



HAL
open science

Stabilisation robuste des systèmes affines commutés. Application aux convertisseurs de puissance

Pascal Hauroigné

► **To cite this version:**

Pascal Hauroigné. Stabilisation robuste des systèmes affines commutés. Application aux convertisseurs de puissance. Automatique / Robotique. Université de Lorraine, 2012. Français. NNT : 2012LORR0101 . tel-01749278v2

HAL Id: tel-01749278

<https://theses.hal.science/tel-01749278v2>

Submitted on 2 Dec 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École doctorale IAEM Lorraine
Département de Formation
Doctorale en Automatique



Stabilisation robuste des systèmes affines commutés. Application aux convertisseurs de puissance

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 12 octobre 2012

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine

(Automatique et Traitement du Signal et des Images, Génie Informatique)

par

Pascal HAUROIGNÉ

Composition du jury

<i>Président :</i>	Mohamed DJEMAI	Professeur à l'UVHC, Valenciennes
<i>Rapporteurs :</i>	Jean BUISSON	Professeur à SUPELEC, Rennes
	Christophe PRIEUR	Directeur de Recherche CNRS au Gipsa-Lab, Grenoble
<i>Examineurs :</i>	Romain POSTOYAN	Chargé de Recherche CNRS au CRAN, Nancy
	Claude IUNG	Professeur à l'UL, Nancy (directeur de thèse)
	Pierre RIEDINGER	MDC - HDR à l'UL, Nancy (co-directeur de thèse)

Mis en page avec la classe thloria.

*"No amount of experimentation can ever prove me right ;
a single experiment can prove me wrong"*
Albert Einstein

"S'il n'y a pas de solution, c'est qu'il n'y a pas de problème"
Les Shadoks

Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été menés au Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN), au sein de l'équipe-projet Systèmes Hybrides et Dynamiques Complexes (SDH.com) rattachée au groupe Automatique, Commande et Observation des Systèmes (ACOS).

Je souhaite exprimer ma plus sincère reconnaissance à Messieurs Claude Iung et Pierre Riedinger pour la confiance qu'ils ont eu en m'offrant la possibilité d'intégrer leur équipe de recherche. Je remercie tout particulièrement Monsieur Pierre Riedinger pour l'intérêt constant qu'il a porté à mes recherches ainsi que la confiance qu'il m'a accordée pour mener à bien ces travaux.

Je tiens également à adresser mes plus vifs remerciements aux membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'examiner l'ensemble de ces recherches. Tout d'abord à Messieurs Jean Buisson et Christophe Prieur pour le temps consacré à la lecture minutieuse de ce manuscrit de thèse ainsi que pour leurs remarques. Puis à Messieurs Romain Postoyan et Mohamed Djemai d'avoir accepté le rôle d'examineurs de ce travail de thèse ainsi que pour leur analyse attentive du présent mémoire. J'ai été très honoré de présenter mes travaux de thèse devant un tel jury.

Mes remerciements sont également adressés à tous les membres du laboratoire qui m'ont aidé lors de mes recherches, pour le temps passé ensemble et les discussions, scientifiques ou non. Un merci chaleureux à mes camarades de thèse et amis, Anca, Carlos, Dalil, Fouad, Ivan, Julien et Vairis. Un remerciement tout particulier pour Farah, les nombreuses heures passées ensemble et son soutien inconditionnel.

Je souhaite également exprimer mes remerciements à Monsieur Jamal Daafouz pour m'avoir permis d'intégrer l'équipe ACOS et Monsieur Marc Jungers pour avoir guidé mes pas vers ce laboratoire. Je tiens enfin à remercier Mesdames Carole Courrier et Christine Pierson qui m'ont apporté une aide précieuse à l'heure de régler les (trop ?) nombreuses formalités administratives.

Enfin, je ne peux terminer ces remerciements sans en adresser également à ma famille, pour leur soutien durant ces trois années et même les vingt quatre précédentes.

Table des matières

Remerciements

iii

Introduction générale

1

Notions introductives

1.1	Introduction aux Systèmes Hybrides	5
1.1.1	Définition des Systèmes Dynamiques Hybrides	6
1.1.2	Séquence de temps et exécution	7
1.1.3	Écriture formelle des systèmes à commutations	8
1.2	Modélisation des convertisseurs de puissance	9
1.2.1	Systèmes affines commutés et modèle affine par morceaux (PWA)	10
1.2.2	Modèle moyen	11
1.2.3	Modèle Mixte Logique Dynamique (MLD)	12
1.2.4	Systèmes linéaires de complémentarité (LCS)	13
1.2.5	Bond Graph	13
1.2.6	Choix du modèle	14
1.3	Stabilité des systèmes	15
1.3.1	Stabilité classique	15
1.3.2	Stabilité des systèmes à commutations	16
1.3.2.1	Stabilité sous une loi de commutations arbitraire	17
1.3.2.2	Stabilité sous une loi de commutations restreinte	19
1.4	Stabilité entrée-état (ISS)	22
1.5	Stabilisation	23
1.5.1	Stabilisation des systèmes linéaires commutés	24
1.5.2	Stabilisation des systèmes affines commutés	25
1.6	Approche pratique	26

1.6.1	Stabilité pratique	26
1.6.2	Stabilisation pratique des systèmes affines commutés	27
1.7	Conclusion	28

2

Stabilisation robuste des systèmes affines commutés

2.1	Préliminaires	29
2.1.1	Modélisation	29
2.1.2	Hypothèse	31
2.2	Synthèse de lois de commande échantillonnées	33
2.3	Stabilité de la boucle fermée	34
2.3.1	Formulation du problème	35
2.3.2	Ensembles attractifs	38
2.3.3	Relations d'inclusion	40
2.4	Stabilisation robuste	41
2.4.1	Robustesse vis-à-vis du temps d'échantillonnage	41
2.4.2	Robustesse aux incertitudes paramétriques et aux instants de commutations	43
2.5	Implémentation	45
2.6	Application	47
2.6.1	Convertisseur buck-boost	47
2.6.1.1	Description du convertisseur	47
2.6.1.2	Stabilisation sans perturbations	48
2.6.1.3	Stabilisation avec perturbations	53
2.6.2	Convertisseur multicellulaire	55
2.7	Conclusion	59

3

Du retour d'état à la commande basée observateur d'un multicellulaire

3.1	Préliminaires	61
3.1.1	Observation des systèmes hybrides	62
3.1.2	Modélisation du convertisseur multicellulaire	63
3.1.2.1	Modèle instantané	64
3.1.2.2	Système à commutations	64
3.2	De l'équilibre des tensions des capacités flottantes	65

3.2.1	Équilibrage en boucle ouverte	65
3.2.2	Équilibrage en boucle fermée	67
3.3	Observation de la tension des capacités flottantes	70
3.3.1	Une observation sous conditions	70
3.3.1.1	Approche statique	71
3.3.1.2	Approche hybride	72
3.3.1.2.1	Z –observabilité :	72
3.3.1.2.2	$[t_0, T^+)$ –observabilité :	73
3.3.1.3	Approche algébrique	74
3.3.1.4	Hypothèses pour l’observation	75
3.3.2	Les observateurs du convertisseur multicellulaire	76
3.3.2.1	Filtres de Kalman	76
3.3.2.2	Observateurs adaptatifs	76
3.3.2.3	Observateurs de Luenberger commutés	77
3.3.2.4	Observateurs en temps fini	78
3.3.3	Commande par retour de sortie du convertisseur multicellulaire	79
3.4	Commande du convertisseur	80
3.4.1	Existence d’une fonction de Lyapunov de commande	80
3.4.2	Commande échantillonnée basée observateur	85
3.5	Simulations	94
3.6	Conclusion	95
3.7	Annexe	96

Conclusion générale & Perspectives

Introduction générale

Les systèmes à commutations appartiennent à la classe plus générale des systèmes dynamiques hybrides. Les systèmes dynamiques hybrides sont des systèmes faisant intervenir simultanément des dynamiques continues et des dynamiques événementielles. La classe des systèmes à commutations se distingue par le fait que la variable événementielle indique quel sous-système dynamique est actif. Les systèmes linéaires à commutations, qui se distinguent par leurs dynamiques linéaires en l'état sont largement étudiés dans la littérature. Les systèmes affines à commutations, qui eux possèdent des dynamiques affines en l'état, possèdent une littérature moins développée. L'intérêt que nous portons à cette classe provient du fait qu'un grand nombre de systèmes physiques peuvent être représentés par cette classe. Comme nous allons le voir par la suite, les résultats obtenus sur les systèmes affines commutés, et a fortiori les résultats de cette thèse, peuvent être appliqués, par exemple, sur les convertisseurs de puissance de type continu-continu.

Objectifs

Synthétiser une loi de commutations stabilisante pour cette classe de systèmes est un sujet de recherche important. Selon la loi de commutations, les sous-systèmes dynamiques étant affines en l'état, le système commuté affine peut présenter plusieurs points d'équilibre. Aucun de ces points d'équilibre n'est commun à l'ensemble des sous-systèmes. En considérant un domaine de commande étendu, il est cependant possible de définir des points de fonctionnement, points que l'on cherchera à atteindre par commutations successives entre les différents sous-systèmes. Dans la littérature, il existe un certain nombre de synthèses de lois de commutations en temps continu pour un domaine de commande étendu. Pour une implémentation réelle, il est important de prendre en compte certaines limitations du système. En effet, quelque soit le système à commutations considéré, les actionneurs ont une bande passante limitée, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent pas s'ouvrir et se fermer aussi rapidement que l'on souhaite. De plus, la commande pouvant être appliquée au système appartient à un domaine discret, et non à son domaine étendu. Les travaux de cette thèse se portent sur ce problème : en supposant qu'il existe une loi de commutations en temps continu dans le domaine de commande étendu qui stabilise le système, peut-on synthétiser une loi de commutations échantillonnée prenant ses valeurs dans le domaine discret possédant de bonnes propriétés stabilisantes pour le système en temps continu ? De plus, peut-on obtenir des garanties de robustesse du système en boucle fermée vis-à-vis d'incertitudes sur les instants de commutations et sur les paramètres ?

Les convertisseurs de puissance continu-continu sont des éléments appartenant à la classe des systèmes affines commutés. L'étude d'un convertisseur particulier, le convertisseur multicellulaire, nous montre qu'un second problème se pose quant à sa stabilisation. En effet, d'un point de vue technologique, l'acquisition du vecteur d'état complet est d'une part complexe, et d'autre part coûteuse. Il est alors nécessaire d'utiliser un observateur afin de reconstruire l'état. Du fait de la nature hybride de ce convertisseur, le vecteur d'état n'est pas entièrement observable à un instant donné. Nous allons donc chercher à synthétiser une stratégie de commutations par retour de sortie basée observateur permettant de garantir l'observabilité de l'état sur un intervalle de temps non nul tout en amenant le système à un point de fonctionnement donné. L'observabilité est assurée en partie par l'existence d'une condition de rang sur la séquence de commutations, et en partie par l'existence d'une durée minimale entre deux commutations. Pour finir, nous montrons que la boucle fermée constituée du système, du contrôleur et de l'observateur est pratiquement stable.

Les résultats de cette thèse sont démontrés dans le cas des systèmes affines commutés possédant une entrée exogène constante, une source de tension continue dans le cas des convertisseurs de puissance, et une référence de sortie constante. Une application directe est donc les convertisseurs de type continu-continu. Ces résultats ont été validés par simulation sur des convertisseurs de puissance de type buck-boost et multicellulaire.

Organisation du mémoire

Ce manuscrit est organisé en trois chapitres de la manière suivante :

Chapitre 1

Le premier chapitre est une étude bibliographique concernant les systèmes à commutations : ce chapitre s'intéresse d'une part à la stabilité des systèmes à commutations, en développant le formalisme de la stabilité entrée-état, et d'autre part à la stabilisation de ces mêmes systèmes. Ce chapitre se conclut par une étude de l'approche pratique des concepts de stabilité et de stabilisabilité permettant d'apporter les outils nécessaires aux chapitres suivants.

Chapitre 2

Le second chapitre se consacre à l'étude de la stabilisation robuste des systèmes affines commutés. Par la connaissance d'une fonction de commande de Lyapunov permettant de construire des stratégies de commutations en temps continu, nous nous intéressons aux propriétés de stabilisation d'une version échantillonnée de ces mêmes stratégies. Ce chapitre nous permet de montrer des propriétés de robustesse vis-à-vis d'incertitudes sur les instants de commutations et sur les paramètres du système de ces lois de commutations. Une application au convertisseur buck-boost ainsi qu'au convertisseur multicellulaire y est faite.

