Processus auto-stabilisants dans un paysage multi-puits

Julian Tugaut

▶ **To cite this version:**

Julian Tugaut. Processus auto-stabilisants dans un paysage multi-puits. Mathématiques [math]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2010. Français. NNT : 2010NAN10047 . tel-01748560v2

HAL Id: tel-01748560
https://theses.hal.science/tel-01748560v2

Submitted on 2 Mar 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Nancy-Université

École Doctorale IAE + M
D.F.D. Mathématiques

MÉMOIRE présenté par Julian TUGAUT

en vue d'obtenir le DOCTORAT

Spécialité : Mathématiques Appliquées.

Sujet : Processus auto-stabilisants dans un paysage multi-puits.

soutenu le 06 juillet 2010

Composition du jury

Directeurs :	
M. Samuel HERRMANN	Maître de Conférence, École des Mines de Nancy.
M. Bernard ROYNETTE	Professeur, Université Henri Poincaré, Nancy.
Rapporteurs :	
M. Nils BERGLUND	Professeur, Université d'Orléans.
M. Benjamin JOURDAIN	Professeur, École Nationale des Ponts et Chaussées.
Examinateurs :	
M. Florent MALRIEU	Maître de Conférence, Université de Rennes 1.
M. Pierre VALLOIS	Professeur, Université Henri Poincaré, Nancy.

Institut de Mathématiques Élie Cartan - UMR 7502
Nancy-Université, CNRS, INRIA Lorraine

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier Samuel Herrmann pour avoir accepté de travailler avec moi et surtout pour avoir pu supporter mon style peu orthodoxe pendant quatre années. Merci aussi pour toutes ces multiples relectures qui m'ont permis d'améliorer radicalement ma maîtrise de LaTeX, ma rédaction, mon anglais ; sans parler évidemment des quelques petites et grosses erreurs qui se glissaient de temps en temps çà et là.

Tout ceci n'aurait bien sûr pas pu être possible sans le concours de Bernard Roynette qui a accepté de m'encadrer officiellement. Par ailleurs, je lui suis reconnaissant d'un conseil qu'il m'a donné en juin 2008 à savoir « ton F, c'est une fonction polynômiale, ne t'encombre pas avec toutes ces hypothèses ».

Je remercie Nils Berglund d'avoir accepté de rapporter mon travail. Je le remercie également pour m'avoir parlé des travaux d'Anton Bovier. Par ailleurs, un exposé qu'il fit en décembre 2006 m'aida à prendre conscience de l'importance de ce que j'appelle aujourd'hui « le cas synchronisé ».

C'est un exposé de Benjamin Jourdain en mai 2007 qui me poussa à étudier les systèmes de particules. Or, l'intuition de mon principal résultat m'est venu en "observant" un tel système. Je dois donc reconnaître devoir à peu près tous mes résultats à Benjamin Jourdain. C'est pourquoi je suis d'autant plus reconnaissant envers lui d'avoir accepté de rapporter mon mémoire.

Pierre Vallois me fit l'honneur et le plaisir d'être le président de mon jury et je l'en remercie. Par ailleurs, je le remercie fortement de m'avoir signalé après la lecture du rapport de soutenance de thèse la sincérité de celui-ci.

J'exprime ma profonde gratitude envers Florent Malrieu pour avoir été examinateur et pour les conseils qu'il m'a donnés le vingt-trois juin 2010 quant à ma façon d'exposer. De plus, les discussions que nous avons eues à propos de la convergence en temps long ont encore accru ma motivation quant à régler celle-ci. Par ailleurs, après avoir assisté à l'un de ses exposés, j'ai saisi la nécessité de ne pas négliger les simulations et je lui dois donc de m'être mis récemment à approfondir mes connaissances en programmation.

Il me faut maintenant absolument remercier toutes les personnes qui m'ont aidé au cours des dernières années à ne pas être submergé par tout ce qui est administratif. J'ai bien trop peur d'oublier des noms pour me hasarder à tenter d'être exhaustif. Aussi, je n'en citerai qu'un : Patricia Georges. Je pense également à tous les autres.

Toute ma gratitude se tourne maintenant vers MANUE et SANDRA. Je ne sais pas comment les remercier pour tout ce qu'elles ont pu m'apporter. Merci à elles d'être elles. Je leur dédie naturellement cette thèse. Je tiens également à remercier tous les membres de ma famille à savoir ma mère, mon père et ma sœur. Leur présence à la soutenance m'a ému. J'ai une reconnaissance particulière pour ma mère qui a refusé catégoriquement que je redouble la maternelle

et qui s'est chargée seule de m'apprendre à écrire et à compter pour que je ne me fasse pas tailler en morceaux à la rentrée au CP.

Mon chemin allant de ma dernière année de maternelle à ma soutenance a été jalonné par d'autres personnes qui ont su me motiver et me conseiller. Je pense en particulier à monsieur Chapon qui a accepté de me préparer aux concours des ENS et grâce à qui j'ai appris à me servir de maple. Je pense également à monsieur Tomaselli pour sa justice à mon égard lors de la rentrée 1992. Je n'oublie pas non plus monsieur Bogard pour ses encouragements et ses conseils lors des colles d'anglais. Plus récemment, j'ai rencontré madame Henrot ainsi que monsieur Collet à qui je dois d'avoir pu me replonger dans des cours auxquels je n'avais plus touché depuis un certain temps. Je suis d'ailleurs reconnaissant envers monsieur Collet d'avoir pris le temps de me faire un rappel sur le pivot de Gauss. Dans le même esprit, je remercie monsieur Monnez grâce à qui je sais aujourd'hui ce qu'est une courbe de concentration. Je tiens également à mentionner Alain Camanès pour un conseil qu'il me donna il y a plus de deux ans. J'exprime aussi ma profonde gratitude envers Philippe Gambette pour la camaraderie dont il a fait preuve ces six dernières années.

Au cours de mes recherches, j'ai dû apprendre les bases du C/C++ et je fus très content de disposer du « siteduzero ». Dans la même optique, je remercie grandement Mehdi Ben Sassi pour m'avoir appris l'existence du générateur Mersenne Twister. Je me dois également d'exprimer ma gratitude envers Aline Kurtzmann puisque c'est pendant son exposé du vingt-quatre avril 2008 que j'ai eu l'idée de ce que j'appelle « la propagation du chaos semi-uniforme ». Dans le même esprit, je suis reconnaissant envers Blandine Berard Bergery pour son exposé de novembre 2006 grâce auquel j'ai appris ce qu'était le critère de Carleman. Je remercie également Nicolas Bouleau qui m'a appris le mot « tiercéïté ».

Avec un peu plus de légèreté, j'ai une pensée pour Damon Lindelof, Carlton Cuse sans oublier Jeffrey Jacob Abrams qui ont donné naissance à la célèbre série « Lost » grâce à laquelle il m'a semblé naturel d'essayer de prouver un résultat qui m'était apparu dans un rêve et ceci contre l'avis de Samuel Herrmann. D'ailleurs, je remercie ce rêve que j'ai fait le mardi treize mai 2008 et qui m'a fourni mon résultat principal. Dans le même esprit, j'exprime une gratitude absolue envers ma balle porte-bonheur qui ne me quitte plus depuis que je l'ai trouvée près de la gare RER de Bagneux, le lundi seize juin 2003. Pareillement, je remercie mon araignée dont la sensibilité au vent m'a fourni une idée originale pour commencer la première phrase de l'introduction de mon mémoire. Je n'oublie pas Benjamin Boutin qui m'a parlé de « Lost » en septembre 2004 ni Ayman Moussa qui a parlé de « Lost » à Benjamin Boutin. Et à nouveau, je remercie Philippe Gambette pour m'avoir convaincu de regarder « Lost » en juillet 2005. Pour terminer, je tiens à déclarer tout mon amour pour celle qui a toujours été là pour moi, qui m'a consolé dans les moments difficiles, qui m'a permis de me ressourcer, dont les formes parfaites hantent mon esprit jour et nuit : la fonction $x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$.

Je dédie cette thèse à Manue et à Sandra

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 1

1. Existence et unicité de la solution à l'équation 17
1.1 Introduction 17
1.2 Construction de l'espace de fonctions et propriétés 18
1.3 Construction d'une solution sur $[0;T]$ 27
1.4 Extension à $\mathbb{R}_+$ tout entier 30

2. Existence des mesures stationnaires 35
2.1 Introduction 35
2.2 Forme générale d'une éventuelle mesure stationnaire 36
2.3 Mesures stationnaires quand l'intéraction F' est linéaire 38
2.4 Seuils critiques 60
2.5 Mesures stationnaires quand l'intéraction F' est quelconque 63
2.5.1 Mesures invariantes symétriques 64
2.5.2 Mesures invariantes excentrées 72

3. Convergence des mesures stationnaires 81
3.1 Convergence de u_ϵ quand l'intéraction F' est linéaire. 82
3.1.1 Convergence de la mesure invariante symétrique. 83
3.1.2 Convergence des mesures excentrées 88
3.1.3 L'ensemble des mesures limites 89
3.2 Le cas général 90
3.2.1 Convergence étroite pour une sous-suite de mesures invariantes 92
3.2.2 Description des mesures limites 98
3.3 Convergence des mesures excentrées 100
3.4 Convergence des mesures invariantes symétriques 104

4. Vitesse de convergence 119
4.1 Introduction 119
4.2 Vitesse de convergence de u_ϵ^0 dans le cas linéaire 120
4.3 Résultats généraux 122
4.4 Vitesse de convergence de u_ϵ^0 vers $u_0^0 = \delta_0$ 127
4.4.1 Si $\alpha > -V''(0)$ 127
4.4.2 Si $\alpha = -V''(0)$ 128

4.5 Vitesse de convergence de u_ϵ^0 vers $u_0^0 = \frac{1}{2}\delta_{x_0} + \frac{1}{2}\delta_{-x_0}$ avec $x_0 > 0$. 140
4.6 Comportement asymptotique autour du dioptre $\alpha = \vartheta$ 145
4.6.1 Vitesse de convergence à droite du dioptre $\alpha = \vartheta$ 147
4.6.2 Vitesse de convergence à gauche du dioptre $\alpha = \vartheta$ 148
4.6.3 Régression linéaire à travers le dioptre $\alpha = \vartheta$ 150
4.7 Vitesse de convergence de $u_\epsilon^{a_0}$ vers δ_{a_0} 152

5. Systèmes de particules 157
5.1 Introduction 157
5.2 Préliminaires 158
5.3 Convergence en loi du système vers sa mesure stationnaire 162
5.4 Propagation du chaos 166
5.4.1 Propagation simple du chaos 166
5.4.2 Propagation du chaos semi-uniforme si $\alpha \geq \vartheta$ 172
5.5 Comportement asymptotique de μ_ϵ^N pour $\epsilon \to 0$ 175

6. Unicité locale des mesures stationnaires 181
6.1 Introduction 181
6.2 Résultats généraux liés à la vitesse de convergence 182
6.3 Unicité locale autour de δ_{a_0} 185
6.4 Unicité de la mesure stationnaire symétrique 186
6.4.1 Lorsque $\alpha > \vartheta$ 186
6.4.2 Lorsque l'on est sur le dioptre : $\alpha = \vartheta$ 192
6.4.3 Lorsque $\alpha < \vartheta$ 193
6.5 Description complète des mesures stationnaires 194

7. Comportement en temps long du processus auto-stabilisant 197
7.1 Introduction 197
7.2 Convergence du processus vers sa mesure stationnaire symétrique 199
7.2.1 Dans le cas sur-critique $\alpha > \vartheta$ 199
7.2.2 Dans le cas critique $\alpha = \vartheta$ 211
7.3 Temps de sortie si X_0 suit une mesure stationnaire u_ϵ 212
7.3.1 Principe de grandes déviations du processus $X^{\epsilon,y}$ 213
7.3.2 Coût de sortie 217
7.3.3 Influence de l'auto-stabilisation sur le temps de sortie $\tau_\epsilon(x)$ 218

Annexe 221

A. Calculs asymptotiques liés à la méthode de Laplace 223

B. Rappels généraux sur la théorie de Freidlin-Wentzell 239

INTRODUCTION

Par essence, le bruit s'oppose à l'information : les lumières des villes polluent l'observation spatiale ; les résistances des fils atténuent le débit de la ligne ADSL ; le vent trompe l'araignée en agitant sa toile. Aussi, tout est fait pour le bannir du signal. Et pourtant...

Résonance stochastique

Dans certains cas, lorsque l'intensité du bruit est optimale, le signal est accentué. Si cette intensité est trop faible, l'influence de la perturbation est négligeable. Si elle est trop forte, le signal est masqué. On parle de résonance stochastique lorsque l'intensité du bruit est optimale. Le cadre des systèmes dynamiques bistables se prête bien à ce phénomène.

Benzi, Parisi, Sutera et Vulpiani (voir [8]) ont établi une modélisation du comportement périodique de la température moyenne de la Terre des sept cent mille dernières années pour laquelle l'adjonction d'un bruit blanc à un système bistable faiblement périodique augmente le caractère périodique des trajectoires et semble correspondre aux mesures observées lorsque l'intensité est optimale : la température prend alternativement une valeur haute et une valeur basse correspondant aux changements climatiques majeurs.

Dans [15], DeVille et Vanden-Eijnden ont étudié dans un modèle stochastique en quoi l'ajout d'une "charge" à une certaine protéïne rendait le comportement de celle-ci plus régulier.

Gammaitoni, Hänggi, Jung et Marchesoni donnent de nombreux exemples de systèmes bistables faiblement périodiques pour lesquels le bruit améliore le signal (voir [19]) : en optique, en électronique, en neurologie...

Jung, Behn, Pantazelou et Moss ont exhibé dans un cadre plus complexe un cas de résonance stochastique lorsque le système bistable est couplé, voir [30].

L'optimalité de l'intensité du bruit est l'enjeu de la résonance. Plusieurs méthodes sont employées pour l'atteindre ou la mesurer. Dans le cas des chaînes de Markov à deux états et à temps continu, sept instruments au moins permettent d'évaluer l'influence positive du bruit sur la périodicité : le coefficient d'amplification spectrale, le ratio de ce dernier par le bruit, l'énergie, le ratio de l'énergie par le bruit, la mesure de déphasage, l'entropie relative et l'entropie. Une description de ces sept approches est disponible dans [39].

Or, la plupart des exemples physiques et biologiques ne se réduisent pas à des sys-

tèmes comprenant un espace d'états à deux éléments *stricto sensu*. Aussi, pour que la modélisation soit judicieuse, il convient que les outils de mesure de la résonance soient robustes lors du passage d'un modèle réduit type chaîne de Markov vers un modèle complet type diffusion. Toutefois, dans [39], Pavlyukevich a démontré que la technique la plus utilisée par les physiciens (la maximisation du coefficient d'amplification spectral) ne vérifiait pas cette propriété lorsque la perturbation du système dynamique était brownienne.

Une autre idée pour mesurer la résonance stochastique, c'est-à-dire l'intensité optimale du bruit dans un système est d'étudier le temps que passe le processus dans le voisinage d'un état métastable avant de sauter vers un autre état (voir [21]) : le temps entre deux transitions successives. Si ce dernier est proche de la demi-période du système déterministe, le système entre en résonance. C'est pourquoi on s'intéresse au temps nécessaire pour qu'un processus stochastique quitte le domaine de stabilité d'un puits.

Temps de sortie

Dans [14], Dembo et Zeitouni exposent la théorie de Freidlin et Wentzell après avoir fixé les résultats de grandes déviations nécessaires (en particulier le principe de contraction et le théorème de Schilder). Ils considèrent un processus vérifiant une équation différentielle stochastique ordinaire dont le coefficient de dérive est homogène et représente le gradient d'un potentiel V et dont le coefficient de diffusion est constant égal à $\sqrt{\epsilon}$:

$$dX_t = \sqrt{\epsilon} dB_t - \nabla V\left(X_t\right) dt\,.$$

Ils ont établi que le temps de sortie $T(\epsilon)$ d'un domaine de stabilité $\mathcal{D}$ d'un puits a de V vérifiait $T(\epsilon) \asymp \exp\left[\frac{2\left(\overline{V}-V(a)\right)}{\epsilon}\right]$ où $\overline{V} := \min_{z\in\partial\mathcal{D}} V(z)$.

Par conséquent, afin de réaliser la résonance stochastique et d'observer régulièrement des transitions entre les états métastables d'un potentiel à deux puits dont les profondeurs varient périodiquement (tout en étant minorées par une valeur strictement positive), il est naturel de rechercher une relation optimale entre l'intensité du bruit et la période du système dynamique déterministe sous la forme $\epsilon = \mu \ln(T)$ avec $\mu > 0$ (voir [39]).

Imkeller, Pavlyukevich et Wetzel se sont intéressés à un cas similaire où la perturbation n'était pas induite par un mouvement brownien mais par un processus de Lévy (voir [29], [27] et [28]).

L'homogénéité des coefficients est fortement utilisée pour parvenir au résultat de Freidlin et Wentzell. En effet, la fonction de taux du principe de grandes déviations vérifié par le processus prend la forme classique

$$I(\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^T \left|\dot{\varphi}_t + U'(\varphi_t)\right|^2 dt$$

lorsque φ est dans l'espace de Cameron-Martin si bien que la fonction de coût est facile à évaluer. Qui plus est, sous des conditions simples portant sur V, le processus défini plus haut admet une unique mesure stationnaire et converge en loi vers cette mesure. Bien que Freidlin et Wentzell (respectivement Dembo et Zeitouni) ne traitent pas cette mesure invariante dans [17] (respectivement dans [14]), elle est tacitement utilisée.

L'introduction d'une dépendance en temps dans le coefficient de dérive correspond à un problème plus subtil. Dans [22], Herrmann, Imkeller et Peithmann ajoutent une dépendance de la propre loi du processus sur la dérive en utilisant un potentiel d'intéraction F et un produit de convolution. On parle d'auto-stabilisation :

$$dX_t = \sqrt{\epsilon} dB_t - \nabla V\left(X_t\right) dt - \int_{\mathbb{R}} F'\left(X_t - x\right) u_t(x) dx\, dt\,.$$

La loi n'étant pas constante *a priori*, la dérive n'est pas homogène. Les auteurs prouvent un principe de grandes déviations non homogène en temps. En ajoutant la convexité au potentiel V, ils parviennent à obtenir un résultat similaire à celui de Freidlin et Wentzell. En notant $T(\epsilon)$ le temps de sortie d'un domaine de stabilité $\mathcal{D}$ de a : $T(\epsilon) \asymp \exp\left[\frac{2\left(\overline{W}-W(a)\right)}{\epsilon}\right]$ où $W(x) := V(x) + F(x-a)$ et $\overline{W} := \min_{z\in\partial\mathcal{D}} W(z)$. Toutefois, dans le cas général à savoir la non-convexité de V, le temps de sortie n'a pas été déterminé. Or, il s'agit bel et bien du point de départ de toute étude de résonance stochastique.

Comme dans le cas simple où les coefficients sont uniformes en temps, la mesure stationnaire intervient tacitement.

Auto-stabilisation

L'auto-stabilisation consiste en une force de rappel d'une diffusion vers sa loi. Le coefficient de dérive dans l'équation stochastique contient un terme de la forme $F' * u_t$ où u_t est la loi de X_t et où $*$ désigne le produit de convolution. Afin de comprendre intuitivement cette non-linéarité, il suffit de s'imaginer un système de N particules qui évoluent sous l'influence du potentiel V, qui sont perturbées par des mouvements browniens indépendants et qui sont en intéraction. Chaque particule X_t^i est soumise à la force de rappel $-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N F'(X_t^i - X_t^j)$. Un tel système est dit à champ moyen. Lorsque N croît, l'influence d'une particule sur une autre diminue. On peut s'imaginer heuristiquement que les particules deviennent indépendantes deux à deux et de même loi.

Dans cette étude, on suppose que la fonction F est convexe ce qui implique la croissance de F'. En d'autres termes, plus les particules sont éloignées, plus elles sont attirées l'une par l'autre. Cette hypothèse peut sembler saugrenue si l'on se représente X_t^i comme étant une position spatiale. Toutefois, ce n'est pas le cas. On peut prendre l'exemple d'un système magnétique où X_t^i correspond à un spin. Dans [30], les auteurs s'intéressent ainsi à un système couplé par une intéraction

F' linéaire.

On peut aussi visualiser l'auto-stabilisation comme induite par (ou induisant) une équation aux dérivées partielles de Fokker-Planck contenant le terme non-linéaire $\nabla\Big[u.\nabla\left(F*u\right)\Big]$.

Il convient de noter que l'on peut aussi étudier un processus auto-stabilisant dont la fonction d'intéraction F' n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ mais décroit sur un intervalle fini. Carillo, McCann et Villani étudient un tel processus dans [12] où un terme de la forme $\nabla\left[u.\nabla\left(A'(u)\right)\right]$ se substitue au laplacien de u. On retombe sur le laplacien classique en choisissant $A(x) := x\ln(x)$.

Le modèle considéré

On s'intéresse ici à un processus stochastique auto-stabilisant dans un paysage à plusieurs puits. On se place dans le cas de la dimension un mais la plupart des résultats obtenus peuvent facilement être étendus en dimension quelconque :

$$\left\{\begin{array}{lcl} dX_t^\epsilon & = & -V'\left(X_t^\epsilon\right)dt + \sqrt{\epsilon}\,dB_t - F'*u_t^\epsilon\left(X_t^\epsilon\right)dt \\ u_t^\epsilon & = & \mathcal{L}\left(X_t^\epsilon\right), \end{array}\right. \tag{0.0.1}$$

où $*$ désigne le produit de convolution. V et F sont deux potentiels dont les conditions seront précisées subséquemment. On dit de V qu'il est le potentiel de confinement et de F qu'il est celui d'intéraction. Dans l'optique des grandes déviations, le paramètre $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit. Toutefois, certains résultats ne nécessitent pas cette exigence.

Description de l'équation

La dérive de la diffusion (0.0.1) peut être décomposée en trois termes :

Dérive déterministe : La dérivée de V correspond à un système dynamique soumis à une équation différentielle ordinaire :

$$dX_t^\epsilon = -V'\left(X_t^\epsilon\right)dt\,. \tag{0.0.2}$$

Cette partie de la dérive pousse ainsi le processus X_t^ϵ à converger vers les puits de V. Si X_0^ϵ est non aléatoire, l'équation (0.0.2) peut être résolue facilement puisqu'il s'agit simplement d'une équation à variables séparables.

Perturbation brownienne : On rajoute du bruit sous forme d'un mouvement brownien d'intensité ϵ :

$$dX_t^\epsilon = -V'\left(X_t^\epsilon\right)dt + \sqrt{\epsilon}\,dB_t\,. \tag{0.0.3}$$

Ce bruit octroie la possibilité au processus de remonter le long des lignes du potentiel V. Il s'agit du cadre des équations différentielles stochastiques classiques déjà présenté dans [14] et dans [17] lorsque le paramètre ϵ tend vers 0.

Auto-stabilisation : On rajoute une influence sur X_t^ϵ de sa propre loi u_t^ϵ. Ainsi le terme $-F' * u_t^\epsilon(X_t^\epsilon) = \int_{z\in\mathbb{R}} F'(X_t^\epsilon - z)\, du_t^\epsilon(z)$ correspond à un rappel de la particule aléatoire vers sa propre loi. Intuitivement, le potentiel d'intéraction F tend à diminuer la dissipation de la mesure u_t^ϵ.
Une autre manière de voir cette dernière perturbation est d'imaginer un système dynamique de N particules :

$$dX_t^i = -V'\left(X_t^i\right) dt + \sqrt{\epsilon}\, dB_t^i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} F'\left(X_t^i - X_t^j\right) dt\,, \tag{0.0.4}$$

où $B_t^1, \cdots, B_t^N$ sont N mouvements browniens indépendants. Le troisième terme consiste à rapprocher les particules les unes des autres. Ce système est "proche" du processus $(X_t^\epsilon)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (voir [41], [5] et [13]). Par conséquent, on peut effectivement considérer que l'auto-stabilisation consiste à resserrer la particule et sa propre loi et ainsi à stabiliser le processus.

Dans le modèle présenté ci-dessus, chaque particule influe sur toutes les autres. On dit de ce système qu'il est à champ moyen. On peut aussi considérer un système où X_t^i agit uniquement sur X_t^{i+1} et X_t^{i-1}. On parle de système à plus proche voisin (voir [9]). Un comportement pour N tendant vers l'infini (voir [10]) peut également être obtenu.

La variable aléatoire initiale n'est pas sans influence sur le comportement du processus auto-stabilisant *a priori*. Ainsi l'objet de cette thèse est l'étude du processus $(X_t^\epsilon)_{t\geq 0}$ de loi $u_t^\epsilon(dx)$ satisfaisant

$$\begin{aligned} X_t^\epsilon &= X_0 + \sqrt{\epsilon}\, B_t - \int_0^t \left(V' + F' * u_s^\epsilon\right)(X_s^\epsilon)\, ds \\ &= X_0 + \sqrt{\epsilon}\, B_t - \int_0^t V'(X_s^\epsilon) ds - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} F'(X_s^\epsilon - x) du_s^\epsilon(x) ds \end{aligned} \tag{0.0.5}$$

où $\epsilon > 0$ et X_0 est une variable aléatoire réelle. $*$ représente à nouveau le produit de convolution.

Hypothèses et paramètres

Dans la littérature des systèmes dynamiques évoluant dans un paysage à plusieurs puits, le potentiel de confinement le plus classique est $x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ ([8] avec une légère modification, [9], [10], [4], [30], [39] où le potentiel qui intervient oscille autour de $\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ au cours du temps). De même, la fonction F est généralement un polynôme voire un polynôme de degré 2 à savoir $F(x) := \frac{\alpha}{2}x^2$ avec $\alpha > 0$. L'équation (0.0.5) devient simplement

$$X_t = X_0 + \sqrt{\epsilon} B_t + \int_0^t \Big[(1-\alpha) X_s - X_s^3 + \alpha \mathbb{E}(X_s) \Big] ds\,. \tag{0.0.6}$$

Par la suite, la fonction classique $x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ sert à plusieurs reprises pour les exemples.

Toutefois, l'on s'intéresse à des cas plus généraux qui étendent ces conditions fort restrictives. En particulier, on constate que le comportement peut être fondamentalement différent de celui induit par (0.0.6) même si V est une fonction polynômiale à deux puits et si F' est linéaire.

D'un point de vue intuitif, il faut s'imaginer que le potentiel de confinement V est une fonction polynômiale qui tend vers l'infini en l'infini et qui possède au moins deux puits

Bien que tous les exemples fournis par la suite soient de cette nature, l'étude théorique est menée sous des hypothèses affaiblies :

(V-1) Régularité : $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ où $\mathcal{C}^\infty$ désigne l'espace de Banach des fonctions indéfiniment dérivables. *Cette propriété entraîne la dérivabilité une infinité de fois de la fonction $V + F * u$ quelle que soit la mesure de probabilité u admettant un moment d'ordre $2q$ fini où $2q$ sera précisé par la suite.*

(V-2) Géométrie : L'équation $V'(x) = 0$ a un nombre fini $2M + 1$ de solutions avec $M \geq 1$. On les note $a_1, \cdots, a_{2M+1}$. De plus, pour tout $1 \leq i \leq 2M+1$, $V''(a_i) \neq 0$. *La condition $M \geq 1$ indique que ce mémoire traite du cas multi-puits. La condition $V''(a_i) \neq 0$ facilite avant tout l'écriture puisque les a_{2i+1} et les a_{2i} sont respectivement tous des puits et des bosses de V. La condition sert par ailleurs d'un point de vue quantitatif puisque l'on est amené à plusieurs reprises à diviser par $V''(a_i)$ pour préciser les positions des moments des mesures stationnaires.*

(V-3) Intégrabilité de $\exp(-V)$: Il existe deux constantes strictement positives C_2 et C_4 telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $V(x) \geq C_4 x^4 - C_2 x^2$. *Tout au long de l'étude, des fonctions à croissance lente seront intégrées contre la fonction $x \mapsto \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(x) + F * u(x)\right)\right]$ où u est la densité d'une mesure de probabilité absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Afin de garantir la finitude de cette intégrale mais aussi fournir certaines majorations explicites, on utilise (V-3). En particulier, elle permet l'existence dans certains cas d'une mesure stationnaire symétrique.*

(V-4) Convexité à l'infini : $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} V''(x) = +\infty$ et pour tout $x \notin]a_1; a_{2M+1}[$, $V''(x) > 0$. *Cette hypothèse entraîne la convexité à l'infini de la fonction $V + F * u$ ce qui permet de représenter les éventuelles mesures stationnaires sous forme intégrée. De plus, la positivité stricte de V'' sur les deux demi-droites $]-\infty; a_1]$ et $[a_{2M+1}; \infty[$ est essentielle dans la preuve de la finitude du nombre de points critiques de $V + F * u$ ce qui est un élément central de la convergence des mesures stationnaires pour ϵ tendant vers* 0.

(V-5) Croissance lente : Il existe un entier $q \in \mathbb{N}^*$ et une constante réelle $C_q > 0$ tels que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|V'(x) - V'(y)| \leq C_q |x - y| \left(1 + |x - y|^{2q-2}\right)$. En particulier, $|V'(x)| \leq C_q \left(1 + x^{2q}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. *L'existence d'un*

tel entier q est utilisé dès le premier chapitre pour prouver l'existence d'une solution forte à l'équation (0.0.5).

(V-6) Initialisation : $V(0) = 0$. *Il s'agit ici d'une convention n'ayant aucune incidence sur les résultats vu que V n'apparaît dans l'équation qu'à travers sa dérivée. Par la suite, lorsque l'on construit un nouveau potentiel (de la forme $V + F * u$), on lui retranche sa valeur en* 0 *si cela n'a pas de conséquence. Il est important de noter que l'on n'utilise pas cette convention dans la Définition 5.2 car la limite donnée dans le Lemme 5.3 serait alors fausse.*

Pour obtenir certains résultats, il peut être nécessaire de supposer des conditions plus fortes :

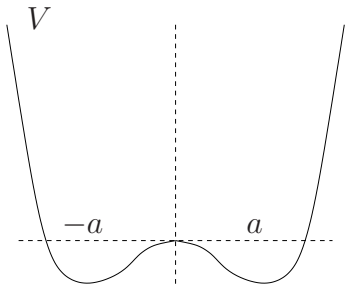
(V-7) Analyticité : Il existe une fonction analytique $\mathcal{V}$ telle que pour tout $x \in [a_1; a_{2M+1}]$, $V(x) = \mathcal{V}(x)$. *La conséquence de la condition (V-7) est la finitude du nombre de zéros de la fonction $V' + F' * u$ sur l'intervalle $[a_1; a_{2M+1}]$ ce qui est essentiel pour prouver que les valeurs d'adhérence des familles de mesures stationnaires sont des sommes finies de mesures de Dirac.*

(V-8) Symétrie : V est symétrique. Dans ce cas, on note $a := a_{2M+1}$ et $-a = a_1$.

(V-9) Double puits : $M = 1$ ce qui signifie que V a deux puits $a_- < a_+$.

Les hypothèses (V-8) et (V-9) correspondent aux cas étudiés dans [23], [24] et [25]. Ici, elles sont utilisées pour le calcul exact du nombre de mesures stationnaires ainsi que pour la convergence en temps long.

(V-10) Comportement polynômial : La quantité $\frac{V'(x)^2}{V''(x)}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. *Cette condition est admise à partir du Chapitre 2 car elle est nécessaire à l'application du Lemme A.1 pour montrer que toute mesure stationnaire ayant un moment d'ordre $8q^2$ fini peut être mise sous la forme intégrée* (2.2.2)–(2.2.3).



(V-11) V est une fonction polynômiale. *On se restreint à cette hypothèse afin d'établir une forme de propagation du chaos uniforme et donc dans tous les résultats qui exploitent cette propagation.*

On remarque que la fonction classique $x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ vérifie les onze conditions.

Le potentiel d'intéraction F vérifie les propriétés suivantes :

(F-1) Analyticité : F est une fonction polynômiale paire telle que $F(0) = 0$. Ainsi $F(x - y) = F(|x - y|)$ pour tous les réels x et y : seule la distance intervient dans l'auto-stabilisation. *La fonction F est supposée polynômiale afin de pouvoir transformer le problème d'existence d'une mesure stationnaire qui correspond à la recherche d'un point fixe en dimension infinie en un problème de point fixe en dimension finie (le degré de la fonction F').*

$F(0) = 0$ *correspond à une convention similaire à (V-6). Enfin, le potentiel d'intéraction* F *est supposé pair car on souhaite que seule la distance entre deux particules compte dans le système à champ moyen.*

(F-2) F est convexe : plus la distance est élevée, plus la force de rappel est grande. *On utilise cette hypothèse dans la construction du processus qui solutionne* (0.0.5).

(F-3) F' est convexe sur $\mathbb{R}_+$ donc pour tous les réels x et y tels que $x \geq y$, on a la minoration $F'(x) - F'(y) \geq F''(0)\,(x - y)$. *Le principal intérêt de la condition (F-3) est l'égalité* $F''(0) = \inf_{z\in\mathbb{R}} F''(z)$ *ce qu'on utilise notamment dans la preuve de l'existence d'une mesure stationnaire symétrique ou pour prouver qu'une mesure stationnaire converge vers une mesure de Dirac pour* ϵ *tendant vers* 0.

(F-4) Croissance lente : $|F'(x) - F'(y)| \leq C_q|x - y|\,(1 + |x|^{2q-2} + |y|^{2q-2})$ où q et C_q sont respectivement l'entier et la constante introduits dans l'hypothèse (V-5). *La fonction* F *étant polynômiale, il s'agit plus d'une condition portant sur l'entier* q *et le réel strictement positif* C_q *qu'une condition sur* F stricto sensu. *La condition (F-4) est utilisée dans les mêmes circonstances que la condition (V-5).*

(F-5) Auto-stabilisation : F n'est pas identiquement nulle. *L'hypothèse (F-5) assure que l'on ne se place pas dans le cadre plus confortable des équations différentielles stochastiques ordinaires. Bien que l'on suppose que le potentiel d'intéraction ne soit pas identiquement nul, on compare à plusieurs reprises les résultats obtenus avec ceux que l'on aurait sans auto-stabilisation.*

On constate que les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{\alpha}{2}x^2$ avec $\alpha > 0$ vérifient les cinq hypothèses.

Certains paramètres interviennent à plusieurs reprises. On pose :

$$\vartheta := \sup_{x\in\mathbb{R}} -V''(x) \geq 0\,. \tag{0.0.7}$$

Dans le cas particulier où V'' est convexe (par exemple si $V(x) := \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$), ϑ est égal à $-V''(0)$. On définit également :

$$\alpha := F''(0) \geq 0 \quad \text{et} \quad F_0(x) := F(x) - \frac{\alpha}{2}x^2\,. \tag{0.0.8}$$

Comme F' est convexe sur $\mathbb{R}_+$, $\alpha = \inf_{x\in\mathbb{R}} F''(x)$. Les deux paramètres α et ϑ jouent un rôle dual.

On se donne aussi

$$n := \frac{\deg(F)}{2} \in \mathbb{N}^*\,. \tag{0.0.9}$$

On considère enfin

$$\kappa := \inf_{x\in]-\infty;a_1]\bigcup[a_{2M+1};+\infty[} \min\Big\{V''(x); F''(x)\Big\}\,. \tag{0.0.10}$$

Ce paramètre κ est utilisé dans la preuve d'existence du processus.

Résultats antécédents

En utilisant un théorème du point fixe, Sznitman prouve que le processus défini par l'équation (0.0.5) existe lorsque V est identiquement nul et lorsque F' est uniformément lipschitz ([41]).

Dans [5], les auteurs se sont intéressés à un processus pour lequel F vérifie les cinq hypothèses admises dans cette étude. Comme dans [41], il n'y a pas de potentiel de confinement. En construisant un espace fonctionnel ainsi qu'une application continue sur cet espace, l'emploi du théorème de Schauder donne l'existence forte d'une solution à (0.0.5) sur $\mathbb{R}_+$ à condition que X_0 admette un moment d'ordre $8q^2$ où q est l'entier qui intervient dans les hypothèses (V-5) et (F-4).

Une preuve de l'existence forte du processus auto-stabilisant peut être trouvée dans [22] où l'étude est menée en dimension quelconque. Il y est seulement demandé au coefficient de dérive classique (qui n'est pas obligatoirement un gradient) et au coefficient de dérive lié à l'auto-stabilisation (qui ne dépend que de la norme) d'être localement lipschitz, la croissance lente de F' ainsi que l'existence d'une boule en-dehors de laquelle l'on dispose d'une convexité uniforme. La condition quant à la variable aléatoire initiale est la même que dans [5] à savoir $\mathbb{E}\left[X_0^{8q^2}\right] < \infty$.

Il existe une correspondance entre l'équation différentielle stochastique (0.0.5) et une équation aux dérivées partielles. En effet, McKean (voir [36]) a montré que la loi du processus $(X_t)_{t\geq 0}$ vérifiait une équation de Fokker-Planck non-linéaire. Cette correspondance permet deux visions différentes du même objet. Par exemple, Benachour, Roynette, Talay et Vallois se servent de l'équation aux dérivées partielles pour établir des résultats de stationnarité du processus ([5]). Dualement, Cattiaux, Guillin et Malrieu étudient une équation de Fokker-Planck non-linéaire avec des méthodes probabilistes dans [13] (voir aussi [33] et [34]).

Dans [33], Malrieu prouve l'existence d'une mesure stationnaire dans le cas convexe lorsque $\epsilon = 2$ en minimisant la fonctionnelle

$$\mathcal{E}(u) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\ln(u(x))dx + \int_{\mathbb{R}} V(x)u(x) + \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^2} F(x-y)u(x)u(y)dxdy\,.$$

Il obtient par ailleurs l'unicité de cette mesure invariante.

Dans [5], sans potentiel de confinement, l'équation aux dérivées partielles de Fokker-Planck associée est intégrée en utilisant la stationnarité de la loi de X_t. Afin de mettre toute mesure stationnaire sous une forme plus simple, ils translatent X_0 et se servent de la symétrie de leur mesure stationnaire. Puis, ils prouvent qu'il existe au moins une mesure symétrique à vérifier la forme simple établie plus haut en se servant à nouveau du théorème de Schauder.

En restreignant l'espace d'étude et en considérant d'autres normes, ils construisent une contraction qui caractérise la stationnarité d'une mesure. Aussi, ils prouvent son unicité. Cette contraction utilise la convexité de V.

Cattiaux, Guillin et Malrieu se placent dans le cas convexe (non uniformément) avec $\epsilon = 2$ et obtiennent l'unicité de la mesure stationnaire après avoir démontré un phénomène de propagation du chaos uniforme en temps du système de particules vers le processus non-linéaire ([13]). Ce résultat de propagation du chaos fournit également la convergence en temps long du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ vers l'unique mesure stationnaire.

Sous des conditions similaires à celles de [5], une preuve de la convergence en temps long vers l'unique mesure stationnaire est fournie dans [6]. Toutefois, les auteurs se servent de la convexité du potentiel (identiquement nul dans leur cas) puisqu'ils utilisent la contraction du [5].

Associer un système de N particules (avec N grand) à l'équation (0.0.5) permet d'obtenir des résultats sur le processus non-linéaire comme l'unicité de la mesure stationnaire ou la convergence en temps long sous certaines conditions. Il est ainsi utile d'approcher le processus par ce système de particules. Lorsque V est nul et F' est uniformément lipschitz, Sznitman prouve cette convergence dans un sens explicité dans [41]. Les auteurs de [5] ont également un tel résultat de même que Cattiaux, Guillin et Malrieu qui fournissent un résultat uniforme en temps dans [13] comme il a déjà été noté.

Comme déjà mentionné, Freidlin et Wentzell ont établi un résultat asymptotique sur le temps de sortie $T(\epsilon)$ d'un domaine de stabilité $\mathcal{D}$ d'un puits a de V lorsqu'il n'y a pas d'auto-stabilisation : $T(\epsilon) \asymp \exp\left[\frac{2H}{\epsilon}\right]$ où $H := \min_{z\in\partial\mathcal{D}} \Big(V(z) - V(a)\Big)$.

Dans [22], les auteurs prouvent un résultat similaire lorsque V est convexe. Le temps de sortie $T(\epsilon)$ d'un domaine de stabilité $\mathcal{D}$ de l'unique puits a de V lorsqu'il n'y a pas d'auto-stabilisation vérifie $T(\epsilon) \asymp \exp\left[\frac{2H}{\epsilon}\right]$ où $H := \min_{z\in\partial\mathcal{D}} \Big(W(z)-W(a)\Big)$ avec $W := V + F * \delta_a$.

Résultats

Dans un premier temps, j'étends la méthode développée dans [5] afin de prouver que l'équation différentielle stochastique auto-stabilisante (0.0.5) admet une unique solution forte sur $\mathbb{R}_+$. Ce résultat est établi pour n'importe quelle valeur de ϵ. La technique employée consiste à construire une solution sur un intervalle fini puis de prouver que les moments du processus au temps t sont majorés par une fonction dépendant des moments au temps 0. Cette majoration se démontre par l'utilisation de la stricte positivité de V'' en-dehors d'un certain compact et permet de construire une solution sur $\mathbb{R}_+$. La même méthode fournit également l'unicité de la solution. Aussi, le principal résultat du premier chapitre est le suivant :

Théorème : *Soit une variable aléatoire réelle X_0 qui admet un moment d'ordre $8q^2$. Alors, l'équation* (0.0.5) *admet une unique solution forte sur $\mathbb{R}_+$.*

Au vu de ce résultat, dans tous les chapitres suivants, je suppose que la variable

aléatoire initiale X_0 admet un moment d'ordre $8q^2$.

Après avoir justifié brièvement que la loi du processus vérifie une équation aux dérivées partielles de type Fokker-Planck non-linéaire, je m'intéresse à l'existence éventuelle des mesures stationnaires. Je suppose pour cela et pour le reste de l'étude que l'hypothèse (V-10) est vérifiée.

Je me place dans le cadre plus confortable d'une fonction d'intéraction F' linéaire pour débuter. Lorsque le potentiel V est symétrique, l'existence d'une mesure stationnaire symétrique est automatique. J'étudie ensuite la possibilité d'existence d'autres types de mesures invariantes. Pour cela, j'utilise une paramétrisation en dimension un. Le principal résultat est le suivant :

Proposition : *Soit $F(x) := \frac{\alpha}{2}x^2$ et a_0 un point critique de V. Si α est assez grand, quel que soit $\delta > 0$, pour ϵ assez petit, l'équation* (0.0.5) *ainsi définie admet une mesure stationnaire dite excentrée autour de a_0 dont la moyenne $m(\epsilon)$ satisfait $|m(\epsilon) - a_0| < \delta$.*

L'une des conséquences de ce résultat est la suivante :

Corollaire : *Soit $F(x) := \frac{\alpha}{2}x^2$. Pour α assez grand puis pour ϵ assez petit, l'équation différentielle stochastique* (0.0.5) *admet au moins $2M + 1 \geq 3$ mesures stationnaires.*

L'unicité de la mesure invariante de l'équation (0.0.5) n'étant pas établie par défaut lorsque le paysage est non convexe, l'étude de la convergence en temps long n'est plus intuitive. On peut ensuite s'interroger quant au nombre exact de mesures. Une réponse est apportée dans un cas particulier (auquel appartient $x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$) :

Théorème : *Soit un potentiel V symétrique tel que V'' est convexe et $F(x) := \frac{\alpha}{2}x^2$. Quel que soit $\alpha > 0$, il y a exactement trois mesures invariantes dès que ϵ est assez petit.*

Ces résultats sur les mesures excentrées autour des points critiques exigent que ϵ soit assez petit. Dans le cas de la fonction $x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$, j'ai simulé le seuil critique en fonction de α en-deça duquel les résultats de la proposition, du corollaire et du théorème sont vrais. Et, l'on constate que ce seuil n'est pas exagérément petit. Par exemple, l'équation $dX_t = \sqrt{2}dB_t - (X_t^3 + 2X_t - 3\mathbb{E}[X_t])\,dt$ admet au moins trois mesures stationnaires.

J'enquête ensuite sur le cas où le degré de F est général. D'abord, j'utilise une méthode proche de celle employée par Benachour, Roynette, Talay et Vallois dans [5] (avec une application continue sur un Banach puis j'applique le théorème de Schauder) afin de montrer qu'il existe une mesure stationnaire symétrique lorsque le potentiel V est symétrique. Puis, j'examine l'éventuelle existence des mesures invariantes "proches" des points critiques. Une réponse est fournie mais les conditions sont plus exigeantes :

Théorème : *Soit a_0 un puits de V tel que $V + F * \delta_{a_0}$ atteint son minimum global en le seul et unique point a_0. On suppose $\sum_{p=0}^{2n-2} \frac{\left|F^{(p+2)}(a_0)\right|}{p!} |a_0|^p < \alpha + V''(a_0)$. Alors, la diffusion auto-stabilisante* (0.0.5) *admet une mesure invariante excentrée*

$u_\epsilon^{a_0}$ *telle que la quantité* $\left| \int_{\mathbb{R}} x^k u_\epsilon^{a_0}(x)dx - a_0^k \right|$ *soit arbitrairement petite.*

On continue l'étude des mesures stationnaires en cherchant leur comportement pour ϵ tendant vers 0 dans le Chapitre 3. On impose désormais la condition (V-7) : V coïncide avec une fonction analytique sur $[a_1; a_{2M+1}]$. Le cas où l'intéraction F' est linéaire est à nouveau mis à part. On prouve rapidement qu'une mesure excentrée autour d'un point critique a_0 converge étroitement vers δ_{a_0}.
Lorsque le potentiel est symétrique, le comportement asymptotique de la mesure stationnaire symétrique est entièrement déterminé par le lemme de Laplace classique. Bien que le cas soit simple, on constate que le potentiel de confinement V peut radicalement changer ce comportement. Ainsi cette mesure converge étroitement vers une mesure discrète symétrique u_0. Si V'' est convexe (ce qui est le cas de $x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$), u_0 charge un ou deux points. Si V'' n'est pas convexe, il est tout à fait envisageable que la mesure u_0 charge au moins trois points quand bien même V serait un potentiel à deux puits :

Proposition : *Soit une mesure de probabilité discrète symétrique quelconque v. Il existe une fonction V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-10) et une constante $\alpha > 0$ telles que la mesure stationnaire symétrique de l'équation* (0.0.5) *(avec le potentiel de confinement V et le potentiel d'intéraction $x \mapsto \frac{\alpha}{2}x^2$) converge vers v.*

On poursuit l'examen du comportement asymptotique des mesures invariantes dans le cas général. Pour parvenir à une convergence, une condition de bornitude (H) est supposée. Celle-ci est vérifiée lorsque l'on s'intéresse à une famille de mesures symétriques ou pour peu que V soit une fonction polynômiale de degré strictement supérieur à $2n = \deg(F)$. Le principal résultat du chapitre est le suivant :

Théorème : *Soit une famille de mesures stationnaires $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$. Sous la condition (H), il existe une suite $(\varepsilon_k)_{k\geq 1}$ qui tend vers 0 telle que u_{ε_k} converge étroitement vers la mesure discrète $\sum_{i=1}^r p_i \delta_{A_i}$. De plus, les r points $A_1, \ldots, A_r$ vérifient $V'(A_i) + \sum_{l=1}^r p_l F'(A_i - A_l) = 0$, $V''(A_i) + \sum_{l=1}^r p_l F''(A_i - A_l) \geq 0$ ainsi que $V(A_i) - V(A_j) + \sum_{l=1}^r p_l (F(A_i - A_l) - F(A_j - A_l)) = 0$.*

En particulier, lorsque l'on considère une famille de mesures excentrées autour de a_0, on dispose de la convergence étroite vers δ_{a_0}. Par ailleurs, comme dans le cas où F' est linéaire, on prouve :

Théorème : *On suppose la symétrie de V ainsi que la convexité des fonctions V'' et F''. Alors toute suite de mesures invariantes symétriques de la diffusion* (0.0.5) *converge étroitement vers $\frac{1}{2}\delta_{x_0} + \frac{1}{2}\delta_{-x_0}$ où x_0 est l'unique réel positif ou nul qui vérifie $V'(x_0) + \frac{1}{2}F'(2x_0) = 0$ et $V''(x_0) + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}F''(2x_0) \geq 0$. De plus, si $\alpha \geq \vartheta = -V''(0)$ alors $x_0 = 0$, sinon $x_0 > 0$.*

Je fournis ensuite deux contre-exemples à ce théorème : l'un où V'' est convexe et F'' ne l'est pas et l'autre où V'' n'est pas convexe alors que F'' l'est.

Le Chapitre 4 est consacré à la vitesse à laquelle une suite de mesures stationnaires converge vers sa limite. C'est une étude plus fine que celle du Chapitre

3. Pour la mener à bien, j'utilise des lemmes proches de celui de Laplace. Pour commencer, j'examine le cas où F' est linéaire et V symétrique. La vitesse de convergence de la suite de mesures stationnaires symétriques vers u_0 suggère la difficulté d'une étude générale. En effet, si l'on n'impose aucune condition de convexité sur V'', même si la mesure limite ne charge que deux points voire un point, l'ordre de la vitesse nécessite que l'on connaisse les autres points critiques de $V + F * u_0$.

Pour le cas général, lorsque l'intéraction F est de degré supérieur ou égal à 4, la convexité des fonctions V'' et F'' implique que l'ordre de la vitesse de convergence des mesures stationnaires symétriques vers sa mesure limite u_0 est ϵ si $V''(0) + F''(0) = -\vartheta + \alpha \neq 0$ et cet ordre est $\epsilon^{\frac{1}{m_0}}$ avec $m_0 \geq 2$ sinon. Cette bifurcation est étudiée en détails par l'adjonction d'une dépendance en ϵ dans le coefficient α.

Puis, pour achever le quatrième chapitre, je démontre que la vitesse est d'ordre ϵ dans le cas des mesures excentrées autour des points critiques lorsque V'' et F'' sont convexes.

Je définis ensuite un système de particules à champ moyen classique. Je le considère comme une particule de $\mathbb{R}^N$ soumise à l'action d'un "méta-potentiel" dont la géométrie est étudiée dans le cas où la fonction d'intéraction F' est linéaire. Aussi, ce système dynamique correspond à un processus de Kolmogorov qui admet une unique mesure stationnaire. Cette unicité n'est pas incompatible avec la non-unicité pour l'équation non-linéaire. En effet, pour N tendant vers l'infini, une mesure sur $\mathbb{R}$ ne s'identifie pas à une mesure sur $\mathbb{R}^N$ mais à un point de $\mathbb{R}^N$.

Dans le cas non convexe, je remarque qu'il n'y a pas de correspondance entre les puits du méta-potentiel et les mesures stationnaires de l'équation non-linéaire (0.0.5). En effet, pour peu que le paramètre α soit assez petit, certains puits du méta-potentiel ne fournissent pas de mesures stationnaires. Inversement, si α est assez grand, certaines mesures stationnaires correspondent à un col du méta-potentiel. En utilisant des techniques classiques liées au trou spectral, j'atteste que le système de particules converge en loi vers son unique mesure stationnaire.

Puis, je démontre la propagation faible du chaos à savoir qu'une particule du système dynamique a un comportement "proche" de celui d'un processus auto-stabilisant (0.0.5) lorsque N tend vers l'infini sur un intervalle de temps donné. Je justifie en quoi il ne peut pas y avoir de propagation du chaos uniforme en temps.

Dans le cas symétrique, lorsque $\alpha \geq \vartheta$, je construis un autre système de particules où V et F sont remplacés par $x \mapsto V(x) + \frac{\alpha}{2}x^2$ et $x \mapsto F(x) - \frac{x^2}{2}$ respectivement. En exigeant la symétrie de la loi initiale u_0 de la variable aléatoire X_0 dans (0.0.5), je démontre la propagation du chaos uniforme en temps de ce nouveau système de particules. Comme ce résultat présuppose la symétrie de X_0, je parle de "propagation du chaos semi-uniforme".

Afin de conclure le Chapitre 5 portant sur les systèmes de particules associés à

l'équation de Fokker-Planck, je mène l'étude du comportement asymptotique pour ϵ tendant vers 0 (à N fixé) de l'unique mesure stationnaire du système à champ moyen.

L'objet du Chapitre 6 est d'étendre autant que faire se peut le résultat de tiercéïté des mesures stationnaires lorsque F' est linéaire et V symétrique et de dérivée seconde convexe. Pour y parvenir, j'exploite les résultats fins du Chapitre 4 sur la vitesse de convergence asymptotique ainsi que la propagation du chaos semi-uniforme établie dans le Chapitre 5 sur les systèmes de particules.

Dans un premier temps, je fournis brièvement des résultats généraux induits par le travail sur la vitesse de convergence. J'exploite ces derniers afin de construire une contraction adéquate. Et, lorsque V'' et F'' sont convexes, je prouve l'unicité - conditionnellement à l'existence - de la mesure stationnaire excentrée autour de a_0 pour ϵ assez petit où a_0 est un puits de V.

Le reste du chapitre traite de l'unicité de la mesure stationnaire symétrique quand le potentiel de confinement V est symétrique. La fonction V'' est supposée convexe. Trois cas distincts sont considérés :

- Lorsque l'intéraction est forte ($\alpha > \vartheta$), j'utilise la méthode de la vitesse de convergence et j'acquiers l'unicité pour ϵ assez petit en supposant la convexité de F''. Je démontre le résultat d'unicité sans supposer la convexité de F'' par une méthode proche de celle développée dans [5]. A nouveau, ϵ doit être assez petit.
- Lorsque l'intéraction est intermédiaire ($\alpha = \vartheta$), j'utilise la propagation du chaos semi-uniforme. En supposant que V'' et F'' sont convexes mais aussi que V satisfait les hypothèses (V-8), (V-9) et (V-11) en plus des hypothèses classiques, j'établis l'unicité de la mesure stationnaire symétrique sans aucune condition portant sur ϵ.
- Lorsque l'intéraction est faible ($\alpha < \vartheta$), l'unicité est traitée exactement comme dans le cas $\alpha > \vartheta$ en exploitant les résultats sur la vitesse de convergence.

Le Chapitre 6 s'achève par un résultat de tiercéïté des mesures stationnaires dans un cas simple mais plus général puisque F n'est pas supposé de degré 2 :

Théorème : *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-11) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). On suppose $\alpha > \vartheta$,* $\deg(V) \geq \deg(F)$ *ainsi que la convexité de V'' et F''. Par ailleurs, on demande la majoration* $\sum_{p=1}^{2n-2} \frac{\left|F^{(p+2)}(a)\right|}{p!} a^p \leq \alpha + V''(a)$. *Alors, pour ϵ assez petit, la diffusion* (0.0.5) *admet exactement trois mesures stationnaires.*

Le dernier chapitre concerne le comportement du processus auto-stabilisant $(X_t^\epsilon)_{t\in\mathbb{R}_+}$ en temps long.

Premièrement, j'établis la convergence en loi du processus vers l'unique mesure stationnaire symétrique lorsque V est symétrique, $\alpha \geq \vartheta$ et X_0 symétrique.

Dans le cas sur-critique $\alpha > \vartheta$, j'utilise une méthode proche de celle développée

dans [6] avec des résultats liés aux semi-groupes d'équations aux dérivées partielles (voir [32]). La différence notable est l'utilisation du théorème de Muckenhoupt (voir [1]) plutôt que le critère de courbure dimension de Bakry-Emery (voir [3]) pour compenser la non-convexité du potentiel V.

Je fournis une autre démonstration en me servant de la propagation du chaos semi-uniforme du Chapitre 5. Les hypothèses sont par conséquent plus fortes :

Théorème : *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-11) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). On suppose de plus que les fonctions V'' et F'' sont convexes et que la variable aléatoire X_0 est symétrique et vérifie $\mathbb{E}\left[X_0^{8q^2}\right] < \infty$. Sous la condition $\alpha > \vartheta$, la diffusion X_t^ϵ définie par* (0.0.5) *converge en loi vers l'unique mesure invariante symétrique u_ϵ^0. De plus, pour tout $t > 0$, on a l'inégalité :*

$$\mathbb{W}_2\left(u_t^\epsilon; u_\epsilon^0\right)^2 \leq 3\, e^{-2\lambda t} \iint_{\mathbb{R}^2} (x-y)^2\, du_0(x) u_\epsilon^0(y) dy$$

où λ est une constante strictement positive et où $\mathbb{W}_2(u;v)$ est la distance de Wasserstein entre les mesures u et v.

Dans le cas critique $\alpha = \vartheta$, la propagation du chaos semi-uniforme implique la convergence étroite de u_t^ϵ vers u_ϵ^0. La vitesse n'est toutefois plus exponentielle :

$$\mathbb{W}\left(u_t^\epsilon\,;\, u_\epsilon^0\right)^2 \;\leq\; \frac{3 \iint_{\mathbb{R}^2} (x-y)^2\, du_0(x) u_\epsilon^0(y) dxdy}{\left[1 + 2\lambda t \left(\iint_{\mathbb{R}^2} (x-y)^2\, du_0(x) u_\epsilon^0(y) dxdy\right)^{l_0-1}\right]^{\frac{1}{l_0-1}}}$$

où $\lambda > 0$ et $l_0 := \min\left\{l \geq 2 \mid V^{(2l)}(0) > 0\right\}$.

Aucun résultat de symétrisation n'est fourni vu qu'il peut y avoir des mesures stationnaires non symétriques.

Dans un second temps, je donne une réponse partielle à la question du temps de sortie. Je me place en effet dans le cas où X_0 suit une loi stationnaire. En utilisant les résultats du troisième chapitre sur le comportement asymptotique des mesures stationnaires, je démontre un résultat de même nature que ceux présents dans [14] et [22]. Je termine l'étude en examinant l'influence de l'auto-stabilisation sur le temps de sortie.

Remarques techniques : Les constantes qui interviennent localement et n'ont pas d'importance capitale sont notées C. Les mesures de probabilité absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue sont notées de la même façon que les densités.

Le travail décrit dans ce mémoire a fait l'objet d'une publication : [23] et de deux prépublications : [24] et [25].

1. EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION À L'ÉQUATION

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on se donne un mouvement brownien $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et l'on prouve que l'équation différentielle stochastique auto-stabilisante unidimensionnelle (0.0.5) :

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \sqrt{\epsilon}B_t - \int_0^t V'(X_s)\,ds - \int_0^t F' * u_s(X_s)\,ds \\ u_t &= \mathcal{L}(X_t) \end{aligned}$$

admet une solution forte qui est unique sous une condition simple portant sur la variable aléatoire réelle X_0. Cette condition en question est $\mathbb{E}\left[X_0^{8q^2}\right] < +\infty$ où q est l'entier naturel défini dans les hypothèses (V-5) et (F-4).

Dans [5], Benachour, Roynette, Talay et Vallois construisent un espace Λ de fonctions localement lipschitziennes et dominées par $x \mapsto (1 + x^{2q})$ ainsi qu'une norme qui lui est canoniquement associée. Ils traduisent le problème d'existence à l'équation en terme de point fixe d'une application fonctionnelle Γ sur Λ. Après avoir établi la stabilité de Λ par Γ, ils donnent un contrôle de la norme de $\Gamma b_1 - \Gamma b_2$ en fonction de celle de $b_1 - b_2$ où b_1 et b_2 sont dans Λ.

Ils prouvent ensuite que Γ est une contraction sur un sous-espace de Λ. Ils peuvent ainsi construire de façon récursive une solution sur un intervalle de temps fini. Ils majorent les moments du processus par une fonction des moments initiaux ce qui leur permet d'étendre la solution sur $\mathbb{R}_+$.

Herrmann, Imkeller et Peithmann utilisent une méthode récursive similaire dans [22] pour fournir le même résultat en dimension quelconque lorsque l'on ajoute de plus une fonction de confinement qui ne représente pas *a priori* le gradient d'un potentiel. Cette fonction de confinement a pour effet principal de compliquer le contrôle des moments.

Dans les deux travaux, la fonction d'intéraction F' est radiale et à croissance lente.

Afin d'atteindre l'objectif de ce chapitre, on adapte la preuve du [5] en exploitant la convexité à l'infini du potentiel de confinement sans utiliser un temps d'arrêt comme dans [22]. On commence par réécrire l'équation (0.0.5) de la sorte :

$$dX_t = \sqrt{\epsilon}dB_t - b(t, X_t)dt \tag{1.1.1}$$

où la dérive b qui apparaît effectivement dans l'équation vérifie $b(t,x) = V'(x) + F' * u_t(x)$. L'idée globale est de prouver qu'il existe une fonction b de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que la diffusion associée $\overline{X_t}$ par (1.1.1) satisfasse $b(t,x) = V'(x) + F' * \overline{u_t}(x)$ avec $\overline{u_t} = \mathcal{L}\left(\overline{X_t}\right)$. Voir par exemple [36], [41] et [5] lorsque la fonction V' est identiquement nulle. Et, voir [22] lorsque $V' \neq 0$.

On utilisera le théorème du point fixe de Banach après avoir construit un espace de fonctions sur lequel la procédure décrite précédemment définit une application contractante sous une condition portant sur les moments de X_0. On en déduiera alors que l'on peut définir la diffusion (0.0.5) sur un intervalle $[0;T]$ avec $T > 0$ et ceci de manière unique. Ensuite, on prouvera un contrôle des moments du processus ainsi défini ce qui permettra sous une condition plus forte sur les moments de X_0 d'étendre la définition du processus ainsi que son unicité à $\mathbb{R}_+$.

On commence par considérer la définition suivante :

Définition 1.1. *Soit une fonction b de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et soit une variable aléatoire réelle X_0. L'équation suivante est notée $E^{(b,\epsilon,X_0)}$:*

$$X_t = X_0 + \sqrt{\epsilon} B_t - \int_0^t b(s, X_s) ds \,.$$

La diffusion ainsi définie, si elle existe et si elle est unique est notée $\left(X_t^{(b,\epsilon,X_0)}\right)_{t\geq 0}$.

Par la suite, on a besoin de fonctions b et d'une variable aléatoire X_0 telles que l'on puisse toujours définir la diffusion $X_t^{(b,\epsilon,X_0)}$. On rappelle le Théorème 10.2.2 de la page 255 dans [40] - sous une forme plus faible - dont on ne donnera pas la preuve :

Proposition 1.2. *Soit une fonction $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :*
1. $\max_{s\geq 0} |b(s,0)| < \infty$.
2. *Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, il existe une constante $c_n > 0$ telle que $|b(s,x) - b(s,y)| \leq c_n |x-y|$ pour tous les réels x et y dont la valeur absolue est inférieure ou égale à n.*
3. *Il existe une constante $r > 0$ telle que pour tout $|x| > r$, $\operatorname{sgn}(x) b(s,x) \geq 0$.*
Alors, quelle que soit la variable aléatoire réelle X_0, l'équation $E^{(b,\epsilon,X_0)}$ admet une unique solution forte $\left(X_t^{(b,\epsilon,X_0)}\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

1.2 Construction de l'espace de fonctions et propriétés

Afin de prouver que l'on peut définir la diffusion (0.0.5) sur un intervalle $[0;T]$ avec $T > 0$, on commence par construire un espace de fonctions adéquat à cet intervalle temporel.

Définition 1.3. *Sur l'espace des fonctions qui vont de* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, on introduit la norme*

$$||b||_T := \sup_{0\leq s\leq T} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{|b(s,x)|}{1+|x|^{2q}} \right)$$

où q *est l'entier strictement positif défini dans les propriétés (V-5) et (F-4).*

En définissant les fonctions $\widetilde{V'}$ et $\widetilde{F'}$ de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\widetilde{V'}(s,x) := V'(x)$ et $\widetilde{F'}(s,x) := F'(x)$, on peut constater qu'elles vérifient $\left|\left|\widetilde{V'}\right|\right|_T < \infty$ et $\left|\left|\widetilde{F'}\right|\right|_T < \infty$, quel que soit $T > 0$.

Définition 1.4. *On définit l'espace fonctionnel*

$$\Lambda_T := \Lambda_T^1 \cap \Lambda_T^2 \cap \Lambda_T^3$$

où les trois espaces de fonctions Λ_T^1*,* Λ_T^2 *et* Λ_T^3 *sont définis comme suit :*

$$\Lambda_T^1 := \left\{ b : [0;T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \forall\, x \notin]a_1; a_{2M+1}[\,,\ \frac{\partial}{\partial x} b(s,x) \geq \kappa \right\},$$

le paramètre $\kappa := \inf_{x\in]-\infty;a_1]\bigcup[a_{2M+1};+\infty[} \min\{V''(x); F''(x)\}$ *ayant été introduit dans* (0.0.10) *;*

$$\Lambda_T^2 := \left\{ b : [0;T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \forall\, x \in [a_1; a_{2M+1}]\,,\ \frac{\partial}{\partial x} b(s,x) \geq \alpha - \vartheta \right\},$$

les paramètres $\alpha := F''(0)$ *et* $\vartheta := \sup_{x\in\mathbb{R}} -V''(x)$ *ayant été introduits dans* (0.0.8) *et* (0.0.7) *;*

$$\Lambda_T^3 := \left\{ b : [0;T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ \mid \ ||b||_T < \infty \right\}.$$

Il convient de noter que l'on demande tacitement aux espaces Λ_T^1 et Λ_T^2 et par suite à l'espace fonctionnel Λ_T de ne contenir que des fonctions dérivables et de dérivées continues par rapport à la variable x. Par conséquent, toute fonction de Λ_T est localement Lipschitz. On souhaite appliquer la Proposition 1.2 pour construire une solution forte associée à une dérive appartenant à Λ_T. Or, cette Proposition exige que les dérives soient localement Lipschitz. Et, par définition de $||\,.\,||_T$, toute fonction $b \in \Lambda_T$ vérifie les autres propriétés de la Proposition 1.2. Enfin, quelle que soit la mesure de probabilité μ dont le moment d'ordre $2n := \deg(F)$ est fini, la fonction $V' + F' * \mu$ appartient à Λ_T.

Définition 1.5. *Les moments jouant un rôle crucial, quel que soit l'élément* b *dans l'ensemble* Λ_T*, on pose*

$$\nu_p^{(b,\epsilon)}(t) := \mathbb{E}\left[\left| X_t^{(b,\epsilon)} \right|^p \right] \quad \text{et} \quad \widehat{\nu_p^{(b,\epsilon)}}(t) := \sup_{0\leq s\leq t} \nu_p^{(b,\epsilon)}(s)\,.$$

La définition de l'ensemble Λ_T intègre une possible décroissance de ses éléments par rapport à la variable x. En effet, le potentiel de confinement V n'est pas convexe vu qu'il possède au minimum deux puits d'après la propriété $M \geq 1$. Contrôlons maintenant cette décroissance.

Lemme 1.6. *Soit $\widetilde{\kappa} := (\kappa + |\alpha - \vartheta|)(a_{2M+1} - a_1)$ où les constantes α, ϑ et κ ont été définies respectivement dans (0.0.8), (0.0.7) et (0.0.10). Soient $T > 0$ et $b \in \Lambda_T$. Alors, quel que soit $s \in [0;T]$ et pour tous les réels x et y, on a la minoration*

$$\mathrm{sgn}(x-y)\Big(b(s,x) - b(s,y)\Big) \geq \kappa|x-y| - \widetilde{\kappa}\,. \tag{1.2.1}$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on suppose $y \geq x$. Plusieurs cas peuvent se produire :

1. Si $y \leq a_1$ ou $x \geq a_{2M+1}$, comme $b \in \Lambda_T^1$, on a $\mathrm{sgn}(x-y)\,(b(s,x) - b(s,y)) = b(s,y) - b(s,x) \geq \kappa\,(y-x)$ ce qui implique bien (1.2.1).
2. Si $x \leq a_1 \leq y \leq a_{2M+1}$, alors comme $b \in \Lambda_T^1$, on a $b(s,a_1) - b(s,x) \geq \kappa\,(a_1 - x)$. Et, comme $b \in \Lambda_T^2$, on a $b(s,y) - b(s,a_1) \geq (\alpha - \vartheta)\,(y - a_1) \geq -|\alpha - \vartheta|\,(y - a_1)$.
   En faisant la somme, il vient $b(s,y) - b(s,x) \geq \kappa\,(a_1 - x) - |\alpha - \vartheta|\,(y - a_1) \geq \kappa\,(y-x) - (\kappa + |\alpha - \vartheta|)\,(y - a_1)$. Comme $0 \leq y - a_1 \leq a_{2M+1} - a_1$, on en déduit (1.2.1). On a bien sûr la même inégalité lorsque $a_1 \leq x \leq a_{2M+1} \leq y$.
3. Si $a_1 \leq x \leq y \leq a_{2M+1}$, comme $b \in \Lambda_T^2$, on a la majoration $b(s,y) - b(s,x) \geq (\alpha - \vartheta)\,(y-x) \geq \kappa\,(y-x) - (\kappa + |\alpha - \vartheta|)\,(y-x)$. Or, $0 \leq y - x \leq a_{2M+1} - a_1$ donc on en déduit (1.2.1).
4. Si $x \leq a_1 \leq a_{2M+1} \leq y$, comme $b \in \Lambda_T^1$, on a $b(s,y) - b(s,a_{2M+1}) \geq \kappa\,(y - a_{2M+1})$ et $b(s,a_1) - b(s,x) \geq \kappa\,(a_1 - x)$. De plus, comme $b \in \Lambda_T^2$, on a l'inégalité $b(s,a_{2M+1}) - b(s,a_1) \geq (\alpha - \vartheta)\,(a_{2M+1} - a_1)$.
   En sommant les trois termes, on obtient donc $b(s,y) - b(s,x) \geq \kappa\,(y-x) - \kappa\,(a_{2M+1} - a_1) - |\alpha - \vartheta|\,(a_{2M+1} - a_1)$ ce qui est exactement (1.2.1).

□

On remarquera que le Lemme 1.6 fournit un contrôle qui ne dépend pas de l'application $b \in \Lambda_T$ que l'on considère.

Lemme 1.7. *Soit une variable aléatoire réelle X_0. Soit $\Phi_0 > \max\{\kappa; \alpha - \vartheta\}$. On définit la fonction ρ de $[0;T] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\rho(s,x) := \Phi_0 x$.*
Alors, $\rho \in \Lambda_T$. De plus, pour tout $k \geq 1$ tel que le moment d'ordre $2k$ de X_0 est fini, $\widehat{\nu_{2k}^{(\rho,\epsilon)}}(T) < \infty$. Par ailleurs, quel que soit $k \geq 1$, il existe une constante $C(k)$ telle que l'on ait

$$\widehat{\nu_{2k}^{(b,\epsilon)}}(T) \;\leq\; C(k)\left[\widehat{\nu_{2k}^{(\rho,\epsilon)}}(T) + T^{2k} + (T||b-\rho||_T)^{2k}\left(1 + \widehat{\nu_{4qk}^{(\rho,\epsilon)}}(T)\right)\right] \tag{1.2.2}$$

pour toute fonction $b \in \Lambda_T$.

Démonstration. D'abord, d'après la définition de Φ_0, il est clair que ρ vérifie les conditions *sine qua non* pour être dans Λ_T^1 et Λ_T^2. Puis, comme la fonction ρ est linéaire, l'inégalité $||\rho||_T < \infty$ est immédiate. Aussi, la fonction b appartient-elle à l'ensemble Λ_T.

Étape 1. La solution de l'équation $E^{(\rho,\epsilon,X_0)}$ peut être exprimée littéralement

$$X_t^{(\rho,\epsilon,X_0)} = \exp\left[-\Phi_0 t\right]\left(X_0 + \sqrt{\epsilon}\int_0^t \exp\left[\Phi_0 s\right] dB_s\right) .$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité $(a+b)^{2k} \leq 2^{2k}\left(a^{2k}+b^{2k}\right)$, on obtient la majoration $|X_t^{(\rho,\epsilon,X_0)}|^{2k} \leq 2^{2k}\exp\left[-2k\Phi_0 t\right]\left[|X_0|^{2k} + \epsilon^k|\int_0^t \exp\left[\Phi_0 s\right] dB_s|^{2k}\right]$. D'où

$$\mathbb{E}\left[|X_t^{(\rho,\epsilon,X_0)}|^{2k}\right] \leq 2^{2k}e^{-2k\Phi_0 t}\left\{\mathbb{E}\left[|X_0|^{2k}\right] + \epsilon^k\mathbb{E}\left[\left(\left|\int_0^t e^{\Phi_0 s} dB_s\right|^2\right)^k\right]\right\} .$$

Or, le processus $\left(\exp\left[-\Phi_0 t\right]\int_0^t \exp\left[\Phi_0 s\right] dB_s\right)_{t\geq 0}$ est gaussien et centré. En lui appliquant l'inégalité de Kunita-Watanabe, il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\exp\left[-\Phi_0 t\right]\int_0^t \exp\left[\Phi_0 s\right] dB_s\right)^2\right] &= \exp\left[-2\Phi_0 t\right]\int_0^t \exp\left[2\Phi_0 s\right] ds \\ &= \frac{1}{2\Phi_0}\Big(1 - \exp\left[-2\Phi_0 t\right]\Big)\end{aligned}$$

ce qui converge vers $\frac{1}{2\Phi_0}$ quand t tend vers l'infini. Par conséquent, le processus $\left(\exp\left[-\Phi_0 t\right]\int_0^t \exp\left[\Phi_0 s\right] dB_s\right)_{t\geq 0}$ est convergent et il en est de même de ses moments, lesquels sont donc bornés sur $\mathbb{R}$ et *a fortiori* sur $[0;T]$. On en déduit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X_t^{(\rho,\epsilon,X_0)}|^{2k}\right] &\leq 2^{2k}\exp\left[-2k\Phi_0 t\right]\mathbb{E}\left[|X_0|^{2k}\right] \\ &\quad + \epsilon^k 2^{2k}\sup_{t\in\mathbb{R}}\mathbb{E}\left[\left(\exp\left[-\Phi_0 t\right]\int_0^t \exp\left[\Phi_0 s\right] dB_s\right)^{2k}\right] < \infty .\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Ainsi on a bien $\widehat{\nu_{2k}^{(\rho,\epsilon)}}(T) < \infty$ puisque l'on avait supposé $\mathbb{E}\left[|X_0|^{2k}\right] < \infty$.

Étape 2. On considère $\left(X_t^{(\rho,\epsilon,X_0)}\right)_{t\geq 0}$ et $\left(X_t^{(b,\epsilon,X_0)}\right)_{t\geq 0}$ les deux solutions associées respectivement à ρ et b sur le même espace de probabilité comme définies par la Proposition 1.2. On peut alors écrire :

$$\Delta_t := X_t^{(b,\epsilon,X_0)} - X_t^{(\rho,\epsilon,X_0)} = -\int_0^t \Big[b(s, X_s^{(b,\epsilon,X_0)}) - \rho(s, X_s^{(\rho,\epsilon,X_0)})\Big] ds .$$

Soit $\eta > 1$. On applique la formule d'Itô au processus $(\Delta_t)_{t\geq 0}$ avec la fonction de classe $\mathcal{C}^2$ $x \longmapsto |x|^\eta$:

$$|\Delta_t|^\eta = -\eta\int_0^t \operatorname{sgn}(\Delta_s)\,|\Delta_s|^{\eta-1}\Big(b(s, X_s^{(b,\epsilon,X_0)}) - \rho(s, X_s^{(\rho,\epsilon,X_0)})\Big) ds .$$

En faisant tendre η vers 1, il vient

$$|\Delta_t| = -\int_0^t \operatorname{sgn}(\Delta_s)\Big\{\left[b\left(s, X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right) - b\left(s, X_s^{(\rho,\epsilon,X_0)}\right)\right] + \left[b\left(s, X_s^{(\rho,\epsilon,X_0)}\right) - \rho\left(s, X_s^{(\rho,\epsilon,X_0)}\right)\right]\Big\} ds\,.$$

En utilisant l'équation (1.2.1), la première intégrale peut être majorée de la sorte

$$-\int_0^t \operatorname{sgn}(\Delta_s)\left(b(s, X_s^{(b,\epsilon,X_0)}) - b(s, X_s^{(\rho,\epsilon,X_0)})\right) \leq -\kappa \int_0^t |\Delta_s|\, ds + T\,\widetilde{\kappa}\,,$$

pour tout $t \leq T$. Ainsi la majoration de l'écart entre les deux processus devient

$$|\Delta_t| \leq \int_0^t \left|b(s, X_s^{(\rho,\epsilon,X_0)}) - \rho(s, X_s^{(\rho,\epsilon,X_0)})\right| ds + \widetilde{\kappa}\,T\,.$$

En rappelant que b et ρ sont tous les deux dans l'espace Λ_T, on sait que $||b||_T < \infty$ et $||\rho||_T < \infty$ d'où $||b-\rho||_T < \infty$. La définition de la norme $||.||_T$ fournit directement

$$|\Delta_t| \leq ||b-\rho||_T \int_0^t \left(1 + \left|X_s^{(\rho,\epsilon,X_0)}\right|^{2q}\right) ds + \widetilde{\kappa} T\,. \tag{1.2.4}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, à partir de la définition de Δ_t, on obtient

$$\left|X_t^{(b,\epsilon,X_0)}\right|^{2k} \leq \left\{\left|X_t^{(\rho,\epsilon,X_0)}\right| + |\Delta_t|\right\}^{2k} \leq 2^{2k}\left\{\left|X_t^{(\rho,\epsilon,X_0)}\right|^{2k} + |\Delta_t|^{2k}\right\}.$$

En prenant le supremum sur tout l'intervalle $[0;T]$, on trouve

$$\left|X_t^{(b,\epsilon,X_0)}\right|^{2k} \leq 2^{2k}\left(\widehat{\nu_{2k}^{(\rho,\epsilon)}}(T) + \sup_{t\in[0;T]} |\Delta_t|^{2k}\right). \tag{1.2.5}$$

En se servant de l'équation (1.2.4), il vient

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0;T]} |\Delta_t|^{2k} &\leq 2^{2k}\left\{||b-\rho||_T^{2k}\left[\int_0^T \left(1 + \left|X_s^{(\rho,\epsilon,X_0)}\right|^{2q}\right) ds\right]^{2k} + \widetilde{\kappa}^{2k} T^{2k}\right\} \\ &\leq 2^{4k}||b-\rho||_T^{2k}\left[T^{2k} + \left(\int_0^T \left|X_s^{(\rho,\epsilon,X_0)}\right|^{2q} ds\right)^{2k}\right] + 2^{2k}\widetilde{\kappa}^{2k}T^{2k}.\end{aligned}$$

Après avoir majoré $\left|X_s^{(\rho,\epsilon,X_0)}\right|^{2q}$ par $\left(\sup_{s\in[0;T]}\left|X_t^{(\rho,\epsilon,X_0)}\right|\right)^{2q}$, l'inégalité précédente devient

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0;T]} |\Delta_t|^{2k} &\leq 2^{4k}T^{2k}||b-\rho||_T^{2k}\left[1 + \sup_{s\in[0;T]}\left|X_s^{(\rho,\epsilon,X_0)}\right|^{4qk}\right] \\ &+ 2^{2k}\widetilde{\kappa}^{2k}T^{2k}.\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

On compile (1.2.5) et (1.2.6) :

$$\left|X_t^{(b,\epsilon,X_0)}\right|^{2k} \leq 2^{2k}\widehat{\nu_{2k}^{(\rho,\epsilon)}}(T) + 2^{4k}\widetilde{\kappa}^{2k}T^{2k} + 2^{6k}T^{2k}||b-\rho||_T^{2k}\left(1+\widehat{\nu_{4qk}^{(\rho,\epsilon)}}(T)\right).$$

On prend $C(k) := \max\left\{2^{6k}; 2^{4k}\widetilde{\kappa}^{2k}\right\}$ et l'on a l'inégalité (1.2.2). □

Aussi, quelle que soit la variable aléatoire réelle X_0 dont le moment d'ordre $4qk$ est fini, quel que soit $T > 0$, quelle que soit $b \in \Lambda_T$, les moments d'ordre inférieur ou égal à $2k$ de $X_t^{(b,\epsilon,X_0)}$ sont finis pour tout $t \in [0;T]$.
Comme F' est une fonction polynômiale de degré $2n-1$ d'après l'hypothèse (F-1), quel que soit le réel x, quel que soit $s \in [0;T]$ et pour toute fonction $b \in \Lambda_T$, l'application $x \longmapsto \mathbb{E}\left[F'\left(x - X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right)\right]$ est une fonction polynômiale de x dont les paramètres sont les moments d'ordre 1 à $2n-1$ de $X_s^{(b,\epsilon,X_0)}$. Ces paramètres étant finis pour peu que le moment d'ordre $4qn$ de X_0 soit fini, on en déduit $\mathbb{E}\left[F'\left(x - X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right)\right] < +\infty$ et par conséquent, on peut définir la fonctionnelle suivante :

Définition 1.8. *Soit une fonction $b \in \Lambda_T$ et une variable aléatoire réelle X_0 dont le moment d'ordre $4qn$ est fini. Pour tout $s \in [0;T]$ et $x \in \mathbb{R}$, on introduit*

$$\Gamma^\epsilon b(s,x) := V'(x) + \mathbb{E}\left[F'\left(x - X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right)\right]. \tag{1.2.7}$$

On va maintenant fournir des propriétés concernant la fonctionnelle Γ^ϵ. En particulier, on va prouver qu'elle stabilise l'espace sur lequel on travaille et à l'intérieur duquel on cherche la solution du problème initial. On remarque que la fonctionnelle Γ^ϵ dépend de X_0.
Le lemme suivant prépare le terrain pour l'application du théorème du point fixe de Banach-Picard.

Lemme 1.9. *Soit $\epsilon > 0$ et $T > 0$. On se donne une variable aléatoire réelle X_0 dont le moment d'ordre $4q^2$ est fini. La fonctionnelle Γ^ϵ associée à X_0 vérifie les trois propriétés suivantes :*
1. *Γ^ϵ stabilise l'espace Λ_T : $\Gamma^\epsilon(\Lambda_T) \subset \Lambda_T$.*
2. *Il existe une constante $C_0 > 0$ telle que pour tout $b \in \Lambda_T$, on a l'inégalité*

$$||\Gamma^\epsilon b||_T \leq C_0\left(1+\widehat{\nu_{2q}^{(b,\epsilon)}}(T)\right) \tag{1.2.8}$$

où q est l'entier strictement positif défini dans (V-5) et (F-4).
3. *Il existe une fonction $C_0' : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ croissante suivant les deux variables telle que pour toutes les fonctions $b, f \in \Lambda_T$, on a la majoration*

$$||\Gamma^\epsilon b - \Gamma^\epsilon f||_T \leq ||b-f||_T\, T\, C_0'\left(\widehat{\nu_{4q}^{(b,\epsilon)}}(T); \widehat{\nu_{4q}^{(f,\epsilon)}}(T)\right) \tag{1.2.9}$$

Démonstration. **Étape 1.** Soit $b \in \Lambda_T$. Prouvons que $\Gamma^\epsilon b$ (cette fonction est bien définie vu que $q \geq n$) est dans Λ_T.
Étape 1.1. Commençons par montrer que $\Gamma^\epsilon b$ est dérivable par rapport à x mais aussi que $\frac{\partial}{\partial x}\Gamma^\epsilon b(s,x) \geq \kappa$ pour $x \geq a_{2M+1}$ et pour $x \leq a_1$. On se sert pour cela du théorème de dérivation sous le signe somme pour justifier de la dérivabilité - à s fixé - de l'application $x \longmapsto \mathbb{E}\left[F'\left(x - X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right)\right]$. Ainsi $\Gamma^\epsilon b$ est dérivable en la variable x et de plus, sa dérivée est

$$\frac{\partial}{\partial x}\Gamma^\epsilon b(s,x) = V''(x) + \mathbb{E}\left[F''\left(x - X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right)\right] .$$

Cette quantité est définie car F'' est une fonction polynômiale de degré $2n-2$ et les moments d'ordre inférieur ou égal à $2n$ de X_t^{b,ϵ,X_0} sont bornés. D'après l'hypothèse (F-2), $F''\left(x - X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right) \geq 0$. De plus, la définition de κ fournie dans (0.0.10) implique $V''(x) \geq \kappa$ pour $x \geq a_{2M+1}$ et pour $x \leq a_1$. Par conséquent, on a bien $\frac{\partial}{\partial x}\Gamma^\epsilon b(s,x) \geq \kappa$ pour tout s dans $[0;T]$ et pour tout $x \notin]a_1; a_{2M+1}[$.
Ceci prouve que $\Gamma^\epsilon b \in \Lambda_T^1$ où Λ_T^1 fut introduit dans la Définition 1.4.
Étape 1.2. Vérifions que l'on a $||\Gamma^\epsilon b||_T = \sup_{0\leq s\leq T} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{|\Gamma^\epsilon b(s,x)|}{1+|x|^{2q}}\right) < \infty$. L'inégalité triangulaire aboutit directement à

$$\frac{|\Gamma^\epsilon b(s,x)|}{1+|x|^{2q}} \leq \frac{|V'(x)|}{1+|x|^{2q}} + \frac{\mathbb{E}\left[\left|F'\left(x - X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right)\right|\right]}{1+|x|^{2q}}. \tag{1.2.10}$$

Or, d'après l'hypothèse (V-5), on sait que l'on a $\frac{|V'(x)|}{1+|x|^{2q}} \leq C_q$. De même, l'utilisation de la propriété (F-4) fournit

$$\begin{aligned}\Delta_s(x) &:= \mathbb{E}\left[\left|F'\left(x - X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right)\right|\right] = \mathbb{E}\left[\left|F'\left(x - X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right) - F'(0)\right|\right] \\ &\leq C_q \mathbb{E}\left[\left|x - X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right|\left(1 + \left|x - X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right|^{2q-2}\right)\right].\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_s(x)}{1+|x|^{2q}} &\leq C_q \frac{\mathbb{E}\left[\left|x - X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right|\left(1 + 2^{2q-2}|x|^{2q-2} + 2^{2q-2}\left|X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right|^{2q-2}\right)\right]}{1+|x|^{2q}} \\ &\leq C_q \xi(x) \mathbb{E}\left[\left(1 + |X_s^{(b,\epsilon,X_0)}|\right)\left(1 + 2^{2q-2}\left|X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right|^{2q-2}\right)\right]\end{aligned}$$

où l'on a $\xi(x) := \frac{(1+|x|)\left(1+2^{2q-2}|x|^{2q-2}\right)}{1+|x|^{2q}}$. L'espérance est finie vu que le moment d'ordre $2q$ est fini et ne dépend d'ailleurs pas de x. Etant entendu que ξ est une fonction rationnelle sans pôle réel et de degré -1, elle est clairement bornée. On trouve ainsi

$$||\Gamma^\epsilon b||_T = \sup_{0\leq s\leq T} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{|\Gamma^\epsilon b(s,x)|}{1+|x|^{2q}}\right) < \infty$$

car le supremum en temps est pris sur un compact. Ceci prouve que $\Gamma^\epsilon b \in \Lambda_T^3$ qui a été introduit dans la Définition 1.4.

Étape 1.3. Prouvons maintenant que $\Gamma^\epsilon b \in \Lambda_T^2$. On a bien la minoration de $\frac{\partial}{\partial x}\Gamma^\epsilon b$. En effet,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\Gamma^\epsilon b(s,x) &= V''(x) + \mathbb{E}\left[F''\left(x - X_t^{(b,\epsilon,X_0)}\right)\right] \geq -\sup_{y\in\mathbb{R}} -V''(y) + F''(0)\\ &\geq \alpha - \vartheta\end{aligned}$$

grâce à la convexité de F' sur $\mathbb{R}_+$ par l'hypothèse (F-3).

Les axiomes étant vérifiés, $\Gamma^\epsilon b \in \Lambda_T^1 \cap \Lambda_T^2 \cap \Lambda_T^3 = \Lambda_T$.

Étape 2. Prouvons maintenant la majoration (1.2.8). D'après (1.2.10), on a

$$\begin{aligned}||\Gamma^\epsilon b||_T &\leq \sup_{s\in[0;T]}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{V'(x)}{1+|x|^{2q}}\right| + \left|\left|\mathbb{E}\left[F'\left(x - X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right)\right]\right|\right|_T\\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{V'(x)}{1+|x|^{2q}}\right| + \left|\left|\mathbb{E}\left[F'\left(x - X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right)\right]\right|\right|_T.\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (F-4), on a

$$\begin{aligned}\left|F'\left(x - X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right)\right| &\leq C_q\left|x - X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right|\left(1 + \left|x - X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right|^{2q-2}\right)\\ &\leq C_q\left(1 + \left|x - X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right|^{2q}\right)\\ &\leq 2^{2q}C_q\left(1 + |x|^{2q} + \left|X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right|^{2q}\right).\end{aligned}$$

Ainsi $\left|\mathbb{E}\left[F'\left(x - X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right)\right]\right| \leq 2^{2q}C_q\left(1+|x|^{2q}\right) + 2^{2q}C_q\widehat{\nu_{2q}^{(b,\epsilon)}}(T)$. Or, on sait que $\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{V'(x)}{1+|x|^{2q}}\right| \leq C_q$. Par conséquent, l'on a bien (1.2.8) en utilisant la constante $C_0 := \left(2^{2q}+1\right)C_q$.

Étape 3. Soient b et f deux éléments de Λ_T. Evaluons $||\Gamma^\epsilon b - \Gamma^\epsilon f||_T$. Soient $s \in [0;T]$ et $x \in \mathbb{R}$. L'inégalité triangulaire entraîne

$$\begin{aligned}|\Gamma^\epsilon b(s,x) - \Gamma^\epsilon f(s,x)| &= \left|\mathbb{E}\left[F'\left(x - X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right)\right] - \mathbb{E}\left[F'\left(x - X_s^{(f,\epsilon,X_0)}\right)\right]\right|\\ &\leq \mathbb{E}\left[\left|F'\left(x - X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right) - F'\left(x - X_s^{(f,\epsilon,X_0)}\right)\right|\right].\end{aligned}$$

$V'(x)$ a disparu car il est commun à $\Gamma^\epsilon b(s,x)$ et à $\Gamma^\epsilon f(s,x)$. D'après l'hypothèse (F-4), il vient

$$\begin{aligned}|\Gamma^\epsilon b(s,x) - \Gamma^\epsilon f(s,x)| &\leq C_q\mathbb{E}\left\{\Delta_s(b,f)\left[1 + \left(\Delta_s^b(x)\right)^{2q-2} + \left(\Delta_s^f(x)\right)^{2q-2}\right]\right\}\\ \text{où l'on a}\quad \Delta_s(b,f) &:= \left|X_s^{(b,\epsilon,X_0)} - X_s^{(f,\epsilon,X_0)}\right|\\ \text{et}\quad \Delta_s^b(x) &:= \left|x - X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right| \quad \text{pour tout} \quad b \in \Lambda_T.\end{aligned}$$

Comme $(a+b)^{2q-2} \leq 2^{2q-2}\left(a^{2q-2} + b^{2q-2}\right)$, en notant $\lambda_{2q-2}^{b,s}$ et $\lambda_{2q-2}^{f,s}$ au lieu de $\left|X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right|^{2q-2}$ et $\left|X_s^{(f,\epsilon,X_0)}\right|^{2q-2}$, on en déduit

$$|\Gamma^\epsilon b(s,x) - \Gamma^\epsilon f(s,x)| \leq 2^{2q}C_q\left(1+|x|^{2q-2}\right)\mathbb{E}\left\{\Delta_s(b,f)\left[1 + \lambda_{2q-2}^{b,s} + \lambda_{2q-2}^{f,s}\right]\right\}$$

en prenant des majorations qui sont larges. En rappelant que pour tous les réels a, b, c et x, on a $(a+b+c)^2 \leq 3\,(a^2+b^2+c^2)$ et $(1+|x|^{2q-2}) \leq 2\,(1+|x|^{2q})$, l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz induit

$$|\Gamma^\epsilon b(s,x) - \Gamma^\epsilon f(s,x)| \leq C'_q \left(1+|x|^{2q}\right) \sqrt{\mathbb{E}\left[\Delta_s(b,f)^2\right]} \sqrt{1+\nu^{(b,\epsilon)}_{4q-4}(s) + \nu^{(f,\epsilon)}_{4q-4}(s)}$$

où $C'_q := 3 \times 2^{2q+1} C_q$. D'où

$$||\Gamma^\epsilon b - \Gamma^\epsilon f||_T \leq C'_q \sup_{s\in[0;T]} \left\{ \sqrt{\mathbb{E}\left[\Delta_s(b,f)^2\right]} \right\} \sqrt{1+\widehat{\nu^{(b,\epsilon)}_{4q-4}}(T) + \widehat{\nu^{(f,\epsilon)}_{4q-4}}(T)}\,. \quad (1.2.11)$$

Or, en se servant de la formule d'Itô avec la fonction $x \mapsto |x|^\eta$ où $\eta > 1$ puis en faisant tendre η vers 1, on peut écrire

$$\Delta_t(b,f) = -\int_0^t \operatorname{sgn}\left(X_s^{(b,\epsilon,X_0)} - X_s^{(f,\epsilon,X_0)}\right) \left[b\left(X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right) - f\left(X_s^{(f,\epsilon,X_0)}\right)\right] ds\,.$$

Soit $\tau := 1 + \max\{\vartheta - \alpha; 0\}$. Soit l'application $\tilde{b}$ de $[0;T]\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\tilde{b}(t,x) := b(t,x) + \tau x$. De même, on définit $\tilde{f}$ par $\tilde{f}(t,x) := f(t,x) + \tau x$. Alors, il vient

$$\begin{aligned}\Delta_t(b,f) = &-\int_0^t \operatorname{sgn}\left(X_s^{(b,\epsilon,X_0)} - X_s^{(f,\epsilon,X_0)}\right) \left(\tilde{b}\left(X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right) - \tilde{f}\left(X_s^{(f,\epsilon,X_0)}\right)\right) ds \\ &+ \tau \int_0^t \Delta_s(b,f) ds\,.\end{aligned}$$

Les deux fonctions $\tilde{b}$ et $\tilde{f}$ sont croissantes par définition de τ. Ainsi la quantité $\operatorname{sgn}\left(X_s^{(b,\epsilon,X_0)} - X_s^{(f,\epsilon,X_0)}\right)\left(\tilde{f}\left(X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right) - \tilde{f}\left(X_s^{(f,\epsilon,X_0)}\right)\right)$ est positive ce qui implique

$$\begin{aligned}&-\int_0^t \operatorname{sgn}\left(X_s^{(b,\epsilon,X_0)} - X_s^{(f,\epsilon,X_0)}\right) \left(\tilde{b}\left(X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right) - \tilde{f}\left(X_s^{(f,\epsilon,X_0)}\right)\right) ds \\ \leq &\int_0^t \left|\tilde{b}\left(X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right) - \tilde{f}\left(X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right)\right| ds = \int_0^t \left|b\left(X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right) - f\left(X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right)\right| ds \\ \leq &||b-f||_T \int_0^t \left(1+\left|X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right|^{2q}\right) ds.\end{aligned}$$

En effet, la translation pour aller de b à $\tilde{b}$ est la même que celle pour aller de f à $\tilde{f}$ donc $||\tilde{b}-\tilde{f}||_T = ||b-f||_T$. Par conséquent, on obtient la majoration suivante :

$$\Delta_t(b,f) \leq \tau \int_0^t \Delta_s(b,f) ds + ||b-f||_T T \left(1+\widehat{\nu^{(b,\epsilon)}_{2q}}\right).$$

On applique le lemme de Grönwall et l'on obtient

$$\begin{aligned}\left|X_t^{(b,\epsilon,X_0)} - X_t^{(f,\epsilon,X_0)}\right| &\leq ||b-f||_T T \left(1+\widehat{\nu^{(b,\epsilon)}_{2q}}\right) e^{\tau T} \\ \text{d'où} \quad \left|X_t^{(b,\epsilon,X_0)} - X_t^{(f,\epsilon,X_0)}\right|^2 &\leq 2||b-f||_T^2 T^2 \left(1+\widehat{\nu^{(b,\epsilon)}_{4q}}\right) e^{2\tau T}.\end{aligned}$$

Comme b et f peuvent être inversées, on a

$$\left|X_t^{(b,\epsilon,X_0)} - X_t^{(f,\epsilon,X_0)}\right|^2 \leq 2||b-f||_T^2 T^2 \left(1 + \frac{1}{2}\widehat{\nu_{4q}^{(b,\epsilon)}} + \frac{1}{2}\widehat{\nu_{4q}^{(f,\epsilon)}}\right) e^{2\tau T}\,. \quad (1.2.12)$$

On compile (1.2.11) et (1.2.12) puis on applique l'inégalité de Jensen afin d'obtenir la majoration (1.2.9) avec la fonction

$$C_0'(x,y) := \sqrt{2}C_q' e^{\tau T}\sqrt{1+|x|^{\frac{4q-4}{4q}}+|y|^{\frac{4q-4}{4q}}}\sqrt{1+\frac{1}{2}|x|+\frac{1}{2}|y|}\,.$$

Cette dernière est bien croissante en chacune des deux variables. □

1.3 Construction d'une solution sur $[0;T]$

Comme il a été dit dans l'introduction du chapitre, on compte se servir d'un théorème du point fixe utilisant une application contractante sur un espace de Banach. On a déjà réussi à obtenir une application continue. On va maintenant restreindre l'espace d'étude pour que l'application continue y soit une contraction.

Définition 1.10. *Soient $T>0$ et $K>0$. On note*

$$\Lambda_T^K := \{b \in \Lambda_T \mid ||b||_T < K\}$$

le nouvel espace d'étude.

Lemme 1.11. *Soit une variable aléatoire réelle X_0 dont le moment d'ordre $8q^2$ est fini. Il existe deux paramètres strictement positifs K_0 et T_0 tels que pour tout $K \geq K_0$ et pour tout $T < T_0$, on a les deux propriétés suivantes :*
1. *Λ_T^K est stable par Γ^ϵ : $\Gamma^\epsilon \Lambda_T^K \subset \Lambda_T^K$.*
2. *La norme Lipschitz de la restriction de Γ^ϵ à l'espace Λ_T^K est inférieure à $\frac{1}{2}$.*

Démonstration. **Étape 1.** En combinant les deux inégalités (1.2.2) et (1.2.8) avec $k=q$, on trouve

$$||\Gamma^\epsilon b||_T \leq C_0\left\{1 + C(q)\left[\widehat{\nu_{2q}^{(\rho,\epsilon)}}(T) + T^{2q} + (T||b-\rho||_T)^{2q}(1+\widehat{\nu_{4q^2}^{(\rho,\epsilon)}}(T))\right]\right\}.$$

En rappelant que $\rho(s,x) = \Phi_0 x$, $||\rho||_T = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|\Phi_0 x|}{1+x^{2q}} \leq \Phi_0$. On a donc l'inégalité

$$\begin{aligned} ||\Gamma^\epsilon b||_T &\leq C_0 + C_0 C(q)\widehat{\nu_{2q}^{(\rho,\epsilon)}}(T) \quad (1.3.1)\\ &\quad + C_0 C(q) T^{2q}\left[1 + 2^{2q}\left(||b||_T^{2q} + \Phi_0^{2q}\right)\left(1 + \widehat{\nu_{4q^2}^{(\rho,\epsilon)}}(T)\right)\right]. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité (1.2.3), en remplaçant k par $2q^2$ puis par q, on a :

$$\widehat{\nu_{4q^2}^{(\rho,\epsilon)}}(T) \leq 2^{4q^2}\mathbb{E}\left[|X_0|^{4q^2}\right] + 2^{4q^2}C\left(4q^2,\Phi_0\right) \quad (1.3.2)$$

$$\text{et} \qquad \widehat{\nu_{2q}^{(\rho,\epsilon)}}(T) \leq 2^{2q}\mathbb{E}\left[|X_0|^{2q}\right] + 2^{2q}C\left(2q,\Phi_0\right) \quad (1.3.3)$$

avec $C(2k,\Phi_0) := \epsilon^k \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\left(\exp\left[-\Phi_0 x\right]\int_0^x \exp\left[\Phi_0 x\right] ds\right)^{2k}\right]$. Donc, en combinant (1.3.1), (1.3.2) et (1.3.3), il vient

$$\begin{aligned}||\Gamma^\epsilon b||_T \leq\ & C_0\left[1+C(q)2^{2q}\left(\mathbb{E}\left[|X_0|^{2q}\right]+C\left(2q,\Phi_0\right)\right)\right]+C_0C(q)T^{2q}\\ &+C_0C(q)T^{2q}2^{2q}\left\{\left(K^{2q}+\Phi_0^{2q}\right)\left(1+2^{4q^2}\left(\mathbb{E}\left[|X_0|^{4q^2}\right]+C\left(4q^2,\Phi_0\right)\right)\right)\right\}\end{aligned}$$

car $||b||_T < K$ vu que $b \in \Lambda_T^K$. On pose

$$\begin{aligned}C_1 &:= C_0\left[1+C(q)2^{2q}\left(\mathbb{E}\left[|X_0|^{2q}\right]+C\left(2q,\Phi_0\right)\right)\right]\\ \text{et}\quad C_2 &:= C_0C(q)2^{2q}\left(2+\Phi_0^{2q}\right)\left(1+2^{4q^2}\left(\mathbb{E}\left[|X_0|^{4q^2}\right]+C\left(4q^2,\Phi_0\right)\right)\right).\end{aligned}$$

Alors, on a

$$||\Gamma^\epsilon b||_T \leq C_1 + C_2T^{2q}(1+K^{2q}).$$

On prend $K^{2q} \geq 2C_1$ puis $T \leq \left(\frac{C_1}{C_2(1+K^{2q})}\right)^{\frac{1}{2q}}$. Par conséquent, $||\Gamma^\epsilon b||_T \leq K$ ce qui prouve bien $\Gamma^\epsilon b \in \Lambda_T^K$ vu qu'on savait déjà d'après le Lemme 1.9 que l'on avait $\Gamma^\epsilon b \in \Lambda_T$.

Étape 2. Soient b et f dans Λ_T^K. On a

$$\widehat{\nu_{4q}^{(b,\epsilon)}}(T) \leq C(q,K)\left(1+T^{4q}\right) \quad \text{et} \quad \widehat{\nu_{4q}^{(f,\epsilon)}}(T) \leq C(q,K)\left(1+T^{4q}\right)$$

où $C(q,K)$ ne dépend que de q et de K. En effet, d'après (1.2.2) :

$$\begin{aligned}\widehat{\nu_{4q}^{(b,\epsilon)}}(T) &\leq C(2q)\left[\widehat{\nu_{4q}^{(\rho,\epsilon)}}(T)+T^{4q}+(T||b-\rho||_T)^{4q}(1+\widehat{\nu_{8q^2}^{(\rho,\epsilon)}}(T))\right]\\ &\leq C(2q)\left[\widehat{\nu_{4q}^{(\rho,\epsilon)}}(T)+T^{4q}+2^{4q}K^{4q}(1+\widehat{\nu_{8q^2}^{(\rho,\epsilon)}}(T))\,T^{4q}\right]\end{aligned}$$

car on s'est placé sur Λ_T^K ce qui implique $||b-\rho||_T \leq ||b||_T + ||\rho||_T \leq 2K$. On prend désormais $K \geq 1$ afin que le terme T^{4q} soit absorbé. Donc :

$$\widehat{\nu_{4q}^{(b,\epsilon)}}(T) \leq C(2q)\max\left\{\widehat{\nu_{4q}^{(\rho,\epsilon)}}(T)\,;\,1+2^{4q}K^{4q}\left[1+\widehat{\nu_{8q^2}^{(\rho,\epsilon)}}(T)\right]\right\}\left(1+T^{4q}\right).$$

Notons $C(q,K,T) := C(2q)\max\left\{\widehat{\nu_{4q}^{(\rho,\epsilon)}}(T)\,;\,1+2^{4q}K^{4q}\left[1+\widehat{\nu_{8q^2}^{(\rho,\epsilon)}}(T)\right]\right\}$. En prenant $T \leq 1$ il vient $C(q,K,T) \leq \sup_{0\leq T\leq 1} C(q,K,T) =: C(q,K)$. On applique ensuite l'inégalité (1.2.9) :

$$\begin{aligned}||\Gamma^\epsilon b - \Gamma^\epsilon f||_T &\leq ||b-f||_T\,T\,C_0'\Big(C(q,K)\left(1+T^{4q}\right),C(q,K)\left(1+T^{4q}\right)\Big)\\ &\leq T||b-f||_T C\end{aligned}$$

puisqu'on a majoré T par 1 ; où $C := C_0'\Big(2C(q,K),2C(q,K)\Big)$ ne dépend ni de T ni des applications b et f. Il suffit de prendre $T \leq \min\left\{1,\frac{1}{2C}\right\}$ pour que la norme Lipschitz de la restriction de Γ^ϵ à l'espace Λ_T^K soit inférieure à $\frac{1}{2}$. □

On peut remarquer que l'on se sert de la finitude du moment d'ordre $8q^2$ pour la première fois dans ce lemme. En effet, le cas échéant, les quantités $\widehat{\nu_{4q}^{(b,\epsilon)}}(T)$ et $\widehat{\nu_{4q}^{(f,\epsilon)}}(T)$ ne pourraient pas être majorées.
A partir de maintenant, on a tout ce qu'il faut pour trouver une solution à l'équation de départ, avec toutefois une certaine restriction sur T et sur X_0. En effet, les calculs précédents nécessitaient la finitude de T et les paramètres K_0 et T_0 dépendent de X_0. On étendra seulement après à $\mathbb{R}_+$ tout entier.

Proposition 1.12. *Soit une variable aléatoire réelle X_0 telle que $\mathbb{E}\left[X_0^{8q^2}\right] < \infty$. Alors il existe $T_0 > 0$ tel que pour tout $T < T_0$, l'équation (0.0.5) admette une solution forte sur l'intervalle $[0;T]$. De plus, l'on a une propriété portant sur les moments de cette solution :*

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\left(|X_t^\epsilon|^{4q}\right) < \infty \tag{1.3.4}$$

Démonstration. **Étape 1.** Soient T_0 et K_0 définis comme dans le Lemme 1.11. On sait donc que la norme de la restriction de Γ^ϵ à l'espace Λ_T^K est plus petite que $\frac{1}{2}$ en considérant $T < T_0$ et $K > K_0$.
Soit $b \in \Lambda_T^K$. On définit la suite $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ par $b_0 := b$ et $b_{p+1} := \Gamma^\epsilon b_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Grâce au Lemme 1.11, on peut prouver par récurrence que $b_p \in \Lambda_T^K$ quel que soit $p \in \mathbb{N}$.
Γ^ϵ étant une contraction, toujours grâce au Lemme 1.11, la suite $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $b_\infty \in \Lambda_T^K$ qui ne dépend d'ailleurs pas de b. Il vérifie de plus : $\Gamma^\epsilon b_\infty = b_\infty$. Par conséquent, $\left(X_t^{(b_\infty,\epsilon,X_0)}\right)_{t\in[0;T]}$ est une solution forte de l'équation.
Étape 2. D'après les hypothèses, on sait que $\mathbb{E}\left[\left|X_0\right|^k\right] < +\infty$ pour tout k entre 1 et $8q^2$. On a donc

$$\sup_{s\in[0;T]} \mathbb{E}\left[\left|X_s^{(\rho,\epsilon,X_0)}\right|^k\right] < \infty$$

où ρ est définie dans le Lemme 1.7 et où $1 \leq k \leq 8q^2$. L'inégalité (1.2.2) nous offre de plus

$$\widehat{\nu_{2k}^{(b,\epsilon)}}(T) \leq C(k)\left[\widehat{\nu_{2k}^{(\rho,\epsilon)}}(T) + T^{2k} + (T||b-\rho||_T)^{2k}(1+\widehat{\nu_{4qk}^{(\rho,\epsilon)}}(T))\right]$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Le membre de droite est fini pour tous les k tels que $4qk \leq 8q^2$. Par conséquent, quel que soit $k \leq 4q$, on a $\sup_{s\in[0;T]} \mathbb{E}\left[\left|X_s^{(b,\epsilon,X_0)}\right|^k\right] < \infty$ ce qui implique (1.3.4). □

L'unicité de la solution n'a pas encore été démontrée. Elle le sera par la suite.

1.4 Extension à $\mathbb{R}_+$ tout entier

On vient d'obtenir le résultat en temps fini. On souhaite l'avoir en temps infini. Pour ce faire, on va d'abord supposer qu'il existe un temps maximal au-delà duquel on ne peut pas définir de solution. On va ensuite donner une bonne majoration des moments de la solution qui sera valable sur tout l'intervalle. Ainsi il sera possible d'étendre l'existence d'une solution au-delà du temps maximal ce qui prouvera donc que l'hypothèse initiale d'un temps maximal est absurde.

Lemme 1.13. *Soit une variable aléatoire réelle X_0 telle que $\mathbb{E}\left[X_0^{2k}\right] < \infty$ avec $k > q$. Soit $T > 0$. Soit b un élément de Λ_T. On suppose que la fonction $\Gamma^\epsilon b$ est définie (ce qui n'est pas automatique dans la mesure où il n'a pas été supposé que le moment d'ordre $4q^2$ de X_0 était fini) et qu'elle vérifie $\Gamma^\epsilon b = b$. On note $X_t := X_t^{(b,\epsilon,X_0)}$ la solution forte de l'équation partant de X_0 et dont la dérive est b. Alors, il existe une fonction C''_ϵ telle que*

$$\widehat{\nu_{2k}}(T) := \sup_{s\in[0;T]} \mathbb{E}\left[|X_t|^{2k}\right] \leq C''_\epsilon \left[\mathbb{E}\left(|X_0|^{2k}\right)\right] .$$

Démonstration. **Étape 1.** On commence par fournir une inégalité fonctionnelle. L'application de la formule d'Itô fournit

$$d|X_t|^{2k} = 2k|X_t|^{2k-1}\mathrm{sgn}(X_t)dX_t + \frac{2k(2k-1)}{2}|X_t|^{2k-2}\epsilon\, dt.$$

On intègre

$$\begin{aligned} |X_t|^{2k} &= |X_0|^{2k} + 2k\sqrt{\epsilon}\int_0^t \mathrm{sgn}(X_s)|X_s|^{2k-1}dB_s + k(2k-1)\epsilon\int_0^t |X_s|^{2k-2}ds \\ &- 2k\int_0^t |X_s|^{2k-1}\mathrm{sgn}(X_s)\Big[V'\left(X_s\right) + F'*u_s^\epsilon\left(X_s\right)\Big]ds\,. \end{aligned}$$

On regarde l'espérance puis on utilise le théorème de dérivation sous le signe somme. On obtient

$$\begin{aligned} \left(\nu_{2k}^{(b,\epsilon)}\right)'(t) &= -2k\mathbb{E}\Big[\mathrm{sgn}(X_t)|X_t|^{2k-1}\left(V'(X_t) + F'*u_t^\epsilon(X_t)\right)\Big] \\ &+ k(2k-1)\epsilon\,\nu_{2k-2}^{(b,\epsilon)}(t)\,. \end{aligned}$$

Or, $\mathbb{E}\left(\mathrm{sgn}(X_t)|X_t|^{2k-1}F'*u_t^\epsilon(X_t)\right) \geq 0$. En effet, soit $\widetilde{X}_t$ une copie indépendante de X_t qui suit la loi u_t^ϵ. Alors,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\mathrm{sgn}(X_t)|X_t|^{2k-1}F'*u_t^\epsilon(X_t)\right) &= \mathbb{E}\left(X_t^{2k-1}F'(X_t-\widetilde{X_t})\right) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} x^{2k-1}F'(x-y)u_t^\epsilon(x)dx\,u_t^\epsilon(y)dy\,. \end{aligned}$$

Comme les rôles de X_t et $\tilde{X}_t$ peuvent être intervertis, on a

$$\mathbb{E}\left(X_t^{2k-1} F' * u_t^\epsilon(X_t)\right) = -\iint_{\mathbb{R}^2} y^{2k-1} F'(x-y) u_t^\epsilon(x)dx\, u_t^\epsilon(y)dy\,.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}\left(X_t^{2k-1} F' * u_t^\epsilon(X_t)\right) = \frac{1}{2}\iint_{x,y\in\mathbb{R}} \left(x^{2k-1} - y^{2k-1}\right) F'(x-y) u_t^\epsilon(x)dx\, u_t^\epsilon(y)dy\,.$$

F' est croissante donc $\left(x^{2k-1} - y^{2k-1}\right) F'(x-y) \geq 0$. On en déduit

$$\left(\nu_{2k}^{(b,\epsilon)}\right)'(t) \leq -2k\mathbb{E}\left(\mathrm{sgn}(X_t)|X_t|^{2k-1} V'(X_t)\right) + \epsilon\, k(2k-1)\, \nu_{2k-2}^{(b,\epsilon)}(t)\,. \tag{1.4.1}$$

Étape 2. On prouve maintenant que le membre de droite est négatif si $\nu_{2k}^{(b,\epsilon)}(t)$ est trop grand. Si V était convexe, la majoration serait simple. Toutefois, dans notre cas, il arrive que $-\mathrm{sgn}(x)V'(x)$ soit positif. Décomposons l'espérance en deux morceaux selon la positivité ou la négativité de $-\mathrm{sgn}(X_t)V'(X_t)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\mathrm{sgn}(X_t)|X_t|^{2k-1} V'(X_t)\right) &= \int_{a_1}^{a_{2M+1}} \mathrm{sgn}(x)|x^{2k-1}|V'(x)u_t^\epsilon(x)dx \\ &+ \int_{[a_1;a_{2M+1}]^c} \mathrm{sgn}(x)|x^{2k-1}|V'(x)u_t^\epsilon(x)dx.\end{aligned} \tag{1.4.2}$$

D'après les hypothèses (V-2) et (V-4), on sait que la première intégrale peut être négative et que la seconde est positive. Nous allons donc chercher à minorer la première par une constante et à minorer la seconde par une fonction croissante de $\nu_{2k}^{(b,\epsilon)}(t)$.

