

Domaines singulièrement perturbés en optimisation de formes

Antoine Laurain

Soutenance de thèse

Institut Elie Cartan
Université Henri Poincaré

Directeur de thèse: *Jan Sokolowski*

16 juin 2006

Plan

- 1.1. Domaines fissurés
- 1.2. Perturbations normale et tangentielle
- 1.3. Théorème de structure

- 2.1. Problème numérique
- 2.2. Problème de Signorini
- 2.3. Dérivation par rapport au domaine
- 2.4. Dérivée topologique
- 2.5. Fonction "Levelset"
- 2.6. Algorithme et résultats numériques

- 3.1. Extensions auto-adjointes en optimisation de forme
- 3.2. L'équation de Laplace en 2D
- 3.3. Extension auto-adjointe du Laplacien
- 3.4. Fonctionnelle d'énergie approchée

- 4. Annexe

Théorème de structure pour les domaines fissurés

Motivations

G. Fremiot, *Structure de la semi-dérivée eulérienne dans le cas de domaines fissurés et quelques applications* (2000)

A. Novruzi, M. Pierre, *Structure of shape derivatives* (2002)

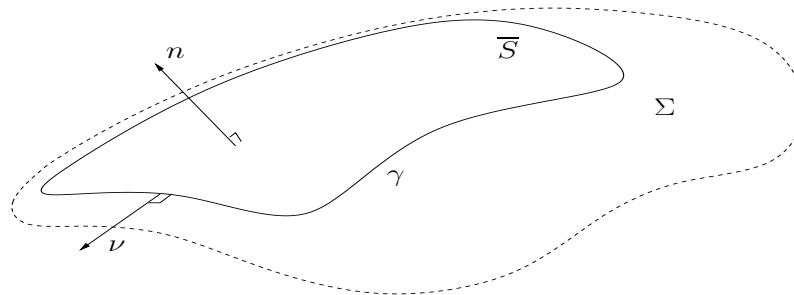
- Obtenir la structure de la dérivée seconde pour des domaines fissurés en généralisant la méthode introduite par A.Novruzi et M.Pierre.
- Application à la méthode du serpent à sonnettes (P.Destuynder, O.Wilk) et à une méthode de recalage d'images (O.Mussejko, G.Leugering).

Domaines fissurés

Soit U un ouvert borné de \mathbb{R}^d , $d \geq 3$ à frontière régulière et $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$.

$$\mathcal{O}_k = \{D \in U; D \text{ ouvert borné de classe } C^k\}.$$

Définition 1. Soit $D \in \mathcal{O}_k$. La frontière $\partial D = \Sigma$ de D est une variété fermée de dimension $d - 1$. Soit γ une sous-variété fermée et connexe de Σ de dimension $d - 2$ et de classe C^k telle que $\Sigma \setminus \gamma$ a deux composantes connexes S et S' . Alors \overline{S} est appelé une fissure et on définit le domaine fissuré par $\Omega = U \setminus \overline{S}$



Cadre fonctionnel: Soit Θ_k l'espace des champs de vecteurs de $C^k(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ qui s'annulent sur U^c et dont les dérivées sont bornées jusqu'à l'ordre k . Muni de la norme usuelle $\|\cdot\|_k$, Θ_k est un espace de Banach. On note

$$\mathcal{D}_k := \{\theta \in \Theta_k, \|\theta\|_k < 1\} .$$

Etant donné Ω_0 un domaine fissuré avec $D_0 \in \mathcal{O}_k$, on pose

$$\mathcal{F}_k(\Omega_0) = \{\Omega_\theta, \theta \in \mathcal{D}_k\}$$

comme étant l'ensemble des domaines fissurés admissibles

Fonctionnelle de forme: Soit $J : \mathcal{F}_k \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle de forme donnée. On associe à J la fonctionnelle E définie sur \mathcal{D}_k par l'égalité

$$\forall \theta \in \mathcal{D}_k, E(\theta) := J(\Omega_\theta) .$$

Perturbations normale et tangentielle

Pour tout $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq l \leq k$, on pose

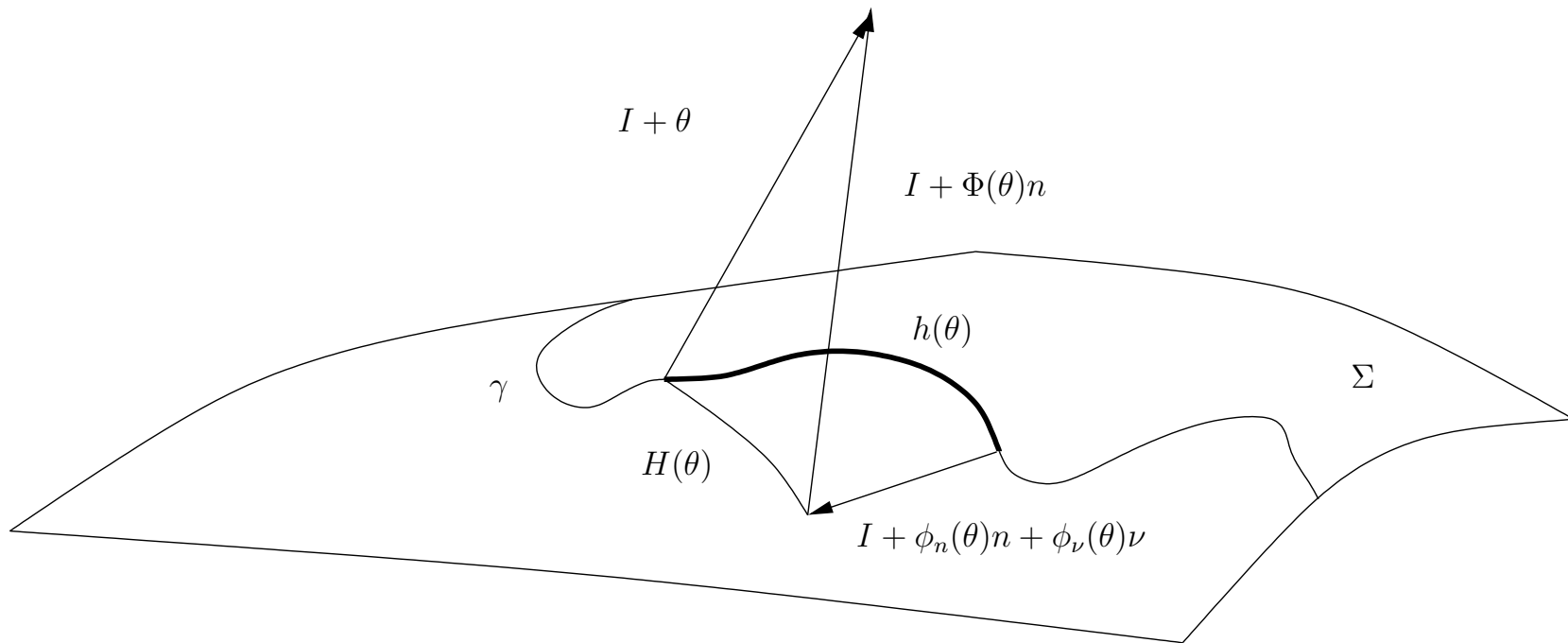
$$G^{k-l}(\Sigma, \Sigma) := \{g \in C^{k-l}(\Sigma, \mathbb{R}^d); g(\Sigma) \subset \Sigma\}$$

$$G^{k-l}(\gamma, \gamma) := \{g \in C^{k-l}(\gamma, \mathbb{R}^d); g(\gamma) \subset \gamma\}$$

On note $\Phi(\theta)$ et $H(\theta)$ les perturbations normale et tangentielle, respectivement, sur la surface Σ . On note également $\phi_n(\theta)$ et $\phi_\nu(\theta)$ les perturbations normales de la courbe γ dans les directions n et ν , et $h(\theta)$ les perturbations tangentielles de la variété γ .

$$I + \theta = (I + \Phi(\theta)n) \circ H(\theta) \text{ sur } \Sigma$$

$$H(\theta) = (I + \phi_n(\theta)n + \phi_\nu(\theta)\nu) \circ h(\theta) \text{ sur } \gamma$$



Perturbations normale et tangentielle

Lemme 2. *On suppose que Σ et γ sont des variétés de classe C^k . Pour tout $1 \leq l \leq k$, il existe un voisinage ouvert \mathcal{U}_k de 0 dans Θ_k et un unique vecteur $(H, \Phi, h, \phi_n, \phi_\nu)$ de fonctions C^l :*

$$(H, \Phi, h, \phi_n, \phi_\nu) : \mathcal{U}_k \rightarrow G^{k-l}(\Sigma, \Sigma) \times C^{k-l}(\Sigma, \mathbb{R}) \times G^{k-l}(\gamma, \gamma) \times C^{k-l}(\gamma, \mathbb{R})^2$$

telles que $(H, \Phi, h, \phi_n, \phi_\nu)(0) = (I, 0, I, 0, 0)$ et pour tout $\theta \in \mathcal{U}_k$

$$I + \theta = (I + \Phi(\theta)n) \circ H(\theta) \text{ sur } \Sigma_0$$

$$H(\theta) = (I + \phi_n(\theta)n + \phi_\nu(\theta)\nu) \circ h(\theta) \text{ sur } \gamma_0$$

