HAL
open science

Analyse et Simulations Numériques du Retournement Temporel et de la Diffraction Multiple

Bertrand Thierry

To cite this version:

Bertrand Thierry. Analyse et Simulations Numériques du Retournement Temporel et de la Diffraction Multiple. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2011. Français. NNT : 2011NAN10071 . tel-01746214v2

HAL Id: tel-01746214

https://theses.hal.science/tel-01746214v2

Submitted on 13 Dec 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Faculté des Sciences et Technologies
Université Henri Poincaré - Nancy I
École Doctorale IAEM
D.F.D. Mathématiques

Analyse et Simulations Numériques du Retournement Temporel et de la Diffraction Multiple

THÈSE

présentée pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy I

Spécialité : Mathématiques Appliquées

par

Bertrand THIERRY

Soutenue publiquement le 20 septembre 2011

après avis des rapporteurs et devant le jury

Xavier ANTOINE	Professeur, Institut National Polytechnique de Lorraine	*Directeur*
Karim RAMDANI	Directeur de recherche INRIA, Nancy-Grand Est	*Directeur*
Marc BONNET	Directeur de recherche CNRS, Ecole Polytechnique	*Rapporteur*
Houssem HADDAR	Directeur de recherche INRIA, Saclay Ile de France	*Rapporteur*
Jean-Claude NÉDÉLEC	Professeur émérite, IRMAR	*Président du jury*
Rémi CARMINATI	Professeur, ESPCI ParisTech	*Examinateur*
Séraphin MEFIRE	Professeur, Université Henri Poincaré Nancy I	*Examinateur*

Institut Élie Cartan Nancy, Laboratoire de Mathématiques, BP 239,
54 506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex

Remerciements

Je souhaite remercier tout d'abord mes deux directeurs de thèse Xavier Antoine et Karim Ramdani, qui m'ont accompagné pendant ces quatre années (et demie). Malgré leur emploi du temps chargé, ils ont toujours su prendre le temps pour m'écouter, m'aider et me prodiguer des conseils avisés. De plus, leur enthousiasme et leur souci de l'encadrement font d'eux des directeurs exceptionnels, extrêmement motivants et donnant envie de poursuivre dans la recherche. Je n'oublie bien entendu pas leur sens de l'humour permettant aux séances de travail de devenir alors très agréables. Pour faire simple, avoir eu Xavier et Karim comme directeurs a été pour moi une réelle chance.

Je tiens ensuite à remercier Marc Bonnet et Houssem Haddar de m'avoir fait l'honneur de rapporter ma thèse. Leurs commentaires et remarques pertinentes m'ont permis d'améliorer grandement mon manuscrit de thèse.

Je suis également très reconnaissant à Jean-Claude Nédélec d'avoir accepté de présider le jury, ainsi qu'à Rémi Carminati et Séraphin Méfire d'avoir accepté de faire partie du jury.

Sans l'aide précieuse de tout le personnel administratif et technique de l'IECN, ces quatre années auraient été bien plus laborieuses et je tiens à les remercier sincèrement. Avec une pensée particulière pour vous, Laurence, Sophie, Hélène et Estelle, pour votre disponibilité et votre gentillesse alors que chacune de mes visites ne faisait que rajouter un dossier (en retard) sur votre pile déjà importante.

Deux autres personnes ont tenu une place importante durant cette thèse. Tout d'abord Pauline, ma sœur de thèse, avec qui nous avons découvert les joies et les peines de la thèse, les inscriptions dans le labyrinthe qu'est l'administration, les premiers congrès, ... En te remerciant pour ta gentillesse, tes nombreux conseils et ta disponibilité, je te souhaite le meilleur pour la suite, même si je n'ai aucun doute quant à ton succès (surtout dans une si jolie ville !). Ensuite, mon voisin de bureau, Thomas, qui m'a enseigné *le savoir vivre d'un enseignant chercheur moderne et dynamique*. Je garderai un souvenir très agréable de nos nombreuses discussions, *ô noble Viking*.

Que serait une thèse sans ses collègues doctorants ? Merci à toutes et à tous pour ces bavardages, ces moments de doute mais aussi (et surtout) de franche rigolade, que ce soit autour d'une bière, d'un café ou même de rien du tout. Je vais essayer de n'oublier personne en remerciant Ghislain, notre chef Julie, Arnaud, *señor gif* Romain, Ibrahim, Jérôme, Li*lililili*, *señorita* Erica, Yuning, Paul, Antoine, Michaël et Joseph. Et bien entendu, merci aux anciens doctorants, notamment Yannick, Nicu, Julien, Christophe, Cyril, Fernando et Aurélien.

Je souhaite également remercier chaleureusement tous les permanents, chercheurs et enseignants/chercheurs de l'IECN que j'ai croisés durant ces années. Plus particulièrement Bruno, sans qui les simulations numériques n'auraient sans doute jamais vu le jour, Julie, pour (entre autres) son oreille attentive et sa bonne humeur, Aline et Anne qui, en plus de leur sourire permanent, m'ont grandement aidé lorsque je me noyais dans l'enseignement.

Sans oublier bien entendu Takéo, Marius, Mario, Corinna, María, Marco et Roberta, pour tous les midis très agréables en votre compagnie au Loria. Enfin, *domo arigato Vladimir-sensei*, pour ces moments passés sur le tatami.

Je n'oublie pas bien entendu mes nouveaux collègues Belges, notamment Christophe pour m'avoir embauché et Axel qui a grandement facilité ma nouvelle vie Wallone, plus d'*une fois*.

Je souhaite profiter de l'occasion qui m'est donnée pour effectuer des remerciements plus personnels. Je vais commencer par les étudiants et étudiantes, croisés au cours de mes études, devenus par la suite de très bons amis. Tout d'abord, l'ENSEM et ses anciens : Bebets et Sylvia, Benji, JT, Nico, ~~Chicotte~~ Stéph et Shamime, avec qui c'est toujours un plaisir de se retrouver, peut importe où, de Vassy, à Vesoul en passant par Rateau ! Ensuite vient naturellement l'ENSIC, avec ses anciennes étudiantes : Julie et *ouss*-Charlie, Caro, Céline et Christelle, ainsi que ses doctorants : Jacques, Wei^2, Camel, Sandrine, Clément, Marion, Cédric et Haîfa. Merci pour tous ces moments et ceux à venir ! Enfin, je n'oublie évidemment pas les anciens et anciennes de classe prépa à Besançon, sur qui le temps ne semble pas avoir de prise : Ja(aaaaa)cques, Vanessa, Camille, Baptiste, Jean-Phi, *ui*-Nicolas, Galou, Fanny, Romain et Camille et tous les autres. Avec évidemment une pensée particulière et des félicitations renouvelées pour les nouveaux parents que sont Gérard, Méla et leur petit Jules, Karine, Dimitri et leur petit bout de chou Anaïs ainsi que Bertrand, Laura et le petit Maël.

J'arrive maintenant à la Haute-Saône. Merci à toi Géraldine, pour ces cyber-discussions, pour être venue à ma soutenance, ainsi que pour avoir su m'aider et m'écouter lorsque j'en avais besoin durant la sombre période que ma famille et moi avons traversée. Merci aussi à toi Romain pour ces bonnes rigolades. Et surtout, merci à mes compères de toujours, Bernard, Claire, Marie, Paul et Xavier : notre si longue et si forte amitié m'est très précieuse. Bien plus que des amis, vous êtes comme une deuxième famille et je vous souhaite le meilleur pour la suite. Au moment d'écrire ces lignes, j'ai naturellement une pensée pour Bernard et Philippe.

À Madame et Monsieur Ngũyên ainsi que Diễm Tiên et Khánh Tiên, je vous remercie grandement pour votre accueil dans votre famille. Merci pour tous ces moments passés et à venir en votre compagnie. *Thật là cám ơn đã chấp nhận con trong gia đình Ngũyên.*

À Phúc Tiên, ma compagne de route, de voyage, de thèse, de joies, de peines, et de bien plus encore. Il y a tant de choses pour lesquelles je souhaiterais te remercier mais si peu de place pour le faire. Ton soutien permanent, ton écoute attentive et ta grande compréhension m'ont été, me sont et me seront toujours aussi indispensables. Cela fait maintenant huit ans que tu éclaires mes journées et j'espère du fond du cœur que nous continuerons à cheminer ensemble et ce pour toujours.

Les derniers remerciements vont naturellement à ma famille. D'une part, ma famille allemande, *der ich für alles danke* et d'autre part ma famille française : Érik, Marie-Pierre, Rémi et Cloé, pour leur soutien permanent, leur gentillesse et leur bonne humeur. Bien évidemment aussi à mon grand-père, ma grand-mère et ma Oma, pour être et avoir toujours été présents pour leurs petits enfants. À ma soeur Sigrid, à qui je souhaite le meilleur car elle le mérite plus qu'amplement. Enfin, à mes parents, qui refusent obstinément d'accepter le titre (pourtant mérité) de meilleurs parents du monde. Vous avez toujours été là pour nous

et avez toujours cru en nous. Avoir des parents tels que vous est une chance inestimable, que nous avons eu tous les trois.

Je termine par toi, Christophe, mon grand frère parti trop tôt dans ce voyage sans fin à travers la Scandinavie. Tu ne pouvais pas savoir que ta randonnée et ta vie seraient brisées par une voiture, vers Göteborg. Le vide que laisse ton absence est immense et ne se comblera jamais. Ta disparition me prive d'un grand frère exceptionnel et prive également les générations futures d'un oncle plus que formidable. Bien que cela n'ait sans doute plus aucune importance, sache que cette thèse t'est dédiée.

,

Puisqu'il faut partir un jour, autant que cela soit aujourd'hui.

Paroles prémonitoires qui ouvrent ton carnet de voyage. Tu ne savais pas que celui-ci serait sans retour, le destin t'ayant fixé rendez-vous vers Göteborg, sous la forme de cette voiture qui te faucha.

À mon frère Christophe.

Table des matières

Introduction **13**

I Retournement temporel **15**

1 Etude numérique de la méthode DORT en acoustique champ lointain **17**
1.1 Introduction . . . 17
1.2 Justification mathématique . . . 19
1.3 Résolution numérique . . . 23
1.4 Etude du nombre de valeurs propres significatives de $\mathbb{T}$ . . . 24
1.5 Focalisation sélective . . . 34
1.5.1 Une simulation de référence avec une discrétisation très fine . . . 34
1.5.2 Cas de deux obstacles identiques . . . 39
1.5.3 Focalisation sélective avec peu d'émetteurs/récepteurs . . . 42
1.6 Bande de fréquences . . . 46
1.7 Influence du bruit . . . 49
1.8 Miroir ouvert . . . 57
1.9 Conclusion . . . 62

2 La méthode DORT en électromagnétisme champ lointain **63**
2.1 Résumé des résultats obtenus . . . 63
2.2 Introduction . . . 65
2.3 A far field model for electromagnetic time-reversal . . . 66
2.4 Scattering by perfectly conducting small scatterers . . . 69
2.4.1 The case of one scatterer . . . 69
2.4.2 Multiply connected scatterer . . . 71
2.5 Selective focusing using time-reversal . . . 75
2.6 Conclusion . . . 79

3 Phénomène de super-résolution en milieu multi-diffusif **81**
3.1 Introduction . . . 81
3.2 Modèle mathématique et justification dans un milieu homogène . . . 83
3.2.1 Modèle mathématique . . . 83
3.2.2 Justification mathématique pour un milieu homogène et un miroir d'épaisseur nulle . . . 85
3.3 Résultats numériques . . . 94
3.3.1 Approximation numérique . . . 94

3.3.2 Mise en œuvre de la méthode des éléments finis 95
3.3.3 Milieu homogène 102
3.3.4 Milieu multi-diffusif (fréquence fixe) 106
3.3.5 Moyenne et écart-type sur les réalisations 110
3.3.6 Moyenne sur les fréquences 113
3.4 Conclusion 130

II Equations intégrales et diffraction multiple 131

4 Contributions à la résolution numérique par équations intégrales de problèmes de diffraction multiple 133
4.1 Introduction 134
4.2 Obtention des équations intégrales usuelles pour l'acoustique 135
4.2.1 Le problème de diffraction 135
4.2.2 Opérateurs intégraux volumiques et de frontière 136
4.2.3 Equations intégrales directes et indirectes 139
4.2.4 Étude de l'EFIE 142
4.2.5 Étude de la MFIE 144
4.2.6 Étude de la CFIE 147
4.2.7 L'équation intégrale indirecte de Brakhage-Werner 149
4.2.8 Cas d'une condition de Neumann 149
4.2.9 Récapitulation 151
4.3 Simulation numérique de la diffraction multiple par des disques 151
4.3.1 Introduction 151
4.3.2 Notations et bases de Fourier 152
4.3.3 Formulation faible des équations intégrales 153
4.3.4 Expressions des opérateurs intégraux dans la base de Fourier 155
4.3.5 Post-traitement : champs proche et lointain 159
4.3.6 Projection des ondes incidentes sur la base de Fourier 164
4.3.7 Approximation en dimension finie 166
4.3.8 Résolution numérique à basse fréquence 170
4.3.9 Résolution numérique en moyenne/haute fréquence 171
4.4 Étude du préconditionnement par la diffraction simple pour des géométries quelconques 181
4.4.1 Équations intégrales directes 181
4.4.2 Égalité des équations intégrales préconditionnées 184
4.4.3 Comparaison avec les équations intégrales indirectes 186
4.4.4 Validation numérique sur d'autres géométries 190
4.5 Conclusion 194

5 Estimations du spectre et du conditionnement du potentiel de simple couche pour la diffraction multiple à basse fréquence 195
5.1 Introduction 196
5.2 L'équation intégrale en champ électrique (EFIE) et l'opérateur de simple couche 197
5.2.1 Formulation faible de l'EFIE 197
5.2.2 Expression de l'opérateur de simple couche dans la base de Fourier pour la diffraction multiple par M disques 197

5.3 Informations spectrales sur le potentiel de simple couche pour la diffraction simple à basse fréquence . . . 199
5.3.1 Le cas du disque . . . 200
5.3.2 Liens avec l'approximation par éléments finis de frontière et extensions formelles à d'autres objets . . . 202
5.4 Estimation du conditionnement du potentiel de simple couche à basse fréquence pour des obstacles éloignés . . . 209
5.4.1 Localisation par le théorème de Gershgorin-Hadamard et asymptotiques 209
5.4.2 Précision sur la localisation des valeurs propres de plus petit et de plus grand module . . . 216
5.4.3 Une approche alternative par passage à la limite sur la matrice $\mathbb{L}$ . . . 217
5.4.4 Lien avec l'approximation par éléments finis de frontière . . . 226
5.5 Estimation du conditionnement de l'opérateur de simple couche à basse fréquence pour des obstacles proches . . . 234
5.5.1 Approche par la matrice limite . . . 234
5.5.2 Estimation de la plus petite valeur propre . . . 242
5.5.3 Estimation de la plus grande valeur propre (en module) . . . 246
5.5.4 Estimation du conditionnement . . . 251
5.5.5 Lien avec l'approximation par éléments finis de frontière . . . 251
5.6 Conclusion . . . 261

Annexe **265**

A Focalisation du champ rétro-propagé en dimension 2 pour un MRT épais **265**

Bibliographie **279**

Résumé **280**

Introduction

La diffraction multiple décrit le phénomène d'interaction entre une onde et un milieu de propagation contenant plusieurs obstacles, par opposition à la diffraction simple où seul un diffuseur est présent (voir la monographie de P. Martin [84] pour une liste exhaustive de références sur le sujet). Cette problématique, qui se pose dans nombre d'applications en acoustique, en électromagnétisme, en élasticité ou en hydrodynamique, pose d'importantes difficultés mathématiques et numériques. Pour le dire d'un mot, le champ diffracté en présence de plusieurs objets n'est pas la simple superposition des champs diffractés par chacun des objets lorsqu'il est éclairé par l'onde incidente. Ceci vient du fait que le champ diffracté par un obstacle agit lui-même comme un champ incident sur les autres objets, ce qui génère un effet de couplage entre les obstacles. L'analyse mathématique et la simulation numérique de ce couplage est à l'origine de cette thèse, qui s'articule autour de deux thèmes. Le premier thème, traité dans les trois premiers chapitres, concerne les problèmes inverses de détection et de localisation d'obstacles ou de sources par retournement temporel. La deuxième partie, constituée des chapitres 4 et 5, est consacrée à la résolution numérique par équations intégrales du problème de diffraction multiple en acoustique.

La première partie peut également être séparée en deux sous-thèmes. Le premier concerne la détection et la focalisation sélective d'ondes sur des petits obstacles par la méthode DORT. Cette technique expérimentale fait intervenir des miroirs à retournement temporel (MRT), appareils capables de mesurer et de rétro-propager des ondes dans leur milieu d'origine. La méthode DORT repose principalement sur l'analyse spectrale de l'opérateur de retournement temporel dont le nombre de valeurs propres significatives est égal au nombre d'obstacles dans le milieu, et dont les fonctions propres permettent de générer des ondes focalisant sélectivement sur les obstacles. Toutefois, ces propriétés spectrales sont satisfaites uniquement dans le régime particulier de petits obstacles très éloignés, ce qui correspond au régime où les effets de couplage de la diffraction multiple, c'est-à-dire les interactions entre les diffuseurs, sont négligés. Dans le premier chapitre, nous proposons une étude numérique de la méthode DORT dans le cadre de l'acoustique en champ lointain étudié du point de vue théorique dans [72]. Nous comparons l'influence des paramètres, tels que le nombre d'émetteurs/récepteurs du miroir à retournement temporel, sur la qualité de la focalisation sélective. Puis, dans le chapitre 2, nous nous plaçons dans le cadre de la diffraction électromagnétique et donnons une justification mathématique de la méthode DORT. Ces résultats, qui ont fait l'objet d'un article publié dans SIAM Journal on Applied Mathematics, généralisent ceux obtenus dans le cadre de l'acoustique dans [72]. Le chapitre 3, qui clôt la première partie, a pour objet la détection d'une source acoustique ponctuelle à l'aide d'un miroir à retournement temporel. On s'intéresse plus particulièrement au phénomène de super-résolution qui peut être décrit de la façon suivante. Le MRT rétro-propage dans le milieu le signal émis initialement par le point source. L'onde ainsi émise focalise alors sur le point source avec une précision qui

dépend notamment de la taille du miroir à retournement temporel. Dans un milieu hétérogène, il apparaît qu'en moyenne la qualité de la focalisation est améliorée par rapport au milieu homogène : c'est le phénomène de super-résolution. Ce résultat est rendu possible grâce aux réflexions multiples qui ont lieu dans le milieu hétérogène et qui permettent au MRT d'obtenir plus d'information sur le signal. Notre étude de la super-résolution est effectuée dans un cadre déterministe. En effet, nous modélisons l'hétérogénéité du milieu par de nombreux petits diffuseurs entre la source et le miroir à retournement temporel et résolvons numériquement l'équation de Helmholtz. A l'aide de nombreuses simulations numériques, nous mettons en évidence l'amélioration (en moyenne) de la qualité de la focalisation.

La deuxième partie du mémoire, constituée de deux chapitres, est consacrée à l'étude de certaines propriétés des équations intégrales usuelles lorsque le milieu comporte plusieurs obstacles. Dans le chapitre 4, nous rappelons les équations intégrales usuelles et nous plaçons dans le cas particulier d'obstacles circulaires. Pour cette configuration, nous calculons explicitement les coefficients des quatre opérateurs intégraux de frontière usuels (traces et traces normales des potentiels de simple et de double couche) dans les bases de Fourier de dimension finie. Nous obtenons ainsi les systèmes linéaires approchant les équations intégrales usuelles. Après avoir présenté une stratégie de stockage creux des matrices, nous proposons également un préconditionneur qui diminue le nombre d'itérations du solveur itératif. Ce préconditionnement, relativement naturel, prend en compte les effets de la diffraction simple de chaque obstacle. A travers un exemple numérique, nous montrons que cette stratégie de résolution du problème de diffraction multiple par des disques est robuste et efficace. Par ailleurs, nous montrons que les équations intégrales de la diffraction multiple préconditionnées par les opérateurs intégraux de la diffraction simple conduisent à la même équation intégrale, à un opérateur inversible de passage près. Nous démontrons ce résultat, qui est le point central de ce chapitre, tout d'abord en dimension deux pour des obstacles circulaires, avant de l'étendre à des géométries régulières quelconques, en dimensions deux et trois. Lorsque les obstacles sont des disques, nous avons calculé explicitement les coefficients de Fourier de l'opérateur intégral frontière de simple couche L dans le chapitre 4. Ceci nous a permis d'étudier numériquement, dans le dernier chapitre, les valeurs propres et le conditionnement de cet opérateur lorsque le milieu comporte plusieurs disques (diffraction multiple). Notre étude est effectuée dans le régime de la basse fréquence, les régimes de moyenne et de haute fréquence étant actuellement hors de portée. Nous considérons tout d'abord un milieu ne comportant qu'un seul disque, pour lequel nous obtenons des estimations du conditionnement de la matrice tronquée $\mathbb{L}$ de l'opérateur intégral de frontière de simple couche. Ces résultats sont ensuite étendus de manière formelle à un obstacle ellipsoïdal ou rectangulaire. Puis, nous étudions deux régimes de diffraction multiple particuliers : un milieu dilué où les obstacles sont éloignés et un milieu dense où les diffuseurs sont proches les uns des autres. Pour ces deux milieux, nous proposons des développements asymptotiques pour obtenir une matrice limite $\mathbb{L}^0$, dont les valeurs propres sont de bonnes approximations de celles de la matrice $\mathbb{L}$. Après avoir estimé les valeurs propres de plus petit et de plus grand module de la matrice limite $\mathbb{L}^0$, nous en déduisons des estimations du conditionnement de la matrice $\mathbb{L}$. Ces estimations sont ensuite validées numériquement sur des exemples. De plus et comme en diffraction simple, nous proposons une extension formelle de ces résultats pour des obstacles ellipsoïdaux et rectangulaires.

Première partie

Retournement temporel

Chapitre 1

Etude numérique de la méthode DORT en acoustique champ lointain

Sommaire

1.1 Introduction **17**
1.2 Justification mathématique **19**
1.3 Résolution numérique **23**
1.4 Etude du nombre de valeurs propres significatives de $\mathbb{T}$ **24**
1.5 Focalisation sélective **34**
1.5.1 Une simulation de référence avec une discrétisation très fine 34
1.5.2 Cas de deux obstacles identiques 39
1.5.3 Focalisation sélective avec peu d'émetteurs/récepteurs 42
1.6 Bande de fréquences **46**
1.7 Influence du bruit **49**
1.8 Miroir ouvert **57**
1.9 Conclusion **62**

1.1 Introduction

Le principe du retournement temporel est de tirer parti de la réversibilité de l'équation des ondes en milieu non dissipatif pour rétro-propager un signal dans ce milieu, en vue d'obtenir des informations sur le milieu de propagation. Sans aller jusqu'à une caractérisation complète du milieu, il s'agit le plus souvent de localiser des défauts ou des cibles enfouies dans le milieu. Un autre objectif apparaissant dans nombre d'applications est de parvenir à générer une onde focalisant sur une cible –émettrice ou non– de position inconnue (destruction de calculs rénaux par lithotritie, focalisation d'ondes électromagnétiques sur un émetteur en télécommunications,...). Des telles expériences sont physiquement possibles depuis la conception par M. Fink des miroirs à retournement temporel (MRT). Ces appareils sont constitués de transducteurs pouvant jouer alternativement le rôle d'émetteur ou de récepteur. Les applications utilisant ces MRT sont dorénavant multiples dans des domaines aussi divers que la médecine [101, 85], le contrôle non destructif [95] ou encore les télécommunications sous-marines [82].

La méthode DORT, acronyme de “Diagonalisation de l’Opérateur de Retournement Temporel”, est une technique expérimentale mise au point par M. Fink et C. Prada [60] qui permet de focaliser sélectivement des ondes sur des petits obstacles à l’aide d’un MRT (voir aussi [87, 88, 89, 94, 96]). La méthode DORT est basée sur l’itération de deux cycles, chaque cycle étant composé de trois étapes. Tout d’abord, le miroir à retournement temporel émet une onde incidente en direction des obstacles qui est réfléchie par les diffuseurs. Le miroir mesure alors le champ diffracté, le retourne temporellement et le rétro-propage. Par définition, l’opérateur de retournement temporel T correspond à deux itérations de ce cycle “émission-réception-retournement temporel”. Lorsque les obstacles sont suffisamment petits et éloignés (ou découplés), il s’avère que le nombre de valeurs propres significatives de T est exactement égal au nombre de petits obstacles dans le milieu. De plus, les fonctions propres de T permettent de focaliser sélectivement des ondes sur les obstacles. Du point de vue pratique, les ondes acoustiques émises sont des signaux transitoires mais la méthode DORT est menée dans le domaine fréquentiel, le retournement temporel se ramenant alors à une conjugaison de phase. Concernant le lien entre le retournement temporel en domaine temporel et en harmonique, nous renvoyons le lecteur à Hazard et Ben Amar [71]. Enfin, soulignons que la méthode DORT a été étendue ces dernières années aux ondes élastiques [19, 55] et électromagnétiques [15, 73, 81, 86, 50, 102].

La première justification mathématique de la méthode DORT en acoustique a été obtenue par Hazard et Ramdani en régime harmonique dans le cadre d’un MRT continu, placé à l’infini et non intrusif. En particulier, les auteurs démontrent que la méthode DORT s’applique dans le régime des petits obstacles éloignés. Le cas du miroir intrusif placé en champ proche est étudié mathématiquement et numériquement dans la thèse de Ben Amar [22] ainsi que dans Ben Amar *et al.* [23]. Enfin, Pinçon et Ramdani ont proposé une justification et une étude numérique de la méthode DORT dans un guide d’ondes bidimensionnel dans [92]. La méthode DORT est à rapprocher de l’algorithme MUSIC (“MUltiple-SIgnal-Classification”, voir [4, 7, 16, 39, 54, 74]) permettant de déterminer la position d’obstacles ponctuels à partir de la matrice de réponses multi-statique. Dans les deux cas, les valeurs propres et vecteurs propres de l’opérateur de champ lointain (ou ses valeurs singulières et ses vecteurs singuliers) sont utilisés pour localiser les cibles contenues dans un milieu. Toutefois, dans l’algorithme MUSIC, on utilise une fonctionnelle faisant intervenir les plus petites valeurs propres (c’est le “noise space”), alors que dans le DORT on utilise les valeurs propres les plus significatives. Soulignons également que MUSIC ne fait intervenir que des émetteurs et des capteurs ponctuels, ce qui n’est pas le cas pour la méthode DORT.

Dans ce chapitre, nous proposons une étude numérique détaillée des résultats théoriques démontrés dans [72], que nous résumons brièvement dans la section 1.2. Nous nous plaçons en régime harmonique, dans le cadre de l’acoustique champ lointain, le MRT étant supposé placé à l’infini et n’interférant pas avec les ondes. Nous commençons par décrire succinctement, dans le paragraphe 1.3, la méthode de résolution numérique employée. L’étude de la méthode DORT débute dans la section 1.4 par l’analyse du comportement des valeurs propres de la matrice de retournement temporel $\mathbb{T}$. Dans le régime asymptotique où la taille caractéristique des obstacles est négligeable devant la longueur d’onde, cette dernière étant supposée très petite devant la distance inter-obstacles, nous verrons que la matrice de retournement temporel $\mathbb{T}$ possède exactement autant de valeurs propres significatives que d’obstacles. Nous nous intéresserons ensuite dans la section 1.5 à la propriété de focalisation sélective des vecteurs propres de $\mathbb{T}$. Pour cela, nous comparerons les résultats obtenus entre un MRT comportant de nombreux émetteurs/récepteurs et un miroir maillé plus grossière-

ment. Nous verrons clairement que la qualité de la focalisation dépend fortement du nombre de transducteurs. Ensuite, dans le paragraphe 1.6, nous proposons d'appliquer la méthode DORT pour une bande de fréquences plutôt qu'en régime monochromatique. Ce balayage fréquentiel permet au miroir à retournement temporel de recevoir plus d'information sur les obstacles. Les simulations physiques souffrent en général de bruit sur les mesures, c'est pourquoi nous testerons la robustesse de la méthode DORT vis-à-vis du bruit numérique. Nous verrons que les propriétés de focalisation de la matrice de retournement temporel s'avèrent robustes vis-à-vis du bruit. Nous conclurons cette étude par un exemple de détection de deux petits obstacles à l'aide d'un MRT ouvert (i.e. n'entourant pas complètement les obstacles).

1.2 Justification mathématique

Considérons un milieu homogène non dissipatif contenant M petits obstacles non pénétrables disjoints $\Omega^-_{p,\delta}$, $p = 1, \ldots, M$. Plus précisément, nous supposons que $\Omega^-_{p,\delta}$ est l'image d'un obstacle de référence Ω^-_p obtenue par un changement d'échelle et une translation de vecteur $\mathbf{s}_p \in \mathbb{R}^3$:

$$\Omega^-_p = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{\xi} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{s}_p}{\delta} \in \Omega^-_{p,\delta} \right\}.$$

Notons $\Omega^-_\delta = \bigcup_{p=1}^M \Omega^-_{p,\delta}$ le domaine occupé par les obstacles et $\mathbf{n}$ sa normale unitaire sortante. Nous supposons le régime harmonique établi de nombre d'onde $k = \omega/c$, où ω est la pulsation temporelle des ondes et c la célérité du son dans le milieu. Tout au long de cette section, la dépendance temporelle est implicite et de la forme $e^{-i\omega t}$.

Le miroir à retournement temporel est supposé continu, entourant complètement les obstacles et placé à l'infini. Grâce à cette hypothèse, nous pouvons supposer que le MRT n'interagit pas avec les ondes.

Durant la première étape de la méthode DORT, le miroir émet une onde incidente u_I en direction des obstacles, modélisée par une superposition d'ondes planes $u_I^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) = e^{ik\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\alpha}}$, $\boldsymbol{\alpha} \in S^2$, pondérée par une densité $f \in L^2(S^2)$:

$$u_I(\mathbf{x}) = \int_{S^2} f(\boldsymbol{\alpha}) u_I^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}, \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \tag{1.1}$$

De telles ondes sont appelées ondes de Herglotz. L'ensemble S^2 est la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ et la quantité $\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\alpha}$ désigne ici le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\alpha} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{x}_j . \boldsymbol{\alpha}_j$.
L'illumination de Ω^-_δ par $u_I^{\boldsymbol{\alpha}}$ génère un champ diffracté $u_D^{\boldsymbol{\alpha}}$, solution du problème de diffraction extérieur de type Dirichlet

$$\begin{cases} (\Delta + k^2) u_D^{\boldsymbol{\alpha}} = 0 & (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^-_\delta}) \\ u_D^{\boldsymbol{\alpha}} = -u_I^{\boldsymbol{\alpha}} & (\partial\Omega^-_\delta) \\ u_D^{\boldsymbol{\alpha}} \text{ sortant.} \end{cases} \tag{1.2}$$

La condition "$u_D^{\boldsymbol{\alpha}}$ sortant" renvoie à la condition de radiation de Sommerfeld. Dans la direction $\boldsymbol{\beta} \in S^2$, il est bien connu que $u_D^{\boldsymbol{\alpha}}$ possède le comportement asymptotique suivant [44]

$$u_D^{\boldsymbol{\alpha}}(\beta\|\mathbf{x}\|) = \frac{e^{ik\|\mathbf{x}\|}}{\|\mathbf{x}\|} A(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + O\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2}\right), \qquad \text{quand } \|\mathbf{x}\| \to +\infty.$$

L'amplitude de diffraction $A(\cdot\,,\cdot)$ est analytique sur $S^2 \times S^2$ et vérifie la propriété de réciprocité [44, p.52-53]

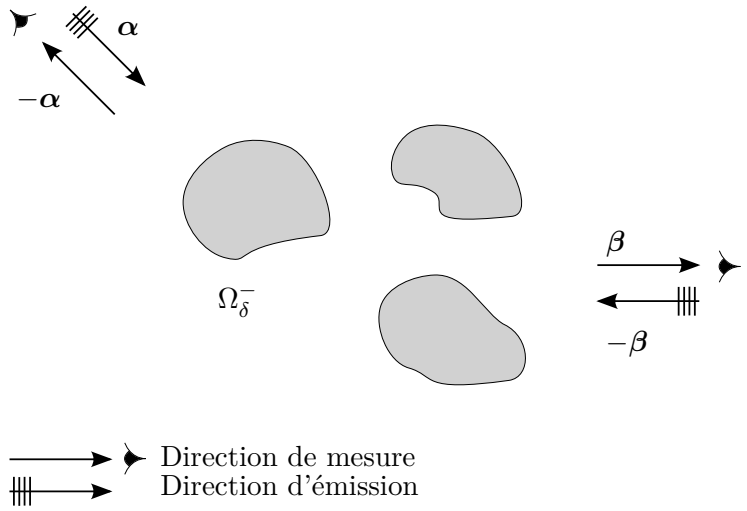


FIGURE 1.1 – Illustration de la propriété de réciprocité

Proposition 1.1 (Réciprocité)**.** *Pour toutes les directions $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ de S^2, nous avons*

$$A(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = A(-\boldsymbol{\beta}, -\boldsymbol{\alpha}). \tag{1.3}$$

Remarque 1.2. *La réciprocité traduit simplement le fait que, dans un milieu non dissipatif, mesurer dans une direction $\boldsymbol{\beta}$ le champ lointain diffracté d'une onde plane de direction $\boldsymbol{\alpha}$, est équivalent à mesurer dans la direction $-\boldsymbol{\alpha}$ le champ lointain diffracté d'une onde plane de direction $-\boldsymbol{\beta}$ (voir figure 1.1).*

Afin de ne pas surcharger les notations, l'indice δ sera omis lorsqu'il n'est pas nécessaire. Par linéarité, l'illumination de Ω_δ^- par une onde de Herglotz u_I de densité f (1.1) génère une onde diffractée u_D définie par

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \qquad u_D(\mathbf{x}) = \int_{S^2} f(\boldsymbol{\alpha}) u_D^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}.$$

De plus, dans la direction $\boldsymbol{\beta} \in S^2$, le champ u_D vérifie

$$u_D(\boldsymbol{\beta}\|\mathbf{x}\|) = \frac{e^{ik\|\mathbf{x}\|}}{\|\mathbf{x}\|} Ff(\boldsymbol{\beta}) + O\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2}\right), \qquad \text{quand } \|\mathbf{x}\| \to +\infty,$$

où $F : L^2(S^2) \longrightarrow L^2(S^2)$ est *l'opérateur de champ lointain* défini par

$$\forall f \in L^2(S^2), \forall \beta \in S^2, \qquad Ff(\boldsymbol{\beta}) = \int_{S^2} A(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) f(\boldsymbol{\alpha}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}.$$

Dans la suite, le produit scalaire sur $L^2(S^2)$ considéré est le produit scalaire usuel :

$$\forall f, g \in L^2(S^2), \qquad (f, g)_{L^2(S^2)} = \int_{S^2} f(\boldsymbol{\alpha}) \overline{g(\boldsymbol{\alpha})} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}.$$

Les principales propriétés de l'opérateur de champ lointain sont alors résumées dans la proposition suivante [44].

Proposition 1.3. *L'opérateur de champ lointain F est compact et normal. De plus, son adjoint F^* est l'opérateur défini par*

$$\begin{array}{rccl} F^*: & L^2(S^2) & \longrightarrow & L^2(S^2) \\ & f & \longmapsto & F^*f = \overline{RF\overline{Rf}}, \end{array} \tag{1.4}$$

où R est l'opérateur de symétrie :

$$\forall f \in L^2(S^2), \forall \boldsymbol{\alpha} \in S^2, \qquad Rf(\boldsymbol{\alpha}) = f(-\boldsymbol{\alpha}).$$

Nous sommes maintenant en mesure de définir l'opérateur de retournement temporel T. Par définition, il correspond à deux cycles Emission-Réception-Retournement temporel. Durant le premier cycle, le miroir émet une onde de Herglotz u_I de densité f en direction des obstacles. Cette onde se diffracte et génère un champ u_D, dont le champ lointain Ff est mesuré puis retourné temporellement (*i.e.* conjugué) par le MRT pour obtenir $\overline{RFf}$. L'opérateur de symétrie R rend compte du fait que le miroir mesure dans une direction $\boldsymbol{\alpha}$ et réémet dans la direction opposée $-\boldsymbol{\alpha}$. Ce cycle est répété avec comme densité initiale, non plus f, mais $\overline{RFf}$. Ces deux cycles sont schématisés ainsi :

	Emission	$\longrightarrow$	Réception	$\longrightarrow$	Retournement temporel
1er cycle	f		Ff		$\overline{RFf}$
2ème cycle	$\overline{RFf}$		$F\overline{RFf}$		$\overline{RF\overline{RFf}}$

Ainsi, l'opérateur de retournement temporel T est défini par :

$$\begin{array}{rccl} T: & L^2(S^2) & \longrightarrow & L^2(S^2) \\ & f & \longmapsto & Tf = \overline{RF\overline{RFf}}, \end{array} \tag{1.5}$$

de sorte que, compte tenu de la Proposition 1.3 :

Proposition 1.4. *L'opérateur de retournement temporel $T : L^2(S^2) \longrightarrow L^2(S^2)$ est défini par*

$$T = F^*F = FF^*. \tag{1.6}$$

Ainsi, d'après les Propositions 1.3 et 1.4, l'opérateur de retournement temporel T est autoadjoint, positif et compact. Outre $\mu = 0$, son spectre est constitué d'une famille au plus dénombrable de valeurs propres dont le seul point d'accumulation est 0 (voir par exemple [31]). De plus, rappelons la proposition suivante.

Proposition 1.5. *Soit N un opérateur compact et normal sur un espace de Hilbert H. Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ est une suite de valeurs propres non nulles de N classées par ordre décroissant en module ($|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$) et si $(\phi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions propres associées, alors $|\lambda_1|^2 \geq |\lambda_2|^2 \geq \ldots$ est la suite de valeurs propres non nulles de l'opérateur $N^*N = NN^*$ et $(\phi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions propres associées.*

Notre étude spectrale de l'opérateur de retournement temporel $T = F^*F = FF^*$ se ramène ainsi à celle de l'opérateur de champ lointain F. Quand la taille caractéristique des obstacles δ tend vers 0, l'amplitude de diffraction $A(\cdot\,,\cdot)$ a le comportement asymptotique suivant [72, Proposition 4.2].

Proposition 1.6. *Il existe M constantes positives $C_1, C_2, \ldots, C_M$, appelées capacités des obstacles, ne dépendant que de la géométrie des obstacles telles que*

$$A(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \delta A^0(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + O\left(\delta^2\right), \qquad \textit{avec} \qquad A^0(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{-1}{4\pi} \sum_{p=1}^{M} C_p u_I^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{s}_p) \overline{u_I^{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{s}_p)}, \tag{1.7}$$

où la décroissance $O\left(\delta^2\right)$ est uniforme pour tout $\boldsymbol{\alpha}$ et tout $\boldsymbol{\beta}$ de S^2.

A partir de maintenant, nous restreignons l'étude spectrale de F à celle de l'opérateur de champ lointain limite $F^0 : L^2(S^2) \longrightarrow L^2(S^2)$ défini par

$$\forall f \in L^2(S^2), \forall \boldsymbol{\beta} \in S^2, \qquad F^0 f(\boldsymbol{\beta}) = \int_{S^2} A^0(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) f(\boldsymbol{\alpha}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}.$$

L'amplitude de diffraction limite $A^0(\cdot\,,\cdot)$ (1.7) se réécrit

$$\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in S^2, \qquad A^0(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = -\sum_{p=1}^{M} C_p \overline{e_p(\boldsymbol{\alpha})} e_p(\boldsymbol{\beta}),$$

où les M fonctions $(e_p)_{p=1,\ldots,M}$ sont définies par

$$\forall p \in \{1, \ldots, M\}, \forall \boldsymbol{\alpha} \in S^2, \qquad e_p(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{e^{-ik(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{s}_p)}}{2\sqrt{\pi}} = \frac{\overline{u_I^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{s}_p)}}{2\sqrt{\pi}}. \tag{1.8}$$

Les fonctions $(e_p)_{p=1,\ldots,M}$ sont normalisées pour le produit scalaire usuel de $L^2(S^2)$. L'intérêt majeur de ces fonctions vient que, en utilisant l'identité suivante (voir par exemple [44])

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, \qquad \int_{S^2} e^{ik\boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} = 4\pi \frac{\sin(k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)}{k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|},$$

l'onde de Herglotz u_I^p de densité e_p s'écrit alors

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \qquad u_I^p(\mathbf{x}) = \int_{S^2} e_p(\boldsymbol{\alpha}) u_I^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{S^2} e^{ik\boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{s}_p)} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} = 2\sqrt{\pi} \frac{\sin(k\|\mathbf{x}-\mathbf{s}_p\|)}{k\|\mathbf{x}-\mathbf{s}_p\|}.$$

Ainsi, l'onde u_I^p est focalisée sur l'obstacle $\Omega_{p,\delta}^-$ dans le sens où son amplitude décroit comme

$$O\left(\frac{\lambda}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}_p\|}\right).$$

Après calculs, la quantité $F^0 f$ se réécrit

$$\forall f \in L^2(S^2), \qquad F^0 f = -\sum_{p=1}^{M} C_p \left(f, e_p\right)_{L^2(S^2)} e_p,$$

et nous avons finalement la proposition 4.3 de [72] :

Proposition 1.7. *L'opérateur de champ lointain limite F^0 est un opérateur négatif, autoadjoint, de rang fini M et dont le rayon spectral ne peut être inférieur à la plus grande capacité*

C_p des obstacles. Dans le cas où la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ est petite en comparaison avec la plus petite distance entre les obstacles

$$d = \min_{1\leq p,q\leq M, p\neq q} (\|\mathbf{s}_p - \mathbf{s}_q\|),$$

alors la famille de fonctions $(e_p)_{p=1,\dots,M}$ fournit une base de fonctions propres approchées associées aux valeurs propres approchées $\{-C_p, p = 1,\dots,M\}$ de F^0, au sens où

$$F^0 e_p = -C_p e_p + O\left(\frac{\lambda}{d}\right).$$

Ainsi, si les obstacles sont suffisamment petits ($\delta \ll \lambda$ et $\delta \ll d$) et éloignés ($\lambda \ll d$), alors l'opérateur de champ lointain limite F^0 possède M valeurs propres. Dans ce cas, le nombre de valeurs propres significatives de F (resp. de T) est donc bien égal au nombre d'obstacles. De plus, les fonctions $(e_p)_{p=1,\dots,M}$ forment alors une base de fonctions propres approchées de F (resp. de T) dont l'onde de Herglotz associée est focalisée sur l'obstacle $\Omega^-_{p,\delta}$. Par conséquent, la focalisation sélective peut être obtenue.

Remarque 1.8. *Dans [72], ces résultats de focalisation sélective ont été étendus au cas d'un MRT ouvert, dans le sens où le MRT n'émet (resp. ne mesure) des ondes planes que sur une partie $\hat{S}$ (resp. $-\hat{S}$) de S^2.*

1.3 Résolution numérique

Nous avons validé numériquement la méthode DORT en acoustique champ lointain en dimension deux. Les directions d'émission $\boldsymbol{\alpha}$ et de mesure $\boldsymbol{\beta}$ s'écrivent alors

$$\boldsymbol{\alpha} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)), \qquad \boldsymbol{\beta} = (\cos(\beta), \sin(\beta)),$$

où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ sont des angles respectivement d'émission et de réception. Nous présentons tout d'abord des résultats pour un miroir à retournement temporel fermé (les angles d'émission/réception couvrent tout l'intervalle $[0, 2\pi]$). Nous discrétisons uniformément le segment $[0, 2\pi]$ avec un pas uniforme $h = \dfrac{2\pi}{N}$. Les N angles d'émission $(\alpha_i)_{i=1,\dots,N}$ et de réception $(\beta_j)_{j=1,\dots,N}$ sont alors donnés par

$$\begin{aligned} \alpha_i &= (i-1)h, \qquad \text{pour } i = 1,\dots,N, \\ \beta_j &= (j-1)h + \pi, \quad \text{pour } j = 1,\dots,N. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Un déphasage de π entre les angles d'émission et de réception apparaît car le transducteur du MRT émettant des ondes planes dans la direction $\boldsymbol{\alpha}$ mesure le champ lointain dans la direction opposée $-\boldsymbol{\alpha}$. Notons d'autre part que nous avons $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_N = 2\pi - h \neq 2\pi$, ceci afin de ne pas compter en deux fois la direction $(1, 0)$.

Nous pouvons maintenant introduire la matrice de champ lointain $\mathbb{F} = (\mathbb{F}_{i,j})_{1\leq i,j\leq N}$, de taille $N \times N$, définie par

$$\forall i, j = 1,\dots,N \qquad \mathbb{F}_{i,j} = hA(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\beta}_j).$$

La matrice de retournement temporel $\mathbb{T}$ est obtenue directement par la relation

$$\mathbb{T} = \mathbb{F}^*\mathbb{F},$$

où $\mathbb{F}^*$ est la matrice adjointe de $\mathbb{F}$. Notons $(\mu_p)_{p=1,\dots,N}$ les valeurs propres de $\mathbb{T}$, classées par ordre décroissant

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_N,$$

et $\mathbf{f}_p = (\mathrm{f}_p^j)_{j=1,\dots,N}$ un vecteur propre normalisé associé à la valeur propre μ_p. L'onde de Herglotz discrétisée u_p est alors calculée par la relation

$$\mathrm{u}_p(x_1, x_2) = h \sum_{j=1}^{N} \mathrm{f}_p^j e^{ik(x_1 \cos(\alpha_j) + x_2 \sin(\alpha_j))}. \tag{1.10}$$

Notons que dans l'annexe de l'article [16], les auteurs ont montré que l'approximation du spectre de l'opérateur F par celui de la matrice $\mathbb{F}$ était raisonnable. D'autre part, calculer numériquement la matrice $\mathbb{F}$ nécessite entres autres la résolution de N problèmes de diffraction multiple du même type que (1.2) (un par angle d'incidence). Nous ne considérons que des obstacles circulaires car, dans ce cas, nous disposons de formules semi-analytiques basées sur une formulation intégrale associée à une projection dans la base de Fourier. Ces formules sont détaillées dans le chapitre 4. Les simulations présentées ici sont effectuées avec le logiciel Matlab. De plus, les valeurs propres ainsi que les vecteurs propres de $\mathbb{T}$ sont obtenus par la fonction "eig" de Matlab.

1.4 Etude du nombre de valeurs propres significatives de $\mathbb{T}$

Nous commençons par étudier l'évolution des valeurs propres de la matrice de retournement temporel $\mathbb{T}$ en fonction de la longueur d'onde λ. En particulier, nous cherchons l'existence d'une plage de fréquences dans laquelle le nombre de valeurs propres significatives de $\mathbb{T}$ est égal au nombre d'obstacles présents dans le milieu.

Dans cette simulation, le MRT est fermé et les directions d'émission et de réception sont discrétisées par $N = 720$ angles. Cette discrétisation est très fine afin de se rapprocher du cas du miroir continu étudié dans la théorie. Plus loin, nous considérons un petit nombre d'angles N et verrons que les mêmes conclusions peuvent être extraites, en ce qui concernent les valeurs propres de la matrice $\mathbb{T}$.

Nous disposons $M = 5$ petits obstacles circulaires, comme illustré par la figure 1.4. Les rayons des disques sont 0.005, 0.009, 0.011, 0.0140 et 0.02 et ont pour centre respectivement $(-10, -20)$, $(0, 20)$, $(20, 20)$, $(10, -10)$ et $(-20, 0)$. Par conséquent, la plus petite distance entre les obstacles est de 20 et la plus grande vaut 50. Avec les notations introduites dans la section précédente, nous avons

$$\delta = 0.02 \ll d = 20.$$

Nous faisons maintenant varier la longueur d'onde λ entre 0.01 ($= \delta/2$) et 200 ($= 10d$). L'évolution des 10 plus grandes valeurs propres de $\mathbb{T}$ en fonction de λ est présentée sur la figure 1.3. Pour certaines valeurs de λ, nous représentons, sur la figure 1.4, les valeurs propres de $\mathbb{T}$, classées par ordre croissant. Afin de la repérer plus facilement, μ_M, la $M^{\text{ème}}$ plus grande valeur propre, est affichée en rouge (ici, la cinquième). Pour compléter cette dernière figure, le tableau 1.1 présente le rapport entre les valeurs propres μ_p et μ_{p+1}, pour $p = 1, \dots, 5$.

Nous en déduisons alors les résultats suivants :

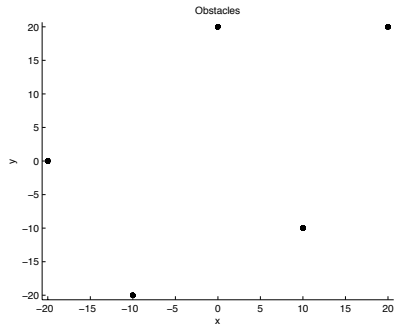


FIGURE 1.2 – Les 5 Obstacles

λ	0.02 ($= \delta = d/1000$)	0.1 ($= 5\delta = d/200$)	0.5 ($= 25\delta = d/40$)	1 ($= 50\delta = d/20$)	10 ($= 500\delta = d/2$)	100 ($= 5000\delta = 5d$)
μ_1/μ_2	1.59	1.59	1.75	1.39	1.64	2.89
μ_2/μ_3	1.17	1.31	1.12	1.75	1.67	3.47
μ_3/μ_4	1.29	1.86	4.65	1.28	1.53	16.54
μ_4/μ_5	1.12	1.58	1.48	1.85	2.93	2.25
μ_5/μ_6	1.18	1.34	30.1	568.49	$1.1.10^6$	$3.5.10^{10}$

TABLE 1.1 – Rapport entre les plus grandes valeurs propres de la matrice $\mathbb{T}$

- Pour des longueurs d'onde λ égales à 0.5, 1 et 10 (figures respectivement 1.6(c), 1.6(d) et 1.6(e)), la matrice de retournement temporel $\mathbb{T}$ dispose de 5 valeurs propres significatives, soit autant que le nombre d'obstacles présents. De plus, le tableau 1.1 montre que, pour ces valeurs de λ, le rapport μ_p/μ_{p+1} est de l'ordre de 1 pour $p = 1, \ldots, 4$. En revanche, le rapport μ_5/μ_6 est lui de l'ordre de 30, pour $\lambda = 0.5$ et de l'ordre de 10^6 pour $\lambda = 10$. Un décalage entre les 5 premières valeurs propres et la $6^{\text{ème}}$ est notable. Remarquons que pour ces valeurs de λ, nous avons la relation d'ordre suivante

$$\delta \ll \lambda \ll d, \tag{1.11}$$

  qui correspond à l'hypothèse suffisante, introduite dans la théorie, pour que la focalisation sélective ait lieu. Cette relation force la taille δ des obstacles a être très petite (vis à vis de la longueur d'onde λ), ce qui rend également le nombre d'onde sans dimension $k\delta$ très petit. Ainsi, le régime peut être considéré comme basse fréquence et chaque obstacle est associé à un unique mode. De plus, l'inégalité $\lambda \ll d$ signifie que les obstacles sont très éloignés les uns des autres (par rapport à λ) et sont, par conséquent, presque découplés (ou idéalement résolus). Ainsi, les effets de la diffraction multiple sont quasi inexistants, nous pouvons alors parler de diffraction "simple" et nous observons bien une unique valeur propre par obstacle.
- Plus λ est proche de δ, plus le nombre de valeurs propres significatives de $\mathbb{T}$ augmente. Par exemple, à $\lambda = 0.1$, soit $\lambda = \delta/2$, la matrice $\mathbb{T}$ possède clairement plus de 5 valeurs propres significatives (voir la figure 1.4(b)). De plus, d'après le tableau 1.1, le rapport entre les valeurs propres μ_p/μ_{p+1} reste constamment de l'ordre de l'unité, pour tout $p = 1, \ldots, 5$: il n'y a pas de saut entre les $5^{\text{ème}}$ et $6^{\text{ème}}$ valeurs propres.

Ici, la taille des disques tend à être de l'ordre de celle de la longueur d'onde. Ainsi, nous quittons le régime basse fréquence pour entrer dans un régime de type moyenne fréquence. Nous observons alors une excitation des modes supérieurs qui entraîne l'apparition de nouvelles valeurs propres : plusieurs valeurs propres peuvent alors être associées à un même obstacle. Les obstacles sont peut être toujours idéalement résolus, cependant, chaque obstacle est maintenant représenté par plusieurs modes et plusieurs valeurs propres peuvent représenter un même obstacle.
Par ailleurs, la courbe 1.3(d) montre que les valeurs propres μ_6 à μ_{10} décroissent lorsque λ augmente. En particulier nous pouvons considérer que, dans ce cas, lorsque $\lambda \geq 0.5$, la matrice de retournement temporel $\mathbb{T}$ possède bien 5 valeurs propres significatives.

- Inversement, si la longueur d'onde λ devient trop grande, alors la matrice $\mathbb{T}$ possède moins que 5 valeurs propres significatives. Par exemple, pour $\lambda = 100(\gg d)$, nous n'observons que trois valeurs propres significatives sur la figure 1.4(f). En particulier, le tableau 1.1 montre que le rapport entre les valeurs propres 3 et 4 est de l'ordre de 10, et non de 1. Un "saut" entre ces deux valeurs propres est apparu. Le miroir à retournement temporel ne détecte *a priori* que trois obstacles. Nous ne disposons pas de la résolution nécessaire pour distinguer les 5 obstacles.
Sur les figures 1.3(a) et surtout 1.3(c), nous observons que l'amplitude de la première valeur propre augmente en permanence avec λ, tandis que les 4 suivantes voient leur amplitude décroître à partir d'une certaine valeur de λ. Si la longueur d'onde λ tend vers l'infini, alors le MRT n'est pas assez précis et tend à ne détecter qu'un seul obstacle.

Ces simulations montrent l'existence d'une plage de longueurs d'onde λ, dans laquelle la matrice $\mathbb{T}$ possède bien 5 valeurs propres significatives, comme le nombre d'obstacles présents dans le milieu. Cette plage semble de plus correspondre à la condition introduite par la théorie, soit

$$\delta \ll \lambda \ll d.$$

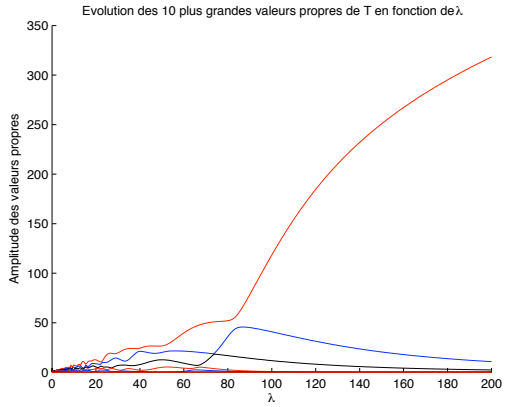
Si λ est petit ou trop proche de δ, alors le nombre de valeurs propres significatives devient plus grand que le nombre d'obstacles : la fréquence est trop élevée et le couplage entre les obstacles est trop important pour permettre au MRT de distinguer les obstacles. En revanche, lorsque λ est très grand devant d alors le nombre de valeurs propres significatives de $\mathbb{T}$ sous-estime le nombre d'obstacles présents : la fréquence est trop basse et les informations recueillies par le MRT sont insuffisantes.

Ces simulations ont été reproduites avec $N = 30$ angles de discrétisation uniquement et sont présentées sur les figures 1.5 et 1.6. Nous constatons que les courbes obtenues, bien que très oscillantes, sont similaires à celles obtenues pour une discrétisation fine de $N = 720$ points. Par conséquent, les mêmes conclusions peuvent alors en être tirées. En revanche, pour un nombre $N = 8$ très faible d'angles d'émission et de réception, les résultats obtenus sont relativement différents de ceux obtenus pour $N = 30$ et $N = 720$. Commençons par étudier, sur les figures 1.7, l'évolution des 8 valeurs propres de $\mathbb{T}$ en fonction de la longueur d'onde, pour $0.01 = \delta/2 \leq \lambda \leq 200 = 10d$. Globalement, l'allure de la courbe de la figure 1.7(c) est similaire à celle de la courbe obtenue pour $N = 720$ (voir figure 1.3(c)) et, en particulier, il reste possible, grâce au balayage en fréquences, de conclure que le milieu contient *a priori* 5 obstacles. Toutefois, pour des longueurs d'onde λ telles que $0 < \lambda \leq 20$ environ, de très fortes oscillations apparaissent. Or, cela correspond à peu près à la bande de fréquences telles que le nombre de valeurs propres significatives de $\mathbb{T}$ est égal au nombre d'obstacles. Nous proposons donc d'étudier plus en détail cette zone, tout d'abord pour de petites longueurs d'onde $0 < \lambda \leq 0.9$. Le résultat est présenté sur la figure 1.5(c) et en échelle logarithmique

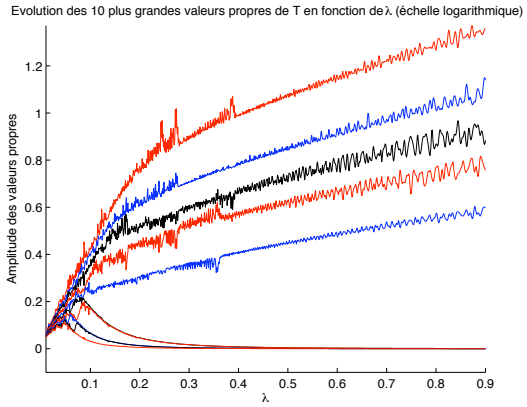
sur la figure 1.5(d). Les oscillations sont effectivement beaucoup plus importantes que pour $N = 30$ (voir figures 1.3(d) et 1.5(d)). En particulier, il est ici délicat de relier le nombre d'obstacles au nombre de valeurs propres significatives de $\mathbb{T}$ pour de telle longueurs d'onde. Nous continuons notre étude pour des longueurs d'onde λ plus importantes, comprises entre $100\delta(= 2)$ et $d/2(= 10)$ et affichons le résultat sur la figure 1.7(e) et en échelle logarithmique sur la figure 1.7(f). Il apparait ici que la $5^{\text{ème}}$ plus grande valeur propre oscille fortement. Par conséquent, pour une fréquence donnée, le spectre de la matrice de retournement temporel $\mathbb{T}$ peut ne pas comporter exactement 5 valeurs propres significatives. Par exemple, nous avons bien 5 valeurs propres significatives pour $\lambda = 4.3$, comme le montre la figure 1.8(a), tandis que nous avons plutôt 4 valeurs propres significatives avec $\lambda = 4.7$ (figure 1.8(b)). Ainsi, avec très peu d'émetteurs/récepteurs, l'utilisation d'une bande de fréquences permet de conclure de manière plus sûre sur le nombre d'obstacles présents dans le milieu, alors qu'à fréquence fixe, un risque d'erreur important apparait. Remarquons par ailleurs que, pour un nombre N si petit d'angles d'émission et de réception, la position des capteurs joue alors un rôle important. Pour mettre en évidence ce phénomène, nous proposons d'ajouter un déphasage φ à tous les angles d'émission $(\alpha_i)_{i=1,\dots,N}$ et de réception $(\beta_i)_{j=1,\dots,N}$:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= (i-1)h + \varphi, \qquad \text{pour } i = 1, \dots, N, \\ \beta_j &= (j-1)h + \pi + \varphi, \quad \text{pour } j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

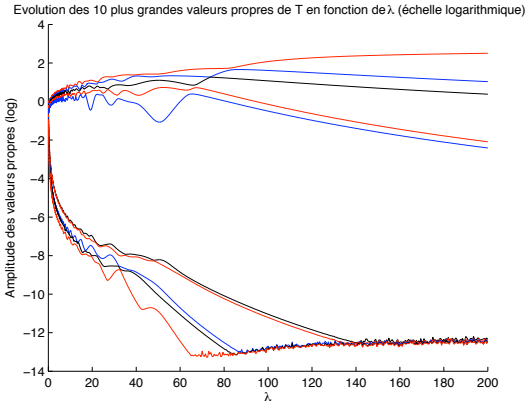
En fixant la longueur d'onde λ à 5 et le déphasage φ à 0.06rad, nous obtenons la figure 1.9(a), qui montre que la matrice $\mathbb{T}$ possède bien 5 valeurs propres significatives. En revanche, pour la même fréquence mais avec un déphasage $\varphi = 0.33$rad, nous perdons complètement cette propriété, comme le montre la figure 1.9(b). Soulignons que pour $N = 30$ ou $N = 720$ angles d'émission et de réception, la position de ces émetteurs/récepteurs a très peu d'influence sur le nombre de valeurs propres significatives de $\mathbb{T}$. Ceci est du au fait que le MRT reçoit alors plus d'information et le nombre de "zones d'ombre" est diminué. Ainsi, la diminution du nombre d'angles d'émission et de réception de $N = 720$ à $N = 30$ semble n'influencer que faiblement le nombre de valeurs propres significatives de la matrice de retournement temporel $\mathbb{T}$. En revanche, l'emploi d'un nombre $N = 8$ très réduit d'émetteurs/récepteurs entraîne d'importantes modifications du spectre de $\mathbb{T}$. En particulier, pour une fréquence donnée, le spectre de la matrice $\mathbb{T}$ peut ne pas comporter autant de valeurs propres significatives que d'obstacles. Toutefois, un balayage en fréquence permet de suivre l'évolution des valeurs propres de la matrice de retournement temporel $\mathbb{T}$ et ainsi de conclure sur le nombre d'obstacles présents dans le milieu. Dans la suite, nous verrons que la qualité de la focalisation est très dégradée même en prenant $N = 30$ émetteurs/récepteurs.



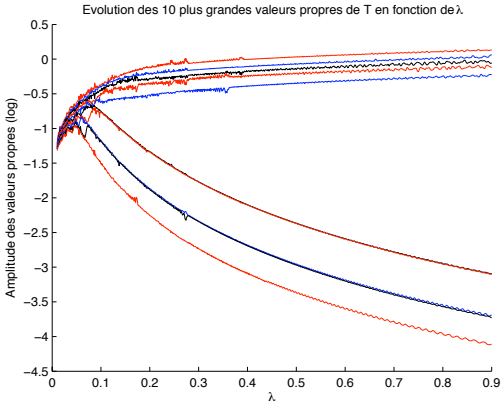
(a) Amplitude des 10 plus grandes valeurs propres de $\mathbb{T}$



(b) Agrandissement de la figure (a) dans la zone $0 < \lambda \leq 0.9$

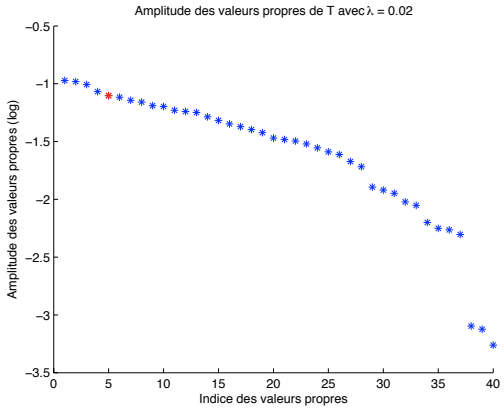


(c) Echelle logarithmique de l'amplitude des 10 plus grandes valeurs propres de $\mathbb{T}$

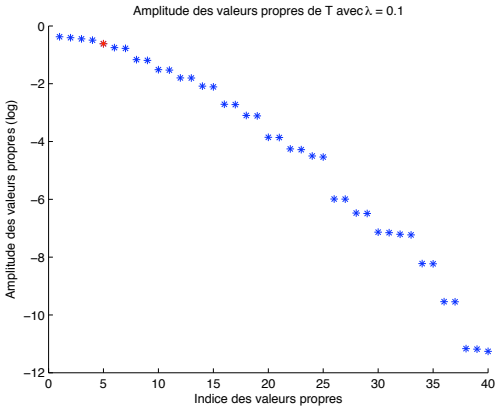


(d) Agrandissement de la figure (c) dans la zone $0 < \lambda \leq 0.9$

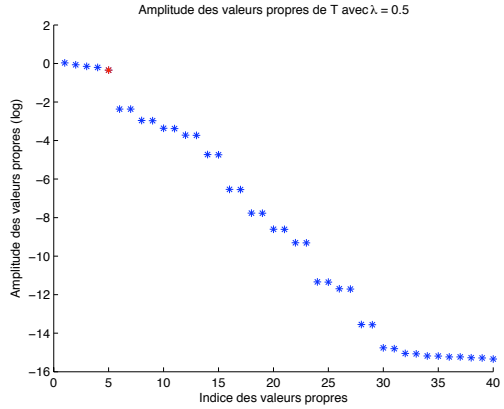
FIGURE 1.3 – Amplitude des 10 plus grandes valeurs propres de $\mathbb{T}$ en fonction de λ, avec 5 obstacles, $\delta = 0.02$ et $d = 20(= 10^3\delta)$. Le nombre d'angles d'émission/réception N est fixé à 720. La longueur d'onde λ varie entre $0.01(= \delta/2)$ et $200(= 10d)$. Les figures (c) et (d) sont les représentations en échelle logarithmique respectivement des figures (a) et (b).



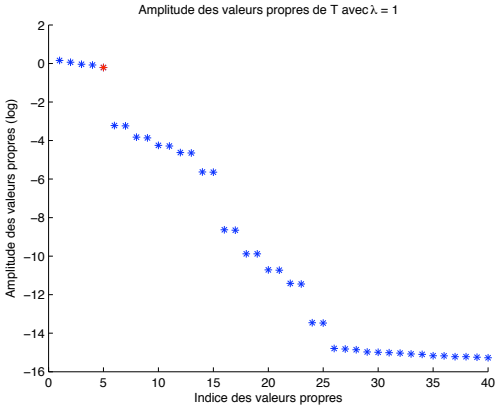
(a) $\lambda = 0.02(= \delta)$



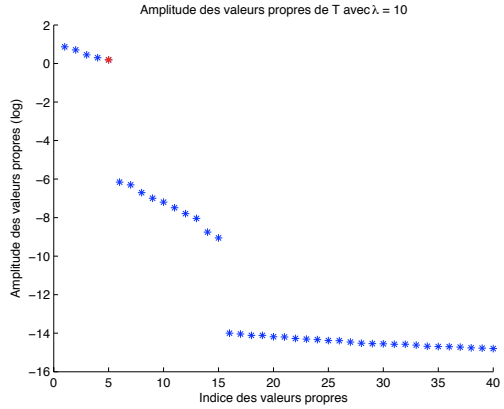
(b) $\lambda = 0.1(= 5\delta)$



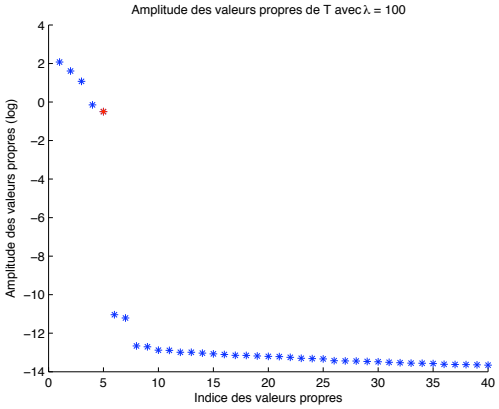
(c) $\lambda = 0.5(= 25\delta = d/40)$



(d) $\lambda = 1(= 50\delta = d/20)$

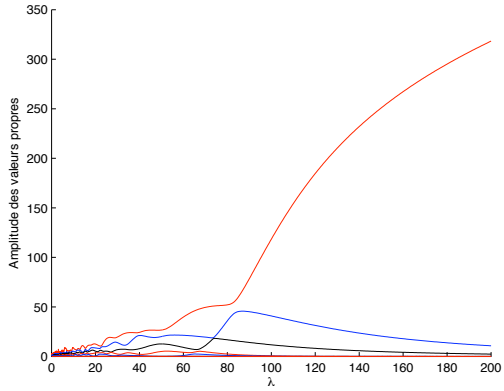


(e) $\lambda = 10(= 500\delta = d/2)$

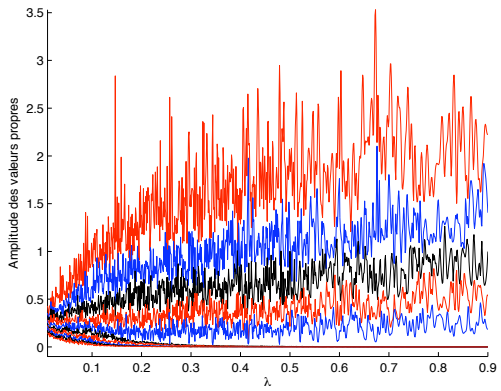


(f) $\lambda = 100(= 5000\delta = 5d)$

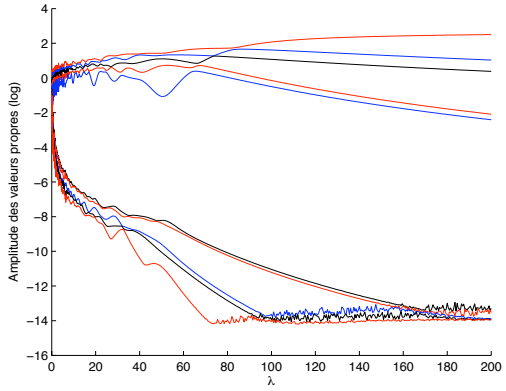
FIGURE 1.4 – Quarante plus grandes valeurs propres de la matrice de retournement temporel $\mathbb{T}$ pour différentes valeurs de λ (échelle logarithmique). Le milieu contient 5 obstacles circulaires dont le plus gros a pour rayon $\delta = 0.02$. La plus petite distance entre les obstacles est $d = 20(= 10^3\delta)$. De plus le MRT est fermé et $N = 720$ angles de discrétisation sont utilisés (les paramètres géométriques sont identiques à ceux utilisés pour obtenir la figure 1.3).



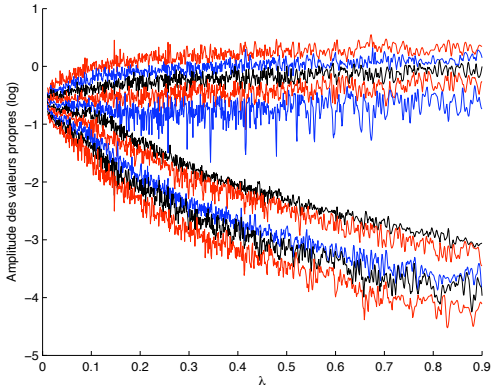
(a) Amplitude des 10 plus grandes valeurs propres de $\mathbb{T}$



(b) Agrandissement de la figure (a) dans la zone $0 < \lambda \leq 0.9$

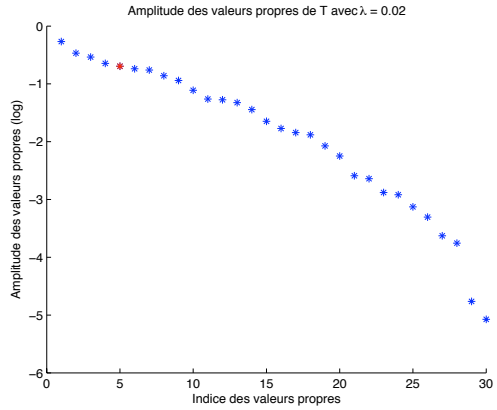


(c) Echelle logarithmique de l'amplitude des 10 plus grandes valeurs propres de $\mathbb{T}$

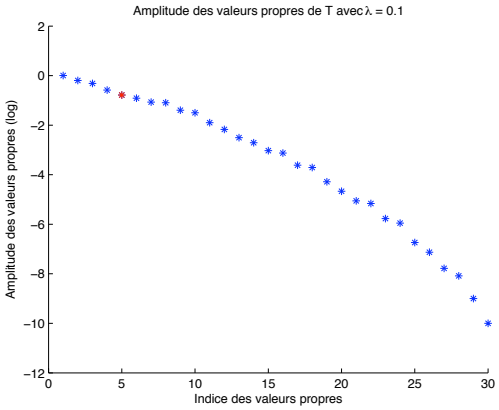


(d) Agrandissement de la figure (c) dans la zone $0 < \lambda \leq 0.9$

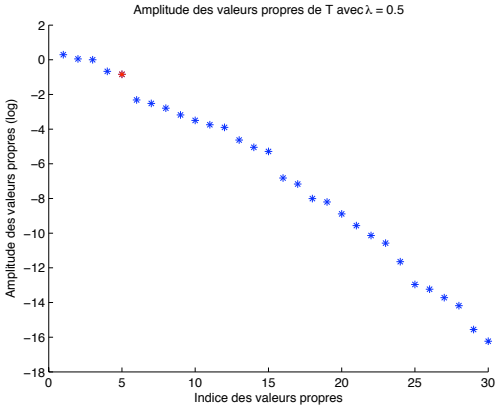
FIGURE 1.5 – Simulation identique à celle présentée sur la figure 1.3, mais avec $N = 30$ points de discrétisation seulement. Les figures (c) et (d) sont les représentations en échelle logarithmique respectivement des figures (a) et (b).



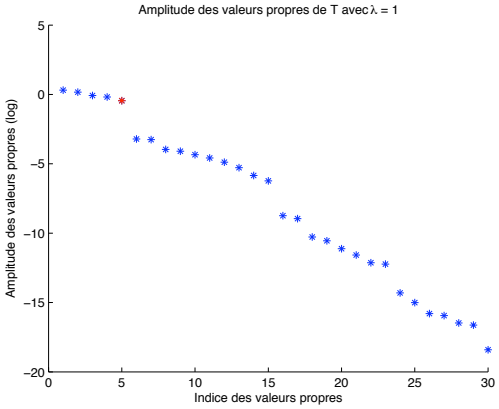
(a) $\lambda = 0.02 (= \delta)$



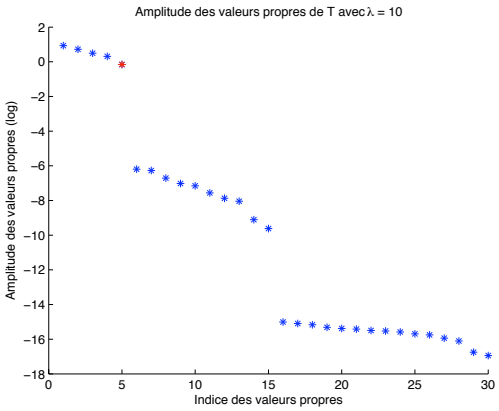
(b) $\lambda = 0.1 (= 5\delta)$



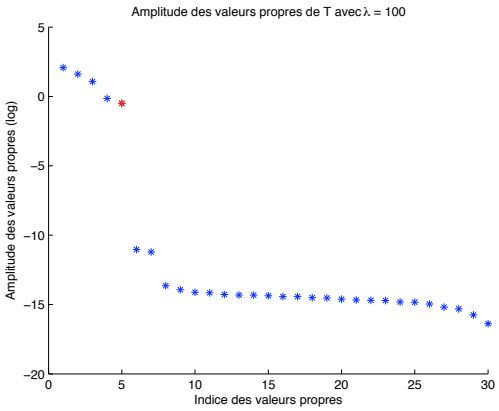
(c) $\lambda = 0.5 (= 25\delta = d/40)$



(d) $\lambda = 1 (= 50\delta = d/20)$

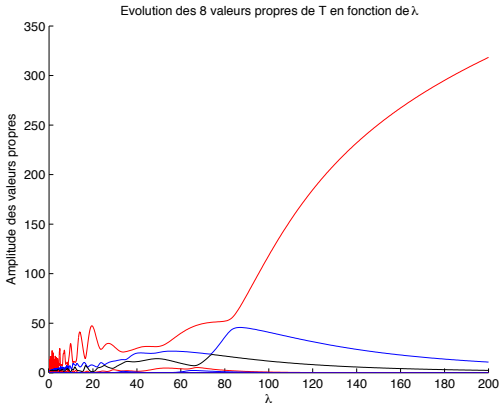


(e) $\lambda = 10 (= 500\delta = d/2)$

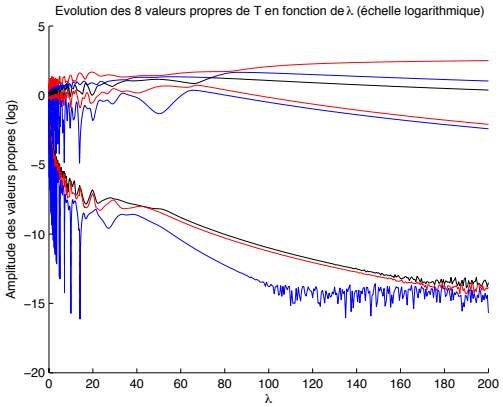


(f) $\lambda = 100 (= 5000\delta = 5d)$

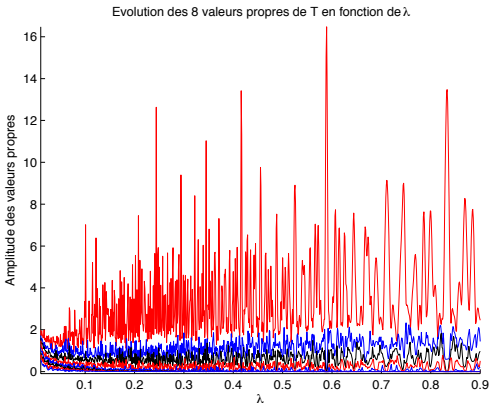
FIGURE 1.6 – Valeurs propres de la matrice de retournement temporel $\mathbb{T}$ pour différentes valeurs de λ (échelle logarithmique), avec $N = 30$ angles de discrétisation uniquement. Cette figure peut être comparée à la figure 1.4, obtenue avec $N = 720$ émetteurs/récepteurs.



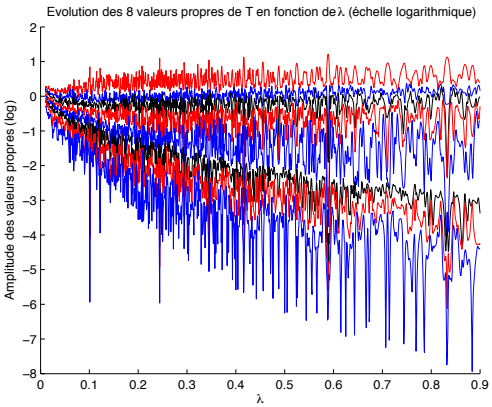
(a) Amplitude des 8 valeurs propres de $\mathbb{T}$



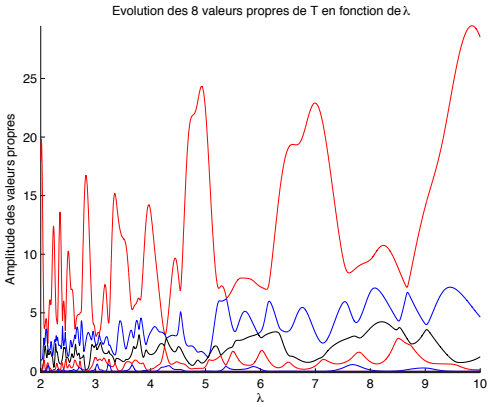
(b) Echelle logarithmique de l'amplitude des 8 valeurs propres de $\mathbb{T}$



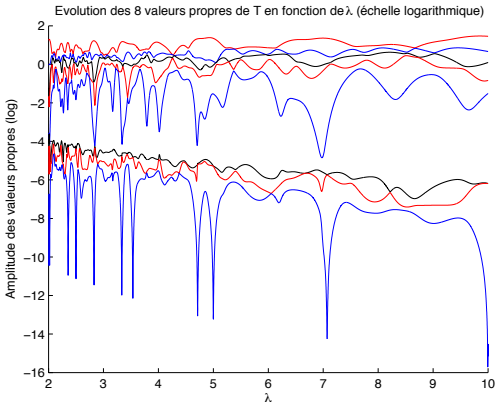
(c) Agrandissement de la figure (a) dans la zone $0 < \lambda \leq 0.9$



(d) Agrandissement de la figure (b) dans la zone $0 < \lambda \leq 0.9$

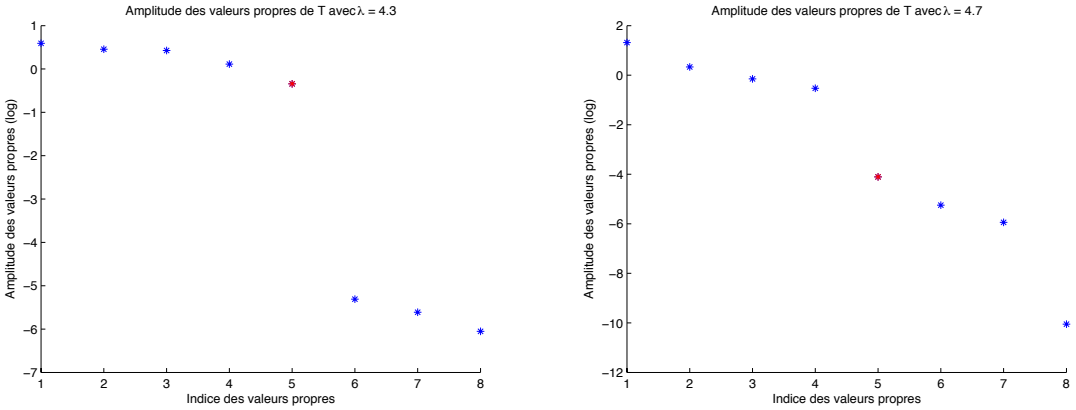


(e) Agrandissement de la figure (a) dans la zone $100\delta = 2 < \lambda \leq 10 = d/2$



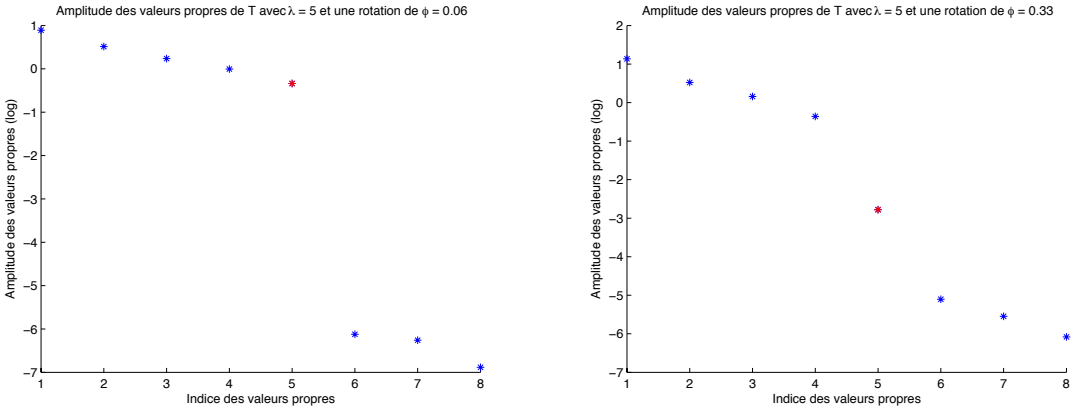
(f) Agrandissement de la figure (b) dans la zone $100\delta = 2 < \lambda \leq 10 = d/2$

FIGURE 1.7 – Évolution des 8 valeurs propres de $\mathbb{T}$ en fonction de λ, lorsque le MRT comporte $N = 8$ émetteurs/récepteurs. Les figures (b), (d) et (f) sont les représentations en échelle logarithmique respectivement des figures (a), (c) et (e). Ces figures peuvent être comparées aux figures 1.3 et 1.5 obtenues respectivement pour $N = 720$ et $N = 30$.



(a) Amplitude des 8 valeurs propres de $\mathbb{T}$ pour $\lambda = 4.3$ (b) Amplitude des 8 valeurs propres de $\mathbb{T}$ pour $\lambda = 4.7$

FIGURE 1.8 – Les 8 valeurs propres de $\mathbb{T}$ en échelle logarithmique pour une fréquence donnée.



(a) Angle de déphasage $\varphi = 0.06$rad. (b) Angle de déphasage $\varphi = 0.33$rad.

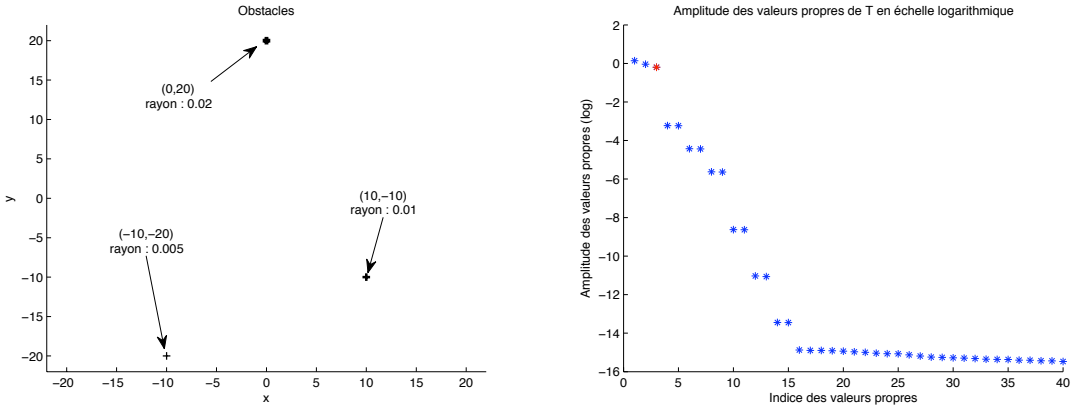
FIGURE 1.9 – Mise en évidence de l'influence de la position des émetteurs/récepteurs du MRT sur le spectre de $\mathbb{T}$, lorsque $N = 8$. La longueur d'onde est ici fixée à $\lambda = 5$.

1.5 Focalisation sélective

1.5.1 Une simulation de référence avec une discrétisation très fine

Nous testons maintenant la deuxième propriété de la méthode DORT, à savoir la possibilité de focaliser sélectivement des ondes de Herglotz sur les obstacles à l'aide des vecteurs propres de la matrice de retournement temporel $\mathbb{T}$. Rappelons que d'après la proposition 1.7, l'onde de Herglotz de densité un vecteur propre (normalisé) f_p de $\mathbb{T}$, associé à la $p^{\text{ème}}$ plus grande valeur propre μ_p, est focalisée sur le $p^{\text{ème}}$ obstacle le plus rayonnant.

Pour simplifier, nous appelons $p^{\text{ème}}$ valeur propre et $p^{\text{ème}}$ vecteur propre de $\mathbb{T}$ respectivement la $p^{\text{ème}}$ plus grande valeur propre μ_p de $\mathbb{T}$ et un vecteur propre normalisé f_p associé à cette valeur propre. Dans ce paragraphe, nous prenons un MRT fermé disposant de $N = 720$ directions d'émission/réception. Le cas d'un miroir à retournement temporel contenant moins d'émetteurs/récepteurs est étudié plus loin. Nous plaçons $M = 3$ petits obstacles comme illustré par la figure 1.10(a). Le plus grand dispose d'un rayon de 0.02 et est positionné en $(0, 20)$. L'obstacle le plus petit est centré en $(-10, -20)$ avec un rayon de 0.005. Le dernier, de rayon 0.01, a pour coordonnées $(10, -10)$. Avec une telle géométrie la distance minimale entre deux obstacles est de $d = 22$ et le plus grand des rayons vaut $\delta = 0.02$. Cette configuration sera utilisée pour de nombreuses simulations de cette section. Nous posons $\lambda = 1$ afin que l'hypothèse $\delta(= 0.02) \ll \lambda \ll d(= 22)$ soit satisfaite. Conformément à la théorie, la matrice de retournement temporel $\mathbb{T}$ possède trois valeurs propres significatives, comme le montre la figure 1.10(b).



(a) Position des 3 obstacles

(b) Quarante plus grandes valeurs propres de $\mathbb{T}$ (échelle logarithmique)

FIGURE 1.10 – Contexte dans lequel la focalisation est vérifiée

Les ondes de Herglotz associées aux vecteurs propres 1 à 4 sont ensuite calculées numériquement par la relation (1.10). Nous représentons leur module dans la figure 1.11. Nous constatons que chaque vecteur propre permet de focaliser une onde sur un obstacle différent. Plus précisément, nous avons :

- L'onde de Herglotz associée au premier vecteur propre est focalisée sur l'obstacle le plus gros, donc le plus rayonnant, positionné en $(0, 20)$ (figure 1.11(a)).
- L'onde de Herglotz associée au deuxième vecteur propre est focalisée sur le deuxième

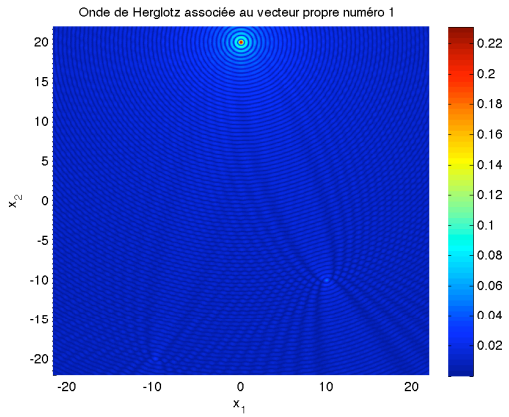
plus gros obstacle, localisé en $(10, -10)$ (figure 1.11(b)).

- L'onde de Herglotz associée au troisième vecteur propre est focalisée sur le plus petit des trois obstacles positionné en $(-10, -20)$ (figure 1.11(c)).

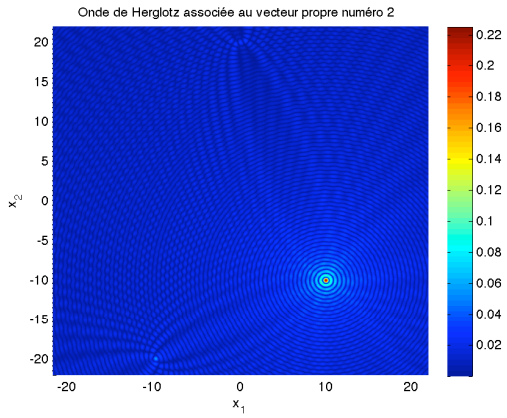
Cette simulation illustre la propriété de focalisation sélective de la méthode DORT comme décrite dans la théorie. En particulier, pour que cette focalisation ait lieu, il est suffisant que les paramètres δ, λ et d vérifient

$$\delta \ll \lambda \ll d.$$

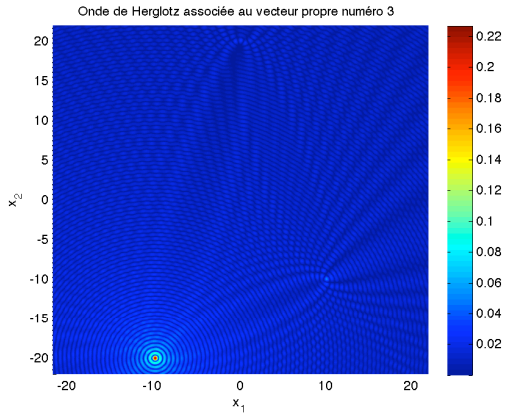
Par ailleurs, l'onde de Herglotz associée au quatrième vecteur propre est focalisée de nouveau sur l'obstacle le plus diffractant, comme le montre la figure 1.12(a). De plus la focalisation a un comportement de type dipôle plutôt que monopôle. L'onde de Herglotz, de densité le cinquième vecteur propre, est elle aussi focalisée sur le disque de plus grand rayon, et également sous la forme d'un dipôle (voir figure 1.12(b)). Ainsi, deux nouvelles valeurs propres (non significatives) représentent l'obstacle le plus rayonnant. Plus généralement, en calculant les modules des ondes de Herglotz associées aux vecteurs propres 4 à 9, nous obtenons les figures 1.12. Nous constatons que, pour un obstacle donné, deux ondes de Herglotz sont focalisées dessus, sous la forme d'un dipôle. Ainsi, deux valeurs propres non significatives de la matrice de retournement temporel $\mathbb{T}$ représentent un même obstacle. Sur la figure 1.10(b), représentant le spectre de la matrice $\mathbb{T}$, il apparait en fait que les valeurs propres μ_4 à μ_9 semblent être associées deux à deux, avec un saut relativement important entre les valeurs propres μ_9 et μ_{10}. Les valeurs propres non significatives suivantes μ_{10} à μ_{15} semblent être elles aussi classées deux à deux. Nous présentons le module des ondes de Herglotz de densité les vecteurs propres numéro 10 à 15 sur les figures 1.13. A chaque fois, deux ondes de Herglotz sont focalisées sur un même obstacle, et, de plus, la focalisation prend cette fois-ci la forme d'un quadripôle. Nous n'avons pas étudié plus en détail les raisons de la répétition de ce cycle. Toutefois, ces vecteurs propres ne sont guère utiles en pratique et sont de plus associés à des valeurs propres de très faible valeur. Nous verrons plus loin que l'ajout de bruit, même faible, modifie ces valeurs propres et annule ainsi cette propriété de focalisation. Les premiers vecteurs propres ont, en revanche, présenté une forte robustesse vis-à-vis du bruit numérique dans nos simulations.



(a) Module de l'onde de Herglotz associée au premier vecteur propre de $\mathbb{T}$

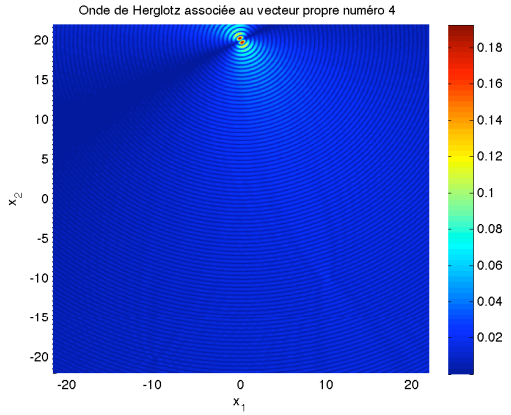


(b) Module de l'onde de Herglotz associée au deuxième vecteur propre de $\mathbb{T}$

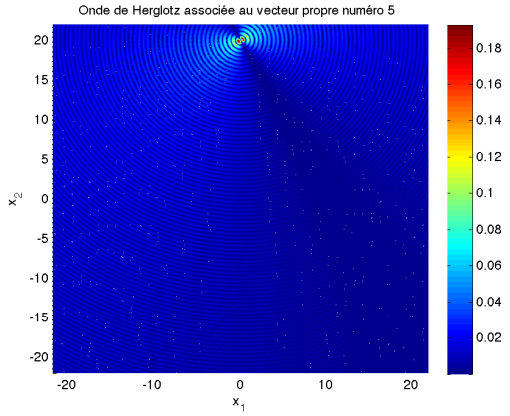


(c) Module de l'onde de Herglotz associée au troisième vecteur propre de $\mathbb{T}$

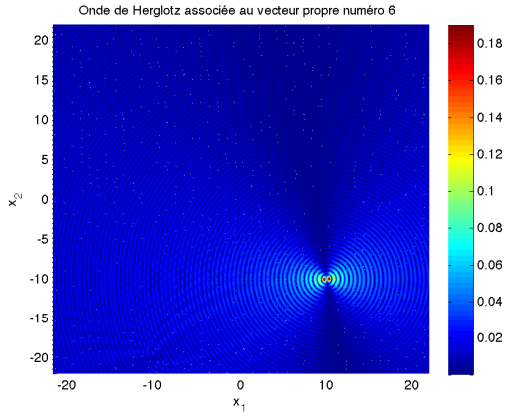
FIGURE 1.11 – Module des ondes de Herglotz associées aux quatre premiers vecteurs propres de la matrice de retournement temporel $\mathbb{T}$, dans le cas de trois petits obstacles, pour $\lambda = 1$ et $N = 720$ angles d'émission/réception. Les obstacles sont situés, par ordre décroissant de taille, en $(0, 20)$, $(10, -10)$ et en $(-10, -20)$.



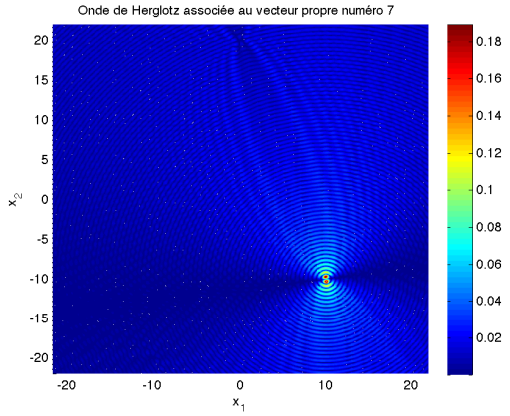
(a) Module de l'onde de Herglotz associée au quatrième vecteur propre de $\mathbb{T}$



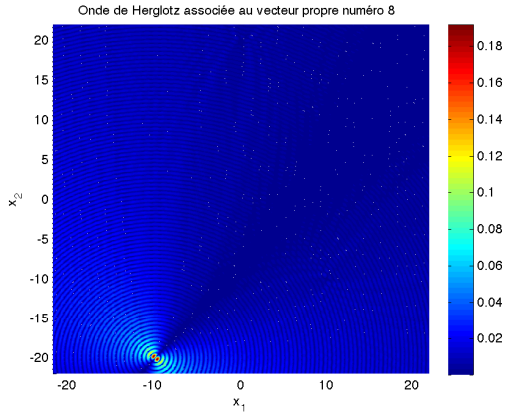
(b) Module de l'onde de Herglotz associée au cinquième vecteur propre de $\mathbb{T}$



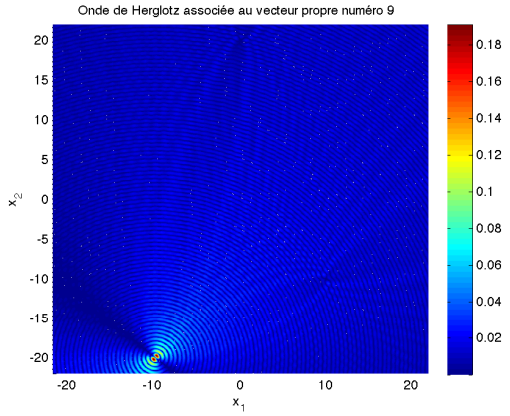
(c) Module de l'onde de Herglotz associée au sixième vecteur propre de $\mathbb{T}$



(d) Module de l'onde de Herglotz associée au septième vecteur propre de $\mathbb{T}$

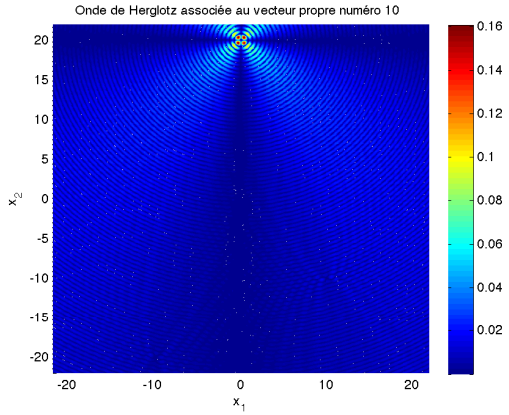


(e) Module de l'onde de Herglotz associée au huitième vecteur propre de $\mathbb{T}$

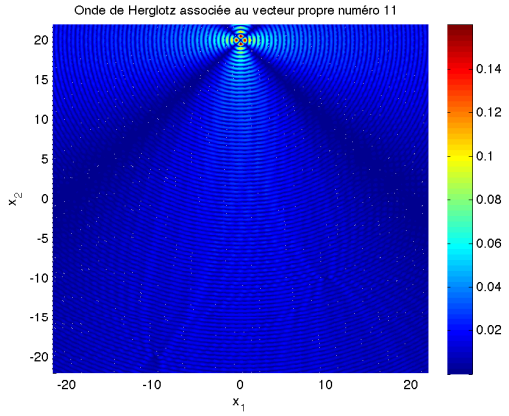


(f) Module de l'onde de Herglotz associée au neuvième vecteur propre de $\mathbb{T}$

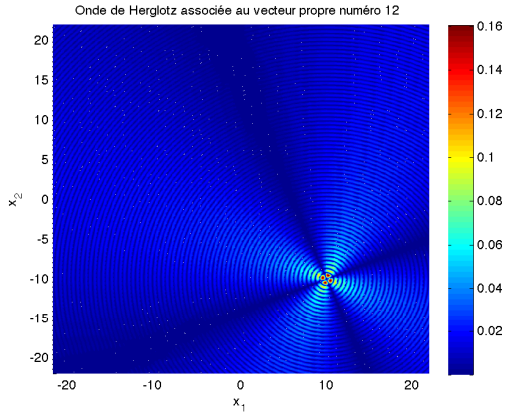
FIGURE 1.12 – Module des ondes de Herglotz associées aux vecteurs propres 4 à 9 de la matrice de retournement temporel $\mathbb{T}$, dans le cas de trois petits obstacles, pour $\lambda = 1$ et $N = 720$ angles d'émission/réception. Les obstacles sont situés, par ordre décroissant de taille, en $(0, 20)$, $(10, -10)$ et en $(-10, -20)$. La focalisation sélective a de nouveau lieu mais sous forme d'un dipôle.



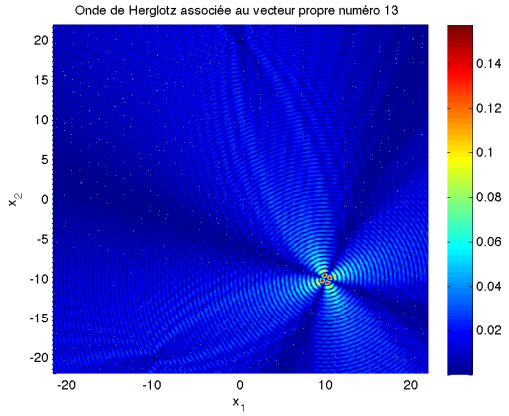
(a) Module de l'onde de Herglotz associée au dixième vecteur propre de $\mathbb{T}$



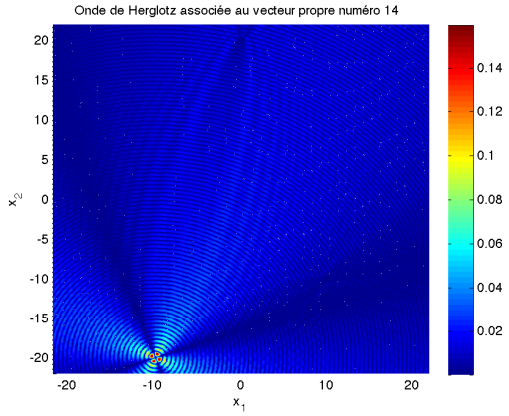
(b) Module de l'onde de Herglotz associée au onzième vecteur propre de $\mathbb{T}$



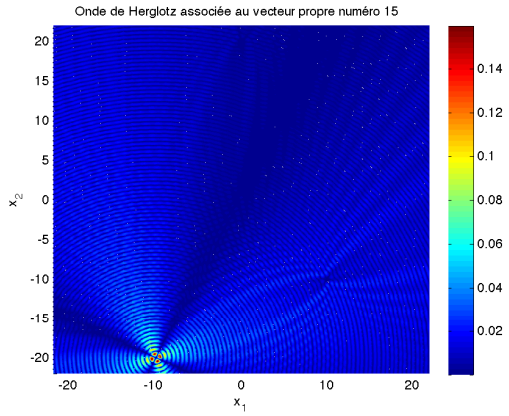
(c) Module de l'onde de Herglotz associée au douzième vecteur propre de $\mathbb{T}$



(d) Module de l'onde de Herglotz associée au treizième vecteur propre de $\mathbb{T}$



(e) Module de l'onde de Herglotz associée au quatorzième vecteur propre de $\mathbb{T}$



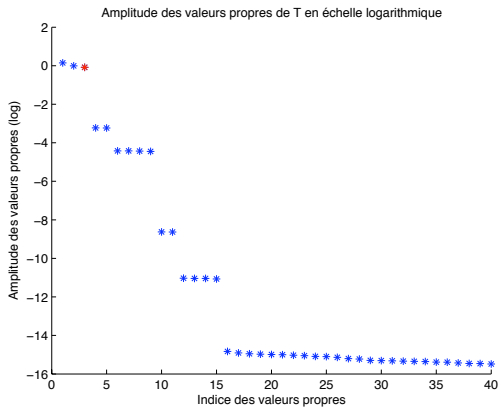
(f) Module de l'onde de Herglotz associée au quinzième vecteur propre de $\mathbb{T}$

FIGURE 1.13 – Module des ondes de Herglotz associées aux vecteurs propres 10 à 15 de la matrice de retournement temporel $\mathbb{T}$, dans le cas de trois petits obstacles, pour $\lambda = 1$ et $N = 720$ angles d'émission/réception. Les obstacles sont situés, par ordre décroissant de taille, en $(0, 20)$, $(10, -10)$ et en $(-10, -20)$. Le cycle se répète encore une fois mais la focalisation prend la forme d'un quadripôle.

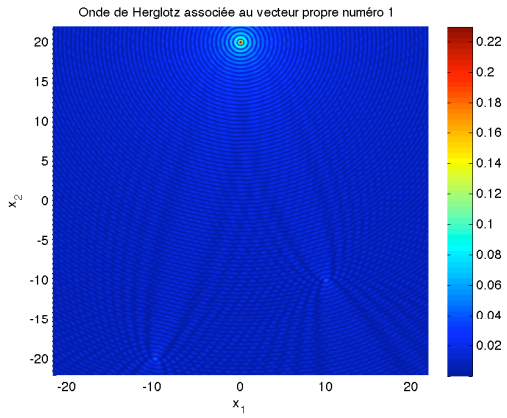
1.5.2 Cas de deux obstacles identiques

Lorsque deux obstacles ont même rayon, la méthode DORT appliquée comme précédemment, ne devrait pas permettre de les détecter sélectivement. Pour illustrer ce phénomène, égalisons par exemple les rayons du plus petit et du deuxième obstacle de la configuration précédente. Les trois obstacles sont alors toujours placés en $(0, 20)$, $(10, -10)$ et $(-10, -20)$ mais avec des rayons respectivement égaux à 0.02, 0.01 et 0.01. Les modules des ondes de Herglotz associées aux trois premiers vecteurs propres ainsi que les valeurs propres de $\mathbb{T}$ sont présentées sur la figure 1.14. Nous constatons que la matrice de retournement temporel $\mathbb{T}$ possède toujours 3 valeurs propres significatives (figure 1.14(a)) et que l'onde de Herglotz associée avec le premier vecteur propre est toujours focalisée le plus gros obstacle (figure 1.14(b)). Cependant, les ondes de Herglotz associées aux vecteurs propres 2 et 3 sont focalisées sur les deux obstacles identiques à la fois, et non sélectivement (voir figures 1.14(c) et 1.14(d)).

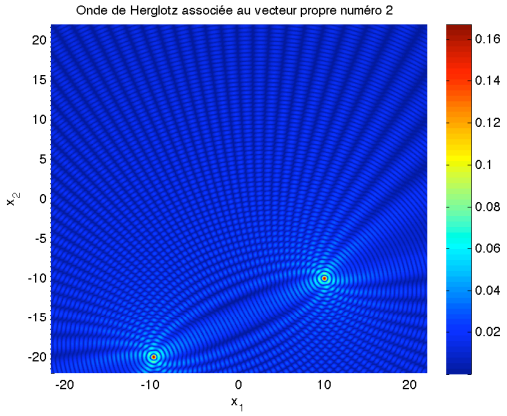
Dans [96], les auteurs proposent de choisir une combinaison linéaire des vecteurs propres de $\mathbb{T}$ afin de pouvoir détecter sélectivement les obstacles identiques. Introduisons alors f_2 (respectivement f_3) un vecteur propre unitaire associé à la deuxième (respectivement la troisième) plus grande valeur propre de $\mathbb{T}$. Nous représentons sur la figure 1.15 les modules des ondes de Herglotz dont les densités sont les combinaisons linéaires simples $(\mathrm{f}_2+\mathrm{f}_3)$ (figure 1.15(a)) et $(\mathrm{f}_2-\mathrm{f}_3)$ (figure 1.15(b)). Ce choix permet ici de focaliser chaque onde de Herglotz sur un des deux obstacles identiques.



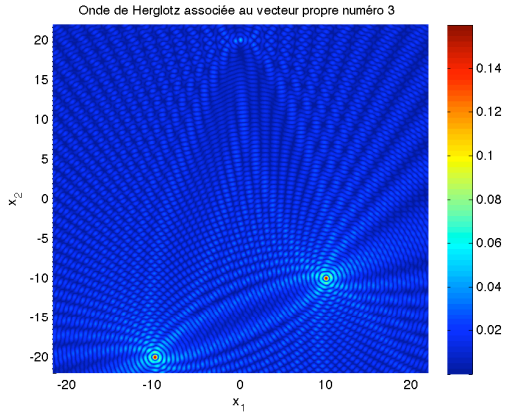
(a) Quarante plus grandes valeurs propres de $\mathbb{T}$ (échelle logarithmique)



(b) Module de l'onde de Herglotz associée au premier vecteur propre de $\mathbb{T}$

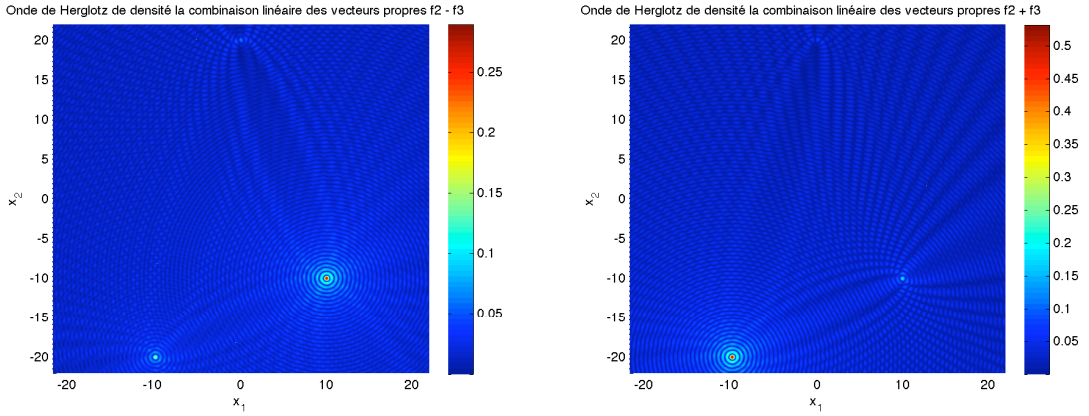


(c) Module de l'onde de Herglotz associée au deuxième vecteur propre de $\mathbb{T}$



(d) Module de l'onde de Herglotz associée au troisième vecteur propre de $\mathbb{T}$

FIGURE 1.14 – Mise en échec de la focalisation sélective lorsque deux obstacles ont même rayon en utilisant directement les vecteurs propres de $\mathbb{T}$. Les obstacles situés en $(10, -10)$ et en $(-10, -20)$ sont identiques, tandis que le plus gros obstacle est situé en $(0, 20)$. La matrice de retournement temporel possède bien 3 valeurs propres significatives, mais la focalisation sélective n'a pas lieu sur les deux obstacles de même rayon.



(a) Module de l'onde de Herglotz de densité $f_2 + f_3$ (b) Module de l'onde de Herglotz de densité $f_2 - f_3$

FIGURE 1.15 – Focalisation sélective sur les deux obstacles identiques, situés en $(10, -10)$ et en $(-10, -20)$. Les ondes de Herglotz ont pour densité f_2+f_3 (figure (a)) et f_2-f_3 (figure (b)), où f_2 et f_3 sont deux vecteurs propres associés respectivement à la deuxième et la troisième plus grande valeur propre de $\mathbb{T}$.

1.5.3 Focalisation sélective avec peu d'émetteurs/récepteurs

Afin de se rapprocher de configurations plus réalistes, nous utilisons uniquement $N = 30$ angles de discrétisation. Nous avons constaté précédemment que, dans ce cas, le nombre de valeurs propres significatives de la matrice $\mathbb{T}$ restait égal au nombre d'obstacles. En revanche, nous verrons que la propriété de focalisation sélective des vecteurs propres de $\mathbb{T}$ est sensible à la discrétisation mais aussi à la disposition des émetteurs/récepteurs ainsi qu'à la fréquence.

Reprenons la configuration géométrique des trois petits obstacles utilisée précédemment. Rappelons que les trois disques sont disposés en $(0, 20)$, $(10, -10)$ et $(-10, -20)$ avec un rayon respectivement de 0.02, 0.01 et 0.005, comme indiqué par la figure 1.10(a). Comme précédemment, nous fixons la longueur d'onde λ égale à 1, mais ne prenons que $N = 30$ angles d'émission/réception, obtenus par la relation (1.9). Nous montrons sur la figure 1.16 les valeurs propres de $\mathbb{T}$ ainsi que les ondes de Herglotz, en module, associées aux trois premiers vecteurs propres de $\mathbb{T}$. Nous constatons tout d'abord sur la figure 1.16(a) que la matrice de retournement temporel $\mathbb{T}$ possède bien 3 valeurs propres significatives. D'autre part, le premier vecteur propre permet toujours de focaliser une onde sur le plus gros obstacle situé en $(0, 20)$ (voir figure 1.16(b)), la précision de la focalisation étant naturellement moindre qu'avec un grand nombre d'émetteurs/récepteurs (figure 1.11(a)). Enfin, les ondes de Herglotz de densité le $2^{\text{ème}}$ et le $3^{\text{ème}}$ vecteur propre sont focalisées respectivement le deuxième et le troisième obstacle, mais de manière floue (voir figures 1.16(c) et 1.16(d)). Sur cet exemple nous constatons que la diminution du nombre d'émetteurs/récepteurs n'influe pas sur le nombre de valeurs propres significatives de la matrice de retournement temporel, mais dégrade notablement la focalisation des ondes de Herglotz. Ceci s'explique simplement par le fait que, d'une part le MRT reçoit moins d'information, et d'autre part, émet un nombre moins important d'ondes planes.

Afin d'améliorer la qualité de la focalisation, nous proposons de déplacer les capteurs en ajoutant un déphasage φ à tous les angles d'émission $(\alpha_i)_{i=1,\dots,N}$ et de réception $(\beta_i)_{j=1,\dots,N}$. Plus précisément, nous avons alors

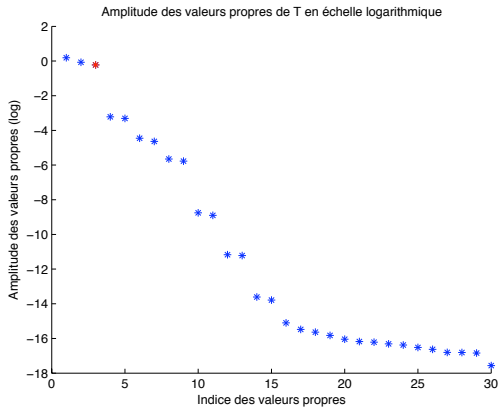
$$\begin{aligned} \alpha_i &= (i-1)h + \varphi, \qquad \text{pour } i = 1, \dots, N, \\ \beta_j &= (j-1)h + \pi + \varphi, \quad \text{pour } j = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Après plusieurs simulations, il apparait que le choix $\varphi = 0.031\text{rad}$ fournit de bons résultats visuels pour cette configuration géométrique. En effet, avec un tel déphasage, la focalisation sélective est nettement plus précise que précédemment, comme le montre la figure 1.17. Le nombre de valeurs propres significatives de la matrice $\mathbb{T}$ est toujours égal à 3 mais les ondes de Herglotz associées aux trois premiers vecteurs propres sont focalisées plus nettement sur chacun des obstacles. Ainsi, la position des émetteurs/récepteurs influe sur la qualité de focalisation des ondes de Herglotz émises par le MRT.

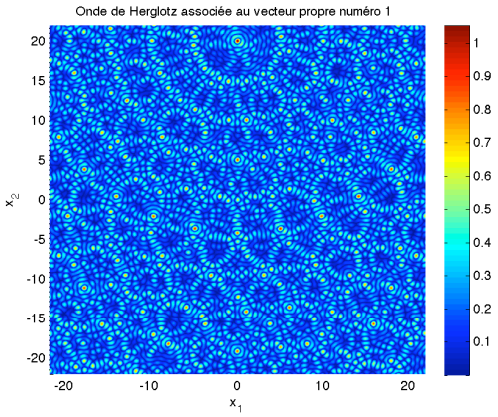
Modifions maintenant la longueur d'onde en prenant $\lambda = 0.9$ plutôt que $\lambda = 1$. Comme précédemment, nous calculons les valeurs propres de $\mathbb{T}$ ainsi que les trois ondes de Herglotz associées aux trois premiers vecteurs propres de $\mathbb{T}$. Le résultat est présenté sur la figure 1.18. Nous constatons que la matrice de retournement temporel possède toujours 3 valeurs propres significatives et l'onde de Herglotz de densité le premier vecteur propre est focalisée sur le plus gros obstacle (voir figures respectivement 1.18(a) et 1.18(b)). En revanche, les figures 1.18(c) et 1.18(d) montrent que les ondes de Herglotz associées aux deuxième et troisième vecteur propre ne sons plus focalisées.

Ainsi, la diminution de récepteurs/émetteurs du MRT entraîne une dégradation globale de la qualité de la focalisation des ondes de Herglotz émises par le miroir à l'aide des vecteurs

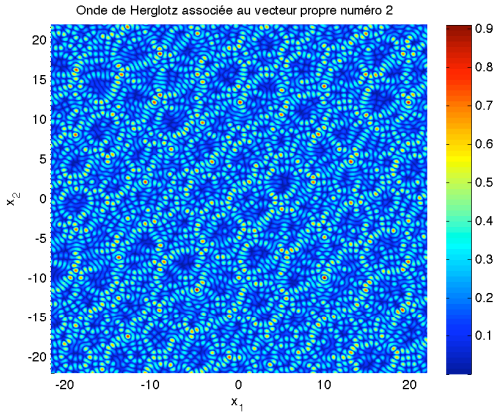
propres de $\mathbb{T}$. De plus, la précision de la focalisation dépend grandement à la fois de la position des capteurs et de la longueur d'onde. Notons que ces phénomènes ne sont pas perceptibles dès lors que le nombre de directions d'émission/réception N est suffisamment grand. En effet, nous avons reproduit ces simulations avec $N = 360$, et la focalisation sélective a eu lieu dans tous les cas.



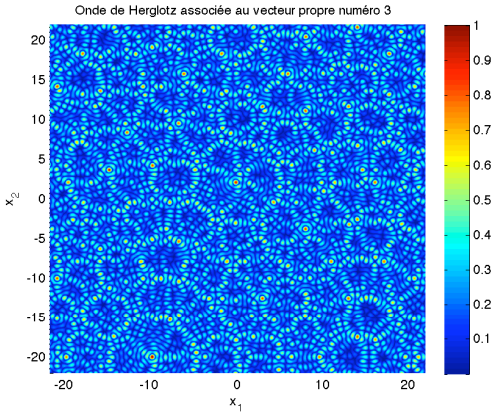
(a) Valeurs propres de $\mathbb{T}$ (échelle logarithmique)



(b) Module de l'onde de Herglotz associée au premier vecteur propre de $\mathbb{T}$

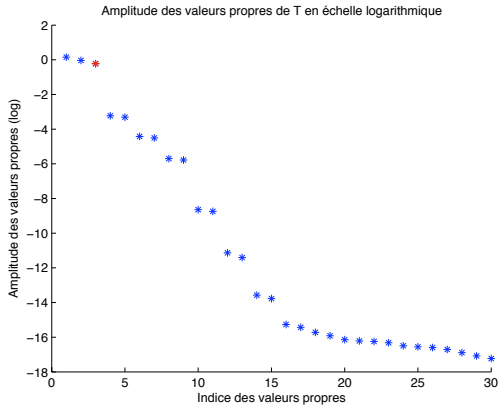


(c) Module de l'onde de Herglotz associée au deuxième vecteur propre de $\mathbb{T}$

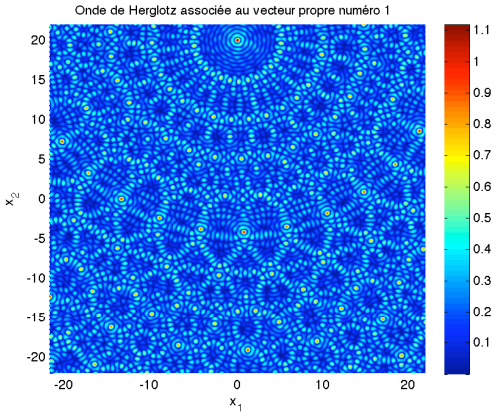


(d) Module de l'onde de Herglotz associée au troisième vecteur propre de $\mathbb{T}$

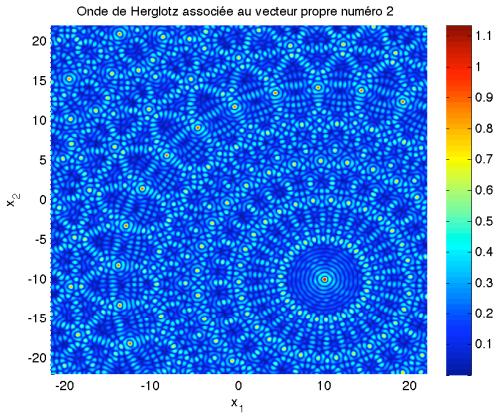
FIGURE 1.16 – Valeurs propres et ondes de Herglotz associées aux vecteurs propres de la matrice de retournement temporel $\mathbb{T}$ dans le cas d'un MRT fermé avec seulement $N = 30$ angles d'émission/réception. Cette simulation est à comparer avec celle présentée par la figure 1.11. La matrice $\mathbb{T}$ possède bien 3 valeurs propres mais la focalisation sélective est très peu précise, notamment pour les 2ème et 3ème vecteurs propres.