Étape 2.1. On commence par la première intégrale :

$$\begin{aligned}&\int_{a_1}^{a_{2M+1}} \mathrm{sgn}(x)|x^{2k-1}|V'(x)u_t^\epsilon(x)dx \geq -\int_{a_1}^{a_{2M+1}} |x|^{2k-1}|V'(x)|u_t^\epsilon(x)dx \\ &\geq -\sup_{x\in[a_1;a_{2M+1}]}\left(|x|^{2k-1}\right)\sup_{x\in[a_1;a_{2M+1}]}(|V'(x)|)\int_{a_1}^{a_{2M+1}} u_t^\epsilon(x)dx \\ &\geq -\max\{|a_1|;|a_{2M+1}|\}^{2k-1} \times \max\{|a_1|;|a_{2M+1}|\} \times \vartheta \times 1.\end{aligned}$$

On obtient ainsi cette minoration :

$$\int_{a_1}^{a_{2M+1}} \mathrm{sgn}(x)|x^{2k-1}|V'(x)u_t^\epsilon(x)dx \geq -\vartheta \max\left\{|a_1|;|a_{2M+1}|\right\}^{2k}. \tag{1.4.3}$$

Ceci est bien une constante.

Étape 2.2. Pour la seconde intégrale, on se place assez loin de sorte que la quantité $\mathrm{sgn}(x) \times \frac{V'(x)}{|x|}$ soit minorée. Soit $\gamma > \max\{|a_1|;|a_{2M+1}|\}$. On introduit

$$\gamma' := \min\left\{\mathrm{sgn}(x) \times \frac{V'(x)}{|x|} \quad \middle| \quad x \in]-\infty;-\gamma[\cup]\gamma;+\infty[\right\} > 0\,.$$

Alors :

$$\begin{aligned}\int_{[a_1;a_{2M+1}]^c} \mathrm{sgn}(x)|x^{2k-1}|V'(x)u_t^\epsilon(x)dx &\geq \int_{[-\gamma;\gamma]^c} |x^{2k}|\frac{\mathrm{sgn}(x)V'(x)}{|x|}u_t^\epsilon(x)dx \\ &\geq \int_{[-\gamma;\gamma]^c} x^{2k}\gamma' u_t^\epsilon(x)dx \\ &\geq \gamma'\left(\mathbb{E}(|X_t|^{2k}) - \int_{[-\gamma;\gamma]} x^{2k}u_t^\epsilon(x)dx\right)\end{aligned}$$

On peut majorer le second terme dans la parenthèse par γ^{2k}. Ainsi :

$$\int_{[a_1;a_{2M+1}]^c} \mathrm{sgn}(x)|x^{2k-1}|V'(x)\,du_t^\epsilon(x) \geq \gamma'\nu_{2k}^{(b,\epsilon)}(t) - \gamma'\gamma^{2k}. \tag{1.4.4}$$

Ceci est bien une fonction croissante de $\nu_{2k}^{(b,\epsilon)}(t)$.
Étape 3. On compile les résultats (1.4.1), (1.4.2), (1.4.3) et (1.4.4) puis on utilise l'inégalité de Jensen :

$$\begin{aligned}\left(\nu_{2k}^{(b,\epsilon)}\right)'(t) &\leq \epsilon\, k(2k-1)\left(\nu_{2k}^{(b,\epsilon)}(t)\right)^{1-\frac{1}{2k}} - 2k\gamma'\nu_{2k}^{(b,\epsilon)}(t) \\ &+ 2k\vartheta\max\{|a_1|;|a_{2M+1}|\}^{2k} + 2k\gamma'\gamma^{2k}.\end{aligned}$$

L'application χ définie par $\chi(x) := \epsilon\, k(2k-1)x^{1-\frac{1}{2k}} + 2k\vartheta\max\{|a_1|;|a_{2M+1}|\}^{2k} + 2k\gamma'\gamma^{2k} - 2k\gamma' x$ est une fonction négative à partir d'un certain rang $x_\chi^{(2k)}$. Ainsi si $x \geq x_\chi^{(2k)}$, alors $\chi(x) < 0$. Donc, l'inégalité $\nu_{2k}^{(b,\epsilon)}(t) > x_\chi^{(2k)}$ implique $\left(\nu_{2k}^{(b,\epsilon)}\right)'(t) < 0$. On en déduit donc

$$\nu_{2k}^{(b,\epsilon)}(t) \leq \max\left\{x_\chi^{(2k)}, \nu_{2k}^{(b,\epsilon)}(0)\right\} = \max\left\{x_\chi^{(2k)}, \mathbb{E}\left[|X_0|^{2k}\right]\right\}$$

pour tout $t \in [0;T]$. □

Maintenant que l'on a la majoration des moments indépendamment du temps, on a toutes les armes en main pour obtenir l'unicité ainsi que l'extension sur $\mathbb{R}_+$.

Théorème 1.14. *Soit une variable aléatoire réelle X_0 telle que $\mathbb{E}\left(|X_0|^{8q^2}\right) < \infty$. Alors, l'équation différentielle stochastique non-linéaire* (0.0.5)

$$\begin{aligned}X_t &= X_0 + \sqrt{\epsilon}B_t - \int_0^t \left\{V'(X_s) + F' * u_s^\epsilon(X_s)\right\}ds\,, \\ u_s^\epsilon &= \mathcal{L}(X_s)\end{aligned}$$

admet une unique solution forte sur $\mathbb{R}_+$. De plus, son moment d'ordre $8q^2$ est fini quel que soit $t \geq 0$.

Démonstration. **Étape 1.** Comme $\mathbb{E}\left[X_0^{8q^2}\right] < \infty$, la Proposition 1.12 nous dit qu'il existe $T > 0$ tel que l'équation (0.0.5) admette une solution forte sur $[0;T]$. Soit $(Y_t^\epsilon)_{t\in[0;T]}$ une solution. On lui associe la fonction de dérive c par $c(t,x) := V'(x) + \mathbb{E}\left[F'\left(x - Y_t^\epsilon\right)\right]$. L'inégalité (1.2.8) devient

$$\frac{|c(t,x)|}{1+|x|^{2q}} \leq \frac{|V'(x)|}{1+|x|^{2q}} + \frac{|\mathbb{E}\left[F'\left(x-Y_t^\epsilon\right)\right]|}{1+|x|^{2q}} \leq C\left(1 + \sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\left[|Y_t^\epsilon|^{2q}\right]\right). \qquad (1.4.5)$$

Or, d'après le Lemme 1.13, le moment au temps t est majoré par une fonction dont la variable est le moment au temps 0.
Si l'on dispose d'une fonction c qui vérifie $\Gamma^\epsilon c = c$ alors le processus associé vérifie l'équation du Lemme 1.13 puis, en prenant K assez grand, à partir de l'équation (1.4.5), on en déduit $\frac{|c(t,x)|}{1+|x|^{2q}} < K$. Ainsi quelle que soit la variable aléatoire initiale X_0 dont le moment d'ordre $8q^2$ est fini, en prenant K assez grand, on est assuré que toute solution de l'équation $\Gamma^\epsilon c = c$ est dans l'espace Λ_T^K d'où l'on a une unique solution puisque Γ^ϵ est une contraction sur cet espace.
Or, si $(X_t)_{t\in[0;T]}$ est une solution, elle vérifie $X_t = X_t^{(b,\epsilon,X_0)}$ où l'on a $b(t,x) = V'(x) + \mathbb{E}\left[F'\left(x - X_t\right)\right]$ donc il y a unicité de l'équation différentielle stochastique.
Étape 2. Supposons qu'il existe $T_0 < \infty$ tel que l'on ne puisse définir une solution forte au-delà de T_0.
Le T_0 en question dépend directement des moments initiaux comme on l'a vu dans la preuve du Lemme 1.11. Or, on a vu que les moments étaient majorés indépendamment du temps par une constante ne dépendant que des moments au temps 0. Notons $\widetilde{C}$ cette constante.
On considère l'équation

$$\begin{aligned} X_t' &= X_0' + \sqrt{\epsilon}B_t - \int_0^t b(s, X_s')ds \\ \text{avec} \quad b(s,x) &:= V'(x) + \mathbb{E}\left[F'(x - X_s')\right] \end{aligned}$$

où l'on a $\mathbb{E}\left[|X_0'|^r\right] \leq \tilde{C}$ pour tout $1 \leq r \leq 8q^2$. On peut associer un temps $T' > 0$ à cette équation tel qu'elle ait une unique solution forte sur $[0;T']$. A la variable aléatoire X_0', est aussi associée une nouvelle constante K' qu'on prend plus grande que K sans rien changer à la généralité.
Prenons $X_0' := X_{T_0 - \frac{T'}{2}}$. Cette valeur initiale vérifie les conditions et on peut alors définir la solution forte sur $[0;T']$ ce qui revient à étendre $(X_t)_{t\in[0;T_0]}$ à $(X_t)_{t\in[0;T_0+\frac{T'}{2}]}$. En effet, sur $[T_0 - \frac{T'}{2}; T_0[$, on a unicité. Ceci contredit la définition de T_0. □

2. EXISTENCE DES MESURES STATIONNAIRES

2.1 Introduction

Afin d'étudier le comportement en temps long (en particulier le temps de sortie d'un domaine) du processus stochastique auto-stabilisant X^ϵ, on va s'intéresser à l'éventuelle existence d'une ou de plusieurs mesures stationnaires pour la diffusion (0.0.5). Le Théorème 1.14 qui assure l'existence de la solution forte de l'équation différentielle stochastique non-linéaire nécessite que l'on ait $\mathbb{E}\left[X_0^{8q^2}\right] < +\infty$. Par la suite, on considèrera toujours que le moment d'ordre $8q^2$ de la variable aléatoire X_0 dont on part est fini. Ainsi on recherchera des mesures stationnaires dont le moment d'ordre $8q^2$ est fini.

Pour commencer dans ce travail sur les mesures stationnaires, on fournit une équation générale que satisfait toute mesure stationnaire de (0.0.5) dont le moment d'ordre $8q^2$ est fini. Pour ce faire, une équation aux dérivées partielles non-linéaires sera utilisée.

Puis, on s'intéressera au cas particulier où le potentiel d'intéraction F est de degré 2. On résoudra le problème d'existence par paramétrisation. Lorsque le potentiel de confinement V est symétrique, on prouvera qu'il y a une unique mesure stationnaire symétrique. Et, que la fonction V soit paire ou non, on prouvera que pour chacun de ses points critiques a_0, sous une condition simple, pour ϵ assez petit, il existe une mesure stationnaire "autour" de a_0, le terme "autour" étant précisé par la suite. On en déduiera qu'il y a toujours au moins une mesure stationnaire. Si de plus V'' est convexe et symétrique, on précisera le nombre exact de mesures stationnaires par paramétrisation. Pour terminer sur l'existence des mesures stationnaires pour ϵ assez petit dans le cas d'une fonction d'intéraction F' linéaire, on montrera que si α est assez grand, il y a au moins $2M+1$ mesures stationnaires où $2M+1$ est le nombre de points critiques de V.

Afin de préciser les résultats de la section sur le cas où F' est linéaire, on approchera les seuils de bifurcation en-deça desquels les mesures "autour" des points critiques existent bien dans le cas d'un exemple particulier. Notamment, on verra que ces seuils existent si bien que l'étude des équations différentielles stochastiques auto-stabilisantes dans le cas où V a plusieurs puits va à l'encontre de l'intuition induite par l'étude du cas convexe (uniformément ou non) et est donc fondamentalement différente.

On terminera ce chapitre en étendant les résultats au cas où la fonction polynômiale F est de degré quelconque ; tant en ce qui concerne les mesures symétriques

que les mesures "autour" des points critiques.
Le résultat principal du chapitre est donc l'existence d'une (ou de plusieurs *a priori*) mesure(s) stationnaire(s) symétrique(s) lorsque V vérifie (V-8) ainsi que l'existence pour chacun des points critiques a_0 de V d'une mesure stationnaire "proche" de a_0 sous une condition simple. En particulier, le comportement en temps long de X_t^ϵ ne pourra pas être deviné péremptoirement.
A partir de ce chapitre, on suppose que le potentiel de confinement V vérifie l'hypothèse (V-10).

2.2 Forme générale d'une éventuelle mesure stationnaire

Afin de paramétrer simplement les mesures stationnaires en fonction des données du système, on commence par donner une équation qui permet de caractériser la loi du processus et fournit donc un pont entre l'équation différentielle stochastique et une équation aux dérivées partielles.

Lemme 2.1. *Soit X_0 une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{E}\left[X_0^{8q^2}\right] < \infty$. Soit $(X_t^\epsilon)_{t\geq 0}$ la solution forte de l'équation différentielle stochastique auto-stabilisante (0.0.5) et $du^\epsilon(t,x)$ sa loi. Alors, pour tout $t > 0$, la loi $du^\epsilon(t,x)$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Cette dernière - que l'on note $u^\epsilon(t,x)$ - vérifie de plus l'équation aux dérivées partielles suivante :*

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\epsilon}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}\Big[u(t,x)(V'(x) + (F' * u)(t,x))\Big]. \qquad (2.2.1)$$

Démonstration. Dans l'Étape 3 de [36], McKean a prouvé, en utilisant le lemme de Weyl que l'unique solution forte de (0.0.5) admettait une loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et dont la densité est solution de l'équation aux dérivées partielles (2.2.1) pour peu que la dérive de l'équation stochastique soit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Comme F' est une fonction polynômiale de degré $2q$ et comme les moments d'ordre 1 à $2q$ de la mesure u_t^ϵ sont bornés, l'application $x \mapsto F' * u_t^\epsilon(x)$ est définie et polynômiale donc elle est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ ce qui achève la preuve. □

On a par conséquent une correspondance entre l'équation différentielle stochastique non-linéaire (0.0.5) et l'équation aux dérivées partielles elliptique (2.2.1).

Lemme 2.2. *Si la diffusion auto-stabilisante* (0.0.5) *admet une mesure station-*

naire u_ϵ dont le moment d'ordre $8q^2$ est fini, celle-ci vérifie

$$\begin{aligned} u_\epsilon(x) &= \frac{1}{\lambda(u_\epsilon)} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(\int_0^x F' * u_\epsilon(y)dy + V(x)\right)\right] \qquad (2.2.2)\\ &= \frac{1}{\lambda(u_\epsilon)} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\Big(F * u_\epsilon(x) - F * u_\epsilon(0) + V(x)\Big)\right], \\ \text{où} \quad \lambda(u_\epsilon) &:= \int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(\int_0^x F' * u_\epsilon(y)dy + V(x)\right)\right] dx \qquad (2.2.3)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\Big(F * u_\epsilon(x) - F * u_\epsilon(0) + V(x)\Big)\right] dx \end{aligned}$$

est la constante de renormalisation. Inversement, une mesure dont la densité u_ϵ vérifie (2.2.2)–(2.2.3) *est invariante pour la diffusion* (0.0.5) *et son moment d'ordre $8q^2$ est fini.*

Démonstration. **Étape 1.** Premièrement, on prouve que toute mesure u_ϵ qui satisfait (2.2.2)–(2.2.3) est une mesure invariante pour la diffusion auto-stabilisante (0.0.5). La finitude de son moment d'ordre $8q^2$ est une conséquence directe des hypothèses (V-3) et (F-3). En effet, ces deux hypothèses impliquent l'existence d'une constante $R_\epsilon > 0$ telle que l'on ait $V(x) + F * u_\epsilon(x) - F * u_\epsilon(0) \geq x^2$ pour tout $x \geq R_\epsilon$.
Soit X_0 une variable aléatoire dont la mesure de probabilité est u_ϵ. Considérons la diffusion

$$\begin{aligned} Y_t^\epsilon &= X_0 + \sqrt{\epsilon}B_t - \int_0^t W_\epsilon'\left(Y_s^\epsilon\right) ds \qquad (2.2.4)\\ \text{où l'on a} \quad W_\epsilon(x) &:= V(x) + F * u_\epsilon(x) - F * u_\epsilon(0)\,. \qquad (2.2.5) \end{aligned}$$

Alors, $\left(Y_t^\epsilon\right)_{t\geq 0}$ est une diffusion de Kolmogorov et elle admet donc une unique mesure de probabilité invariante et il s'agit de $v_\epsilon(x) := \frac{e^{-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon(x)}}{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon(y)}dy} = u_\epsilon(x)$ d'après (2.2.2). Par conséquent, $\mathcal{L}\left(Y_t^\epsilon\right) = u_\epsilon$ pour tout $t \geq 0$. Puis, (2.2.4) devient :

$$\begin{aligned} Y_t^\epsilon &= X_0 + \sqrt{\epsilon}B_t - \int_0^t \Big\{V'\left(Y_s^\epsilon\right) + F' * v_s^\epsilon\left(Y_s^\epsilon\right)\Big\}ds \\ v_s^\epsilon &= \mathcal{L}\left(Y_s^\epsilon\right) \quad \text{pour tout} \quad s \geq 0 \end{aligned}$$

ce qui est exactement (0.0.5). Donc $u_\epsilon = \mathcal{L}\left(Y_t^\epsilon\right) = \mathcal{L}\left(X_t^\epsilon\right)$ pour tout $t \geq 0$ car il y a unicité de la solution d'après le Théorème 1.14. D'où u_ϵ est une mesure invariante pour (0.0.5).
Étape 2. Prouvons maintenant la réciproque. Supposons qu'il existe une mesure stationnaire u_ϵ dont le moment d'ordre $8q^2$ est fini. Elle vérifie donc l'équation (2.2.1) ainsi que $\frac{\partial}{\partial t}u_\epsilon(t,x) = 0$. D'où l'on a

$$\frac{\epsilon}{2}u_\epsilon''(x) + \Big(u_\epsilon(x)\left(V'(x) + F' * u_\epsilon(x)\right)\Big)' = 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. En intégrant, on en déduit l'existence d'une constante $C_\epsilon \in \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{\epsilon}{2}u'_\epsilon(x) + u_\epsilon(x)\Big(V'(x) + F' * u_\epsilon(x)\Big) = C_\epsilon$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par la méthode de la variation de la constante, la solution u_ϵ prend la forme

$$u_\epsilon(x) = \Lambda_\epsilon(x)\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon(x)\right] \quad \text{avec} \quad \Lambda'_\epsilon(x) := \frac{2}{\epsilon}C_\epsilon \exp\left[\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon(x)\right]$$

où la fonction W_ϵ a été définie dans (2.2.5). D'où, après une simple intégration :

$$u_\epsilon(x) = \Lambda_\epsilon(0)e^{-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon(x)} + \frac{2}{\epsilon}C_\epsilon\left(\int_0^x \exp\left[\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon(y)\right]dy\right)e^{-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon(x)}.$$

La fonction $x \mapsto \frac{2}{\epsilon}W_\epsilon(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ d'après les hypothèses (V-1) et (F-1). La fonction $x \mapsto F * u_\epsilon(x)$ est convexe d'après l'hypothèse (F-2). Par conséquent, l'hypothèse (V-4) implique l'existence de $M > 0$ tel que $W''_\epsilon(x) > 0$ pour tout $x \geq M$. De même, la condition (V-3) implique la stricte positivité de W_ϵ pour $x \geq M$. De plus, la fonction $x \mapsto F * u_\epsilon(x)$ est polynômiale vu que les moments d'ordre 1 à $2q$ de u_ϵ sont finis. Par conséquent, $\frac{F''*u_\epsilon(x)}{(F'*u_\epsilon(x))^2}$ converge vers 0 pour x tendant vers l'infini. Cette limite ainsi que la condition (V-10) fournissent la limite $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{W''_\epsilon(x)}{(W'_\epsilon(x))^2} = 0$. On peut alors appliquer le Lemme A.1 à $\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon$ afin de donner un équivalent - pour x s'approchant de l'infini - de $\Lambda_\epsilon(x)$ dans le cas où $C_\epsilon \neq 0$. On a alors

$$\Lambda_\epsilon(x) \approx \frac{2}{\epsilon}C_\epsilon\frac{\exp\left[\frac{2}{\epsilon}\left(\int_0^x F' * u_\epsilon(y)dy + V(x)\right)\right]}{\frac{2}{\epsilon}\left(V'(x) + F' * u_\epsilon(x)\right)}.$$

Ainsi :

$$u_\epsilon(x) \approx \frac{C_\epsilon}{V'(x) + F' * u_\epsilon(x)}.$$

On remarque la positivité stricte de $V'(x) + F' * u_\epsilon(x)$ au voisinage de $+\infty$ et sa négativité stricte au voisinage de $-\infty$. Donc, si $C_\epsilon > 0$, alors $u_\epsilon(x)$ est négatif strictement au voisinage de $-\infty$. Inversement, si $C_\epsilon < 0$, alors $u_\epsilon(x)$ est négatif strictement au voisinage de $+\infty$. Par conséquent u_ϵ n'est pas la densité d'une mesure de probabilité. Il vient donc que $C_\epsilon = 0$ puis, après renormalisation, on obtient (2.2.2) ainsi que (2.2.3). □

2.3 Mesures stationnaires quand l'intéraction F' est linéaire

On s'intéresse dans la présente section au cas où la fonction d'intéraction F' est linéaire c'est-à-dire $F'(x) := \alpha x$ et $F(x) = \frac{\alpha}{2}x^2$ pour tout x où α a été défini dans

(0.0.8). Dans cette section, comme l'on suppose qu'il y a bien auto-stabilisation, l'on dispose de l'inégalité stricte $\alpha > 0$. La recherche d'une mesure invariante revient *in fine* à un problème de paramétrisation sur $\mathbb{R}$. En effet, une mesure u_ϵ est invariante si et seulement si elle vérifie

$$u_\epsilon(x) = \frac{\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(x)+\alpha\frac{x^2}{2}-\alpha m_1(\epsilon)x\right)\right]}{\int_{\mathbb{R}}\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(y)+\alpha\frac{y^2}{2}-\alpha m_1(\epsilon)y\right)\right]dy} \tag{2.3.1}$$

$$\text{et} \quad m_1(\epsilon) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(x)+\alpha\frac{x^2}{2}-\alpha m_1(\epsilon)x\right)\right]dx}{\int_{\mathbb{R}}\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(y)+\alpha\frac{y^2}{2}-\alpha m_1(\epsilon)y\right)\right]dy}. \tag{2.3.2}$$

Il est évident que si V est symétrique, la mesure u_ϵ^0 définie par (2.3.1) avec $m_1(\epsilon) = 0$ est symétrique et vérifie également (2.3.2). Elle est donc invariante et

$$u_\epsilon^0(x) = \frac{\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(x)+\alpha\frac{x^2}{2}\right)\right]}{\int_{\mathbb{R}}\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(y)+\alpha\frac{y^2}{2}\right)\right]dy}.$$

Le moment d'ordre 1 d'une mesure symétrique étant obligatoirement nul, on en déduit instantanément l'unicité de la mesure invariante symétrique si le potentiel de confinement V est symétrique. Mais aussi, on en déduit que si ce dernier n'est pas symétrique, alors l'équation auto-stabilisante (0.0.5) n'admet pas de mesure stationnaire qui soit symétrique puisque la mesure $\frac{e^{-\frac{2}{\epsilon}\left(V(x)+\frac{\alpha}{2}x^2\right)}}{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{2}{\epsilon}\left(V(y)+\frac{\alpha}{2}y^2\right)}dy}\,dx$ ne serait pas symétrique.
La question que l'on peut maintenant se poser est de savoir s'il y a d'autres réels $m_1(\epsilon)$ satisfaisant (2.3.2) c'est-à-dire s'il y a des mesures stationnaires qui ne soient pas symétriques lorsque V est symétrique. De plus, on peut se demander s'il existe des mesures stationnaires lorsque V n'est pas symétrique.
Pour rechercher ces éventuelles mesures, on va utiliser deux fonctions particulières.

Définition 2.3. *Quels que soient $m \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$, on définit*

$$\Psi_\epsilon(m) := \frac{\int_{\mathbb{R}} x\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(x)+\alpha\frac{x^2}{2}-\alpha mx\right)\right]dx}{\int_{\mathbb{R}}\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(x)+\alpha\frac{x^2}{2}-\alpha mx\right)\right]dx} \tag{2.3.3}$$

$$\textit{ainsi que} \quad \chi_\epsilon(m) := \Psi_\epsilon(m) - m\,. \tag{2.3.4}$$

Trouver une mesure invariante à la diffusion auto-stabilisante (0.0.5) *dont le moment d'ordre $8q^2$ est borné revient donc à trouver un point fixe à Ψ_ϵ c'est-à-dire un zéro à χ_ϵ.*
Rappelons que d'après l'hypothèse (V-2), le potentiel V possède $2M+1$ points critiques avec $M \geq 1$ et on les note $a_1, a_2, \cdots, a_{2M+1}$. Dans la suite, quand on parlera de l'un de ces points, on utilisera la notation générale a_0 sans préciser s'il s'agit d'un puits ou d'une bosse du potentiel V.

Proposition 2.4. *Soit un potentiel V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-6) ainsi que (V-10). Soit a_0 un de ses points critiques tel que*

$$\alpha > 2 \sup_{x \neq a_0} \frac{V(a_0) - V(x)}{(a_0 - x)^2} \quad et \quad \alpha + V''(a_0) > 0\,. \tag{2.3.5}$$

Alors, quel que soit $\delta > 0$, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\epsilon \leq \epsilon_0$, le système d'équations (2.3.1)–(2.3.2) *admet une solution $m_1(\epsilon)$ satisfaisant*

$$\left| m_1(\epsilon) - a_0 + \frac{V^{(3)}(a_0)}{4V''(a_0)\left(\alpha + V''(a_0)\right)}\,\epsilon \right| \leq \delta\,\epsilon. \tag{2.3.6}$$

Démonstration. Soit $\tau > 0$. Procédons au développement limité à l'ordre 1 de la quantité $\Psi_\epsilon(a_0 - \tau\epsilon)$:

$$\begin{aligned}
\Psi_\epsilon(a_0 - \tau\epsilon) &= \frac{\int_{\mathbb{R}} x \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(x) + \alpha\frac{x^2}{2} - \alpha(a_0 - \tau\epsilon)x\right)\right] dx}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(x) + \alpha\frac{x^2}{2} - \alpha(a_0 - \tau\epsilon)x\right)\right] dx} \\
&= \frac{\int_{\mathbb{R}} x e^{-2\alpha\tau x} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(x) + \alpha\frac{x^2}{2} - \alpha a_0 x\right)\right] dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{-2\alpha\tau x} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(x) + \alpha\frac{x^2}{2} - \alpha a_0 x\right)\right] dx}.
\end{aligned}$$

On peut appliquer le Lemme A.9 à $f(x) := -2\alpha\tau x$, $k := 1$, $\mu := 0$ et $U(x) := V(x) + \frac{\alpha}{2}x^2 - \alpha a_0 x$. En effet, l'hypothèse (2.3.5) affirme que a_0 est l'unique point où U atteint son minimum global et qu'en plus $U''(a_0) := V''(a_0) + \alpha > 0$. Il vient ainsi :

$$\begin{aligned}
\Psi_\epsilon(a_0 - \tau\epsilon) &= a_0 - \frac{a_0 V^{(3)}(a_0) + 4a_0\alpha\tau\left(\alpha + V''(a_0)\right)}{4a_0\left(\alpha + V''(a_0)\right)^2}\epsilon + o(\epsilon) \\
&= a_0 - \tau\epsilon + \frac{V''(a_0)}{\alpha + V''(a_0)}\left[\tau - \frac{V^{(3)}(a_0)}{4V''(a_0)\left(\alpha + V''(a_0)\right)}\right]\epsilon + o(\epsilon).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\chi_\epsilon(a_0 - \tau\epsilon) = \frac{V''(a_0)}{\alpha + V''(a_0)}\left(\tau - \frac{V^{(3)}(a_0)}{4V''(a_0)\left(\alpha + V''(a_0)\right)}\right)\epsilon + o(\epsilon).$$

On pose $\tau^0 := \frac{V^{(3)}(a_0)}{4V''(a_0)(\alpha + V''(a_0))}$ alors $a_0 - \tau^0\epsilon$ est un point fixe à ϵ près. En effet, soit $\delta > 0$. On a

$$d_\pm := \chi_\epsilon\Big(a_0 - \left(\tau^0 \pm \delta\right)\,\epsilon\Big) = \pm\delta\frac{V''(a_0)}{\alpha + V''(a_0)}\,\epsilon + o(\epsilon). \tag{2.3.7}$$

Pour ϵ suffisamment petit, $d_+ d_- < 0$. Les fonctions Ψ_ϵ et χ_ϵ étant continues, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure de l'existence d'un $m_1(\epsilon)$ qui vérifie $|m_1(\epsilon) - (a_0 - \tau^0\epsilon)| \leq \delta\epsilon$ et $\Psi_\epsilon(m_1(\epsilon)) = m_1(\epsilon)$. □

Remarque 2.5. *Nous venons d'obtenir l'existence d'une valeur ϵ_0 qui dépend de V et de α en-dessous de laquelle une mesure existe au voisinage de δ_{a_0}. Toutefois, aucune expression analytique de cette valeur critique n'a été donnée. D'ailleurs, nous n'avons pas non plus prouvé qu'au-dessus de cette valeur, une telle mesure n'existait pas.*

Définition 2.6. *La mesure stationnaire associée à $m_1(\epsilon)$ par* (2.3.1) *est dite* **excentrée** *autour de a_0. On la note $u_\epsilon^{a_0}$ en gardant à l'esprit que rien n'interdit* a priori *qu'il existe plusieurs mesures stationnaires excentrées autour de a_0.*

Corollaire 2.7. *Soit V un potentiel qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-6) ainsi que (V-10).*
1. *Si V réalise son minimum global en a_0, la diffusion* (0.0.5) *admet une mesure invariante excentrée autour de a_0. Ainsi il y a* toujours *au moins une mesure stationnaire lorsque l'intéraction F' est linéaire.*
2. *En particulier, si V est symétrique et possède deux puits distincts a et $-a$, pour ϵ assez petit, il existe une mesure invariante excentrée autour de a et une mesure invariante excentrée autour de $-a$.*

Démonstration. **1.** Si a_0 est un point où V atteint son minimum global, alors a_0 vérifie $V''(a_0) \geq 0$ d'où $\alpha + V''(a_0) > 0$ d'après l'hypothèse (V-2). De plus, $V(x) \geq V(a_0)$ pour tout $x \neq a_0$ et comme $\alpha > 0$ d'après l'hypothèse (F-5), le point a_0 vérifie bien l'hypothèse (2.3.5) et l'on peut donc appliquer la Proposition 2.4 ce qui conduit au résultat d'existence d'une mesure invariante excentrée autour de a_0.
2. Si V est symétrique et a deux puits $-a$ et a, alors V réalise son minimum global en a ainsi qu'en $-a$ et l'on est ramené au cas précédent. □

Dans le cas où V est symétrique et a deux puits , on sait donc d'avance qu'il y a au moins trois mesures stationnaires dès que le paramètre ϵ est assez petit. L'une excentrée autour de a, l'autre excentrée autour de $-a$ et enfin une mesure stationnaire symétrique. On peut maintenant se demander s'il y a plus de trois mesures invariantes dans ce cas. Pour cela, on va s'intéresser avec plus de précision à Ψ_ϵ et χ_ϵ.

Théorème 2.8. *Soit un potentiel V qui est symétrique et possède deux puits a et $-a$ avec $a > 0$. Si V'' est convexe, il y a exactement trois mesures invariantes dès que ϵ est assez petit.*

Démonstration. Soit $m > 0$. Rappelons que la fonction modélisant l'intéraction est linéaire : $F'(x) = \alpha x$ avec $\alpha > 0$. Afin d'étudier les mesures invariantes, on doit considérer les points fixes de l'application $\Psi_\epsilon(m)$ définie par (2.3.3). On introduit le potentiel suivant :

$$W_m(x) := V(x) + \frac{\alpha}{2}x^2 - \alpha m x\,.$$

Comme $V'(0) = 0$, on a $W'_m(0) < 0$. De plus $\lim_{x\to+\infty} W'_m(x) = +\infty$. On note x_m le réel strictement positif pour lequel le potentiel W_m atteint son minimum global. Il est bien unique étant entendu que V'' (et ainsi W''_m) est une fonction convexe. En effet, la convexité (au sens large) de W''_m implique la croissance de $W^{(3)}_m$. Comme $W^{(3)}_m(0) = V^{(3)}(0) = 0$, on en déduit que $W^{(3)}_m(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$ ce qui implique la croissance de W''_m sur $\mathbb{R}_+$. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe deux réels strictement positifs $x^{(1)}_m < x^{(2)}_m$ tels que W_m y atteigne son minimum global. Alors, $W'_m\left(x^{(1)}_m\right) = W'_m\left(x^{(2)}_m\right) = 0$ et $W''_m\left(x^{(1)}_m\right) \geq 0$. Comme W''_m est croissante, on en déduit que $W''_m(x) = 0$ pour tout $x \in [x^{(1)}_m; x^{(2)}_m]$. D'après la définition de W_m, cela implique $V''(x) = -\alpha$ et $V^{(3)}(x) = 0$ pour tout $x \in [x^{(1)}_m; x^{(2)}_m]$. Mais, V'' est convexe et $V^{(3)}(0) = 0$ donc $V^{(3)}(x) = 0$ pour tout $x \in [0; x^{(2)}_m]$ d'où $W''_m(x) = 0$ sur ce même intervalle. Or, $W'_m(x^{(1)}_m) = 0$ donc $W'_m(x) = 0$ pour tout $x \in [0; x^{(2)}_m]$. $W'_m(0) = -\alpha m \neq 0$. Par conséquent, x_m est unique. De plus, x_m satisfait

$$V'(x_m) + \alpha(x_m - m) = 0 \qquad \text{et} \qquad V''(x_m) + \alpha > 0\,. \tag{2.3.8}$$

En effet, comme W_m atteint son minimum global en x_m, l'égalité $V''(x_m) + \alpha = 0$ impliquerait $V^{(3)}(x_m) = 0$ c'est-à-dire $x_m = 0$ ce qui contredit l'hypothèse de positivité stricte de x_m.
On définit

$$\chi_0(m) := x_m - m\,. \tag{2.3.9}$$

On obtient l'expression :

$$\chi_\epsilon(m) = x_m - m + \frac{\int_{\mathbb{R}}(x - x_m)\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(x) + \frac{\alpha x^2}{2} - \alpha m x\right)\right]dx}{\int_{\mathbb{R}}\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(x) + \frac{\alpha x^2}{2} - \alpha m x\right)\right]dx}\,. \tag{2.3.10}$$

Il suffit de prouver que χ_ϵ a juste un zéro dans $\mathbb{R}^*_+$.
Étape 1. *Pour tout $\epsilon > 0$ et $m > 0$, on remarque que $\chi_\epsilon(m) \leq \chi_0(m) = x_m - m$.*
On applique le changement de variable $x := y + x_m$ aux intégrales dans (2.3.10) et on obtient

$$\begin{aligned}
\chi_\epsilon(m) &= \chi_0(m) + \frac{\int_{\mathbb{R}} y\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(y + x_m) + \frac{\alpha y^2}{2} + \alpha\,(x_m - m)\,y\right)\right]dy}{\int_{\mathbb{R}}\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(y + x_m) + \frac{\alpha y^2}{2} + \alpha\,(x_m - m)\,y\right)\right]dy} \\
&= \chi_0(m) + \frac{\int_0^\infty y\exp\left[-\frac{\alpha}{\epsilon}y^2\right]\Omega_{\epsilon,m}(y)dy}{\int_{\mathbb{R}}\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(y + x_m) + \frac{\alpha y^2}{2} + \alpha\,(x_m - m)\,y\right)\right]dy},
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\Omega_{\epsilon,m}(y) := &\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\Big(V(y + x_m) + \alpha\,(x_m - m)\,y\Big)\right] \\
&- \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\Big(V(y - x_m) - \alpha\,(x_m - m)\,y\Big)\right].
\end{aligned}$$

On introduit la fonction

$$\Lambda_m(y) := V(y + x_m) - V(y - x_m) + 2\alpha\,(x_m - m)\,y$$

Comme V est une fonction paire, $\Lambda_m(0) = 0$ et $\Lambda_m''(0) = 0$. D'après la définition de x_m, $\Lambda_m'(0) = 0$. V'' est une fonction convexe par conséquent $V^{(3)}$ est croissante. Donc $\Lambda_m^{(3)}(y) = V^{(3)}(y+x_m) - V^{(3)}(y-x_m) \geq 0$ pour tout y. On en déduit que Λ_m'' est croissante. Ainsi Λ_m'' est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et de même en ce qui concerne $\Lambda_m(y)$ pour $y > 0$. Finalement, on arrive à $\Omega_{\epsilon,m}(y) \leq 0$ pour tout $y > 0$. On obtient le résultat annoncé : $\chi_\epsilon(m) \leq \chi_0(m)$ pour $m > 0$.

Étape 2. *La fonction χ_0 a un unique zéro sur $\mathbb{R}_+^*$.*

Calculons $\chi_0(a)$ où $a > 0$ est défini par (V-8). On sait que a est solution de $V'(x) + \alpha\,(x - a) = 0$ avec $V''(x) + \alpha > 0$. Ainsi $x_a = a$ ce qui implique $\chi_0(a) = 0$. Concentrons-nous sur les variations de la fonction χ_0 sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Comme $V'(x_m) + \alpha x_m = \alpha m$ et $\alpha + V''(x_m) > 0$, on en déduit que l'application $m \to x_m$ est dérivable ce qui fournit

$$\chi_0'(m) = \frac{d}{dm}\, x_m - 1\,.$$

et

$$\frac{d}{dm}\, x_m = \frac{\alpha}{\alpha + V''(x_m)} > 0 \quad \text{ce qui implique} \quad \chi_0'(m) = -\frac{V''(x_m)}{\alpha + V''(x_m)}\,.$$

Le dénominateur est positif d'après la définition de x_m. L'hypothèse (V-4) nous dit que $V''(x) > 0$ pour tout $x > a$. Ainsi $\chi_0'(m) < 0$ pour tout $m > a$. Comme $\chi_0(a) = 0$ on en déduit que, pour tout $m > a$, $\chi_0(m)$ est strictement négatif et par conséquent la fonction χ_0 n'a aucun zéro sur $]a; +\infty[$.

Cela ramène donc l'étude de χ_0 à l'intervalle $]0, a]$. Comme V'' est une fonction convexe, on en déduit que la dérivée de χ_0 est négative pour $x_m \geq c$ où $c > 0$ satisfait $V''(c) = 0$. On sait que $c > 0$ existe et est unique car $V''(0) < 0$ et V'' est convexe. De plus $c < a$ d'après l'hypothèse (V-4). Comme l'application $m \to x_m$ est croissante pour $m > 0$, on en déduit que $\chi_0'(m)$ est strictement négatif pour $m \in]\max(0, m_c), a]$ où m_c est tel que c soit solution de (2.3.8). On peut calculer ce paramètre explicitement : $m_c := c + \frac{V'(c)}{\alpha}$.

On remarque alors deux cas différents :

- Si $m_c \leq 0$ c'est-à-dire $\alpha < \frac{|V'(c)|}{c}$: χ_0 est décroissante strictement sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\chi_0(a) = 0$. La fonction χ_0 s'annule donc une seule fois sur $\mathbb{R}_+^*$ et c'est au point a.
- Si $m_c > 0$ alors χ_0 est croissante strictement sur $]0, m_c[$ et décroissante strictement sur $]m_c, +\infty[$ avec $\chi_0(a) = 0$. Il suffit de prouver que la limite à droite en 0 de la fonction χ_0 est positive afin de conclure que a est l'unique zéro de χ_0 sur $\mathbb{R}_+^*$. Au vu de la définition de x_m on a : $\lim_{m\to 0^+} \chi_0(m) = \lim_{m\to 0^+} x_m \geq 0$. En effet, l'application $m \to x_m$ est strictement croissante de $]0, +\infty[$ vers $]0, +\infty[$ donc la limite en $m = 0$ est positive ou nulle.

Dans ces deux cas, la fonction χ_0 n'admet qu'un seul zéro sur $\mathbb{R}_+^*$ et il s'agit de a.
Étape 3. *La famille de fonctions $(\chi_\epsilon)_{\epsilon>0}$ (respectivement $(\chi'_\epsilon)_{\epsilon>0}$) converge uniformément vers χ_0 (respectivement χ'_0) sur chaque compact de $\mathbb{R}_+^*$.*
Premièrement, on prouve la convergence de $\Psi_\epsilon(m)$ pour $m > 0$. Rappelons que

$$\Psi_\epsilon(m) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(x) + \frac{\alpha x^2}{2} - \alpha m x\right)\right] dx}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(x) + \frac{\alpha x^2}{2} - \alpha m x\right)\right] dx}\,.$$

En appliquant le Lemme A.9 avec $U(x) := V(x) + \frac{\alpha x^2}{2}$, $k := 1$, $\mu := m$ et $G(x) := -\alpha x$, on obtient la convergence annoncée :

$$\chi_\epsilon(m) - \chi_0(m) = \Psi_\epsilon(m) - x_m = -\frac{V^{(3)}(x_m)}{4\left(\alpha + V''(x_m)\right)^2}\epsilon + o(\epsilon)\,.$$

De plus, cette convergence est uniforme par rapport à la variable m sur chaque compact de $\mathbb{R}_+^*$.
On s'intéresse maintenant au comportement asymptotique de $\chi'_\epsilon(m)$ lorsque ϵ est petit. On dérive Ψ_ϵ :

$$\Psi'_\epsilon(m) \;=\; \frac{2\alpha}{\epsilon}\left\{\frac{\int_{\mathbb{R}} x^2 \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_m(x)\right] dx}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_m(x)\right] dx} - \left(\frac{\int_{\mathbb{R}} x \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_m(x)\right] dx}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_m(x)\right] dx}\right)^2\right\}\,.$$

On reconnait la variance de la mesure $u_\epsilon^{(m)}$ associée à la moyenne m par (2.3.1). Ainsi

$$\chi'_\epsilon(m) = \frac{2\alpha}{\epsilon}\mathrm{Var}(u_\epsilon^{(m)}) - 1\,. \tag{2.3.11}$$

En appliquant à nouveau le Lemme A.9 avec $U(x) := V(x) + \frac{\alpha x^2}{2}$, $G(x) := -\alpha x$, $\mu := m$ et $k := 2$, on obtient

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} x^2 \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_m(x)\right] dx}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_m(x)\right] dx} = x_m^2 - \frac{\left(x_m V^{(3)}(x_m) - (\alpha + V''(x_m))\right)}{2\left(\alpha + V''(x_m)\right)^2}\,\epsilon + o(\epsilon)\,.$$

On applique maintenant le Lemme A.9 avec $k := 1$ et l'on a une estimation du premier moment :

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} x \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_m(x)\right] dx}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_m(x)\right] dx} = x_m - \frac{x_m V^{(3)}(x_m)}{4x_m\left(\alpha + V''(x_m)\right)^2}\epsilon + o(\epsilon)\,.$$

En combinant (2.3.11) et les estimations des deux moments, il vient

$$\chi'_\epsilon(m) = \frac{-V''(x_m)}{\alpha + V''(x_m)} + o(1) = \chi'_0(m) + o(1)\,.$$

De plus, cette convergence est uniforme par rapport à la variable m sur chaque compact de $\mathbb{R}_+^*$.

Étape 4. *Pour tout $\delta > 0$ assez petit, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que χ_ϵ a un unique zéro sur $[\delta, \infty[$ quel que soit $\epsilon \leq \epsilon_0$.*
Les Étapes 1 et 2 impliquent que χ_ϵ ne s'annule pas sur l'intervalle $]a, +\infty[$. On regarde donc ce qu'il se passe sur l'intervalle $]0, a]$. Sur chaque sous-espace compact de cet intervalle, χ_ϵ converge uniformément vers χ_0 d'après l'Étape 3. Ainsi les zéros de χ_ϵ sur chacun des compacts inclus dans $]0; a]$ sont au voisinage de a, l'unique zéro de χ_0 comme prouvé lors de l'Étape 2. On étudie la dérivée de χ_ϵ au voisinage de a. Comme χ'_ϵ converge uniformément vers χ'_0 d'après l'Étape 3 et comme $\chi'_0(m) < 0$ au voisinage de a d'après l'Étape 2, on obtient $\chi'_\epsilon(m) < 0$ dans un voisinage de a dès que ϵ est assez petit. Finalement on prouve que, pour ϵ assez petit, la fonction χ_ϵ ne peut admettre strictement plus d'un zéro sur $[\delta, \infty[$.
Étape 5. *Il existe $\delta > 0$ et $\epsilon_0 > 0$ tels que χ_ϵ ne s'annule pas sur $]0, \delta]$ pour tout $\epsilon \leq \epsilon_0$.*
Dans cette dernière étape, on doit distinguer trois cas differents selon les positions des paramètres ϑ et α l'un par rapport à l'autre. On rappelle que ϑ et α sont définis par (0.0.7) et (0.0.8) respectivement.
Étape 5.1. On suppose $\alpha < \vartheta$. Dans ce cas particulier, $W_0(x) = V(x) + \alpha x^2/2$ atteint son minimum global en un un unique point sur $\mathbb{R}_+$ et c'est en $x_0 > 0$.
Soit $\delta > 0$ quelconque. On prouve que, pour ϵ assez petit, $\chi_\epsilon(m) = \Psi_\epsilon(m) - m > 0$ sur $]0, \delta]$. D'après la définition de Ψ_ϵ par (2.3.3), il suffit de prouver que $N_\epsilon(m) > 0$ pour $m \in]0, \delta]$ où l'on a

$$N_\epsilon(m) := \int_{\mathbb{R}} x \exp\Big[-\frac{2}{\epsilon} W_m(x)\Big] dx - m \int_{\mathbb{R}} \exp\Big[-\frac{2}{\epsilon} W_m(x)\Big] dx \,.$$

Evidemment $N_\epsilon(0) = 0$. Prouvons que N_ϵ est croissante. En dérivant, on obtient

$$N'_\epsilon(m) = \frac{2\alpha}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \Big(x^2 - mx - \frac{\epsilon}{2\alpha}\Big) \exp\Big[-\frac{2}{\epsilon} W_m(x)\Big] dx \,.$$

Cette expression est en fait positive. En effet, en se servant de la symétrie de $W_0(x)$ et de la majoration $m \leq \delta$, on obtient

$$\begin{aligned} N'_\epsilon(m) &= \frac{2\alpha}{\epsilon} \int_0^\infty \left\{ \Big(x^2 - \frac{\epsilon}{2\alpha}\Big) \cosh\Big(\frac{2\alpha m x}{\epsilon}\Big) - mx \sinh\Big(\frac{2\alpha m x}{\epsilon}\Big) \right\} e^{-\frac{2}{\epsilon} W_0(x)} dx \\ &\geq \frac{\alpha}{\epsilon} \int_0^\infty P_\delta(x) e^{\frac{2\alpha m x}{\epsilon}} e^{-\frac{2}{\epsilon} W_0(x)} dx \quad \text{avec} \quad P_\delta(x) := x^2 - \delta x - \frac{\epsilon}{\alpha} \,. \end{aligned}$$

On sépare l'intégrale précédente en deux parties : la première, que l'on note I_0, est effectuée sur l'intervalle $[0, 2\delta]$ et la seconde, que l'on note $I_{2\delta}$, est effectuée sur le complémentaire $[2\delta, \infty[$. On a $N'_\epsilon(m) \geq \frac{\alpha}{\epsilon} (I_0 + I_{2\delta})$.
Comme les racines de la fonction polynômiale P_δ sont

$$x_\pm = \frac{1}{2} \left(\delta \pm \sqrt{\delta^2 + \frac{4\epsilon}{\alpha}} \right) < 2\delta \,,$$

la fonction polynômiale est positive et croissante sur l'intervalle $[2\delta, \infty[$ et peut donc être minorée par $P_\delta(2\delta) = 2\delta^2 - \epsilon/\alpha$. Le Lemme A.6 implique l'existence d'une constante $C > 0$ qui amène à la minoration suivante lorsque $\epsilon \to 0$:

$$I_{2\delta} \geq (2\delta^2 - \epsilon/\alpha) \int_{2\delta}^{x_0+1} e^{-\frac{2}{\epsilon} W_0(x)} dx \geq C\delta^2\sqrt{\epsilon}\, e^{-\frac{2}{\epsilon}(V(x_0)+\alpha x_0^2/2)}$$

tant que $x_0 > 2\delta$ (il suffit alors de choisir δ assez petit).
On s'intéresse finalement à la minoration de l'intégrale I_0. Comme la valeur minimale de P_δ est $-(\delta^2/4 + \epsilon/\alpha)$ et comme $W''(0) < 0$, on a

$$I_0 \geq -\Big(\frac{\delta^2}{4} + \frac{\epsilon}{\alpha}\Big) \int_0^{2\delta} e^{\frac{2\alpha m x}{\epsilon}} e^{-\frac{2}{\epsilon} W_0(x)} dx \geq -2\delta\Big(\frac{\delta^2}{4} + \frac{\epsilon}{\alpha}\Big) e^{-\frac{V(2\delta)}{\epsilon}}. \qquad (2.3.12)$$

Pour $\delta > 0$ assez petit, $V(2\delta) > V(x_0) + \alpha x_0^2/2$ (car le minimum de $V(x) + \alpha x^2/2$ est atteint uniquement en x_0). Par conséquent, le terme négatif par lequel I_0 est minorée dans (2.3.12) est négligeable par rapport au terme positif par lequel $I_{2\delta}$ est minorée lorsque ϵ est proche de 0. On en déduit qu'il existe ϵ_0 tel que $N'_\epsilon(m) > 0$ pour tout $m \in [0, \delta]$ et $\epsilon \leq \epsilon_0$. Comme $N_\epsilon(0) = 0$, on conclut que $N_\epsilon(m) > 0$ sur $]0, \delta]$ et donc de même avec χ_ϵ.
Étape 5.2. On suppose ici que l'on a $\alpha > \vartheta$. Dans ce cas, $W_0(x)$ atteint son minimum global en 0 et x_m converge continûment vers 0 lorsque $m \to 0$. En utilisant des arguments similaires à ceux déjà présentés dans l'Étape 3, on affirme que χ_ϵ (respectivement χ'_ϵ) converge vers χ_0 (respectivement χ'_0) uniformément sur $[0, a]$ lorsque $\epsilon \to 0$. En se servant de la régularité de χ_0 et de l'inégalité $\chi'_0(0) = -\frac{V''(0)}{\alpha + V''(0)} > 0$, on obtient l'existence de $\delta > 0$ et $\epsilon_0 > 0$ tels que $\chi'_\epsilon(m) > 0$ pour $m \in [0, \delta]$ et $\epsilon \leq \epsilon_0$. χ_ϵ est nulle en 0 puis est strictement croissante sur $[0, \delta]$ ce qui implique le résultat annoncé.
Étape 5.3. On suppose maintenant que $\alpha = \vartheta$. Il suffit alors de remarquer que χ_ϵ dépend continûment du paramètre α. Le résultat suivant peut être déduit directement du précédent (Étape 5.2) par continuité : $\chi'_\epsilon(0) > 0$, $\chi'_\epsilon(m) \geq 0$ pour $m \in [0, \delta]$ et $\epsilon \leq \epsilon_0$. En fait, χ_ϵ s'annule en 0 et est croissant sur $[0, \delta]$. L'inégalité $\chi_\epsilon(m) > 0$ pour tout $m \in]0, \delta]$ et $\epsilon \leq \epsilon_0$ est une conséquence évidente.
Conclusion : Les Étapes 4 et 5 fournissent l'existence de $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\epsilon < \epsilon_0$, χ_ϵ a exactement trois zéros : 0 et deux autres réels, l'un dans le voisinage de a, l'autre dans celui de $-a$. A chacune de ces moyennes correspond une unique mesure invariante obtenue par (2.3.1). □

Bien que l'on n'ait pas pu obtenir l'unicité de la mesure stationnaire comme c'est le cas lorsque V est convexe, on a un résultat de tiercéïté des mesures stationnaires lorsque V'' est convexe pour ϵ assez petit. On peut se demander s'il est possible d'étendre ce résultat lorsque F n'est pas de degré 2. Cette question sera partiellement résolue par le Chapitre 6 et cela nécessitera les résultats des Chapitres 3, 4 et 5.
Illustrons maintenant le Théorème 2.8. Pour cela, on considère un potentiel simple

ainsi qu'une valeur assez petite de ϵ et on fait varier α afin de voir le comportement de χ_0 et χ_ϵ en fonction de α.

Exemple 2.9. *Soit* $V(x) := \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ *et* $\alpha > 0$. *On pose* $F(x) := \frac{\alpha}{2}x^2$. *D'après le Théorème 2.8, dès que* ϵ *est assez petit, la diffusion* (0.0.5) *admet exactement trois mesures invariantes : l'une est symétrique, une autre est excentrée autour de* 1 *et la troisième est excentrée autour de* -1.

Dans la preuve du Théorème 2.8, on a étudié les zéros de la fonction χ_0. Ici, $a = 1$ et V'' est bien convexe. Soit $x_\alpha(m)$ l'unique réel strictement positif tel que

$$V'(x_\alpha(m)) + \alpha x_\alpha(m) - \alpha m = 0 \quad \text{et} \quad \alpha + V''(x_\alpha(m)) \geq 0\,.$$

Ici, on sait que l'unique réel strictement positif annulant V'' est $c := \frac{1}{\sqrt{3}}$ et le paramètre qui lui est associé est

$$m_c := c + \frac{V'(c)}{\alpha} = \frac{3\alpha - 2}{3\sqrt{3}\alpha}\,. \tag{2.3.13}$$

On pose $\chi_\alpha(m) := x_\alpha(m) - m$. Cette fonction χ_α est l'analogue de χ_0 et ne doit pas être confondue avec χ_ϵ que l'on note maintenant χ^ϵ_α afin de faire intervenir de façon visible la dépendance en α. Etudions la fonction χ_α sur $\mathbb{R}$ tout entier. On introduit le système $(E^{\alpha,m})$:

$$X^3 + (\alpha - 1)X - \alpha m = 0 \quad \text{et} \quad 3X^2 + (\alpha - 1) \geq 0\,.$$

Le discriminant de l'équation polynômiale de degré 3 est donné par

$$\Delta_\alpha(m) := \frac{\alpha^2 m^2}{4} + \frac{(\alpha - 1)^3}{27}\,.$$

Dans le cas particulier où $\alpha = 0$, il y a une unique solution au système $(E^{\alpha,m})$ et il s'agit de 1 d'où $\chi_0(m) = \mathrm{sgn}(m) - m$ avec la convention $\mathrm{sgn}(0) = 0$. Par la suite, sur chacun des graphes, on tracera la courbe de $\chi_\alpha^{1/4}$. En effet, $\epsilon = \frac{1}{4}$ est suffisamment petit pour permettre l'apparition des mesures excentrées pour les différentes valeurs de α que l'on va considérer dans les graphes.
Toutefois, il convient de préciser que $\epsilon_0 = \frac{1}{4}$ *n'est pas un seuil critique universel, l'étude de ce dernier étant repoussée pour l'instant.*

Premier cas : $\alpha > 1$**.** Alors, quel que soit $m \in \mathbb{R}$, $\Delta_\alpha(m) > 0$. Ainsi on a

$$\chi_\alpha(m) = \sqrt[3]{\frac{\alpha m}{2} + \sqrt{\Delta_\alpha(m)}} + \sqrt[3]{\frac{\alpha m}{2} - \sqrt{\Delta_\alpha(m)}} - m\,.$$

La fonction χ_α est continue et impaire. On constate : $\chi_\alpha(0) = \chi_\alpha(1) = 0$. En

utilisant le fait que $\Delta'_\alpha(m) = \frac{\alpha^2 m}{2}$, il vient

$$\begin{aligned}
\chi'_\alpha(m)+1 &= \frac{\alpha}{6\sqrt{\Delta_\alpha(m)}}\left\{\left(\frac{\alpha m}{2}+\sqrt{\Delta_\alpha(m)}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{\alpha m}{2}-\sqrt{\Delta_\alpha(m)}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}\\
\text{puis}\quad \chi''_\alpha(m) &= \frac{\alpha^2}{12\Delta_\alpha(m)^{\frac{3}{2}}}\left\{\left(\frac{\sqrt{\Delta_\alpha(m)}}{3}-\frac{\alpha m}{2}\right)\left(\frac{\alpha m}{2}+\sqrt{\Delta_\alpha(m)}\right)^{\frac{1}{3}}\right.\\
&+ \left.\left(\frac{\sqrt{\Delta_\alpha(m)}}{3}+\frac{\alpha m}{2}\right)\left(\frac{\alpha m}{2}-\sqrt{\Delta_\alpha(m)}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}.
\end{aligned}$$

Cette dernière quantité est négative. En effet, $\chi''_\alpha(m) \leq 0$ équivaut à

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2\sqrt{\Delta_\alpha(m)}-3\alpha m}{2\sqrt{\Delta_\alpha(m)}+3\alpha m}\right)^3 &\leq \frac{2\sqrt{\Delta_\alpha(m)}-\alpha m}{2\sqrt{\Delta_\alpha(m)}+\alpha m}\\
\Leftrightarrow\quad \left(1-6\alpha m\frac{1}{2\sqrt{\Delta_\alpha(m)}+3\alpha m}\right)^3 &\leq 1-2\alpha m\frac{1}{2\sqrt{\Delta_\alpha(m)}+\alpha m}.
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est bien vérifiée vu que les deux quantités sont dans $[0;1]$ et $\frac{6\alpha m}{2\sqrt{\Delta_\alpha(m)}+3\alpha m} > \frac{2\alpha m}{2\sqrt{\Delta_\alpha(m)}+\alpha m}$ puisque $\Delta_\alpha(m) \geq 0$. Ainsi χ'_α est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Or, $\chi'_\alpha(0) = \frac{1}{\alpha-1} > 0$. On en déduit l'existence d'un unique réel $m(\alpha)$ strictement positif tel que $\chi'_\alpha(m(\alpha)) = 0$. Cherchons $m(\alpha)$. Il faut résoudre

$$\left(\frac{\alpha m}{2}+\sqrt{\Delta_\alpha(m)}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{\alpha m}{2}-\sqrt{\Delta_\alpha(m)}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{6\sqrt{\Delta_\alpha(m)}}{\alpha}$$

Posons $A := \left(\frac{\alpha m}{2}+\sqrt{\Delta_\alpha(m)}\right)^{\frac{1}{3}}$ et $B := \left(\frac{\alpha m}{2}-\sqrt{\Delta_\alpha(m)}\right)^{\frac{1}{3}}$. On a

$$\begin{aligned}
A^3-B^3 &= (A-B)\left\{(A-B)^2+3AB\right\}\\
\Leftrightarrow\quad 2\sqrt{\Delta_\alpha(m)} &= \left(\frac{6\sqrt{\Delta_\alpha(m)}}{\alpha}\right)^3+3\frac{6\sqrt{\Delta_\alpha(m)}}{\alpha}\left[\frac{\alpha^2m^2}{4}-\Delta_\alpha(m)\right]^{\frac{1}{3}}\\
\Leftrightarrow\quad 108\Delta_\alpha(m) &= 4\alpha^3-3\alpha^2\\
\Leftrightarrow\quad 27\alpha^2m^2 &= 4\alpha^3-3\alpha^2-4(\alpha-1)^3 \quad\Leftrightarrow\quad m(\alpha)=\frac{3\alpha-2}{3\sqrt{3}\alpha}.
\end{aligned}$$

On peut vérifier qu'il s'agit bien du paramètre m_c défini dans (2.3.13).

Deuxième cas : $\alpha = 1$**.** La résolution est immédiate et il vient $\chi_1(m) = m^{\frac{1}{3}} - m$. La fonction est à nouveau impaire, continue sur $\mathbb{R}$ ainsi que de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ mais elle n'est pas dérivable en 0.

En dérivant deux fois, il vient $\chi''_1(m) = -\frac{2}{9}m^{-\frac{5}{3}} < 0$ pour tout $m > 0$. A nouveau, χ'_1 ne s'annule qu'une seule fois sur $\mathbb{R}_+^*$ et c'est en $\frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{3\times1-2}{3\sqrt{3}}$.

On constate aussi que la fonction χ_1 a exactement trois zéros.

Troisième cas : $\frac{2}{3} < \alpha < 1$. Dans le cas présent, le discriminant peut être négatif. Soit donc $m_0(\alpha)$ tel que $\Delta_\alpha(m_0(\alpha)) = 0$. Pour tout m entre 0 et $m_0(\alpha)$, le discriminant est négatif et pour tout m entre $m_0(\alpha)$ et $+\infty$, il est positif. Un calcul simple donne

$$m_0(\alpha) = \frac{2}{3\alpha\sqrt{3}} (1-\alpha)^{\frac{3}{2}} .$$

Alors, on a

$$\chi_\alpha(m) = \begin{cases} \varphi_1^{(\alpha)}(m) & \forall m \in [-m_0(\alpha); 0[\bigcup]0; m_0(\alpha)] \\ 0 & \text{si} \quad m = 0 \\ \varphi_2^{(\alpha)}(m) & \forall m \in]-\infty; -m_0(\alpha)] \bigcup [m_0(\alpha); +\infty[\end{cases}$$

avec

$$\varphi_1^{(\alpha)}(m) := 2\sqrt{\frac{1-\alpha}{3}} \cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{\alpha m}{2}\sqrt{\frac{27}{(1-\alpha)^3}}\right)\right] - m \qquad \text{et}$$

$$\varphi_2^{(\alpha)}(m) := \sqrt[3]{\frac{\alpha m}{2} + \sqrt{\Delta_\alpha(m)}} + \sqrt[3]{\frac{\alpha m}{2} - \sqrt{\Delta_\alpha(m)}} - m\,.$$

On peut commencer par remarquer $\varphi_1^{(\alpha)}(0^+) = \sqrt{1-\alpha} \neq 0$. Ainsi la fonction χ_α n'est pas continue en 0 mais elle est équilibrée c'est-à-dire qu'elle vérifie $\varphi_1^{(\alpha)}(0) = \frac{1}{2}\left(\varphi_1^{(\alpha)}(0^+) + \varphi_1^{(\alpha)}(0^-)\right)$. Et, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; m_0(\alpha)[$ ainsi que sur $]m_0(\alpha); +\infty[$. Elle est de plus continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme dans le cas où $\alpha > 1$, la fonction $\varphi_2^{(\alpha)}$ a une dérivée seconde strictement négative et sa dérivée s'annule en un unique réel strictement positif : $m_c(\alpha) = \frac{3\alpha-2}{3\sqrt{3}\alpha}$. Il reste à connaître la position de $m_c(\alpha)$ par rapport à $m_0(\alpha)$. En effet, la fonction $\varphi_2^{(\alpha)}$ ne coïncide avec la fonction χ_α que si le paramètre m est plus grand que $m_0(\alpha)$. On est ainsi amené à résoudre

$$\frac{2}{3\sqrt{3}\alpha} (1-\alpha)^{\frac{3}{2}} \quad < \quad \frac{3\alpha-2}{3\sqrt{3}\alpha}$$

ce qui donne $\alpha > \frac{3}{4}$. D'où $m_c(\alpha) > m_0(\alpha)$ si $\alpha > \frac{3}{4}$. Dans ce cas, χ_α est croissante strictement sur $[\frac{2}{3\sqrt{3}\alpha}(1-\alpha)^{\frac{3}{2}}; \frac{3\alpha-2}{3\sqrt{3}\alpha}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{3\alpha-2}{3\sqrt{3}\alpha}; +\infty[$.

On dérive maintenant $\varphi_1^{(\alpha)}$ pour $m < m_0(\alpha)$:

$$\left(\varphi_1^{(\alpha)}\right)'(m) = \sqrt{\frac{4\alpha^2(1-\alpha)}{4(1-\alpha)^3 - 27\alpha^2 m^2}} \sin\left[\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{\alpha m}{2}\sqrt{\frac{27}{(1-\alpha)^3}}\right)\right] - 1\,.$$

On pose

$$\xi(\alpha, m) := \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{\alpha m}{2}\sqrt{\frac{27}{(1-\alpha)^3}}\right) .$$

On dérive $\varphi_1^{(\alpha)}$ une seconde fois :

$$\begin{aligned}\left(\varphi_1^{(\alpha)}\right)''(m) &= \frac{4\sqrt{3}\alpha^2(1-\alpha)^2}{(-27\alpha^2m^2+4(1-\alpha)^3)^{\frac{3}{2}}}\left\{\frac{3\alpha m}{2}\sqrt{\frac{27}{(1-\alpha)^3}}\sin\left[\xi(\alpha,m)\right]\right.\\ &- \left.\sqrt{1-\left(\frac{\alpha m}{2}\sqrt{\frac{27}{(1-\alpha)^3}}\right)^2}\cos\left[\xi(\alpha,m)\right]\right\}.\end{aligned}$$

Par définition, $\xi(\alpha,m)\in[0;\frac{\pi}{3}]$ d'où $\sin(3\xi(\alpha,m))\geq 0$, $\sin(\xi(\alpha,m))\geq 0$ et $\cos(\xi(\alpha,m))\geq 0$. Il vient :

$$\begin{aligned}\left(\varphi_1^{(\alpha)}\right)''(m) &= \frac{4\sqrt{3}\alpha^2(1-\alpha)^2}{(-27\alpha^2m^2+4(1-\alpha)^3)^{\frac{3}{2}}}\\ &\times \left\{3\cos(3\xi(\alpha,m))\sin(\xi(\alpha,m))-\sin(3\xi(\alpha,m))\cos(\xi(\alpha,m))\right\}\\ &= -\frac{32\sqrt{3}\alpha^2(1-\alpha)^2}{(-27\alpha^2m^2+4(1-\alpha)^3)^{\frac{3}{2}}}\cos(\xi(\alpha,m))\sin^3(\xi(\alpha,m))\leq 0\,.\end{aligned}$$

On s'intéresse maintenant à la dérivée aux bords : $\left(\varphi_1^{(\alpha)}\right)'(0^+)=\frac{(2+\sqrt{3})\alpha-2}{2(1-\alpha)}>0$ car $\alpha>\frac{2}{3}$ ainsi que $\left(\varphi_1^{(\alpha)}\right)'(m_0(\alpha)^-)=\frac{4\alpha-3}{3(1-\alpha)}$. Par conséquent, lorsque $\alpha>\frac{3}{4}$, la fonction $\varphi_1^{(\alpha)}$ est strictement croissante sur $]0;m_0(\alpha)[$. Au contraire, si $\alpha<\frac{3}{4}$, la fonction $\varphi_1^{(\alpha)}$ est strictement croissante sur $]0;m_1(\alpha))]$ et strictement décroissante sur $[m_1(\alpha);m_0(\alpha)[$ où $m_1(\alpha)$ est l'unique zéro de $\left(\varphi_1^{(\alpha)}\right)'$ compris strictement entre 0 et $m_0(\alpha)$. Il reste à évaluer $m_1(\alpha)$.
Dans le cas où $\alpha\leq\frac{3}{4}$, cherchons $m_1(\alpha)$. On utilise à nouveau $\xi(\alpha,m)$:

$$\begin{aligned}\left(\varphi_1^{(\alpha)}\right)'(m) &= 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\sin(\xi(\alpha,m))}{\sin(3\xi(\alpha,m))}-1=0\\ \Leftrightarrow\quad \cos(\xi(\alpha,m)) &= \frac{1}{2\sqrt{1-\alpha}}\,.\end{aligned}$$

En se servant d'un polynôme de Tchebychev, il vient

$$\frac{\alpha m}{2}\sqrt{\frac{27}{(1-\alpha)^3}}=4\left(\frac{1}{2\sqrt{1-\alpha}}\right)^3-3\left(\frac{1}{2\sqrt{1-\alpha}}\right)=\frac{3\alpha-2}{2\,(1-\alpha)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

D'où $m_1(\alpha)=m_c(\alpha)=\frac{3\alpha-2}{3\sqrt{3}\alpha}$.
Pour résumer, si l'on prend $\frac{2}{3}<\alpha<1$, la fonction χ_α est strictement croissante sur $]0;\frac{3\alpha-2}{3\sqrt{3}\alpha}]$ puis strictement décroissante sur $[\frac{3\alpha-2}{3\sqrt{3}\alpha};+\infty[$ avec $\chi_\alpha(0^+)=\sqrt{1-\alpha}>0$ et $\chi_\alpha(1)=0$. Ainsi la fonction χ_α a exactement trois zéros.
Plus précisément, si $\alpha>\frac{3}{4}$, alors le maximum de χ_α sur $\mathbb{R}_+^*$ est atteint avec la

seconde fonction $\varphi_2^{(\alpha)}$. Et, si $\alpha < \frac{3}{4}$, ce maximum est atteint avec la première fonction $\varphi_1^{(\alpha)}$. Enfin, si $\alpha = \frac{3}{4}$, le maximum est atteint au niveau de la jonction des deux courbes à savoir $\frac{1}{9\sqrt{3}}$.
On remarque également que le point où la dérivée s'annule est de plus en plus à gauche. Ainsi la partie croissante est de moins en moins longue au profit de la partie décroissante.
De plus, la partie où χ_α coïncide avec $\varphi_1^{(\alpha)}$ est de plus en plus longue.
Quatrième cas : $\alpha = \frac{2}{3}$**.** La résolution explicite donne ici $m_0(\frac{2}{3}) = \frac{1}{9}$ ainsi que

$$\chi_{\frac{2}{3}}(m) = \begin{cases} \frac{2}{3}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos(9m)\right] - m & \text{si} \quad |m| \in]0; \frac{1}{9}] \\ 0 & \text{si} \quad m = 0 \\ \sqrt[3]{\frac{m}{3} + \sqrt{\Delta(m)}} + \sqrt[3]{\frac{m}{3} - \sqrt{\Delta(m)}} - m & \text{si} \quad |m| \geq \frac{1}{9} \end{cases}$$

où l'on a $\Delta(m) := \sqrt{\Delta_{\frac{2}{3}}(m)} = \frac{m^2}{9} - \left(\frac{1}{9}\right)^3$. La fonction $\chi_{\frac{2}{3}}$ est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ bien que $\chi'_{\frac{2}{3}}(0^+) = 0$. Et, $\chi_{\frac{2}{3}}(0^+) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. On en déduit donc que la fonction $\chi_{\frac{2}{3}}$ a exactement trois zéros sur $\mathbb{R}$.
Cinquième cas : $\alpha < \frac{2}{3}$**.** La résolution de l'équation polynômiale donne ici $m_0(\alpha) = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{(1-\alpha)^3}{27}}$ et

$$\chi_\alpha(m) = \begin{cases} \varphi_1^{(\alpha)}(m) & \text{si} \quad |m| \in]0; m_0(\alpha)] \\ 0 & \text{si} \quad m = 0 \\ \varphi_2^{(\alpha)}(m) & \text{si} \quad |m| \in [m_0(\alpha); +\infty[\end{cases}$$

avec

$$\varphi_1^{(\alpha)}(m) := 2\sqrt{\frac{1-\alpha}{3}}\cos\left[\xi(\alpha, m)\right] - m$$
$$\varphi_2^{(\alpha)}(m) := \sqrt[3]{\frac{\alpha m}{2} + \sqrt{\Delta_\alpha(m)}} + \sqrt[3]{\frac{\alpha m}{2} - \sqrt{\Delta_\alpha(m)}} - m\,.$$

Les deux fonctions $\varphi_1^{(\alpha)}$ et $\varphi_2^{(\alpha)}$ sont strictement décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$ d'où la fonction χ_α est également strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\chi_\alpha(0^+) = \sqrt{1-\alpha} > 0$. On en déduit donc que la fonction $\chi_{\frac{2}{3}}$ a exactement trois zéros sur $\mathbb{R}$.

Voici maintenant les graphes de χ_α et $\chi_\alpha^{1/4}$ (où $\chi_\alpha^{1/4}$ correspond à la fonction χ_ϵ introduite dans (2.3.4) pour la valeur α et pour $\epsilon := \frac{1}{4}$) pour différentes valeurs de α :

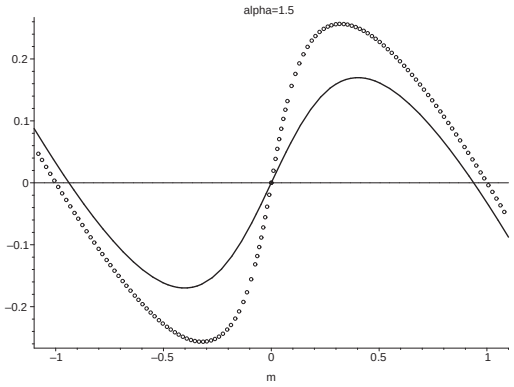


Fig. 2.1: χ_α (en trait discontinu) et $\chi_\alpha^{\frac{1}{4}}$ pour $\alpha > 1$

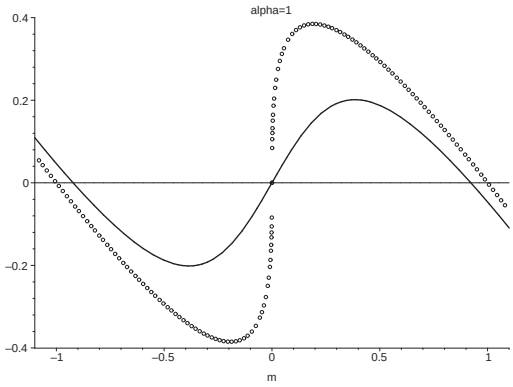


Fig. 2.2: χ_α (en trait discontinu) et $\chi_\alpha^{\frac{1}{4}}$ pour $\alpha = 1$

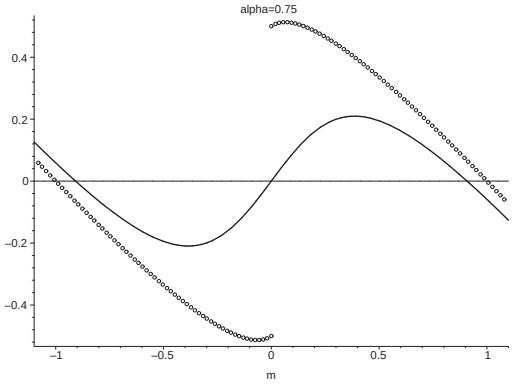


Fig. 2.3: χ_α (en trait discontinu) et $\chi_\alpha^{\frac{1}{4}}$ pour $2/3 < \alpha < 1$

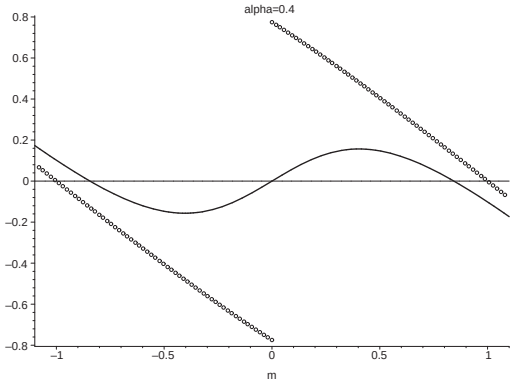


Fig. 2.4: χ_α (en trait discontinu) et $\chi_\alpha^{\frac{1}{4}}$ pour $\alpha < 2/3$

On voit bien que 0, 1 et -1 sont les seuls points stables et par suite qu'il y a exactement trois mesures invariantes pour la diffusion auto-stabilisante (0.0.5). On peut aussi remarquer que plus α est petit, plus la courbe de χ_α se rapproche de celle de la fonction linéaire par morceaux χ_0 avec $\chi_0(x) := \mathrm{sgn}(x) - |x|$ avec la convention $\mathrm{sgn}(0) = 0$.
Lorsque $\alpha > \vartheta = 1$, on observe que la courbe de la fonction χ_α est de classe $\mathcal{C}^1$ y compris en 0 où elle s'annule.
Quand on se trouve sur la limite $\alpha = \vartheta = 1$, la courbe est toujours continue mais elle n'est plus dérivable en 0. Ceci s'explique car il s'agit de la zone limite pour laquelle le paramètre x_0 est égal à 0.
En effet, dès que $\alpha < \vartheta = 1$, la limite à droite de χ_α est strictement positive et la courbe souffre d'une discontinuité en 0.
Enfin, comme annoncé dans la preuve du Théorème 2.8, lorsque $m_c(\alpha) \leq 0$ (ce qui se traduit ici par $\alpha \leq \frac{2}{3}$), la courbe est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque 2.10. *Dans le Théorème 2.8, on a prouvé que si le potentiel V était symétrique, à deux puits et si V'' était convexe, alors il y avait exactement trois*

mesures invariantes : les deux excentrées autour des puits a et $-a$ ainsi que la mesure invariante symétrique. On peut maintenant s'interroger quant à l'existence éventuelle de mesures invariantes qui ne soient pas excentrées autour d'un fond de puits. On sait déjà qu'il existe une mesure stationnaire excentrée autour d'une bosse a_{2i} (pour $1 \leq i \leq M$) sous la condition (2.3.5)*. Toutefois, on va voir que cette condition n'est pas nécessaire pour qu'il existe une mesure stationnaire "entre" les puits a_{2i-1} et a_{2i+1} où le mot "entre" sera précisé par la suite. De manière plus générale, on va prouver qu'il existe au moins une mesure stationnaire "entre" deux mesures stationnaires excentrées autour de deux puits a_{2i+1} et a_{2j+1} pour tous les entiers $1 \leq i < j \leq M$.*

Proposition 2.11. *Soient $a_0 < b_0$ deux points critiques où V atteint des minima locaux qui satisfont* (2.3.5)*. Alors, il existe $\delta_0 > 0$ et $\epsilon_0 > 0$ tels que pour tout $\epsilon \leq \epsilon_0$, le système d'équations* (2.3.1)–(2.3.2) *admette une solution $m(\epsilon) \in [a_0 + \delta_0; b_0 - \delta_0]$ et par conséquent, il existe une mesure stationnaire $u_\epsilon^{a_0,b_0}$ définie par $m(\epsilon)$ avec* (2.3.1)*.*

Démonstration. On considère la fonction χ_ϵ définie par (2.3.4). On introduit à nouveau le potentiel

$$W_m(x) := V(x) + \frac{\alpha}{2}x^2 - \alpha m x$$

pour tout $m > 0$. Alors $W_m(x) = W_{a_0}(x) - \alpha\,(m - a_0)\,x$ où l'on a $W_{a_0}(x) := V(x) + \frac{\alpha}{2}\,(x - a_0)^2 - \frac{\alpha}{2}a_0^2$. Comme a_0 satisfait (2.3.5), la fonction W_{a_0} atteint son minimum global en un unique point et il s'agit de a_0. Montrons maintenant que pour $|\delta|$ assez petit, il en est de même pour $W_{a_0+\delta}$.

Étape 1. Prouvons que tout point où la fonction $W_{a_0+\delta}$ atteint son minimum global converge vers a_0 pour δ tendant vers 0 (en étant positif ou négatif). Pour tout $\delta \in [-1; 1] \setminus \{0\}$, on considère $x(\delta)$ un point où $W_{a_0+\delta}$ atteint son minimum global. Donc $x(\delta)$ est un point critique de $W_{a_0+\delta}$ ce qui implique $W'_{a_0+\delta}(x(\delta)) = 0$ d'où $W'_{a_0}(x(\delta)) = \alpha\delta$. Par conséquent, quel que soit $\delta \in [-1;;1] \setminus \{0\}$, $\left|W'_{a_0}(x(\delta))\right| \leq \alpha$ et donc la famille $(x(\delta))_{\delta\in[-1;;1]\setminus\{0\}}$ est bornée. De plus, par définition, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $W_{a_0+\delta}(x(\delta)) \leq W_{a_0+\delta}(x)$. En particulier, pour $x = a_0$, cela se traduit par $W_{a_0}(x(\delta)) \leq W_{a_0}(a_0) + \alpha\delta(x(\delta) - a_0)$ d'où l'on a la convergence de $x(\delta)$ vers a_0 quand δ tend vers 0.

Étape 2. Prouvons que le point $x(\delta)$ est unique dès que δ est assez petit. Comme $W''_{a_0}(a_0) > 0$ d'après l'hypothèse (2.3.5), il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $x \in [a_0 - \rho; a_0 + \rho]$, $W''_{a_0}(x) > 0$. Puis, pour δ assez petit, on a $x(\delta) \in [a_0 - \rho; a_0 + \rho]$. Par conséquent, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $\delta \in [-\delta_1; \delta_1]$, tous les points où $W_{a_0+\delta}$ atteint son minimum global sont dans l'intervalle $[a_0 - \rho; a_0 + \rho]$. Et, comme $W''_{a_0+\delta}(x) = W''_{a_0}(x) > 0$ pour tout $x \in [a_0 - \rho; a_0 + \rho]$, on en déduit que le potentiel $W_{a_0+\delta}$ atteint son minimum global en un unique point que l'on note $x(\delta)$.

Étape 3. Montrons les deux inégalités $\chi_\epsilon(a_0 + \delta) < 0$ et $\chi_\epsilon(a_0 - \delta) > 0$ dès que $\delta > 0$ est assez petit. Comme $W'_{a_0+\delta}(x(\delta)) = 0$, on a $W'_{a_0}(x(\delta)) = \alpha\delta$. Etant donné

que $W''_{a_0}(a_0) > 0$, on obtient le développement limité à l'ordre 1 suivant :

$$x(\delta) = a_0 + \frac{\alpha}{W''_{a_0}(a_0)}\,\delta + o(\delta)\,.$$

Par conséquent :

$$x(\delta) - (a_0 + \delta) = -\frac{V''(a_0)}{\alpha + V''(a_0)}\,\delta + o(\delta)\,.$$

En rappelant que x_m est l'unique réel strictement positif qui vérifie (2.3.8) pour tout paramètre $m > 0$, on en déduit qu'il existe $\delta_2 < \delta_1$ tel que pour tout $\delta \in]0;\delta_2[$, on a $x_{a_0+\delta} - (a_0+\delta) < 0$ et $x_{a_0-\delta} - (a_0-\delta) > 0$. En utilisant le Lemme A.9, vu que $x_{a_0+\delta} = x(\delta)$ par définition de $m \mapsto x_m$, il vient

$$\begin{aligned} & \chi_\epsilon(a_0+\delta) &=& \; x_{a_0+\delta} - (a_0+\delta) + o(1) \\ \text{et} \quad & \chi_\epsilon(a_0-\delta) &=& \; x_{a_0-\delta} - (a_0-\delta) + o(1)\,. \end{aligned}$$

Et, par conséquent, il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_1$, on a $\chi_\epsilon(a_0+\delta) < 0$ et $\chi_\epsilon(a_0-\delta) > 0$.

Étape 4. De même, il existe $\delta_3 > 0$ tel que pour tout $\delta \in]0;\delta_3[$, il existe $\epsilon_2 > 0$ tel que pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_2$, on a $\chi_\epsilon(b_0+\delta) < 0$ et $\chi_\epsilon(b_0-\delta) > 0$. Prendre $\delta_0 < \min\left\{\delta_2;\delta_3;\frac{b_0-a_0}{2}\right\}$ et $\epsilon_0 = \min\{\epsilon_1;\epsilon_2\}$ suffit à achever la preuve. En effet, pour $\epsilon \le \epsilon_0$, on a $\chi_\epsilon(a_0+\delta_0) < 0 < \chi_\epsilon(b_0-\delta_0)$ et $a_0+\delta_0 < b_0-\delta_0$. Puis, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe $m(\epsilon) \in [a_0+\delta_0; b_0-\delta_0]$ tel que $\chi_\epsilon(m(\epsilon)) = 0$. □

Définition 2.12. *On suppose que pour un certain $0 \le i \le M-1$ (où M est défini dans l'hypothèse (V-2)), il existe une mesure invariante excentrée u_ϵ^i autour du puits a_{2i+1} (voir la Définition 2.6) et une mesure invariante excentrée u_ϵ^{i+1} autour du puits a_{2i+3}. On note $m_i(\epsilon)$ la moyenne de u_ϵ^i et $m_{i+1}(\epsilon)$ celle de u_ϵ^{i+1}. S'il existe $m(\epsilon) \in]m_i(\epsilon); m_{i+1}(\epsilon)[$ tel que $\chi_\epsilon(m(\epsilon)) = 0$, on dit que la mesure stationnaire associée à $m(\epsilon)$ est intermédiaire entre u_ϵ^i et u_ϵ^{i+1} et on la note $u_\epsilon^{i,i+1}$.*

Remarque 2.13. *La définition précédente n'exclut pas qu'une mesure stationnaire soit à la fois excentrée et intermédiaire.*

Corollaire 2.14. *Soit un potentiel V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-6) ainsi que (V-10). On suppose que pour tout $1 \le i \le M$:*

$$\alpha > 2 \max_{0\le i\le M} \sup_{y\neq a_{2i+1}} \frac{V(a_{2i+1}) - V(y)}{(a_{2i+1}-y)^2}\,. \tag{2.3.14}$$

Alors, dès que ϵ est assez petit, l'équation différentielle stochastique (0.0.5) *admet au moins $2M+1$ mesures stationnaires.*

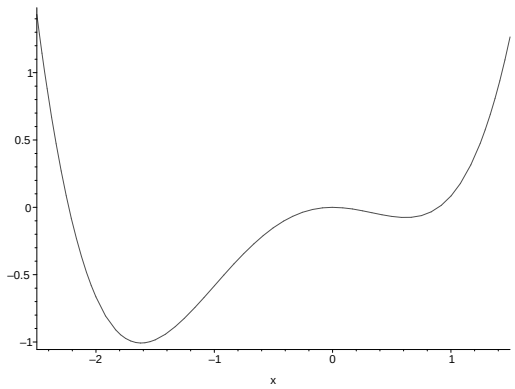
Démonstration. L'hypothèse (V-2) implique $V''(a_{2i+1}) > 0$ pour tout $0 \leq i \leq M$ d'où $V''(a_{2i+1}) + \alpha > 0$. La condition (2.3.14) implique que chacun des a_{2i+1} vérifie la condition (2.3.5). On peut donc appliquer la Proposition 2.11 avec a_1 et a_3. On est alors assuré de l'existence de $\delta_1 > 0$ et de $\epsilon_1 > 0$ tels que, pour tout $0 < \delta < \delta_1$, pour tout $\epsilon < \epsilon_1$ la fonction χ_ϵ s'annule en un point $m_{1,3}(\epsilon)$ de l'intervalle $[a_1 + \delta; a_3 - \delta]$. On fait de même avec chacun des a_{2i+1} et a_{2i+3} pour $0 \leq i \leq M-1$. On pose ensuite $\delta_0 := \min\{\delta_1, \cdots, \delta_M\}$ et $\epsilon_0 := \min\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_M\}$. Alors, pour tout $\epsilon \in]0; \epsilon_0[$, la fonction χ_ϵ s'annule sur chacun des intervalles $[a_{2i+1} + \delta_0; a_{2i+3} - \delta_0]$ pour i allant de 0 à $M-1$. On pose $\mathcal{I} := \bigcup_{i=0}^{M-1} [a_{2i+1} + \delta_0; a_{2i+3} - \delta_0]$.
Puis, on peut appliquer la Proposition 2.4 et l'on sait que le système admet une mesure stationnaire excentrée u_ϵ^i autour de chacun des points critiques a_{2i+1} pour $0 \leq i \leq M$ dont la moyenne vérifie en outre $m_i(\epsilon) \notin \mathcal{I}$.
Par conséquent, on a au moins $2M+1$ mesures stationnaires. M sont intermédiaires et $M+1$ sont excentrées autour des fonds de puits. □

Le Corollaire 2.14 peut en particulier être appliqué si $\alpha > \vartheta$ puisque la définition du paramètre ϑ implique $\vartheta \geq 2 \max_{0 \leq i \leq M} \sup_{y \neq a_{2i+1}} \frac{V(a_{2i+1}) - V(y)}{(a_{2i+1} - y)^2}$. Illustrons-le maintenant dans un cas simple.

Exemple 2.15. *On considère le potentiel*

$$V(x) := \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\,.$$

Il s'agit d'un potentiel non symétrique dont la dérivée seconde est convexe qui possède deux puits : $a_g := \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ *ainsi que* $a_d := \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. *Voici son graphe :*



Bien que V'' soit convexe, on remarquera qu'avec ce potentiel - selon la valeur de α - il peut y avoir une seule comme trois mesures stationnaires.

Afin de faire apparaître l'influence de α sur le nombre de mesures stationnaires et afin de ne pas confondre avec les notations de l'Exemple 2.9, j'introduis la notation :

$$\widehat{\chi_\alpha^\epsilon}(m) := \frac{\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{\alpha}{2}x^2 - \alpha m x\right)\right]}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(\frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + \frac{\alpha}{2}y^2 - \alpha m y\right)\right] dy} - m\,.$$

Et, je noterai $\widehat{\chi_\alpha}$ sa limite pour ϵ tendant vers 0.
On remarque : $V(a_d) = \frac{-13+5\sqrt{5}}{24} > \frac{-13-5\sqrt{5}}{24} = V(a_g)$. On est assuré de l'existence d'une mesure invariante excentrée autour de a_g pour ϵ assez petit. Et, on aura de même autour de a_d si $\alpha > \alpha_c = \sup_{y \neq a_d} 2\frac{V(a_d)-V(y)}{(y-a_d)^2}$. Or, on peut développer

$$2\frac{V(a_d)-V(y)}{(y-a_d)^2} = -V''(a_d) - \frac{V^{(3)}(a_d)}{3}(y-a_d) - \frac{1}{2}(y-a_d)^2 .$$

En calculant, il vient $V''(a_d) = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ et $V^{(3)}(a_d) = -1+3\sqrt{5}$. Par conséquent

$$2\frac{V(a_d)-V(y)}{(y-a_d)^2} = -\left\{\frac{u^2}{2} + \frac{-1+3\sqrt{5}}{3}u + \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right\}$$

où $u := y - a_d$. On en déduit immédiatement que la valeur critique de α introduite dans l'inégalité (2.3.14) est ici $\alpha_c = \frac{1+3\sqrt{5}}{18} \in [0.428; 0.429]$. On peut également évaluer facilement $\vartheta = \sup_{y\in\mathbb{R}} -V''(y)$ et l'on a $\vartheta = \frac{4}{3}$.
Je vais donc prendre dans un premier temps trois valeurs différentes de α. L'une strictement plus petite que α_c, l'une entre α_c et ϑ et enfin la troisième strictement plus grande que ϑ. Puis, je compléterai par trois autres valeurs afin de relier le comportement de ce système avec celui de l'Exemple 2.9.
Quelle que soit la valeur de α, on introduit :

$$W_{m,\alpha}(x) := V(x) + \frac{\alpha}{2}x^2 - \alpha m x = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}(\alpha - 1) - \alpha m x .$$

On va s'intéresser à la fonction $\widehat{\chi^\epsilon_\alpha}$ et à sa limite $\widehat{\chi_\alpha}$ comme dans l'Exemple 2.9. On va d'ailleurs s'appuyer sur ce qui a déjà été fait dans cet exemple. En effet, quel que soit $m \in \mathbb{R}$ et quel que soit $\alpha > 0$ on a :

$$W_{m,\alpha}(x) = \frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{3}\right)^4 - \frac{\frac{4}{3}-\alpha}{2}\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{11-9\alpha-27\alpha m}{27}\left(x+\frac{1}{3}\right) + C$$

où C dépend de α et m mais ne présente pas le moindre intérêt. Ainsi quel que soit $\epsilon > 0$, quel que soit $m \in \mathbb{R}$ et quel que soit $\alpha > 0$ on peut écrire

$$\widehat{\chi^\epsilon_\alpha}(m) := \frac{\int_{\mathbb{R}} x \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_{m,\alpha}(x)\right] dx}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_{m,\alpha}(x)\right] dx} - m .$$

On applique le changement de variable $x := -\frac{1}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}z$ et l'on obtient

$$\widehat{\chi^\epsilon_\alpha}(m) = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\int_{\mathbb{R}} z \exp\left\{-\frac{2}{\widehat{\epsilon}}\left[\frac{z^4}{4} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{4}\alpha\right)z^2 + \frac{11-9\alpha-27\alpha m}{24\sqrt{3}}z\right]\right\} dz}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{2}{\widehat{\epsilon}}\left[\frac{z^4}{4} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{4}\alpha\right)z^2 + \frac{11-9\alpha-27\alpha m}{24\sqrt{3}}z\right]\right\} dz} - \frac{1}{3} - m$$

avec $\widehat{\epsilon} := \frac{9}{16}\epsilon$. On pose $\widehat{\alpha} = \frac{3}{4}\alpha$ et $\widehat{m} = \frac{27\alpha m + 9\alpha - 11}{18\sqrt{3}\alpha}$. Il vient

$$\widehat{\chi^{\epsilon}_{\alpha}}(m) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}} z \exp\left[-\frac{2}{\widehat{\epsilon}}\left(\frac{z^4}{4} - \frac{1}{2}(1-\widehat{\alpha})z^2 - \widehat{\alpha}\widehat{m}z\right)\right] dz}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\widehat{\epsilon}}\left(\frac{z^4}{4} - \frac{1}{2}(1-\widehat{\alpha})z^2 - \widehat{\alpha}\widehat{m}z\right)\right] dz} - \widehat{m} \right\} - \frac{11}{27\alpha} .$$

En faisant tendre ϵ vers 0, $\widehat{\epsilon}$ tend également vers 0 et l'on en déduit donc

$$\widehat{\chi_{\alpha}}(m) = \frac{2}{\sqrt{3}}\chi_{\widehat{\alpha}}(\widehat{m}) - \frac{11}{27\alpha}$$

où χ_α correspond à la fonction utilisée dans l'Exemple 2.9. Comme le comportement de cette fonction a déjà été bien étudié quelle que soit la valeur du paramètre $\alpha > 0$, on peut tracter les résultats.
Par exemple, on a la convergence uniforme sur tout compact ne contenant pas $\frac{11-9\alpha}{27\alpha}$ (ce qui correspond à $\widehat{m} = 0$). Au passage, le paramètre $\widehat{m}$ varie sur $\mathbb{R}$ tout comme m. Aussi, on ne se servira plus de m. Par ailleurs, contrairement à l'Exemple 2.9, les graphiques seront tracés pour la valeur $\epsilon := \frac{1}{10}$ puisque $\frac{1}{4}$ est trop grand.
Dans l'Exemple 2.9, trois comportements étaient apparus. Ainsi :

Premier cas : $\alpha \leq \frac{8}{9}$. Alors, $\widehat{\alpha} \leq \frac{2}{3}$. Ceci implique que la fonction χ_α est continue ainsi que décroissante strictement sur $\mathbb{R}^*_-$ puis continue et décroissante strictement sur $\mathbb{R}^*_+$. De plus, on a une discontinuité en $\widehat{m} = 0$. On sait également que $\chi_\alpha(+\infty) = -\infty$ et $\chi_\alpha(-\infty) = +\infty$. Par conséquent, la fonction $\widehat{\chi_\alpha}$ a un comportement similaire. Elle réalise une bijection de $\left]-\infty; \frac{11-9\alpha}{27\alpha}\right[$ vers $\left]\chi^-(\alpha); +\infty\right[$ ainsi qu'une bijection de $\left]\frac{11-9\alpha}{27\alpha}; +\infty\right[$ vers $\left]-\infty; \chi^+(\alpha)\right[$ où $\chi^-(\alpha)$ et $\chi^+(\alpha)$ sont respectivement les limites de $\widehat{\chi}_\alpha$ quand z tend vers $\frac{11-9\alpha}{27\alpha}$ par valeurs inférieures et supérieures.

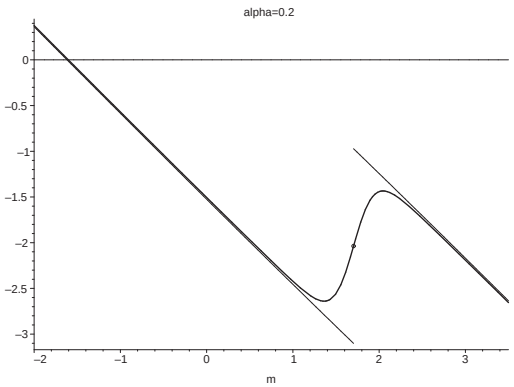


Fig. 2.5: $\widehat{\chi_\alpha}$ (en trait fin) et $\widehat{\chi^{\epsilon}_{\alpha}}$ (en trait épais) pour $\alpha < \alpha_c$

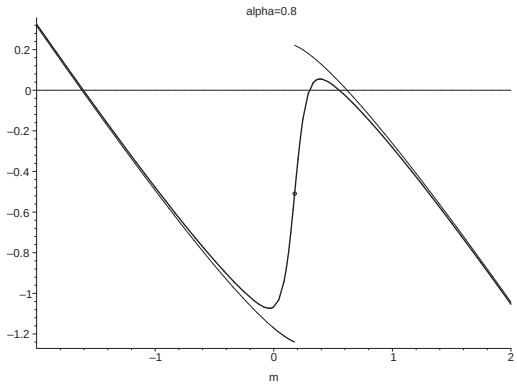


Fig. 2.6: $\widehat{\chi_\alpha}$ (en trait fin) et $\widehat{\chi^{\epsilon}_{\alpha}}$ (en trait épais) pour $\alpha \in]\alpha_c; \frac{8}{9}[$

Calculons maintenant ces valeurs. Rappelons que $\lim_{z\to 0^-} \chi_{\widehat{\alpha}}(z) = -\sqrt{1-\widehat{\alpha}}$ et $\lim_{z\to 0^+} \chi_{\widehat{\alpha}}(z) = \sqrt{1-\widehat{\alpha}}$. On obtient directement $\chi^-(\alpha) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{3}{4}\alpha} - \frac{11}{27\alpha} = -\sqrt{\frac{4}{3}-\alpha} - \frac{11}{27\alpha} < 0$. Comme $\chi^-(\alpha) < 0$, la fonction $\widehat{\chi_\alpha}$ a exactement un zéro sur

$\left]-\infty;\frac{11-9\alpha}{27\alpha}\right[$.
De même, $\chi^+(\alpha)=\sqrt{\frac{4}{3}-\alpha}-\frac{11}{27\alpha}$. Si $\chi^+(\alpha)\leq 0$, la fonction $\widehat{\chi_\alpha}$ n'admet pas de zéro sur $]\frac{11-9\alpha}{27\alpha};+\infty[$ et ainsi admet un unique zéro sur $\mathbb{R}$. Inversement, si $\chi^+(\alpha)>0$, il y a exactement deux zéros sur $\mathbb{R}$. On regarde donc le signe :

$$\begin{aligned}\chi^+(\alpha)>0 \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha^3-\frac{4}{3}\alpha^2+\frac{121}{729} \;<\; 0\\ \Leftrightarrow \quad &\left(\alpha-\frac{11}{9}\right)\left(\alpha-\frac{1-3\sqrt{5}}{18}\right)\left(\alpha-\frac{1+3\sqrt{5}}{18}\right) \;<\; 0\,.\end{aligned}$$

Comme on prend $\alpha>0$ et $\alpha<\frac{8}{9}$, cette condition équivaut à $\alpha>\frac{1+3\sqrt{5}}{18}=\alpha_c$. Par conséquent, lorsque $\alpha<\alpha_c=\frac{1+3\sqrt{5}}{18}$, il y a une mesure stationnaire qui est unique comme l'indique le graphique. Au contraire, il y en a trois dès que $\alpha>\alpha_c$.

Deuxième cas : $\alpha\in]\frac{8}{9};\frac{4}{3}[$. Alors $\widehat{\alpha}\in]\frac{2}{3};1[$. Ceci implique à nouveau l'existence d'une discontinuité en $\frac{11-9\alpha}{27\alpha}$. La fonction est continue partout ailleurs avec $\widehat{\chi_\alpha}(+\infty)=-\infty$ et $\widehat{\chi_\alpha}(-\infty)=+\infty$. De plus, il existe $m_c(\widehat{\alpha})$ tel que $\chi_{\widehat{\alpha}}$ soit strictement décroissante sur $]-\infty;-m_c(\widehat{\alpha})]$, strictement croissante sur $[-m_c(\widehat{\alpha});0[$, strictement croissante sur $]0;m_c(\widehat{\alpha})]$ et enfin strictement décroissante sur la demi-droite $[m_c(\widehat{\alpha});+\infty[$.

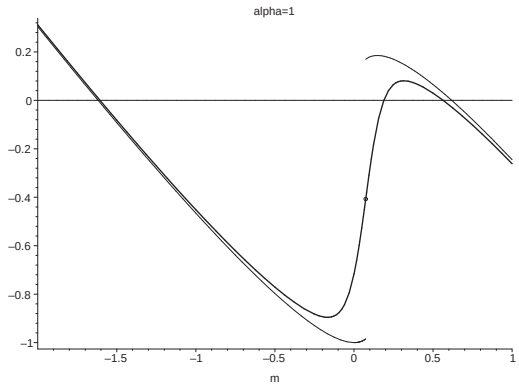


Fig. 2.7: $\widehat{\chi_\alpha}$ (en trait fin) et $\widehat{\chi^\epsilon_\alpha}$ (en trait épais) pour $\frac{8}{9}<\alpha<\frac{11}{9}$

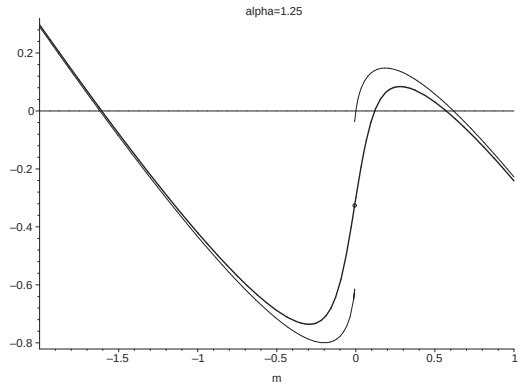


Fig. 2.8: $\widehat{\chi_\alpha}$ (en trait fin) et $\widehat{\chi^\epsilon_\alpha}$ (en trait épais) pour $\frac{11}{9}<\alpha<\frac{4}{3}$

Comme précédemment, on note $\chi^-(\alpha)$ la limite inférieure de $\widehat{\chi_\alpha}$ en $\frac{11-9\alpha}{27\alpha}$. On a $\chi^-(\alpha)=-\sqrt{\frac{4}{3}-\alpha}-\frac{11}{27\alpha}<0$. Et, on dispose de la positivité stricte de $\chi^+(\alpha)$ si et seulement si $\alpha<\frac{11}{9}$. Dans le cas où $\alpha\geq\frac{11}{9}$, $\widehat{\alpha}\geq\frac{11}{12}>\frac{3}{4}$. Aussi sait-on que le maximum local de $\chi_{\widehat{\alpha}}$ est atteint en $m_c(\widehat{\alpha})=\frac{3\widehat{\alpha}-2}{3\sqrt{3\widehat{\alpha}}}$. En d'autres termes :

$$\begin{aligned}\max_{z\in\left]\frac{11-9\alpha}{27\alpha};+\infty\right[}\widehat{\chi_\alpha}(z) \;&=\; \frac{2}{\sqrt{3}}\varphi_2^{(\widehat{\alpha})}\left(\frac{3\widehat{\alpha}-2}{3\sqrt{3\widehat{\alpha}}}\right)-\frac{11}{27\alpha}=\frac{5}{27\alpha}>0 \qquad \text{où l'on a}\\ \varphi_2^{(\widehat{\alpha})}\left(\frac{x}{\widehat{\alpha}}\right) \;&=\; \sqrt[3]{\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{(\widehat{\alpha}-1)^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{(\widehat{\alpha}-1)^3}{27}}}-\frac{x}{\widehat{\alpha}}\,.\end{aligned}$$

C'est toujours strictement positif donc la fonction χ_α admet exactement deux zéros sur l'intervalle $\left]\frac{11-9\alpha}{27\alpha};+\infty\right[$. Lorsque $\frac{8}{9}<\alpha<\frac{4}{3}$, on a à nouveau trois mesures stationnaires bien que la courbe de la fonction $\widehat{\chi_\alpha}$ ne traverse toujours l'axe des abscisses qu'à deux reprises quand $\alpha<\frac{11}{9}$.

Troisième cas : $\alpha \geq \frac{4}{3}$. Alors $\widehat{\alpha}\geq 1$. Ceci implique que la fonction $\widehat{\chi_\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}$, que $\widehat{\chi_\alpha}(-\infty)=+\infty$, que $\widehat{\chi_\alpha}(+\infty)=-\infty$. De plus, il existe deux réels $\widehat{m_1}(\alpha)<\widehat{m_2}(\alpha)$ tels que $\widehat{\chi_\alpha}$ est décroissante strictement sur $]-\infty;\widehat{m_1}(\alpha)]$, croissante strictement sur $[\widehat{m_1}(\alpha);\widehat{m_2}(\alpha)]$ et décroissante strictement sur $[\widehat{m_2}(\alpha);+\infty[$. Les paramètres $\widehat{m_1}(\alpha)$ et $\widehat{m_2}(\alpha)$ correspondent à $-m_c(\widehat{\alpha})$ et $m_c(\widehat{\alpha})$ défini plus haut. $\max_{z\in\left]\frac{11-9\alpha}{27\alpha};+\infty\right[}\widehat{\chi_\alpha}(z)=\frac{5}{27\alpha}>0$ et $\min_{z\in\left]-\infty;\frac{11-9\alpha}{27\alpha}\right[}\widehat{\chi_\alpha}(z)<0$. Par conséquent, la fonction $\widehat{\chi_\alpha}$ admet exactement un zéro sur chacun des trois intervalles de monotonie.

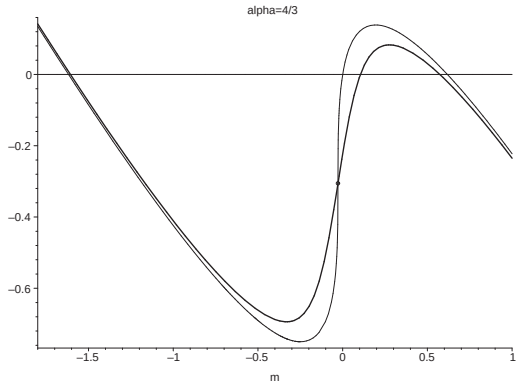


Fig. 2.9: $\widehat{\chi_\alpha}$ (en trait fin) et $\widehat{\chi_\alpha^\epsilon}$ (en trait épais) pour $\alpha=\frac{4}{3}$

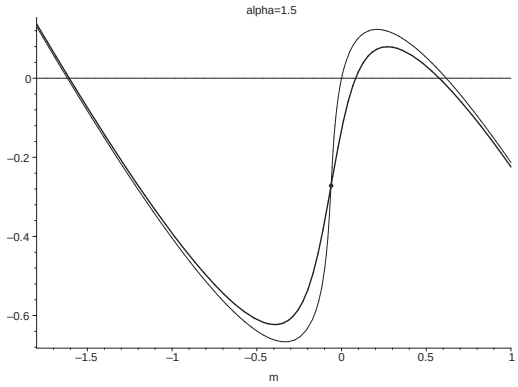


Fig. 2.10: $\widehat{\chi_\alpha}$ (en trait fin) et $\widehat{\chi_\alpha^\epsilon}$ (en trait épais) pour $\alpha>\frac{4}{3}$

En prenant maintenant $\alpha\geq\frac{4}{3}$, la courbe de $\widehat{\chi_{\frac{4}{3}}}$ coupe l'axe des abscisses à trois reprises exactement et il y a trois mesures stationnaires pour ϵ assez petit.

Résumé. On a exactement trois cas de figure :

1. Si $\alpha\leq\alpha_c$, la fonction $\widehat{\chi_\alpha}$ admet un zéro unique et des techniques similaires à celles employées dans le Théorème 2.8 permettent de prouver que la fonction $\widehat{\chi_\alpha^\epsilon}$ admet exactement un zéro pour ϵ assez petit.
2. Si $\alpha\in]\alpha_c;\frac{11}{9}]$, la fonction $\widehat{\chi_\alpha}$ admet exactement deux zéros. Toutefois, la fonction $\widehat{\chi_\alpha^\epsilon}$ étant continue contrairement à la fonction $\widehat{\chi_\alpha}$, pour ϵ assez petit, il y a exactement trois zéros pour $\widehat{\chi_\alpha^\epsilon}$. Deux sont proches des deux zéros de $\widehat{\chi_\alpha}$ et le troisième est "caché dans la discontinuité".
3. Si $\alpha>\frac{11}{9}$, la fonction $\widehat{\chi_\alpha}$ admet exactement trois zéros et il en est de même pour $\widehat{\chi_\alpha^\epsilon}$ pour ϵ assez petit. La discontinuité lorsque $\alpha<\frac{4}{3}$ ne contient plus de zéro puisque la limite à gauche et la limite à droite sont toutes les deux négatives.

Les deux figures les plus éloignées illustrent bien l'absence de trivialité dans toute étude portant sur les mesures stationnaires (et par suite toutes leurs conséquences

comme la convergence en temps long de la loi vers une mesure stationnaire) d'un processus auto-stabilisant évoluant dans un paysage multi-puits. En effet, on constate que si l'on est en-dessous de la valeur critique α_c, dans ce cas précis, on a l'unicité de la mesure stationnaire.

2.4 Seuils critiques

Dans les nombreux résultats qui ont été décrits dans la Section 2.3 (Proposition 2.4, Corollaire 2.7, Théorème 2.8, Exemple 2.9, Proposition 2.11, Corollaire 2.14, Exemple 2.15), il était demandé que ϵ soit assez petit. On peut se demander, pour chacun de ces résultats s'il existe un seuil ϵ_c qui dépende de V et de F tel qu'en-deça, les résultats soient vrais et tel qu'au-dessus, ils soient faux. Si un tel seuil existe, que vaut-il ?

Dans cette section, on étudiera le cas particulier décrit dans l'Exemple 2.9. Soit donc $V(x) := \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$. L'existence des mesures invariantes excentrées est exactement équivalente à l'existence d'au moins trois zéros pour la fonction χ_ϵ^α :

$$\chi_\epsilon^\alpha(m) := \frac{\int_{\mathbb{R}} x \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{1-\alpha}{2}x^2 - \alpha m x\right)\right] dx}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{1-\alpha}{2}x^2 - \alpha m x\right)\right] dx} - m\,.$$

On s'intéresse alors au seuil critique suivant :

$$\epsilon_c(\alpha) := \sup\left\{\epsilon_0 > 0 \;\middle|\; \forall\, \epsilon \in]0;\epsilon_0[\,,\ \exists\, m(\epsilon) \in]0;1[\text{ tel que } \chi_\epsilon^\alpha(m(\epsilon)) = 0\right\}.$$

En effet, χ_ϵ^α est impaire et $\lim_{m\to+\infty} \chi_\epsilon^\alpha(m) = -\infty$. Donc, l'existence de deux zéros différents de 0 équivaut en fait à l'existence d'un $m > 0$ tel que $\chi_\epsilon^\alpha(m) > 0$. De plus, on a vu dans la preuve du Théorème 2.8 que pour tout $m \geq a = 1$, on avait $\chi_\epsilon^\alpha(m) < 0$.
Or, si $(\chi_\epsilon^\alpha)'(0) > 0$, on sait qu'un tel m existe vu que χ_ϵ^α est continue sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
(\chi_\epsilon^\alpha)'(0) &= \frac{2\alpha}{\epsilon}\frac{\int_{\mathbb{R}} x^2 \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{1-\alpha}{2}x^2\right)\right] dx}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{1-\alpha}{2}x^2\right)\right] dx} - 1 \\
&= \alpha\left\{\frac{\int_{\mathbb{R}_+} t^2 \exp\left[-\frac{\epsilon}{8}t^4 + \frac{1-\alpha}{2}t^2\right] dt}{\int_{\mathbb{R}_+} \exp\left[-\frac{\epsilon}{8}t^4 + \frac{1-\alpha}{2}t^2\right] dt} - \frac{1}{\alpha}\right\} \\
&=: \alpha\mathcal{T}(\alpha,\epsilon)
\end{aligned}$$

après le changement de variable $x := \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}t$. On note

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{8}\Big\{\mathbb{E}\left[X^6\right] - \mathbb{E}\left[X^4\right]\mathbb{E}\left[X^2\right]\Big\}$$

où X est une variable aléatoire de densité $u_{x,y}(t) := \frac{\exp\left[-\frac{y}{8}t^4+\frac{1-x}{2}t^2\right]}{Z(x,y)}\mathbf{1}_{\{t\geq 0\}}$ par rapport à la mesure de Lebesgue. L'inégalité de Jensen implique ainsi $\mathbb{E}[X^4] \leq (\mathbb{E}[X^6])^{\frac{2}{3}}$ et $\mathbb{E}[X^2] \leq (\mathbb{E}[X^6])^{\frac{1}{3}}$ d'où $\mathbb{E}[X^4]\mathbb{E}[X^2] < \mathbb{E}[X^6]$ (vu que la loi de X n'est pas une mesure de Dirac) si bien que la fonction $\mathcal{T}$ est décroissante strictement par rapport à la variable ϵ. Par conséquent, quel que soit $\alpha > 0$, il existe un unique $\epsilon_0(\alpha) > 0$ tel que $\left(\chi^{\alpha}_{\epsilon_0(\alpha)}\right)'(0) = \alpha\mathcal{T}(\alpha, \epsilon_0(\alpha)) = 0$. Pour $\epsilon < \epsilon_0(\alpha)$, la dérivée est strictement positive d'où l'on a existence des mesures invariantes excentrées c'est-à-dire que l'on a $\epsilon_0(\alpha) \leq \epsilon_c(\alpha)$. On peut également calculer la valeur précise $\epsilon_0(1) = 8\left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\right)^2$.

