



**HAL**  
open science

# Etude mathématique et numérique de la propagation acoustique d'un turboréacteur

Stefan Duprey

► **To cite this version:**

Stefan Duprey. Etude mathématique et numérique de la propagation acoustique d'un turboréacteur. Mathématiques [math]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2006. Français. NNT : 2006NAN10185 . tel-01746556v2

**HAL Id: tel-01746556**

**<https://theses.hal.science/tel-01746556v2>**

Submitted on 9 May 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Etude mathématique et numérique de la propagation acoustique d'un turboréacteur

## THÈSE

en vue d'obtenir le diplôme

Doctorat de l'Université Henri Poincaré-Nancy 1

Spécialité : Mathématiques Appliquées.

par

Stefan Duprey

Composition du jury :

<i>Rapporteurs</i>	Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia Christophe Bailly	CR1 CNRS HDR, INRIA-ENSTA Paris Professeur, ECL Lyon
<i>Examineurs</i>	Isabelle Terrasse François Dubois Karim Ramdani	Ingénieure de recherche, EADS-CCR Paris Professeur, CNAM Paris CR1 INRIA, IECN Nancy
<i>Directeur</i>	Antoine Henrot	Professeur, EMN-INPL Nancy

Analyse Mathématique et Numérique du Rayonnement Acoustique des  
Turboréacteurs

Stefan Duprey\*

\*EADS-CCR Suresnes, Département Modélisation Mathématique et Numérique ; Institut Elie Cartan-INRIA Lorraine-Université Poincaré Nancy 1

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude à Eric Duceau et Isabelle Terrasse pour m'avoir accueilli à EADS au sein du département Modélisation Mathématique du CCR-Suresnes pour la réalisation de cette thèse CIFRE. Je leur suis gré de leur confiance.

Je remercie Antoine Henrot d'avoir accepté de diriger cette thèse, pour sa disponibilité malgré son emploi du temps chargé.

Je tiens également à remercier Christophe Bailly et Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia qui ont accepté de rapporter ce mémoire.

Je remercie François Dubois et Karim Ramdani d'avoir accepté de faire partie du jury, confirmant ainsi l'intérêt qu'il porte à mon travail.

Je salue également tous les thésards et stagiaires de EADS, anciens comme nouveaux, qui ont toujours su faire régner une ambiance joviale.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Enjeux et problèmes</b>	<b>9</b>
1.1	Classification en zones propres . . . . .	9
1.1.1	Géométrie des zones propres . . . . .	10
1.1.2	Distinction des zones propres . . . . .	10
1.1.3	Zones d'étude . . . . .	11
1.2	Distinction entre domaines de calcul et zones propres . . . . .	12
1.2.1	Définition géométrique des domaines de calcul . . . . .	12
1.2.2	Hypothèses inhérentes au modèle . . . . .	13
1.3	Equations générales . . . . .	13
1.3.1	Equations de l'écoulement total . . . . .	13
1.3.2	Equations linéarisées . . . . .	14
1.4	Plan du document . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Moteur : un modèle de guide d'ondes</b>	<b>19</b>
2.1	Problématique . . . . .	19
2.2	Décomposition modale . . . . .	20
2.3	Normalisation . . . . .	22
2.3.1	Flux d'énergie . . . . .	22
2.3.2	Adimensionnement et coefficients modaux . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Ecoulement constant</b>	<b>29</b>
3.1	Théorie du problème continu . . . . .	30
3.1.1	Transformée de Lorentz . . . . .	30
3.1.2	Equations intégrales . . . . .	31
3.2	Du continu au discret . . . . .	39

3.2.1	Discrétisation axisymétrique . . . . .	39
3.2.2	Opérateur simple couche . . . . .	41
3.2.3	Opérateur singulier . . . . .	42
3.2.4	Opérateur adjoint du double couche . . . . .	44
3.2.5	Partie régulière . . . . .	45
3.2.6	Intégrales singulières . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Écoulement potentiel</b>	<b>49</b>
4.1	Un premier problème simplifié . . . . .	49
4.1.1	Problématique . . . . .	49
4.1.2	Formulation énergétique . . . . .	51
4.1.3	Formulation symétrique . . . . .	52
4.1.4	Formulation axisymétrique . . . . .	53
4.2	Théorie du problème continu . . . . .	56
4.2.1	Écoulement porteur . . . . .	56
4.2.2	Acoustique potentielle . . . . .	68
4.2.3	Couplage modes-volume . . . . .	70
4.2.4	Existence et unicité . . . . .	73
4.3	Du continu au discret . . . . .	86
4.3.1	Couplage numérique modes-volume . . . . .	86
4.3.2	Equations intégrales avec écoulement . . . . .	90
4.3.3	Détails de l'implémentation numérique . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>95</b>
5.1	Singularité axiale . . . . .	95
5.1.1	Problématique . . . . .	95
5.1.2	Élément fini axisymétrique . . . . .	97
5.2	Condition de Robin . . . . .	102
5.2.1	Problématique . . . . .	102
5.2.2	Intégrale de bord dans l'espace de Lorentz . . . . .	102
5.3	Cas-tests analytiques . . . . .	103
5.3.1	Validation des conditions intégrales . . . . .	103
5.3.2	Validation des conditions modales . . . . .	107

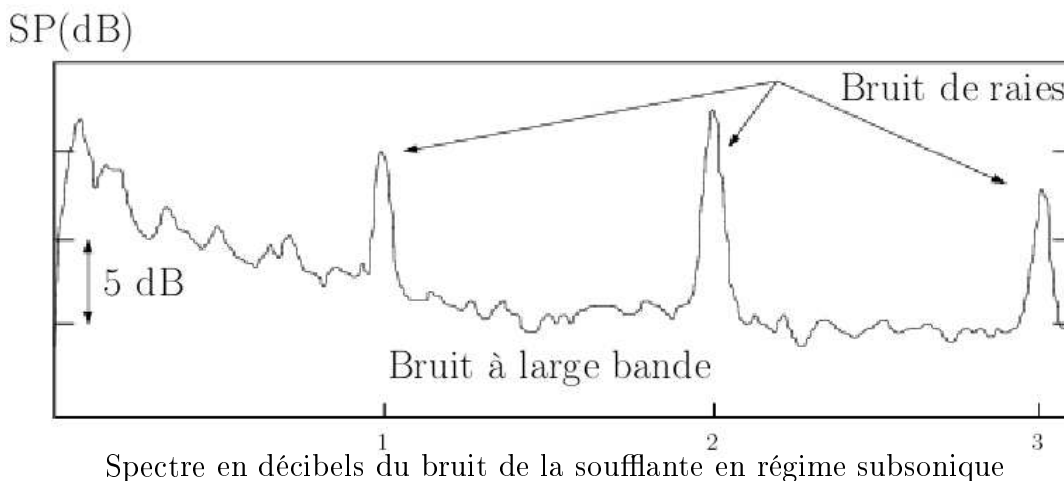
5.4	Validation comparative . . . . .	112
5.4.1	Problématique . . . . .	112
5.4.2	Écoulement porteur nul . . . . .	112
5.4.3	Écoulement constant $M = 0,1$ . . . . .	113
5.5	Propagation potentielle et influence de l'écoulement . . . . .	115
5.5.1	Écoulement porteur numérique . . . . .	115
5.5.2	Acoustique numérique . . . . .	116
5.5.3	Effet Doppler et effet d'advection . . . . .	117
5.5.4	Comparaison à Mach moteur augmentant . . . . .	119
5.5.5	Diagrammes de rayonnement . . . . .	122
5.6	Propagation acoustique potentielle à haute fréquence . . . . .	124
5.6.1	Écoulement porteur numérique . . . . .	124
5.6.2	Acoustique numérique . . . . .	125

## Introduction générale

Ce document présente les travaux de recherche effectués dans le cadre d'une thèse CIFRE issue d'un partenariat entre le Centre Commun de Recherche EADS-Suresnes et l'INRIA-Lorraine au sein de l'université Henri Poincaré Nancy 1. Ces travaux traitent de problèmes de propagation acoustique en présence d'écoulement et proposent une analyse mathématique et numérique du rayonnement acoustique des turboréacteurs.

Devant la récente explosion du trafic aérien, les industriels se sont vus imposer des normes internationales de certification quant au bruit occasionné par les avions au décollage, dans le but de protéger les populations avoisinantes aux aéroports. Ces normes sont strictes et définies au décibel près : une atténuation de quelques décibels peut se révéler primordiale. La gêne acoustique et sa minimisation sont donc maintenant une priorité.

Les principales nuisances sonores d'un avion au décollage sont dues aux turboréacteurs. Le bruit d'origine aérodynamique et le bruit de jet à l'arrière de la nacelle sont alors négligeables par rapport au bruit créé par le moteur, puis rayonné par les conduits d'entrée et d'éjection d'air. La source acoustique "moteur" se caractérise par la présence de raies émergeant de plus de 20 dB du spectre à large bande, aux harmoniques de la fréquence de rotation des pales. Ce bruit est qualifié de tonal ou de raies.



Pour minimiser ce bruit, les constructeurs d'avion peuvent jouer sur plusieurs paramètres du réacteur :



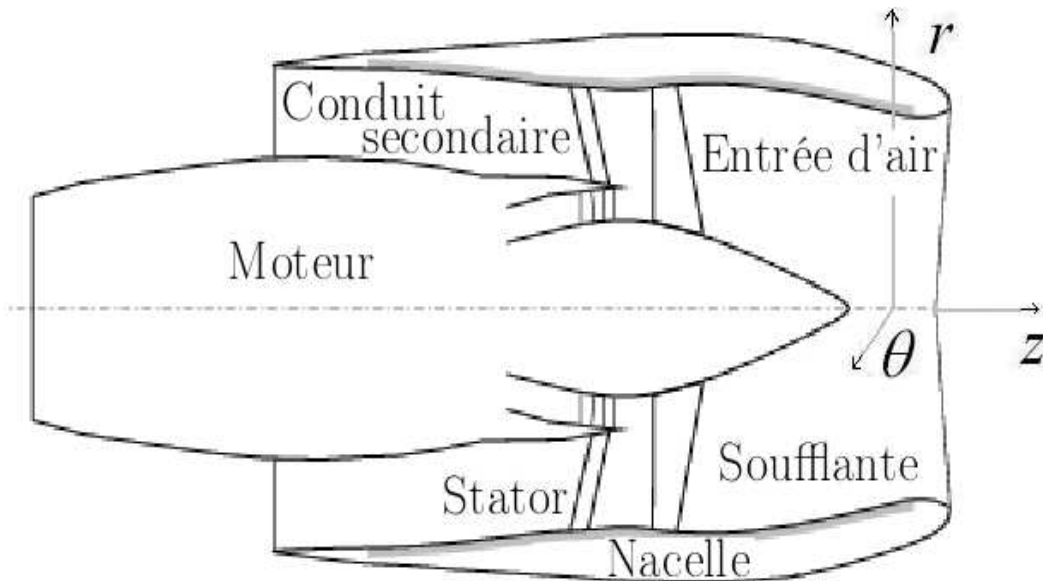


Schéma d'une nacelle de turboréacteur

- Les motoristes peuvent, par une meilleure compréhension de la génération du bruit par les différents constituants du moteur, réagencer, traiter et minimiser la production du bruit à sa source.
- La présence de matériaux de type nid d'abeilles sur les parois des conduits de la nacelle est destinée à absorber le bruit tonal du moteur lors de sa propagation dans les conduits de la nacelle.
- Même si ces travaux d'atténuation ont porté leurs fruits, les normes internationales de certification devenant de plus en plus sévères, il faut toujours trouver de nouvelles solutions pour réduire le bruit :  
les nacellistes peuvent apporter des améliorations de type géométrique comme l'optimisation de la forme de la lèvre de l'entrée d'air ou encore de la disposition des traitements dans les conduits...

Tester l'influence d'une nouvelle forme de nacelle ou d'un réagencement des parties traitées est onéreux et les mesures délicates : l'intérêt du développement d'un code de calcul informatique pour prévoir et optimiser avant de construire est évident.

Actuellement, dans l'optique de traiter numériquement l'avion tout entier, il faut le décomposer en domaines de complexité physique croissante, optimisant ainsi la résolution numérique globale en profitant des simplifications inhérentes à chaque physique.

Les phénomènes physiques mis en jeu par le rayonnement acoustique tonal du moteur au décollage sont simples par rapport à ceux mis en jeu par la création du bruit aérodynamique et le bruit de jet, qui nécessitent un traitement numérique extrêmement coûteux.

Le rayonnement acoustique tonal à l'avant de la nacelle (*via* le conduit d'entrée d'air) s'inscrit dans une zone physique bien ciblée définissant un domaine précis dans la décomposition de domaine globale : la propagation linéaire d'une perturba-

tion acoustique sur un écoulement porteur.

Le rayonnement acoustique tonal à l'arrière de la nacelle (*via* les conduits d'éjection d'air) n'est pas traité dans ce document : la présence d'une discontinuité de jet à l'arrière de la nacelle relève d'une physique plus compliquée.

Ce manuscrit détaille l'avènement du modèle mathématique découlant du cadre physique précis et ciblé de la propagation acoustique linéaire tonale à l'avant de la nacelle.

L'existence et l'unicité de la solution globale fluide-acoustique sont démontrées.

Une discrétisation numérique du problème continu par éléments finis est proposée.

La complexité des différents écoulements porteurs envisageables ramifie le problème de la propagation acoustique linéaire en une suite de problèmes de complexité croissante et il découle naturellement le plan du document (plan explicité précisément dans le chapitre 1 "Enjeux et problèmes").

La validation du code se fait naturellement à partir de solutions analytiques et de codes préexistants.

L'originalité des nouveaux résultats est finalement détaillée.

# Chapitre 1

## Enjeux et problèmes

Ce chapitre détaille dans un premier temps la physique de la distinction en zones propres d'un écoulement autour d'une nacelle.

Fort de cette décomposition, le domaine précis d'étude du manuscrit est explicité.

Les conditions de bord fermant le domaine d'étude et les hypothèses inhérentes à la réalisation d'un code ciblé sur une zone propre précise sont exposées.

Les équations globales et linéarisées du problème sont détaillées.

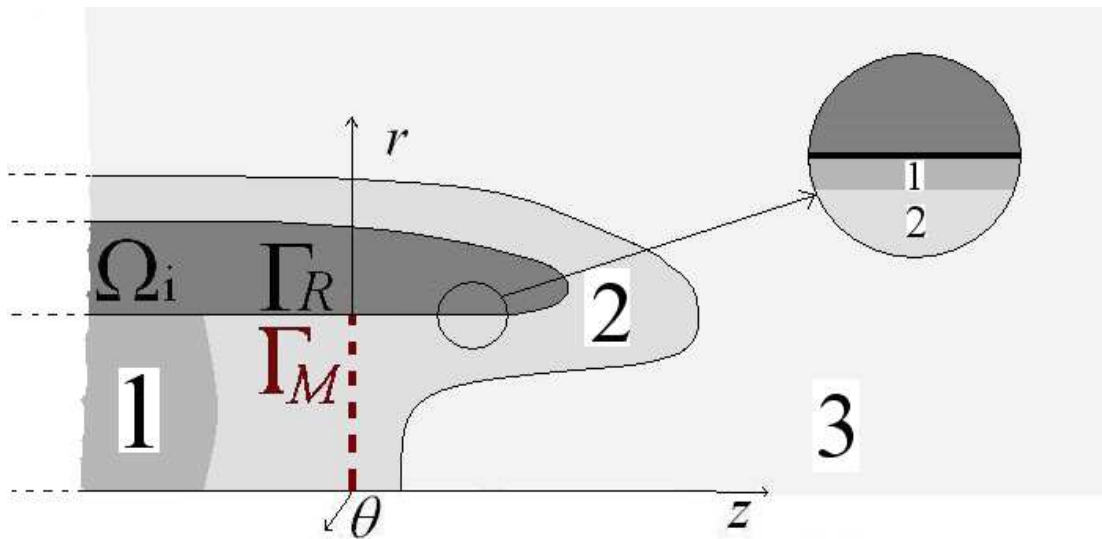
Le plan du document est finalement exposé dans ses détails, de la démonstration mathématique de l'existence et l'unicité à la description des résultats de la discrétisation numérique proposée.

### 1.1 Classification en zones propres

De récents progrès dans l'étude de la génération et de la propagation du son par un écoulement quelconque (les ouvrages de référence de M.S. Howe [35] et de D.G. Crighton [24], par exemple, dressent un bilan des principales avancées consécutives aux travaux pionniers de N. Curle [25], de M.J. Lighthill [41] et de J.E. Ffowcs Williams et D.L. Hawkings [63], ainsi que des nouvelles applications physiques résultantes) ont conduit à une classification nouvelle d'un écoulement quelconque en zones "géographiques" de complexité acoustique croissante.

Ce paragraphe explicite succinctement la physique et la géométrie propres de chaque zone de cette classification dans le cadre de l'écoulement à l'avant de la nacelle d'un turboréacteur.

### 1.1.1 Géométrie des zones propres



- 1** : zone de création du bruit aérodynamique
- 2** : zone de linéarisation
- 3** : zone de propagation linéaire sur un écoulement uniforme

Le repère cylindrique  $(r, \theta, z)$  est le repère du référentiel de l'avion, qui vole à vitesse constante.  $\Omega_i$  désigne la nacelle considérée comme un objet acoustiquement rigide à symétrie de révolution d'axe  $z$ . La surface  $\Gamma_R$  désigne la surface rigide de la nacelle. La surface  $\Gamma_M$  est une surface fictive située assez loin du moteur pour se trouver dans la zone **2** (elle se trouve à l'origine  $z = 0$  du référentiel fixe à l'avion). Le zoom pointe sur le phénomène de couche limite.

### 1.1.2 Distinction des zones propres

- La zone **1** correspond à la zone de création du bruit aérodynamique. Cette zone comprend l'intérieur du moteur, le jet à l'arrière de la nacelle et les couches limites. Cette zone est la plus complexe. Elle nécessite l'équation complète de Navier-Stokes (terme non linéaire+terme visqueux) et une équation énergétique complète reliant température et entropie. Les nombres de Mach au niveau des pales sont transsoniques et des ondes de choc peuvent apparaître. L'acoustique est non-linéaire. L'analogie de Lighthill suggère de considérer les perturbations tourbillonnaires et les non linéarités comme des sources acoustiques quadripolaires. Il y a interaction entre écoulement et acoustique : on parle d'**aéroacoustique**. Les approches numériques de cette zone sont très coûteuses et encore incapables de traiter l'avion tout entier.
- La zone **2** correspond à l'acoustique linéaire. Les nombres de Mach sont supposés suffisamment faibles pour que l'acoustique puisse être considérée comme une perturbation linéaire petite devant l'écoulement porteur. L'acoustique est un phénomène linéaire découplé de l'écoulement qui devient simple porteur. Cette zone exclut les

perturbations aérodynamiques et les couches limites : la viscosité de l'équation de Navier-Stokes est négligée (équation d'Euler) et l'équation thermodynamique se réduit à une condition isentropique pour le fluide que l'on suppose parfait.

Pour toute grandeur physique totale de l'écoulement global (porteur+acoustique), sa valeur moyenne dans le temps est introduite : ces valeurs moyennes temporelles sont stationnaires, car le régime permanent est établi et l'avion vole à vitesse constante. Ces valeurs sont celles de l'écoulement fluide porteur, où se propagent les ondes acoustiques. Les variables acoustiques (resp. les variables de l'écoulement porteur) sont obtenues en linéarisant l'équation d'Euler et l'équation énergétique d'isentro- pie à l'ordre 1 (resp. à l'ordre 0). La linéarisation introduit deux échelles physiques distinctes : une pour l'écoulement et une pour l'acoustique. Les variables physiques correspondantes sont indicées par  $a$  (resp. 0) pour les variables acoustiques (resp. pour les variables de l'écoulement porteur).

Une hypothèse est ajoutée au modèle. L'équation d'Euler propage les perturbations tourbillonnaires créées par la viscosité et l'écoulement porteur est *a priori* rotationnel (ainsi que la perturbation acoustique). L'influence des rotationnalités de l'écoulement porteur sur la propagation de la perturbation acoustique du moteur est ici négligée par rapport à la simple propagation potentielle (sur la partie de l'écoulement dérivant d'un gradient dans la décomposition de Hodge) : l'écoulement porteur est supposé potentiel et irrotationnel. La perturbation acoustique est aussi supposée potentielle.

- La séparation entre la zone **2** et la zone **3** concerne uniquement la complexité de l'écoulement porteur : la zone **2** correspond à un écoulement potentiel quelconque vérifiant l'ordre 0 stationnaire des équations d'Euler et d'isentro- pie pour un écoulement potentiel. La zone **3** correspond à l'écoulement potentiel le plus simple possible : l'écoulement uniforme. L'uniformité de l'écoulement permet d'exhiber la fonction de Green de l'équation aux dérivées partielles de la zone **3**, puisque celle-ci est à coefficients constants. L'équation volumique est équivalente à une équation surfacique sur le bord du domaine.

### 1.1.3 Zones d'étude

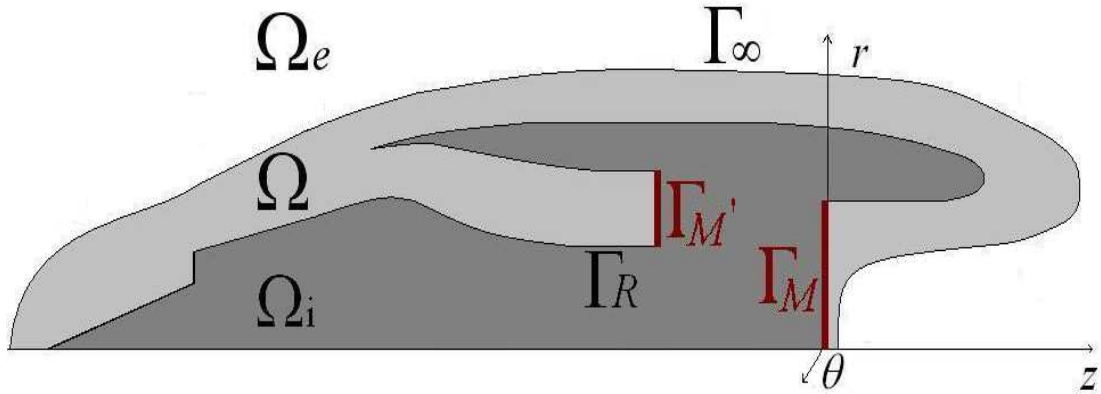
La distinction physique des différentes zones explicitée, le cadre de travail peut être maintenant défini : seul le traitement des zones **2** et **3** est envisagé dans ce docu- ment.

La zone **1** nécessite l'utilisation de codes de mécanique des fluides complexes. Les résultats issus de calculs d'un logiciel de mécanique des fluides ou de mesures phy- siques dans la zone **1** sont ici des **données** du problème : ces données acoustiques provenant de la zone **1** sont exprimées sur la surface fictive  $\Gamma_M$ , permettant ainsi de borner le domaine d'étude intéressant ce document et formé uniquement des zones **2** et **3** ( $\Gamma_M$  est supposée assez loin du moteur pour être située dans la zone **2**, cette hypothèse est nécessaire pour l'expression des sources acoustiques provenant du moteur).

## 1.2 Distinction entre domaines de calcul et zones propres

Ce paragraphe détaille le lien entre les domaines géographiques effectifs de calcul et les zones propres physiques réelles qui ne sont en fait pas les mêmes pour des raisons d'implémentation numérique.

### 1.2.1 Définition géométrique des domaines de calcul



Domaines de définition des équations

$\Omega_i$  désigne toujours la nacelle rigide, à laquelle on a ajouté l'intérieur du moteur (zone 1 et une partie de la zone **2** jusqu'à la surface fictive  $\Gamma_M$ ).

$\Omega$  est le domaine proche de la nacelle, où l'acoustique est supposée linéaire et où l'écoulement porteur potentiel est supposé variable : les équations de  $\Omega$  correspondent à la physique propre de la zone **2**.

$\Omega_e$  est le domaine, où l'écoulement potentiel porteur est partout uniforme (égal à l'opposé de la vitesse de l'avion) : les équations de  $\Omega_e$  correspondent à la physique propre de la zone **3**.

Le domaine de définition  $\Omega$  des équations linéarisées coïncide avec le domaine réel de la zone propre **2** seulement à l'avant de la nacelle.

Le domaine de définition  $\Omega_e$  de propagation acoustique sur un écoulement constant coïncide totalement avec la zone propre **3**.

Par abus de notation, les domaines tridimensionnels cartésiens (resp. surfaces de bord bidimensionnelles cartésiennes) obtenus par révolution des domaines transverses :  $\Omega_i$ ,  $\Omega$  et  $\Omega_e \subset \mathbb{R}^2$  (resp. des surfaces de bord monodimensionnelles transverses correspondantes  $\Gamma_M$ ,  $\Gamma_M'$ ,  $\Gamma_R$  et  $\Gamma_\infty$ ) sont désignés de la même façon que ceux-ci (resp. celles-ci).

Dans certains paragraphes, où des distinctions sont nécessaires, de nouvelles conventions d'écriture sont ajoutées : la géométrie de la situation est explicitée au début de chaque nouveau paragraphe.

## 1.2.2 Hypothèses inhérentes au modèle

L'implémentation d'un code numérique global évitant la zone **1** (et donc l'arrière de la nacelle à cause de la discontinuité de jet) nécessite d'imposer à l'arrière de la nacelle une fausse zone propre **2**, d'où la définition du domaine de calcul effectif  $\Omega$  de la zone **2**. En effet, la résolution de l'écoulement porteur potentiel découlant d'un problème de Neumann sans second membre (un flux constant est imposé sur  $\Gamma_M$  et  $\Gamma_\infty$  de telle sorte que l'écoulement soit uniforme à leur niveau), il est nécessaire d'introduire la surface  $\Gamma_{M'}$  et de prolonger  $\Omega$  à l'arrière de la nacelle pour avoir un problème de Neumann bien posé, dont le flux global est nul.

Cet écoulement porteur potentiel à l'arrière est irréaliste. Néanmoins, seule la propagation acoustique à l'intérieur du conduit avant principal (la soufflante et pas les conduits secondaires) et son rayonnement à l'avant nous intéressent : l'effet de l'écoulement irréaliste à l'arrière de la nacelle est négligé dans le cadre de la propagation acoustique du bruit tonal du moteur à l'avant de la nacelle.

L'implémentation d'un code numérique global évitant la zone **1** nécessite également d'occulter les phénomènes complexes de couche limite. Les couches limites sont remplacées par des conditions de bord simplifiées : on impose une condition glissante de flux nul pour l'écoulement porteur et une condition de réflexion totale pour l'acoustique.

## 1.3 Equations générales

Ce paragraphe présente les équations de l'écoulement total dans  $\Omega$  (physique de la zone **2**) et leur linéarisation. Une démarche identique peut être trouvée dans le manuel théorique du logiciel ACTRAN [21] développé par la société Free Field Technologies, qui résout exactement le même problème physique ciblé sur la zone **2** avec également l'hypothèse supplémentaire de potentialité pour l'écoulement porteur et la perturbation acoustique.

### 1.3.1 Equations de l'écoulement total

Dans le domaine cartésien  $\Omega_{tot} = (\bar{\Omega} \cup \Omega_e) \setminus (\Gamma_R \cup \Gamma_M \cup \Gamma_{M'}) \subset \mathbb{R}^3$ , le fluide est de l'air, que l'on assimile à un gaz parfait caractérisé par le rapport des chaleurs spécifiques  $\gamma = 1,4$ . On suppose l'écoulement isentropique et isenthalpique : la viscosité est négligée et le fluide est supposé ne pas conduire la chaleur. L'écoulement est supposé potentiel : sa vitesse dérive d'un potentiel et l'écoulement est irrotationnel. On désigne respectivement par  $\vec{v}$ ,  $p$ ,  $\rho$  et  $\phi$  : la vitesse, la pression, la densité volumique, le potentiel des vitesses de la particule de fluide se trouvant en  $\vec{x}$  à l'instant  $t$ .  $a$  désigne la vitesse du son à l'intérieur de l'écoulement. De ces hypothèses physiques découlent les quatre équations suivantes :

- L'équation d'Euler des fluides non visqueux :

$$\frac{d}{dt} \vec{v}(\vec{x}, t) + \frac{\vec{\nabla} p(\vec{x}, t)}{\rho(\vec{x}, t)} = 0, \quad \forall \vec{x} \in \Omega_{tot}, \quad \forall t \geq 0, \quad (1.1)$$

où  $\frac{d}{dt}$  désigne la dérivée particulaire (vision eulérienne).

- L'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{x}, t) + \operatorname{div}(\rho(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t)) = 0, \quad \forall \vec{x} \in \Omega_{tot}, \quad \forall t \geq 0 \quad (1.2)$$

- La conservation de l'entropie et la loi des gaz parfaits :

$$\frac{p(\vec{x}, t)}{\rho(\vec{x}, t)^\gamma} = cte = K, \quad \forall \vec{x} \in \Omega_{tot}, \quad \forall t \geq 0 \quad (1.3)$$

- L'irrotationnalité de l'écoulement et le potentiel des vitesses découlant :

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{\nabla} \phi(\vec{x}, t), \quad \forall \vec{x} \in \Omega_{tot}, \quad \forall t \geq 0 \quad (1.4)$$

- La définition thermodynamique de la vitesse du son :

$$a(\vec{x}, t)^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s \text{ fixée}} = K \gamma \rho(\vec{x}, t)^{\gamma-1}, \quad \forall \vec{x} \in \Omega_{tot}, \quad \forall t \geq 0 \quad (1.5)$$

Etablissons maintenant la relation de Bernoulli. L'équation de conservation de la masse se réécrit en fonction de  $\phi$  et  $\rho$  :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \Delta \phi + \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \rho = 0, \quad \forall \vec{x} \in \Omega_{tot}, \quad \forall t \geq 0$$

L'équation d'Euler se réécrit en fonction de  $\phi$  et  $\rho$  :

$$\vec{\nabla} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\vec{\nabla} \phi|^2}{2} \right) + \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} = 0, \quad \forall \vec{x} \in \Omega_{tot}, \quad \forall t \geq 0$$

L'isentropie et la loi des gaz parfaits donnent :

$$\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} = \frac{\vec{\nabla} a^2}{\gamma - 1}, \quad \forall \vec{x} \in \Omega_{tot}, \quad \forall t \geq 0$$

En substituant l'équation précédente dans l'équation d'Euler, on obtient la relation de Bernoulli.

Le potentiel des vitesses de l'écoulement vérifie dans l'espace et dans le temps, où  $F(t)$  est une fonction uniforme en espace :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\vec{\nabla} \phi|^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = F(t), \quad \forall \vec{x} \in \Omega_{tot}, \quad \forall t \geq 0 \quad (1.6)$$

### 1.3.2 Equations linéarisées

#### Equations de l'écoulement porteur

L'écoulement fluide porteur est stationnaire (l'avion vole à vitesse constante). Les équations de l'écoulement porteur dans le domaine cartésien  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  s'obtiennent



à partir de la linéarisation au premier ordre des équations de l'écoulement global (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.5) :

- L'irrotationnalité de l'écoulement porteur et le potentiel des vitesses découlant :

$$\vec{v}_0(\vec{x}) = \vec{\nabla} \phi_0(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in \Omega \quad (1.7)$$

- La conservation de l'entropie et la loi des gaz parfaits :

$$\frac{p_0(\vec{x})}{\rho_0(\vec{x})^\gamma} = cte, \quad \forall \vec{x} \in \Omega \quad (1.8)$$

- L'équation d'Euler pour les fluides non visqueux stationnaires :

$$\frac{\vec{\nabla} (|\vec{v}_0(\vec{x})|^2)}{2} + \text{rot}(\vec{v}_0(\vec{x})) \wedge \vec{v}_0(\vec{x}) + \frac{\vec{\nabla} (p_0(\vec{x}))}{\rho_0(\vec{x})} = 0, \quad \forall \vec{x} \in \Omega, \quad (1.9)$$

où le terme rotationnel disparaît du fait de la potentialité.

- La définition thermodynamique de la vitesse du son :

$$a_0(\vec{x})^2 = \left( \frac{\partial p_0}{\partial \rho_0} \right)_{s \text{ fixée}}(\vec{x}) = cste \gamma \rho_0(\vec{x})^{\gamma-1} = \frac{\gamma p_0(\vec{x})}{\rho_0(\vec{x})}, \quad \forall \vec{x} \in \Omega \quad (1.10)$$

- L'équation de conservation de la masse :

$$\text{div} \left( \rho_0(\vec{x}) \vec{\nabla} \phi_0(\vec{x}) \right) = 0, \quad \forall \vec{x} \in \Omega \quad (1.11)$$

## Equations de l'acoustique

Dans le domaine cartésien  $\Omega_{tot}$ , l'écoulement total est la somme de l'écoulement potentiel stationnaire porteur et d'une perturbation acoustique, dont les grandeurs acoustiques correspondantes sont indexées par  $a$ . Le bruit du moteur est supposé monofréquentiel et la perturbation acoustique est supposée harmonique de pulsation  $\omega$  (convention  $e^{-i\omega t}$ ) :

$$\begin{cases} u(\vec{x}, t) = \vec{v}_0(\vec{x}) + \vec{v}_a(\vec{x}) e^{-i\omega t}, & \forall \vec{x} \in \Omega_{tot}, \quad \forall t \geq 0 \\ \rho(\vec{x}, t) = \rho_0(\vec{x}) + \rho_a(\vec{x}) e^{-i\omega t}, & \forall \vec{x} \in \Omega_{tot}, \quad \forall t \geq 0 \\ p(\vec{x}, t) = p_0(\vec{x}) + p_a(\vec{x}) e^{-i\omega t}, & \forall \vec{x} \in \Omega_{tot}, \quad \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

La perturbation acoustique harmonique se propageant sur l'écoulement porteur potentiel est déterminée par l'ordre 1 des équations de l'écoulement total (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.5) :

- La perturbation acoustique est irrotationnelle :

$$\vec{v}_a(\vec{x}) e^{-i\omega t} = \vec{\nabla} \phi_a(\vec{x}) e^{-i\omega t}, \quad \forall \vec{x} \in \Omega_{tot}, \quad \forall t \geq 0 \quad (1.13)$$

- La linéarisation de la loi de conservation de l'entropie :

$$p_a(\vec{x}) e^{-i\omega t} = a_0(\vec{x})^2 \rho_a(\vec{x}) e^{-i\omega t}, \quad \forall \vec{x} \in \Omega_{tot}, \quad \forall t \geq 0 \quad (1.14)$$

- La linéarisation de la loi de conservation de la masse :

$$-i\omega\rho_a(\vec{x}) + \operatorname{div}\left(\rho_0(\vec{x})\vec{\nabla}\phi_a(\vec{x})\right) + \operatorname{div}\left(\rho_a(\vec{x})\vec{v}_0(\vec{x})\right) = 0 \quad (1.15)$$

- La linéarisation du théorème de Bernoulli (1.6) :

$$\rho_a(\vec{x}) = -\frac{\rho_0}{a_0^2}(-i\omega\phi_a(\vec{x}) + \vec{v}_0(\vec{x})\cdot\vec{\nabla}\phi_a(\vec{x})) \quad (1.16)$$

**Remarque 1.3.1.**

- Dans la relation de Bernoulli (1.6) pour le champ total, la fonction  $F(t)$  est uniforme en espace et ne dépend que du temps. On se place en régime harmonique établi et cette fonction  $F$  est une constante complète qui disparaît avec l'ordre 0.
- Le bruit du moteur est monofréquentiel (pulsation  $\omega$  de rotation des pales) et on cherche le potentiel acoustique en régime harmonique établi sous la forme :

$$\phi_a(x, t) = a(x) \cos(\omega t - \psi(x)) = \Re e\left(\phi_a(x) e^{-i\omega t}\right), \quad (1.17)$$

où  $\phi_a(x) = a(x) e^{i\psi(x)}$  est maintenant une fonction à valeurs complexes ( $a(x)$  (resp.  $\psi(x)$ ) est une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  (resp.  $\mathbb{R}$ )). Si la source  $f(x)\cos(\omega t)$  est à valeurs réelles, par linéarité,  $\Re e(\phi_a(x)e^{-i\omega t})$  définit la solution réelle associée. Toute variable physique dépendant linéairement du potentiel acoustique s'obtient par la partie réelle de sa valeur complexe associée.

## 1.4 Plan du document

Ce paragraphe détaille le plan complet de ce manuscrit.

Le chapitre 2 de ce manuscrit détaille la modélisation de la source de bruit tonal du moteur et la condition de bord acoustique à imposer sur  $\Gamma_M$  pour prendre en compte les données acoustiques sources provenant de la zone **1** et ainsi fermer le domaine géométrique d'étude. Les hypothèses physiques de linéarisation de la zone **2** et le placement de la surface fictive  $\Gamma_M$  permettent l'expression de la perturbation acoustique tonale du moteur sous la forme de modes acoustiques de conduit guidés en écoulement uniforme. La condition de bord acoustique s'exprime à l'aide d'un opérateur Dirichlet-Neumann en présence d'écoulement.

Le chapitre 3 traite de l'écoulement potentiel le plus simple, globalement uniforme (même s'il viole les conditions aux limites) : la zone 2 est inexistante et seule la zone 3 à l'extérieur de la nacelle est considérée. L'écoulement est alors ramené à zéro par une transformation algébrique de Lorentz. Le problème est équivalent à la question de la diffraction d'une onde acoustique en domaine homogène non borné. La transformée de Lorentz de la condition de bord acoustique au moteur en écoulement permet de retrouver la condition habituelle d'un guide d'ondes sans écoulement *via* le classique opérateur Dirichlet-Neumann. L'existence et l'unicité de la solution transformée soumise à une condition de Sommerfeld ne sont pas abordées ici :

elles découlent naturellement du cas plus général traité dans les chapitres suivants. L'équation volumique en domaine non borné est ramenée à une équation intégrale sur la surface finie de la nacelle à l'aide du classique noyau de Green de l'équation de Helmholtz. L'approche numérique dans le cas d'une géométrie axisymétrique est détaillée.

Le chapitre 4 aborde le cadre général d'un écoulement potentiel variable localement et uniforme à l'infini.

Le problème classique de la diffraction d'une onde acoustique par un objet dur entouré d'une anisotropie locale est traité dans un premier temps. L'équation volumique en domaine non borné est ramenée à une équation volumique locale autour de l'hétérogénéité *via* le couplage avec une équation intégrale. Cette équation intégrale est posée sur une surface fictive entourant l'hétérogénéité. Elle s'exprime à l'aide du classique noyau de Green de l'équation de Helmholtz. La discrétisation numérique dans le cas d'une géométrie axisymétrique est détaillée.

L'existence et l'unicité du problème continu global fluide-acoustique sont ensuite prouvées en appliquant la transformation de Lorentz dans l'espace entier. La transformée de Lorentz annule l'écoulement à l'infini, là où celui-ci est uniforme et modifie l'équation aux dérivées partielles là où l'écoulement est variable. La condition de Sommerfeld classique appliquée au potentiel acoustique transformé fournit l'unicité du problème. L'existence découle alors de l'unicité d'après l'alternative de Fredholm.

La méthodologie du cas simple de la diffraction d'une onde acoustique en milieu homogène non borné par une anisotropie locale, combinée à celle du traitement par la transformée de Lorentz de l'écoulement partout uniforme, est exploitée pour déterminer le couplage en écoulement permettant de traiter le cas général de la perturbation potentielle locale.

Le chapitre 5 présente les résultats numériques du nouveau code produit et nommé PA2R. La méthodologie de validation du nouveau code est présentée dans un premier temps.

Une première validation analytique des différents modules est réalisée : l'écoulement porteur, la condition modale en présence d'écoulement et la condition intégrale en présence d'écoulement sont validés à l'aide de cas-tests analytiques, dont la solution est connue.

Une validation finale est effectuée avec la comparaison au logiciel ACTI3S développé à EADS-CCR. Cette validation s'effectue uniquement pour un écoulement constant (seul cas traité par ACTI3S) et concerne le code acoustique global : condition modale en écoulement + propagation acoustique volumique + condition intégrale en écoulement.

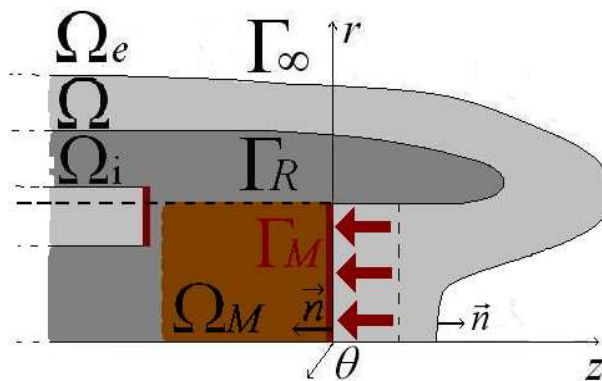
Les résultats originaux en présence d'un écoulement potentiel variable sont ensuite commentés. La comparaison des diagrammes de rayonnement en champ lointain pour des écoulements potentiels variables (l'accélération au moteur est successivement augmentée) permet de conclure à la nécessité de prendre en compte l'écoulement porteur non-linéaire et ses effets, qui peuvent se traduire par des différences

supérieures à 5 dB pour certaines directivités du diagramme de rayonnement en champ lointain.

# Chapitre 2

## Moteur : un modèle de guide d'ondes

### 2.1 Problématique



Le moteur  $\Omega_M$  : un guide d'ondes cylindrique infini

Les domaines sont considérés ici transverses et bidimensionnels.

La surface fictive  $\Gamma_M$  est située suffisamment loin du moteur pour se trouver dans la zone **2**. L'écoulement potentiel est supposé constant au niveau de  $\Gamma_M$ .

La portion de conduit d'entrée d'air à l'intérieur du moteur entre  $\Gamma_M$  et la zone **1** de création du bruit est supposée suffisamment longue pour que l'on puisse considérer que les ondes acoustiques émises et réfléchies dans le moteur se propagent sous la forme de modes guidés en conduit cylindrique infini en présence d'écoulement uniforme.

Le moteur est assimilé à un guide d'ondes cylindrique infini dans le sens des  $z < 0$  et noté  $\Omega_M$  (géométrie *a priori* impossible).

La source acoustique "moteur" est modélisée sous la forme de modes acoustiques de conduit cylindrique incidents en présence d'écoulement uniforme.

Les coefficients de ces modes sources sont supposés connus (soit provenant d'un code de mécanique des fluides, soit mesurés par les motoristes). Ils représentent les données du problème.

## 2.2 Décomposition modale

Les résultats exposés ci-dessous présentent les modes acoustiques d'un guide d'ondes cylindrique en présence d'un écoulement uniforme.

Ces résultats sont classiques et on peut les trouver dans la thèse de G. Legendre [38] par exemple, où ils sont présentés dans le cadre de l'équation légèrement différente de Galbrun linéarisée (équation du déplacement lagrangien). Néanmoins, la méthodologie est strictement identique.

L'écoulement porteur dans le guide d'ondes cylindrique infini  $\Omega_M \times [0, 2\pi]$  est supposé uniforme selon  $z$  :

$$\begin{pmatrix} \rho_0 \\ a_0 \\ M_{0r} \\ M_{0\theta} \\ M_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_M \\ a_M \\ 0 \\ 0 \\ -M_M \end{pmatrix} = \text{constante}, \quad (2.1)$$

où  $\overrightarrow{M}_0 = \frac{\overrightarrow{v}_0}{a_0}$  désigne le nombre de Mach vectoriel dans  $\Omega \times [0, 2\pi]$  et  $0 < M_M = \frac{|v_M|}{a_M} < 1$  est le nombre de Mach non signé au moteur. Les variables de l'écoulement porteur sont dorénavant indicées par  $M$  car ce sont des constantes fixées par le nombre de Mach au moteur. L'équation aux dérivées partielles du potentiel acoustique en écoulement constant en régime harmonique est obtenue en combinant les équations (1.13), (1.14), (1.15), (1.16). L'équation obtenue est une équation de Helmholtz convectée :

$$A_M(\phi_a) = \Delta \phi_a - M_M^2 \frac{\partial^2 \phi_a}{\partial z^2} - 2ik_M M_M \frac{\partial \phi_a}{\partial z} + k_M^2 \phi_a = 0 \text{ dans } \Omega_M \times [0, 2\pi], \quad (2.2)$$

où  $k_M = \frac{\omega}{a_M}$  est le nombre d'ondes modulé au moteur. Le guide d'ondes est supposé rigide :

$$\frac{\partial \phi_a}{\partial n} = 0, \quad \forall x \in (\Gamma_R \cap \overline{\Omega_M}) \times [0, 2\pi] \quad (2.3)$$

Toute fonction  $\phi_a \in H_{loc}^1(\Omega_M \times [0, 2\pi])$ , cherchée à variables séparées :

$$\phi_a = \phi_{a,2d}(r, \theta) \phi_{a,z}(z) \quad (2.4)$$

et solution de (2.2) et (2.3) dans le guide cylindrique se décompose sur la base  $(\Xi_{mn}^\pm(r, \theta, z))_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}}$  :

$$\Xi_{mn}^\pm(r, \theta, z) = J_m(k_{rnm}r) e^{im\theta} e^{i\beta_{mn}^\pm z} = \Xi_{rnm}(r, \theta) e^{i\beta_{mn}^\pm z}, \quad (2.5)$$

avec  $J_m$  la fonction de Bessel de première espèce d'ordre entier  $|m|$  et  $k_{rnm} = \frac{z_{mn}}{R}$ , où  $z_{mn}$  désigne le  $n$ -ième zéro de la dérivée de  $J_m$  et  $R$  le rayon de la nacelle. A chaque mode azimutal  $m \in \mathbb{Z}$  correspondent deux constantes complexes axiales

$\beta_{mn}^\pm$  qui sont les deux racines d'une équation polynômiale. Les modes de conduit se regroupent en deux familles  $\pm$  d'après leurs nombres axiaux :

$$\beta_{mn}^\pm = \frac{k_M M_M \pm \sqrt{k_M^2 - k_{rnm}^2 (1 - M_M^2)}}{1 - M_M^2}, \quad (2.6)$$

où la détermination pour la racine carrée complexe est choisie de la manière suivante :  $\sqrt{z} = \sqrt{|z|} e^{i \frac{\arg(z)}{2}}$ ,  $0 \leq \arg(z) < 2\pi$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ . On distingue également les modes propagatifs des modes évanescents :

- Les modes propagatifs (incidents et réfléchis) :  $k_{rnm} \leq \left[ \frac{k_M}{\sqrt{1 - M_M^2}} \right]$

Où  $[ ]$  désigne la partie entière et la fréquence associée au nombre d'ondes  $\left[ \frac{k_M}{\sqrt{1 - M_M^2}} \right]$

est appelée fréquence de coupure. Leurs constantes propagatives  $\pm$  sont réelles. L'amplitude de ces modes est constante : ils se propagent et ne s'atténuent pas. Ils sont en nombre fini à fréquence fixée. Leur nombre est une fonction croissante (resp. décroissante) de la fréquence (resp. du nombre d'ondes moteur). Les vitesses de groupe des modes  $\beta_{mn}^+$  (resp.  $\beta_{mn}^-$ ) sont réelles positives (resp. réelles négatives) :

$$\frac{\partial \omega}{\partial \beta_{mn}^+} = \frac{1 - M_M^2}{M_M + \frac{k_M}{\sqrt{k_M^2 - k_{rnm}^2 (1 - M_M^2)}}}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \beta_{mn}^-} = \frac{1 - M_M^2}{M_M - \frac{k_M}{\sqrt{k_M^2 - k_{rnm}^2 (1 - M_M^2)}}} \quad (2.7)$$

La vitesse de groupe est la vitesse de l'énergie : les modes  $\beta_{mn}^+$  (resp.  $\beta_{mn}^-$ ) sont les modes incidents (resp. réfléchis). L'étude des vitesses de groupe prouve que l'écoulement ralentit les modes amonts et accélère les modes avals, ce que l'on peut également constater avec les nombres d'onde :  $\beta^+$  (resp.  $\beta^-$ ) est augmenté (les ondes sont tassées par l'écoulement) (resp. diminué (les ondes sont emportées)) pour les modes amonts de l'écoulement (resp. modes avals). Un effet bien connu de la présence d'un écoulement uniforme est la présence de modes  $\beta_{mn}^-$ , dits 'inverse upstream modes' (modes emportés par l'écoulement), qui ont une vitesse de phase positive et une vitesse de groupe négative pour :

$$\sqrt{1 - M_M^2} k_{rnm} < k_M < k_{rnm} \quad (2.8)$$

- Les modes évanescents (incidents et réfléchis) :  $k_{rnm} > \left[ \frac{k_M}{\sqrt{1 - M_M^2}} \right]$

Ces modes décroissent exponentiellement à l'infini dans une direction étant donné que  $\Im m(\beta_{mn}^\pm) \neq 0$  et croissent exponentiellement dans l'autre direction. Un principe d'absorption limite permet de leur donner une causalité et de sélectionner les modes physiquement acceptables (incident ou réfléchi). La vitesse de groupe n'est plus définie car strictement complexe : le calcul de leur flux d'énergie montre que ces modes ne véhiculent aucune d'énergie.

## 2.3 Normalisation

### 2.3.1 Flux d'énergie

Les modes transverses de conduit forment une base orthogonale de  $L^2(\Gamma_M \times [0, 2\pi])$  de la surface modale. Un mode transverse  $(m, n)$  quelconque est une simple fonction de base physiquement adimensionnée. La valeur physique du potentiel acoustique est contenue dans les coefficients modaux.

Une normalisation des modes par leur flux d'énergie permet un dimensionnement pertinent des fonctions de base donnant un sens parlant aux valeurs physiques des coefficients modaux.

Le calcul du flux d'énergie d'un mode acoustique de conduit en présence d'écoulement pour la pression acoustique est classique et peut être trouvé par exemple dans le manuel fondamental de l'acoustique de M. Bruneau [16].

L'originalité de ce paragraphe réside dans l'approche potentielle de l'acoustique : c'est le potentiel acoustique qui est décomposé en modes acoustiques de conduit et le flux d'énergie est calculé en fonction de la norme  $L^2$  du potentiel acoustique.

