UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAE + M
Université Henri Poincaré - Nancy I
D.F.D. Mathématiques

THÈSE présenté par

Viet Cuong Do

pour l'obtention du

Doctorat de l'Universit de Lorraine

Spécialité: Mathématiques.

Le lemme fondamental métaplectique de Jacquet et Mao

soutenu le 10 mai 2012

Composition du jury :

Pierre-Henri Chaudouard	Rapporteur. Professeur à l'université Paris 7.
Alain Genestier	Directeur de thèse. Professeur à l'université de Lorraine.
Gérard Laumon	Directeur de recherche CNRS - Université Paris 11.
Sergey Lysenko	Professeur à l'université de Lorraine .
Bao Chau Ngo	Rapporteur. Professeur à l'université de Chicago (USA).
David Renard	Professeur à l'école Polytechnique de Paris .

Institut Élie Cartan Nancy
INRIA Lorraine

Remerciements

La présente étude n'aurait pas été possible sans le bienveillant soutien de certaines personnes. Et je ne suis pas non plus capable de dire dans les mots qui conviennent, le rôle qu'elles ont pu jouer à mes côtés pour en arriver là. Cependant, je voudrais les prier d'accueillir ici tous mes sentiments de gratitude qui viennent du fond de mon cœur, en acceptant mes remerciements.

J'adresse mes plus sincères remerciements à Alain Genestier qui est m'a accompagné durant ces cinq années. Sa grande disponibilité par rapport de mes questions ainsi que l'étendue ses connaissances m'ont permis d'appréhender de belles mathématiques. Ses conseils avisés et son soutien précieux tout au long de ces années ont grandement facilité ma tâche et ont permis d'aboutir à cette mémoire. Enfin, de toutes ces qualités inestimables, que tout jeune chercheur souhaiterait découvrir chez son directeur de thèse, je lui exprime ma plus profonde gratitude.

Je tiens à exprimer aussi ma profonde gratitude à Bao Chau Ngo. Un problème posé par Ngo est à l'origine des présents travaux. Depuis, il m'a plusieurs fois suggéré des méthodes ou posé des questions, qui ont été grandement fructueuses pour mes recherches. Une très belle formule de ce travail a été obtenue lorsque j'ai eu la chance de travailler avec lui à Chicago. C'est pour moi une grande joie que Ngo ait accepté d'être rapporteur de cette thèse. De cette attention manifeste à mon égard, je ne peux que lui témoigner ici ma très vive gratitude.

Je remercie également Pierre-Henri Chaudouard d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Je remercie vivement Gérard Laumon, Sergey Lysenko et David Renard pour leur présence à la soutenance.

Je profite de cet instant pour remercier mes collègues, tous les membres de l'équipe Analyse et Géométrie complexes et de l'IECN, en particulier Joseph Basquin – mon co-bureau qui n'a pas épargné son temps pour m'aider.

Enfin, une énorme pensée pour ma famille, mon amie qui m'ont remonté le moral dans les moments difficiles et les moments d'incertitude. Merci de m'avoir soutenu et de me soutenir encore et toujours…

Table des matières

1 Introduction **3**

2 Intégrale I **15**
2.1 Somme locale 15
2.2 Somme globale 16
2.3 Le cas $\underline{d} = (1, 2, \ldots, r)$ 18

3 Le groupe métaplectique **23**
3.1 Le groupe métaplectique local 23
3.1.1 La construction du groupe métaplectique local (cf. [9]) 23
3.1.2 Le symbole $(A|B)$ (cf. [1]) 25
3.1.3 L'extension de ACK 26
3.1.4 Construction geométrique du groupe métaplectique . . 29
3.1.5 Fonction κ locale 41
3.2 Le groupe métaplectique global 43
3.2.1 La construction du groupe métaplectique S-global . . 43
3.2.2 Fonction $\underline{\kappa}$ globale 46

4 Intégrale J **49**
4.1 Somme locale 49
4.2 Somme globale 51
4.3 Le cas $\underline{d} = (1, 2, \ldots, r)$ 59

5 Facteur de tranfert **71**
5.1 Rappels sur le symbole de Hilbert et les constantes de Weil . 71
5.2 Géométrisation d'un calcul de Jacquet [8, paragraphe 8] . . . 71
5.3 Facteur de transfert 76

6 L'énoncé local résulte de l'énoncé global **79**

Chapitre 1

Introduction

Soit $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles d'un corps global et $\widetilde{\mathrm{GL}}_r(\mathbb{A})$ le revêtement métaplectique de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ (c'est un revêtement à deux feuillets de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, qui est une extension centrale par $\{\pm 1\}$, cf [9]). Pour $r = 2$, Jacquet [8] a montré qu'on pouvait utiliser une formule des traces relative pour caractériser l'image de l'application de relèvement automorphe de $\widetilde{\mathrm{GL}}_r(\mathbb{A})$ à $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ comme ensemble des représentations distinguées par le groupe orthogonal. Pour r arbitraire, Mao [12] a écrit la formule des traces relative correspondante. Pour achever la caractérisation de l'image du relèvement il reste entre autres un énoncé local à démontrer (le "lemme fondamental métaplectique de Jacquet-Mao"). L'objet de ce travail est de donner une démonstration de cet énoncé dans le cas de caractéristique positive.

On va d'abord énoncer ce lemme fondamental. Soient F un corps local non-archimédien, $\mathcal{O}$ son anneau des entiers et k son corps résiduel, que l'on suppose de caractéristique p impaire et de cardinal q. On fixe ϖ une uniformisante de F. Soit $\psi : k \to \mathbb{C}^*$ un caractère additif. On note $\Psi(x) = \psi(\mathrm{res}\, x\, \mathrm{d}\varpi)$; c'est un caractère additif de F dans $\mathbb{C}^*$. On note $v(x)$ la valuation de l'élément $x \in F$ et $|x| = q^{-v(x)}$. On note N_r le sous-groupe de GL_r formé des matrices triangulaires supérieures unipotentes, T_r celui formé des matrices diagonales et S_r le sous-schéma de GL_r formé des matrices symétriques. Soit $\theta : N_r(F) \to \mathbb{C}^*$ le caractère défini par $\theta(n) = \Psi(\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{r} n_{i-1,i})$.

Le revêtement de Kazhdan-Patterson local est (canoniquement) scindé au-dessus de $N_r(F)$ ainsi qu'au-dessus de $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O})$. On peut écrire les éléments de $\widetilde{\mathrm{GL}}_r(F)$ sous la forme $\tilde{g} = (g, z)$, avec $g \in \mathrm{GL}_r(F)$ et $z \in \{\pm 1\}$ et la multiplication est alors définie par

$$(g, z).(g', z') = (gg', \chi(g, g')zz'),$$

où χ est un certain cocycle, pour la description duquel on renvoie à Kazhdan-Patterson [9]. Ces notations étant fixées, le scindage σ au-dessus de $N_r(F)$ est simplement défini par $\sigma(n) = (n, 1)$ alors que le scindage κ^* au-dessus de $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O})$ est défini par $\kappa^*(g) = (g, \kappa(g))$ - la fonction $\kappa : \mathrm{GL}_r(F) \to \{\pm 1\}$ n'est vraiment pas facile à calculer et son calcul dans la situation géométrique qu'on envisagera est l'un des résultats importants de ce travail.

Le groupe $N_r(F)$ agit sur $S_r(F)$ par $s \mapsto {}^t nsn$ et le groupe $N_r(F) \times N_r(F)$ agit sur $\mathrm{GL}_r(F)$ par $g \mapsto n^{-1} g n'$. On appelle *pertinentes* les orbites $\dot{s}$ sous l'action de $N_r(F)$ (resp. les orbites $\dot{g}$ sous l'action de $N_r(F) \times N_r(F)$) telles que pour tout n appartenant au fixateur $(N_r(F))_s$ de s on ait $\theta^2(n) = 1$ (resp. telles que pour toute couple (n, n') appartenant au fixateur $(N_r(F) \times N_r(F))_g$ de g on ait $\theta(n^{-1}n') = 1$). Dans cet article, on s'intéresse au cas où ces fixateurs sont triviaux, qui est en fait le cas fondamental [7]. Il existe alors un représentant dans l'orbite sous l'action de $N_r(F)$ qui est une matrice diagonale t (resp. un représentant de la forme $w_0 t$, où w_0 est la matrice de la permutation $(r, \ldots, 1)$ et t est une matrice diagonale, dans l'orbite sous l'action de $N_r(F) \times N_r(F)$).

Pour chaque matrice diagonale $t \in T_r(F)$, on introduit les deux intégrales orbitales

$$I(t) = \int_{N_r(F)} \phi_0({}^t ntn)\theta^2(n) dn$$

et

$$J(t) = \int_{N_r(F) \times N_r(F)} f_0(n^{-1} w_0 t n')\theta(n^{-1}n') dn dn',$$

où f_0 est la fonction définie par

$$f_0(g) = \begin{cases} \kappa(g), & \text{si } g \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}) \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$\phi_0(g) = \begin{cases} 1, & \text{si } g \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}) \cap S_r(F) \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases},$$

les mesures de Haar de $N_r(F)$ et $N_r(F) \times N_r(F)$ étant normalisées de sorte qu'elles attribuent la mesure 1 aux sous-groupes compacts ouverts formés des matrices à coefficients dans $\mathcal{O}$.

Soit $\zeta : k^* \to \{\pm 1\}$ le caractère quadratique non trivial ($\zeta(\lambda) = \lambda^{\frac{q-1}{2}}$, $\lambda \in k^*$). On note $\gamma(a, \Psi)$ la constante de Weil, qui est définie par la formule

$$\int \Phi^\vee(x)\Psi\left(\frac{1}{2}ax^2\right) dx = |a|^{-1/2}\gamma(a, \Psi) \int \Phi(x)\Psi\left(-\frac{1}{2}a^{-1}x^2\right) dx,$$

où $\Psi : F \to \mathbb{C}^*$ est un caractère additif, Φ est une fonction de Schwartz sur F et $\Phi^\vee$ est sa transformée de Fourier ($\Phi^\vee(x) = \int \Phi(y)\Psi(xy)dy$).

Conjecture 1.1.1.1. (Jacquet et Mao). Soit $t = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_r)$, on note $a_i = \prod_{j=1}^{i} t_j$. On a alors $t = \mathrm{diag}(a_1, a_1^{-1}a_2, \ldots, a_{r-1}^{-1}a_r)$ et

$$J(t) = \begin{cases} \mathfrak{t}(t)I(t) \\ \mathfrak{t}'(t)I(t) \end{cases},$$

où $\mathfrak{t}(t) = |\prod_{i=1}^{r-1} a_i|^{-1/2}\zeta(-1)^{\sum_{j\not\equiv r(\mathrm{mod}2)} v(a_j)} \prod_{j\not\equiv r(\mathrm{mod}2)} \gamma(a_j a_{j-1}^{-1}, \Psi)$ et où $\mathfrak{t}'(t) = |\prod_{i=1}^{r-1} a_i|^{-1/2}\zeta(-1)^{\sum_{j\equiv r(\mathrm{mod}2)} v(a_j)} \prod_{j\equiv r(\mathrm{mod}2)} \gamma(a_j a_{j-1}^{-1}, \Psi)$ (en convenant que $a_0 = 1$). De plus si $\mathfrak{t}(t) \neq \mathfrak{t}'(t)$, les deux intégrales $I(t)$ et $J(t)$ sont nulles.

Jacquet et Mao ont démontré leur conjecture pour GL_2 (voir [7]) et GL_3 (voir [12]) pour tout corps local de caractéristique résiduelle $\neq 2$ (la formule de [12] $\mu(a,b,c) = |a|^{-1}|b|^{-1/2}\gamma(a,\Psi)\gamma(-c,\Psi)$ doit en fait être corrigée en $\mu(a,b,c) = |a|^{-1}|b|^{-1/2}\gamma(-a,\Psi)\gamma(c,\Psi)$, comme on le voit en la comparant avec la formule de Jacquet [7] pour GL_2).

THÉORÈME A. *Si le corps local F est de caractéristique positive, alors la conjecture de Jacquet et Mao est vérifiée.*

Les méthodes qui sont utilisée par Jacquet et Mao dans leurs démonstrations pour GL_2 et GL_3 sont combinatoires (le calcul est déjà très complexe dans le cas GL_3) et il n'est pas clair qu'elles permettent d'obtenir l'énoncé pour tout rang r. On va donc utiliser une autre approche, en s'inspirant de la démonstration géométrique de B. C. Ngo pour le lemme fondamental de Jacquet et Ye (voir [15]).

On va en fait démontrer un énoncé un peu plus général que le théorème A, obtenu en remplaçant $\theta^2(n)$ par $\theta^2_{\underline{\alpha}}(n)$ dans la définition de l'intégrale I et $\theta(n^{-1}n')$ par $\theta_{\overline{\alpha}}(n^{-1})\theta_{\underline{\alpha}}(n')$ dans la définition de l'intégrale J, où $\underline{\alpha} = (\alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in (k^*)^{r-1}$, $\overline{\alpha} = (\alpha_r, \ldots, \alpha_2)$ et $\theta_{\underline{\alpha}}(n) = \psi \circ \underline{h}_{\underline{\alpha}}$ avec $\underline{h}_{\underline{\alpha}} = \mathrm{res}(\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{r} \alpha_i n_{i-1,i} \mathrm{d}\varpi)$. On notera $I(t, \underline{\alpha})$, $J(t, \underline{\alpha})$ les intégrales ainsi obtenues ; bien sûr si $\underline{\alpha} = (1, \ldots, 1)$ on retrouve bien les intégrales I et J ci-dessus.

Les intégrales orbitales $I(t, \underline{\alpha})$ et $J(t, \underline{\alpha})$ portent sur des fonctions localement constantes à support compact : de ce fait elles se réduisent à des sommes finies. Lorsque le corps F est de caractéristique positive, les ensembles d'indices de ces sommes finies s'interprètent naturellement comme ensembles de points à valeurs dans k de variétés algébriques définies sur ce

corps (qu'on appellera respectivement $X(t)$ et $Y(t)$). Plus précisément, on a :

$$I(t,\underline{\alpha}) = \sum_{n\in X(t)(k)} \theta_{\underline{\alpha}}^2(n) \text{ et } J(t,\underline{\alpha}) = \sum_{(n,n')\in Y(t)(k)} \kappa({w_0}^t n t n') \theta_{\overline{\alpha}}({w_0}^t n w_0) \theta_{\underline{\alpha}}(n'),$$

où $X(t)(k) = \{n \in N_r(F)/N_r(\mathcal{O}) | {}^t n t n \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}) \cap S_r(F)\}$ et où $Y(t)(k) = \{(n,n') \in (N_r(F)/N_r(\mathcal{O}))^2 | {}^t n t n' \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O})\}$; pour la deuxième somme, on a en fait effectué le changement de variables $n^{-1} \mapsto {w_0}^t n w_0$ (pour que $X(t)(k)$ et $Y(t)(k)$ soient non vides, il faut que $a_1, \ldots, a_{r-1}$ appartiennent à $\mathcal{O}$ et a_r appartiennent à $\mathcal{O}^*$). Il reste alors à donner aussi aux fonctions une interprétation géométrique.

Du côté de l'intégrale I, on géométrise facilement le caractère ψ à l'aide d'un revêtement d'Artin-Schreier (en considérant ψ comme un caractère à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, où ℓ est un nombre premier distinct de $p = \mathrm{car}(k)$). En revanche, du côté de l'intégrale J, il faut aussi géométriser la fonction κ. Pour cela, la construction de Kazhdan-Patterson [9] n'est pas très commode à utiliser directement et j'ai préféré une méthode plus indirecte, consistant à comparer l'extension de Kazhdan-Patterson à celle d'Arabello-De Concini-Kac, qui est de nature plus géométrique.

Arbarello, De Concini et Kac associent à chaque $g \in \mathrm{GL}_r(F)$ une droite

$$D_g = (\bigwedge g\mathcal{O}^r/g\mathcal{O}^r \cap \mathcal{O}^r) \otimes (\bigwedge \mathcal{O}^r/g\mathcal{O}^r \cap \mathcal{O}^r)^{\otimes(-1)}$$

où $\bigwedge V$ désigne la puissance extérieure maximale $\bigwedge^{\dim V} V$ d'un k-espace vectoriel V (en particulier, pour $g \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O})$ cette droite est canoniquement trivialisée). Cette construction fournit une extension centrale $\widetilde{\mathrm{GL}}_r'(F)$ de $\mathrm{GL}_r(F)$ par k^*. On utilisera plutôt la droite $\Delta_g = D_{\det(g)} \otimes D_g^{\otimes -1}$, ce qui revient à considérer l'extension $\widetilde{\mathrm{GL}}_{r,\mathrm{geo}}(F) = \det^*(\widetilde{\mathrm{GL}}_1'(F)) - \widetilde{\mathrm{GL}}_r'(F)$ (la somme de Baer des extensions étant ici notée additivement). On construit, à l'aide de la décomposition de Bruhat, une base $\delta(g)$ de Δ_g, ce qui fournit une section s_{geo} de $\widetilde{\mathrm{GL}}_{r,\mathrm{geo}}(F)$. On rappelle qu'on note $\zeta : k^* \to \{\pm 1\}$ le caractère quadratique non-trivial.

Proposition 1.1.1.2. On a $\chi(g_1,g_2) = \zeta\left(\delta_{g_1} \otimes \delta_{g_2} \otimes \delta_{g_1 g_2}^{\otimes -1}\right)$, où χ est le 2-cocycle de Kazhdan-Patterson [9]. En particulier, l'extension de Kazhdan-Patterson s'obtient à partir de notre extension $\widetilde{\mathrm{GL}}_{r,\mathrm{geo}}(F)$ en la poussant par ζ

La fonction $\kappa : \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}) \to \{\pm 1\}$ est donc $\zeta \circ \underline{\kappa}$ où $\underline{\kappa}$ est le quotient triv/δ de la section triviale par la section s_{geo}. Cette construction définit un

morphisme $\underline{\kappa} : Y(t) \to \mathbb{G}_m$, qui induit une application $\kappa = \zeta \circ \underline{\kappa} : Y(t)(k) \to \{\pm 1\}$.

Soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Soient $\mathcal{L}_\psi$ le faisceau d'Artin-Schreier sur $\mathbb{G}_a$ associé au caractère ψ et $\mathcal{L}_\zeta$ le faisceau de Kummer sur $\mathbb{G}_m$ associé au revêtement $\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$, $x \mapsto x^2$ et à $\{\pm 1\} \subset \overline{\mathbb{Q}}_\ell$. D'après la formule des traces de Grothendieck-Lefschetz, on a :

$$I(t, \underline{\alpha}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}, \mathrm{R}\Gamma_c(X(t) \otimes_k \overline{k}, h_{\underline{\alpha}}^* \mathcal{L}_\psi));$$

$$J(t, \underline{\alpha}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}, \mathrm{R}\Gamma_c(Y(t) \otimes_k \overline{k}, h'^*_{\underline{\alpha}} \mathcal{L}_\psi \otimes \underline{\kappa}^* \mathcal{L}_\zeta)),$$

où $h_{\underline{\alpha}}$ (resp. $h'_{\underline{\alpha}}$) sont des morphismes de $X(t)$ et $Y(t)$ dans $\mathbb{G}_a$ (provenant du morphisme $\underline{h}_{\underline{\alpha}} : N_r(F) \to k$ ci-dessus).

Le théorème A est alors une conséquence de l'énoncé géométrique suivant, où on note $\mathcal{I}(t) = \mathrm{R}\Gamma_c(X(t) \otimes_k \overline{k}, h_{\underline{\alpha}}^* \mathcal{L}_\psi)$ et $\mathcal{J}(t) = \mathrm{R}\Gamma_c(Y(t) \otimes_k \overline{k}, h'^*_{\underline{\alpha}} \mathcal{L}_\psi \otimes \underline{\kappa}^* \mathcal{L}_\zeta)$.

THÉORÈME A′. *$\mathcal{J}(t) \simeq \mathcal{T}(t) \otimes \mathcal{I}(t) \simeq \mathcal{T}'(t) \otimes \mathcal{I}(t)$, où $\mathcal{T}(t)$ et $\mathcal{T}'(t)$ sont des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espaces vectoriels de rang 1 placés en degré $v(\prod_{i=1}^{r-1} a_i)$ tels que $\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}, \mathcal{T}(t)) = \mathfrak{t}(t)$ et $\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}, \mathcal{T}'(t)) = \mathfrak{t}'(t)$.*

En géométrisant l'argument de Jacquet [7, p. 145], on a en fait une démonstration directe du théorème A' dans le cas particulier où $r = 2$ et $t = \mathrm{diag}(t_1, t_2)$ avec $v(t_1) = 1,\ v(t_2) = -1$.

Proposition 1.1.1.3. Le théorème A' est vrai dans le cas particulier ci-dessus ; de plus $\mathcal{I}(t)$ et $\mathcal{J}(t)$ sont alors des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espaces vectoriels de rang 2 placés respectivement en degré 0 et 1.

Dans le cas général, on ne connaît pas explicitement $\mathcal{I}(t)$ (resp. $\mathcal{J}(t)$) car la variété $X(t)$ (resp. $Y(t)$) n'est ni lisse ni irréductible et sa dimension est très grande. Suivant une idée due à B.C. Ngo [15] on va les déformer pour se ramener à une situation plus simple.

Comme dans loc. cit., on obtient ces déformations en considérant plutôt des sommes sur un corps global de caractéristique positive. Changeant de notations, on note maintenant $\mathcal{O} = k[\varpi]$ l'anneau des polynômes en une variable ϖ à coefficients dans k, et F son corps des fractions (dans l'énoncé local ci-dessus, on va noter plutôt respectivement F_ϖ, $\mathcal{O}_\varpi$ et k_ϖ le corps, son anneau des entiers et son corps résiduel). Pour tout $x \in F$, on note $\mathrm{sres}(x \mathrm{d}\varpi) = \sum_{v \in \mathrm{Spm}(\mathcal{O})} \mathrm{Tr}_{k_v/k} \mathrm{res}_v(x \mathrm{d}\varpi)$ la somme des résidus en tous ses pôles à distance finie (où k_v est le corps résiduel de v et res_v est le résidu en v). Soit $\Psi : F \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$ le caractère défini par $\Psi(x) = \psi(\mathrm{sres}(x\, \mathrm{d}\varpi))$. Soit

$\underline{\alpha} = (\alpha_2, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{G}_m^{r-1}$. On note $\overline{\alpha} := (\alpha_r, \dots, \alpha_2)$. Soit $\theta_{\underline{\alpha}} : N_r(F) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$ le caractère défini par $\theta_{\underline{\alpha}}(n) = \Psi(\frac{1}{2}\sum_{i=2}^r \alpha_i n_{i-1,i})$. Pour tout idéal maximal v de $\mathcal{O}$, on note $\mathcal{O}_v$ la complété de $\mathcal{O}$ selon v, F_v son corps des fractions, et k_v son corps résiduel.

Du côté de l'intégrale I, pour toute place v, on modifie un peu l'intégrale I locale en remplaçant la fonction caractéristique de $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_v)$ par celle de $\mathfrak{gl}_r(\mathcal{O}_v)$ (cf. [15]), de sorte qu'on obtient la somme

$$I_v(t, \alpha) = \sum_{\substack{n \in N_r(F_v)/N_r(\mathcal{O}_v) \\ {}^t ntn \in S_r(\mathcal{O}_v)}} \theta^2_{\underline{\alpha},v}(n),$$

où $\theta_{\underline{\alpha},v}(n) = \psi(\frac{1}{2}\sum_{i=2}^r \mathrm{tr}_{k_v/k}\mathrm{res}(\alpha_i n_{i-1,i}\mathrm{d}\varpi))$ (quand $v = \varpi$ et $a_r \in \mathcal{O}_\varpi^*$, on retrouve bien la somme locale I (qu'on va noter I_ϖ) dans l'énoncé du théorème A ci-dessus). Ensuite, pour toute matrice diagonale t à coefficients dans F, on définit

$$I(t, \underline{\alpha}) = \prod_{v \in \mathrm{Spm}(\mathcal{O})} I_v(t, \underline{\alpha}), \tag{1.1.1.1}$$

où $I_v(t, \underline{\alpha}) = 1$ sauf si v divise $\prod_{i=1}^{r-1} a_i$. Ceci se réduit à une somme finie

$$I(t, \underline{\alpha}) = \sum_{\substack{n \in N_r(F)/N_r(\mathcal{O}) \\ {}^t ntn \in S_r(\mathcal{O})}} \theta^2_{\underline{\alpha}}(n)$$

laquelle est non-nulle seulement si $a_1, \dots, a_r$ sont des polynômes. En utilisant la même interprétation que pour la somme locale I_ϖ ci-dessus, on obtient une donnée géométrique $(X(t), h_{\underline{\alpha}})$ associée à $I(t, \underline{\alpha})$ (resp. des données géométriques $(X_v(t), h_{\underline{\alpha},v})$ associées à $I_v(t, \underline{\alpha})$) et on a l'interprétation géométrique suivante de l'identité (1.1.1.1)

Proposition 1.1.1.4.

$$\mathrm{R}\Gamma_c(X(t) \otimes_k \overline{k}, h^*_{\underline{\alpha}}\mathcal{L}_\psi) = \bigotimes_{\lambda \in \mathrm{supp}(t)} \mathrm{R}\Gamma_c(X_v(t) \otimes_k \overline{k}, h^*_{\underline{\alpha},v}\mathcal{L}_\psi),$$

où $\mathrm{supp}(t)$ est l'ensemble des racines de $\prod_{i=1}^{r-1} a_i$ dans $\overline{k}$.

Du côté de l'intégrale J, le problème qui se présente lorsqu'on tente d'adapter la démarche utilisée pour l'intégrale I ci-dessus est que la fonction $\underline{\kappa}_{\mathrm{loc}}$ n'est définie que sur le sous-groupe compact maximal standard

de $\mathrm{GL}_{r,\mathrm{loc}}$. Pour contourner ce problème, on considère (en remarquant que ${}^tN_r(F_v)tN_r(F_v)\cap\mathfrak{gl}_r(\mathcal{O}_v)={}^tN_r(F_v)tN_r(F_v)\cap\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_v)$ quand $a_r\in\mathcal{O}_v^*$)

$$J_v(t,\underline{\alpha})=\begin{cases}\sum_{\substack{n,n'\in N_r(F_v)/N_r(\mathcal{O}_v)\\ {}^tntn\in\mathfrak{gl}_r(\mathcal{O}_v)}}\kappa_v(w_0{}^tntn')\theta_{\overline{\alpha},v}(w_0{}^tnw_0)\theta_{\underline{\alpha},v}(n') & \text{si } v\not| a_r,\\ \sum_{\substack{n,n'\in N_r(F_v)/N_r(\mathcal{O}_v)\\ {}^tntn\in\mathfrak{gl}_r(\mathcal{O}_v)}}\theta_{\overline{\alpha},v}(w_0{}^tnw_0)\theta_{\underline{\alpha},v}(n') & \text{si } v|a_r,\end{cases}$$

où $\kappa_v:\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_v)\to\{\pm1\}$ provient du scindage au-dessus de $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_v)$ du revêtement de Kazhdan-Patterson local en v (quand $v=\varpi$ et $a_r\in\mathcal{O}_\varpi^*$, on retrouve bien la somme locale J (notée dorénavant J_ϖ) qui figure dans l'énoncé du théorème A ci-dessus). Pour toute matrice diagonale t à coefficients dans F, la somme globale en t est en fait définie par

$$J(t,\underline{\alpha})=\prod_{v\in\mathrm{Spm}(\mathcal{O})}J_v(t,\underline{\alpha}),\tag{1.1.1.2}$$

où $J_v(t,\underline{\alpha})=1$ sauf si v divise $\prod_{i=1}^{r-1}a_i$.

En adaptant la géométrisation de la somme local J_ϖ, on obtient des données géométriques associées à $J_v(t,\alpha)$ qui sont $(Y_v(t),h'_{\underline{\alpha},v},\underline{\kappa}_v)$ quand $v\nmid a_r$ (dans ce cas, on a que $\kappa_v=\zeta\circ\underline{\kappa}_v$) et $(Y_v(t),h'_{\underline{\alpha},v})$ quand $v|a_r$. Il reste à interpréter géométriquement la somme globale $J(t,\alpha)$. Pour cela, on introduit la variété $Y(t)$ dont l'ensemble de k points est

$$Y(t)(k)=\{(n,n')\in(N_r(F)/N_r(\mathcal{O}))^2|{}^tntn\in\mathfrak{gl}_r(\mathcal{O})\}.$$

Cette variété est munie d'un morphisme vers $\mathbb{G}_a$ défini par

$$h'_{\underline{\alpha}}(n,n')=\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{r}\alpha_i\mathrm{sres}((n_{i-1,i}+n'_{i-1,i})\mathrm{d}\varpi).$$

La fonction $\kappa=\prod_{v\nmid a_r}\kappa_v$ est interprétée à l'aide du point de vue géométrique sur l'extension métaplectique évoqué ci-dessus. Plus précisément, en associant à chaque $g\in G_r(F)$ la droite $D_{\det(g)}(a_r^{-1})\otimes D_g(a_r^{-1})^{\otimes-1}$, où $D_g(a_r^{-1}):=(\bigwedge\mathcal{O}[a_r^{-1}]^r/\mathcal{O}[a_r^{-1}]^r\cap g\mathcal{O}[a_r^{-1}]^r)^*\otimes(g\mathcal{O}[a_r^{-1}]^r/\mathcal{O}[a_r^{-1}]^r\cap g\mathcal{O}[a_r^{-1}]^r)$, on obtient une extension centrale $\widetilde{\mathrm{GL}}_{r,\mathrm{geo}}(F)$ de $\mathrm{GL}_r(F)$ par k^*. À l'aide de la décomposition de Bruhat, on définit une section s_{geo} de cette extension, de sorte qu'on définit une fonction $\underline{\kappa}$ globale analogue à celle introduite ci-dessus (cette fonction est le produit des fonctions $\underline{\kappa}_v$ locales, i.e $\underline{\kappa}=\prod_{v\nmid a_r}N_{k_v/k}\underline{\kappa}_v$). De cette manière, on obtient le morphisme $\underline{\kappa}:Y(t)\to\mathbb{G}_m$ (comme ${}^tN_r(F)tN_r(F)\cap\mathfrak{gl}_r(\mathcal{O})\subset{}^tN_r(F)tN_r(F)\cap\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}[a_r^{-1}])$).

En utilisant la formule des traces de Grothendieck et Leftschetz, on obtient l'interprétation suivante de l'identité 1.1.1.2

Proposition 1.1.1.5.

$$\mathrm{R}\Gamma_c(Y(t)\otimes_k\overline{k},h'^*_{\underline{\alpha}}\mathcal{L}_\psi\otimes\underline{\kappa}^*\mathcal{L}_\zeta)=\bigotimes_{\lambda\in\mathrm{supp}(t)}\mathrm{R}\Gamma_c(Y_v(t)\otimes_k\overline{k},h'^*_{\underline{\alpha},v}\mathcal{L}_\psi\otimes\underline{\kappa}_v^*\mathcal{L}_\zeta),$$

où $\mathrm{supp}(t)$ est l'ensemble des racines de $\prod_{i=1}^{r-1}a_i$ dans $\overline{k}$.

Soient Q_{d_i} la variété affine sur k des polynômes unitaires de degré d_i et $V_{\underline{d}}=\{(a_1,\dots,a_r)\in\prod_{i=1}^r Q_{d_i}|\mathrm{pgcd}(\prod_{i=1}^{r-1}a_i,a_r)=1\}$ avec $\underline{d}=(d_1,\dots,d_r)$ (la raison pour laquelle on considère cet ouvert est que les sommes locales en les places divisant a_r y sont triviales, du côté de l'intégrale I comme du côté de l'intégrale J). Soit $t=\mathrm{diag}(a_1,a_2/a_1,\dots,a_r/a_{r-1})$ tel que $(a_1,\dots,a_r)\in V_{\underline{d}}$ et $\underline{\alpha}=(\alpha_2,\dots,\alpha_r)\in(k^*)^{r-1}$. Le couple $(X(t),h_{\underline{\alpha}})$ et le triple $(Y(t),h'_{\underline{\alpha}},\underline{\kappa})$ se mettent en familles de sorte qu'on obtient des variétés $X_{\underline{d}}$ et $Y_{\underline{d}}$ de type fini sur k munies de morphismes $f^X_{\underline{d}}:X_{\underline{d}}\times\mathbb{G}_m^{r-1}\to V_{\underline{d}}\times\mathbb{G}_m^{r-1}$, $f^Y_{\underline{d}}:Y_{\underline{d}}\times\mathbb{G}_m^{r-1}\to V_{\underline{d}}\times\mathbb{G}_m^{r-1}$, $h_{\underline{d}}:X_{\underline{d}}\times\mathbb{G}_m^{r-1}\to\mathbb{G}_a$, $h'_{\underline{d}}:Y_{\underline{d}}\times\mathbb{G}_m^{r-1}\to\mathbb{G}_a$ et $\underline{\kappa}_{\underline{d}}:Y_{\underline{d}}\times\mathbb{G}_m^{r-1}\to\mathbb{G}_m$ tels que $X(t)$ et $\mathrm{R}\Gamma_c(X(t),h^*_{\underline{\alpha}}\mathcal{L}_\psi)$ (resp. $Y(t)$ et $\mathrm{R}\Gamma_c(Y(t),h'^*_{\underline{\alpha}}\mathcal{L}_\psi\otimes\underline{\kappa}^*\mathcal{L}_\zeta)$) sont respectivement les fibres en t de $f^X_{\underline{d}}$ et de $\mathrm{R}f^X_{\underline{d},!}h^*_{\underline{d}}\mathcal{L}_\psi$ (resp. de $f^Y_{\underline{d}}$ et de $\mathrm{R}f^Y_{\underline{d},!}(h'^*_{\underline{d}}\mathcal{L}_\psi\otimes\underline{\kappa}^*_{\underline{d}}\mathcal{L}_\zeta)$).

Les fibres de $\mathcal{I}_{\underline{d}}=\mathrm{R}f^X_{\underline{d},!}h^*_{\underline{d}}\mathcal{L}_\psi$ (resp. $\mathcal{J}_{\underline{d}}=\mathrm{R}f^Y_{\underline{d},!}(h'^*_{\underline{d}}\mathcal{L}_\psi\otimes\underline{\kappa}^*_{\underline{d}}\mathcal{L}_\zeta)$ au-dessus des points $(t,\underline{\alpha})$ tels que le polynôme $\prod_{i=1}^r a_i$ n'a pas de racine multiples se factorisent en produits tensoriels des complexes locaux "simples" considérés dans la proposition 1.1.1.3, lesquels sont des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espaces vectoriels de rang 2 placée en degré 0 (resp. en degré 1). De plus, les points $(t,\underline{\alpha})$ de cette espèce forment un ouvert $U_{\underline{d}}$ de $\prod_{i=1}^r Q_i\times(\mathbb{G}_m)^{r-1}$, et les restrictions de $\mathcal{I}_{\underline{d}}$ et $\mathcal{J}_{\underline{d}}$ à cet ouvert sont des systèmes locaux de rang $2^{\deg(\prod_{i=1}^r a_i)}$ placés respectivement en degré 0 et $\deg(\prod_{i=1}^r a_i)$. Les deux restrictions sont reliées par un système local $\mathcal{T}_{\underline{d}}$ de rang 1, placé en degré $\deg(\prod_{i=1}^r a_i)$ au-dessus de $U_{\underline{d}}$, géométriquement constant et provenant d'un certain caractère τ de $\mathrm{Gal}_{\overline{k}/k}$.

Proposition 1.1.1.6. Pour $\underline{d}=(d_1,\dots,d_r)$, $\mathcal{T}_{\underline{d}}$ est géométriquement constant et est défini par le caractère τ de $\mathrm{Gal}_{\overline{k}/k}$:

$$\tau(\mathrm{Fr}_q)=\begin{cases}(-1)^{\sum_{i=1}^r d_i}q^{\sum_{i=1}^r d_i/2}\zeta(-1)^{\sum_{i=0}^{s-1}d_{2i+1}}\gamma_\infty(\varpi,\Psi_\infty)^{-\sum_{i=1}^{s-1}p(d_{2i}-d_{2i+1})}\text{ si }r=2s,\\(-1)^{\sum_{i=1}^r d_i}q^{\sum_{i=1}^r d_i/2}\zeta(-1)^{\sum_{i=1}^{s}d_{2i}}\gamma_\infty(\varpi,\Psi_\infty)^{-\sum_{i=1}^{s}p(d_{2i}-d_{2i-1})}\text{ si }r=2s+1,\end{cases}$$

où $p(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x \text{ est impair}\\ 0 & \text{si } x \text{ est pair.}\end{cases}$

La formule de τ vient du fait que le produit des constantes de Weil en toutes les places du corps global F est trivial [16]. À l'aide du théorème de Chebotarev, le système local $\mathcal{T}_{\underline{d}}$ est géométriquement constant et se prolonge alors de manière évidente à $V_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1}$.