Par définition de $\epsilon_0(\alpha)$, pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{2\alpha}{\epsilon_0(\alpha)}x^2 - 1\right) \exp\left[-\frac{2}{\epsilon_0(\alpha)}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{1-\alpha}{2}x^2\right)\right] dx &= 0 \\
\int_{\mathbb{R}} \left(z^2-1\right) \exp\left[-\frac{\epsilon_0(\alpha)}{8\alpha^2}\left(z^4 - \frac{4\alpha}{\epsilon_0(\alpha)}z^2\right)\right] \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dz &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad \mathbb{E}\Big\{\xi_2\left(\epsilon_0(\alpha), \alpha, X\right)\Big\} &= 0
\end{aligned}$$

où X est une gaussienne centrée réduite et où l'on a

$$\xi_2(\epsilon, \alpha, x) := \left(x^2-1\right)\exp\left[-\frac{\epsilon}{8\alpha^2}\left(x^4 - \frac{4\alpha}{\epsilon}x^2\right)\right].$$

Pour simuler $\epsilon_0(\alpha)$, on se donne $r > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$. L'entier N a pour vocation à être très grand puisqu'il sera le nombre de tirages indépendants d'une variable aléatoire dont la loi sera choisie judicieusement. Au contraire, le réel r doit être le plus petit possible puisqu'il correspond à la précision.
On tire N variables aléatoires indépendantes gaussiennes centrées et réduites $(X_i)_{1\leq i\leq N}$. La méthode de Monte-Carlo invite à prendre l'estimateur suivant de $\epsilon_0(\alpha)$:

$$\epsilon_0^{r,N}(\alpha) := r\left[\min\left\{p \in \mathbb{N}^* \quad \middle| \quad \sum_{i=1}^{N} \xi_2(pr, \alpha, X_i) < 0\right\} - 1\right].$$

Rappelons toutefois que l'on n'a pas prouvé $\epsilon_c(\alpha) = \epsilon_0(\alpha)$ ni même $\epsilon_c(\alpha) < +\infty$. On dispose uniquement de l'inégalité $\epsilon_0(\alpha) \leq \epsilon_c(\alpha)$. Il est donc naturel de chercher plus particulièrement $\epsilon_c(\alpha)$. Pour ceci, on reprend la définition de cette valeur critique à savoir :

$$\epsilon_c(\alpha) := \sup\left\{\epsilon_0 > 0 \mid \forall\, \epsilon \in]0; \epsilon_0[\,, \exists\, m \in]0; 1[\text{ tel que } \mathbb{E}\Big[\xi_1(\epsilon, \alpha, m, X)\Big] > 0\right\}$$

où X est une gaussienne centrée réduite et

$$\xi_1(\epsilon, \alpha, m, x) \quad := \quad \left(\sqrt{\frac{\epsilon}{2\alpha}}x - m\right)\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(\frac{\epsilon^2x^4}{16\alpha^2} - \frac{\epsilon x^2}{4\alpha} - \sqrt{\frac{\epsilon\alpha}{2}}mx\right)\right].$$

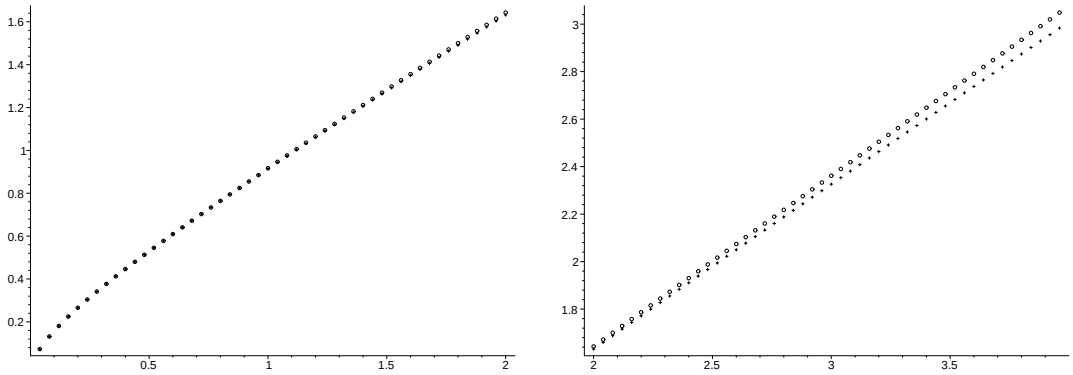
On introduit $M \in \mathbb{N}^*$ et on prend l'estimateur suivant :

$$\epsilon_c^{r,N,M}(\alpha) := r\left[p^{r,N,M}(\alpha) - 1\right] \quad \text{avec}$$
$$p^{r,N,M}(\alpha) := \min\left\{p \in \mathbb{N}^* \mid \forall\, 1 \leq k \leq M-1 \ \sum_{i=1}^{N} \xi_1\left(pr, \alpha, \frac{k}{M}, X_i\right) < 0\right\}.$$

Les tests sont effectués sur les réels de la forme $\frac{k}{M}$ pour $1 \leq k \leq M-1$ afin de savoir si la fonction χ_ϵ^α y est positive.

Le premier estimateur tend vers $\epsilon_0(\alpha)$ alors que le second converge vers $\epsilon_c(\alpha)$. On notera toutefois deux grands défauts concernant $\epsilon_c^{r,N,M}(\alpha)$ par rapport à $\epsilon_0^{r,N}(\alpha)$.
Premier défaut. Les deux estimateurs reposent sur la même méthode : on teste chacun des $\epsilon := pr$ avec $p \geq 1$ et l'on regarde si cette valeur est assez petite. Toutefois, pour le premier, on n'effectue qu'un seul calcul d'espérance pour chacun des tests y compris dans le dernier test. Au contraire, avec l'estimateur $\epsilon_c^{r,N,M}(\alpha)$, on effectue $M-1$ calculs dans le dernier test $\epsilon := p^{r,N,M}(\alpha)r$ puisque par définition, lorsque l'on teste $p^{r,N,M}(\alpha)r$, la valeur de la fonction χ_ϵ^α en chacun des réels $\frac{k}{M}$ est négative. Comme on prend M grand, le calcul est plus rapide avec $\epsilon_0^{r,N}(\alpha)$ plutôt qu'avec $\epsilon_c^{r,N,M}(\alpha)$.
Second défaut. L'estimateur $\epsilon_c^{r,N,M}(\alpha)$ passe à côté d'une éventuelle excursion positive sur un des intervalles $]\frac{l}{M}; \frac{l+1}{M}[$ avec $0 \leq l \leq M-1$ en particulier sur l'intervalle $]0; \frac{1}{M}[$.

Voici maintenant une courbe simulée de $\epsilon_0(\alpha)$ et de $\epsilon_c(\alpha)$ avec $\alpha \in [0;2]$ et une autre avec $\alpha \in [2;4]$:



où les ronds correspondent à $\epsilon_0^{r,N}(\alpha)$ et les croix correspondent à $\epsilon_c^{r,N,M}(\alpha)$. Pour réaliser ces deux courbes, on a pris $r := 10^{-4}$, $N := 2\times10^5$ et $M := 10^3$. Le premier constat est la finitude de $\epsilon_c(\alpha)$ pour tous les $\alpha \in [0;4]$. On note également que les deux valeurs seuils sont croissantes suivant le paramètre α.

Mais aussi, l'apparition des mesures invariantes excentrées ne nécessite pas que ϵ soit exagérément petit par rapport à α. Par exemple, lorsque $\alpha = 3$, avoir $\epsilon \leq 2$ est suffisant pour que la diffusion auto-stabilisante admette au moins trois mesures stationnaires. Ainsi même si le travail se situe avec ϵ tendant vers 0, le résultat de non-unicité des mesures stationnaires est valable avec l'équation pourtant plus

simple suivante :

$$dX_t = \sqrt{2}dB_t - \left(X_t^3 + 2X_t\right) dt + 3\mathbb{E}\left[X_t\right] dt$$

ce qui prouve indubitablement que le cas d'une diffusion dirigée par le gradient d'un potentiel non convexe est fondamentalement différent du cas convexe.
Qui plus est, on remarque que pour $\alpha \in [0;2]$, les deux estimateurs fournissent des valeurs quasiment similaires. En revanche, pour $\alpha \geq 2$, un écart entre les deux commence à se former. Et, cet écart grandit avec α. Bien que le second soit calibré pour approcher directement $\epsilon_c(\alpha) \geq \epsilon_0(\alpha)$ alors que le premier approche $\epsilon_0(\alpha)$, on remarque qu'avec les mêmes valeurs de r et N, bien que le calcul soit plus long pour le second estimateur, celui-ci fournit une valeur strictement plus petite que celle établie par le premier lorsque $M = 1000$. Aussi, il est préférable d'utiliser $\epsilon_0^{r,N}(\alpha)$ plutôt que $\epsilon_c^{r,N,M}(\alpha)$.

2.5 Mesures stationnaires quand l'intéraction $\boldsymbol{F'}$ est quelconque

L'avantage principal du cas où l'intéraction est linéaire est que le problème d'existence d'une mesure invariante revient *in fine* à un problème de paramétrisation en dimension 1. Dans le cas général, il est possible de paramétrer mais en dimension supérieure. On perd ainsi la possibilité d'utiliser le théorème des valeurs intermédiaires. Toutefois, avant de détecter les éventuelles mesures excentrées, on va prouver qu'il existe au moins une mesure invariante symétrique lorsque le potentiel V est symétrique. En effet, il ne peut y avoir de mesures stationnaires symétriques si le potentiel V ne l'est pas :

Lemme 2.16. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-6) ainsi que (V-10). Supposons que V ne soit pas symétrique. Soit un potentiel d'intéraction F qui vérifie (F-1)–(F-5). La diffusion auto-stabilisante* (0.0.5) *n'admet pas de mesure stationnaire symétrique dont le moment d'ordre $8q^2$ est fini.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il y ait une mesure stationnaire symétrique dont le moment d'ordre $8q^2$ est fini : du_ϵ. On sait alors que cette mesure admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue (d'après le Lemme 2.2) notée $u_\epsilon(x)$. De plus, elle vérifie :

$$u_\epsilon(x) = \frac{\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(x) + F * u_\epsilon(x)\right)\right]}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(y) + F * u_\epsilon(y)\right)\right] dy}.$$

La mesure u_ϵ étant symétrique, la fonction $F * u_\epsilon$ est symétrique. Soit maintenant un point $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $V(x_0) \neq V(-x_0)$. On a alors $u_\epsilon(x_0) \neq u_\epsilon(-x_0)$ ce qui est impossible étant donné que la mesure u_ϵ est symétrique. □

2.5.1 Mesures invariantes symétriques

Dans cette sous-section, on suppose que le potentiel de confinement V satisfait l'hypothèse (V-8) c'est-à-dire qu'il est symétrique. Rappelons que l'on note $-a$ son puits le plus à gauche et a son puits le plus à droite.
Lorsque le potentiel d'intéraction F est de degré 2, l'équation (2.3.2) est satisfaite avec $m_1(\epsilon) = 0$ c'est-à-dire que l'on est assuré de l'existence (et même de l'unicité) de la mesure invariante symétrique. Regardons maintenant le cas général lorsque la partie "surquadratique" de F n'est pas nulle.
Pour prouver que la diffusion gouvernée par l'équation (0.0.5) admet une mesure stationnaire symétrique, on va utiliser une méthode similaire à celle employée dans [5]. Rappelons le théorème du point fixe de Schauder :

Proposition 2.17. *Soient $\mathbb{B}$ un espace de Banach, $\mathbb{C}$ un convexe fermé de $\mathbb{B}$ et $\mathbb{A}$ une application continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\overline{\mathbb{A}(\mathbb{C})}$ est compact.*
Alors, $\mathbb{A}$ admet un point fixe dans $\mathbb{C}$.

Dans le but d'utiliser cette proposition, on a besoin de quelques définitions.

Définition 2.18. 1. *Soit un entier $p > 4q$ où q est l'entier strictement positif défini dans les hypothèses (V-6) et (F-4).*
2. *Soit $\mathbb{B} := \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \sup_{x\in\mathbb{R}} (1 + |x|^p)\,|f(x)| < \infty\}$ un espace de Banach. On le munit de la norme $||\,||_\infty$ définie comme suit*

$$||f||_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} (1 + |x|^p)\,|f(x)|\,.$$

3. *Soit $M > 0$. On introduit alors*

$$\mathbb{C}_M := \left\{ f \in \mathbb{B},\ f \geq 0,\ \int_{\mathbb{R}} f = 1,\ f(x) = f(-x),\ ||f||_\infty \leq M \right\}. \qquad (2.5.1)$$

4. *On se donne maintenant une application $\mathbb{A}^\epsilon$ qui agit sur les fonctions $f \in \mathbb{B}$ de la sorte :*

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^\epsilon(f)(x) &:= \frac{\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(x) + \int_0^x (F' * f)\,(y)dy\right)\right]}{\int_{z\in\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(z) + \int_0^z (F' * f)\,(y)dy\right)\right] dz} \qquad (2.5.2)\\ &= \frac{\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(x) + F * f(x) - F * f(0)\right)\right]}{\lambda_\epsilon(f)}\,, \\ \text{avec}\quad \lambda_\epsilon(f) &:= \int_{z\in\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(z) + \int_0^z (F' * f)\,(y)dy\right)\right] dz\,. \qquad (2.5.3) \end{aligned}$$

5. *Enfin, comme il faudra un certain contrôle sur les moments, on introduit la notation suivante pour tout $0 \leq k \leq p-2$:*

$$\gamma_k(u) := \int_{\mathbb{R}} |x|^k u(x)dx\,.$$

L'espace $\mathbb{B}$ est un espace de Banach et $\mathbb{C}_M$ est un espace fermé, convexe et inclus dans $\mathbb{B}$. Le travail de cette sous-section consiste - comme on peut s'en douter à la lecture de la Proposition 2.17 - à montrer que l'application $\mathbb{A}^\epsilon$ stabilise $\mathbb{C}_M$ et y est continue. On a ainsi l'existence d'un point fixe ce qui se traduit par l'existence d'une fonction symétrique dans l'ensemble $\mathbb{B}$ correspondant à une mesure stationnaire symétrique admettant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Lemme 2.19. *Il existe deux constantes C_1 et C_2, toutes les deux indépendantes de M telles que pour toute fonction $u \in \mathbb{C}_M$, on a :*

1. *$\gamma_k(u) \leq MC_1$ pour tout $0 \leq k \leq p-2$.*
2. *Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\frac{\alpha}{2}x^2 \;\leq\; \int_0^x (F' * u)(y)dy \;\leq\; C_2 M x^2(1+x^{2q})\,. \tag{2.5.4}$$

Démonstration. **1.** Soit $u \in \mathbb{C}_M$ alors, comme $k \leq p-2$, la fonction $x \mapsto \frac{|x|^k}{1+|x|^p}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. De plus, la définition de $\mathbb{C}_M$ implique $(1+|x|^p)\,u(x) \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où

$$\gamma_k(u) = \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|^k}{1+|x|^p}(1+|x|^p)u(x)dx \leq M\int_{\mathbb{R}} \frac{|x|^k}{1+|x|^p}dx \leq MC_1$$

en posant $C_1 := 1 + \max\limits_{0\leq r\leq p-2} \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|^r}{1+|x|^p}dx$.
2. Soit $x \geq 0$. La fonction u est dans $\mathbb{C}_M$ donc elle est symétrique. D'après l'hypothèse (F-1) et la définition de α, on a $F'(x) = \alpha x + F_0'(x)$. L'hypothèse (F-3) implique que F' ainsi que F_0' sont positives sur $\mathbb{R}_+$ et comme elles sont impaires, on peut utiliser l'inégalité fournie dans le Lemme 4.3 de [5]. On obtient alors :

$$F_0'(x) \leq \frac{1}{2}\Big(F_0'(x-y) + F_0'(x+y)\Big)\,, \quad \forall y \in \mathbb{R}\,,\; x \in \mathbb{R}_+\,.$$

Par conséquent, pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^x (F_0' * u)(y)dy &= \int_0^x \int_0^{+\infty} \Big(F_0'(y-z) + F_0'(y+z)\Big)u(z)dzdy \\ &\geq \int_0^x \int_{\mathbb{R}_+} 2F_0'(y)u(z)dzdy \geq 0\,.\end{aligned}$$

Cette inégalité implique

$$\int_0^x (F' * u)(y)dy = \int_0^x (F_0' * u)(y)dy + \frac{\alpha}{2}x^2 \geq \frac{\alpha}{2}x^2 \quad \text{pour tout } x \geq 0\,.$$

Comme $x \mapsto \int_0^x (F' * u)(y)dy$ est paire, l'inégalité est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Etant donné que la fonction $x \mapsto \int_0^x (F' * u)(y)dy$ est symétrique, on restreint l'étude à $x \geq 0$.

$$\int_0^x (F' * u)(y)dy = \frac{1}{2}\int_0^x \int_0^\infty \Big(F'(y-z) + F'(y+z)\Big)u(z)dzdy.$$

Les hypothèses (F-1) et (F-4) entraînent que F est une fonction polynômiale paire de degré $2n \leq 2q$ où $q \geq 1$ est défini dans (V-5). On peut ainsi écrire F' comme suit

$$F'(x) = \sum_{k=0}^{q-1} \alpha_k x^{2k+1}.$$

En écrivant pour les besoins du calcul : $\mathcal{F}(y,z) := F'(y-z) + F'(y+z)$, on trouve

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(y,z) &= 2y\sum_{k=0}^{q-1}\alpha_k \sum_{j=0}^{k} C_{2k+1}^{2j+1} y^{2j} z^{2k-2j} \\ &\leq qy \max_{0\leq k\leq q-1}|\alpha_k| 2^{2q+2} \max_{0\leq k\leq q}\sum_{j=0}^{k} y^{2j}z^{2k-2j} \leq Cy\left(1+y^{2q}\right)\left(1+z^{2q}\right).\end{aligned}$$

Finalement, avec $p > 4q$, il existe une constante $C' > 0$ telle que :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathcal{F}(y,z)u(z)dz &\leq Cy\left(1+y^{2q}\right)\int_0^\infty \left(1+z^{2q}\right)u(z)dz \\ &\leq Cy\left(1+y^{2q}\right)\int_0^\infty \frac{1+z^{2q}}{1+z^p}\Big((1+z^p)u(z)\Big)dz \\ &\leq C'yM\left(1+y^{2q}\right).\end{aligned}$$

En intégrant, on obtient $\int_0^x (F' * u)(y)dy \leq C_2 M x^2(1+x^{2q})$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$. □

Lemme 2.20. *Il existe M_0 tel que pour tout $M \geq M_0$, $\mathbb{A}^\epsilon(\mathbb{C}_M) \subset \mathbb{C}_M$. De plus, il existe une constante $C(\epsilon) > 0$ telle que*

$$\frac{1}{\lambda_\epsilon(u)} \leq C(\epsilon)\sqrt{M} \tag{2.5.5}$$

pour tout $u \in \mathbb{C}_M$ où $\lambda_\epsilon(u)$ est définie dans (2.5.3).

Démonstration. La plupart des axiomes à vérifier pour prouver que $\mathbb{A}^\epsilon$ stabilise $\mathbb{C}_M$ le sont par la définition même de $\mathbb{A}^\epsilon$ dans (2.5.2). En effet, $\mathbb{A}^\epsilon u$ est une fonction symétrique et positive qui vérifie $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{A}^\epsilon u(x)dx = 1$. Il suffit donc de prouver ceci :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|^p)\,\mathbb{A}^\epsilon u(x) \leq M\,.$$

D'après (2.5.2) et d'après le Lemme 2.19 on obtient une minoration de la constante de renormalisation :

$$\begin{aligned}\lambda_\epsilon(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(x)+\int_0^x (F'*u)(y)dy\right)\right]dx \\ &\geq \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\Big(V(x)+C_2Mx^2\left(1+x^{2q}\right)\Big)\right]dx\,.\end{aligned}$$

Soit $\overline{V} := \sup_{x\in[-a;a]} V(x)$. On a alors l'inégalité suivante :

$$\lambda_\epsilon(u) \geq \int_{-a}^{a} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\overline{V} - \frac{2}{\epsilon}C_2Mx^2(1+a^{2q})\right]dx\,.$$

On pose $\xi(M) := \sqrt{\epsilon}(2C_2M(1+a^{2q}))^{-1/2}$. Par définition, $\lim_{M\to\infty}\xi(M) = 0$. Après avoir appliqué le changement de variable $x := \xi(M)y$ et utilisé le Lemme A.1, on trouve le développement suivant :

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{+a} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\overline{V} - \frac{2}{\epsilon}C_2Mx^2(1+a^{2q})\right]dx &= 2e^{-\frac{2}{\epsilon}\overline{V}}\xi(M)\int_0^{a/\xi(M)} e^{-x^2}dx \\ &= \xi(M)\left\{C(\epsilon)+o(1)\right\}\end{aligned}$$

où $C(\epsilon)$ est indépendant de M et $o(1)$ tend vers 0 quand M converge vers $+\infty$. Par conséquent $\frac{1}{\lambda_\epsilon(u)} \leq C(\epsilon)\sqrt{M}$ où $C(\epsilon)$ est une constante positive ne dépendant que des paramètres du système et de ϵ d'après la définition de $\xi(M)$. Ceci prouve donc la majoration (2.5.5).
En se servant de (2.5.2) et de (2.5.5), on prouve que l'on a

$$(1+|x|^p)\mathbb{A}^\epsilon u(x) \leq C(\epsilon)\sqrt{M}(1+|x|^p)e^{-\frac{2}{\epsilon}V(x)} \leq C'(\epsilon)\sqrt{M},$$

où $C'(\epsilon)$ est une constante positive au même titre que $C(\epsilon)$. Afin de conclure, il suffit de choisir $M \geq C'(\epsilon)^2$.
On obtient immédiatement : $\sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|^p)\, f(x) \leq M$ ce qui était le dernier axiome à vérifier pour être assuré de l'appartenance de $\mathbb{A}^\epsilon u$ à l'espace $\mathbb{C}_M$. □

On a prouvé que l'opérateur $\mathbb{A}^\epsilon$ allait de $\mathbb{C}_M$ dans lui-même. Prouvons maintenant qu'il y est continu.

Lemme 2.21. *$\mathbb{A}^\epsilon$ est un opérateur continu sur $\mathbb{C}_M$ pour la norme infini.*

Démonstration. **Étape 1.** Soient $u, v \in \mathbb{C}_M$. On définit :

$$\begin{aligned}\Lambda^\epsilon(x) &:= e^{-\frac{2}{\epsilon}V(x)}\left\{\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}F^u(x)\right] - \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}F^v(x)\right]\right\} \qquad (2.5.6)\\ &= e^{-\frac{2}{\epsilon}V(x)-\frac{\alpha}{\epsilon}x^2}\left\{\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}F_0^u(x)\right] - \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}F_0^v(x)\right]\right\}\end{aligned}$$

où l'on a $F^u(x) := \int_0^x (F' * u)(y)dy$ et $F_0^u(x) := \int_0^x (F_0' * u)(y)dy$ et de même avec v.
Or, on sait que $|e^{-a} - e^{-b}| \leq |a - b|$ si $a, b \geq 0$. Pour pouvoir appliquer cette inégalité, on doit d'abord prouver que les fonctions F_0^u et F_0^v sont positives. D'après le Lemme 2.19, pour chaque fonction $f \in \mathbb{C}_M$ l'intégrale $\int_0^x (F' * f)(y)dy$ est minorée par $\frac{\alpha}{2}x^2$. Donc $\int_0^x (F_0' * f)(y)dy \geq 0$ vu la relation : $F'(y) = F_0'(y) + \alpha y$. D'où :

$$\begin{aligned} |\Lambda^\epsilon(x)| &\leq \frac{2}{\epsilon} e^{-\frac{2}{\epsilon}V(x) - \frac{\alpha}{\epsilon}x^2} \Lambda_0^\epsilon(x) \qquad (2.5.7) \\ \text{avec} \quad \Lambda_0^\epsilon(x) &:= |F_0^u(x) - F_0^v(x)| = \left| \int_0^x \int_{\mathbb{R}} F_0'(y-z)\Big(u(z) - v(z)\Big) dz dy \right|. \end{aligned}$$

Comme u et v sont des éléments de $\mathbb{C}_M$, ces fonctions sont paires. Aussi le changement de variable $z \to -z$ ne change pas l'intégrale en z. Il vient ainsi

$$\begin{aligned} \Lambda_0^\epsilon(x) &= \left| \int_0^x \int_0^\infty \left(F_0'(z+y) - F_0'(z-y)\right) \Big(u(z) - v(z)\Big) dz dy \right| \\ &\leq \int_0^x \int_0^\infty |F_0'(z+y) - F_0'(z-y)| \, |u(z) - v(z)| \, dz dy \,. \qquad (2.5.8) \end{aligned}$$

L'hypothèse (F-4) nous fournit l'existence de deux constantes strictement positives C_q et C telles que

$$\begin{aligned} |F_0'(z+y) - F_0'(z-y)| &\leq 2|y| C_q \left(1 + |z+y|^{2q-2} + |z-y|^{2q-2}\right) \\ &\leq 2|y| C_q \left(1 + 2^{2q-1}|z|^{2q-2} + 2^{2q-1}|y|^{2q-2}\right) \\ &\leq C|y| \left(1 + |y|^{2q-1} + |z|^{2q-1}\right) \\ &\leq C|y| \left(1 + |y|^{2q-1}\right)\left(1 + |z|^{2q-1}\right). \qquad (2.5.9) \end{aligned}$$

On va maintenant trouver une borne supérieure pour $|u(z) - v(z)|$ dans l'inégalité (2.5.8). Comme $u, v \in \mathbb{C}_M$ on en déduit $u(z)(1 + |z|^p) \leq M$ et $v(z)(1 + |z|^p) \leq M$, quel que soit $z \in \mathbb{R}$. L'inégalité triangulaire permet d'obtenir $|u(z) - v(z)|(1 + |z|^p) \leq 2M$ et par suite $\sqrt{|u(z) - v(z)|} \leq \sqrt{\frac{2M}{1+|z|^p}}$. En conséquence, quel que soit $z \in \mathbb{R}$, il vient

$$|u(z) - v(z)| \leq \sqrt{||u - v||_\infty} \sqrt{\frac{2M}{1 + |z|^p}} \qquad (2.5.10)$$

où $\|\cdot\|_\infty$ représente la norme infinie. En utilisant (2.5.10), (2.5.9) ainsi que (2.5.8) afin d'estimer Λ_0^ϵ, on obtient

$$\Lambda_0^\epsilon(x) \leq C\sqrt{||u - v||_\infty} \int_0^x |y| \left(1 + |y|^{2q-1}\right) dy \int_0^\infty \sqrt{\frac{2M}{1 + |z|^p}} \left(1 + z^{2q-1}\right) dz \,.$$

Comme $p > 4q$ l'intégrale portant sur la variable z est finie et peut être considérée comme un terme constant. D'après (2.5.7) et en utilisant la positivité de αx^2, on trouve directement l'existence d'une constante positive $C > 0$ telle que

$$\Lambda^\epsilon(x) \leq C\frac{\sqrt{M}}{\epsilon}\sqrt{||u-v||_\infty}\, x^2\left(1+|x|^{2q-1}\right)e^{-\frac{2}{\epsilon}V(x)}\,.$$

D'après l'hypothèse (V-3), l'expression $x^2\left(1+|x|^{2q-1}\right)\left(1+|x|^p\right)e^{-\frac{2}{\epsilon}V(x)}$ peut être majorée par une constante qui dépend de ϵ. Par conséquent :

$$||\Lambda^\epsilon||_\infty \leq C(M,\epsilon)\sqrt{||u-v||_\infty}\,. \tag{2.5.11}$$

On en déduit deux résultats. Premièrement, $||\Lambda^\epsilon||_\infty$ est fini et deuxièmement $||\Lambda^\epsilon||_\infty$ est petit lorsque $||u-v||_\infty$ tend vers 0.

Étape 2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on introduit :

$$\Omega_\epsilon(x) := \frac{1}{\lambda_\epsilon(u)\lambda_\epsilon(v)}\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(\int_0^x (F'*v)(y)dy + V(x)\right)\right]\,.$$

Alors la différence $\mathbb{A}^\epsilon u(x) - \mathbb{A}^\epsilon v(x)$ peut être décomposée ainsi :

$$\mathbb{A}^\epsilon u(x) - \mathbb{A}^\epsilon v(x) = \frac{1}{\lambda_\epsilon(u)}\Lambda^\epsilon(x) + \Big(\lambda_\epsilon(v)-\lambda_\epsilon(u)\Big)\Omega_\epsilon(x)\,. \tag{2.5.12}$$

En prenant la norme uniforme, on obtient

$$||\mathbb{A}^\epsilon u - \mathbb{A}^\epsilon v||_\infty \leq \frac{1}{\lambda_\epsilon(u)}||\Lambda^\epsilon||_\infty + |\lambda_\epsilon(v)-\lambda_\epsilon(u)|\,||\Omega_\epsilon||_\infty\,.$$

En combinant (2.5.5) et (2.5.11), on a

$$\frac{1}{\lambda_\epsilon(u)}||\Lambda^\epsilon||_\infty \leq C'(M,\epsilon)\sqrt{||u-v||_\infty}\,.$$

Afin de pouvoir conclure la preuve, il est suffisant de trouver une inégalité similaire pour le terme $|\lambda_\epsilon(v)-\lambda_\epsilon(u)|\,||\Omega_\epsilon||_\infty$.

$$\begin{aligned}|\lambda_\epsilon(v)-\lambda_\epsilon(u)| &= \left|\int_{\mathbb{R}}\Lambda^\epsilon(x)dx\right| \\ &\leq C\frac{\sqrt{M}}{\epsilon}\sqrt{||u-v||_\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\left(1+|x|^{2q-1}\right)e^{-\frac{2}{\epsilon}V(x)}dx\,.\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (V-3), l'intégrale est finie et ne dépend pas de M. On a immédiatement

$$|\lambda_\epsilon(v)-\lambda_\epsilon(u)| \leq C(M,\epsilon)\sqrt{||u-v||_\infty}\,.$$

Il reste à majorer uniformément $\Omega_\epsilon(x)$. D'après l'hypothèse (V-3) et (2.5.4), on a

$$\int_0^x (F'*v)(y)dy + V(x) \geq C_4x^4 + \Big(\frac{\alpha}{2}-C_2\Big)x^2$$

pour tout $x \geq 0$. On étend cette majoration à tout $x \in \mathbb{R}$ en se servant de la symétrie de V et de F. La fonction $x \mapsto (1+|x|^p)\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(\int_0^x (F'*v)(y)dy + V(x)\right)\right]$ est bornée par une constante qui dépend de ϵ. De plus, on peut appliquer la majoration (2.5.5) à u et v. Finalement, on obtient l'existence d'une constante $C(\epsilon) > 0$ telle que, pour tout réel x, $|\Omega_\epsilon(x)| \leq C(\epsilon)M$.
D'après (2.5.12), on a

$$||\mathbb{A}^\epsilon u - \mathbb{A}^\epsilon v||_\infty \leq C'(M,\epsilon)\sqrt{||u-v||_\infty} + C(M,\epsilon)\sqrt{||u-v||_\infty}C(\epsilon)M\,.$$

En d'autres termes

$$||\mathbb{A}^\epsilon u - \mathbb{A}^\epsilon v||_\infty \leq C''(M,\epsilon)\sqrt{||u-v||_\infty}$$

ce qui termine la preuve. □

On a maintenant toutes les clés en main pour parvenir au résultat d'existence d'une mesure stationnaire symétrique. En effet, nous venons de prouver que l'application continue $\mathbb{A}^\epsilon$ stabilise un convexe fermé $\mathbb{C}_M$ inclus dans un espace de Banach $\mathbb{B}$.

Théorème 2.22. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-6) ainsi que (V-10). On suppose de plus que V est symétrique. Alors, la diffusion auto-stabilisante* (0.0.5) *admet une mesure stationnaire symétrique.*

Démonstration. Soit le paramètre M_0 défini par le Lemme 2.20. En prenant $M \geq M_0$, prouvons que $\overline{\mathbb{A}^\epsilon(\mathbb{C}_M)}$ est un compact. Afin d'établir ce résultat, on va estimer la dérivée suivante :

$$\left(\mathbb{A}^\epsilon u\right)'(x) = -\frac{2}{\epsilon}\frac{(F'*u)(x)+V'(x)}{\lambda_\epsilon(u)}\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(\int_0^x (F'*u)(y)dy + V(x)\right)\right].$$

Regardons les différents termes de cette dérivée. On a déjà vu dans la preuve du Lemme 2.20 que pour tout $u \in \mathbb{C}_M$ le facteur de renormalisation $\lambda_\epsilon(u)$ satisfaisait (2.5.5) à savoir $\frac{1}{\lambda_\epsilon(u)} \leq C(\epsilon)\sqrt{M}$.
D'après (2.5.4), on obtient : $0 \leq \int_0^x (F'*u)(y)dy \leq C_2 M x^2(1+x^{2q})$.
De plus, d'après les hypothèses (V-3) et (V-5), on dispose d'inégalités sur V et sa dérivée :

$$V(x) \geq C_4 x^4 - C_2 x^2 \quad \text{et} \quad |V'(x)| \leq C_q\left(1+|x|^{2q}\right) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}\,. \quad (2.5.13)$$

Aussi, il suffit de trouver une majoration pour le terme contenant la convolution : $|(F'*u)(x)|$ avec $x \in \mathbb{R}_+$. D'après l'hypothèse (F-4) et comme u est une fonction paire,

$$\begin{aligned}|(F'*u)(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}} F'(x-z)u(z)dz\right| \leq \int_0^\infty \Big|F'(x+z)+F'(x-z)\Big|u(z)dz \\ &\leq C_q\int_0^\infty \Big\{|x+z|\left(1+|x+z|^{2q-2}\right)+|x-z|\left(1+|x-z|^{2q-2}\right)\Big\}u(z)dz\,.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et l'inégalité $(a+b)^{2q-2} \leq 2^{2q-2}\,(a^{2q-2}+b^{2q-2})$, on trouve

$$\begin{aligned}|(F'*u)(x)| \;\leq\; & \int_{\mathbb{R}^+} C_q 2^{2q-1}\Big\{|x|^{2q-1}+|z||x|^{2q-2} \\ & +|x|\left(1+|z|^{2q-2}\right)+|z|\left(1+|z|^{2q-2}\right)\Big\}u(z)dz\,.\end{aligned}$$

Par définition de $\mathbb{C}_M$, on a $u(z) \leq \frac{M}{1+|z|^p}$ où l'entier p est strictement plus grand que $4q$. D'où les moments d'ordre 1, $2q-2$ et $2q-1$ sont bornés dans $\mathbb{C}_M$: il existe des constantes positives C et C' telles que

$$|(F'*u)(x)| \leq C\left(1+|x|+|x|^{2q-2}+|x|^{2q-1}\right) \leq C'\left(1+|x|^{2q+1}\right). \qquad (2.5.14)$$

Pour résumer : en utilisant (2.5.5), (2.5.13) et (2.5.14), on obtient

$$\left|\left(\mathbb{A}^\epsilon u\right)'(x)\right| \leq \frac{2}{\epsilon}C'C(\epsilon)\sqrt{M}(1+|x|^{2q+1})\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(C_4x^4-C_2x^2\right)\right]. \quad (2.5.15)$$

Finalement, on en déduit qu'il existe une constante strictement positive C_ϵ telle que $\left|\left(\mathbb{A}^\epsilon u\right)'(x)\right| \leq C_\epsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Pour démontrer que $\overline{\mathbb{A}^\epsilon \mathbb{C}_M}$ est compact, on se donne une suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}_M$ et on s'intéresse à la suite $(\mathbb{A}^\epsilon u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On sait, d'après le Lemme 2.21 que $(1+|x|^p)\,\mathbb{A}^\epsilon u_n(x) \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc il existe une fonction v de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et une fonction croissante φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que $x \mapsto (1+x^p)\,\mathbb{A}^\epsilon u_{\varphi(n)}(x)$ converge vers v, uniformément sur les compacts. On étend l'uniformité à tous les réels. En effet, (2.5.15) implique $(1+|x|^p)\left|\left(\mathbb{A}^\epsilon u_n\right)'(x)\right| \leq C_{M,\epsilon}e^{-\rho x^2}$ où $C_{M,\epsilon}$ et ρ sont des constantes strictement positives. Pour tout $\delta > 0$, soit $R > 0$ tel que $C_{M,\epsilon}\int_R^{+\infty} e^{-\rho x^2}dx \leq \delta$. Ainsi $\left|\mathbb{A}^\epsilon u_{\varphi(n)}(x) - \mathbb{A}^\epsilon u_{\varphi(n)}(R)\right| \leq \delta$ pour tout $x \geq R$. Ceci prouve la convergence de $(1+x^p)\,\mathbb{A}^\epsilon u_{\varphi(n)}$ vers v uniformément sur $\mathbb{R}$.
D'après le Lemme 2.20, comme $M \geq M_0$, l'opérateur $\mathbb{A}^\epsilon$ va du convexe fermé $\mathbb{C}_M$ dans lui-même. Par ailleurs, le Lemme 2.21 implique la continuité de $\mathbb{A}^\epsilon$ pour la norme infini. Vu que $\overline{\mathbb{A}^\epsilon(\mathbb{C}_M)}$ est un compact, on peut appliquer le théorème de Schauder (Proposition 2.17) à l'opérateur $\mathbb{A}^\epsilon$ sur l'espace de fonctions $\mathbb{C}_M$ avec $M \geq M_0$. On en déduit l'existence d'un point fixe f_0 pour l'opérateur $\mathbb{A}^\epsilon$ sur l'espace $\mathbb{C}_M$. En considérant la mesure de probabilité u_0 absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et dont la densité est f_0, il vient que cette mesure satisfait les formes intégrées (2.2.2) et (2.2.3). D'après le Lemme 2.2, cela signifie que u_0 est une mesure stationnaire symétrique pour la diffusion (0.0.5). □

Il est important de noter que l'on n'a pas encore établi l'unicité de cette mesure. Il y a toutefois un cas simple (à savoir celui où le degré du potentiel d'intéraction F vaut 4) où l'on peut prouver cette unicité.

Proposition 2.23. *Soit V un potentiel satisfaisant (V-1)–(V-6) ainsi que (V-8) c'est-à-dire qu'il est symétrique et (V-10). Supposons que F soit de degré 4. Alors la diffusion* (0.0.5) *admet une unique mesure invariante symétrique u_ϵ^0.*

Démonstration. Comme le potentiel d'intéraction F est de degré 4 et comme F' est une fonction convexe sur $\mathbb{R}_+$, on peut écrire $F(x) = \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\beta}{4}x^4$ où $\alpha \geq 0$ et $\beta > 0$. Soit u_ϵ une mesure invariante symétrique (on sait qu'il y en a une d'après le Théorème 2.22). On note $m_2(\epsilon)$ son moment d'ordre 2. Le couple $(u_\epsilon, m_2(\epsilon))$ est solution d'un système du type (2.3.1)–(2.3.2). En effet,

$$\begin{aligned} F * u_\epsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}} F(x-z)u_\epsilon(z)dz \\ &= \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\beta}{4}x^4 + \frac{3\beta m_2(\epsilon)}{2}x^2 + \left(\frac{\alpha}{2}m_2(\epsilon) + \frac{\beta}{4}\int_{\mathbb{R}} z^4 u_\epsilon(z)dz\right). \end{aligned}$$

L'expression dans les parenthèses est une constante donc elle disparaîtra puisqu'apparaissant dans le numérateur comme dans le dénominateur. Alors, on obtient le système d'équations suivant pour u_ϵ et $m_2(\epsilon)$:

$$\begin{aligned} 2u_\epsilon(x) &= \nu(m_2(\epsilon), x) \quad \text{et} \quad m_2(\epsilon) = \int_{\mathbb{R}_+} x^2 \nu(m_2(\epsilon), x)dx \\ \text{avec} \quad \nu(m,x) &:= \frac{\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(x) + F(x) + \frac{3\beta m}{2}x^2\right)\right]}{\int_0^\infty \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(z) + F(z) + \frac{3\beta m}{2}z^2\right)\right]dz}. \end{aligned}$$

On introduit la fonction $\chi_\epsilon(m) := \int_0^\infty x^2\nu(m,x)dx - m$. D'après le Théorème 2.22, on sait que χ_ϵ admet au moins un zéro sur $\mathbb{R}_+$. En calculant χ'_ϵ, on prouve que χ_ϵ est strictement décroissante :

$$\chi'_\epsilon(m) = -\frac{3\beta}{\epsilon}\left\{\int_0^\infty x^4\nu(m,x)dx - \left(\int_0^\infty x^2\nu(m,x)dx\right)^2\right\} - 1 < 0.$$

La conclusion est immédiate : il y a une unique mesure invariante symétrique. □

Evidemment, ce résultat et la méthode qui a été utilisée pour l'obtenir est propre à l'exemple où la paramétrisation ne fait intervenir qu'un seul paramètre. Si le degré du potentiel d'intéraction est strictement plus grand que 4, alors le second moment est insuffisant pour définir la mesure invariante symétrique : on a besoin de plus de moments et la preuve d'unicité telle que développée dans la démonstration de la Proposition 2.23 devient insuffisante.

2.5.2 Mesures invariantes excentrées

Cette partie est essentiellement motivée par la question de l'unicité des mesures stationnaires. On vient d'établir l'existence d'une mesure invariante symétrique lorsque V est symétrique. On a prouvé dans le cas où l'intéraction était linéaire qu'il y avait également des mesures invariantes asymétriques autour des points critiques sous certaines conditions même si le potentiel V était symétrique. Par ailleurs, on a démontré que la diffusion (0.0.5) admettait une mesure stationnaire excentrée autour de chaque puits où V réalise son minimum global.

Prouvons maintenant dans le cas général que sous certaines conditions peu contraignantes, il existe des mesures invariantes excentrées autour des puits. En effet, l'une des conditions que l'on utilise exclut d'office les bosses du potentiel V. Le potentiel d'intéraction F est une fonction polynômiale mais l'on ne suppose plus que son degré est 2. On rappelle que son degré est $2n \leq 2q$ d'après les hypothèses (F-1) et (F-4). On écrit ainsi :

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{F^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} .$$

Soit u la densité d'une probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue. On note $\mu_1, \cdots, \mu_{2n-1}$ les moments d'ordre 1 à $2n-1$ de cette mesure que l'on appelle également u pour simplifier. On suppose que u admet un moment d'ordre $8q^2$ fini. En effet, on s'intéresse aux mesures stationnaires dont le moment d'ordre $8q^2$ est fini afin que l'égalité (2.2.2) soit vérifiée ; ce qui avait nécessité l'application du Lemme 2.2.1. Comme conséquence directe, μ_k est fini pour tout $1 \leq k \leq 2n-1$. On pose $D(x) := F * u(x) - F * u(0)$. Quel que soit le point $a_0 \in \mathbb{R}$, on obtient alors

$$\begin{aligned} D(x) &= F(x-a_0) - F(-a_0) + \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{(-1)^p}{p!} (\mu_p - a_0^p) \sum_{j \geq \frac{1+p}{2}}^{n} \frac{F^{(2j)}(0)}{(2j-p)!} x^{2j-p} \\ &= F(x-a_0) - F(a_0) + \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{(-1)^p}{p!} (\mu_p - a_0^p) \Big(F^{(p)}(x) - F^{(p)}(0) \Big) . \end{aligned}$$

Par conséquent $D(x) = Z_\mu^{a_0}(x) - Z_\mu^{a_0}(0)$ où

$$Z_m^{a_0}(x) := F(x-a_0) + \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{(-1)^p}{p!} (m_p - a_0^p) F^{(p)}(x) . \tag{2.5.16}$$

Etant donné que le produit de convolution peut être simplement exprimé en tant que fonction polynômiale dont les coefficients dépendent uniquement des moments de u, l'équation (2.2.2) peut être simplifiée et transformée en un simple système dont les inconnues sont les moments de la mesure. Dans le but d'introduire ce système, quel que soit $1 \leq k \leq 2n-1$, on définit la fonction

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(\epsilon)}(m_1, \cdots, m_{2n-1}) &:= \frac{\int_{\mathbb{R}} x^k \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(x) + Z_m^{a_0}(x) - Z_m^{a_0}(0)\right)\right] dx}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(x) + Z_m^{a_0}(x) - Z_m^{a_0}(0)\right)\right] dx} \\ &= \frac{\int_{\mathbb{R}} x^k \exp\left[-\frac{2}{\epsilon} W_m^{a_0}(x)\right] dx}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon} W_m^{a_0}(x)\right] dx} \end{aligned} \tag{2.5.17}$$

où le potentiel qui intervient de manière effective dans l'intégrale est défini par $W_m^{a_0}(x) := V(x) + Z_m^{a_0}(x)$. A partir de ces $2n-1$ fonctions qui vont de $\mathbb{R}^{2n-1}$ dans $\mathbb{R}$, on construit la fonction suivante qui va de $\mathbb{R}^{2n-1}$ dans lui-même :

$$\Phi^{(\epsilon)} := (\varphi_1^{(\epsilon)}, \ldots, \varphi_k^{(\epsilon)}, \ldots, \varphi_{2n-1}^{(\epsilon)}). \tag{2.5.18}$$

Par construction, la mesure associée à la densité u est stationnaire si et seulement si le vecteur représentant ses $2n-1$ premiers moments $(\mu_1, \cdots, \mu_{2n-1})$ est un point fixe de l'application $\Phi^{(\epsilon)}$.

On va maintenant prouver l'existence - sous des conditions simples - d'une mesure invariante excentrée dont les $2n-1$ moments sont proches de $a_0, \cdots, a_0^{2n-1}$ respectivement où a_0 est un fond de puits de V. En d'autres termes, on va prouver l'existence d'une mesure invariante excentrée proche de la mesure δ_{a_0}. Pour ce faire, on va prouver qu'il existe un parallélépipède stable par l'application continue $\Phi^{(\epsilon)}$ et qui converge vers le point $(a_0, a_0^2, \cdots, a_0^{2n-1})$ quand ϵ tend vers 0. Comme dans le cas linéaire, on va utiliser un résultat asymptotique lorsque le paramètre ϵ tend vers 0. Ce sera donc à nouveau un résultat valable lorsque le paramètre ϵ est en-deça d'un seuil critique dépendant de V et de F.

Théorème 2.24. *Soit V un potentiel de confinement qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-6) ainsi que (V-10) et F un potentiel d'intéraction qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). Soit a_0 un point où V atteint un minimum local tel que :*

$$V(x) + F(x - a_0) > V(a_0) \quad \textit{pour tout} \quad x \neq a_0 \,. \tag{2.5.19}$$

Soit une famille $(\eta_\epsilon)_\epsilon$ vérifiant $\lim_{\epsilon\to 0} \eta_\epsilon = 0$ et $\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon/\eta_\epsilon = 0$. Sous la condition

$$\sum_{p=0}^{2n-2} \frac{\left|F^{(p+2)}(a_0)\right|}{p!} \, |a_0|^p < \alpha + V''(a_0) \,, \tag{2.5.20}$$

quel que soit $\rho > 0$, la diffusion auto-stabilisante (0.0.5), il existe une mesure invariante excentrée que l'on notera par la suite $u_\epsilon^{a_0}$ satisfaisant, pour ϵ assez petit

$$\left| \int_{\mathbb{R}} x^k u_\epsilon^{a_0}(x) dx - a_0^k \right| \leq \rho \; \eta_\epsilon \quad \textit{pour tout} \quad 1 \leq k \leq 2n-1 \,. \tag{2.5.21}$$

Démonstration. Soit $\lambda > 0$ arbitrairement petit. On définit le parallélépipède

$$\mathcal{C}(\epsilon) := \prod_{p=1}^{2n-1} \Big[a_0^p - p a_0^{p-1} \lambda \eta_\epsilon \,;\, a_0^p + p a_0^{p-1} \lambda \eta_\epsilon \Big].$$

Soit m un élément de $\mathcal{C}(\epsilon)$ alors il existe des coordonnées $(r_p)_{1\leq p\leq 2n-1}$ qui caractérisent m via les équations $m_p = a_0^p + r_p \, \eta_\epsilon$ et $|r_p| \leq p|a_0|^{p-1}\lambda$ pour tout $1 \leq p \leq 2n-1$. D'après (2.5.16) et (2.5.17), on obtient

$$\varphi_k^{(\epsilon)}(m) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x^k e^{-\frac{2}{\epsilon}(V(x)+F(x-a_0))} \exp\Big[-\frac{2\eta_\epsilon}{\epsilon} \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{(-1)^p r_p}{p!} F^{(p)}(x) \Big] dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{2}{\epsilon}(V(x)+F(x-a_0))} \exp\Big[-\frac{2\eta_\epsilon}{\epsilon} \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{(-1)^p r_p}{p!} F^{(p)}(x) \Big] dx} \,.$$

On applique le Lemme A.11 et la Remarque A.13 aux fonctions $U(x) := V(x) + F(x - a_0)$, $f(x) := x^k$ et aux paramètres $\mu_p := r_p$ et $G_p(x) := \frac{(-1)^p}{p!} F^{(p)}(x)$. On

obtient :

$$\varphi_k^{(\epsilon)}(m) = a_0^k - \eta_\epsilon \frac{k a_0^{k-1}}{\alpha + V''(a_0)} \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{(-1)^p r_p}{p!} F^{(p+1)}(a_0) + o(\eta_\epsilon),$$

où le reste $o(\eta_\epsilon)$ tend uniformément vers 0 quand ϵ tend vers 0 par rapport aux coordonnées $(r_p)_p$. Notons que c'est lors de l'application de ce lemme asymptotique que l'on s'est servi de la propriété (2.5.19) puisqu'il fallait que a_0 soit l'unique point où le potentiel effectif $U := V + F(. - a_0)$ réalise son minimum global. Il fallait également que la dérivée seconde du potentiel effectif en a_0 soit strictement positive ce qui est une conséquence de l'inégalité (2.5.20). Par définition du parallélépipède $\mathcal{C}(\epsilon)$, les coordonnées satisfont $|r_p| \leq p|a_0|^{p-1}\lambda$. Ainsi sous la condition (2.5.20),

$$\begin{aligned} \left|\varphi_k^{(\epsilon)}(m) - a_0^k\right| &\leq \eta_\epsilon \lambda \frac{k|a_0|^{k-1}}{\alpha + V''(a_0)} \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{\left|F^{(p+1)}(a_0)\right|}{p!} p|a_0|^{p-1} + o(\eta_\epsilon) \\ &\leq \eta_\epsilon k|a_0|^{k-1}\lambda\xi + o(\eta_\epsilon) \end{aligned}$$

où $\xi \in]0;1[$. Comme cette inégalité est uniforme par rapport aux coordonnées, dès que ϵ est assez petit, on a $|\varphi_k^{(\epsilon)}(m) - a_0^k| \leq k|a_0|^{k-1}\lambda\eta_\epsilon$, ce qui signifie $\Phi^{(\epsilon)}(m) \in \mathcal{C}(\epsilon)$.
Or, $\mathcal{C}(\epsilon)$ est fermé, convexe et borné dans l'espace $\mathbb{R}^{2n-1}$, lequel est de Banach puisque de dimension finie. Ainsi la continuité de l'application $\Phi^{(\epsilon)}$ implique que la fermeture de l'image du parallélépipède $\mathcal{C}(\epsilon)$ est un espace compact.
On peut alors appliquer le théorème de Schauder (Proposition 2.17) et on obtient l'existence d'un point fixe dans le compact pour l'application $\Phi^{(\epsilon)}$. En d'autres termes, il existe $m \in \mathcal{C}(\epsilon)$ telle que la mesure associée à la densité

$$u_{\epsilon,m}(x) = \frac{\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_m(x)\right]}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_m(z)\right] dz} \tag{2.5.22}$$

soit invariante. On termine en prenant $\lambda \leq \min\left\{\frac{\rho}{p|a_0|^{p-1}}\,;\, 1 \leq p \leq 2n-1\right\}$. □

Il n'est pour l'instant pas possible d'établir l'unicité de la mesure invariante excentrée autour de a_0. L'unicité en question sera étudiée dans un prochain chapitre. Par ailleurs, rien ne prouve qu'il n'y a pas de mesures invariantes asymétriques qui ne soient "proches" d'aucun des points critiques de V.
On regarde maintenant de façon plus spécifique ce qu'il se passe au voisinage des points où V réalise son minimum global.

Corollaire 2.25. 1. *Si V réalise son minimum global en un point a_0 qui satisfait* (2.5.20)*, la diffusion* (0.0.5) *admet une mesure invariante excentrée autour de a_0 dès que ϵ est assez petit.*
2. *En particulier, si V est symétrique et possède deux puits distincts a et $-a$, alors dès que ϵ est assez petit, si a satisfait* (2.5.20) *il existe au moins deux mesures invariantes excentrées : au moins une autour de a et au moins une autour de $-a$.*

Démonstration. **1.** Si a_0 est un point critique où V atteint son minimum global, alors $V(x) \geq V(a_0)$ pour tout $x \neq a_0$. Or, $F(x - a_0) > 0$ pour tout $x \neq a_0$. Par conséquent, le point a_0 vérifie bien l'hypothèse (2.5.19) et l'on peut donc appliquer le Théorème 2.24 à condition que (2.5.20) soit vérifiée.
2. Si V est symétrique et possède deux puits distincts a et $-a$, alors V atteint son minimum global en a et en $-a$ et l'on est ramené au point **1** du corollaire. □

On va maintenant préciser le résultat du Théorème 2.24 en se restreignant à un parallélépipède dont l'arête est d'ordre ϵ. Avant de faire ceci, on a besoin d'introduire un système qui apparaît naturellement lorsque l'on recherche précisément le coefficient du premier ordre dans le développement de la taille de l'arête en fonction de ϵ.

Lemme 2.26. *Soit a_0 un point critique de V qui satisfait* (2.5.19) *et* (2.5.20)*. Il existe une unique solution $(\tau_1^0, \cdots, \tau_{2n-1}^0)$ au système suivant, lequel est de Cramer :*

$$\sum_{p=1}^{2n-1} \frac{(-1)^p}{p!}\ F^{(p+1)}(a_0)\tau_p + \frac{\alpha + V''(a_0)}{k a_0^{k-1}}\ \tau_k = \frac{V^{(3)}(a_0)}{4(\alpha + V''(a_0))} - \frac{k-1}{4a_0}\,, \quad (2.5.23)$$

pour $1 \leq k \leq 2n-1$. Et, la solution s'exprime comme suit

$$\tau_k^0 = k a_0^{k-1} \frac{a_0 V^{(3)}(a_0) - (k-1)V''(a_0)}{4a_0 V''(a_0)\,(\alpha + V''(a_0))}, \quad 1 \leq k \leq 2n-1\,.$$

Démonstration. Par la suite, on note I_{2n-1} la matrice unité de dimension $2n-1$ et pour $A \in \mathbb{R}^{2n-1}$, A^{T} représente la transposée du vecteur A. Par ailleurs, dans la preuve, on considèrera la notation suivante : $(x_k)_{1\leq k\leq 2n-1} = (x_1, \ldots, x_{2n-1})$. Le système (2.5.23) peut être réécrit matriciellement. On définit $\mathcal{T} := (\tau_k)^{\mathrm{T}}_{1\leq k\leq 2n-1}$ alors

$$\Big[\,(\alpha + V''(a_0))\,I_{2n-1} + C_1 C_2^{\mathrm{T}}\Big]\mathcal{T} = \left(k a_0^{k-1}\Big(\frac{V^{(3)}(a_0)}{4\alpha + 4V''(a_0)} - \frac{k-1}{4a_0}\Big)\right)^{\mathrm{T}}_{1\leq k\leq 2n-1}$$

où les vecteurs sont définis de la façon suivante : $C_1^{\mathrm{T}} := (k a_0^{k-1})_{1\leq k\leq 2n-1}$ et $C_2^{\mathrm{T}} := \Big(\frac{(-1)^k}{k!} F^{(k+1)}(a_0)\Big)_{1\leq k\leq 2n-1}$. On pose maintenant

$$A := (\alpha + V''(a_0))\,I_{2n-1} + C_1 C_2^{\mathrm{T}}. \quad (2.5.24)$$

On remarque alors $C_1 C_2^{\mathrm{T}} C_1 C_2^{\mathrm{T}} = (C_2^{\mathrm{T}} C_1) C_1 C_2^{\mathrm{T}}$ et

$$C_2^{\mathrm{T}} C_1 \;=\; \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{(-1)^p}{p!} F^{(p+1)}(a_0) p a_0^{p-1} = -\sum_{p=0}^{2n-2} \frac{(-1)^p}{p!} F^{(p+2)}(a_0) a_0^p = -F''(0)\,.$$

Etant donné que $F''(0) = \alpha$, l'on obtient

$$\begin{aligned} A^2 &= (\alpha + V''(a_0))^2 I_{2n-1} + \big(2(\alpha + V''(a_0)) + C_2^{\mathrm{T}} C_1\big) C_1 C_2^{\mathrm{T}} \\ &= (\alpha + V''(a_0))^2 I_{2n-1} + \Big(2(\alpha + V''(a_0)) - F''(0)\Big) C_1 C_2^{\mathrm{T}} \\ &= (\alpha + V''(a_0))^2 I_{2n-1} + \Big(\alpha + 2V''(a_0)\Big) C_1 C_2^{\mathrm{T}} \\ &= (\alpha + 2V''(a_0))A - V''(a_0)\,(\alpha + V''(a_0))\, I_{2n-1}\,. \end{aligned}$$

On en déduit que la matrice A est inversible (c'est-à-dire que le système linéaire (2.5.23) est bien un système de Cramer) et en utilisant (2.5.24) on obtient facilement son inverse :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{V''(a_0)(\alpha + V''(a_0))}\Big((\alpha + 2V''(a_0))I_{2n-1} - A\Big) \\ &= \frac{1}{V''(a_0)(\alpha + V''(a_0))}\left(V''(a_0)I_{2n-1} - C_1 C_2^{\mathrm{T}}\right). \end{aligned}$$

Le système de Cramer (2.5.23) admet ainsi une unique solution qui est la suivante

$$\begin{aligned} \tau_k^0 &= \frac{1}{V''(a_0)(\alpha + V''(a_0))}\left\{ V''(a_0) k a_0^{k-1} \frac{a_0 V^{(3)}(a_0) - (k-1)(\alpha + V''(a_0))}{4a_0\,(\alpha + V''(a_0))} \right. \\ &\quad \left. - k a_0^{k-1} \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{(-1)^p}{p!} F^{(p+1)}(a_0) p a_0^{p-1} \frac{a_0 V^{(3)}(a_0) - (p-1)(\alpha + V''(a_0))}{4a_0\,(\alpha + V''(a_0))} \right\} \\ &= \frac{k a_0^{k-1}}{4a_0 V''(a_0)(\alpha + V''(a_0))^2}\left\{ a_0 V^{(3)}(a_0)\left[V''(a_0) - \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{(-1)^p a_0^{p-1}}{(p-1)!} F^{(p+1)}(a_0)\right]\right. \\ &\quad \left. - (\alpha + V''(a_0))\left[(k-1)V''(a_0) - \sum_{p=2}^{2n-1} \frac{(-1)^p}{(p-2)!} F^{(p+1)}(a_0) a_0^{p-1}\right]\right\} \\ &= k a_0^{k-1} \frac{a_0 V^{(3)}(a_0) - (k-1)V''(a_0)}{4a_0 V''(a_0)(\alpha + V''(a_0))}\,. \end{aligned}$$

En effet, en calculant, on a

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{(-1)^p}{(p-1)!} F^{(p+1)}(a_0) a_0^{p-1} &= -F''(0) = -\alpha \\ \text{et} \quad \sum_{p=2}^{2n-1} \frac{(-1)^p}{(p-2)!} F^{(p+1)}(a_0) a_0^{p-1} &= a_0 F^{(3)}(0) = 0 \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

Le Théorème 2.24 prouve l'existence d'une mesure invariante excentrée autour de a_0 sous deux conditions simples à savoir (2.5.19) et (2.5.20). En se servant

du Lemme 2.26 on va maintenant exhiber l'existence d'une mesure invariante excentrée proche de a_0 sous les mêmes conditions et dont la distance sera d'ordre ϵ. En un sens, on anticipe sur la vitesse de convergence. Toutefois, nous ne faisons que prouver qu'il y a une mesure stationnaire vérifiant cet écart avec δ_{a_0}. En effet, *a priori* il est tout à fait possible que d'autres mesures stationnaires excentrées autour de a_0 ne vérifient pas cette propriété.

Théorème 2.27. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-6) ainsi que (V-10) et un potentiel d'intéraction qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). Soit a_0 un point critique de V qui satisfait* (2.5.19) *et* (2.5.20)*. Alors, quel que soit $\rho > 0$, il existe ϵ_0 tel que $\Phi^{(\epsilon)}$ admette un point fixe $m^{a_0}(\epsilon) \in \mathbb{R}^{2n-1}$ qui vérifie*

$$\left| m_k^{a_0}(\epsilon) - \left(a_0^k - \tau_k^0 \epsilon \right) \right| \leq \rho\epsilon, \quad 1 \leq k \leq 2n-1, \ \epsilon \leq \epsilon_0 \,. \tag{2.5.25}$$

Et par suite, dès que ϵ est assez petit, la diffusion (0.0.5) *admet une mesure stationnaire $u_\epsilon^{a_0}$ qui vérifie*

$$\left| \int_{\mathbb{R}} x^k u_\epsilon^{a_0}(x) dx - \left(a_0^k - \tau_k^0 \epsilon \right) \right| \leq \rho\epsilon, \quad 1 \leq k \leq 2n-1, \ \epsilon \leq \epsilon_0 \,. \tag{2.5.26}$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle du Théorème 2.24. Soit $\lambda > 0$ arbitrairement petit et $\mathcal{C}(\epsilon) := \prod_{p=1}^{2n-1} \Big[a_0^p - (\tau_p^0 + p a_0^{p-1}\lambda)\epsilon \,;\, a_0^p - (\tau_p^0 - p a_0^{p-1}\lambda)\epsilon \Big]$. On prend un élément m dans le parallélépipède $\mathcal{C}(\epsilon)$. Quel que soit $1 \leq p \leq 2n-1$, il existe une coordonnée $\lambda_p \in [-\lambda; \lambda]$ telle que $m_p = a_0^p - (\tau_p^0 + p a_0^{p-1}\lambda_p)\epsilon$. D'après (2.5.16) et (2.5.17), on obtient

$$\varphi_k^{(\epsilon)}(m) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x^k \exp\left[2 \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{(-1)^p F^{(p)}(x)}{p!} (\tau_p^0 + p a_0 x^{p-1} \lambda_p) \right] e^{-\frac{2}{\epsilon}(V(x)+F(x-a_0))} dx}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[2 \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{(-1)^p F^{(p)}(x)}{p!} (\tau_p^0 + p a_0^{p-1} \lambda_p) \right] e^{-\frac{2}{\epsilon}(V(x)+F(x-a_0))} dx}$$

pour tout $1 \leq k \leq 2n-1$. On applique le Lemme A.9 et la remarque A.13 avec les paramètres $U(x) := V(x) + F(x-a_0)$, $\mu_p := \tau_p^0 + p a_0^{p-1}\lambda_p$, $G := 0$ et $f_p(x) := 2\frac{(-1)^p}{p!} F^{(p)}(x)$. D'où

$$\begin{aligned}
\varphi_k^{(\epsilon)}(m) &= a_0^k - \frac{k a_0^{k-2}}{4(\alpha + V''(a_0))^2} \Big[a_0 V^{(3)}(a_0) - (\alpha + V''(a_0)) \Big((k-1) \\
&\qquad + 4a_0 \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{(-1)^p}{p!} (\tau_p^0 + p a_0^{p-1}\lambda_p) F^{(p+1)}(a_0) \Big) \Big] \epsilon + o(\epsilon) \\
&= a_0^k - \frac{1}{\alpha + V''(a_0)} \Big[\frac{k a_0^{k-1} V^{(3)}(a_0)}{4(\alpha + V''(a_0))} - k a_0^{k-1} \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{(-1)^p \tau_p^0}{p!} F^{(p+1)}(a_0) \\
&\qquad - \frac{k(k-1) a_0^{k-2}}{4} - k a_0^{k-1} \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{(-1)^p \lambda_p a_0^{p-1}}{(p-1)!} F^{(p+1)}(a_0) \Big] \epsilon + o(\epsilon) \,.
\end{aligned}$$

Le reste $o(\epsilon)$ tend vers 0 uniformément par rapport aux variables $(\lambda_p)_p$.
On note d_k^ϵ la différence $|\varphi_k^{(\epsilon)}(m) - a_0^k + \tau_k^0\epsilon|$. On calcule cette expression :

$$d_k^\epsilon \leq \left| \frac{ka_0^{k-1}V^{(3)}(a_0)}{4(\alpha + V''(a_0))^2} - \frac{ka_0^{k-1}}{\alpha + V''(a_0)} \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{(-1)^p}{p!} \tau_p^0 F^{(p+1)}(a_0) \right.$$
$$\left. - \frac{k(k-1)a_0^{k-2}}{4(\alpha + V''(a_0))} - \tau_k^0 - \frac{ka_0^{k-1}}{\alpha + V''(a_0)} \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{(-1)^p}{(p-1)!} \lambda_p F^{(p+1)}(a_0) a_0^{p-1} \right| \epsilon + o(\epsilon)\,.$$

En se servant du Lemme 2.26 et en utilisant la condition (2.5.20), on obtient, pour ϵ assez petit :

$$\left|\varphi_k^{(\epsilon)}(m) - a_0^k + \tau_k^0\epsilon\right| \leq \frac{k|a_0|^{k-1}}{\alpha + V''(a_0)} \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{|a_0|^{p-1}}{(p-1)!} |\lambda_p| |F^{(p+1)}(a_0)| \epsilon + o(\epsilon)$$
$$\leq \lambda \frac{k|a_0|^{k-1}}{\alpha + V''(a_0)} \sum_{p=0}^{2n-2} \frac{1}{p!} |F^{(p+2)}(a_0)| |a_0|^p \epsilon + o(\epsilon) < k|a_0|^{k-1}\delta\epsilon\,.$$

En d'autres termes, $\Phi^{(\epsilon)}(m) \in \mathcal{C}(\epsilon)$ lorsque le paramètre ϵ est petit. L'application du théorème de Schauder (Proposition 2.17) permet de prouver l'existence d'un point fixe dans ce compact. Par conséquent, il existe $m \in \mathcal{C}(\epsilon)$ tel que la mesure associée $u_{\epsilon,m}(x)$ définie par (2.5.22) soit invariante. La preuve est achevée en prenant $\lambda < \min\left\{ \frac{\rho}{p|a_0|^{p-1}} \,;\, 1 \leq p \leq 2n-1 \right\}$. □

A nouveau, on peut s'intéresser au cas des puits où V réalise son minimum global ainsi qu'au cas où V est symétrique et a deux puits.

Corollaire 2.28. 1. *Si V réalise son minimum global en un point a_0 qui satisfait* (2.5.20)*, la diffusion* (0.0.5) *admet une mesure invariante excentrée autour de a_0 dont les moments vérifient* (2.5.25) *dès que ϵ est assez petit.*
2. *En particulier, si V est symétrique et possède deux puits distincts a et $-a$ qui satisfont* (2.5.20)*, alors dès que ϵ est assez petit, la diffusion* (0.0.5) *admet au moins deux mesures invariantes excentrées qui satisfont* (2.5.25) *: au moins une autour de a et au moins une autour de $-a$.*

Démonstration. **1.** Si a_0 est un point où V atteint son minimum global, alors $V(x) \geq V(a_0)$ pour tout $x \neq a_0$. Or, $F(x - a_0) > 0$ pour tout $x \neq a_0$. Par conséquent, le point a_0 vérifie bien l'hypothèse (2.5.19) et l'on peut donc appliquer le Théorème 2.27 si a_0 satisfait l'inégalité (2.5.20).
2. Si V est symétrique et possède deux puits distincts a et $-a$, alors V atteint son minimum global en a et en $-a$ et l'on est ramené au point **1** du corollaire. □

Remarque 2.29. 1. *Dans le cas particulier où tous les coefficients de F sont positifs et où $a_0 \geq 0$ c'est-à-dire : $a_0 F^{(p)}(a_0) \geq 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, la condition* (2.5.20) *devient simplement $V''(a_0) > F_0''(2a_0)$ où F_0 est définie par $F_0(x) := F(x) - \frac{\alpha}{2}x^2$.*

2. *Dans le cas encore plus particulier où F' est linéaire, on a : $F(x) = \frac{\alpha}{2}x^2$ et alors* (2.5.20) *est équivalent à la condition $V''(a_0) > 0$. En d'autres termes, on obtient le résultat d'existence présenté dans le cas de l'intéraction linéaire.*
3. *La condition* (2.5.20) *implique la positivité stricte de $V''(a_0)$. Ainsi contrairement au cas où F' est linéaire, seuls les puits de V sont concernés par la condition* (2.5.20).

Il est très important de noter que les résultats d'existence du cas général sont plus faibles que ceux du cas linéaire. En effet, dans le cas linéaire, la condition (2.3.5) est nécessaire au même titre que la condition (2.5.19) l'est dans le cas général toutefois la condition (2.5.20) est uniquement suffisante.

3. CONVERGENCE DES MESURES STATIONNAIRES

Dans ce chapitre, on s'intéresse au comportement des mesures stationnaires (symétriques ou asymétriques) lorsque le paramètre ϵ tend vers 0. Dès à présent et pour tout le reste de l'étude, l'hypothèse (V-7) est satisfaite. En d'autres termes, la fonction V coïncide sur $[a_1; a_{2M+1}]$ avec une fonction analytique $\mathcal{V}$.
Précédemment, on s'est concentré sur les mesures stationnaires dont le moment d'ordre $8q^2$ est fini. On a prouvé que ces mesures étaient de la forme :

$$\begin{aligned} u_\epsilon(x) &= \frac{1}{\lambda(u_\epsilon)} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(\int_0^x F' * u_\epsilon(y)dy + V(x)\right)\right] \\ &= \frac{1}{\lambda(u_\epsilon)} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\Big(F * u_\epsilon(x) - F * u_\epsilon(0) + V(x)\Big)\right] , \\ \text{avec} \quad \lambda(u_\epsilon) &= \int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\Big(F * u_\epsilon(x) - F * u_\epsilon(0) + V(x)\Big)\right] dx \, . \end{aligned}$$

Et inversement, des mesures de cette forme sont stationnaires pour (0.0.5) et leur moment d'ordre $8q^2$ est fini.

Pour commencer l'étude asymptotique des mesures stationnaires, une attention particulière sera déjà portée sur le cas où la fonction d'intéraction F' est linéaire. D'abord, en supposant que V est symétrique, on va prouver que l'unique mesure invariante symétrique converge vers une somme finie de mesures de Dirac. Une étude sera d'ailleurs fournie quant au cardinal du support de la mesure limite suivant la convexité ou non de V''.
Ensuite, la convergence des mesures stationnaires excentrées autour des points critiques (on sait d'après le Corollaire 2.25 qu'il en existe au moins une) sera effectuée. Pour conclure l'étude du cas où F' est linéaire, on prouvera que si V est symétrique et si V'' est convexe, il y a exactement trois valeurs d'adhérence possibles pour les mesures stationnaires lorsque ϵ tend vers 0.

On abordera ensuite le cas général en supposant que la famille $(\mu_{2n}(\epsilon))_{\epsilon>0}$ est bornée où $\mu_{2n}(\epsilon) := \int_{\mathbb{R}} x^{2n} u_\epsilon(x)dx$ est le moment d'ordre $2n = \deg(F)$. On prouvera que cette condition est réalisable sous des hypothèses simples portant sur V. A partir de la bornitude de ces moments, on montrera que toute valeur d'adhérence d'une famille de mesures stationnaires $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ est une somme finie de mesures de Dirac. Des propriétés simples seront ensuite énoncées concernant ces valeurs d'adhérence.
Puis, on spécifiera le comportement asymptotique pour les familles des mesures stationnaires excentrées autour d'un point critique en prouvant que la limite est

la mesure de Dirac autour de ce point critique. On fera de même avec les mesures stationnaires asymétriques et non excentrées autour d'un point critique lorsque V'' et F'' sont convexes. On donnera des exemples pour lesquels les seules mesures asymétriques limites sont des mesures de Dirac chargeant un puits de V.
Pour terminer, on spécifiera le comportement asymptotique des mesures stationnaires symétriques lorsque V est symétrique. En particulier, on prouvera que si V'' et F'' sont convexes, alors il y a une unique valeur d'adhérence et celle-ci charge soit un soit deux points. Afin de prouver que la convexité des fonctions V'' et F'' n'est pas anodine, on donnera deux exemples où le degré de F est supérieur ou égal à 4 pour lesquels il y a strictement plus de deux points limites ; l'un avec V'' convexe et F'' non convexe et l'autre avec V'' non convexe et F'' convexe ; bien que V possède deux puits seulement.

3.1 Convergence de u_ϵ quand l'intéraction F' est linéaire.

Pour commencer, analysons la convergence des différentes mesures stationnaires quand la fonction d'intéraction F' est linéaire : $F(x) = \frac{\alpha}{2}x^2$ avec $\alpha > 0$. L'expression analytique de u_ϵ peut être paramétrée facilement en fonction du premier moment de la loi stationnaire. Dans le cas où le potentiel V est symétrique, il y a une mesure invariante symétrique et elle est unique. On la note u_ϵ^0. Elle s'exprime ainsi :

$$u_\epsilon^0(x) = \frac{\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_0(x)\right]}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_0(y)\right] dy} \quad \text{avec} \quad W_0(x) := V(x) + \frac{\alpha}{2}x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}\,. \quad (3.1.1)$$

Le comportement asymptotique de l'expression précédente peut être obtenu en utilisant directement la méthode de Laplace classique. Ce travail sera effectué dans la Sous-Section 3.1.1. Si ε est petit, en ne supposant plus que le potentiel V est symétrique, quel que soit le point critique a_0 qui vérifie (2.3.5), la Proposition 2.4 démontre que pour tout $\delta > 0$ arbitrairement petit, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_0$, la difusion auto-stabilisante (0.0.5) admet au moins une mesure stationnaire excentrée de densité $u_\epsilon^{a_0}$ par rapport à la mesure de Lebesgue définie par

$$u_\epsilon^{a_0}(x) = \frac{\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(x) + \alpha\frac{x^2}{2} - \alpha m_\epsilon^{a_0} x\right)\right]}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(y) + \alpha\frac{y^2}{2} - \alpha m_\epsilon^{a_0} y\right)\right] dy} \quad (3.1.2)$$

et dont le premier moment $m_\epsilon^{a_0}$ vérifie

$$\left| m_\epsilon^{a_0} - a_0 + \frac{V^{(3)}(a_0)}{4V''(a_0)\left(\alpha + V''(a_0)\right)}\,\epsilon \right| \leq \delta\,\epsilon, \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0\,. \quad (3.1.3)$$

Plus particulièrement, si le potentiel V est symétrique et a deux puits, quel que soit $\delta > 0$, il existe un seuil critique pour ϵ en-deça duquel il existe deux mesures

invariantes excentrées u_ϵ^+ et u_ϵ^- définies par

$$u_\epsilon^\pm(x) = \frac{\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(x)+\alpha\frac{x^2}{2}-\alpha m_\epsilon^\pm x\right)\right]}{\int_{\mathbb{R}}\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(y)+\alpha\frac{y^2}{2}-\alpha m_\epsilon^\pm y\right)\right]dy} \tag{3.1.4}$$

$$\text{et}\quad \left|m_\epsilon^\pm-(\pm a)+\frac{V^{(3)}(\pm a)}{4V''(a)\left(\alpha+V''(a)\right)}\,\epsilon\right| \le \delta\,\epsilon,\quad \forall\varepsilon\le\varepsilon_0\,. \tag{3.1.5}$$

L'équation (3.1.3) permet de développer, dans la Sous-Section 3.1.2, l'analyse asymptotique de la loi invariante dans le cas où la mesure invariante en question est excentrée autour du point critique a_0.

3.1.1 Convergence de la mesure invariante symétrique.

Pour qu'une telle mesure symétrique existe, il est nécessaire de supposer que le potentiel de confinement V satisfait l'hypothèse (V-8). On rappelle que son puits le plus à gauche est $-a$ et son puits le plus à droite est a. D'après (3.1.1), la densité est directement reliée au potentiel qui intervient de manière effective dans l'exponentielle à savoir W_0 où l'on a $W_0(x) := V(x) + \frac{\alpha}{2}x^2$.
Le potentiel W_0 admet un nombre fini de points critiques. En effet, d'après l'hypothèse (V-4), on sait que $W_0'' > 0$ sur $[-a;a]^c$. Et, V coïncide avec une fonction analytique $\mathcal{V}$ sur l'intervalle compact $[-a;a]$. D'où W_0' admet un nombre fini de zéros sur $\mathbb{R}$. Si tel n'était pas le cas, la fonction W_0' serait constante et égale à 0 sur tout l'intervalle $[-a,a]$ ce qui implique immédiatement $W_0'' = 0$. En particulier, on aurait $W_0''(a) = 0$ ce qui est impossible étant donné que $W_0''(a) = V''(a) + \alpha > 0$. On en déduit que W_0' admet bien un nombre fini de zéros sur $\mathbb{R}$.
La mesure symétrique notée u_ε^0 peut alors être développée simplement en fonction des points critiques où W_0 réalise son minimum global.

Théorème 3.1. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-8) ainsi que (V-10). Soient $A_1 < \ldots < A_r$ les r points critiques où W_0 atteint son minimum global et $\omega_0 := \min_{z\in\mathbb{R}} W_0(z)$. Pour tout i, on introduit l'entier $k_0(i) := \min\{k \in \mathbb{N} \,|\, W_0^{(2k)}(A_i) > 0\}$. Puis, l'on définit $k_0 := \max\{k_0(i)\,,\, 1\le i\le r\}$. Enfin, on se donne $I := \{1\le i\le r \mid k_0(i) = k_0\}$. Lorsque $\varepsilon\to 0$, la mesure u_ϵ^0 définie par* (3.1.1) *converge étroitement vers la mesure discrète suivante*

$$u_0^0 = \frac{\sum_{i\in I}\left(W_0^{(2k_0)}(A_i)\right)^{-\frac{1}{2k_0}}\delta_{A_i}}{\sum_{j\in I}\left(W_0^{(2k_0)}(A_j)\right)^{-\frac{1}{2k_0}}}\,. \tag{3.1.6}$$

Démonstration. Soit f une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$. On pose $A_0 := -\infty$ et $A_{r+1} := +\infty$. Alors, pour tout $2\le i\le r-1$, on applique le Lemme A.3 à la fonction $U := W_0$ sur l'intervalle d'intégration $J_i := [\frac{A_{i-1}+A_i}{2}; \frac{A_i+A_{i+1}}{2}]$. On obtient

l'équivalence asymptotique suivante quand $\varepsilon \to 0$:

$$e^{\frac{2}{\epsilon}\omega_0}\int_{J_i} f(x)e^{-\frac{2W_0(x)}{\epsilon}}dx = \frac{f(A_i)}{k_0(i)}\Gamma\left(\frac{1}{2k_0(i)}\right)\left(\frac{\epsilon(2k_0(i))!}{2W_0^{(2k_0(i))}(A_i)}\right)^{\frac{1}{2k_0(i)}}(1+o(1)).$$

L'équivalence est vraie également sur les intervalles J_1 et J_r. En effet, on peut écrire $J_1 = J_1^1 \cup J_1^2$ où J_1^1 est borné et contient A_1 et où $W_0(x) \geq x^2$ pour tout $x \in J_1^2$. On fait de même avec J_r. Ainsi en posant $\mathcal{M} := e^{\frac{2}{\epsilon}\omega_0}\int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-\frac{2W_0(t)}{\epsilon}}dt$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \sum_{i=1}^{r}\frac{f(A_i)}{k_0(i)}\Gamma\left(\frac{1}{2k_0(i)}\right)\left(\frac{\epsilon(2k_0(i))!}{2W_0^{(2k_0(i))}(A_i)}\right)^{\frac{1}{2k_0(i)}}(1+o(1)) \\
&= \sum_{i\in I}\frac{f(A_i)}{k_0}\Gamma\left(\frac{1}{2k_0}\right)\left(\frac{\epsilon(2k_0)!}{2W_0^{(2k_0)}(A_i)}\right)^{\frac{1}{2k_0}}(1+o(1)) \\
&= C(k_0)\epsilon^{\frac{1}{2k_0}}\sum_{i\in I}\frac{f(A_i)}{\left(W_0^{(2k_0)}(A_i)\right)^{\frac{1}{2k_0}}}\,(1+o(1)) \qquad (3.1.7)
\end{aligned}$$

avec $C(k_0) := \frac{1}{k_0}\Gamma\left(\frac{1}{2k_0}\right)\left(\frac{(2k_0)!}{2}\right)^{\frac{1}{2k_0}}$. En appliquant le précédent résultat asymptotique (3.1.7) d'une part à la fonction f et d'autre part à la fonction constante égale à 1, on a l'estimation suivante du quotient des deux :

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} f(t)\exp\left[-\frac{2W_0(t)}{\epsilon}\right]dt}{\int_{\mathbb{R}}\exp\left[-\frac{2W_0(t)}{\epsilon}\right]dt} = \frac{\sum_{i\in I}\left(W_0^{(2k_0)}(A_i)\right)^{-\frac{1}{2k_0}}f(A_i)}{\sum_{j\in I}\left(W_0^{(2k_0)}(A_j)\right)^{-\frac{1}{2k_0}}}(1+o(1)) \qquad (3.1.8)$$

ce qui se traduit par la convergence étroite de u_ϵ^0 vers u_0^0. □

Si V est un potentiel symétrique à double puits, l'on s'attend naturellement à ce que la mesure de Dirac u_0^0 charge exactement deux points. On s'intéresse maintenant à la géométrie de W_0 et en particulier au nombre de ses puits. En effet, ces derniers sont liés au nombre de points chargés par la mesure u_0^0. Rappelons que l'on note r ce nombre de points.

Proposition 3.2. *Soit un potentiel V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-8) ainsi que (V-10) tel que V'' soit convexe, alors la mesure discrète u_0^0 charge soit un soit deux points c'est-à-dire $r = 1$ ou $r = 2$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. On suppose que le support de la mesure u_0^0 contient trois éléments ou plus. D'après le Théorème 3.1, ces éléments correspondent à des points critiques où W_0 atteint son minimum global (et donc un minimum local). On en déduit que W_0 admet au moins deux points critiques où il réalise des maxima locaux. Par conséquent, W_0 admet au moins cinq points critiques. On applique le théorème de Rolle à la fonction W_0' et l'on en déduit que W_0'' admet quatre zéros ce qui est impossible vu que $W_0^{(4)} = V^{(4)} \geq 0$. □

On remarquera que la condition de convexité de V'' était déjà apparue dans le chapitre sur l'existence des mesures stationnaires. En effet, dans le Théorème 2.8, si F' est linéaire et si le potentiel de confinement V est symétrique et de dérivée seconde convexe, la diffusion (0.0.5) admet exactement trois mesures stationnaires dont le moment d'ordre $8q^2$ est fini.
On peut se demander naturellement ce qu'il se produit lorsque V'' n'est pas convexe, notamment si le résultat de la Proposition 3.2 reste vrai. En d'autres termes, on se demande s'il existe $\alpha > 0$ et un potentiel V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-10) (c'est-à-dire qui est de plus symétrique à double puits) pour lesquels la mesure associée u_0^0 possède au moins trois points dans son support.

Proposition 3.3. *Soit $p_0 \in [0;1[$ et $r \geq 1$. On introduit*
- *Une mesure de probabilité discrète $(p_i)_{1\leq i\leq r} \in]0;1[^r$ satisfaisant $p_1 + \cdots + p_r = 1 - p_0$,*
- *Une famille de points $(A_i)_{1\leq i\leq r}$ avec $0 < A_1 < \cdots < A_r$.*

Il existe un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-10) et une constante positive α tels que la mesure u_0^0 - associée à V et à l'intéraction linéaire $F'(x) := \alpha x$ - soit donnée par

$$u_0^0 = p_0\delta_0 + \sum_{i=1}^{r} \frac{p_i}{2} \left(\delta_{A_i} + \delta_{-A_i}\right) .$$

Démonstration. **Étape 1.** Définissons la fonction W comme suit :

$$W(x) := \Big(C + \xi(x^2)^2\Big)^2 \prod_{i=1}^{r} \left(x^2 - A_i^2\right)^2 \quad \text{si} \quad p_0 = 0, \tag{3.1.9}$$

$$W(x) := x^2\Big(C + \xi(x^2)^2\Big)^2 \prod_{i=1}^{r} \left(x^2 - A_i^2\right)^2 \quad \text{si} \quad p_0 \neq 0, \tag{3.1.10}$$

où C est une constante positive et ξ une fonction polynômiale. C et ξ seront précisées par la suite. Par construction, la fonction W atteint son minimum global aux points A_i (ainsi qu'en 0 dans le second cas). En utilisant (3.1.1), on introduit $V(x) := W(x) - W(0) - \frac{\alpha}{2}x^2$. Le Théoreme 3.1 nous dit que la mesure invariante symétrique associée à V et F converge vers une probabilité discrète dont le support est $\{\pm A_i, 1 \leq i \leq r\}$ si $p_0 = 0$ mais $\{0\} \cup \{\pm A_i, 1 \leq i \leq r\}$ si $p_0 \neq 0$.
On peut également évaluer littéralement le poids de chacun des éléments du support en se servant du Théorème 3.1. Pour commencer, on remarque que la dérivée seconde en chacun des minima globaux est strictement positive ce qui se traduit

par $k_0 = 1$. Plus précisément, la dérivée seconde de W satisfait

$$W''(A_i) = 8A_i^2\Big(C + \xi(A_i^2)^2\Big)^2 \prod_{j=1, j\neq i}^{r} \big(A_i^2 - A_j^2\big)^2 \quad \text{si} \quad p_0 = 0\,,$$

$$W''(A_i) = 8A_i^4\Big(C + \xi(A_i^2)^2\Big)^2 \prod_{j=1, j\neq i}^{r} \big(A_i^2 - A_j^2\big)^2 \quad \text{si} \quad p_0 \neq 0\,,$$

$$\text{et} \quad W''(0) = 2\Big(C + \xi(0)^2\Big)^2 \prod_{j=1}^{r} A_j^4 \quad \text{si} \quad p_0 \neq 0\,.$$

D'après l'équation (3.1.6), on sait que $\sqrt{\frac{W''(A_k)}{W''(A_i)}} = \frac{p_i}{p_k}$ si $i \neq 0$ et $\frac{2p_0}{p_i} = \sqrt{\frac{W''(A_i)}{W''(0)}}$ si $p_0 \neq 0$. D'où, si $p_0 = 0$,

$$\frac{p_i}{p_k} = \sqrt{\frac{W''(A_k)}{W''(A_i)}} = \frac{A_k\Big(C + \xi(A_k^2)^2\Big)\prod_{j=1, j\neq k}^{r}\big|A_k^2 - A_j^2\big|}{A_i\Big(C + \xi(A_i^2)^2\Big)\prod_{j=1, j\neq i}^{r}\big|A_i^2 - A_j^2\big|}\,, \tag{3.1.11}$$

$$\text{et} \quad \frac{2p_0}{p_i} = \sqrt{\frac{W''(A_i)}{W''(0)}} = 2\frac{C + \xi(A_i^2)^2}{C + \xi(0)^2} \prod_{j=1, j\neq i}^{r} \left|1 - \frac{A_i^2}{A_j^2}\right| \quad \text{si} \quad p_0 \neq 0\,. \tag{3.1.12}$$

Étape 2. Caractérisons maintenant la fonction polynômiale ξ.
Étape 2.1. Premier cas : $p_0 = 0$. On choisit ξ tel que $\xi(A_r^2) := 1$. Alors (3.1.11) fournit

$$\frac{C + \xi(A_k^2)^2}{C + 1} = \eta_k := \frac{A_r p_r}{A_k p_k} \prod_{j=1, j\neq k}^{r-1} \left|\frac{A_r^2 - A_j^2}{A_k^2 - A_j^2}\right|\,. \tag{3.1.13}$$

Posons $C := \inf\{\eta_k,\, 1 \leq k \leq r\} > 0$. Ceci implique $\eta_k(C+1) - C \geq C^2 > 0$. Par conséquent, l'équation (3.1.13) devient

$$\xi(A_k^2) = \sqrt{(C+1)\eta_k - C}, \quad \text{pour tout} \quad 1 \leq k \leq r\,.$$

Finalement, en s'inspirant du polynôme de Lagrange, il suffit de choisir la fonction polynômiale suivante (qui vérifie (3.1.13)) :

$$\xi(x) := \sum_{k=1}^{r} \left(\prod_{j=1, j\neq k}^{r} \frac{x - A_j^2}{A_k^2 - A_j^2}\right) \sqrt{(C+1)\eta_k - C}\,.$$

Étape 2.2. Second cas : $p_0 \neq 0$. Procédons de la même façon que dans l'Étape 2.1. On construit une fonction polynômiale ξ qui satisfait (3.1.12). D'abord, on impose $\xi(0) := 1$ et de cela, on définit

$$\eta_i := \frac{p_0}{p_i} \prod_{j=1, j\neq i}^{r} \left|\frac{A_j^2}{A_j^2 - A_i^2}\right|\,.$$

Pour $C := \inf\{\eta_i,\, 1 \leq i \leq r\}$, on a à nouveau $\eta_i(C+1) - C \geq C^2 > 0$. Toujours en s'inspirant du polynôme de Lagrange, on choisit la fonction suivante :

$$\xi(x) := \prod_{j=1}^{r} \left(1 - \frac{x}{A_j^2}\right) + \sum_{i=1}^{r} \frac{x}{A_i^2} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{r} \frac{x - A_j^2}{A_i^2 - A_j^2} \right) \sqrt{(C+1)\eta_i - C}\,.$$

Ainsi choisies dans les Étapes 2.1 et 2.2, C et ξ sont telles que la mesure stationnaire symétrique converge vers $p_0\delta_0 + \sum_{i=1}^{r} \frac{p_i}{2} \left(\delta_{A_i} + \delta_{-A_i}\right)$ lorsque ϵ tend vers 0.

Étape 3. Il reste encore à prouver que les conditions (V-1)–(V-10) sont satisfaites par la fonction V telle que définie dans l'Étape 1. Seules deux hypothèses ne sont pas immédiates. D'abord, il faut prouver que V a exactement trois points critiques : 0 ainsi que a et $-a$. Et, il faut également avoir $V''(0) < 0$ ainsi que $V''(a) > 0$.

Comme la fonction W définie par (3.1.9) et (3.1.10) est une fonction polynômiale paire, la quantité $\rho(x) := \frac{W'(x)}{x}$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ (y compris en 0 en prolongeant par continuité). De plus, ρ est une fonction polynômiale paire tendant vers $+\infty$ lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$. D'où il existe $R > 0$ tel que ρ soit strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; -R]$ et strictement croissante sur $[R; +\infty[$. On définit maintenant $\alpha' := \sup_{z\in[-R;R]} \rho(z)$. Alors, quel que soit $\alpha > \alpha'$, l'équation $\rho(z) = \alpha$ admet exactement deux solutions. Ceci implique donc l'existence d'exactement trois solutions à l'équation $x\rho(x) = \alpha x$ c'est-à-dire à l'équation $V'(x) = 0$. Ainsi la condition (V-9) est bien remplie. On note $a(\alpha)$ la solution strictement positive.

Il reste à prouver que l'on a $V''(0) < 0$ et $V''(a(\alpha)) > 0$ mais aussi $V''(x) > 0$ pour tout $x \notin]-a(\alpha); a(\alpha)[$ (à savoir la seconde partie de la condition (V-4)). Par définition, $V''(0) = W''(0) - \alpha$. Ainsi il suffit de prendre $\alpha > W''(0)$. On ne peut faire de même avec $W''(a(\alpha))$ car $a(\alpha)$ dépend de α. Par définition, W est une fonction polynômiale paire de degré $12r - 8$ si $p_0 = 0$ et de degré $12r + 2$ si $p_0 \neq 0$. On peut donc écrire

$$W(x) = \lambda x^{2l} + \mathcal{P}(x)$$

où $\lambda > 0$, $l \geq 2$ et $\mathcal{P}$ est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à $2l-2$. Par conséquent, l'équation $\rho(a(\alpha)) = \alpha$ implique l'équivalence suivante lorsque α tend vers l'infini : $a(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{2l\lambda}\right)^{\frac{1}{2l-2}} (1 + o(1))$. Ainsi $W''(a(\alpha)) = 2l\lambda\,(2l-1)\,\frac{\alpha}{2l\lambda} + o\,(\alpha) = (2l-1)\,\alpha + o(\alpha) > \alpha$ dès que α est assez grand vu que $l \geq 2$.

En utilisant à nouveau la fonction polynômiale $\mathcal{P}$, on peut écrire :

$$W^{(3)}(x) \geq 2l(2l-1)(2l-2)x^{2l-3} - Cx^{2l-5}$$

pour tout $x \geq 1$ où $C > 0$ est une constante qui ne dépend que de la fonction $\mathcal{P}$. Ainsi, pour $a(\alpha) \geq 1$ (ce qui est possible lorsque α assez grand), quel que soit $x \geq a(\alpha)$, on a

$$W^{(3)}(x) \geq x^{2l-5} \left(2l(2l-1)(2l-2)a(\alpha)^2 - C\right).$$

Par conséquent, pour α assez grand, la fonction V'' est croissante sur $[a(\alpha);+\infty[$ ce qui implique $V''(x) > 0$ pour tout $x \notin]-a(\alpha);a(\alpha)[$. Ceci achève la preuve. □

3.1.2 Convergence des mesures excentrées

Dans la sous-section précédente, l'analyse de l'unique mesure invariante symétrique u_ε^0 a été étudiée lorsque $\varepsilon \to 0$ dans le cas où le potentiel V était symétrique. Or, on a prouvé dans la Proposition 2.4 que pour pour $\delta > 0$, lorsque ϵ est assez petit, il existe une mesure invariante excentrée autour de chacun des points critiques a_0 satisfaisant

$$V(x) - V(a_0) + \frac{\alpha}{2}(x-a_0)^2 > 0 \quad \text{pour tout } x \neq a_0 \quad \text{et} \quad \alpha + V''(a_0) > 0\,.$$

Et, cette mesure invariante excentrée vérifie (3.1.2) et (3.1.3).
Plus particulièrement, si V vérifie de plus les hypothèses (V-8) et (V-9), quel que soit $\delta > 0$, en-deça d'un certain seuil critique ϵ_δ, il existe deux mesures invariantes excentrées u_ϵ^+ et u_ϵ^- définies par (3.1.4) et (3.1.5).
On va maintenant décrire le comportement asymptotique des mesures excentrées $u_\epsilon^{a_0}$. La propriété sur laquelle se fonde l'étude est la suivante : quel que soit $\delta > 0$, il existe $\epsilon_0 > 0$ assez petit tel que pour tout $\epsilon < \epsilon_0$

$$\left| m_\epsilon^{a_0} - a_0 + \frac{V^{(3)}(a_0)}{4V''(a_0)\,(\alpha + V''(a_0))}\,\epsilon \right| \leq \delta\epsilon, \quad \varepsilon \leq \varepsilon_0 \tag{3.1.14}$$

où $m_\epsilon^{a_0}$ est le moment d'ordre 1 d'une mesure invariante excentrée autour de a_0 c'est-à-dire l'unique paramètre dont dépend $u_\epsilon^{a_0}$. Remarquons qu'on ne demande rien quant à une éventuelle convexité de V''. On ne demande pas non plus la moindre unicité quant à la mesure invariante excentrée autour de a_0. Qui plus est, on ne suppose pas par la suite que l'on est dans le cadre de la Proposition 2.4. On suppose uniquement que l'on dispose de l'inégalité (3.1.14).

Théorème 3.4. *La mesure invariante $u_\epsilon^{a_0}$ définie par* (3.1.2) *et* (3.1.3) *converge étroitement vers δ_{a_0} quand ϵ tend vers* 0.

Démonstration. On définit $W_\epsilon^{a_0}(x) := V(x) + \frac{\alpha}{2}x^2 - \alpha m_\epsilon^{a_0} x$. Soit f une fonction continue, bornée et positive sur $\mathbb{R}$ dont le maximum est noté $M := \sup_{z\in\mathbb{R}} f(z)$. D'après l'égalité (3.1.2), on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) u_\epsilon^{a_0}(x)dx = \frac{\int_{\mathbb{R}} f(x)\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon^{a_0}(x)\right]dx}{\int_{\mathbb{R}}\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon^{a_0}(x)\right]dx}\,.$$

On introduit $U(y) := V(y) + \frac{\alpha}{2}y^2 - \alpha a_0 y$. D'après l'inégalité (3.1.14), pour ε assez petit, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon^{a_0}(y)\right]dy \quad &\leq \quad \int_{\mathbb{R}} \xi^+(y)\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}U(y)\right]dy \\ \text{où} \quad \xi^+(y) \quad &:= \quad \exp\left\{-\frac{\alpha V^{(3)}(a_0)}{2V''(a_0)\,(\alpha+V''(a_0))}y + 2\alpha\delta\,|y|\right\},\end{aligned}$$

δ étant un réel positif arbitrairement petit. D'après le Lemme A.9, lorsque ϵ tend vers 0, on a le résultat asymptotique suivant :

$$\int_{\mathbb{R}} \xi^+(y) \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}U(y)\right] dy = \sqrt{\frac{\pi\epsilon}{\alpha + V''(a_0)}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}U(a)\right] \xi^+(a_0)(1+o(1))\,.$$

On peut obtenir une minoration par des arguments similaires en remplaçant $\xi^+(y)$ par $\xi^-(y)$ où

$$\xi^-(y) := \exp\left\{-\frac{\alpha V^{(3)}(a_0)}{2V''(a_0)\left(\alpha + V''(a_0)\right)} y - 2\alpha\delta\,|y|\right\}.$$

Par conséquent, pour tout $\eta > 1$, il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que

$$\frac{1}{\eta}\xi^-(a_0) \leq \sqrt{\frac{U''(a_0)}{\pi\epsilon}}\; e^{\frac{2U(a_0)}{\epsilon}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon^{a_0}(x)} dx \leq \eta\,\xi^+(a_0)\,, \tag{3.1.15}$$

pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_1$. De la même manière, il existe $\varepsilon_2 > 0$ tel que

$$\frac{1}{\eta} f(a_0)\xi^-(a_0) \leq \sqrt{\frac{U''(a_0)}{\pi\epsilon}}\; e^{\frac{2U(a_0)}{\epsilon}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon^{a_0}(x)} dx \leq \eta f(a_0)\xi^+(a_0), \tag{3.1.16}$$

pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_2$. En prenant le quotient de (3.1.16) par (3.1.15), on obtient immédiatement :

$$\frac{1}{\eta^2} f(a_0) \exp\left[-4\alpha a_0 \delta\right] \leq \int_{\mathbb{R}} f(x) u_\epsilon^{a_0}(x) dx \leq \eta^2 f(a_0) \exp\left[4\alpha a_0 \delta\right],$$

pour tout $\varepsilon \leq \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. δ est arbitrairement petit et η est arbitrairement proche de 1, donc on en déduit la convergence de $\int_{\mathbb{R}} f(x) u_\epsilon^{a_0}(x) dx$ vers $f(a_0)$. □

Comme précédemment, on peut regarder le cas particulier où le potentiel V est symétrique et possède deux puits a et $-a$.

Corollaire 3.5. *Si le potentiel V vérifie les hypothèses (V-1)–(V-10) c'est-à-dire qu'il est symétrique et possède deux puits, la mesure invariante u_ϵ^+ (respectivement u_ϵ^-) définie par* (3.1.2) *et* (3.1.3) *converge étroitement vers δ_a (respectivement vers δ_{-a}) quand ϵ tend vers* 0.

Démonstration. Comme V atteint son minimum global en a, $V(x) \geq V(a)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ d'où $V(x) - V(a) + F(x-a) > 0$ pour tout $x \neq a$. De plus, $V''(a) > 0$ donc $\alpha + V''(a) > 0$. On peut donc appliquer le Théorème 3.4. □

3.1.3 L'ensemble des mesures limites

Dans le cas particulier où le potentiel V est symétrique et a exactement deux puits a et $-a$, lorsque V'' est convexe, on peut décrire avec exactitude l'ensemble des mesures stationnaires associées à (0.0.5) à ϵ fixé lorsque celui-ci est assez petit. En effet, en-dessous d'un seuil critique, le Théorème 2.8 précise qu'il y a exactement trois mesures invariantes.
On se demande ce qu'il se produit lorsque ϵ tend vers 0. Commençons par un résultat préliminaire :

Lemme 3.6. *Soit un potentiel de confinement V qui satisfait les hypothèses (V-1)–(V-10). On suppose de plus que V'' est une fonction convexe. Alors, il existe un unique réel $x_0 \geq 0$ tel que $V'(x_0) = -\alpha x_0$ et $\alpha + V''(x_0) \geq 0$. De plus, l'inégalité $\alpha + V''(0) \geq 0$ est équivalente à $x_0 = 0$.*

Démonstration. Comme V'' est une fonction symétrique et convexe, on trouve $\vartheta = -V''(0)$ où ϑ est défini par (0.0.7). Soit χ la fonction définie par $\chi(x) := V'(x) + \alpha x$. On distingue deux cas différents :
Premier cas. Si $\alpha \geq -V''(0)$, la convexité de V'' implique $\alpha + V''(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$. Par conséquent, 0 est l'unique solution positive de l'équation $V'(x) + \alpha x = 0$. De plus, 0 vérifie bien $\alpha + V''(0) \geq 0$.
Second cas. Si $\alpha < -V''(0)$, la fonction χ admet au plus trois zéros vu qu'elle est impaire et que sa dérivée est convexe. Etant donné que $\chi(0) = 0$, il existe au plus un zéro strictement positif. L'inégalité $\alpha + V''(0) < 0$ implique la stricte décroissance de χ sur un intervalle $[0; \tau]$ puis sa stricte croissance sur $[\tau; +\infty[$. De plus, $\lim_{x\to+\infty} \chi(x) = +\infty$ ce qui permet de conclure sur l'existence d'un unique zéro strictement positif, lequel vérifie bien $\alpha + V''(x_0) \geq 0$ puisqu'il se trouve sur l'intervalle $]\tau; +\infty[$. □

A partir de là, on peut prouver la tiercéïté des mesures limites.

Proposition 3.7. *Soit un potentiel de confinement V qui satisfait les hypothèses (V-1)–(V-10). On suppose de plus que V'' est une fonction convexe. Alors la famille des mesures stationnaires admet exactement trois valeurs d'adhérence quand ϵ tend vers 0. Deux sont asymétriques : δ_a et δ_{-a}. La troisième est symétrique et il s'agit de $\frac{1}{2}\delta_{x_0} + \frac{1}{2}\delta_{-x_0}$ où x_0 a été introduit dans le Lemme 3.6.*

Démonstration. D'après le Théorème 2.8, comme V est symétrique à double puits et comme V'' est convexe, il existe exactement trois mesures invariantes pour l'équation non-linéaire (0.0.5) dès que ε est assez petit. Ces mesures sont u_ϵ^0 (définie par (3.1.1)) ainsi que u_ϵ^+ et u_ϵ^- définies par (3.1.2).
1) Le Théorème 3.1 prouve la convergence de u_ϵ^0 vers une mesure de probabilité discrète u_0^0 définie par (3.1.6). Vu que V'' est convexe, le support de cette probabilité discrète contient soit un soit deux éléments comme le prouve la Proposition 3.2. Et, les éléments correspondent aux points critiques où le potentiel $W_0(x) := V(x) + \frac{\alpha}{2}x^2$ atteint son minimum global. Or, on sait que W_0 atteint son minimum global en un unique point sur $\mathbb{R}_+$ et il s'agit de x_0 d'après le Lemme 3.6. Si $\alpha \geq -V''(0)$, $x_0 = 0$ ce qui signifie $r = 1$ c'est-à-dire $u_0^0 = \delta_0$. Si $\alpha < -V''(0)$, $x_0 > 0$ ce qui signifie $r = 2$ c'est-à-dire $u_0^0 = \frac{1}{2}\delta_{x_0} + \frac{1}{2}\delta_{-x_0}$ vu que u_0^0 est symétrique.
2) Le Corollaire 3.5 prouve que $u_\epsilon^\pm$ converge vers $\delta_{\pm a}$. □

3.2 Le cas général

Dans cette section, on va analyser le comportement asymptotique pour ϵ tendant vers 0 des mesures invariantes u_ϵ pour la diffusion auto-stabilisante (0.0.5)

dans le cas général où F n'est pas réduit à un polynôme de degré 2. Rappelons que le Lemme 2.2 fournit l'expression suivante :

$$u_\epsilon(x) = \frac{\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon(x)\right]}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon(y)\right] dy} \quad \text{avec} \quad W_\epsilon := V + F * u_\epsilon - F * u_\epsilon(0)\,. \tag{3.2.1}$$

Comme F est une fonction polynômiale de degré $2n$, la fonction W_ϵ introduite plus tôt peut être développée comme suit

$$W_\epsilon(x) = V(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\omega_k(\epsilon) \quad \text{avec} \quad \omega_k(\epsilon) := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} F^{(l+k)}(0)\mu_l(\epsilon), \tag{3.2.2}$$

$\mu_l(\epsilon)$ étant le moment d'ordre l de la mesure u_ϵ.
On dit que W_ϵ est le *pseudo-potentiel*. Comme F est une fonction polynômiale de degré $2n$, la somme précédente dans (3.2.2) ne contient en réalité qu'un nombre fini de termes. Afin d'étudier le comportement de la mesure u_ε pour des petites valeurs de ϵ, on a besoin de connaître précisément celui du pseudo-potentiel W_ϵ. Remarquons que la convergence L^p de la mesure u_ϵ vers une éventuelle mesure u_0 impliquerait la convergence de son pseudo-potentiel associé W_ϵ vers un pseudo-potentiel limite W_0.
L'étude du comportement asymptotique de u_ε sera organisé comme suit :

- *Étape 1.* D'abord, on prouve que sous la condition de bornitude de la famille $\{\mu_{2n}(\epsilon),\ \varepsilon > 0\}$ (où $2n := \deg(F)$), on peut trouver une suite $(\epsilon_k)_{k\geq 0}$ tendant vers 0 en décroissant telle que le pseudo-potentiel W_{ϵ_k} converge vers un pseudo-potentiel limite W_0 associé à une mesure u_0. Et, l'on a de plus la convergence de u_{ϵ_k} vers u_0. Par ailleurs, on montre que cette condition est vraie à partir de conditions simples portant sur V ainsi que sur F.
- *Étape 2.* On décrit la mesure u_0 : c'est à nouveau une mesure de probabilité discrète dont le support correspond aux points où le pseudo-potentiel limite W_0 atteint son minimum global. Ainsi on a certaines conditions simples pour les caractériser.
- *Étape 3.* On analyse le comportement des mesures invariantes excentrées autour d'un point critique a_0 et l'on prouve que ces mesures convergent vers δ_{a_0}. En particulier, si V satisfait (V-8) et (V-9), les mesures invariantes excentrées autour de a et de $-a$ convergent respectivement vers δ_a et δ_{-a} où $a > 0$ est défini par (V-8). Ensuite, on exhibe des potentiels d'intéraction F pour lesquels ces deux mesures de Dirac sont les seules mesures asymétriques limites lorsque le potentiel est $V(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$.
- *Étape 4.* Finalement, on s'intéresse aux mesures symétriques lorsque le potentiel V est symétrique. Après avoir prouvé la bornitude des moments, on montre certains exemples non triviaux (c'est-à-dire où la fonction d'intéraction F' n'est pas linéaire) pour lesquels les supports des mesures limites contiennent au moins trois points bien que le potentiel de confinement V soit à double puits.

3.2.1 Convergence étroite pour une sous-suite de mesures invariantes

Soit $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ une famille de mesures stationnaires. La principale condition dont on se sert par la suite est la suivante :

(H) La famille $\{\mu_{2n}(\epsilon), \epsilon > 0\}$ est bornée où $2n := \deg(F)$.

Cette condition est satisfaite si le potentiel V est une fonction polynômiale dont le degré est strictement supérieur à celui de F, le potentiel d'intéraction :

Proposition 3.8. *Soit $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ une famille de mesures invariantes pour la diffusion (0.0.5). On suppose que V est une fonction polynômiale de degré $2m_0 := \deg(V) > \deg(F) =: 2n$. Alors, la famille $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ vérifie la condition (H).*

Démonstration. Supposons qu'il existe une suite décroissante $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui tende vers 0 telle que la suite de moments $\mu_{2m_0}(k) := \int_{\mathbb{R}} x^{2m_0} u_{\epsilon_k}(x)dx$ tende vers $+\infty$. D'après (3.2.1) et (3.2.2) on peut écrire le moment d'ordre $2m_0$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\mu_{2m_0}(k) &= \frac{\int_{\mathbb{R}} x^{2m_0} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon_k}\left(\sum_{r=1}^{2m_0-1}\mathcal{M}_r(k)x^r + C_{2m_0}x^{2m_0}\right)\right]dx}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon_k}\left(\sum_{r=1}^{2m_0-1}\mathcal{M}_r(k)x^r + C_{2m_0}x^{2m_0}\right)\right]dx}, \\
\text{où} \quad \mathcal{M}_r(k) &:= \frac{1}{r!}\left\{V^{(r)}(0) + \sum_{l=0}^{2n-r}\frac{(-1)^l}{l!}F^{(l+r)}(0)\mu_l(k)\right\} \\
\text{et} \quad C_{2m_0} &:= \frac{V^{(2m_0)}(0)}{(2m_0)!}\,.
\end{aligned}$$

$\mathcal{M}_r(k)$ est une combinaison des moments $\mu_j(k)$, avec $0 \le j \le \max(0, 2n-r)$. Remarquons que le coefficient de degré 0 a disparu lorsque l'on a pris le quotient. De plus, $\mathcal{M}_r(k)$ ne dépend pas de ε_k pour tous les $2n \le r \le 2m_0$. Par ailleurs, on a supposé la convergence de $\mu_{2m_0}(k)$ vers $+\infty$. Ensuite, en considérant s_0 le plus petit indice tel que $\mu_{s_0}(k)$ ne soit pas borné, la quantité $\mathcal{M}_{2n-s_0}(k)$ n'est pas bornée non plus. Ainsi, quitte à considérer une sous-suite, il existe des indices r tels que $\mathcal{M}_r(k)$ converge vers $+\infty$ ou $-\infty$. On introduit la suite

$$\eta_r(k) := \mathcal{M}_r(k)\left(\mu_{2m_0}(k)\right)^{-\left(1-\frac{r}{2m_0}\right)}$$

pour tout $1 \le r \le 2m_0$. Le changement de variable $x := (\mu_{2m_0}(k))^{\frac{1}{2m_0}}\, y$ fournit

$$1 = \frac{\int_{\mathbb{R}} y^{2m_0} \exp\left[-\frac{2\mu_{2m_0}(k)}{\epsilon_k}\left(\sum_{r=1}^{2m_0-1}\eta_r(k)y^r + C_{2m_0}y^{2m_0}\right)\right]dy}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2\mu_{2m_0}(k)}{\epsilon_k}\left(\sum_{r=1}^{2m_0-1}\eta_r(k)y^r + C_{2m_0}y^{2m_0}\right)\right]dy}\,. \tag{3.2.3}$$

Le plus haut moment qui apparaît dans l'expression $\mathcal{M}_r(k)$ est celui d'ordre $2n-r$. D'après l'inégalité de Jensen, il existe une constante $C > 0$ telle que $|\mathcal{M}_r(k)| \le C\mu_{2m_0}(k)^{\frac{2n-r}{2m_0}}$ pour tout $1 \le r \le 2n-1$. On obtient la majoration suivante :

$$|\eta_r(k)| \le C\mu_{2m_0}(k)^{\frac{n-m_0}{m_0}} \longrightarrow 0\,.$$

On considère la fonction :

$$\Theta(\tau) := \frac{\int_{\mathbb{R}} y^{2m_0} \exp\left[-\frac{2\mu_{2m_0}(k)}{\epsilon_k}\left(\sum_{r=1}^{2m_0-1}\eta_r(k)y^r + C_{2m_0}y^{2m_0} - \tau y^2\right)\right] dy}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2\mu_{2m_0}(k)}{\epsilon_k}\left(\sum_{r=1}^{2m_0-1}\eta_r(k)y^r + C_{2m_0}y^{2m_0} - \tau y^2\right)\right] dy}$$

qui est paramétrée en fonction de $\eta_r(k)$ et de ϵ_k. Le théorème de dérivation sous le signe somme nous donne $\Theta'(\tau) = \mathbb{E}\left[X^{2m_0+2}\right] - \mathbb{E}\left[X^{2m_0}\right]\left[X^2\right]$ où X est une variable aléatoire dont la loi est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et a pour densité $\frac{\exp\left[-\frac{2\mu_{2m_0}(k)}{\epsilon_k}\left(\sum_{r=1}^{2m_0-1}\eta_r(k)x^r + C_{2m_0}x^{2m_0} - \tau x^2\right)\right]dy}{\int_{\mathbb{R}}\exp\left[-\frac{2\mu_{2m_0}(k)}{\epsilon_k}\left(\sum_{r=1}^{2m_0-1}\eta_r(k)y^r + C_{2m_0}y^{2m_0} - \tau y^2\right)\right]dy}$. L'inégalité de Jensen implique donc la croissance de la fonction Θ. Par conséquent, quel que soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\eta_{2m_0}(k) \leq \Theta(\tau)$ pour tout $\tau > 0$. On introduit la fonction $W_\tau(y) := C_{2m_0}y^{2m_0} - \tau y^2$. On procède comme dans la preuve du Théorème 3.1 en appliquant le Lemme A.3 et la Remarque A.5 à la fonction W_τ et aux paramètres $\eta_r(k)$ qui tendent vers 0. Comme le résultat du Lemme A.3 est vrai uniformément par rapport aux paramètres $\eta_r(k)$, on en déduit que $\Theta(\tau)$ tend vers $x_\tau^{2m_0}$ quand k tend vers l'infini ; où $x_\tau = \left(\frac{\tau}{m_0 C_{2m_0}}\right)^{\frac{1}{2m_0-2}}$ est l'unique point où W_τ atteint son minimum global sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi quel que soit $\tau > 0$, il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, on ait l'inégalité $0 \leq 1 \leq 2\left(\frac{\tau}{m_0 C_{2m_0}}\right)^{\frac{m_0}{m_0-1}}$ ce qui est impossible. Finalement, on en déduit que la famille $\{\mu_{2m_0}(\varepsilon),\, \varepsilon > 0\}$ est bornée.