Les équations de l'acoustique (1.13), (1.14), (1.15), (1.16) pour un écoulement porteur constant dans  $\Omega_M \times [0, 2\pi]$  se combinent sous forme conservative :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho_M \vec{v}_a^2 + \frac{p_a^2}{2\rho_M a_M^2} \right) + \operatorname{div} \left[ \left( \frac{1}{2} \rho_M \vec{v}_a^2 + \frac{p_a^2}{2\rho_M a_M^2} \right) \vec{v}_M + p_a \vec{v}_a \right] = 0 \quad (2.9)$$

L'énergie acoustique  $W_a$  se définit :

$$W_a = \frac{1}{2} \rho_M \vec{v}_a^2 + \frac{p_a^2}{2\rho_M a_M^2} \quad (2.10)$$

Le vecteur Intensité  $\vec{I}$  se définit :

$$\vec{I} = W_a \vec{v}_M + p_a \vec{v}_a \quad (2.11)$$

Le vecteur Intensité est la somme de deux composantes, l'une représentant la densité d'énergie convectée par l'écoulement, l'autre représentant le flux de l'énergie de l'onde. En régime harmonique, le flux d'énergie du vecteur Intensité (2.11), que l'on note  $I$ , se définit comme la moyenne temporelle sur une période d'oscillations et spatiale sur une section transverse du conduit du flux du vecteur Intensité :

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{1}{|S|} \int_S dS \left( \vec{I} \cdot \vec{n} \right), \quad (2.12)$$

où  $T$  désigne la période associée à la pulsation harmonique  $\omega T = 2\pi$  et  $S$  désigne la surface de  $\Gamma_M \times [0, 2\pi]$ . L'énergie se conserve le long d'un tube de rayons. La valeur du flux du vecteur Intensité ne dépend pas de l'abscisse de la section transverse



choisie. Il ne dépend que du mode considéré. On définit le flux d'énergie du vecteur Intensité pour chaque mode de conduit pondéré par le coefficient modal associé  $a_{mn}^\pm$  :

$$I_{mn}^\pm = \frac{1}{T} \int_0^T \langle \vec{I}_{mn}^\pm \cdot \vec{n} \rangle, \quad (2.13)$$

où  $\vec{I}_{mn}^\pm = \vec{I}(a_{mn}^\pm \Xi_{mn}^\pm(r, \theta, z))$ ,  $\Xi_{mn}^\pm(r, \theta, z) = \Xi_{rmn}(r, \theta) e^{i\beta_{mn}^\pm z}$  et  $\langle \rangle$  désigne la moyenne spatiale sur une section transverse  $S$ .

**Proposition 1.**

*Le flux du vecteur Intensité s'exprime, en distinguant modes évanescents et modes propagatifs :*

1. *Les modes propagatifs incidents (resp. réfléchis) ont un flux d'énergie positif (resp. négatif) à travers la surface transverse au conduit orienté dans le sens des  $z$  croissants :*

$$\forall (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \text{ tels que } k_{rmn} \leq \left[ \frac{k_M}{\sqrt{1 - M_M^2}} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{mn}^\pm = \zeta_{mn}^\pm \frac{\|\Xi_{rmn}\|_{L^2(\Gamma_M \times [0, 2\pi])}^2}{S(\Gamma_M \times [0, 2\pi])} |a_{mn}^\pm|^2 \\ \text{signe}(\zeta_{mn}^\pm) = \text{signe}\left(\frac{\partial \omega}{\partial \beta_{mn}^\pm}\right) \end{array} \right., \quad (2.14)$$

où  $\zeta_{mn}^\pm = \frac{\rho_M a_M}{2} (k_M \beta_{mn}^\pm - M_M k_{rmn}^2)$  pour simplification.

2. *Les modes évanescents incidents et réfléchis ont un flux d'énergie nul à travers toute surface transverse du conduit.*

$$\forall (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \quad k_{rmn} > \left[ \frac{k_M}{\sqrt{1 - M_M^2}} \right], \quad I_{mn}^\pm = 0 \quad (2.15)$$

Les modes de conduit propagatifs sont donc renormalisés pour obtenir un flux d'énergie unitaire :

$$\Xi_{mn}^{renorm \pm}(r, \theta, z) = \frac{\Xi_{mn}^\pm(r, \theta, z)}{\sqrt{|\zeta_{mn}^\pm| \frac{\|\Xi_{rmn}\|_{L^2(\Gamma_M \times [0, 2\pi])}^2}{S(\Gamma_M \times [0, 2\pi])}}}, \quad (2.16)$$

que l'on note encore :

$$\Xi_{mn}^{renorm \pm}(r, \theta, z) = \Xi_{rmn}^{renorm \pm}(r, \theta) e^{i\beta_{mn}^\pm z} \quad (2.17)$$

On choisit par simplicité de renormer les modes évanescents de la même manière. Toutes les informations sur le flux d'énergie des modes propagatifs renormalisés sont portées par le module du coefficient modal et le signe de la vitesse de phase :

$$\frac{1}{T} \int_0^T \langle \vec{I}(a_{mn}^\pm \Xi_{mn}^{renorm \pm}(r, \theta, z)) \cdot \vec{n} \rangle = \pm |a_{mn}^\pm|^2 \quad (2.18)$$

**Remarque 2.3.1.**

• Le potentiel acoustique harmonique est cherché sous la forme  $\Re(\phi_a(x)e^{-i\omega t})$ . Si la source  $f(x)\cos(\omega t)$  est à valeurs réelles, par linéarité,  $\Re(\phi_a(x)e^{-i\omega t})$  définit la solution réelle associée. Toute variable physique dépendant linéairement du potentiel acoustique s'obtient par la partie réelle de sa valeur complexe associée.

Néanmoins, cette démarche ne se généralise pas aux variables physiques obtenues non linéairement comme le vecteur Intensité : sa valeur physique n'est pas la partie réelle du produit des variables complexes associées, mais le produit des parties réelles des variables physiques associées.

• Le signe du flux du vecteur Intensité convecté et la direction de la vitesse de groupe de l'énergie sont cohérents. La surface étant orientée dans le sens des  $z$  décroissants, les modes propagatifs incidents (resp. réfléchis) ont un flux d'énergie de  $-1$  (resp.  $1$ ). Les modes évanescents ne véhiculent aucune énergie.

• Les fonctions de base sont maintenant dimensionnées. Elles sont homogènes à un potentiel multiplié par l'inverse de la racine carrée d'un flux d'énergie. Les coefficients modaux sont homogènes à la racine carrée d'un flux d'énergie.

• Par abus de notation, les modes renormalisés seront notés par la suite comme les anciens modes : le  $renorm$  est oublié.

Preuve :

L'écoulement étant constant, on peut linéariser l'équation d'Euler sans l'hypothèse de potentialité.

$$\begin{cases} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_M \cdot \vec{\nabla} \right] \rho_a + \rho_M \operatorname{div}(\vec{v}_a) = 0 \\ \rho_M \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_M \cdot \vec{\nabla} \right] \vec{v}_a + \vec{\nabla} p_a = 0 \\ p_a = a_M^2 \rho_a \end{cases} \quad (2.19)$$

L'équation (2.9) est une simple combinaison de ces équations.  $p_a$  s'exprime en fonction de  $\phi_a$  dans le guide d'ondes :

$$\begin{cases} p_a = -\rho_M(-i\omega\phi_a + \vec{v}_M \cdot \vec{\nabla}\phi_a) \\ p_a = \rho_M a_M i(k_M + M_M k_z)\phi_a \end{cases} \quad (2.20)$$

Le flux du premier terme du vecteur Intensité donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \langle \operatorname{Re}(p_a) \operatorname{Re}(\vec{v}_a \cdot \vec{n}) \rangle &= \frac{1}{4} (\langle \overline{p_a} v_{az} \rangle + \langle p_a \overline{v_{az}} \rangle) \\ &= \frac{i}{4} (k_z \langle \overline{p_a} \phi_a \rangle - \overline{k_z} \langle p_a \overline{\phi_a} \rangle) \\ &= \frac{i}{4} (-\rho_M a_M i(k_M + M_M \overline{k_z}) k_z \langle \overline{\phi_a} \phi_a \rangle - \rho_M a_M i(k_M + M_M k_z) \overline{k_z} \langle \phi_a \overline{\phi_a} \rangle) \\ &= \frac{\rho_M a_M}{2} (k_M \operatorname{Re}(k_z) + M_M |k_z|^2) \langle |\phi_a|^2 \rangle \end{aligned} \quad (2.21)$$

Exprimons maintenant la densité moyenne d'énergie acoustique par section de conduit et par période :

$$\frac{1}{T} \int_0^T \langle W \rangle = \frac{\rho_M}{2} \frac{1}{T} \int_0^T \left( \langle \text{Re}(v_{a(r\theta)})^2 \rangle + \langle \text{Re}(v_{az})^2 \rangle \right) + \frac{1}{2\rho_M a_M^2} \frac{1}{T} \int_0^T \langle \text{Re}(p_a)^2 \rangle$$

En moyennant temporellement les parties réelles de nos signaux :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \langle W \rangle &= \frac{\rho_M}{4} \left( \langle |v_{a(r\theta)}|^2 \rangle + \langle |v_{az}|^2 \rangle \right) + \frac{1}{4\rho_M a_M^2} \langle |p_a|^2 \rangle \\ \frac{1}{T} \int_0^T \langle W \rangle &= \frac{\rho_M}{4} \left( \langle |v_{a(r\theta)}|^2 \rangle + |k_z|^2 \langle |\phi_a|^2 \rangle \right) + \frac{\rho_M |k_M + M_M k_z|^2}{4} \langle |\phi_a|^2 \rangle \end{aligned}$$

On exprime le premier terme par une intégration par parties :

$$\langle v_{a(r,\theta)}^2 \rangle = \langle \vec{\nabla}_{r,\theta} \phi_a \cdot \overline{\vec{\nabla}_{r,\theta} \phi_a} \rangle = \langle \text{div}_{r,\theta} (\overline{\phi_a} \vec{\nabla}_{r,\theta} \phi_a) \rangle - \langle \overline{\phi_a} \Delta_{r,\theta} \phi_a \rangle$$

Le premier terme intégré par parties est nul d'après la condition de réflexion totale au niveau de la paroi. Il vient :

$$\langle |v_{a(r,\theta)}|^2 \rangle = k_r^2 \langle |\phi_a|^2 \rangle = [(k_M + M_M k_z)^2 - k_z^2] \langle |\phi_a|^2 \rangle$$

D'où l'expression finale de l'énergie acoustique moyennée :

$$\frac{1}{T} \int_0^T \langle W \rangle = \frac{\rho_M (k_r^2 + |k_z|^2 + |k_M + M_M k_z|^2)}{4} \langle |\phi_a|^2 \rangle \quad (2.22)$$

La moyenne spatiale et temporelle du flux du vecteur Intensité s'obtient en sommant les deux équations (2.22) et (2.21) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \langle \vec{I} \cdot \vec{n} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \langle p_a \vec{v}_a \cdot \vec{n} \rangle + \frac{1}{T} \int_0^T \langle W \rangle \vec{v}_M \cdot \vec{n} \\ \frac{1}{T} \int_0^T \langle \vec{I} \cdot \vec{n} \rangle &= \frac{\rho_M a_M}{2} (k_M \text{Re}(k_z) + M_M |k_z|^2) \langle |\phi_a|^2 \rangle \\ &\quad - \frac{\rho_M a_M M_M (k_r^2 + |k_z|^2 + |k_M + M_M k_z|^2)}{4} \langle |\phi_a|^2 \rangle \end{aligned} \quad (2.23)$$

La relation de dispersion  $k_r^2 + k_z^2 = (k_M + M_M k_z)^2$  permet de simplifier l'expression en distinguant modes propagatifs et modes évanescents. Il vient (2.14). La renormalisation (2.16) donne un flux d'énergie unitaire pour les modes propagatifs :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{T} \int_0^T \langle \vec{I}(a_{mn}^\pm \Xi_{mn}^{renorm \pm}(r, \theta, z)) \cdot \vec{n} \rangle = \\
& \frac{\rho_M a_M}{2} (\beta_{mn}^\pm k_M - M_M k_{r_{mn}}^2) \langle \left| \frac{a_{mn}^\pm \Xi_{mn}^\pm(r, \theta, z)}{\sqrt{\left| \frac{\rho_M a_M}{2} (\beta_{mn}^\pm k_M - M_M k_{r_{mn}}^2) \langle |\Xi_{mn}^\pm(r, \theta)|^2 \rangle \right|}} \right|^2 \rangle \\
& \frac{1}{T} \int_0^T \langle \vec{I}(a_{mn}^\pm \Xi_{mn}^{renorm \pm}(r, \theta, z)) \cdot \vec{n} \rangle = \text{signe}(\beta_{mn}^\pm k_M - M_M k_{r_{mn}}^2) |a_{mn}^\pm|^2 \\
& \frac{1}{T} \int_0^T \langle \vec{I}(a_{mn}^\pm \Xi_{mn}^{renorm \pm}(r, \theta, z)) \cdot \vec{n} \rangle = \pm |a_{mn}^\pm|^2
\end{aligned} \tag{2.24}$$

### 2.3.2 Adimensionnement et coefficients modaux

Par commodité de calcul, les valeurs physiques sont toutes adimensionnées par la valeur canonique homogène correspondante, formée à partir des valeurs de référence de l'écoulement porteur à l'infini et du rayon caractéristique de la nacelle :  $\rho_\infty$ ,  $a_\infty$  et  $R$ .

Les paragraphes (4.2.1) et (4.2.2) de la partie (4) reviennent plus précisément sur l'adimensionnement des variables physiques fluides (de l'écoulement porteur) et acoustiques.

Ici pour le potentiel acoustique et les coefficients modaux renormés :

$$a_{mn}^{\pm*} = \frac{a_{mn}^\pm}{\sqrt{\rho_\infty a_\infty^3}}, \quad \phi_a^* = \frac{\phi_a}{Ra_\infty} \tag{2.25}$$

Le problème étant linéaire, il suffit de propager une unique fois chaque mode avec une intensité arbitraire. Toute solution du problème acoustique globale pourra être reconstruite par linéarité. Le coefficient modal adimensionné est choisi par simplicité égal à l'unité  $a_{mn}^{\pm*} = 1$  : ce choix correspond à une intensité adimensionnée unitaire (après renormalisation). Il est important d'explicitier la démarche de retour à une valeur physique Mètre-Kilo-Seconde-Ampère exploitable. L'intensité en décibel se définit :

$$I_{dB} = 10 \log_{10} \left( \frac{I_{mn}^\pm}{I_{ref}} \right), \tag{2.26}$$

où  $I_{ref}$  correspond à l'intensité d'une onde plane de pression de référence  $p_{ref} = 2.10^{-5} Pa$ , de densité volumique de référence  $\rho_{ref} = 1.2 kg.m^{-3}$ , et de vitesse du son

de référence  $a_{ref} = 340m.s^{-1}$  :

$$I_{ref} = \frac{p_{ref}^2}{\rho_{ref}a_{ref}} \quad (2.27)$$

Explicitons la conversion des résultats adimensionnés aux résultats dimensionnés MKSA correspondant à un coefficient modal physique d'une intensité de 100 dB :

$$I_{dB} = 10\log_{10} \left( \frac{I_{mn}^{\pm}}{I_{ref}} \right) \quad (2.28)$$

L'intensité  $I_{mn}^{\pm}$  du mode  $mn$  est directement relié au coefficient modal :

$$\sqrt{I_{mn}^{\pm}} = |a_{mn}^{\pm}| = \sqrt{\frac{p_r^2}{\rho_{ref}a_{ref}} \exp \left( \frac{I_{dB}}{10} \log(10) \right)} \quad (2.29)$$

Le taux de conversion s'exprime :

$$\begin{cases} \phi_a(I_{dB} = 100) = \frac{R}{\sqrt{\rho_{\infty}a_{\infty}}} \sqrt{\frac{p_r^2}{\rho_{ref}a_{ref}} \exp \left( \frac{I_{dB}}{10} \log(10) \right)} \phi_a^*(a_{mn}^* = 1) \\ p_a(I_{dB} = 100) = \sqrt{\rho_{\infty}a_{\infty}} \sqrt{\frac{p_r^2}{\rho_{ref}a_{ref}} \exp \left( \frac{I_{dB}}{10} \log(10) \right)} p_a^*(a_{mn}^* = 1) \end{cases} \quad (2.30)$$

**Remarque 2.3.2.**

Le retour aux valeurs physiques MKSA non invariantes par changement d'échelle n'est possible que lorsque les paramètres à l'infini  $\rho_{\infty}$  et  $a_{\infty}$  sont connus (ces coefficients dépendent de la vitesse de l'avion, de l'altitude, de la température, ...). Dans le cas d'un écoulement nul,  $\rho_{\infty} = \rho_{ref} = 1.2kg.m^{-3}$  est la densité volumique de référence pour l'air et  $a_{\infty} = a_{ref} = 340m.s^{-1}$  est la vitesse du son de référence dans l'air. Le rapport de proportionnalité entre la pression acoustique physique correspondant à un mode de 100 décibels et la pression acoustique adimensionnée est

alors de  $\sqrt{p_{ref}^2 \exp \left( \frac{I_{dB}}{10} \log(10) \right)} = 2$ .



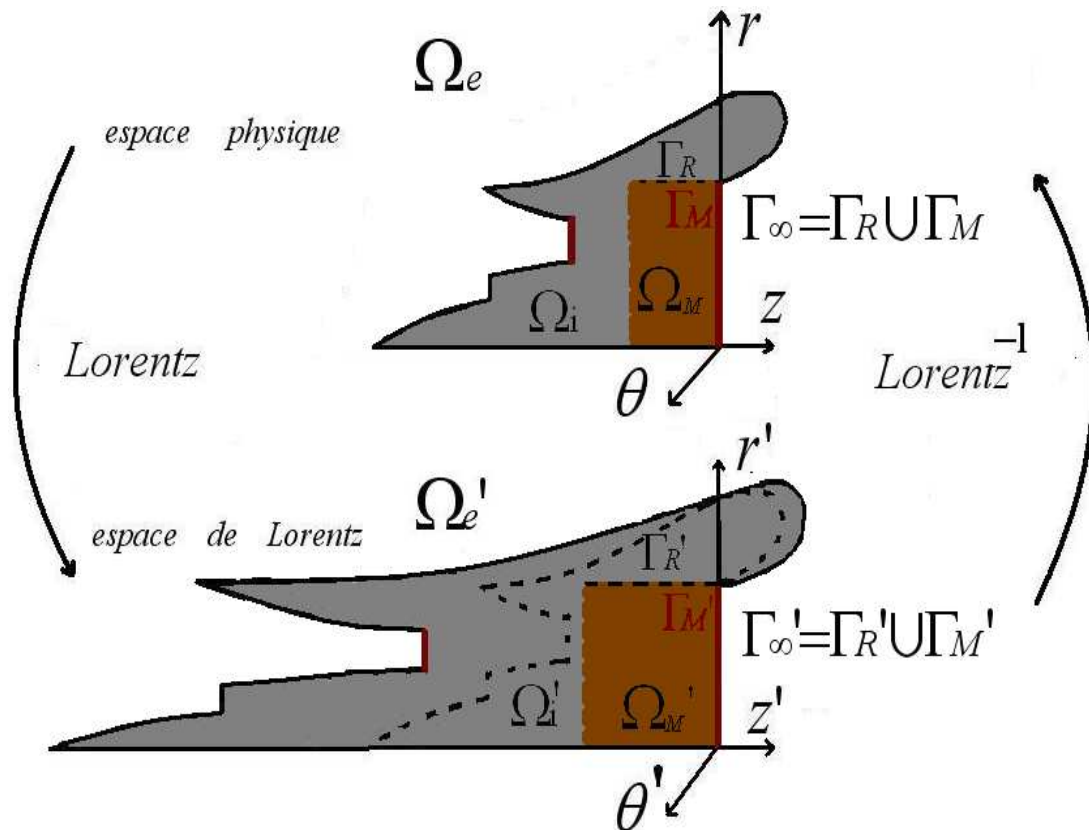
# Chapitre 3

## Écoulement constant

Ce chapitre considère l'écoulement potentiel le plus simple, globalement uniforme : la zone 2 est inexistante et seule la zone 3 à l'extérieur de la nacelle est considérée. Il détaille l'effet de la transformation algébrique de Lorentz sur les équations de Euler linéarisées autour d'un écoulement uniforme constant, ainsi que sur les conditions de bord fermant le problème continu.

Ce chapitre s'inspire du manuel théorique du logiciel A3DF [43] développé à EADS-CCR.

Les domaines sont ici cartésiens et tridimensionnels.



Transformée de Lorentz et géométrie

### 3.1 Théorie du problème continu

#### 3.1.1 Transformée de Lorentz

Ce paragraphe détaille la transformation de Lorentz sur les équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement constant en régime temporel et harmonique.

L'écoulement est supposé uniforme partout :  $\Omega = \emptyset$  et  $\overline{\Omega_e} \cup \Omega_M \setminus \Gamma_R = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_i}$ .

#### Transformée de Lorentz temporelle

Dans  $\Omega_e \subset \mathbb{R}^3$ , l'écoulement est uniforme et indicé par  $\infty$  :

$$\begin{pmatrix} \rho_0 \\ a_0 \\ M_{0x} \\ M_{0y} \\ M_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_\infty \\ a_\infty \\ 0 \\ 0 \\ -M_\infty \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

où  $0 < M_\infty = \frac{|v_\infty|}{a_\infty} < 1$  est le nombre de Mach à l'infini non signé. L'équation aux dérivées partielles du potentiel acoustique en écoulement constant et en régime transitoire est obtenue en combinant les équations (1.13), (1.14), (1.15), (1.16). L'équation obtenue est l'équation des ondes convectées :

$$\frac{1}{a_\infty} \frac{\partial^2 \phi_a}{\partial t^2} - \Delta \phi_a + 2 \frac{M_\infty}{a_\infty} \frac{\partial^2 \phi_a}{\partial t \partial z} + M_\infty^2 \frac{\partial^2 \phi_a}{\partial z^2} = 0 \quad (3.2)$$

La transformation de Lorentz est un changement d'espace-temps algébrique :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} z \\ t' = t + \frac{M_\infty}{a_\infty(1 - M_\infty^2)} z \end{cases} \quad (3.3)$$

Le potentiel acoustique transformé  $\tilde{\phi}_a(r', \theta', z', t') = \phi_a(r, \theta, z, t)$  est solution de l'équation des ondes dans l'espace transformé de Lorentz  $\Omega'_e$  :

$$\frac{1}{a_\infty \sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_a}{\partial t'^2} - \Delta' \tilde{\phi}_a = 0, \quad (3.4)$$

où la nouvelle vitesse des ondes  $a_\infty \sqrt{1 - M_\infty^2}$  a subi un déphasage Doppler.



### Transformée de Lorentz fréquentielle

L'écoulement est uniforme dans  $\Omega_e \subset \mathbb{R}^3$  : (3.1). Le moteur est une source de bruit tonal (monofréquentiel) : le potentiel acoustique est cherché sous la forme harmonique, et l'équation suivante dite de Helmholtz convectée dans  $\Omega_e$  est obtenue en substituant (1.17) dans (3.4) :

$$\frac{\partial^2 \phi_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_a}{\partial y^2} + (1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi_a}{\partial z^2} - 2ik_\infty M_\infty \frac{\partial \phi_a}{\partial z} + k_\infty^2 \phi_a = 0, \quad \forall (x, y, z) \in \Omega_e, \quad (3.5)$$

où  $k_\infty = \frac{\omega}{a_\infty}$  désigne le nombre d'ondes modulé à l'infini. La transformation de Lorentz se décompose en deux étapes :

- Une dilatation algébrique d'espace :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = \frac{z}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \end{cases} \quad (3.6)$$

L'équation (3.5) transporté par le  $C^1$ -difféomorphisme (3.6) s'écrit dans le nouvel espace  $\Omega'_e$  :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}_a}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_a}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_a(x', y', z')}{\partial z'^2} - \frac{2ik_\infty M_\infty}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{\partial \tilde{\phi}_a(x', y', z')}{\partial z'} + k_\infty^2 \tilde{\phi}_a(x', y', z') = 0,$$

où  $\tilde{\phi}_a(r', \theta', z') = \phi_a(r, \theta, z)$ .

- Un changement de fonction inconnue :

$$\tilde{\phi}'_a(x', y', z') = \tilde{\phi}_a(x', y', z') e^{\frac{-ik_\infty M_\infty}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} z'} \quad (3.7)$$

Le potentiel acoustique transformé vérifie dans l'espace de Lorentz  $\Omega'_e$  l'équation de Helmholtz :

$$\Delta \tilde{\phi}'_a(x', y', z') + k'^2_\infty \tilde{\phi}'_a(x', y', z') = 0, \quad (3.8)$$

où  $k'_\infty = \frac{k_\infty}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$  est le nouveau nombre d'ondes ayant subi un effet Doppler.

### 3.1.2 Equations intégrales

Ce paragraphe détaille la manière de ramener le problème acoustique en domaine non borné et en présence d'un écoulement partout uniforme à une équation intégrale (à l'aide du noyau de Green classique de l'équation de Helmholtz et de ses dérivées) sur la nacelle transformée  $\Gamma'_M \cup \Gamma'_R$  dans l'espace de Lorentz.

**Problématique**

La situation géométrique est celle du paragraphe (3.1.1) de la partie (3) : les domaines sont tridimensionnels cartésiens et l'écoulement est partout constant :  $\Omega = \emptyset$  et  $\overline{\Omega_e \cup \Omega_M} \setminus \Gamma_R = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_i$ .

On applique la transformée de Lorentz (3.6), (3.7) dans  $\overline{\Omega_e \cup \Omega_M} \setminus \Gamma_R$ . L'introduction d'une variable vectorielle  $\vec{v}_a$  permet de décomposer l'équation aux dérivées partielles (3.8) en un système différentiel d'ordre un :

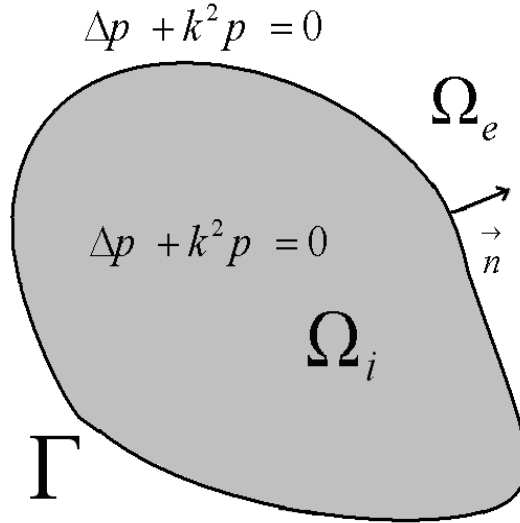
$$\begin{cases} ik'_\infty \vec{v}_a = \widetilde{\nabla} \widetilde{\phi}'_a & , \forall x' \in \overline{\Omega'_e \cup \Omega'_M} \setminus \Gamma'_R \\ ik'_\infty \widetilde{\phi}'_a = \text{div}(\vec{v}_a) & , \forall x' \in \overline{\Omega'_e \cup \Omega'_M} \setminus \Gamma'_R \end{cases} \quad (3.9)$$

**Remarque 3.1.1.**

Attention : la transformée de Lorentz de la vitesse acoustique n'est pas la vitesse acoustique dérivant de la transformée de Lorentz du potentiel acoustique.

Par souci de généralité, on choisit d'utiliser les notations suivantes pour ce paragraphe :

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi}'_a &= p, \quad \vec{v}_a = \vec{v}, \quad k = k'_\infty \\ \Omega_e &= \Omega'_e, \quad \Omega_i = \overline{\Omega'_i \cup \Omega'_M} \setminus (\Gamma'_M \cup \Gamma'_R), \quad \Omega_M = \Omega'_M \\ \Gamma &= \Gamma'_\infty = \Gamma'_R \cup \Gamma'_M \end{aligned} \quad (3.10)$$



Géométrie et notations

Le domaine  $\Omega_i$  contient maintenant le domaine modal transformé  $\Omega'_M$  : l'équation intégrale sera posée sur la surface transformée de la nacelle  $\Gamma'_R \cup \Gamma'_M$  (interface entre les nouveaux domaines  $\Omega_i$  et  $\Omega_e$  définis dans (3.10)).

Le système différentiel d'ordre un (3.9) se réécrit :

$$\begin{cases} ik \vec{v} = \vec{\nabla} p & , \forall x \in \Omega_e \\ ikp = \text{div}(\vec{v}) & , \forall x \in \Omega_e \end{cases} \quad (3.11)$$

La combinaison de ces deux équations conduit soit à l'équation de Helmholtz pour la pression acoustique  $p$ , soit à l'équation de Helmholtz vectorielle pour la vitesse acoustique  $\vec{v}$  :

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p = 0, & \forall x \in \Omega_e \\ \vec{\nabla}(\operatorname{div}(\vec{v})) + k^2 \vec{v} = 0, & \forall x \in \Omega_e \end{cases} \quad (3.12)$$

### Projecteurs de Calderón

Des résultats classiques à propos de l'équation de Helmholtz en domaine non borné sont explicités ici : le problème continu en domaine non borné homogène  $\Omega_e$  est ramené à une équation intégrale sur la surface  $\Gamma$ .

Ces résultats peuvent être trouvés dans le cours de DEA de J.C. Nédélec [47].

Toute solution de l'équation de Helmholtz dans  $\Omega_i \cup \Omega_e$  admet une représentation intégrale.

La solution  $p \in C^2(\overline{\Omega_i}) \cap C^2(\overline{\Omega_e})$  du problème de Helmholtz suivant :

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p = 0 & , \forall x \in \Omega_i \\ \Delta p + k^2 p = 0 & , \forall x \in \Omega_e \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} r \left( \frac{\partial p}{\partial r} - ikp \right) = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

se représente comme somme d'un potentiel de simple et de double couche :

$$p(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \left[ \frac{\partial p(y)}{\partial n} \right]_{|\Gamma} d\gamma_y - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} \left( \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right) [p(y)]_{|\Gamma} d\gamma_y, \quad (3.14)$$

$$\forall x \in \Omega_i \cup \Omega_e,$$

où l'on notera dorénavant  $G(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}$ . Notons ici que la normale est prise sortante à "l'objet diffractant" (le domaine intérieur  $\Omega_i$ ), ce qui sera dorénavant toujours le cas sauf lorsque spécifié. Les termes entre crochets représentent les sauts de  $p$  et  $\frac{\partial p}{\partial n}$  au niveau de la surface  $\Gamma$  :

$$\begin{cases} [p]_{|\Gamma} = p|_{x \in \Omega_i \rightarrow \Gamma} - p|_{x \in \Omega_e \rightarrow \Gamma} \\ \left[ \frac{\partial p}{\partial n} \right]_{|\Gamma} = \frac{\partial p}{\partial n}|_{x \in \Omega_i \rightarrow \Gamma} - \frac{\partial p}{\partial n}|_{x \in \Omega_e \rightarrow \Gamma} \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}
S(p)(x) &= \int_{\Gamma} G(x,y)p(y)dy \text{ est l'opérateur de simple couche.} \\
D(p)(x) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} p(y)dy \text{ est l'opérateur de double couche.} \\
D^*(p)(x) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_x} p(y)dy \text{ est l'opérateur adjoint du double couche.} \\
N(p)(x) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial n_x \partial n_y} p(y)dy \text{ est l'opérateur singulier dérivé du double couche.}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Le résultat suivant explicite le comportement de ces opérateurs sur  $\Gamma$  :

Le potentiel de simple couche  $p(x) = \int_{\Gamma} G(x,y)q(y)dy$  est solution du problème :

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p = 0 & , \forall x \in \Omega_i \\ \Delta p + k^2 p = 0 & , \forall x \in \Omega_e \\ [p]_{\Gamma} = 0 & , \forall x \in \Gamma \\ \left[ \frac{\partial p}{\partial n} \right]_{\Gamma} = q & , \forall x \in \Gamma \end{cases} \tag{3.17}$$

Le potentiel de simple couche est continu à la traversée de  $\Gamma$ , par contre sa dérivée normale est discontinue :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial n}|_{x \in \Omega_i \rightarrow \Gamma} &= \frac{q(x)}{2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_x} q(y)dy \\
\frac{\partial p}{\partial n}|_{x \in \Omega_e \rightarrow \Gamma} &= -\frac{q(x)}{2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_x} q(y)dy
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Le potentiel de double couche  $p(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} \Phi(y)dy$  est solution du problème :

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p = 0 & , \forall x \in \Omega_i \\ \Delta p + k^2 p = 0 & , \forall x \in \Omega_e \\ [p]_{\Gamma} = -\Phi & , \forall x \in \Gamma \\ \left[ \frac{\partial p}{\partial n} \right]_{\Gamma} = 0 & , \forall x \in \Gamma \end{cases} \tag{3.19}$$

La dérivée normale du potentiel de double couche est continue à la traversée de  $\Gamma$ , par contre l'opérateur double couche est discontinu :

$$\begin{aligned}
p|_{x \in \Omega_i \rightarrow \Gamma} &= -\frac{\Phi(x)}{2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} \Phi(y)dy \\
p|_{x \in \Omega_e \rightarrow \Gamma} &= \frac{\Phi(x)}{2} + \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} \Phi(y)dy
\end{aligned} \tag{3.20}$$

La formule de représentation (3.14) et les formules de saut (3.20) et (3.18) permettent d'établir les relations suivantes sur la surface  $\Gamma$  :

$$\begin{cases} -N(\Phi) + \left(\frac{I}{2} + D^*\right)(q) = \frac{\partial p}{\partial n}|_{x \in \Omega_i \rightarrow \Gamma}, \forall x \in \Gamma \\ \left(\frac{I}{2} - D\right)(\Phi) + S(q) = p|_{x \in \Omega_i \rightarrow \Gamma}, \forall x \in \Gamma \end{cases}, \quad (3.21)$$

ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} -N & \frac{I}{2} + D^* \\ \frac{I}{2} - D & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial n}|_{x \in \Omega_i \rightarrow \Gamma} \\ p|_{x \in \Omega_i \rightarrow \Gamma} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

### Formulation variationnelle de l'opérateur singulier

Ce paragraphe donne une propriété fondamentale de l'opérateur  $N$ .

Ce résultat est encore tiré du cours de DEA de J.C. Nédélec [47].

L'opérateur  $N$  de dérivée normale de l'opérateur de double couche est un opérateur à noyau singulier, non intégrable, à considérer au sens des distributions comme une valeur principale de Cauchy.

Cet opérateur  $N$  est un isomorphisme de  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  sur  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  lorsque  $-k^2$  n'est pas une valeur propre du problème intérieur de Neumann pour le Laplacien. Et l'équation intégrale :

$$\text{Etant donnée } f \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \text{ trouver } p \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \text{ tel que } -N(p) = f$$

se formule variationnellement :

$$\begin{cases} \text{Etant donnée } f \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ \text{Trouver } p \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \text{ tel que :} \\ \int_{\Gamma_x} \int_{\Gamma_y} G(x, y) \overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma_y} p(y) \cdot \overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma_x} \overline{p^t(x)} d\Gamma_x d\Gamma_y \\ -k^2 \int_{\Gamma_x} \int_{\Gamma_y} G(x, y) \overrightarrow{n}_x \cdot \overrightarrow{n}_y p(y) \overline{p^t(x)} d\Gamma_x d\Gamma_y \\ = \int_{\Gamma_x} f(x) p^t(x) d\Gamma_x, \quad \forall p^t \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \end{cases} \quad (3.23)$$

### Conditions de bord transformées

Les notations  $p$  et  $\vec{v}$  des variables physiques (3.10) sont oubliées : on revient au vrai problème physique dans l'espace transformé et l'on note simplement par abus de notation les variables physiques transformées comme les anciennes :  $\tilde{\phi}'_a = \phi_a$ ,  $k'_\infty = k$ , ...

Les domaines sont toujours cartésiens et tridimensionnels et les notations (3.10) pour les domaines géométriques sont toujours valables.

L'effet de la transformation de Lorentz sur les conditions de bord est explicité précisément avec les équations à la section (4.2.4) dans le cas général d'un écoulement potentiel avec un nombre de Mach moteur différent du nombre de Mach à l'infini. Ce paragraphe s'inspire du manuel théorique du logiciel ACTI3S [28] développé à EADS-CCR.

Ci-dessous sont énumérées les conditions de bord du nouveau problème :

- La condition de réflexion totale se traduit également par la nullité de la dérivée normale dans l'espace de Lorentz.
- La transformée de Lorentz annule partout l'ancien écoulement constant. La condition de Sommerfeld classique permet de sélectionner l'onde sortante à l'infini :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial \phi_a}{\partial n} - ik\phi_a \right|^2 d\gamma = 0, \quad (3.24)$$

où  $S_R$  (resp.  $B_R$ ) désigne la sphère (resp. la boule) de rayon  $R$  et d'origine nulle avec  $R$ .

- Le domaine modal  $\Omega_M$  est borné *via* l'introduction de l'opérateur Dirichlet-Neumann classique pour un guide d'ondes sans écoulement :

L'absence d'écoulement pour les modes de conduit change uniquement les constantes de propagations de  $\Xi_{mn}^\pm(r, \theta, z) = J_m\left(\frac{z_{mn}}{R}r\right)e^{im\theta}e^{i\beta_{mn}^\pm z}$ , où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall k_{rmn} \leq [k], \\ \forall k_{rmn} > [k], \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \beta_{mn}^+ = +\sqrt{k^2 - k_{rmn}^2} \\ \beta_{mn}^- = -\sqrt{k^2 - k_{rmn}^2} \\ \beta_{mn}^+ = +i\sqrt{k_{rmn}^2 - k^2} \\ \beta_{mn}^- = -i\sqrt{k_{rmn}^2 - k^2} \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Le problème posé en domaine modal non borné pour le potentiel acoustique total :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi_a \in H_{loc}^1(\overline{\Omega_e \cup \Omega_M} \setminus \Gamma_R) \text{ tel que :} \\ \Delta \phi_a + k^2 \phi_a = 0, \\ \frac{\partial \phi_a}{\partial n} = 0, \\ \phi_a - \phi_{a,inc} \text{ est réfléchi dans le guide d'ondes} \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial \phi_a}{\partial n} - ik_\infty \phi_a \right|^2 d\gamma = 0 \end{array} \right. , \quad \begin{array}{l} \forall \vec{x} \in \overline{\Omega_e \cup \Omega_M} \setminus \Gamma_R \\ \forall \vec{x} \in \Gamma_R \end{array} \quad (3.26)$$

est équivalent au problème en domaine modal borné :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi_a \in H_{loc}^1(\Omega_e) \text{ tel que :} \\ \Delta \phi_a + k^2 \phi_a = 0 = 0, \quad \forall \vec{x} \in \Omega_e \\ \frac{\partial \phi_a}{\partial n} = 0, \quad \forall \vec{x} \in \Gamma_R \\ \frac{\partial (\phi_a - \phi_{a,inc})}{\partial n} = T_M(\phi_a - \phi_{a,inc}), \quad \forall \vec{x} \in \Gamma_M, \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial \phi_a}{\partial n} - ik_\infty \phi_a \right|^2 d\gamma = 0 \end{array} \right. \quad (3.27)$$

où  $T_M$  est l'opérateur Dirichlet-Neumann modal en l'absence d'écoulement :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_M : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_M) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_M) \\ \phi_a \rightarrow \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}} \mu_{mn}^-(\phi_a, \Xi_{rmn}(r, \theta))_{L^2(\Gamma_M)} \Xi_{rmn}(r, \theta) \end{array} \right. \quad (3.28)$$

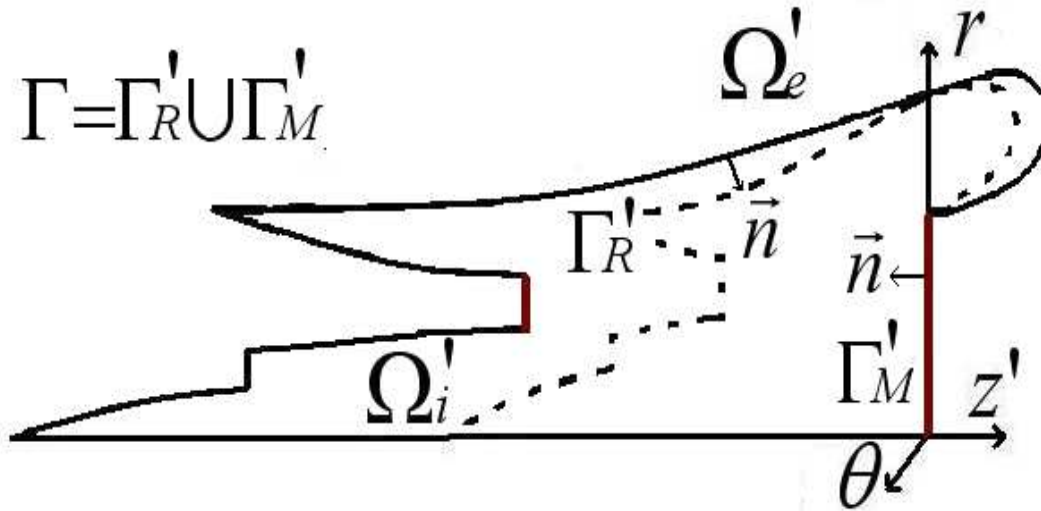
où  $\mu_{mn}^\pm = -i\beta_{mn}^\pm$ .

La source acoustique du moteur est une somme de modes incidents :

$$\phi_{a,inc} \text{ incident} \Leftrightarrow \phi_{a,inc} = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}} \langle \phi_{a,inc}, \Xi_{rmn} \rangle_{L^2(\Gamma_M)} \Xi_{rmn}(r, \theta) e^{i\beta_{mn}^+ z} \quad (3.29)$$

Les coefficients modaux incidents  $a_{mn}^+ = \langle \phi_{a,inc}, \Xi_{rmn} \rangle_{L^2(\Gamma_M)}$  sont les données du problème.

### Formulation variationnelle globale



Géométrie

Les domaines sont toujours cartésiens et tridimensionnels. On utilise toujours les notations (3.10) pour les domaines géométriques :  $\Omega_e = \Omega_e'$ ,  $\Omega_i = \overline{\Omega_i' \cup \Omega_M'} \setminus (\Gamma_M' \cup \Gamma_R')$ ,

$\Omega_M = \Omega'_M$  et  $\Gamma = \Gamma'_\infty = \Gamma'_R \cup \Gamma'_M$ , auxquelles on ajoute la notation nécessaire  $\Gamma_M = \Gamma'_M$  pour faire apparaître l'opérateur Dirichlet-Neumann dans la formulation variationnelle globale.

Ce paragraphe s'inspire du manuel théorique du logiciel ACT3S [28] développé à EADS-CCR.

La normale est choisie, pour ce paragraphe uniquement, rentrante à la nacelle  $\Omega_i$  (le domaine de calcul étant le domaine extérieur, la normale est choisie sortante au domaine de calcul  $\Omega_e$ ).

On considère le vrai problème physique dans  $\Omega_e$  et on pose arbitrairement un problème nul dans  $\Omega_i$ .

Le problème global se formule variationnellement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Etant donné } (a_{mn}^+)_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z} \times \mathbb{N}} \\ \text{Trouver } (\phi_a, \lambda, (a_{mn}^-)_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}}) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathbb{C}^{\mathbb{Z} \times \mathbb{N}}, \text{ tel que :} \\ \lambda = \lambda_{inc} + T_M(\phi_a - \phi_{a,inc}) \text{ sur } \Gamma_M, \phi_a - \phi_{a,inc} = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}} a_{mn}^- \Xi_{rmn} \text{ sur } \Gamma_M \\ \lambda = 0 \text{ sur } \Gamma_R \\ \int_{\Gamma_x} \int_{\Gamma_y} G(x, y) \left( k^2 \vec{n}_x \cdot \vec{n}_y \phi_a(y) \overline{\phi_a^t(x)} - \vec{\text{rot}}_{\Gamma_y} \phi_a(y) \cdot \vec{\text{rot}}_{\Gamma_x} \overline{\phi_a^t(x)} \right) d\Gamma_x d\Gamma_y \\ + \int_{\Gamma_x} \int_{\Gamma_{My}} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \vec{n}_x} [T_M(\phi_a - \phi_{a,inc})](y) \overline{\phi_a^t(x)} d\Gamma_x d\Gamma_y \\ - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{Mx}} T_M(\phi_a - \phi_{a,inc})(x) \overline{\phi_a^t(x)} d\Gamma_x \\ = - \int_{\Gamma_x} \int_{\Gamma_{My}} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \vec{n}_x} \lambda_{inc}(y) \overline{\phi_a^t(x)} d\Gamma_x d\Gamma_y + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{Mx}} \lambda_{inc}(x) \overline{\phi_a^t(x)} d\Gamma_x \\ \text{et} \\ \int_{\Gamma_{Mx}} \int_{\Gamma_y} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \vec{n}_y} \phi_a(y) \overline{\lambda^t(x)} d\Gamma_x d\Gamma_y + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{Mx}} \phi_a(x) \overline{\lambda^t(x)} d\Gamma_x \\ - \int_{\Gamma_{Mx}} \int_{\Gamma_{My}} G(x, y) [T_M(\phi_a - \phi_{a,inc})](y) \overline{\lambda^t(x)} d\Gamma_x d\Gamma_y \\ = + \int_{\Gamma_{Mx}} \int_{\Gamma_{My}} G(x, y) \lambda_{inc}(y) \overline{\lambda^t(x)} d\Gamma_x d\Gamma_y \\ \forall (\phi_a^t, \lambda^t) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \text{ tel que } \lambda^t = 0 \text{ sur } \Gamma_R \end{array} \right. \quad (3.30)$$

**Remarque 3.1.2.**

- L'inconnue  $\lambda$  est la dérivée normale du potentiel acoustique  $\frac{\partial \phi_a}{\partial n}$  et  $\lambda_{inc} = \frac{\partial \phi_{a,inc}}{\partial n}$  avec  $\phi_{a,inc} = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}} a_{mn}^+ \Xi_{rmn}$ .



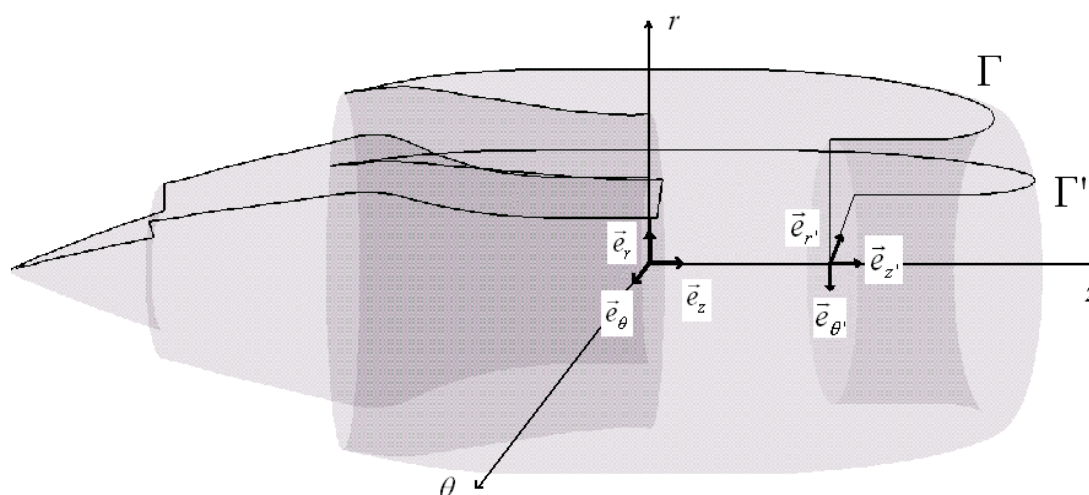
- Les surfaces sur lesquelles les intégrales sont définies sont indicées par la variable qui les parcourt.  $\Gamma_x$  (resp.  $\Gamma_y$ ) signifie que la nacelle entière est parcourue par  $x$  (resp.  $y$ ).  $\Gamma_{Mx}$  (resp.  $\Gamma_{My}$ ) signifie que seule la surface modale est parcourue par  $x$  (resp.  $y$ ).
- L'expression de la condition Dirichlet-Neumann modal s'exprime numériquement par un simple produit matrice-vecteur, où la matrice (resp. le vecteur) correspond à la discrétisation des opérateurs intégraux (resp. les valeurs modales au niveau des degrés de liberté modaux) : seule la discrétisation des opérateurs intégraux est à expliciter.
- Les coefficients modaux sont en infinité dénombrable, mais pratiquement, seuls les modes propagatifs sont considérés.

### 3.2 Du continu au discret

Ce paragraphe présente la discrétisation numérique des opérateurs intégraux définis par (3.16) pour une géométrie axisymétrique. Ces résultats s'inspirent du manuel théorique du logiciel ELFI2R [61] développé à EADS-CCR.

#### 3.2.1 Discrétisation axisymétrique

##### Géométrie axisymétrique



Nacelle axisymétrique

L'axisymétrie de la nacelle permet la décomposition des inconnues et des fonctions-tests sur les modes de Fourier de la variable angulaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda(y) = \lambda(r', z', \theta') = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \lambda_m(r', z') e^{im\theta'}, \quad p(y) = p(r', z', \theta') = \sum_{m \in \mathbb{Z}} p_m(r', z') e^{im\theta'} \\ \lambda^t(x) = \lambda^t(r, z, \theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \lambda_m^t(r, z) e^{im\theta}, \quad p^t(x) = p(r, z, \theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} p_m^t(r, z) e^{im\theta} \end{array} \right. \quad (3.31)$$

La notation  $\Gamma_x$  (resp.  $\Gamma_y$ ) correspond à la surface tridimensionnelle de la nacelle lorsque celle-ci est parcourue par la variable  $x$  (resp.  $y$ ). Nous notons maintenant  $\Gamma$  (resp.  $\Gamma'$ ) la section axisymétrique de  $\Gamma_x$  (resp.  $\Gamma_y$ ) correspondant à l'angle  $\theta$  (resp.  $\theta'$ ). Soit  $\sigma \in I \rightarrow (r(\sigma), z(\sigma)) \in \Gamma$  (resp.  $\sigma' \in I \rightarrow (r'(\sigma'), z'(\sigma')) \in \Gamma'$ ) un paramétrage normal de la surface  $\Gamma$  (resp.  $\Gamma'$ ).  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont des abscisses curvilignes. Le paramétrage est supposé orienté de bas en haut (par rapport à l'orientation positive de l'axe  $z$ ), de telle sorte que la normale sortante au domaine de calcul soit obtenue par une rotation directe de  $+\frac{\pi}{2}$  dans le plan  $(r, z)$  orienté par  $\vec{e}_\theta$ . Le paramétrage étant normal et orienté, il vient en notant  $\vec{\tau}$  le vecteur tangent unitaire résultant et  $\vec{n}$  la normale sortante au domaine de calcul :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\tau} = \tau_r \vec{e}_r + \tau_z \vec{e}_z, & \vec{\tau}' = \tau'_{r'} \vec{e}_{r'} + \tau'_{z'} \vec{e}_{z'} \\ \frac{dr}{d\sigma} = \tau_r, \quad \frac{dz}{d\sigma} = \tau_z, & \frac{dr'}{d\sigma'} = \tau'_{r'}, \quad \frac{dz'}{d\sigma'} = \tau'_{z'} \\ \vec{n} = \vec{e}_\theta \wedge \vec{\tau} = \tau_z \vec{e}_r - \tau_r \vec{e}_z, & \vec{n}' = \vec{e}_{\theta'} \wedge \vec{\tau}' = \tau'_{z'} \vec{e}_{r'} - \tau'_{r'} \vec{e}_{z'} \\ \frac{dp}{d\sigma} = \frac{\partial p}{\partial r} \tau_r + \frac{\partial p}{\partial z} \tau_z, & \frac{dp'}{d\sigma'} = \frac{\partial p'}{\partial r'} \tau'_{r'} + \frac{\partial p'}{\partial z'} \tau'_{z'} \end{array} \right.$$

Par définition de l'opérateur différentiel rotationnel surfacique, il vient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}_{\Gamma} p^t(r(\sigma), z(\sigma)) &= \vec{n} \wedge \overrightarrow{\nabla} p^t \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left( -\frac{dp_m^t}{d\sigma}(r(\sigma), z(\sigma)) \vec{e}_\theta + \frac{im}{r} p_m^t \vec{n} \wedge \vec{e}_\theta \right) e^{im\theta} \end{aligned} \quad (3.32)$$

## Discrétisation

Soit  $\mathcal{T}$  une discrétisation régulière de  $\Gamma$  en poutres. On note  $\mathcal{T}^0$  (resp.  $\mathcal{T}^1$ ) l'ensemble des sommets (resp. arêtes) de cette discrétisation.