Dans le cas où $\underline{d} = (1, 2, \ldots, r)$, d'après [15], on trouve des présentations simples pour $(X_{\underline{d}}, h_{\underline{d}})$ et pour $(Y_{\underline{d}}, h'_{\underline{d}}, \underline{\kappa}_{\underline{d}})$ (voir les propositions 2.3.1.2 et 4.3.1.1) qui vont nous simplifier les calculs. On obtient alors le théorème suivant (qui peut être considéré comme un analogue global du lemme fondamental de Jacquet-Mao) :

THÉORÈME B. *Pour $\underline{d} = (1, 2, \ldots, r)$, $\mathcal{J}_{\underline{d}} = \mathcal{T}_{\underline{d}} \otimes \mathcal{I}_{\underline{d}}$. Les deux membres de cette égalité sont, à décalage près, des faisceaux pervers isomorphes au prolongement intermédiaire de leur restriction à $U_{\underline{d}}$.*

Ce théorème résulte immédiatement du suivant :

Théorème 1.1.1.7.
1. Le complexe de faisceaux $\mathcal{I}_{\underline{d}}[\frac{r(r+1)}{2} + r - 1]$ est un faisceau pervers, prolongement intermédiaire de sa restriction à l'ouvert $U_{\underline{d}}$.
2. Le complexe de faisceaux $\mathcal{J}_{\underline{d}}[r^2+r-1]$ est un faisceau pervers, prolongement intermédiaire de sa restriction à l'ouvert $U_{\underline{d}}$.

Le point (1) du théorème 1.1.1.7 s'obtient assez facilement par l'argument de [15, "le pas de récurence", p.515] en remplaçant GL_i par le groupe orthogonal associé à la forme quadratique $(x_1, \ldots, x_i) \mapsto \sum_{j=1}^{i} x_j^2$. En revanche, on ne peut pas adapter directement l'argument de loc. cit. pour démontrer le point (2) car la fonction $\kappa_{\underline{d}}$ n'est pas invariante sous l'action de GL_{r-1}. Le théorème suivant est le point crucial pour résoudre cette difficulté (en remarquant que $Y_{\underline{d}} \simeq \{y + \varpi \mathrm{Id}_r,\ y \in \mathfrak{gl}_r | \mathrm{pgcd}(\prod_{i=1}^{r-1} a_i(y), a_r(y)) = 1\}$, où $a_i(y) = \det(s_i(y) + \varpi \mathrm{Id}_i)$, et où $s_i(y)$ est la sous-matrice de y constituée des i premières lignes et des i premières colonnes, cf. 2.3.1.2 et 4.3.1.1).

Théorème 1.1.1.8. $\underline{\kappa}_{\underline{d}}(w_0(y + \varpi \mathrm{Id}_r))$ est en fait un polynôme en les coefficients de la matrice y. De plus on a : $\underline{\kappa}_{\underline{d}}(w_0(y + \varpi \mathrm{Id}_r))\underline{\kappa}_{\underline{d}}({w_0}^t(y + \varpi \mathrm{Id}_r)) = (-1)^{\sum_{i=1}^{r-1}(i+i(i+1))} \mathrm{result}(a_{r-1}(y), a_r(y))$.

La démonstration de ce théorème repose sur l'interprétation géométrique de l'extension de Kazhdan-Patterson évoquée ci-dessus. Ce théorème implique que $\underline{\kappa}(y) = \underline{\kappa}_{\underline{d}}(w_0(y + \varpi \mathrm{Id}_r))$ est alors un produit de facteurs irréductibles de $\mathrm{result}(a_{r-1}(y), a_r(y))$. En faisant agit $g \in \mathrm{GL}_{r-1}$ par

$$y \mapsto \mathrm{diag}(g, 1)^{-1}\, y\, \mathrm{diag}(g, 1),$$

g transforme alors $\underline{\kappa}$ en la multipliant par une puissance de $\det(g)$ (pour l'argument détaillé, on renvoie à la démonstration de la perversité de $\mathcal{J}_{\underline{d}}$ à la fin du chapitre 4) ; l'extension G_{r-1} de GL_{r-1} obtenue en extrayant une racine carrée de $\det(g)$ laisse alors invariant le faisceau $\underline{\kappa}^*\mathcal{L}_\zeta$ et l'argument de loc. cit. s'adapte alors en remplaçant GL_i par l'extension G_i (le plongement $G_i \hookrightarrow G_{i+1}$ est fourni aussi par $g \mapsto \mathrm{diag}(g,1)$ puisque les deux ont même déterminant).

On verra ensuite comment déduire le théorème A' du théorème B. Les complexes locaux obtenus par les factorisations de la proposition 1.1.1.5 sont d'autant plus compliqués que les multiplicités des racines du polynôme $\prod_{i=1}^{r-1} a_i$ sont grandes. D'après B.C. Ngo [15], tous les complexes locaux peuvent être obtenu en considérant seulement $\mathcal{I}_{\underline{d}}$ et $\mathcal{J}_{\underline{d}}$, où $\underline{d} = (1, 2, \ldots, r)$ quitte à remplacer r par $r + r'$ pour r' assez grand. Plus précisément on considère la situation suivante (pour simplifier les notations, désormais on va supprimer l'indice $\underline{d}$) :

Soit $t' \in T_s(F_\varpi)$. D'après B.C. Ngo [15, prop 3.5.1, p. 505], pour r assez grand, il existe $t^\circ = \mathrm{diag}(a_1^\circ, a_2^\circ/a_1^\circ, \ldots, a_r^\circ/a_{r-1}^\circ)$, avec $(a_1^\circ, \ldots, a_r^\circ) \in V_{(1,2,\ldots,r)}(k)$ tel que $\mathcal{I}_\varpi(t^\circ) \simeq \mathcal{I}_\varpi(t')$ et $\mathcal{J}_\varpi(t^\circ) \simeq \mathcal{J}_\varpi(t')$. On a $a_i^\circ = {a'}_i^\circ {a''}_i^\circ$, où ${a'}_i^\circ$ est à racines simples différentes de 0 et où ${a''}_i^\circ$ sont des puissances de ϖ. Soient alors $\underline{d}' = (\deg({a'}_i^\circ))_i$ et $\underline{d}'' = (\deg({a''}_i^\circ))_i$. On fait varier $(a'_i)_i$ et $(a''_i)_i$ en introduisant l'ouvert $(V_{\underline{d}'} \times V_{\underline{d}''})^{\mathrm{dist}}$ de $V_{\underline{d}'} \times V_{\underline{d}''}$ au-dessus duquel $\mathrm{pgcd}(\prod_{i=1}^r a'_i, \prod_{i=1}^r a''_i) = 1$ et les a'_i sont à racines simples. On a alors un morphisme étale $\mu : (V_{\underline{d}'} \times V_{\underline{d}''})^{\mathrm{dist}} \to V_{\underline{d}}$.

Pour $(t', t'') = (\mathrm{diag}(a'_1, a'_2/a'_1, \ldots, a'_r/a'_{r-1}), \mathrm{diag}(a''_1, a''_2/a''_1, \ldots, a''_r/a''_{r-1}))$ où $((a'_i)_i, (a''_i)_i) \in (V_{\underline{d}'} \times V_{\underline{d}''})^{\mathrm{dist}}$, on généralise les sommes globales I et J ci-dessus en introduisant

$$X_1(t', t'') = \prod_{w | a'_1 \ldots a'_{r-1}} \mathrm{Res}_{k_w/k} X_w(t) \text{ et } X_2(t', t'') = \prod_{w | a''_1 \ldots a''_{r-1}} \mathrm{Res}_{k_w/k} X_w(t)$$

($Y_1(t', t'')$ et $Y_2(t', t'')$ sont définies par des formules analogues). Celles-ci se mettent en familles quand $\underline{d}'$ et $\underline{d}''$ sont fixées. On définit de cette manière des complexes $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ vérifiant $\mu^*\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{I}_2$ et $\mu^*\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{J}_2$. En fait $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{J}_1$ sont des systèmes locaux. De plus, en utilisant la formule du produit des constantes de Weil, on définit un système local $\mathcal{T}_1$ (ce système local n'est plus géométriquement constant) tel que $\mathcal{J}_1 = \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{I}_1$; on pose $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}_1^{\otimes -1}$.

À l'aide du théorème B et des propriétés des faisceaux pervers et du prolongement intermédiaire, on obtient que $\mathcal{I}_2$ et $\mathcal{J}_2$ sont pervers et prolongement intermédiaire de leur restriction à l'ouvert $\mu^* U_{\underline{d}}$. De plus, on a $\mathcal{J}_{2|\mu^* U_{\underline{d}}} = \mathcal{T}_{2|\mu^* U_{\underline{d}}} \otimes \mathcal{I}_2 | \mu^* U_{\underline{d}}$, de sorte qu'on a $\mathcal{J}_2 = \mathcal{T}_2 \otimes \mathcal{I}_2$.

En spécialisant en $t = t^\circ$ on obtient alors le théorème A'.

Voici maintenant le plan détaillé de ce travail. La section 2 contient la définition de la somme locale $I_\varpi(t, \underline{\alpha})$ et de la somme globale $I(t, \underline{\alpha})$ pour tout $\underline{\alpha} \in (k^*)^{r-1}$. On démontre que la somme globale est le produit des sommes locales

$$I(t, \underline{\alpha}) = \prod_{v \in \mathrm{Spm}(\mathcal{O})} I_v(t, \underline{\alpha}).$$

On expose l'interprétation géométrique de la somme locale et de la somme globale et exprime géométriquement la formule de produit ci-dessus. On construit aussi le complexe $\mathrm{R}f^X_{\underline{d},!}h^*_{\underline{d}}\mathcal{L}_\psi$ et on démontre qu'il est pervers quand $\underline{d} = (1, 2 \ldots, r)$ (voir le point (1) du théorème 1.1.1.7).

Dans la section 3, on rappelle la définition du groupe métaplectique local de Kazhdan-Patterson. L'extension de ACK et son scindage au-dessus $N_r(F_\varpi)$ et au-dessus de $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_\varpi)$ sont introduits en 3.1.2 . La construction géométrique du groupe métaplectique à l'aide de l'extension de ACK figure dans 3.2.3. On exprime la fonction $\underline{\kappa}$ locale géométriquement dans 3.1.4. Le 3.2 contient la définition du groupe métaplectique global et de la fonction κ globale. On montre dans 3.2.2 que le fonction $\underline{\kappa}$ globale est un produit de fonctions $\underline{\kappa}$ locales.

La section 4 contient la définition de la somme locale $J_\varpi(t, \underline{\alpha})$ et de la somme globale $J(t, \underline{\alpha})$ pour tout $\underline{\alpha} \in (k^*)^{r-1}$. On démontre que la somme globale est le produit des sommes locales

$$J(t, \underline{\alpha}) = \prod_{v \in \mathrm{Spm}(\mathcal{O})} J_v(t, \underline{\alpha}).$$

On expose l'interprétation géométrique de la somme locale et de la somme globale et exprime géométriquement la formule de produit ci-dessus. On construit aussi le complexe $\mathrm{R}f^Y_{\underline{d},!}(h'^*_{\underline{d}}\mathcal{L}_\psi \otimes \underline{\kappa}^*_{\underline{d}}\mathcal{L}_\zeta)$. La sous-section 4.3 contient l'étude de ce complexe dans le cas particulier où $\underline{d} = (1, 2, \ldots, r)$. Dans cette sous-section figure le calcul de la fonction $\underline{\kappa}$ dans ce cas particulier, ainsi que la formule cruciale $\underline{\kappa}_{\underline{d}}(w_0(y + \varpi \mathrm{Id}_r))\underline{\kappa}_{\underline{d}}({w_0}^t(y + \varpi \mathrm{Id}_r)) = (-1)^{\sum_{i=1}^{r-1}(i+i(i+1))}\mathrm{rest}(a_r(y), a_{r-1}(y))$. La perversité de $\mathrm{R}f^Y_{\underline{d},!}(h'^*_{\underline{d}}\mathcal{L}_\psi \otimes \underline{\kappa}^*_{\underline{d}}\mathcal{L}_\zeta)$ est montrée à la fin de la section 4.

Dans la section 5, on donne la formule du facteur de transfert ; dans la section 6, on déduit l'énoncé local de l'énoncé global (dans cette introduction on a déjà donné une idée de leur contenu).

Chapitre 2

Intégrale I

2.1 Somme locale

Soit k un corps fini de caractéristique p et à q éléments. On fixe un caractère additif non trivial $\psi : k \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$, où ℓ est un nombre premier différent de p et où $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ est une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$. On note $\mathcal{O}_\varpi = k[[\varpi]]$ l'anneau des séries formelles en une indéterminée ϖ et à coefficients dans k, $F_\varpi = k((\varpi))$ son corps des fractions. On notera Ψ le caractère de F_ϖ défini par $\Psi(x) = \psi(\mathrm{res}(x\mathrm{d}\varpi))$.

Pour tout $\underline{\alpha} = (\alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in (k^*)^{r-1}$, on note $\theta_{\underline{\alpha}} : N_r(F_\varpi) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$ le caractère défini par $\theta_{\underline{\alpha}}(n) = \Psi(\sum_{i=2}^r \alpha_i n_{i-1,i})$. Sa restriction à $N_r(\mathcal{O}_\varpi)$ étant triviale, il induit une fonction $\theta_{\underline{\alpha}}$ sur $N_r(F_\varpi)/N_r(\mathcal{O}_\varpi)$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$.

Pour chaque $t = \mathrm{diag}(a_1, a_2/a_1, \ldots, a_r/a_{r-1}) \in T_r(F_\varpi)$, on considère l'ensemble fini (cf. [15, proposition 1.1.2])

$$X_\varpi(t)(k) = \{n \in N_r(F_\varpi)/N_r(\mathcal{O}_\varpi) | {}^t n t n \in S_r(\mathcal{O}_\varpi)\}.$$

L'intégrale orbitale I de Jacquet-Mao peut s'écrire (cf. [15, p. 484])

$$I_\varpi(t, \alpha) = \sum_{n \in X_\varpi(t)(k)} \theta_{\underline{\alpha}}(n).$$

L'ensemble $X_\varpi(t)(k)$ est de manière naturelle l'ensemble des points à valeurs dans k d'une variété algébrique $X_\varpi(t)$ de type fini sur k. Cette variété est munie d'un morphisme $h_{\underline{\alpha}} : X_\varpi(t) \to \mathbb{G}_a$ défini par $h_{\underline{\alpha}}(n) = \mathrm{res}(\sum_{i=2}^r \alpha_i n_{i-1,i}\mathrm{d}\varpi)$.

Soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. On note $\overline{X}_\varpi(t) = X_\varpi(t) \otimes_k \overline{k}$. Soient $\mathcal{L}_\psi$ le faisceau d'Artin-Schreier sur $\mathbb{G}_a$ associé au caractère ψ. D'après la

formule des traces de Grothendieck-Lefschetz, on a :

$$I_{\varpi}(t,\alpha) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}, \mathrm{R}\Gamma_c(\overline{X}_{\varpi}(t), h_{\underline{\alpha}}^{*}\mathcal{L}_{\psi})).$$

2.2 Somme globale

Dans le cas général, on ne connaît pas explicitement $\mathrm{R}\Gamma_c(\overline{X}_{\varpi}(t), h_{\underline{\alpha}}^{*}\mathcal{L}_{\psi})$ car la variété $\overline{X}_{\varpi}(t)$ est trop compliquée.

D'après Ngo Bao Chau, on va introduire une somme sur un corps global qui permettra de se ramener par déformation à une situation plus simple. Soient $\mathcal{O} = k[\varpi]$ l'anneau des polynômes en une variable ϖ à coefficients dans k et F son corps des fractions. Pour tout $x \in F$, on note $\mathrm{sres}(x\mathrm{d}\varpi)$ la somme des résidus en tous ses pôles à distance finie (c.à.d. en les points de $\mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}(\mathcal{O})$). On notera Ψ le caractère de F défini par $\Psi(x) = \psi(\mathrm{sres}(x\mathrm{d}\varpi))$. Pour tout $\underline{\alpha} = (\alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in (k^*)^{r-1}$, on note $\theta_{\underline{\alpha}} : N_r(F) \to \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}^{*}$ le caractère défini par $\theta_{\underline{\alpha}}(n) = \Psi(\sum_{i=2}^{r} \alpha_i n_{i-1,i})$. Sa restriction à $N_r(\mathcal{O})$ étant triviale, il induit une fonction $\theta_{\underline{\alpha}}$ sur $N_r(F)/N_r(\mathcal{O})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}^{*}$. Pour tous $t \in T_r(F)$ et $\underline{\alpha} \in (k^*)^{r-1}$, on construit un couple $(X(t), h_{\underline{\alpha}})$ de manière analogue à [15, proposition 3.1.1] où $X(t)$ est une variété de type fini sur k dont l'ensemble des k-points est

$$X(t)(k) = \{n \in N_r(F)/N_r(\mathcal{O}) | {}^t n t n \in S_r(\mathcal{O})\},$$

munie d'un morphisme $h_{\underline{\alpha}}(n) = \sum_{i=2}^{r} \alpha_i \mathrm{sres}(n_{i-1,i}\mathrm{d}\varpi)$. L'intégrale orbitale I globale est alors :

$$I(t,\alpha) = \sum_{n \in X(t)(k)} \theta_{\underline{\alpha}}(n).$$

Pour toute place v, on note $\mathcal{O}_v$ le complété de $\mathcal{O}$ en v, F_v son corps des fractions, et k_v son corps résiduel. On note n_v l'image de n dans $N_r(F_v)/N_r(\mathcal{O}_v)$. Pour $t = \mathrm{diag}(a_1, \frac{a_2}{a_1}, \ldots, \frac{a_r}{a_{r-1}}) \in T_r(F_v)$, on introduit la variété de type fini dont l'ensemble de k points est

$$X_v(t)(k) = \{n \in N_r(F_v)/N_r(\mathcal{O}_v) | {}^t n t n \in S_r(\mathcal{O}_v)\}.$$

Cette variété est munie d'un morphisme $h_{\underline{\alpha},v}(n) = \sum_{i=2}^{r} \alpha_i \mathrm{tr}_{k_v/k}(\mathrm{res}(n_{i-1,i}))$. Lorsque $v = \varpi$ et $t \in T_r(F_{\varpi})$ on retrouve bien le couple $(X_{\varpi}(t), h_{\underline{\alpha},\varpi})$. L'intégrale orbitale I de Jacquet-Mao en la place v est :

$$I_v(t,\underline{\alpha}) = \sum_{n_v \in X_v(t)(k)} \theta_{\underline{\alpha}}(n_v),$$

où $\theta_{\underline{\alpha}}(n_v) = \psi(\sum_{i=2}^{r} \alpha_i \mathrm{tr}_{k_v/k}(\mathrm{res}(n_{i-1,i})))$.

On note $\mathrm{supp}(t) = \mathrm{Spm}(\mathcal{O}/\prod_{i=1}^{r-1} a_i)$.

Lemme 2.2.1.1. Si $v \notin \mathrm{supp}(t)$, alors $I_v(t, \underline{\alpha}) = 1$.

Démonstration. D'après [15, corollaire 1.1.5], $X_v(t)(k)$ est réduit à l'élément $n = \mathrm{Id_r}$ (car $a_i \in \mathcal{O}_v^* \ \forall i \in \{1, \ldots, r-1\}$), de sorte qu'on a $I_v(t, \underline{\alpha}) = 1$. □

La somme globale est reliée aux sommes locales par la formule de produit suivante (cf. [15, proposition 1.3.2])

$$I(t, \underline{\alpha}) = \prod_{v \in \mathrm{supp}(t)} I_v(t, \underline{\alpha}). \tag{2.2.1.1}$$

On ajoute une barre pour indiquer le changement de corps de k à $\overline{k}$. On peut définir les couples $(\overline{X}(t), h_{\underline{\alpha}})$ et $(\overline{X}_v(t), h_{\underline{\alpha},v})$, où $v \in \mathrm{Spm}(\overline{\mathcal{O}})$. On note encore $\mathrm{supp}(t) = \mathrm{Spm}(\overline{\mathcal{O}}/\prod_{i=1}^{r-1} a_i\overline{\mathcal{O}})$.On a alors la forme cohomologique suivante de 2.2.1.1 (cf. [15, corollaire 3.2.3]) :

$$\mathrm{R}\Gamma_c(\overline{X}(t), h_{\underline{\alpha}}^* \mathcal{L}_\psi) = \bigotimes_{v \in \mathrm{supp}(t)} \mathrm{R}\Gamma_c(\overline{X}_v(t), h_{\underline{\alpha},v}^* \mathcal{L}_\psi).$$

Supposons $t = \mathrm{diag}(a_1, \frac{a_2}{a_1}, \ldots, \frac{a_r}{a_{r-1}})$, où les a_i sont des polynôme unitaires dont on fixera les degrés $d_i = \deg(a_i)$. Soient Q_{d_i}, la variété affine sur k des polynômes unitaires de degré d_i et $Q_{\underline{d}} = \prod_{i=1}^{r} Q_{d_i}$ avec $\underline{d} = (d_1, \ldots, d_r)$. Le couple $(X(t), h_{\underline{\alpha}})$ se mettent en famille de sorte qu'on obtient une variété $X_{\underline{d}}$ de type fini sur k munie de deux morphismes $f_{\underline{d}}^X : X_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1} \to Q_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1}$ et $h_{\underline{d}} : X_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1} \to \mathbb{G}_a$ tels que $\overline{X}(t)$ et $\mathrm{R}\Gamma_c(\overline{X}(t), h_{\underline{\alpha}}^* \mathcal{L}_\psi)$ sont respectivement les fibres en $(t, \underline{\alpha}) \in (Q_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1})(\overline{k})$ de $f_{\underline{d}}^X$ et de $\mathrm{R}f_{\underline{d},!}^X h_{\underline{d}}^* \mathcal{L}_\psi$. Plus précisément :

Lemme 2.2.1.2. (cf. [15, proposition 3.3.1])

1. Pour tout $\underline{d} \in \mathbb{N}^r$ le foncteur $X_{\underline{d}}$ qui associe à toute k-algèbre R l'ensemble

$$X_{\underline{d}}(R) = \{g \in S_r(\mathcal{O} \otimes_k R) | \det(g_i) \in Q_{d_i}(R)\}/N_r(\mathcal{O} \otimes_k R),$$

où g_i est la sous-matrice de g faite des i-premières lignes et des i-premières colonnes de g, est représenté par une variété affine de type fini sur k, qu'on note aussi $X_{\underline{d}}$. Soit

$$f_{\underline{d}}^X : X_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1} \to Q_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1}$$

le morphisme défini par $f_{\underline{d}}^X(g, \underline{\alpha}) = ((a_i)_{1 \leq i \leq r}, \underline{\alpha})$ où $a_i = \det(g_i)$.

2. Pour tout i avec $2 \leq i \leq r$, l'application $h_i : S_r(\mathcal{O} \otimes_k R) \times (R^*)^{r-1} \to R$ définie par

$$h_i = \mathrm{res}\left(a_{i-1}^{-1}\left((g_{i,1}, \ldots, g_{i,i-1}) a_{i-1} g_{i-1}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_i \end{pmatrix}\right)\right),$$

où $a_i g_i^{-1}$ est la matrice des cofacteurs de g_i, lesquels sont dans $\mathcal{O}_R := \mathcal{O} \otimes_k R$ et où $\mathrm{res}(a_{i-1}^{-1} b)$ est le coefficient de $\varpi^{d_{i-1}-1}$ dans l'expression polynomiale en la variable ϖ du reste de la division euclidienne de b par a_{i-1} (cette division euclidienne a un sens puisque le coefficient dominant de a_{i-1} est égal à 1), induit un morphisme $h_i : X_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1} \to \mathbb{G}_a$.

3. Soit $h_{\underline{d}} = \sum_{i=2}^r h_i$. Alors pour tous $t \in Q_{\underline{d}}(k)$ et $\underline{\alpha} \in \mathbb{G}_m^{r-1}$, le couple $(X(t), h_{\underline{\alpha}})$ est isomorphe à la fibre $(f_{\underline{d}}^X)^{-1}(t, \underline{\alpha})$ munie de la restriction de $h_{\underline{d}}$ à cette fibre.

2.3 Le cas $\underline{d} = (1, 2, \ldots, r)$

Soit $U_{\underline{d}}$ l'ouvert de $\prod_{i=1}^r Q_i \times (\mathbb{G}_m)^{r-1}$ formé des couples $(t, \underline{\alpha})$ tels que le polynôme $\prod_{i=1}^r a_i$ n'ait pas de racines multiples.

Théorème 2.3.1.1. Pour $\underline{d} = (1, 2, \ldots, r)$ le complexe de faisceaux $\mathrm{R}f_{\underline{d},!}^X h_{\underline{d}}^* \mathcal{L}_\psi[\frac{r(r+1)}{2} + r - 1]$ est un faisceau pervers, prolongement intermédiaire de sa restriction à l'ouvert $U_{\underline{d}}$.

On rappelle que S_r désigne l'espace affine des matrices symétriques de taille r.

Proposition 2.3.1.2. (cf. [15, proposition 4.2.1]) Pour $\underline{d} = (1, 2, \ldots, r)$ le triplet $(X_{\underline{d}}, f_{\underline{d}}^X, h_{\underline{d}})$ est isomorphe au triplet (S_r, f^X, h) où le morphisme $f^X : S_r \times \mathbb{G}_m^{r-1} \to \prod_{i=1}^r Q_i \times \mathbb{G}_m^{r-1}$ est défini par

$$f^X(x, \underline{\alpha}) = (a_1(x), \ldots, a_r(x), \underline{\alpha}),$$

où $a_i(x) = \det(s_i(x) + \varpi \mathrm{Id}_i)$, $s_i(x)$ étant la sous-matrice faite des i premières lignes et des i premières colonnes de x, et où le morphisme $h : S_r \times \mathbb{G}_m^{r-1} \to \mathbb{G}_a$ est défini par

$$h(x, \underline{\alpha}) = \sum_{i=2}^r \alpha_i x_{i-1,i}.$$

Démonstration. Soit R une k-algèbre. On note $\mathcal{O}_R := \mathcal{O} \otimes_k R = R[\varpi]$.

On montre d'abord que l'on peut réduire toute matrice $g \in S_r(\mathcal{O}_R)$ dont le déterminant de la sous-matrice $s_i(g)$ est un polynôme unitaire de degré i à une matrice de la forme $x+\varpi\mathrm{Id}_r$, avec x une matrice symétrique à coefficients dans R, par récurrence sur r. L'assertion est évidente pour $r = 1$. D'après l'hypothèse de récurrence, on peut supposer que $s_{r-1}(g) = x_{r-1} + \varpi\mathrm{Id}_{r-1}$ (à l'aide de l'action du groupe N_{r-1}, qu'on voit comme le sous-groupe de N_r formé des matrices unipotentes dont les coefficients non diagonaux de la r-ième colonne sont nuls). On écrit

$$g = \begin{pmatrix} s_{r-1}(g) & y \\ {}^t y & z \end{pmatrix},$$

où y est un vecteur colonne appartenant à ${\mathcal{O}_R}^{r-1}$ et z un élément de $\mathcal{O}_R$. Comme pour toute matrice x à coefficient dans R le R-module ${\mathcal{O}_R}^r$ se décompose en une somme directe $R^r \oplus (x+\varpi\mathrm{Id}_r){\mathcal{O}_R}^r$, (cf. [15, lemme 4.1.2]) il existe un unique vecteur v tel que $y + s_{r-1}(g)v \in R^{r-1}$. En considèrant la matrice $u_r = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{r-1} & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a alors ${}^t u_r g u_r = x + \varpi\mathrm{Id}_r$, où x est une matrice symétrique à coefficients dans R. De plus, si $x + \varpi\mathrm{Id}_r = {}^t ntn$, on a nécessairement $\mathrm{sres}(n_{i-1,i}) = x_{i-1,i}$. □

Soit S_i la variété affine des matrices symétriques de taille i. On définit les variétés R_i en posant $R_r = \mathrm{Spec}(k)$ et $R_{i-1} = R_i \times Q_i \times \mathbb{G}_m$. Soit $f_i^X : \mathbb{G}_m \times S_i \times R_i \to S_{i-1} \times R_{i-1}$ le morphisme défini par $f_i^X(\alpha_i, x_i, r_i) = (s_{i-1}(x_i), r_{i-1})$, où $r_{i-1} = (r_i, \Delta_i(x_i), \alpha_i)$. Soit $h_i : \mathbb{G}_m \times S_i \times R_i \to \mathbb{G}_a$ le morphisme défini par $h_i(\alpha_i, x_i, r_i) = \alpha_i x_{i-1,i}$. Soit $\mathrm{pr}_i : \mathbb{G}_m \times S_i \times R_i \to S_i \times R_i$ la projection évidente. On définit les complexes $\mathcal{I}_i$ sur $S_i \times R_i$ en posant $\mathcal{I}_r = \overline{\mathbb{Q}}_\ell[\frac{r(r+1)}{2}]$ et $\mathcal{I}_{i-1} = Rf_{i,!}^X(\mathcal{I}_i \otimes h_i^* \mathcal{L}_\psi)$ (voir loc. cit.). On a un isomorphisme $S_1 \times R_1 \simeq Q_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1}$ pour lequel $\mathcal{I}_1 \simeq \mathrm{R}f_{\underline{d},!}^X h_{\underline{d}}^* \mathcal{L}_\psi[\frac{r(r+1)}{2} + r - 1]$.

On note O_i le groupe orthogonal de degré i de la forme quadratique $q(x_1, \ldots, x_i) = \sum_{j=1}^i x_j^2$. Ce groupe agit dans $\mathbb{G}_m \times S_i \times R_i$ par l'action adjointe sur S_i et par l'action triviale sur les autres facteurs. On identifiera le groupe O_{i-1} au sous-groupe $\mathrm{diag}(\mathrm{O}_{i-1}, 1)$ de O_i de sorte que O_{i-1} agit aussi sur $\mathbb{G}_m \times S_i \times R_i$ par l'action induite. Comme l'action adjointe laisse invariant le polynôme caractéristique, le morphisme f_i^X est O_{i-1}-équivariant. Le morphisme h_i n'est pas O_{i-1}-équivariant mais est néanmoins O_{i-2}-équivariant. Le théorème 2.3.1.1 résulte alors de la proposition suivante

Proposition 2.3.1.3. (cf. [15, proposition 5.2.2]) Soient U_i et U_{i-1} les images réciproques de $U_{\underline{d}}$ dans $S_i \times R_i$ et dans $S_{i-1} \times R_{i-1}$. Si $\mathcal{I}$ est un

faisceau pervers sur $S_i \times R_i$, O_{i-1}-équivariant et isomorphe au prolongement intermédiaire à restriction à l'ouvert U_i, alors

$$\mathcal{I}' = Rf_{i,!}^X(\mathcal{I} \otimes h_i^*\mathcal{L}_\psi)[1]$$

est aussi un faisceau pervers sur $S_{i-1} \times R_{i-1}$, O_{i-2}-équivariant et isomorphe au prolongement intermédiaire de sa restriction à l'ouvert U_{i-1}.

Démonstration. Les morphismes qui interviennent dans la formation de $\mathcal{I}'$ sont tous O_{i-2}-équivariants donc $\mathcal{I}'$ l'est aussi.

On utilise la transformation de Fourier-Deligne ([11]) pour démontrer la perversité et le prolongement intermédiaire. Soit $E = S_i \times Q_i \times R_i$. Il est clair que $E \times \mathbb{G}_m \simeq S_{i-1} \times R_{i-1}$. Soient V le fibré trivial $E \times \mathbb{A}^{i-1}$ et $V^\vee$ son fibré dual. On note $\iota : S_i \times R_i \to V$ l'immersion fermée définie par $\iota(x_i, r_i) = (x_{i-1}, a_i(x_i), r_i, y)$, où x_i est de la forme $\begin{pmatrix} x_{i-1} & y \\ {}^t y & * \end{pmatrix}$. On note $\epsilon : E \times \mathbb{G}_m \to V^\vee$ l'immersion fermé définie par $\epsilon(e, \alpha_i) = (e, {}^t(0, \ldots, 0, \alpha_i))$. On vérifie que $\mathcal{I}' = \epsilon^* \mathfrak{F}_\psi(\iota_* \mathcal{I})[2-i]$ (cf. [15, proposition 5.3.2]), où $\mathfrak{F}_\psi$ est la transformation de Fourier-Deligne. Puisque $\mathcal{I}$ est un faisceau pervers et ι est une immersion fermée, $\iota_*\mathcal{I}$ est un faisceau pervers. D'après [11], $\mathfrak{F}_\psi(\iota_*\mathcal{I})$ en est un aussi. L'action de O_{i-1} sur $S_i \times R_i$ s'étend à V de la manière suivante :

$$\pi(g, (x_{i-1}, a_i, r_i), y) = (({}^t g x_{i-1} g, a_i, r_i), {}^t g y).$$

Cela induit donc une action sur $V^\vee$

$$\check{\pi}(g, (x_{i-1}, a_i, r_i), \check{y}) = (({}^t g x_{i-1} g, a_i, r_i), {}^t g \check{y}).$$

Par rapport à cette action, $\mathfrak{F}_\psi(\iota_*\mathcal{I})$ est O_{i-1}-équivariant. On va utiliser le lemme suivant

Lemme 2.3.1.4. (cf. [15, lemme 5.4.3]) Le morphisme composé

$$\mathrm{O}_{i-1} \times E \times \mathbb{G}_m \overset{\epsilon}{\hookrightarrow} \mathrm{O}_{i-1} \times V^\vee \xrightarrow{\check{\pi}} V^\vee$$

est un morphisme lisse de dimension relative $\frac{i(i-1)}{2} + 1 - (i-1)$.

Démonstration du lemme. On note Z l'image de l'immersion localement fermée ϵ dans $V^\vee$. Le morphisme composé s'écrit donc :

$$\mathrm{O}_{i-1} \times Z \xrightarrow{\check{\pi}} V^\vee.$$

En oubliant les composantes Q_i et R_i on obtient un diagramme cartésien évident

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{O}_{i-1} \times Z & \xrightarrow{\check{\pi}} & V^\vee \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{O}_{i-1} \times \mathbb{G}_m \times S_{i-1} & \xrightarrow{\xi} & S_{i-1} \times \mathbb{A}^{i-1} \end{array}$$

où $\xi(g_{i-1}, \alpha_i, x_{i-1}) = ({}^t g_{i-1} x_{i-1} g_{i-1}, g_{i-1}{}^t(0, \ldots, 0, \alpha_i))$.

En factorisant le morphisme ζ et oubliant le facteur S_{i-1}, l'assertion se ramène à démontrer que le morphisme

$$\mathrm{O}_{i-1} \times \mathbb{G}_m \to \mathbb{A}^{i-1},\ (g_{i-1}, \alpha_i) \mapsto (g_{i-1}{}^t(0, \ldots, 0, \alpha_i))$$

est lisse et de dimension relative $\frac{i(i-1)}{2} + 1 - (i-1)$. Cela résulte de l'assertion suivante : "L'orbite de l'élément ${}^t(0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{A}^{i-1}$ sous l'action du groupe $\mathrm{O}_{i-1} \times \mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^{i-1}$ définie par

$$(g_{i-1}, \lambda, y) \mapsto \lambda g_{i-1} y$$

est l'ouvert défini par l'équation ${}^t yy \neq 0$." Cette assertion est évidente.

Fin de la démonstration. D'après [3, 4.2.5], $\check{\pi}^*(\mathfrak{F}_\psi(\iota_*\mathcal{I}))[\frac{i(i-1)}{2} + 1 - (i-1)]$ est un faisceau pervers sur $O_{i-1} \times Z$. Grâce à la O_{i-1}-équivariance on a un isomorphisme

$$\check{\pi}^*(\mathfrak{F}_\psi(\iota_*\mathcal{I})) = \mathrm{pr}_Z^*(\mathfrak{F}_\psi(\iota_*\mathcal{I})_{|Z}).$$

D'après loc. cit. $\mathfrak{F}_\psi(\iota_*\mathcal{I})_{|Z}[1 - (i-1)]$ est un faisceau pervers sur Z, la projection $\mathrm{pr}_Z : O_{i-1} \times Z \to Z$ étant clairement un morphisme lisse surjectif de dimension relative $\dim(O_{i-1}) = \frac{i(i-1)}{2}$. Alors $\mathcal{I}'$ est un faisceau pervers sur $S_{i-1} \times R_{i-1}$.