De plus, pour tout $\xi, \eta \in \Theta_k$ on a pour $l \geq 1$:

$$H'(0)(\xi) = \xi_\Sigma,$$

$$\Phi'(0)(\xi) = \xi_n,$$

$$h'(0)(\xi) = \xi_\gamma,$$

$$\phi'_n(0)(\xi) = 0,$$

$$\phi'_\nu(0)(\xi) = \xi_\nu,$$

et pour $l \geq 2$ les dérivées secondes sont données par

$$\Phi''(0)(\xi, \eta) = -\langle D\eta \xi_\Sigma, n \rangle - \langle D\xi \eta_\Sigma, n \rangle - \langle Dn \xi_\Sigma, \eta_\Sigma \rangle$$

$$H''(0)(\xi, \eta) = -\langle Dn \eta_\Sigma, \xi_\Sigma \rangle n - \eta_n Dn \xi_\Sigma - \xi_n Dn \eta_\Sigma$$

$$\begin{aligned} h''(0)(\xi, \eta) &= \langle \xi_\gamma, Dn \eta_\gamma \rangle n + \langle \xi_\gamma, D\nu \eta_\gamma \rangle \nu - \eta_n Dn \xi_\Sigma - \xi_n Dn \eta_\Sigma \\ &+ \eta_n \langle Dn \xi_\Sigma, \nu \rangle \nu + \xi_n \langle Dn \eta_\Sigma, \nu \rangle \nu - \xi_\nu D\nu \eta_\gamma - \eta_\nu D\nu \xi_\gamma \\ &+ \xi_\nu \langle D\nu \eta_\gamma, n \rangle n + \eta_\nu \langle D\nu \xi_\gamma, n \rangle n \end{aligned}$$

$$\phi_n''(0)(\xi, \eta) = -\eta_\nu \xi_\nu \langle Dn \nu, \nu \rangle$$

$$\begin{aligned} \phi_\nu''(0)(\xi, \eta) &= -\langle \xi_\gamma, D\nu \eta_\gamma \rangle - \langle \nu, D\eta \xi_\gamma \rangle - \langle \nu, D\xi \eta_\gamma \rangle \\ &- \eta_n \langle \nu, Dn \xi_\Sigma \rangle - \xi_n \langle \nu, Dn \eta_\Sigma \rangle \\ &- \eta_n \langle n, D\nu \xi_\gamma \rangle - \xi_n \langle n, D\nu \eta_\gamma \rangle. \end{aligned}$$

Théorème de structure

Théorème obtenu au *premier ordre* par G. Frémiot dans le cadre de la *semi-dérivabilité eulérienne*. Ici il s'agit de *dérivation au sens de Fréchet*, et on donne la structure pour les dérivées premières *et* secondes. La méthode utilisée est différente.

Théorème 3. (Théorème de structure) Soit $k \geq 1$.

1. Soit Ω_0 un domaine fissuré avec $D_0 \in \mathcal{O}_{k+1}$. On suppose que E est Fréchet-différentiable dans Θ_k en 0, alors il existe deux formes linéaires continues $l^1 : C^k(\Sigma_0, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ et $l_\nu^1 : C^k(\gamma_0, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, telles que :

$$E'(0)(\xi) = l^1(\xi_n) + l_\nu^1(\xi_\nu), \quad \forall \xi \in \Theta_k .$$

2. Soit Ω_0 un domaine fissuré avec $D_0 \in \mathcal{O}_{k+2}$. On suppose que E est deux fois Fréchet-différentiable en 0 dans Θ_k , alors il existe trois formes bilinéaires:

$$\begin{aligned} l^2 & : C^k(\Sigma_0, \mathbb{R}) \times C^k(\Sigma_0, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} , \\ l_\nu^2 & : C^k(\gamma_0, \mathbb{R}) \times C^k(\gamma_0, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} , \\ \mathcal{L}^2 & : C^k(\Sigma_0, \mathbb{R}) \times C^k(\gamma_0, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} , \end{aligned}$$

et une forme linéaire $l_n^1 : C^k(\gamma_0, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, telles que pour tout champ de vecteurs $\xi, \eta \in \Theta_{k+1}$:

$$\begin{aligned} E''(0)(\xi, \eta) & = l^2(\xi_n, \eta_n) \\ & + l_\nu^2(\xi_\nu, \eta_\nu) \\ & + l^1(\Phi''(0)(\xi, \eta)) \\ & + l_n^1(\phi_n''(0)(\xi, \eta)) \\ & + l_\nu^1(\phi_\nu''(0)(\xi, \eta)) \\ & + \mathcal{L}^2(\xi_n, \eta_\nu) \\ & + \mathcal{L}^2(\eta_n, \xi_\nu), \end{aligned}$$

Conclusion de la première partie

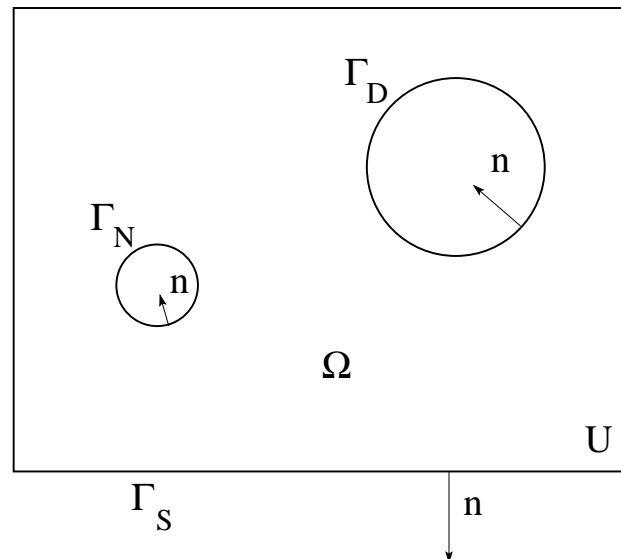
- Le théorème de structure permet de calculer la dérivée par rapport au domaine des fonctionnelles de forme. Cette dérivée par rapport au domaine est utilisée dans les applications numériques pour déformer la frontière du domaine, mais n'est pas toujours suffisante pour trouver un domaine optimal.

⇒ Pour remédier à ce problème, on peut par exemple utiliser la dérivée topologique pour créer des trous à l'intérieur du domaine et ainsi améliorer la recherche d'un domaine optimal.

Les notions de dérivée par rapport au domaine et de dérivée topologique sont également valables pour des problèmes non-linéaires tels que le problème de Signorini.

Problème numérique

- Ω : Domaine de \mathbb{R}^2
- n : Vecteur normal sortant à Ω
- Γ_D : Conditions de Dirichlet
- Γ_N : Conditions de Neumann
- Γ_S : Conditions de Signorini ou conditions de Dirichlet



Problème de Signorini

- Problème de Signorini

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u + u = f \quad \text{dans } \Omega \subset U \subset \mathbb{R}^2 \\ u \geq 0, \quad \partial_n u \geq 0, \quad u \partial_n u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_S \\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D, \\ \partial_n u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N, \end{array} \right.$$

De façon équivalente, u est solution de l'inéquation variationnelle

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) d\Omega \geq \int_{\Omega} (f - u)(v - u) d\Omega \quad \forall v \in K$$

$$K := \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_D, v \geq 0 \text{ sur } \Gamma_S\}$$

- On veut maximiser la fonctionnelle $J(\Omega)$ définie par

$$J(\Omega) = E(\Omega) + \lambda A(\Omega) - \mu P_c(\Omega)^2,$$

avec $A(\Omega)$, $P_c(\Omega)$ et $E(\Omega)$ définis par

$$E(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 - \int_{\Omega} f u$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} f u,$$

$$A(\Omega) = |\Omega|,$$

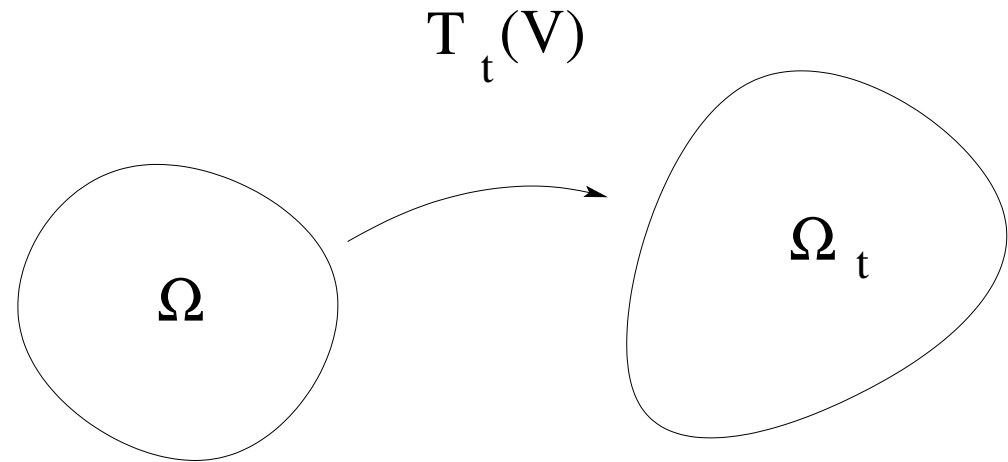
$$P_c(\Omega) = \max(0, \mathcal{H}^1(\partial\Omega) - c),$$

Dérivation par rapport au domaine

Méthode des vitesses

$V = V(x, t)$ régulier

$$\begin{cases} x'(t) = V(x(t), t), & 0 < t < \tau \\ x(0) = X \in U \subset \mathbb{R}^2 \end{cases}$$



$$T_t(V)(X) = x(t) \text{ et } \Omega_t = T_t(V)(\Omega)$$

- $dJ(\Omega; V) = \left. \frac{dJ(\Omega_t)}{dt} \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(\Omega_t) - J(\Omega)}{t}$
- $dJ(\Omega; V) > 0 \implies J(\Omega_t) > J(\Omega), \quad t \text{ petit.}$

Dérivée par rapport au domaine pour le problème non-linéaire

On considère la transformation $F_\delta = I + \delta V$ avec $\Omega_\delta = F_\delta(\Omega)$ et $u^\delta \in K_\delta$ solution de l'inéquation variationnelle suivante

$$\int_{\Omega_\delta} \langle \nabla u^\delta, \nabla v - \nabla u^\delta \rangle \geq \int_{\Omega_\delta} (f - u^\delta)(v - u^\delta) \quad \forall v \in K_\delta,$$

$$K_\delta = \{v \in H^1(\Omega_\delta) \mid v \geq 0 \text{ sur } \Gamma_S ; v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\} .$$

On considère la fonctionnelle d'énergie

$$E(\Omega_\delta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\delta} |\nabla u^\delta|^2 + (u^\delta)^2 - \int_{\Omega_\delta} f u^\delta.$$

La limite suivante

$$E'(\Omega, V) := \left. \frac{dE(\Omega_\delta)}{d\delta} \right|_{\delta=0} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{E(\Omega_\delta) - E(\Omega)}{\delta}$$

existe et est finie, linéaire et continue par rapport au champ de vecteurs V .