Soit  $\mathcal{T}'$  une discrétisation régulière de  $\Gamma'$  en poutres. On note  $\mathcal{T}'^0$  (resp.  $\mathcal{T}'^1$ ) l'ensemble des sommets (resp. arêtes) de cette discrétisation.

La fonction  $p_m \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma')$  est approchée par des éléments finis continus,  $H^1$ -conformes et  $P^1$  par élément poutre. La fonction de base discrète du degré de liberté  $s'_j \in \mathcal{T}'^0$  est notée  $p_{s'_j}$ . La fonction-test discrète correspondante du degré de liberté  $s_j \in \mathcal{T}^0$  est notée  $p_{s_j}^t$ .

La fonction  $\lambda_m \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma')$  est approchée par des éléments finis constants par élément poutre  $L^2$ -conformes. La fonction de base discrète du degré de liberté  $a'_j \in \mathcal{T}'^1$  est notée  $\lambda_{a'_j}$ . La fonction-test discrète correspondante du degré de liberté  $a_j \in \mathcal{T}^1$

est notée  $\lambda_{a_j}^t$ .

On note  $K$  une arête de  $\mathcal{T}^0$ . Les deux degrés de liberté  $P^1$  de  $p_m$  sur  $K$  sont notés  $K1$  et  $K2$ . Ils correspondent aux sommets 1 de coordonnées  $(r'_{1K}, z'_{1K})$  et 2 de coordonnées  $(r'_{2K}, z'_{2K})$ , notés de telle façon que la numérotation croisse avec l'abscisse curviligne  $\sigma'$ . On note  $d_K$  la longueur de la poutre. Les fonctions de base correspondantes se notent  $p_{K1}$  et  $p_{K2}$ . Le degré de liberté  $P^0$  de  $\lambda_m$  sur  $K$  est noté abusivement  $K$ . La fonction de base correspondante est notée  $\lambda_K$ .

On note  $L$  une arête de  $\mathcal{T}^0$ . Les deux degrés de liberté  $P^1$  de  $p_m^t$  sur  $L$  sont notés  $L1$  et  $L2$ . Ils correspondent aux sommets 1 de coordonnées  $(r_{1L}, z_{1L})$  et 2 de coordonnées  $(r_{2L}, z_{2L})$ , notés de telle façon que la numérotation croisse avec l'abscisse curviligne  $\sigma$ . On note  $d_L$  la longueur de la poutre. Les fonctions-tests correspondantes se notent  $p_{L1}^t$  et  $p_{L2}^t$ . Le degré de liberté  $P^0$  de  $\lambda_m^t$  sur  $L$  est noté abusivement  $L$ . La fonction de base correspondante est notée  $\lambda_L^t$ .

Les opérateurs intégraux sont assemblés sur le profil discrétisé de  $\Gamma$ . Explicitons les fonctions de base en fonction de l'abscisse curviligne, restreintes à l'élément, des degrés de liberté des éléments  $K$  et  $L$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{K1}(\sigma') = 1 - \frac{\sigma'}{d_K} \\ p_{K2}(\sigma') = \frac{\sigma'}{d_K} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} p_{L1}^t(\sigma) = 1 - \frac{\sigma}{d_L} \\ p_{L2}^t(\sigma) = \frac{\sigma}{d_L} \end{array} \right\}, \lambda_K(\sigma') = 1_{|K}, \lambda_L^t(\sigma) = 1_{|L} \quad (3.33)$$

Les variables  $r, z$  de la géométrie du profil discrétisé de  $\Gamma$  s'expriment simplement en fonction des abscisses curvilignes  $\sigma$  et  $\sigma'$  au niveau de chaque élément  $K$  et  $L$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} r'(\sigma')|_K = r_{1K} + \sigma' \tau_{Kr}, \quad r(\sigma)|_L = r_{1L} + \sigma \tau_{Lr} \\ z'(\sigma')|_K = z_{1K} + \sigma' \tau_{Kz}, \quad z(\sigma)|_L = z_{1L} + \sigma \tau_{Lz} \end{array} \right. \quad (3.34)$$

### 3.2.2 Opérateur simple couche

#### Découplage modal

Le problème à trois dimensions est décomposé en une succession dénombrable de problèmes à deux dimensions  $(r, z)$  en choisissant des fonctions tests uniquement sur le mode  $m$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda(y) = \lambda(r', z', \theta') = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n(r', z') e^{in\theta'} \\ \lambda^t(x) = \lambda^t(r, z, \theta) = \lambda_m^t(r, z) e^{im\theta} \end{array} \right. \quad (3.35)$$

Développons l'intégrale  $S = \langle S(\lambda), \lambda^t \rangle$  en coordonnées cylindriques :

$$S = \oint_0^{2\pi} d\theta \int_{\Gamma} r(\sigma) d\sigma \oint_0^{2\pi} d\theta' \int_{\Gamma'} r'(\sigma') d\sigma' \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n(r', z') e^{in\theta'} \overline{\lambda_m^t(r, z)} e^{-im\theta} \quad (3.36)$$

L'expression de  $R$  montre que celui-ci ne dépend que de la différence des deux angles :

$$\begin{cases} R^2 = r'^2 + r^2 + (z' - z)^2 - 2rr' \cos(\theta' - \theta) \\ R = R(r, r', z, z', \theta - \theta') \end{cases} \quad (3.37)$$

Un changement de variable immédiat donne l'orthogonalité des modes de Fourier :

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \oint_0^{2\pi} d\theta \int_{\Gamma} r(\sigma) d\sigma \int_{\Gamma'} r'(\sigma') d\sigma' \left( \frac{e^{ikR(r, r', z, z', \theta)}}{4\pi R(r, r', z, z', \theta)} e^{im\theta} \lambda_m(r', z') \overline{\lambda_m^t(r, z)} \right) \\ &= \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} rr' G_m(r, r', z, z') \lambda_m \overline{\lambda_m^t}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

où l'on a noté :

$$G_m = 2\pi \oint_0^{2\pi} d\theta \frac{e^{ikR(r, r', z, z', \theta)}}{4\pi R(r, r', z, z', \theta)} e^{im\theta} = \oint_0^{\pi} d\theta \frac{e^{ikR(r, r', z, z', \theta)}}{R(r, r', z, z', \theta)} \cos(m\theta) \quad (3.39)$$

### Interaction élémentaire

L'interaction élémentaire entre les deux degrés de liberté  $P^0$  :  $L$  de l'élément ligne  $L$  et  $K$  de l'élément colonne  $K$  (quantité assemblée dans la matrice globale lors d'une double boucle sur les éléments ligne et colonne) est donnée par  $S_{L,K} = \langle S(1_K), 1_L \rangle$ , assemblé sur le profil discrétisé de  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  :

$$\begin{aligned} S_{L,K} &= \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} (rr' G_m(r, r', z, z') 1_L 1_K) \\ S_{L,K} &= r_{1K} r_{1L} G_{m,1}^{11} + r_{1K} \tau_{Lr} G_{m,1}^{21} + r_{1L} \tau_{Kr} G_{m,1}^{12} + \tau_{Kr} \tau_{Lr} G_{m,1}^{22}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

où les intégrales élémentaires à calculer numériquement s'écrivent :

$$G_{m,p}^{ij} = \int_L d\sigma \int_K d\sigma' \oint_0^{\pi} \sigma^{i-1} \sigma'^{j-1} \frac{e^{ikR(r(\sigma), r'(\sigma'), z(\sigma), z'(\sigma'), \cos\theta)}}{R^p(r(\sigma), r'(\sigma'), z(\sigma), z'(\sigma'), \cos(\theta))} \cos(m\theta) d\theta \quad (3.41)$$

### 3.2.3 Opérateur singulier

#### Découplage modal

Les fonctions tests sont entièrement portées par le mode  $m$  :

$$\begin{cases} p(y) = p(r', z', \theta') = \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n(r', z') e^{in\theta'} \\ p^t(x) = p(r, z, \theta) = p_m^t(r, z) e^{im\theta} \end{cases} \quad (3.42)$$

La formulation variationnelle (3.23) et l'expression cylindrique du rotationnel surfacique (3.32) permettent d'écrire  $-N = \langle -N(p), p^t \rangle$  en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}
 -N &= \oint_0^{2\pi} d\theta \int_{\Gamma} r(\sigma) d\sigma \oint_0^{2\pi} d\theta' \int_{\Gamma'} r'(\sigma') d\sigma' \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \\
 &\quad [k^2 \vec{n} \cdot \vec{n}' \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n(r', z') e^{in\theta'} \right) \overline{p_n^t(r, z)} e^{-im\theta} \\
 &\quad - \left\langle \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( -\frac{dp_n}{d\sigma'}(r'(\sigma'), z'(\sigma')) \vec{e}_{\theta'} + \frac{in}{r'} p_n(r', z') \vec{n}' \wedge \vec{e}_{\theta'} \right) e^{in\theta'} \right) \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left( -\frac{dp_m^t}{d\sigma}(r(\sigma), z(\sigma)) \vec{e}_{\theta} - \frac{im}{r} \overline{p_m^t(r, z)} \vec{n} \wedge \vec{e}_{\theta} \right) e^{-im\theta} \right\rangle]
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

L'écriture des variables géométriques de (3.43) en coordonnées cylindriques prouve le découplage des modes (dépendance angulaire en  $\theta' - \theta$  uniquement) :

$$\vec{\tau} = \begin{cases} \tau_r \cos\theta \\ \tau_r \sin\theta \\ \tau_z \end{cases}, \quad \vec{\tau}' = \begin{cases} \tau_r' \cos\theta' \\ \tau_r' \sin\theta' \\ \tau_z' \end{cases}, \quad \vec{e}_{\theta} = \begin{cases} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{cases}, \quad \vec{e}'_{\theta'} = \begin{cases} -\sin\theta' \\ \cos\theta' \\ 0 \end{cases}, \tag{3.44}$$

$$\vec{n} = \vec{e}_{\theta} \wedge \vec{\tau} = \begin{cases} \tau_z \cos\theta \\ \tau_z \sin\theta \\ -\tau_r \end{cases}, \quad \vec{n}' = \vec{e}'_{\theta'} \wedge \vec{\tau}' = \begin{cases} \tau_z' \cos\theta' \\ \tau_z' \sin\theta' \\ -\tau_r' \end{cases}, \tag{3.45}$$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{n}' = \tau_r \tau_r' + \tau_z \tau_z' \cos(\theta - \theta') \\ \vec{\tau} \cdot \vec{\tau}' = \tau_r \tau_r' \cos(\theta - \theta') + \tau_z \tau_z' \\ \vec{\tau}' \cdot \vec{e}_{\theta} = -\tau_r' \sin(\theta - \theta') \\ \vec{\tau} \cdot \vec{e}'_{\theta'} = \tau_r \sin(\theta - \theta') \end{cases} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}
 -N &= \int_{\Gamma} d\sigma \int_{\Gamma'} d\sigma' \\
 &\quad [p_n(r', z') \overline{p_n^t(r, z)} (G_m (k^2 \tau_r \tau_r' r r' - m^2 \tau_z \tau_z') + S_m (k^2 \tau_z \tau_z' r r' - m^2 \tau_r \tau_r')) \\
 &\quad + p_n(r', z') \frac{dp_n^t(r(\sigma), z(\sigma))}{d\sigma} (-m r \tau_r' D_m) + \overline{p_n^t(r, z)} \frac{dp_n(r'(\sigma'), z'(\sigma'))}{d\sigma'} (-m r' \tau_r D_m) \\
 &\quad - \frac{dp_n^t(r(\sigma), z(\sigma))}{d\sigma} \frac{dp_n(r'(\sigma'), z'(\sigma'))}{d\sigma'} r r' S_m]
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

où l'on a posé :

$$\begin{cases} S_m = \frac{G_{m+1} + G_{m-1}}{2} = 2\pi \int_0^{2\pi} d\theta \frac{e^{ikR(r, r', z, z', \theta)}}{4\pi R(r, r', z, z', \theta)} e^{im\theta} \cos(\theta) \\ -\frac{D_m}{i} = \frac{G_{m+1} - G_{m-1}}{2i} = 2\pi \int_0^{2\pi} d\theta \frac{e^{ikR(r, r', z, z', \theta)}}{4\pi R(r, r', z, z', \theta)} e^{im\theta} \sin(\theta) \end{cases} \tag{3.48}$$

### Interaction élémentaire

L'interaction élémentaire entre les deux degrés de liberté  $P^1$   $K1$  de  $K$  et  $L1$  de  $L$ , restreinte aux éléments colonne  $K$  et ligne  $L$  (quantité assemblée dans la matrice globale lors d'une double boucle sur les éléments ligne et colonne), est donnée par  $-N_{L1,K1} = \langle -N(p_{K1}1_K), p_{L1}^t 1_L \rangle$ , assemblé sur le profil discrétisé de  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  :

$$\begin{aligned}
 -N_{L1,K1} = & \left(1 - \frac{\sigma}{d_{|L}}\right) \left(1 - \frac{\sigma'}{d_{|K}}\right) [G_m(k^2 \tau_r \tau_{r'} (r_{1K} + t' \tau_{Kr}) (r_{1L} + \sigma \tau_{Kl}) - m^2 \tau_z \tau_{z'})] \\
 & + \left(1 - \frac{\sigma}{d_{|L}}\right) \left(1 - \frac{\sigma'}{d_{|K}}\right) [S_m(k^2 \tau_z \tau_{z'} (r_{1K} + \sigma' \tau_{Kr}) (r_{1L} + \sigma \tau_{Kl}) - m^2 \tau_r \tau_{r'})] \\
 & + \left(1 - \frac{\sigma'}{d_{|K}}\right) \left(-\frac{1}{d_{|L}}\right) \left(- (r_{1L} + \sigma \tau_{Kl}) m \tau_{r'} D_m\right) + \left(1 - \frac{\sigma}{d_{|L}}\right) \left(-\frac{1}{d_{|K}}\right) \left(- (r_{1K} + \sigma' \tau_{Kr}) m \tau_r D_m\right) \\
 & - \frac{1}{d_{|L}} \frac{1}{d_{|K}} S_m (r_{1K} + \sigma' \tau_{Kr}) (r_{1L} + \sigma \tau_{Kl})
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

où les intégrales élémentaires à estimer numériquement s'explicitent à partir des  $G_{m,p}^{ij}$  (3.57) ( $S_{m,p}^{ij} = \frac{G_{m+1,p}^{ij} + G_{m-1,p}^{ij}}{2}$  et  $D_{m,p}^{ij} = \frac{-G_{m+1,p}^{ij} + G_{m-1,p}^{ij}}{2}$ ).

### 3.2.4 Opérateur adjoint du double couche

#### Découplage modal

Les fonctions tests sont axisymétriques et ne dépendent que du mode  $m$  :

$$\begin{cases} \lambda(y) = \lambda(r', z', \theta') = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n(r', z') e^{in\theta'} \\ p^t(x) = p^t(r, z, \theta) = p_m^t(r, z) e^{im\theta} \end{cases} \tag{3.50}$$

$D^* = \langle D^*(\lambda), p^t \rangle$  s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$D^* = \oint_0^{2\pi} d\theta \int_{\Gamma} r d\sigma \oint_0^{2\pi} d\theta' \int_{\Gamma} r' d\sigma' \overrightarrow{n_X} \cdot \left( ik - \frac{1}{R} \right) \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \frac{\overrightarrow{YX}}{R} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n(r', z') e^{in\theta'} \overline{p_m^t(r, z)} e^{-im\theta} \tag{3.51}$$

L'écriture des variables géométriques de (3.51) en coordonnées cylindriques prouve le découplage des modes (dépendance angulaire en  $\theta' - \theta$  uniquement) :

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{e}_\theta \wedge \overrightarrow{\tau} = \begin{cases} \tau_z \cos\theta \\ \tau_z \sin\theta \\ -\tau_r \end{cases}, \quad \overrightarrow{YX} = \begin{cases} r \cos\theta - r' \cos(\theta') \\ r \sin\theta - r' \sin(\theta') \\ z - z' \end{cases} \tag{3.52}$$

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{YX} = -\tau_r (z - z') + \tau_z r - \tau_z r' \cos(\theta' - \theta) \tag{3.53}$$

$$D^* = \int_{\Gamma} d\sigma \int_{\Gamma'} d\sigma' r r' \lambda_m(r', z') \overline{p_m^t(r, z)} (H_m(-\tau_r(z - z') + \tau_z r) - T_m \tau_z r'), \quad (3.54)$$

où l'on a noté :

$$\begin{cases} H_m = 2\pi \oint_0^{2\pi} \frac{e^{ikR(r, r', z, z', \theta)}}{4\pi R(r, r', z, z', \theta)} \left(\frac{ik}{R} - \frac{1}{R^2}\right) e^{im\theta} = \oint_0^{\pi} \frac{e^{ikR(r, r', z, z', \theta)}}{R(r, r', z, z', \theta)} \left(\frac{ik}{R} - \frac{1}{R^2}\right) \cos(m\theta) \\ T_m = \frac{H_{m+1} + H_{m-1}}{2} = 2\pi \oint_0^{2\pi} \frac{e^{ikR(r, r', z, z', \theta)}}{4\pi R(r, r', z, z', \theta)} \left(ik - \frac{1}{R}\right) \frac{1}{R} e^{im\theta} \cos(\theta) \end{cases} \quad (3.55)$$

### Interaction élémentaire

L'interaction élémentaire entre le degré de liberté  $P^1 L1$  de l'élément ligne  $L$  et le degré de liberté  $P^0 K$  de l'élément colonne  $K$ , restreinte aux éléments  $K$  et  $L$  (quantité assemblée dans la matrice globale lors d'une double boucle sur les éléments ligne et colonne), est donnée par  $D_{L1,K}^* = \langle D^*(1_K), p_{L1}^t 1_L \rangle$ , assemblé sur le profil discrétisé de  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  :

$$\begin{aligned} D_{L1,K}^* &= \left(1 - \frac{t}{d_L}\right) (r_{1K} + t' \tau_{Kr}) (r_{1L} + t \tau_{Lr}) \\ &\quad (-H_m(\tau_{Lr}(z_{1L} + t \tau_{Lz} - z_{1K} - t' \tau_{Kz}) - \tau_{Lz}(r_{1L} + t \tau_{Lr})) - T_m \tau_{Lz}(r_{1K} + t' \tau_{Kr})) \end{aligned} \quad (3.56)$$

où les intégrales élémentaires à estimer numériquement s'explicitent à partir des  $G_{m,p}^{ij}$  (3.57) ( $H_{m,1}^{ij} = ik G_{m,2}^{ij} - G_{m,3}^{ij}$  et  $T_{m,p}^{ij} = \frac{H_{m+1,p}^{ij} + H_{m-1,p}^{ij}}{2}$ ).

L'opérateur discret double couche est simplement le transposé matriciel de cet opérateur.

### 3.2.5 Partie régulière

Les intégrales élémentaires que l'on est amenées à estimer numériquement lors de l'interaction entre les degrés de liberté de l'élément ligne  $L$  et de l'élément colonne  $K$  s'explicitent toutes en fonction de la quantité suivante :

$$G_{m,p}^{ij} = \int_{\Gamma} d\sigma \int_{\Gamma'} d\sigma' \oint_0^{\pi} d\theta \sigma^{i-1} \sigma'^{j-1} \frac{e^{ikR(r(\sigma), r'(\sigma'), z(\sigma), z'(\sigma'), \cos\theta)}}{R^p(r(\sigma), r'(\sigma'), z(\sigma), z'(\sigma'), \cos(\theta))} \cos(m\theta) \quad (3.57)$$

Ces intégrales ne sont pas toujours définies : elles sont singulières dans le cas de l'autoréaction, où l'élément  $L$  et l'élément  $K$  coïncident. Lorsque les deux éléments  $K$  et  $L$  sont éloignés (à un seuil de tolérance que l'on a fixé), ces intégrales ne sont plus singulières et peuvent être approximées numériquement par une méthode de quadrature.

**Quadrature**

Toute intégrale du type  $I = \int_a^b f(x)dx$  est ramenée par un changement de variable affine sur l'intervalle  $]-1,1[$  :

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}u + \frac{b+a}{2}\right)du = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \phi(u)du$$

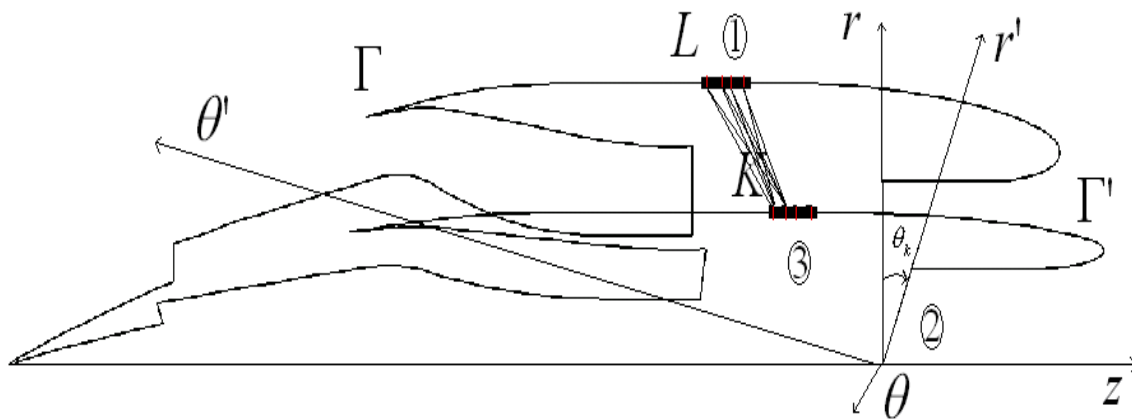
Une formule de quadrature sur  $]-1,1[$  est la donnée de  $n$  points  $u_i$  de  $]-1,1[$  et de  $n$  poids  $w_i$ , permettant d'approximer l'intégrale sur  $]-1,1[$  :

$$\int_{-1}^1 \phi(u)du = \sum_{i=1}^n w_i \phi(x_i)$$

Les intégrales sur un intervalle  $[a,b[$  quelconque se déduisent de cette quadrature sur  $]-1,1[$  :

$$I = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i \phi(u_i) = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f\left(\frac{b-a}{2}u_i + \frac{b+a}{2}\right)$$

On choisit ici une quadrature de Gauss. Les points d'interpolation sont les zéros des polynômes de Legendre (4.107), tous réels et strictement contenus dans  $]-1,1[$ . Ces zéros se répartissent symétriquement par rapport à l'origine (le polynôme de Legendre a même parité que l'entier  $n$  et pour un nombre  $n$  de points impairs, le milieu de l'intervalle appartient à la quadrature) et les extrémités de l'intervalle n'appartiennent pas aux points d'interpolation. Pour  $n$  points d'interpolation, cette formule est exacte pour les polynômes de degré  $2n - 1$ .

**Méthodologie Numérique**

Trois boucles successives



**Première étape**

Pour chaque point de Gauss  $pG_K$  de l'élément colonne  $K$  de  $\Gamma$  de coordonnées  $(r'_{pG_K}, z'_{pG_K})$  et pour chaque point de Gauss angulaire  $pG_\theta$  d'angle  $\theta_{pG_\theta}$ , on calcule l'intégration sur l'élément ligne  $L$  :

$$g_L(p, i, pG_K, \theta_{pG_\theta}) = \sum_{pG_L} w_L(pG_L) (t_{pG_L})^{i-1} \frac{e^{ikR} d_L}{R^p 2}, \quad (3.58)$$

où  $t_{pG_L}$  (resp.  $w_L(pG_L)$ ) représente l'abscisse curviligne (resp. le poids de Gauss) du point de Gauss  $pG_L$  de l'élément ligne  $L$  et  $R^2 = (z_{pG_L} - z'_{pG_K})^2 + r_{pG_L}^2 + r_{pG_K}^2 - 2r_{pG_L} r'_{pG_K} \cos(\theta_{pG_\theta})$  désigne la distance entre le point de Gauss  $pG_K$  en cours pour une surface  $\Gamma'$  tournée de  $\theta_{pG_\theta}$  au le point de Gauss  $pG_L$ .

**Deuxième étape**

On intègre sur le secteur angulaire :

$$g_K(i, m, p) = \sum_{pG_\theta} w_\theta(pG_\theta) \cos(m\theta) g_L(p, i, pG_K, \theta_{pG_\theta}) \frac{\pi}{2} \quad (3.59)$$

**Troisième étape**

On intègre sur l'élément colonne  $K$  :

$$G_{m,p}^{ij} = \sum_{pG_K} (t'_{pG_K})^{j-1} w_K(pG_K) g_K(i, m, p) \frac{d_K}{2} \quad (3.60)$$

En rassemblant les trois sommations successives :

$$G_{m,p}^{ij} = \sum_{pG_K} w_K(pG_K) (t'_{pG_K})^{j-1} \sum_{pG_\theta} w_\theta(pG_\theta) \cos(m\theta) \sum_{pG_L} (t_{pG_L})^{i-1} w_L(pG_L) \frac{e^{ikR} d_L d_K \pi}{R^p 8} \quad (3.61)$$

### 3.2.6 Intégrales singulières

Lorsque les éléments  $K$  et  $L$  sont proches à un seuil  $\epsilon$  fixé, la singularité de la fonction de Green ne permet pas une intégration précise par une formule de quadrature. Il faut extraire la partie singulière non oscillante de l'intégrale, que l'on intègre maintenant analytiquement. La partie régulière est toujours évaluée à l'aide d'une formule de quadrature. Les parties singulières et régulières s'explicitent pour les quatres opérateurs intégraux :

Le développement limité  $\frac{e^{ikR}}{R} = \frac{1}{R} + ik + o_{R \rightarrow 0}(1)$  du noyau de Green donne la partie régulière  $\frac{e^{ikR}}{R} - \frac{1}{R}$  pour les opérateurs  $S$  et  $N$ .

Le développement limité  $\left( ik - \frac{1}{R} \right) \frac{e^{ikR}}{R^2} = -\frac{1}{R^3} - \frac{k^2}{2R} - \frac{ik^3}{3} + o_{R \rightarrow 0}(1)$  donne la

partie régulière  $\left(ik - \frac{1}{R}\right) \frac{e^{ikR}}{R^2} + \frac{1}{R^3} + \frac{k^2}{2R}$  pour les opérateurs  $D$  et  $D^*$ .

Les intégrales suivantes des parties singulières :

$$\int_{S_{1L}}^{S_{2L}} (\sigma)^{i-1} \frac{1}{R} d\sigma, \int_{S_{1L}}^{S_{2L}} (\sigma)^{i-1} \frac{1}{R^2} d\sigma \text{ et } \int_{S_{1L}}^{S_{2L}} (\sigma)^{i-1} \frac{1}{R^3} d\sigma, \text{ pour } i \in \{1, 2, 3\},$$

sont estimées analytiquement.

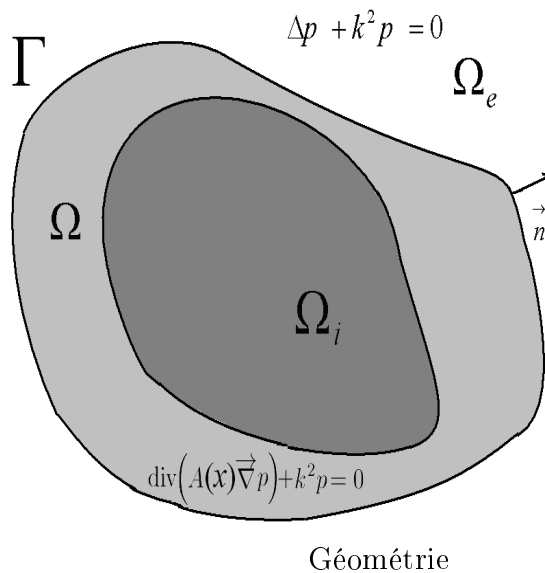
# Chapitre 4

## Ecoulement potentiel

Ce chapitre traite le problème général d'un écoulement potentiel localement variable. Le cas simplifié de la diffraction d'une onde acoustique par un objet dur entouré d'une anisotropie locale est considéré dans un premier temps. Le problème continu général fluide-acoustique est étudié ensuite mathématiquement. Une discrétisation naturelle en éléments finis du problème global est finalement proposée.

### 4.1 Un premier problème simplifié

#### 4.1.1 Problématique



On expose dans ce paragraphe un cas classique de traitement numérique de la diffraction en domaine non borné d'une onde acoustique incidente par un objet acoustiquement dur entouré d'une anisotropie locale.

Plusieurs formulations numériques possibles sont proposées.

La démarche suivie s'inspire de celle d'un problème électromagnétique similaire exposé dans la thèse de V. Levillain [39] (ou encore l'article [13]).

Les domaines sont ici cartésiens et tridimensionnels.  $\Omega_i$  est l'objet acoustiquement dur et le domaine borné  $\Omega$  est le siège de la perturbation locale anisotrope du milieu.

On considère le problème suivant en notant  $\Omega_{tot} = (\overline{\Omega} \cup \Omega_e) \setminus \partial\Omega_i$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (p, \vec{v}) \in H_{loc}^1(\Omega_{tot}) \times H_{loc}^{div}(\Omega_{tot}) \text{ tel que :} \\ ik \vec{v}(x) = A(x) \vec{\nabla} p(x) \\ ikp(x) = \text{div}(\vec{v}(x)) \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial p}{\partial n} - ikp \right|^2 d\gamma = 0 \end{array} \right. , \forall x \in \Omega_{tot} \quad , \quad (4.1)$$

où  $A(x) \in L^\infty(\Omega_{tot}, \mathcal{L}(\mathbb{C}^3))$  est un tenseur d'anisotropie localement variable dans  $\Omega$ , égal à l'identité dans  $\Omega_e$  et elliptique dans  $\Omega_{tot}$  ( $\exists c > 0, A \geq cI$  dans  $\Omega_{tot}$ ).  $\Gamma$  est une surface fictive placée à la limite de l'hétérogénéité. Le problème (4.1) est équivalent au problème décomposé :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (p_1, \vec{v}_1) \in H^1(\Omega) \times H^{div}(\Omega) \text{ tel que :} \\ ik \vec{v}_1(x) = A(x) \vec{\nabla} p_1(x) \\ ikp_1(x) = \text{div}(\vec{v}_1(x)) \\ p_1(x) = p_2(x), \\ \vec{v}_1(x) \cdot \vec{n}(x) = \vec{v}_2(x) \cdot \vec{n}(x), \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \forall x \in \Omega \\ \forall x \in \Omega \\ \forall x \in \Gamma \\ \forall x \in \Gamma \end{array} \\ (2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (p_2, \vec{v}_2) \in H_{loc}^1(\Omega_e) \times H_{loc}^{div}(\Omega_e) \text{ tel que :} \\ ik \vec{v}_2(x) = \vec{\nabla} p_2(x) \\ ikp_2(x) = \text{div}(\vec{v}_2(x)) \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial p}{\partial n} - ikp \right|^2 d\gamma = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \forall x \in \Omega_e \\ \forall x \in \Omega_e \end{array} \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Le projecteur de Calderón intérieur pour un problème intérieur arbitraire nul appliqué au problème (2) de (4.2) donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} -N(p_2) + \left(\frac{I}{2} + D^*\right) \left(\frac{\partial p_2}{\partial n}\right) = 0 \\ \left(\frac{I}{2} - D\right) (p_2) + S \left(\frac{\partial p_2}{\partial n}\right) = 0 \end{array} \right. , \forall x \in \Gamma \quad (4.3)$$

Le problème (4.1) se réécrit finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (p_1, \vec{v}_1) \in H^1(\Omega) \times H^{div}(\Omega) \text{ tel que :} \\ ik(x) \vec{v}_1(x) = A(x) \vec{\nabla} p_1(x) \\ ik(x) p_1(x) = \text{div}(\vec{v}_1(x)) \\ -N(p_1) + \left(\frac{I}{2} + D^*\right) \left(\frac{\partial p_1}{\partial n}\right) = 0 \\ \left(\frac{I}{2} - D\right) (p_1) + S \left(\frac{\partial p_1}{\partial n}\right) = 0 \end{array} \right. , \forall x \in \Omega \quad , \forall x \in \Omega \quad , \forall x \in \Gamma \quad , \forall x \in \Gamma \quad (4.4)$$

Le problème complet est ramené au domaine borné  $\Omega$  et à sa frontière  $\Gamma$ . L'indice 1 est oublié.

### 4.1.2 Formulation énergétique

Les équations de Helmholtz, scalaire pour la pression et vectorielle pour la vitesse, s'écrivent dans le domaine cartésien  $\Omega$  :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left( A \overrightarrow{\nabla} p \right) + k^2 p = 0 & \text{dans } \Omega \\ \overrightarrow{\nabla} \operatorname{div} (\overrightarrow{v}) + k^2 A^{-1} \overrightarrow{v} = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (4.5)$$

Elles se formulent variationnellement dans le domaine borné  $\Omega$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (p, \overrightarrow{v}) \in H^1(\Omega) \times H^{\operatorname{div}}(\Omega) \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \left[ A \overrightarrow{\nabla} p \cdot \overrightarrow{\nabla} \overline{p^t} - k^2 p \overline{p^t} \right] = \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial n} \overline{p^t} = ik \int_{\Gamma} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} \overline{p^t} \\ \int_{\Omega} \left[ \operatorname{div}(\overrightarrow{v}) \overline{\operatorname{div}(\overrightarrow{v^t})} - k^2 A^{-1} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v^t} \right] = \int_{\Gamma} \operatorname{div}(\overrightarrow{v}) \overline{v^t \cdot \overrightarrow{n}} = ik \int_{\Gamma} p \overline{v^t \cdot \overrightarrow{n}} \\ \forall (p^t, \overrightarrow{v^t}) \in H^1(\Omega) \times H^{\operatorname{div}}(\Omega) \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Les équations intégrales sur  $\Gamma$  de (4.4) sont exprimées variationnellement en prenant comme inconnue auxiliaire  $\phi = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (p, \phi) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \text{ tel que :} \\ \int_{\Gamma} D(p) \overline{\phi^t} - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} p \overline{\phi^t} - ik \int_{\Gamma} S(\phi) \overline{\phi^t} = 0, \quad \forall \phi^t \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \phi \overline{p^t} + \int_{\Gamma} D^*(\phi) \overline{p^t} - \frac{1}{ik} \int_{\Gamma} N(p) \overline{p^t} = 0, \quad \forall p^t \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \end{array} \right. \quad (4.7)$$

La combinaison de (4.6) et (4.7) donne la formulation **(C)** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (p, \overrightarrow{v}) \in H^1(\Omega) \times H^{\operatorname{div}}(\Omega) \text{ tel que :} \\ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ A \overrightarrow{\nabla} p \cdot \overrightarrow{\nabla} \overline{p^t} - k^2 p \overline{p^t} \right] = -ik \int_{\Gamma} D^*(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}) \overline{p^t} + \int_{\Gamma} N(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}) \overline{p^t} \\ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \operatorname{div}(\overrightarrow{v}) \overline{\operatorname{div}(\overrightarrow{v^t})} - k^2 A^{-1} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v^t} \right] = ik \int_{\Gamma} D(p) \overline{v^t \cdot \overrightarrow{n}} - k^2 \int_{\Gamma} S(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}) \overline{v^t \cdot \overrightarrow{n}} \\ \forall (p^t, \overrightarrow{v^t}) \in H^1(\Omega) \times H^{\operatorname{div}}(\Omega) \end{array} \right. , \quad (4.8)$$

A partir des propriétés des opérateurs volumiques non homogènes associés à la pression et à la vitesse acoustiques en domaine borné, ainsi que celles des opérateurs intégraux surfaciques, [39] montre l'existence et l'unicité de la solution de cette formulation. Elle n'est cependant pas propice à la résolution numérique car elle nécessite deux inconnues volumiques dont une vectorielle.

### 4.1.3 Formulation symétrique

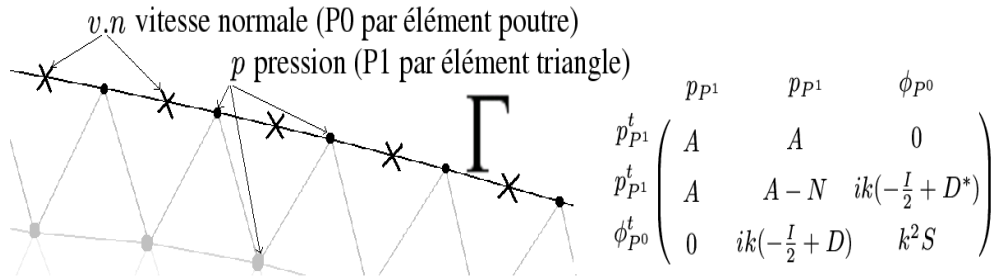
Une formulation alternative avec une seule inconnue volumique scalaire est possible. On utilise l'artifice suivant dans la première équation de (4.6) :

$$ik \int_{\Gamma} \phi \bar{p}^t = \underbrace{\frac{ik}{2} \int_{\Gamma} \phi \bar{p}^t}_I + \frac{ik}{2} \int_{\Gamma} \phi \bar{p}^t$$

La formulation (S)-scalaire s'écrit :

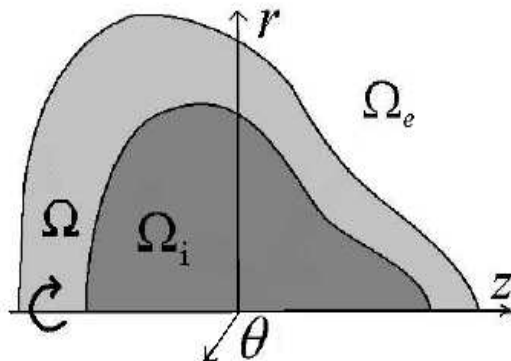
$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (p, \phi) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \left[ A \vec{\nabla} p \cdot \vec{\nabla} \bar{p}^t - k^2 p \bar{p}^t \right] = \frac{ik}{2} \int_{\Gamma} \phi \bar{p}^t - ik \int_{\Gamma} D^*(\phi) \bar{p}^t + \int_{\Gamma} N(p) \bar{p}^t \\ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} p \bar{\phi}^t - \int_{\Gamma} D(p) \bar{\phi}^t + ik \int_{\Gamma} S(\phi) \bar{\phi}^t = 0 \\ \forall (p^t, \phi^t) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma) \end{array} \right. , \quad (4.9)$$

Cette formulation est symétrique et ne possède qu'une inconnue volumique scalaire : elle se prête à une résolution numérique. Elle couple la pression volumique intérieur  $p \in H^1(\Omega)$ ,  $P^1$  par éléments volumiques (éléments finis classiques continus  $H^1$ -conformes), à la vitesse normale surfacique extérieure  $\phi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ ,  $P^0$  par éléments finis surfaciques (éléments finis classiques  $L^2$ -conformes).



#### 4.1.4 Formulation axisymétrique

##### Généralités



Géométrie

Un traitement particulier est possible lors d'une configuration à géométrie axisymétrique.

Ce problème se présente lorsque l'on étudie la diffraction d'une onde acoustique par un objet axisymétrique entouré d'une hétérogénéité également axisymétrique.

Les domaines sont ici bidimensionnels. Ce sont les domaines transverses de coupe de l'objet, de l'hétérogénéité et du domaine extérieur, qui sont notés par abus de notation comme les anciens domaines tridimensionnels ( $\Omega_i, \Omega, \Omega_e, \Omega_{tot} = (\bar{\Omega} \cup \Omega_e) \setminus \partial\Omega_i \subset \mathbb{R}^2$ ).

Il faut ici conserver une notation du domaine cartésien extérieur à l'objet, que l'on notera  $\Omega_{tot,xyz}$ .

Les opérateurs différentiels d'ordre 1 s'écrivent en coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} p(r, z, \theta) = \frac{\partial p}{\partial r}(r, z, \theta) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}(r, z, \theta) \vec{e}_\theta + \frac{\partial p}{\partial z}(r, z, \theta) \vec{e}_z \\ \text{div}(\vec{v})(r, z, \theta) = \frac{\partial v_r}{\partial r}(r, z, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}(r, z, \theta) + \frac{\partial v_z}{\partial z}(r, z, \theta) \end{cases} \quad (4.10)$$

L'équation de Helmholtz scalaire anisotrope en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r a(r, z) \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{a(r, z)}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( a(r, z) \frac{\partial p}{\partial z} \right) + k^2 p = 0, \quad (4.11)$$

où  $A(x) = a(r, z)I$  par simplicité, variant localement dans  $\Omega$  ( $a(r, z) = 1$  dans  $\Omega_e$ ). Le problème physique de la diffraction d'une onde par l'objet et l'hétérogénéité s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r a(r, z) \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{a(r, z)}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( a(r, z) \frac{\partial p}{\partial z} \right) + k^2 p = 0, \text{ dans } \Omega_{tot} \times [0, 2\pi] \\ \frac{\partial p}{\partial n} = g_{inc}, \quad \forall (r, z, \theta) \in \partial\Omega_i \times [0, 2\pi] \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left( \frac{\partial p}{\partial |x|} - ikp \right) = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

Le problème est posé en terme de champ diffracté. Le terme  $g_{inc}$  provient de l'onde incidente et de la condition acoustiquement dure à la surface de l'objet. La condition de Sommerfeld à l'infini permet de sélectionner l'onde sortante du problème et de retrouver la causalité temporelle perdue lors du passage en fréquentiel.

### Espaces de Sobolev axisymétriques

A toute fonction cartésienne  $\tilde{u}$  définie à l'extérieur de l'objet dans  $\Omega_{tot,xyz}$ , on associe la fonction  $u$  définie sur  $\Omega_{tot} \times [0, 2\pi]$  par le changement de variables suivant :  $u(r, z, \theta) = \tilde{u}(x, y, z) = \tilde{u}(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ . Si  $\tilde{u}$  est continue, alors  $u$  est continue et  $2\pi$ -périodique. Le théorème d'intégration des fonctions composées donne pour toute fonction  $L^2(\Omega_{tot,xyz})$  du domaine extérieur à l'objet :

$$\int |\tilde{u}(x, y, z)|^2 dx dy dz = \int_{\Omega_{tot} \times [0, 2\pi]} |u(r, \theta, z)|^2 r dr d\theta dz$$

On déduit de cette formule les images des espaces  $L^2(\Omega_{tot,xyz})$  et  $H^1(\Omega_{tot,xyz})$  du domaine extérieur à l'objet et leurs normes respectives :

$$\begin{aligned} L_a^2(\Omega_{tot} \times [0, 2\pi]) &= \{u \text{ mesurable et tel que : } \sqrt{r}u \in L^2(\Omega_{tot,xyz})\}, \\ \|u\|_{L_a^2(\Omega_{tot} \times [0, 2\pi])}^2 &= \int_{(\Omega_{tot} \times [0, 2\pi]) \times [0, 2\pi]} |u(r, \theta, z)|^2 r dr dz d\theta \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} H_a^1(\Omega_{tot} \times [0, 2\pi]) &= \{u \in L_a^2(\Omega_{tot} \times [0, 2\pi]), \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{\partial u}{\partial z} \in L_a^2(\Omega_{tot} \times [0, 2\pi])\}, \\ \|u\|_{H_a^1(\Omega_{tot} \times [0, 2\pi])}^2 &= \int_{(\Omega_{tot} \times [0, 2\pi]) \times [0, 2\pi]} \left[ |u|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 \right] r dr dz d\theta \end{aligned} \quad (4.14)$$

### Décomposition de Fourier et espaces de Sobolev à poids transverses

La décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts permet de décomposer toute fonction de  $L_a^2(\Omega_{tot} \times [0, 2\pi])$  en série de Fourier angulaire en  $\theta$  :

$$u(r, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} u_m(r, z) e^{im\theta} \quad (4.15)$$

Les coefficients de Fourier sont donnés par le produit scalaire :

$$u_m(r, z) = \langle u, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\theta} \rangle_{L^2(0, 2\pi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} u(r, \theta, z) e^{-im\theta} d\theta \quad (4.16)$$

La vitesse acoustique vectorielle se décompose sur les modes de Fourier angulaires :

$$\vec{v} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \vec{v}_m(r, z) e^{im\theta}$$



La continuité sur l'axe implique la nullité de certaines composantes vectorielles pour certains modes :

$$\begin{cases} \vec{v}_m^z(0, z) = 0, \forall m \neq 0 \\ \vec{v}_m^r(0, z) = 0, \forall m \neq \pm 1 \\ \vec{v}_m^\theta(0, z) = 0, \forall m \neq \pm 1 \end{cases} \quad (4.17)$$

L'espace à poids transverse équivalent  $L^2$  est noté par abus de notation comme l'espace à poids avec la variable supplémentaire (5.4) :

$$\begin{aligned} L_a^2(\Omega_{tot}) &= \{u(r, z) \text{ mesurable et tel que : } \sqrt{r}u \in L^2(\Omega_{tot})\} \\ \|u\|_{L_a^2(\Omega_{tot})}^2 &= \int_{\Omega_{tot}} |u(r, z)|^2 r dr dz \end{aligned} \quad (4.18)$$

La décomposition de Fourier en modes azimutaux oblige à distinguer les espaces fonctionnels à poids pour chaque mode azimutal :

$$\begin{aligned} H_{am}^1(\Omega_{tot}) &= \{u(r, z) \in L_a^2(\Omega_{tot}) \text{ tel que } \frac{\partial u}{\partial r}, m \frac{u}{r}, \frac{\partial u}{\partial z} \in L_a^2(\Omega_{tot})\}, \\ \|u\|_{H_{am}^1(\Omega_{tot})}^2 &= \int_{\Omega_{tot}} \left[ |u|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + m^2 \left| \frac{u}{r} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 \right] r dr dz \end{aligned} \quad (4.19)$$

### Formulation variationnelle volumique et découplage modal

L'axisymétrie permet la décomposition du problème initial en une série dénombrable de problèmes :

$$\begin{cases} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r a(r, z) \frac{\partial p_m(r, z)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( a(r, z) \frac{\partial p_m(r, z)}{\partial z} \right) + \left( k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) p_m(r, z) \right] e^{im\theta} = 0 \\ \forall (r, z, \theta) \in \Omega_{tot} \times [0, 2\pi] \\ \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left[ \frac{\partial_m}{\partial_m n} \right] (p_m(r, z)) e^{im\theta} = g_{inc}, \forall (r, z, \theta) \in \partial\Omega_i \times [0, 2\pi] \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left( \frac{\partial p_m}{\partial |x|} - ik_\infty p_m \right) = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

La formulation variationnelle du problème (4.20) est établie en prenant des fonctions tests axisymétriques portées uniquement par le mode  $m$  :  $p^t = p_m^t(r, z)e^{im\theta}$  (resp.  $\phi^t = \phi_m^t(r, z)e^{im\theta}$ ). Le découplage des modes de Fourier volumiques est immédiat. Le découplage des opérateurs intégraux s'obtient par la même démarche que le paragraphe (3.2). La formulation (S)-scalaire (4.9) s'écrit pour le mode azimutal

$m \in \mathbb{Z}$  :

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (p_m, \phi_m) \in H_{am}^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma) \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} a(r, z) \frac{\partial p_m}{\partial r} \frac{\partial \overline{p_m^t}}{\partial r} r dr dz + \int_{\Omega} a(r, z) \frac{\partial p_m}{\partial z} \frac{\partial \overline{p_m^t}}{\partial z} r dr dz \\ - \int_{\Omega} k^2 p_m \overline{p_m^t} r dr dz + m^2 \int_{\Omega} a(r, z) \frac{p_m \overline{p_m^t}}{r} dr dz \\ - \frac{ik}{4\pi} \int_{\Gamma} \phi_m \overline{p_m^t} + \frac{ik}{2\pi} \int_{\Gamma} D_m^*(\phi_m) \overline{p_m^t} - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} N_m(p_m) \overline{p_m^t} \\ = \int_{\partial\Omega_i} \langle g_{inc}, e^{im\theta} \rangle p_m^t r dr dz \\ \\ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} p_m \overline{\phi_m^t} - \int_{\Gamma} D_m(p_m) \cdot \overline{\phi_m^t} + ik \int_{\Gamma} S_m(\phi_m) \cdot \overline{\phi_m^t} = 0 \\ \\ \forall (p_m^t, \phi_m^t) \in H_{am}^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma) \end{array} \right. , \quad (4.21)$$

où les opérateurs intégraux azimutaux sont détaillés au paragraphe (3.2). La forme matricielle numérique s'écrit :

$$\begin{array}{c} p_{mP^1.vol}^t \\ p_{mP^1.sur}^t \\ \phi_{mP^0.sur}^t \end{array} \left( \begin{array}{ccc} p_{mP^1.vol} & p_{mP^1.sur} & \phi_{mP^0.sur} \\ A_m & A_m & 0 \\ A_m & A_m - \frac{1}{2\pi} N_m & \frac{ik}{2\pi} \left( -\frac{I}{2} + D_m^* \right) \\ 0 & \frac{ik}{2\pi} \left( -\frac{I}{2} + D_m \right) & \frac{k^2}{2\pi} S_m \end{array} \right) , \quad (4.22)$$

où  $p_{mP^1.vol}$  (resp.  $p_{mP^1.sur}$ ) désigne les degrés de liberté de la pression volumique  $P^1$  par élément triangulaire (resp. les degrés de liberté de la pression surfacique  $P^1$  par élément poutre) et où  $\phi_{mP^0.sur}$  désigne les degrés de liberté de la vitesse normale surfacique constante par élément poutre.

## 4.2 Théorie du problème continu

### 4.2.1 Ecoulement porteur

#### Equations aux dérivées partielles du potentiel

Les domaines considérés ici sont tridimensionnels et cartésiens.

La potentialité de l'écoulement porteur annule le terme rotationnel de l'équation d'Euler (1.9).

Une version stationnaire de la relation de Bernoulli (1.6) pour l'écoulement porteur découle :

$$\frac{|\vec{v}_0(\vec{x})|^2}{2} + \frac{a_0^2(\vec{x})}{\gamma - 1} = \text{constante}, \quad (4.23)$$

où l'énergie totale du fluide porteur est une constante absolue de l'espace et du temps. Cette constante est déterminée par les paramètres constants de l'écoulement à l'infini. Les équations (1.8), (1.10) impliquent que la densité volumique est uniquement fonction de la vitesse au carré et des paramètres à l'infini :

$$\rho_0 = \left( \frac{\rho_\infty^\gamma}{\gamma p_\infty} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} a_0^{\frac{2}{\gamma-1}} = F_\infty \left( |\vec{\nabla} \phi_0(\vec{x})|^2 \right), \quad \forall \vec{x} \in \Omega, \quad (4.24)$$

où  $F_\infty(x) = \left( \frac{\rho_\infty^\gamma}{\gamma p_\infty} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left( a_\infty^2 + \frac{\gamma-1}{2} (v_\infty^2 - x) \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$ . La loi de conservation de la masse donne l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le potentiel porteur :

$$\operatorname{div} \left( F_\infty \left( |\vec{\nabla} \phi_0(\vec{x})|^2 \right) \vec{\nabla} \phi_0(\vec{x}) \right) = 0, \quad \forall \vec{x} \in \Omega \quad (4.25)$$

L'équation (4.25) est non linéaire et change de nature selon le régime considéré : elliptique en régime subsonique et hyperbolique en régime supersonique. Le régime transsonique est complexe avec la présence d'ondes de choc. Au niveau de l'avant de la nacelle, les nombres de Mach sont largement subsoniques. Le modèle choisi est subsonique.