De la même manière, $\mathcal{I}'$ est le prolongement intermédiaire de sa restriction à U_{i-1}. □

Chapitre 3

Le groupe métaplectique

3.1 Le groupe métaplectique local

3.1.1 La construction du groupe métaplectique local (cf. [9])

Soit k un corps fini de caractéristique $p \neq 2$ et à q éléments. On note $\mathcal{O}_\varpi = k[[\varpi]]$ l'anneau des séries formelles à une indéterminée ϖ et à coefficients dans k, $F_\varpi = k((\varpi))$ son corps des fractions.

Dans [9] le groupe métaplectique $\widetilde{\mathrm{GL}}_r$ est construit comme une extension centrale non-triviale du groupe $\mathrm{GL}_r(F_\varpi)$ par $\{\pm 1\}$

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{GL}}_r(F_\varpi) \longrightarrow \mathrm{GL}_r(F_\varpi) \longrightarrow 1 \ .$$

L'extension $\widetilde{\mathrm{GL}}_r(F_\varpi)$ est définie par une loi de groupe sur le produit $\mathrm{GL}_r(F_\varpi) \times \{\pm 1\}$

$$(g, z)(g', z') = (gg', zz'\chi(g, g')),$$

où χ est un certain 2-cocycle, ce qui veut dire qu'il vérifie l'identité

$$\chi(g', g'')\chi(gg', g'')^{-1}\chi(g, g'g'')\chi(g, g')^{-1} = 1,$$

qui traduit l'associativité de la loi de groupe.

Proposition 3.1.1.1. (cf. [9, Proposition 0.1.2]) L'extension centrale $\widetilde{\mathrm{GL}}_r(F_\varpi)$ est scindée au-dessus de $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_\varpi)$.

On a une section canonique κ^* de l'extension $\mathrm{GL}_r(F_\varpi)$ au-dessus de $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_\varpi)$ qui s'écrit $\kappa^*(g) = (g, \kappa(g))$ pour une certaine application

$$\kappa : \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_\varpi) \to \{\pm 1\}$$

qui satisfait les relations suivantes (c.f [12, lemme 2]) :

1. $\kappa|_{T_r(F_\varpi)\cap \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_\varpi)} = \kappa|_{W_r} = \kappa|_{N_r(F_\varpi)\cap \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_\varpi)} = 1$ (ceci détermine κ de manière unique).
2. $\kappa(g_1g_2) = \kappa(g_1)\kappa(g_2)\chi(g_1,g_2) \quad (g_1, g_2 \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_\varpi))$.
3. $\kappa\left(\begin{bmatrix} g_1 & \\ & g_2 \end{bmatrix}\right) = \kappa\left(\begin{bmatrix} & g_1 \\ g_2 & \end{bmatrix}\right) = \kappa(g_1)\kappa(g_2)$ $\left(\begin{bmatrix} g_1 & \\ & g_2 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_\varpi)\right)$.

Dans le cas $r = 2$ Kubota ([10, p. 19]) a montré que

$$\kappa(g) = \begin{cases} \left[c, \frac{d}{\det(g)}\right] & \left(g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ c \neq 0,\ c \notin \mathcal{O}_\varpi^*\right) \\ 1 & (c = 0 \text{ ou } c \in \mathcal{O}_\varpi^*), \end{cases}$$

où $[.,.]$ est le symbole de Hilbert.

En remplaçant le symbole de Hilbert par le symbole modéré dans la définition de χ (on note encore χ le cocycle ainsi obtenu), on obtient une extension $\widetilde{\mathrm{GL}}_{r,KP}(F_\varpi)$ de $\mathrm{GL}_r(F_\varpi)$ par k^*. Le symbole de Hilbert peut s'exprimer en termes du symbole modéré, de sorte que cette extension $\widetilde{\mathrm{GL}}_{r,KP}(F_\varpi)$ permet de retrouver celle ci-dessus.

Le nouveau 2-cocycle χ est bien défini par la proposition suivante.

Proposition 3.1.1.2. ([12, p. 112]) Soit $g \in \mathrm{GL}_r(F_\varpi)$. D'après la décomposition de Bruhat, on écrit $g = n_1mn_2$, où n_1, $n_2 \in N_r$ et $m \in T_rW_r(F_\varpi)$ (m est uniquement déterminé). On note $B(g) = m$. Soit $\{.,.\}$ le symbole modéré, i.e. $\{f,g\} = (-1)^{v(f)v(g)}\frac{f^{v(g)}}{g^{v(f)}}(0)$. On a alors :

1. $\chi(t,t') = \prod_{i<j}\{t_i, t'_j\}$,
   où $t = \mathrm{diag}[t_i]$ et $t' = \mathrm{diag}[t'_i]$.
2. $\chi(w,w') = 1 \quad (w, w' \in W_r)$.
3. $\chi(t,w) = 1 \quad (w \in W_r,\ t \in T_r(F_\varpi))$.
4. $\chi(\alpha,t) = \{t_\ell, t_{\ell+1}\}^{-1}\{-1, \frac{t_\ell}{t_{\ell+1}}\}\{-1, \det(t)\}$,
   où α est la matrice de la transposition $(\ell, \ell+1)$.
5. $\chi(ng, g'n') = \chi(g,g') \quad (n, n' \in N_r(F_\varpi))$.
6. $\chi(t,g) = \chi(t, B(g)) \quad (t \in T_r(F_\varpi))$.
7. La formule de loc. cit. $\sigma(s_\alpha, g) = \sigma(R(s_\alpha g)R(g))$ doit en fait être corrigée en $\chi(\alpha, g) = \chi(B(\alpha g)B(g)^{-1}, B(g))$, comme on le voit en la comparant avec la construction de Matsumoto du groupe métaplectique dans [9, p. 40].

Pour comprendre géométriquement l'extension $\widetilde{\mathrm{GL}}_{KP}(F_\varpi)$, on la compare à une autre extension due à Arbarello, De Concini et Kac (ACK), dont la définition est plus géométrique.

3.1.2 Le symbole $(A|B)$ (cf. [1])

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie. On note $\bigwedge V = \bigwedge^{\dim V}(V)$ la puissance extérieuse maximale de V. Soient $(v_1, \ldots, v_m)$ une base de V et $(v_1^*, \ldots, v_m^*)$ sa base duale. L'élément $v_1 \wedge \cdots \wedge v_m$ est une base de $\bigwedge V$ et on normalise l'identification $(\bigwedge V)^* \simeq \bigwedge V^*$ de telle sorte que $(v_1 \wedge \cdots \wedge v_m)^* = v_1^* \wedge \cdots \wedge v_m^*$ soit sa base duale.

Proposition 3.1.2.1. Soit $0 \to V \to V'' \to V' \to 0$ une suite exacte d'espaces vectoriels de dimension finie. On a des isomorphismes canoniques

$$\phi(V, V') : \bigwedge V \otimes \bigwedge V' \to \bigwedge V'';$$

$$\phi(V', V) : \bigwedge V' \otimes \bigwedge V \to \bigwedge V'',$$

définis par

$$\phi(V, V')(v_1 \wedge \cdots \wedge v_m \otimes v_1' \wedge \cdots \wedge v_n') = v_1 \wedge \cdots \wedge v_m \wedge \widetilde{v_1'} \wedge \cdots \wedge \widetilde{v_n'},$$

$$\phi(V', V)(v_1' \wedge \cdots \wedge v_n' \otimes v_1 \wedge \cdots \wedge v_m) = \widetilde{v_1'} \wedge \cdots \wedge \widetilde{v_n'} \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_m,$$

où $(v_1, \ldots, v_m)$ (resp. $(v_1', \ldots, v_n')$) est une base de V (resp. de V') et $\widetilde{v_1'}, \ldots, \widetilde{v_n'}$ sont les préimages dans V'' de $v_1', \ldots, v_n'$.

D'après Deligne ([4]), pour éviter les problèmes de signes, on va considérer $\bigwedge V$ comme l'espace vectoriel gradué $\bigwedge^{\dim(V)} V$ placé en degré $\dim V$, qui est muni un isomorphisme de symétrie

$$\bigwedge V \otimes \bigwedge V' \xrightarrow{\sim} \bigwedge V' \otimes \bigwedge V$$

par la règle de Koszul (l'isomorphisme évident est multiplié par $(-1)^{\dim V . \dim V'}$). La suite exacte $0 \to V \to V \oplus V' \to V' \to 0$ donne alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge(V \oplus V') & \xleftarrow{\phi(V,V')} & \bigwedge V \otimes \bigwedge V' \\ \wr \downarrow & & \downarrow Koszul \\ \bigwedge(V' \oplus V) & \xleftarrow[\phi(V',V)]{} & \bigwedge V' \otimes \bigwedge V \end{array},$$

où l'isomorphisme $\bigwedge(V \oplus V') \xrightarrow{\sim} \bigwedge(V' \oplus V)$ vient de l'isomorphisme de symétrie $V \oplus V' \xrightarrow{\sim} V' \oplus V$

Définition 3.1.2.2. Soient V un espace-vectoriel et A, B deux sous-espaces de V. On dit que A et B sont *commensurables* (et on note $A \sim B$) si et seulement si $\dim\left(\frac{A+B}{A\cap B}\right) < \infty$.

On s'intéresse au cas où $V = F_\varpi^r$ et A, B sont deux $\mathcal{O}_\varpi^r$-réseaux. Il est clair que $A \sim B$. On a donc $\dim(A/A\cap B) < \infty$ et $\dim(B/A\cap B) < \infty$.

Définition 3.1.2.3. Soient A, B deux $\mathcal{O}_\varpi^r$-réseaux. On définit la droite

$$(A|B) = \left(\bigwedge A/A\cap B\right)^* \otimes \left(\bigwedge B/A\cap B\right).$$

Clairement $(A|B)\otimes(B|A) \overset{can}{\simeq} k$, et si $A = B$, on a $(A|B) \overset{can}{\simeq} k$.

Proposition 3.1.2.4. Soient A, B, C, D des $\mathcal{O}_\varpi^r$-réseaux.

– On a un isomorphisme de permutation évident

$$(A|B)\otimes(C|D) \to (C|D)\otimes(A|B).$$

Pour éviter le problème de signe, on va voir $(A|B)$ comme une droite graduée placée en degré $[A:B] = \dim(A/A\cap B) - \dim(B/A\cap B)$, et on redéfinira l'isomorphisme de symétrie :

$$(A|B)\otimes(C|D) \to (C|D)\otimes(A|B),$$

en multipliant le morphisme évident par $(-1)^{[A:B][C:D]}$ (règle de Koszul). On notera $\mathrm{Sym}^\bullet$ l'isomorphisme de symétrie ainsi obtenu.

– On a un isomorphisme canonique de contraction

$$\beta : (A|B)\otimes(B|C) \to (A|C).$$

On renvoie à ([1, §4]) pour la construction β à l'aide de l'isomorphisme ϕ de la proposition 3.1.2.1.

3.1.3 L'extension de ACK

Lemme 3.1.3.1. Soient $g \in \mathrm{GL}_r(F_\varpi)$ et L un $\mathcal{O}_\varpi^r$-réseau. Il existe alors un isomorphisme canonique :

$$\gamma : (\mathcal{O}_\varpi^r|g\mathcal{O}_\varpi^r) \overset{can}{\simeq} (L|gL).$$

Démonstration. L'isomorphisme γ est défini par le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
(L|gL) & \longleftarrow & (L|gL)\otimes(\mathcal{O}_\varpi^r|L)\otimes(L|\mathcal{O}_\varpi^r) \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Sym}^\bullet} \\
\uparrow{\scriptstyle \gamma} & & (\mathcal{O}_\varpi^r|L)\otimes(L|gL)\otimes(L|\mathcal{O}_\varpi^r) \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \times g^{-1}} \\
(\mathcal{O}_\varpi^r|g\mathcal{O}_\varpi^r) & \xrightarrow[\beta^{-1}]{} & (\mathcal{O}_\varpi^r|L)\otimes(L|gL)\otimes(gL|g\mathcal{O}_\varpi^r).
\end{array}$$

□

Arbarello, De Concini, Kac associent à chaque $g \in \mathrm{GL}_r(F_\varpi)$ une droite $D_g := (\mathcal{O}_\varpi^r|g\mathcal{O}_\varpi^r)$. Cette contruction fournit une extension centrale de $\mathrm{GL}_r(F_\varpi)$ par k^*

$$1 \to k^* \to \widetilde{\mathrm{GL}}_r'(F_\varpi) \to \mathrm{GL}_r(F_\varpi) \to 1.$$

Le groupe $\widetilde{\mathrm{GL}}_r'(F_\varpi)$ est formé des éléments

$$\{(g,v)|g \in \mathrm{GL}_r(F_\varpi),\, v \in D_g - \{0\}\}$$

et est muni de la loi de groupe (cf. [1] pour la vérification de l'associativité et de l'inverse) définie par l'isomorphisme de multiplication :

$$D_g \otimes D_{g'} \overset{\times g}{\to} (\mathcal{O}_\varpi^r|g\mathcal{O}_\varpi^r)\otimes(g\mathcal{O}_\varpi^r|gg'\mathcal{O}_\varpi^r) \overset{\beta}{\to} D_{gg'}.$$

La restriction de cette extension à $\mathrm{SL}_r(F_\varpi)$ est celle de Beauville-Laszlo [2].

Remarque 3.1.3.2. Soit k' une extension finie de k. On note $\mathcal{O}'_\varpi = k'[[\varpi]]$ et F'_ϖ son corps de fractions. On a aussi une extension de ACK

$$1 \to (k')^* \to \mathrm{GL}_r'(F'_\varpi) \to \mathrm{GL}_r(F'_\varpi) \to 1,$$

comme celle définie ci-dessus dans le cas particulier où $k' = k$. En poussant cette extension via le morphisme de norme $N_{k'/k} : k'^* \to k$ on obtient une extension métaplectique de $\mathrm{GL}_r'(F'_\varpi)$ par $k^* : 1 \to k^* \to N_*\widetilde{\mathrm{GL}}_r'(F'_\varpi) \to \mathrm{GL}_r(F'_\varpi) \to 1$. Cette extension est aussi obtenue en associant à chaque $g \in \mathrm{GL}_r(F'_\varpi)$ la droite $D'_g = ({\mathcal{O}'_\varpi}^r|g{\mathcal{O}'_\varpi}^r)_k$ (où ${\mathcal{O}'_\varpi}^r$ et $g{\mathcal{O}'_\varpi}^r$ sont vus comme k-espaces vectoriels).

D'après la définition de D_g, on a $D(g) \overset{can}{\simeq} k\,,\ \forall g \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_\varpi)$, de sorte que cette extension est scindée canoniquement sur $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_\varpi)$, i.e on a le morphisme de groupes

$$\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_\varpi) \to \widetilde{\mathrm{GL}}'_r(\mathcal{O}_\varpi) \quad g \mapsto (g,1),$$

où 1 désigne le préimage dans D_g de $1 \in k$ par l'isomorphisme canonique $D_g \overset{can}{\simeq} k\,,\ \forall\, g \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_\varpi)$.

Lemme 3.1.3.3. Soit $n \in N_r(F_\varpi)$, il existe alors un $\mathcal{O}_\varpi^r$-réseau M tel que $nM = M$.

Démonstration. Supposons que $n = \begin{pmatrix} 1 & n_2^1 & n_3^1 & \dots & n_r^1 \\ 0 & 1 & n_3^2 & \dots & n_r^2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & & 1 \end{pmatrix}$. On considère le $\mathcal{O}_\varpi^r$-réseau M de la forme $M = \mathrm{diag}(\beta_1, \dots, \beta_r)\mathcal{O}_\varpi^r$. On a alors

$$nM = \begin{pmatrix} \beta_1\mathcal{O}_\varpi + n_2^1\beta_2\mathcal{O}_\varpi + n_3^1\beta_3\mathcal{O}_\varpi \cdots + n_r^1\beta_r\mathcal{O}_\varpi \\ \beta_2\mathcal{O}_\varpi + n_3^2\beta_3\mathcal{O}_\varpi + \cdots + n_r^2\beta_r\mathcal{O}_\varpi \\ \vdots \\ \beta_r\mathcal{O}_\varpi \end{pmatrix}.$$

On choisit les $\beta_i \in F_\varpi$ de telle sorte que à $v(\beta_{i-1}) \ll v(\beta_i)\,,\ \forall i = 2, \dots, r$. Cela implique $\beta_i\mathcal{O}_\varpi + \sum_{j=i+1}^r n_j^i\beta_j\mathcal{O}_\varpi = \beta_i\mathcal{O}_\varpi\,,\ \forall i$. On en déduit : $nM = M$. □

Lemme 3.1.3.4. Soient M, M' deux $\mathcal{O}_\varpi^r$-réseaux tels que $nM = M$ et $nM' = M'$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (M|nM) & \xrightarrow{(\ 3.1.3.1)} & (M'|nM') \\ & {\scriptstyle \text{évident}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \text{évident}} & \\ & k. & \end{array}$$

est alors commutatif.

Démonstration. On peut supposer que $M' \subset M$ (comme on le voit en considérant le réseau $M'' = M \cap M''$, qui vérifie lui aussi $nM'' = M''$).

L'assertion résulte immédiatement du fait que l'automorphisme $(M'|M) \overset{\times n}{\to} (nM'|nM) = (M'|M)$ est l'identité. Ceci résulte du fait que l'automorphisme $\times n$ de M/M' est unipotent. □

D'après le lemme 3.1.3.3, on peut choisir un $\mathcal{O}_\varpi^r$-réseau M qui satisfait $nM = M$, ce qui induit un isomorphisme $D_n \overset{can}{\simeq} k$ (qui est l'isomorphimse composé de $D_n \overset{3.1.3.1}{\to} (M|nM)$ et de $(M|nM) \overset{can}{\simeq} k$). On note $\mathfrak{d}_n$ l'image réciproque de $1 \in k$ dans D_n par cet isomorphisme. À l'aide du lemme 3.1.3.4, on voit que $\mathfrak{d}_n$ ne dépend pas du choix de M.

Lemme 3.1.3.5. La fonction $\sigma_N : N_r(F_\varpi) \to \widetilde{N}'_r(F_\varpi)$ $n \mapsto (n, \mathfrak{d}_n)$ est un morphisme de groupes, i.e l'extension de ACK est scindée au-dessus de $N_r(F_\varpi)$.

Démonstration. Soient $n, n' \in N_r(F_\varpi)$. On choisit $M = \mathrm{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_r)\mathcal{O}_\varpi^r$ tel que $v(\beta_i) \ll v(\beta_{i+1})$, de telle sorte que : $nM = n'M = nn'M = M$. Le lemme résulte immédiatement de $((\mathcal{O}_\varpi^r|M) \otimes (nM|n\mathcal{O}_\varpi^r)) \otimes ((\mathcal{O}_\varpi^r|M') \otimes (nM'|n\mathcal{O}_\varpi^r)) \overset{can}{\simeq} ((\mathcal{O}_\varpi^r|M) \otimes (nn'M|nn'\mathcal{O}_\varpi^r))$ (à l'aide de l'isomorphisme canonique $D_n \overset{can}{\simeq} ((\mathcal{O}_\varpi^r|M) \otimes (nM|n\mathcal{O}_\varpi^r))$ du lemme 3.1.3.1, ici avec $g = n$). □

3.1.4 Construction geométrique du groupe métaplectique

En utilisant la construction de ACK ci-dessus dans le cas $r = 1$, on obtient aussi une extension centrale

$$1 \to k^* \to \widetilde{\mathrm{GL}}'_1(F_\varpi) \to \mathrm{GL}_1(F_\varpi) \to 1.$$

On note $\det^*(\widetilde{\mathrm{GL}}'_1(F_\varpi))$ l'image réciproque de cette extension par le morphisme de déterminant $\det : \mathrm{GL}_r(F_\varpi) \to \mathrm{GL}_1(F_\varpi)$. Dans le groupe d'extensions $H^2(\mathrm{GL}_r(F_\varpi), k^*)$ (dont la loi de groupe sera notée additivement), on considère la classe d'équivalence $\det^*(\widetilde{\mathrm{GL}}'_1(F_\varpi)) - \widetilde{\mathrm{GL}}'_r(F_\varpi)$. C'est la classe d'équivalence de l'extension

$$\widetilde{\mathrm{GL}}_{r,\mathrm{geo}}(F_\varpi) = \{(g, v) | g \in \mathrm{GL}_r(F_\varpi),\, v \in \Delta_g - \{0\}\},$$

où l'on note $\Delta_g = D_{\det(g)} \otimes D_g^{\otimes(-1)}$. Les scindages de $\widetilde{\mathrm{GL}}'_r(F_\varpi)$ au-dessus de N_r et K_r définissent encore des scindages de $\widetilde{\mathrm{GL}}_{r,\mathrm{geo}}(F_\varpi)$ au-dessus de N_r et K_r.

Remarque 3.1.4.1. Comme pour l'extension ACK, soit k' une extension finie de k. On note $\mathcal{O}'_\varpi = k'[[\varpi]]$ et F'_ϖ son corps de fractions. On a aussi une extension métaplectique géométrique

$$1 \to (k')^* \to \widetilde{\mathrm{GL}}_{r,\mathrm{geo}}(F'_\varpi) \to \mathrm{GL}_r(F'_\varpi) \to 1,$$

comme celle définie ci-dessus dans le cas particulier où $k' = k$. En poussant cette extension via le morphisme de norme $N_{k'/k} : k'^* \to k$ on obtient une extension métaplectique de $\mathrm{GL}_r(F'_\varpi)$ par $k^* : 1 \to k^* \to N_*\widetilde{\mathrm{GL}}_{r,\mathrm{geo}}(F'_\varpi) \to \mathrm{GL}_r(F'_\varpi) \to 1$. Cette extension est aussi obtenue en associant à chaque $g \in \mathrm{GL}_r(F'_\varpi)$ la droite $\Delta'_g = D'_{\det(g)} \otimes_k D'^{\otimes -1}_g$.

Théorème 3.1.4.2. $\widetilde{\mathrm{GL}}_{r,\mathrm{geo}}(F_\varpi)$ et $\widetilde{\mathrm{GL}}_{r,KP}(F_\varpi)$ sont isomorphes.

Pour montrer ce théorème, on va construire une section ensembliste $s_{\mathrm{geo}} : \mathrm{GL}_r(F_\varpi) \to \widetilde{\mathrm{GL}}_{r,\mathrm{geo}}(F_\varpi)$. Ensuite on associera à cette section un 2-cocycle $\chi_{\mathrm{geo}} : \mathrm{GL}_r(F_\varpi) \times \mathrm{GL}_r(F_\varpi) \to k^*$, défini par

$$(\mathrm{Id}_r, \chi_{\mathrm{geo}}(g, g')) = s_{\mathrm{geo}}(g)s_{\mathrm{geo}}(g')/s_{\mathrm{geo}}(gg').$$

Le théorème 3.1.4.2 résultera de l'énoncé plus précis

$$\chi_{\mathrm{geo}}(g, g') = \chi(g, g').$$

Construction 3.1.4.3. (*La section ensembliste* $s' : \mathrm{GL}_r(F_\varpi) \to \widetilde{\mathrm{GL}}'_r(F_\varpi)$).

Soient $(e_i)_i$ la base canonique de F^r_ϖ et $(e^*_i)_i$ sa base duale. On note $\varpi^j_i = \varpi^j e_i$ et $\varpi^{j*}_i = \varpi^j e^*_i$. Soient $t = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_r) \in T_r(F_\varpi)$ et $w \in W_r$. Soit $\mathfrak{n} \gg 0 \in 2\mathbb{Z}$ tel que $\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}^r_\varpi \subset \mathcal{O}^r_\varpi \cap tw\mathcal{O}^r_\varpi$, par définition on a un isomorphisme canonique

$$D_{tw} = (\mathcal{O}^r_\varpi | tw\mathcal{O}^r_\varpi) = (\mathcal{O}^r_\varpi | t\mathcal{O}^r_\varpi) \overset{can}{\simeq} (\bigwedge \mathcal{O}^r_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}^r_\varpi)^* \otimes (\bigwedge t\mathcal{O}^r_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}^r_\varpi).$$

On choisit $(\bigwedge_{i=1}^r \bigwedge_{j=1}^{\mathfrak{n}-1} \varpi^j_i)^* \otimes \bigwedge_{i=1}^r \bigwedge_{j=v(t_i)}^{\mathfrak{n}-1} \varpi^j_i$ comme base du facteur de gauche et on note $\mathfrak{d}_{tw}$ son image réciproque dans D_{tw} par l'isomorphisme ci-dessus. L'élément $\mathfrak{d}_{tw}$ ne dépend pas du choix de $\mathfrak{n}$. En pratique, on notera "=" au lieu de l'isomorphisme canonique, i.e $\mathfrak{d}_{tw} = (\bigwedge_{i=1}^r \bigwedge_{j=1}^{\mathfrak{n}-1} \varpi^j_i)^* \otimes \bigwedge_{i=1}^r \bigwedge_{j=v(t_i)}^{\mathfrak{n}-1} \varpi^j_i$.

Soit $g \in \mathrm{GL}_r(F_\varpi)$, à l'aide de la décomposition de Bruhat, on a $g = nB(g)n'$. En utilisant le scindage au-dessus de $N_r(F_\varpi)$ de l'extension de ACK et l'isomorphisme de multiplication, on obtient l'isomorphime canonique $D_g \overset{can}{\simeq} D_{B(g)}$ (c'est l'isomorphisme composé de $D_g \overset{can}{\simeq} D_n \otimes D_{B(g)} \otimes D_{n'}$ et de $D_n \otimes D_{B(g)} \otimes D_{n'} \overset{can}{\simeq} k \otimes D_{B(g)} \otimes k \overset{can}{\simeq} D_{B(g)}$). On note $\mathfrak{d}_g$ l'image réciproque de $\mathfrak{d}_{B(g)} \in D_{B(g)}$ dans D_g par cet isomorphisme.

Lemme 3.1.4.4. $\mathfrak{d}_g$ ne depend pas du choix de l'écriture $g = nB(g)n'$.

Démonstration. On suppose que $g = n_1 B(g) n_1' = n_2 B(g) n_2'$. On note $\mathfrak{d}_g^i$ ($i = 1, 2$) l'élément de D_g défini comme ci-dessus relativement aux deux écritures de g. D'après la définition, on a $\mathfrak{d}_g^i = \mathfrak{d}_{n_i} \otimes \mathfrak{d}_{B(g)} \otimes \mathfrak{d}_{n_i'}$.

On a $\mathfrak{d}_g^1 = \mathfrak{d}_g^2 \Leftrightarrow \mathfrak{d}_{n_2}^{\otimes -1} \otimes \mathfrak{d}_{n_1} \otimes \mathfrak{d}_{B(g)} = \mathfrak{d}_{B(g)} \otimes \mathfrak{d}_{n_2'} \otimes \mathfrak{d}_{n_1'}^{\otimes -1}$. Comme σ_N est un morphisme de groupes (cf. le lemme 3.1.3.5), on a $\mathfrak{d}_{n_2}^{\otimes -1} \otimes \mathfrak{d}_{n_1} = \mathfrak{d}_{n_2^{-1} n_1}$ et $\mathfrak{d}_{n_2'} \otimes \mathfrak{d}_{n_1'}^{\otimes -1} = \mathfrak{d}_{n_2' n_1'^{-1}}$. On note $n = n_2^{-1} n_1$ et $n' = n_2' n_1'^{-1}$. Le lemme résultera immédiatement du fait que l'image de $\mathfrak{d}_n \otimes \mathfrak{d}_{tw}$ dans D_{ntw} par l'isomorphisme canonique $D_n \otimes D_{tw} \to D_{ntw}$ et celle de $\mathfrak{d}_{tw} \otimes \mathfrak{d}_{n'}$ dans $D_{twn'}$ par l'isomorphimse de $D_{tw} \otimes D_{n'} \to D_{twn'}$ sont identiques quand $ntw = twn'$, ce qu'on va maintenant démontrer. Plus précisement on va montrer que l'automorphisme $D_{ntw} \overset{can}{\simeq} D_{tw} \overset{can}{\simeq} D_{twn'}$ est trivial.

Soit $M = \mathrm{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_r)\mathcal{O}_\varpi^r$ tel que $v(\beta_i) \ll v(\beta_{i+1})$ (de telle sorte que $nM = n'M = M$). Comme $ntw = twn'$, on a $ntwM = twn'M = twM$. Comme dans la démonstration du lemme 3.1.3.4, l'automorphisme $(M|twM) \overset{\times n}{\to} (nM|ntwM)$ est trivial. On note $u \neq 0$ une base de $(M|twM)$ (donc $u = (\times n)(u)$) et $v \neq 0$ une base de $(\mathcal{O}_\varpi^r|M)$. D'après la définition l'image de u dans D_{ntw} par l'isomorphisme canonique $(M|twM) \overset{can}{\simeq} D_{tw} \overset{can}{\simeq} D_{ntw}$ est l'image de $v \otimes (\times n)(u) \otimes (\times ntw)(v^*) \in (\mathcal{O}_\varpi^r|M) \otimes (nM|ntwM) \otimes (ntwM|ntw\mathcal{O}_\varpi^r)$ par l'isomorphisme de multiplication. De même, l'image de u dans $D_{twn'}$ est l'image de $v \otimes u \otimes (\times twn')(v^*) \in (\mathcal{O}_\varpi^r|M) \otimes (M|twM) \otimes (twn'M|twn'\mathcal{O}_\varpi^r)$ par l'isomorphimse de multiplication. Par ailleurs, comme $ntw = twn'$ et $u = (\times n)(u)$, on obtient $v \otimes (\times n)(u) \otimes (\times ntw)(v^*) = v \otimes u \otimes (\times twn')(v^*)$, ce qui achève la démonstration du lemme. □

La section ensembliste $s' : \mathrm{GL}_r(F_\varpi) \to \widetilde{\mathrm{GL}}_r'(F_\varpi)$ est alors définie par $s'(g) = (g, \mathfrak{d}_g)$. On note $\chi'(g, g') := s'(g)s'(g')/s'(gg')$ le 2-cocycle associé à s'. On note $\mathfrak{d}_g * \mathfrak{d}_{g'}$ l'image de $\mathfrak{d}_g \otimes \mathfrak{d}_{g'}$ dans $D_{gg'}$ par l'isomorphisme de multiplication $D_g \otimes D_{g'} \to D_{gg'}$.

Lemme 3.1.4.5. 1. $\chi'(t, t') = (-1)^{\sum_{i<j} v(t_i)v(t_j')} \prod_{i=1}^{r} \left(\dfrac{t_i}{\varpi^{v(t_i)}} \right)^{v(t_i')} (0)$
où $t = \mathrm{diag}(t_i)_i$ et $t' = \mathrm{diag}(t_i')_i$.

2. $\chi'(w, w') = 1 \quad (w, w' \in W_r)$.
3. $\chi'(t, w) = 1 \quad (w \in W_r,\ t \in T_r(F_\varpi))$.
4. $\chi'(\alpha, t) = (-1)^{v(t_\ell)v(t_{\ell+1})}$
où α est la matrice de la permutation $(\ell, \ell+1)$ et $t \in T_r(F_\varpi)$.
5. $\chi'(ng, g'n') = \chi' \quad (n, n' \in N_r(F_\varpi))$
6. $\chi'(t, g) = \chi'(t, B(g)) \quad (t \in T_r(F_\varpi))$

Démonstration. 1. On rappelle la définition du morphisme canonique de multiplication sur $T_r(F_\varpi)$:

$$D_t \otimes D_{t'} \xrightarrow{\times t} (\mathcal{O}_\varpi^r | t\mathcal{O}_\varpi^r) \otimes (t\mathcal{O}_\varpi^r | tt'\mathcal{O}_\varpi^r) \xrightarrow{\beta} D_{tt'}.$$

Soit $\mathfrak{n} \in 2\mathbb{Z}$ tel que $\mathfrak{n} > \max\{v(t_i), v(t_i'), v(t_i)+v(t_i')\}$, $\forall i$. On a $t\mathcal{O}_\varpi^r/\varpi^{\mathfrak{n}} t\mathcal{O}_\varpi^r = \oplus_{i=1}^r t_i\mathcal{O}_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}} t_i\mathcal{O}_\varpi$. Cela nous donne une base $\left\{\varpi_i^j\right\}$ de $t\mathcal{O}_\varpi^r/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi^r$, où i varie de 1 à r et où j varie de $v(t_i)$ à $\mathfrak{n}-1+v(t_i)$. La matrice de passage de $\left\{\varpi_i^j\right\}_{j=v(t_i)\dots\mathfrak{n}-1+v(t_i)}^{i=1\dots r}$ à $\left\{t\varpi_i^j\right\}_{j=0\dots\mathfrak{n}-1}^{i=1\dots r}$ est la matrice carrée $\mathrm{Mat} = \mathrm{diag}(\mathrm{Mat}_i)$ de taille $\mathfrak{n}r$, où

$$\mathrm{Mat}_i = \begin{pmatrix} \frac{t_i}{\varpi^{v(t_i)}}(0) & * & * & \dots & * \\ & \frac{t_i}{\varpi^{v(t_i)}}(0) & * & \dots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \frac{t_i}{\varpi^{v(t_i)}}(0) \end{pmatrix} \text{ de taille } \mathfrak{n}.$$

On a aussi $tt'\mathcal{O}_\varpi^r/\varpi^{\mathfrak{n}} t\mathcal{O}_\varpi^r = \oplus_{i=1}^r t_i t_i'\mathcal{O}_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}} t_i\mathcal{O}_\varpi$. Cela nous donne une base $\left\{\varpi_i^j\right\}_{j=v(t_it_i')\dots\mathfrak{n}-1+v(t_i)}^{i=1\dots r}$ de $tt'\mathcal{O}_\varpi^r/\varpi^{\mathfrak{n}} t\mathcal{O}_\varpi^r$. La matrice de passage de $\left\{\varpi_i^j\right\}_{j=v(t_it_i')\dots\mathfrak{n}-1+v(t_i)}^{i=1\dots r}$ à $\left\{t\varpi_i^j\right\}_{j=v(t_i')\dots\mathfrak{n}-1}^{i=1\dots r}$ est la matrice carrée $\mathrm{Mat}' = \mathrm{diag}(\mathrm{Mat}_i')$ de taille $\mathfrak{n}r - \sum_{i=1}^r v(t_i')$, où

$$\mathrm{Mat}'_i = \begin{pmatrix} \frac{t_i}{\varpi^{v(t_i)}}(0) & * & * & \dots & * \\ & \frac{t_i}{\varpi^{v(t_i)}}(0) & * & \dots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \frac{t_i}{\varpi^{v(t_i)}}(0) \end{pmatrix} \text{ de taille } (\mathfrak{n}-v(t_i')).$$

On a (on se contente de faire le calcul dans le cas où $v(t_i) > 0$, le cas général étant laissé au lecteur) :

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_t * \mathfrak{d}_{t'} &= \left(\bigwedge_{i=1}^r \bigwedge_{j=1}^{\mathfrak{n}-1} \varpi_i^j\right)^* \otimes \bigwedge_{i=1}^r \bigwedge_{j=v(t_i)}^{\mathfrak{n}-1} \varpi_i^j \otimes \left(\bigwedge_{i=1}^r \bigwedge_{j=1}^{\mathfrak{n}-1} t\varpi_i^j\right)^* \otimes \bigwedge_{i=1}^r \bigwedge_{j=v(t_i')}^{\mathfrak{n}-1} t\varpi_i^j \\ &= \left(\bigwedge_{i=1}^r \bigwedge_{j=1}^{\mathfrak{n}-1} \varpi_i^j\right)^* \otimes \bigwedge_{i=1}^r \bigwedge_{j=v(t_i)}^{\mathfrak{n}-1} \varpi_i^j \otimes \frac{1}{\det(\mathrm{Mat})} \left(\bigwedge_{i=1}^r \bigwedge_{j=v(t_i)}^{\mathfrak{n}-1+v(t_i)} \varpi_i^j\right)^* \otimes \\ &\quad \otimes \bigwedge_{i=1}^r \bigwedge_{j=v(t_i')}^{\mathfrak{n}-1} t\varpi_i^j \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\bigwedge_{i=1}^{r}\bigwedge_{j=1}^{\mathfrak{n}-1}\varpi_i^j\right)^*\otimes\frac{(-1)^{\sum_{i<j}(\mathfrak{n}-v(t_j))v(t_i)}}{\det(\mathrm{Mat})}\left(\bigwedge_{i=1}^{r}\bigwedge_{j=\mathfrak{n}}^{\mathfrak{n}-1+v(t_i)}\varpi_i^j\right)^*\otimes\\
&\quad\otimes\bigwedge_{i=1}^{r}\bigwedge_{j=v(t_i')}^{\mathfrak{n}-1}t\varpi_i^j\\
&= \left(\bigwedge_{i=1}^{r}\bigwedge_{j=1}^{\mathfrak{n}-1}\varpi_i^j\right)^*\otimes\frac{(-1)^{\sum_{i<j}(\mathfrak{n}-v(t_j))v(t_i)}}{\det(\mathrm{Mat})}\left(\bigwedge_{i=1}^{r}\bigwedge_{j=\mathfrak{n}}^{\mathfrak{n}-1+v(t_i)}\varpi_i^j\right)^*\otimes\\
&\quad\otimes\det(\mathrm{Mat}')\bigwedge_{i=1}^{r}\bigwedge_{j=v(t_it_i')}^{\mathfrak{n}-1+v(t_i)}\varpi_i^j\\
&= \frac{(-1)^{\sum_{i<j}(\mathfrak{n}-v(t_j))v(t_i)}(-1)^{\sum_{i<j}(\mathfrak{n}-v(t_jt_j'))v(t_i)}\det(\mathrm{Mat}')}{\det(\mathrm{Mat})}\times\\
&\quad\times\left(\bigwedge_{i=1}^{r}\bigwedge_{j=1}^{\mathfrak{n}-1}\varpi_i^j\right)^*\otimes\bigwedge_{i=1}^{r}\bigwedge_{j=v(t_it_i')}^{\mathfrak{n}-1}\varpi_i^j\\
&= (-1)^{\sum_{i<j}v(t_i)v(t_j')}\prod_{i=1}^{r}\frac{\det(\mathrm{Mat}_i^i)}{\det(\mathrm{Mat}'^i_i)}.\mathfrak{d}_{tt'}\\
&= (-1)^{\sum_{i<j}v(t_i)v(t_j')}\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{t_i}{\varpi^{v(t_i)}}\right)^{v(t_i')}(0).\mathfrak{d}_{tt'}.
\end{aligned}
$$

On en déduit $\chi'(t,t')=(-1)^{\sum_{i<j}v(t_i)v(t_j')}\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{t_i}{\varpi^{v(t_i)}}\right)^{v(t_i')}(0)$.