Chapitre 3

Le troisième chapitre s'intéresse au problème de l'observation des convertisseurs multicellulaires. Après avoir effectué un état de l'art concernant l'observation et les observateurs existants dans la littérature, nous synthétisons une stratégie échantillonnée par retour de sortie basée observateur permettant à la fois de satisfaire les conditions d'observabilité du système et d'amener le système à un point de fonctionnement donné. Cette synthèse utilise une contrainte algébrique afin de satisfaire la condition d'observabilité du système tout en garantissant la décroissance d'une fonction qui est une fonction de commande de Lyapunov pour le système en temps continu.

Production scientifique

Cette thèse a donné lieu aux publications suivantes :

- P. Hauroigné, P. Riedinger, and C. Iung. Sampled control design for switched affine systems : robust stabilization. In *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, pages 5453–5458, Milano, Italy, august 2011.
- P. Hauroigné, P. Riedinger, and C. Iung. Switched affine systems using sampled-data controllers : robust and guaranteed stabilization. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 12(56) :2929–2935, 2011.
- P. Hauroigné, P. Riedinger, and C. Iung. Observer-based output-feedback of a multicellular converter : Control Lyapunov Function – sliding mode approach. In *Proceedings of the 2012 IEEE Conference On Decision and Control*, Accepté, 2012.

Acronymes & Notations

Acronymes

- CLF : Fonction de commande de Lyapunov (*Control Lyapunov Function* en anglais)
- CQLF : Fonction de Lyapunov quadratique commune (*Common Quadratic Lyapunov Function* en anglais)
- ISS : Stabilité entrée-état (*Input-to-State Stability* en anglais)
- LMI : Inégalité matricielle linéaire (*Linear Matrix Inequality* en anglais)
- PWM : Modulation de largeur d'impulsion (*Pulse Width Modulation* en anglais)

Notations

- $\text{int}(\mathcal{C})$: intérieur de \mathcal{C}
- $\delta(\mathcal{C})$: frontière de \mathcal{C}
- $\text{co}(\mathcal{C})$: enveloppe convexe de \mathcal{C}
- $\mathcal{B}(a, b)$: boule ouverte de centre a et de rayon b
- $\|x\|$: norme euclidienne de x
- $\|x\|_\infty$: norme infini de x

1

Notions introductives

Ce chapitre a pour but de présenter les notions fondamentales concernant les systèmes à commutations et leurs propriétés. Après un bref rappel concernant les systèmes hybrides, nous permettant de définir les systèmes à commutations, nous nous attacherons à définir la stabilité des systèmes. Tout d'abord, d'un point de vue classique pour les systèmes continus, puis pour le cas particulier des systèmes à commutations. Nous présenterons ensuite la stabilité entrée-état qui correspond à la stabilité de système en présence d'entrées exogènes. Puis nous développerons la stabilisation des systèmes à commutations. Pour clore ce chapitre, nous discuterons de l'approche pratique de la stabilité et de la stabilisabilité.

1.1 Introduction aux Systèmes Hybrides

Au cours de l'histoire, la recherche a dissocié deux classes de systèmes dynamiques : d'une part, les systèmes faisant intervenir des variables continues, régies par des équations différentielles (par exemple, un circuit électronique constitué de résistances, capacités et inductances, ou bien un système mécanique composé de ressorts, masses et amortisseurs), et d'autre part, les systèmes à variables purement discrètes (traitement numérique, régulation de flux automobile...). Cette dissociation a été faite pour des raisons de métrique : en effet, on n'étudie pas de la même manière un système continu et un système discret. Cependant, cette classification laisse place, le plus souvent, à une approximation faite sur le système : un système est rarement uniquement constitué de variables continues, ou bien de variables discrètes. On représente ce couplage entre le domaine continu et le domaine discret par le schéma de la figure 1.1.

Une première méthode utilisée pour modéliser et commander les systèmes dynamiques hybrides consiste à approcher le système par un modèle moyen [SV85]. On ramène alors l'étude du système hybride à celle d'un système continu dont la dynamique est obtenue

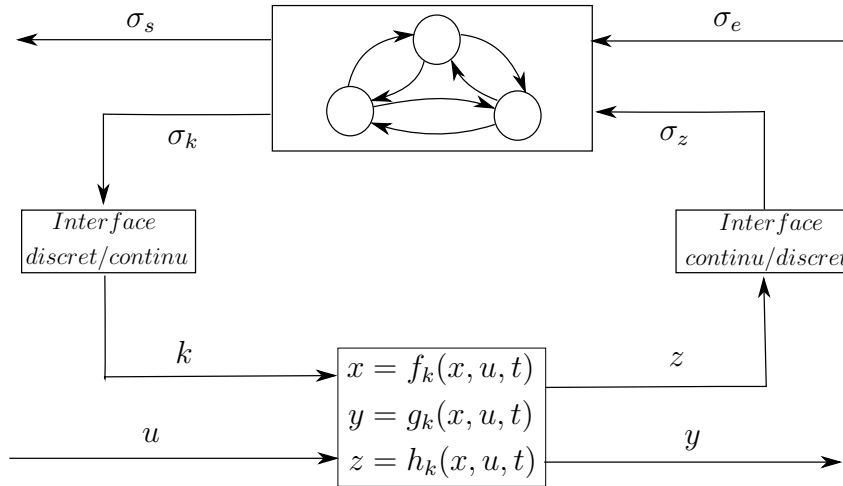


FIGURE 1.1 – Schéma général d'un système dynamique hybride

par moyenne des dynamiques composant le système hybride. Cette approche a le mérite de simplifier l'étude. Cependant, l'approximation faite n'est valable que sous certaines conditions, qui ne sont pas vérifiées dans le cas général. La volonté des chercheurs a alors été de mieux appréhender et commander ces systèmes, d'où le développement d'un cadre formel. La notion de Système Dynamique Hybride est alors apparue. La difficulté de celle-ci a été d'amener à coexister deux théories avec des fondements solides et distincts : la théorie continue, et la théorie événementielle.

1.1.1 Définition des Systèmes Dynamiques Hybrides

Nous allons définir de manière formelle les systèmes hybrides [SJS^L99, LJS⁺03] à l'aide de la théorie des automates. Tout d'abord, précisons qu'on notera $P(\alpha)$ l'ensemble des parties de α .

Définition 1 (Système hybride). *Un système hybride est un 8-uplet :*

$$\mathbf{H} = (\mathcal{I}, \mathcal{A}, \mathbb{X}, \mathcal{D}, \mathcal{F}, \text{Init}, \mathcal{G}, \mathcal{R}) \quad (1.1)$$

où :

- \mathcal{I} est l'ensemble des variables discrètes nommées modes $i \in \mathcal{I} = \{1, 2, \dots, m\}$, $m \geq 1$ ($m \in \mathbb{N}$);
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ est un ensemble d'arcs;
- \mathbb{X} est l'ensemble des variables continues $x \in \mathbb{X}$;
- $\mathcal{D} = \{D_i : i \in \mathcal{I}\}$ est un ensemble de domaines de l'automate hybride \mathbf{H} , $\mathcal{D} : \mathcal{I} \rightarrow P(\mathbb{X})$;
- $\mathcal{F} = \{F_i : i \in \mathcal{I}\}$ est un ensemble de champs de vecteurs tel que F_i est Lipschitz sur D_i , $\forall i \in \mathcal{I}$;
- $\text{Init} \subseteq \mathcal{I} \times \mathbb{X}$ est l'ensemble des états initiaux;

- $\mathcal{G} = \{G(a) : a \in \mathcal{A}\}$ est un ensemble de gardes, où $a = (i, i') \in \mathcal{A}$, $\mathcal{G} : \mathcal{A} \rightarrow P(\mathbb{X})$;
- $\mathcal{R} = \{R(a, x) : a \in \mathcal{A}\}$ est un ensemble de réinitialisations, où $a = (i, i') \in \mathcal{A}$.
 $\mathcal{R} : \mathcal{A} \times \mathbb{X} \rightarrow P(\mathbb{X})$.

Hypothèse 1. *Le nombre de modes est fini ($m < \infty$). De plus, $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall a \in \mathcal{A}$, $G(a) \neq \emptyset$ et $\forall x \in G(a)$, $R(a, x) \neq \emptyset$.*

La définition 1 doit être comprise ainsi : en considérant un point initial x vérifiant $Init$ et se trouvant dans un domaine D_i . On aura la dynamique de x qui vérifiera $\dot{x} = F_i(x, t)$ et ce tant qu'on restera dans le domaine D_i , qu'on appelle aussi invariant. Si à un moment quelconque x vérifie l'ensemble de gardes G , alors le système peut passer de la dynamique i à la dynamique i' . L'état x peut alors subir la discontinuité R associée à ce changement de dynamique.

Remarque 1. *En considérant un mode $i \in \mathcal{I}$, tel que $D_i \cap G(a(i, i')) \neq \emptyset$, on peut constater qu'on ne force pas le passage d'un mode à l'autre tant que l'état $x \in \left(D_i \cap G(a(i, i')) \right)$, mais que celui-ci est possible. On a donc une indétermination de mode.*

En effet, la représentation par automate donne un ensemble de fonctionnements possibles. On voit donc la nécessité d'introduire une nouvelle définition.

Définition 2 (Automate déterministe). *Pour tout état $x \in \mathbb{X}$, il ne peut y avoir qu'un seul arc possible et lorsque celui-ci existe, l'évolution de l'état continu force un changement d'état discret :*

H est déterministe si et seulement si $\forall (i, x) \in \mathcal{I} \times \mathbb{X}$:

- si $\exists i'$ tel que $(i, i') \in \mathcal{A}$ et $x \in G(i, i')$ alors $x \notin D_i$;
- si $\exists i'$ et $i'' \neq i'$ tels que (i, i') et $(i, i'') \in \mathcal{A}$ alors $x \notin G(i, i') \cap G(i, i'')$;
- si $(i, i') \in \mathcal{A}$ et $x \in G(i, i')$ alors $R((i, i'), x)$ contient au plus un élément.

Remarque 2. *Un automate est dit déterministe si et seulement si une transition n'est possible que lorsque l'évolution continue est bloquée. De plus, si une transition est autorisée, alors toutes les autres sont bloquées et la variable continue ne peut être réinitialisée qu'à une seule valeur.*

Dans ce manuscrit, tous les systèmes étudiés pourront être décrits par un automate déterministe.

1.1.2 Séquence de temps et exécution

Nous allons définir dans cette section deux notions importantes des systèmes hybrides qui nous serviront dans la suite de ce mémoire.

Définition 3 (Séquence de temps [SJS99]). *Une séquence de temps est un ensemble ordonné, fini ou infini, $\mathcal{T} = \{t_j\}_{j=0}^s$ de temps tels que :*

- $I_j = [t_{j,0}, t_{j,1}]$, pour tout $0 \leq j \leq s$;

- si $s < \infty$, alors soit $I_s = [t_{s,0}, t_{s,1}]$ ou $I_s = [t_{s,0}, t_{s,1})$;
- pour tout $0 \leq j \leq s$, $t_{j,1} = t_{j+1,0}$.

On notera de plus $\langle \mathcal{T} \rangle$ l'ensemble ordonné $\{0, 1, \dots\}$ pour une séquence infinie, et $\{0, 1, \dots, s\}$ pour une séquence finie, avec s la taille de la séquence.

Définition 4 (Exécution d'un système hybride [SJSL99]). Une exécution d'un système dynamique hybride \mathbf{H} est un triplet $(\mathcal{T}, \sigma, \mathcal{X})$ où :

- \mathcal{T} est la séquence des temps de commutations ;
- $\sigma = \{i_j\}_{j=0}^{s-1}$ est un ensemble d'applications appelé séquence de modes tel que $\forall j \in \langle \mathcal{T} \rangle, i_j : [t_j, t_{j+1}] \rightarrow \mathcal{I}$;
- $\mathcal{X} = \{x_j : j \in \langle \mathcal{T} \rangle\}$, $x_j : [t_j, t_{j+1}] \rightarrow \mathbb{X}$ est un ensemble d'applications de classe \mathcal{C}^1 tel que :
 1. $(i_0, x_0) \in \text{Init}$;
 2. $\forall t \in [t_j, t_{j+1}]$, $x^j : [t_j, t_{j+1}] \rightarrow D_{i_j}$ et $\dot{x}^j(t) = F_{i_j}(x^j(t))$;
 3. $\forall j \in \langle \mathcal{T} \rangle$, nous avons $a = (i_j, i_{j+1}) \in \mathcal{A}$, $x^j(t_{j+1}^-) \in G(i_j, i_{j+1})$ et $x^{j+1}(t_{j+1}^+) \in R(a, x^j(t_{j+1}^-))$.