### Conditions aux bords

- L'écoulement fluide est supposé uniforme au-delà de  $\Gamma_\infty$ . Sa vitesse est l'opposée de celle de l'avion. On impose sur  $\Gamma_\infty$  une condition de flux égale à la masse convectée par l'écoulement uniforme à l'infini :

$$\rho_0(\vec{x}) \vec{v}_0(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) = \rho_\infty \vec{v}_\infty \cdot \vec{n}(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in \Gamma_\infty \quad (4.26)$$

- L'écoulement fluide glisse sur les parois de la nacelle :

$$\rho_0(\vec{x}) \vec{v}_0(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) = 0, \quad \forall \vec{x} \in \Gamma_R \quad (4.27)$$

- On impose un flux de masse sortant (du domaine de calcul) à l'entrée de la nacelle :

$$\rho_0(\vec{x}) \vec{v}_0(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) = q_M(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in \Gamma_M \quad (4.28)$$

- On impose un flux de masse rentrant (du domaine de calcul) à la sortie de la nacelle :

$$\rho_0(\vec{x}) \vec{v}_0(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) = q_{M'}(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in \Gamma_{M'} \quad (4.29)$$

#### Remarque 4.2.1.

- La normale  $\vec{n}$  est sortante au domaine de calcul. Le flux sortant  $q_M$  (resp. rentrant  $q_{M'}$ ) est donc positif (resp. négatif).

• Le flux total sur  $\partial\Omega$  doit être nul, pour que le problème de Neumann soit bien posé. Le flux global à travers  $\Gamma_\infty$  étant nul, les deux débits à la nacelle doivent se compenser :

$$\int_{\Gamma_M} q_M(\vec{x}) + \int_{\Gamma_{M'}} q_{M'}(\vec{x}) = 0 \quad (4.30)$$

• L'écoulement réel à l'arrière de la nacelle est complexe : il est la combinaison de deux jets de vitesses différentes. Le phénomène aérodynamique de jet est très complexe à modéliser. Néanmoins, la discontinuité tangentielle de vitesse d'écoulement est modélisable tout en conservant un écoulement potentiel, comme le propose W. Eversmann dans l'article [29].

• Les débits fixés en entrée et en sortie de la nacelle n'ont d'autres nécessités que de globalement s'annuler. La géométrie axisymétrique de la nacelle suggère d'imposer des flux entrants et sortants axisymétriques. Ces débits n'ont a priori aucune raison d'être constants radialement. On peut donner deux raisons à fixer des débits constants :

- Pour les fluides parfaits eulériens, la circulation du vecteur rotationnel le long d'une courbe fermée se conserve. Le long de toute ligne de courant provenant de l'infini, l'écoulement est donc bien irrotationnel, celui-ci étant irrotationnel à l'infini : l'hypothèse de base de potentialité du modèle est bien vérifiée. L'imposition de débits plus forts au centre de  $\Gamma_M$  provoquerait l'existence de lignes de courant ne pouvant être reliées à l'infini et le modèle potentiel ne serait plus valide.
- L'expression du bruit provenant du moteur est fournie sous la forme de coefficients de modes acoustiques cylindriques de conduit se propageant sur un écoulement uniforme. Cet écoulement uniforme est obtenu en fixant des débits constants.

• Le placement arbitraire des surfaces  $\Gamma_M$  et  $\Gamma_\infty$ , où des flux constants sont imposés, peut "comprimer" l'écoulement. Il faut jouer sur la position des surfaces et s'assurer qu'elles sont suffisamment loin pour que l'écoulement soit naturellement constant à leur niveau. En effet, l'imposition de flux pour l'écoulement est l'analogue d'une condition de Robin pour l'équation de Helmholtz et la solution recherchée est correcte si les surfaces d'imposition sont situés suffisamment loin (à l'infini théoriquement) de l'objet. L'article [8] de H. Berger, W. Warnecke et W.L. Wendland propose des conditions intégrales à la place des conditions de flux imposés, de telle sorte que l'écoulement calculé soit automatiquement relaxé à l'infini (exactement la même démarche que pour l'équation de Helmholtz présentée dans le paragraphe 4.1).

## Adimensionnement

Chaque variable physique du problème est adimensionnée par la valeur homogène obtenue à partir des trois valeurs fondamentales :  $R$  la grandeur caractéristique de la nacelle,  $a_\infty$  la vitesse du son à l'infini et  $\rho_\infty$  la densité volumique de l'écoulement

porteur à l'infini :

$$\begin{cases} \vec{x}^* = \frac{\vec{x}}{R}, & \rho_0^* = \frac{\rho_0}{\rho_\infty}, & a_0^* = \frac{a_0}{a_\infty}, & \phi_0^* = \frac{R\phi_0}{a_\infty} \\ p_0^* = \frac{p_0}{\rho_\infty a_\infty^2}, & v_0^* = \frac{v_0}{a_\infty}, & q^* = \frac{q}{\rho_\infty a_\infty}, & M^* = M \end{cases} \quad (4.31)$$

Le seul invariant d'échelle est le nombre de Mach :  $M^* = M$ . Les conditions de bord sont des fonctions directes du nombre de Mach. Par abus de notation, l'indiciation \* est oubliée. Les équations de l'écoulement porteur (1.7), (1.8), (1.9) et (1.10) se réécrivent :

$$\begin{cases} a_0^2(\vec{x}) = \gamma \frac{p_0(\vec{x})}{\rho_0(\vec{x})} & , \forall \vec{x} \in \Omega \\ p_0(\vec{x}) = \frac{\rho_0(\vec{x})^\gamma}{\gamma} & , \forall \vec{x} \in \Omega \\ \rho_0(\vec{x}) = (a_0^2(\vec{x}))^{\frac{1}{\gamma-1}} & , \forall \vec{x} \in \Omega \\ a_0^2(\vec{x}) = 1 + \frac{\gamma-1}{2}(M_\infty^2 - |\vec{v}_0(\vec{x})|^2) & , \forall \vec{x} \in \Omega \\ \rho_0(\vec{x}) = (1 + \frac{\gamma-1}{2}(M_\infty^2 - |\vec{v}_0(\vec{x})|^2))^{\frac{1}{\gamma-1}} = F_\infty(|\vec{\nabla}\phi_0|^2) & , \forall \vec{x} \in \Omega \end{cases} \quad (4.32)$$

L'équation aux dérivées partielles vérifiées par le potentiel fluide dans  $\Omega$  :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(F_\infty(|\vec{\nabla}\phi_0|^2)\vec{\nabla}\phi_0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ F_\infty(|\vec{\nabla}\phi_0|^2)\frac{\partial\phi_0}{\partial n} = q & \text{dans } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.33)$$

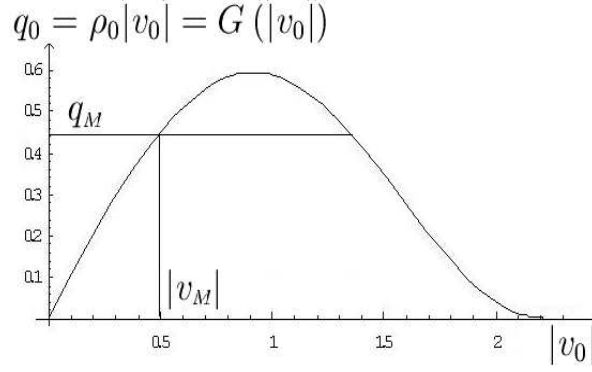
où l'on note  $q(\vec{x}) = \vec{M}_\infty \cdot \vec{n}(\vec{x})$ , si  $\vec{x} \in \Gamma_\infty$  ; 0, si  $\vec{x} \in \Gamma_R$  ;  $q_M(\vec{x})$ , si  $\vec{x} \in \Gamma_M$  ;  $q_{M'}(\vec{x})$ , si  $\vec{x} \in \Gamma_{M'}$ .

### Nombre de Mach et débit

Le débit est fonction directe du module de la vitesse :

$$q_0 = \rho_0|v_0| = G(|v_0|), \quad (4.34)$$

où  $G(x) = (1 + \frac{\gamma-1}{2}(M_\infty^2 - x^2))^{\frac{1}{\gamma-1}} x$ ,  $x \geq 0$ . Une étude de cette fonction montre que le débit croît avec la vitesse pour atteindre son apogée à une vitesse qui correspond à un nombre de Mach transsonique, puis décroît. Une valeur de  $q_0$  donnée dans l'image de la fonction  $G$  correspond à deux valeurs de vitesse, une subsonique et une supersonique. Le choix d'un modèle subsonique implique une bijection entre débit et nombre de Mach. Les paramètres physiques nécessaires à l'écoulement porteur se restreignent donc aux nombres de Mach à la nacelle et à l'infini.



Bijection débit-vitesse

### Résultats théoriques d'existence et d'unicité

La démarche suivie ici est une adaptation de l'article [14] de M.O. Bristeau, R. Glowinski, J. Periaux, P. Perrier, O. Pironneau et G. Poirier dans le cas du problème de Neumann pur (4.33) (les articles [18], [52] traitent également du même problème). Ce paragraphe prouve l'existence et l'unicité de (4.33) pour des flux imposés conservant le régime subsonique.

### Approche variationnelle

Le régime subsonique est défini par une borne pour la norme infinie de la vitesse :

$$\|\vec{\nabla} \phi_0\|_\infty < \sqrt{\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2\right)} = c_* \quad (4.35)$$

Une solution faible de l'équation (4.33) est cherchée variationnellement :

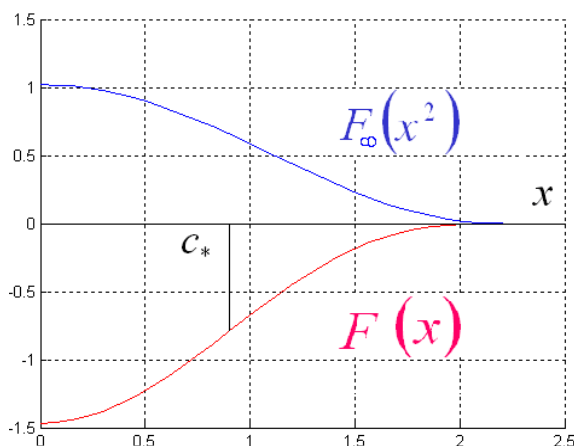
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi_0 \in H^1(\Omega)/\mathbb{R} \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} F_\infty(|\vec{\nabla} \phi_0|^2) \vec{\nabla} \phi_0 \vec{\nabla} \psi \, dx = \int_{\partial\Omega} q \psi \, d\gamma, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R} \end{array} \right. \quad (4.36)$$

Le problème de Neumann (4.33) définit le potentiel à une constante près et l'espace fonctionnel où l'on cherche la solution est quotienté par les constantes.

### Problème subsonique

$K_\delta = \left\{ v \in W^{1,\infty}(\Omega)/\mathbb{R}, \|\vec{\nabla} v\|_\infty \leq \delta < c_* \right\}$  est un convexe fermé non vide de l'espace  $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ .  $\Omega$  est un domaine borné à frontière régulière. Le théorème d'Ascoli (que l'on peut trouver dans le livre d'analyse fonctionnelle d'H. Brézis [15] ou encore [36]) prouve la fermeture. Les fonctions de  $K_\delta$  sont uniformément continues. Nous allons montrer que le problème (4.36) restreint à ce convexe admet toujours une unique solution.

Fonctionnelle associée



Fonctions  $F_\infty$  et  $F$

La fonction  $F : x \rightarrow -\frac{2}{\gamma} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} (M_\infty^2 - x^2) \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = - \int_{x^2}^{c_{max}^2} F_\infty(s) \, ds$  est convexe,

si  $x \in [0, c_*]$ ; concave, si  $x \in [c_*, x_{max}]$ ; strictement convexe, si  $x \in [0, c_*[$  et où l'on a noté  $c_{max}$  la vitesse à partir de laquelle la densité volumique n'est plus définie. Il vient  $F'(|v_0|) = 2|v_0|F_\infty(|v_0|)$ . La fonctionnelle  $J$  est définie sur  $K_\delta$  à l'aide de  $F$  :

$$J(\phi_0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} F(|\vec{\nabla} \phi_0|) \, dx \tag{4.37}$$

Définissons la fonctionnelle  $K$  par :

$$K(\phi_0) = J(\phi_0) - \int_{\partial\Omega} q\phi_0 \, d\gamma \tag{4.38}$$

Un résultat classique de minimisation convexe permet d'affirmer que le problème de minimisation de la fonctionnelle strictement convexe  $K$  sur le convexe fermé non vide  $K_\delta$  admet une unique solution  $\phi_0$ . Cette solution est l'unique fonction vérifiant l'inégalité variationnelle suivante (associée à l'ancienne condition d'Euler (4.36)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi_0 \in K_\delta \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} F_\infty(|\vec{\nabla} \phi_0|^2) \vec{\nabla} \phi_0 \vec{\nabla} (\psi - \phi_0) \, dx \geq \int_{\partial\Omega} q(\psi - \phi_0) \, d\gamma, \quad \forall \psi \in K_\delta \end{array} \right. \tag{4.39}$$

**Existence et unicité**

Le théorème suivant est une adaptation d'un théorème tiré de l'article [14].

Le problème initial (4.33) et le problème convexifié (4.39) sont équivalents en régime subsonique :

**Théorème 4.2.2.** *Supposons que le problème initial (4.33) admette une unique solution  $\phi_0 \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ , telle qu'il existe  $\delta_0 < c_*$  et  $\|\vec{\nabla}\phi_0\|_\infty \leq \delta_0 < c_*$ . Alors  $\phi_0$  est une solution du problème convexifié (4.39), pour tout  $\delta \in [\delta_0, c_*[$ . Réciproquement, si  $\phi_0$  est une solution du problème convexifié (4.39) pour un certain  $\delta < c_*$ , telle que l'on peut trouver  $\delta_0 < \delta$  et  $\|\vec{\nabla}\phi_0\|_\infty \leq \delta_0$  (la contrainte de convexité n'est pas saturée). Alors  $\phi_0$  est une solution du problème initial (4.33).*

Preuve du théorème 4.2.2 :

La première implication est triviale. Montrons la deuxième implication.  $\Omega$  est un domaine régulier et l'ensemble  $C^\infty(\overline{\Omega})$  des restrictions à  $\Omega$  des fonctions régulières à support compact dans  $\mathbb{R}^n$  est dense dans  $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe  $\delta_0 < \delta$  tel que l'unique solution  $\phi_0 \in K_\delta$  du problème convexifié (4.39) pour ce  $\delta$  vérifie  $\|\phi_0\|_\infty \leq \delta_0$ . Pour tout  $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ , on peut trouver un réel  $t > 0$  suffisamment petit tel que  $\phi_0 + tv \in K_\delta$ . En remplaçant  $\psi$  par  $\phi_0 + tv$  dans l'inégalité variationnelle :

$$\int_{\Omega} F_\infty(|\vec{\nabla}\phi_0|^2) \vec{\nabla}\phi_0 \vec{\nabla}(\psi - \phi_0) \, dx \geq \int_{\partial\Omega} q(\psi - \phi_0) \, d\gamma, \quad \forall \psi \in K_\delta,$$

il vient en divisant par  $t$  :

$$\int_{\Omega} F_\infty(|\vec{\nabla}\phi_0|^2) \vec{\nabla}\phi_0 \vec{\nabla}v \, dx \geq \int_{\partial\Omega} qv \, d\gamma, \quad \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

En raisonnant similairement avec  $-t$  :

$$\int_{\Omega} F_\infty(|\vec{\nabla}\phi_0|^2) \vec{\nabla}\phi_0 \vec{\nabla}v \, dx = \int_{\partial\Omega} qv \, d\gamma, \quad \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

On conclut par l'argument de la densité de  $C^\infty(\overline{\Omega})$  dans  $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ . Le problème subsonique admet toujours une unique solution et cette solution est celle du problème général si la contrainte de convexité n'est pas saturée. Le problème est que l'on ne peut connaître le régime *a priori*. Pratiquement on choisit  $\delta$  le plus proche possible de  $c_*$  et l'on joue sur les flux imposés pour ne pas saturer la contrainte de convexité.

### Ellipticité de la fonctionnelle

Nous prouvons ici un résultat d'ellipticité de la fonctionnelle  $K$  plus fort que sa stricte convexité et nécessaire au paragraphe suivant pour démontrer la convergence du point fixe.

#### Proposition 2.

La fonctionnelle  $K$  est elliptique sur  $K_\delta$  :

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall \phi_0 \in K_\delta, \quad \forall \psi \in K_\delta, \quad \vec{\nabla}^2 K(\phi_0)(\psi, \psi) \geq \alpha \|\psi\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}^2, \quad (4.40)$$

ce qui équivaut encore à :

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall \phi \in K_\delta, \quad \forall \psi \in K_\delta, \quad \langle \vec{\nabla} K(\phi) - \vec{\nabla} K(\psi), \phi - \psi \rangle \geq \alpha \|\phi - \psi\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}^2 \quad (4.41)$$



Preuve :

$J$  est une fonctionnelle deux fois continûment dérivable sur  $K_\delta$  :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} J(\phi_0)(\psi) &= \int_{\Omega} F_\infty(|\vec{\nabla} \phi_0|^2) \vec{\nabla} \phi_0 \vec{\nabla} \psi \, dx \\ \vec{\nabla}^2 J(\phi_0)(\psi, \xi) &= \int_{\Omega} 2F'_\infty(|\vec{\nabla} \phi_0|^2) \vec{\nabla} \phi_0 \cdot \vec{\nabla} \psi \vec{\nabla} \phi_0 \cdot \vec{\nabla} \xi \, dx + \int_{\Omega} F_\infty(|\vec{\nabla} \phi_0|^2) \vec{\nabla} \psi \vec{\nabla} \xi \, dx\end{aligned}\tag{4.42}$$

$J$  est strictement convexe sur  $K_\delta$ . L'inégalité de Cauchy-Schwartz implique :

$$\vec{\nabla}^2 J(\phi_0)(\psi, \psi) \geq \int_{\Omega} (F_\infty(|\vec{\nabla} \phi_0|^2) - 2\delta^2 |F'_\infty(|\vec{\nabla} \phi_0|^2)|) |\vec{\nabla} \psi|^2 \, dx,\tag{4.43}$$

où  $F_\infty(|\vec{\nabla} \phi_0|^2) - 2\delta^2 |F'_\infty(|\vec{\nabla} \phi_0|^2)| = \rho_0 \left(1 - \left(\frac{\delta}{a_0}\right)^2\right) > 0$  sur  $K_\delta$ , où  $\delta < c_*$  avec  $c_*$  la valeur du module de la vitesse correspond à un Mach transsonique égal à l'unité ( $\frac{\delta}{a_0} < 1$ ). La fonctionnelle  $J$  est elliptique :

$$\exists \alpha > 0, \vec{\nabla}^2 J(\phi_0)(\psi, \psi) \geq \alpha \|\psi\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}^2\tag{4.44}$$

La fonctionnelle  $K$  est deux fois continûment dérivable, strictement convexe et elliptique sur  $K_\delta$  :

$$\vec{\nabla} K(\phi_0)(\psi) = \vec{\nabla} J(\phi_0)(\psi) - \int_{\partial\Omega} q\psi \, d\gamma\tag{4.45}$$

$$\vec{\nabla}^2 K(\phi_0)(\psi, \psi) = \vec{\nabla}^2 J(\phi_0)(\psi, \psi) \geq \alpha \|\psi\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}^2\tag{4.46}$$

### Convergence du point fixe

Ce paragraphe propose une alternative à la résolution numérique par une méthode des moindres carrés proposée par l'article [14] en suivant un théorème de J. Nečas tiré de [49] prouvant la convergence d'un point fixe théorique vers la solution du problème convexifié.

On note  $B(\phi_0; \psi, \xi) = \int_{\Omega} F_\infty(|\vec{\nabla} \phi_0|^2) \vec{\nabla} \psi \vec{\nabla} \xi$ . Récapitulons les propriétés de  $B$  :

$$\exists C_1 > 0, \forall \phi_0 \in K_\delta, \forall (\psi, \xi) \in [H^1(\Omega)/\mathbb{R}]^2, B(\phi_0; \psi, \xi) \leq C_1 \|\psi\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \|\xi\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}\tag{4.47}$$

$$\exists C_2 > 0, \forall \phi_0 \in K_\delta, \forall \psi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}, B(\phi_0; \psi, \psi) \geq C_2 \|\psi\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}^2\tag{4.48}$$

$J : K_\delta \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonctionnelle définie par (4.37).  $J$  est Gâteaux-différentiable sur  $K_\delta$  et sa différentielle est un élément du dual  $[H^1(\Omega)/\mathbb{R}]^*$  donnée par :

$$\forall \phi_0 \in K_\delta, \vec{\nabla} J(\phi_0)(\psi) = B(\phi_0; \phi_0, \psi), \forall \psi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R},$$

La convexité de la fonctionnelle  $J$  équivaut à :

$$J(\psi) - J(\phi_0) \geq \vec{\nabla} J(\phi_0)(\psi - \phi_0) = B(\phi_0; \phi_0, \psi) - B(\phi_0; \phi_0, \phi_0), \quad \forall \phi_0, \psi \in K_\delta \quad (4.49)$$

L'ellipticité de la fonctionnelle  $J$  équivaut à :

$$\exists C_3 > 0, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}, \quad \phi_0 + \psi \in K_\delta, \quad \vec{\nabla} J(\phi_0 + \psi)(\psi) - \vec{\nabla} J(\phi_0)(\psi) \geq C_3 \|\psi\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}^2 \quad (4.50)$$

Ayant prouvé toutes les propriétés (4.47) et (4.48) pour  $B(\cdot; \cdot, \cdot)$  et les propriétés (4.49) et (4.50) pour  $J$ , on peut appliquer le théorème général tiré de [49] :

**Théorème 4.2.3 (Nečas).** *Pour tout  $\phi_0 \in K_\delta$ , la coercivité (4.48) de  $B(\phi_0; \cdot, \cdot)$  implique l'existence et l'unicité de la solution de :*

$$\forall \phi_0 \in K_\delta, \quad \exists ! \zeta = \zeta(\phi_0) \in K_\delta \text{ tel que : } \forall \psi \in K_\delta, \quad B(\phi_0; \zeta, \psi - \zeta) \geq \langle q, \psi - \zeta \rangle \quad (4.51)$$

La suite définie par  $\phi_0 \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$  et  $\phi_0^{n+1} = \zeta(\phi_0^n)$  converge vers l'unique solution de (4.39).

Preuve du théorème 4.2.3 :

Prouvons la propriété :

$$B(\phi_0; \zeta(\phi_0), \zeta(\phi_0)) - B(\phi_0; \phi_0, \phi_0) + 2J(\phi_0) - 2J(\zeta(\phi_0)) \geq 0 \quad (4.52)$$

L'unique solution  $\zeta \in K_\delta$  de (4.51) minimise la fonctionnelle  $\frac{1}{2}B(\phi_0; \cdot, \cdot) - \langle q, \cdot \rangle$  sur  $K_\delta$  :

$$\frac{1}{2}B(\phi_0; \zeta(\phi_0), \zeta(\phi_0)) - \langle q, \zeta(\phi_0) \rangle \leq B(\phi_0; \phi_0, \phi_0) - \langle q, \zeta(\phi_0) \rangle \quad (4.53)$$

L'unique solution  $\phi_0 \in K_\delta$  minimise la fonctionnelle  $J(\cdot) - \langle q, \cdot \rangle$  sur  $K_\delta$  :

$$J(\phi_0) - \langle q, \phi_0 \rangle \leq J(\zeta(\phi_0)) - \langle q, \zeta(\phi_0) \rangle \quad (4.54)$$

La sommation de (4.53) et (4.54) implique (4.52).  $L$  désigne la fonctionnelle suivante :

$$L(\phi_0) = J(\phi_0) - J(\zeta(\phi_0)) - \langle q, \phi_0 - \zeta(\phi_0) \rangle = K(\phi_0) - K(\zeta(\phi_0)) \quad (4.55)$$

Prouvons la propriété :

$$L(\phi_0) \geq \frac{C_2}{2} \|\phi_0 - \zeta(\phi_0)\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}^2 \quad (4.56)$$

Par bilinéarité de  $B(\phi_0; \cdot, \cdot)$ , il vient :

$$B(\phi_0; \zeta - \phi_0, \zeta - \phi_0) = B(\phi_0; \zeta, \zeta) - 2B(\phi_0; \zeta, \phi_0) + B(\phi_0; \phi_0, \phi_0)$$

$$B(\phi_0; \zeta - \phi_0, \zeta - \phi_0) \geq 2(J(\zeta) - J(\phi_0) + B(\phi_0; \zeta - \phi_0, \zeta - \phi_0) + B(\phi_0; \phi_0 - \zeta, \zeta))$$

$$B(\phi_0; \zeta - \phi_0, \zeta - \phi_0) \geq 2(J(\zeta) - J(\phi_0) + B(\phi_0; \zeta - \phi_0, \zeta - \phi_0) + \langle q, \phi_0 - \zeta \rangle)$$

$$B(\phi_0; \zeta - \phi_0, \zeta - \phi_0) \geq 2(-L(\phi_0) + B(\phi_0; \zeta - \phi_0, \zeta - \phi_0))$$

$$2L(\phi_0) \geq B(\phi_0; \zeta - \phi_0, \zeta - \phi_0) \geq C_2 \|\phi_0 - \zeta(\phi_0)\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}^2$$

Par définition de la suite  $(\phi_0^n)$  :

$$J(\phi_0^n) - J(\phi_0^{n+1}) - \langle q, \phi_0^n - \phi_0^{n+1} \rangle = L(\phi_0^n) \geq \frac{C_2}{2} \|\phi_0^n - \phi_0^{n+1}\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}^2 \geq 0 \quad (4.57)$$

La suite  $(K(\phi_0^n))_{n \in \mathbb{N}}$  est donc décroissante. Elle est minorée sur le convexe  $K_\delta$ . Elle est donc convergente et :

$$L(\phi_0^n) = K(\phi_0^n) - K(\phi_0^{n+1}) \rightarrow 0$$

Il suit d'après (4.57) :

$$\|\phi_0^n - \phi_0^{n+1}\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \rightarrow 0 \quad (4.58)$$

Montrons la propriété :

$$J(\phi_0^n) - J(\phi_0) \geq \vec{\nabla} J(\phi_0)(\phi_0^n - \phi_0) + \frac{C_3}{2} \|\phi_0^n - \phi_0\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}^2 \quad (4.59)$$

$$J(\phi_0^n) - J(\phi_0) = \int_0^1 \vec{\nabla} J(\phi_0 + t(\phi_0^n - \phi_0))(\phi_0^n - \phi_0) dt$$

$$J(\phi_0^n) - J(\phi_0) = \vec{\nabla} J(\phi_0)(\phi_0^n - \phi_0) + \int_0^1 \vec{\nabla} [J(\phi_0 + t(\phi_0^n - \phi_0)) - \vec{\nabla} J(\phi_0)](\phi_0^n - \phi_0) dt$$

En utilisant la propriété (4.50) :

$$J(\phi_0^n) - J(\phi_0) \geq \vec{\nabla} J(\phi_0)(\phi_0^n - \phi_0) + \int_0^1 C_3 t \|\phi_0^n - \phi_0\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}^2 dt$$

Il vient (4.59). En utilisant les propriétés de  $B$ , il vient :

$$\begin{aligned} C_3 \|\phi_0^n - \phi_0\|^2 &\leq \vec{\nabla} J(\phi_0^n)(\phi_0^n - \phi_0) - \vec{\nabla} J(\phi_0)(\phi_0^n - \phi_0) \\ &= B(\phi_0^n; \phi_0^n, \phi_0^n - \phi_0) - \vec{\nabla} J(\phi_0)(\phi_0^n - \phi_0) \\ &\leq B(\phi_0^n; \phi_0^n, \phi_0^n - \phi_0) - \langle q, \phi_0^n - \phi_0 \rangle \\ &= B(\phi_0^n; \phi_0^n - \phi_0^{n+1}, \phi_0^n - \phi_0) + B(\phi_0^n, \phi_0^{n+1}, \phi_0^n - \phi_0) - \langle q, \phi_0^n - \phi_0 \rangle \\ &= B(\phi_0^n, \phi_0^n - \phi_0^{n+1}, \phi_0^n - \phi_0) + B(\phi_0^n, \phi_0^{n+1}, \phi_0^{n+1} - \phi_0) \\ &\quad + B(\phi_0^n, \phi_0^{n+1}, \phi_0^n - \phi_0^{n+1}) - \langle q, \phi_0^{n+1} - \phi_0 \rangle + \langle q, \phi_0^{n+1} - \phi_0^n \rangle \end{aligned}$$

Finalement, par la définition (4.51) de la suite  $\phi_0^{n+1} = \zeta(\phi_0^n)$ , il vient :

$$C_3 \|\phi_0 - \phi_0^n\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}^2 \leq B(\phi_0^n; \phi_0^n - \phi_0^{n+1}, \phi_0^n - \phi_0) + B(\phi_0^n, \phi_0^{n+1}, \phi_0^n - \phi_0^{n+1}) + \langle q, \phi_0^{n+1} - \phi_0^n \rangle,$$

ce qui prouve la convergence forte de la suite.

### Formulation axisymétrique

Les domaines considérés sont maintenant bidimensionnels : ce sont les domaines de coupe transverses, qui sont notés par abus de notation comme les précédents domaines tridimensionnels.

Les conditions de flux de bord sont supposées indépendantes de  $\theta$  : l'écoulement cherché est à symétrie axiale.

Le potentiel  $\phi_0$  de l'écoulement porteur est solution de l'équation aux dérivées partielles en coordonnées cylindriques dans le plan transverse :

$$\begin{cases} |\vec{\nabla} \phi_0(x, y, z)|^2 = \left| \frac{\partial \phi_0}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{\partial \phi_0}{\partial z} \right|^2 & , \forall (r, z) \in \Omega \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r F_\infty(|\vec{\nabla} \phi_0|^2) \frac{\partial \phi_0}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( F_\infty(|\vec{\nabla} \phi_0|^2) \frac{\partial \phi_0}{\partial z} \right) = 0 & , \forall (r, z) \in \Omega \\ \rho_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial n} = q & , \forall (r, z) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (4.60)$$

La formulation variationnelle axisymétrique du point fixe théorique s'écrit :

$$\begin{cases} \phi_0^0 = 0 \\ \text{Trouver } \phi_0^{n+1} \in K_\delta \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} F_\infty(|\vec{\nabla} \phi_0^n|^2) \vec{\nabla} \phi_0^{n+1} \vec{\nabla} \psi \, r dr dz = \int_{\partial\Omega} q \psi \, r d\gamma, \forall \psi \in K_\delta \end{cases} \quad (4.61)$$

où  $\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial r} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right)$  désigne le gradient cartésien en  $(r, z)$ . Les espaces de Sobolev classiques  $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$  de  $K(\delta)$  sont remplacés par les espaces de Sobolev à poids axisymétriques transverses pour le mode azimutal  $m = 0$  :  $H_{a0}^1(\Omega)/\mathbb{R}$  (4.19).

### Détails de l'implémentation numérique

Le problème convexifié (4.39) admet toujours une unique solution obtenue comme limite de la suite  $(\phi_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Le potentiel  $\phi_0^n$  de l'écoulement porteur est approché par des éléments finis classiques  $H^1$ -conformes, continus et  $P^1$  par élément. La densité est constante par élément et sa valeur à l'étape  $k+1$  est obtenue à partir des valeurs du potentiel à l'étape  $k$ .

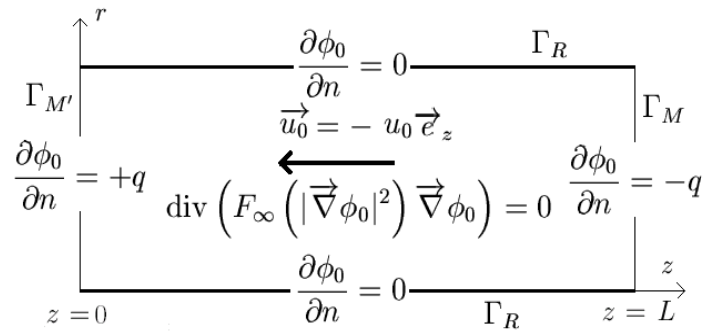
$\phi_0^0$  est choisi nul : le potentiel est initialisé à zéro. Le potentiel convergé est obtenu à la limite d'un point fixe numérique, lorsque la variation entre deux itérations successives de la norme infinie du potentiel est inférieur à un seuil  $\epsilon$  fixé.

La saturation de la contrainte de convexité se traduit par l'atteinte ou le dépassement de  $c_*$  par le module de la vitesse au niveau d'un élément et d'une itération. Il suffit de tester la norme de la vitesse sur chaque élément à chaque itération et d'arrêter le calcul dès qu'il y a saturation. On choisit alors des flux entrants plus faibles afin de garantir le régime subsonique non saturé.

L'implémentation du code de calcul est parallélisée *via* l'utilisation d'un logiciel

d'algèbre linéaire parallèle MPF développé à EADS-CCR. Une nouvelle matrice est assemblée à chaque itération. Ces matrices sont creuses et symétriques et la résolution du système linéaire utilise le serveur creux parallèle MUMPS du CERFACS. Seules les données du potentiel à tous les sommets à l'étape précédente sont communes à tous les processeurs pour palier au cas d'un élément dont les degrés de liberté se trouvent dans deux blocs disjoints.

**Cas-Test**



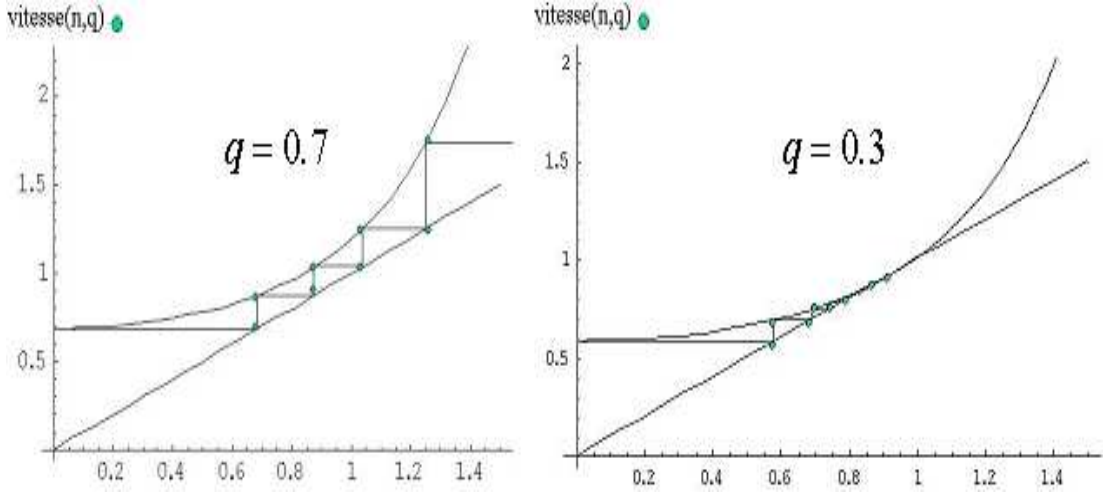
Cas-Test

On propose le cas-test axisymétrique suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left( F_\infty \left( |\vec{\nabla} \phi_0|^2 \right) \vec{\nabla} \phi_0 \right) = 0 & \forall x \in \Omega \\ \frac{\partial \phi_0}{\partial n} = 0 & \forall x \in \Gamma_R \\ \frac{\partial \phi_0}{\partial n} = -q & \forall x \in \Gamma_M \\ \frac{\partial \phi_0}{\partial n} = +q & \forall x \in \Gamma_{M'} \end{cases} \quad (4.62)$$

La vitesse théorique à l'étape  $k + 1$  s'obtient par récurrence :

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{k+1} = \frac{q}{F_\infty(v_k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (4.63)$$



Débit et convergence du point fixe

Comme le montrent les schémas précédents, la suite théorique (4.63) converge pour des débits  $q$  tels que la fonction définie par  $v_{k+1} = f_q(v_k)$  admette un point fixe, ce qui correspond exactement au régime subsonique. Ces schémas ont pour mérite d'explicitier la façon dont converge l'algorithme de point fixe. La convergence du schéma de point fixe est d'autant plus rapide que les débits imposés sont petits et inversement. Le schéma diverge dès que l'on atteint un débit correspondant à un régime transsonique.

## 4.2.2 Acoustique potentielle

### Equation aux dérivées partielles du potentiel acoustique

Les domaines considérés ici sont tridimensionnels et cartésiens.

L'équation aux dérivées partielles d'ordre 2 à coefficients variables du potentiel acoustique découle immédiatement des équations (1.13), (1.14), (1.15) et (1.16) :

$$\operatorname{div} \left( \rho_0 \left( I - \overline{M}_0 \cdot {}^t \overline{M}_0 \right) \overline{\nabla} \phi_a \right) + \rho_0 k_0^2 \phi_a + ik_0 \rho_0 \overline{M}_0 \cdot \overline{\nabla} \phi_a + \operatorname{div} \left( ik_0 \rho_0 \phi_a \overline{M}_0 \right) = 0, \quad (4.64)$$

où  $k_0 = \frac{\omega}{a_0}$  est le nombre d'ondes modulé par l'écoulement et  $\overline{M}_0 = \frac{\vec{u}_0}{a_0}$  est le nombre de Mach vectoriel. L'équation aux dérivées partielles (4.64) est elliptique en régime subsonique. On note  $A_0$  l'opérateur différentiel elliptique associé :

$$A_0(\phi_a) = 0, \quad (4.65)$$

et l'on note  $\frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A_0}} = \rho_0 \frac{\partial \phi_a}{\partial n} - \left( -ik_0 \phi_a + \overline{M}_0 \cdot \overline{\nabla} \phi_a \right) \rho_0 \overline{M}_0 \cdot \vec{n}$  la dérivée conormale de bord associé à l'opérateur  $A_0$ .

### Conditions de bords

- Sur les parois non traitées, les ondes acoustiques se réfléchissent totalement :

$$\frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A_0}} = 0, \quad \forall x \in \Gamma_R \quad (4.66)$$

- Au niveau de la surface fictive  $\Gamma_M$  du moteur, l'écoulement est uniforme. Le moteur est assimilé à un conduit uniforme infini, d'où provient la source sonore à diffracter sous forme de modes incidents. La démarche est identique à la partie sans écoulement (3.1.2) et détaillée précisément dans le paragraphe (4.2.3) (une condition d'onde sortante au potentiel acoustique diffracté  $\phi_a - \phi_{a,inc}$  sous la forme d'une condition de Sommerfeld ou d'un opérateur Dirichlet-Neumann est imposée) :

$$\phi_a - \phi_{a,inc} \text{ est réfléchi dans le guide d'ondes} \quad (4.67)$$

- A l'infini, l'écoulement porteur est uniforme. Il faut imposer une condition de type Sommerfeld sélectionnant les ondes sortantes pour le potentiel acoustique total à l'infini. L'obtention de cette condition est détaillée dans la sous-section (4.2.4) (elle est obtenue à partir de la classique condition de Sommerfeld pour l'équation de Helmholtz (3.24) que l'on a appliquée au potentiel acoustique transformé par Lorentz (3.6), (3.7)) et ramenée à l'espace physique). Cette condition est toujours désignée par abus de notation comme la condition de Sommerfeld.

### Adimensionnement

Chaque variable physique acoustique est adimensionnée par la valeur homogène correspondante obtenue à partir des trois valeurs fondamentales :  $R$  la grandeur caractéristique de la nacelle,  $a_\infty$  la vitesse du son à l'infini et  $\rho_\infty$  la densité volumique de l'écoulement porteur à l'infini :

$$\omega^* = \frac{R}{a_\infty} \omega, \quad t^* = \frac{a_\infty}{R} t, \quad \vec{x}^* = \frac{\vec{x}}{R}, \quad \phi_a^* = \frac{\phi_a}{Ra_\infty}, \quad \rho_a^* = \frac{\rho_a}{\rho_\infty}, \quad p_a^* = \frac{Rp_a}{\rho_\infty a_\infty^2} \quad (4.68)$$

Par abus de notation, l'indice \* des paramètres adimensionnés est oublié. L'unique invariant d'échelle est le nombre de Mach.

### Problème acoustique complet

Le problème acoustique complet s'écrit dans le domaine cartésien  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_i}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi_a \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_i}) \\ A_0(\phi_a) = 0, \\ \frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A_0}} = 0, \\ \phi_a - \phi_{a,inc} \text{ est réfléchi dans le guide d'ondes} \\ \phi_a \text{ vérifie la condition de Sommerfeld à l'infini} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_i} \\ \forall \vec{x} \in \Gamma_R \end{array}, \quad (4.69)$$

### Formulation axisymétrique

Les domaines considérés sont maintenant bidimensionnels : ce sont les domaines de coupe transverses, qui sont notés par abus de notation comme les précédents domaines tridimensionnels.

L'axisymétrie de la nacelle permet de décomposer  $\phi_a$  en modes azimutaux de Fourier :

$$\phi_a(r, z, \theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \phi_{am}(r, z) e^{im\theta}, \quad \forall (r, z, \theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_i} \times [0, 2\pi] \quad (4.70)$$

Le mode azimutal  $m$  du potentiel acoustique est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante dans le domaine transverse bidimensionnelle  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_i}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \rho_0 \frac{\partial \phi_{am}}{\partial r} \right) - \frac{m^2 \rho_0}{r^2} \phi_{am} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho_0 \frac{\partial \phi_{am}}{\partial z} \right) + k_0^2 \rho_0 \phi_{am} \\ + ik_0 \rho_0 \left( M_{0r} \cdot \frac{\partial \phi_{am}}{\partial r} + M_{0z} \cdot \frac{\partial \phi_{am}}{\partial z} \right) \\ - \frac{1}{r} \left( \rho_0 M_{0r} (-ik_0 \phi_{am} + M_{0r} \cdot \frac{\partial \phi_{am}}{\partial r} + M_{0z} \cdot \frac{\partial \phi_{am}}{\partial z}) \right) \\ - \frac{\partial}{\partial r} \left( \rho_0 M_{0r} (-ik_0 \phi_{am} + M_{0r} \cdot \frac{\partial \phi_{am}}{\partial r} + M_{0z} \cdot \frac{\partial \phi_{am}}{\partial z}) \right) \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho_0 M_{0z} (-ik_0 \phi_{am} + M_{0r} \cdot \frac{\partial \phi_{am}}{\partial r} + M_{0z} \cdot \frac{\partial \phi_{am}}{\partial z}) \right) = 0, \quad \forall (r, z) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_i} \\ \frac{\partial \phi_{am}}{\partial n_{A_{0m}}} = 0, \quad \forall (r, z) \in \Gamma_R \\ \phi_{am} - \phi_{am,inc} \text{ est réfléchi dans le guide d'ondes} \\ \phi_{am} \text{ vérifie la condition de Sommerfeld à l'infini} \end{array} \right. , \quad (4.71)$$

que l'on note à l'aide de l'opérateur volumique elliptique :  $A_{0m}(\phi_{am}) = 0$ .

#### Remarque 4.2.4.

- Les modes acoustiques azimutaux sont découplés. Le problème tridimensionnel se décompose en un nombre dénombrable de problèmes axisymétriques.
- L'écoulement porteur stationnaire est axisymétrique et le nombre de Mach vectoriel n'a pas de composante angulaire :  $\vec{M}_0 = M_{0r} \vec{e}_r + M_{0z} \vec{e}_z$ .
- L'équation (4.71) en présence d'un écoulement potentiel quelconque non axisymétrique (avec une composante angulaire) possède des termes supplémentaires. De plus, les modes acoustiques azimutaux de Fourier sont couplés par la non-axisymétrie de l'écoulement porteur.

### 4.2.3 Couplage modes-volume

#### Opérateur Dirichlet-Neumann

Les domaines considérés ici sont des domaines transverses bidimensionnels.

Le problème considéré est le problème acoustique vérifié par le mode azimutal  $m$  du



potentiel acoustique.

Ce paragraphe détaille l'obtention de l'opérateur Dirichlet-Neumann pour un guide d'ondes cylindrique en écoulement, qui permet de formuler un problème acoustique équivalent en domaine modal borné dans l'optique d'une formulation variationnelle et d'un traitement numérique.

La démonstration de ces résultats est connue et peut être trouvée dans la thèse de L. Dahi [27] (ou encore l'article [12]). Ces références étudient la perturbation des modes de conduit en écoulement uniforme par la présence d'une plaque et de son sillage de vorticité. Le traitement numérique du problème nécessite l'introduction d'un problème équivalent en domaine borné à l'aide d'un opérateur Dirichlet-Neumann en écoulement.

Le moteur est modélisé comme un guide d'ondes cylindrique infini. La source acoustique du moteur est une somme *a priori* infinie dénombrable de modes incidents portés par le mode azimutal  $m$  :

$$\phi_{am,inc} \text{ incident} \Leftrightarrow \phi_{am,inc} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \phi_{am,inc}, \Xi_{rmn} \rangle_{L^2(\Gamma_M)} \Xi_{rmn}(r) e^{i\beta_{mn}^+ z} \quad (4.72)$$

Les coefficients modaux incidents  $a_{mn}^+ = \langle \phi_{am,inc}, \Xi_{rmn} \rangle_{L^2(\Gamma_M)}$  sont les données du problème. L'opérateur Dirichlet-Neumann modal  $T_{Mm}$  se définit à l'aide des constantes  $\mu_{mn}^\pm$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall k_{rmn} \leq \left[ \frac{k_M}{\sqrt{1 - M_M^2}} \right], \\ \forall k_{rmn} > \left[ \frac{k_M}{\sqrt{1 - M_M^2}} \right], \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \mu_{mn}^+ = -\rho_M i \sqrt{k_M^2 - (1 - M_M^2) k_{rmn}^2} \\ \mu_{mn}^- = +\rho_M i \sqrt{k_M^2 - (1 - M_M^2) k_{rmn}^2} \\ \mu_{mn}^+ = +\rho_M \sqrt{(1 - M_M^2) k_{rmn}^2 - k_M^2} \\ \mu_{mn}^- = -\rho_M \sqrt{(1 - M_M^2) k_{rmn}^2 - k_M^2} \end{array} \right. , \quad (4.73)$$

que l'on peut définir sous la forme synthétique  $\mu_{mn}^\pm = \rho_M (M_M^2 - 1) i \beta_{mn}^\pm + \rho_M i k_M M_M$  à l'aide des constantes propagatives axiales  $\beta_{mn}^\pm$  définies en (2.6). L'opérateur Dirichlet-Neumann modal  $T_{Mm}$  s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{Mm} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_M) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_M) \\ \phi_{am} \rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_{mn}^- \langle \phi_{am}, \Xi_{rmn}(r) \rangle_{L^2(\Gamma_M)} \Xi_{rmn}(r) \end{array} \right. \quad (4.74)$$

Le problème vérifié par le potentiel acoustique total au mode azimutal  $m$   $\phi_{am} = \phi_{am,inc} + \phi_{am,diff}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi_{am} \in H_{am,loc}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_i}) \\ A_{0m}(\phi_{am}) = 0, \\ \frac{\partial \phi_{am}}{\partial n_{A_{0m}}} = 0, \\ \phi_{am} - \phi_{am,inc} \text{ est réfléchi dans le guide d'ondes} \\ \phi_{am} \text{ vérifie la condition de Sommerfeld à l'infini} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_i} \\ \text{sur } \Gamma_R \end{array} \quad (4.75)$$

est équivalent au problème en domaine modal borné :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi_{am} \in H_{am,loc}^1((\bar{\Omega} \cup \Omega_e) \setminus (\Gamma_R \cup \Gamma_M)) \\ A_{0m}(\phi_{am}) = 0, \quad \text{dans } (\bar{\Omega} \cup \Omega_e) \setminus (\Gamma_R \cup \Gamma_M) \\ \frac{\partial \phi_{am}}{\partial n_{A_{0m}}} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_R \\ \frac{\partial(\phi_{am} - \phi_{am,inc})}{\partial n_{A_{0m}}} = T_{Mm}(\phi_{am} - \phi_{am,inc}), \quad \text{sur } \Gamma_M \\ \phi_{am} \text{ vérifie la condition de Sommerfeld à l'infini} \end{array} \right. , \quad (4.76)$$

où  $\frac{\partial}{\partial n_{A_{0m}}}$  est la dérivée conormale associée à l'opérateur elliptique  $A_{0m}$  et  $H_{am,loc}^1$  désigne l'espace de Sobolev à poids défini par (4.19).