2. Les assertions (2) et (3) résultent immédiatement de la construction de la section s'.
3. En notant ${}^{\alpha}t=\alpha t\alpha^{-1}\in T_r(F_\varpi)$, on a

$$\mathfrak{d}_{\alpha t}=\mathfrak{d}_{{}^{\alpha}t\alpha}=(\bigwedge_{i=1}^{r}\bigwedge_{j=1}^{n-1}\varpi_i^j)^*\otimes\bigwedge_{i=1}^{r}\bigwedge_{j=v(t_{\alpha(i)})}^{n-1}\varpi_i^j.$$

D'autre part, on a alors :

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{d}_\alpha*\mathfrak{d}_t &= (\bigwedge_{i=1}^{r}\bigwedge_{j=1}^{\mathfrak{n}-1}\alpha\varpi_i^j)^*\otimes\bigwedge_{i=1}^{r}\bigwedge_{j=v(t_i)}^{\mathfrak{n}-1}\alpha\varpi_i^j\\
&= (\bigwedge_{i=1}^{r}\bigwedge_{j=1}^{\mathfrak{n}-1}\varpi_{\alpha(i)}^j)^*\otimes\bigwedge_{i=1}^{r}\bigwedge_{j=v(t_i)}^{\mathfrak{n}-1}\varpi_{\alpha(i)}^j\\
&= (-1)^{\mathfrak{n}^2}(\bigwedge_{i=1}^{r}\bigwedge_{j=1}^{\mathfrak{n}-1}\varpi_i^j)^*\otimes(-1)^{(\mathfrak{n}-v(t_\ell))(\mathfrak{n}-v(t_{\ell+1}))}\bigwedge_{i=1}^{r}\bigwedge_{j=v(t_{\alpha(i)})}^{n-1}\varpi_i^j\\
&= (-1)^{v(t_\ell)v(t_{\ell+1})}\mathfrak{d}_{\alpha t}
\end{aligned}
$$

Par conséquent, on a : $\chi'(\alpha, t) = (-1)^{v(t_\ell)v(t_{\ell+1})}$.

4. En utilisant la propriété de 2-cocycle $\chi'(g_1, g_2)\chi'(g_1g_2, g_3) = \chi'(g_1, g_2g_3)$ $\chi'(g_2, g_3)$, le point (5) résulte immédiatement de $\chi'(n, g) = \chi'(g, n') = 1,\ \forall g \in \mathrm{GL}_r(F_\varpi)$. On montre que $\chi'(n, g) = 1$ et l'autre est pareil. Soit $g = n_1twn_2$, d'après la construction on a $s'(g) = s'(n_1)s'(tw)s'(n_2)$ et $s'(ng) = s'(nn_1)s'(tw)s'(n_2)$. Comme $s'(n)s'(n_1) = s'(nn_1)$, on obtient $s'(n)s'(g) = s'(ng)$, i.e $\chi'(n, g) = s'(n)s'(g)/s'(ng) = 1$.
5. Soit $g = n_1B(g)n_2$, on a $tg = n_1'tB(g)n_2 = n_1'B(tg)n_2$. On a

$$\begin{aligned} s'(t)s'(g) &= s'(t)s'(n_1)s'(B(g))s'(n_2) \\ &= (tn_1, \mathfrak{d}_{tn_1})s'(B(g))s'(n_2) \text{ (comme } \chi(t, n_1) = 1) \\ &= (n_1't, \mathfrak{d}_{n_1't})s'(B(g))s'(n_2) \\ &= s'(n_1')s'(t)s'(B(g))s'(n_2) \text{ (comme } \chi(n_1', t) = 1) \\ &= \chi'(t, B(g))s'(n_1')s'(B(tg))s'(n_2) \\ &= \chi'(t, B(g))s'(tg) \end{aligned}$$

Par conséquent, $\chi'(t, g) = \chi'(t, B(g))$.

□

Construction 3.1.4.6. Soit $t = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_r) \in T_r(F_\varpi)$. On a alors un isomorphisme canonique

$$D_t \overset{can}{\simeq} \bigotimes_{i=1}^{r} D_{t_i}$$

défini comme suit.

Soit $\mathfrak{n} \gg 0 \in 2\mathbb{Z}$ tel que : $\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi \subset t_i\mathcal{O}_\varpi \cap \mathcal{O}_\varpi,\ \forall i \in \{1, \ldots, \mathfrak{n}\}$ et $\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi^r \subset t\mathcal{O}_\varpi^r \cap \mathcal{O}_\varpi^r$. On a les isomorphismes canoniques :

$$D_{t_i} \overset{\beta}{\leftarrow} (\mathcal{O}_\varpi|\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi) \otimes (\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi|t_i\mathcal{O}_\varpi) = \Big(\bigwedge(\mathcal{O}_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi)\Big)^* \otimes \bigwedge(t_i\mathcal{O}_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi),$$

$$D_t \overset{\beta}{\leftarrow} (\mathcal{O}_\varpi^r|\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi^r) \otimes (\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi|t_i\mathcal{O}_\varpi) = \Big(\bigwedge(\mathcal{O}_\varpi^r/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi^r)\Big)^* \otimes \bigwedge(t\mathcal{O}_\varpi^r/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi^r).$$

En utilisant la suite exacte : $0 \to t_i\mathcal{O}_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi \to \bigoplus_{j=1}^{i} t_j\mathcal{O}_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi \to \bigoplus_{j=1}^{i-1} t_j\mathcal{O}_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi \to 0$, on a l'isomorphisme canonique :

$$\bigwedge\left(\bigoplus_{j=1}^{i} t_j\mathcal{O}_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi\right) \overset{\phi_i}{\leftarrow} \bigwedge\left(\bigoplus_{j=1}^{i-1} t_j\mathcal{O}_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi\right) \otimes \bigwedge(t_i\mathcal{O}_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi),$$

où $\phi_i = \phi(\bigoplus_{j=1}^{i-1} t_j\mathcal{O}_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi, t_j\mathcal{O}_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi)$.

En utilisant la suite exacte : $0 \to \mathcal{O}_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi \to \bigoplus_{j=1}^{i} \mathcal{O}_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi \to \bigoplus_{j=1}^{i-1} \mathcal{O}_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi \to 0$, on a l'isomorphisme canonique :

$$\bigwedge\left(\bigoplus_{j=1}^{i} \mathcal{O}_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi\right) \overset{\phi_i'}{\leftarrow} \bigwedge\left(\bigoplus_{j=1}^{i-1} \mathcal{O}_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi\right) \otimes \bigwedge(\mathcal{O}_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi),$$

où $\phi_i' = \phi(\bigoplus_{j=1}^{i-1} \mathcal{O}_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi, \mathcal{O}_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi)$.

Par ailleurs, on a l'isomorphisme canonique :

$$\begin{array}{c} \bigotimes_{i=1}^{r} [(\bigwedge(\mathcal{O}_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi))^* \otimes \bigwedge(t_i\mathcal{O}_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi)] \\ \downarrow \\ \bigotimes_{i=1}^{r} (\bigwedge(\mathcal{O}_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi))^* \otimes \bigotimes_{i=1}^{r} \bigwedge(t_i\mathcal{O}_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi), \end{array}$$

(comme on utilise la règle de commutation de Koszul, c'est l'isomorphisme évident multiplié par $(-1)^{\sum_{i=2}^{r} \mathfrak{n}.\sum_{j=1}^{i-1}(\mathfrak{n}-v(t_j))} = 1$.)

Par conséquent, en utilisant les relations $t\mathcal{O}_\varpi^r/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi^r = \bigoplus_{i=1}^{r} t_i\mathcal{O}_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi$, et $\mathcal{O}_\varpi^r/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi^r = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi$, on obtient le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{i=1}^{r} [(\bigwedge(\mathcal{O}_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi))^* \otimes \bigwedge(t_i\mathcal{O}_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi)] & \xrightarrow{\beta} & \bigotimes_{i=1}^{r} D_{t_i} \\ \downarrow & & \\ \bigotimes_{i=1}^{r} (\bigwedge(\mathcal{O}_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi))^* \otimes \bigotimes_{i=1}^{r} \bigwedge(t_i\mathcal{O}_\varpi/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi) & & \downarrow \\ \downarrow \phi & & \\ (\bigwedge(\mathcal{O}_\varpi^r/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi^r))^* \otimes \bigwedge(t\mathcal{O}_\varpi^r/\varpi^{\mathfrak{n}}\mathcal{O}_\varpi^r) & \xrightarrow[\beta]{} & D_t, \end{array}$$

où $\phi = (\phi_r' \circ \cdots \circ \phi_2') \otimes (\phi_r \circ \cdots \circ \phi_2)$.

Soit $tw \in T_rW_r(F_\varpi)$, où $t = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_r) \in T_r(F_\varpi)$. Clairement, on a

$$\Delta_{tw} \overset{can}{\simeq} Hom_k(D_{tw}, D_{\det(tw)}).$$

On définit alors δ_{tw} comme l'isomorphisme rendant le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} D_{tw} = D_t & \xrightarrow[can]{(\ 3.1.4.6)} & \bigotimes_{i=1}^{r} D_{t_i} & \xrightarrow{\times(-1)^{\sum_{i<j} v(t_i)v(t_j)}} & \bigotimes_{i=1}^{r} D_{t_{r+1-i}} \\ \downarrow \delta_{tw} & & & & \downarrow \mu \\ D_{\det(tw)} = D_{\det(t)} & & \xleftarrow[\times(-1)^{\sum_{i=1}^{r}(r-i)v(t_i)+\sum_{i<j} v(t_i)v(t_j)}]{} & & D_{\det(t)}, \end{array}$$

commutatif, où l'isomorphisme μ est l'isomorphisme composé des isomorphismes de multiplication $D_{\prod_{j=1}^{r-i} t_{r+1-j}} \otimes D_{t_i} \overset{\mu_i}{\to} D_{\prod_{j=1}^{r-i+1} t_{r+1-j}}$, c.à.d $\mu = \mu_1 \circ \cdots \circ \mu_{r-1}$.

Soit $g \in \mathrm{GL}_r(F_\varpi)$, à l'aide de la décomposition de Bruhat on a $g = ntwn'$. On a un isomorphisme canonique $\Delta_n \otimes \Delta_{tw} \otimes \Delta_{n'} \overset{can}{\simeq} \Delta_g$ provenant du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Delta_n \otimes \Delta_{tw} \otimes \Delta_{n'} & = & D_{\det(n)} \otimes D_n^{\otimes -1} \otimes D_{\det(tw)} \otimes D_{tw}^{\otimes -1} \otimes D_{\det(n')} \otimes D_{n'}^{\otimes -1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_{\det(g)} \otimes D_g^{\otimes -1} & \leftarrow & (D_{\det(n)} \otimes D_{\det(tw)} \otimes D_{\det(n')}) \otimes (D_n \otimes D_{tw} \otimes D_{n'})^{\otimes -1} \end{array}$$

où l'isomorphisme vertical de gauche est l'isomorphisme composé des isomorphismes de commutation (la règle de Koszul est ici triviale car D_n et $D_{\det(n)}$ sont des droites graduées de degré 0), et où l'isomorphisme horizontal du bas est le composé des isomorphismes de multiplication. Puisque $\Delta_n \overset{can}{\simeq} k\,,\ \forall n \in N_r(F_\varpi)$ on a $\Delta_g \overset{can}{\simeq} \Delta_{tw}$. On note δ_g l'image réciproque de δ_{tw} par cet isomorphisme.

Proposition 3.1.4.7. δ_g ne dépend pas du choix l'écriture $g = nB(g)n'$.

Démonstration. Elle est semblable à celle du lemme 3.1.4.4. □

Grâce à cette proposition, on obtient une section ensembliste $s_{\mathrm{geo}} : \mathrm{GL}_r(F_\varpi) \to \widetilde{\mathrm{GL}}_{r,\mathrm{geo}}(F_\varpi)$ définie par

$$s_{\mathrm{geo}}(g) = (g, \delta_g).$$

On note χ_{geo} le 2-cocycle associé à cette section. On va comparer χ_{geo} au cocycle de Kazhdan-Patterson et le théorème 3.1.4.2 résulte alors de la proposition suivante :

Proposition 3.1.4.8.

1. $\chi_{\mathrm{geo}}(t,t') = (-1)^{\sum_{i<j} v(t_i)v(t'_j)} \prod_{i<j} \dfrac{t_i^{v(t'_j)}}{t'_j{}^{v(t_i)}}(0)$
   où $t = \mathrm{diag}[t_i]$ et $t' = \mathrm{diag}[t'_i]$.
2. $\chi_{\mathrm{geo}}(w,w') = 1 \quad (w, w' \in W_r)$.
3. $\chi_{\mathrm{geo}}(t,w) = 1 \quad (w \in W_r,\ t \in T_r)$.
4. $\chi_{\mathrm{geo}}(\alpha,t) = (-1)^{v(t_\ell)v(t_{\ell+1}) + \sum_{i \neq \ell,\ell+1} v(t_i)} \dfrac{t_{\ell+1}^{v(t_\ell)}}{t_\ell^{v(t_{\ell+1})}}(0)$
   où α est la matrice de la permutation $(\ell, \ell+1)$ et $t \in T_r$.

5. $\chi_{\mathrm{geo}}(ng, g'n') = \chi_{\mathrm{geo}}(g, g') \quad (n, n' \in N_r)$
6. $\chi_{\mathrm{geo}}(t, g) = \chi_{\mathrm{geo}}(t, B(g)) \quad (t \in T_r)$
7. $\chi_{\mathrm{geo}}(\alpha, g) = \chi_{\mathrm{geo}}(B(\alpha g)B(g)^{-1}, B(g))$

En particulier, $\chi_{\mathrm{geo}}(g, g') = \chi(g, g')$.

Démonstration. On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} D_g \otimes D_{g'} & \xrightarrow{\delta_g \otimes \delta_{g'}} & D_{\det(g)} \otimes D_{\det(g')} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_{gg'} & \xrightarrow[\delta_{gg'}]{} & D_{\det(gg')}\,, \end{array}$$

où les isomorphismes verticaux ci-dessus sont des isomorphismes de multiplication.

D'après la définition de δ_g on trouve

$$\delta_g = [\delta_g]\mathfrak{d}_{\det(g)} \otimes \mathfrak{d}_g^{\otimes -1}\,,$$

où $[\delta_g] = (-1)^{\sum_{i=1}^{r}(r-i)v(t_i)} \prod_{i=1}^{r-1} \chi'(\prod_{j=i+1}^{r} t_j, t_i)$. Le cocycle χ_{geo} est alors donné par la formule

$$\chi_{\mathrm{geo}}(g, g') = \frac{[\delta_g].[\delta_{g'}].\chi'(\det(g), \det(g'))}{[\delta_{gg'}].\chi'(g, g')}.$$

Par conséquent, les six premières assertions de la proposition résultent immédiatement des six assertions du lemme 3.1.4.5 et de la définition de s_{geo}

On va maintenant donner la démonstration du point (7) de la proposition.

On note $m_\alpha(u)$ la matrice $\mathrm{diag}(\mathrm{Id}_{\ell-1}, \begin{pmatrix} 0 & u \\ -\frac{1}{u} & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{Id}_{r-\ell-1})$, e_α^u la matrice $\mathrm{diag}(\mathrm{Id}_{\ell-1}, \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{Id}_{r-\ell-1})$ et $d_\alpha(u)$ la matrice $\mathrm{diag}(\mathrm{Id}_{\ell-1}, -\frac{1}{u}, u, \mathrm{Id}_{r-\ell-1})$. On note aussi $e_{-\alpha}^u$ la matrice de transposition de e_α^u, i.e $e_{-\alpha}^u = \mathrm{diag}(\mathrm{Id}_{\ell-1}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{Id}_{r-\ell-1})$.

Soit $g = nwtn'$, où $t = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_r)$. On écrit $n = n_\alpha e_\alpha^u$, où $n_\alpha \in N_r(F_\varpi)$ est telle que le coefficient situé sur la ℓ-ième ligne et la $\ell+1$-ième colonne est nul.

On considère $\alpha g = \alpha n_\alpha e_\alpha^u B(g)n' = n''\alpha e_\alpha^u B(g)n'$.

– Si $u = 0$, on a $\alpha g = n''\alpha B(g)n'$, donc $B(\alpha g) = \alpha B(g)$. On voit que

$$\begin{aligned}\delta_\alpha * \delta_g &= \delta_\alpha * (\delta_{n_\alpha} * \delta_{B(g)} * \delta_{n'}) \\ &= \delta_{\alpha n_\alpha} * \delta_{B(g)} * \delta_{n'} \\ &= \delta_{n''\alpha} * \delta_{B(g)} * \delta_{n'} \\ &= \delta_{n''} * \delta_\alpha * \delta_{B(g)} * \delta_{n'} \\ &= \chi_{\mathrm{geo}}(\alpha, B(g))\delta_{n''} * \delta_{\alpha B(g)} * \delta_{n'} \\ &= \chi_{\mathrm{geo}}(\alpha, B(g))\delta_{\alpha g}\end{aligned}$$

Par conséquent, $\chi_{\mathrm{geo}}(\alpha, g) = \chi_{\mathrm{geo}}(B(\alpha g)B(g)^{-1}, B(g))$.

– Si $w^{-1}(\ell) < w^{-1}(\ell + 1)$, comme $B(g)^{-1}e_\alpha^u B(g) \in N_r(F_\varpi)$, on a $\alpha g = n''\alpha B(g)(B(g)^{-1}e_\alpha^u B(g)n')$, de sorte qu'on obtient $B(\alpha g) = \alpha B(g)$. On a

$$\begin{aligned}\delta_\alpha * \delta_g &= \delta_\alpha * \delta_n * \delta_{B(g)} * \delta_{n'} \\ &= \delta_{\alpha n} * \delta_{B(g)} * \delta_{n'} \\ &= \delta_{n''\alpha e_\alpha^u} * \delta_{B(g)} * \delta_{n'} \\ &= \delta_{n''} * \delta_{\alpha e_\alpha^u} * \delta_{B(g)} * \delta_{n'} \\ &= \delta_{n''} * \delta_\alpha * \delta_{e_\alpha^u} * \delta_{B(g)} * \delta_{n'} \\ &= \delta_{n''} * \delta_\alpha * \delta_{e_\alpha^u B(g)} * \delta_{n'} \\ &= \delta_{n''} * \delta_\alpha * \delta_{B(g)B(g)^{-1}e_\alpha^u B(g)} * \delta_{n'} \\ &= \delta_{n''} * \delta_\alpha * \delta_{B(g)} * \delta_{B(g)^{-1}e_\alpha^u B(g)} * \delta_{n'} \\ &= \chi_{\mathrm{geo}}(\alpha, B(g))\delta_{n''} * \delta_{\alpha B(g)} * \delta_{B(g)^{-1}e_\alpha^u B(g)n'} \\ &= \chi_{\mathrm{geo}}(\alpha, B(g))\delta_{\alpha g}\end{aligned}$$

Par conséquent, $\chi_{\mathrm{geo}}(\alpha, g) = \chi_{\mathrm{geo}}(B(\alpha g)B(g)^{-1}, B(g))$.

– Si $w^{-1}(\ell) > w^{-1}(\ell + 1)$, et $u \neq 0$, on a $e_\alpha^u = m_\alpha(u)e_\alpha^{-u}e_{-\alpha}^{1/u}$. Ceci implique (en utilisant $\alpha m_\alpha(u) = d_\alpha(u)$)

$$\begin{aligned}\alpha g &= n''d_\alpha(u)e_\alpha^{-u}e_{-\alpha}^{1/u}B(g)n' \\ &= n'''(d_\alpha(u)B(g))(B(g)^{-1}e_{-\alpha}^{1/u}B(g))n'.\end{aligned}$$

Comme $B(g)^{-1}e_{-\alpha}^{1/u}B(g) \in N_r(F_\varpi)$, on a $B(\alpha g) = d_\alpha(u)B(g)$. On considère

$$\begin{aligned}\delta_\alpha * \delta_g &= \delta_\alpha * \delta_n * \delta_{B(g)} * \delta_{n'} \\ &= \delta_{\alpha n} * \delta_{B(g)} * \delta_{n'}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \delta_{n''\alpha e_\alpha^u} * \delta_{B(g)} * \delta_{n'} \\
&= \delta_{n'' d_\alpha(u) e_\alpha^{-u} e_{-\alpha}^{1/u}} * \delta_{B(g)} * \delta_{n'} \\
&= \delta_{n''' d_\alpha(u) e_{-\alpha}^{1/u}} * \delta_{B(g)} * \delta_{n'} \\
&= \delta_{n'''} * \delta_{d_\alpha(u) e_{-\alpha}^{1/u}} * \delta_{B(g)} * \delta_{n'} \\
&= \chi_{\mathrm{geo}}(d_\alpha(u), e_{-\alpha}^{1/u})^{-1} \times \\
&\quad \times \delta_{n'''} * \delta_{d_\alpha(u)} * \delta_{e_{-\alpha}^{1/u}} * \delta_{B(g)} * \delta_{n'} \\
&= \chi_{\mathrm{geo}}(d_\alpha(u), B(e_{-\alpha}^{1/u}))^{-1} \chi_{\mathrm{geo}}(e_{-\alpha}^{1/u}, B(g)) \times \\
&\quad \times \delta_{n'''} * \delta_{d_\alpha(u)} * \delta_{e_{-\alpha}^{1/u} B(g)} * \delta_{n'} \\
&= \chi_{\mathrm{geo}}(d_\alpha(u), d_\alpha(1/u))^{-1} \chi_{\mathrm{geo}}(e_{-\alpha}^{1/u}, B(g)) \times \\
&\quad \times \delta_{n'''} * \delta_{d_\alpha(u)} * \delta_{B(g)B(g)^{-1} e_{-\alpha}^{1/u} B(g)} * \delta_{n'} \\
&= \chi_{\mathrm{geo}}(e_{-\alpha}^{1/u}, B(g)) \chi_{\mathrm{geo}}(d_\alpha(u), B(g)) \delta_{\alpha g}.
\end{aligned}
$$

On calcule $\chi_{\mathrm{geo}}(e_{-\alpha}^{1/u}, B(g))$.

$$
\begin{aligned}
\chi_{\mathrm{geo}}(e_{-\alpha}^{1/u}, B(g)) &= \chi_{\mathrm{geo}}(e_{-\alpha}^{1/u}, wt) \\
&= \chi_{\mathrm{geo}}(e_{-\alpha}^{1/u} w, t) \chi_{\mathrm{geo}}(e_{-\alpha}^{1/u}, w) / \chi_{\mathrm{geo}}(w, t) \\
&= \chi_{\mathrm{geo}}(w w^{-1} e_{-\alpha}^{1/u} w, t) \chi_{\mathrm{geo}}(e_{-\alpha}^{1/u}, w) / \chi_{\mathrm{geo}}(w, t) \\
&= \frac{\chi_{\mathrm{geo}}(w, w^{-1} e_{-\alpha}^{1/u} w t) \chi_{\mathrm{geo}}(w^{-1} e_{-\alpha}^{1/u} w, t) \chi_{\mathrm{geo}}(e_{-\alpha}^{1/u}, w)}{\chi_{\mathrm{geo}}(w, w^{-1} e_{-\alpha}^{1/u} w) \chi_{\mathrm{geo}}(w, t)} \\
&= \chi_{\mathrm{geo}}(e_{-\alpha}^{1/u}, w) \text{ (comme } w^{-1} e_{-\alpha}^{1/u} w \in N_r(F_\varpi)).
\end{aligned}
$$

On va prouver que $\chi_{\mathrm{geo}}(e_{-\alpha}^{1/u}, w) = 1$. On a $e_{-\alpha}^{1/u} = e_\alpha^u d_\alpha(1/u) \alpha e_\alpha^u$ et $w^{-1} e_{-\alpha}^{1/u} w = e_{(w^{-1}(\ell+1), w^{-1}(\ell))}^{1/u} \in N_r(F_\varpi)$.

– Si $v(u) > 0$, i.e $v(1/u) < 0$, on a $e_\alpha^u \mathcal{O}_\varpi^r = \mathcal{O}_\varpi^r$. Donc $\mathfrak{d}_{e_{-\alpha}^{1/u}} = (\bigwedge_{i=1}^{v(u)-1} \varpi^i e_\ell)^* \otimes \left(\bigwedge_{i=-v(u)}^{-1} \varpi^i \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix}_\ell \right) \in (e_\alpha^u \mathcal{O}_\varpi^r | e_\alpha^u d_\alpha(1/u) \mathcal{O}_\varpi^r)$, où $\begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix}_\ell$ est le vecteur $u e_\ell + e_{\ell+1} \in \mathcal{O}_\varpi^r$.

On choisit $M = \oplus_{i=1}^{w^{-1}(\ell)-1} \mathcal{O}_\varpi \oplus \varpi^{v(u)} \mathcal{O}_\varpi \oplus \oplus_{i=w^{-1}(\ell)+1}^{r} \mathcal{O}_\varpi$, de sorte qu'on a $e_{(w^{-1}(\ell+1), w^{-1}(\ell))}^{1/u} M = M$. Donc $\mathfrak{d}_{e_{-\alpha}^{1/u} w} = \mathfrak{d}_{w e_{(w^{-1}(\ell+1), w^{-1}(\ell))}^{1/u}}$

$$
= (\textstyle\bigwedge_{i=1}^{v(u)-1} \varpi^i e_\ell)^* \otimes \left(\bigwedge_{i=0}^{v(u)-1} \frac{1}{u} \varpi^i \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix}_\ell \right) \in (w \mathcal{O}_\varpi^r | w M) \otimes
$$

$(wM|we^{1/u}_{(w^{-1}(\ell+1),w^{-1}(\ell))}\mathcal{O}^r_\varpi)$.

La matrice de passage de $\left(\varpi^i \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix}_\ell\right)_{i=-v(u)}^{-1}$ à $\left(\frac{1}{u}\varpi^i \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix}_\ell\right)_{i=0}^{v(u)-1}$ est une matrice de taille $v(u)$: Mat $= \begin{pmatrix} \frac{\varpi^{v(u)}}{u}(0) & * & \cdots & * \\ 0 & \frac{\varpi^{v(u)}}{u}(0) & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \frac{\varpi^{v(u)}}{u}(0) \end{pmatrix}$.

Ceci implique $\chi'(e^{1/u}_{-\alpha}, w) = \left(\frac{u}{\varpi^{v(u)}}\right)^{v(u)}(0)$.

– Si $v(u) \leq 0$, i.e $v(1/u) \geq 0$, on a $e^{1/u}_{(w^{-1}(\ell+1),w^{-1}(\ell))}\mathcal{O}^r_\varpi = \mathcal{O}^r_\varpi$, donc $\mathfrak{d}_{e^{1/u}_{-\alpha}w} = \mathfrak{d}_w \otimes \mathfrak{d}_{e^{1/u}_{(w^{-1}(\ell+1),w^{-1}(\ell))}} = 1$.

On choisit $M = \oplus_{i=1}^{\ell}\mathcal{O}_\varpi \oplus \varpi^{-v(u)}\mathcal{O}_\varpi \oplus \oplus_{i=\ell+2}^{r}\mathcal{O}_\varpi$, de sorte qu'on a $e^u_\alpha M = M$. Donc $\mathfrak{d}_{e^{1/u}_{-\alpha}} = (\bigwedge_{i=0}^{-v(u)-1}\varpi^i e_{\ell+1})^* \otimes \left(\bigwedge_{i=0}^{-v(u)-1}\varpi^i \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix}_\ell\right) \otimes \left(\bigwedge_{i=0}^{-v(u)-1}\varpi^i \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix}_\ell\right)^* \otimes \left(\bigwedge_{i=v(u)}^{-1}\varpi^i e_\ell\right) \otimes \left(\bigwedge_{i=0}^{-v(u)-1} -u\varpi^i e_\ell\right)^* \otimes \left(\bigwedge_{i=0}^{-v(u)-1}\varpi^i e_{\ell+1}\right) \in (\mathcal{O}^r_\varpi|M) \otimes (e^u_\alpha M|e^u_\alpha \mathcal{O}^r_\varpi) \otimes (e^u_\alpha \mathcal{O}^r_\varpi|e^u_\alpha d_\alpha(1/u)\mathcal{O}^r_\varpi) \otimes (e^u_\alpha d_\alpha(1/u)\alpha\mathcal{O}^r_\varpi|e^u_\alpha d_\alpha(1/u)\alpha M) \otimes (e^{1/u}_{-\alpha}M|e^{1/u}_{-\alpha}\mathcal{O}^r_\varpi)$.

La matrice de passage de $\left(\varpi^i e_\ell\right)_{i=v(u)}^{-1}$ à $\left(-u\varpi^i e_\ell\right)_{i=0}^{-v(u)-1}$ est une matrice de taille $-v(u)$: Mat $= \begin{pmatrix} \frac{-u}{\varpi^{v(u)}}(0) & * & \cdots & * \\ 0 & \frac{-u}{\varpi^{v(u)}}(0) & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \frac{-u}{\varpi^{v(u)}}(0) \end{pmatrix}$.

Ceci implique $\mathfrak{d}_{e^{1/u}_{-\alpha}} = \left(\frac{-u}{\varpi^{v(u)}}\right)^{v(u)}(0)$, de sorte qu'on a

$$\chi'(e^{1/u}_{-\alpha}, w) = \left(\frac{-u}{\varpi^{v(u)}}\right)^{v(u)}(0).$$

Par ailleurs on a

$$\begin{aligned} \chi_{\text{geo}}(e^{1/u}_{-\alpha}, w) &= \frac{\overline{\delta}_{e^{1/u}_{-\alpha}}.\overline{\delta}_w.\chi'(\det(e^{1/u}_{-\alpha}), \det(w))}{\overline{\delta}_{e^{1/u}_{-\alpha}w}.\chi'(e^{1/u}_{-\alpha}, w)} \\ &= (-1)^{v(u)}\left(\frac{u}{\varpi^{v(u)}}\right)^{-v(u)}/\chi'(e^{1/u}_{-\alpha}, w) \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

3.1.5 Fonction κ locale

Le scindage $\underline{\kappa}^*$ de la proposition 3.1.1.1 provient en fait d'un scindage de l'extension $\widetilde{\mathrm{GL}}_{r,KP}(F_\varpi)$ au-dessus de $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_\varpi)$. Ceci définit une fonction $\underline{\kappa} : \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_\varpi) \to k^*$ telle que (cf. [9])

$$\underline{\kappa}^*(g) = (g, \underline{\kappa}(g)) = (1, \underline{\kappa}(g)).s(g)\,,\ \forall g \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_\varpi)\,,$$

(où $s(g) = (g, 1)$ est la section de $\mathrm{GL}_r(F_\varpi) \to \widetilde{\mathrm{GL}}_r(F_\varpi)$ de Kazhdan-Patterson).

En termes géométriques, le scindage trivial de $\widetilde{\mathrm{GL}}_{r,\mathrm{geo}}(F_\varpi)$ au-dessus de $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_\varpi)$ qui vient de l'isomorphisme canonique

$$\mathrm{triv} : \Delta_g \overset{can}{\simeq} k\,,\ \forall g \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_\varpi)$$

coïncide avec s_{geo} au-dessus des trois sous-groupes $T_r(\mathcal{O}_\varpi)$, W_r et $N_r(\mathcal{O}_\varpi)$ (cf. la première condition de la proposition 3.1.1.1) et s'identifie donc au scindage $\underline{\kappa}^*$. Par conséquent, on a $\underline{\kappa}(g) = \mathrm{triv}/\delta_g$.

Remarque 3.1.5.1. En remplaçant k par une extension finie de k' de k, on a une extension de $\mathrm{GL}_r(F'_\varpi)$ par $(k')^* : 1 \to (k')^* \to \widetilde{\mathrm{GL}}_{r,\mathrm{geo}}(F'_\varpi) \to \mathrm{GL}_r(F_\varpi) \to 1$. On obtient alors de la même manière une fonction $\kappa' : \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}'_\varpi) \to (k')^*$. En composant cette fonction $\underline{\kappa}'$ avec le morphisme de norme $N_{k'/k}$ on obtient une fonction $\underline{\kappa} : \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}'_\varpi) \to k^*$. Cette fonction satisfait que $g \mapsto (g, \underline{\kappa}(g))$ est un scindage de $1 \to k^* \to N_*\widetilde{\mathrm{GL}}_{r,\mathrm{geo}}(F'_\varpi) \to \mathrm{GL}_r(F'_\varpi) \to 1$ au-dessus de $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}'_\varpi)$.

À l'aide de ce point de vue, on obtient une nouvelle démonstration de la formule pour $\underline{\kappa}$ de Kubota pour $r = 2$ (on plutôt, du renforcement où en remplace le symbole de Hilbert par le symbole modéré).

Proposition 3.1.5.2. Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\varpi)$, on a alors

$$\underline{\kappa}(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } c = 0 \text{ ou } c \in \mathcal{O}_\varpi^* \\ \left\{c, \frac{d}{\det(g)}\right\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. – Si $c = 0$, la décomposition de Bruhat de g est

$$g = \mathrm{diag}(a, d) \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $g \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\varpi)$, donc $a, d \in \mathcal{O}_\varpi^*$, de sorte qu'on a $n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\varpi)$ et $t = \mathrm{diag}(a, d) \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\varpi)$. Par conséquent, on a $\delta_g = \mathrm{triv}$, i.e $\underline{\kappa}(g) = 1$.

– Si $c \neq 0$, la décomposition de Bruhat de g est

$$g = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{diag}\left(\frac{-\det(g)}{c}, c \right) w_0 \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  – Si $c \in \mathcal{O}_\varpi^*$, les facteurs de la décomposition de Bruhat de g ci-dessus sont dans $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\varpi)$, donc on obtient facilement que $\delta_g = \mathrm{triv}$, de sorte qu'on a $\underline{\kappa}(g) = 1$.