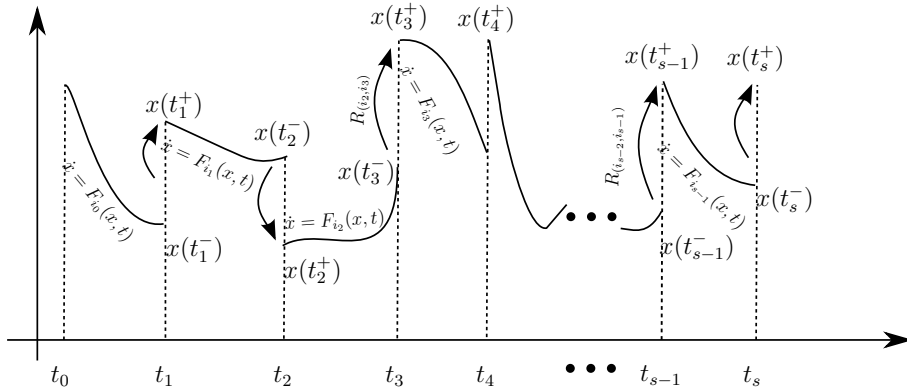


FIGURE 1.2 – Exécution d'un système hybride

1.1.3 Écriture formelle des systèmes à commutations

Par la suite, nous nous intéresserons à la classe des systèmes autonomes à commutations, qui est une sous-classe des systèmes dynamiques hybrides. À partir des définitions précédentes, on peut décrire les systèmes à commutations ainsi :

Définition 5 (Système à commutations [Lib03]). Soit une famille de fonctions suffisamment régulières $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, paramétrée par un ensemble d'applications $\sigma = \{i_j\}_{j=0}^{s-1}$ tel que $R(a, x^j(t_{j+1}^-)) = x^{j+1}(t_{j+1}^+)$ avec $x^j(t_{j+1}^-) = x^{j+1}(t_{j+1}^+)$.

On écrit alors le système à commutations comme :

$$\dot{x}(t) = F_{\sigma}(x(t)).$$

Si $\forall i \in \mathcal{I}$, la fonction F_i est affine, on a :

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma}x(t) + B_{\sigma} \tag{1.2}$$

Remarque 3. *Par cette définition, il faut comprendre qu'un système à commutations est un système hybride pour lequel il n'existe pas de discontinuité sur la variable continue x . De plus, on dit que ce système est dit autonome car il n'existe pas de commande continue.*

Par la suite, on lie l'ensemble d'applications σ à la loi de commutation $\sigma(t)$ définie de manière formelle par :

Définition 6 (Loi de commutations). *Une loi de commutations $\sigma(t)$, $\sigma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{I}$ est une fonction constante par morceaux qui prend ses valeurs dans l'ensemble \mathcal{I} d'indices de modes.*

On peut distinguer dans la littérature deux types de systèmes à commutations : ceux dont les commutations sont autonomes dans le sens où la commutation s'effectue car une condition de garde est remplie ($\exists (i, i') \in \mathcal{I}^2$ tel que $x \in G(i, i')$) et que la condition d'invariance ne l'est plus ($\exists (i, i') \in \mathcal{I}^2$ tel que $x \notin D_i$ et $x \in D_{i'}$) et ceux dont la commutation présente un aspect contrôlé, c'est-à-dire que l'état discret change en fonction d'une commande externe. Ce sera ce deuxième type qui nous intéressera dans les prochains chapitres de ce manuscrit.

Sauf mention contraire, on se placera dans le cas de systèmes commutés autonomes invariants dans le temps de la forme

$$\dot{x}(t) = f_i(x(t)) \quad t \in \mathbb{R}^+, i \in \mathcal{I} \quad (1.3)$$

avec l'état $x \in \mathbb{R}^n$ et $f_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ des champs de vecteurs. Par la suite, deux cas seront envisagés :

- soit les champs de vecteurs sont linéaires, c'est-à-dire $\forall i \in \mathcal{I}, f_i(x) = A_i x$

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) \quad t \in \mathbb{R}^+, i \in \mathcal{I}; \quad (1.4)$$

- soit les champs de vecteurs sont affines, c'est-à-dire $\forall i \in \mathcal{I}, f_i(x) = A_i x + B_i$

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i \quad t \in \mathbb{R}^+, i \in \mathcal{I}. \quad (1.5)$$

1.2 Modélisation des convertisseurs de puissance

La synthèse de lois de commande ainsi que la simulation nécessite une modélisation du système étudié. Celle-ci dépend de son utilisation finale : en effet, il n'est pas toujours nécessaire d'obtenir une modélisation précise, donc souvent complexe, d'un système. On peut se satisfaire d'un modèle simplifié si celui-ci répond parfaitement à nos attentes, c'est-à-dire, si par exemple une commande basée sur ce modèle et appliquée sur le système original répond à un cahier des charges prédéterminé. Dans cette partie, nous allons faire un état de l'art des modélisations existant pour les systèmes commutés et plus particulièrement pour les convertisseurs de puissance. Il faut cependant noter qu'il existe d'autres modèles (modèle moyen sur tiers de période, modèle harmonique, etc.) que nous ne développerons pas ici car ceux-ci n'ont été développés que pour des applications particulières.

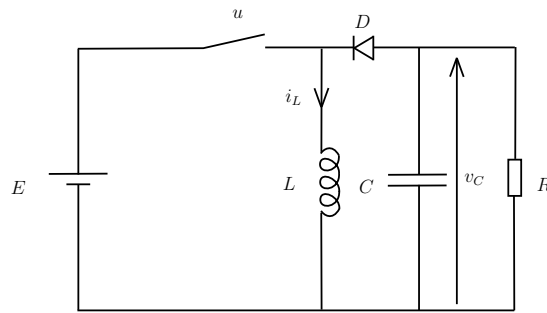


FIGURE 1.3 – Convertisseur buck-boost

Par la suite, chacune de ces modélisations sera illustrée dans le cas simple du convertisseur buck-boost en temps continu, représenté à la figure 1.3. Dans la suite de ce manuscrit, la modélisation d’un convertisseur multicellulaire sera aussi abordée et développée le cas échéant.

Notations et hypothèses : E est la tension de la source, L est une inductance, D est une diode, R et C sont respectivement la résistance et la capacité de charge. On note de plus i_L le courant circulant dans l’inductance et v_C la tension aux bornes de la charge RC . On fera l’hypothèse que le courant i_L passant dans l’inductance ne s’annule jamais, ce qui a pour effet qu’il reste, dans les conventions utilisées, toujours positif. Lorsque, dans les différents modèles, nous utilisons le terme “état du système”, celui-ci fait référence au vecteur $x = [i_L, v_C]^T$. Enfin le système possède un interrupteur : une commande $u = 0$ signifie que l’interrupteur est à l’état bloqué et $u = 1$ signifie qu’il est à l’état passant. Dans les modélisations qui suivent, le fonctionnement du convertisseur est idéalisé :

- interrupteur parfait : la commutation est instantanée, l’impédance est infinie quand l’interrupteur est ouvert, et est nulle quand il est fermé ;
- source et composants parfaits : la source de tension est constante, le condensateur et l’inductance ne possèdent pas de résistance parasite.

La complexité de la classe des systèmes étudiés provient de l’existence de composants rendant le système non-linéaire avec une dynamique pouvant être discontinue. De ce fait, il existe des modèles relativement simplifiés, ne prenant pas en compte les discontinuités. Il existe aussi des modélisations plus complexes modélisant le caractère hybride de ces systèmes et ainsi permettant la prise en compte des commutations dans l’élaboration des lois de commandes.

1.2.1 Systèmes affines commutés et modèle affine par morceaux (PWA)

La modélisation sous forme de systèmes affines commutés se base sur les lois de Kirchhoff pour établir un modèle exact du convertisseur. Les équations électriques du convertisseur buck-boost sont les suivantes :

interrupteur à l'état bloqué,
 $u = 0 :$

$$\begin{cases} L \frac{di_L}{dt} = v_c \\ C \frac{dv_c}{dt} = -i_L - \frac{v_c}{R} \end{cases}$$

interrupteur à l'état passant,
 $u = 1 :$

$$\begin{cases} L \frac{di_L}{dt} = E \\ C \frac{dv_c}{dt} = -\frac{v_c}{R} \end{cases}$$

On peut alors en déduire écrire :

$$\dot{x} = A_i x + B_i \quad \text{où } i = \begin{cases} 1 & \text{si } u = 0 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.6)$$

avec

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} & A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T & B_2 &= \begin{bmatrix} \frac{E}{L} & 0 \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (1.7)$$

L'écriture explicite sous la forme d'un système à commutations permet d'utiliser des outils puissants que nous allons voir par la suite, outils élaborés pour les systèmes hybrides, et particulièrement pour les systèmes à commutations. On remarque ici que, du fait que la commutation non contrôlée de la diode n'est pas prise en compte (grâce à l'hypothèse de la positivité du courant), on a un modèle à seulement deux modes. Il est important de remarquer que le système (1.6) n'entre pas dans la classe des systèmes linéaires à commutations, qui, comme on le verra dans la suite de ce chapitre, est très largement étudiée dans la littérature. De ce fait, en plus des concepts usuels nécessaires à l'étude des systèmes linéaires, on s'intéresse à ces mêmes concepts dans le cas des systèmes commutés affines.

En temps discret, une seconde manière de décrire les systèmes à commutations est sous une modélisation affine par morceaux (PWA) [BFM00]. Contrairement à la modélisation précédente, la loi de commutation n'apparaît pas explicitement dans ce formalisme, mais est incluse sous forme de partition de l'espace d'état. Pour un système possédant une partition en N polyèdres, on écrit le modèle PWA sous la forme :

$$x_{k+1} = \tilde{A}_j x_k + \tilde{B}_j v_k + \tilde{f}_j \quad \text{pour } \begin{bmatrix} x_k \\ v_k \end{bmatrix} \in \Omega_k, \quad j \in \mathcal{S} \quad (1.8)$$

où $\{\Omega_k\}_{k=1}^N$ est une partition de l'espace d'état et d'entrée et où $\tilde{A}_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{B}_j \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\tilde{f}_j \in \mathbb{R}^n$ définissent les sous-systèmes avec $j \in \mathcal{S}$ avec $\mathcal{S} = \{1, \dots, N\}$. v est une entrée exogène.

1.2.2 Modèle moyen

Le modèle moyen a été mis en oeuvre pour s'affranchir du caractère discontinu des commutations. Il s'agit d'approximer le fonctionnement global du système hybride par un modèle différentiel unique. L'une des premières mentions [MC76] de moyenne d'état se retrouve dans la littérature de l'électronique de puissance, où cette modélisation est fortement utilisée, encore de nos jours. En effet, le caractère périodique ou pseudo périodique

des commandes rend la notion de moyennisation intuitive et n'a donc pas nécessité au début, d'outils mathématiques perfectionnés. Ces outils formels existaient pourtant depuis le début du XIX^e siècle [Lap05] mais la relation entre ces outils et le modèle moyen ne fut établie que beaucoup plus tard [KBBL90]. Ce modèle a l'avantage de simplifier l'étude des systèmes commutés, mais occulte cependant nombres de phénomènes qui peuvent intéresser les concepteurs de commande et être important lors de simulation.

Voici brièvement comment est construit un modèle moyen [Zay01]. Soit un système représenté sous la forme dite standard $\dot{x}(t) = \varepsilon f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ avec ε un "petit" paramètre. Pour une fonction T -périodique, la moyenne de f est l'application $f_0(x)$ définie par :

$$f_0(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.9)$$

On définit aussi la moyenne glissante f_T de f comme :

$$f_T(t, x) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\tau, x) d\tau \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.10)$$

De ces définitions, on peut alors définir le modèle moyen du système :

$$\dot{\bar{x}} = \varepsilon f_0(\bar{x}) \quad \bar{x}(t_0) = x_0 \quad (1.11)$$

avec \bar{x} le vecteur d'état moyen et le modèle moyen glissant

$$\dot{\tilde{x}} = \varepsilon f_T(\tilde{x}) \quad \tilde{x}(t_0) = x_0 \quad (1.12)$$

avec \tilde{x} le vecteur d'état moyen glissant. Sous certaines conditions pouvant être vérifiées dans le cas des convertisseurs de puissance, [SV85] montre que, pourvu que ε est faible, les solutions des modèles standard, moyen et glissant sont proches en tout instant.