Dérivée topologique

La méthode des vitesses ne permet pas de modifier la topologie (création d'un trou).
→ utilisation de la dérivée topologique (utilisée par Nazarov, Sokolowski, Zochowski, Guillaume, Masmoudi, Amstutz, Feijoo, Novotny, Tarocco entre autres).

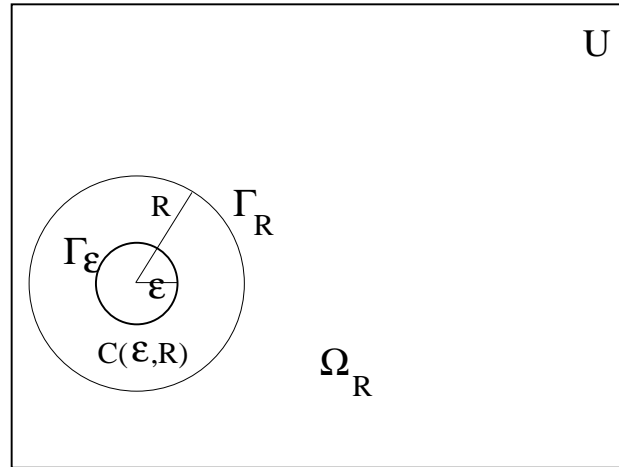
$$\omega_\varepsilon = B_{x_0}(\varepsilon), \quad \Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon}$$

$$J(\Omega_\varepsilon) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 + u_\varepsilon^2 + \lambda A(\Omega_\varepsilon) - \mu P_c(\Omega_\varepsilon)^2$$

Développement asymptotique : $J(\Omega_\varepsilon) = J(\Omega) + \rho(\varepsilon)\mathcal{T}_\Omega(x_0) + o(\rho(\varepsilon))$,
 $\rho(\varepsilon) > 0, \quad \rho(\varepsilon) \rightarrow 0$.

Si $\mathcal{T}_\Omega(x_0) > 0$ alors $J(\Omega_\varepsilon) > J(\Omega)$.

Problème tronqué



$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_\epsilon + u_\epsilon = f \quad \text{dans } \Omega_\epsilon, \quad \Omega_\epsilon = U \setminus B_\epsilon, \\ u_\epsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\epsilon. \\ u_\epsilon \geq 0, \quad \partial_n u_\epsilon \geq 0, \quad u_\epsilon \partial_n u_\epsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_S. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_\epsilon^R + u_\epsilon^R = f \quad \text{dans } \Omega_R, \quad \Omega_R = U \setminus B_R, \quad R > \epsilon, \\ u_\epsilon^R \geq 0, \quad \partial_n u_\epsilon^R \geq 0, \quad u_\epsilon^R \partial_n u_\epsilon^R = 0 \quad \text{sur } \Gamma_S, \\ -\partial_n y_\epsilon + \partial_n u_\epsilon^R = A_\epsilon(u_\epsilon^R) \quad \text{sur } \Gamma_R. \end{array} \right.$$

u_ε^R est solution de l'inéquation variationnelle suivante

$$u_\varepsilon^R \in K(\Omega_R) : a_\varepsilon(u_\varepsilon^R, v - u_\varepsilon^R) \geq l_\varepsilon(v - u_\varepsilon^R) \quad \forall v \in K(\Omega_R)$$

$$a_\varepsilon(u, v) = \int_{\Omega_R} \langle \nabla u, \nabla v \rangle + uv \, dS + \int_{\Gamma_R} A_\varepsilon(u)v$$

$$l_\varepsilon(v) = \int_{\Omega_R} f v - \int_{\Gamma_R} v \partial_n y_\varepsilon,$$

Théorème 4. *La solution u_ε^R du problème tronqué vérifie*

$$u_\varepsilon^R = u_\varepsilon|_{\Omega_R},$$

L'énergie du problème défini sur Ω_ε est donnée par

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(f) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} \|\nabla u_\varepsilon\|^2 + u_\varepsilon^2 \, dS - \int_{\Omega_\varepsilon} f u_\varepsilon \, dS \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} \|\nabla u_\varepsilon\|^2 + u_\varepsilon^2 \, dS. \end{aligned}$$

Opérateur de Steklov-Poincaré

Le problème homogène

On introduit le problème homogène dans l'anneau $C(\varepsilon, R) = B(R) \setminus \overline{B(\varepsilon)}$

$$\begin{cases} -\Delta w_\varepsilon + w_\varepsilon = 0 & \text{dans } C(\varepsilon, R), \\ w_\varepsilon = v & \text{sur } \Gamma_R, \\ w_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon. \end{cases}$$

L'opérateur de Steklov-Poincaré est défini par

$$A_\varepsilon : H^{1/2}(\Gamma_R) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_R)$$

$$A_\varepsilon(v) = \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial n} \quad \text{sur } \Gamma_R$$

Développement asymptotique pour A_ε

$$A_\varepsilon = A_0 + \frac{1}{|\ln \varepsilon|} B + o\left(\frac{1}{|\ln \varepsilon|^2}\right) \quad \text{dans } \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_R); H^{-1/2}(\Gamma_R))$$

On définit les énergies

$$E^{(1)}(v) = \int_{B(R)} \|\nabla w\|^2 + w^2 dS, \quad E_\varepsilon^{(1)}(v) = \int_{C(R,\varepsilon)} \|\nabla w_\varepsilon\|^2 + w_\varepsilon^2 dS,$$

Théorème 5. $E_\varepsilon^{(1)}(v)$ a un développement

$$E_\varepsilon^{(1)}(v) = E^{(1)}(v) + \frac{\pi a_0(R)^2}{2I_0(R)^2 |\ln \varepsilon|} + \mathfrak{R}(v),$$

avec

$$|\mathfrak{R}(v)| \leq \frac{M}{|\ln \varepsilon|^2},$$

uniformément sur les sous-ensembles bornés de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_R)$ et

$$v(R, \phi) = \frac{1}{2}a_0(R) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(R) \sin k\phi + b_k(R) \cos k\phi$$

$$I_k(r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{k+2m}}{m!(k+m)!}, \quad k \geq 0$$

Le problème non-homogène

$$\begin{cases} -\Delta y_\varepsilon + y_\varepsilon = f|_{C(R,\varepsilon)} & \text{dans } C(R,\varepsilon) \\ y_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_R \\ y_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \end{cases}$$

avec $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. On étudie la fonction suivante:

$$f|_{C(R,\varepsilon)} \mapsto \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial n}|_{\Gamma_R} = g_\varepsilon.$$

Théorème 6. g_ε admet le développement

$$g_\varepsilon = g_0 - \frac{h(R)}{2RI_0(R) \ln \varepsilon} + O((\ln \varepsilon)^{-2}),$$

avec

$$h(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} t f(t, \phi) \frac{I_0(t)K_0(R) - K_0(t)I_0(R)}{I_0(R)} dt d\phi.$$

On définit les énergies

$$E^{(2)}(f) = - \int_{B(R)} \|\nabla y\|^2 + y^2 dS, \quad E_\varepsilon^{(2)}(f) = - \int_{C(R,\varepsilon)} \|\nabla y_\varepsilon\|^2 + y_\varepsilon^2 dS$$

Théorème 7. $E_\varepsilon^{(2)}(f)$ a un développement

$$E_\varepsilon^{(2)}(f) = E^{(2)}(f) + \frac{\pi h(R)^2}{2|\ln \varepsilon|} + \mathfrak{R}(f),$$

avec

$$|\mathfrak{R}(f)| \leq \frac{M}{|\ln \varepsilon|^2},$$

Théorème 8. *L'énergie du problème défini sur Ω_ε admet le développement*

$$E_\varepsilon(f) = E(f) + \frac{\pi a_0(R)^2}{4I_0(R)^2 |\ln \varepsilon|} + \frac{\pi h(R)^2}{4|\ln \varepsilon|} + \frac{\pi a_0 h(R)}{2I_0(R) |\ln \varepsilon|} + \mathfrak{R}(f)$$

avec

$$|\mathfrak{R}(f)| \leq \frac{M}{|\ln \varepsilon|^2}$$

où le coefficient $a_0(R)$ est défini par

$$a_0(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \phi) d\phi.$$

On a les convergences suivantes

$$\lim_{R \rightarrow 0} h(R) = 0, \quad \lim_{R \rightarrow 0} a_0(R) = 2u(0), \quad \lim_{R \rightarrow 0} I_0(R) = 1$$

on peut donc considérer l'approximation suivante pour la dérivée topologique

$$\mathcal{T}_\Omega(0) \simeq \frac{1}{4\pi} \left(\int_0^{2\pi} u(R, \phi) d\phi \right)^2$$

En fait, on peut prouver que

$$u(0) = \frac{a_0(R)}{2I_0(R)} + \frac{h(R)}{2}$$

Par conséquent

$$E_\varepsilon(f) = E(f) + \frac{\pi u(0)^2}{|\ln \varepsilon|} + \mathfrak{R}(f)$$

avec

$$\mathfrak{R}(f) \leq \frac{M}{|\ln \varepsilon|^2}$$

Conditions de Dirichlet sur $\partial\omega_\varepsilon$

$$u_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\omega_\varepsilon$$

$$J(\Omega_\varepsilon) = J(\Omega) + \frac{\pi u(0)^2}{|\ln \varepsilon|} + o(1/\log \varepsilon) - 4\mu P_c(\Omega)\pi\varepsilon - \lambda\pi\varepsilon^2$$

$$\rightarrow \mathcal{T}_\Omega(x_0) = u_\Omega^2(x_0) \geq 0$$

Conditions de Neumann sur $\partial\omega_\varepsilon$

$$\partial_n u_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\omega_\varepsilon$$

$$J(\Omega_\varepsilon) = J(\Omega) + \pi\varepsilon^2 \left(-|\nabla u(x_0)|^2 - \frac{1}{2}u(x_0)^2 + uf(x_0) - \lambda \right) + 4\mu P_c(\Omega)\pi\varepsilon + o(\varepsilon^2)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \mathcal{T}_\Omega(x_0) = -|\nabla u(x_0)|^2 - \frac{1}{2}u(x_0)^2 + uf(x_0) - \lambda & \text{si } P_c(\Omega) = 0 \\ \mathcal{T}_\Omega(x_0) = 4\mu P_c(\Omega)\pi & \text{si } P_c(\Omega) > 0 \end{cases}$$