### Formulation variationnelle au moteur

Le problème azimutal pour le potentiel acoustique (4.76) se formule variationnellement. Nous supposons ici le domaine borné :  $\Omega_e = \emptyset$  par commodité pour ne pas compliquer inutilement le problème avec les termes de bord à l'infini qui ne correspondent pas à ce paragraphe et seront explicités dans le paragraphe (4.3.2). Les espaces fonctionnels se définissent à l'aide des espaces de Sobolev à poids (4.18) et (4.19) :

$$H_{am-mod}^1(\Omega) = \left\{ \phi_{am} \in H_{am}^1(\Omega), \text{ tel que } [\phi_{am}]_{\Gamma_M} = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^+ \Xi_{rmn}(r, z) + \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^- \Xi_{rmn}(r, z) \right\} \quad (4.77)$$

On note  $H_{am-\Gamma_M}^1(\Omega)$  l'espace fonctionnel  $H_{am}^1(\Omega)$ , dont les éléments ont une trace nulle sur la surface modale  $\Gamma_M$ . La formulation variationnelle du problème continu (4.76) s'écrit à l'aide d'un relèvement de la condition de Dirichlet modale (ce relèvement s'interprète numériquement en une fonction nulle sur tous les degrés de liberté intérieurs du domaine et égale à  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^+ \Xi_{rmn}(r, \theta) + \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^- \Xi_{rmn}(r, \theta)$  sur les degrés de liberté modaux). Ce relèvement est noté abusivement  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^+ \Xi_{rmn}(r, \theta) + \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^- \Xi_{rmn}(r, \theta)$ . Le problème (4.76) se formule variationnellement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Etant donné } (a_{mn}^+)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \\ \text{Trouver } \phi_{am} \in H_{am-\Gamma_M}^1(\Omega) \text{ et } (a_{mn}^-)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \text{ tel que :} \\ a_{0m}(\phi_{am}, \psi_m) + \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^- a_{0m}(\Xi_{rmn}, \psi_m) - \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^- \mu_{mn}^- \int_{\Gamma_M} \Xi_{rmn} \overline{\psi_m} \\ = - \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^+ a_{0m}(\Xi_{rmn}, \psi_m) + \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^+ \mu_{mn}^+ \int_{\Gamma_M} \Xi_{rmn} \overline{\psi_m} \\ \forall \psi_m \in H_{am-mod}^1(\Omega) \end{array} \right. , \quad (4.78)$$

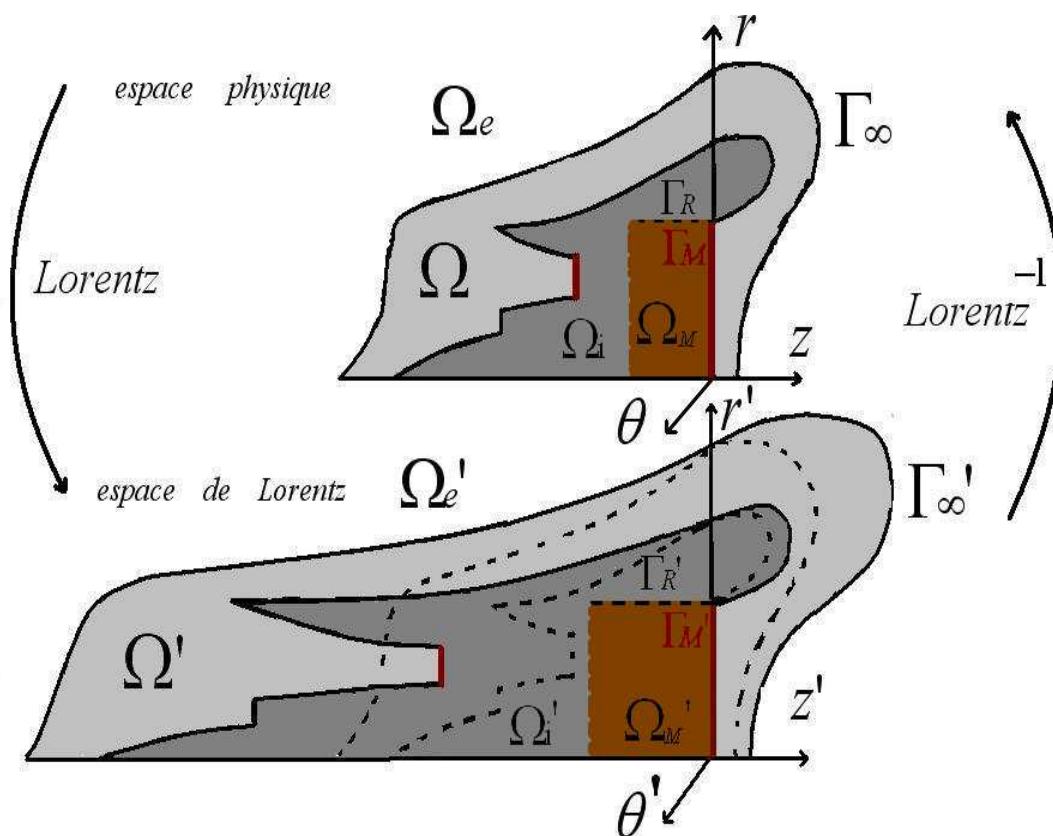
où  $a_{0m}(\cdot, \cdot)$  désigne la forme hermitienne associée à l'opérateur volumique  $A_{0m}$  définie en (4.71) :

$$\begin{aligned}
 a_{0m}(\phi_{am}, \psi_m) = & \int_{\Omega} \rho_0 \vec{\nabla} \phi_{am} \vec{\nabla} \overline{\psi_m} r dr dz + m^2 \int_{\Omega} \rho_0 \frac{1}{r} \phi_{am} \overline{\psi_m} dr dz \\
 & - \int_{\Omega} \rho_0 k_0^2 \phi_{am} \overline{\psi_m} r dr dz - \int_{\Omega} \rho_0 \vec{M}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_{am} \vec{M}_0 \cdot \vec{\nabla} \overline{\psi_m} r dr dz \\
 & + \int_{\Omega} \rho_0 i k_0 (\vec{M}_0 \cdot \vec{\nabla} \overline{\psi_m} \phi_{am} - \vec{M}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_{am} \overline{\psi_m}) r dr dz
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

Les  $a_{mn}^-$  sont les inconnues modales du système et sont placées dans le membre de gauche. Les  $a_{mn}^+$  sont les sources connues du système et sont placées dans le membre de droite.

### 4.2.4 Existence et unicité

#### Problématique



Transformée de Lorentz et géométrie

Les domaines considérés sont les domaines tridimensionnels et cartésiens  $(x, y, z)$ . Néanmoins, les démonstrations d'existence et d'unicité du problème acoustique com-

plet sont rédigées dans un espace cartésien bidimensionnel (l'axe  $x$  correspond à l'axe de propagation  $z$  et l'axe  $y$  correspond aux axes  $(r, \theta)$ ) par souci de simplicité étant donnée la taille des équations à trois dimensions. Les démonstrations sont totalement similaires dans un espace tridimensionnel et les principaux résultats du paragraphe suivant sont explicités ultérieurement dans le paragraphe (4.2.4) en coordonnées cylindriques.

La transformée de Lorentz est appliquée à tout l'espace  $\mathbb{R}^3 = \overline{\Omega_i \cup \Omega_M \cup \Omega \cup \Omega_e}$ . Par abus de notation, les nouvelles variables physiques et les nouveaux domaines transformés sont notés comme les anciennes variables et anciens domaines.

Ce paragraphe prouve l'existence et l'unicité de la solution du problème acoustique complet.

### Unicité et condition de rayonnement

On note  $A_L(\phi_a)$  l'opérateur volumique défini par l'équation aux dérivées partielles suivante dans  $(\overline{\Omega \cup \Omega_e}) \setminus (\Gamma_R \cup \Gamma_M)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1 - M_\infty^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_0 \frac{\partial \phi_a}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho_0 \frac{\partial \phi_a}{\partial y} \right) \\ - \frac{1}{1 - M_\infty^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_0 M_{0x}^2 \frac{\partial \phi_a}{\partial x} \right) - \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_0 M_{0x} M_{0y} \frac{\partial \phi_a}{\partial y} \right) \\ - \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho_0 M_{0x} M_{0y} \frac{\partial \phi_a}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho_0 M_{0y}^2 \frac{\partial \phi_a}{\partial y} \right) \\ + \rho_0 \left( \frac{ik_\infty M_\infty}{(1 - M_\infty^2)^{\frac{3}{2}}} (1 - M_{0x}^2) + \frac{ik_0 M_{0x}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \right) \frac{\partial \phi_a}{\partial x} \\ + \rho_0 \left( ik_0 M_{0y} - \frac{ik_\infty M_\infty M_{0x} M_{0y}}{(1 - M_\infty^2)} \right) \frac{\partial \phi_a}{\partial y} + \frac{ik_\infty M_\infty}{(1 - M_\infty^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} (\rho_0 \phi_a) \\ + \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{\partial}{\partial x} (\rho_0 ik_0 M_{0x} \phi_a) - \frac{ik_\infty M_\infty}{(1 - M_\infty^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} (\rho_0 M_{0x}^2 \phi_a) \\ + \frac{\partial}{\partial y} (\rho_0 ik_0 M_{0y} \phi_a) - \frac{ik_\infty M_\infty}{1 - M_\infty^2} \frac{\partial}{\partial y} (\rho_0 M_{0x} M_{0y} \phi_a) \\ + \rho_0 \left( \frac{-k_\infty^2 M_\infty^2}{(1 - M_\infty^2)^2} (1 - M_{0x}^2) + k_0^2 - \frac{2k_0 k_\infty M_{0x} M_\infty}{(1 - M_\infty^2)} \right) \phi_a = 0, \end{array} \right. \quad (4.80)$$

La dérivée conormale de l'opérateur elliptique  $A_L$  est notée  $\frac{\partial}{\partial n_{A_L}}$ .

$T_{LM}$  désigne l'opérateur Dirichlet-Neumann transformé dans l'espace de Lorentz, qui s'obtient en appliquant la transformation de Lorentz à l'opérateur Dirichlet-Neumann (4.74) permettant de borner le domaine modal du problème continu non transformé (4.76) :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{LM} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_M) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_M) \\ \phi_a \rightarrow \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}} \mu_{mn}^- \langle \phi_a, \Xi_{rmn} \rangle_{L^2(\Gamma_M)} \Xi_{rmn} \end{array} \right. \quad (4.81)$$

Le caractère incident ou réfléchi d'un mode dans l'espace de Lorentz dépend du caractère de son image par la transformée de Lorentz inverse :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{a,inc} = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}} \langle \phi_{a,inc}, \Xi_{rmn} \rangle_{L^2(\Gamma_M)} e^{i\gamma_{mn}^+ x} \Xi_{rmn}(y) \\ \phi_a - \phi_{a,inc} = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}} \langle \phi_a - \phi_{a,inc}, \Xi_{rmn} \rangle_{L^2(\Gamma_M)} e^{i\gamma_{mn}^- x} \Xi_{rmn}(y) \end{array} \right. , \forall (x, y) \in \Gamma_M \quad (4.82)$$

où l'on a noté :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{mn}^\pm = -k'_\infty M_\infty + \sqrt{1 - M_\infty^2} \beta_{mn}^\pm, \\ \mu_{mn}^\pm = i\rho_M (k_M M_M - (1 - M_M^2) \beta_{mn}^\pm), \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{les constantes propagatives axiales} \\ \text{les coefficients de l'opérateur } T_{LM} \end{array} \quad (4.83)$$

avec  $k'_\infty = \frac{k_\infty}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$ .

Si le Mach moteur égale le Mach infini, la transformation de Lorentz annule simplement l'écoulement et l'on retombe sur le classique opérateur Dirichlet-Neumann d'un guide d'ondes.

L'opérateur Dirichlet-Neumann est écrit pour un guide d'ondes à trois dimensions par abus de notation : son expression bidimensionnelle est conceptuellement identique (seules les fonctions de Bessel radiales sont remplacées par la classique base de Fourier  $L^2$  en cosinus d'un segment. Les constantes propagatives axiales et les coefficients de l'opérateur  $T_{LM}$  restent conceptuellement identiques.

**Théorème 4.2.5.**

- *Le potentiel acoustique transformé dans l'espace de Lorentz cartésien bidimensionnel  $(\Omega \cup \Omega_e) \setminus (\Gamma_R \cup \Gamma_M)$  vérifie l'équation aux dérivées partielles elliptique  $A_L(\phi_a) = 0$ .*
- *Les conditions aux limites du potentiel transformé et de l'écoulement transformé s'écrivent :*

1. 
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} M_{0x} \vec{n} \cdot \vec{e}_x + M_{0y} \vec{n} \cdot \vec{e}_y = 0, \quad \forall x \in \Gamma_R \\ \frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A_L}} = 0, \quad \forall x \in \Gamma_R \end{array} \right. \quad (4.84)$$

2. 
$$\frac{\partial (\phi_a - \phi_{a,inc})}{\partial n_{A_L}} = T_{LM} (\phi_a - \phi_{a,inc}), \quad \forall x \in \Gamma_M, \quad (4.85)$$

- *L'équation aux dérivées partielles (4.80) est équivalente à l'équation de Helmholtz, là où l'écoulement est uniforme.*

$$\frac{\partial^2 \phi_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_a}{\partial y^2} + (k'_\infty)^2 \phi_a = 0, \quad (4.86)$$

- *Le potentiel transformé vérifiant  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial \phi_a}{\partial n} - ik'_\infty \phi_a \right|^2 d\gamma = 0$  est unique. Cette*

condition est la condition classique de Sommerfeld appliquée au potentiel acoustique transformé, où  $S_R$  (resp.  $B_R$ ) désigne la sphère (resp. la boule) de rayon  $R$  et d'origine nulle avec  $R$  choisi de telle sorte que  $\Gamma_\infty \subset B_R$ .

Preuve du théorème 4.2.5 :

Le difféomorphisme  $C^\infty$  de la transformée de Lorentz avec les paramètres de l'écoulement constant à l'infini (3.6) est appliqué dans tout le domaine extérieur  $\mathbb{R}^3 = \overline{\Omega_i \cup \Omega_M \cup \Omega \cup \Omega_e}$  à l'équation aux dérivées partielles cartésienne bidimensionnelle du potentiel acoustique (4.64). Le changement d'inconnue conduit à l'équation aux dérivées partielles (4.80) pour le nouveau potentiel acoustique. Les nouvelles conditions de bord s'obtiennent de la même façon. La nullité de la dérivée conormale dans l'espace physique est conservée par la transformation de Lorentz : (4.84). La transformée de Lorentz appliquée à l'opérateur différentiel de bord modal (4.74) donne l'équation (4.85).

L'ellipticité de l'opérateur  $A_L$  s'obtient en écrivant la partie principale de l'opérateur  $A_L$  sous forme conservative :

$$\operatorname{div}(A(x, y) \nabla \phi_a(x, y)) \text{ avec } A(x, y) = \rho_0 \begin{pmatrix} \frac{1 - M_{0x}^2}{1 - M_\infty^2} & \frac{M_{0x} M_{0y}}{1 - M_\infty^2} \\ \frac{M_{0x} M_{0y}}{1 - M_\infty^2} & 1 - M_{0y}^2 \end{pmatrix} \quad (4.87)$$

$$\langle A(x, y)X, X \rangle = \rho_0 \begin{pmatrix} \frac{X_1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} & X_2 \end{pmatrix} (I - {}^t \vec{M}_0 \vec{M}_0) \begin{pmatrix} \frac{X_1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \\ X_2 \end{pmatrix}$$

$$\langle A(x, y)X, X \rangle \geq \rho_0 (1 - |\vec{M}_0|^2) \left| \begin{pmatrix} \frac{X_1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \\ X_2 \end{pmatrix} \right|^2 > C(\rho_0, M_0, \Omega) \left| \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \right|^2$$

L'inégalité d'ellipticité de l'équation aux dérivées partielles (4.80) s'écrit :

$$\forall (x, y) \in \Omega, \forall X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \langle A(\vec{x})X, X \rangle \geq C(\rho_0, M_0, \Omega) \left| \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \right|^2 \quad (4.88)$$

La preuve de (4.86) s'obtient en remplaçant l'écoulement variable  $\rho_0$ ,  $k_0$  et  $\vec{M}_0$  par ses valeurs à l'infini.

On note  $a_L(\cdot, \cdot)$  la forme sesquilinéaire volumique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 a_L(\phi_a, \psi) = \int_{\Omega} \rho_0 \left( \frac{1 - M_{0x}^2}{(1 - M_{\infty}^2)^2} \right) \frac{\partial \phi_a}{\partial x} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} + \int_{\Omega} \rho_0 (1 - M_{0y}^2) \frac{\partial \phi_a}{\partial y} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \\
 - \frac{1}{\sqrt{1 - M_{\infty}^2}} \int_{\Omega} \rho_0 M_{0x} M_{0y} \frac{\partial \phi_a}{\partial y} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} - \frac{1}{\sqrt{1 - M_{\infty}^2}} \int_{\Omega} \rho_0 M_{0x} M_{0y} \frac{\partial \phi_a}{\partial x} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \\
 - \int_{\Omega} \rho_0 \left( \frac{ik_{\infty} M_{\infty}}{(1 - M_{\infty}^2)^{\frac{3}{2}}} (1 - M_{0x}^2) + \frac{ik_0 M_{0x}}{\sqrt{1 - M_{\infty}^2}} \right) \frac{\partial \phi_a}{\partial x} \bar{\psi} \\
 - \int_{\Omega} \rho_0 \left( ik_0 M_{0y} - \frac{ik_{\infty} M_{\infty} M_{0x} M_{0y}}{1 - M_{\infty}^2} \right) \frac{\partial \phi_a}{\partial y} \bar{\psi} \\
 + \int_{\Omega} \rho_0 \left( \frac{ik_{\infty} M_{\infty} (1 - M_{0x}^2)}{(1 - M_{\infty}^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{ik_0 M_{0x}}{\sqrt{1 - M_{\infty}^2}} \right) \phi_a \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \\
 + \int_{\Omega} \rho_0 \left( ik_0 M_{0y} - \frac{ik_{\infty} M_{\infty} M_{0x} M_{0y}}{1 - M_{\infty}^2} \right) \phi_a \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \\
 - \int_{\Omega} \rho_0 \left( \frac{-k_{\infty}^2 M_{\infty}^2}{(1 - M_{\infty}^2)^2} (1 - M_{0x}^2) + k_0^2 - \frac{2k_0 k_{\infty} M_{0x} M_{\infty}}{1 - M_{\infty}^2} \right) \phi_a \bar{\psi}
 \end{array} \right. \quad (4.89)$$

On note  $b_L(\cdot, \cdot)$  la forme sesquilinéaire de bord suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 b_L(\phi_a, \psi) = \int_{\partial\Omega} \rho_0 \left( \frac{1 - M_{0x}^2}{1 - M_{\infty}^2} \right) \frac{\partial \phi_a}{\partial x} \bar{\psi} \vec{n} \cdot \vec{e}_x - \int_{\partial\Omega} \rho_0 \frac{M_{0x} M_{0y}}{\sqrt{1 - M_{\infty}^2}} \frac{\partial \phi_a}{\partial y} \bar{\psi} \vec{n} \cdot \vec{e}_x \\
 + \int_{\partial\Omega} \rho_0 (1 - M_{0y}^2) \frac{\partial \phi_a}{\partial y} \bar{\psi} \vec{n} \cdot \vec{e}_y - \int_{\partial\Omega} \rho_0 \frac{M_{0x} M_{0y}}{\sqrt{1 - M_{\infty}^2}} \frac{\partial \phi_a}{\partial x} \bar{\psi} \vec{n} \cdot \vec{e}_y \\
 + \int_{\partial\Omega} \rho_0 \left( \frac{ik_{\infty} M_{\infty}}{(1 - M_{\infty}^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{ik_0 M_{0x}}{\sqrt{1 - M_{\infty}^2}} - \frac{ik_{\infty} M_{\infty} M_{0x}^2}{(1 - M_{\infty}^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \phi_a \bar{\psi} \vec{n} \cdot \vec{e}_x \\
 + \int_{\partial\Omega} \rho_0 \left( ik_0 M_{0y} - \frac{ik_{\infty} M_{\infty} M_{0x} M_{0y}}{1 - M_{\infty}^2} \right) \phi_a \bar{\psi} \vec{n} \cdot \vec{e}_y
 \end{array} \right. \quad (4.90)$$

Par linéarité, montrer l'unicité du problème équivaut à montrer que pour une source sonore incidente nulle, la condition de Sommerfeld implique une unique solution nulle.

**Lemme 4.2.6.** *On suppose donc la source sonore incidente nulle :  $\phi_{a,inc} = 0$ . Le problème transformé (4.80), (4.84) et (4.85) se formule variationnellement dans  $\Omega$  :*

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Trouver } \phi_a \in H^1(\Omega) \text{ tel que :} \\
 a_L(\phi_a, \psi) = \langle T_{LM}(\phi_a), \psi \rangle_{L^2(\Gamma_M)} + \int_{\Gamma_{\infty}} \vec{\nabla} \phi_a \cdot \vec{n} \bar{\psi} \quad , \\
 \forall \psi \in H^1(\Omega)
 \end{array} \right. \quad (4.91)$$

• La solution du problème transformé soumise à la condition de Sommerfeld vérifie

le bilan d'énergie :

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow +\infty} k'_\infty \|\phi_a\|_{L^2(S_R)} \\ & + \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}} \sum_{\pm} \Im m(\mu_{mn}^\pm) |\langle \phi_a, \Xi_{rmn} \rangle_{L^2(\Gamma_M)}|^2 \|\Xi_{rmn}\|_{L^2(\Gamma_M)}^2, \end{aligned} \quad (4.92)$$

$$= 0$$

où la somme modale ci-dessus ne se fait que sur les modes propagatifs.

• En l'absence de modes incidents propagatifs à l'entrée de la nacelle ( $\phi_{a,inc} = 0$ ) :

–

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \|\phi_a\|_{L^2(S_R)} = 0 \quad (4.93)$$

–

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left\| \frac{\partial \phi_a}{\partial n} \right\|_{L^2(S_R)} = 0 \quad (4.94)$$

Preuve du lemme 4.2.6 :

La formulation variationnelle (4.91) s'obtient à partir de l'équation aux dérivées partielles elliptique (4.80) que l'on a multipliée par une fonction test et intégrée par parties. L'expression des conditions aux limites (4.84) et (4.85) dans l'intégrale de bord (4.90) donne le second membre.  $a_L(\cdot, \cdot)$  est la forme sesquilinéaire volumique associée à l'opérateur  $A_L$  et  $b_L(\phi_a, \psi) = \langle T_{LM}(\phi_a), \psi \rangle_{L^2(\Gamma_M)} + \int_{\Gamma_\infty} \overrightarrow{\nabla} \phi_a \cdot \overrightarrow{n} \overline{\psi}$  est la forme sesquilinéaire de bord associée à la dérivée conormale  $\frac{\partial}{\partial n_{A_L}}$ .

La forme sesquilinéaire volumique (4.89) s'écrit sous la forme synthétique :

$$\begin{aligned} a_L(\phi_a, \phi_a) &= \int_{\Omega} f_1(x, y) |\phi_a|^2 + \int_{\Omega} \langle A(x, y) \nabla \phi_a, \overline{\nabla \phi_a} \rangle \\ &+ \int_{\Omega} i f_2(x, y) \frac{\partial \phi_a}{\partial x} \overline{\phi_a} + \int_{\Omega} i f_2(x, y) \frac{\partial \phi_a}{\partial x} \overline{\phi_a} \\ &+ \int_{\Omega} i f_3(x, y) \frac{\partial \phi_a}{\partial y} \overline{\phi_a} + \int_{\Omega} i f_3(x, y) \frac{\partial \phi_a}{\partial y} \overline{\phi_a} \end{aligned}, \quad (4.95)$$

où  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  sont trois fonctions  $W^{1, \infty}(\Omega)$  à valeurs réelles. La matrice  $A(x, y)$  définie par (4.87) étant réelle, symétrique, définie et positive, la forme sesquilinéaire volumique vérifie :

$$\Im m(a_L(\phi_a, \phi_a)) = 0, \quad \forall \phi_a \in H^1(\Omega) \quad (4.96)$$

L'application de  $\phi_a$  comme fonction-test dans la formulation variationnelle (4.91) donne l'égalité :

$$a_L(\phi_a, \phi_a) = \int_{\Gamma_\infty} \frac{\partial \phi_a}{\partial n} \overline{\phi_a} + \langle T_{LM}(\phi_a), \phi_a \rangle_{L^2(\Gamma_M)}$$



$$a_L(\phi_a, \phi_a) = \int_{\Gamma_\infty} \left( \frac{\partial \phi_a}{\partial n} - ik'_\infty \phi_a \right) \overline{\phi_a} + ik'_\infty \int_{\Gamma_\infty} \phi_a \overline{\phi_a} + \langle T_{LM}(\phi_a), \phi_a \rangle_{L^2(\Gamma_M)} \quad (4.97)$$

En utilisant la décomposition de  $\phi_a$  sur les modes de conduit et l'orthogonalité de ceux-ci :

$$\langle T_{LM}(\phi_a), \phi_a \rangle_{L^2(\Gamma_M)} = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}} \sum_{\pm} \mu_{mn}^\pm |\langle \phi_a, \Xi_{rmn} \rangle_{L^2(\Gamma_M)}|^2 \|\Xi_{rmn}\|_{L^2(\Gamma_M)}^2$$

En identifiant partie réelle et imaginaire dans l'égalité (5.26) :

$$\begin{aligned} k'_\infty \|\phi_a\|_{L^2(\Gamma_\infty)}^2 + \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}} \sum_{\pm} \Im m(\mu_{mn}^\pm) |\langle \phi_a, \Xi_{rmn} \rangle_{L^2(\Gamma_M)}|^2 \|\Xi_{rmn}\|_{L^2(\Gamma_M)}^2 \\ = -\Im m \left( \int_{\Gamma_\infty} \left( \frac{\partial \phi_a}{\partial n} - ik'_\infty \phi_a \right) \overline{\phi_a} \right) \leq \|\phi_a\|_{L^2(\Gamma_\infty)} \left\| \frac{\partial \phi_a}{\partial n} - ik'_\infty \phi_a \right\|_{L^2(\Gamma_\infty)} \end{aligned}$$

La somme modale ne se fait que sur les modes propagatifs :

$$\Im m(\mu_{mn}^\pm) = 0 \iff \text{le mode est évanescent} \quad (4.98)$$

$$\Im m(\mu_{mn}^\pm) < 0 \iff \text{le mode est propagatif incident} \quad (4.99)$$

La condition de Sommerfeld conclut (4.92). En l'absence de modes propagatifs incidents, on a une somme de deux termes positifs nulle, il découle (4.93) et la nullité des coefficients des modes propagatifs réfléchis :

$$|a_{mn}^-| = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \Xi_{mn}^- \text{ soit un mode propagatif} \quad (4.100)$$

La condition de Sommerfeld et (4.93) implique (4.94) :

$$\left\| \frac{\partial \phi_a}{\partial n} \right\|_{L^2(\Gamma_\infty)} \leq k'_\infty \|\phi_a\|_{L^2(\Gamma_\infty)} + \left\| \frac{\partial \phi_a}{\partial n} - ik'_\infty \phi_a \right\|_{L^2(\Gamma_\infty)}$$

Le théorème de Rellich [56] et le principe de continuation unique pour une équation aux dérivées partielles elliptique (la régularité  $W^{1, \infty}(\Omega)$  des coefficients variables provenant de l'écoulement porteur est suffisante) concluent la nullité de  $\phi_a$  partout et donc la nullité de tous les coefficients réfléchis (pas seulement les propagatifs). Citons le théorème de Rellich [56] :

**Théorème 4.2.7 (Rellich).** *Soit  $\phi_a$  une fonction de classe  $C^2$  pour  $|x|$  assez grand, et vérifiant l'équation de Helmholtz :  $\Delta \phi_a + \lambda \phi_a = 0$  pour  $|x| \geq r_0$  (avec  $\lambda > 0$ ). Alors seuls deux cas de figures sont possibles :*

$$\phi_a(x) = 0 \text{ pour } |x| > r_0 \quad (4.101)$$

$$\forall R_0 > r_0, \exists C > 0 \text{ tel que } \int_{R_0 < |x| < R} |\phi_a(x)|^2 dx \geq CR, \text{ pour } R \text{ assez grand} \quad (4.102)$$

Le théorème de Rellich et (4.93) entraînent (4.101). Etant donné  $\epsilon > 0$ , il existe d'après (4.93) un réel  $R_\epsilon > 0$  tel que  $\|\phi_a\|_{L^2(S_r)}^2 \leq \epsilon, \forall r \geq R_\epsilon$ .

$$\forall R > R_\epsilon, \int_{R_\epsilon < |x| < R} |\phi_a|^2 dx = \int_{R_\epsilon < r < R} dr \int_{S_r} |\phi_a|^2 r d\theta \leq \epsilon (R - R_\epsilon)$$

Le cas (4.102) du théorème de Rellich n'est pas possible :  $\phi_a = 0$  pour  $|x| > r_0$ . Le principe de prolongement unique d'une équation aux dérivées partielles strictement elliptique à coefficients variables de régularité  $W^{1, \infty}(\Omega)$  (qui est la régularité de l'écoulement porteur dont on peut extraire une sous-suite convergente pour  $W^{1, \infty}(\Omega)$  d'après le théorème d'Ascoli) implique la nullité de  $\phi_a$  partout dans  $\overline{\Omega_M \cup \Omega \cup \Omega_e} \setminus \Gamma_R$ . Par unicité de la décomposition modale dans le guide d'ondes, les coefficients réfléchis évanescents sont nuls. Par linéarité, la solution du problème transformé est unique.

## Existence

Les domaines considérés ici sont les domaines cartésiens tridimensionnels correspondant à ceux du paragraphe (4.2.4) (l'axe de propagation  $z$  correspond à l'axe précédemment nommé  $x$  et les axes transverses  $(r, \theta)$  correspondent à l'axe précédemment nommé  $y$ ). Le cas tridimensionnel est de nouveau considéré, car à l'extérieur les équations ne sont pas compliquées par la transformée de Lorentz. On gagne de plus en généralité en exprimant l'opérateur Dirichlet-Neumann tridimensionnel à l'infini.

Les variables physiques transformées sont toujours notées comme les anciennes. L'existence du problème acoustique transformé (4.80), (4.84) et (4.85) est démontré dans ce paragraphe. Il suffit de prouver que l'on est dans le cadre de l'alternative de Fredholm pour obtenir l'existence, sachant que l'on a démontré l'unicité dans le paragraphe précédent.

Le problème posé dans le domaine  $\overline{\Omega \cup \Omega_e} \setminus (\Gamma_R \cup \Gamma_M)$  est ramené au domaine borné  $\Omega$  par un opérateur Dirichlet-Neumann à l'infini. L'équivalence des deux problèmes est prouvée. Le domaine  $\Omega$  est borné et régulier : on utilise l'injection compacte de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  pour prouver la compacité de l'opérateur différentiel volumique. Les propriétés des opérateurs Dirichlet-Neumann "modaux et infini" ramenant le domaine global  $\overline{\Omega_M \cup \Omega \cup \Omega_e} \setminus \Gamma_R$  à  $\Omega$  prouve alors que le problème relève de l'alternative de Fredholm.

La démarche est classique et s'inspire de la thèse de T. Abboud [1] (ou encore l'article [2]), qui prouve l'existence et l'unicité du problème similaire précédemment présenté (4.1).

## Réduction à un domaine borné :

Le Laplacien en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\Delta \phi_a = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi_a}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{LB} \phi_a, \quad (4.103)$$

où  $\Delta_{LB}$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami agissant sur les fonctions définies sur la sphère unité  $S$  :

$$\Delta_{LB}\phi_a = \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 \phi_a}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial \phi_a}{\partial \theta} \right) \quad (4.104)$$

$\Delta_{LB}$  est inversible et d'inverse compact sur  $H^1(S)/\mathbb{R}$ . Les harmoniques sphériques  $Y_{l,m}(\theta, \phi)$  forment la base propre dénombrable de  $\Delta_{LB}$ . A  $l$  fixé, les  $(Y_{l,m})_{-l \leq m \leq l}$  forment un espace propre de dimension  $2l + 1$  associé à la valeur propre  $l(l + 1)$  de  $-\Delta_{LB}$  :

$$-\Delta_{LB}Y_{l,m} = l(l + 1)Y_{l,m} \quad (4.105)$$

Les harmoniques sphériques se définissent analytiquement :

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = (-1)^m i^l \left[ \frac{l + 1/2}{2\pi} \frac{(l - m)!}{(l + m)!} \right]^{\frac{1}{2}} e^{im\phi} P_l^m(\cos\theta), \quad (4.106)$$

où  $P_l^m$  sont les polynômes de Legendre associés, dont l'expression analytique s'obtient par récurrence :

$$\begin{cases} P_l^m(x = \cos\theta) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} (\sin\theta)^m \left( \frac{d}{dx} \right)^{l+m} (1 - x^2)^l, & \forall 0 \leq m \leq l \\ P_l^m(x = \cos\theta) = \frac{(-1)^{l+m}}{2^l l!} \frac{(l + m)!}{(l - m)!} (\sin\theta)^{-m} \left( \frac{d}{dx} \right)^{l-m} (1 - x^2)^l, & \forall -l \leq m \leq 0 \end{cases} \quad (4.107)$$

$(\nabla Y_{l,m}, \vec{rot} Y_{l,m})$  forment une base orthogonale de  $TL^2(S)$ , l'ensemble des champs vectoriels tangents de carré intégrable définis sur la sphère unité  $S$ . On cherche une solution à variables séparées de l'équation de Helmholtz à l'extérieur de la boule  $B_R$  de rayon  $R$  ( $S_R$  désigne la sphère associée), où le rayon  $R$  est choisi assez grand pour que  $\Gamma_\infty \subset B_R$  (le potentiel transformé vérifie alors l'équation de Helmholtz pour le nombre d'ondes  $k'_\infty$ ) :

$$\phi_a(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{m=+l} h_{l,m}(k'_\infty r) Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (4.108)$$

La partie radiale de chaque coefficient de la décomposition de la solution vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} h_{l,m} \right) + \left( 1 - \frac{l(l + 1)}{r^2} \right) h_{l,m} = 0 \quad (4.109)$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions de Hankel (ou encore Bessel sphériques), qui se répartissent en deux classes de solutions. Leur expression analytique se déduit par récurrence :

$$\begin{cases} h_l^{(1)}(r) = (-r)^l \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^l \left( \frac{e^{ir}}{r} \right) \\ h_l^{(2)}(r) = (-r)^l \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^l \left( \frac{e^{-ir}}{r} \right) \end{cases} \quad (4.110)$$

Seule la famille (1) vérifie la condition de Sommerfeld :  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial \phi_a}{\partial n} - ik'_\infty \phi_a \right|^2 \rightarrow 0$

. La solution du problème de Helmholtz extérieur avec une condition de Dirichlet :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \phi_a + (k'_\infty)^2 \phi_a = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus B_R \\ \phi_a = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{m=+l} \phi_{l,m} Y_{l,m}(\theta, \phi), \quad \forall x \in S_R \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial \phi_a}{\partial n} - ik'_\infty \phi_a \right|^2 \rightarrow 0 \end{array} \right. \quad (4.111)$$

existe et est unique. Son expression analytique s'écrit :

$$\phi_a = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{m=+l} \phi_{l,m} \frac{h_l^{(1)}(k'_\infty r)}{h_l^{(1)}(k'_\infty R)}(r) Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (4.112)$$

On définit l'opérateur Dirichlet-Neumann  $T_R$ , qui à une fonction  $\phi_a \in H^{\frac{1}{2}}(S_R)$  associe la trace sur  $S_R$  de la dérivée normale de l'unique solution du problème (4.111) pour cette fonction comme condition de Dirichlet. L'opérateur  $T_R$ , qui, à

toute fonction régulière  $\phi_a(R, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \phi_{l,m} Y_{l,m}(\theta, \phi)$  sur  $S_R$ , associe :

$$T_R(\phi_a) = \sum_{l,m} k'_\infty \frac{\frac{d}{dr} h_l^{(1)}(k'_\infty R)}{h_l^{(1)}(k'_\infty R)} \phi_{l,m} Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (4.113)$$

se prolonge de manière unique en un opérateur continu de  $H^{\frac{1}{2}}(S_R)$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(S_R)$ . L'opérateur  $T_R$  a les propriétés suivantes :

•

$$-\Re e \left( \langle T_R(\phi_a), \phi_a \rangle_{L^2(S_R)} \right) \geq \frac{1}{R} \|\phi_a\|_{L^2(S_R)}^2, \quad \forall \phi_a \in H^{\frac{1}{2}}(S_R) \quad (4.114)$$

• Pour toute fonction  $\phi_a \in H_{loc}^1(\overline{\Omega \cup \Omega_e \setminus B_R})$  satisfaisant l'équation de Helmholtz dans  $\overline{\Omega \cup \Omega_e \setminus B_R}$  avec second membre nul et vérifiant la condition de Sommerfeld, sa trace sur  $S_R$  vérifie :

$$\frac{\partial \phi_a}{\partial n} = T_R(\phi_a), \quad \text{sur } S_R \quad (4.115)$$

Le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi_a \in H_{loc}^1(\overline{\Omega \cup \Omega_e \setminus (\Gamma_R \cup \Gamma_M)}) \text{ tel que :} \\ A_L(\phi_a) = 0, \quad \text{dans } \overline{\Omega \cup \Omega_e \setminus (\Gamma_R \cup \Gamma_M)} \\ \frac{\partial(\phi_a - \phi_{a,inc})}{\partial n_L} = T_{LM}(\phi_a - \phi_{a,inc}), \quad \text{sur } \Gamma_M \\ \frac{\partial \phi_a}{\partial n_L} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_R \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial \phi_a}{\partial n} - ik'_\infty \phi_a \right|^2 d\gamma = 0 \end{array} \right. \quad (4.116)$$

est équivalent au problème dans le domaine borné et régulier  $\Omega$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } \phi_a \in H^1(\Omega) \text{ tel que :} & \\ A_L(\phi_a) = 0, & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial(\phi_a - \phi_{a,inc})}{\partial n_L} = T_{LM}(\phi_a - \phi_{a,inc}), & \text{sur } \Gamma_M \\ \frac{\partial\phi_a}{\partial n_L} = 0, & \text{sur } \Gamma_R \\ \frac{\partial\phi_a}{\partial n} = T_R(\phi_a), & \text{sur } S_R \end{array} \right. \quad (4.117)$$

**Alternative de Fredholm :**

Le problème posé dans le domaine borné  $\Omega$  (4.117) se formule variationnellement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi_a \in H^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a_L(\phi_a, \psi) - \langle T_{LM}(\phi_a), \psi \rangle_{L^2(\Gamma_M)} - \langle T_R(\phi_a), \psi \rangle_{L^2(S_R)} = L_{inc}(\psi) \\ \forall \psi \in H^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (4.118)$$

Les paramètres fluides  $\rho_0, k_0$  et  $\vec{M}_0$  sont de régularité :  $W^{1,\infty}(\Omega)$ . L'équation aux dérivées partielles volumique (4.80) s'explícite sous la forme synthétique :

$$A_L(\phi_a) = \text{div} \left( A(x, y, z) \vec{\nabla} \phi_a \right) + g_1(x, y, z) \frac{\partial\phi_a}{\partial x} + g_2(x, y, z) \frac{\partial\phi_a}{\partial y} + g_3(x, y, z) \phi_a, \quad (4.119)$$

où les fonctions  $g_i(x, y, z)$  sont à valeurs complexes et bornées dans  $\Omega : L^\infty(\Omega)$ . Le problème (4.118) relève de l'alternative de Fredholm. La forme hermitienne du membre de gauche de (4.118) se décompose en deux formes hermitiennes : une coercive  $b(\phi_a, \psi)$  et une compacte  $c(\phi_a, \psi)$ .

$$\begin{aligned} b(\phi_a, \psi) &= \int_{\Omega} A(x, y, z) \vec{\nabla} \phi_a \cdot \overline{\vec{\nabla} \psi} + \int_{\Omega} \phi_a \overline{\psi} - \langle T_{LM}(\phi_a), \psi \rangle_{L^2(\Gamma_M)} - \langle T_R(\phi_a), \psi \rangle_{L^2(S_R)} \\ c(\phi_a, \psi) &= \int_{\Omega} g_1(x, y, z) \frac{\partial\phi_a}{\partial x} \overline{\psi} + \int_{\Omega} g_2(x, y, z) \frac{\partial\phi_a}{\partial y} \overline{\psi} + \int_{\Omega} (g_3(x, y, z) - 1) \phi_a \overline{\psi} \end{aligned} \quad (4.120)$$

L'opérateur associé à la forme sesquilinéaire  $b(\cdot, \cdot)$  est coercif. L'opérateur associé à la forme sesquilinéaire  $c(\cdot, \cdot)$  est compact. Le problème acoustique relève de l'alternative de Fredholm et l'existence découle de l'unicité prouvée précédemment.

Preuve de la coercivité de  $b$  :

Analysons la partie réelle de  $b(\phi_a, \phi_a)$ .

L'inégalité (4.114) pour la partie réelle de l'opérateur Dirichlet-Neumann à l'infini s'écrit :

$$-\Re e \left( \langle T_R(\phi_a), \phi_a \rangle_{L^2(S_R)} \right) \geq \frac{1}{R} \|\phi_a\|_{L^2(S_R)}^2, \quad \forall \phi_a \in H^{\frac{1}{2}}(S_R)$$

L'inégalité correspondante pour la partie réelle de l'opérateur Dirichlet-Neumann modal de Lorentz s'obtient en exprimant :

$$-\Re e \left( \langle T_{LM}(\phi_a), \phi_a \rangle_{L^2(\Gamma_M)} \right) = -\Re e \left( \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}} \mu_{mn}^- |\langle \phi_a, \Xi_{rmn} \rangle_{L^2(\Gamma_M)}|^2 \right)$$

et en utilisant les propriétés (4.83) des constantes  $\mu_{mn}^-$  de l'opérateur Dirichlet-Neumann  $T_{LM}$  :

$$-\Re e \left( \langle T_{LM}(\phi_a), \phi_a \rangle_{L^2(\Gamma_M)} \right) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{E}} \rho_M \sqrt{(1 - M_M^2)k_{rmn}^2 - k_M^2} |\langle \phi_a, \Xi_{rmn} \rangle|^2,$$

où  $\mathbb{E} = \left\{ (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \left\{ (m', n') \mid k_{rm'n'} > \left\lceil \frac{k_M}{\sqrt{1 - M_M^2}} \right\rceil \right\} \right\}$  désigne l'ensemble des indices discrets correspondant à des modes propagatifs. Et donc :

$$-\Re e \left( \langle T_{LM}(\phi_a), \phi_a \rangle_{L^2(\Gamma_M)} \right) \geq 0, \quad (4.121)$$

La matrice  $A$  étant symétrique et définie-positive dans tout le domaine  $\Omega$ , les inégalités (4.114) et (4.121) donnent la coercivité de  $b$  :

$$|b(\phi_a, \phi_a)| \geq \Re e(b(\phi_a, \phi_a)) \geq C \left( \Omega, \rho_0, \vec{M}_0 \right) \|\phi_a\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall \phi_a \in H^1(\Omega) \quad (4.122)$$

Preuve de la compacité de  $c$  :

Montrons la compacité de  $c$  terme par terme. L'opérateur  $C_1$  est défini par la première intégrale de  $c$  et le théorème de représentation de Riesz :

$$C_1 : \begin{cases} H^1(\Omega) & \rightarrow H^1(\Omega) \\ \phi_a & \rightarrow C_1(\phi_a) \end{cases} \quad \text{tel que :} \quad (4.123)$$

$$\forall \psi \in \Omega, \quad \langle C_1(\phi_a), \psi \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} g_1(x, y, z) \frac{\partial \phi_a}{\partial x} \bar{\psi}$$

Cet opérateur est continu de  $H^1(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$  :

$$\|C_1(\phi_a)\|_{H^1(\Omega)}^2 = \langle g_1(x, y, z) \frac{\partial \phi_a}{\partial x}, C_1(\phi_a) \rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$\|C_1(\phi_a)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \sup_{\Omega} \{|g_1(x, y, z)|\} \|\phi_a\|_{H^1(\Omega)} \|C_1(\phi_a)\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\|C_1(\phi_a)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \|g_1\|_{L^\infty(\Omega)} \|\phi_a\|_{H^1(\Omega)} \|C_1(\phi_a)\|_{L^2(\Omega)} \quad (4.124)$$

La continuité de  $C_1$  dans  $H^1(\Omega)$  est immédiate à partir de (4.124).

Soit  $(\phi_{an})_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée de  $H^1(\Omega)$ . Par continuité de  $C_1$ , la suite  $(C_1(\phi_{an}))_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $H^1(\Omega)$ .  $\Omega$  étant borné et régulier, on peut en extraire une sous-suite  $(C_1(\phi_{an_k}))_{n_k \in \mathbb{N}}$  qui converge fortement dans  $L^2(\Omega)$ . On écrit en utilisant (4.124) :

$$\|C_1(\phi_{an_k}) - C_1(\phi_{am_k})\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \|g_1\|_{L^\infty(\Omega)} \|\phi_{an_k} - \phi_{am_k}\|_{H^1(\Omega)} \|C_1(\phi_{an_k}) - C_1(\phi_{am_k})\|_{L^2(\Omega)}$$

$(C_1(\phi_{an_k}))_{n_k \in \mathbb{N}}$  est donc de Cauchy dans  $H^1(\Omega)$  et converge fortement dans l'espace complet  $H^1(\Omega)$  : l'opérateur  $C_1$  est un opérateur compact dans  $H^1(\Omega)$ .

Les deux dernières intégrales de  $c$  se traitent de la même manière. L'opérateur associé à la forme sesquilinéaire  $c$  est compact.

### Formulation axisymétrique

Nous énonçons ci-dessous l'analogie axisymétrique du paragraphe précédent (4.2.4). Les domaines considérés sont maintenant les domaines de coupe transverses bidimensionnels, que l'on note par abus de notation comme les domaines tridimensionnels cartésiens.

Les domaines et les variables physiques transformés sont toujours notés par abus de notation comme les anciens.

• Le mode azimutal  $m$  du potentiel acoustique total transformé  $\phi_{am}$  dans l'espace de Lorentz cylindrique vérifie l'équation aux dérivées partielles volumique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \rho_0 \frac{\partial \phi_{am}}{\partial r} \right) + \frac{1}{1 - M_\infty^2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho_0 \frac{\partial \phi_{am}}{\partial z} \right) \\ - \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{\partial}{\partial r} \left( \rho_0 M_{0r} M_{0z} \frac{\partial \phi_{am}}{\partial z} \right) - \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho_0 M_{0z} M_{0r} \frac{\partial \phi_{am}}{\partial r} \right) \\ - \frac{1}{1 - M_\infty^2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho_0 M_{0z}^2 \frac{\partial \phi_{am}}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \rho_0 M_{0r}^2 \frac{\partial \phi_{am}}{\partial r} \right) \\ + \rho_0 \left( \frac{ik_\infty M_\infty}{(1 - M_\infty^2)^{\frac{3}{2}}} (1 - M_{0z}^2) + \frac{ik_0 M_{0z}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} - \frac{M_{0r} M_{0z}}{r \sqrt{1 - M_\infty^2}} \right) \frac{\partial \phi_{am}}{\partial z} \\ + \rho_0 \left( -\frac{M_{0r}^2}{r} + ik_0 M_{0r} - \frac{ik_\infty M_\infty M_{0r} M_{0z}}{1 - M_\infty^2} \right) \frac{\partial \phi_{am}}{\partial r} \\ + \frac{\partial}{\partial r} (ik_0 \rho_0 M_{0r} \phi_{am}) + \frac{ik_\infty M_\infty}{(1 - M_\infty^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 \phi_{am}) - \frac{ik_\infty M_\infty}{1 - M_\infty^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho_0 M_{0r} M_{0z} \phi_{am}) \\ + \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 ik_0 M_{0z} \phi_{am}) - \frac{ik_\infty M_\infty}{(1 - M_\infty^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 M_{0z}^2 \phi_{am}) \\ + \rho_0 \left( -\frac{m^2}{r^2} - \frac{k_\infty^2 M_\infty^2}{(1 - M_\infty^2)^2} (1 - M_{0z}^2) + \frac{ik_0 M_{0r}}{r} \right) \phi_{am} \\ + \rho_0 \left( -ik_\infty \frac{M_{0r} M_{0z} M_\infty}{r (1 - M_\infty^2)} + k_0^2 - \frac{2k_\infty M_\infty k_0 M_{0z}}{(1 - M_\infty^2)} \right) \phi_{am} = 0 \end{array} \right. , \quad (4.125)$$

que l'on note par l'opérateur volumique  $A_{Lm}(\phi_a) = 0$ .

- L'équation aux dérivées partielles (4.125) est elliptique.
- Les conditions aux limites du potentiel transformé s'écrivent :

1.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} M_{0z} \vec{n} \cdot \vec{e}_z + M_{0r} \vec{n} \cdot \vec{e}_r = 0 \quad , \forall x \in \Gamma_R \\ \frac{\partial \phi_{am}}{\partial n_{A_{Lm}}} = 0 \quad , \forall x \in \Gamma_R \end{array} \right. \quad (4.126)$$

2.

$$\frac{\partial (\phi_{am} - \phi_{am,inc})}{\partial n_{A_{Lm}}} = T_{LMm} (\phi_{am} - \phi_{am,inc}) \quad , \forall x \in \Gamma_M \quad , \quad (4.127)$$

où  $T_{LMm}$  désigne l'opérateur Dirichlet-Neumann dans l'espace de Lorentz et s'obtient en appliquant la transformation de Lorentz à l'opérateur Dirichlet-Neumann (4.74)

permettant de borner le domaine modal du problème continu non transformé (4.76) :

$$\begin{cases} T_{LMm} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_M) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_M) \\ \phi_{am} \rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_{mn}^- (\phi_a, \Xi_{rmn})_{L^2(\Gamma_M)} \Xi_{rmn} \end{cases}, \quad (4.128)$$

où l'on a noté :

$$\begin{cases} \gamma_{mn}^\pm = -k'_\infty M_\infty + \sqrt{1 - M_\infty^2} \beta_{mn}^\pm & : \text{les constantes de propagation axiales} \\ \mu_{mn}^\pm = i\rho_M (k_M M_M - (1 - M_M^2) \beta_{mn}^\pm) & : \text{les coefficients de l'opérateur } T_{LMm} \end{cases} \quad (4.129)$$

• L'équation (4.125) équivaut à la classique équation de Helmholtz avec un simple déphasage Doppler en dehors du domaine perturbé :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi_{am}}{\partial r} \right) - \frac{m^2}{r^2} \phi_{am} + \frac{\partial^2 \phi_{am}}{\partial z^2} + \frac{k_\infty^2}{1 - M_\infty^2} \phi_{am} = 0 \quad (4.130)$$

• Le théorème de Rellich implique l'unicité du potentiel transformé vérifiant la condition de Sommerfeld :

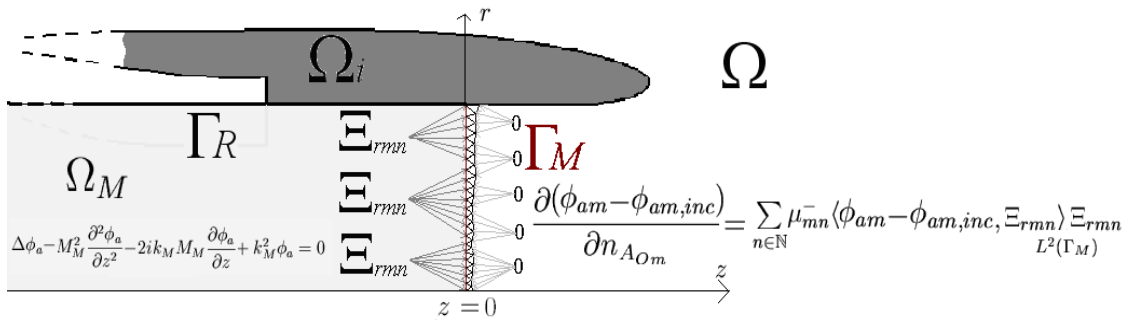
$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial \phi_{am}}{\partial n} - i \frac{k_\infty}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \phi_{am} \right|^2 d\gamma = 0, \quad (4.131)$$

où  $S_R$  (resp.  $B_R$ ) désigne la sphère (resp. la boule) de rayon  $R$  et d'origine nulle avec  $R$  choisi de telle sorte que  $\Gamma_\infty \subset B_R$ .

• Le problème acoustique global transformé relève de l'alternative de Fredholm et l'existence du potentiel acoustique transformé découle de l'unicité impliquée par la condition de Sommerfeld.