La transposition de ces résultats aux systèmes hybrides n'est a priori pas évidente. Cependant, dans le cas où il existe un nombre fini de sauts bornés sur un intervalle de temps fini (pas de phénomène Zeno), [Fil88] montre que les résultats précédents sont applicables à ces systèmes. Dans le cas d'une ouverture et fermeture périodique de l'interrupteur (une ouverture et une fermeture ayant lieu sur une période T), [KBBL90] montre qu'en considérant une commande

$$\bar{u} = \int_t^{t+T} u(\tau) d\tau \in [0, 1], \quad (1.13)$$

c'est-à-dire dans le domaine de commande convexifié, on peut écrire le modèle moyen du système (1.6) ainsi :

$$\dot{\bar{x}} = (A_1 \bar{x} + B_1)(1 - \bar{u}) + (A_2 \bar{x} + B_2) \bar{u}. \quad (1.14)$$

1.2.3 Modèle Mixte Logique Dynamique (MLD)

Afin de modéliser des systèmes pour lesquels coexistent des règles logiques, des dynamiques ainsi que des contraintes, la modélisation MLD est introduite par [BM99]. La description MLD est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Ax(t) + B_1 v(t) + B_2 \delta(t) + B_3 \zeta(t) \\ y(t) = Cz(t) + D_1 v(t) + D_2 \delta(t) + D_3 \zeta(t) \\ E_2 \delta(t) + E_3 \zeta(t) \leq E_1 v(t) + E_4 z(t) + E_5 \end{cases} \quad (1.15)$$

avec $z = [z_c, z_\ell]^T$ le vecteur d'état du système, tel que z_c sont les états continus et z_ℓ les états logiques. La sortie y et la commande exogène v se décomposent de la même manière. $\delta \in \{0, 1\}^{r_\ell}$ et $\zeta \in \mathbb{R}^{r_c}$ sont des variables auxiliaires logiques et continues.

Cette modélisation possède l'avantage de prendre en compte des contraintes sur le système de manière explicite.

1.2.4 Systèmes linéaires de complémentarité (LCS)

Les discontinuités provenant des commutations posent des problèmes d'un point de vue synthèse de commande mais aussi d'un point de vue simulation. [vS98] propose une modélisation très performante de l'analyse de ces discontinuités : la modélisation sous forme de système linéaire de complémentarité. Les LCS sont des systèmes commutant entre les différents modes sur la base d'inégalités de contraintes. À l'instar des modèles MLD, la description des LCS utilise des variables auxiliaires. Dans le cas du convertisseur buck-boost (1.3), le modélisation sous forme LCS donne :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bv + FE \\ y = Cx + Dv + GE \\ 0 \leq y \perp v \geq 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ D = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

où $v = [v_S, i_D]^T$ et $y = [i_S, -v_D]^T$. i_D et v_D représentent respectivement le courant et la tension aux bornes de la diode et i_S et v_S , le courant et la tension aux bornes de l'interrupteur. \perp représente la complémentarité des variables, c'est-à-dire que la relation $0 \leq y \perp v \geq 0$ signifie que lorsque y est positif, v est nécessairement nul et lorsque v est positif, y est nul.

Ce formalisme a donné lieu à de nombreux travaux, en particulier concernant les méthodes de résolutions numériques [AB08] de ces systèmes.

1.2.5 Bond Graph

Le formalisme Bond Graph [Bui93] n'est pas à proprement parlé une modélisation d'un système hybride : c'est un outil graphique permettant de fournir une description mathématique du système en se basant sur des concepts énergétiques. Cet outil, fondé sur les lois de la physique, est utilisé entre autres, pour représenter les convertisseurs de puissance. L'utilisation des Bond Graph pour représenter ces systèmes a conduit à des solutions élégantes pour construire automatiquement le modèle actif avec le basculement d'interrupteurs. Ce formalisme permet de modéliser de manière unifiée des systèmes de nature différente (électronique, mécanique, hydraulique, etc.) mais régis par des équations similaires. Les bond graphs, en se basant sur le principe de conservation de la puissance,

représentent les transferts d'énergie dans le système considéré. La modélisation par bond graph du convertisseur buck-boost (1.3) est donnée à la figure 1.4.

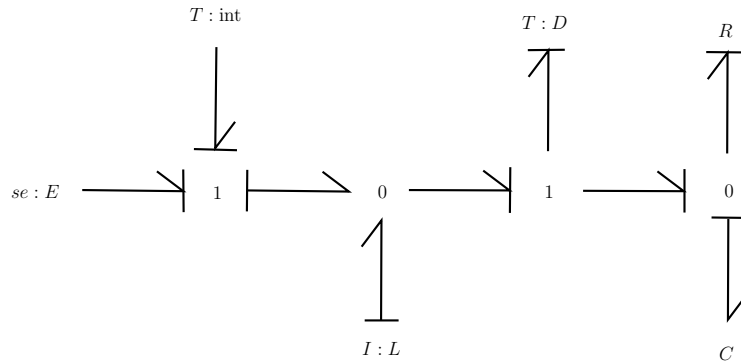


FIGURE 1.4 – Modélisation du buck-boost sous bond graph

$se : E$ représente une source d'effort, dans notre cas la source de tension E , $I : L$ est un élément d'induction, l'inductance dans notre cas. $T : int$ et $T : D$ sont des éléments de transition, l'interrupteur et la diode. La jonction 0 représente un noeud du système pour lequel tous les efforts des liens sont égaux, ce qui revient dans le cas électrique à dire que la somme des flux des liens connectés au noeud est nulle. La jonction 1 est la forme duale de la jonction 0, c'est-à-dire pour laquelle les notions d'efforts et de flux sont inversées.

1.2.6 Choix du modèle

Cette partie nous a permis de recenser un grand nombre de modèles utilisés pour représenter les convertisseurs de puissance. Chacun des modèles possède ses particularités et peut être envisagé selon l'approche désirée.

L'utilisation du modèle moyen requiert du système un fonctionnement pseudo-périodique. En cela, la prise en compte de changements de mode autonomes ou de contraintes ne peut être faite. De plus, la moyennisation implique certes que le modèle est continu, mais celui-ci peut devenir fortement non-linéaire rendant alors son étude complexe.

Les modèles MLD et LCS permettent quant à eux de prendre en compte des contraintes, mais leur formalisme est relativement complexe.

Le modèle PWA considère des changements de mode déclenchés par le franchissement par l'état des frontières de domaines prédéfinis. De ce fait, la loi de commutations est incluse directement dans la modélisation ne permettant pas l'étude de sa stabilisation du système.

L'utilisation d'un modèle système à commutations permet la prise en compte de contraintes tout en possédant un formalisme relativement simple. On verra dans la suite de ce chapitre que la littérature concernant les systèmes à commutations est très étendue, en particulier celle concernant les systèmes dont les différentes dynamiques sont linéaires en l'état.

1.3 Stabilité des systèmes

Bien que l'ensemble de ce mémoire soit consacré à l'étude des systèmes à commutations, nous allons tout d'abord rappeler la notion de stabilité dans le cas classique. En effet, nous verrons par la suite que la plupart des résultats obtenus concernant la stabilité des systèmes à commutations dérivent de résultats obtenus pour les systèmes continus.

1.3.1 Stabilité classique

Dans cette partie, nous allons définir formellement les différentes formes de stabilité dans le cas des systèmes non linéaires. Considérons un système autonome

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.17)$$

avec $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction localement Lipschitz. On définit comme point d'équilibre du système (1.17) les points vérifiant la définition suivante :

Définition 7 (Point d'équilibre). *Soit le système $\dot{x} = f(x)$, on dit que x_{eq} est un point d'équilibre si $f(x_{eq}) = 0$.*

Supposons que le point d'équilibre du système (1.17) est l'origine. Cette supposition n'induit pas de perte de généralité car quelque soit l'équilibre du système, il existe toujours un changement de variable permettant de se ramener à l'origine. On peut alors donner la définition suivante :

Définition 8 (Stabilité). *Le point d'équilibre $x_{eq} = 0$ du système (1.17) est :*

- **stable** si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ tel que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq 0 ; \quad (1.18)$$

- **instable** s'il n'est pas stable ;
- **asymptotiquement stable** s'il est stable et que l'on peut choisir $\delta > 0$ tel que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 ; \quad (1.19)$$

- **globalement asymptotiquement stable** si la relation précédente est vérifiée $\forall x(0) \in \mathbb{R}^n$.

où x est la solution de (1.17).

Les différents cas de stabilité sont illustrés à la figure 1.5.

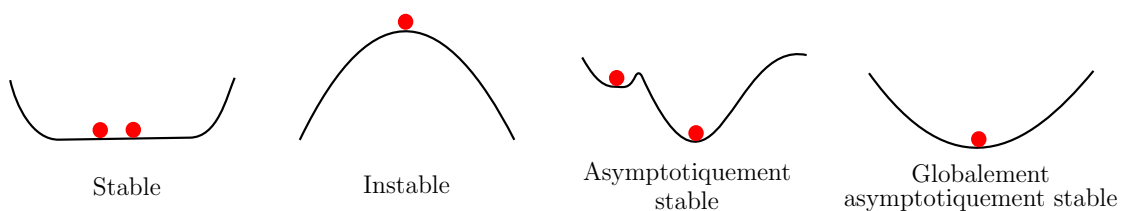


FIGURE 1.5 – Les différents cas d'équilibre

En considérant l'exemple d'un pendule pesant, il est aisé de montrer [Kha01] que la notion de stabilité peut être liée de manière étroite à l'existence d'une fonction énergie décroissante décrivant le système. Le théorème suivant établit formellement ce lien, où V fera office de fonction énergie.

Théorème 1. *Théorème de Lyapunov pour la stabilité locale :*

Soit le système (1.17), Ω un voisinage de O et $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ un état d'équilibre. Une fonction $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 est dite fonction de Lyapunov si :

- $V(x)$ est définie positive dans le voisinage Ω ;
- $\dot{V}(x) \leq 0$, le long de toutes les trajectoires dans Ω

alors l'état d'équilibre $x = 0$ est localement stable. De plus, si :

- $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in \Omega, x \neq 0$

alors l'état d'équilibre $x_{eq} = 0$ est localement asymptotiquement stable.

On garantit avec ce théorème que le système est stable dans la région considérée si l'on est capable de trouver une fonction de Lyapunov dans cette région. De plus, on peut spécifier la région où la stabilité est assurée. C'est donc un théorème très puissant. Toute la difficulté réside à trouver cette fonction V .

Afin d'obtenir une déclinaison globale de la stabilité, il suffit de remplacer, dans le théorème précédent, le voisinage Ω par \mathbb{R}^n et d'ajouter la condition suivante :

- V est radialement non bornée : $V(x) \rightarrow \infty$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$.

Remarque 4. *Dans le cas d'un système linéaire $\dot{x} = Ax$, on obtient une formulation très simple de la stabilité asymptotique sous forme d'équivalence :*

- le système $\dot{x} = Ax$ est asymptotiquement stable ;
- A est Hurwitz ;
- $\forall Q = Q^T > 0, \exists P = P^T > 0$ telle que $A^T P + P A = -Q$.

Cette théorie a donné naissance à un grand nombre de résultats dans la littérature. En effet, on peut remarquer que les théorèmes précédents requièrent l'existence d'une fonction de Lyapunov comme condition suffisante de stabilité. On peut en partie répondre au problème inverse grâce aux *converse theorems* [Kra63, Hah67] qui donnent des conditions d'existence d'une fonction de Lyapunov pour des systèmes particuliers. D'autre part, il existe de nombreux systèmes où l'on peut exhiber une fonction de Lyapunov rendant le système stable, mais ne permettant pas de conclure quant à une stabilité asymptotique, le principe d'invariance [LaS67] de LaSalle peut alors être utile.

1.3.2 Stabilité des systèmes à commutations

Avant de donner un bref aperçu des outils existants pour l'analyse de la stabilité des systèmes à commutations, il est important de rappeler que cette étude, même pour des systèmes commutés linéaires de la forme (1.4), est beaucoup plus complexe que celle des systèmes linéaires sans commutations. Une excellente étude de Liberzon et Morse [LM99] met en exergue les problèmes que l'on peut rencontrer. On peut donner deux exemples

particulièrement représentatifs. Le premier est celui de deux systèmes stables pour lesquels il est possible de trouver une loi de commutations rendant le système global instable. Le second est celui de deux systèmes instables qui peuvent donner un comportement stable, avec un choix judicieux de loi de commutations.

Dans le cas des systèmes à commutations, l'analyse de la stabilité s'effectue sous l'une ou l'autre hypothèse concernant la loi de commutations σ :

- soit celle-ci est arbitraire, c'est-à-dire qu'aucune contrainte ne lui est imposée ;
- soit celle-ci se fait sous contraintes (dans le domaine temporel ou dans le domaine de l'espace d'état), c'est-à-dire une loi de commutations restreinte.

1.3.2.1 Stabilité sous une loi de commutations arbitraire

Il est évident que dans ce cas, on considérera uniquement les systèmes dont les sous-systèmes sont asymptotiquement stables. En effet, il suffirait sinon de choisir une loi constante gardant un sous-système instable actif pour garantir l'instabilité du système global. Cependant, bien que cette condition soit nécessaire, elle n'est pas suffisante, hormis pour quelques cas particuliers tels que :

- toutes les matrices A_i du système (1.4) sont commutantes par paires [NB94] : $A_i A_j = A_j A_i, \forall i, j \in \mathcal{I}$;
- les matrices A_i sont symétriques [ZL04] : $A_i = A_i^T, \forall i \in \mathcal{I}$;
- les matrices A_i sont normales [ZXLM06] : $A_i A_i^T = A_i^T A_i, \forall i \in \mathcal{I}$.