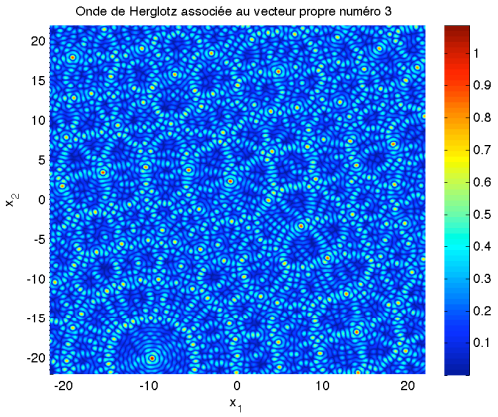
(a) Valeurs propres de $\mathbb{T}$ (échelle logarithmique)



(b) Module de l'onde de Herglotz associée au premier vecteur propre de $\mathbb{T}$

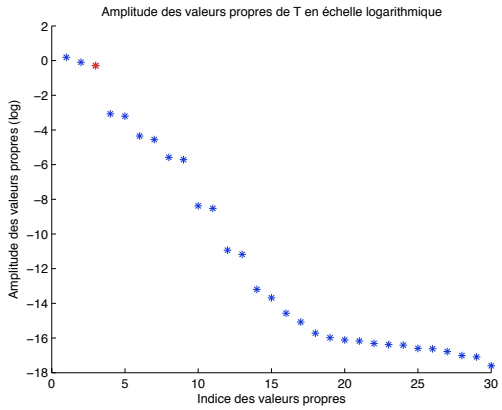


(c) Module de l'onde de Herglotz associée au deuxième vecteur propre de $\mathbb{T}$

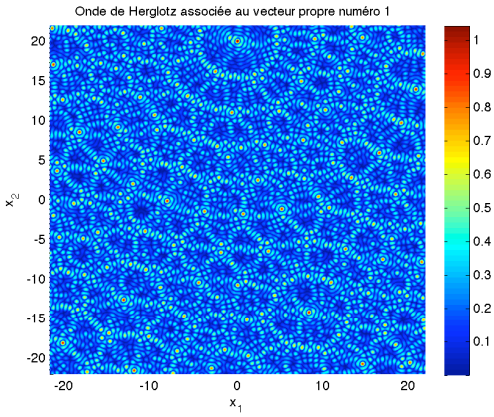


(d) Module de l'onde de Herglotz associée au troisième vecteur propre de $\mathbb{T}$

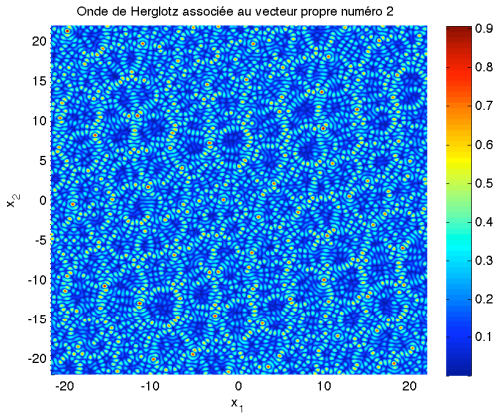
FIGURE 1.17 – Simulation identique à celle présentée sur la figure 1.16, avec un déphasage de $\varphi = 0.031$rad sur les angles d'émission/réception (voir relation (1.12)). La matrice $\mathbb{T}$ dispose bien de 3 valeurs propres significatives et la focalisation sélective est plus précise que lorsque $\varphi = 0$ (voir figure 1.17).



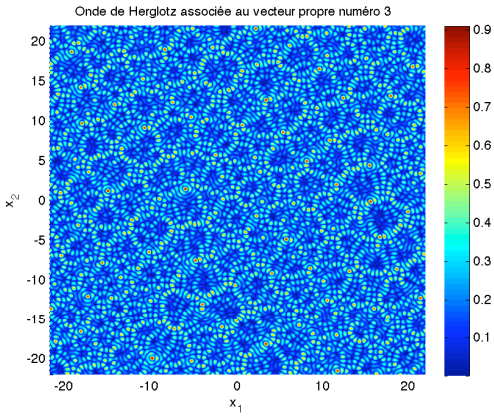
(a) Valeurs propres de $\mathbb{T}$ (échelle logarithmique)



(b) Module de l'onde de Herglotz associée au premier vecteur propre de $\mathbb{T}$



(c) Module de l'onde de Herglotz associée au deuxième vecteur propre de $\mathbb{T}$



(d) Module de l'onde de Herglotz associée au troisième vecteur propre de $\mathbb{T}$

FIGURE 1.18 – La simulation est la même que celle présentée par la figure 1.17 mais avec une longueur d'onde λ égale à 0.9. Nous observons que la focalisation sélective est alors très imprécise voire inexistante, notamment pour les vecteurs propres 2 et 3, alors que la matrice de retournement temporel possède 3 valeurs propres significatives.

1.6 Bande de fréquences

Miroir à retournement temporel continu. Nous avons étudié la méthode DORT en régime monochromatique. Pour améliorer la qualité de la focalisation, nous proposons d'utiliser une bande de fréquences $[k_{min}, k_{max}]$. Pour chaque nombre d'onde $k \in [k_{min}, k_{max}]$, notons T^k l'opérateur de retournement temporel associé dont les valeurs propres $(\mu_p^k)_{p\geq 1}$ sont classées par ordre décroissant

$$\mu_1^k \geq \mu_2^k \geq \ldots \geq \mu_p^k \geq \ldots$$

Pour tout $k \in [k_{min}, k_{max}]$ et $p = 1, \ldots, M$, nous introduisons l'onde de Herglotz v_p^k, définie de la même manière que (1.1), par

$$v_p^k(\mathbf{x}) = \int_{S^2} f_p^k(\boldsymbol{\alpha}) e^{ik\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha},$$

où f_p^k est une fonction propre de T^k associée à la valeur propre μ_p^k. Enfin, introduisons maintenant l'onde v_p, superposition de toutes ces ondes de Herglotz

$$v_p(\mathbf{x}) = \int_{k_{min}}^{k_{max}} v_p^k(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}k = \int_{k_{min}}^{k_{max}} \int_{S^2} f_p^k(\boldsymbol{\alpha}) e^{ik\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} \, \mathrm{d}k.$$

Supposons que la bande de fréquence soit telle que, pour tout $k \in [k_{min}, k_{max}]$, la relation $\delta \ll \lambda \ll d$ soit vérifiée. Chaque onde de Herglotz v_p^k introduite ci-dessus est alors focalisée sur le $p^{\text{ème}}$ obstacle le plus rayonnant. Ainsi, nous conjecturons que leur superposition v_p est également focalisée sur le $p^{\text{ème}}$ obstacle, et, de plus, avec davantage de précision.

Cependant, bien qu'unitaire, chaque fonction propre f_p^ℓ est définie à une constante complexe multiplicative unitaire près. Ainsi, au niveau de l'obstacle Ω_p^- par exemple et si les fonctions propres f_p^ℓ ne sont pas choisies avec précaution, un phénomène de compensation peut apparaître et rien ne nous garantit que la somme v_p des ondes de Herglotz est focalisée sur le $p^{\text{ème}}$ obstacle. Numériquement, nous avons observé que l'onde v_p (discrète) peut ne pas être focalisée sur l'obstacle p, ni, d'ailleurs, sur aucun autre obstacle. Pour s'affranchir de ce problème, nous préférons étudier l'énergie $\mathbb{E}v_p$ de l'onde v_p :

$$\mathbb{E}v_p(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = \int_{\mathbb{R}} \left| v_p^k(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) \right|^2 \, \mathrm{d}k = \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} \left| v_p^k(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) \right|^2 \, \mathrm{d}k.$$

Miroir à retournement temporel discret. Numériquement, nous discrétisons le segment $[k_{min}, k_{max}]$ en N_k nombres d'onde avec un pas uniforme $h_k = \dfrac{k_{max} - k_{min}}{N_k - 1}$. Notons

$$k_\ell = k_{min} + (\ell - 1)h_k, \qquad \text{pour tout } \ell = 1, \ldots, N_k,$$

les nombres d'onde discrétisés. Pour tout $\ell = 1, \ldots, N_k$, nous calculons la matrice de retournement temporel $\mathbb{T}^\ell$ associée ainsi que ses valeurs propres $(\mu_p^\ell)_{p=1,\ldots,N}$, classées par ordre décroissant

$$\mu_1^\ell \geq \mu_2^\ell \geq \ldots \geq \mu_N^\ell.$$

Pour tout $p = 1, \ldots, N$ et $\ell = 1, \ldots, N_k$, notons $\mathrm{f}_p^\ell = (\mathrm{f}_p^{\ell,j})_{j=1,\ldots,N}$ un vecteur propre normalisé associé à la valeur propre μ_p^ℓ de la matrice $\mathbb{T}^\ell$ et v_p^ℓ l'onde de Herglotz discrétisée,

calculée par la relation (1.10), soit

$$\mathrm{v}_p^\ell(x_1,x_2) = h\sum_{j=1}^{N} \mathrm{f}_p^{\ell,j} e^{ik_\ell(x_1\cos(\alpha_j)+x_2\sin(\alpha_j))}.$$

La superposition v_p de ces ondes de Herglotz discrétisées est alors obtenue par la relation suivante

$$\mathrm{v}_p(x_1,x_2) = h_k\sum_{\ell=1}^{N_k} \mathrm{v}_p^\ell(x_1,x_2) = h_k h\sum_{\ell=1}^{N_k}\sum_{j=1}^{N} \mathrm{f}_p^{\ell,j} e^{ik_\ell(x_1\cos(\alpha_j)+x_2\sin(\alpha_j))}.$$

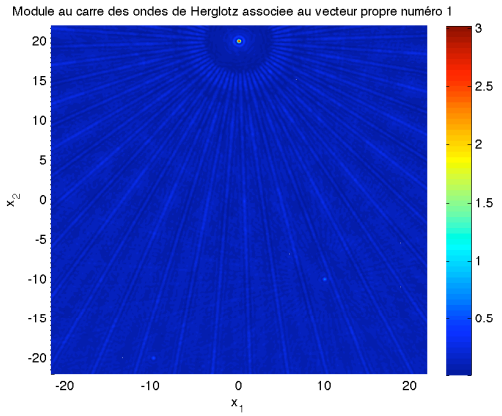
L'énergie $\mathbb{E}\mathrm{v}_p$ de l'onde v_p est ainsi donnée par

$$\mathbb{E}\mathrm{v}_p(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2) = h_k\sum_{\ell=1}^{N_k} \left|\mathrm{v}_p^\ell(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)\right|^2. \tag{1.13}$$

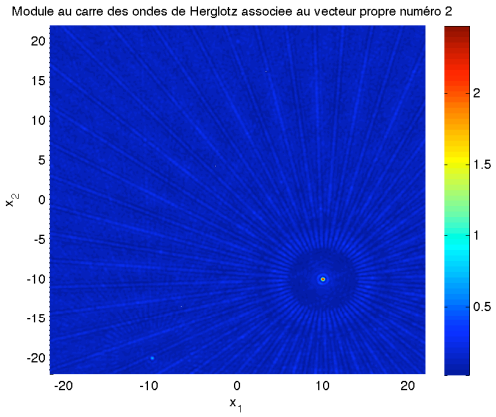
Exemple de résultat numérique. Nous proposons un exemple de simulation numérique, reprenant la même configuration des trois petits obstacles disposés dans le plan, comme présenté sur la figure 1.10(a). Les trois disques sont centrés sur $(0,20)$, $(10,-10)$ et $(-10,-20)$ avec un rayon respectivement de 0.02, 0.01 et 0.005. Ainsi, avec les notations précédentes, le plus grand des rayons des obstacles vaut $\delta = 0.02$ et la plus petite distance d entre les obstacles est de 22. La plage de fréquence choisie est comprise entre $k_{min} = 5.236$ et $k_{max} = 7.554$, de ce fait, la longueur d'onde λ est comprise entre 0.8 et 1.2. Ainsi, pour toutes les fréquences testées, la relation suivante est toujours satisfaite

$$\forall\lambda \in [0.8, 1.2], \qquad \delta = 0.02 \ll \lambda \ll d = 22.$$

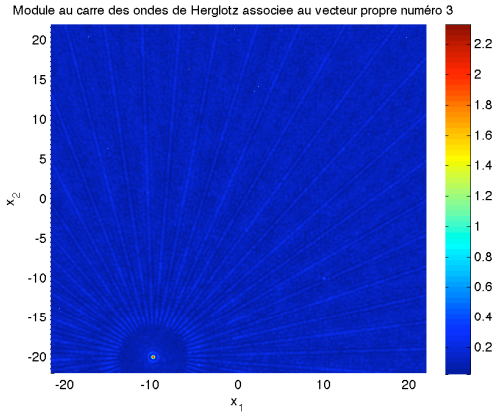
Nous présentons sur les figures 1.19, l'énergie de la somme des ondes de Herglotz. Comme nous pouvions nous y attendre, l'énergie est bien focalisée sur les obstacles.



(a) Module de l'onde de Herglotz associée au premier vecteur propre de $\mathbb{T}$



(b) Module de l'onde de Herglotz associée au deuxième vecteur propre de $\mathbb{T}$



(c) Module de l'onde de Herglotz associée au troisième vecteur propre de $\mathbb{T}$

FIGURE 1.19 – Représentation de l'énergie, donnée par (1.13), pour une bande de fréquences telle que la longueur d'onde λ est comprise entre 0.8 et 1.2. La configuration géométrique des trois petits obstacles est exactement la même que présentée que la figure1.10(a). Le nombre d'angles d'émission/réception utilisé est de $N = 30$ (sans déphasage).

1.7 Influence du bruit

Nous étudions maintenant la robustesse de la méthode DORT par rapport au bruit. Pour ce faire, nous ajoutons à chaque coefficient de la matrice $\mathbb{F}$ un nombre complexe aléatoire, mais tel que la matrice de champ lointain bruitée $\widetilde{\mathbb{F}}$ vérifie

$$\|\mathbb{F} - \widetilde{\mathbb{F}}\|_2 = \gamma \|\mathbb{F}\|_2,$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne induite sur l'espace des matrices complexes et γ le paramètre régissant l'amplitude du bruit. La matrice de retournement temporel bruitée $\widetilde{\mathbb{T}}$ est ensuite obtenue par la relation

$$\widetilde{\mathbb{T}} = \widetilde{\mathbb{F}}^* \widetilde{\mathbb{F}}.$$

Notons $(\widetilde{\mu}_p)_{p=1,\ldots,N}$ les valeurs propres de $\widetilde{\mathbb{T}}$, classées par ordre décroissant :

$$\widetilde{\mu}_1 \geq \widetilde{\mu}_2 \geq \ldots \geq \widetilde{\mu}_N.$$

Prenons encore une fois la même configuration géométrique. C'est à dire trois petits disques de rayon 0.02, 0.01 et 0.005 localisés respectivement en $(0, 20)$, $(10, -10)$ et $(-10, -20)$. La longueur d'onde λ est égale à 1, le nombre d'angles d'émission/réception est fixé à $N = 30$ avec un déphasage de $\varphi = 0.031$rad. Ces paramètres sont les mêmes que ceux employés lors de la simulation présentée sur la figure 1.17. Nous comparons sur la figure 1.20(a) les valeurs propres des matrices de retournement temporel non bruitée $\mathbb{T}$ et bruitée $\widetilde{\mathbb{T}}$, pour un bruit faible d'amplitude $\gamma = 0.06$. Il apparait que les valeurs propres non significatives ont une amplitude plus élevée qu'en absence de bruit. Toutefois, le spectre de la matrice bruitée $\widetilde{\mathbb{T}}$ comporte toujours bien trois valeurs propres significatives, comme le montre le tableau des rapports entre les valeurs propres suivant

p	1	2	3	4
μ_p/μ_{p+1}	1.55	1.54	1018.74	1.20
$\widetilde{\mu}_p/\widetilde{\mu}_{p+1}$	1.55	1.52	101.82	1.09

Nous comparons maintenant, sur les figures 1.20 et 1.21, les ondes de Herglotz associées aux quatre premiers vecteurs propres des matrices $\mathbb{T}$ et $\widetilde{\mathbb{T}}$. Nous remarquons alors que l'ajout de bruit n'a pas, ou très peu, perturbé les ondes de Herglotz associées aux trois premiers vecteurs propres de $\widetilde{\mathbb{T}}$. En particulier, la focalisation sélective a toujours lieu (voir les figures 1.20(c), 1.21(b) et 1.21(d)). Cependant, le quatrième vecteur propre ne permet plus de focaliser de nouveau une onde sur l'obstacle le plus diffractant. Ceci est du fait que la quatrième valeur propre de $\mathbb{T}$ est très modifiée par l'ajout de bruit, comme nous l'avons expliqué plus haut. Continuons notre étude avec un bruit plus élevé d'amplitude $\gamma = 0.37$. Sur les figures 1.22 et 1.23, nous comparons les valeurs propres des matrices $\mathbb{T}$ et $\widetilde{\mathbb{T}}$ ainsi que les ondes de Herglotz construites à partir des vecteurs propres de $\mathbb{T}$ et de $\widetilde{\mathbb{T}}$. Encore une fois, la matrice $\widetilde{\mathbb{T}}$ possède trois valeurs propres significatives, cependant, les autres valeurs propres voient leur amplitude augmenter. Le saut entre la troisième et la quatrième valeur propre est beaucoup moins important qu'en absence de bruit, comme le montre le tableau suivant

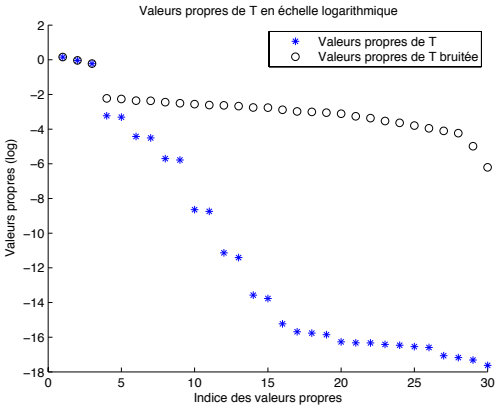
p	1	2	3	4
μ_p/μ_{p+1}	1.55	1.54	1018.74	1.20
$\widetilde{\mu}_p/\widetilde{\mu}_{p+1}$	1.44	1.43	4.05	1.26

Par ailleurs, les ondes de Herglotz basées sur les trois premiers vecteurs propres de $\widetilde{\mathbb{T}}$ sont légèrement perturbées mais sont toujours focalisées sur les obstacles, comme le montrent les figures 1.22(c), 1.23(b) et 1.23(d). Quant au quatrième vecteur propre, il ne permet plus de focaliser de nouveau une onde sur l'obstacle le plus rayonnant, comme nous pouvions nous y attendre. Augmentons maintenant l'amplitude du bruit en prenant une valeur importante $\gamma = 0.59$. La figure 1.24(a) compare les valeurs propres de la matrice $\mathbb{T}$ avec celles de la matrice bruitée $\widetilde{\mathbb{T}}$. Nous constatons alors que la matrice de retournement temporel bruitée $\widetilde{\mathbb{T}}$ possède plus que 3 valeurs propres significatives et, de plus, le rapport entre les valeurs propres $\widetilde{\mu}_p/\widetilde{\mu}_{p+1}$ est presque constant et de l'ordre de 1 :

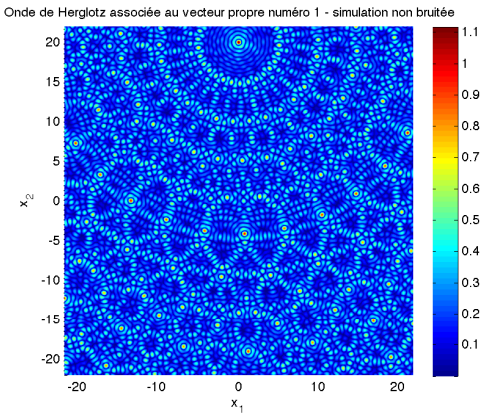
p	1	2	3	4
μ_p/μ_{p+1}	1.55	1.54	1018.74	1.2
$\widetilde{\mu}_p/\widetilde{\mu}_{p+1}$	1.46	1.39	1.99	1.16

Nous étudions tout de même les ondes de Herglotz associées aux vecteurs propres de $\widetilde{\mathbb{T}}$, dont le résultat est présenté sur les figures 1.24 et 1.25. Nous constatons que la focalisation sélective a lieu malgré tout. Toutefois, elle est très dégradée, notamment pour les ondes de Herglotz associées aux deuxième et troisième vecteurs propres (voir figure 1.24(e) et 1.25(b)).

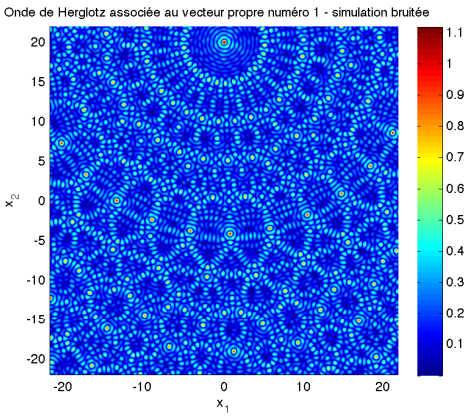
Ainsi, bien que la propriété de focalisation sélective soit sensible à la fois à la position des émetteurs/récepteurs et à la fréquence, elle semble relativement robuste vis à vis du bruit numérique. Dans la dernière simulation numérique, le bruit était de l'ordre de 50% sur la matrice de champ lointain, et pourtant, le MRT était toujours capable de focaliser (au moins) une onde sur le plus gros obstacle.



(a) Valeurs propres de $\mathbb{T}$ et de $\widetilde{\mathbb{T}}$ (échelle logarithmique)

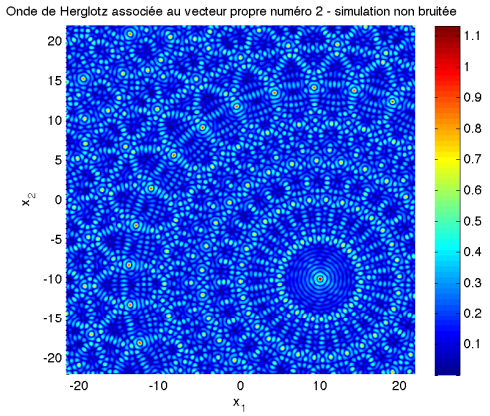


(b) Module de l'onde de Herglotz associée au premier vecteur propre de $\mathbb{T}$

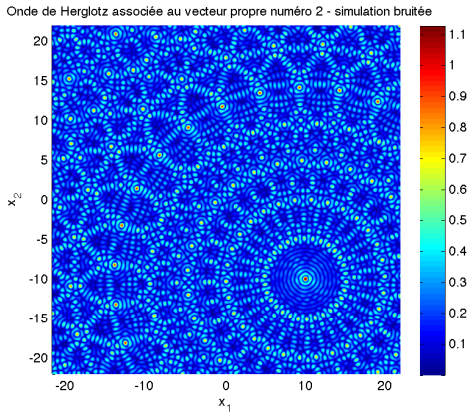


(c) Simulation bruitée - Module de l'onde de Herglotz associée au premier vecteur propre de $\widetilde{\mathbb{T}}$

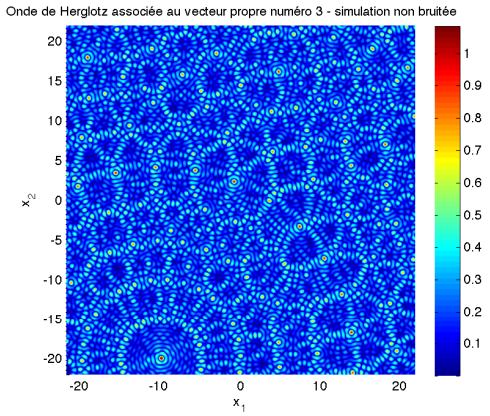
FIGURE 1.20 – Comparaison des propriétés de focalisation sélective entre les matrices de retournement temporel non bruitée $\mathbb{T}$ et bruitée $\widetilde{\mathbb{T}}$ avec une amplitude de bruit γ égale à 0.06. Les paramètres sont identiques à ceux de la figure 1.17 : $\lambda = 1$ et trois petits obstacles de rayon 0.02, 0.01 et 0.005 centrés respectivement en $(0, 20)$, $(10, -10)$ et $(-10, -20)$. Le MRT est fermé et discrétisé par $N = 30$ angles avec un déphasage de $\varphi = 0.031$rad. Sur cette figure, le bruit affecte peu la focalisation sélective mais l'amplitude des valeurs propres non significatives de $\widetilde{\mathbb{T}}$ est plus importante qu'en absence de bruit.



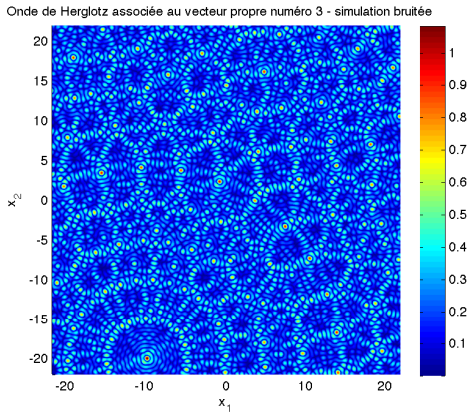
(a) Module de l'onde de Herglotz associée au deuxième vecteur propre de $\mathbb{T}$



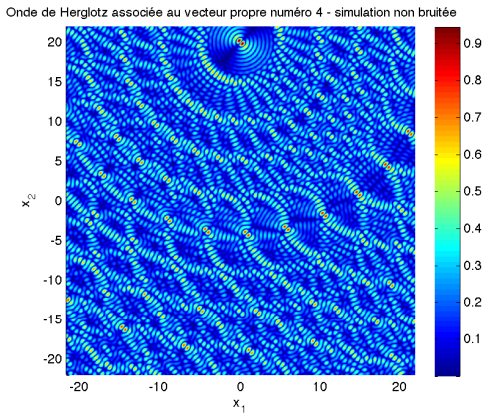
(b) Simulation bruitée - Module de l'onde de Herglotz associée au deuxième vecteur propre de $\widetilde{\mathbb{T}}$



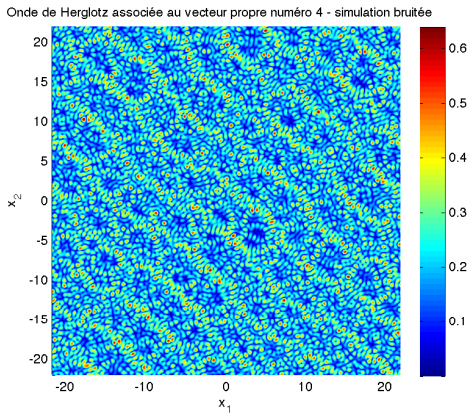
(c) Module de l'onde de Herglotz associée au troisième vecteur propre de $\mathbb{T}$



(d) Simulation bruitée - Module de l'onde de Herglotz associée au troisième vecteur propre de $\widetilde{\mathbb{T}}$

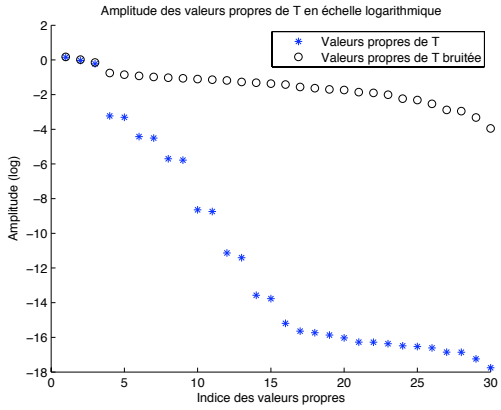


(e) Module de l'onde de Herglotz au quatrième vecteur propre de $\mathbb{T}$

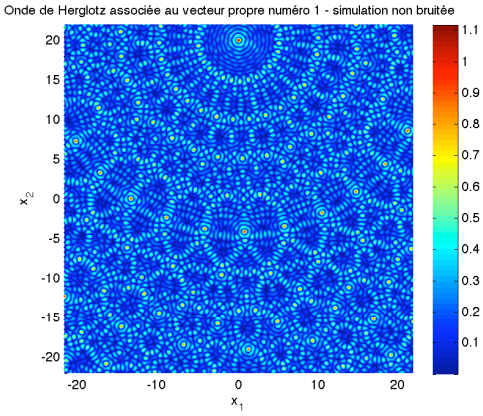


(f) Simulation bruitée - Module de l'onde de Herglotz au quatrième vecteur propre de $\widetilde{\mathbb{T}}$

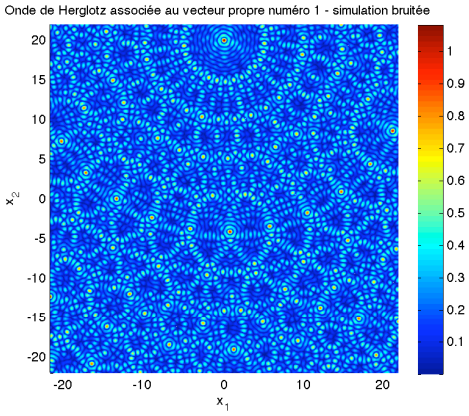
FIGURE 1.21 – Suite de la figure 1.20 : modules des ondes de Herglotz associées aux deuxième, troisième et quatrième vecteurs propres.



(a) Valeurs propres de $\mathbb{T}$ et de $\widetilde{\mathbb{T}}$ (échelle logarithmique)

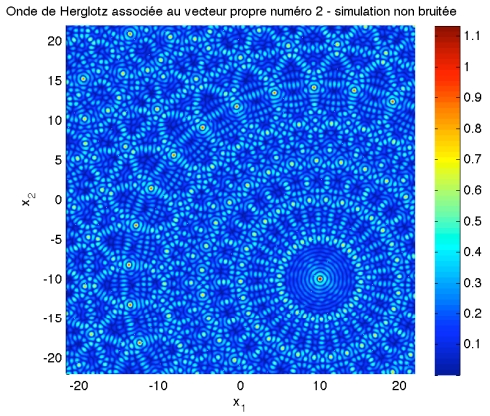


(b) Module de l'onde de Herglotz associée au premier vecteur propre de $\mathbb{T}$

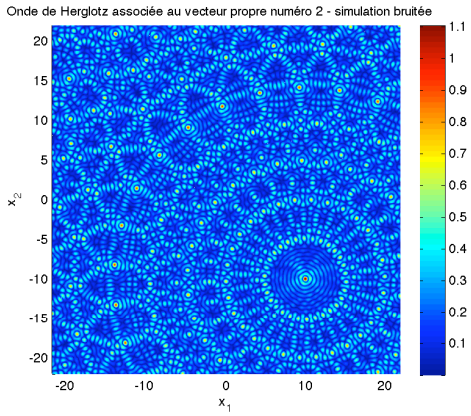


(c) Simulation bruitée - Module de l'onde de Herglotz associée au premier vecteur propre de $\widetilde{\mathbb{T}}$

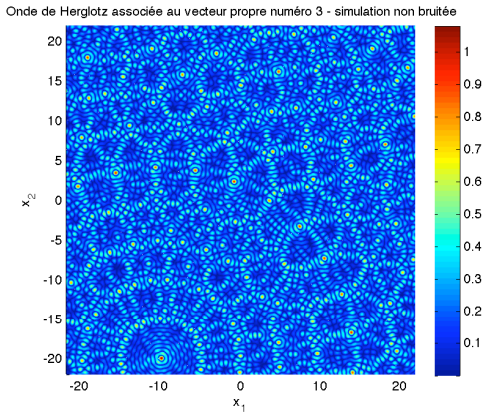
FIGURE 1.22 – Comparaison des propriétés de focalisation sélective entre les matrices de retournement temporel non bruitée $\mathbb{T}$ et bruitée $\widetilde{\mathbb{T}}$. L'amplitude de bruit γ est égale à 0.37, plus importante que dans les figures 1.20 et 1.21. Les paramètres sont identiques à ceux utilisés de la figure 1.20. L'augmentation du bruit n'a pas modifié de manière importante la qualité de la focalisation.



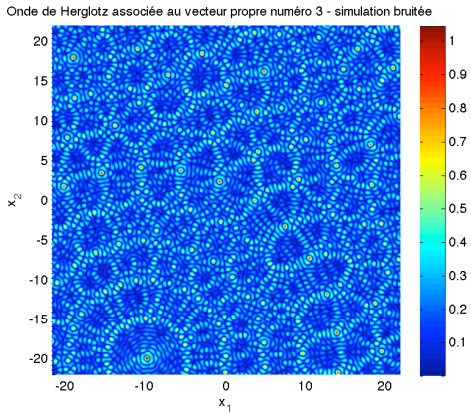
(a) Module de l'onde de Herglotz associée au deuxième vecteur propre de $\mathbb{T}$



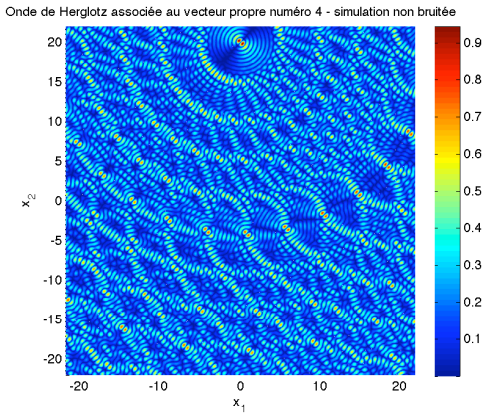
(b) Simulation bruitée - Module de l'onde de Herglotz associée au deuxième vecteur propre de $\widetilde{\mathbb{T}}$



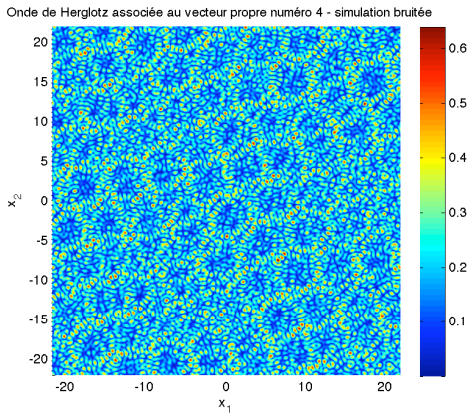
(c) Module de l'onde de Herglotz associée au troisième vecteur propre de $\mathbb{T}$



(d) Simulation bruitée - Module de l'onde de Herglotz associée au troisième vecteur propre de $\widetilde{\mathbb{T}}$

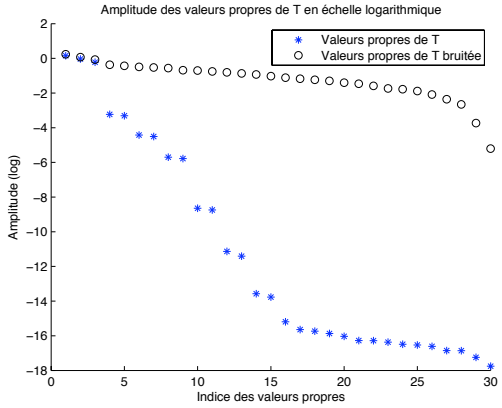


(e) Module de l'onde de Herglotz au quatrième vecteur propre de $\mathbb{T}$

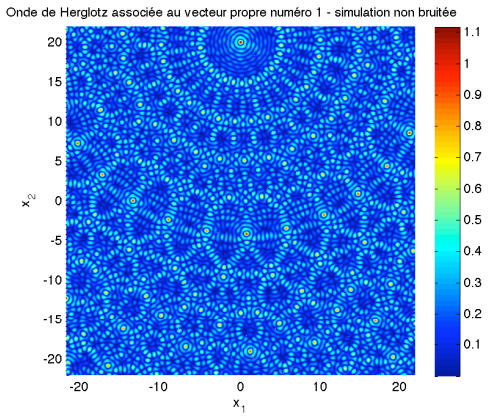


(f) Simulation bruitée - Module de l'onde de Herglotz au quatrième vecteur propre de $\widetilde{\mathbb{T}}$

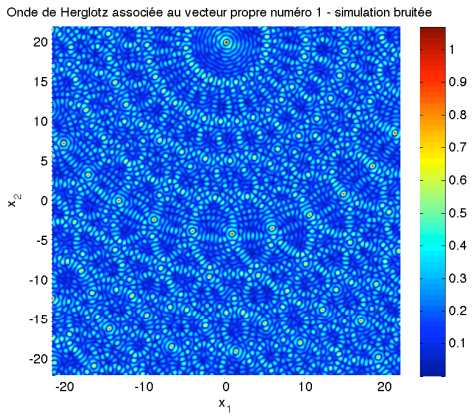
FIGURE 1.23 – Suite de la figure 1.22 : modules des ondes de Herglotz associées aux deuxième, troisième et quatrième vecteurs propres.



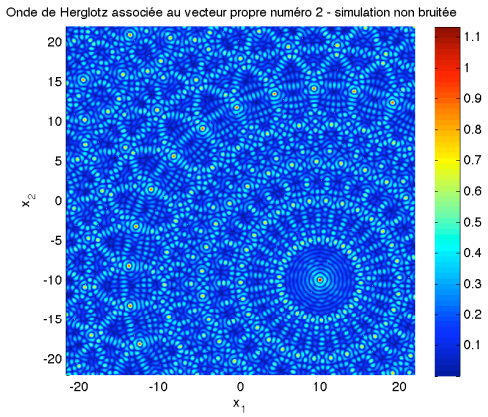
(a) Valeurs propres de $\mathbb{T}$ et de $\widetilde{\mathbb{T}}$ (échelle logarithmique)



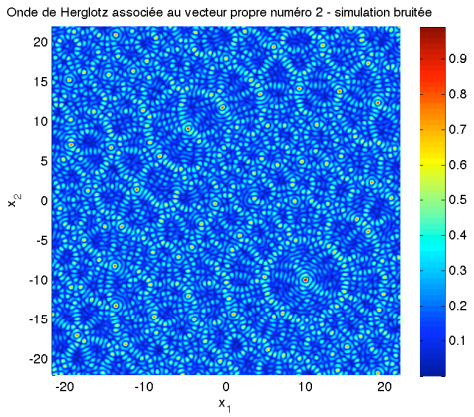
(b) Module de l'onde de Herglotz associée au premier vecteur propre de $\mathbb{T}$



(c) Simulation bruitée - Module de l'onde de Herglotz associée au premier vecteur propre de $\widetilde{\mathbb{T}}$

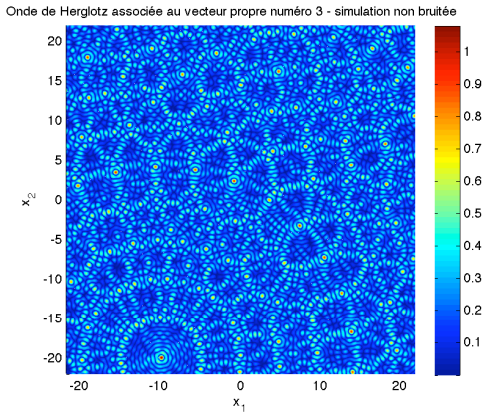


(d) Module de l'onde de Herglotz associée au deuxième vecteur propre de $\mathbb{T}$

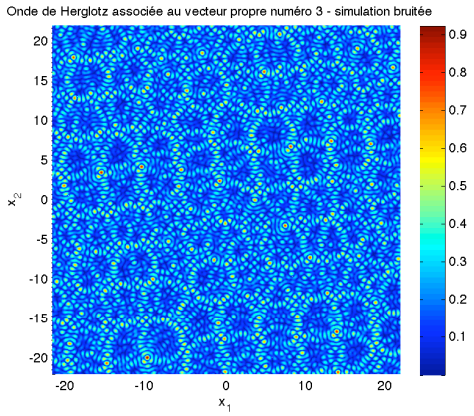


(e) Simulation bruitée - Module de l'onde de Herglotz associée au deuxième vecteur propre de $\widetilde{\mathbb{T}}$

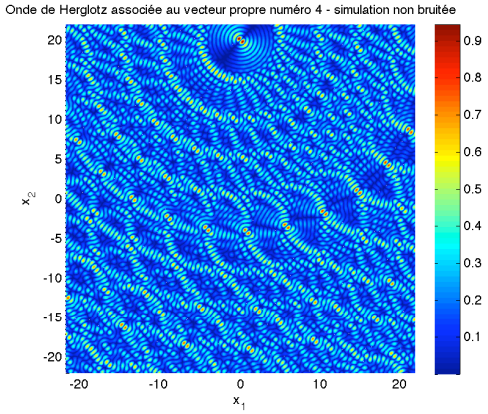
FIGURE 1.24 – Comparaison des propriétés de focalisation sélective entre la matrice de retournement temporel $\mathbb{T}$ et la matrice de retournement temporel bruitée $\widetilde{\mathbb{T}}$. L'amplitude du bruit opéré sur la matrice de champ lointain est plus important que sur les figures 1.22 et 1.23 puisqu'il est égal à $\gamma = 0.59$. Cette fois, les ondes de Herglotz sont très bruitées. La configuration géométrique et fréquentielle ainsi que les paramètres de discrétisation sont les mêmes que ceux utilisés pour la simulation présentée par la figure 1.22.



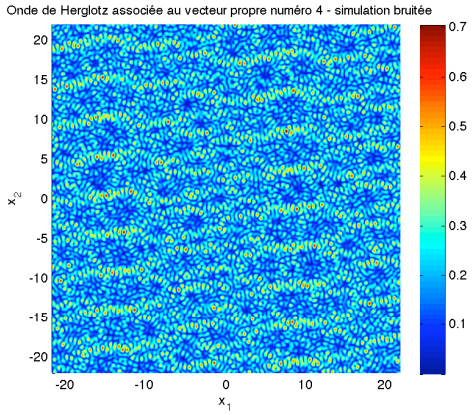
(a) Module de l'onde de Herglotz associée au troisième vecteur propre de $\mathbb{T}$



(b) Simulation bruitée - Module de l'onde de Herglotz associée au troisième vecteur propre de $\widetilde{\mathbb{T}}$



(c) Module de l'onde de Herglotz au quatrième vecteur propre de $\mathbb{T}$



(d) Simulation bruitée - Module de l'onde de Herglotz au quatrième vecteur propre de $\widetilde{\mathbb{T}}$

FIGURE 1.25 – Suite de la figure 1.24 : modules des ondes de Herglotz associées aux troisième et quatrième vecteurs propres.

1.8 Miroir ouvert

Pour cette dernière simulation en dimension deux, nous prenons un MRT ouvert, dans le sens où il ne mesure le champ lointain (resp. émet des ondes planes) uniquement dans la plage d'angles $[-\pi/4, \pi/4]$ (resp. $[3\pi/4, 5\pi/4]$). Rappelons que le déphasage de π apparaissant entre les angles d'émission et de réception provient du fait que le transducteur du MRT émettant des ondes planes dans la direction $\boldsymbol{\alpha}$ mesure le champ lointain dans la direction opposée $-\boldsymbol{\alpha}$. Nous discrétisons uniformément le segment $[-\pi/4, \pi/4]$ avec un pas $h = \frac{\pi/2}{N-1}$. Les N angles d'émission $(\alpha_i)_{i=1,\dots,N}$ et de réception $(\beta_j)_{j=1,\dots,N}$ discrétisés sont alors donnés par

$$\begin{aligned} \alpha_i &= -\frac{\pi}{4} + (i-1)h, \qquad \text{pour } i = 1, \dots, N \\ \beta_j &= -\frac{\pi}{4} + (j-1)h + \pi, \quad \text{pour } j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Nous proposons de placer deux obstacles circulaires comme illustré par la figure 1.26. Le plus petit des disques est de rayon 0.005 et est situé sur l'origine en $(0, 0)$. L'autre obstacle est de rayon 0.02 et positionné sur l'axe des abscisses en $(d, 0)$, où $d > 0$ est un paramètre que nous ferons varier. Nous verrons que si cette distance d est trop petite, alors le MRT ne distingue qu'un seul obstacle.

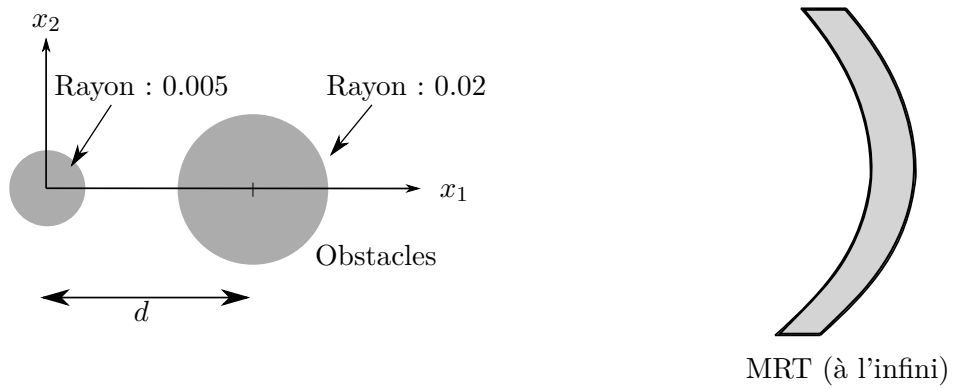


FIGURE 1.26 – Représentation de la simulation avec un MRT ouvert placé à l'infini

Afin de se rapprocher d'un cas réel, prenons uniquement $N = 15$ angles de discrétisation. Nous fixons de plus $\lambda = 1 (= 50\delta)$. Commençons avec une distance $d = 1$ égale à la longueur d'onde λ. Nous avons alors, avec les notations précédentes,

$$\delta (= 0.02) \ll \lambda = d (= 1).$$

Comme pour un MRT fermé, nous calculons les valeurs propres de la matrice $\mathbb{T}$ ainsi que les ondes de Herglotz construites à l'aide des deux premiers vecteurs propres de $\mathbb{T}$. Le résultat est présenté sur la figure 1.27. Sur la figure 1.27(a), nous constatons que la matrice de retournement temporel $\mathbb{T}$ ne possède qu'une seule valeur propre significative. Ceci est illustré par le rapport entre la première et la deuxième valeur propre

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = 30.$$

L'écart entre μ_1 et μ_2 est ainsi important. Le MRT ne semble donc détecter qu'un seul obstacle. Ce résultat est confirmé par les tests de focalisation sélective. En effet, les figures

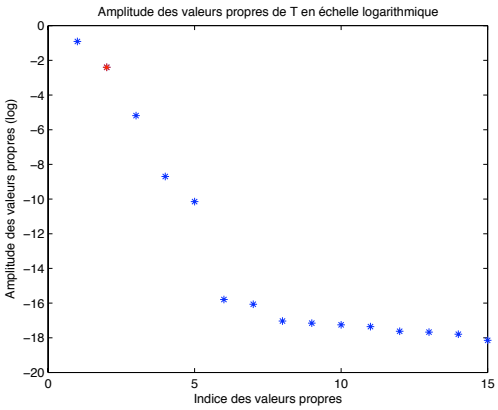
1.27(b) et 1.27(c) montrent que seule l'onde de Herglotz associée au premier vecteur propre est focalisée sur le plus gros obstacle. L'onde de Herglotz construite avec le deuxième vecteur propre n'est pas focalisée. Ceci est *a priori* dû à l'ouverture du miroir à retournement temporel. Pour le vérifier, nous effectuons une simulation avec les mêmes paramètres mais avec un MRT fermé (toujours avec $N = 15$). Nous obtenons alors la figure 1.28, qui montre que, d'une part la matrice $\mathbb{T}$ a 2 valeurs propres significatives, et d'autre part, que les ondes de Herglotz construites à l'aide des vecteurs propres de $\mathbb{T}$ sont focalisées sélectivement sur les deux obstacles. Déplaçons maintenant le plus gros obstacle en prenant $d = 5$ et reprenons un miroir à retournement temporel ouvert, comme précédemment. Nous avons alors

$$\delta(= 0.02) \ll \lambda(= 1) \leq d(= 5).$$

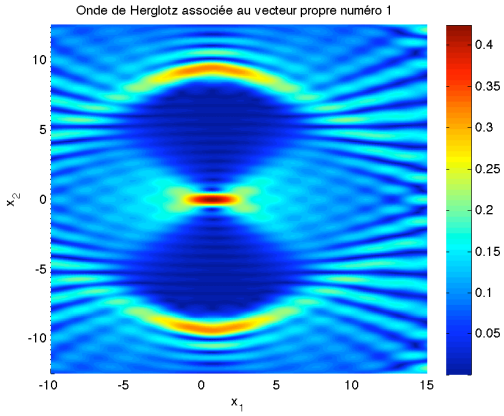
Les valeurs propres de $\mathbb{T}$ ainsi que les ondes de Herglotz émises par le MRT pour cette configuration sont présentées sur la figure 1.29. De plus, le tableau ci-dessous donne le rapport entre les quatre plus grandes valeurs propres de $\mathbb{T}$:

μ_1/μ_2	μ_2/μ_3	μ_3/μ_4
2	5945	272

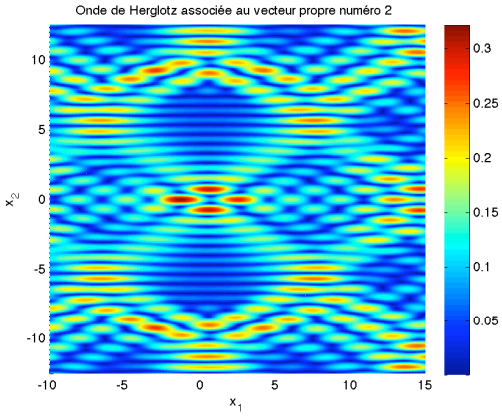
Ce tableau, ainsi que la figure 1.29(a), montrent clairement que $\mathbb{T}$ possède bien deux valeurs propres significatives. D'autre part, les ondes de Herglotz construites à l'aide des premier et deuxième vecteurs propres de $\mathbb{T}$ sont focalisées sélectivement sur les deux obstacles, comme le montrent les figures 1.29(b) et 1.29(c). Ainsi, malgré le caractère ouvert du miroir à retournement temporel, la méthode DORT donne les résultats attendus. Il est alors possible à la fois de déterminer le nombre d'obstacles présents et de constuire des ondes qui sont focalisées sélectivement sur les obstacles.



(a) Valeurs propres de $\mathbb{T}$ (échelle logarithmique)

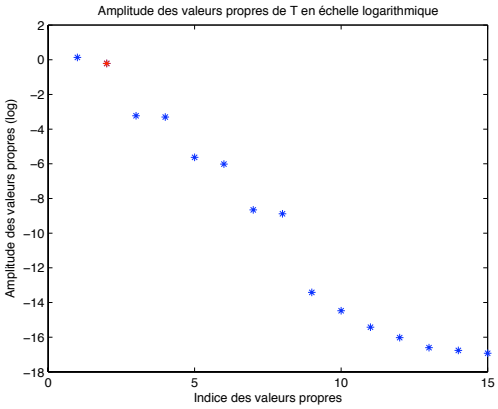


(b) Module de l'onde de Herglotz associée au premier vecteur propre de $\mathbb{T}$

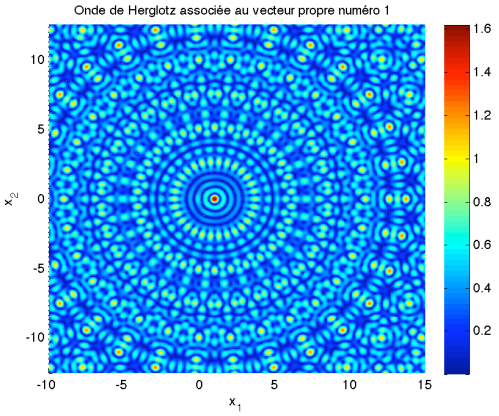


(c) Module de l'onde de Herglotz associée au deuxième vecteur propre de $\mathbb{T}$

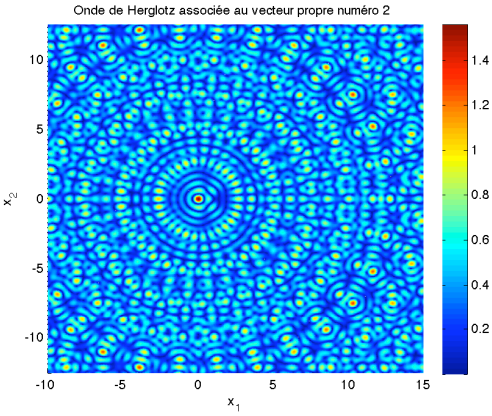
FIGURE 1.27 – Focalisation sélective uniquement sur le plus gros obstacle avec un miroir à retournement temporel ouvert mesurant le champ lointain (resp. émettant des ondes planes) dans la plage d'angles $[-\pi/4, \pi/4]$ (resp. $[3\pi/4, 5\pi/4]$). Deux obstacles sont disposés, le plus petit en $(0, 0)$ pour un rayon de 0.005 et le plus gros en $(1, 0)$, de rayon 0.02. La longueur d'onde λ est fixée à 1 et le nombre d'angles de discrétisation N à 15.



(a) Valeurs propres de $\mathbb{T}$ (échelle logarithmique)

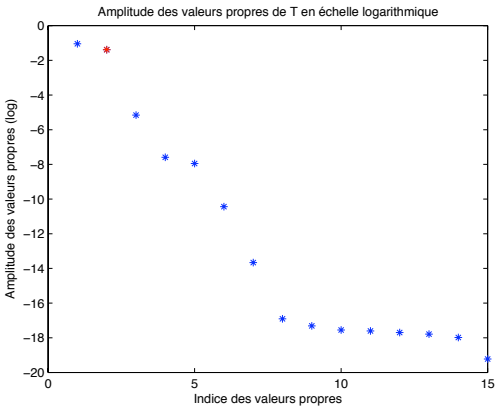


(b) Module de l'onde de Herglotz associée au premier vecteur propre de $\mathbb{T}$

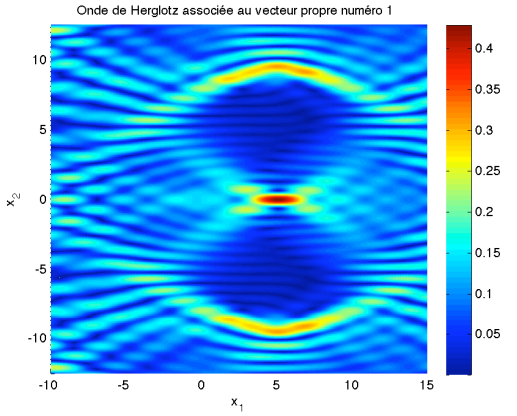


(c) Module de l'onde de Herglotz associée au deuxième vecteur propre de $\mathbb{T}$

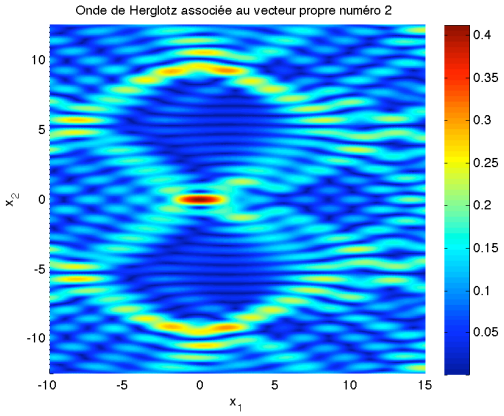
FIGURE 1.28 – Configuration géométrique identique à la figure 1.27, mais avec l'utilisation d'un MRT fermé ($N = 15$). La focalisation sélective est alors possible.



(a) Valeurs propres de $\mathbb{T}$ (échelle logarithmique)



(b) Module de l'onde de Herglotz associée au premier vecteur propre de $\mathbb{T}$



(c) Module de l'onde de Herglotz associée au deuxième vecteur propre de $\mathbb{T}$

FIGURE 1.29 – Focalisation sélective sur les deux obstacles avec un miroir à retournement temporel ouvert. Le MRT mesure le champ lointain (resp. émet des ondes planes) dans la plage d'angles $[-\pi/4, \pi/4]$ (resp. $[3\pi/4, 5\pi/4]$). Les deux petits obstacles circulaires sont disposés en $(0, 0)$ (de rayon 0.005) et en $(5, 0)$ (de rayon 0.02). La longueur d'onde λ est fixée à 1 et le nombre d'angles de discrétisation N à 15.

1.9 Conclusion

Après un premier paragraphe résumant les principaux résultats obtenus dans [72] par C. Hazard et K. Ramdani sur la méthode DORT en acoustique champ lointain, nous avons proposé une étude numérique de cette méthode. Nous avons tout d'abord étudié le cas d'un miroir à retournement temporel "idéal", c'est-à-dire maillé finement et entourant complètement les obstacles. Pour un tel MRT, nous avons constaté numériquement que, lorsque la taille caractéristique δ des objets est très petite devant la longueur d'onde λ, elle-même supposée négligeable devant la distance d entre deux objets, alors la matrice de retournement temporel $\mathbb{T}$ possède autant de valeurs propres significatives que d'obstacles contenus dans le milieu. De plus, les vecteurs propres de $\mathbb{T}$ permettent de focaliser sélectivement des ondes de Herglotz sur les diffuseurs. En pratique dans nos simulations numériques, nous avons constaté ces résultats typiquement pour $\lambda = 10\delta$ et $\lambda = d/10$. Lorsque la longueur d'onde est de l'ordre de la taille des objets, alors le nombre de valeurs propres significatives devient important, tandis que si λ est de l'ordre de la distance entre deux diffuseurs, alors la résolution du MRT n'est pas suffisamment précise pour détecter tous les obstacles.

Afin de se rapprocher de configurations plus réalistes, nous avons ensuite considéré un MRT ne comportant que $N = 30$ émetteurs/récepteurs. Nous avons alors constaté les résultats suivants.

- Le nombre de valeurs propres significatives de la matrice de retournement temporel $\mathbb{T}$...
  - → est peu influencé par le nombre d'émetteurs/récepteurs et par leur placement
  - → est peu influencé par des petites variations de la fréquence
  - → est très perturbé par le bruit numérique
- La propriété de focalisation sélective sur les obstacles...
  - → dépend du nombre d'émetteurs/récepteurs ainsi que de leur placement
  - → dépend de la fréquence (même pour de petites variations)
  - → est peu sensible au bruit numérique

Par ailleurs, nous avons testé l'utilisation d'une bande de fréquences (signal polychromatique) afin d'améliorer la qualité de la focalisation sélective. Toutefois, la normalisation "cohérente" (au sens où elle correspond à un suivi continu des fonctions propres vis à vis de la fréquence) des vecteurs propres de la matrice de retournement temporel est alors délicate. Pour lever cette difficulté, nous avons alors considéré uniquement l'énergie de l'onde de Herglotz. Nous avons conclu ce chapitre par un exemple de miroir à retournement temporel ouvert, dans le sens où il n'entoure pas complètement les objets. Cet exemple a permis de valider numériquement les résultats obtenus dans [72] concernant un MRT ouvert.

Dans ce mémoire, nous nous sommes restreint à une condition aux limites de Dirichlet sur le bord des obstacles. D'autres conditions aux limites mériteraient d'être étudiées comme une condition de Neumann (obstacles durs) ou des objets pénétrables. Nous n'avons pas non plus étudié la qualité de la focalisation des ondes de Herglotz, qui pourrait sans doute être améliorée en considérant par exemple un milieu faiblement hétérogène, comme nous le ferons dans le chapitre 3 pour la reconstruction d'une source acoustique ponctuelle.

Une étude de la méthode DORT avec un miroir à retournement temporel de taille finie et à distance finie des obstacles est actuellement en cours. Nous pensons que la démonstration, proposée en champ lointain dans [72], doit pouvoir s'adapter au champ proche. Toutefois, par manque de temps, ces résultats ne figurent pas dans ce mémoire.

Chapitre 2

La méthode DORT en électromagnétisme champ lointain

Sommaire

2.1 Résumé des résultats obtenus **63**
2.2 Introduction **65**
2.3 A far field model for electromagnetic time-reversal **66**
2.4 Scattering by perfectly conducting small scatterers **69**
2.4.1 The case of one scatterer 69
2.4.2 Multiply connected scatterer 71
2.5 Selective focusing using time-reversal **75**
2.6 Conclusion **79**

2.1 Résumé des résultats obtenus

Dans ce chapitre, nous étendons au cas de l'électromagnétisme les résultats théoriques concernant la méthode DORT en acoustique présentés dans le chapitre 1. Ce travail, effectué avec X. Antoine, K. Ramdani et B. Pinçon, a donné lieu à un article publié dans SIAM Journal on Applied Mathematics. Nous avons choisi d'intégrer directement l'article dans le mémoire sans le traduire, en donnant ci-dessous un rapide résumé des résultats obtenus.

Nous nous plaçons en régime harmonique et nous considérons des petits obstacles parfaitement conducteurs disposés dans un milieu homogène non dissipatif. Nous plaçons "à l'infini" un MRT non intrusif et fermé (i.e. entourant complètement les objets). Nous supposons que le MRT émet une superposition d'ondes planes électromagnétiques (ondes de Herglotz) et qu'il mesure le champ lointain associé.

Comme pour l'acoustique, nous montrons que l'opérateur de retournement temporel est défini par $\mathbf{T} = \mathbf{F}^*\mathbf{F} = \mathbf{F}\mathbf{F}^*$ où $\mathbf{F}$ désigne l'opérateur de champ lointain. En particulier, l'opérateur $\mathbf{T}$ est hermitien et positif, et l'étude du spectre de $\mathbf{T}$ peut se ramener à celle du spectre de $\mathbf{F}$.

Concernant les résultats de focalisation sélective, ceux-ci sont sensiblement les mêmes que dans le cadre de l'acoustique. La différence principale réside dans le fait que l'opérateur de retournement temporel possède, dans le régime de petits obstacles découplés, au plus 6 valeurs propres significatives par objet et non une seule. Ceci est dû au caractère vectoriel des

ondes électriques (trois valeurs propres) et magnétiques (trois valeurs propres). La preuve de ces résultats repose essentiellement sur l'analyse asymptotique du problème de diffraction multiple par des conducteurs parfaits de petite taille. Nous montrons que celle-ci peut être obtenue à partir des résultats de l'analyse asymptotique basse fréquence. Nous montrons alors que si la taille caractéristique δ des obstacles est suffisamment petite par rapport à la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ et par rapport à la distance minimale d entre les obstacles, alors l'opérateur de champ lointain limite $\mathbf{F^0}$ possède au plus $6M$ valeurs propres non nulles (M étant le nombre d'obstacles). Si de plus $\lambda \ll d$ et si les tenseurs de polarisation des obstacles sont diagonaux (hypothèse satisfaite pour des obstacles à symétrie axiale), alors les fonctions propres de $\mathbf{T^0} = \mathbf{F^{0*}}\mathbf{F^0}$ permettent de focaliser sélectivement des ondes de Herglotz sur les obstacles. Terminons en soulignant que le cas du miroir à retournement temporel ouvert, c'est-à-dire n'entourant pas complètement les obstacles, reste un problème ouvert. En effet, dans ce cas, l'opérateur de champ lointain $\mathbf{F}$ perd le caractère normal et l'étude du spectre de $\mathbf{T}$ ne peut plus se ramener à celle de $\mathbf{F}$.

Far field modelling of electromagnetic time-reversal and application to selective focusing on small scatterers

X. ANTOINE[1 2] B. PINÇON[1 2] K. RAMDANI[2 1] B. THIERRY[1 2]

Abstract. A time harmonic far field model for closed electromagnetic time reversal mirrors is proposed. Then, a limit model corresponding to small perfectly conducting scatterers is derived. This asymptotic model is used to prove the selective focusing properties of the time reversal operator. In particular, a mathematical justification of the DORT method (Decomposition of the Time Reversal Operator method) is given for axially symmetric scatterers.

Key words. electromagnetic scattering, time reversal, far field, small obstacles

AMS. 35B40, 35P25, 45A05, 74J20, 78M35

2.2 Introduction

In the last decade, acoustic time reversal has definitely demonstrated its efficiency in target characterization by wave focusing in complex media (see the review papers [58, 61]). In particular, it has been shown that selective focusing can be achieved using the eigenvectors (resp. eigenfunctions) of the so-called time reversal matrix (resp. operator). Known as the DORT method (French acronym for Diagonalization of the Time Reversal Operator, see [60, 96, 89, 95, 62, 88, 66]), this technique involves three steps. First, an incident wave is emitted in the medium containing the scatterers by the time reversal mirror (TRM). The scattered field is then measured by the mirror and time-reversed (or phase-conjugated in the time harmonic case). Finally, the obtained signal is then re-emitted in the medium. By definition, the time reversal operator $\mathbf{T}$ is the operator describing two successive cycles Emission/Reception/Time-Reversal. If the propagation medium is non dissipative, the operator $\mathbf{T}$ is hermitian, since $\mathbf{T} = \mathbf{F}^*\mathbf{F}$, where $\mathbf{F}$ denotes the far field operator. The DORT method can thus be seen as a singular value decomposition of $\mathbf{F}$. Moreover, in a particular range of frequencies (for which the scatterers can be considered as point-like scatterers), $\mathbf{T}$ has as many significant eigenvalues as there are scatterers in the medium, and the corresponding eigenfunctions generate incident waves that selectively focus on the scatterers. From the mathematical point of view, a detailed analysis of this problem has been proposed for the acoustic scattering problem by small scatterers in the free space in [72] and in a two-dimensional straight waveguide in [92]. Let us emphasize that time reversal has also been intensively studied in the context of random media (see [64] and the references therein).

Recently, electromagnetic focusing using time reversal has been demonstrated experimentally [81] and used for imaging applications [83]. One of the first works dealing with mathematical and numerical aspects of electromagnetic time reversal is the paper [102]. The authors analyze therein the DORT method in the case of a homogeneous medium containing perfectly conducting or dielectric objects of particular shapes (circular rods and spheres). Their method is based on a low frequency approximation of a multipole expansion of the

1. Institut Elie Cartan Nancy (Nancy-Université, CNRS, INRIA), Université Henri Poincaré, BP 239, 54506, Vandœuvre-lès-Nancy, France
2. INRIA (Corida Team), 615 rue du Jardin Botanique, 54600 Villers-lès-Nancy, France

scattered field (*i.e.* a Fourier-Bessel series involving Hankel functions for circular rods and vector spherical functions for spheres). In [40], the authors proposed an iterative process based on time reversal to determine optimal electromagnetic measurements (*i.e.* to determine the incident waves maximizing the scattered field). More recently, the DORT method has been used for targets localization, especially in the context of imaging [35, 36, 4]. The analysis followed in these works is based on the singular value decomposition of the multistatic response matrix, which corresponds to the case where the mirror is described by a discrete array of transducers (emitters and receivers). In this paper, we propose a time harmonic far field model of electromagnetic time reversal in the case of a continuous distribution of transducers. Only *closed mirrors* (i.e. completely surrounding the scatterers) are considered in this work and the limited aperture case is not studied. Except this difference, the present work can be seen as the extension of the results obtained for acoustic time reversal in the free space [72] and in straight waveguides [92]. We pay a very careful attention to the derivation of the limit scattering model for small perfectly conducting scatterers. The functional framework used hereafter for the far field and the time reversal operators is the one commonly used in inverse electromagnetic scattering theory [44, 33, 75].

We start the paper with a short description in Section 2.3 of the mathematical model of time reversal. In particular, we define the incident field emitted by the TRM (electromagnetic Herglotz waves), the measured fields (the far field pattern) and the time reversal operator. In Section 2.4, we restrict our analysis to the case of small scatterers (of typical size δ). We show that the small scatterers asymptotics can be deduced from the classical low frequency scattering asymptotics (the Rayleigh approximation) involving the polarization tensors of the scatterers. More precisely, our analysis corresponds to the case where $k\delta$ and δ/d tend simultaneously to 0, where k denotes the wavenumber and d the minimum separation distance between the scatterers. Finally, we study in Section 2.5 the spectral focusing properties of the eigenfunctions of the limit far field operator obtained in Section 2.4. We show that each small scatterer gives rise to at most 6 distinct eigenvalues (recovering the results obtained in [36, 4] for the case of a discrete TRM). Furthermore, if the polarizability tensors of the scatterers are diagonal (e.g. for axially symmetric scatterers) and under the additional assumption that $kd \to \infty$, we prove that each associated eigenfunction generates an incident wave that selectively focuses on the corresponding scatterer.

2.3 A far field model for electromagnetic time-reversal

In order to obtain an expression of the time reversal operator, we begin this paper by recalling the far field model of electromagnetic scattering. Consider the scattering problem of an incident electromagnetic plane wave by a perfectly conducting bounded obstacle contained in an homogeneous medium. Without loss of generality, we assume that the electric permittivity ε and the magnetic permeability μ are both equal to 1. Let $\mathcal{O}$ be a bounded open subset of $\mathbb{R}^3$ with smooth boundary Γ, and outward unit normal $\boldsymbol{\nu}$ and let $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{O}}$ be the propagation domain. Let $L^2_t(S^2)$ be the space of tangential vector fields of the unit sphere S^2 :

$$L^2_t(S^2) = \left\{ \mathbf{f} \in \left(L^2(S^2) \right)^3 \mid \forall \boldsymbol{\alpha} \in S^2,\, \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0 \right\}$$

and consider the incident plane wave $(\mathbf{E}_I^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}}, \mathbf{H}_I^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}})$ of direction $\boldsymbol{\alpha} \in S^2$ and electric polarization $\mathbf{f} \in L_t^2(S^2)$:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_I^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha})\, \mathrm{e}^{ik\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}}, \\ \mathbf{H}_I^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}))\, \mathrm{e}^{ik\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}}, \end{cases} \tag{2.1}$$

Throughout the paper, the time dependence is assumed to be of the form $e^{-i\omega t}$ and will always be implicit. Introducing the wave number $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \omega$, the scattered field $(\mathbf{E}^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}}, \mathbf{H}^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}})$ solves the following exterior boundary value problem :

$$\begin{cases} \mathbf{curl}\, \mathbf{E}^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}} = ik\, \mathbf{H}^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}} & (\Omega) \\ \mathbf{curl}\, \mathbf{H}^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}} = -ik\, \mathbf{E}^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}} & (\Omega) \\ \mathbf{E}^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}} \times \boldsymbol{\nu} = -\mathbf{E}_I^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}} \times \boldsymbol{\nu} & (\Gamma) \\ \mathbf{H}^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}} \cdot \boldsymbol{\nu} = -\mathbf{H}_I^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}} \cdot \boldsymbol{\nu} & (\Gamma) \\ \mathbf{E}^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}}, \mathbf{H}^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}} \text{ are outgoing.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Classically, the outgoing behavior of the scattered field is imposed by one of the two Silver-Müller radiation conditions :

$$\begin{cases} \lim\limits_{|\mathbf{x}|\to\infty} \left(\mathbf{E}^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \times \mathbf{x} + |\mathbf{x}|\, \mathbf{H}^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}}(\mathbf{x})\right) = 0 \\ \lim\limits_{|\mathbf{x}|\to\infty} \left(\mathbf{H}^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \times \mathbf{x} - |\mathbf{x}|\, \mathbf{E}^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}}(\mathbf{x})\right) = 0 \end{cases}$$

uniformly in every direction $\mathbf{x}/|\mathbf{x}| \in S^2$, where $|\,.\,|$ is the euclidian norm in $\mathbb{R}^3$.

We are now in position to introduce the far field pattern of the electromagnetic field $(\mathbf{E}^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}}, \mathbf{H}^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}})$. Its main properties are collected in the next proposition (see [44] for the proofs).

Property 2.1. *The scattered field* $(\mathbf{E}^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}}, \mathbf{H}^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}})$ *has the asymptotic behavior in the direction* $\boldsymbol{\beta} \in S^2$ *as* $|\mathbf{x}| \to \infty$ *:*

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}}(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{x}|) = \dfrac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{ik|\mathbf{x}|} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha})) + O\left(\dfrac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right), \\ \mathbf{H}^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}}(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{x}|) = \dfrac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{ik|\mathbf{x}|} \left(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}))\right) + O\left(\dfrac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right). \end{cases}$$

The scattering amplitude $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}))$ *is given for all* $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in S^2$ *and all* $\mathbf{f} \in L_t^2(S^2)$ *by the formula*

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha})) = -\frac{k^2}{4\pi} \boldsymbol{\beta} \times \int_\Gamma \left[\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{H}_T^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}}(\mathbf{y})\right] \times \boldsymbol{\beta}\, e^{-ik\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{y}} \mathrm{d}\mathbf{y} \tag{2.3}$$

where $\mathbf{H}_T^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}} = \mathbf{H}_I^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}} + \mathbf{H}^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}}$ *is the total magnetic field. Moreover,* $\boldsymbol{A}(\cdot,\cdot;\cdot)$ *satisfies the following reciprocity relation*

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha})) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{A}(-\boldsymbol{\beta}, -\boldsymbol{\alpha}; \mathbf{g}(\boldsymbol{\beta})) \tag{2.4}$$

for all $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in S^2$ *and all* $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L_t^2(S^2)$.

Assume now that the TRM emits a Herglotz wave, *i.e.* a superposition of plane waves of the form (2.1). More precisely, denote by $(\mathbf{E}_I^{\mathbf{f}}, \mathbf{H}_I^{\mathbf{f}})$ the incident Herglotz wave of polarization $\mathbf{f} \in L_t^2(S^2)$, defined by

$$\begin{cases} \mathbf{E}_I^{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \displaystyle\int_{S^2} \mathbf{E}_I^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} = \int_{S^2} \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) e^{ik\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{H}_I^{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \displaystyle\int_{S^2} \mathbf{H}_I^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} = \int_{S^2} (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{f})(\boldsymbol{\alpha}) e^{ik\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} \end{cases} \tag{2.5}$$

By linearity, Proposition 2.1 yields the following result.

Corollary 2.2. *When illuminated by the Herglotz wave* $(\mathbf{E}_I^{\mathbf{f}}, \mathbf{H}_I^{\mathbf{f}})$*, the scattering obstacle generates the diffracted field* $(\mathbf{E}^{\mathbf{f}}, \mathbf{H}^{\mathbf{f}})$ *which admits in the direction* $\boldsymbol{\beta} \in S^2$ *the far field asymptotics*

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{x}|) = \dfrac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{ik|\mathbf{x}|}\mathbf{F}\mathbf{f}(\boldsymbol{\beta}) + O\left(\dfrac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right), \\ \mathbf{H}^{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{x}|) = \dfrac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{ik|\mathbf{x}|}\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{F}\mathbf{f}(\boldsymbol{\beta}) + O\left(\dfrac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right). \end{cases}$$

where $\mathbf{F}\mathbf{f}(\boldsymbol{\beta})$ *is given by*

$$\mathbf{F}\mathbf{f}(\boldsymbol{\beta}) = \int_{S^2} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}))\, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}. \tag{2.6}$$

Using the expression (2.3) of the scattering amplitude, one can show that the far field operator $\mathbf{F} : \mathbf{f} \longmapsto \mathbf{F}\mathbf{f}$ defined by (2.6) is continuous from $L_t^2(S^2)$ onto itself. Moreover, using the reciprocity relation (2.4), one can show the following result (see [43] for the proof).

Property 2.3. *The far field operator* $\mathbf{F} : L_t^2(S^2) \longrightarrow L_t^2(S^2)$ *defined by (2.6) is a compact and normal operator. As in the acoustic case, its adjoint is the operator* $\mathbf{F}^* : L_t^2(S^2) \to L_t^2(S^2)$ *defined by*

$$\forall \mathbf{f} \in L_t^2(S^2), \qquad \mathbf{F}^*\mathbf{f} = \overline{\mathbf{R}\mathbf{F}\overline{\mathbf{R}\mathbf{f}}} \tag{2.7}$$

where $\mathbf{R}$ *is the symmetry operator defined by* $\mathbf{R}\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{f}(-\boldsymbol{\alpha})$ *for all* $\boldsymbol{\alpha} \in S^2$ *and* $\mathbf{f} \in L_t^2(S^2)$*.*

We are now able to define the time reversal operator $\mathbf{T}$. During the time-reversal process, the TRM first emits an incident electromagnetic Herglotz wave $(\mathbf{E}_I^{\mathbf{f}}, \mathbf{H}_I^{\mathbf{f}})$ of polarization $\mathbf{f}$. Then the scattering obstacle generates a scattered field $(\mathbf{E}^{\mathbf{f}}, \mathbf{H}^{\mathbf{f}})$. The TRM measures and conjugates the corresponding electric far field $\mathbf{F}\mathbf{f}$. The resulting field is then used as a polarization $\mathbf{g}$ of a new incident Herglotz wave. Therefore, we have

$$\mathbf{g} = \overline{\mathbf{R}\mathbf{F}\mathbf{f}}, \tag{2.8}$$

where the presence of the symmetry operator is due to the fact that the far field measured in a direction $\boldsymbol{\beta}$ is re-emitted in the opposite direction $-\boldsymbol{\beta}$. The time reversal operator $\mathbf{T}$ is then obtained by iterating this cycle twice :

$$\mathbf{T}\mathbf{f} = \overline{\mathbf{R}\mathbf{F}\mathbf{g}} = \overline{\mathbf{R}\mathbf{F}\overline{\mathbf{R}\mathbf{F}\mathbf{f}}}. \tag{2.9}$$

Thanks to Proposition 2.3, we have shown the following result.

Property 2.4. *The time reversal operator* $\mathbf{T}$ *is the compact, selfadjoint and positive operator given by*

$$\begin{array}{rlcl} \mathbf{T}: & L_t^2(S^2) & \longrightarrow & L_t^2(S^2) \\ & \mathbf{f} & \longmapsto & \mathbf{T}\mathbf{f} = \mathbf{F}\mathbf{F}^*\mathbf{f} = \mathbf{F}^*\mathbf{F}\mathbf{f}. \end{array}$$

The nonzero eigenvalues of $\mathbf{T}$ *are exactly the positive numbers*

$$|\lambda_1|^2 \geq |\lambda_2|^2 \geq \cdots > 0,$$

where the sequence $(\lambda_p)_{p\geq 1}$ *denotes the nonzero complex eigenvalues of the normal compact far field operator* $\mathbf{F}$*. Moreover, the corresponding eigenfunctions* $(\mathbf{f}_p)_{p\geq 1}$ *of* $\mathbf{F}$ *are exactly the eigenfunctions of* $\mathbf{T}$*.*

2.4 Scattering by perfectly conducting small scatterers

In this Section, we show that the asymptotics of the electromagnetic scattering problem by small scatterers is closely connected to the classical low frequency scattering (the Rayleigh approximation [76, 48]). In particular, this asymptotics involves the electromagnetic polarizability tensors of the scatterers [93, 5, 6]. The fact that the two limit models are similar is straightforward when the scattering obstacle has only one connected component. As it is shown in Subsection 2.4.1, this follows from a scaling argument. The proof is less obvious when the obstacle is multiply connected (one cannot anymore use a unique change of variables to work in a reference domain of fixed size). We study this question using an integral equation approach in Subsection 2.4.2.

2.4.1 The case of one scatterer

Let us assume that the perfectly conducting scatterer is of small size δ and that it is obtained from a reference obstacle after a dilation. More precisely, let us set :

$$\mathcal{O}^\delta = \{\mathbf{x} = \mathbf{s} + \delta\boldsymbol{\xi} \ ; \ \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{O}\} \, .$$

Its boundary is denoted by Γ^δ and its exterior by $\Omega^\delta := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{O}^\delta}$. Given an incident plane wave $(\mathbf{E}_I^{\alpha,\mathbf{f}}, \mathbf{H}_I^{\alpha,\mathbf{f}})$, let $(\mathbf{E}^\delta, \mathbf{H}^\delta)$ be the solution of the scattering problem by the perfectly conducting obstacle (for the sake of clarity, we drop here the reference to the angle of incidence and to the polarization in the scattered field) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{curl}\,\mathbf{E}^\delta = ik\mathbf{H}^\delta & (\Omega^\delta) \\ \mathbf{curl}\,\mathbf{H}^\delta = -ik\mathbf{E}^\delta & (\Omega^\delta) \\ \mathbf{div}\,\mathbf{E}^\delta = 0 & (\Omega^\delta) \\ \mathbf{div}\,\mathbf{H}^\delta = 0 & (\Omega^\delta) \\ \mathbf{E}^\delta \times \boldsymbol{\nu} = -\mathbf{E}_I^{\alpha,\mathbf{f}} \times \boldsymbol{\nu} & (\Gamma^\delta) \\ \mathbf{H}^\delta \cdot \boldsymbol{\nu} = -\mathbf{H}_I^{\alpha,\mathbf{f}} \cdot \boldsymbol{\nu} & (\Gamma^\delta) \\ \mathbf{E}^\delta, \ \mathbf{H}^\delta \text{ outgoing.} & \end{array} \right. \tag{2.10}$$

Introducing the scaled fields

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}^\delta(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{E}^\delta(\mathbf{s} + \delta\boldsymbol{\xi}), \\ \mathbf{h}^\delta(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{H}^\delta(\mathbf{s} + \delta\boldsymbol{\xi}), \end{array} \right. \qquad \boldsymbol{\xi} \in \Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{O}}$$

we obtain that

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{curl}\,\mathbf{e}^\delta = i\,(k\delta)\,\mathbf{h}^\delta & (\Omega) \\ \mathbf{curl}\,\mathbf{h}^\delta = -i\,(k\delta)\,\mathbf{e}^\delta & (\Omega) \\ \mathbf{div}\,\mathbf{e}^\delta = 0 & (\Omega) \\ \mathbf{div}\,\mathbf{h}^\delta = 0 & (\Omega) \\ \mathbf{e}^\delta \times \boldsymbol{\nu} = -\mathbf{e}_I^{\alpha,\mathbf{f}} \times \boldsymbol{\nu} & (\Gamma) \\ \mathbf{h}^\delta \cdot \boldsymbol{\nu} = -\mathbf{h}_I^{\alpha,\mathbf{f}} \cdot \boldsymbol{\nu} & (\Gamma) \\ \mathbf{e}^\delta, \ \mathbf{h}^\delta \text{ outgoing,} & \end{array} \right. \tag{2.11}$$

where $\Gamma = \partial\Omega$ and

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}_I^{\alpha,\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{E}_I^{\alpha,\mathbf{f}}(\mathbf{s} + \delta\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{E}_I^{\alpha,\mathbf{f}}(\mathbf{s}) + O(k\delta), \\ \mathbf{h}_I^{\alpha,\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{H}_I^{\alpha,\mathbf{f}}(\mathbf{s} + \delta\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{H}_I^{\alpha,\mathbf{f}}(\mathbf{s}) + O(k\delta). \end{array} \right.$$

When $\delta \to 0$, problem (2.11) appears as a low frequency electromagnetic scattering problem ($k\delta \to 0$) associated with an incident wave that behaves like the constant field $(\mathbf{E}_I^{\alpha,\mathbf{f}}(\mathbf{s}), \mathbf{H}_I^{\alpha,\mathbf{f}}(\mathbf{s}))$ asymptotically. The electromagnetic scattering problem for small frequencies has been studied for a long time (see [104, 105, 77, 91]) and the asymptotic behavior of its solution is by now well known (see the reference book [48] for a detailed presentation and [8] for convergence results of higher order terms). In particular, the first order approximation $(\mathbf{e}^0, \mathbf{h}^0)$ of $(\mathbf{e}^\delta, \mathbf{h}^\delta)$ (the so-called Rayleigh approximation) is given by the next result, which follows from [48, Chap. 5]).

Theorem 2.5. *Let $\mathbf{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ and $\mathbf{\Psi} = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ be the vector potentials defined by*

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{\Phi} = 0, & (\Omega) \\ \mathbf{\Phi} = \mathbf{x} + \mathbf{c}, & (\Gamma) \\ \mathbf{\Phi} = O\left(\dfrac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right) & |\mathbf{x}| \to \infty \end{cases} \tag{2.12}$$

and

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{\Psi} = 0, & (\Omega) \\ \dfrac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}, & (\Gamma) \\ \mathbf{\Psi} = O\left(\dfrac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right) & |\mathbf{x}| \to \infty \end{cases} \tag{2.13}$$

where the constant vector $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ is chosen such that $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0$.

Then, as $\delta \longrightarrow 0$, we have

$$\begin{cases} \mathbf{e}^\delta \longrightarrow \mathbf{e}^0 := -\nabla \mathbf{\Phi}\, \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) \\ \mathbf{h}^\delta \longrightarrow \mathbf{h}^0 := -\nabla \mathbf{\Psi}\, (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha})) \end{cases}$$

locally in $H_{\mathbf{curl}}(\Omega)$.

Using the above result, one can easily obtain the asymptotics of the far field associated to $\mathbf{E}^\delta$.

Corollary 2.6. *Let $(\mathbf{E}^\delta, \mathbf{H}^\delta)$ be the solution of the scattering problem (2.10). Let $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ and $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ be respectively the electric polarizability and magnetic polarizability tensors defined by (I denotes the identity)*

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = |\mathcal{O}|\, I - \int_\Gamma \mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)^T \mathrm{d}\gamma_{\mathbf{x}} \qquad\qquad \boldsymbol{\mathcal{M}} = |\mathcal{O}|\, I - \int_\Gamma \boldsymbol{\nu} \mathbf{\Psi}^T \,\mathrm{d}\gamma_{\mathbf{x}}$$

where the vector potentials $\mathbf{\Phi}$ and $\mathbf{\Psi}$ are respectively defined by (2.12) and (2.13). Then, the far field $\boldsymbol{A}^\delta(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}))$ of $\mathbf{E}^\delta$, defined by

$$\mathbf{E}^\delta(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{x}|) = \boldsymbol{A}^\delta(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha})) \frac{\mathrm{e}^{ik|\mathbf{x}|}}{ik|\mathbf{x}|} + O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right),$$

admits as $\delta \to 0$ the following asymptotics :

$$\boldsymbol{A}^\delta(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha})) = \frac{(ik\delta)^3}{4\pi}\, \boldsymbol{\beta} \times \Big[\boldsymbol{\beta} \times (\boldsymbol{\mathcal{P}}\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha})) - \boldsymbol{\mathcal{M}}(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}))\Big]\, \mathrm{e}^{ik\,(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\cdot\mathbf{s}} + O(\delta^4). \tag{2.14}$$

Démonstration. Following [48], we have

$$\boldsymbol{A}^\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta};\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha})) = \frac{k^2}{4\pi}\,\boldsymbol{\beta}\times\left\{\boldsymbol{\beta}\times\int_{\Gamma^\delta}\left[\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{x}}\times\left(\mathbf{H}^\delta(\mathbf{x})+\mathbf{H}_I^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}}(\mathbf{x})\right)\right]\,\mathrm{e}^{-ik\,\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{x}}\,\mathrm{d}\gamma_{\mathbf{x}}\right\} \tag{2.15}$$

The change of variables $\boldsymbol{\xi}=(\mathbf{x}-\mathbf{s})/\delta$ in the above integral shows that

$$\boldsymbol{A}^\delta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta};\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha})) = \left(\frac{(k\delta)^2}{4\pi}\,\boldsymbol{\beta}\times\left\{\boldsymbol{\beta}\times\int_{\Gamma}\left[\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{\xi}}\times\left(\mathbf{h}^\delta(\boldsymbol{\xi})+\mathbf{h}_I^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi})\right)\right]\,\mathrm{d}\gamma_{\boldsymbol{\xi}}\right\}\right)\mathrm{e}^{-ik\,\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{s}} + O(\delta^3). \tag{2.16}$$

Comparing (2.15) with the term between parenthesis in the above expression, we see that this term is nothing but the electric far field associated to the solution $(\mathbf{e}^\delta,\mathbf{h}^\delta)$ of the low frequency scattering problem (2.11). Consequently, this term can be expressed using the polarizability tensors (see equation (5.158) in [48]) :

$$\frac{(k\delta)^2}{4\pi}\,\boldsymbol{\beta}\times\left\{\boldsymbol{\beta}\times\int_{\Gamma}\left[\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{\xi}}\times\left(\mathbf{h}^\delta(\boldsymbol{\xi})+\mathbf{h}_I^{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi})\right)\right]\,\mathrm{d}\gamma_{\boldsymbol{\xi}}\right\} = \frac{(ik\delta)^3}{4\pi}\boldsymbol{\beta}\times\left[\boldsymbol{\beta}\times(\boldsymbol{\mathcal{P}}\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}))-\boldsymbol{\mathcal{M}}(\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}))\right]\mathrm{e}^{ik\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{s}}+O\left(\delta^4\right),$$

where we have used the fact that the incident electromagnetic field $(\mathbf{e}_I,\mathbf{h}_I)$ converges to the constants $\left(\mathbf{E}_I^{\alpha,\mathbf{f}}(\mathbf{s}),\mathbf{H}_I^{\alpha,\mathbf{f}}(\mathbf{s})\right)=(\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}))\,\mathrm{e}^{ik\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{s}}$ as δ tends to 0. Plugging the last relation in (2.16) yields (2.14). □

2.4.2 Multiply connected scatterer

We consider now the case where the scatterer has M connected components :

$$\mathcal{O}^\delta=\bigcup_{p=1}^{M}\mathcal{O}_p^\delta$$

where each component $\mathcal{O}_p^\delta$ is obtained from a reference domain $\mathcal{O}_p$ by a dilation and a translation :

$$\mathcal{O}_p^\delta=\{\mathbf{x}=\mathbf{s}_p+\delta\boldsymbol{\xi}\ ;\ \boldsymbol{\xi}\in\mathcal{O}_p\}\,.$$

Finally we denote once again by $\Omega^\delta=\mathbb{R}^3\setminus\overline{\mathcal{O}^\delta}$ the exterior domain and by $\Gamma^\delta=\bigcup_{p=1}^{M}\Gamma_p^\delta$ its boundary.

In order to study the asymptotics $\delta\to 0$, we seek an integral representation of the solution $(\mathbf{E}^\delta,\mathbf{H}^\delta)$ of (2.10) in the form

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{E}^\delta(\mathbf{y})=\delta\,\mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\displaystyle\int_{\Gamma^\delta}G_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\mathbf{J}^\delta(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\gamma_{\mathbf{x}},\\ \mathbf{H}^\delta(\mathbf{y})=-\delta\,(ik)\,\mathbf{curl}\displaystyle\int_{\Gamma^\delta}G_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\mathbf{J}^\delta(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\gamma_{\mathbf{x}},\end{array}\right.\qquad \mathbf{y}\in\Omega^\delta, \tag{2.17}$$

where $\mathbf{J}^\delta$ is the (unknown) electric surface current and

$$G_k(\mathbf{x},\mathbf{y})=\frac{\mathrm{e}^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$$

denotes the Green function of $-\Delta - k^2$ in $\mathbb{R}^3$.

Using the identity $\mathbf{curl}\,\mathbf{curl} = \nabla\,\mathbf{div} - \Delta$ and the fact that for $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, we have $\Delta G_k(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -k^2\, G_k(\mathbf{x},\mathbf{y})$, one can show that the electric field can also be written in the form [45, p. 64] :

$$\mathbf{E}^\delta(\mathbf{y}) = \delta\,\left(k^2 \int_{\Gamma^\delta} G_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\mathbf{J}^\delta(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\gamma_{\mathbf{x}} + \nabla \int_{\Gamma^\delta} G_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\mathbf{div}_{\Gamma^\delta}\,\mathbf{J}^\delta(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\gamma_{\mathbf{x}}\right), \tag{2.18}$$

where $\mathbf{div}_{\Gamma^\delta}$ denotes the surface divergence operator on Γ^δ.

The unknown current $\mathbf{J}^\delta = (\mathbf{J}_1^\delta, \ldots, \mathbf{J}_M^\delta)$ is uniquely determined by writing the perfectly conducting boundary condition on each scatterer :

$$(\mathbf{E}^\delta \times \boldsymbol{\nu})_{|\Gamma_p^\delta} = -(\mathbf{E}_I^{\alpha,\mathbf{f}} \times \boldsymbol{\nu})_{|\Gamma_p^\delta} \qquad \forall\, p = 1, \ldots, M. \tag{2.19}$$

It is well known (see for instance [90, Theorem 5.5.1]) that the trace of a potential of the form (2.18) is given by

$$(\mathbf{E}^\delta \times \boldsymbol{\nu})_{|\Gamma_p^\delta} = \sum_{q=1}^{M} \delta\,\left(k^2 S_{pq}^{k,\delta} + T_{pq}^{k,\delta}\right)\mathbf{J}_q^\delta,$$

where the integral operators $S_{pq}^{k,\delta} : TH^s(\Gamma_q) \to TH^{s+1}(\Gamma_p)$ and $T_{pq}^{k,\delta} : TH^s(\Gamma_q) \to TH^{s-1}(\Gamma_p)$, ($TH^s(\Gamma_q)$ denotes the Sobolev space of tangent vector fields [90]) are defined for $\mathbf{y} \in \Gamma_p$ by

$$\begin{cases} \left(S_{pq}^{k,\delta}\,\mathbf{J}_q^\delta\right)(\mathbf{y}) &= \displaystyle\int_{\Gamma_q^\delta} G_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\left(\mathbf{J}_q^\delta(\mathbf{x}) \times \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{y}}\right)\,\mathrm{d}\gamma_{\mathbf{x}} \\ \left(T_{pq}^{k,\delta}\,\mathbf{J}_q^\delta\right)(\mathbf{y}) &= \left(\nabla_{\mathbf{y}} \displaystyle\int_{\Gamma_q^\delta} G_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\mathbf{div}_{\Gamma_q^\delta}\mathbf{J}_q^\delta(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\gamma_{\mathbf{x}}\right)_{|\Gamma_p^\delta} \times \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{y}}. \end{cases}$$

For $q \neq p$, the kernels of the above integral operators are infinitely differentiable. The operator S_{pp}^δ is the classical single layer potential, and has a singular but integrable kernel. The operator T_{pp}^δ can also be written using a formula involving only integrable kernels (see [90, p. 242]) :

$$\begin{aligned}\left(T_{pp}^{k,\delta}\,\mathbf{J}_p^\delta\right)(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma_p^\delta} \Big[&\left(\nabla_{\mathbf{y}} G_k(\mathbf{x},\mathbf{y}) \times (\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{x}})\right)\,\mathbf{div}_{\Gamma_p^\delta}\mathbf{J}_p^\delta(\mathbf{x}) \\ &- G_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\mathbf{curl}_{\Gamma_p^\delta}\mathbf{div}_{\Gamma_p^\delta}\mathbf{J}_p^\delta(\mathbf{x})\Big]\mathrm{d}\gamma_{\mathbf{x}}.\end{aligned}$$

In the above relation, $\mathbf{div}_{\Gamma_p^\delta}$ and $\mathbf{curl}_{\Gamma_p^\delta}$ denote respectively the surface divergence operator and tangential rotational operator on Γ_p^δ. Then, the integral equation (2.19) reads

$$\sum_{q=1}^{M} \delta\,\left(k^2 S_{pq}^{k,\delta} + T_{pq}^{k,\delta}\right)\mathbf{J}_q^\delta = -(\mathbf{E}^{inc} \times \boldsymbol{\nu})_{|\Gamma_p^\delta} \qquad \forall\, p = 1, \ldots, M. \tag{2.20}$$

In order to work in a functional framework independent of δ, we introduce the new variables

$$\begin{cases} \boldsymbol{\xi} = \dfrac{\mathbf{x} - \mathbf{s}_q}{\delta} \in \mathcal{O}_q, \\ \boldsymbol{\eta} = \dfrac{\mathbf{y} - \mathbf{s}_p}{\delta} \in \mathcal{O}_p, \end{cases}$$

and the scaled fields

$$\begin{cases} \mathbf{j}_q^\delta(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{J}_q^\delta(\mathbf{x}), \\ \mathcal{G}_{pq}^{k,\delta}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = G_k(\mathbf{x},\mathbf{y}). \end{cases}$$

With the above notation, we have

$$\left(S_{pq}^{k,\delta}\,\mathbf{J}_q^\delta\right)(\mathbf{y}) := \delta^2\left(\mathcal{S}_{pq}^{k,\delta}\,\mathbf{j}_q^\delta\right)(\boldsymbol{\eta}) = \delta^2\int_{\Gamma_q}\mathcal{G}_{pq}^{k,\delta}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\,\left(\mathbf{j}_q^\delta(\boldsymbol{\xi})\times\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{\eta}}\right)\,\mathrm{d}\gamma_{\boldsymbol{\xi}}$$

and

$$\left(T_{pq}^{k,\delta}\,\mathbf{J}_p^\delta\right)(\mathbf{y}) = \begin{cases} \left(\nabla_{\boldsymbol{\eta}}\int_{\Gamma_q}\mathcal{G}_{pq}^{k,\delta}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\,\mathbf{div}_{\Gamma_q}\mathbf{j}_q^\delta(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\gamma_{\boldsymbol{\xi}}\right)_{|\Gamma_p}\times\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{\eta}} & \text{for } q\neq p, \\ \int_{\Gamma_q}\Big[\left(\nabla_{\boldsymbol{\eta}}\mathcal{G}_{pp}^{k,\delta}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\times(\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{\eta}}-\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{\xi}})\right)\,\mathbf{div}_{\Gamma_q}\mathbf{j}_p^\delta(\boldsymbol{\xi}) \\ \qquad -\mathcal{G}_{pp}^{k,\delta}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\,\mathbf{curl}_{\Gamma_p}\mathbf{div}_{\Gamma_p}\mathbf{j}_p^\delta(\boldsymbol{\xi})\Big]\mathrm{d}\gamma_{\boldsymbol{\xi}}, & \text{for } q=p \end{cases}$$

$$:= \left(\mathcal{T}_{pq}^{k,\delta}\,\mathbf{j}_q^\delta\right)(\boldsymbol{\eta}).$$

Consequently, equation (2.20) can be written

$$\mathcal{B}_{pp}^{k,\delta}\,\mathbf{j}_p^\delta + \sum_{q\neq p}\mathcal{B}_{pq}^{k,\delta}\,\mathbf{j}_q^\delta = -(\mathbf{e}_I^{\alpha,\mathbf{f}}\times\boldsymbol{\nu})_{|\Gamma_p} \qquad \forall\, p=1,\dots,M, \tag{2.21}$$

with

$$\mathcal{B}_{pq}^{k,\delta} = (k\delta)^2\;\delta\,\mathcal{S}_{pq}^{k,\delta} + \delta\,\mathcal{T}_{pq}^{k,\delta} \tag{2.22}$$

and

$$\mathbf{e}_I^{\alpha,\mathbf{f}}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{E}_I^{\alpha,\mathbf{f}}(\mathbf{y}).$$

Let us consider first the diagonal terms in (2.21), by investigating the behavior of the kernels involved in the expression of $\mathcal{B}_{pp}^{k,\delta}$ as $\delta\to 0$. Since

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{pp}^{k,\delta}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = \dfrac{1}{\delta}G_{k\delta}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}), \\ \nabla_{\boldsymbol{\eta}}\mathcal{G}_{pp}^{k,\delta}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = \dfrac{1}{\delta}\nabla_{\boldsymbol{\eta}}G_{k\delta}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}), \end{cases}$$

we see that

$$\mathcal{B}_{pp}^{k,\delta} = (k\delta)^2\,\widetilde{\mathcal{S}}_{pp}^{k\delta} + \widetilde{\mathcal{T}}_{pp}^{k\delta} := \widetilde{\mathcal{B}}_{pp}^{k\delta}$$

where

$$\begin{cases} \left(\widetilde{\mathcal{S}}_{pp}^{k\delta}\,\mathbf{j}_p\right)(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma_q}G_{k\delta}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\,\left(\mathbf{j}_p(\boldsymbol{\xi})\times\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{\eta}}\right)\,\mathrm{d}\gamma_{\boldsymbol{\xi}}, \\ \left(\widetilde{\mathcal{T}}_{pp}^{k\delta}\,\mathbf{j}_q\right)(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma_q}\Big[\left(\nabla_{\boldsymbol{\eta}}G_{k\delta}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\times(\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{\eta}}-\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{\xi}})\right)\,\mathbf{div}_{\Gamma_p}\mathbf{j}_p(\boldsymbol{\xi}) \\ \qquad -G_{k\delta}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\,\mathbf{curl}_{\Gamma_p}\mathbf{div}_{\Gamma_p}\mathbf{j}_p(\boldsymbol{\xi})\Big]\mathrm{d}\gamma_{\boldsymbol{\xi}} \end{cases}$$

The crucial point here is that $\widetilde{\mathcal{B}}_{pp}^{k\delta}$ is exactly the operator involved in the integral equation formulation of the simple scattering problem associated with the reference scatterer $\mathcal{O}_p$ at

low frequency $k\delta \to 0$. Moreover, since the zero frequency limit exists, $\widetilde{\mathcal{B}}_{pp}^{k\delta} = \mathcal{B}_{pp}^{k,\delta}$ admits a limit $\mathcal{B}_{pp}^{0}$.

Let us consider now the off diagonal terms $\mathcal{B}_{pq}^{k,\delta}$, $q \neq p$. Denote by

$$d = \min_{1 \leq p < q \leq N} |\mathbf{s}_p - \mathbf{s}_q| \tag{2.23}$$

the minimal distance between the centers of the obstacles. Using the relation

$$|s_p - s_q + \delta(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta})| = |s_p - s_q| \left(1 + O\left(\frac{\delta}{d}\right)\right),$$

one can easily check that

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{pq}^{k,\delta}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = G_k(\mathbf{s}_q, \mathbf{s}_p) \left[1 + O(k\delta) + O\left(\frac{\delta}{d}\right)\right] \\ \nabla_{\boldsymbol{\eta}} \mathcal{G}_{pq}^{k,\delta}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = G_k(\mathbf{s}_q, \mathbf{s}_p) \left[O(k\delta) + O\left(\frac{\delta}{d}\right)\right], \end{cases} \qquad \forall q \neq p.$$

Inserting the above asymptotics in (2.22) shows that

$$\mathcal{B}_{pq}^{k,\delta} = O\left(\frac{\delta}{d}\right) \left[O(k\delta) + O\left(\frac{\delta}{d}\right)\right] \qquad \text{for } q \neq p.$$

Summing up, the behavior of the solution $(\mathbf{E}^\delta, \mathbf{H}^\delta)$ of (2.10) for small scatterers (namely for $k\delta \to 0$ and $\delta/d \to 0$) is given by the low frequency limit of the simple scattering problem. Therefore, the multiple scattering effects can be neglected when $k\delta \to 0$ and $\delta/d \to 0$, and the electric far field can be obtained simply by superposition of the far fields given in Corollary 2.6. We have thus proved the following result.

Theorem 2.7. *Assume that the scatterer has M connected components*

$$\mathcal{O}^\delta = \bigcup_{p=1}^{M} \mathcal{O}_p^\delta,$$

where each component $\mathcal{O}_p^\delta$ is obtained from a reference scatterer $\mathcal{O}_p$ (centered at the origin) of smooth boundary Γ_p by a dilation of ratio δ centered at a given point $\mathbf{s}_p \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{O}_p^\delta = \{\mathbf{x} = \mathbf{s}_p + \delta\boldsymbol{\xi} \ ; \ \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{O}_p\}.$$

For all $p = 1, \ldots, M$, let $\boldsymbol{\Phi}_p$ and $\boldsymbol{\Psi}_p$ be the vector potentials defined by

$$\begin{cases} \Delta \boldsymbol{\Phi}_p = 0, & (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{O}_p}) \\ \boldsymbol{\Phi}_p = \mathbf{x} + \mathbf{c}_p, & (\Gamma_p) \\ \boldsymbol{\Phi}_p = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right) & |\mathbf{x}| \to \infty \end{cases} \tag{2.24}$$

and

$$\begin{cases} \Delta \boldsymbol{\Psi}_p = 0, & (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{O}_p}) \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{\Psi}_p}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}, & (\Gamma_p) \\ \boldsymbol{\Psi}_p = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right) & |\mathbf{x}| \to \infty \end{cases} \tag{2.25}$$

where the constant vector $\mathbf{c}_p \in \mathbb{R}^3$ *is chosen such that* $\displaystyle\int_{\Gamma_p} \frac{\partial \mathbf{\Phi}_p}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0$.

Let $\boldsymbol{\mathcal{P}}_p$ *and* $\boldsymbol{\mathcal{M}}_p$ *be respectively the electric polarizability and magnetic polarizability tensors of the reference scatterer* $\mathcal{O}_p$ *(*I *denotes the identity) :*

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{P}}_p = |\mathcal{O}_p|\, I - \displaystyle\int_{\Gamma_p} \mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathbf{\Phi}_p}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right)^T \mathrm{d}\gamma_{\mathbf{x}}, \\ \\ \boldsymbol{\mathcal{M}}_p = |\mathcal{O}_p|\, I - \displaystyle\int_{\Gamma_p} \boldsymbol{\nu} \mathbf{\Psi}_p^T \,\mathrm{d}\gamma_{\mathbf{x}}. \end{cases} \tag{2.26}$$

Finally, let $(\mathbf{E}^\delta, \mathbf{H}^\delta)$ *be the solution of the scattering problem* (2.10) *and* $\boldsymbol{A}^\delta(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}))$ *the far field of* $\mathbf{E}^\delta$ *:*

$$\mathbf{E}^\delta(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{x}|) = \boldsymbol{A}^\delta(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha})) \frac{\mathrm{e}^{ik|\mathbf{x}|}}{ik|\mathbf{x}|} + O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right).$$

Then, as $\delta \to 0$*, we have*

$$\frac{4\pi}{(ik\delta)^3} \boldsymbol{A}^\delta(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha})) \longrightarrow \boldsymbol{A}^0(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha})) \tag{2.27}$$

where

$$\boldsymbol{A}^0(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha})) = \sum_{p=1}^{M} \boldsymbol{\beta} \times \Big[\boldsymbol{\beta} \times (\boldsymbol{\mathcal{P}}_p \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha})) - \boldsymbol{\mathcal{M}}_p(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha})) \Big] \mathrm{e}^{ik\,(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\cdot \mathbf{s}_p}. \tag{2.28}$$

The convergence (2.27) *holds uniformly for all* $\alpha, \beta \in S^2$ *and for all wavenumber* k *and minimal distance* d *(defined by* (2.23)*) satisfying* $k\delta \to 0$ *and* $\delta/d \to 0$.

2.5 Selective focusing using time-reversal

From now on, we assume that $k\delta \to 0$ and $\delta/d \to 0$. According to Theorem 2.7, the eigenfunctions of the far field operator $\mathbf{F}^\delta$ can be approximated by those of the operator $\mathbf{F}^0 : L^2_t(S^2) \to L^2_t(S^2)$ defined by

$$(\mathbf{F}^0 \mathbf{f})(\boldsymbol{\beta}) = \int_{S^2} \boldsymbol{A}^0(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}))\, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} \qquad \forall\, \mathbf{f} \in L^2_t(S^2). \tag{2.29}$$

Substituting the expression (2.28) of $\boldsymbol{A}^0(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}))$ in (2.29), we obtain that

$$(\mathbf{F}^0 \mathbf{f})(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{p=1}^{M} \boldsymbol{\beta} \times \Big[\boldsymbol{\beta} \times \Big(\boldsymbol{\mathcal{P}}_p \mathbf{E}_I^{\mathbf{f}}(\mathbf{s}_p) \Big) - \boldsymbol{\mathcal{M}}_p \mathbf{H}_I^{\mathbf{f}}(\mathbf{s}_p) \Big] \mathrm{e}^{-ik\,\boldsymbol{\beta}\cdot \mathbf{s}_p}, \tag{2.30}$$

where $(\mathbf{E}_I^{\mathbf{f}}, \mathbf{H}_I^{\mathbf{f}})$ denote the electromagnetic Herglotz wave associated to $\mathbf{f}$ defined by (2.5). Finally, let us notice that

$$(\mathbf{F}^0 \mathbf{f})(\boldsymbol{\beta}) = -\sum_{p=1}^{M} \Big[\Delta(\boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\mathcal{P}}_p \mathbf{E}_I^{\mathbf{f}}(\mathbf{s}_p) + \boldsymbol{\beta} \times (\boldsymbol{\mathcal{M}}_p \mathbf{H}_I^{\mathbf{f}}(\mathbf{s}_p)) \Big] \mathrm{e}^{-ik\,\boldsymbol{\beta}\cdot \mathbf{s}_p}, \tag{2.31}$$

where we have set for every $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{bmatrix} \in S^2$:

$$\Delta(\boldsymbol{\alpha}) = \mathrm{I} - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T. \tag{2.32}$$

Remark 2.8. *Note that formula* (2.30) *shows that, the electric far field radiated by the scatterers as their size tends to* 0 *corresponds to the superposition of* M *(uncoupled) electric and magnetic dipoles located at the points* $\mathbf{s}_p$ *and associated with the electric and magnetic moments* $\mathbf{p}_p = \boldsymbol{\mathcal{P}}_p\, \mathbf{E}_I^{\mathbf{f}}(\mathbf{s}_p)$ *and* $\mathbf{m}_p = \boldsymbol{\mathcal{M}}_p\, \mathbf{H}_I^{\mathbf{f}}(\mathbf{s}_p)$.

Remark 2.9. *Formula* (2.31) *shows that* $\mathbf{F}^0$ *has at most* $6M$ *nonzero eigenvalues, since its range satisfies* $\operatorname{Ran}\mathbf{F}^0 \subset \bigoplus_{1\le p\le M} \Big\{ (\Delta(\boldsymbol{\beta})\operatorname{Ran}\boldsymbol{\mathcal{P}}_p) \oplus (\boldsymbol{\beta}\times \operatorname{Ran}\boldsymbol{\mathcal{M}}_p)\Big\}$.

The aim of this section is twofold : first, to compute approximate eigenfunctions of $\mathbf{F}^0$, and then to prove that these eigenfunctions selectively focus on the scatterers. As we will see, this can be achieved provided the two following assumptions are satisfied :

1. The polarizability tensors $\boldsymbol{\mathcal{P}}_p$ and $\boldsymbol{\mathcal{M}}_p$ are diagonal (in the same basis). This is in particular true for axially symmetric scatterers (see [48, p. 167]).
2. The scatterers are distant enough (well separated scatterers). More precisely, we assume that $kd \to \infty$, where $d = \min_{1\le p<q\le N} |\mathbf{s}_p - \mathbf{s}_q|$ is the minimal distance between the obstacles.

From now on, we will assume that these two conditions are satisfied.

Theorem 2.10. *For* $p \in \{1,\dots,M\}$, *let* $(\mathbf{e}_{p,1}, \mathbf{e}_{p,2}, \mathbf{e}_{p,3})$ *be an orthonormal basis of* $\mathbb{R}^3$ *such that the polarizability tensors* $\boldsymbol{\mathcal{P}}_p, \boldsymbol{\mathcal{M}}_p$ *of the reference scatterer* $\mathcal{O}_p$ *are diagonal :*

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_p = \begin{bmatrix} \lambda_{p,1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{p,2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{p,3} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\mathcal{M}}_p = \begin{bmatrix} \lambda'_{p,1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda'_{p,2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda'_{p,3} \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

Given $\ell \in \{1,2,3\}$, *define the following elements of* $L^2_t(S^2)$ *(recall that* $\Delta(\boldsymbol{\alpha})$ *is defined by* (2.32)*) :*

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{p,\ell}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}\times(\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{e}_{p,\ell})\, \mathrm{e}^{-ik\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{s}_p} = -\Delta(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{e}_{p,\ell}\, \mathrm{e}^{-ik\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{s}_p}, \\ \mathbf{g}_{p,\ell}(\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{e}_{p,\ell})\, \mathrm{e}^{-ik\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{s}_p}, \end{cases} \qquad \boldsymbol{\alpha}\in S^2. \tag{2.34}$$

Then, the family of functions $\{\mathbf{f}_{p,\ell},\ \mathbf{g}_{p,\ell}\ ;\ 1\le \ell\le 3\,, 1\le p\le M\}$ *is linearly independent in* $L^2_t(S^2)$. *Moreover, the functions* $\mathbf{f}_{p,\ell}$ *and* $\mathbf{g}_{p,\ell}$ *constitute approximate eigenfunctions of the limit far field operator* $\mathbf{F}^0$ *defined by* (2.28)-(2.29) *as* $kd\to\infty$ *:*

$$\begin{cases} \mathbf{F}^0\mathbf{f}_{p,\ell} = -\dfrac{8\pi}{3}\lambda_{p,\ell}\ \mathbf{f}_{p,\ell} + O\left((kd)^{-N}\right), \\ \mathbf{F}^0\mathbf{g}_{p,\ell} = -\dfrac{8\pi}{3}\lambda'_{p,\ell}\ \mathbf{g}_{p,\ell} + O\left((kd)^{-N}\right), \end{cases} \qquad \textit{for all } N\in\mathbb{N}. \tag{2.35}$$

Démonstration. To see that the functions $\mathbf{f}_{p,\ell}$ and $\mathbf{g}_{p,\ell}$, for $\ell = 1,2,3$ and $p = 1,\dots,M$, are linearly independent, it suffices to note that these functions are exactly the far field patterns of electric and magnetic dipoles located at the points $\mathbf{s}_p$ and associated with electric or

magnetic dipole moment $\mathbf{e}_{p,\ell}$. Consequently, by uniqueness of the far field pattern (which follows from Rellich's lemma, see [44]), the condition

$$\sum_{p=1}^{M}\sum_{\ell=1}^{3}(z_{p,\ell}\,\mathbf{f}_{p,\ell}+z'_{p,\ell}\,\mathbf{g}_{p,\ell})=0 \qquad\qquad z_{p,\ell},\ z'_{p,\ell}\in\mathbb{C},$$

implies that $z_{p,\ell}=z'_{p,\ell}=0$ for all $p=1,\dots,M$ and $\ell=1,2,3$.
Fix now $q\in\{1,\dots,M\}$ and $\ell\in\{1,2,3\}$ and let us compute $\mathbf{F}^0\mathbf{f}_{q,\ell}$. We have

$$\begin{cases}\mathbf{E}_I^{\mathbf{f}_{q,\ell}}(\mathbf{s}_p)=-\left(\displaystyle\int_{S^2}\Delta(\boldsymbol{\alpha})\,\mathrm{e}^{ik\,\boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{s}_p-\mathbf{s}_q)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}\right)\mathbf{e}_{q,\ell}:=\mathbf{D}_{pq}\,\mathbf{e}_{q,\ell}\\ \mathbf{H}_I^{\mathbf{f}_{q,\ell}}(\mathbf{s}_p)=\displaystyle\int_{S^2}\boldsymbol{\alpha}\times[\boldsymbol{\alpha}\times(\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{e}_{q,\ell})]\,\mathrm{e}^{ik\,\boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{s}_p-\mathbf{s}_q)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}:=\mathbf{D}'_{pq}\,\mathbf{e}_{q,\ell}\end{cases}$$

A straightforward computation shows that

$$\mathbf{D}_{qq}=-\int_{S^2}\Delta(\boldsymbol{\alpha})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}=-\frac{8\pi}{3}\mathrm{I}$$

while by symmetry

$$\mathbf{D}'_{qq}=\int_{S^2}\boldsymbol{\alpha}\times\left[\boldsymbol{\alpha}\times(\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{e}_{q,\ell})\right]\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}=0.$$

On the other hand, let us note that the elements of the 3×3 matrices $\mathbf{D}_{pq}$ and $\mathbf{D}'_{pq}$ for $p\neq q$ are oscillatory integrals of the form $\displaystyle\int_{S^2}\psi(\boldsymbol{\alpha})\,\mathrm{e}^{ik\,\boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{s}_p-\mathbf{s}_q)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}$, where ψ is a smooth function. It follows then from the stationary phase theorem (see for instance [100, Chap. VIII]) that

$$\mathbf{D}_{pq}=\mathbf{D}'_{pq}=O\left((kd)^{-N}\right)\qquad\qquad\forall\,p\neq q,\ \forall N\in\mathbb{N}.$$

Consequently, formula (2.31) simplifies into

$$\begin{aligned}(\mathbf{F}^0\mathbf{f}_{q,\ell})(\boldsymbol{\beta})&=-\frac{8\pi}{3}\Delta(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\mathcal{P}}_q\mathbf{e}_{q,\ell}\,\mathrm{e}^{-ik\,\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{s}_q}+O\left((kd)^{-N}\right),\\&=-\frac{8\pi}{3}\lambda_{q,\ell}\,\Delta(\boldsymbol{\beta})\mathbf{e}_{q,\ell}\,\mathrm{e}^{-ik\,\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{s}_q}+O\left((kd)^{-N}\right),\end{aligned}$$

which proves the first relation of (2.35). The second relation of (2.35) follows using the same arguments, since

$$\begin{cases}\mathbf{E}_I^{\mathbf{g}_{q,\ell}}(\mathbf{s}_p)=-\mathbf{H}_I^{\mathbf{f}_{q,\ell}}(\mathbf{s}_p)=-\mathbf{D}'_{pq}\,\mathbf{e}_{q,\ell}\\ \mathbf{H}_I^{\mathbf{g}_{q,\ell}}(\mathbf{s}_p)=\mathbf{E}_I^{\mathbf{f}_{q,\ell}}(\mathbf{s}_p)=\mathbf{D}_{pq}\,\mathbf{e}_{q,\ell}\end{cases}$$

and the proof is thus complete. □

Remark 2.11. *In the special case of scattering by small triaxial ellipsoids (see [48, Chap. 8]), with semi-axes $a_{p,1}>a_{p,2}>a_{p,3}$, the electric and magnetic polarizability tensors admit in the basis constituted by the axis of each ellipsoid the diagonal form* (2.33)*, with*

$$\begin{cases}\lambda_{p,\ell}=\dfrac{4\pi}{3I_{p,\ell}}\\ \lambda'_{p,\ell}=\dfrac{4\pi}{3}\dfrac{a_{p,1}a_{p,2}a_{p,3}}{1-a_{p,1}a_{p,2}a_{p,3}I_{p,\ell}}\end{cases}\qquad\qquad\ell=1,2,3,$$

with

$$I_{p,\ell} = \frac{2\pi}{3} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x + a_{p,\ell}^2)\sqrt{x^2 + a_{p,1}^2}\sqrt{x^2 + a_{p,2}^2}\sqrt{x^2 + a_{p,3}^2}}.$$

In the special case of spheres of radii a_p, we have $\boldsymbol{\mathcal{P}}_p = 2\boldsymbol{\mathcal{M}}_p = 4\pi a_p^3 I$.

The next result provides the expected selective focusing properties of the eigenfunctions of the far field operator $\mathbf{F}^0$ (and thus of time reversal operator $\mathbf{T}^0 = (\mathbf{F}^0)^*\mathbf{F}^0$).

Theorem 2.12. *For $p \in \{1, \dots, M\}$, the approximate eigenfunctions $(\mathbf{f}_{p,\ell}, \mathbf{g}_{p,\ell})_{1\le\ell\le 3}$ defined by* (2.34) *generate electromagnetic Herglotz waves that focus selectively on the scatterer p.*

Démonstration. Plugging the expression (2.34) of $\mathbf{f}_{p,\ell}$ and $\mathbf{g}_{p,\ell}$ in (2.5), we obtain that

$$\begin{cases} \mathbf{E}_I^{\mathbf{f}_{p,\ell}}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}_I^{\mathbf{g}_{p,\ell}}(\mathbf{x}) = \displaystyle\int_{S^2} (\boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{e}_{p,\ell}))\, \mathrm{e}^{ik\,\boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{s}_p)}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}, \\ \mathbf{H}_I^{\mathbf{f}_{p,\ell}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{E}_I^{\mathbf{g}_{p,\ell}}(\mathbf{x}) = -\displaystyle\int_{S^2} (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{e}_{p,\ell})\, \mathrm{e}^{ik\,\boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{s}_p)}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}. \end{cases}$$

The conclusion follows once again from the stationary phase theorem, since for $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}_p$ the above integrals behave like $O\left((k|x - s_p|)^{-N}\right)$ for all $N \in \mathbb{N}$, and are independent of k for $\mathbf{x} = \mathbf{s}_p$. □

2.6 Conclusion

A l'aide d'une analyse asymptotique pour de petits obstacles, nous avons donné une justification mathématique de la méthode DORT en électromagnétisme champ lointain. Les résultats ainsi démontrés sont généralisent ceux obtenus dans le cadre de l'acoustique champ lointain dans [72]. Principalement, nous avons montré que, dans le régime particulier de petits obstacles éloignés, l'opérateur de retournement temporel $\mathbf{T}$ possède (au plus) 6 valeurs propres significatives par objet et que de plus, les fonctions propres associées à ces valeurs propres permettent de construire des ondes focalisant sélectivement sur les diffuseurs.

Toutefois, pour démontrer la propriété de focalisation sélective des fonctions propres de $\mathbf{T}$, nous nous sommes restreint à des obstacles particuliers (à symétrie tri-axiale). Nous cherchons actuellement à lever cette hypothèse restrictive. De plus, lorsque le miroir à retournement temporel est ouvert, c'est-à-dire lorsqu'il n'entoure pas complètement les obstacles, l'opérateur de champ lointain $\mathbf{F}$ perd son caractère normal et nous n'avons pas réussi à traiter ce cas. Ce problème ouvert mériterait également d'être étudié. Enfin, soulignons qu'une étude numérique de la méthode DORT en électromagnétisme (similaire à celle proposée en acoustique dans le chapitre 1) serait intéressante, afin de tester et valider les résultats obtenus.

Chapitre 3

Phénomène de super-résolution en milieu multi-diffusif

Sommaire

3.1 Introduction **81**
3.2 Modèle mathématique et justification dans un milieu homogène **83**
3.2.1 Modèle mathématique 83
3.2.2 Justification mathématique pour un milieu homogène et un miroir d'épaisseur nulle 85
3.3 Résultats numériques **94**
3.3.1 Approximation numérique 94
3.3.2 Mise en œuvre de la méthode des éléments finis 95
3.3.3 Milieu homogène 102
3.3.4 Milieu multi-diffusif (fréquence fixe) 106
3.3.5 Moyenne et écart-type sur les réalisations 110
3.3.6 Moyenne sur les fréquences 113
3.4 Conclusion **130**

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions la reconstruction d'une source acoustique ponctuelle à l'aide d'un miroir à retournement temporel (MRT). Le MRT $\mathcal{M}$ est ici placé dans un milieu non dissipatif et à distance finie de la source $\mathbf{s}$. L'expérience que nous considérons, illustrée par la figure 3.1, est la suivante. La source émet une onde acoustique que le MRT mesure, retourne temporellement et rétro-propage. Le champ ainsi émis par le miroir est alors focalisé sur le point source avec une précision qui dépend notamment de la taille du miroir à retournement temporel.