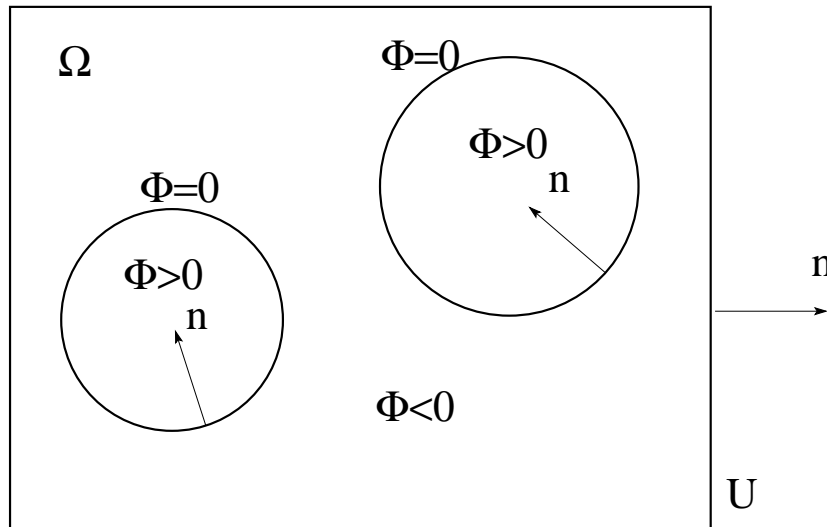
Si $\mathcal{T}_\Omega(x_{max}) \geq \mathcal{T}_\Omega(x)$ pour tout $x \in \Omega$ dans $\mathcal{T}_\Omega(x_{max}) > 0$, on crée un trou dans Ω en x_{max} .

La fonction “levelset”

La fonction “levelset” $\phi = \phi(x, t)$ est définie pour tout $x \in U$

$$\Omega = \{x \in U, \phi(x, t) < 0\}$$

$$\Gamma = \{x \in U, \phi(x, t) = 0\}$$



$$\left. \begin{aligned} \phi_t + V \cdot \nabla \phi &= 0 \text{ dans } U \\ n &= \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{équation d'Hamilton-Jacobi} \\ \phi_t + V_n |\nabla \phi| = 0 \text{ dans } U$$

- Dirichlet : $V_n = -\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \lambda - 2\mu P_c(\Omega)\mathcal{H}$ sur Γ_D
- Neumann : $V_n = \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}u^2 - uf + \lambda - 2\mu P_c(\Omega)\mathcal{H}$ sur Γ_N

Remarques : V_n doit être définie partout dans U , et pas seulement sur Γ
 \rightarrow extension. On veut aussi avoir $|\nabla \phi| \simeq 1$.

Extension de la vitesse normale

On calcule V_{ext} dans U de sorte que $V_{ext} = V_n$ sur $\Gamma = \Gamma_D$ ou Γ_N et

$$\nabla V_{ext} \cdot \nabla \phi = 0 \text{ dans } U.$$

On obtient alors $|\nabla \phi| = 1$ pour tout t .

Construction de V_{ext}

On résout (pour de grandes valeurs de T)

$$\begin{aligned} \partial_t q + S(\phi) \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \cdot \nabla q &= 0 && \text{dans } U \times (0, T) \\ q(x, 0) &= p(x) && \text{pour } x \in U \end{aligned}$$

où $p = V_n$ sur Γ et $p = 0$ sinon.

S est proche de la fonction signe

$$S(d) = \frac{d}{\sqrt{d^2 + |\nabla d|^2 \epsilon^2}}, \quad \epsilon = \min(\Delta x, \Delta y).$$

Algorithme

- Initialisation de ϕ^0 , le domaine initial est Ω_0 .
- Pour k de 0 à K
 - (1) Calcul de la dérivée topologique dans Ω_k
 - i. calcul de u_{Ω_k} dans Ω_k
 - ii. calcul de la dérivée topologique
 - iii. on crée un trou \rightarrow domaine Ω_k^1
 - (2) Résolution de l'équation de Hamilton-Jacobi dans U
 - * Pour p de 1 à P
 - i. calcul de $u_{\Omega_k^p}$ dans Ω_k^p
 - ii. calcul de V_n^p sur Γ_k^p and son extension à U
 - iii. résolution de l'équation de Hamilton-Jacobi: $\phi_t + V_n^p |\nabla \phi| = 0$,
 \rightarrow domaine Ω_k^{p+1}
 - fin pour p
 - * $\rightarrow \phi^{k+1}$ dans D et nouveau domaine $\Omega_{k+1} = \Omega_k^P$
- fin pour k

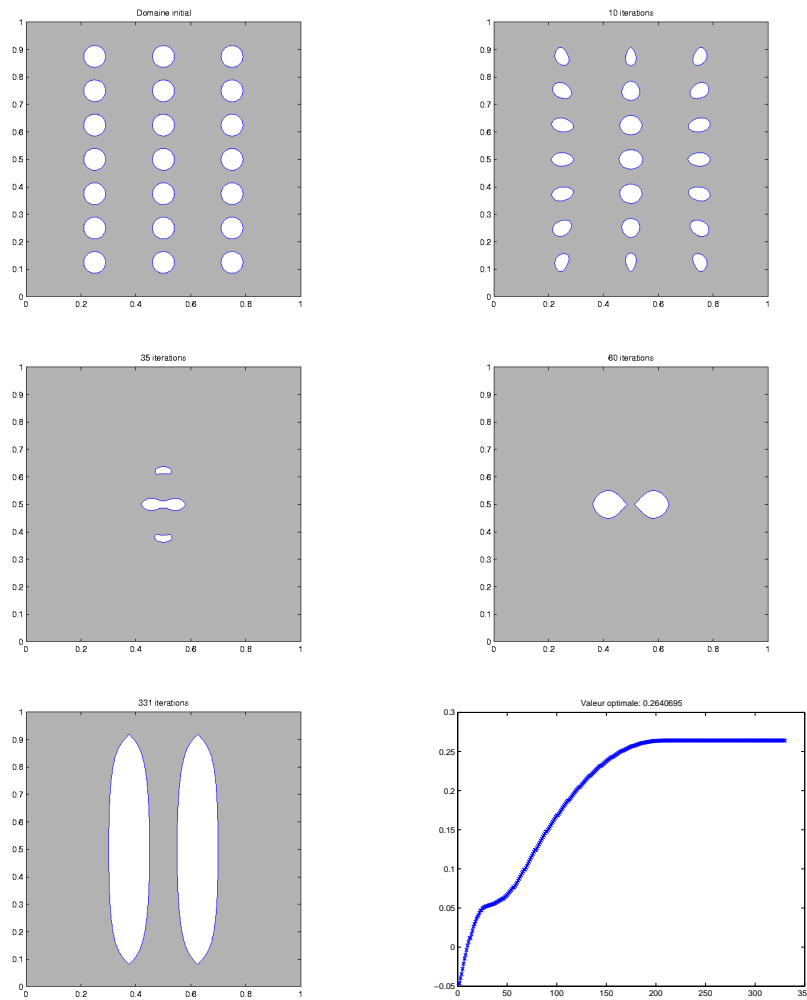


FIG. 1. Le domaine initial contient 21 trous et on n'utilise pas la dérivée topologique
 $f = 10 \sin^2(4\pi x)$, $\lambda = 0.5$, $\mu = 0$
 Valeur optimale : $J(\Omega_2) = 0,2640695$

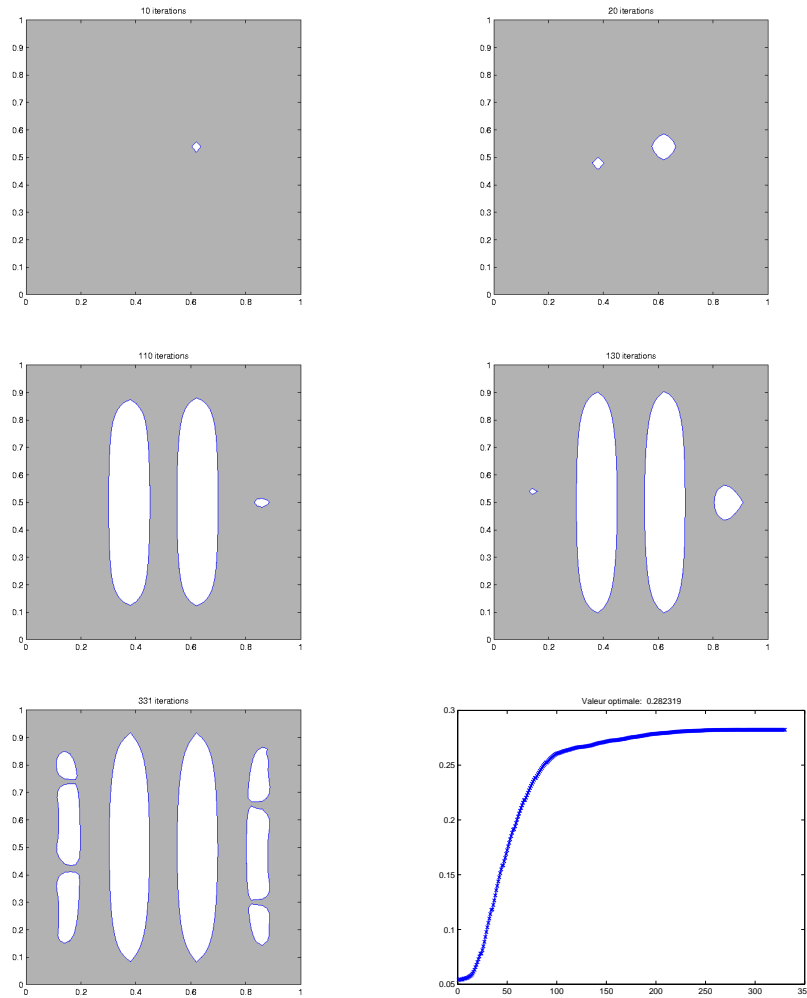


FIG. 1. Le domaine initial est plein et on utilise la dérivée topologique
 $f = 10 \sin^2(4\pi x)$, $\lambda = 0.5$, $\mu = 0$
 Valeur optimale : $J(\Omega_1) = 0,282319$