Comme $2n < 2m_0$, la famille $\{\mu_{2n}(\varepsilon),\, \varepsilon > 0\}$ est bornée d'où la condition (H) est vérifiée. □

A partir de maintenant, on va supposer que la condition (H) est vérifiée. Par conséquent, on peut appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass et on obtient le résultat suivant :

Lemme 3.9. *Sous la condition (H), il existe une suite décroissante $(\epsilon_k)_{k\geq 0}$ tendant vers 0 telle que pour tout $1 \leq l \leq 2n-1$, $\mu_l(\epsilon_k)$ converge vers un réel que l'on note $\mu_l(0)$.*

Il est explicite dans (3.2.2) que les moments $\mu_l(\varepsilon)$ caractérisent le pseudo-potentiel W_ϵ. On a obtenu une suite de mesures dont les moments sont convergents donc on peut extraire une sous-suite telle que le pseudo-potentiel converge. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on écrit :

$$\omega_k(0) := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} F^{(l+k)}(0)\mu_l(0) \quad \text{puis} \quad W_0(x) := V(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\omega_k(0)\,. \quad (3.2.4)$$

Comme dans (3.2.2), il y a seulement un nombre fini de termes non nuls dans les deux sommes donc $W_0(x)$ est bien défini quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 3.10. *Sous la condition (H), il existe une suite décroissante* $(\epsilon_k)_{k\geq 0}$ *tendant vers* 0 *telle que, pour tout* $j \in \mathbb{N}$, $(W_{\epsilon_k}^{(j)})_{k\geq 1}$ *converge vers* $W_0^{(j)}$, *uniformément sur chaque compact de* $\mathbb{R}$, *où le* pseudo-potentiel limite W_0 *est défini par* (3.2.4), *et* $(u_{\epsilon_k})_{k\geq 1}$ *converge étroitement vers une mesure de probabilité* u_0.

Démonstration. Par (3.2.4), on obtient, pour tout $p \geq 1$,

$$|\omega_p(\epsilon) - \omega_p(0)| \leq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\left|F^{(l+p)}(0)\right|}{l!} \left|\mu_l(\epsilon) - \mu_l(0)\right|.$$

Remarquons à nouveau que la somme dans le membre droit de l'inégalité contient un nombre fini de termes. En utilisant le Lemme 3.9, on obtient l'existence d'une sous-suite qui permet la convergence vers 0 de chaque terme. Par conséquent, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\omega_p(\epsilon_k)$ tend vers $\omega_p(0)$ quand k tend vers l'infini. Soit $x \in \mathbb{R}$, comme V est de classe $\mathcal{C}^\infty$, $W_{\epsilon_k}^{(j)}(x)$ et $W_0^{(j)}(x)$ sont bien définis. De plus, on obtient

$$\begin{aligned}\left|W_{\epsilon_k}^{(j)}(x) - W_0^{(j)}(x)\right| &= \left|\sum_{p=j}^{\infty} \frac{x^{p-j}}{(p-j)!}\omega_p(\epsilon_k) - \sum_{p=j}^{\infty} \frac{x^{p-j}}{(p-j)!}\omega_p(0)\right| \\ &\leq \sum_{p=j}^{\infty} \frac{|x|^{p-j}}{(p-j)!} \left|\omega_p(\epsilon_k) - \omega_p(0)\right|.\end{aligned}$$

Comme il y a un nombre fini de termes dans la somme et comme chacun de ces termes tend vers 0, on obtient directement la convergence séquentielle de $W_{\epsilon_k}^{(j)}$ vers $W_0^{(j)}$. Afin d'obtenir la convergence uniforme, on remarque que, pour $j \geq 1$, la suite $\left(W_{\varepsilon_k}^{(j)}(y)\right)$ est uniformément bornée sur tout compact. C'est une simple conséquence de la régularité de V et de la majoration suivante :

$$|W_{\varepsilon_k}^{(j)}(y)| \leq |V^{(j)}(y)| + \sum_{p=j}^{\infty} \frac{|y|^{p-j}}{(p-j)!} \left|w_p(\varepsilon_k)\right|.$$

Prouvons maintenant l'existence d'une sous-suite de $(\varepsilon_k)_{k\geq 0}$ pour laquelle on peut prouver la convergence étroite de la mesure invariante correspondante. D'après la condition (H), la suite $\{\mu_2(\epsilon_k); k \geq 1\}$ est bornée. On note m_2 la borne supérieure. En utilisant l'inégalité de Bienayme-Tchebychev, pour tout $R > 0$ et $k \geq 1$, on obtient la minoration suivante : $u_{\epsilon_k}([-R; R]) \geq 1 - \frac{m_2}{R^2}$. En conséquence, la famille de mesures $\{u_{\epsilon_k}; k \in \mathbb{N}^*\}$ est tendue. Le théorème de Prohorov permet de conclure que la famille $\{u_{\epsilon_k}; k \in \mathbb{N}^*\}$ est relativement compact par rapport à la convergence étroite. □

Rappelons que dans ce chapitre, V vérifie l'hypothèse (V-7) qui va servir en particulier pour la démonstration du prochain Lemme.

Lemme 3.11. *Soit un potentiel de confinement* V *qui satisfait les hypothèses (V-1)–(V-7) ainsi que (V-10) et un potentiel d'intéraction* F *qui vérifie (F-1)–(F-5). Alors, chaque pseudo-potentiel limite* W_0 *admet un nombre fini* $r \geq 1$ *de points où il atteint son minimum global.*

Démonstration. D'après la définition (3.2.4), on peut écrire $W_0'(x) = V'(x)+P'(x)$ où P est une fonction polynômiale. Comme V coïncide avec une fonction analytique $\mathcal{V}$ sur $[a_1; a_{2M+1}]$ d'après la condition (V-7), on en déduit que W_0' a un nombre fini de zéros sur cet intervalle.
En effet, si tel n'était pas le cas, la dérivée W_0' serait identiquement égale à 0 d'où $W_0''(a_{2M+1}) = 0$ ce qui contredit la limite suivante : $W_0''(a_{2M+1}) = V''(a_{2M+1}) + \lim_{k\to\infty} F'' * u_{\varepsilon_k}(a_{2M+1}) > 0$ après avoir utilisé l'hypothèse (F-2) à savoir la convexité de F.
D'après la Proposition 3.10, le pseudo-potentiel W_{ϵ_k} converge vers W_0. Or, $W_{\epsilon_k} - V$ est une fonction polynômiale de degré pair et dont le terme de plus haut degré est strictement positif et indépendant de k. En se servant de l'hypothèse (V-4), on en déduit l'existence d'une fonction polynômiale $\mathcal{Q}$ de degré pair dont le terme de plus haut degré est strictement positif telle que $W_{\epsilon_k}(x) \geq \mathcal{Q}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En prenant la limite $\epsilon \to 0$, on obtient $W_0(x) \geq \mathcal{Q}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cette minoration permet de conclure qu'il existe $R > 0$ tel que le compact $[-R; R]$ contienne tous les points où W_0 atteint son minimum global.
Il reste à étudier les zéros de W_0' sur le compact $K := [-R; a_1] \bigcup [a_{2M+1}; R]$. Or, d'après la propriété (V-4), $V''(x) > 0$ pour tout $x \in K$. De plus, F est une fonction convexe d'après l'hypothèse (F-2). Par conséquent la définition (3.2.1) implique : $W_\epsilon''(x) \geq \min_{z\in K} V''(z) > 0$ pour tout $x \in K$. D'après la Proposition 3.10, il existe une suite décroissante $(\varepsilon_k)_{k\geq 0}$ tendant vers 0 telle que W_{ϵ_k}'' converge vers W_0'' uniformément sur K. En conséquence $W_0''(x) > 0$ pour tout $x \in K$ et donc W_0' admet un nombre fini de zéros sur K ce qui achève la preuve. □

Comme W_0 atteint son minimum global en r points, on les note $A_1 < \cdots < A_r$:

$$W_0(A_1) = \cdots = W_0(A_r) = \inf_{x\in\mathbb{R}} W_0(x) =: w_0\,. \tag{3.2.5}$$

On introduit un ouvert U^δ qui contient tous ces points :

$$U^\delta := \bigcup_{i=1}^{r} [A_i - \delta; A_i + \delta] \quad \text{avec} \quad \delta \in \left]0; \frac{1}{2}\min_{i\neq j} |A_i - A_j|\right[.$$

L'ensemble $\{A_1, \ldots, A_r\}$ joue un rôle central dans l'analyse asymptotique des mesures $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ lorsque ϵ tend vers 0. En particulier, on peut montrer que la mesure u_0 définie dans la Proposition 3.10 est une mesure discrète dont le support est *contenu* dans cet ensemble. Rappelons que dans le cas linéaire, l'on a établi que tous les points où W_0 atteint son minimum global ne sont pas forcément chargés par u_0.

Proposition 3.12. *Soit W_0 et $(\varepsilon_k)_{k\geq 0}$ tels que définis dans la Proposition 3.10. Alors, on a le résultat de convergence suivant :*
1) Pour tout $x \notin U^\delta$, $\lim_{k\to\infty} u_{\epsilon_k}(x) = 0$.
2) Pour $\delta > 0$ assez petit, $\lim_{k\to\infty} \int_{(U^\delta)^c} u_{\epsilon_k}(x)dx = 0$.

Démonstration. **1.** Le pseudo-potentiel limite W_0 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et les r points où il atteint son minimum global sont dans U^δ. Comme $\lim_{x\to\pm\infty} W_0(x) = +\infty$, il existe $\eta > 0$ tel que $W_0(x) \geq w_0 + \eta$ pour tout $x \notin U^\delta$.
On fournit maintenant une minoration pour W_{ε_k}. En utilisant (V-4), (F-3), (0.0.8) et la définition (3.2.1), on prouve

$$W''_{\epsilon_k}(x) \geq V''(x) + \alpha > \alpha \quad \forall\, |x| \geq \max\{|a_1|\,;|a_{2M+1}|\} \quad \text{et} \quad k \geq 0\,. \tag{3.2.6}$$

De plus, vu que les moments sont bornés (car on a supposé que la condition (H) est vraie), $W'_{\varepsilon_k}(0)$ et $W''_{\varepsilon_k}(0)$ sont bornés uniformément par rapport à $k \geq 0$. En combinant cette propriété avec (3.2.6), on trouve l'existence d'une constante $R > 0$ (indépendante de k) telle que $W_{\epsilon_k}(x) \geq w_0 + \eta$ pour tout $|x| \geq R$.
On regarde maintenant ce qu'il en est sur l'ensemble compact $[-R, R] \cap (U^\delta)^c$. La Proposition 3.10 affirme la convergence uniforme de W_{ϵ_k} sur cet ensemble compact. Par conséquent, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $W_{\epsilon_k}(x) \geq w_0 + \frac{\eta}{2}$ pour $k \geq k_0$ et $x \in [-R, R] \cap (U^\delta)^c$. Pour résumer, la minoration $W_{\epsilon_k}(x) \geq w_0 + \frac{\eta}{2}$ apparaît pour tout $x \in (U^\delta)^c$ lorsque $k \geq k_0$. Finalement, on obtient

$$\exp\left[-\frac{2}{\epsilon_k} W_{\epsilon_k}(x)\right] \leq \exp\left[-\frac{2}{\epsilon_k} w_0\right] \exp\left[-\frac{\eta}{\epsilon_k}\right], \quad \forall x \notin U^\delta,\ k \geq k_0\,. \tag{3.2.7}$$

Afin d'estimer $u_{\varepsilon_k}(x)$, on a besoin d'une minoration pour le dénominateur dans le quotient (3.2.1). On appelle D_ε ce dénominateur. Comme la fonction continue W_0 atteint son minimum global en un nombre fini de points, il existe γ avec $\delta > \gamma > 0$ tel que, pour tout $x \in U^\gamma$, on a $W_0(x) \leq w_0 + \frac{\eta}{8}$. D'après la Proposition 3.10, W_{ϵ_k} converge uniformément sur chaque compact de $\mathbb{R}$ vers W_0. Ainsi il existe k_1 tel que pour tout $k \geq k_1$, pour tout $x \in U^\gamma$, on a $W_{\epsilon_k}(x) \leq w_0 + \frac{\eta}{4}$. Finalement, le dénominateur dans (3.2.1) peut être minoré comme suit

$$D_{\varepsilon_k} \geq \int_{U^\gamma} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon_k} W_{\epsilon_k}(x)\right] dx \geq 2r\gamma \exp\left[-\frac{2}{\epsilon_k}\left(w_0 + \frac{\eta}{4}\right)\right], \quad k \geq k_1\,. \tag{3.2.8}$$

Pour $k \geq \max\{k_0; k_1\}$, d'après (3.2.7) et (3.2.8), on a l'inégalité suivante

$$u_{\epsilon_k}(x) \leq \frac{1}{2r\gamma} \exp\left[-\frac{\eta}{2\epsilon_k}\right]. \tag{3.2.9}$$

Le membre droit de l'inégalité (3.2.9) tend vers 0 quand $k \to \infty$ ce qui prouve la première partie du résultat à savoir la convergence séquentielle de $u_{\epsilon_k}(x)$ vers 0 quel que soit $x \notin U^\delta$.
2. Soit $\delta > 0$ et $K > 0$. On sépare le support d'intégration en deux morceaux : $\left(U^\delta\right)^c = I_1 \cup I_2$ avec $I_1 = [-K; K]^c$ respectivement $I_2 = [-K; K] \bigcap (U^\delta)^c$. L'inégalité de Bienayme-Tchebychev permet de borner l'intégrale de u_{ε_k} sur I_1 par $\frac{m_2}{K^2}$, où m_2 est une borne supérieure de la famille $\{\mu_2(\epsilon_k)\,;\, k \in \mathbb{N}\}$.
D'après (3.2.9), l'intégrale sur le second support I_2 est bornée par $\frac{K}{r\gamma} \exp\left[-\frac{\eta}{2\epsilon_k}\right]$. On se donne $\rho > 0$ arbitrairement petit. Il suffit alors de choisir K assez grand

pour que l'intégrale portant sur I_1 soit inférieure à $\frac{\rho}{2}$. Puis, en prenant k assez grand, l'intégrale portant sur I_2 est inférieure à $\frac{\rho}{2}$. Ceci prouve la convergence de $\int_{(U^\delta)^c} u_{\epsilon_k}(x)dx$ vers 0. □

La suite de mesures $(u_{\epsilon_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une mesure u_0 et l'ouvert $\left(U^\delta\right)^c$ est de moins en moins chargé par u_{ϵ_k} quand k devient grand. Intuitivement u_0 devrait être une mesure de probabilité discrète dont le support est *inclus* dans l'ensemble $\{A_1, \ldots, A_r\}$.

Théorème 3.13. *Soit $(\varepsilon_k)_{k\geq 1}$, W_0, u_0 et $A_1, \ldots, A_r$ définis dans la Proposition 3.10 et dans* (3.2.5)*. Alors la mesure limite u_0 s'écrit $u_0 := \sum_{i=1}^r p_i \delta_{A_i}$ où*

$$p_i := \lim_{k\to+\infty} \int_{A_i-\delta}^{A_i+\delta} u_{\epsilon_k}(x)dx, \quad 1 \leq i \leq r, \quad \delta > 0 \quad \textit{assez petit.} \tag{3.2.10}$$

De plus, p_i est indépendant de δ.

Démonstration. **Étape 1.** Soit une constante positive δ arbitrairement petite. Les suites $\left(\int_{A_i-\delta}^{A_i+\delta} u_{\epsilon_k}(x)dx\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sont bornées. On peut donc extraire une sous-suite $\left(u_{\epsilon_{\varphi(k)}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la quantité $\int_{A_i-\delta}^{A_i+\delta} u_{\epsilon_{\varphi(k)}}(x)dx$ converge vers $p_i(\delta)$ pour tout $1 \leq i \leq r$. Par ailleurs, cette limite est indépendante de δ. En effet, soit $\delta' < \delta$. Par définition, on obtient

$$p_i(\delta) - p_i(\delta') = \lim_{k\to\infty} \left\{ \int_{A_i-\delta}^{A_i-\delta'} u_{\epsilon_{\varphi(k)}}(x)dx + \int_{A_i+\delta'}^{A_i+\delta} u_{\epsilon_{\varphi(k)}}(x)dx \right\}.$$

Une application directe du second point de la Proposition 3.12 en considérant $U^{\delta'}$ permet d'obtenir $p_i(\delta') = p_i(\delta) =: p_i$.

Étape 2. Prouvons maintenant que u_0 est une mesure de probabilité discrète. Soit f une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$. Soit $\delta > 0$ assez petit pour que les intervalles $U_i(\delta) := [A_i - \delta; A_i + \delta]$ soient disjoints. La convergence étroite repose sur la convergence vers 0 de la différence suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) u_{\epsilon_{\varphi(k)}}(x)dx - \sum_{i=1}^r p_i f(A_i) = \mathcal{R} + \sum_{i=1}^r \Delta_i(f),$$

avec $\Delta_i(f) := \int_{A_i-\delta}^{A_i+\delta} f(x) u_{\epsilon_{\varphi(k)}}(x)dx - p_i f(A_i)$ et $\mathcal{R} := \int_{\left(U^\delta\right)^c} f(x) u_{\epsilon_{\varphi(k)}}(x)dx$. La bornitude de la fonction f et le second point de la Proposition 3.12 impliquent que $\mathcal{R}$ tend vers 0 quand $k \to \infty$. Estimons maintenant chaque terme $\Delta_i(f)$:

$$\begin{aligned} |\Delta_i(f)| &\leq \int_{A_i-\delta}^{A_i+\delta} \left| f(x) - f(A_i) \right| du_{\epsilon_{\varphi(k)}}(x) + |f(A_i)| \left| u_{\epsilon_{\varphi(k)}}\left(U_i(\delta)\right) - p_i \right| \\ &\leq \sup_{z\in U_i(\delta)} |f(z) - f(A_i)|\, u_{\epsilon_{\varphi(k)}}\left(U_i(\delta)\right) + |f(A_i)| \left| u_{\epsilon_{\varphi(k)}}\left(U_i(\delta)\right) - p_i \right|. \end{aligned}$$

La continuité de f implique la petitesse de $\sup_{z\in U_i(\delta)} |f(z) - f(A_i)|$ dès que δ est assez petit. De plus, pour un δ fixé, la définition de p_i amène à la convergence de $u_{\epsilon_{\varphi(k)}}(U_i(\delta)) - p_i$ vers 0 quand $k \to \infty$. En combinant ces deux arguments, on obtient la convergence étroite de $u_{\varepsilon_{\varphi(k)}}$ vers la mesure discrète $\sum_{i=1}^r p_i \delta_{A_i}$ c'est-à-dire $u_0 = \sum_{i=1}^r p_i \delta_{A_i}$.
Étape 3. On achève la preuve en prouvant que les p_i ne dépendent pas de la suite extraite choisie. En effet, si l'on n'avait pas (3.2.10), l'on pourrait extraire une sous-suite $\left(u_{\epsilon_{\psi(k)}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la quantité $\int_{A_i-\delta}^{A_i+\delta} u_{\epsilon_{\psi(k)}}(x)dx$ converge vers q_i pour tout $1 \leq i \leq r$ avec $(p_1, \cdots, p_r) \neq (q_1, \cdots, q_r)$. Par suite, on obtiendrait $u_0 = \sum_{i=1}^r q_i \delta_{A_i}$ ce qui est impossible vu que $u_0 = \sum_{i=1}^r p_i \delta_{A_i}$. □

Il est important de noter que l'on n'a pas prouvé la convergence de chaque famille de mesures stationnaires u_ϵ quand $\epsilon \to 0$ car l'on n'a pas prouvé la convergence des moments. En revanche, on sait d'avance que toute valeur d'adhérence est discrète.

3.2.2 Description des mesures limites

On a montré dans la précédente sous-section que toute valeur d'adhérence d'une famille de mesures stationnaires était une mesure de probabilité discrète. Notons de façon générique u_0 chacune de ces mesures limites ainsi que W_0 le pseudo-potentiel limite qui lui est associé et qui est défini par (3.2.4). On a également l'expression suivante : $u_0 = \sum_{i=1}^r p_i \delta_{A_i}$ où les points A_i sont les réels où W_0 atteint son minimum global, réordonnés par ordre croissant, et $\sum_{i=1}^r p_i = 1$ où $p_i > 0$ pour tout $1 \leq i \leq r$. On va maintenant affiner ce résultat en exhibant des propriétés portant sur les points A_i et les poids associés p_i.
On rappelle que tous ces résultats nécessitent la condition (H).

Proposition 3.14. 1) *Pour tout* $1 \leq i \leq r$ *et* $1 \leq j \leq r$, *on a :*

$$V'(A_i) + \sum_{l=1}^r p_l F'(A_i - A_l) = 0, \tag{3.2.11}$$

$$V(A_i) - V(A_j) + \sum_{l=1}^r p_l \Big(F(A_i - A_l) - F(A_j - A_l) \Big) = 0 \tag{3.2.12}$$

$$et \quad V''(A_i) + \sum_{l=1}^r p_l F''(A_i - A_l) \geq 0 \tag{3.2.13}$$

2) $A_i \in [a_1; a_{2M+1}]$ *pour tout* $1 \leq i \leq r$. *De plus, si* $r \geq 2$ *et* $M = 1$ *(c'est-à-dire si* V *est à double puits),* $A_1 \in]a_1; a_2[$ *et* $A_r \in]a_2; a_3[$ *où l'on rappelle que* a_1 *et* a_3 *correspondent aux puits de* V *alors que* a_2 *correspond à la bosse de* V. *En particulier, si* $r = 2$ *alors* $(A_1 - a_2)(A_2 - a_2) < 0$.
3) *Si* $\alpha \geq \vartheta$, *où* α *(respectivement* ϑ*) a été défini dans* (0.0.8) *(respectivement dans* (0.0.7)*), le support de chacune des mesures limites contient un unique point*

c'est-à-dire $r = 1$.
4) *Si* V'' *et* F'' *sont convexes, le support de chaque mesure limite contient au plus deux points c'est-à-dire* $r \leq 2$.

Démonstration. **1)** Dans la preuve de la Proposition 3.10, on a montré que la famille $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ était tendue. En combinant cet argument avec la convergence des moments $(\mu_l(\varepsilon_k))_{k\geq 0}$ pour $l \leq 2n$ établie dans le Lemme 3.9 et l'équation (3.2.1), on peut exprimer W_0' comme suit :

$$W_0'(x) = V'(x) + F' * u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Il suffit alors de préciser que u_0 est une mesure discrète (d'après le Théorème 3.13). Par définition, A_i est un point critique de W_0 ainsi le point A_i annule la dérivée du pseudo-potentiel limite W_0' et de plus vérifie $W_0''(A_i) \geq 0$: on en déduit directement (3.2.11) et (3.2.13). Qui plus est, par la définition (3.2.5) de A_i, $W_0(A_i) = W_0(A_j)$ pour tout i et j ce qui implique (3.2.12).
2) Par définition, A_r est le plus grand des points où W_0 réalise son minimum global et A_1 est le plus petit. D'après l'équation (3.2.11), ils vérifient

$$V'(A_r) = -\sum_{j\neq r} p_j F'(A_r - A_j) \quad \text{et} \quad V'(A_1) = -\sum_{j\neq 1} p_j F'(A_1 - A_j).$$

Comme $A_r - A_j > 0$ pour $j < r$ et $A_1 - A_j < 0$ pour $j > 1$ et comme F' est croissante, on en déduit les inégalités $V'(A_1) \geq 0$ et $V'(A_r) \leq 0$. En conséquence, on obtient $A_1 \geq a_1$ et $A_r \leq a_3$.
De plus, si $r \geq 2$ et $M = 1$, $V'(A_1) > 0$ et $V'(A_r) < 0$. Or, la dérivée V' est positive ou nulle sur $[a_1; a_2]$ et négative ou nulle sur $[a_2; a_3]$, par conséquent $a_1 < A_1 < a_2 < A_r < a_3$.
3) On suppose $A_r > A_1$ ce qui est équivalent à $r \neq 1$. D'après les hypothèses (V-4) et (V-7), l'équation $V''(x) = -\vartheta$ admet un nombre fini de solutions, par conséquent $-\left(V'(A_r) - V'(A_1)\right) < \vartheta\,(A_r - A_1)$. D'après l'équation (3.2.11) appliquée à A_1 et à A_r, on obtient :

$$-\left(V'(A_r) - V'(A_1)\right) = \sum_{i=1}^{r} p_i \Big(F'(A_r - A_i) - F'(A_1 - A_i)\Big).$$

Or, F est une fonction paire d'après l'hypothèse (F-1) et de plus F' est une fonction convexe sur $\mathbb{R}_+$ d'après la propriété (F-3) donc $F'(A_r - A_i) \geq \alpha(A_r - A_i)$ et $-F'(A_1 - A_i) = F'(A_i - A_1) \geq \alpha(A_i - A_1)$. Finalement, il vient la minoration suivante : $-\left(V'(A_r) - V'(A_1)\right) \geq \alpha\,(A_r - A_1)$. On conclut donc que $\vartheta\,(A_r - A_1) > \alpha\,(A_r - A_1)$. Cette inégalité contredit l'hypothèse comme quoi $A_r > A_1$ étant donné $\alpha \geq \vartheta$.
4) On peut calculer la dérivée seconde du pseudo-potentiel limite : $W_0'' = V'' + \sum_{j=1}^{r} p_j F''(. - A_j)$. Or, V'' et F'' sont des fonctions convexes donc il en est de même pour W_0''. Supposons par l'absurde que le pseudo-potentiel W_0 atteigne son minimum global en au moins trois points alors il admet au moins deux bosses

ce qui fait cinq points critiques au moins. L'application du théorème de Rolle à W_0' implique l'existence de quatre zéros pour W_0'' ce qui est impossible vu sa convexité. □

La Proposition 3.14 permet, sous certaines conditions décentes de décrire avec précision l'ensemble des mesures limites.

Remarque 3.15. *1) Dans le cas particulier où $F(x) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui correspond à l'absence d'auto-stabilisation, les équations* (3.2.11), (3.2.12) *et* (3.2.13) *sont satisfaites si et seulement si les points A_i sont les réels où V atteint son minimum global. D'où la mesure stationnaire limite charge uniquement les puits de V. Plus particulièrement, s'il n'y a que deux puits a_- et a_+, la mesure stationnaire limite charge a_- et a_+.*
2) Supposons que l'on ait $\alpha \geq \vartheta$. Si $(u_{\varepsilon_k})_{k\geq 1}$ représente une famille de mesures invariantes symétriques (ce qui présuppose donc que le potentiel V soit lui-même symétrique) dont les suites des moments d'ordre $1, \ldots, 2n-1$ sont bornées alors la suite converge étroitement vers $u_0 = \delta_0$. En effet, d'après (3.2.11) *et la Proposition 3.14, l'unique point qui puisse appartenir au support de u_0 est un zéro de V' et la symétrie impose qu'il s'agisse de* 0.
3) Supposons que l'on ait $\alpha \geq \vartheta$. Si on considère une suite de mesures stationnaires asymétriques vérifiant (H), la Proposition 3.14 implique que les seules mesures limites possibles sont de la forme δ_{a_0} où a_0 est un point critique de V. En particulier, si V est symétrique et satisfait (V-1)–(V-10), il existe au plus deux mesures asymétriques limites et il s'agit de δ_a et δ_{-a}.

3.3 Convergence des mesures excentrées

Dans cette section, on va spécifier le résultat de convergence obtenu précédemment pour les suites de mesures invariantes excentrées $(u_{\epsilon_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Commençons par rappeler que F est une fonction polynômiale de degré $2n$.

Proposition 3.16. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-7) ainsi que (V-10) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie (F-1)–(F-5). Soit a_0 un fond de puits de V. Sous les conditions :*

$$V(x) - V(a_0) + F(x - a_0) > 0\,, \quad \forall x \neq a_0 \tag{3.3.1}$$

$$et \quad \sum_{p=0}^{2n-2} \frac{\left|F^{(p+2)}(a_0)\right|}{p!}|a_0|^p < \alpha + V''(a_0), \quad (2n = \deg(F))\,, \tag{3.3.2}$$

il existe une famille de mesure $(u_\varepsilon^{a_0})_{\varepsilon>0}$ qui converge étroitement quand $\varepsilon \to 0$ vers la mesure de Dirac δ_{a_0}.

Démonstration. Soit une suite décroissante $(\eta_\epsilon)_\epsilon$ qui converge vers 0 et qui vérifie de plus $\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon/\eta_\epsilon = 0$. En utilisant le Théorème 2.24, on sait que (3.3.1) et (3.3.2)

impliquent l'existence d'une famille de mesures invariantes $(u_\varepsilon^{a_0})_{\varepsilon>0}$ qui vérifie l'estimation asymptotique suivante quand ϵ tend vers 0 :

$$\left| \int_{\mathbb{R}} x^l u_\epsilon^{a_0}(dx) - a_0^l \right| \leq \ \eta_\epsilon, \quad 1 \leq l \leq 2n-1, \text{ pour } \varepsilon \text{ assez petit.}$$

En utilisant les coefficients binômiaux ainsi que l'équation (2.5.21) avec $\rho = 1$, il est facile de prouver que $u_\varepsilon^{a_0}$ converge dans l'espace L^{2n-2} vers δ_{a_0}, et par suite la mesure $u_\epsilon^{a_0}$ converge étroitement vers δ_{a_0}. □

Définition 3.17. *On dira que $u_\varepsilon^{a_0}$ est une mesure extrêmale car le support de sa limite ne contient qu'un seul point.*

On peut restreindre le champ d'action de la Proposition 3.16 au cas où le potentiel V vérifie (V-8) et (V-9).

Corollaire 3.18. *Soit un potentiel V symétrique à deux puits vérifiant les hypothèses (V-1)–(V-7) ainsi que (V-10) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie (F-1)–(F-5). Sous la condition :*

$$\sum_{p=0}^{2n-2} \frac{\left|F^{(p+2)}(a)\right|}{p!} a^p < \alpha + V''(a), \quad (2n = \deg(F)), \tag{3.3.3}$$

il existe une famille de mesures $(u_\varepsilon^+)_{\varepsilon>0}$ (respectivement $(u_\varepsilon^-)_{\varepsilon>0}$) qui converge étroitement quand $\varepsilon \to 0$ vers la mesure de Dirac δ_a (respectivement δ_{-a}).

Démonstration. Le potentiel V étant symétrique et ayant exactement deux puits, a (ainsi que $-a$) vérifie automatiquement la condition (3.3.1). Et, la condition (3.3.3) correspond exactement à la condition (3.3.2). Ainsi on peut appliquer la Proposition 3.16 à a ainsi qu'à $-a$. □

Remarque 3.19. *Dans le cas où V satisfait les hypothèses (V-1)–(V-8) ainsi que (V-10), le résultat 3) de la Proposition 3.14 et la Remarque 3.15 insistent sur le fait que sous la condition $\alpha \geq \vartheta$, δ_a et δ_{-a} sont les seules mesures asymétriques limites possibles pour les familles de mesures stationnaires associées à la diffusion* (0.0.5) *dont les* $(2n-1)$ *premiers moments sont uniformément bornés.*

Regardons maintenant quelques situations où V satisfait l'hypothèse (V-9) et où l'on n'a pas forcément $\alpha \geq \vartheta$ mais où δ_{a_1} et δ_{a_3} sont les seules mesures limites asymétriques possibles malgré tout. Pour cela, étudions théoriquement (et formellement) les propriétés des mesures asymétriques limites ayant un support à deux points.

Proposition 3.20. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-7) ainsi que (V-9) et (V-10). Soit un potentiel d'intéraction F qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). On suppose que V'' et F'' sont des fonctions convexes. S'il existe une suite de mesures stationnaires $(u_{\varepsilon_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant la propriété (H)*

et qui converge étroitement vers une mesure asymétrique qui n'est pas concentrée autour d'un point critique de V (c'est-à-dire que u_0 n'est pas de la forme δ_{a_0} où a_0 est un point critique de V, soit a_1, soit a_2 soit a_3), alors la mesure limite satisfait $u_0 = p\delta_{A_1} + (1-p)\delta_{A_2}$ où l'on a les inégalités $p(1-p) > 0$ et $(A_1 - a_2)(A_2 - a_2)|A_2 - A_1| < 0$. De plus, on a les propriétés suivantes :

$$V(A_2) - V(A_1) - \frac{V'(A_1) + V'(A_2)}{F'(A_2 - A_1)} F(A_2 - A_1) = 0\,, \tag{3.3.4}$$

$$V'(A_1) - V'(A_2) = F'(A_2 - A_1) \quad et \quad p = \frac{-V'(A_2)}{V'(A_1) - V'(A_2)}\,. \tag{3.3.5}$$

Démonstration. D'abord, comme V'' est convexe, on sait qu'il a exactement deux puits (le cas où il n'y a qu'un seul puits n'étant pas étudié vu que $M \geq 1$ d'après la propriété (V-2)). En effet, si tel n'était pas le cas, on pourrait prouver facilement que la fonction V'' s'annule au moins quatre fois, ce qui contredirait l'hypothèse de convexité de V''. Par conséquent, V' s'annule exactement trois fois : en a_1, en a_2 et en a_3.
Comme les $2n$ premiers moments de $(u_{\varepsilon_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont uniformément bornés et comme cette suite de mesures converge étroitement, on obtient la convergence des moments. Par ailleurs, on peut appliquer les résultats de la Proposition 3.14 : la convexité de F'' et V'' implique que le support de u_0 contient au plus deux éléments.
1) Regardons pour commencer le cas où $u_0 = \delta_{A_1}$. L'équation (3.2.11) implique $V'(A_1) = 0$. Ainsi $A_1 = a_1$, a_2, ou a_3. Comme on suppose que u_0 est non extrêmale, aucune des trois solutions proposées ici ne satisfait les conditions exigées.
2) Si $u_0 = p\delta_{A_1} + (1-p)\delta_{A_2}$ avec $p(1-p) > 0$, alors la Proposition 3.14 fournit certaines informations sur les paramètres. Premièrement $(A_1 - a_2)(A_2 - a_2) < 0$. De plus, (3.2.11), (3.2.12) et (3.2.13) amènent immédiatement à (3.3.4) et (3.3.5). □

Remarque 3.21. *Rien n'interdit à δ_0 d'être une mesure limite même si V n'est pas symétrique. En effet, si l'ensemble des mesures symétriques est fermé, celui des mesures non symétriques ne l'est pas.*

Regardons le cas plus précis où le potentiel V est symétrique et a exactement deux puits a et $-a$.

Corollaire 3.22. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-10). Soit un potentiel d'intéraction F qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). On suppose que V'' et F'' sont convexes. S'il existe une suite de mesures stationnaires $(u_{\varepsilon_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant la condition (H) et qui converge étroitement vers une mesure asymétrique qui n'est pas concentrée autour d'un puits de V (c'est-à-dire que u_0 est différent de δ_a et de δ_{-a}), alors la mesure limite satisfait $u_0 = p\delta_{A_1} + (1-p)\delta_{A_2}$ où l'on a $p(1-p)\left|p - \frac{1}{2}\right| > 0$ et $A_1 A_2 |A_2^2 - A_1^2| < 0$. De plus,* (3.3.4) *et* (3.3.5) *sont vérifiées.*

Démonstration. Les conditions de la Proposition 3.20 sont satisfaites donc on peut l'appliquer. Il reste à vérifier $p \neq \frac{1}{2}$ et $A_2 \neq -A_1$.
Si $p = 1/2$ alors (3.3.4) et (3.3.5) impliquent $V(A_1) = V(A_2)$. Comme la fonction V est symétrique et comme $A_1 \in]-a; 0[$ et $A_2 \in]0; a[$, on obtient $A_1 = -A_2$ et par conséquent u_0 est symétrique ce qui contredit l'hypothèse du corollaire. Finalement $\left|p - \frac{1}{2}\right| > 0$.
Enfin, si $A_1 = -A_2$, alors on obtient directement $p = 1/2$. Or, ce cas vient d'être étudié et il amène à une impossibilité : on en déduit également que $A_1 + A_2 \neq 0$. On obtient $A_1 A_2 \left|A_2^2 - A_1^2\right| < 0$. □

Intéressons-nous maintenant à des potentiels symétriques V et F particuliers pour lesquels les seules mesures limites asymétriques possibles sont les mesures extrêmales δ_a et δ_{-a}.

Proposition 3.23. *Soit le potentiel de confinement* $V(x) := \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ *et le potentiel d'intéraction* $F(x) := \beta \frac{x^{2n}}{2n}$, *avec* $n \geq 1$ *et* $\beta > 0$. *Considérons une suite* $(u_{\varepsilon_k})_{k\geq 0}$ *de mesures stationnaires asymétriques pour la diffusion* (0.0.5) *vérifiant la condition (H). Alors les seules valeurs d'adhérence de cette suite sont* δ_1 *et* δ_{-1}.

Démonstration. Comme $V^{(4)}(x) = 6 > 0$, V'' est une fonction convexe. De même, F'' est convexe.
Étape 1. Si $n = 1$, le Théorème 2.8 implique qu'il y a exactement trois mesures : l'une est symétrique et les deux autres sont les mesures excentrées u_ϵ^+ et u_ϵ^- qui convergent respectivement vers δ_a et δ_{-a} d'après le Théorème 3.4. Dans notre cas précis, $a = 1$ aussi les seules mesures limites asymétriques possibles sont les mesures extrêmales δ_1 et δ_{-1}.
A partir de maintenant, on suppose : $n \geq 2$.
Étape 2. Considérons une mesure limite asymétrique u_0 vers laquelle tend une sous-suite $(u_{\varepsilon_k})_{k\geq 1}$. Comme V'' et F'' sont convexes, on peut appliquer le Corollaire 3.22. On en déduit que $u_0 = p\delta_{A_1} + (1-p)\delta_{A_2}$ avec $p(1-p)\left|p - \frac{1}{2}\right| > 0$ et $A_1 A_2 \left|A_2^2 - A_1^2\right| < 0$ donc $|A_1| < 1$ et $|A_2| < 1$. De plus, les équations (3.3.4) et (3.3.5) sont vérifiées.
Étape 3. Prouvons que l'on ne peut résoudre simultanément les deux équations (3.3.4) et (3.3.5). En se servant de la forme particulière des fonctions V et F, (3.3.4) devient, après avoir divisé par $A_2^2 - A_1^2$:

$$\frac{A_2^2 + A_1^2}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\left(A_2^2 - A_1 A_2 + A_1^2 - 1\right) = 0.$$

Cette expression est équivalente à $(n-2)A_1^2 + (n-2)A_2^2 + 2A_1A_2 = 2n - 2$.
Pour $n = 2$, on trouve $A_1 A_2 = 1$ ce qui contredit le résultat du deuxième point de la Proposition 3.14 : $A_1 A_2 < 0$ (car $a_2 = 0$ ici). Ainsi le support de u_0 ne peut pas contenir deux éléments si $n = 2$.
Pour $n > 2$, les arguments sont assez similaires. En utilisant les majorations $|A_i| \leq 1$, pour $i = 1$ et 2, on obtient l'inégalité :

$$2n - 2 = (n-2)A_1^2 + (n-2)A_2^2 + 2A_1A_2 \leq 2n - 4 + 2A_1A_2.$$

On en déduit que $A_1A_2 \geq 1$ ce qui contredit la propriété déjà mentionnée plus tôt à savoir $A_1A_2 < 0$. □

On remarquera que la preuve précédente était relativement simple car la fonction F' divise la fonction F vu que l'intéraction était un monôme. Présentons maintenant un autre cas particulier où le coefficient α défini par (0.0.8) est non nul donc entre 0 et $-V''(0) = \vartheta$ (cette dernière égalité est impliquée par la convexité de V''). Sous ces conditions, la Remarque 3.19 n'est plus valable.

Proposition 3.24. *Soit le potentiel de confinement* $V(x) := \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ *et le potentiel d'intéraction* $F(x) := \beta\frac{x^4}{4} + \alpha\frac{x^2}{2}$, *avec* $\alpha \in [0; 1[$ *et* $\beta > 0$. *Considérons une suite* $(u_{\varepsilon_k})_{k\geq 0}$ *de mesures stationnaires asymétriques pour la diffusion* (0.0.5) *vérifiant la condition (H). Alors les seules valeurs d'adhérence de cette suite sont* δ_1 *et* δ_{-1}.

Démonstration. Les arguments développés pour la preuve de la Proposition 3.24 sont similaires à ceux présentés dans la preuve de la Proposition 3.23 : on peut passer directement à la seconde étape. Par conséquent, on suppose que les équations (3.3.4) et (3.3.5) sont satisfaites. Développons l'équation (3.3.4) en se servant des expressions particulières de V et de F. D'où (3.3.4) est équivalente à

$$A_2^4 - A_1^4 - 2A_2^2 + 2A_1^2 = \frac{(A_1^3 + A_2^3 - A_1 - A_2)(\beta(A_2 - A_1)^4 + 2\alpha(A_2 - A_1)^2)}{\beta(A_2 - A_1)^3 + \alpha(A_2 - A_1)}.$$

Après réduction au même dénominateur, il vient :

$$\beta(A_2 - A_1)^4(A_1 + A_2)(A_1A_2 - 1) - \alpha(A_2 - A_1)^4(A_1 + A_2) = 0\,.$$

Cette équation est équivalente à $A_1A_2 - 1 = \alpha/\beta$ car $A_1 \neq -A_2$. En effet, on ne considère que des mesures limites qui sont asymétriques et $A_1 = -A_2$ impliquerait $p = 1/2$ c'est-à-dire la symétrie de la mesure. Afin de conclure, il suffit de noter que $A_1A_2 = 1 + \alpha/\beta$ contredit la propriété $A_1A_2 < 0$ qui est fournie par le point 2) de la Proposition 3.14. On en déduit que le support de n'importe quelle mesure limite asymétrique est un singleton et ce dernier est alors un zéro de V'. Comme 0 correspond à une mesure symétrique, les seules valeurs possibles sont 1 et -1. □

3.4 Convergence des mesures invariantes symétriques

Pour terminer sur le comportement asymptotique quand $\epsilon \to 0$, on considère les mesures limites pour une famille de mesures invariantes symétriques associées à la diffusion auto-stabilisante (0.0.5). Il est tacitement supposé que le potentiel de confinement V est symétrique au vu du Lemme 2.16. Pour rappel, on pose $-a := a_1$ et $a := a_{2M+1}$. On note $(u_\epsilon^0)_{\epsilon>0}$ une telle famille. On introduit la notation suivante : $\mu_l^0(\varepsilon)$ représente le moment d'ordre l de la mesure u_ε^0. Comme les fonctions V et F sont paires, la fonction W_ε^0 définie par (3.2.1) et (3.2.2) satisfait

$$W_\epsilon^0(x) = V(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\omega_{2k}^0(\epsilon) \quad \text{avec} \quad \omega_{2k}^0(\epsilon) := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{F^{(2l+2k)}(0)}{(2l)!}\mu_{2l}^0(\epsilon)\,.$$

Notons que les sommes qui apparaissent dans les égalités précédentes contiennent un nombre fini de termes non nuls.
On introduit le coefficient de renormalisation : $\lambda_\epsilon^0 := \int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon^0(x)\right] dx$ et l'on obtient :

$$\mu_{2l}^0(\epsilon) = \frac{\int_0^\infty x^{2l} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon^0(x)\right] dx}{\int_0^\infty \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon^0(y)\right] dy} = \frac{2}{\lambda_\epsilon^0}\int_0^\infty x^{2l} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon^0(x)\right] dx.$$

Premièrement, on va prouver que la famille de moments $(\mu_{2n}^0(\varepsilon),\, \varepsilon > 0)$ est bornée. Le point de départ consiste à donner une estimation de la constante de renormalisation λ_ϵ^0. Ce résultat est un raffinement de plusieurs arguments introduits dans la preuve du Lemme 2.20 et liés au Lemme 4.10 dans [5].

Lemme 3.25. *Il existe $C > 0$ tel que pour ϵ assez petit, on a $\frac{1}{\lambda_\epsilon^0} \leq \frac{C}{\epsilon}$.*

Démonstration. **Étape 1.** En utilisant la symétrie des fonctions V et F_0 (laquelle est définie dans (0.0.8)) et celle de la mesure u_ϵ^0, on trouve

$$\begin{aligned}\left|(F_0' * u_\epsilon^0)(y)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^+} \Big(F_0'(z+y) - F_0'(z-y)\Big) u_\epsilon^0(z)dz\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^+} \Big|F_0'(z+y) - F_0'(z-y)\Big| u_\epsilon^0(z)dz\,.\end{aligned}$$

Puis, en utilisant l'hypothèse (F-4) et la définition de F_0, on obtient la majoration suivante :

$$\begin{aligned}\left|(F_0' * u_\epsilon^0)(y)\right| &\leq 2C_q|y| \int_{\mathbb{R}^+} \left(1 + |z+y|^{2q-2} + |z-y|^{2q-2}\right) u_\epsilon^0(z)dz \\ &\leq 2^{2q}C_q|y| \left(1 + |y|^{2q-2}\right)\left(1 + \int_{\mathbb{R}^+} z^{2q-2} u_\epsilon^0(z)dz\right) \\ &\leq C|y| \left(1 + |y|^{2q}\right)\left(1 + \int_{\mathbb{R}^+} z^{2q} u_\epsilon^0(z)dz\right), \qquad (3.4.1)\end{aligned}$$

car la fonction $y \mapsto \frac{1+|y|^{2q-2}}{1+|y|^{2q}}$ est bornée.
Étape 2. Soit $K > 0$. On découpe le moment d'ordre $2q$ en deux intégrales suivant les supports d'intégration :

$$\int_0^\infty z^{2q} u_\epsilon^0(z)dz = \int_0^K z^{2q} u_\epsilon^0(z)dz + \int_K^\infty z^{2q} u_\epsilon^0(z)dz\,.$$

Par construction, u_ε^0 est directement reliée à $F * u_\varepsilon^0$ via (3.2.1). D'après le Lemme 2.19, on a l'inégalité suivante :

$$\left(F * u_\epsilon^0\right)(x) - \left(F * u_\epsilon^0\right)(0) = \int_0^x \left(F' * u_\epsilon^0\right)(y)dy \geq 0, \quad x \geq 0\,.$$

Puis, en utilisant l'hypothèse (V-3) et l'inégalité précédente, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$u_\epsilon^0(x) \leq \frac{1}{\lambda_\epsilon^0} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}V(x)\right] \leq \frac{1}{\lambda_\epsilon^0} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(C_4x^4 - C_2x^2\right)\right].$$

Ainsi si $K \geq \sqrt{\frac{2C_2}{C_4}}$ alors $C_4z^4 - C_2z^2 \geq \frac{C_4}{2}z^4$ pour $z \geq K$, et donc

$$\int_K^\infty z^{2q}u_\epsilon^0(z)dz \;\leq\; \frac{1}{\lambda_\epsilon^0}\int_K^\infty z^{2q}\exp\left[-\frac{C_4}{\epsilon}z^4\right]dz = \frac{C(q)\epsilon^{\frac{q}{2}}}{\lambda_\varepsilon^0},$$

où $C(q)$ est une constante positive. Finalement il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\epsilon \leq \epsilon_0$ implique l'inégalité

$$\int_0^\infty z^{2q}u_\epsilon^0(z)dz \leq K^{2q} + \frac{1}{\lambda_\epsilon^0}. \tag{3.4.2}$$

En se servant des hypothèses (V-5) et (V-6), on trouve $|V'(x)| \leq C_q(1+x^{2q})$ et $|V(x)| \leq C_q|x|(1+x^{2q})$. Ainsi pour tout $|x| \geq a$, on a $|V(x)| \leq \frac{C_q}{a}|x|^2(1+x^{2q})$. De plus, la propriété (V-7) permet d'obtenir, sur l'intervalle $[-a,a]$: $\frac{V(x)}{x^2} = V''(0) + \sum_{k=2}^\infty \frac{V^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}$ qui est donc une quantité bornée par une constante M. En prenant $C_q' := \max\left\{M, \frac{C_q}{a}\right\}$, il vient :

$$|V(x)| \leq C_q'|x|^2(1+x^{2q}). \tag{3.4.3}$$

Les majorations (3.4.1) et (3.4.2) ainsi que la symétrie de la densité u_ε^0 impliquent immédiatement l'existence de constantes C' et C'' telles que

$$\begin{aligned}\int_0^x \left(F_0' * u_\epsilon^0\right)(y)dy + V(x) &\leq C_q'x^2\left(1+x^{2q}\right) + C'x^2(1+x^{2q})\left(1+\frac{1}{\lambda_\epsilon^0}\right)\\ &\leq C''x^2(1+x^{2q})\left(1+\frac{1}{\lambda_\epsilon^0}\right).\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Étape 3. On en déduit à partir de (3.4.4) et de la définition de la constante de normalisation λ_ϵ^0 :

$$\lambda_\epsilon^0 \geq 2\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{2}{\epsilon}\left[\frac{\alpha}{2}x^2 + C''x^2(1+x^{2q})\left(1+\frac{1}{\lambda_\epsilon^0}\right)\right]\right\}dx. \tag{3.4.5}$$

On pose $\mu := \sqrt{\lambda_\epsilon^0}$ et on applique le changement de variable $x := \mu\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}\xi$. On obtient alors l'inégalité $\mu \geq h(\mu)$ où la fonction h est définie par

$$h(z) := \sqrt{2\epsilon}\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{\alpha}{2}z^2\xi^2 - C''\xi^2(1+z^2)\left(1+\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^q z^{2q}\xi^{2q}\right)\right\}d\xi.$$

Etudions l'équation $\mu \geq h(\mu)$. Clairement, $h'(z) \leq 0$ pour $z \geq 0$. Pour obtenir plus d'informations, on va trouver une majoration de $-h'(z)$:

$$\begin{aligned} -h'(z) &= \sqrt{2\epsilon}\int_0^\infty \Big(\alpha z\xi^2 + C''\xi^2 A(z,\xi)\Big)\exp\left[-B(z,\xi)\right]d\xi\,, \\ \text{avec}\quad A(z,\xi) &:= 2q\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^q \xi^{2q} z^{2q-1}(1+z^2) + 2z\left(1+\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^q z^{2q}\xi^{2q}\right) \\ \text{et}\quad B(z,\xi) &:= \frac{\alpha}{2}z^2\xi^2 + C''\xi^2(1+z^2)\left(1+\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^q z^{2q}\xi^{2q}\right). \end{aligned}$$

Pour ϵ assez petit et $z \geq 0$,

$$A(z,\xi) \leq 2z + 2q\xi^{2q}z^{2q-1} + 2\xi^{2q}z^{2q+1} \quad \text{et} \quad B(z,\xi) \geq C''\xi^2 + \frac{\alpha}{2}\,z^2\xi^2\,. \quad (3.4.6)$$

Il convient de signaler que $\mu \geq 1$ impliquerait directement $\frac{1}{\lambda_\epsilon^0(u)} \leq 1$. On se restreint naturellement au cas où $z \leq 1$ puisque si $z \geq 1$, le résultat du lemme est prouvé. En se servant des inégalités (3.4.6) et après quelques calculs, on obtient

$$\begin{aligned} -h'(z) &\leq \sqrt{2\varepsilon}\int_0^\infty \alpha z\xi^2 \exp\left\{-\Big(C'' + \frac{\alpha z^2}{2}\Big)\xi^2\right\} d\xi + C_1\sqrt{\varepsilon} \\ &\leq C_1\sqrt{\epsilon} - C_2\sqrt{\epsilon}\frac{d}{dz}\left\{\Big(C'' + \frac{\alpha}{2}z^2\Big)^{-\frac{1}{2}}\right\}. \end{aligned}$$

Pour $0 \leq z \leq 1$, l'estimation précédente de la dérivée fournit l'existence d'une constante $C_2' > 0$ telle que

$$h(0) - h(z) \leq C_1\sqrt{\epsilon}z + C_2\sqrt{\epsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{C''}} - \frac{1}{\sqrt{C'' + \frac{\alpha}{2}z^2}}\right) \leq C_1\sqrt{\epsilon}z + C_2'\sqrt{\epsilon}\alpha z^2\,.$$

De plus, $h(0) = \sqrt{2\epsilon}\int_{\mathbb{R}_+} e^{-C''\xi^2}d\xi$. D'où le quotient $h(0)/\sqrt{\varepsilon}$ est indépendent de ε et sera noté C_3. On trouve $h(z) \geq C_3\sqrt{\epsilon} - C_1\sqrt{\epsilon}z - C_2'\sqrt{\epsilon}\alpha z^2$. L'inégalité $\mu \geq h(\mu)$ implique $a_1\mu^2 + a_2\mu - \sqrt{\epsilon}a_3 \geq 0$ où les trois constantes sont définies par $a_1 := C_2'\sqrt{\epsilon}\alpha \geq 0$, $a_2 := 1 + C_1\sqrt{\epsilon}$ et $a_3 := C_3 > 0$. Donc, pour $\alpha > 0$, il existe $C > 0$ satisfaisant

$$\sqrt{\lambda_\epsilon^0} = \mu \geq \frac{\sqrt{a_2^2 + 4a_3C_2'\alpha\epsilon} - (1 + C_1\sqrt{\epsilon})}{2C_2'\sqrt{\epsilon}\alpha} = C\sqrt{\epsilon} + o\left(\sqrt{\epsilon}\right).$$

Pour $\alpha = 0$, on obtient directement la minoration $\mu \geq \frac{a_3\sqrt{\epsilon}}{1+a_2\sqrt{\epsilon}}$. Finalement on obtient l'existence de $C > 0$ telle que $\sqrt{\lambda_\epsilon^0} \geq \frac{C}{2}\sqrt{\epsilon}$ pour ε assez petit. □

En utilisant la majoration de la constante de renormalisation λ_ε^0, on peut obtenir également des majorations pour les moments des mesures invariantes symétriques. On rappelle que $\mu_l^0(\epsilon)$ représente le moment d'ordre l.

Lemme 3.26. *Pour tout $l \geq 1$, la famille $\{\mu_{2l}^0(\epsilon), \epsilon > 0\}$ est bornée.*

Notons que ce résultat généralise celui de la Proposition 3.8 dans le cas où l'on regarde des mesures symétriques. On ne suppose donc rien quant aux degrés de F et de V. D'ailleurs, on ne suppose même pas que V est une fonction polynômiale.

Démonstration. Soit $K := \sqrt{\frac{C_2+1}{C_4}}$ où les constantes C_2 et C_4 sont définies dans l'hypothèse (V-3). On découpe le moment en deux termes différents :

$$\mu_{2l}^0(\epsilon) \;=\; \int_{-K}^{K} x^{2l} u_\epsilon^0(x)dx + \frac{2}{\lambda_\epsilon^0}\int_K^\infty x^{2l}\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon^0(x)\right]dx\,.$$

D'après le point 2) du Lemme 2.19, $F * u_\epsilon^0(x) - F * u_\epsilon^0(0) \geq 0$. De plus $V(x) \geq C_4x^4 - C_2x^2$ d'après l'hypothèse (V-3). Ainsi pour tout $|x| > K$, $V(x) \geq x^2$. On a par conséquent :

$$\mu_{2l}^0(\epsilon) \leq K^{2l} + \frac{2}{\lambda_\epsilon^0}\int_K^\infty x^{2l}e^{-\frac{2x^2}{\epsilon}}\,dx \leq K^{2l} + \frac{2}{\lambda_\epsilon^0}\,\epsilon^{l+\frac{1}{2}}\int_{\frac{K}{\sqrt{\epsilon}}}^\infty y^{2l}e^{-2y^2}\,dy\,.$$

Le Lemme 3.25 implique $\mu_{2l}^0(\epsilon) \leq K^{2l} + C\epsilon^{l-\frac{1}{2}}$ où C est une constante. □

Présentons maintenant le résultat principal concernant les limites des mesures invariantes symétriques du processus auto-stabilisant (0.0.5).

Proposition 3.27. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-8) ainsi que (V-10) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). Soit $(u_\varepsilon^0)_{\varepsilon>0}$ une famille de mesures invariantes symétriques de la diffusion* (0.0.5)*. Alors, il existe une suite décroissante $(\varepsilon_k)_{k\geq 0}$ qui tend vers* 0 *et une mesure de probabilité discrète u_0^0 telles que $\left(u_{\epsilon_k}^0\right)_{k\geq 0}$ converge étroitement vers u_0^0. De plus, la mesure u_0^0 s'écrit comme suit :*

$$u_0^0 = \sum_{i=1}^r p_i\left(\frac{1}{2}\delta_{A_i} + \frac{1}{2}\delta_{-A_i}\right) \tag{3.4.7}$$

avec $r \geq 1$, $p_i > 0$ pour tout $1 \leq i \leq r$, $0 \leq A_1 < \cdots < A_r \leq a$ et

$$V'(A_i) + \sum_{j=1}^r p_j\mathcal{S}(F')(A_i,A_j) \;=\; 0 \tag{3.4.8}$$

$$V(A_i) - V(A_j) + \sum_{l=1}^r p_l\Big(\mathcal{S}(F)(A_i,A_l) - \mathcal{S}(F)(A_j,A_l)\Big) \;=\; 0$$

$$V''(A_i) + \sum_{j=1}^r p_j\mathcal{S}(F'')(A_i,A_j) \;\geq\; 0 \tag{3.4.9}$$

pour tout $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq r$. Ici $\mathcal{S}(G)(x,y) := \frac{1}{2}\left(G(x+y) + G(x-y)\right)$ pour toute fonction G.

Démonstration. On sait d'après le Lemme 3.26 que les moments sont bornés. Par conséquent, le Théorème 3.13 et la Proposition 3.14 peuvent être directement appliqués. Afin de conclure, il suffit de noter que u_0^0 est symétrique et que les deux fonctions V et F sont paires d'après les hypothèses (V-8) et (F-1). □

Ce résultat de convergence est maintenant précisé sous quelques conditions supplémentaires. Rappelons au passage que la convexité de V'' implique directement l'hypothèse (V-9) à savoir que V a exactement deux puits ainsi qu'une bosse ; cette dernière étant située en 0 si le potentiel V est symétrique.

Théorème 3.28. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-10) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). On suppose que les fonctions V'' et F'' sont convexes. Alors toute suite de mesures invariantes symétriques de la diffusion* (0.0.5) *converge étroitement vers la mesure de probabilité discrète $\frac{1}{2}\,\delta_{x_0} + \frac{1}{2}\,\delta_{-x_0}$ où x_0 est l'unique solution positive ou nulle du système :*

$$\begin{cases} V'(x_0) + \frac{1}{2}F'(2x_0) = 0 \\ V''(x_0) + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}F''(2x_0) \geq 0 \end{cases} \tag{3.4.10}$$

De plus, si $\alpha \geq \vartheta = -V''(0)$ alors $x_0 = 0$, sinon $x_0 > 0$. On rappelle que α est défini par (0.0.8) *et que ϑ est défini par* (0.0.7).

Démonstration. **Étape 1.** D'après la Proposition 3.27, toute mesure limite u_0^0 de la famille $\{u_\varepsilon^0,\, \varepsilon > 0\}$ est discrète. De plus, comme V'' et F'' sont des fonctions convexes, le support de la mesure limite contient au plus deux éléments d'après la Proposition 3.14. On en déduit immédiatement que $r = 1$ dans (3.4.7). Qui plus est, si $A_1 = 0$ alors le support est réduit à un point.
Étape 2. Par conséquent, le point A_1 qui caractérise la mesure limite satisfait (3.4.8) et (3.4.9) c'est-à-dire (3.4.10). Comme V'' est une fonction paire et convexe, le coefficient ϑ défini par (0.0.7) prend la valeur $\vartheta = -V''(0)$. Utilisons maintenant des arguments assez similaires à ceux déjà présentés lors de la preuve du Lemme 3.6. Soit $\chi(x) := V'(x) + \frac{1}{2}F'(2x)$. Résolvons $\chi(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+$. 0 est une solution évidente. De plus, $\chi'(x) = V''(x) + F''(2x)$ ce qui implique que χ' est une fonction symétrique et convexe qui tend vers l'infini quand x tend vers l'infini. Par conséquent, le minimum de χ' sur $\mathbb{R}_+$ est $\chi'(0) = V''(0) + F''(0) = \alpha - \vartheta$. On distingue maintenant deux cas différents :

– Si $\alpha < \vartheta$, le comportement de χ sur $\mathbb{R}_+$ peut être résumé ainsi : la fonction est d'abord strictement décroissante puis elle est strictement croissante. Comme $\lim_{x\to\infty} \chi(x) = +\infty$, il existe un unique $x_0 > 0$ tel que $\chi(x_0) = 0$. On a donc exactement deux zéros pour la fonction χ sur $\mathbb{R}_+$: 0 et x_0. Comme $V''(0) + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}F''(0) = \alpha - \vartheta < 0$, l'unique solution de (3.4.10) est $x_0 > 0$. Le réel x_0 est en effet solution car χ coupe l'axe des abscisses sur un intervalle où elle est croissante.

– Si $\alpha \geq -V''(0)$, la fonction χ' atteint son minimum pour $x = 0$ et $\chi'(0) \geq 0$. D'où $\chi(x) = 0$ implique $x = 0$. On peut aussi vérifier que $V''(0) + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}F''(0) = \alpha - \vartheta \geq 0$ si bien que le système (3.4.10) admet une unique solution et il s'agit de 0.

Dans la mesure où chaque mesure limite est caractérisée par l'unique solution de (3.4.10), il existe une unique mesure limite ce qui entraîne la convergence étroite de toute famille de mesures invariantes symétriques $\{u^0_\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ grâce au fait que cette famille soit relativement compacte. □

Remarque 3.29. *Le cas particulier où $\alpha = -V''(0)$ correspond au point de départ d'une bifurcation : le support de la mesure limite passe du statut de doublon à celui de singleton. On parlera de dioptre à propos de cette valeur frontière $\alpha = -V''(0)$. On verra par la suite que d'autres bifurcations se situent dans ce dioptre. En un sens, on peut songer au travail effectué dans [13] où les auteurs étendent quelques propriétés du cas uniformément strictement convexe au cas convexe mais non uniformément strictement convexe.*

On peut se demander ce qu'il se passe lorsque V'' ou F'' ne sont pas des fonctions convexes. En effet, si l'on part d'un potentiel admettant deux puits, on s'attend naturellement à ce que la mesure limite charge également deux points voire un seul point comme c'est le cas lorsque $\alpha \geq \vartheta$.
Or, on peut observer des mesures limites dont le support contient au moins trois points comme on l'a prouvé dans la Proposition 3.3 lorsque $\deg(F) = 2$ bien que le potentiel V ait exactement deux puits. On va maintenant étudier deux exemples non triviaux, c'est-à-dire pour lesquels l'intéraction F' n'est pas linéaire et en conséquence pour lesquels un calcul explicite *a priori* du pseudo-potentiel W_ϵ (et donc du pseudo-potentiel limite W_0) n'est pas possible.

Proposition 3.30. *Soit le potentiel de confinement $V(x) := \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$. V satisfait donc toutes les hypothèses (V-1)–(V-10) et de plus V'' est convexe. Il existe une fonction polynômiale F de degré 8, satisfaisant les propriétés (F-1)–(F-5), telle que le support de toute mesure limite pour les familles de mesures invariantes symétriques $\{u^0_\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ de la diffusion* (0.0.5) *contienne trois ou quatre points.*

Démonstration. **Étape 1.** Comme on a déjà vu dans la preuve précédente, si le support de la mesure limite contient un ou deux éléments, ces éléments sont solutions de (3.4.10). Il suffit alors de prouver que le système ne peut pas être résolu pour un potentiel d'intéraction F bien choisi.
Premièrement, notons qu'il est nécessaire de choisir une fonction F qui vérifie $F''(0) < -V''(0) = 1$. Si tel n'était pas le cas, la mesure δ_0 serait une limite possible. Choisissons en particulier : $F''(0) = 0$.
Supposons que F est une fonction polynômiale paire de degré 8. Comme sa limite en $+\infty$ est égale à $+\infty$, on obtient $F^{(8)}(0) \geq 0$. De plus, F doit satisfaire l'hypothèse (F-3), ce qui signifie que F' est une fonction convexe sur $\mathbb{R}_+$ ce qui implique $F^{(4)}(0) \geq 0$. Finalement, comme V'' est une fonction convexe, la fonction F'' ne

doit pas être convexe ce qui exige $F^{(6)}(0) < 0$. On va donc tester les potentiels F de la forme suivante

$$F(x) := \alpha_4 \frac{x^4}{4} - \alpha_6 \frac{x^6}{6} + \alpha_8 \frac{x^8}{8} \quad \text{avec} \quad \alpha_4,\ \alpha_6 \ \text{et}\ \alpha_8 > 0\,.$$

Étape 2. F' devant être convexe sur $\mathbb{R}_+$ d'après l'hypothèse (F-3), on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F^{(3)}(x)/x =: Q_2(x^2) \geq 0$ où Q_2 est une fonction polynômiale de degré 2 qui s'exprime ainsi : $Q_2(X) = 6\alpha_4 - 20\alpha_6 X + 42\alpha_8 X^2$. Ici, $X := x^2$. De plus, F'' n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$ ce qui se traduit par $F^{(4)}(x) =: R_2(x^2) < 0$ pour certains $x \in \mathbb{R}$ où R_2 est une autre fonction polynômiale de degré 2 qui s'exprime ainsi : $R_2(X) = 6\alpha_4 - 60\alpha_6 X + 210\alpha_8 X^2$. En d'autres termes, on cherche une fonction F telle que le discriminant de Q_2 soit négatif et celui de R_2 soit positif. On en déduit les inégalités suivantes :

$$\sqrt{\frac{35}{25}\alpha_4\alpha_8} < \alpha_6 < \sqrt{\frac{63}{25}\alpha_4\alpha_8}\,. \tag{3.4.11}$$

Prouvons maintenant qu'il existe une telle fonction F qui ne vérifie pas le système (3.4.10). Il suffit de prouver l'implication suivante

$$P_3(x^2) := 64\alpha_8 x^6 - 16\alpha_6 x^4 + (4\alpha_4 + 1)x^2 - 1 = 0 \tag{3.4.12}$$

$$\Longrightarrow \quad 224\alpha_8 x^6 - 40\alpha_6 x^4 + (6\alpha_4 + 3)x^2 - 1 < 0\,. \tag{3.4.13}$$

On remplace (3.4.13) par $2\times$(3.4.13)$-7\times$(3.4.12). Donc (3.4.12) et (3.4.13) sont équivalentes à $P_3(x) = 0 \Rightarrow P_2(x) < 0$ pour $x \geq 0$ où l'on a $P_2(x) := 32\,\alpha_6 x^2 - (16\,\alpha_4 + 1)x + 5$.
En utilisant (3.4.11) on peut prouver que le discriminant de P_3' est négatif. En effet, ce discriminant est

$$\begin{aligned} 1024\left\{\alpha_6^2 - \frac{3}{4}\alpha_8\,(4\alpha_4 + 1)\right\} &< 1024\left(\alpha_6^2 - 3\alpha_4\alpha_8\right) \\ &< 1024\left(\alpha_6^2 - \frac{63}{25}\alpha_4\alpha_8\right) < 0\,. \end{aligned}$$

On en déduit donc l'existence d'un unique x_0 réel qui vérifie $P_3(x_0) = 0$. Comme $P_3(0) = -1 < 0$, on sait également que $x_0 > 0$.
Étape 3. Pour conclure, il suffit de trouver des coefficients α_4, α_6 et α_8 satisfaisant (3.4.11) et tels que $x_0 \in]x_-, x_+[$ où les $x_\pm$ sont les racines éventuelles de P_2 (à ce stade, rien ne prouve que P_2 a bien deux zéros réels). En d'autres termes, on prouve que $P_3(x_-)P_3(x_+) < 0$. Pour ce faire, on introduit le paramètre $\eta \in]35/25, 63/25[$ tel que $\alpha_6 =: \sqrt{\eta\alpha_4\alpha_8}$. On peut alors exprimer $x_\pm$, $P_3(x_-)$ et $P_3(x_+)$ en fonction de η, α_4 et α_8. Plus précisément, si le discriminant de P_2 satisfait

$$\Delta := (16\alpha_4 + 1)^2 - 640\sqrt{\eta\alpha_4\alpha_8} > 0\,, \tag{3.4.14}$$

on trouve

$$x_\pm = \frac{16\alpha_4 + 1 \pm \sqrt{(16\alpha_4+1)^2 - 640\sqrt{\eta\alpha_4\alpha_8}}}{64\sqrt{\eta\alpha_4\alpha_8}}\,.$$

On vérifiera à la fin de la preuve que l'on a bien $\Delta > 0$ pour les valeurs de η, α_4 et α_8 que l'on va considérer. On va commencer par simplifier l'inégalité stricte $P_3(x_-)P_3(x_+) < 0$. Pour cela, on paramètre de la sorte :

$$\alpha_4 =: s^2, \quad \alpha_8 =: t^2, \quad \eta =: u^2 \quad \text{et} \quad A := 16s^2 + 1\,.$$

La paramétrisation des racines du polynôme P_2 est la suivante : $x_\varepsilon = \frac{A+\varepsilon\sqrt{A^2-640ust}}{64ust}$ avec $\varepsilon^2 = 1$. Ainsi on a

$$P_3(x_\varepsilon) = \frac{1}{64^3u^3s^3t^3}\Big\{\chi_1 + \varepsilon\chi_2\Big\}\,.$$

Il faut maintenant exprimer les quantités χ_1 et χ_2 :

$$\begin{aligned}
\chi_1 &:= 64t^2\left[A^3 + 3A\left(A^2 - 640ust\right)\right] - 16\times 64u^2s^2t^2\left[A^2 + A^2 - 640ust\right]\\
&+ 64^2u^2s^2t^2(4s^2+1)A - 64^3u^3s^3t^3\\
&= 256t^2\left\{32ust\Big(48u^2s^2 - 15A\Big) + A\Big(A^2 - 8u^2s^2A + 16u^2s^2(4s^2+1)\Big)\right\}\,.
\end{aligned}$$

Et pour ce qui est de la quantité χ_2 :

$$\begin{aligned}
\chi_2 &:= 64t^2\left[3A^2\sqrt{A^2-640ust} + \left(A^2 - 640ust\right)\sqrt{A^2-640ust}\right]\\
&- 16\times 64u^2s^2t^2\times 2A\sqrt{A^2-640ust} + 64^2u^2s^2t^2(4s^2+1)\sqrt{A^2-640ust}\\
&= 256t^2\sqrt{A^2-640ust}\Big\{A^2 - 8u^2s^2A + 16u^2s^2(4s^2+1) - 160ust\Big\}\,.
\end{aligned}$$

L'inégalité $P_3(x_-)P_3(x_+) < 0$ est donc simplement équivalente à $\chi_1^2 - \chi_2^2 < 0$ puis, en divisant par $\left(256t^2\right)^2$, on obtient

$$a_0(s,u) + a_1(s,u)\,t + a_2(s,u)\,t^2 + a_3(s,u)\,t^3 < 0 \tag{3.4.15}$$

où les coefficients $a_0(s,u)$, $a_1(s,u)$, $a_2(s,u)$ et $a_3(s,u)$ s'expriment comme suit :

$$\begin{aligned}
a_0(s,u) &:= A^2\Big(A^2 - 8u^2s^2A + 16u^2s^2(4s^2+1)\Big)^2\\
&- A^2\Big(A^2 - 8u^2s^2A + 16u^2s^2(4s^2+1)\Big)^2 = 0.\\
a_1(s,u) &:= 64usA\Big(48u^2s^2 - 15A\Big)\Big(A^2 - 8u^2s^2A + 16u^2s^2(4s^2+1)\Big)^2\\
&+ 640us\Big(A^2 - 8u^2s^2A + 16u^2s^2(4s^2+1)\Big)\\
&+ 320usA^2\Big(A^2 - 8u^2s^2A + 16u^2s^2(4s^2+1)\Big)\\
&= 64us\Big(A^2 - 8u^2s^2A + 16u^2s^2(4s^2+1)\Big)\\
&\times \Big(5A^2 + 10A^2 - 80u^2s^2A + 160u^2s^2(4s^2+1) + 48u^2s^2A - 15A^2\Big)\\
&= 32\times 64u^3s^3\Big(A^2 - 8u^2s^2A + 16u^2s^2(4s^2+1)\Big)\Big(5(4s^2+1) - A\Big)\,.
\end{aligned}$$

En rappelant que $A = 16s^2 + 1$, on obtient

$$\begin{aligned} a_1(s,u) &= 2 \times 64^2 u^3 s^3 (s^2+1) \\ &\times \Big(256s^4 + 32s^2 + 1 - 128u^2 s^4 - 8u^2 s^2 + 64u^2 s^4 + 16u^2 s^2\Big) \\ &= 2 \times 64^2 u^3 s^3 (s^2+1)\Big(256s^4 - 64u^2 s^4 + 8u^2 s^2 + 32s^2 + 1\Big). \end{aligned}$$

Le coefficient de degré 2 est

$$\begin{aligned} a_2(s,u) &= 32^2 u^2 s^2 \Big(48u^2 s^2 - 15A\Big)^2 - 160^2 u^2 s^2 A^2 \\ &- 640us \times 320us\Big(A^2 - 8u^2 s^2 A + 16u^2 s^2 (4s^2+1)\Big) \\ &= 32^2 u^2 s^2 \Big\{ \big(48u^2 s^2 - 15A\big)^2 - 25A^2 - 200A^2 \\ &+ 1600u^2 s^2 A - 3200u^2 s^2 (4s^2+1)\Big\} \\ &= 8 \times 64^2 u^4 s^4 \Big\{72u^2 s^2 + 5A - 100(4s^2+1)\Big\} \\ &= -2 \times 64^2 u^3 s^3 \times 4us\Big\{320s^2 + 95 - 72u^2 s^2\Big\} \end{aligned}$$

car $A = 16s^2 + 1$. Enfin, le coefficient de degré 3 est

$$a_3(s,u) = 640 \times 160^2 u^3 s^3 = 2 \times 64^2 u^3 s^3 \times 2000.$$

On divise alors l'inégalité (3.4.15) par $2 \times 64^2 u^3 s^3 t$ et l'on obtient

$$2000t^2 - 4us\left(320s^2 + 95 - 72u^2 s^2\right) t + R_u(s^2) < 0$$

où l'on a $R_u(X) := (X+1)\left(256X^2 - 64u^2 X^2 + 8u^2 X + 32X + 1\right)$. Par conséquent, on obtient une équivalence entre l'inégalité $P_3(x_-)P_3(x_+) < 0$ et l'inégalité $\Psi_{\sqrt{\eta},\sqrt{\alpha_4}}(\sqrt{\alpha_8}) < 0$ où $\Psi_{u,s}(t)$ est la fonction polynômiale définie ainsi :

$$\Psi_{u,s}(t) := 2000t^2 - 4us\left\{320s^2 + 95 - 72u^2 s^2\right\} t + s^6(256 - 64u^2) + \overline{R_u}(s^2),$$

où $\overline{R_u}$ est une fonction polynômiale d'ordre 2 dont les coefficients ne dépendent que de la variable u. D'après (3.4.11), la variable u satisfait $u^2 = \eta < \frac{63}{25} < \frac{320}{72}$ ce qui implique l'inégalité $320s^2 + 95 - 72u^2 s^2 > 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Choisissons α_8 dans le but de minimiser la quantité $\Psi_{\sqrt{\eta},\sqrt{\alpha_4}}(\sqrt{\alpha_8})$. Ainsi on choisit

$$\alpha_8 := \eta\alpha_4 \frac{\left(320\alpha_4 + 95 - 72\eta\alpha_4\right)^2}{10^6} \quad \text{et} \quad \alpha_6 = \eta\alpha_4 \frac{320\alpha_4 + 95 - 72\eta\alpha_4}{10^3}. \quad (3.4.16)$$

Cela ramène maintenant à prouver $\Psi_{\sqrt{\eta},\sqrt{\alpha_4}}(\sqrt{\alpha_8}) < 0$. On obtient l'estimation suivante de ce minimum :

$$\Psi_{\sqrt{\eta},\sqrt{\alpha_4}}(\sqrt{\alpha_8}) = -\frac{16\alpha_4^3}{125}\Big\{81\eta^3 - 720\eta^2 + 2100\eta - 2000\Big\} + \overline{R}_\eta(\alpha_4),$$

où $\overline{R}_\eta$ est une fonction polynômiale de degré 2. En remarquant que la fonction f définie par $f(\eta) := 81\eta^3 - 720\eta^2 + 2100\eta - 2000$ est une fonction croissante telle que $f(63/25) > 0$, on trouve l'existence d'un élément $\eta_0 \in]35/25, 63/25[$ tel que $f(\eta) > 0$ pour tout $\eta \in]\eta_0, 63/25[=: I$; η_0 n'ayant pas à être optimal. Pour conclure, il suffit de choisir $\eta \in I$ puis de prendre α_4 assez grand ($P_3(x_-)P_3(x_+)$ étant alors négatif strictement) afin de déterminer les paramètres α_4, α_6 et α_8 qui vont satisfaire (3.4.12) et (3.4.13).

Étape 4. La fonction F ainsi choisie satisfait les propriétés demandées tant que l'inégalité (3.4.14) est vraie. Il reste maintenant à prouver que x_- et x_+ existent bien c'est-à-dire que le discriminant de P_2 est strictement positif. En fait, en utilisant la valeur particulière de α_8, l'inégalité (3.4.14) est équivalente à

$$(16\alpha_4 + 1)^4 > 640^2 \eta^{3/2} \alpha_4^{3/2} \, \frac{320\alpha_4 + 95 - 72\eta\alpha_4}{1000},$$

ce qui est bien satisfait dès que α_4 est assez grand.

Étape 5. Enfin, supposons qu'il existe une suite de mesures stationnaires symétriques telle que le support de sa limite contienne cinq points ou plus. On sait alors que le pseudo-potentiel limite associé W_0 atteint son minimum global en au moins cinq points et par suite il admet au moins quatre points critiques où il atteint des maxima locaux ce qui fait donc au moins neuf points critiques. On applique le théorème de Rolle à W_0', W_0'', $W_0^{(3)}$, $W_0^{(4)}$ puis à $W_0^{(5)}$ et l'on en déduit que la fonction $W_0^{(6)}$ admet au moins quatre zéros ce qui est impossible vu que la convexité des fonctions $V^{(6)}$ (identiquement égale à 0 vu que V est de degré 4) et $F^{(6)}$ implique celle de $W_0^{(6)}$. □

On a dû exiger de la fonction polynômiale F d'être de degré au moins égal à 8 car pour obtenir un tel résultat, il est nécessaire que F'' ne soit pas convexe. Or, il est également nécessaire que F soit convexe d'où $F''(0) \geq 0$ et $F^{(2n)}(0) > 0$ où $2n = \deg(F)$. De plus, F' doit être convexe sur $\mathbb{R}_+$ donc $F^{(4)}(0) \geq 0$. Ainsi il est nécessaire d'avoir $2n \geq 8$ pour que l'un au moins des coefficients soit strictement négatif.

Exemple 3.31. *Soit* $V(x) := \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ *et* $F(x) := \frac{5}{2}x^4 - \frac{299}{48}x^6 + \frac{89\,401}{12\,800}x^8$. *Alors toute mesure limite possible d'une suite de mesures invariantes symétriques de la diffusion auto-stabilisante* (0.0.5) *a un support contenant soit trois soit quatre points.*

Démonstration. Considérons la fonction f définie lors de la preuve de la Proposition 3.30. Rappelons que l'on a

$$f(\eta) = 81\eta^3 - 720\eta^2 + 2100\eta - 2000\,.$$

On peut factoriser : $f(\eta) = (9x - 20)\,(3x - 10)^2$ donc on en déduit $f(\eta) > 0$ pour tout $\eta \in \left]\frac{20}{9}; \frac{63}{25}\right[$. En prenant $\eta := \frac{5}{2}$, on obtient

$$\Psi_{\sqrt{\eta},\sqrt{\alpha_4}}(\alpha_8) = -2\,(\alpha_4 - 8)\left(\alpha_4 + \frac{1}{4}\right)^2$$

où α_8 est remplacé par son expression dans (3.4.16). On prend ensuite $\alpha_4 = 10$ donc (3.4.16) donne $\alpha_6 = \frac{299}{8}$ et $\alpha_8 = \frac{89\,401}{1\,600}$.
Il reste à vérifier

$$(16\alpha_4 + 1)^4 > 640^2 \eta^{3/2} \alpha_4^{3/2} \, \frac{320\alpha_4 + 95 - 72\eta\alpha_4}{1000} \, .$$

Or, le membre de gauche vaut 671 898 241 et celui de droite vaut 99 840. Ainsi $F(x) := \frac{5}{2}x^4 - \frac{299}{48}x^6 + \frac{89401}{12800}x^8$ vérifie bien les conditions demandées dans la preuve de la Proposition (3.30) et l'on peut appliquer celle-ci. □

On a étudié le cas où V'' était convexe et on a trouvé l'existence d'une fonction polynômiale F dont la dérivée seconde n'est pas convexe qui interdit aux mesures symétriques limites d'avoir un support de cardinal strictement plus petit que trois. Cherchons maintenant un contre-exemple dual à savoir si F'' est convexe mais si c'est V'' qui ne l'est pas.

Proposition 3.32. *Soit le potentiel d'intéraction $F(x) := \frac{\beta}{4}x^4 + \frac{\alpha}{2}x^2$ avec $\alpha \geq 0$ et $\beta > 0$. F satisfait donc les hypothèses (F-1)–(F-5) et de plus F'' est convexe. Il existe un potentiel de confinement V satisfaisant les propriétés (V-1)–(V-10) tel que le support de toute mesure limite pour les familles de mesures invariantes symétriques $\{u^0_\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ de la diffusion* (0.0.5) *contienne exactement trois points.*

Démonstration. Les arguments développés pour la preuve de la Proposition 3.32 sont similaires à ceux présentés dans celle de la Proposition 3.30. Commençons par éliminer δ_0 des mesures limites possibles. D'après (3.4.9), appliqué à $r = 1$ et $A_1 = 0$, il suffit d'imposer $-V''(0) > \alpha$.
Concentrons-nous maintenant sur les mesures limites dont le support contient exactement deux éléments : A_1 et $-A_1$. En utilisant la Proposition 3.27, on sait que A_1 satisfait (3.4.8) et (3.4.9). Cherchons V sous la forme d'une fonction polynômiale de degré 6. Afin d'obtenir la limite $\lim_{x\to\infty} V(x) = +\infty$ qui est une conséquence de l'hypothèse (V-3), on choisit un coefficient de degré 6 strictement positif. De plus, le coefficient de degré 4 est négatif car on a besoin que V'' soit non convexe. Par conséquent, si l'on veut que V satisfasse les hypothèses (V-1)–(V-10), on écrit V comme suit :

$$V(x) = \frac{\alpha_6}{6}x^6 - \frac{\alpha_4}{4}x^4 - \frac{\alpha_2}{2}x^2 \quad \text{avec} \quad \alpha_4,\, \alpha_6 > 0 \quad \text{et} \quad \alpha_2 > \alpha \, .$$

L'équation $V'(x) = 0$ a trois solutions. En effet, $V'(x) = x\,(\alpha_6 x^4 - \alpha_4 x^2 - \alpha_2)$. Comme α_6, α_4 et α_2 sont strictement positifs, l'équation du second degré $\alpha_6 X^2 - \alpha_4 X - \alpha_2$ admet exactement deux solutions : l'une est strictement positive et l'autre est strictement négative. Les hypothèses (V-2) et (V-9) sont donc bien satisfaites pour peu que $V''(a) > 0$ où a est le réel strictement positif tel que $V'(a) = 0$. Or, on peut vérifier : $V''(a) = 2\alpha_4 a^2 + 4\alpha_2 > 0$.
En se servant des expressions particulières de V et F, les équations (3.4.8) et (3.4.9) deviennent

$$A_1 \left(\alpha_6 A_1^4 + (4\beta - \alpha_4)A_1^2 + (\alpha - \alpha_2)\right) = 0 \tag{3.4.17}$$

$$\text{et} \quad 5\alpha_6 A_1^4 + (6\beta - 3\alpha_4)A_1^2 + (\alpha - \alpha_2) \geq 0 \, . \tag{3.4.18}$$

On divise (3.4.17) par A_1, on remplace (3.4.18) par $\frac{1}{2}\Big((3.4.18)-5\times(3.4.17)\Big)$ puis en posant $X := A_1^2$, on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha_6 X^2 + (4\beta - \alpha_4)X + (\alpha - \alpha_2) &= 0 \\ \text{et} \quad (\alpha_4 - 7\beta)\, X - 2\,(\alpha - \alpha_2) &\geq 0\,. \end{aligned} \tag{3.4.19}$$

Comme $\alpha < \alpha_2$, il y a une unique solution positive à l'équation (3.4.19) :

$$X_0 := \frac{\alpha_4 - 4\beta + \sqrt{(\alpha_4 - 4\beta)^2 + 4\alpha_6(\alpha_2 - \alpha)}}{2\alpha_6}\,.$$

Le but de la preuve est de trouver des paramètres α_2, α_4 et α_6 tels que (3.4.17) et (3.4.18) soient incompatibles ce qui se traduit par $(\alpha_4 - 7\beta)\, X_0 - 2\,(\alpha - \alpha_2) < 0$. En d'autres termes,

$$(\alpha_4 - 7\beta)\,\frac{\alpha_4 - 4\beta + \sqrt{(\alpha_4 - 4\beta)^2 + 4\alpha_6(\alpha_2 - \alpha)}}{2\alpha_6} - 2\,(\alpha - \alpha_2) < 0\,.$$

On pose $\alpha_4 := 6\beta$ et $\alpha_2 := \alpha + \frac{u^2-1}{\alpha_6}\beta^2$ avec $u > 1$ (il est nécessaire que l'on ait $\alpha_2 > \alpha$). L'inégalité précédente devient $2u^2 - u - 3 < 0$. Ainsi pour tout paramètre u tel que $1 < u < \frac{3}{2}$ et $\alpha_6 > 0$, on calcule α_2 et α_4 avec les expressions données plus haut et l'on a donc défini une fonction polynômiale V ayant les propriétés suivantes :

- Il n'y a pas de solution au système d'équations (3.4.8) et (3.4.9) pour $r = 1$.
- La fonction V satisfait les propriétés (V-1)–(V-10).

On en conclut que le support de toute mesure limite correspondant à une suite de mesures invariantes symétriques pour la diffusion auto-stabilisante (0.0.5) contient au moins trois points.

Comme présenté dans la preuve de la Proposition 3.14, le support de toute mesure limite symétrique u_0^0 est inclus dans l'ensemble des points où $W_0 = V + F * u_0^0$ atteint son minimum global. Comme les fonctions particulières $V^{(4)}$ et $F^{(4)}$ sont convexes, $W_0^{(4)}$ l'est également. Or, si W_0 atteint son minimum global en au moins quatre points, la dérivée W_0' s'annule au moins sept fois (vu qu'il y a au moins trois points où W_0 atteint un maximum local). En appliquant le théorème de Rolle à trois reprises, $W_0^{(4)}$ s'annule au moins quatre fois ce qui contredit la propriété de convexité qui vient d'être mentionnée.
Par conséquent, le support de toute mesure limite d'une famille de mesures invariantes symétriques pour la diffusion (0.0.5) contient exactement trois points. □

Afin de conclure cette étude des cas non triviaux (c'est-à-dire des cas où la fonction d'intéraction F' n'est pas linéaire) qui font apparaître des mesures limites dont le support contient au moins trois points limites bien que le potentiel V possède exactement deux puits, présentons un exemple particulier de diffusion auto-stabilisante du type (0.0.5) pour laquelle on a la propriété suivante : toute mesure invariante symétrique converge quand $\varepsilon \to 0$ vers une mesure de probabilité discrète dont le support contient trois points exactement alors que F'' est convexe.

Exemple 3.33. *Soit le potentiel de confinement* $V(x) := \frac{x^6}{6} - \frac{3}{2}x^4 - \frac{17}{32}x^2$ *qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-10) et soit le potentiel d'intéraction* $F(x) := \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$ *qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). Soit une suite de mesures invariantes symétriques* $\{u^0_\varepsilon,\, \varepsilon > 0\}$ *pour la diffusion* (0.0.5)*. Cette suite est alors convergente et l'on a*

$$\lim_{\epsilon\to 0} u^0_\epsilon = \frac{26}{45}\,\delta_0 + \frac{19}{90}\left(\delta_{\frac{\sqrt{15}}{2}} + \delta_{-\frac{\sqrt{15}}{2}}\right).$$

Démonstration. On utilise la méthode développée dans la preuve de la Proposition 3.32 avec les paramètres suivants : $\alpha = \beta = 1$, $\alpha_2 = \alpha + \frac{1}{16\alpha_6}\beta^2$, $\alpha_4 = 6\beta$ et $\alpha_6 = 1$. On obtient immédiatement le résultat de la proposition à savoir que le support de toute mesure limite pour la famille $\{u^0_\varepsilon,\, \varepsilon > 0\}$ contient exactement trois points. D'où toutes les mesures limites symétriques possibles u^0_0 sont des combinaisons de trois mesures de Dirac : $u^0_0 = p_0\delta_0 + \frac{1-p_0}{2}\,(\delta_{x_1} + \delta_{-x_1})$ avec $p_0(1-p_0) > 0$ et $x_1 > 0$. On peut préciser les valeurs de p_0 et x_1 en utilisant la Proposition 3.27. Les équations suivantes doivent être résolues :

$$\begin{aligned} V'(x_1) + p_0F'(x_1) + \frac{1-p_0}{2}F'(2x_1) &= 0 \\ \text{et}\quad V(x_1) + (2p_0-1)F(x_1) + \frac{1-p_0}{2}F(2x_1) &= 0\,. \end{aligned}$$

En utilisant l'expression particulière des fonctions V et F, et comme $x_1 \neq 0$, les équations deviennent

$$x_1^4 - (3p_0+2)\,x_1^2 - \frac{1}{16} = 0 \tag{3.4.20}$$

$$\text{et}\quad x_1^4 + \frac{3}{2}\,(1-6p_0)\,x_1^2 - \frac{3}{16} = 0\,. \tag{3.4.21}$$

En soustrayant (3.4.21) à (3.4.20), on trouve $p_0 = \frac{7}{12} - \frac{1}{48x_1^2}$. Par conséquent, l'équation (3.4.20) devient :

$$x_1^4 - \left(2 + \frac{7}{4} - \frac{1}{16x_1^2}\right)x_1^2 - \frac{1}{16} = 0$$

ce qui donne directement $x_1 = \frac{\sqrt{15}}{2}$ puis $p_0 = \frac{1}{12}\frac{104}{15} = \frac{26}{45}$. On ne prend pas la peine de vérifier que les dérivées secondes sont bien positives c'est-à-dire que l'on a

$$\begin{aligned} V''(0) + \frac{26}{45}F''(0) + \frac{19}{45}F''(x_1) &\geq 0 \\ \text{et}\quad V''(x_1) + \frac{26}{45}F''(x_1) + \frac{19}{90}\,(F''(0) + F''(2x_1)) &\geq 0\,. \end{aligned}$$

Toutefois, on sait d'après la Proposition 3.32 que le support de toute mesure limite contient exactement trois points. La seule mesure limite possible étant justement $\frac{26}{45}\,\delta_0 + \frac{19}{90}\left(\delta_{\frac{\sqrt{15}}{2}} + \delta_{-\frac{\sqrt{15}}{2}}\right)$, on sait d'avance que les deux inégalités sont vérifiées. Et, par conséquent, on a bien la convergence annoncée. □

4. VITESSE DE CONVERGENCE

4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, le comportement asymptotique pour ϵ tendant vers 0 des mesures stationnaires de la diffusion (0.0.5) a été étudié : on a regardé les valeurs d'adhérence possibles et sous des hypothèses plus fortes, montré l'existence d'une véritable limite. Ici, on va s'intéresser à la vitesse à laquelle une famille de mesures stationnaires $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ converge vers sa limite u_0. Ce travail permettra en particulier de généraliser le Théorème 2.27 concernant les mesures excentrées. Par ailleurs, les résultats de ce chapitre seront utilisés dans le Chapitre 6 afin de prouver l'unicité "locale" des mesures sous des conditions peu exigeantes - déjà formulées précédemment (Théorème 2.8). Comme dans les Chapitres 3 et 4, on considère des mesures stationnaires dont le moment d'ordre $8q^2$ est fini si bien que toute mesure stationnaire vérifie le système (2.2.2)–(2.2.3). Afin de pouvoir appliquer les résultats du Chapitre 3, on suppose que les familles de mesures stationnaires que l'on considère vérifient la condition **(H)** mais aussi que le potentiel de confinement V vérifie l'hypothèse (V-7).

Pour commencer l'étude de la vitesse de convergence et afin de montrer que cette étude n'est pas triviale, on s'intéresse au cas le plus simple à savoir celui où la fonction d'intéraction F' est linéaire et où le potentiel de confinement V est symétrique. C'est la vitesse de convergence de la mesure stationnaire symétrique unique vers sa limite que l'on va regarder et l'on prouvera que la vitesse est d'ordre $\epsilon^{\frac{1}{k}}$ où k est un entier non nul qui n'est pas forcément égal à 1. En d'autres termes, même dans le cas le plus simple, la vitesse ne peut pas être devinée péremptoirement. On prouvera également que des points qui ne sont pas chargés par la mesure limite peuvent dans certains cas non sporadiques parasiter cette vitesse.

Ensuite, des résultats généraux seront établis dans le cas où F est de degré quelconque, où V n'est pas forcément symétrique et où l'on considère n'importe quelle famille de mesures stationnaires. En particulier, un résultat asymptotique qui servira de clé de voûte dans la suite de l'étude sera fourni. Par ailleurs, une condition simple sera donnée de sorte que seuls les points chargés par la mesure limite interviennent dans la vitesse de convergence.

On spécifiera ensuite le cas où la famille de mesures stationnaires symétriques converge vers δ_0 sous des conditions simples. On scindera le cas en deux sous-cas selon la stricte positivité ou non de $\alpha+V''(0)$. Une différence dans l'ordre de la vitesse de convergence apparaîtra alors. En effet, on verra que si $\alpha+V''(0) > 0$, cette vitesse est d'ordre ϵ alors qu'elle est d'ordre $\epsilon^{\frac{1}{m_0}}$ avec $m_0 \geq 2$ si $\alpha + V''(0) = 0$.

Le préfacteur sera également calculé.
On poursuivra l'étude concernant les familles de mesures stationnaires symétriques dans le cas où la mesure limite est de la forme $\frac{1}{2}\delta_{-x_0} + \frac{1}{2}\delta_{x_0}$ avec $x_0 > 0$. On prouvera en particulier que la vitesse de convergence est d'ordre ϵ sous des conditions simples.
Pour terminer sur la vitesse de convergence des mesures stationnaires symétriques, on se placera dans le cas où F'' est convexe et l'on observera que le cas $\alpha = \vartheta$ correspond à un dioptre vu que la vitesse y est d'ordre $\epsilon^{\frac{1}{m_0}}$ (avec $m_0 \geq 2$) alors qu'elle est d'ordre ϵ si $\alpha < \vartheta$ et si $\alpha > \vartheta$; où α et ϑ sont les constantes définies par (0.0.8) et (0.0.7). Une étude sera menée dans l'exemple du potentiel de confinement $V(x) := \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$. On reliera continûment le comportement entre $\alpha < \vartheta$ et $\alpha > \vartheta$ à travers le dioptre $\alpha = \vartheta$.
Enfin, pour terminer le chapitre, on mènera l'étude de la vitesse de convergence des mesures excentrées de la forme $u_\epsilon^{a_0}$ vers leur limite δ_{a_0}. On observera en particulier que cette vitesse est d'ordre ϵ sous des conditions simples.

4.2 Vitesse de convergence de u_ϵ^0 dans le cas linéaire

On suppose que le potentiel V vérifie les hypothèses (V-1)–(V-8) ainsi que (V-10). On reprend les notations déjà utilisées pour la convergence des mesures invariantes symétriques lorsque V est symétrique et F' est linéaire.

Définition 4.1. 1) *On note $A_1, \cdots, A_r$ les r points où le pseudo-potentiel limite (qui est égal au pseudo-potentiel pour tout $\epsilon > 0$) $W_0(x) := V(x) + \frac{\alpha}{2}x^2$ atteint son minimum global.*
2) *Pour tout $1 \leq i \leq r$, on pose $k_0(i) := \min\left\{k > 0 \ \mid \ W_0^{(2k)}(A_i) > 0\right\}$.*
3) *On pose $k_0 := \max_{1\leq i\leq r} k_0(i)$ et $I := \{1 \leq i \leq r \ \mid \ k_0(i) = k_0\}$.*

Avec ces notations, on a étudié le comportement asymptotique de l'unique mesure stationnaire symétrique (car F' est linéaire) u_ϵ^0 dans le Théorème 3.1 :

$$u_\epsilon^0 \longrightarrow u_0^0 := \frac{\sum_{i\in I}\left(W_0^{(2k_0)}(A_i)\right)^{-\frac{1}{2k_0}}\delta_{A_i}}{\sum_{j\in I}\left(W_0^{(2k_0)}(A_j)\right)^{-\frac{1}{2k_0}}}$$

pour la topologie de la convergence étroite. Seuls les indices appartenant à I interviennent dans la limite. Toutefois, on verra par la suite que si l'on poursuit le développement asymptotique à l'ordre suivant, d'autres indices peuvent éventuellement apparaître. On introduit donc de nouvelles notations :

Définition 4.2. 4) *Afin de simplifier les calculs, on écrit $\mathcal{W}_k^i := \frac{W_0^{(k)}(A_i)}{k!}$.*
5) *On pose $\omega_0 := W_0(A_1) = \cdots = W_0(A_r) = \inf_{z\in\mathbb{R}} W_0(z)$.*
6) *On pose $k_1 := \max\limits_{1\leq i\leq r,\, i\notin I} k_0(i)$ et $I_1 := \{1 \leq i \leq r \ \mid \ k_0(i) = k_1\}$.*
7) *On pose $J := \{1 \leq i \leq r,\, k_0(i) < k_1\}$ l'ensemble des indices restants.*

Par définition, on constate $\{1;\cdots;r\} = I \bigcup I_1 \bigcup J$. On va maintenant fournir le premier résultat asymptotique :

Proposition 4.3. *Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^4$ à croissance lente sur $\mathbb{R}$. Alors, on a le développement asymptotique suivant pour ϵ tendant vers 0 :*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\frac{2}{\epsilon}W_0(x)}dx = \tau_\epsilon \Bigg\{ &\sum_{i\in I}\left(\frac{1}{\mathcal{W}^i_{2k_0}}\right)^{\frac{1}{2k_0}} f(A_i) \\ &+ \epsilon^{\frac{1}{k_0}} \sum_{i\in I}\Big[C_0^i f(A_i) + C_1^i f'(A_i) + C_2^i f''(A_i)\Big] + o\left(\epsilon^{\frac{1}{k_0}}\right) \\ &+ \epsilon^{\frac{1}{2k_1}-\frac{1}{2k_0}}\rho \sum_{j\in I_1}\left(\frac{1}{\mathcal{W}^j_{2k_1}}\right)^{\frac{1}{2k_1}} f(A_j) + o\left(\epsilon^{\frac{1}{2k_1}-\frac{1}{2k_0}}\right)\Bigg\}\end{aligned}$$

où les différents coefficients sont définis comme suit :

$$\tau_\epsilon := \frac{\epsilon^{\frac{1}{2k_0}}}{k_0} e^{-\frac{2}{\epsilon}\omega_0}\Gamma\left(\frac{1}{2k_0}\right)\frac{1}{2^{\frac{1}{2k_0}}} \quad et \quad \rho := \frac{k_0}{k_1}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2k_1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2k_0}\right)} 2^{\frac{1}{2k_0}-\frac{1}{2k_1}},$$

$$C_0^i := \frac{\left(\mathcal{W}^i_{2k_0+1}\right)^2}{2^{1+\frac{1}{k_0}}\left(\mathcal{W}^i_{2k_0}\right)^{2+\frac{3}{2k_0}}}\frac{\Gamma\left(\frac{4k_0+3}{2k_0}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2k_0}\right)} - \frac{\mathcal{W}^i_{2k_0+2}}{2^{\frac{1}{k_0}}\left(\mathcal{W}^i_{2k_0}\right)^{1+\frac{3}{2k_0}}}\frac{\Gamma\left(\frac{2k_0+3}{2k_0}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2k_0}\right)},$$

$$C_1^i := -\frac{\mathcal{W}^i_{2k_0+1}}{2^{\frac{1}{k_0}}\left(\mathcal{W}^i_{2k_0}\right)^{1+\frac{3}{2k_0}}}\frac{\Gamma\left(\frac{2k_0+3}{2k_0}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2k_0}\right)} \quad et \quad C_2^i := \frac{1}{2^{1+\frac{5}{2k_0}}\left(\mathcal{W}^i_{2k_0}\right)^{\frac{3}{2k_0}}}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2k_0}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2k_0}\right)}.$$

Démonstration. On pose $A_0 := -\infty$ et $A_{r+1} := +\infty$ puis, pour tout $1 \le i \le r$, on considère l'intervalle $J_i := \left[\frac{A_{i-1}+A_i}{2}; \frac{A_i+A_{i+1}}{2}\right]$. On peut alors appliquer le Lemme A.4 à W_0 et f sur chacun de ces intervalles. En effet, on peut l'utiliser sur J_1 et J_r bien qu'ils soient semi-infinis. Pour cela, on utilise le même raisonnement que dans la preuve du Théorème 3.1. En d'autres termes, on se donne R assez grand pour que l'on ait la minoration $W_0(x) \ge x^2$ pour $|x| \ge R$ et l'on note $J_1 :=]-\infty; -R] \bigcup]R; \frac{A_1+A_2}{2}]$. L'intégrale portant sur $]-\infty; -R]$ sera clairement négligeable pour R assez grand et celle portant sur $]R; \frac{A_1+A_2}{2}]$ entre dans le cadre du Lemme A.4. On fait de même avec J_r.
En réordonnant et en simplifiant, on trouve bien le résultat annoncé. En effet, on ne garde que le terme de plus haut degré pour les indices $j \in I_1$ et les termes qui correspondent aux indices $k \in J$ sont négligeables devant $\epsilon^{\frac{1}{2k_1}-\frac{1}{2k_0}}$. □

On constate que les indices $j \in I_1$ ont un impact dans le développement asymptotique à la seule condition que l'on ait $\frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_0} \le \frac{1}{k_0}$ c'est-à-dire $k_1 \ge \frac{k_0}{3}$. A partir de là, on peut donner une estimation de $\langle f; u_\epsilon^0\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)du_\epsilon(x)$ en prenant le ratio de l'estimation précédente par celle appliquée avec la fonction

constante égale à 1. Afin de simplifier les calculs, on introduit la constante de renormalisation :

$$Z := \sum_{i\in I} \left(\mathcal{W}^i_{2k_0}\right)^{\frac{1}{2k_0}}.$$

Théorème 4.4. *Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^4$ à croissance lente sur $\mathbb{R}$. Trois situations différentes peuvent se produire :*
1. *Si $k_1 < \frac{k_0}{3}$, on a le développement asymptotique suivant pour $\epsilon \to 0$:*

$$\lim_{\epsilon\longrightarrow 0} \epsilon^{-\frac{1}{k_0}} \Big\{ \big\langle f; u^0_\epsilon \big\rangle - \big\langle f; u^0_0 \big\rangle \Big\} = \frac{1}{Z} \sum_{i\in I} \Big[\lambda_i(f) - \big\langle f; u^0_0 \big\rangle C^i_0 \Big]$$

où $\lambda_i(f) := C^i_0 f(A_i) + C^i_1 f'(A_i) + C^i_2 f''(A_i)$ pour $i \in I$; les constantes C^i_0, C^i_1 et C^i_2 ayant été introduites dans la Proposition 4.3.
2. *Si $k_1 > \frac{k_0}{3}$, on a le développement asymptotique suivant pour $\epsilon \to 0$:*

$$\lim_{\epsilon\longrightarrow 0} \epsilon^{\frac{1}{2k_0}-\frac{1}{2k_1}} \Big\{ \big\langle f; u^0_\epsilon \big\rangle - \big\langle f; u^0_0 \big\rangle \Big\} = \frac{1}{Z} \sum_{j\in I_1} \mu_j(f) \Big(f(A_j) - \big\langle f; u^0_0 \big\rangle \Big)$$

où $\mu_j(f) := \rho \left(\mathcal{W}^j_{2k_1}\right)^{-\frac{1}{2k_1}}$ pour $j \in I_1$; la constante ρ ayant été introduite dans la Proposition 4.3.
3. *Enfin, si $k_1 = \frac{k_0}{3}$, on a le développement asymptotique suivant pour $\epsilon \to 0$:*

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\longrightarrow 0} \epsilon^{-\frac{1}{k_0}} \Big\{ \big\langle f; u^0_\epsilon \big\rangle - \big\langle f; u^0_0 \big\rangle \Big\} &= \frac{1}{Z} \sum_{i\in I} \Big[\gamma_i(f) - \big\langle f; u^0_0 \big\rangle C^i_0 \Big] \\ &+ \frac{1}{Z} \sum_{j\in I_1} \gamma_j(f) \Big(f(A_j) - \big\langle f; u^0_0 \big\rangle \Big) \end{aligned}$$

où $\gamma_i(f) := \lambda_i(f)$ si $i \in I$ et $\gamma_j(f) := \mu_j(f)$ si $j \in I_1$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la Proposition 4.3 à f ainsi qu'à la fonction constante égale à 1 puis l'on prend le quotient de la première estimation par la seconde après avoir discuté du plus gand terme négligeable dans la somme selon le signe de $k_1 - \frac{k_0}{3}$. □

Remarque 4.5. *On voit ici que les puits de W_0 qui n'interviennent pas dans la mesure u^0_0 jouent un rôle capital. En effet, ils peuvent diminuer considérablement l'ordre de la vitesse de convergence mais aussi modifier le préfacteur sans affecter l'ordre de la vitesse comme dans le cas $k_1 = \frac{k_0}{3}$.*

4.3 Résultats généraux

On ne suppose maintenant plus rien sur la mesure limite u_0 et l'on ne demande pas non plus à V d'être symétrique ni même d'avoir seulement deux puits. On

exige seulement du potentiel de confinement V qu'il satisfasse les hypothèses (V-1)–(V-7) ainsi que (V-10). On utilise les notations habituelles :

$$W_0 := V + F * u_0 - F * u_0(0) \quad \text{et} \quad W_\epsilon := V + F * u_\epsilon - F * u_\epsilon(0)$$

pour tout $\epsilon > 0$. D'après la Proposition 3.14, on sait que $u_0 = \sum_{j=1}^r p_j \delta_{A_j}$ avec $p_j > 0$ pour tout $1 \leq j \leq r$. Par conséquent, vu que F est paire, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a $W_0(x) = V(x) + \sum_{j=1}^r p_j \Big(F(x - A_j) - F(A_j) \Big)$.

Définition 4.6. 1. *On note $\mathcal{A} := \{A_j \, ; \, 1 \leq j \leq r\}$ le support de la mesure u_0.*
2. *On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des réels où le pseudo-potentiel limite W_0 atteint son minimum global qui ne sont pas dans $\mathcal{A}$. On pose $s := card\,(\mathcal{B})$. Si $s \geq 1$, on note ses éléments par ordre croissant $B_1 < \cdots < B_s$.*
3. *On introduit $\mathcal{D} := \mathcal{A} \bigcup \mathcal{B}$. On note $D_1 < \cdots < D_{r+s}$ les $r+s$ éléments de $\mathcal{D}$. On pose aussi $D_0 := -\infty$ et $D_{r+s+1} := +\infty$. D_0 et D_{r+s+1} ne sont évidemment pas des éléments de $\mathcal{D}$.*
4. *Pour tout $1 \leq i \leq r+s$, on pose $\mathcal{V}_i := \left[\frac{D_{i-1}+D_i}{2} ; \frac{D_i+D_{i+1}}{2} \right]$ la cellule de Voronoï contenant le point D_i et aucun autre élément de $\mathcal{D}$.*

Les calculs faits sur u_0^0 dans le cas particulier où l'intéraction F' est linéaire suggèrent que les éléments de $\mathcal{B}$ peuvent intervenir dans la vitesse de convergence. Ainsi l'ensemble $\mathcal{A}$ n'est pas suffisant pour rendre compte systématiquement de la vitesse de convergence : on aura éventuellement besoin de $\mathcal{B}$.

Lemme 4.7. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-7) ainsi que (V-10) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). Soit $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ une suite de mesures invariantes pour la diffusion autostabilisante* (0.0.5) *qui converge vers u_0. Lorsque ϵ est assez petit, on a les résultats suivants :*
1. *Si $W_0''(D) > 0$ pour tout $D \in \mathcal{D}$, le pseudo-potentiel W_ϵ possède $r+s$ points critiques $D_1^\epsilon < \cdots < D_{r+s}^\epsilon$ avec $D_i^\epsilon \in \mathcal{V}_i$ pour tout $1 \leq i \leq r+s$ et tels que $W_\epsilon(D_i^\epsilon)$ corresponde à un minimum local du pseudo-potentiel W_ϵ. On note A_i^ϵ l'élément de $\mathcal{D}^\epsilon := \{D_k^\epsilon \, ; \, 1 \leq k \leq r+s\}$ appartenant à la cellule de Voronoï associée à $A_i \in \mathcal{A}$ et l'on note également B_j^ϵ l'élément de $\mathcal{D}^\epsilon$ appartenant à la cellule de Voronoï associée à $B_j \in \mathcal{B}$. Pour tout $1 \leq i \leq r+s$, D_i^ϵ vérifie le développement suivant :*

$$D_i^\epsilon = D_i - \frac{W_\epsilon'(D_i)}{W_0''(D_i)} + o\left\{W_\epsilon'(D_i)\right\} . \tag{4.3.1}$$

2. *Supposons que V soit symétrique. Si u_ϵ est symétrique, si $u_0 = \delta_0$, si $W_0 := V + F$ est convexe et si F'' est convexe, alors le pseudo-potentiel W_ϵ est convexe et 0 est l'unique point où W_ϵ atteint son minimum global. De plus, si F' n'est pas linéaire, on a $W_\epsilon''(0) > 0$.*
3. *Si $W_0''(D) > 0$ pour tous les éléments $D \in \mathcal{D}$, alors quelle que soit la fonction*

$f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R},\mathbb{R})$ à croissance lente, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{\frac{-2W_\epsilon(t)}{\epsilon}}dt &= \sum_{j=1}^{r}\sqrt{\frac{\pi\epsilon}{W_\epsilon''(A_j^\epsilon)}}\; e^{-\frac{2W_\epsilon(A_j^\epsilon)}{\epsilon}}\Big\{f(A_j^\epsilon)+\gamma_j(f)\epsilon+o(\epsilon)\Big\} \quad (4.3.2)\\ &+ \sum_{l=1}^{s}\sqrt{\frac{\pi\epsilon}{W_\epsilon''(B_l^\epsilon)}}\; e^{-\frac{2W_\epsilon(B_l^\epsilon)}{\epsilon}}\Big\{f(B_l)+o(1)\Big\}\end{aligned}$$

avec

$$\gamma_j(f) := f(A_j)\left(\frac{5\ \mathcal{W}_{3,j}^2}{48\ \mathcal{W}_{2,j}^3}-\frac{\mathcal{W}_{4,j}}{16\ \mathcal{W}_{2,j}^2}\right)-f'(A_j)\frac{\mathcal{W}_{3,j}}{4\ \mathcal{W}_{2,j}^2}+\frac{f''(A_j)}{4\ \mathcal{W}_{2,j}}\,. \qquad (4.3.3)$$

Ici, on utilise la notation $\mathcal{W}_{k,j} := W_\epsilon^{(k)}(A_j^\epsilon)$.