Lorsque le milieu comporte des hétérogénéités, des expériences physiques [53, 52, 59, 51] ont mis en évidence une meilleure qualité de focalisation comparativement au milieu homogène. La raison avancée est l'apparition, en raison de la diffraction multiple, de *chemins multiples (multi-pathing)* entre la source et le MRT : ce dernier reçoit alors plus d'information et agit comme si sa taille était plus importante. La limite de la diffraction peut être alors

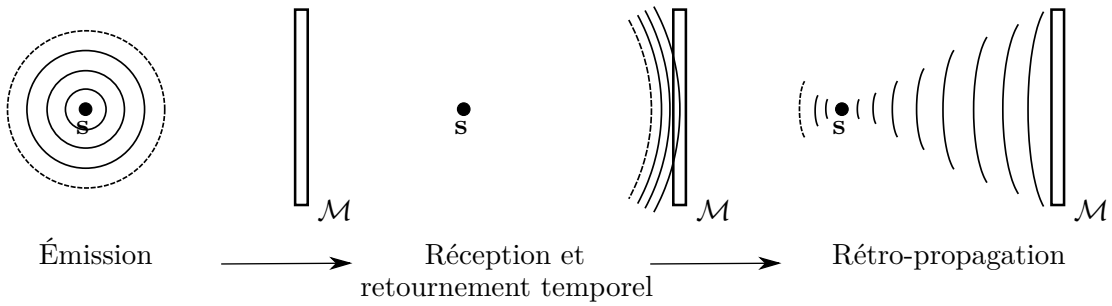


FIGURE 3.1 – Les trois étapes de l'expérience de retournement temporel

battue et nous parlons de *super-résolution*. Ce phénomène a également été observé numériquement dans des milieux aléatoires acoustiques [17, 18, 28, 29] et élastiques [103] ou encore dans des milieux stratifiés [63, 65]. Toutefois, ce gain en précision est un gain *en moyenne*. En effet, en régime harmonique, il apparaît que, pour une réalisation de milieu aléatoire donneé, le champ rétro-propagé par le MRT peut focaliser ou pas sur le point source. L'utilisation du régime transitoire plutôt qu'harmonique permet alors d'effectuer une sorte de moyenne sur les fréquences. Cette "auto-moyennisation" (*self-averaging*) rend le phénomène de super-résolution stable vis-à-vis du milieu [28, 53].

Nous étudions ici numériquement le phénomène de super-résolution dans un cadre déterministe : nous nous plaçons en régime harmonique et modélisons l'hétérogénéité du milieu par de nombreux petits diffuseurs pénétrables situés aléatoirement (mais fixes !) entre la source et le MRT. L'équation gouvernant la propagation acoustique est bien évidemment l'équation de Helmholtz. Pour simplifier, nous supposons de plus que le miroir à retournement temporel est continu et non intrusif.

Nous commençons notre étude en détaillant le modèle mathématique employé pour décrire cette expérience de retournement temporel. Dans un milieu homogène, l'expression explicite de la fonction de Green est connue ce qui nous permet de démontrer, dans la section 3.2, que le champ rétro-propagé par le MRT est focalisé sur le point source. En revanche, dans un milieu hétérogène, cette étude mathématique ne peut plus être effectuée. Nous approchons alors numériquement le champ rétro-propagé par la méthode des éléments finis couplée à une couche absorbante parfaitement adaptée (voir paragraphe 3.3.2). Les résultats numériques obtenus commencent dans la section 3.3.4 en considérant tout d'abord une fréquence et une réalisation de milieu. Comme la précision de la focalisation varie grandement d'un milieu à un autre, nous étudions la précision de la focalisation en moyenne *via* deux approches. Tout d'abord, dans la section 3.3.5, nous effectuons une moyenne sur les configurations à fréquence fixe, en considérant un grand nombre de réalisations de milieux différents. Puis, dans le paragraphe 3.3.6, la source acoustique est polychromatique, ce qui nous permet d'effectuer, pour un milieu donné, une moyenne sur les fréquences. Pour ces deux approches, nous montrons que la focalisation gagne en précision par la présence d'hétérogénéités.

3.2 Modèle mathématique et justification dans un milieu homogène

3.2.1 Modèle mathématique

Milieu homogène

FIGURE 3.2 – Représentation du miroir à retournement temporel $\mathcal{M}$ et du point source $\mathbf{s}$

Considérons un milieu dans lequel la célérité du son est homogène et de valeur c. Dans la première étape, la source ponctuelle, placée en $\mathbf{s}$, émet une onde acoustique harmonique u_E de pulsation temporelle ω. La dépendance temporelle est, tout au long de ce chapitre, implicite et de la forme $e^{-i\omega t}$. Le champ u_E est alors l'unique solution du problème

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u_E = -\delta_{\mathbf{s}} \quad (\mathbb{R}^d) \\ u_E \text{ sortant,} \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\delta_{\mathbf{s}}$ est la distribution de Dirac centrée sur $\mathbf{s}$ et $d = 2$ ou $d = 3$ est la dimension du problème. Nous dirons qu'une onde u est sortante lorsqu'elle satisfait la condition de radiation de Sommerfeld :

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \to +\infty} \|\mathbf{x}\|^{(d-1)/2} \left(\nabla u \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - iku \right) = 0,$$

où $\|\mathbf{x}\| = (\sum_{j=1}^{d} \mathrm{x}_j^2)^{1/2}$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$ d'un point $\mathbf{x} = (\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_d)$. L'onde u_E, solution du système (3.1), n'est autre que la fonction de Green $G_k(\cdot\,, \mathbf{s})$ centrée sur le point source $\mathbf{s}$:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{s}\}, \qquad u_E(\mathbf{x}) = G_k(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \begin{cases} \dfrac{i}{4} H_0^{(1)}(k\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|) & \text{si } d = 2, \\ \dfrac{e^{ik\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|}}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|} & \text{si } d = 3, \end{cases} \tag{3.2}$$

où $H_0^{(1)}$ est la fonction de Hankel de première espèce d'ordre zéro.

Le miroir à retournement temporel mesure ce champ, soit $u_E|_{\mathcal{M}}$, puis le retourne temporellement. Du fait du régime harmonique, cette dernière opération revient à effectuer une

conjugaison de phase : $\overline{u_E}|_{\mathcal{M}}$. Le MRT rétro-propage ensuite cette onde. Nous modélisons cette dernière étape par un champ u_{RE}, unique solution de

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u_{RE} = -\overline{u_E}|_{\mathcal{M}} = -\overline{G_k(\cdot\,,\mathbf{s})}|_{\mathcal{M}} \quad (\mathbb{R}^d) \\ u_{RE} \text{ sortant .} \end{cases} \tag{3.3}$$

L'expression du champ rétro-propagé u_{RE} est obtenue par un produit de convolution des fonctions de Green :

$$\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\mathcal{M}}, \qquad u_{RE}(\mathbf{y}) = \int_{\mathcal{M}} G_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\overline{G_k(\mathbf{x},\mathbf{s})}\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{3.4}$$

A l'aide de la méthode de la phase stationnaire, nous montrons plus loin que, lorsque le nombre d'onde k tend vers l'infini, l'onde u_{RE} est focalisée sur le point source $\mathbf{s}$. Nous décrivons maintenant le modèle employé lorsque le milieu comporte de nombreux petits diffuseurs.

Milieu multi-diffusif

Nous considérons maintenant un grand nombre de petits diffuseurs pénétrables disposés aléatoirement entre la source $\mathbf{s}$ et le miroir $\mathcal{M}$ comme illustré par la figure 3.2.1. La présence de ces petits obstacles diffractants peut améliorer la précision de la focalisation du champ rétro-propagé par le miroir à retournement temporel.

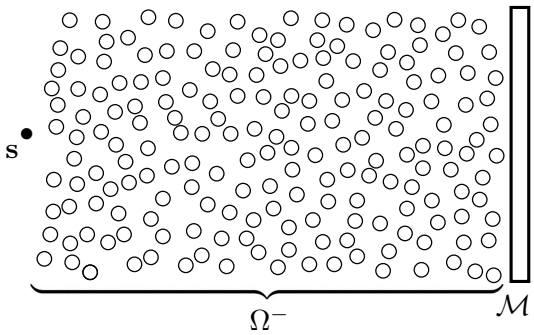


FIGURE 3.3 – Milieu multi-diffusif présentant de nombreux obstacles entre le miroir et la source

Notons $\Omega_1^-, \Omega_2^-, \ldots, \Omega_M^-$ les M petits diffuseurs, situés entre la source et le MRT, et $\Omega^- = \bigcup_{p=1}^M \Omega_p^-$ le domaine occupé par les obstacles. Introduisons de plus la fonction contraste n définie par

$$n(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega^- \\ n_p & \text{si } \mathbf{x} \in \overline{\Omega_p^-}, \text{ pour } p = 1, \ldots, M, \end{cases} \tag{3.5}$$

où chaque n_p est une constante réelle positive, pour $p = 1, \ldots, M$. Par ailleurs, nous notons u_E et u_{RE} les champs émis et réémis dans le cadre de l'espace libre et par v_E et v_{RE} ceux en présence de diffuseurs.

Durant la phase d'émission, la source $\mathbf{s}$ émet une onde ponctuelle v_E, solution d'un problème de type (3.1) avec un nombre d'onde variable

$$\begin{cases} (\Delta + k^2 n^2)v_E = -\delta_{\mathbf{s}} \quad (\mathbb{R}^d) \\ v_E \text{ sortant.} \end{cases} \tag{3.6}$$

Le MRT mesure ensuite $v_E|_{\mathcal{M}}$, le retourne temporellement pour obtenir $\overline{v_E}|_{\mathcal{M}}$, puis le réémet. Nous modélisons cette dernière étape par une onde v_{RE}, unique solution du problème suivant

$$\begin{cases} (\Delta + k^2 n^2) v_{RE} = -\overline{v_E}|_{\mathcal{M}} & (\mathbb{R}^d) \\ v_{RE} \text{ sortant.} \end{cases} \tag{3.7}$$

Nous cherchons alors à vérifier tout d'abord que v_{RE} est focalisée sur le point source $\mathbf{s}$ et le cas échéant, si cette focalisation est plus précise ou non que celle obtenue sans obstacle. Contrairement à l'espace libre, nous ne disposons pas de l'expression explicite de v_{RE}, ni de v_E. Une approximation numérique de ces champs sera alors nécessaire.

3.2.2 Justification mathématique pour un milieu homogène et un miroir d'épaisseur nulle

Nous proposons une étude mathématique dans un milieu homogène, en dimension $d = 2$ et pour un miroir à retournement temporel continu sous forme d'un segment, c'est à dire d'épaisseur nulle. Notons que ce cas a également été étudié en parallèle par M. Cassier [34], qui a de plus étendu ces résultats au cas tridimensionnel avec un MRT plan.

Dans les simulations numériques que nous proposons plus loin, nous avons fait le choix de prendre un MRT possédant une faible épaisseur. Pour un tel miroir, les résultats présentés ici restent en général valables et la démonstration est similaire à celle présentée ici. Cependant, afin de ne pas surcharger ce chapitre, la preuve est placée en annexe A.

Dans ce paragraphe, nous montrons que le champ rétro-propagé $u_{RE}(\cdot\,, k)$ est focalisé sur le point $\mathbf{s}$ lorsque k tend vers l'infini, mais également le point $\widetilde{\mathbf{s}}$, symétrique de $\mathbf{s}$ par rapport au MRT. Etant donné que nous étudions un comportement asymptotique par rapport au nombre d'onde k, nous faisons apparaître explicitement la dépendance en k dans la notation du champ rétro-propagé $u_{RE}(\cdot\,, k)$. Notons $\Omega_{RE} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{M} (= \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{M}})$ le domaine de propagation extérieur au MRT, l'ensemble $\mathcal{M}$ étant fermé et défini par

$$\mathcal{M} = \Big\{ \mathbf{x} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) \in \mathbb{R}^2 ; a \leq \mathrm{x}_1 \leq b \text{ et } \mathrm{x}_2 = 0 \Big\} \, (= \overline{\mathcal{M}}), \tag{3.8}$$

où a et b sont deux réels tels que $a < b$. Par ailleurs, nous supposons que le point source $\mathbf{s} = (\mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2)$ n'est pas sur l'axe $\overrightarrow{Ox_1}$ (soit $\mathrm{s}_2 \neq 0$) car dans ce cas, le MRT ne peut le détecter. Quitte à effectuer une rotation du repère, nous supposons que la deuxième coordonnée de $\mathbf{s}$ vérifie $\mathrm{s}_2 > 0$. La figure 3.4 illustre la configuration.

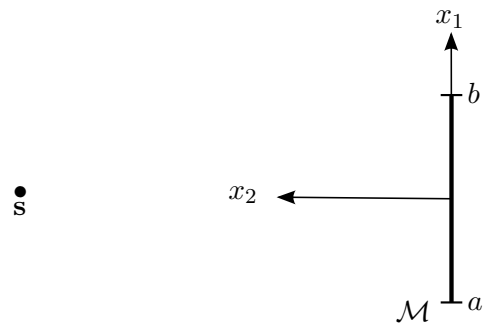


FIGURE 3.4 – Illustration du MRT sous forme de segment en dimension 2.

En dimension deux, la fonction de Green $G_k(\mathbf{x},\mathbf{y})$ s'écrit

$$\forall k>0, \forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^2, \mathbf{x}\neq\mathbf{y}, \qquad G_k(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|),$$

où $H_0^{(1)}$ est la fonction de Hankel de première espèce d'ordre zéro. Ainsi, l'expression (3.4) du champ rétro-propagé $u_{RE}(\cdot\,,k)$ s'écrit, en dimension deux,

$$\forall k>0, \forall \mathbf{y}\in\Omega_{RE}, \qquad u_{RE}(\mathbf{y},k) = \frac{1}{16}\int_{\mathcal{M}} H_0^{(1)}(k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)\overline{H_0^{(1)}(k\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|)}\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{3.9}$$

Afin de faire apparaître une intégrale oscillante, nous effectuons une première asymptotique sur les fonctions de Hankel. Rappelons à ce propos que, lorsque k tend vers l'infini, la fonction $H_0^{(1)}$ a le comportement asymptotique suivant [1, (9.2.7)], pour deux points $\mathbf{x}\in\mathcal{M}$ et $\mathbf{y}\in\Omega^+$,

$$H_0^{(1)}(k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|) = \sqrt{\frac{2}{k\pi}}e^{-i\pi/4}\frac{e^{ik\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{1/2}}\left[1+O\left(k^{-1}\right)\right], \qquad k\longrightarrow+\infty. \tag{3.10}$$

Ainsi, lorsque k tend vers l'infini, nous avons

$$\forall \mathbf{y}\in\Omega_{RE}, \qquad u_{RE}(\mathbf{y},k) = \frac{1}{k}\int_{\mathcal{M}}\frac{e^{ik[\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|-\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|]}}{8\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{1/2}\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|^{1/2}}\,\mathrm{d}\mathbf{x} + O\left(k^{-2}\right), \qquad k\longrightarrow+\infty. \tag{3.11}$$

Le terme $u_{RE}(\mathbf{y},k)$ est ainsi obtenu par la somme d'une intégrale oscillante en fonction de k et d'un terme décroissant comme $O\left(k^{-2}\right)$. Pour tout point $\mathbf{y}\in\Omega_{RE}$, notons $J_{\mathbf{y}}:]0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{C}$ la fonction définie par

$$\forall k>0, \qquad J_{\mathbf{y}}(k) = \int_{\mathcal{M}}\frac{e^{ik[\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|-\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|]}}{8\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{1/2}\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|^{1/2}}\,\mathrm{d}\mathbf{x},$$

de sorte que

$$\forall \mathbf{y}\in\Omega_{RE}, \qquad u_{RE}(\mathbf{y},k) = \frac{1}{k}J_{\mathbf{y}}(k) + O\left(k^{-2}\right), \qquad \text{lorsque } k\longrightarrow+\infty. \tag{3.12}$$

Le comportement asymptotique de $u_{RE}(\mathbf{y},k)$ lorsque k tend vers l'infini dépend principalement de celui de $J_{\mathbf{y}}(k)$. Ainsi, nous étudions uniquement le comportement asymptotique de $J_{\mathbf{y}}(k)$, lorsque k tend vers l'infini, à l'aide de la méthode de la phase stationnaire. Comme le MRT est situé sur l'axe $\overrightarrow{Ox_1}$, nous avons la relation suivante

$$\mathrm{x}_1\in[a,b] \Longleftrightarrow \mathbf{x}=(\mathrm{x}_1,0)\in\mathcal{M}, \tag{3.13}$$

qui nous permettra d'écrire le terme $J_{\mathbf{y}}(k)$ comme une intégrale selon la variable réelle x_1 uniquement. Introduisons pour tout point $\mathbf{y}\in\Omega_{RE}$ les deux fonctions $\phi_{\mathbf{y}}:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ et $\Psi_{\mathbf{y}}:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, définies par

$$\forall \mathbf{x}=(\mathrm{x}_1,0)\in\mathcal{M}, \qquad \begin{cases}\phi_{\mathbf{y}}(\mathrm{x}_1) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|-\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|,\\ \psi_{\mathbf{y}}(\mathrm{x}_1) = \dfrac{1}{8\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{1/2}\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|^{1/2}}.\end{cases} \tag{3.14}$$

Ainsi, à l'aide de ces fonctions $\phi_{\mathbf{y}}$ et $\psi_{\mathbf{y}}$ et de la relation (3.13), l'intégrale $J_{\mathbf{y}}(k)$ s'écrit

$$\forall k > 0, \qquad J_{\mathbf{y}}(k) = \int_a^b e^{ik\phi_{\mathbf{y}}(\mathrm{x}_1)} \psi_{\mathbf{y}}(\mathrm{x}_1)\, \mathrm{d}\mathrm{x}_1. \tag{3.15}$$

Remarquons que la fonction $\phi_{\mathbf{s}}$ est identiquement nulle et la fonction $J_{\mathbf{s}}$ est alors donnée par

$$\forall k > 0, \qquad J_{\mathbf{s}}(k) = \int_a^b \psi_{\mathbf{s}}(\mathrm{x}_1)\, \mathrm{d}\mathrm{x}_1.$$

En particulier, la fonction $J_{\mathbf{s}}$ est constante par rapport au nombre d'onde k. Montrons maintenant que les seuls points $\mathbf{y}$ tels que la fonction $\phi_{\mathbf{y}}$ soit identiquement nulle sont les points $\mathbf{s}$ et $\widetilde{\mathbf{s}}$, symétrique de $\mathbf{s}$ par rapport au MRT.

Lemme 3.1. *Soit $\mathbf{y} \in \Omega_{RE}$. La fonction $\phi_{\mathbf{y}}$ est identiquement nulle si et seulement si $\mathbf{y} = \mathbf{s}$ ou $\mathbf{y} = \widetilde{\mathbf{s}}$, où $\widetilde{\mathbf{s}} = (\mathrm{s}_1, -\mathrm{s}_2)$ est le symétrique de $\mathbf{s}$ par rapport à l'axe $\overrightarrow{Ox_1}$.*

Démonstration. Nous avons vu que la fonction $\phi_{\mathbf{s}}$ est nulle. De plus, nous avons,

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{M}, \qquad \|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{s})_1^2 + \mathrm{s}_2^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{s})_1^2 + (-\mathrm{s}_2)^2 = \|\mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{s}}\|^2, \tag{3.16}$$

ce qui implique que les fonctions $\phi_{\widetilde{\mathbf{s}}}$ et $\phi_{\mathbf{s}}$ sont égales et donc identiquement nulles. Il nous reste à montrer l'implication inverse. Supposons que la fonction $\phi_{\mathbf{y}}$ soit identiquement nulle pour un point $\mathbf{y} \in \Omega_{RE}$ donné. Nous avons alors, d'après (3.14),

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{M}, \qquad \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|^2.$$

En particulier, aux points $\mathbf{x} = (a, 0)$ et $\mathbf{x} = (b, 0)$, nous aboutissons au système d'équations suivant

$$\begin{cases} (a - \mathrm{y}_1)^2 + \mathrm{y}_2^2 = (a - \mathrm{s}_1)^2 + \mathrm{s}_2^2 \\ (b - \mathrm{y}_1)^2 + \mathrm{y}_2^2 = (b - \mathrm{s}_1)^2 + \mathrm{s}_2^2 \end{cases} \tag{3.17}$$

Nous effectuons la différence entre les deux équations ci-dessus pour obtenir

$$(a - \mathrm{y}_1)^2 - (b - \mathrm{y}_1)^2 = (a - \mathrm{s}_1)^2 - (b - \mathrm{s}_1)^2,$$

soit, après développement et simplifications

$$2\mathrm{y}_1(a - b) = 2\mathrm{s}_1(a - b).$$

Comme nous avons supposé $b > a$, les coordonées y_1 et s_1 sont alors égales. En reportant l'égalité $\mathrm{y}_1 = \mathrm{s}_1$ dans une des équations du système (3.17), nous obtenons

$$\begin{cases} \mathrm{y}_1 = \mathrm{s}_1 \\ \mathrm{y}_2 = \pm \mathrm{s}_2 \end{cases}$$

soit encore $\mathbf{y} = \mathbf{s}$ ou $\mathbf{y} = \widetilde{\mathbf{s}}$. □

Remarque 3.2. *Pour un MRT sous forme de segment, le champ rétro-propagé $u_{RE}(\cdot\,, k)$ est symétrique par rapport au MRT. En effet, la relation (3.16) peut être démontrée pour tout point $\mathbf{y} = (\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2) \in \Omega_{RE}$, puisque, en notant $\widetilde{\mathbf{y}} = (\mathrm{y}_1, -\mathrm{y}_2)$ son symétrique par rapport à $\overrightarrow{Ox_1}$, nous avons*

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{M}, \qquad \|\mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{y}}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

En reportant cette égalité dans l'expression (3.9) du champ rétro-propagé, nous obtenons

$$\forall k > 0, \forall \mathbf{y} \in \Omega_{RE}, \qquad u_{RE}(\mathbf{y}, k) = u_{RE}(\widetilde{\mathbf{y}}, k).$$

Par conséquent, si l'onde est focalisée sur le point $\mathbf{s}$*, alors elle l'est aussi sur son symétrique* $\widetilde{\mathbf{s}} = (\mathrm{s}_1, -\mathrm{s}_2)$*. Notons que nous avons aussi les relations*

$$\forall \mathbf{y} \in \Omega_{RE}, \qquad \phi_{\mathbf{y}} = \phi_{\widetilde{\mathbf{y}}}, \qquad \psi_{\mathbf{y}} = \psi_{\widetilde{\mathbf{y}}},$$

et ainsi

$$\forall \mathbf{y} \in \Omega_{RE}, \qquad J_{\mathbf{y}} = J_{\widetilde{\mathbf{y}}}.$$

Lorsque $\mathbf{y}$ n'est confondu ni avec $\mathbf{s}$ ni avec $\widetilde{\mathbf{s}}$, l'intégrale $J_{\mathbf{y}}(k)$, donnée par (3.15), est une intégrale à une variable et oscillante en fonction de k. Pour ces points $\mathbf{y}$, nous appliquons la méthode de la phase stationnaire pour obtenir une décroissance en fonction de k du terme $J_{\mathbf{y}}(k)$. Nous rappelons dans le théorème ci-dessous plusieurs résultats pour ce type d'intégrale (voir les propositions 1 et 3, pages 331 et 334, de [100], ainsi que le chapitre 4, section 14, pages 29 à 34, de [46])

Théorème 3.3. *Soient deux réels* a *et* b *tels que* $a < b$ *et deux fonctions* ϕ *et* ψ *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $[a, b]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$*. Pour tout* $k > 0$*, introduisons la fonction* $I : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$*, définie par*

$$\forall k \geq 0, \qquad I(k) = \int_a^b e^{ik\phi(x)} \psi(x) \, \mathrm{d}x.$$

Nous avons alors les résultats suivants.

i) Supposons que, pour tout x *de* $[a, b]$*, la fonction* ϕ *ne possède aucun point critique, c'est à dire que sa dérivée vérifie*

$$\forall x \in [a, b], \qquad \phi'(x) \neq 0.$$

Alors la fonction I *a le comportement asymptotique suivant*

$$I(k) = O\left(k^{-1}\right), \qquad k \longrightarrow +\infty.$$

ii) Supposons que la fonction ϕ *admet un unique point critique* $x_0 \in [a, b]$ *(i.e :* $\phi'(x_0) = 0$*). Si, de plus, nous avons*

$$\phi''(x_0) \neq 0,$$

alors, l'intégrale $I(k)$ *a le comportement asymptotique suivant*

$$I(k) = O\left(k^{-1/2}\right), \qquad k \longrightarrow +\infty.$$

Ce théorème montre que le comportement asymptotique de l'intégrale $J_{\mathbf{y}}(k)$ dépend principalement des points critiques (appelés aussi points stationnaires) de la fonction $\phi_{\mathbf{y}}$. Le lemme suivant est une première caractérisation de ces points.

Lemme 3.4. *Pour tout point* $\mathbf{y} \in \Omega_{RE}$*. Le réel* $\mathrm{x}_1 \in [a, b]$ *est un point critique de* $\phi_{\mathbf{y}}$ *si et seulement si le point* $\mathbf{x} = (\mathrm{x}_1, 0) \in \mathcal{M}$ *satisfait*

$$\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})_1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{s})_1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|}, \tag{3.18}$$

avec, pour $j = 1, 2$*,*

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y})_j = \mathrm{x}_j - \mathrm{y}_j.$$

Démonstration. Calculons la dérivée première de la fonction $\phi_{\mathbf{y}}$, dont l'expression au point $\mathbf{x}$ est donnée par la relation (3.14). Pour tout $\mathbf{x} = (\mathrm{x}_1, 0) \in \mathcal{M}$ et $\mathbf{y} = (\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2) \in \Omega_{RE} \setminus \{\mathbf{s}, \widetilde{\mathbf{s}}\}$, la norme du vecteur $(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ s'écrit

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(\mathrm{x}_1 - \mathrm{y}_1)^2 + (\mathrm{x}_2 - \mathrm{y}_2)^2},$$

et pour $j = 1, 2$, sa dérivée partielle par rapport à x_j a pour expression

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})_j}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}. \tag{3.19}$$

Nous en déduisons ainsi la dérivée première de $\phi_{\mathbf{y}}$

$$\forall \mathrm{x}_1 \in [a, b], \qquad \phi'_{\mathbf{y}}(\mathrm{x}_1) = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})_1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{s})_1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|}, \tag{3.20}$$

ce qui permet de conclure. □

Pour tout point $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$, introduisons les demi-droites ouvertes $\mathcal{D}_{\mathbf{xs}}$ et $\mathcal{D}_{\mathbf{x}\widetilde{\mathbf{s}}}$ respectivement d'origine $\mathbf{x}$ (exclue) passant par $\mathbf{s}$ et d'origine $\mathbf{x}$ (exclue) passant par $\widetilde{\mathbf{s}}$:

$$\mathcal{D}_{\mathbf{xs}} = \left\{ \mathbf{y} \in \Omega_{RE} \text{ tel que } \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{s}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|} \right\}, \tag{3.21}$$

et

$$\mathcal{D}_{\mathbf{x}\widetilde{\mathbf{s}}} = \left\{ \mathbf{y} \in \Omega_{RE} \text{ tel que } \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} = \frac{\mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{s}}}{\|\mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{s}}\|} \right\}. \tag{3.22}$$

Nous verrons plus loin que la fonction $\phi_{\mathbf{y}}$ possède un point critique si et seulement si $\mathbf{y}$ est un point d'une demi-droite $\mathcal{D}_{\mathbf{xs}}$ ou $\mathcal{D}_{\mathbf{x}\widetilde{\mathbf{s}}}$. Commençons par énoncer deux relations sur les intersections de ces demi-droites.

Lemme 3.5. *Soient deux points* $\mathbf{x}$ *et* $\mathbf{x}'$ *de* $\mathcal{M}$*. Nous avons alors d'une part*

$$\mathcal{D}_{\mathbf{xs}} \bigcap \mathcal{D}_{\mathbf{x}'\widetilde{\mathbf{s}}} = \emptyset,$$

et d'autre part, si $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$*,*

$$\mathcal{D}_{\mathbf{xs}} \bigcap \mathcal{D}_{\mathbf{x}'\mathbf{s}} = \{\mathbf{s}\}.$$

Démonstration. Soient $\mathbf{x} = (\mathrm{x}_1, 0)$ et $\mathbf{x}' = (\mathrm{x}'_1, 0)$ deux points de $\mathcal{M}$. Prenons un point $\mathbf{y}$ de $\mathcal{D}_{\mathbf{xs}}$. D'après la définition (3.21) de la demi-droite $\mathcal{D}_{\mathbf{xs}}$, nous avons

$$\frac{\mathrm{y}_2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} = \frac{\mathrm{s}_2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}.$$

Comme $\mathrm{s}_2 > 0$, nous avons alors $\mathrm{y}_2 > 0$. Ainsi, la demi-droite $\mathcal{D}_{\mathbf{xs}}$ est entièrement inclue dans le demi-plan $x_2 > 0$. De même, la demi-droite $\mathcal{D}_{\mathbf{x}'\widetilde{\mathbf{s}}}$ l'est dans le demi-plan $x_2 < 0$. Par conséquent, l'intersection entre $\mathcal{D}_{\mathbf{xs}}$ et $\mathcal{D}_{\mathbf{x}'\widetilde{\mathbf{s}}}$ est vide.

Supposons maintenant que $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$ et de plus que les demi-droites $\mathcal{D}_{\mathbf{xs}}$ et $\mathcal{D}_{\mathbf{x}'\mathbf{s}}$ sont confondues. Ainsi, les trois points $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ et $\mathbf{s}$ appartiennent à la même demi-droite. Les vecteurs $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ et $(\mathbf{x} - \mathbf{s})$ sont alors linéairement dépendants et il existe un réel γ tel que

$$\mathbf{x} - \mathbf{s} = \gamma(\mathbf{x}' - \mathbf{s}).$$

En prenant la deuxième coordonnée de l'égalité ci-dessus, comme $\mathrm{x}_2 = 0$ et $\mathrm{x}'_2 = 0$, il vient que

$$\mathrm{s}_2 = \gamma \mathrm{s}_2,$$

soit $\gamma = 1$. Les points $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ sont alors confondus, ce qui est contraire à l'hypothèse énoncée plus haut. Par conséquent, les demi-droites $\mathcal{D}_{\mathbf{xs}}$ et $\mathcal{D}_{\mathbf{x's}}$ ne sont pas confondues. Elles ne peuvent alors qu'être sécantes en un point ou être parallèles. Or, d'après leurs définitions (3.21) et (3.22), $\mathbf{s}$ est un point d'intersection de ces deux demi-droites. Nous avons alors, pour tout point $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ de $\mathcal{M}$ tels que $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$:

$$\mathcal{D}_{\mathbf{xs}} \bigcap \mathcal{D}_{\mathbf{x's}} = \{\mathbf{s}\}.$$

□

A l'aide des demi-droites $\mathcal{D}_{\mathbf{xs}}$ et $\mathcal{D}_{\mathbf{x}\widetilde{\mathbf{s}}}$ définies plus haut, caractérisons plus précisément les points $\mathbf{y}$ tels que la fonction $\phi_{\mathbf{y}}$ possède un point critique.

Lemme 3.6. *Soit $\mathbf{y} \in \Omega_{RE}$ tel que $\mathbf{y} \neq \mathbf{s}$ et $\mathbf{y} \neq \widetilde{\mathbf{s}}$. Le réel $\mathrm{x}_1 \in [a, b]$ est un point critique de la fonction $\phi_{\mathbf{y}}$ si et seulement si $\mathbf{y}$ appartient soit à la demi-droite $\mathcal{D}_{\mathbf{xs}}$ soit à la demi-droite $\mathcal{D}_{\mathbf{x}\widetilde{\mathbf{s}}}$, avec $\mathbf{x} = (\mathrm{x}_1, 0)$. De plus, si la fonction $\phi_{\mathbf{y}}$ possède un point critique, alors celui-ci est unique.*

Démonstration. Prenons un point $\mathbf{y} \in \Omega_{RE}$, avec $\mathbf{y} \neq \mathbf{s}$ et $\mathbf{y} \neq \widetilde{\mathbf{s}}$ et montrons ce lemme par double implication. Supposons que la fonction $\phi_{\mathbf{y}}$ possède un point critique $\mathrm{x}_1 \in [a, b]$ et notons $\mathbf{x} = (\mathrm{x}_1, 0)$ le point de $\mathcal{M}$ associé. D'après le lemme 3.4, l'égalité suivante est satisfaite

$$\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})_1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{s})_1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|}.$$

En prenant le carré de cette expression, il vient que

$$\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})_1^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{s})_1^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|^2},$$

soit encore

$$\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})_1^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|^2} - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{s})_1^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|^2}.$$

Comme $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{y})_1^2 + \mathrm{y}_2^2$ et $\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{s})_1^2 + \mathrm{s}_2^2$, l'égalité ci-dessus implique que

$$\frac{\mathrm{y}_2^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} = \frac{\mathrm{s}_2^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|^2}.$$

Nous allons maintenant distinguer deux cas, selon le signe de y_2 (remarquons tout d'abord que $\mathrm{y}_2 \neq 0$ puisque $\mathrm{s}_2 \neq 0$). Supposons que la deuxième coordonnée de $\mathbf{y}$ vérifie $\mathrm{y}_2 > 0$. Nous avons alors

$$\frac{\mathrm{y}_2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} = \frac{\mathrm{s}_2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|},$$

et par conséquent l'égalité vectorielle suivante

$$\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{s}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|}.$$

En d'autres termes, le point $\mathbf{y}$ appartient à la demi-droite $\mathcal{D}_{\mathbf{xs}}$. De la même manière, en supposant que $\mathrm{y}_2 < 0$, il vient que

$$\frac{\mathrm{y}_2}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} = -\frac{\mathrm{s}_2}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|}.$$

Comme $\widetilde{\mathbf{s}} = (\mathrm{s}_1, -\mathrm{s}_2)$ et $\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\| = \|\mathbf{x}-\widetilde{\mathbf{s}}\|$, l'égalité suivante est alors satisfaite

$$\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} = \frac{\mathbf{x}-\widetilde{\mathbf{s}}}{\|\mathbf{x}-\widetilde{\mathbf{s}}\|},$$

et le point $\mathbf{y}$ est un élément de la demi-droite $\mathcal{D}_{\mathbf{x}\widetilde{\mathbf{s}}}$.

Montrons maintenant la deuxième implication. Supposons tout d'abord qu'il existe un point $\mathbf{x} = (\mathrm{x}_1, 0) \in \mathcal{M}$ tel que le point $\mathbf{y}$ soit sur la demi-droite $\mathcal{D}_{\mathbf{xs}}$. D'après la définition (3.21) de l'ensemble $\mathcal{D}_{\mathbf{xs}}$, le point $\mathbf{y}$ satisfait l'égalité

$$\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})_1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} = \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{s})_1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|},$$

et le lemme 3.4 implique alors que x_1 est un point critique de $\phi_{\mathbf{y}}$. De la même manière, supposons qu'il existe un point $\mathbf{x}$ tel que $\mathbf{y}$ appartienne à $\mathcal{D}_{\mathbf{x}\widetilde{\mathbf{s}}}$. Nous avons alors, d'après la définition (3.22) de $\mathcal{D}_{\mathbf{x}\widetilde{\mathbf{s}}}$,

$$\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} = \frac{\mathbf{x}-\widetilde{\mathbf{s}}}{\|\mathbf{x}-\widetilde{\mathbf{s}}\|}.$$

Comme $\widetilde{\mathbf{s}} = (\mathrm{s}_1, -\mathrm{s}_2)$ et $\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\| = \|\mathbf{x}-\widetilde{\mathbf{s}}\|$, alors en prenant la première coordonnée de l'égalité ci-dessus, il vient que

$$\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})_1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} = \frac{(\mathbf{x}-\widetilde{\mathbf{s}})_1}{\|\mathbf{x}-\widetilde{\mathbf{s}}\|} = \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{s})_1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|}.$$

Le lemme 3.4 permet alors d'affirmer que le point x_1 est un point critique de $\phi_{\mathbf{y}}$.

Il nous reste à démontrer l'unicité du point stationnaire. Prenons $\mathbf{y} \in \mathcal{C}$ et un point critique $\mathrm{x}_1 \in [a, b]$ de $\phi_{\mathbf{y}}$ (nous venons de montrer son existence). D'après ce qui précède, le point $\mathbf{y}$ appartient alors soit à la demi-droite $\mathcal{D}_{\mathbf{xs}}$, soit à la demi-droite $\mathcal{D}_{\mathbf{x}\widetilde{\mathbf{s}}}$, avec $\mathbf{x} = (\mathrm{x}_1, 0) \in \mathcal{M}$. Supposons que la fonction $\phi_{\mathbf{y}}$ possède un autre point critique $\mathrm{x}_1' \in [a, b]$. Le point $\mathbf{y}$ est alors aussi un élément soit de $\mathcal{D}_{\mathbf{x}'\mathbf{s}}$, soit de $\mathcal{D}_{\mathbf{x}'\widetilde{\mathbf{s}}}$, avec $\mathbf{x}' = (\mathrm{x}_1', 0)$. Le point $\mathbf{y}$ vérifie donc

$$\mathbf{y} \in \left(\mathcal{D}_{\mathbf{xs}} \bigcap \mathcal{D}_{\mathbf{x}'\mathbf{s}}\right) \bigcup \left(\mathcal{D}_{\mathbf{xs}} \bigcap \mathcal{D}_{\mathbf{x}'\widetilde{\mathbf{s}}}\right) \bigcup \left(\mathcal{D}_{\mathbf{x}\widetilde{\mathbf{s}}} \bigcap \mathcal{D}_{\mathbf{x}'\mathbf{s}}\right) \bigcup \left(\mathcal{D}_{\mathbf{x}\widetilde{\mathbf{s}}} \bigcap \mathcal{D}_{\mathbf{x}'\widetilde{\mathbf{s}}}\right).$$

Le lemme 3.5 permet de simplifier cette relation

$$\mathbf{y} \in \{\mathbf{s}\} \bigcup \emptyset \bigcup \emptyset \bigcup \{\widetilde{\mathbf{s}}\} = \{\mathbf{s}, \widetilde{\mathbf{s}}\}.$$

Or, $\mathbf{y}$ est différent de $\mathbf{s}$ et de $\widetilde{\mathbf{s}}$. Les points $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ sont donc confondus et le point critique de la fonction $\phi_{\mathbf{y}}$, lorsqu'il existe, est unique. □

Introduisons maintenant l'ensemble $\mathcal{C}$, union de toutes les demi-droites $\mathcal{D}_{\mathbf{xs}}$ et $\mathcal{D}_{\mathbf{x}\widetilde{\mathbf{s}}}$, privé des points $\mathbf{s}$ et $\widetilde{\mathbf{s}}$:

$$\mathcal{C} = \left(\bigcup_{\mathbf{x}\in\mathcal{M}} \mathcal{D}_{\mathbf{xs}}\right) \bigcup \left(\bigcup_{\mathbf{x}\in\mathcal{M}} \mathcal{D}_{\mathbf{x}\widetilde{\mathbf{s}}}\right) \setminus \{\mathbf{s}, \widetilde{\mathbf{s}}\}. \tag{3.23}$$

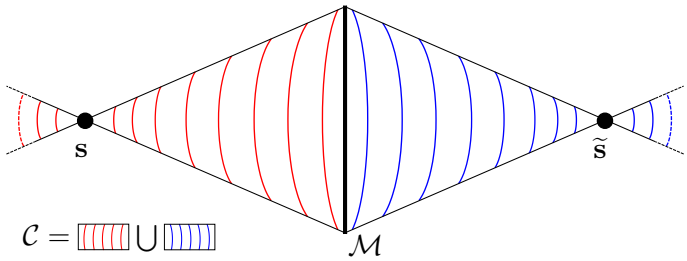


FIGURE 3.5 – Illustration du domaine $\mathcal{C}$ dans le cadre d'un miroir sous forme de segment.

L'ensemble $\mathcal{C}$ est l'union de deux cônes de base $\mathcal{M}$ et de sommet respectif $\mathbf{s}$ et $\widetilde{\mathbf{s}}$. Une illustration de l'ensemble $\mathcal{C}$ est proposée sur la figure 3.2.2. Clairement, d'après le lemme précédent, la fonction $\phi_{\mathbf{y}}$ possède un point critique si et seulement si $\mathbf{y} \in \mathcal{C}$.

Pour appliquer complètement le théorème 3.3, il nous reste à évaluer les dérivées successives de $\phi_{\mathbf{y}}$ au point critique.

Lemme 3.7. *Soient $\mathbf{y} \in \mathcal{C}$ et $\mathrm{x}_1 \in [a, b]$ le point critique de la fonction $\phi_{\mathbf{y}}$. Alors la dérivée seconde de $\phi_{\mathbf{y}}$ en x_1 n'est pas nulle :*

$$\phi''_{\mathbf{y}}(\mathrm{x}_1) \neq 0.$$

Démonstration. Soient $\mathbf{y} \in \mathcal{C}$ et x_1 le point critique de la fonction $\phi_{\mathbf{y}}$. Soit de plus $\mathbf{x} = (\mathrm{x}_1, 0)$ le point de $\mathcal{M}$ associé à x_1. Nous utilisons la relation (3.19) ainsi que l'expression (3.20) de la dérivée première de $\phi_{\mathbf{y}}$ pour obtenir sa dérivée seconde au point x_1 :

$$\phi''(\mathrm{x}_1) = \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}\left[1 - \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})_1^2}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}\right] - \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|}\left[1 - \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{s})_1^2}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|^2}\right].$$

La relation (3.18) satisfaite par le point critique x_1 implique alors que

$$\phi''(\mathrm{x}_1) = \left[\frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} - \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|}\right]\left[1 - \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{s})_1^2}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|^2}\right],$$

soit encore, comme $\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|^2 = (\mathbf{x}-\mathbf{s})_1^2 + (\mathbf{x}-\mathbf{s})_2^2 = (\mathbf{x}-\mathbf{s})_1^2 + \mathrm{s}_2^2$,

$$\phi''(\mathrm{x}_1) = \left[\frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|} - \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}\right]\left[\frac{\mathrm{s}_2^2}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|^2}\right].$$

D'après le lemme 3.6, le point $\mathbf{y}$ appartient soit à la demi-droite $\mathcal{D}_{\mathbf{xs}}$, soit à la demi-droite $\mathcal{D}_{\mathbf{x}\widetilde{\mathbf{s}}}$. Si $\mathbf{y}$ est un élément de $\mathcal{D}_{\mathbf{xs}}$ et comme $\mathbf{y} \neq \mathbf{s}$, il vient alors que $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \neq \|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|$. De même, si $\mathbf{y}$ appartient à $\mathcal{D}_{\mathbf{x}\widetilde{\mathbf{s}}}$, nous avons $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \neq \|\mathbf{x}-\widetilde{\mathbf{s}}\|$. Comme $\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\| = \|\mathbf{x}-\widetilde{\mathbf{s}}\|$, il vient finalement que

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \neq \|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|.$$

Comme s_2 est de plus supposé non nul, nous en déduisons alors que $\phi''(\mathrm{x}_1) \neq 0$. □

Nous disposons maintenant de tous les ingrédients pour obtenir le comportement asymptotique de l'intégrale $J_{\mathbf{y}}(k)$ lorsque k tend vers l'infini, et, par conséquent, de $u_{RE}(\mathbf{y}, k)$.

Proposition 3.8. *Dans le cadre de la dimension deux avec un miroir à retournement temporel $\mathcal{M}$ sous forme de segment, défini par (3.8), le champ rétro-propagé $u_{RE}(\cdot\,,k)$, donné par (3.9), est focalisée sur les points $\mathbf{s}$ et $\widetilde{\mathbf{s}}$ lorsque k tend vers l'infini, dans le sens où*

- *Si $\mathbf{y}=\mathbf{s}$ ou $\mathbf{y}=\widetilde{\mathbf{s}}$, alors, pour tout nombre d'onde $k>0$,*

$$u_{RE}(\mathbf{s},k)=u_{RE}(\widetilde{\mathbf{s}},k)=\frac{1}{16}\int_{\mathcal{M}}\left|H_0^{(1)}(k\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|)\right|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}=\frac{1}{k}\frac{1}{8\pi}\int_{\mathcal{M}}\frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|^2}\,\mathrm{d}\mathbf{x}+O\left(k^{-2}\right).$$

- *Si $\mathbf{y}\in\mathcal{C}$, où l'ensemble $\mathcal{C}$ est défini par (3.23), alors*

$$|u_{RE}(\mathbf{y},k)|=O\left(k^{-3/2}\right),\qquad k\longrightarrow+\infty.$$

- *Si $\mathbf{y}\notin\mathcal{C}$, $\mathbf{y}\neq\mathbf{s}$ et $\mathbf{y}\neq\widetilde{\mathbf{s}}$, alors*

$$|u_{RE}(\mathbf{y},k)|=O\left(k^{-2}\right),\qquad k\longrightarrow+\infty.$$

Démonstration. Rappelons que, d'après (3.12),

$$\forall\mathbf{y}\in\Omega_{RE},\qquad u_{RE}(\mathbf{y},k)=\frac{1}{k}J_{\mathbf{y}}(k)+O\left(\frac{1}{k^2}\right),\qquad \text{lorsque } k\longrightarrow+\infty.$$

Aux points $\mathbf{y}=\mathbf{s}$ et $\mathbf{y}=\widetilde{\mathbf{s}}$, alors la fonction $\phi_{\mathbf{y}}$ est identiquement nulle, d'après le lemme 3.1. L'intégrale $J_{\mathbf{y}}(k)$ s'écrit alors, pour tout nombre d'onde k

$$J_{\mathbf{y}}(k)=\int_a^b\psi_{\mathbf{y}}(\mathrm{x}_1)\,\mathrm{d}\mathrm{x}_1=\frac{1}{8\pi}\int_{\mathcal{M}}\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|^2},$$

et le terme $u_{RE}(\mathbf{y},k)$ a pour expression, d'après (3.9) et (3.12),

$$u_{RE}(\mathbf{y},k)=u_{RE}(\mathbf{s},k)=\frac{1}{16}\int_{\mathcal{M}}\left|H_0^{(1)}(k\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|)\right|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}=\frac{1}{k}\frac{1}{8\pi}\int_{\mathcal{M}}\frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|^2}\,\mathrm{d}\mathbf{x}+O\left(k^{-2}\right).$$

De plus, comme souligné dans la remarque 3.2, l'onde $u_{RE}(\cdot\,,k)$ est symétrique par rapport au MRT. Nous avons alors $u_{RE}(\widetilde{\mathbf{s}},k)=u_{RE}(\mathbf{s},k)$ et l'égalité ci-dessus est vraie aussi au point $\mathbf{y}=\widetilde{\mathbf{s}}$. Supposons maintenant que $\mathbf{y}\in\mathcal{C}$. D'après les lemmes 3.6 et 3.7, la fonction $\phi_{\mathbf{y}}$ possède un unique point critique x_1. De plus, ce point vérifie

$$\phi''_{\mathbf{y}}(\mathrm{x}_1)\neq 0.$$

Par conséquent, le théorème 3.3 permet d'affirmer que

$$J_{\mathbf{y}}(k)=O\left(k^{-1/2}\right),\qquad k\longrightarrow+\infty,$$

et de conclure que

$$|u_{RE}(\mathbf{y},k)|=O\left(k^{-3/2}\right),\qquad k\longrightarrow+\infty.$$

Enfin, supposons que $\mathbf{y}\notin(\mathcal{C}\bigcup\{\mathbf{s},\widetilde{\mathbf{s}}\})$. La fonction $\phi_{\mathbf{y}}$ ne possède alors aucun point critique et le théorème 3.3 permet de conclure directement que

$$J_{\mathbf{y}}(k)=O\left(k^{-1}\right),\qquad k\longrightarrow+\infty,$$

soit, grâce à la relation (3.12), que

$$|u_{RE}(\mathbf{y},k)|=O\left(k^{-2}\right),\qquad k\longrightarrow+\infty.$$

□

Cette proposition montre que le champ rétro-propagé $u_{RE}(\cdot\,,k)$ par le MRT est focalisé sur le point source $\mathbf{s}$ lorsque le nombre d'onde k tend vers l'infini. Cependant, il montre que $u_{RE}(\cdot\,,k)$ est également focalisé sur le point $\widetilde{\mathbf{s}}$, symétrique de $\mathbf{s}$ par rapport au miroir. Ceci est naturellement dû au fait que le MRT $\mathcal{M}$ est d'épaisseur nulle. Un schéma illustrant les zones de décroissance est proposé sur la figure 3.2.2.

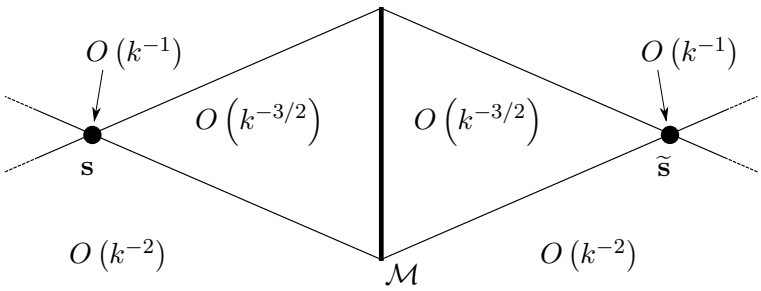


FIGURE 3.6 – Schéma récapitulatif des différentes zones de décroissance du module de u_{RE}

Pour les points $\mathbf{y}$ de $\mathcal{C}$, la décroissance de $|u_{RE}(\mathbf{y},k)|$ est plus lente que pour les points $\mathbf{y}$ n'appartenant pas à $\mathcal{C}$. Physiquement, ceci traduit le fait que $\mathbf{y}$ se situe ou non dans la trajectoire du MRT, l'ensemble $\mathcal{C}$ pouvant alors être interprété comme étant le cône d'émission du miroir.

3.3 Résultats numériques

3.3.1 Approximation numérique

Pour effectuer des simulations de retournement temporel dans l'espace libre, nous devons résoudre les problèmes d'émission (3.1) et de rétro-propagation (3.3) dans un milieu homogène. Nous les rappelons ci-dessous :

$$\begin{cases}(\Delta+k^2)u_E=-\delta_{\mathbf{s}} & (\mathbb{R}^2),\\ u_E \text{ sortant,}\end{cases} \qquad \begin{cases}(\Delta+k^2)u_{RE}=-\overline{u_E}|_{\mathcal{M}} & (\mathbb{R}^2),\\ u_{RE} \text{ sortant.}\end{cases} \tag{3.24}$$

Émission Rétro-propagation

Afin de ne pas surcharger les notations, la dépendance des ondes par rapport à k est à présent implicite. Nous avons vu précédemment que chacun de ces deux problèmes peut être résolu analytiquement. En effet, l'onde u_E du problème d'émission est la fonction de Green $G_k(\cdot\,,\mathbf{s})$ de l'équation de Helmholtz pour un milieu homogène, centrée sur le point source $\mathbf{s}$. Son expression est donnée par la relation (3.2). D'autre part, le champ rétro-propagé u_{RE} par le miroir à retournement temporel s'obtient par l'intégrale sur le MRT d'un produit de fonctions de Green (voir équation (3.4)). Ainsi, aucune méthode de résolution numérique d'équation aux dérivées partielles n'est nécessaire pour obtenir les champs émis u_E et rétro-propagé u_{RE}, dans l'espace libre.

Dans un milieu multi-diffusif, les deux problèmes modélisant une expérience de retournement temporel sont les problèmes d'émission (3.6) et de rétro-propagation (3.7), rappelés

ci-dessous

$$\begin{cases}(\Delta + k^2n^2)v_E = -\delta_{\mathbf{s}} & (\mathbb{R}^2),\\ v_E \text{ sortant,}\end{cases} \qquad \begin{cases}(\Delta + k^2n^2)v_{RE} = -\overline{v_E}|_{\mathcal{M}} & (\mathbb{R}^2),\\ v_{RE} \text{ sortant.}\end{cases} \tag{3.25}$$

Émission Rétro-propagation

Les obstacles sont supposés placés aléatoirement et en grand nombre. Les deux problèmes (3.25) ne peuvent être résolus analytiquement. Une approximation numérique est alors nécessaire pour calculer d'une part l'onde émise v_E par le point source $\mathbf{s}$, et d'autre part le champs rétro-propagé v_{RE} par le miroir à retournement temporel. Notre choix d'une méthode de résolution s'est porté sur la méthode des éléments finis, couplée à une couche absorbante de type PML. Cette technique présente l'avantage de fournir directement la valeur de l'approximation de la solution sur un domaine d'étude contrairement à, par exemple, une résolution par formulation intégrale où un post-traitement est nécessaire.

3.3.2 Mise en œuvre de la méthode des éléments finis

Bien que nous disposons des solutions exactes des problèmes (3.24) posés dans le milieu homogène, nous sommes amenés à calculer numériquement une approximation de ces solutions par la méthode des éléments finis. En effet, pour comparer les propriétés de focalisation des milieux homogène et hétérogène, il est préférable d'employer la même méthode de résolution numérique. Cependant, les problèmes (3.24) peuvent être vus comme un cas particulier des problèmes (3.25), avec un contraste n constant égal à 1. De plus, les deux systèmes composants (3.25) sont également similaires, seuls les termes sources (membre de droite de l'équation de Helmholtz) diffèrent. C'est pourquoi, dans cette section, nous nous concentrons uniquement sur la résolution numérique du problème (3.25), et, plus généralement, au problème générique suivant

$$\begin{cases}(\Delta + k^2n^2)u = -f & (\mathbb{R}^2)\\ u \text{ sortant,}\end{cases} \tag{3.26}$$

où f est le second membre, représentant $\delta_{\mathbf{s}}$, $\overline{u_E}|_{\mathcal{M}}$ ou encore $\overline{v_E}|_{\mathcal{M}}$.

Logiciels et dimension

Nous utilisons le logiciel libre Gmsh [1] [68] pour le maillage du domaine, la visualisation et le traitement de la solution. La résolution numérique est effectuée à l'aide du solveur éléments finis associé GetDP [2] [56], logiciel libre aussi. Nous traitons, a posteriori, certains résultats sous Matlab. Enfin, le système linéaire construit par la méthode des éléments finis est résolu par une méthode directe (la taille du système le permettant pour nos machines de calcul), le solveur utilisé étant UMFPack [3] [49] ou, préférentiellement, MUMPS [4] [2] (solveur direct parallèle). Les simulations numériques présentées sont effectuées en dimension deux. Soulignons que le passage à la dimension trois ne pose de problème qu'au niveau du matériel disponible : les coûts de calcul et surtout la place mémoire nécessaires sont trop importants. Du point de vue de l'implémentation, le code construit sous GetDP est effectué pour la

1. http://www.geuz.org/gmsh/
2. http://www.geuz.org/getdp/
3. http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/umfpack/
4. http://graal.ens-lyon.fr/MUMPS/

dimension trois et la géométrie considérée est relativement simple pour être adaptée à la dimension trois.

Un miroir à retournement temporel avec une faible épaisseur

Afin d'éviter des effets de singularités induits par un MRT d'épaisseur nulle comme dans l'étude théorique, le miroir à retournement temporel prendra ici la forme d'un rectangle de hauteur H et d'épaisseur $\delta_{\mathcal{M}}$. En pratique, cette épaisseur est de l'ordre de $H/75$, très petit devant l'ouverture H, représentant quelques mailles éléments finis. Une illustration du domaine de calcul est présentée sur la figure 3.8. Soulignons par ailleurs que les résultats théoriques de focalisation du champ rétro-propagé sur le point source $\mathbf{s}$, décrits dans le paragraphe 3.2.2, restent valables pour un MRT légèrement épais. La preuve étant proche de celle présentée pour un MRT d'épaisseur nulle, nous l'avons placée dans l'annexe A.

Approximation de la distribution de Dirac

Pour résoudre le problème (3.25) par la méthode des éléments finis, nous devons approcher la distribution de Dirac $\delta_{\mathbf{s}}$ centrée sur $\mathbf{s}$. Pour ce faire, nous choisissons la fonction "chapeau" $\eta_{\mathbf{s}}$, définie par

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \qquad \eta_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{3}{\pi \varepsilon_{\mathbf{s}}^2}\left(1 - \dfrac{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|}{\varepsilon_{\mathbf{s}}}\right) & \text{si } \mathbf{x} \in B_{\varepsilon_{\mathbf{s}}} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

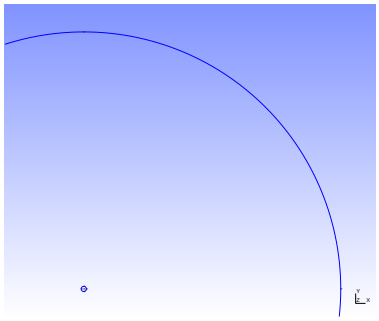
où $B_{\varepsilon_{\mathbf{s}}}$ est le disque de centre $\mathbf{s}$ et de rayon $\varepsilon_{\mathbf{s}}$:

$$B_{\varepsilon_{\mathbf{s}}} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \|\mathbf{x}-\mathbf{s}\| < \varepsilon_{\mathbf{s}} \right\}.$$

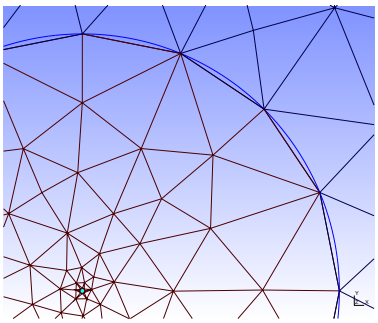
La fonction $\eta_{\mathbf{s}}$ est de plus d'intégrale totale sur $\mathbb{R}^2$ égale à 1 et est centrée sur $\mathbf{s}$. On peut montrer facilement que, lorsque le rayon $\varepsilon_{\mathbf{s}}$ tend vers 0, la suite de fonctions $(\eta_{\mathbf{s}})_{\varepsilon_{\mathbf{s}}}$ converge vers la distribution de Dirac $\delta_{\mathbf{s}}$, au sens des distributions. En pratique, nous fixons le rayon $\varepsilon_{\mathbf{s}}$ à une très petite valeur, de l'ordre de $\lambda/1000$, où λ est la longueur d'onde. La discrétisation du disque est elle aussi fixée à $\varepsilon_{\mathbf{s}}$: quelques éléments seulement sont utilisés pour mailler le disque $B_{\varepsilon_{\mathbf{s}}}$. D'autre part, pour ne pas mailler globalement le domaine de calcul avec cette discrétisation très fine, nous introduisons un deuxième cercle, de même centre $\mathbf{s}$ et de rayon $100\varepsilon_{\mathbf{s}} = \lambda/10$. Nous imposons sur ce cercle une densité de points de discrétisation beaucoup plus faible (de l'ordre, par exemple, de $\lambda/15$). Un exemple de maillage de ces deux cercles est représenté sur la figure 3.7, obtenu avec les paramètres géométriques décrits précédemment. Dans la suite, pour simplifier, nous confondons souvent le point source $\mathbf{s}$ avec le disque $B_{\varepsilon_{\mathbf{s}}}$.

Troncature du domaine par une PML

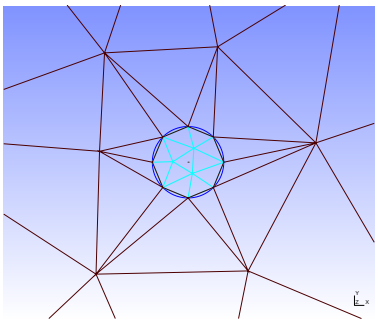
Les problèmes d'émission et de rétro-propagation de (3.25) sont tous deux posés dans $\mathbb{R}^2$. Afin de les résoudre numériquement, nous devons nous ramener à un problème posé en domaine borné, en évitant toute réflexion parasite sur les bords artificiels ainsi introduits. Plusieurs techniques ont été élaborées dans ce but, comme l'introduction d'une frontière artificielle avec des conditions aux limites exactes sur le bord [80], des conditions transparentes ou absorbantes [20, 57], ou encore la construction d'une couche volumique absorbante



(a) Les deux cercles concentriques centrés sur $\mathbf{s}$. Le disque $B_{\varepsilon_{\mathbf{s}}}$ étant situé en bas à gauche.



(b) Maillage du domaine présenté sur la figure (a).



(c) Agrandissement au niveau du point source $\mathbf{s}$. En bleu turquoise le maillage du disque $B_{\varepsilon_{\mathbf{s}}}$ supportant $\eta_{\mathbf{s}}$.

FIGURE 3.7 – Exemple de maillage obtenu au niveau du support de la fonction $\eta_{\mathbf{s}}$ (au voisinage du point source $\mathbf{s}$). La figure (a) représente uniquement les deux cercles avant discrétisation, le maillage obtenu est présenté sur la figure (b). Enfin, un agrandissement au niveau du point source $\mathbf{s}$ est proposé sur la troisième figure. Pour une meilleure visibilité, les deux cercles concentriques centrés sur $\mathbf{s}$ sont également représentés sur les figures (en bleu foncé).

comme la PML (pour “Perfectly Matched Layer”) [25]. Une revue des différentes méthodes de troncature est proposée par exemple dans [14]. Notre avons fait le choix d’introduire une PML autour du domaine d’étude, qui dissipe les ondes la pénétrant et réduit fortement les réflexions parasites. Cette technique a été introduite par Bérenger en 1994 [25] dans le cadre de l’électromagnétisme en régime transitoire. Une démonstration mathématique de son efficacité a été donnée par Collino et Monk en 1998 dans [42], dans le cadre de l’électromagnétisme en régime harmonique, pour une PML infinie (non tronquée), en coordonnées cylindriques. De nombreux travaux ont permis d’améliorer ou d’adapter cette méthode à d’autres équations aux dérivées partielles, comme à l’équation de Helmholtz scalaire par exemple dans [69], ou encore à la propagation d’ondes acoustiques et hydrodynamiques dans un écoulement de fluide [21]. Nous décrivons dans ce paragraphe la mise en œuvre de cette méthode pour résoudre numériquement le problème générique (3.26) introduit en début de section.

En premier lieu, construisons le domaine d’étude Ω_e, sur lequel nous calculons une ap-

proximation de la solution. Cet ensemble est choisi rectangulaire :

$$\Omega_e =]\alpha_1, \beta_1[\times]\alpha_2, \beta_2[,$$

avec α_1, b_1, α_2 et β_2 quatre constantes réelles telles que $\alpha_j < \beta_j$ pour $j = 1, 2$. Naturellement, cet ensemble est suffisamment large pour contenir le miroir à retournement temporel $\mathcal{M}$, le point source $\mathbf{s}$ (le disque $B_{\varepsilon_\mathbf{s}}$ le représentant) et les éventuels obstacles Ω^-. Autour du rectangle Ω_e, nous introduisons la couche absorbante Ω_{PML} définie par

$$\Omega_{\mathrm{PML}} = \Big(\Big]\alpha_1 - \delta_1^{\mathrm{PML}}, \beta_1 + \delta_1^{\mathrm{PML}}\Big[\times \Big]\alpha_2 - \delta_2^{\mathrm{PML}}, \beta_2 + \delta_2^{\mathrm{PML}}\Big[\Big) \setminus \overline{\Omega_e},$$

où δ_1^{PML} et δ_2^{PML} sont les épaisseurs respectivement dans la direction $\overrightarrow{Ox_1}$ et $\overrightarrow{Ox_2}$. Notons Σ_{int} la frontière de Ω_e, commune à Ω_{PML}. Enfin, introduisons $\Omega_T = \overline{\Omega_e} \bigcup \Omega_{\mathrm{PML}}$ le domaine total de calcul et Σ_{PML} sa frontière (commune avec Ω_{PML}). Un schéma récapitulant les différents domaines et leurs frontières est proposé sur la figure 3.8. En pratique, les épaisseurs δ_1^{PML} et δ_2^{PML} correspondent à une dizaine de mailles éléments finis. Ces longueurs dépendent naturellement de l'efficacité de la PML : plus celle-ci dissipe efficacement les ondes, plus les épaisseurs peuvent être réduites. L'approximation u_{PML} de u dans Ω_e, obtenue par l'intro-

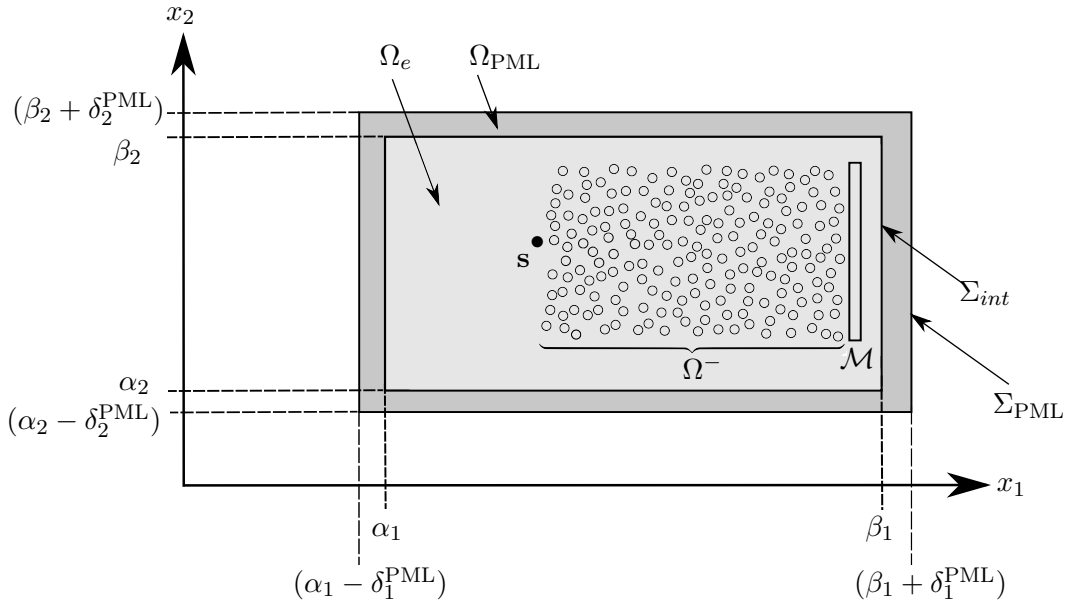


FIGURE 3.8 – Représentation du domaine Ω_T, composé des sous-domaines Ω_e et Ω_{PML} ainsi que de leurs frontières Σ_{int} et Σ_{PML}. Le domaine Ω_e est le domaine d'étude sur lequel une approximation de la solution est calculée. Il contient notamment le miroir à retournement temporel $\mathcal{M}$, les obstacles Ω^- et la source $\mathbf{s}$. L'épaisseur de la PML dans la direction x_1 est δ_1^{PML}, et δ_2^{PML} dans la direction x_2.

duction d'une PML, est solution d'une équation aux dérivées partielles dans Ω_T et satisfait également une condition aux limites sur le bord Σ_{PML}. A l'intérieur de Ω_{PML}, le champ u_{PML} est dissipé au fur et à mesure de sa progression. Cette dissipation est obtenue par une modification de l'équation de Helmholtz. Commençons cependant par expliciter la condition aux limites que nous avons choisie. Si la PML est suffisamment épaisse et efficace alors l'onde

est presque nulle au voisinage de Σ_{PML}. La condition aux limites sur ce bord peut alors ne pas jouer de rôle significatif, comme ce fut le cas dans nos simulations numériques. C'est pourquoi nous avons décidé d'appliquer une condition de Dirichlet homogène. Toutefois, il est possible de placer une condition aux limites absorbantes pour augmenter la précision et/ou diminuer l'épaisseur de la PML. Notons par ailleurs que la condition d'onde sortante est prise en compte par cette dissipation de la couche absorbante.

Concentrons-nous maintenant sur le point majeur des PML. Comme expliqué brièvement plus haut, la dissipation dans la couche absorbante Ω_{PML} est obtenue par une modification de l'équation de Helmholtz à l'intérieur de Ω_{PML}. Plus précisément, le problème satisfait par u_{PML}, approximation de u par l'introduction de la PML, est le suivant

$$\begin{cases} \partial_{x_1}\left(\dfrac{S_{x_2}}{S_{x_1}}\partial_{x_1}u_{\mathrm{PML}}\right)+\partial_{x_2}\left(\dfrac{S_{x_1}}{S_{x_2}}\partial_{x_2}u_{\mathrm{PML}}\right)+k^2S_{x_1}S_{x_2}u_{\mathrm{PML}}=f & (\Omega_T) \\ u_{\mathrm{PML}}=0 & (\Sigma_{\mathrm{PML}}) \end{cases} \tag{3.27}$$

avec

$$\forall \mathbf{x}=(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)\in\overline{\Omega_T}, \qquad \begin{cases} S_{x_1}(\mathbf{x})=1-\dfrac{\sigma_{x_1}(\mathrm{x}_1)}{ik}, \\ S_{x_2}(\mathbf{x})=1-\dfrac{\sigma_{x_2}(\mathrm{x}_2)}{ik}. \end{cases}$$

Les fonctions σ_{x_1} et σ_{x_2} sont appelées fonction de dissipation. Lorsque que σ_{x_1} et σ_{x_2} sont nulles, l'équation (3.27) se ramène à l'équation de Helmholtz classique, c'est pourquoi en général ces fonctions s'annulent sur le domaine d'étude Ω_e. En revanche, lorsque ces fonctions sont positives, cela revient à rajouter un terme de dissipation dans l'équation. Remarquons qu'en introduisant la matrice

$$A=\begin{bmatrix} \frac{S_{x_2}}{S_{x_1}} & 0 \\ 0 & \frac{S_{x_2}}{S_{x_1}} \end{bmatrix},$$

le problème (3.27) peut se réécrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} \mathrm{div}(A\nabla u_{\mathrm{PML}})+k^2n^2u_{\mathrm{PML}}=f & (\Omega_T) \\ u_{\mathrm{PML}}=0 & (\Sigma_{\mathrm{PML}}) \end{cases} \tag{3.28}$$

Le choix des fonctions σ_{x_1} et σ_{x_2} a naturellement une influence sur le pouvoir dissipatif de la PML. Pour nos simulations, nous avons fait le choix simple de fonctions linéaires et, de plus, continues sur Ω_T, afin de limiter toute réflexion parasite. Etant constamment nulles dans Ω_e, ces fonctions restent de valeur nulle à l'interface Σ_{int}. Sur la frontière Σ_{PML}, nous fixons leur valeur de manière empirique à 100. Ce choix est purement déterminé par l'expérience afin de dissiper suffisamment les ondes. En résumé, les deux fonctions de dissipation σ_{x_1} et σ_{x_2} sont définies par :

$$\forall j=1,2,\forall \mathbf{x}=(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)\in\overline{\Omega_T}, \qquad \sigma_{x_j}(\mathbf{x})=\begin{cases} 0 & \text{si } \alpha_j<\mathrm{x}_j<\beta_j, \\ \dfrac{100\,|\mathrm{x}_j-\beta_j|}{\delta_j^{\mathrm{PML}}} & \text{si } \beta_j\le \mathrm{x}_j\le\beta_j+\delta_j^{\mathrm{PML}}, \\ \dfrac{100\,|\mathrm{x}_j-\alpha_j|}{\delta_j^{\mathrm{PML}}} & \text{si } \alpha_j-\delta_j^{\mathrm{PML}}\le \mathrm{x}_j\le\alpha_j. \end{cases}$$

Sur la figure 3.9, nous présentons l'allure de la fonction σ_{x_j} en fonction de x_j, à x_i fixé, avec $\alpha_i - \delta_i^{\mathrm{PML}} \leq \mathrm{x}_i \leq \beta_i + \delta_i^{\mathrm{PML}}$, pour $i, j = 1, 2$ avec $i \neq j$. A l'intérieur de Ω_e, les fonctions de dissipation sont nulles, tandis que dans la couche absorbante Ω_{PML}, au moins une fonction de dissipation ne l'est pas. Notons que dans les "coins" de Ω_{PML}, les deux fonctions σ_{x_1} et σ_{x_2} sont non nulles.

Terminons en remarquant que le choix des fonctions de dissipation peut être amélioré. En effet, des fonctions à croissance quadratique peuvent être employées, voire même des fonctions à intégrale non bornée dans la PML telles que les fonctions proposées par Bermudez et. al [26], permettant notamment de réduire l'épaisseur de la PML.

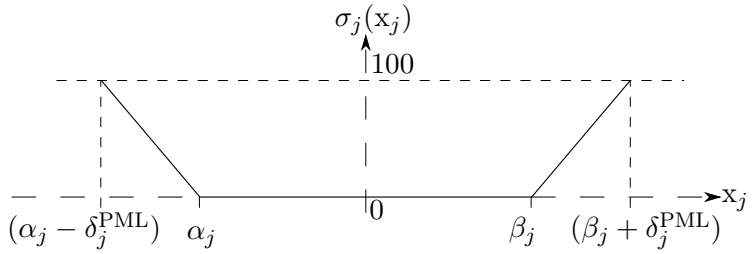


FIGURE 3.9 – Représentation de la fonction σ_{x_j} en fonction de x_j. La coordonnée x_i est fixée entre $\alpha_i - \delta_i^{\mathrm{PML}}$ et $\beta_i + \delta_i^{\mathrm{PML}}$, pour $i, j = 1, 2$ avec $i \neq j$. Dans le segment $[\alpha_j, \beta_j]$, la fonction σ_{x_j} est nulle. En particulier, les deux fonctions de dissipation sont nulles dans Ω_e, mais ne sont pas nulles simultanément dans Ω_{PML}.

Formulation faible des problèmes avec PML

Nous donnons maintenant les formulations faibles des deux problèmes de (3.25). Commençons par le premier problème, que nous rappelons

$$\begin{cases} (\Delta + k^2 n^2) v_E = -\delta_{\mathbf{s}} & (\mathbb{R}^2), \\ v_E \text{ sortant.} \end{cases}$$

Notons $\widetilde{v_E}$ l'approximation de v_E sur Ω_e, calculée avec la PML. En appliquant la démarche décrite ci-dessus, la fonction $\widetilde{v_E}$ est la solution du problème suivant

$$\begin{cases} \mathrm{div}(A \nabla \widetilde{v_E}) + k^2 n^2 S_{x_1} S_{x_2} \widetilde{v_E} = -\eta_{\mathbf{s}} & (\Omega_T), \\ \tilde{v_E} = 0 & (\Sigma_{\mathrm{PML}}), \end{cases}$$

dont la formulation formulation faible s'écrit

$$\begin{cases} \text{Trouver } \widetilde{v_E} \in H_0^1(\Omega_T) \text{ tel que, pour tout } v \text{ de } H_0^1(\Omega_T), \\ \displaystyle\int_{\Omega_T} A \nabla \widetilde{v_E} \cdot \nabla v \, \mathrm{d}\Omega_T - \int_{\Omega_T} k^2 n^2 S_{x_1} S_{x_2} \, \widetilde{v_E} \, v \, \mathrm{d}\Omega_T - \int_{\|\mathbf{x}\| < \varepsilon_{\mathbf{s}}} \eta_{\mathbf{s}} \, v \, \mathrm{d}\mathbf{x} = 0. \end{cases}$$

De la même manière, la solution v_{RE} du deuxième problème de (3.25), rappelé ci-dessous

$$\begin{cases} (\Delta + k^2 n^2) v_{RE} = -\overline{v_E}|_{\mathcal{M}} & (\mathbb{R}^2), \\ v_{RE} \text{ sortant,} \end{cases}$$

est approchée par la solution $\widetilde{v_{RE}}$ de la formulation faible suivante

$$\begin{cases} \text{Trouver } \widetilde{v_{RE}} \in H_0^1(\Omega_T) \text{ tel que, pour tout } v \text{ de } H_0^1(\Omega_T), \\ \displaystyle\int_{\Omega_T} A\nabla\widetilde{v_{RE}} \cdot \nabla v \, \mathrm{d}\Omega_T - \int_{\Omega_T} k^2 n^2 S_{x_1} S_2 \, \widetilde{v_{RE}} \, v \, \mathrm{d}\Omega_T - \int_{\mathcal{M}} \overline{\widetilde{v_E}} \, v \, \mathrm{d}\mathcal{M} = 0. \end{cases}$$

Rappelons que, pour les simulation dans l'espace libre, les formulations faibles associées sont obtenues en prenant un contraste n égal à 1 dans Ω^-.

Raffinement de maillage et géométrie : généralités

Dans toutes nos simulations, les fonctions de bases de la méthode des éléments finis sont des fonctions affines par morceaux (éléments finis P1).

Nous donnons un exemple de raffinement de maillage utilisé lors de nos simulations. Celui-ci doit naturellement prendre en compte les nombres d'onde k et kn (apparaissant à l'intérieur des obstacles). C'est pourquoi nous introduisons un nombre d'onde fictif k_{dis}, de longueur d'onde fictive associée $\lambda_{\text{dis}} = 2\pi/k_{\text{dis}}$. Ces deux paramètres prennent en compte l'indice de contraste à l'intérieur des obstacles (par exemple : $k_{\text{dis}} = \max(k, nk)$). Généralement, nous avons utilisé la densité de discrétisation suivante :

- Miroir $\mathcal{M}$: $\lambda_{\text{dis}}/15$.
- Disque $B_{\varepsilon_{\mathbf{s}}}$: $\varepsilon_{\mathbf{s}} = \lambda_{\text{dis}}/1000$.
- Cercle empêchant la propagation de la discrétisation fine de $B_{\varepsilon_{\mathbf{s}}}$: $\lambda_{\text{dis}}/15$.
- Frontière Σ_{int} de Ω_e : $\lambda_{\text{dis}}/10$.
- Troncature Σ_{PML} du domaine : $\lambda_{\text{dis}}/10$.
- Obstacles : $\lambda_{\text{dis}}/15$.

D'autre part, les paramètres de la géométrie (ouverture du miroir, distance entre le MRT et la source, ...) dépendent aussi du nombre d'onde k. Afin de pouvoir modifier le nombre d'onde sans changer la géométrie, nous introduisons un nombre d'onde fictif k_{geo}, et sa longueur d'onde associée $\lambda_{\text{geo}} = 2\pi/k_{\text{geo}}$. Ces valeurs sont utilisées comme nombre d'onde et longueur d'onde de référence lors de la construction du domaine.

Nous présentons un exemple de domaine obtenu avec Gmsh (avant maillage) sur la figure 3.10. Pour cette géométrie, nous avons placés 400 obstacles circulaires de rayon $\lambda_{\text{geo}}/5$. La distance D entre la source et le MRT est de $20\lambda_{\text{geo}}$, la hauteur H du miroir est fixée à $15\lambda_{\text{geo}}$ et son épaisseur à $\lambda_{\text{geo}}/5$. L'épaisseur de la PML est de l'ordre de λ_{geo}, dans les deux directions. Par ailleurs le rayon $\varepsilon_{\mathbf{s}}$ du disque $B_{\varepsilon_{\mathbf{s}}}$ est fixé à $\lambda_{\text{geo}}/1000$, et le deuxième cercle concentrique à $\lambda_{\text{geo}}/10$. Enfin, le domaine Ω_e (le rectangle "interne") est de longueur environ $44\lambda_{\text{geo}}$ et de hauteur $21\lambda_{\text{geo}}$. Soulignons que le domaine d'étude Ω_e est ici étendu afin de visualiser la solution approchée sur un grand domaine, et non à cause d'éventuelles réflexions parasites dues à la PML. En prenant un nombre d'onde égal à $1.8k_{\text{geo}}$ à l'intérieur des obstacles et avec les paramètres de discrétisation exposés ci-dessus, le maillage obtenu contient un peu plus d'un million de triangles pour environ 550 000 degrés de liberté.

Remarque sur le crime inverse

La résolution numérique des problèmes d'émission et de rétro-propagation est basée sur le même maillage. Afin de prendre en compte le phénomène purement numérique de "crime inverse", deux maillages distincts auraient pu être utilisés (un par problème). Cependant,

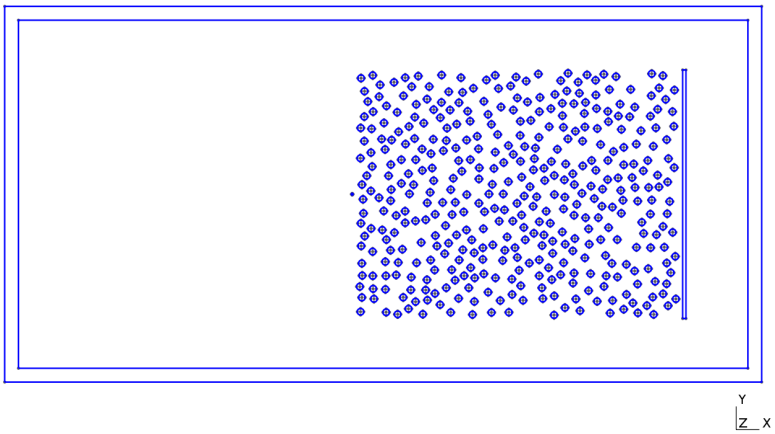


FIGURE 3.10 – Exemple de géométrie obtenue avec Gmsh pour 400 obstacles de rayon $\lambda_{\text{geo}}/5$ placés entre la source $\mathbf{s}$ et le miroir à retournement temporel $\mathcal{M}$. Le domaine d'étude possède une largeur d'environ $44\lambda_{\text{geo}}$ pour une hauteur de $21\lambda_{\text{geo}}$. La PML possède une épaisseur d'environ λ_{geo}. Avec un indice de contraste de 1.8 à l'intérieur des obstacles, le maillage associé à cette géométrie comporte environ 1 million d'éléments pour 550 000 points.

dans l'espace libre, nous disposons des expressions explicites des solutions modélisant l'émission et la rétro-propagation. Nous disposons alors de deux méthodes pour calculer le champ rétro-propagé : une méthode directe et la méthode par éléments finis. Nous avons comparé les solutions obtenues dans le deux cas et les résultats obtenus étaient très similaires. Le "crime inverse" ne semble donc pas jouer de rôle dans nos simulations.

3.3.3 Milieu homogène

Focalisation : généralités

Rappelons que dans un milieu homogène nous disposons de l'expression analytique (3.4) du champ rétro-propagé u_{RE} :

$$\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{M}}, \qquad u_{RE}(\mathbf{y}) = \int_{\mathcal{M}} G_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\overline{G_k(\mathbf{x},\mathbf{s})}\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

De plus, pour un MRT $\mathcal{M}$ sous forme de segment, la proposition A.7 montre que, lorsque k tend vers l'infini,

$$k\,|u_{RE}(\mathbf{y})| = \begin{cases} O\left(1\right) & \text{si } \mathbf{y} = \mathbf{s} \text{ ou } \mathbf{y} = \widetilde{\mathbf{s}}, \\ O\left(k^{-1/2}\right) & \text{si } \mathbf{y} \in \mathcal{C}, \\ O\left(k^{-1}\right) & \text{si } \mathbf{y} \notin \mathcal{C}, \mathbf{y} \neq \mathbf{s} \text{ et } \mathbf{y} \neq \widetilde{\mathbf{s}}, \end{cases}$$

où $\mathcal{C}$ est le cône de lumière du MRT (voir figure 3.2.2) et $\widetilde{\mathbf{s}}$ le symétrique de $\mathbf{s}$ par rapport au MRT. En particulier, la décroissance de $|u_{RE}(\mathbf{y})|$ par rapport au nombre d'onde k est plus rapide en dehors du cône $\mathcal{C}$ qu'à l'intérieur.

Dans ce paragraphe, nous fixons le nombre d'onde "géométrique" k_{geo} à 10 et plaçons le MRT symétriquement par rapport au point source, à une distance $D = 20\lambda_{\text{geo}}$ de $\mathbf{s}$.

La hauteur du miroir à retournement temporel est fixée à $H = 15\lambda_{\text{geo}}$ et son épaisseur à $\delta_{\mathcal{M}} = \lambda_{\text{geo}}/5$. Une représentation de la géométrie est présentée sur la figure 3.11(a).

Pour commencer, nous prenons $k = k_{\text{geo}}(= 10)$ et calculons le champ rétro-propagé u_{RE}, à l'aide de la méthode des éléments finis présentée dans le paragraphe précédent. Nous représentons le module de l'onde (en dehors de la PML) sur la figure 3.11(b). Nous constatons tout d'abord que l'amplitude maximale du champ se situe autour du point source $\mathbf{s}$ dans une zone (appelée "tache focale") prenant la forme d'une ellipse allongée dans la direction $\overrightarrow{Ox_2}$. De plus, lorsque le nombre d'onde augmente, cette tache focale se resserre, comme on peut s'y attendre, autour de $\mathbf{s}$ comme le montrent les figures 3.11(c) et 3.11(d) pour respectivement $k = 1.5k_{\text{geo}}$ et $k = 2k_{\text{geo}}$. En d'autres termes, la focalisation est de plus en plus précise lorsque la fréquence augmente. Nous détaillons plus loin comment nous comparons la qualité de la focalisation. L'amplitude de l'onde rétro-propagée semble diminuer avec l'accroissement de la fréquence, notamment autour de la source. Ceci n'est, en fait, aucunement un problème. En effet, le problème (3.3), dont est solution le champ u_{RE}, est linéaire, le MRT peut alors amplifier le signal sans altérer la focalisation. Par ailleurs, sur les trois figures 3.11(b), 3.11(c) et 3.11(d), nous observons bien que le module du champ rétro-propagé est plus important à l'intérieur du cône $\mathcal{C}$ qu'à l'extérieur de celui-ci. De plus, nous pouvons remarquer une certaine symétrie du module de l'onde par rapport au MRT. Nous avons vu dans la remarque 3.2 que le champ rétro-propagé est symétrique par rapport au miroir à retournement temporel lorsque celui-ci est d'épaisseur nul. Cette propriété disparait dès lors que le MRT est épais. Dans notre cas, l'épaisseur $\delta_{\mathcal{M}}$ n'est pas nulle mais est très petite. Ainsi, le champ obtenu conserve une certaine symétrie par rapport au MRT, tout en étant de module plus important dans le demi-plan contenant le point source que dans l'autre demi-plan.

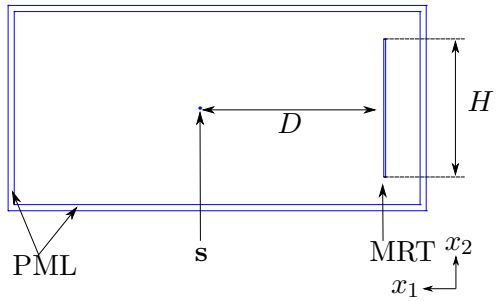
Mesure de la qualité de focalisation par la largeur à mi-hauteur

Comme le miroir à retournement temporel est d'ouverture finie, il reçoit moins d'information, ce qui dégrade la qualité de la focalisation. Pour évaluer la précision de la focalisation, nous effectuons une coupe au niveau de la source dans la direction $\overrightarrow{Ox_2}$ (parallèlement au MRT) du module du champ rétro-propagé, comme illustrée par la figure 3.12. Nous normalisons ensuite le résultat obtenu par sa valeur maximale. Enfin, nous mesurons la largeur à mi-hauteur du pic central (largeur pour une ordonnée de 0.5). Cette valeur permet de quantifier la qualité de focalisation de l'onde émise par le MRT. Dans la suite, nous la noterons $\Delta_{\text{hom}}^{num}$ lorsque le milieu est homogène et $\Delta_{\text{diff}}^{num}$ pour un milieu multi-diffusant.

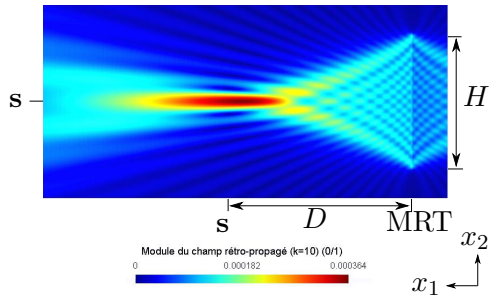
Nous reportons sur la figure 3.13 les modules (normalisés) des champs rétro-propagés de la figure 3.11, autour du point source. Comme toute la géométrie dépend de λ_{geo}, nous rapportons en abscisse la coordonnée x_2 à la longueur d'onde λ_{geo}. Nous calculons de plus les largeurs à mi-hauteur associées :

k	$k_{\text{geo}}(= 10)$	$1.5k_{\text{geo}}(= 15)$	$2k_{\text{geo}}(= 20)$
$\Delta_{\text{hom}}^{num}$	1.072	0.725	0.551

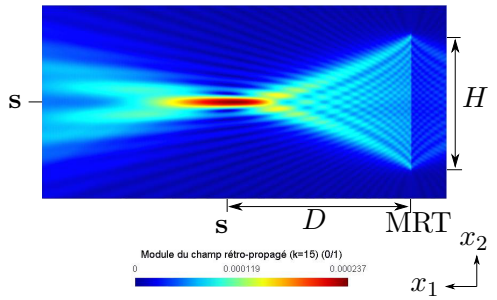
Nous constatons sur la figure 3.13 que le pic central se rétrécit avec l'augmentation de la longueur d'onde k. Il en va naturellement de même pour les largeurs à mi-hauteur. Autrement dit, la qualité de la focalisation est meilleure lorsque le nombre d'onde augmente.



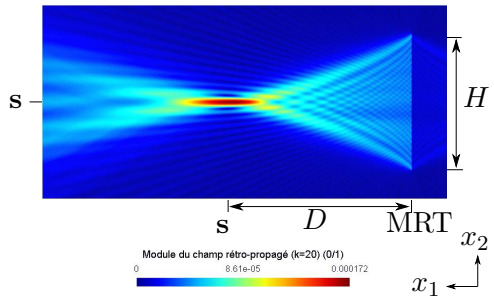
(a) Géométrie du domaine avec $D = 20\lambda_{\text{geo}}$ et $H = 15\lambda_{\text{geo}}$. L'épaisseur $\delta_{\mathcal{M}} = \lambda_{\text{geo}}/5$ du MRT n'apparait pas sur le schéma.



(b) $k = k_{\text{geo}} (= 10)$



(c) $k = 1.5k_{\text{geo}} = 15$



(d) $k = 2k_{\text{geo}} = 20$

FIGURE 3.11 – Géométrie du domaine (fig. (a)) et module du champ rétro-propagé dans le milieu homogène pour $k = k_{\text{geo}} (= 10)$, $k = 1.5k_{\text{geo}} (= 15)$ et $k = 2k_{\text{geo}} (= 20)$. Les paramètres géométriques sont les suivants : $D = 20\lambda_{\text{geo}}$, $H = 15\lambda_{\text{geo}}$ et $\delta_{\mathcal{M}} = \lambda_{\text{geo}}/5$ (non indiqué sur les figures).

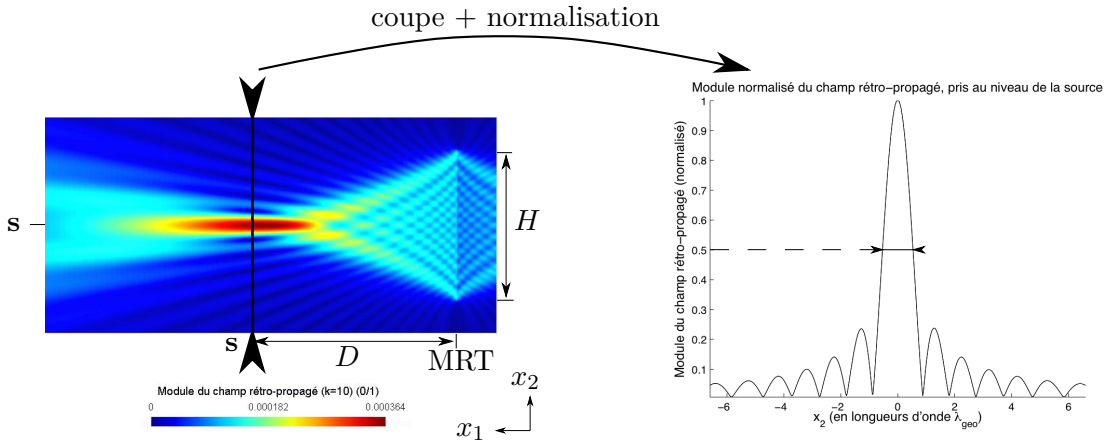


FIGURE 3.12 – Coupe au niveau de la source du module du champ rétro-propagé (figure de gauche). Après normalisation, nous calculons la largeur à mi-hauteur correspondant à la largeur du pic central (figure de droite).

Ceci rejoint, en quelque sorte, les résultats de la proposition A.7 sur la focalisation du champ rétro-propagé u_{RE}.

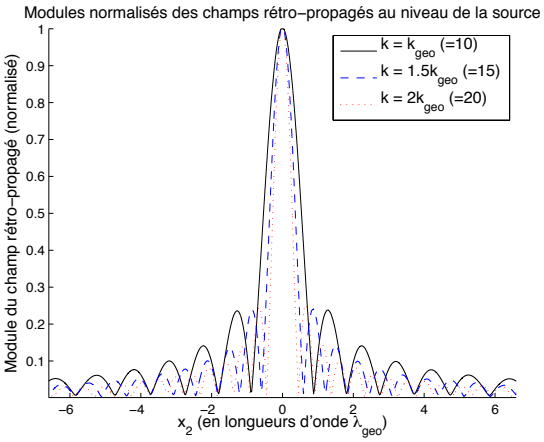


FIGURE 3.13 – Modules normalisés des champs rétro-propagés calculés au niveau de la source pour $k = k_{\text{geo}}(= 10)$, $k = 1.5k_{\text{geo}}(= 15)$ et $k = 2k_{\text{geo}}(= 20)$. En abscisse est indiqué la coordonnée x_2 en longueurs d'onde λ_{geo}. Le lobe central se resserre avec l'augmentation de la longueur d'onde k.

Limite de diffraction et ouverture apparente

Nous avons reporté, sur la figure 3.14(a), l'évolution de la largeur à mi-hauteur en fonction de H, pour un milieu homogène, en dimension deux Nous observons alors que la focalisation s'améliore avec l'ouverture du miroir à retournement temporel. Ceci est normal : plus l'ouverture du MRT est grande, plus celui-ci reçoit d'information.

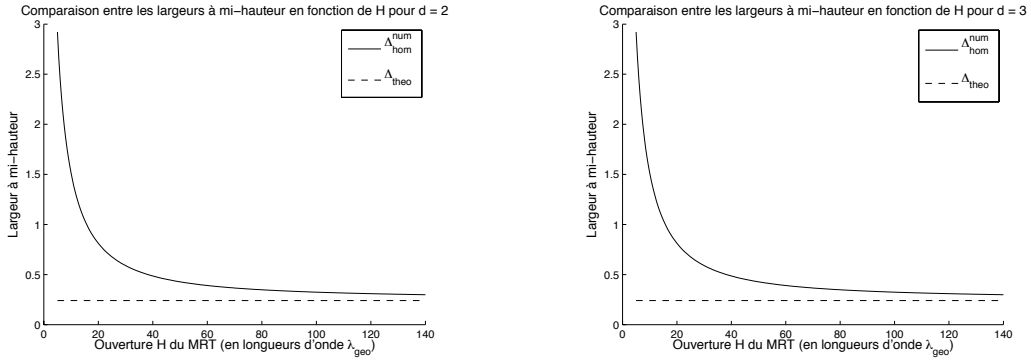
Dans un milieu faiblement hétérogène, nous avons réussi à obtenir une meilleure qualité de focalisation par rapport au milieu homogène. Un ordre de grandeur du gain s'obtient par le calcul de l'ouverture $H_{éq}$ "apparente" (ou "équivalente") de MRT. Cette valeur correspondant à la taille du miroir nécessaire pour obtenir une résolution similaire dans un milieu homogène. En pratique, nous estimons cette valeur numériquement, à l'aide de la courbe 3.14(a). Par ailleurs, lorsque H tend vers l'infini, la largeur à mi-hauteur tend vers une limite Δ_{theo}, appelée limite de diffraction. Cette valeur dépend de la dimension d du problème et nous l'estimons par :

$$\Delta_{\text{theo}} = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2}\dfrac{\xi_0}{\pi} & \text{si } d = 2, \\ \dfrac{\lambda}{2} & \text{si } d = 3, \end{cases} \tag{3.29}$$

où ξ_0 est la première racine (positive) de la fonction de Bessel J_0 d'ordre 0 ($\xi_0 \simeq 2.4048$). Nous avons reporté sur les figures 3.14(a) et 3.14(b) la valeur de Δ_{theo}, en trait pointillé, selon la dimension considérée. Ces courbes montrent que la largeur à mi-hauteur semble bien tendre vers Δ_{theo} lorsque la hauteur du MRT tend vers l'infini, en dimension deux ou trois. Notons que la dimension du problème intervient dans l'expression (3.2) de la fonction de Green et par conséquent dans les expressions (3.2) et (3.4) respectivement des champs u_E et u_{RE}.

Remarque 3.9. *Les courbes de la figure 3.14 n'ont pas été obtenues par la méthode des éléments finis. En effet, il est plus commode ici d'utiliser directement l'expression analytique (3.4) du champ rétro-propagé u_{RE}, rappelée en début de paragraphe. Le MRT est alors d'une*

épaisseur nulle et l'intégrale (à une variable) sur le segment $\mathcal{M}$ est approchée par la méthode des rectangles.



(a) Avec $d = 2$ et $\Delta_{\text{theo}} = (\lambda\xi_0)/(2\pi)$.

(b) Avec $d = 3$ et $\Delta_{\text{theo}} = \lambda/2$.

FIGURE 3.14 – Évolution de la largeur à mi-hauteur $\Delta_{\text{hom}}^{num}$ en fonction de l'ouverture H du miroir à retournement temporel et comparaison avec la valeur limite Δ_{theo}, donnée par (3.29). La dimension du problème est $d = 2$ sur la figure (a) et $d = 3$ sur la figure (b). Dans les deux cas, nous avons $k = k_{\text{geo}}$, $\lambda = \lambda_{\text{geo}}$ et $D = 20\lambda_{\text{geo}}$.

3.3.4 Milieu multi-diffusif (fréquence fixe)

Placement des obstacles

Nous considérons maintenant un milieu hétérogène, composé de nombreux obstacles circulaires pénétrables placés aléatoirement entre la source et le MRT. Nous parlerons d'une *réalisation* ou d'une *configuration* pour décrire un placement possible des diffuseurs. Dans toute cette section, le nombre d'onde k et la longueur d'onde λ sont fixes et égaux respectivement au nombre d'onde "géométrique" k_{geo} et à la longueur d'onde associée λ_{geo}

$$k = k_{\text{geo}} \qquad \text{et} \qquad \lambda = \lambda_{\text{geo}}.$$

Nous disposons $M = 400$ petits disques de rayon $a = \lambda/5$ dans la boîte

$$[\mathrm{s}_1 + d_{\mathbf{s},\min}, \mathrm{s}_1 + D - d_{\mathcal{M},\min}] \times [\mathrm{s}_2 - H/2, \mathrm{s}_2 + H/2]\,,$$

située entre la source $\mathbf{s}$, à une distance $d_{\mathbf{s},\min}$, et le MRT, à une distance $d_{\mathcal{M},\min}$. Ce domaine rectangulaire est par ailleurs de même hauteur H que le MRT. Nous avons fait le choix de prendre des distances $d_{\mathbf{s},\min}$ et $d_{\mathcal{M},\min}$ égales à $\lambda/5$, petites devant la longueur d'onde. Par ailleurs, la distance entre deux disques est au minimum de $d_{\min} = \lambda/5$ également, soit un écart inter-centres au minimum de $3\lambda/5$. Ainsi, les obstacles sont placés de manière dense et proche de la source et du MRT. Un exemple de configuration est présenté sur la figure 3.10 tandis qu'un schéma récapitulant les différentes distances l'est sur la figure 3.15. En outre, nous choisissons de prendre le même indice à l'intérieur de chaque obstacle. En notant n

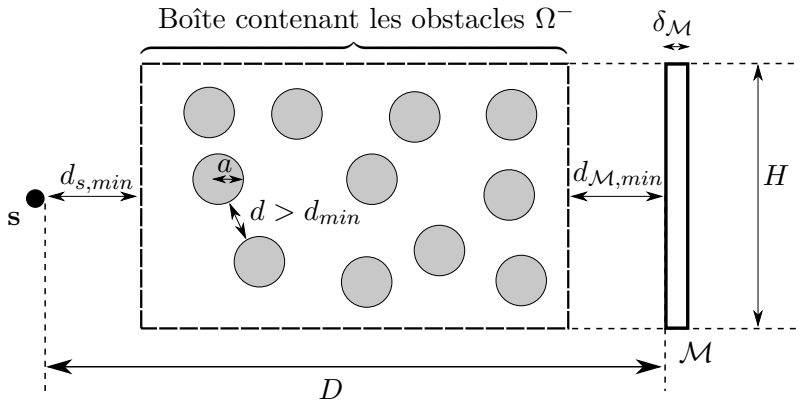


FIGURE 3.15 – Schéma récapitulant les différentes distances intervenant dans la géométrie du domaine. En pratique, les distances $d_{\mathbf{s},\min}$, $d_{\mathcal{M},\min}$ et $d_{\min}$ sont égales à $\lambda/5$, très petites devant D et H. De plus, les obstacles sont petits, de rayon $a = \lambda/5$ et en grand nombre ($M = 400$). Un exemple d'une réalisation de milieu est proposée sur la figure 3.10.

cette constante, nous avons alors :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_T, \qquad n(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega^- \\ \mathrm{n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme nous l'avons souligné précédemment, la densité de points de discrétisation du maillage doit prendre en compte le contraste n, notamment lorsque le nombre d'onde kn à l'intérieur des obstacles est plus grand que le nombre d'onde k du milieu homogène entourant les diffuseurs. Sauf mention contraire, la discrétisation des maillages est basée sur un contraste n = 1.8. La longueur d'onde de discrétisation λ_{dis} est alors associée au nombre d'onde $k_{\text{dis}} = 1.8k = 1.8k_{\text{geo}}$, soit

$$\lambda_{\text{dis}} = \frac{\lambda}{1.8} \left(= \frac{\lambda_{\text{geo}}}{1.8} \right).$$

Terminons en remarquant que le nombre d'onde adimensionné ka est égal à $2\pi/5$, où a est le rayon des obstacles. Le régime de diffraction peut alors être considéré comme plutôt basse fréquence. Par conséquent, une discrétisation de l'ordre de $\lambda_{\text{dis}}/15$ est suffisante pour nos simulations. En outre, les paramètres de discrétisation sont les mêmes que ceux décrits en fin de paragraphe 3.3.2. Afin de comparer précisément les résultats, les simulations effectuées dans un milieu homogène sont obtenues, dans cette section, par la méthode des éléments finis avec un contraste constant $n(\mathbf{x}) = 1$ dans Ω_T.

Simulations numériques pour une réalisation et une fréquence

Nous prenons une configuration d'obstacles et calculons numériquement, pour différentes valeurs de n, le champ rétro-propagé, que nous notons $v_{RE}(\cdot\,;\mathrm{n})$ dans ce paragraphe. Nous commençons par un contraste n = 1.1 faible et représentons sur la figure 3.16(a) le module de $v_{RE}(\cdot\,;\mathrm{n} = 1.1)$ dans le domaine d'étude Ω_e. Comme nous pouvions nous y attendre, l'onde est modifiée par la présence des diffuseurs. Toutefois, la valeur du contraste étant faible, l'allure générale de l'onde est proche de celle obtenue dans un milieu homogène (voir

figure 3.11(b)). En particulier, le module du champ reste maximal autour de la source et les contours du cône $\mathcal{C}$ sont encore visibles.

Comme pour un milieu homogène, nous évaluons la qualité de la focalisation en effectuant une coupe du module du champ au niveau la source. Ensuite, nous normalisons le résultat par rapport à son maximum et calculons, si cela est possible, la largeur à mi-hauteur du pic central. Pour l'exemple de la figure 3.16(a), nous obtenons la courbe (en trait plein) de la figure 3.16(b), que nous comparons avec le milieu homogène (en trait pointillé). Comme la courbe présente un pic au niveau de l'origine, donc au niveau du point source $\mathbf{s}$, nous pouvons calculer la largeur à mi-hauteur :

$$\Delta_{\text{diff}}^{num}(\text{n} = 1.1) = 0.877,$$

qui est à comparée à celle obtenue en milieu homogène

$$\Delta_{\text{hom}}^{num} = 1.058.$$

La présence des diffuseurs améliore ici la qualité de la focalisation. D'autre part, dans un milieu homogène, pour obtenir une précision similaire, l'ouverture $H_{éq}$ du MRT serait environ de

$$H_{éq} \simeq 18\lambda_{\text{geo}} = 1.2H.$$

Cette valeur est obtenue numériquement grâce à la courbe de la figure 3.14(a). Nous avons reproduit cette simulation pour cent configurations différentes et avons observé, dans la grande majorité des cas, une amélioration de la qualité de la focalisation. Pour certaines réalisations, la précision était dégradée, mais seulement faiblement.

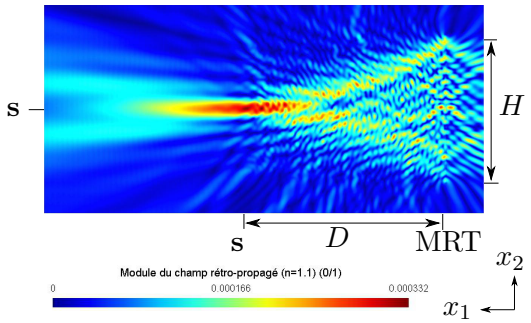
Continuons notre étude en prenant un contraste n = 1.3 plus élevé. Le module du champ rétro-propagé $v_{RE}(\cdot\,;\text{n} = 1.3)$ dans le domaine Ω_e est présenté sur la figure 3.16(c). Les effets de la diffraction multiple sont maintenant plus importants et plus visibles. En particulier, nous constatons que le maximum n'est pas atteint autour du point source, mais à l'intérieur du domaine contenant les obstacles et, de plus, le cône $\mathcal{C}$ ne se devine plus. Toutefois, une légère tache focale apparaît près du point $\mathbf{s}$ et le module normalisé du champ, affiché sur la figure 3.16(d), présente un pic centré sur $\mathbf{s}$. Le calcul de la largeur à mi-hauteur donne alors :

$$\Delta_{\text{diff}}^{num}(\text{n} = 1.3) = 0.429, \qquad \text{soit} \qquad H_{éq} \simeq 49\lambda_{\text{geo}} \simeq 3.267H.$$

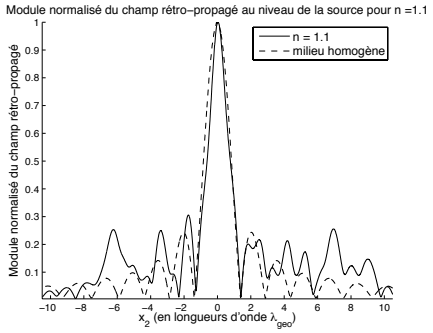
L'ouverture équivalente du MRT dans un milieu homogène est ici de $49\lambda_{\text{geo}}$, soit plus de trois fois l'ouverture réelle du MRT ($15\lambda_{\text{geo}}$). Comme pour un contraste de n = 1.1, cette simulation a été reproduite pour une centaine de configurations d'obstacles différentes. Nous avons alors observé dans certains cas l'apparition de pics secondaires, rendant délicat le calcul de la largeur à mi-hauteur. Nous en montrons un exemple sur la figure 3.17(a).

Terminons par un contraste n = 1.8 élevé. Comme le montre la figure 3.16(e), l'onde est fortement perturbée et semble presque totalement réfléchie par les obstacles. Au niveau de la source, nous constatons, sur la figure 3.16(d), que l'amplitude maximale n'est pas située sur l'origine, c'est à dire sur $\mathbf{s}$. Autrement dit, il n'y a pas focalisation de l'onde rétro-propagée sur le point source. Toutefois, ce résultat dépend de la configuration considérée. En effet, sur la figure 3.17(b) nous représentons un exemple de focalisation très précise obtenue avec n = 1.8. Dans cet exemple, la largeur à mi-hauteur est alors donnée par

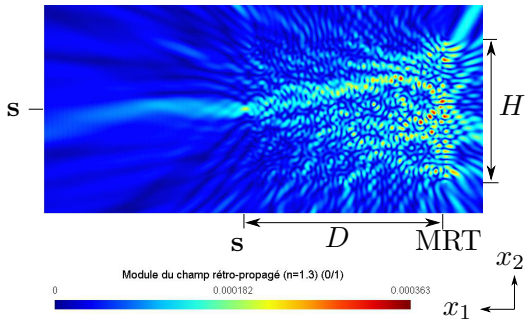
$$\Delta_{\text{diff}}^{num}(\text{n} = 1.8) = 0.312, \qquad \text{soit} \qquad H_{éq} \simeq 115\lambda_{\text{geo}} \simeq \frac{23}{3}H \simeq 7.667H.$$



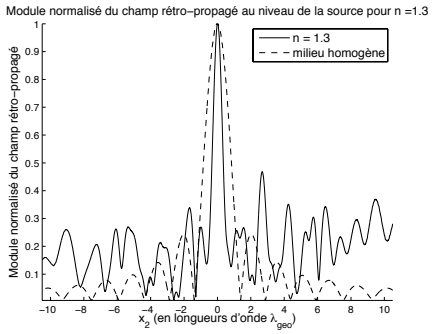
(a) n = 1.1 : module du champ rétro-propagé dans le domaine d'étude Ω_e.



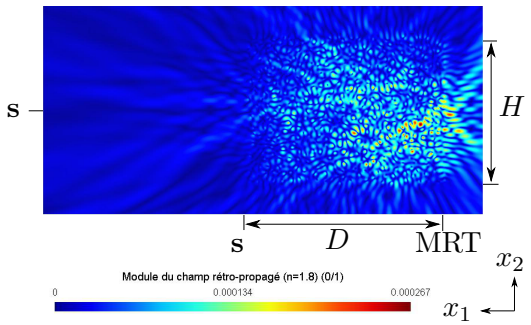
(b) n = 1.1 : module normalisé du champ rétro-propagé au niveau de la source.



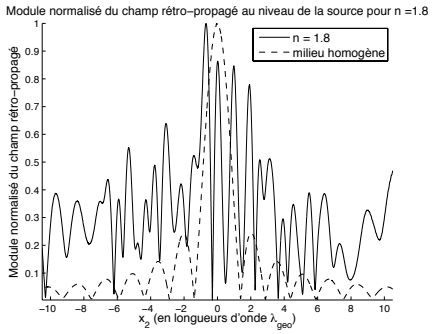
(c) n = 1.3 : module du champ rétro-propagé dans le domaine d'étude Ω_e.



(d) n = 1.3 : module normalisé du champ rétro-propagé au niveau de la source.



(e) n = 1.8 : module du champ rétro-propagé dans le domaine d'étude Ω_e.

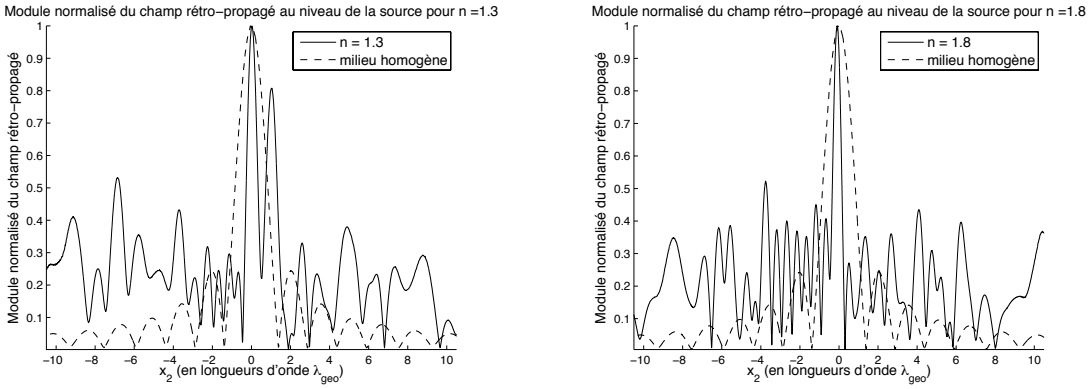


(f) n = 1.8 : module normalisé du champ rétro-propagé au niveau de la source.

FIGURE 3.16 – Module du champ rétro-propagé dans le domaine Ω_e, sur la colonne de gauche, et au niveau de la source (normalisé), sur la colonne de droite, en présence d'hétérogénéités. Le contraste prend pour valeur n = 1.1 (figures (a) et (b)), n = 1.3 (figures (c) et (d)) et n = 1.8 (figures (e) et (f)).

Ici l'ouverture apparente du MRT est égale à plus de 7 fois l'ouverture réelle du miroir à retournement temporel. Toutefois, ce résultat a été obtenu pour une réalisation d'obstacles particulière.

Nous avons effectué les mêmes simulations numériques pour des valeurs de contraste $0 < n \leq 1$. Les résultats que nous avons obtenus sont très similaires à ceux présentés pour $n \geq 1$, c'est pourquoi nous ne les détaillons pas. Lorsque le contraste augmente, la qualité de la focalisation semble être meilleure en présence d'obstacles légèrement diffuseurs. Pour un contraste plus élevé, la précision peut alors être très fine, mais la focalisation peut être dégradée voire même ne plus avoir lieu. C'est pourquoi nous étudions, dans les paragraphes suivants, des résultats de focalisation *en moyenne*, soit sur les configurations d'obstacles, soit sur les fréquences.



(a) n = 1.3 : présence de pics secondaires.

(b) n = 1.8 : focalisation très précise sur le point source **s**.

FIGURE 3.17 – Module du champ rétro-propagé au niveau de la source, normalisé par rapport à son maximum. Sur la figure (a), obtenue avec n = 1.3, des pics secondaires d'amplitude importante apparaissent. En revanche, sur la figure (b), la focalisation est très précise, malgré le contraste élevé n = 1.8.

3.3.5 Moyenne et écart-type sur les réalisations

Nous évaluons maintenant la qualité de la focalisation en moyenne sur les réalisations du milieu. Nous générons pour cela 100 milieux diffusants différents ainsi que leur maillage, en utilisant les mêmes paramètres géométriques introduits dans le paragraphe 3.3.4. Pour chaque valeur du contraste n, nous calculons numériquement les cent champs rétro-propagés dans le milieu Ω_e. Dans un premier temps, nous évaluons la moyenne des largeurs à mi-hauteur, lorsque n varie, puis, dans un deuxième temps, nous effectuons une moyenne sur tous les champs rétro-propagés.

Moyenne des largeurs à mi-hauteur pour un milieu faiblement diffusant

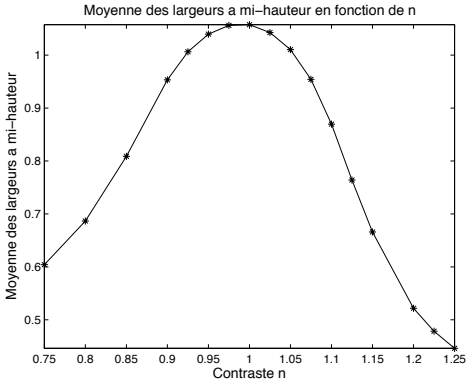
Nous venons de voir que, pour un contraste relativement élevé, le champ peut être diffracté de manière importante et la focalisation sur le point source peut ne pas avoir lieu (voir par exemple la figure 3.16(f)). Nous nous sommes alors restreint, pour cette première étude,

à des contrastes n tels que

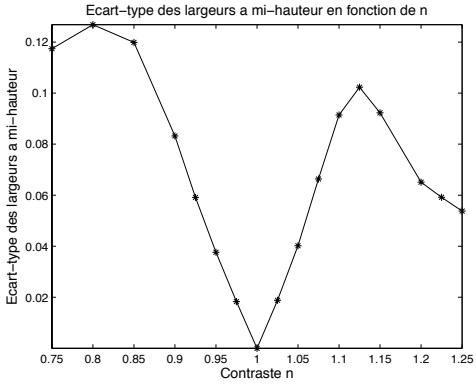
$$0.75 \leq \mathrm{n} \leq 1.275.$$

Ces bornes ont été déterminées empiriquement selon les résultats obtenus. Autrement dit, cet intervalle correspond aux cas où chaque champ rétro-propagé est focalisé. En dehors de ces bornes, il nous est apparu délicat de calculer précisément la largeur à mi-hauteur.

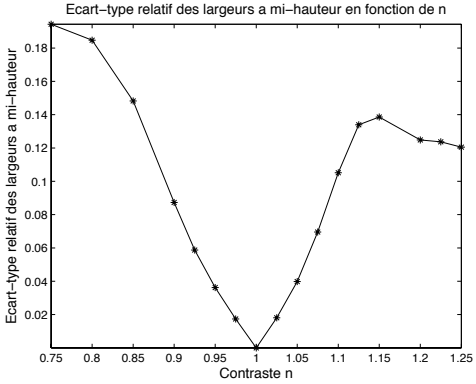
Pour une valeur de contraste n, nous calculons numériquement les cent champs rétro-propagés ainsi que les cent largeurs à mi-hauteur associées. Nous déduisons ensuite la moyenne $\mu(\mathrm{n})$ ainsi que l'écart-type $\sigma(\mathrm{n})$ de cet échantillon. En faisant varier n entre 0.75 et 1.275 avec un pas variant entre 0.05 et 0.025, nous obtenons les courbes de la figure 3.18. La figure 3.18(a) montre que, plus le contraste n s'écarte de 1, c'est à dire plus $|1 - \mathrm{n}|$ est



(a) Moyenne $\mu(\mathrm{n})$ des largeurs à mi-hauteur.



(b) Ecart-type $\sigma(\mathrm{n})$ des largeurs à mi-hauteur.



(c) Ecart-type relatif $\dfrac{\sigma(\mathrm{n})}{\mu(\mathrm{n})}$ des largeurs à mi-hauteur.

FIGURE 3.18 – Moyenne μ, écart-type σ et écart-type relatif σ/μ des largeurs à mi-hauteur pour 100 configurations d'obstacles en fonction du contraste n.

grand, plus la moyenne des largeurs à mi-hauteur diminue. Autrement dit, en moyenne, la focalisation devient plus précise. D'autre part, d'après la figure 3.18(b), nous constatons que l'écart-type ne suit pas de comportement monotone. Nous avons alors préféré étudier l'écart relatif $\dfrac{\sigma(\mathrm{n})}{\mu(\mathrm{n})}$, dont la courbe est celle de la figure 3.18(c). Globalement, nous constatons que

$\dfrac{\sigma(\mathrm{n})}{\mu(\mathrm{n})}$ est croissant en fonction de $|1-\mathrm{n}|$. Autrement dit, plus le contraste est important et plus la largeur à mi-hauteur, calculée pour une réalisation donnée, peut être éloignée de la largeur moyenne du milieu. Ceci est dû aux effets de la diffraction qui sont plus importants au fur et à mesure que $|1-\mathrm{n}|$ croît.

Champs moyens

Nous avons vu qu'il n'est pas toujours possible d'obtenir la largeur à mi-hauteur du champ rétro-propagé pour tous les contrastes. Toutefois, nous pouvons toujours calculer un champ moyen sur le domaine d'étude. Numérotons les cent configurations d'obstacles de 1 à 100 par l'indice $j = 1, \ldots, 100$ et notons de plus $v_{RE}(\cdot\,;\mathrm{n}, j)$ l'onde rétro-propagée par le MRT pour un contraste n dans le milieu numéro j. Le champ moyen $\widehat{v}_{RE}(\cdot\,;\mathrm{n})$ s'obtient alors par

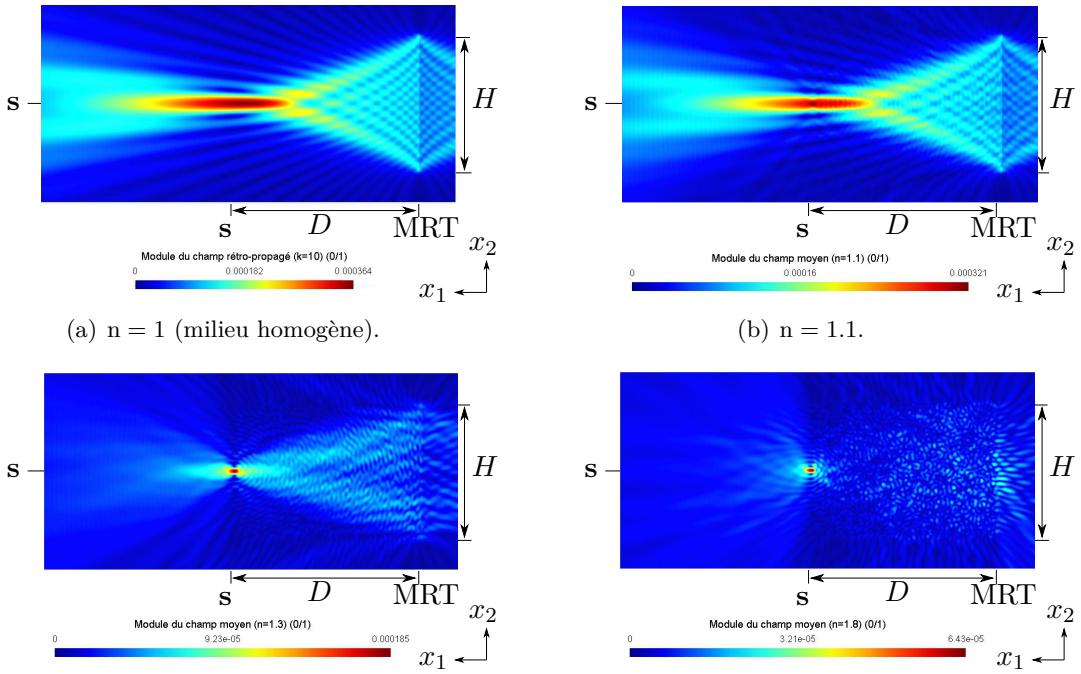
$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_e, \qquad \widehat{v}_{RE}(\mathbf{x};\mathrm{n}) = \frac{1}{100}\sum_{j=1}^{100} v_{RE}(\mathbf{x};\mathrm{n}, j).$$

Commençons par un contraste faible de $\mathrm{n} = 1.1$. Le module du champ moyen $\widehat{v}_{RE}(\cdot\,;\mathrm{n} = 1.1)$ est présenté sur la figure 3.19(b). Cette figure est très proche de celle obtenue pour un milieu homogène (figure 3.19(a)). En particulier, le module du champ est quasi-symétrique par rapport à l'axe $\overrightarrow{Ox_1}$ et la tache focale ainsi que le cône $\mathcal{C}$ sont clairement visibles.

En augmentant le contraste pour $\mathrm{n} = 1.3$, nous obtenons la figure 3.19(c). Comme précédemment, le module de l'onde rétro-propagée est symétrique par rapport à $\overrightarrow{Ox_1}$. De plus, la tache focale ressort de manière importante, contrairement au cône $\mathcal{C}$. Ainsi, autour du point source, les interférences entre les ondes semblent être constructives alors qu'à l'extérieur de la tache focale, ces interférences semblent être destructrices. Ceci est sans doute dû au placement aléatoire des obstacles. Par ailleurs, la tache focale est nettement resserrée autour de $\mathbf{s}$ par rapport aux cas $\mathrm{n} = 1$ et $\mathrm{n} = 1.1$.