  – Si $c \notin \mathcal{O}_\varpi^*$ (i.e $v(c) > 0$), on a $[\delta_g] = (-1)^{v(c)} \left(\frac{c}{\varpi^{v(c)}} \right)^{-v(c)} (0)$. On va noter chaque facteur de la décomposition ci-dessus respectivement (de gauche à droite) n, t, w_0, n'. Comme $g \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\varpi)$ et $v(c) > 0$, on a $a, d \in \mathcal{O}_\varpi^*$. Pour trouver $\mathfrak{d}_g$, on choisit $M = \mathcal{O}_\varpi \oplus \varpi^{v(c)} \mathcal{O}_\varpi$ (ce réseau satisfait la condition que $nM = M$ et $n'M = M$), de sorte qu'on obtient :

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_g = (\bigwedge_{j=0}^{v(c)-1} \varpi^j e_2)^* \otimes (\bigwedge_{j=0}^{v(c)-1} \varpi^j n e_2) \otimes (\bigwedge_{j=0}^{v(c)-1} \varpi^j n e_2)^* \otimes \bigwedge_{j=-v(c)}^{-1} \varpi^j n e_1 \\ \otimes (\bigwedge_{j=0}^{v(c)-1} \varpi^j n t w_0 e_2)^* \otimes (\bigwedge_{j=0}^{v(c)-1} \varpi^j g e_2) \\ \in (\mathcal{O}_\varpi^2 | M) \otimes (nM | n\mathcal{O}_\varpi^2) \otimes (n\mathcal{O}_\varpi^2 | nM) \otimes (nM | ntw_0 \mathcal{O}_\varpi^2) \\ \otimes (ntw_0 \mathcal{O}_\varpi^2 | ntw_0 M) \otimes (gM | g\mathcal{O}_\varpi^2). \end{aligned}$$

  On considère le k-espace vectoriel $ntw_0\mathcal{O}_\varpi^2 / ntw_0 M$. Celui-ci est muni de deux bases : $\{ntw_0 \varpi^j e_2\}_{j=0\ldots v(c)-1}$, qui est l'image de $\{\varpi^j e_2\}_{j=0\ldots v(c)-1} \in \mathcal{O}_\varpi^2 / M$ par l'isomorphisme $\times ntw_0$, et $\{n\varpi^j e_1\}_{j=-v(c)\ldots -1}$ qui est l'image de $\{\varpi^j e_1\}_{j=-v(c)\ldots -1} \in tw_0 \mathcal{O}_\varpi^2 / tw_0 M$ par l'isomorphisme $\times n$. La matrice de passage de la seconde vers la première est la matrice carrée de taille $v(c)$

$$\mathrm{Mat} = \begin{pmatrix} \frac{-\det(g)}{c\varpi^{-v(c)}}(0) & * & * & \ldots & * \\ & \frac{-\det(g)}{c\varpi^{-v(c)}}(0) & * & \ldots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \frac{-\det(g)}{c\varpi^{-v(c)}}(0) \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, on a $ntw_0M = M$ (ce qui implique $gM = M$) et $g\mathcal{O}^2_\varpi = \mathcal{O}^2_\varpi$, donc $g\mathcal{O}^2_\varpi/gM = \mathcal{O}^2_\varpi/M$, de sorte que le k-espace vectoriel $\mathcal{O}^2_\varpi/M$ est muni des deux bases $\{\varpi^j e_2\}_{j=0\ldots v(c)}$ et $\{g\varpi^j e_2\}_{j=0\ldots v(c)}$ qui est l'image de $\{\varpi^j e_2\}_{j=0\ldots v(c)} \in \mathcal{O}^2_\varpi/M$ par l'isomorphisme $\times g$. La matrice de passage de la seconde vers la première est la matrice carrée de taille $v(c)$

$$\mathrm{Mat}' = \begin{pmatrix} d(0) & * & * & \ldots & * \\ & d(0) & * & \ldots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & d(0) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on a $\mathfrak{d}_g = \frac{\det(\mathrm{Mat}')}{\det(\mathrm{Mat})}\mathrm{triv}$. En utilisant la formule $\delta_g = [\delta_g]\mathfrak{d}_{\det(g)} \otimes \mathfrak{d}_g^{\otimes(-1)}$, on a donc que $\underline{\kappa}(g) = \left\{c, \frac{d}{\det(g)}\right\}$.

□

3.2 Le groupe métaplectique global

3.2.1 La construction du groupe métaplectique S-global

Soient $\mathcal{O} := k[\varpi]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée ϖ et à coefficients dans k, $F = k(\varpi)$ son corps des fractions. Soit S un ensemble fini des points fermés de $\mathbb{P}^1$ (qui seront considérés comme des places de F). On associe à chaque $g \in \mathrm{GL}_r(F)$ la droite $\Delta_g^S := \otimes_v \Delta_{g,v}$ 5(grâce à la règle de Koszul cette définition ne dépend pas du choix d'un ordre sur les places v), où $\Delta_{g,v} = (\mathcal{O}_v^r | g\mathcal{O}_v^r)_k^{\otimes -1} \otimes (\mathcal{O}_v | \det(g)\mathcal{O}_v)_k$ ($\mathcal{O}_v$ est l'anneau d'entiers de F en place v ; $\mathcal{O}_v^r$, $g\mathcal{O}_v^r$, $\mathcal{O}_v$ et $\det(g)\mathcal{O}_v$ sont vu comme des k-espaces vectoriels). Par ailleurs, dans le cas où $S \neq \emptyset$, on a le lemme suivant :

Lemme 3.2.1.1. Pour $S \neq \emptyset$, soit $\mathcal{O}(S)$ l'anneaux des fractions rationnelles dont les pôles sont dans S. On a un isomorphisme canonique $D_g^S \overset{can}{\simeq} (\mathcal{O}(S)^r | g\mathcal{O}(S)^r)$. Par conséquent, on a un isomorphisme canonique $\Delta_g^S \overset{can}{\simeq} (\mathcal{O}(S) | \det(g)\mathcal{O}(S)) \otimes (\mathcal{O}(S)^r | g\mathcal{O}(S)^r)^{\otimes -1}$.

Démonstration. On note $L = \mathcal{O}(S)^r \cap g\mathcal{O}(S)^r$. En utilisant le lemme chinois, si $M' \subset M$ sont deux $\mathcal{O}(S)$-réseaux dans F^r on obtient des isomorphismes canoniques

$$M/M' \simeq \bigoplus_{v \notin S} (M \otimes_{\mathcal{O}(S)} \mathcal{O}_v)/(M' \otimes_{\mathcal{O}(S)} \mathcal{O}_v),$$

d'où des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}(\mathcal{O}(S)^r|g\mathcal{O}(s)^r) &\simeq (\bigwedge \mathcal{O}(S)^r/L)^* \otimes (\bigwedge g\mathcal{O}(S)^r/L)\\ &\simeq \left(\bigwedge \bigoplus_{v\notin S}(\mathcal{O}_v^r)/(L\otimes_{\mathcal{O}(S)}\mathcal{O}_v)\right)^* \otimes\\ &\quad \otimes \left(\bigwedge \bigoplus_{v\notin S}(g\mathcal{O}_v^r)/(L\otimes_{\mathcal{O}(S)}\mathcal{O}_v)\right)\\ &\simeq \bigotimes{}'_{v\notin S} D_{g,v}\,. \qquad \square\end{aligned}$$

En utilisant ce lemme, on obtient de nouveau la définition de la droite Δ_g^S. Cette construction fournit une extension centrale de $\mathrm{GL}_r(F)$ par k^* :

$$1 \to k^* \to \widetilde{\mathrm{GL}}_r^{\,S}(F) \to \mathrm{GL}_r(F) \to 1.$$

On va appeler $\widetilde{\mathrm{GL}}_r^{\,S}(F)$ *le groupe métaplectique S-global*. Comme dans le cas local envisagé dans la partie précédente, cette extension est scindée au-dessus de $N_r(F)$, et au-dessus de $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}(S))$. On construit aussi comme dans le cas local une section ensembliste

$$s_{\mathrm{geo}} : \mathrm{GL}_r(F) \to \widetilde{\mathrm{GL}}_r^{\,S}(F),\ g \mapsto (g, \delta_g).$$

Pour toute place v de F, on note F_v la complétion en v de F, $\mathcal{O}_v$ son anneau des entiers et k_v son corps résiduel. En utilisant que k_v est une extension finie de k on a une extension (qu'on appelle le groupe métaplectique local en la place v) :

$$1 \to k^* \to N_*\widetilde{\mathrm{GL}}_r(F_v) \to \mathrm{GL}_r(F_v) \to 1,$$

une fonction $\underline{\kappa}_v : \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_v) \to k^*$ (voir ci-dessus pour la définition) et un scindage $\underline{\kappa}_v^* : \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_v) \to N_*\widetilde{\mathrm{GL}}_r(F_v)\ g \mapsto (g, \underline{\kappa}_v(g))$.

D'après Kazhdan-Patterson, on a l'extension suivante (voir [9, section 2] pour la construction quand on remplace le symbole de Hilbert par le symbole modéré) :

$$1 \longrightarrow \prod{}'_{v\notin S} k_v^* \longrightarrow \prod{}'_{v\notin S} \widetilde{\mathrm{GL}}_r(F_v) \longrightarrow \prod{}'_{v\notin S} \mathrm{GL}_r(F_v) \longrightarrow 1,$$

où

- $\prod'_{v\notin S} k_v^*$ est le groupe formé des éléments $(x_v)_{v\notin S}$ où $x_v \in k_v^*$ et $x_v = 1$ pour presque tout v.
- $\prod'_{v\notin S} \mathrm{GL}_r(F_v)$ est le groupe formé des éléments $(g_v)_{v\notin S}$ où $g_v \in \mathrm{GL}_r(F_v)$ et $g_v \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_v)$ pour presque tout v.
- $\prod'_{v\notin S} \widetilde{\mathrm{GL}}_r(F_v)$ est le groupe formé des éléments $(\widetilde{g}_v)_{v\notin S}$ où $\widetilde{g}_v \in \widetilde{\mathrm{GL}}_r(F_v)$ et, pour presque tout v, $\widetilde{g}_v \in \widetilde{\mathrm{GL}}_r(\mathcal{O}_v)$ et $\widetilde{g}_v = \underline{\kappa}_v^*(g_v)$.

En poussant cette extension via le morphisme $\prod'_{v\notin S} k_v^* \to k^*$, $(x_v) \mapsto \prod_{v\notin S} N_{k_v/k}(x_v)$, on obtient une extension de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}^S)$ par k^* (où $\mathbb{A}^S := \prod'_{v\notin S} F_v$) :

$$1 \to k^* \to \widetilde{\mathrm{GL}}_r(\mathbb{A}^S) \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}^S) \to 1.$$

Proposition 3.2.1.2. On a un morphisme d'extensions :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & k^* & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{GL}}_r^{\,S}(F) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_r(F) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & \square & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & k^* & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{GL}}_r(\mathbb{A}^S) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}^S) & \longrightarrow & 1, \end{array}$$

pour lequel le carré de droite est cartésien.

Démonstration. L'assertion résulte immédiatement de l'identité $\widetilde{\mathrm{GL}}_r(F_v) \simeq \widetilde{\mathrm{GL}}_{r,\mathrm{geo}}(F_v)$ (cf. théorème 3.1.4.2) et du lemme 3.2.1.1. □

Remarque 3.2.1.3. L'extension globale est triviale au-dessus de $\mathrm{GL}_r(F)$ lorsqu'on prend $S = \emptyset$ (cf.[9, p. 50-51]), i.e $\widetilde{\mathrm{GL}}_r(F) := \widetilde{\mathrm{GL}}_r^{\,\emptyset}(F)$ est une extension scindée. On va le voir géométriquement en la reliant au déterminant de la cohomologie.

Soient $\mathcal{C}$ une courbe lisse (connexe) projective sur k, F son corps des fonctions rationelles. On note $\mathbb{A}_{\mathcal{C}} = \prod'_{v\in|\mathcal{C}|} F_v$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{C}}} = \prod_{v\in|\mathcal{C}|} \mathcal{O}_v$ où $\mathcal{O}_v$ est l'anneau des entiers de F_v. Soient $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ deux fibrés vectoriels de rang r sur $\mathcal{C}$ munis un isomorphisme générique entre eux (i.e un isomorphisme $\mathcal{F}_{|U} \simeq \mathcal{G}_{|U}$ défini sur un ouvert U assez petit).À l'aide de cet isomorphisme on a que $\mathcal{G}\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{C}}}$ est un $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{C}}}$-réseau dans $\mathcal{F}\otimes\mathbb{A}_{\mathcal{C}}$ et vice versa, de sorte qu'on définit $(\mathcal{G}\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{C}}}|\mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{C}}})$ comme dans le chapitre 2. On a la proposition suivante

Proposition 3.2.1.4. Il existe un isomorphisme canonique :

$$\det(R\Gamma\mathcal{G})\otimes(\det(R\Gamma\mathcal{F}))^{\otimes -1} \simeq (\mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{C}}}|\mathcal{G}\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{C}}})$$

Démonstration. On peut supposer que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ (sinon, on considère un troisième fibré vectoriel $\mathcal{H}$ muni d'un isomorphisme générique avec $\mathcal{G}$ tel que $\mathcal{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{A}_\mathcal{C}} \subset (\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{A}_\mathcal{C}} \cap \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{A}_\mathcal{C}})$ dans $\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{A}_\mathcal{C}}$ et est ramené à démontrer la proposition pour les deux couples $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ et $(\mathcal{H}, \mathcal{G})$).

On considère la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{F} \to 0.$$

Par conséquent, on obtient la suite exacte longue :

$$0 \to H^0(\mathcal{F}) \to H^0(\mathcal{G}) \to H^0(\mathcal{G}/\mathcal{F}) \to H^1(\mathcal{F}) \to H^1(\mathcal{G}) \to 0.$$

Elle implique $(\det(H^0(\mathcal{F})))^{\otimes -1} \otimes \det(H^0(\mathcal{G}) \otimes (\det(H^0(\mathcal{G}/\mathcal{F})))^{\otimes -1} \otimes \det(H^1(\mathcal{F})) \otimes (\det(H^1(\mathcal{F})))^{\otimes -1} \simeq k$, de sorte qu'on a :

$$\det(R\Gamma\mathcal{G}) \otimes (\det(R\Gamma\mathcal{F}))^{\otimes -1} \simeq (\det(H^0(\mathcal{G}/\mathcal{F})))^{\otimes -1} \simeq (\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{A}_\mathcal{C}} | \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{A}_\mathcal{C}}).$$

□

En utilisant cette proposition dans le cas où $\mathcal{F} = \mathcal{O}_\mathcal{C}^r$ et $\mathcal{G}$ est le fibré vectoriel associé à $g \in \mathrm{GL}_r(F) \setminus \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_\mathcal{C})/\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_\mathcal{C}})$, on a :

$$\det(R\Gamma\mathcal{G}) \otimes \det(R\Gamma\mathcal{O}_\mathcal{C}^r)^{\otimes -1} \simeq D_g.$$

Quand $g \in \mathrm{GL}_r(F)$, on a $\mathcal{G} \simeq \mathcal{O}_\mathcal{C}^r$, de sorte qu'on obtient des isomorphisme canoniques $D_g \overset{can}{\simeq} k$ et $\Delta_g \overset{can}{\simeq} k$.

Par ailleurs, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} D_g \otimes D_{g'} & \longrightarrow & (\det(R\Gamma\mathcal{G}) \otimes \det(R\Gamma\mathcal{O}_\mathcal{C}^r)^{\otimes -1}) \otimes (\det(R\Gamma\mathcal{G}') \otimes \det(R\Gamma\mathcal{O}_\mathcal{C}^r)^{\otimes -1} \\ {\scriptstyle \times g'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \times g'} \\ D_{gg'} & \longleftarrow & (\det(R\Gamma\mathcal{G}) \otimes \det(R\Gamma\mathcal{O}_\mathcal{C}^r)^{\otimes -1}) \otimes (\det(R\Gamma\mathcal{G}'') \otimes \det(R\Gamma\mathcal{G})^{\otimes -1}, \end{array}$$

où $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}''$ sont des fibrés vectoriels de rang r associés à g' et gg'. Alors, le morphisme $D_g \overset{can}{\simeq} k$ qu'on vient de défnir est compatible avec la multiplication du groupe $\widetilde{\mathrm{GL}}_r(F)$, de sorte qu'on obtient un scindage au dessus de $\mathrm{GL}_r(F)$.

3.2.2 Fonction $\underline{\kappa}$ globale

Clairement, d'après la construction du groupe métaplectique S-global on a un scindage canonique $\underline{\kappa}_S^*$ au-dessus $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}(S))$ (qui vient de l'isomorphisme $\Delta_g(S) \overset{can}{\simeq} k$, $\forall g \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}(S))$). De plus, on a :

- $\underline{\kappa}^*_{S|T_r(\mathcal{O}(S))} = s_{\mathrm{geo}_{|T_r(\mathcal{O}(S))}}$,
- $\underline{\kappa}^*_{S|W_r} = s_{\mathrm{geo}_{|W_r}}$
- $\underline{\kappa}^*_{S|N_r(\mathcal{O}(S))} = s_{\mathrm{geo}_{|N_r(\mathcal{O}(S))}}$.

D'après [9, proposition 0.1.3], $\underline{\kappa}^*_S$ est alors un scindage canonique au sens de Kazhdan-Patterson. On considère donc l'application $\underline{\kappa}_S$: $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}(S)) \to k^*$ qui est définie par :

$$\underline{\kappa}_S(g) = \underline{\kappa}^*_S(g).s(g)^{-1}$$

(la loi du groupe de $\widetilde{\mathrm{GL}}_r^S(F)$ étant notée multiplicativement.)

On note g_v la matrice g vue comme matrice à coefficients dans F_v. D'après la proposition 3.2.1.2, on a :

Proposition 3.2.2.1.

$$\underline{\kappa}_S(g) = \prod_{v \notin S} \underline{\kappa}_v(g_v) \quad \forall\, g \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}(S)).$$

Chapitre 4

Intégrale J

4.1 Somme locale

Pour tout $\underline{\alpha} = (\alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in (k^*)^{r-1}$, on note $\theta'_{\underline{\alpha}} : N_r(F_\varpi) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$ le caractère défini par $\theta'_{\underline{\alpha}}(n) = \Psi(\frac{1}{2}\sum_{i=2}^r \alpha_i n_{i-1,i})$, et $\overline{\alpha} = (\alpha_r, \ldots, \alpha_2)$. La restriction de $\theta'_{\underline{\alpha}}$ à $N_r(\mathcal{O}_\varpi)$ étant triviale, elle induit une fonction $\theta'_{\underline{\alpha}}$ sur $N_r(F_\varpi)/N_r(\mathcal{O}_\varpi)$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$. Soit $\zeta : k^* \to \{\pm 1\}$ le caractère quadratique non trivial ($\zeta(\lambda) = \lambda^{\frac{q-1}{2}}$, $\lambda \in k^*$).

Pour chaque $t = \mathrm{diag}(a_1, a_2/a_1, \ldots, a_r/a_{r-1}) \in T_r(F_\varpi)$, on considère l'ensemble fini (cf. [15, proposition 1.1.2])

$$Y_\varpi(t)(k) = \{(n, n') \in (N_r(F_\varpi)/N_r(\mathcal{O}_\varpi))^2 | {}^t n t n' \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_\varpi)\}.$$

En utilisant le changement de variable $n \mapsto {}^t n'' = w_0 n^{-1} w_0$, l'intégrale orbitale J de Jacquet-Mao peut s'écrire :

$$\begin{aligned} J_\varpi(t, \underline{\alpha}) &= \sum_{(n'', n') \in Y_\varpi(t)(k)} \underline{\kappa}(w_0 {}^t n'' t n) \theta'_{\overline{\alpha}}(w_0 {}^t n'' w_0) \theta'_{\underline{\alpha}}(n') \\ &= \sum_{(n, n') \in Y_\varpi(t)(k)} \underline{\kappa}(w_0 {}^t n t n) \theta'_{\overline{\alpha}}(w_0 {}^t n w_0) \theta'_{\underline{\alpha}}(n'). \end{aligned}$$

L'ensemble $Y_\varpi(t)(k)$ est de manière naturelle l'ensemble des points à valeurs dans k d'une variété algébrique $Y_\varpi(t)$ de type fini sur k. Cette variété

est munie d'un morphisme $h'_{\underline{\alpha}} : Y_\varpi(t) \to \mathbb{G}_a$ défini par

$$\begin{aligned} h'_{\underline{\alpha}}(n,n') &= \sum_{i=2}^{r} \frac{1}{2}\mathrm{res}(\alpha_{r+2-i} n_{r+1-i,r+2-i} d\varpi) + \sum_{i=2}^{r} \frac{1}{2}\mathrm{res}(\alpha_i n'_{i-1,i} d\varpi) \\ &= \sum_{i=2}^{r} \frac{1}{2}\mathrm{res}(\alpha_i (n_{i-1,i} + n'_{i-1,i}) d\varpi). \end{aligned}$$

et d'un morphisme $\underline{\kappa} : Y_\varpi(t) \to \mathbb{G}_m$ qu'on va maintenant construire (la fonction $\kappa : Y_\varpi(t)(k) \to \{\pm 1\}$ est alors définie par $\kappa = \zeta \circ \underline{\kappa}$).

Construction 4.1.1.1. Soit R une k-algèbre. On note $\mathcal{O}_{\varpi,R} = \mathcal{O}_\varpi \otimes_k R$ et $F_{\varpi,R} = F_\varpi \otimes_k R$. On va géométriser la fonction $\underline{\kappa}$ à l'aide des résultats du chapitre 3.

1. Soit $g \in \mathrm{GL}_r(F_{\varpi,R})$. On va définir une R-droite (plus précisément un R-module inversible) associée à g. Pour cela on a besoin du lemme suivant :

   Lemme 4.1.1.2. (cf.[6]) Soient M et M' deux $\mathcal{O}^r_{\varpi,R}$-réseaux dans $F^r_{\varpi,R}$ tels que $M' \subset M$. Le R-module M/M' est alors localement libre.

   Soit $g \in \mathrm{GL}_r(F_{\varpi,R})$. On choisit un $\mathcal{O}^r_{\varpi,R}$-réseau M tel que $M \subset g\mathcal{O}^r_{\varpi,R} \cap \mathcal{O}^r_{\varpi,R}$. En utilisant le lemme 4.1.1.2 ci-dessus, $g(\mathcal{O}^r_{\varpi,R})/M$ et $\mathcal{O}_{\varpi,R}/M$ sont des R-modules localements libres. On considère alors les puissances extérieures de degré maximal $\bigwedge(g(\mathcal{O}^r_{\varpi,R})/M)$, $\bigwedge(\mathcal{O}^r_{\varpi,R}/M)$ et on note $D_{g,R}$ la R-droite

   $$(\mathcal{O}^r_{\varpi,R} | g\mathcal{O}^r_{\varpi,R}) = (\bigwedge(\mathcal{O}^r_{\varpi,R}/M)^* \otimes_R \bigwedge(g(\mathcal{O}^r_{\varpi,R})/M).$$

   Cette définition ne dépend pas du choix de M. En particulier, pour $g \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_{\varpi,R})$ cette droite est canoniquement trivialisée.
   Comme dans le chapitre 3, on pose $\Delta_{g,R} = D_{\det(g),R} \otimes D_{g,R}^{\otimes -1}$.
2. On trouve une trivialisation naturelle de $\Delta_{n,R}$ pour $n \in N_r(F_{\varpi,R})$, à l'aide des deux généralisations suivantes des lemmes 3.1.3.3 et 3.1.3.4 (les démonstrations données plus haut s'étendent sans problème).

   Lemme 4.1.1.3. Soit $n \in N_r(F_{\varpi,R})$, il existe alors un $\mathcal{O}^r_{\varpi,R}$-réseau M tel que $nM = M$

   Lemme 4.1.1.4. Soit $n \in N_r(F_{\varpi,R})$.Soient M, M' deux $\mathcal{O}^r_{\varpi,R}$-réseaux tels que $nM = M$ et $nM' = M'$. Le diagramme

   $$\begin{array}{ccc} (M|nM) & \xrightarrow{(\ 3.1.3.1)} & (M'|nM') \\ & {\scriptstyle \text{évident}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \text{évident}} & \\ & k. & \end{array}$$

est alors commutatif.

3. On construit une base $\delta_R(w_0t)$ de $\Delta_{w_0t,R}$ en prenant la construction 3.1.4.6.
4. Comme $\Delta_{nw_0tn'} \overset{can}{\simeq} \Delta_n \otimes \Delta_{w_0t} \otimes \Delta_{n'}$, on obtient une base $\delta_R(nw_0tn')$ de $\Delta_{nw_0tn',R}$ et on pose $\underline{\kappa}(nw_0tn') = \delta_R(nw_0tn')/\mathrm{triv}$ pour $nw_0tn' \in \mathrm{GL}_r(F_{\varpi,R})$.

La fonction $\underline{\kappa} : Y(t)(R) \to R^*$ est définie par $(n, n') \mapsto \underline{\kappa}((w_0{}^t n w_0) w_0 t n')$. Comme la construction ci-dessus commute au changement de base et généralise celle du chapitre 3 (dans le cas où R est un corps) on obtient bien un morphisme $\underline{\kappa} : Y(t) \to \mathbb{G}_m$.

On note $\overline{Y}_\varpi(t) = Y_\varpi(t) \otimes_k \overline{k}$. Soit $\mathcal{L}_\zeta$ le faisceau de Kummer sur $\mathbb{G}_m$ associé au revêtement $\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$, $x \mapsto x^2$ et au caractère non trivial ζ de $\{\pm 1\}$. D'après la formule des traces de Grothendieck-Lefschetz, on a :

$$J_\varpi(t, \underline{\alpha}) := \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}, \mathrm{R}\Gamma_c(\overline{Y}_\varpi(t), h'^*_{\underline{\alpha}}\mathcal{L}_\psi \otimes \underline{\kappa}^*\mathcal{L}_\zeta)).$$

4.2 Somme globale

Comme pour l'intégrale I, on ne connaît pas explicitement $\mathrm{R}\Gamma_c(\overline{Y}_\varpi(t), h'^*_{\underline{\alpha}}\mathcal{L}_\psi \otimes \underline{\kappa}^*\mathcal{L}_\zeta)$ car la variété $\overline{Y}_\varpi(t)$ est trop compliquée, donc on a besoin de globaliser. Dans cette partie, on va introduire deux définitions de l'intégrale J globale. La première utilise les intégrales locales et la propriété de multiplicativité et la deuxième est géométrique. Bien entendu, ces deux définitions donnent le même résultat (voir le lemme 4.2.1.4).

1. Première définition

   On rappelle que $\mathcal{O} = k[\varpi]$ est l'anneau des polynômes en une variable ϖ à coefficients dans k, et F est son corps des fractions. Pour toute place v, $\mathcal{O}_v$ est le complété de $\mathcal{O}$ en v, F_v est son corps des fractions, et k_v est son corps résiduel. On note t_v l'image de t dans $T_r(F_v)$.

   Soit $t = \mathrm{diag}(a_1, a_2/a_1, \ldots, a_r/a_{r-1})$ où $a_i \in \mathcal{O} - \{0\}$. Désormais, on note $Y_v(t) = \{(n, n') \in (N_r(F_v)/N_r(\mathcal{O}_v))^2 | {}^t n t_v n' \in \mathfrak{gl}_r(\mathcal{O}_v)\}$ et $\theta'_{\underline{\alpha}}(n_v) = \psi(\sum_{i=2}^r \alpha_i tr_{k_v/k}\mathrm{res}_v(n_{i-1,i}\mathrm{d}\varpi))$.

   Pour toute place $v \not| a_r$, on pose

$$J_v(t, \underline{\alpha}) = \int_{N_r(F_v)\times N_r(F_v)} f_v(w_0{}^t n t_v n') \theta'_{\overline{\alpha}}(w_0{}^t n w_0) \theta'_{\underline{\alpha}}(n') dn dn',$$

où $f_v({w_0}^t n t_v n') = \begin{cases} \zeta(\underline{\kappa}_v({w_0}^t n t_v n')) & \text{si } {w_0}^t n t_v n' \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_v) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
En utilisant que $a_r \in \mathcal{O}_v^*$ implique ${}^tN_r(F_v)t_vN_r(F_v) \cap \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_v) = {}^tN_r(F_v)t_vN_r(F_v) \cap \mathfrak{gl}_r(\mathcal{O}_v)$ (cf. [15, proposition 1.1.1]), on peut aussi écrire :

$$J_v(t,\underline{\alpha}) = \sum_{(n,n')\in Y_v(t)} \zeta(\underline{\kappa}_v({w_0}^t n t_v n'))\theta'_{\overline{\alpha}}({w_0}^t n w_0)\theta'_{\underline{\alpha}}(n').$$

Pour toute place $v|a_r$, on pose

$$J_v(t,\underline{\alpha}) = \int_{N_r(F_v)\times N_r(F_v)} \mathbb{I}_{\mathfrak{gl}_r(\mathcal{O}_v)}({w_0}^t n t_v n')\theta'_{\overline{\alpha}}({w_0}^t n w_0)\theta'_{\underline{\alpha}}(n')dndn',$$

où $\mathbb{I}_{\mathfrak{gl}_r(\mathcal{O}_v)}$ est la fonction caractéristique de l'ensemble $\mathfrak{gl}_r(\mathcal{O}_v)$. Cette intégrale s'écrit aussi :

$$J_v(t,\underline{\alpha}) = \sum_{(n,n')\in Y_v(t)} \theta'_{\overline{\alpha}}({w_0}^t n w_0)\theta'_{\underline{\alpha}}(n').$$

Définition 4.2.1.1. On introduit l'intégrale orbitale J globale :

$$J^{(1)}(t,\underline{\alpha}) = \prod_{v\neq\infty} J_v(t,\underline{\alpha}).$$

Lemme 4.2.1.2. Si $v \not| \prod_{i=1}^{r-1} a_i$, alors $J_v(t,\underline{\alpha}) = 1$.

Démonstration. D'après [15, corollaire 1.1.5], $Y_v(t)$ est réduit à l'élément $(n,n') = (Id_r, Id_r)$ (car $a_i \in \mathcal{O}_v^*$ $\forall i \in \{1\ldots,r-1\}$. Donc

$$J_v(t,\underline{\alpha}) = \begin{cases} \zeta(\underline{\kappa}_v(w_0t_v)) & \text{si } v \not| a_r \\ 1 & \text{si } v|a_r. \end{cases}$$

Si $v \nmid a_r$, on a alors $t_v \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_v)$. En utilisant la propriété de la fonction $\underline{\kappa}_v$, on a :

$$\begin{aligned} \underline{\kappa}_v(w_0t_v) &= \underline{\kappa}_v(w_0)\underline{\kappa}_v(t_v)\chi_v(w_0,t_v) \\ &= \chi_v(w_0,t_v) \end{aligned}$$

A l'aide de la formule de définition de 2-cocycle χ_v, on a : $\chi_v(w_0,t_v) = 1$. Par conséquent, $J_v(t,\underline{\alpha}) = 1$. □

2. Deuxième définition :
   Soit $t = \mathrm{diag}(a_1, a_2/a_1, \ldots, a_r/a_{r-1})$ où $a_i \in \mathcal{O} - \{0\}$. Pour tout $x \in F$, $\mathrm{sres}(x\mathrm{d}\varpi)$ est la somme des résidus en tous ses pôles à distance finie (c.à.d en les points de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$). On notera Ψ le caractère de F défini par $\Psi(x) = \psi(\mathrm{sres}(x\mathrm{d}\varpi))$. Pour tout $\underline{\alpha} \in (k^*)^{r-1}$, on note $\theta'_{\underline{\alpha}} : N_r(F) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$ le caractère défini par $\theta'_{\underline{\alpha}}(n) = \Psi(\frac{1}{2}\sum_{i=2}^r \alpha_i n_{i-1,i})$. Sa restriction à $N_r(\mathcal{O})$ étant triviale, elle induit une fonction $\theta'_{\underline{\alpha}}$ sur $N_r(F)/N_r(\mathcal{O})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$.
   On introduit la variété de type fini $Y(t)$ dont l'ensemble des k points est
   $$Y(t)(k) = \{(n, n') \in (N_r(F)/N_r(\mathcal{O})^2 | {}^t n t n' \in \mathfrak{gl}_r(\mathcal{O})\}.$$
   Cette variété est munie d'un morphisme
   $$h'_{\underline{\alpha}}(n, n') = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^r \alpha_i \mathrm{sres}((n_{i-1,i} + n'_{i-1,i})d\varpi),$$
   et d'un morphisme $\underline{\kappa} : Y(t) \to \mathbb{G}_m$ défini par
   $$\underline{\kappa}(n, n') = \prod_{v | \prod_{i=1}^{r-1}} \underline{\kappa}_v(w_0 {}^t n_v t_v n'_v),$$
   où les fonctions $\underline{\kappa}_v$ sont celles définies dans la section 3.2.

   Définition 4.2.1.3. On introduit l'intégrale J globale :
   $$J^{(2)}(t, \underline{\alpha}) = \sum_{(n,n') \in Y(t)(k)} \zeta(\underline{\kappa}(w_0 {}^t n t n'))\theta'_{\overline{\alpha}}(w_0 {}^t n w_0)\theta'_{\underline{\alpha}}(n').$$

Proposition 4.2.1.4. Lorsque $\mathrm{pgcd}(a_r, \prod_{i=1}^{r-1} a_i) = 1$, les deux définitions dans 4.2.1.1 et 4.2.1.3 donnent le même résultat.

Démonstration. On rappelle que $\mathrm{supp}(t) = \mathrm{Spm}(\mathcal{O}/\prod_{i=1}^{r-1} t_i)$.
D'après le lemme 4.2.1.2, on a : $J^{(1)}(t, \underline{\alpha}) = \prod_{v \in \mathrm{supp}(t)} J_v(t, \underline{\alpha})$.
D'après la propriété multiplicative de la fonction $\underline{\kappa}$ globale et [15, proposition 1.3.2] on a : $J^{(2)}(t, \underline{\alpha}) = \prod_{v \in \mathrm{supp}(t)} J_v(t, \underline{\alpha})$.
Par conséquent, on a : $J^{(1)}(t, \underline{\alpha}) = J^{(2)}(t, \underline{\alpha})$. □

On ajoute une barre pour indiquer le changement de corps de k à $\overline{k}$. On définit les triples $(\overline{Y}(t), h'_{\underline{\alpha}}, \underline{\kappa})$ et $(\overline{Y}_v(t), h'_{\underline{\alpha},v}, \underline{\kappa}_v)$, où $v \in \mathrm{Spm}(\overline{\mathcal{O}})$ comme on a fait pour le cas local (4.1). On note encore $\mathrm{supp}(t) = \mathrm{Spm}(\overline{\mathcal{O}}/\prod_{i=1}^{r-1} a_i\overline{\mathcal{O}})$. En utilisant $\underline{\kappa}(w_0 {}^t n t n') = \prod_{v \in \mathrm{supp}(t)} \underline{\kappa}_v(w_0 {}^t n_v t_v n'_v)$, on a une

forme cohomologique de la proposition 4.2.1.4 (cf. [15, corollaire 3.2.3] pour la démonstration) : quand $\mathrm{pgcd}(a_r, \prod_{i=1}^{r-1} a_i) = 1$,

$$\mathrm{R}\Gamma_c(\overline{Y}(t), h'^*_{\underline{\alpha}}\mathcal{L}_\psi \otimes \underline{\kappa}^*\mathcal{L}_\zeta) = \bigotimes_{v\in \mathrm{supp}(t)} \mathrm{R}\Gamma_c(\overline{Y}_v(t), h'^*_{\underline{\alpha},v}\mathcal{L}_\psi \otimes \underline{\kappa}_v^*\mathcal{L}_\zeta).$$

Supposons $t = \mathrm{diag}(a_1, \frac{a_2}{a_1}, \ldots, \frac{a_r}{a_{r-1}})$, où les a_i sont des polynôme unitaires dont on fixera les degrés $d_i = \deg(a_i)$. On note $V_{\underline{d}} = \{(a_1, \ldots, a_r) \in Q_{\underline{d}} \,|\mathrm{pgcd}(\prod_{i=1}^{r-1} a_i, a_r) = 1\}$. Le triple $(Y(t), h'_{\underline{\alpha}}, \underline{\kappa})$ se mettent en famille de sorte qu'on obtient une variété $Y_{\underline{d}}$ de type fini sur k munie de trois morphismes $f^Y_{\underline{d}} : Y_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1} \to V_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1}$, $h'_{\underline{d}} : Y_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1} \to \mathbb{G}_a$, et $\underline{\kappa}_{\underline{d}} : Y_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1} \to \mathbb{G}_m$ tels que $\overline{Y}(t)$ et $\mathrm{R}\Gamma_c(\overline{Y}(t), h'^*_{\underline{\alpha}}\mathcal{L}_\psi \otimes \underline{\kappa}^*\mathcal{L}_\zeta)$ sont respectivement les fibres en $(t, \underline{\alpha}) \in (V_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1})(\overline{k})$ de $f^Y_{\underline{d}}$ et de $\mathrm{R}f^Y_{\underline{d},!}(h'^*_{\underline{d}}\mathcal{L}_\psi \otimes \underline{\kappa}^*_{\underline{d}}\mathcal{L}_\zeta)$. En précisant, on a :

Lemme 4.2.1.5. (cf. [15, proposition 3.3.1])

1. Pour tout $\underline{d} \in \mathbb{N}^r$ le foncteur $Y_{\underline{d}}$ qui associe à toute k-algèbre R l'ensemble

$$\begin{aligned} Y_{\underline{d}}(R) \;=\; & {}^tN_r(\mathcal{O} \otimes_k R) \setminus \{g \in \mathfrak{gl}_r(\mathcal{O} \otimes_k R) | \det(g_i) \in Q_{d_i}(R), \\ & \mathrm{pgcd}(\prod_{i=1}^{r-1} \det(g_i), \det(g_r)) = 1\}/N_r(\mathcal{O} \otimes_k R), \end{aligned}$$

   où g_i est la sous-matrice de g faite des i-premières lignes et des i-premières colonnes de g, est représenté par une variété affine de type fini sur k qu'on note aussi $Y_{\underline{d}}$. Soit

$$f^Y_{\underline{d}} : Y_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1} \to V_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1}$$

   le morphisme défini par $f^Y_{\underline{d}}(g, \alpha) = ((a_i)_{1\le i\le r}, \alpha)$ où $a_i = \det(g_i)$

2. Pour tout i avec $2 \le i \le r$, l'application $h'_i : \mathfrak{gl}_r(\mathcal{O}\otimes_k R) \times (R^*)^{r-1} \to R$ définie par

$$\begin{aligned} h'_i \;=\; & \frac{1}{2}\,\mathrm{res}\left(a_{i-1}^{-1}\left((g_{i,1}, \ldots, g_{i,i-1}) a_{i-1} g_{i-1}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_i \end{pmatrix} + \right.\right. \\ & \left.\left. +(0, \ldots, 0, \alpha_i) a_{i-1} g_{i-1}^{-1} \begin{pmatrix} g_{1,i} \\ \vdots \\ g_{i-2,i} \\ g_{i-1,i} \end{pmatrix} \right) \right), \end{aligned}$$

où $a_i g_i^{-1}$ est la matrice des cofacteurs de g_i lesquels sont dans $\mathcal{O}_R := \mathcal{O} \otimes_k R$ et où $\mathrm{res}(a_{i-1}^{-1} b)$ est le coefficient de $\varpi^{d_{i-1}-1}$ dans l'expression polynomiale en variable ϖ du reste de la division euclidienne de b par a_{i-1} (cette division euclidienne a un sens puisque le coefficient dominant de a_{i-1} est égal à 1), induit un morphisme $h'_i : Y_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1} \to \mathbb{G}_a$.