Afin d'obtenir des conditions de stabilité pour les systèmes à commutations, diverses approches existent. Historiquement, l'une des premières approches a été l'utilisation de résultats sur les inclusions différentielles [MP89]. Ces résultats montrent que l'existence d'une fonction de Lyapunov quasi-quadratique $V(x) = x^T R(x)x$ implique la stabilité de l'inclusion différentielle, ou de manière équivalente celle de son convexifié. Cependant, ces résultats ne peuvent être appliqués directement du fait de la trop grande complexité numérique de la recherche de cette fonction $R(x)$. De ce fait, de nombreuses études ont été faites sur la recherche d'une fonction de Lyapunov quadratique commune à tous les sous-systèmes.

Approche par Fonctions de Lyapunov Quadratiques Communes (CQLF)

De manière analogue au cas d'un système linéaire vu précédemment, on peut exprimer simplement une condition suffisante de stabilité pour le cas des systèmes linéaires à commutations.

Théorème 2. *Soit le système (1.4). S'il existe une matrice $P = P^T > 0$, solution des inégalités matricielles linéaires (LMI) [BGFB94] suivantes*

$$A_i^T P + P A_i < 0, \forall i \in \mathcal{I} \quad (1.20)$$

alors la fonction $V(x) = x^T P x$ est dite fonction de Lyapunov pour le système (1.4) et le point d'équilibre $x_{eq} = 0$ est globalement asymptotiquement stable.

Toute la complexité est alors de déterminer cette matrice P satisfaisant les inégalités (1.20). Deux approches ont été faites, de manière parallèle :

1. D'une part, par Shorten et Narendra [SN99, SNM03] qui proposent, dans le cas d'un système commuté de dimension deux une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une CQLF. Considérons le faisceau paramétré de deux matrices $\varphi_\alpha(A_1, A_2) = \alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2$ avec $\alpha \in [0, 1]$. On dit que ce faisceau de matrices est Hurwitz si ses valeurs propres sont dans le demi plan ouvert gauche pour tout $0 \leq \alpha \leq 1$. Le théorème suivant peut alors être formulé :

Théorème 3 ([SN99, SNM03]). *Soit A_1 et A_2 deux matrices Hurwitz dans \mathbb{R}^2 . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- une CQLF pour (1.4) existe avec A_1 et A_2 pour sous-systèmes ;
- les faisceaux de matrices $\varphi_\alpha(A_1, A_2)$ et $\varphi_\alpha(A_1, A_2^{-1})$ sont Hurwitz ;
- les matrices $A_1 A_2$ et $A_1 A_2^{-1}$ ne possèdent pas de valeurs propres à partie réelle négative.

Remarque 5. *Ces résultats sont à liés à l'approche par modèle moyen utilisée dans [WPD94].*

Une extension au cas général n'est pas immédiate. Il a cependant été prouvé [SN02] qu'une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une CQLF pour un système composé d'un nombre fini de sous-systèmes de dimension deux est qu'il existe une CQLF pour chaque triplet $\{A_i, A_j, A_k\}$, $i \neq j \neq k$, pour tout $i, j, k \in \mathcal{I}$.

2. D'autre part, Liberzon *et al.* [LHM99] proposent une condition suffisante fondée sur l'algèbre de Lie. Ces travaux sont à liés à ceux de Gurvits [Gur95] où un lien entre la stabilité asymptotique d'un système linéaire commuté et la structure de l'algèbre de Lie associé à ses éléments est établi. Liberzon [LHM99] donne un résultat plus général en montrant qu'il suffit seulement que l'algèbre de Lie généré par l'ensemble des matrices d'état A_i soit solvable pour qu'il existe une CQLF.

À l'inverse, il est aussi intéressant d'établir sous quelles conditions il n'existe pas de CQLF. En utilisant les Inégalités Matricielles Linéaires et en formulant le problème dual, on obtient le résultat suivant :

Théorème 4 ([KP87]). *Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

- $\exists P = P^T > 0$ telle que $A_i^T P + P A_i < 0$, $\forall i \in \mathcal{I}$;
- $\nexists X_i \geq 0$ (au moins un des X_i est non nul), tels que $\sum_{i=1}^m A_i X_i + X_i A_i^T > 0$.

En d'autres termes, si l'on est capable de trouver une famille de matrices X_i respectant la deuxième proposition, il ne peut pas exister de CQLF pour le système (1.4).

Approche par fonctions de Lyapunov quadratiques commutées

Bien que l'existence d'une CQLF permet d'analyser de manière simple la stabilité du système, cette approche est, dans le cas général, trop conservative. [Lib03] donne plusieurs

exemples de systèmes ne possédant pas de CQLF mais pour lesquels la stabilité exponentielle sous une loi de commutations arbitraire est démontrable. De ce fait, il est intéressant de chercher des classes de fonctions de Lyapunov plus générales. Cette recherche a permis d'obtenir la classe des fonctions de Lyapunov commutées [DRI02]. Le principe sur lequel se base cette recherche est le suivant : sachant que chaque sous-système i est stable, il existe nécessairement une matrice définie positive P_i permettant de vérifier l'équation de Lyapunov indépendamment pour chaque sous-système. L'idée est alors de construire une fonction de Lyapunov pour le système global de la forme

$$V(t, x(t)) = x^T(t)P_{\sigma(t)}x(t). \quad (1.21)$$

On remarque que la fonction de Lyapunov est dépendante de la loi de commutation $\sigma(t)$. Plus précisément, [JR98] donne une procédure numérique pour la recherche de fonctions de Lyapunov quadratiques commutées de la forme $V(x) = x^T P_i x$, $x \in \Omega_i$ pour que les domaines Ω_i sont des polyèdres, avec $P_i = P_i^T$, $\forall i \in \mathcal{I}$. Cette approche permet donc de relaxer les conditions de stabilité données par l'existence d'une CQLF. En effet, l'utilisation de différentes matrices P_i selon la région Ω_i donne une plus grande flexibilité dans la définition de la fonction de Lyapunov. Il est de plus important de remarquer que les matrices P_i ne sont plus choisies pour être définies positives dans tout l'espace d'état, il suffit seulement de vérifier que la relation $x^T P_i x > 0$ est vérifiée pour $x \in \Omega_i$ pour tout $i \in \mathcal{I}$.

L'approche par fonctions de Lyapunov quadratiques commutées appartient à l'ensemble des techniques utilisant les fonctions de Lyapunov Multiples (MLF). On s'intéressera aux MLF dans le cas de la stabilité pour une loi de commutations restreinte, mais elles peuvent très bien être utilisées dans le cas de commutations arbitraires.

1.3.2.2 Stabilité sous une loi de commutations restreinte

Parfois, il est impossible de montrer qu'un système commuté est stable, soit parce que l'on ne sait pas construire une fonction de Lyapunov permettant de prouver la stabilité, soit parce que le système n'est, par nature, pas stable pour toutes les lois de commutations. Dans ce cas, il peut être intéressant de limiter le choix dans les lois de commutations afin de garantir, pour un ensemble de lois restreint, la stabilité du système global. De plus, les limitations que l'on peut imposer sont parfois dues directement à des limitations physiques du système considéré, par exemple, la bande passante d'un actionneur.

Restriction temporelle

L'idée sur laquelle cette restriction se fonde est la suivante : si l'on considère un système commuté constitué de sous-systèmes stables et qu'on maintient le système dans chacun de ces modes suffisamment longtemps, alors l'énergie du système global peut décroître. En effet, si on s'intéresse aux exemples donnés dans [LM99, DBPL00], on constate que l'instabilité est provoquée par la commutation "trop rapide" entre les deux sous-systèmes, c'est-à-dire que l'énergie n'a pas le temps d'être dissipée dans l'un ou l'autre des sous-systèmes stables. Il suffit donc de garantir une durée de séjour minimum dans chacun des modes, durée avant laquelle aucune commutation ne doit se faire. La première apparition

de cette notion de commutation peu rapide apparaît dans la littérature des systèmes lentement variant dans le temps. Moyennant certaines hypothèses, [Ros63] montre que pour un système autonome de la forme $\dot{x} = A(t)x$, s'il existe une borne suffisamment petite sur $\|\dot{A}(t)\|$ alors le système variant est stable. Ceci revient, dans le cas des systèmes commutés, à limiter le nombre de commutations sur une période donnée ou encore à imposer un temps de séjour minimum par mode. De nombreuses études ont été effectuées dans le cas des systèmes commutés sur ce problème, la plus notable étant celle de [HM99].

Définition 9 (Temps de séjour [Mor96]). *Une constante positive $\tau_d \in \mathbb{R}$ est nommée temps de séjour d'un signal de commutation $\sigma(t)$ si la durée entre deux instants de commutations successifs est toujours supérieure ou égale à τ_d .*

Si on impose que la durée minimale entre chaque instant de commutation est supérieure à cette constante τ_d choisie suffisamment grande, alors [Mor96] a montré que le système commuté (1.4) est stable, pourvu que les sous-systèmes sont stables. Cependant, il apparaît qu'imposer un temps de séjour entre chaque commutation est trop restrictif. En effet, même si parfois cette condition n'est pas respectée, on comprend bien que le système n'en sera pas déstabilisé pour autant. De fait, on utilise alors la notion de temps de séjour moyen :

Définition 10 (Temps de séjour moyen [HM99]). *Une constante positive τ_a est nommée temps de séjour moyen pour un signal de commutation $\sigma(t)$ si la relation*

$$N_{\sigma(t,\tau)} \leq N_0 + \frac{t - \tau}{\tau_a}$$

est vérifiée pour tout $t \geq \tau \geq 0$ et pour un scalaire $N_0 \geq 0$ (appelé limite de commutations), où $N_{\sigma(t,\tau)}$ signifie le nombre de commutations pour un signal de commutations $\sigma(t)$ donné, sur un intervalle (τ, t) .

[HM99] démontre alors le résultat suivant :

Théorème 5. *Supposons que tous les sous-systèmes de (1.4) sont exponentiellement stables. Il existe alors un scalaire $\tau_a > 0$ tel que le système commuté est exponentiellement stable si le temps de séjour moyen entre commutations est supérieur à τ_a .*

Il est important de remarquer que pour les systèmes physiques, du fait de la bande passante inhérente à chaque actionneur, cette hypothèse de temps de séjour minimum est naturellement vérifiée. Cependant, on ne peut pas garantir directement que ce temps de séjour soit suffisant pour assurer la stabilité, et ce n'est, en général, pas le cas.

Restriction dans le domaine d'état

Dans le cas de la restriction du domaine d'état, on va s'intéresser à des lois de commutations qui sont régies par le vecteur d'état. C'est-à-dire que pour un état x donné, la commutation sera contrainte vers un mode (éventuellement un ensemble de modes) donné. De manière générale, l'étude de stabilité sous ce type de restriction sera effectuée via l'utilisation de Fonctions de Lyapunov Multiples (MLF). L'analyse de stabilité des

systèmes commutés par l'utilisation de MLF est l'un des domaines les plus étudiés de la littérature [LM99, DBPL00, SWM⁺07] des systèmes commutés. Le principe est d'utiliser une famille de fonctions nommées pseudo-fonctions de Lyapunov $\{V_i, i \in \mathcal{I}\}$, fonctions associées à chacun des champs de vecteurs $f_i(x) = A_i x$, pour démontrer la stabilité.

Définition 11 (Pseudo-fonction de Lyapunov). *Une pseudo fonction de Lyapunov pour le système (1.3) et un point d'équilibre $x_{eq} \in \Omega_i \subset \mathbb{R}^n$ est une fonction à valeurs réelles $V_i(x)$ définie sur une région Ω_i de l'espace satisfaisant les conditions suivantes :*

- *définie positive : $V_i(x_{eq}) = 0$ et $V_i(x) > 0$ pour $x_{eq} \neq x \in \Omega_i$. Dans le cas des systèmes linéaires autonomes, on aura $x_{eq} = 0$;*
- *dérivée définie non-positive : pour $x \in \Omega_i$*

$$\dot{V}_i(x) = \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} f_i(x) \leq 0$$

On peut alors écrire le résultat suivant :

Théorème 6. [PD91] *Supposons que $\bigcup_i \Omega_i = \mathbb{R}^n$. Pour $k < j$, on pose $t_k < t_j$ les instants de commutations pour lesquelles $\sigma(t_k) = \sigma(t_j)$, et supposons qu'il existe un réel $\gamma > 0$ tel que la relation*

$$V_{\sigma(t_j)}(x(t_{j+1})) - V_{\sigma(t_k)}(x(t_{k+1})) \leq -\gamma \|x(t_{k+1})\|^2 \quad (1.22)$$

est vérifiée pour toute trajectoire x du système $\dot{x} = f_{\sigma(t)}(x)$, avec $f_{\sigma(t)}(x) = A_{\sigma(t)}x$, et pour tout signal de commutation σ tel que $\sigma(t_j) = \sigma(t_k), \forall (t_j, t_k)$. Le système $\dot{x} = f_{\sigma(t)}(x)$, avec $f_{\sigma(t)}(x) = A_{\sigma(t)}x$ et la loi de commutations $\sigma(t)$, est globalement asymptotiquement stable.