Continuons avec un indice important $\mathrm{n} = 1.8$ dans les obstacles Ω^-, dont le résultat est montré sur la figure 3.19(d). Cette fois-ci le module de l'onde rétro-propagée est principalement concentré sur la tache focale, qui s'est encore resserrée. Remarquons de plus que, sur cette figure, le cône $\mathcal{C}$ n'est plus visible, cependant, nous pouvons deviner les bords de la boîte contenant les obstacles. Nous pouvons également observer que l'amplitude du champ est très faible à l'intérieur de la tache focale, comparé aux contrastes plus faibles. Ceci ne pose en fait pas de problème. En effet, rappelons qu'étant donné que les problèmes (3.25) sont linéaires, nous pouvons amplifier le signal émis par le MRT.

Ainsi, pour chaque champ moyen, nous constatons la présence d'une tache focale. Celle-ci semble de plus se resserrer lorsque le contraste devient plus important. Nous vérifions ce fait en reportant sur les figures 3.20(a) et 3.20(b) les modules (normalisés) des champs rétro-propagés moyens, au niveau de la source, pour $\mathrm{n} = 1$, $\mathrm{n} = 1.1$, $\mathrm{n} = 1.3$ et $\mathrm{n} = 1.8$. Nous constatons d'une part que chaque courbe est presque symétrique par rapport à l'origine ($\mathbf{s}$) et d'autre part que le pic central se rétrécit lorsque n augmente. La focalisation devient plus précise lorsque le contraste est important. Par ailleurs, nous reportons sur la figure 3.21(a) les largeurs à mi-hauteurs des pics centraux en fonction du contraste n. Nous constatons encore une fois la décroissance monotone de la largeur à mi-hauteur du champ moyen en fonction de $|1-\mathrm{n}|$. Autrement dit, les effets de la diffraction influent positivement sur la précision de la focalisation mais en moyenne. Enfin, notons qu'à partir de $\mathrm{n} = 1.3$ environ,



(a) n = 1 (milieu homogène).

(b) n = 1.1.

(c) n = 1.3.

(d) n = 1.8.

FIGURE 3.19 – Module du champ moyen pour différents indices n, obtenu pour cent réalisations de milieux multi-diffusants.

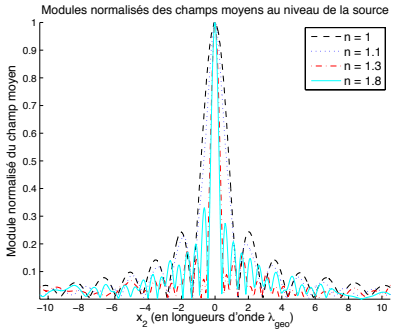
la décroissance de la largeur à mi-hauteur est beaucoup moins importante, pour devenir quasi-constante vers n = 1.7. Nous ne pouvons toutefois pas deviner le comportement pour des contrastes plus élevés. Par ailleurs, des résultats et des conclusions similaires peuvent s'obtenir pour un contraste n plus petit que 1, comme en attestent les figures 3.20(c) et 3.20(d).

Pour conclure, nous comparons sur la figure 3.21(b) les largeurs à mi-hauteurs des champs moyens avec les moyennes des largeurs à mi-hauteurs calculées précédemment (voir figure 3.18(a)). Nous remarquons que, globalement, les deux courbes sont très proches et ont même allure. Pour un contraste n très proche de 1, nous avons presque l'égalité entre la moyenne des largeurs à mi-hauteur des champs rétro-propagés et les largeurs à mi-hauteur des champs moyens, ce qui, a priori, n'est pas nécessairement vrai.

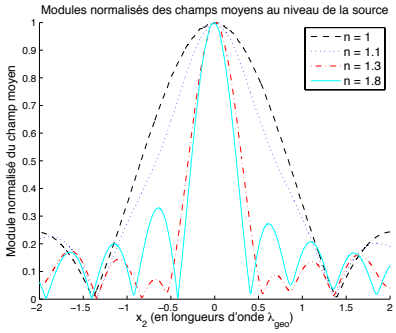
3.3.6 Moyenne sur les fréquences

Position du problème

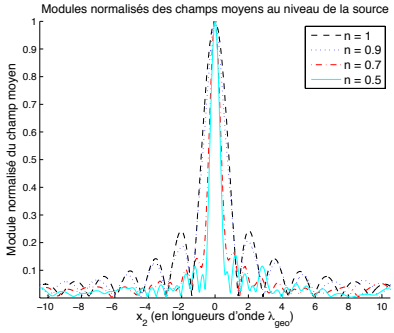
En régime harmonique, nous résolvons numériquement les problèmes (3.25) pour une fréquence $k = \omega/c$, où ω est la pulsation de l'onde et c la célérité du son dans le milieu homogène entourant les éventuels obstacles. Nous réécrivons ces problèmes en indiçant les



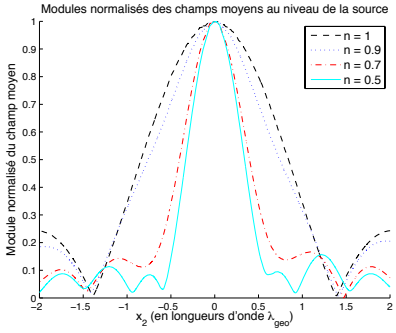
(a) Modules normalisés des champs rétro-propagés pris au niveau de la source pour n = 1, n = 1.1, n = 1.3 et n = 1.8



(b) Agrandissement de la figure (a).



(c) Modules normalisés des champs rétro-propagés pris au niveau de la source pour n = 1, n = 0.9, n = 0.7 et n = 0.5



(d) Agrandissement de la figure (c).

FIGURE 3.20 – Modules (normalisés) des champs moyens pour différents contrastes n, pris au niveau de la source. Sur les figures (a) et (b) la valeur de n est plus grande que 1, tandis que sur les figures (c) et (d), cette valeur est plus petite que 1. Les résultats obtenus dans les deux cas sont très similaires.

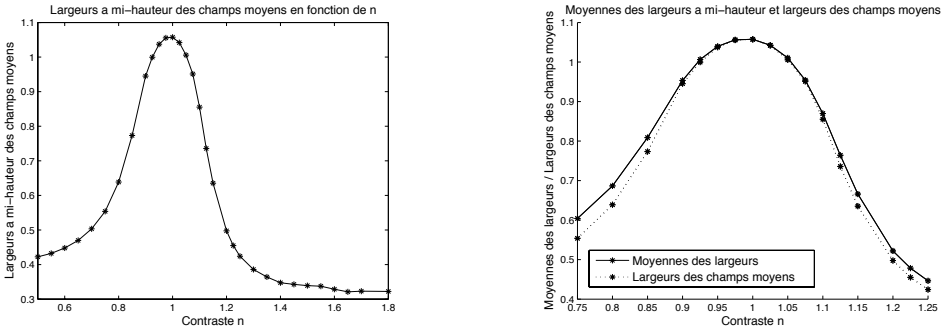
solutions par le nombre d'onde k :

$$\begin{cases}(\Delta + k^2n^2)v_E(\cdot\,,k) = -\delta_{\mathbf{s}} & (\mathbb{R}^2),\\ v_E(\cdot\,,k) \text{ sortant,}\end{cases} \qquad \begin{cases}(\Delta + k^2n^2)v_{RE}(\cdot\,,k) = -\overline{v_E(\cdot\,,k)}|_{\mathcal{M}} & (\mathbb{R}^2),\\ v_{RE}(\cdot\,,k) \text{ sortant.}\end{cases} \tag{3.30}$$

Les ondes (complexes) associées $\mathcal{V}_{E;k}$ et $\mathcal{V}_{RE;k}$, dépendant périodiquement du temps, sont obtenues pour temps $t \in \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{V}_{E;k}(\cdot,t) = v_E(\cdot\,,k)e^{-ikct} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{V}_{RE;k}(\cdot,t) = v_{RE}(\cdot\,,k)e^{-ikct}.$$

Dans cette section, nous proposons de travailler sur une bande de fréquences $k \in [k_0 - d_k, k_0 + d_k]$ avec $d_k \ll k_0$ plutôt qu'à fréquence fixe. Ainsi, pour chaque nombre d'onde k de cette bande, nous résolvons les problèmes (3.30) pour obtenir deux familles de champs $(v_E(\cdot\,,k))_{k_0-d_k\le k\le k_0+d_k}$ et $(v_{RE}(\cdot\,,k))_{k_0-d_k\le k\le k_0+d_k}$. Les ondes $\mathscr{V}_E$ émises par le point source et $\mathscr{V}_{RE}$ rétro-propagée par le MRT sont ensuite obtenues comme la superposition des ondes



(a) Largeurs à mi-hauteur des champs moyens

(b) Comparaison entre les largeurs à mi-hauteurs des champs moyens et la moyenne des largeurs à mi-hauteurs des champs rétro-propagés.

FIGURE 3.21 – Largeurs à mi-hauteur des champs moyens (figure (a)) et comparaison avec les moyennes des largeurs à mi-hauteur des champs rétro-propagés (figure (b)).

périodiques en temps associées à ces deux familles :

$$\begin{cases} \mathscr{V}_E(\mathbf{x},t) = \displaystyle\int_{k_0-d_k}^{k_0+d_k} v_E(\mathbf{x},k)e^{-ikct}\,\mathrm{d}k, & \forall t\in\mathbb{R}, \forall \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2\setminus\{\mathbf{s}\}, \\ \mathscr{V}_{RE}(\mathbf{x},t) = \displaystyle\int_{k_0-d_k}^{k_0+d_k} v_{RE}(\mathbf{x},k)e^{-ikct}\,\mathrm{d}k, & \forall t\in\mathbb{R}, \forall \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{\mathcal{M}}. \end{cases} \tag{3.31}$$

Ainsi, le champ $\mathscr{V}_{RE}$ correspond à la rétro-propagation par le MRT d'une onde non périodique $\mathscr{V}_E$, émise par le point source $\mathbf{s}$.

Approximation numérique

Pour approcher numériquement les intégrales de (3.31), nous discrétisons le segment $[k_0-d_k, k_0+d_k]$ en N_k fréquences $k_1, k_2, \ldots, k_{N_k}$, réparties uniformément avec un pas h_k. Nous estimons ensuite les ondes $\mathscr{V}_E$ et $\mathscr{V}_{RE}$ par une formule des rectangles :

$$\begin{cases} \mathscr{V}_E(\mathbf{x},t) \simeq h_k \displaystyle\sum_{j=1}^{N_k} v_{RE}(\mathbf{x},k_j)e^{-ik_jct}, & \forall t\in\mathbb{R}, \forall \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2\setminus\{\mathbf{s}\}, \\ \mathscr{V}_{RE}(\mathbf{x},t) \simeq h_k \displaystyle\sum_{j=1}^{N_k} v_{RE}(\mathbf{x},k_j)e^{-ik_jct}, & \forall t\in\mathbb{R}, \forall \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{\mathcal{M}}. \end{cases}$$

Numériquement, nous approchons chaque onde harmonique $v_{RE}(\mathbf{x},k_j)$ par la méthode des éléments finis, comme expliqué précédemment. En pratique, nous devons donc résoudre numériquement les problèmes (3.30) pour les N_k différents nombres d'onde. Soulignons que le maillage utilisé doit, d'une part, prendre en compte l'indice à l'intérieur des obstacles et, d'autre part, se baser sur le plus grand nombre d'onde de la bande de fréquences, soit k_0+d_k.

Milieu homogène : étude mathématique

Afin de continuer à utiliser les notations des paragraphes précédents, nous notons $u_E(\cdot\,,k)$ et $u_{RE}(\cdot\,,k)$ les solutions des problèmes (3.30) dans un milieu homogène (c'est à dire pour

n = 1). De plus, les ondes temporelles associées sont notées respectivement $\mathscr{U}_E$ et $\mathscr{U}_{RE}$

$$\begin{cases} \mathscr{U}_E(\mathbf{x},t) = \displaystyle\int_{k_0-d_k}^{k_0+d_k} u_E(\mathbf{x},k)e^{-ikct}\,\mathrm{d}k, & \forall t\in\mathbb{R}, \forall \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2\setminus\{\mathbf{s}\}, \\ \mathscr{U}_{RE}(\mathbf{y},t) = \displaystyle\int_{k_0-d_k}^{k_0+d_k} u_{RE}(\mathbf{y},k)e^{-ikct}\,\mathrm{d}k, & \forall t\in\mathbb{R}, \forall \mathbf{y}\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{\mathcal{M}}. \end{cases} \tag{3.32}$$

Dans un milieu homogène, nous disposons de l'expression analytique des champs $u_E(\cdot\,,k)$ et $u_{RE}(\cdot\,,k)$. Il nous est alors possible de calculer également les ondes $\mathscr{U}_E(\cdot\,,t)$ et $\mathscr{U}_{RE}(\cdot\,,t)$. Cependant, les calculs sont plus simples en dimension trois qu'en dimension deux, où la fonction de Green fait intervenir la fonction de Hankel. C'est pourquoi, dans cette sous-section, nous proposons un calcul analytique des ondes $\mathscr{U}_E(\cdot\,,t)$ et $\mathscr{U}_{RE}(\cdot\,,t)$, en dimension trois. La forme du MRT reste inchangée, seule la fonction de Green est modifiée.

Onde émise par le point source $\mathscr{U}_E$: Nous avons déjà vu que $u_E(\cdot\,,k)$ est la fonction de Green $G_k(\cdot\,,\mathbf{s})$ centrée sur $\mathbf{s}$, donnée par (3.2). En dimension trois, nous avons alors

$$\forall k\in[k_0-\Delta_k,k_0+\Delta_k], \forall \mathbf{x}\neq\mathbf{s}, \qquad u_E(\mathbf{x},k) = G_k(\mathbf{x},\mathbf{s}) = \frac{e^{ik\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|}}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|}.$$

Ainsi, l'onde $\mathscr{U}_E$ a pour expression

$$\forall t\in\mathbb{R}, \forall \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\setminus\{\mathbf{s}\}, \qquad \mathscr{U}_E(\mathbf{x},t) = \int_{k_0-d_k}^{k_0+d_k} \frac{e^{ik\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|}e^{-ikct}}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|}\,\mathrm{d}k,$$

ce qui peut se réécrire, en sortant de l'intégrale les termes ne dépendant pas de k,

$$\forall t\in\mathbb{R}, \forall \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\setminus\{\mathbf{s}\}, \qquad \mathscr{U}_E(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|}\int_{k_0-d_k}^{k_0+d_k} e^{ik(\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|-ct)}\,\mathrm{d}k. \tag{3.33}$$

A l'aide d'un changement de variable "$k = k_0 + k''$, l'intégrale sur la variable k devient

$$\int_{k_0-d_k}^{k_0+d_k} e^{ik(\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|-ct)}\,\mathrm{d}k = e^{ik_0(\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|-ct)}\int_{-d_k}^{d_k} e^{ik(\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|-ct)}\,\mathrm{d}k.$$

L'intégration par rapport à k ne pose alors aucun problème et conduit à

$$\int_{k_0-d_k}^{k_0+d_k} e^{ik(\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|-ct)}\,\mathrm{d}k = 2d_k\mathrm{sinc}\left[d_k\left(\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|-ct\right)\right]e^{ik_0(\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|-ct)}$$

où $\mathrm{sinc}(x) = \sin(x)/x$ est le sinus cardinal. Par conséquent, en remplaçant cette expression dans celle (3.33) de l'onde $\mathscr{U}_E$, nous obtenons

$$\forall t\in\mathbb{R}, \forall \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\setminus\{\mathbf{s}\}, \qquad \mathscr{U}_E(\mathbf{x},t) = \frac{d_k\mathrm{sinc}\left[d_k\left(\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|-ct\right)\right]e^{ik_0(\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|-ct)}}{2\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|}.$$

Remarquons tout d'abord que, du fait du terme $e^{ik_0(\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|-ct)}$, l'onde $\mathscr{U}_E$ se propage, au cours du temps, radialement par rapport à $\mathbf{s}$. Le module de $\mathscr{U}_E(\mathbf{x},t)$ dépend notamment du terme en sinus cardinal, puisque :

$$\forall t\in\mathbb{R}, \forall \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\setminus\{\mathbf{s}\}, \qquad |\mathscr{U}_E(\mathbf{x},t)| = \left|\frac{d_k\mathrm{sinc}\left[d_k\left(\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|-ct\right)\right]}{2\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|}\right|.$$

En particulier, nous pouvons constater que, pour un point $\mathbf{x}$ très proche de $\mathbf{s}$, le module de $\mathscr{U}_E(\mathbf{x},t)$ est atteint à $t=0$, lorsque le sinus cardinal a pour valeur 1. Ceci montre en particulier la présence d'une impulsion à $t=0$ au niveau de la source. Par ailleurs, sur un point $\mathbf{x}$ situé à la distance D du point source, le module de $\mathscr{U}_E(\mathbf{x},t)$ est donné par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad |\mathscr{U}_E(\mathbf{x},t)| = \left| \frac{d_k \mathrm{sinc}\left[d_k\left(D-ct\right)\right]}{2\pi D} \right|.$$

Or, ce terme est maximal lorsque $t=-D/c$. Autrement dit, la perturbation créée à l'instant $t=0$ au niveau de la source atteint la distance D, donc le MRT, à l'instant $t=D/c$.

Onde rétro-propagée $\mathscr{U}_{RE}$ par le MRT : Rappelons l'expression (3.4) du champ rétro-propagé $u_{RE}(\cdot\,,k)$ de fréquence k, en régime harmonique,

$$\forall k \in [k_0-\Delta_k, k_0+\Delta_k], \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{M}}, \qquad u_{RE}(\mathbf{y},k) = \int_{\mathcal{M}} \overline{G_k(\mathbf{x},\mathbf{s})} G_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{x},$$

qui s'écrit, en dimension $d=3$,

$$\forall k \in [k_0-\Delta_k, k_0+\Delta_k], \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{M}}, \qquad u_{RE}(\mathbf{y},k) = \int_{\mathcal{M}} \frac{e^{ik[\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|-\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|]}}{(4\pi)^2\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|}\, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

En utilisant cette égalité dans l'expression (3.32) de l'onde $\mathscr{U}_{RE}$, nous obtenons

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{M}, \qquad \mathscr{U}_{RE}(\mathbf{y},t) = \int_{k_0-d_k}^{k_0+d_k} \int_{\mathcal{M}} \frac{e^{ik[\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|-\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|]}}{(4\pi)^2\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|}\, \mathrm{d}\mathbf{x}\, e^{-ikct}\, \mathrm{d}k.$$

Nous permutons les deux intégrales posées sur un domaine borné pour obtenir, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{M}}$,

$$\mathscr{U}_{RE}(\mathbf{y},t) = \int_{\mathcal{M}} \left[\int_{k_0-d_k}^{k_0+d_k} e^{ik[\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|-\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|]} e^{-ikct}\, \mathrm{d}k \right] \frac{1}{(4\pi)^2\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|}\, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

L'intégrale portant sur la variable k a déjà été calculée lors de notre étude du champ $\mathscr{U}_E$, ce qui nous permet d'obtenir directement, pour tout $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{M}}$ et tout t de $\mathbb{R}$,

$$\mathscr{U}_{RE}(\mathbf{y},t) = 2d_k \int_{\mathcal{M}} \frac{\mathrm{sinc}\left[d_k\left([\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|-\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|]-ct\right)\right] e^{ik_0([\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|-\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|]-ct)}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}\, \mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{3.34}$$

Nous pouvons alors remarquer que, au point $\mathbf{y}=\mathbf{s}$, le terme en sinus cardinal se simplifie et nous avons

$$\mathscr{U}_{RE}(\mathbf{s},t) = 2d_k \int_{\mathcal{M}} \frac{\mathrm{sinc}\left(-d_k ct\right)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|^2}\, \mathrm{d}\mathbf{x} = 2d_k \mathrm{sinc}\left(d_k ct\right) \int_{\mathcal{M}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|^2}.$$

Il apparaît alors que, au point $\mathbf{y}=\mathbf{s}$, le module de $\mathscr{U}_{RE}(\mathbf{s},t)$ est maximal à l'instant $t=0$. Par ailleurs, sur un point $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{M}}$, à l'instant $t=0$, l'égalité (3.34) devient

$$\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{M}}, \qquad \mathscr{U}_{RE}(\mathbf{y},t=0) = 2d_k \int_{\mathcal{M}} \frac{\mathrm{sinc}\left[d_k\left(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|-\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|\right)\right] e^{ik_0([\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|-\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|]-ct)}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}\, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Au point $\mathbf{y}=\mathbf{s}$, le terme $\mathscr{U}_{RE}(\mathbf{y},t=0)$ ne dépend plus de k et a pour valeur

$$\mathscr{U}_{RE}(\mathbf{s},t=0) = 2d_k \int_{\mathcal{M}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|^2}.$$

Pour tous les autres points $\mathbf{y}$ (aux symétriques de $\mathbf{s}$ par rapport au MRT près), nous pouvons appliquer le théorème de la phase stationnaire, comme dans le paragraphe 3.2.2, pour obtenir une décroissance de $|\mathscr{U}_{RE}(\mathbf{y}, t = 0)|$ en fonction de k_0. Cette décroissance est de plus accélérée par la présence du sinus cardinal. Par conséquent, à l'instant $t = 0$, l'onde $\mathscr{U}_{RE}$ est bien focalisée sur le point source $\mathbf{s}$.

Terminons en remarquant que, à l'instant $t = 0$, l'expression (3.32) générale de $\mathscr{U}_{RE}$, devient

$$\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{M}}, \qquad \mathscr{U}_{RE}(\mathbf{y}, t = 0) = \int_{k_0 - d_k}^{k_0 + d_k} u_{RE}(\mathbf{y}, k)\, \mathrm{d}k.$$

En d'autres termes, l'onde $\mathscr{U}_{RE}$ au point $\mathbf{y}$ et à l'instant $t = 0$ est obtenue par la somme de tous les champs $u_{RE}(\cdot\,, k)$, pour $k \in [k_0 - d_k, k_0 + d_k]$. Le terme $\mathscr{U}_{RE}(\mathbf{y}, t = 0)$ peut alors être vu comme une moyenne sur les fréquences k des différents champs $u_{RE}(\cdot\,, k)$.

Milieu homogène : simulations numériques

Les simulations numériques sont effectuées en dimension deux. Nous posons $k_0 = k_{\text{geo}} = 10$, et prenons, comme précédemment, un miroir à retournement temporel d'ouverture $H = 15\lambda_0$, placé à une distance $D = 20\lambda_0$ du point source $\mathbf{s}$. La bande de fréquences choisie est telle que $d_k = k_0/5 = 2$ (soit $k \in [8, 12]$), discrétisée par $N_k = 64$ nombres d'onde. Par ailleurs, la célérité du son c est choisie égale à 1.

Nous commençons tout d'abord par étudier l'onde $\mathscr{U}_E(\cdot\,, t)$ émise par le point source avec une telle bande de fréquences. Nous représentons sur la figure 3.22 l'évolution au cours du temps du module de l'onde $\mathscr{U}_E(\mathbf{x}, t)$ au point $\mathbf{x} = (\mathrm{s}_1 + \varepsilon, \mathrm{s}_2)$ très proche de $\mathbf{s} = (\mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2)$, avec $\varepsilon = 10^{-8}$ (nous ne pouvons calculer numériquement la valeur de l'onde au point source du fait de la singularité de la fonction de Green en ce point). Nous constatons d'une part la présence d'un pic à $t = 0$ et d'autre part l'allure en (valeur absolue du) sinus cardinal. Nous montrons par ailleurs sur les figures 3.23 le module de l'onde $\mathscr{U}_E(\cdot\,, t)$ à différents instants et dans le domaine de calcul Ω_e. Nous observons à l'instant $t = 0$, sur la figure 3.23(a), une impulsion au niveau du point source $\mathbf{s}$. Ce pic se propage ensuite radialement par rapport à $\mathbf{s}$ lorsque le temps s'écoule. Enfin, l'onde atteint effectivement le MRT à $t = D = 20\lambda_0$.

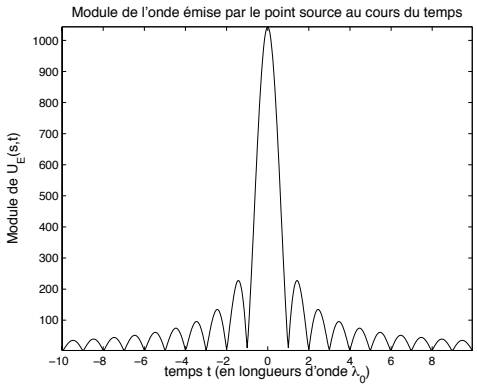
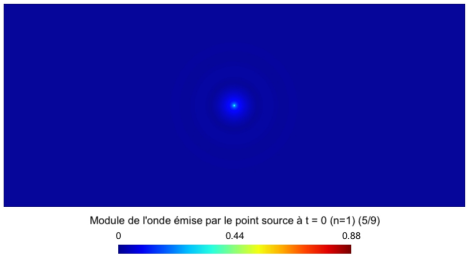
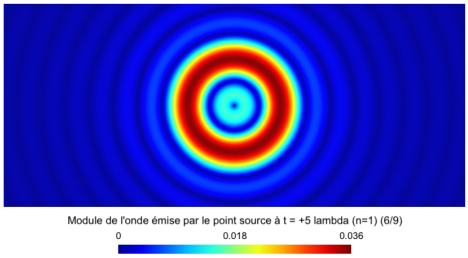


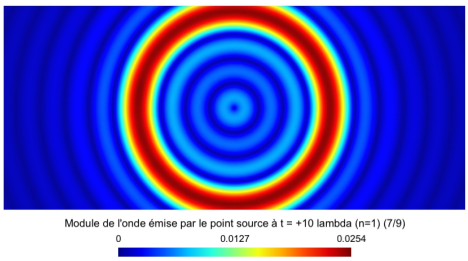
FIGURE 3.22 – Module de l'onde $\mathscr{U}_E$ émise par le point source en milieu homogène pour $k_0 = 10$ et $d_k = k_0/5$. La mesure du signal est effectuée sur un point très proche de $\mathbf{s}$, à une distance de 10^{-8}.



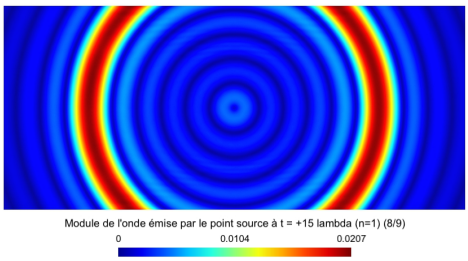
(a) $t = 0$



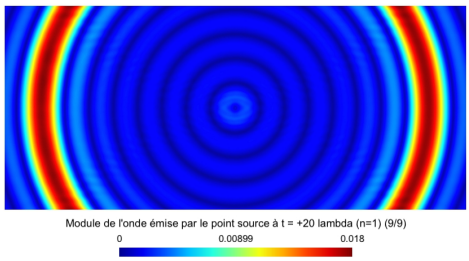
(b) $t = 5\lambda_0$



(c) $t = 10\lambda_0$



(d) $t = 15\lambda_0$



(e) $t = 20\lambda_0$: l'onde atteint le MRT.

FIGURE 3.23 – Module de l'onde $\mathscr{U}_E$ émise par le point source sur le domaine de calcul Ω_e à différents instants t et dans un milieu homogène (n = 1). La bande de fréquences utilisée étant $[k_0 - k_0/5, k_0 + k_0/5]$. Pour une meilleure lisibilité, l'échelle est adaptée à chaque pas de temps.

Etudions maintenant l'onde rétro-propagée $\mathscr{U}_{RE}$ par le MRT. Nous commençons par représenter, sur la figure 3.24, le module de l'onde sur le domaine de calcul Ω_e pour des temps t négatifs. A $t = -D = -20\lambda_0$ (figure 3.24(a)), le MRT a déjà commencé à émettre l'onde $\mathscr{U}_{RE}$, qui se propage ensuite en direction de $\mathbf{s}$. Nous pouvons remarquer que le module de l'onde prend la forme d'un arc de cercle de centre $\mathbf{s}$, et, de plus, suit le cône de lumière $\mathcal{C}$ (introduit dans le paragraphe 3.2.2 et illustré en régime harmonique sur, par exemple, la figure 3.11). A l'instant $t = 0$, nous observons, sur la figure 3.25(a), une tache focale centrée sur $\mathbf{s}$: la focalisation a lieu à la fois en espace et en temps. Comme en régime harmonique, nous effectuons alors une coupe au niveau de $\mathbf{s}$, puis normalisons le résultat ainsi obtenu par son maximum, afin de mesurer la précision de la focalisation. La courbe obtenue est présentée, en trait plein, sur la figure 3.25(b) et la largeur à mi-hauteur du pic central a pour valeur

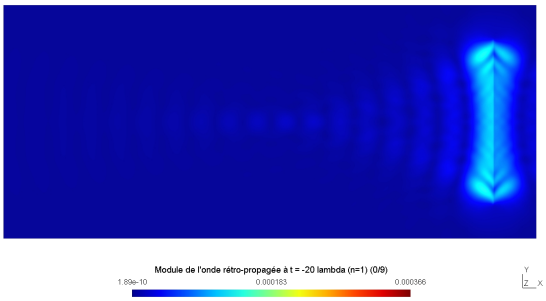
$$\Delta_{\text{hom}}^{num} = 1.08.$$

Sur la figure 3.25(b), nous avons également reporté, en trait pointillé, le résultat obtenu en régime harmonique à la fréquence $k = k_0$. Nous constatons que les deux courbes sont presque confondues au niveau du pic central. La largeur à mi-hauteur du pic obtenu en régime harmonique a pour valeur 1.058, légèrement différent de celle obtenue avec une bande de fréquences. Cette différence provient justement de l'utilisation d'une bande de fréquences. En effet, nous avons vu précédemment, par exemple sur la figure 3.11, que la focalisation est plus précise lorsque le nombre d'onde est grand. Or, la bande de de fréquences contient des nombres d'onde k plus petits que k_0. Ainsi, la qualité de la focalisation est dégradée par ces fréquences $k < k_0$.

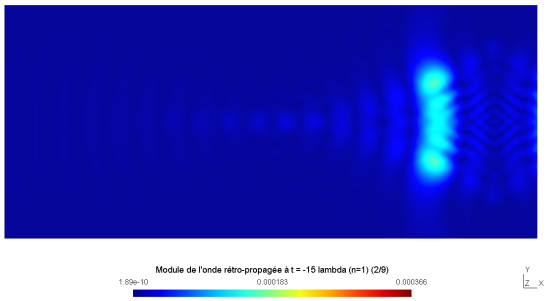
Nous continuons de laisser le temps s'écouler et représentons le module de $\mathscr{U}_E(\cdot\,, t)$ sur les figures 3.26 pour des temps $t > 0$. Nous observons que l'onde continue de se propager, et son module, d'une part, suit de nouveau le cône $\mathcal{C}$ et, d'autre part, prend la forme d'un arc de cercle centré sur $\mathbf{s}$.

Nous avons donc observé, dans un milieu homogène, une focalisation à la fois en espace et en temps (à $t = 0$) sur le point source $\mathbf{s}$. La qualité de la focalisation est sensiblement la même qu'en régime harmonique, une légère dégradation est observée du fait de l'utilisation de nombres d'onde plus faibles que le nombre d'onde central k_0.

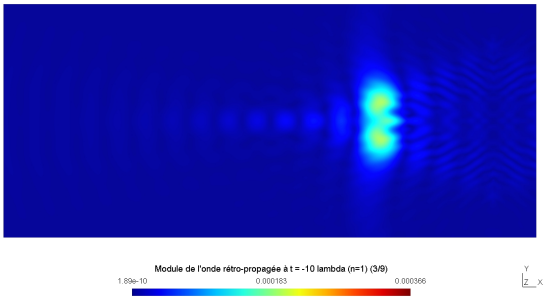
Remarque 3.10. *Pour les simulations dans un milieu multi-diffusant que nous présentons dans le paragraphe suivant, nous calculerons, comme précédemment, la largeur à mi-hauteur du pic central, ainsi que l'ouverture $H_{\text{éq}}$ "apparente" du MRT. Cette valeur correspond à la taille que le miroir devrait posséder pour obtenir, dans un milieu homogène, une résolution similaire à celle obtenue en milieu complexe. En régime harmonique, nous disposions de la courbe 3.14(a) représentant la largeur à mi-hauteur en fonction de la hauteur H dans un milieu homogène. Pour une bande de fréquences, nous ne disposons pas d'une courbe équivalente à celle-ci. Toutefois, en milieu homogène, nous avons vu que la largeur à mi-hauteur est très peu altérée par l'utilisation d'une bande de fréquences. C'est pourquoi nous continuerons de calculer $H_{\text{éq}}$ à l'aide de la courbe de la figure 3.14(a), comme précédemment, en prenant $k = k_0$.*



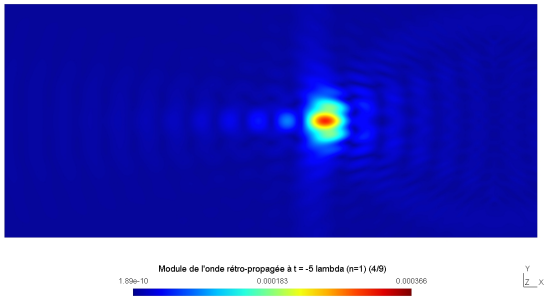
(a) $t = -20\lambda_0$



(b) $t = -15\lambda_0$

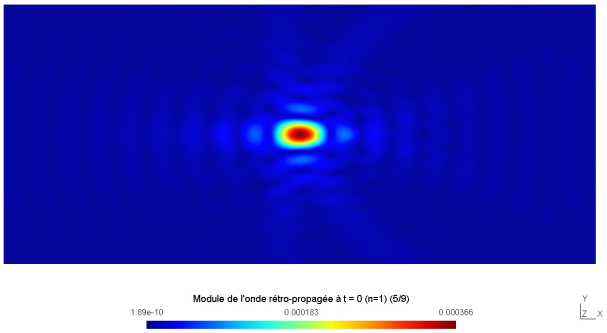


(c) $t = -10\lambda_0$

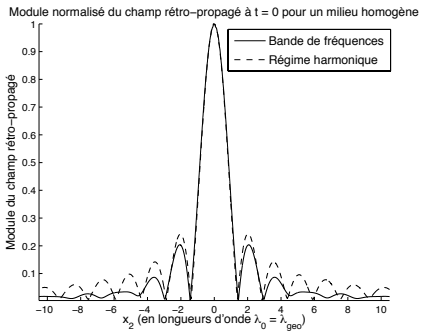


(d) $t = -5\lambda_0$

FIGURE 3.24 – Module du champ rétro-propagé sur le domaine de calcul Ω_e à différents instants $t < 0$ pour un milieu homogène (n = 1), avec utilisation de la bande de fréquences $[k_0 - k_0/5, k_0 + k_0/5]$.

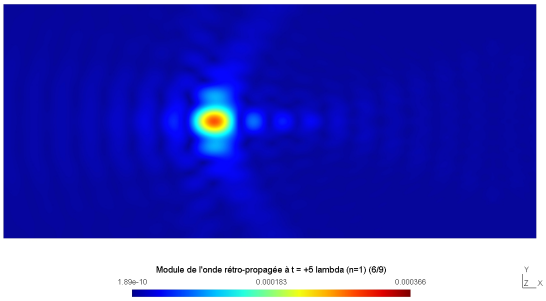


(a) $t = 0\lambda_0$

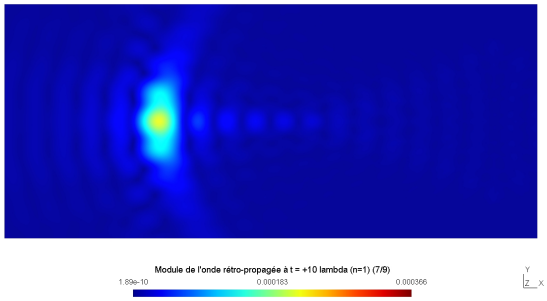


(b) Au niveau de la source

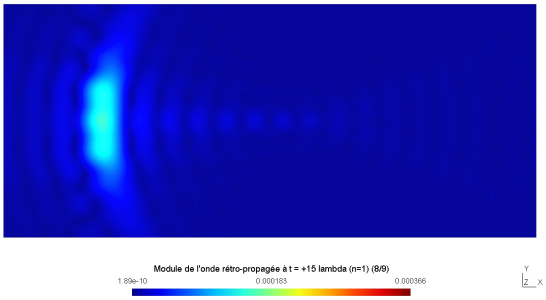
FIGURE 3.25 – Suite de la figure 3.24 à l'instant $t = 0$ de la focalisation dans le domaine de calcul Ω_e, sur la figure (a), et au niveau de la source, après normalisation, sur la figure (b).



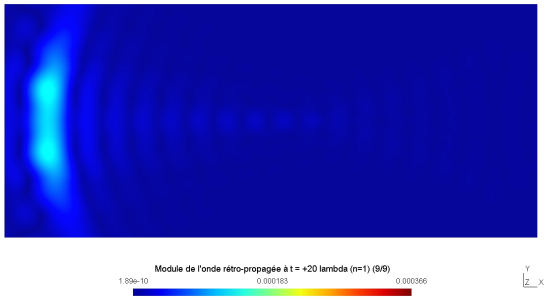
(a) $t = 5\lambda_0$



(b) $t = 10\lambda_0$



(c) $t = 15\lambda_0$



(d) $t = 20\lambda_0$

FIGURE 3.26 – Suite des figures 3.24 et 3.25 pour des temps $t > 0$ (après la focalisation).

Milieu hétérogène : simulations numériques

Nous proposons maintenant des simulations de retournement temporel dans un milieu multi-diffusant avec l'utilisation d'une bande de fréquences. Nous considérons dans cette section une seule réalisation d'obstacles. Les paramètres géométriques sont les mêmes que dans les sections précédentes : nous plaçons $M = 400$ petits disques de rayon $\lambda_0/5$, dans une boîte située à une distance $d_{\mathbf{s},\min} = \lambda_0/5$ de la source et à une distance $d_{\mathcal{M},\min} = \lambda_0/5$ du MRT. Entre deux disques, une distance maximale de $\lambda_0/5$ est possible (voir le schéma de la figure 3.15). Le nombre d'onde central k_0 est de plus fixé à $10(= k_{\text{geo}})$, comme précédemment. Nous prenons par ailleurs la même bande de fréquences que pour les simulations numériques effectuées dans un milieu homogène, c'est à dire

$$k \in [k_0 - k_0/5, k_0 + k_0/5](= [8, 12]),$$

discrétisé numériquement en $N_k = 64$ nombres d'onde.

Nous prenons tout d'abord un contraste faible n = 1.1 et observons le module du champ rétro-propagé $\mathscr{V}_{RE}$, tout d'abord pour des temps négatifs, sur la figure 3.27. Comme nous pouvions nous y attendre, l'allure de l'onde est très similaire à celle obtenue en milieu homogène (voir figure 3.23). En particulier, le champ se propage clairement en direction du point source $\mathbf{s}$ et son module semble suivre le cône de lumière $\mathcal{C}$, tout en étant légèrement perturbée par les petits diffuseurs. A l'instant $t = 0$, correspondant à la figure 3.28(a), nous constatons la présence d'une tache focale au niveau du point source. La coupe au niveau de $\mathbf{s}$, après normalisation, est proposée sur la figure 3.28(b), sur laquelle nous avons reporté, en trait pointillé, le résultat obtenu précédemment en milieu homogène. Le pic central semble être légèrement plus rétréci pour le milieu multi-diffusant, ce qui est confirmé par le calcul de la largeur à mi-hauteur :

$$\Delta_{\text{diff}}^{num}(\text{n} = 1.1) = 0.83 < \Delta_{\text{hom}}^{num} = 1.08.$$

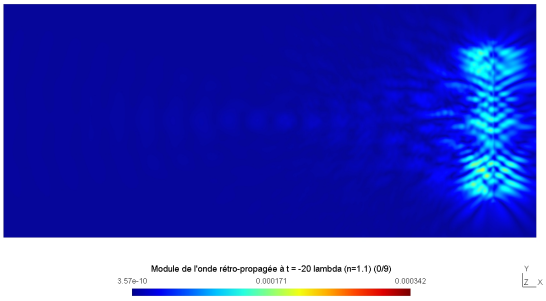
Par ailleurs, l'ouverture apparente $H_{éq}$ est alors environ de

$$H_{éq} \simeq 19.5\lambda_0 = 1.3H.$$

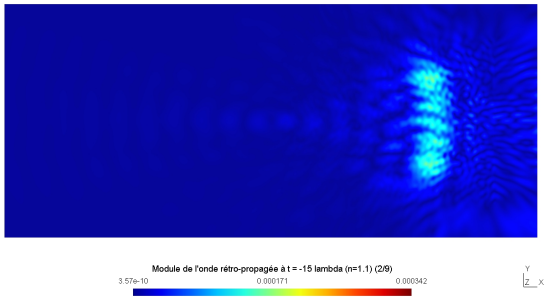
La focalisation est donc améliorée par rapport au milieu homogène. Le miroir à retournement temporel agit comme si son ouverture était 1.3 fois plus grande. En laissant le temps s'écouler, nous obtenons les figures 3.29, qui montrent que l'onde continue de se propager et que son module suit à la fois le cône $\mathcal{C}$ et reprend la forme d'un arc de cercle centré sur $\mathbf{s}$.

Continuons les simulations numériques en prenant un contraste plus élevé n = 1.3. Nous représentons le module champ rétro-propagé $\mathscr{V}_{RE}$ sur les figures 3.27 pour des temps t négatifs. Avec ce contraste, l'onde est très perturbée et l'allure de son module n'est plus du tout la même que pour n = 1.1 ou n = 1 (milieu homogène). Toutefois, à $t = 0$ et comme le montre la figure 3.31(a), une tache focale très resserrée apparaît distinctement au niveau du point source $\mathbf{s}$. Nous effectuons comme toujours une coupe au niveau de la source et affichons le module normalisé sur la figure 3.31(b). Le calcul de la largeur à mi-hauteur du pic central donne alors

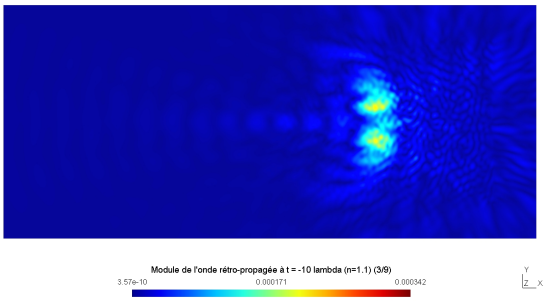
$$\Delta_{\text{diff}}^{num}(\text{n} = 1.3) = 0.44 < \Delta_{\text{hom}}^{num} = 1.08.$$



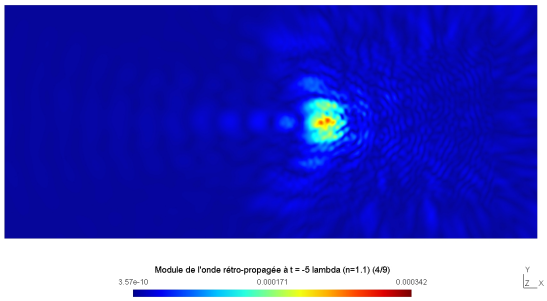
(a) $t = -20\lambda_0$



(b) $t = -15\lambda_0$

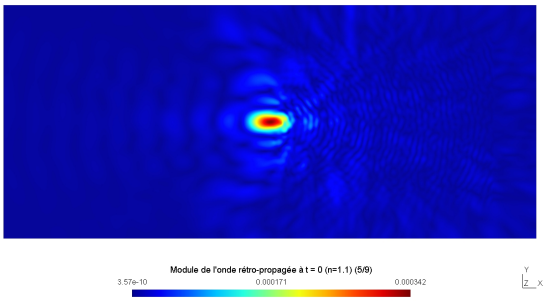


(c) $t = -10\lambda_0$

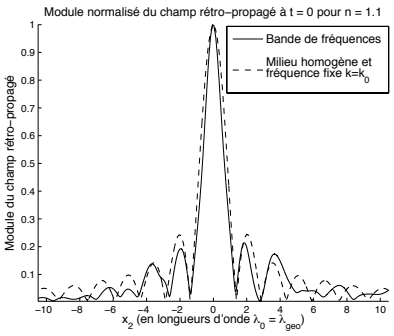


(d) $t = -5\lambda_0$

FIGURE 3.27 – Module du champ rétro-propagé sur le domaine de calcul Ω_e à différents instants $t < 0$ pour un milieu hétérogène de contraste n = 1.1, avec utilisation de la bande de fréquences $[k_0 - k_0/5, k_0 + k_0/5]$.

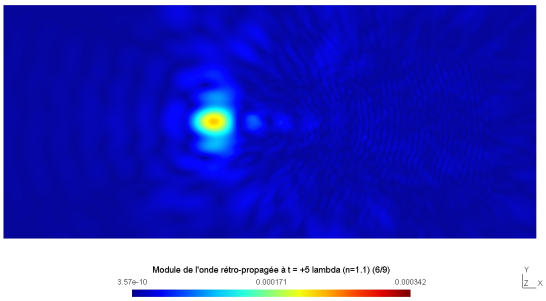


(a) $t = 0\lambda_0$

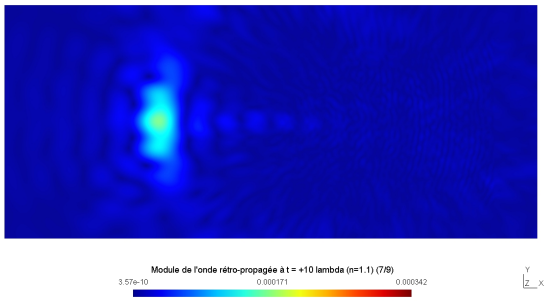


(b) Au niveau de la source

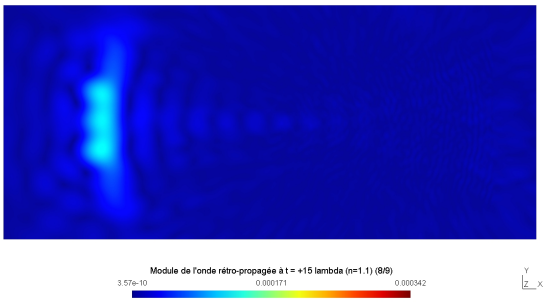
FIGURE 3.28 – Suite de la figure 3.27 à l'instant $t = 0$ de la focalisation pour n = 1.1. La figure (a) présente le module de l'onde rétro-propagée dans le domaine de calcul Ω_e tandis que la figure (b) le présente au niveau de la source et après normalisation.



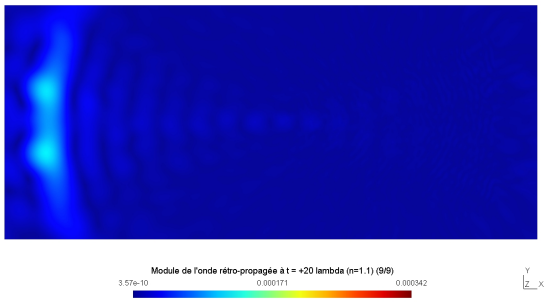
(a) $t = 5\lambda_0$



(b) $t = 10\lambda_0$



(c) $t = 15\lambda_0$



(d) $t = 20\lambda_0$

FIGURE 3.29 – Module de l'onde rétro-propagée $\mathscr{U}_{RE}$ pour des temps $t > 0$ (après la focalisation) avec n = 1.1. Ces figures font suite aux figures 3.27 et 3.28.

Cette fois encore, la qualité de focalisation est meilleure en milieu hétérogène que homogène. En outre, la hauteur apparente $H_{éq}$ du MRT vaut environ

$$H_{éq} \simeq 48\lambda_0 = 3.2H.$$

Ensuite, nous laissons le temps s'écouler et obtenons les figures 3.32. Nous constatons que l'onde se disperse très rapidement une fois le point source dépassé, cependant, une partie de l'onde semble être encore contenue à l'intérieur des obstacles. Cette simulation a été reproduite pour quelques réalisations de milieux hétérogène. Dans tous les cas, nous avons réussi à obtenir une tache focale sur le point source qui est, de plus, de taille inférieure à celle obtenue en milieu homogène. En régime harmonique, rappelons que ce ne fut pas toujours le cas, notamment avec l'apparition de pics secondaires (voir figure 3.17(a)). Ici, le spectre de l'onde émise par le point source comporte plusieurs fréquences et le champ rétro-propagé par le MRT effectue en quelque sorte une moyenne sur ces fréquences. Nous parlons alors d'"auto-moyenne" en fréquences [28]. Ainsi, le retournement temporel en milieu hétérogène semble plus stable pour une bande de fréquences plutôt qu'à fréquence fixe.

Pour illustrer plus fortement ce phénomène, prenons un contraste plus fort n = 1.8. Lors de nos simulations en régime harmonique et pour une unique réalisations de milieu, la focalisation de l'onde sur le point source pouvait ne pas avoir lieu, comme en atteste l'exemple de la figure 3.16(f). Sur les figures 3.33, nous représentons le module de l'onde rétro-propagée pour des temps négatifs, en commençant par $t = -D = -20\lambda_0$. L'onde est

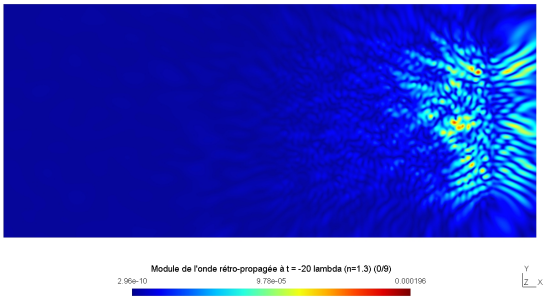
cette fois-ci très perturbée, cependant, nous pouvons observer que l'amplitude maximal du module semble se déplacer en direction du point source $\mathbf{s}$. A l'instant $t = 0$ et comme le montre la figure 3.34(a), la focalisation a bien lieu au niveau de la source et, de plus, la tache focale est de petite taille. La coupe au niveau de la source, présentée sur la figure 3.34(b), montre clairement un pic central très fin, de largeur à mi-hauteur

$$\Delta_{\text{diff}}^{num}(\text{n} = 1.8) = 0.38 < \Delta_{\text{hom}}^{num} = 1.08,$$

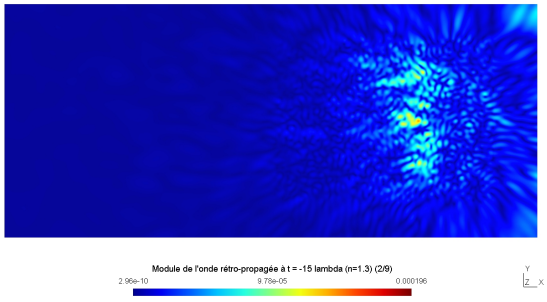
bien plus petite qu'en milieu homogène. Par ailleurs, la valeur de l'ouverture équivalente $H_{éq}$ du MRT est d'environ

$$H_{éq} \simeq 64.5\lambda_0 = 4.3H.$$

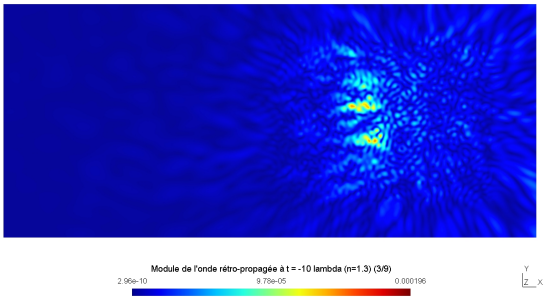
Nous avons reproduit cette simulation pour différentes réalisations. Dans la majorité des cas, la focalisation avait lieu et, de plus, était de meilleure qualité que dans un milieu homogène. L'utilisation d'une bande de fréquences semble effectivement jouer un rôle de moyenne sur les fréquences, rendant la focalisation plus stable. Par ailleurs, dans les simulations présentées ici, nous avons bien observé une focalisation à la fois en espace (sur $\mathbf{s}$) et en temps (à l'instant $t = 0$).



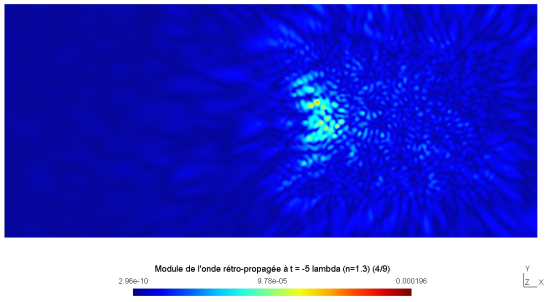
(a) $t = -20\lambda_0$



(b) $t = -15\lambda_0$

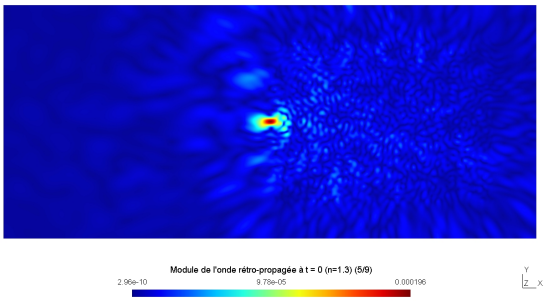


(c) $t = -10\lambda_0$

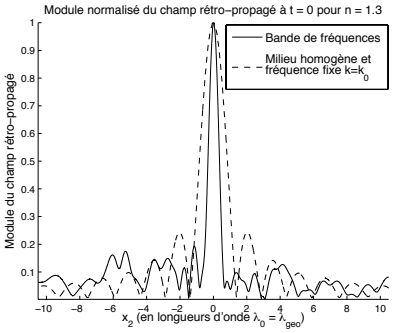


(d) $t = -5\lambda_0$

FIGURE 3.30 –

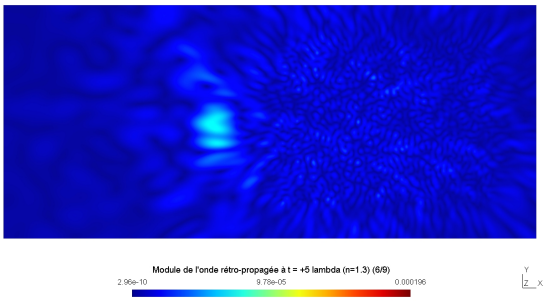


(a) $t = 0\lambda_0$

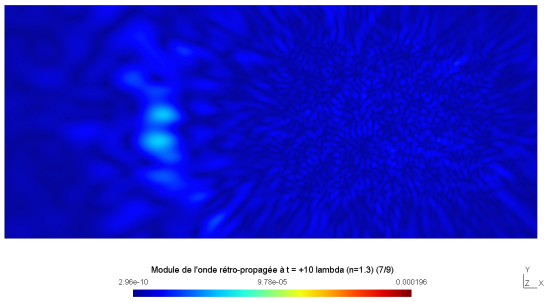


(b) Au niveau de la source

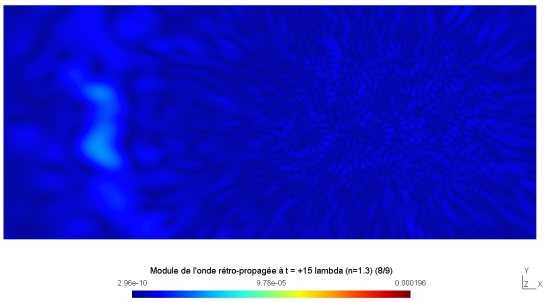
FIGURE 3.31 – Module de l'onde rétro-propagée à l'instant $t = 0$ de la focalisation, dans le domaine de calcul Ω_e (figure (a)) et au niveau de la source, après normalisation (figure (b)). L'indice à l'intérieur des obstacles est de n = 1.3. Ces deux images font suite à la figure 3.30.



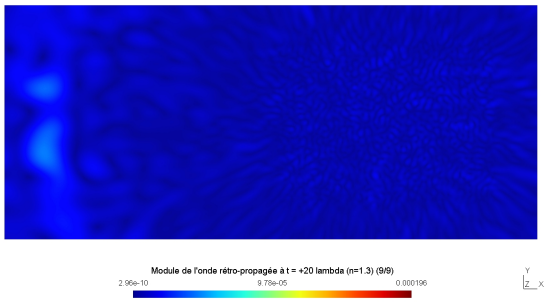
(a) $t = 5\lambda_0$



(b) $t = 10\lambda_0$

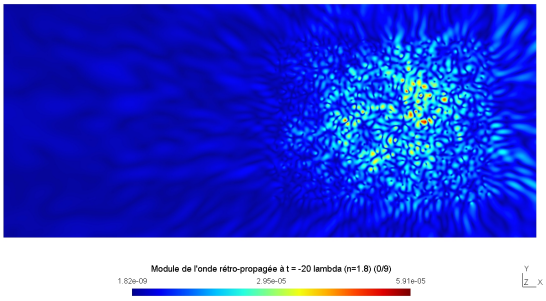


(c) $t = 15\lambda_0$

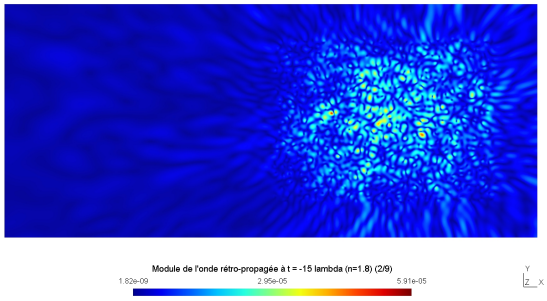


(d) $t = 20\lambda_0$

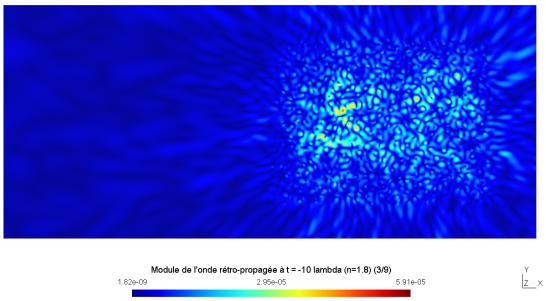
FIGURE 3.32 – Module du champ rétro-propagé $\mathscr{U}_{RE}$ par le MRT pour des temps $t > 0$, c'est-à-dire après la focalisation. Le contraste n est égal à 1.3. Pour des temps $t \leq 0$, le module est affiché sur les figures 3.30 et 3.31.



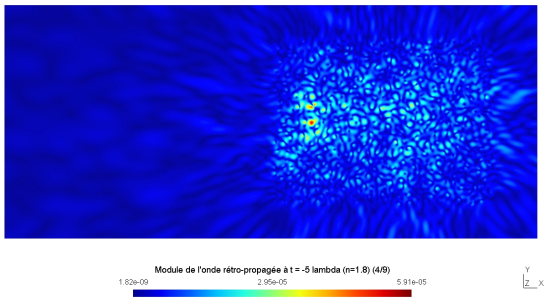
(a) $t = -20\lambda_0$



(b) $t = -15\lambda_0$

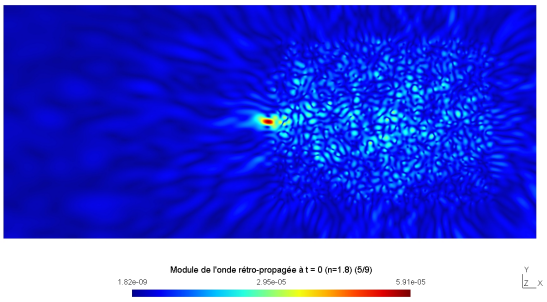


(c) $t = -10\lambda_0$

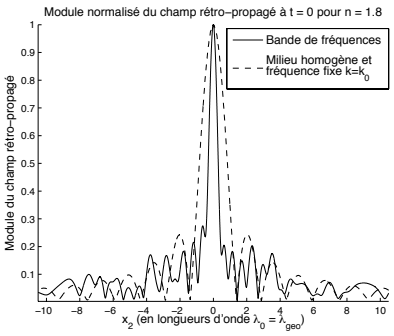


(d) $t = -5\lambda_0$

FIGURE 3.33 – Module du champ rétro-propagé $\mathscr{U}_{RE}$ sur le domaine de calcul Ω_e à différents instants $t < 0$ pour un milieu hétérogène de contraste n = 1.8, avec utilisation de la bande de fréquences $[k_0 - k_0/5, k_0 + k_0/5]$.

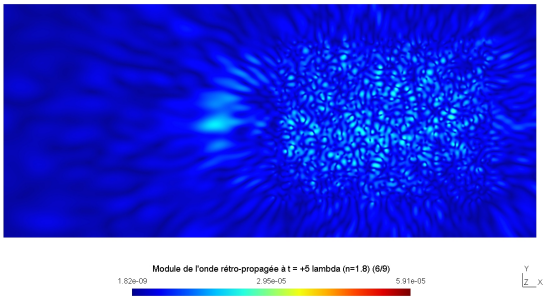


(a) $t = 0\lambda_0$

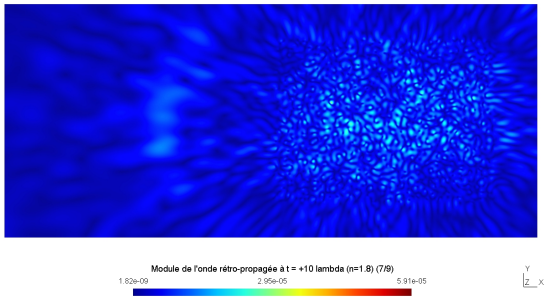


(b) Au niveau de la source

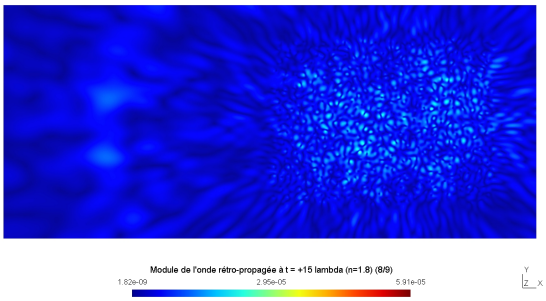
FIGURE 3.34 – Suite de la figure 3.33 à l'instant $t = 0$ de la focalisation. Le module du champ rétro-propagé est représenté dans le domaine de calcul Ω_e sur la figure (a) et au niveau de la source (après normalisation) sur la figure (b).



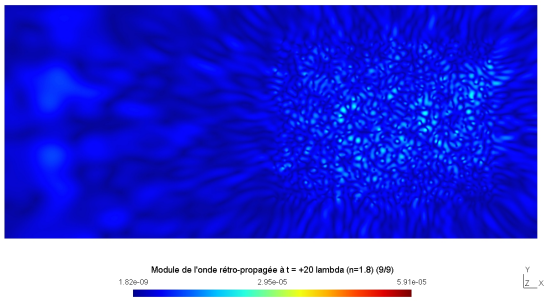
(a) $t = 5\lambda_0$



(b) $t = 10\lambda_0$



(c) $t = 15\lambda_0$



(d) $t = 20\lambda_0$

FIGURE 3.35 – Module de l'onde rétro-propagée par le MRT dans un milieu construit avec un contraste n = 1.8. Les instants t sont ici positifs et correspondent à la propagation de l'onde après la focalisation sur le point source, présentée sur la figure 3.34.

3.4 Conclusion

Nous avons proposé un modèle déterministe pour la reconstruction de sources acoustiques à l'aide d'un miroir à retournement temporel en milieu hétérogène. En milieu homogène, nous avons donné une preuve de la focalisation du champ rétro-propagé sur le point source en dimension deux et ces résultats ont été validés numériquement.

Nos résultats numériques ont mis en évidence qu'en régime harmonique, la qualité de la focalisation est meilleure en milieu faiblement hétérogène qu'en milieu homogène. Toutefois, pour des valeurs plus importantes de contraste, la focalisation varie grandement d'un milieu à un autre et le calcul de la précision de la focalisation devient délicat. Deux types de moyenne ont alors été abordés. Dans un premier temps, nous avons effectué une moyenne des champs rétro-propagés sur une centaine de réalisations du milieu. Puis, dans un deuxième temps, nous avons considéré une seule réalisation du milieu mais avec une source polychromatique. Cette dernière approche revient à utiliser une bande de fréquences et, en quelque sorte, à effectuer une moyenne sur les fréquences. Ces deux types de moyennes ont permis de mettre en évidence le phénomène de super-résolution.

En revanche, nous n'avons pas étudié la stabilité du retournement temporel en régime transitoire. En effet, "l'auto-moyennisation" effectuée par l'utilisation d'une bande de fréquences rend le phénomène de retournement temporel stable vis-à-vis des réalisations de milieux. Pour mettre en évidence numériquement cette propriété, nous devrions effectuer des simulations numériques avec une source polychromatique et pour un grand nombre de réalisations de milieux différentes. De telles simulations numériques permettraient de plus de comparer plus précisément les régimes harmonique (une seule fréquence) et transitoire (bande de fréquences). Toutefois, par manque de temps, ces simulations numériques n'ont pu être menées.

Terminons en soulignant que nous n'avons pas non plus eu le temps d'étudier l'influence des autres paramètres. En effet, nous nous sommes principalement intéressés à l'impact de la réalisation du milieu aléatoire sur la précision de la focalisation. Nous pensons toutefois qu'il serait intéressant d'analyser, dans le domaine fréquentiel ou transitoire, l'incidence sur la focalisation de la distance entre la source et la boîte contenant les obstacles, de l'espacement entre deux diffuseurs, la taille des objets ou encore de la nature des objets (autres conditions aux limites, obstacles dissipatifs, ...).

Deuxième partie

Equations intégrales et diffraction multiple

Chapitre 4

Contributions à la résolution numérique par équations intégrales de problèmes de diffraction multiple

Sommaire

4.1 Introduction . . . 134

4.2 Obtention des équations intégrales usuelles pour l'acoustique . . 135

4.2.1 Le problème de diffraction . . . 135

4.2.2 Opérateurs intégraux volumiques et de frontière . . . 136

4.2.3 Equations intégrales directes et indirectes . . . 139

4.2.4 Étude de l'EFIE . . . 142

4.2.5 Étude de la MFIE . . . 144

4.2.6 Étude de la CFIE . . . 147

4.2.7 L'équation intégrale indirecte de Brakhage-Werner . . . 149

4.2.8 Cas d'une condition de Neumann . . . 149

4.2.9 Récapitulation . . . 151

4.3 Simulation numérique de la diffraction multiple par des disques 151

4.3.1 Introduction . . . 151

4.3.2 Notations et bases de Fourier . . . 152

4.3.3 Formulation faible des équations intégrales . . . 153

4.3.4 Expressions des opérateurs intégraux dans la base de Fourier . . . 155

4.3.5 Post-traitement : champs proche et lointain . . . 159

4.3.6 Projection des ondes incidentes sur la base de Fourier . . . 164

4.3.7 Approximation en dimension finie . . . 166

4.3.8 Résolution numérique à basse fréquence . . . 170

4.3.9 Résolution numérique en moyenne/haute fréquence . . . 171

4.4 Étude du préconditionnement par la diffraction simple pour des géométries quelconques . . . 181

4.4.1 Équations intégrales directes . . . 181

4.4.2 Égalité des équations intégrales préconditionnées . . . 184

4.4.3 Comparaison avec les équations intégrales indirectes . . . 186

4.4.4 Validation numérique sur d'autres géométries 190
4.5 Conclusion 194

4.1 Introduction

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la résolution par équations intégrales de problèmes de diffraction multiple. Dans la section 4.2, nous présentons une approche générale et unifiée qui permet d'obtenir les équations intégrales usuelles directes (EFIE, MFIE, CFIE) et indirecte (Brakhage-Werner). Ceci nous amène également à préciser certaines propriétés relatives à ces équations et notamment le problème de l'existence de fréquences de résonance et du rayonnement des solutions parasites associées. De plus, nous insistons sur le fait que certaines équations intégrales sont de première ou de seconde espèce. Ceci est un point *a priori* important lorsqu'une résolution numérique itérative du système intégral par un solveur de Krylov est envisagée (après approximation de la solution par éléments de frontière).

Ensuite, dans la section 4.3, nous démontrons, comment exprimer analytiquement les opérateurs intégraux dans le cas où les obstacles sont circulaires. Ceci permet d'obtenir, pour chacune des équations intégrales, explicitement, le système linéaire à résoudre après projection en dimension finie. Dans ce cas particulier de configuration, la base d'approximation est obtenue par série de Fourier, la solution étant donc approchée spectralement et les quantités usuelles liées au post-traitement (section efficace radar, traces des champs) évaluées directement. Nous discutons ensuite de la résolution du système linéaire en séparant le cas de la basse et moyenne/haute fréquence. Dans le cas de la basse fréquence, le système est donné par une matrice par blocs, complexe et pleine. Pour un nombre modéré M d'obstacles et pour un paramètre de troncature N de l'approximation relativement bas, nous montrons qu'une solution brutale par un solveur direct peut être envisagée. Celle-ci devient néanmoins moins performante qu'un solveur itératif de Krylov quand M devient suffisamment grand. Lorsque l'on passe au régime de moyenne/haute fréquence, la stratégie proposée précédemment trouve ses limitations à la fois en termes de stockage et de coûts de calculs. Nous développons alors une approche alternative. En remarquant que la matrice est composée de blocs diagonaux (interactions d'un objet avec lui-même) et Toeplitz (interaction entre deux objets distincts), nous réduisons les coûts de stockage de façon drastique. D'autre part, la matrice étant alors donnée sous une forme compressée, une solution par un solveur direct est impossible puisque nous n'avons pas accès à la matrice explicitement. Par conséquent, la seule solution envisageable est itérative. Nous réduisons les coûts des produits matrice-vecteur à chaque itération par le biais de la FFT en se ramenant à une matrice circulante. Si l'on considère ensuite une formulation intégrale de type EFIE ou MFIE, la convergence est très mauvaise alors qu'en passant à une représentation de type CFIE ou Brakhage-Werner, la convergence est améliorée. La question du préconditionnement se pose alors. Cette question est non triviale dans notre situation essentiellement pour deux raisons :

- Le système est hautement non défini positif et donc faire converger une méthode itérative est connu pour être difficile notamment en haute fréquence
- Nous ne possédons pas la matrice et par conséquent nous ne pouvons pas avoir recours à des préconditionneurs algébriques.

Nous proposons alors de préconditionner par la matrice diagonale, ce qui signifie du point de vue de la physique que l'on préconditionne par la matrice de la *diffraction simple*. Nous montrons alors que la convergence est améliorée. De plus, il s'avère que toutes les équations

intégrales classiques (EFIE, MFIE, CFIE) préconditionnées sont alors identiques. Ce résultat reste vrai pour l'équation intégrale de Brakhage-Werner, à une matrice de passage près. Ce résultat nous a paru surprenant à première vue et nous avons alors pensé que cela était dû au cas particulier de la géométrie circulaire. En fait, il n'en est rien : le résultat est général et totalement indépendant de la géométrie !

Nous proposons alors dans la section 4.4 une démonstration de ce résultat qui ne nous semble pas connu. L'idée du préconditionnement par la diffraction simple en diffraction multiple est naturelle, les auteurs prenant soin du choix de la représentation intégrale sous-jacente (cf. par exemple [67] en haute fréquence). La démonstration du résultat utilise la présentation générale des équations intégrales de la section 4.2. Ainsi, les équations intégrales préconditionnées étant identiques (éventuellement à un opérateur de passage près), la convergence d'un solveur de Krylov pour leur résolution est identique. Nous terminons cette section par des validations numériques de cette propriété en utilisant une discrétisation par éléments de frontière des équations intégrales dans le cas d'une collection d'objets de forme non circulaire en dimension deux.

4.2 Obtention des équations intégrales usuelles pour l'acoustique

Nous présentons une méthode permettant d'obtenir les équations intégrales directes classiques. Cette partie est largement inspirée de Bendali et Fares [24] et de la thèse de Darbas [47].

4.2.1 Le problème de diffraction

Considérons un milieu homogène, isotrope et non dissipatif remplissant l'espace $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) contenant un ouvert borné Ω^-, non nécessairement connexe mais dont chaque composante est simplement connexe. Nous notons Γ sa frontière et $\mathbf{n}$ la normale unitaire pointant vers l'extérieur de Ω^-. Notons de plus $\Omega^+ = \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega^-}$ le domaine connexe de propagation. Nous étudions la diffraction par Ω^- d'une onde incidente u^{inc} en régime harmonique (nous supposons la dépendance temporelle de la forme $e^{-i\omega t}$ et k, le nombre d'onde, réel positif). Autrement dit, nous cherchons à déterminer l'onde diffractée u solution du problème

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega^+ \\ u = -u^{inc} & \text{sur } \Gamma \\ u \text{ sortant.} \end{cases} \tag{4.1}$$

Dans la suite, la condition "u sortant" signifie que l'onde u vérifie la condition de radiation de Sommerfeld

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \to \infty} \|\mathbf{x}\|^{(d-1)/2} \left(\nabla u \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - iku \right) = 0,$$

où $\|\mathbf{x}\| = (\sum_{j=1}^d x_j^2)^{1/2}$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$. Nous nous concentrons ici sur une condition de Dirichlet sur le bord Γ. Pour une condition de Neumann, les résultats obtenus ici s'adaptent parfaitement et nous en donnons un résumé plus loin. Comme u^{inc} est solution de l'équation de Helmholtz dans $\mathbb{R}^d$, alors l'onde totale $u_T = u + u^{inc}$ est solution

du problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u_T + k^2 u_T = 0 & \text{dans } \Omega^+ \\ u_T = 0 & \text{sur } \Gamma \\ (u_T - u^{inc}) \text{ sortant.} \end{cases} \tag{4.2}$$

Rappelons en outre que ces deux problèmes sont bien posés [45].

Théorème 4.1. *Les problèmes (4.1) et (4.2) admettent une unique solution.*

4.2.2 Opérateurs intégraux volumiques et de frontière

Nous effectuons quelques rappels sur les solutions de l'équation de Helmholtz. Nous introduisons en particulier les potentiels de simple et de double couche ainsi que les opérateurs intégraux volumiques et de frontière. Nous commençons par définir la fonction de Green G, solution élémentaire de l'équation de Helmholtz,

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \qquad G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \dfrac{i}{4} H_0^{(1)}(k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|) & \text{si } d = 2, \\ \dfrac{e^{ik\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} & \text{si } d = 3. \end{cases} \tag{4.3}$$

Les équations intégrales sont essentiellement basées sur le théorème de représentation intégrale de Helmholtz que nous rappelons [45, Théorèmes 3.1 et 3.3].

Théorème 4.2. *Si v est une solution de l'équation de Helmholtz dans le domaine connexe non borné Ω^+ et vérifie la condition de radiation de Sommerfeld, alors nous avons*

$$\int_\Gamma -G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\partial_{\mathbf{n}} v(\mathbf{y}) + \partial_{\mathbf{n_y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) v(\mathbf{y}) \, \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{y}) = \begin{cases} v(\mathbf{x}) & \textit{si } \mathbf{x} \in \Omega^+, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases} \tag{4.4}$$

Si v^- est solution de l'équation de Helmholtz dans le domaine borné Ω^-, alors il vient que

$$\int_\Gamma -G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\partial_{\mathbf{n}} v^-(\mathbf{y}) + \partial_{\mathbf{n_y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) v^-(\mathbf{y}) \, \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{y}) = \begin{cases} 0 & \textit{si } \mathbf{x} \in \Omega^+, \\ -v^-(\mathbf{x}) & \textit{sinon.} \end{cases} \tag{4.5}$$

Remarque 4.3. *Les intégrales sur Γ doivent ici être vues comme des produits de dualité entre l'espace de Sobolev $H^{1/2}(\Gamma)$ et son dual $H^{-1/2}(\Gamma)$. Toutefois, dès que l'onde incidente u^{inc} et la courbe Γ sont suffisamment régulières, le champ diffracté devient lui même régulier et nous pouvons identifier le produit de dualité au produit scalaire (non hermitien sur) $L^2(\Gamma)$:*

$$\langle f, g \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} = \int_\Gamma fg.$$

Dans ce chapitre, nous commettrons systématiquement l'abus consistant à noter le produit de dualité entre $H^{1/2}(\Gamma)$ et $H^{-1/2}(\Gamma)$ par une intégrale.

Introduisons maintenant les opérateurs intégraux volumiques de simple couche $\mathscr{L}$ et de double couche $\mathscr{M}$ définis par

$$\begin{array}{rccl} \mathscr{L} : & H^{-1/2}(\Gamma) & \longrightarrow & H^1_{loc}(\mathbb{R}^d \setminus \Gamma) \\ & \rho & \longmapsto & \mathscr{L}\rho, \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma, \mathscr{L}\rho(\mathbf{x}) = \displaystyle\int_\Gamma G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\rho(\mathbf{y}) \, \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{y}), \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} \mathscr{M}: & H^{1/2}(\Gamma) & \longrightarrow & H^1_{loc}(\mathbb{R}^d \setminus \Gamma) \\ & \lambda & \longmapsto & \mathscr{M}\lambda, \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma, \mathscr{M}\lambda(\mathbf{x}) = -\displaystyle\int_\Gamma \partial_{\mathbf{n_y}} G(\mathbf{x},\mathbf{y})\lambda(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\Gamma(\mathbf{y}). \end{array}$$

Nous pouvons alors écrire les champs v (4.4) et v^- (4.5) à l'aide de ces opérateurs comme

$$\begin{cases} v(\mathbf{x}) = -\mathscr{L}(\partial_{\mathbf{n}} v|_\Gamma)(\mathbf{x}) - \mathscr{M}(v|_\Gamma)(\mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \Omega^+, \\ v^-(\mathbf{x}) = \mathscr{L}(\partial_{\mathbf{n}} v^-|_\Gamma)(\mathbf{x}) + \mathscr{M}(v^-|_\Gamma)(\mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \Omega^-. \end{cases}$$

En outre, les potentiels de simple couche et de double couche présentent l'avantage d'être des solutions sortantes de l'équation de Helmholtz [44].

Proposition 4.4. *Pour toute densité $\rho \in H^{-1/2}(\Gamma)$ et $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma)$, les potentiels de simple couche $\mathscr{L}\rho$ et de double couche $\mathscr{M}\lambda$ sont des solutions sortantes de l'équation de Helmholtz dans $\mathbb{R}^d \setminus \Gamma$.*

Nous rappelons maintenant les relations de trace et de trace normale des opérateurs intégraux volumiques, appelées aussi relations de saut [44, Théorème 3.1].

Proposition 4.5. *Pour tout $\mathbf{x}$ de Γ, la trace et la trace normale des opérateurs $\mathscr{L}$ et $\mathscr{M}$ sont données par les relations suivantes (les signes indiquent que z tend vers x de l'extérieur ou de l'intérieur de Γ)*

$$\begin{aligned} &\lim_{\mathbf{z}\in\Omega^\pm\to\mathbf{x}} \mathscr{L}\rho(\mathbf{z}) = L\rho(\mathbf{x}), \\ &\lim_{\mathbf{z}\in\Omega^\pm\to\mathbf{x}} \mathscr{M}\lambda(\mathbf{z}) = \left(\mp\frac{1}{2}I + M\right)\lambda(\mathbf{x}), \\ &\lim_{\mathbf{z}\in\Omega^\pm\to\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{n_z}}\mathscr{L}\rho(\mathbf{z}) = \left(\mp\frac{1}{2}I + N\right)\rho(\mathbf{x}), \\ &\lim_{\mathbf{z}\in\Omega^\pm\to\mathbf{x}} \partial_{\mathbf{n_z}}\mathscr{M}\lambda(\mathbf{z}) = D\lambda(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{4.6}$$

où I est l'opérateur identité et les quatre opérateurs intégraux de frontière sont définis par

$$\begin{array}{rccl} L: & H^{-1/2}(\Gamma) & \longrightarrow & H^{1/2}(\Gamma), \\ M: & H^{1/2}(\Gamma) & \longrightarrow & H^{1/2}(\Gamma), \\ N: & H^{-1/2}(\Gamma) & \longrightarrow & H^{-1/2}(\Gamma), \\ D: & H^{1/2}(\Gamma) & \longrightarrow & H^{-1/2}(\Gamma), \end{array} \tag{4.7}$$

avec, pour $\mathbf{x} \in \Gamma$,

$$\begin{aligned} &L\rho(\mathbf{x}) = \int_\Gamma G(\mathbf{x},\mathbf{y})\rho(\mathbf{y})\mathrm{d}\Gamma(\mathbf{y}), \\ &M\lambda(\mathbf{x}) = -\int_\Gamma \partial_{\mathbf{n_y}} G(\mathbf{x},\mathbf{y})\lambda(\mathbf{y})\mathrm{d}\Gamma(\mathbf{y}), \\ &N\rho(\mathbf{x}) = \int_\Gamma \partial_{\mathbf{n_x}} G(\mathbf{x},\mathbf{y})\rho(\mathbf{y})\mathrm{d}\Gamma(\mathbf{y}) = -M^*\rho(\mathbf{x}), \\ &D\lambda(\mathbf{x}) = -\partial_{\mathbf{n_x}} \int_\Gamma \partial_{\mathbf{n_y}} G(\mathbf{x},\mathbf{y})\lambda(\mathbf{y})\mathrm{d}\Gamma(\mathbf{y}). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Les opérateurs intégraux de frontière seront toujours notés avec une lettre romane (ex : L) tandis que les opérateurs intégraux volumiques le seront avec une lettre calligraphique (ex : $\mathscr{L}$).

Remarque 4.6. *L'opérateur $M^* = -N$ est l'opérateur adjoint de M, au sens où*

$$\langle g, Mf\rangle_{H^{-1/2},H^{1/2}} = \langle -Ng, f\rangle_{H^{-1/2},H^{1/2}}, \qquad \forall (f,g) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma).$$

Nous avons la propriété suivante de compacité des opérateurs M et N [90, Théorème 4.4.1] (ils sont en fait régularisants d'ordre 1, *i.e.* continus de $H^s(\Gamma)$ dans $H^{s+1}(\Gamma)$).

Proposition 4.7. *Si la frontière Γ est de classe $\mathscr{C}^2$ alors l'opérateur M (respectivement l'opérateur N) est compact de $H^{1/2}(\Gamma)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$ (respectivement de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$).*

Concernant l'inversibilité des opérateurs L et D, on a le résultat suivant, issu des théorèmes 3.4.1 et 3.4.2 de [90].

Théorème 4.8. *Soit $F_D(\Omega^-)$ (resp. $F_N(\Omega^-)$) l'ensemble dénombrable des nombres d'onde k positifs s'accumulant à l'infini tels que le problème homogène de Dirichlet intérieur (resp. de Neumann intérieur)*

$$\begin{cases} -\Delta v = k^2 v & \text{dans } \Omega^- \\ v = 0 \,(\text{resp. } \partial_{\mathbf{n}} v = 0) & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{4.9}$$

admette des solutions non nulles. Alors, l'opérateur L (resp. D) réalise un isomorphisme de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$ (resp. de $H^{1/2}(\Gamma)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$) si et seulement si $k \notin F_D(\Omega^-)$ (resp. $k \notin F_N(\Omega^-)$).

Les fréquences irrégulières k de $F_D(\Omega^-)$ (resp. de $F_N(\Omega^-)$) sont exactement les racines carrées des valeurs propres de l'opérateur $(-\Delta)$ pour le problème homogène de Dirichlet intérieur (resp. de Neumann intérieur). Dans le cas de la diffraction multiple, on notera que les fréquences irrégulières de l'ensemble des obstacles sont à chercher parmi les fréquences irrégulières de chaque obstacle. Autrement dit, il n'y a pas de couplage entre les fréquences irrégulières.

Proposition 4.9. *Nous supposons que Ω^- est l'union de M ouverts connexes Ω_p^- d'intersection vide et tels que $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega^-}$ est connexe. Nous avons alors les égalités suivantes*

$$F_D(\Omega^-) = \bigcup_{p=1}^{M} F_D(\Omega_p^-), \qquad F_N(\Omega^-) = \bigcup_{p=1}^{M} F_N(\Omega_p^-).$$

Démonstration. Nous ne démontrons cette proposition que pour les fréquences irrégulières pour le problème interne de Dirichlet (le cas de Neumann étant similaire). De plus, afin de simplifier la preuve, nous supposons que Ω^- ne possède que deux composantes connexes Ω_1^- et Ω_2^- d'intersection vide. Nous démontrons la propriété par double inclusion.

Supposons que $k \in F_D(\Omega^-)$, alors il existe une fonction w définie dans Ω^-, non identiquement nulle, solution du problème interne homogène de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta w = k^2 w & \text{dans } \Omega^- = \Omega_1^- \bigcup \Omega_2^- \\ w = 0 & \text{sur } \Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2. \end{cases} \tag{4.10}$$

Notons $w_1 = w|_{\Omega_1^-}$ et $w_2 = w|_{\Omega_2^-}$ les restrictions de w à respectivement Ω_1^- et Ω_2^-. Comme la fonction w n'est pas identiquement nulle dans Ω^-, alors une des deux fonctions w_p n'est pas identiquement nulle sur son domaine de définition Ω_p^-, pour $p = 1, 2$. Quitte à renuméroter,

nous pouvons supposer $w_1 \neq 0$ dans Ω_1^-. Autrement dit, la fonction w_1 est une solution non nulle au problème interne de Dirichlet dans Ω_1^- suivant

$$\begin{cases} -\Delta v = k^2 v & \text{dans } \Omega_1^- \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases} \tag{4.11}$$

Par conséquent, nous avons $k \in F_D(\Omega_1^-)$ et, par suite, $k \in \bigcup_{p=1}^2 F_D(\Omega_p^-)$. Montrons maintenant que tout élément k de $F_D(\Omega_1^-) \bigcup F_D(\Omega_2^-)$ appartient également à $F_D(\Omega^-)$. Quitte à changer la numérotation, prenons un nombre d'onde k de $F_D(\Omega_1^-)$. Ainsi, il existe une solution non nulle w_1 au problème interne (4.11) de Dirichlet posé dans Ω_1^-. Ceci implique que la fonction w définie sur Ω^- par

$$w|_{\Omega_1^-} = w_1, \qquad\qquad w|_{\Omega_2^-} = 0,$$

est une solution non nulle au problème interne (4.10) de Dirichlet posé dans Ω^-. Ainsi, la fréquence k est une fréquence irrégulière de Ω^-, donc k est un élément de $F_D(\Omega^-)$. □

4.2.3 Equations intégrales directes et indirectes

Généralités

Nous présentons ici une approche systématique de construction des équations intégrales directes usuelles EFIE, MFIE et CFIE ainsi que de l'équation intégrale indirecte de Brakhage-Werner [30]. Les acronymes EFIE, MFIE et CFIE signifient respectivement *Electric Field Integral Equation*, *Magnetic Field Integral Equation* et *Combined Field Integral Equation*. Dans ce paragraphe, nous donnons un aperçu des différentes équations intégrales considérées. Les sections suivantes donnent une étude plus approfondie de chaque équation intégrale.

De manière générale, le principe des équations intégrales est de chercher le champ diffracté u au problème (4.1) sous la forme d'une combinaison d'un potentiel de simple couche et de double couche

$$u = \mathscr{L}\rho + \mathscr{M}\lambda,$$

où (λ, ρ) sont les deux nouvelles inconnues du problème. Ainsi, le champ total u_T s'écrit

$$u_T(\mathbf{x}) = \mathscr{L}\rho(\mathbf{x}) + \mathscr{M}\lambda(\mathbf{x}) + u^{inc}(\mathbf{x}), \qquad \forall \mathbf{x} \in \Omega^+. \tag{4.12}$$

Remarquons qu'une telle expression nous assure que u_T est solution de l'équation de Helmholtz dans Ω^+ et que $(u_T - u^{inc})$ est sortant (proposition 4.4).

Nous parlons d'équation intégrale directe lorsque les densités (λ, ρ) ont un sens physique [24]. En fait, pour ces équations intégrales, les densités valent exactement les données de Cauchy $(-u_T|_\Gamma, -\partial_{\mathbf{n}} u_T|_\Gamma)$. Toutefois, ceci n'est pas un choix mais une conséquence de la construction des équations intégrales, dont nous donnons ici les grandes lignes. Pour une équation intégrale indirecte, les densités n'ont pas de sens physique.

Initialement nous disposons d'une seule équation portant sur (λ, ρ), donnée par la condition de Dirichlet sur le bord Γ. Pour compléter le problème, nous introduisons une onde interne u_T^- (fictive) définie dans Ω^- par

$$u_T^-(\mathbf{x}) = \mathscr{L}\rho(\mathbf{x}) + \mathscr{M}\lambda(\mathbf{x}) + u^{inc}(\mathbf{x}), \qquad \forall \mathbf{x} \in \Omega^-. \tag{4.13}$$

Remarquons que d'après la proposition 4.4, u_T^- est solution de l'équation de Helmholtz dans Ω^-. D'autre part, du fait des relations de traces (4.6) des opérateurs intégraux $\mathscr{L}$ et $\mathscr{M}$, les inconnues (λ, ρ) vérifient les relations de saut

$$\begin{cases} \lambda = u_T^-|_\Gamma - u_T|_\Gamma \\ \rho = \partial_{\mathbf{n}} u_T^-|_\Gamma - \partial_{\mathbf{n}} u_T|_\Gamma. \end{cases} \tag{4.14}$$

L'onde u_T^- étant fictive, elle ne joue aucun rôle sur la solution u_T au problème de diffraction. Par conséquent, nous pouvons lui imposer une condition quelconque sur le bord Γ, représentée par un opérateur Λ^-

$$\begin{cases} \Delta u_T^- + k^2 u_T^- = 0 & \text{dans } \Omega^- \\ \Lambda^- u_T^- = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{4.15}$$

Pour construire les équations intégrales directes, la condition au bord est choisie de telle sorte que u_T^- soit nul dans Ω^- (nous parlons alors aussi de "méthode du champ nul"). Supposons que nous disposons d'une telle condition. Le champ interne u_T^- est alors identiquement nul et, en particulier, nous avons sur le bord Γ,

$$\begin{cases} -u_T^-|_\Gamma = 0 \\ -\partial_{\mathbf{n}} u_T^-|_\Gamma = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, les relations de saut (4.14) deviennent

$$\begin{cases} \lambda = -u_T|_\Gamma \\ \rho = -\partial_{\mathbf{n}} u_T|_\Gamma. \end{cases}$$

Nous retrouvons ici l'égalité entre les densités et les données de Cauchy. Par ailleurs, la condition de Dirichlet $u_T|_\Gamma = 0$ du problème (4.2) rend l'inconnue λ nulle. Ainsi, le champ fictif u_T^-, donné par (4.13), s'écrit sous la forme d'un simple couche uniquement

$$u_T^-(\mathbf{x}) = \mathscr{L}\rho(\mathbf{x}) + u^{inc}(\mathbf{x}), \qquad \forall \mathbf{x} \in \Omega^-.$$

La densité ρ est ensuite obtenue par résolution de l'équation intégrale

$$\Lambda^- u_T^- = \Lambda^-(\mathscr{L}\rho + u^{inc}) = 0. \tag{4.16}$$

Finalement, la solution u_T au problème de diffraction extérieur (4.9) est construite sous la forme d'un potentiel de simple couche de densité ρ, solution de l'équation (4.16),

$$u_T(\mathbf{x}) = \mathscr{L}\rho(\mathbf{x}) + u^{inc}(\mathbf{x}), \qquad \forall \mathbf{x} \in \Omega^+.$$

L'expression et la nature de l'équation intégrale (4.16) dépend de la condition aux limites sur u_T^-, représentée ici par l'opérateur Λ^-. Nous donnons ci-dessous un résumé des équations intégrales que nous étudions dans ce document ainsi que leurs principales propriétés. Une étude plus complète pour chaque équation intégrale est présentée plus loin.

EFIE (*Electric Field Integral Equation*)

Si nous appliquons une condition aux limites de Dirichlet dans le problème interne (4.15) et en utilisant la continuité de l'opérateur de simple couche sur le bord Γ, nous obtenons alors l'EFIE

$$u_T^-|_\Gamma = L\rho + u^{inc}|_\Gamma = 0,$$

qui est une équation intégrale de première espèce. Elle est bien posée et équivalente au problème de diffraction extérieur (4.2) pour tout nombre d'onde k hormis pour les fréquences irrégulières de Dirichlet (pour lesquelles u_T^- n'est plus forcément nul dans Ω^-). D'autre part, si $k \in F_D(\Omega^-)$ alors l'opérateur L n'est plus injectif (théorème 4.8). Notons toutefois que l'opérateur L reste surjectif puisque $-\partial_{\mathbf{n}} u_T|_\Gamma$ est toujours solution de l'EFIE. Pour ces fréquences de résonance, toute solution $\widetilde{\rho}$ de l'EFIE s'écrit alors $\widetilde{\rho} = \rho^* + \rho$, où ρ^* est un élément du noyau de L et $\rho = -\partial_{\mathbf{n}} u_T|_\Gamma$ est la solution physique. L'onde $\widetilde{u_T}$ reconstruite à partir de $\widetilde{\rho}$ est parasitée par le terme $\mathscr{L}\rho^*$

$$\widetilde{u_T} = \mathscr{L}\widetilde{\rho} + u^{inc} = u_T + \mathscr{L}\rho^*. \tag{4.17}$$

Cependant, comme nous le montrons plus loin, le terme parasite $\mathscr{L}\rho^*$ est en fait nul dans Ω^+, il ne "rayonne pas" dans le domaine Ω^+.

MFIE (*Magnetic Field Integral Equation*)

En prenant une condition de Neumann dans le problème interne (4.15) et en utilisant les formules de traces (4.6), nous obtenons la MFIE

$$\partial_{\mathbf{n}} u_T^-|_\Gamma = \left(\frac{1}{2}I + N\right)\rho + \partial_{\mathbf{n}} u^{inc}|_\Gamma = 0,$$

qui est une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce. Elle est bien posée et équivalente au problème de diffraction extérieur (4.2) tant que k n'est pas une fréquence irrégulière de Neumann. Comme pour l'EFIE, il n'est plus garanti que l'onde u_T^- soit nulle. L'opérateur $\left(\frac{1}{2}I + N\right)$ de la MFIE n'est alors plus injectif mais reste surjectif, puisque $-\partial_{\mathbf{n}} u_T|_\Gamma$ est encore solution de la MFIE. Nous verrons plus loin que si $k \in F_N(\Omega^-)$, alors les solutions de la MFIE s'écrivent $\widetilde{\rho} = \rho^* + \rho$, où ρ^* est un élément du noyau de l'opérateur $\left(\frac{1}{2}I + N\right)$ de la MFIE et $\rho = -\partial_{\mathbf{n}} u_T|_\Gamma$ est la "bonne" solution. Cependant, lorsque nous reconstruisons l'onde $\widetilde{u_T}$ associée à $\widetilde{\rho}$ (4.17), le terme parasite $\mathscr{L}\rho^*$ ne disparaît pas dans Ω^+ : on dit qu'il "rayonne" dans le domaine Ω^+.

CFIE (*Combined Field Integral Equation*)

Pour éviter les fréquences irrégulières, Burton et Miller [32] ont proposé de prendre une combinaison linéaire de l'EFIE et de la MFIE en choisissant une condition aux limites mixte

$$\Lambda^- u_T^- = (1-\alpha)\partial_{\mathbf{n}} u_T^-|_\Gamma + \alpha\eta u_T^-|_\Gamma = 0.$$

Cette condition nous assure que l'onde interne u_T^- est nulle dans Ω^- dès que les paramètres α et η vérifient

$$0 < \alpha < 1, \qquad \Im(\eta) \neq 0,$$

où $\Im(\eta)$ est la partie imaginaire de η. Avec une telle condition, nous obtenons la CFIE (dénomination d'Harrington et Mautz [70] en électromagnétisme) ou équation de Burton-Miller

$$\left[(1-\alpha)\left(\frac{1}{2}I+N\right)+\alpha\eta L\right]\rho=-\left[(1-\alpha)\partial_{\mathbf{n}}u^{inc}|_{\Gamma}+\alpha\eta u^{inc}|_{\Gamma}\right].$$

Cette équation intégrale possède le double avantage d'être de deuxième espèce et d'être bien posée pour tout nombre d'onde k.

L'équation intégrale indirecte de Brakhage-Werner

Le principe est de lier linéairement les inconnues λ et ρ par un paramètre complexe η de partie imaginaire non nulle

$$\psi=-\lambda=-\frac{\rho}{\eta}.$$

Ainsi l'onde u_T est à rechercher sous la forme d'une combinaison linéaire d'un simple et d'un double couche

$$u_T=-(\eta\mathscr{L}+\mathscr{M})\psi+u^{inc}.$$

L'équation intégrale est alors obtenue par simple passage à la trace, soit grâce aux relations de traces des opérateurs intégraux volumiques (4.6),

$$\left[-\eta L-M+\frac{1}{2}I\right]\psi=-u^{inc}|_{\Gamma}.$$

Cette équation intégrale de deuxième espèce, dite de Brakhage-Werner [30], est bien posée pour tout nombre d'onde k et est équivalente au problème de diffraction. En revanche, l'inconnue ψ n'a pas de sens physique.

4.2.4 Étude de l'EFIE

Nous cherchons l'onde diffractée u sous la forme d'une combinaison d'un potentiel de simple couche et d'un potentiel de double couche

$$u(\mathbf{x})=\mathscr{L}\rho(\mathbf{x})+\mathscr{M}\lambda(\mathbf{x}),\qquad\forall\mathbf{x}\in\Omega^{+}.$$

Ainsi, les ondes totale $u_T=u+u^{inc}$ et interne u_T^- sous de la forme (4.12) et (4.13). Les densités λ et ρ doivent vérifier les relations de saut (4.14) et, de plus, nous imposons une condition de Dirichlet sur Γ au champ fictif u_T^-

$$u_T^-=0\qquad\text{sur }\Gamma.$$

Le champ non physique u_T^- est alors solution du problème interne de Dirichlet

$$\begin{cases}\Delta u_T^-+k^2u_T^-=0 & \text{dans }\Omega^-\\ u_T^-=0 & \text{sur }\Gamma.\end{cases}\tag{4.18}$$

En supposant que $k\notin F_D(\Omega^-)$, le champ u_T^- est alors identiquement nul dans Ω^-, d'après le théorème 4.8. Dans ce cas, les relations de saut (4.14) se ramènent à

$$\begin{cases}\lambda=-u_T|_{\Gamma}=0\\ \rho=-\partial_{\mathbf{n}}u_T|_{\Gamma}.\end{cases}$$

La densité ρ est ensuite obtenue par résolution de l'équation intégrale $u_T^-|_\Gamma = 0$. A l'aide de l'expression (4.13) de u_T^- et des relations de traces des opérateurs intégraux volumiques (proposition 4.5), cette condition s'écrit

$$L\rho = -u^{inc}|_\Gamma. \tag{4.19}$$

Cette équation, appelée EFIE (Electric Field Integral Equation) pour le problème de Dirichlet, est une équation intégrale de première espèce. D'après le théorème 4.8, nous remarquons que l'EFIE (4.19) admet une unique solution si et seulement si $k \notin F_D(\Omega^-)$. Plus précisément, nous disposons de la proposition suivante.

Proposition 4.10. *Pour $\rho \in H^{-1/2}(\Gamma)$, définissons $v_T = \mathscr{L}\rho + u^{inc}$ dans le domaine de propagation Ω^+. Supposons de plus que k ne soit pas une fréquence de résonance de $F_D(\Omega^-)$. Alors, ρ est la solution de l'EFIE (4.19) si et seulement si v_T est la solution du problème de diffraction extérieur (4.2).*

Démonstration. Par construction, on sait que si $v_T = \mathscr{L}\rho + u^{inc}$ est solution du problème (4.2), alors ρ est solution de l'EFIE (4.19). Montrons l'implication inverse. Supposons que ρ est la solution de l'EFIE (4.19) et introduisons le potentiel de simple couche associé $v_T = \mathscr{L}\rho + u^{inc}$. Nous avons alors, sur le bord Γ,

$$v_T|_\Gamma = L\rho + u^{inc}|_\Gamma = 0.$$

De plus, d'après la Proposition 4.4, le potentiel v_T est la solution de l'équation de Helmholtz dans Ω^+ et $(v_T - u^{inc})$ satisfait la condition de radiation de Sommerfeld. Par conséquent, le potentiel de simple couche v est la solution du problème de diffraction (4.2). □

La condition $k \notin F_D(\Omega^-)$ assure l'unicité de la solution de l'EFIE, en vertu du théorème 4.8. Lorsque k est une fréquence de $F_D(\Omega^-)$, l'opérateur L n'est plus injectif et l'EFIE devient mal posée. Dans ce cas, toute solution $\widetilde{\rho}$ de l'EFIE (4.19) s'écrit

$$\widetilde{\rho} = \rho^* + \rho,$$

où $\rho = -\partial_{\mathbf{n}} u_T|_\Gamma$ est la "bonne" solution et ρ^* un élément non forcément nul du noyau de L. La reconstruction de l'onde $\widetilde{u_T}$ avec la densité $\widetilde{\rho}$, nous donne

$$\widetilde{u_T} = \mathscr{L}\widetilde{\rho} + u^{inc} = \mathscr{L}\rho + u^{inc} + \mathscr{L}\rho^* = u_T + \mathscr{L}\rho^*.$$

La solution calculée $\widetilde{u_T}$ est ainsi polluée par le terme $\mathscr{L}\rho^*$. Toutefois, comme le montre la proposition suivante, ce terme est nul et l'onde $\widetilde{u_T}$ est alors la solution du problème de diffraction (4.2). En terme d'ingénieur, on dit que les modes parasites "ne rayonnent pas".

Proposition 4.11. *Nous avons la relation suivante entre les éléments du noyau de l'opérateur L et leur potentiel de simple couche associé*

$$\forall \rho^* \in \mathrm{Ker}(L), \qquad \mathscr{L}\rho^* = 0 \text{ dans } \Omega^+.$$

Démonstration. Soit ρ^* un élément du noyau de L et $v = \mathscr{L}\rho^*$ le potentiel de simple couche associé défini dans Ω^+. Comme $\rho^* \in \mathrm{Ker}(L)$, nous avons alors $v|_\Gamma = L\rho^* = 0$. De plus, v est une solution sortante de l'équation de Helmholtz dans Ω^+, ce qui implique que v est solution du problème de diffraction extérieur (4.1) avec un second membre nul. L'unicité pour ce problème, donnée par le théorème 4.1, implique que le champ v est identiquement nul dans Ω^+. □

Remarque 4.12. *La démonstration de la proposition 4.11 suggérait déja ce résultat. En effet, la fonction* $\widetilde{u_T} = u_T + \mathscr{L}\rho^*$ *est solution de l'équation de Helmholtz dans le domaine* Ω^+ *et* $(\widetilde{u_T} - u^{inc})$ *est sortant (proposition 4.4). De plus, sa trace sur le bord* Γ *donne*

$$\widetilde{u_T}|_\Gamma = u_T|_\Gamma + L\rho^* = u_T|_\Gamma = 0.$$

Donc $\widetilde{u_T}$ *est la solution du problème de diffraction (4.2) et on a bien :* $\widetilde{u_T} = u_T$.

Remarque 4.13. *Même si* $\mathscr{L}\rho^*$ *ne pollue pas la solution dans* Ω^+*, la résolution numérique de l'EFIE au voisinage d'une fréquence de résonance* $k \in F_D(\Omega^-)$ *est problématique, compte tenu de la présence d'instabilités numériques.*

4.2.5 Étude de la MFIE

La méthode pour construire la MFIE est sensiblement la même que pour l'EFIE sauf que la condition à appliquer à u_T^- sur le bord Γ est une condition de Neumann. L'onde diffractée est toujours cherchée sous la forme suivante

$$u(\mathbf{x}) = \mathscr{L}\rho(\mathbf{x}) + \mathscr{M}\lambda(\mathbf{x}), \qquad \forall \mathbf{x} \in \Omega^+,$$

où λ et ρ sont deux densités inconnues. En introduisant les champs total $u_T = u + u^{inc}$ et intérieur u_T^-, donnés respectivement par (4.12) et (4.13), les densités λ et ρ doivent vérifier les relations de saut (4.14). Pour obtenir la MFIE, nous imposons de plus que u_T^- vérifie

$$\partial_{\mathbf{n}} u_T^- = 0 \qquad \text{sur } \Gamma.$$

Le champ fictif u_T^- est alors solution du problème interne de Neumann

$$\begin{cases} \Delta u_T^- + k^2 u_T^- = 0 & \text{dans } \Omega^- \\ \partial_{\mathbf{n}} u_T^- = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{4.20}$$

En supposant que $k \notin F_N(\Omega^-)$, l'onde u_T^- est alors identiquement nulle dans Ω^-, d'après le Théorème 4.8 et, dans ce cas, les relations de saut (4.14) deviennent

$$\begin{cases} \lambda = -u_T|_\Gamma = 0 \\ \rho = -\partial_{\mathbf{n}} u_T|_\Gamma. \end{cases}$$

La densité ρ est ensuite obtenue par résolution de l'équation intégrale $\partial_{\mathbf{n}} u_T^-|_\Gamma = 0$. En utilisant l'expression de u_T^- (4.13) ainsi que les relations de traces de opérateurs intégraux volumiques (voir proposition 4.5), cette égalité $\partial_{\mathbf{n}} u_T^-|_\Gamma = 0$ s'écrit

$$\left(\frac{1}{2}I + N\right)\rho = -\partial_{\mathbf{n}} u^{inc}|_\Gamma. \tag{4.21}$$

Cette équation, appelée MFIE (Magnetic Field Integral Equation) pour le problème de Dirichlet, est une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ (l'opérateur N étant compact d'après la Proposition 4.7). Par ailleurs, cette équation est bien posée tant que k n'est pas une fréquence irrégulière pour le problème interne de Neumann homogène.

Proposition 4.14. *La MFIE (4.21) admet une unique solution dans* $H^{-1/2}(\Gamma)$ *si et seulement si* $k \notin F_N(\Omega^-)$.

Pour prouver cette proposition, nous avons besoin du lemme suivant

Lemme 4.15. *Pour toute densité $\rho \in H^{-1/2}(\Gamma)$, le potentiel de simple couche $\mathscr{L}\rho$ est identiquement nul dans Ω^- si et seulement si la densité ρ est nulle.*

Démonstration. Soit $\rho \in H^{-1/2}(\Gamma)$ une densité et $v^- = \mathscr{L}\rho$ le potentiel de simple couche associé défini dans Ω^-. Il suffit de montrer que l'annulation du potentiel v^- dans Ω^- implique que la densité ρ est nulle. Supposons donc que $v^- = 0$. Nous avons en particulier

$$v^-|_\Gamma = 0 = L\rho,$$

ainsi que

$$\partial_{\mathbf{n}} v^-|_\Gamma = 0 = \left(\frac{1}{2}I + N\right)\rho. \tag{4.22}$$

Nous introduisons maintenant le potentiel de simple couche $v = \mathscr{L}\rho$ défini dans le domaine extérieur Ω^+. D'après la Proposition 4.5, nous avons sur le bord Γ,

$$v^+|_\Gamma = L\rho = v^-|_\Gamma = 0.$$

Comme v^+ est solution sortante de l'équation de Helmholtz dans Ω^+ vérifiant la condition de Dirichlet homogène, alors par unicité du problème de diffraction (Théorème 4.1), l'onde v^+ est identiquement nulle dans Ω^+. Ceci implique en particulier que sa trace normale sur Γ est nulle, soit

$$\partial_{\mathbf{n}} v^+|_\Gamma = \left(-\frac{1}{2}I + N\right)\rho = 0. \tag{4.23}$$

Il ne nous reste plus qu'à effectuer la différence entre les égalités (4.22) et (4.23) pour obtenir que $\rho = 0$. □

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 4.14.

Preuve de la Proposition 4.14. Comme l'opérateur de la MFIE est un opérateur de Fredholm de seconde espèce ($N : H^{-1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ est compact), montrer l'existence et l'unicité de la solution de la MFIE revient à montrer que l'opérateur $\left(\frac{1}{2}I + N\right)$ est injectif (voir par exemple [31]). Pour cela, nous montrons la contraposée de la propriété, c'est à dire que $\left(\frac{1}{2}I + N\right)$ n'est pas injectif si et seulement si $k \in F_N(\Omega^-)$.

Supposons que $k \in F_N(\Omega^-)$, alors le problème interne de Neumann (4.20) admet (au moins) une solution non nulle notée ω, définie dans Ω^-. Par la représentation intégrale des solutions de l'équation de Helmholtz introduite dans le théorème 4.2, nous avons

$$\omega = \mathscr{L}(\partial_{\mathbf{n}}\omega|_\Gamma) + \mathscr{M}(\omega|_\Gamma) = \mathscr{M}(\omega|_\Gamma).$$

Comme $\omega \neq 0$, alors l'expression ci-dessus implique que $\omega|_\Gamma \neq 0$. En prenant la trace sur Γ de ω, il vient que

$$\omega|_\Gamma = \left(\frac{1}{2}I + M\right)\omega|_\Gamma.$$

Ainsi, $\omega|_\Gamma$ est un élément du noyau de l'opérateur $\left(\frac{1}{2}I - M\right)$. Or, d'après la relation (4.6), nous avons $M = -N^*$, ce qui nous permet d'écrire les égalités successives suivantes

$$\omega|_\Gamma \in \operatorname{Ker}\left(\frac{1}{2}I - M\right) = \operatorname{Ker}\left(\frac{1}{2}I + N^*\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2}I + N\right)^\perp,$$

où $E^{\perp}$ est l'espace orthogonal de E. Ainsi, comme $\omega|_{\Gamma}$ n'est pas identiquement nul, il vient que l'opérateur de la MFIE $\left(\frac{1}{2}I + N\right)$ n'est pas surjectif et, par suite, n'est pas injectif non plus.

Supposons maintenant que $\left(\frac{1}{2}I + N\right)$ n'est pas injectif et notons alors ρ^* un élément non nul du noyau de l'opérateur$\left(\frac{1}{2}I + N\right)$. Le potentiel de simple couche $\omega = \mathscr{L}\rho^*$ défini dans Ω^- est solution du problème interne de Neumann (4.20) et n'est pas identiquement nul dans Ω^- (d'après le lemme 4.15). Le nombre d'onde k est donc une fréquence irrégulière pour le problème interne de Neumann. □

Proposition 4.16. *Soit $v_T = \mathscr{L}\rho + u^{inc}$ défini dans le domaine de propagation Ω^+ et $k \notin F_N(\Omega^-)$. Alors, ρ est la solution de la MFIE (4.21) si et seulement si v_T est la solution du problème de diffraction extérieur (4.2).*

Démonstration. Par construction, nous avons vu que si v_T est solution de (4.2) et que $k \notin F_N(\Omega^-)$, alors ρ est solution de la MFIE (4.21). Inversement, si ρ est solution de (4.21), alors, le potentiel de simple couche

$$v_T^-(\mathbf{x}) = \mathscr{L}\rho(\mathbf{x}) + u^{inc}(\mathbf{x}) \qquad \forall \mathbf{x} \in \Omega^-,$$

est solution du problème intérieur homogène de Neumann (4.20) et est donc nul dans Ω^-, car $k \notin F_N(\Omega^-)$. En particulier, nous avons sur le bord Γ

$$v_T^-|_{\Gamma} = 0 = L\rho = v_T|_{\Gamma}.$$

Donc, v_T est solution de l'équation de Helmholtz dans Ω^+, $(v_T - u^{inc})$ est sortant et $v_T|_{\Gamma} = 0$. Par conséquent, v_T est la solution du problème de diffraction (4.2). □

La condition $k \notin F_N(\Omega^-)$ garantit l'unicité de la solution de la MFIE. Si k est une fréquence irrégulière pour le problème interne de Neumann (i.e. $k \in F_N(\Omega^-)$), alors l'opérateur de la MFIE $\left(\frac{1}{2}I + N\right)$ n'est pas injectif (proposition 4.14) et toutes les solutions $\widetilde{\rho}$ de la MFIE sont de la forme

$$\widetilde{\rho} = \rho^* + \rho,$$

où $\rho = -\partial_{\mathbf{n}} u_T|_{\Gamma}$ est la "bonne" solution et ρ^* est un élément non forcément nul du noyau de $\left(\frac{1}{2}I + N\right)$. Dans ce cas, l'onde $\widetilde{u_T}$ construite avec la densité $\widetilde{\rho}$ a pour expression

$$\widetilde{u_T} = \mathscr{L}\widetilde{\rho} + u^{inc} = u_T + \mathscr{L}\rho^*.$$

Ainsi, le champ $\widetilde{u_T}$ est parasité par le terme $\mathscr{L}\rho^*$. Or, comme le montre la proposition suivante, ce terme n'est pas nul si $\rho^* \neq 0$. On dit que "les modes rayonnent" dans le domaine Ω^+ : la solution calculée avec la MFIE est polluée dès que nous sommes sur une fréquence irrégulière.

Proposition 4.17. *Soit $\rho^* \in \operatorname{Ker}\left(\dfrac{1}{2}I + N\right)$, alors*

$$\mathscr{L}\rho^* = 0 \text{ dans } \Omega^+ \Longleftrightarrow \rho^* = 0.$$

Démonstration. Soit ρ un élément du noyau de l'opérateur $\left(\frac{1}{2}I + N\right)$ et supposons que $\mathscr{L}\rho^* = 0$ dans Ω^+. Introduisons le potentiel de simple couche

$$v(\mathbf{x}) = \mathscr{L}\rho^*(\mathbf{x}) = 0, \qquad \forall \mathbf{x} \in \Omega^+.$$

L'onde v étant identiquement nulle dans Ω^+, sa trace normale sur Γ l'est aussi

$$\partial_{\mathbf{n}} v|_\Gamma = 0 = \left(-\frac{1}{2}I + N\right)\rho^*.$$

Cette dernière égalité implique que ρ^* vérifie

$$\rho^* = \left(\frac{1}{2}I + N\right)\rho^*.$$

Or, la densité ρ^* appartient au noyau de l'opérateur $\left(\frac{1}{2}I + N\right)$. Ainsi, nous avons bien $\rho^* = 0$. □

4.2.6 Étude de la CFIE

Pour pallier le problème des fréquences irrégulières tout en conservant une équation intégrale de deuxième espèce, une solution, introduite par Burton et Miller [32] (et Harrington et Mautz [70]), est de choisir une condition au bord mixte. L'onde totale u_T et l'onde interne u_T^- sont toujours cherchées sous la forme d'une combinaison d'un potentiel de simple couche et d'un potentiel de double couche (voir les relations (4.12) et (4.13)). Les densités λ et ρ doivent vérifier les relations de saut (4.14) ainsi que la condition de Fourier-Robin (ou d'impédance) suivante

$$(1-\alpha)\partial_{\mathbf{n}} u_T^- + \alpha\eta u_T^- = 0 \qquad \text{sur } \Gamma, \tag{4.24}$$

avec α une constante réelle et η un nombre complexe tels que

$$0 < \alpha < 1, \qquad \Im(\eta) \neq 0, \tag{4.25}$$

où $\Im(\eta)$ est la partie imaginaire de η. Le champ u_T^- est alors solution du problème intérieur avec une condition mixte

$$\begin{cases} \Delta u_T^- + k^2 u_T^- = 0 & \text{dans } \Omega^- \\ (1-\alpha)\partial_{\mathbf{n}} u_T^- + \alpha\eta u_T^- = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{4.26}$$

Nous avons alors la proposition suivante

Proposition 4.18. *Si α et η vérifient (4.25), alors la solution nulle est l'unique solution du problème intérieur (4.26).*

Démonstration. Soit v une solution du problème (4.26). Nous avons alors

$$\int_{\Omega^-} |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}\Omega^- = \int_{\Omega^-} \nabla v \cdot \nabla \overline{v} \, \mathrm{d}\Omega^-.$$

En appliquant la formule de Green, il vient que

$$\int_{\Omega^-} |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}\Omega^- = -\int_{\Omega^-} \overline{v}\Delta v \, \mathrm{d}\Omega^- + \int_\Gamma \overline{v}\partial_{\mathbf{n}} v \, \mathrm{d}\Gamma.$$

Or, v est solution de l'équation de Helmholtz dans Ω^-. Nous avons $\Delta v = -k^2 v$ dans Ω^- et par conséquent

$$\int_{\Omega^-} |\nabla v|^2 - k^2|v|^2 \, \mathrm{d}\Omega^- = \int_\Gamma \overline{v}\partial_{\mathbf{n}} v \, \mathrm{d}\Gamma.$$

Ensuite, la condition aux limites (4.24) sur le bord Γ conduit à

$$\int_{\Omega^-} |\nabla v|^2 - k^2|v|^2 \, \mathrm{d}\Omega^- = \frac{-\alpha}{1-\alpha}\eta \int_\Gamma |v|^2 \, \mathrm{d}\Gamma.$$

Le membre de gauche de l'égalité ci-dessus est réel. Ainsi, en prenant la partie imaginaire de cette égalité, et comme $\Im(\eta) \neq 0$, il vient que

$$\int_\Gamma |v|^2 \, \mathrm{d}\Gamma = 0.$$

Par conséquent, nous avons $v|_\Gamma = 0$. Nous utilisons à nouveau la condition mixte (4.24) pour obtenir que $\partial_{\mathbf{n}} v|_\Gamma = 0$. Finalement, la représentation intégrale de v par le théorème 4.2 permet de conclure que le champ v est identiquement nul dans Ω^-. □

La condition mixte (4.24) choisie nous assure que u_T^- est nul dans Ω^-. Les relations de saut (4.14) se ramènent donc à

$$\begin{cases} \lambda = -u_T|_\Gamma = 0 \\ \rho = -\partial_{\mathbf{n}} u_T|_\Gamma. \end{cases}$$

La densité ρ est ensuite obtenue par résolution de l'équation intégrale (4.24), qui s'écrit, grâce à la proposition 4.5,

$$\left[(1-\alpha)\left(\frac{1}{2}I + N\right) + \alpha\eta L\right]\rho = -\left[(1-\alpha)\partial_{\mathbf{n}} u^{inc}|_\Gamma + \alpha\eta u^{inc}|_\Gamma\right]. \tag{4.27}$$

Cette équation, appelée CFIE (Combined Field Integral Equation), est une équation intégrale de deuxième espèce et présente l'avantage d'être bien posée pour tout nombre d'onde k, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 4.19. *Soit $v_T = \mathscr{L}\rho + u^{inc}$ défini dans Ω^+. Pour tout $k > 0$, la densité ρ est la solution de la CFIE (4.27) si et seulement si le champ v_T est la solution du problème de diffraction extérieur (4.2).*

Démonstration. Précédemment, nous avons démontré par construction que si v_T est solution du problème de diffraction (4.2), alors la densité ρ est solution de la CFIE (4.27). Maintenant supposons que ρ est la solution de la CFIE (4.27). Dans ce cas, le potentiel de simple couche $v_T^- = \mathscr{L}\rho + u^{inc}$ défini dans Ω^- est solution du problème intérieur avec une condition mixte (4.26). La proposition 4.18 implique alors que $v_T^- = 0$ et, par conséquent, nous avons sur le bord Γ,

$$v_T^-|_\Gamma = L\rho = 0.$$

Ainsi, la fonction $v_T = \mathscr{L}\rho + u^{inc}$ définie dans Ω^+ est solution de l'équation de Helmholtz dans Ω^+, $v_T - u^{inc}$ est sortante et, de plus

$$v_T|_\Gamma = L\rho + u^{inc}|_\Gamma = v^-|_\Gamma = 0.$$

Donc, v_T est la solution du problème de diffraction (4.2). □

Remarque 4.20. *Dans le cas de la diffraction par M obstacles, c'est à dire si $\Omega^- = \cup_{p=1}^M \Omega_p^-$, où les Ω_p^- sont des ouverts connexes d'intersection vide, nous pouvons choisir des paramètres α_p et η_p différents pour chaque obstacle Ω_p^-. Toutefois, pour $p = 1, \ldots, M$, les paramètres α_p et η_p doivent être tels que $0 < \alpha_p < 1$ et les parties imaginaires des paramètres η_p doivent être de même signe.*

4.2.7 L'équation intégrale indirecte de Brakhage-Werner

Le problème de diffraction (4.2) admet une unique solution, pour toute fréquence $k > 0$. Les fréquences irrégulières qui apparaissent dans l'EFIE et la MFIE ne sont donc pas intrinsèques au problème de diffraction, mais sont dues à la méthode de résolution. Afin d'obtenir une équation intégrale de deuxième espèce bien posée pour tout nombre d'onde k, une autre solution que la CFIE consiste à lier linéairement les deux densités λ et ρ par un paramètre de couplage η, avec $\Im(\eta) \neq 0$. Le problème se ramène alors à une inconnue et il n'est plus nécessaire de définir une onde interne fictive, évitant tout problème de fréquence irrégulière. Ce procédé a été introduit par Brakhage et Werner [30].

On introduit la densité ψ suivante

$$\psi = -\lambda = -\frac{\rho}{\eta},$$

et on cherche l'onde totale u_T sous la forme

$$u_T = (-\eta\mathscr{L} - \mathscr{M})\,\psi + u^{inc}.$$

Pour que l'équation intégrale soit bien posée, le paramètre de couplage η doit vérifier $\Im(\eta) \neq 0$. Ensuite, par simple passage à la trace, nous obtenons l'équation intégrale de deuxième espèce de Brakhage Werner

$$\left(-\eta L - M + \frac{1}{2}I\right)\psi = -u^{inc}|_\Gamma. \tag{4.28}$$

Nous donnons le résultat d'existence et d'unicité de la solution de l'équation intégrale de Brakhage-Werner sans fournir de démonstration.