3. Soit $h_{\underline{d}} = \sum_{i=2}^r h_i$. Il existe un morphisme naturel $\underline{\kappa}_{\underline{d}} : Y_{\underline{d}} \to \mathbb{G}_m$ tel que pour tous $t \in Q_{\underline{d}}(k)$ et $\underline{\alpha} \in \mathbb{G}_m^{r-1}$, le triplet $(Y(t), h'_{\underline{\alpha}}, \underline{\kappa})$ est isomorphe à la fibre $(f_{\underline{d}}^Y)^{-1}(t, \underline{\alpha})$ munie de la restriction de $h_{\underline{d}}$ et de $\underline{\kappa}_{\underline{d}}$ à cette fibre.

Démonstration. On adapte la démonstration de [15, proposition 3.3.1] et il ne reste que le morphisme $\underline{\kappa}_{\underline{d}}$ à construire.

Soit R une k-algèbre. Soit $g \in Y_{\underline{d}}(R)$. On considère la "décomposition de Bruhat" de g dans $R[\varpi, (\prod_{i=1}^r a_i)^{-1}]$:

$$g = n w_0 t n',$$

où

- les a_i sont des polynômes unitaires à coefficients dans R,
- $n, n' \in N_r(R[\varpi, (\prod_{i=1}^r a_i)^{-1}])$
- et $t = \mathrm{diag}(a_1, a_2/a_1, \ldots, a_r/a_{r-1})$.

Comme $g \in \mathrm{GL}_r(R[\varpi, a_r^{-1}])$, d'après Ngo [15], n (resp. n') s'écrit sous la forme :

$$n = \prod_{i=2}^r (\mathrm{Id}_r + y_i) \quad (\text{resp. } n' = \prod_{i=2}^r (\mathrm{Id}_r + y'_i)),$$

où $y_i \in a_{i-1}^{-1} R[\varpi, a_r^{-1}]$ (resp. $y'_i \in a_{i-1}^{-1} R[\varpi, a_r^{-1}]$).

Lorsque M, M' et M'' sont trois $R[\varpi, a_r^{-1}]$- sous-modules de $R[\varpi, (\prod_{i=1}^r a_i)^{-1}]^r$ tels que $M'' \subset M \cap M'$ et lorsque les quotients M/M'' et M'/M'' sont libres de type fini en tant que R-modules, on note

$$(M|M') = (\bigwedge M/M'')^{\otimes -1} \otimes (\bigwedge M'/M''),$$

où $\bigwedge$ est la puissance extérieure de degré maximal.

On note $P = \prod_{i=1}^r a_i$. On a alors : $P.R[\varpi, a_r^{-1}]^r \subset w_0 t R[\varpi, a_r^{-1}]^r \cap R[\varpi, a_r^{-1}]^r$. Comme P est un polynôme unitaire, $w_0 t R[\varpi, a_r^{-1}]^r / P.R[\varpi, a_r^{-1}]^r$ et $R[\varpi, a_r^{-1}]^r / P.R[\varpi, a_r^{-1}]^r$ sont libres de type fini, de sorte qu'on définit :

$$D_{w_0 t}^R = (\bigwedge R[\varpi, a_r^{-1}]^r / P.R[\varpi, a_r^{-1}]^r)^{\otimes -1} \otimes_R (\bigwedge w_0 t R[\varpi, a_r^{-1}]^r / P.R[\varpi, a_r^{-1}]^r)$$

(on obtient de la même manière la R-droite D_{t_i} où $t_i = a_i/a_{i-1}$ en convenant que $a_0 = 1$). En utilisant la même démarche que dans 3.1.4.6, on obtient le morphisme $\delta_{w_0 g} : D_{w_0 t} \to D^R_{\det(w_0 t)} = (R[\varpi, a_r^{-1}]^r |\det(w_0 t) R[\varpi, a_r^{-1}]^r) \overset{can}{\simeq} R$ (le morphisme de multiplication

$$D_{\prod_{j=1}^{r-i} t_{r+1-j}} \otimes_R D_{t_i} \to D_{\prod_{j=1}^{r-i+1} t_{r+1-j}}$$

est défini comme dans la proposition 3.1.2.4), de sorte qu'on obtient un isomorphisme $\Delta^R_{w_0 t} \simeq R$.

On considère $M = \mathrm{diag}(1, a_1, a_1.a_2, \ldots, \prod_{i=1}^{r-1} a_i) R[\varpi, a_r^{-1}]^r$. On a $nM = M$ et $n'M = M$. De plus, $R[\varpi, a_r^{-1}]^r/M \simeq n.R[\varpi, a_r^{-1}]^r/n.M = n.R[\varpi, a_r^{-1}]^r/M$ est un R-module libre, de sorte qu'on définit

$$D^R_n := (\bigwedge R[\varpi, a_r^{-1}]^r/M)^{\otimes -1} \otimes_R (\bigwedge n.R[\varpi, a_r^{-1}]^r/M)$$

et

$$D^R_{n'} := (\bigwedge R[\varpi, a_r^{-1}]^r/M)^{\otimes -1} \otimes_R (\bigwedge n'.R[\varpi, a_r^{-1}]^r/M).$$

L'isomorphisme canonique $n.R[\varpi, a_r^{-1}]^r/n.M \to R[\varpi, a_r^{-1}]^r/M$ (resp. $n'.R[\varpi, a_r^{-1}]^r/n'.M \to R[\varpi, a_r^{-1}]^r/M$) nous donne un isomorphisme $D_n \overset{can}{\simeq} R$ (resp. $D_{n'} \overset{can}{\simeq} R$).

On considère

$$\begin{gathered} D^R_n \otimes D^R_{w_0 t} \otimes D^R_{n'} \simeq (R[\varpi, a_r^{-1}]^r | M) \otimes (n.M | n.R[\varpi, a_r^{-1}]^r) \otimes \\ (n.R[\varpi, a_r^{-1}]^r | n.P.R[\varpi, a_r^{-1}]^r) \otimes (n.P.R[\varpi, a_r^{-1}]^r | n.w_0 t R[\varpi, a_r^{-1}]^r) \otimes \\ (nw_0 t.R[\varpi, a_r^{-1}]^r | nw_0 t.M) \otimes (nw_0 t.M | nw_0 t n' R[\varpi, a_r^{-1}]^r). \end{gathered}$$

Comme $n.P.R[\varpi, a_r^{-1}]^r \subset n.M \subset n.R[\varpi, a_r^{-1}]^r$, on a un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} (n.M | n.R[\varpi, a_r^{-1}]^r) \otimes (n.R[\varpi, a_r^{-1}]^r | n.P.R[\varpi, a_r^{-1}]^r) \\ \simeq (n.M | n.P.R[\varpi, a_r^{-1}]^r). \end{aligned}$$

On a aussi $n.P.R[\varpi, a_r^{-1}]^r \subset nw_0 t.M \subset nw_0 t.R[\varpi, a_r^{-1}]^r$, de sorte qu'on obtient un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} (n.P.R[\varpi, a_r^{-1}]^r | n.w_0 t R[\varpi, a_r^{-1}]^r) \otimes (nw_0 t.R[\varpi, a_r^{-1}]^r | nw_0 t.M) \\ \simeq (n.P.R[\varpi, a_r^{-1}]^r | nw_0 t.M). \end{aligned}$$

De plus, comme $n.P.R[\varpi, a_r^{-1}]^r \subset nw_0t.M \subset nw_0t.n'R[\varpi, a_r^{-1}]^r$, on obtient :

$$(n.P.R[\varpi, a_r^{-1}]^r | nw_0t.M) \otimes (nw_0t.M | nw_0tn'R[\varpi, a_r^{-1}]^r) \simeq (n.P.R[\varpi, a_r^{-1}]^r | nw_0tn'R[\varpi, a_r^{-1}]^r).$$

D'autre part, on a $n.P.R[\varpi, a_r^{-1}]^r \subset n.M = M \subset R[\varpi, a_r^{-1}]^r$, donc

$$(R[\varpi, a_r^{-1}]^r | M) \otimes (n.M | n.P.R[\varpi, a_r^{-1}]^r) \simeq (R[\varpi, a_r^{-1}]^r | n.P.R[\varpi, a_r^{-1}]^r)$$

Par conséquent, on obtient un isomorphisme $\delta_g : R \simeq D_n^R \otimes D_{w_0t}^R \otimes D_{n'}^R \to (R[\varpi, a_r^{-1}]^r | gR[\varpi, a_r^{-1}]^r)$. On obtient alors un isomorphisme $\delta_g : R \to \Delta_g^R$, où $\Delta_g^R := (R[\varpi, a_r^{-1}]^r | gR[\varpi, a_r^{-1}]^r)^{\otimes -1} \otimes (R[\varpi, a_r^{-1}] | \det(g) R[\varpi, a_r^{-1}])$. On définit $\underline{\kappa_d}(g) = \mathrm{triv}/\delta_g$, où triv est l'isomorphisme $R \to \Delta_g^R$ provenant du fait que $gR[\varpi, a_r^{-1}]^r = R[\varpi, a_r^{-1}]^r$.

Cette définition commute au changement de base, on obtient donc bien un morphisme $\underline{\kappa_d} : Y_{\underline{d}} \to \mathbb{G}_m$; en prenant les k-points celui-ci redonne la fonction $\underline{\kappa}$ du chapitre 3.2.

□

Théorème 4.2.1.6. Soit $g \in Y_{\underline{d}}$. On a alors

$$\underline{\kappa_d}(w_0 g)\underline{\kappa_d}({w_0}^t g) = (-1)^{\sum_{i=1}^{r-1} d_i + \sum_{i=1}^{r-1} d_i d_{i+1}} \mathrm{result}(a_{r-1}, a_r).$$

Démonstration. Comme $\underline{\kappa_d}$ est un morphisme de $Y_{\underline{d}}$ dans $\mathbb{G}_m$, le théorème résulte du fait (qu'on va ensuite vérifier) que

$$\underline{\kappa_d}(w_0 g)\underline{\kappa_d}({w_0}^t g) = (-1)^{\sum_{i=1}^{r-1} d_i + \sum_{i=1}^{r-1} d_i d_{i+1}} \mathrm{result}(a_{r-1}, a_r)$$

pour g dans un ouvert dense de $Y_{\underline{d}}$, qui n'est autre que l'image réciproque de $U_{\underline{d}}$ par le morphisme $f_{\underline{d}}^Y$. On va supprimer l'indice $\underline{d}$ pour alléger les notations.

Soit $i \in \{1, \dots, r-1\}$. On note $\lambda_{i,j}$ où $j \in \{1, \dots, d_i\}$ les racines simples de a_i. En utilisant la formule de produit, on a :

$$\underline{\kappa}(w_0 g) = \prod_{i=1}^{r-1} \prod_{j=1}^{d_i} \underline{\kappa}_{\varpi - \lambda_{i,j}}(w_0 g) \ ; \quad \underline{\kappa}({w_0}^t g) = \prod_{i=1}^{r-1} \prod_{j=1}^{d_i} \underline{\kappa}_{\varpi - \lambda_{i,j}}({w_0}^t g).$$

En chaque place $\varpi - \lambda_{i,j}$, on écrit $n = u_2 u_3 \dots u_n$ et $n' = u_2' u_3' \dots u_n'$ où u_k, u_k' appartiennent au-sous groupe $U_k(F_{\varpi - \lambda_{i,j}}$ de $N_r(F_{\varpi - \lambda_{i,j}})$ formé

des matrice triangulaires supérieures unipotentes dont les coefficients non-diagonaux sont tous nuls sauf caux de la k-ième colonne. Soient $u_k = \mathrm{Id}_r + y_k$ et $u'_k = \mathrm{Id}_r + y'_k$. D'après [15, lemme 1.1.3], $y_k, y'_k \in (a_{k-1}^{-1}\mathcal{O}_{\varpi-\lambda_{i,j}})^{k-1}$, donc $u_k, u'_k \in U_k(\mathcal{O}_{\varpi-\lambda_{i,j}})$ pour $j \neq i$. On note $n_{i+1} = u_2 \dots u_{i+1} u_i^{-1} \dots u_2^{-1}$ et $n'_{i+1} = u'_2 \dots u'_{i+1} {u'}_i^{-1} \dots {u'}_2^{-1}$. En reprenant la démonstration de [15, proposition 2.4.1], on obtient que $n_{i+1}, n'_{i+1} \in U_{i+1}$ et que les coefficients $n_{k,i+1}, n'_{k,i+1}$ de n_{i+1} et n'_{i+1} sont dans $\mathcal{O}_{\varpi-\lambda_{i,j}}$ pour $k = 1, \dots, i-1$. Ainsi n_{i+1} (resp. n'_{i+1}) s'écrit-il $n_{i+1} = (\mathrm{Id} + z_{i+1})(\mathrm{Id} + \underline{z}_{i+1})$ (resp. $n'_{i+1} = (\mathrm{Id} + z'_{i+1})(\mathrm{Id} + \underline{z}'_{i+1})$, où $z_{i+1} = {}^t(0, \dots, 0, n_{i,i+1}) \in \mathcal{O}^i_{\varpi-\lambda_{i,j}}$ et $\underline{z}_{i+1} = {}^t(n_{1,i+1}, \dots, n_{i-1,i+1}, 0) \in \mathcal{O}^i_{\varpi-\lambda_{i,j}}$ (resp. $z'_{i+1} = {}^t(0, \dots, 0, n'_{i,i+1}) \in \mathcal{O}^i_{\varpi-\lambda_{i,j}}$ et $\underline{z}'_{i+1} = {}^t(n'_{1,i+1}, \dots, n'_{i-1,i+1}, 0) \in \mathcal{O}^i_{\varpi-\lambda_{i,j}}$). Soient

$$\widehat{n}_{i+1} = (\mathrm{Id} + \underline{z}_{i+1}) u_2 \dots u_i u_{i+1} \dots u_r \in N_r(\mathcal{O}_{\varpi-\lambda_{i,j}})$$

et

$$\widehat{n}'_{i+1} = (\mathrm{Id} + \underline{z}'_{i+1}) u'_2 \dots u'_i u'_{i+1} \dots u'_r \in N_r(\mathcal{O}_{\varpi-\lambda_{i,j}}).$$

On a alors $w_0 g = (w_0 {}^t\widehat{n}_{i+1} w_0) w_0 {}^t(\mathrm{Id} + z_{i+1}) t (\mathrm{Id} + z'_{i+1}) \widehat{n}'_{i+1}$. Comme $w_0 {}^t\widehat{n}_{i+1} w_0$, $\widehat{n}'_{i+1} \in N_r(\mathcal{O}_{\varpi-\lambda_{i,j}})$, on a $\underline{\kappa}(w_0 {}^t\widehat{n}_{i+1} w_0) = \underline{\kappa}(\widehat{n}'_{i+1}) = 1$. Par ailleurs, en utilisant $\underline{\kappa}(g_1 g_2) = \underline{\kappa}(g_1)\underline{\kappa}(g_2)\chi(g_1, g_2)$ et $\chi(n, g) = \chi(g, n) = 1$, on a

$$\underline{\kappa}(w_0 g) = \underline{\kappa}(w_0 {}^t(\mathrm{Id} + z_{i+1}) t (\mathrm{Id} + z'_{i+1})).$$

Pareillement, on a aussi :

$$\underline{\kappa}(w_0 {}^t g) = \underline{\kappa}(w_0 {}^t({}^t(\mathrm{Id} + z_{i+1}) t (\mathrm{Id} + z'_{i+1}))).$$

t s'écrit $t = t_1 t_2$ où $t_1 = \mathrm{diag}(1, \dots, a_i/a_{i-1}, a_{i+1}/a_i, 1, \dots, 1)$ et $t_2 = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_{i-1}/a_{i-2}, 1, 1, a_{i+1}/a_{i+2}, \dots, a_r/a_{r-1}) \in T_r(\mathcal{O}_{\varpi-\lambda_{i,j}})$. On a

$$(\mathrm{Id} + z_{i+1}) t (\mathrm{Id} + z'_{i+1}) = (\mathrm{Id} + z_{i+1}) t_1 (\mathrm{Id} + z''_{i+1}) t_2$$

où z''_{i+1} est une matrice triangulaire supérieure unipotente dont les coefficients non-diagonaux sont tous nuls sauf celui de la position $(i, i+1)$.

Comme $\underline{\kappa}(g t_2) = \underline{\kappa}(g)$ pour $g \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_{\varpi-\lambda_{i,j}})$ et $t_2 \in T_r(\mathcal{O}_\varpi - \lambda_{i,j})$ et que $\underline{\kappa}(\left(\begin{smallmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{smallmatrix}\right)) = \underline{\kappa}(\left(\begin{smallmatrix} 0 & g_1 \\ g_2 & 0 \end{smallmatrix}\right)) = \underline{\kappa}(g_1)\underline{\kappa}(g_2)$, le calcul $\underline{\kappa}$ se réduit au cas où $r = 2$ avec

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \mathrm{diag}(a_i/a_{i-1}, a_{i+1}/a_i) \begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a_i}{a_{i-1}} & x' \frac{a_i}{a_{i-1}} \\ x \frac{a_i}{a_{i-1}} & x x' \frac{a_i}{a_{i-1}} + \frac{a_{i+1}}{a_i} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{\varpi-\lambda_{i,j}}). \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Kubota (cf. la proposition 3.1.5.2), on a :

$$\underline{\kappa}_{\varpi-\lambda_{i,j}}(w_0 g) = \left\{ a_i/a_{i-1}, \frac{x' a_i/a_{i-1}}{\det(w_0 g)} \right\}_{\varpi-\lambda_{i,j}};$$

$$\underline{\kappa}_{\varpi-\lambda_{i,j}}(w_0{}^t g) = \left\{ a_i/a_{i-1}, \frac{x a_i/a_{i-1}}{\det(w_0{}^t g)} \right\}_{\varpi-\lambda_{i,j}}.$$

Comme $g \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{\varpi-\lambda_{i,j}})$, on a donc $v_{\varpi-\lambda_{i,j}}(x) = v_{\varpi-\lambda_{i,j}}(x') = -1$. Donc $\underline{\kappa}_{\varpi-\lambda_{i,j}}(w_0 g) = \frac{\det(w_0 g)}{x' a_i/a_{i-1}}(\lambda_{i,j})$ et $\underline{\kappa}_{\varpi-\lambda_{i,j}}(w_0{}^t g) = \frac{\det(w_0 g)}{x a_i/a_{i-1}}(\lambda_{i,j})$.

Par ailleurs on a : $\det(w_0 g) = x' \frac{a_i}{a_{i-1}} x \frac{a_i}{a_{i-1}} - \frac{a_i}{a_{i-1}} \left(x x' \frac{a_i}{a_{i-1}} + \frac{a_{i+1}}{a_i} \right)$. Le deuxième terme de la somme est de valuation supérieure ou égal à 1, donc $\det(w_0 g)(\lambda_{i,j}) = \left(x' \frac{a_i}{a_{i-1}} x \frac{a_i}{a_{i-1}} \right)(\lambda_{i,j})$. Par conséquent, on a :

$$\underline{\kappa}_{\varpi-\lambda_{i,j}}(w_0 g) \underline{\kappa}_{\varpi-\lambda_{i,j}}(w_0{}^t g) = \det(w_0 g)(\lambda_{i,j}) = -\frac{a_{i+1}}{a_{i-1}}(\lambda_{i,j}).$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \underline{\kappa}(w_0 g) \underline{\kappa}(w_0{}^t g) &= \prod_{i=1}^{r-1} \prod_{j=1}^{d_i} (-1) \frac{a_{i+1}}{a_{i-1}}(\lambda_{i,j}) \\ &= \prod_{i=1}^{r-1} (-1)^{d_i} \frac{\mathrm{result}(a_{i+1}, a_i)}{\mathrm{result}(a_{i-1}, a_i)} \\ &= (-1)^{\sum_{i=1}^{r-1} d_i + \sum_{i=1}^{r-1} d_i d_{i+1}} \mathrm{result}(a_{r-1}, a_r). \end{aligned}$$

La signe dans la dernière formule vient du fait que

$$\mathrm{result}(P, Q) = (-1)^{\deg(P)\deg(Q)} \mathrm{result}(Q, P).$$

□

4.3 Le cas $\underline{d} = (1, 2, \ldots, r)$

Proposition 4.3.1.1. Pour $\underline{d} = (1, 2, \ldots, r)$ le quadruple $(Y_{\underline{d}}, f^Y_{\underline{d}}, h'_{\underline{d}}, \underline{\kappa}_{\underline{d}})$ est isomorphe au quadruple $(\mathfrak{gl}^\circ_r, f^Y, h', \underline{\kappa})$ où :

- $\mathfrak{gl}_r = \{ y \in \mathfrak{gl}_r | \mathrm{pgcd}(\prod_{i=1}^{r-1} a_i(y), a_r(y)) = 1 \}$,
- le morphisme $f^Y : \mathfrak{gl}^\circ_r \times \mathbb{G}_m^{r-1} \to \prod_{i=1}^r Q_i \times \mathbb{G}_m^{r-1}$ est défini par

$$f^Y(y, \underline{\alpha}) = (a_1(y), \ldots, a_r(y), \underline{\alpha}),$$

– le morphisme $h' : \mathfrak{gl}_r^\circ \times \mathbb{G}_m^{r-1} \to \mathbb{G}_a$ est défini par

$$h'(y, \underline{\alpha}) = \sum_{i=2}^{r} \frac{1}{2} \alpha_i (y_{i-1,i} + y_{i,i-1})$$

– le morphisme $\underline{\kappa} : \mathfrak{gl}_r^\circ \to \mathbb{G}_m$ est défini par $\underline{\kappa}(y) = \underline{\kappa_d}(w_0(y + \varpi \mathrm{Id}_r))$.

Démonstration. On adapte la démonstration de [15, proposition 4.2.1]. □

Il reste à calculer la fonction $\underline{\kappa}$ sur $\mathfrak{gl}_r^\circ$. Soit $y = (y_{i,j}) \in \mathfrak{gl}_r^\circ$. Pour cela on va utiliser le lemme suivant :

Lemme 4.3.1.2. Soi V' un espace vectoriel (en général de dimension infinie). Soient A et B deux sous-espaces vectoriels et $V = A \oplus B$. Soit $g \in \mathrm{Aut}(V')$ tel que A et gA soient commensurables ainsi que B et gB. Les sous-espaces vectoriels V et gV sont alors commensurables et on a un isomorphisme canonique :

$$(V|gV) \overset{can}{\simeq} (A|gA) \otimes (B|gB).$$

Cet isomorphisme est compatible avec la convention de signe, c.à.d le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & (V|gV) & \\ \swarrow & & \searrow \\ (A|gA) \otimes (B|gB) & \xrightarrow{\mathrm{Sym}^\bullet} & (B|gB) \otimes (A|gA) \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. On note $A' = A \cap gA$ et $B' = B \cap gB$.

$$\begin{aligned}
(V|gV) &= (A \oplus B|gA \oplus gB) \\
&\overset{can}{\simeq} \Big(\bigwedge (A \oplus B/A' \oplus B')\Big)^* \otimes \bigwedge (gA \oplus gB/A' \oplus B') \\
&\overset{can}{\simeq} \Big(\bigwedge (A/A' \oplus B/B')\Big)^* \otimes \bigwedge (gA/A' \oplus gB/B') \\
&\overset{can}{\simeq} \Big(\bigwedge (A/A')\Big)^* \otimes \Big(\bigwedge (B/B')\Big)^* \otimes \bigwedge (gA/A') \otimes \bigwedge (gB/B') \\
&\overset{can}{\simeq} \Big(\bigwedge (A/A')\Big)^* \otimes \bigwedge (gA/A') \otimes \Big(\bigwedge (B/B')\Big)^* \otimes \bigwedge (gB/B') \\
&\overset{can}{\simeq} (A|gA) \otimes (B|gB).
\end{aligned}$$

□

Soit g une matrice de taille r. Soient I, J deux sous-ensembles de $\{1, 2, \ldots, r\}$. On note $g_{I,J}$ la matrice extraite de g dont les indices de ligne sont dans I et les indices de colonnes sont dans J, en ordonnant par ordre croissant les éléments de I et de J.

Proposition 4.3.1.3. (cf. [5, p. 394-395]) Soit $g \in \mathrm{GL}_r$. Supposons que g s'écrit comme un produit AB^{-1}, où A est une matrice triangulaire inférieure et B est une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficiens diagonaux sont égaux à 1. On écrit les matrices A et B sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{r,1} & \ldots & a_{r,r-1} & a_{r,r} \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & b_{1,2} & \ldots & b_{1,r} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{r-1,r} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note $\tilde{a}_{i,j}$ (resp. $\tilde{b}_{i,j}$) les coefficients de la matrice A^{-1} (resp. de la matrice B^{-1}). On a alors :

$$a_{i,j} = \frac{\det(g_{[1,j-1]\cup\{i\},[1,j]})}{\det(g_{[1,j-1],[1,j-1]})}, \quad b_{i,j} = (-1)^{j-i}\frac{\det(g_{[1,j-1],[1,j]-\{i\}})}{\det(g_{[1,j-1],[1,j-1]})},$$

$$\tilde{a}_{i,j} = (-1)^{i-j}\frac{\det(g_{[1,i]-\{j\},[1,i-1]})}{\det(g_{[1,i],[1,i]})} \text{ et } \quad \tilde{b}_{i,j} = \frac{\det(g_{[1,i],[1,i-1]\cup\{j\}})}{\det(g_{[1,i],[1,i]})}.$$

En utilisant la proposition 4.3.1.3 ci-dessus pour $g = y + \varpi\mathrm{Id}_r$ et en factorisant la matrice triangulaire inférieure sous la forme ${}^tN_rT_r$, on obtient le corollaire suivant

Corollaire 4.3.1.4. La décomposition de Bruhat de $w_0g = w_0(y + \varpi\mathrm{Id}_r)$ est nw_0tn' avec $n = (n_{i,j})$ où

$$n_{i,j} = \frac{\det(g_{[1,r-j]\cup\{r+1-i\},[1,r+1-j]})}{\det(g_{[1,r+1-j],[1,r+1-j]})},$$

$t = \mathrm{diag}(a_1(y), a_2(y)/a_1(y), \ldots, a_r(y)/a_{r-1}(y))$ et $n' = (n'_{i,j})$ où

$$n'_{i,j} = (-1)^{j-i}\frac{\det(g_{[1,j-1],[1,j]-\{i\}})}{\det(g_{[1,j-1],[1,j-1]})}.$$

De plus, si on note $n^{-1} = (\tilde{n}_{i,j})$, on a alors

$$\tilde{n}_{i,j} = (-1)^{j-i}\frac{\det(g_{[1,r+1-i]-\{r+1-j\},[1,r-i]})}{\det(g_{[1,r-i],[1,r-i]})}.$$

Théorème 4.3.1.5. $\underline{\kappa}(y)$ est en fait un polynôme en les coefficients de la matrice $y \in \mathfrak{gl}_r^\circ$. De plus on a :

$$\underline{\kappa}(y)\underline{\kappa}({}^t y) = (-1)^{\sum_{i=1}^{r-1}[i+i(i+1)]}(\mathrm{result}(a_{r-1}(y), a_r(y)).$$

Démonstration. Comme $\underline{\kappa}$ est un morphisme de $\mathfrak{gl}_r^\circ$ dans $\mathbb{G}_m$, on peut se contenter de calculer $\underline{\kappa}(y)$ sur l'ouvert dense où $a_r(y)$ est à racines simples. On note $(\lambda_i)_{i\in\{1,\dots,r\}}$ ($\lambda_i \in \overline{k}$) les racines de $a_r(y)$. En utilisant $S = \{\lambda_i\}_i$, la fonction $\underline{\kappa_{\underline{d}}}$ provient de l'extension $\widetilde{\mathrm{GL}}_r^S(F)$ de la partie ci-dessus. D'après le corollaire 4.3.1.4, la décomposition de Bruhat de $w_0(y+\varpi\mathrm{Id}_r)$ est nw_0tn' avec $t = \mathrm{diag}(a_1(y), a_2(y)/a_1(y), \dots, a_r(y)/a_{r-1}(y))$. La fonction $\underline{\kappa_{\underline{d}}}$ provient alors du diagramme

$$\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{can} & \Delta^S_{w_0(y+\varpi\mathrm{Id}_r)} \\ & \nwarrow & \downarrow \\ & & \Delta^S_{w_0t} \end{array}$$

où l'isomorphisme vertical est celui figurant dans la définition de la section ensembliste $s_{\mathrm{geo}} : \mathrm{GL}_r(F) \to \widetilde{\mathrm{GL}}_r^S(F)$.

En utilisant le lemme 4.3.1.2 dans le cas particulier où $V = V' = \bigoplus_{i=1}^r \overline{k}((\varpi - \lambda_i)) \oplus \overline{k}((\varpi^{-1}))$, $A = \overline{k}[\varpi, \Delta_r(y)^{-1}]$, $B = \bigoplus_{i=1}^r \overline{k}[[\varpi - \lambda_i]] \oplus \varpi^{-1}\overline{k}[[\varpi^{-1}]]$, on a $(V|\det(w_0(y+\varpi\mathrm{Id}_r))V) \overset{can}{\simeq} (A|\det(w_0(y+\varpi\mathrm{Id}_r))A) \otimes (B|\det(w_0(y+\varpi\mathrm{Id}_r))B)$ et aussi $(V^r|w_0(y+\varpi\mathrm{Id}_r)V^r) \overset{can}{\simeq} (A^r|w_0(y+\varpi\mathrm{Id}_r)A^r) \otimes (B^r|w_0(y+\varpi\mathrm{Id}_r)B^r)$. Par conséquent, on a $\Delta^V_{w_0(y+\varpi\mathrm{Id}_r)} \overset{can}{\simeq} \Delta^A_{w_0(y+\varpi\mathrm{Id}_r)} \otimes \Delta^B_{w_0(y+\varpi\mathrm{Id}_r)}$, où $\Delta^\bullet_y = (\bullet|\det(y)\bullet) \otimes (\bullet^r|y\bullet^r)^{\otimes -1}$ avec $\bullet = A, B$ ou V (voir aussi la remarque 3.2.1.3 sur la trivialité de l'extension globale $\widetilde{\mathrm{GL}}_r^\emptyset(F)$).

Pareillement, on a $\Delta^V_{w_0t} \overset{can}{\simeq} \Delta^A_{w_0t} \otimes \Delta^B_{w_0t}$.

Comme $w_0(y+\varpi\mathrm{Id}_r), w_0t \in \mathrm{GL}_r(V)$, on a $\Delta^V_{w_0(y+\varpi\mathrm{Id}_r)} \overset{can}{\simeq} \overline{k}$ et $\Delta^V_{w_0t} \overset{can}{\simeq} \overline{k}$, de sorte qu'on a un isomorphisme canonique : $\Delta^A_{w_0(y+\varpi\mathrm{Id}_r)} \overset{can}{\simeq} \Delta^B_{w_0(y+\varpi\mathrm{Id}_r)}{}^{\otimes -1}$ et $\Delta^A_{w_0t} \overset{can}{\simeq} \Delta^B_{w_0t}{}^{\otimes -1}$. On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \overline{k} & \xrightarrow{can} & \Delta^S_{w_0(y+\varpi\mathrm{Id}_r)} = \Delta^A_{w_0(y+\varpi\mathrm{Id}_r)} & \xrightarrow{\sim} & \Delta^B_{w_0(y+\varpi\mathrm{Id}_r)}{}^{\otimes -1} \\ & \nwarrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & \Delta^S_{w_0t} = \Delta^A_{w_0t} & \xrightarrow[\sim]{} & \Delta^B_{w_0t}{}^{\otimes -1} \end{array}$$

1. À la place $v_i = \varpi - \lambda_i$, on note $\overline{\mathcal{O}}_{v_i} = \overline{k}[[\varpi - \lambda_i]]$. D'après le lemme 4.3.1.4 on a : $n\overline{\mathcal{O}}^r_{v_i} = n'\overline{\mathcal{O}}^r_{v_i} = \overline{\mathcal{O}}^r_{v_i}$. Comme $t\overline{\mathcal{O}}^r_{v_i} = \mathrm{diag}(a_1(y), a_2(y)/a_1(y), \ldots, a_r(y)/a_{r-1}(y))\overline{\mathcal{O}}^r_{v_i} = \bigoplus_{j=1}^{r-1} \overline{\mathcal{O}}_{v_i} e_j \oplus v_i \overline{\mathcal{O}}_{v_i} e_r$, on a

$$\mathfrak{d}_{w_0(y+\varpi \mathrm{Id}_r)_{|v_i}} = e^*_{1|v_i}.$$

Comme $\det(w_0(y + \varpi \mathrm{Id}_r)) = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} a_r(y)$, on a

$$\mathfrak{d}_{\det(w_0(y+\varpi \mathrm{Id}_r))_{|v_i}} = 1^*_{|v_i}.$$

On a $\overline{\delta}_{w_0(y+\varpi \mathrm{Id}_r)_{|v_i}} = (-1)^{r-1} a_{r-1}(\lambda_i)$. Donc on a

$$\delta_{w_0(y+\varpi \mathrm{Id}_r)_{|v_i}} = (-1)^{r-1} a_{r-1}(\lambda_i) 1^*_{|v_i} \otimes e_{1|v_i}.$$

2. À la place ∞, on note $\overline{\mathfrak{m}}_\infty = \varpi^{-1}\overline{k}[[\varpi^{-1}]]$ et $\overline{\mathcal{O}}_\infty = \overline{k}[[\varpi^{-1}]]$. La droite qu'on va utiliser dans ce cas est $D^\infty_g = (\overline{\mathfrak{m}}^r_\infty | g\overline{\mathfrak{m}}^r_\infty)$ et le choix de l'élément $\delta_{w_0(y+\varpi \mathrm{Id}_r)_{|\infty}}$ est le même que celui fait dans la construction 3.1.4.6. D'après le lemme 4.3.1.4 on a $v_\infty(n_{i,j}) \geq 1$ et $v_\infty(n'_{i,j}) \geq 1$, de sorte qu'on a $n\overline{\mathfrak{m}}^r_\infty = n'\overline{\mathfrak{m}}^r_\infty = \overline{\mathfrak{m}}^r_\infty$ et $t\overline{\mathfrak{m}}^r_\infty = \overline{\mathcal{O}}^r_\infty$. Donc $\mathfrak{d}_{w_0(y+\varpi \mathrm{Id}_r)_{|\infty}} = \bigwedge_{i=1}^r ne_{i|\infty}$. En reprenant la démonstration du lemme 3.1.3.4 dans le cas où $M = \overline{\mathcal{O}}^r_\infty$ et $M' = \overline{\mathfrak{m}}^r_\infty$, on voit que l'isomorphisme $(\overline{\mathcal{O}}^r_\infty | \overline{\mathfrak{m}}^r_\infty) \overset{\times n}{\to} (n\overline{\mathcal{O}}^r_\infty | n\overline{\mathfrak{m}}^r_\infty)$ est l'identité, de sorte qu'on obtient

$$\mathfrak{d}_{w_0(y+\varpi \mathrm{Id}_r)_{|\infty}} = \bigwedge_{i=1}^r e_{i|\infty}.$$

De plus $\mathfrak{d}_{\det(w_0(y+\varpi \mathrm{Id}_r))_{|\infty}} = (\bigwedge_{i=r-1}^0 \varpi^i)_{|\infty}$. Par ailleurs $\overline{\delta}_{w_0(y+\varpi \mathrm{Id}_r)_{|\infty}} = (-1)^{\frac{(r-1)r}{2}}$. On a alors

$$\delta_{w_0(y+\varpi \mathrm{Id}_r)_{|\infty}} = (-1)^{\frac{(r-1)r}{2}} (\bigwedge_{i=r-1}^0 \varpi^i)_{|\infty} \otimes (\bigwedge_{i=1}^r e_i)^*_{|\infty}.$$

Ensuite on va expliciter l'isomorphisme $\Delta^B_{w_0(y+\varpi \mathrm{Id}_r)}{}^{\otimes -1} \simeq \overline{k}$ du diagramme ci-dessus. On note $B' = \bigoplus_{j=1}^r g\overline{\mathcal{O}}^r_{v_i} \oplus \overline{\mathfrak{m}}^r_\infty$. Il est clair que $B' = B^r \cap gB^r$.