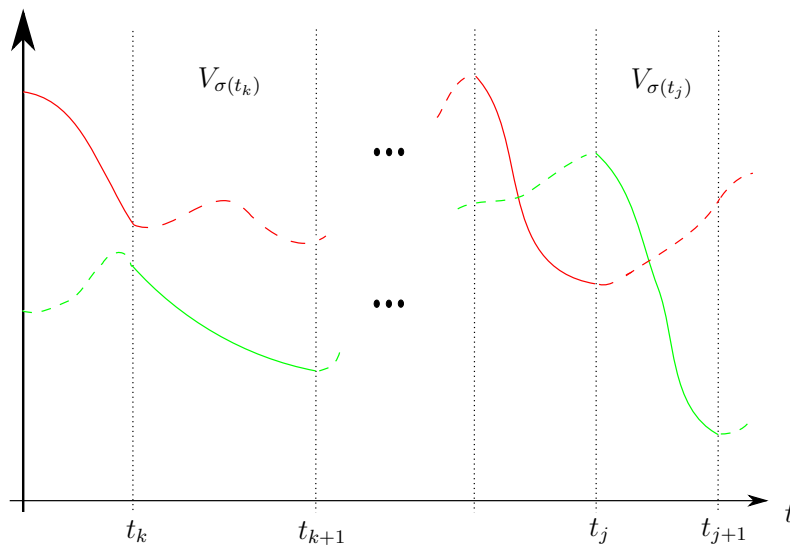


FIGURE 1.6 – Fonctions de Lyapunov Multiples

Le théorème 6 est illustré à la figure 1.6.

Il existe de nombreuses extensions à ce résultat. En particulier, on peut citer les travaux de Branicky [Bra98], où ce résultat est généralisé au cas des systèmes commutés non-linéaires. De plus, on peut considérer [Bra98, GC06] comme valeurs de comparaison de V_i dans (1.22) non pas les instants de sortie de modes i , mais les entrées dans le mode i .

1.4 Stabilité entrée-état (ISS)

Les propriétés de stabilité dont on a parlé à la section précédente, sont établies dans le cas de systèmes autonomes, c'est-à-dire pour lesquels une entrée exogène n'est pas considérée. Dans le cas des systèmes linéaires, il a été montré [Son98] qu'un système globalement asymptotiquement stable possède nécessairement la propriété d'entrée bornée, sortie bornée. Cependant, dans le cas non-linéaire il est simple de trouver [Son06] un système non-linéaire qui est asymptotiquement stable avec une entrée exogène nulle et dont les solutions divergent pour une entrée non-nulle, même si celle-ci converge vers zéro. De la volonté de caractériser la stabilité des systèmes vis-à-vis d'une entrée exogène est né le concept de stabilité entrée-état (ISS) [Son89]. Nous allons définir un certain nombre de notions qui nous seront utiles dans la suite de ce manuscrit.

Définition 12 (Fonctions de classe \mathcal{N}_0 , \mathcal{K} et \mathcal{K}_∞). *Une fonction de classe \mathcal{N}_0 est une fonction $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue, non-décroissante et satisfaisant $\alpha(0) = 0$. De plus, α est une fonction \mathcal{K} si α est strictement croissante. α est une fonction \mathcal{K}_∞ si α est une fonction \mathcal{K} non bornée.*

Définition 13 (Fonction de classe \mathcal{KL}). *Une fonction de classe \mathcal{KL} est une fonction $\beta : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\beta(\cdot, t) \in \mathcal{K}$ pour tout $t \geq 0$ fixé et $\forall r \geq 0$, $\beta(r, t)$ est décroissante par rapport à r et $\beta(r, t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow +\infty$.*

Pour les définitions qui suivent, on supposera que le système considéré est un système non-linéaire de la forme

$$\dot{x} = f(x, v) \tag{1.23}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ l'état et $v \in \mathbb{R}^p$ le vecteur d'entrées exogènes et f une fonction localement lipschitzienne. On notera x_0 la condition initiale de l'état. De plus, on notera $x(t, x_0, \nu)$ la solution de (1.23).

Définition 14 (0-GAS). *Le système (1.23) est 0-Globalement Asymptotiquement Stable (0-GAS), s'il existe une fonction $\beta \in \mathcal{KL}$ telle que $\|x(t, x_0, 0)\| \leq \beta(\|x_0\|, t)$, $\forall x_0$.*

Définition 15 (AG). *Le système (1.23) possède la propriété de Gain Asymptotique (AG), s'il existe une fonction $\alpha \in \mathcal{N}_0$ telle que $\forall v \in \mathbb{R}^p \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \|x(t, x_0, v)\| \leq \alpha(\|v\|_\infty)$.*

[SW96] a montré qu'un système 0-GAS qui possède la propriété AG est ISS, c'est-à-dire :

Définition 16 (ISS). *Le système (1.23) est ISS s'il existe des fonctions $\beta \in \mathcal{KL}$ et $\gamma \in \mathcal{K}$ telles que $\|x(t, x_0, v)\| \leq \beta(\|x_0\|, t) + \gamma(\|v\|_\infty)$, $\forall v \forall x_0$.*

Cela signifie que les trajectoires d'un système ISS restent toujours incluses dans une boule dont le rayon est paramétré par la condition initiale x_0 de l'état et par la norme infinie $\|v\|_\infty$ de l'entrée. Dans le cas d'un système linéaire stable, on peut écrire

$$\|x(t, x_0, v)\| \leq \beta(t)\|x_0\| + \gamma\|v\|_\infty$$

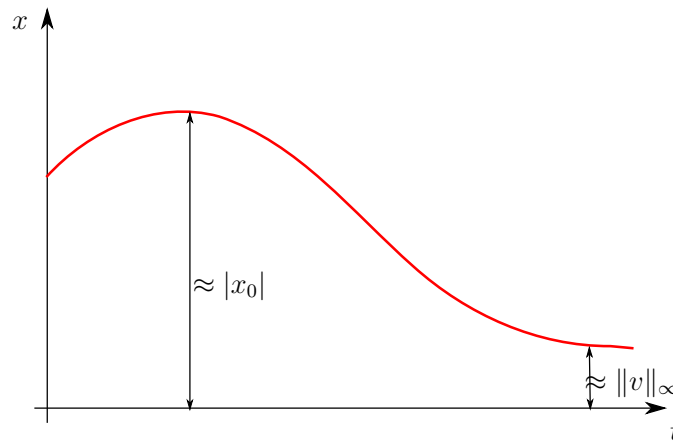


FIGURE 1.7 – [Son06] Le dépassement et le comportement asymptotique sont inclus dans l’ISS

avec $\beta(t) = \|e^{tA}\| \rightarrow 0$ et $\gamma = \|B\| \int_0^\infty \|e^{sA}\| ds < \infty$, c’est-à-dire un terme évanescent lié à la condition initiale et un terme lié à l’excitation de l’entrée. La figure 1.7 illustre ce point.

La formulation ISS a de plus l’avantage de présenter un formalisme identique quelque soit l’entrée considérée : v peut aussi bien représenter une commande injectée dans le système que des perturbations extérieures ou bien même des variations paramétriques. De ce fait, cette formulation est un outil très puissant, largement utilisé dans la littérature. [SW96] établit l’équivalence entre l’ISS et un grand nombre de propriétés de stabilité pour les systèmes en temps continus. [KT94] adapte pour la première fois la notion d’ISS au cas des systèmes en temps discret, et ces résultats sont généralisés dans [JW01]. Pour le cas des systèmes non-linéaires commutés en temps continu admettant une condition de temps de séjour minimum par mode, [XWL01] montre qu’une condition suffisante pour que le système global soit ISS est que chacun des modes composant le système est ISS. [VCL07] étend cette condition au cas des systèmes commutés avec un temps de séjour moyen par modes. Il est de plus montré que ces systèmes admettent des propriétés ISS encore plus fortes. En temps discret, [MRS06, GK08] utilisent la formulation ISS afin d’analyser la robustesse de schémas de commande prédictive vis-à-vis de perturbations extérieures.

Dans le chapitre suivant, nous allons utiliser la formulation ISS afin de caractériser le comportement des trajectoires d’un système affine commuté par rapport à un temps d’échantillonnage, c’est-à-dire avec un temps de séjour minimum par mode imposé, ce temps pouvant être variable d’une période d’échantillonnage sur l’autre. On considérera de plus grâce à cette formulation l’ajout d’incertitudes paramétriques.

1.5 Stabilisation

L’analyse de la stabilité est un sujet important à étudier pour un système. Cependant, un autre problème, d’une importance toute aussi grande, est de savoir s’il existe une loi de commutation permettant de stabiliser le système, ou même d’amener son état à un point

de fonctionnement choisi. De plus, une fois démontrée l'existence d'une telle loi, il est alors intéressant de synthétiser celle-ci. Le problème de la stabilisation pour les systèmes commutés est différent si les sous-systèmes sont linéaires ou s'ils sont affines en l'état.

Nous considérons dans cette section, les systèmes de la forme (1.3) avec une loi de commutations $\sigma(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{I}$.

À l'instar de la stabilité, il existe différentes sortes de stabilisabilité. L'une d'elle, largement étudiée, est la stabilisabilité quadratique, dont voici la définition :

Définition 17 (Stabilisabilité quadratique). *Le système (1.3) est dit quadratiquement stabilisable s'il existe une fonction définie position $V(x) = x^T P x$, un nombre positif ϵ et une loi de commutations $\sigma(x, t)$ tels que la relation*

$$\frac{d}{dt}V(x) < -\epsilon x^T x$$

est vérifiée pour toutes les trajectoires du système (1.3).

Afin d'établir la stabilisabilité du système et de pouvoir synthétiser une stratégie de commutations permettant de stabiliser le système, une approche [Art83] issue de la théorie de la commande non-linéaire est souvent utilisée : s'il existe une fonction, dite fonction de commande de Lyapunov (CLF) pour le système considéré, alors celui-ci est stabilisable. Avant de préciser la définition d'une CLF, rappelons la notion de fonction propre :

Définition 18 (Fonction propre). *Une fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite propre si, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $V^{-1}([0, a]) = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq V(x) \leq a\}$ est compact.*

On peut maintenant préciser la notion de CLF. Pour un système de la forme $\dot{x} = f(x, u)$, on définit une CLF par :

Définition 19 (CLF). *Une CLF est une fonction $V(x)$ continue, différentiable, définie positive et propre et telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists u \in U \quad \dot{V}(x; u(x)) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u(x)) \leq -\gamma(\|x\|)$$

où $\dot{V}(x; u(x))$ représente la dérivée de V dans la direction donnée par u et où γ est une fonction de classe \mathcal{K} .

[SZ01] a montré que l'existence d'une CLF pour le système commuté est une condition suffisante pour que celui-ci soit globalement asymptotiquement stabilisable.

1.5.1 Stabilisation des systèmes linéaires commutés

Dans cette première partie, nous considérons uniquement les systèmes commutés linéaires en temps continu donnés par la relation (1.4). Les premiers résultats qui ont pu être obtenus sur la stabilisation des systèmes linéaires commutés l'ont été pour des systèmes bimodaux. [WPD98] obtient une condition nécessaire et suffisante pour la stabilisation de ces systèmes :

Théorème 7 ([WPD98]). *Un système commuté bimodal $\dot{x} = A_i x$, $i = 1, 2$ est quadratiquement stabilisable si et seulement si le faisceau de matrices $\varphi_\alpha(A_1, A_2)$ contient une matrice Hurwitz.*

Il n'est pas possible de généraliser cette condition nécessaire et suffisante pour les systèmes possédant plus de deux modes de la forme (1.4). Cependant, [PL01] obtient une condition suffisante dans le cas général et synthétise de plus une stratégie de commande de la forme

$$\sigma(t) = \arg \min_{i \in \mathcal{I}} x(t)^T P A_i x(t) \quad (1.24)$$

Théorème 8 ([PL01]). *La stratégie (1.24), dite *min-projection*, rend le système (1.4) quadratiquement stable s'il existe des constantes $\alpha_i \in [0, 1]$ et $\sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i = 1$ telles que*

$$A_\alpha = \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i A_i$$

est Hurwitz.

Dans le cas des contrôleurs commutés, [SESP99] obtient une condition nécessaire et suffisante de stabilisation d'un système affine par un ensemble de contrôleurs linéaires commutés. [ZLA03] s'intéresse à la stabilisation robuste de systèmes commutés incertains sous forme polytopiques : à partir de techniques LMI, une loi de commutations est synthétisée.