## 4.3 Du continu au discret

### 4.3.1 Couplage numérique modes-volume



Relèvement modal discret



Les domaines considérés sont les domaines de coupe transverses bidimensionnels. Soit  $\mathcal{T}$  une triangulation régulière de  $\Omega$ . On note  $\mathcal{T}^0$  (resp.  $\mathcal{T}^1, \mathcal{T}^2$ ) l'ensemble des sommets de cette triangulation (resp. arêtes, triangles). Les sommets se situant sur la surface modale  $\Gamma_M$  sont notés :  $\mathcal{T}_M^0$ . Les sommets non modaux sont notés :  $\mathcal{T}_M^0$ . La formulation variationnelle (4.78) est discrétisée avec des éléments finis classiques continus,  $H^1$ -conformes et  $P^1$  par élément triangulaire. La fonction de base du degré de liberté (resp. les coordonnées) correspondant au sommet  $j \in \mathcal{T}^0$  est notée  $\phi_j$  (resp.  $s_j$ ). Le degré de liberté correspondant au sommet  $j$  est noté abusivement  $j$ . La solution discrète du problème continu (4.78) a pour inconnues les degrés de liberté non modaux et les coefficients modaux réfléchis  $\phi_a = \sum_{j \in \mathcal{T}_M^0} u_j \phi_j + \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^- \Xi_{rmn}$ , où  $u_j = \phi_a(s_j)$  est la valeur de la fonction discrète au degré de liberté  $j$ . L'espace des fonctions-tests se composent des fonctions de base éléments finis pour les degrés de liberté non modaux  $\psi_i, i \in \mathcal{T}_M^0$  et des fonctions de base  $\Xi_{rmn'}$  pour la surface modale  $\Gamma_M$  (changement de base discret). Les termes numériques provenant de la formulation variationnelle (4.78) sont examinés un par un :

### Fonctions-tests intérieures éléments Finis

Exhibons les termes matriciels provenant des fonctions-tests éléments finis intérieurs  $\psi_i$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{0m}(\phi_j, \psi_i) \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^- a_{0m}(\Xi_{rmn}, \psi_i) \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^+ a_{0m}(\Xi_{rmn}, \psi_i) \end{array} \right. \quad (4.132)$$

### Fonctions-tests modales

Exhibons les termes matriciels provenant des fonctions-tests modales  $\Xi_{rmn'}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{0m}(\phi_j, \Xi_{rmn'}) \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^- a_{0m}(\Xi_{rmn}, \Xi_{rmn'}) \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^+ a_{0m}(\Xi_{rmn}, \Xi_{rmn'}) \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^- \mu_{mn}^- \int_{\Gamma_M} \Xi_{rmn} \overline{\Xi_{rmn'}} \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^+ \mu_{mn}^+ \int_{\Gamma_M} \Xi_{rmn} \overline{\Xi_{rmn'}} \end{array} \right. \quad (4.133)$$

**Equation matricielle discrète**

Les modes relevés discrets sont décomposés sur les fonctions de base des degrés de liberté de la triangulation  $\mathcal{T}$  :

$$\Xi_{rmn} = \sum_{j \in \mathcal{T}_M^0} \Xi_{rmn}(s_j) \phi_j \quad (4.134)$$

A chaque mode azimutal fixé  $m$ , il faut prendre en compte une infinité dénombrable de modes réfléchis. On ne peut traiter numériquement qu'un nombre fini de modes réfléchis : on se restreint aux modes propagatifs, qui sont en nombre fini et qui seuls véhiculent l'énergie. De-même la source incidente ne peut se décomposer numériquement que sur un nombre fini de modes : on se limite uniquement aux modes propagatifs et l'on résout un problème pour chaque mode propagatif incident (les modes évanescents, rapidement atténués, ne sont pas pertinents dans l'étude du rayonnement extérieur). La linéarité du problème permet de recomposer la solution pour toute source incidente propagative par combinaison. On désigne par  $X_{mn}$  (resp.  $X_{mn'}$ ) les matrices, dont les colonnes représentent les vecteurs des valeurs nodales des modes transverses sur lesquels la partie diffractée de la solution est cherchée (resp. des fonctions-tests mode transverse) pour chaque  $n \in \mathbb{N}$  propagatif (resp. chaque  $n' \in \mathbb{N}$  propagatif) du mode azimutal  $m$  en cours. On désigne par  $\Xi_{rm, \mathcal{T}_M^0}$  les degrés de liberté modaux des éléments finis  $H^1$ -conformes :

$$\overline{{}^t X_{mn}} = \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_k \end{matrix} \begin{pmatrix} \overline{\Xi_{rm, \mathcal{T}_M^0}} \\ \overline{\Xi_{rmn_1}} \\ \overline{\Xi_{rmn_2}} \\ \vdots \\ \overline{\Xi_{rmn_k}} \end{pmatrix}, \quad \overline{{}^t X_{mn'}} = \begin{matrix} n'_1 \\ n'_2 \\ \vdots \\ n'_k \end{matrix} \begin{pmatrix} \overline{\Xi_{rm, \mathcal{T}_M^0}} \\ \overline{\Xi_{rmn'_1}} \\ \overline{\Xi_{rmn'_2}} \\ \vdots \\ \overline{\Xi_{rmn'_k}} \end{pmatrix} \quad (4.135)$$

L'implémentation des matrices de couplage se traduit par un produit matrice-vecteur :

$$\begin{pmatrix} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^- a_{0m} (\Xi_{rmn}, \Xi_{rmn'_1}) \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^- a_{0m} (\Xi_{rmn}, \Xi_{rmn'_2}) \\ \vdots \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^- a_{0m} (\Xi_{rmn}, \Xi_{rmn'_k}) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{matrix} n'_1 \\ n'_2 \\ \vdots \\ n'_k \end{matrix} \begin{pmatrix} \overline{\Xi_{rm, \mathcal{T}_M^0}} \\ \overline{\Xi_{rmn'_1}} \\ \overline{\Xi_{rmn'_2}} \\ \vdots \\ \overline{\Xi_{rmn'_k}} \end{pmatrix} \cdot [a_{0m}(\phi_j, \psi_i)] \cdot \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & \dots & n_k \\ \Xi_{rmn_1} & \Xi_{rmn_2} & \dots & \Xi_{rmn_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{mn_1}^- \\ a_{mn_2}^- \\ \vdots \\ a_{mn_k}^- \end{pmatrix}$$

L'obtention des termes de couplage de la formulation variationnelle (4.78) se récapitule :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^- a_{0m} (\Xi_{rmn}, \psi_i) \right)_{(i)} = [a_{0m} (\phi_j, \psi_i)]_{(i,j)} \cdot X_{mn} \times (a_{mn}^-)_{(n)} \\ \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn'}^+ a_{0m} (\Xi_{rmn'}, \psi_i) \right)_{(i)} = [a_{0m} (\phi_j, \psi_i)]_{(i,j)} \cdot X_{mn} \times (a_{mn}^+)_{(n)} \\ \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^- a_{0m} (\Xi_{rmn}, \Xi_{rmn'}) \right)_{(n')} = \overline{X_{mn'}^t} \cdot [a_{0m} (\phi_j, \psi_i)]_{(i,j)} \cdot X_{mn} \times (a_{mn}^-)_{(n)} \\ \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^+ a_{0m} (\Xi_{rmn}, \Xi_{rmn'}) \right)_{(n')} = \overline{X_{mn'}^t} \cdot [a_{0m} (\phi_j, \psi_i)]_{(i,j)} \cdot X_{mn} \times (a_{mn}^+)_{(n)} \\ (a_{0m} (\phi_j, \Xi_{rmn'}))_{(n')} = \overline{X_{mn'}^t} \cdot [a_{0m} (\phi_j, \psi_i)]_{(i,j)} \end{array} \right. \quad (4.136)$$

Les termes de couplage provenant des matrices de bord sont calculés analytiquement. Les modes transverses de conduit  $\Xi_{rmn}$  sont orthogonaux ( $\Xi_{rmn}$  et  $\Xi_{rmn'}$  sont orthogonales dès que  $(m, n) \neq (m', n')$ ) et la renormalisation des modes (2.16) donne l'expression analytique de  $\|\Xi_{rmn}\|_{L^2(\Gamma_M)}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^- \mu_{mn}^- \int_{\Gamma_M} \Xi_{rmn} \overline{\Xi_{rmn'}} \right)_{(n')} = \frac{S(\Gamma_M)}{2\pi} \left[ \frac{\mu_{mn}^-}{|\zeta_{mn}^-|} \delta_{nn'} \right]_{(n'n)} \times (a_{mn}^-)_{(n)} \\ \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^+ \mu_{mn}^+ \int_{\Gamma_M} \Xi_{rmn} \overline{\Xi_{rmn'}} \right)_{(n')} = \frac{S(\Gamma_M)}{2\pi} \left[ \frac{\mu_{mn}^+}{|\zeta_{mn}^+|} \delta_{nn'} \right]_{(n'n)} \times (a_{mn}^+)_{(n)} \end{array} \right. \quad (4.137)$$

On note les matrices de bord modales :

$$[\mu_m^-]_{(n'n)} = \frac{S(\Gamma_M)}{2\pi} \begin{array}{c} n'_1 \\ \vdots \\ n'_k \end{array} \begin{array}{ccc} n_1 & \dots & n_k \\ \left( \begin{array}{ccc} \frac{\mu_{mn_1}^-}{|\zeta_{mn_1}^-|} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu_{mn}^-}{|\zeta_{mn}^-|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu_{mn_k}^-}{|\zeta_{mn_k}^-|} \end{array} \right) \end{array} \quad (4.138)$$

La formulation variationnelle (4.78) du problème continu (4.76) restreint aux espaces fonctionnels discrets  $H^1$ -conformes admet la formulation matricielle suivante (où l'on utilise les notations (4.136) et (4.138)) :

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cc} A_{0m} & A_{0m} \cdot X_{mn} \\ \overline{X_{mn'}^t} \cdot A_{0m} & \overline{X_{mn'}^t} \cdot A_{0m} \cdot X_{mn} - [\mu_m^-] \end{array} \right) \begin{pmatrix} u_j \\ a_{mn}^- \end{pmatrix} \\ & = \left( \begin{array}{c} [A_{0m}] \cdot X_{mn} (a_{mn}^+) \\ \left( \overline{X_{mn'}^t} \cdot [-A_{0m}] \cdot X_{mn} + [\mu_m^+] \right) (a_{mn}^+) \end{array} \right), \end{aligned} \quad (4.139)$$

où  $A_{0m} = (a_{0m}(\phi_j, \psi_i))_{ij}$  est la matrice volumique obtenue à partir de la forme hermitienne (4.79). La matrice issue de la discrétisation du problème continu n'a plus de degrés de liberté modaux type éléments finis. Ils sont remplacés par les coefficients de réflexion  $a_{mn}^-$ .

### 4.3.2 Equations intégrales avec écoulement

Les domaines considérés ici sont les domaines transverses bidimensionnels. On se place ici dans l'espace physique et les variables physiques désignent les variables classiques.

L'application de la transformée de Lorentz dans  $\Omega$  complique l'équation aux dérivées partielles volumique (4.125), tandis qu'elle simplifie les opérateurs intégraux (4.130) en annulant l'écoulement dans  $\Omega_e$  (noyau de Green classique de l'équation de Helmholtz).

On décrit ici une méthodologie permettant de garder le problème volumique physique initial simple, tout en couplant le problème à l'infini avec les classiques opérateurs intégraux de l'équation de Helmholtz.

#### Transformation de la dérivée conormale de bord du potentiel

Soit  $\sigma \in I \rightarrow (r(\sigma), z(\sigma)) \in \Gamma_\infty$  un paramétrage normal orienté comme celui du paragraphe (3.2.1). La variable  $\sigma$  désigne une abscisse curviligne et le vecteur tangent normalisé  $\vec{\tau} = \left( \frac{dr(\sigma)}{d\sigma}, \frac{dz(\sigma)}{d\sigma} \right)$  est tel que  $\vec{n} = \vec{e}_\theta \wedge \vec{\tau}$  soit sortant à  $\Omega$  (paramétrage orienté de bas en haut par rapport à l'orientation positive des  $z$ ). La composition de ce paramétrage par la transformée de Lorentz :  $\sigma \in I \rightarrow \left( r(\sigma), \frac{z(\sigma)}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \right) \in \Gamma'_\infty$  donne un paramétrage de la surface géométriquement dilatée par Lorentz. Mais ce paramétrage n'est plus normal. Il garde la même orientation, mais le vecteur tangent doit être renormé. La nouvelle normale à  $\Gamma'_\infty$  s'exprime en fonction de l'ancienne normale :

$$\begin{aligned} \vec{\tau}' &= \begin{pmatrix} \tau'_{r'} \\ \tau'_{z'} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2 \tau_r^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1 - M_\infty^2} \tau_r \\ \tau_z \end{pmatrix} \\ \vec{n}' &= \begin{pmatrix} n'_{r'} \\ n'_{z'} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2 n_z^2}} \begin{pmatrix} n_r \\ n_z \sqrt{1 - M_\infty^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.140)$$

Appliquons maintenant la transformation de Lorentz à l'intégrale de bord apparaissant sur  $\Gamma_\infty$ , là où l'écoulement est uniforme. Les deux étapes de la transformation de Lorentz (3.6) et (3.7) s'écrivent :

$$I = \int_{\Gamma_\infty} \left[ \frac{\partial \phi_a}{\partial n}(r, z) - \left( -ik_\infty \phi_a(r, z) + \overrightarrow{M}_\infty \cdot [\vec{\nabla} \phi_a](r, z) \right) \overrightarrow{M}_\infty \cdot \vec{n} \right] \bar{\psi}(r, z) r dr dz$$

Le théorème de changement de variable appliqué à la dilatation géométrique de la transformation de Lorentz  $L : \Gamma_\infty \rightarrow L(\Gamma_\infty) = \Gamma'_\infty$  donne :

$$I = \int_{\Gamma'_\infty} \left[ \frac{\partial \phi_a}{\partial n} \left( r', \sqrt{1 - M_\infty^2} z' \right) - \left( -ik_\infty \phi_a \left( r', \sqrt{1 - M_\infty^2} z' \right) + \overrightarrow{M_\infty} \cdot [\overrightarrow{\nabla} \phi_a] \left( r', \sqrt{1 - M_\infty^2} z' \right) \right) \overrightarrow{M_\infty} \cdot \overrightarrow{n} \right] \overline{\psi} \left( r', \sqrt{1 - M_\infty^2} z' \right) r' |Jac(L^{-1})(r', z')| dr' dz'$$

Il vient :

$$\frac{I}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} = \int_{\Gamma'_\infty} \left[ \overrightarrow{\nabla}(\phi_a) \circ L^{-1} \cdot \overrightarrow{n} \circ L^{-1} - \left( -ik_\infty \tilde{\phi}_a + \overrightarrow{M_\infty} \cdot [\overrightarrow{\nabla} \phi_a] \circ L^{-1} \right) \overrightarrow{M_\infty} \cdot \overrightarrow{n} \circ L^{-1} \right] \overline{\psi} r' dr' dz',$$

où l'on a posé  $\tilde{\phi}_a = \phi_a \circ L^{-1}$ . La dérivation des fonctions composées donne les égalités :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle [\overrightarrow{\nabla} \phi_a] \circ L^{-1}, \overrightarrow{n} \circ L^{-1} \rangle = \langle \overrightarrow{\nabla} \tilde{\phi}_a, \begin{pmatrix} n_r \circ L^{-1} \\ n_z \circ L^{-1} \\ \sqrt{1 - M_\infty^2} \end{pmatrix} \rangle \\ \langle \overrightarrow{M_\infty}, [\overrightarrow{\nabla} \phi_a] \circ L^{-1} \rangle = \langle \overrightarrow{\nabla} \tilde{\phi}_a, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{M_\infty}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \\ \langle \overrightarrow{M_\infty}, \overrightarrow{n} \circ L^{-1} \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -M_\infty n_z \circ L^{-1} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Finalement, la dérivée conormale de bord s'écrit dans l'espace de Lorentz :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\phi}_a}{\partial r'} \cdot n_r \circ L^{-1} + \left( \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{\partial \tilde{\phi}_a}{\partial z'} - [ik_\infty \tilde{\phi}_a + \frac{M_\infty}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{\partial \tilde{\phi}_a}{\partial z'}] M_\infty \right) n_z \circ L^{-1} \\ = \left[ \frac{\partial \tilde{\phi}_a'}{\partial r'} \cdot n_r \circ L^{-1} + \sqrt{1 - M_\infty^2} n_z \circ L^{-1} \frac{\partial \tilde{\phi}_a'}{\partial z'} \right] e^{\frac{ik_\infty M_\infty z'}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}}, \end{aligned}$$

où  $\tilde{\phi}_a' = \tilde{\phi}_a e^{\frac{-ik_\infty M_\infty z'}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}}$  est le potentiel acoustique transformé (3.7) dans l'espace de Lorentz.

$$I = \sqrt{1 - M_\infty^2} \int_{\Gamma'_\infty} \left[ \frac{\partial \tilde{\phi}_a'}{\partial r'} \cdot n_r \circ L^{-1} + \sqrt{1 - M_\infty^2} n_z \circ L^{-1} \frac{\partial \tilde{\phi}_a'}{\partial z'} \right] \overline{\psi} r' dr' dz'$$

L'expression de la normale dans l'espace dilaté (4.140) donne l'intégrale de bord dans l'espace de Lorentz :

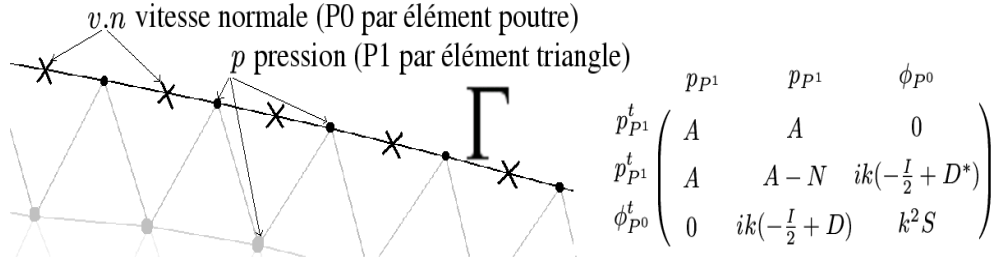
$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\infty} \left[ \frac{\partial \phi_a}{\partial n} - \left( -ik_\infty \phi_a + \overrightarrow{M_\infty} \cdot \overrightarrow{\nabla} \phi_a \right) \overrightarrow{M_\infty} \cdot \overrightarrow{n} \right] \overline{\psi} r dr dz \\ = \int_{\Gamma'_\infty} \sqrt{1 - M_\infty^2} \overrightarrow{\nabla} \tilde{\phi}_a' \cdot \overrightarrow{n}' \overline{\psi}' d\gamma, \end{aligned} \quad (4.141)$$

où  $\tilde{\phi}'_a$ , le potentiel acoustique transformé, vérifie l'équation de Helmholtz au-delà de  $\Gamma'_\infty$ .

### Couplage intégral avec écoulement

En absence d'écoulement, la formulation symétrique (4.9) couple la pression volumique intérieure ( $P^1$  par élément volumique intérieur) à la vitesse normale surfacique extérieure ( $P^0$  par élément surfacique extérieur) :

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (p, \phi = ' v.n') \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} [\overrightarrow{\nabla} p \cdot \overrightarrow{\nabla} \bar{p}^t - k^2 p \bar{p}^t] = \frac{ik}{2} \int_{\Gamma} \phi \bar{p}^t - ik \int_{\Gamma} D^* \phi \bar{p}^t + \int_{\Gamma} N p \bar{p}^t \\ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} p \bar{\phi}^t - \int_{\Gamma} D p \cdot \bar{\phi}^t + ik \int_{\Gamma} S \phi \cdot \bar{\phi}^t = 0 \\ \forall (p^t, \phi^t) \in H^1(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma) \end{array} \right. ,$$



La transformation de Lorentz transforme les quantités physiques suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A_0}} = \frac{\partial \phi_a}{\partial n} - \left( -ik_\infty \phi_a + \overrightarrow{M}_\infty \cdot \nabla \phi_a \right) \overrightarrow{M}_\infty \cdot \vec{n} \xrightarrow{\text{Lorentz}} \overrightarrow{\nabla} \tilde{\phi}'_a \cdot n' \\ \phi_a \xrightarrow{\text{Lorentz}} \tilde{\phi}'_a \end{array} \right. ,$$

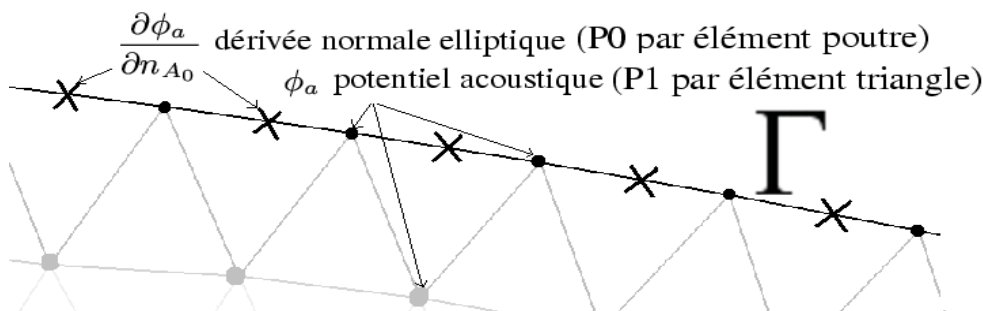
où le potentiel acoustique transformé  $\tilde{\phi}'_a$  vérifie l'équation de Helmholtz dans le domaine  $\Omega'_e$  pour le nombre d'ondes déphasé Doppler  $k'_\infty$ . On couple le potentiel acoustique volumique intérieur  $\phi_a$  ( $P^1$  par élément intérieur) à la dérivée normale elliptique surfacique extérieure  $\frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A_0}}$  ( $P^0$  par élément extérieur) de telle sorte que,  $\tilde{\phi}'_a$  et  $\overrightarrow{\nabla} \tilde{\phi}'_a \cdot n'$  soient couplés *via* la formulation symétrique  $S$  dans l'espace de Lo-

rentz :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Trouver } (\phi_a, \tilde{\lambda}') \in H^1(\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma'_\infty) \text{ tel que :} \\
 \int_{\Omega} \rho_0 \vec{\nabla} \phi_a \vec{\nabla} \bar{\psi} - \int_{\Omega} \rho_0 k_0^2 \phi_a \bar{\psi} + i \int_{\Omega} \rho_0 k_0 (\vec{M}_0 \cdot \vec{\nabla} \bar{\psi} \phi_a - \vec{M}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_a \bar{\psi}) \\
 - \int_{\Omega} \rho_0 \vec{M}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_a \vec{M}_0 \cdot \vec{\nabla} \bar{\psi} - \frac{\sqrt{1-M_\infty^2}}{2} \int_{\Gamma'_\infty} \sqrt{1-M_\infty^2} \tilde{n}_z^2 \tilde{\lambda}' \bar{\psi}' \, d\gamma \\
 - \sqrt{1-M_\infty^2} \left( - \int_{\Gamma'_\infty} \sqrt{1-M_\infty^2} \tilde{n}_z^2 \tilde{D}^* (\tilde{\lambda}') \bar{\psi}' + \int_{\Gamma'_\infty} \sqrt{1-M_\infty^2} \tilde{n}_z^2 \tilde{N} (\phi'_a) \bar{\psi}' \right) = 0, \\
 \sqrt{1-M_\infty^2} \int_{\Gamma'_\infty} \sqrt{1-M_\infty^2} \tilde{n}_z^2 \tilde{D} (\phi'_a) \bar{\lambda}'^t - \frac{\sqrt{1-M_\infty^2}}{2} \int_{\Gamma'_\infty} \sqrt{1-M_\infty^2} \tilde{n}_z^2 \phi'_a \bar{\lambda}'^t \\
 - \sqrt{1-M_\infty^2} \int_{\Gamma'_\infty} \sqrt{1-M_\infty^2} \tilde{n}_z^2 \tilde{S} (\tilde{\lambda}') \bar{\lambda}'^t = 0 \\
 \forall (\psi, \tilde{\lambda}'^t) \in H^1(\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma'_\infty)
 \end{array} \right. \quad (4.142)$$

où les opérateurs intégraux  $S$ ,  $D$ ,  $D^*$  et  $N$  sont définis au paragraphe (3.1.2) par (3.16). Ils sont indexés par un tilda car ils vivent dans l'espace transformé pour un nombre d'ondes déphasé Doppler. Les valeurs dans l'espace de Lorentz des variables transformées aux degrés de liberté des fonctions de base pour le sommet  $\tilde{s}$  et l'arête  $\tilde{a}$  s'expriment en fonction des degrés de liberté des vraies variables physiques :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 [\tilde{\phi}'_a]_{\tilde{s}} = e^{-ik'_\infty M_\infty z'} [\phi_a]_s = \tilde{\Theta}_{\tilde{s}} [\phi_a]_s \\
 [\tilde{\nabla} \tilde{\phi}'_a \cdot n']_{\tilde{a}} = \frac{\int_{\tilde{a}} e^{-ik'_\infty M_\infty z'} \left[ \frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A_0}} \right]_a}{|\tilde{a}|} = \tilde{\Theta}_{\tilde{a}} \left[ \frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A_0}} \right]_a
 \end{array} \right. ,$$



Il suit la formulation variationnelle discrète globale du problème acoustique dans l'espace physique :

$$\left( \begin{array}{ccc}
 A_{0m} - {}^t\tilde{\Theta}_{\tilde{s}} \tilde{N} \tilde{\Theta}_{\tilde{s}} & A_{0m} X_{mn} & {}^t\tilde{\Theta}_{\tilde{s}} (-\frac{\tilde{I}}{2} + \tilde{D}^*) \tilde{\Theta}_{\tilde{a}} \\
 \overline{X_{mn}^t} A_{0m} & \overline{X_{mn}^t} A_{0m} X_{mn} - [\mu_{mn}^-] & 0 \\
 {}^t\tilde{\Theta}_{\tilde{a}} (-\frac{\tilde{I}}{2} + \tilde{D}) \tilde{\Theta}_{\tilde{s}} & 0 & -{}^t\tilde{\Theta}_{\tilde{a}} \tilde{S} \tilde{\Theta}_{\tilde{a}}
 \end{array} \right) \quad (4.143)$$

$$\times \begin{pmatrix} \phi_a(s) \\ a_{mn}^- \\ \frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A_{0m}}}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{0m} X_{mn'}(a_{mn}^+) \\ \left( -\overline{X_{mn'}^t} A_{0m} X_{mn'} + [\mu_m^+] \right) (a_{mn}^+) \\ 0 \end{pmatrix},$$

où l'on a noté :

$$\begin{aligned} \phi_a(s) & : && \text{Potentiel Acoustique par Sommet du Maillage} \\ a_{mn}^- & : && \text{Coefficients Modaux Réfléchis} \\ \frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A_{0m}}}(a) & : && \text{Dérivée Elliptique par Arête} \end{aligned}$$

### 4.3.3 Détails de l'implémentation numérique

Ce paragraphe détaille la méthodologie pratique d'implémentation du logiciel PA2R, dont la théorie et la discrétisation ont été exposées aux paragraphes précédents.

Chacune des matrices de la formulation (4.143) est assemblée séparément. Ceci est réalisé par une séparation du maillage volumique global (obtenu par le logiciel commercial IDEAS) ayant servi au calcul de l'écoulement en trois maillages séparés distincts : le maillage modal, le maillage volumique et le maillage intégral. Chaque maillage a ses degrés de liberté propre et sa propre numérotation.

La condition de Dirichlet nulle sur l'axe est réalisée en annulant les lignes et les colonnes des degrés de liberté correspondants.

L'inversion de la matrice totale (4.143) est réalisée par un complément de Schur. La première étape du complément de Schur consiste en l'inversion de la matrice strictement volumique creuse  $A_{0m}$  (ce qui permet l'utilisation du solveur creux parallèle MUMPS développé au CERFACS). Cette première étape correspond en terme d'équations aux dérivées partielles à un problème de Dirichlet pur (les degrés de liberté modaux et intégraux sont mis à zéro) pour l'opérateur volumique compact. Ce problème est bien posé sauf pour un nombre dénombrable de fréquence sans points d'accumulation. L'interprétation des étapes ultérieures en terme d'équations aux dérivées partielles n'a pas encore été mise à jour. Le caractère bien posé du problème est un sujet ouvert.

L'assemblage de chaque matrice est parallélisé *via* le logiciel d'algèbre linéaire parallèle MPF développé à EADS-CCR. Les données de l'écoulement porteur provenant du solveur fluide sont vues par tous les processeurs. Le post-traitement des données acoustiques (obtention de la pression acoustique, de l'intensité en décibels sur le maillage et des diagrammes de rayonnement) se fait après rapatriement des données acoustiques *via* l'utilisation d'exécutables annexes.



# Chapitre 5

## Résultats numériques

Ce chapitre présente les résultats numériques issus du code développé PA2R. Les deux premiers paragraphes proposent des alternatives théoriques et numériques à la méthodologie actuelle du code PA2R :

- Un élément fini naturel conforme dans les espaces de Sobolev axisymétriques à poids propose une alternative aux éléments finis classiques utilisés pour la propagation acoustique volumique.
- Une condition rayonnante approchée de type Robin est proposée comme une alternative aux conditions intégrales complexes.

Les paragraphes suivants présentent la démarche de validation et étudient les résultats produits :

- Les cas-tests analytiques de validation des différents modules du code PA2R sont détaillés.
- Le code PA2R est ensuite validé comparativement au code ACTI3S sur une même géométrie.
- Les résultats originaux sont finalement commentés.

### 5.1 Singularité axiale

#### 5.1.1 Problématique

Les domaines considérés ici sont les domaines transverses bidimensionnels.

La formulation variationnelle (4.21) est établie dans des espaces de Sobolev axisymétriques transverses à poids (4.19). L'utilisation d'éléments finis classiques  $H^1$ -conformes continus est *a priori* impossible pour les modes azimutaux  $m$  non nuls à

cause du terme singulier sur l'axe  $m^2 \int_{\Omega} \frac{p_m \overline{p_m^t}}{r} dr dz$ .

Plusieurs alternatives se présentent pour évincer cette singularité :

- Pour le cas de l'équation de Helmholtz homogène, une première méthode consiste à utiliser une formulation analogue à la formulation (C) (4.8), mais n'utilisant que des opérateurs différentiels d'ordre 1.

Les intégrales axisymétriques volumiques ne sont alors plus singulières :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ik}{2} \left[ - \int_{\Omega} \overleftrightarrow{\nabla} p \overline{v^t} + \int_{\Omega} p \overline{\operatorname{div} v^t} \right] - k^2 \int_{\Omega} \overline{v} \overline{v^t} \\ = -ik \int_{\Gamma} D^*(\overline{v} \cdot \overline{n}) \overline{p^t} + \int_{\Gamma} N p \cdot \overline{p^t}, \\ \\ \frac{ik}{2} \left[ - \int_{\Omega} \operatorname{div} \overline{v} \overline{p^t} + \int_{\Omega} \overline{v} \overleftrightarrow{\nabla} \overline{p^t} \right] - \int_{\Omega} k^2 \overline{v} \cdot \overline{v^t} \\ = ik \int_{\Gamma} D p \overline{v^t} \cdot \overline{n} - \int_{\Gamma} k^2 S(\overline{v} \cdot \overline{n}) \overline{v^t} \cdot \overline{n}, \\ \forall (p^t, v^t) \in H^1(\Omega) \times H^{\operatorname{div}}(\Omega) \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Cette méthode est impossible à réaliser en présence d'un écoulement variable sans faire apparaître des dérivées de l'écoulement porteur.

Elle fait, de plus, apparaître une inconnue vectorielle volumique non naturelle : elle est numériquement coûteuse.

- Une deuxième approche consiste en l'utilisation d'éléments finis classiques continus  $H^1$ -conformes,  $P^1$  par éléments, auxquels une condition de Dirichlet numérique nulle sur l'axe est imposée.

La connaissance *a posteriori* du comportement de la solution au niveau de l'axe pour les modes azimutaux non nuls est ici détournée en une condition de bord "numérique".

Cette approche est détaillée dans le paragraphe suivant. Le code actuel utilise pour l'instant uniquement ces éléments finis classiques.

- On propose dans ce paragraphe l'alternative d'un élément fini axisymétrique naturel dans les espaces de Sobolev à poids (4.19), où le problème est naturellement bien posé.

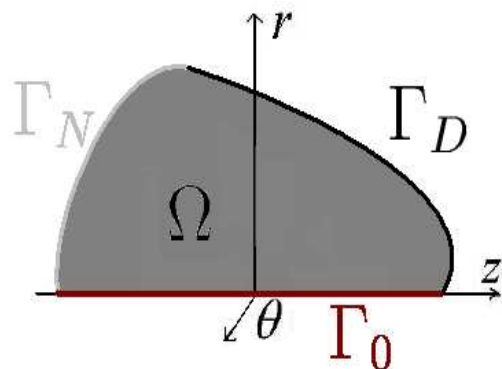
L'implémentation de ce nouvel élément fini axisymétrique dans le code global n'est pas finalisée : un travail supplémentaire au niveau des conditions intégrales est nécessaire.

Les résultats présentés sont obtenus à l'aide d'un code prototype développé en SCILAB.

Le problème simplifié du Laplacien axisymétrique est traité pour simplifier la démarche en éliminant les termes volumiques inutiles.

### 5.1.2 Élément fini axisymétrique

#### Problématique



Géométrie

Les domaines considérés ici sont des domaines transverses bidimensionnels. Nous considérons le problème modèle de Dirichlet-Neumann pour le Laplacien en domaine axisymétrique  $\Omega \times [0, 2\pi]$ . L'ouvert  $\Omega \subset ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  (constitué des points  $(r, z)$  tel que  $r > 0, z \in \mathbb{R}$ ) est connexe, borné et de frontière  $\partial\Omega$  de classe  $C^1$  par morceaux, se décomposant en trois parties  $\Gamma_0, \Gamma_N$  et  $\Gamma_D$ , d'intérieurs disjoints :  $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D$ , où  $\Gamma_0 = \partial\Omega \cap \{r = 0\}$ . Le problème modèle posé dans  $\Omega \times [0, 2\pi]$  :

$$\begin{cases} -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = f(r, z) e^{i\theta}, & \forall (r, z, \theta) \in \Omega \times [0, 2\pi] \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g(r, z) e^{i\theta}, & \forall (r, z, \theta) \in \Gamma_N \times [0, 2\pi] \\ u = 0, & \forall (r, z, \theta) \in \Gamma_D \times [0, 2\pi] \end{cases}, \quad (5.2)$$

est équivalent au problème posé dans le domaine transverse  $\Omega$  :

$$\begin{cases} -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{u}{r^2} = f(r, z), & \forall (r, z) \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g(r, z), & \forall (r, z) \in \Gamma_N \\ u = 0, & \forall (r, z) \in \Gamma_D \end{cases} \quad (5.3)$$

#### Problème continu

- Dans la suite, on note  $\|u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} |u|^2 dx}$  la norme  $L^2$  d'une fonction  $u$  de carré intégrable. Pour toute fonction mesurable, définie sur  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  par  $u : (r, z) \mapsto u(r, z)$ , on note  $u_{\sqrt{\cdot}}$  la fonction  $u_{\sqrt{\cdot}}(r, z) \equiv \frac{u(r, z)}{\sqrt{r}}$  et  $u^{\sqrt{\cdot}}$  la fonction  $u^{\sqrt{\cdot}}(r, z) \equiv \sqrt{r} u(r, z)$ . On considère les espaces de Sobolev à poids suivants :

$$L_a^2(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tel que } u^\vee \in L^2(\Omega)\}. \quad (5.4)$$

$$H_a^1(\Omega) = \{u \in L_a^2(\Omega), \text{ tel que } u_{\sqrt{\cdot}} \in L^2(\Omega), \vec{\nabla} u \in L_a^2(\Omega)\}. \quad (5.5)$$

On pose  $\|u\|_{L_a^2(\Omega)} = \|u^\vee\|_{L^2(\Omega)}$ ,  $\|u\|_{H_a^1(\Omega)} = \sqrt{\|u\|_{L_a^2(\Omega)}^2 + \|\vec{\nabla} u\|_{L_a^2(\Omega)}^2 + \|u_{\sqrt{\cdot}}\|_{L^2(\Omega)}^2}$  comme normes respectives. Avec les notations précédentes, pour  $\Gamma \subset \partial\Omega$ , on note  $L_a^2(\Gamma, \partial\Omega)$  l'ensemble des fonctions  $u : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mesurables, nulles hors de  $\Gamma$  et telles que  $u^\vee \in L^2(\Gamma)$ .

• On note  $C_a^\infty(\overline{\Omega})$  l'ensemble des restrictions à  $\Omega$  des fonctions indéfiniment dérivables et à support compact sur  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ . Suivant B. Mercier et G. Raugel [31], cet ensemble est dense dans  $H_a^1(\Omega)$ . De plus, l'application trace notée  $\gamma_0$ , qui à  $v \in C_a^\infty(\overline{\Omega})$  associe ses valeurs au bord  $\gamma_0 v : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , se prolonge de manière unique en une application linéaire continue de  $H_a^1(\Omega)$  dans  $L_a^2(\partial\Omega, \partial\Omega)$ . Toute fonction  $u \in H_a^1(\Omega)$  vérifie  $\gamma_0 u = 0$  sur l'axe. On note  $H_{0,a}^1(\Omega)$  l'espace de Hilbert tel que  $\gamma_0 u = 0$  sur  $\Gamma_D$ . Grâce à la compacité de  $H_a^1(\Omega)$  dans  $L_a^2(\Omega)$ , il est facile de montrer que la semi-norme  $|\cdot|_{H_a^1(\Omega)}$  définie par :

$$|u|_{H_a^1(\Omega)} = \sqrt{\|\vec{\nabla} u\|_{L_a^2(\Omega)}^2 + \|u_{\sqrt{\cdot}}\|_{L^2(\Omega)}^2}, \quad u \in H_{0,a}^1(\Omega). \quad (5.6)$$

est une norme sur  $H_{0,a}^1(\Omega)$ , si la mesure de  $\Gamma_0$  est non nulle. On se donne  $f \in L_a^2(\Omega)$  et  $g \in L_a^2(\Gamma_N, \partial\Omega)$ . On introduit la forme bilinéaire  $a(u, v)$ , définie sur  $H_{0,a}^1(\Omega)$  par

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \vec{\nabla} v \, r \, dr \, dz + \int_{\Omega} uv \frac{dr \, dz}{r} \quad \text{et la forme linéaire } \ell(v) = \int_{\Omega} f v \, r \, dr \, dz + \int_{\Gamma_N} g v \, rd\gamma. \quad (5.7)$$

Le problème (5.3) se formule variationnellement :

Trouver  $u \in H_{0,a}^1(\Omega)$ , tel que :  $a(u, v) = \ell(v)$ ,  $\forall v \in H_{0,a}^1(\Omega)$ .

La forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est coercive et le problème (5.7) admet une unique solution dans  $H_{0,a}^1(\Omega)$ .

### Discrétisation conforme

• Soit  $\mathcal{T}$  une triangulation régulière de  $\Omega$  avec les conditions classiques de compatibilité d'intersection exposées par exemple dans Ciarlet [17]. On note  $\mathcal{T}^0$  (resp.  $\mathcal{T}^1$ ,  $\mathcal{T}^2$ ) l'ensemble des sommets de cette triangulation (resp. arêtes, triangles). On désigne par  $P^1$  l'espace des polynômes de degré total inférieur ou égal à un. Dans l'article de B. Mercier et G. Raugel, la solution  $u$  est approchée dans un espace  $H_{\mathcal{T}}$  d'éléments finis classiques  $P^1$  continus avec une condition de Dirichlet nulle sur l'axe et sur  $\Gamma_D$  :

$$H_{\mathcal{T}} = \left\{ u \in C^0(\overline{\Omega}), u|_K \in P^1, \forall K \in \mathcal{T}^2, u|_{\Gamma_0} = 0, u|_{\Gamma_D} = 0 \right\}. \quad (5.8)$$

La conformité  $H_{\mathcal{T}} \subset H_{0,a}^1(\Omega)$  impose une condition de Dirichlet discrète sur l'axe. L'espace continu  $H_{0,a}^1(\Omega)$  est alors remplacé par l'espace discret  $H_{\mathcal{T}}$  dans la formulation (5.7) et nous cherchons  $u_{\mathcal{T}} \in H_{\mathcal{T}}$  tel que :

$$a(u_{\mathcal{T}}, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H_{\mathcal{T}}. \quad (5.9)$$

Dans le même travail, ces auteurs montrent que  $\|u - u_{\mathcal{T}}\|_{H_a^1(\Omega)}$  tend vers zéro à l'ordre un relativement à la mesure  $h_{\mathcal{T}}$  de la plus grande arête du maillage.

- Nous proposons ici un espace "naturel" de discrétisation, en référence à l'espace fonctionnel  $H_a^1(\Omega)$  où le problème (5.7) est bien posé. Nous considérons l'espace discret suivant :

$$X_{\mathcal{T}} = \left\{ u \in C^0(\overline{\Omega}), u_{\sqrt{\cdot}}|_K \in P^1, \forall K \in \mathcal{T}^2, u|_{\Gamma_D} = 0 \right\}. \quad (5.10)$$

Une fonction  $\tilde{u}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}$  est de la forme :

$$\tilde{u}_{\mathcal{T}}(r, z) = \tilde{\alpha}\sqrt{r} + \tilde{\beta}r\sqrt{r} + \tilde{\gamma}\sqrt{r}z, \quad \forall K \in \mathcal{T}^2, \quad (5.11)$$

où  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) \in \mathbb{R}^3$ , alors qu'une fonction  $u_{\mathcal{T}} \in H_{\mathcal{T}}$  est de la forme  $u_{\mathcal{T}}(r, z) = \alpha + \beta r + \gamma z$ . Cet espace discret  $X_{\mathcal{T}}$  est naturellement inclus dans l'espace fonctionnel de référence :  $X_{\mathcal{T}} \subset H_{0,a}^1(\Omega)$ . Pour la formulation discrète de (5.7), l'espace continu  $H_{0,a}^1(\Omega)$  est remplacé par l'espace discret  $X_{\mathcal{T}}$  et nous cherchons  $\tilde{u}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}$  tel que :

$$a(\tilde{u}_{\mathcal{T}}, v) = \ell(v), \quad \forall v \in X_{\mathcal{T}}. \quad (5.12)$$

Par rapport au choix antérieur de Mercier-Raugel, nous disposons donc de **plus** de degrés de liberté : pour chaque sommet  $S$  de l'axe  $\mathcal{T}^0 \cap \Gamma_0$ , la fonction de base correspondante  $\phi_S \in X_{\mathcal{T}}$  induit un degré de liberté sur l'axe (c'est le coefficient  $\tilde{\alpha}$  de  $\sqrt{r}$  dans (5.11)), même si la valeur correspondante de la fonction est nulle. Citons ici le travail de N. Gmati [33], qui introduit une fonction auxiliaire non singulière sur l'axe, reformule le laplacien axisymétrique en prenant cette fonction comme inconnue et résout le problème discret ainsi obtenu avec des éléments finis classiques. Depuis, l'analyse numérique dans l'espace de Sobolev à poids  $H_a^1$  d'une approche spectrale fondée sur une approximation polynomiale de haut degré a été développée par C. Bernardi, M. Dauge et Y. Maday [10].

### Cas-test analytique

- On suppose dans cette partie que  $\Omega = ]0, 1]^2$  et  $\Gamma_D = \emptyset$ . On introduit deux paramètres réels  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , un second membre  $f$  donné par :

$$f(r, z) \equiv r^{\alpha} \left[ (\alpha^2 - 1) \frac{z^{\beta}}{r^2} + \beta(\beta - 1)z^{\beta-2} \right]. \quad (5.13)$$

et une donnée de Neumann  $g$  telle que  $g(r, z) = \alpha$  si  $r = 1$ ,  $-\beta r^{\alpha} z^{\beta-1}$  si  $z = 0$ ,  $\beta r^{\alpha}$  si  $z = 1$ . La solution du problème (5.7) s'exprime simplement :  $u(r, z) \equiv r^{\alpha} z^{\beta}$ .

- Nous présentons à la figure 1 les courbes d'isovaleurs (et leur zoom au niveau de l'axe) des solutions approchées du problème (5.7) pour  $u(r, z) \equiv r^{1/4} z^{\beta}$  par la méthode de Mercier-Raugel et l'approche proposée dans cette Note pour trois valeurs entières :  $\beta = 0$ ,  $\beta = 1$  et  $\beta = 2$  et pour un maillage triangulaire régulier à  $31 \times 31$  degrés de liberté. Les numéros sur les axes présentent les indices discrets de maille. La colonne de droite est un agrandissement de la partie encadrée et permet

une visualisation plus précise des isovaleurs au niveau de l'axe. La condition de Dirichlet imposée pour le schéma Mercier-Raugel introduit des effets d'axe bien connus des praticiens. En revanche, notre approche est déjà précise avec ce maillage assez grossier : les degrés de liberté naturels sur l'axe suppriment les effets d'axe et l'erreur est suffisamment petite pour que notre solution approchée soit graphiquement confondue avec la solution analytique.

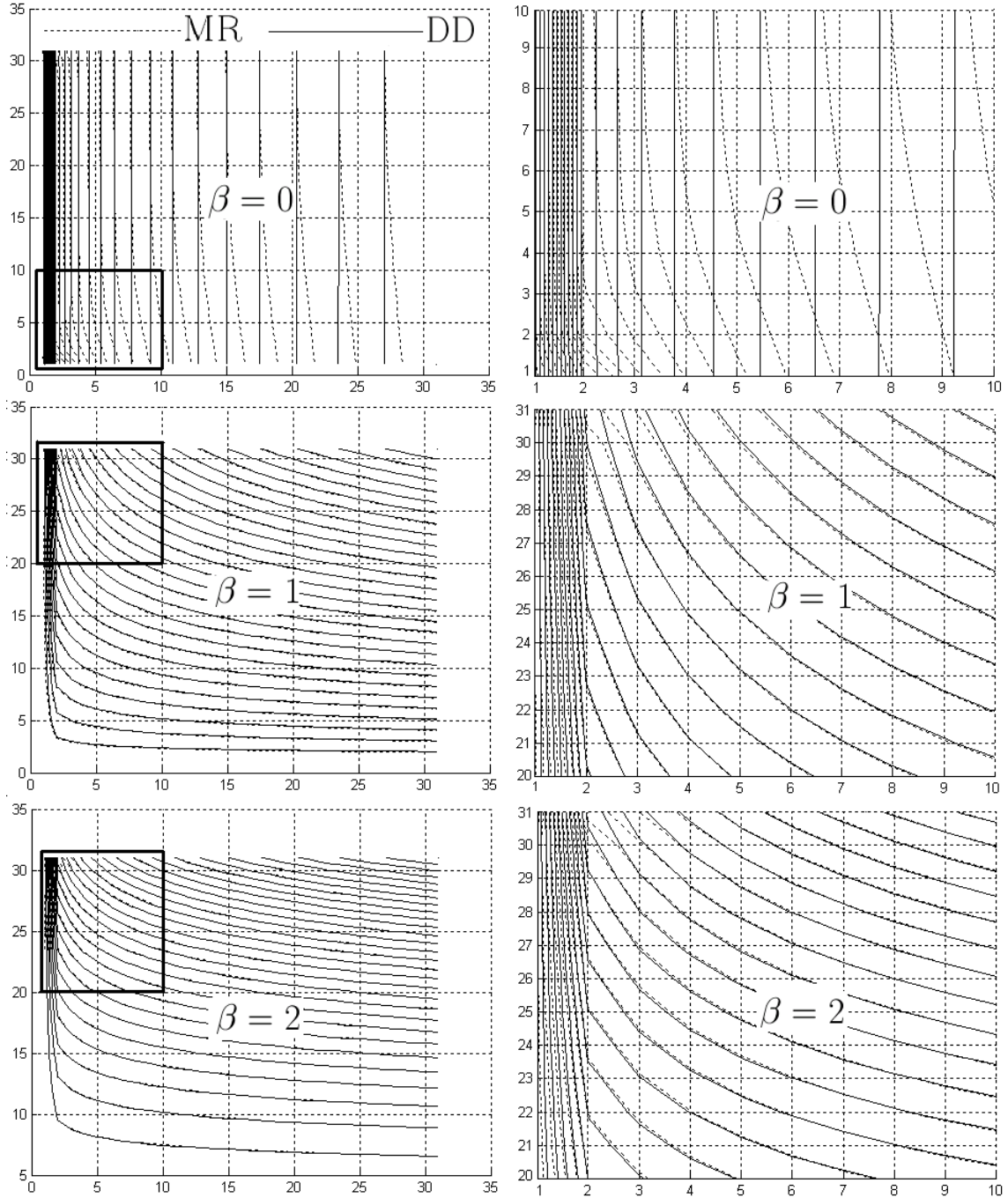


Fig. 1. Isovaleurs et zoom au niveau de l'axe  $u(r, z) \equiv r^{\frac{1}{4}}z^\beta$ ; nous comparons les résultats de Mercier-Raugel (MR) et notre approche (DD).

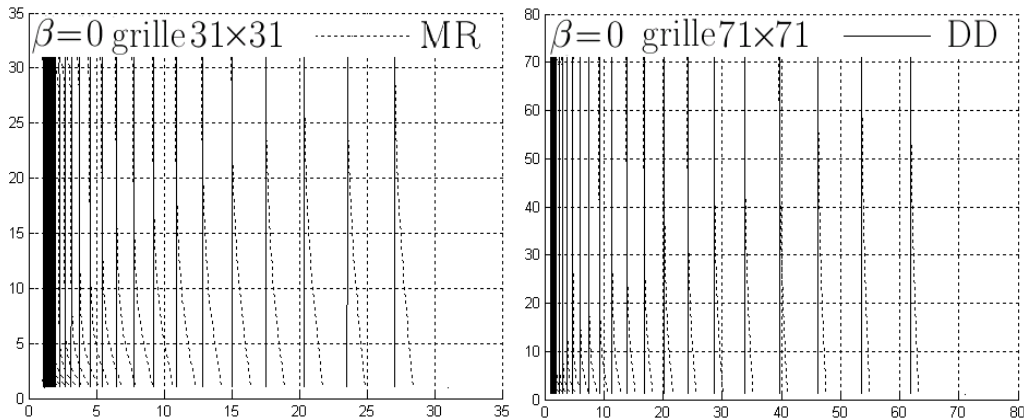


Fig. 2. Convergence en maillage des isovaleurs  $u(r, z) \equiv r^{1/4}$ ; nous comparons les résultats de Mercier-Raugel ( $MR$ ) et notre approche ( $DD$ ).