Démonstration. **1.** La suite $(W_\epsilon)_{\epsilon>0}$ satisfait les conditions du Lemme A.15. En effet, W_ϵ et chacune de ses dérivées successives convergent uniformément vers W_0 et chacune de ses dérivées successives sur tout compact d'après la Proposition 3.10. De plus, comme F est une fonction polynômiale et comme u_ϵ converge vers u_0, on peut écrire en utilisant l'hypothèse (V-3) : $W_\epsilon(x) \geq C_4x^4 - C_2x^2 + P(x)$ où P est une fonction polynômiale indépendante de ϵ dont le terme principal est positif. L'application du Lemme A.15 fournit l'existence des r élements A_j^ϵ et des s éléments B_l^ϵ si $s \geq 1$.
Soit D un point où W_0 réalise son minimum global. Si $W_0''(D) > 0$, la convergence uniforme de D^ϵ vers D et celle sur tout compact de W_ϵ vers W_0 donnent $W_\epsilon''(D^\epsilon) > 0$ pour ϵ assez petit. Le développement asymptotique (4.3.1) est une conséquence directe du Lemme A.15.
2. Si le potentiel V est symétrique, si u_ϵ est symétrique, si W_0 est convexe et si F'' est convexe, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$W_\epsilon''(x) - W_0''(x) = \int_{\mathbb{R}_+}\Big(F''(x-z)+F''(x+z)-2F''(x)\Big)u_\epsilon(z)dz \geq 0\,.$$

Ainsi W_ϵ est convexe et l'unique point où il atteint son minimum global est 0 vu qu'il est symétrique.
De plus, si F' n'est pas linéaire, $F''(z) > F''(0)$ pour tout $z \neq 0$. En conséquence, $W_\epsilon''(0) - W_0''(0) = \int_{\mathbb{R}}\Big(F''(z)-F''(0)\Big)u_\epsilon(z)dz > 0$ car F' est impaire et convexe sur $\mathbb{R}_+$ d'après l'hypothèse (F-3) et puisque la mesure u_ϵ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Par conséquent, $W_\epsilon''(0) > W_0''(0) \geq 0$.
3. Comme B_l^ϵ tend vers B_l, on a $f(B_l^\epsilon) + C\epsilon = f(B_l) + o(1)$ pour toute constante C. Donc, l'application du Lemme A.15 donne directement (4.3.2). □

Ce Lemme (qui est essentiel pour tous les calculs de vitesse de convergence) permet d'obtenir un premier résultat, plutôt général, à propos de la vitesse de convergence. Il permet également de bien visionner en quoi les éléments de $\mathcal{B}$ peuvent parasiter la vitesse de convergence.
Afin de compléter la description asymptotique, on a besoin du comportement de $W_\epsilon(A_i^\epsilon)$.

Proposition 4.8. *On suppose que $W_0''(D) > 0$ pour tout $D \in \mathcal{D}$. Alors, quels que soient les indices j et k dans $\{1; \cdots; r\}$, on a la limite suivante*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{W_\epsilon(A_j^\epsilon) - W_\epsilon(A_k^\epsilon)}{\epsilon} = -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{W_0''(A_j)}{W_0''(A_k)}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_j}{p_k}\right). \tag{4.3.4}$$

De plus, si $\mathcal{B} \neq \emptyset$, pour tout $1 \leq l \leq s$, on a

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{W_\epsilon(B_l^\epsilon) - W_\epsilon(A_1^\epsilon)}{\epsilon} = +\infty. \tag{4.3.5}$$

Démonstration. Le Théorème 3.13 implique $u_0 = \sum_{j=1}^r p_j\delta_{A_j} + \sum_{l=1}^s q_l\delta_{B_l}$ où, quels que soient $1 \leq j \leq r$ et $1 \leq l \leq s$, on a :

$$p_j = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{A_j-\delta}^{A_j+\delta} u_\epsilon(x)dx \quad \text{et} \quad q_l = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{B_l-\delta}^{B_l+\delta} u_\epsilon(x)dx\,,$$

δ étant choisi de telle sorte que les intervalles $[D_k-\delta; D_k+\delta]$ soient disjoints deux à deux. Par définition de $\mathcal{A}$, $p_i \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq r$: il vient directement que pour tous les indices $1 \leq j,k \leq r$ et $1 \leq l \leq s$:

$$\frac{p_j}{p_k} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\int_{A_j-\delta}^{A_j+\delta} e^{-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon(x)}dx}{\int_{A_k-\delta}^{A_k+\delta} e^{-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon(x)}dx} \quad \text{et} \quad \frac{q_l}{p_j} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\int_{B_l-\delta}^{B_l+\delta} e^{-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon(x)}dx}{\int_{A_j-\delta}^{A_j+\delta} e^{-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon(x)}dx}\,.$$

Par définition de $\mathcal{B}$, $q_l = 0$. On applique le Lemme 4.7 à la fonction constante égale à 1 et on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\sqrt{\frac{\pi\epsilon}{W_\epsilon''(A_j^\epsilon)}}\, e^{-\frac{2W_\epsilon(A_j^\epsilon)}{\epsilon}}\Big\{1+o(1)\Big\}}{\sqrt{\frac{\pi\epsilon}{W_\epsilon''(A_k^\epsilon)}}\, e^{-\frac{2W_\epsilon(A_k^\epsilon)}{\epsilon}}\Big\{1+o(1)\Big\}} &= \frac{p_j}{p_k} \\ \text{et} \qquad \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\sqrt{\frac{\pi\epsilon}{W_\epsilon''(B_l^\epsilon)}}\, e^{-\frac{2W_\epsilon(B_l^\epsilon)}{\epsilon}}\Big\{1+o(1)\Big\}}{\sqrt{\frac{\pi\epsilon}{W_\epsilon''(A_j^\epsilon)}}\, e^{-\frac{2W_\epsilon(A_j^\epsilon)}{\epsilon}}\Big\{1+o(1)\Big\}} &= 0\,. \end{aligned}$$

On simplifie et on applique la fonction $x \mapsto -\frac{1}{2}\ln(x)$. On trouve ainsi les deux limites (4.3.4) et (4.3.5). □

Remarque 4.9. a) *Chaque D_i^ϵ converge vers un point D_i où le pseudo-potentiel limite W_0 atteint son minimum global. Toutefois,* a priori *le pseudo-potentiel W_ϵ n'y atteint pas son minimum global. On va dire que W_ϵ atteint en ce point un quasi-minimum global. Les différences de profondeurs entre les divers quasi-minima globaux modifient les poids des points. Alors, la vitesse de convergence a un impact sur la limite vers laquelle converge la suite de mesures. Evidemment, cette limite a également un impact sur la vitesse de convergence.*
b) *De plus, même si les éléments de $\mathcal{B}$ n'interfèrent pas dans la limite u_0, on peut*

imaginer qu'ils soient bien présents dans la vitesse de convergence. En effet, on a vu dans le Théorème 4.4 que sous certaines conditions simples, les éléments de $\mathcal{B}$ intervenaient dans la vitesse de convergence ; que ce soit au niveau de la puissance de ϵ ou du préfacteur.

Pour éviter le parasitisme de l'ensemble $\mathcal{B}$ et ainsi rendre les calculs palpables, on introduit une condition que l'on supposera vraie par la suite :

Hypothèse 4.10. *Quel que soit $D \in \mathcal{D}$, $W_0''(D) > 0$. Et, de plus, quels que soient $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq j \leq s$, on exige*

$$\liminf_{\epsilon \to 0} \frac{W_\epsilon(B_j^\epsilon) - W_\epsilon(A_i^\epsilon)}{-\epsilon \ln(\epsilon)} > 1 \quad \forall\, 1 \leq l \leq s\,. \tag{4.3.6}$$

Cette condition est naturelle. En effet, en reprenant l'équivalence (4.3.2), on voit que si la condition est vérifiée, alors

$$\sqrt{\frac{\pi\epsilon}{W_\epsilon''\left(B_j^\epsilon\right)}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon} W_\epsilon\left(B_j^\epsilon\right)\right] = o\left\{\epsilon \sqrt{\frac{\pi\epsilon}{W_\epsilon''\left(A_i^\epsilon\right)}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon} W_\epsilon\left(A_i^\epsilon\right)\right]\right\}.$$

En d'autres termes, sous l'Hypothèse 4.10, les termes principaux induits par $\mathcal{B}$ sont négligeables non seulement devant les termes principaux et les termes secondaires induits par $\mathcal{A}$.
On remarquera par ailleurs que si $W_0''(A) > 0$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ et si $\mathcal{B} = \emptyset$, l'Hypothèse 4.10 est vérifiée.

Exemple 4.11. *On reprend l'Exemple 3.33. Soit donc le potentiel de confinement $V(x) := \frac{x^6}{6} - \frac{3}{2}x^4 - \frac{17}{32}x^2$ et le potentiel d'intéraction $F(x) := \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$. On a vu que la convergence étroite suivante avait lieu :*

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} u_\epsilon^0 = \frac{26}{45}\delta_0 + \frac{19}{90}\left(\delta_{\frac{\sqrt{15}}{2}} + \delta_{-\frac{\sqrt{15}}{2}}\right).$$

De plus, on a vu dans cet exemple qu'il y a exactement trois points critiques où le pseudo-potentiel limite réalise son minimum global à savoir 0, $\frac{\sqrt{15}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{15}}{2}$. Par conséquent, l'ensemble $\mathcal{B}$ est vide. On peut exprimer facilement le pseudo-potentiel limite :

$$W_0(x) := V(x) + \frac{26}{45}F(x) + \frac{19}{90}\Big\{F(x - x_0) + F(x + x_0) - 2F(x_0)\Big\}$$

avec $x_0 := \frac{\sqrt{15}}{2}$. Un calcul simple donne

$$W_0''(0) = \frac{75}{16} \quad \text{et} \quad W_0''(x_0) = \frac{75}{4} = 4W_0''(0)\,.$$

De la même façon qu'on a prouvé dans l'Exemple 3.33 que W_0 admet exactement trois puits, on prouve que W_ϵ n'admet que trois puits à savoir 0 d'après le Lemme

4.7 ainsi que x_ϵ et $-x_\epsilon$ où x_ϵ converge vers x_0 quand ϵ tend vers 0.
Comme $W_0''\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}\right) = 4W_0''(0) > 0$, la Proposition 4.8 fournit la différence de profondeur suivante :

$$W_\epsilon(x_\epsilon) = \frac{\epsilon}{2}\ln\left(1+\frac{7}{19}\right) + o(\epsilon)\,.$$

On va maintenant étudier la vitesse de convergence pour différentes mesures limites u_0 dans le cas où l'Hypothèse 4.10 est vérifiée.

4.4 Vitesse de convergence de u_ϵ^0 vers $u_0^0 = \delta_0$

On suppose ici que le potentiel V satisfait l'hypothèse (V-8) c'est-à-dire que V est symétrique. Comme $u_0 = \delta_0$, le pseudo-potentiel limite est $W_0(x) = V(x) + F(x)$. On sait alors que $\alpha \geq -V''(0)$ d'après la Proposition 3.14. On ne suppose pas $\alpha \geq \vartheta$ où l'on a $\vartheta = \sup_{x\in\mathbb{R}} -V''(x)$ et $\alpha = F''(0)$. On demande toutefois à ce que le pseudo-potentiel limite W_0 ainsi que F'' soient convexes. L'Hypothèse 4.10 est donc automatiquement satisfaite puisque $\mathcal{D} = \mathcal{A} = \{0\}$.
On scinde en deux cas. En effet, la méthode développée lorsque $\alpha = -V''(0)$ est différente de celle développée lorsque l'on a l'inégalité stricte $\alpha > -V''(0)$. On pouvait d'ailleurs s'y attendre au vu de la Remarque 3.29.

4.4.1 Si $\alpha > -V''(0)$

Ici, on suppose que $W_0''(0) > 0$. Si l'on pense à la constante k_0 introduite dans la Définition 4.1, on a $k_0 = 1$ c'est-à-dire que l'entier k_0 est minimal.

Lemme 4.12. *Quelle que soit la fonction $f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R},\mathbb{R})$ à croissance lente, on a l'estimation suivante :*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon(x)\right]dx = \sqrt{\frac{\pi\epsilon}{W_\epsilon''(0)}}\Big\{f(0)+\gamma(f)\epsilon+o(\epsilon)\Big\} \tag{4.4.1}$$

$$\text{avec}\quad \gamma(f) := -\frac{W_0^{(4)}(0)}{16W_0''(0)^2}f(0) + \frac{f''(0)}{4W_0''(0)}\,. \tag{4.4.2}$$

Démonstration. D'après le second point du Lemme 4.7, $\mathcal{A} = \{0\}$ et $\mathcal{B} = \emptyset$. De plus, $W_0''(0) > 0$ donc l'application du troisième point du Lemme 4.7 fournit

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon(x)}dx = \sqrt{\frac{\pi\epsilon}{W_\epsilon''(0)}}\Big\{f(0)+\gamma_0(f)\epsilon+o(\epsilon)\Big\} \tag{4.4.3}$$

où $\gamma_0(f)$ est définie dans (4.3.3). En remarquant que $W_0^{(3)}(0) = V^{(3)}(0) = 0$ et que $W_0''(0) = \alpha + V''(0) > 0$, $\gamma_0(f)$ converge vers $\gamma(f)$ ce qui achève la preuve. □

En utilisant le lemme précédent, il est maintenant possible d'estimer la vitesse de convergence de la suite de mesures stationnaires symétriques $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ vers $u_0 = \delta_0$ quand ϵ tend vers 0.

Théorème 4.13. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-8) ainsi que (V-10) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie (F-1)–(F-5). Quelle que soit la fonction $f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R},\mathbb{R})$ à croissance lente, on a :*

$$\lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\frac{1}{\epsilon}\Big\{\,\langle f,u_\epsilon\rangle - \langle f,u_0\rangle\,\Big\} = \frac{f''(0)}{4(\alpha+V''(0))}\,. \tag{4.4.4}$$

Démonstration. En rappelant que la mesure u_ϵ vérifie (2.2.2), il suffit d'appliquer le Lemme 4.12 à la fonction f puis à la fonction constante égale à 1 :

$$\int_{\mathbb{R}}\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon(x)\right]dx = \sqrt{\frac{\pi\epsilon}{W_\epsilon''(0)}}\Big\{1+\gamma(1)\epsilon+o(\epsilon)\Big\} \tag{4.4.5}$$

avec $\gamma(1) := -\frac{W_0^{(4)}(0)}{16W_0''(0)^2}$. On divise (4.4.1) par (4.4.5) :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)u_\epsilon(x)dx &= \frac{\sqrt{\frac{\pi\epsilon}{W_\epsilon''(0)}}\Big\{f(0)+\gamma(f)\epsilon+o(\epsilon)\Big\}}{\sqrt{\frac{\pi\epsilon}{W_\epsilon''(0)}}\Big\{1+\gamma(1)\epsilon+o(\epsilon)\Big\}}\\ &= f(0)+\Big(\gamma(f)-f(0)\gamma(1)\Big)\epsilon+o(\epsilon)\end{aligned}$$

où $\gamma(f)$ est définie dans (4.4.2). On a alors

$$\frac{\langle f,u_\epsilon\rangle-\langle f,u_0\rangle}{\epsilon} = \gamma(f)-f(0)\gamma(1)+o(1) = \frac{f''(0)}{4W_0''(0)}+o(1)\,.$$

En rappelant que $W_0''(0)=\alpha+V''(0)$, la preuve est finie. □

On constate qu'il n'y avait pas de difficultés particulières pour traiter ce cas. En effet, lorsque le potentiel V est symétrique, lorsque $\alpha>\vartheta$, si l'on considère des mesures symétriques, la diffusion auto-stabilisante (0.0.5) est équivalente à une diffusion auto-stabilisante dont le potentiel de confinement est uniformément strictement convexe.

4.4.2 Si $\boldsymbol{\alpha = -V''(0)}$

On suppose cette fois que $W_0''(0)=0$. A nouveau, on demande à ce que W_0 et F'' soient convexes ce qui implique $\mathcal{B}=\emptyset$ et 0 est donc l'unique point critique de W_0. Le Lemme 4.7 devient insuffisant pour obtenir une bonne équivalence dans ce cas. Le raison provient de la nécessité de poursuivre le développement limité du pseudo-potentiel à des dérivées d'ordre supérieur. On introduit les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} k_0 &:= \min\Big\{k>0 \;\mid\; W_0^{(2k)}(0)>0\Big\},\\ \Omega_\epsilon &:= \max_{1\le j\le k_0}\Big\{\big|W_\epsilon^{(2j)}(0)\big|^{\frac{1}{2j}}\,\epsilon^{-\frac{1}{2j}}\Big\}\\ \text{et}\quad M_{2r}(\epsilon) &:= \int_{\mathbb{R}} x^{2r}\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon(x)\right]dx \quad \text{pour tout } r\ge 0\,.\end{aligned} \tag{4.4.6}$$

Ω_ϵ va correspondre au bon changement de variable à effectuer afin d'estimer la quantité $M_{2r}(\epsilon)$:

Proposition 4.14. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-8) ainsi que (V-10) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). On suppose que $W_0 := V + F$ et F'' sont convexes ainsi que $\alpha + V''(0) = 0$. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a les inégalités suivantes :*

$$0 < \liminf_{\epsilon \longrightarrow 0} \Omega_\epsilon^{2r+1} M_{2r}(\epsilon) < \limsup_{\epsilon \longrightarrow 0} \Omega_\epsilon^{2r+1} M_{2r}(\epsilon) < +\infty \,. \tag{4.4.7}$$

Démonstration. L'idée de la preuve est la suivante : d'abord, on trouve une suite décroissante $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 telle que $\frac{W_{\epsilon_k}^{(2j)}(0)}{\epsilon_k \Omega_{\epsilon_k}^{2j}}$ converge vers C_j pour tout $1 \leq j \leq k_0$. Puis, on prouve que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_+} y^{2r} e^{-2\sum_{j=1}^{k_0} \frac{C_j}{j!} y^{2j}} dy$ est finie pour tout $r \in \mathbb{N}$. On montre ensuite qu'avec un $\eta(\epsilon_k)$ judicieusement choisi, $\Omega_{\epsilon_k}^{2r+1} \int_0^{\eta(\epsilon_k)} x^{2r} e^{-\frac{2}{\epsilon_k} W_{\epsilon_k}(x)} dx$ tend vers $\int_{\mathbb{R}_+} y^{2r} e^{-2\sum_{j=1}^{k_0} \frac{C_j}{j!} y^{2j}} dy > 0$.
Enfin, on prouve qu'il existe des constantes $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ telles que les trois intégrales $\int_{\eta(\epsilon_k)}^{\epsilon_k^\lambda} x^{2r} e^{-\frac{2}{\epsilon_k} W_{\epsilon_k}(x)} dx$, $\int_{\epsilon_k^\lambda}^{\epsilon_k^{-\mu}} x^{2r} e^{-\frac{2}{\epsilon_k} W_{\epsilon_k}(x)} dx$ et $\int_{\epsilon_k^{-\mu}}^{+\infty} x^{2r} e^{-\frac{2}{\epsilon_k} W_{\epsilon_k}(x)} dx$ soient négligeables devant $\Omega_{\epsilon_k}^{2r+1}$.
Pour achever la preuve, on suppose par l'absurde que l'inégalité (4.4.7) est fausse c'est-à-dire qu'il existe une suite décroissante $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 telle que $\Omega_{\epsilon_k}^{2r+1} M_{2r}(\epsilon_k)$ tende vers $+\infty$ ou 0. Et, après avoir extrait une sous-suite, on tombe sur une impossibilité.
Étape 1. Préliminaires. On sait d'après la Proposition 3.10 que $W_\epsilon^{(2k_0)}$ converge uniformément vers $W_0^{(2k_0)}$ sur tout compact. Ainsi $W_\epsilon^{(2k_0)}(0)$ converge vers un réel strictement positif vu la définition de k_0. Par conséquent, on a la convergence de la quantité $\left|W_\epsilon^{(2k_0)}(0)\right|^{\frac{1}{2k_0}} \epsilon^{-\frac{1}{2k_0}}$ vers $+\infty$; il en est de même pour Ω_ϵ.
Pour tout $1 \leq j \leq k_0$, on introduit :

$$C_j(\epsilon) := \frac{W_\epsilon^{(2j)}(0)}{\epsilon \Omega_\epsilon^{2j}} \,.$$

Par définition de Ω_ϵ, les k_0 familles $\{C_j(\epsilon)\}_{\epsilon>0}$ sont bornées. En invoquant le théorème de Bolzano-Weierstrass, on sait qu'il existe une suite décroissante $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 telle que pour tout $1 \leq j \leq k_0$, la suite $C_j(\epsilon_k)$ tend vers $C_j \in \mathbb{R}$. Afin de simplifier la rédaction de la preuve, on va omettre l'indice k par la suite. On définit l'ensemble des indices

$$\mathbb{J} := \Big\{ 1 \leq j \leq k_0 \;\Big|\; C_j \neq 0 \Big\} = \Big\{ j_1; \cdots; j_l \Big\} \tag{4.4.8}$$

avec $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_l \leq k_0$. On scinde l'intégrale en deux parties après avoir exploité la parité du pseudo-potentiel W_ϵ :

$$\begin{aligned} M_{2r}(\epsilon) &= 2\int_0^{\eta(\epsilon)} x^{2r} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon} W_\epsilon(x)\right] dx + 2\int_{\eta(\epsilon)}^{+\infty} x^{2r} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon} W_\epsilon(x)\right] dx \\ &=: I_{2r}(\epsilon) + J_{2r}(\epsilon) \end{aligned}$$

où $\eta(\epsilon)$ sera exprimée explicitement par la suite.
Étape 2. Equivalent de $I_{2r}(\epsilon)$: On va prouver que l'on a

$$\Omega_\epsilon^{2r+1} \int_0^{\eta(\epsilon)} x^{2r} e^{-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon(x)} dx \longrightarrow \mathcal{C}_r \in]0;+\infty[$$

où $\mathcal{C}_r \in]0;+\infty[$ pour une quantité $\eta(\epsilon)$ bien choisie. On applique le théorème des accroissements finis sur $[0;\eta(\epsilon)]$ à la fonction W_ϵ ce qui donne

$$\frac{W_\epsilon(x)}{\epsilon} = \sum_{j=1}^{k_0} \frac{1}{(2j)!} \frac{W_\epsilon^{(2j)}(0)}{\epsilon} x^{2j} + \frac{1}{(2k_0+2)!} \frac{W_\epsilon^{(2k_0+2)}(y_x)}{\epsilon} x^{2k_0+2}$$

avec $y_x \in [0;x] \subset [0;\eta(\epsilon)]$. En utilisant la définition de $C_j(\epsilon)$ ainsi que sa convergence vers le réel C_j :

$$\begin{aligned} \frac{W_\epsilon(x)}{\epsilon} &= \sum_{k=1}^{l} \frac{C_{j_k}}{(2j_k)!} \Omega_\epsilon^{2j_k} x^{2j_k} + \frac{1}{(2k_0+2)!} \frac{W_\epsilon^{(2k_0+2)}(y_x)}{\epsilon} x^{2k_0+2} \\ &+ \sum_{j=1}^{k_0} \frac{1}{(2j)!} \operatorname{sgn}\left(C_j(\epsilon) - C_j\right) \left(|C_j(\epsilon) - C_j|^{\frac{1}{2j}}\right)^{2j} \Omega_\epsilon^{2j} x^{2j} . \end{aligned}$$

Pour ϵ assez petit, pour tout $x \in [0;\eta(\epsilon)]$, on a la majoration

$$\frac{\left|W_\epsilon^{(2k_0+2)}(y_x)\right|}{\epsilon} x^{2k_0+2} \leq \sup_{z\in[0;1]} \left|W_\epsilon^{(2k_0+2)}(z)\right| \eta(\epsilon)^{2k_0+2} \epsilon^{-1} .$$

On introduit maintenant la quantité

$$\overline{\Omega}_\epsilon := \max\left\{ \max_{1\leq j\leq k_0} \left\{ |C_j(\epsilon) - C_j|^{\frac{1}{2j}} \right\}; \frac{1}{\Omega_\epsilon}; \epsilon^{\frac{1}{2k_0(2k_0+2)}} \right\} .$$

$\overline{\Omega}_\epsilon$ tend vers 0 quand ϵ tend vers 0. On prend comme valeur

$$\eta(\epsilon) := \Omega_\epsilon^{-1} \left(\overline{\Omega}_\epsilon\right)^{-\frac{1}{2}} .$$

On vérifie ces deux propriétés :
1. La quantité $\eta(\epsilon)$ tend vers 0. En effet, par définition, $\overline{\Omega}_\epsilon \geq \frac{1}{\Omega_\epsilon}$. Par conséquent $\left(\overline{\Omega}_\epsilon\right)^{-\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\Omega_\epsilon}$ puis il vient $\eta(\epsilon) \leq (\Omega_\epsilon)^{-\frac{1}{2}}$ ce qui tend bien vers 0 vu que Ω_ϵ tend vers l'infini.
2. Il existe $\rho(\epsilon) > 0$ telle que pour tout $x \in [0;\eta(\epsilon)]$, on a

$$\frac{\left|W_\epsilon^{(2k_0+2)}(y_x)\right|}{\epsilon\,(2k_0+2)!} x^{2k_0+2} + \sum_{j=1}^{k_0} \frac{\left(|C_j(\epsilon) - C_j|^{\frac{1}{2j}}\right)^{2j}}{(2j)!} \Omega_\epsilon^{2j} x^{2j} < \rho(\epsilon) \longrightarrow 0 .$$

En effet, avec cette valeur de $\eta(\epsilon)$, on a la majoration $\eta(\epsilon) \leq \Omega_\epsilon^{-1} \epsilon^{-\frac{1}{4k_0(2k_0+2)}}$. De plus, par définition, $\Omega_\epsilon^{-1} \leq C\epsilon^{\frac{1}{2k_0}}$ où C est une constante strictement positive. Par conséquent $\eta(\epsilon)^{2k_0+2}\epsilon^{-1} \leq C^{2k_0+2}\epsilon^{\frac{3}{4k_0}}$ d'où, pour tout $x \in [0;\eta(\epsilon)]$, la quantité $\frac{\left|W_\epsilon^{(2k_0+2)}(y_x)\right|}{\epsilon\,(2k_0+2)!}x^{2k_0+2}$ peut bien être majorée indépendamment de x par une constante $\rho_1(\epsilon)$ qui tend vers 0. Puis, pour chaque $1 \leq j \leq k_0$ et $x \in [0;\eta(\epsilon)]$, on obtient la majoration

$$\begin{aligned}\left(|C_j(\epsilon)-C_j|^{\frac{1}{2j}}\right)^{2j}\Omega_\epsilon^{2j}x^{2j} &\leq \left\{|C_j(\epsilon)-C_j|^{\frac{1}{2j}}\,\Omega_\epsilon\eta(\epsilon)\right\}^{2j}\\ &\leq \left\{\overline{\Omega}_\epsilon\Omega_\epsilon\Omega_\epsilon^{-1}\left(\overline{\Omega}_\epsilon\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}^{2j} = \left(\overline{\Omega}_\epsilon\right)^{j} \longrightarrow 0\,.\end{aligned}$$

Ainsi la quantité $\sum_{j=1}^{k_0}\frac{\left(|C_j(\epsilon)-C_j|^{\frac{1}{2j}}\right)^{2j}}{(2j)!}\Omega_\epsilon^{2j}x^{2j}$ peut être majorée indépendamment de x par une constante $\rho_2(\epsilon)$ qui tend vers 0 ce qui donne directement l'existence de $\rho(\epsilon)$ annoncée plus haut.

Donc, on en déduit que l'intégrale $\int_0^{\eta(\epsilon)} x^{2r}\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon(x)\right]dx$ est équivalente à une intégrale plus simple à savoir $\int_0^{\eta(\epsilon)} x^{2r}\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(\sum_{k=1}^{l}\frac{C_{j_k}}{(2j_k)!}\Omega_\epsilon^{2j_k}x^{2j_k}\right)\right]dx$.

Le changement de variable $x := \Omega_\epsilon^{-1}y$ fournit

$$I_{2r}(\epsilon) \approx \Omega_\epsilon^{-2r-1}\int_0^{\varphi(\epsilon)} y^{2r}\exp\left[-2\sum_{k=1}^{l}\frac{C_{j_k}}{(2j_k)!}y^{2j_k}\right]dy$$

où $\varphi(\epsilon) := \eta\,(\epsilon)\,\Omega_\epsilon = \left(\overline{\Omega}_\epsilon\right)^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow +\infty$. Par la définition de $\mathbb{J}$, $C_{j_l} \neq 0$. Prouvons maintenant que $C_{j_l} > 0$.

En effet, si l'on avait $C_{j_l} < 0$, alors $\lim_{y\longrightarrow+\infty}\sum_{k=1}^{l}\frac{C_{j_k}}{(2j_k)!}y^{2j_k} = -\infty$. Il existerait y_0 tel que $\sum_{k=1}^{l}\frac{C_{j_k}}{(2j_k)!}y_0^{2j_k} \leq -1$. Mais, pour tout y, les calculs effectués précédemment prouvent que la quantité $\frac{W_\epsilon\left(\Omega_\epsilon^{-1}y\right)}{\epsilon}$ tend vers $\sum_{k=1}^{l}\frac{C_{j_k}}{(2j_k)!}y^{2j_k}$. On en déduit donc que $\frac{W_\epsilon\left(\Omega_\epsilon^{-1}y_0\right)}{\epsilon} < 0$ pour ϵ assez petit. Ceci est impossible car 0 est le minimum global de W_ϵ d'après le Lemme 4.7 vu que $W_\epsilon(0) = 0$. On en déduit que $C_{j_l} > 0$ donc quel que soit $r \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^+} y^{2r}\exp\left[-2\sum_{k=1}^{l}\frac{C_{j_k}}{(2j_k)!}y^{2j_k}\right]dy$ est finie. Alors, on trouve l'équivalence suivante :

$$\Omega_\epsilon^{2r+1}I_{2r}(\epsilon) \approx \int_{\mathbb{R}^+} y^{2r}\exp\left[-2\sum_{k=1}^{l}\frac{C_{j_k}}{(2j_k)!}y^{2j_k}\right]dy =: \mathcal{C}_r\,.$$

Étape 3. Equivalent de $J_{2r}(\epsilon)$: Il est maintenant suffisant de prouver que $J_{2r}(\epsilon)$ est négligeable devant $I_{2r}(\epsilon)$ et donc devant Ω_ϵ^{-2r-1} quel que soit $r \in \mathbb{N}$. On scinde

cette intégrale en trois parties :

$$\begin{aligned} J_{2r}(\epsilon) &= \int_{\eta(\epsilon)}^{\epsilon^{\lambda}} x^{2r} e^{-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon(x)} dx + \int_{\epsilon^{\lambda}}^{\epsilon^{-\mu}} x^{2r} e^{-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon(x)} dx + \int_{\epsilon^{-\mu}}^{+\infty} x^{2r} e^{-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon(x)} dx \\ &=: J_{2r}^{*}(\epsilon) + J_{2r}^{\circ}(\epsilon) + J_{2r}^{\Delta}(\epsilon) \end{aligned}$$

où $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ sont des constantes qui seront explicitées par la suite.
Étape 3.1. On commence par $J_{2r}^{\Delta}(\epsilon)$. D'après les hypothèses (F-2) et (V-3) ainsi que le Lemme 4.7, on a la minoration $W_\epsilon(x) \geq W_0(x) \geq C_4 x^4 - C_2 x^2 \geq \frac{x^2}{2}$ pour x assez grand. Le changement de variable $x := \sqrt{\epsilon} y$ puis le Lemme A.1 avec $U(y) := y^2 - 2r\ln(y)$ amènent à

$$J_{2r}^{\Delta}(\epsilon) \leq \epsilon^{r+\frac{1}{2}} \int_{\epsilon^{-\mu-\frac{1}{2}}}^{+\infty} y^{2r} e^{-y^2} dy \leq 2\epsilon^{1+(1-2r)\mu} \exp\left[-\epsilon^{-2\mu-1}\right]$$

pour ϵ assez petit. Or, la définition de Ω_ϵ implique $\epsilon\Omega_\epsilon \longrightarrow 0$ et en conséquence :

$$J_{2r}^{\Delta}(\epsilon) = o\left(\epsilon^{2r+1}\right) = o\left\{\Omega_\epsilon^{-2r-1}\right\} .$$

Étape 3.2. On estime maintenant $J_{2r}^{\circ}(\epsilon)$. En prenant le maximum sur tout l'intervalle, il vient

$$J_{2r}^{\circ}(\epsilon) < \epsilon^{-\mu(2r+1)} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon} \inf_{z\in[\epsilon^{\lambda};+\infty[} W_\epsilon(z)\right] .$$

0 est l'unique réel où W_0 atteint son minimum global donc, pour ϵ assez petit :

$$\inf_{z\in[\epsilon^{\lambda};+\infty[} W_\epsilon(z) = W_\epsilon\left(\epsilon^{\lambda}\right) \geq W_0\left(\epsilon^{\lambda}\right)$$

d'après le Lemme 4.7. Le théorème des accroissements finis appliqué à W_0 au voisinage de 0 fournit $\inf_{z\in[\epsilon^{\lambda};+\infty[} W_0(z) \geq \frac{W_0^{(2k_0)}(0)}{(2k_0)!}\epsilon^{2k_0\lambda}$. En prenant $\lambda := \frac{1}{2k_0+1}$, on a $\frac{1}{\epsilon}W_0\left(\epsilon^{\lambda}\right) \approx \frac{W_0^{(2k_0)}(0)}{(2k_0)!}\epsilon^{-\frac{1}{2k_0+1}}$. Donc, pour tout $\mu > 0$, la seconde intégrale est exponentiellement petite devant ϵ. Par définition $\epsilon = o\left\{\frac{1}{\Omega_\epsilon}\right\}$ et ainsi

$$J_{2r}^{\circ}(\epsilon) = o\left\{\Omega_\epsilon^{-2r-1}\right\} .$$

Étape 3.3. On termine maintenant avec la première intégrale à savoir $J_{2r}^{*}(\epsilon)$.
Étape 3.3.1. On applique le théorème des accroissements finis à la fonction W_ϵ ainsi qu'à sa dérivée :

$$\begin{aligned} W_\epsilon(x) &= \sum_{j=1}^{k_0-1} \frac{W_\epsilon^{(2j)}(0)}{(2j)!}x^{2j} + \frac{W_\epsilon^{(2k_0)}(0)}{(2k_0)!}x^{2k_0} + \frac{W_\epsilon^{(2k_0+2)}(y_x)}{(2k_0+2)!}x^{2k_0+2} \\ \text{et} \quad W_\epsilon'(x) &= \sum_{j=1}^{k_0-1} \frac{W_\epsilon^{(2j)}(0)}{(2j-1)!}x^{2j-1} + \frac{W_\epsilon^{(2k_0)}(0)}{(2k_0-1)!}x^{2k_0-1} + \frac{W_\epsilon^{(2k_0+2)}(z_x)}{(2k_0+1)!}x^{2k_0+1} \end{aligned}$$

où y_x et z_x sont dans $[0;x] \subset [0;\epsilon^\lambda]$.
Pour tout $x \in [\eta(\epsilon);\epsilon^\lambda]$, on a $\left|\frac{W_\epsilon^{(2k_0+2)}(y_x)}{\epsilon}x^{2k_0+2}\right| = O\left\{\epsilon^{\frac{1}{2k_0+1}}\right\}$ car on a choisi $\lambda = \frac{1}{2k_0+1}$. On a également : $\left|\frac{W_\epsilon^{(2k_0+2)}(z_x)}{\epsilon}x^{2k_0+1}\right| = O\{1\}$. En introduisant la fonction $\widetilde{W}_\epsilon(x) := \frac{2}{\epsilon}W_\epsilon\left(\frac{x}{\Omega_\epsilon}\right)$, comme sa dérivée vaut $\widetilde{W}'_\epsilon(x) = \frac{2}{\epsilon\Omega_\epsilon}W'_\epsilon\left(\frac{x}{\Omega_\epsilon}\right)$, on a les résultats asymptotiques suivants :

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_\epsilon(x) &= 2\sum_{j=1}^{k_0}\frac{C_j(\epsilon)}{(2j)!}x^{2j} + o(1)\\ \text{et}\quad \widetilde{W}'_\epsilon(x) &= 2\sum_{j=1}^{k_0}\frac{C_j(\epsilon)}{(2j-1)!}x^{2j-1} + o(1)\end{aligned}$$

pour tout $x \in [\eta(\epsilon)\Omega_\epsilon;\epsilon^\lambda\Omega_\epsilon]$ et où le reste $o(1)$ est uniforme par rapport à x. On applique le changement de variable $x := \Omega_\epsilon^{-1}y$:

$$J^*_{2r}(\epsilon) = \Omega_\epsilon^{-2r-1}\int_{a(\epsilon)}^{b(\epsilon)} y^{2r}\exp\left[-\widetilde{W}_\epsilon(y)\right]dy$$

avec $a(\epsilon) := \eta(\epsilon)\Omega_\epsilon = \varphi(\epsilon) \longrightarrow +\infty$ et $b(\epsilon) := \epsilon^\lambda\Omega_\epsilon$. On va prouver que l'intégrale $\int_{a(\epsilon)}^{b(\epsilon)} y^{2r}\exp\left[-\widetilde{W}_\epsilon(y)\right]dy$ tend vers 0 quand ϵ tend vers 0. Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}\int_{a(\epsilon)}^{b(\epsilon)} y^{2r}e^{-\widetilde{W}_\epsilon(y)}dy &= \frac{a(\epsilon)^{2r}\exp\left[-\widetilde{W}_\epsilon(a(\epsilon))\right]}{\widetilde{W}'_\epsilon(a(\epsilon)) - 2\frac{r}{a(\epsilon)}} - \frac{b(\epsilon)^{2r}\exp\left[-\widetilde{W}_\epsilon(b(\epsilon))\right]}{\widetilde{W}'_\epsilon(b(\epsilon)) - 2\frac{r}{b(\epsilon)}}\\ &- \int_{a(\epsilon)}^{b(\epsilon)} y^{2r}\frac{\widetilde{W}''_\epsilon(y) + 2\frac{r}{y^2}}{\left(\widetilde{W}'_\epsilon(y) - 2\frac{r}{y}\right)^2}\exp\left[-\widetilde{W}_\epsilon(y)\right]dy\,.\end{aligned}$$

Étape 3.3.2. Comme F'' et W_0 sont convexes, le second point du Lemme 4.7 implique la convexité de W_ϵ. Par conséquent, $\widetilde{W}''_\epsilon(y) = \frac{2}{\epsilon}\left(\frac{1}{\Omega_\epsilon}\right)^2 W''_\epsilon\left(\frac{y}{\Omega_\epsilon}\right) \geq 0$. Il vient alors

$$\int_{a(\epsilon)}^{b(\epsilon)} y^{2r}\frac{\widetilde{W}''_\epsilon(y) + 2\frac{r}{y^2}}{\left(\widetilde{W}'_\epsilon(y) - 2\frac{r}{y}\right)^2}\exp\left[-\widetilde{W}_\epsilon(y)\right]dy \geq 0\,.$$

Ceci implique :

$$0 \leq \int_{a(\epsilon)}^{b(\epsilon)} y^{2r}e^{-\widetilde{W}_\epsilon(y)}dy \leq \frac{a(\epsilon)^{2r}\exp\left[-\widetilde{W}_\epsilon(a(\epsilon))\right]}{\widetilde{W}'_\epsilon(a(\epsilon)) - 2\frac{r}{a(\epsilon)}} - \frac{b(\epsilon)^{2r}\exp\left[-\widetilde{W}_\epsilon(b(\epsilon))\right]}{\widetilde{W}'_\epsilon(b(\epsilon)) - 2\frac{r}{b(\epsilon)}}\,.$$

On va maintenant prouver que le terme de droite est strictement négatif mais aussi que le terme de gauche tend vers 0.

Étape 3.3.3. Pour cela, montrons que $C_r(\epsilon)a\left(\epsilon\right)^{2r} = o\left\{a\left(\epsilon\right)^{2j_l}\right\}$ pour tous les indices $j_l + 1 \leq r \leq k_0 - 1$. En effet, $a(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{\overline{\Omega}_\epsilon}}$ donc

$$\frac{|C_r(\epsilon)|\, a\left(\epsilon\right)^{2r}}{a\left(\epsilon\right)^{2j_l}} = \frac{|C_r(\epsilon)|\left(\overline{\Omega}_\epsilon\right)^{-r}}{\left(\overline{\Omega}_\epsilon\right)^{-j_l}} = \frac{|C_r(\epsilon)|}{\left(\overline{\Omega}_\epsilon\right)^{r-j_l}}\,.$$

Par définition de j_l, quel que soit $j_l + 1 \leq r \leq k_0 - 1$, le coefficient C_r est nul donc $|C_r(\epsilon)| = \left[|C_r(\epsilon) - C_r|^{\frac{1}{2r}}\right]^{2r} \leq \overline{\Omega}_\epsilon^{2r}$ d'après la définition de $\overline{\Omega}_\epsilon$. Et par conséquent, $\frac{|C_r(\epsilon)|a(\epsilon)^{2r}}{a(\epsilon)^{2j_l}} \leq \left(\overline{\Omega}_\epsilon\right)^{r+j_l} \longrightarrow 0$. De la même manière, comme $a(\epsilon) \longrightarrow +\infty$, on en déduit que pour tout $1 \leq j \leq j_l - 1$, $C_j(\epsilon)a(\epsilon)^{2j} = o\left\{C_{j_l}(\epsilon)a(\epsilon)^{2j_l}\right\}$. En rappelant que l'on a la convergence de $C_{j_l}(\epsilon)$ vers C_{j_l}, pour ϵ assez petit, on a :

$$\widetilde{W}_\epsilon(a(\epsilon)) \geq \frac{C_{j_l}}{2(2j_l)!}a(\epsilon)^{2j_l} \quad \text{et} \quad \widetilde{W}'_\epsilon(a(\epsilon)) \geq \frac{C_{j_l}}{2(2j_l-1)!}a(\epsilon)^{2j_l-1}\,.$$

Étape 3.3.4 On en déduit que $\widetilde{W}'_\epsilon(a(\epsilon))$ tend vers l'infini. Or, $\widetilde{W}''_\epsilon \geq 0$ donc $\widetilde{W}'_\epsilon(b(\epsilon))$ tend vers l'infini également. Comme $\frac{2r}{b(\epsilon)}$ tend vers 0, on en déduit l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{a(\epsilon)}^{b(\epsilon)} y^{2r}e^{-\widetilde{W}_\epsilon(y)}dy &\leq \frac{a(\epsilon)^{2r}\exp\left[-\widetilde{W}_\epsilon(a(\epsilon))\right]}{\widetilde{W}'_\epsilon(a(\epsilon)) - 2\frac{r}{a(\epsilon)}} \\ &\leq \frac{a(\epsilon)^{2r+1}}{\frac{C_{j_l}}{2(2j_l)!}a(\epsilon)^{2j_l} - 2r}\exp\left[-\frac{C_{j_l}}{2(2j_l)!}a(\epsilon)^{2j_l}\right]\,. \end{aligned}$$

Comme $a(\epsilon)$ tend vers $+\infty$, le membre de droite converge vers 0 et donc l'intégrale $\int_{a(\epsilon)}^{b(\epsilon)} y^{2r}e^{-\widetilde{W}_\epsilon(y)}dy$ tend vers 0. Par conséquent :

$$J^*_{2r}(\epsilon) = o\left\{\Omega_\epsilon^{-2r-1}\right\}\,.$$

Étape 4. En compilant les résultats des Étapes 1, 2 et 3, on a :

$$M_{2r}(\epsilon) = \Omega_\epsilon^{-2r-1}\int_{\mathbb{R}} x^{2r}\exp\left[-2\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{(2j_k)!}C_{j_k}x^{2j_k}\right]dx + o\left\{\Omega_\epsilon^{-2r-1}\right\}$$

où les coefficients C_j dépendent de la suite $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Étape 5. Pour achever la preuve, supposons par l'absurde que l'inégalité (4.4.7) ne soit pas vérifiée. Alors, il existe une suite décroissante $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 telle que $\Omega_{\epsilon_k}^{2r+1}M_{2r}(\epsilon_k)$ tende vers 0 ou vers $+\infty$. On extrait une sous-suite $(\epsilon_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de la suite $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que chacune des suites $C_j(\epsilon_{\varphi(k)})$ converge vers

C_j. On a prouvé dans l'Étape 4 que l'on avait la convergence de $\Omega_{\epsilon_{\varphi(k)}}^{2r+1} M_{2r}(\epsilon_{\varphi(k)})$ vers $\mathcal{C}_r = 2\int_{\mathbb{R}_+} y^{2r} \exp\left[-2\sum_{j=1}^{k_0} \frac{C_j}{j!} y^{2j}\right] dy \in]0;+\infty[$. C'est impossible vu que la convergence de $\Omega_{\epsilon_k}^{2r+1} M_{2r}(\epsilon_k)$ vers 0 ou vers $+\infty$ implique celle de $\Omega_{\epsilon_{\varphi(k)}}^{2r+1} M_{2r}(\epsilon_{\varphi(k)})$ vers 0 ou vers $+\infty$. □

D'après la Proposition 4.14, on sait par avance que la suite $\frac{\ln(M_{2r}(\epsilon))}{\ln(\epsilon)}$ est bornée et strictement positive uniformément vu que $\Omega_\epsilon = o(\epsilon)$ et $\epsilon^{\frac{1}{k_0}} = O(\Omega_\epsilon)$. Dans la proposition suivante, on va trouver l'ordre précis de $M_{2r}(\epsilon)$. On rappelle que $k_0 = \min\left\{k \geq 1 \;\middle|\; W_0^{(2k)}(0) > 0\right\}$. Maintenant, on introduit deux autres indices :

$$p_0 := \min\left\{k \geq 2 \;\middle|\; F^{(2k)}(0) > 0\right\} \quad \text{et} \quad m_0 := \min\left\{k_0, p_0\right\}. \tag{4.4.9}$$

On va montrer que $M_{2r}(\epsilon) \approx C_{2r}\epsilon^{\frac{2r+1}{2m_0}}$ pour tout $r \geq 0$. D'abord, on précise l'ordre de Ω_ϵ en ϵ.

Proposition 4.15. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-8) ainsi que (V-10) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). On suppose que $W_0 := V + F$ et F'' sont convexes ainsi que $\alpha + V''(0) = 0$. On a alors le résultat asymptotique suivant :*

$$0 < \liminf_{\epsilon \longrightarrow 0} \Omega_\epsilon \epsilon^{\frac{1}{2m_0}} < \limsup_{\epsilon \longrightarrow 0} \Omega_\epsilon \epsilon^{\frac{1}{2m_0}} < +\infty. \tag{4.4.10}$$

Démonstration. Par définition du paramètre k_0, pour tout $1 \leq j \leq k_0 - 1$, on a

$$W_\epsilon^{(2j)}(0) = W_\epsilon^{(2j)}(0) - W_0^{(2j)}(0) = \int_{\mathbb{R}} \left(F^{(2j)}(x) - F^{(2j)}(0)\right) u_\epsilon(x) dx.$$

F est une fonction polynômiale dont le degré est $2n$ donc la dérivée d'ordre $2j$ en 0 du pseudo-potentiel s'écrit ainsi : $W_\epsilon^{(2j)}(0) = \sum_{r=1}^{n-j} \frac{F^{(2j+2r)}(0)}{(2r)!} M_{2r}(\epsilon)$. Pour tout $1 \leq j \leq n-1$, on introduit

$$s(j) := \min\left\{r \geq 1 \;\middle|\; F^{(2j+2r)}(0) \neq 0\right\}.$$

Par application de la Proposition 4.14, il existe une suite décroissante $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 telle que $C_j(\epsilon_k) := \frac{W_{\epsilon_k}^{(2j)}(0)}{\epsilon_k \Omega_{\epsilon_k}^{2j}}$ converge vers un réel C_j pour tout $1 \leq j \leq k_0$. De plus, d'après (4.4.7), pour $1 \leq r \leq k_0 - 1$, il vient directement :

$$\begin{aligned} W_{\epsilon_k}^{(2j)}(0) &\approx \frac{F^{(2j+2s(j))}(0)}{(2s(j))!}\, \alpha_{s(j)}\, \Omega_{\epsilon_k}^{-2s(j)} \\ \text{avec} \quad \alpha_r &:= \frac{\int_{\mathbb{R}^+} x^{2r} \exp\left[-2\sum_{k=1}^{l} \frac{C_{j_k}}{(2j_k)!} x^{2j_k}\right] dx}{\int_{\mathbb{R}^+} \exp\left[-2\sum_{p=1}^{l} \frac{C_{j_p}}{(2j_p)!} x^{2j_p}\right] dx}. \end{aligned} \tag{4.4.11}$$

L'ensemble des indices $\mathbb{J}$ est défini dans (4.4.8). Deux cas différents doivent être étudiés :

Premier cas : $p_0 > k_0$**.** Par définition des coefficients $C_j(\epsilon_k)$ et en utilisant (4.4.11), on obtient le résultat asymptotique suivant :

$$C_j(\epsilon_k) = W_{\epsilon_k}^{(2j)}(0)\frac{1}{\epsilon_k\Omega_{\epsilon_k}^{2j}} = \frac{F^{(2j+2s(j))}(0)}{(2s(j))!}\,\alpha_{s(j)}\,\frac{1}{\epsilon_k\Omega_{\epsilon_k}^{2(j+s(j))}} + o\left\{\epsilon_k^{-1}\Omega_{\epsilon_k}^{-2j-2s(j)}\right\}.$$

Comme $j \geq 1$ et $s(j) \geq 1$, $j + s(j) \geq 2$. $F^{(2j+2s(j))}(0) \neq 0$ donc $j + s(j) \geq p_0$. Toutefois, par définition de Ω_{ϵ_k}, $\Omega_{\epsilon_k} \geq W_{\epsilon_k}^{(2k_0)}(0)^{\frac{1}{2k_0}}\epsilon_k^{-\frac{1}{2k_0}}$ alors on trouve la minoration suivante

$$\epsilon_k\Omega_{\epsilon_k}^{2(j+s(j))} \geq \left(W_{\epsilon_k}^{(2k_0)}(0)^{\frac{1}{2k_0}}\right)^{2(j+s(j))}\epsilon_k^{1-\frac{p_0}{k_0}} \longrightarrow +\infty$$

car $p_0 > k_0$. Ainsi quel que soit $1 \leq j \leq k_0 - 1$, la suite $C_j(\epsilon_k)$ tend vers 0. Donc, $\mathbb{J} = \{k_0\}$ et, pour k assez grand, on a

$$\Omega_{\epsilon_k} = W_{\epsilon_k}^{(2k_0)}(0)^{\frac{1}{2k_0}}\epsilon_k^{-\frac{1}{2k_0}} = W_{\epsilon_k}^{(2k_0)}(0)^{\frac{1}{2k_0}}\epsilon_k^{-\frac{1}{2m_0}}.$$

Second cas : $p_0 \leq k_0$**.** Pour tout $j \leq k_0 - 1$, le développement asymptotique (4.4.11) entraîne l'équivalence suivante :

$$\left|W_{\epsilon_k}^{(2j)}(0)\right|^{\frac{1}{2j}}\epsilon_k^{-\frac{1}{2j}} \approx \left|\frac{F^{(2j+2s(j))}(0)}{(2s(j))!}\alpha_{s(j)}\right|^{\frac{1}{2j}}\Omega_{\epsilon_k}^{-\frac{s(j)}{j}}\epsilon_k^{-\frac{1}{2j}} = K_j\Omega_{\epsilon_k}^{-\frac{s(j)}{j}}\epsilon_k^{-\frac{1}{2j}}$$

où K_j est une constante. Comme $\Omega_{\epsilon_k} \geq \left|W_{\epsilon_k}^{(2j)}(0)\right|^{\frac{1}{2j}}\epsilon_k^{-\frac{1}{2j}}$, on trouve $\Omega_{\epsilon_k}\epsilon_k^{\frac{1}{2(j+s(j))}} \geq C := \min\left\{K_j^{\frac{j}{j+s(j)}}\right\} > 0$. En particulier, pour $j = p_0 - 1$, on a la minoration

$$\Omega_{\epsilon_k} \geq C\epsilon_k^{-\frac{1}{2p_0}}. \tag{4.4.12}$$

Or, pour tout $1 \leq j \leq k_0 - 1$, $j + s(j) \geq p_0$ donc $\frac{p_0 - s(j)}{2jp_0} \leq \frac{1}{2p_0}$ et par conséquent, dès que ϵ est assez petit, on a :

$$\Omega_{\epsilon_k}^{-\frac{s(j)}{j}}\epsilon_k^{-\frac{1}{2j}} \leq C'\epsilon_k^{-\frac{p_0-s(j)}{2jp_0}} \leq C'\epsilon_k^{-\frac{1}{2p_0}}$$

où C' est une constante strictement positive. Puis, comme $\left|W_{\epsilon_k}^{(2j)}(0)\right|^{\frac{1}{2j}}\epsilon_k^{-\frac{1}{2j}} \approx K_j\Omega_{\epsilon_k}^{-\frac{s(j)}{j}}\epsilon_k^{-\frac{1}{2j}}$, il existe une constante $C'' > 0$ telle que

$$\left|W_{\epsilon_k}^{(2j)}(0)\right|^{\frac{1}{2j}}\epsilon_k^{-\frac{1}{2j}} \leq C''\epsilon_k^{-\frac{1}{2p_0}}$$

pour k assez grand. Puis, en reprenant la définition de Ω_{ϵ_k} dans (4.4.6), on en déduit l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour k assez grand, on a

$$\Omega_{\epsilon_k} \leq C\epsilon_k^{-\frac{1}{2p_0}}. \tag{4.4.13}$$

En effet, comme $k_0 \geq p_0$, la quantité $\left|W_{\epsilon_k}^{(2k_0)}(0)\right|^{\frac{1}{2k_0}} \epsilon_k^{-\frac{1}{2k_0}}$ est dominée par $\epsilon_k^{-\frac{1}{2p_0}}$. La minoration (4.4.12) et la majoration (4.4.13) impliquent (4.4.10). En effet, en raisonnant par l'absurde comme dans l'Étape 5 de la preuve de la Proposition 4.14, on peut extraire une sous-suite dont le comportement asymptotique est différent de celui de la suite dont on l'a extraite. □

Remarque 4.16. *Dans la preuve de la Proposition 4.14, l'argument-clé avancé dès les préliminaires était la bornitude de la famille* $\left(C_j(\epsilon) = \frac{W_\epsilon^{(2j)}(0)}{\epsilon(\Omega_\epsilon)^{2j}}\right)_{\epsilon>0}$ *pour tout* $1 \leq j \leq k_0$ *ainsi que l'inégalité* $\liminf_{\epsilon\longrightarrow 0} \sup_{1\leq j\leq k_0} |C_j(\epsilon)| > 0$. *Les inégalités dans* (4.4.10) *impliquent que les familles* $\left(C_j'(\epsilon) := W_\epsilon^{(2j)}(0)\epsilon^{\frac{j}{m_0}-1}\right)_{\epsilon>0}$ *sont également bornées et vérifient* $\liminf_{\epsilon\longrightarrow 0} \sup_{1\leq j\leq k_0} \left|C_j'(\epsilon)\right| > 0$. *On va maintenant considérer* $C_j'(\epsilon)$ *et sa limite* C_j' *à la place de* $C_j(\epsilon)$ *et sa limite* C_j. *Pour simplifier, on va continuer à écrire* $C_j(\epsilon)$ *et* C_j.

Cette équivalence nous dit que $x := \epsilon^{\frac{1}{2m_0}} y$ est le changement de variable adapté qu'il va falloir appliquer par la suite. Et, on devine déjà que la vitesse de convergence sera $\epsilon^{\frac{1}{m_0}}$. Par la suite, on verra que le moment d'ordre 2 est le seul dont on ait vaiment besoin pour estimer la vitesse de convergence de $\langle f, u_\epsilon\rangle$ vers $\langle f, u_0\rangle = f(0)$.

Théorème 4.17. *Soit un potentiel de confinement* V *qui vérifie (V-1)–(V-8) ainsi que (V-10) et un potentiel d'intéraction* F *qui vérifie (F-1)–(F-5). On suppose que* $W_0 := V + F$ *et* F'' *sont convexes ainsi que* $\alpha + V''(0) = 0$. *Soit une suite décroissante* $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *qui tend vers* 0 *telle que* $C_j(\epsilon_k) := W_{\epsilon_k}^{(2j)}(0)\epsilon_k^{\frac{j}{m_0}-1}$ *converge vers* C_j *pour tout* $1 \leq j \leq k_0$. *Alors, pour toute fonction* $f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *à croissance lente, on a le résultat asymptotique suivant :*

$$\epsilon_k^{-\frac{1}{m_0}}\Big(\langle f, u_{\epsilon_k}\rangle - \langle f, u_0\rangle\Big) \longrightarrow \frac{f''(0)}{2}\frac{\int_{\mathbb{R}} x^2 \exp\left[-2\sum_{j=1}^{k_0}\frac{C_j}{(2j)!}x^{2j}\right]dx}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-2\sum_{j=1}^{k_0}\frac{C_j}{(2j)!}x^{2j}\right]dx} \tag{4.4.14}$$

pour k *tendant vers l'infini où l'entier* m_0 *a été défini dans* (4.4.9).

Démonstration. On se donne $R > 0$ quelconque. Alors :

$$\langle f, u_{\epsilon_k}\rangle - \langle f, u_0\rangle = \int_{-R}^{R} (f(x) - f(0))\, u_{\epsilon_k}(x)dx + \int_{[-R;R]^c} g(x)u_{\epsilon_k}(x)dx$$

où $g(x) := f(x) - f(0)$. Comme la fonction f est à croissance lente, g l'est également d'où il existe une constante $C > 0$ et un entier $l \geq 1$ tels que $|f(x) - f(0)| \leq C\left(1 + |x|^{2l}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi l'intégrale portant sur $[-R; R]^c$ peut être majorée comme suit

$$\left|\int_{[-R;R]^c} g(x)u_{\epsilon_k}(x)dx\right| \leq 2C\frac{\int_R^{+\infty}\left(1 + x^{2l}\right)\exp\left[-\frac{2}{\epsilon_k}W_{\epsilon_k}(x)\right]dx}{M_0(\epsilon_k)}\,.$$

D'après les hypothèses (F-2) et (V-3) ainsi que le Lemme 4.7, on a la minoration $W_\epsilon(x) \geq W_0(x) \geq C_4 x^4 - C_2 x^2 \geq \frac{x^2}{2}$ pour x assez grand. Le changement de variable $x := \sqrt{\epsilon} y$ puis l'application du Lemme A.1 à $U_1(y) := y^2$ ainsi qu'à $U_2(y) := y^2 - 2l\ln(y)$ amènent à la majoration

$$\left| \int_{[-R;R]^c} g(x) u_{\epsilon_k}(x) dx \right| \leq 2 e^{-\frac{R^2}{\epsilon_k}} \frac{C\epsilon_k}{R M_0(\epsilon_k)} \left(1 + \frac{R^{2l}}{1 - \frac{l\epsilon_k}{R^2}} \right)$$

pour k assez grand. Il vient $\int_{[-R;R]^c} g(x) u_{\epsilon_k}(x) dx = o\left\{ \epsilon_k^{\frac{1}{m_0}} \right\}$ vu que la quantité $M_0(\epsilon_k)^{-1}$ est dominée par $\epsilon_k^{-\frac{1}{2m_0}}$ d'après les deux propositions précédentes. On introduit la fonction $f_+(x) := \frac{1}{2}\Big(f(x) + f(-x) \Big)$. Le changement de variable $x \to -x$ donne

$$\int_{-R}^{R} (f(x) - f(0))\, u_{\epsilon_k}(x) dx = \int_{-R}^{R} (f_+(x) - f(0))\, u_{\epsilon_k}(x) dx \,.$$

L'application du théorème des accroissements finis fournit l'existence d'un réel $y_x \in [0; x]$ tel que $f_+(x) - f_+(0) = \frac{1}{2} f''(0) x^2 + \frac{1}{24} f_+^{(4)}(y_x) x^4$ pour tout x. Alors :

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{R} \Big(f_+(x) - f(0) \Big) u_{\epsilon_k}(x) dx &= \frac{f''(0)\, M_2(\epsilon_k)}{2\, M_0(\epsilon_k)} + \frac{1}{24} \int_{-R}^{R} f_+^{(4)}(y_x) x^4 u_{\epsilon_k}(x) dx \\ &- f''(0) \frac{\int_{[-R;R]^c} x^2 \exp\left[-\frac{2}{\epsilon_k} W_{\epsilon_k}(x) \right] dx}{2\, M_0(\epsilon_k)} \,. \end{aligned}$$

En utilisant des arguments similaires à ceux employés plus haut, on majore le reste ainsi

$$\left| \frac{\int_{[-R;R]^c} x^2 \exp\left[-\frac{2}{\epsilon_k} W_{\epsilon_k}(x) \right] dx}{2\, M_0(\epsilon_k)} \right| \leq 2 e^{-\frac{R^2}{\epsilon_k}} \frac{R\epsilon_k}{M_0(\epsilon_k)} \frac{1}{1 - \frac{\epsilon_k}{R^2}}$$

pour k assez grand d'où $\frac{\int_{[-R;R]^c} x^2 \exp\left[-\frac{2}{\epsilon_k} W_{\epsilon_k}(x) \right] dx}{2\, M_0(\epsilon_k)} = o\left\{ \epsilon_k^{\frac{1}{m_0}} \right\}$.

Soit $K := \sup_{z \in [-R;R]} \left| f_+^{(4)}(z) \right|$. Par conséquent :

$$\left| \int_{-R}^{R} f_+^{(4)}(y_x) x^4 u_{\epsilon_k}(x) dx \right| \leq K \frac{M_4(\epsilon_k)}{M_0(\epsilon_k)} \,.$$

On en déduit $\int_{-R}^{R} f_+^{(4)}(y_x) x^4 u_{\epsilon_k}(x) dx = O\left\{ \epsilon_k^{\frac{2}{m_0}} \right\} = o\left\{ \epsilon_k^{\frac{1}{m_0}} \right\}$ en prenant $r = 2$ puis $r = 0$ dans l'équivalence (4.4.7) avant de prendre le ratio.

Enfin, on prouve de même l'équivalence $\frac{M_2(\epsilon_k)}{M_0(\epsilon_k)} \approx \frac{\int_{\mathbb{R}} x^2 \exp\left[-2 \sum_{j=1}^{k_0} \frac{C_j}{(2j)!} x^{2j} \right] dx}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-2 \sum_{j=1}^{k_0} \frac{C_j}{(2j)!} x^{2j} \right] dx}$. On trouve ainsi la limite (4.4.14). □

On va maintenant chercher à connaître la valeur limite dans (4.4.14) avec plus de précision. Pour ceci, on décrit les coefficients C_j pour tous les indices $1 \leq j \leq k_0$.

Corollaire 4.18. *On se place sous les mêmes hypothèses que celles du Théorème 4.17. On rappelle que k_0, p_0 et m_0 ont été définies dans* (4.4.6) *et* (4.4.9).
Premier cas : si $k_0 < p_0$. *On a la limite suivante*

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \epsilon^{-\frac{1}{m_0}} \Big(\langle f, u_\epsilon \rangle - \langle f, u_0 \rangle \Big) = \frac{1}{2} \left(\frac{(2k_0)!}{2W_0^{(2k_0)}(0)} \right)^{\frac{1}{k_0}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2k_0}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2k_0}\right)} f''(0) \,. \quad (4.4.15)$$

*On peut noter que la mesure signée $\frac{u_\epsilon - u_0}{\epsilon}$ converge dans ce cas alors qu'*a priori*, dans les cas plus généraux, on a seulement obtenu une bornitude.*
Second cas : si $p_0 \leq k_0$. *On considère une suite décroissante $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui tend vers 0 telle que $C_j(\epsilon_k) := W_{\epsilon_k}^{(2j)}(0) \epsilon_k^{\frac{j}{m_0}-1}$ converge vers C_j pour tout $1 \leq j \leq k_0$. Alors :*

- $C_{k_0} := W_0^{(2k_0)}(0) \mathbf{1}_{\{p_0 = k_0\}}$.
- $C_j = 0$ *pour tout* $p_0 \leq j \leq k_0 - 1$.
- *Pour tous les indices* $1 \leq j \leq p_0 - 1$, *on a :*

$$C_j = \frac{F^{(2p_0)}(0)}{(2(p_0 - j))!} \frac{\int_{\mathbb{R}} x^{2(p_0 - j)} \exp\left[-2 \sum_{r=1}^{p_0 - 1} \frac{C_r x^{2r}}{(2r)!} - \frac{2C_{k_0}}{(2k_0)!} x^{2k_0} \right] dx}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-2 \sum_{r=1}^{p_0 - 1} \frac{C_r x^{2r}}{(2r)!} - \frac{2C_{k_0}}{(2k_0)!} x^{2k_0} \right] dx} \,.$$

En particulier, $C_j > 0$ pour tout $1 \leq j \leq p_0 - 1$.

Démonstration. On rappelle l'égalité $W_\epsilon^{(2j)}(0) = \sum_{r=1}^{n-j} \frac{F^{(2j+2r)}(0)}{(2r)!} \frac{M_{2r}(\epsilon)}{M_0(\epsilon)}$. On introduit à nouveau $s(j) := \min\left\{ r \geq 1 \mid F^{(2j+2r)}(0) > 0 \right\}$ pour tout $1 \leq j \leq k_0 - 1$. Soit une suite décroissante $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui tend vers 0 telle que $C_j(\epsilon_k) := W_{\epsilon_k}^{(2j)}(0) \epsilon_k^{\frac{j}{m_0}-1}$ converge vers C_j. En utilisant une méthode similaire à celle de la preuve de la Proposition 4.14 (avec le changement de variable $x := \epsilon_k^{\frac{1}{m_0}} y$ au lieu de $x := \Omega_{\epsilon_k} y$), on obtient pour tous les indices $1 \leq j \leq k_0 - 1$:

$$\begin{aligned} W_{\epsilon_k}^{(2j)}(0) &= \frac{F^{(2j+2s(j))}(0)}{(2s(j))!} \alpha_{s(j)} \epsilon_k^{\frac{s(j)}{m_0}} + o\left\{ \epsilon_k^{\frac{s(j)}{m_0}} \right\} \\ \text{avec} \quad \alpha_r &:= \frac{\int_{\mathbb{R}^+} x^{2r} \exp\left[-2 \sum_{p=1}^{k_0} \frac{C_p}{(2p)!} x^{2p} \right] dx}{\int_{\mathbb{R}^+} \exp\left[-2 \sum_{p=1}^{k_0} \frac{C_p}{(2p)!} x^{2p} \right] dx} \,. \end{aligned}$$

Premier cas : si $k_0 < p_0$. $C_j(\epsilon) = W_\epsilon^{(2j)}(0) \epsilon^{\frac{j}{k_0}-1}$. Donc, pour tout $1 \leq j \leq k_0 - 1$, on a l'équivalence $C_j(\epsilon) \approx \frac{F^{(2j+2s(j))}(0)}{(2s(j))!} \alpha_{s(j)} \epsilon^{\frac{j+s(j)}{k_0}-1}$. Par définition de p_0, $j + s(j) \geq p_0 > k_0$ donc $C_j(\epsilon) \longrightarrow 0$ et l'on a

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \epsilon_k^{-\frac{1}{m_0}} \Big(\langle f, u_{\epsilon_k} \rangle - \langle , u_0 \rangle \Big) = \frac{1}{2} f''(0) \frac{\int_{\mathbb{R}^+} x^2 \exp\left[-2 W_0^{(2k_0)}(0) \frac{x^{2k_0}}{(2k_0)!} \right] dx}{\int_{\mathbb{R}^+} \exp\left[-2 W_0^{(2k_0)}(0) \frac{x^{2k_0}}{(2k_0)!} \right] dx} .$$

On applique le changement de variable $x := \left(\frac{(2k_0)!}{2W_0^{(2k_0)}(0)}\right)^{\frac{1}{2k_0}} u^{\frac{1}{2k_0}}$ ce qui permet d'obtenir la convergence vers $\frac{1}{2}\left(\frac{(2k_0)!}{2W_0^{(2k_0)}(0)}\right)^{\frac{1}{k_0}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2k_0}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2k_0}\right)} f''(0)$. Il s'agit de l'unique valeur d'adhérence donc on en déduit (4.4.15).

Second cas : $p_0 \leq k_0$**.** Ici, pour $j \leq k_0 - 1$: $C_j(\epsilon) \approx \frac{F^{(2j+2s(j))}(0)}{(2s(j))!}\alpha_{s(j)}\epsilon^{\frac{j+s(j)}{p_0}-1}$. On en déduit que pour tout $p_0 \leq j \leq k_0 - 1$, $C_j = 0$. Et, pour tout $1 \leq j \leq p_0 - 1$, on a $C_j = \frac{F^{(2j+2s(j))}(0)}{(2s(j))!}\alpha_{s(j)}$ avec $j + s(j) = p_0$. Donc

$$C_j = \frac{F^{(2p_0)}(0)}{(2(p_0-j))!} \frac{\int_{\mathbb{R}^+} x^{2(p_0-j)} \exp\left[-2\sum_{k=1}^{l} \frac{C_{j_k}}{(2j_k)!} x^{2j_k}\right] dx}{\int_{\mathbb{R}^+} \exp\left[-2\sum_{k=1}^{l} \frac{C_{j_k}}{(2j_k)!} x^{2j_k}\right] dx}.$$

$\mathbb{J} \bigcap \{1\,;\cdots;\,k_0-1\} = \{1\,;\cdots;\,p_0-1\}$ et $C_{k_0}(\epsilon_k) = W_{\epsilon_k}^{(2k_0)}(0)\epsilon_k^{\frac{k_0}{p_0}-1}$ donc si $k_0 = p_0$, on a $C_{k_0} = W_0^{(2k_0)}(0)$ et si $k_0 > p_0$ alors $C_{k_0} = 0$. On connait $\mathbb{J}$ et C_j pour tout élément j de $\mathbb{J}$ ce qui achève la preuve. □

Remarque 4.19. *Si on prouve l'unicité des coefficients C_j, alors on dispose de l'unicité du préfacteur qui décrit la vitesse de convergence et par conséquent, même si $p_0 \leq k_0$, on a la convergence de $\Big(\langle f\,;\,u_\epsilon\rangle - \langle f\,;\,u_0\rangle\Big)\epsilon^{-\frac{1}{p_0}}$ comme dans* (4.4.15)*. C'est notamment le cas pour $p_0 = 2$: on a directement cette unicité des coefficients et donc la convergence. En effet, dans ce cas précis, il n'y a qu'un seul coefficient à déterminer et il s'agit de C_1 qui vérifie alors l'égalité*

$$C_1 = \frac{F^{(4)}(0)}{2} \frac{\int_{\mathbb{R}} x^2 \exp\left[-C_1x^2 - \frac{2C_{k_0}}{(2k_0)!}x^{2k_0}\right] dx}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-C_1x^2 - \frac{2C_{k_0}}{(2k_0)!}x^{2k_0}\right] dx} =: \xi(C_1)\,. \tag{4.4.16}$$

On remarque que $\xi'(z) = -\frac{F^{(4)}(0)}{2}\Big\{\mathbb{E}[X^4] - \mathbb{E}[X^2]^2\Big\}$ où X est une variable aléatoire dont la loi admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue : $u_z(x) := \frac{\exp\left[-zx^2 - \frac{2C_{k_0}}{(2k_0)!}x^{2k_0}\right]}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-zu^2 - \frac{2C_{k_0}}{(2k_0)!}u^{2k_0}\right] du}$. La fonction ξ étant strictement décroissante, il y a bien un unique paramètre C_1 qui satisfait l'équation (4.4.16)*.*

On constate que dans le cas où $V''(0) + F''(0) = 0$, la vitesse de convergence n'est pas d'ordre ϵ. Ainsi il est clair que cette vitesse ne peut pas décemment être considérée d'ordre ϵ par défaut même si c'est bien le cas dans la plupart des situations.

4.5 *Vitesse de convergence de $\boldsymbol{u_\epsilon^0}$ vers $\boldsymbol{u_0^0 = \frac{1}{2}\delta_{x_0} + \frac{1}{2}\delta_{-x_0}}$ avec $\boldsymbol{x_0 > 0}$*

On suppose à nouveau que le potentiel de confinement V satisfait les hypothèses (V-1)–(V-8) ainsi que (V-10). D'après la Proposition 3.27, on sait que le

réel $x_0 > 0$ intervenant dans la mesure est tel que $V'(x_0) + \frac{1}{2}F'(2x_0) = 0$ et $V''(x_0) + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}F''(2x_0) \geq 0$. La Proposition 3.14 implique l'inégalité $x_0 \leq a$. Et, comme $x_0 > 0$, on a également $\alpha = F''(0) < \vartheta$.
Par ailleurs, $W_0(x) = V(x) + \frac{1}{2}F(x - x_0) + \frac{1}{2}F(x + x_0) - F(x_0) \geq W(x_0)$. *Comme précédemment, on définit* $k_0 := \min\left\{k > 0 \mid W_0^{(2k)}(0) > 0\right\}$.

Lemme 4.20. *Si les fonctions V'' et F'' sont convexes, le pseudo-potentiel limite W_0 atteint son minimum global en exactement deux points : x_0 et $-x_0$. De plus, $W_0''(x_0) > 0$ c'est-à-dire $k_0 = 1$.*

Démonstration. Comme V'' et F'' sont convexes, le Théorème 3.28 afirme que le pseudo-potentiel limite possède un unique point critique strictement positif et il s'agit de x_0.
Supposons par l'absurde que l'on ait $W_0''(x_0) = 0$. Comme W_0 admet un extremum local en x_0, l'inégalité $W_0^{(3)}(x_0) = 0$ est satisfaite. Toutefois, W_0'' est convexe donc $W_0^{(3)}$ est croissante. On sait que $W_0^{(3)}(0) = 0$ car W_0 est paire. Alors, pour tout $x \in [0; x_0]$, $W_0^{(3)}(x) = 0$. On en déduit $W_0''(0) = W_0''(x_0)$ ce qui est impossible car $W_0''(x_0) = 0$ et $W_0''(0) = \alpha - \vartheta < 0$. En effet, $\vartheta = -V''(0)$ car V'' est convexe. □

Lemme 4.21. *Si le pseudo-potentiel limite W_0 n'a que deux puits à savoir x_0 et $-x_0$ et si $W_0''(x_0) > 0$ alors pour ϵ assez petit, le pseudo-potentiel W_ϵ admet un unique puits strictement positif x_0^ϵ. De plus, x_0^ϵ vérifie le développement asymptotique suivant :*

$$x_0^\epsilon = x_0 - \frac{W_\epsilon'(x_0)}{W_0''(x_0)} + o\left\{W_\epsilon'(x_0)\right\} . \tag{4.5.1}$$

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence directe du Lemme 4.7 étant donné que $\mathcal{D} = \{x_0; -x_0\}$ et qu'en plus $W_0''(D) > 0$ pour tout $D \in \mathcal{D}$. □

Lemme 4.22. *Si le pseudo-potentiel limite W_0 n'a pas d'autres puits que x_0 et $-x_0$, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ à croissance lente, on a l'estimation asymptotique suivante :*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon(x)} dx = 2\sqrt{\frac{\pi\epsilon}{W_\epsilon''(x_0^\epsilon)}}\; e^{-\frac{2W_\epsilon(x_0^\epsilon)}{\epsilon}} \left\{f_+(x_0^\epsilon) + \gamma(f)\epsilon + o(\epsilon)\right\} \tag{4.5.2}$$

avec

$$\gamma(f) := \left(\frac{5\ \mathcal{W}_3^2}{48\ \mathcal{W}_2^3} - \frac{\mathcal{W}_4}{16\ \mathcal{W}_2^2}\right) f_+(x_0) - \frac{\mathcal{W}_3}{4\ \mathcal{W}_2^2} f_+'(x_0) + \frac{f_+''(x_0)}{4\ \mathcal{W}_2}. \tag{4.5.3}$$

Ici, on utilise les notations $\mathcal{W}_k := W_0^{(k)}(x_0)$ et $f_+(x) := \frac{f(x)+f(-x)}{2}$.

Démonstration. D'après le Lemme 4.21, on sait que $\mathcal{D}^\epsilon = \{x_0^\epsilon; -x_0^\epsilon\}$ où x_0^ϵ vérifie l'estimation asymptotique (4.5.1). Ainsi l'Hypothèse 4.10 est satisfaite. Le Lemme

4.7 fournit directement l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{\frac{-2W_\epsilon(t)}{\epsilon}}dt &= \sqrt{\frac{\pi\epsilon}{W_\epsilon''(x_0^\epsilon)}}\, e^{-\frac{2W_\epsilon(x_0^\epsilon)}{\epsilon}}\Big\{f(x_0^\epsilon)+\gamma_+(f)\epsilon+o(\epsilon)\Big\} \qquad (4.5.4)\\ &+ \sqrt{\frac{\pi\epsilon}{W_\epsilon''(x_0^\epsilon)}}\, e^{-\frac{2W_\epsilon(x_0^\epsilon)}{\epsilon}}\Big\{f(-x_0^\epsilon)+\gamma_-(f)\epsilon+o(\epsilon)\Big\}\end{aligned}$$

avec

$$\gamma_\pm(f) := f(\pm x_0)\left(\frac{5\ \mathcal{W}_{3,\epsilon}^2}{48\ \mathcal{W}_{2,\epsilon}^3}-\frac{\mathcal{W}_{4,\epsilon}}{16\ \mathcal{W}_{2,\epsilon}^2}\right)-f'(\pm x_0)\frac{\pm\mathcal{W}_{3,\epsilon}}{4\ \mathcal{W}_{2,\epsilon}^2}+\frac{f''(\pm x_0)}{4\ \mathcal{W}_{2,\epsilon}}\,.$$

Ici, on a utilisé la notation $\mathcal{W}_{k,\epsilon} := W_\epsilon^{(k)}(x_0^\epsilon)$. Ainsi (4.5.4) devient

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{\frac{-2W_\epsilon(t)}{\epsilon}}dt = 2\sqrt{\frac{\pi\epsilon}{W_\epsilon''(x_0^\epsilon)}}\, e^{-\frac{2U_\epsilon(x_0^\epsilon)}{\epsilon}}\Big\{f_+(x_0^\epsilon)+\gamma(f)\epsilon+o(\epsilon)\Big\}$$

où $\gamma(f) := \frac{\gamma_+(f)+\gamma_-(f)}{2}$. On obtient (4.5.2) et (4.5.3) en faisant tendre ϵ vers 0. □

En combinant les Lemmes 4.21 et 4.22, on peut obtenir une estimation de la dérivée $W_\epsilon'(x_0)$.

Proposition 4.23. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-8) ainsi que (V-10) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). On suppose de plus que le pseudo-potentiel limite W_0 n'admet pas d'autres fonds de puits que x_0 et $-x_0$ et $W_0''(x_0) > 0$. On a alors la limite suivante :*

$$\lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\frac{W_\epsilon'(x_0)}{\epsilon} = \frac{F^{(3)}(2x_0)W_0''(x_0)-W_0^{(3)}(x_0)\left(F''(2x_0)-\alpha\right)}{8W_0''(x_0)\left(V''(x_0)+F''(2x_0)\right)}\,. \qquad (4.5.5)$$

Démonstration. Comme W_0 admet un extremum local en x_0, celui-ci est un zéro de la dérivée W_0' : $W_0'(x_0) = 0$. En rappelant que l'on a $W_\epsilon'(x) - W_0'(x) = F' * u_\epsilon(x) - F' * u_0^0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$\begin{aligned}W_\epsilon'(x_0) &= W_\epsilon'(x_0)-W_0'(x_0) = \int_{\mathbb{R}}\xi(z)u_\epsilon(z)dz-\frac{1}{2}\Big(\xi(x_0)+\xi(-x_0)\Big)\\ &= \frac{\int_{\mathbb{R}}\xi(z)\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon(z)\right]dz}{\int_{\mathbb{R}}\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon(z)\right]dz}-\xi_+(x_0)\end{aligned}$$

où $\xi(z) := F'(x_0 - z)$ et $\xi_+(z) := \frac{1}{2}\Big(\xi(z)+\xi(-z)\Big)$. L'application du Lemme 4.22 à la fonction ξ et à la fonction constante égale à 1 fournit

$$\int_{\mathbb{R}}\xi(x)e^{-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon(x)}dx = 2\sqrt{\frac{\pi\epsilon}{W_\epsilon''(x_0^\epsilon)}}\, e^{-\frac{2W_\epsilon(x_0^\epsilon)}{\epsilon}}\Big\{\xi_+(x_0^\epsilon)+\gamma(\xi)\epsilon+o(\epsilon)\Big\} \qquad (4.5.6)$$

$$\text{et}\quad \int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{2}{\epsilon}W_\epsilon(x)}dx = 2\sqrt{\frac{\pi\epsilon}{W_\epsilon''(x_0^\epsilon)}}\, e^{-\frac{2W_\epsilon(x_0^\epsilon)}{\epsilon}}\Big\{1+\gamma(1)\epsilon+o(\epsilon)\Big\}\,. \qquad (4.5.7)$$

L'application γ est définie dans (4.5.3). On divise (4.5.6) par (4.5.7) et on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} \xi(x)u_\epsilon(x)dx \;=\; \xi_+(x_0^\epsilon) + \gamma(\xi)\epsilon - \xi_+(x_0^\epsilon)\gamma(1)\epsilon + o(\epsilon)\,.$$

On trouve alors

$$\int_{\mathbb{R}} \xi(x)u_\epsilon(x)dx \;=\; \xi_+(x_0^\epsilon) + \left(-\frac{\mathcal{W}_3}{4\,\mathcal{W}_2^2}\xi_+'(x_0) + \frac{\xi_+''(x_0)}{4\,\mathcal{W}_2}\right)\epsilon + o(\epsilon)\,. \qquad (4.5.8)$$

Par conséquent, on a

$$\frac{W_\epsilon'(x_0)}{\epsilon}\left\{1 - \frac{\xi_+(x_0^\epsilon) - \xi_+(x_0)}{x_0^\epsilon - x_0}\frac{x_0^\epsilon - x_0}{W_\epsilon'(x_0)}\right\} = -\frac{\mathcal{W}_3}{4\,\mathcal{W}_2^2}\xi_+'(x_0) + \frac{\xi_+''(x_0)}{4\,\mathcal{W}_2} + o(1)\,.$$

Le développement (4.5.1) donne

$$\lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\frac{W_\epsilon'(x_0)}{\epsilon}\left(1 + \frac{\xi_+'(x_0)}{W_0''(x_0)}\right) = \left(-\frac{\mathcal{W}_3}{4\,\mathcal{W}_2^2}\xi_+'(x_0) + \frac{\xi_+''(x_0)}{4\,\mathcal{W}_2}\right)\,.$$

Comme $\mathcal{W}_3 = W_0^{(3)}(x_0) = V^{(3)}(x_0) + \frac{F^{(3)}(x_0)}{2}$ et $\mathcal{W}_2 = W_0''(x_0) = V''(x_0) + \frac{\alpha}{2} + \frac{F''(2x_0)}{2}$, on obtient (4.5.5) après simplification. □

A partir de là, on peut évaluer la position de x_0^ϵ, le puits du pseudo-potentiel W_ϵ par rapport à celle de x_0, le puits du pseudo-potentiel limite W_0.

Corollaire 4.24. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-8) ainsi que (V-10) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). On suppose de plus que le pseudo-potentiel limite W_0 n'admet pas d'autres puits que x_0 et $-x_0$ ainsi que $W_0''(x_0) > 0$. On a l'estimation asymptotique suivante :*

$$\frac{x_0^\epsilon - x_0}{\epsilon} \longrightarrow \frac{W_0^{(3)}(x_0)\,(F''(2x_0) - \alpha) - F^{(3)}(2x_0)W_0''(x_0)}{8W_0''(x_0)^2\,(V''(x_0) + F''(2x_0))} \qquad (4.5.9)$$

lorsque ϵ tend vers 0.

Démonstration. Comme la dérivée seconde $W_0''(x_0)$ est strictement positive, on sait d'après le Lemme 4.21 qu'il suffit de diviser (4.5.5) par $-W_0''(x_0)$ ce qui donne directement l'estimation asymptotique (4.5.9). □

Or, pour connaître la vitesse de convergence, d'après l'estimation asymptotique (4.5.2), il suffit de connaître la distance entre les deux puits x_0^ϵ et x_0. On peut donc maintenant donner la vitesse de convergence de u_ϵ^0 vers u_0^0.

Théorème 4.25. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-8) ainsi que (V-10) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). On suppose de plus que le pseudo-potentiel limite W_0 n'admet pas*

d'autres puits que x_0 et $-x_0$ et que $W_0''(x_0) > 0$. Quelle que soit la fonction $f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R},\mathbb{R})$ à croissance lente, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\longrightarrow 0} \frac{(\langle f,u_\epsilon\rangle - \langle f,u_0\rangle)}{\epsilon} &= \frac{f''(x_0)+f''(-x_0)}{8W_0''(x_0)} + \chi(x_0)\frac{f'(x_0)-f'(-x_0)}{8W_0''(x_0)} \\ \text{avec} \quad \chi(x_0) &:= -\frac{V^{(3)}(x_0)+F^{(3)}(2x_0)}{V''(x_0)+F''(2x_0)}\,.\end{aligned}$$

Démonstration. Comme la mesure limite est une somme de deux mesures de Dirac : $u_0 = \frac{1}{2}\delta_{x_0} + \frac{1}{2}\delta_{-x_0}$, on trouve $\langle f,u_\epsilon\rangle - \langle f,u_0\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)u_\epsilon(x)dx - f_+(x_0)$ avec $f_+(x) := \frac{f(x)+f(-x)}{2}$. On applique le Lemme 4.22 à la fonction f et à la fonction constante égale à 1. On divise la première estimation par la seconde et on obtient un résultat similaire à celui que l'on avait dans (4.5.8) avec f à la place de ξ :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)u_\epsilon(x)dx = f_+(x_0^\epsilon) + \left(-\frac{\mathcal{W}_3}{4\,\mathcal{W}_2^2}f_+'(x_0) + \frac{f_+''(x_0)}{4\,\mathcal{W}_2}\right)\epsilon + o(\epsilon)\,.$$

Par conséquent, si on introduit

$$\mathcal{T}_\epsilon := \frac{\langle f,u_\epsilon\rangle - \langle f,u_0\rangle}{\epsilon} - \frac{f_+(x_0^\epsilon)-f_+(x_0)}{x_0^\epsilon - x_0}\frac{x_0^\epsilon - x_0}{W_\epsilon'(x_0)}\frac{W_\epsilon'(x_0)}{\epsilon},$$

on trouve $\lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\mathcal{T}_\epsilon = \frac{f_+''(x_0)}{4W_0''(x_0)} - \frac{\mathcal{W}_3 f_+'(x_0)}{4\mathcal{W}_2^2}$. Or, $\frac{f_+(x_0^\epsilon)-f_+(x_0)}{x_0^\epsilon-x_0} \longrightarrow f_+'(x_0)$. Le développement (4.5.1) implique la limite suivante : $\frac{x_0^\epsilon-x_0}{W_\epsilon'(x_0)} \longrightarrow -\frac{1}{W_0''(x_0)}$. Enfin, d'après la Proposition 4.23, on sait que $\frac{W_\epsilon'(x_0)}{\epsilon} \longrightarrow \frac{F^{(3)}(2x_0)W_0''(x_0)-W_0^{(3)}(x_0)(F''(2x_0)-\alpha)}{8W_0''(x_0)(V''(x_0)+F''(2x_0))}$. Par conséquent :

$$\lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\frac{\langle f,u_\epsilon\rangle - \langle f,u_0\rangle}{\epsilon} = \frac{f_+''(x_0)}{4W_0''(x_0)}\epsilon + f_+'(x_0)\Delta(x_0)\epsilon + o(\epsilon)$$

où l'on a

$$\begin{aligned}\Delta(x_0) &:= \frac{W_0^{(3)}(x_0)\,(F''(2x_0)-\alpha) - F^{(3)}(2x_0)W_0''(x_0)}{8W_0''(x_0)^2\,(V''(x_0)+F''(2x_0))} - \frac{\mathcal{W}_3}{4\,\mathcal{W}_2^2} \\ &= -\frac{2W_0^{(3)}(x_0)+F^{(3)}(2x_0)}{8W_0''(x_0)\,(V''(x_0)+F''(2x_0))}\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve vu que $W_0^{(3)}(x_0) = V^{(3)}(x_0) + \frac{1}{2}F^{(3)}(2x_0)$. □

On peut constater que si l'on avait un pseudo-potentiel W_ϵ constant par rapport au paramètre ϵ et donc si son puits était toujours x_0, l'ordre de la vitesse de convergence serait encore ϵ mais le préfacteur serait différent. En effet, il suffirait d'appliquer le Lemme 4.22 puis de remplacer W_ϵ par W_0 et x_0^ϵ par x_0 dans l'estimation asymptotique (4.5.2) et l'on trouverait alors $\chi(x_0) = \frac{1}{W_0''(x_0)}$. Par conséquent, le fait que le pseudo-potentiel W_ϵ dépende de ϵ apporte une perturbation dans le préfacteur de la vitesse de convergence.

4.6 Comportement asymptotique autour du dioptre $\boldsymbol{\alpha = \vartheta}$

On suppose à nouveau que le potentiel de confinement V vérifie (V-1)–(V-8) ainsi que (V-10) et que le potentiel d'intéraction vérifie (F-1)–(F-5). On suppose également que les deux fonctions V'' et F'' sont convexes. Automatiquement, le potentiel V vérifie l'hypothèse (V-9). On considère une mesure invariante symétrique u_ϵ^0 associée à la diffusion auto-stabilisante (0.0.5). On sait qu'elle existe d'après le Théorème 2.22. D'après le Théorème 3.28, on sait que u_ϵ^0 converge vers $u_0^0 = \frac{1}{2}\delta_{x_0} + \frac{1}{2}\delta_{-x_0}$ où x_0 est défini comme étant l'unique solution positive ou nulle de (3.4.10). D'après les précédents résultats (le Théorème 4.13, le Théorème 4.17 et le Théorème 4.25), en considérant une fonction $f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ à accroissements polynômiaux, on a la limite suivante :

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{\ln |\langle f, u_\epsilon^0 \rangle - \langle f, u_0^0 \rangle|}{\ln |\epsilon|} = \Lambda(\alpha) := \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \neq \vartheta \\ \frac{1}{m_0} & \text{si } \alpha = \vartheta, \end{cases}$$

où m_0 a été défini dans (4.4.9). On en déduit qu'il y a un dioptre en $\alpha = \vartheta$.
Le but de cette section est de lier continûment le comportement lorsque α tend vers ϑ par valeurs inférieures avec celui de α tendant vers ϑ par valeurs supérieures à travers l'entaille $\alpha = \vartheta$.
On va se concentrer ici sur un exemple particulier mais le résultat peut être facilement étendu à des cas plus généraux. On prend $V(x) := \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ et $F(x) := \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$. Ici, $\vartheta = \alpha = 1$. Afin de connaître le comportement de $u_\epsilon^0 - u_0^0$ sur ce dioptre, on va ajouter une dépendance en ϵ dans le paramètre α. On considère par conséquent deux nouveaux potentiels d'intéractions :

$$F_\epsilon^{+,\rho}(x) := \frac{x^4}{4} + \frac{(1 + \rho\epsilon^\eta)\, x^2}{2} \quad \text{et} \quad F_\epsilon^{-,\rho}(x) := \frac{x^4}{4} + \frac{(1 - \rho\epsilon^\eta)\, x^2}{2}$$

où $\rho > 0$. Lorsque l'on prend $F_\epsilon^{+,\rho}$, on dit que l'on considère le côté droit du dioptre et inversement, lorsque l'on prend $F_\epsilon^{-,\rho}$, on dit que l'on considère le côté gauche du dioptre.
Le nouveau problème que l'on étudie est alors une petite variation autour de la diffusion auto-stabilisante (0.0.5) :

$$\begin{cases} dX_t^\epsilon = \sqrt{\epsilon} dB_t - \left\{ 2\left(X_t^\epsilon\right)^3 + \left(3m_2(\epsilon, t) \pm \rho\epsilon^\eta\right) X_t^\epsilon \right\} dt \\ m_2(\epsilon, t) = \mathbb{E}\left[\left(X_t^\epsilon\right)^2\right]. \end{cases} \tag{4.6.1}$$

On a enlevé les moments impairs car on considère ici des mesures symétriques. Ainsi même si l'équation différentielle stochastique sans les moments impairs est différente de l'équation différentielle stochastique avec les moments impairs, comme on part d'une mesure symétrique, les deux systèmes sont similaires.
La nouvelle équation avec $F_\epsilon^{\pm,\rho}$ à la place de F est differente mais l'existence d'une solution forte est toujours vraie car on a prouvé celle-ci à ϵ fixé dans le Théorème 1.14.
De même, l'existence d'une mesure invariante symétrique a été prouvée dans le

Théorème 2.22 à ϵ fixé donc on en déduit que la nouvelle diffusion (4.6.1) admet une mesure invariante symétrique que l'on note $u_\epsilon^{0,\eta,\pm,\rho}$. On sait également que cette mesure stationnaire est unique d'après la Proposition 2.23 car le potentiel d'intéraction $F_\epsilon^{\pm,\rho}$ est de degré 4.
Afin de pouvoir étudier le dioptre d'un point de vue vitesse de convergence, il faut d'abord prouver que l'on a bien la convergence de cette mesure symétrique. Ceci ne peut pas être obtenu par simple application des résultats du Chapitre 3 puisque ces résultats en question n'ont pas été obtenus à ϵ fixé. On pose dans toute la suite $m_2(\epsilon) := \int_{\mathbb{R}} x^2 u_\epsilon^{0,\eta,\pm,\rho}(x)dx$ en gardant bien à l'esprit que $m_2(\epsilon)$ dépend de ρ mais aussi du côté du dioptre que l'on étudie. Alors $m_2(\epsilon)$ est l'unique réel strictement positif tel que

$$m_2(\epsilon) = \frac{\int_{\mathbb{R}_+} x^2 \exp\left[-\frac{3m_2(\epsilon)\pm\rho\epsilon^\eta}{\epsilon}x^2 - \frac{x^4}{\epsilon}\right] dx}{\int_{\mathbb{R}_+} \exp\left[-\frac{3m_2(\epsilon)\pm\rho\epsilon^\eta}{\epsilon}x^2 - \frac{x^4}{\epsilon}\right] dx}\,. \tag{4.6.2}$$

A partir de cette équation, on va prouver la convergence étroite de la mesure stationnaire symétrique de la diffusion auto-stabilisante (4.6.1) vers la mesure de Dirac δ_0.

Proposition 4.26. *Quel que soit $\eta > 0$ et $\rho > 0$, la mesure $u_\epsilon^{0,\eta,\pm,\rho}$ converge étroitement vers δ_0 lorsque ϵ tend vers 0.*

Démonstration. On suppose par l'absurde qu'il existe une constante positive C et une suite décroissante $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 telles que $m_2(\epsilon_k) > C$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour simplifier, on va omettre l'indice k. En appliquant le changement de variable $x := \sqrt{\epsilon}y$ dans (4.6.2), on trouve $m_2(\epsilon) = \epsilon\xi\left(m_2(\epsilon) \pm \frac{\rho\epsilon^\eta}{3}, \epsilon\right)$ où la fonction ξ est définie comme suit :

$$\xi(u,v) := \int_{\mathbb{R}_+} y^2 \nu_{u,v}(y)dy \quad \text{avec} \quad \nu_{u,v}(y) := \frac{\exp\left[-3uy^2 - vy^4\right]}{\int_{\mathbb{R}_+} \exp\left[-3uz^2 - vz^4\right] dy}\,. \tag{4.6.3}$$

Soit $u \in \mathbb{R}$ et $v > 0$. On considère une variable aléatoire X dont la distribution est $\nu_{u,v}$. L'inégalité de Jensen implique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\xi}{\partial u}(u,v) &= -3\mathbb{E}\left[X^4\right] + 3\mathbb{E}\left[X^2\right]^2 < 0 \\ \text{et} \quad \frac{\partial\xi}{\partial v}(u,v) &= -\mathbb{E}\left[X^6\right] + \mathbb{E}\left[X^4\right]\mathbb{E}\left[X^2\right] < 0\,. \end{aligned}$$

Pour ϵ assez petit, on a $3m_2(\epsilon) \pm \rho\epsilon^\eta > C$. On en déduit l'inégalité $m_2(\epsilon) \leq \epsilon\frac{\int_{\mathbb{R}_+} y^2 \exp\left[-Cy^2\right]dy}{\int_{\mathbb{R}_+} \exp[-Cy^2]dy}$. Le terme de droite tend vers 0 ce qui est impossible puisque $m_2(\epsilon) \geq C > 0$. Donc, on en déduit que $m_2(\epsilon)$ converge vers 0 lorsque ϵ tend vers 0 ce qui équivaut à la convergence L^2 de $u_\epsilon^{0,\eta,\pm,\rho}$ vers δ_0. Par suite, on a la convergence étroite de $u_\epsilon^{0,\eta,\pm,\rho}$ vers δ_0. □

Comme on a vu précédemment, la vitesse de convergence de $\langle f, u_\epsilon^0\rangle$ vers $\langle f, u_0^0\rangle$ est directement liée à celle de $m_2(\epsilon)$ vers 0.
En effet, on a $\langle f, u_\epsilon^0\rangle - \langle f, u_0^0\rangle = \frac{f''(0)}{2} m_2(\epsilon) + o\{m_2(\epsilon)\}$. Maintenant, on va étudier séparément les vitesses de convergence selon le côté du dioptre que l'on considère.

4.6.1 Vitesse de convergence à droite du dioptre $\boldsymbol{\alpha = \vartheta}$

On commence par regarder l'ordre de la vitesse de convergence.

Proposition 4.27. *Avec les notations de cette section, si l'on considère le système gouverné par* $V(x) := \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ *et* $F_\epsilon^{+,\rho}(x) := \frac{x^4}{4} + \frac{1+\rho\epsilon^\eta}{2}x^2$*, on a la limite suivante :*

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{\ln|m_2(\epsilon)|}{\ln|\epsilon|} = \Lambda_+(\eta) := 1 - \min\left\{\eta; \frac{1}{2}\right\}. \tag{4.6.4}$$

Démonstration. Rappelons que $m_2(\epsilon)$ vérifie $m_2(\epsilon) = \epsilon\xi\left(m_2(\epsilon) + \frac{\rho\epsilon^\eta}{3}, \epsilon\right)$ où ξ a été définie dans (4.6.3). Comme on a vu dans la preuve de la Proposition 4.26, la fonction ξ est décroissante suivant ses deux variables. De cela, on en déduit (4.6.4). En effet :

- $m_2(\epsilon) + \frac{\rho\epsilon^\eta}{3} > m_2(\epsilon)$ donc $m_2(\epsilon) \leq \epsilon\xi(m_2(\epsilon), 0)$. En faisant le changement de variable $y := \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{3m_2(\epsilon)}}$, on obtient $m_2(\epsilon)^2 \leq \frac{\epsilon}{6}$ d'où $m_2(\epsilon) \leq \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{6}}$.
- $m_2(\epsilon) + \frac{\rho\epsilon^\eta}{3} > \frac{\rho\epsilon^\eta}{3}$ donc $m_2(\epsilon) \leq \epsilon\xi(\frac{\rho\epsilon^\eta}{3}, 0)$. En faisant le changement de variable $y := \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{\rho}\epsilon^{\frac{\eta}{2}}}$, on obtient $m_2(\epsilon) \leq \frac{\epsilon^{1-\eta}}{2\rho}$.

Par conséquent, il existe une constante $C > 0$ telle que $m_2(\epsilon) \leq C\epsilon^{\Lambda_+(\eta)}$. De cela, on en déduit qu'il existe une autre constante $C' > 0$ telle que $m_2(\epsilon) + \frac{\rho\epsilon^\eta}{3} \leq C'\epsilon^{\min\left\{\eta, \frac{1}{2}\right\}}$. En utilisant la décroissance de ξ suivant ses deux variables, il vient :

$$\begin{aligned} m_2(\epsilon) &\leq \epsilon\xi\left(C'\epsilon^{\min\left\{\eta,\frac{1}{2}\right\}}, \epsilon^{\min\{1;2\eta\}}\right) \\ &\leq \epsilon \frac{\int_{\mathbb{R}_+} y^2 \exp\left[-3C'\left(\epsilon^{\min\left\{\frac{\eta}{2},\frac{1}{4}\right\}}y\right)^2 - \left(\epsilon^{\min\left\{\frac{\eta}{2},\frac{1}{4}\right\}}y\right)^4\right] dy}{\int_{\mathbb{R}_+} \exp\left[-3C'\left(\epsilon^{\min\left\{\frac{\eta}{2},\frac{1}{4}\right\}}y\right)^2 - \left(\epsilon^{\min\left\{\frac{\eta}{2},\frac{1}{4}\right\}}y\right)^4\right] dy}. \end{aligned}$$

Le changement de variable $y := \epsilon^{-\min\left\{\frac{\eta}{2},\frac{1}{4}\right\}} z$ fournit directement l'existence d'une constante $C'' > 0$ telle que $m_2(\epsilon) \geq C''\epsilon^{\Lambda_+(\eta)}$. □

On calcule maintenant le pré-facteur afin de préciser l'influence de $\rho > 0$.

Corollaire 4.28. *Avec les hypothèses de la Proposition 4.27, on a :*

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{m_2(\epsilon)}{\epsilon^{\Lambda_+(\eta)}} = \lambda^+(\eta) := \begin{cases} \frac{1}{2\rho} & si \quad 2\eta < 1 \\ x_\rho^+ & si \quad 2\eta = 1 \\ x_0 & si \quad 2\eta > 1 \end{cases} \tag{4.6.5}$$

$$avec \quad x_\rho^+ = \xi\left(x_\rho^+ + \frac{\rho}{3}, 1\right) \tag{4.6.6}$$

$$et \quad x_0 = \xi(x_0, 1), \tag{4.6.7}$$

la fonction ξ étant définie dans (4.6.3).

Démonstration. **Premier cas : $\eta < \frac{1}{2}$.** Alors $\Lambda_+(\eta) = 1 - \eta$. On applique le changement de variable $x := \epsilon^{\frac{\eta}{2}} y$ dans (4.6.2) et on obtient :

$$m_2(\epsilon) = \epsilon^{\eta} \xi \left(\frac{m_2(\epsilon)\epsilon^{-\eta} + \frac{\rho}{3}}{\widetilde{\epsilon}}, \frac{1}{\widetilde{\epsilon}} \right)$$

où ξ a été définie dans (4.6.3) et où $\widetilde{\epsilon} := \epsilon^{1-2\eta}$. Comme $\frac{m_2(\epsilon)}{\rho}\epsilon^{-\eta}$ tend vers 0, on peut utiliser le Lemme A.3 avec $U(x) := \frac{\rho+3m_2(\epsilon)\epsilon^{-\eta}}{2} y^2 + \frac{y^4}{2}$ et $f(x) := x^2$. Ainsi : $\xi \left(\frac{m_2(\epsilon)\epsilon^{-\eta}+\frac{\rho}{3}}{\widetilde{\epsilon}}, \frac{1}{\widetilde{\epsilon}} \right) \approx \frac{\widetilde{\epsilon}}{2U''(0)} = \frac{\epsilon^{1-2\eta}}{2\rho}$ d'où $m_2(\epsilon) \approx \epsilon^{1-\eta}\frac{1}{2\rho}$.

Second cas : $\eta = \frac{1}{2}$. Alors $\Lambda_+(\eta) = \frac{1}{2}$. On applique le changement de variable $x := \epsilon^{\frac{1}{4}} y$ dans (4.6.2) et on obtient :

$$\frac{m_2(\epsilon)}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{\int_{\mathbb{R}_+} y^2 \exp\left[-\left(\rho + 3\frac{m_2(\epsilon)}{\sqrt{\epsilon}} \right) y^2 - y^4 \right] dy}{\int_{\mathbb{R}_+} \exp\left[-\left(\rho + 3\frac{m_2(\epsilon)}{\sqrt{\epsilon}} \right) y^2 - y^4 \right] dy}.$$

Soit C une valeur d'adhérence de $\frac{m_2(\epsilon)}{\sqrt{\epsilon}}$. L'égalité précédente fournit directement $C = x_\rho^+$ défini dans (4.6.6). Comme x_ρ^+ est unique, il y a une unique valeur d'adhérence et par conséquent $\frac{m_2(\epsilon)}{\sqrt{\epsilon}}$ converge vers x_ρ^+.

Troisième cas : $\eta > \frac{1}{2}$. On procède exactement comme précédemment en utilisant le changement de variable du second cas. Comme différence, on a la disparition du paramètre ρ dans l'exponentielle puisque la quantité $m_2(\epsilon)\epsilon^{-\eta}$ est très grande. On voit à nouveau apparaître une unique valeur d'adhérence et il s'agit cette fois de x_0. □

On peut noter que pour $\eta > \frac{1}{2}$, la vitesse de convergence du système (4.6.1) est constante aussi bien pour l'ordre que pour le préfacteur.

4.6.2 Vitesse de convergence à gauche du dioptre $\boldsymbol{\alpha = \vartheta}$

On va maintenant s'intéresser à la vitesse de convergence lorsque l'on est du côté gauche du dioptre. Comme pour le côté droit, on commence par l'ordre de la vitesse de convergence avant de spécifier le préfacteur.

Proposition 4.29. *Avec les notations de cette section, si l'on considère le système gouverné par $V(x) := \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ et $F_\epsilon^{-,\rho}(x) := \frac{x^4}{4} + \frac{1-\rho\epsilon^\eta}{2}x^2$, on a la limite suivante :*

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{\ln |m_2(\epsilon)|}{\ln |\epsilon|} = \Lambda_-(\eta) := \min \left\{ \eta; \frac{1}{2} \right\}. \tag{4.6.8}$$

Démonstration. **Premier cas : $\eta \geq \frac{1}{2}$.** On applique le changement de variable $x := \epsilon^{\frac{1}{4}} y$ dans (4.6.2) et on obtient :

$$m_2(\epsilon) = \sqrt{\epsilon}\xi\left(\frac{m_2(\epsilon)}{\sqrt{\epsilon}} - \frac{\rho\epsilon^{\eta-\frac{1}{2}}}{3}, 1\right). \tag{4.6.9}$$

Supposons que l'on ait $\liminf_{\epsilon\longrightarrow 0} \frac{m_2(\epsilon)}{\sqrt{\epsilon}} = 0$. On considère alors une suite décroissante $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 telle que $\frac{m_2(\epsilon_k)}{\sqrt{\epsilon_k}}$ tende vers 0. En divisant (4.6.9) par $\sqrt{\epsilon_k}$ et en faisant tendre k vers l'infini, il vient $0 = \xi(0,1) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} > 0$. Ainsi il existe une constante $C > 0$ telle que $m_2(\epsilon) \geq C\sqrt{\epsilon}$ pour tout $\epsilon > 0$ et pour ϵ assez petit, $m_2(\epsilon) - \frac{\rho\epsilon^{\eta-\frac{1}{2}}}{3} > C'$. La fonction ξ étant décroissante suivant ses deux variables, on trouve $\frac{m_2(\epsilon)}{\sqrt{\epsilon}} \leq \xi(C', 1)$. Par conséquent, on a bien $\lim_{\epsilon\longrightarrow 0} \frac{\ln|m_2(\epsilon)|}{\ln|\epsilon|} = \frac{1}{2}$ lorsque $\eta \geq \frac{1}{2}$.

Second cas : $\eta < \frac{1}{2}$. On applique le changement de variable $x := \sqrt{\frac{\epsilon}{m_2(\epsilon)}} y$ dans (4.6.2) et on obtient :

$$m_2(\epsilon) = \epsilon^{\eta}\xi\left(\frac{m_2(\epsilon)\epsilon^{-\eta} - \frac{\rho}{3}}{\widetilde{\epsilon}}, \frac{1}{\widetilde{\epsilon}}\right) \tag{4.6.10}$$

où $\widetilde{\epsilon} := \epsilon^{1-2\eta}$. La fonction ξ étant décroissante, il vient $\frac{m_2(\epsilon)}{\epsilon^{\eta}} \leq \xi\left(\frac{-\rho}{3\widetilde{\epsilon}}, \frac{1}{\widetilde{\epsilon}}\right)$. En utilisant le Lemme A.3, on obtient la convergence de $\xi\left(\frac{-\rho}{3\widetilde{\epsilon}}, \frac{1}{\widetilde{\epsilon}}\right)$ vers $\frac{\rho}{2}$ et ainsi $m_2(\epsilon) = O(\epsilon^{\eta})$. Supposons maintenant par l'absurde qu'il existe une suite décroissante $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui tende vers 0 et telle que $\frac{m_2(\epsilon_k)}{\epsilon_k^{\eta}} < \frac{\rho}{6}$. Alors, (4.6.10) implique

$$\frac{m_2(\epsilon_k)}{\epsilon_k^{\eta}} \geq \xi\left(-\frac{\rho}{6\widetilde{\epsilon_k}}, \frac{1}{\widetilde{\epsilon_k}}\right)$$

car ξ est décroissante. On utilise à nouveau le Lemme A.3 et on obtient la convergence de $\xi\left(-\frac{\rho}{6\widetilde{\epsilon_k}}, \frac{1}{\widetilde{\epsilon_k}}\right)$ vers $\frac{\rho}{4}$ ce qui est impossible. On en déduit donc la minoration $\frac{m_2(\epsilon)}{\epsilon^{\eta}} \geq \frac{\rho}{6}$ pour ϵ assez petit. Ainsi $m_2(\epsilon)$ et ϵ^{η} sont du même ordre ce qui implique la limite (4.6.8). □

On peut remarquer l'asymétrie des résultats : l'ordre de la vitesse de convergence est $\min\{\frac{1}{2}; \eta\}$ sur la partie gauche du dioptre et $1 - \min\{\frac{1}{2}; \eta\}$ sur sa partie droite. En effet, lorsque $\alpha \geq \vartheta$, la mesure limite est toujours δ_0. Au contraire, si $\alpha < \vartheta$, la mesure limite n'est pas δ_0 donc plus η est petit, plus la mesure $u_{\epsilon}^{0,\eta,-,\rho}$ est loin de sa limite δ_0.

Précisons maintenant le préfacteur de la vitesse de convergence à gauche du dioptre.

Corollaire 4.30. *Avec les hypothèses de la Proposition 4.29, on a :*

$$\lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\frac{m_2(\epsilon)}{\epsilon^{\Lambda_-(\eta)}}=\lambda^-(\epsilon) \;:=\; \begin{cases} \frac{\rho}{5} & si \quad 2\eta<1 \\ x_\rho^- & si \quad 2\eta=1 \\ x_0 & si \quad 2\eta>1 \end{cases}$$
$$avec \quad x_\rho^- \;=\; \xi\left(x_\rho^- - \frac{\rho}{3},1\right) \tag{4.6.11}$$

où le réel x_0 est défini dans (4.6.7) *et où la fonction ξ est définie dans* (4.6.3).

Démonstration. **Premier cas : $\eta<\frac{1}{2}$.** Alors $\Lambda_-(\eta)=\eta$. On applique le changement de variable $x:=\epsilon^{\frac{\eta}{2}}y$ dans (4.6.2) et on obtient

$$\frac{m_2(\epsilon)}{\epsilon^\eta}=\frac{\int_{\mathbb{R}_+}y^2\exp\left[\frac{\rho-3m_2(\epsilon)\epsilon^{-\eta}}{\widetilde{\epsilon}}y^2-\frac{y^4}{\widetilde{\epsilon}}\right]dy}{\int_{\mathbb{R}_+}\exp\left[\frac{\rho-3m_2(\epsilon)\epsilon^{-\eta}}{\widetilde{\epsilon}}y^2-\frac{y^4}{\widetilde{\epsilon}}\right]dy}$$

où $\widetilde{\epsilon}:=\epsilon^{1-2\eta}\longrightarrow 0$. Soit une suite décroissante $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 telle que $m_2(\epsilon)\epsilon^{-\eta}$ converge vers $C>0$. On applique le Lemme A.3 à la fonction $U(y):=\frac{3m_2(\epsilon)\epsilon^{-\eta}-\rho}{2}y^2+\frac{y^4}{2}$ et $f(x):=x^2$ alors on obtient $C=x_C^2$; x_C étant le point critique où U_C atteint son minimum global sur $\mathbb{R}_+$ avec $U_C(y):=\frac{3C-\rho}{2}y^2+\frac{y^4}{2}$. Si $C>\frac{\rho}{3}$ alors $x_C=0$ donc $C=0$ ce qui est impossible. On en déduit $C<\frac{\rho}{3}$ puis $x_C=\sqrt{\frac{\rho-3C}{2}}$ donc $C=\frac{\rho}{5}$. Il s'agit de l'unique valeur d'adhérence donc on a $m_2(\epsilon)\epsilon^{-\eta}\longrightarrow\frac{\rho}{5}$.

Second cas : $\eta\geq\frac{1}{2}$. On procède exactement de la même manière que dans la preuve du Corollaire 4.28 après avoir utilisé le changement de variable $x:=\epsilon^{\frac{1}{4}}y$ dans (4.6.2). □

4.6.3 Régression linéaire à travers le dioptre $\boldsymbol{\alpha=\vartheta}$

Rappelons que $m_2(\epsilon)$ dépend de η, de ϵ mais aussi du côté où l'on se place. Dans cette sous-section, on pose $m_2^+(\epsilon)$ le moment d'ordre 2 du côté droit et $m_2^-(\epsilon)$ celui du côté gauche.
En prenant $\rho:=1$, le Corollaire 4.28 implique

$$\begin{aligned} \ln(m_2^+(\epsilon)) &= (1-\eta)\ln(\epsilon)-\ln(2)+o(1) \quad \text{pour} \quad \eta\in\left]0;\frac{1}{2}\right[\\ \text{et} \quad \ln(m_2^+(\epsilon)) &= \frac{1}{2}\ln(\epsilon)+\ln(x_0)+o(1) \quad \text{pour} \quad \eta\in\left]\frac{1}{2};\infty\right[\end{aligned}$$

où x_0 est défini dans (4.6.7). Prenons $\epsilon:=10^{-10}$ pour simuler le moment d'ordre deux de la mesure stationnaire symétrique associée aux paramètres. En rappelant que $\lambda^+(\eta)$ a été défini dans (4.6.5), voici le graphe de $\xi(\eta):=\frac{\ln\left(m_2^+(\epsilon)\right)-\lambda^+(\eta)}{\ln(\epsilon)}$:

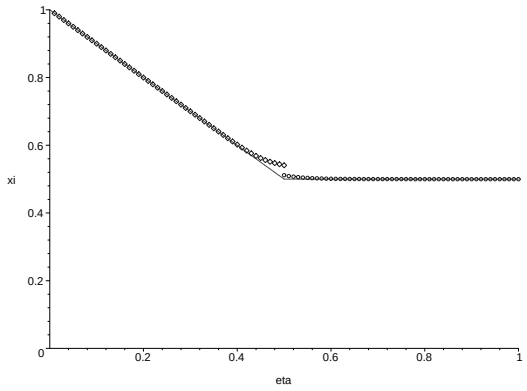


Fig. 4.1: Côté droit du dioptre.