Proposition 4.21. *Soit $v_T = (-\eta\mathscr{L} - \mathscr{M})\,\psi + u^{inc}$, alors, pour tout nombre d'onde $k > 0$, la densité ψ est la solution de l'équation intégrale de Brakhage-Werner (4.28) si et seulement si v_T est la solution du problème de diffraction (4.2).*

Remarque 4.22. *Une étude numérique concernant le choix optimal du paramètre η est proposée dans [79]. Dans le cadre de la diffraction simple et pour une condition de Dirichlet, le choix $\eta = i/2\max(1, k)$ conduit à un conditionnement raisonnable de la matrice du système linéaire associé à l'équation intégrale de Brakhage-Werner. Des généralisations de ces équations, lorsque η est un opérateur sont disponibles dans [12, 13].*

4.2.8 Cas d'une condition de Neumann

Nous considérons maintenant le problème de diffraction pour une condition de Neumann sur le bord Γ

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega^+ \\ \partial_{\mathbf{n}} u = -\partial_{\mathbf{n}} u^{inc} & \text{sur } \Gamma \\ u \text{ sortant.} \end{cases}$$

Le principe des équations intégrales présenté pour une condition de Dirichlet reste le même, seules les équations changent. L'onde diffractée u est cherchée sous la forme d'une combinaison linéaire entre un potentiel de simple couche et un potentiel de double couche

$$u(\mathbf{x}) = \mathscr{L}\rho(\mathbf{x}) + \mathscr{M}\lambda(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \Omega^+.$$

Pour les équations intégrales directes, on introduit une onde interne fictive $u_T^- = \mathscr{L}\rho + \mathscr{M}\lambda + u^{inc}$ définie dans Ω^-. On impose alors une condition aux limites sur Γ au champ u_T^- de manière à le rendre nul dans Ω^-. Dans ce cas, les relations de saut (4.14) deviennent

$$\begin{cases} \lambda = -u_T|_\Gamma \\ \rho = -\partial_{\mathbf{n}} u_T|_\Gamma = 0. \end{cases}$$

Ainsi, du fait de la condition de Neumann, c'est la densité ρ qui s'annule. Les ondes interne u_T^- et externe u_T sont à chercher sous la forme d'un potentiel de double couche

$$u_T^-(\mathbf{x}) = \mathscr{M}\lambda(\mathbf{x}) + u^{inc}(\mathbf{x}) \qquad \forall \mathbf{x} \in \Omega^-,$$

$$u_T = \mathscr{M}\lambda(\mathbf{x}) + u^{inc}(\mathbf{x}) \qquad \forall \mathbf{x} \in \Omega^+.$$

Comme précédemment, la condition aux limites appliquée à u_T^- fournit l'équation intégrale à résoudre. Nous listons les quatre équations intégrales obtenues ainsi que leurs principales propriétés, sans fournir les démonstrations qui sont similaires à celles pour une condition de Dirichlet.

- EFIE : on applique une condition de Neumann à l'onde u_T^-

$$\partial_{\mathbf{n}} u_T^-|_\Gamma = 0, \tag{4.29}$$

  et on obtient l'EFIE pour une condition de Neumann,

$$D\lambda = -\partial_{\mathbf{n}} u^{inc}|_\Gamma.$$

  Cette équation intégrale de première espèce est bien posée et est équivalente au problème de diffraction tant que k n'est pas une fréquence de résonance pour le problème interne de Neumann. Cependant, si $k \in F_N(\Omega^-)$, alors, après reconstruction, la solution obtenue par l'EFIE reste la solution du problème de diffraction (les modes ne "rayonnent" pas).
- MFIE : on applique une condition de Dirichlet à l'onde u_T^-

$$u_T^-|_\Gamma = 0,$$

  et on obtient la MFIE pour une condition de Neumann

$$\left(\frac{1}{2}I + M\right)\lambda = -u^{inc}|_\Gamma. \tag{4.30}$$

  Cette équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce (M est compact) est bien posée et est équivalente au problème de diffraction tant que k n'est pas une fréquence irrégulière pour le problème interne de Dirichlet. Dans ce cas, la solution obtenue par la MFIE est parasitée (les modes "rayonnent" dans le domaine de propagation).

- CFIE : on applique la même condition mixte (4.24) à l'onde u_T^-, soit

$$(1-\alpha)\partial_{\mathbf{n}} u_T^-|_\Gamma + \alpha\eta u_T^-|_\Gamma = 0,$$

avec

$$0 < \alpha < 1 \qquad \text{et} \qquad \Im(\eta) \neq 0.$$

Nous obtenons ainsi la CFIE pour une condition de Neumann

$$\left[(1-\alpha)D + \alpha\eta\left(\frac{1}{2}I + M\right)\right]\lambda = -\left[(1-\alpha)\partial_{\mathbf{n}} u^{inc}|_\Gamma + \alpha\eta u^{inc}|_\Gamma\right]. \tag{4.31}$$

Cette équation intégrale de deuxième espèce est bien posée pour tout nombre d'onde k et est équivalente au problème de diffraction.

- Brackhage-Werner : nous cherchons l'onde u_T sous la forme

$$u = (-\mathscr{L} - \eta\mathscr{M})\psi,$$

avec $\Im(\eta) \neq 0$, et nous passons à la trace normale sur Γ pour obtenir

$$\left(-\eta D + \frac{1}{2}I - N\right)\psi = -\partial_{\mathbf{n}} u^{inc}|_\Gamma. \tag{4.32}$$

Cette équation intégrale de deuxième espèce est bien posée pour tout nombre d'onde k.

4.2.9 Récapitulation

Nous avons regroupé les principales propriétés des différentes équations intégrales dans un tableau pour une condition au bord de Dirichlet (respectivement de Neumann) :

Condition de Dirichlet (resp. Neumann)			
Eq. Int.	Nature	Bien posée pour ...	Modes parasites ...
EFIE	1ère espèce	$k \notin F_D(\Omega^-)$ (resp. $F_N(\Omega^-)$)	ne rayonnent pas
MFIE	Fredholm 2ème espèce	$k \notin F_N(\Omega^-)$ (resp. $F_D(\Omega^-)$)	rayonnent
CFIE	2ème espèce	$k > 0$	aucun mode parasite
B-W	2ème espèce	$k > 0$	aucun mode parasite

Soulignons pour finir que la nature (première ou seconde espèce) d'une équation intégrale dépend bien évidemment du cadre fonctionnel choisi pour son étude. Implicitement, nous avons retenu le cadre naturellement associé à la définition (4.7) des opérateurs frontière.

4.3 Simulation numérique de la diffraction multiple par des disques

4.3.1 Introduction

Nous nous plaçons ici dans le cas particulier où tous les obstacles sont circulaires. Dans ce cas, nous pouvons obtenir une expression analytique des coefficients des opérateurs intégraux de frontière dans les bases de Fourier associées à chaque obstacle. Nous proposons ensuite

une stratégie de résolution permettant de résoudre le problème de diffraction multiple à basse et haute fréquences pour des problèmes où le nombre d'obstacles M est grand.

Après quelques notations, nous introduisons la base spectrale de Fourier pour l'approximation de la solution. Nous explicitons analytiquement ensuite les approximations des quatre opérateurs intégraux de frontière dans les bases de Fourier tronquées. Puis, nous montrons quelques résultats numériques à basse fréquence et proposons une stratégie de résolution pour le problème à haute fréquence et/ou avec beaucoup d'obstacles. Notre approche algorithmique utilise les mêmes méthodes que dans [11] mais adaptées aux équations intégrales.

4.3.2 Notations et bases de Fourier

Nous nous plaçons maintenant en dimension deux dans un repère orthonormal $(\mathbf{O}, \overrightarrow{\mathbf{O}x_1}, \overrightarrow{\mathbf{O}x_2})$. Nous supposons que l'obstacle diffractant Ω^- est l'union de M disques Ω_p^-, pour $p = 1, \ldots, M$, de rayon a_p et de centre $\mathbf{O}_p$. Nous notons Γ_p le bord de l'obstacle Ω_p^- et $\Gamma = \cup_{p=1\ldots M}\Gamma_p$ la frontière de Ω^-. La normale unitaire $\mathbf{n}$ à Ω^- est sortante. Une illustration des notations qui suivent est présentée sur la figure 4.1. Pour tout $p = 1, \ldots, M$, nous notons $\mathbf{b}_p$ le vecteur entre le centre $\mathbf{O}_p$ et l'origine

$$\mathbf{b}_p = \mathbf{O}\mathbf{O}_p, \qquad b_p = \|\mathbf{b}_p\|, \qquad \alpha_p = Angle(\overrightarrow{\mathbf{O}x_1}, \mathbf{b}_p) \tag{4.33}$$

et, pour $q = 1, \ldots, M$, avec $q \neq p$, $\mathbf{b}_{pq}$ le vecteur entre les centres $\mathbf{O}_q$ et $\mathbf{O}_p$

$$\mathbf{b}_{pq} = \mathbf{O}_q\mathbf{O}_p, \qquad b_{pq} = \|\mathbf{b}_{pq}\|, \qquad \alpha_{pq} = Angle(\overrightarrow{\mathbf{O}x_1}, \mathbf{b}_{pq}). \tag{4.34}$$

Par ailleurs, tout point $\mathbf{x}$ du plan est décrit par ses coordonnées polaires globales

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{O}\mathbf{x}, \qquad r(\mathbf{x}) = \|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|, \qquad \theta(\mathbf{x}) = Angle(\overrightarrow{\mathbf{O}x_1}, \mathbf{r}(\mathbf{x})),$$

ou par ses coordonnées polaires dans le repère orthonormal lié à l'obstacle Ω_p^-, avec $p = 1, \ldots, M$

$$\mathbf{r}_p(\mathbf{x}) = \mathbf{O}_p\mathbf{x}, \qquad r_p(\mathbf{x}) = \|\mathbf{r}_p(\mathbf{x})\|, \qquad \theta_p(\mathbf{x}) = Angle(\overrightarrow{\mathbf{O}_p x_1}, \mathbf{r}_p(\mathbf{x})). \tag{4.35}$$

Dans ce paragraphe, le but est d'obtenir une base de $L^2(\Gamma)$ pour pouvoir y projeter les opérateurs intégraux. Pour cela, nous construisons tout d'abord, pour $p = 1, \ldots, M$, une base de $L^2(\Gamma_p)$, associée au disque Ω_p^-. Si le cercle Γ_p était un cercle de rayon 1 et centré sur l'origine, alors une base adaptée de $L^2(\Gamma_p)$ serait la base spectrale de Fourier des fonctions $(e^{im\theta})$. Nous adaptons cette base au cas général où $a_p \neq 1$ en introduisant d'une part les fonctions $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \qquad \varphi_m(\mathbf{x}) = e^{im\theta(\mathbf{x})},$$

et d'autre part les fonctions $(\varphi_m^p)_{1\leq p\leq M,\, m\in\mathbb{Z}}$ définies par

$$\forall p = 1, \ldots, M, \forall m \in \mathbb{Z}, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_p, \qquad \varphi_m^p(\mathbf{x}) = \frac{\varphi_m(\mathbf{r}_p(\mathbf{x}))}{\sqrt{2\pi a_p}} = \frac{e^{im\theta_p(\mathbf{x})}}{\sqrt{2\pi a_p}}. \tag{4.36}$$

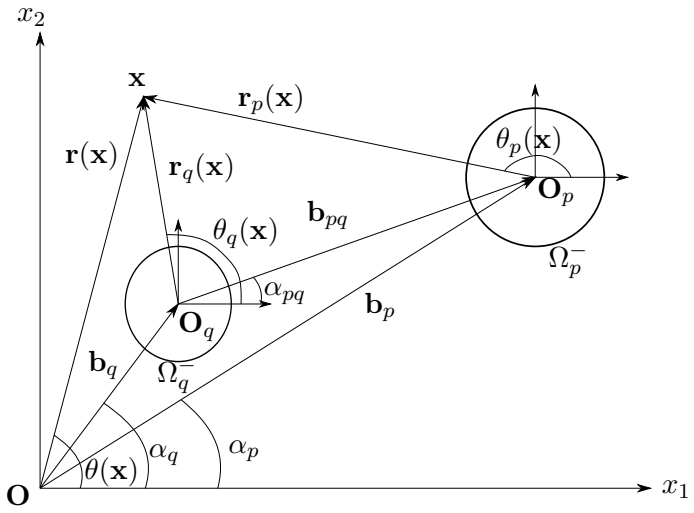


FIGURE 4.1 – Illustration des notations pour deux disques Ω_p^- et Ω_q^- et un point $\mathbf{x}$ de Ω^+.

Ainsi, pour $p = 1, \ldots, M$, la famille $(\varphi_m^p)_{m\in\mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de $L^2(\Gamma_p)$ pour le produit scalaire hermitien

$$\forall f, g \in L^2(\Gamma_p), \qquad (f, g)_{L^2(\Gamma_p)} = \int_{\Gamma_p} f(\mathbf{x})\overline{g(\mathbf{x})}\mathrm{d}\Gamma_p(\mathbf{x}).$$

Afin de constituer une base de $L^2(\Gamma)$, nous introduisons les fonctions Φ_m^p de $L^2(\Gamma)$, réunissant ces M familles

$$\forall p, q = 1, \ldots, M, \forall m \in \mathbb{Z}, \qquad \Phi_m^p|_{\Gamma_q} = \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq p, \\ \varphi_m^p & \text{si } q = p. \end{cases} \tag{4.37}$$

La famille $\mathscr{B} = \{\Phi_m^p,\ m \in \mathbb{Z}, p = 1, \ldots, M\}$, appelée dans la suite base de Fourier ou base spectrale, forme bien une base orthonormée de $L^2(\Gamma)$ pour le produit scalaire hermitien usuel, c'est à dire, pour f et g de $L^2(\Gamma)$

$$(f, g)_{L^2(\Gamma)} = \int_{\Gamma} f(\mathbf{x})\overline{g(\mathbf{x})}\mathrm{d}\Gamma(\mathbf{x}).$$

Remarquons par ailleurs que les fonctions φ_m vérifient les relations suivantes, pour tout m de $\mathbb{Z}$ et pour tout point $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^2$,

$$\varphi_{-m}(\mathbf{x}) = \overline{\varphi_m(\mathbf{x})}, \qquad \varphi_m(-\mathbf{x}) = (-1)^m\varphi_m(\mathbf{x}). \tag{4.38}$$

4.3.3 Formulation faible des équations intégrales

Exemple de l'EFIE pour une condition de Dirichlet

Prenons l'EFIE pour le problème de Dirichlet : l'onde diffractée u est cherchée sous la forme d'un potentiel de simple couche

$$u = \mathscr{L}\rho,$$

où la densité ρ de $H^{-1/2}(\Gamma)$ est solution de l'EFIE (4.19)

$$L\rho = -u^{inc}|_\Gamma.$$

Nous supposons que $k \notin F_D(\Omega^-)$ pour que cette équation intégrale soit bien posée. Par ailleurs, dans le cas d'obstacles circulaires, nous connaissons explicitement les fréquences de résonance, et nous avons

$$F_D(\Omega^-) = \{k > 0 \text{ tel qu'il existe } p = 1, \dots, M \text{ et } m \in \mathbb{N} \text{ tels que } J_m(ka_p) = 0\}, \quad (4.39)$$

où la fonction J_m est la fonction de Bessel d'ordre m.

Afin de résoudre l'EFIE numériquement, il peut être plus commode de considérer sa formulation faible. Comme $L\rho$ est dans $H^{1/2}(\Gamma)$, nous pouvons écrire cette formulation dans $L^2(\Gamma)$ et plus particulièrement dans la base de Fourier $\mathscr{B}$

$$\begin{cases} \text{Trouver } \rho \in H^{-1/2}(\Gamma) \text{ tel que, pour tout } p = 1, \dots, M, \text{ et } m \in \mathbb{Z}, \\ (L\rho, \Phi_m^p)_{L^2(\Gamma)} = -\left(u^{inc}|_\Gamma, \Phi_m^p\right)_{L^2(\Gamma)}. \end{cases}$$

Comme u^{inc} est supposée très régulière (typiquement de classe $\mathscr{C}^\infty$) et que Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, alors l'onde diffractée est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty(\Omega^+)$ et la densité ρ est (au moins) dans $H^{1/2}(\Gamma)$. Nous pouvons alors la décomposer dans la base $\mathscr{B}$

$$\rho = \sum_{q=1}^{M} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \rho_n^q \Phi_n^q.$$

La formulation faible de l'EFIE dans la base $\mathscr{B}$ devient alors

$$\begin{cases} \text{Trouver les coefficients } \rho_n^q \in \mathbb{C}, \text{ pour } q = 1, \dots, M \text{ et } n \in \mathbb{Z}, \text{ tel que,} \\ \forall p = 1, \dots, M,\ \forall m \in \mathbb{Z}, \qquad \displaystyle\sum_{q=1}^{M} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \rho_n^q \left(L\Phi_n^q, \Phi_m^p\right)_{L^2(\Gamma)} = -\left(u^{inc}|_\Gamma, \Phi_m^p\right)_{L^2(\Gamma)}. \end{cases}$$

En vue d'une implémentation numérique, nous pouvons réécrire cette formulation sous la forme matricielle suivante

$$\widetilde{\mathbb{L}}\widetilde{\boldsymbol{\rho}} = \widetilde{\mathbf{U}},$$

où la matrice infinie $\widetilde{\mathbb{L}} = (\widetilde{\mathbb{L}}^{p,q})_{1\le p,q\le M}$ et les vecteurs infinis $\widetilde{\boldsymbol{\rho}} = (\widetilde{\boldsymbol{\rho}}^p)_{1\le p\le M}$ et $\widetilde{\mathbf{U}} = (\widetilde{\mathbf{U}}^p)_{1\le p\le M}$ sont définis par blocs de la façon suivante

$$\widetilde{\mathbb{L}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbb{L}}^{1,1} & \widetilde{\mathbb{L}}^{1,2} & \dots & \widetilde{\mathbb{L}}^{1,M} \\ \widetilde{\mathbb{L}}^{2,1} & \widetilde{\mathbb{L}}^{2,2} & \dots & \widetilde{\mathbb{L}}^{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{\mathbb{L}}^{M,1} & \widetilde{\mathbb{L}}^{M,2} & \dots & \widetilde{\mathbb{L}}^{M,M} \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{\boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{\rho}}^1 \\ \widetilde{\boldsymbol{\rho}}^2 \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{\rho}}^M \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{U}}^1 \\ \widetilde{\mathbf{U}}^2 \\ \vdots \\ \widetilde{\mathbf{U}}^M \end{bmatrix}, \quad (4.40)$$

avec, pour tout $p, q = 1, \dots, M$ et $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\widetilde{\mathbb{L}}_{m,n}^{p,q} = \left(L\Phi_n^q, \Phi_m^p\right)_{L^2(\Gamma)}, \qquad \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_m^p = \rho_m^p \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\mathbf{U}}_m^p = \left(-u^{inc}|_\Gamma, \Phi_m^p\right)_{L^2(\Gamma)}.$$

Remarquons que, pour $p = 1, \dots, M$, $\widetilde{\mathbb{L}}^{p,p}$ représente le bloc intégral lié à la diffraction simple ou l'interaction de l'obstacle Ω_p^- avec lui même, tandis que le bloc extra-diagonal $\widetilde{\mathbb{L}}^{p,q}$, pour $q = 1, \dots, M$ avec $q \neq p$, représente l'action de l'obstacle Ω_q^- sur l'obstacle Ω_p^- (dûe aux effets de couplage de la diffraction multiple).

Généralisation aux autres équations intégrales et opérateurs intégraux

Pour une condition de Dirichlet ou de Neumann, les quatre équations intégrales EFIE, MFIE, CFIE et de Brakhage-Werner font intervenir une combinaison linéaire des opérateurs intégraux de frontière L, M, N et D. Ainsi, afin de pouvoir implémenter chaque équation intégrale, nous introduisons les matrices infinies $\widetilde{\mathbb{M}} = (\widetilde{\mathbb{M}}^{p,q})_{1\leq p,q\leq M}$, $\widetilde{\mathbb{N}} = (\widetilde{\mathbb{N}}^{p,q})_{1\leq p,q\leq M}$ et $\widetilde{\mathbb{D}} = (\widetilde{\mathbb{D}}^{p,q})_{1\leq p,q\leq M}$, de même structure par blocs que la matrice infinie $\widetilde{\mathbb{L}}$ (voir équation (4.40)). Pour $p, q = 1, \ldots, M$, les coefficients des sous-matrices infinies $\widetilde{\mathbb{M}}^{p,q}$, $\widetilde{\mathbb{N}}^{p,q}$ et $\widetilde{\mathbb{D}}^{p,q}$ sont définis pour tout indice m et n de $\mathbb{Z}$ par

$$\widetilde{\mathbb{M}}^{p,q}_{m,n} = (M\Phi^q_n, \Phi^p_m)_{L^2(\Gamma)}\,, \qquad \widetilde{\mathbb{N}}^{p,q}_{m,n} = (N\Phi^q_n, \Phi^p_m)_{L^2(\Gamma)}\,, \qquad \widetilde{\mathbb{D}}^{p,q}_{m,n} = (D\Phi^q_n, \Phi^p_m)_{L^2(\Gamma)}\,.$$

D'autre part, les équations intégrales font intervenir la trace simple ou normale sur Γ de l'onde incidente. Nous avons déjà introduit le vecteur infini $\widetilde{\mathbf{U}}$ des coefficients de $u^{inc}|_\Gamma$ dans la base de Fourier. Nous définissons alors de la même manière le vecteur infini $\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}} = (\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}}^p)_{1\leq p\leq M}$ des coefficients de la trace normale $\partial_{\mathbf{n}} u^{inc}|_\Gamma$, défini par

$$\forall p = 1, \ldots, M,\ \forall m \in \mathbb{Z}, \qquad (\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}})^p_m = \left(\partial_{\mathbf{n}} u^{inc}|_\Gamma, \Phi^p_m\right)_{L^2(\Gamma)}\,.$$

Enfin, la densité change selon l'équation intégrale et notamment selon la condition aux limites. Pour garder les mêmes notations que dans la section précédente, nous introduisons les densités λ et ψ (utilisées dans l'équation intégrale de Brakhage-Werner). Nous les décomposons dans la base de Fourier pour obtenir

$$\lambda = \sum_{p=1}^{M} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda^p_m \Phi^p_m \qquad \text{et} \qquad \psi = \sum_{p=1}^{M} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \psi^p_m \Phi^p_m.$$

Puis, nous introduisons les vecteurs infinis $\widetilde{\boldsymbol{\lambda}} = (\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}^p)_{1\leq p\leq M}$ et $\widetilde{\Psi} = (\widetilde{\Psi}^p)_{1\leq p\leq M}$, dont chaque bloc $\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}^p = (\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}^p_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ et $\widetilde{\Psi}^p = (\widetilde{\Psi}^p_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ est défini par

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \qquad \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}^p_m = \lambda^p_m \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\Psi}^p_m = \psi^p_m.$$

Remarque 4.23. *Certaines équations intégrales, comme par exemple la MFIE pour le problème de Dirichlet (4.21), sont posées dans $H^{-1/2}(\Gamma)$. Toutefois, comme l'onde incidente et le bord Γ sont très réguliers, la densité inconnue (ρ ou λ) est alors elle aussi très régulière. Par conséquent, nous pouvons écrire la formulation faible dans $L^2(\Gamma)$. Ce raisonnement s'applique naturellement pour toutes les équations intégrales présentées dans ce document.*

Remarque 4.24. *Dans le cas où tous les obstacles sont des disques, les fréquences de résonance pour le problème intérieur homogène de Dirichlet sont explicites et données par la relation (4.39), tandis que celles pour le problème intérieur homogène de Neumann sont données par*

$$F_N(\Omega^-) = \left\{k > 0 \text{ tel qu'il existe } p = 1, \ldots, M \text{ et } m \in \mathbb{N} \text{ tels que } J'_m(ka_p) = 0\right\}.$$

4.3.4 Expressions des opérateurs intégraux dans la base de Fourier

Les sous-matrices infinies situées sur la diagonale

Dans le cadre de la diffraction simple par un seul disque, les quatre opérateurs intégraux de frontière usuels sont diagonalisables dans la base de Fourier. Ce résultat a été prouvé

par Kress dans [78] lors de l'étude du conditionnement de la CFIE pour des obstacles circulaires. Le théorème suivant [3, Théorème 8] donne l'expression analytique des coefficients des opérateurs intégraux.

Théorème 4.25. *Pour $p = 1, \dots, M$, les sous-matrices infinies $\widetilde{\mathbb{L}}^{p,p}$, $\widetilde{\mathbb{M}}^{p,p}$, $\widetilde{\mathbb{N}}^{p,p}$ et $\widetilde{\mathbb{D}}^{p,p}$ issues des matrices infinies respectives $\widetilde{\mathbb{L}}$, $\widetilde{\mathbb{M}}$, $\widetilde{\mathbb{N}}$ et $\widetilde{\mathbb{D}}$, sont toutes les quatre diagonales et, de plus, pour $m \in \mathbb{Z}$, nous avons*

$$\begin{cases} \bullet \quad \widetilde{\mathbb{L}}^{p,p}_{m,m} = (L\Phi^p_m, \Phi^p_m)_{L^2(\Gamma)} = \dfrac{i\pi a_p}{2} J_m(ka_p) H^{(1)}_m(ka_p), \\ \bullet \quad \widetilde{\mathbb{M}}^{p,p}_{m,m} = (M\Phi^p_m, \Phi^p_m)_{L^2(\Gamma)} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\pi k a_p}{2} J_m(ka_p) H^{(1)'}_m(ka_p) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{i\pi k a_p}{2} J'_m(ka_p) H^{(1)}_m(ka_p), \\ \bullet \quad \widetilde{\mathbb{N}}^{p,p}_{m,m} = (N\Phi^p_m, \Phi^p_m)_{L^2(\Gamma)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i\pi k a_p}{2} J_m(ka_p) H^{(1)'}_m(ka_p) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\pi k a_p}{2} J'_m(ka_p) H^{(1)}_m(ka_p), \\ \bullet \quad \widetilde{\mathbb{D}}^{p,p}_{m,m} = (D\Phi^p_m, \Phi^p_m)_{L^2(\Gamma)} = -\dfrac{i\pi k^2 a_p}{2} J'_m(ka_p) H^{(1)'}_m(ka_p). \end{cases} \tag{4.41}$$

Les fonctions J_m et $H^{(1)}_m$ sont respectivement les fonctions de Bessel d'ordre m et les fonctions de Hankel de première espèce et d'ordre m.

Les sous-matrices infinies extra-diagonales

Concentrons nous maintenant sur les blocs extra-diagonaux $\widetilde{\mathbb{L}}^{p,q}$, $\widetilde{\mathbb{M}}^{p,q}$, $\widetilde{\mathbb{N}}^{p,q}$ et $\widetilde{\mathbb{D}}^{p,q}$, pour $p, q = 1, \dots, M$ avec $q \neq p$. Les coefficients de la matrice $\widetilde{\mathbb{L}}^{p,q}$ ont été obtenus par Row en 1955 [98]. Nous donnons l'expression des coefficients de chaque sous-matrice infinie $\widetilde{\mathbb{L}}^{p,q}$, $\widetilde{\mathbb{M}}^{p,q}$, $\widetilde{\mathbb{N}}^{p,q}$ et $\widetilde{\mathbb{D}}^{p,q}$, dont on peut trouver une preuve dans [98] mais que nous rappelons ici pour être complet. Avant d'énoncer la proposition, nous rappelons le théorème de développement en deux centres [84, Théorème 2.14]. Celui-ci permet de développer la fonction de Hankel $H^{(1)}_0(k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)$ dans les bases de Fourier $(\varphi^p_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ et $(\varphi^q_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ associées respectivement aux obstacles Ω^-_p et Ω^-_q.

Théorème 4.26 (Développement en deux centres)**.** *Soient p et q deux entiers distincts compris entre 1 et M. Alors, pour tout $\mathbf{x}$ de Γ_p et pour tout $\mathbf{y}$ de Γ_q, nous avons*

$$H^{(1)}_0(k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|) = 2\pi\sqrt{a_p a_q} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(ka_p) S_{nm}(\boldsymbol{b}_{pq}) J_n(ka_q) \overline{\varphi^q_n(\mathbf{y})} \varphi^p_m(\mathbf{x}). \tag{4.42}$$

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition ci-dessous, donnant les coefficients de Fourier de chaque sous-matrice infinie $\widetilde{\mathbb{L}}^{p,q}$, $\widetilde{\mathbb{M}}^{p,q}$, $\widetilde{\mathbb{N}}^{p,q}$ et $\widetilde{\mathbb{D}}^{p,q}$.

Proposition 4.27. *Pour tout $p, q = 1, \dots, M$ et $m, n \in \mathbb{Z}$, tel que $p \neq q$, nous avons*

$$\begin{cases} \bullet \quad \widetilde{\mathbb{L}}^{p,q}_{m,n} = (L\Phi^q_n, \Phi^p_m)_{L^2(\Gamma)} = \dfrac{i\pi\sqrt{a_p a_q}}{2} J_m(ka_p) S_{nm}(\mathbf{b}_{pq}) J_n(ka_q), \\ \bullet \quad \widetilde{\mathbb{M}}^{p,q}_{m,n} = (M\Phi^q_n, \Phi^p_m)_{L^2(\Gamma)} = -\dfrac{ik\pi\sqrt{a_p a_q}}{2} J_m(ka_p) S_{nm}(\mathbf{b}_{pq}) J'_n(ka_q), \\ \bullet \quad \widetilde{\mathbb{N}}^{p,q}_{m,n} = (N\Phi^q_n, \Phi^p_m)_{L^2(\Gamma)} = \dfrac{ik\pi\sqrt{a_p a_q}}{2} J'_m(ka_p) S_{nm}(\mathbf{b}_{pq}) J_n(ka_q), \\ \bullet \quad \widetilde{\mathbb{D}}^{p,q}_{m,n} = (D\Phi^q_n, \Phi^p_m)_{L^2(\Gamma)} = -\dfrac{ik^2\pi\sqrt{a_p a_q}}{2} J'_m(a_p) S_{nm}(\mathbf{b}_{pq}) J'_n(ka_q), \end{cases} \tag{4.43}$$

où le terme $S_{nm}(\mathbf{b}_{pq})$ est donné par

$$S_{nm}(\mathbf{b}_{pq}) = H^{(1)}_{n-m} k b_{pq}) e^{i(n-m)\alpha_{pq}}.$$

Démonstration. Nous commençons par les coefficients $\widetilde{\mathbb{L}}^{p,q}_{m,n}$ de l'opérateur intégral de simple couche L. Grâce à la définition (4.8) de l'opérateur L, nous avons

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{L}}^{p,q}_{m,n} &= (L\Phi^q_n, \Phi^p_m)_{L^2(\Gamma)} \\
&= \int_\Gamma L\Phi^q_n(\mathbf{x})\overline{\Phi^p_m(\mathbf{x})}\, \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{x}) \\
&= \int_\Gamma \int_\Gamma G(\mathbf{x},\mathbf{y})\Phi^q_n(\mathbf{y})\overline{\Phi^p_m(\mathbf{x})}\, \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{y})\mathrm{d}\Gamma(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Nous remplaçons la fonction de Green $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ par son expression (4.3), pour obtenir

$$\mathbb{L}^{p,q}_{m,n} = \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{i}{4} H^{(1)}_0(k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)\Phi^q_n(\mathbf{y})\overline{\Phi^p_m(\mathbf{x})}\, \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{y})\mathrm{d}\Gamma(\mathbf{x}).$$

Nous utilisons maintenant la définition (4.37) des fonctions Φ^p_m pour ramener la double intégrale sur Γ à une double intégrale sur Γ_p et Γ_q uniquement

$$\mathbb{L}^{p,q}_{m,n} = \int_{\Gamma_p} \int_{\Gamma_q} \frac{i}{4} H^{(1)}_0(k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)\varphi^q_n(\mathbf{y})\overline{\varphi^p_m(\mathbf{x})}\, \mathrm{d}\Gamma_q(\mathbf{y})\mathrm{d}\Gamma_p(\mathbf{x}). \tag{4.44}$$

Comme $\mathbf{x}$ est un point de Γ_p et $\mathbf{y}$ de Γ_q, nous pouvons appliquer le théorème 4.26 de développement en deux centres. Ainsi, nous remplaçons la quantité $H^{(1)}_0(k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)$ par la relation (4.42) dans l'égalité (4.44) pour obtenir

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{L}}^{p,q}_{m,n} = \frac{i2\pi\sqrt{a_p a_q}}{4} \int_{\Gamma_p} \int_{\Gamma_q} \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} J_{m1}(ka_p) S_{n_1 m_1}(\mathbf{b}_{pq}) J_{n1}(ka_q) \overline{\varphi^q_{n1}(\mathbf{y})}\varphi^p_{m1}(\mathbf{x}) \dots \\
\dots \varphi^q_n(\mathbf{y})\overline{\varphi^p_m(\mathbf{x})}\, \mathrm{d}\Gamma_q(\mathbf{y})\mathrm{d}\Gamma_p(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Puis, en permutant sommation et intégration, il vient que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{L}}^{p,q}_{m,n} = \frac{i\pi\sqrt{a_p a_q}}{2} \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} J_{m1}(ka_p) S_{n_1 m_1}(\mathbf{b}_{pq}) J_{n1}(ka_q) \int_{\Gamma_p} \varphi^p_{m1}(\mathbf{x})\overline{\varphi^p_m(\mathbf{x})}\, \mathrm{d}\Gamma_p(\mathbf{x}) \dots \\
\dots \int_{\Gamma_q} \varphi^q_n(\mathbf{y})\overline{\varphi^q_{n1}(\mathbf{y})}\, \mathrm{d}\Gamma_q(\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

Enfin, l'orthonormalité des fonctions (φ^p_m) et (φ^q_n) founit l'expression de $\widetilde{\mathbb{L}}^{p,q}_{m,n}$ cherchée

$$\widetilde{\mathbb{L}}^{p,q}_{m,n} = \frac{i\pi\sqrt{a_p a_q}}{2} J_m(ka_p) S_{nm}(\mathbf{b}_{pq}) J_n(ka_q).$$

Pour obtenir les expressions (4.43) des autres coefficients $\widetilde{\mathbb{M}}^{p,q}_{m,n}$, $\widetilde{\mathbb{N}}^{p,q}_{m,n}$ et $\widetilde{\mathbb{D}}^{p,q}_{m,n}$, nous procédons de la même manière. Toutefois, les opérateurs intégraux M, N et D font intervenir les dérivées normales de la fonction de Green et donc de la fonction de Hankel $H^{(1)}_0$. Nous avons alors besoin de développer les dérivées normales du terme $H^{(1)}_0(k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)$ dans les

bases de Fourier associées à deux obstacles Ω_p^- et Ω_q^-, pour $p, q = 1, \ldots, M$ et $p \neq q$. Ce point étant le seul qui diffère de la démonstration ci-dessus, nous donnons ici les développements en deux centres des dérivées normales de la fonction de Hankel, obtenus par dérivation de l'égalité (4.42). Nous avons alors, pour tout p et q tels que $1 \leq p \neq q \leq M$, et pour tout point $\mathbf{x}$ de Γ_p et $\mathbf{y}$ de Γ_q,

$$\begin{cases} \partial_{\mathbf{n_x}} H_0^{(1)}(k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|) &= 2\pi k\sqrt{a_p a_q} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m'(ka_p) S_{nm}(\mathbf{b}_{pq}) J_n(ka_q) \overline{\varphi_n^q(\mathbf{y})} \varphi_m^p(\mathbf{x}), \\ \partial_{\mathbf{n_y}} H_0^{(1)}(k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|) &= 2\pi k\sqrt{a_p a_q} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(ka_p) S_{nm}(\mathbf{b}_{pq}) J_n'(ka_q) \overline{\varphi_n^q(\mathbf{y})} \varphi_m^p(\mathbf{x}), \\ \partial_{\mathbf{n_x}}\partial_{\mathbf{n_y}} H_0^{(1)}(k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|) &= 2\pi k^2\sqrt{a_p a_q} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m'(ka_p) S_{nm}(\mathbf{b}_{pq}) J_n'(ka_q) \overline{\varphi_n^q(\mathbf{y})} \varphi_m^p(\mathbf{x}). \end{cases}$$

□

Écriture matricielle des blocs infinis

En vue d'une future implémentation numérique, nous réécrivons sous une forme matricielle les blocs $\widetilde{\mathbb{L}}^{p,q}$, $\widetilde{\mathbb{M}}^{p,q}$, $\widetilde{\mathbb{N}}^{p,q}$ et $\widetilde{\mathbb{D}}^{p,q}$ des matrices infinies $\widetilde{\mathbb{L}}$, $\widetilde{\mathbb{M}}$, $\widetilde{\mathbb{N}}$ et $\widetilde{\mathbb{D}}$, pour $p, q = 1, \ldots, M$. Pour cela, nous introduisons les matrices infinies diagonales $\widetilde{\mathbb{J}}^p$, $(\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{J}})^p$, $\widetilde{\mathbb{H}}^p$ et $(\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{H}})^p$, dont le terme général est donné par, pour $m \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{array}{ll} \bullet\ \widetilde{\mathbb{J}}^p_{mm} = J_m(ka_p) & \bullet\ (\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{J}})^p_{mm} = J_m'(ka_p) \\ \bullet\ \widetilde{\mathbb{H}}^p_{mm} = H_m^{(1)}(ka_p) & \bullet\ (\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{H}})^p_{mm} = H_m^{(1)'}(ka_p). \end{array} \tag{4.45}$$

Nous introduisons de plus la matrice infinie identité $\widetilde{\mathbb{I}}^p$ et, pour $q \neq p$, la matrice infinie de séparation $\widetilde{\mathbb{S}}^{p,q}$ entre les obstacles Ω_p^- et Ω_q^-, définie par

$$\widetilde{\mathbb{S}}^{p,q} = (\widetilde{\mathbb{S}}^{p,q}_{m,n})_{m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{Z}} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\mathbb{S}}^{p,q}_{m,n} = S_{mn}(\mathbf{b}_{pq}) = H^{(1)}_{m-n}(kb_{pq}) e^{i(m-n)\alpha_{b_q}}. \tag{4.46}$$

Avec ces notations, nous réécrivons les blocs $\widetilde{\mathbb{L}}^{p,q}$, $\widetilde{\mathbb{M}}^{p,q}$, $\widetilde{\mathbb{N}}^{p,q}$ et $\widetilde{\mathbb{D}}^{p,q}$ des matrices infinies $\widetilde{\mathbb{L}}$, $\widetilde{\mathbb{M}}$, $\widetilde{\mathbb{N}}$ et $\widetilde{\mathbb{D}}$ sous la forme matricielle suivante, pour tout $p, q = 1, \ldots, M$,

- $$\widetilde{\mathbb{L}}^{p,q} = \begin{cases} \dfrac{i\pi a_p}{2} \widetilde{\mathbb{J}}^p \widetilde{\mathbb{H}}^p, & \text{si } p = q, \\ \dfrac{i\pi\sqrt{a_p a_q}}{2} \widetilde{\mathbb{J}}^p (\widetilde{\mathbb{S}}^{p,q})^T \widetilde{\mathbb{J}}^q, & \text{si } p \neq q, \end{cases}$$

- $$\widetilde{\mathbb{M}}^{p,q} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\widetilde{\mathbb{I}}^p - \dfrac{i\pi k a_p}{2} \widetilde{\mathbb{J}}^p (\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{H}})^p = \dfrac{1}{2}\widetilde{\mathbb{I}}^p - \dfrac{i\pi k a_p}{2} (\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{J}})^p \widetilde{\mathbb{H}}^p, & \text{si } p = q, \\ -\dfrac{ik\pi\sqrt{a_p a_q}}{2} \widetilde{\mathbb{J}}^p (\widetilde{\mathbb{S}}^{p,q})^T (\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{J}})^q, & \text{si } p \neq q, \end{cases}$$

- $$\widetilde{\mathbb{N}}^{p,q} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\widetilde{\mathbb{I}}^p + \dfrac{i\pi k a_p}{2} \widetilde{\mathbb{J}}^p (\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{H}})^p = -\dfrac{1}{2}\widetilde{\mathbb{I}}^p + \dfrac{i\pi k a_p}{2} (\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{J}})^p \widetilde{\mathbb{H}}^p, & \text{si } p = q, \\ \dfrac{ik\pi\sqrt{a_p a_q}}{2} (\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{J}})^p (\widetilde{\mathbb{S}}^{p,q})^T \widetilde{\mathbb{J}}^q, & \text{si } p \neq q, \end{cases}$$

- $$\widetilde{\mathbb{D}}^{p,q} = \begin{cases} \dfrac{i\pi k^2 a_p}{2}(\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{J}})^p(\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{H}})^p, & \text{si } p = q, \\ -\dfrac{ik^2\pi\sqrt{a_p a_q}}{2}(\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{J}})^p(\widetilde{\mathbb{S}}^{p,q})^T(\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{J}})^q, & \text{si } p \neq q, \end{cases}$$

où $(\widetilde{\mathbb{S}}^{p,q})^T$ est la transposée de la matrice de séparation $\widetilde{\mathbb{S}}^{p,q}$.

4.3.5 Post-traitement : champs proche et lointain

Evaluation des potentiels de simple et de double couche en un point x

Nous donnons ici les relations permettant d'évaluer en un point $\mathbf{x}$ le potentiel de simple couche $\mathscr{L}\rho(\mathbf{x})$ de densité $\rho \in H^{-1/2}(\Gamma)$ ainsi que le potentiel de double couche $\mathscr{M}\lambda(\mathbf{x})$ de densité $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma)$. Nous commençons par introduire les fonctions $(\widetilde{\Phi}^p_m)$, pour $p = 1, \ldots, M$ et $m \in \mathbb{Z}$, définies à l'extérieur de l'obstacle Ω^-_p par

$$\widetilde{\Phi}^p_m(\mathbf{x}) = \frac{\varphi_m(\mathbf{r}_p(\mathbf{x}))}{\sqrt{2\pi a_p}} = \frac{e^{im\theta_p(\mathbf{x})}}{\sqrt{2\pi a_p}}, \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega^-_p}, \tag{4.47}$$

où nous rappelons que $\theta_p(\mathbf{x})$ est l'angle polaire du point $\mathbf{x}$ dans le repère local lié à l'obstacle Ω^-_p (voir égalité (4.35)). Les fonctions $(\widetilde{\Phi}^p_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ sont en quelque sorte un prolongement des fonctions $(\Phi^p_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ à l'extérieur de l'obstacle Ω^-_p. Nous rappelons maintenant le théorème de Graf (ou d'addition des fonctions de Hankel) [84, p.39, Théorème 2.12], qui nous permet de développer la fonction $H^{(1)}_0(k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)$ dans le repère local d'un obstacle Ω^-_p, pour $p = 1, \ldots, M$. Comme ce théorème nous sera utile à de multiples reprises, nous le présentons sous une forme générale.

Théorème 4.28 (Addition des fonctions $H^{(1)}_m(kr)e^{im\theta}$)**.** *Soient deux points $\widetilde{\mathbf{O}}_1$ et $\widetilde{\mathbf{O}}_2$ du plan. Nous introduisons le vecteur $\widetilde{\mathbf{b}}_{12}$ entre les centres $\widetilde{\mathbf{O}}_1$ et $\widetilde{\mathbf{O}}_2$, défini par*

$$\widetilde{\mathbf{b}}_{12} = \widetilde{\mathbf{O}}_2\widetilde{\mathbf{O}}_1 \qquad \text{et} \qquad \widetilde{b}_{12} = \|\widetilde{\mathbf{b}}_{12}\|,$$

ainsi que, pour tout point $\mathbf{x}$ du plan et pour $j = 1, 2$, le vecteur $\widetilde{\mathbf{r}}_j(\mathbf{x})$ donné par

$$\widetilde{\mathbf{r}}_j(\mathbf{x}) = \widetilde{\mathbf{O}}_j\mathbf{x} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{r}_j(\mathbf{x}) = \|\widetilde{\mathbf{r}}_j(\mathbf{x})\|.$$

Pour tout indice m de $\mathbb{Z}$, nous avons alors d'une part

$$H^{(1)}_m(k\widetilde{r}_2)\varphi_m(\mathbf{r}_2) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} H^{(1)}_{m-n}(k\widetilde{b}_{12})\varphi_{m-n}(\widetilde{\mathbf{b}}_{12})J_n(k\widetilde{r}_1)\varphi_n(\widetilde{\mathbf{r}}_1), \qquad \text{si } \widetilde{r}_1 < \widetilde{b}_{12}, \tag{4.48}$$

et d'autre part

$$H^{(1)}_m(k\widetilde{r}_2)\varphi_m(\mathbf{r}_2) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_{m-n}(k\widetilde{b}_{12})\varphi_{m-n}(\widetilde{\mathbf{b}}_{12})H^{(1)}_n(k\widetilde{r}_1)\varphi_n(\widetilde{\mathbf{r}}_1), \qquad \text{si } \widetilde{r}_1 > \widetilde{b}_{12}. \tag{4.49}$$

Soulignons que le théorème 4.26 de développement en deux centres est une conséquence de ce théorème : la fonction de Hankel est développée une première fois dans le repère lié à un obstacle Ω^-_p, puis l'expression obtenue est de nouveau développée dans le repère associé à un autre obstacle Ω^-_q. A l'aide du théorème d'addition des fonctions de Graf, nous pouvons calculer l'expression des potentiels de simple et de double couche en un point $\mathbf{x}$ situé dans le domaine de propagation Ω^+.

Proposition 4.29. *Soient $\rho \in L^2(\Gamma)$ et $\mu \in H^{1/2}(\Gamma)$ deux densités admettant les décompositions dans la base de Fourier $\mathscr{B}$ suivantes*

$$\rho = \sum_{p=1}^{M} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho_m^p \Phi_m^p \qquad \text{et} \qquad \lambda = \sum_{p=1}^{M} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda_m^p \Phi_m^p.$$

Alors, pour tout point $\mathbf{x}$ du domaine de propagation Ω^+, on a pour le potentiel de simple couche,

$$\mathscr{L}\rho(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{M} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho_m^p \mathscr{L}\Phi_m^p(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{M} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho_m^p \frac{i\pi a_p}{2} J_m(ka_p) H_m^{(1)}(kr_p(\mathbf{x}))\widetilde{\Phi}_m^p(\mathbf{x}), \tag{4.50}$$

et d'autre part pour le potentiel de double couche,

$$\mathscr{M}\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{M} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda_m^p \mathscr{M}\Phi_m^p(\mathbf{x}) = -\sum_{p=1}^{M} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda_m^p \frac{i\pi k a_p}{2} J_m'(ka_p) H_m^{(1)}(kr_p(\mathbf{x}))\widetilde{\Phi}_m^p(\mathbf{x}). \tag{4.51}$$

Démonstration. Nous ne donnons que la preuve de la relation (4.50) pour le potentiel de simple couche, la démonstration de la relation (4.51) du potentiel de double couche étant similaire. Utilisons la décomposition dans la base de Fourier de la densité ρ pour obtenir

$$\mathscr{L}\rho(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{M} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho_m^p \mathscr{L}\Phi_m^p(\mathbf{x}). \tag{4.52}$$

Pour $p = 1, \ldots, M$, $m \in \mathbb{Z}$ et $\mathbf{x} \in \Omega^+$, nous avons

$$\mathscr{L}\Phi_m^p(\mathbf{x}) = \frac{i}{4} \int_{\Gamma_p} H_0^{(1)}(k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)\Phi_m^p(\mathbf{y})\mathrm{d}\Gamma_p(\mathbf{y}).$$

En injectant cette relation dans l'expression (4.52) de $\mathscr{L}\rho(\mathbf{x})$, nous obtenons

$$\mathscr{L}\rho(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{M} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{i\rho_m^p}{4} \int_{\Gamma_p} H_0^{(1)}(k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)\Phi_m^p(\mathbf{y})\mathrm{d}\Gamma_p(\mathbf{y}). \tag{4.53}$$

Nous développons maintenant le terme $H_0^{(1)}(k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)$ par rapport au centre $\mathbf{O}_p$ grâce au théorème 4.28 d'addition des fonctions de Hankel. Pour reprendre les notations du théorème 4.28, nous notons

$$\mathbf{y} = \widetilde{\mathbf{O}}_2, \qquad \mathbf{O}_p = \widetilde{\mathbf{O}}_1.$$

Ainsi, nous avons, d'une part,

$$\widetilde{\mathbf{b}}_{12} = \widetilde{\mathbf{O}}_2\widetilde{\mathbf{O}}_1 = -\mathbf{r}_p(\mathbf{y}), \qquad \widetilde{b}_{12} = r_p(\mathbf{y}) = a_p,$$

et, d'autre part,

$$\widetilde{\mathbf{r}}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{r}_p(\mathbf{x}) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{r}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{y}.$$

De cette manière, il vient que

$$\widetilde{b}_{12} = r_p(\mathbf{y}) = a_p < \widetilde{r}_1(\mathbf{x}) = r_p(\mathbf{x}).$$

Par conséquent, nous pouvons utiliser la deuxième égalité (4.49) du théorème 4.28 et ainsi disposer d'un premier développement de la fonction de Hankel

$$H_0^{(1)}(k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_{-n}(kr_p(\mathbf{y}))\varphi_{-n}(-\mathbf{r}_p(\mathbf{y}))H_n^{(1)}(kr_p(\mathbf{x}))\varphi_n(\mathbf{r}_p(\mathbf{x})).$$

Nous utilisons ensuite la relation (4.38) ainsi que l'égalité suivante [1, éq. (9.1.5)]

$$J_{-n}(kr_p(\mathbf{y})) = (-1)^n J_n(kr_p(\mathbf{y})),$$

pour obtenir que

$$H_0^{(1)}(k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(kr_p(\mathbf{y}))\overline{\varphi_n(\mathbf{r}_p(\mathbf{y}))}H_n^{(1)}(kr_p(\mathbf{x}))\varphi_n(\mathbf{r}_p(\mathbf{x})).$$

Notons maintenant que, comme $\mathbf{y}$ est un point de Γ_p, nous avons alors $r_p(\mathbf{y}) = a_p$. Par ailleurs, en utilisant les définitions (4.37) et (4.47) respectivement des fonctions Φ_m^p et des fonctions $\widetilde{\Phi}_m^p$, nous aboutissons au développement cherché de la fonction de Hankel

$$H_0^{(1)}(k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|) = 2\pi a_p \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(ka_p)\overline{\Phi_n^p(\mathbf{y})}H_n^{(1)}(kr_p(\mathbf{x}))\widetilde{\Phi}_n^p(\mathbf{x}).$$

Nous remplaçons maintenant ce développement de $H_0^{(1)}(k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)$ dans l'expression (4.53) du potentiel de simple couche. Il vient alors que

$$\mathscr{L}\rho(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{M}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho_m^p \frac{i\pi a_p}{2}\int_{\Gamma_p}\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(ka_p)\overline{\Phi_n^p(\mathbf{y})}H_n^{(1)}(kr_p(\mathbf{x}))\widetilde{\Phi}_m^p(\mathbf{x})\Phi_n^p(\mathbf{y})\mathrm{d}\Gamma_p(\mathbf{y}).$$

Nous permutons la sommation et l'intégration pour obtenir

$$\mathscr{L}\rho(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{M}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho_m^p \frac{i\pi a_p}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(ka_p)H_n^{(1)}(kr_p(\mathbf{x}))\widetilde{\Phi}_m^p(\mathbf{x})\int_{\Gamma_p}\overline{\Phi_n^p(\mathbf{y})}\Phi_m^p(\mathbf{y})\mathrm{d}\Gamma_p(\mathbf{y}).$$

Enfin, nous utilisons l'orthogonalité des fonctions $(\Phi_m^p)_{m\in\mathbb{Z}}$ pour égaliser les indices m et n et ainsi aboutir à l'égalité cherchée

$$\mathscr{L}\rho(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{M}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \rho_m^p \frac{i\pi a_p}{2} J_m(ka_p)H_m^{(1)}(kr_p(\mathbf{x}))\widetilde{\Phi}_m^p(\mathbf{x}).$$

□

Nous pouvons ici faire le lien entre cette approche par représentation intégrale et l'approche par séries de Mie, comme utilisée dans [11]. Cette dernière approche repose sur la recherche de l'onde diffractée u sous la forme

$$\forall \mathbf{x}\in\Omega^+, \qquad u(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{M}\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m^p H_m^{(1)}(kr_p(\mathbf{x}))\widetilde{\Phi}_m^p(\mathbf{x}),$$

où les c_m^p sont des coefficients complexes inconnus. Pour les équations intégrales usuelles que nous avons présentées, le champ diffracté u est la somme d'un potentiel de simple couche et

d'un potentiel de double couche. La proposition 4.29 implique alors que pour tout point $\mathbf{x}$ de Ω^+,

$$u(\mathbf{x}) = \mathscr{L}\rho(\mathbf{x}) + \mathscr{M}\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{M}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{i\pi a_p}{2}\left[\rho_m^p J_m(ka_p) + \lambda_m^p J_m'(ka_p)\right] H_m^{(1)}(kr_p(\mathbf{x}))\widetilde{\Phi}_m^p(\mathbf{x}).$$

Ainsi, nous disposons d'une relation simple entre les coefficients c_m^p et les coefficients ρ_m^p et λ_m^p

$$\forall p = 1,\dots,M,\ \forall m\in\mathbb{Z}, \qquad c_m^p = \frac{i\pi a_p}{2}\left[\rho_m^p J_m(ka_p) + \lambda_m^p J_m'(ka_p)\right].$$

Par conséquent, les approches par série de Mie et par équation intégrale projetée dans la base de Fourier sont similaires. L'approche par équation intégrale que nous présentons permet toutefois de s'adapter facilement à d'autres cas (obstacles pénétrables, ...), pour peu que l'on dispose d'une équation intégrale. De plus, nous verrons dans le chapitre suivant, qu'à l'aide de cette représentation matricielle des opérateurs intégraux, nous pouvons étudier leur spectre dans le cadre de la diffraction multiple par des disques.

Champ lointain et section efficace radar (SER)

Nous proposons maintenant de calculer le champ lointain des potentiels de simple et de double couche. Rappelons que, quel que soit l'équation intégrale, le champ u a pour représentation intégrale

$$u = \mathscr{L}\rho + \mathscr{M}\lambda,$$

où ρ et λ sont les deux densités inconnues. En coordonnées polaires (r,θ) et en effectuant un développement asymptotique de u quand $r\to+\infty$, nous avons la relation suivante [45],

$$\forall\theta\in[0,2\pi], \qquad u(r,\theta) = \frac{e^{ikr}}{r^{1/2}}\left[a_{\mathscr{L}}(\theta) + a_{\mathscr{M}}(\theta)\right] + O\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right),$$

où $a_{\mathscr{L}}$ et $a_{\mathscr{M}}$ sont les champs lointains respectivement du potentiel de simple couche et du potentiel de double couche, définies pour tout angle θ de $[0,2\pi]$ par

$$\begin{cases} a_{\mathscr{L}}(\theta) = \dfrac{i\sqrt{2}}{4\sqrt{k\pi}} e^{-i\pi/4}\displaystyle\int_\Gamma e^{-ik\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{y}}\rho(\mathbf{y})\mathrm{d}\Gamma(\mathbf{y}), \\ a_{\mathscr{M}}(\theta) = \dfrac{i\sqrt{2}}{4\sqrt{k\pi}} e^{-i\pi/4}\displaystyle\int_\Gamma -\frac{ik}{\|\mathbf{y}\|}\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{y}e^{-ik\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{y}}\lambda(\mathbf{y})\mathrm{d}\Gamma(\mathbf{y}), \end{cases}$$

le vecteur $\boldsymbol{\theta}$ étant égal à $(\cos(\theta),\sin(\theta))$. Par ailleurs, nous rappelons l'expression de la section efficace radar (SER, mesurée en dB), que nous définissons pour tout angle $\theta\in[0,2\pi]$ par

$$\sigma(\theta) = 10\log_{10}\left(2\pi\left|a_{\mathscr{L}}(\theta) + a_{\mathscr{M}}(\theta)\right|^2\right). \tag{4.54}$$

Lorsque les obstacles sont des disques, nous disposons d'une formule analytique des champs lointains des potentiels de simple et double couche dans la base de Fourier $\mathscr{B}$. Par conséquent, il en va de même de la SER.

Proposition 4.30. *Soient $\rho\in L^2(\Gamma)$ et $\mu\in H^{1/2}(\Gamma)$ deux densités admettant les décompositions suivantes dans la base de Fourier $\mathscr{B}$:*

$$\rho = \sum_{p=1}^{M}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\rho_m^p\Phi_m^p \qquad \textit{et} \qquad \lambda = \sum_{p=1}^{M}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\lambda_m^p\Phi_m^p.$$

Alors, pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, les champs lointains $a_{\mathscr{L}}$ et $a_{\mathscr{M}}$ respectivement associés aux potentiel de simple couche $\mathscr{L}\rho$ et de double couche $\mathscr{M}\lambda$ sont donnés par

$$a_{\mathscr{L}}(\theta) = \frac{ie^{-i\pi/4}}{2\sqrt{k}} \sum_{p=1}^{M} \left[\sqrt{a_p} e^{-ib_p k \cos(\theta - \alpha_p)} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \rho_m^p J_m(ka_p) e^{im(\theta - \frac{\pi}{2})} \right) \right], \tag{4.55}$$

et

$$a_{\mathscr{M}}(\theta) = -\frac{ie^{-i\pi/4}\sqrt{k}}{2} \sum_{p=1}^{M} \left[\sqrt{a_p} e^{-ib_p k \cos(\theta - \alpha_p)} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \lambda_m^p J'_m(ka_p) e^{im(\theta - \frac{\pi}{2})} \right) \right]. \tag{4.56}$$

Démonstration. Nous ne démontrons que la première relation (4.55), la preuve pour la deuxième égalité étant similaire. Soit $v = \mathscr{L}\rho$, avec $\rho \in L^2(\Gamma)$, un potentiel de simple couche. En décomposant ρ dans la base $\mathscr{B}$ et d'après la proposition 4.29, nous avons, pour tout $\mathbf{x}$ de Ω^+,

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{M} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \rho_m^p \frac{i\pi a_p}{2} J_m(ka_p) H_m^{(1)}(kr_p(\mathbf{x})) \widetilde{\Phi}_m^p(\mathbf{x}). \tag{4.57}$$

Nous passons en coordonnées polaires : $\mathbf{x} = r(\cos(\theta), \sin(\theta))$, et effectuons un développement asymptotique quand r tend vers l'infini. Pour $p = 1, \ldots, M$ et $m \in \mathbb{Z}$, le développement asymptotique de la fonction de Hankel [1, (9.2.3)] donne

$$H_m^{(1)}(kr_p(\mathbf{x})) = \frac{e^{ikr_p(\mathbf{x})}}{\sqrt{r_p(\mathbf{x})}} \sqrt{\frac{2}{k\pi}} e^{i(-m\pi/2 - \pi/4)} + O\left(\frac{1}{r}\right), \qquad r \to +\infty. \tag{4.58}$$

Par ailleurs, nous avons la relation

$$r_p(\mathbf{x}) = r - b_p \cos(\theta - \alpha_p) + O\left(\frac{1}{r}\right),$$

ainsi que les égalités

$$\cos(\theta_p) = \cos(\theta) + O\left(\frac{1}{r}\right), \qquad \sin(\theta_p) = \sin(\theta) + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Nous utilisons maintenant ces deux dernières relations dans le développement asymptotique (4.58) de la fonction de Hankel, que nous injectons ensuite dans l'expression de v (4.57). Nous obtenons l'expression suivante

$$v(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \frac{ie^{-i\pi/4}}{2\sqrt{k}} \sum_{p=1}^{M} \left[\sqrt{a_p} e^{-ib_p k \cos(\theta - \alpha_p)} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} J_m(ka_p) \rho_m^p e^{im(\theta - \frac{\pi}{2})} \right) \right] + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

□

Remarque 4.31. *Pour obtenir l'expression ci-dessus, nous avons négligé une difficulté puisque nous avons écarté la quantité en $O(1/r)$ de la somme (infinie). Nous supposons ici que cette étape est possible. Notons qu'en pratique, cette expression n'est utilisée qu'en dimension finie, c'est-à-dire pour un nombre fini de coefficients de Fourier. Dans ce cas, la somme est finie et l'utilisation des asymptotiques est beaucoup moins délicate. Par ailleurs, cette formule a également été validée numériquement.*

Remarque 4.32. *Afin d'optimiser le calcul numérique du champ lointain, les relations (4.55) et (4.56) peuvent s'écrire sous la forme d'un produit scalaire entre deux vecteurs (infinis). Plus précisément, introduisons les vecteurs infinis* $\widetilde{\mathbf{a}}_{\mathscr{L}} = ((\widetilde{\mathbf{a}}_{\mathscr{L}})^p)_{1\leq p\leq M}$ *et* $\widetilde{\mathbf{a}}_{\mathscr{M}} = ((\widetilde{\mathbf{a}}_{\mathscr{M}})^p)_{1\leq p\leq M}$ *dont les sous-vecteurs infinis* $(\widetilde{\mathbf{a}}_{\mathscr{L}})^p$ *et* $(\widetilde{\mathbf{a}}_{\mathscr{M}})^p$ *sont donnés par, pour* $p = 1,\dots,M$,

$$\begin{cases} (\widetilde{\mathbf{a}}_{\mathscr{L}})^p = \Big((\widetilde{\mathbf{a}}_{\mathscr{L}})^p_m\Big)_{m\in\mathbb{Z}}, & (\widetilde{\mathbf{a}}_{\mathscr{L}})^p_m = \dfrac{ie^{-i\pi/4}\sqrt{a_p}}{2\sqrt{k}} e^{-ib_pk\cos(\theta-\alpha_p)} J_m(ka_p) e^{im(\theta-\pi/2)}, \\ (\widetilde{\mathbf{a}}_{\mathscr{M}})^p = \Big((\widetilde{\mathbf{a}}_{\mathscr{L}})^p_m\Big)_{m\in\mathbb{Z}}, & (\widetilde{\mathbf{a}}_{\mathscr{L}})^p_m = \dfrac{ie^{-i\pi/4}\sqrt{ka_p}}{2} e^{-ib_pk\cos(\theta-\alpha_p)} J'_m(ka_p) e^{im(\theta-\pi/2)}. \end{cases}$$

Alors, les égalités (4.55) et (4.56) peuvent s'écrire

$$\begin{cases} a_{\mathscr{L}}(\theta) = (\widetilde{\mathbf{a}}_{\mathscr{L}})^T \widetilde{\boldsymbol{\rho}}, \\ a_{\mathscr{M}}(\theta) = (\widetilde{\mathbf{a}}_{\mathscr{M}})^T \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}. \end{cases}$$

4.3.6 Projection des ondes incidentes sur la base de Fourier

Afin de projeter complètement les quatre équations intégrales EFIE, MFIE, CFIE et Brakhage-Werner, nous donnons les coefficients dans la base de Fourier des traces et traces normales de deux types d'ondes incidentes : une onde plane et une onde émise par une source ponctuelle (fonction de Green).

Onde incidente plane

Pour une onde incidente plane, nous avons la proposition suivante [11].

Proposition 4.33. *Supposons que* u^{inc} *soit une onde incidente plane de direction* $\boldsymbol{\beta}$, *avec* $\boldsymbol{\beta} = (\cos(\beta), \sin(\beta))$ *et* $\beta \in [0, 2\pi]$, *c'est-à-dire que,*

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \qquad u^{inc}(\mathbf{x}) = e^{ik\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{x}}.$$

Nous avons alors les égalités suivantes

$$\widetilde{\mathbf{U}}^p_m = \Big(u^{inc}|_\Gamma, \Phi^p_m\Big)_{L^2(\Gamma)} = d^p_m J_m(ka_p), \qquad (\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}})^p_m = \Big(\partial_{\mathbf{n}} u^{inc}|_\Gamma, \Phi^p_m\Big)_{L^2(\Gamma)} = kd^p_m J'_m(ka_p), \tag{4.59}$$

avec

$$d^p_m = \sqrt{2\pi a_p} e^{ik\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{b}_p} e^{im(\pi/2-\beta)}. \tag{4.60}$$

Onde incidente émise par une source ponctuelle

Prenons maintenant le cas d'une onde incidente émise par une source ponctuelle située en $\mathbf{s} \in \Omega^+$. Autrement dit, l'onde u^{inc} est la fonction de Green centrée sur $\mathbf{s}$. Les coefficients dans la base de Fourier des traces simple et normale sur Γ de cette onde u^{inc} sont alors donnés par la proposition suivante.

Proposition 4.34. *Soit* $\mathbf{s} \in \Omega^+$ *et supposons que l'onde incidente* u^{inc} *soit la fonction de Green centrée sur* $\mathbf{s}$

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{s}\}, \qquad u^{inc}(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{i}{4} H^{(1)}_0(k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|).$$

Les coefficients dans la base de Fourier $\mathscr{B}$ des traces simple et normale de l'onde incidente sur Γ sont alors donnés par

$$\widetilde{\mathbf{U}}_m^p = \left(u^{inc}|_\Gamma, \Phi_m^p\right)_{L^2(\Gamma)} = \frac{i\pi a_p}{2} J_m(ka_p) H_m^{(1)}(kr_p(\mathbf{s}))\overline{\widetilde{\Phi}_m^p(\mathbf{s})}, \tag{4.61}$$

et

$$(\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}})_m^p = \left(\partial_{\mathbf{n}} u^{inc}|_\Gamma, \Phi_m^p\right)_{L^2(\Gamma)} = k\frac{i\pi a_p}{2} J_m'(ka_p) H_m^{(1)}(kr_p(\mathbf{s}))\overline{\widetilde{\Phi}_m^p(\mathbf{s})}.$$

Démonstration. Prenons un point $\mathbf{s}$ tel que décrit dans la proposition ainsi qu'un point $\mathbf{x}$ du bord Γ_p de l'obstacle Ω_p^-, pour $p = 1, \ldots, M$. Comme $\mathbf{s} \notin \overline{\Omega_p^-}$, nous avons alors

$$r_p(\mathbf{x}) = a_p < r_p(\mathbf{s}).$$

Nous utilisons maintenant le théorème 4.28 d'addition de Graf afin de développer la fonction de Hankel dans les bases de Fourier. En reprenant les notations du théorème 4.28, nous posons

$$\widetilde{\mathbf{O}}_2 = \mathbf{s}, \qquad \widetilde{\mathbf{O}}_1 = \mathbf{O}_p.$$

Nous avons alors

$$\widetilde{\mathbf{b}}_{12} = \widetilde{\mathbf{O}}_2\widetilde{\mathbf{O}}_1 = -\mathbf{r}_p(\mathbf{y}), \qquad \widetilde{b}_{12} = r_p(\mathbf{y}) = a_p,$$

et

$$\widetilde{\mathbf{r}}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{r}_p(\mathbf{x}) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{r}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{y}.$$

Avec ces notations, il vient que

$$\widetilde{b}_{12} = r_p(\mathbf{y}) = a_p < \widetilde{r}_1(\mathbf{x}) = r_p(\mathbf{x}).$$

Nous utilisons alors la première égalité (4.48) du théorème 4.28 pour obtenir

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|) = \frac{i}{4}\sum_{m\in\mathbb{Z}} H_{-m}^{(1)}(kr_p(\mathbf{s}))\varphi_{-m}(-\mathbf{r}_p(\mathbf{s}))J_m(kr_p(\mathbf{x}))\varphi_m(\mathbf{r}_p(\mathbf{x})). \tag{4.62}$$

Nous utilisons maintenant la relation (9.1.6) de [1]

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad H_m^{(1)}(x) = (-1)^m H_{-m}^{(1)}(x),$$

ainsi que les relations (4.38) sur les fonctions φ_m, pour remplacer les indices $-m$ en m dans l'expression (4.62)

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{i}{4}\sum_{m\in\mathbb{Z}} H_m^{(1)}(kr_p(\mathbf{s}))\overline{\varphi_m^p(\mathbf{r}_p(\mathbf{s}))}J_m(kr_p(\mathbf{x}))\varphi_m^p(\mathbf{x}).$$

Par ailleurs, le point $\mathbf{x}$ est sur le bord Γ_p. Nous avons alors $r_p(\mathbf{x}) = a_p$. De plus, d'après les définitions (4.37) et (4.47) respectivement des fonctions Φ_m^p et des fonctions $\widetilde{\Phi}_m^p$, il vient que

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{i\pi a_p}{2} J_m(ka_p) H_m^{(1)}(kr_p(\mathbf{s}))\overline{\widetilde{\Phi}_m^p(\mathbf{s})}\Phi_m^p(\mathbf{x}), \tag{4.63}$$

ce qui montre directement que, pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et $p = 1, \ldots, M$,

$$\widetilde{\mathbf{U}}_m^p = (G(\cdot\,, \mathbf{s})|_\Gamma, \Phi_m^p)_{L^2(\Gamma)} = \frac{i\pi a_p}{2} J_m(ka_p) H_m^{(1)}(kr_p(\mathbf{s}))\overline{\widetilde{\Phi}_m^p(\mathbf{s})}.$$

Nous calculons maintenant les coefficients $(\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}})^p_m$. La fonction de Green est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur le bord Γ_p, nous pouvons donc dériver l'expression (4.63) par rapport à la normale $\mathbf{n_x}$. La dérivée radiale ne porte que sur la fonction de Bessel, ce qui implique que

$$\partial_{\mathbf{n_x}} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) = k \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{i\pi a_p}{2} J'_m(ka_p) H^{(1)}_m(kr_p(\mathbf{s}))\overline{\widetilde{\Phi}^p_m(\mathbf{s})}\Phi^p_m(\mathbf{x}),$$

et par conséquent, nous avons bien

$$(\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{U}})^p_m = (\partial_{\mathbf{n}} G(\cdot\,,\mathbf{s})|_\Gamma, \Phi^p_m)_{L^2(\Gamma)} = k\frac{i\pi a_p}{2} J'_m(ka_p) H^{(1)}_m(kr_p(\mathbf{s}))\overline{\widetilde{\Phi}^p_m(\mathbf{s})}.$$

□

4.3.7 Approximation en dimension finie

Nous disposons à présent de tous les ingrédients pour résoudre numériquement les quatre équations intégrales EFIE, MFIE, CFIE et l'équation intégrale de Brakhage-Werner, pour une condition de Dirichlet ou de Neumann, lorsque les obstacles sont des disques. Nous n'avons pas la prétention de fournir une étude numérique approfondie des différentes équations intégrales. Dans ce domaine, la littérature est abondante. Notre but ici est d'illustrer, au travers de quelques exemples, une méthode intégro-spectrale permettant de résoudre le problème de diffraction par des disques, à basse fréquence ainsi qu'en moyenne et haute fréquences. De plus, nous verrons que les calculs peuvent être effectués sur un ordinateur personnel, même à haute fréquence.

Troncature du système infini : le cas de l'EFIE

Nous reprenons l'exemple de l'EFIE pour le problème de Dirichlet et nous détaillons l'approximation retenue de l'équation intégrale. Nous généraliserons ensuite ce procédé à toutes les autres équations intégrales et à tous les autres opérateurs intégraux. Rappelons que l'EFIE pour une condition de Dirichlet s'écrit sous la forme matricielle suivante (voir l'équation (4.40))

$$\widetilde{\mathbb{L}}\widetilde{\boldsymbol{\rho}} = -\widetilde{\mathbf{U}}.$$

En vue d'une résolution numérique de ce système linéaire infini, nous devons naturellement le tronquer. Pour chaque série de Fourier associée à la base $(\Phi^p_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ de l'obstacle Ω^-_p, nous choisissons de garder $2N_p+1$ modes, de telle sorte que les indices m de la série tronquée vérifient

$$\forall p = 1,\dots,M, \qquad -N_p \le m \le N_p.$$

Nous proposons plus loin différentes possibilités pour l'indice de troncature N_p dépendant du nombre d'onde adimensionné ka_p. Pour l'instant, nous étudions uniquement le système linéaire ainsi tronqué, lequel s'écrit

$$\mathbb{L}\boldsymbol{\rho} = -\mathbf{U},$$

où nous avons introduit la matrice par blocs $\mathbb{L} = (\mathbb{L}^{p,q})_{1\le p,q\le M}$ ainsi que les vecteurs $\boldsymbol{\rho} = (\boldsymbol{\rho}^p)_{1\le p\le M}$ et $\mathbf{U} = (\mathbf{U}^p)_{1\le p\le M}$ définis par

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} \mathbb{L}^{1,1} & \mathbb{L}^{1,2} & \dots & \mathbb{L}^{1,M} \\ \mathbb{L}^{2,1} & \mathbb{L}^{2,2} & \dots & \mathbb{L}^{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{L}^{M,1} & \mathbb{L}^{M,2} & \dots & \mathbb{L}^{M,M} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}^1 \\ \boldsymbol{\rho}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}^M \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^1 \\ \mathbf{U}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{U}^M \end{bmatrix}, \quad (4.64)$$

avec, pour $p, q = 1, \ldots, M$,

- La matrice $\mathbb{L}^{p,q}$ est de taille $(2N_p + 1) \times (2N_q + 1)$ et ses coefficients $\mathbb{L}^{p,q}_{m,n}$ sont définis par,
$$\forall m = -N_p, \ldots, N_p, \forall n = -N_q, \ldots, N_q, \qquad \mathbb{L}^{p,q}_{m,n} = \widetilde{\mathbb{L}}^{p,q}_{m,n}.$$
Nous pouvons remarquer que, comme la matrice infinie $\widetilde{\mathbb{L}}^{p,p}$ est diagonale, il en va de même de la matrice $\mathbb{L}^{p,p}$.
- Le vecteur $\boldsymbol{\rho}^p = (\boldsymbol{\rho}^p_m)_{-N_p \leq m \leq N_p}$ de taille $2N_p + 1$ contient l'approximation des coefficients ρ^p_m de l'inconnue ρ. Par souci de clarté, nous continuons de noter,
$$\forall m = -N_p, \ldots, N_p, \qquad \boldsymbol{\rho}^p_m = \widetilde{\boldsymbol{\rho}}^p_m = \rho^p_m.$$
- Le vecteur $\mathbf{U}^p = (\mathbf{U}^p_m)_{-N_p \leq m \leq N_p}$, de taille $2N_p + 1$, est composé des coefficients de Fourier de la trace sur Γ de l'onde incidente. Autrement dit,
$$\forall m = -N_p, \ldots, N_p, \qquad \mathbf{U}^p_m = \widetilde{\mathbf{U}}^p_m = \left(u^{inc}|_\Gamma, \Phi^p_m\right)_{L^2(\Gamma)}.$$

Ainsi, en notant N_{tot} le nombre total de modes considérés
$$N_{tot} = \sum_{p=1}^{M} (2N_p + 1),$$
la taille de la matrice carrée $\mathbb{L}$ est alors de $N_{tot} \times N_{tot}$.

Généralisation aux autres équations intégrales

Nous généralisons maintenant ce procédé pour les trois autres opérateurs intégraux M, N et D. Pour ce faire, nous introduisons trois matrices carrées $\mathbb{M} = (\mathbb{M}^{p,q})_{1 \leq p,q \leq M}$, $\mathbb{N} = (\mathbb{N}^{p,q})_{1 \leq p,q \leq M}$ et $\mathbb{D} = (\mathbb{D}^{p,q})_{1 \leq p,q \leq M}$ de même taille que $\mathbb{L}$, soit $N_{tot} \times N_{tot}$, et de même structure par blocs que $\mathbb{L}$ (4.64). De plus, pour chaque indice d'obstacle $p, q = 1, \ldots, M$,

- Les sous-matrices $\mathbb{M}^{p,q}$, $\mathbb{N}^{p,q}$ et $\mathbb{D}^{p,q}$ sont de tailles $(2N_p + 1) \times (2N_q + 1)$,
- Pour tous les indices m et n tels que $-N_p \leq m \leq N_p$ et $-N_q \leq n \leq N_q$, les coefficients $\mathbb{M}^{p,q}_{m,n}$, $\mathbb{N}^{p,q}_{m,n}$ et $\mathbb{D}^{p,q}_{m,n}$, respectivement des matrices $\mathbb{M}^{p,q}$, $\mathbb{N}^{p,q}$ et $\mathbb{D}^{p,q}$, sont donnés par
$$\mathbb{M}^{p,q}_{m,n} = \widetilde{\mathbb{M}}^{p,q}_{m,n}, \qquad \mathbb{N}^{p,q}_{m,n} = \widetilde{\mathbb{N}}^{p,q}_{m,n} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{D}^{p,q}_{m,n} = \widetilde{\mathbb{D}}^{p,q}_{m,n}.$$

Nous définissons de plus le vecteur $\mathrm{d}\mathbf{U} = (\mathrm{d}\mathbf{U}^p)_{p=1,\ldots,M}$ contenant les coefficients dans la base de Fourier $\mathscr{B}$ de la trace normale sur Γ de l'onde incidente. Plus précisément, pour $p = 1, \ldots, M$, chaque bloc $\mathrm{d}\mathbf{U}^p = (\mathrm{d}\mathbf{U}^p_m)_{-N_p \leq m \leq N_p}$ est défini par
$$\forall m = -N_p, \ldots, N_p, \qquad \mathrm{d}\mathbf{U}^p_m = \left(\partial_{\mathbf{n}} u^{inc}|_\Gamma, \Phi^p_m\right)_{L^2(\Gamma)}.$$

Terminons en introduisant les vecteurs $\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda}^p)_{1 \leq p \leq M}$ et $\Psi = (\Psi^p)_{1 \leq p \leq M}$ contenant l'approximation des coefficients des densités respectives λ et ψ dans la base de Fourier. Pour $p = 1, \ldots, M$, chaque bloc $\boldsymbol{\lambda}^p = (\boldsymbol{\lambda}^p_m)_{-N_p \leq m \leq N_p}$ et $\Psi^p = (\Psi^p_m)_{-N_p \leq m \leq N_p}$ est défini par
$$\forall m = -N_p, \ldots, N_p, , \qquad \boldsymbol{\lambda}^p_m = \lambda^p_m \qquad \text{et} \qquad \Psi^p_m = \psi^p_m.$$

Pour simplifier, nous continuons de noter $\boldsymbol{\lambda}^p_m = \lambda^p_m$ (respectivement $\Psi^p_m = \psi^p_m$) bien que $\boldsymbol{\lambda}^p_m$ (respectivement Ψ^p_m) soit une approximation de λ^p_m (respectivement de ψ^p_m).

Ecriture matricielle

Comme en dimension infinie, pour $p, q = 1, \dots, M$, nous pouvons écrire chaque bloc $\mathbb{L}^{p,q}$, $\mathbb{M}^{p,q}$, $\mathbb{N}^{p,q}$ et $\mathbb{D}^{p,q}$ sous une forme matricielle :

$$
\begin{aligned}
&\bullet\quad \mathbb{L}^{p,q} = \begin{cases} \dfrac{i\pi a_p}{2}\mathbb{J}^p\mathbb{H}^p, & \text{si } p = q, \\ \dfrac{i\pi\sqrt{a_p a_q}}{2}\mathbb{J}^p(\mathbb{S}^{p,q})^T\mathbb{J}^q, & \text{si } p \neq q, \end{cases} \\
&\bullet\quad \mathbb{M}^{p,q} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\mathbb{I}^p - \dfrac{i\pi k a_p}{2}\mathbb{J}^p(\mathrm{d}\mathbb{H})^p = \dfrac{1}{2}\mathbb{I}^p - \dfrac{i\pi k a_p}{2}(\mathrm{d}\mathbb{J})^p\mathbb{H}^p, & \text{si } p = q, \\ -\dfrac{ik\pi\sqrt{a_p a_q}}{2}\mathbb{J}^p(\mathbb{S}^{p,q})^T(\mathrm{d}\mathbb{J})^q, & \text{si } p \neq q, \end{cases} \\
&\bullet\quad \mathbb{N}^{p,q} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\mathbb{I}^p + \dfrac{i\pi k a_p}{2}\mathbb{J}^p(\mathrm{d}\mathbb{H})^p = -\dfrac{1}{2}\mathbb{I}^p + \dfrac{i\pi k a_p}{2}(\mathrm{d}\mathbb{J})^p\mathbb{H}^p, & \text{si } p = q, \\ \dfrac{ik\pi\sqrt{a_p a_q}}{2}(\mathrm{d}\mathbb{J})^p(\mathbb{S}^{p,q})^T\mathbb{J}^q, & \text{si } p \neq q, \end{cases} \\
&\bullet\quad \mathbb{D}^{p,q} = \begin{cases} \dfrac{i\pi k^2 a_p}{2}(\mathrm{d}\mathbb{J})^p(\mathrm{d}\mathbb{H})^p, & \text{si } p = q, \\ -\dfrac{ik^2\pi\sqrt{a_p a_q}}{2}(\mathrm{d}\mathbb{J})^p(\mathbb{S}^{p,q})^T(\mathrm{d}\mathbb{J})^q, & \text{si } p \neq q. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{4.65}
$$

Les matrices $\mathbb{J}^p$, $(\mathrm{d}\mathbb{J})^p$, $\mathbb{H}^p$ et $(\mathrm{d}\mathbb{H})^p$ sont diagonales, de taille $(2N_p+1)\times(2N_p+1)$, et leurs coefficients diagonaux sont donnés pour tout $-N_p \leq m \leq N_p$ par

- $\mathbb{J}^p_{mm} = J_m(ka_p)$
- $(\mathrm{d}\mathbb{J})^p_{mm} = J'_m(ka_p)$
- $\mathbb{H}^p_{mm} = H^{(1)}_m(ka_p)$
- $(\mathrm{d}\mathbb{H})^p_{mm} = H^{(1)'}_m(ka_p)$.

D'autre part, la matrice $\mathbb{I}^p$ est la matrice identité de taille $(2N_p+1)\times(2N_p+1)$ et, pour $q \neq p$, la matrice de séparation $\mathbb{S}^{p,q}$ entre les obstacles Ω_p^- et Ω_q^- est définie par

$$\mathbb{S}^{p,q} = (\mathbb{S}^{p,q}_{m,n})_{-N_p\leq m\leq N_p, -N_q\leq n\leq N_q}, \qquad \mathbb{S}^{p,q}_{m,n} = S_{mn}(\mathbf{b}_{pq}) = H^{(1)}_{m-n}(kb_{pq})e^{i(m-n)\alpha_{bq}} (= \widetilde{\mathbb{S}}^{p,q}_{m,n}).$$

Approximation des équations intégrales

Maintenant que nous disposons des matrices approchant les quatre opérateurs intégraux de frontière L, M, N et D, nous pouvons écrire le système linéaire approchant les quatre équations intégrales considérées : EFIE, MFIE, CFIE et Brakhage-Werner. Nous proposons ici d'écrire, sous forme matricielle, chaque équation intégrale pour une condition de Dirichlet et pour une condition de Neumann. Nous commençons par une condition de Dirichlet sur le bord Γ

- EFIE

$$\mathbb{L}\boldsymbol{\rho} = -\mathbf{U}. \tag{4.66}$$

- MFIE

$$\left(\frac{\mathbb{I}}{2} + \mathbb{N}\right)\boldsymbol{\rho} = -\mathrm{d}\mathbf{U},$$

- CFIE (avec $0 \leq \alpha \leq 1$ et $\Im(\eta) \neq 0$)

$$\left[\alpha\eta\mathbb{L} + (1-\alpha)\left(\frac{\mathbb{I}}{2} + \mathbb{N}\right)\right]\boldsymbol{\rho} = -\alpha\eta\mathbf{U} - (1-\alpha)\mathrm{d}\mathbf{U},$$

- Brakhage-Werner (avec $\Im(\eta) \neq 0$)

$$\left(-\eta\mathbb{L} - \mathbb{M} + \frac{1}{2}\mathbb{I}\right)\Psi = -\mathbf{U},$$

Pour une condition de Neumann, nous avons

- EFIE

$$\mathbb{D}\boldsymbol{\lambda} = -\mathrm{d}\mathbf{U}.$$

- MFIE

$$\left(\frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbb{M}\right)\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{U},$$

- CFIE (avec $0 \leq \alpha \leq 1$ et $\Im(\eta) \neq 0$)

$$\left[(1-\alpha)\mathbb{D} + \alpha\eta\left(\frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbb{M}\right)\right]\boldsymbol{\lambda} = -(1-\alpha)\mathrm{d}\mathbf{U} - \alpha\eta\mathbf{U},$$

- Brakhage-Werner (avec $\Im(\eta) \neq 0$)

$$\left(-\eta\mathbb{D} - \mathbb{N} + \frac{1}{2}\mathbb{I}\right)\Psi = -\mathrm{d}\mathbf{U}.$$

Notons que la matrice du système linéaire obtenue après discrétisation est toujours une combinaison linéaire des quatre matrices $\mathbb{L}$, $\mathbb{M}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{D}$ ainsi que de la matrice identité $\mathbb{I}$. Par conséquent, pour une équation intégrale donnée, la matrice obtenue est de taille $N_{tot} \times N_{tot}$ et, surtout, possède la même structure par bloc que, par exemple, la matrice $\mathbb{L}$ (voir l'équation (4.64)).

Post-traitement : champ proche, champ lointain et SER

Nous donnons maintenant les approximations en dimension finie des potentiels de simple et de double couche en un point $\mathbf{x}$. Nous supposons que nous disposons des vecteurs $\boldsymbol{\rho}$ et $\boldsymbol{\lambda}$ dont les composantes sont des approximations des coefficients des densités respectives ρ et λ. Nous reprenons alors la proposition 4.29 et l'adaptons à la dimension finie en tronquant la somme infinie. Ainsi, pour tout point $\mathbf{x}$ de Ω^+, nous avons d'une part

$$\mathscr{L}\rho(\mathbf{x}) \simeq \sum_{p=1}^{M}\sum_{m=-N_p}^{N_p} \rho_m^p \mathscr{L}\Phi_m^p(\mathbf{x}) \simeq \sum_{p=1}^{M}\sum_{m=-N_p}^{N_p} \rho_m^p \frac{i\pi a_p}{2} J_m(ka_p) H_m^{(1)}(kr_p(\mathbf{x}))\widetilde{\Phi}_m^p(\mathbf{x}),$$

et d'autre part

$$\mathscr{M}\lambda(\mathbf{x}) \simeq \sum_{p=1}^{M}\sum_{m=-N_p}^{N_p} \lambda_m^p \mathscr{M}\Phi_m^p(\mathbf{x}) \simeq -\sum_{p=1}^{M}\sum_{m=-N_p}^{N_p} \lambda_m^p \frac{i\pi k a_p}{2} J_m'(ka_p) H_m^{(1)}(kr_p(\mathbf{x}))\widetilde{\Phi}_m^p(\mathbf{x}).$$

De la même manière, nous pouvons obtenir une approximation des champs lointains des potentiels de simple et de double couche. En effet, grâce à la proposition 4.30, nous avons, pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, pour le potentiel de simple couche

$$a_{\mathscr{L}}(\theta) \simeq \frac{ie^{-i\pi/4}}{2\sqrt{k}} \sum_{p=1}^{M}\left[\sqrt{a_p}e^{-ib_p k\cos(\theta-\alpha_p)}\left(\sum_{m=-N_p}^{N_p} \rho_m^p J_m(ka_p)e^{im(\theta-\frac{\pi}{2})}\right)\right],$$

et pour le potentiel de double couche

$$a_{\mathscr{M}}(\theta) \simeq -\frac{ie^{-i\pi/4}\sqrt{k}}{2}\sum_{p=1}^{M}\left[\sqrt{a_p}e^{-ib_pk\cos(\theta-\alpha_p)}\left(\sum_{m=-N_p}^{N_p}\lambda_m^p J_m'(ka_p)e^{im(\theta-\frac{\pi}{2})}\right)\right].$$

Enfin, la section efficace radar $\sigma(\theta)$, donnée par (4.54), est alors obtenue en remplaçant $a_{\mathscr{L}}$ et $a_{\mathscr{M}}$ par leur approximation respective. Notons que chacune des quatre expressions ci-dessus peut être mises sous la forme d'un produit scalaire entre deux vecteurs afin de faciliter ou d'accélérer leur calcul (voir remarque 4.32).

4.3.8 Résolution numérique à basse fréquence

Pour commencer, nous nous plaçons à basse fréquence, c'est-à-dire lorsque le nombre adimensionné ka_p vérifie $ka_p \ll 1$, pour $p = 1, \ldots, M$. Nous proposons d'étudier l'influence du paramètre de troncature N_p sur la précision de la solution calculée. A basse fréquence, nous pouvons raisonnablement penser qu'*a priori* un faible nombre de modes suffit à garantir une bonne précision sur le champ diffracté.

Nous proposons de prendre l'exemple de la configuration suivante. Nous plaçons aléatoirement $M = 200$ obstacles circulaires dans la boîte $[0, 50] \times [0, 50]$. Pour tout $p = 1, \ldots, M$, nous prenons $a_p = a = 1$ et, de plus, pour $q = 1, \ldots, M$ avec $q \neq p$, nous imposons à la distance b_{pq} entre les centres $\mathbf{O}_p$ et $\mathbf{O}_q$ des deux obstacles Ω_p^- et Ω_q^- de vérifier $b_{pq} \geq 2.5a = 2.5$. Le nombre d'onde k est fixé à 0.1 et, par conséquent, nous avons

$$\forall p = 1, \ldots, M, \qquad ka_p = ka = 0.1 \ll 1.$$

Le régime considéré est donc celui de la basse fréquence. Comme tous les disques sont identiques, nous proposons de conserver le même nombre de modes

$$\forall p = 1, \ldots, M, \qquad N_p = N.$$

Enfin, nous prenons une onde incidente plane de direction $\boldsymbol{\beta} = (\cos(\pi/2), \sin(\pi/2))$. La configuration testée est présentée sur la figure 4.2(a). Avec ces paramètres, nous construisons le système linéaire (4.66) associé à la EFIE pour une condition de Dirichlet. Soulignons que les résultats numériques que nous obtenons restent valables pour une condition aux limites de Neumann. Nous posons $N_{ref} = 20$ un indice de troncature suffisamment grand pour obtenir une très bonne précision sur la solution. Pour $N = N_{ref}$ et pour 720 angles d'observation, nous calculons numériquement la section efficace radar, donnée par la relation (4.54), que nous notons $\sigma_{N_{ref}}$. La fonction $\sigma_{N_{ref}}$, représentée sur la figure 4.2(b), est considérée comme la section efficace radar de référence dans la suite. Nous faisons maintenant varier la valeur de N entre 1 et N_{ref}. Pour chaque valeur de N, nous calculons numériquement la section efficace radar σ_N du champ diffracté ainsi que l'erreur relative relative entre σ_N et la section efficace radar de référence $\sigma_{N_{ref}}$

$$err(N) = \left\|\frac{\sigma_N - \sigma_{N_{ref}}}{\sigma_{N_{ref}}}\right\|_\infty = \max_\theta \left|\frac{\sigma_{N_{ref}}(\theta) - \sigma_N(\theta)}{\sigma_{N_{ref}}(\theta)}\right|. \tag{4.67}$$

Nous présentons sur la figure 4.2(c) la courbe de l'erreur relative $err(N)$ en fonction de N ("Résolution directe"). Nous constatons que, très rapidement, l'erreur relative est faible. Par exemple, pour $N = 2$, nous obtenons une erreur relative de 10^{-4}. Comme nous pouvions

nous y attendre, à basse fréquence, un petit nombre de modes est suffisant pour décrire le champ diffracté avec une bonne précision. Avec $N = 2$, la taille de la matrice du système linéaire est alors de $5M \times 5M$. Ainsi, même avec un grand nombre d'obstacles (typiquement $M = 2000$), la matrice du système linéaire peut être stockée pleinement en mémoire et une résolution directe peut être utilisée. Nous proposons toutefois de comparer, lorsque le nombre d'obstacles augmente, le temps CPU nécessaire à la résolution de l'EFIE entre une résolution directe et une résolution à l'aide du solveur itératif GMRES [99], avec une réinitialisation de 50 et une tolérance de 10^{-4} (noté GMRES$(50, 10^{-4})$). Les disques sont ici unitaires et répartis aléatoirement dans la boîte $[0, 130] \times [0, 130]$. Nous reportons sur la figure 4.2(d) les courbes de temps cpu pour une méthode directe et pour le GMRES$(50, 10^{-4})$, avec $N = 0, 1$ et 2. Notons qu'une tolérance de 10^{-4} est suffisante si l'on considère $N \leq 2$ (voir figure 4.2(c)). Nous constatons que, pour $N = 2$ et $M > 1000$, l'utilisation du GMRES$(50, 10^{-4})$ devient beaucoup plus intéressante qu'une résolution directe, avec, par exemple, un gain d'environ 50% de temps CPU lorsque le milieu contient $M = 2500$ obstacles.

Limite de l'approche par résolution directe

Montrons qu'à haute fréquence, la méthode directe proposée à basse fréquence n'est plus envisageable. Pour simplifier, supposons que pour $p = 1, \ldots, M$, nous ayons $a_p \simeq a$ et $N_p = N$. Lorsque le nombre d'onde augmente, nous devons conserver au moins $N = ka$ modes pour conserver une bonne précision sur le champ diffracté. La matrice (tronquée) du système linéaire approchant l'équation intégrale possède $M^2(2N + 1)^2$ coefficients. Avec les simplifications introduites ci-dessus, le nombre de coefficients est de l'ordre de $O\left(M^2[ka]^2\right)$. De plus, la résolution du système linéaire par une méthode directe est effectuée en $O\left([ka]^3 M^3\right)$ opérations. Ainsi, lorsque le nombre ka est important et le nombre d'obstacles M grand, le coût de stockage mémoire ainsi que le coût CPU sont très importants et rendent la résolution directe impossible. Pour donner un exemple, si $a = 1$, $k = 200$ et $M = 53$, alors le stockage de la matrice nécessite 8Go de mémoire, ce qui est la taille mémoire actuelle des ordinateurs portables haut de gamme. Toutefois, la structure des matrices des opérateurs intégraux est particulière. Nous proposons alors une stratégie pour diminuer grandement les coûts de stockage puis les coûts CPU. Cette méthode est basée sur celle proposée dans [11].

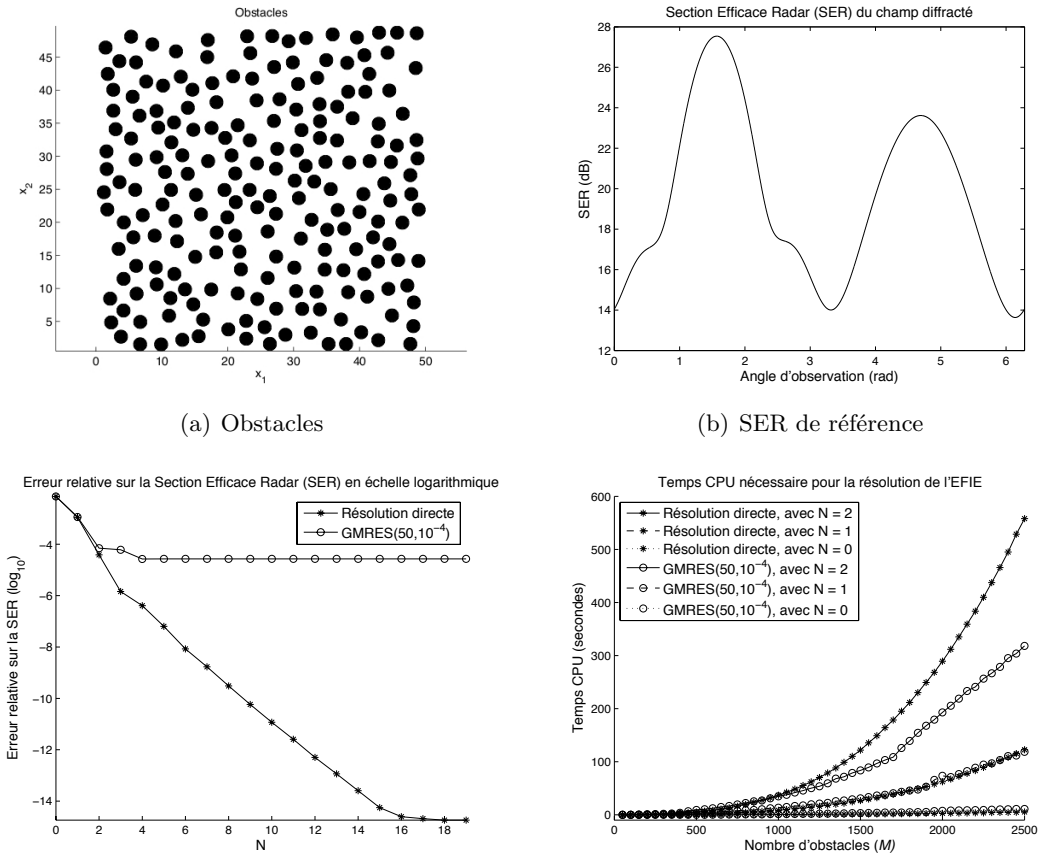
4.3.9 Résolution numérique en moyenne/haute fréquence

Un paramètre de troncature adapté à la taille de chaque disque

Nous nous plaçons maintenant dans le cadre de la moyenne et haute fréquence. Autrement dit, on suppose que $ka_p \gg 1$, pour $p = 1, \ldots, M$. Pour conserver une précision satisfaisante sur le champ diffracté, un nombre de modes plus conséquent doit être pris en compte. Dans [11] (voir équation (21)), les auteurs proposent de prendre, pour $p = 1, \ldots, M$,

$$N_p = \left[ka_p + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(2\sqrt{2}\pi ka_p \varepsilon^{-1}) \right)^{\frac{2}{3}} (ka_p)^{1/3} + 1 \right], \tag{4.68}$$

où ε est l'erreur tolérée sur les coefficients de Fourier. Cette erreur sera également, plus loin, la tolérance du solveur itératif. Remarquons que ce choix est adapté au nombre adimensionné ka_p associé à chaque obstacle Ω_p^-.



(a) Obstacles

(b) SER de référence

(c) Erreur relative sur la SER en fonction de N

(d) Temps CPU nécessaire pour résoudre l'EFIE en fonction de N

FIGURE 4.2 – Influence du paramètre de troncature N à basse fréquence sur une configuration. Le milieu, présenté sur la figure (a), comporte $M = 200$ disques unitaires placés aléatoirement dans le carré $[0, 50] \times [0, 50]$ pour un nombre d'onde k égal à 0.1. La figure (b) donne la section efficace radar $\sigma_{N_{ref}}$ calculée à l'aide de l'EFIE et avec $N_{ref} = 20$ et la figure (c) présente l'erreur relative (4.67) sur $\sigma_{N_{ref}}$ en fonction de N. Enfin, sur la figure (d), nous comparons les temps CPU nécessaires à la résolution de l'EFIE avec une méthode directe et avec le GMRES$(50, 10^{-4})$, pour $N = 0, 1$ et 2 et en fonction du nombre d'obstacles M.

Diminution du nombre de coefficients stockés

Les quatre matrices $\mathbb{L}$, $\mathbb{M}$, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{D}$ ont toutes la même structure. Pour simplifier la présentation, nous décrivons la stratégie de résolution uniquement pour la matrice $\mathbb{L}$, donnée par (4.65). Cette matrice est globalement pleine, cependant, les blocs $\mathbb{L}^{p,p}$, situés sur la diagonale de $\mathbb{L}$, sont diagonaux. Par conséquent, pour $p = 1, \ldots, M$, le nombre de coefficients à stocker de la matrice $\mathbb{L}^{p,p}$ peut être réduit de $(2N_p + 1)^2$ à $2N_p + 1$.

Concentrons nous maintenant sur les blocs extra-diagonaux $\mathbb{L}^{p,q}$, pour $p, q = 1, \ldots, M$ avec $p \neq q$. Rappelons que ces sous-matrices s'écrivent sous la forme suivante (4.65),

$$\mathbb{L}^{p,q} = \frac{i\pi\sqrt{a_p a_q}}{2} \mathbb{J}^p (\mathbb{S}^{p,q})^T \mathbb{J}^q.$$

Les deux matrices $\mathbb{J}^p$ et $\mathbb{J}^q$ sont diagonales et respectivement de taille $(2N_p + 1) \times (2N_p + 1)$

et $(2N_q+1)\times(2N_q+1)$. Ainsi, elles peuvent être représentées uniquement par leur vecteur diagonal contenant $2N_p+1$ coefficients pour $\mathbb{J}^p$ et $2N_q+1$ coefficients pour $\mathbb{J}^q$. En revanche, la matrice $\mathbb{S}^{p,q}$ est pleine mais présente une structure Toeplitz [38]. En effet, ses coefficients $\mathbb{S}^{p,q}_{m,n}$ ne dépendent que de la différence $n-m$

$$\mathbb{S}^{p,q}_{m,n} = H^{(1)}_{n-m} e^{i(n-m)\alpha_{pq}}.$$

Ainsi, le vecteur contenant la première colonne et la première ligne (par exemple) de la matrice Toeplitz $\mathbb{S}^{p,q}$ contient tous les coefficients de $\mathbb{S}^{p,q}$. Plus précisément, ce vecteur γ_{pq} est de taille $2N_p+2N_q+1$ et est donné par

$$\gamma_{pq} = (\mathbb{S}^{p,q}_{N_q,-N_p},\ldots,\mathbb{S}^{p,q}_{-N_q+1,-N_p},\mathbb{S}^{p,q}_{-N_q,-N_p},\mathbb{S}^{p,q}_{-N_q,-N_p+1},\ldots,\mathbb{S}^{p,q}_{-N_q,N_p}).$$

Au final, la matrice $\mathbb{L}^{p,q}$ nécessite en fait le stockage $4N_p+4N_q+3$ coefficients.

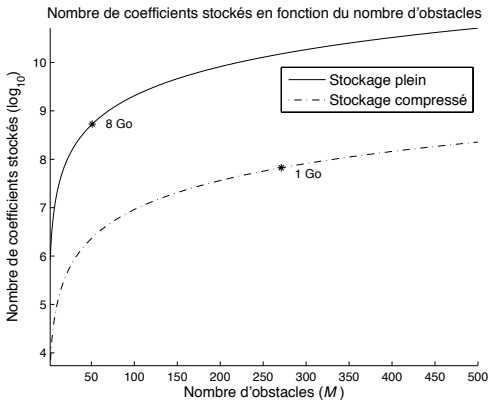
Nous pouvons maintenant calculer le coût de stockage total de la matrice $\mathbb{L}$ dans sa version compressée. Pour simplifier, nous supposons que $N_p=N$, pour tout $p=1,\ldots,M$. Chaque bloc diagonal $\mathbb{L}^{p,p}$ nécessite le stockage de $2N+1$ coefficients, tandis que chaque matrice extra-diagonale $\mathbb{L}^{p,q}$ est représentée par $8N+3$ coefficients. Etant donné que la matrice $\mathbb{L}$ dispose de M blocs diagonaux et $M(M-1)$ blocs extra-diagonaux, le nombre de coefficients à stocker est finalement de $M(2N+1+8N(M-1)+3(M-1))$. Autrement dit, le nombre de coefficients à stocker est de l'ordre de $O\left(NM^2\right)$ ce qui est à comparer avec un ordre $O\left(N^2M^2\right)$ pour le stockage plein de la matrice.

Pour illustrer ces ordres de grandeur en terme de coût réel de stockage mémoire, nous représentons, sur les figures 4.3, le nombre de coefficients à stocker pour la version pleine et pour la version compressée de la matrice $\mathbb{L}$. Pour simplifier, tous les disques sont unitaires. Sur la figure 4.3(a), nous fixons le nombre d'obstacles à $M=200$ et nous faisons varier le nombre d'onde k, tandis que pour la figure 4.3(b), le nombre d'onde k est égal à 200 et le nombre de disques augmente progressivement. Nous indiquons de plus les points tels que le stockage coûte 1Go ou 8Go, lorsque chaque variable occupe 16Ko d'espace mémoire. Nous pouvons alors remarquer que la méthode de stockage compressée offre un gain très important par rapport à la version pleine, notamment à haute fréquence en présence de nombreux obstacles.

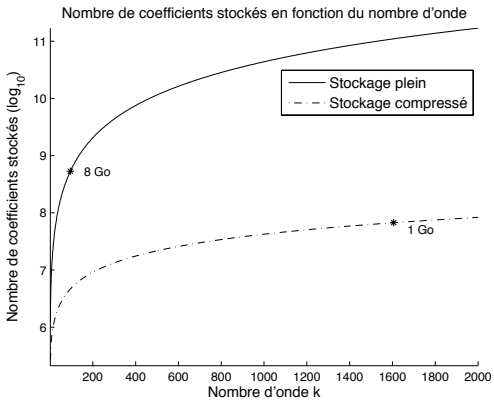
Utilisation d'un solveur itératif et réduction des coûts

Sous sa forme compressée, nous ne disposons plus de la matrice mais d'un vecteur. En plus d'être trop coûteuse, une résolution directe devient alors impossible. Nous devons donc employer un solveur itératif pour résoudre numériquement le système linéaire. Nous avons fait le choix d'utiliser le GMRES et ne testons pas d'autres solveurs. En effet, notre but ici n'est pas de fournir une étude approfondie de la résolution à haute fréquence du problème de diffraction par des disques, mais d'illustrer que notre stratégie fonctionne. Une étude plus détaillée est proposée par exemple dans [11]. Dans la suite, nous noterons GMRES$(restart, tol)$ pour préciser que le GMRES est employé avec une réinitialisation de $restart$ et une tolérance de tol. En général, la tolérance tol et l'erreur ε sur les coefficients de Fourier (voir (4.68)) seront égales.

Nous proposons maintenant d'accélérer la résolution numérique du système linéaire. Pour cela, nous pouvons agir principalement sur deux points



(a) Nombre de coefficients stockés en fonction du nombre d'obstacles M



(b) Nombre de coefficients stockés en fonction du nombre d'onde k

FIGURE 4.3 – Comparaisons entre les méthodes pleine et compressée du nombre de coefficients stockés. Dans chaque figure, le rayon des disques est unitaire. Pour la première courbe (a), le nombre d'onde k est fixé à 200 et le nombre d'obstacles M varie entre 2 et 500, tandis que pour la figure (b), nous fixons $M = 100$ et faisons varier k entre 1 et 2000. Les points 8Go et 1Go sont obtenus en supposant que chaque coefficient occupe 16Ko de place mémoire.

- La réduction du coût CPU d'une itération du GMRES en introduisant un produit matrice-vecteur rapide,
- La diminution du nombre d'itérations nécessaires pour faire converger le solveur en proposant un préconditionneur.

Réduction du coût CPU d'un produit matrice-vecteur

La majeure partie du coût CPU d'une itération du GMRES est dûe à un produit matrice-vecteur. En suivant le procédé proposé dans [11], il est possible de tirer profit encore une fois de la structure Toeplitz par blocs des matrices $\mathbb{L}$, $\mathbb{M}$, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{D}$. Nous donnons les grandes lignes de la méthode proposée uniquement pour la matrice $\mathbb{L}$, impliquée dans l'EFIE pour une condition de Dirichlet.Prenons un vecteur $\mathbf{X} = (\mathbf{X}^p)_{1\leq p\leq M}$ dont chaque bloc $\mathbf{X}^p$ est de taille $2N_p + 1$ et notons $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}^p)_{1\leq p\leq M}$ le vecteur résultant du produit entre $\mathbb{L}$ et $\mathbf{X}$

$$\mathbf{Y} = \mathbb{L}\mathbf{X}.$$

En décomposant ce produit par bloc, nous avons,

$$\forall p = 1, \ldots, M, \qquad \mathbf{Y}^p = \mathbb{L}^{p,p}\mathbf{X}^p + \sum_{q\neq p} \mathbb{L}^{p,q}\mathbf{X}^q.$$

Nous réécrivons cette relation en utilisant l'expression (4.65) de $\mathbb{L}^{p,q}$

$$\forall p = 1, \ldots, M, \qquad \mathbf{Y}^p = \mathbb{L}^{p,p}\mathbf{X}^p + \sum_{q\neq p} \left[\frac{i\pi\sqrt{a_p a_q}}{2}\mathbb{J}^p\mathbb{S}^{p,q}\mathbb{J}^q\mathbf{X}^q\right].$$

Etudions maintenant chaque terme du membre de droite. La matrice $\mathbb{L}^{p,p}$ est diagonale donc l'évaluation du terme $\mathbb{L}^{p,p}\mathbf{X}^p$ nécessite environ $2N_p + 1$ opérations. Il en va de même des

produits impliquant les matrices diagonales $\mathbb{J}^p$ et $\mathbb{J}^q$. En revanche, la matrice $\mathbb{S}^{p,q}$ est pleine et le coût CPU pour calculer le vecteur $\mathbf{Y}$ est principalement dû au produit matrice-vecteur entre les matrices $\mathbb{S}^{p,q}$ et les vecteurs $\mathbb{J}^q\mathbf{X}^q$. Or, les matrices $\mathbb{S}^{p,q}$ sont Toeplitz, et un produit matrice-vecteur avec une matrice Toeplitz peut être vu comme un produit de convolution discret. Donc, en se servant de la transformée de Fourier rapide [38], nous pouvons ramener le coût d'un produit matrice-vecteur de type $\mathbb{S}^{p,q}(\mathbb{J}^q\mathbf{X}^q)$ à un ordre de $O\left(N_{tot}\ln(N_{tot})\right)$ opérations. Au final, une itération complète du GMRES implique un nombre d'opérations de l'ordre de $O\left(N_{tot}\ln(N_{tot})\right)$, où N_{tot} est la dimension de la matrice $\mathbb{L}$.

Préconditionneur par la diffraction simple

Nous ne disposons pas de la matrice du système mais d'une version compressée (un vecteur). Ainsi, un préconditionneur algébrique ne peut être utilisé. Nous proposons donc un préconditionnement *par la diffraction simple* en ne prenant en compte que les interactions des obstacles avec eux-mêmes. Nous détaillons ce préconditionnement sur l'exemple de l'EFIE pour une condition de Dirichlet, la méthode étant exactement la même pour les autres équations intégrales (et en fait conduisant à la même équation). Rappelons l'expression du système linéaire tronqué associé à l'EFIE

$$\mathbb{L}\boldsymbol{\rho} = -\mathbf{U}.$$

Nous introduisons la matrice $\widehat{\mathbb{L}} = (\widehat{\mathbb{L}}^{p,q})_{1\leq p,q\leq M}$ ne contenant que les blocs situés sur la diagonale de $\mathbb{L}$. Plus précisément, nous avons

$$\widehat{\mathbb{L}} = \begin{bmatrix} \mathbb{L}^{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbb{L}^{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{L}^{3,3} & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \mathbb{L}^{M,M} \end{bmatrix}. \tag{4.69}$$

Nous pouvons remarquer que la matrice $\widehat{\mathbb{L}}$ est en fait diagonale puisque chaque sous-matrice $\mathbb{L}^{p,p}$ qui la compose est diagonale, pour $p = 1, \dots, M$. De plus, la matrice $\widehat{\mathbb{L}}$ représente la matrice de diffraction simple car nous avons vu que les matrices $\mathbb{L}^{p,p}$ représentent l'action de l'obstacle Ω_p^- avec lui-même. Notons par ailleurs que $\widehat{\mathbb{L}}$ est inversible en dehors des fréquences de résonance de $F_D(\Omega^-)$ et, dans ce cas, sa matrice inverse est donnée par

$$(\widehat{\mathbb{L}})^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbb{L}^{1,1})^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\mathbb{L}^{2,2})^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbb{L}^{3,3})^{-1} & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & (\mathbb{L}^{M,M})^{-1} \end{bmatrix}.$$

Nous multiplions alors L'EFIE à gauche par la matrice $(\widehat{\mathbb{L}})^{-1}$ pour obtenir l'EFIE préconditionnée

$$(\widehat{\mathbb{L}})^{-1}\mathbb{L}\boldsymbol{\rho} = -(\widehat{\mathbb{L}})^{-1}\mathbf{U}.$$

Cette opération peut naturellement être effectuée pour toutes les équations intégrales et, dans la suite, nous parlerons de *préconditionnement par la diffraction simple* ou simplement de *préconditionnement* pour mentionner ce préconditionneur. De plus, l'équation ainsi obtenue sera appelée équation intégrale *préconditionnée par la diffraction simple* ou simplement équation intégrale *préconditionnée*.

Exemple de résolution numérique à haute fréquence : le cas de l'EFIE

Nous testons l'efficacité de la stratégie présentée plus haut sur le cas de l'EFIE pour une condition de Dirichlet. Nous présentons sur les figures 4.4 le temps CPU [1] nécessaire pour construire la matrice et résoudre le système linéaire pour les différentes stratégies. Sur la figure 4.4(b), nous fixons $ka = 200$ et augmentons progressivement le nombre de disques unitaires M. Ceux-ci sont placés aléatoirement dans la boîte $[0, 50]^2$. Sur la figure 4.4(a), nous disposons aléatoirement $M = 50$ disques unité dans la boîte $[0, 30]^2$ et faisons varier le nombre d'onde k entre 1 et 100. Dans les deux cas, la distance minimale entre les centres est $a/2 = 0.5$ et le solveur itératif utilisé dans la stratégie de stockage compressé est GMRES(50,10^{-4}. Lorsque le nombre de disques dans le milieu est fixe et que le nombre d'onde k augmente, la stratégie couplant le préconditionnement et le stockage compressé donne de très bon résultats en terme de temps CPU, comparativement à la méthode directe ou sans préconditionneur (voir figure 4.4(a)). A haute fréquence ($ka = 200$), lorsque le nombre d'obstacles augmente, la méthode directe est très vite limitée, comme le montre la figure 4.4(b). De plus, la méthode de stockage compressée sans préconditionnement conduit à une divergence du GMRES même avec un petit nombre d'obstacles, c'est pourquoi sa courbe n'est pas représentée sur la figure 4.4(b). Ainsi, le préconditionnement permet non seulement un gain très important en temps CPU mais devient également obligatoire à haute fréquence pour que le solveur itératif converge. Ce résultat est toutefois à remettre dans le contexte de l'EFIE. En effet, cette équation intégrale est de première espèce et, en général, ce type d'équation intégrale souffre d'un mauvais conditionnement ce qui dégrade la convergence des solveurs itératifs comme le GMRES. Néanmoins, le problème existe également avec la MFIE qui est pourtant de seconde espèce. Comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, le préconditionnement que nous proposons fournit un gain important pour les quatre équations intégrales considérées (qui deviennent alors identiques).

Comparaison de la vitesse de convergence entre les équations intégrales

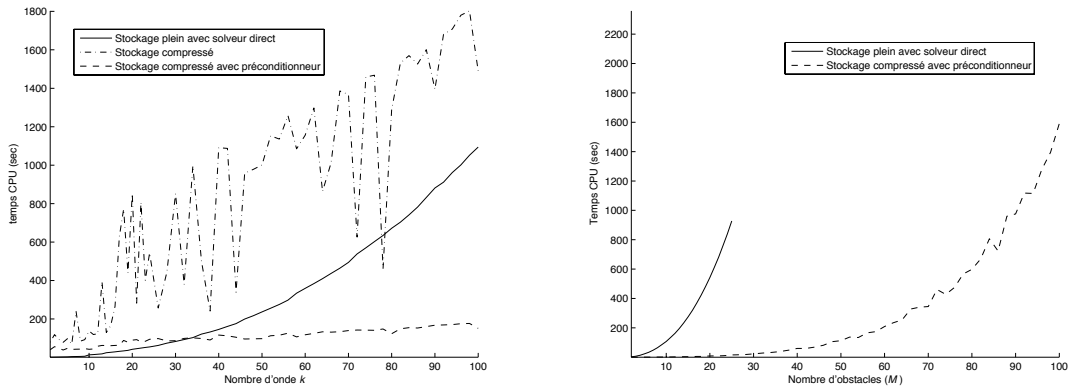
Nous montrons maintenant un exemple de résolution du problème de diffraction multiple par des disques en haute fréquence avec la stratégie présentée précédemment. Nous considérons une onde incidente plane de direction $\boldsymbol{\beta} = (\cos(\pi/2), \sin(\pi/2))$ et nous disposons aléatoirement $M = 50$ disques unitaires dans la boîte $[0, 45] \times [0, 45]$ tels que la distance b_{pq} entre les centres de deux disques Ω_p^- et Ω_q^- soit plus grande que $3(= 3a)$. Nous nous plaçons en haute fréquence en prenant un nombre d'onde k égal à 100. Ainsi nous avons $ka_p = 100 \gg 1$. La configuration obtenue est présentée sur la figure 4.5(a). Nous ne considérons ici que le cas d'une condition de Dirichlet. Nous construisons les systèmes linéaires (finis) associés à l'EFIE, MFIE, CFIE et à l'équation intégrale de Brakhage-Werner. Précisons que nous prenons les paramètres suivants pour la CFIE

$$\alpha = 0.5, \qquad \eta = \frac{-i}{k}\left(= \frac{-i}{100}\right),$$

et pour l'équation intégrale de Brakhage-Werner

$$\eta = \frac{ik}{2}(= 50i).$$

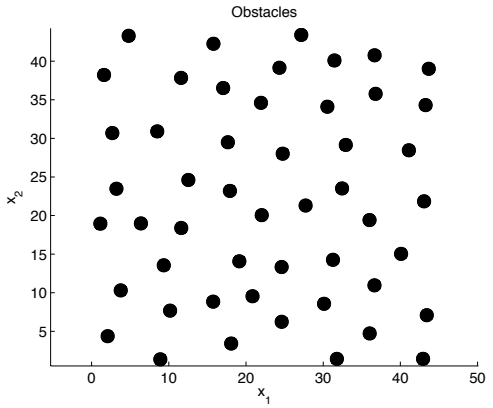
1. Calculs réalisés avec le logiciel Matlab (64 bit) sur un Macbook Pro possédant 8Go de mémoire et un processeur Intel Core 2 Duo cadencé à 2.8GHz.



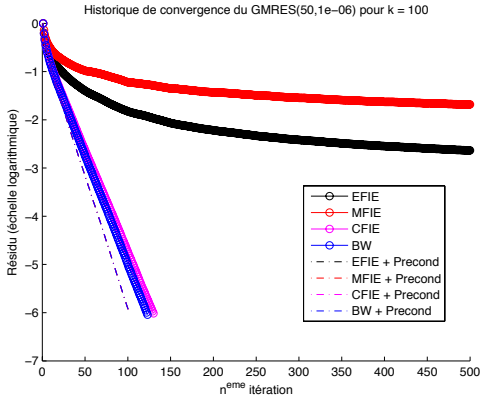
(a) Temps CPU en fonction du nombre d'onde k (b) Temps CPU en fonction du nombre d'obstacles

FIGURE 4.4 – Temps CPU nécessaire à la construction du système et à sa résolution pour l'EFIE avec une condition de Dirichlet. Pour la figure (a), le milieu comporte $M = 50$ obstacles circulaires de rayon 1 et la fréquence k varie entre 1 et 100, tandis que sur la figure (b), le nombre d'onde k est fixé à 200 et le nombre de disques unitaires augmentent progressivement. A chaque fois, nous comparons les trois stratégies : stockage plein, stockage creux (ou compressé) avec ou sans préconditionneur. Sur la figure (a), nous ne représentons pas le stockage creux sans préconditionneur, étant donné que, très rapidement, le GMRES(50,10^{-4}) ne converge pas.

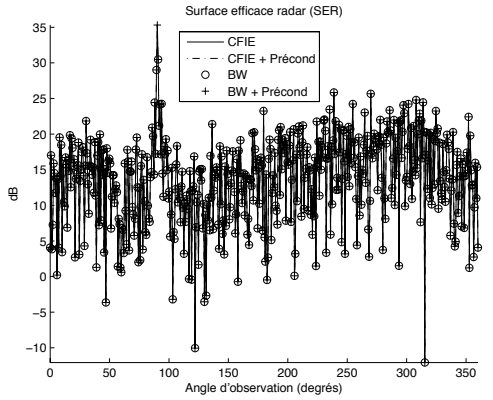
Nous résolvons ensuite les systèmes linéaires à l'aide de GMRES(50,10^{-6}). Le nombre d'itérations maximal est fixé à 500. Nous représentons sur la figure 4.5(b) les courbes de convergence du GMRES pour les huit systèmes linéaires (les quatre équations intégrales et leurs versions préconditionnées). Chaque courbe représente le résidu normalisé (r_k/r_0) du GMRES, où r_k est le résidu après la $k^{ème}$ itération et r_0 le résidu initial. Intéressons nous d'abord aux équations intégrales non préconditionnées. Dans le cas de l'EFIE, qui est une équation intégrale de première espèce, les 500 itérations sont insuffisantes pour faire converger le GMRES vers la tolérance voulue. La même conclusion peut être tirée pour la MFIE, bien qu'étant une équation intégrale de seconde espèce. Nous constatons ici que le GMRES converge uniquement pour la CFIE et pour l'équation intégrale de Brakhage-Werner (notée "BW" dans les figures). Étudions maintenant l'influence du préconditionnement sur la convergence du solveur itératif. Il apparaît que le solveur itératif converge pour les quatre équations intégrales préconditionnées par la diffraction simple et ce, avec le minimum d'itérations. Nous pouvons noter de plus que les quatre courbes sont confondues (voir agrandissement de la figure 4.5(d)). Nous terminons l'étude de cet exemple en représentant, sur la figure 4.5(c), la section efficace radar pour 500 angles d'observation et obtenue avec la CFIE ou Brakhage-Werner, préconditionnées ou non. Entre ces quatre courbes, l'erreur relative maximale obtenue est de 10^{-3}. Nous avons effectué de nombreuses autres simulations numériques similaires qui ont permis de valider notre méthode de résolution. Pour chaque test, nous avons observé que le préconditionnement par la diffraction simple diminue le nombre d'itérations du GMRES.



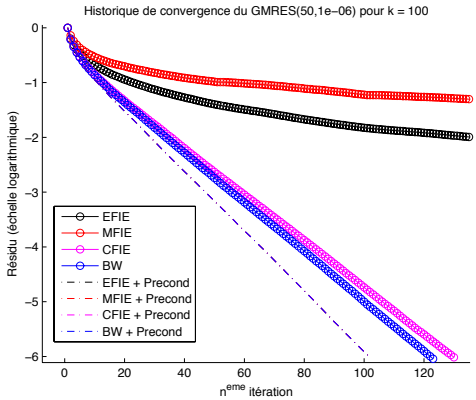
(a) Configuration



(b) Historique de convergence du GMRES(50,10^{-6})



(c) Surface Efficace Radar (SER)



(d) Agrandissement de la figure (b)

FIGURE 4.5 – La figure (a) présente les $M = 50$ disques unitaires placés aléatoirement dans la boîte $[0, 45]^2$, tels que la plus petite distance b_{pq} entre les centres de deux obstacles Ω_p^- et Ω_q^- vérifie $b_{pq} \geq 3(= 3a)$. Sur la figure (c), nous représentons la section efficace radar obtenue pour $k = 100$ avec la CFIE (préconditionnée ou non) et l'équation intégrale de Brakhage-Werner préconditionnée par la diffraction simple. Enfin, les figures (b) et (d) présentent l'historique de convergence du GMRES(50,10^{-6}) pour les quatre équations intégrales considérées et leurs versions préconditionnées par la diffraction simple (symbolisées par "+ Precond").