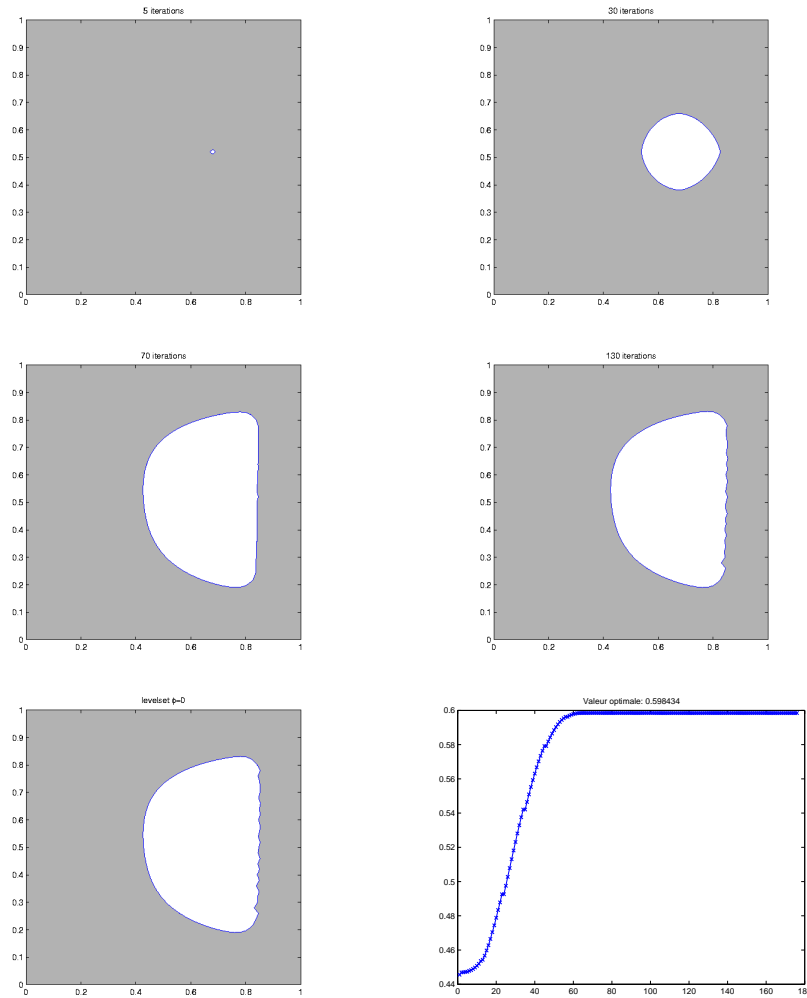


FIG. 1. On observe un début d'oscillations
 $f = 10x + y, \lambda = 1, \mu = 0$
 Valeur optimale : $J(\Omega) = 0,598434$

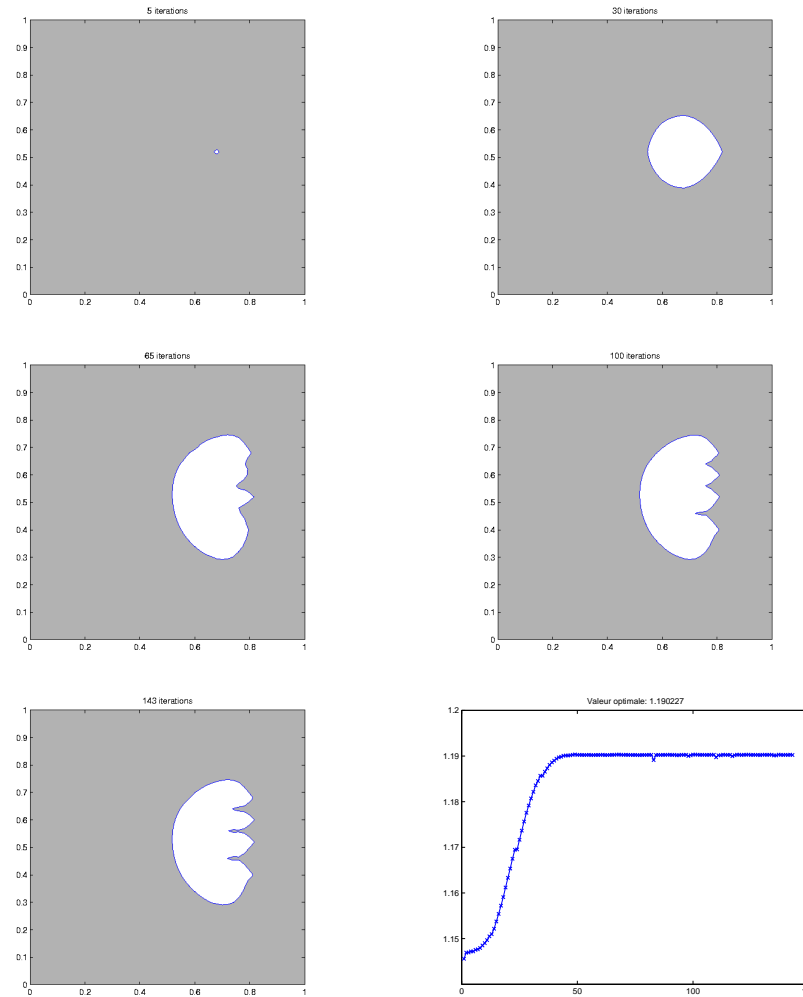


FIG. 1. On observe de fortes oscillations
 $f = 10x + y$, $\lambda = 1, 7$, $\mu = 0$
 Valeur optimale : $J(\Omega) = 1.190227$

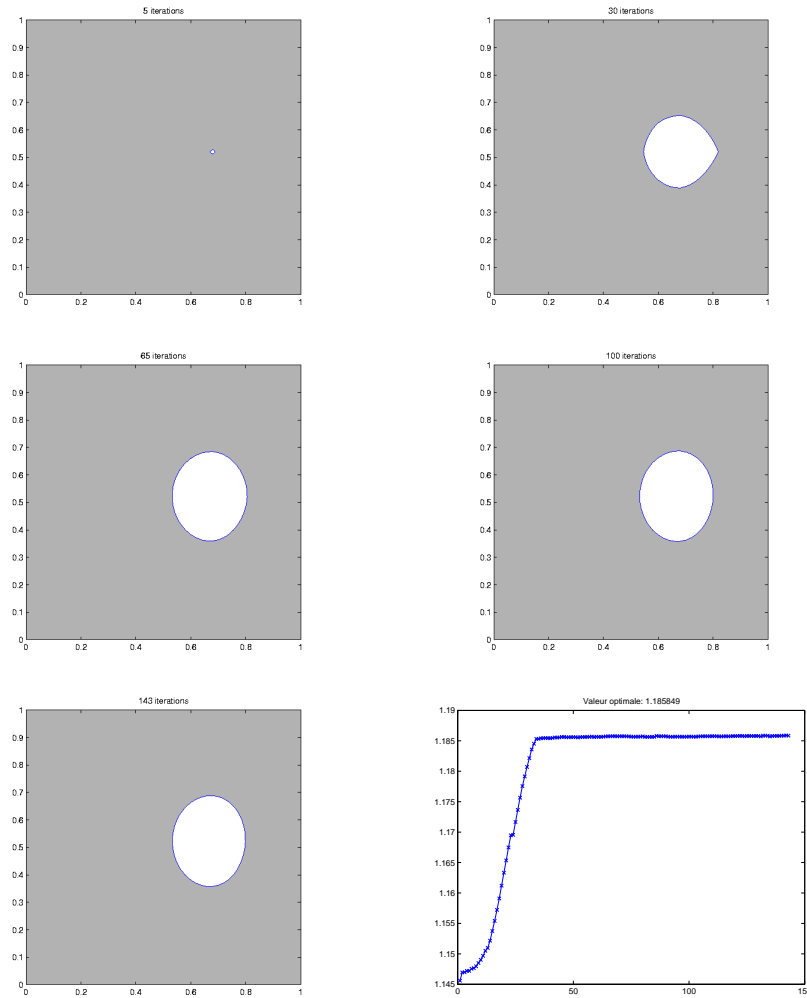


FIG. 1. Les oscillations ont disparu
 $f = 10x + y, \lambda = 1, 7, \mu = 0, 4$
 Valeur optimale : $J(\Omega) = 1.185849$

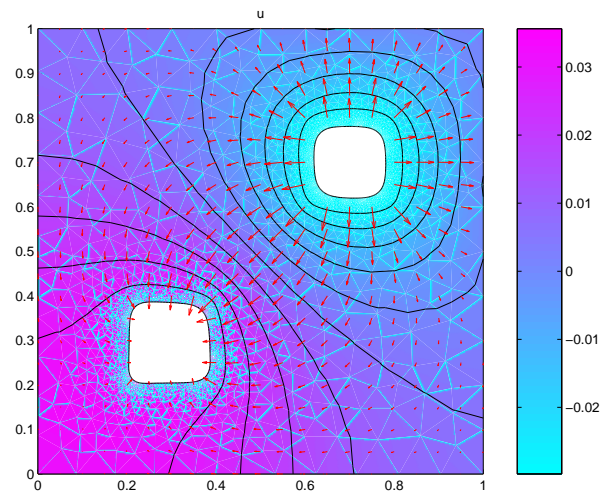
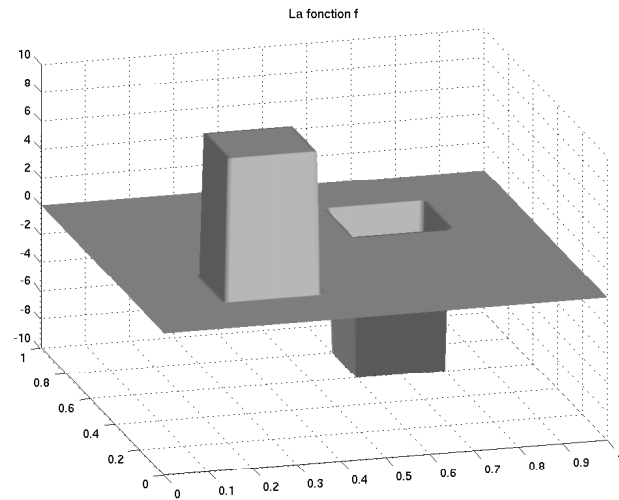