La stabilisabilité quadratique, directement liée à l'existence d'une CQLF pour le système en boucle fermée, n'est pas le seul type de stabilisabilité étudié. À partir de fonctions de Lyapunov linéaires par morceaux, [KA02] synthétise une loi de commande stabilisante pour les systèmes commutés linéaires. En utilisant les propriétés des matrices de Metzler, [GC06, GCB08] proposent une stratégie de type *min-projection* permettant de stabiliser les systèmes linéaires commutés. Cette approche utilise des fonctions de Lyapunov quadratiques commutées.

Il est important de rappeler que l'existence d'une fonction de Lyapunov, commune ou non, pour le système est uniquement une condition suffisante de stabilisabilité. En effet, l'existence d'une telle fonction n'est en rien nécessaire. [BS08] donne l'exemple d'un système pour lequel il n'existe pas de fonctions de Lyapunov, mais pour lequel on peut synthétiser une loi de commutation permettant de stabiliser le système autour de l'origine.

1.5.2 Stabilisation des systèmes affines commutés

Cette seconde partie s'intéresse aux systèmes affines commutés de la forme (1.5). L'un des premiers résultats concernant la stabilisation des systèmes affines commutés est issu de [BS04]. Par une approche par modèle moyen, [BS04] donne une condition nécessaire et suffisante de stabilisabilité des systèmes bimodaux et une condition suffisante dans le cas général. Deux lois de commutations, l'une par retour d'état de type modes glissants et l'autre sous forme hybride, sont synthétisées afin de stabiliser le système affine commuté. Dans un contexte temps discret, [LK09] utilise la notion d'invariance périodique pour synthétiser une commande prédictive permettant de stabiliser un système affine commuté bimodal. Cependant, du fait de la formulation LMI afin de calculer les invariants, les

résultats obtenus sont conservatifs. [TASC09] synthétise une loi de commutations, fondée sur des méthodes LMI, permettant de stabiliser asymptotiquement un système affine commuté. Le cas d’incertitudes polytopiques y est aussi considéré. Une autre synthèse de loi de commutations est effectuée dans [DGGP10] où est pris en compte une considération énergétique : la loi de commutations permet d’assurer la convergence du système commuté vers un point d’équilibre et de minimiser une fonction coût. Cette approche est intéressante dans le cas des convertisseurs car cette fonction coût peut modéliser des dépenses énergétiques.

1.6 Approche pratique

Dans cette section, nous allons nous intéresser aux systèmes commutés de la forme (1.3) pour lesquels on ne suppose pas que $f_i(0) = 0, \forall i \in \mathcal{I}$. Appartiennent à cette classe de systèmes, les systèmes affines commutés (1.5) pour lesquels il existe au moins un indice $i \in \mathcal{I}, B_i \neq 0$. Dans ce cas, l’origine n’est pas un point d’équilibre commun à l’ensemble des sous-systèmes. En supposant qu’il existe une durée minimum entre deux commutations successives, on doit alors s’intéresser à l’étude de la stabilité non pas par rapport à un point, comme précédemment, mais par rapport à un ensemble. On nommera la stabilité par rapport à un ensemble, stabilité pratique du système. De même, on nommera la stabilisation d’un système commuté par rapport à un ensemble, stabilisation pratique.

1.6.1 Stabilité pratique

Il est intéressant de remarquer que la notion de stabilité pratique est antérieure à celle de système hybride. En effet, les premiers résultats concernant la stabilité pratique sont apparus dans [LL61, Mic70, Mic71], afin de s’intéresser et de caractériser des systèmes n’étant pas asymptotiquement stables, mais possédant tout de même de bonnes propriétés.

Dans le cas des systèmes commutés qui nous intéresse, la convergence vers un ensemble ou vers un point est directement liée à la loi de commutations (définition 6). Nous considérons par la suite des lois de commutations dite non-Zeno, c’est-à-dire qu’il existe un nombre de commutations fini sur une durée finie. Cette hypothèse est proche de celle du temps de séjour minimum vue précédemment, mais du fait que la durée minimale n’est pas fixée, elle ne donne pas de garantie de stabilité. On peut alors donner les définitions suivantes :

Définition 20 (Stabilité ε -pratique [XZH08]). *Soit une loi de commutation σ pour le système commuté (1.3). Pour un réel $\varepsilon > 0$ donné, le système est ε -pratiquement stable sous σ s’il existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tel que*

$$x(0) \in B(0, \delta) \Rightarrow x(t) \in B(0, \varepsilon) \quad t \geq 0.$$

Remarque 6. *Par rapport à la définition 8 de la stabilité classique, la différence est que la valeur de la constante est fixée et ne varie pas. C’est-à-dire que la stabilité ε -pratique s’intéresse au fait que les trajectoires, pour une loi de commutations fixée, restent dans un voisinage borné que l’on ne peut pas rendre aussi petit que l’on veut, dont la borne dépend de ε , autour de l’origine.*

Par analogie à la stabilité asymptotique, on peut aussi définir la stabilité asymptotique pratique de la manière suivante :

Définition 21 (Stabilité asymptotique ε -pratique [XZH08]). *Soit une loi de commutation σ pour le système commuté (1.3). Pour un réel $\varepsilon > 0$ donné, le système est ε -pratiquement asymptotiquement stable dans un domaine \mathcal{D} donné autour de l'origine sous σ s'il est ε -pratiquement stable sous σ et que pour tout $x(0) \in \mathcal{D}$, il existe $T = T(x(0)) \geq 0$ tel que*

$$x(t) \in B(0, \varepsilon) \quad \forall t \geq T.$$

1.6.2 Stabilisation pratique des systèmes affines commutés

Cette dernière partie concernant la stabilisation s'intéresse au cas où on cherche à concevoir une stratégie de commutations pour laquelle on impose qu'un temps de maintien par mode soit respecté. Ce cas de figure peut apparaître à différentes occasions. Dans ce manuscrit nous nous intéresserons aux deux cas suivant :

- une stratégie de commutations en temps continu est connue pour le système commuté. Cependant, du fait de l'existence d'une bande passante limitée au niveau des actionneurs, il est nécessaire de considérer une loi de commutations échantillonnée, qui permet de fixer une borne maximale à la fréquence d'utilisation des actionneurs ;
- afin de satisfaire des conditions extérieures à la commande, un temps de maintien par mode doit être imposé. Dans le troisième chapitre de cette thèse, nous verrons que le temps de maintien est imposé afin de satisfaire des conditions d'observabilité du système commuté.

Le problème d'échantillonnage est bien connu car il intervient lors de l'implémentation de commandes, majoritairement issues de calculateurs en temps discret, sur un système réel en temps continu. Dans le cas des systèmes non-linéaires, de nombreuses études ont été effectuées (voir [NTK99] et les références mentionnées). Dans le cas des systèmes hybrides, deux approches se distinguent : soit on considère une entrée continue exogène, et on s'intéresse à l'effet de l'échantillonnage si cette entrée est de la forme d'un retour d'état [Rod07, SR09], soit l'effet de l'échantillonnage existe sur la loi de commutations et on cherche à garantir la stabilité du système en boucle fermée. C'est cette deuxième approche qui va nous concerner. [SG02, Sun04] s'intéressent à l'effet de l'échantillonnage sur la commandabilité du système. Ils établissent des conditions sur la période d'échantillonnage permettant de conserver la commandabilité du système commuté. Cependant, la synthèse d'une stratégie échantillonnée n'y est pas abordée. [Imu03, AI03] montrent que pour des systèmes sous la forme PWA avec une loi de commutations échantillonnée, si l'ensemble des sous-systèmes est commandable par rapport à une entrée exogène alors la commandabilité est conservée entre le système avec loi de commutations en temps continu et le système avec loi de commutations échantillonnée.

Dans la suite des travaux sur la stabilité pratique, [ZM02] établit un lien entre pseudo-fonctions de Lyapunov et stabilisabilité pratique. En reprenant la définition 20, on peut définir la stabilisabilité pratique de la manière suivante :

Définition 22 (Stabilisabilité pratique [XZ05]). *Le système commuté (1.3) est pratiquement stabilisable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une loi de commutation $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ telle que le système est ε -pratiquement stable.*

[XZ05, XZH08] établissent une condition suffisante pour la stabilisabilité pratique des systèmes commutés.

Théorème 9 ([XZH08]). *Supposons qu'il existe une fonction $V(x)$ définie positive et continuellement différentiable pour le système commuté (1.3). Supposons de plus qu'un réel $\rho > 0$ est donné et que l'ensemble $\Omega_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq \rho\}$ est borné. Le système commuté (1.3) est pratiquement asymptotiquement stabilisable sur un domaine $D \subseteq \Omega_\rho$ incluant l'origine si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- (a) pour tout $x \in \Omega_\rho - \{0\}$ la relation suivante est vérifiée : $\min_{i \in \mathcal{I}} \frac{\partial V}{\partial x} f_i(x) < 0$;
- (b) $0 \in \text{int}(C)$ où C est le domaine convexeifié $\{f_i(0) : i \in \mathcal{I}\}$, c'est-à-dire $C = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(0) : \lambda_i \geq 0, i \in \mathcal{I} \text{ et } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}$.

Il est intéressant de remarquer que pour le cas des systèmes affines commutés (1.5), la condition (a) est inchangée et la condition (b) peut être réécrite par $0 \in \text{int}(C)$ avec $C = \text{co}(B_i : i \in \mathcal{I})$. [XZH08] donne plusieurs résultats afin d'estimer la région pour laquelle le système est pratiquement asymptotiquement stabilisable. Une approche numérique est aussi décrite permettant de vérifier pour un système donné si celui-ci est pratiquement stabilisable ou non, et si oui, d'estimer la taille du domaine pour lequel la stabilisation est possible.

1.7 Conclusion

Après avoir présenté les systèmes à commutations, ce chapitre a fourni différentes méthodes servant à leur analyse d'un point de vue de la stabilité et de la stabilisabilité. De plus des outils servant dans les prochains chapitres ont été présentés.

2

Stabilisation robuste des systèmes affines commutés

2.1 Préliminaires

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre à la stabilisation des systèmes affines commutés. En se fondant sur l'existence d'une fonction de Lyapunov de commande, nous proposerons des lois de commande échantillonnées. Nous montrerons alors, par la résolution de problèmes d'optimisation, que ces stratégies de commande stabilisent le système discrétisé en boucle fermée. Une partie sera ensuite dédiée à la robustesse de cette stabilisation, vis-à-vis de la période d'échantillonnage considérée pour la discrétisation. Nous formulerons de plus, sous le formalisme de la stabilité entrée-état, la robustesse de ces stratégies par rapport aux incertitudes, qu'elles soient paramétriques ou liées aux instants de commutations. Les problèmes liés à l'implémentation seront traités ensuite. Pour finir, deux applications sur des convertisseurs statiques seront faites, afin d'illustrer les approches proposées.

2.1.1 Modélisation

Nous étudions des systèmes affines commutés de la forme :

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + B_0 + \sum_{i=1}^m u^i(t)(A_i x(t) + B_i), \quad u^i(t) = \{0, 1\} \quad (2.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente l'état à l'instant t , $u^i(t)$, $i = 1, \dots, m$ sont les composantes du vecteur de commande $u(t) \in U = \{0, 1\}^m$. Dans le chapitre précédent (partie 1.5), nous avons vu que le cas le plus étudié dans la littérature était celui où toutes les matrices B_i étaient nulles : l'étude du système (2.1) revient alors à celle d'un système commuté

linéaire. Dans notre étude, nous allons exclure ce cas afin que la dynamique de chaque sous-système soit affine en l'état. Dans la partie 1.2 sont référencés les différents modèles utilisés dans la littérature pour représenter les systèmes à commutations. Nous allons ici utiliser une approche par modèle moyen.

Auparavant, il est important de rappeler que les systèmes affines commutés possèdent des dynamiques discontinues. En cela, la notion d'existence de solutions doit être étudiée particulièrement. En effet, dans le cas classique où le champ de vecteurs est continuellement différentiable, l'existence de solutions est assurée par le théorème de Peano [Cor08]. Or dans notre cas, par la présence de la commande discrète u , le champ de vecteurs n'est pas continuellement différentiable. Il est donc nécessaire d'étendre la notion de solutions au cas où les champs de vecteurs ne sont pas continuellement différentiable. Une manière d'étendre cette notion est donnée par Filippov [Fil88]. Son idée est la suivante : le problème de l'existence des solutions provient des variations abruptes qui peuvent survenir arbitrairement près d'un point donné, il est donc intéressant de regarder les solutions autour de ce point au lieu de se concentrer sur la valeur du champ de vecteurs au point donné. De manière plus formelle, cela se traduit par l'utilisation des fonctions multivaluées : Filippov associe une fonction multivaluée au champ de vecteurs en regardant les valeurs de ce champ de vecteurs dans un voisinage du point considéré. Pour ce voisinage, on considère une boule ouverte $B(x, \delta)$ de rayon δ centrée sur le point voulu x . On examine alors l'effet de la réduction de ce rayon en prenant des δ de plus en plus petit. Pour finir, afin de garantir que deux champs de vecteurs qui diffèrent uniquement sur un ensemble de mesure nulle possèdent la même solution au sens de Filippov, on exclut tout ensemble de mesure nulle \mathcal{N} sur la boule lors de l'évaluation du champ de vecteurs. Notons $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ la famille des sous-ensembles de \mathbb{R}^n . Formellement, on peut résumer le raisonnement précédent par la définition suivante :

Définition 23 (Fonction de Filippov [Cor08]). *Soit l'équation différentielle $\dot{x}(t) = f(x(t))$. Pour $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, on définit l'application multivaluée de Filippov $\mathcal{F}[f] : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ par*

$$\mathcal{F}[f](t, x(t)) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu(\mathcal{N})=0} \overline{\text{co}} \left\{ f(B(x(t), \delta) \setminus \mathcal{N}) \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

où $\overline{\text{co}}(R)$ est la frontière convexe de l'ensemble R et μ représente la mesure de Lebesgue.