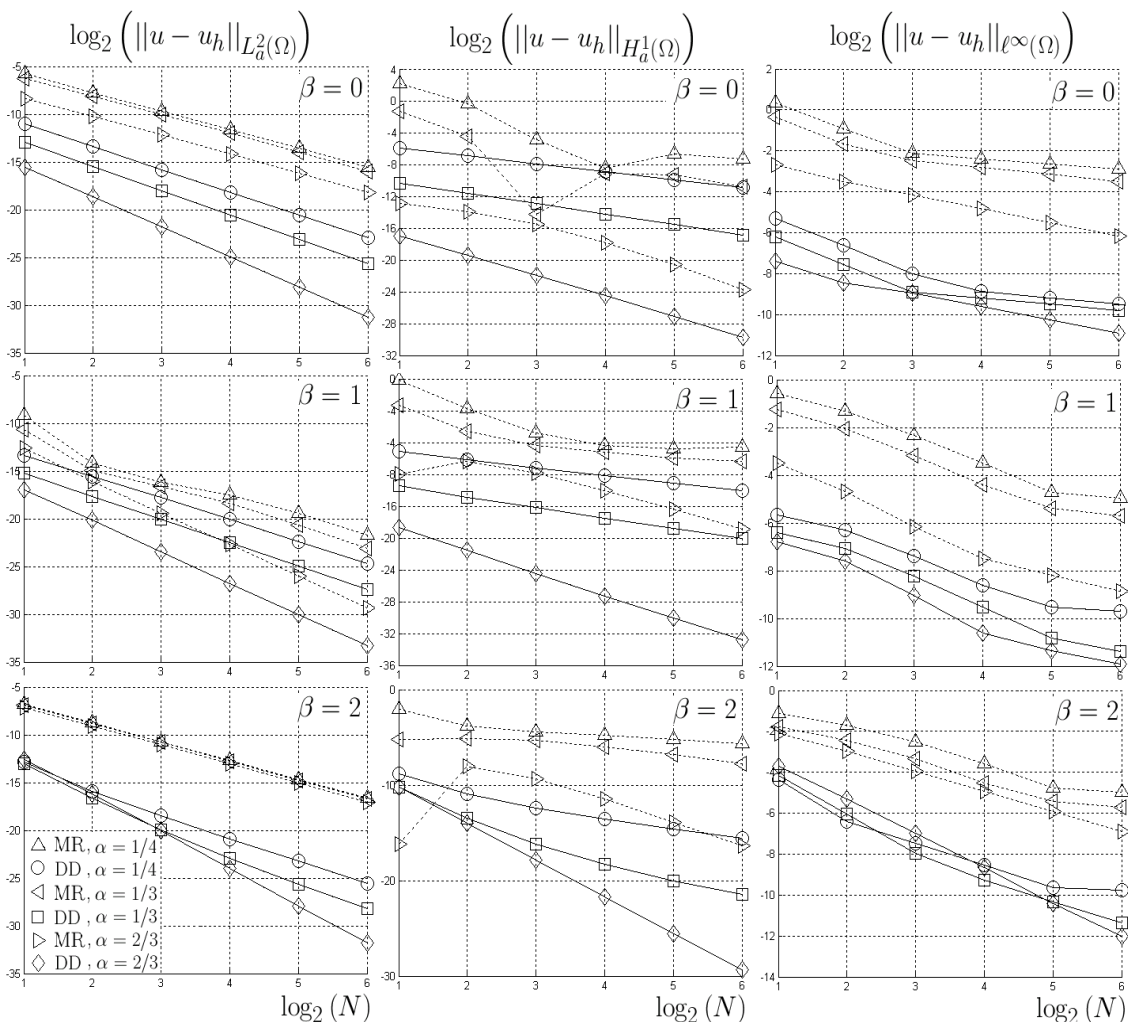


Fig. 3. Courbes de convergence pour diverses normes  $u(r, z) \equiv r^\alpha z^\beta$ ; nous comparons les résultats de Mercier-Raugel ( $MR$ ) et notre approche ( $DD$ ).

- Nous présentons à la figure 2 les isovaleurs des solutions approchées du problème (5.7) pour  $u(r, z) \equiv r^{1/4}$  par notre méthode et celle de Mercier-Raugel pour deux maillages triangulaires réguliers à  $31 \times 31$  et  $71 \times 71$  sommets. La figure de gauche correspond au maillage triangulaire  $31 \times 31$  et celle de droite au maillage  $71 \times 71$ . Les défauts d'axe s'ammenuisent par raffinement du maillage. Nous observons que notre approche est déjà très précise avec le maillage le plus grossier et l'erreur est suffisamment petite pour que notre solution approchée soit graphiquement confondue avec la solution analytique.
- Nous présentons à la figure 3 les courbes de convergence de l'erreur pour diverses normes en fonction du pas de maillage pour  $\alpha = 1/4$ ,  $\alpha = 1/3$ ,  $\alpha = 2/3$  et  $\beta = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\beta = 2$ . Les figures de gauche (resp. du milieu, de droite) correspondent à la norme  $L^2$  (resp. semi-norme  $H^1$  donnée par (5.6), norme  $\ell^\infty$ ). La présentation des résultats par une échelle logarithmique permet la lecture des ordres de convergence *via* la pente des droites. Par exemple, notre schéma pour  $\beta = 0$  et  $\alpha = 2/3$  converge en norme  $L^2$  (première figure) avec un ordre proche de 3. On constate expérimentalement que, de façon générale, la méthode que nous proposons ici a le même ordre de convergence que la méthode de Mercier-Raugel. Par contre à maillage donné, l'erreur avec notre méthode est beaucoup plus petite que celle obtenue avec le savoir-faire antérieur.

## 5.2 Condition de Robin

### 5.2.1 Problématique

Ce paragraphe présente une condition rayonnante approchée : la condition de Robin. Ce traitement alternatif aux équations intégrales complexes est implémenté dans le code PA2R et tous les résultats présentés ultérieurement ont également été réalisés avec cette condition.

### 5.2.2 Intégrale de bord dans l'espace de Lorentz

Dans l'espace transformé de Lorentz, le potentiel acoustique transformé vérifie l'équation des ondes. On impose au potentiel acoustique transformé une condition sortante approchée de Robin :

$$\frac{\widetilde{\partial\phi'_a}}{\widetilde{\partial n'}} = ik'_\infty \widetilde{\phi'_a}, \quad \forall x \in \Gamma'_\infty \quad (5.14)$$

Cette condition de Robin s'exprime dans l'espace physique de référence :

$$\frac{\partial\phi_a}{\partial n_L} = ik_\infty \frac{\sqrt{1 - M_\infty^2 n_z^2}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \phi_a, \quad \forall x \in \Gamma_\infty \quad (5.15)$$

L'intégrale de bord se réécrit :

$$\int_{\Gamma_\infty} \frac{\partial\phi_a}{\partial n_L} \bar{\psi} \, r dr dz = \frac{ik_\infty}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \int_{\Gamma_\infty} \sqrt{1 - M_\infty^2 n_z^2} \phi_a \bar{\psi} \, r dr dz \quad (5.16)$$

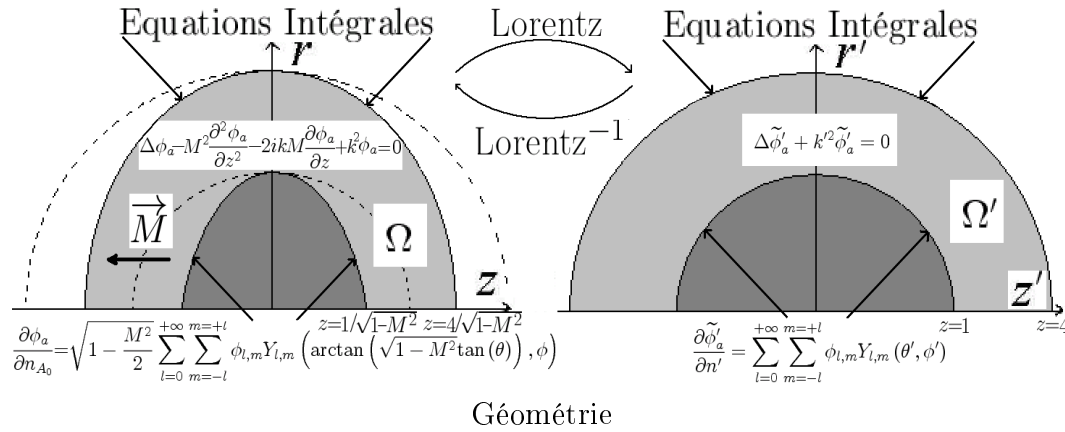


### 5.3 Cas-tests analytiques

Ce paragraphe présente les différents cas-tests analytiques, qui permettent de valider séparément la condition intégrale de rayonnement à l'infini et les conditions modales à l'entrée de la nacelle. Ces cas-tests valident également la propagation acoustique sur un écoulement uniforme.

#### 5.3.1 Validation des conditions intégrales

##### Problématique



Les notations de ce paragraphe ont déjà été introduites au paragraphe (4.2.4) du chapitre (4).

On propose ici un problème physique, élaboré de telle sorte, que le problème transformé associé soit un problème de Helmholtz avec une condition de Neumann sur la sphère unité. L'expression analytique de la solution transformée est ainsi connue. On se propose de résoudre numériquement ce problème *via* un traitement volumique par éléments finis et un couplage avec l'infini par les équations intégrales validant ainsi le couplage volumique-intégral en présence d'écoulement. La surface fictive  $\Gamma$ , où les équations intégrales sont posées, est placée à  $z = 4\sqrt{1 - M^2}$ .

##### Expression analytique

##### Cas général :

Le problème suivant dans l'espace physique de référence  $\Omega$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi_a \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \Delta \phi_a - M^2 \frac{\partial^2 \phi_a}{\partial z^2} - 2ikM \frac{\partial \phi_a}{\partial z} + k^2 \phi_a = 0, \quad \forall x \in \Omega \\ \frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A_0}} = \sqrt{1 - \frac{M^2}{2}} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{m=+l} \phi_{l,m} Y_{l,m} \left( \arctan \left( \sqrt{1 - M^2} \tan(\theta) \right), \phi \right), \quad \forall x \in \partial\Omega \end{array} \right. , \quad (5.17)$$

où  $(r, \theta, \phi)$  désignent les coordonnées sphériques de  $x$ . Le domaine  $\Omega$  est choisi de telle sorte qu'il devienne le domaine  $\Omega' = \mathbb{R}^3 \setminus B$  dans l'espace de Lorentz ( $B$  désigne la boule unité et  $\partial\Omega' = S$  avec  $S$  désignant la sphère unité). Le nouveau problème dans l'espace transformé s'écrit :

$$\begin{cases} \Delta \tilde{\phi}'_a + k'^2 \tilde{\phi}'_a = 0, & \forall x' \in \Omega' \\ \frac{\partial \tilde{\phi}'_a}{\partial n'} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{m=+l} \phi_{l,m} Y_{l,m}(\theta', \phi'), & \forall x' \in \partial\Omega' \end{cases}, \quad (5.18)$$

où  $k' = \frac{k}{\sqrt{1-M^2}}$  et  $(r', \theta', \phi')$  désignent les coordonnées polaires de  $x'$  dans l'espace de Lorentz. La solution de ce problème auquel on a ajouté la condition de Sommerfeld  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial \tilde{\phi}'_a}{\partial n'} - ik' \tilde{\phi}'_a \right|^2 \rightarrow 0$  existe et est unique. Son expression analytique est connue :

$$\tilde{\phi}'_a = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{m=+l} \phi_{l,m} \frac{h_l^{(1)}(k' r')}{k' \left[ \frac{d}{dr'} h_l^{(1)} \right] (k')} (r') Y_{l,m}(\theta', \phi'), \quad (5.19)$$

On en déduit l'expression analytique du potentiel acoustique dans l'espace physique de référence :

$$\phi_a = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{m=+l} \phi_{l,m} \frac{h_l^{(1)}(k' r')}{k' \left[ \frac{d}{dr'} h_l^{(1)} \right] (k')} (r') Y_{l,m} \left( \arctan \left( \sqrt{1-M^2} \tan(\theta) \right), \phi \right) e^{\frac{ik' M z}{\sqrt{1-M^2}}}, \quad (5.20)$$

$$\text{avec } r' = \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{z^2}{1-M^2}}$$

### Premier cas-Test :

Le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta \phi_a - M^2 \frac{\partial^2 \phi_a}{\partial z^2} - 2ikM \frac{\partial \phi_a}{\partial z} + k^2 \phi_a = 0, & \forall x \in \Omega \\ \frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A_0}} = \sqrt{1 - \frac{M^2}{2}} Y_{0,0} \left( \arctan \left( \sqrt{1 - M^2} \tan(\theta) \right), \phi \right) \\ \tilde{\phi}'_a \text{ vérifie la condition de Sommerfeld} \end{cases} \quad (5.21)$$

a pour solution :

$$\begin{aligned} \phi_a &= -\frac{h_0^{(1)}(k' r')}{k' h_0^{(1)'(k')} } Y_{0,0} \left( \arctan \left( \sqrt{1 - M^2} \tan(\theta) \right), \phi \right) e^{\frac{ik' M z}{\sqrt{1-M^2}}} \\ \phi_a &= \frac{e^{ik'(r'-1)}}{r'} [1 + ik'] \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \frac{1}{1 + k'^2} e^{\frac{ik' M z}{\sqrt{1-M^2}}} \end{aligned} \quad (5.22)$$

**Deuxième cas-Test :**

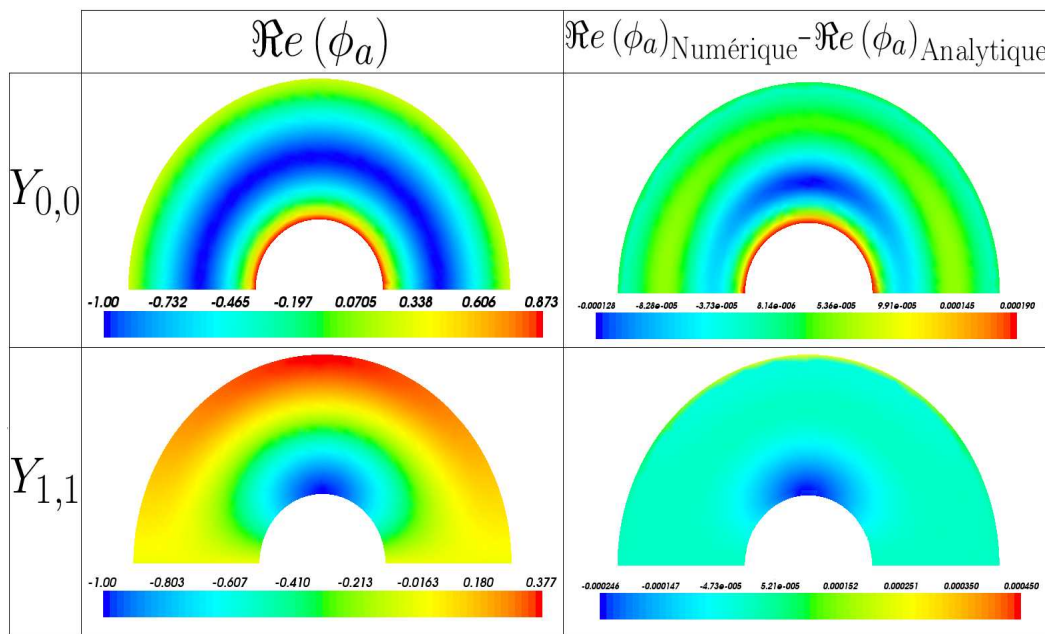
Le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta \phi_a - M^2 \frac{\partial^2 \phi_a}{\partial z^2} - 2ikM \frac{\partial \phi_a}{\partial z} + k^2 \phi_a = 0, \forall x \in \Omega \\ \frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A_0}} = \sqrt{1 - \frac{M^2}{2}} Y_{1,1} \left( \arctan \left( \sqrt{1 - M^2} \tan(\theta) \right), \phi \right) \\ \tilde{\phi}'_a \text{ vérifie la condition de Sommerfeld} \end{cases} \quad (5.23)$$

a pour solution :

$$\begin{aligned} \phi_a &= -\frac{h_1^{(1)}(k'r')}{k'h_1^{(1)'(k')}} Y_{1,1}(\theta', \phi') e^{\frac{ik'Mz}{\sqrt{1-M^2}}} \\ \phi_a &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\phi} \sin\theta' e^{ik(r'-1)} \left( \frac{i}{r'^2} + \frac{k'}{r'} \right) \frac{[(2 - k'^2) + 2ik']}{[(2 - k'^2)^2 + 4k'^2]} e^{\frac{ik'Mz}{\sqrt{1-M^2}}} \end{aligned}, \quad (5.24)$$

**Résultats numériques sans écoulement**



Les résultats de cette figure ont été obtenus sur un maillage non structuré de diamètre inférieur à 15 cm (la sphère de Neumann du problème transformée a un diamètre unitaire).

Le cas-test est effectué avec un nombre de Mach nul et avec un nombre d'ondes  $kR = 2$ .

La première ligne concerne le premier cas-test détaillé ci-dessus avec l'harmonique sphérique  $Y_{0,0}$  comme condition de Neumann. Cette configuration ne possède pas le terme volumique singulier du laplacien axisymétrique.

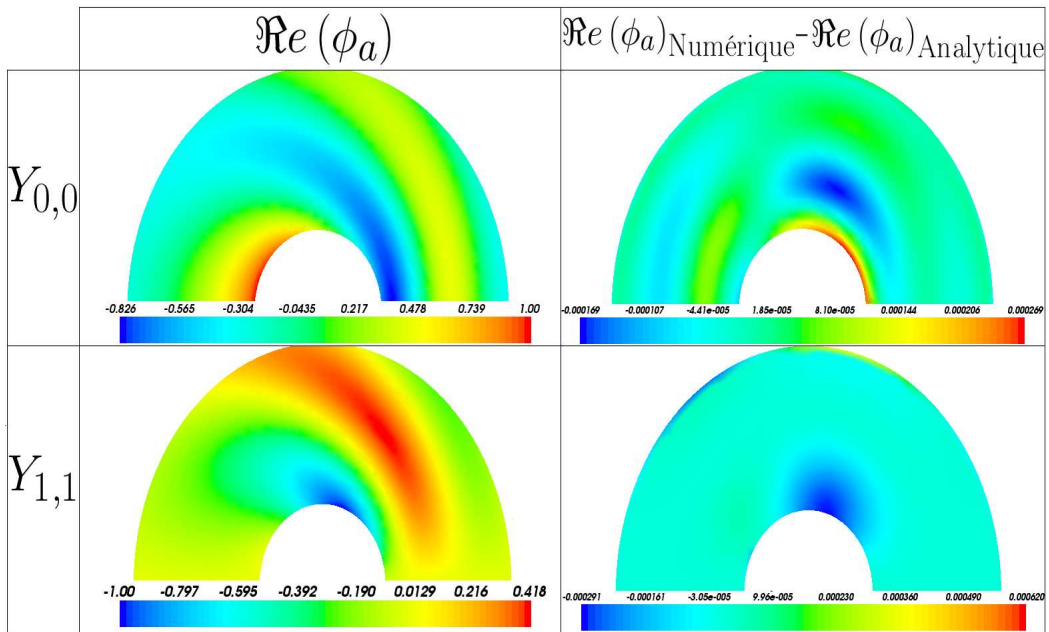
La deuxième ligne concerne le deuxième cas-test détaillé ci-dessus avec l'harmonique

sphérique  $Y_{1,1}$  comme condition de Neumann. Cette configuration possède le terme volumique singulier du laplacien axisymétrique.

La première colonne présente la partie réelle du potentiel acoustique calculé numériquement. Les solutions sont renormalisées par leur maximum pour présenter des résultats unitaires (attention les couleurs changent de valeurs pour chaque graphique).

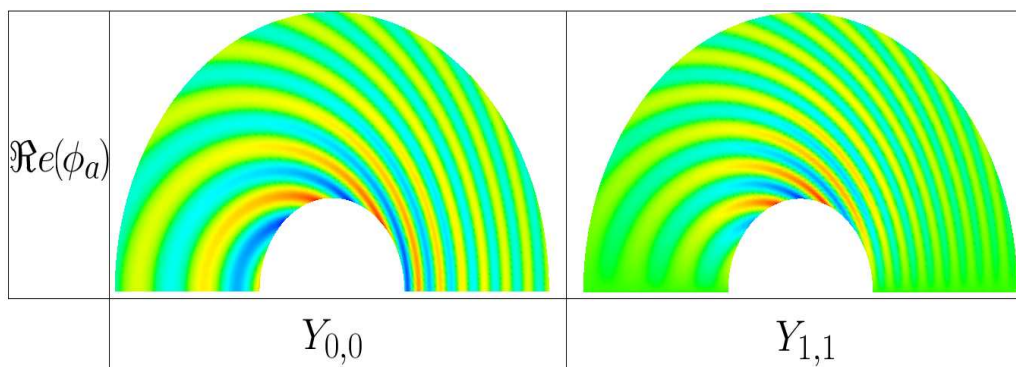
La dernière colonne représente la différence relative de la solution renormée avec la solution analytique renormée correspondante.

**Résultats numériques en présence d'écoulement**



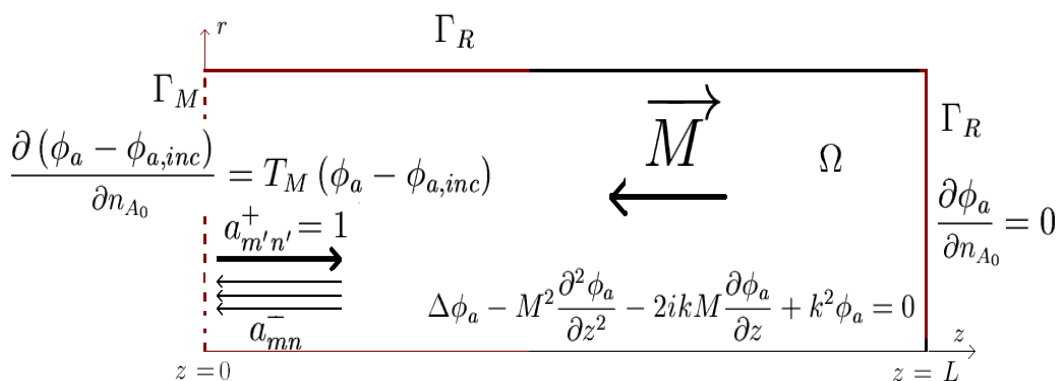
Le même cas-test que précédemment est réalisé avec un nombre de Mach constant de 0.3.

**Résultats numériques en présence d'écoulement avec un  $kR$  élevé**



Les mêmes résultats ont été obtenus avec un maillage plus raffiné de mailles de diamètre inférieur à 3 cm. On constate la convergence en maillage vers la solution analytique. Les résultats exhibés correspondent à  $kR = 15$ .

### 5.3.2 Validation des conditions modales



Bouchon d'aspirine avec écoulement

Les domaines considérés ici sont bidimensionnels transverses.

On propose ici le cas-test d'un tube d'aspirine infini dans le sens des  $z < 0$ , de diamètre unitaire, et bouché en  $z = L$  (condition de réflexion pour les ondes). La surface fictive modale  $\Gamma_M$  est placée à l'origine. Nous introduisons un écoulement uniforme (qu'importe son orientation). Tout se passe comme si le fond du bouchon d'aspirine était transparent pour l'écoulement, alors que les ondes acoustiques y sont réfléchies.

Ce cas-test physiquement absurde, mais possédant une solution analytique, va nous permettre de tester la condition modale en présence d'écoulement sur  $\Gamma_M$ .

### Opérateur Dirichlet-Neumann et bilan d'énergie

On considère le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi_a \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \Delta \phi_a - M^2 \frac{\partial^2 \phi_a}{\partial z^2} - 2ikM \frac{\partial \phi_a}{\partial z} + k^2 \phi_a = 0, \quad \forall x \in \Omega \\ \frac{\partial(\phi_a - \phi_{a,inc})}{\partial n_{A_0}} = T_M(\phi_a - \phi_{a,inc}), \quad \forall x \in \Gamma_M \\ \frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A_0}} = 0, \quad \forall x \in \Gamma_R \end{array} \right. , \quad (5.25)$$

où  $T_M$  est l'opérateur Dirichlet-Neumann modal avec écoulement (4.74). Les coefficients modaux réfléchis et incidents vérifient l'égalité d'énergie suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k_{r mn} \leq [k]} |a_{mn, \Phi}^+|^2 = \sum_{k_{r mn} \leq [k]} |a_{mn, \Phi}^-|^2 - \sum_{k_{r mn} > [k]} 2\Im m \left( a_{mn, \Phi}^+ \overline{a_{mn, \Phi}^-} \right) \\ \text{et} \\ \int_{\Omega} |\nabla \phi_a|^2 - k^2 \int_{\Omega} |\phi_a|^2 - M^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \phi_a}{\partial z} \right|^2 - 2kM \int_{\Omega} \Im m \left( \frac{\partial \overline{\phi_a}}{\partial z} \phi_a \right) = \quad , \\ \frac{2S(\Gamma_M)}{k} \left[ \sum_{k_{r mn} > [k]} (|a_{mn, \Phi}^+|^2 - |a_{mn, \Phi}^-|^2) + 2\Im m \left( \sum_{k_{r mn} \leq [k]} a_{mn, \Phi}^+ \overline{a_{mn, \Phi}^-} \right) \right] \end{array} \right. \quad (5.26)$$

où  $a_{mn, \Phi}^{\pm} = \frac{|\mu_{mn}^{\pm}|}{|\zeta_{mn}^{\pm}|} a_{mn}^{\pm}$  est la quantité physique liée au coefficient modal renormalisé pour le bilan d'énergie. Ce bilan d'énergie théorique est un premier moyen de valider les résultats numériques obtenus en vérifiant leur concordance.

Preuve de (5.26) :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |\nabla \phi_a|^2 - k^2 \int_{\Omega} |\phi_a|^2 - M^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \phi_a}{\partial z} \right|^2 - 2kM \int_{\Omega} \Im m \left( \frac{\partial \overline{\phi_a}}{\partial z} \phi_a \right) = \int_{\Gamma_M} \frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A_0}} \overline{\phi_a} \\ & \int_{\Gamma_M} \frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A_0}} \overline{\phi_a} = \int_{\partial \Omega} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}} (a_{mn}^+ \mu_{mn}^+ \Xi_{r mn} + a_{mn}^- \mu_{mn}^- \Xi_{r mn}) \overline{(a_{mn}^+ \Xi_{r mn} + a_{mn}^- \Xi_{r mn})} \\ & = \sum_{(m,n)} (\mu_{mn}^+ |a_{mn}^+|^2 + \mu_{mn}^- |a_{mn}^-|^2 + \mu_{mn}^+ a_{mn}^+ \overline{a_{mn}^-} + \mu_{mn}^- a_{mn}^- \overline{a_{mn}^+}) \|\Xi_{m,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & = \frac{2S(\Gamma_M)}{k} \left[ -i \sum_{k_{r mn} \leq [k]} (|a_{mn, \Phi}^+|^2 - |a_{mn, \Phi}^-|^2) + \sum_{k_{r mn} > [k]} (|a_{mn, \Phi}^+|^2 - |a_{mn, \Phi}^-|^2) \right. \\ & \quad \left. -i \sum_{k_{r mn} \leq [k]} (a_{mn, \Phi}^+ \overline{a_{mn, \Phi}^-} - a_{mn, \Phi}^- \overline{a_{mn, \Phi}^+}) + \sum_{k_{r mn} > [k]} (a_{mn, \Phi}^+ \overline{a_{mn, \Phi}^-} - a_{mn, \Phi}^- \overline{a_{mn, \Phi}^+}) \right] \\ & = -i \frac{2S(\Gamma_M)}{k} \left[ \sum_{k_{r mn} \leq [k]} (|a_{mn, \Phi}^+|^2 - |a_{mn, \Phi}^-|^2) + i \sum_{k_{r mn} > [k]} (|a_{mn, \Phi}^+|^2 - |a_{mn, \Phi}^-|^2) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k_{r mn} \leq [k]} 2i \Im m \left( a_{mn, \Phi}^+ \overline{a_{mn, \Phi}^-} \right) - \sum_{k_{r mn} > [k]} 2\Im m \left( a_{mn, \Phi}^+ \overline{a_{mn, \Phi}^-} \right) \right] \end{aligned}$$

En distinguant partie réelle et partie imaginaire, l'égalité ci-dessus donne l'égalité d'énergie (5.26).

### Expression analytique

#### Mode propagatif :

On se fixe un mode via deux entiers naturels  $m', n'$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{mn}^+ = 0 \quad \forall (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{(m', n')\} \\ a_{m'n'}^+ = 1 \\ k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ est supposé assez grand pour que le mode } m'n' \text{ soit propagatif} \end{array} \right. , \quad (5.27)$$

La solution est cherchée sous la forme de l'onde incidente plus une onde réfléchie. On cherche  $\beta \in \mathbb{C}$ , tel que :

$$\phi_a = \phi_{m'n'}^+ + \beta \phi_{m'n'}^- \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \phi_{m'n'}^+ &= \frac{J_{m'}(k_{rm'n'}r)}{\sqrt{|\zeta_{m'n'}^+| \frac{\|J_{m'}(k_{rm'n'}r)\|^2_{L^2(\Gamma_M)}}{S(\Gamma_M)}}} e^{i \frac{kM + \sqrt{k^2 - (1-M^2)k_{rm'n'}^2}}{1-M^2} z} \\ \phi_{m'n'}^- &= \frac{J_{m'}(k_{rm'n'}r)}{\sqrt{|\zeta_{m'n'}^-| \frac{\|J_{m'}(k_{rm'n'}r)\|^2_{L^2(\Gamma_M)}}{S(\Gamma_M)}}} e^{i \frac{kM - \sqrt{k^2 - (1-M^2)k_{rm'n'}^2}}{1-M^2} z} \end{aligned} \quad (5.29)$$

La condition de réflexion rigide permet d'identifier  $\beta$  :

$$\frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A_0}|_L} = 0 \implies \beta = e^{2i \frac{\sqrt{k^2 - (1-M^2)k_{rm'n'}^2}}{1-M^2} L} \quad (5.30)$$

Dans le cas d'un Mach nul pour le mode plan  $(m', n') = (0, 0)$  et une longueur d'ondes dont la dimension de la cavité en est un multiple  $L = n \times \lambda$ , alors  $\beta = 1$ .  $|\beta| = 1$  est toujours vrai. La solution du problème (5.27) est analytique et donnée par (5.28). Donnons l'expression analytique de la solution pour le mode 00, qui est toujours propagatif à Mach nul pour  $L = \lambda$  :

$$\Re(\phi_a) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{kR} 2\cos(kz) \quad (5.31)$$

#### Mode évanescent :

On se fixe un mode via deux entiers naturels  $m', n'$ .

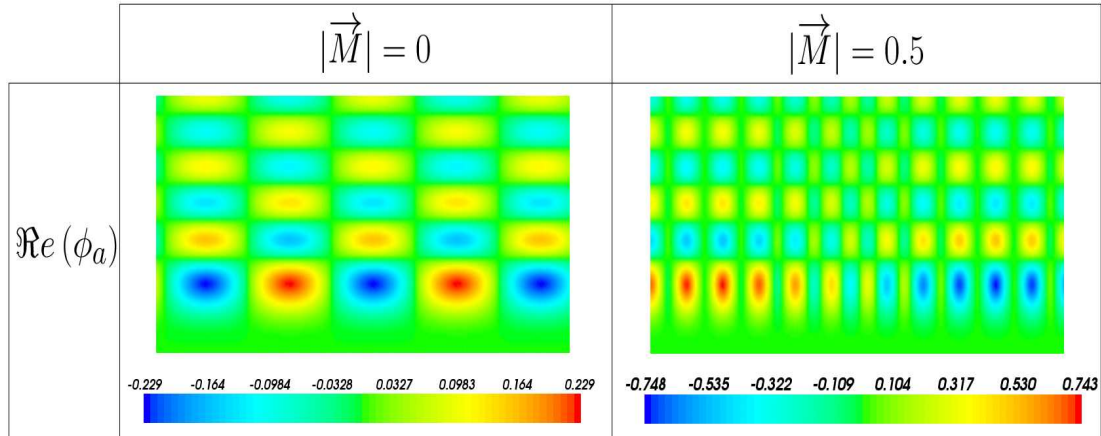
$$\left\{ \begin{array}{l} a_{mn}^+ = 0 \quad \forall (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{(m', n')\} \\ a_{m'n'}^+ = 1 \\ k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ est supposé assez petit pour que le mode } m'n' \text{ soit évanescent} \end{array} \right. \quad (5.32)$$

La condition de réflexion implique un coefficient de réflexion nul :

$$\frac{\partial \phi_a}{\partial n} \Big|_L = 0 \implies \beta = e^{-2 \frac{\sqrt{(1-M^2)k_{rm'n'}^2 - k^2}}{1-M^2} L} \ll 1 \quad (5.33)$$

La solution du problème (5.32) est analytique et s'obtient en négligeant l'onde réfléchie.

### Résultats numériques



Les résultats ci-dessus sont présentés pour un maillage structuré de diamètre inférieur à 1 cm.

Chaque graphique représente la partie réelle du potentiel acoustique dans le conduit modal.

Les résultats sont présentés pour un mode azimutal  $m = 5$ ,  $n = 5$  et pour un nombre d'onde  $kR = 6\pi$ .

Les modes présentés sont renormalisés comme explicité au chapitre 2 (attention les couleurs changent de valeurs à chaque graphique).

### Résultats numériques sans écoulement :

Nous présentons ci-dessous le coefficient modal du retour du mode plan sur lui-même pour un maillage structuré de diamètre 4 cm (le conduit fait 2 m) en l'absence d'écoulement :

$$\begin{cases} \lambda = L \\ k = \frac{\pi}{a} \\ f = \frac{a}{2} \end{cases} \implies \beta = 1. \quad (5.34)$$

*THEORIE*  $F(1, 1) = 1.$

*PA2R*  $F(1, 1) = 9.99966 \times 10^{-1} -i 8.23800 \times 10^{-3}$

*ACTI3S*  $F(1, 1) = 1.00056 \times 10^0 -i 1.63131 \times 10^{-3}$



$$\begin{cases} \lambda = 8L \\ k = \frac{\pi}{8a} \\ f = \frac{1}{16} \end{cases} \Rightarrow \beta = i \quad (5.35)$$

*THEORIE*  $F(1,1) = i$   
*PA2R*  $F(1,1) = 2.66247 \times 10^{-5} + i 9.99999 \times 10^{-1}$   
*ACTI3S*  $F(1,1) = -3.40934 \times 10^{-4} + i 1.00049 \times 10^0$

$$\begin{cases} \lambda = 16L \\ k = \frac{\pi}{16} \\ f = \frac{1}{32} \end{cases} \Rightarrow \beta = e^{i\frac{\pi}{4}} \quad (5.36)$$

*THEORIE*  $F(1,1) = 7.07106 \times 10^{-1} + i 7.07106 \times 10^{-1}$   
*PA2R*  $F(1,1) = 7.07110 \times 10^{-1} + i 7.07102 \times 10^{-1}$   
*ACTI3S*  $F(1,1) = 7.07520 \times 10^{-1} + i 7.07899 \times 10^{-1}$

Les résultats sont exacts à  $10^{-4}$  près jusqu'au plus grand nombre d'ondes  $k = \pi$ .

**Résultats numériques avec écoulement :**

Nous présentons ci-dessous le coefficient modal du retour du mode plan sur lui-même pour un maillage structuré de diamètre 4 cm en présence d'écoulement :

$$\begin{cases} \lambda = 8L \\ k = \frac{\pi}{8a} \\ f = \frac{1}{16} \\ M = 0.1 \end{cases} \Rightarrow \beta = e^{i\frac{\pi}{2(1-M^2)}} \quad (5.37)$$

*THEORIE*  $F(1,1) = -1.58659 \times 10^{-2} + i 9.99874 \times 10^{-1}$   
*PA2R*  $F(1,1) = -1.58658 \times 10^{-2} + i 9.99874 \times 10^{-1}$

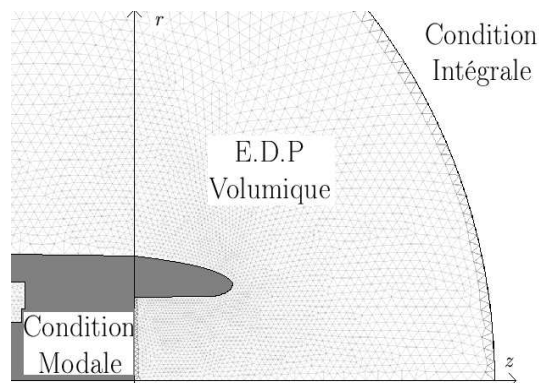
$$\begin{cases} \lambda = 16L \\ k = \frac{\pi}{16} \\ f = \frac{1}{32} \\ M = 0.1 \end{cases} \Rightarrow \beta = e^{i\frac{\pi}{4(1-M^2)}} \quad (5.38)$$

*THEORIE*  $F(1,1) = 7.01474 \times 10^{-1} + i 7.12694 \times 10^{-1}$   
*PA2R*  $F(1,1) = 7.01479 \times 10^{-1} + i 7.12689 \times 10^{-1}$

La convergence en maillage est également constatée.

## 5.4 Validation comparative

### 5.4.1 Problématique



Problème général

Ce paragraphe détaille la validation du code numérique complet (condition modale + partie volumique + condition intégrale). Le maillage représenté ci-dessus possède 6085 sommets. Les cas de calcul de validation sont effectués pour un  $kR = 2$ , pour lequel ce maillage a un raffinement supérieur à  $\frac{\lambda}{10}$ .

Cette validation se base sur les références produites par le code ACTI3S développé à EADS-CCR, dont la méthodologie théorique est détaillée aux paragraphes (3.1.2) et (3.1.2) de la partie (3). Ce logiciel permet le calcul du rayonnement acoustique d'une source modale se propageant sur un écoulement au plus uniforme.

Les premières validations sont faites en l'absence d'écoulement.

Les coefficients modaux de réflexion sont comparés, ainsi que les champs acoustiques à l'extérieur de la nacelle. La convergence en maillage est prouvée pour les deux codes.

Les validations suivantes sont faites pour un écoulement constant  $M = 0,1$ . La même démarche que pour le cas sans écoulement est suivie.

### 5.4.2 Écoulement porteur nul

#### Un mode non singulier : le mode plan

Ci-dessous est présenté le coefficient de retour du mode  $m = 0$ ,  $n = 0$  sur lui-même en l'absence d'écoulement pour le code PA2R (l'écoulement porteur ne provient plus du solveur fluide, mais est "rentré en dur"). La première ligne correspond à un maillage à 6085 ddls et les deux dernières lignes correspondent à ce même maillage que l'on a successivement raffiné en décomposant chaque triangle en 4 sous-triangles.

$$\text{PA2R, } m=0, n=0 \left\{ \begin{array}{lll} 6085 & \text{ddls} & -2.00150 \times 10^{-1} - i 9.09183 \times 10^{-2} \\ 23123 & \text{ddls} & -1.99342 \times 10^{-1} - i 9.24564 \times 10^{-2} \\ 86752 & \text{ddls} & -1.99844 \times 10^{-1} - i 9.36297 \times 10^{-2} \\ 312318 & \text{ddls} & -1.99837 \times 10^{-1} - i 9.36476 \times 10^{-2} \end{array} \right.$$

Ci-dessous est présenté le coefficient de retour du mode  $m = 0$ ,  $n = 0$  sur lui-même en l'absence d'écoulement pour le code ACTI3S. La première ligne correspond au maillage dont la trace sur la surface transverse de la nacelle correspond au premier maillage ci-dessus et les deux dernières lignes correspondent à ce même maillage que l'on a successivement raffiné en décomposant chaque triangle en 4 sous-triangles.

$$\text{ACTI3S, } m=0, n=0 \left\{ \begin{array}{lll} 17137 & \text{ddls} & -1.99854 \times 10^{-1} - i 9.35946 \times 10^{-2} \\ 62455 & \text{ddls} & -1.99837 \times 10^{-1} - i 9.36477 \times 10^{-2} \\ 226747 & \text{ddls} & -1.99837 \times 10^{-1} - i 9.36477 \times 10^{-2} \end{array} \right.$$

La convergence en maillage des coefficients de réflexion est constatée pour les deux codes. Sur les maillages les plus raffinés, les coefficients de réflexion coïncident à  $10^{-6}$  près. PA2R gagne environ un chiffre à chaque raffinement, alors qu'ACTI3S semble converger plus rapidement (5 chiffres fixés dès la deuxième itération).

**Un mode singulier : le mode  $m = 1$ ,  $n = 0$**

La même démarche est suivie pour le mode singulier  $m = 1$ ,  $n = 0$  en absence d'écoulement :

$$\text{PA2R, } m=1, n=0 \left\{ \begin{array}{lll} 6085 & \text{ddls} & 6.35537 \times 10^{-1} - i 4.76084 \times 10^{-1} \\ 23123 & \text{ddls} & 6.57412 \times 10^{-1} - i 4.73512 \times 10^{-1} \\ 86752 & \text{ddls} & 6.64245 \times 10^{-1} - i 4.76292 \times 10^{-1} \\ 312318 & \text{ddls} & 6.65853 \times 10^{-1} - i 4.76164 \times 10^{-1} \end{array} \right.$$

$$\text{ACTI3S, } m=1, n=0 \left\{ \begin{array}{lll} 17137 & \text{ddls} & 6.29812 \times 10^{-1} - i 4.76084 \times 10^{-1} \\ 62455 & \text{ddls} & 6.64129 \times 10^{-1} - i 4.76151 \times 10^{-1} \\ 226747 & \text{ddls} & 6.65324 \times 10^{-1} - i 4.76121 \times 10^{-1} \end{array} \right.$$

La convergence en maillage des coefficients de réflexion est constatée pour les deux codes. Ils sont proches à  $10^{-3}$  près sur les maillages les plus raffinés. La convergence semble moins rapide que pour le mode plan et ce pour les deux codes (1 chiffre gagné environ à chaque raffinement pour ACTI3S pour 0,5 chiffre gagné environ par PA2R. PA2R converge toujours plus lentement que ACTI3S).

**5.4.3 Ecoulement constant  $M = 0, 1$**

**Un mode non singulier : le mode plan**

Ci-dessous est présenté le coefficient de retour du mode  $m = 0$ ,  $n = 0$  sur lui-même en présence d'un écoulement constant  $M = 0, 1$  pour le code PA2R (l'écoulement porteur ne provient plus du solveur fluide, mais est "rentré en dur"). La première ligne correspond à un maillage à 6085 degrés de liberté et les deux dernières lignes

correspondent à ce même maillage que l'on a successivement raffiné en décomposant chaque triangle en 4 sous-triangles.

$$\text{PA2R, } m=0, n=0 \left\{ \begin{array}{lll} 6085 & \text{dcls} & -1.92695 \times 10^{-1} - i 1.01288 \times 10^{-1} \\ 23123 & \text{dcls} & -1.92537 \times 10^{-1} - i 1.02264 \times 10^{-1} \\ 86752 & \text{dcls} & -1.92143 \times 10^{-1} - i 1.02926 \times 10^{-1} \\ 312318 & \text{dcls} & -1.92118 \times 10^{-1} - i 1.02966 \times 10^{-1} \end{array} \right.$$

Ci-dessous sont présentés les coefficients de retour du mode  $m = 0$ ,  $n = 0$  sur lui-même en présence d'un écoulement constant pour le code ACTI3S (le code résout le problème dans l'espace transformé de Lorentz, et les résultats sont ramenés dans l'espace physique *via* un post-traitement). La première ligne correspond au maillage dont la trace sur la surface transverse de la nacelle correspond au premier maillage ci-dessus. La deuxième ligne correspond à ce même maillage que l'on a raffiné en décomposant chaque triangle en 4 sous-triangles.

$$\text{ACTI3S, } m=0, n=0 \left\{ \begin{array}{lll} 17137 & \text{dcls} & -1.92133 \times 10^{-1} - i 1.02915 \times 10^{-1} \\ 62455 & \text{dcls} & -1.92111 \times 10^{-1} - i 1.02967 \times 10^{-1} \\ 226747 & \text{dcls} & -1.92111 \times 10^{-1} - i 1.02967 \times 10^{-1} \end{array} \right.$$

Des remarques similaires au cas du mode plan en absence d'écoulement (5.4.2) peuvent être faites : la convergence en maillage des coefficients de réflexion est constatée pour les deux codes. Sur le maillage le plus raffiné, les coefficients de réflexion coïncident à  $10^{-5}$  près. PA2R gagne environ un chiffre à chaque raffinement, alors qu'ACTI3S semble converger plus rapidement (5 chiffres fixés dès la deuxième itération).

### Un mode singulier : le mode $m = 1$ , $n = 0$

La même démarche est suivie pour le mode non singulier  $m = 1$ ,  $n = 0$  en présence d'écoulement :

$$\text{PA2R, } m=1, n=0 \left\{ \begin{array}{lll} 6085 & \text{dcls} & 6.67034 \times 10^{-1} - i 4.08839 \times 10^{-1} \\ 23123 & \text{dcls} & 6.89210 \times 10^{-1} - i 4.08321 \times 10^{-1} \\ 86752 & \text{dcls} & 6.92364 \times 10^{-1} - i 4.09236 \times 10^{-1} \\ 312318 & \text{dcls} & 6.93765 \times 10^{-1} - i 4.09455 \times 10^{-1} \end{array} \right.$$

$$\text{ACTI3S, } m=1, n=0 \left\{ \begin{array}{lll} 17137 & \text{dcls} & 6.62946 \times 10^{-1} - i 4.05877 \times 10^{-1} \\ 62455 & \text{dcls} & 6.96835 \times 10^{-1} - i 4.09237 \times 10^{-1} \\ 226747 & \text{dcls} & 6.93515 \times 10^{-1} - i 4.09432 \times 10^{-1} \end{array} \right.$$

Des remarques similaires au cas du mode plan en absence d'écoulement (5.4.2) peuvent être faites : la convergence en maillage des coefficients de réflexion est constatée pour les deux codes. Ils sont proches à  $10^{-4}$  près sur le maillage le plus raffiné. La convergence semble moins rapide que pour le mode plan pour les deux codes (1 chiffre gagné environ à chaque raffinement pour ACTI3S pour 0,5 chiffre gagné environ par PA2R. PA2R converge toujours plus lentement que ACTI3S.

## 5.5 Propagation potentielle et influence de l'écoulement

Ce paragraphe présente des résultats numériques globaux écoulement-acoustique sur une géométrie réaliste.

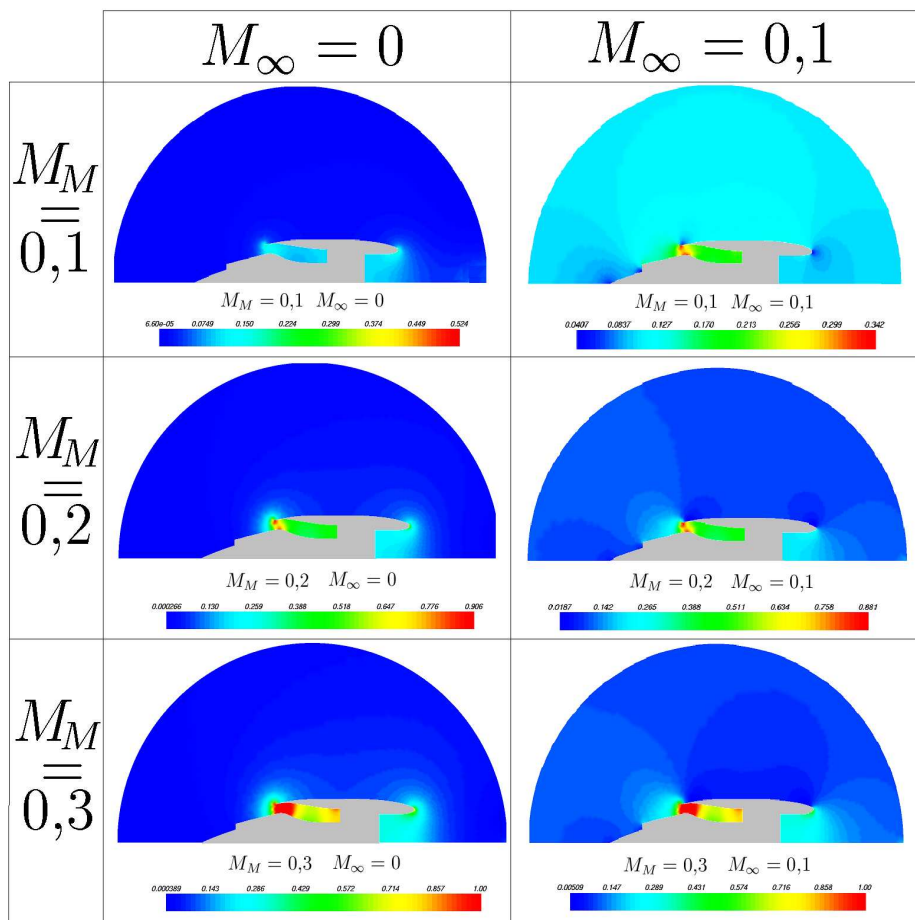
Différents écoulements potentiels sont exhibés. Ces écoulements diffèrent par une accélération croissante à la nacelle et un nombre de Mach à l'infini nul ou constant égal à 0, 1 (le turboréacteur est en banc statique ou l'avion vole à vitesse constante Mach 0, 1).

Les variables acoustiques dans le cadre particulier d'un écoulement potentiel non accéléré à la nacelle à vitesse constante  $M = 0,1$  sont détaillées.

Les résultats de comparaison entre un écoulement constant et un écoulement nul montrent ensuite le phénomène d'effet Doppler.

L'effet de l'écoulement (de l'accélération à la nacelle) est ensuite discuté. L'intensité acoustique en décibels et les diagrammes de champ lointain sont comparés pour des écoulements potentiels dont l'accélération à la nacelle augmente.

### 5.5.1 Ecoulement porteur numérique



Nombres de Mach

Les résultats des nombres de Mach de l'écoulement porteur sont présentés ci-dessus pour deux valeurs du Mach à l'infini :  $M_\infty = 0$  et  $M_\infty = 0,1$  et pour trois valeurs des nombres de Mach au moteur :  $M_M = 0,1$ ,  $M_M = 0,2$  et  $M_M = 0,3$ .

Les nombres de Mach les plus élevés se trouvent au niveau de la lèvre de la nacelle, là où les effets Ventury d'accélération sont les plus présents. Ils sont d'autant plus élevés que le Mach infini est grand (l'avion vole vite) et que l'accélération au moteur est forte.

Le choix d'un Mach infini nul correspond à un avion au repos ou plutôt à un turbo-réacteur en banc statique d'essai. Ce choix s'explique par sa possibilité d'établir un grand différentiel entre le Mach moteur et le Mach infini sans faire saturer le régime subsonique au niveau de la lèvre avant de la nacelle : on verra que ce sont en fait les grands différentiels de Mach entre le moteur et l'infini qui causent les grandes différences acoustiques dans les diagrammes de rayonnement en dB.

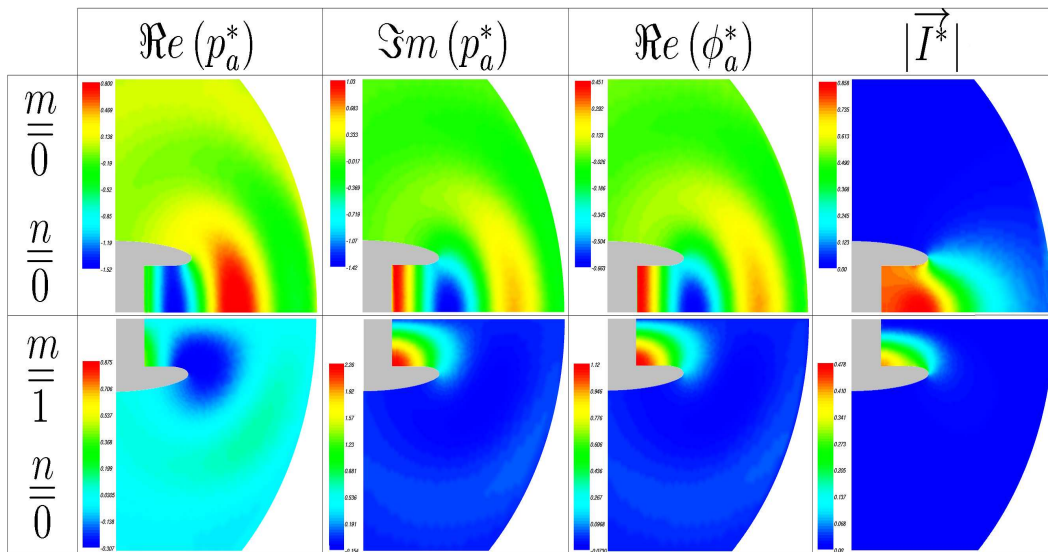
Des phénomènes de saturation apparaissent à l'arrière de la nacelle du fait des hauts débits du conduit d'éjection : l'écoulement à l'arrière n'est pas physique et l'influence de cet écoulement "non physique" sur le diagramme de rayonnement à l'avant est négligée.