Préconditionnement par la diffraction simple

Lors de nos simulations numériques, nous avons observé que les quatre courbes de convergence du GMRES, associées aux équations intégrales préconditionnées EFIE, MFIE, CFIE et Brakhage-Werner sont confondues, comme sur l'exemple de la figure 4.5(d). Nous allons montrer que, dans le cas d'obstacles circulaires, les opérateurs des trois équations intégrales directes préconditionnées par la diffraction simple sont identiques et sont également semblables à l'opérateur de l'équation intégrale de Brakhage-Werner préconditionnée par la diffraction simple. Pour énoncer ce résultat, nous introduisons les matrices infinies $\widetilde{\mathbb{A}}_{\mathrm{EFIE}}$, $\widetilde{\mathbb{A}}_{\mathrm{MFIE}}$, $\widetilde{\mathbb{A}}_{\mathrm{CFIE}}$ et $\widetilde{\mathbb{A}}_{\mathrm{BW}}$ de respectivement l'EFIE (4.19), la MFIE (4.21), la CFIE (4.27) et de l'équation intégrale de Brakhage-Werner (4.28), définies par

$$\widetilde{\mathbb{A}}_{\mathrm{EFIE}} = \widetilde{\mathbb{L}}, \qquad \widetilde{\mathbb{A}}_{\mathrm{MFIE}} = \frac{1}{2}\widetilde{\mathbb{I}} + \widetilde{\mathbb{N}},$$
$$\widetilde{\mathbb{A}}_{\mathrm{CFIE}} = \alpha\eta\widetilde{\mathbb{L}} + (1-\alpha)\left(\frac{1}{2}\widetilde{\mathbb{I}} + \widetilde{\mathbb{N}}\right), \qquad \widetilde{\mathbb{A}}_{\mathrm{BW}} = -\eta\widetilde{\mathbb{L}} - \widetilde{\mathbb{M}} + \frac{1}{2}\widetilde{\mathbb{I}},$$

où $0 < \alpha < 1$ et $\Im(\eta) \neq 0$. Nous introduisons ensuite les matrices (infinies) de la diffraction simple $\widehat{\mathbb{A}}_{\mathrm{EFIE}}$, $\widehat{\mathbb{A}}_{\mathrm{MFIE}}$, $\widehat{\mathbb{A}}_{\mathrm{CFIE}}$ et $\widehat{\mathbb{A}}_{\mathrm{BW}}$ associées respectivement aux matrices infinies $\widetilde{\mathbb{A}}_{\mathrm{EFIE}}$, $\widetilde{\mathbb{A}}_{\mathrm{MFIE}}$, $\widetilde{\mathbb{A}}_{\mathrm{CFIE}}$ et $\widetilde{\mathbb{A}}_{\mathrm{BW}}$ (comme pour la matrice $\mathbb{L}$ (voir relation (4.69))). Notons que les quatre matrices infinies $\widehat{\mathbb{A}}_{\mathrm{EFIE}}$, $\widehat{\mathbb{A}}_{\mathrm{MFIE}}$, $\widehat{\mathbb{A}}_{\mathrm{CFIE}}$ et $\widehat{\mathbb{A}}_{\mathrm{BW}}$ sont diagonales et inversibles. Pour exemple, la matrice infinie de l'EFIE préconditionnée par la diffraction simple s'écrit alors $\widehat{\mathbb{A}}_{\mathrm{EFIE}}^{-1}\widetilde{\mathbb{A}}_{\mathrm{EFIE}}$. Nous avons alors la proposition suivante dont la démonstration, purement calculatoire, n'est pas mise dans ce document.

Proposition 4.35. *On suppose que $k \notin F_D(\Omega^-) \cup F_N(\Omega^-)$. Soit la matrice infinie $\widetilde{\mathbb{A}} = (\widetilde{\mathbb{A}}^{p,q})_{1\leq p,q\leq M}$ telle que, pour $p, q = 1, \ldots, M$, chaque bloc $\widetilde{\mathbb{A}}^{p,q}$ est donné par*

$$\widetilde{\mathbb{A}}^{p,q} = \begin{cases} \widetilde{\mathbb{I}}^p & \text{si } p = q, \\ \sqrt{\dfrac{a_q}{a_p}}(\widetilde{\mathbb{H}}^p)^{-1}(\widetilde{\mathbb{S}}^{p,q})^T\widetilde{\mathbb{J}}^q & \text{sinon,} \end{cases}$$

où la matrice infinie $\widetilde{\mathbb{I}}^p$ est la matrice identité, les matrices infinies diagonales $\widetilde{\mathbb{H}}^p$ et $\widetilde{\mathbb{J}}^q$ sont données par (4.45) et la matrice Toeplitz infinie $\widetilde{\mathbb{S}}^{p,q}$ est définie par la relation (4.46). Nous avons alors les résultats suivants.

i) Les matrices infinies des trois équations intégrales préconditionnées sont identiques et égales à la matrice infinie $\widetilde{\mathbb{A}}$

$$\widetilde{\mathbb{A}} = \widehat{\mathbb{A}}_{\mathrm{EFIE}}^{-1}\widetilde{\mathbb{A}}_{\mathrm{EFIE}} = \widehat{\mathbb{A}}_{\mathrm{MFIE}}^{-1}\widetilde{\mathbb{A}}_{\mathrm{MFIE}} = \widehat{\mathbb{A}}_{\mathrm{CFIE}}^{-1}\widetilde{\mathbb{A}}_{\mathrm{CFIE}}. \tag{4.70}$$

ii) Pour tout paramètre η, avec $\Im(\eta) \neq 0$, la matrice infinie $\widehat{\mathbb{A}}_{\mathrm{BW}}^{-1}\widetilde{\mathbb{A}}_{\mathrm{BW}}$ de l'équation intégrale de Brakhage-Werner préconditionnée par la diffraction simple est semblable à la matrice infinie $\widetilde{\mathbb{A}}$, dans le sens où

$$(\widehat{\mathbb{A}}_{\mathrm{BW}})^{-1}\widetilde{\mathbb{A}}_{\mathrm{BW}} = \left[-\eta\widetilde{\mathbb{I}} + k\widetilde{\mathbb{J}}^{-1}(\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{J}})\right]^{-1}\widetilde{\mathbb{A}}\left[-\eta\widetilde{\mathbb{I}} + k\widetilde{\mathbb{J}}^{-1}(\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{J}})\right],$$

où la matrice infinie $\widetilde{\mathbb{I}}$ est la matrice identité et les matrices infinies diagonales $\widetilde{\mathbb{J}} = (\widetilde{\mathbb{J}}^{p,q})_{1\leq p,q\leq M}$ et $(\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{J}}) = ((\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{J}})^{p,q})_{1\leq p,q\leq M}$ sont composées des sous-matrices (infinies) $\widetilde{\mathbb{J}}^p$ et $\widetilde{\mathbb{H}}^p$

$$\forall p, q = 1, \ldots, M, \qquad \widetilde{\mathbb{J}}^{p,q} = \begin{cases} \widetilde{\mathbb{J}}^p & \text{si } p = q, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \qquad (\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{J}})^{p,q} = \begin{cases} (\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{J}})^p & \text{si } p = q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.71}$$

Cette proposition peut s'écrire de la même manière dans le cadre de la dimension finie, les calculs étant exactement les mêmes. Ce résultat explique pourquoi les courbes de convergence du GMRES, associées aux quatre équations intégrales préconditionnées par la diffraction simple, sont toujours confondues, comme sur la figure 4.5(d).

Nous pouvons également comparer les équations intégrales avec l'approche par séries de Mie. Dans cette approche, l'onde diffractée u est cherchée sous la forme suivante

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega^+, \qquad u(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{M} \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m^p H_m^{(1)}(kr_p(\mathbf{x}))\widetilde{\Phi}_m^p(\mathbf{x}).$$

où les coefficients (c_m^p) sont les inconnues. En passant à la trace sur Γ, la condition de Dirichlet nous donne le système linéaire infini suivant [11]

$$\widetilde{\mathbb{A}}_{\text{Mie}}\widetilde{\mathbf{C}} = -\widetilde{\mathbf{U}}, \tag{4.72}$$

où

- Pour $1 \leq p, q \leq M$, chaque sous-matrice infinie $\widetilde{\mathbb{A}}_{\text{Mie}}^{p,q}$ de la matrice infinie $\widetilde{\mathbb{A}}_{\text{Mie}} = (\widetilde{\mathbb{A}}_{\text{Mie}}^{p,q})_{1\leq p,q\leq M}$, est donnée par

$$\widetilde{\mathbb{A}}_{\text{Mie}}^{p,q} = \begin{cases} \sqrt{2\pi a_p}\widetilde{\mathbb{H}}^p & \text{si } p = q, \\ \sqrt{2\pi a_q}\widetilde{\mathbb{J}}^p(\widetilde{\mathbb{S}}^{p,q})^T & \text{sinon,} \end{cases}$$

  les matrices diagonales infinies $\widetilde{\mathbb{H}}^p$, $\widetilde{\mathbb{J}}^p$ et la matrice infinie Toeplitz $\widetilde{\mathbb{S}}^{p,q}$ étant définies par les relations respectivement (4.45) et (4.46).
- Le vecteur infini $\widetilde{\mathbf{C}} = (\widetilde{\mathbf{C}}^p)_{1\leq p\leq M}$ contient les coefficients c_m^p. Autrement dit, pour $p = 1, \ldots, M$, nous avons

$$\widetilde{\mathbf{C}}^p = (\widetilde{\mathbf{C}}_m^p)_{m\in\mathbb{Z}}, \qquad \widetilde{\mathbf{C}}_m^p = c_m^p.$$

Nous définissions la matrice de diffraction simple $\widehat{\mathbb{A}}_{\text{Mie}}$ par le même procédé comme nous l'avons fait pour les opérateurs intégraux. Autrement dit, la matrice $\widehat{\mathbb{A}}_{\text{Mie}}$ ne contient que les blocs diagonaux $\widetilde{\mathbb{A}}_{\text{Mie}}^{p,p}$ de la matrice $\widetilde{\mathbb{A}}_{\text{Mie}}$. Nous préconditionnons maintenant le système linéaire infini (4.72) par la matrice de la diffraction simple $\widehat{\mathbb{A}}_{\text{Mie}}$ pour obtenir

$$\widehat{\mathbb{A}}_{\text{Mie}}^{-1}\widetilde{\mathbb{A}}_{\text{Mie}}\widetilde{\mathbf{C}} = -\widehat{\mathbb{A}}_{\text{Mie}}^{-1}\widetilde{\mathbf{U}}.$$

La matrice infinie $\widehat{\mathbb{A}}_{\text{Mie}}^{-1}\widetilde{\mathbb{A}}_{\text{Mie}}$ est alors semblable à la matrice infinie $\widetilde{\mathbb{A}}$. La démonstration, purement calculatoire, est placée en annexe.

Proposition 4.36. *Lorsque $k \notin F_D(\Omega^-)$, les matrices infinies $\widehat{\mathbb{A}}_{\text{Mie}}^{-1}\widetilde{\mathbb{A}}_{\text{Mie}}$ et $\widetilde{\mathbb{A}}$ (cf. (4.70)) sont semblables :*

$$\widehat{\mathbb{A}}_{\text{Mie}}^{-1}\widetilde{\mathbb{A}}_{\text{Mie}} = \widetilde{\mathbb{J}}^{-1}\widetilde{\mathbb{A}}\widetilde{\mathbb{J}},$$

où la matrice diagonale infinie $\widetilde{\mathbb{J}}$ est définie par (4.71).

Lorsque les obstacles sont des disques et après préconditionnement par la diffraction simple et sous réserve que k ne soit pas une fréquence de résonance, les trois équations intégrales directes

- sont identiques,

- sont semblables à l'équation intégrale de Brakhage-Werner,
- sont semblables au système obtenu par une approche par séries de Mie.

Autrement dit, le choix de la méthode de résolution (séries de Mie, équations intégrales de première ou de seconde espèce) n'a aucune influence sur le système linéaire infini, une fois le préconditionnement par la diffraction simple effectué. On pourrait penser que ce résultat surprenant est lié à la forme particulière des obstacles (disques). En réalité, et comme nous le montrons dans le paragraphe suivant, il est indépendant de la géométrie !

4.4 Étude du préconditionnement par la diffraction simple pour des géométries quelconques

Dans ce paragraphe, nous étudions l'effet du préconditionnement des opérateurs intégraux par l'opérateur de la diffraction simple dans le cas de géométries quelconques. Nous montrons en particulier que le préconditionnement par la diffraction simple d'une des trois équations intégrales directes EFIE, MFIE, CFIE conduit exactement à la même équation, indépendamment de la forme des obstacles ! Concernant l'équation intégrale indirecte de Brakhage-Werner, nous prouvons que l'équation obtenue est semblable à une des équations intégrales directes préconditionnées. Les résultats que nous présentons sont obtenus pour une condition de Dirichlet mais ils s'étendent assez directement à une condition de Neumann.

Nous revenons au cas général en dimension d, pour $d = 2$ ou 3. Nous supposons que Ω^- est constitué de M composantes connexes Ω_p^-, $p = 1, \ldots, M$, d'intersections vides et tel que $\Omega^+ = \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega^-}$ soit connexe. Pour $p = 1, \ldots, M$, nous continuons de noter Γ_p le bord de l'ouvert Ω_p^-, et $\Gamma = \cup_{p=1}^M \Gamma_p$ leur union. Le vecteur unitaire $\mathbf{n}$ est sortant à Ω^-.

4.4.1 Équations intégrales directes

Nous commençons par montrer qu'une fois préconditionnées par la diffraction simple, les opérateurs apparaissant dans les trois équations intégrales directes sont identiques. Pour cela, nous introduisons une équation intégrale directe "générique", représentant indifféremment l'EFIE, la MFIE ou la CFIE, appelée équation intégrale associée à A.

Équation intégrale associée à A

Pour les trois équations intégrales directes EFIE, MFIE et CFIE, le champ total u_T s'écrit sous forme d'un potentiel de simple couche de densité $\rho \in H^{-1/2}(\Gamma)$

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega^+, \qquad u_T(\mathbf{x}) = u^{inc}(\mathbf{x}) + \mathscr{L}\rho(\mathbf{x}) = u^{inc}(\mathbf{x}) + \int_\Gamma G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\rho(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{y}.$$

A l'intérieur de Ω^-, on introduit un champ fictif u_T^- donné par

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega^-, \qquad u_T^-(\mathbf{x}) = u^{inc}(\mathbf{x}) + \mathscr{L}\rho(\mathbf{x}). \tag{4.73}$$

L'équation intégrale directe est alors précisément la condition aux limites sur Γ imposée à u_T^-. Selon la condition, nous obtenons l'EFIE (condition de Dirichlet), la MFIE (condition de Neumann) ou la CFIE (condition mixte ou de Fourier-Robin). Afin de rester dans un cadre général, nous notons A l'opérateur de trace interne utilisé sur le bord Γ. Cet opérateur

A est la trace simple (γ_0^-), la trace normale (γ_1^-) ou une combinaison linéaire des deux ($\alpha\eta\gamma_0^- + (1-\alpha)\gamma_1^-$, avec $0 \leq \alpha \leq 1$ et $\Im(\eta) \neq 0$). Alors, la condition imposée sur u_T^- s'écrit

$$Au_T^- = 0 \qquad \text{sur } \Gamma. \tag{4.74}$$

En remplaçant u_T^- par son expression (4.73) dans la condition aux limites (4.74), nous obtenons l'équation intégrale directe associée à l'opérateur A

$$A(\mathscr{L}\rho) = -Au^{inc}. \tag{4.75}$$

Nous introduisons finalement l'opérateur intégral de frontière L_A défini sur $H^{-1/2}(\Gamma)$ par

$$\forall \rho \in H^{-1/2}(\Gamma), \qquad L_A\rho = A\mathscr{L}\rho,$$

de sorte que l'équation intégrale (4.75) s'écrit

$$L_A\rho = -Au^{inc}. \tag{4.76}$$

Par exemple, si A représente la trace simple interne γ_0^-, alors l'opérateur L_A est l'opérateur intégral de simple couche de frontière L et l'équation (4.76) est l'EFIE.

Nous supposons que l'équation intégrale directe (4.76) est bien posée. Pour les fréquences de $F_D(\Omega^-)$ (respectivement de $F_N(\Omega^-)$), l'EFIE (respectivement la MFIE) est mal posée. Dans la suite de ce chapitre, nous ferons donc toujours l'hypothèse que

$$k \notin F_{DN}(\Omega^-) := F_D(\Omega^-) \bigcup F_N(\Omega^-).$$

Nous avons ainsi la proposition suivante qui découle directement des propositions 4.10, 4.16 et 4.19 respectivement pour l'EFIE, la MFIE et la CFIE.

Proposition 4.37. *Le potentiel de simple couche $v_T = \mathscr{L}\rho + u^{inc}$ est solution du problème de diffraction (4.2) si et seulement si la densité ρ est solution de l'équation intégrale (4.76) associée à A.*

De plus, en notant u_T la solution du problème de diffraction (4.2), la densité ρ est alors donnée par

$$\rho = -\partial_{\mathbf{n}} u_T|_\Gamma.$$

Écriture matricielle de l'équation intégrale associée à A en diffraction multiple

Comme Ω^- est composé de M parties connexes disjointes Ω_p^- pour $p = 1, \ldots, M$, nous pouvons décomposer l'opérateur de simple couche $\mathscr{L}$ en M opérateurs $\mathscr{L}_q$, pour $q = 1, \ldots, M$, définis par

$$\begin{array}{rccl} \mathscr{L}_q : & H^{-1/2}(\Gamma_q) & \longrightarrow & H^1_{loc}(\mathbb{R}^d \setminus \Gamma_q) \\ & \rho_q & \longmapsto & \mathscr{L}_q\rho_q, \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma_q, \quad \mathscr{L}_q\rho_q(\mathbf{x}) = \displaystyle\int_{\Gamma_q} G(\mathbf{x},\mathbf{y})\rho_q(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{y}. \end{array} \tag{4.77}$$

Ainsi, en notant $\rho_q = \rho|_{\Gamma_q}$ pour $\rho \in H^{-1/2}(\Gamma)$ et $q = 1, \ldots, M$, nous avons par construction

$$\forall \rho \in H^{-1/2}(\Gamma), \qquad \mathscr{L}\rho = \sum_{q=1}^{M} \mathscr{L}_q\rho_q.$$

De même, pour tout $p = 1, \dots, M$, introduisons l'opérateur de trace A_p, restriction de l'opérateur A sur Γ_p :

$$A_p g = (Ag)|_{\Gamma_p},$$

pour toute fonction g suffisamment régulière.

Avec ces notations, l'équation intégrale (4.76) portant sur ρ peut s'écrire de manière équivalente

$$\forall p = 1, \dots, M, \qquad A_p \mathscr{L} \rho = -A_p u^{inc},$$

ou encore, en utilisant la décomposition

$$\forall p = 1, \dots, M, \qquad \sum_{q=1}^{M} A_p \mathscr{L}_q \rho_q = -A_p u^{inc}. \tag{4.78}$$

Pour finir, nous introduisons les opérateurs $L_A^{p,q}$, définis sur $H^{-1/2}(\Gamma_q)$ pour tout $p, q = 1, \dots, M$, par

$$\forall \rho_q \in H^{-1/2}(\Gamma_q), \qquad L_A^{p,q} \rho_q = A_p(\mathscr{L}_q \rho_q). \tag{4.79}$$

Finalement, à l'aide de ces notations, nous récrivons l'équation intégrale (4.78) sous la forme matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} L_A^{1,1} & L_A^{1,2} & \dots & L_A^{1,M} \\ L_A^{2,1} & L_A^{2,2} & \dots & L_A^{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_A^{M,1} & L_A^{M,2} & \dots & L_A^{M,M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_M \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A_1 u^{inc} \\ A_2 u^{inc} \\ \vdots \\ A_M u^{inc} \end{bmatrix}.$$

Dans la suite, nous identifierons l'opérateur L_A avec sa matrice associée $(L_A^{p,q})_{1 \le p,q \le M}$.

Opérateur de diffraction simple et équation intégrale préconditionnée associée à A

Introduisons maintenant *l'opérateur de diffraction simple* $\widehat{L}_A$, défini matriciellement par

$$\widehat{L}_A = \begin{bmatrix} L_A^{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_A^{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & L_A^{M,M} \end{bmatrix}.$$

Chaque opérateur $L_A^{p,p}$ composant l'opérateur $\widehat{L}_A$ représente l'interaction de l'obstacle Ω_p^- avec lui même. Par ailleurs, nous avons supposé que k n'était pas une fréquence de $F_{DN}(\Omega^-)$. La proposition 4.9 implique que, pour tout $p = 1, \dots, M$, le nombre d'onde k n'est pas non plus un élément de $F_{DN}(\Omega_p^-)$. Ainsi, les opérateurs associés à la diffraction simple $L_A^{p,p}$ sont inversibles (voir le théorème 4.8) et, par conséquent, l'opérateur de la diffraction simple $\widehat{L}_A$ est également inversible et d'inverse

$$\widehat{L}_A^{-1} = \begin{bmatrix} (L_A^{1,1})^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (L_A^{2,2})^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (L_A^{M,M})^{-1} \end{bmatrix}.$$

Nous pouvons maintenant composer à gauche l'équation intégrale associée à A par $\widehat{L}_A^{-1}$ pour obtenir *l'équation intégrale préconditionnée associée à A*

$$\widehat{L}_A^{-1} L_A \rho = -\widehat{L}_A^{-1} A u^{inc}, \tag{4.80}$$

où l'opérateur $\widehat{L}_A^{-1} L_A$ s'écrit sous la forme matricielle suivante

$$\widehat{L}_A^{-1} L_A = \begin{bmatrix} I & (L_A^{1,1})^{-1} L_A^{1,2} & \dots & (L_A^{1,1})^{-1} L_A^{1,M} \\ (L_A^{2,2})^{-1} L_A^{2,1} & I & \dots & (L_A^{2,2})^{-1} L_A^{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (L_A^{M,M})^{-1} L_A^{M,1} & (L_A^{M,M})^{-1} L_A^{M,2} & \dots & I \end{bmatrix}. \tag{4.81}$$

Équation intégrale associée à B

De la même façon que nous avons introduit l'équation intégrale préconditionnée associée à A, nous définissons une deuxième équation intégrale directe préconditionnée associée à B :

$$\widehat{L}_B^{-1} L_B \rho = -\widehat{L}_B^{-1} B u^{inc}. \tag{4.82}$$

Notons que, pour $k \notin F_{DN}(\Omega^-)$, le potentiel de simple couche $\mathscr{L}\rho$ est solution du problème de diffraction extérieur (4.1) si et seulement si ρ est solution de l'équation intégrale (4.76) associée à A ou à B. Autrement dit, les équations intégrales A et B sont équivalentes.

4.4.2 Égalité des équations intégrales préconditionnées

Nous montrons maintenant que l'équation intégrale préconditionnée associée à A (4.80) est exactement la même que l'équation intégrale préconditionnée associée à B (4.82). Pour cela, il nous suffit de montrer que les opérateurs $\widehat{L}_A^{-1} L_A$ et $\widehat{L}_B^{-1} L_B$ sont identiques. D'après leur écriture matricielle, il suffit de montrer que pour tout $p, q = 1, \dots, M$, nous avons

$$(L_A^{p,p})^{-1} L_A^{p,q} = (L_B^{p,p})^{-1} L_B^{p,q}. \tag{4.83}$$

Or, pour $p = 1, \dots, M$, les opérateurs situés sur la diagonale sont égaux :

$$(L_A^{p,p})^{-1} L_A^{p,p} = (L_B^{p,p})^{-1} L_B^{p,p} = I.$$

Il nous reste à montrer l'égalité (4.83) uniquement pour $p \neq q$. Avant cela, nous commençons par établir un résultat intermédiaire.

Lemme 4.38. *En supposant que $k \notin F_{DN}(\Omega^-)$, nous avons l'égalité suivante, pour tout $p = 1, \dots, M$,*

$$(L_A^{p,p})^{-1} A_p = (L_B^{p,p})^{-1} B_p.$$

Démonstration. Soit $p = 1, \dots, M$ et soit g un élément de $H^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$. On introduit le problème de diffraction simple posé sur l'obstacle Ω_p^-

$$\begin{cases} (\Delta + k^2) v = 0 & (\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_p^-}) \\ v = -g & (\Gamma_p) \\ v \text{ sortant.} \end{cases} \tag{4.84}$$

L'unique solution de ce problème est donné par le potentiel de simple couche $\mathscr{L}_p\rho_p$ sur Γ_p, où $\rho_p \in H^{-1/2}(\Gamma_p)$ est indifféremment obtenue en résolvant l'équation intégrale associée à A

$$L_A^{p,p}\rho_p = -A_p g,$$

où celle associée à B :

$$L_B^{p,p}\rho_p = -B_p g.$$

Ces deux équations étant bien posées (puisque $k \notin F_{DN}(\Omega^-)$), on a donc :

$$(L_A^{p,p})^{-1}A_p g = (L_B^{p,p})^{-1}B_p g,$$

et comme g est arbitraire, la preuve est achevée. □

Nous pouvons maintenant démontrer que les deux opérateurs des équations intégrales préconditionnées sont identiques.

Proposition 4.39. *Si $k \notin F_{DN}(\Omega^-)$, alors les opérateurs $\widehat{L}_A^{-1}L_A$ et $\widehat{L}_B^{-1}L_B$ sont égaux. Autrement dit, l'opérateur $\widehat{L}_A^{-1}L_A$ ne dépend pas du choix de l'opérateur de trace A.*

Démonstration. Pour démontrer cette proposition, il suffit de démontrer que, pour tout $p, q = 1, \ldots, M$, avec $p \neq q$,

$$(L_A^{p,p})^{-1}L_A^{p,q} = (L_B^{p,p})^{-1}L_B^{p,q}.$$

Rappelons que l'opérateur $L_A^{p,q}$ est donné par $L_A^{p,q} = A_p\mathscr{L}_q$. Ainsi

$$(L_A^{p,p})^{-1}L_A^{p,q} = (L_A^{p,p})^{-1}A_p\mathscr{L}_q = (L_B^{p,p})^{-1}B_p\mathscr{L}_q,$$

où la dernière relation vient du lemme 4.38. Par conséquent,

$$(L_A^{p,p})^{-1}L_A^{p,q} = (L_B^{p,p})^{-1}L_B^{p,q}, \qquad \forall p, q = 1, \ldots, M,\ p \neq q,$$

et le résultat en découle. □

Pour conclure, remarquons que comme les opérateurs intervenant dans les deux équations intégrales préconditionnées sont identiques et que ces deux équations ont la même solution, les seconds membres sont aussi égaux :

$$-\widehat{L}_A^{-1}u^{inc} = -\widehat{L}_B^{-1}u^{inc}.$$

Ainsi, l'équation intégrale A préconditionnée

$$\widehat{L}_A^{-1}L_A\rho = -\widehat{L}_A^{-1}u^{inc},$$

et l'équation intégrale B préconditionnée

$$\widehat{L}_B^{-1}L_B\rho = -\widehat{L}_B^{-1}u^{inc},$$

sont exactement les mêmes. Par conséquent, le préconditionnement de n'importe quelle équation directe, EFIE, MFIE ou CFIE, par son opérateur de la diffraction simple, conduit exactement à la même équation.

Soulignons enfin que, comme la CFIE est bien posée pour tout nombre d'onde $k > 0$, alors la CFIE préconditionnée l'est également pour tout nombre d'onde $k > 0$.

4.4.3 Comparaison avec les équations intégrales indirectes

Nous montrons maintenant qu'après préconditionnement par la diffraction simple, l'équation intégrale de Brakhage-Werner ne conduit pas exactement à la même équation que les équations intégrales directes mais est semblable à l'EFIE. L'écriture du champ diffracté diffère entre les équations intégrales directes (potentiel de simple couche) et de Brakhage-Werner (combinaison linéaire de potentiels de simple et de double couche). Toutefois, le point commun entre l'EFIE et l'équation intégrale de Brakhage-Werner réside dans l'obtention par passage direct à la trace sur Γ du champ diffracté.

L'équation intégrale indirecte de Brakhage-Werner

Nous commençons par introduire certaines notations et effectuer quelques rappels sur l'équation de Brakhage-Werner (4.28). Le champ total u_T s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire d'un potentiel de simple couche et d'un potentiel de double couche de densité $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in \Omega^+, \qquad u_T(\mathbf{x}) &= u^{inc}(\mathbf{x}) + (-\eta\mathscr{L} - \mathscr{M})\psi(\mathbf{x}) \\ &= u^{inc}(\mathbf{x}) + \int_\Gamma \left(-\eta G(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \partial_{\mathbf{n_y}} G(\mathbf{x},\mathbf{y})\right) \psi(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

dont le paramètre complexe η est de partie imaginaire non nulle : $\Im(\eta) \neq 0$. L'équation intégrale est ensuite obtenue par application de la trace simple (extérieur) γ_0^+ sur Γ. La condition de Dirichlet $u_T|_\Gamma = 0$ nous donne alors l'équation intégrale portant sur ψ

$$\left(-\eta L - M + \frac{1}{2} I\right) \psi = -u^{inc}|_\Gamma.$$

Pour alléger les notations, nous introduisons les opérateurs suivants

$$\mathscr{L}_{BW} = (-\eta\mathscr{L} - \mathscr{M}) \qquad \text{et} \qquad L_{BW} = \left(-\eta L - M + \frac{1}{2} I\right),$$

de sorte que le champ diffracté u s'écrit

$$u = \mathscr{L}_{BW}\psi,$$

et l'équation intégrale de Brakhage-Werner devient

$$L_{BW}\psi = -u^{inc}|_\Gamma. \tag{4.85}$$

De la même manière que précédemment, nous introduisons les M opérateurs intégraux de volume $\mathscr{L}^q_{BW}$, pour $q = 1, \ldots, M$, définis pour toute densité $\psi_q \in H^{1/2}(\Gamma_q)$ par

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma_q, \qquad \mathscr{L}^q_{BW}\psi_q(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_q} \Big(\partial_{\mathbf{n_y}} G(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \eta G(\mathbf{x},\mathbf{y})\Big)\psi_q(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\Gamma(\mathbf{y}).$$

Ainsi, le potentiel $\mathscr{L}_{BW}\psi$ s'écrit

$$\forall \psi \in H^{1/2}(\Gamma_q), \qquad \mathscr{L}_{BW}\psi = \sum_{q=1}^{M} \mathscr{L}^q_{BW}\psi_q, \qquad \text{avec } \psi_q = \psi|_{\Gamma_q}.$$

Pour $p, q = 1, \ldots, M$, nous introduisons finalement l'opérateur $L_{BW}^{p,q}$ défini par

$$\forall \psi_q \in H^{1/2}(\Gamma_q), \qquad L_{BW}^{p,q}\psi_q = (\mathscr{L}_{BW}^{q}\psi_q)|_{\Gamma_p}. \tag{4.86}$$

Nous pouvons maintenant écrire l'équation intégrale de Brakhage-Werner (4.85) sous la forme matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} L_{BW}^{1,1} & L_{BW}^{1,2} & \ldots & L_{BW}^{1,M} \\ L_{BW}^{2,1} & L_{BW}^{2,2} & \ldots & L_{BW}^{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{BW}^{M,1} & L_{BW}^{M,2} & \ldots & L_{BW}^{M,M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_M \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \gamma_0^1 u^{inc} \\ \gamma_0^2 u^{inc} \\ \vdots \\ \gamma_0^M u^{inc} \end{bmatrix}, \tag{4.87}$$

et nous définissons l'opérateur de la diffraction simple $\widehat{L}_{BW}$ de l'équation intégrale de Brakhage-Werner par

$$\widehat{L}_{BW} = \begin{bmatrix} L_{BW}^{1,1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & L_{BW}^{2,2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & L_{BW}^{M,M} \end{bmatrix}.$$

Chaque opérateur $L_{BW}^{p,p}$ est inversible comme le montre le lemme suivant.

Lemme 4.40. *Pour $p = 1, \ldots, M$, l'opérateur $L_{BW}^{p,p}$ est inversible.*

Démonstration. Considérons le problème de diffraction simple ne comportant que l'obstacle Ω_p^- :

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)v_T^p = 0 & (\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_p^-}) \\ v_T^p = 0 & (\Gamma_p) \\ (v_T^p - u^{inc}) \text{ sortant.} \end{cases}$$

La proposition 4.21 implique que le potentiel $(\mathscr{L}_{BW}\xi_p + u^{inc})$ est solution du problème de diffraction simple ci-dessus si et seulement si ξ_p est solution de l'équation intégrale de Brakhage-Werner

$$L_{BW}^{p,p}\xi_p = -u^{inc}|_{\Gamma_p}.$$

Ainsi, l'opérateur $L_{BW}^{p,p}$ est inversible. □

Ce lemme implique alors que l'opérateur $\widehat{L}_{BW}$ est inversible et son opérateur inverse $\widehat{L}_{BW}^{-1}$ est donné par

$$\widehat{L}_{BW}^{-1} = \begin{bmatrix} (L_{BW}^{1,1})^{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & (L_{BW}^{2,2})^{-1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & (L_{BW}^{M,M})^{-1} \end{bmatrix}$$

Nous pouvons maintenant composer à gauche l'équation intégrale de Brakhage-Werner (4.85) par l'opérateur $\widehat{L}_{BW}^{-1}$ pour obtenir l'équation intégrale de Brakhage-Werner préconditionnée

$$\widehat{L}_{BW}^{-1} L_{BW}\psi = -\widehat{L}_{BW}^{-1} u^{inc}|_{\Gamma}. \tag{4.88}$$

EFIE

Nous prenons maintenant l'EFIE (4.19) pour le problème de Dirichlet. Cette équation force le champ total u_T à s'écrire sous la forme d'un potentiel de simple couche de densité $\rho \in H^{-1/2}(\Gamma)$

$$u_T = u^{inc} + \mathscr{L}\rho.$$

Nous pouvons obtenir l'EFIE de deux manières. La première est celle que nous avons présenté précédemment : introduire un champ fictif $u_T^- = \mathscr{L}\rho + u^{inc}$ dans Ω^- et lui appliquer une condition de Dirichlet homogène sur le bord Γ. L'autre méthode consiste à appliquer directement la condition de Dirichlet $u_T|_\Gamma = 0$ au potentiel de simple couche $u^{inc} + \mathscr{L}\rho$, pour obtenir directement l'équation intégrale en champ électrique portant sur la densité ρ

$$L\rho = -u^{inc}|_\Gamma. \tag{4.89}$$

Ainsi, l'EFIE et l'équation intégrale de Brakhage-Werner s'obtiennent toutes deux par passage à la trace (extérieure) sur Γ du champ total u_T. C'est ce point commun qui nous permet ici de démontrer que, après préconditionnement par la diffraction simple, l'EFIE et l'équation intégrale de Brakhage-Werner sont semblables.

Dans la suite, nous supposons que k n'est pas une fréquence de résonance de $F_D(\Omega^-)$, de sorte que l'opérateur L est inversible. Nous décomposons maintenant l'opérateur intégral volumique de simple couche $\mathscr{L}$ en M opérateurs $(\mathscr{L}_q)_{1\leq q\leq M}$, comme précédemment (voir relation (4.77)). Nous introduisons ensuite les opérateurs $(L^{p,q})_{1\leq p,q\leq M}$ définis par

$$\forall \rho_q \in H^{-1/2}(\Gamma_q), \qquad L^{p,q}\rho_q = (\mathscr{L}_q\rho_q)|_{\Gamma_p}, \tag{4.90}$$

de sorte que l'équation intégrale en champ électrique s'écrit sous la forme matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} L^{1,1} & L^{1,2} & \dots & L^{1,M} \\ L^{2,1} & L^{2,2} & \dots & L^{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L^{M,1} & L^{M,2} & \dots & L^{M,M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_M \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \gamma_0^1 u^{inc} \\ \gamma_0^2 u^{inc} \\ \vdots \\ \gamma_0^M u^{inc} \end{bmatrix}. \tag{4.91}$$

Nous terminons les notations sur l'EFIE en introduisons l'opérateur de la diffraction simple $\widehat{L}$ de l'EFIE défini par

$$\widehat{L} = \begin{bmatrix} L^{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L^{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & L^{M,M} \end{bmatrix}.$$

Le théorème 4.8 et la proposition 4.9 impliquent que l'opérateur $\widehat{L}$ est inversible. Nous composons alors à gauche l'EFIE par $\widehat{L}^{-1}$ pour obtenir l'EFIE préconditionnée

$$\widehat{L}^{-1}L\psi = -\widehat{L}^{-1}u^{inc}|_\Gamma, \tag{4.92}$$

avec

$$\widehat{L}^{-1} = \begin{bmatrix} (L^{1,1})^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (L^{2,2})^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (L^{M,M})^{-1} \end{bmatrix}.$$

Relation entre l'EFIE préconditionnée et l'équation intégrale de Brakhage-Werner préconditionnée

Nous étudions maintenant la relation entre les opérateurs $\widehat{L}^{-1}L$ de l'EFIE préconditionnée (4.92) et $\widehat{L}_{BW}^{-1}L_{BW}$ de l'équation de Brakhage-Werner préconditionnée (4.88). Nous commençons par un premier lemme.

Lemme 4.41. *Lorsque $k \notin F_D(\Omega^-)$, nous avons l'égalité suivante, pour tout $p = 1, \dots, M$,*

$$\mathscr{L}_p(L^{p,p})^{-1} = \mathscr{L}_{BW}^p(L_{BW}^{p,p})^{-1}.$$

Démonstration. Prenons un obstacle Ω_p^-, pour $p = 1, \dots, M$, ainsi qu'une fonction f_p de $H^{1/2}(\Gamma_p)$. Considérons le problème de diffraction simple suivant

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)v = 0 & (\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_p^-}) \\ v = -f_p & (\Gamma_p) \\ v \text{ sortant.} \end{cases} \tag{4.93}$$

Introduisons maintenant les potentiels ω et ω_{BW} définis par

$$\begin{cases} \omega = \mathscr{L}_p\left[(L^{p,p})^{-1}f_p\right], \\ \omega_{BW} = \mathscr{L}_{BW}^p\left[(L_{BW}^{p,p})^{-1}f_p\right]. \end{cases}$$

En tant que combinaison linéaire de potentiels de simple et double couche, ces deux fonctions sont des solutions sortantes de l'équation de Helmholtz sur $(\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_p^-})$. De plus, en prenant leur trace simple sur le bord Γ_p, nous avons

$$\begin{cases} \omega|_{\Gamma_p} = -\left(\mathscr{L}_p(L^{p,p})^{-1}f_p\right)|_{\Gamma_p} = -L^{p,p}(L^{p,p})^{-1}f_p = -f_p, \\ \omega_{BW}|_{\Gamma_p} = -\left(\mathscr{L}_{BW}^p(L_{BW}^{p,p})^{-1}f_p\right)|_{\Gamma_p} = -L_{BW}^{p,p}(L_{BW}^{p,p})^{-1}f_p = -f_p. \end{cases}$$

Ainsi, les ondes ω et ω_{BW} sont toutes deux solutions du problème de diffraction (4.93). Or, d'après le théorème 4.1, ce problème admet une unique solution. Par conséquent, il vient que

$$\forall f_p \in H^{1/2}(\Gamma_p), \qquad \mathscr{L}_p(L^{p,p})^{-1}f_p = \mathscr{L}_{BW}^p(L_{BW}^{p,p})^{-1}f_p.$$

□

Nous pouvons maintenant démontrer un deuxième lemme généralisant le lemme précédant.

Lemme 4.42. *Pour $k \notin F_D(\Omega^-)$, nous avons l'égalité suivante*

$$L\widehat{L}^{-1} = L_{BW}\widehat{L}_{BW}^{-1}.$$

Démonstration. Grâce à leurs écritures matricielles (4.87) et (4.91), nous montrons plutôt que

$$\forall p, q = 1, \dots, M, \qquad L^{q,p}(L^{p,p})^{-1} = L_{BW}^{q,p}(L_{BW}^{p,p})^{-1}. \tag{4.94}$$

Pour tous les indices p compris entre 1 et M, nous avons que

$$(L\widehat{L}^{-1})^{p,p} = (L_{BW}\widehat{L}_{BW}^{-1})^{p,p} (= I).$$

Il nous reste donc à montrer l'égalité (4.94) pour $p \neq q$. A cette fin, nous utilisons le lemme 4.41 qui implique que

$$\mathscr{L}_p(L^{p,p})^{-1} = \mathscr{L}^p_{BW}(L^{p,p}_{BW})^{-1}.$$

Nous passons à la trace sur le bord Γ_q pour obtenir que, d'après les relations (4.90) et (4.86),

$$L^{q,p}(L^{p,p})^{-1} = L^{q,p}_{BW}(L^{p,p}_{BW})^{-1}.$$

La relation (4.94) est donc démontrée et, par conséquent, la preuve est achevée. □

A présent, nous notons $\rho = -\partial_{\mathbf{n}} u_T|_\Gamma$ la solution de l'EFIE (4.89) et ψ la solution de l'équation intégrale de Brakhage-Werner (4.85). Ainsi, nous avons

$$L\rho = -u^{inc}|_\Gamma \qquad \text{et} \qquad L_{BW}\psi = -u^{inc}|_\Gamma.$$

Par conséquent, nous avons la relation suivante entre les densités ρ et ψ

$$\rho = L^{-1}L_{BW}\psi.$$

L'opérateur inversible $L^{-1}L_{BW}$ est l'opérateur de passage entre l'EFIE préconditionnée et l'équation intégrale de Brakhage-Werner préconditionnée, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 4.43. *Pour tout $k \notin F_D(\Omega^-)$, les opérateurs $\widehat{L}^{-1}L$ de l'EFIE préconditionnée et $\widehat{L}^{-1}_{BW}L_{BW}$ de l'équation intégrale de Brakhage-Werner préconditionnée sont semblables, dans le sens où*

$$\left(L^{-1}L_{BW}\right)^{-1}\widehat{L}^{-1}L\left(L^{-1}L_{BW}\right) = \widehat{L}^{-1}_{BW}L_{BW}.$$

Démonstration. Nous partons de l'égalité donnée par le lemme 4.42

$$L\widehat{L}^{-1} = L_{BW}\widehat{L}^{-1}_{BW}.$$

Par conséquent, nous avons

$$\left(L^{-1}L_{BW}\right)^{-1}\widehat{L}^{-1} = \widehat{L}^{-1}_{BW}.$$

En composant le membre de gauche par l'identité $I = LL^{-1}$, il vient que

$$\left(L^{-1}L_{BW}\right)^{-1}\widehat{L}^{-1}LL^{-1} = \widehat{L}^{-1}_{BW}.$$

Enfin, il nous reste à composer cette égalité par l'opérateur L_{BW} pour obtenir la relation cherchée

$$\left(L^{-1}L_{BW}\right)^{-1}\widehat{L}^{-1}L\left(L^{-1}L_{BW}\right) = \widehat{L}^{-1}_{BW}L_{BW}.$$

□

4.4.4 Validation numérique sur d'autres géométries

Pour conclure ce chapitre et illustrer les résultats précédents, nous proposons un exemple numérique utilisant le préconditionnement par la diffraction simple. Nous avons déjà étudié le cas d'obstacles circulaires, sur l'exemple de la figure 4.5. Nous proposons ici de prendre des objets ellipsoïdaux, rectangulaires ou en forme de "cerfs-volants" (voir figure 4.6). Toutefois, la résolution des équations intégrales pour de telles géométries ne peut plus être effectuée avec la méthode spectrale présentée dans le paragraphe 4.3. Nous proposons alors d'utiliser une approximation par éléments finis de frontières, que nous décrivons brièvement dans le cas de l'EFIE uniquement. Nous terminons ce chapitre par un exemple numérique illustrant les résultats présentés plus haut sur le préconditionnement par la diffraction simple.

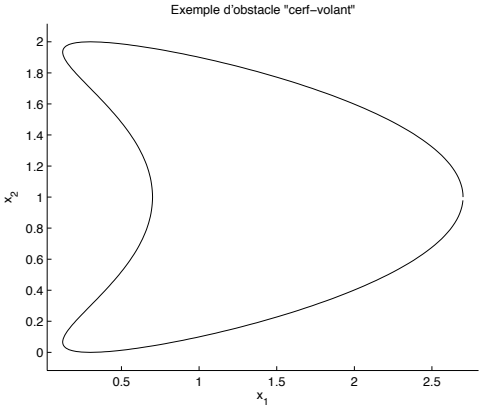


FIGURE 4.6 – Exemple d'obstacle en forme d'un "cerf-volant".

Approximation par éléments finis de frontières : exemple de l'EFIE

Rappelons que l'EFIE pour le problème de Dirichlet s'écrit

$$L\rho = -u^{inc}|_{\Gamma}.$$

Introduisons maintenant une approximation polygonale Γ_h du bord Γ comportant N_h segments. Notons h la plus grande longueur des segments de cette discrétisation. Nous choisissons comme sous-espace d'approximation éléments finis l'espace V_h de $L^2(\Gamma_h)$ des fonctions continues sur Γ_h et linéaires par morceaux (éléments finis $\mathbb{P}_1$)

$$V_h := \left\{\rho_h \in \mathcal{C}^0(\Gamma_h)/\rho_h|_{K_j} \in \mathbb{P}_1, 1 \leq j \leq N_h\right\}.$$

La formulation faible approchée de l'EFIE s'écrit alors

$$\begin{cases} \text{trouver } \rho_h \in V_h \text{ tel que} \\ \forall \Phi_h \in V_h, \ \ (L_h\rho_h, \Phi_h)_{L^2(\Gamma_h)} = -\left(u^{inc}|_{\Gamma_h}, \Phi_h\right)_{L^2(\Gamma_h)}. \end{cases}$$

Après avoir approché les doubles intégrales liées au potentiel de simple couche à l'aide de formules de quadrature, la formulation faible ci-dessus s'écrit sous la forme matricielle suivante

$$\begin{cases} \text{trouver } \boldsymbol{\rho}_h \in \mathbb{C}^{N_h} \text{ tel que} \\ [L_h]\,\boldsymbol{\rho}_h = -[M_h]\mathbf{u}^{\text{inc}}, \end{cases}$$

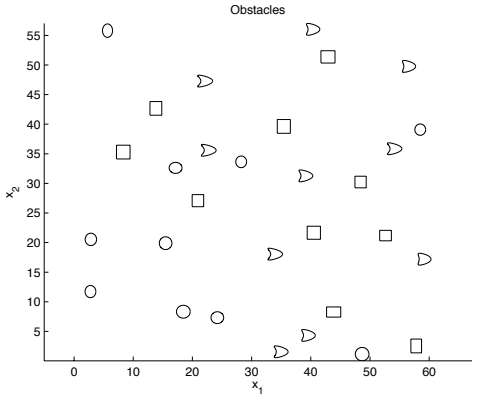
où $[L_h] \in \mathcal{M}_{N_h,N_h}(\mathbb{C})$ est la matrice du potentiel de simple couche et $[M_h] \in \mathcal{M}_{N_h,N_h}(\mathbb{C})$ la matrice de masse pour les éléments finis linéaires, $\boldsymbol{\rho}_h \in \mathbb{C}^{N_h}$ le vecteur nodal densité et $\mathbf{u}^{\text{inc}} \in \mathbb{C}^{N_h}$ le vecteur nodal incident. Nous calculons ensuite la matrice de la diffraction simple $[\hat{L}_h]$, composé uniquement des blocs situés sur la diagonale de la matrice $[L_h]$, ainsi que son inverse $[\hat{L}_h]^{-1}$. Le système approchant l'EFIE préconditionnée est alors donné par

$$\begin{cases} \text{trouver } \boldsymbol{\rho}_h \in \mathbb{C}^{N_h} \text{ tel que} \\ \left[\hat{L}_h\right]^{-1}[L_h]\,\boldsymbol{\rho}_h = -\left[\hat{L}_h\right]^{-1}[M_h]\mathbf{u}^{\text{inc}}. \end{cases}$$

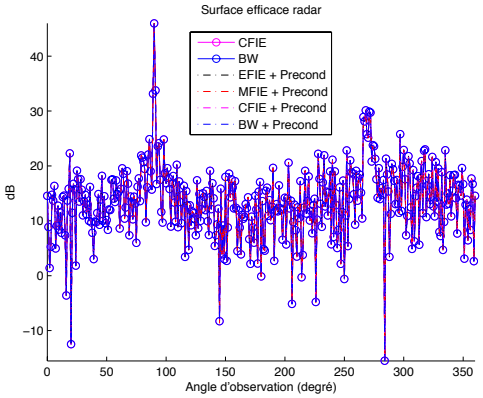
Concernant les autres équations intégrales, la méthode est exactement la même et a été décrite dans d'autres cas précédemment. Etant donné que nous ne proposons ici qu'un exemple numérique et non une étude des matrices éléments finis, nous ne généralisons pas les notations aux autres équations intégrales.

Exemple numérique

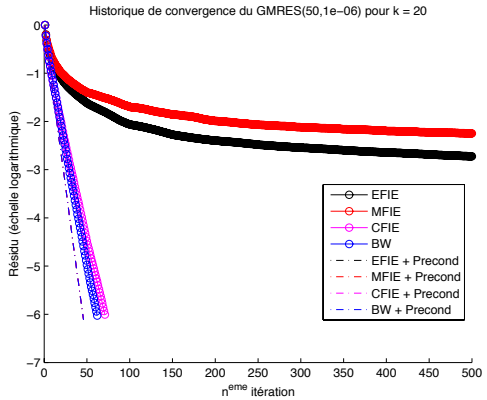
Nous montrons un exemple de résolution du problème de diffraction multiple pour des obstacles de formes diverses. Nous considérons des ellipses, des rectangles et des objets sous la forme d'un "cerf-volant". Nous plaçons aléatoirement $M = 30$ obstacles dans la boîte $[0, 60] \times [0, 60]$, constitués de 10 objets de chacune des trois formes différentes. La taille caractéristique de chaque objet est également aléatoire mais reste de l'ordre de 1. L'onde incidente est une onde plane de direction $\boldsymbol{\beta} = (\cos(\pi/2), \sin(\pi/2))$ et le nombre d'onde k est fixé à 20. La densité de discrétisation est de l'ordre de 15 degrés de liberté par longueur d'onde. Ainsi, chaque obstacle est décrit par environ 300 segments. Nous présentons la configuration obtenue sur la figure 4.7(a). Nous résolvons numériquement chaque système linéaire en utilisant le GMRES avec une réinitialisation de 50 et une tolérance de 10^{-6}. L'historique de convergence est présenté sur la figure 4.7(c), avec un agrandissement au niveau des courbes associées aux systèmes préconditionnés sur la figure 4.7(d). Remarquons que pour l'EFIE et la MFIE, le GMRES ne converge pas en 500 itérations, contrairement à la CFIE et à l'équation intégrale de Brakhage-Werner. D'autre part, les quatre courbes de convergence associées aux quatre systèmes préconditionnés par la diffraction simple sont bien confondues (voir figure 4.7(d)), comme prédit par la théorie. Pour terminer, nous présentons sur la figure 4.7(b) la section efficace radar. Comme nous pouvions nous y attendre, les systèmes linéaires, pour lesquel le GMRES a convergé, fournissent tous un résultat similaire.



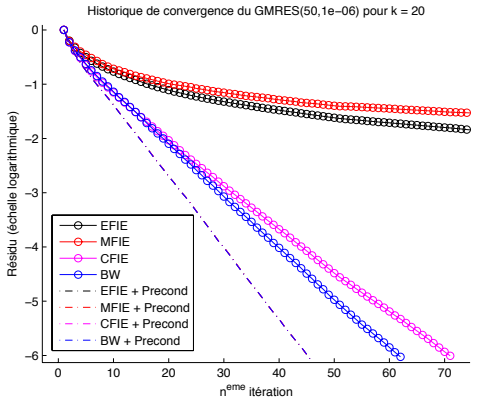
(a) Configuration



(b) Surface Efficace Radar (SER)



(c) Historique de convergence du GMRES(50,10^{-6})



(d) Agrandissement de la figure (b)

FIGURE 4.7 – La figure (a) présente les $M = 30$ obstacles des trois formes proposées : ellipses, rectangles et cerfs-volants. Les objets sont disposés aléatoirement dans la boîte $[0, 60]^2$, tels que la plus petite distance b_{pq} entre les centres de deux obstacles Ω_p^- et Ω_q^- vérifie $b_{pq} \geq 3$. Sur la figure (b), nous représentons la section efficace radar obtenue pour $k = 20$ avec la CFIE et l'équation de Brakhage-Werner (préconditionnées et non préconditionnées). Enfin, les figures (c) et (d) présentent l'historique de convergence du GMRES(50,10^{-6}) pour les quatre équations intégrales considérées et leurs versions préconditionnées par la diffraction simple (symbolisées par "+ Precond").

4.5 Conclusion

Aprèse avoir présenté sous forme unifiée les équations intégrales usuelles, nous avons proposé une stratégie efficace de résolution des systèmes pour une collection d'obstacles circulaires selon le cas de basse ou moyenne/haute fréquence. En particulier, nous avons montré qu'il est nécessaire de préconditionner les équations intégrales par celles liées à la diffraction simple. Un résultat est qu'alors, tous les systèmes intégraux sont les mêmes. Ce résultat, que l'on pourrait penser lié à la géométrie particulière choisie, ne l'est en fait pas. En effet, nous prouvons que, dans le cas d'objets de formes arbitraires, les équations intégrales EFIE, MFIE, CFIE préconditionnées par la diffraction simple sont identiques et semblables à l'équation de Brakhage-Werner. Sous réserve que k ne soit pas une fréquence de résonance, nous pouvons résumer les résultats obtenus sous le diagramme suivant, après préconditionnement par la diffraction simple

$$\text{CFIE} = \text{MFIE} = \text{EFIE} \xleftrightarrow{\text{semblable à}} \text{Brakhage-Werner}.$$

En particulier, les matrices des systèmes linéaires approchant ces équations intégrales ont toutes le même spectre. Par conséquent, le comportement d'un solveur itératif tel que le GMRES est alors exactement le même, comme nous l'avons vu dans le cas d'obstacles circulaires.

Chapitre 5

Estimations du spectre et du conditionnement du potentiel de simple couche pour la diffraction multiple à basse fréquence

Sommaire

5.1 Introduction 196

5.2 L'équation intégrale en champ électrique (EFIE) et l'opérateur de simple couche 197

5.2.1 Formulation faible de l'EFIE 197

5.2.2 Expression de l'opérateur de simple couche dans la base de Fourier pour la diffraction multiple par M disques 197

5.3 Informations spectrales sur le potentiel de simple couche pour la diffraction simple à basse fréquence 199

5.3.1 Le cas du disque 200

5.3.2 Liens avec l'approximation par éléments finis de frontière et extensions formelles à d'autres objets 202

5.4 Estimation du conditionnement du potentiel de simple couche à basse fréquence pour des obstacles éloignés 209

5.4.1 Localisation par le théorème de Gershgorin-Hadamard et asymptotiques 209

5.4.2 Précision sur la localisation des valeurs propres de plus petit et de plus grand module 216

5.4.3 Une approche alternative par passage à la limite sur la matrice $\mathbb{L}$ . . 217

5.4.4 Lien avec l'approximation par éléments finis de frontière 226

5.5 Estimation du conditionnement de l'opérateur de simple couche à basse fréquence pour des obstacles proches 234

5.5.1 Approche par la matrice limite 234

5.5.2 Estimation de la plus petite valeur propre 242

5.5.3 Estimation de la plus grande valeur propre (en module) 246

5.5.4 Estimation du conditionnement 251

5.5.5 Lien avec l'approximation par éléments finis de frontière 251

5.6 Conclusion 261

5.1 Introduction

Nous proposons dans cette partie une étude des propriétés spectrales et du conditionnement de l'opérateur intégral de simple couche dans le cadre de la diffraction multiple à basse fréquence. Plusieurs études ont déjà été menées afin de mieux cerner le spectre des opérateurs intégraux dans le cadre de la diffraction simple en haute fréquence. A titre d'exemples, mentionnons le cas du disque [78, 79, 12, 13], le cas de différentes géométries convexes et non convexes [27, 37] ou encore le cas de surfaces ouvertes et de guidage [9, 10, 41].

La diffraction multiple pose de nouvelles difficultés dues à la présence d'interactions multiples entre obstacles. Mathématiquement, ceci se traduit par les paramètres de distance entre obstacles. Etudier le cas de la moyenne et haute fréquence est actuellement hors de portée et nécessite à notre avis une meilleure compréhension du cas de la basse fréquence, ce que nous nous proposons de faire ici. L'opérateur potentiel de simple couche (associé à l'EFIE, section 5.2) est considéré ici à titre d'exemple, mais les autres opérateurs classiques, soit la trace du double couche et les traces normales du simple et double couche pourraient également être considérées. Néanmoins, nous verrons que l'étude du simple couche est déjà non triviale et fastidieuse. En particulier, plusieurs régimes doivent être analysés en détail. Nous examinons ici plus particulièrement le cas d'un milieu dilué (distances entre obstacles grandes par rapport à la longueur d'onde (obstacles éloignés)) puis dense (distances entre obstacles petites par rapport à la longueur d'onde, obstacles proches). Le cas intermédiaire où les distances entre objets sont de l'ordre de la longueur d'onde n'est pas étudié ici et s'avère plus délicat.

Notre approche s'appuie dans un premier temps sur une étude détaillée du spectre et conditionnement de l'opérateur de simple couche pour la diffraction simple en régime de basse fréquence (section 5.3). Nous proposons de regarder le cas explicite de la diffraction par un disque où l'opérateur est alors diagonalisable dans la base de Fourier. Cela nous permet d'obtenir des expressions asymptotiques des valeurs propres de l'opérateur qui sont ensuite étendues au cas de l'approximation par éléments de frontière de manière formelle et à d'autres formes d'objets (ellipse et rectangle). Dans la section 5.2.2, nous donnons l'expression analytique de l'opérateur de simple couche dans le cas de la diffraction multiple. La section 5.4 est dédiée à des estimations spectrales de l'opérateur de simple couche dans le cas d'obstacles éloignés. Une première approche qui s'avère donner peu d'informations est basée sur le théorème de Gershgorin-Hadamard combiné à des asymptotiques. Nous proposons une approche alternative plus précise utilisant une asymptotique du simple couche et l'application de la méthode de la puissance itérée. Nous obtenons alors des estimations tout à fait satisfaisantes qui sont ensuite étendues et validées pour l'approximation par éléments de frontière et des géométries ellipsoidales et rectangulaires. La section 5.5 s'attaque à l'étude spectrale de l'opérateur de simple couche dans le cas d'obstacles proches. Bien que s'appuyant sur une approche par matrice limite comme précédemment, l'analyse et les résultats obtenus ici sont très différents du cas des obstacles éloignés. Nous étendons et validons ces résultats pour le passage aux éléments frontière et à d'autres obstacles.

5.2 L'équation intégrale en champ électrique (EFIE) et l'opérateur de simple couche

5.2.1 Formulation faible de l'EFIE

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, une équation intégrale pour résoudre le problème

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & \text{dans } \Omega^+, \\ u = -u^{\text{inc}} & \text{sur } \Gamma, \\ \lim\limits_{\|\mathbf{x}\| \to +\infty} \|\mathbf{x}\|^{1/2} \left(\nabla u \cdot \dfrac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - iku \right) = 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

est l'Equation Intégrale en Champ Electrique (Electric Field Integral Equation ou EFIE également), d'inconnue $\rho \in H^{-1/2}(\Gamma)$, et donnée par

$$L\rho = -u^{inc}|_\Gamma, \quad \text{dans } H^{1/2}(\Gamma). \tag{5.2}$$

Ici, nous avons

$$u = \mathscr{L}\rho, \quad \text{avec } \rho \in H^{1/2}(\Gamma). \tag{5.3}$$

Rappelons que, si $k \notin F_D(\Omega^-)$, alors le potentiel de simple couche $\mathscr{L}\rho$ est solution du problème de diffraction (5.1) si et seulement si ρ est solution de l'EFIE (5.2).

Pour des raisons liées à l'approximation numérique de l'équation intégrale, il est classique de considérer sa version variationnelle qui s'écrit dans $L^2(\Gamma)$

$$\begin{cases} \text{trouver } \rho \in H^{-1/2}(\Gamma) \text{ tel que} \\ \forall \Phi \in L^2(\Gamma), \ \ (L\rho, \Phi)_{L^2(\Gamma)} = -\left(u^{inc}|_\Gamma, \Phi\right)_{L^2(\Gamma)}. \end{cases} \tag{5.4}$$

Le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{L^2(\Gamma)}$ est défini par

$$\forall (f,g) \in L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma), \quad (f,g)_{L^2(\Gamma)} = \int_\Gamma f\bar{g} \, \mathrm{d}\Gamma. \tag{5.5}$$

Dans le cas de la diffraction multiple, nous avons $L^2(\Gamma) = L^2(\Gamma_1) \times ... \times L^2(\Gamma_M)$ et

$$(f,g)_{L^2(\Gamma)} = \sum_{p=1}^{M} \int_{\Gamma_p} f_p \bar{g}_p \, \mathrm{d}\Gamma_p, \tag{5.6}$$

avec $f = (f_1, ..., f_M)$ et $g = (g_1, ..., g_M)$ des fonctions de $L^2(\Gamma)$. Nous faisons l'hypothèse ici que $u^{inc}|_\Gamma$ et le bord Γ sont suffisamment réguliers pour que la densité ρ soit dans $L^2(\Gamma)$. On peut alors réécrire la formulation (5.4) sous la forme

$$\begin{cases} \text{trouver } \rho \in L^2(\Gamma) \text{ tel que} \\ \forall \Phi \in L^2(\Gamma), \ \ (L\rho, \Phi)_{L^2(\Gamma)} = -\left(u^{inc}|_\Gamma, \Phi\right)_{L^2(\Gamma)}. \end{cases} \tag{5.7}$$

5.2.2 Expression de l'opérateur de simple couche dans la base de Fourier pour la diffraction multiple par M disques

Nous supposons que l'obstacle Ω^- est l'union de M disques Ω_p^-, $p = 1, \ldots, M$, strictement disjoints deux à deux. La frontière circulaire Γ_p de l'obstacle Ω_p^- est un cercle de centre $\mathbf{O}_p$ et

de rayon a_p, la frontière de Ω^- étant toujours notée Γ. L'expression analytique de l'EFIE dans le cas de disques a été obtenue dans le chapitre précédent dont nous reprenons les notations. Rappelons que, pour $p = 1, \ldots, M$, tout point $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^2$ est repéré par ses coordonnées polaires liées à l'obstacle Ω_p^-

$$\mathbf{r}_p(\mathbf{x}) = \mathbf{O}_p\mathbf{x}, \qquad r_p(\mathbf{x}) = \|\mathbf{r}_p(\mathbf{x})\|, \qquad \theta_p(\mathbf{x}) = Angle(\overrightarrow{\mathbf{O}x_1}, \mathbf{O}_p\mathbf{x}).$$

Le centre $\mathbf{O}_p$ du disque Ω_p^- est repéré par rapport à l'origine $\mathbf{O}$

$$b_p = \mathbf{O}\mathbf{O}_p, \qquad b_p = \|b_p\|, \qquad \alpha_p = Angle(\overrightarrow{\mathbf{O}x_1}, b_p),$$

et par rapport à $\mathbf{O}_q$, pour $q = 1, \ldots, M$, $p \neq q$,

$$b_{pq} = \mathbf{O}_q\mathbf{O}_p, \qquad b_{pq} = \|b_{pq}\|, \qquad \alpha_{pq} = Angle(\overrightarrow{\mathbf{O}x_1}, b_{pq}).$$

Pour chaque disque Ω_p^-, $p = 1, \ldots, M$, nous introduisons la base de Fourier des fonctions $(\varphi_m^p)_{m\in\mathbb{Z}}$ définies par

$$\begin{array}{rccc} \varphi_m^p : & \Gamma_p & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \mathbf{x} & \longmapsto & \dfrac{e^{im\theta_p(\mathbf{x})}}{\sqrt{2\pi a_p}}. \end{array}$$

Chaque famille $(\varphi_m^p)_{m\in\mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de $L^2(\Gamma_p)$ pour le produit scalaire usuel. Nous prolongeons les fonctions φ_m^p sur Γ par les fonctions Φ_m^p telles que

$$\Phi_m^p = \begin{cases} \varphi_m^p & \text{sur } \Gamma_p, \\ 0 & \text{sur } \Gamma_q,\ \forall q \neq p. \end{cases} \tag{5.8}$$

Ainsi, la famille $\mathscr{B} = (\Phi_m^p)_{p=1,\ldots,M,m\in\mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de $L^2(\Gamma)$. Dans cette base, la formulation variationnelle (5.7) de l'EFIE s'écrit, par projection sur les fonctions de base,

$$(L\rho, \Phi_m^p)_{L^2(\Gamma)} = -\left(u^{inc}|_\Gamma, \Phi_m^p\right)_{L^2(\Gamma)}, \qquad \forall p = 1, \ldots, M, \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{5.9}$$

En décomposant ρ dans la base $\mathscr{B}$: $\rho = \sum_{q=1}^M \sum_{n\in\mathbb{Z}} \rho_n^q \Phi_n^q$, et en injectant cette expression dans la formulation variationnelle (5.9), il vient que

$$\sum_{q=1}^N \sum_{n\in\mathbb{Z}} \rho_n^q \left(\Phi_n^q, \Phi_m^p\right)_{L^2(\Gamma)} = -\left(u^{inc}|_\Gamma, \Phi_m^p\right)_{L^2(\Gamma)}, \qquad \forall p \in \{1, \ldots, M\}, \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Ces équations s'écrivent aussi sous la forme matricielle

$$\widetilde{\mathbb{L}}\widetilde{\boldsymbol{\rho}} = -\widetilde{\mathbf{U}}, \tag{5.10}$$

avec

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbb{L}}^{1,1} & \widetilde{\mathbb{L}}^{1,2} & \ldots & \widetilde{\mathbb{L}}^{1,M} \\ \widetilde{\mathbb{L}}^{2,1} & \widetilde{\mathbb{L}}^{2,2} & \ldots & \widetilde{\mathbb{L}}^{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{\mathbb{L}}^{M,1} & \widetilde{\mathbb{L}}^{M,2} & \ldots & \widetilde{\mathbb{L}}^{M,M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{\rho}}^1 \\ \widetilde{\boldsymbol{\rho}}^2 \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{\rho}}^M \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{U}}^1 \\ \widetilde{\mathbf{U}}^2 \\ \vdots \\ \widetilde{\mathbf{U}}^M \end{pmatrix},$$

où chaque bloc infini $\widetilde{\mathbb{L}}^{p,q}$, $1 \leq p, q \leq M$ de la matrice $\widetilde{\mathbb{L}}$ a pour coefficients

$$\widetilde{\mathbb{L}}_{m,n}^{p,q} = \left(L\Phi_n^q, \Phi_m^p\right)_{L^2(\Gamma)}, \qquad \forall m, n \in \mathbb{Z}. \tag{5.11}$$

Les coefficients (5.11) de l'opérateur intégral de simple couche, pour deux objets p et q, avec $p, q = 1, \ldots, M$, pour deux modes de Fourier $m, n \in \mathbb{Z}$, sont donnés par les expressions suivantes

$$\widetilde{\mathbb{L}}^{p,q}_{m,n} = \begin{cases} \dfrac{i\pi a_p}{2} J_m(ka_p) H^{(1)}_m(ka_p)\delta_{mn} & \text{si } p = q, \\ \dfrac{i\pi\sqrt{a_p a_q}}{2} J_m(ka_p) S_{nm}(b_{pq}) J_n(ka_q) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.12}$$

Le symbole δ_{mn} est le symbole de Kronecker, égale à 1 si $m = n$ et à 0 autrement, et la quantité $S_{nm}(b_{pq})$ est donnée par : $S_{nm}(b_{pq}) = H^{(1)}_{n-m}(kb_{pq})e^{i(n-m)\alpha_{pq}}$, pour $p, q = 1, \ldots, M, p \neq q$ et $m, n \in \mathbb{Z}$. Il est plus commode d'introduire une notation par bloc

$$\widetilde{\mathbb{L}}^{p,q} = \begin{cases} \dfrac{i\pi a_p}{2} \widetilde{\mathbb{J}}^p \widetilde{\mathbb{H}}^p & \text{si } p = q, \\ \dfrac{i\pi\sqrt{a_p a_q}}{2} \widetilde{\mathbb{J}}^p (\widetilde{\mathbb{S}}^{p,q})^T \widetilde{\mathbb{J}}^q & \text{sinon,} \end{cases}$$

où les matrices infinies $\widetilde{\mathbb{J}}^p$ et $\widetilde{\mathbb{H}}^p$ sont diagonales et de terme général respectif $J_m(ka_p)$ et $H^{(1)}_m(ka_p)$, et la matrice infinie $(\widetilde{\mathbb{S}}^{p,q})^T$ est la transposée de la matrice $(\widetilde{\mathbb{S}}^{p,q})$, de coefficients $\widetilde{\mathbb{S}}^{p,q}_{m,n} = S_{mn}(b_{pq})$.

Maintenant, nous considérons une projection en dimension finie. Pour cela, nous tronquons le système (5.10) en gardant, pour chaque série de Fourier $(\Phi^p_m)_{m\in\mathbb{Z}}$, $p = 1, \ldots, M$, $2N_p + 1$ modes tels que : $-N_p \leq m \leq N_p$. Le système tronqué résultant est noté $\mathbb{L}\boldsymbol{\rho} = -\mathbf{U}$, avec

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} \mathbb{L}^{1,1} & \mathbb{L}^{1,2} & \ldots & \mathbb{L}^{1,M} \\ \mathbb{L}^{2,1} & \mathbb{L}^{2,2} & \ldots & \mathbb{L}^{2,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{L}^{M,1} & \mathbb{L}^{M,2} & \ldots & \mathbb{L}^{M,M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho}^1 \\ \boldsymbol{\rho}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}^M \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{U}^1 \\ \mathbf{U}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{U}^M \end{pmatrix},$$

où chaque bloc $\mathbb{L}^{p,q}$, de taille $(2N_p + 1) \times (2N_q + 1)$, pour $p, q = 1, \ldots, M$, de la matrice $\mathbb{L}$ a pour coefficients (5.12) $\mathbb{L}^{p,q}_{m,n} = \widetilde{\mathbb{L}}^{p,q}_{m,n}$, pour $-N_p \leq m \leq N_p$ et $-N_q \leq q \leq N_q$. Chaque bloc peut être écrit matriciellement, pour $p, q = 1, \ldots, M$,

$$\mathbb{L}^{p,q} = \begin{cases} \dfrac{i\pi a_p}{2} \mathbb{J}^p \mathbb{H}^p & \text{si } p = q, \\ \dfrac{i\pi\sqrt{a_p a_q}}{2} \mathbb{J}^p (\mathbb{S}^{p,q})^T \mathbb{J}^q & \text{sinon,} \end{cases}$$

où les matrices diagonales $\mathbb{J}^p$ et $\mathbb{H}^p$ de taille $(2N_p + 1) \times (2N_p + 1)$ ont pour terme général respectif $J_m(ka_p)$ et $H^{(1)}_m(ka_p)$, et la matrice $(\mathbb{S}^{p,q})^T$ de taille $(2N_p + 1) \times (2N_q + 1)$ est la transposée de la matrice $(\mathbb{S}^{p,q})$, de coefficients $\mathbb{S}^{p,q}_{m,n} = S_{mn}(b_{pq})$.

5.3 Informations spectrales sur le potentiel de simple couche pour la diffraction simple à basse fréquence

Dans la suite, nous supposons que $k \notin F_D(\Omega^-)$ pour que l'EFIE soit bien posée. Le but de cette section consiste à obtenir des informations spectrales (valeurs propres, conditionnement) sur l'opérateur de simple couche pour la diffraction multiple. Avant de nous attaquer à cette situation, commençons par étudier plus en détail le cas de la diffraction simple. Pour

cela, nous nous plaçons dans le cadre de la basse fréquence en choisissant d'étudier le cas du disque. En effet, pour de tels obstacles, la formulation variationnelle (5.7) peut être approchée par un système linéaire de dimension finie dont tous les coefficients sont explicites. Par un développement asymptotique, nous obtenons ensuite des estimations des valeurs propres de l'opérateur de simple couche pour des obstacles circulaires. Nous concluons cette première étude en proposant des règles formelles d'extension à d'autres objets, pour l'approximation par éléments finis de frontière. Cette étude en basse fréquence peut être vue comme un premier pas lorsque l'on veut ensuite essayer de monter en fréquence, la situation étant alors encore plus complexe.

5.3.1 Le cas du disque

Diagonalisation dans la base de Fourier

Nous supposons ici que le domaine Ω^- est un unique disque de frontière Γ, de rayon a et centré à l'origine $\mathbf{O}$. Dans ce cas, la matrice infinie $\widetilde{\mathbb{L}}$ est diagonale. De plus, d'après la relation (5.12), ses coefficients, notés $\widetilde{\mathbb{L}}_{mn}$, sont donnés par

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \qquad \widetilde{\mathbb{L}}_{mn} = \delta_{mn} \frac{i\pi a}{2} J_m(ka) H_m^{(1)}(ka). \tag{5.13}$$

En dimension finie, nous conservons $2N+1$ modes tels que les indices m vérifient $-N \leq m \leq N$. Nous notons $\mathbb{L} = (\mathbb{L}_{mn})_{-N \leq m,n \leq N}$ la matrice diagonale de taille $(2N+1) \times (2N+1)$ approchant l'opérateur de simple couche, telle que

$$\forall -N \leq m, n \leq N, \qquad \mathbb{L}_{mn} = \widetilde{\mathbb{L}}_{mn} = \delta_{mn} \frac{i\pi a}{2} J_m(ka) H_m^{(1)}(ka).$$

Remarque 5.1. *Dans le cas particulier de la diffraction par un disque, l'opérateur de simple couche est diagonal d'éléments diagonaux : $\mu_m = \widetilde{\mathbb{L}}_{mm}$. De plus, l'opérateur L est non inversible dès qu'une des valeurs propres μ_m est nulle, soit, $J_m(ka) = 0$, pour une certaine valeur de m pour ka fixé (rappelons que $H_m^{(1)}(x) \neq 0$ pour tout $x > 0$). Ceci est exclu ici puisque nous avons supposé que $k \notin F_D(\Omega^-) = \{k / \exists m \in \mathbb{N} / J_m(ka) = 0\}$.*

Etude spectrale et conditionnement à basse fréquence

La matrice $\mathbb{L}$ étant diagonale, ses valeurs propres, notées μ_m, $m = -N, \ldots, N$, sont directement obtenues par les termes diagonaux

$$\mu_m = \mathbb{L}_{mm} = \frac{i\pi a}{2} J_m(ka) H_m^{(1)}(ka), \qquad m = -N, \ldots, N. \tag{5.14}$$

Autrement dit, nous disposons de l'expression explicite de chaque valeur propre de l'opérateur de simple couche L. Nous proposons maintenant une étude détaillée du spectre de l'opérateur L lorsque ka tend vers 0, c'est-à-dire à basse fréquence. Commençons par remarquer que, d'après [1, (9.1.5)], nous avons

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \forall x \neq 0, \qquad H_{-m}^{(1)}(x) = (-1)^m H_m^{(1)}(x), \qquad J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x). \tag{5.15}$$

Ces propriétés impliquent que les valeurs propres μ_m de $\mathbb{L}$ sont doubles

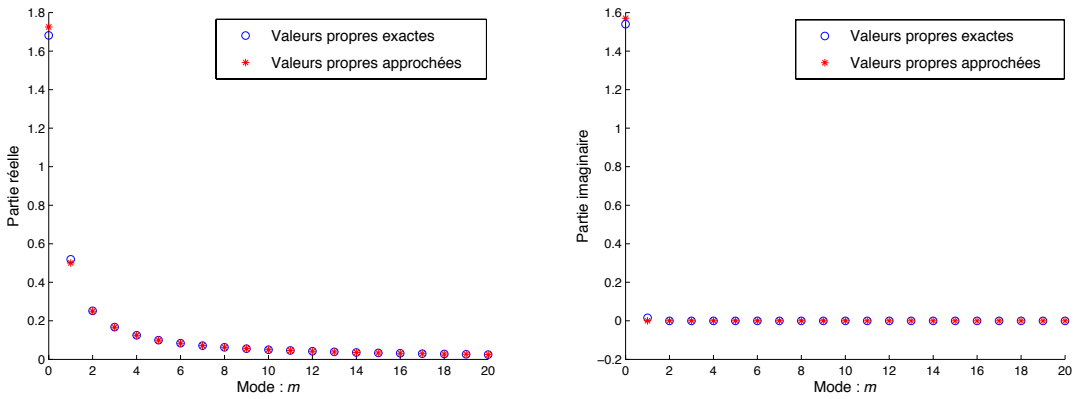
$$\mu_m = \mu_{-m}, \qquad m = -N, \ldots, N, \quad m \neq 0,$$

la valeur propre μ_0 étant simple.

Les valeurs propres sont connues explicitement. Toutefois, elles sont données en termes de fonctions spéciales, ce qui ne rend pas aisée l'explicitation de la dépendance en termes de nombre d'onde adimensionné ka et paramètre de troncature N. Afin d'obtenir des expressions plus simples à interpréter, nous allons considérer des développements des valeurs propres à basse fréquence. Remarquons que l'analyse à moyenne et haute fréquence est possible [12, 13]. Toutefois, son extension au cas de la diffraction multiple haute fréquence est plus compliquée. Pour cette raison, nous avons choisi de nous restreindre ici à la basse fréquence. Considérons donc que $ka \to 0$. Dans ce cas particulier, les développements asymptotiques des fonctions J_m et $H_m^{(1)}$ donnent (voir relations (9.1.12) et (9.1.13) de [1])

$$\mu_m \simeq \begin{cases} -a\left[\ln\left(\dfrac{ka}{2}\right)+\gamma\right]+i\dfrac{\pi a}{2}+O\left((ka)^2\ln(ka)\right) & \text{pour } m=0, \\ \dfrac{a}{2|m|}+O\left((ka)^2\right) & \text{pour } m\neq 0, \end{cases} \tag{5.16}$$

où $\gamma = 0.577215665...$ est la constante d'Euler. Afin d'illustrer et valider ce choix d'approximation, nous représentons sur la figure 5.2 les parties réelles et imaginaires des valeurs propres exactes (5.14) et approchées (5.16) en tronquant l'approximation à $N = 20$, pour un nombre d'onde adimensionné $ka = 0.2$ ($a = 1$ ici). Nous voyons que, effectivement, l'approximation donne des valeurs très proches de celles souhaitées. De plus, on remarque que seule la première valeur propre pour le mode $m = 0$ possède une partie imaginaire non nulle. Cela se traduit physiquement par le fait que le mode d'ordre zéro est le seul mode propagatif à basse fréquence. Ceci bien sûr devient faux pour des valeurs de ka suffisamment grandes. D'autre part, lorsque ka augmente, les approximations considérées introduisent des erreurs assez importantes. Par ailleurs, nous constatons que les valeurs propres de la matrice $\mathbb{L}$ tendent vers zéro lorsque m devient grand. Ces valeurs propres, qui correspondent à des modes évanescents, ont comme limite zéro car l'opérateur L est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre -1, donnant lieu alors à des valeurs propres tendant vers zéro pour des fréquences spatiales grandes.



(a) Parties réelles (b) Parties imaginaires

FIGURE 5.1 – Comparaison entre les valeurs propres exactes (5.14) et approchées (5.16) de L, pour $ka = 0.2$ et $N = 20$ modes (positifs).

Intéressons nous maintenant au conditionnement cond($\mathbb{L}$) de la matrice $\mathbb{L}$ défini par

$$\mathrm{cond}(\mathbb{L}) = \|\mathbb{L}\| \, \|\mathbb{L}^{-1}\|,$$

pour une norme matricielle $\|\cdot\|$ associée à une norme vectorielle $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{C}^{2N+1}$, c'est-à-dire

$$\|\mathbb{L}\| = \sup_{\mathbf{X}\in\mathbb{C}^{2N+1}\setminus\{0\}} \frac{\|\mathbb{L}\mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|}.$$

Nous proposons ici d'analyser le conditionnement en norme euclidienne $\|\cdot\|_2$, soit

$$\|\mathbf{X}\|_2 = \sqrt{\sum_{m=-N}^{N} |X_m|^2},$$

pour tout vecteur $\mathbf{X} = (X_{-N}, \ldots, X_N)^T$ de $\mathbb{C}^{2N+1}$. Dans ce cas, nous avons

$$\mathrm{cond}_2(\mathbb{L}) = \|\mathbb{L}\|_2 \|\mathbb{L}^{-1}\|_2.$$

Comme la matrice $\mathbb{L}$ est diagonale, elle est normale, d'où

$$\mathrm{cond}_2(\mathbb{L}) = \frac{\mu_{max}}{\mu_{min}},$$

où $\mu_{max} = \max_{0\le m\le N} |\mu_m|$ et $\mu_{min} = \min_{0\le m\le N} |\mu_m|$. Au vu de l'analyse asymptotique basse fréquence précédente (5.16), la valeur propre de module maximal est donnée pour $m = 0$ (mode propagatif) et celle de module minimal correspond à $m = N$ (mode évanescent). Finalement, une approximation basse fréquence ($ka \ll 1$) du conditionnement est donnée par

$$\mathrm{cond}_2(\mathbb{L}) \simeq \left\{ a^2 \left[\ln\left(\frac{ka}{2}\right) + \gamma \right]^2 + \left(\frac{\pi a}{2}\right)^2 \right\}^{1/2} \frac{2N}{a}, \tag{5.17}$$

dans le cas de la diffraction simple par un disque de rayon a pour une troncature à $(2N+1)$ modes de Fourier.

5.3.2 Liens avec l'approximation par éléments finis de frontière et extensions formelles à d'autres objets

Approximation par éléments finis de frontière

Introduisons maintenant l'approximation par éléments finis de frontière du problème variationnel (5.7). Rappelons que nous supposons le bord Γ et l'onde incidence u^{inc} suffisamment réguliers pour que la densité ρ soit une fonction de $L^2(\Gamma)$. Soit Γ_h une approximation polygonale de la courbe Γ à l'aide de N_h segments K_j, $1 \le j \le N_h$. Nous avons alors : $\Gamma_h = \cup_{j=1}^{N_h} K_j$. Nous désignons par h_j la longueur du segment K_j et par h le maximum de ces longueurs : $h = \max_{1\le j\le N_h} h_j$. Nous choisissons comme sous-espace d'approximation éléments finis l'espace V_h de $L^2(\Gamma_h)$ des fonctions continues sur Γ_h affines par morceaux

$$V_h := \left\{ \rho_h \in \mathcal{C}^0(\Gamma_h) / \rho_h|_{K_j} \in \mathbb{P}_1, 1 \le j \le N_h \right\}. \tag{5.18}$$

Dans ce cadre, la formulation variationnelle exacte (5.7) est approchée par celle discrète

$$\begin{cases} \text{trouver } \rho_h \in V_h \text{ tel que} \\ \forall \Phi_h \in V_h, \ \ (L_h\rho_h, \Phi_h)_{L^2(\Gamma_h)} = -\left(u^{inc}|_{\Gamma_h}, \Phi_h\right)_{L^2(\Gamma_h)}. \end{cases} \tag{5.19}$$

Après approximation des doubles intégrales liées au potentiel de simple couche par des formules de quadrature semi-numérique, nous sommes amené à résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} \text{trouver } \boldsymbol{\rho}_h \in \mathbb{C}^{N_h} \text{ tel que} \\ [L_h]\,\boldsymbol{\rho}_h = -[M_h]\mathbf{u}^{\text{inc}}, \end{cases} \tag{5.20}$$

où $[L_h] \in \mathcal{M}_{N_h,N_h}(\mathbb{C})$ est la matrice du potentiel de simple couche et $[M_h] \in \mathcal{M}_{N_h,N_h}(\mathbb{C})$ la matrice de masse pour les éléments finis linéaires, $\boldsymbol{\rho}_h \in \mathbb{C}^{N_h}$ est le vecteur nodal densité et $\mathbf{u}^{\text{inc}}$ est le vecteur nodal incident.

Le disque

Nous relions maintenant la méthode spectrale décrite plus haut avec la méthode d'éléments finis de frontière. Supposons que le maillage du disque soit uniforme, de pas h. Le nombre de degrés de liberté N_E utilisés en éléments finis de frontière est alors

$$N_E = N_h \simeq \frac{2\pi a}{h}.$$

En comparaison, la méthode spectrale nécessite $2N+1$ modes. Notons μ^h_{min} et μ^h_{max} respectivement les valeurs propres de plus petit et de plus grand module de la matrice $[M_h]^{-1}\,[L_h]$. En remplaçant formellement N par $\pi a h^{-1} - 1/2$ dans l'estimation de μ_{min} et μ_{max}, nous avons

$$\begin{aligned} \mu_{min}(a,h) &= \frac{a}{2\pi a h^{-1} - 1}, \\ \mu_{max}(k,a) &= \sqrt{a^2\left[\ln\left(\frac{ka}{2}\right) + \gamma\right]^2 + \left(\frac{\pi a}{2}\right)^2}. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Nous obtenons ensuite l'estimation du conditionnement spectral (5.17) suivante

$$\text{cond}(k,a,\Gamma_h) := \text{cond}_2([M_h]^{-1}\,[L_h]) \simeq \text{cond}_{app}(k,a,h), \tag{5.22}$$

avec

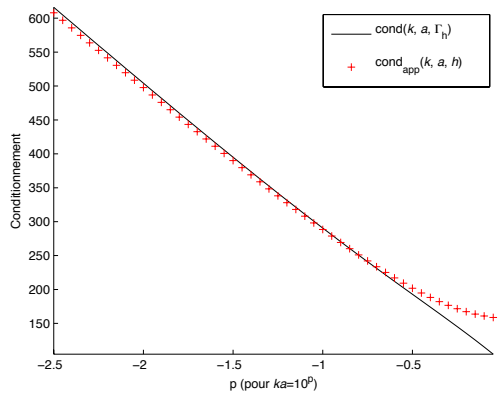
$$\text{cond}_{app}(k,a,h) = \left\{a^2\left[\ln\left(\frac{ka}{2}\right) + \gamma\right]^2 + \left(\frac{\pi a}{2}\right)^2\right\}^{1/2} \frac{2\pi a h^{-1} - 1}{a}, \tag{5.23}$$

lorsque ka tend vers zéro.

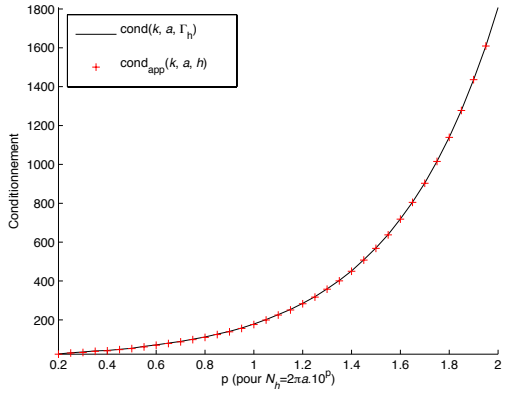
Afin de valider l'approximation (5.22), nous considérons la suite de tests numériques suivante. Soit un disque de rayon $a = 1$. Nous comparons (Figures 5.2(a) et 5.2(b)) les conditionnements numériques $\text{cond}(k,a,\Gamma_h)$ du potentiel de simple couche et son estimation $\text{cond}_a(k,a,h)$ pour un maillage uniforme. Dans le premier cas, nous faisons varier ka (petit) pour un nombre de points égal à $N_h = 100$. Dans le second cas, c'est le nombre de points N_h qui varie pour $ka = 0.1$. Dans les deux situations, nous voyons que notre estimation donne une approximation très précise de la valeur cherchée. De plus, il est clair que lorsque ka devient suffisamment grand, l'estimation devient incorrecte puisque l'approximation basse fréquence n'est plus valide. Nous considérons maintenant un maillage non uniforme sur les Figures 5.2(c) et 5.2(d). Pour cela, nous générons une suite de segments $K_j = [\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j]$, $1 \le j \le N_h$, avec

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{j-1} &= a(\cos(\theta_{j-1}), \sin(\theta_{j-1})), \\ \theta_{j-1} &= \frac{2\pi}{N_h}\left(j - 1 + \frac{10\,\varepsilon_{j-1}}{N_h}\right), \end{aligned} \tag{5.24}$$

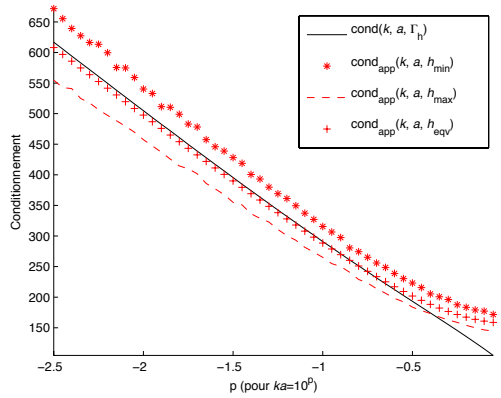
où ε_{j-1} est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0;1]$ et $\mathbf{x}_{N_h} = \mathbf{x}_0$. Le calcul de $\mathrm{cond}(k, a, \Gamma_h)$ est encore effectué de manière numérique puis approchée *via* la formule (5.23). Dans ce dernier cas, le choix du paramètre h est plus délicat. En effet, si l'on considère la dépendance du conditionnement $\mathrm{cond}(k, a, \Gamma_h)$ du simple couche vis-à-vis de la géométrie Γ_h, cette dépendance est *a priori* globale et affecte $\mu_{min}(a, h)$. Dans le cas d'une discrétisation non uniforme, il est possible de considérer une estimation de $\mu_{min}(a, \cdot)$ qui n'est que locale en prenant $\mathrm{cond}_{app}(k, a, h_{min})$ ou $\mathrm{cond}_{app}(k, a, h_{max})$, avec $h_{min} = \min_{1\leq j\leq N_h} h_j$ et $h_{max} = \max_{1\leq j\leq N_h} h_j$, ou alors globale en prenant $\mathrm{cond}_{app}(k, a, h_{\mathrm{eqv}})$, avec $h_{\mathrm{eqv}} = N_h^{-1} \sum_{j=1}^{N_h} h_j$. Ce dernier choix correspond à un calcul du conditionnement estimé pour une discrétisation équivalente uniforme basée sur un pas moyen h_{eqv}. Dans le cas d'une discrétisation uniforme, les définitions coïncident. On voit finalement que le choix de h_{eqv} conduit à l'estimation la plus précise.



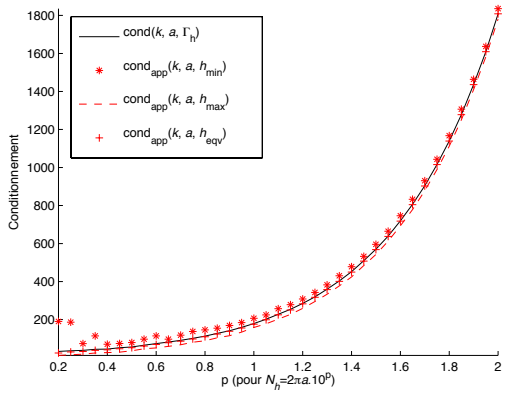
(a) Conditionnements en fonction de ka, $N_h = 100$ (discrétisation uniforme)



(b) Conditionnements en fonction de N_h, $ka = 0.1$ (discrétisation uniforme)



(c) Conditionnements en fonction de ka, $N_h = 100$ (discrétisation non uniforme)



(d) Conditionnements en fonction de N_h, $ka = 0.1$ (discrétisation non uniforme)

FIGURE 5.2 – Validation des formules d'approximation du conditionnement de l'opérateur de simple couche dans le cas du disque (maillages uniformes et non uniformes).

Estimations pour d'autres géométries

Nous considérons maintenant le cas de deux autres géométries

a) une ellipse de demi grand axe a_{x_1} le long de l'axe $\overrightarrow{\mathbf{O}x_1}$ et de demi petit axe a_{x_2} le long de l'axe $\overrightarrow{\mathbf{O}x_2}$,

b) un rectangle de longueur de côtés $2a_{x_1}$ et $2a_{x_2}$ le long des axes $\overrightarrow{\mathbf{O}x_1}$ et $\overrightarrow{\mathbf{O}x_2}$.

Les deux objets sont centrés à l'origine.

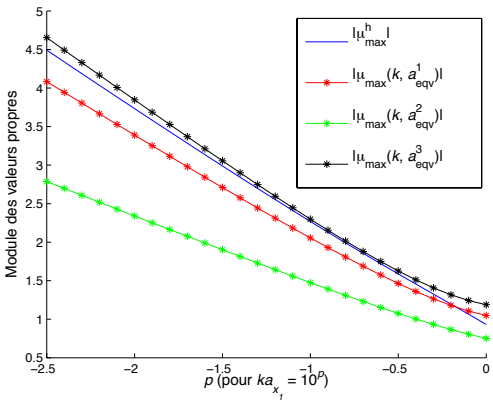
Considérons le premier cas. Rappelons que, dans le cas du disque et pour la méthode d'éléments finis $\mathbb{P}_1$, les plus petite et plus grande valeurs propres en module sont estimées respectivement par

$$\mu_{min}(a,h) = \frac{a}{2\pi a h^{-1} - 1}, \qquad \mu_{max}(k,a) = \sqrt{a^2\left[\ln\left(\frac{ka}{2}\right) + \gamma\right]^2 + \frac{\pi^2 a^2}{4}}.$$

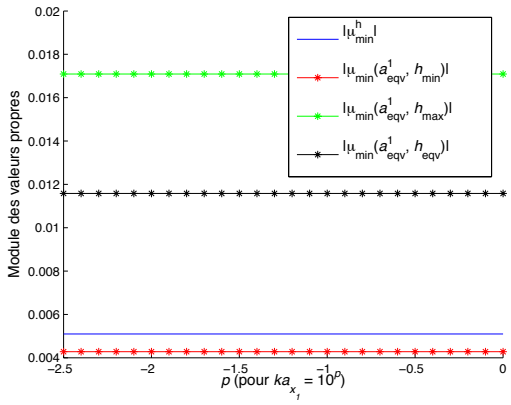
Deux questions se posent alors : comment prendre en compte un rayon équivalent, noté a_{eqv}, pour une ellipse, et, puisque le maillage n'est pas uniforme, quel pas h équivalent choisir. Dans le cas de l'ellipse, nous proposons pour l'approximation de la plus grande valeur propre, trois approximations

$$\begin{aligned} a^1_{\text{eqv}} &= \frac{a_{x_1} + a_{x_2}}{2}, \\ a^2_{\text{eqv}} &= \frac{2a_{x_1}a_{x_2}}{a_{x_1} + a_{x_2}}, \\ a^3_{\text{eqv}} &= \frac{\sqrt{a^2_{x_1} + a^2_{x_2}}}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{5.25}$$

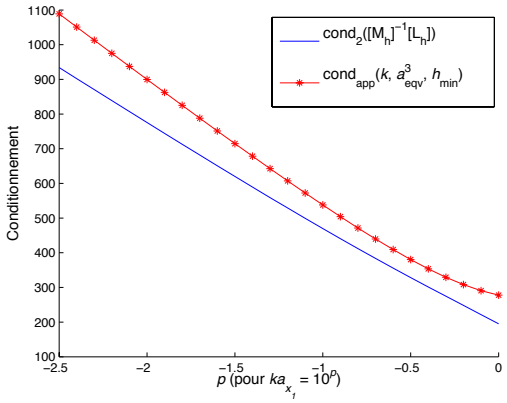
La première approximation consiste à prendre un disque de rayon moyen en fonction des deux rayons a_{x_1} et a_{x_2} et la seconde le disque de courbure moyenne en fonction des courbures $1/a_{x_1}$ et $1/a_{x_2}$. Le troisième choix propose de prendre le point $(a_{x_1}, a_{x_2})/\sqrt{2}$ de l'ellipse, puis de choisir le rayon du disque centré à l'origine et passant par ce point. Par ailleurs, concernant la discrétisation, nous proposons les trois possibilités liées à h_{min}, h_{max} et h_{eqv}, ceci pour chacune des valeurs a^j_{eqv}, $j = 1, 2, 3$. Fixons la situation suivante : $a_{x_1} = 1$, $a_{x_2} = 0.25$ et $N_h = 60$. Nous représentons sur les Figures 5.3(a), 5.3(b) et 5.3(c) respectivement les plus grandes et plus petites valeurs propres ainsi que le conditionnement en fonction du nombre d'onde k. Nous voyons que l'approximation de la plus grande valeur propre est correctement réalisée grâce à la troisième approximation donnée par a^3_{eqv}. Par ailleurs, la plus petite valeur propre est très peu sensible à ce choix comme on pouvait s'y attendre. Il s'avère par contre que le choix du pas équivalent est prépondérant, avec notamment une meilleure approximation basée sur h_{min}. Ceci est confirmé en pratique sur tous les cas traités. Nous voyons que ces estimations donnent alors une approximation satisfaisante du conditionnement. Nous proposons également, sur la figure 5.4, une comparaison des différentes estimations en fonction du rapport entre les demi-axes de l'ellipse. Plus précisément, fixons N_h à 60, le nombre d'onde k à 0.2 ainsi que le demi-axe a_{x_1} à 1. Nous faisons ensuite varier le demi-axe a_{x_2} entre 0.05 et 1. Nous constatons encore une fois que l'utilisation du rayon équivalent a^3_{eqv} conduit à la meilleure estimation de la valeur propre de plus grand module. De même, l'estimation la plus précise de μ^h_{min} s'obtient avec le pas équivalent h_{min}. Il apparaît qu'en présence d'une unique ellipse, le rayon équivalent a^3_{eqv} associé au pas équivalent h_{min} conduit à une estima-



(a) Ellipse ($a_{x_1} = 1$ et $a_{x_2} = 0.25$) : Plus grandes valeurs propres numérique et estimées en fonction de ka_{x_1}, $N_h = 60$.



(b) Plus petites valeurs propres numérique et estimées en fonction de ka_{x_1}, $N_h = 60$.



(c) Ellipse ($a_{x_1} = 1$ et $a_{x_2} = 0.25$) : Conditionnements numérique et estimé en fonction de ka_{x_1}, $N_h = 60$.

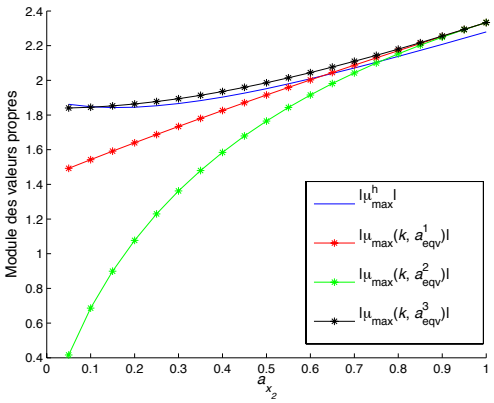
FIGURE 5.3 – Validation des formules d'approximation du conditionnement du potentiel de simple couche dans le cas de l'ellipse (maillage non uniforme).

tion relativement précise des valeurs propres de plus petit et de plus grand modules, ainsi que, par conséquent, du conditionnement de la matrice $[M_h]^{-1}[L_h]$.

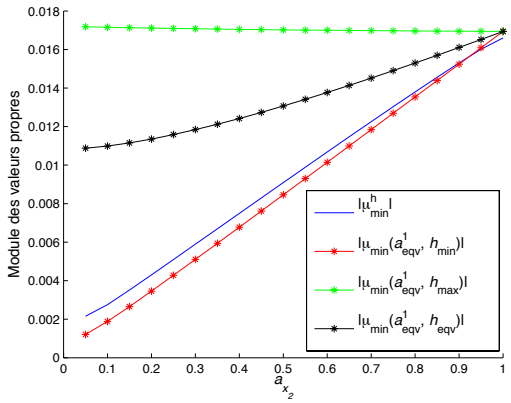
Dans le cas du rectangle de demi longueurs de côtés a_{x_1} et a_{x_2}, nous considérons l'approximation suivante

$$a^4_{\text{eqv}} = \frac{(1+\sqrt{2})}{2}\frac{\sqrt{a^2_{x_1}+a^2_{x_2}}}{\sqrt{2}}. \tag{5.26}$$

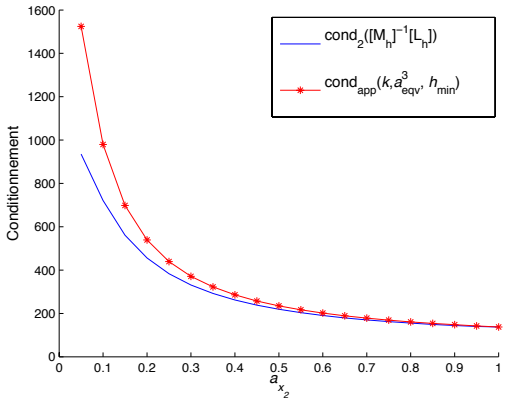
Pour obtenir cette approximation, nous considérons l'ellipse de demi-axes a_{x_1} et a_{x_2} et celle de demi-axes $\sqrt{2}a_{x_2}$ et $\sqrt{2}a_{x_2}$ le long des abscisses et ordonnées respectivement. En particulier, les coins du rectangle appartiennent à cette dernière ellipse alors que les milieux des côtés sont sur la première. Puis, nous prenons l'ellipse dont les demi-axes sont les moyennes de ces deux ellipses, soit $(1+\sqrt{2})a_{x_1}/2$ et $(1+\sqrt{2})a_{x_2}/2$. Enfin, le disque de rayon équivalent donné par a^3_{eqv} mais pour l'ellipse équivalente précédente est considéré. Cela conduit alors



(a) Ellipse ($a_{x_1} = 1$ et $k = 0.2$) : plus grandes valeurs propres numérique et estimées en fonction du demi-axe a_{x_2}, avec $N_h = 60$.



(b) Ellipse ($a_{x_1} = 1$ et $k = 0.2$) : plus petites valeurs propres numérique et estimées en fonction du demi-axe a_{x_2}, avec $N_h = 60$.

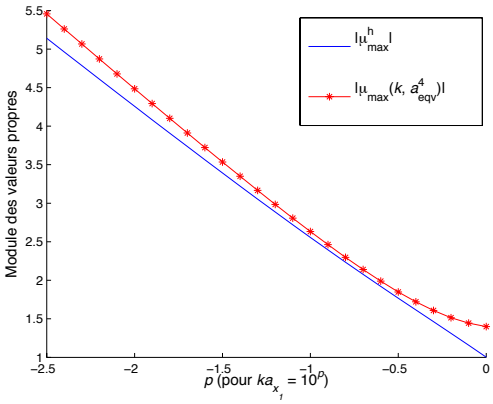


(c) Ellipse ($a_{x_1} = 1$ et $k = 0.2$) : conditionnements numérique et estimé en fonction du demi-axe a_{x_2}, avec $N_h = 60$.

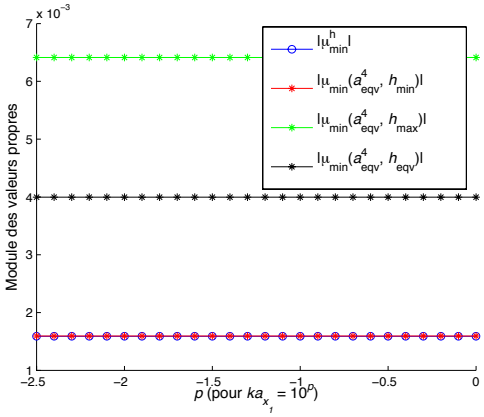
FIGURE 5.4 – Validation des formules d'approximation du conditionnement du potentiel de simple couche dans le cas de l'ellipse (maillage non uniforme). Un nombre $N_h = 60$ points est utilisé pour discrétiser l'ellipse. Sur les trois figures, le nombre d'onde k est égal à 0.2, le demi-axe a_{x_1} est fixé à 1 tandis que le deuxième demi-axe a_{x_2} varie entre 0.05 et 1.

à la formule (5.26). Nous testons sur les figures 5.5(a) à 5.5(c) l'approximation des plus grandes et petites valeurs propres approchées ainsi que le conditionnement correspondant. Le cas étudié est celui du rectangle centré à l'origine avec $a_{x_1} = 1$ et $a_{x_2} = 0.25$. Nous discrétisons chacun des quatre côtés avec 50 points, ce qui fait un total de $N_h = 200$ points. Comme on peut le voir, l'approximation basée sur a^4_{eqv} est très satisfaisante et le choix du paramètre minimal de pas donne une courbe exacte.

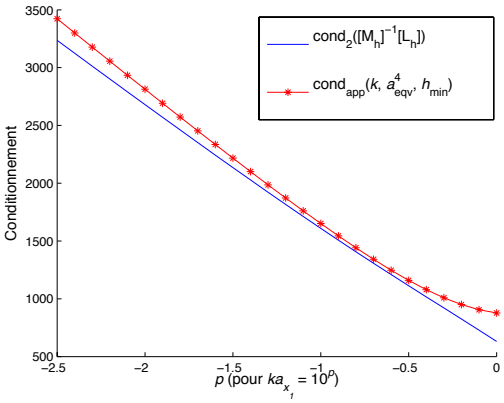
En conclusion, cette première étude permet d'obtenir des estimations analytiques des valeurs propres minimales et maximales ainsi que du conditionnement de l'opérateur de simple couche à basse fréquence dans le cas de trois objets : le disque, l'ellipse et le rectangle.



(a) Plus grandes valeurs propres numérique et estimée.



(b) Plus petites valeurs propres numérique et estimées.



(c) Conditionnements numérique et estimé.

FIGURE 5.5 – Validation des formules d'approximation des valeurs propres μ^h_{min} et μ^h_{max} et du conditionnement du potentiel de simple couche dans le cas du rectangle de demi longueurs $a_{x_1} = 1$ et $a_{x_2} = 0.25$, en fonction de ka_{x_1}. Le maillage est constitué de $N_h = 200$ segments, soit 50 par arrête.

5.4 Estimation du conditionnement du potentiel de simple couche à basse fréquence pour des obstacles éloignés

Contrairement au cas de la diffraction simple, nous n'avons pas accès ici directement aux valeurs propres de la matrice $\mathbb{L}$, et notamment à son conditionnement, puisque celle-ci n'est plus diagonale. Nous nous plaçons toujours en régime de basse fréquence, soit $ka \to 0$, avec

$$a = \max_{p=1,\dots,M} a_p$$

le plus grand rayon des M obstacles circulaires. La diffraction multiple fait apparaître des paramètres supplémentaires par rapport à la diffraction simple, essentiellement kb_{pq}, où b_{pq} est la distance entre les centres des obstacles Ω_p^- et Ω_q^-. Nous proposons d'analyser l'effet de ce paramètre sur le spectre de la matrice intégrale en fonction de son asymptotique. Nous obtiendrons des résultats partiels pour certains régimes, le cas général demeurant trop complexe. Dans notre étude, nous distinguons essentiellement deux situations : le cas d'obstacles éloignés (section 5.4) et le cas d'obstacles proches (section 5.5). La situation intermédiaire, plus complexe d'après nos premières études, n'est pas traitée ici.

5.4.1 Localisation par le théorème de Gershgorin-Hadamard et asymptotiques

Dans cette section, nous supposons les obstacles éloignés, c'est à dire $kb \to +\infty$, où

$$b = \min_{p,q=1,\dots,M, p\neq q} b_{pq}$$

est la plus petite distance inter-centres du groupe d'obstacles. Dans ce régime particulier, on peut espérer que les effets de la diffraction multiple soient faibles et que le système couplé se comporte comme celui de la diffraction simple. Pour localiser le spectre de $\mathbb{L}$, nous utilisons une approche par les disques de Gershgorin directement sur la matrice tronquée de l'opérateur. Nous commençons par rappeler le premier théorème de Gershgorin-Hadamard [97] appliqué à la matrice $\mathbb{L}$. Par ailleurs, pour alléger les notations, nous introduisons l'ensemble I de tous les couples d'indices (p, m) :

$$I = \{(p,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \text{ tels que } 1 \leq p \leq M \text{ et } -N_p \leq m \leq N_p\}.$$

Théorème 5.2 (Théorème des disques de Gershgorin)**.** *Pour $(p, m) \in I$, nous introduisons les disques de Gershgorin lignes*

$$\mathscr{R}_m^p = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \mathbb{L}_{m,m}^{p,p}| \leq R_m^p \right\}, \tag{5.27}$$

et les disques colonnes

$$\mathscr{C}_m^p = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \mathbb{L}_{m,m}^{p,p}| \leq C_m^p \right\}, \tag{5.28}$$

où les rayons R_m^p et C_m^p sont donnés par

$$R_m^p = \sum_{\substack{1\leq q\leq M \\ q\neq p}} \sum_{n=-N_q}^{N_q} \left| \mathbb{L}_{m,n}^{p,q} \right|, \qquad C_m^p = \sum_{\substack{1\leq q\leq M \\ q\neq p}} \sum_{n=-N_q}^{N_q} \left| \mathbb{L}_{n,m}^{q,p} \right|. \tag{5.29}$$

Alors, le spectre $\sigma(\mathbb{L})$ de $\mathbb{L}$ vérifie

$$\sigma(\mathbb{L}) \subseteq \left(\mathscr{S}_R \bigcap \mathscr{S}_C\right),$$

où

$$\mathscr{S}_R = \bigcup_{p=1}^{M} \bigcup_{m=-N_p}^{N_p} \mathscr{R}_m^p \qquad \text{et} \qquad \mathscr{S}_C = \bigcup_{p=1}^{M} \bigcup_{m=-N_p}^{N_p} \mathscr{C}_m^p,$$

sont l'union des disques lignes et colonnes.

Un second théorème permet de raffiner la localisation des valeurs propres [97].

Théorème 5.3. *Soient I_1 un sous-ensemble de I et $I_2 = I \setminus I_1$ son complémentaire. Soient de plus S_1 et S_2 l'union des disques de Gershgorin associés à ces ensembles*

$$S_1 = \bigcup_{(p,m)\in I_1} \mathscr{R}_m^p, \qquad S_2 = \bigcup_{(p,m)\in I_2} \mathscr{R}_m^p.$$

Si $S_1 \bigcap S_2 = \emptyset$, alors S_1 contient exactement card(I_1) valeurs propres de $\mathbb{L}$, chacune étant comptée avec sa multiplicité algébrique, les autres valeurs propres étant dans S_2.

Commençons par établir les principales propriétés des disques de Gershgorin de la matrice $\mathbb{L}$ à travers la proposition suivante.

Proposition 5.4. *Pour $(p,m) \in I$, les disques de Gershgorin de la matrice $\mathbb{L}$ vérifient*

i) Les rayons des disques lignes et colonnes sont égaux

$$\mathscr{R}_m^p = \mathscr{C}_m^p.$$

ii) Pour $m \neq 0$, les disques sont doubles

$$\mathscr{R}_m^p = \mathscr{R}_{-m}^p, \qquad \mathscr{C}_m^p = \mathscr{C}_{-m}^p.$$

Démonstration. Pour $(p,m) \in I$ et $(q,n) \in I$ avec $p \neq q$, le module du coefficient $\mathbb{L}_{m,n}^{p,q}$ s'écrit

$$\left|\mathbb{L}_{m,n}^{p,q}\right| = \frac{\pi\sqrt{a_p a_q}}{2} \left|J_m(ka_p)\right| \left|H_{n-m}(kb_{pq})\right| \left|J_n(ka_q)\right|.$$

Rappelons la relation vérifiée par les fonctions de Bessel et de Hankel [1, 9.1.5 et 9.1.6], pour tout $\nu \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x), \qquad H_{-\nu}^{(1)}(x) = (-1)^\nu H_\nu^{(1)}(x). \tag{5.30}$$

Nous obtenons alors la relation

$$\left|\mathbb{L}_{m,n}^{p,q}\right| = \frac{\pi\sqrt{a_p a_q}}{2} \left|J_{|m|}(ka_p)\right| \left|H_{|n-m|}^{(1)}(kb_{pq})\right| \left|J_{|n|}(ka_q)\right|,$$

et en particulier, l'invariance par les opérations $(p,q,m,n) \longmapsto (q,p,n,m)$ et $(m,n) \longmapsto (-m,-n)$

$$\left|\mathbb{L}_{m,n}^{p,q}\right| = \left|\mathbb{L}_{-m,-n}^{p,q}\right| = \left|\mathbb{L}_{n,m}^{q,p}\right| = \left|\mathbb{L}_{-n,-m}^{q,p}\right|. \tag{5.31}$$

De même, pour les coefficients diagonaux $\mathbb{L}^{p,p}_{m,m}$ (5.12), qui sont les centres des disques de Gershgorin, nous avons l'égalité suivante

$$\mathbb{L}^{p,p}_{m,m} = \mathbb{L}^{p,p}_{-m,-m}. \tag{5.32}$$

En utilisant (5.31), il vient que

$$R^p_m = \sum_{\substack{1\le q\le M\\ q\neq p}} \sum_{n=-N_q}^{N_q} \left|\mathbb{L}^{p,q}_{m,n}\right| = \sum_{\substack{1\le q\le M\\ q\neq p}} \sum_{n=-N_q}^{N_q} \left|\mathbb{L}^{q,p}_{n,m}\right| = C^p_m,$$

ce qui démontre le premier point i). Ensuite, d'une part les disques $\mathscr{R}^p_m$ et $\mathscr{R}^p_{-m}$ ont le même centre d'après (5.32), et d'autre part, en utilisant (5.31), nous montrons qu'ils ont même rayon

$$R^p_m = \sum_{\substack{1\le q\le M\\ q\neq p}} \sum_{n=-N_q}^{N_q} \left|\mathbb{L}^{p,q}_{m,n}\right| = \sum_{\substack{1\le q\le M\\ q\neq p}} \sum_{n=-N_q}^{N_q} \left|\mathbb{L}^{p,q}_{-m,n}\right| = R^p_{-m},$$

ce qui achève la preuve. □

La proposition 5.4 montre en particulier que nous pouvons restreindre notre étude aux disques de Gershgorin lignes. Afin d'être plus explicite dans l'analyse du spectre, nous allons nous placer dans le régime basse fréquence et dans le cas d'obstacles éloignés pour effectuer une analyse asymptotique des disques de Gershgorin. Cela passe par une analyse asymptotique des coefficients de la matrice $\mathbb{L}$ lorsque $ka_p \to 0$, $1 \le p \le M$, et $kb \to +\infty$.

Lemme 5.5. *Soient deux couples d'indices (p,m) et (q,n) de I tels que $p \neq q$. Si*

$$ka \to 0 \qquad \text{et} \qquad kb \to +\infty,$$

alors le coefficient $\mathbb{L}^{p,p}_{m,m}$ de la matrice $\mathbb{L}$ possède le comportement asymptotique suivant

$$\mathbb{L}^{p,p}_{m,m} = \begin{cases} -a_p\left[\ln\left(\dfrac{ka_p}{2}\right)+\gamma\right] + i\dfrac{\pi a_p}{2} + O\left((ka_p)^2\ln(ka_p)\right) & \text{pour } m=0,\\ \dfrac{a_p}{2|m|} + O\left((ka_p)^2\right) & \text{pour } m\neq 0. \end{cases} \tag{5.33}$$

Par ailleurs, le coefficient $\mathbb{L}^{p,q}_{m,n}$ vérifie

$$\begin{aligned}\mathbb{L}^{p,q}_{m,n} &= i\sqrt{\frac{\pi a_p a_q}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{|m|+|n|}\frac{(ka_p)^{|m|}(ka_q)^{|n|}}{\sqrt{kb_{pq}}}e^{i(kb_{pq}-\pi/4-(n-m)\pi/2+(n-m)\alpha_{pq})}\\ &\quad + O\left(\frac{(ka_p)^{|m|}(ka_q)^{|n|+2}}{\sqrt{kb_{pq}}}\right) + O\left(\frac{(ka_p)^{|m|+2}(ka_q)^{|n|}}{\sqrt{kb_{pq}}}\right) + O\left(\frac{(ka_p)^{|m|}(ka_q)^{|n|}}{kb_{pq}}\right),\end{aligned} \tag{5.34}$$

et son module

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{L}^{p,q}_{m,n}\right| &= \sqrt{\frac{\pi a_p a_q}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{|m|+|n|}\frac{(ka_p)^{|m|}(ka_q)^{|n|}}{|m|!|n|!\sqrt{kb_{pq}}}\\ &\quad + O\left(\frac{(ka_p)^{|m|}(ka_q)^{|n|+2}}{\sqrt{kb_{pq}}}\right) + O\left(\frac{(ka_p)^{|m|+2}(ka_q)^{|n|}}{\sqrt{kb_{pq}}}\right) + O\left(\frac{(ka_p)^{|m|}(ka_q)^{|n|}}{kb_{pq}}\right).\end{aligned} \tag{5.35}$$

Démonstration. L'asymptotique sur les coefficients diagonaux (5.33) provient directement de la relation (5.16) dans le cadre de la diffraction simple. Soient maintenant deux couples d'indices $(p,m) \in I$ et $(q,n) \in I$ tels que $p \neq q$. Rappelons le comportement asymptotique de la fonction de Hankel (voir équations (9.2.7), (9.2.9) et (9.2.10) dans [1])

$$H^{(1)}_{n-m}(kb_{pq}) = \sqrt{\frac{2}{\pi(kb_{pq})}} e^{i(kb_{pq}-(n-m)\pi/2-\pi/4)} + O\left(\frac{1}{kb_{pq}}\right), \tag{5.36}$$

lorsque $kb_{pq} \longrightarrow +\infty$, et celui de la fonction de Bessel

$$J_m(ka_p) = \frac{1}{|m|!}\left(\frac{ka_p}{2}\right)^{|m|} + O\left((ka_p)^{|m|+2}\right), \tag{5.37}$$

lorsque $ka_p \longrightarrow 0$. L'approximation (5.34) est alors obtenue en appliquant (5.36) et (5.37) dans l'expression de $\mathbb{L}^{p,q}_{m,n}$ (5.12), et la relation (5.35) est dérivée en prenant le module de (5.34). □

Étant donné la complexité du problème et par souci de clarté, nous supposons à partir de maintenant que tous les obstacles sont de même rayon a

$$\forall p = 1, \ldots, M, \qquad a_p = a, \tag{5.38}$$

et que les indices de troncatures N_p sont choisis égaux à un indice $N \in \mathbb{N}$

$$\forall p = 1, \ldots, M, \qquad N_p = N.$$

Cette hypothèse permet de simplifier les notations et les preuves. L'ensemble I est alors défini par

$$(p,m) \in I \Longleftrightarrow 1 \leq p \leq M \text{ et } -N \leq m \leq N.$$

Commençons par étudier l'asymptotique des rayons des disques de Gershgorin.

Lemme 5.6. *Soient $(p,m) \in I$ et $b = \min_{p,q=1,\ldots,M,p\neq q} b_{pq}$. Si $ka \to 0$ et $kb \to +\infty$, alors le rayon R^p_m du disque de Gershgorin $\mathscr{R}^p_m$ possède le comportement asymptotique suivant*

$$R^p_m = \left(\frac{ka}{2}\right)^{|m|} \frac{a}{|m|!}\left[\sum_{q=1,q\neq p}^{M} \sqrt{\frac{\pi}{2kb_{pq}}}\right] + \sum_{q=1,q\neq p}^{M} O\left(\frac{(ka)^{|m|+1}}{\sqrt{kb_{pq}}}\right) + \sum_{q=1,q\neq p}^{M} O\left(\frac{(ka)^{|m|}}{kb_{pq}}\right). \tag{5.39}$$

En particulier, nous avons

$$R^p_m \leq \frac{a(M-1)}{|m|!}\left(\frac{ka}{2}\right)^{|m|}\sqrt{\frac{\pi}{2kb}} + O\left(\frac{(ka)^{|m|+1}}{\sqrt{kb}}\right) + O\left(\frac{(ka)^{|m|}}{kb}\right) \tag{5.40}$$

Démonstration. Soient (p,m) et (q,n) deux couples d'indices de I. D'après le lemme 5.5, pour ka suffisamment petit et kb suffisamment grand, nous avons

$$\left|\mathbb{L}^{p,q}_{m,0}\right| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{ka}{2}\right)^{|m|}\frac{a}{|m|!}\frac{1}{\sqrt{kb_{pq}}} + O\left(\frac{(ka)^{|m|+2}}{\sqrt{kb_{pq}}}\right) + O\left(\frac{(ka)^{|m|}}{kb_{pq}}\right),$$

et pour $n \neq 0$,

$$\left|\mathbb{L}^{p,q}_{m,n}\right| = O\left(\frac{(ka)^{|m|+1}}{\sqrt{kb_{pq}}}\right).$$

En injectant ces deux expressions dans celle de R_m^p (5.29) et en sommant sur n et q, nous obtenons la relation (5.39). L'inégalité (5.40) provient simplement du fait que $b \leq b_{pq}$, pour tout $p, q = 1, \ldots, M$, $p \neq q$. □

Remarquons que, sous l'hypothèse (5.38), pour $m = 0, \ldots, N$, les disques de Gershgorin $\mathscr{R}_m^p$ ont même centre, pour tout $p = 1, \ldots, M$, puisque

$$1 \leq p, q \leq M, -N \leq m \leq N, \qquad \mathbb{L}_{m,m}^{p,p} = \mathbb{L}_{-m,-m}^{p,p} = \mathbb{L}_{m,m}^{q,q} = \mathbb{L}_{-m,-m}^{q,q}.$$

Nous notons $\mathbb{L}_m$ ce centre

$$\forall m = 0, \ldots, N, \qquad \mathbb{L}_m = \mathbb{L}_{m,m}^{p,p}.$$

D'autre part, d'après le lemme 5.5, les centres $\mathbb{L}_m$ ont le comportement asymptotique suivant lorsque ka tend vers 0

$$\mathbb{L}_m = \begin{cases} \widehat{\mathbb{L}}_0 + O\left((ka)^2 \ln(ka)\right) & \text{si } m = 0 \\ \widehat{\mathbb{L}}_m + O\left((ka)^2\right) & \text{sinon,} \end{cases} \tag{5.41}$$

où

$$\widehat{\mathbb{L}}_m = \begin{cases} -a\left[\ln\left(\dfrac{ka}{2}\right) + \gamma\right] + i\dfrac{\pi a}{2} & \text{si } m = 0 \\ \dfrac{a}{2m} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.42}$$

Nous montrons maintenant, que lorsque $ka \longrightarrow 0$ et $kb \longrightarrow +\infty$, alors nous pouvons regrouper les disques de Gershgorin en N disques $\mathscr{R}_m$, $m = 0, \ldots, N$ d'intersection vide. Ceci nous permettra d'appliquer le Théorème 5.3 afin de localiser explicitement les valeurs propres de $\mathbb{L}$.