FIG. 1. La fonction f et la solution u dans le domaine final

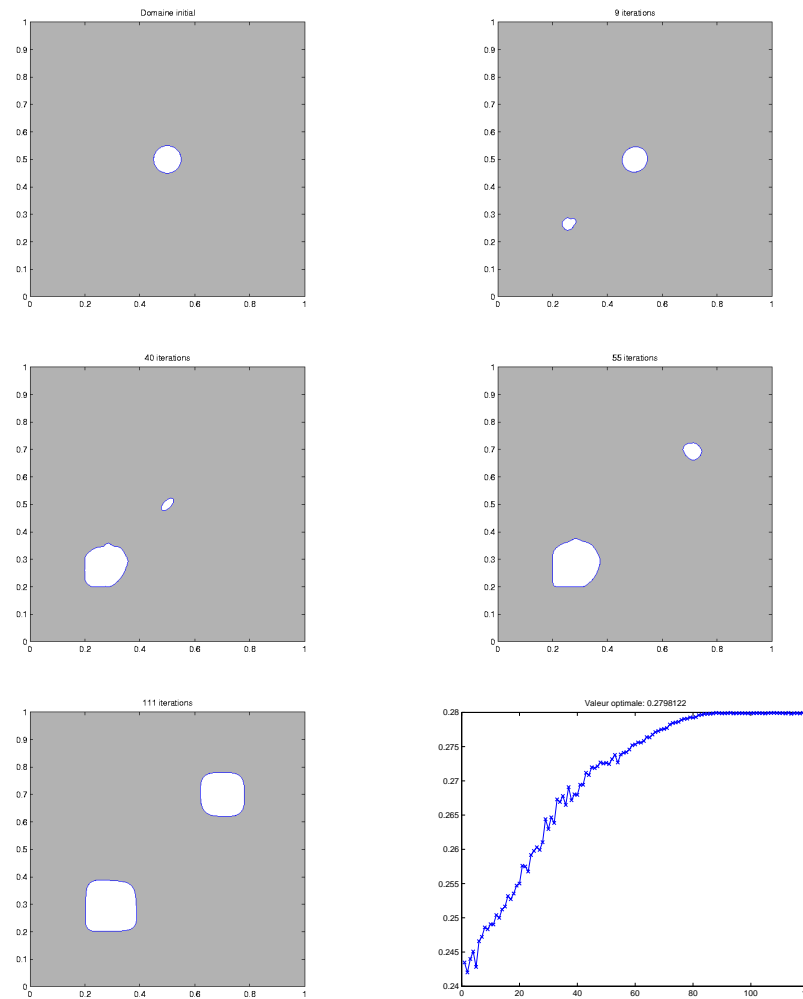


FIG. 1. Le cas non-linéaire
 $\lambda = 0.3, \mu = 0.001, c = 0.6$

Extensions auto-adjointes en optimisation de forme

Motivations

F.A. Berezin and L.D. Faddeev, *A remark on Schrödinger equation with a singular potential* (1961)

S.A. Nazarov, *Asymptotic conditions at a point, self adjoint extensions of operators, and the method of matched asymptotic expansions* (1999)

S.A. Nazarov, J. Sokolowski *Self adjoint extensions of differential operators in application to shape optimization* (2003)

- Modéliser la perturbation singulière du domaine due à la création d'un trou par une perturbation du Laplacien.
- Travailler dans un domaine fixe Ω au lieu du domaine perturbé Ω_ε .
- Appliquer cette modélisation à un problème inverse.

L'équation de Laplace en 2D

- Problème de Dirichlet

Soit Ω, ω des ouverts de \mathbb{R}^2 à frontières régulières, $\omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2, x = \varepsilon\xi, \xi \in \omega\}$

$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \omega_\varepsilon, \omega_\varepsilon^h = \{x = y + h, y \in \omega_\varepsilon\}, \Omega_\varepsilon^h = \Omega \setminus \omega_\varepsilon^h. f$ dans $L^2(\Omega)$

$$-\Delta u_h(x, \varepsilon) = f(x) \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon^h, \quad (1)$$

$$u_h(x, \varepsilon) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (2)$$

$$u_h(x, \varepsilon) = 0 \quad \text{sur } \partial\omega_\varepsilon^h. \quad (3)$$

Analyse asymptotique

- Premier problème limite

$$-\Delta v^0(x) = f(x) \quad \text{dans } \Omega \quad (4)$$

$$v^0(x) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (5)$$

Comme on a des conditions de Dirichlet sur la frontière du trou, le problème suivant donne une meilleure approximation

$$-\Delta v_h(x) = f(x) + \beta_h \delta(x - h) \quad \text{dans } \Omega \quad (6)$$

$$v_h(x) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (7)$$

et on a la représentation

$$v_h(x) = v^0(x) + \beta_h G(x, h).$$

$G(x, y)$ est la fonction de Green définie par

$$-\Delta_x G(x, y) = \delta(x - y) \quad \text{dans } \Omega \quad (8)$$

$$G(x, y) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (9)$$

La solution $u_h(x, \varepsilon)$ est approchée loin d'un voisinage de ω_ε^h par

$$u_h(x, \varepsilon) \simeq v^0(x) + \beta_h G(x, h)$$

La fonction $G(x, y)$ admet la représentation suivante au voisinage de l'origine:

$$G(x, h) = - \left\{ (2\pi)^{-1} \log \|x - h\| + \mathcal{G}(x, h) \right\}, \quad \|x - h\| \rightarrow 0 \quad (10)$$

où $\mathcal{G}(x, y)$ est la partie régulière de la fonction de Green solution de

$$-\Delta_x \mathcal{G}(x, y) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (11)$$

$$\mathcal{G}(x, y) = -(2\pi)^{-1} \log \|x - y\| \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (12)$$

- Deuxième problème limite (on détermine β_h)

L'approximation $u_h(x, \varepsilon) \simeq v^0(x) + \beta_h G(x, h)$ ne vérifie pas la condition limite (3) sur le trou. Par conséquent, on doit ajouter la couche limite $w_h^0(\xi_h, \varepsilon)$ qui dépend de la variable rapide ξ_h définie comme $\xi_h = \varepsilon^{-1}(x - h)$ pour compenser la discrédance. En développant $v^0(x) + \beta_h G(x, h)$ quand $x \rightarrow h$ on trouve

$$\begin{aligned} v^0(x) + \beta_h G(x, h) &= v^0(x) - \beta_h \left\{ (2\pi)^{-1} \log \|x - h\| + \mathcal{G}(x, h) \right\} \\ &= v^0(h) - \beta_h \left\{ (2\pi)^{-1} \log \|\varepsilon \xi_h\| + \mathcal{G}(h, h) \right\} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Maintenant la couche limite $w_h^0(\xi, \varepsilon)$ est solution du système suivant

$$-\Delta_{\xi_h} w_h^0(\xi_h, \varepsilon) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \omega^h \tag{13}$$

$$w_h^0(\xi_h, \varepsilon) = -v^0(h) + \beta_h \left\{ (2\pi)^{-1} \log \|\varepsilon \xi_h\| + \mathcal{G}(h, h) \right\} \quad \text{sur } \partial\omega^h \tag{14}$$

La solution du système (13)-(14) est

$$w_h^0(\xi_h, \varepsilon) = -v^0(h) + \beta_h \left\{ (2\pi)^{-1} \log \varepsilon + \mathcal{G}(h, h) \right\} + \beta_h \mathcal{E}_h^0(\xi_h). \tag{15}$$

$\mathcal{E}_h^0(\xi_h)$ est solution de

$$-\Delta_{\xi_h} \mathcal{E}_h^0(\xi_h) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \omega^h \quad (16)$$

$$\mathcal{E}_h^0(\xi_h) = (2\pi)^{-1} \log \|\xi_h\| \quad \text{sur } \partial\omega^h \quad (17)$$

La fonction $\mathcal{E}_h^0(\xi_h)$ admet le développement suivant

$$\mathcal{E}_h^0(\xi_h) = (2\pi)^{-1} L + O(\|\xi_h\|^{-1}) \quad (18)$$

La quantité $\exp(L)$ est appelée la capacité logarithmique de ω . Par conséquent, $w_h^0(\xi_h, \varepsilon)$ admet le développement

$$w_h^0(\xi_h, \varepsilon) = -v^0(h) + \beta_h \left\{ (2\pi)^{-1} \log \varepsilon + \mathcal{G}(h, h) \right\} + \beta_h (2\pi)^{-1} L + O(\|\xi_h\|^{-1}).$$

Pour avoir $w_h^0(\xi_h, \varepsilon) \rightarrow 0$ quand $\|\xi_h\| \rightarrow \infty$, on impose une condition sur β_h :

$$\beta_h = \left\{ (2\pi)^{-1} (\log \varepsilon + L) + \mathcal{G}(h, h) \right\}^{-1} v^0(h). \quad (19)$$

Par conséquent, la solution $u_h(x, \varepsilon)$ de (1)-(3) peut être représentée par

$$u_h(x, \varepsilon) = v^0(x) + \beta_h G(x, h) + \tilde{u}_h^0(x, \varepsilon)$$

où la fonction $\tilde{u}_h^0(x, \varepsilon)$ est solution du problème

$$-\Delta \tilde{u}_h^0(x, \varepsilon) = 0 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon^h \tag{20}$$

$$\tilde{u}_h^0(x, \varepsilon) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \tag{21}$$

$$\tilde{u}_h^0(x, \varepsilon) = - (v^0(x) - v^0(h)) \tag{22}$$

$$+ \beta_h \{ (2\pi)^{-1} (\log \|\xi_h\| - L) \}$$

$$+ \beta_h \{ \mathcal{G}(x, h) - \mathcal{G}(h, h) \} \quad \text{sur } \partial\omega_\varepsilon^h$$

et

$$\beta_h = \frac{v^0(h)}{(2\pi)^{-1} (\log \varepsilon + L) + \mathcal{G}(h, h)}$$

Extension auto-adjointe du Laplacien

On considère l'opérateur \mathcal{A}_0 dans $L_2(\Omega)$ donné par l'expression différentielle $-\Delta_x$ et dont le domaine de définition est

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \{v \in C_0^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{0\})\}.$$

L'opérateur $\overline{\mathcal{A}_0}$ et l'adjoint \mathcal{A}_0^* pour l'opérateur \mathcal{A}_0 sont donnés par l'expression différentielle $-\Delta_x$, avec les domaines de définition:

$$\mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_0}) = \{v \in H^2(\Omega), v(0) = 0, v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_0^*) = \left\{ v : v(x) = \chi_\delta(x) \left(-\frac{a}{2\pi} \log r + b \right) + \bar{v}(x), \bar{v} \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_0}), a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$\overline{\mathcal{A}_0}$ et \mathcal{A}_0^* ne sont pas auto-adjoints. Cependant, il existe une famille d'opérateurs auto-adjoints \mathcal{A} , telle que $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{A}_0^*$ et $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ contient toutes les solutions singulières requises du problème de Dirichlet dans Ω .