La ligne continue correspond à la fonction $1 - \min\left\{\eta; \frac{1}{2}\right\}$. La discontinuité est causée par la bifurcation du pré-facteur.
On a supprimé le préfacteur $\lambda^+(\eta)$ sinon il aurait fallu prendre ϵ beaucoup plus petit pour que la courbe simulée soit vraiment proche de la courbe théorique limite.

Maintenant, on regarde le côté gauche du dioptre. En prenant $\rho := 1$, le Corollaire 4.30 implique

$$\begin{aligned} \ln(m_2^-(\epsilon)) &= \eta \ln(\epsilon) - \ln(5) + o(1) \quad \text{pour} \quad \eta \in \left]0; \frac{1}{2}\right[\\ \text{et} \quad \ln(m_2^-(\epsilon)) &= \frac{1}{2}\ln(\epsilon) + \ln(x_0) + o(1) \quad \text{pour} \quad \eta \in \left]\frac{1}{2}; \infty\right[\end{aligned}$$

où x_0 est défini dans (4.6.7). Prenons $\epsilon := 10^{-10}$ pour simuler le moment d'ordre deux de la mesure stationnaire symétrique associée aux paramètres. En rappelant que $\lambda^-(\eta)$ a été défini dans (4.6.11), voici le graphe de $\xi(\eta) := \frac{\ln\left(m_2^-(\epsilon)\right) - \lambda^-(\eta)}{\ln(\epsilon)}$:

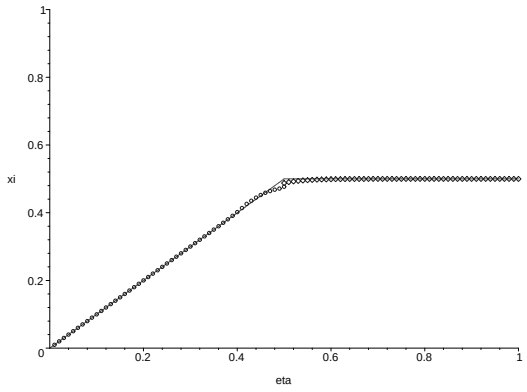


Fig. 4.2: Côté gauche du dioptre.

La ligne continue correspond à la fonction $\min\left\{\eta; \frac{1}{2}\right\}$. La discontinuité est causée par la bifurcation du pré-facteur.

Remarque 4.31. *Tout le travail de cette section a été effectué avec* $V(x) := \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ *et* $F(x) := \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$ *mais l'on aurait pu prouver le même résultat pour* $\Lambda^{\pm}(\eta)$ *avec des potentiels différents tant que l'on a* $m_0 = 2$.

Remarque 4.32. *On peut traiter l'équation* (4.6.2) *(qui est centrale dans l'étude autour du dioptre) en utilisant des fonctions de Bessel modifiées, voir [11].*

4.7 Vitesse de convergence de $\boldsymbol{u_\epsilon^{a_0}}$ vers $\boldsymbol{\delta_{a_0}}$

Dans cette section, on suppose que V satisfait les hypothèses (V-1)–(V-7) ainsi que (V-10). On suppose également que V'' et F'' sont convexes. Ainsi V vérifie (V-9). Soit a_0 un point critique du potentiel V. Il s'agit donc soit de a_1 soit de a_2 soit de a_3 d'après l'hypothèse (V-2). On admet l'existence d'une mesure invariante excentrée autour de a_0 pour ϵ assez petit. En d'autres termes, on suppose qu'il y a une suite de mesures stationnaires $\left(u_{\epsilon_k}^{a_0}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ pour la diffusion auto-stabilisante (0.0.5) qui converge vers δ_{a_0}. On va omettre l'indice k pour simplifier la lecture par la suite. On suppose de plus que l'on a $\alpha + V''(a_0) > 0$.
On rappelle que $2n$ est le degré de F. D'après le Théorème 2.24 et la Proposition 3.16, on sait qu'il est suffisant d'avoir

$$\begin{aligned} V(x) - V(a_0) + F(x - a_0) &> 0 \quad \forall x \neq a_0 \\ \text{et} \quad \sum_{p=0}^{2n-2} \frac{|F^{p+2}(a_0)|}{p!} |a_0|^p &< \alpha + V''(a_0) \end{aligned}$$

pour qu'il existe une telle suite de mesures. On note $W_\epsilon^{a_0}$ le pseudo-potentiel associé à la mesure $u_\epsilon^{a_0}$. Il converge vers $W_0^{a_0} := V + F(. - a_0) - F(a_0)$. On suppose aussi que F'' est convexe. La condition (4.3.6) est clairement satisfaite car a_0 est l'unique point où le pseudo-potentiel limite $W_0^{a_0}$ atteint son minimum global si a_0 vérifie $V(x) - V(a_0) + F(x - a_0) > 0$ pour tout $x \neq a_0$.

Lemme 4.33. *On suppose que* $\alpha + V''(a_0) > 0$. *Si* V'' *et* F'' *sont convexes, pour* ϵ *assez petit,* $W_\epsilon^{a_0}$ *atteint son minimum global en un unique réel* a_ϵ *et celui-ci vérifie de plus le développement asymptotique suivant :*

$$a_\epsilon = a_0 - \frac{(W_\epsilon^{a_0})'(a_0)}{\alpha + V''(a_0)} + o\left\{(W_\epsilon^{a_0})'(a_0)\right\} . \tag{4.7.1}$$

Démonstration. a_0 est l'unique point où le pseudo-potentiel limite $W_0^{a_0}$ atteint son minimum global et $(W_0^{a_0})''(a_0) = \alpha + V''(a_0) > 0$ donc il s'agit d'une conséquence directe du Lemme 4.7. □

Comme dans le cas des familles de mesures stationnaires qui convergent vers $\frac{1}{2}\delta_{x_0} + \frac{1}{2}\delta_{-x_0}$, on fournit déjà un premier résultat asymptotique faisant intervenir le puits a_ϵ.

Lemme 4.34. *On suppose que $\alpha + V''(a_0) > 0$. Si V'' et F'' sont convexes, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ à croissance lente, on a le développement asymptotique :*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{2}{\epsilon} W_\epsilon^{a_0}(x)} dx = 2\sqrt{\frac{\pi\epsilon}{(W_\epsilon^{a_0})''(a_\epsilon)}}\; e^{-\frac{2W_\epsilon^{a_0}(a_\epsilon)}{\epsilon}} \Big\{ f(a_\epsilon) + \gamma(f)\epsilon + o(\epsilon) \Big\} \quad (4.7.2)$$

avec

$$\gamma(f) := \left(\frac{5\ \mathcal{W}_3^2}{48\ \mathcal{W}_2^3} - \frac{\mathcal{W}_4}{16\ \mathcal{W}_2^2} \right) f(a_0) - \frac{\mathcal{W}_3}{4\ \mathcal{W}_2^2} f'(a_0) + \frac{f''(a_0)}{4\ \mathcal{W}_2}. \quad (4.7.3)$$

Ici, $\mathcal{W}_k := (W_0^{a_0})^{(k)}(a_0)$.

Démonstration. Comme $(W_0^{a_0})''(a_0) > 0$, on trouve (4.7.2) et (4.7.3) en faisant tendre ϵ vers 0 après application du Lemme 4.7. □

Les Lemmes 4.33 et 4.34 permettent de donner l'ordre de $(W_\epsilon^{a_0})'(a_0)$ et par suite de calculer précisément la vitesse de convergence de $u_\epsilon^{a_0}$ vers $u_0^{a_0}$.

Proposition 4.35. *On suppose que $\alpha + V''(a_0) > 0$. Si V'' et F'' sont convexes, on a la convergence suivante :*

$$\frac{(W_\epsilon^{a_0})'(a_0)}{\epsilon} \longrightarrow \frac{\alpha V^{(3)}(a_0)}{4V''(a_0)\,(\alpha + V''(a_0))} \quad (4.7.4)$$

lorsque ϵ tend vers 0.

Démonstration. Comme V admet un extremum local en a_0, celui-ci est un zéro de V'. Par conséquent, $(W_\epsilon^{a_0})'(a_0) = \int_{\mathbb{R}} F'(a_0 - z) u_\epsilon^{a_0}(z) dz$. On introduit la fonction $\xi(z) := F'(a_0 - z)$. On procède comme dans la preuve de la Proposition 4.23. L'application du Lemme 4.34 à ξ et à 1 donne

$$\int_{\mathbb{R}} \xi(x) e^{-\frac{2}{\epsilon} W_\epsilon^{a_0}(x)} dx = 2\sqrt{\frac{\pi\epsilon}{(W_\epsilon^{a_0})''(a_\epsilon)}}\; e^{-\frac{2W_\epsilon^{a_0}(a_\epsilon)}{\epsilon}} \Big\{ \xi(a_\epsilon) + \gamma(\xi)\epsilon + o(\epsilon) \Big\} \quad (4.7.5)$$

$$\text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{2}{\epsilon} W_\epsilon^{a_0}(x)} dx = 2\sqrt{\frac{\pi\epsilon}{(W_\epsilon^{a_0})''(a_\epsilon)}}\; e^{-\frac{2W_\epsilon^{a_0}(a_\epsilon)}{\epsilon}} \Big\{ 1 + \gamma(1)\epsilon + o(\epsilon) \Big\}. \quad (4.7.6)$$

La fonction γ est définie dans (4.7.3). On divise (4.7.5) par (4.7.6) et on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \xi(x) u_\epsilon^{a_0}(x) dx \;=\; \xi(a_\epsilon) + \gamma(\xi)\epsilon - \xi(a_\epsilon)\gamma(1)\epsilon + o(\epsilon).$$

Après avoir effectué la somme, il vient

$$\int_{\mathbb{R}} \xi(x) u_\epsilon^{a_0}(x) dx \;=\; \xi(a_\epsilon) + \left(-\frac{\mathcal{W}_3}{4\ \mathcal{W}_2^2} \xi'(a_0) + \frac{\xi''(a_0)}{4\ \mathcal{W}_2} \right) \epsilon + o(\epsilon). \quad (4.7.7)$$

Ainsi :

$$\frac{(W_\epsilon^{a_0})'(a_0)}{\epsilon}\left\{1-\frac{\xi(a_\epsilon)-\xi(a_0)}{a_\epsilon-a_0}\frac{a_\epsilon-a_0}{(W_\epsilon^{a_0})'(a_0)}\right\}=-\frac{\mathcal{W}_3\xi'(a_0)}{4\,\mathcal{W}_2^2}+\frac{\xi''(a_0)}{4\,\mathcal{W}_2}+o(1)\,.$$

Or $\frac{\xi(a_\epsilon)-\xi(a_0)}{a_\epsilon-a_0}$ converge vers $\xi'(a_0)=-\alpha$ et $\frac{a_\epsilon-a_0}{\left(W_\epsilon^{a_0}\right)'(a_0)}$ converge vers $-\frac{1}{\alpha+V''(a_0)}$. En rappelant $\mathcal{W}_3=(W_0^{a_0})^{(3)}(a_0)=V^{(3)}(a_0)$, $\mathcal{W}_2=V''(a_0)+\alpha=(W_0^{a_0})''(a_0)$, $\xi'(a_0)=-\alpha$ et $\xi''(a_0)=0$, on obtient après simplification

$$\frac{V''(a_0)}{\alpha+V''(a_0)}\frac{(W_\epsilon^{a_0})'(a_0)}{\epsilon}\longrightarrow\alpha\,\frac{V^{(3)}(a_0)}{4\,(\alpha+V''(a_0))^2}$$

ce qui achève la preuve. □

On peut maintenant évaluer la distance entre le puits a_ϵ du pseudo-potentiel $W_\epsilon^{a_0}$ et le puits a_0 du pseudo-potentiel limite $W_0^{a_0}$.

Corollaire 4.36. *On suppose que $\alpha+V''(a_0)>0$. Si V'' et F'' sont convexes, on a la limite suivante :*

$$\lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\frac{a_\epsilon-a_0}{\epsilon}=-\frac{\alpha V^{(3)}(a_0)}{4V''(a_0)\,(\alpha+V''(a_0))^2}\,.$$

Démonstration. D'après le Lemme 4.33, il suffit de diviser la limite (4.7.4) par $-(\alpha+V''(a_0))$. □

Théorème 4.37. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-7) ainsi que (V-10) et un potentiel d'intéraction (F-1)–(F-5). On suppose de plus que V'' et F'' sont convexes. On suppose également que $\alpha+V''(a_0)>0$. Quelle que soit la fonction $f\in\mathcal{C}^4(\mathbb{R},\mathbb{R})$ à croissance lente, on a la convergence suivante :*

$$\frac{1}{\epsilon}\Big(\langle f,u_\epsilon^{a_0}\rangle-\langle f,u_0\rangle\Big)\longrightarrow\frac{V''(a_0)f''(a_0)-V^{(3)}(a_0)f'(a_0)}{4V''(a_0)\,(\alpha+V''(a_0))}$$

lorsque ϵ tend vers 0.

Démonstration. On procède comme dans la preuve du Théorème 4.25. Comme $u_0=\delta_{a_0}$, on trouve

$$\langle f,u_\epsilon^{a_0}\rangle-\langle f,u_0\rangle\;=\;\int_{\mathbb{R}}f(x)u_\epsilon^{a_0}(x)dx-f(a_0)\,.$$

On applique le Lemme 4.34 à f et à 1 puis en divisant la première estimation par la seconde, on obtient un résultat similaire à (4.7.7) avec f à la place de ξ :

$$\int_{\mathbb{R}}f(x)u_\epsilon^{a_0}(x)dx\;=\;f(a_\epsilon)+\left(-\frac{\mathcal{W}_3}{4\,\mathcal{W}_2^2}f'(a_0)+\frac{f''(a_0)}{4\,\mathcal{W}_2}\right)\epsilon+o(\epsilon)\,.$$

Par conséquent, on obtient directement

$$\frac{\langle f, u_\epsilon^{a_0}\rangle - \langle f, \delta_{a_0}\rangle}{\epsilon} = \frac{f(a_\epsilon) - f(a_0)}{a_\epsilon - a_0}\frac{a_\epsilon - a_0}{\epsilon} - \frac{\mathcal{W}_3}{4\,\mathcal{W}_2^2} f'(a_0) + \frac{f''(a_0)}{4\,\mathcal{W}_2} + o(1)\,.$$

En se servant maintenant du Théorème 4.36, on obtient

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} f(x) u_\epsilon^{a_0}(x)dx - f(a_0)}{\epsilon} \longrightarrow \frac{f''(a_0)}{4\,(W_0^{a_0})''(a_0)} + f'(a_0)\Delta(a_0)$$

où l'on a

$$\begin{aligned}\Delta(a_0) &:= -\alpha\frac{V^{(3)}(a_0)}{4V''(a_0)\,(\alpha + V''(a_0))^2} - \frac{V^{(3)}(a_0)}{4\,(\alpha + V''(a_0))^2} \\ &= -\frac{V^{(3)}(a_0)}{4V''(a_0)\,(\alpha + V''(a_0))}\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

Remarque 4.38. *On retrouve le résultat du Théorème 2.27 en prenant* $f(x) := x^k$. *En effet, par définition, on a*

$$\tau_k^0 := -\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{m_k^{a_0}(\epsilon) - a_0^k}{\epsilon}\,.$$

Toutefois, dans le Théorème 2.27, il n'a pas été démontré que toutes les mesures stationnaires excentrées autour de a_0 *vérifiaient ceci ; il a seulement été prouvé qu'il y avait une mesure le vérifiant. Ainsi les résultats du Chapitre* 4 *sont plus forts que ceux du Chapitre* 2.

De plus, le Théorème 2.27 ne concerne que les puits de V *alors qu'ici, le résultat est également vrai pour les bosses tant qu'il y a une suite de mesures stationnaires qui converge vers* δ_{a_0}.

5. SYSTÈMES DE PARTICULES ASSOCIÉS À LA DIFFUSION DE MCKEAN-VLASOV

5.1 Introduction

La particularité de la diffusion (0.0.5) est la composante non-linéaire de la dérive $-F' * u_t^\epsilon$. Cette composante est appellée auto-stabilisation car la loi du processus intervient dans la dérive. La justification de cette terminologie tient aux liens étroits entre une diffusion auto-stabilisante et un système de particules dont le nombre de particules N tend vers $+\infty$. En effet, en considèrant le système d'équations

$$dX_t^i = \sqrt{\epsilon} dB_t^i - V'\left(X_t^i\right) dt - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} F'\left(X_t^i - X_t^j\right) dt\,, \quad 1 \leq i \leq N$$

où les processus $(B_t^i)_{t\in\mathbb{R}_+}$ sont des mouvements browniens indépendants, la convergence de la mesure empirique $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_{X_t^j}$ vers la mesure u_t^ϵ impliquerait heuristiquement la convergence du processus X_t^i vers un processus auto-stabilisant satisfaisant une équation du type (0.0.5). Ainsi la loi de la diffusion non-linéaire peut être vue intuitivement comme la moyenne des lois d'une infinité de particules en intéraction. De plus, en faisant tendre N vers l'infini, l'influence d'une particule prise isolément sur une autre particule prise isolément devient négligeable devant l'influence moyenne de tout le champ. Ainsi toujours heuristiquement, deux particules prises isolément deviennent indépendantes pour N asymptotiquement grand. Ce phénomène porte le nom de propagation du chaos. On peut par exemple trouver des études de ce phénomène dans [41] (dans le cas où le potentiel de confinement V est nul et où la fonction d'intéraction F' est uniformément lipschitzienne et bornée), dans [5] (dans le cas où le potentiel de confinement V est nul et où le potentiel d'intéraction F satisfait des hypothèses proches de (F-1)–(F-5)), dans [13] (dans le cas où le potentiel de confinement V est convexe et où le potentiel d'intéraction F satisfait des hypothèses proches de (F-1)–(F-5)). L'objectif principal de ce chapitre est de lier la diffusion auto-stabilisante avec un système de particules et d'expliquer quel phénomène est responsable de la non-unicité des mesures stationnaires (l'absence de propagation du chaos uniforme). De plus, certains résultats de ce chapitre seront utilisés afin de prouver dans le chapitre suivant un résultat d'unicité de la mesure stationnaire symétrique lorsque V est symétrique.

Dans un premier temps, on introduit le système de particules ainsi que quelques

définitions. Puis on étudie la géométrie du potentiel intervenant dans le système de particules.
Ensuite, on prouve que le système de particules converge en temps long vers l'unique mesure stationnaire du système.
On s'intéresse ensuite au phénomène de propagation du chaos dans le cas de la diffusion (0.0.5). On prouve aussi que cette propagation n'est pas uniforme en temps. Toutefois, sous deux hypothèses simples, on obtient une forme faible de propagation uniforme du chaos.
Pour finir, on étudie le comportement de l'unique mesure stationnaire du système de particules lorsque ϵ tend vers 0.

Rappelons que le potentiel de confinement V satisfait l'hypothèse (V-10) c'est-à-dire qu'il vérifie la limite $\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} \frac{(V'(x))^2}{V''(x)} = +\infty$. L'hypothèse (V-10) est bien vérifiée pour peu que V soit une fonction polynômiale.

5.2 Préliminaires

On se donne N variables aléatoires indépendantes $X_0^1, \cdots, X_0^N$, identiquement distribuées et dont le moment d'ordre $8q^2$ est fini. En effet, afin de relier un système de particules partant de $\left(X_0^1, \cdots, X_0^N\right)$ à un processus auto-stabilisant comme (0.0.5), on demande à ce que chacune des variables aléatoires initiales vérifie la condition d'existence du processus auto-stabilisant partant de X_0^i à savoir $\mathbb{E}\left[\left(X_0^i\right)^{8q^2}\right] < +\infty$ comme il a été vu dans le Théorème 1.14.
Ainsi par la suite, on considère le système de N particules $\left(X_t^{\epsilon,i,N}\right)_{1\leq i\leq N}$ qui est soumis à la dynamique suivante

$$X_t^{\epsilon,i,N} = X_0^i + \sqrt{\epsilon}B_t^i - \int_0^t \left\{ V'\left(X_s^{\epsilon,i,N}\right) + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N F'\left(X_s^{\epsilon,i,N} - X_s^{\epsilon,j,N}\right) \right\} ds \quad (5.2.1)$$

où les $(B_t^i)_{t\in\mathbb{R}_+}$ sont des mouvements browniens indépendants pour tout $1 \leq i \leq N$.
En parallèle, on définit N diffusions auto-stabilisantes deux à deux indépendantes du même type que (0.0.5) :

$$\overline{X_t^{\epsilon,i}} = X_0^i + \sqrt{\epsilon}B_t^i - \int_0^t \left\{ V'\left(\overline{X_s^{\epsilon,i}}\right) ds + F' * u_s^{\epsilon,i}\left(\overline{X_s^{\epsilon,i}}\right) \right\} ds \quad (5.2.2)$$

où $u_t^{\epsilon,i} := \mathcal{L}\left(\overline{X_t^i}\right) =: u_t^\epsilon$.

Définition 5.1. *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $\epsilon > 0$, on pose*

$$\begin{aligned} \mu_t^{\epsilon,N} &:= \left(X_t^{\epsilon,1,N}, X_t^{\epsilon,2,N}, \cdots, X_t^{\epsilon,N,N}\right) \quad (5.2.3)\\ \mu_0^N &:= \left(X_0^1, X_0^2, \cdots, X_0^N\right) \\ et \quad B_t^{(N)} &:= \left(B_t^1, B_t^2, \cdots, B_t^N\right) . \end{aligned}$$

La notation est choisie pour insister sur la correspondance entre une mesure sur $\mathbb{R}$ *et un élément de* $\mathbb{R}^N$.

Dans ce chapitre, on identifie tacitement l'ensemble $\mathbb{R}^N$ à l'ensemble des mesures de probabilité de $\mathbb{R}$ dont le support est de cardinal inférieur ou égal à N et dont les poids sont de la forme $\frac{k}{N}$ où $k \in \mathbb{N}$. Ainsi à tout N-uplet $(A_1, A_2, \cdots, A_N)$, on associe la mesure $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \delta_{A_j}$. Afin de simplifier l'écriture dans la suite de ce chapitre, on introduit également une fonction de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ qui dirigera le système :

Définition 5.2. 1. *Soit* $(x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. *On pose :*

$$\Upsilon^N(x_1, x_2, \cdots, x_N) := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} V(x_i) + \frac{1}{2N^2}\sum_{i,j=1}^{N} F(x_i - x_j)\,.$$

On dira que Υ^N *est le méta-potentiel de la diffusion à* N *particules. En effet, il agit directement sur la mesure* $\mu_t^{\epsilon,N}$.

2. *Soit une mesure de probabilité* μ *sur* $\mathbb{R}$. *On introduit :*

$$\Upsilon(\mu) := \int_{\mathbb{R}} \Big\{ V(x) + \frac{1}{2} F * \mu(x) \Big\} d\mu(x)\,.$$

On dira que Υ *est le méta-potentiel de la diffusion auto-stabilisante* (0.0.5). *En effet, il agit directement sur la mesure* u_t^{ϵ}.

Afin de bien insister sur le fait que le système de particules représente une mesure et non pas une diffusion, on prouve que le méta-potentiel Υ^N est la restriction de Υ à $\mathbb{R}^N$.

Lemme 5.3. *Soit une mesure de probabilité* μ *sur* $\mathbb{R}$. *Soient* N *variables aléatoires indépendantes* $X^1, \cdots, X^N$ *de loi* μ *dont le moment d'ordre* $2q$ *est fini. On a alors la convergence presque sûre suivante :*

$$\lim_{N \longrightarrow +\infty} \Upsilon^N\left(X^1, \cdots, X^N\right) = \Upsilon(\mu) = \int_{\mathbb{R}} \Big\{ V(x) + \frac{1}{2} F * \mu(x) \Big\} d\mu(x)\,.$$

Démonstration. On introduit la mesure $\mu^N := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \delta_{X^j}$. Par définition, on a

$$\begin{aligned}
\Upsilon^N\left(X^1, X^2, \cdots, X^N\right) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} V\left(X^i\right) + \frac{1}{2N^2}\sum_{i,j=1}^{N} F\left(X^i - X^j\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} V(x) d\mu^N(x) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} F * \mu^N(x) d\mu^N(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Big\{ V(x) + \frac{1}{2} F * \mu(x) \Big\} d\mu(x) \\
&+ \int_{\mathbb{R}} V(x) \left(d\mu^N(x) - d\mu(x) \right) \\
&+ \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^2} F(x-y) \left(d\mu^N(x) \otimes d\mu^N(y) - d\mu(x) \otimes d\mu(y) \right)\,.
\end{aligned}$$

La première intégrale est égale à $\Upsilon(\mu)$. La seconde converge vers 0 d'après la loi des grands nombres. Montrons que la troisième converge vers 0. On note $m_1, \cdots, m_{2n}$ les $2n$ premiers moments de la mesure μ. Ces moments sont finis car le moment d'ordre $2q$ de μ est fini et $q \geq n$. On utilise l'écriture $F(x) = \sum_{r=1}^{n} \alpha_r (x-y)^{2r}$:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} F(x-y) d\mu(x) d\mu(y) &= \sum_{r=1}^{n} \alpha_r \sum_{l=0}^{2r} C_{2r}^{l} (-1)^l \iint_{\mathbb{R}^2} x^l y^{2r-l} d\mu(x) d\mu(y) \\ &= \sum_{r=1}^{n} \alpha_r \sum_{l=0}^{2r} C_{2r}^{l} (-1)^l m_l m_{2r-l} \,. \end{aligned}$$

De même :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} F(x-y) d\mu^N(x) d\mu^N(y) = \sum_{r=1}^{n} \alpha_r \sum_{l=0}^{2r} C_{2r}^{l} (-1)^l m_l^N m_{2r-l}^N$$

où m_l^N est le moment d'ordre l de la mesure empirique μ^N. L'application de la loi forte des grands nombres atteste de la convergence presque sûre de m_l^N vers m_l pour tout $1 \leq l \leq 2n$. On en déduit la convergence presque sûre de $\iint_{\mathbb{R}^2} F(x-y) d\mu^N(x) d\mu^N(y)$ vers $\iint_{\mathbb{R}^2} F(x-y) d\mu(x) d\mu(y)$ ce qui achève la preuve. □

Avec ces notations, le système $\left(\mu_t^{\epsilon,N}\right)_{t\geq 0}$ vérifie une équation différentielle stochastique classique :

$$\mu_t^{\epsilon,N} = \mu_0^N + \sqrt{\epsilon} B_t^{(N)} - N \int_0^t \nabla \Upsilon^N \left(\mu_s^{\epsilon,N}\right) ds \,. \tag{5.2.4}$$

Il s'agit d'une diffusion de Kolmogorov et les hypothèses de départ impliquent la convergence en temps long de la diffusion (5.2.4) vers une mesure stationnaire qui est par ailleurs unique, comme on le verra par la suite.
Avant cela, on va étudier la géométrie du méta-potentiel Υ^N. On commence par décrire l'ensemble des points critiques dans un cas simple.

Proposition 5.4. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-7) ainsi que (V-10) et un potentiel d'intéraction F défini par $F(x) := \frac{\alpha}{2} x^2$. On considère $N \geq 2$. Alors :*

- *Si $\alpha > \vartheta$, le méta-potentiel Υ^N admet exactement $2M+1$ points critiques : les points $\overline{a_{2i+1}} := (a_{2i+1}, \cdots, a_{2i+1})$ sont des puits et les points $\overline{a_{2i}} := (a_{2i}, \cdots, a_{2i})$ sont des cols dont la signature de la matrice Hessienne est $(N-1, 1)$.*
- *Si $\alpha < \vartheta$, les points $\overline{a_{2i+1}} := (a_{2i+1}, \cdots, a_{2i+1})$ sont des puits de Υ^N. Et, les $\overline{a_{2i}}$ sont des points critiques.*

Démonstration. **Étape 1.** Quel que soit $1 \leq i \leq N$, la dérivée du méta-potentiel par rapport à x_i est

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Upsilon^N(x_1, \cdots, x_N) = \frac{1}{N} \left\{ V'(x_i) + \alpha x_i - \frac{\alpha}{N} \sum_{j=1}^{N} x_j \right\} .$$

Soit donc un point critique $(x_1, \cdots, x_N)$. On en déduit $\rho(x_i) = \rho(x_j)$ pour tous les indices i et j où l'on a $\rho(x) := V'(x) + \alpha x$. Or, $\rho'(x) = V''(x) + \alpha > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ d'après l'hypothèse $\alpha > \vartheta$. On en déduit directement $x_i = x_j$ pour tous les indices i et j et par conséquent, les points critiques sont de la forme $\overline{x} := (x, \cdots, x)$.
Par ailleurs, on a nécessairement $V'(x) + \alpha x - \frac{\alpha}{N} \sum_{j=1}^{N} x = 0$ ce qui signifie que x est un point critique du potentiel V soit $x = a_i$ avec $1 \leq i \leq 2M+1$. On peut vérifier que les $2M+1$ points $\overline{a_i}$ sont bien des points critiques du méta-potentiel Υ^N, quel que soit le signe de $\alpha - \vartheta$.
Étape 2. Calculons la Hessienne de Υ^N en chacun des deux types de points :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \Upsilon^N (x_1, \cdots, x_N) &= \frac{1}{N} \left\{ V''(x_i) + \alpha \left(1 - \frac{1}{N} \right) \right\} \\ \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \Upsilon^N (x_1, \cdots, x_N) &= -\frac{\alpha}{N^2} \,. \end{aligned}$$

On en déduit directement que les valeurs propres de la Hessienne en $\overline{a_i}$ sont $\frac{1}{N} V''(a_i)$ et $\frac{1}{N} (V''(a_i) + \alpha)$ associées respectivement à des espaces propres de dimensions 1 et $N-1$. Si i est impair c'est-à-dire si a_i est un puits de V, les deux valeurs propres sont strictement positives donc on en déduit que le méta-potentiel atteint un minimum local en $\overline{a_i}$.
Et, la première valeur propre de la Hessienne en $\overline{a_{2i}}$ est $\frac{1}{N} V''(a_{2i}) < 0$ alors que $\frac{1}{N} (\alpha + V''(a_{2i})) > 0$. Par conséquent, $\overline{a_{2i}}$ est bien un col qui est localement décroissant suivant une dimension et localement croissant suivant $N-1$ dimensions.
Enfin, comme $V''(a_{2i+1}) > 0$, chacun des points $\overline{a_{2i+1}}$ est bien un puits de Υ^N même lorsque $\alpha < \vartheta$. □

Définition 5.5. *Comme N a pour vocation à être grand, on dit que $\overline{a_{2i}}$ est un "col stable" du méta-potentiel.*

On remarquera que d'après la Proposition 2.4, la diffusion (0.0.5) admet une mesure stationnaire excentrée autour d'un point critique a_i si l'on a

$$V(x) - V(a_i) + \frac{\alpha}{2} (x - a_i)^2 > 0 \quad \text{pour tout} \quad x \neq a_i \,. \tag{5.2.5}$$

Toutefois, si $\alpha > \vartheta$, on a $V(x) - V(a_{2i}) + \frac{\alpha}{2} (x - a_{2i})^2 > 0$ pour tout $x \neq a_{2i}$ ce qui prouve qu'il existe une mesure stationnaire excentrée autour de $\delta_{a_{2i}}$. Pourtant, $\overline{a_{2i}}$ n'est *jamais* un puits de Υ^N.
Par ailleurs, quel que soit la valeur de $\alpha > 0$, $\overline{a_{2i+1}}$ est bien un puits du méta-potentiel. Mais, l'on peut prouver réciproquement que si a_{2i+1} ne vérifie pas (5.2.5), alors il n'existe pas de mesure stationnaire excentrée proche de $\delta_{a_{2i+1}}$. En effet, s'il en existait une, en reprenant tout le travail du troisième chapitre, on en déduirait la convergence étroite de cette mesure stationnaire vers $\delta_{a_{2i+1}}$ ainsi que vers une mesure discrète chargeant le(s) point(s) où la fonction $W_0 := V + F * \delta_{a_{2i+1}} - F * \delta_{a_{2i+1}}(0)$ atteint son minimum global. Or, si l'inégalité (5.2.5)

n'est pas vérifiée, $W_0(a_{2i+1})$ n'est pas le minimum global de W_0 d'où une impossibilité.
Ainsi il n'y a pas de correspondance entre les puits de Υ^N et les mesures stationnaires de (0.0.5).
Après avoir étudié les points critiques dans certains cas, intéressons-nous aux points pour lesquels le méta-potentiel réalise son minimum global.

Proposition 5.6. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-7) ainsi que (V-10) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). Soient $j_1, \cdots, j_r$ les r indices tels que $a_{2j_1+1}, \cdots, a_{2j_r+1}$ soient les r puits les plus profonds de V. Alors, on a l'inégalité*

$$\Upsilon^N(X) > \Upsilon^N(\overline{a_{2j_1+1}}) = \cdots = \Upsilon^N(\overline{a_{2j_r+1}}) = \inf_{z\in\mathbb{R}} V(z)$$

pour tout $X \notin \{\overline{a_{2j_1+1}}, \cdots, \overline{a_{2j_r+1}}\}$.

Démonstration. Par définition, $V(x) \geq \inf_{z\in\mathbb{R}} V(z)$ et l'inégalité est stricte si $x \notin \{a_{2j_1+1}, \cdots, a_{2j_r+1}\}$. Par définition, F est une fonction positive donc $\Upsilon^N(X) \geq \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N V(x_j) \geq \inf_{z\in\mathbb{R}} V(z)$. On a l'égalité si et seulement si $\frac{1}{2N^2}\sum_{i,j=1}^N F(x_i - x_j) = 0$ (ce qui implique $F(x_i - x_j) = 0$ pour tous les indices i et j) et si $x_i \in \{a_{2j_1+1}, \cdots, a_{2j_r+1}\}$ pour tout i. Ainsi $\Upsilon^N(X) = \inf_{z\in\mathbb{R}} V(z)$ si et seulement si $X \in \{\overline{a_{2j_1+1}}, \cdots, \overline{a_{2j_r+1}}\}$. □

5.3 Convergence en loi du système vers sa mesure stationnaire

L'intérêt principal du système de Kolmogorov (5.2.4) qu'on étudie est le fait qu'il satisfasse des propriétés fortes. On introduit une quantité avant cela qui servira à prouver la convergence en loi en temps long.

Définition 5.7. *On pose* $\overline{\Delta}\Upsilon^N := N\frac{\epsilon}{2}\Delta\Upsilon^N - N^2\left|\left|\nabla\Upsilon^N\right|\right|^2$.

Etablissons une propriété essentielle par la suite sur cette quantité.

Lemme 5.8. *Soit un potentiel de confinement V qui satisfait les hypothèses (V-1)–(V-8) ainsi que (V-10) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). Alors, il existe deux constantes $\tau \in]0;1[$ et $C > 0$ telles qu'on ait la majoration :*

$$\limsup_{||X||\longrightarrow+\infty} N\frac{\epsilon}{2}\Delta\Upsilon^N(X) - \tau N^2\left|\left|\nabla\Upsilon^N(X)\right|\right|^2 < -C\,. \tag{5.3.1}$$

Démonstration. On va montrer qu'il existe un réel strictement positif R_ϵ tel que

$$\inf_{||X||>R_\epsilon} \frac{N}{\epsilon}\frac{||\nabla\Upsilon^N(X)||^2}{\Delta\Upsilon^N(X)} \geq 1\,. \tag{5.3.2}$$

Cette inégalité implique $N\frac{\epsilon}{2}\Delta\Upsilon^N(X) \leq \frac{N^2}{2}\left|\left|\nabla\Upsilon^N(X)\right|\right|^2$ pour tout X tel que $||X|| > R_\epsilon$. Ainsi en prenant R_ϵ assez grand pour que tous les points critiques du

méta-potentiel Υ^N soient de norme inférieure à $\frac{R_\epsilon}{2}$ ce qui est possible vu que Υ^N a un nombre fini de points critiques, il vient

$$N\frac{\epsilon}{2}\Delta\Upsilon^N(X) - \frac{3}{4}N^2\left|\left|\nabla\Upsilon^N(X)\right|\right|^2 \leq -\frac{1}{4}N^2\left|\left|\nabla\Upsilon^N(X)\right|\right|^2$$

pour tout X tel que $||X|| > R_\epsilon$. Vu que tous les points critiques de Υ^N sont de norme inférieure à $\frac{R_\epsilon}{2}$, on en déduit $\sup_{||X||>R_\epsilon} -\frac{N^2}{4}\left|\left|\nabla\Upsilon^N(X)\right|\right|^2 =: -C < 0$. Ainsi (5.3.1) est prouvée.

Afin d'établir cela, on s'intéresse à la coordonnée de module maximal. On suppose qu'il s'agit de X_N sans rien changer à la généralité. Comme on se place au voisinage de l'infini, on peut exiger $X_N > a_{2M+1}$ ou $X_N < a_1$ où l'on rappelle que $a_1, \cdots, a_{2M+1}$ sont les $2M+1$ puits du potentiel V d'après l'hypothèse (V-2). On va supposer $X_N > a_{2M+1}$ et l'on peut procéder de même en $-\infty$. On a alors $V'(X_N) > 0$ et $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N F'(X_N - X_j) > 0$ d'où

$$\begin{aligned} N^2||\nabla\Upsilon^N(X_1,\cdots,X_N)||^2 &\geq \left(V'(X_N) + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N F'(X_N - X_j)\right)^2 \\ &\geq V'(X_N)^2 + \frac{1}{N^2}\left(\sum_{j=1}^N F'(X_N - X_j)\right)^2 \\ &\geq V'(X_N)^2 + \frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^N F'(X_N - X_j)^2\,. \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

On a également

$$\begin{aligned} N\Delta\Upsilon^N(X_1,\cdots,X_N) &= \sum_{i=1}^N V''(X_i) + \sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N \frac{1}{N}F''\left(X_i - X_j\right) \\ &\leq NV''(X_N) + NF''(2X_N)\,. \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

En effet, on se place assez loin pour que $V''(X_N) \geq V''(X_i)$ (ce qui est possible vu que V est symétrique) pour tout $1 \leq i \leq N$ d'après la propriété (V-4). Par ailleurs, $|X_i - X_j| \leq |X_i| + |X_j| \leq 2X_N$.

Comme $\lim_{|X_N|\longrightarrow+\infty} \frac{V'(X_N)^2}{NV''(X_N)} = +\infty$ d'après l'hypothèse (V-10) et de même $\lim_{|X_N|\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^N F'(X_N-X_j)^2}{NF''(2X_N)} = +\infty$ car F est polynômiale, on en déduit, après avoir divisé (5.3.3) par (5.3.4) :

$$N\frac{||\nabla\Upsilon^N(X)||^2}{\Delta\Upsilon^N(X)} \geq \frac{\max\left\{(V'(X_N))^2; \frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^N F'(X_N - X_j)^2\right\}}{2N\max\left\{V''(X_N); F''(2X_N)\right\}}\,.$$

Le membre de droite dans l'inégalité précédente tend vers l'infini lorsque $|X_N|$ tend vers l'infini. Ainsi il existe $R_\epsilon > 0$ tel que (5.3.2) soit satisfaite et le réel $R_\epsilon > 0$ existe bien. □

Cette inégalité va permettre d'obtenir les principaux résultats de cette section.

Proposition 5.9. *Soit un potentiel de confinement V qui satisfait les hypothèses (V-1)–(V-7) ainsi que (V-10) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). Soit $\mu_0^N \in \mathbb{R}^N$. Il existe une unique solution forte non explosive à l'équation* (5.2.4).

Démonstration. On se sert pour cela du Théorème 10.2.2 de la page 255 de [40] dont est dérivée la Proposition 1.2. On peut l'appliquer pour peu qu'il existe $R > 0$ tel que

$$\inf_{||X||>R} \left\langle X \,;\, \nabla \Upsilon^N (X) \right\rangle \geq 0 \tag{5.3.5}$$

comme dans le cas de la dimension un. Les autres conditions sont en effet vérifiées : le coefficient associé aux dérivées secondes dans le problème de martingale est constant et $\nabla\Upsilon^N$ est localement lipschitzienne vu que V satisfait (V-5) et F vérifie (F-4). Pour prouver la minoration (5.3.5), on remarque d'abord que la fonction $x \mapsto xV'(x)$ est minorée par $-a\vartheta$ sur $\mathbb{R}$ où $a := \max\{|a_1|; |a_{2M+1}|\}$. Aussi, l'on dispose de la minoration

$$\begin{aligned}
\left\langle X \,;\, \nabla \Upsilon^N(X) \right\rangle &:= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N x_i V'(x_i) + \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i F'(x_i - x_j) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N x_i V'(x_i) + \frac{1}{2N^2}\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (x_i - x_j) F'(x_i - x_j) \\
&\geq \frac{x_N V'(x_N)}{N} - a\vartheta \,,
\end{aligned}$$

où il a été supposé que x_N était la coordonnée de valeur absolue maximale sans perte de généralité. Comme V'' tend vers l'infini en l'infini d'après l'hypothèse (V-4), il existe R_1 tel que $V'(x) \geq 1$ pour tout $x \geq R_1$. Par conséquent, si $x_N \geq R_1 \vee Na\vartheta$, la minoration (5.3.5) est vérifiée pour la norme $||\,.\,||_\infty$ et on applique le Théorème 10.2.2 de [40] pour avoir l'existence d'une solution forte à l'équation (5.2.4). □

La diffusion est donc correctement définie et pourra être comparée au système de N diffusions auto-stabilisantes. Si elle admet une probabilité invariante, cette dernière est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue pour des arguments similaires à ceux employés dans le Lemme 2.1. Il est facile de montrer qu'elle est unique et que sa densité est donnée par :

$$\mu_\epsilon^N (X) = \frac{\exp\left[-\frac{2N}{\epsilon}\Upsilon^N(X)\right]}{\int_{\mathbb{R}^N} \exp\left[-\frac{2N}{\epsilon}\Upsilon^N(Y)\right] dY} \,. \tag{5.3.6}$$

Avant de montrer que la diffusion (5.2.4) converge en loi vers la mesure de probabilité dont la densité est définie dans (5.3.6) lorsque t tend vers l'infini, on donne un résultat général sur le trou spectral dont la preuve peut être trouvée dans [2] :

Proposition 5.10. *Soit une fonction U de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^N$. La mesure de probabilité $d\mu(X) := \frac{\exp\left[-\frac{2N}{\epsilon}U(X)\right]}{\int_{\mathbb{R}}\exp\left[-\frac{2N}{\epsilon}U(Y)\right]dY}\,dX$ vérifie l'inégalité de Poincaré s'il existe deux constantes $\tau \in]0;1[$ et $C > 0$ telles que*

$$\liminf_{||X||\longrightarrow+\infty}\left(\frac{2N}{\epsilon}\Delta U - \tau||\nabla U||^2\right)(X) < -C\,. \tag{5.3.7}$$

Lemme 5.11. *La mesure stationnaire μ_ϵ^N du système* (5.2.3) *vérifie l'inégalité de Poincaré. En d'autres termes, il existe une constante $\lambda_N(\epsilon)$ telle que pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^N$ à croissance lente, on a*

$$\mathrm{Var}_{\mu_\epsilon^N}(f) \leq \frac{1}{\lambda_N(\epsilon)}\int_{\mathbb{R}^N}||\nabla f||^2(X)\mu_\epsilon^N(X)dX\,.$$

Démonstration. La Proposition 5.10 peut ici être appliquée car l'on a bien (5.3.7) avec Υ^N d'après le Lemme 5.8 et l'on en déduit que μ_ϵ^N vérifie l'inégalité de Poincaré. □

Cette inégalité de Poincaré permet de montrer la convergence étroite de la loi du processus stochastique vers sa mesure stationnaire. En effet,

Proposition 5.12. *Considérons la diffusion de Kolmogorov sur $\mathbb{R}^N$:*

$$\mu_t = \mu_0 + \sqrt{\epsilon}B_t^{(N)} - N\int_0^t \nabla U(\mu_s)ds \tag{5.3.8}$$

où la fonction U est localement lipschitzienne et convexe à l'infini. Sa mesure de probabilité stationnaire est donnée par $d\nu(X) := \frac{\exp\left[-\frac{2N}{\epsilon}U(X)\right]}{\int_{\mathbb{R}^N}\exp\left[-\frac{2N}{\epsilon}U(Y)\right]dY}\,dX$. On note $P_tf(\mu_0) := \mathbb{E}_{\mu_0}\left[f\left(\mu_t\right)\right]$. Soit un réel strictement positif λ quelconque. On a alors l'implication suivante pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^N$ et de carré intégrable par rapport à la mesure $d\nu$:

$$\mathrm{Var}_\nu(f) \leq \frac{1}{\lambda}\int||\nabla f||^2\,d\nu \quad\Longrightarrow\quad \left|\left|P_tf - \int f d\nu\right|\right|_2^2 \leq \exp\left[-\epsilon\lambda t\right]\,\mathrm{Var}_\nu(f)$$

$$\text{avec } \left|\left|P_tf - \int f d\nu\right|\right|_2^2 := \int_{\mathbb{R}^N}\left(P_tf(\mu_1) - \int_{\mathbb{R}^N} f(\mu_2)d\nu(\mu_2)\right)^2 d\nu(\mu_1).$$

Démonstration. On pose $g := f - \int f d\nu$ puis $\Psi(t) := \int\left(P_tg\right)^2 d\nu$. La dérivée de Ψ est égale à $2\int\left(P_tg\right)\left(\mathcal{L}P_tg\right)d\nu$ où $\mathcal{L} := \frac{\epsilon}{2}\Delta - N\nabla U.\nabla$ est l'opérateur associé à la diffusion (5.3.8). En tenant compte de la convexité à l'infini de U et de l'intégrabilité de f^2 contre la mesure $d\nu$, on peut faire une intégration par partie et il vient

$$\Psi'(t) = -\epsilon\int_{\mathbb{R}^N}||\nabla P_tf(\mu)||^2\,d\nu(\mu) \leq -\epsilon\lambda\Psi(t)$$

d'après l'inégalité reliant la variance et l'énergie. L'application du lemme de Grönwall implique $\psi(t) \leq \exp\left[-\epsilon\lambda t\right]\Psi(0)$ ce qui correspond au résultat annoncé. □

Théorème 5.13. *Soit ν_0 une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^N$. Soit μ_0 un vecteur aléatoire dont la loi est ν_0. On note $\nu_t^{\epsilon,N}$ la loi de $\mu_t^{\epsilon,N}$. La mesure $\nu_t^{\epsilon,N}$ converge étroitement vers μ_ϵ^N l'unique mesure stationnaire de* (5.2.4) *lorsque $t \longrightarrow +\infty$. Plus précisément, il existe une constante $\lambda_N(\epsilon) > 0$ telle que pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^N$ à croissance lente, on a la majoration*

$$\left\| \int f(x) d\nu_t^{\epsilon,N}(x) - \int f(x) d\mu_\epsilon^N(x) \right\|_2^2 \leq e^{-\lambda_N(\epsilon)t} \operatorname{Var}_{\mu\epsilon^\epsilon}(f)\,. \tag{5.3.9}$$

Démonstration. Il s'agit d'une simple conséquence de la Proposition 5.12. En effet, on considère la diffusion (5.2.3). On sait d'après le Lemme 5.11 que la mesure stationnaire μ_ϵ^N vérifie l'inégalité de Poincaré. Aussi, on en déduit directement

$$\left\| P_t f - \int f d\mu_\epsilon^N \right\|_2^2 \leq e^{-\lambda_N(\epsilon)t} \operatorname{Var}_{\mu_\epsilon^N}(f)$$

où, par définition, $P_t f := \int_{\mathbb{R}} f(x)\nu_t^{\epsilon,N}(x)dx$. Ainsi pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^N$ à croissance lente, $\int_{\mathbb{R}} f(x)\nu_t^{\epsilon,N}(x)dx$ converge vers $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_\epsilon^N(x)dx$ ce qui signifie la convergence étroite de $\nu_t^{\epsilon,N}$ vers μ_ϵ^N. □

Remarque 5.14. *Ce résultat peut sembler surprenant. En effet, non seulement la mesure stationnaire est unique mais en plus, la loi du processus converge vers cette mesure. Pourtant, la diffusion auto-stabilisante* (0.0.5) *peut admettre plusieurs mesures stationnaires (voir Chapitre* 2*).*

La vitesse de convergence dépend directement de $\lambda_N(\epsilon)$. Il s'agit de la plus petite valeur propre de l'opérateur L_ϵ^N défini par $L_\epsilon^N f := N\frac{\epsilon}{2}f'' - N^2\left\langle \nabla\Upsilon^N, f'\right\rangle$ d'après la définition récursive dans [26]. La convergence vers 0 pour N tendant vers l'infini de $\lambda_N(\epsilon)$ semble donc être la cause de l'apparition de diverses mesures stationnaires.

5.4 Propagation du chaos

Le système de particules défini dans ce chapitre est en lien étroit avec la diffusion non-linéaire (0.0.5). On va montrer dans quel sens la convergence vers l'infini du nombre de particules N rend (5.2.4) proche de (0.0.5). Par ailleurs, il convient de connaître le lien entre les deux puisque certains résultats établis sur le système peuvent éventuellement être tractés sur la diffusion auto-stabilisante.

5.4.1 Propagation simple du chaos

On va commencer par prouver un résultat de propagation faible du chaos. En d'autres termes, on va prouver que sur un intervalle de temps fixé $[0;T]$, en faisant tendre N vers l'infini, le comportement de chacune des particules de ce système

se comporte comme une particule satisfaisant une équation non-linéaire de type (5.2.2). On rappelle ce que sont les systèmes d'équations (5.2.1) et (5.2.2) :

$$X_t^{\epsilon,i,N} = X_0^i + \sqrt{\epsilon}B_t^i - \int_0^t V'(X_s^{\epsilon,i,N})ds - \int_0^t \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N F'(X_s^{\epsilon,i,N} - X_s^{\epsilon,j,N})ds$$

$$\text{et} \quad \overline{X_t^{\epsilon,i}} = X_0^i + \sqrt{\epsilon}B_t^i - \int_0^t V'(\overline{X_s^{\epsilon,i}})ds - \int_0^t F' * u_s^{\epsilon,i}(\overline{X_s^{\epsilon,i}})ds\,,$$

où $B_t^1, \cdots, B_t^N$ sont des mouvements browniens indépendants. Comme les notations le suggèrent, la distance entre $X_t^{\epsilon,i,N}$ et $\overline{X_t^{\epsilon,i}}$ sera petite.

Proposition 5.15. *Soit une mesure de probabilité μ_0 dont le moment d'ordre $8q^2$ est fini. Soient N variables indépendantes, identiquement distribuées et de loi μ_0 que l'on note $X_0^1, \cdots, X_0^N$. Soit $T > 0$. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $1 \leq i \leq N$, on a l'inégalité suivante :*

$$\sup_{t\in[0;T]} \mathbb{E}\left\{\left|X_t^{\epsilon,i,N} - \overline{X_t^{\epsilon,i}}\right|^2\right\} \leq \frac{C}{N}\exp\left[(2\vartheta + C)\,T\right]\,. \tag{5.4.1}$$

Démonstration. Par définition, quel que soit $1 \leq i \leq N$, on a

$$\begin{aligned} X_t^{\epsilon,i,N} - \overline{X_t^{\epsilon,i}} = \; & - \int_0^t \left\{V'(X_s^{\epsilon,i,N}) - V'(\overline{X_s^{\epsilon,i}})\right\} ds \\ & - \int_0^t \left\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N F'(X_s^{\epsilon,i,N} - X_s^{\epsilon,j,N}) - F' * u_s^{\epsilon,i}(\overline{X_s^{\epsilon,i}})\right\} ds\,. \end{aligned}$$

On applique la formule d'Itô à $X_t^{\epsilon,i,N} - \overline{X_t^{\epsilon,i}}$ avec la fonction $x \mapsto x^2$ et en posant $\xi_i(t) := \left|X_t^{\epsilon,i,N} - \overline{X_t^{\epsilon,i}}\right|^2$, on obtient :

$$\begin{aligned} d\xi_i(t) &= -2\Delta_1(i,t)dt - \frac{2}{N}\Delta_2(i,t)dt \\ \text{avec} \quad \Delta_1(i,t) &:= \left(X_t^{\epsilon,i,N} - \overline{X_t^{\epsilon,i}}\right)\left(V'(X_t^{\epsilon,i,N}) - V'\left(\overline{X_t^{\epsilon,i}}\right)\right) \\ \text{et} \quad \Delta_2(i,t) &:= \left(X_t^{\epsilon,i,N} - \overline{X_t^{\epsilon,i}}\right)\sum_{j=1}^N \left[F'(X_t^{\epsilon,i,N} - X_t^{\epsilon,j,N}) - F' * u_t^{\epsilon,i}\left(\overline{X_t^{\epsilon,i}}\right)\right]\,. \end{aligned}$$

En sommant sur tous les indices $1 \leq i \leq N$, il vient

$$\begin{aligned} d\sum_{i=1}^N \xi_i(t) &= -2\Delta_1(t)dt - \frac{2}{N}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N \Big(\Delta_2(i,j,t) + \Delta_3(i,j,t)\Big)dt \\ \text{avec} \quad \Delta_1(t) &:= \sum_{i=1}^N \Delta_1(i,t)\,, \\ \Delta_2(i,j,t) &:= \left(F'(X_t^{\epsilon,i,N} - X_t^{\epsilon,j,N}) - F'(\overline{X_t^{\epsilon,i}} - \overline{X_t^{\epsilon,j}})\right)\left(X_t^{\epsilon,i,N} - \overline{X_t^{\epsilon,i}}\right) \\ \text{et} \quad \Delta_3(i,j,t) &:= \left(F'(\overline{X_t^{\epsilon,i}} - \overline{X_t^{\epsilon,j}}) - F' * u_t^{\epsilon,i}\left(\overline{X_t^{\epsilon,i}}\right)\right)\left(X_t^{\epsilon,i,N} - \overline{X_t^{\epsilon,i}}\right)\,. \end{aligned}$$

La parité de F ainsi que la convexité de F' sur $\mathbb{R}_+$ impliquent $(x-y)\,F'(x-y) \geq \alpha\,(x-y)^2 \geq 0$. Or, en utilisant l'associativité, on a $\Delta_2(i,j,t) + \Delta_2(j,i,t) \geq 0$. En effet :

$$\begin{aligned}
\Delta_2(i,j,t) + \Delta_2(j,i,t) &= \Big(F'(X_t^{\epsilon,i,N} - X_t^{\epsilon,j,N}) - F'(\overline{X_t^{\epsilon,i}} - \overline{X_t^{\epsilon,j}})\Big) \\
&\quad \times \left\{\left(X_t^{\epsilon,i,N} - \overline{X_t^{\epsilon,i}}\right) - \left(X_t^{\epsilon,j,N} - \overline{X_t^{\epsilon,j}}\right)\right\} \\
&= \Big(F'(X_t^{\epsilon,i,N} - X_t^{\epsilon,j,N}) - F'(\overline{X_t^{\epsilon,i}} - \overline{X_t^{\epsilon,j}})\Big) \\
&\quad \times \left\{\left(X_t^{\epsilon,i,N} - X_t^{\epsilon,j,N}\right) - \left(\overline{X_t^{\epsilon,i}} - \overline{X_t^{\epsilon,j}}\right)\right\} \\
&\geq \alpha \left|\left(X_t^{\epsilon,i,N} - X_t^{\epsilon,j,N}\right) - \left(\overline{X_t^{\epsilon,i}} - \overline{X_t^{\epsilon,j}}\right)\right|^2 \geq 0\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\mathbb{E}\left\{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Delta_2(i,j,t)\right\} = \mathbb{E}\left\{\sum_{1\leq i<j\leq N}^N \Big(\Delta_2(i,j,t) + \Delta_2(j,i,t)\Big)\right\} \geq 0\,. \quad (5.4.2)$$

En rappelant la définition du paramètre ϑ, à savoir $\vartheta := \sup_{z\in\mathbb{R}} -V''(z)$, il vient $(V'(x) - V'(y))\,(x-y) \geq -\vartheta(x-y)^2$ ce qui implique

$$-2\sum_{i=1}^N \Delta_1(i,t) \leq 2\vartheta \sum_{i=1}^N \xi_i(t)\,. \quad (5.4.3)$$

Occupons-nous maintenant de la double somme contenant $\Delta_3(i,j,t)$. On applique pour cela l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$-\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N \Delta_3(i,j,t)\right] \leq \left\{\mathbb{E}\left[\left|X_t^{\epsilon,i,N} - \overline{X_t^{\epsilon,i}}\right|^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \mathbb{E}\left[\rho_j \rho_k\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$\text{avec} \quad \rho_j := F'(\overline{X_t^{\epsilon,i}} - \overline{X_t^{\epsilon,j}}) - F' * u_t^{\epsilon,i}\left(\overline{X_t^{\epsilon,i}}\right)\,.$$

En conditionnant par rapport à $\overline{X_t^{\epsilon,i}}$ et par rapport à $\overline{X_t^{\epsilon,j}}$, on obtient la nullité des termes $\mathbb{E}\left[\rho_j\rho_k\right]$ pour $j \neq k$. Par conséquent, en utilisant l'indépendance, il vient

$$-\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N \Delta_3(i,j,t)\right] \leq \sqrt{N\mathbb{E}\left[\xi_i(t)\right]}\Big\{\mathbb{E}\left[\left|F'(X_t - Y_t) - F' * u_t^\epsilon(X_t)\right|^2\right]\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

où X_t et Y_t sont deux variables aléatoires indépendantes de loi u_t^ϵ. F' est une fonction polynômiale de degré $2n-1$ d'après l'hypothèse (F-1). Ainsi la quantité $C_t := \mathbb{E}\left[\left|F'(X_t - Y_t) - F' * u_t^\epsilon(X_t)\right|^2\right]$ ne dépend que des moments d'ordre inférieur ou égal à $4n-2$. Le contrôle des moments établi dans le Lemme 1.13

implique la majoration de C_t par une constante $C > 0$ quel que soit $t \geq 0$. On en déduit

$$-\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} \Delta_3(i,j,t)\right] \leq C\sqrt{N\mathbb{E}\left[\xi_i(t)\right]}\,. \tag{5.4.4}$$

En compilant (5.4.2), (5.4.3) et (5.4.4), on obtient

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}\left[\xi_i(t)\right] \leq 2\sum_{i=1}^{N}\left\{\vartheta\mathbb{E}\left[\xi_i(t)\right] + \frac{C}{\sqrt{N}}\sqrt{\mathbb{E}\left[\xi_i(t)\right]}\right\}. \tag{5.4.5}$$

Or, comme chacune des N particules est définie de la même manière, $X_t^{\epsilon,i,N} - \overline{X_t^{\epsilon,i}}$ et $X_t^{\epsilon,j,N} - \overline{X_t^{\epsilon,j}}$ ont même loi. Donc, quel que soit $1 \leq i \leq N$, on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbb{E}\left\{\xi_i(t)\right\} &\leq 2\vartheta\mathbb{E}\left\{\xi_i(t)\right\} + \frac{2C}{\sqrt{N}}\sqrt{\mathbb{E}\left[\xi_i(t)\right]} \\ &\leq 2\left[\left(\vartheta + \frac{C}{2}\right)\mathbb{E}\left\{\xi_i(t)\right\} + \frac{C}{2N}\right].\end{aligned} \tag{5.4.6}$$

En effet,

$$\frac{2C}{\sqrt{N}}\sqrt{\mathbb{E}\left[\xi_i(t)\right]} = \sqrt{\frac{2C}{N}}\sqrt{2C\mathbb{E}\left[\xi_i(t)\right]} \leq \frac{1}{2}\left\{\frac{2C}{N} + 2C\mathbb{E}\left[\xi_i(t)\right]\right\}.$$

L'application du Lemme de Grönwall donne

$$\mathbb{E}\left\{\left|X_t^{\epsilon,i,N} - \overline{X_t^{\epsilon,i}}\right|^2\right\} \leq \frac{C}{N}\exp\left[\left(2\vartheta + \frac{C}{N}\right)t\right].$$

On trouve (5.4.1) en prenant le supremum sur l'intervalle $[0;T]$. □

Il ne s'agit pas d'une propagation du chaos uniforme. En effet, pour tout $T > 0$, les processus $\left(X_t^{\epsilon,i,N}\right)_{t\in[0;T]}$ et $\left(\overline{X_t^{\epsilon,i}}\right)_{t\in[0;T]}$ sont bien proches lorsque N tend vers l'infini. Toutefois, ce résultat n'est plus valable sur $\mathbb{R}_+$ tout entier vu que le temps T intervient dans la majoration et que la convergence vers l'infini de T implique la convergence vers l'infini de la borne supérieure. On va maintenant prouver un résultat qui brise tout espoir quant à une éventuelle propagation du chaos uniforme en temps.

Définition 5.16. *Il y a propagation du chaos uniforme du système* (5.2.1) *vers le système* (5.2.2) *s'il existe une fonction positive η qui tend vers* 0 *lorsque N tend vers $+\infty$ telle que*

$$\sup_{t\geq 0}\mathbb{E}\left\{\left|X_t^{\epsilon,i,N} - \overline{X_t^{\epsilon,i}}\right|^2\right\} \leq \eta(N) \quad \textit{pour tout} \quad 1 \leq i \leq N\,. \tag{5.4.7}$$

Cette propagation du chaos uniforme a en particulier été utilisée dans [13] dans le cas où le potentiel V est convexe. La propagation uniforme permettait d'obtenir une convergence en temps long du processus. Toutefois, ici, il n'y a pas d'uniformité comme on va le voir.

Proposition 5.17. *Supposons que l'on ait propagation du chaos uniforme du système* (5.2.1) *vers le système* (5.2.2)*. Alors la diffusion* (5.2.2) *(et donc la diffusion* (0.0.5)*) admet une mesure stationnaire au plus.*

Démonstration. Soient deux mesures stationnaires $u_\epsilon^{(1)}$ et $u_\epsilon^{(2)}$ pour la diffusion (0.0.5). Considérons les deux systèmes à champ moyen suivants :

$$X_t^{\epsilon,i,N} := X_0^i + \sqrt{\epsilon}B_t^i - \int_0^t V'(X_s^{\epsilon,i,N})ds - \int_0^t \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N F'(X_s^{\epsilon,i,N} - X_s^{\epsilon,j,N})ds$$

$$\text{et} \quad Y_t^{\epsilon,i,N} := Y_0^i + \sqrt{\epsilon}B_t^i - \int_0^t V'(Y_s^{\epsilon,i,N})ds - \int_0^t \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N F'(Y_s^{\epsilon,i,N} - Y_s^{\epsilon,j,N})ds$$

où les $2N$ variables aléatoires de départ sont indépendantes. De plus, on suppose que X_0^i suit la loi $u_\epsilon^{(1)}$ et que Y_0^i suit la loi $u_\epsilon^{(2)}$. On demande également aux N mouvements browniens d'être indépendants. On note $\mu_t^{\epsilon,N,1}$ le vecteur dont la marginale numéro i est $Y_t^{\epsilon,i,N}$ et $\mu_t^{\epsilon,N,2}$ celui dont la marginale numéro i est $X_t^{\epsilon,i,N}$. En parallèle, on considère les diffusions non-linéaires :

$$\begin{aligned}\overline{X_t^{\epsilon,i}} &:= X_0^i + \sqrt{\epsilon}B_t^i - \int_0^t V'(\overline{X_s^{\epsilon,i}})ds - \int_0^t F' * u_\epsilon^{(1)}(\overline{X_s^{\epsilon,i}})ds \\ \text{et} \quad \overline{Y_t^{\epsilon,i}} &:= Y_0^i + \sqrt{\epsilon}B_t^i - \int_0^t V'(\overline{Y_s^{\epsilon,i}})ds - \int_0^t F' * u_\epsilon^{(2)}(\overline{Y_s^{\epsilon,i}})ds\,.\end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\{\left|\overline{Y_t^{\epsilon,i}} - \overline{X_t^{\epsilon,i}}\right|^2\right\} &\leq 3\mathbb{E}\left\{\left|\overline{Y_t^{\epsilon,i}} - Y_t^{\epsilon,i,N}\right|^2\right\} + 3\mathbb{E}\left\{\left|Y_t^{\epsilon,i,N} - X_t^{\epsilon,i,N}\right|^2\right\} \\ &+ 3\mathbb{E}\left\{\left|X_t^{\epsilon,i,N} - \overline{X_t^{\epsilon,i}}\right|^2\right\}. \qquad (5.4.8)\end{aligned}$$

On applique ensuite l'hypothèse de la proposition à savoir la propagation du chaos uniforme. On obtient

$$\mathbb{E}\left\{\left|\overline{Y_t^{\epsilon,i}} - \overline{X_t^{\epsilon,i}}\right|^2\right\} \leq 6\eta(N) + 3\mathbb{E}\left\{\left|Y_t^{\epsilon,i,N} - X_t^{\epsilon,i,N}\right|^2\right\}.$$

Or quel que soit $t \geq 0$, par définition des mesures stationnaires $u_\epsilon^{(1)}$ et $u_\epsilon^{(2)}$, on a

$$\mathbb{E}\left\{\left|\overline{Y_t^{\epsilon,i}} - \overline{X_t^{\epsilon,i}}\right|^2\right\} \geq \mathbb{W}_2\left(u_\epsilon^{(1)}; u_\epsilon^{(2)}\right)^2$$

où $\mathbb{W}_2(u;v)$ est la distance de Wasserstein entre les mesures de probabilités u et v. Par conséquent, quel que soit $t \geq 0$, on a l'inégalité

$$\mathbb{W}_2\left(u_\epsilon^{(1)}; u_\epsilon^{(2)}\right)^2 \leq 6\eta(N) + 3\mathbb{E}\left\{\left|Y_t^{\epsilon,i,N} - X_t^{\epsilon,i,N}\right|^2\right\}.$$

Cette inégalité étant indépendante de l'indice $1 \leq i \leq N$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{W}_2\left(u_\epsilon^{(1)}; u_\epsilon^{(2)}\right)^2 &\leq 6\eta(N) + \frac{3}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}\left\{\left|Y_t^{\epsilon,i,N} - X_t^{\epsilon,i,N}\right|^2\right\} \\ &\leq 6\eta(N) + 3\mathbb{E}\left\{\left|\left|\mu_t^{\epsilon,N,1} - \mu_t^{\epsilon,N,2}\right|\right|_N^2\right\} \qquad (5.4.9)\end{aligned}$$

où $||X||_N^2 := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N x_i^2$. Or, d'après le Théorème 5.13, $\mu_t^{\epsilon,N,1}$ ainsi que $\mu_t^{\epsilon,N,2}$ convergent en loi vers l'unique mesure stationnaire du système (5.2.3). Et, comme ils sont dirigés par le même mouvement brownien en dimension N, on trouve :

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty}\mathbb{E}\left\{\left|\left|\mu_t^{\epsilon,N,1} - \mu_t^{\epsilon,N,2}\right|\right|_N^2\right\} = 0\,.$$

Comme l'inégalité (5.4.9) est uniforme en temps, en prenant la limite quand t tend vers l'infini, on obtient :

$$\mathbb{W}_2\left(u_\epsilon^{(1)}; u_\epsilon^{(2)}\right)^2 \leq 6\eta(N)\,.$$

Cette inégalité est valable quel que soit l'entier N. En faisant tendre N vers l'infini, on trouve

$$\mathbb{W}_2\left(u_\epsilon^{(1)}; u_\epsilon^{(2)}\right)^2 = 0$$

ce qui implique $u_\epsilon^{(1)} = u_\epsilon^{(2)}$ presque partout. On a donc bien l'unicité de la mesure stationnaire. □

Remarque 5.18. *Sous des conditions simples, la diffusion* (0.0.5) *admet au moins trois mesures stationnaires. Il ne peut donc pas y avoir propagation du chaos uniforme. Malheureusement, cette propagation du chaos uniforme est un outil qui permet d'obtenir des résultats importants comme la convergence du processus auto-stabilisant vers sa mesure stationnaire (qui est alors unique).*
Ainsi le cas où V est convexe sans être uniformément strictement convexe semble correspondre à une frontière au-delà de laquelle ne se propage pas la propagation du chaos uniforme.

Afin d'illustrer cette absence de propagation du chaos uniforme, voici un exemple simple :

Exemple 5.19. *Soit* $V(x) := \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ *et* $F(x) := \frac{\alpha}{2}x^2$. *Dès que* ϵ *est assez petit, il n'y a pas de propagation du chaos uniforme du système de particules* (5.2.1) *vers la diffusion auto-stabilisante* (5.2.2).
En particulier, il n'y a pas de propagation du chaos uniforme du système de particules

$$dX_t^{i,N} = \sqrt{2}dB_t^i - \left\{ \left(X_t^{i,N}\right)^3 + 2X_t^{i,N} \right\} dt + \frac{3}{N}\sum_{j=1}^{N} X_t^{j,N} dt \tag{5.4.10}$$

vers le système non-linéaire

$$d\overline{X_t^i} = \sqrt{2}dB_t^i - \left\{ \overline{X_t^i}^3 + 2\overline{X_t^i} \right\} dt + 3\mathbb{E}\left[\overline{X_t^i}\right] dt\,. \tag{5.4.11}$$

Démonstration. **Étape 1.** La fonction V'' étant convexe, on sait d'après le Théorème 2.8 qu'il existe exactement trois mesures stationnaires dès que ϵ est assez petit. La Proposition 5.17 nous dit alors qu'une éventuelle propagation du chaos uniforme entraînerait l'unicité de la mesure stationnaire (en cas d'existence). On sait donc qu'il n'y a pas propagation du chaos uniforme.
Étape 2. Et, dans le cas particulier où $V(x) := \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$, on a vu dans l'étude des seuils de bifurcation que la valeur $\epsilon_c := 2$ est assez petite pour qu'il y ait au moins trois mesures stationnaires lorsque $\alpha = 3$. □

Bien que l'on ait pris la fonction symétrique à double puits la plus simple et bien que l'on ait pris l'intéraction la plus simple possible, on n'a pas de propagation du chaos uniforme. La recherche d'une propagation du chaos uniforme dans des cas plus compliqués semble donc compromise.
Par exemple, on a vu dans l'Exemple 2.15 avec le potentiel $V(x) := \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$ qu'il y avait une unique mesure stationnaire lorsque $\alpha < \frac{1+3\sqrt{5}}{18}$ dès que ϵ est assez petit. Toutefois, la non-convexité du méta-potentiel (induite par la non-convexité du potentiel de confinement V) invite à penser qu'il n'y a pas non plus de propagation du chaos uniforme.
On remarquera toutefois qu'il y a bien une unique mesure stationnaire symétrique dans les hypothèses de l'Exemple 5.19. Par conséquent, les configurations symétriques jouent un rôle particulier et l'on peut espérer une forme affaiblie de propagation du chaos uniforme.

5.4.2 Propagation du chaos semi-uniforme si $\boldsymbol{\alpha \geq \vartheta}$

Dans cette sous-section, on suppose que le potentiel V vérifie les hypothèses (V-1)–(V-10) mais aussi que sa dérivée seconde est convexe. De plus, on demande $\alpha \geq \vartheta$. Cette condition était déjà apparue lorsque l'on étudiait le comportement asymptotique pour ϵ petit de toutes les familles de mesures stationnaires. Lorsque cette condition est satisfaite, on sait qu'il y a une unique mesure stationnaire symétrique limite et il s'agit de δ_0. On va prouver maintenant que cette condition permet une propagation du chaos uniforme d'un système de particules à champ

moyen légèrement différent de (5.2.1) vers un système auto-stabilisant légèrement différent de (5.2.2). On rappelle :

$$F(x) = \frac{\alpha}{2}x^2 + F_0(x)\,.$$

où F_0 vérifie exactement les mêmes propriétés que F. Ainsi (5.2.1) et (5.2.2) deviennent

$$X_t^{\epsilon,i,N} = X_0^i + \sqrt{\epsilon}B_t^i - \int_0^t \widetilde{V}'(X_s^{\epsilon,i,N})ds - \int_0^t \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N F_0'(X_s^{\epsilon,i,N} - X_s^{\epsilon,j,N})ds$$
$$- \alpha\int_0^t \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N X_s^{\epsilon,j,N}ds$$

$$\text{et}\quad \overline{X_t^{\epsilon,i}} = X_0^i + \sqrt{\epsilon}B_t^i - \int_0^t \widetilde{V}'(\overline{X_s^{\epsilon,i}})ds - \int_0^t F_0' * u_s^{\epsilon,i}(\overline{X_s^{\epsilon,i}})ds - \alpha\int_0^t \mathbb{E}\left[\overline{X_s^{\epsilon,i}}\right]ds$$

où $\widetilde{V}(x) := V(x) + \frac{\alpha}{2}x^2$. La fonction $\widetilde{V}$ ainsi définie est convexe. Si l'on a $\alpha > \vartheta$, elle est même uniformément strictement convexe. Si l'on part d'une mesure symétrique, comme la dynamique préserve cette symétrie, on a $\mathbb{E}\left[\overline{X_t^{\epsilon,i}}\right] = 0$ pour tout $t \geq 0$. Et, l'équation de diffusion non-linéaire devient simplement :

$$\overline{X_t^{\epsilon,i}} = X_0^i + \sqrt{\epsilon}B_t^i - \int_0^t \left[\widetilde{V}'(\overline{X_s^{\epsilon,i}}) + F_0' * u_s^{\epsilon,i}(\overline{X_s^{\epsilon,i}})\right]ds\,. \tag{5.4.12}$$

Il est important de noter que les systèmes (5.2.2) et (5.4.12) ne coïncident que si $\mathbb{E}\left[\overline{X_t^{\epsilon,i}}\right] = 0$ pour tout $t \geq 0$. Toutefois, dans le cas présent, on étudie le cas où la mesure initiale est symétrique. Par conséquent, étudier (5.2.2) ou (5.4.12) revient au même. A cette nouvelle diffusion auto-stabilisante, on associe le système de particules :

$$X_t^{\epsilon,i,N} = X_0^i + \sqrt{\epsilon}B_t^i - \int_0^t \left[\widetilde{V}'(X_s^{\epsilon,i,N}) + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N F_0'(X_s^{\epsilon,i,N} - X_s^{\epsilon,j,N})\right]ds\,. \tag{5.4.13}$$

Cette fois, les deux systèmes (5.2.1) et (5.4.13) ne sont pas équivalents sous la même condition. En effet, la condition d'équivalence est : $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N X_t^{\epsilon,i,N} = 0$ pour tout $t \geq 0$. C'est une restriction différente de la précédente. Toutefois, en rappelant que le système de particules peut être plus ou moins vu comme une mesure, les deux conditions sont intuitivement équivalentes lorsque N tend vers l'infini. On pose :

$$\widetilde{\Upsilon^N}(x_1, \cdots, x_N) := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \left(V(x_i) + \frac{\alpha}{2}x_i^2\right) + \frac{1}{2N^2}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N F_0(x_i - x_j)$$

le nouveau méta-potentiel associé à la diffusion (5.4.13). On remarquera au passage que si F est de degré 2 c'est-à-dire si F_0 est identiquement nulle alors le nouveau

méta-potentiel est diagonalisé et les particules sont donc indépendantes deux à deux. On peut appliquer un résultat similaire à celui du Lemme 5.3 et la limite est ici $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left\{ \widetilde{V}(x) + \frac{1}{2} F_0 * \mu(x) \right\} d\mu(x)$.
Par la suite, on va montrer la propagation du chaos uniforme de (5.4.13) vers (5.4.12). Ainsi le résultat de propagation du chaos uniforme sera également vrai de (5.4.13) vers (5.2.2) si l'on se restreint aux configurations symétriques. C'est ce résultat de propagation du chaos uniforme avec restriction sur les configurations symétriques que je baptise propagation du chaos semi-uniforme.

Théorème 5.20. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-11) et un potentiel d'intéraction qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). On suppose de plus que V'' est convexe.*
1. *Supposons que l'on ait $\alpha > \vartheta$. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute mesure de probabilité symétrique μ_0, on a la propagation du chaos uniforme suivante du système de particules* (5.4.13) *vers le système non-linéaire* (5.4.12) *:*

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left\{ \left| X_t^{\epsilon,i,N} - \overline{X_t^{\epsilon,i}} \right|^2 \right\} \leq \frac{C}{N} .$$

2. *Supposons que l'on ait $\alpha = \vartheta = -V''(0)$. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute mesure de probabilité symétrique μ_0, on a la propagation du chaos uniforme suivante du système de particules* (5.4.13) *vers le système non-linéaire* (5.4.12) *:*

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left\{ \left| X_t^{\epsilon,i,N} - \overline{X_t^{\epsilon,i}} \right|^2 \right\} \leq C N^{-\frac{1}{2l_0-1}} .$$

où l'on a $l_0 := \min\left\{ k \geq 2 \ \middle|\ V^{(2k)}(0) \neq 0 \right\}$.

Démonstration. **1.** Plaçons-nous pour commencer dans le cas où $\alpha > \vartheta$. Les systèmes (5.4.13) et (5.4.12) vérifient exactement les mêmes hypothèses que les systèmes (5.2.1) et (5.2.2). Reprenons la notation $\xi_i(t) := \left| X_t^{\epsilon,i,N} - \overline{X_t^{\epsilon,i}} \right|^2$ et la preuve de la Proposition 5.17. Comme la majoration de $-2\sum_{i=1}^N \Delta_1(i,t)$ ne nécessitait pas la positivité de ϑ, l'inégalité (5.4.6) vient alors :

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\left\{\xi_i(t)\right\} \ \leq \ 2\widetilde{\vartheta}\mathbb{E}\left\{\xi_i(t)\right\} + \frac{2C}{\sqrt{N}}\sqrt{\mathbb{E}\left[\xi_i(t)\right]}$$

où $C > 0$ est une constante et où l'on a $\widetilde{\vartheta} := \sup_{z\in\mathbb{R}} -\widetilde{V}''(z) = \vartheta - \alpha < 0$. En effet, F_0 vérifie l'hypothèse (F-4) (avec une constante éventuellement différente) nécessaire pour l'inégalité (5.4.4). Ainsi :

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\left\{\xi_i(t)\right\} \ \leq \ 2\sqrt{\mathbb{E}\left[\xi_i(t)\right]}\left\{ \frac{C}{\sqrt{N}} - (\alpha-\vartheta)\sqrt{\mathbb{E}\left\{\xi_i(t)\right\}} \right\} .$$

Comme $\xi_i(0) = 0$, on en déduit directement $\mathbb{E}\{\xi_i(t)\} \leq \frac{C^2}{(\alpha-\vartheta)^2 N}$ pour tout $t \geq 0$.
2. Plaçons-nous maintenant dans le cas du dioptre lorsque $\alpha = \vartheta = -V''(0)$. Comme la fonction V'' est convexe, on en déduit que $V^{(2l_0)}(0) > 0$ où $l_0 := \min\left\{k \geq 2 \mid V^{(2k)}(0) \neq 0\right\}$. De plus, l'analyticité de V implique $l_0 < \infty$. En effet, dans le cas contraire, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, l'on aurait $V(x) = -\frac{\vartheta}{2}x^2$ ce qui est incompatible avec l'hypothèse (V-3). Donc il existe $\lambda_0 > 0$ tel que

$$(x-y)\left(\widetilde{V}'(x) - \widetilde{V}'(y)\right) \geq \lambda_0 (x-y)^{2l_0} .$$

Par conséquent, en reprenant les notations utilisées dans la preuve de la Proposition 5.15, on obtient une inégalité similaire à (5.4.3) :

$$-2\sum_{i=1}^{N} \Delta_1(i,t) \leq 2\lambda_0 \sum_{i=1}^{N} \xi_i(t)^{l_0} .$$

L'inégalité (5.4.2) est conservée et le changement dans l'inégalité (5.4.4) est le changement de la constante C comme on a déjà constaté dans la preuve du pemier point. On obtient ainsi une variante de (5.4.6) :

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\{\xi_i(t)\} \leq 2\sqrt{\mathbb{E}[\xi_i(t)]}\left\{\frac{C}{\sqrt{N}} - \lambda_0\Big(\mathbb{E}[\xi_i(t)]\Big)^{\frac{2l_0-1}{2}}\right\}$$

Comme $\xi_i(0) = 0$, on en déduit directement $\mathbb{E}\{\xi_i(t)\} \leq \left(\frac{C^2}{N\lambda_0^2}\right)^{\frac{1}{2l_0-1}}$ pour tout $t \geq 0$. □

Ainsi le résultat de propagation du chaos semi-uniforme est démontré. On verra des conséquences de cette propagation du chaos semi-uniforme dans le Chapitre 6 sur l'unicité locale des mesures.

5.5 *Comportement asymptotique de $\boldsymbol{\mu_\epsilon^N}$ pour $\boldsymbol{\epsilon \to 0}$*

Comme avec le processus non-linéaire, on va s'intéresser au comportement asymptotique pour ϵ tendant vers 0 de la mesure stationnaire μ_ϵ^N. Cette convergence est étudiée à nombre de particules N fixé.
On suppose ici que V satisfait les hypothèses (V-1)–(V-7) ainsi que (V-10) et on rappelle que V a $M+1$ puits avec $M \geq 1$. On note maintenant r le nombre de ces $M+1$ points où V atteint son minimum *global*. Et, on note $b_1, \cdots, b_r$ ces points. La donnée de ces r points où V atteint son minimum global ainsi que des dérivées secondes $V''(b_i)$ suffit à caractériser la limite quand ϵ tend vers 0 de l'unique mesure invariante μ_ϵ^N. Par la suite, on utilise à nouveau la notation $\overline{x} := (x, \cdots, x) \in \mathbb{R}^N$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, on pose $X := (x_1, \cdots, x_N)$.

Proposition 5.21. *On suppose que le potentiel de confinement V vérifie les hypothèses (V-1)–(V-7) ainsi que (V-10) et que le potentiel d'intéraction F vérifie les*

hypothèses (F-1)–(F-5). Considérons μ_ϵ^N l'unique mesure stationnaire du système (5.2.4). *On observe la convergence étroite suivante lorsque ϵ tend vers* 0 *:*

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \mu_\epsilon^N = \frac{\sum_{j=1}^r q_j \delta_{\overline{b_j}}}{\sum_{j=1}^r q_j} \tag{5.5.1}$$

$$\text{avec} \qquad q_j := \Big(V''(b_j) + \alpha\Big)^{-\frac{N-1}{2}} \Big(V''(b_j)\Big)^{-\frac{1}{2}}. \tag{5.5.2}$$

Démonstration. On se donne une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ à croissance lente qui va de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$. On va chercher à évaluer $\int_{\mathbb{R}^N} f(X) \exp\left[-\frac{2N}{\epsilon}\Upsilon^N(X)\right] dX$ lorsque ϵ est petit.

Étape 1. Soit $\eta(\epsilon) > 0$ qui tend vers 0 quand ϵ tend vers 0. On note $\eta := \eta(\epsilon)$ pour simplifier la lecture. η sera précisée plus tard. Soit b_i l'un des r points critiques où V atteint son minimum global. On sait d'après la Proposition 5.6 que le méta-potentiel atteint son minimum global en $\overline{b_i}$. On écrira $\overline{b}$ pour simplifier les calculs. Evaluons

$$I_\eta(b) := \int_{\mathbb{B}\left(\overline{b},\eta\right)} f\Big(X\Big) \exp\left[-\frac{2N}{\epsilon}\Upsilon^N(X)\right] dX \tag{5.5.3}$$

où $\mathbb{B}\left(\overline{b},\eta\right)$ est la boule de centre $\overline{b}$ et de rayon η pour la norme euclidienne. Intéressons-nous au comportement du méta-potentiel Υ^N autour de $\overline{b}$. On sait d'avance que $\overline{b}$ est un point critique du méta-potentiel vu que ce dernier y atteint son minimum global. On calcule maintenant sa Hessienne :

$$\begin{aligned} N\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\Upsilon^N\left(\overline{b}\right) &= V''(b) + \frac{1}{N}\sum_{k=1,\,k\neq i}^{N} F''(b-b) \\ &= V''(b) + \alpha\left(1 - \frac{1}{N}\right) \\ \text{et} \qquad N\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\Upsilon^N\left(\overline{b}\right) &= -\frac{1}{N}F''(b-b) = -\frac{\alpha}{N}. \end{aligned}$$

La matrice Hessienne du méta-potentiel en $\overline{b}$ vérifie donc

$$N\,H(\overline{b}) = \left(V''(b) + \alpha\right) I_N - \frac{\alpha}{N} U_N$$

où I_N est la matrice identité alors que la matrice U_N est la matrice dont tous les coefficients valent 1. La matrice $N\,H(\overline{b})$ a exactement deux valeurs propres : $\lambda_1 = V''(b)$ associée à la direction $(1,\cdots,1)^T$ et $\lambda_2 = V''(b) + \alpha$ associée à $N-1$ vecteurs propres $V_2,\cdots,V_N$ orthogonaux à $(1,\cdots,1)^T$. Soit $O_N\left(\overline{b}\right)$ la matrice orthogonale formée par les N vecteurs.

La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $X \in \mathbb{B}\left(\overline{b},\eta\right)$ on a

$$\left|f(X) - f\left(\overline{b}\right)\right| \leq C\eta.$$

Soit maintenant un point $X \in \mathbb{B}\left(\overline{b},\eta\right)$. On suppose même que l'on a $\left|\left|X-\overline{b}\right|\right|^2 = h^2$. Posons $h_i := x_i - b$ pour tout $1 \leq i \leq N$. On applique le théorème des accroissements finis à $N\Upsilon^N$ au voisinage de $\overline{b}$. Comme $N\Upsilon^N$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'après les hypothèses (V-1) et (F-1), on a le développement limité suivant :

$$\begin{aligned} N\Upsilon^N(X) &= N\Upsilon^N\left(\overline{b}\right) + N\left\langle \nabla\Upsilon\left(\overline{b}\right) ; (h_1,\cdots,h_N)\right\rangle \\ &+ \frac{N}{2}H(\overline{b})\Big\{ (h_1,\cdots,h_N) , (h_1,\cdots,h_N) \Big\} + O\left(h^3\right) \\ &= N\Upsilon^N\left(\overline{b}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left\{ V''(b)k_1^2 + (V''(b)+\alpha)\sum_{i=2}^N k_i^2 \right\} + O\left(h^3\right) \end{aligned}$$

où $(k_1,\cdots,k_N)^T := O_N\,(b,\cdots,b)^T\,(h_1,\cdots,h_N)^T$ et où la matrice $H(\overline{b})$ est identifiée à la forme bilinéaire symétrique qui lui est associée. On effectue le changement de variable $X := \overline{b} + O_N\left(\overline{b}\right)(k_1,\cdots,k_N)^T$ et l'on trouve ainsi

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{B}\left(\overline{b},\eta\right)} \exp\left[-\frac{N}{\epsilon}H(\overline{b})\Big\{ (h_1,\cdots,h_N) , (h_1,\cdots,h_N) \Big\}\right] dX \\ =&\int_{\mathbb{B}\left(\overline{0},\eta\right)} \exp\left[-\frac{V''(b)}{\epsilon}k_1^2 - \frac{(V''(b)+\alpha)}{\epsilon}\sum_{i=2}^N k_i^2 \right] dk_1\cdots dk_N \\ =&\int_{-\eta}^{\eta} \exp\left[-\frac{\lambda_1 k_1^2}{\epsilon}\right]\left(\int_{\mathbb{B}\left(\overline{0'},\sqrt{\eta^2-k_1^2}\right)} \exp\left[-\frac{\lambda_2||K||^2}{\epsilon}\right] dK\right) dk_1 \end{aligned}$$

où $\overline{0'}$ désigne le $(N-1)$-uplet constitué uniquement de 0. L'intégrale portant sur la boule de centre $\overline{0'}$ se calcule facilement :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}\left(\overline{0'},\sqrt{\eta^2-k_1^2}\right)} e^{-\frac{\lambda_2||K||^2}{\epsilon}} dK &= \mathcal{A}_{N-1}\int_0^{\sqrt{\eta^2-k_1^2}} r^{N-2}\exp\left[-\frac{\lambda_2 r^2}{\epsilon}\right] dr \\ &= \frac{\mathcal{A}_{N-1}}{2}\left(\frac{\epsilon}{\lambda_2}\right)^{\frac{N-1}{2}}\left\{\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right) - \int_\rho^\infty u^{\frac{N-3}{2}}e^{-u}du\right\} \end{aligned}$$

où $\mathcal{A}_{N-1}$ est l'aire de la sphère unité en dimension $N-1$ et $\rho := \frac{\lambda_2\left(\eta^2-k_1^2\right)}{\epsilon}$. Par conséquent, en prenant $\eta(\epsilon)$ tel que $\frac{\eta(\epsilon)^2}{\epsilon}$ tend vers $+\infty$, il vient

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{B}\left(\overline{b},\eta\right)} \exp\left[-\frac{N}{\epsilon}H(\overline{b})\Big\{ (h_1,\cdots,h_N) , (h_1,\cdots,h_N) \Big\}\right] dX \\ =&\mathcal{A}_{N-1}\left(\frac{\epsilon}{\lambda_2}\right)^{\frac{N-1}{2}}\left\{\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)\int_0^\eta e^{-\frac{\lambda_1 k_1^2}{\epsilon}}dk_1 - \int_0^\eta e^{-\frac{\lambda_1 k_1^2}{\epsilon}}\int_\rho^\infty u^{\frac{N-3}{2}}e^{-u}du\,dk_1\right\} \\ =&\sqrt{\frac{\epsilon}{\lambda_1}}\mathcal{A}_{N-1}\left(\frac{\epsilon}{\lambda_2}\right)^{\frac{N-1}{2}}\left\{\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}+o(1)\right) - \mathcal{I}_\epsilon\right\} \end{aligned}$$

où $\mathcal{I}_\epsilon := \int_0^{\sqrt{\frac{\lambda_1}{\epsilon}}\eta} e^{-v^2} \int_{\lambda_2\left(\frac{\eta^2}{\epsilon}-\frac{v^2}{\lambda_1}\right)}^{\infty} u^{\frac{N-3}{2}} e^{-u} du\, dv$. Montrons que $\mathcal{I}_\epsilon$ converge vers 0. On introduit la famille de fonctions

$$\Psi_\epsilon(v) := e^{-v^2} \mathbf{1}_{\left[0;\sqrt{\frac{\lambda_1}{\epsilon}}\eta\right]}(v) \int_{\lambda_2\left(\frac{\eta^2}{\epsilon}-\frac{v^2}{\lambda_1}\right)}^{\infty} u^{\frac{N-3}{2}} e^{-u} du\,.$$

Quel que soit $v \geq 0$, $\Psi_\epsilon(v)$ tend vers 0 lorsque ϵ tend vers 0. De plus, l'on dispose de la majoration $|\Psi_\epsilon(v)| \leq e^{-v^2}\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)$. On peut appliquer le théorème de convergence dominée et l'on obtient ainsi

$$\int_{\mathbb{B}\left(\overline{b},\eta\right)} \exp\left[-\frac{N}{\epsilon} H(\overline{b})\Big\{ (h_1,\cdots,h_N)\ ,\ (h_1,\cdots,h_N) \Big\}\right] dX \approx C(N)\sqrt{\frac{\epsilon^N}{\lambda_1\lambda_2^{N-1}}}$$

où $C(N) := \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathcal{A}_{N-1}\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)$ ne dépend pas de b. En prenant $\eta(\epsilon) = \epsilon^{\frac{5}{12}}$, on a également

$$\left|\Upsilon^N(X) - \Upsilon^N(\overline{b}) - \frac{H(\overline{b})}{2}\Big\{ (h_1,\cdots,h_N)\,,(h_1,\cdots,h_N) \Big\}\right| \leq C'(N)\epsilon^{\frac{5}{4}}$$

quel que soit l'élément $X \in \mathbb{B}\left(\overline{b},\eta\right)$ où $C'(N)$ est une constante ne dépendant que de N. Par (5.5.3), on déduit le développement asymptotique suivant quand ϵ tend vers 0 :

$$\begin{aligned} I_\eta(b) &\approx f\left(\overline{b}\right)\exp\left[-\frac{2N}{\epsilon}\Upsilon^N\left(\overline{b}\right)\right] C(N)\sqrt{\frac{\epsilon^N}{\lambda_1\lambda_2^{N-1}}} \\ &\approx C(N) f\left(\overline{b}\right)\frac{\epsilon^{\frac{N}{2}}\exp\left[-\frac{2N}{\epsilon}V(b)\right]}{\sqrt{V''(b)}\left(V''(b)+\alpha\right)^{\frac{N-1}{2}}}\,. \end{aligned} \tag{5.5.4}$$

Étape 2. Soit $\epsilon > 0$ tel que $V(x) > x^2$ pour tout $x \notin [-\frac{1}{\epsilon};\frac{1}{\epsilon}]$. Soit $K := [-\frac{1}{\epsilon};\frac{1}{\epsilon}]^N$ et $\widehat{K} := K \bigcap \left\{\bigcup_{i=1}^r \mathbb{B}\left(\overline{b_i},\epsilon^{\frac{5}{12}}\right)\right\}^c$. Soit $M := \sup_{z\in K}|f(z)| \leq \epsilon^{-\gamma_N}$ pour un certain $\gamma_N > 0$ car f est à croissance lente. Alors, on a directement :

$$\left|\int_{\widehat{K}} f(X)\exp\left[-\frac{2N}{\epsilon}\Upsilon^N(X)\right] dX\right| \leq \epsilon^{-\gamma_N} 2^N \epsilon^{-N}\exp\left[-\frac{2N}{\epsilon}\inf_{z\in\widehat{K}}\Upsilon^N(z)\right]\,.$$

Or, on sait d'après la Proposition 5.6 que le minimum global est réalisé en $\overline{b_i}$ pour $1 \leq i \leq r$. L'application Υ^N étant continue, pour ϵ assez petit, on en déduit que le minimum de Υ^N sur $\widehat{K}$ est réalisé en un point à une distance exactement $\eta = \epsilon^{\frac{5}{12}}$ de l'un des $(b_i,\cdots,b_i)$. Soit un vecteur H de norme euclidienne η et un point b tel que $V(b)$ soit le minimum global de V. Un développement limité donne

$$\Upsilon^N\left(\overline{b}+H\right) = \Upsilon^N\left(\overline{b}\right) + \frac{1}{2}H(\overline{b})\left(H,H\right) + O\left(\epsilon^{\frac{5}{4}}\right)\,.$$

En notant $\lambda := \min_{1\leq i\leq r} V''(b_i)$, on sait que chacune des valeurs propres de chaque matrice Hessienne est supérieure strictement à λ. Par conséquent, dès que ϵ est assez petit : $\Upsilon^N\left(\overline{b}+H\right) > \Upsilon^N\left(\overline{b}\right) + \frac{\lambda}{2}\epsilon^{\frac{5}{6}}$. On en déduit :

$$\int_{\widehat{K}} f(X)\exp\left[-\frac{2N}{\epsilon}\Upsilon^N(X)\right]dX = o\left\{I_\eta(b)\right\} \tag{5.5.5}$$

quel que soit le point b où V réalise son minimum global.

Étape 3. Montrons maintenant que le reste de l'intégrale est également négligeable. Quel que soit $X \notin K$, on a : $N\Upsilon^N(X) \geq \sum_{i=1}^N x_i^2$. Comme f est à croissance lente, on peut écrire $|f(X)| \leq C\,||x||_2^k$ où $C>0$ est une constante et $k\in\mathbb{N}$ d'où

$$\begin{aligned}\left|\int_{K^c} f(X)\,e^{-\frac{2N}{\epsilon}\Upsilon^N(X)}dX\right| &\leq C\int_{K^c}||X||_2^k\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}||X||_2^2\right]dX\\ &\leq C\mathcal{A}_{N-1}\int_{\frac{1}{\epsilon}}^{+\infty} x^{k+N-2}e^{-\frac{2}{\epsilon}x^2}dx = o\left\{I_\eta(b)\right\}\end{aligned} \tag{5.5.6}$$

après application du changement de variable $x := \sqrt{\epsilon}y$ puis du Lemme A.1.

En compilant (5.5.6), (5.5.5) et (5.5.4), on obtient le résultat asymptotique suivant :

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(X)\,e^{-\frac{2N}{\epsilon}\Upsilon^N(X)}dX \approx C(N,\epsilon)\sum_{i=1}^r \frac{f\left(\overline{b_i}\right)}{\sqrt{V''(b_i)}\left(V''(b_i)+\alpha\right)^{\frac{N-1}{2}}}$$

où $C(N,\epsilon)$ ne dépend ni de f ni de b_i. On applique cette inégalité à une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ à croissance lente ainsi qu'à la fonction constante égale à 1. On considère le quotient et on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(X)\,\mu_\epsilon^N(X)\,dX \approx \frac{\sum_{i=1}^r \frac{f\left(\overline{b_i}\right)}{\sqrt{V''(b_i)}\left(V''(b_i)+\alpha\right)^{\frac{N-1}{2}}}}{\sum_{i=1}^r \frac{1}{\sqrt{V''(b_i)}\left(V''(b_i)+\alpha\right)^{\frac{N-1}{2}}}},$$

ce qui est exactement (5.5.1) et (5.5.2). □

Remarque 5.22. *Il est intéressant de noter que l'on s'est fortement servi de la finitude de la dimension de l'espace dans lequel on travaillait. En effet, pour N tendant vers l'infini, la surface de la sphère unité tend vers 0 tandis que le volume du compact $[-R;R]^N$ tend vers l'infini dès que l'on choisit $R>1$.*
On remarque également que la direction de la diagonale a un rôle particulier dans le poids associé à la mesure limite. D'ailleurs, cela avait déjà été noté par Malrieu dans [34].

Regardons maintenant le résultat lorsque V est symétrique et possède deux puits $-a$ et a.

Corollaire 5.23. *On suppose que le potentiel de confinement V vérifie les hypothèses (V-1)–(V-10) et que le potentiel d'intéraction F vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). Considérons μ_ϵ^N l'unique mesure stationnaire du système* (5.2.4). *On a la convergence étroite suivante lorsque ϵ tend vers* 0 *:*

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \mu_\epsilon^N = \frac{1}{2}\delta_{\overline{-a}} + \frac{1}{2}\delta_{\overline{a}}. \tag{5.5.7}$$

Démonstration. En appliquant la Proposition 5.21, on obtient

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \mu_\epsilon^N = \frac{q_-\delta_{\overline{-a}} + q_+\delta_{\overline{a}}}{q_- + q_+}$$

où q_- et q_+ sont définis ainsi :

$$q_\pm = (V''(\pm a) + \alpha)^{-\frac{N-1}{2}} \left(V''(\pm a)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

ce qui implique $q_- = q_+$ car V est symétrique d'où (5.5.7). □

Comme il a été noté depuis le début du chapitre, le système de particules est lié à la loi de la diffusion (0.0.5) et non pas à la diffusion elle-même. Ainsi la loi μ_ϵ^N n'a pas de correspondance avec la loi u_ϵ. Intuitivement, les mesures stationnaires du processus non-linéaire correspondent à des points de l'espace $\mathbb{R}^N$. Or, on constate dans la Proposition 5.21 que certains puits de Υ^N de la forme $\overline{a_{2i+1}}$ ne sont pas chargés par la mesure μ_0^N. Toutefois, il est tout à fait envisageable qu'il existe bien une mesure stationnaire excentrée autour de a_{2i+1}.
Au contraire, si $\deg(F) \geq 4$, pour peu que la condition (2.5.20) ne soit pas vérifiée pour a_{2i+1} où $\overline{a_{2i+1}}$ est chargé par μ_0^N, le Théorème 2.24 ne peut pas affirmer l'existence d'une mesure stationnaire excentrée autour de a_{2i+1}.
De plus, si $\alpha \geq \vartheta$ et si les fonctions V'' ainsi que F'' sont convexes, on sait qu'il existe une mesure stationnaire qui converge vers δ_0 d'après le Théorème 3.28 bien que $\overline{0}$ ne soit pas chargé par μ_0^N et soit d'ailleurs un col de Υ^N.

6. UNICITÉ LOCALE DES MESURES STATIONNAIRES

6.1 Introduction

Dans le Chapitre 2, on a vu que sous des conditions simples, la diffusion (0.0.5) admettait plusieurs mesures stationnaires. Pour peu que l'on ait α assez grand et F' linéaire, il y en a au moins $2M+1$. Dans le Théorème 2.8, il a été prouvé que si V était symétrique, si V'' était convexe et si F' était linéaire, alors il y avait exactement trois mesures invariantes. L'objectif de ce chapitre est d'étendre ce théorème à des conditions plus générales. Afin d'y parvenir, on se sert des résultats des Chapitres 4, 5 et 6. L'idée générale est d'utiliser la convergence des mesures vers une mesure limite et de montrer que pour chaque mesure limite u_0, sous des conditions simples, lorsque ϵ est assez petit, il existe une seule mesure stationnaire proche de u_0 ; ce que l'on appelle "unicité locale". Si l'on se place de plus dans un cas où l'on a exactement trois mesures limites, on a alors l'existence d'un seuil critique en-dessous duquel il y a exactement trois mesures stationnaires.

Dans un premier temps, on fournit quelques résultats concernant la vitesse de convergence. Ensuite, ces résultats seront utilisés. Pour montrer l'unicité locale des mesures stationnaires excentrées pour chaque mesure limite de la forme δ_{a_0} où a_0 est un point critique du potentiel V. Notons que l'on suppose donc qu'il existe une telle mesure.

Puis, on se concentre sur l'unicité de la mesure stationnaire symétrique lorsque V'' et F'' sont convexes (et donc on suppose tacitement que le potentiel de confinement V est symétrique) :

- Lorsque $\alpha > \vartheta$, on utilise deux méthodes différentes : la première utilisant la vitesse de convergence, la seconde étant une adaptation de celle fournie dans [5].
- Lorsque $\alpha = \vartheta$, une seule méthode est fournie à savoir la propagation du chaos semi-uniforme. Comme dans le cas où $\alpha > \vartheta$, elle ne nécessite pas la petitesse de ϵ mais en contre-partie, elle demande à ce que le potentiel de confinement V vérifie (V-11).
- Lorsque $\alpha < \vartheta$, une seule méthode est fournie à savoir celle basée sur la vitesse de convergence. Le résultat n'est donc valable que pour ϵ assez petit.

Pour terminer, on étend le Théorème 2.8 à des cas simples.

Par la suite, lorsque l'on s'intéresse aux mesures invariantes symétriques, on suppose bien sûr que la fonction V est symétrique mais aussi que V'' et F'' sont convexes. On sait donc que le potentiel de confinement V admet exactement deux puits : $-a$ et a.

Et, lorsque l'on s'intéresse aux mesures stationnaires excentrées, on ne suppose pas que le potentiel V est symétrique. Toutefois, on demande à ce que V'' et F'' soient convexes.

6.2 Résultats généraux liés à la vitesse de convergence

Le travail sur la vitesse de convergence permet de donner une estimation des moments des mesures stationnaires. Or, comme F est une fonction polynômiale de degré $2n$, les $2n-1$ premiers moments d'une mesure invariante sont suffisants pour décrire complètement cette mesure.
On va se servir à nouveau de la fonction $\Phi^{(\epsilon)}$ (définie dans (2.5.18)) qui avait fourni l'existence d'une mesure stationnaire excentrée autour de a_0 conditionnellement aux deux conditions (2.5.19) et (2.5.20).
On écrit $F(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{F^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k}$. Soit u_ϵ une mesure stationnaire de la diffusion auto-stabilisante (0.0.5) et $\mu_1(\epsilon)$, ..., $\mu_{2n-1}(\epsilon)$ ses moments. On suppose que u_ϵ converge vers $u_0 = \delta_{a_0}$ (a_0 étant un point critique de V où il atteint un minimum local et qui satisfait les conditions (2.5.19) et (2.5.20)) ou vers $u_0^0 = \frac{1}{2}\delta_{x_0} + \frac{1}{2}\delta_{-x_0}$ où $x_0 > 0$ est défini comme étant l'unique solution du système :

$$\begin{cases} V'(x) + \frac{1}{2}F'(2x) = 0 \\ V''(x) + \frac{\alpha}{2} + \frac{F''(2x)}{2} \geq 0 \end{cases} .$$

On note à nouveau $W_0 := V + F * u_0 - F * u_0(0)$ le pseudo-potentiel limite associé à u_0 et $W_\epsilon := V + F * u_\epsilon - F * u_\epsilon(0)$ le pseudo-potentiel associé à u_ϵ. On pose $m_k(0)$ le moment d'ordre k de la mesure limite u_0.
Pour toute mesure u dont le moment d'ordre p est m_p, on a :

$$V(x) + F * u(x) - F * u(0) = W_0(x) + Z_m(x) - Z_m(0) =: W_m(x) \tag{6.2.1}$$

$$\text{avec} \quad Z_m(x) := \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{(-1)^p}{p!} \Big(m_p - m_p(0) \Big) F^{(p)}(x). \tag{6.2.2}$$

La fonction W_m est celle qui intervient de manière effective dans l'intégrale. Pour tout $k \geq 1$, on pose

$$\varphi_k^\epsilon(m_1, \cdots, m_{2n-1}) \;:=\; \frac{\int_{\mathbb{R}} x^k \exp\left[-\frac{2}{\epsilon} W_m(x)\right] dx}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon} W_m(x)\right] dx} . \tag{6.2.3}$$

Cette fonction était déjà apparue dans le Chapitre 2. On pose également

$$\begin{aligned} \Phi^{(\epsilon)}(m) \;&:=\; \left(\varphi_1^\epsilon(m), \;\cdots\; , \varphi_k^\epsilon(m), \;\cdots\; , \varphi_{2n-1}^\epsilon(m) \right)^T \\ \text{et} \quad \Phi_0^{(\epsilon)}(m^0) \;&:=\; \left(\varphi_2^\epsilon(m^0), \;\cdots\; , \varphi_{2k}^\epsilon(m^0), \;\cdots\; , \varphi_{2n-2}^\epsilon(m^0) \right)^T . \end{aligned}$$

où l'on note $m := (m_1, \cdots, m_{2n-1})$ et $m^0 := (m_2, \cdots, m_{2n-2})$. Les variables de l'application $\Phi_0^{(\epsilon)}$ sont donc les moments d'ordres pairs : $m_{2k}(\epsilon)$ pour tout $1 \leq k \leq n-1$ alors que les variables de l'application $\Phi^{(\epsilon)}$ sont tous les moments d'ordre 1 à $2n-1$.

Remarque 6.1. *La mesure u_ϵ est invariante si et seulement si le vecteur des moments de u_ϵ à savoir $\mu := (\mu_1(\epsilon), \mu_2(\epsilon), \cdots, \mu_{2n-1}(\epsilon))$ est un point fixe de $\Phi^{(\epsilon)}$. Elle est invariante et symétrique si et seulement si ses moments d'ordres impairs sont nuls et si de plus $\mu^0 := (\mu_2(\epsilon), \cdots, \mu_{2n-2}(\epsilon))$ est un point fixe de $\Phi_0^{(\epsilon)}$.*

Afin d'obtenir un résultat d'unicité locale des mesures stationnaires, on va utiliser la convergence uniforme de $\Phi^{(\epsilon)}$ et de sa différentielle vers une application $\Phi^{(0)}$ et sa différentielle sur tout compact. Puis, on va prouver que la différentielle de $Id - \Phi^{(0)}$ est inversible sur un certain compact (de petite taille) contenant le point limite. On va conclure en utilisant la vitesse de convergence qui assure la présence des vecteurs des moments dans ce petit compact.

Proposition 6.2. *Soient $\mu := (\mu_1, \cdots, \mu_{2n-1})$ et $\nu := (\nu_2, \cdots, \nu_{2n-2})$ deux éléments de $\mathbb{R}^{2n-1}$ et $\mathbb{R}^{n-1}$ respectivement. Pour $C > 0$, on définit les deux espaces compacts $\mathcal{P}_\epsilon := \prod_{p=1}^{2n-1} [\mu_p - C\epsilon; \mu_p + C\epsilon]$ et $\mathcal{Q}_\epsilon := \prod_{p=1}^{n-1} [\nu_{2p} - C\epsilon; \nu_{2p} + C\epsilon]$.*
1. *Si la fonction $U_0(x) := V(x) + \sum_{p=0}^{2n-1} \frac{(-1)^p}{p!} \mu_p \left(F^{(p)}(x) - F^{(p)}(0)\right)$ atteint son minimum global en un unique point a_0 avec $U_0''(a_0) > 0$ alors pour tout $m \in \mathcal{P}_\epsilon$, $k \geq 1$ et $1 \leq p \leq 2n-1$, on a*

$$\frac{\partial \varphi_k^\epsilon}{\partial m_p}(m) = \frac{k\, a_0^{k-1}}{U_0''(a_0)} \frac{(-1)^{p-1}}{p!} F^{(p+1)}(a_0) + o_{\mathcal{P}_\epsilon}(1)\,. \tag{6.2.4}$$

2. *Supposons que le potentiel V soit symétrique. Si la fonction $T_0(x) := V(x) + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(2p)!} \nu_{2p} \left(F^{(2p)}(x) - F^{(2p)}(0)\right)$ atteint son minimum global sur $\mathbb{R}_+$ en un point b_0 avec $T_0''(b_0) > 0$ alors pour tout $\tilde{m} \in \mathcal{Q}_\epsilon$, $k \geq 1$ et $1 \leq p \leq n-1$, on a :*

$$\frac{\partial \xi_{2k}}{\partial m_{2p}}(\tilde{m}) = -\frac{2k\, b_0^{2k-1}}{T_0''(b_0)} \frac{1}{(2p)!} F^{(2p+1)}(b_0) + o_{\mathcal{Q}_\epsilon}(1)\,. \tag{6.2.5}$$

Démonstration. **Étape 1.** L'application φ_k^ε est directement reliée à W_m. D'après sa définition (6.2.1) et comme F est une fonction polynômiale paire de degré $2n$, on obtient

$$W_m(x) = W_0(x) + \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{(-1)^p}{p!} \Big(m_p - m_p(0)\Big) \sum_{j \geq \frac{1+p}{2}}^{n} \frac{F^{(2j)}(0)}{(2j-p)!}\, x^{2j-p}\,.$$

Puis, la dérivée par rapport à la variable m_p de l'égalité (6.2.3) donne

$$\frac{\partial \varphi_k^\epsilon}{\partial m_p}(m) = -\frac{2}{\epsilon} \frac{(-1)^p}{p!} \sum_{j \geq \frac{1+p}{2}}^{n} \frac{F^{(2j)}(0)}{(2j-p)!} \Big(\varphi_{2j+k-p}^\epsilon(m) - \varphi_{2j-p}^\epsilon(m) \varphi_k^\epsilon(m)\Big)\,. \tag{6.2.6}$$

La dérivée de ξ_{2k}^ε par rapport à la variable m_{2p} est calculée de la même manière :

$$\frac{\partial \xi_{2k}^\epsilon}{\partial m_{2p}}(\widetilde{m}) = \frac{-2}{\epsilon(2p)!} \sum_{j \geq p+1}^{n} \frac{F^{(2j)}(0)}{(2j-2p)!} \Big(\xi_{2j+2k-2p}^\epsilon(\widetilde{m}) - \xi_{2j-2p}^\epsilon(\widetilde{m}) \xi_{2k}^\epsilon(\widetilde{m})\Big)\,. \tag{6.2.7}$$

Étape 2. Soit $m \in \mathcal{P}_\epsilon$. Pour tout $1 \leq i \leq 2n-1$, il existe $C_i \in [-C, C]$ telle que $m_i = \mu_i + C_i\epsilon$. Ainsi pour tout $l \geq 1$:

$$\varphi_l^\epsilon(m) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x^l \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}U_0(x) - 2R_m(x)\right] dx}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}U_0(x) - 2R_m(x)\right] dx} \tag{6.2.8}$$

avec $R_m(x) := \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{(-1)^p}{p!}\frac{(m_p-\mu_p)}{\varepsilon}F^{(p)}(x) = \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{(-1)^p}{p!} C_p F^{(p)}(x)$. L'application du Lemme A.9 fournit le résultat asymptotique suivant qui est uniforme par rapport au paramètre $m \in \mathcal{P}_\epsilon$:

$$\varphi_l^\epsilon(m) = a_0^l - l\frac{a_0^{l-2}}{4U_0''(a_0)}\left(a_0\frac{U_0^{(3)}(a_0)}{U_0''(a_0)} - (l-1) + 4a_0R_m'(a_0)\right)\epsilon + o_{\mathcal{P}_\epsilon}(\epsilon)\,.$$

On obtient l'équivalence suivante qui intervenait dans la somme pour le calcul de la dérivée de φ_k^ε :

$$\varphi_{2j+k-p}^\epsilon(m) - \varphi_{2j-p}^\epsilon(m)\varphi_k^\epsilon(m) = \frac{k(2j-p)}{2U_0''(a_0)}\, a_0^{2j+k-p-2}\epsilon + o_{\mathcal{P}_\epsilon}(\epsilon).$$

Par conséquent, (6.2.6) devient

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_k}{\partial m_p}(m) &= \frac{2}{\epsilon}\frac{(-1)^{p-1}}{p!}\sum_{j\geq\frac{1+p}{2}}^{n}\frac{F^{(2j)}(0)}{(2j-p)!}\left\{\frac{k(2j-p)}{2U_0''(a_0)}\, a_0^{2j+k-p-2}\epsilon + o_{\mathcal{P}_\epsilon}(\epsilon)\right\}\\ &= \frac{k\, a_0^{k-1}(-1)^{p-1}}{U_0''(a_0)p!}\sum_{j\geq\frac{1+p}{2}}^{n}\frac{F^{(2j)}(0)}{(2j-p-1)!}a_0^{2j-p-1} + o_{\mathcal{P}_\epsilon}(1),\end{aligned}$$

ce qui fournit l'expression (6.2.4) comme annoncé.