Proposition 5.7. *Pour $0 \leq m \leq N$, introduisons les disques $\mathscr{R}_m$ de centre $\mathbb{L}_m$, définis par (5.41), et de rayons R_m définis par : $R_m = \max_{p=1,\ldots,M} R_m^p$. Alors, les deux assertions suivantes sont vraies*

i) Pour tout $p = 1, \ldots, M$ et $m = 0, \ldots, N$,

$$\mathscr{R}_m^p \subset \mathscr{R}_m \qquad \text{et} \qquad \mathscr{R}_{-m}^p \subset \mathscr{R}_m.$$

ii) Il existe deux constantes $K_a > 0$ et $K_b > 0$ telles que, si $ka < K_a$ et $kb > K_b$, alors pour tout m, n tels que $0 \leq m, n \leq N$, nous avons

$$m \neq n \Longleftrightarrow \mathscr{R}_m \bigcap \mathscr{R}_n = \emptyset.$$

Démonstration. Le point $i)$ est évident : pour tout $p = 1, \ldots, M$ et $m = 0, \ldots, N$, d'une part les disques $\mathscr{R}_m$ et $\mathscr{R}_m^p$ ont même centre $\mathbb{L}_m$, et d'autre part, par définition, le rayon R_m du disque $\mathscr{R}_m$ est plus grand que celui de $\mathscr{R}_m^p$.

Concentrons nous sur le point $ii)$. Introduisons le paramètre $\varepsilon > 0$ défini par

$$\varepsilon = \min_{1 \leq m \neq n \leq N} \left|\widehat{\mathbb{L}}_m - \widehat{\mathbb{L}}_n\right|,$$

et remarquons que, comme $\widehat{\mathbb{L}}_m = \dfrac{a}{2m}$ pour $m = 1, \ldots, N$, nous avons

$$\varepsilon = \left|\widehat{\mathbb{L}}_{N-1} - \widehat{\mathbb{L}}_N\right|.$$

Notons que ε est indépendant de ka mais dépendant de a. D'après (5.42), il existe une constante $K'_a > 0$ telle que, si $ka < K'_a$, alors, pour tout m tel que $1 \leq m \leq N$, nous ayons

$$\left|\widehat{\mathbb{L}}_m - \widehat{\mathbb{L}}_0\right| \geq \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout m et n tels que $0 \leq m, n \leq N$, nous avons

$$\left|\widehat{\mathbb{L}}_m - \widehat{\mathbb{L}}_n\right| \geq \varepsilon, \qquad \text{pour } m \neq n.$$

Soient maintenant m et n tels que $0 \leq m, n \leq N$. L'expression (5.41) implique qu'il existe une constante $K_{a,m,n} > 0$ telle que, si $ka < K_{a,m,n}$, alors

$$\left|\mathbb{L}_m - \widehat{\mathbb{L}}_m\right| < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \text{et} \qquad \left|\mathbb{L}_n - \widehat{\mathbb{L}}_n\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Ceci implique que, puisque

$$|\mathbb{L}_m - \mathbb{L}_n| = \left|\mathbb{L}_m - \widehat{\mathbb{L}}_m + \widehat{\mathbb{L}}_m - \widehat{\mathbb{L}}_n + \widehat{\mathbb{L}}_n - \mathbb{L}_n\right| \geq \left|\left|\widehat{\mathbb{L}}_m - \widehat{\mathbb{L}}_n\right| - \left|\mathbb{L}_m - \widehat{\mathbb{L}}_m\right| - \left|\mathbb{L}_n - \widehat{\mathbb{L}}_n\right|\right|,$$

alors, pour $ka < \min\left(K'_a, K_{a,m,n}\right)$, nous avons

$$|\mathbb{L}_m - \mathbb{L}_n| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{pour } m \neq n. \tag{5.43}$$

D'autre part, d'après l'inégalité (5.40) du Lemme 5.6 et pour $ka < \min\left(K'_a, K_{a,m,n}\right)$, on peut trouver une constante $K_{b,m,n} > 0$ telle que, si $kb > K_{b,m,n}$, nous ayons

$$R_m < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \text{et} \qquad R_n < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Ainsi, il vient que

$$R_m + R_n < \frac{\varepsilon}{2} < |\mathbb{L}_m - \mathbb{L}_n|.$$

Introduisons maintenant

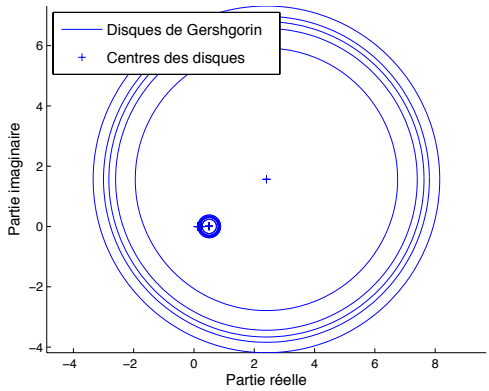
$$K_a = \min\left(K'_a, \min_{0 \leq m,n \leq N} K_{a,m,n}\right), \qquad K_b = \max_{1 \leq m,n \leq N} K_{b,m,n}.$$

Nous avons alors le résultat suivant : si $ka < K_a$ et $kb > K_b$, alors, pour tout m et n tels que $0 \leq m, n \leq N$

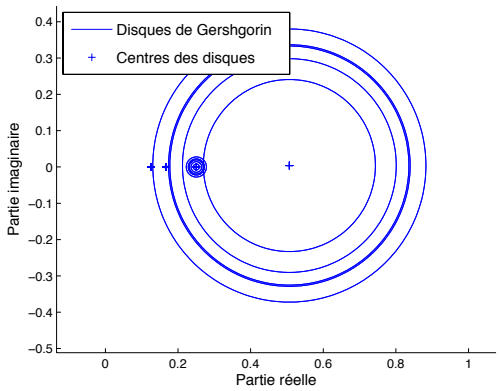
$$R_m + R_n < |\mathbb{L}_m - \mathbb{L}_n|.$$

Ce qui signifie exactement que $\mathscr{R}_m \bigcap \mathscr{R}_n = \emptyset$, qui est le point *ii*). □

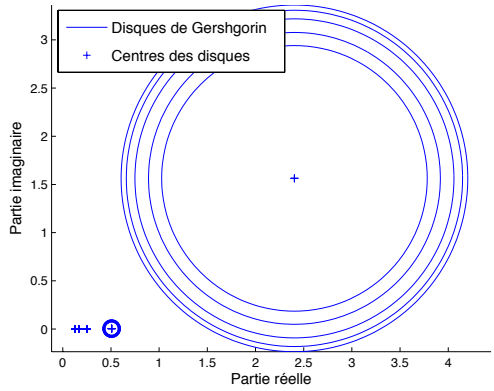
Regardons maintenant sur quelques exemples l'interprétation visuelle de la proposition 5.7. Considérons le régime basse fréquence $ka = 0.1$, pour cinq disques de rayon unitaire (répartis aléatoirement). L'indice de troncature N est fixé à 4. Nous représentons les disques de Gershgorin et leurs centres (cf. Théorème 5.2) sur les figures 5.6 pour deux valeurs de kb : $kb = 0.5$ sur les figures 5.6(a)-5.6(b) et $kb = 7.8$ sur les figures 5.6(c)-5.6(d). Nous remarquons que, dans le premier cas, soit $kb = 0.5$, nous ne sommes pas dans le régime des obstacles éloignés de la proposition 5.7 puisque les disques s'intersectent. Ceci est corrigé dans la seconde situation pour $kb = 7.8$, où les disques ne s'intersectent pas. Dans ce dernier cas, on voit que l'on s'approche en quelque sorte d'un régime où le couplage issu de la diffraction



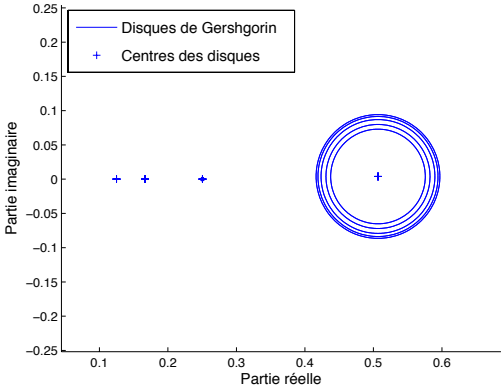
(a) $kb = 0.5$



(b) $kb = 0.5$ (agrandissement près de l'origine)



(c) $kb = 7.8$



(d) $kb = 7.8$ (agrandissement près de l'origine)

FIGURE 5.6 – Disques de Gershgorin de la matrice $\mathbb{L}$, avec 5 obstacles de rayon unitaire et pour $ka = 0.1$ et $N = 4$ placés aléatoirement dans la boîte $[1, 20] \times [1, 20]$ pour les figures (a) et (b) et $[1, 200] \times [1, 200]$ pour les figures (c) et (d).

multiple n'est pas trop important, au moins pour les modes $m \neq 0$. Ainsi, les valeurs propres de la diffraction simple (centres des disques) peuvent être considérées comme de bonnes approximations des valeurs propres de la diffraction multiple. Pour le mode propagatif $m = 0$, nous voyons que les cinq disques de Gershgorin ont un rayon encore relativement grand et donc que les valeurs propres associées à la diffraction multiple et simple peuvent être relativement différentes.

Supposons que ka soit suffisamment petit et kb suffisamment grand, alors d'après le point $i)$ de la Proposition 5.7, le disque $\mathscr{R}_0$ contient exactement les M disques $\mathscr{R}_0^p$ de Gershgorin de la matrice $\mathbb{L}$. Chaque disque $\mathscr{R}_m$, $1 \leq m \leq N$, contient les $2M$ disques $\mathscr{R}_m^p$ et $\mathscr{R}_{-m}^p$. De plus, ces disques $(\mathscr{R}_m)_{m=0,\ldots,N}$ ne s'intersectent pas d'après le point $ii)$. Le Théorème 5.3 implique alors que la matrice $\mathbb{L}$ possède M valeurs propres localisées dans le disque $\mathscr{R}_0$, que nous noterons $(\mu_0^p)_{p=1,\ldots,M}$, et $2M$ autres valeurs propres dans chaque disque $\mathscr{R}_m$, pour $m \neq 0$, qui seront désignées par $(\mu_m^p)_{p=1,\ldots,M}$ et $(\mu_{-m}^p)_{p=1,\ldots,M}$. Dans la suite, nous supposons un tel régime atteint et nous nous attachons à estimer les valeurs propres de $\mathbb{L}$ de plus petit et plus grand modules.

Remarque 5.8. *Le régime décrit ici correspond à celui de la méthode DORT, présentée dans le chapitre 1. En effet, les obstacles sont très petits (basse fréquence) et éloignés les uns des autres (découplés). Nous constatons de plus que, dans ce cas, la matrice $\mathbb{L}$ de l'opérateur de simple couche possède M valeurs propres significatives, celles comprises dans le disque de Gershgorin $\mathscr{R}_0$.*

5.4.2 Précision sur la localisation des valeurs propres de plus petit et de plus grand module

A partir de maintenant, notons $(\mu_m^p)_{(p,m)\in I}$ les valeurs propres de $\mathbb{L}$, ainsi que μ_{min} et μ_{max} respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre (en module) de $\mathbb{L}$, soit

$$|\mu_{min}| = \min_{(p,m)\in I} |\mu_m^p| \quad \text{et} \quad |\mu_{max}| = \max_{(p,m)\in I} |\mu_m^p|.$$

D'après ce qui précède, μ_{min} (respectivement μ_{max}) *se situe dans le disque $\mathscr{R}_m$ le "plus proche" (respectivement "le plus éloigné") de l'origine.* Or, nous avons, d'une part, le comportement asymptotique des centres des disques $\mathscr{R}_m$

$$\mathbb{L}_m = \widehat{\mathbb{L}}_m + O\left((ka)^2 \ln(ka)\right),$$

et, d'autre part, la relation d'ordre (pour ka suffisamment petit) sur les centres approchés des disques (d'après (5.42))

$$0 < \widehat{\mathbb{L}}_N < \widehat{\mathbb{L}}_{N-1} < \ldots < \widehat{\mathbb{L}}_1 < \Re(\widehat{\mathbb{L}}_0).$$

Ainsi, μ_{min} est localisée dans le disque $\mathscr{R}_N$ et μ_{max} dans $\mathscr{R}_0$ si ka est suffisamment petit. Comme μ_{min} est un élément de $\mathscr{R}_N$, nous avons l'inégalité suivante

$$\mathbb{L}_N - R_N \leq |\mu_{min}| \leq \mathbb{L}_N + R_N.$$

Comparons maintenant les ordres de grandeur des différents paramètres intervenant dans cet encadrement. Nous savons que

$$\mathbb{L}_N = \frac{a}{2N} + O\left((ka)^2\right),$$

et, d'après (5.39), le rayon R_N se comporte comme

$$R_N = O\left(\frac{(ka)^N}{\sqrt{kb}}\right),$$

ce qui entraine clairement (si $N \geq 2$) que

$$|\mu_{min}| = \frac{a}{2N} + O\left((ka)^2\right). \tag{5.44}$$

Nous remarquons alors que la distance b entre les obtacles n'intervient pas dans cette estimation de $|\mu_{min}|$. De plus, cette estimation correspond exactement à la plus petite valeur propre obtenue dans le cadre de la diffraction simple (5.16). D'autre part, rappelons que les $2M$ valeurs propres μ_N^p et μ_{-N}^p, pour $p = 1, \ldots, M$, de la matrice $\mathbb{L}$ sont localisées dans le disque $\mathscr{R}_N$. Elles vérifient aussi l'égalité (5.44) et donc $\frac{a}{2N}$ en est une bonne estimation.

Ainsi, $\frac{a}{2N}$ peut être considérée comme une valeur propre de multiplicité $2M$, de module minimal, approchant les $2M$ valeurs propres $(\mu_N^p)_{p=1,\dots,M}$ et $(\mu_{-N}^p)_{p=1,\dots,M}$. Remarquons que, bien que l'étude vient d'être menée pour $m = N$, nous pouvons aussi conclure que les valeurs propres $(\mu_m^p)_{p=1,\dots,M}$ et $(\mu_{-m}^p)_{p=1,\dots,M}$, pour $m = 1, ...N$ et $m \neq 0$, peuvent être approchées par la valeur propre $\frac{a}{2|m|}$ avec une multiplicité $2M$ (chacune).

Comme μ_{max} est un élément de $\mathscr{R}_0$, nous avons l'inégalité suivante

$$|\mathbb{L}_0| - R_0 \leq |\mu_{max}| \leq |\mathbb{L}_0| + R_0. \tag{5.45}$$

Précisons cet encadrement. D'une part, d'après (5.33), nous avons

$$\mathbb{L}_0 = \widehat{\mathbb{L}}_0 + O\left((ka)^2 \ln(ka)\right), \qquad \text{avec} \qquad \widehat{\mathbb{L}}_0 = -a\left[\ln\left(\frac{ka}{2}\right) + \gamma\right] + i\frac{\pi a}{2},$$

et, d'autre part, d'après (5.40),

$$R_0 \leq \widehat{R}_0 + O\left(\frac{ka}{\sqrt{kb}}\right) + O\left(\frac{1}{kb}\right), \qquad \text{avec} \qquad \widehat{R}_0 = a(M-1)\sqrt{\frac{2}{\pi(kb)}}. \tag{5.46}$$

Au final, (5.45) s'écrit

$$\begin{aligned}\left|\widehat{\mathbb{L}}_0\right| - \widehat{R}_0 + O\left((ka)^2 \ln(ka)\right) + O\left(\frac{ka}{\sqrt{kb}}\right) + O\left(\frac{1}{kb}\right) &\leq |\mu_{max}| \\ &\leq \left|\widehat{\mathbb{L}}_0\right| + \widehat{R}_0 + O\left((ka)^2 \ln(ka)\right) + O\left(\frac{ka}{\sqrt{kb}}\right) + O\left(\frac{1}{kb}\right).\end{aligned} \tag{5.47}$$

Le terme $\widehat{R}_0$ est proportionnel au nombre d'obstacles M. En particulier, en présence de nombreux obstacles, $\widehat{R}_0$ devient très grand, rendant l'inégalité (5.47) imprécise. En reprenant l'exemple de la figure 5.6(c), l'encadrement obtenu est

$$1.04 \leq |\mu_{max}| \leq 4.69,$$

sachant que $|\mu_{max}| = 3.54$. Cet encadrement peut être satisfaisant avec un petit nombre d'obstacles, cependant, dès que M augmente, il devient très imprécis.

L'approche par les disques de Gershgorin est donc limitée : elle ne permet pas d'estimer précisément $|\mu_{max}|$. Elle permet d'approcher la plus petite valeur propre $|\mu_{min}|$. Cependant, cette dernière estimation est valable uniquement dans le régime particulier où les disques de Gershgorin sont séparés. Or, cette hypothèse est très restrictive. En effet, lorsque le nombre d'obstacles est grand, le rayon R_0^p, pour $p = 1, \dots, M$, donné par (5.39), prend également une grande valeur et le disque $\mathscr{R}_0^p$ peut alors s'intersecter avec d'autres disques $\mathscr{R}_n^q$, pour $n \neq 0$ et $q = 1, \dots, M$. Nous proposons une méthode alternative, basée sur l'étude asymptotique des coefficients de la matrice $\mathbb{L}$, obtenus dans le lemme 5.5. Avec cette méthode, nous montrons que l'estimation de $|\mu_{min}|$ reste valable même lorsque les obstacles sont nombreux et que les disques de Gershgorin s'intersectent, comme sur l'exemple de la figure 5.6(a).

5.4.3 Une approche alternative par passage à la limite sur la matrice $\mathbb{L}$

Nous proposons ici une approche alternative à la précédente, basée sur le lemme 5.5, qui donne une analyse asymptotique de tous les coefficients de la matrice $\mathbb{L}$. Nous en déduisons

alors une approximation limite de la matrice $\mathbb{L}$ à travers celles de chaque sous-bloc $\mathbb{L}^{p,q}$, pour $p, q = 1, \ldots, M$.

Nous commençons notre étude par le bloc diagonal $\mathbb{L}^{p,p}$, pour $p = 1, \ldots, M$. Rappelons que cette matrice est diagonale. De plus, lorsque $ka \to 0$, ses coefficients $\mathbb{L}^{p,p}_{m,m}$, pour $-N \leq m \leq N$ vérifient (voir lemme 5.5)

$$\mathbb{L}^{p,p}_{m,m} = \begin{cases} \widehat{\mathbb{L}}_0 + O\left((ka)^2 \ln(ka)\right) & \text{si } m = 0 \\ \widehat{\mathbb{L}}_m + O\left((ka)^2\right) & \text{sinon,} \end{cases} \tag{5.48}$$

avec

$$\widehat{\mathbb{L}}_m = \begin{cases} -a\left[\ln\left(\dfrac{ka}{2}\right) + \gamma\right] + \dfrac{i\pi a}{2} & \text{si } m = 0 \\ \dfrac{a}{2|m|} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.49}$$

Nous construisons alors la sous-matrice diagonale $(\mathbb{L}^0)^{p,p}$ ne contenant que les termes prépondérants du développement asymptotique obtenu dans (5.48). Plus précisément, $(\mathbb{L}^0)^{p,p}$ est de même taille que $\mathbb{L}^{p,p}$, soit $(2N+1) \times (2N+1)$, et est définie par

$$(\mathbb{L}^0)^{p,p} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbb{L}}_N & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \widehat{\mathbb{L}}_0 & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \widehat{\mathbb{L}}_N \end{pmatrix}. \tag{5.50}$$

La relation (5.48) implique que, lorsque $ka \to 0$, la relation suivante est vérifiée, pour $p = 1, \ldots, M$

$$\mathbb{L}^{p,p} = (\mathbb{L}^0)^{p,p} + O\left((ka)^2 \ln(ka)\right). \tag{5.51}$$

Autrement dit, chaque sous-matrice $(\mathbb{L}^0)^{p,p}$ constitue une approximation du bloc diagonal $\mathbb{L}^{p,p}$ de la matrice $\mathbb{L}$. Notons de plus que, d'après la relation (5.50), les coefficients de $(\mathbb{L}^0)^{p,p}$ ne dépendent pas de l'indice p (car $a_p = a$, pour tout $p = 1, \ldots, M$), ce qui implique que, pour $1 \leq p, q \leq M$, nous avons l'égalité

$$(\mathbb{L}^0)^{p,p} = (\mathbb{L}^0)^{q,q}.$$

Nous procédons maintenant de la même manière pour le bloc extra-diagonal $\mathbb{L}^{p,q}$, avec $1 \leq p, q \leq M$ et $p \neq q$. Lorsque $ka \to 0$ et $kb_{pq} \to +\infty$, les coefficients $\mathbb{L}^{p,q}_{m,n}$ du bloc $\mathbb{L}^{p,q}$ ont le comportement asymptotique suivant (lemme 5.5)

$$\mathbb{L}^{p,q}_{m,n} = \begin{cases} ia\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{e^{i(kb_{pq}-\pi/4)}}{\sqrt{kb_{pq}}} + O\left(\dfrac{1}{kb_{pq}}\right) + O\left(\dfrac{(ka)^2}{\sqrt{kb_{pq}}}\right) & \text{si } (m,n) = (0,0), \\ O\left(\dfrac{(ka)^{|m|+|n|}}{\sqrt{kb_{pq}}}\right) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.52}$$

Autrement dit, lorsque $ka \to 0$ et $kb_{pq} \to +\infty$, tous les coefficients $\mathbb{L}^{p,q}_{m,n}$ de $\mathbb{L}^{p,q}$ décroissent (au moins) comme

$$O\left(\frac{ka}{\sqrt{kb_{pq}}}\right),$$

sauf le terme d'indice $(m,n)=(0,0)$, qui décroît comme

$$O\left(\frac{1}{\sqrt{kb_{pq}}}\right).$$

Soit la sous-matrice $(\mathbb{L}^0)^{p,q}$ de taille $(2N+1)\times(2N+1)$ et définie par

$$(\mathbb{L}^0)^{p,q}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & (\mathbb{L}^0)^{p,q}_{0,0} & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad (\mathbb{L}^0)^{p,q}_{0,0}=ia\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{i(kb_{pq}-\pi/4)}}{\sqrt{kb_{pq}}}. \tag{5.53}$$

Ainsi, grâce à (5.52), lorsque $ka\to 0$ et $kb\to+\infty$, la relation suivante est vérifiée, pour $p,q=1,\dots,M$ et $p\neq q$

$$\mathbb{L}^{p,q}=(\mathbb{L}^0)^{p,q}+O\left(\frac{ka}{\sqrt{kb_{pq}}}\right)+O\left(\frac{1}{kb_{pq}}\right). \tag{5.54}$$

Autrement dit, chaque sous-matrice $(\mathbb{L}^0)^{p,q}$ constitue une approximation du bloc extra-diagonal $\mathbb{L}^{p,q}$ de la matrice $\mathbb{L}$. Introduisons la matrice par blocs $\mathbb{L}^0$ contenant chaque sous-matrice $(\mathbb{L}^0)^{p,q}$, soit

$$\mathbb{L}^0=\begin{pmatrix} (\mathbb{L}^0)^{1,1} & (\mathbb{L}^0)^{1,2} & \dots & (\mathbb{L}^0)^{1,M} \\ (\mathbb{L}^0)^{2,1} & (\mathbb{L}^0)^{2,2} & \dots & (\mathbb{L}^0)^{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbb{L}^0)^{M,1} & (\mathbb{L}^0)^{M,2} & \dots & (\mathbb{L}^0)^{M,M} \end{pmatrix}.$$

Résumons ces derniers résultats dans le lemme suivant.

Lemme 5.9. *Lorsque $ka\longrightarrow 0$ et $kb\longrightarrow+\infty$, nous avons*

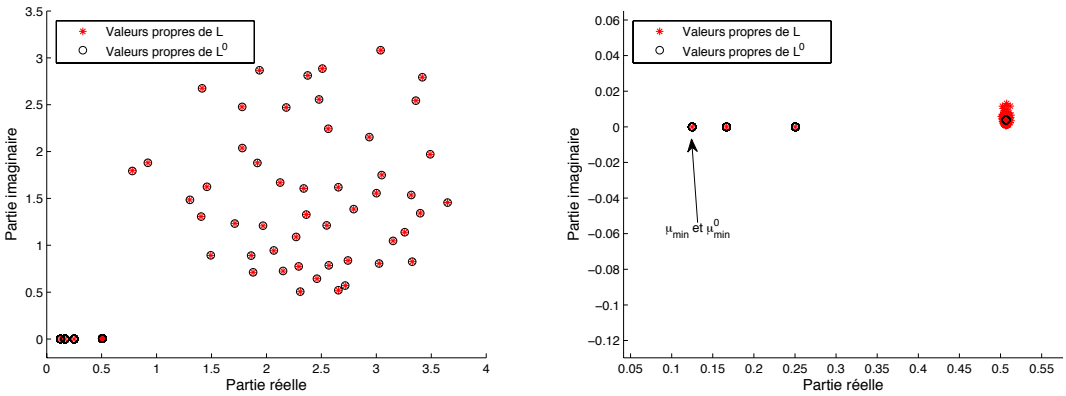
$$\mathbb{L}=\mathbb{L}^0+O\left((ka)^2\ln(ka)\right)+O\left(\frac{ka}{\sqrt{kb}}\right)+O\left(\frac{1}{kb}\right). \tag{5.55}$$

A présent, nous notons $((\mu^0)^p_m)_{(p,m)\in I}$ les valeurs propres de $\mathbb{L}^0$. Pour $p=1,\dots,M$ et $m=-N,\dots,N$, nous supposons que

$$\mu^p_m\simeq(\mu^0)^p_m,$$

ce qui est assez légitime au vu de (5.55). Pour motiver notre approche et mieux visualiser les valeurs propres de $\mathbb{L}^0$, nous montrons sur la figure 5.7 une comparaison entre les valeurs propres de la matrice $\mathbb{L}$ et celles de la matrice $\mathbb{L}^0$, pour une configuration de 50 disques unitaires placés aléatoirement dans le domaine $[0,1000]^2$ avec $ka=0.1$, $kb=10$ et l'indice de troncature N égal à 4. Ces valeurs propres ont été calculées numériquement par la fonction "eig" de Matlab. Globalement, l'approximation des valeurs propres $(\mu^p_m)_{(p,m)\in I}$ de $\mathbb{L}$ par les valeurs propres $((\mu^0)^p_m)_{(p,m)\in I}$ de $\mathbb{L}^0$ est satisfaisante.

Commençons l'étude spectrale de $\mathbb{L}^0$ en remarquant que cette matrice est presque diagonale puisque tous ses coefficients extra-diagonaux sont nuls sauf ceux d'indice $(m,n)=(0,0)$



(a) Toutes les valeurs propres

(b) Agrandissement sur les valeurs propres de modes $|m| \geq 1$.

FIGURE 5.7 – Valeurs propres des matrices $\mathbb{L}$ et $\mathbb{L}^0$, pour $M = 50$ disques unitaires, pour $N = 4$, $ka = 0.1$ et $kb = 10$.

(voir (5.50) et (5.53)). Ceci implique que chaque coefficient $(\mathbb{L}^0)^{p,p}_{m,m}$ de la diagonale de $\mathbb{L}^0$ d'indice $m \neq 0$ est une valeur propre de $\mathbb{L}^0$. De plus, pour $p, q = 1, \ldots, M$ et $m \neq 0$, nous avons les égalités suivantes

$$(\mathbb{L}^0)^{p,p}_{-m,-m} = (\mathbb{L}^0)^{p,p}_{m,m} = (\mathbb{L}^0)^{q,q}_{m,m} = (\mathbb{L}^0)^{q,q}_{-m,-m} = \widehat{\mathbb{L}}_{|m|}.$$

Ainsi, $\widehat{\mathbb{L}}_m$ est une valeur propre de $\mathbb{L}^0$ de multiplicité $2M$, pour $m = 1, \ldots, N$. Nous fixons le choix de numérotation suivant, pour $p = 1, \ldots, M$, $m \neq 0$ et $-N \leq m \leq N$

$$(\mu^0)^p_m = \widehat{\mathbb{L}}_{|m|} = \frac{a}{2|m|}. \tag{5.56}$$

Nous connaissons alors explicitement $2NM$ valeurs propres de $\mathbb{L}^0$. Ainsi, le calcul des M dernières valeurs propres $((\mu^0)^p_0)_{p=1,\ldots,M}$ peut être effectué à partir de la sous matrice qui correspond aux modes d'ordre zéro, ce que nous faisons plus loin.

Revenons sur l'exemple précédent. L'approximation des valeurs propres de $\mathbb{L}$ par celles de $\mathbb{L}^0$ est raisonnable pour les valeurs propres liées aux modes d'ordre $m = 0$ (figure 5.7(a)) ainsi que pour les modes d'indices plus élevés, $|m| \geq 2$ (figure 5.7(b)). En particulier, nous remarquons que l'approximation des valeurs propres $(\mu^p_1)_{p=1,\ldots,M}$ associées aux modes d'ordre un sont moins précises. Ceci est certainement du au couplage entre les modes propagatifs $m = 0$ et les modes d'ordre $m = 1$. Si les obstacles étaient plus éloignés, alors ce couplage serait plus faible et l'approximation meilleure.

Nous cherchons maintenant à localiser les valeurs propres de $\mathbb{L}^0$ de plus petit et de plus grand modules. Pour commencer, nous disposons de la relation d'ordre suivante, d'après (5.48)

$$0 < \widehat{\mathbb{L}}_N < \widehat{\mathbb{L}}_{N-1} < \ldots < \widehat{\mathbb{L}}_2 < \widehat{\mathbb{L}}_1. \tag{5.57}$$

Comme $\widehat{\mathbb{L}}_m$, pour $m = 1, \ldots, N$, est une valeur propre de multiplicité $2M$ de $\mathbb{L}^0$, nous avons

$$|\mu^0_{min}| = \min\left(\widehat{\mathbb{L}}_N, \min_{p=1,\ldots,M} |(\mu^0)^p_0|\right).$$

Or, la figure 5.7 nous suggère que les M valeurs propres $((\mu^0)_0^p)_{p=1,\dots,M}$ vérifient l'inégalité

$$|(\mu^0)_0^p| > \widehat{\mathbb{L}}_N. \tag{5.58}$$

Lorsque $kb_{pq} \to +\infty$, cette relation peut être démontrée mathématiquement par l'intermédiaire des disques de Gershgorin de la matrice $\mathbb{L}^0$, comme dans la section précédente. En effet, les coefficients extra-diagonaux $(\mathbb{L}^0)_{0,0}^{p,q}$ tendent vers 0 quand $kb_{pq} \to +\infty$ (voir (5.53)). En pratique, cette relation semble être vérifiée même lorsque kb_{pq} n'est pas suffisamment grand pour pouvoir appliquer l'approche basée sur les disques de Gershgorin. Nous supposons donc dans la suite que la relation (5.58) est vérifiée. Nous estimons alors μ_{min}^0 par $\widehat{\mathbb{L}}_N$, soit

$$\mu_{min}^0 = \widehat{\mathbb{L}}_N = \frac{a}{2N}.$$

Or, $\widehat{\mathbb{L}}_N$ est une valeur propre de multiplicité $2M$, ce qui implique que μ_{min}^0 l'est aussi. Cette conclusion est conforme à notre étude basée sur les disques de Gershgorin réalisée dans la section 5.4.2.

Concentrons nous maintenant sur la plus grande valeur propre en module de $\mathbb{L}^0$, notée μ_{max}^0. La figure 5.7 suggère que μ_{max}^0 est une des valeurs propres liées aux modes propagatifs et que son module est plus grand que celui obtenu par la diffraction simple. Pour montrer ces résultats et étudier plus facilement les M valeurs propres $((\mu^0)_0^p)_{p=1,\dots,M}$, nous construisons la sous-matrice $\mathbb{L}^1$ des modes d'ordre 0 de $\mathbb{L}^0$. Plus précisément, $\mathbb{L}^1 = (\mathbb{L}_{p,q}^1)_{1\le p,q\le M}$ est de taille $M \times M$ et pour tout $1 \le p, q \le M$

$$\mathbb{L}_{p,q}^1 = (\mathbb{L}^0)_{0,0}^{p,q} = \begin{cases} \widehat{\mathbb{L}}_0 = -a\left[\ln\left(\dfrac{ka}{2}\right) + \gamma\right] + i\dfrac{\pi a}{2} & \text{si } p = q, \\ \dfrac{ia\sqrt{\pi}}{\sqrt{2kb_{pq}}} e^{i(kb_{pq}-\pi/4)} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.59}$$

Les valeurs propres de $\mathbb{L}^1$ sont alors exactement les $((\mu^0)_0^p)_{p=1,\dots,M}$, comme le montre le lemme suivant.

Lemme 5.10. *Les M valeurs propres de $\mathbb{L}^1$ sont exactement les M valeurs propres $(\mu^0)_0^p$, pour $p = 1, \dots, M$, de la matrice $\mathbb{L}^0$.*

Démonstration. Ce lemme peut se démontrer grâce à la structure particulière de la matrice $\mathbb{L}^0$, définie par les relations (5.50) et (5.53). En effet, nous pouvons aisément construire deux matrices de permutation $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ (que nous n'explicitons pas) telles que

$$\mathbb{P}\mathbb{L}^0\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} \mathbb{L}^1 & 0 \\ 0 & \mathbb{L}^2 \end{pmatrix}, \tag{5.60}$$

où la sous-matrice $\mathbb{L}^1$ est définie par (5.59) et la sous-matrice $\mathbb{L}^2 := ((\mathbb{L}^2)^{p,q})_{1\le p,q\le M}$, de taille $2NM \times 2NM$, contient la diagonale de la matrice $\mathbb{L}^0$ privée des modes d'ordre 0. Plus précisément, pour $p = 1, \dots, M$, chaque bloc diagonal $(\mathbb{L}^2)^{p,p}$ a pour coefficient, pour $m = -N, \dots, N$, $m \neq 0$,

$$(\mathbb{L}^2)_{m,m}^{p,p} = (\mathbb{L}^0)_{m,m}^{p,p} = \widehat{\mathbb{L}}_{|m|} = (\mu^0)_m^p, \tag{5.61}$$

où nous avons utilisé l'égalité (5.56). Remarquons maintenant que, comme la matrice $\mathbb{L}^2$ est diagonale, ses valeurs propres sont aussi ses coefficients diagonaux, soient, d'après (5.61), les $(\mu^0)_m^p$, pour $(p, m) \in I$ avec $m \neq 0$. Ceci implique que les valeurs propres de $\mathbb{L}^1$ ne peuvent être que les $(\mu^0)_0^p$, pour $p = 1, \dots, M$. □

Nous avons ensuite les deux résultats suivants.

Lemme 5.11. *L'inégalité suivante est vérifiée*

$$\max_{p=1,\dots,M} |(\mu^0)^p_0| \geq |\widehat{\mathbb{L}}_0|. \tag{5.62}$$

Démonstration. La trace $\mathrm{tr}(\mathbb{L}^1)$ de la matrice $\mathbb{L}^1$ s'écrit

$$\mathrm{tr}(\mathbb{L}^1) = \sum_{p=1}^{M} \widehat{\mathbb{L}}_0 = M\widehat{\mathbb{L}}_0.$$

De plus elle est aussi égale à la somme des valeurs propres de $\mathbb{L}^1$, ce qui permet d'obtenir l'égalité suivante

$$M\widehat{\mathbb{L}}_0 = \sum_{p=1}^{M} (\mu^0)^p_0.$$

En utilisant l'inégalité suivante

$$\left|M\widehat{\mathbb{L}}_0\right| = \left|\sum_{p=1}^{M} (\mu^0)^p_0\right| \leq \sum_{p=1}^{M} \left|(\mu^0)^p_0\right| \leq M \max_{p=1,\dots,M} |(\mu^0)^p_0|,$$

nous obtenons finalement

$$\left|\widehat{\mathbb{L}}_0\right| \leq \max_{p=1,\dots,M} |(\mu^0)^p_0|.$$

□

Ce lemme permet en particulier de démontrer la proposition suivante.

Proposition 5.12. *La plus grande valeur propre en module μ^0_{max} de $\mathbb{L}^0$ est une valeur propre liée aux modes propagatifs $m = 0$*

$$\mu^0_{max} \in \left\{(\mu^0)^p_0, p = 1, \dots, M\right\}. \tag{5.63}$$

De plus, μ^0_{max} vérifie l'inégalité

$$|\mu^0_{max}| \geq |\widehat{\mathbb{L}}_0|. \tag{5.64}$$

Démonstration. Comme $|z| \geq |\Im(z)|$ pour tout nombre complexe z, alors, d'après (5.48), l'inégalité suivante est vérifiée

$$|\widehat{\mathbb{L}}_0| \geq \frac{a\pi}{2}.$$

D'autre part, comme $\widehat{\mathbb{L}}_m = a/(2m)$ pour $m = 1, \dots, N$, nous avons alors

$$|\widehat{\mathbb{L}}_0| > |\widehat{\mathbb{L}}_1| > |\widehat{\mathbb{L}}_2| > \dots > |\widehat{\mathbb{L}}_{N-1}| > |\widehat{\mathbb{L}}_N|.$$

Compte tenu de (5.56), cette relation implique que

$$|\widehat{\mathbb{L}}_0| > \max_{(p,m)\in I} |(\mu^0)^p_m|.$$

Ensuite, il nous reste à appliquer le lemme 5.11, pour obtenir

$$\max_{p=1,\dots,M} |(\mu^0)^p_0| \geq |\widehat{\mathbb{L}}_0| > \max_{(p,m)\in I} |(\mu^0)^p_m|,$$

ce qui prouve directement les relations (5.63) et (5.64). □

Cette proposition montre deux résultats. Le premier, donné par (5.63), est que μ^0_{max} est à chercher parmi les valeurs propres de $\mathbb{L}^0$ liées aux modes propagatifs $m = 0$. Le deuxième, qui est donné par (5.64), est que le module de la plus grande valeur propre de la diffraction multiple $|\mu^0_{max}|$ est plus grand que le module de la plus grande valeur propre de la diffraction simple $\widehat{\mathbb{L}}_0$. Remarquons que, d'après la proposition 5.12, le terme $\left|\widehat{\mathbb{L}}_0\right|$ peut être utilisé pour (sous-)estimer $|\mu^0_{max}|$. Cependant, nous proposons une méthode fournissant une meilleure estimation de $|\mu^0_{max}|$.

Nous ne disposons pas des expressions explicites des M valeurs propres de $\mathbb{L}^1$. Reprenons l'exemple décrit par la figure 5.8. Cette figure présente les termes $(\widehat{\mathbb{L}}_m)_{0\leq m\leq N}$ (représentés par les croix) ainsi que les valeurs propres de $\mathbb{L}$, calculées numériquement. Le milieu comporte 50 disques unitaires répartis aléatoirement dans la boîte $[0, 1000] \times [0, 1000]$, de telle sorte que $kb = 100$ et $ka = 0.1$. L'indice de troncature N est fixé à 4. Nous constatons alors que les $M = 50$ valeurs propres $((\mu^0)^p_0)_{p=1,\ldots,M}$ de $\mathbb{L}^1$ sont concentrées autours de $\widehat{\mathbb{L}}_0(\simeq 2.4 + 1.6i)$. Ceci provient du fait que les termes extra-diagonaux

$$ia\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{i(kb_{pq}-\pi/4)}}{\sqrt{kb_{pq}}}$$

de $\mathbb{L}^1$ sont hautement oscillants et tendent vers 0 lorsque $kb_{pq} \to +\infty$. Les valeurs propres agissent alors comme des perturbations complexes de $\widehat{\mathbb{L}}_0$ (avec rotation autour de $\widehat{\mathbb{L}}_0$).

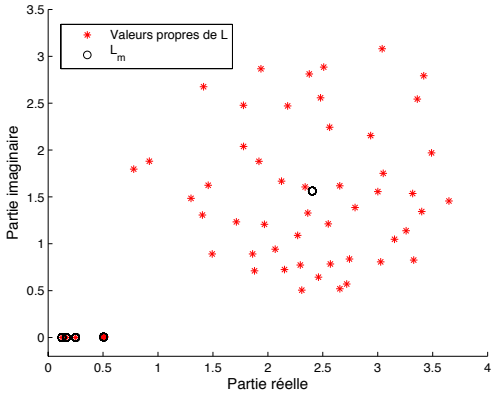


FIGURE 5.8 – Valeurs propres de la matrice $\mathbb{L}$ pour $M = 50$ disques unitaires répartis aléatoirement dans la boîte $[0, 1000] \times [0, 1000]$, pour $ka = 0.1$, $kb = 10$ et $N = 4$. Les cercles représentent les $\widehat{\mathbb{L}}_m$, pour $m = 0, \ldots, N$ et les étoiles les valeurs propres de $\mathbb{L}$.

L'approche que nous proposons consiste à appliquer à la matrice $\mathbb{L}^1$ une seule itération de la méthode de la puissance itérée pour obtenir une estimation de $|\mu^0_{max}|$. Introduisons pour cela la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$

$$\forall \mathbf{X} \in \mathbb{C}^M, \qquad \|\mathbf{X}\|_\infty = \max_{p=1,\ldots,M} |X_p| \,.$$

La première itération de la méthode de la puissance itérée revient à choisir un vecteur $\mathbf{X}$ normalisé puis à effectuer le produit matrice-vecteur $\mathbf{Y} = \mathbb{L}^1\mathbf{X}$. La norme du vecteur $\mathbf{Y}$ est alors une estimation de $|\mu^0_{max}|$. Naturellement, effectuer une seule itération n'est

généralement pas suffisant pour obtenir une estimation précise. Cependant, dans notre cas, l'estimation obtenue est relativement satisfaisante. Notre choix pour $\mathbf{X}$ est le vecteur de coefficients tous égaux à 1

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons alors

$$\mathbf{Y} = \mathbb{L}^1\mathbf{X} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_M \end{pmatrix},$$

avec pour $p = 1, \ldots, M$:

$$Y_p = \widehat{\mathbb{L}}_0 + \frac{ia\sqrt{\pi}e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \sum_{1\leq q\neq p\leq M} \frac{e^{ikb_{pq}}}{\sqrt{kb_{pq}}}. \tag{5.65}$$

La norme infinie de Y est alors une estimation de $\left|\mu^0_{max}\right|$:

$$\left|\mu^0_{max}\right| \simeq \max_{p=1,\ldots,M} |Y_p|. \tag{5.66}$$

Reprenons une situation similaire à celle présentée figure 5.8, soit 50 disques unitaires aléatoirement répartis dans la boîte $[0, 1000] \times [0, 1000]$, avec $ka = 0.1$, $kb = 10$ et $N = 4$. Nous présentons sur la figure 5.9 les coefficients de $\mathbf{Y}$ comparés aux valeurs propres de $\mathbb{L}^1$. Nous remarquons que les coefficients Y_p se "regroupent" autours de $\widehat{\mathbb{L}}_0$, comme les valeurs propres de $\mathbb{L}^1$. Remarquons de plus que les coefficients du vecteur $\mathbf{Y}$ ont une interprétation physique. En effet, $\widehat{\mathbb{L}}_0$ représente la trace sur le bord Γ_p de la fonction de Green $\frac{i}{4}H_0^{(1)}(\cdot)$ centrée sur $\mathbf{O}_p$ (à une constante multiplicative près). De même, chaque terme

$$i\frac{e^{ikb_{pq}}}{\sqrt{kb_{pq}}}\frac{a\sqrt{\pi}e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}}$$

représente la trace sur le bord Γ_p du champ lointain de la fonction de Green centrée sur $\mathbf{O}_q$ (à une constante multiplicative près).

L'estimation (5.66) de $|\mu^0_{max}|$ permet d'estimer la plus grande valeur propre $|\mu_{max}|$ de $\mathbb{L}$. En remplaçant $\widehat{\mathbb{L}}_0$ et Y_p par leurs valeurs respectives dans (5.66) nous obtenons

$$|\mu_{max}| \simeq a \max_{p=1,\ldots,M} \left| -\left[\ln\left(\frac{ka}{2}\right) + \gamma\right] + i\frac{\pi}{2} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-i\pi/4} \sum_{1\leq q\neq p\leq M} \frac{e^{ikb_{pq}}}{\sqrt{kb_{pq}}} \right|. \tag{5.67}$$

Remarquons que si nous majorons $|\mu_{max}|$ par la somme des modules, soit

$$|\mu_{max}| \leq a \left| -\left[\ln\left(\frac{ka}{2}\right) + \gamma\right] + i\frac{\pi}{2} \right| + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{1\leq q\neq p\leq M} \left| \frac{e^{ikb_{pq}}}{\sqrt{kb_{pq}}} \right|,$$

alors nous retrouvons l'estimation obtenue avec le théorème de Gershgorin qui n'est pas satisfaisante comme le montre par exemple la figure 5.10. Par conséquent, nous gardons (5.67).

La figure 5.10 compare $|\mu_{max}|$ aux estimations obtenues par la méthode de la puissance itérée (une itération), par l'approximation de la plus grande valeur propre de la diffraction simple $\widehat{\mathbb{L}}_0$ et par la méthode des disques de Gershgorin. La valeur propre $|\mu_{max}|$ est calculée numériquement par la fonction "eig" de Matlab. Le test est réalisé pour 100 configurations de 50 disques unitaires placés aléatoirement dans la boîte $[0, 1000] \times [0, 1000]$. Ici, nous prenons $N = 4$, $ka = 0.1$ et $kb \geq 10$. Nous constatons que l'estimation par la puissance itérée est, dans cet exemple, une sur-estimation de $|\mu_{max}|$ et qu'elle fournit une meilleure estimation que la valeur propre maximale de la diffraction simple $|\widehat{\mathbb{L}}_0|$. Par ailleurs, l'estimation basée sur l'approche par le théorème de Gershgorin n'est clairement pas satisfaisante.

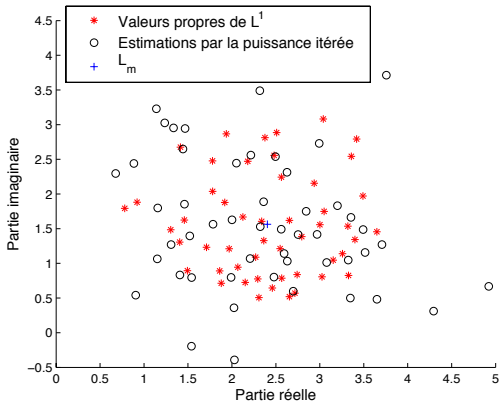


FIGURE 5.9 – Comparaison entre la méthode de la puissance itérée (une seule itération) et les valeurs propres de la matrice $\mathbb{L}^1$ pour $M = 50$ disques unitaires, pour $N = 4$, $k = 0.1$ et $b = 100$.

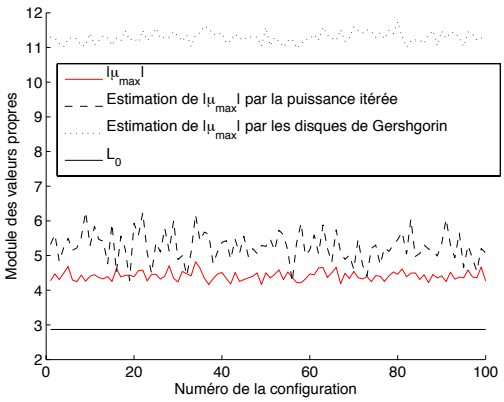


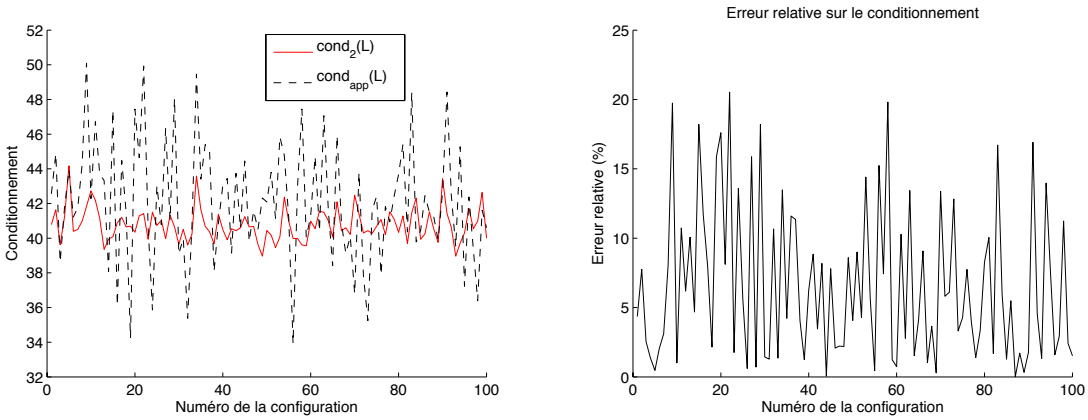
FIGURE 5.10 – Comparaison entre $|\mu_{max}|$, la méthode de la puissance itérée (une seule itération), $\widehat{\mathbb{L}}_0$ et l'estimation obtenue par les disques de Gershgorin, pour 100 configurations différentes de $M = 50$ disques unitaires placés aléatoirement dans la boîte $[0, 1000] \times [0, 1000]$, avec $N = 4$, $k = 0.1$ et $b \geq 100$.

Nous effectuons maintenant l'hypothèse que la matrice est presque normale, et nous

utilisons la quantité $\dfrac{|\mu_{max}|}{|\mu_{min}|}$ pour estimer le conditionnement $\mathrm{cond}_2(\mathbb{L})$ de la matrice $\mathbb{L}$. Nous injectons les approximations de $|\mu_{min}|$ (5.44) et de $|\mu_{max}|$ (5.67) dans le rapport $\dfrac{|\mu_{max}|}{|\mu_{min}|}$ pour obtenir le conditionnement approché $\mathrm{cond}_{app}(\mathbb{L})$ de la matrice $\mathbb{L}$:

$$\mathrm{cond}_{app}(\mathbb{L}) = 2N \max_{p=1,\dots,M} \left| -\left[\ln\left(\frac{ka}{2}\right) + \gamma\right] + i\frac{\pi}{2} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-i\pi/4} \sum_{1\le q\neq p\le M} \frac{e^{ikb_{pq}}}{\sqrt{kb_{pq}}} \right|. \tag{5.68}$$

Un exemple de conditionnement obtenu est montré sur la figure 5.11(a), pour 100 configurations différentes de 50 disques unitaires placés aléatoirement dans la boîte $[0, 1000] \times [0, 1000]$, avec $N = 4$, $ka = 0.1$ et $kb \geq 10$. L'estimation obtenue souffre d'une erreur relative, en moyenne, de 6.6%, ce qui est satisfaisant au vu de la complexité du problème.



(a) Comparaison entre le conditionnement exact et approché

(b) Erreur relative sur le conditionnement (%) : $100\left|\dfrac{\mathrm{cond}_2(\mathbb{L}) - \mathrm{cond}_{app}(\mathbb{L})}{\mathrm{cond}_2(\mathbb{L})}\right|$

FIGURE 5.11 – Comparaison entre le conditionnement exact et approché de $\mathbb{L}$, pour 100 configurations différentes de $M = 50$ disques unitaires placés aléatoirement dans la boîte $[0, 1000] \times [0, 1000]$, avec $k = 0.1$ et $b \geq 100$.

5.4.4 Lien avec l'approximation par éléments finis de frontière

Approximation par éléments finis de frontière

Comme dans le cadre de la diffraction simple, nous introduisons l'approximation par éléments finis de frontière du problème variationnel (5.7) associé à l'EFIE. Pour tout $p = 1, \dots, M$, notons $\Gamma_{p,h}$ une approximation polygonale de la courbe Γ_p, à l'aide de $N_{p,h}$ segments $K_{p,j}$, pour $1 \leq j \leq N_{p,h}$. Nous avons alors

$$\Gamma_{p,h} = \cup_{j=1}^{N_{p,h}} K_{p,j}.$$

Nous désignons de plus par $h_{p,j}$ la longueur du segment $K_{p,j}$ et par h la plus grande de toutes ces longueurs

$$h = \max_{1\le p\le M} \left(\max_{1\le j\le N_{p,h}} h_{p,j} \right).$$

Nous choisissons comme sous-espace d'approximation éléments finis l'espace V_h de $L^2(\Gamma_h)$ des fonctions continues sur Γ_h affines par morceaux

$$V_h := \left\{ \rho_h \in \mathscr{C}^0(\Gamma_h) \text{ tel que } \rho_h|_{K_{p,j}} \in \mathbb{P}_1, \text{ avec } 1 \leq p \leq M \text{ et } 1 \leq j \leq N_{p,h} \right\}.$$

Rappelons que nous supposons le bord Γ et l'onde incidence u^{inc} suffisamment réguliers pour que la densité ρ soit une fonction de $L^2(\Gamma)$. Dans ce cadre, la formulation variationnelle exacte (5.7) est approchée par celle discrète

$$\begin{cases} \text{trouver } \rho_h \in V_h \text{ tel que} \\ \forall \Phi_h \in V_h, \ \ (L_h \rho_h, \Phi_h)_{L^2(\Gamma_h)} = -\left(u^{inc}|_{\Gamma_h}, \Phi_h\right)_{L^2(\Gamma)}. \end{cases}$$

Après approximation des doubles intégrales liées au potentiel de simple couche par des formules de quadrature semi-numérique, nous sommes amené à résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} \text{trouver } \boldsymbol{\rho}_h \in \mathbb{C}^{N_{tot,h}} \text{ tel que} \\ [L_h]\, \boldsymbol{\rho}_h = -[M_h]\mathbf{u}^{\text{inc}}, \end{cases}$$

où $N_{tot,h} = \sum_{p=1}^{M} N_{p,h}$ est le nombre total de segments, $[L_h] \in \mathcal{M}_{N_{tot,h},N_{tot,h}}(\mathbb{C})$ est la matrice du potentiel de simple couche et $[M_h] \in \mathcal{M}_{N_{tot,h},N_{tot,h}}(\mathbb{C})$ la matrice de masse pour les éléments finis linéaires, $\boldsymbol{\rho}_h \in \mathbb{C}^{N_{tot,h}}$ est le vecteur nodal densité et $\mathbf{u}^{\text{inc}}$ est le vecteur nodal incident. Dans la suite, nous notons μ^h_{min} et μ^h_{max} respectivement les valeurs propres de plus petit et plus grand module de la matrice $[M_h]^{-1}\,[L_h]$.

Le disque

Nous relions maintenant la méthode spectrale à l'approximation par éléments finis de frontière. Nous commençons par prendre des obstacles circulaires de même rayon a. Nous maillons uniformément chaque cercle Γ_p par un pas h à l'aide de $N_h = N_{p,h}$ segments, pour $p = 1, \ldots, M$. Le nombre de degrés de liberté N_E utilisés en éléments finis de frontière pour discrétiser l'obstacle Ω_p^- est alors

$$N_E = N_h \simeq \frac{2\pi a}{h}.$$

En comparaison, la méthode spectrale nécessite $2N+1$ modes. En remplaçant formellement N par $\pi a h^{-1} - 1/2$ dans les estimations (5.44) et (5.67) respectivement de μ_{min} et de $|\mu_{max}|$, nous avons, lorsque ka tend vers zéro et kb tend vers l'infini,

$$\begin{cases} \mu^h_{min} \simeq \mu^{app}_{min}(a,h), \\ \left|\mu^h_{max}\right| \simeq |\mu^{app}_{max}(a,k)|, \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \mu^{app}_{min}(a,h) = \dfrac{a}{2\pi a h^{-1} - 1}, \\ |\mu^{app}_{max}(a,k)| = a \max\limits_{p=1,\ldots,M} \left| -\left[\ln\left(\dfrac{ka}{2}\right) + \gamma\right] + i\dfrac{\pi}{2} + i\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} e^{-i\pi/4} \sum\limits_{1 \leq q \neq p \leq M} \dfrac{e^{ikb_{pq}}}{\sqrt{kb_{pq}}} \right|. \end{cases} \tag{5.69}$$

Nous obtenons ensuite l'estimation du conditionnement spectral (5.68) suivante, lorsque ka tend vers zéro et kb tend vers l'infini,

$$\mathrm{cond}(k, a, \Gamma_h) := \mathrm{cond}_2([M_h]^{-1}[L_h]) \simeq \mathrm{cond}_{app}(k, a, h),$$

avec

$$\begin{aligned}\mathrm{cond}_{app}(k, a, h) &= \left|\frac{\mu_{max}^{app}(a, h)}{\mu_{min}^{app}(a, k)}\right| \\ &= (2\pi a h^{-1} - 1) \max_{p=1,\dots,M} \left| -\left[\ln\left(\frac{ka}{2}\right) + \gamma\right] + i\frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-i\pi/4} \sum_{1 \le q \ne p \le M} \frac{e^{ikb_{pq}}}{\sqrt{kb_{pq}}} \right|.\end{aligned} \tag{5.70}$$

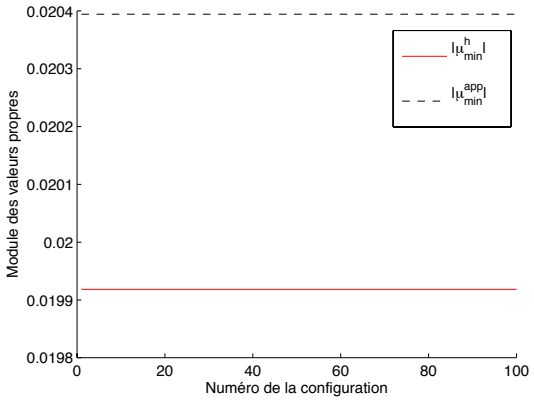
Validons numériquement l'approximation (5.70) sur un exemple. Reprenons les mêmes paramètres géométriques que précédemment, c'est-à-dire $M = 50$ disques unitaires placés aléatoirement dans la boîte $[0, 1000] \times [0, 1000]$, avec $kb \geq 10$ et $ka = 0.1$. Nous utilisons $N_h = 100$ segments pour mailler chaque obstacle. Pour cent configurations différentes, nous calculons les valeurs propres de plus petit et de plus grand module de la matrice $[M_h]^{-1}[L_h]$ ainsi que son conditionnement. Nous comparons ensuite ces valeurs avec leurs estimations respectives. Les courbes ainsi obtenues sont représentées sur la figure 5.12. Commençons par étudier les estimations de la valeur propre μ_{min}^h et du module de la valeur propre μ_{max}^h. D'après les figures 5.12(a) et 5.12(b), l'erreur relative moyenne sur μ_{min}^h est de 2.5%, ce qui est satisfaisant. Concernant l'estimation de $|\mu_{max}^h|$, la figure 5.12(c) montre que l'estimation de $|\mu_{max}^h|$ est du même ordre de grandeur que $|\mu_{max}^h|$. L'erreur relative sur le module est cependant plus importante et vaut, en moyenne, 19%. Toutefois, l'estimation obtenue sur le conditionnement est relativement précise, avec une erreur relative moyenne de 7%, comme l'attestent les figures 5.12(e) et 5.12(f). Ainsi, l'adaptation de la méthode spectrale à l'approximation par éléments finis de frontières conduit à des estimations satisfaisantes.

Adaptation à d'autres géométries

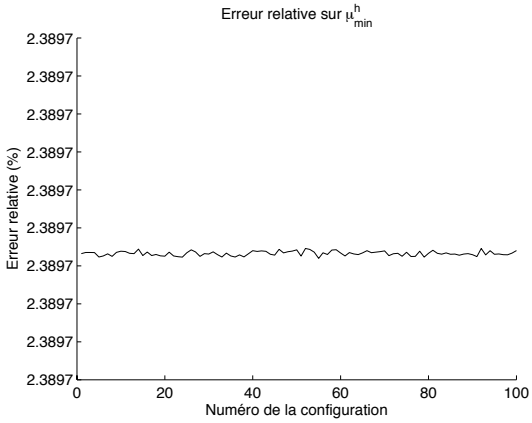
Dans le cadre de la diffraction simple (paragraphe 5.3.2), nous avons adapté formellement les estimations des valeurs propres à des ellipses et des rectangles. Pour ce faire, nous avons remplaçé formellement le rayon a et le pas h par respectivement un rayon équivalent a_{eqv} et un pas équivalent h_{eqv} dans les approximations des valeurs propres de plus petit et plus grand module. Nous proposons de tester cette méthode dans le cadre de la diffraction multiple pour des obstacles éloignés.

Nous commençons par considérer des obstacles ellipsoidaux de demi-grand axe a_{x_1} dans la direction x_1 et a_{x_2} dans la direction x_2. En présence d'une seule ellipse, nous avions proposé trois rayons équivalents (5.25), que nous rappelons

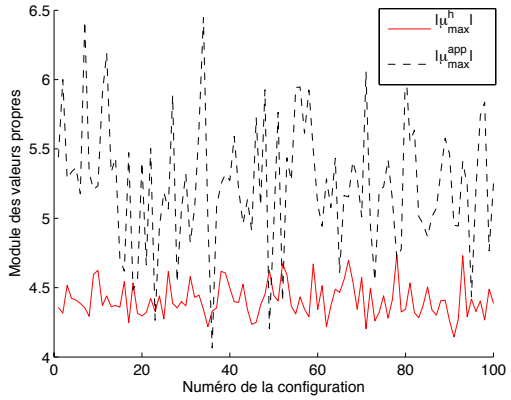
$$\begin{aligned} a_{\mathrm{eqv}}^1 &= \frac{a_{x_1} + a_{x_2}}{2}, \\ a_{\mathrm{eqv}}^2 &= \frac{2 a_{x_1} a_{x_2}}{a_{x_1} + a_{x_2}}, \\ a_{\mathrm{eqv}}^3 &= \frac{\sqrt{a_{x_1}^2 + a_{x_2}^2}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$



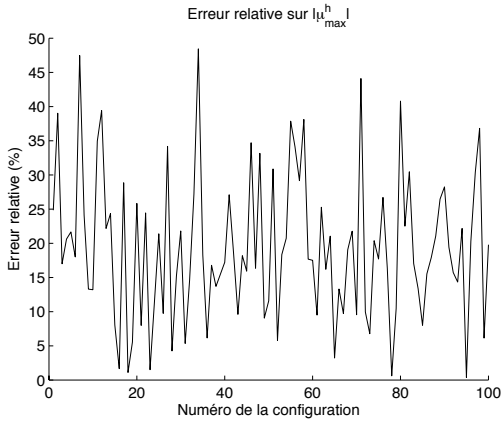
(a) Comparaison entre le module de la plus petite valeur propre (en module) et son estimation (5.69)



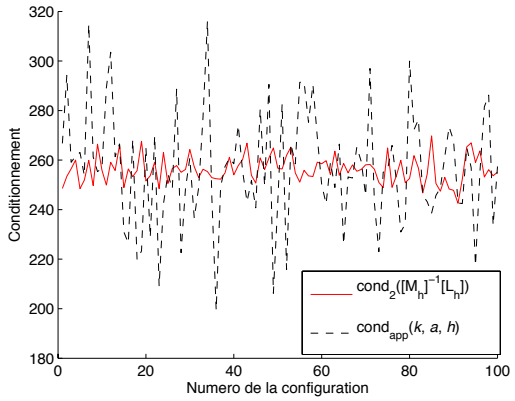
(b) Erreur relative sur μ^h_{min}



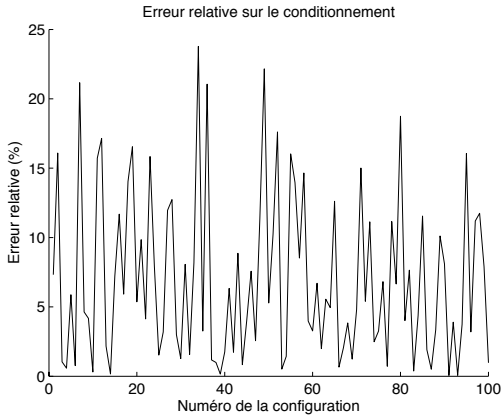
(c) Comparaison entre le module de la plus grande valeur propre (en module) et son estimation (5.69)



(d) Erreur relative sur $\left|\mu^h_{max}\right|$



(e) Comparaison entre le conditionnement exact et approché



(f) Erreur relative sur le conditionnement

FIGURE 5.12 – Comparaison des estimations (5.69) et (5.70) du module des plus petites et grandes valeurs propres ainsi que du conditionnement de la matrice $[M_h]^{-1}[L_h]$. Les obstacles sont des disques unitaires discrétisés à l'aide de $N_h = 50$ segments. Pour chacune des 100 configurations différentes, nous plaçons $M = 50$ disques aléatoirement dans la boîte $[0, 1000] \times [0, 1000]$, avec $k = 0.1$ et $b \geq 100$.

Concernant le pas équivalent h_{eqv}, nous avions constaté que le plus petit pas de discrétisation utilisé conduisait à la meilleure estimation de μ^h_{min}. Nous posons donc

$$h_{\text{eqv}} = \min_{1\leq p\leq M} \min_{1\leq j\leq N_{h,p}} h_{p,j}.$$

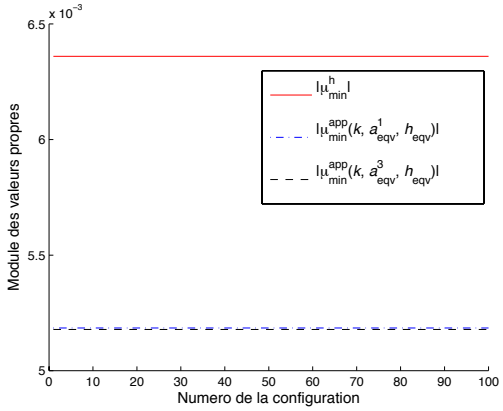
Ainsi, pour obtenir une estimation de la valeur propre μ^h_{min} et du module de la valeur propre μ^h_{max}, nous remplaçons formellement a par un des rayons équivalents a^j_{eqv}, pour $j = 1, 2$ ou 3, et le pas h par h_{eqv}, dans les expressions (5.69) de $\mu^{app}_{min}(a, h)$ et $\mu^{app}_{max}(a, k)$. Cette substitution formelle est ensuite effectuée également dans l'expression (5.70) de $\text{cond}_{app}(a, h, k)$ afin d'obtenir une estimation du conditionnement de la matrice $[M_h]^{-1}[L_h]$. Nous validons et comparons ces estimations pour les différents rayons équivalents sur un exemple numérique. Nous considérons pour cela $M = 50$ ellipses de demi-grand axes $a_{x_1} = 1$ et $a_{x_2} = 0.25$ placées aléatoirement dans la boîte $[0, 1000] \times [0, 1000]$. Nous posons, de plus, $k = 0.1$ et $b \geq 100$, où b représente la plus petite distance entre les centres de deux ellipses. Pour cent placements différents d'obstacles, nous comparons numériquement les valeurs propres de la matrice $[M_h]^{-1}[L_h]$ avec leurs estimations, ainsi que son conditionnement et son estimation. Les résultats sont présentés sur la figure 5.13. Les simulations numériques ont montré que le rayon équivalent a^2_{eqv} donnait lieu à une très mauvaise estimation de $|\mu_{max}|$ et par suite, du conditionnement. Afin d'alléger les figures, seuls les résultats obtenus avec les rayons équivalents a^1_{eqv} et a^3_{eqv} sont représentés. Commençons par étudier l'estimation de μ^h_{min}, sur les figures 5.14(a) et 5.13(b). Bien que du même ordre, l'estimation souffre d'une erreur relative en moyenne de 19%, pour les deux rayons équivalents a^1_{eqv} et a^3_{eqv}. Cette erreur est beaucoup plus importante que dans le cas d'obstacles circulaires. Ceci s'explique par le fait que la valeur propre de plus petit module dépend grandement du pas de discrétisation minimum utilisé. Or, dans le cadre de l'ellipse et surtout si elle est relativement "aplatie", le pas de discrétisation peut être très petit notamment dans les zones de fortes courbures. L'estimation de μ^h_{min} devient alors plus délicate. Concernant l'estimation du module de μ^h_{max}, nous constatons sur les figures 5.14(c) et 5.13(d) que le rayon a^1_{eqv} conduit ici à une meilleure estimation que le rayon a^3_{eqv}, contrairement à ce que nous avions obtenu dans le cadre de la diffraction simple. Plus précisément, l'erreur relative sur $|\mu^h_{max}|$ est d'environ 9% en moyenne pour le rayon équivalent a^1_{eqv}, ce qui est du même ordre que dans le cas d'obstacles circulaires, et de 22% pour le rayon équivalent a^3_{eqv}. Enfin, les deux dernières figures 5.13(e) et 5.13(f) comparent le conditionnement de la matrice $[M_h]^{-1}[L_h]$ avec son estimation. Nous ne conservons que le rayon équivalent a^1_{eqv}, étant donné que celui-ci fournit la meilleure estimation de $|\mu_{max}|$. De cette manière, nous obtenons une erreur relative sur le conditionnement de 11% en moyenne, ce qui est plutôt satisfaisant.

Pour finir, nous adaptons les estimations précédentes à des rectangles. Pour un unique obstacle rectangulaire de demi-longueurs a_{x_1} et a_{x_2}, nous avions proposé de prendre le rayon équivalent a^4_{eqv} (5.26), donné par

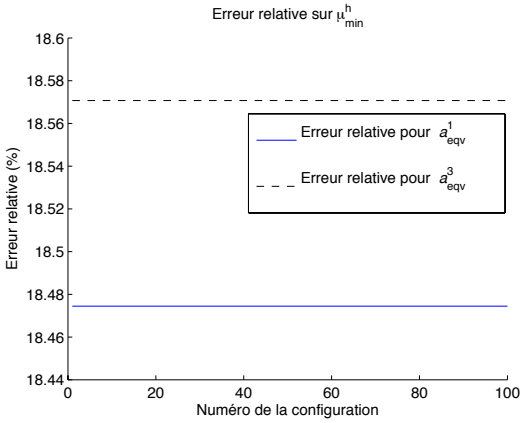
$$a^4_{\text{eqv}} = \frac{(1+\sqrt{2})}{2} \frac{\sqrt{a^2_{x_1} + a^2_{x_2}}}{\sqrt{2}}.$$

Le pas équivalent h_{eqv} est toujours choisi comme le plus petit pas de discrétisation utilisé

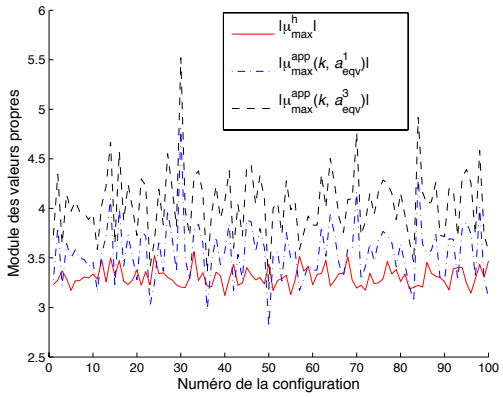
$$h_{\text{eqv}} = \min_{1\leq p\leq M} \min_{1\leq j\leq N_{h,p}} h_{p,j}.$$



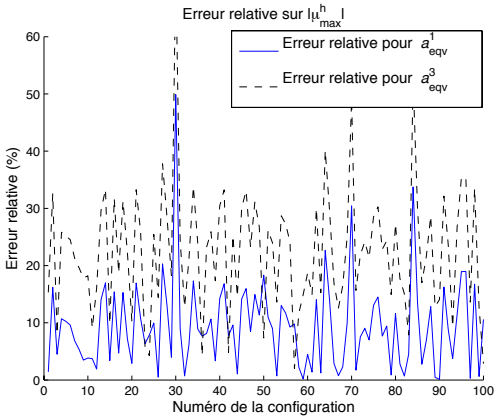
(a) Comparaison entre le module de la plus petite valeur propre (en module) et son estimation



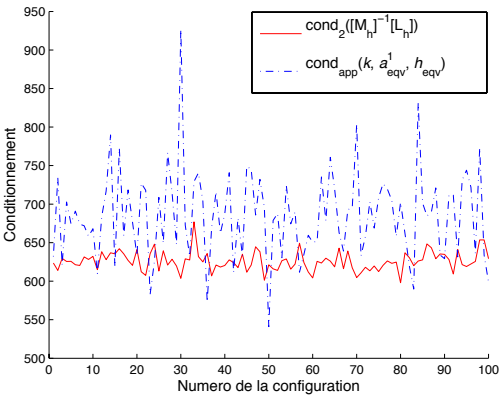
(b) Erreur relative sur μ^h_{min}



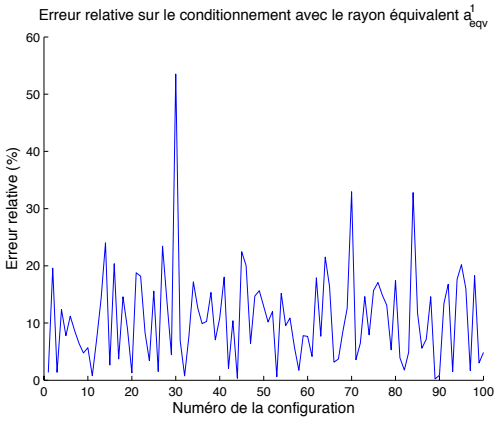
(c) Comparaison entre le module de la plus grande valeur propre (en module) et son estimation



(d) Erreur relative sur $\left|\mu^h_{max}\right|$



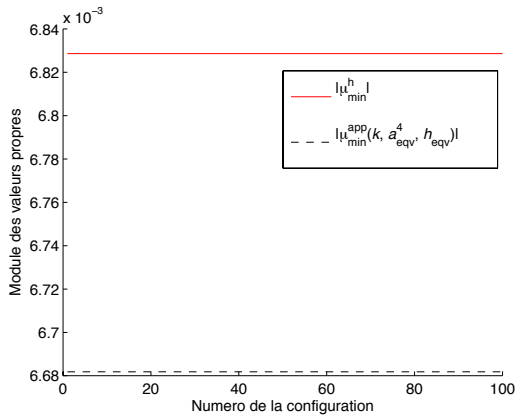
(e) Comparaison entre le conditionnement exact et approché



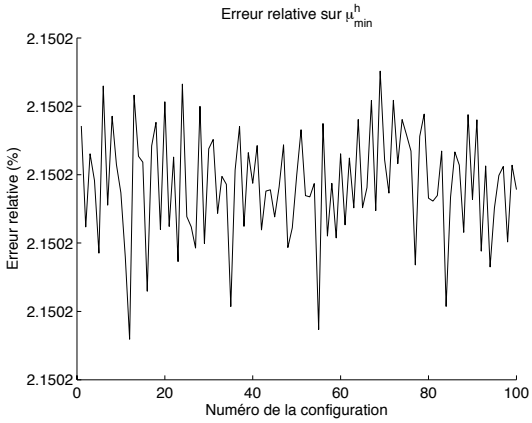
(f) Erreur relative sur le conditionnement

FIGURE 5.13 – Comparaison des estimations du module des plus petites et grandes valeurs propres ainsi que du conditionnement de la matrice $[M_h]^{-1}[L_h]$ pour des ellipses de demi-grands axes $a_{x_1} = 1$ et $a_{x_2} = 0.25$. Chaque ellipse est discrétisée par $N_h = 50$ segments. Pour chacune des 100 configurations différentes, nous plaçons $M = 50$ ellipses aléatoirement dans la boîte $[0, 1000] \times [0, 1000]$, avec $k = 0.1$ et $b \geq 100$.

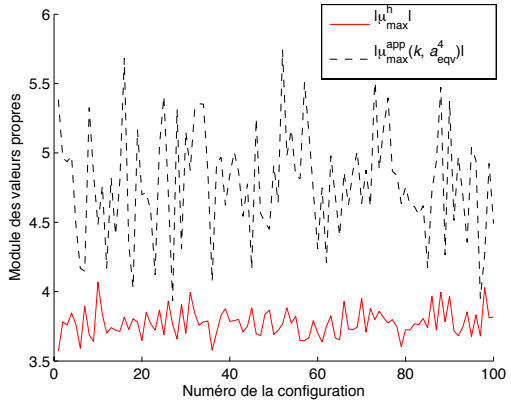
Nous donnons un exemple numérique reprenant les mêmes paramètres que précédemment : nous considérons $M = 50$ rectangles de demi-longueurs $a_{x_1} = 1$ et $a_{x_2} = 0.25$ placés aléatoirement dans la boîte $[0, 1000] \times [0, 1000]$. Le nombre d'onde k est fixé à 0.1 et la plus petite distance b autorisée entre deux centres de rectangles est égale à 100. Ensuite, nous calculons numériquement le conditionnement de la matrice $[M_h]^{-1}[L_h]$ ainsi que son estimation (5.70) pour cent placements différents d'obstacles. Enfin, chaque rectangle est maillé à l'aide de $N_h = 48$ segments (12 segments par côté). Nous présentons les courbes obtenues sur la figure 5.14. Comme le montrent les figures 5.14(a) et 5.14(b), l'estimation de la valeur propre de plus petit module est très précise, puisque l'erreur relative moyenne est d'environ 2%. Ceci est probablement du au fait que la courbure du rectangle, sur chaque côté est nulle et ainsi, bien que le maillage soit globalement non uniforme, le pas de discrétisation est constant sur chaque côté. Par ailleurs, l'estimation du module de la valeur propre de plus grand module μ^h_{max} conduit à une erreur relative moyenne de 27%, d'après les figures 5.14(c) et 5.14(d). Cette erreur est plus importante que celle obtenue avec des ellipses ou des disques. Toutefois, l'estimation du conditionnement est très précise, avec une erreur relative moyenne de 7% (figures 5.14(e) et 5.14(f)). Ainsi, notre extension formelle aux ellipses et aux rectangles semble conduire à des estimations satisfaisantes du conditionnement de la matrice $[M_h]^{-1}[L_h]$ obtenue par une approximation par éléments finis de frontière, dans le cadre de la diffraction multiple à basse fréquence et en présence d'obstacles très éloignés.



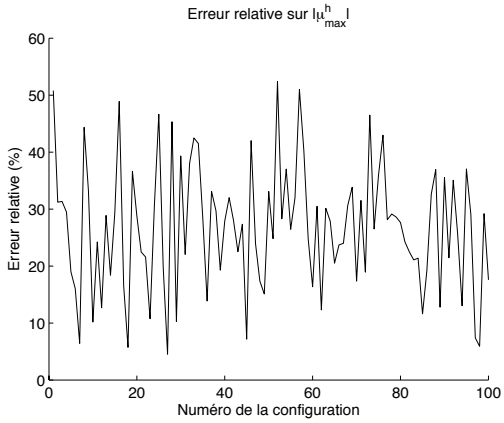
(a) Comparaison entre le module de la plus petite valeur propre (en module) et son estimation



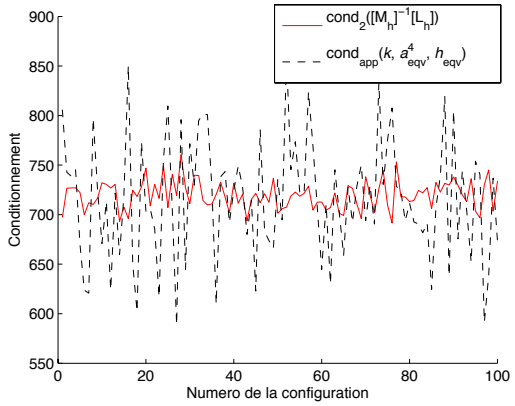
(b) Erreur relative sur μ^h_{min}



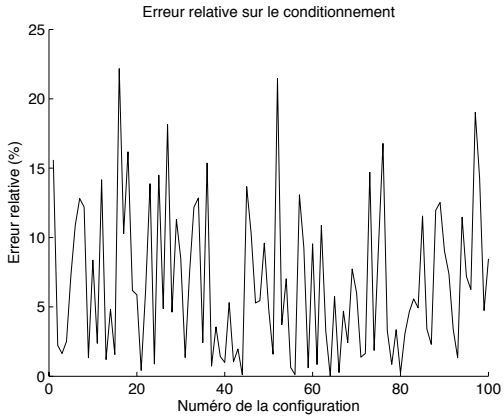
(c) Comparaison entre le module de la plus grande valeur propre (en module) et son estimation



(d) Erreur relative sur $|\mu^h_{max}|$



(e) Comparaison entre le conditionnement exact et approché



(f) Erreur relative sur le conditionnement

FIGURE 5.14 – Comparaison des estimations du module des plus petites et grandes valeurs propres ainsi que du conditionnement de la matrice $[M_h]^{-1}[L_h]$ pour des obstacles rectangulaires de demi-côté $a_{x_1} = 1$ et $a_{x_2} = 0.25$. Un nombre $N_h = 48$ segments est utilisé pour mailler chaque rectangle. Pour chacune des 100 configurations différentes, nous plaçons $M = 50$ rectangles aléatoirement dans la boîte $[0, 1000] \times [0, 1000]$, avec $k = 0.1$ et $b \geq 100$.

5.5 Estimation du conditionnement de l'opérateur de simple couche à basse fréquence pour des obstacles proches

Dans cette section, nous nous intéressons au régime particulier où ka et kb tendent vers 0 "à la même vitesse". En d'autres termes, nous supposons que les obstacles sont petits et rapprochés. Pour modéliser ce régime, nous disposons entre autres de deux méthodes. La première consiste à choisir un nombre d'onde k fixe puis d'effectuer une homothétie sur la configuration géométrique. Plus précisément, nous considérons une configuration géométrique de référence composée de M obstacles circulaires $\widetilde{\Omega}_p$, pour $p = 1, \ldots, M$, de centre $\widetilde{\mathbf{O}}_p$ et de rayon $\widetilde{a}_p$. La distance entre les centres $\widetilde{\mathbf{O}}_p$ et $\widetilde{\mathbf{O}}_q$ est notée $\widetilde{b}_{pq}$. Nous effectuons ensuite une homothétie de rapport δ sur l'ensemble de la configuration de référence. Autrement dit, les centres $(\mathbf{O}_p)_{p=1,\ldots,M}$ des nouveaux obstacles Ω_p^- sont obtenus par la relation

$$\mathbf{O}\mathbf{O}_p = \delta \mathbf{O}\widetilde{\mathbf{O}}_p,$$

où $\mathbf{O}$ est l'origine. Ceci implique que la distance b_{pq} entre les centres $\mathbf{O}_p$ et $\mathbf{O}_q$ est proportionnelle à $\widetilde{b}_{pq}$

$$b_{pq} = \delta \widetilde{b}_{pq}.$$

De même, les rayons $(a_p)_{p=1,\ldots,M}$ vérifient

$$a_p = \delta \widetilde{a}_p.$$

Ainsi, nous avons

$$ka_p = \delta k \widetilde{a}_p, \qquad \text{et} \qquad kb_{pq} = \delta k \widetilde{b}_{pq}.$$

Puis, nous laissons δ tendre vers 0 de sorte que (ka_p) et (kb_{pq}) tendent vers 0 à la "même vitesse". La seconde méthode consiste à fixer la géométrie et à faire tendre uniquement le nombre d'onde k vers 0. C'est cette méthode que nous utilisons. De ce fait, les rayons a_p, les centres des obstacles $\mathbf{O}_p$ et les distances entre les centres b_{pq} sont supposés constants dans toute cette section.

Dans ce paragraphe et à l'aide d'une approche par la matrice limite, nous réussissons à obtenir une estimation des valeurs propres μ_{min} et μ_{max} respectivement de plus petit et de plus grand module de la matrice $\mathbb{L}$ lorsque k tend vers 0. Nous montrons en particulier que nous pouvons toujours estimer μ_{min} par la plus petite valeur propre (en module) de la diffraction simple. Ces approximations nous permettent ensuite d'estimer le conditionnement de la matrice. Enfin, nous terminons ce paragraphe en adaptant formellement ces estimations au cas d'obstacles ellipsoïdaux ou rectangulaires.

5.5.1 Approche par la matrice limite

Notre approche est similaire à celle développée dans le cas d'obstacles éloignés, dans le paragraphe 5.4.3. En effet, nous effectuons une analyse asymptotique des coefficients de la matrice $\mathbb{L}$ lorsque le nombre d'onde k tend vers 0. Puis, à partir de ces comportements asymptotiques, nous construisons une matrice limite $\mathbb{L}^0$ et obtenons la relation suivante liant $\mathbb{L}$ et $\mathbb{L}^0$

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}^0 + O\left(k^2 \ln(k)\right).$$

Nous approcherons alors le spectre de $\mathbb{L}$ par celui de $\mathbb{L}^0$.

Nous commençons par étudier chaque bloc diagonal $\mathbb{L}^{p,p}$, pour $p = 1, \ldots, M$. Rappelons que ces matrices sont diagonales et que ses coefficients $\mathbb{L}^{p,p}_{m,m}$ s'écrivent, pour $m = -N_p, \ldots, N_p$

$$\mathbb{L}^{p,p}_{m,m} = \frac{i\pi a_p}{2} J_m(ka_p) H^{(1)}_m(ka_p).$$

Le lemme 5.5 donne l'asymptotique de ces coefficients lorsque $ka_p \to 0$, asymptotiques qui restent valables lorsque seul le nombre d'onde k tend vers 0. Nous résumons sans les démontrer ces résultats dans le lemme suivant. Rappelons par ailleurs que l'ensemble I est l'ensemble des couples d'indices (p, m), défini par

$$I = \{(p, m) \in \mathbb{Z} \text{ tels que } 1 \leq p \leq M \text{ et } -N_p \leq m \leq N_p\}.$$

Lemme 5.13. *Soit un couple d'indices (p, m) de I. Lorsque $k \to 0$, nous avons le résultat suivant*

$$\mathbb{L}^{p,p}_{m,m} = \begin{cases} (\mathbb{L}^0)^{p,p}_{0,0} + O\left((k)^2 \ln(k)\right) & \textit{si } m = 0, \\ (\mathbb{L}^0)^{p,p}_{m,m} + O\left((k)^2\right) & \textit{sinon,} \end{cases} \tag{5.71}$$

avec

$$(\mathbb{L}^0)^{p,p}_{m,m} = \begin{cases} -a_p \left[\ln\left(\frac{ka_p}{2}\right) + \gamma\right] + i\frac{\pi a_p}{2} & \textit{si } m = 0, \\ \frac{a_p}{2|m|} & \textit{sinon.} \end{cases} \tag{5.72}$$

Comme dans la section 5.4.3, pour tout $p = 1, \ldots, M$, nous construisons la sous matrice diagonale $(\mathbb{L}^0)^{p,p}$, de taille $(2N_p + 1) \times (2N_p + 1)$, définie par

$$(\mathbb{L}^0)^{p,p} = \begin{pmatrix} (\mathbb{L}^0)^{p,p}_{-N_p,-N_p} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & (\mathbb{L}^0)^{p,p}_{0,0} & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & (\mathbb{L}^0)^{p,p}_{N_p,N_p} \end{pmatrix}, \tag{5.73}$$

où les coefficients $(\mathbb{L}^0)^{p,p}_{m,m}$ sont donnés par la relation (5.72). La relation (5.71) entre les coefficients de $\mathbb{L}^{p,p}$ et ceux de $(\mathbb{L}^0)^{p,p}$ implique que, lorsque $k \to 0$, nous avons

$$\mathbb{L}^{p,p} = (\mathbb{L}^0)^{p,p} + O\left(k^2 \ln(k)\right),$$

pour $p = 1, \ldots, M$. Remarquons que la matrice limite $(\mathbb{L}^0)^{p,p}$ est la même que lorsque les obstacles étaient éloignés. Ceci est tout à fait naturel puisque la différence essentielle avec la section précédente apparaît dans l'asymptotique par le biais du terme kb_{pq} représentant la distance entre les obstacles Ω^-_p et Ω^-_q. Ces termes n'interviennent pas dans les blocs diagonaux $\mathbb{L}^{p,p}$ mais uniquement dans les blocs extra-diagonaux $\mathbb{L}^{p,q}$, pour $p \neq q$.

Le comportement asymptotique des coefficients $\mathbb{L}^{p,q}_{m,n}$ de ces blocs extra-diagonaux diffère selon le couple d'indices m et n. En fonction de ces indices, nous divisons chaque bloc $\mathbb{L}^{p,q}$, pour $p \neq q$, en 5 zones, numérotées de 0 à 4, comme indiqué sur la figure 5.15. Nous effectuons ensuite une analyse asymptotique des coefficients $\mathbb{L}^{p,q}_{m,n}$ lorsque $k \to 0$ selon chacune des zones. Les résultats obtenus sont résumés dans le lemme suivant.

$n \rightarrow$, $m \downarrow$

2	4	4	4	4	1	1	1	1	1	1
3	2	4	4	4	1	1	1	1	1	1
3	3	2	4	4	1	1	1	1	1	1
3	3	3	2	4	1	1	1	1	1	1
3	3	3	3	2	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	2	3	3	3	3
1	1	1	1	1	1	4	2	3	3	3
1	1	1	1	1	1	4	4	2	3	3
1	1	1	1	1	1	4	4	4	2	3
1	1	1	1	1	1	4	4	4	4	2

FIGURE 5.15 – Répartition par "zones" du bloc $\mathbb{L}^{p,q}$ pour $p \neq q$.

Lemme 5.14. *Soient deux couples d'indices (p,m) et (q,n) de I tels que $p \neq q$. Lorsque k tend vers 0, les coefficients $\mathbb{L}^{p,q}_{m,n}$ de la matrice $\mathbb{L}$ ont le comportement asymptotique suivant*

• ***Zone*** 0 *:* $(m = n = 0)$

$$\mathbb{L}^{p,q}_{0,0} = -\sqrt{a_p a_q}\left[\ln\left(\frac{kb_{pq}}{2}\right) + \gamma\right] + i\frac{\pi\sqrt{a_p a_q}}{2} + O\left(k^2\ln(k)\right).$$

• ***Zone*** 1 *:* $(mn \leq 0$ *et* $(m,n) \neq (0,0))$

$$\mathbb{L}^{p,q}_{m,n} = i(-1)^m \frac{\sqrt{a_p a_q}}{2}\frac{(|m|+|n|-1)!}{|m|!|n|!}\left(\frac{a_p}{b_{pq}}\right)^{|m|}\left(\frac{a_q}{b_{pq}}\right)^{|n|} e^{i(n-m)\alpha_{pq}} + \begin{cases} O\left(k^2\ln(k)\right) & \text{si } |m|+|n|=1, \\ O\left(k^2\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

• ***Zone*** 2 *:* $(n = m, m \neq 0$ *et* $n \neq 0)$

$$\mathbb{L}^{p,q}_{m,m} = O\left(k^{2|m|}\ln(k)\right).$$

• ***Zone*** 3 *:* $((0 > m > n)$ *ou* $(0 < m < n))$

$$\mathbb{L}^{p,q}_{m,n} = O\left(k^{2|m|}\right).$$

• ***Zone*** 4 *:* $((0 > n > m)$ *ou* $(0 < n < m))$

$$\mathbb{L}^{p,q}_{m,n} = O\left(k^{2|n|}\right).$$

Démonstration. Prouvons les comportements asymptotiques zone par zone.

• **Zone** 0, $m = n = 0$: les coefficients $\mathbb{L}^{p,q}_{m,n}$ de cette zone s'écrivent

$$\mathbb{L}^{p,q}_{0,0} = i\frac{\pi\sqrt{a_p a_q}}{2} J_0(ka_p)H_0^{(1)}(kb_{pq})J_0(ka_q). \tag{5.74}$$

Rappelons le comportement asymptotique de la fonction de Hankel de première espèce d'ordre 0 lorsque $k \to 0$ (voir les relations (9.1.8) et (9.1.13) dans [1])

$$H_0^{(1)}(kb_{pq}) = 1 + i\frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{kb_{pq}}{2}\right) + \gamma\right] + O\left(k^2\ln(k)\right), \tag{5.75}$$

et de la fonction de Bessel d'ordre $m \in \mathbb{N}$ (équation (9.1.10) dans [1])

$$J_m(ka_p) = \frac{1}{m!}\left(\frac{ka_p}{2}\right)^m + O\left(k^{m+2}\right). \tag{5.76}$$

En injectant (5.76) et (5.75) dans (5.74), nous obtenons

$$\mathbb{L}_{0,0}^{p,q} = i\frac{\pi\sqrt{a_p a_q}}{2}\left[1 + O\left(k^2\right)\right]\left[1 + i\frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{kb_{pq}}{2}\right) + \gamma\right] + O\left(k^2\ln(k)\right)\right]\left[1 + O\left(k^2\right)\right],$$

soit, après développement

$$\mathbb{L}_{0,0}^{p,q} = -\sqrt{a_p a_q}\left[\ln\left(\frac{kb_{pq}}{2}\right) + \gamma\right] + i\frac{\pi\sqrt{a_p a_q}}{2} + O\left(k^2\ln(k)\right),$$

qui est la relation désirée.

• **Zone** 1 ($mn \leq 0$ et $(m,n) \neq (0,0)$). Introduisons la fonction signe sgn telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{sgn}(n) = 1$ si $n \geq 0$ et $\mathrm{sgn}(n) = -1$ si $n < 0$. Grâce à (5.30), écrivons les coefficients $\mathbb{L}_{m,n}^{p,q}$ sous la forme suivante

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_{m,n}^{p,q} &= (\mathrm{sgn}(m))^m(\mathrm{sgn}(n))^n(\mathrm{sgn}(n-m))^{n-m}\\ &\quad i\frac{\pi\sqrt{a_p a_q}}{2}e^{i(n-m)\alpha_{pq}}J_{|m|}(ka_p)H_{|n-m|}^{(1)}(kb_{pq})J_{|n|}(ka_q).\end{aligned} \tag{5.77}$$

Notons que les indices des fonctions de Bessel et de Hankel sont positifs. Pour les coefficients de la zone 1, les indices m et n vérifient $mn \leq 0$. Nous avons alors, d'une part,

$$|n-m| = |n| + |m|,$$

et, d'autre part, $\mathrm{sgn}(m) = -\mathrm{sgn}(n)$ et $\mathrm{sgn}(n-m) = \mathrm{sgn}(n)$, ce qui implique que

$$(\mathrm{sgn}(m))^m(\mathrm{sgn}(n))^n(\mathrm{sgn}(n-m))^{n-m} = (-\mathrm{sgn}(n))^m(\mathrm{sgn}(n))^n(\mathrm{sgn}(n))^{n+m} = (-1)^m.$$

Les coefficients $\mathbb{L}_{m,n}^{p,q}$ de cette zone s'écrivent, d'après (5.77),

$$\mathbb{L}_{m,n}^{p,q} = (-1)^m i\frac{\pi\sqrt{a_p a_q}}{2}e^{i(n-m)\alpha_{pq}}J_{|m|}(ka_p)H_{|m|+|n|}^{(1)}(kb_{pq})J_{|n|}(ka_q). \tag{5.78}$$

Rappelons le comportement asymptotique des fonctions de Hankel de première espèce et d'ordre $m > 0$ lorsque $k \to 0$ (voir relation (9.1.9) et (9.1.11) dans [1])

$$H_m^{(1)}(kb_{pq}) = \frac{(m-1)!}{\pi}\left(\frac{kb_{pq}}{2}\right)^{-m} + O\left(f_m(k)\right), \tag{5.79}$$

où les fonctions f_m sont définies par

$$f_1(k) = k\ln(k) \qquad \text{et} \qquad f_m(k) = k^{2-m} \text{ pour } m \geq 2. \tag{5.80}$$

Ensuite, nous exploitons les comportements asymptotiques des fonctions de Bessel (5.76) et de Hankel (5.79) dans l'expression (5.78) des coefficients $\mathbb{L}_{m,n}^{p,q}$ pour obtenir

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_{m,n}^{p,q} &= i(-1)^m\frac{\pi\sqrt{a_p a_q}}{2}e^{i(n-m)\alpha_{pq}}\left[\frac{1}{|m|!}\left(\frac{ka_p}{2}\right)^{|m|} + O\left(k^{|m|+2}\right)\right]\\ &\quad\left[\frac{(|m|+|n|-1)!}{\pi}\left(\frac{kb_{pq}}{2}\right)^{-|m|-|n|} + O\left(f_{|m|+|n|}(k)\right)\right]\left[\frac{1}{|n|!}\left(\frac{ka_q}{2}\right)^{|n|} + O\left(k^{|n|+2}\right)\right].\end{aligned}$$

Notons que nous pouvons utiliser la relation asymptotique (5.79) des fonctions de Hankel d'ordre $|m|+|n|$. En effet, pour les coefficients de cette zone, le couple d'indice (m,n) vérifie $mn \leq 0$ et $(m,n) \neq (0,0)$, ce qui implique notamment que $|m|+|n| \neq 0$. L'ordre des fonctions de Hankel étudiées est ainsi non nul. Nous développons ensuite la relation précédente pour obtenir

$$\mathbb{L}_{m,n}^{p,q} = i(-1)^m \frac{\sqrt{a_p a_q}}{2} e^{i(n-m)\alpha_{pq}} \frac{(|m|+|n|-1)!}{|m|!|n|!} \left(\frac{ka_p}{2}\right)^{|m|} \left(\frac{ka_q}{2}\right)^{|n|} \left(\frac{2}{kb_{pq}}\right)^{|m|+|n|} + O\left(k^{|n|+|m|+2-|m|-|n|}\right) + O\left(k^{|m|+|n|} f_{|m|+|n|}(k)\right).$$

Après simplifications, il vient que

$$\mathbb{L}_{m,n}^{p,q} = i(-1)^m \frac{\sqrt{a_p a_q}}{2} \frac{(|m|+|n|-1)!}{|m|!|n|!} \left(\frac{a_p}{b_{pq}}\right)^{|m|} \left(\frac{a_q}{b_{pq}}\right)^{|n|} e^{i(n-m)\alpha_{pq}} + O\left(k^2\right) + O\left(k^{|m|+|n|} f_{|m|+|n|}(k)\right). \quad (5.81)$$

Or, d'après la définition des fonctions $f_{|m|+|n|}$, nous avons

$$k^{|m|+|n|} f_{|m|+|n|}(k) = \begin{cases} k^2 \ln(k) & \text{si } |m|+|n| = 1, \\ k^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En injectant cette relation dans (5.81), il vient la relation souhaitée.

• **Zone** 2, ($n = m, m \neq 0$ et $n \neq 0$). Pour démontrer les relations des zones 2, 3 et 4, nous avons besoin d'étudier uniquement le module du coefficient $\mathbb{L}_{m,n}^{p,q}$, soit, dans le cas général

$$\left|\mathbb{L}_{m,n}^{p,q}\right| = \frac{\sqrt{a_p a_q}}{2} \left|J_{|m|}(ka_p)\right| \left|H_{|n-m|}^{(1)}(kb_{pq})\right| \left|J_{|n|}(ka_q)\right|. \quad (5.82)$$

Dans le cas particulier de la zone 2, nous avons $|n-m| = 0$, avec $m \neq 0$ et $n \neq 0$. Le module d'un des coefficients $\mathbb{L}_{m,n}^{p,q}$ de cette zone s'écrit alors

$$\left|\mathbb{L}_{m,n}^{p,q}\right| = \frac{\sqrt{a_p a_q}}{2} \left|J_{|m|}(ka_p)\right| \left|H_0^{(1)}(kb_{pq})\right| \left|J_{|n|}(ka_q)\right|.$$

Nous utilisons ensuite les asymptotiques des fonctions de Bessel (5.76) et de Hankel d'ordre 0 (5.75) pour obtenir

$$\left|\mathbb{L}_{m,n}^{p,q}\right| = \left|\frac{\pi\sqrt{a_p a_q}}{2} \left[\left(\frac{ka_p}{2}\right)^{|m|} + O\left(k^{|m|+2}\right)\right] \left[1 + i\frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{kb_{pq}}{2}\right) + \gamma\right] + O\left(k^2 \ln(k)\right)\right] \left[\left(\frac{ka_q}{2}\right)^{|m|} + O\left(k^{|m|+2}\right)\right]\right|.$$

Ceci implique directement la relation cherchée

$$\mathbb{L}_{m,n}^{p,q} = O\left(k^{2|m|} \ln(k)\right).$$

• **Zone** 3. Comme $(0 > m > n)$ ou $(0 < m < n)$, nous avons $|n-m| = |n|-|m|$. L'expression (5.82) du module du coefficient $\mathbb{L}_{m,n}^{p,q}$ devient

$$\left|\mathbb{L}_{m,n}^{p,q}\right| = \frac{\sqrt{a_p a_q}}{2} \left|J_{|m|}(ka_p)\right| \left|H_{|n|-|m|}^{(1)}(kb_{pq})\right| \left|J_{|n|}(ka_q)\right|.$$

Nous utilisons les asymptotiques des fonctions de Bessel (5.76) et de Hankel (5.79) pour obtenir

$$\left|\mathbb{L}^{p,q}_{m,n}\right| = \left|\frac{\pi\sqrt{a_p a_q}}{2}\left[\frac{1}{|m|!}\left(\frac{ka_p}{2}\right)^{|m|} + O\left(k^{|m|+2}\right)\right]\right.$$
$$\left.\left[\frac{(|n|-|m|-1)!}{\pi}\left(\frac{kb_{pq}}{2}\right)^{-|n|+|m|} + O\left(f_{|n|-|m|}(k)\right)\right]\left[\frac{1}{|n|!}\left(\frac{ka_q}{2}\right)^{|n|} + O\left(k^{|n|+2}\right)\right]\right|.$$

Ainsi, il vient directement que

$$\mathbb{L}^{p,q}_{m,n} = O\left(k^{2|m|}\right).$$

• **Zone** 4 : cette zone correspond à $(0 > n > m)$ ou $(0 < n < m)$. Remarquons qu'en inversant le rôle de m et n, nous retrouvons la zone 3. Par conséquent, la démonstration précédente peut être adaptée pour obtenir directement le résultat cherché :

$$\mathbb{L}^{p,q}_{m,n} = O\left(k^{2|n|}\right).$$

□

Comme précédemment, nous introduisons, pour tout $1 \leq p \neq q \leq M$, la matrice limite $(\mathbb{L}^0)^{p,q}$ de même taille que $\mathbb{L}^{p,q}$, dont les coefficients sont les premiers termes du développement asymptotique fournit par le lemme 5.14. Plus précisément, les coefficients $(\mathbb{L}^0)^{p,q}_{m,n}$ de $(\mathbb{L}^0)^{p,q}$ vérifient, pour $-N_p \leq m \leq N_p$ et $-N_q \leq n \leq N_q$

$$(\mathbb{L}^0)^{p,q}_{m,n} = \begin{cases} -\sqrt{a_p a_q}\left[\ln\left(\frac{kb_{pq}}{2}\right) + \gamma\right] + i\frac{\pi\sqrt{a_p a_q}}{2} & \text{si } (m,n) = (0,0), \\ (-1)^m \frac{i\sqrt{a_p a_q}}{2}\frac{(|m|+|n|-1)!}{|m|!|n|!}\left(\frac{a_p}{b_{pq}}\right)^{|m|}\left(\frac{a_q}{b_{pq}}\right)^{|n|} e^{i(n-m)\alpha_{pq}} & \text{si } (m,n) \neq (0,0) \\ & \text{et } mn \leq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.83}$$

De plus, grâce au lemme 5.14, nous disposons de la relation suivante entre le bloc $\mathbb{L}^{p,q}$ et la matrice $(\mathbb{L}^0)^{p,q}$

$$\mathbb{L}^{p,q} = (\mathbb{L}^0)^{p,q} + O\left(k^2\ln(k)\right), \qquad \text{pour } p \neq q. \tag{5.84}$$

Introduisons maintenant la matrice par blocs $\mathbb{L}^0$ contenant chaque sous-matrice $(\mathbb{L}^0)^{p,q}$, soit

$$\mathbb{L}^0 = \begin{pmatrix} (\mathbb{L}^0)^{1,1} & (\mathbb{L}^0)^{1,2} & \dots & (\mathbb{L}^0)^{1,M} \\ (\mathbb{L}^0)^{2,1} & (\mathbb{L}^0)^{2,2} & \dots & (\mathbb{L}^0)^{2,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbb{L}^0)^{M,1} & (\mathbb{L}^0)^{M,2} & \dots & (\mathbb{L}^0)^{M,M} \end{pmatrix}.$$

Grâce aux égalités (5.73) et (5.84), nous avons la proposition suivante.

Proposition 5.15. *Lorsque k tend vers 0, la matrice tronquée $\mathbb{L}$ de l'opérateur de simple couche L satisfait la relation*

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}^0 + O\left(k^2\ln(k)\right). \tag{5.85}$$

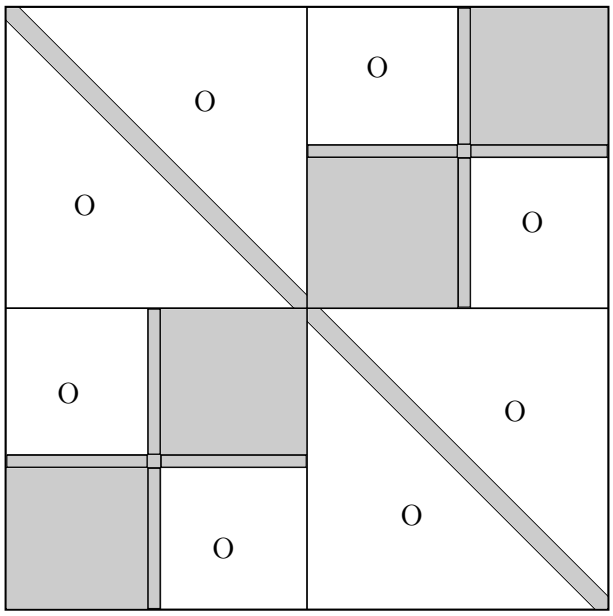


FIGURE 5.16 – Répartition des coefficients de la matrice $\mathbb{L}^0$ pour une configuration de deux obstacles. En gris, les zones pourvues de coefficients non nuls.

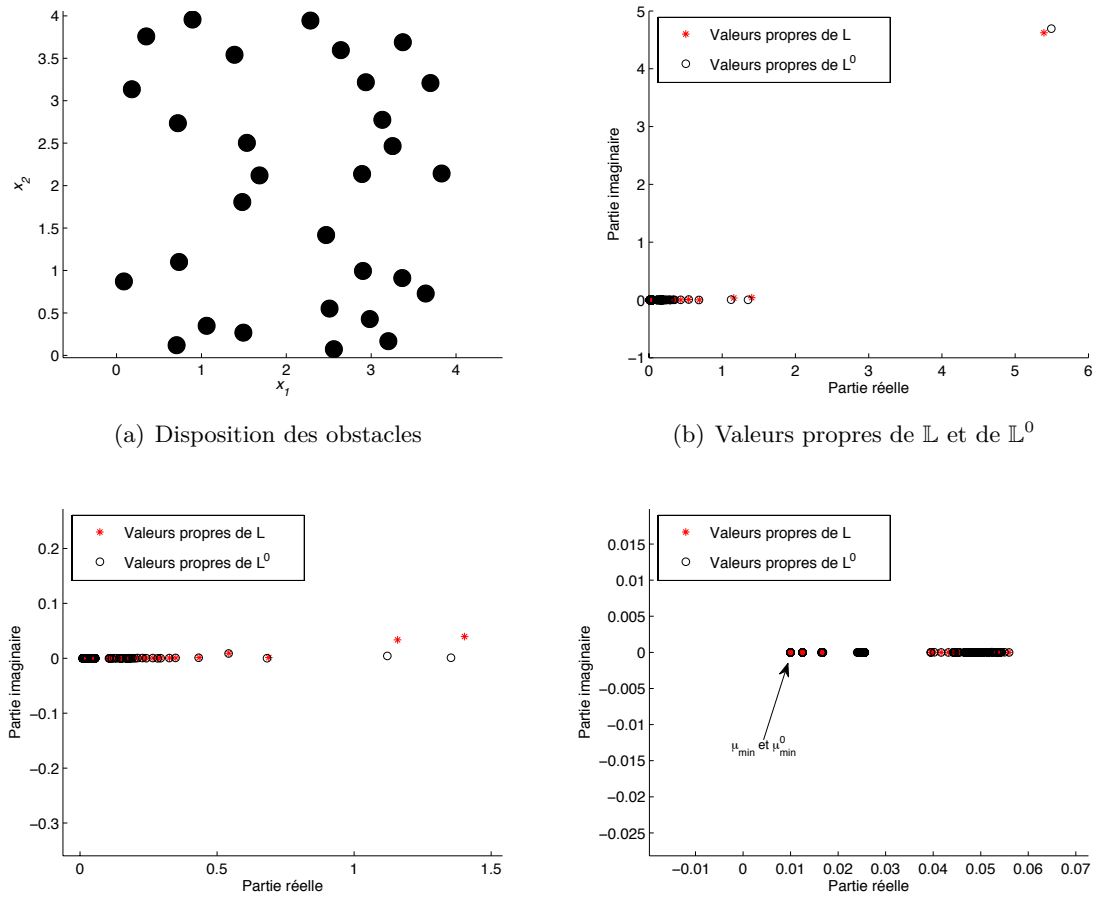
Afin de mieux visualiser la structure relativement creuse de $\mathbb{L}^0$, nous représentons figure 5.16 en gris les emplacements de ses coefficients non nuls (squelette de $\mathbb{L}^0$) pour une configuration de deux obstacles circulaires.

A partir de maintenant, notons respectivement $(\mu_m^p)_{(p,m)\in I}$ et $((\mu^0)_m^p)_{(p,m)\in I}$ les valeurs propres de $\mathbb{L}$ et $\mathbb{L}^0$ (par souci de clarté, les notations sont les mêmes que dans la section précédente). Pour $(p,m) \in I$, nous supposons de plus que

$$\mu_m^p \simeq (\mu^0)_m^p, \tag{5.86}$$

ce qui est assez légitime au vue de (5.85). Pour motiver notre approche et mieux visualiser les valeurs propres de $\mathbb{L}^0$, nous montrons sur les figures 5.17(b) à 5.17(d) une comparaison entre les valeurs propres des matrices $\mathbb{L}$ et $\mathbb{L}^0$, pour une configuration de 30 disques de rayon 0.1 placés aléatoirement dans la boîte $[0,4] \times [0,4]$ (voir l'exemple de la figure 5.17(a)). Le nombre d'onde est fixé à $k = 0.1$. Pour $p, q = 1, \ldots, M$, avec $p \neq q$, l'indice de troncature N_p est égal à 5 et la distance b_{pq} entre les centres des obstacles Ω_p^- et Ω_q^- est comprise entre 0.33 et 4.59. Les valeurs propres ont été calculées numériquement par la fonction "eig" de Matlab. Nous observons que l'approximation des valeurs propres $(\mu_m^p)_{(p,m)\in I}$ de $\mathbb{L}$ par les valeurs propres $((\mu^0)_m^p)_{(p,m)\in I}$ de $\mathbb{L}^0$ est satisfaisante. Notons comme précédemment μ_{max} et μ_{max}^0 les valeurs propres de plus grand module respectivement de $\mathbb{L}$ et $\mathbb{L}^0$. Sur la figure 5.17(b), nous observons que celles-ci sont très proches. Ce résultat est confirmé numériquement puisque nous obtenons : $\mu_{max} \simeq 5.393 + 4.623i$ et $\mu_{max}^0 \simeq 5.494 + 4.695i$, soit en module : $|\mu_{max}| \simeq 7.103$ et $|\mu_{max}^0| \simeq 7.227$. D'autre part, les valeurs propres de plus petit module de $\mathbb{L}$ et $\mathbb{L}^0$, notées respectivement μ_{min} et μ_{min}^0 (comme précédemment), sont elles aussi très proches comme le montre la figure 5.17(d). Les valeurs numériques confirment ce résultat

$$\mu_{min} \simeq 0.01 + 10^{-13}i, \qquad \mu_{min}^0 \simeq 0.01 + 10^{-13}i.$$



(a) Disposition des obstacles

(b) Valeurs propres de $\mathbb{L}$ et de $\mathbb{L}^0$

(c) Agrandissement de la figure (b) au niveau de l'origine

(d) Agrandissement au niveau des valeurs propres de plus petit module μ_{min} et μ^0_{min}

FIGURE 5.17 – Comparaison des valeurs propres de $\mathbb{L}$ et de $\mathbb{L}^0$ pour une configuration de 30 disques de rayon $a = 0.1$ disposés aléatoirement dans la boîte $[0, 4] \times [0, 4]$, avec un indice de troncature $N_p = 5$ pour chaque obstacle. Le nombre d'onde k est fixé à 0.1 et la distance b_{pq} entre les centres de deux obstacles Ω_p^- et Ω_q^- est comprise entre 0.33 et 4.59.

Sur cet exemple, nous constatons que notre approche semble raisonnable. Ces tests ont été réalisés plusieurs fois et, à chaque fois, les valeurs propres de $\mathbb{L}^0$ étaient très proches de celles de la matrice $\mathbb{L}$. Pour simplifier le problème et les calculs, nous supposons, comme dans la section précédente, que les obstacles ont tous même rayon a et que l'indice de troncature N_p est le même pour tous les obstacles. Autrement dit, pour tout $p = 1, \ldots, M$, nous supposons que : $a_p = a$ et $N_p = N$. Rappelons que, sous cette hypothèse, pour $p = 1, \ldots, M$, les blocs diagonaux $(\mathbb{L}^0)^{p,p}$ de $\mathbb{L}^0$ ne dépendent plus de l'indice p. De plus, nous avons, pour $-N \leq m \leq N$ et $p, q = 1, \ldots, M$

$$(\mathbb{L}^0)^{p,p}_{m,m} = (\mathbb{L}^0)^{p,p}_{-m,-m} = (\mathbb{L}^0)^{q,q}_{m,m} = (\mathbb{L}^0)^{q,q}_{-m,-m}.$$

Comme précédemment, nous notons $\widehat{\mathbb{L}}_m$ ces termes

$$\forall m = 0, \dots, N, \qquad \widehat{\mathbb{L}}_m = (\mathbb{L}^0)^{p,p}_{m,m} = \begin{cases} -a\left[\ln\left(\dfrac{ka}{2}\right) + \gamma\right] + i\dfrac{\pi a}{2}, & \text{si } m = 0 \\ \dfrac{a}{2m}, & \text{si } m \neq 0. \end{cases}$$

5.5.2 Estimation de la plus petite valeur propre

Cherchons maintenant à estimer la plus petite valeur propre μ^0_{min} de $\mathbb{L}^0$. Comme dans le cas des obstacles éloignés, nous avons essayé une approche basée sur les théorèmes des disques de Gershgorin-Hadamard (théorèmes 5.2 et 5.3). Cependant, lorsque k tend vers 0, le module des coefficients extra-diagonaux $\left|(\mathbb{L}^0)^{p,q}_{0,0}\right|$, pour $p \neq q$, tend vers l'infini. Par conséquent, le rayon du disque de Gershgorin associé à ces coefficients, tend aussi vers l'infini. L'origine est alors incluse dans ce disque. Selon le théorème de Gershgorin, la plus petite valeur propre possible est 0, or zéro n'est pas une valeur propre de $\mathbb{L}$. Aucune conclusion ne peut ainsi être donnée concernant la plus petite valeur propre en module de $\mathbb{L}^0$ (ni de $\mathbb{L}$). Par ailleurs, concernant la plus grande valeur propre en module de $\mathbb{L}^0$, l'approximation obtenue par les disques de Gershgorin n'est pas précise, notamment en présence d'un grand nombre d'obstacles.

Comme dans le cas d'obstacles éloignés, nous montrons que lorsque les disques sont proches, la plus petite valeur propre (en module) de $\mathbb{L}^0$, puis de $\mathbb{L}$, peut généralement être estimée par l'approximation de la plus petite valeur propre (en module) de la diffraction simple, soit $\widehat{\mathbb{L}}_N = a/(2N)$, de multiplicité $2M$. Pour prouver ce résultat, nous construisons un vecteur propre approché de $\mathbb{L}^0$ avec pour valeur propre approchée $\mathbb{L}_{|m|}$, dès que $|m|$ est suffisamment grand. Introduisons le vecteur $\mathbf{X}^{(p,m)}$, pour $(p,m) \in I$, donné par

$$\mathbf{X}^{(p,m)} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1^{(p,m)} \\ \mathbf{X}_2^{(p,m)} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_M^{(p,m)} \end{pmatrix}.$$

Chaque bloc $\mathbf{X}_q^{(p,m)} = (X_{q,n}^{(p,m)})_{n=-N,\dots,N}$, pour $q = 1, \dots, M$, est de taille $2N+1$ et ses composantes sont définies par les relations suivantes

$$X_{p,n}^{(p,m)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \qquad \text{pour } q = p, \tag{5.87}$$

et

$$X_{q,n}^{(p,m)} = 0, \qquad \text{pour } q \neq p. \tag{5.88}$$

Autrement dit, les blocs $\mathbf{X}_q^{(p,m)}$ sont nuls pour $q \neq p$, et le bloc $\mathbf{X}_p^{(p,m)} = (X_{p,n}^{(p,m)})_{n=-N,\dots,N}$ ne dispose que d'une seule composante non nulle localisée en $n = m$ (et valant 1). Remarquons que $\mathbf{X}^{(p,m)}$ est alors normalisé pour la norme infinie et la norme euclidienne usuelle. Notons maintenant $\mathbf{Y}^{(p,m)}$ le vecteur obtenu par le produit matrice-vecteur entre $\mathbb{L}^0$ et $\mathbf{X}^{(p,m)}$

$$\mathbf{Y}^{(p,m)} = \mathbb{L}^0\mathbf{X}^{(p,m)} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1^{(p,m)} \\ \mathbf{Y}_2^{(p,m)} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_M^{(p,m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbb{L}^0)^{1,p}\mathbf{X}_p^{(p,m)} \\ (\mathbb{L}^0)^{2,p}\mathbf{X}_p^{(p,m)} \\ \vdots \\ (\mathbb{L}^0)^{M,p}\mathbf{X}_p^{(p,m)} \end{pmatrix}.$$

Concentrons nous tout d'abord sur le bloc vectoriel $\mathbf{Y}_p^{(p,m)}$. Du fait de la définition (5.73) de la sous-matrice $(\mathbb{L}^0)^{p,p}$, les coefficients du sous-vecteur $\mathbf{Y}_p^{(p,m)} = (Y_{p,n}^{(p,m)})_{n=-N,\dots,N}$ vérifient

$$Y_{p,n}^{(p,m)} = \begin{cases} (\mathbb{L}^0)_{m,m}^{p,p} = \widehat{\mathbb{L}}_{|m|} & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, cela signifie que, d'après la relation (5.87), nous avons

$$\mathbf{Y}_p^{(p,m)} = \widehat{\mathbb{L}}_{|m|}\mathbf{X}_p^{(p,m)}.$$

Etudions maintenant les blocs vectoriels $\mathbf{Y}_q^{(p,m)} = (\mathbb{L}^0)^{q,p}\mathbf{X}_p^{(p,m)}$, pour $q = 1, \dots, M$ et $q \neq p$. Du fait de la structure particulière de $\mathbf{X}_p^{(p,m)}$ (voir (5.87)), les coefficients $Y_{q,n}^{(p,m)}$ du sous-vecteur $\mathbf{Y}_q^{(p,m)}$ satisfont l'égalité suivante, pour $-N \leq n \leq N$

$$Y_{q,n}^{(p,m)} = (\mathbb{L}^0)_{n,m}^{q,p}.$$

En notant $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne usuelle, nous avons alors l'égalité suivante

$$\left\|\mathbb{L}^0\mathbf{X}^{(p,m)} - \widehat{\mathbb{L}}_{|m|}\mathbf{X}^{(p,m)}\right\|_2^2 = \sum_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{M}\sum_{n=-N}^{N}\left|(\mathbb{L}^0)_{m,n}^{p,q}\right|^2. \tag{5.89}$$

Notre but est de montrer que $\mathbf{X}^{(p,m)}$ est un vecteur propre approché de $\mathbb{L}^0$, de valeur propre approchée $\widehat{\mathbb{L}}_{|m|}$, pour $|m|$ suffisamment grand. Pour cela, nous cherchons à majorer le terme

$$\left\|\mathbb{L}^0\mathbf{X}^{(p,m)} - \widehat{\mathbb{L}}_{|m|}\mathbf{X}^{(p,m)}\right\|_2^2.$$

En effet, ce terme mesure l'erreur issue de l'approximation d'un vecteur propre de $\mathbb{L}^0$ par $\mathbf{X}^{(p,m)}$ avec pour valeur propre approchée $\widehat{\mathbb{L}}_{|m|}$. Nous commençons par majorer la somme des carrés par le carré de la somme

$$\left\|\mathbb{L}^0\mathbf{X}^{(p,m)} - \widehat{\mathbb{L}}_{|m|}\mathbf{X}^{(p,m)}\right\|_2^2 \leq \left(\sum_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{M}\sum_{n=-N}^{N}\left|(\mathbb{L}^0)_{m,n}^{p,q}\right|\right)^2. \tag{5.90}$$

Soit maintenant le lemme suivant.