Théorème 9.

1. Soit \mathbf{A} la restriction de l'opérateur \mathcal{A}_0^* à l'espace vectoriel

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}) = \{v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0^*) : b = Sa\} \quad (23)$$

où $S = S(\varepsilon) = (2\pi)^{-1}(\log \varepsilon + L)$, la quantité L est définie en (18). Alors \mathbf{A} est un opérateur auto-adjoint.

2. L'équation suivante

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = f \in L_2(\Omega) \quad (24)$$

admet une unique solution

$$\mathbf{v} = v^0(x) + \beta G(x, 0) \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$$

Dérivée par rapport à la position du trou

- Fonctionnelles d'énergie dans L_p

On considère des fonctionnelles \mathcal{F} vérifiant:

$$\mathcal{F}(u, \varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} F(x, u) dx. \quad (25)$$

$$|\mathcal{F}(u, \varepsilon) - \mathcal{F}(v, \varepsilon)| \leq c \|u - v, L_p\| \left(\|u, L_p\|^{p-1} + \|v, L_p\|^{p-1} \right), \quad (26)$$

où $L_p = L_p(\Omega_\varepsilon)$, $p \in [1, \infty[$ et pour tout $u, v \in L_p(\Omega_\varepsilon)$. La fonction u_h est étendue par zéro sur ω_ε^h . Comme $H^1(\Omega) \subset L_p(\Omega)$ on obtient

$$|\mathcal{F}(u, 0) - \mathcal{F}(u_h, 0)| \leq c \|u - u_h\|_p \left(\|u\|_p^{p-1} + \|u_h\|_p^{p-1} \right), \quad (27)$$

Comme u et u_h sont dans $\mathcal{D}(\mathbf{A})$, on a le développement (23) pour u et u_h , ainsi

$$\|u - u_h\|_p = \left\| -\frac{a_0}{2\pi} \log r + \frac{a_h}{2\pi} \log r_h + S(a_0 - a_h) + \bar{u} - \bar{u}_h \right\|_p \quad (28)$$

Grâce au développement de $\mathcal{G}(h, h)$ et à la régularité de v^0 on trouve

$$\|a_0 - a_h\|_p = \|\beta - \beta_h\|_p \leq c|h| \quad (29)$$

$$\|b_0 - b_h\|_p = \|Sa - Sa_h\|_p \leq Sc|h| \quad (30)$$

$$\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_p \leq c|h| \quad (31)$$

Soit $\alpha \in]0, 1]$, on obtient l'estimation suivante pour $\|\log r - \log r_h\|_p$ quand $\alpha p < 1$:

$$\left\| \log \frac{r_h}{r} \right\|_p \leq C_\alpha |h|^{2/p}. \quad (32)$$

Par conséquent, pour $p \in [1, 2]$ on obtient la h -convergence de la fonctionnelle \mathcal{F} .

Fonctionnelle d'énergie approchée

$$-\Delta u(x, \varepsilon) = f(x) \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \quad (33)$$

$$u(x, \varepsilon) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon. \quad (34)$$

- Fonctionnelle d'énergie

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u, f) = \frac{1}{2}(\nabla u, \nabla u)_{\Omega_\varepsilon} - (f, u)_{\Omega_\varepsilon} = -\frac{1}{2}(f, u)_{\Omega_\varepsilon} \quad (35)$$

- Fonctionnelle d'énergie approchée

$$\mathbf{E}(\mathbf{v}, f) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{v})_\Omega - (f, \mathbf{v})_\Omega = -\frac{1}{2}(f, \mathbf{v})_\Omega \quad (36)$$

Le développement du premier ordre de la fonctionnelle d'énergie approchée $\mathbf{E}(\mathbf{v}, f)$ donne le résultat suivant:

$$\mathbf{E}(\mathbf{v}, f) = \mathcal{E}_0(u, f) - \frac{\pi v^0(0)^2}{\log \varepsilon} + O\left(\frac{1}{\log^2 \varepsilon}\right), \quad (37)$$

où le terme

$$-\frac{\pi v^0(0)^2}{\log \varepsilon}$$

est effectivement la dérivée topologique de la fonctionnelle d'énergie pour le problème (1)-(3) (avec $h = 0$).

Conclusions

Théorème de structure pour les domaines fissurés

- Obtention de la structure pour la dérivée seconde, application au calcul des dérivées pour des fonctionnelles dépendant du domaine.
- Article paru dans AMSA sur le théorème de structure pour des domaines fissurés en dimension deux.

Problème numérique

- Sans dérivée topologique, l'algorithme est très sensible au domaine initial et on risque de tomber dans un minimum local.
- Grâce à la dérivée topologique, on peut partir de n'importe quel domaine initial, en particulier le domaine initial plein.
- Pour le problème non-linéaire, il est possible de définir une dérivée par rapport au domaine et une dérivée topologique, et on obtient les mêmes formules que pour le problème linéaire.
- Proceedings (MMAR 2004) pour le problème numérique en collaboration avec P. Fulmanski, J.F. Scheid et J. Sokolowski.

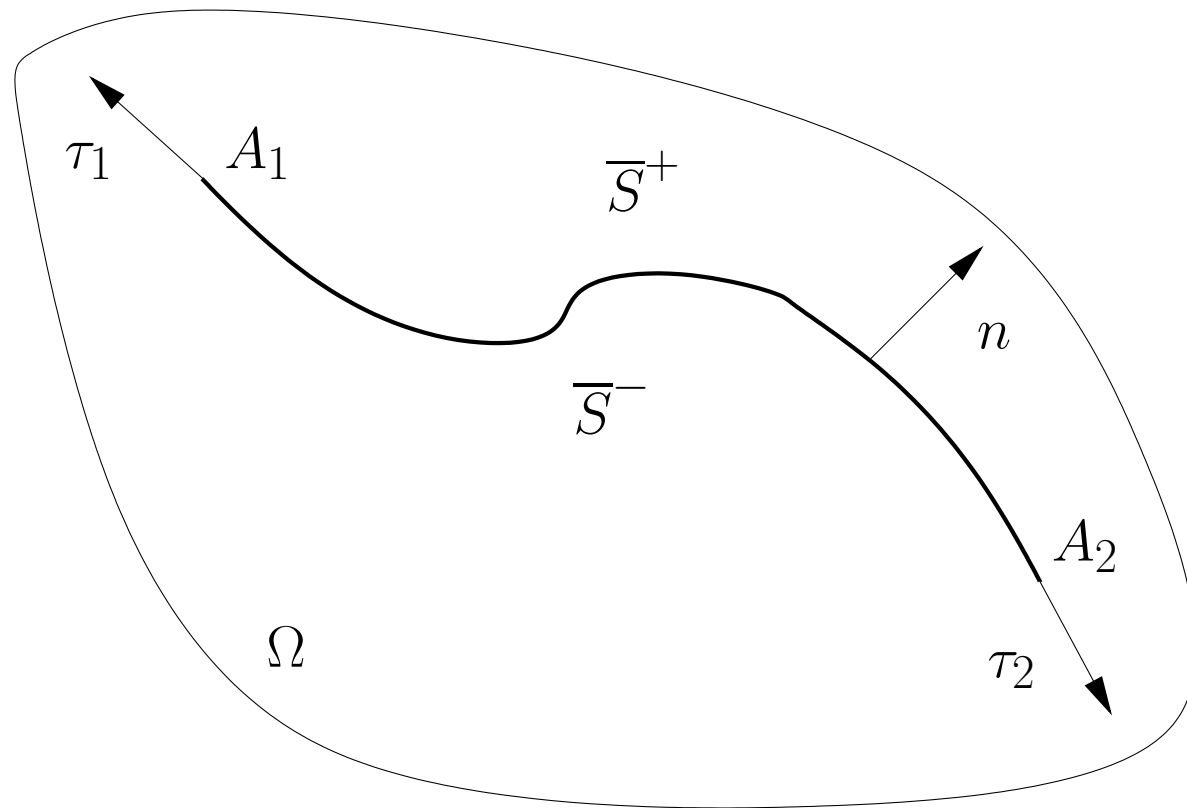
Extensions auto-adjointes

- Etude de la variation de la position du trou dans le cadre des extensions auto-adjointes
- Obtention de la dérivée topologique à l'aide d'une fonctionnelle d'énergie approchée définie à partir de l'extension auto-adjointe, formule intégrale pour la dérivée topologique.

Perspectives

- Article en préparation pour le cas de la dimension trois.
- Travail en cours utilisant les résultats du théorème de structure pour l'analyse d'images en collaboration avec G. Leugering et O. Mussejko.
- Calcul de la dérivée par rapport au domaine des coefficients de singularité dans les domaines fissurés, application au calcul de la dérivée seconde.
- Article en préparation pour le problème numérique contenant les résultats récents.
- Utilisation de la méthode Levelset pour des problèmes non-linéaires avec M.Hintermueller.
- Etude d'un problème inverse utilisant les extensions auto-adjointes.