## 5.5.2 Acoustique numérique

### Problématique

Nous présentons ci-dessous les champs des variables acoustiques se propageant sur un écoulement potentiel  $M_M = 0,1$  et  $M_\infty = 0,1$ . Les calculs sont effectués pour  $kR = 2$  sur le maillage à 6085 dds et les champs acoustiques sont présentés dans le cas du mode non singulier  $m = 0$ ,  $n = 0$  et du mode singulier  $m = 1$ ,  $n = 0$ .

### Résultats



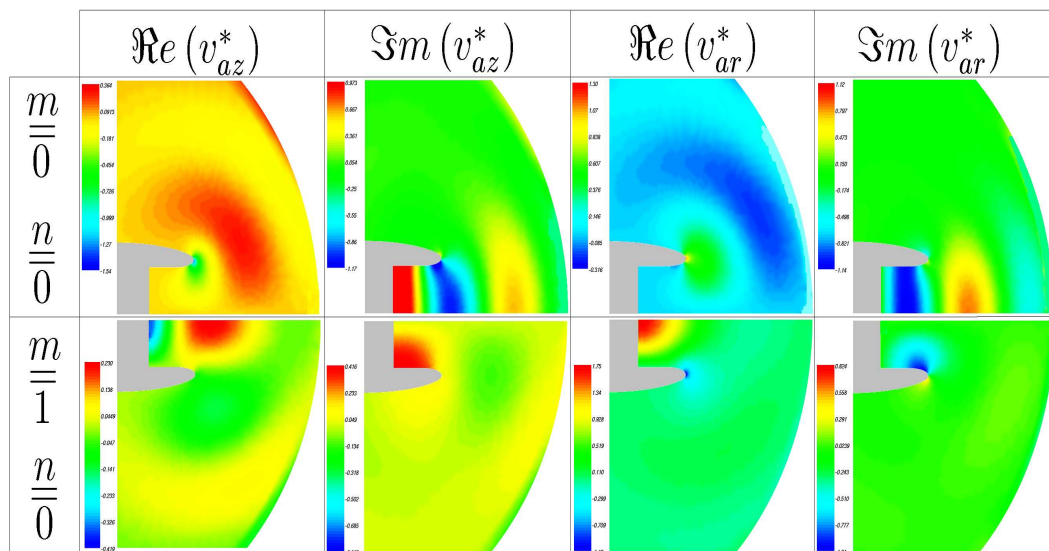
Résultats acoustiques 1.

La figure ci-dessus présente la partie réelle et imaginaire de la pression acoustique adimensionnée ( $\Re(p_a^*)$  et  $\Im(p_a^*)$ ). La pression acoustique complexe s'obtient à partir du potentiel acoustique complexe :  $p_a = -\rho_0(-i \omega \phi_a + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_a)$ .

La dernière figure présente  $|\vec{I}^*|$ , où  $\vec{I}^*$  désigne le vecteur réel :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \rho_0 |\vec{v}_a|^2 + \frac{|p_a|^2}{2 \rho_0 a_0^2} \right) \vec{v}_0 + \frac{1}{4} (p_a \vec{v}_a + \bar{p}_a \vec{v}_a) \tag{5.39}$$

Cette notation est un abus par rapport à (2.11), qui référerait à des valeurs acoustiques réelles. Ce vecteur obtenu à partir des valeurs acoustiques complexes est justement déterminé de telle sorte que la valeur moyenne spatiale et temporelle de son flux à travers une surface égale à la valeur moyenne spatiale et temporelle du flux à travers la même surface du vecteur Intensité (2.11) formé à partir des valeurs acoustiques réelles.

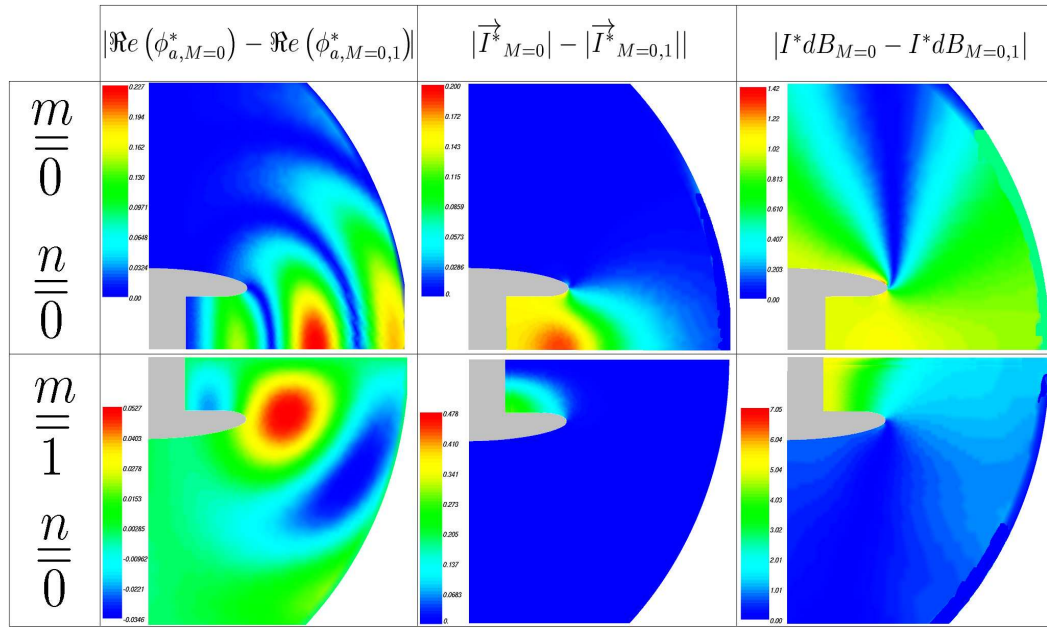


Résultats acoustiques 2.

La figure ci-dessus présente les parties réelles et imaginaires des vitesses acoustiques radiales et axiales ( $\Re(v_{az}^*)$ ,  $\Im(v_{az}^*)$ ,  $\Re(v_{ar}^*)$  et  $\Im(v_{ar}^*)$ ).

### 5.5.3 Effet Doppler et effet d'advection

Ce paragraphe détaille la comparaison de la propagation acoustique sur un écoulement porteur nul et la propagation acoustique sur un écoulement porteur constant de même Mach moteur et infini égal à 0, 1.

Comparaison Mach constant 0 - Mach potentiel  $M_M = M_\infty = 0, 1$ 

La ligne supérieure correspond aux résultats pour le mode plan non singulier  $m = 0$ ,  $n = 0$ . La ligne inférieure correspond aux résultats du mode singulier  $m = 1$ ,  $n = 0$ . La figure de gauche présente la différence absolue des parties réelles des potentiels acoustiques :  $|\Re(\phi_{a,M=0}^*) - \Re(\phi_{a,M=0,1}^*)|$ , où l'indexation  $M = 0$  (resp.  $M = 0, 1$ ) correspond à un écoulement porteur nul (resp. un écoulement porteur constant de même Mach moteur et infini égal à 0, 1).

La figure du milieu présente la différence absolue des modules du vecteur Intensité (5.39) adimensionnée (valeur physique non pertinente) :  $||\vec{I}_{M=0}^*| - |\vec{I}_{M=0,1}^*||$ .

La figure du droite présente la différence absolue des intensités en décibels (valeur physique pertinente) :  $|I^*dB_{M=0} - I^*dB_{M=0,1}|$ , où  $I^*dB = 20\log(|\vec{I}^*|)$ .

Dans le cas de la comparaison pour un même Mach à l'infini (ce qui n'est pas le cas ici), les paramètres d'adimensionnement étant les mêmes, les propriétés du logarithme font disparaître ces constantes (ainsi que l'intensité de référence de la définition (2.26)) et cette différence absolue se lit en décibels physiques. Dans ce cas, les comparaisons se faisant entre un Mach infini nul et un Mach infini de 0, 1, cette différence absolue représente une variation de décibels physiques définie à une constante près.

### Commentaires

La figure de gauche explicite l'effet Doppler : les ondes en présence d'écoulement sont compressées par celui-ci, lorsqu'elles se déplacent à contre-courant (le nombre d'ondes est augmenté) et allongées lorsqu'elles sont emportées par celui-ci (le nombre d'ondes est diminué).

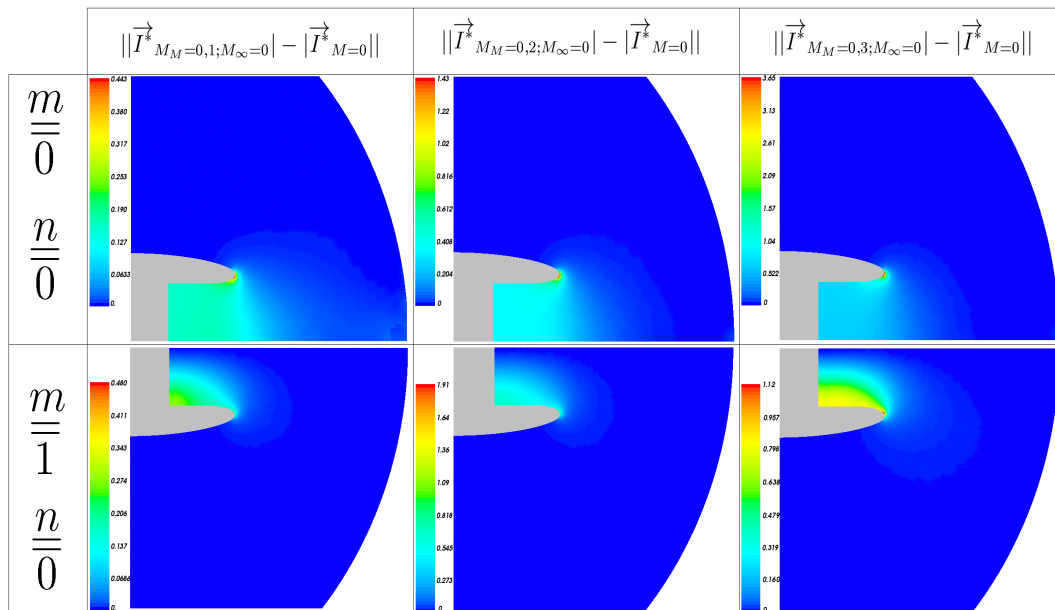
La figure du milieu et la figure de droite démontre des différences dans la propagation de l'intensité acoustique adimensionnée et en décibels. Attention, les résultats en décibels sont ici définis à une constante près.



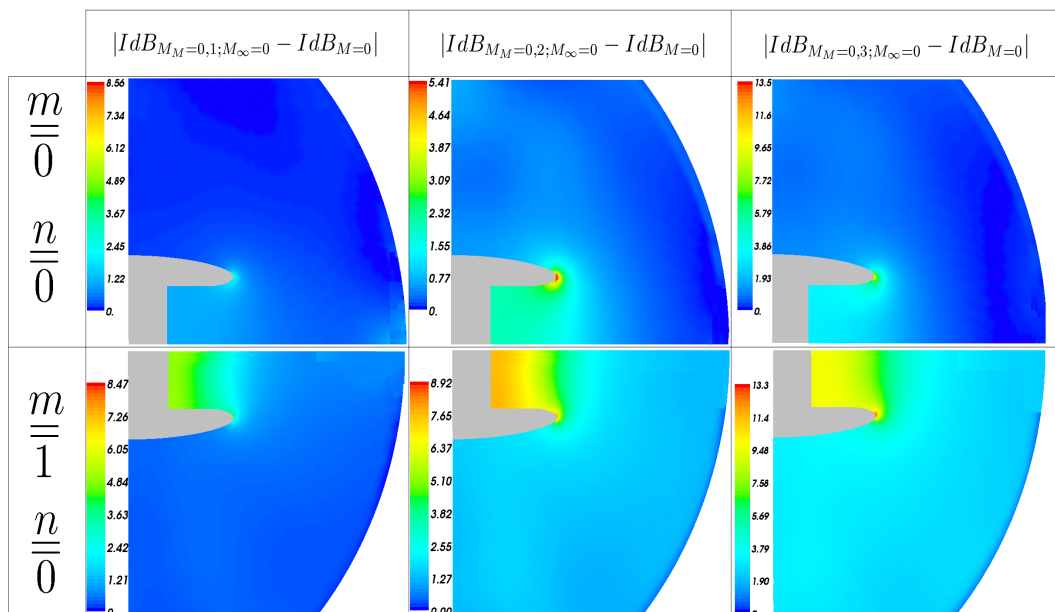
### 5.5.4 Comparaison à Mach moteur augmentant

Ce paragraphe détaille les effets de l'écoulement potentiel et son accélération à la nacelle sur la propagation de l'intensité du bruit. Ces comparaisons s'effectuent pour un Mach à l'infini au repos et pour un Mach à l'infini constant. L'intensité physique adimensionnée est comparée dans un premier temps, puis les résultats sont transcrits en décibels (quantité physique pertinente pour l'être humain).

**Mach Nul à l'Infini :  $M_\infty = 0$**



Comparaison des intensités  $M_\infty = 0 ; M_M = 0, 1 - M_M = 0, 2 - M_M = 0, 3$

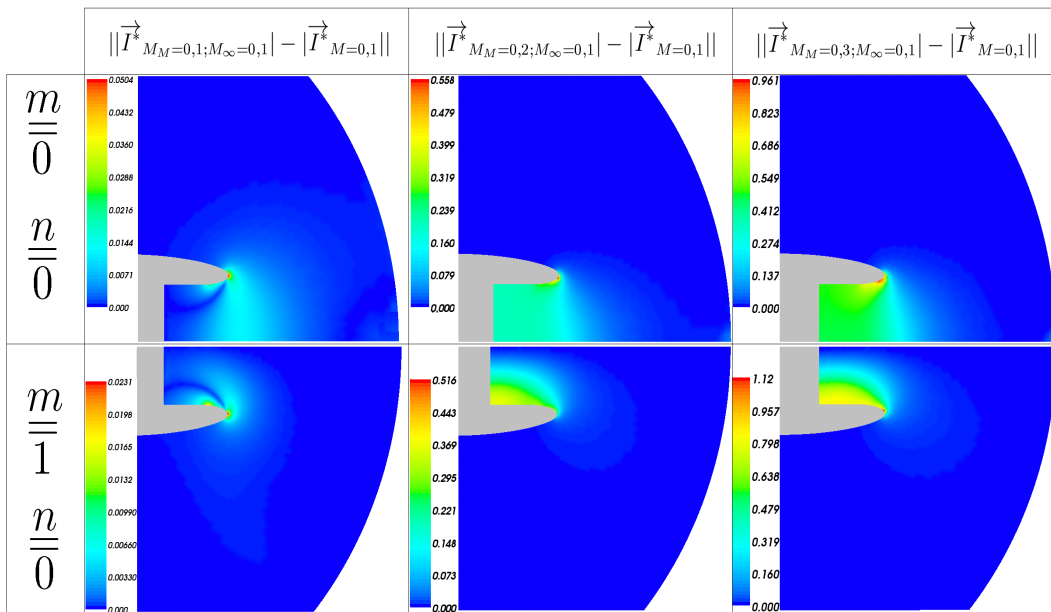


Comparaison en décibels  $M_\infty = 0 ; M_M = 0, 1 - M_M = 0, 2 - M_M = 0, 3$

La première figure ci-dessus présente les différences absolues du module du vecteur Intensité (5.39) de la propagation acoustique du mode  $m = 0, n = 0$  (resp.  $m = 1, n = 0$ ) pour la première ligne (resp. la deuxième ligne) sur un écoulement potentiel de Mach infini nul  $M_\infty = 0$  et de Mach moteur de gauche à droite respectivement  $M_M = 0, 1, M_M = 0, 2$  et  $M_M = 0, 3$  par rapport à la propagation acoustique du même mode sur un écoulement de référence nul.

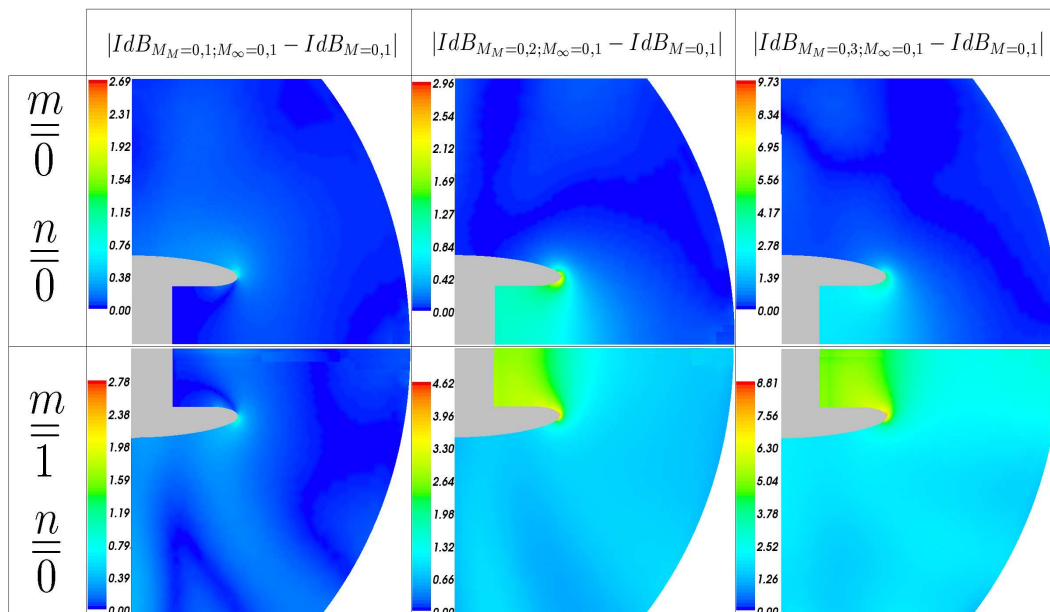
La deuxième figure ci-dessus présente les différences absolues de l'intensité en décibels de la propagation acoustique du mode  $m = 0, n = 0$  (resp.  $m = 1, n = 0$ ) pour la première ligne (resp. la deuxième ligne) sur un écoulement potentiel de Mach infini nul  $M_\infty = 0$  et de Mach moteur de gauche à droite respectivement  $M_M = 0, 1, M_M = 0, 2$  et  $M_M = 0, 3$  par rapport à la propagation acoustique du même mode sur un écoulement de référence nul (cette différence absolue se lit en décibels physiques car le nombre de Mach à l'infini est toujours le même :  $M_\infty = 0$ , faisant disparaître ainsi les constantes d'adimensionnement dans les logarithmes).

**Mach non Nul à l'Infini :  $M_\infty = 0, 1$**



Comparaison des intensités  $M_\infty = 0, 1 ; M_M = 0, 1 - M_M = 0, 2 - M_M = 0, 3$

La première figure ci-dessus présente les différences absolues du module du vecteur Intensité (5.39) de la propagation acoustique du mode  $m = 0, n = 0$  (resp.  $m = 1, n = 0$ ) pour la première ligne (resp. la deuxième ligne) sur un écoulement potentiel de Mach infini  $M_\infty = 0, 1$  et de Mach moteur de gauche à droite respectivement  $M_M = 0, 1, M_M = 0, 2$  et  $M_M = 0, 3$  par rapport à la propagation acoustique du même mode sur un écoulement de référence constant à  $M_\infty = 0, 1$ .



Comparaison en décibels  $M_\infty = 0, 1$  ;  $M_M = 0, 1 - M_M = 0, 2 - M_M = 0, 3$

La deuxième figure ci-dessus présente les différences absolues de l'intensité en décibels de la propagation acoustique du mode  $m = 0, n = 0$  (resp.  $m = 1, n = 0$ ) pour la première ligne (resp. la deuxième ligne) sur un écoulement potentiel de Mach infini  $M_\infty = 0, 1$  et de Mach moteur de gauche à droite respectivement  $M_M = 0, 1, M_M = 0, 2$  et  $M_M = 0, 3$  par rapport à la propagation acoustique du même mode sur un écoulement de référence constant à  $M_\infty = 0, 1$  (cette différence absolue se lit en décibels physiques car le nombre de Mach à l'infini est toujours le même  $M_\infty = 0, 1$ ).

### Commentaires

Les champs de comparaison en décibels entre un écoulement constant et un écoulement potentiel variable prouvent la nécessité de prendre en compte ce dernier : des différences d'environ 10 décibels sont présentes au niveau de la nacelle et ce quelques soient le mode considéré et le Mach au moteur.

Ces différences sont relativement élevées vis à vis des normes internationales de certification. Néanmoins, ces normes concernent le rayonnement de l'avion à longue distance :

Une étude des diagrammes de champ lointain permet finalement d'étudier la propagation de ces différences élevées au niveau des normes à une longue distance de la nacelle en étudiant les diagrammes de champ lointain.

On remarque déjà que plus le différentiel entre le nombre de Mach à l'infini et le nombre de Mach au moteur est grand, plus les différences d'intensité acoustique par rapport à un écoulement constant sont élevées.

### 5.5.5 Diagrammes de rayonnement

Les diagrammes de rayonnement en champ lointain sont finalement commentés. Ces diagrammes détaillent l'effet de l'écoulement potentiel sur la directivité du son à une longue distance de l'avion.

Les diagrammes de rayonnement sont présentés dans le référentiel galiléen de l'avion. Le rayonnement de l'avion dans un référentiel fixe se déduit *via* une transformation algébrique de Galilée (effet Doppler).

Les résultats sont présentés sous forme de courbe polaire du module  $|A(\theta)|$  en fonction de  $\theta$ .

On ne présente pas la classique SER du fait de l'adimensionnement des variables physiques : seul la différence du logarithme des courbes présentées pour un même Mach infini peut s'interpréter en vrais décibels physiques.

#### Théorie

Une estimation asymptotique de la formule de représentation (3.14) pour le potentiel acoustique dans l'espace transformé de Lorentz s'écrit :

$$\tilde{\phi}'_a(y') \approx \frac{e^{ik'_\infty r'}}{4\pi r'} \left[ - \int_{\Gamma'_\infty} e^{-ik'_\infty x' \cdot \frac{y'}{|y'|}} \tilde{\nabla} \tilde{\phi}'_a \cdot \vec{n}' dx' + \int_{\Gamma'_\infty} \frac{\tilde{\partial}}{\tilde{\partial n}'} \left( e^{-ik'_\infty x' \cdot \frac{y'}{|y'|}} \right) \tilde{\phi}'_a dx' \right],$$

$$\tilde{\phi}'_a(y' = r', \theta') \approx \frac{e^{ik'_\infty r'}}{4\pi r'} \tilde{A}'(\theta')$$
(5.40)

où  $\theta'$  désigne l'angle entre les vecteurs  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_z$ .

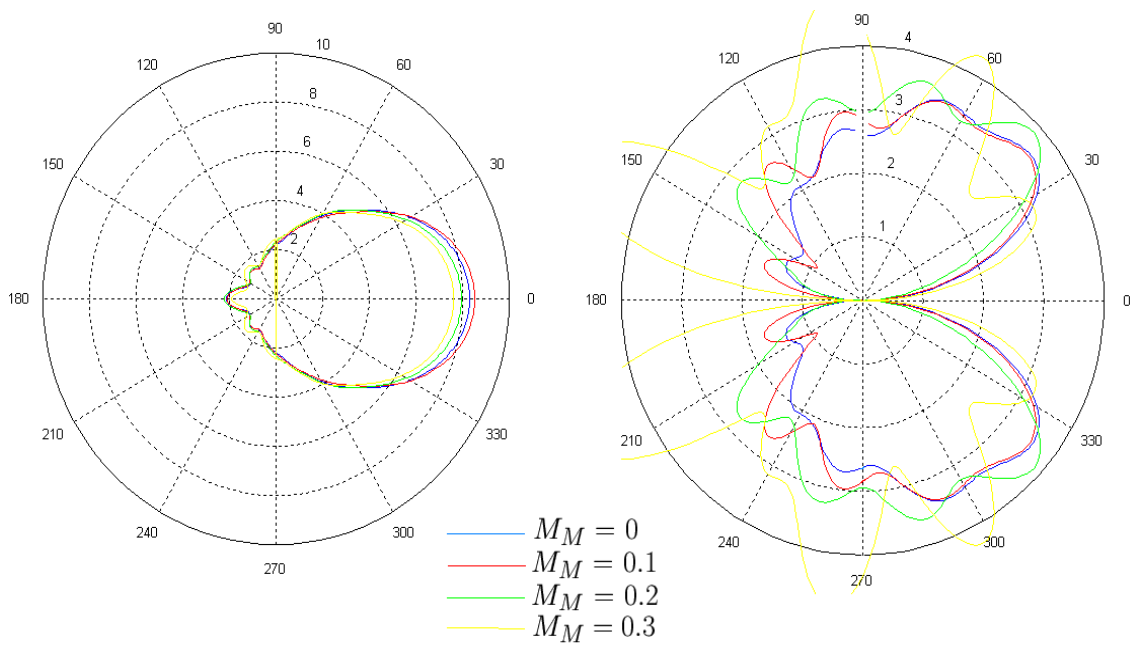
Le potentiel acoustique dans l'espace physique vérifie alors :

$$\phi_a(y = r, \theta) \approx \frac{e^{i \frac{k_\infty}{\sqrt{1-M_\infty^2}} r}}{4\pi r} A(\theta),$$
(5.41)

où  $A(\theta)$  est donné par :

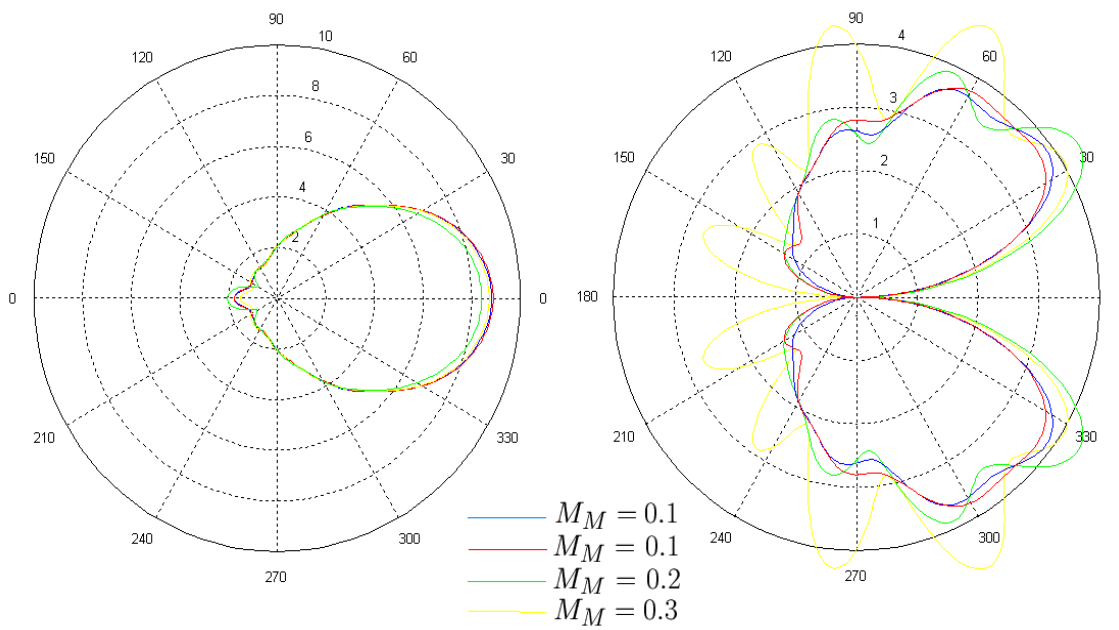
$$A(\theta) = \frac{e^{ik_\infty M_\infty}}{e^{\sqrt{1-M_\infty^2}}} \cos \left( \arctan \left( \sqrt{1-M_\infty^2} \tan \theta \right) \right) \tilde{A}' \left( \arctan \left( \sqrt{1-M_\infty^2} \tan \theta \right) \right)$$
(5.42)

Mach nul à l'infini :  $M_\infty = 0$



Champs lointains  $M_\infty = 0$ ;  $M_M = 0, 1-M_M = 0, 2-M_M = 0, 3$

Mach non nul à l'infini :  $M_\infty = 0, 1$



Champs lointains  $M_\infty = 0, 1$ ;  $M_M = 0, 1-M_M = 0, 2-M_M = 0, 3$

## Commentaires

Les diagrammes de rayonnement laissent apparaître des différences supérieures à 5 décibels selon certaines directivités en fonction de l'accélération au moteur.

Ceci prouve que l'influence de l'écoulement potentiel n'est pas négligeable quant à la directivité du son : des différences supérieures à 5 décibels en champ lointain sont sanctionnées par les normes de l'aviation civile internationales.

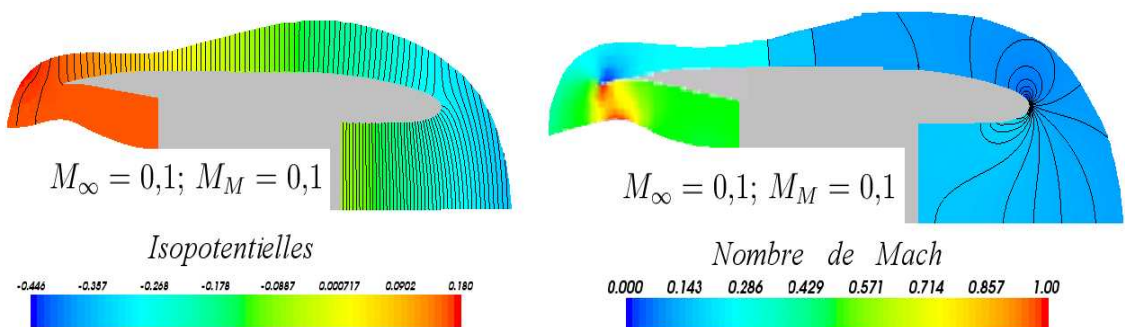
Les diagrammes de rayonnement confirment ce que nous apprenions les champs extérieurs d'intensité acoustique : le diagramme de champ lointain est d'autant plus déformé que l'accélération au moteur est grande.

Néanmoins, on constate que les différences très fortes constatées au niveau de la lèvre de la nacelle sont atténuées dans les diagrammes en champ lointain.

## 5.6 Propagation acoustique potentielle à haute fréquence

Ce paragraphe présente des résultats acoustiques pour des nombres d'ondes élevés  $kR = 60$  sur un maillage raffiné à hauteur de  $\frac{\lambda}{10}$  pour un écoulement potentiel non accéléré à  $M = 0,1$ .

### 5.6.1 Écoulement porteur numérique



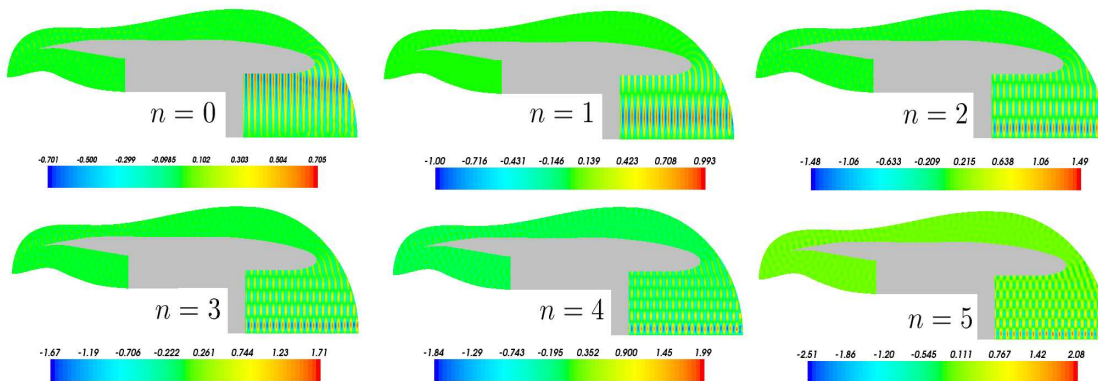
Écoulement potentiel  $M_\infty = 0,1$  et  $M_M = 0,1$

La figure ci-dessus présente les isopotentielles et les nombres de Mach d'un écoulement potentiel de même Mach moteur et infini égal à 0,1.

La position de la surface  $\Gamma_\infty$  a été optimisée pour ne pas compresser l'écoulement et être la plus proche possible de la nacelle pour limiter le domaine de calcul. Le maillage est de plus très raffiné à l'avant vers la lèvre de la nacelle (122 412 degrés de liberté en tout) pour capturer au mieux le point d'arrêt hydrodynamique.

L'arrière de la nacelle est toujours le siège de phénomènes de saturation : l'écoulement potentiel n'y est pas réaliste.

### 5.6.2 Acoustique numérique



$$\Re(\phi_a^*), M_\infty = 0, 1 \text{ et } M_M = 0, 1, kR = 60, m = 1, n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

La figure ci-dessus présente les champs acoustiques de la partie réelle du potentiel se propageant sur l'écoulement précédent  $M_M = M_\infty = 0, 1$  pour les modes  $m = 1, n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  et pour un nombre d'ondes  $kR = 60$ .

La haute fréquence se traduit par une directionnalité 'quasi-droite' dans les diagrammes de rayonnement (comme un jet d'eau sort droit d'un tuyau). Cet effet est prépondérant sur la présence d'un écoulement potentiel et les diagrammes de rayonnement pour des Mach moteurs légèrement augmentés 0, 2 et 0, 3 sont identiques à ceux obtenus à Mach constant.

## Conclusion et Perspectives

Les travaux présentés dans ce document sont originaux par leur proposition de nouvelles méthodologies numériques. Ainsi la résolution de l'écoulement porteur non-linéaire par un point fixe numérique est une alternative à des méthodes de type moindre carré plus complexes pouvant s'adapter au régime transsonique. La mise à jour d'un élément axisymétrique conforme dans les espaces de Sobolev à poids est encore une alternative à l'utilisation d'éléments finis classiques auxquels on a rajouté une condition de Dirichlet numérique sur l'axe. De-même le couplage à l'infini pour faire rayonner le problème acoustique en écoulement est une nouvelle alternative à plusieurs méthodes déjà existantes. Détaillons ici leurs avantages et leurs inconvénients respectifs :

L'originalité principale de ce manuscrit repose dans l'avènement d'un couplage numérique FEM-BEM en écoulement uniforme.

Ce couplage est réalisé à l'aide d'opérateurs intégraux de convolution et la matrice résultante est pleine. Néanmoins, la surface fictive n'a d'autres nécessiter que de se trouver là, où l'écoulement est constant : elle peut entourer l'hétérogénéité générée par l'écoulement de façon optimale. La méthode multipôle rapide [57] est également adaptable à ce couplage et susceptible de l'accélérer.

Ce couplage est original dans son implémentation. Ces principaux concurrents relèvent de techniques numériques différentes :

Citons les éléments surfaciques infinis développés dans l'article de W. Eversman [51]. [21], [22] et [23] utilisent également cette technique, qui s'appuie sur un couplage avec un développement en série d'harmoniques sphériques. La matrice surfacique résultante est creuse. Néanmoins, la surface fictive rayonnante est nécessairement une sphère (forme imposée) et il en résulte dans certains cas une surface de couplage autour de l'écoulement porteur beaucoup plus grande que nécessaire, ainsi qu'un domaine de calcul beaucoup plus grand que nécessaire pour la propagation acoustique volumique.

Une deuxième alternative est l'utilisation de "perfectly matched layers", comme le proposent [6], [7], [9], [43] et [59]. Cette méthode consiste en l'imposition d'une couche limite où les ondes sont tuées sans réflexion parasite. Elle a déjà prouvé sa compétence numérique dans les problèmes où la propagation acoustique volumique est nécessaire (à cause de la présence d'hétérogénéité). Cependant elle ne fait pas naturellement rayonner le problème acoustique et la surface fermant le domaine de calcul est nécessairement une boîte rectangulaire (forme imposée) et il en résulte dans certains cas un domaine de calcul beaucoup plus grand que nécessaire pour la propagation acoustique volumique.



Le couplage intégral se distingue donc par la flexibilité du positionnement de la surface rayonnante de forme quelconque. Dans le cadre du traitement de l'avion tout entier, on imagine clairement le gain numérique apporté par un cernage optimum des hétérogénéités d'écoulement et ce d'autant plus que la fréquence est grande.

La potentialité de l'écoulement et de la perturbation acoustique est une hypothèse principale de notre modèle. Cette hypothèse simplifie la propagation acoustique volumique. Cette hypothèse est néanmoins réductrice puisqu'elle ne permet pas de propager une perturbation acoustique sur un tourbillon. D'autres méthodes numériques pour le traitement volumique de la propagation acoustique sont ici envisageables. On peut ici citer les méthodes de type Galerkin discontinu [9] ou encore de différences finies [58] et [60] pour résoudre les équations d'Euler linéarisées complètes.

Ces approches plus générales sont nécessaires pour traiter des problèmes physiques plus complexes comme le bruit de jet. Néanmoins, une grande partie de la propagation acoustique autour d'un avion est potentielle et la naissance d'un code informatique global optimisé traitant l'avion tout entier par décomposition de domaines nécessite les simplifications numériques de cette propagation potentielle.

L'approche potentielle, par sa simplicité et le couplage intégral, par sa flexibilité, sont donc des briques nécessaires dans un code global de décomposition de domaine. L'écriture de conditions de raccord entre les méthodes numériques plus complexes ([9], [58] et [60]) et l'approche potentielle sont les développements futurs nécessaires à un code informatique complet de calcul du rayonnement acoustique d'un avion.



# Bibliographie

- [1] T. Abboud, *Etude mathématique et numérique de quelques problèmes de diffraction d'ondes électromagnétiques*. Thèse de doctorat de l'école polytechnique, (1991), France.
- [2] T. Abboud et J.C. Nédélec, *Electromagnetic waves in inhomogeneous medium*. J. Math. Anal. Appl., 164 (1992), pp. 40-58.
- [3] R.J. Astley et W. Eversman, *A finite element formulation of the eigenvalue problem in lined ducts with flow*. J. Sound Vibration, 65 (1979), pp. 61-74.
- [4] B. Aublin, *Rayonnement et diffraction acoustique par un guide ouvert semi-infini*. Thèse de doctorat de l'université de Compiègne, France, 1996.
- [5] C. Bailly et D. Juvé, *Numerical solution of acoustic propagation problems using linearized Euler equations*. AIAA J., 36 (1998), pp. 775-782.
- [6] E. Bécache, S. Fauqueux et P. Joly, *Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves*. J. Comp. Phys., 188 (2003), pp. 399-433.
- [7] J.-P. Bérenger, *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves*. J. Comput. Phys., 114 (1994), pp. 185-200.
- [8] H. Berger, G. Warnecke et W.L. Wendland, *Coupling of FEM and BEM for transonic flows*. The Mathematics of finite elements and applications, 95 (1994), pp. 323-350.
- [9] M. Bernacki et S. Piperno, *Méthode de type Galerkin discontinu appliquée aux équations d'Euler linéarisées en écoulement uniforme ou non*. INRIA, RR-5292, 2004.
- [10] C. Bernardi, M. Dauge et Y. Maday, *Spectral Methods for Axisymmetric Domains*. Series "Series in Applied Mathematics", 3, Elsevier, 1999
- [11] C. Bogey, C. Bailly et D. Juvé, *Computation of flow noise using source terms in linearized Euler's equations*. AIAA J., 40 (2002), pp. 235-243.
- [12] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Dahi, E. Lunéville et V. Pagneux, *Acoustic Diffraction by a plate in a uniform flow*. Math. Models Methods Appl. Sci., 12 (2002), pp. 625-647.
- [13] A. De La Bourdonnaye, *Some formulations coupling finite element and integral equation methods for Helmholtz equation and electromagnetism*. Numer. Math., 69 (1995), pp. 257-268.

- [14] M.O. Bristeau, R. Glowinski, J. Periaux, P. Perrier, O. Pironneau et G. Poirier, *On the numerical solution of nonlinear problems in fluid dynamics by least squares and finite element methods*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 51 (1985), pp. 363-394.
- [15] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*. Masson, Paris, France, 1998.
- [16] M. Bruneau, *Manuel d'acoustique fondamentale*. Hermès, Paris, France, 1998.
- [17] P.G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. Series "Studies in Mathematics and its Applications", North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [18] J.F. Ciavaldini, M. Pogu et G. Tournemine, *Existence and regularity of stream functions for subsonic flows past profiles with a sharp trailing edge*. Arch. Rat. Mech. Anal., 93 (1986), pp. 1-14.
- [19] M. Costabel, *Boundary integral operators on Lipschitz domains : Elementary results*. SIAM J. Math. Anal., 19 (1988), pp. 613-626.
- [20] M. Costabel et M. Dauge, *Weighted regularization of Maxwell equations in polyhedral domains*. Numer. Math., 93 (2002), pp. 239-277.
- [21] J.P. Coyette, *Manuel théorique ACTRAN*. Free Field Technologies, Louvain-la-Neuve, Belgique, 2001.
- [22] J.P. Coyette et B. Van den Nieuwenhof, *A conjugate infinite element method for half-space acoustic problems*. The J. of Acoustical American Society, 108 (2000), pp. 1464-1473.
- [23] J.P. Coyette et B. Van den Nieuwenhof, *Treatment of frequency-dependent admittance boundary conditions in transient acoustic finite/infinite element models*. The J. of Acoustical American Society, 110 (2001), pp. 1743-1751.
- [24] D.G. Crighton, *Basic principles of aerodynamic noise generation*. Progress in Aerospace Sciences, 16 (1975), pp. 31-96.
- [25] N. Curle, *The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound*. Proceedings of the royal society of London, 231 (1955), pp. 505-514.
- [26] I. Danda Roy et W. Eversman, *Improved finite element modeling of the turbofan engine inlet radiation problem*. J. Vib. Acoust., 117 (1995), pp. 109-115.
- [27] L. Dahi, *Guidage et diffraction d'ondes acoustiques : étude mathématique et analyse numérique*. Thèse de doctorat de l'université Paris 6, Paris, 2001.
- [28] A. Delnevo et I. Terrasse, *Manuel théorique ACTI3S, Justifications Théoriques*. Technical report, Rapport interne Aerospatiale Matra-CCR, 2000.
- [29] W. Eversman et D. Okunbor, *Aft fan duct acoustic radiation*. J. of Sound and Vibrations. 1997.
- [30] R. Ewert et W. Schröder, *Acoustic perturbation equations based on flow decomposition via source filtering*. J. Computat. Physics, 188 (2003), pp. 365-398.
- [31] B. Mercier et G. Raugel, *Résolution d'un problème aux limites dans un ouvert axisymétrique par éléments finis en  $(r,z)$  et série de Fourier en  $\theta$* . R.A.I.R.O Analyse numérique, 16 (1982), pp. 405-461.

- [32] V. Girault et P.-A. Raviart, *Finite element methods for Navier-Stokes equations, theory and algorithms*. vol. 5 of Springer Series in computational mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1986.
- [33] N. Gmati, *Guidage et diffraction d'ondes en milieu non borné*. Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1992.
- [34] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains*. vol. 24 of Monographs and studies in mathematics, Pitman, London, 1985.
- [35] M.S. Howe, *Theory of vortex sound*. Cambridge texts in applied mathematics, Cambridge university press, 2003.
- [36] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*. Springer-Verlag, New-York, NY, USA, 1976.
- [37] Lord Kelvin, *On vortex motion*. Transactions of the royal society of Edinburgh. 25 (1867), pp. 217-260.
- [38] G. Legendre, *Rayonnement acoustique dans un fluide en écoulement : analyse mathématique et numérique de l'équation de Galbrun*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France, 2003.
- [39] V. Levillain, *Couplage éléments finis-équations intégrales pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène*. Thèse de l'école polytechnique, France, 1991.
- [40] S. Lidoine, H. Batard, S. Troyes, A. Delnevo et M. Roger, *Acoustic radiation modelling of aeroengine intake, comparaison between analytical and numerical methods*. 7<sup>th</sup> AIAA/CEAS Aeroacoustics conference, paper 2001-2140.
- [41] M.J. Lighthill, *On sound generated aerodynamically. Part one : general theory*. Proceedings of the royal society of London, 211 (1952), pp. 564-587.
- [42] J.L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Dunod, 1968, Paris.
- [43] F. Maréchal et F. Dubois, *Manuel théorique A3DF. Différences finies pour la propagation acoustique en présence d'un écoulement stationnaire uniforme*. Technical report, EADS-CCR, Juillet 2000.
- [44] H. J.-P. Morand et R. Ohayon, *Interactions fluides-structures*. Recherches en mathématiques appliquées , vol. 23, Masson, Paris, France, 1992.
- [45] M.K. Myers, *On the acoustic boundary condition in the presence of flow*. J. Sound Vibration, 71 (1980), pp. 429-434.
- [46] F. Murat, *L'injection du cône positif de  $H^{-1}$  dans  $W^{-1,q}$  est compact pour tout  $q < 2$* . J. Math. Pures Appl., 60 (1981), pp. 309-322.
- [47] J.-C. Nédélec, *Ondes électromagnétiques et acoustiques*. Cours de D.E.A, Université Paris 6, 1993.
- [48] J.-C. Nédélec, *Mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$* . Numer. Math., 35 (1980), pp. 315-341.
- [49] J. Nečas, *Compacité par entropie et écoulements de fluides*. Notes de cours de Université Charles Pragues-E.N.S Paris, Masson, Paris, 1989.

- [50] V. Pagneux, *Propagation acoustique dans les guides à section variables et effets d'écoulement*. Thèse de doctorat, Université du Maine, France, 1996.
- [51] A.V. Parrett et W. Eversman, *Wave envelope and finite element approximation for turbofan noise radiation in flight*. AIAA J., 24 (1986), pp. 753-760.
- [52] J. Perriaux, *Three dimensional analysis of compressible potential flows with the FEM*. Method. Int. Jour. for Num. Math. in Engrg., 9 (1975).
- [53] C. Peyret et G. Elias, *Finite-element method to study harmonic aeroacoustics problems*. J. Acoust. Soc. Amer., 110 (2001), pp. 661-668.
- [54] B. Poirée, *Les équations de l'acoustique linéaire et non linéaire dans un écoulement de fluide parfait*. Acustica, 57 (1985), pp. 5-25.
- [55] P.-A. Raviart et J.-M. Thomas, *A mixed finite element method for second order elliptic problems*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1977.
- [56] F. Rellich, *Über das asymptotische Verhalten der lösungen von  $\Delta u + \lambda u = 0$  in unendlichen Gebieten*. Jahresber. Deutsch. Math. Verein., 53 (1943), pp. 57-65.
- [57] G. Sylvand, *La méthode multipôle rapide en électromagnétisme : Performances, parallélisation, applications*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, Juin 2002.
- [58] C.K.W. Tam, *Computational aeroacoustics : issues and methods*. AIAA J., 33 (1995), pp. 1788-1796.
- [59] C.K.W. Tam, *Advances in numerical boundary conditions for computational aeroacoustics*. J. Comput. Phys., 144 (1998), pp. 213-234.
- [60] C.K.W. Tam et J.C. Webb, *Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics*. J. Comput. Phys., 107 (1993), pp. 262-281.
- [61] I. Terrasse et A. Tillequin, *ELFI2R 3.1. Rapport sur la prise en compte des matériaux anisotropes*. Technical report, EADS-CCR, Janvier 2003.
- [62] A. Tillequin, *Une méthode de raccordement modal généralisée pour les problèmes de jonction de guides d'ondes*. Rapport de recherche 345, ENSTA, Paris, France, 2001.
- [63] J.E. Ffowcs Williams et D.L. Hawkings, *Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion*. Philosophical transactions of the royal society of London, 264 (1969), pp. 321-342.
- [64] K.S. Yee, *Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems in Isotropic Media*. IEEE Trans. Antennas Propagation, 1966.

Monsieur **DUPREY Stefan**

**DOCTORAT DE L'UNIVERSITE HENRI POINCARÉ, NANCY 1**

en **MATHEMATIQUES APPLIQUEES**

VU, APPROUVÉ ET PERMIS D'IMPRIMER n° 1260

Nancy, le 20 avril 2007

Le Président de l'Université



**Résumé :** Cette thèse traite du problème industriel de la modélisation et de la simulation numérique du rayonnement acoustique à l'entrée d'air des nacelles d'Airbus. Les hypothèses physiques subséquentes au contexte industriel précis conduisent à un modèle simplifié de propagation acoustique linéaire sur un écoulement porteur potentiel et non-linéaire. La modélisation de la source modale de bruit du moteur se traduit par une condition de bord exprimée par un opérateur Dirichlet-Neumann. L'existence et l'unicité du problème mathématique général (auquel on a rajouté une condition de Sommerfeld convectée) de la perturbation potentielle et locale autour d'un écoulement uniforme sont démontrées. Un couplage discret alliant le potentiel acoustique (éléments finis de volume) et sa dérivée conormale de bord (éléments finis de frontière) par une équation intégrale est proposé. Le code informatique est validé analytiquement et comparativement. Les résultats originaux prouvent la nécessité de la prise en compte des non-linéarités de l'écoulement par des différences de plus de 5 décibels en champ lointain. Le positionnement optimal de la surface rayonnante et la possibilité d'adaptation de la méthode multipôle rapide rendent ce couplage incontournable. Le modèle simplifié potentiel-linéaire, même si il n'est a priori apte qu'à traiter l'entrée d'air, trouve toute sa justification en tant que brique d'un code global basé sur la décomposition de domaine. Finalement, soulignons l'avènement d'un élément fini axisymétrique naturel et d'une alternative originale de calcul de l'écoulement non-linéaire par une méthode de point fixe.

**Mots clés :** Aéroacoustique, potentialité, couplage éléments finis de volume-éléments finis de bord, équation intégrale, dérivée elliptique conormale.

**Abstract :** This thesis deals with the industrial problem of modelisation and numerical simulation of the acoustic radiation from fan duct air entry. The physical hypothesis subsequent to the industrial framework give way to a simplified model of linear acoustic propagation upon a non linear potential flow. Engine modal noise source modelisation requires acoustic boundary conditions through a Dirichlet-Neumann operator. Existence and uniqueness of the global mathematical problem (a convected Sommerfeld condition is added) of the potential and local perturbation from a uniform flow are proved. A discrete coupling between the volumic acoustic potential (finite volumic elements) and its elliptic normal derivate (boundary finite element) through an integral equation is exhibited. Computing code is validated analytically and comparatively. Original results are described and prove the necessity to consider the nonlinearity of the flow by differences greater than 5 dBs in the far field acoustic diagrams. Optimal positionning of the radiating surface and the plugability of the fast multipole method make this coupling unmissable. Simplified potential-linear model, even if its range of validity is restricted to the fan duct air entry, gets his whole interest as a brick in a global domain decomposition code. By the way, let's mention the achievement of a natural axisymetric finite element and an alternative method to the calculus of the non linear flow by a fixed point method.

**Key Words :** Aeroacoustic, potential, coupling finite volume elements-boundary elements, integral equation, boundary elliptic derivate.