Étape 3. La preuve permettant d'obtenir (6.2.5) est similaire à la précédente. Soit $\widetilde{m} \in \mathcal{Q}_\epsilon$. Pour tout $1 \leq i \leq n-1$, il existe $C_{2i} \in [-C; C]$ telle que $\widetilde{m}_{2i} = \nu_{2i} + C_{2i}\epsilon$. Ainsi pour tout $l \geq 1$, ξ_{2l}^ε satisfait la même expression que φ_{2l}^ε dans (6.2.8) où le support de l'intégrale est réduit à $\mathbb{R}_+$ grâce à la symétrie, où U_0 est remplacé par T_0 et où le reste R_m est remplacé par $R_{\widetilde{m}} = \sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{(2p)!}C_{2p}F^{(2p)}(x)$. On ne peut pas appliquer directement le Lemme A.9 car le support est réduit à $\mathbb{R}_+$. Toutefois, en étendant le Lemme A.6 qui s'applique sur des domaines bornés à $\mathbb{R}_+$ au lieu de $\mathbb{R}$ tout entier afin d'estimer le numérateur puis le dénominateur, on obtient :

$$\xi_{2l}^\epsilon(\widetilde{m}) = b_0^{2l} - 2l\frac{b_0^{2l-2}}{4W_0''(b_0)}\left(b_0\frac{T_0^{(3)}(b_0)}{T_0''(b_0)} - (2l-1) - 2b_0g'(b_0)\right)\epsilon + o_{\mathcal{Q}_\epsilon}(\epsilon)$$

où $g(x) := -2\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{(2p)!}(\widetilde{m}_{2p} - \nu_{2p})F^{(2p)}(x)$. Après avoir effectué la somme, il vient

$$\xi_{2j+2k-2p}^\epsilon(\widetilde{m}) - \xi_{2j-2p}^\epsilon(\widetilde{m})\xi_{2k}^\epsilon(\widetilde{m}) = \frac{2k(2j-2p)}{2T_0''(b_0)}\, b_0^{2j+2k-2p-2}\epsilon + o_{\mathcal{Q}_\epsilon}(\epsilon)\,.$$

Finalement, l'égalité (6.2.5) est prouvée :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi_{2k}}{\partial m_{2p}}(\widetilde{m}) =& \frac{2}{\epsilon}\frac{1}{(2p)!}\sum_{j\geq p+1}^{n}\frac{F^{(2j)}(0)}{(2j-2p)!}\left\{\frac{2k(2j-2p)}{2T_0''(b_0)}\,b_0^{2j+2k-2p-2}\epsilon + o_{\mathcal{Q}_\epsilon}(\epsilon)\right\}\\ =& -\frac{2k\,b_0^{2k-1}}{T_0''(b_0)(2p)!}\sum_{j\geq p+1}^{n}\frac{F^{(2j)}(0)}{(2j-2p-1)!}\,b_0^{2j-2p-1} + o_{\mathcal{Q}_\epsilon}(1)\,.\end{aligned}$$

□

Ces résultats préliminaires permettent d'estimer la différentielle des applications $\Phi^{(\epsilon)}$ et $\Phi_0^{(\epsilon)}$ dans un voisinage compact des vecteurs constitués des moments de la mesure stationnaire limite.

6.3 Unicité locale autour de $\boldsymbol{\delta_{a_0}}$

Soit a_0 un point critique du potentiel de confinement V tel qu'il existe une mesure stationnaire excentrée $u_\epsilon^{a_0}$ qui converge vers δ_{a_0} lorsque ϵ tend vers 0. On sait que si a_0 est un puits et si les deux conditions (2.5.19) et (2.5.20) sont vérifiées alors une telle famille de mesures existe d'après la Proposition 3.16.
On va montrer que si $u_\epsilon^{a_0}$ existe, il y a exactement une telle mesure dès que ϵ est assez petit.

Théorème 6.3. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les conditions (V-1)–(V-7) ainsi que (V-10) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). On suppose que V'' et F'' sont convexes. Soient deux familles de mesures stationnaires excentrées pour la diffusion* (0.0.5) *$(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ et $(v_\epsilon)_{\epsilon>0}$ qui convergent toutes les deux vers δ_{a_0}. Alors, les deux mesures u_ϵ et v_ϵ sont égales dès que ϵ est assez petit.*

Démonstration. **Étape 1.** Pour tout $1 \leq k \leq 2n-1$, on applique le Théorème 4.37 à la fonction $f(x) := x^k$ et on déduit l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $\mu := \Big(\mu_1(\epsilon), \cdots, \mu_{2n-1}(\epsilon)\Big)$ et $\nu := \Big(\nu_1(\epsilon), \cdots, \nu_{2n-1}(\epsilon)\Big)$ sont dans le compact $\mathcal{P}_\epsilon := \prod_{p=1}^{2n-1}\Big[a_0^p - C\epsilon\,;\, a_0^p + C\epsilon\Big]$ où $\mu_k(\epsilon)$ et $\nu_k(\epsilon)$ sont respectivement les moments d'ordre k de u_ϵ et v_ϵ.
Étape 2. On considère un élément m quelconque dans $\mathcal{P}_\epsilon$. Pour tous les indices k, $1 \leq p \leq 2n-1$, on a :

$$\frac{\partial \varphi_k^{(\epsilon)}}{\partial m_p}(m) = \frac{k a_0^{k-1}}{W_0''(a_0)}\frac{(-1)^{p-1}}{p!}F^{(p+1)}(a_0) + o_{\mathcal{P}_\epsilon}(1) \tag{6.3.1}$$

d'après la Proposition 6.2. En effet, pour tout $1 \leq p \leq 2n-1$, on pose $\mu_p := a_0^p$ et a_0 est l'unique point où le potentiel effectif $U_0 := W_0^{a_0}$ réalise son minimum global.

Étape 3. On suppose par l'absurde que $u_\epsilon \neq v_\epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$. On en déduit qu'il existe un point $m_\epsilon \in \mathcal{P}_\epsilon$ tel que la différentielle de l'application $\chi_\epsilon := Id - \Phi^{(\epsilon)}$ ne soit pas inversible en m_ϵ pour tout ϵ et par suite, la matrice A n'est pas inversible où l'on a

$$A_{i,j} := \delta_{i,j} + \frac{i a_0^{i-1}}{\left(W_0^{a_0}\right)''(a_0)} \frac{(-1)^j}{j!} F^{(j+1)}(a_0)\,.$$

On peut écrire $A := I_{2n-1} + \frac{1}{\left(W_0^{a_0}\right)''(a_0)} V_1 V_2^T$ où les deux vecteurs V_1 et V_2 sont définis ainsi : $V_1(i) := i a_0^{i-1}$ et $V_2(j) := \frac{(-1)^j}{j!} F^{(j+1)}(a_0)$. Comme dans la preuve du Lemme 2.26, on peut prouver que A est inversible si $\left(W_0^{a_0}\right)''(a_0) + \langle V_1, V_2\rangle \neq 0$. Or, $\langle V_1, V_2\rangle = \sum_{i=1}^{2n-1} \frac{i a_0^{i-1}(-1)^i}{i!} F^{(i+1)}(a_0) = -F''(0) = -\alpha$. Ainsi $\left(W_0^{a_0}\right)''(a_0) + \langle V_1, V_2\rangle = V''(a_0) \neq 0$ d'après l'hypothèse (V-2). □

On a prouvé qu'il y avait unicité locale autour de δ_{a_0} par une méthode dans laquelle intervient la vitesse de convergence. Pour les mesures stationnaires symétriques, d'autres méthodes peuvent être utilisées.

6.4 Unicité de la mesure stationnaire symétrique

On suppose dans cette section que V satisfait les hypothèses (V-1)–(V-10) et que V'' est convexe. Donc $\vartheta = -V''(0)$. Comme dans les Chapitres 3, 4, 5 et 6, il y a une bifurcation lorsque $\alpha - \vartheta$ s'annule. Ainsi on scinde en trois cas : $\alpha > \vartheta$, $\alpha = \vartheta$ et $\alpha < \vartheta$.

6.4.1 Lorsque $\boldsymbol{\alpha > \vartheta}$

On va prouver le résultat d'unicité en utilisant deux méthodes différentes. La première est la suite logique des résultats développés dans le Chapitre 4 et possède le même mode opératoire que pour la section précédente alors que la seconde est une adaptation de la preuve de l'unicité de la mesure stationnaire d'espérance nulle fournie dans [5]. On constatera que la seconde méthode est beaucoup plus rapide (dans la mesure où elle n'a pas nécessité l'étude de la convergence puis de la vitesse de convergence des mesures stationnaires symétriques) mais elle n'est pas adaptable au cas où $\alpha \leq \vartheta$.

Première méthode : la vitesse de convergence

D'après la Proposition 3.14 et la Remarque 3.15, comme $\alpha > \vartheta$, on sait déjà que $u_0 = \delta_0$ et $\mathcal{B} = \emptyset$.

Théorème 6.4. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les conditions (V-1)–(V-10) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). On suppose que V'' et F'' sont convexes. Alors, la diffusion* (0.0.5) *admet une unique mesure invariante symétrique dès que ϵ est assez petit.*

Démonstration. **Étape 1.** D'après le Théorème 2.22, on sait qu'il existe au moins une mesure invariante symétrique u_ϵ^0. On sait par le Théorème 3.28 que u_ϵ^0 converge vers δ_0 quand ϵ tend vers 0.
Étape 2. On applique le Théorème 4.13 à la fonction $f(x) := x^{2k}$ et il vient

$$\int_{\mathbb{R}} x^{2k} u_\epsilon^0(x)dx = \frac{f''(0)}{4\,(\alpha-\vartheta)}\epsilon + o(\epsilon)\,.$$

Alors, en posant $\mathcal{P}_\epsilon^0 := [-C\epsilon; C\epsilon]^{n-1}$ où la constante C est choisie suffisamment grande et ϵ assez petit, on sait que $\Big(m_2(\epsilon), \cdots, m_{2n-2}(\epsilon)\Big) \in \mathcal{P}_\epsilon^0$.
Étape 3. Pour tout $m \in \mathcal{P}_\epsilon^0$, en utilisant la Proposition 6.2, on a le résultat asymptotique suivant :

$$\frac{\partial \varphi_{2k}^\epsilon}{\partial m_{2p}}(m) = o_{\mathcal{P}_\epsilon}(1)\,. \tag{6.4.1}$$

En effet, comme $\alpha > \vartheta$, comme V'' et F'' sont convexes, $U_0 := V + F$ atteint son minimum global en un unique point et il s'agit de 0.
Étape 4. Supposons qu'il existe deux suites de mesures stationnaires et symétriques qui soient différentes. Ces deux suites tendent vers δ_0 et sont donc dans $\mathcal{P}_\epsilon^0$ pour ϵ assez petit. Ainsi pour ϵ assez petit, la différentielle de $Id - \Phi_0^{(\epsilon)}$ est non inversible sur l'un des points de ce compact. Et, en faisant tendre ϵ vers 0, on en déduit que la matrice identité est non inversible ce qui est impossible. □

Deuxième méthode : en utilisant une contraction sur un espace de mesure

On va maintenant prouver le même résultat en adaptant la méthode développée dans [5]. On suppose que V satisfait les hypothèses (V-1)–(V-8) ainsi que (V-10). Toutefois, on ne demande pas à V'' d'être convexe ni même à V d'avoir exactement deux puits. On se place dans le cas où $\alpha > \vartheta$ donc $\alpha + V''(0) > 0$. On introduit les notations suivantes :

Définition 6.5. 1. *Soit* $\gamma := \alpha + V''(0) > 0$.
2. *Soit* $p > 4q$ *où* q *est l'entier défini dans les hypothèses (V-5) et (F-4). On note :*

$$\mathbb{D}^p := \left\{ u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \;\middle|\; u(x) = u(-x)\ \forall x \in \mathbb{R},\ \sup_{x\in\mathbb{R}_+} (1+|x|^p)\, v(x) < +\infty \right\}.$$

3. *Pour toutes les fonctions* $u \in \mathbb{D}^p$*, la constante de renormalisation est notée*

$$\lambda_\epsilon(u) := \int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\Big(V(y) + F * u(y) - F * u(0)\Big)\right] dy\,.$$

4. *On introduit également l'espace*

$$\mathbb{D}_\epsilon := \left\{ u \in \mathbb{D}^p \;\middle|\; u(x) \le \frac{\exp\left[-\frac{\gamma}{\epsilon}x^2\right]}{\lambda_\epsilon(u)}\ \forall x \in \mathbb{R} \right\}.$$

5. *On munit l'espace $\mathbb{D}_\epsilon$ de la distance N_p définie comme suit*

$$N_p(u,v) := \int_0^\infty (1+x^p)\,|u(x)-v(x)|\,dx$$

pour toutes les fonctions u et v dans $\mathbb{D}_\epsilon$.
6. *On rappelle la définition de l'opérateur $\mathbb{A}^\epsilon$ qui agit sur l'espace $\mathbb{D}^p$:*

$$\mathbb{A}^\epsilon(u)(x) \;:=\; \frac{1}{\lambda_\epsilon(u)}\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\Big(V(x)+F*u(x)-F*u(0)\Big)\right].$$

Rappelons qu'une mesure symétrique u_ϵ^0 est invariante si et seulement si elle vérifie $u_\epsilon^0 = \mathbb{A}^\epsilon(u_\epsilon^0)$. Or, on sait d'après le Lemme 2.19 que l'on a

$$F*u(x)-F*u(0) \geq \frac{\alpha}{2}x^2 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

lorsque la mesure u est dans l'espace $\mathbb{C}_M$ (voir (2.5.1) pour la définition). La preuve de cette minoration ne nécessite toutefois que la parité de u et le fait que F_0' soit impaire et convexe sur $\mathbb{R}_+$. D'où l'on trouve

$$V(x)+F*u(x)-F*u(0) \geq \frac{\gamma}{2}x^2 \quad \forall x\in\mathbb{R}\,.$$

En effet, comme $V(0)=0$ et comme $\sup_{z\in\mathbb{R}} -V''(z)=\vartheta$, on a $V(x)\geq -\frac{\vartheta}{2}x^2$ d'où $W_0(x)\geq\frac{\gamma}{2}x^2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Ainsi toute mesure symétrique stationnaire est un élément de $\mathbb{D}_\epsilon$. Il suffit alors de prouver que l'application $\mathbb{A}^\epsilon$ est une contraction sur $\mathbb{D}_\epsilon$ pour la distance N_p.

Lemme 6.6. *Il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $\epsilon\in]0;1[$, quelle que soit la mesure $u\in\mathbb{D}_\epsilon$, on a l'inégalité*

$$\frac{1}{\lambda_\epsilon(u)} \leq \frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\,.$$

Démonstration. On procède d'une manière similaire à celle qui avait été utilisée dans la preuve du Lemme 3.25.
Étape 1. D'abord, on note que l'inégalité 3.4.1 ne nécessitait que la symétrie de la mesure ainsi que la bornitude de son moment d'ordre $2q$. On retrouve ainsi :

$$|(F_0'*u)(y)| \;\leq\; C|y|\left(1+|y|^{2q}\right)\left(1+\int_{\mathbb{R}^+} z^{2q}u(z)dz\right).$$

puis

$$F*u(x)-F*u(0) \;\leq\; \frac{\alpha}{2}x^2 + Cx^2\left(1+x^{2q}\right)\left(1+\int_{\mathbb{R}^+} z^{2q}u(z)dz\right).$$

Étape 2. On évalue le demi-moment d'ordre $2q$:

$$\int_{\mathbb{R}^+} z^{2q}u(z)dz \;\leq\; \frac{1}{\lambda_\epsilon(u)}\int_{\mathbb{R}^+} z^{2q}\exp\left[-\frac{\gamma}{\epsilon}z^2\right]dz \leq C(q)\frac{\epsilon^q}{\lambda_\epsilon(u)}$$

après avoir fait le changement de variable $z := \sqrt{\epsilon}u$. Ainsi en se servant de l'inégalité (3.4.3) et de l'hypothèse (F-4), on a l'inégalité

$$V(x) + F * u(x) - F * u(0) \leq \frac{\alpha}{2}x^2 + C_q'' x^2 \left(1 + x^{2q}\right) \left(1 + \frac{\epsilon^q}{\lambda_\epsilon(u)}\right) .$$

Étape 3. On peut minorer la constante de renormalisation :

$$\lambda_\epsilon(u) \geq 2 \int_0^\infty \exp\left\{ -\frac{2}{\epsilon} \left[\frac{\alpha}{2}x^2 + C_q'' x^2 \left(1 + x^{2q}\right) \left(1 + \frac{\epsilon^q}{\lambda_\epsilon(u)}\right) \right] \right\} dx . \quad (6.4.2)$$

On tombe donc sur l'inégalité (3.4.5). On en déduit le même résultat que dans le Lemme 3.25 à savoir $\frac{1}{\lambda_\epsilon(u)} \leq \frac{C}{\epsilon}$ où C est une constante ne dépendant pas de la mesure u. C'est pourquoi (6.4.2) devient

$$\lambda_\epsilon(u) \geq 2 \int_0^\infty \exp\left\{ -\frac{2}{\epsilon} \left[\frac{\alpha}{2}x^2 + \widetilde{C_q} x^2 \left(1 + x^{2q}\right) \right] \right\} dx .$$

En effet, $q \geq 2$ donc $\frac{\epsilon^q}{\lambda_\epsilon} \leq C\epsilon \longrightarrow 0$. Puis, après application du Lemme A.3 à la fonction $R(x) := \frac{\alpha}{2}x^2 + \widetilde{C_q} x^2 \left(1 + x^{2q}\right)$, on trouve $\lambda_\epsilon(u) \geq C\sqrt{\epsilon}$ ce qui achève la preuve. □

On va maintenant définir une fonction qui apparaît naturellement lorsque l'on regarde la distance $N_p\Big(\mathbb{A}^\epsilon(u), \mathbb{A}^\epsilon(v)\Big)$:

Définition 6.7. *Soient u et v deux éléments de $\mathbb{D}_\epsilon$. On pose :*

$$\Lambda_\epsilon^{u,v}(x) \;:=\; e^{-\frac{2}{\epsilon}V(x) - \frac{\alpha}{\epsilon}x^2} \left\{ \exp\left[-\frac{2}{\epsilon} F_0^u(x) \right] - \exp\left[-\frac{2}{\epsilon} F_0^v(x) \right] \right\}$$

où l'on a $F_0^u(x) := F_0 * u(x) - F_0 * u(0)$ et $F_0^v(x) := F_0 * v(x) - F_0 * v(0)$.

Lemme 6.8. *Il existe $C > 0$ telle que pour toutes les mesures u et v dans $\mathbb{D}_\epsilon$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la majoration suivante :*

$$|\Lambda_\epsilon^{u,v}(x)| \leq C x^2 \left(1 + x^{2q}\right) \exp\left[-\frac{\gamma}{\epsilon}x^2 \right] N_p(u, v) . \quad (6.4.3)$$

Démonstration. Déjà, on sait que $V(x) + \frac{\alpha}{2}x^2 \geq \frac{\gamma}{2}x^2$ d'où $\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}V(x) - \frac{\alpha}{\epsilon}x^2\right] \leq \exp\left[-\frac{\gamma}{\epsilon}x^2\right]$. Majorons maintenant la différence des deux exponentielles. Etant donné que $F_0 * u(x) - F_0 * u(0) \geq 0$ et $F_0 * v(x) - F_0 * v(0) \geq 0$ car u et v sont symétriques, on peut majorer de la sorte :

$$\begin{aligned}
\left| e^{-\frac{2}{\epsilon}F_0^u(x)} - e^{-\frac{2}{\epsilon}F_0^v(x)} \right| &\leq \left| \int_0^x \Big(F_0' * u(y) - F_0' * v(y) \Big) dy \right| \\
&\leq \left| \int_0^x \int_{\mathbb{R}_+} \Big(F_0'(y - z) + F_0'(x + z) \Big) \Big(u(z) - v(z) \Big) dz\, dy \right| \\
&\leq \int_0^x \int_{\mathbb{R}_+} \left| F_0'(y - z) + F_0'(y + z) \right| \, \left| u(z) - v(z) \right| dz\, dy
\end{aligned}$$

en exploitant la symétrie des mesures u et v puis en utilisant l'inégalité triangulaire. L'hypothèse (F-4) implique

$$\begin{aligned}\xi(y) &:= \int_{\mathbb{R}_+} |F_0'(y-z)+F_0'(y+z)|\ |u(z)-v(z)|\,dz \\ &\le 2C_q y \int_{\mathbb{R}_+} \left(1+|z+y|^{2q-2}+|z-y|^{2q-2}\right)|u(z)-v(z)|\,dz \\ &\le C_q' y\left(1+y^{2q-2}\right)\int_{\mathbb{R}_+}\left(1+z^{2q-2}\right)|u(z)-v(z)|\,dz\,.\end{aligned}$$

Puis, comme $p>4q$, la quantité $\frac{1+z^{2q-2}}{1+z^p}$ est bornée pour tout $z\in\mathbb{R}$. On en déduit directement $\xi(y)\le Cy\left(1+y^{2q-2}\right)N_p(u,v)$. Après intégration :

$$\left|e^{-\frac{2}{\epsilon}F_0^u(x)}-e^{-\frac{2}{\epsilon}F_0^v(x)}\right|\le Cx^2\left(1+x^{2q-2}\right)N_p(u,v)\,.$$

Enfin, comme $z\mapsto\frac{1+z^{2q}}{1+z^p}$ est bornée, l'inégalité (6.4.3) est immédiate. □

Afin de prouver que l'opérateur $\mathbb{A}^\epsilon$ est une contraction, on reprend un développement déjà utilisé lorsque l'on a prouvé l'existence d'une mesure invariante symétrique dans le Chapitre 2.

Définition 6.9. 7. *Pour tout couple de fonctions u et v dans $\mathbb{D}_\epsilon$, on utilise la décomposition :*

$$\mathbb{A}^\epsilon(u)(x)-\mathbb{A}^\epsilon(v)(x) \;=\; \frac{1}{\lambda_\epsilon(u)}\Lambda_\epsilon^{u,v}(x)+\Big(\lambda_\epsilon(u)-\lambda_\epsilon(v)\Big)\Omega_\epsilon^{u,v}(x) \quad (6.4.4)$$

où la fonction $\Omega_\epsilon^{u,v}$ est définie comme suit :

$$\Omega_\epsilon^{u,v}(x) \;:=\; \frac{1}{\lambda_\epsilon(u)\lambda_\epsilon(v)}\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(x)+\frac{\alpha}{2}x^2+F_0^v(x)\right)\right].$$

A partir de là, on a toutes les clés en main pour prouver l'unicité de la mesure stationnaire symétrique dès que ϵ est assez petit.

Théorème 6.10. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-8) ainsi que (V-10) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). On suppose de plus que $\alpha>\vartheta$. Dès que ϵ est assez petit, la diffusion* (0.0.5) *admet une unique mesure invariante symétrique.*

Démonstration. Soient u et v deux mesures dans l'espace $\mathbb{D}_\epsilon$. La décomposition (6.4.4) implique

$$N_p\left(\mathbb{A}^\epsilon(u),\mathbb{A}^\epsilon(v)\right)\le\frac{1}{\lambda_\epsilon(u)}N_p\left(\Lambda_\epsilon^{u,v},0\right)+|\lambda_\epsilon(u)-\lambda_\epsilon(v)|\,N_p\left(\Omega_\epsilon^{u,v},0\right) \quad (6.4.5)$$

Étape 1. Pour commencer, le Lemme 6.6 fournit l'existence de $C > 0$ telle que

$$\frac{1}{\lambda_\epsilon(u)} \leq \frac{C}{\sqrt{\epsilon}} \qquad \forall\, \epsilon \in]0;1[, \quad \forall\, u \in \mathbb{D}_\epsilon\,. \tag{6.4.6}$$

Étape 2. On majore maintenant la distance de $\Lambda_\epsilon^{u,v}$ à 0 :

$$\begin{aligned} N_p\left(\Lambda_\epsilon^{u,v}, 0\right) &= \int_{\mathbb{R}_+} (1+x^p)\left|\Lambda_\epsilon^{u,v}(x)\right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+} (1+x^p)\, Cx^2\left(1+x^{2q}\right)\exp\left[-\frac{\gamma}{\epsilon}x^2\right] N_p(u,v)dx \end{aligned}$$

d'après le Lemme 6.8. En prenant $\epsilon < 1$, le changement de variable $x := \sqrt{\epsilon}y$ implique

$$N_p\left(\Lambda_\epsilon^{u,v}, 0\right) \leq C'\epsilon^{\frac{3}{2}} N_p(u,v) \tag{6.4.7}$$

où $C' := C\int_{\mathbb{R}_+} y^2\,(1+y^p)\,(1+y^{2q})\,e^{-\gamma y^2}dy$.

Étape 3. Majorons la différence entre les constantes de renormalisation :

$$\begin{aligned} |\lambda_\epsilon(u) - \lambda_\epsilon(v)| &= 2\left|\int_{\mathbb{R}_+} e^{-\frac{2}{\epsilon}\left(V(x)+\frac{\gamma}{2}x^2+F_0^u(x)\right)}dx - \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\frac{2}{\epsilon}\left(V(x)+\frac{\gamma}{2}x^2+F_0^v(x)\right)}dx\right| \\ &\leq 2\int_{\mathbb{R}_+}\left|\Lambda_\epsilon^{u,v}(x)\right| dx \\ &\leq CN_p(u,v)\int_{\mathbb{R}_+} x^2\,(1+x^p)\left(1+x^{2q}\right)\exp\left[-\frac{\gamma}{\epsilon}x^2\right] dx \end{aligned}$$

d'après le Lemme 6.8. Le changement de variable $x := \sqrt{\epsilon}y$ implique

$$|\lambda_\epsilon(u) - \lambda_\epsilon(v)| \leq C'\epsilon^{\frac{3}{2}} N_p(u,v)\,. \tag{6.4.8}$$

Étape 4. On termine en majorant la distance de $\Omega_\epsilon^{u,v}$ à 0 :

$$\begin{aligned} N_p\left(\Omega_\epsilon^{u,v}, 0\right) &= \frac{1}{\lambda_\epsilon(u)\lambda_\epsilon(v)}\int_{\mathbb{R}_+} (1+x^p)\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\left(V(x)+\frac{\gamma}{2}x^2+F_0^v(x)\right)\right] dx \\ &\leq \frac{C^2}{\epsilon}\int_{\mathbb{R}_+} (1+x^p)\exp\left[-\frac{\gamma}{\epsilon}x^2\right] dx \end{aligned}$$

après avoir utilisé le Lemme 6.6. Le changement de variable $x := \sqrt{\epsilon}y$ implique l'existence d'une constante $C'' > 0$ telle que

$$N_p\left(\Omega_\epsilon^{u,v}, 0\right) \leq \frac{C''}{\sqrt{\epsilon}}\,. \tag{6.4.9}$$

Étape 5. On compile (6.4.5), (6.4.6), (6.4.7), (6.4.8) et (6.4.9) et l'on obtient l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tous les éléments u et v de $\mathbb{D}_\epsilon$, on a :

$$N_p\Big(\mathbb{A}^\epsilon(u), \mathbb{A}^\epsilon(v)\Big) \leq C\epsilon N_p(u,v)\,. \tag{6.4.10}$$

Par conséquent, dès que ϵ est assez petit, on a $N_p\left(\mathbb{A}^\epsilon(u), \mathbb{A}^\epsilon(v)\right) \leq \frac{1}{2} N_p(u,v)$. Soient maintenant u et v deux mesures invariantes symétriques. Alors u et v sont dans $\mathbb{D}_\epsilon$ et par définition elles vérifient $\mathbb{A}^\epsilon(u) = u$ et $\mathbb{A}^\epsilon(v) = v$. Il vient $N_p(u,v) \leq \frac{1}{2} N_p(u,v)$ d'où $N_p(u,v) = 0$. Ceci implique directement $u = v$ ce qui achève la preuve de l'unicité de la mesure invariante symétrique pour ϵ assez petit. □

Un élément central de cette méthode est le point où le pseudo-potentiel $W_\epsilon := V + F * u_\epsilon - F * u_\epsilon(0)$ atteint son minimum global. En effet, même si c'est tacite, on se sert fortement du fait que ce dernier se trouve en 0 quelle que soit la mesure symétrique considérée. Ainsi dans le cas général, lorsque ce point n'est pas indépendant de ϵ ni égal à 0, cette méthode est inapplicable.
En d'autres termes, l'unicité de la mesure invariante symétrique exploitait un résultat de convergence à savoir $u_\epsilon^0 \longrightarrow \delta_0$. A vrai dire, de manière tout aussi tacite, on se sert également de la vitesse de convergence qui est d'ordre ϵ lorsque $\alpha > -V''(0)$. On peut comparer les principes sous-jacents des deux méthodes. Dans la seconde méthode, on utilise un principe de contraction, lequel implique l'inversibilité de l'application qui est contractante. Dans la méthode utilisant la vitesse de convergence de u_ϵ^0 vers δ_0, on utilisait l'inversibilité locale ce qui est plus faible qu'un principe de contraction. C'est pourquoi la première méthode pourra être appliquée dans des cas où $\alpha < \vartheta$.

On aurait pu utiliser une troisième méthode à savoir la propagation du chaos semi-uniforme. Toutefois, cette méthode sera utilisée dans le cas suivant à savoir $\alpha = \vartheta$. En effet, il n'y a pas la moindre différence entre les deux cas $\alpha > \vartheta$ et $\alpha = \vartheta$ lorsque l'on utilise le système de particules qui permet de prouver l'unicité de la mesure stationnaire symétrique.

6.4.2 Lorsque l'on est sur le dioptre : $\boldsymbol{\alpha = \vartheta}$

On suppose ici que V'' ainsi que F'' sont convexes. La méthode utilisant l'application contractante se sert fortement de l'inégalité stricte $\alpha > \vartheta$. Quant à la méthode basée sur la vitesse de convergence de u_ϵ^0 vers δ_0, elle nécessite que la vitesse soit d'ordre ϵ ce qui n'est pas le cas lorsque $\alpha + V''(0) = 0$.
Par conséquent, il faut utiliser une troisième méthode. Cette méthode utilise un système de particules introduit dans le Chapitre 5. Et, plus précisément, elle repose sur le résultat de propagation du chaos semi-uniforme établi dans le Théorème 5.20. On suppose donc par la suite que V satisfait les hypothèses (V-1)–(V-11)

Théorème 6.11. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-11) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). On suppose également que V'' ainsi que F'' sont convexes et que l'on a de plus $\alpha = \vartheta$. Alors la diffusion auto-stabilisante* (0.0.5) *admet une unique mesure stationnaire symétrique u_ϵ^0.*

Démonstration. Soit une variable aléatoire symétrique X_0. Soit X_t^ϵ la diffusion auto-stabilisante définie par

$$\begin{aligned} X_t^\epsilon &= X_0 + \sqrt{\epsilon} B_t - \int_0^t V'\left(X_s^\epsilon\right) ds - \int_0^t F' * u_s^\epsilon\left(X_s^\epsilon\right) ds \\ &= X_0 + \sqrt{\epsilon} B_t - \int_0^t \left\{ V'\left(X_s^\epsilon\right) + \alpha X_s^\epsilon \right\} ds - \int_0^t F_0' * u_s^\epsilon\left(X_s^\epsilon\right) ds \qquad (6.4.11) \end{aligned}$$

et $u_s^\epsilon = \mathcal{L}\left(X_s^\epsilon\right)$.

On pose $\widetilde{V}(x) := V(x) + \frac{\alpha}{2} x^2$. Alors, $\widetilde{V}$ est une fonction convexe. On définit en parallèle le système de particules associé à savoir :

$$X_t^{\epsilon,i,N} = X_0^i + \sqrt{\epsilon} B_t^i - \int_0^t \left[\widetilde{V}'(X_s^{\epsilon,i,N}) + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F_0'(X_s^{\epsilon,i,N} - X_s^{\epsilon,j,N}) \right] ds \quad (6.4.12)$$

où N est arbitrairement grand. Comme $\alpha \geq \vartheta$, le Théorème 5.20 nous apprend qu'il y a propagation du chaos uniforme du système (6.4.12) vers (6.4.11).
Or, la Proposition 5.17 nous permet de déduire qu'il y a une unique mesure stationnaire pour (6.4.11). □

Remarque 6.12. *Cette méthode ne nécessite pas que ϵ soit en-dessous d'un seuil critique contrairement aux deux autres méthodes. On aurait d'ailleurs pu l'utiliser afin de prouver que pour tout $\epsilon > 0$ et $\alpha > \vartheta$, il existait une unique mesure stationnaire symétrique.*

6.4.3 Lorsque $\boldsymbol{\alpha < \vartheta}$

Dans le cas où $\alpha < \vartheta$, il n'y a ni propagation du chaos semi-uniforme ni possibilité de définir une application contractante autour de δ_0.
On suppose à nouveau que V'' et F'' sont convexes. On demande également à ce que V vérifie (V-1)–(V-10). Ainsi on sait d'après le Théorème 3.28 que la mesure limite s'écrit $u_0 = \frac{1}{2}\delta_{x_0} + \frac{1}{2}\delta_{-x_0}$ avec $x_0 > 0$. Et $\pm x_0$ sont les deux seuls antécédents du minimum global de $W_0 := V + \frac{1}{2}F(. - x_0) + \frac{1}{2}F(. + x_0) - F(x_0)$. Donc $\mathcal{B} = \emptyset$.

Théorème 6.13. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-10) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). On suppose aussi que V'' et F'' sont convexes ainsi que $\alpha < \vartheta$. Alors, la diffusion* (0.0.5) *admet une unique mesure invariante symétrique pour ϵ suffisamment petit.*

Démonstration. **Étape 1.** Si V'' et F'' sont convexes, d'après le Théorème 3.28, toute suite de mesures invariantes symétriques converge vers $\frac{1}{2}\delta_{x_0} + \frac{1}{2}\delta_{-x_0}$.
Étape 2. D'après le Théorème 4.25, on sait que le vecteur des moments pairs $\left(m_2(\epsilon), \cdots, m_{2n-2}(\epsilon)\right) \in \mathcal{P}_\epsilon^0 := \prod_{p=1}^{n-1} \left[x_0^{2p} - C\epsilon, x_0^{2p} + C\epsilon \right]$ pour une constante

$C > 0$. Soit $m \in \mathcal{P}_\epsilon^0$. D'après la Proposition 6.2, on sait que pour tous les indices $1 \leq k, r \leq n-1$:

$$\frac{\partial \varphi_{2k}^\epsilon}{\partial m_{2p}}(m) = -\frac{2k x_0^{2k-1}}{W_0''(x_0)} \frac{1}{(2p)!} F^{(2p+1)}(x_0) + o(1)\,.$$

Étape 3. On suppose qu'il existe deux mesures stationnaires symétriques pour une suite décroissante $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0. Ainsi comme dans la preuve du Théorème 6.3, on obtient la non inversibilité de la matrice $A := \Big(I_{n-1} + \frac{1}{W_0''(a)} V_1 \, {}^T V_2\Big)$ avec $V_1(i) := 2i x_0^{2i-1}$ et $V_2(j) := \frac{1}{(2j)!} F^{(2j+1)}(x_0)$. Comme on l'a vu dans la preuve du Lemme 2.26, la matrice A est inversible si $W_0''(x_0) + \langle V_1, V_2 \rangle \neq 0$. Or,

$$\langle V_1, V_2 \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_0^{2i-1}}{(2i-1)!} F^{(2i+1)}(x_0) = \frac{1}{2}\Big(F''(2x_0) - F''(0)\Big) \geq 0\,.$$

Alors $W_0''(x_0) + \langle V_1, V_2 \rangle > 0$ ce qui achève la preuve. □

6.5 Description complète des mesures stationnaires

On étend maintenant le Théorème 2.8 à un cas simple.

Théorème 6.14. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-11) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). On suppose également que $\alpha > \vartheta$, $\deg(V) > \deg(F)$, que les fonctions V'' et F'' sont convexes mais aussi*

$$\sum_{p=0}^{2n-2} \frac{\big|F^{(p+2)}(a)\big|}{p!} a^p \leq \alpha + V''(a)\,. \tag{6.5.1}$$

Alors, dès que ϵ est assez petit, la diffusion (0.0.5) *admet exactement trois mesures stationnaires.*

Démonstration. **Étape 1.** Comme la fonction V vérifie les hypothèses (V-1)–(V-7) ainsi que (V-10) et F vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5), on sait d'après la Proposition 3.16 que l'inégalité (6.5.1) implique l'existence d'une famille de mesures stationnaires excentrées $(u_\epsilon^+)_{\epsilon>0}$ qui converge vers δ_a. De même, il existe une famille de mesures stationnaires excentrées $(u_\epsilon^-)_{\epsilon>0}$ qui converge vers δ_{-a}.
Étape 2. Comme la fonction V vérifie les hypothèses (V-1)–(V-8) ainsi que (V-10), on sait que la diffusion (0.0.5) admet une mesure stationnaire symétrique u_ϵ^0 d'après le Théorème 2.22. Et, comme V'' ainsi que F'' sont convexes et comme $\alpha \geq \vartheta$, on sait d'après le Théorème 3.28 que cette mesure converge vers δ_0.
Étape 3. Comme la fonction V est polynômiale et de degré strictement supérieur à celui de F, on sait d'après la Proposition 3.8 que l'hypothèse (H) est satisfaite et ainsi toutes les familles de mesures stationnaires de la diffusion auto-stabilisante

ont la suite de leur moment d'ordre $2n$ bornée. Puis, comme $\alpha \geq \vartheta$, on sait d'après la Remarque 3.15 que les seules mesures limites possibles sont δ_0, δ_a et δ_{-a}.
Étape 4. Or, d'après le Théorème 6.3, dès que ϵ est assez petit, il y a une unique mesure stationnaire excentrée autour de a et une unique mesure stationnaire excentrée autour de $-a$. Et, d'après le Théorème 6.4, il y a une unique mesure stationnaire symétrique dès que ϵ est assez petit si $\alpha > \vartheta$.
Étape 5. Enfin, comme $\alpha > \vartheta$, l'on peut appliquer le Théorème 6.3 avec $a_0 = 0$ afin de s'assurer qu'il n'y a pas de mesure non symétrique arbitrairement proche de δ_0 ; ce qui achève la preuve. □

L'hypothèse $\alpha \geq \vartheta$ a été utilisée uniquement pour que toutes les mesures limites soient de la forme δ_A. Il est donc naturel de supposer que même si $\alpha < \vartheta$, le résultat est vrai. On se sert fortement de la symétrie de V. En effet, si α est trop petit et si V n'est pas symétrique, il peut n'y avoir qu'une seule mesure stationnaire, comme on l'a vu dans l'Exemple 2.15.

Conjecture 1 : *Si V est symétrique, si V'' et F'' sont convexes, dès que ϵ est assez petit, la diffusion* (0.0.5) *admet exactement trois mesures stationnaires.*
Conjecture 2 : *Si $V^{(2k)}$ et $F^{(2k)}$ sont convexes avec $k \geq 1$, dès que ϵ est assez petit, la diffusion* (0.0.5) *admet au plus $2k+1$ mesures stationnaires.*

7. COMPORTEMENT EN TEMPS LONG DU PROCESSUS AUTO-STABILISANT

7.1 Introduction

Dans le Chapitre 1, il a été prouvé que la diffusion auto-stabilisante (0.0.5) existait bien à condition que l'on ait $\mathbb{E}\left[X_0^{8q^2}\right] < \infty$. Dans le Chapitre 2, l'existence d'éventuelles mesures stationnaires a été étudiée et l'on a vu que l'on en avait plusieurs sous des conditions simples. Dans les Chapitres 3 et 4, une analyse asymptotique de ces mesures pour ϵ tendant vers 0 a été menée. Dans le Chapitre 5, la diffusion (0.0.5) a été liée à une particule d'un système à champ moyen. Le Chapitre 6 fut consacré au problème d'unicité des mesures stationnaires. Afin de conclure cette étude sur les processus stochastiques non-linéaires du type (0.0.5), on s'intéresse au comportement du processus lorsque le temps devient grand.

Dans [6], les auteurs ont prouvé que si le potentiel de confinement V est identiquement nul et si le potentiel d'intéraction F vérifie des hypothèses moins fortes que (F-1)–(F-5), la loi du processus convergeait pour t tendant vers l'infini vers l'unique mesure stationnaire d'espérance nulle ; laquelle est d'ailleurs symétrique. Ce résultat n'exige pas que la mesure initiale soit symétrique. On sait qu'un tel résultat est inenvisageable lorsque le potentiel V a plusieurs puits car il peut y avoir plusieurs mesures stationnaires. Dans le cas où le potentiel V est strictement convexe (même s'il est non uniformément strictement convexe), l'on dispose d'un résultat similaire comme il fut prouvé dans [13]. Tacitement, les deux études ont besoin de l'unicité de la mesure stationnaire ainsi que de l'unicité du point pour lequel le pseudo-potentiel réalise son minimum global.

Dans [22], des calculs de grandes déviations furent menés afin d'établir le temps moyen pour que la diffusion sorte d'un domaine donné, dans le cas où V est convexe. D'un point de vue tacite, deux propriétés ont été nécessaires : l'unicité de la mesure stationnaire et l'unicité du point chargé par cette mesure lorsque ϵ tend vers 0.

Avec les hypothèses associées à la diffusion (0.0.5), les deux propriétés implicites ne sont plus vérifiées. Ce chapitre est consacré à des phénomènes similaires lorsque le potentiel de confinement V n'est plus convexe et possède même plusieurs puits : l'étude sera menée dans des cas simples.

Dans un premier temps, on s'intéresse au comportement de la loi du processus auto-stabilisant u_t^ϵ en temps long lorsque V'' et F'' sont convexes. On suppose de plus que le potentiel de confinement V est symétrique et que la variable aléatoire

initiale X_0 est symétrique. Et, l'on prouve que si $\alpha \geq \vartheta$, la mesure u_t^ϵ converge vers u_ϵ^0, l'unique mesure stationnaire symétrique (voir les Théorèmes 6.4 et 6.11). Par ailleurs, on suppose que l'on a $\deg(F) \geq 4$. En effet, si $\deg(F) = 2$, l'équation (0.0.5) devient simplement

$$X_t^\epsilon = X_0 + \sqrt{\epsilon} B_t - \int_0^t W_0'\left(X_s^\epsilon\right) ds$$

où $W_0(x) := V(x) + \frac{\alpha}{2} x^2$ est une fonction convexe. Ainsi (0.0.5) est un processus de Kolmogorov dont la dérive est convexe et par conséquent, il y a bien convergence en loi vers l'unique mesure stationnaire symétrique.
Les cas $\alpha > \vartheta$ (uniformément strictement convexe) et $\alpha = \vartheta$ sont séparés. Pour prouver la convergence en loi dans le premier cas, on utilise deux méthodes différentes : celle fournie dans [6] complétée par la propagation du chaos semi-uniforme. Le second cas est traité uniquement avec la propagation du chaos semi-uniforme.

Dans un second temps, on s'intéresse au temps de sortie par le processus auto-stabilisant (0.0.5) d'un domaine donné lorsque la mesure initiale est stationnaire, qu'elle soit symétrique ou non. Le potentiel V n'a pas particulièrement besoin d'être symétrique. En se servant des résultats des Chapitres 3 et 4, on prouve que la diffusion est exponentiellement équivalente à un processus de Kolmogorov dont la dérive ne dépend ni de ϵ ni de t. On peut ensuite en déduire un principe de grandes déviations et en appliquant la théorie de Freidlin-Wentzell décrite dans l'annexe, on en déduit la description du temps de sortie.
On termine l'étude du temps de sortie en observant en quoi l'auto-stabilisation a une influence sur le temps de sortie. On constate en particulier que dans certains cas, "l'auto-stabilisation déstabilise le processus".
Remarquons par ailleurs que l'on pourrait conduire facilement une étude plus générale du temps de sortie dans certains cas. Supposons en effet que V soit symétrique, que α soit strictement plus grand que ϑ et que de plus, la variable aléatoire de départ X_0 soit elle aussi symétrique. Alors l'équation (0.0.5) s'écrit simplement :

$$X_t^\epsilon = X_0 + \sqrt{\epsilon} B_t - \int_0^t W_0'\left(X_s^\epsilon\right) ds - \int_0^t F_0' * u_t^\epsilon\left(X_s^\epsilon\right) ds$$

où $W_0(x) := V(x) + \frac{\alpha}{2} x^2$ est une fonction convexe. On serait alors ramené à l'étude menée dans [22].

Il convient de noter que le principe de grandes déviations ne nécessite pas la convexité. Cette dernière n'est nécessaire que pour établir la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la dérive de la diffusion auto-stabilisante lorsque ϵ tend vers 0. La barrière qui ne permet donc pas d'obtenir simplement un temps de sortie général est donc la même que celle qui ne permet pas d'obtenir facilement une convergence en temps long de la loi.

7.2 Convergence du processus vers sa mesure stationnaire symétrique

Pour commencer, on s'intéresse à la convergence en temps long de la diffusion (0.0.5) vers l'unique mesure stationnaire symétrique. On est en effet assuré de son unicité dès que ϵ est assez petit d'après les Théorèmes 6.4, 6.10, 6.11 et 6.13.
Les hypothèses de ces quatre théorèmes sont légérement différentes. On y fera donc attention.
Par la suite, on ne prouvera la convergence en temps long que dans le cas où $\alpha \geq \vartheta$. En effet, les deux méthodes utilisées à savoir l'étude des semi-groupes associés à deux équations aux dérivées partielles qui encadrent (en un sens qu'il conviendra de préciser par la suite) l'équation (2.2.1) ainsi que la propagation du chaos semi-uniforme nécessitent $\alpha \geq \vartheta$.

7.2.1 Dans le cas sur-critique $\boldsymbol{\alpha > \vartheta}$

De la même manière qu'on a prouvé l'unicité des mesures stationnaires symétriques par deux méthodes différentes, on va établir que la diffusion auto-stabilisante (0.0.5) converge vers son unique mesure stationnaire symétrique par deux méthodes différentes lorsque $F''(0)+V''(0) > 0$ c'est-à-dire lorsque le pseudo-potentiel limite est uniformément strictement convexe. La première utilise un théorème de comparaison de processus et la seconde utilise la propagation du chaos semi-uniforme.

Première méthode : En utilisant des semi-groupes d'EDP

On rappelle quelques résultats du Chapitre 1 ainsi que du Chapitre 2. Si l'on se donne une variable aléatoire X_0 dont le moment d'ordre $8q^2$ est fini, alors la diffusion (0.0.5) admet une solution forte qui est unique d'après le Théorème 1.14. De plus, d'après le Lemme 2.1 en notant $u^\epsilon(t, dx)$ la loi de X_t^ϵ, celle-ci admet une densité $u^\epsilon(t, x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue qui vérifie l'équation aux dérivées partielles (2.2.1) à savoir

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\epsilon}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}\Big[u(t,x)(V'(x) + (F' * u)(t,x))\Big].$$

On va s'intéresser aux semi-groupes de contraction dont la forme s'apparente à ceux qui sont sous-jacents ici.

Définition 7.1. 1. *Soit une fonction W de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par la suite, on suppose que W vérifie les hypothèses suivantes :*

1. *La fonction $\frac{1}{W'}$ est intégrable au voisinage de l'infini.*
2. *La fonction W est localement bornée.*
3. *La fonction W'' est positive en l'infini.*

4. On a la limite $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{W''(x)}{(W'(x))^2} = 0.$

2. *A cette fonction* W*, on associe la probabilité* $\nu_\epsilon^{(W)}$ *que l'on identifie avec sa densité par rapport à la mesure de Lebesgue :*

$$\nu_\epsilon^{(W)}(x) := \frac{\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W(x)\right]}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}W(y)\right] dy}.$$

3. *On lui associe également l'opérateur* $L_\epsilon^{(W)}$ *défini par*

$$L_\epsilon^{(W)} f := \frac{\epsilon}{2} f'' - W' f' \tag{7.2.1}$$

où f *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}$*.* $L_\epsilon^{(W)}$ *est le générateur d'un semi-groupe de contraction* $(T_t^{\epsilon,W};\, t \geq 0)$ *par rapport à la mesure* $\nu_\epsilon^{(W)}$*. En effet, d'après le Lemme 2.1,* $L_\epsilon^{(W)}$ *est le générateur infinitésimal de la diffusion homogène* $dX_t = \sqrt{\epsilon} dB_t - W'(X_t)\, dt$ *de mesure stationnaire* $\nu_\epsilon^{(W)}$*.*

4. *On considère la diffusion (non auto-stabilisante) :*

$$X_t^{\epsilon,X_0,W} = X_0 + \sqrt{\epsilon} B_t - \int_0^t W'\left(X_s^{\epsilon,X_0,W}\right) ds \tag{7.2.2}$$

où $(B_t\,;\, t \geq 0)$ *est un mouvement brownien et où* X_0 *est une variable aléatoire.*

Rappelons quelques théorèmes qui vont permettre d'établir différentes propriétés sur le semi-groupe ainsi défini. Pour commencer, on fournit un théorème concernant l'ultracontractivité.

Proposition 7.2. *En considérant une fonction* W *qui vérifie les hypothèses de la Définition 7.1, le semi-groupe de contraction* $(T_t^{\epsilon,W};\, t \geq 0)$ *est ultra-contractif. En d'autres termes, quel que soit* $t > 0$*, il existe une constante* $k_\epsilon(t) > 0$ *telle que pour toute fonction* f *intégrable par rapport à la mesure* $\nu_\epsilon^{(W)}$*, on a l'inégalité*

$$\left|\left|T_t^{\epsilon,W} f\right|\right|_\infty \leq k_\epsilon(t)\, ||f||_{L^1\left(\nu_\epsilon^{(W)}\right)}. \tag{7.2.3}$$

Démonstration. Dans le Théorème 1.4 de [32], les auteurs ont prouvé qu'un semi-groupe sur $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ de la forme (7.2.1) était ultra-contractif pour peu que la fonction W vérifie les cinq conditions suivantes :

1. L'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{W(x)}{\epsilon}\right] dx$ est finie.
2. Il existe une constante $c_\epsilon > 0$ telle que $\Delta\left(\nu_\epsilon^{(W)}\right)^{\frac{1}{2}} / \left(\nu_\epsilon^{(W)}\right)^{\frac{1}{2}} + c_\epsilon \geq 0$.
3. Il existe une constante $M > 0$ telle que $\nu_\epsilon^{(W)}(x) \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. La fonction W'' est positive au voisinage de l'infini.
5. La fonction $\frac{1}{W'}$ est intégrable au voisinage de l'infini.

Les conditions 4 et 5 sont explicitement mentionnées dans la Définition 7.1.
La condition 1 est une conséquence directe de l'intégrabilité en l'infini de $\frac{1}{W'}$ et de la positivité en l'infini de W''.
La condition 2 est équivalente à l'existence d'une constante $c_\epsilon > 0$ telle que $-\frac{1}{\epsilon}W''(x) + \frac{(W'(x))^2}{\epsilon^2} + c_\epsilon > 0$. Comme on a supposé que $\frac{W''(x)}{(W'(x))^2}$ converge vers 0 en l'infini, la condition 2 est donc vérifiée.
Enfin, la bornitude de $\nu_\epsilon^{(W)}$ est une conséquence directe de l'intégrabilité en l'infini de $\frac{1}{W'}$ et de la positivité de W'' en l'infini. □

Comme on l'a vu précédemment (voir la Proposition 5.12 du Chapitre 5), le trou spectral permet d'obtenir une convergence en loi d'une diffusion vers sa mesure stationnaire, laquelle est unique. Le critère de courbure-dimension de Bakry-Emery (introduit dans [3]) est classiquement utilisé si le potentiel W est une fonction uniformément strictement convexe, voir [6]. Toutefois, on souhaite travailler avec des potentiels qui ne sont pas forcément convexes.
Or, bien que l'on puisse établir des résultats assez généraux concernant les semi-groupes, on verra par la suite que l'on a besoin de la convexité de W.
On utilise ici le Théorème de Muckenhoupt (voir [1]) pour obtenir l'inégalité de Poincaré en ne se servant que du comportement en l'infini du potentiel :

Proposition 7.3. *Soit une fonction $U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. On se donne une mesure $d\eta(x) := \exp[-U(x)]\,dx$. On prend la médiane m de $d\eta$. Alors la mesure $d\eta$ satisfait l'inégalité de Poincaré si et seulement si :*

$$\begin{aligned} B_m^+ &= \sup_{x\geq m}\left(\int_x^{+\infty} e^{-U(y)}dy\right)\left(\int_m^x e^{U(y)}dy\right) < +\infty \\ \text{et} \qquad B_m^- &= \sup_{x\leq m}\left(\int_{-\infty}^x e^{-U(y)}dy\right)\left(\int_x^m e^{U(y)}dy\right) < +\infty\,. \end{aligned}$$

De plus, en notant C le trou spectral, on a l'encadrement :

$$\frac{1}{2}\min\left\{B_m^+\,;\,B_m^-\right\} \leq C \leq 4\max\left\{B_m^+\,;\,B_m^-\right\}\,.$$

On peut maintenant fournir un résultat clé permettant la convergence en loi sous certaines conditions des diffusions auto-stabilisantes. A noter toutefois que les semi-groupes considérés jusqu'à présent sont linéaires.

Lemme 7.4. *Soit une fonction W qui satisfait les cinq hypothèses de la Définition 7.1. Alors, on a les deux résultats suivants :*
1. *Quel que soit $t \geq 0$, $T_t^{\epsilon,W} : L^2\left(\nu_\epsilon^{(W)}\right) \Longrightarrow L^2\left(\nu_\epsilon^{(W)}\right)$ est un opérateur à trace.*
2. *Si on note $(-\lambda_n^\epsilon)_{n\geq 1}$ les valeurs propres par ordre décroissant de $L_\epsilon^{(W)}$ et f_n^ϵ les vecteurs propres associés, de norme 1 dans $L^2\left(\nu_\epsilon^{(W)}\right)$ alors la propriété de trou spectral est vérifiée et $||f_n^\epsilon||_\infty \leq k_\epsilon(t)\,e^{\lambda_n^\epsilon t}$ que que soit $t > 0$ où $k_\epsilon(t)$ est donné par l'inégalité* (7.2.3).

Démonstration. **1.** On peut écrire le semi-groupe ultracontractif de la façon suivante :

$$T_t^{\epsilon,W} f(x) = \int_{\mathbb{R}} p_t^{\epsilon,W}(x,y) f(y) \nu_\epsilon^{(W)}(y) dy$$

où $p_t^{\epsilon,W}$ est le noyau de $T_t^{\epsilon,W}$. Soit un point x_0 quelconque dans $\mathbb{R}$. Soit une suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de valeur absolue intégrable par rapport à la mesure $\nu_\epsilon^{(W)}$ et qui converge vers la mesure de Dirac δ_{x_0}. En appliquant (7.2.3) à la fonction g_n, il vient

$$\left|\left| \int_{\mathbb{R}} p_t^{\epsilon,W}(x,y) g_n(y) \nu_\epsilon^{(W)}(y) dy \right|\right|_\infty \leq k_\epsilon(t) \left|\left| g_n \right|\right|_{L^1\left(\nu_\epsilon^{(W)}\right)} .$$

Par conséquent, en prenant la limite quand n tend vers l'infini, on trouve l'existence d'une constante $\widetilde{k}_\epsilon(t)$ telle que $p_t^{\epsilon,W}(x,x_0) \leq \widetilde{k}_\epsilon(t)$. Ainsi quel que soit $t \geq 0$, on a l'inégalité

$$\iint_{\mathbb{R}^2} p_t^{\epsilon,W}(x,y) \nu_\epsilon^{(W)}(x) \nu_\epsilon^{(W)}(y) dx dy < \infty .$$

On en déduit que pour tout $t > 0$, l'application $T_t^{\epsilon,W}$ allant de $L^2\left(\nu_\epsilon^{(W)}\right)$ dans lui-même est un opérateur de Hilbert-Schmidt.
De plus, par définition de cet opérateur, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^2$, on a $T_t^{\epsilon,W} f(x) = \mathbb{E}\left[f\left(X_t^{\epsilon,x,W}\right)\right] = \mathbb{E}\left[f\left(X_{\frac{t}{2}}^{\epsilon,X_{\frac{t}{2}}^{\epsilon,x,W},W}\right)\right] = T_{\frac{t}{2}}^{\epsilon,W} T_{\frac{t}{2}}^{\epsilon,W} f(x)$. Ainsi c'est un opérateur à trace.
2. La preuve de l'existence du trou spectral ne peut se faire par le critère de courbure-dimension de Bakry-Emery. On utilise donc ici la Proposition 7.3 ce qui nécessite un équivalent asymptotique pour x proche de $+\infty$ de la quantité $\left(\int_x^{+\infty} e^{-\frac{2}{\epsilon}W(y)} dy\right)\left(\int_m^x e^{\frac{2}{\epsilon}W(y)} dy\right)$ et pour x proche de $-\infty$ de la quantité $\left(\int_{-\infty}^x e^{-\frac{2}{\epsilon}W(y)} dy\right)\left(\int_x^m e^{\frac{2}{\epsilon}W(y)} dy\right)$.
On utilise ainsi le Lemme A.1 en rappelant que l'on travaille à ϵ fixé et aussi que l'on a supposé $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{W''(x)}{\left(W'(x)\right)^2} = 0$. En posant $U := \frac{2}{\epsilon}W$, il vient :

$$\int_x^{+\infty} \exp\left[-U(y)\right] dy \approx \frac{\exp\left[-U(x)\right]}{U'(x)} \quad \text{et} \quad \int_m^x \exp\left[U(y)\right] dy \approx \frac{\exp\left[U(x)\right]}{U'(x)} .$$

D'où $B_m^+(x) \approx \frac{\epsilon^2}{4(W'(x))^2}$ lorsque x est proche de $+\infty$. Et, de même : $B_m^-(x) \approx \frac{\epsilon^2}{4(W'(x))^2}$ lorsque x est proche de $-\infty$. Par conséquent, $B_m^+ < \infty$ et $B_m^- < \infty$ vu que la quantité $\left(\frac{1}{W'(x)}\right)^2$ est bornée au voisinage de l'infini. □

A partir de là, on peut établir un premier résultat de convergence même si ce résultat ne concerne pas en soit les diffusions auto-stabilisantes.

Proposition 7.5. *Soit une fonction W de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui vérifie les hypothèses de la Définition 7.1. Alors, en conservant les notations de la Définition 7.1 et en notant $\left(X_t^{\epsilon,X_0,W}\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$ la diffusion définie dans (7.2.2), quel que soit $t_0 > 0$, il existe deux constantes $\lambda_\epsilon > 0$ et $\gamma_\epsilon(t_0) > 0$ telles que l'on ait l'inégalité*

$$\left|\mathbb{E}\left[g\left(X_t^{\epsilon,X_0,W}\right)\right] - \int_{\mathbb{R}} g(x)\nu_\epsilon^{(W)}(x)dx\right| \leq \gamma_\varepsilon(t_0)\, e^{-\lambda_\epsilon t}||g||_{L^2\left(\nu_\epsilon^{(W)}\right)} \tag{7.2.4}$$

quels que soient $t \geq t_0$, la variable aléatoire initiale X_0 et g une fonction de carré intégrable pour la mesure $\nu_\epsilon^{(W)}$.

Démonstration. Premièrement, on suppose que la loi de la variable aléatoire X_0 admet une densité par rapport à la mesure $\nu_\epsilon^{(W)}$ et l'on note cette dernière Θ. On remarque que le second membre de l'inégalité (7.2.4) ne dépend pas de la loi initiale. Ainsi le résultat sera également vrai pour des lois n'admettant pas de densité par rapport à la mesure de Lebesgue.
Pour simplifier les calculs par la suite, on note $X_t := X_t^{\epsilon,X_0,W}$, $\nu := \nu_\epsilon^{(W)}$, $T_t := T_t^{\epsilon,W}$ ainsi que $\lambda_n := \lambda_n^\epsilon$. Soit g un élément de $L^2(\nu)$. Alors g admet le développement en série suivant :

$$g = \langle g, 1\rangle_\nu + \sum_{n\geq 1} \langle g, f_n\rangle_\nu\, f_n$$

où $(f_n\,;\, n \geq 1)$ est la suite introduite dans le Lemme 7.4 des vecteurs propres associés aux valeurs propres $(\lambda_n\,;\, n \geq 1)$. A partir de l'hypothèse sur la loi de la variable aléatoire X_0 à savoir $\mathbb{P}(X_0 \in [x; x+dx]) = \Theta(x)\nu(x)dx$, on a :

$$\mathbb{E}\left[g(X_t)\right] = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[g(X_t^x)\right]\Theta(x)\nu(x)dx = \langle \mathbb{E}_\cdot\left[g(X_t)\right], \Theta(\cdot)\rangle_\nu = \langle T_t g, \Theta\rangle_\nu$$

où $(X_t^x, t \geq 0)$ est la solution de $X_t^x = x + \sqrt{\epsilon}B_t - \int_0^t W'\left(X_s^x\right)ds$. On applique l'opérateur T_t à la décomposition suivant la base hilbertienne de g et on obtient :

$$T_t g = \langle g, 1\rangle_\nu + \sum_{n\geq 1} \langle g, f_n\rangle_\nu\, e^{-\lambda_n t} f_n\,.$$

On en déduit l'inégalité

$$\left|\mathbb{E}\left[g(X_t)\right] - \int_{\mathbb{R}} g(x)\nu(dx)\right| \leq \sum_{n\geq 1} e^{-\lambda_n t}\left|\langle g, f_n\rangle_\nu\right|\left|\langle f_n, \Theta\rangle_\nu\right|\,.$$

Or, l'inégalité de Jensen puis le second point du Lemme 7.4 impliquent

$$|\langle f_n, \Theta\rangle_\nu| \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|\Theta(x)\nu(x)dx \leq ||f_n||_\infty \leq k_\epsilon\left(\frac{t_0}{2}\right)e^{\lambda_n\frac{t_0}{2}}\,.$$

On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $l^2(\mathbb{N})$ et l'on trouve :

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left[g(X_t)\right] - \int_{\mathbb{R}} g(x)\nu(dx)\right| &\leq k_\varepsilon\left(\frac{t_0}{2}\right)\left(\sum_{n\geq 1}\langle g, f_n\rangle_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n\geq 1} e^{-2\lambda_n(t-\frac{t_0}{2})}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq k_\varepsilon\left(\frac{t_0}{2}\right)\left(\sum_{n\geq 1} e^{-2\lambda_n(t-\frac{t_0}{2})}\right)^{\frac{1}{2}} ||g||_{L^2_\nu}\,.\end{aligned}$$

Or, $\lambda_n \geq \lambda_1$ et si $t \geq t_0$, alors $-2\lambda_n(t-\frac{t_0}{2}) \leq -\lambda_n(\frac{t_0}{2}) - \lambda_1(t-t_0)$ d'où la majoration

$$\left|\mathbb{E}\left[g(X_t)\right] - \int_{\mathbb{R}} g(x)\nu(dx)\right| \leq k_\varepsilon\left(\frac{t_0}{2}\right) e^{\lambda_1 t_0}\sqrt{\sum_{n\geq 1} e^{-\lambda_n \frac{t_0}{2}}}\, e^{-\lambda_1 t}||g||_{L^2_\nu}\,.$$

Vu que $T_t^{\epsilon,W}$ est un opérateur à trace d'après le Lemme 7.4, on a

$$\sum_{n\geq 1} e^{-\lambda_n \frac{t_0}{2}} = \sum_{n\geq 1}\left|\left\langle T_{\frac{t_0}{2}} f_n\,;\, f_n\right\rangle\right| < \infty\,.$$

On obtient ainsi (7.2.4). □

Dans la suite, on souhaiterait utiliser ce résultat de convergence pour la diffusion auto-stabilisante (0.0.5) que l'on rappelle :

$$\begin{aligned} dX_t^\epsilon &= \sqrt{\epsilon}dB_t - V'(X_t^\epsilon)dt - F' * u_t^\epsilon\,(X_t^\epsilon)\,dt \\ u_t^\epsilon &= \mathcal{L}\,(X_t^\epsilon)\,. \end{aligned}$$

On utilise la notation suivante : $b_\epsilon(t,x) := \displaystyle\int_0^x \left\{\mathbb{E}\left(F'(y-X_t^\epsilon)\right) + V'(y)\right\} dy$. En utilisant les hypothèses (V-5) et (F-4), on trouve la majoration suivante :

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial x}b_\epsilon(t,x) - \frac{\partial}{\partial x}b_\epsilon(t,y)\right| &\leq |V'(x)-V'(y)| + \int |F'(x-z)-F'(y-z)|\,du_t^\epsilon(z) \\ &\leq C|x-y|(1+|x|^{2q-2}+|y|^{2q-2})\,.\end{aligned}$$

Dans [6], les auteurs ont défini des fonctions qui encadrent asymptotiquement la fonction b_ϵ. La définition de ces fonctions repose sur une propriété simple :

$$\exists\, x_\epsilon \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \forall\, t \geq 0 \quad \frac{\partial}{\partial x}b_\epsilon(t,x_\epsilon) = 0\,. \tag{7.2.5}$$

Si V est symétrique et si $\alpha \geq \vartheta$, on a bien ceci avec $x_\epsilon := 0$. C'est à cause de (7.2.5) que l'hypothèse $\alpha \geq \vartheta$ est essentielle.
Comme la fonction V est paire, la mesure u_t^ϵ est symétrique pour tout $t > 0$ lorsque la loi de X_0 est symétrique. On a besoin de définir quelques fonctions simples pour pouvoir encadrer asymptotiquement l'équation aux dérivées partielles (2.2.1) par deux équations aux dérivées partielles linéaires auxquelles on appliquera la Proposition 7.5 :

Définition 7.6. 1. *Soit $t_0 \geq 0$. Pour tout $x \geq 0$, on introduit*

$$\overline{b^\epsilon_{t_0}}(x) := \int_0^x \left(\sup_{t \geq t_0} \frac{\partial}{\partial x} b_\epsilon(t,y) \right) dy \quad et \quad \underline{b^\epsilon_{t_0}}(x) := \int_0^x \left(\inf_{t \geq t_0} \frac{\partial}{\partial x} b_\epsilon(t,y) \right) dy \,.$$

On prolonge les fonctions $\overline{b^\epsilon_{t_0}}$ et $\underline{b^\epsilon_{t_0}}$ sur $\mathbb{R}$ par parité.
2. *Pour tout $x \geq 0$, on pose :*

$$\overline{b^\epsilon}(x) := \int_0^x \left(\limsup_{t \longrightarrow +\infty} \frac{\partial}{\partial x} b_\epsilon(t,y) \right) dy \;\; et \;\; \underline{b^\epsilon}(x) := \int_0^x \left(\liminf_{t \longrightarrow +\infty} \frac{\partial}{\partial x} b_\epsilon(t,y) \right) dy \,.$$

On prolonge les fonctions $\overline{b^\epsilon}$ et $\underline{b^\epsilon}$ sur $\mathbb{R}$ par parité.
3. *On introduit les mesures suivantes :*

$$d\overline{u^\epsilon}(x) := \frac{\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\overline{b^\epsilon}(x)\right]}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\overline{b^\epsilon}(y)\right] dy} dx \quad et \quad d\underline{u^\epsilon}(x) := \frac{\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\underline{b^\epsilon}(x)\right]}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\underline{b^\epsilon}(y)\right] dy} dx \,.$$

La suite du travail va en fait consister à montrer que les deux fonctions $\overline{b^\epsilon}$ et $\underline{b^\epsilon}$ sont égales et par suite que les deux mesures $\underline{u^\epsilon}$ et $\overline{u^\epsilon}$ sont les mêmes. Cela nécessitera un lemme de comparaison dont une démonstration peut être trouvée dans [31] :

Proposition 7.7. *Soient b et c deux fonctions localement lipschitziennes, impaires, de même signe que x et telles que $\mathrm{sgn}(x)\Big(b(s,x) - c(s,x)\Big) \geq 0$. Alors, quelle que soit la fonction f paire, croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a*

$$\mathbb{E}[f(X_t^{(b)})] \leq \mathbb{E}[f(X_t^{(c)})] \quad pour\ tout \quad t \geq 0$$

où $X_t^{(b)} = X_0 + \sqrt{\epsilon} B_t - \int_0^t b(s, X_s^{(b)}) ds$ et $X_t^{(c)} = X_0 + \sqrt{\epsilon} B_t - \int_0^t c(s, X_s^{(c)}) ds$, X_0 étant une variable aléatoire quelconque.

Cette proposition nécessite que les deux dérives b et c soient de même signe que x. Aussi, lorsque $\alpha < \vartheta$, quelle que soit la mesure symétrique v_0, $V' + F' * v_0$ ne vérifie pas cette hypothèse. Par conséquent, c'est à ce niveau là que la convexité est utilisée.
A partir de ce résultat, on trouve le Lemme suivant :

Lemme 7.8. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-10) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). On suppose de plus que V'' ainsi que F'' sont convexes. Si $\alpha > \vartheta$, quels que soient $\epsilon > 0$ et $x \geq 0$, on a l'inégalité suivante :*

$$F' * \overline{u^\epsilon}(x) + V'(x) \leq \left(\underline{b^\epsilon}\right)'(x) \leq \left(\overline{b^\epsilon}\right)'(x) \leq F' * \underline{u^\epsilon}(x) + V'(x) \,. \tag{7.2.6}$$

Démonstration. La mesure u_t^ϵ étant symétrique pour tout $t \geq 0$, on a $b_\epsilon(t,x) = V(x) + \int_0^x \mathbb{E}\left[\widetilde{F'}_y(X_t^\epsilon)\right] dy$ avec $\widetilde{F'}_y(z) := \frac{1}{2}\Big(F'(y-z) + F'(y+z)\Big)$. Comme F' est

convexe sur $\mathbb{R}_+$ d'après l'hypothèse (F-3), on obtient l'inégalité $\widetilde{F'}_y(z) \geq F'(y) \geq \alpha y \geq 0$ pour tout $y \geq 0$ et pour tout $z \in \mathbb{R}$. De plus, grâce aux hypothèses (V-5) et (F-4), on a $\left|\frac{\partial}{\partial x} b_\epsilon(t,x) - \frac{\partial}{\partial x} b_\epsilon(t,y)\right| \leq C|x-y|(1+|x|^{2q-2}+|y|^{2q-2})$ pour tous les réels x et y.
Ces propriétés étant vraies indépendamment de la variable temporelle t, elles le sont également pour les fonctions $\overline{b^\epsilon_{t_0}}(x)$ et $\underline{b^\epsilon_{t_0}}(x)$. Considérons deux nouveaux processus qui vont encadrer la diffusion (0.0.5) :

$$\begin{aligned} Y^\epsilon_t &= X_{t_0} + \sqrt{\epsilon}B_t - \sqrt{\epsilon}B_{t_0} - \frac{1}{2}\int_{t_0}^t \underline{b^\epsilon_{t_0}}'(Y^\epsilon_s)ds \\ \text{et} \qquad Z^\epsilon_t &= X_{t_0} + \sqrt{\epsilon}B_t - \sqrt{\epsilon}B_{t_0} - \frac{1}{2}\int_{t_0}^t \overline{b^\epsilon_{t_0}}'(Z^\epsilon_s)ds \end{aligned}$$

pour $t \geq t_0$. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ paire, croissante sur $\mathbb{R}_+$, à croissance lente. Alors, à partir de l'inégalité

$$\left(\underline{b^\epsilon_{t_0}}\right)'(x)\,\mathrm{sgn}(x) \leq \frac{\partial}{\partial x} b_\epsilon(t,x)\,\mathrm{sgn}(x) \leq \left(\overline{b^\epsilon_{t_0}}\right)'(x)\,\mathrm{sgn}(x)\,,$$

on peut utiliser la Proposition 7.7 et en déduire :

$$\mathbb{E}\left[f\left(Z^\epsilon_t\right)\right] \leq \mathbb{E}\left[f\left(X^\epsilon_t\right)\right] \leq \mathbb{E}\left[f\left(Y^\epsilon_t\right)\right]$$

pour tout $t \geq t_0$. Or, les deux fonctions $\overline{b^\epsilon_{t_0}}$ et $\underline{b^\epsilon_{t_0}}$ vérifient les quatre hypothèses de la Définition 7.1. Prouvons la convergence vers 0 de $\frac{\overline{b^\epsilon_{t_0}}''(x)}{\left(\overline{b^\epsilon_{t_0}}'(x)\right)^2}$ pour x tendant vers l'infini. Par définition, $\overline{b^\epsilon_{t_0}}'(x) \geq V'(x) + \mathbb{E}\left[F'(x - X^\epsilon_{t_0})\right]$. Pour x assez grand, les deux membres sont positifs d'où $\left(\overline{b^\epsilon_{t_0}}'(x)\right)^2 \geq V'(x)^2 + \mathbb{E}\left[F'(x-X^\epsilon_{t_0})\right]^2$. On s'intéresse maintenant à la dérivée seconde. Soient t et h deux réels strictement positifs. Alors :

$$\begin{aligned} &\frac{\sup_{t\geq t_0}\mathbb{E}\left[F'(x+h-X^\epsilon_t)\right] - \sup_{t\geq t_0}\mathbb{E}\left[F'(x-X^\epsilon_t)\right] - h\,\sup_{t\geq t_0}\mathbb{E}\left[F''(x-X^\epsilon_t)\right]}{h} \\ &\leq \sup_{t\geq t_0}\frac{\mathbb{E}\left[F'(x+h-X^\epsilon_t)\right] - \mathbb{E}\left[F'(x-X^\epsilon_t)\right]}{h} - \mathbb{E}\left[F''(x-X^\epsilon_t)\right]\,. \end{aligned}$$

Le théorème des accroissements finis implique la convergence vers 0 du membre de droite car $F^{(3)}$ est une fonction polynômiale de degré inférieur à $2q$ et car les moments d'ordre 1 à $2q$ de la loi de X^ϵ_t sont uniformément bornés en temps d'après le Théorème 1.14. D'où $\overline{b^\epsilon_{t_0}}''(x) \leq V''(x) + \sup_{t\geq t_0}\mathbb{E}\left[F''(x-X^\epsilon_t)\right]$ puis

$$\begin{aligned} \frac{\overline{b^\epsilon_{t_0}}''(x)}{\left(\overline{b^\epsilon_{t_0}}'(x)\right)^2} &\leq \frac{V''(x) + \sup_{t\geq t_0}\mathbb{E}\left[F''(x-X^\epsilon_t)\right]}{V'(x)^2 + \mathbb{E}\left[F'(x-X^\epsilon_{t_0})\right]^2} \\ &\leq \frac{V''(x)}{V'(x)^2} + \frac{\sup_{t\geq t_0}\mathbb{E}\left[F''(x-X^\epsilon_t)\right]}{\mathbb{E}\left[F'(x-X^\epsilon_{t_0})\right]^2}\,. \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite tend vers 0 d'après la propriété (V-10). Le second est le quotient d'une fonction polynômiale de degré $2n-2$ par une fonction polynômiale de degré $4n-2$ où $2n := \deg(F)$. En effet, les moments d'ordre 1 à $2n$ de la loi de X_t^ϵ sont finis. On en déduit donc la limite annoncée. On dispose exactement de la même propriété pour $\underline{b^\epsilon_{t_0}}$. On peut donc appliquer la Proposition 7.5 aux deux fonctions $\overline{b^\epsilon_{t_0}}$ et $\underline{b^\epsilon_{t_0}}$ et l'on en déduit

$$\gamma_\epsilon(t_0)e^{-\lambda_\varepsilon(t-t_0)}\int_{\mathbb{R}}\Big(f^2(y)\nu_{\underline{b^\epsilon_{t_0}}}(y)dy\Big)+\int_{\mathbb{R}}f(y)\nu_{\underline{b^\epsilon_{t_0}}}(y)dy\le\mathbb{E}\left[f(X_t^\epsilon)\right]$$

$$\text{et}\qquad \mathbb{E}\left[f(X_t^\epsilon)\right]\le\int_{\mathbb{R}}f(y)\nu_{\overline{b^\epsilon_{t_0}}}(y)dy+\gamma_\epsilon(t_0)e^{-\lambda_\varepsilon(t-t_0)}\int_{\mathbb{R}}\Big(f^2(y)\nu_{\overline{b^\epsilon_{t_0}}}(y)dy\Big)\,.$$

Toujours grâce à la Proposition 7.7, on sait que si deux fonctions c_1 et c_2 vérifient les hypothèses de la Définition 7.1 ainsi que $\mathrm{sgn}(x)(c_1(x)-c_2(x))\ge 0$ alors on a l'inégalité $\mathbb{E}\left[f(X_t^{(c_1)})\right]\le\mathbb{E}\left[f(X_t^{(c_2)})\right]$ pour tout $t\ge 0$. En prenant ensuite la limite pour t tendant vers l'infini et en appliquant la Proposition 7.5, il vient $\int_{\mathbb{R}}f(y)\nu_{c_1}(y)dy\le\int_{\mathbb{R}}f(y)\nu_{c_2}(y)dy$ où f est une fonction paire, croissante sur $\mathbb{R}_+$ et à croissance lente. Il suffit ensuite d'utiliser les deux inégalités

$$\mathrm{sgn}(y)\overline{b^\epsilon_{t_0}}'(y)\ge\mathrm{sgn}(y)\underline{b^\epsilon_{t_0}}'(y)\ge\mathrm{sgn}(y)\Big(F'(y)+V'(y)\Big)$$

$$\text{et}\qquad \mathrm{sgn}(y)\overline{b^\epsilon_{t_0}}'(y)\le C|y|\left(1+|y|^{2q-2}\right)+\mathrm{sgn}(y)V'(y)$$

pour en déduire la finitude de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\Big(f^2(y)\nu_{\underline{b^\epsilon_{t_0}}}(y)dy\Big)$ et de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\Big(f^2(y)\nu_{\overline{b^\epsilon_{t_0}}}(y)dy\Big)$. Ensuite, on prend $f:=\widetilde{F'}_x$ qui vérifie les hypothèses de la Proposition 7.7 et qui a la particularité de satisfaire $\frac{\partial}{\partial x}b_\epsilon(t,x)=V'(x)+\mathbb{E}\left[\widetilde{F'}_x(X_t^\epsilon)\right]$. On prend maintenant la limite supérieure ainsi que la limite inférieure et l'on trouve :

$$V'(x)+\liminf_{t_0\longrightarrow\infty}\int_{\mathbb{R}}\widetilde{F'}_x d\nu_{\overline{b^\epsilon_{t_0}}}\le(\underline{b^\epsilon})'(x)\le(\overline{b^\epsilon})'(x)\le V'(x)+\limsup_{t_0\longrightarrow\infty}\int_{\mathbb{R}}\widetilde{F'}_x d\nu_{\underline{b^\epsilon_{t_0}}}$$

pour tout $x\ge 0$. De cela, on déduit (7.2.6). □

Avant de prouver le résultat de convergence en temps long, on va étudier les intervalles sur lesquels la fonction $\underline{u^\epsilon}$ est supérieure à la fonction $\overline{u^\epsilon}$.

Lemme 7.9. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-10) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). On suppose de plus que les fonctions V'' et F'' sont convexes. Alors, il existe un réel strictement positif x_ϵ tel que $\underline{u^\epsilon}(x)\le\overline{u^\epsilon}(x)$ pour tout $x\in[-x_\epsilon;x_\epsilon]$ et $\underline{u^\epsilon}(x)\ge\overline{u^\epsilon}(x)$ pour tout $x\in[-x_\epsilon;x_\epsilon]^c$.*

Démonstration. Par définition des fonctions $\underline{b^\epsilon}$ et $\overline{b^\epsilon}$, quel que soit $x\in\mathbb{R}$ on a l'inégalité $\underline{b^\epsilon}(x)\le\overline{b^\epsilon}(x)$. On introduit :

$$\underline{\lambda_\epsilon}:=\int_{\mathbb{R}}\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\underline{b^\epsilon}(x)\right]dx\ge\int_{\mathbb{R}}\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\overline{b^\epsilon}(x)\right]dx=:\overline{\lambda_\epsilon}\,.$$

Vu que les fonction $\overline{u^\epsilon}$ et $\underline{u^\epsilon}$ sont positives, l'égalité $\int_{\mathbb{R}} \overline{u^\epsilon}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \underline{u^\epsilon}(x)dx = 1$ implique l'existence d'un réel positif ou nul x_ϵ (par symétrie) tel que $\overline{u^\epsilon}(x_\epsilon) = \underline{u^\epsilon}(x_\epsilon)$. Par définition des deux mesures, l'on a

$$\underline{b^\epsilon}(x_\epsilon) + \frac{\epsilon}{2}\ln\left(\underline{\lambda_\epsilon}\right) = \overline{b^\epsilon}(x_\epsilon) + \frac{\epsilon}{2}\ln\left(\overline{\lambda_\epsilon}\right) .$$

La fonction $\overline{b^\epsilon} - \underline{b^\epsilon}$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit $\underline{u^\epsilon}(x) \geq \overline{u^\epsilon}(x)$ pour tout $x \geq x_\epsilon$ ainsi que $\underline{u^\epsilon}(x) \leq \overline{u^\epsilon}(x)$ pour tout $x \in [0; x_\epsilon]$. La symétrie donne le résultat annoncé. □

On a maintenant toutes les armes en main pour obtenir le Théorème de convergence en loi vers l'unique mesure stationnaire symétrique.

Théorème 7.10. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-10) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). On suppose de plus que les fonctions V'' et F'' sont convexes et que la variable aléatoire X_0 est symétrique et vérifie $\mathbb{E}\left[X_0^{8q^2}\right] < \infty$. Sous la condition $\alpha > \vartheta$, la diffusion $(X_t^\epsilon)_{t\geq 0}$ définie par* (0.0.5) *converge en loi vers l'unique mesure invariante symétrique u_ϵ^0.*

Démonstration. Montrons que $\underline{b^\epsilon} = \overline{b^\epsilon}$. Les fonctions $V' + F' * \overline{u^\epsilon}$ et $V' + F' * \underline{u^\epsilon}$ sont impaires donc leurs primitives sont paires d'où $\mathbb{A}^\epsilon\overline{u^\epsilon}$ et $\mathbb{A}^\epsilon\underline{u^\epsilon}$ sont symétriques où l'opérateur $\mathbb{A}^\epsilon$ est défini dans la Définition 6.5. On peut à nouveau appliquer la Proposition 7.7 :

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)(\mathbb{A}^\epsilon\underline{u^\epsilon})(y)dy \leq \int_{\mathbb{R}} f(y)\overline{u^\epsilon}(y)dy \leq \int_{\mathbb{R}} f(y)\underline{u^\epsilon}(y)dy \leq \int_{\mathbb{R}} f(y)(\mathbb{A}^\epsilon\overline{u^\epsilon})(y)dy$$

où f est une fonction paire, croissante sur $\mathbb{R}_+$ et à croissance lente. Soit $p > 4q$ où q est l'entier introduit dans les hypothèses (V-5) et (F-4). On se donne la fonction

$$g_p(x) := (1 + |x|^p)\ \mathrm{sgn}\left(\underline{u^\epsilon}(x) - \overline{u^\epsilon}(x)\right) .$$

Elle est paire et croissante sur $\mathbb{R}_+$ car le signe de $\underline{u^\epsilon}(x) - \overline{u^\epsilon}(x)$ est d'abord égal à -1 sur l'intervalle $[0; x_\epsilon]$ puis égal à 1. De plus, on a l'égalité :

$$N_p(\underline{u^\epsilon}, \overline{u^\epsilon}) = \int_{\mathbb{R}} g_p(x)\left(\underline{u^\epsilon}(x) - \overline{u^\epsilon}(x)\right)dx$$

où N_p est la distance introduite dans (6.4.2). Comme g_p vérifie les conditions suffisantes à l'application de la Proposition 7.7, il vient

$$\begin{aligned} N_p(\underline{u^\epsilon}, \overline{u^\epsilon}) &\leq \int_{\mathbb{R}} g_p(x)\left(\mathbb{A}^\epsilon\overline{u^\epsilon}(x) - \mathbb{A}^\epsilon\underline{u^\epsilon}(x)\right)dx \leq \int_{\mathbb{R}} |g_p(x)|\,|\mathbb{A}^\epsilon\overline{u^\epsilon}(x) - \mathbb{A}^\epsilon\underline{u^\epsilon}(x)|\,dx \\ &\leq N_p(\mathbb{A}^\epsilon\overline{u^\epsilon}, \mathbb{A}^\epsilon\underline{u^\epsilon}) . \end{aligned}$$

Or, comme $\alpha > \vartheta$, l'opérateur $\mathbb{A}^\epsilon$ est une contraction sur l'ensemble des mesures symétriques appartenant à $\mathbb{D}_\epsilon$ (défini dans (6.4.2)) d'après (6.4.10). De plus,

d'après les définitions, les fonctions $\overline{u^\epsilon}$ et $\underline{u^\epsilon}$ sont bien dans l'espace des fonctions $\mathbb{D}_\epsilon$. On en déduit : $N_p(\underline{u^\epsilon} - \overline{u^\epsilon}) \leq CN_p(\underline{u^\epsilon} - \overline{u^\epsilon})$ où $C < 1$.
Donc, $\underline{u^\epsilon} = \overline{u^\epsilon}$ et par conséquent $\underline{b^\epsilon} = \overline{b^\epsilon}$. Notons $\overline{b^\epsilon} := \underline{b^\epsilon} = \overline{b^\epsilon}$ et $\overline{u^\epsilon} := \underline{u^\epsilon} = \overline{u^\epsilon}$. Ainsi $\overline{u^\epsilon}$ vérifie l'équation $\mathbb{A}^\epsilon \overline{u^\epsilon} = \overline{u^\epsilon}$ donc $\overline{u^\epsilon} = u^0_\epsilon$ l'unique mesure stationnaire symétrique de la diffusion auto-stabilisante (0.0.5). Or, comme $\overline{u^\epsilon}$ est la limite pour t_0 tendant vers l'infini de $\overline{b^\epsilon_{t_0}}$ et $\underline{u^\epsilon}$ celle de $\underline{b^\epsilon_{t_0}}$, on a :

$$\lim_{t_0 \longrightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(y) \nu_{\underline{b^\epsilon_{t_0}}}(y)dy = \lim_{t_0 \longrightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(y) \nu_{\overline{b^\epsilon_{t_0}}}(y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) u^0_\epsilon(y)dy$$

De cela, on en déduit que la loi de X^ϵ_t converge étroitement vers u^0_ϵ. □

Cette méthode est simple et l'on peut d'ailleurs remarquer que les hypothèses de convexité de V'' et de F'' n'ont été utilisées que pour l'unicité de la mesure stationnaire u^0_ϵ. Toutefois, on a dû utiliser à deux reprises la positivité stricte de $\alpha - \vartheta$. D'abord, il fallait l'unicité du zéro de $\frac{\partial}{\partial x} b_\epsilon(t, x)$ et ensuite il fallait que l'opérateur $\mathbb{A}^\epsilon$ soit une contraction sur un espace stable pour la diffusion.

Seconde méthode : en utilisant la propagation du chaos semi-uniforme

On utilise maintenant une méthode liée au système de particules. C'est la Proposition 5.17 ainsi que le Théorème 5.20 qui vont fournir les résultats. On suppose ici que V satisfait les hypothèses (V-1)–(V-11).
On se donne deux mesures symétriques du_0 et dv_0 et on regarde les deux diffusions auto-stabilisantes (0.0.5) partant de du_0 et de dv_0. On note du^ϵ_t la densité de la loi du processus partant de la mesure du_0 et dv^ϵ_t celle du processus partant de dv_0. On sait que ces densités existent d'après le Lemme 2.1.
On va prouver que la distance de Wasserstein entre u^ϵ_t et v^ϵ_t tend vers 0 quand t tend vers l'infini. Ceci impliquera automatiquement la convergence étroite de la loi de la diffusion (0.0.5) partant d'une mesure symétrique quelconque vers l'unique mesure stationnaire symétrique u^0_ϵ.

Théorème 7.11. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-11) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). On suppose de plus que les fonctions V'' et F'' sont convexes et que la variable aléatoire X_0 est symétrique et vérifie $\mathbb{E}\left[X_0^{8q^2}\right] < \infty$. Sous la condition $\alpha > \vartheta$, la loi de la diffusion X^ϵ_t définie par* (0.0.5) *converge étroitement vers l'unique mesure invariante symétrique u^0_ϵ quand t tend vers l'infini. De plus, on a l'inégalité :*

$$\mathbb{W}_2\left(u^\epsilon_t; u^0_\epsilon\right)^2 \leq 3\, e^{-2\lambda t} \iint_{\mathbb{R}^2} (x-y)^2\, du_0(x) u^0_\epsilon(y)dy \tag{7.2.7}$$

où λ est une constante strictement positive et où $\mathbb{W}_2(u; v)$ est la distance de Wasserstein entre les mesures u et v.

Démonstration. **Étape 1.** Le Théorème 5.20 nous donne la propagation du chaos uniforme du système de particules à champ moyen (5.4.13) vers le système auto-stabilisant (5.4.12). En d'autres termes, il existe $\eta(N)$ tendant vers 0 quand N tend vers l'infini tel que (5.4.7) soit satisfaite. On peut alors utiliser la Proposition 5.17. En particulier, on a l'inégalité (5.4.9) :

$$\mathbb{W}_2\left(u_t^\epsilon; u_\epsilon^0\right)^2 \leq 6\eta(N) + 3\mathbb{E}\left\{\left|\left|\mu_t^{\epsilon,N,1} - \mu_t^{\epsilon,N,2}\right|\right|_N^2\right\} \tag{7.2.8}$$

où les processus $\mu_t^{\epsilon,N,1}$ et $\mu_t^{\epsilon,N,2}$ sont définis dans (5.2.3), les particules du premier au temps $t = 0$ étant toutes indépendantes et de loi du_0 et les particules du second au temps $t = 0$ étant toutes indépendantes et de loi du_ϵ^0, l'unique mesure stationnaire symétrique de (0.0.5). On prend à nouveau la limite supérieure pour t tendant vers l'infini. Toutefois, le paramètre t intervient également dans le terme de gauche de l'inégalité (7.2.8). Soit ρ strictement positif. Pour N assez grand, $6\eta(N) \leq \frac{\rho}{2}$. Puis, comme on a convergence en loi de $\mu_t^{\epsilon,N,2}$ et de $\mu_t^{\epsilon,N,1}$ vers l'unique mesure stationnaire du système de particules, il existe $T(N)$ tel que $3\mathbb{E}\left\{\left|\left|\mu_t^{\epsilon,N,1} - \mu_t^{\epsilon,N,2}\right|\right|_N^2\right\} \leq \frac{\rho}{2}$ pour tout $t \geq T(N)$ ce qui implique donc $\mathbb{W}_2\left(u_t^\epsilon; u_\epsilon^0\right)^2 \leq \rho$ pour t assez grand.

On a donc bien la convergence annoncée.

Étape 2. On prouve maintenant que la convergence est de type exponentiel. En d'autres termes, montrons que l'inégalité (7.2.7) est vraie. On applique la formule d'Itô à la quantité $\left|\left|\mu_t^{\epsilon,N,1} - \mu_t^{\epsilon,N,2}\right|\right|_N^2$:

$$\begin{aligned}\left|\left|\mu_t^{\epsilon,N,1} - \mu_t^{\epsilon,N,2}\right|\right|_N^2 &= \left|\left|\mu_0^{\epsilon,N,1} - \mu_0^{\epsilon,N,2}\right|\right|_N^2 \\ &\quad - 2\int_0^t \left\langle \nabla\Upsilon^N\left(\mu_s^{\epsilon,N,1}\right) - \nabla\Upsilon^N\left(\mu_s^{\epsilon,N,2}\right) ; \mu_s^{\epsilon,N,1} - \mu_s^{\epsilon,N,2}\right\rangle_N ds\end{aligned}$$

le produit scalaire $\langle\,;\,\rangle_N$ étant associé à la norme $||.||_N$. Comme $\alpha > \vartheta$, le métapotentiel Υ^N défini par

$$\Upsilon^N(x_1, \cdots, x_n) := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \left(V(x_i) + \frac{\alpha}{2}x_i^2\right) + \frac{1}{2N^2}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N F_0(x_i - x_j)$$

est uniformément strictement convexe sur $\mathbb{R}^N$. Ainsi il existe une constante $\lambda > 0$ telle que :

$$\left|\left|\mu_t^{\epsilon,N,1} - \mu_t^{\epsilon,N,2}\right|\right|_N^2 \leq \left|\left|\mu_0^{\epsilon,N,1} - \mu_0^{\epsilon,N,2}\right|\right|_N^2 - 2\lambda\int_0^t \left|\left|\mu_s^{\epsilon,N,1} - \mu_s^{\epsilon,N,2}\right|\right|_N^2 ds\,.$$

On applique le Lemme de Grönwall et il vient

$$\left|\left|\mu_t^{\epsilon,N,1} - \mu_t^{\epsilon,N,2}\right|\right|_N^2 \leq \left|\left|\mu_0^{\epsilon,N,1} - \mu_0^{\epsilon,N,2}\right|\right|_N^2 \exp\left[-2\lambda t\right]\,.$$

Or, par définition, on peut écrire :

$$\left|\left|\mu_0^{\epsilon,N,1} - \mu_0^{\epsilon,N,2}\right|\right|_N^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(X_0^i - X^i\right)^2$$

où X_0^i suit la loi du_0 et X^i suit la loi du_ϵ^0. Ainsi lorsque N tend vers l'infini, comme les $2N$ particules initiales sont indépendantes de par leur construction, la loi des grands nombres implique

$$\lim_{N\longrightarrow+\infty}\left|\left|\mu_0^{\epsilon,N,1} - \mu_0^{\epsilon,N,2}\right|\right|_N^2 = \iint_{\mathbb{R}^2}(x-y)^2\, du_0(x)u_\epsilon^0(y)dy\,.$$

Par conséquent, si l'on fait tendre N vers l'infini dans l'inégalité (7.2.8), on obtient

$$\mathbb{W}_2\left(u_t^\epsilon; u_\epsilon^0\right)^2 \leq 3\, e^{-2\lambda t}\iint_{\mathbb{R}^2}(x-y)^2\, du_0(x)u_\epsilon^0(y)dxdy\,.$$

□

Cette méthode était plus simple que la précédente mais elle a présupposé les résultats du Chapitre 5.

7.2.2 Dans le cas critique $\boldsymbol{\alpha = \vartheta}$

On utilise à nouveau la propagation du chaos semi-uniforme. Cette fois, elle sera utilisée pour le cas où l'on se trouve sur le dioptre $\alpha = \vartheta$. On va voir que l'on a à nouveau la convergence en loi du processus vers sa mesure stationnaire symétrique mais la vitesse de convergence ne sera pas exponentielle.

Théorème 7.12. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-11) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). On suppose de plus que les fonctions V'' et F'' sont convexes et que la variable aléatoire X_0 est symétrique et vérifie $\mathbb{E}\left[X_0^{8q^2}\right] < \infty$. Sous la condition $\alpha = \vartheta$, la loi de la diffusion X_t^ϵ définie par* (0.0.5) *converge étroitement vers l'unique mesure invariante symétrique u_ϵ^0. On a de plus l'inégalité suivante :*

$$\mathbb{W}\left(u_t^\epsilon\,;\, u_\epsilon^0\right)^2 \;\leq\; \frac{3\iint_{\mathbb{R}^2}(x-y)^2\, du_0(x)u_\epsilon^0(y)dxdy}{\left[1 + 2\lambda t\left(\iint_{\mathbb{R}^2}(x-y)^2\, du_0(x)u_\epsilon^0(y)dxdy\right)^{l_0-1}\right]^{\frac{1}{l_0-1}}} \qquad (7.2.9)$$

où $\lambda > 0$, $l_0 := \min\left\{k \geq 2 \mid V^{(2l)}(0) > 0\right\}$ et $\mathbb{W}_2(u;v)$ est la distance de Wasserstein entre u et v.

Démonstration. La preuve est similaire à celle du Théorème 7.11. Toutefois, on ne peut obtenir l'inégalité (7.2.7) vu que l'on ne dispose pas de la stricte convexité uniforme. Ici, quels que soient μ^1 et μ^2 dans $\mathbb{R}$, on a

$$\left\langle \nabla\Upsilon^N\left(\mu^1\right) - \nabla\Upsilon^N\left(\mu^2\right)\,;\,\mu^1 - \mu^2\right\rangle \geq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(V_0'(\mu_i^1) - V_0'(\mu_i^2)\right)\left(\mu_i^1 - \mu_i^2\right)$$

où $V_0(x) = V(x) + \frac{\alpha}{2}x^2$. Or, comme V'' est convexe, il existe deux constantes $\lambda > 0$ et $l \geq 2$ telles que $\left(V_0'(x) - V_0'(y)\right)(x-y) \geq \lambda (x-y)^{2l}$ pour tous les réels x et y. D'où :

$$\left|\left|\mu_t^{\epsilon,N,1} - \mu_t^{\epsilon,N,2}\right|\right|_N^2 \leq \left|\left|\mu_0^{\epsilon,N,1} - \mu_0^{\epsilon,N,2}\right|\right|_N^2 - 2\lambda \int_0^t \left|\left|\mu_s^{\epsilon,N,1} - \mu_s^{\epsilon,N,2}\right|\right|_N^{2l} ds\,.$$

On pose $\Psi(t) := \left|\left|\mu_t^{\epsilon,N,1} - \mu_t^{\epsilon,N,2}\right|\right|_N^2$. On est ainsi amené à étudier l'inéquation différentielle

$$\Psi(t) \leq \Psi(0) - 2\lambda \int_0^t \Psi(s)^l ds\,.$$

L'équation différentielle associée $\chi(t) = \Psi(0) - 2\lambda \int_0^t \chi(s)^l ds$ a pour solution unique $\chi(t) = \dfrac{\Psi(0)}{\left[1 + 2\lambda(l-1)\Psi(0)^{l-1}t\right]^{\frac{1}{l-1}}}$. On obtient l'inégalité

$$\Psi(t) - \chi(t) \leq -2\lambda \int_0^t \left(\Psi(s)^l - \chi(s)^l\right) ds\,.$$

En utilisant la positivité stricte de χ ainsi que la positivité de Ψ, on en déduit que pour tout $T > 0$, il existe une constante $c_T > 0$ telle que

$$\Psi(t) - \chi(t) \leq -2\lambda c_T \int_0^t \left(\Psi(s) - \chi(s)\right) ds$$

quel que soit $t \leq T$. Par conséquent, $\Psi(t) \leq \chi(t)$ pour tout $t > 0$ et on obtient (7.2.9) ce qui implique la convergence en loi de la diffusion vers sa mesure stationnaire symétrique. □

Remarque 7.13. *Il est important de rappeler que le système de particules qui a été considéré afin de prouver les Théorèmes 7.11 et 7.12 n'est pas celui associé à la diffusion* (0.0.5)*. Il s'agit en réalité d'un système de particules qui rend compte de la diffusion auto-stabilisante si l'on part d'une loi symétrique mais qui est fondamentalement différent dans sa dynamique si bien que l'on n'a pas la convergence du processus si la loi initiale n'est pas symétrique, même si $\alpha \geq \vartheta$.*

7.3 Temps de sortie si X_0 suit une mesure stationnaire u_ϵ

Dans la suite du chapitre, on ne suppose pas de manière générale que V soit symétrique ni que V'' soit convexe. On suppose uniquement que V vérifie les hypothèses (V-1)–(V-7) ainsi que (V-10). On introduit maintenant quelques notations. Les familles de mesures stationnaires $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ considérées vérifient par la suite la condition (H) c'est-à-dire que la suite $\int_{\mathbb{R}} x^{2n} u_\epsilon(x)dx$ est bornée où l'entier n est introduit dans (0.0.9).

Définition 7.14. 1. *Soit $T > 0$. Soient deux fonctions continues f et g sur l'intervalle $[0;T]$. On pose :*

$$\rho_T(f,g) := \sup_{0\leq t\leq T} |f(t)-g(t)| \ .$$

2. *On note $\mathcal{H}_T^1$ l'espace de Cameron-Martin des fonctions absolument continues dont la dérivée est L^2 sur l'intervalle $[0;T]$.*
3. *On note $X^{\epsilon,y}$ le processus défini par*

$$X_t^{\epsilon,y} \ = \ y+\sqrt{\epsilon}B_t - \int_0^t \left[V'\left(X_s^{\epsilon,y}\right) + F' * u_s^\epsilon\left(X_s^{\epsilon,y}\right)\right] ds$$

où $u_s^\epsilon := \mathcal{L}\left(X_s^\epsilon\right)$, c'est-à-dire le processus défini dans (0.0.5).

Le processus $X^{\epsilon,y}$ est en fait la pénalisation du processus X^ϵ par l'évènement $\{X_0^\epsilon = y\}$. On peut d'ailleurs écrire :

$$d\mathbb{P}\left(X_t^\epsilon = x\right) = \int_{y\in\mathbb{R}} d\mathbb{P}\left(X_t^{\epsilon,y}=x\right) d\mathbb{P}\left(X_0^\epsilon = y\right) \ .$$

Par la suite, on suppose que la loi initiale est invariante ainsi le processus pénalisé est un processus de Kolmogorov partant de la loi initiale δ_y. Si la loi u_ϵ est symétrique, on la note u_ϵ^0. Si elle est excentrée autour d'un point critique a_0 du potentiel de confinement V, on la note $u_\epsilon^{a_0}$. On ne considèrera pas d'autres types de mesures stationnaires.

Une autre façon d'aborder le processus $\left(X_t^{\epsilon,y}\right)_{t\geq 0}$ est d'introduire le temps d'arrêt $\tau_y := \inf\{t\geq 0 \mid X_t^\epsilon = y\}$. Il est alors possible d'écrire $X_t^{\epsilon,y} = X_{\tau_y+t}^\epsilon$, quelle que soit la variable initiale X_0 vérifiant $\mathbb{E}\left[X_0^{8q^2}\right] < \infty$. En effet, dans cette section, on suppose que la variable aléatoire X_0 suit une loi stationnaire u_ϵ. Par conséquent, la loi de X_s^ϵ est u_ϵ pour tout $s\geq 0$.

7.3.1 Principe de grandes déviations du processus $\boldsymbol{X^{\epsilon,y}}$

Lorsque la loi initiale est stationnaire, la diffusion (7.3.1) s'écrit simplement :

$$X_t^{\epsilon,y} = y+\sqrt{\epsilon}B_t - \int_0^t W_\epsilon'\left(X_s^{\epsilon,y}\right) ds$$

où W_ϵ est le pseudo-potentiel associé à la mesure invariante u_ϵ par (3.2.1) : $W_\epsilon := V(x) + F * u_\epsilon - F * u_\epsilon(0)$. On suppose que la famille de mesures $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ converge vers une mesure $u_0^{a_0} := \delta_{a_0}$ où a_0 est un point critique de V ou vers une mesure $u_0^0 := \frac{1}{2}\delta_{x_0} + \frac{1}{2}\delta_{-x_0}$; x_0 étant l'unique solution positive du système (3.4.10) lorsque V'' et F'' sont convexes et lorsque le potentiel V est symétrique.

Remarque 7.15. *Le pseudo-potentiel W_ϵ (et ses dérivées) converge uniformément sur tout compact vers le pseudo-potentiel limite $W_0 := V + F * u_0 - F * u_0(0)$ (et ses dérivées) d'après la Proposition 3.10 et l'hypothèse (H). En effet, le résultat de la Proposition peut être étendu au-delà d'une sous-suite vu que u_ϵ converge vers u_0.*

Il est alors naturel de s'intéresser à la diffusion

$$\begin{aligned} Y_t^{\epsilon,y} &= y + \sqrt{\epsilon}B_t - \int_0^t \Big[V'(Y_s^{\epsilon,y}) + F' * u_0(Y_s^{\epsilon,y})\Big]ds \\ &= y + \sqrt{\epsilon}B_t - \int_0^t W_0'(Y_s^{\epsilon,y})ds\,. \end{aligned}$$

Cette dernière équation est plus simple et on en connait le temps de sortie. On va maintenant prouver que les deux processus $X^{\epsilon,y}$ et $Y^{\epsilon,y}$ sont proches.

Lemme 7.16. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-7) ainsi que (V-10) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). Quels que soient $T \geq 0$ et $y \in \mathbb{R}$, les processus $(X_t^{\epsilon,y})_{t\in[0;T]}$ et $(Y_t^{\epsilon,y})_{t\in[0;T]}$ sont exponentiellement équivalents. En d'autres termes, quel que soit $\delta > 0$, on a le résultat asymptotique suivant :*

$$\limsup_{\epsilon\longrightarrow 0} \epsilon \ln \mathbb{P}\Big[\rho_T(X^{\epsilon,y}, Y^{\epsilon,y}) \geq \delta\Big] = -\infty \tag{7.3.1}$$

où la quantité ρ_T a été définie dans 7.14.

Démonstration. Comme les deux processus sont définis à partir du même mouvement brownien, le théorème de Jensen puis l'inégalité triangulaire nous donnent

$$|X_t^{\epsilon,y} - Y_t^{\epsilon,y}| \leq \int_0^t |W_\epsilon'(X_s^{\epsilon,y}) - W_0'(X_s^{\epsilon,y})|ds + \int_0^t |W_0'(X_s^{\epsilon,y}) - W_0'(Y_s^{\epsilon,y})|ds\,.$$

Soit $R > 0$ tel que $|y| < 2R$. En notant $\mathbb{B}(0;R)$ la boule de centre 0 et de rayon R c'est-à-dire l'intervalle $]-R;R[$, on pose $\sigma_R(\epsilon)$ le premier temps de sortie de $X^{\epsilon,y}$ ou $Y^{\epsilon,y}$ de cette boule :

$$\sigma_R(\epsilon) := \min\Big\{t \geq 0 \ ;\ (X_t^{\epsilon,y}, Y_t^{\epsilon,y}) \notin]-R\,;\,R[^2\Big\}\,.$$

Les deux potentiels W_ϵ et W_0 ainsi que leurs dérivées sont lipschitziennes sur $\mathbb{B}(0;R)$ de constante $C(R)$ indépendante de ϵ car W_ϵ et ses dérivées convergent uniformément sur tout compact vers W_0 et ses dérivées comme il a été noté dans la Remarque 7.15. Cette indépendance est évidente pour la fonction W_0 ce qui explique l'indépendance pour la fonction W_ϵ. Par conséquent, quel que soit $t \leq \sigma_R(\epsilon)$, on a l'inégalité $|W_0'(X_s^{\epsilon,y}) - W_0'(Y_s^{\epsilon,y})| \leq C(R)|X_s^{\epsilon,y} - Y_s^{\epsilon,y}|$. D'où :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\{t\leq\sigma_R(\epsilon)\}}\,|X_t^{\epsilon,y} - Y_t^{\epsilon,y}| \leq & \mathbf{1}_{\{t\leq\sigma_R(\epsilon)\}}\,\Big\{\int_0^t |W_\epsilon'(X_s^{\epsilon,y}) - W_0'(X_s^{\epsilon,y})|ds \\ & + C(R)\int_0^t |X_s^{\epsilon,y} - Y_s^{\epsilon,y}|ds\Big\} \\ \leq & \mathbf{1}_{\{t\leq\sigma_R(\epsilon)\}}\,\int_0^t |W_\epsilon'(X_s^{\epsilon,y}) - W_0'(X_s^{\epsilon,y})|ds \\ & + C(R)\int_0^t \mathbf{1}_{\{s\leq\sigma_R(\epsilon)\}}\,|X_s^{\epsilon,y} - Y_s^{\epsilon,y}|ds\,. \end{aligned}$$

L'application du Lemme de Grönwall fournit

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{\{t\leq\sigma_R(\epsilon)\}}\,|X_t^{\epsilon,y}-Y_t^{\epsilon,y}| &\leq \mathbf{1}_{\{t\leq\sigma_R(\epsilon)\}}\,\exp\left[C(R)t\right]\int_0^t |W'_\epsilon(X_s^{\epsilon,y})-W'_0(X_s^{\epsilon,y})|ds\\ &\leq \mathbf{1}_{\{t\leq\sigma_R(\epsilon)\}}\,t\,\exp\left[C(R)t\right]\sup_{z\in\mathbb{B}(0;R)}|W'_\epsilon(z)-W'_0(z)|\\ &\leq \mathbf{1}_{\{t\leq\sigma_R(\epsilon)\}}\,C(R,t)\,\tau\left(\epsilon\right) \qquad (7.3.2)\end{aligned}$$

où $\tau\left(\epsilon\right)$ désigne l'ordre de la vitesse de convergence de la mesure u_ϵ vers la mesure u_0 et où $C(R,t)$ est une constante ne dépendant pas de ϵ. On ne spécifie pas $\tau(\epsilon)$ puisque la seule chose dont on ait besoin est sa convergence vers 0. Par conséquent, on a le résultat suivant :

$$\mathbb{P}\left(\{\rho_T(X^{\epsilon,y}-Y^{\epsilon,y})\geq\delta\}\bigcap\{T<\sigma_R(\epsilon)\}\right)=0$$

dès que ϵ est assez petit à savoir dès que $\tau(\epsilon)<\frac{\delta}{C(R,T)}$. On va maintenant regarder l'autre partie de l'évènement rare à savoir

$$\mathbb{P}\left(\{\rho_T(X^{\epsilon,y}-Y^{\epsilon,y})\geq\delta\}\bigcap\{T\geq\sigma_R(\epsilon)\}\right).$$

Pour cela, on introduit $\sigma'_R(\epsilon)$ le premier temps de sortie du processus $Y^{\epsilon,y}$ de la boule $\mathbb{B}(0,\frac{R}{2})$. On va scinder l'évènement rare selon que l'on ait $T\leq\sigma'_R(\epsilon)$ ou $T>\sigma'_R\left(\epsilon\right)$. On a :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\{\rho_T(X^{\epsilon,y}-Y^{\epsilon,y})\geq\delta\}\bigcap\{T\geq\sigma_R(\epsilon)\}\right)\\ &\leq\mathbb{P}\left(\{\rho_T(X^{\epsilon,y}-Y^{\epsilon,y})\geq\delta\}\bigcap\{T\geq\sigma_R(\epsilon)\}\bigcap\{T\geq\sigma'_R(\epsilon)\}\right)\\ &+\mathbb{P}\left(\{\rho_T(X^{\epsilon,y}-Y^{\epsilon,y})\geq\delta\}\bigcap\{T\geq\sigma_R(\epsilon)\}\bigcap\{T\leq\sigma'_R(\epsilon)\}\right).\end{aligned}$$

Or, le premier des deux évènements est inclus dans l'évènement $\{T\geq\sigma'_R(\epsilon)\}$. Quant au second, quel que soit $t\leq T$, on a $Y_t^{\epsilon,y}\in\mathbb{B}\left(0;\frac{R}{2}\right)$ et en particulier lorsque $t=\sigma_R$. Par conséquent, le second évènement est inclus dans l'évènement $\left\{\rho_{[0;\sigma_R(\epsilon)]}(X^{\epsilon,y}-Y^{\epsilon,y})\geq\frac{R}{2}\right\}$ dont la probabilité est exactement égale à 0 dès que ϵ est assez petit vu que (7.3.2) est uniforme en $t\in[0;T]$. On en déduit donc

$$\mathbb{P}\left(\{\rho_T(X^{\epsilon,y}-Y^{\epsilon,y})\geq\delta\}\bigcap\{T\geq\sigma_R\}\right)\leq\mathbb{P}\left(\{T\geq\sigma'_R(\epsilon)\}\right)$$

dès que ϵ est assez petit. Comme le processus $Y^{\epsilon,y}$ vérifie un principe de grandes déviations avec la bonne fonction de taux $I_{y,T}$, définie dans (B.2), en remplaçant U par W_0, on a l'inégalité (B.4). Et, la Proposition B.4 amène :

$$\limsup_{\epsilon\longrightarrow0}\epsilon\ln\mathbb{P}\left(\sigma'_R(\epsilon)\leq T\right)=-2H_R \qquad (7.3.3)$$

où $H_R:=\min\left\{W_0\left(\frac{R}{2}\right);W_0\left(-\frac{R}{2}\right)\right\}$. Par conséquent, pour tout $R>2|y|$:

$$\limsup_{\epsilon\longrightarrow0}\epsilon\ln\mathbb{P}(\rho_T(X^{\epsilon,y},Y^{\epsilon,y})\geq\delta)\leq-2H_R\,.$$

Comme H_R tend vers l'infini quand R tend vers l'infini, quel que soit $\delta > 0$, on a bien l'équivalence exponentielle entre les deux processus $X^{\epsilon,y}$ et $Y^{\epsilon,y}$ à savoir la limite (7.3.1). □

On peut alors en déduire que $X^{\epsilon,y}$ vérifie le même principe de grandes déviations que $Y^{\epsilon,y}$ ce qui est l'une des deux conditions exigées pour l'application du Théorème B.6.