Exemples d'application du théorème de structure



Domaine fissuré

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, u est la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial u / \partial n = 0 & \text{sur } \bar{S}^\pm. \end{cases}$$

On a la représentation suivante pour u

$$u = u^R + cS,$$

où $S = \sqrt{r} \cos \frac{\lambda}{2}$, $u^R \in H^2(V)$, V est un voisinage de $(0,0)$ dans Ω tel que $\bar{V} \cap \Gamma = \emptyset$, et $c = c(\Omega, A)$ est le coefficient de singularité à l'extrémité A . On obtient alors

$$\alpha_1 = -\frac{\pi c^2}{4},$$

$$l_1(\xi_n) = -\frac{1}{2} \int_{\bar{S}} \xi_n \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y_1} \right)^2 \right] d\bar{S}(y) .$$

Dérivation du périmètre

$$P(\bar{S}) = \int_{\bar{S}} dx$$

La dérivée première est donnée par

$$P'(\bar{S}, \xi) = \int_{\bar{S}} \mathcal{H} \xi_n dx + \xi_\tau(A_1) + \xi_\tau(A_2).$$

La dérivée seconde est donnée par

$$\begin{aligned} P''(\bar{S}, \xi, \eta) &= \int_{\bar{S}} \langle \nabla_\tau \xi_n, \nabla_\tau \eta_n \rangle + \xi_n \eta_n [\mathcal{H}^2 - \text{Tr}({}^t D_\tau n D_\tau n)] \\ &\quad - \int_{\bar{S}} \mathcal{H} [\mathcal{H} \xi_\tau \eta_\tau + \langle n, D \xi_\tau \rangle \eta_\tau + \langle n, D \eta_\tau \rangle \xi_\tau] \\ &\quad + \mathcal{H}(A_i) (\xi_\tau \eta_n + \xi_n \eta_\tau)(A_i) \\ &\quad + \mathcal{H}(A_i) \xi_\tau(A_i) \eta_\tau(A_i), \end{aligned}$$

avec $D_\tau n = Dn - (Dnn)^t n$.

Problème linéaire

- Problème linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u + u = f \quad \text{dans } \Omega \subset U \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_S \\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D, \\ \partial_n u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N, \end{array} \right.$$

De façon équivalente, u est solution de l'équation variationnelle

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + uv \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_D \cup \Gamma_S\}$$

Existence d'un domaine optimal pour le problème linéaire

Théorème 10. (*Bucur et Varchon*)

Soit $\Omega_i = U \setminus \bar{\omega}_i$ une suite de domaines tels que le nombre de composantes connexes de $\bar{\omega}_i$ est uniformément borné. Si $\bar{\omega}_i$ converge vers $\bar{\omega}$ au sens de la métrique de Hausdorff, alors la solution u_i du problème de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u_i + u_i = f & \text{dans } \Omega_i, \\ u_i = 0 & \text{sur } \partial U. \\ \partial u_i / \partial n = 0 & \text{sur } \partial \omega_i. \end{cases}$$

converge vers la solution u du même problème défini sur $\Omega = U \setminus \bar{\omega}$ au sens suivant:

$$u_i \xrightarrow{L^2(U)} u \text{ et } \nabla u_i \xrightarrow{L^2(U; \mathbb{R}^2)} \nabla u$$

si et seulement si $|\Omega_i| \rightarrow |\Omega|$. (les fonctions sont implicitement étendues par 0 sur U)

Théorème 11. *Le problème*

$$\max_{\Omega \in \mathcal{O}_k} J(\Omega)$$

admet au moins une solution $\Omega \in \mathcal{O}_k = \{\Omega = U \setminus \bar{\omega}, \omega \subset V \subset\subset U, \#\bar{\omega} \leq k\}$.

Preuve. Soit Ω_i une suite maximisante telle que $\Omega_i \xrightarrow{H^c} \Omega$. Le nombre de composantes connexes de Ω^c est borné et

$$\mathcal{H}^1(\partial\Omega) \leq \liminf_i \mathcal{H}^1(\partial\Omega_i).$$

$$\Omega_i \xrightarrow{H^c} \Omega \implies \chi_{\Omega_i} \xrightarrow{L^1(U)} \chi_{\Omega}.$$

Par conséquent, on obtient

$$|\Omega_i| \rightarrow |\Omega|.$$

Finalement

$$\begin{aligned} |E(\Omega_i) - E(\Omega)| &= \left| \int_{\Omega_i} f u_i - \int_{\Omega} f u \right| \\ &= \left| \int_U f u_i \chi_{\Omega_i} - \int_U f u \chi_{\Omega} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|E(\Omega_i) - E(\Omega)| &= \left| \int_U f u_i (\chi_{\Omega_i} - \chi_{\Omega}) + \int_U f \chi_{\Omega} (u_i - u) \right| \\
&\leq \|u_i\|_2 \|f(\chi_{\Omega_i} - \chi_{\Omega})\|_2 + \|f \chi_{\Omega}\|_2 \|u_i - u\|_2.
\end{aligned}$$

D'après le théorème (10)

$$\|u_i\|_2 \rightarrow \|u\|_2 \quad \text{et} \quad \|u_i - u\|_2 \rightarrow 0.$$

Finalemment

$$\|f(\chi_{\Omega_i} - \chi_{\Omega})\|_2 \rightarrow 0 \implies E(\Omega_i) \rightarrow E(\Omega),$$

et

$$J(\Omega) \geq \limsup_i J(\Omega_i).$$

Ainsi J atteint son maximum en Ω .

Dérivée par rapport au domaine pour le problème linéaire

1) Conditions de Dirichlet sur la frontière du trou

$$J(\Omega) = E(\Omega) + \lambda A(\Omega) - \mu P_c(\Omega)^2 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_S \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \end{cases}$$

$$dJ(\Omega; V) = \int_{\Gamma_D} \left(-\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \lambda - 2\mu P_c(\Omega) \mathcal{H} \right) V \cdot n \, d\sigma$$

Choix de V_n : on choisit $V_n = V \cdot n$ de sorte que $dJ(\Omega; V) > 0$.

$$\longrightarrow \bullet \quad \text{Dirichlet : } V_n = -\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \lambda - 2\mu P_c(\Omega) \mathcal{H} \quad \text{sur } \Gamma_D$$

2) Conditions de Neumann sur la frontière du trou

$$J(\Omega) = E(\Omega) + \lambda A(\Omega) - \mu P_c(\Omega)^2 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_S \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \Gamma_N \end{cases}$$

$$dJ(\Omega; V) = \int_{\Gamma_N} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} u^2 - uf + \lambda - 2\mu P_c(\Omega) \mathcal{H} \right) V \cdot n \, d\sigma$$

Choix de V_n : on choisit $V_n = V \cdot n$ de sorte que $dJ(\Omega; V) > 0$.

$$\longrightarrow \bullet \quad \text{Neumann : } V_n = \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} u^2 - uf + \lambda - 2\mu P_c(\Omega) \mathcal{H} \quad \text{sur } \Gamma_N$$

$$E(\Omega_\delta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\| (DF_\delta^T)^{-1} \nabla u_\delta \| + u_\delta^2) q_\delta dy - \int_{\Omega} f_\delta u_\delta q_\delta dy,$$

avec

$$q_\delta = \det DF_\delta = 1 + \delta \operatorname{div}(V) + \delta^2 \det DV .$$

On définit

$$f^\delta = q_\delta f_\delta.$$

La limite suivante existe

$$f' = \left. \frac{df^\delta}{d\delta} \right|_{\delta=0} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{f^\delta - f^0}{\delta} = \operatorname{div}(V f) \in L^\infty(U) .$$

F_δ est bijectif entre les ensembles convexes K_0 et K_δ , et on a

$$\|u_\delta - u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\delta.$$

On introduit les notations

$$\pi(\Omega; u) := E(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + u^2 dy - \int_{\Omega} f u dy,$$

$$\pi_\delta(\Omega; u_\delta) := E(\Omega_\delta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\| (DF_\delta^T)^{-1} \nabla u_\delta \| + u_\delta^2) q_\delta dy - \int_{\Omega} f_\delta u_\delta q_\delta dy.$$

On obtient

$$\frac{E(\Omega_\delta) - E(\Omega)}{\delta} = \frac{\pi_\delta(\Omega; u_\delta) - \pi(\Omega; u)}{\delta} \leq \frac{\pi_\delta(\Omega; u) - \pi(\Omega; u)}{\delta},$$

et en passant à la limite on trouve

$$\begin{aligned} \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{E(\Omega_\delta) - E(\Omega)}{\delta} &\leq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\pi_\delta(\Omega; u) - \pi(\Omega; u)}{\delta} \\ &\leq -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(V) \nabla u, \nabla u \rangle - u^2 \operatorname{div}(V) \, dy - \int_{\Omega} g(V) u \, dy, \end{aligned}$$

avec $A(V)$ et $g(V)$ défini par

$$A(V) = DV + DV^T - (\operatorname{div} V)I,$$

$$g(V) = \operatorname{div}(fV).$$

De la même manière, on a une autre inégalité

$$\frac{E(\Omega_\delta) - E(\Omega)}{\delta} = \frac{\pi_\delta(\Omega; u_\delta) - \pi(\Omega; u)}{\delta} \geq \frac{\pi_\delta(\Omega; u_\delta) - \pi(\Omega; u_\delta)}{\delta},$$

et en passant à la limite, on obtient

$$\begin{aligned} \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{E(\Omega_\delta) - E(\Omega)}{\delta} &\geq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\pi_\delta(\Omega; u_\delta) - \pi(\Omega; u_\delta)}{\delta} \\ &\geq -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(V) \nabla u, \nabla u \rangle - u^2 \operatorname{div}(V) \, dy - \int_{\Omega} g(V) u \, dy, \end{aligned}$$

grâce à la convergence forte de u_δ vers u dans $H^1(\Omega)$. Ainsi

$$\begin{aligned} E'(\Omega, V) &:= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{E(\Omega_\delta) - E(\Omega)}{\delta} \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(V) \nabla u, \nabla u \rangle - u^2 \operatorname{div}(V) \, dy - \int_{\Omega} g(V) u \, dy. \end{aligned}$$