Comme $g \in \mathrm{GL}_r(A) \subset \mathrm{GL}_r(V)$, on a successivement les identifications suivantes :

$$\begin{aligned}
V^r/B' &= gV^r/B' \\
(A^r \oplus B^r)/B' &\overset{can}{\simeq} (gA^r \oplus gB^r)/B' \\
A^r \oplus (B^r/B') &\overset{can}{\simeq} gA^r \oplus (gB^r/B') \\
(B^r/B') &\overset{can}{\simeq} (gB^r/B') \qquad (A^r = gA^r) \\
(\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{v_i}^r \oplus \mathfrak{m}_\infty^r)/(\bigoplus_{i=1}^r g\mathcal{O}_{v_i}^r \oplus \mathfrak{m}_\infty^r) &\overset{can}{\simeq} (\bigoplus_{i=1}^r g\mathcal{O}_{v_i}^r \oplus g\mathfrak{m}_\infty^r)/(\bigoplus_{i=1}^r g\mathcal{O}_{v_i}^r \oplus \mathfrak{m}_\infty^r) \\
\bigoplus_{i=1}^r (\mathcal{O}_{v_i}^r/g\mathcal{O}_{v_i}^r) &\overset{can}{\simeq} g\mathfrak{m}_\infty^r/\mathfrak{m}_\infty^r \overset{can}{\simeq} \mathcal{O}_\infty^r/\mathfrak{m}_\infty^r \ (**).
\end{aligned}$$

$(e_i)_{|\infty} \in V^r$ s'écrit $(\bigoplus_{j=1}^r (e_i)_{|v_j} \oplus (e_i)_{|\infty}) \oplus \bigoplus_{j=1}^r (-e_i)_{|v_j} \in A^r \oplus B^r$ Par conséquent, l'image de $(e_i)_{|\infty} \in \overline{\mathcal{O}}_\infty^r/\overline{\mathfrak{m}}_\infty^r$ par l'isomorphisme canonique (**) ci-dessus est $\bigoplus_{j=1}^r (-\overline{e_i})_{|v_j} \in \bigoplus_{j=1}^r (\overline{\mathcal{O}}_{v_j}^r/g\overline{\mathcal{O}}_{v_j}^r)$, où $(-\overline{e_i})_{|v_j}$ est l'image de $(-e_i)_{|v_j}$ par la projection canonique $\overline{\mathcal{O}}_{v_j}^r \to \overline{\mathcal{O}}_{v_j}^r/g\overline{\mathcal{O}}_{v_j}^r$.

Soit $(1, \tilde{n}_{1,2}, \ldots, \tilde{n}_{1,r})$ la première ligne de la matrice n^{-1}. On a $n^{-1}(-e_i)_{|v_j} = -\tilde{n}_{1,i}(\lambda_j) e_{1|v_j} \pmod{w_0 t n' \overline{\mathcal{O}}_{v_j}}$ (en convenant que $\tilde{n}_{1,1} = 1$), de sorte qu'on obtient $(-\overline{e_i})_{|v_j} = -\tilde{n}_{1,i}(\lambda_j)(e_1)_{|v_j}$. Par conséquent l'isomorphisme canonique $D_{g,\infty} \overset{can}{\simeq} \bigotimes_{i=1}^r D_{g,v_i}$ (qui vient de l'isomorphisme (**)) est $(\bigwedge_{i=1}^r e_i)_{|\infty} \mapsto \det(\mathrm{Mat}) \bigotimes_{i=1}^r e_{1|v_i}$, où

$$\mathrm{Mat} = \begin{pmatrix} -\tilde{n}_{1,1}(\lambda_1) & -\tilde{n}_{1,1}(\lambda_2) & \ldots & -\tilde{n}_{1,1}(\lambda_r) \\ -\tilde{n}_{1,2}(\lambda_1) & -\tilde{n}_{1,2}(\lambda_2) & \ldots & -\tilde{n}_{1,2}(\lambda_r) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\tilde{n}_{1,r}(\lambda_1) & -\tilde{n}_{1,r}(\lambda_2) & \ldots & -\tilde{n}_{1,r}(\lambda_r) \end{pmatrix}.$$

De même, l'isomorphisme canonique $D_{\det(g),\infty} \overset{can}{\simeq} \bigotimes_{i=1}^r D_{\det(g),v_i}$ est $(\bigwedge_{i=r-1}^0 \varpi^i)_{|\infty} \mapsto \det(\mathrm{Mat}') \bigotimes_{i=1}^r 1_{|v_i}$ où

$$\mathrm{Mat}' = \begin{pmatrix} -\lambda_1^{r-1} & -\lambda_1^{r-2} & \ldots & -1 \\ -\lambda_2^{r-1} & -\lambda_2^{r-2} & \ldots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda_r^{r-1} & -\lambda_r^{r-2} & \ldots & -1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on a

$$\underline{\kappa_{\underline{d}}}(w_0(y + \varpi \mathrm{Id}_r)) = (-1)^{r(r-1)+\frac{r(r-1)}{2}} \mathrm{result}(a_{r-1}(y), a_r(y)) \det(\mathrm{Mat})/\det(\mathrm{Mat}').$$

Par ailleurs, en utilisant le corollaire 4.3.1.4, on a

$$\det(\mathrm{Mat}) = (-1)^{r+\sum_{i=1}^{r}(i-1)} \begin{pmatrix} \frac{\det(g^{r,r})}{a_{r-1}(y)}(\lambda_1) & \frac{\det(g^{r,r})}{a_{r-1}(y)}(\lambda_2) & \ldots & \frac{\det(g^{r,r})}{a_{r-1}(y)}(\lambda_r) \\ \frac{\det(g^{r-1,r})}{a_{r-1}(y)}(\lambda_1) & \frac{\det(g^{r-1,r})}{a_{r-1}(y)}(\lambda_2) & \ldots & \frac{\det(g^{r-1,r})}{a_{r-1}(y)}(\lambda_r) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\det(g^{1,r})}{a_{r-1}(y)}(\lambda_1) & \frac{\det(g^{1,r})}{a_{r-1}(y)}(\lambda_2) & \ldots & \frac{\det(g^{1,r})}{a_{r-1}(y)}(\lambda_r) \end{pmatrix},$$

où $g^{i,r}$ est la sous-matrice de g obtenue en supprimant sa i-ième ligne et sa r-ième colonne de g (en effet, par définition on a $g^{i,r} = g_{[1,r]-\{i\},[1,r-1]}$).

Il est clair que $\det(g^{i,r})$ est un polynôme en la variable ϖ et en les coefficients de y, de degré partiel $\leq r-1$ en la variable ϖ. On note $\det(g^{i,r}) = g^{i,r}[0] + g^{i,r}[1]\varpi + \cdots + g^{i,r}[r-1]\varpi^{r-1}$, de sorte que la formule de $\det(\mathrm{Mat})$ se reécrit :

$$\det(\mathrm{Mat}) = (-1)^{r+\frac{r(r-1)}{2}} \frac{1}{\mathrm{result}(a_{r-1}(y), a_r(y))} \times$$
$$\times \det\left(\begin{bmatrix} g^{r,r}[0] & g^{r,r}[1] & \ldots & g^{r,r}[r-1] \\ g^{r-1,r}[0] & g^{r-1,r}[1] & \ldots & g^{r-1,r}[r-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{1,r}[0] & g^{1,r}[1] & \ldots & g^{1,r}[r-1] \end{bmatrix}\right) \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \ldots & \lambda_r^{r-1} \end{bmatrix}\right)$$

(comme on le voit en effectuant le produit de ces deux dernières matrices).

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \underline{\kappa}(y) &= \underline{\kappa}_{\underline{d}}(w_0(y + \varpi \mathrm{Id}_r)) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} g^{r,r}[0] & g^{r,r}[1] & \ldots & g^{r,r}[r-1] \\ g^{r-1,r}[0] & g^{r-1,r}[1] & \ldots & g^{r-1,r}[r-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{1,r}[0] & g^{1,r}[1] & \ldots & g^{1,r}[r-1] \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

est un polynôme en les coefficients de la matrice y.

La deuxième assertion du théorème est la conséquence du théorème 4.2.1.6 dan le cas particulier où $\underline{d} = (1, 2, \ldots, r)$ et $g = y + \varpi \mathrm{Id}_r$. □

D'après le théorème 4.3.1.5 la fonction $\underline{\kappa}$ est un produit des facteurs irréductibles de $\mathrm{result}(a_{r-1}, a_r)$, de sorte qu'on peut prolonger la fonction $\underline{\kappa}$ au-dessus de l'ouvert $V'_{\underline{d}} = \{(a_1, \ldots, a_r) \in Q_{\underline{d}} | \mathrm{pgcd}(a_{r-1}, a_r) = 1\}$. De cette manière la famille $(Y_{\underline{d}}, f^Y_{\underline{d}}, h'_{\underline{d}}, \underline{\kappa}_{\underline{d}})$ au-dessus de $V_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1}$ se prolonge à $V'_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1}$ tout entier. On note $\tilde{\mathfrak{gl}}_r$ l'ouvert de $\mathfrak{gl}_r$ au-dessus de $V'_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1}$.

Théorème 4.3.1.6. Pour $\underline{d} = (1, 2, \ldots, r)$ le complexe de faisceaux $\mathrm{R}f^Y_{\underline{d},!}(h'^*_{\underline{d}}\mathcal{L}_\psi \otimes \underline{\kappa}^*_{\underline{d}}\mathcal{L}_\zeta)[r^2 + r - 1]$ est un faisceau pervers sur $V'_{\underline{d}}$, prolongement intermédiaire de sa restriction à l'ouvert $U_{\underline{d}}$.

On définit les variétés R_i en posant $R_r = \mathrm{Spec}(k)$ et $R_{i-1} = R_i \times Q_i \times \mathbb{G}_m$. Soit $f_i^Y : \mathbb{G}_m \times \mathfrak{gl}_i \times R_i \to \mathfrak{gl}_{i-1} \times R_{i-1}$ le morphisme défini par $f_i^Y(\alpha_i, y_i, r_i) = (s_{i-1}(y_i), r_{i-1})$, où $r_{i-1} = (r_i, a_i(y_i), \alpha_i)$ (sauf $f_r^Y : \mathbb{G}_m \times \mathfrak{gl}_r \times R_r \to \mathfrak{gl}_{r-1} \times R_{r-1}$). Soit $h_i' : \mathbb{G}_m \times \mathfrak{gl}_i \times R_i \to \mathbb{G}_a$ le morphisme défini par $h_i'(\alpha_i, y_i, r_i) = \frac{1}{2}\alpha_i(y_{i-1,i} + y_{i,i-1})$. Soit $\mathrm{pr}_i : \mathbb{G}_m \times S_i \times R_i \to S_i \times R_i$ la projection évidente. On définit les complexes $\mathcal{J}_i$ sur $\mathfrak{gl}_i \times R_i$ en posant $\mathcal{J}_r = \underline{\kappa}^* \mathcal{L}_\zeta[r^2]$ et $\mathcal{J}_{i-1} = Rf_{i,!}^Y(\mathcal{J}_i \otimes h_i'^* \mathcal{L}_\psi)$ (voir [15]). On a un isomorphisme $\mathfrak{gl}_1 \times R_1 \simeq Q_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1}$ via lequel $\mathcal{J}_1 \simeq \mathrm{R}f_{\underline{d},!}^Y(h'^*_{\underline{d}} \mathcal{L}_\psi \otimes \underline{\kappa}_{\underline{d}}^* \mathcal{L}_\zeta)[r^2 + r - 1]$.

On note G_i l'extension de GL_i obtenue en extrayant une racine carrée de $\det(g)\, \forall g \in \mathrm{GL}_i$ (i.e $G_i = \{(g, \delta) | g \in \mathrm{GL}_i, \det(g) = \delta^2\}$. Ce groupe agit sur $\mathbb{G}_m \times \mathfrak{gl}_i \times R_i$ par l'action adjointe de GL_i sur $\mathfrak{gl}_i$ et par l'action triviale sur les autres facteurs. On identifiera le groupe G_{i-1} au sous-groupe $\mathrm{diag}(G_{i-1}, 1)$ de G_i (puisque $\det(g) = \det(\mathrm{diag}(g, 1))$ de sorte que G_{i-1} agit aussi sur $\mathbb{G}_m \times \mathfrak{gl}_i \times R_i$ par l'action induite. Comme l'action adjointe laisse invariant le polynôme caractéristique, le morphisme f_i^Y est G_{i-1}-équivariant. Le morphisme h_i' n'est pas G_{i-1}-équivariant mais est néanmoins G_{i-2}-équivariant.

Lorsque P un polynôme de plusieurs variables, on note $V(P)$ le schéma des zéros de P. D'après le théorème 4.3.1.5 ci-dessus, la fonction $\underline{\kappa}$ est un produit de facteurs irréductibles de $\mathrm{result}(a_{r-1}, a_r)$, donc on peut écrire $\mathrm{result}(a_{r-1}, a_r) = \prod_i P_i^{m_i}$ et $\underline{\kappa}(w_0(y + \varpi \mathrm{Id}_r) = \prod_i P_i(y)^{n_i}$ avec $0 \leq n_i \leq m_i$. On a $V(\mathrm{result}(a_{r-1}, a_r)) = \bigcup_i V(P_i^{m_i})$. Soit $h \in \mathrm{GL}_{r-1}$, comme l'action adjointe $y \mapsto h.y$ laisse invariant $a_{r-1}(y)$ et $a_r(y)$, cette action laisse invariant $\mathrm{result}(a_{r-1}(y), a_r(y))$, i.e

$$\mathrm{result}(a_{r-1}(y), a_r(y)) = \mathrm{result}(a_{r-1}(h.y), a_r(h.y)),$$

donc encore

$$V(\mathrm{result}(a_{r-1}(y), a_r(y))) = V(\mathrm{result}(a_{r-1}(h.y), a_r(h.y))).$$

On considère le morphisme $\rho : \mathrm{GL}_{r-1} \times \mathfrak{gl}_r \to \mathfrak{gl}_r$ $(h, y) \mapsto h.y$ défini par l'action. Comme $V(\mathrm{result}(a_{r-1}(y), a_r(y))) = V(\mathrm{result}(a_{r-1}(h.y), a_r(h.y))) = V$, on a donc un morphisme $\rho_{|V(P_i)} : \mathrm{GL}_{r-1} \times V(P_i) \to V$. Puisque $\mathrm{GL}_{r-1} \times V(P_i)$ est irréductible, son image dans V est aussi irréductible. Par ailleurs, cette image contient $V(P_i)$ et lui est donc égale. Par conséquent, on a $V(P_i(h.y)) = V(P_i(y))\, \forall h \in \mathrm{GL}_{r-1}, \forall y \in \mathfrak{gl}_r$, de sorte que $P_i(h.y) = c_i(h, y).P_i(y)$ où $c_i(h, y)$ est inversible (i.e $c_i(h, y) \in (\mathcal{O}_{\mathrm{GL}_{r-1}}[(y_{i,j})])^*$).On a donc $c_i(h, y) = c_i(h) \in \mathcal{O}^*_{\mathrm{GL}_{r-1}}$ puisque les inversibles d'un anneau de polynômes $A[x_1, \ldots, x_n]$ sont ceux de A. On obtient alors $\underline{\kappa}_{\underline{d}}(w_0(h.y + \varpi \mathrm{Id}_r)) = c(h)\underline{\kappa}_{\underline{d}}(w_0(y + \varpi \mathrm{Id}_r))$ avec $c(h) = \prod_i (c_i(h))^{n_i}$.

Lemme 4.3.1.7. On a $c(h.h') = c(h).c(h')$. En particulier, on a un morphisme $c : \mathrm{GL}_{r-1} \to \mathbb{G}_m$.

Démonstration. La démonstration est évidente. □

On considère le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \longrightarrow & \mathrm{SL}_{r-1} & \hookrightarrow & \mathrm{GL}_{r-1} \xrightarrow{\det} \mathbb{G}_m. \\ & & & & \downarrow c \\ & & & & \mathbb{G}_m \end{array}$$

En utilisant $\mathrm{Hom}(\mathrm{SL}_{r-1}, \mathbb{G}_m) = \{1\}$ et la propriété universelle du conoyau , on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_{r-1} & \xrightarrow{\det} & \mathbb{G}_m, \\ \downarrow c & \swarrow & \\ \mathbb{G}_m & & \end{array}$$

de sorte qu'on a $c(h) = \det(h)^s$ pour un certain $s \in \mathbb{Z}$. Donc $\underline{\kappa}$ est G_{r-1}-équivariant. Le théorème 4.3.1.6 résulte alors de la proposition suivante

Proposition 4.3.1.8. (cf. [15, proposition 5.2.2]) Soient U_i et U_{i-1} les images réciproques de $U_{\underline{d}}$ dans $\mathfrak{gl}_i \times R_i$ et dans $\mathfrak{gl}_{i-1} \times R_{i-1}$. Si $\mathcal{J}$ est un faisceau pervers sur $\mathfrak{gl}_i \times R_i$, G_{i-1}-équivariant et isomorphe au prolongement intermédiaire à restriction à l'ouvert U_i, alors

$$\mathcal{J}' = Rf^Y_{i,!}(\mathcal{J} \otimes h_i^* \mathcal{L}_\psi)[1]$$

est aussi un faisceau pervers sur $\mathfrak{gl}_{i-1} \times R_{i-1}$, G_{i-2}-équivariant et isomorphe au prolongement intermédiaire de sa restriction à l'ouvert U_{i-1}.

Démonstration. Les morphismes qui interviennent dans la formation de $\mathcal{J}'$ sont tous G_{i-2}-équivariants donc $\mathcal{J}'$ l'est aussi.

On utilise la transformation de Fourier-Deligne ([11]) pour démontrer la perversité et le prolongement intermédiaire. Soit $E = \mathfrak{gl}_i \times Q_i \times R_i$. Il est clair que $E \times \mathbb{G}_m \simeq \mathfrak{gl}_{i-1} \times R_{i-1}$. Soient V le fibré trivial $E \times (\mathbb{A}^{i-1})^2$ et $V^\vee$ son fibré dual. On note $\iota : \mathfrak{gl}_i \times R_i \to V$ l'immersion fermée définie par $\iota(y_i, r_i) = ((y_{i-1}, \Delta_i(y_i), r_i), z, z')$, où y_i est de la forme $\begin{pmatrix} y_{i-1} & z' \\ {}^t z & * \end{pmatrix}$. On note $\epsilon : E \times \mathbb{G}_m \to V^\vee$ l'immersion fermée définie par $\epsilon(e, \alpha_i) = (e, {}^t(0, \ldots, 0, \alpha_i), {}^t(0, \ldots, 0, \alpha_i))$. On vérifie que $\mathcal{J}' = \epsilon^* \mathfrak{F}_\psi(\iota_* \mathcal{J})[1 - 2(i-1)]$

(cf. [15, proposition 5.3.2]), où $\mathfrak{F}_\psi$ est la transformation de Fourier-Deligne. Puisque $\mathcal{J}$ est un faisceau pervers et ι est une immersion fermée, $\iota_*\mathcal{J}$ est un faisceau pervers. D'après [11], $\mathfrak{F}_\psi(\iota_*\mathcal{J})$ en est un aussi. L'action de G_{i-1} sur $\mathfrak{gl}_i \times R_i$ s'étend à V de la manière suivante :

$$\pi(g,(y_{i-1},a_i,r_i),(z,z')) = ((g^{-1}y_{i-1}g,a_i,r_i),({}^tgz,g^{-1}z').$$

Cela induit donc une action sur $V^\vee$

$$\check{\pi}(g,(y_{i-1},a_i,r_i),(\check{z},\check{z}') = (({}^tgy_{i-1}g,a_i,r_i),({}^tg^{-1}\check{y},g\check{y}')).$$

Par rapport à cette action, $\mathfrak{F}_\psi(\iota_*\mathcal{J})$ est G_{i-1}-équivariant. On utilise alors le lemme suivant

Lemme 4.3.1.9. (cf. [15, lemme 5.4.3]) Le morphisme composé

$$G_{i-1}\times E\times \mathbb{G}_m \overset{\epsilon}{\hookrightarrow} G_{i-1}\times V^\vee \xrightarrow{\check{\pi}} V^\vee$$

est un morphisme lisse de dimension relative $(i-1)^2+1-2(i-1)$.

Démonstration du lemme. On note Z l'image de l'immersion localement fermée ϵ dans $V^\vee$. Le morphisme composé s'écrit alors :

$$G_{i-1}\times Z \xrightarrow{\check{\pi}} V^\vee.$$

En oubliant les composantes Q_i et R_i on obtient un diagramme cartésien évident

$$\begin{array}{ccc} G_{i-1}\times Z & \xrightarrow{\check{\pi}} & V^\vee \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_{i-1}\times \mathbb{G}_m\times \mathfrak{gl}_{i-1} & \xrightarrow{\xi} & \mathfrak{gl}_{i-1}\times (\mathbb{A}^{i-1})^2 \end{array}$$

où $\xi(g_{i-1},\alpha_i,y_{i-1}) = (g_{i-1}^{-1}y_{i-1}g_{i-1}, g_{i-1}{}^t(0,\dots,0,\alpha_i), {}^tg_{i-1}^{-1}{}^t(0,\dots,0,\alpha_i))$.

En factorisant le morphisme ζ et oubliant le facteur $\mathfrak{gl}_{i-1}$, l'assertion se ramène à démontrer que le morphisme

$$G_{i-1}\times\mathbb{G}_m \to (\mathbb{A}^{i-1})^2,\ (g_{i-1},\alpha_i)\mapsto (g_{i-1}{}^t(0,\dots,0,\alpha_i), {}^tg_{i-1}^{-1}{}^t(0,\dots,0,\alpha_i))$$

est lisse et de dimension relative $(i-1)^2+1-2(i-1)$. Cela résulte de l'assertion suivante : "L'orbite de l'élément ${}^t(0,\dots,0,1)\in\mathbb{A}^{i-1}$ sous l'action du groupe $\mathrm{G}_{i-1}\times\mathbb{G}_m$ sur $(\mathbb{A}^{i-1})^2$ définie par

$$((g_{i-1},\lambda),(z,z'))\mapsto(\lambda g_{i-1}z,\lambda{}^tg_{i-1}^{-1}z')$$

est l'ouvert défini par l'équation ${}^tzz'\neq 0$." Cette assertion est démontrée dans [15, lemme 5.3.5].

Fin de la démonstration. D'après [3, 4.2.5], $\check{\pi}^*(\mathfrak{F}_\psi(\iota_*\mathcal{J}))[(i-1)^2+1-2(i-1)]$ est un faisceau pervers sur $G_{i-1} \times Z$. Grâce à la G_{i-1}-équivariance on a un isomorphisme

$$\check{\pi}^*(\mathfrak{F}_\psi(\iota_*\mathcal{J})) = \mathrm{pr}_Z^*(\mathfrak{F}_\psi(\iota_*\mathcal{J})_{|Z}).$$

D'après loc. cit. $\mathfrak{F}_\psi(\iota_*\mathcal{I})_{|Z}[1-2(i-1)]$ est un faisceau pervers sur Z, la rojection $\mathrm{pr}_Z : G_{i-1} \times Z \to Z$ étant clairement un morphisme lisse de dimension relative $\dim(G_{i-1}) = (i-1)^2$. Alors $\mathcal{J}'$ est un faisceau pervers sur $G_{i-1} \times R_{i-1}$.

De la même manière, $\mathcal{J}'$ est le prolongement intermédiaire de sa restriction à U_{i-1}. □

Chapitre 5

Facteur de tranfert

5.1 Rappels sur le symbole de Hilbert et les constantes de Weil

Proposition 5.1.1.1. (cf. [12, proposition 1]) Soient $a, b \in F_\varpi$. On a :

1. Si $v(a)$ et $v(b)$ sont impaires, $[a, b] = [-ab, \varpi]$.
2. Si $v(a)$ est paire et $v(b) = 1$, $[a, b] = \zeta(a)$.

On peut retrouver les formules de la proposition 5.1.1.1 ci-dessus en considérant le symbole de Hilbert comme le composé du symbole modéré et du caractère ζ.

Proposition 5.1.1.2. (cf. [12, proposition 2]) Soit ψ un caractère additif d'ordre 0. On a :

1. $\gamma(a, \psi) = 1$ si $v(a)$ est paire.
2. $\gamma(a, \psi) = q^{-1/2} \sum_{b \in \mathcal{O}_\varpi / \varpi\mathcal{O}_\varpi} \psi(a\varpi^{2r} b/2)[b, \varpi]$, si $|a| = q^{2r+1}$.
3. $\gamma(ab, \psi) = \gamma(a, \psi)\gamma(b, \psi)[a, b]$.

Proposition 5.1.1.3. (c.f [16, proposition 5, p. 179]) Soient $a \in k(\varpi)$ et $\psi : \mathbb{A}/k(\varpi) \to \mathbb{C}$ un caractère additif. On a : $\prod_{v \in |\mathbb{P}^1|} \gamma_v(a, \psi_v) = 1$.

5.2 Géométrisation d'un calcul de Jacquet [8, paragraphe 8]

On commence cette partie en démontrant le cas très particulier du théorème A' de l'introduction où $r = 2$ et $t = \mathrm{diag}(t_1, t_2)$ avec $v_\varpi(t_1) = 1, v_\varpi(t_2) = -1$. Plus précisement, on montre la proposition suivante :

Proposition 5.2.1.1. Pour $r = 2$ et $t = \mathrm{diag}(t_1, t_2)$ avec $v_\varpi(t_1) = 1, v_\varpi(t_2) = -1$, on a $\mathcal{J}_\varpi(t) \simeq \mathcal{T}_\varpi(t) \otimes \mathcal{I}_\varpi(t) \simeq \mathcal{T'}_\varpi(t) \otimes \mathcal{I}_\varpi(t)$, où $\mathcal{T}_\varpi(t)$ et $\mathcal{T'}_\varpi(t)$ sont des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espaces vectoriels de rang 1 placés en degré 1 tels que $\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}, \mathcal{T}_\varpi(t)) = |t_1|^{-1/2}\gamma_\varpi(-t_1, \psi)$ et $\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}, \mathcal{T'}_\varpi(t)) = |t_2|^{1/2}\gamma_\varpi(t_2, \psi)$. De plus $\mathcal{I}_\varpi(t)$ et $\mathcal{J}_\varpi(t)$ sont alors des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$-espaces vectoriels de rang 2 placés respectivement en degré 0 et 1.

Démonstration. On a besoin du lemme suivant :

Lemme 5.2.1.2. Soient $X'_1 = \{(u, \epsilon, c) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{G}_m | \epsilon^2 = c\}$ munie du morphisme $\mathrm{pr}_X : X'_1 \to \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_m$ défini par $(u, \epsilon, c) \mapsto (u, c)$, $Y'_1 = \{(u, v, c) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{G}_m | v^2 - uv + c = 0\}$ munie du morphisme $\mathrm{pr}_Y : Y'_1 \to \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_m$ défini par $(u, c, v) \mapsto (u, c)$ et $j : \mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{G}_a$ l'immersion canonique. On a alors un isomorphisme canonique

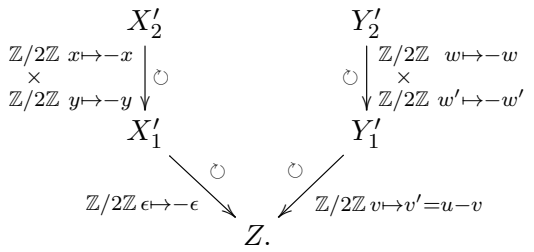
$$R\mathrm{pr}_{X,!}(Rj_!\mathcal{L}_\zeta(u + 2\epsilon)) \simeq R\mathrm{pr}_{Y,!}(Rj_!\mathcal{L}_\zeta(v)),$$

où pour tout k-schéma S muni d'un morphisme $S \to \mathbb{G}_m$, on note $\mathcal{L}_\zeta(s) = s^*\mathcal{L}_\zeta$.

Démonstration. On note

$$X'_2 = \{(u, \xi, \xi', \epsilon, c) \in \mathbb{A}^4 \times \mathbb{G}_m | \epsilon^2 = c,\ \xi^2 = u + 2\epsilon,\ \xi'^2 = u - 2\epsilon\},$$

$Y'_2 = \{(u, v, w, w', c) \in \mathbb{A}^4 \times \mathbb{G}_m | v^2 - uv + c = 0,\ w^2 = v,\ w'^2 = v' = u - v\}$ et $Z = \{(u, c) \in \mathbb{A}^1 \times \mathbb{G}_m\}$. On considère le diagramme suivant



Soit $\overset{\circ}{Z} = Z - \{(u, c) | u^2 - 4c = 0\}$. On ajoute un $\circ$ pour indiquer le changement de base de Z à $\overset{\circ}{Z}$. On note $j_X : \overset{\circ}{X'}_1 \hookrightarrow X'_1$, $j_Y : \overset{\circ}{Y'}_1 \hookrightarrow Y'_1$ et $j_Z : \overset{\circ}{Z} \to Z$. On obtient les isomorphismes suivants :

$$j_{X,*}j_X^*(Rj_!\mathcal{L}_\zeta(u + 2\epsilon)) \simeq Rj_!\mathcal{L}_\zeta(u + 2\epsilon),$$

$$j_{Y,*}j_Y^*(Rj_!\mathcal{L}_\zeta(v)) \simeq Rj_!\mathcal{L}_\zeta(v),$$

desquels résultent les isomorphismes

$$pr_{X,*}j_!\mathcal{L}_\zeta(u+2\epsilon) \simeq j_{Z,*}j_Z^*(pr_{X,*}j_!\mathcal{L}_\zeta(u+2\epsilon)),$$

$$pr_{Y,*}j_!\mathcal{L}_\zeta(v) \simeq j_{Z,*}j_Z^*(pr_{Y,*}j_!\mathcal{L}_\zeta(v)),$$

de sorte qu'il suffira de construire l'isomorphisme au-dessus de $\overset{\circ}{Z}$. Les morphismes $\overset{\circ}{X'}_2 \to \overset{\circ}{X'}_1 \to \overset{\circ}{Z}$ et $\overset{\circ}{Y'}_2 \to \overset{\circ}{Y'}_1 \to \overset{\circ}{Z}$ sont étales et les deux membres de l'isomorphisme qu'on veut obtenir sont donc des systèmes locaux lorsqu'on les restreint à $\overset{\circ}{Z}$. On considérera ces systèmes locaux comme des représentations des groupes de Galois des revêtements $\overset{\circ}{X'}_2 \,/\, \overset{\circ}{Z}$ et $\overset{\circ}{Y'}_2 \,/\, \overset{\circ}{Z}$.

On a un isomorphisme $\overset{\circ}{X'}_2 \xrightarrow{\sim} \overset{\circ}{Y'}_2$:

– $\overset{\circ}{X'}_2 \to \overset{\circ}{Y'}_2$:

$$\begin{aligned} v &= \tfrac{1}{2}(u+\xi\xi'),\\ w &= \tfrac{1}{2}(\xi+\xi'),\\ w' &= \tfrac{1}{2}(\xi-\xi'). \end{aligned}$$

– $\overset{\circ}{Y'}_2 \xrightarrow{\sim} \overset{\circ}{X'}_2$:

$$\begin{aligned} \epsilon &= ww',\\ \xi &= w+w',\\ \xi' &= w-w'. \end{aligned}$$

Cet isomorphisme est équivariant vis à vis de l'isomorphisme des groupes de Galois

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$$

donné par

$$\begin{array}{ccc} (\epsilon \mapsto -\epsilon, \xi \leftrightarrows \xi') & \mapsto & (w \mapsto w, w \mapsto w') \\ (\epsilon \mapsto \epsilon, \xi \mapsto \xi, \xi' \mapsto -\xi') & \mapsto & (w \leftrightarrows w'). \end{array}$$

Nos deux systèmes locaux correspondent respectivement aux représentations des groupes de Galois sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^2$ données par

$$\begin{array}{ccc} (\epsilon \mapsto -\epsilon, \xi \leftrightarrows \xi') & \mapsto & \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \\ (\epsilon \mapsto \epsilon, \xi \mapsto \xi, \xi' \mapsto -\xi') & \mapsto & \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} (w \mapsto w, w \mapsto w') & \mapsto & \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \\ (w \leftrightarrows w') & \mapsto & \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right). \end{array}$$

Par conséquent, le lemme résulte du diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell^2) & \xrightarrow{\quad A \quad} & \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell^2) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \end{array}$$

où A est l'isomorphisme défini par $M \mapsto AMA^{-1}$ avec $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

□

Remarque 5.2.1.3. En utilisant la formule des traces de Grothendieck-Lefschetz pour les deux systèmes locaux dans le lemme ci-dessus sur (c, u), on obtient :

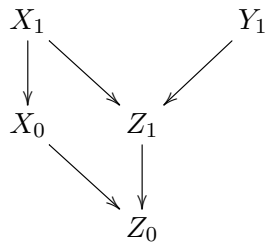
$$\sum_{v+c/v=u} \zeta(v) = \sum_{\epsilon^2=c} \zeta(u - 2\epsilon).$$

Pour $c = 1$, on obtient la démonstration d'une formule de [8, paragraphe 8, p.145 (entre les formules 127 et 128)]

$$\sum_{v+1/v=u} \zeta(v) = \zeta(u-2) + \zeta(u+2),$$

à l'aide de laquelle Jacquet obtient essentiellement le cas particulier du lemme fondamental de Jacquet et Mao obtenu en prenant les traces de Frobenius dans la proposition 5.2.1.1.