Lemme 5.16. *Soient $(p,m) \in I$ et $q = 1, \dots, M$ tels que $p \neq q$ et $m \neq 0$. L'inégalité suivante est vérifiée*

$$\sum_{n=-N}^{N}\left|(\mathbb{L}^0)_{n,m}^{q,p}\right| \leq \frac{a}{2|m|}\left(\frac{a}{b_{pq}-a}\right)^{|m|}. \tag{5.91}$$

Démonstration. Prenons trois entiers $p, q = 1, \dots, M$ et $m = -N, \dots, N$ tels que $p \neq q$ et $m \neq 0$. D'après la définition (5.83) des coefficients $(\mathbb{L}^0)_{m,n}^{p,q}$, nous avons

$$\sum_{n=-N}^{N}\left|(\mathbb{L}^0)_{n,m}^{q,p}\right| = \frac{a}{2}\left(\frac{a}{b_{pq}}\right)^{|m|}\sum_{n=0}^{N}\frac{(|m|+|n|-1)!}{|m|!|n|!}\left(\frac{a}{b_{pq}}\right)^{|n|}.$$

Nous utilisons le fait que $|m|! = |m|(|m-1|!)$ pour réécrire la somme comme

$$\sum_{n=-N}^{N} \left|(\mathbb{L}^0)^{q,p}_{n,m}\right| = \frac{a}{2|m|}\left(\frac{a}{b_{pq}}\right)^{|m|} \sum_{n=0}^{N} \frac{(|m|+|n|-1)!}{(|m|-1)!|n|!}\left(\frac{a}{b_{pq}}\right)^{|n|}.$$

Cette écriture nous permet de faire apparaître les coefficients binômiaux

$$\sum_{n=-N}^{N} \left|(\mathbb{L}^0)^{q,p}_{n,m}\right| = \frac{a}{2|m|}\left(\frac{a}{b_{pq}}\right)^{|m|} \sum_{n=0}^{N} \binom{|m|+|n|-1}{|m|-1}\left(\frac{a}{b_{pq}}\right)^{|n|}, \tag{5.92}$$

où nous avons noté

$$\binom{|m|+|n|-1}{|m|-1} = \frac{(|m|+|n|-1)!}{(|m|-1)!|n|!}.$$

Comme $a < b_{pq}$, la série sur les indices n apparaissant dans le membre de droite de l'égalité (5.92) est convergente lorsque N tend vers l'infini. Plus précisément, nous avons

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \binom{|m|+|n|-1}{|m|-1}\left(\frac{a}{b_{pq}}\right)^{|n|} = \left(1-\frac{a}{b_{pq}}\right)^{-|m|} = \left(\frac{b_{pq}}{b_{pq}-a}\right)^{|m|}.$$

De plus, comme chaque terme de la série est positif, l'inégalité suivante est vérifiée pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{N} \binom{|m|+|n|-1}{|m|-1}\left(\frac{a}{b_{pq}}\right)^{|n|} \leq \left(\frac{b_{pq}}{b_{pq}-a}\right)^{|m|}.$$

En utilisant cette majoration dans l'égalité (5.92), nous obtenons l'inégalité cherchée

$$\sum_{n=-N}^{N} \left|(\mathbb{L}^0)^{q,p}_{n,m}\right| \leq \frac{a}{2|m|}\left(\frac{a}{b_{pq}-a}\right)^{|m|}.$$

□

Ce lemme nous permet de majorer la norme euclidienne

$$\left\|\mathbb{L}^0\mathbf{X}^{(p,m)} - \widehat{\mathbb{L}}_{|m|}\mathbf{X}^{(p,m)}\right\|_2$$

plus finement et de montrer que le vecteur $\mathbf{X}^{(p,m)}$ peut être utilisé comme approximation d'un vecteur propre de $\mathbb{L}^0$. Nous résumons cela dans la proposition suivante.

Proposition 5.17. *Soit $(p,m) \in I$ avec $m \neq 0$. Le vecteur $\mathbf{X}^{(p,m)}$ défini par les relations (5.87) et (5.88) est un vecteur propre approché de $\mathbb{L}^0$ de valeur propre approchée $\widehat{\mathbb{L}}_{|m|}$, au sens où l'erreur relative entre $\mathbb{L}^0\mathbf{X}^{(p,m)}$ et $\widehat{\mathbb{L}}_{|m|}\mathbf{X}^{(p,m)}$ vérifie la majoration suivante*

$$\frac{\left\|\mathbb{L}^0\mathbf{X}^{(p,m)} - \widehat{\mathbb{L}}_{|m|}\mathbf{X}^{(p,m)}\right\|_2}{\widehat{\mathbb{L}}_{|m|}} \leq \sum_{\substack{q=1\\ q\neq p}}^{M} \left(\frac{a}{b_{pq}-a}\right)^{|m|}. \tag{5.93}$$

Démonstration. Prenons l'inégalité (5.90) portant sur le terme $\left\|\mathbb{L}^0\mathbf{X}^{(p,m)} - \widehat{\mathbb{L}}_{|m|}\mathbf{X}^{(p,m)}\right\|_2$ et appliquons le lemme 5.16 pour obtenir

$$\left\|\mathbb{L}^0\mathbf{X}^{(p,m)} - \widehat{\mathbb{L}}_{|m|}\mathbf{X}^{(p,m)}\right\|_2^2 \leq \left(\sum_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{M} \frac{a}{2|m|}\left(\frac{a}{b_{pq}-a}\right)^{|m|}\right)^2.$$

Comme tous les termes de la somme sur l'indice q sont positifs, nous pouvons appliquer la fonction racine carrée à l'inégalité pour obtenir

$$\left\|\mathbb{L}^0\mathbf{X}^{(p,m)} - \widehat{\mathbb{L}}_{|m|}\mathbf{X}^{(p,m)}\right\|_2 \leq \frac{a}{2|m|}\sum_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{M}\left(\frac{a}{b_{pq}-a}\right)^{|m|}.$$

Enfin, nous utilisons la relation $\widehat{\mathbb{L}}_{|m|} = \dfrac{a}{2|m|}$ pour faire apparaître la majoration cherchée, soit

$$\frac{\left\|\mathbb{L}^0\mathbf{X}^{(p,m)} - \widehat{\mathbb{L}}_{|m|}\mathbf{X}^{(p,m)}\right\|_2}{\widehat{\mathbb{L}}_{|m|}} \leq \sum_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{M}\left(\frac{a}{b_{pq}-a}\right)^{|m|}.$$

□

D'après cette proposition, pour tout couple (p,m) de I avec $m \neq 0$, dès que $|m|$ est suffisamment grand alors le vecteur $\mathbf{X}^{(p,m)}$ est un vecteur propre approché de $\mathbb{L}^0$ avec pour valeur propre approchée $\widehat{\mathbb{L}}_{|m|}$. De plus, les $2M$ vecteurs $(\mathbf{X}^{(p,m)})_{p=1,\ldots,M}$ et $(\mathbf{X}^{(p,-m)})_{p=1,\ldots,M}$ sont tous des vecteurs propres approchés associés à la même valeur propre approchée $\widehat{\mathbb{L}}_{|m|}$. Ainsi, pour $|m|$ suffisamment grand, le terme $\widehat{\mathbb{L}}_{|m|}$ est une valeur propre approchée de $\mathbb{L}^0$ de multiplicité $2M$. Par ailleurs, la suite $(\widehat{\mathbb{L}}_m)_{m\geq 1} = (\frac{a}{2m})_{m\geq 1}$ est décroissante et tend vers 0 lorsque m tend vers l'infini. Le terme $\widehat{\mathbb{L}}_N$ est alors la plus petite des valeurs propres approchées $(\widehat{\mathbb{L}}_m)_{m\geq 1}$. De plus, $\widehat{\mathbb{L}}_N$ tend vers 0 lorsque l'indice de troncature N tend vers l'infini. C'est la raison pour laquelle il paraît naturel d'estimer μ^0_{min}, puis μ_{min}, par $\widehat{\mathbb{L}}_N$ avec un ordre de multiplicité égal à $2M$, soit

$$\mu_{min} \simeq \mu^0_{min} \simeq \widehat{\mathbb{L}}_N. \tag{5.94}$$

Remarquons que $\widehat{\mathbb{L}}_N$ est aussi l'approximation de la plus petite valeur propre dans le cadre de la diffraction simple ainsi que dans le cadre de la diffraction multiple lorsque les obstacles sont éloignés. Cette estimation est d'autant plus précise que l'indice de troncature N est élevé et que le couplage entre les obstacles est faible, autrement dit, lorsque les obstacles ne sont pas trop proches. En effet, plus les distances b_{pq} entre les centres des obstacles sont grandes, plus petit est le second membre de l'inégalité (5.93). De même, plus N est grand, plus le majorant de l'inégalité (5.93) (pris avec $|m| = N$) est petit.

Reprenons l'exemple présenté sur la figure 5.17. La configuration était la suivante : 30 disques de rayon 0.1 disposés aléatoirement dans la boîte $[0,4]\times[0,4]$, $N = 5$ et $k = 0.1$. La distance b_{pq} entre les obstacles Ω_p^- et Ω_q^- est comprise entre 0.33 et 4.59. Le calcul numérique des plus petites valeurs propres (en module) de $\mathbb{L}$ et de $\mathbb{L}^0$ donne $\mu_{min} \simeq 0.01 + 10^{-13}i$ et $\mu^0_{min} \simeq 0.01 + 10^{-13}i$. Notre estimation vaut $\widehat{\mathbb{L}}_N = 0.01$, avec une erreur relative sur la valeur propre μ_{min} égale à

$$100\frac{\left|\mu_{min} - \widehat{\mathbb{L}}_N\right|}{|\mu_{min}|} \simeq 0.08\%.$$

Notre estimation est donc très satisfaisante. Comme dans le cas d'obstacles éloignés, notre estimation porte sur la valeur propre μ_{min} et pas seulement sur son module.

5.5.3 Estimation de la plus grande valeur propre (en module)

Contrairement au paragraphe précédent, nous ne sommes pas en mesure de construire de vecteur propre approché de $\mathbb{L}^0$ pour obtenir une estimation de la plus grande valeur propre μ^0_{max} de $\mathbb{L}^0$. En étudiant l'expression (5.83) des coefficients de la matrice limite $\mathbb{L}^0$, nous constatons qu'aucun de ses coefficients ne dépend de k mis à part ceux associés aux indices $m = n = 0$ qui ont une croissance logarithmique selon k (*zone* 0 dans le lemme 5.14). Lorsque le nombre d'onde k est suffisamment petit, l'information sur la plus grande valeur propre est *a priori* contenue dans ces coefficients.

Comme dans la section précédente, nous proposons d'extraire la sous matrice $\mathbb{L}^1$ de $\mathbb{L}^0$ des modes d'ordre 0. D'après la relation (5.83), cette matrice $\mathbb{L}^1$, de taille $M \times M$, est définie, pour $p, q = 1, \ldots, M$, par

$$(\mathbb{L}^1)^{p,q} = (\mathbb{L}^0)^{p,q}_{0,0} = \begin{cases} -a\left[\ln\left(\dfrac{ka}{2}\right) + \gamma\right] + i\dfrac{\pi a}{2}, & \text{si } p = q, \\ -a\left[\ln\left(\dfrac{kb_{pq}}{2}\right) + \gamma\right] + i\dfrac{\pi a}{2}, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.95}$$

Notons μ^0_{max} et μ^1_{max} la plus grande valeur propre en module respectivement de $\mathbb{L}^0$ et $\mathbb{L}^1$. Nous estimons alors la plus grande valeur propre de $\mathbb{L}^0$ par celle de $\mathbb{L}^1$, soit

$$\mu^0_{max} \simeq \mu^1_{max}.$$

Par suite, d'après (5.86), nous estimons également μ_{max} par μ^1_{max}. Nous avons comparé trois méthodes pour estimer μ^1_{max}. Deux approches consistaient à majorer le rayon spectral de la matrice $\mathbb{L}^1$, donc le module de μ^1_{max}, soit en calculant la norme de Frobenius de la matrice $\mathbb{L}^1$, soit en appliquant le théorème des disques de Gershgorin à la matrice $\mathbb{L}^1$. Dans les deux cas, le résultat obtenu était moins bon que pour la troisième approche. De plus, l'expression de l'estimation obtenue dans cette dernière méthode est beaucoup plus simple, c'est pourquoi nous ne présentons que celle-ci.

Le principe de notre approche est d'obtenir une distance "moyenne" d à toutes les autres distances inter-centres b_{pq}. Introduisons la matrice $\mathbb{L}^1_{\text{eqv}}$ de taille $M \times M$ définie par

$$\forall p, q = 1, \ldots, M, \qquad (\mathbb{L}^1_{\text{eqv}})^{p,q} = \begin{cases} -a\left[\ln\left(\dfrac{ka}{2}\right) + \gamma\right] + i\dfrac{\pi a}{2}, & \text{si } p = q, \\ -a\left[\ln\left(\dfrac{kd}{2}\right) + \gamma\right] + i\dfrac{\pi a}{2}, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $d > 0$ est une distance "équivalente" aux distances b_{pq} (les coefficients $(\mathbb{L}^1_{\text{eqv}})^{p,q}$ sont obtenus en remplaçant b_{pq} par d dans (5.95)). Nous supposons que d vérifie l'inégalité naturelle suivante

$$d \geq \min_{1 \leq p \neq q \leq M} b_{pq}. \tag{5.96}$$

Notons que la matrice $\mathbb{L}^1_{\text{eqv}}$ n'est définie qu'à partir de deux paramètres sous la forme

$$\mathbb{L}^1_{\text{eqv}} = \begin{pmatrix} l_0 & l_1 & l_1 & \dots & l_1 \\ l_1 & l_0 & l_1 & \dots & l_1 \\ l_1 & l_1 & l_0 & \dots & l_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ l_1 & \dots & l_1 & l_1 & l_0 \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{cases} l_0 = (\mathbb{L}^1_{\text{eqv}})^{0,0} = -a\left[\ln\left(\dfrac{ka}{2}\right) + \gamma\right] + i\dfrac{\pi a}{2}, \\ l_1 = (\mathbb{L}^1_{\text{eqv}})^{1,1} = -a\left[\ln\left(\dfrac{kd}{2}\right) + \gamma\right] + i\dfrac{\pi a}{2}. \end{cases} \tag{5.97}$$

L'intérêt de cette matrice est que l'on connait explicitement toutes ses valeurs propres, notamment celle de plus grand module, comme le montre le lemme suivant.

Lemme 5.18. *Les valeurs propres de $\mathbb{L}^1_{eqv}$ sont*

- $\mu^1_1 = l_0 + (M-1)l_1 = -a\left[\ln\left(\dfrac{ka}{2}\right) + (M-1)\ln\left(\dfrac{kd}{2}\right)\right] - aM\gamma + i\dfrac{M\pi a}{2}$, *de multiplicité* 1,
- $\mu^1_2 = l_0 - l_1 = a\ln\left(\dfrac{d}{a}\right)$, *de multiplicité* $(M-1)$.

De plus, pour $kd < 1$, nous avons l'inégalité suivante

$$\left|\mu^1_1\right| \geq \left|\mu^1_2\right|. \tag{5.98}$$

Démonstration. Calculons le polynôme caractéristique de $\mathbb{L}^1_{\text{eqv}}$, c'est à dire $P(X) = det(\mathbb{L}^1_{\text{eqv}} - X\mathbb{I})$, où $\mathbb{I}$ est la matrice identité de taille $M \times M$

$$\det(\mathbb{L}^1_{\text{eqv}} - X\mathbb{I}) = \det\begin{pmatrix} l_0 - X & l_1 & l_1 & \dots & l_1 \\ l_1 & l_0 - X & l_1 & \dots & l_1 \\ l_1 & l_1 & l_0 - X & \dots & l_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ l_1 & \dots & l_1 & l_1 & l_0 - X \end{pmatrix}.$$

Nous soustrayons aux lignes $2, 3, \dots, M$ la première ligne pour obtenir

$$\det(\mathbb{L}^1_{\text{eqv}} - X\mathbb{I}) = \det\begin{pmatrix} l_0 - X & l_1 & l_1 & \dots & l_1 \\ l_1 - l_0 + X & l_0 - X - l_1 & 0 & \dots & 0 \\ l_1 - l_0 + X & 0 & l_0 - X - l_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ l_1 - l_0 + X & \dots & 0 & 0 & l_0 - X - l_1 \end{pmatrix}.$$

Puis nous ajoutons à la première colonne les $M-1$ autres colonnes

$$\det(\mathbb{L}^1_{\text{eqv}} - X\mathbb{I}) = \det\begin{pmatrix} l_0 - X + (M-1)l_1 & l_1 & l_1 & \dots & l_1 \\ 0 & l_0 - X - l_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & l_0 - X - l_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & l_0 - X - l_1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi on obtient aisément l'expression du polynôme caractéristique

$$\det(\mathbb{L}^1_{\text{eqv}} - X\mathbb{I}) = (-1)^M \left[X - (l_0 + (M-1)l_1)\right]\left[X - (l_0 - l_1)\right]^{M-1}.$$

Ceci permet de déduire que les valeurs propres de $\mathbb{L}^1_{eqv}$ sont

$$\mu_1^1 = l_0 + (M-1)l_1 = -a\left[\ln\left(\frac{ka}{2}\right) + (M-1)\ln\left(\frac{kd}{2}\right)\right] - aM\gamma + i\frac{M\pi a}{2},$$

de multiplicité 1, et

$$\mu_2^1 = l_0 - l_1 = a\ln\left(\frac{d}{a}\right),$$

de multiplicité $M-1$.

Démontrons maintenant l'inégalité (5.98). Remarquons tout d'abord que la valeur propre μ_2^1 est réelle. D'après la relation (5.97) et comme $d > a$, alors μ_2^1 est de plus positive. Il nous suffit alors de montrer que la partie réelle de μ_1^1 est plus grande que μ_2^1 pour démontrer l'inégalité (5.99). Commençons par remarquer que, comme la valeur propre μ_2^1 est réelle, elle s'écrit

$$\mu_2^1 = \Re(l_0) - \Re(l_1).$$

Nous comparons ensuite la partie réelle de μ_1^1 avec μ_2^1

$$\Re(\mu_1^1) - \mu_2^1 = (M-2)\Re(l_1). \tag{5.99}$$

Comme $M - 2 \geq 0$ (nous étudions la diffraction multiple, ce qui suppose la présence d'au moins deux obstacles), le signe de $\Re(\mu_1^1) - \mu_2^1$ est le même que le signe de $\Re(l_1)$. Nous cherchons donc à montrer que $\Re(l_1)$ est positif. Donnons l'expression de la partie réelle de l_1

$$\Re(l_1) = -a\left[\ln\left(\frac{kd}{2}\right) - \gamma\right].$$

Rappelons maintenant l'inégalité suivante

$$-\ln(0.5) \simeq 0.69 > \gamma \simeq 0.58.$$

Supposons que nous ayons l'inégalité $kd < 1$. Comme la fonction ln est croissante, il vient que

$$-\ln\left(\frac{kd}{2}\right) > \gamma > 0,$$

soit encore

$$\Re(l_1) = a\left[-\ln\left(\frac{kd}{2}\right) - \gamma\right] \geq 0.$$

Ceci implique, d'après la relation (5.99), que

$$\Re(\mu_1^1) - \mu_2^1 \geq 0,$$

puis, par suite, l'inégalité cherchée sur les modules

$$\left|\mu_1^1\right| \geq \left|\mu_2^1\right|.$$

□

Remarquons que, comme le nombre d'onde k tend vers 0, nous pouvons supposer que $kd < 1$. Ce lemme montre que la valeur propre de plus grand module $\mu_{max}^{1,\text{eqv}}$ de $\mathbb{L}_{\text{eqv}}^1$ est de multiplicité 1 et a pour expression

$$\mu_{max}^{1,\text{eqv}} = l_0 + (M-1)l_1 = -a\left[\ln\left(\frac{ka}{2}\right) + (M-1)\ln\left(\frac{kd}{2}\right)\right] - aM\gamma + i\frac{M\pi a}{2}. \tag{5.100}$$

Nous estimons maintenant μ_{max} par $\mu_{max}^{1,\text{eqv}}$, soit

$$\mu_{max} \simeq -a\left[\ln\left(\frac{ka}{2}\right) + (M-1)\ln\left(\frac{kd}{2}\right)\right] - aM\gamma + i\frac{M\pi a}{2}.$$

Il nous reste maintenant à déterminer une valeur pour d. Nous proposons de choisir d ainsi

$$d = \frac{b_{min} + b_{max}}{2}.$$

Les termes b_{min} et b_{max} représentent respectivement la plus petite et la plus grande distance possibles b_{pq} entre les centres de deux obstacles. Lorsque les obstacles sont contenus dans une boîte rectangulaire de largeur ℓ et de longueur L, nous fixons b_{min} et b_{max} ainsi

$$b_{min} = 2a, \qquad b_{max} = \sqrt{\ell^2 + L^2} - 2a.$$

Dans ce cas, b_{min} représente la plus petite distance possible entre les centres de deux obstacles et b_{max} la plus grande. Au final, d est défini comme étant la demi-somme de b_{min} et de b_{max}

$$d = \frac{b_{min} + b_{max}}{2} = \frac{\sqrt{\ell^2 + L^2}}{2}. \tag{5.101}$$

Notons que d peut également être vu comme la demi-diagonale de la boîte de largeur ℓ et de longueur L. Reprenons encore une fois l'exemple présenté sur la figure 5.17. Rappelons que nous considérions alors 30 disques de rayon 0.1 disposés aléatoirement dans la boîte $[0,4]\times[0,4]$, avec $k = 0.1$ et $N = 5$. La distance b_{pq} entre les obstacles Ω_p^- et Ω_q^- est comprise entre 0.33 et 4.59. Le calcul numérique de la plus grande valeur propre (en module) μ_{max} de $\mathbb{L}$ donnait

$$\mu_{max} \simeq 5.39 + 4.62i, \qquad |\mu_{max}| \simeq 7.1.$$

En utilisant la relation (5.101) pour le choix de d, nous obtenons $d = 2\sqrt{2}$. Notre formule (5.100) obtenue par homogénisation donne alors

$$\mu_{max}^{1,\text{eqv}} \simeq 4.47 + 4.71i, \qquad |\mu_{max}^{1,\text{eqv}}| \simeq 6.5.$$

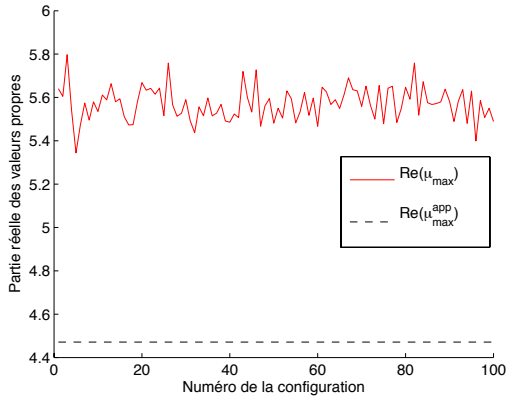
L'erreur relative en estimant μ_{max} par $\mu_{max}^{1,\text{eqv}}$ est alors de

$$100\frac{|\mu_{max} - \mu_{max}^{1,\text{eqv}}|}{|\mu_{max}|} = 13.04\%, \tag{5.102}$$

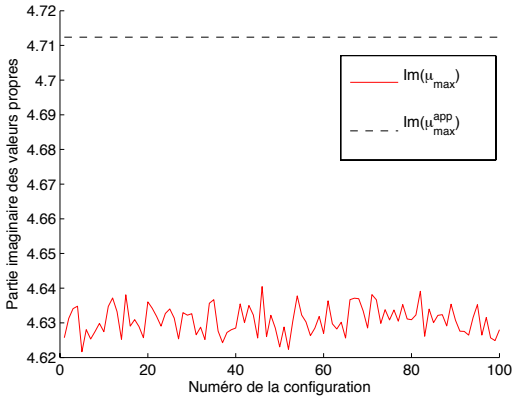
et en module de

$$100\frac{\big||\mu_{max}| - |\mu_{max}^{1,\text{eqv}}|\big|}{|\mu_{max}|} = 8.4\%. \tag{5.103}$$

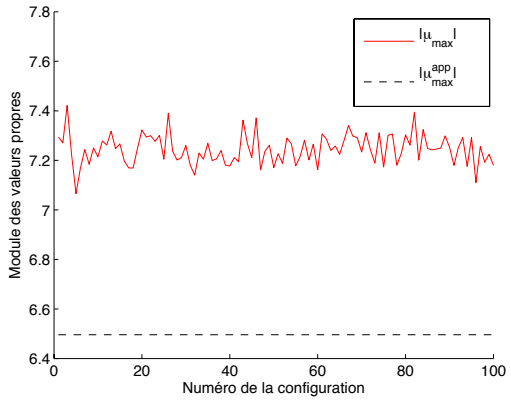
Notre approche est donc raisonnable.De plus, notons que contrairement au cas d'obstacles éloignés, nous proposons ici une estimation de la valeur propre μ_{max} et pas uniquement de



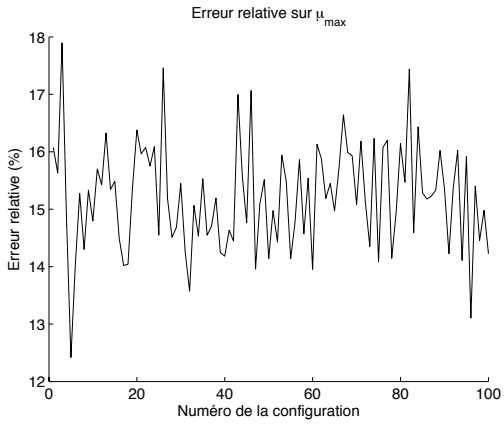
(a) Parties réelles de μ_{max} et de $\mu_{max}^{1,\mathrm{eqv}}$



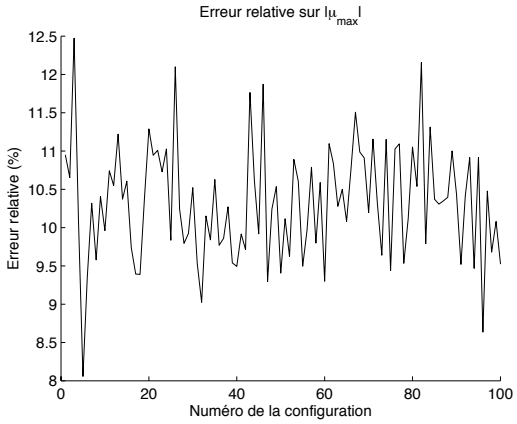
(b) Parties imaginaires de μ_{max} et de $\mu_{max}^{1,\mathrm{eqv}}$



(c) Modules de μ_{max} et de $\mu_{max}^{1,\mathrm{eqv}}$



(d) Erreur relative en pourcentage sur μ_{max} (voir relation (5.102))



(e) Erreur relative en pourcentage, donnée par la relation (5.103), sur le module de μ_{max}

FIGURE 5.18 – Comparaison entre μ_{max} et son estimation $\mu_{max}^{1,\mathrm{eqv}}$ pour 100 configurations différentes de $M = 30$ disques de rayon $a = 0.1$ placés aléatoirement dans la boîte $[0,4]\times[0,4]$, avec $k = 0.1$, $N = 5$ et $b \geq 0.3(= 3a)$.

son module. Nous avons lancé 100 tests respectant les même paramètres que l'exemple ci-dessus (soit $k = 0.1$, $N = 5$ et 30 disques de rayon 0.1 disposés aléatoirement dans la boîte $[0,4]^2$). Le résultat est affiché sur la figure 5.18. Nous constatons alors, sur les figures 5.18(a) et 5.18(b) que l'erreur affecte principalement la partie réelle de μ_{max}, l'estimation sur la partie imaginaire étant raisonnable. En moyenne, sur ces 100 simulations, nous obtenons une erreur relative sur μ_{max} d'environ 15.6% et sur son module d'environ 10%.

5.5.4 Estimation du conditionnement

Nous disposons à présent d'une estimation de la plus petite valeur propre (en module) μ_{min} de $\mathbb{L}$, donnée par (5.94), et de la plus grande valeur propre (en module) μ_{max}, par la relation (5.100). Comme dans le cas d'obstacles éloignés, nous estimons le conditionnement $\mathrm{cond}_2(\mathbb{L})$ de la matrice $\mathbb{L}$ par la quantité $\left|\frac{\mu_{max}}{\mu_{min}}\right|$. Nous obtenons alors le conditionnement approché $\mathrm{cond}_{app}(\mathbb{L})$ de la matrice $\mathbb{L}$ en utilisant les estimations (5.94) et (5.100) respectivement de μ_{min} et de μ_{max} :

$$\mathrm{cond}_2(\mathbb{L}) \simeq \mathrm{cond}_{app}(\mathbb{L}) = 2N \left| -\left[\ln\left(\frac{ka}{2}\right) + \ln\left(\frac{kd}{2}\right)\right] - M\gamma + i\frac{M\pi}{2}\right|. \tag{5.104}$$

Reprenons une dernière fois l'exemple présenté par la figure 5.17 où sont considérés 30 disques de rayon 0.1 disposés aléatoirement dans la boîte $[0,4]\times[0,4]$, le nombre d'onde k est égal à 0.1, l'indice de troncature N à 5 et $0.33 < b_{pq} < 4.59$. Nous obtenons pour le conditionnement de la matrice $\mathbb{L}$

$$\mathrm{cond}_2(\mathbb{L}) \simeq 713.$$

L'estimation du conditionnement, donné par la formule (5.104), a pour valeur

$$\mathrm{cond}_{app}(\mathbb{L}) \simeq 650,$$

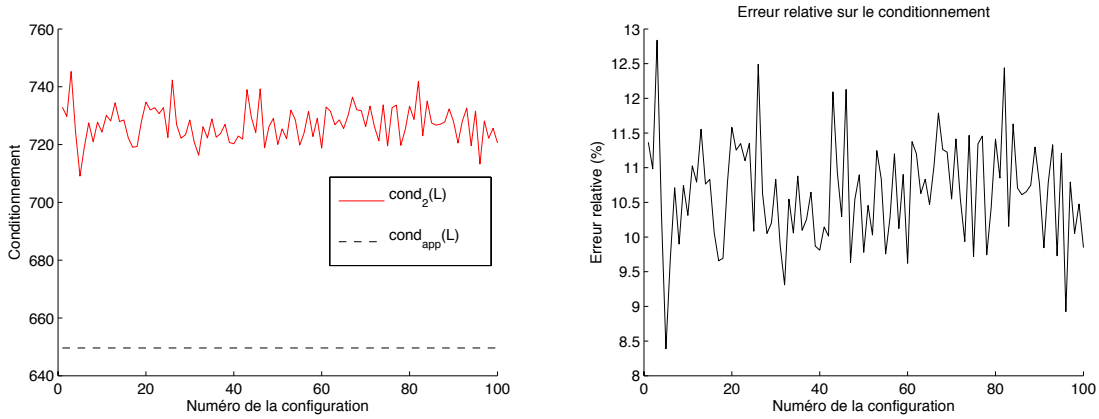
soit une erreur relative de

$$100\frac{|\mathrm{cond}_2(\mathbb{L}) - \mathrm{cond}_{app}(\mathbb{L})|}{|\mathrm{cond}_2(\mathbb{L})|} \simeq 9\%. \tag{5.105}$$

Remarquons que cette erreur provient presque entièrement de l'erreur issue de l'estimation de la plus grande valeur propre. Nous avons effectué 100 tests avec les mêmes paramètres. Nous obtenons alors les courbes de la figure 5.19. En moyenne, nous aboutissons à une erreur relative de 11%, ce qui est très satisfaisant.

5.5.5 Lien avec l'approximation par éléments finis de frontière

Nous approchons la formulation faible (5.7) de l'EFIE par une méthode d'éléments finis de frontière. Nous approche est ici exactement la même que celle présentée dans la section 5.4.4 pour des obstacles éloignés.



(a) Comparaison entre le conditionnement exact et approché

(b) Erreur relative sur le conditionnement en pourcentage (voir relation (5.105))

FIGURE 5.19 – Comparaison entre le conditionnement exact de $\mathbb{L}$ et approché, pour 100 configurations différentes de $M = 30$ disques de rayon $a = 0.1$ disposés aléatoirement dans la boîte $[0, 4] \times [0, 4]$, avec $k = 0.1$, $N = 5$ et $b \geq 0.3 (= 3a)$.

Le disque

Nous effectuons maintenant le lien entre notre analyse spectrale et l'approximation par éléments finis de frontière. Comme précédemment, nous commençons par des disques, puis nous étendons formellement la méthode à des ellipses puis des rectangles. Nous considérons M disques Ω_p^- de même rayon a et nous maillons chaque cercle Γ_p uniformément pour un même pas h. La méthode que nous décrivons est, encore une fois, la même que celle présentée pour des obstacles éloignés, dans la section 5.4.4. Autrement dit, nous substituons formellement le nombre N par $\pi a h^{-1} - 1/2$ dans les estimations (5.94) et (5.100) respectivement de μ_{min} et de μ_{max}. Nous obtenons alors, lorsque k tend vers 0,

$$\begin{cases} \mu_{min} \simeq \mu_{min}^{app}(a, h), \\ \\ \mu_{max} \simeq \mu_{max}^{app}(a, k), \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \mu_{min}^{app}(a, h) = \dfrac{a}{2\pi a h^{-1} - 1}, \\ \\ \mu_{max}^{app}(a, k) = -a \left[\ln\left(\dfrac{ka}{2}\right) + (M-1) \ln\left(\dfrac{kd}{2}\right) \right] - aM\gamma + i\dfrac{M\pi a}{2}. \end{cases} \tag{5.106}$$

Rappelons que d représente une "distance équivalente" entre les obstacles. Lorsque les obstacles sont contenus dans le domaine rectangulaire $[0, \ell] \times [0, L]$, nous utilisons la valeur (5.101) introduite précédemment

$$d = \frac{\sqrt{\ell^2 + L^2}}{2}.$$

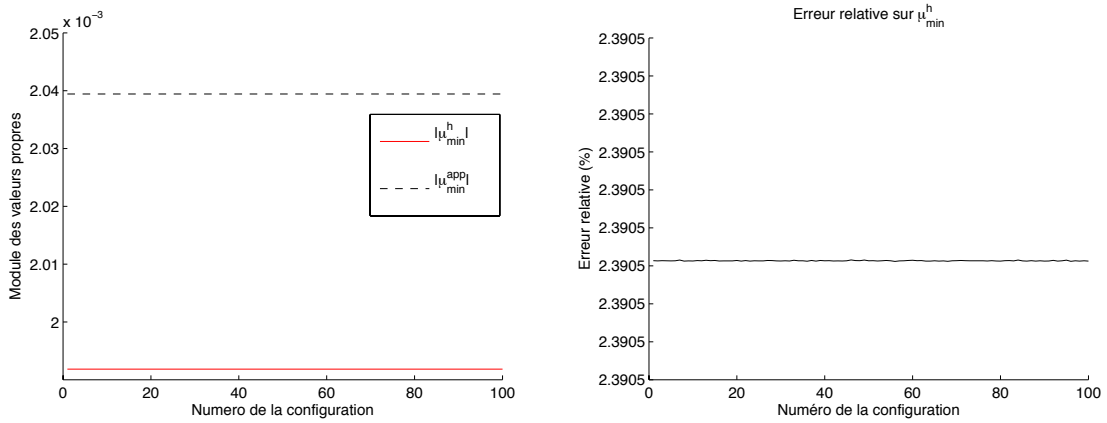
Par ailleurs, le conditionnement spectral de la matrice $[M_h]^{-1} [L_h]$ est approché, lorsque k tend vers zéro, par

$$\mathrm{cond}_2([M_h]^{-1} [L_h]) \simeq \mathrm{cond}_{app}(k, a, h),$$

avec

$$\mathrm{cond}_{app}(k,a,h) = a(2\pi a h^{-1} - 1)\left| -\ln\left(\frac{ka}{2}\right) - (M-1)\ln\left(\frac{kd}{2}\right) - M\gamma + i\frac{M\pi}{2}\right|. \quad (5.107)$$

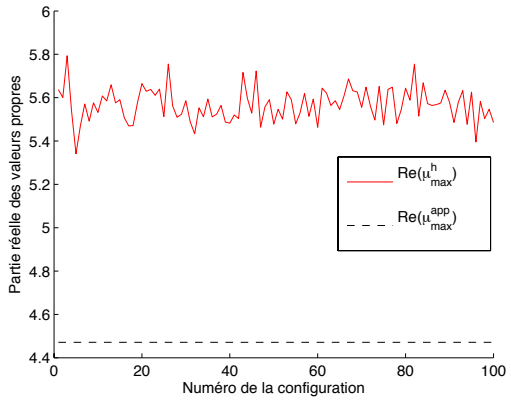
Nous proposons de valider numériquement les approximations précédentes sur un exemple reprenant les mêmes paramètres géométriques que précédemment. Nous plaçons aléatoirement $M = 30$ petits disques de rayon $a = 0.1$ dans la boîte $[0,4] \times [0,4]$. La plus petite distance b entre les centres de deux disques est $0.3(= 3a)$ et le nombre d'onde k est fixé à 0.1. De plus, chaque obstacle est maillé à l'aide de $N_h = 50$ segments. Nous calculons numériquement, pour cent placements différents d'obstacles, les valeurs propres, le conditionnement de la matrice $[M_h]^{-1}[L_h]$, ainsi que les estimations précédentes. Commençons par comparer les valeurs propres de plus petit et de plus grand module μ^h_{min} et μ^h_{max} avec leurs estimations. Les courbes obtenues avec les paramètres précédents sont représentées sur les figures 5.20 et 5.21. La première figure 5.20 montre que l'erreur relative sur la valeur propre de plus petit module μ^h_{min} est, en moyenne, de 2.4%, ce qui est très satisfaisant et, par ailleurs, est la même valeur que dans le cas d'obstacles éloignés. Concernant la valeur propre de plus grand module et d'après la figure 5.21, l'erreur relative sur μ^h_{max} est en moyenne de 15%, l'erreur étant surtout sur la partie réelle de μ^h_{max}. En outre, l'erreur relative sur le module de μ^h_{max} est en moyenne de 10%. En comparaison, nous avons obtenu des erreurs relatives moyennes du même ordre avec la méthode spectrale. Nous comparons maintenant, sur la figure 5.22, l'évolution du conditionnement de la matrice $[M_h]^{-1}[L_h]$ avec son estimation (5.107). Nous constatons qu'en moyenne l'erreur relative est de 13%. Ceci est sensiblement du même ordre que ce que nous avons obtenu avec la méthode spectrale (11%).



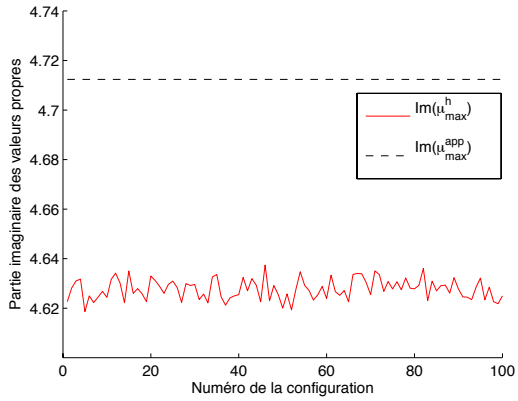
(a) Comparaison entre le module de la plus petite valeur propre (en module) et son estimation (5.106)

(b) Erreur relative sur μ_{min}

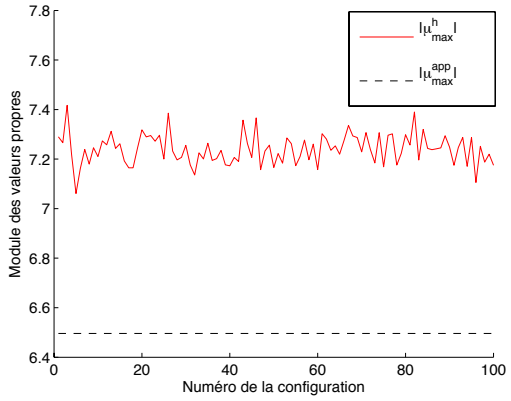
FIGURE 5.20 – Comparaison entre la valeur propre de plus petit module μ^h_{min} de la matrice $[M_h]^{-1}[L_h]$ et son estimation (5.106). Les obstacles sont des petits disques de rayon $a = 0.1$ discrétisés à l'aide de $N_h = 50$ segments. Pour chacune des 100 configurations différentes, nous plaçons $M = 30$ petits disques aléatoirement dans la boîte $[0,4] \times [0,4]$, avec $k = 0.1$ et $b \geq 0.3(= 3a)$.



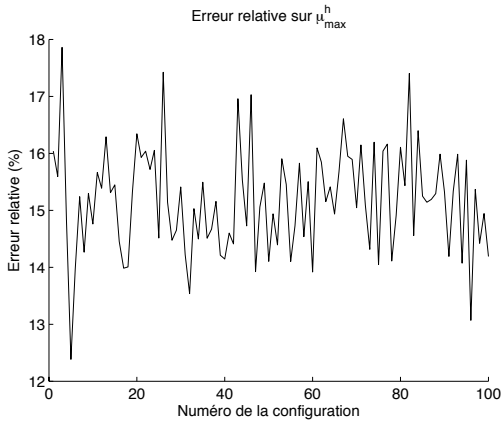
(a) Comparaison entre la partie réelle de la plus grande valeur propre (en module) et son estimation (5.106)



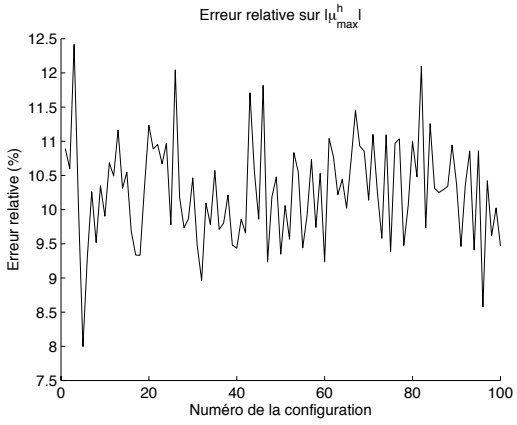
(b) Comparaison entre la partie imaginaire de la plus grande valeur propre (en module) et son estimation (5.106)



(c) Comparaison entre le module de la plus grande valeur propre (en module) et son estimation (5.106)

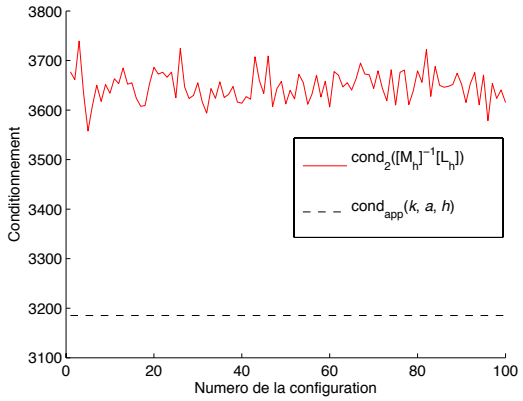


(d) Erreur relative sur μ_{max}

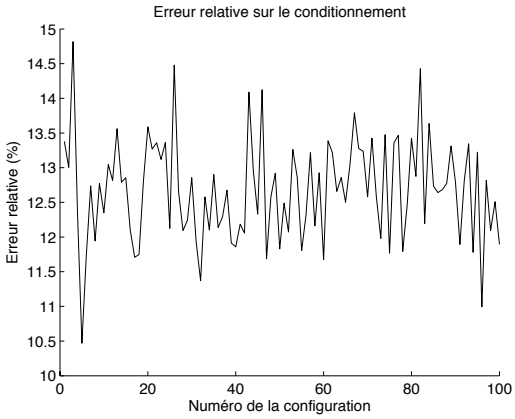


(e) Erreur relative sur le module de μ^h_{max}

FIGURE 5.21 – Comparaison entre la valeur propre de plus grand module μ^h_{max} de la matrice de la matrice $[M_h]^{-1}[L_h]$ et son estimation (5.106). Les obstacles sont des petits disques de rayon $a = 0.1$ discrétisés à l'aide de $N_h = 50$ segments. Pour chacune des 100 configurations différentes, nous plaçons $M = 30$ petits disques aléatoirement dans la boîte $[0, 4] \times [0, 4]$, avec $k = 0.1$ et $b \geq 0.3 (= 3a)$.



(a) Comparaison entre le conditionnement exact et approché



(b) Erreur relative sur le conditionnement

FIGURE 5.22 – Comparaison entre le conditionnement de la matrice $[M_h]^{-1}[L_h]$ et son estimation (5.107). Les obstacles sont des petits disques de rayon $a = 0.1$ discrétisés à l'aide de $N_h = 50$ segments. Pour chacune des 100 configurations différentes, nous plaçons $M = 30$ disques aléatoirement dans la boîte $[0,4] \times [0,4]$, avec $k = 0.1$ et $b \geq 0.3 (= 3a)$.

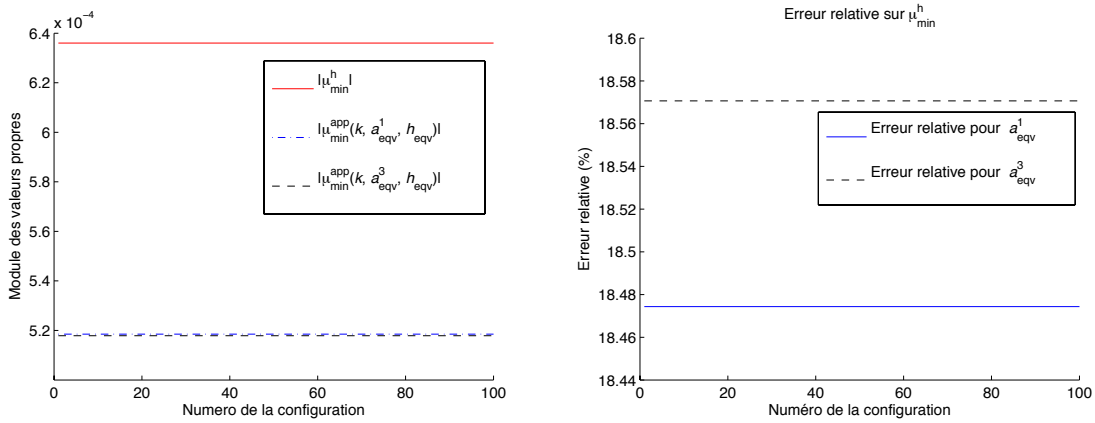
Adaptation à d'autres géométries

Nous adaptons maintenant formellement les estimations (5.106) des valeurs propres μ^h_{min} et μ^h_{max} à des ellipses, le cas des rectangles est traité dans le paragraphe suivant. Nous procédons comme dans le paragraphe 5.4.4 lorsque les obstacles sont éloignés : nous susbtituons formellement le rayon a et le pas h dans les estimations (5.106) des valeurs propres μ^h_{min} et μ^h_{max} par respectivement un rayon équivalent a_{eqv} et un pas équivalent h_{eqv}. Pour une ellipse de demi-grands axes a_{x_1} dans la direction x_1 et a_{x_2} dans la direction x_2, nous avions proposé de choisir le pas équivalent h_{eqv} comme étant égal au plus petit pas de discrétisation du maillage. De plus, les trois rayons équivalents suivants étaient proposés (voir relation (5.25))

$$a^1_{\text{eqv}} = \frac{a_{x_1} + a_{x_2}}{2}, \qquad a^2_{\text{eqv}} = \frac{2a_{x_1}a_{x_2}}{a_{x_1} + a_{x_2}} \qquad \text{et} \qquad a^3_{\text{eqv}} = \frac{\sqrt{a^2_{x_1} + a^2_{x_2}}}{\sqrt{2}}.$$

Nous proposons de valider ces approximations pour des petites ellipses de demi-grand axes $a_{x_1} = 0.1$ et $a_{x_2} = 0.025$. Nous conservons les mêmes paramètres que précédemment : 30 obstacles placés aléatoirement dans la boîte $[0,4] \times [0,4]$, avec $k = 0.1$ et $b \geq 0.3 (= 3a_{x_1})$, où b représente la plus petite distance entre les centres de deux ellipses. Nous calculons numériquement les valeurs propres de plus petit et de plus grand module de la matrice $[M_h]^{-1}[L_h]$, ainsi que son conditionnement pour 100 placements différents d'ellipses. Les figures 5.23 et 5.24 comparent les valeurs propres μ^h_{min} et μ^h_{max} avec leurs estimations tandis que la figure 5.25 compare le conditionnement de la matrice avec son estimation. Notons que les simulations numériques ont montré encore une fois que le rayon a^2_{eqv} donne lieu à une mauvaise approximation des valeurs propres. Afin d'alléger les figures, nous ne présentons les résultats obtenus que pour les deux autres rayons équivalents a^1_{eqv} et a^3_{eqv}. Nous comparons tout d'abord les estimations des valeurs propres μ^h_{min} et μ^h_{max} à l'aide des figures 5.23 et 5.24. Comme nous l'avons constaté en diffraction simple, le choix du rayon équivalent joue un

faible rôle dans l'estimation de μ^h_{min}. Par ailleurs, nous obtenons une erreur relative sur μ^h_{min} de l'ordre de 18% pour chacun des deux rayons. Cette erreur importante peut s'expliquer par le fait que μ^h_{min} dépend fortement du maillage, notamment du plus petit pas de discrétisation utilisé (cas de fortes courbures). Ainsi, l'estimation de la valeur propre de plus petit module peut être très dégradée. Concernant la valeur propre de plus grand module, le choix du rayon équivalent joue un rôle sur l'estimation de μ^h_{max}. En effet, la figure 5.24 montre que a^3_{eqv} conduit à une meilleure estimation de μ_{max} que a^1_{eqv}. Plus précisément, l'erreur relative sur μ^h_{max} est, en moyenne, de 14% pour le choix du rayon équivalent a^3_{eqv} et de 22% pour le rayon a^1_{eqv}. D'autre part, l'estimation sur le module de μ_{max} est plus précise et nous avons en moyenne 5.4% pour a^3_{eqv} contre 19% pour a^1_{eqv} Lorsque les obstacles sont éloignés, nous avions constaté le résultat opposé. Enfin, nous comparons le conditionnement de la matrice $[M_h]^{-1}[L_h]$ avec son estimation, sur la figure 5.25. Nous avons décidé de garder uniquement le rayon équivalent a^3_{eqv}, étant donné que celui-ci fournit une meilleure estimation de μ^h_{max}. L'erreur relative sur le conditionnement est alors en moyenne de 9%, ce qui est satisfaisant.



(a) Comparaison entre le module de la plus petite valeur propre (en module) et son estimation

(b) Erreur relative sur le module de μ_{min}

FIGURE 5.23 – Comparaison entre la plus petite valeur propre (en module) μ^h_{min} de la matrice $[M_h]^{-1}[L_h]$ et ses estimations (5.106). Les obstacles sont des petites ellipses de demi-grand axes $a_{x_1} = 0.01$ et $a_{x_2} = 0.025$, obtenus par une discrétisation de $N_h = 50$ segments. Pour chacune des 100 configurations différentes, nous plaçons $M = 30$ petites ellipses aléatoirement dans la boîte $[0,4] \times [0,4]$, avec $k = 0.1$ et $b \geq 0.3 (= 3a_{x_1})$.

Nous terminons cette étude numérique en considérant des obstacles rectangulaires de demi-longueurs a_{x_1} et a_{x_2}. Nous prenons le rayon équivalent a^4_{eqv} donné par (5.26)

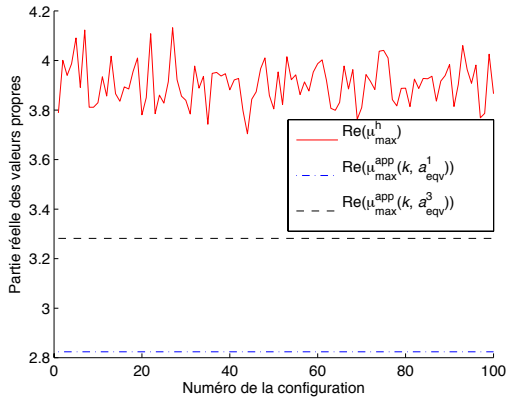
$$a^4_{\text{eqv}} = \frac{(1+\sqrt{2})}{2} \frac{\sqrt{a^2_{x_1} + a^2_{x_2}}}{\sqrt{2}}.$$

De plus, le pas h_{eqv} équivalent est toujours choisi égal au plus petit pas de discrétisation du maillage

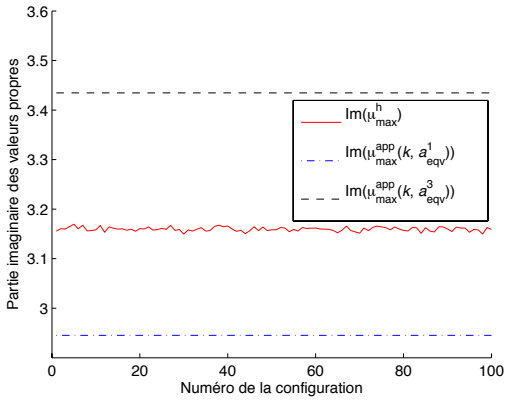
$$h_{\text{eqv}} = \min_{1 \leq p \leq M} \min_{1 \leq j \leq N_{h,p}} h_{p,j}.$$

Nous montrons un exemple numérique reprenant les paramètres précédents. Nous plaçons $M = 30$ petits rectangles de demi-longueurs $a_{x_1} = 0.1$ et $a_{x_2} = 0.025$ aléatoirement dans la boîte $[0, 4] \times [0, 4]$. De plus, nous fixons le nombre d'onde k à 0.1 et la plus petite distance autorisée b entre deux centres de rectangles à $0.3(= 3a_{x_1})$. Numériquement, nous calculons les valeurs propres de la matrice $[M_h]^{-1}[L_h]$, son conditionnement ainsi que les estimations respectives, pour cent placements différents d'obstacles. Commençons par comparer les estimations des valeurs propres de plus petit module μ^h_{min} et de plus grand module μ^h_{max} sur la figure 5.27. En moyenne, nous obtenons une erreur relative sur μ^h_{min} de 2%, contre 18% dans le cas des ellipses. Ceci peut s'expliquer par le fait que, dans le cas du rectangle, le maillage n'est pas uniforme mais le pas de discrétisation reste cependant contant sur chaque arrête du rectangle (contrairement au cas de l'ellipse). Concernant la valeur propre de plus grand module μ^h_{max}, l'erreur relative est en moyenne de 13% et de 2.4% sur son module, ce qui est très précis. L'estimation du conditionnement est satisfaisante puisque, d'après la figure 5.28, l'erreur relative est en moyenne de 14%, comme dans le cas de disques.

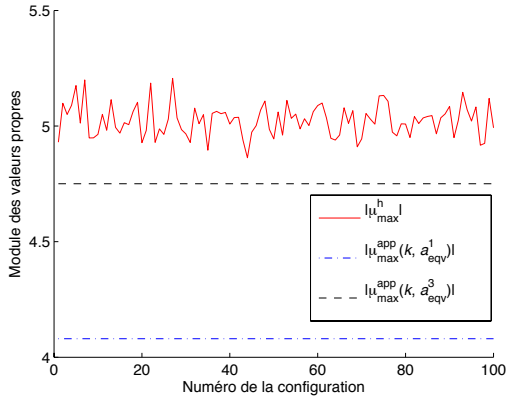
Nous avons ainsi proposé une extension formelle des estimations des valeurs propres de plus petit et de plus grand module de la matrice $[M_h]^{-1}[L_h]$ pour des obstacles proches sous forme d'ellipses ou de rectangles. Sur les exemples numériques que nous avons traité, les estimations obtenues sont aussi précises que dans le cas de disques avec cependant une précision moindre sur la valeur propre de plus petit module μ^h_{min} dans le cas d'ellipses.



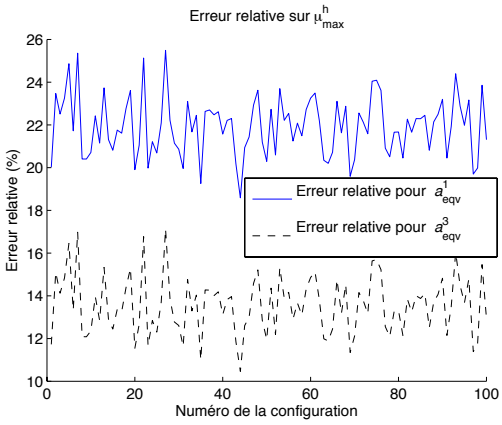
(a) Comparaison entre la partie réelle de la plus grande valeur propre (en module) et son estimation (5.106)



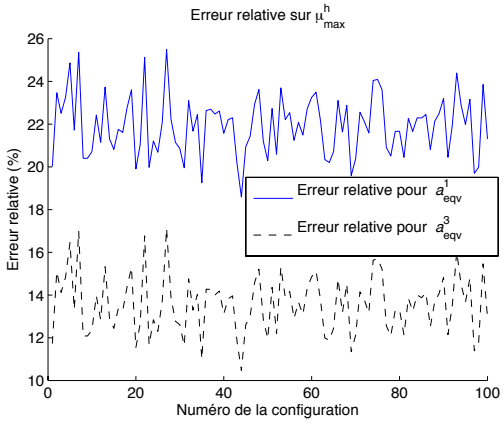
(b) Comparaison entre la partie imaginaire de la plus grande valeur propre (en module) et son estimation (5.106)



(c) Comparaison entre le module de la plus grande valeur propre (en module) et son estimation (5.106)

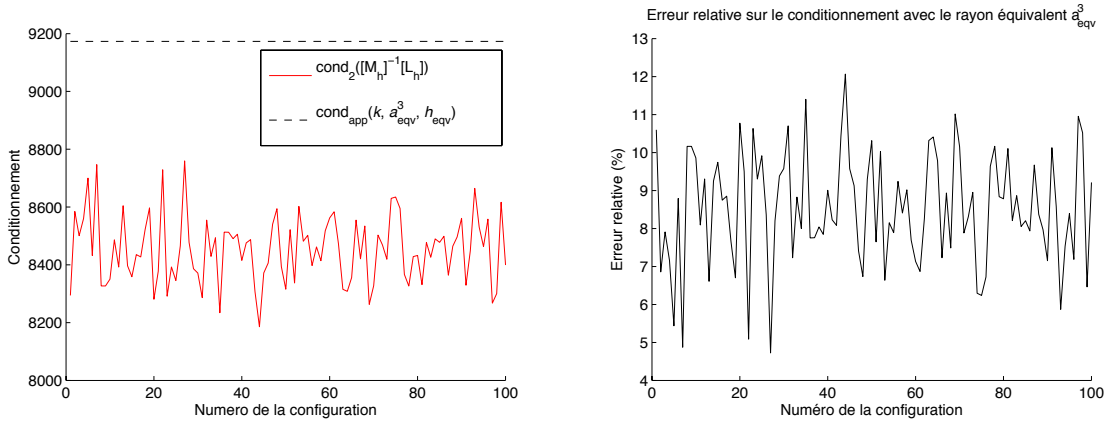


(d) Erreur relative sur de μ_{max}



(e) Erreur relative sur le module de μ_{max}

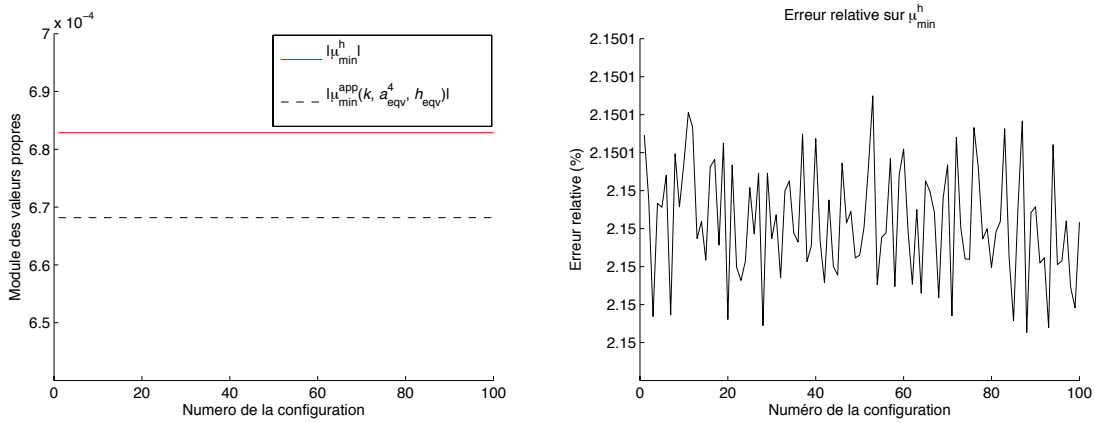
FIGURE 5.24 – Comparaison entre la plus grande valeur propre (en module) μ^h_{max} de la matrice $[M_h]^{-1}[L_h]$ et ses estimations (5.106) pour des petites ellipses de demi-grand axes $a_{x_1} = 0.01$ et $a_{x_2} = 0.025$. Chaque obstacle est obtenu par une discrétisation de $N_h = 50$ segments. Pour chacune des 100 configurations différentes, nous plaçons $M = 30$ petites ellipses aléatoirement dans la boîte $[0,4] \times [0,4]$, avec $k = 0.1$ et $b \geq 0.3 (= 3a_{x_1})$.



(a) Comparaison entre le conditionnement exact et approché

(b) Erreur relative sur le conditionnement

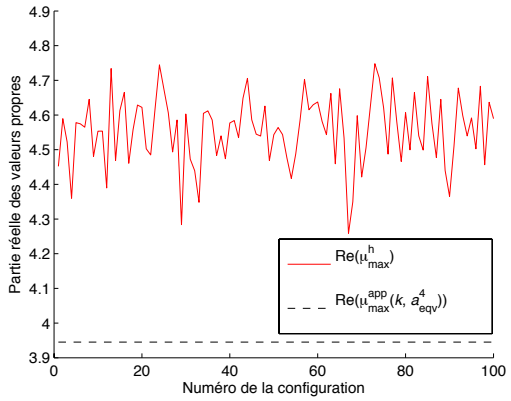
FIGURE 5.25 – Comparaison entre le conditionnement de la matrice $[M_h]^{-1}[L_h]$ et son estimation avec le rayon équivalent a^3_{eqv}. Les obstacles sont des petites ellipses de demi-grands axes $a_{x_1} = 0.1$ et $a_{x_2} = 0.025$, discrétisées à l'aide de $N_h = 50$ segments. Pour chacune des 100 configurations différentes, nous plaçons $M = 30$ ellipses aléatoirement dans la boîte $[0,4] \times [0,4]$, avec $k = 0.1$ et $b \geq 0.3 (= 3a_{x_1})$.



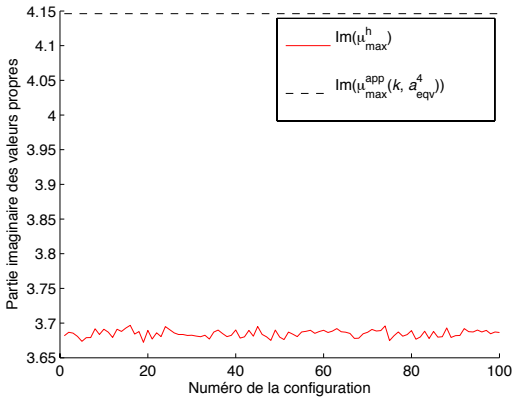
(a) Comparaison entre le module de la plus petite valeur propre (en module) et son estimation

(b) Erreur relative sur le module de μ^h_{min}

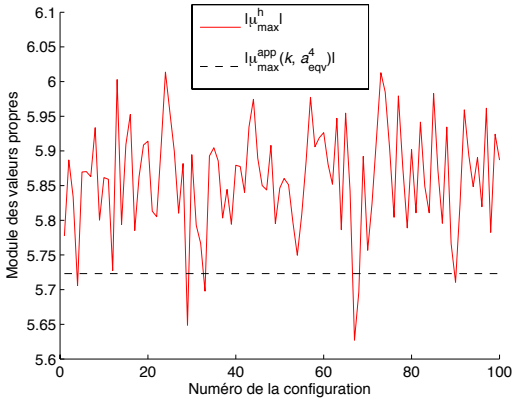
FIGURE 5.26 – Comparaison entre la valeur propre de plus petit module μ^h_{min} de la matrice $[M_h]^{-1}[L_h]$ et son estimation (5.106) pour des petits rectangles de demi-côtés $a_{x_1} = 0.1$ et $a_{x_2} = 0.025$. Chaque rectangle est discrétisé à l'aide de $N_h = 48$ segments (12 par arrête). Pour chacune des 100 configurations différentes, nous plaçons $M = 30$ petits rectangles aléatoirement dans la boîte $[0,4] \times [0,4]$, avec $k = 0.1$ et $b \geq 0.3 (= 3a_{x_1})$.



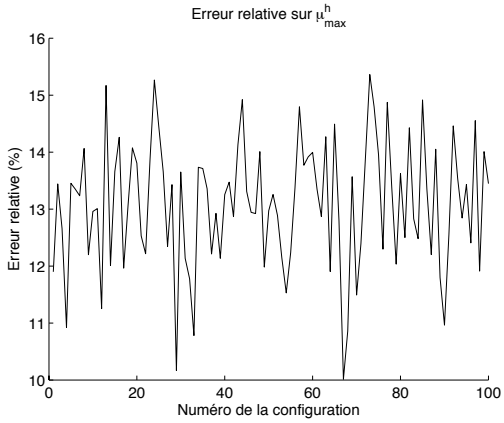
(a) Comparaison entre la partie réelle de la plus grande valeur propre (en module) et son estimation



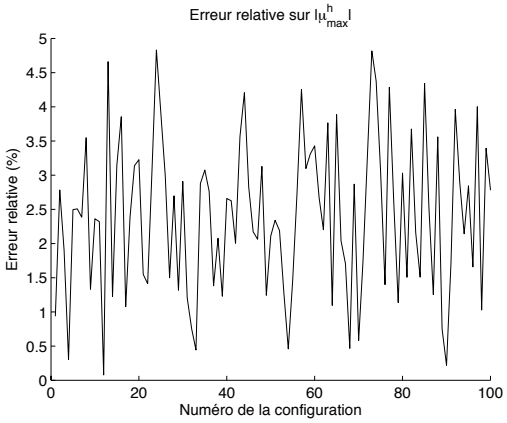
(b) Comparaison entre la partie imaginaire de la plus grande valeur propre (en module) et son estimation



(c) Comparaison entre le module de la plus grande valeur propre (en module) et son estimation

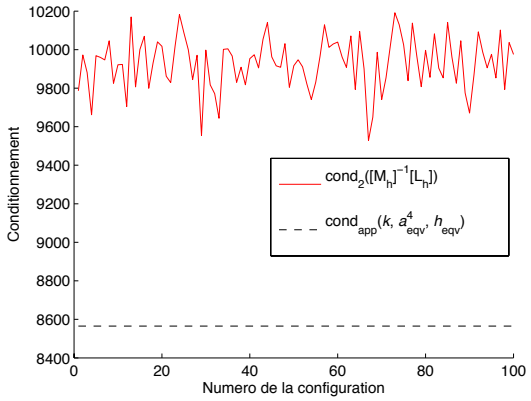


(d) Erreur relative sur μ^h_{max}

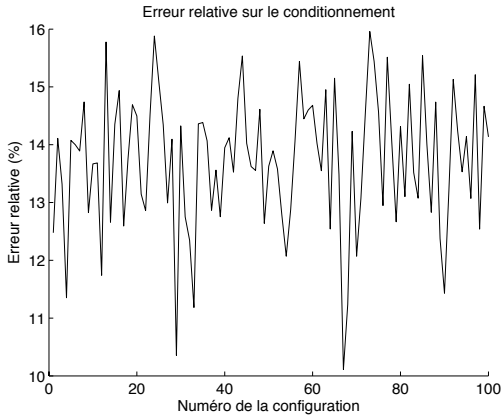


(e) Erreur relative sur le module de μ^h_{max}

FIGURE 5.27 – Comparaison entre la valeur propre de plus grand module μ^h_{max} de la matrice $[M_h]^{-1}[L_h]$ et son estimation (5.106) pour des petits rectangles de demi-côtés $a_{x_1} = 0.1$ et $a_{x_2} = 0.025$. Chaque rectangle est discrétisé à l'aide de $N_h = 48$ segments (12 par arrête). Pour chacune des 100 configurations différentes, nous plaçons $M = 30$ petits rectangles aléatoirement dans la boîte $[0, 4] \times [0, 4]$, avec $k = 0.1$ et $b \geq 0.3 (= 3a_{x_1})$.



(a) Comparaison entre le conditionnement exact et approché



(b) Erreur relative sur le conditionnement

FIGURE 5.28 – Comparaison entre le conditionnement de la matrice $[M_h]^{-1}[L_h]$ et son estimation. Les obstacles sont des petits rectangles de demi-côtés $a_{x_1} = 0.1$ et $a_{x_2} = 0.025$, chacun étant discrétisé à l'aide de $N_h = 48$ segments (12 par arrête). Pour chacune des 100 configurations différentes, nous plaçons $M = 30$ rectangles aléatoirement dans la boîte $[0, 4] \times [0, 4]$, avec $k = 0.1$ et $b \geq 0.3 (= 3a_{x_1})$.

5.6 Conclusion

Dans cette chapitre, nous avons développé des estimations spectrales et du conditionnement de l'opérateur de simple couche en basse fréquence, dans le cadre de la diffraction multiple. Ceci a permis de mettre en évidence le comportement des valeurs propres et du conditionnement de l'opérateur simple couche dans le cas où les obstacles sont éloignés ou proches (en fonction de la longueur d'onde). De plus, des extensions formelles aux obstacles ellipsoïdaux ou rectangulaires ont été obtenues.

Quelques questions restent toutefois à étudier. Une étude plus complète pour les opérateurs de double couche et les traces normales des potentiels de simple et double couches devrait être envisagée. Il est probable (mais cela reste à vérifier) que notre stratégie puisse s'étendre. Nous ne l'avons pas fait faute de temps, car cela nécessitait de nouveaux développements. L'intérêt de cette étude permettrait de considérer l'analyse des opérateurs de type CFIE ou Brakhage-Werner pour la résolution de problèmes de diffraction multiple.

Ensuite, le cas où la distance entre objets est de l'ordre de la taille caractéristique n'a pas été abordé. Nous avons commencé à regarder cette configuration mais n'avons pas encore été capable d'obtenir des estimations pertinentes. Ce commentaire vaut également pour l'étude des régimes de moyenne et haute fréquences. Nous avons prospecté cette situation, sans être à même d'obtenir de résultats clairs. En effet, l'existence de nombreux modes spatiaux couplés rend l'analyse extrêmement délicate. Il est probable qu'une étude sur la diffraction par deux disques permettrait de préciser la situation. Enfin, le cas tridimensionnel mériterait d'être abordé.

Annexe

Annexe A

Focalisation du champ rétro-propagé en dimension 2 pour un MRT épais

Nous proposons ici une étude en dimension deux du champ rétro-propagé u_{RE} lorsque le miroir à retournement temporel $\mathcal{M}$ est épais. Bien que physiquement peu réaliste, ce type de miroir nous a été utile en pratique lors de nos simulations numériques dans le chapitre 3. En reprenant les notations introduites au chapitre 3, nous montrons que l'onde rétro-propagée u_{RE} par ce type de miroir est focalisée uniquement sur le point source $\mathbf{s}$ (voir proposition A.7). En particulier, le champ u_{RE} n'est pas focalisé sur un autre point $\widetilde{\mathbf{s}}$ contrairement au cas du miroir d'épaisseur nulle (voir chapitre 3, paragraphe 3.2.2). Dans cette partie, le miroir $\mathcal{M}$ est défini par

$$\mathcal{M} = \left\{ \mathbf{x} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } a \leq \mathrm{x}_1 \leq b \text{ et } -h \leq \mathrm{x}_2 \leq 0 \right\} (= \overline{\mathcal{M}}), \tag{A.1}$$

où a, b et h sont trois réels tels que $b > a$ et $h > 0$. Nous notons toujours $\Omega_{RE} = \Omega^+ \setminus \mathcal{M}$ le domaine de propagation extérieur au miroir à retournement temporel. Nous supposons que les coordonnées du point source $\mathbf{s} = (\mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2)$ vérifient

$$\mathrm{s}_2 > h, \qquad \mathrm{s}_1 \neq a \qquad \text{et} \qquad \mathrm{s}_1 \neq b. \tag{A.2}$$

La première condition impose au point $\mathbf{s}$ d'être relativement éloigné du MRT, ce qui n'est *a priori* pas très contraignant, étant donné que l'épaisseur h du MRT est supposée très petite devant sa hauteur $b-a$. Les deux hypothèses sur la coordonnées s_1 sont purement techniques et permettent de simplifier les preuves. Une illustration de la configuration est proposée sur la figure A.1.

Rappelons que le champ rétro-propagé u_{RE} par le MRT a pour expression,

$$\forall k > 0, \forall \mathbf{y} \in \Omega_{RE}, \qquad u_{RE}(\mathbf{y}, k) = \int_{\mathcal{M}} \overline{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{A.3}$$

Nous avons vu dans le paragraphe 3.2.2 qu'en dimension deux et lorsque le nombre d'onde k tend vers l'infini, le champ rétro-propagé u_{RE} a le comportement asymptotique suivant

$$\forall \mathbf{y} \in \Omega_{RE}, \qquad u_{RE}(\mathbf{y}, k) = \frac{1}{k} \int_{\mathcal{M}} \frac{e^{ik[\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|]}}{8\pi \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{1/2} \|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|^{1/2}} \, \mathrm{d}\mathbf{x} + O\left(k^{-2}\right), \qquad k \longrightarrow +\infty. \tag{A.4}$$

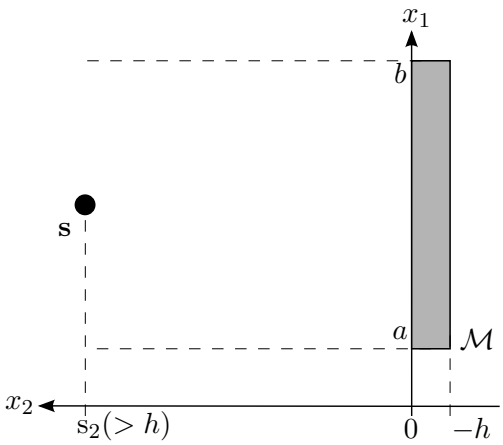


FIGURE A.1 – MRT rectangle en dimension 2.

Pour tout point $\mathbf{y}$ de Ω_{RE}, nous introduisons les fonctions $\Phi_{\mathbf{y}} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\Psi_{\mathbf{y}} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$, définies par

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{M}, \qquad \begin{cases} \Phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|, \\ \Psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{8\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{1/2}\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|^{1/2}}, \end{cases} \tag{A.5}$$

ainsi que, pour tout $k > 0$ et tout point $\mathbf{y} \in \Omega_{RE}$, l'intégrale $J_{\mathbf{y}}(k)$, définie par

$$J_{\mathbf{y}}(k) = \int_{-h}^{0}\int_{a}^{b} e^{ik\Phi_{\mathbf{y}}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)}\Psi_{\mathbf{y}}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)\,\mathrm{d}\mathrm{x}_1\mathrm{d}\mathrm{x}_2. \tag{A.6}$$

Avec ces notations, la relation (A.4) s'écrit

$$\forall \mathbf{y} \in \Omega_{RE}, \qquad u_{RE}(\mathbf{y},k) = J_{\mathbf{y}}(k) + O\left(k^{-2}\right), \qquad k \longrightarrow +\infty. \tag{A.7}$$

Le comportement asymptotique de $J_{\mathbf{y}}(k)$ nous donnera alors celui du champ u_{RE}. Comme précédemment, nous commençons par rechercher les points $\mathbf{y}$ de $\Omega_{RE} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{M}$ tels que la fonction $\Phi_{\mathbf{y}}$, donnée par (A.5), est nulle. Le résultat suivant montre que seul le point $\mathbf{s}$ possède cette propriété.

Lemme A.1. *Pour tout point $\mathbf{y} \in \Omega_{RE}$, la fonction $\Phi_{\mathbf{y}}$ est identiquement nulle si et seulement si $\mathbf{y} = \mathbf{s}$.*

Démonstration. Nous avons montré que si $\mathbf{y} = \mathbf{s}$ alors la fonction $\Phi_{\mathbf{y}}$ est nulle. Supposons maintenant que $\Phi_{\mathbf{y}}$ soit identiquement nulle pour $\mathbf{y} = (\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2) \in \Omega_{RE}$. Nous avons alors, d'après la définition (A.5) de la fonction $\Phi_{\mathbf{y}}$,

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{M}, \qquad \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|^2.$$

En particulier, aux points $(a, 0)$, $(b, 0)$ et $(a, -h)$, il vient que

$$\begin{cases} (a-\mathrm{y}_1)^2 + \mathrm{y}_2^2 = (a-\mathrm{s}_1)^2 + \mathrm{s}_2^2 \\ (b-\mathrm{y}_1)^2 + \mathrm{y}_2^2 = (b-\mathrm{s}_1)^2 + \mathrm{s}_2^2 \\ (a-\mathrm{y}_1)^2 + (-h-\mathrm{y}_2)^2 = (a-\mathrm{s}_1)^2 + (-h-\mathrm{s}_2)^2 \end{cases}$$

En effectuant la différence entre les lignes 1 et 2, ainsi qu'entre les lignes 1 et 3, nous obtenons que

$$\begin{cases} \mathrm{y}_1(a-b) = \mathrm{s}_1(a-b) \\ h\mathrm{y}_2 = h\mathrm{s}_2 \end{cases}$$

Nous concluons que $\mathbf{y} = \mathbf{s}$ puisque $b \neq a$ et $h \neq 0$, par hypothèse. □

Ainsi, aux points $\mathbf{y} \in \Omega_{RE}$ tels que $\mathbf{y} \neq \mathbf{s}$, la quantité $J_{\mathbf{y}}(k)$ est une intégrale oscillante à deux variables. Pour de telles intégrales, nous disposons du résultat suivant (phase stationnaire en dimension deux), issu de la proposition 6 du chapitre VIII de [100] et de la relation (2.9) du chapitre VIII de [106] [1].

Théorème A.2. *Soit un rectangle $D = [a,b] \times [c,d] (= \overline{D})$ de $\mathbb{R}^2$. Introduisons la fonction $I :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ définie par*

$$\forall k > 0, \qquad I(k) = \int_c^d \int_a^b e^{ik\phi(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)} \psi(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)\, \mathrm{d}\mathrm{x}_1 \mathrm{d}\mathrm{x}_2,$$

où les fonctions $\phi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : D \longrightarrow \mathbb{C}$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur domaine. Nous avons alors les résultats suivants

- *Si le gradient de la fonction ϕ ne s'annule jamais sur D, alors le module de l'intégrale $|I(k)|$ a le comportement asymptotique suivant*

$$|I(k)| = O\left(k^{-1}\right), \qquad k \longrightarrow +\infty.$$

- *Supposons qu'il existe un point $(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$ situé dans l'intérieur de D tel que $\nabla\phi(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = 0$ et supposons de plus que la matrice symétrique, de taille 2×2,*

$$\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) \right]_{1 \leq i,j \leq n} \tag{A.8}$$

  soit inversible. Alors, si la fonction ψ est contenue sur un support suffisamment petit autour de $\mathbf{x}_0$, l'intégrale oscillante $I(k)$ a le comportement asymptotique suivant

$$|I(k)| = O\left(k^{-1}\right), \qquad k \longrightarrow +\infty.$$

Les points $(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) \in D$ tels que $\nabla\phi(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = 0$ sont appelés points stationnaires de la fonction ϕ. Ils sont de plus appelés points stationnaires non dégénérés si la matrice (A.8) est inversible.

Notre étude porte maintenant sur les points $\mathbf{y}$ de Ω_{RE} tels que $\mathbf{y} \neq \mathbf{s}$. Recherchons les points stationnaires de la fonction $\Phi_{\mathbf{y}}$. Commençons par un premier résultat de caractérisation de ces points.

Lemme A.3. *Soit un point $\mathbf{y} \in \Omega_{RE}$ tel que $\mathbf{y} \neq \mathbf{s}$. La fonction $\Phi_{\mathbf{y}}$ admet un point stationnaire $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ si et seulement si*

$$\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{s})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|}. \tag{A.9}$$

1. Merci à M. Cassier pour la référence.

Démonstration. Pour $\mathbf{y} \in \Omega_{RE}$, en utilisant la relation (3.20) obtenue dans le cadre d'un MRT d'épaisseur nulle, les dérivées premières de $\Phi_{\mathbf{y}}$ s'écrivent, pour $j = 1, 2$

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{M}, \qquad \frac{\partial \Phi_{\mathbf{y}}}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})_j}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} - \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{s})_j}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|}, \tag{A.10}$$

ce qui permet de conclure directement. □

Pour tout point $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$, introduisons la demi-droite $\mathcal{D}_{\mathbf{xs}} = [\mathbf{x}, \mathbf{s}) \bigcap \Omega_{RE}$ d'origine $\mathbf{x}$ exclue, passant par $\mathbf{s}$ et privée des (éventuels) points de $\mathcal{M}$. Cet ensemble est exactement l'ensemble des points $\mathbf{y}$ de Ω_{RE} tels que le point $\mathbf{x}$ est un point stationnaire de la fonction $\Phi_{\mathbf{y}}$:

$$\mathcal{D}_{\mathbf{xs}} = \left\{ \mathbf{y} \in \Omega_{RE} \text{ tel que } \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} = \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{s})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|} \right\}.$$

Nous introduisons alors le cône $\mathcal{C}$, union de toutes ces demi-droites privé du point $\mathbf{s}$:

$$\mathcal{C} = \left(\bigcup_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}} \mathcal{D}_{\mathbf{xs}} \right) \setminus \{\mathbf{s}\}. \tag{A.11}$$

Ainsi, d'après le lemme précédent, la fonction $\Phi_{\mathbf{y}}$ admet au moins un point stationnaire si et seulement si $\mathbf{y} \in \mathcal{C}$. Une illustration de l'ensemble $\mathcal{C}$ est donnée sur la figure A.2.

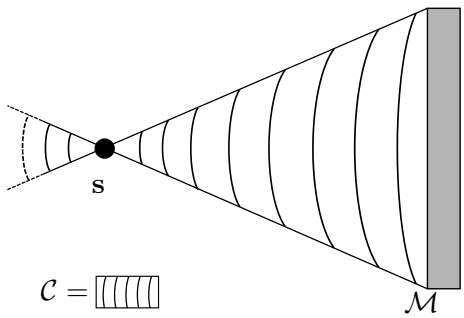


FIGURE A.2 – Illustration du cône de lumière dans le cadre d'un MRT épais

Montrons maintenant que (malheureusement) ces points stationnaires sont dégénérés.

Lemme A.4. *Pour tout $\mathbf{y} \in \mathcal{C}$, chaque point stationnaire de $\Phi_{\mathbf{y}}$ est dégénéré.*

Démonstration. Soient $\mathbf{y} \in \mathcal{C}$ et $\mathbf{x}$ un point stationnaire de $\Phi_{\mathbf{y}}$. Notons d le déterminant de la matrice Hessienne de $\Phi_{\mathbf{y}}$ évaluée au point $\mathbf{x}$:

$$d = \det \left(\left[\frac{\partial^2 \phi_{\mathbf{y}}}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) \right]_{1 \leq i,j \leq 2} \right).$$

Commençons par calculer les dérivées secondes de $\Phi_{\mathbf{y}}$ au point $\mathbf{x}$. Notons $i, j = 1, 2$ avec $i \neq j$. De la relation (A.10) nous en déduisons l'expression des dérivées partielles secondes $\partial^2_{x_i x_j} \Phi_{\mathbf{y}}$, tout d'abord pour pour les dérivées secondes croisées :

$$\frac{\partial^2 \phi_{\mathbf{y}}}{\partial x_i \partial x_j}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = -\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})_i (\mathbf{x}-\mathbf{y})_j}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^3} + \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{s})_i (\mathbf{x}-\mathbf{s})_j}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|^3}.$$

Si $(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$ est un point stationnaire de $\Phi_{\mathbf{y}}$, alors la relation (A.9) implique

$$\frac{\partial^2 \Phi_{\mathbf{y}}}{\partial x_i \partial x_j}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = \left[\frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|} - \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}\right] \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|^2} \left[(\mathbf{x}-\mathbf{s})_i (\mathbf{x}-\mathbf{s})_j\right]. \tag{A.12}$$

Concernant la dérivée partielle seconde de $\Phi_{\mathbf{y}}$ par rapport à x_j, nous obtenons

$$\frac{\partial^2 \Phi_{\mathbf{y}}}{\partial x_j^2}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}\left[1 - \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})_j^2}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}\right] - \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|}\left[1 - \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{s})_j^2}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|^2}\right].$$

Lorsque $(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$ est le point stationnaire de $\Phi_{\mathbf{y}}$, cette expression se réduit à

$$\frac{\partial^2 \Phi_{\mathbf{y}}}{\partial x_j^2}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = \left[\frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|} - \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}\right]\left[\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{s})_j^2}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|^2} - 1\right],$$

soit encore, comme $\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|^2 = (\mathbf{x}-\mathbf{s})_j^2 + (\mathbf{x}-\mathbf{s})_i^2$ et $i \neq j$,

$$\frac{\partial^2 \Phi_{\mathbf{y}}}{\partial x_j^2}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = \left[\frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|} - \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}\right] \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|^2} \left[(\mathbf{x}-\mathbf{s})_i^2\right]. \tag{A.13}$$

Grâce aux expressions (A.12) et (A.13) des dérivées partielles d'ordre deux de la fonction $\Phi_{\mathbf{y}}$, le déterminant d s'écrit alors

$$d = \left[\frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|} - \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}\right]^2 \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|^4} \widetilde{d},$$

où le terme $\widetilde{d}$ est donné par

$$\widetilde{d} = \det \begin{bmatrix} -(\mathbf{x}-\mathbf{s})_2^2 & (\mathbf{x}-\mathbf{s})_1(\mathbf{x}-\mathbf{s})_2 \\ (\mathbf{x}-\mathbf{s})_1(\mathbf{x}-\mathbf{s})_2 & -(\mathbf{x}-\mathbf{s})_1^2 \end{bmatrix}.$$

En développant nous obtenons directement que

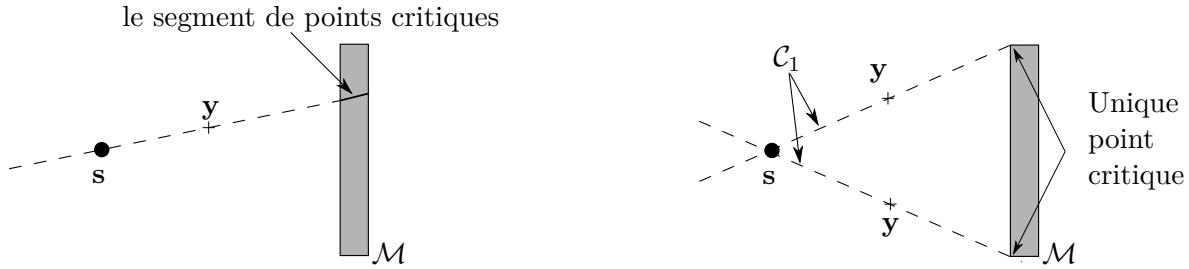
$$\widetilde{d} = 0.$$

Par conséquent, le déterminant d est nul et le point stationnaire $\mathbf{x}$ de $\Phi_{\mathbf{y}}$ est dégénéré. □

Ainsi, quand $\mathbf{y} \in \mathcal{C}$, les points critiques de la fonction $\Phi_{\mathbf{y}}$ sont dégénérés. Par conséquent, nous ne pouvons pas appliquer le théorème A.2 et obtenir le comportement asymptotique de $J_{\mathbf{y}}(k)$. Remarquons alors que, pour tout point $\mathbf{y}$ de $\mathcal{C}$, l'ensemble des points stationnaires de la fonction $\Phi_{\mathbf{y}}$ est exactement $\mathscr{M} \bigcap \mathcal{D}_{\mathbf{ys}}$, où $\mathcal{D}_{\mathbf{ys}}$ est la droite passant par $\mathbf{y}$ et $\mathbf{s}$. Ainsi, soit il existe un unique point stationnaire, qui est alors situé dans un coin de $\mathcal{M}$, soit les points stationnaires décrivent un segment de longueur non nulle. Notons $\mathcal{C}_0$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ tel que, pour tout $\mathbf{y} \in \mathcal{C}_0$, la fonction $\Phi_{\mathbf{y}}$ admette un segment de longueur non nulle de points stationnaires :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 = \{\mathbf{y} \in \mathcal{C} \text{ tel qu'il existe deux points } \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{M} \text{ tels que } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \text{ et} \\ \nabla \Phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \nabla \Phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}') = 0\}. \end{aligned} \tag{A.14}$$

Introduisons de plus $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0$ l'ensemble tel que, pour tout $\mathbf{y} \in \mathcal{C}_0$, la fonction $\Phi_{\mathbf{y}}$ admette un unique point critique. Nous pouvons remarquer que $\mathcal{C}_1$ ne contient en réalité que deux droites. Une illustration est présentée sur la figure A.3. Lorsque la fonction de phase admet une courbe de points stationnaires dégénérés, comme c'est le cas lorsque $\mathbf{y} \in \mathcal{C}_0$, nous disposons du résultat suivant (voir théorème 1 du chapitre VIII, section 9, de [106]).



Exemple de point $\mathbf{y}$ dans $\mathcal{C}_0$ Deux exemples de points $\mathbf{y}$ dans $\mathcal{C}_1$

FIGURE A.3 – Les deux cas possibles de point stationnaires possibles

Théorème A.5. *Soient D un domaine fermé borné de $\mathbb{R}^2$ et f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère la fonction I définie par :*

$$\forall k > 0, \qquad I(k) = \int_D e^{ikf(\mathbf{x})} g(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Nous supposons que les cinq conditions suivantes sont satisfaites :

i) Le domaine D contient une courbe γ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $\nabla f = 0$ sur γ et $\nabla f \neq 0$ sur $D \setminus \gamma$.

ii) La courbe γ est simple (i.e : n'est pas une boucle).

iii) Sur la courbe γ, la fonction f vérifie $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \neq 0$.

iv) La courbe γ coupe le bord de D en deux uniques points A et B tels que $A \neq B$.

v) Les courbes γ et la frontière de D ne sont pas tangentes aux points A et B.

Dans ce cas, lorsque k tend vers l'infini, la quantité $I(k)$ a le comportement asymptotique suivant

$$I(k) = O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

Pour $\mathbf{y} \in \mathcal{C}_0$, le segment $\gamma = \mathcal{M} \bigcap \mathcal{D}_{\mathbf{ys}}$ est exactement l'ensemble des points stationnaires de $\Phi_{\mathbf{y}}$. De plus, cette courbe est simple, de classe $\mathscr{C}^\infty$ et coupe le bord de $\mathcal{M}$ en deux points distincts. Ainsi, il nous reste uniquement à démontrer les points *iii*) et *v*) pour pouvoir appliquer le théorème A.5. Or, nous avons le résultat suivant.

Lemme A.6. *Soient un point $\mathbf{y}$ de $\mathcal{C}_0$ et γ la courbe de points stationnaires de $\Phi_{\mathbf{y}}$. Nous avons les cinq résultats suivants :*

i) La courbe γ de classe $\mathscr{C}^\infty$.

ii) La courbe γ est simple.

iii) Sur la courbe γ, la fonction $\Phi_{\mathbf{y}}$ vérifie $\dfrac{\partial^2 \Phi_{\mathbf{y}}}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 \Phi_{\mathbf{y}}}{\partial x_2^2} \neq 0$.

iv) La courbe γ coupe le bord de $\mathcal{M}$ en deux uniques points $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ tels que $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$.

v) Les courbes γ et la frontière de $\mathcal{M}$ ne sont pas tangentes aux points $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$.

Démonstration. Nous avons vu que les points *i*), *ii*) et *iv*) sont vrais. Il nous reste uniquement à démontrer les points *iii*) et *v*). Commençons par le point *iii*). Prenons un point $\mathbf{y}$ de $\mathcal{C}_0$ et notons $\mathbf{x}$ un point stationnaire de la fonction $\Phi_{\mathbf{y}}$. Nous avons alors d'après les expressions (A.13) des dérivées secondes de $\Phi_{\mathbf{y}}$ au point stationnaire $\mathbf{x}$,

$$\frac{\partial^2 \Phi_{\mathbf{y}}}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2 \Phi_{\mathbf{y}}}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) = \left[\frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|} - \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}\right] \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|^2} \left[(\mathbf{x}-\mathbf{s})_1^2 + (\mathbf{x}-\mathbf{s})_2^2\right].$$

Les trois points $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ et $\mathbf{s}$ appartiennent à la demi-droite $\mathcal{D}_{\mathbf{xs}}$ et sont tels que $\mathrm{x}_2 > \mathrm{y}_2$ et $\mathrm{x}_2 > \mathrm{s}_2$. De plus, nous avons $\mathbf{y} \neq \mathbf{s}$. Par conséquent il vient que $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \neq \|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|$. Enfin, comme $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$, alors nous avons clairement $(\mathbf{x}-\mathbf{s})_1^2 + (\mathbf{x}-\mathbf{s})_2^2 \neq 0$. Ainsi, la relation suivante est satisfaite

$$\frac{\partial^2 \Phi_{\mathbf{y}}}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2 \Phi_{\mathbf{y}}}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) \neq 0,$$

et le point *iii*) est démontré. Intéressons nous maintenant au point *v*). Notons $\partial\mathcal{M}$ la frontière de $\mathcal{M}$ et $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ les deux (uniques) points d'intersection de γ et $\partial\mathcal{M}$. Nous démontrons le point *v*) par l'absurde en supposant que la courbe γ est tangente à $\partial\mathcal{M}$ au point $\mathbf{A}$. Notons $\mathbf{A} = [A_1, A_2]$ les coordonnées du point $\mathbf{A}$. Rappelons que la courbe γ est un segment appartenant à la droite $\mathcal{D}_{\mathbf{sA}}$ passant par $\mathbf{s}$ et $\mathbf{A}$, ce qui implique que la droite $\mathcal{D}_{\mathbf{sA}}$ est tangente à $\partial\mathcal{M}$ au point $\mathbf{A}$. Si on introduit les quatre points $\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}$ situés aux coins de $\mathcal{M}$:

$$\mathbf{M} = [0, b], \qquad \mathbf{N} = [-h, b], \qquad \mathbf{P} = [-h, a], \qquad \mathbf{Q} = [0, a], \tag{A.15}$$

alors, nécessairement, comme $\partial\mathcal{M}$ est un rectangle, la droite $\mathcal{D}_{\mathbf{sA}}$ contient un des quatre côtés de $\partial\mathcal{M}$. Autrement dit, nous avons

$$\mathcal{D}_{\mathbf{sA}} = (\mathbf{MN}) \bigcup (\mathbf{NP}) \bigcup (\mathbf{PQ}) \bigcup (\mathbf{QM}).$$

Remarquons que les droites $(\mathbf{NP})$ et $(\mathbf{QM})$ sont parallèles entre elles ainsi qu'à l'axe $\overrightarrow{\mathbf{O}x_1}$. Le vecteur directeur $\mathbf{sA}$ de la droite $\mathcal{D}_{\mathbf{sA}}$ a pour coordonnées $[A_1 - \mathrm{s}_1, A_2 - \mathrm{s}_2]$ or, d'après la définition (A.1) de $\mathcal{M}$ et l'hypothèse (A.2) sur $\mathbf{s}$, nous avons $A_2 - \mathrm{s}_2 \neq 0$. Autrement dit, la droite $\mathcal{D}_{\mathbf{sA}}$ n'est parallèle ni à $(\mathbf{NP})$ ni à $(\mathbf{QM})$ et nous avons par conséquent

$$\mathcal{D}_{\mathbf{sA}} = (\mathbf{MN}) \bigcup (\mathbf{QP}).$$

Ainsi, d'après les définitions (A.15) des points $\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$, il vient que

$$\mathcal{D}_{\mathbf{sA}} = \Big\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } z_1 = a \text{ ou } z_1 = b \Big\}.$$

Comme le point $\mathbf{s}$ appartient à la droite $\mathcal{D}_{\mathbf{sA}}$, alors $\mathrm{s}_1 = a$ ou $\mathrm{s}_1 = b$. Or, nous avons supposé (A.2) que $\mathrm{s}_1 \neq a$ et $\mathrm{s}_1 \neq b$. Ainsi, la droite $\mathcal{D}_{\mathbf{sA}}$ est vide. La courbe γ n'est alors pas tangente au bord $\partial\mathcal{M}$ au point d'intersection $\mathbf{A}$. Cette démonstration peut être réutilisée pour le point $\mathbf{B}$. Le point *v*) et le lemme sont donc démontrés. □

Ce lemme nous permet d'appliquer le théorème A.5 pour les points $\mathbf{y}$ de $\mathcal{C}_0$ et ainsi obtenir le comportement asymptotique de $J_{\mathbf{y}}(k)$ lorsque k tend vers l'infini. Lorsque $\mathbf{y} \in \mathcal{C}_1$, le point stationnaire (qui est dégénéré) de $\Phi_{\mathbf{y}}$ est situé sur un coin de $\mathcal{M}$. Dans ce cas là, nous n'avons pas obtenu le comportement asymptotique de l'intégrale oscillante $J_{\mathbf{y}}(k)$. Nous pensons toutefois que la décroissance est du même ordre qu'en présence de points stationnaires. Nous pouvons maintenant donner le résultat de focalisation de l'onde u_{RE} sur le point source $\mathbf{s}$, lorsque k tend vers l'infini.

Proposition A.7. *Considérons en dimension deux un miroir à retournement temporel $\mathcal{M}$ d'épaisseur non nulle décrit par la relation (A.1) et un point source $\mathbf{s} = (\mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2)$ tels que*

$$\mathrm{s}_2 > h, \qquad \mathrm{s}_1 \neq a \quad \textit{et} \quad \mathrm{s}_1 \neq b.$$

Dans ce cas, le champ rétro-propagé u_{RE} par le MRT, donné par (A.3) focalise sur le point source $\mathbf{s}$ lorsque le nombre d'onde k tend vers l'infini, dans le sens où

- *si* $\mathbf{y} = \mathbf{s}$*, alors,*

$$u_{RE}(k, \mathbf{s}) = \frac{1}{k}\frac{1}{8\pi}\int_{\mathcal{M}} \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|^2}\,\mathrm{d}\mathbf{x} + O\left(k^{-2}\right) = O\left(k^{-1}\right), \qquad k \longrightarrow +\infty.$$

- *si* $\mathbf{y} \in \mathcal{C}_0$*, alors nous avons*

$$|u_{RE}(k, \mathbf{y})| = O\left(k^{-1/2}\,|u_{RE}(k, \mathbf{s})|\right) = O\left(k^{-3/2}\right), \qquad k \longrightarrow +\infty.$$

- *si* $\mathbf{y} \neq \mathbf{s}$ *et* $\mathbf{y} \notin \mathcal{C}$*, alors nous avons*

$$|u_{RE}(k, \mathbf{y})| = O\left(k^{-1}\,|u_{RE}(k, \mathbf{s})|\right) = O\left(k^{-2}\right), \qquad k \longrightarrow +\infty.$$

Les ensembles $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}_0$ *étant définis par les relations respectives (A.11) et (A.14).*

Démonstration. Rappelons que, lorsque k tend vers l'infini, nous avons, d'après la relation (A.4),

$$\forall \mathbf{y} \in \Omega_{RE}, \qquad u_{RE}(k, \mathbf{y}) = k^{-1} J_{\mathbf{y}}(k) + O\left(k^{-2}\right), \qquad k \longrightarrow +\infty.$$

Au point $\mathbf{y} = \mathbf{s}$, le résultat est évident. Prenons maintenant un point $\mathbf{y} \notin \mathcal{C}$. Dans ce cas, la fonction $\Phi_{\mathbf{y}}$ ne possède aucun point stationnaire et le théorème A.2 permet d'affirmer que $J_{\mathbf{y}}(k) = O\left(k^{-1}\right)$. Par conséquent, nous avons $|u_{RE}(\mathbf{y})| = O\left(k^{-2}\right) = O\left(k^{-1}\,|u_{RE}(\mathbf{s})|\right)$. Terminons en prenant un point $\mathbf{y}$ du cône $\mathcal{C}_0$. Dans ce cas, la fonction $\Phi_{\mathbf{y}}$ admet une courbe γ de points stationnaires dégénérés. Toutefois, d'après le lemme A.6, cette courbe vérifie les hypothèses du théorème A.5 et nous avons alors $J_{\mathbf{y}}(k) = O\left(k^{-1/2}\right)$. Ce qui implique directement que $|u_{RE}(\mathbf{y})| = O\left(k^{-3/2}\right) = O\left(k^{-1/2}\,|u_{RE}(\mathbf{s})|\right)$. □

Comme pour le miroir d'épaisseur nulle, nous schématisons les différentes zones de décroissance dans la figure A.4.

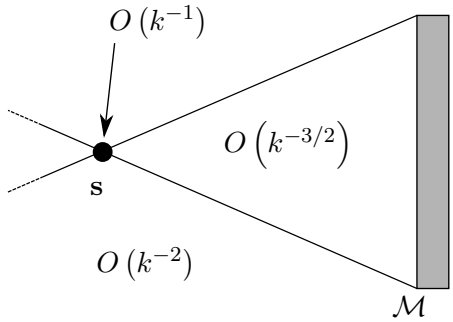


FIGURE A.4 – Récapitulatif des différentes zones de décroissance de $|u_{RE}|$

Bibliographie

[1] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* New York : Dover Publiations, Ninth Printing (1972).

[2] P. R. Amestoy, I. S. Duff, J. Koster, and J.-Y. L'Excellent. A fully asynchronous multifrontal solver using distributed dynamic scheduling. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 23(1) :15–41, 2001.

[3] S. Amini and S. M. Kirkup. Solution of Helmholtz equation in the exterior domain by elementary boundary integral methods. *J. Comput. Phys.*, 118(2) :208–221, 1995.

[4] H. Ammari, E. Iakovleva, D. Lesselier, and G. Perrusson. Music-type electromagnetic imaging of a collection of small three-dimensional inclusions. *SIAM J. Sci. Comput.*, 29(2) :674–709 (electronic), 2007.

[5] H. Ammari and H. Kang. Generalized polarization tensors, inverse conductivity problems, and dilute composite materials : a review. In *Inverse problems, multi-scale analysis and effective medium theory*, volume 408 of *Contemp. Math.*, pages 1–67. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[6] H. Ammari and H. Kang. *Polarization and Moment Tensors. With Applications to Inverse Problems and Effective Medium Theory*, volume 162 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, 2007.

[7] H. Ammari, H. Kang, E. Kim, K. Louati, and M. Vogelius. A MUSIC-type algorithm for detecting internal corrosion from electrostatic boundary measurements. *Numer. Math.*, 108(4) :501–528, 2008.

[8] H. Ammari and J.-C. Nédélec. Low-frequency electromagnetic scattering. *SIAM J. Math. Anal.*, 31(4) :836–861 (electronic), 2000.

[9] X. Antoine, A. Bendali, and M. Darbas. Analytic preconditioners for the electric field integral equation. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, (61) :1310–1331, 2004.

[10] X. Antoine, A. Bendali, and M. Darbas. Analytic preconditioners for the boundary integral solution of the scattering of acoustic waves by open surfaces. *J. Comput. Acoust.*, 3(13) :477–498, 2005.

[11] X. Antoine, C. Chniti, and K. Ramdani. On the numerical approximation of high-frequency acoustic multiple scattering problems by circular cylinders. *J. Comput. Phys.*, 227(3) :1754–1771, 2008.

[12] X. Antoine and M. Darbas. Alternative integral equations for the iterative solution of acoustic scattering problems. *Quaterly J. Mech. Appl. Math.*, 1(58) :107–128, 2005.

[13] X. Antoine and M. Darbas. Generalized combined field integral equations for the iterative solution of the three-dimensional Helmholtz equation. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 1(41) :147–167, 2007.

[14] X. Antoine, C. Geuzaine, and K. Ramdani. *Wave Propagation in Periodic Media - Analysis, Numerical Techniques and Practical Applications*, volume 1, chapter Computational Methods for Multiple Scattering at High Frequency with Applications to Periodic Structures Calculations, pages 73–107. Progress in Computational Physics, 2010.

[15] X. Antoine, B. Pinçon, K. Ramdani, and B. Thierry. Far field modeling of electromagnetic time reversal and application to selective focusing on small scatterers. *SIAM J. Appl. Math.*, 69(3) :830–844, 2008.

[16] T. Arens, A. Lechleiter, and D. R. Luke. Music for extended scatterers as an instance of the factorization method. *SIAM J. Appl. Math.*, 70(4) :1283–1304, 2009.

[17] G. Bal and K. Ren. Transport-based imaging in random media. *SIAM J. Appl. Math.*, 68(6) :1738–1762, 2008.

[18] G. Bal and L. Ryzhik. Time reversal and refocusing in random media. *SIAM J. Appl. Math.*, 63(5) :1475–1498, 2003.

[19] E. Barbieri and M. Meo. Time reversal DORT method applied to nonlinear elastic wave scattering. *Wave Motion*, 47(7) :452–467, 2010.

[20] A. Bayliss, M. Gunzburger, and E. Turkel. Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions. *SIAM J. Appl. Math.*, 42(2) :430–451, 1982.

[21] E. Bécache, A.-S. Bonnet-Ben Dhia, and G. Legendre. Perfectly matched layers for the convected Helmholtz equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(1) :409–433 (electronic), 2004.

[22] C. Ben Amar. *Etude Théorique et Numérique de Processus de Retournement Temporel.* PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2007.

[23] C. Ben Amar, N. Gmati, C. Hazard, and K. Ramdani. Numerical simulation of acoustic time reversal mirrors. *SIAM J. Appl. Math.*, 67(3) :777–791 (electronic), 2007.

[24] A. Bendali and M. Fares. Boundary integral equations methods in acoustics in computational acoustic scattering. In *Computational Methods for Acoustics Problems*, pages 1–36. Saxe-Coburg Publications, 2008.

[25] J.-P. Bérenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comput. Phys.*, 114(2) :185–200, 1994.

[26] A. Bermúdez, L. Hervella-Nieto, A. Prieto, and R. Rodríguez. An optimal perfectly matched layer with unbounded absorbing function for time-harmonic acoustic scattering problems. *J. Comput. Phys.*, 223(2) :469–488, 2007.

[27] T. Betcke, S.N. Chandler-Wilde, I.G. Graham, S. Langdon, and M. Lindner. Condition number estimates for combined potential operators in acoustics and their boundary element discretisation. *Numer. Methods Partial Differential Eq.*, to appear, 2011.

[28] P. Blomgren, G. Papanicolaou, and H. Zhao. Super-resolution in time-reversal acoustics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 11 :230–248, 2002.

[29] L. Borcea, G. Papanicolaou, C. Tsogka, and J. G. Berryman. Imaging and time reversal in random media. *Inverse Problems*, 18(5) :1247–1279, 2002.

[30] H. Brakhage and P. Werner. Über das Dirichletsche Aussenraumproblem für die Helmholtzsche Schwingungsgleichung. *Arch. Math.*, 16 :325–329, 1965.

[31] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications.* Masson, Paris, 1983.

[32] A. J. Burton and G. F. Miller. The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems. *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*, 323 :201–210, 1971. A discussion on numerical analysis of partial differential equations (1970).

[33] F. Cakoni and D. Colton. Combined far-field operators in electromagnetic inverse scattering theory. *Math. Methods Appl. Sci.*, 26(5) :413–429, 2003.

[34] M. Cassier. Détection de cibles par retournement temporel. Mémoire de Master 2 Modélisation et Simulation de l'INSTN (CEA) et de l'Université de Versailles Saint-Quentin (UVSQ), 2010.

[35] D. H. Chambers and J. G. Berryman. Analysis of the time-reversal operator for a small spherical scatterer in an electromagnetic field. *IEEE Trans. Antenna. Prop.*, 52(7) :1729–1738, 2004.

[36] D. H. Chambers and J. G. Berryman. Target characterization using decomposition of the time-reversal operator : electromagnetic scattering from small ellipsoids. *Inverse Problems*, 22(6) :2145–2163, 2006.

[37] S.N. Chandler-Wilde, I.G. Graham, S. Langdon, and M. Lindner. Condition number estimates for combined potential boundary integral operators in acoustic scattering. *J. Integral Equations Appl.*, (21) :229–279, 2009.

[38] K. Chen. *Matrix Preconditioning Techniques and Applications.* Cambridge Cambridge Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, 2005.

[39] M. Cheney. The linear sampling method and the MUSIC algorithm. *Inverse Problems*, 17(4) :591–595, 2001.

[40] M. Cheney and G. Kristensson. Optimal electromagnetic measurements. Technical Report TEAT-7091, Lund Institute of Technology (LUTEDX), 2001.

[41] W.C. Chew and K.F. Warnick. On the spectrum of the electric field integral equation and the convergence of the moment method. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, (51) :475–489, 2001.

[42] F. Collino and P. Monk. The perfectly matched layer in curvilinear coordinates. *SIAM J. Sci. Comput.*, 19(6) :2061–2090 (electronic), 1998.

[43] D. Colton and R. Kress. Eigenvalues of the far field operator and inverse scattering theory. *SIAM J. Math. Anal.*, 26(3) :601–615, 1995.

[44] D. Colton and R. Kress. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, volume 93 of *Applied Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.

[45] D. L. Colton and R. Kress. *Integral Equation Methods in Scattering Theory.* Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons Inc., New York, 1983. A Wiley-Interscience Publication.

[46] E. T. Copson. *Asymptotic Expansions.* Cambridge University Press, 1965.

[47] M. Darbas. *Préconditionneurs Analytiques de type Calderòn pour les Formulations Intégrales des Problèmes de Diffraction d'Ondes.* PhD thesis, INSA de Toulouse, 2004.

[48] G. Dassios and R. Kleinman. *Low Frequency Scattering.* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2000.

[49] T. A. Davis and I. S. Duff. An unsymmetric-pattern multifrontal method for sparse *LU* factorization. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 18(1) :140–158, 1997.

[50] J. de Rosny, G. Lerosey, and M. Fink. Theory of electromagnetic time-reversal mirrors. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, 58(10) :3139–3149, 2010.

[51] J. de Rosny, A. Tourin, A. Derode, B. van Tiggelen, and M. Fink. Relation between time reversal focusing and coherent backscattering in multiple scattering media : A diagrammatic approach. *Phys. Rev. E*, 70(4) :046601, Oct 2004.

[52] A. Derode, A. Tourin, J. de Rosny, M. Tanter, S. Yon, and M. Fink. Taking advantage of multiple scattering to communicate with time-reversal antennas. *Phys. Rev. Lett.*, 90(1) :014301, Jan 2003.

[53] A. Derode, A. Tourin, and M. Fink. Time reversal versus phase conjugation in a multiple scattering environment. *Ultrasonics*, 40(1-8) :275–280, 2002.

[54] A. Devaney. Super-resolution processing of multi-static data using time-reversal and MUSIC. *Northeastern University Preprint*, 2002.

[55] N. Dominguez, V. Gibiat, and Y. Esquerre. Time domain topological gradient and time reversal analogy : an inverse method for ultrasonic target detection. *Wave Motion*, 42(1) :31–52, 2005.

[56] P. Dular, C. Geuzaine, F. Henrotte, and W. Legros. A general environment for the treatment of discrete problems and its application to the finite element method. *IEEE Trans. Magn.*, 34(5) :3395–3398, September 1998.

[57] B. Engquist and A. Majda. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Math. Comp.*, 31(139) :629–651, 1977.

[58] M. Fink, D. Cassereau, A. Derode, C. Prada, P. Roux, M. Tanter, J.-L. Thomas, and F. Wu. Time-reversed acoustics. *Rep. Prog. Phys.*, 63(12) :1933–1995, 2000.

[59] M. Fink, J. de Rosny, G. Lerosey, and A. Tourin. Time-reversed waves and super-resolution. *Comptes Rendus Physique*, 10(5) :447–463, 2009.

[60] M. Fink and C. Prada. Eigenmodes of the time-reversal operator : A solution to selective focusing in multiple-target media. *Wave Motion*, 20 :151–163, 1994.

[61] M. Fink and C. Prada. Acoustic time-reversal mirrors. *Inverse Problems*, 17(1) :1761–1773, 2001.

[62] T. Folégot, C. Prada, and M. Fink. Resolution enhancement and separation of reverberation from target echo with the time reversal operator decomposition. *J. Acoust. Soc. Am.*, 113(6) :3155–3160, 2003.

[63] J.-P. Fouque, J. Garnier, A. Nachbin, and K. Sølna. Time-reversal refocusing for point source in randomly layered media. *Wave Motion*, 42(3) :238 – 260, 2005.

[64] J.-P. Fouque, J. Garnier, G. Papanicolaou, and K. Sølna. *Wave Propagation and Time Reversal in Randomly Layered Media*, volume 56 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer, New York, 2007.

[65] J.-P. Fouque, J. Garnier, and K. Sølna. Time reversal super resolution in randomly layered media. *Wave Motion*, 43(8) :646–666, 2006.

[66] C. F. Gaumond, D. M. Fromm, J. F. Lingevitch, R. Menis, G. F. Edelmann, D. C. Calvo, and E. Kim. Demonstration at sea of the decomposition-of-the-time-reversal-operator technique. *J. Acoust. Soc. Am.*, 119(2) :976–990, 2006.

[67] C. Geuzaine, O. Bruno, and F. Reitich. On the O(1) solution of multiple-scattering problems. *IEEE Trans. Magn.*, 41(5) :1488–1491, May 2005. 11th IEEE Biennial Conference on Electromagnetic Field Computation, Seoul, South Korea, June 06-09, 2004.

[68] C. Geuzaine and J.-F. Remacle. Gmsh : A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 79(11) :1309–1331, 2009.

[69] I. Harari, M. Slavutin, and E. Turkel. Analytical and numerical studies of a finite element PML for the Helmholtz equation. *J. Comput. Acoust.*, 8(1) :121–137, 2000. Finite elements for wave problems (Trieste, 1999).

[70] R.F. Harrington and J.R. Mautz. H-field, E-field and combined field solution for conducting bodies of revolution. *Archiv Elektronik und Uebertragungstechnik*, 4(32) :157–164, 1978.

[71] C. Hazard and C. Ben Amar. Time reversal and scattering theory for time-dependent acoustic waves in a homogeneous medium. *IMA J. Appl. Math.*, 2010.

[72] C. Hazard and K. Ramdani. Selective acoustic focusing using time-harmonic reversal mirrors. *SIAM J. Appl. Math.*, 64(3) :1057–1076, 2004.

[73] D. Ia. *Méthodes d'Imagerie et d'Identification en Électromagnétisme.* PhD thesis, Université Paul Sabatier, 2008.

[74] A. Kirsch. The MUSIC algorithm and the factorization method in inverse scattering theory for inhomogeneous media. *Inverse Problems*, 18(4) :1025–1040, 2002.

[75] A. Kirsch. The factorization method for Maxwell's equations. *Inverse Problems*, 20(6) :S117–S134, 2004.

[76] R. E. Kleinman and T. B. A. Senior. Rayleigh scattering. In *Low and high frequency asymptotics*, volume 2 of *Mech. Math. Methods. Ser. Handbooks. Ser. III Acoust. Electromagnet. Elastic Wave Scatt.*, pages 1–70. North-Holland, Amsterdam, 1986.

[77] R. Kress. On the limiting behaviour of solutions to boundary integral equations associated with time harmonic wave equations for small frequencies. *Math. Methods Appl. Sci.*, 1(1) :89–100, 1979.

[78] R. Kress. Minimizing the condition number of boundary integral operators in acoustic and electromagnetic scattering. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 38(2) :323–341, 1985.

[79] R. Kress and W. T. Spassov. On the condition number of boundary integral operators for the exterior Dirichlet problem for the Helmholtz equation. *Numer. Math.*, 42(1) :77–95, 1983.

[80] M. Lenoir and A. Jami. A variational formulation for exterior problems in linear hydrodynamics. *Comput. Method. Appl. M.*, 16(3) :341–359, 1978.

[81] G. Lerosey, J. de Rosny, A. Tourin, A. Derode, G. Montaldo, and M. Fink. Time reversal of electromagnetic waves. *Phy. Rev. Lett.*, 92(19) :193904, 2004.

[82] J. F. Lingevitch, H. Song, and W. Kuperman. Time reversed reverberation focusing in a waveguide. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 111(6) :2609–2614, 2002.

[83] D. Liu, G. Kang, L. Li, Y. Chen, S. Vasudevan, W. Joines, Q. Liu, J. Krolik, and L. Carin. Electromagnetic time-reversal imaging of a target in a cluttered environment. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 53 :3058–3066, 2005.

[84] P. A. Martin. *Multiple Scattering. Interaction of Time-Harmonic Waves with N Obstacles*, volume 107 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[85] T.D. Mast, A.I. Nachman, and R.C. Waag. Focusing and imaging using the eigenfunctions of the scattering operator. *J. Acoust. Soc. Am.*, 102 :715–725, 1997.

[86] G. Micolau. *Etude Théorique et Numérique de la Méthode de la Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel (D.O.R.T.) en diffraction Électromagnétique*. PhD thesis, Université d'Aix-Marseille, June 2001.

[87] J.-G. Minonzio. *Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel Appliquée à l'Imagerie et à la Caractérisation Ultrasonore*. PhD thesis, Paris 7 University, 2006.

[88] J.-G. Minonzio, C. Prada, A. Aubry, and M. Fink. Multiple scattering between two elastic cylinders and invariants of the time-reversal operator : Theory and experiment. *J. Acoust. Soc. Am.*, 120(2) :875–883, 2006.

[89] N. Mordant, C. Prada, and M. Fink. Highly resolved detection and selective focusing in a waveguide using the D.O.R.T. method. *J. Acoust. Soc. Am.*, 105(5) :2634–2642, 1999.

[90] J.-C. Nédélec. *Acoustic and Electromagnetic Equations. Integral Representations for Harmonic Problems*, volume 144 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2001.

[91] R. Picard. On the low frequency asymptotics in electromagnetic theory. *J. Reine Angew. Math.*, 354 :50–73, 1984.

[92] B. Pinçon and K. Ramdani. Selective focusing on small scatterers in acoustic waveguides using time reversal mirrors. *Inverse Problems*, 23(1) :1–25, 2007.

[93] G. Pólya and G. Szegö. *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*. Annals of Mathematics Studies, no. 27. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1951.

[94] C. Prada. The D.O.R.T. method. *J. Acoust. Soc. Am.*, 101(5) :3090–3090, 1997.

[95] C. Prada, E. Kerbrat, D. Cassereau, and M. Fink. Time reversal techniques in ultrasonic nondestructive testing of scattering media. *Inverse Problems*, 18(6) :1761–1773, 2002.

[96] C. Prada, S. Manneville, D. Spoliansky, and M. Fink. Decomposition of the time reversal operator : Detection and selective focusing on two scatterers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1996.

[97] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri. *Méthodes Numériques*. Springer Milan, 2007.

[98] R. V. Row. Theoretical and experimental study of electromagnetic scattering by two identical conducting cylinders. *J. Appl. Phys.*, 26(6) :666–675, 1955.

[99] Y. Saad and M. Schultz. GMRES : a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 7(3) :856–869, 1986.

[100] E. M. Stein. *Harmonic Analysis : Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, volume 43 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III.

[101] J.-L. Thomas, F. Wu, and M. Fink. Time reversal focusing applied to lithotripsy. *Ultrasonic Imaging*, 18(2) :106–121, 1996.

[102] H. Tortel, G. Micolau, and M. Saillard. Decomposition of the time reversal operator for electromagnetic scattering. *J. Electromagn. Waves Appl.*, 13(5) :687–719, 1999.

[103] C. Tsogka and G. Papanicolaou. Time reversal through a solid-liquid interface and super-resolution. *Inverse Problems*, 18(6) :1639–1657, 2002.

[104] P. Werner. On the exterior boundary value problem of perfect reflection for stationary electromagnetic wave fields. *J. Math. Anal. Appl.*, 7 :348–396, 1963.

[105] P. Werner. On the behavior of stationary electromagnetic wave fields for small frequencies. *J. Math. Anal. Appl.*, 15 :447–496, 1966.

[106] R. Wong. *Asymptotic Approximations of Integrals.* Academic Press Inc., Boston, MA, 1989.

Analyse et Simulations Numériques du Retournement Temporel et de la Diffraction Multiple

Cette thèse comporte deux parties.

La première est consacrée à l'étude de quelques problèmes inverses de détection et de localisation d'obstacles ou de sources à l'aide d'un miroir à retournement temporel (MRT), appareil pouvant rétro-propager des ondes sur la source qui les a émises. Nous commençons par la méthode DORT qui permet de focaliser sélectivement des ondes sur des petits obstacles. Nous étudions numériquement en acoustique les résultats mathématiques obtenus par C. Hazard et K. Ramdani et étendons mathématiquement ces résultats au cas de l'électromagnétisme. Puis, nous nous intéressons à la reconstruction d'une source acoustique ponctuelle avec un MRT. Dans un contexte déterministe, nous proposons des simulations numériques attestant du phénomène de super-résolution, c'est-à-dire l'amélioration en moyenne de la qualité de la focalisation dans un milieu hétérogène plutôt qu'homogène.

La deuxième partie a pour objet la résolution numérique par équations intégrales du problème de diffraction multiple en acoustique, c'est-à-dire en présence de nombreux obstacles. D'une part, nous montrons que le préconditionneur prenant en compte les effets de la diffraction simple (interaction d'un objet avec lui-même) a la propriété intéressante de rendre toutes les équations intégrales semblables. D'autre part, pour des obstacles circulaires, nous calculons explicitement les coefficients de Fourier des quatre opérateurs intégraux usuels. Ceci nous permet de proposer une méthode de résolution numérique robuste et efficace et, de plus, d'étudier numériquement le spectre de l'opérateur intégral de simple couche en régime basse fréquence dans un milieu dilué et dans un milieu dense.

Analysis and Numerical Simulations of Time Reversal and Multiple Scattering

This thesis is divided into two parts.

The first one deals with some inverse problems related to the detection and localization of targets using a Time Reversal Mirror (TRM), which can back-propagate a signal on the source that emitted it. We first study the DORT method, a technique used to focus waves selectively on small scatterers. In the context of acoustic scattering, a numerical investigation of the mathematical results obtained by C. Hazard and K. Ramdani is proposed. These results are then mathematically extended to the electromagnetic case. To conclude this part, we investigate numerically the reconstruction of an acoustic point source with a TRM. By using a deterministic model, we provide numerical examples that illustrate the super-resolution phenomena, that is, the enhancement in average of the quality of focusing in an heterogeneous medium compared to an homogeneous one.

The second part is devoted to the numerical solution of acoustic multiple scattering problems using integral equations. Multiple scattering means that the medium contains at least two scatterers. We first study the preconditioner which takes into account the single scattering (self-interaction) effects. Then, we show that all the so-preconditioned integral equations are identical, up to an invertible operator. Afterwards, for circular scatterers, we analytically compute the Fourier coefficients of the four classical boundary integral operators. Thus, we propose on the one hand an efficient and robust numerical method and on the other hand a numerical investigation of the spectrum of the single-layer boundary integral operator in the low frequency regime for a dense medium and a dilute one.

Mots clés : retournement temporel (acoustique), équation d'Helmholz, diffraction des ondes, simulation numérique, opérateurs intégraux.