Proposition 7.17. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-7) ainsi que (V-10) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). Quels que soient $T > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, le processus $(X_t^{\epsilon,y})_{t\in[0;T]}$ vérifie un principe de grandes déviations avec pour bonne fonction de taux :*

$$I_T(\Phi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T \left|\dot{\Phi}_t + W_0'(\Phi_t)\right|^2 dt & si\ \Phi \in \mathcal{H}_1^y \\ +\infty & si\ \Phi \notin \mathcal{H}_1^y \end{cases}$$

où $\mathcal{H}_1^y$ est l'espace des fonctions Φ qui sont absolument continues sur $[0;T]$ et telles que $\Phi(0) = y$. En d'autres termes, quels que soient le fermé $\mathcal{F}^y$ et l'ouvert $\mathcal{O}^y$ dans $\mathcal{C}_y([0;T])$, on a les résultats asymptotiques :

$$\begin{aligned} \limsup_{\epsilon\longrightarrow 0} \epsilon \ln \mathbb{P}\left(X^{\epsilon,y} \in \mathcal{F}^y\right) &\leq -\inf_{\Phi\in\mathcal{F}^y} I_T(\Phi) \\ et \quad \liminf_{\epsilon\longrightarrow 0} \epsilon \ln \mathbb{P}\left(X^{\epsilon,y} \in \mathcal{O}^y\right) &\geq -\inf_{\Phi\in\mathcal{O}^y} I_T(\Phi)\,. \end{aligned}$$

Démonstration. On sait d'après le Théorème B.6 que le processus $(Y_t^{\epsilon,y})_{t\in[0;T]}$ vérifie ce principe de grandes déviations. Or, les deux processus $(X_t^{\epsilon,y})_{t\in[0;T]}$ et $(Y_t^{\epsilon,y})_{t\in[0;T]}$ sont exponentiellement équivalents d'après le Lemme 7.16. Le Théorème 4.2.13 de [14] nous informe que le processus $(X_t^{\epsilon,y})_{t\in[0;T]}$ vérifie le même principe de grandes déviations que $(Y_t^{\epsilon,y})_{t\in[0;T]}$. □

Ainsi si la loi de X_0^ϵ suit la mesure invariante, conditionnellement à $\{X_0^\epsilon = y\}$, le comportement de $X^{\epsilon,y}$ est proche de celui de la fonction déterministe $t \mapsto \Psi_t(y)$ avec $\dot{\Psi}_t(y) = -W_0'(\Psi_t(y))$. On a le résultat suivant (qui correspond au Corollaire 5.6.15 dans [14] et dans lequel on peut en trouver une preuve) :

Corollaire 7.18. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-7) ainsi que (V-10) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). Soit un compact K inclus dans $\mathbb{R}$. Alors, quels que soient le fermé $\mathcal{F}^y$ et l'ouvert $\mathcal{O}^y$ dans $\mathcal{C}_y([0;T])$, on dispose des inégalités*

$$\begin{aligned} \limsup_{\epsilon\longrightarrow 0} \epsilon \ln \left[\sup_{y\in K} \mathbb{P}\left(X^{\epsilon,y} \in \mathcal{F}^y\right)\right] &\leq -\inf_{y\in K}\inf_{\Phi\in\mathcal{F}^y} I_T(\Phi) \\ et \quad \liminf_{\epsilon\longrightarrow 0} \epsilon \ln \left[\inf_{y\in K} \mathbb{P}\left(X^{\epsilon,y} \in \mathcal{O}^y\right)\right] &\geq -\sup_{y\in K}\inf_{\Phi\in\mathcal{O}^y} I_T(\Phi)\,. \end{aligned}$$

7.3.2 Coût de sortie

Après avoir établi un principe de grandes déviations, on définit naturellement une fonction de coût qui ne sera ni plus ni moins que la tension entre deux points suivant les lignes du pseudo-potentiel intervenant dans la fonction de taux. En effet, intuitivement, il faut remonter le courant ce qui demandera l'énergie correspondant au coût. Comme on a plusieurs mesures stationnaires dans l'étude du processus auto-stabilisant (0.0.5), on a évidemment plusieurs fonctions de coût. Globalement, le processus $(X_t^\epsilon)_{t\in[0;T]}$ satisfait un principe de grandes déviations dont la bonne fonction de taux est :

$$I_T(\Phi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^T \left|\dot{\Phi}_t + W_0'(\Phi_t)\right|^2 dt & \text{si } \Phi \in \mathcal{H}_T^1 \\ +\infty & \text{si } \Phi \notin \mathcal{H}_T^1 \end{cases}$$

où $W_0 := V + F*\mu - V*\mu(0)$, μ étant la limite pour ϵ tendant vers 0 d'une famille de mesures stationnaires $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$. Cette mesure est discrète. On ne suppose rien quant au nombre de points qu'elle charge. Toutefois, on sait déjà qu'elle en charge un ou deux si V'' et F'' sont convexes d'après le quatrième point de la Proposition 3.14.

Définition 7.19. 1. *On définit la fonction de coût pour aller de x à y :*

$$Q^{W_0}(x,y) := \inf_{T\geq 0} \inf_{\Phi\in\mathcal{H}_x^y([0;T])} \frac{1}{2}\int_0^T \left|\dot{\Phi}_t + W_0'(\Phi_t)\right|^2 dt$$

où $\mathcal{H}_x^y([0;T])$ est l'ensemble des fonctions Φ qui sont absolument continues sur $[0;T]$ et telles que $\Phi(0) = x$ et $\Phi(T) = y$.
2. *Soit un intervalle $\mathcal{G} =]y_-; y_+[$ inclus dans le domaine de stabilité d'un puits x_s du pseudo-potentiel W_0. On note $\tau_\epsilon(x) := \inf\{t \geq 0 \mid X_t^{\epsilon,x} \in \partial\mathcal{G}\}$ le premier temps pour lequel le processus auto-stabilisant X^ϵ sort de $\mathcal{G}$ en pénalisant par l'évènement $\{X_0^\epsilon = x\}$.*
3. *On note $Q(x_s, \mathcal{G}^c) := \inf_{z\in\partial\mathcal{G}} Q(x_s, z) = \min\left\{Q(x_s, y^-)\ ;\ Q(x_s, y^+)\right\}$.*

Il est important de bien comprendre que l'on n'a pas $X_0^\epsilon = x$ mais bien que l'on pénalise par la condition $\{X_0^\epsilon = x\}$.

Théorème 7.20. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-7) ainsi que (V-10) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie les hypothèses (F-1)–(F-5). Soit $x \in \mathcal{G}$. Quel que soit $\delta > 0$ arbitrairement petit, on a les résultats asymptotiques suivants :*

$$\lim_{\epsilon\longrightarrow 0} \mathbb{P}\left\{ e^{\frac{1}{\epsilon}\left(Q(x_s;\mathcal{G}^c)-\delta\right)} < \tau_\epsilon(x) < e^{\frac{1}{\epsilon}\left(Q(x_s;\mathcal{G}^c)+\delta\right)} \right\} = 1 \qquad (7.3.4)$$

ainsi que
$$\lim_{\epsilon\longrightarrow 0} \epsilon \ln \mathbb{E}\Big[\tau_\epsilon(x)\Big] = Q(x_s;\mathcal{G}^c)\ . \qquad (7.3.5)$$

De plus, on peut connaître le lieu de sortie :

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \mathbb{P}\left[X^{\epsilon,x}_{\tau_\epsilon(x)} = y_-\right] = \begin{cases} 0 & si \quad W_0(y_-) > W_0(y_+) \\ 1 & si \quad W_0(y_-) < W_0(y_+) \end{cases} . \tag{7.3.6}$$

Il s'agit d'une conséquence directe du Théorème B.6. Et, on peut évaluer $Q(x_s; \mathcal{G}^c)$ grâce au Corollaire suivant :

Corollaire 7.21. *Soit un potentiel de confinement V qui vérifie les hypothèses (V-1)–(V-7) ainsi que (V-10) et un potentiel d'intéraction F qui vérifie (F-1)–(F-5).*
1. *Soit a_0 un point critique de V tel qu'il existe une mesure stationnaire excentrée $u_\epsilon^{a_0}$ qui converge vers δ_{a_0}. Alors $W_0 := V + F(. - a_0) - F(a_0)$. Soit y un réel dans le domaine de stabilité de a_0 par rapport au pseudo-potentiel limite W_0. On a par conséquent $Q^{W_0}(a_0, y) = 2(V(y) - V(a_0) + F(y - a_0))$.*
2. *Supposons que V est symétrique mais aussi que l'on a V'' et F'' convexes. Dans le cas où $\alpha \geq \vartheta$, la mesure u_ϵ^0 converge vers $u_0^0 = \delta_0$ quand ϵ tend vers 0 d'après le Théorème 3.28 et alors $W_0 := V + F$. Il s'agit d'une fonction convexe donc tout réel est dans le domaine d'attraction de 0. Par conséquent, quel que soit $y \in \mathbb{R}$, on a $Q^{W_0}(0, y) = 2(V(y) + F(y))$.*
3. *Supposons que V soit symétrique et que V'' et F'' soient convexes. Dans le cas où $\alpha < \vartheta$, la mesure u_ϵ^0 converge vers $u_0^0 = \frac{1}{2}\delta_{x_0} + \frac{1}{2}\delta_{-x_0}$ quand ϵ tend vers 0 d'après le Théorème 3.28 où $x_0 > 0$ est l'unique solution du système* (3.4.10)*. Par conséquent, $W_0 := V + \frac{1}{2}F(. - x_0) + \frac{1}{2}F(. + x_0) - F(x_0)$. Tout réel strictement positif est dans le domaine d'attraction de x_0. Par conséquent, quel que soit $y \in \mathbb{R}_+$, on a $Q^{W_0}(x_0, y) = 2V(y) - 2V(x_0) + F(y - x_0) + F(y + x_0) - F(2x_0)$.*

Il s'agit d'une conséquence directe de la Proposition B.4

7.3.3 Influence de l'auto-stabilisation sur le temps de sortie $\boldsymbol{\tau_\epsilon(x)}$

On connait le temps de sortie lorsqu'il n'y a pas d'auto-stabilisation. On regarde donc l'influence de la perturbation non-linéaire sur le temps de sortie.

Si la loi initiale est de la forme $\boldsymbol{u_\epsilon^{a_0}}$ où $\boldsymbol{a_0}$ est un point critique de $\boldsymbol{V}$

Dans le cas où il n'y a pas d'auto-stabilisation, c'est-à-dire lorsque F est identiquement nulle, il y a une unique mesure stationnaire que l'on note v_ϵ et dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est $\frac{\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}V\right]}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{2}{\epsilon}V(y)\right]dy}$.
Premièrement, on sait que les seuls points critiques stables quand il n'y a pas d'auto-stabilisation sont les puits de V. Or, sous des conditions simples, avec auto-stabilisation, même les bosses peuvent être stables. C'est en particulier le cas si F' est linéaire et si $\alpha > \vartheta$.
On note $\tau_\epsilon^0(x)$ le temps de sortie en partant d'un point x appartenant à l'ouvert

$\mathcal{O}$ inclus dans le domaine de stabilité pour le potentiel V de l'un de ses puits a_0. Le temps $\tau_\epsilon^0(x)$ vérifie :

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \epsilon \ln \mathbb{E}\left[\tau_\epsilon^0(x)\right] = 2 \min\left\{V(y^-)\,;\, V(y^+)\right\} - 2V(a_0) \tag{7.3.7}$$

où $\mathcal{O} =:]y^-; y^+[$. Or, dans le cas où F n'est pas identiquement nulle, en supposant que y^- et y^+ sont dans le domaine de stabilité de a_0 pour le pseudo-potentiel $W_0 := V + F(\boldsymbol{.} - a_0) - F(a_0)$, on a

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \epsilon \ln \mathbb{E}\left[\tau_\epsilon(x)\right] = 2 \min\left\{V(y^-) + F(y^- - a_0)\,;\, V(y^+) + F(y^+ - a_0)\right\} \\ - 2V(a_0)\,.\end{aligned} \tag{7.3.8}$$

Par conséquent, le temps de sortie $\tau_\epsilon(x)$ est plus élevé lorsque l'on a une auto-stabilisation et que l'on part d'une mesure stationnaire excentrée autour d'un puits a_0 que lorsqu'il n'y a pas d'auto-stabilisation. En d'autres termes, l'auto-stabilisation induit une stabilisation.

Si la loi initiale est symétrique avec $\boldsymbol{\alpha \geq \vartheta}$

On demande maintenant implicitement à V d'être symétrique. On suppose que les fonctions V'' et F'' sont convexes. Immédiatement, on sait que le potentiel V a exactement deux puits : a et $-a$. On sait d'après la Remarque 3.15 que u_ϵ^0 converge vers δ_0. La première influence notable de l'auto-stabilisation est le fait que 0 est l'unique puits du pseudo-potentiel. Ainsi le point de stabilité est 0 alors que sans auto-stabilisation, il y avait deux points de stabilité : a et $-a$. On se donne $R > a$ et on cherche le temps de sortie de $]-R; R[$ en partant de $x \in]-R; R[$. Le Théorème 7.20 et le Corollaire 7.21 impliquent

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \epsilon \ln \mathbb{E}\left[\tau_\epsilon(x)\right] = 2V(R) + 2F(R)\,. \tag{7.3.9}$$

Or, si l'on considère le processus sans stabilisation, en reprenant entièrement la preuve du Théorème B.6, on obtient

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \epsilon \ln \mathbb{E}\left[\tau_\epsilon^0(x)\right] = 2V(R) - 2V(a)\,. \tag{7.3.10}$$

Or, comme V'' et F'' sont convexes et comme $V''(0) + F''(0) = -\vartheta + \alpha \geq 0$, on a $F(a) \geq -V(a)$. Et, F est croissante strictement sur $\mathbb{R}_+$ et $R > a$ donc à nouveau, l'ajout de l'auto-stabilisation rend le temps de sortie de $]-R; R[$ plus grand. Par conséquent, l'auto-stabilisation induit une stabilisation du système.

Si la loi initiale est symétrique avec $\boldsymbol{\alpha < \vartheta}$

On demande à nouveau implicitement à V d'être symétrique. On suppose que les fonctions V'' et F'' sont convexes. Le potentiel V a encore exactement deux puits : a et $-a$. On sait d'après le Théorème 3.28 que u_ϵ^0 converge vers $\frac{1}{2}\delta_{x_0} + \frac{1}{2}\delta_{-x_0}$.

La première influence notable de l'auto-stabilisation est le fait que les deux points de stabilité soient devenus x_0 et $-x_0$ alors que sans auto-stabilisation, il y avait deux points de stabilité : a et $-a$. On se donne $R > a$ et on cherche le temps de sortie de $]-R;R[$ en partant de $x \in]-R;R[$. Le Théorème 7.20 et le Corollaire 7.21 impliquent

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \epsilon \ln \mathbb{E}\left[\tau_\epsilon(x)\right] &= 2V(R) - 2V(x_0) \\ &+ F(R-x_0) + F(R+x_0) - F(2x_0)\,. \end{aligned} \tag{7.3.11}$$

Or, si l'on considère le processus sans stabilisation, on a déjà vu que l'on avait :

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \epsilon \ln \mathbb{E}\left[\tau_\epsilon^0(x)\right] = 2V(R) - 2V(a)\,. \tag{7.3.12}$$

On introduit la quantité

$$\begin{aligned} \Delta(R) &:= \{2V(R) - 2V(x_0) + F(R-x_0) + F(R+x_0) - F(2x_0)\} \\ &- \{2V(R) - 2V(a)\}\ . \end{aligned}$$

Quel que soit $x_0 \in [0;a]$, la fonction Δ est croissante strictement. Donc $\Delta(R) > \Delta(a) = F(x_0+a)+F(x_0-a)-F(2x_0)$. Comme $a \geq x_0$, on a $F'(x_0+a)+F'(a-x_0) > 0$ d'où $\Delta(a) \geq F(a-x_0) \geq 0$. Par conséquent, le temps de sortie est plus élevé lorsque l'on ajoute une auto-stabilisation et ainsi à nouveau l'auto-stabilisation induit une stabilisation lorsque l'on cherche à sortir d'un domaine contenant tous les points de stabilité.

Intéressons-nous maintenant au temps de sortie de $\mathcal{G} := \mathbb{R}_+^*$. Soit $\tau_\epsilon^+(x)$ le plus petit temps de sortie de $\mathcal{G}$. Et, on note $\tau_\epsilon^{+,0}(x)$ le plus petit temps de sortie de $\mathcal{G}$ lorsqu'il n'y a pas d'auto-stabilisation. Le Théorème 7.20 et le Corollaire 7.21 impliquent

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \epsilon \ln \left\{\mathbb{E}\left[\tau_\epsilon^+(x)\right]\right\} &= 2V(0) - 2V(x_0) \\ &+ F(0-x_0) + F(0+x_0) - F(2x_0) \\ &= -2V(x_0) + 2F(x_0) - F(2x_0)\,. \end{aligned} \tag{7.3.13}$$

Or, si l'on considère le processus sans auto-stabilisation, le Théorème B.6 implique :

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \epsilon \ln \mathbb{E}\left[\tau_\epsilon^{+,0}(x)\right] = 2V(0) - 2V(a) = -2V(a)\,. \tag{7.3.14}$$

Comme F est convexe, $2F(x_0) - F(2x_0) < 0$. Et, comme le minimum global de V sur $\mathbb{R}$ est $V(a)$, on a $V(a) - V(x_0) < 0$. D'où :

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \epsilon \left\{\ln \mathbb{E}\left[\tau_\epsilon^+(x)\right] - \ln \mathbb{E}\left[\tau_\epsilon^{+,0}(x)\right]\right\} < 0\,.$$

Ainsi le temps pour sortir du domaine de stabilité $\mathbb{R}_+^*$ est plus petit lorsque l'on ajoute une auto-stabilisation. *En d'autres termes, l'auto-stabilisation induit une déstabilisation de chacun des deux domaines d'attraction.*

ANNEXE

A. CALCULS ASYMPTOTIQUES LIÉS À LA MÉTHODE DE LAPLACE

On fournit ici différents résultats asymptotiques qui sont utilisés dans certaines preuves de l'étude. Ils sont associés à la méthode classique de Laplace.

Lemme A.1. *Soit $M > 0$. On suppose que U est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[M, \infty[$ ainsi que $U(x) \neq 0$ et $U''(x) > 0$ pour tout $x \in [M, \infty[$ et $\lim_{x\to\infty} \frac{U''(x)}{(U'(x))^2} = 0$. Si $x \mapsto e^{-U(x)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ alors quel que soit $x \geq M$:*

$$\int_x^{+\infty} e^{-U(t)}dt \approx \frac{e^{-U(x)}}{U'(x)} \quad et \quad \int_M^x e^{U(t)}dt \approx \frac{e^{U(x)}}{U'(x)} \quad pour \quad x \to \infty\,. \tag{A.1}$$

Démonstration. Comme l'application $x \mapsto e^{-U(x)}$ est intégrable et comme ces propriétés sont satisfaites : $U(x) \neq 0$ et $U''(x) > 0$ pour $x \geq M$, on sait que $\lim_{x\to\infty} U(x) = +\infty$. Alors, il existe $M_0 > M$ tel que $U'(x) > 0$ pour tout $x \geq M_0$. Par conséquent, pour $t \geq M_0$ on peut écrire

$$e^{-U(t)} = \left(-\frac{e^{-U(t)}}{U'(t)}\right)' - \frac{U''(t)}{(U'(t))^2}e^{-U(t)}\,.$$

En conséquence,

$$I := \int_x^{\infty} e^{-U(t)}dt = \frac{e^{-U(x)}}{U'(x)} - \int_x^{\infty} \frac{U''(t)}{(U'(t))^2}e^{-U(t)}dt, \quad x \geq M_0\,.$$

En utilisant les hypothèses, on a $\int_x^{\infty} \frac{U''(t)}{(U'(t))^2}e^{-U(t)}dt \geq 0$ ce qui entraîne $I \leq e^{-U(x)}U'(x)^{-1}$. De plus $\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} \frac{U''(x)}{(U'(x))^2} = 0$. On en déduit que pour tout $\delta > 0$, il existe $M_1(\delta) > M_0$ tel que

$$\int_x^{\infty} \frac{U''(t)}{(U'(t))^2}e^{-U(t)}dt \leq \delta \int_x^{\infty} e^{-U(t)}dt \leq \delta\frac{e^{-U(x)}}{U'(x)}\,.$$

Ainsi on a $I \geq (1-\delta)\frac{e^{-U(x)}}{U'(x)}$. L'équivalence de I dans (A.1) en est facilement déduite. La seconde s'obtient avec des arguments similaires. □

Remarque A.2. *Les propriétés exigées sur la fonction U sont facilement vérifiées. En effet, toute fonction polynômiale de degré supérieur ou égal à 2 et dont le terme de plus haut degré est strictement positif vérifie les hypothèses du Lemme A.1.*

Lemme A.3. *Soit $\epsilon > 0$. Soient U et G deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On définit $U_\mu := U + \mu G$ où le paramètre μ prend ses valeurs dans un intervalle compact $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}$. On considère un intervalle $[a,b]$ satisfaisant : $U'_\mu(a) \neq 0$, $U'_\mu(b) \neq 0$ et U_μ atteint son minimum global sur l'intervalle $[a,b]$ en un unique point $x_\mu \in]a,b[$ quel que soit $\mu \in \mathcal{I}$. On suppose qu'il existe un exposant k_0 indépendant de $\mu \in \mathcal{I}$ tel que $2k_0 = \min_{r\in\mathbb{N}^*} \left\{U_\mu^{(r)}(x_\mu) \neq 0\right\}$ quel que soit $\mu \in \mathcal{I}$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors, en faisant tendre ϵ vers 0, on obtient*

$$\int_a^b f(t)e^{-\frac{U_\mu(t)}{\epsilon}}dt = \frac{f(x_\mu)}{k_0}\left(\frac{\epsilon(2k_0)!}{U_\mu^{(2k_0)}(x_\mu)}\right)^{\frac{1}{2k_0}}\Gamma\left(\frac{1}{2k_0}\right)e^{-\frac{U_\mu(x_\mu)}{\epsilon}}(1+o_{\mathcal{I}}(1))\,, \quad \text{(A.2)}$$

où Γ représente la fonction d'Euler et où $o_{\mathcal{I}}(1)$ converge vers 0 uniformémemt par rapport à $\mu \in \mathcal{I}$.

Démonstration. On définit $\eta_\mu := \frac{U_\mu^{(2k_0)}(x_\mu)}{(2k_0)!}$ et l'on remarque que η_μ varie continûment par rapport à μ. Comme μ varie sur un compact et comme U_μ est régulière et atteint son minimum global en un unique point x_μ, il existe $\tau_0 > 0$ indépendant du paramètre μ tel que $\tau_0 < \min\{x_\mu - a; b - x_\mu\}$ pour tout $\mu \in \mathcal{I}$ et tel que le minimum sur l'intervalle $[a; x_\mu - \tau] \bigcup [x_\mu + \tau; b]$ que l'on note $\underline{u^\epsilon}_\mu(\tau)$ est atteint sur le bord $\{x_\mu - \tau; x_\mu + \tau\}$ pour tout $\tau < \tau_0$. Il vient

$$\left|\int_{[a\,;\,x_\mu-\tau]\bigcup[x_\mu+\tau\,;\,b]} f(t)\exp\left[-\frac{U_\mu(t)}{\epsilon}\right]dt\right| \leq (b-a)\sup_{z\in[a;b]}|f(z)|\exp\left[-\frac{\underline{u^\epsilon}_\mu(\tau)}{\epsilon}\right].$$

En écrivant $I_\tau(f) := \int_{x_\mu-\tau}^{x_\mu+\tau} f(t)\exp\left[-\frac{U_\mu(t)}{\epsilon}\right]dt$ et $I(f) := \int_a^b f(t)\exp\left[-\frac{U_\mu(t)}{\epsilon}\right]dt$, on obtient l'inégalité suivante :

$$|I(f) - I_\tau(f)| \leq (b-a)\sup_{z\in[a;b]}|f(z)|\exp\left[-\frac{\underline{u^\epsilon}_\mu(\tau)}{\epsilon}\right]. \quad \text{(A.3)}$$

On introduit maintenant $I_\tau := \int_{x_\mu-\tau}^{x_\mu+\tau}\exp\left[-\frac{U_\mu(t)}{\epsilon}\right]dt = I_\tau(1)$. Alors, en appliquant le théorème des accroissements finis, on a :

$$|I_\tau(f) - f(x_\mu)I_\tau| \leq \tau \sup_{z\in[a;b]}|f'(z)|\,I_\tau\,. \quad \text{(A.4)}$$

Fournissons maintenant un équivalent de I_τ. D'après le théorème des accroissements finis, il existe une constante $C > 0$ indépendante de $\mu \in \mathcal{I}$ telle que, dans un voisinage de x_μ, la majoration suivante est vérifiée :

$$\left|U_\mu(t) - U_\mu(x_\mu) - \eta_\mu(t-x_\mu)^{2k_0}\right| \leq C|t-x_\mu|^{2k_0+1}\,.$$

D'où

$$J_\tau\exp\Big[-\frac{C\tau^{2k_0+1}}{\epsilon}\Big] \leq \frac{I_\tau}{2}\exp\left[\frac{U_\mu(x_\mu)}{\epsilon}\right] \leq J_\tau\exp\Big[\frac{C\tau^{2k_0+1}}{\epsilon}\Big], \quad \text{(A.5)}$$

où

$$J_\tau := \int_0^\tau \exp\left[-\frac{1}{\epsilon}\eta_\mu t^{2k_0}\right] dt = \left(\frac{\epsilon}{\eta_\mu}\right)^{\frac{1}{2k_0}} \frac{1}{2k_0} \int_0^{\tau^{2k_0}\frac{\eta_\mu}{\epsilon}} t^{\frac{1}{2k_0}-1} e^{-t} dt\,,$$

après application du changement de variable $t := \left(\frac{\epsilon}{\eta_\mu}\right)^{\frac{1}{2k_0}} (t')^{\frac{1}{2k_0}}$. Après avoir noté que la fonction $t \mapsto t^{\frac{1}{2k_0}-1}$ était décroissante strictement, une simple intégration fournit

$$-\tau^{1-2k_0}\left(\frac{\eta_\mu}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{2k_0}-1} e^{-\tau^{2k_0}\frac{\eta_\mu}{\epsilon}} \leq \int_0^{\tau^{2k_0}\frac{\eta_\mu}{\epsilon}} t^{\frac{1}{2k_0}-1} e^{-t} dt - \Gamma\left(\frac{1}{2k_0}\right) \leq 0\,. \tag{A.6}$$

Afin de conclure, on choisit une valeur particulière pour la variable τ à savoir $\tau := \exp\left[\frac{\ln(\epsilon)}{2k_0+\frac{1}{2}}\right]$. Alors pour $C \in \mathbb{R}$, $l > 0$, on trouve :

$$\lim_{\epsilon\to 0} e^{C\frac{\tau^{2k_0+1}}{\epsilon}} = 1, \quad \lim_{\epsilon\to 0} e^{-\eta_\mu\frac{\tau^{2k_0}}{\epsilon}} \frac{\tau^{1-2k_0}}{\epsilon^{\frac{1}{2k_0}-1}} = \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{-l} e^{\frac{U_\mu(x_\mu)-\underline{u}^\epsilon_\mu(\tau)}{\epsilon}} = 0.$$

Ces convergences sont uniformes par rapport au paramètre μ. Par conséquent, l'application des équivalences dans (A.3), (A.4), (A.5) et (A.6) donne directement le résultat (A.2). □

Lemme A.4. *Soit $\epsilon > 0$. Soit U une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a;b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$. On suppose que U atteint son minimum global sur l'intervalle $[a;b]$ en un unique point $x_0 \in]a;b[$. On introduit l'entier $k_0 := \min\left\{k \geq 1 \mid U^{(2k)}(x_0) > 0\right\}$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a,b]$. Alors, en faisant tendre ϵ vers 0, on obtient*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) e^{-\frac{2}{\epsilon}U(x)} dx = \frac{\epsilon^{\frac{1}{2k_0}}}{k_0} e^{-\frac{2}{\epsilon}U(x_0)} \Gamma\left(\frac{1}{2k_0}\right) \Big\{ &\left(\frac{1}{2\mathcal{U}_{2k_0}}\right)^{\frac{1}{2k_0}} f(x_0) \\ &+ \epsilon^{\frac{1}{k_0}}\Big[C_0(x_0)f(x_0) + C_1(x_0)f'(x_0) + C_2(x_0)f''(x_0)\Big] \\ &+ o\left[\epsilon^{\frac{1}{k_0}}\right] \Big\}\end{aligned} \tag{A.7}$$

où les différents coefficients sont définis comme suit :

$$C_0(x_0) := 2\mathcal{U}_{2k_0+1}^2 \left(\frac{1}{2\mathcal{U}_{2k_0}}\right)^{\frac{4k_0+3}{2k_0}} \frac{\Gamma\left(\frac{4k_0+3}{2k_0}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2k_0}\right)} - 2\mathcal{U}_{2k_0+2}\left(\frac{1}{2\mathcal{U}_{2k_0}}\right)^{\frac{2k_0+3}{2k_0}} \frac{\Gamma\left(\frac{2k_0+3}{2k_0}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2k_0}\right)}$$

$$C_1(x_0) := -2\mathcal{U}_{2k_0+1}\left(\frac{1}{2\mathcal{U}_{2k_0}}\right)^{\frac{2k_0+3}{2k_0}} \frac{\Gamma\left(\frac{2k_0+3}{2k_0}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2k_0}\right)}$$

$$C_2(x_0) := \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\mathcal{U}_{2k_0}}\right)^{\frac{3}{2k_0}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2k_0}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2k_0}\right)}\,.$$

Ici, Γ représente la fonction d'Euler et l'on a posé $\mathcal{U}_k := \frac{U^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Démonstration. **Étape 1.** Pour commencer, on scinde le support d'intégration en deux parties : $[a;b] := [x_0-\epsilon^\gamma; x_0+\epsilon^\gamma] \bigcup \mathcal{B}$ où $\mathcal{B}$ est une union de deux intervalles bornés. La valeur de γ sera choisie ultérieurement et de façon judicieuse. On note $\mathcal{I} := \int_{x_0-\epsilon^\gamma}^{x_0+\epsilon^\gamma} f(t)e^{-\frac{2}{\epsilon}U(t)}dt$. On prouvera par la suite que la différence entre l'intégrale $\int_a^b f(x)e^{-\frac{2}{\epsilon}U(x)}dx$ et $\mathcal{I}$ est négligeable par rapport à $\mathcal{I}$.
Étape 2. Cherchons un développement de l'intégrale $\mathcal{I}$. En posant $t := x - x_0$, après application du théorème des accroissements finis à la fonction f ainsi qu'à la fonction U, on a les deux égalités suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)t + \frac{1}{2}f''(x_0)t^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(x_0)t^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi_x)t^4 \\ \text{et} \quad U(x) &= U(x_0) + \frac{U^{(2k_0)}(x_0)}{(2k_0)!}t^{2k_0} + \frac{U^{(2k_0+1)}(x_0)}{(2k_0+1)!}t^{2k_0+1} \\ &+ \frac{U^{(2k_0+2)}(x_0)}{(2k_0+2)!}t^{2k_0+2} + \frac{U^{(2k_0+3)}(x_0)}{(2k_0+3)!}t^{2k_0+3} + \frac{U^{(2k_0+4)}(\zeta_x)}{(2k_0+4)!}t^{2k_0+4} \end{aligned}$$

où ξ_x et ζ_x sont dans l'intervalle $[x_0-\epsilon^\gamma; x_0+\epsilon^\gamma]$. En rappelant la notation $\mathcal{U}_k := \frac{U^{(k)}(x_0)}{k!}$, on pose :

$$X := \mathcal{U}_{2k_0+1}t^{2k_0+1} + \mathcal{U}_{2k_0+2}t^{2k_0+2} + \mathcal{U}_{2k_0+3}t^{2k_0+3} + \frac{U^{(2k_0+4)}(\zeta_x)}{(2k_0+4)!}t^{2k_0+4}\,.$$

La quantité $\frac{U^{(2k_0+4)}(\zeta_x)}{(2k_0+4)!}$ est bornée. Soit $M := \sup_{z\in[a;b]}\left|\frac{U^{(2k_0+4)}(z)}{(2k_0+4)!}\right|$. Alors :

$$\begin{aligned} e^{-\frac{2}{\epsilon}X} = 1 &- \frac{2}{\epsilon}\Big[\mathcal{U}_{2k_0+1}t^{2k_0+1} + \mathcal{U}_{2k_0+2}t^{2k_0+2} + \mathcal{U}_{2k_0+3}t^{2k_0+3}\Big] + \frac{C_1(x)}{\epsilon}t^{2k_0+4} \\ &+ \frac{2}{\epsilon^2}\Big[\mathcal{U}_{2k_0+1}^2t^{4k_0+2} + 2\mathcal{U}_{2k_0+1}\mathcal{U}_{2k_0+2}t^{4k_0+3}\Big] + \frac{C_2(x,t)}{\epsilon^2}t^{4k_0+4} \\ &- \frac{4}{3\epsilon^3}\mathcal{U}_{2k_0+1}^3t^{6k_0+3} + \frac{C_3(x,t)}{\epsilon^3}t^{6k_0+4} + \mathcal{R}(X) \end{aligned}$$

où les coefficients $C_1(x)$, $C_2(x,t)$ et $C_3(x,t)$ sont des restes que l'on obtient en prenant les puissances successives de X et ils sont bornés et où $\mathcal{R}$ est le reste du développement limité de la fonction exponentielle. On peut majorer ce dernier facilement :

$$|\mathcal{R}(X)| \leq \frac{16}{\epsilon^4}X^4e^{\frac{2}{\epsilon}|X|}\,.$$

Comme on souhaite appliquer des méthodes de type Laplace, on veut que le terme $\frac{t^{2k_0}}{\epsilon}$ soit grand et les suivants petits. Par conséquent, on prend $\gamma := \frac{1}{2k_0+\frac{1}{2}}$. Alors, le terme $\frac{2|X|}{\epsilon}$ est petit pour tout $x \in [x_0-\epsilon^\gamma; x_0+\epsilon^\gamma]$. On se sert maintenant du développement que l'on a trouvé pour f. Dans la mesure où l'on va intégrer par rapport à une mesure dont la densité est symétrique, on mettra les termes impairs à part. De plus, comme on appliquera une renormalisation du type $t := \epsilon^{\frac{1}{2k_0}}u$, on

met les termes ayant en facteur t^4u^r à part également, quel que soit $r \geq 0$. Il vient :

$$\begin{aligned} f(x)e^{-\frac{2}{\epsilon}X} = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)t^2 - \frac{2}{\epsilon}\Big\{f(x_0)\mathcal{U}_{2k_0+2} + f'(x_0)\mathcal{U}_{2k_0+1}\Big\}t^{2k_0+2} \\ + \frac{2}{\epsilon^2}f(x_0)\mathcal{U}_{2k_0+1}^2 t^{4k_0+2} + \widetilde{C_0}(x,t)t^4 + \frac{\widetilde{C_1}(x,t)}{\epsilon}t^{2k_0+4} + \frac{\widetilde{C_2}(x,t)}{\epsilon^2}t^{4k_0+4} \\ + \frac{\widetilde{C_3}(x,t)}{\epsilon^3}t^{6k_0+4} + \mathcal{P}(X) + f(x)\mathcal{R}(X) \end{aligned}$$

où $\mathcal{P}$ est une fonction polynômiale de degré impair et où les coefficients $\widetilde{C_0}(x,t)$, $\widetilde{C_1}(x,t)$, $\widetilde{C_2}(x,t)$ et $\widetilde{C_3}(x,t)$ sont bornés. Voici donc ce qu'on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}e^{\frac{2}{\epsilon}U(x_0)} =& f(x_0)I_0 + \frac{f''(x_0)}{2}I_2 - \frac{2}{\epsilon}\Big\{f(x_0)\mathcal{U}_{2k_0+2} + f'(x_0)\mathcal{U}_{2k_0+1}\Big\}I_{2k_0+2} \\ &+ \frac{2}{\epsilon^2}f(x_0)\mathcal{U}_{2k_0+1}^2 I_{4k_0+2} + \int_{x_0-\epsilon^\gamma}^{x_0+\epsilon^\gamma} \Lambda(x,t)\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\mathcal{U}_{2k_0}t^{2k_0}\right]dt\,. \end{aligned}$$

Ici, $I_{2k} := \int_{-\epsilon^\gamma}^{\epsilon^\gamma} t^{2k}\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\mathcal{U}_{2k_0}t^{2k_0}\right]dx$ et la fonction Λ rassemble tous les différents restes.

Étape 3. On choisit : $\gamma := \frac{1}{2k_0+\frac{1}{2}}$. On calcule les intégrales I_{2k} en appliquant le changement de variable $t := \left(\frac{\epsilon\, u}{2\mathcal{U}_{2k_0}}\right)^{\frac{1}{2k_0}}$:

$$I_{2k} = \frac{1}{k_0}\left(\frac{\epsilon}{2\,\mathcal{U}_{2k_0}}\right)^{\frac{2k+1}{2k_0}}\Gamma\left(\frac{2k+1}{2k_0}\right) + o\left[\epsilon^{\frac{3}{2k_0}}\right] \tag{A.8}$$

après utilisation du Lemme A.1.

Étape 4. On majore maintenant le reste. :

$$\left|\int_{x_0-\epsilon^\gamma}^{x_0+\epsilon^\gamma}\Lambda(x,t)e^{-\frac{2}{\epsilon}\mathcal{U}_{2k_0}t^{2k_0}}dx\right| \leq \int_{-\epsilon^\gamma}^{\epsilon^\gamma} t^4\mathcal{Q}\left(\frac{t^{2k_0}}{\epsilon}\right)\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\mathcal{U}_{2k_0}t^{2k_0}\right]dt$$

où $\mathcal{Q}$ est un polynôme de degré 4. On applique le changement de variable $t := \epsilon^{\frac{1}{2k_0}}u$ et on trouve

$$\left|\int_{x_0-\epsilon^\gamma}^{x_0+\epsilon^\gamma}\Lambda(x,t)e^{-\frac{2}{\epsilon}\mathcal{U}_{2k_0}t^{2k_0}}dx\right| \leq \rho\epsilon^{\frac{2}{k_0}} = o\left\{\epsilon^{\frac{3}{2k_0}}\right\} \tag{A.9}$$

où ρ est une constante.

Étape 5. En compilant (A.8) et (A.9), on a le développement asymptotique

suivant :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}e^{\frac{2}{\epsilon}U(x_0)} &= \frac{1}{k_0}\left(\frac{\epsilon}{2\mathcal{U}_{2k_0}}\right)^{\frac{1}{2k_0}}\left\{f(x_0)\Gamma\left(\frac{1}{2k_0}\right)+\epsilon^{\frac{1}{k_0}}\frac{f''(x_0)}{2}\left(\frac{1}{2\mathcal{U}_{2k_0}}\right)^{\frac{1}{k_0}}\Gamma\left(\frac{3}{2k_0}\right)\right.\\ &- 2\epsilon^{\frac{1}{k_0}}\left(f(x_0)\mathcal{U}_{2k_0+2}+f'(x_0)\mathcal{U}_{2k_0+1}\right)\left(\frac{1}{2\mathcal{U}_{2k_0}}\right)^{\frac{k_0+1}{k_0}}\Gamma\left(\frac{2k_0+3}{2k_0}\right)\\ &+ \left.2\epsilon^{\frac{1}{k_0}}f(x_0)\mathcal{U}_{2k_0+1}^2\left(\frac{1}{2\mathcal{U}_{2k_0}}\right)^{\frac{2k_0+1}{k_0}}\Gamma\left(\frac{4k_0+3}{2k_0}\right)+o\left[\epsilon^{\frac{1}{k_0}}\right]\right\}.\end{aligned}$$

Étape 6. Prouvons maintenant que l'intégrale portant sur le support $\mathcal{B}$ est négligeable devant $\epsilon^{\frac{3}{2k_0}}e^{-\frac{2}{\epsilon}U(x_0)}$:

$$\left|\int_{\mathcal{B}} f(x)\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}U(x)\right]dx\right| \leq (b-a)\sup_{z\in[a;b]}|f(z)|\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\inf_{z\in\mathcal{B}}U(z)\right].$$

Or, la fonction U n'atteint son minimum global qu'au point x_0 donc, pour ϵ assez petit, le minimum de U sur $\mathcal{B}$ est atteint en $x_0-\epsilon^\gamma$ ou en $x_0+\epsilon^\gamma$. Et, en calculant :

$$\begin{aligned}U\left(x_0\pm\epsilon^\gamma\right) &= U(x_0)+\mathcal{U}_{2k_0}\left(\epsilon^\gamma\right)^{2k_0}+O\left\{\epsilon^{(2k_0+1)\gamma}\right\}\\ &= U(x_0)+\epsilon\left[\mathcal{U}_{2k_0}\epsilon^{-\frac{1}{4k_0+1}}+O\left\{\epsilon^{\frac{1}{4k_0+1}}\right\}\right].\end{aligned}$$

Ainsi la quantité $\exp\left[-\frac{2}{\epsilon}\inf_{z\in\mathcal{B}}U(z)\right]$ est négligeable devant $\epsilon^{\frac{3}{2k_0}}e^{-\frac{2}{\epsilon}U(x_0)}$ ce qui implique alors (A.7). □

Remarque A.5. *Si l'on suppose l'existence de $R>0$ et de $\rho>0$ tels que pour tout $x\notin[-R;R]$, pour tout $\mu\in\mathcal{I}$, $U_\mu(x)\geq\rho x^2$ alors on peut étendre les résultats des Lemmes A.3 et A.4 à des intervalles non bornés si la fonction f est à croissance lente.*

Lemme A.6. *Soit $\epsilon>0$. Soient U et G deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle compact $[a,b]$. On définit $U_\mu := U+\mu G$ où μ prend ses valeurs dans un intervalle compact $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}$. On suppose que U_μ atteint son minimum global sur l'intervalle $[a;b]$ en un unique point $x_\mu\in]a;b[$ tel que $U_\mu''(x_\mu)>0$. Soit f_m une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ pour tous les paramètres m variant sur un certain espace compact $\mathcal{M}$. On suppose qu'il existe une constante λ telle que $|f_m^{(i)}(x)|\leq\lambda$ pour tout $m\in\mathcal{M}$, $x\in[a,b]$ et $0\leq i\leq 3$. Alors, on a le résultat asymptotique suivant :*

$$\int_a^b f_m(t)e^{\frac{-2U_\mu(t)}{\epsilon}}dt = \sqrt{\frac{\pi\epsilon}{\mathcal{U}_2}}\,e^{-\frac{2U_\mu(x_\mu)}{\epsilon}}\left\{f_m(x_\mu)+\gamma_0(\mu)\epsilon+o_{\mathcal{I}\mathcal{M}}(\epsilon)\right\} \tag{A.10}$$

avec

$$\gamma_0(\mu) := f_m(x_\mu)\left(\frac{5\,\mathcal{U}_3^2}{48\,\mathcal{U}_2^3}-\frac{\mathcal{U}_4}{16\,\mathcal{U}_2^2}\right)-f_m'(x_\mu)\frac{\mathcal{U}_3}{4\,\mathcal{U}_2^2}+\frac{f_m''(x_\mu)}{4\,\mathcal{U}_2}. \tag{A.11}$$

Ici, on utilise la notation $\mathcal{U}_k := U_\mu^{(k)}(x_\mu)$ et $o_{\mathcal{I}\mathcal{M}}(\epsilon)/\epsilon$ converge vers 0 quand ϵ tend vers 0. Cette convergence est de plus uniforme par rapport aux paramètres $m\in\mathcal{M}$ et $\mu\in\mathcal{I}$.

Démonstration. D'abord, on scinde l'intégrale en deux morceaux :

$$\begin{aligned} I &:= \int_a^b f_m(t) e^{\frac{-2U_\mu(t)}{\epsilon}} dt \\ &= \int_{x_\mu-\rho}^{x_\mu+\rho} f_m(t) e^{\frac{-2U_\mu(t)}{\epsilon}} dt + \int_{[x_\mu-\rho;x_\mu+\rho]^c \bigcap [a;b]} f_m(t) e^{\frac{-2U_\mu(t)}{\epsilon}} dt =: I_1 + I_2 \end{aligned}$$

pour un certain $\rho > 0$ qui sera spécifié plus tard.

Étape 1. On va prouver que la seconde intégrale est négligeable pour peu que $\frac{\rho^2}{\epsilon}$ tende vers $+\infty$ c'est-à-dire que $I_2 = o_{\mathcal{IM}}\{\epsilon^{3/2} e^{-\frac{2U(x_\mu)}{\epsilon}}\}$. On a

$$I_2 \leq (b-a) \sup_{z\in[a,b]} |f_m(z)| \exp\left[-2\frac{\inf_{z\in[x_\mu-\rho;x_\mu+\rho]^c} U_\mu(z)}{\epsilon}\right]. \tag{A.12}$$

Comme le minimum global de U_μ est atteint uniquement en x_μ, en se servant de la régularité de U_μ par rapport au paramètre μ, on en déduit que le minimum de la fonction sur l'intervalle $[x_\mu-\rho; x_\mu+\rho]^c \bigcap [a;b]$ est atteint sur le bord dès que ρ est assez petit. Le développement $U_\mu(x_\mu \pm \rho) = U_\mu(x_\mu) + \frac{1}{2}U''_\mu(x_\mu)\rho^2 + o_{\mathcal{I}}(\rho^2)$ implique comme cela avait été annoncé que $I_2 = o_{\mathcal{IM}}\left\{\epsilon^{3/2} e^{-\frac{2U(x_\mu)}{\epsilon}}\right\}$ si $\rho^2/\epsilon \to \infty$.

Étape 2. On se concentre sur l'intégrale dont le domaine d'intégration est l'intervalle compact $[x_\mu-\rho; x_\mu+\rho]$. La fonction f_m peut être développée de la sorte au voisinage de x_μ :

$$\begin{aligned} f_m(x) &= f_m(x_\mu) + f'_m(x_\mu)(x-x_\mu) + \frac{1}{2}f''_m(x_\mu)(x-x_\mu)^2 \\ &+ \frac{1}{6}f^{(3)}_m(w_{m,\mu}(x))(x-x_\mu)^3 \end{aligned}$$

où le réel $w_{m,\mu}(x)$ est entre x_μ et x. En tenant compte de ces différents termes, l'intégrale I_1 peut être divisée en quatre intégrales différentes que l'on note respectivement $\tilde{I}_0, \cdots, \tilde{I}_3$. On va analyser le comportement asymptotique de chacune de ces intégrales.

Étape 2.1. On commence avec celui de $\tilde{I}_3$. Par définition, $w_{m,\mu}(t) \in [x_\mu-\rho; x_\mu+\rho]$ quand $t \in [x_\mu-\rho; x_\mu+\rho]$. En outre, par hypothèse $|f^{(3)}_m(w_{m,\mu}(t))|$ est majorée par une constante $\lambda > 0$ indépendante de m et de μ. En appliquant le Lemme A.3 à $2U_\mu$, pour $\rho < 1$ et ϵ assez petit, on obtient l'existence d'une constante $C > 0$, indépendante des paramètres m et μ, telle que

$$|\tilde{I}_3| \leq \frac{\lambda}{6}\rho^3 \int_{(x_\mu-1)\vee a}^{(x_\mu+1)\wedge b} e^{-\frac{2U_\mu(t)}{\epsilon}} dt \leq C\sqrt{\pi}\rho^3 \sqrt{\frac{\epsilon}{U''_\mu(x_\mu)}} e^{-\frac{2U_\mu(x_\mu)}{\epsilon}}.$$

Par ailleurs, si $\rho^3 = o(\epsilon)$ alors on a le résultat asymptotique suivant

$$\tilde{I}_3 = o_{\mathcal{IM}}\left\{\epsilon^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{2U(x_0)}{\epsilon}}\right\}. \tag{A.13}$$

Étape 2.2. On s'intéresse maintenant au comportement asymptotique de $\tilde{I}_2$. En utilisant le fait que U_μ est de classe $\mathcal{C}^3$, on a $U_\mu(t) = U_\mu(x_\mu) + \frac{1}{2}U''_\mu(x_\mu)(t-x_\mu)^2 + \frac{1}{6}U^{(3)}_\mu(y_\mu(t))(t-x_\mu)^3$ où $y_\mu(t)$ appartient à $[x_\mu - \rho; x_\mu + \rho]$. D'où

$$\tilde{I}_2 = \frac{f''_m(x_\mu)}{2} e^{-\frac{2U_\mu(x_\mu)}{\epsilon}} \int_{x_\mu-\rho}^{x_\mu+\rho} (t-x_\mu)^2 e^{-\frac{U''_\mu(x_\mu)}{\epsilon}(t-x_\mu)^2 - \frac{U^{(3)}_\mu(y_\mu(t))}{3\epsilon}(t-x_\mu)^3} dt\,.$$

Comme $y_\mu(t)$ appartient à un espace compact, la dérivée troisième $U^{(3)}_\mu(y_\mu(t))$ est bornée par une constante indépendante de μ. Le changement de variable $u := (t-x_\mu)^2 U''_\mu(x_\mu)/\epsilon$ fournit

$$J_2 e^{-C\frac{\rho^3}{\epsilon}} \left(\frac{\epsilon}{U''_\mu(x_\mu)}\right)^{\frac{3}{2}} \leq \frac{2\tilde{I}_2\ e^{\frac{2U_\mu(x_\mu)}{\varepsilon}}}{f''_m(x_\mu)} \leq J_2 e^{C\frac{\rho^3}{\epsilon}} \left(\frac{\epsilon}{U''_\mu(x_\mu)}\right)^{\frac{3}{2}},$$

avec $J_2 := \int_0^{U''_\mu(x_\mu)\frac{\rho^2}{\epsilon}} \sqrt{u} e^{-u} du$. Si $\frac{\rho^3}{\epsilon} \to 0$ et $\frac{\rho^2}{\epsilon} \to \infty$ alors

$$\tilde{I}_2 = \sqrt{\pi}\frac{f''_m(x_\mu)}{4} e^{-\frac{2U_\mu(x_\mu)}{\epsilon}} \left(\frac{\epsilon}{U''_\mu(x_\mu)}\right)^{\frac{3}{2}} (1 + o_{\mathcal{I}}(1))\,. \tag{A.14}$$

Étape 2.3. On poursuit avec le comportement asymptotique de $\tilde{I}_1$. On développe la fonction U_μ au voisinage de x_μ : $U_\mu(t+x_\mu) = U_\mu(x_0) + \frac{1}{2}U''_\mu(x_\mu)t^2 + \frac{1}{6}U^{(3)}_\mu(x_\mu)t^3 + \frac{1}{24}U^{(4)}_\mu(y_\mu(t))t^4$ où $y_\mu(t) \in [x_\mu - \rho, x_\mu + \rho]$. La régularité de $U_\mu(x)$ par rapport à x et μ implique l'existence d'une constante $C > 0$ indépendante de μ qui borne la dérivée quatrième de U_μ sur le support de l'intégrale. Par suite, on a

$$f'_m(x_\mu) e^{-C\frac{\rho^4}{\epsilon}} J_\rho \leq e^{\frac{2U_\mu(x_\mu)}{\epsilon}} \tilde{I}_1 \leq f'_m(x_\mu) e^{C\frac{\rho^4}{\epsilon}} J_\rho\,,$$

avec $J_\rho := \int_{-\rho}^{\rho} z e^{-\frac{\mathcal{U}_2}{\epsilon}z^2 - \frac{\mathcal{U}_3}{3\epsilon}z^3} dz$ et $\mathcal{U}_k := U^{(k)}_\mu(x_\mu)$. Comme $|e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2}| \leq |x|^3 e^{|x|}$, on en déduit que pour tout $z \in [-\rho; \rho]$:

$$\left| e^{-\frac{\mathcal{U}_3}{3\epsilon}z^3} - 1 + \frac{\mathcal{U}_3 z^3}{3\epsilon} - \frac{\mathcal{U}_3^2 z^6}{18\epsilon^2} \right| \leq \left|\frac{\mathcal{U}_3}{3}\right|^3 \frac{\rho^9}{\epsilon^3} e^{\frac{|\mathcal{U}_3|\rho^3}{3\epsilon}}.$$

On définit $m_\rho(l) := \int_{-\rho}^{\rho} z^l e^{-\frac{\mathcal{U}_2}{\epsilon}z^2} dz$ et $n_\rho(l) := \int_0^\rho |z|^l e^{-\frac{\mathcal{U}_2}{\epsilon}z^2} dz$. L'estimation suivante de l'intégrale J_ρ apparaît directement :

$$\left| J_\rho - m_\rho(1) + \frac{\mathcal{U}_3}{3\epsilon} m_\rho(4) - \frac{\mathcal{U}_3^2}{18\epsilon^2} m_\rho(7) \right| \leq 2 \left|\frac{\mathcal{U}_3}{3}\right|^3 \frac{\rho^9}{\epsilon^3} e^{\frac{|\mathcal{U}_3|\rho^3}{3\epsilon}} n_\rho(1)\,.$$

Des arguments sur la symétrie du potentiel dans l'exponentielle amènent directement $m_\rho(1) = m_\rho(7) = 0$. Finalement, il suffit d'évaluer $m_\rho(4)$ et $n_\rho(1)$. Dans ce but, on introduit le changement de variable $u := \frac{\mathcal{U}_2}{\epsilon}z^2$ et lorsque ρ^2/ϵ tend vers l'infini :

$$m_\rho(4) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{1}{U''_\mu(x_\mu)}\right)^{\frac{5}{2}} \epsilon^{\frac{5}{2}}(1 + o_{\mathcal{I}}(1)) \quad \text{et} \quad n_\rho(1) = \frac{\epsilon}{2U''_\mu(x_\mu)}(1 + o_{\mathcal{I}}(1))\,.$$

Pour résumer : si $\frac{\rho^{18}}{\epsilon^7} \to 0$ (c'est-à-dire si $\frac{\rho^9}{\epsilon^2} = o\{\epsilon^{\frac{3}{2}}\}$) alors

$$\tilde{I}_1 = -\sqrt{\pi} f'_m(x_\mu) \frac{U_\mu^{(3)}(x_\mu)}{4} \left(\frac{1}{U''_\mu(x_\mu)}\right)^{\frac{5}{2}} \epsilon^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{2U_\mu(x_\mu)}{\epsilon}} (1 + o_{\mathcal{I}}(1)) \,. \tag{A.15}$$

Étape 2.4. On termine avec le comportement asymptotique de $\tilde{I}_0$. On étudie d'abord l'intégrale suivante

$$I'_0 := \int_{-\rho}^{\rho} \exp\left[-\frac{U''_\mu(x_\mu)}{\epsilon} z^2 - \frac{U_\mu^{(3)}(x_\mu)}{3\epsilon} z^3 - \frac{U_\mu^{(4)}(x_\mu)}{12\epsilon} z^4\right] dz \,.$$

Rappelons la notation $\mathcal{U}_k := U_\mu^{(k)}(x_\mu)$. Les arguments sont similaires à ceux utilisés dans l'Étape 2.3. Comme $\left|e^{-u} - 1 + u - \frac{u^2}{2}\right| \leq |u|^3 e^{|u|}$, pour tout $z \in [-\rho; \rho]$ on a

$$\left| e^{-\frac{\mathcal{U}_3}{3\epsilon} z^3 - \frac{\mathcal{U}_4}{12\epsilon} z^4} - 1 + \frac{\mathcal{U}_3}{3\epsilon} z^3 + \frac{\mathcal{U}_4}{12\epsilon} z^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{U}_3}{3\epsilon} z^3 + \frac{\mathcal{U}_4}{12\epsilon} z^4\right)^2 \right| \leq C \frac{\rho^9}{\epsilon^3}.$$

En reprenant les mêmes notations que dans l'Étape 2.3 et en se servant à nouveau d'arguments sur la symétrie, on obtient la majoration suivante, uniformément par rapport au paramètre μ :

$$\left| I'_0 - m_\rho(0) + \frac{\mathcal{U}_4}{12\epsilon} m_\rho(4) - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{U}_3}{3\epsilon}\right)^2 m_\rho(6) - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{U}_4}{12\epsilon}\right)^2 m_\rho(8) \right| \leq C \frac{\rho^9}{\epsilon^3} m_\rho(0) \,.$$

En appliquant le changement de variable déjà utilisé plusieurs fois à savoir $u := \frac{U''_\mu(x_\mu)}{\epsilon} z^2$ on trouve l'estimation asymptotique de I'_0 pour peu que l'on ait $\rho^2/\epsilon \to \infty$, $\rho^3/\epsilon \to 0$ et $\frac{\rho^9}{\epsilon^4} \to 0$:

$$I'_0 = \sqrt{\frac{\pi\epsilon}{U''_\mu(x_\mu)}} \left\{1 - \frac{U_\mu^{(4)}(x_\mu)}{16 U''_\mu(x_\mu)^2}\epsilon + \frac{5 U_\mu^{(3)}(x_\mu)^2}{48 U''_\mu(x_\mu)^3}\epsilon + o_{\mathcal{I}}(\epsilon)\right\} .$$

On applique le théorème des accroissements finis à la fonction U_μ :

$$U_\mu(x_\mu + z) = U_\mu(x_\mu) + \frac{\mathcal{U}_2}{2} z^2 + \frac{\mathcal{U}_3}{6} z^3 + \frac{\mathcal{U}_4}{24} z^4 + \frac{1}{120} U^{(5)}(y_\mu(t)) z^5,$$

avec $y_\mu(t) \in [x_\mu - \rho, x_\mu + \rho]$ et $|z| \leq \rho$. A partir de cette égalité, on en déduit une estimation de la distance entre les intégrales $\tilde{I}_0$ et I'_0.
On note $\mathcal{D} := e^{\frac{2U_\mu(x_\mu)}{\epsilon}} \tilde{I}_0 - f_m(x_\mu) I'_0$ cette distance. Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de μ et m telle que

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}| &\leq |f_m(x_\mu)| \int_{-\rho}^{\rho} e^{-\frac{\mathcal{U}_2}{\epsilon} z^2 - \frac{\mathcal{U}_3}{3\epsilon} z^3 - \frac{\mathcal{U}_4}{12\epsilon} z^4} \left|1 - e^{-\frac{1}{60\epsilon} U^{(5)}(y_\mu(z+x_\mu) z^5}\right| dz \\ &\leq \frac{|f_m(x_\mu)| C\lambda}{60\epsilon} \rho^5 \int_{-\rho}^{\rho} e^{-\frac{\mathcal{U}_2}{\epsilon} z^2 - \frac{\mathcal{U}_3}{3\epsilon} z^3 - \frac{\mathcal{U}_4}{12\epsilon} z^4 + \frac{1}{60\epsilon}\left|U^{(5)}(y_\mu(z+x_\mu)) z^5\right|} dz \,. \end{aligned}$$

Si les deux conditions $\rho^2/\epsilon \to \infty$ et $\rho^3/\epsilon \to 0$ sont satisfaites alors l'intégrale dans l'inégalité précédente est équivalente à $\sqrt{\frac{\pi\epsilon}{U''_\mu(x_\mu)}}$. Par conséquent, sous l'hypothèse $\frac{\rho^5}{\sqrt{\epsilon}} = o\left(\epsilon^{\frac{3}{2}}\right)$, on trouve $|\mathcal{D}| = o_{\mathcal{IM}}\left(\epsilon^{\frac{3}{2}}\right)$ et ainsi

$$\tilde{I}_0 = e^{-\frac{2U(x_\mu)}{\epsilon}} \sqrt{\frac{\pi\epsilon}{\mathcal{U}_2}} \left\{ 1 - \frac{\mathcal{U}_4}{16\,\mathcal{U}_2^2}\epsilon + \frac{5\,\mathcal{U}_3^2}{48\,\mathcal{U}_2^3}\epsilon + o_{\mathcal{IM}}(\epsilon) \right\}. \tag{A.16}$$

Étape 3. Pour résumer : dans l'Étape 1, on a prouvé qu'il suffit d'estimer l'intégrale I_1. Cette dernière peut être scindée en quatre termes. Pour chacun d'entre eux, un équivalent a été fourni dans les équations (A.13), (A.14), (A.15) et (A.16). L'intégrale I admet donc l'équivalence asymptotique (A.10) si l'on peut trouver ρ qui vérifie $\rho^3/\epsilon \to 0$, $\rho^{18}/\epsilon^7 \to 0$, $\frac{\rho^9}{\epsilon^4} \to 0$ et $\rho^5/\epsilon^2 \to 0$. Or, la valeur $\rho := \epsilon^{\frac{9}{20}}$ vérifie toutes les conditions. □

On peut étendre le résultat du lemme précédent aux intégrales sur des supports qui ne sont pas bornés.

Lemme A.7. *Soit $\epsilon > 0$. Soient U et G deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On définit $U_\mu := U + \mu G$ où μ prend ses valeurs dans un intervalle compact $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}$. On suppose que $U_\mu(t) \geq t^2$ pour $|t|$ plus grand qu'un certain R indépendant de μ et que U_μ atteint son minimum global en un unique point x_μ tel que $U''_\mu(x_\mu) > 0$. Soit f_m une fonction continue pour tous les paramètres m variant sur un certain espace compact $\mathcal{M}$. On suppose de plus que f_m est de classe $\mathcal{C}^3$ sur un voisinage $[a,b]$ de x_μ. On suppose qu'il existe une constante λ telle que $|f_m(t)| \leq \exp[\lambda|U_\mu(t)|]$ pour tout $t \geq R$, $\mu \in \mathcal{I}$, $m \in \mathcal{M}$ et $|f_m^{(i)}| \leq \lambda$ pour tout $t \in [a;b]$, $m \in \mathcal{M}$ pour $0 \leq i \leq 3$. Alors, lorsque ϵ tend vers 0, on a l'estimation suivante :*

$$\int_{\mathbb{R}} f_m(t) e^{\frac{-2U_\mu(t)}{\epsilon}} dt = e^{-\frac{2U_\mu(x_\mu)}{\epsilon}} \sqrt{\frac{\pi\epsilon}{\mathcal{U}_2}} \Big\{ f_m(x_\mu) + \gamma_0(\mu)\epsilon + o_{\mathcal{IM}}(\epsilon) \Big\}, \tag{A.17}$$

où $\gamma_0(\mu)$ est defini par (A.11) *et $o_{\mathcal{IM}}(\epsilon)/\epsilon$ converge vers 0 quand ϵ tend vers 0 uniformément par rapport aux paramètres m et μ.*

Démonstration. Soit $R > \max\{|a|;|b|\}$ tel que $U_\mu(t) \geq t^2$ pour $t \geq R$. L'intégrale initiale peut être scindée en trois intégrales : la première que l'on note I_1 sur le support compact $[a,b]$, la seconde I_2 sur $[-R;a[\bigcup]b;R]$ et la troisième I_3 sur $[-R;R]^c$.
Pour I_1, il suffit d'appliquer le Lemme A.6 afin d'obtenir le développement asymptotique. L'équation (A.17) est donc prouvée si l'on montre que I_2 et I_3 sont négligeables par rapport à I_1 c'est-à-dire $I_2 = o_{\mathcal{IM}}\left\{\epsilon^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{2U_\mu(x_\mu)}{\epsilon}}\right\}$ et la même chose avec I_3.
Étape 1. D'après la bornitude de f_m sur $[-R;R]$, on a

$$|I_2| \leq 2R \sup_{m\in\mathcal{M}} \sup_{z\in[-R;R]} |f_m(z)| \exp\left[-\frac{2}{\epsilon} \inf_{z\in[-R;a[\bigcup]b;R]} U_\mu(z)\right] = o_{\mathcal{IM}}\left\{\epsilon^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{2U_\mu(x_\mu)}{\epsilon}}\right\}.$$

En effet, le minimum de la fonction U_μ sur $[-R; a[\bigcup]b; R]$ est strictement plus grand que le minimum global.

Étape 2. En utilisant le changement de variable $t := \left(\frac{2}{\epsilon} - \lambda\right)^{-\frac{1}{2}} s$, on obtient la majoration suivante dès que $\epsilon < \frac{2}{\lambda}$:

$$|I_3| \leq 2\int_R^{+\infty} \exp\left[t^2\left(\lambda - \frac{2}{\epsilon}\right)\right] dt \leq 2\sqrt{\frac{\epsilon}{2-\lambda\epsilon}} \int_{R\sqrt{\frac{2-\lambda\epsilon}{\epsilon}}}^{+\infty} \exp\left[-s^2\right] ds\,.$$

Le Lemme A.1 permet de prouver que I_3 peut être négligée. □

Remarque A.8. *On peut étendre à $\mathbb{R}_+$ au lieu de $\mathbb{R}$.*

Le Lemme A.7 peut être appliqué à des fonctions f_m particulières.

Lemme A.9. *Soit $\epsilon > 0$. Soient U et G deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On définit $U_\mu := U + \mu G$ où μ prend ses valeurs dans un intervalle compact $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}$. On suppose que $U_\mu(t) \geq t^2$ pour $|t|$ plus grand qu'un certain R indépendant de μ et que U_μ atteint son minimum global en un unique point x_μ tel que $U''_\mu(x_\mu) > 0$. Soit f_m une fonction continue pour tous les paramètres m variant sur un certain espace compact $\mathcal{M}$. On suppose de plus que f_m est de classe $\mathcal{C}^3$ sur un voisinage $[a, b]$ de x_μ. On suppose qu'il existe une constante λ telle que $|f_m(t)| \leq \lambda|U_\mu(t)|$ pour tout $t \geq R$, $\mu \in \mathcal{I}$, $m \in \mathcal{M}$ et $|f_m^{(i)}| \leq \lambda$ pour tout $t \in [a; b]$, $m \in \mathcal{M}$ pour $0 \leq i \leq 3$. Alors, pour tout $n \geq 1$, lorsque ϵ tend vers 0, on a l'estimation suivante :*

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} t^n e^{f_m(t)} e^{\frac{-2U_\mu(t)}{\epsilon}} dt}{\int_{\mathbb{R}} e^{f_m(t)} e^{\frac{-2U_\mu(t)}{\epsilon}} dt} = x_\mu^n - \frac{n x_\mu^{n-2}}{4\mathcal{U}_2}\left[x_\mu \frac{\mathcal{U}_3}{\mathcal{U}_2} - n + 1 - 2x_\mu f'_m(x_\mu)\right]\epsilon + o_{\mathcal{IM}}(\epsilon)\,,$$

où $\mathcal{U}_i := U_\mu^{(i)}(x_\mu)$ et $o_{\mathcal{IM}}(\epsilon)/\epsilon$ converge vers 0 quand ϵ tend vers 0 uniformément par rapport aux paramètres m et μ.

Démonstration. On se contente d'appliquer deux fois le Lemme A.7 : la première fois pour le dénominateur D^ϵ c'est-à-dire à la fonction $t \mapsto e^{f_m(t)}$ et la seconde fois pour le numérateur N^ϵ à la fonction $t \mapsto t^n e^{f_m(t)}$. On a le résultat asymptotique suivant :

$$D^\epsilon = e^{-\frac{2U_\mu(x_\mu)}{\epsilon}} \sqrt{\frac{\pi\epsilon}{\mathcal{U}_2}} e^{f_m(x_\mu)} \left\{1 + \hat{\gamma}_d \epsilon + o_{\mathcal{IM}}(\epsilon)\right\} \tag{A.18}$$

où

$$\hat{\gamma}_d := \left(\frac{5\mathcal{U}_3^2}{48\mathcal{U}_2^3} - \frac{\mathcal{U}_4}{16\mathcal{U}_2^2}\right) - f'_m(x_\mu)\frac{\mathcal{U}_3}{4\mathcal{U}_2^2} + \left(f''_m(x_\mu) + f'_m(x_\mu)^2\right)\frac{1}{4\mathcal{U}_2}\,.$$

Le numérateur divisé par x_μ^n c'est-à-dire N^ϵ/x_μ^n satisfait une égalité similaire à celle de D^ϵ, à savoir (A.18) où l'on a $\hat{\gamma}_n$ au lieu de $\hat{\gamma}_d$:

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_n := &\left(\frac{5\mathcal{U}_3^2}{48\mathcal{U}_2^3} - \frac{\mathcal{U}_4}{16\mathcal{U}_2^2}\right) - \left(\frac{n}{x_\mu} + f'_m(x_\mu)\right)\frac{\mathcal{U}_3}{4\mathcal{U}_2^2} \\ &+ \left(\frac{n(n-1)}{x_\mu^2} + 2\frac{n}{x_\mu} f'_m(x_\mu) + f''_m(x_\mu) + f'_m(x_\mu)^2\right)\frac{1}{4\mathcal{U}_2}\,.\end{aligned}$$

On en déduit l'estimation suivante du ratio :

$$\begin{aligned}\frac{\int_{\mathbb{R}} t^n e^{f_m(t)} e^{\frac{-2U_\mu(t)}{\epsilon}} dt}{\int_{\mathbb{R}} e^{f_m(t)} e^{\frac{-2U_\mu(t)}{\epsilon}} dt} &= x_\mu^n \frac{1+\hat{\gamma}_n\epsilon + o_{\mathcal{IM}}(\epsilon)}{1+\hat{\gamma}_d\epsilon + o_{\mathcal{IM}}(\epsilon)} \\ &= x_\mu^n \left\{1 - \epsilon\left(\hat{\gamma}_d - \hat{\gamma}_n\right) + o_{\mathcal{IM}}(\epsilon)\right\} .\end{aligned}$$

Cette dernière égalité est exactement (A.9). □

Remarque A.10. *Lorsque $n = 1$ et $x_\mu = 0$, la quantité nx_μ^{n-2} n'est pas définie. Toutefois, entre les crochets, si $n = 1$, on peut factoriser par x_μ si bien que le terme d'ordre ϵ est bien défini et l'on a d'ailleurs :*

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} t e^{f_m(t)} e^{\frac{-2U_\mu(t)}{\epsilon}} dt}{\int_{\mathbb{R}} e^{f_m(t)} e^{\frac{-2U_\mu(t)}{\epsilon}} dt} = \frac{1}{2\mathcal{U}_2}\left(f_m'(0) - \frac{\mathcal{U}_3}{2\mathcal{U}_2}\right)\epsilon + o_{\mathcal{IM}}(\epsilon) .$$

Les deux prochains lemmes sont des généralisations des Lemmes A.7 et A.9 à des fonctions G qui dépendent du petit paramètre ϵ.

Lemme A.11. *Soit $\epsilon > 0$. Soient U et G deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telles que $U(t) \geq t^2$ pour $|t|$ assez grand et $|G(t)| \leq \lambda|U(t)| + C$ pour deux constantes $\lambda > 0$ et $C > 0$. On suppose également que U atteint son minimum global en un unique x_0 tel que $U''(x_0) > 0$. Pour toute famille $(\eta_\epsilon)_\epsilon$ satisfaisant $\lim_{\epsilon\to 0}\eta_\epsilon = 0$ et $\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon/\eta_\epsilon = 0$, on définit $U_{\epsilon,\mu} := U + \eta_\epsilon\mu G$ dépendant du paramètre μ qui prend ses valeurs dans un intervalle compact $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ telle que $|f(t)| \leq e^{\lambda|U(t)|}$ pour tout $|t|$ assez grand et telle que $|f^{(i)}|$ soit localement bornée pour $0 \leq i \leq 3$. Alors, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que le potentiel $U_{\epsilon,\mu}$ atteigne son minimum global en un unique point $x_{\epsilon,\mu}$ pour tout $\epsilon \leq \epsilon_0$. En outre, on a les résultats asymptotiques :*

$$x_{\epsilon,\mu} = x_0 - \mu\frac{G'(x_0)}{U''(x_0)}\eta_\epsilon + o_{\mathcal{I}}(\eta_\epsilon) \quad \textit{ainsi que} \tag{A.19}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-\frac{2U_{\epsilon,\mu}(t)}{\epsilon}} dt = \sqrt{\frac{\pi\epsilon}{U''(x_0)}} e^{-\frac{2U_{\epsilon,\mu}(x_{\epsilon,\mu})}{\epsilon}} \left(f(x_0) + \gamma_\mu\eta_\epsilon + o_{\mathcal{I}}(\eta_\epsilon)\right) \tag{A.20}$$

où

$$\gamma_\mu := \frac{\mu}{2U''(x_0)}\left(-2f'(x_0)G'(x_0) - f(x_0)G''(x_0) + f(x_0)\frac{U^{(3)}(x_0)G'(x_0)}{U''(x_0)}\right)$$

et $o_{\mathcal{I}}(\eta_\epsilon)/\eta_\epsilon$ tend vers 0 quand $\epsilon \to 0$ uniformément par rapport au paramètre μ.

Démonstration. Prouvons d'abord que le potentiel $U_{\epsilon,\mu}$ atteint son minimum global en un unique point $x_{\epsilon,\mu}$ qui vérifie de surcroît $\lim_{\epsilon\to 0} x_{\epsilon,\mu} = x_0$. Par définition de $(\eta_\epsilon)_\epsilon$ et de $U_{\epsilon,\mu}$, on a la convergence suivante

$$\lim_{\epsilon\to 0} U_{\epsilon,\mu}(x_0) = U(x_0) . \tag{A.21}$$

Comme x_0 est l'unique point où U atteint son minimum global, pour tout $R > 0$ assez petit, il existe une constante $\rho_R > 0$ telle que $\inf_{x\in[x_0-R,x_0+R]^c} U(x) > U(x_0) + \rho_R$. On en déduit l'existence de deux constantes ρ'_R et ϵ_0 telles que

$$U_{\epsilon,\mu}(x) \geq (1 - \mu\lambda\eta_\epsilon)U(x) - \eta_\epsilon\mu C \geq U(x_0) + \rho'_R, \tag{A.22}$$

pour tout $\epsilon \leq \epsilon_0$ et $x \in [x_0 - R, x_0 + R]^c$. D'après (A.21) et (A.22), on obtient : pour tout $R > 0$, le minimum global du potentiel $U_{\epsilon,\mu}$ est atteint sur l'intervalle $[x_0-R, x_0+R]$ dès que ϵ est assez petit (uniformément par rapport à μ). En outre, le point pour lequel le minimum global est réalisé est unique. En effet, $U''(x_0) > 0$ et la régularité de U implique $U''(x) > 0$ pour tout x dans un petit voisinage de x_0. Comme $U''_{\epsilon,\mu}$ converge vers U'' quand $\epsilon \to 0$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$, on obtient $U''_{\epsilon,\mu}(x) > 0$ pour tout $x \in [x_0 - R, x_0 + R]$ dès que R et ϵ sont assez petits. Le point où le minimum est atteint est donc unique et on le note $x_{\epsilon,\mu}$. Et, pour ϵ petit, $U''_{\epsilon,\mu}(x_{\epsilon,\mu}) > 0$ uniformément par rapport à μ.
Donnons un développement asymptotique de $x_{\epsilon,\mu}$. En appliquant le théorème des accroissements finis à $U_{\epsilon,\mu}$, on a

$$0 = U'_{\epsilon,\mu}(x_{\epsilon,\mu}) = U'(x_0) + \mu\eta_\epsilon G'(x_0) + U''_{\epsilon,\mu}(\tilde{x})(x_{\epsilon,\mu} - x_0)\,,$$

où $\tilde{x}$ est entre x_0 et $x_{\epsilon,\mu}$. Comme la dérivée seconde est continue, la quantité $U''_{\epsilon,\mu}(\tilde{x})$ est uniformément bornée. Or $U'(x_0) = 0$. En conséquence, $x_{\epsilon,\mu} - x_0 = \mathcal{O}_{\mathcal{I}}(\eta_\epsilon)$. En utilisant le même argument pour le second ordre du développement asymptotique de $U'_{\epsilon,\mu}(x_{\epsilon,\mu})$, il vient

$$0 = \mu\eta_\epsilon G'(x_0) + \Big(U''(x_0) + \mu\eta_\epsilon G''(x_0)\Big)(x_{\epsilon,\mu} - x_0) + \frac{U^{(3)}_{\epsilon,\mu}(\tilde{x})}{2}(x_{\epsilon,\mu} - x_0)^2$$

d'où l'on obtient (A.19). Terminons en prouvant l'estimation (A.20). Le Lemme A.7 peut être appliqué à $U_{\epsilon,\mu}$ car le résultat asymptotique (A.17) est uniforme par rapport au paramètre μ. Donc, il suffit de remplacer μ par $\mu\eta_\epsilon$. On obtient immédiatement

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-\frac{U_{\epsilon,\mu}(t)}{\epsilon}}dt = \sqrt{\frac{\pi\epsilon}{U''_{\epsilon,\mu}(x_{\epsilon,\mu})}}f(x_{\epsilon,\mu})e^{-\frac{U_{\epsilon,\mu}(x_{\epsilon,\mu})}{\epsilon}}\Big(1 + o_{\mathcal{I}}(\eta_\epsilon)\Big)\,. \tag{A.23}$$

On trouve ces résultats asymptotiques :

$$\begin{aligned} f(x_{\epsilon,\mu}) &= f(x_0) - \mu\eta_\epsilon f'(x_0)\frac{G'(x_0)}{U''(x_0)} + o_{\mathcal{I}}(\eta_\epsilon) \\ \text{et}\quad U''_{\epsilon,\mu}(x_{\epsilon,\mu}) &= U''(x_0) + \mu\eta_\epsilon\Big(G''(x_0) - U^{(3)}(x_0)\frac{G'(x_0)}{U''(x_0)}\Big) + o_{\mathcal{I}}(\eta_\epsilon)\,. \end{aligned}$$

Le résultat du Lemme A.11 est obtenu en combinant ces deux résultats asymptotiques ainsi que (A.23). □

Nous pouvons maintenant fournir un résultat similaire à celui du Lemme A.9 pour un potentiel U_μ dependant du petit paramètre ϵ. Il suffit de considérer un ratio de deux intégrales. Alors, une application immédiate du Lemme A.11 amène au résultat suivant.

Lemme A.12. *Soit $\epsilon > 0$. Soient U et G deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telles que $U(t) \geq t^2$ pour $|t|$ assez grand et $|G(t)| \leq \lambda|U(t)|+C$ pour deux constantes $\lambda > 0$ et $C > 0$. On suppose également que U atteint son minimum global en un unique point x_0 tel que $U''(x_0) > 0$. Pour toute famille $(\eta_\epsilon)_\epsilon$ satisfaisant $\lim_{\epsilon\to 0} \eta_\epsilon = 0$ et $\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon/\eta_\epsilon = 0$, on définit $U_{\epsilon,\mu} := U + \eta_\epsilon\mu G$ dépendant du paramètre μ qui prend ses valeurs dans un intervalle compact $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ telle que $|f(t)| \leq e^{\lambda|U(t)|}$ pour tout $|t|$ assez grand et telle que $|f^{(i)}|$ soit localement bornée pour $0 \leq i \leq 3$. Alors, on a le résultat asymptotique suivant :*

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-\frac{2U_{\epsilon,\mu}(t)}{\epsilon}}dt}{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{2U_{\epsilon,\mu}(t)}{\epsilon}}dt} = f(x_0) - \frac{f'(x_0)G'(x_0)}{U''(x_0)}\mu\,\eta_\epsilon + o_{\mathcal{I}}(\eta_\epsilon) \tag{A.24}$$

où le reste $o_{\mathcal{I}}(\eta_\epsilon)/\eta_\epsilon$ converge vers 0 lorsque $\epsilon \to 0$ uniformément par rapport au paramètre μ.

Démonstration. Les hypothèses du Lemme A.11 sont satisfaites pour la fonction f ainsi que pour la fonction constante égale à 1. On a ainsi :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-\frac{2U_{\epsilon,\mu}(t)}{\epsilon}}dt &= \sqrt{\frac{\pi\epsilon}{U''(x_0)}}e^{-\frac{2U_{\epsilon,\mu}(x_{\epsilon,\mu})}{\epsilon}}\Big(f(x_0) + \gamma_\mu(f)\eta_\epsilon + o_{\mathcal{I}}(\eta_\epsilon)\Big)\\ \text{et}\quad \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{2U_{\epsilon,\mu}(t)}{\epsilon}}dt &= \sqrt{\frac{\pi\epsilon}{U''(x_0)}}e^{-\frac{2U_{\epsilon,\mu}(x_{\epsilon,\mu})}{\epsilon}}\Big(1 + \gamma_\mu(1)\eta_\epsilon + o_{\mathcal{I}}(\eta_\epsilon)\Big)\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\gamma_\mu(f) &:= \frac{\mu}{2U''(x_0)}\Big(-2f'(x_0)G'(x_0) - f(x_0)G''(x_0) + f(x_0)\frac{U^{(3)}(x_0)G'(x_0)}{U''(x_0)}\Big)\\ \text{et}\quad \gamma_\mu(1) &:= \frac{\mu}{2U''(x_0)}\Big(-G''(x_0) + \frac{U^{(3)}(x_0)G'(x_0)}{U''(x_0)}\Big).\end{aligned}$$

et $o_{\mathcal{I}}(\eta_\epsilon)/\eta_\epsilon$ tend vers 0 quand $\epsilon \to 0$ uniformément par rapport au paramètre μ. Il vient donc

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-\frac{2U_{\epsilon,\mu}(t)}{\epsilon}}dt}{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{2U_{\epsilon,\mu}(t)}{\epsilon}}dt} = f(x_0) + \Big(\gamma_\mu(f) - f(x_0)\gamma_\mu(1)\Big)\eta_\epsilon + o_{\mathcal{I}}(\eta_\epsilon)$$

ce qui devient (A.24) après simplifications. □

Remarque A.13. *Les résultats des Lemmes A.3–A.12 peuvent être facilement généralisés, en remplaçant la fonction $U_\mu := U + \mu G$ par $U_\mu := U + \sum_{i=1}^k \mu_i G_i$ où $(\mu_1, \ldots, \mu_k) \in \mathcal{I}_1 \times \ldots \times \mathcal{I}_k$. Les résultats asymptotiques sont alors uniformes par rapport à tous les paramètres.*

Lemme A.14. *Soit $\epsilon > 0$. Soit $U_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty([a;b],\mathbb{R})$ tel que pour tout $i \geq 0$, $U_\epsilon^{(i)}$ converge vers $U^{(i)}$ uniformément sur $[a;b]$ avec $U \in \mathcal{C}^\infty([a;b],\mathbb{R})$. U atteint son minimum global sur $[a;b]$ en un unique point $x_0 \in]a;b[$. Alors, pour ϵ assez petit :*
1. *U_ϵ atteint son minimum global sur $[a;b]$ en un unique point $x_\epsilon \in]a;b[$.*
2. *$U''(x_0) > 0$ implique $U_\epsilon''(x_\epsilon) > 0$ pour ϵ assez petit et*

$$x_\epsilon = x_0 - \frac{U_\epsilon'(x_0)}{U''(x_0)} + o\left\{U_\epsilon'(x_0)\right\} . \tag{A.25}$$

3. *De plus, si $U''(x_0) > 0$, en prenant la limite $\epsilon \to 0$, pour toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^4([a;b];\mathbb{R})$, on a*

$$\int_a^b f(t) e^{\frac{-2U_\epsilon(t)}{\epsilon}} dt = \sqrt{\frac{\pi\epsilon}{\mathcal{U}_2}}\; e^{-\frac{2U_\epsilon(x_\epsilon)}{\epsilon}} \Big\{ f(x_\epsilon) + \gamma_{x_0}(f)\epsilon + o(\epsilon) \Big\} \tag{A.26}$$

avec

$$\gamma_{x_0}(f) := f(x_0)\left(\frac{5\,\mathcal{U}_3^2}{48\,\mathcal{U}_2^3} - \frac{\mathcal{U}_4}{16\,\mathcal{U}_2^2} \right) - f'(x_0)\frac{\mathcal{U}_3}{4\,\mathcal{U}_2^2} + \frac{f''(x_0)}{4\,\mathcal{U}_2} . \tag{A.27}$$

Ici, $\mathcal{U}_k := U^{(k)}(x_0)$.

Démonstration. **1.** Supposons qu'on puisse trouver une suite $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 en décroissant telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, U_{ϵ_k} atteigne son minimum global en deux points $x_k^{(1)}$ et $x_k^{(2)}$. Comme U_ϵ converge uniformément vers U sur $[a;b]$, on en déduit que $x_k^{(1)}$ tout comme $x_k^{(2)}$ tendent vers x_0 pour k tendant vers l'infini. Donc, quel que soit $\delta > 0$, dès que k est assez grand, $x_k^{(1)}$ et $x_k^{(2)}$ sont dans l'intervalle $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$. Or, $U''(x_0) > 0$ donc il existe $\rho > 0$ et $\delta_0 > 0$ tels que $U''(x) \geq 2\rho$ pour tout $x \in [x_0 - \delta_0; x_0 + \delta_0]$. U_ϵ'' converge uniformément vers U'' sur $[x_0 - \delta_0; x_0 + \delta_0] \subset [a;b]$ donc pour k assez grand, $U_{\epsilon_k}''(x) \geq \rho$ pour tout $x \in [x_0 - \delta_0; x_0 + \delta_0]$. Par conséquent, il ne peut pas y avoir deux points critiques de U sur cet intervalle. Prenons $\delta = \delta_0$ et on a bien l'unicité du point où est réalisé le minimum global de U_ϵ dès que ϵ est assez petit.
2. La convergence uniforme implique clairement $U_\epsilon''(x_\epsilon) > 0$ pour ϵ assez petit si $U''(x_0) > 0$. On effectue un développement limité :

$$U_\epsilon'(x_0) = U_\epsilon'(x_\epsilon) + U_\epsilon''(x_\epsilon)\,(x_0 - x_\epsilon) + o\left\{x_0 - x_\epsilon\right\} .$$

Or, $U_\epsilon'(x_\epsilon) = 0$ et $U_\epsilon''(x_\epsilon)$ converge vers $U''(x_0)$. On obtient ainsi (A.25).
3. La preuve est absolument similaire à celle du Lemme A.6. □

On peut étendre le résultat du lemme précédent sur des domaines non bornés.

Lemme A.15. *Soit $\epsilon > 0$. Soit une fonction $U_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \geq 0$, $U_\epsilon^{(i)}$ converge vers $U^{(i)}$ uniformément sur tout compact où $U \in \mathcal{C}^\infty([a;b],\mathbb{R})$. U atteint son minimum global en r points $A_1 < \cdots < A_r$. De plus, il existe $R > 0$ tel que $U_\epsilon(x) > x^2$ pour tout $|x| > R$ et $\epsilon < \epsilon_c$ avec $\epsilon_c \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, on a les*

résultats suivants dès que ϵ assez petit :
1. *Si l'on note $\mathcal{V}_i$ la cellule de Voronoï contenant A_i, U_ϵ atteint son minimum global sur $\mathcal{V}_i$ en exactement un point que l'on note A_i^ϵ. De plus, A_i^ϵ converge vers A_i.*
2. *Si $U''(A_i) > 0$, on a l'inégalité $U_\epsilon''(A_i^\epsilon) > 0$ dès que ϵ est assez petit. On a de plus le développement asymptotique :*

$$A_i^\epsilon = A_i - \frac{U_\epsilon'(A_i)}{U''(A_i)} + o\left\{U_\epsilon'(A_i)\right\} . \tag{A.28}$$

3. *En outre, si $U''(A_i) > 0$ pour tout $1 \leq i \leq r$, en faisant tendre ϵ vers 0, pour toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ à croissance lente, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{\frac{-2U_\epsilon(t)}{\epsilon}} dt = \sum_{j=1}^{r} \sqrt{\frac{\pi\epsilon}{U_\epsilon''(A_j^\epsilon)}}\; e^{-\frac{2U_\epsilon(A_j^\epsilon)}{\epsilon}} \Big\{ f(A_j^\epsilon) + \gamma_j(f)\epsilon + o(\epsilon) \Big\} \tag{A.29}$$

avec

$$\gamma_j(f) := f(A_j) \left(\frac{5\,\mathcal{U}_{3,j}^2}{48\,\mathcal{U}_{2,j}^3} - \frac{\mathcal{U}_{4,j}}{16\,\mathcal{U}_{2,j}^2} \right) - f'(A_j) \frac{\mathcal{U}_{3,j}}{4\,\mathcal{U}_{2,j}^2} + \frac{f''(A_j)}{4\,\mathcal{U}_{2,j}} . \tag{A.30}$$

Ici $\mathcal{U}_{k,j} := U^{(k)}(A_j)$.

Démonstration. On applique le Lemme A.14 sur $\mathcal{V}_i := \left[\frac{A_{j-1}+A_j}{2}; \frac{A_{j+1}+A_j}{2}\right]$ pour tout $2 \leq j \leq r-1$. On l'applique également sur $\left[-R; \frac{A_1+A_2}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{A_{r-1}+A_r}{2}; R\right]$. Cela donne le résultat sur $[-R; R]$. La croissance polynômiale de f et la minoration $U_\epsilon(x) > x^2$ pour $|x| > R$ implique que l'intégrale sur $[-R; R]^c$ est négligeable. □

B. RAPPELS GÉNÉRAUX SUR LA THÉORIE DE FREIDLIN-WENTZELL

Les principaux résultats concernant la théorie de Freidlin-Wentzell notamment sur le temps que met un processus stochastique pour sortir d'un ouvert sont énoncés ici. Cette théorie est bien développée dans [14]. Toutefois, les résultats du [14] sont ici inapplicables puisque le potentiel y est supposé uniformément lipschitz. Or, la géométrie du potentiel V que l'on considère dans cette étude implique que cette condition est fausse. En revanche, la propriété de convexité à l'infini permet d'obtenir des résultats similaires.
Considérons un processus stochastique Y_t^ϵ qui est l'unique solution de l'équation différentielle stochastique

$$Y_t^\epsilon = x + \sqrt{\epsilon} W_t - \int_0^t U'\left(Y_s^\epsilon\right) ds\,, \quad x \in \mathbb{R} \tag{B.1}$$

où U est un potentiel de classe $\mathcal{C}^\infty$ et convexe à l'infini. En utilisant le principe de contraction et le théorème de Schilder, on peut prouver facilement que le processus $\left(Y_t^\epsilon\right)_{t\in[0;T]}$ satisfait un principe de grandes déviations sur $\mathcal{C}_x\left([0;T]\right)$ avec la bonne fonction de taux

$$I_{x,T}(f) := \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T \left|\dot{f}\,(t) + U'\left(f(t)\right)\right|^2 dt & \text{si } f \in \mathcal{H}_1^x \\ +\infty & \text{si } f \notin \mathcal{H}_1^x \end{cases}, \tag{B.2}$$

$\mathcal{H}_1^x$ désignant l'espace des fonctions f absolument continues sur $[0;T]$ telles que $f(0) = x$. Par la suite, on considère un processus stochastique $\left(X_t^\epsilon\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$ qui est l'unique solution de l'équation différentielle stochastique

$$X_t^\epsilon = x + \sqrt{\epsilon} W_t - \int_0^t U_\epsilon'\left(X_s^\epsilon\right) ds \tag{B.3}$$

où U_ϵ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que le processus $\left(X_t^\epsilon\right)_{t\in[0;T]}$ vérifie un principe de grandes déviations avec pour bonne fonction de taux $I_{x,T}$ définie dans (B.2) ce qui signifie que pour tout fermé $\mathcal{F}_x$ et pour tout ouvert $\mathcal{O}_x$ dans $\mathcal{C}_x\left([0;T]\right)$, on a les deux résultats asymptotiques suivants :

$$\limsup_{\epsilon\longrightarrow 0} \epsilon \ln \mathbb{P}\left(X^\epsilon \in \mathcal{F}_x\right) \;\leq\; -\inf_{\Phi\in\mathcal{F}_x} I_{x,T}(\Phi) \tag{B.4}$$

$$\text{et} \quad \liminf_{\epsilon\longrightarrow 0} \epsilon \ln \mathbb{P}\left(X^\epsilon \in \mathcal{O}_x\right) \;\geq\; -\inf_{\Phi\in\mathcal{O}_x} I_{x,T}(\Phi)\,. \tag{B.5}$$

Cette supposition n'est pas exigeante. Il suffit en effet que les deux processus $(X_t^\epsilon)_{t\in[0;T]}$ et $(Y_t^\epsilon)_{t\in[0;T]}$ soient exponentiellement équivalents ce qui est le cas si U'_ϵ converge vers U' uniformément sur tout compact. On suppose désormais cette convergence uniforme sur tout compact.
On introduit $\Psi_t(x)$ la solution du système dynamique

$$\Psi_0(x) = x \quad \text{et} \quad \dot{\Psi}_t\,(x) = -U'\left(\Psi_t(x)\right)\,. \tag{B.6}$$

On pose :

$$Q(x,y,t) := \inf_{\{\varphi\in\mathcal{C}_x([0;t])\,|\,\varphi(t)=y\}} I_{x,t}(\varphi) \quad \text{puis} \quad Q(x,y) := \inf_{t>0} Q(x,y,t)\,.$$

On considère un intervalle borné $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ qui contient l'élément x. Trois conditions sont exigées sur le potentiel U et sur l'ouvert $\mathcal{O}$:

Hypothèse B.1. *L'unique équilibre stable dans l'intervalle $\mathcal{O}$ du système dynamique* (B.6) *est $x_s \in \mathcal{O}$. De plus, pour tout $\Psi_0 \in \mathcal{O}$, quel que soit $t > 0$, $\Psi_t \in \mathcal{O}$ et Ψ_t converge vers x_s quand t tend vers $+\infty$.*

Hypothèse B.2. *Quel que soit $\Psi_0 \in \partial\mathcal{O}$, Ψ_t converge vers x_s.*

Cette condition supplémentaire invite à s'éloigner de $\partial\mathcal{D}$ si la frontière du domaine d'attraction de x_s est d'intersection non vide avec le domaine d'attraction d'un autre point de $\mathbb{R}^d$.
Toutefois, si l'intervalle $\mathcal{O} =]y_-; y_+[$ ne la vérifie pas, on considère l'intervalle réduit $\mathcal{O}^\delta :=]y_- + \delta; y_+ - \delta[$ et on fait tendre δ vers 0.

Hypothèse B.3. $\overline{Q} := \inf_{z\in\partial\mathcal{O}} Q\,(x_s, z) < +\infty$.

Cette condition signifie que le coût pour sortir de l'intervalle $\mathcal{O}$ est fini. On peut calculer explicitement $Q(x_s, z)$ pour tout $z \in \mathcal{O}$:

Proposition B.4. 1. *On a les deux limites suivantes :* $\lim_{x\longrightarrow x_s} Q(x, x_s) = 0$ *ainsi que* $\lim_{x\longrightarrow x_s} Q(x_s, x) = 0$.
2. *Soient $x, y \in \mathcal{O}$ tels que le système dynamique $\Psi_t(x)$ partant de x satisfait la propriété $y \in \overline{\{\Psi_t(x)\,;\, t \geq 0\}}$. Alors, $Q(x, y) = 0$.*
3. *Soit $y \in \mathcal{O}$ alors $Q\,(x_s, y) = 2U(y) - 2U\,(x_s)$.*

Démonstration. **1.** Soit la fonction $\varphi(t) := x + t(x_s - x)$. On a alors $\varphi(0) = x$ et $\varphi(1) = x_s$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} Q(x, x_s) &\leq Q(x, x_s, 1) \leq I_{x,1}\,(\varphi) \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^1 \Big|\,(x_s - x) + U'\Big[x_s + (1-t)\,(x - x_s)\,\Big]\Big|^2 dt \end{aligned}$$

Comme x tend vers x_s et comme U est de classe $\mathcal{C}^1$, on a donc bien $Q(x, x_s)$ qui converge vers 0. On a la seconde limite en renversant le temps.

2. Soient x et y dans $\mathcal{O}$ tels que U soit décroissant sur $[x;y]$. On suppose $x < y \leq x_s$ sans rien changer à la généralité. Considérons la fonction $t \mapsto \Psi_t(x)$. On sait alors que Ψ_t converge vers x_s qui est supérieur ou égal à y. Posons T le temps tel que $\Psi_T(x) = y$. Si $T < \infty$ c'est-à-dire si $y < x_s$, on a $I_{x,\Psi(x)}(T) = 0$ d'où $Q(x,y) = 0$. Et, si jamais $T = +\infty$ c'est-à-dire si $y = x_s$, quel que soit $\delta \in]0; y-x[$, on a $Q(x, y-\delta) = 0$ d'où $Q(x,y) \leq Q(y-\delta, y)$ ce qui tend vers 0 quand δ tend vers 0. D'où l'on a bien $Q(x,y) = 0$.

3. Soit $\varphi \in \mathcal{C}([0;T])$ telle que $\varphi(0) = x_s$ et $\varphi(T) = y$ où $y \in \mathcal{O}$. Sans rien changer à la généralité, on suppose $y > x_s$. Ainsi $\varphi(T) > \varphi(0)$ et $U'(\varphi(t)) \geq 0$ pour tout $t \in [0;T]$. Supposons que la fonction φ ne soit pas croissante. Alors, il existe deux temps $t_1 < t_2$ tels que $\varphi(t_1) > \varphi(t_2)$. Notons t_3 le plus petit temps strictement plus grand que t_2 tel que $\varphi(t_3) = \varphi(t_1)$. Considérons la fonction $\widetilde{\varphi}$ sur $[0; T-(t_3-t_1)]$ définie par $\widetilde{\varphi}(t) := \varphi(t)$ si $t \in [0;t_1]$ et $\widetilde{\varphi}(t) := \varphi(t+(t_3-t_1))$ si $t \in [t_1; T-(t_3-t_1)]$. $\widetilde{\varphi}$ est dans $\mathcal{H}_1^{x_s}$. Et, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^T \left|\dot{\varphi}_t + U'(\varphi_t)\right|^2 dt &= \int_0^{T-(t_3-t_1)} \left|\dot{\widetilde{\varphi}}_t + U'(\varphi_t)\right|^2 dt + \int_{t_1}^{t_3} \left|\dot{\varphi}_t + U'(\varphi_t)\right|^2 dt \\ &\geq \int_0^{T-(t_3-t_1)} \left|\dot{\widetilde{\varphi}}_t + U'(\varphi_t)\right|^2 dt\,.\end{aligned}$$

Donc, pour trouver le minimum, on peut couper les parties qui vont à contre-sens (décroissantes ici). On peut donc se ramener à $\dot{\varphi}_t \geq 0$ quel que soit $t \geq 0$ c'est-à-dire au cas où $\dot{\varphi}_t\, U'(\varphi_t) \geq 0$ ce qui revient à $\dot{\varphi}_t\, U'(\varphi_t) = \left|\dot{\varphi}_t\, U'(\varphi_t)\right|$. En d'autres termes, le chemin ne revient pas sur ses pas. Alors :

$$\begin{aligned}\int_0^T \left|\dot{\varphi}_t + U'(\varphi_t)\right|^2 dt &= \int_0^T \left|\dot{\varphi}_t\right|^2 dt + \int_0^T |U'(\varphi_t)|^2\, dt + 2\int_0^T \dot{\varphi}_t\, U'(\varphi_t) dt \\ &\geq 4\left|\int_0^T \dot{\varphi}_t\, U'(\varphi_t) dt\right| = 4\,|U(\varphi(T)) - U(\varphi(0))| \\ &\geq 4|U(y) - U(x_s)|\,.\end{aligned}$$

Ainsi pour tout y, on a $Q(x_s, y) \geq 2|U(y) - U(x_s)|$.

Il reste maintenant à approcher ce minimum. Pour cela, on considère la fonction particulière $\chi_t(y) := \Psi_{T-t}(y)$. Ainsi on a : $\dot{\chi}_t\,(y) = U'(\chi_t(y))$. De plus, $\chi_T(y) = y$ et aussi $\chi_0(y) = \Psi_T(y) \longrightarrow x_s$ pour $T \longrightarrow \infty$. On calcule maintenant :

$$\begin{aligned}I_{x_s,T}(\chi(y)) &= \frac{1}{2}\int_0^T \left|\dot{\chi}_t\,(y) + U'(\chi_t(y))\right|^2 dt = 2\int_0^T |U'(\chi_t(y))|^2\, dt \\ &= 2\int_0^T \left|\dot{\chi}_t\,(y)\right| |U'(\chi_t(y))|\, dt\,.\end{aligned}$$

Or, $\dot{\chi}_t\,(y)$ et $U'(\chi_t(y))$ sont de même signe donc on peut enlever la valeur absolue.

D'où

$$\begin{aligned} I_{\Psi_T(y),T}(\chi(y)) &= 2\int_0^T \dot{\chi}_t\,(y)U'(\chi_t(y))dt = 2\Big[U(\chi_T(y)) - U(\chi_0(y))\Big] \\ &= 2\Big[U(y) - U(\Psi_T(y))\Big]. \end{aligned}$$

On en déduit donc $Q\left(\Psi_T(y), y\right) = 2\left[U(y) - U(\Psi_T(y))\right] \leq 2\left[U(y) - U(x_s)\right]$. Or, $Q\left(x_s, \Psi_T(y)\right)$ tend vers 0 quand T tend vers $+\infty$ vu que $\Psi_T(y)$ converge vers x_s quand T tend vers l'infini. Ainsi $Q\left(x_s, y\right) \leq 2\left[U(y) - U(x_s)\right]$ ce qui achève la preuve. □

Aussi, la condition B.3 est vérifiée pour peu que l'on ait $\inf_{z\in\mathcal{O}} U(z) < +\infty$. C'est d'ailleurs le cas puisqu'on considère un potentiel U de classe $\mathcal{C}^\infty$ et un intervalle borné $\mathcal{O}$.
Par la suite, on note $\mathbb{B}\left(x, \rho\right)$ la boule de centre x et de rayon ρ.

Définition B.5. *Pour tout $x \in \mathcal{O}$, on note*

$$\tau_\epsilon(x) := \inf\left\{t > 0 \mid\ X_t^\epsilon \in \partial\mathcal{O}\right\} \tag{B.7}$$

le premier temps de sortie de l'intervalle $\mathcal{O}$ du processus X^ϵ.

Il convient de remarquer que l'on suppose ici que la loi initiale est δ_x ce qui ne pose pas de problème si l'on part d'une mesure quelconque puisqu'on peut conditionner.
Le théorème suivant n'est pas *stricto sensu* celui de Freidlin et Wentzell décrit dans [14]. D'une part, la dérive n'est pas uniformément lipschitzienne et d'autre part, elle est paramétrée en fonction de ϵ. Les mêmes différences apparaissent dans [22] où l'équation est de plus non homogène. L'argument principal pour prouver un résultat similaire est la convergence de la dérive $b_\epsilon(t,x)$ vers $b_0(t,x)$ uniformément en temps et uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ par rapport à x et y. C'est d'ailleurs pour ce résultat que les auteurs ont dû supposer la convexité de V vu que la dérive y dépend du temps. Comme on a supposé cette convergence, on obtient

Théorème B.6. *Soit $x \in \mathcal{O} =]y_-; y_+[$. Quel que soit $\delta > 0$ arbitrairement petit, on a les résultats asymptotiques suivants :*

$$\lim_{\epsilon\longrightarrow 0} \mathbb{P}\left\{e^{\frac{1}{\epsilon}(Q(x_s;\mathcal{O}^c)-\delta)} < \tau_\epsilon(x) < e^{\frac{1}{\epsilon}(Q(x_s;\mathcal{O}^c)+\delta)}\right\} = 1 \tag{B.8}$$

$$et \qquad \lim_{\epsilon\longrightarrow 0} \epsilon \ln \mathbb{E}\left[\tau_\epsilon(x)\right] = Q\left(x_s;\mathcal{O}^c\right) \tag{B.9}$$

où $Q\left(x_s;\mathcal{O}^c\right) := 2\min\left\{U\left(y_-\right)\,;\,U\left(y_+\right)\right\} - 2U\left(x_s\right)$. De plus, on peut connaître le lieu de sortie :

$$\lim_{\epsilon\longrightarrow 0} \mathbb{P}\left[X^\epsilon_{\tau_\epsilon(x)} = y_-\right] = \left\{\begin{array}{lll} 0 & si & U\left(y_-\right) > U\left(y_+\right) \\ 1 & si & U\left(y_-\right) < U\left(y_+\right) \end{array}\right. . \tag{B.10}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto and G. Scheffer. *Sur les inégalités de Sobolev-logarithmiques* Vol. 10 of Panoramas et Synthèses. Société Mathématique de France, Paris, 2000.

[2] D. Bakry, F. Barthe, P. Cattiaux, and A. Guillin. A simple proof of the Poincaré inequality for a large class of probability measures including the log-concave case. *Electronic Communications in Probability.*, 13 :60–66, 2008.

[3] D. Bakry, and M. Emery. Diffusions hypercontractives. In *Séminaire de Probabilités*, XIX, 1983/84, volume 1123 of *Lecture Notes in Math.*, pages 177–206. Springer, Berlin, 1985.

[4] F. Barret, A. Bovier, and S. Méléard. Uniform estimates for metastable transition times in a coupled bistable system. *arXiv :0907.0537.*

[5] S. Benachour, B. Roynette, D. Talay, and P. Vallois. Nonlinear self-stabilizing processes. I. Existence, invariant probability, propagation of chaos. *Stochastic Process. Appl.*, 75(2) :173–201, 1998.

[6] S. Benachour, B. Roynette, and P. Vallois. Nonlinear self-stabilizing processes. II. Convergence to invariant probability. *Stochastic Process. Appl.*, 75(2) :203–224, 1998.

[7] G. Ben Arous and O. Zeitouni. Increasing propagation of chaos for mean fields models. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 35(1) :85–102, 1999.

[8] R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera, and A. Vulpiani. A theory of stochastic resonance in climatic change. *SIAM J. Appl. Math. 43* (1983), 563–578

[9] N. Berglund, B. Fernandez, and B. Gentz. Metastability in Interacting Nonlinear Stochastic Differential Equations : I. From Weak Coupling to Synchronization. *Nonlinearity* 20 (2007), no. 11, 2551–2581.

[10] N. Berglund, B. Fernandez, and B. Gentz. Metastability in Interacting Nonlinear Stochastic Differential Equations : II. Large-N behaviour. *Nonlinearity* 20 (2007), no. 11, 2583–2614.

[11] N. Berglund, and B. Gentz. The Eyring ?Kramers law for potentials with nonquadratic saddles *arXiv :0807.1681*

[12] J. A. Carillo, R. J. McCann, and C. Villani. Kinetic equilibration rates for granular media and related equations : entropy dissipation and mass transportation estimates. *Rev. Mat. Iberoamericana* 19 (2003), no. 3, 971–1018.

[13] P. Cattiaux, A. Guillin and F. Malrieu. Probabilistic approach for granular media equations in the non-uniformly convex case. *Probability theory and related fields*, Vol. 140, No 1-2, 19–40, 2008.

[14] A. Dembo and O. Zeitouni. *Large deviations techniques and applications*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.

[15] R. E. L. DeVille, and E. Vanden-Eijnden. Regular gaits and optimal velocities for motor proteins. *Biophysical J.,* 95(6) :2681–2691. 2008

[16] A. Erdélyi. *Asymptotics expansions*. Dover Publications, Inc., New York, 1956.

[17] M. Freidlin and A. Wentzell. *Random Perturbations of Dynamical Systems*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998

[18] T. Funaki. A certain class of diffusion processes associated with nonlinear parabolic equations. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 67(3) :331–348, 1984.

[19] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, and F. Marchesoni. Stochastic resonance. *Reviews of Modern Physics* 70 (1998), 223–287.

[20] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer-Verlag, Berlin, 1977. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 224.

[21] S. Herrmann, and P. Imkeller. Barrier crossings characterize stochastic resonance. *Stochastics and Dynamics* 2 (2002), 413–436.

[22] S. Herrmann, P. Imkeller, and D. Peithmann. Large deviations and a Kramers' type law for self-stabilizing diffusions. *Ann. Appl. Probab.*, 18(4) :1379–1423, 2008.

[23] S. Herrmann, and J. Tugaut. Non uniqueness of stationary measures for self-stabilizing processes. *Stochastic Process. Appl.*, 120(7) :1215–1246, 2010.

[24] S. Herrmann, and J. Tugaut. Stationary measures for self-stabilizing processes : asymptotic analysis in the small noise limit. *Prépublications de l'Institut Elie Cartan*, no. 26, (2009).

[25] S. Herrmann, and J. Tugaut. Self-stabilizing processes : uniqueness problem for stationary measures and convergence rate in the small noise limit. *Prépublications de l'Institut Elie Cartan*, no. 36, (2009).

[26] P. D. Hislop, and I. M. Sigal. *Introduction to spectral theory. With applications to Schrödinger operators*, vol. 113 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, NY, 1996.

[27] P. Imkeller, and I. Pavlyukevich. First exit times of SDEs driven by stable Lévy processes. *Stochastic Process. Appl.* 116 (2006), no. 4, 611–642.

[28] P. Imkeller, and I. Pavlyukevich. Metastable behaviour of small noise Lévy-driven diffusions. *ESAIM Probab. Stat.* 12 (2008), 412–437.

[29] P. Imkeller, I. Pavlyukevich, and T. Wetzel. First exit times for Lévy-driven diffusions with exponentially light jumps. *Ann. Probab.* 37, no. 2, 530–564 (2009).

[30] P. Jung, U. Behn, E. Pantazelou, and F. Moss. Collective response in globally coupled bistable systems. *Phys. Rev. A*, vol.46, no.4, 1709–1712 (1992).

[31] I. Karatzas, and S. E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus.*, Springer-Verlag, second edition (1991).

[32] O. Kavian, G. Kerkyacharian, and B. Roynette. Quelques remarques sur l'ultracontractivité. *J. Funct. Anal.* 111(1993), no. 1, 155–196.

[33] F. Malrieu. Logarithmic Sobolev inequalities for some nonlinear PDE's. *Stochastic Process. Appl.*, 95(1) :109–132, 2001.

[34] F. Malrieu. Convergence to equilibrium for granular media equations and their Euler schemes *Ann. Appl. Probab.*, 13(2) :540–560, 2003.

[35] H. P. McKean, Jr. A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 56 :1907–1911, 1966.

[36] H. P. McKean, Jr. Propagation of chaos for a class of non-linear parabolic equations. In *Stochastic Differential Equations (Lecture Series in Differential Equations, Session 7, Catholic Univ., 1967)*, pages 41–57. Air Force Office Sci. Res., Arlington, Va., 1967.

[37] K. Oelschläger. A law of large numbers for moderately interacting diffusion processes. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 69(2) :279–322, 1985.

[38] F. W. J. Olver *Asymptotics and special functions*. Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press, a subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, New York - London, 1974.

[39] I. Pavlyukevich. *Stochastic Resonance.* Ph.D. thesis, Humboldt-Univ. zu Berlin. (2002).

[40] D. W. Stroock and S. R. S. Varadhan. *Multidimensional diffusion processes*, volume 233 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[41] A-S. Sznitman. Topics in propagation of chaos. In *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIX—1989*, volume 1464 of *Lecture Notes in Math.*, pages 165–251. Springer, Berlin, 1991.

[42] Y. Tamura. Free energy and the convergence of distributions of diffusion processes of McKean type. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 34(2) :443–484, 1987.

[43] Y. Tamura. On asymptotic behaviors of the solution of a nonlinear diffusion equation. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 31(1) :195–221, 1984.

Résumé

Les processus auto-stabilisants sont définis comme des solutions d'équations différentielles stochastiques dont le terme de dérive contient à la fois le gradient d'un potentiel ainsi qu'un terme non-linéaire au sens de McKean qui attire le processus vers sa propre loi de distribution. On dispose de nombreux résultats lorsque l'environnement est convexe. L'objet de ce travail est de les étendre autant que possible au cas général notamment lorsque le paysage contient plusieurs puits. Des différences fondamentales sont constatées.

Le premier chapitre prouve l'existence d'une solution forte. Le second s'intéresse aux lois de probabilités d'une telle solution. En particulier, l'existence et la non-unicité des mesures stationnaires sont mises en évidence sous des hypothèses faibles. Les chapitres trois et quatre sont affectés au comportement de ces mesures lorsque le coefficient de diffusion tend vers 0.

Le chapitre cinq met en relation le processus auto-stabilisant avec des systèmes particulaires *via* une « propagation du chaos ». Il est ainsi possible de transposer certains résultats du système de particules sur le processus non-markovien et réciproquement. Le chapitre six est dédié au dénombrement exact des mesures stationnaires.

Le chapitre sept est employé pour l'étude du comportement en temps long. D'une part, un résultat de convergence dans un cas simple est fourni. D'autre part, un principe de grandes déviations est mis en évidence par l'utilisation des résultats de Freidlin et Wentzell.

Mots-clés : processus auto-stabiliants, mesures stationnaires, systèmes dynamiques, équation de McKean-Vlasov, temps de sortie.

Abstract

Self-stabilizing processes are defined as the solutions of stochastic differential equations which drift term contains the gradient of a potential and a term nonlinear in the sense of McKean which attracts the process to its own law distribution. There are many results if the landscape is convex. The purpose of this work is to extend these in the general case especially when the landscape contains contains several wells. Essential differences are found.

The first chapter proves the strong existence of a solution. The second one deals with the probability measure of the solution. Particularly, the existence and the non-uniqueness of the stationary measures are highlighted under weak assumptions. Chapter three and four are assigned to the asymptotic analysis in the small noise limit of these measures.

Chapter five connects the self-stabilizing process and some particle systems *via* a « propagation of chaos ». It is thus possible to translate some results from the particle systems to the non-markovian process and reciprocally.

Chapter seven is used to study the long time behavior. In one hand, a convergence's result is provided in a simple case. In the other hand, a large deviations principle is highlighted by using the results of Freidlin and Wentzell.

Key words : self-stabilizing processes, stationary measures, perturbed dynamical system, McKean-Vlasov equation, exit time.