Démonstration de la proposition 5.2.1.1. Soient $t_1 = t_1[1]\varpi + t_1[2]\varpi^2 + \ldots$ et $t_2 = t_2[-1]\varpi^{-1} + t_2[0]\varpi^0 + \ldots$. On note $c = -t_2[-1]/t_1[1]$. Soient $X(c) = \operatorname{Spec} k[\epsilon]/(\epsilon^2 - c)$ munie du morphisme $h : X(c) \to \mathbb{G}_a$ défini par $h(\epsilon) = x$ et $Y(c) = \operatorname{Spec} k[v, v']/(vv' - c)$ munie du morphisme $h' : Y(c) \to \mathbb{G}_a$ défini par $h'(v, v') = \frac{v+v'}{2}$ et du morphisme $\underline{\kappa} : Y(c) \to \mathbb{G}_m$ défini par $\underline{\kappa}(v, v') = -vt_1[1]$ (la définition de $\underline{\kappa}$ vient de la formule de Kubota (cf. la proposition 3.1.5.2)). D'après les définitions des variétés $X_\varpi(t)$ et $Y_\varpi(t)$ (voir les chapitres 2 et 4), $(X_\varpi(t), h_\alpha)$ est donc isomorphe à $(X(c), h)$ et $(Y_\varpi(t), h'_\alpha, \underline{\kappa})$ est isomorphe à $(Y(c), h', \underline{\kappa})$. En faisant varier c et $d := t_1[1]$, on obtient le diagramme suivant :



où

- $X_1 = \{(c, d, u, \epsilon, x) \in \mathbb{G}_m^2 \times \mathbb{A}^3 | \epsilon^2 = c, x = u + 2\epsilon\}$,
- $Y_1 = \{(c, d, u, v) \in \mathbb{G}_m^2 \times \mathbb{A}^2 | v^2 - uv + c = 0\}$,
- $X_0 = \{(c, d, x) \in \mathbb{G}_m^2 \times \mathbb{A}\}$,
- $Z_1 = \{(c, d, u) \in \mathbb{G}_m^2 \times \mathbb{A}\}$,
- $Z_0 = \{(c, d) \in \mathbb{G}_m^2\}$.

On a alors les isomorphismes canoniques suivants

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\varpi &\simeq R(Y_1 \to Z_0)_! \mathcal{L}_\zeta(-dv) \otimes \mathcal{L}_\psi(\frac{u}{2}) \\ &\simeq \mathcal{L}_\zeta(-d) \otimes R(Z_1 \to Z_0)_! \mathcal{L}_\psi(\frac{u}{2}) \otimes R(Y_1 \to Z_1)_! \mathcal{L}_\zeta(v) \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 5.2.1.2, on obtient

$$R(Y_1 \to Z_1)_! \mathcal{L}_\zeta(v) \simeq R(X_1 \to Z_1)_! \mathcal{L}_\psi(u + 2\epsilon).$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\varpi &\simeq \mathcal{L}_\zeta(-d) \otimes R(Z_1 \to Z_0)_! \mathcal{L}_\psi(\frac{u}{2}) \otimes R(X_1 \to Z_1)_! \mathcal{L}_\psi(u + 2\epsilon) \\ &\simeq \mathcal{L}_\zeta(-d) \otimes R(X_1 \to Z_0)_! (\mathcal{L}_\psi(\frac{u}{2}) \otimes \mathcal{L}_\psi(u + 2\epsilon)) \\ &\simeq \mathcal{L}_\zeta(-d) \otimes R(X_1 \to Z_0)_! (\mathcal{L}_\psi(-\epsilon) \otimes \mathcal{L}_\psi(\frac{x}{2}) \otimes \mathcal{L}_\psi(x)) \\ &\simeq \mathcal{L}_\zeta(-d) \otimes R(X_0 \to Z_0)_! (\mathcal{L}_\psi(\frac{x}{2}) \otimes \mathcal{L}_\psi(x)) \otimes R(X_1 \to X_0)_! \mathcal{L}_\psi(-\epsilon) \\ &\simeq \mathcal{L}_\zeta(-d) \otimes R(X_0 \to Z_0)_! (\mathcal{L}_\psi(\frac{x}{2}) \otimes \mathcal{L}_\psi(x)) \otimes \mathcal{I}_\varpi \end{aligned}$$

On pose $\mathcal{T}_\varpi = \mathcal{L}_\zeta(-d) \otimes R(X_0 \to Z_0)_! (\mathcal{L}_\psi(\frac{x}{2}) \otimes \mathcal{L}_\psi(x))$ et $\mathcal{T}'_\varpi = \mathcal{T}_\varpi \otimes \mathcal{L}_\zeta(c)$. On a donc $\mathcal{J}_\varpi \simeq \mathcal{T}_\varpi \otimes \mathcal{I}_\varpi$. Comme par ailleurs, on a isomorphisme canonique $\mathcal{I}_\varpi \simeq \mathcal{I}_\varpi \otimes \mathcal{L}_\zeta(c)$.

En utilisant la formule des traces de Grothendieck-Lefschetz, on obtient bien :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_{(c,d)},\mathcal{T}_\varpi) &= \sum_{x\in k}\psi(x/2)\zeta(-t_1[1]x)\\ &= \sum_{x\in k}\psi(-t_1[1]x/2)\zeta(x)\\ &= |t_1|_\varpi^{-1/2}\gamma_\varpi(-t_1,\Psi)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_{(c,d)},\mathcal{T}'_\varpi) &= \zeta(c)\mathrm{Tr}(\mathcal{T}_\varpi)\\ &= \zeta(-t_2[-1]/t_1[1])|t_1|_\varpi^{-1/2}\gamma_\varpi(-t_1,\Psi)\\ &= |t_2|^{1/2}\gamma_\varpi(t_2,\Psi).\end{aligned}$$

□

La proposition suivante ramène le cas simple des matrices $t \in T_r(F_\varpi)$ telles que $v(\prod_{i=1}^{r-1} a_i) = 1$ et $v(a_r) = 0$ à celui envisagé dans la proposition 5.2.1.1.

Proposition 5.2.1.4. Soient $t \in T_r(F_\varpi)$ et i un nombre entier compris entre 1 et $r-1$, tels que $v(a_i) = 1$ et $v(a_j) = 0$ pour $j \neq i$. Alors, pour tout $\underline{\alpha} \in (k^*)^{r-1}$, on a un isomorphisme entre $(X_\varpi(t), h_{\underline{\alpha}})$ et $(X_\varpi(\mathrm{diag}(\frac{a_i}{a_{i-1}}, \frac{a_{i+1}}{a_i})), h_{\alpha_{i+1}})$ et un isomorphimse entre $(Y_\varpi(t), h'_{\underline{\alpha}}, \underline{\kappa}_\varpi)$ et $(Y_\varpi(\mathrm{diag}(\frac{a_i}{a_{i-1}}, \frac{a_{i+1}}{a_i})), h'_{\alpha_{i+1}}, \underline{\kappa})$.

Démonstration. On adapte la démonstration de [15, proposition 2.4.1] pour le premier isomorphisme. Pour le deuxième isomorphisme, on adapte encore cette démonstration en utilisant la formule :

$$\underline{\kappa}\begin{pmatrix} & g_1\\ g_2 & \end{pmatrix} = \underline{\kappa}\begin{pmatrix} g_1 & \\ & g_2\end{pmatrix} = \underline{\kappa}(g_1)\underline{\kappa}(g_2).$$

□

5.3 Facteur de transfert

Proposition 5.3.1.1. Pour $\underline{d} = (d_1, \ldots, d_r)$, la restriction à $U_{\underline{d}}$ du complexe $\mathcal{I} = \mathrm{R}f^X_{\underline{d},!}h^*_{\underline{d}}\mathcal{L}_\psi$ (resp. $\mathcal{J} = \mathrm{R}f^Y_{\underline{d},!}(h'^*_{\underline{d}}\mathcal{L}_\psi \otimes \underline{\kappa}^*_{\underline{d}}\mathcal{L}_\zeta)$) est un système local de rang $2^{\sum_{i=1}^r d_i}$ placé en degré 0 (resp. placé en degré $\sum_{i=1}^r d_i$). De plus $\mathcal{J}_{|U_{\underline{d}}} =$

$\mathcal{T} \otimes \mathcal{I}_{|U_{\underline{d}}}$, où $\mathcal{T}$ est un système local de rang 1 placé en degré $\sum_{i=1}^{r} d_i$ audessus de $U_{\underline{d}}$, géométriquement constant et provenant d'un caractère τ de $\mathrm{Gal}_{\overline{k}/k}$ tel que

$$\tau(\mathrm{Fr}_q) = \begin{cases} (-1)^{\sum_{i=1}^{r} d_i} q^{\sum_{i=1}^{r} d_i/2} \zeta(-1)^{\sum_{i=0}^{s-1} d_{2i+1}} \gamma_\infty(\varpi, \Psi_\infty)^{-\sum_{i=1}^{s-1} p(d_{2i}-d_{2i+1})} \text{ si } r = 2s, \\ (-1)^{\sum_{i=1}^{r} d_i} q^{\sum_{i=1}^{r} d_i/2} \zeta(-1)^{\sum_{i=1}^{s} d_{2i}} \gamma_\infty(\varpi, \Psi_\infty)^{-\sum_{i=1}^{s} p(d_{2i}-d_{2i-1})} \text{ si } r = 2s+1. \end{cases}$$

Démonstration. En utilisant la proposition 5.2.1.1, la proposition 5.2.1.4 et la formule de produit, on obtient les assertions sur les systèmes locaux $\mathcal{I}_{|U_{\underline{d}}}$ et $\mathcal{J}_{|U_{\underline{d}}}$. Pour le facteur de tranfert on envisage deux cas suivants :

1. Si $r = 2s$, on écrit le facteur de transfert sous la forme :

$$\mathbf{T} = \prod_{v|a_1} (q^{1/2} \gamma_v(-a_1, \Psi_v)) \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{s-1} \left(\prod_{v|a_{2i}} (q^{1/2} \gamma_v(a_{2i+1}/a_{2i}, \Psi_v)) \prod_{v|a_{2i+1}} (q^{1/2} \gamma_v(-a_{2i+1}/a_{2i}, \Psi_v)) \right).$$

2. Si $r = 2s+1$, on écrit le facteur de transfert sous la forme :

$$\mathbf{T} = \prod_{i=1}^{s} \left(\prod_{v|a_{2i-1}} (q^{1/2} \gamma_v(a_{2i}/a_{2i-1}, \Psi_v)) \prod_{v|a_{2i}} (q^{1/2} \gamma_v(-a_{2i}/a_{2i-1}, \Psi_v)) \right).$$

On se contente de donner le calcul pour le premier cas où $r = 2s$ (pour le cas où $r = 2s+1$, on utilise le même argument). En fait,

$$\begin{aligned} \prod_{v|a_1} (q^{1/2} \gamma_v(-a_1, \Psi_v)) &= \prod_{v|a_1} (q^{1/2} \gamma_v(a_1, \Psi_v) \gamma_v(-1, \Psi_v) [-1, a_1]_v) \\ &= \prod_{v|a_1} (q^{1/2} \gamma_v(a_1, \Psi_v) \zeta(-1)) \\ &= q^{d_1/2} \zeta(-1)^{d_1} \prod_{v|a_1} \gamma_v(a_1, \Psi_v) \\ &= q^{d_1/2} \zeta(-1)^{d_1} \gamma_\infty(a_1, \Psi_\infty)^{-1}. \end{aligned}$$

On a aussi (comme $\gamma_v(-a_{2i+1}/a_{2i}, \Psi_v) = \zeta(-1)\gamma_v(a_{2i+1}/a_{2i}, \Psi_v)$, où la

démonstration est la même que ci-dessus avec a_1)

$$\begin{aligned}
&\prod_{v|a_{2i}}(q^{1/2}\gamma_v(a_{2i+1}/a_{2i},\Psi_v))\prod_{v|a_{2i+1}}(q^{1/2}\gamma_v(-a_{2i+1}/a_{2i},\Psi_v))\\
=&\prod_{v|a_{2i}}(q^{1/2}\gamma_v(a_{2i+1}/a_{2i},\Psi_v))\prod_{v|a_{2i+1}}(q^{1/2}\gamma_v(a_{2i+1}/a_{2i},\Psi_v)\zeta(-1)\\
=&\ q^{d_{2i}+d_{2i+1}}\zeta(-1)^{d_{2i+1}}\prod_{v|a_{2i}a_{2i+1}}\gamma_v(a_{2i+1}/a_{2i},\Psi_v)\\
=&\ q^{d_{2i}+d_{2i+1}}\zeta(-1)^{d_{2i+1}}\gamma_\infty(a_{2i+1}/a_{2i},\Psi_\infty)^{-1}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, les a_i sont des polynôme unitaire, donc $a_{2i+1}/a_{2i} = (\varpi^{-1})^{d_{2i}-d_{2i+1}}+$ ... (c'est à dire $v_\infty(a_{2i+1}/a_{2i}) = d_{2i} - d_{2i+1}$). En utilisant les deux assertions premières la proposition 5.1.1.2 on a alors

$$\gamma_\infty(a_{2i+1}/a_{2i},\Psi_\infty) = \begin{cases} 1 & \text{si } d_{2i}-d_{2i+1} \text{ est paire,}\\ \gamma_\infty(\varpi,\Psi_\infty) & \text{si } d_{2i}-d_{2i+1} \text{ est impaire.}\end{cases}$$

Par conséquent, on obtient la formule de trace de $\mathcal{T}_{|U_{\underline{d}}}$. D'après le théorème de Chebotarev, on voit que $\mathcal{T}$ est géométriquement constant. □

Le facteur de tranfert est géométriquement constant au-dessus de $U_{\underline{d}}$ et se prologne alors de manière évidente $\mathcal{T}$ à $V'_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1}$.

En utilisant les théorèmes 2.3.1.1 et 4.3.1.6, on obtient l'énoncé global pour $\underline{d} = (1, 2 \ldots, r)$, qui prolonge l'égalité de la proposition 5.3.1.1 ci-dessus au-dessus de $V'_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1}$ tout entier.

THÉORÈME B. *Pour* $\underline{d} = (1, 2 \ldots, r)$, $\mathrm{R}f^Y_{\underline{d},!}(h^*_{Y,\underline{d}}\mathcal{L}_\psi \otimes \underline{\kappa}^*_{\underline{d}}\mathcal{L}_\zeta) = \mathcal{T} \otimes \mathrm{R}f^X_{\underline{d},!}h^*_{X,\underline{d}}\mathcal{L}_\psi$. *Les deux membres de cette égalité sont, à décalage près, des faisceaux pervers isomorphes au prolongement intermédiaire de leur restriction à* $U_{\underline{d}} \times \mathbb{G}_m^{r-1}$.

Chapitre 6

L'énoncé local résulte de l'énoncé global

Dans cette partie, on va montrer que le théorème B entraine une version géométrique du théorème A.

THÉORÈME A'. *Soit* $t' = \mathrm{diag}(t'_1, \ldots, t'_s) \in T_s(F_\varpi)$. *On a alors* $\mathcal{J}_\varpi(t') \simeq \mathcal{T}_\varpi(t') \otimes \mathcal{I}_\varpi(t') \simeq \mathcal{T'}_\varpi(t') \otimes \mathcal{I}_\varpi(t')$, *où* $\mathcal{T}_\varpi(t')$ *et* $\mathcal{T'}_\varpi(t)$ *sont des* $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$*-espaces vectoriels de rang* 1 *placés en degré* $v_\varpi(\prod_{i=1}^{r-1} a_i)$ *tels que* $\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}, \mathcal{T}_\varpi(t')) = \mathfrak{t}_\varpi(t', \alpha)$ *et* $\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}, \mathcal{T'}_\varpi(t')) = \mathfrak{t'}_\varpi(t', \alpha)$ *avec* $\mathfrak{t}_\varpi$ *et* $\mathfrak{t}'_\varpi$ *sont analogues celles du théorème A (cf. le chapitre d'introduction).*

D'après [15, prop 3.5.1, p. 505], pour r assez grand, il existe $t^\circ = \mathrm{diag}(a_1^\circ, a_2^\circ/a_1^\circ, \ldots, a_r^\circ/a_{r-1}^\circ)$, avec $(a_1^\circ, \ldots, a_r^\circ) \in V_{(1,2,\ldots,r)}(k)$ tel que $\mathcal{I}_\varpi(t^\circ) \simeq \mathcal{I}_\varpi(t')$ et $\mathcal{J}_\varpi(t^\circ) \simeq \mathcal{J}_\varpi(t')$. De plus, en utilisant la proposition 1.1.1.5 on a :

$$\mathcal{I}(t^\circ) \simeq \mathcal{I}_\varpi(t') \otimes \bigotimes_{\substack{v \neq \varpi \\ v \in \mathrm{supp}(t^\circ)}} \mathcal{I}_v(t^\circ) \text{ et } \mathcal{J}(t^\circ) \simeq \mathcal{J}_\varpi(t') \otimes \bigotimes_{\substack{v \neq \varpi \\ v \in \mathrm{supp}(t^\circ)}} \mathcal{J}_v(t^\circ).$$

On a $a_i^\circ = a'^\circ_i a''^\circ_i$, où a'°_i est à racines simples non nulles et où a''°_i a toutes ses racines nulles. Soient alors $\underline{d}' = (\deg(a'^\circ_i))_i$ et $\underline{d}'' = (\deg(a''^\circ_i))_i$. On fait varier $(a'_i)_i$ et $(a''_i)_i$ en introduisant l'ouvert $(V_{\underline{d}'} \times V_{\underline{d}''})^{\mathrm{dist}}$ de $V_{\underline{d}'} \times V_{\underline{d}''}$ au-dessus duquel $\mathrm{pgcd}(\prod_{i=1}^r a'_i, \prod_{i=1}^r a''_i) = 1$ et les a'_i sont à racines simples. On a alors un morphisme étale $\mu : (V_{\underline{d}'} \times V_{\underline{d}''})^{\mathrm{dist}} \to V_{\underline{d}}$.

Du côté de l'intégrale I, pour tout couple $(t', t'') = (\mathrm{diag}(a'_1, \ldots, a'_r), \mathrm{diag}(a'_1, \ldots, a'_r))$ où $((a'_1, \ldots, a'_r), (a''_1, \ldots, a''_r)) \in (V_{\underline{d}'} \times V_{\underline{d}''})^{\mathrm{dist}}$, on introduit les deux données géométriques, $(X_1(t', t''), h_{1,\underline{\alpha}})$ et $(X_2(t', t''), h_{2,\underline{\alpha}})$, où

$$X_1(t', t'')(k) = \{n \in N_r(F)/N_r(\mathcal{O}[\det(t'')^{-1}]) | {}^t n t' t'' n \in \mathfrak{gl}_r(\mathcal{O}[\det(t'')^{-1}])\},$$

$$X_2(t',t'')(k)=\{n\in N_r(F)/N_r(\mathcal{O}[\det(t')^{-1}])|{}^tnt't''n\in\mathfrak{gl}_r(\mathcal{O}[\det(t')^{-1}])\}$$

et les morphismes

$$h_{1,\underline{\alpha}}(n)=\sum_{i=2}^{r}\left(\alpha_i\sum_{v\nmid\prod_{i=1}^{r}a_i''}\mathrm{tr}_{k_v/k}\mathrm{res}_v(n_{i-1,i}\mathrm{d}\varpi)\right),$$

$$h_{2,\underline{\alpha}}(n)=\sum_{i=2}^{r}\left(\alpha_i\sum_{v\nmid\prod_{i=1}^{r}a_i'}\mathrm{tr}_{k_v/k}\mathrm{res}_v(n_{i-1,i}\mathrm{d}\varpi)\right).$$

Du côté de l'intégrale J, pour tout couple $(t',t'')=(\mathrm{diag}(a_1',\dots,a_r'),\ \mathrm{diag}(a_1',\dots,a_r'))$ où $((a_1',\dots,a_r'),(a_1'',\dots,a_r''))\in(V_{\underline{d}'}\times V_{\underline{d}''})^{\mathrm{dist}}$, on introduit aussi les deux données géométriques $(Y_1(t',t''),h'_{1,\underline{\alpha}},\underline{\kappa}_1)$ et $(Y_2(t',t''),h'_{2,\underline{\alpha}},\underline{\kappa}_2)$ où

$$Y_1(t',t'')(k)=\{(n,n')\in(N_r(F)/N_r(\mathcal{O}[\det(t'')^{-1}]))^2|{}^tnt't''n'\in\mathfrak{gl}_r(\mathcal{O}[\det(t'')^{-1}])\},$$

$$Y_2(t',t'')(k)=\{(n,n')\in(N_r(F)/N_r(\mathcal{O}[\det(t')^{-1}]))^2|{}^tnt't''n'\in\mathfrak{gl}_r(\mathcal{O}[\det(t')^{-1}])\}$$

et les morphismes

$$h'_{1,\underline{\alpha}}(n,n')=\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{r}\left(\alpha_i\sum_{v\nmid\prod_{i=1}^{r}a_i''}\mathrm{tr}_{k_v/k}\mathrm{res}_v((n_{i-1,i}+n'_{i-1,i})\mathrm{d}\varpi)\right),$$

$$\underline{\kappa}_1=\prod_{v\nmid a_r'\prod_{i=1}^{r}a_i''}\underline{\kappa}_v,$$

$$h'_{2,\underline{\alpha}}(n,n')=\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{r}\left(\alpha_i\sum_{v\nmid\prod_{i=1}^{r}a_i'}\mathrm{tr}_{k_v/k}\mathrm{res}_v((n_{i-1,i}+n'_{i-1,i})\mathrm{d}\varpi)\right),$$

$$\underline{\kappa}_2=\prod_{v\nmid a_r''\prod_{i=1}^{r}a_i'}\underline{\kappa}_v$$

(le morphisme $\underline{\kappa}_1$ (resp. $\underline{\kappa}_2$) a une présentation géométrique comme dans la sous-section 3.2 où $S=\{v|v\setminus a_r'\prod_{i=1}^{r}a_i''\}$ (resp. où $S=\{v|v\setminus a_r''\prod_{i=1}^{r}a_i'\}$).

Ces données géométriques se mettent en familles (on va les nommer respectivement $(X_{1,\underline{d}'},f_{\underline{d}'}^{X_1},h_{1,\underline{d}'})$, $(X_{2,\underline{d}''},f_{\underline{d}''}^{X_2},h_{2,\underline{d}''})$, $(Y_{1,\underline{d}'},f_{\underline{d}'}^{Y_1},h'_{1,\underline{d}'},\underline{\kappa}_{1,\underline{d}'})$ et $(Y_{2,\underline{d}''},f_{\underline{d}''}^{Y_2},h'_{2,\underline{d}''},\underline{\kappa}_{2,\underline{d}''})$) quand $\underline{d}'$ et $\underline{d}''$ sont fixés. Plus précisément on a les lemmes suivants :

Lemme 6.1.1.1. 1. Pour tout $\underline{d}', \underline{d}'' \in \mathbb{N}^r$ le foncteur $X_{1,\underline{d}'}$ qui associe à toute $k[(a'_{i,j})_{i,j}, (a''_{i,j})_{i,j}]$-algèbre ($a'_{i,j}$ (resp. $a''_{i,j}$) sont les coefficients de a'_i (resp. de a''_i) - c'est à dire $a'_i = \varpi^{d'_i} + a'_{i,d'_i-1}\varpi^{d'_i-1} + \cdots + a'_{i,0}$) l'ensemble

$$\begin{aligned} X_{1,\underline{d}'}(R) &= \{g \in S_r((\mathcal{O} \otimes_k R)[(\prod_{i=1}^r a''_i)^{-1}]) | \\ &\qquad \det(g_i) = a'_i a''_i\}/N_r((\mathcal{O} \otimes_k R)[(\prod_{i=1}^r a''_i)^{-1}]), \end{aligned}$$

où g_i est la sous-matrice de g faite des i-premières lignes et des i-premières colonnes de g, est représenté par une variété affine de type fini sur k, qu'on note aussi $X_{1,\underline{d}'}$ (resp. $X_{2,\underline{d}''}$). Soient

$$f^{X_1}_{\underline{d}'} : X_{1,\underline{d}'} \times \mathbb{G}_m^{r-1} \to (V_{\underline{d}'} \times V_{\underline{d}''})^{\mathrm{dist}} \times \mathbb{G}_m^{r-1}$$

les morphismes définis par $f^{X_1}_{\underline{d}'}(g, \underline{\alpha}) = ((a'_j)_{1\le j\le r}, (a''_j)_{1\le i\le r}, \underline{\alpha})$ où $a'_j a''_j = \det(g_j)$.

2. Pour tout i avec $2 \le i \le r$, l'application $h_i : S_r((\mathcal{O}\otimes_k R)[(\prod_{j=1}^r a''_j)^{-1}]) \times (R^*)^{r-1} \to R$ définie par

$$h_{1,i} = \mathrm{res}\left((a'_{i-1}a''_{i-1})^{-1} \left((g_{i,1}, \ldots, g_{i,i-1})(a'_{i-1}a''_{i-1})g_{i-1}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_i \end{pmatrix} \right) \right),$$

où $(a'_i a''_i)g_i^{-1}$ est la matrice des cofacteurs de g_i, lesquels sont dans $(\mathcal{O} \otimes_k R)[(\prod_{i=1}^r a''_i)^{-1}]$ et où $\mathrm{res}((a'_{i-1}a''_{i-1})^{-1}\frac{b}{(\prod_{j=1}^r a''_j)^s})$ est le coefficient de $\varpi^{(d'_i+d''_i)+s\sum_{j=1}^r d''_j-1}$ dans l'expression polynomiale en la variable ϖ du reste de la division euclidienne de b par $a'_{i-1}a''_{i-1}(\prod_{j=1}^r a''_j)^s$ (cette division euclidienne a un sens puisque le coefficient dominant des a'_i et des a''_i sont égals à 1), induit un morphisme $h_{1,i} : X_{1,\underline{d}'} \times \mathbb{G}_m^{r-1} \to \mathbb{G}_a$.

3. Soit $h_{1,\underline{d}'} = \sum_{i=2}^r h_{1,i}$. Alors pour tous $(t', t'') \in (V_{\underline{d}'} \times V_{\underline{d}''})^{\mathrm{dist}}(k)$ et $\underline{\alpha} \in \mathbb{G}_m^{r-1}$, le couple $(X_1(t', t''), h_{1,\underline{\alpha}})$ est isomorphe à la fibre $(f^{X_1}_{\underline{d}'})^{-1}(t', t'', \underline{\alpha})$ munie de la restriction de $h_{1,\underline{d}'}$ à cette fibre.

Lemme 6.1.1.2. (cf. [15, proposition 3.3.1])

1. Pour tout $\underline{d}', \underline{d}'' \in \mathbb{N}^r$ le foncteur $Y_{1,\underline{d}'}$ qui associe à toute $k[(a_i')_i, (a_i'')_i]$-algèbre R l'ensemble

$$Y_{1,\underline{d}'}(R) = {}^tN_r((\mathcal{O} \otimes_k R)[(\prod_{i=1}^r a_i'')^{-1}]) \setminus \{g \in \mathfrak{gl}_r((\mathcal{O} \otimes_k R)[(\prod_{i=1}^r a_i'')^{-1}]) |$$
$$\det(g_i) = a_i' a_i'', \mathrm{pgcd}(\prod_{i=1}^{r-1} \det(g_i), \det(g_r)) = 1\}/N_r((\mathcal{O} \otimes_k R)[(\prod_{i=1}^r a_i'')^{-1}]),$$

où g_i est la sous-matrice de g faite des i-premières lignes et des i-premières colonnes de g, est représenté par une variété affine de type fini sur k qu'on note aussi $Y_{1,\underline{d}'}$. Soit

$$f_{\underline{d}'}^{Y_1} : Y_{1,\underline{d}'} \times \mathbb{G}_m^{r-1} \to (V_{\underline{d}'} \times V_{\underline{d}''})^{\mathrm{dist}} \times \mathbb{G}_m^{r-1}$$

le morphisme défini par $f_{\underline{d}'}^{Y_1}(g, \underline{\alpha}) = ((a_i')_{1 \leq i \leq r}, (a_i'')_{1 \leq i \leq r}, \underline{\alpha})$ où $a_i' a_i'' = \det(g_i)$

2. Pour tout i avec $2 \leq i \leq r$, l'application $h_{1,i}' : \mathfrak{gl}_r((\mathcal{O} \otimes_k R)[(\prod_{j=1}^r a_j'')^{-1}]) \times (R^*)^{r-1} \to R$ définie par

$$h_i' = \frac{1}{2} \mathrm{res} \left(a_{i-1}^{-1} \left((g_{i,1}, \ldots, g_{i,i-1}) a_{i-1} g_{i-1}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_i \end{pmatrix} + \right. \right.$$
$$\left. \left. + (0, \ldots, 0, \alpha_i) a_{i-1} g_{i-1}^{-1} \begin{pmatrix} g_{1,i} \\ \vdots \\ g_{i-2,i} \\ g_{i-1,i} \end{pmatrix} \right) \right),$$

où $(a_i' a_i'') g_i^{-1}$ est la matrice des cofacteurs de g_i, lesquels sont dans $(\mathcal{O} \otimes_k R)[(\prod_{i=1}^r a_i'')^{-1}]$ et où $\mathrm{res}((a_{i-1}' a_{i-1}'')^{-1} \frac{b}{(\prod_{j=1}^r a_j'')^s})$ est le coefficient de $\varpi^{(d_i' + d_i'') + s \sum_{j=1}^r d_j'' - 1}$ dans l'expression polynomiale en la variable ϖ du reste de la division euclidienne de b par $a_{i-1}' a_{i-1}'' (\prod_{j=1}^r a_j'')^s$ (cette division euclidienne a un sens puisque le coefficient dominant des a_i' et des a_i'' sont égals à 1), induit un morphisme $h_{1,i}' : Y_{1,\underline{d}'} \times \mathbb{G}_m^{r-1} \to \mathbb{G}_a$.

3. Soit $h_{1,\underline{d}'}' = \sum_{i=2}^r h_{1,i}'$. Il existe un morphisme naturel $\underline{\kappa}_{1,\underline{d}'} : Y_{1,\underline{d}'} \to \mathbb{G}_m$ tel que pour tous $(t', t'') \in (V_{\underline{d}'} \times V_{\underline{d}''})^{\mathrm{dist}}(k)$ et $\underline{\alpha} \in \mathbb{G}_m^{r-1}$, le triplet $(Y_1(t', t''), h_{1,\underline{\alpha}}', \underline{\kappa}_1)$ est isomorphe à la fibre $(f_{\underline{d}'}^{Y_1})^{-1}(t', t'', \underline{\alpha})$ munie de la restriction de $h_{1,\underline{d}'}'$ et de $\underline{\kappa}_{1,\underline{d}'}$ à cette fibre.

Les données géométriques de $X_{2,\underline{d}''}$ et de $Y_{2,\underline{d}''}$ sont définies par des propositions analogues.

Ensuite, on définit des complexes $\mathcal{I}_1 = \mathrm{R}f^{X_1}_{\underline{d}',!} h^*_{1,\underline{d}'}\mathcal{L}_\psi$, $\mathcal{I}_2 = \mathrm{R}f^{X_2}_{\underline{d}'',!} h^*_{2,\underline{d}'}\mathcal{L}_\psi$ $\mathcal{J}_1 = \mathrm{R}f^{Y_1}_{\underline{d}',!}(h'^*_{1,\underline{d}'}\mathcal{L}_\psi \otimes \underline{\kappa}^*_{1,\underline{d}'}\mathcal{L}_\zeta)$ et $\mathcal{J}_2 = \mathrm{R}f^{Y_2}_{\underline{d}'',!}(h'^*_{2,\underline{d}''}\mathcal{L}_\psi \otimes \underline{\kappa}^*_{2,\underline{d}''}\mathcal{L}_\zeta)$ vérifiant $\mu^*\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{I}_2$ et $\mu^*\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{J}_2$.

Comme les a'_i sont à racines simples, en utilisant la proposition 5.2.1.1 et la proposition 5.2.1.4, on obtient que $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{J}_1$ sont des produits de systèmes locaux, donc sont eux mêmes des systèmes locaux. De plus, en utilisant la formule du produit des constantes de Weil (cf. la proposition 5.1.1.3), on définit un système local $\mathcal{T}_1$ telle que $\mathcal{J}_1 = \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{I}_1$. Plus précisé ent, on a la proposition suivante

Proposition 6.1.1.3. (cf. la proposition 5.2.1.1) $\mathcal{T}_1$ est un système local de rang 1 placé en degré $\sum_{i=1}^r d'_i$ au-dessus de $(V_{\underline{d}'} \times V_{\underline{d}''})^{\mathrm{dist}}$ et provenant d'un caractère τ de $\mathrm{Gal}^-_{\overline{k}/k}$ tel que $(-1)^{\sum_{i=1}^r d'_i}\tau(\mathrm{Fr}_q)$ est égal à

$$\begin{cases} q^{\sum_{i=1}^r d'_i/2}\zeta(-1)^{\sum_{i=0}^{s-1} d'_{2i+1}}\gamma_\infty(\varpi,\Psi_\infty)^{-\sum_{i=1}^{s-1} p(d'_{2i}-d'_{2i+1})} & \text{si } r = 2s, \\ q^{\sum_{i=1}^r d'_i/2}\zeta(-1)^{\sum_{i=1}^{s} d'_{2i}}\gamma_\infty(\varpi,\Psi_\infty)^{-\sum_{i=1}^{s} p(d'_{2i}-d'_{2i-1})} & \text{si } r = 2s+1, \end{cases}$$

où $p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } x \text{ est pair.} \end{cases}$

En utilisant le fait que la perversité et le prolongement intermédiaire sont stables par changement de base étale et que le produit tensoriel d'un complexe avec un système local est pervers et prolongement intermédiaire de sa restriction à un ouvert si et seulement si ce complexe l'est déjà, on obtient que $\mathcal{I}_2$ et $\mathcal{J}_2$ sont pervers et prolongement intermédiaire de leur restriction à l'ouvert $\mu^*U_{\underline{d}}$.

Le système local $\mathcal{T}$ s'écrit lui aussi comme un produit $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ ($\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ ne sont plus géométriquement constants, on définit en fait $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}_1^{\otimes -1}$) et à l'aide des propositions 5.2.1.1 et 6.1.1.3, la formule du produit pour les constantes de Weil permet de calculer $\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_t, \mathcal{T}_2) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_t, \mathcal{T})/\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_t, \mathcal{T}_1)$. En spécialisant en $t = t^\circ$ on obtient alors le théorème A′.

Bibliographie

[1] E. Arbarello, C. De Concini, V. G. Kac, *The infinite wedge representaiton and the reciprocity law for algebraic curves*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 49 (1989), 171-190.

[2] A. Beauville, Y. Laszlo, *Conformal blocks and genaralized theta functions*, Commun. Math.Phys. 164 (1994), 385-419.

[3] A. Beilinson, J. Berstein, P. Deligne *Faisceau pervers* dans Analysis and topology on Singular Spaces, I (Luminy, 1981), Astérisque 100, Soc. Math. France. Paris, 5-171 (1982).

[4] P. Deligne avec la collaboration de J. F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J. L. Verdier, SGA $4\frac{1}{2}$ *Cohomologie étale*, Lecture Notes in Mathematics, 569, Springer-Verlag. de l'ENS 44, fascicule 2 (2011), 263-360.

[5] L. Fargues, A. Genestier, V. Lafforgue *L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld*, Progress in Mathematics, 262, Birkhäuser.

[6] A. Genestier, V. Lafforgue *Théorie de Fontaine en égales caractéristiques*, Annales scientifiques.

[7] H. Jacquet *Représentations distinguées pour le groupe orthogonal*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 312 (1991) pp. 957-961.

[8] H. Jacquet *On the non vanishing of some L-functions*, Proc. Indian Acad. Sci.(Math. Set.) 97 (1987), 117-155.

[9] D. Kazhdan, S. Patterson, *Metaplectic form*, Publ. Math. IHES 59 (1982), 35-142.

[10] T. Kubota, *Automorphic Forms and the Reciprocity Law in a Number Feild*, Kyoto Univ., 1969.

[11] G. Laumon *Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjectures de Weil*, Pub. Math. I.H.E.S., 65, 131-219 (1987).

[12] Z. Mao *A fundamental lemma for metaplectic correspondence*, J.reine angrew. Math. 496 (1998), 107-129.

[13] H. Matsumoto *Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup 4^e série, 2 (1969), 1-62.

[14] J. Milnor *Introduction to algebraic k-theory*, Annals of Mathematics Studies, 72 (1971).

[15] B. C. Ngo *Le lemme fondamental de Jacquet et Ye en caractéristique positive*, Duke Math. J. 96, No. 3, 473-520 (1999).

[16] A. Weil *Sur certain groupe d'opérateurs unitaires*, Acta Math. 111 (1964) 143-211.