Dans le cas qui nous intéresse des systèmes dont le champ de vecteurs est affine en l'état, on peut définir les solutions de Filippov ainsi :

Définition 24 (Solution de Filippov). *Une fonction absolument continue $\tilde{x}(t)$ est dite solution de Filippov du système (2.1) si elle est solution de l'inclusion différentielle*

$$\dot{\tilde{x}}(t) \in \mathcal{F}[f](t, \tilde{x}(t)) \quad (2.3)$$

où $f(t, \tilde{x}(t)) = A_0 \tilde{x}(t) + B_0 + \sum_{i=1}^m u^i(t) (A_i \tilde{x}(t) + B_i)$, $u^i(t) \in \{0, 1\}$.

Or les champs de vecteurs étant affines en la commande :

$$\dot{\tilde{x}}(t) \in A_0 \tilde{x}(t) + B_0 + \sum_{i=1}^m u^i(t) (A_i \tilde{x}(t) + B_i), \quad u^i(t) \in \text{co}\{0, 1\} = [0, 1]. \quad (2.4)$$

Le domaine de commande $U = \{0, 1\}$ est étendu à son enveloppe convexe $\text{co}(U) = [0, 1]$, de ce fait on nommera ce système, le système relaxé, sous-entendu, dont le domaine de commande est le domaine de commande relaxé du système commuté. On a vu dans le chapitre précédent qu'on peut trouver [ISW03] des lois de commutations $u \in L^\infty([0, +\infty), U)$ telles qu'on peut approcher les trajectoires du système (2.4) d'aussi près que l'on veut par celles du système (2.1). On peut alors définir l'ensemble des points de fonctionnement du système commuté comme les points d'équilibre du système relaxé :

$$X_{ref} = \left\{ x_{ref} \in \mathbb{R}^n : A_0 x_{ref} + B_0 + \sum_{i=1}^m u_{ref}^i (A_i x_{ref} + B_i) = 0, u_{ref}^i \in [0, 1] \right\}. \quad (2.5)$$

Il est important de remarquer que les commandes $u_{ref} \in \text{co}(U) \setminus U$ correspondant à un équilibre x_{ref} ne sont pas des commandes admissibles pour le système commuté. De ce fait, et c'est ce qui va motiver notre étude, l'état x du système commuté ne peut être exactement maintenu sur le point de fonctionnement désiré x_{ref} . On obtiendra alors deux comportements asymptotiques possibles pour les trajectoires du système commuté :

- soit un phénomène de modes glissants ;
- soit un comportement cyclique autour de la référence x_{ref} si un temps minimum est imposé entre chaque instant de commutation.

Pratiquement, le premier cas n'est pas réalisable. En effet, celui-ci revient à actionner les commutateurs à fréquence infinie, ce qui est impossible. De plus, si on cherche à approcher au mieux ce comportement, c'est-à-dire à commuter à des fréquences de commutations très élevées, cela induit des comportements hautes fréquences qui ne sont pas pris en compte dans le modèle ou encore des pertes et une fatigue importante au niveau des commutateurs. Nous allons donc nous intéresser à des commandes pour lesquelles on peut garantir qu'il existe un temps non nul entre deux instants de commutations. Rappelons qu'il existe de nombreux travaux considérant la stabilité des systèmes à commutations sous la contrainte d'un temps minimum de maintien dans chaque mode (voir partie 1.3.2.2).

Par la suite, afin de ramener le problème de stabilisation à un point de référence x_{ref} quelconque dans l'ensemble X_{ref} , on considère le changement de variable $z = x - x_{ref}$. La dynamique des systèmes commuté et relaxé est alors :

$$\dot{z} = A(u)z + B(u) \quad (2.6)$$

avec $A(u) = A_0 + \sum_{i=1}^m u^i A_i$ et $B(u) = A_0 x_{ref} + B_0 + \sum_{i=1}^m u^i (A_i x_{ref} + B_i)$.

2.1.2 Hypothèse

Dans la suite de ce chapitre, nous supposons que l'hypothèse suivante est vérifiée :

Hypothèse 2. *Une fonction de commande de Lyapunov (CLF) existe pour le système relaxé.*

D'après cette hypothèse, il existe donc un retour d'état en temps continu

$$u^*(t) = \kappa(z(t)) \in \text{co}(U) \quad (2.7)$$

qui rend le système relaxé globalement asymptotiquement stable. Cette hypothèse suppose donc que l'on est capable d'exhiber une fonction de Lyapunov pour le système relaxé. Dans le cas des systèmes affines commutés, cette existence d'une CLF peut être établie de deux manières [HRI11a].

Proposition 1 ([HRI11a]). *S'il existe une matrice $P = P^T > 0$ telle que la relation $A(u)^T P + PA(u) \leq 0$ est vérifiée pour toute commande $u \in \{0, 1\}^m$ et si de plus $\text{rang}[A_i x_{ref} + B_i : i = 1, \dots, m] = n$ pour tout x_{ref} alors la fonction quadratique $V(z) = z^T P z$ est une CLF pour le système relaxé pour tout $x_{ref} \in X_{ref}$.*

Démonstration. Pour un point d'équilibre donné x_{ref} , en reprenant la définition de l'ensemble des points de fonctionnement X_{ref} , nous avons $A_0 x_{ref} + B_0 = -\sum_{i=1}^m u_{ref}^i (A_i x_{ref} + B_i)$ qu'on remplace alors dans l'équation (2.6) :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A(u)z + B(u) \\ &= A(u)z + \sum_{i=1}^m (u^i - u_{ref}^i)(A_i x_{ref} + B_i). \end{aligned}$$

En notant $\dot{V}(z; u)$, la dérivée de V selon la direction $A(u)z + B(u)$, on obtient alors

$$\begin{aligned} \dot{V}(z; u) &= 2z^T P (A(u)z + B(u)) \\ &= 2z^T P \left(A(u)z + \sum_{i=1}^m (u^i - u_{ref}^i)(A_i x_{ref} + B_i) \right). \end{aligned}$$

Or, par hypothèse nous avons $z^T P A(u)z \leq 0$. Pour tout instant t , il est possible de choisir une commande $u_i \in \text{co}(U)$ telle que :

$$\sum_{i=1}^m (u^i - u_{ref}^i) z^T P (A_i x_{ref} + B_i) \leq 0 \quad (2.8)$$

avec $i = 1, \dots, m$. On peut remarquer que ceci est vérifié si $\text{sign}(u^i - u_{ref}^i) = -\text{sign}(z^T P (A_i x_{ref} + B_i))$. La condition sur le rang de $[A_i x_{ref} + B_i : i = 1, \dots, m]$ permet d'assurer une décroissance stricte de la fonction V : il existe toujours un indice i pour assurer la relation (2.8) tant que $z \neq 0$. On peut alors conclure que V est bien une CLF pour le système relaxé. \square

Proposition 2 ([HRI11a]). *Pour un point de fonctionnement x_{ref} donné, s'il existe une matrice $P = P^T > 0$ telle que la relation $A(u_{ref})^T P + PA(u_{ref}) \leq 0$ est vérifiée et si de plus $\text{rang}[A_i(z + x_{ref}) + B_i : i = 1, \dots, m] = n$ pour tout z alors la fonction quadratique $V(z) = z^T P z$ est une CLF pour le système relaxé pour x_{ref} .*

Démonstration. La preuve de cette proposition s'établit de manière similaire à celle de la précédente. Pour le point d'équilibre x_{ref} considéré, il suffit de remarquer qu'on peut décomposer la dérivée directionnelle de V ainsi :

$$\dot{V}(z; u) = 2z^T P A(u_{ref})z + 2 \sum_{i=1}^m (u^i - u_{ref}^i) z^T P (A_i(z + x_{ref}) + B_i).$$

Or, par hypothèse nous avons $z^T P A(u_{ref}) z \leq 0$. De ce fait, à tout instant t , il est possible de choisir une commande $u_i \in co(U)$ telle que :

$$\sum_{i=1}^m (u^i - u_{ref}^i) z^T P (A_i(z + x_{ref}) + B_i) \leq 0 \quad (2.9)$$

avec $i = 1, \dots, m$. Par la condition de rang, on obtient alors que V est une CLF pour le système relaxé. \square

2.2 Synthèse de lois de commande échantillonnées

Afin d'illustrer les résultats obtenus dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à trois lois de commutations en temps discret. Ces lois de commutations sont fondées sur l'hypothèse 2 de l'existence d'une CLF pour le système relaxé. Cependant, bien que ces lois soient conçues à partir du système relaxé, nous allons les appliquer sur le système commuté. Le lien existant entre le système commuté et le système relaxé va nous permettre de définir certaines propriétés sur les trajectoires obtenues.

1. Stratégie constante appliquée par une Modulation de Largeur d'Impulsion (PWM : *Pulse Width Modulation*) :

En supposant que la fréquence de commutation est suffisamment élevée par rapport à la dynamique du système, il a été montré [ILG78] que le point de fonctionnement x_{ref} peut être atteint en valeur moyenne. Cependant, il est important de remarquer que l'existence d'une CLF implique uniquement qu'il existe une stratégie de commande permettant de stabiliser le système, mais n'implique nullement que la stratégie possède de bonnes propriétés. En effet, tout dépendra de la manière dont est synthétisée la loi $\kappa(z(t))$, donc de la manière dont est formulée la CLF. Du fait que ce ne sont pas les propriétés dynamiques des lois de commande qui nous intéressent directement, mais leurs propriétés stabilisantes pour le système commuté, nous allons considérer le cas le plus simple : soit un point de fonctionnement x_{ref} auquel est associé une commande u_{ref} , on obtient alors $B(u_{ref}) = 0$. Si $A(u_{ref})$ est Hurwitz, on peut associer une CLF quadratique au système $\dot{z} = A(u_{ref})z$ autonome obtenu pour $u(t) = u_{ref}$, $\forall t$. La technique de PWM permet alors d'implémenter cette commande continue sur un système à commutations dont les entrées sont booléennes. La PWM est directement liée au concept de modèle moyen définie dans le chapitre précédent. Pour une période d'échantillonnage T_e donnée, la $i^{\text{ème}}$ composante de la commande v est donnée par

$$v^i(t, T_e) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{I}_{[t_k, t_k + u_k^i T_e[}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad t_k = kT_e \quad (2.10)$$

où $\mathbb{I}_A(\cdot)$ est appelée fonction indicatrice. Celle-ci prend la valeur 1 si $t \in A$ et 0 sinon. On note u_k la commande à l'instant t_k , telle que $u_k = u(t_k)$.

2. Stratégie de la plus grande pente :

Cette approche consiste à choisir à chaque instant t_k , $k \in \mathbb{N}$, la direction permettant la décroissance la plus forte de la CLF V parmi un ensemble fini de valeurs déterminées par $u \in U$:

$$v(t, T_e) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \mathbb{I}_{[t_k, t_{k+1}[}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad t_k = kT_e \quad (2.11)$$

$$\text{où} \quad u_k = \arg \min_{u \in U} \dot{V}(z_k; u) \quad (2.12)$$

avec $\dot{V}(z_k; u)$ la dérivée de V dans la direction donnée par $A(u)z_k + B(u)$. On peut remarquer que l'existence de la CLF nous garantit qu'il existe au moins une commande telle que $\dot{V} < 0$. Cependant, du fait de la discrétisation, on ne peut pas garantir qu'après une période d'échantillonnage, la relation $V(z_{k+1}) - V(z_k) < 0$ soit vérifiée.

3. Stratégie prédictive :

Pour un horizon N_H donné et un ensemble fini de séquences, cette approche consiste à minimiser $V(z_{k+N_H})$ à partir de la position actuelle z_k :

$$v(t, T_e) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \mathbb{I}_{[t_k, t_{k+1}[}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad t_k = kT_e \quad (2.13)$$

$$\text{où} \quad u_k = \arg_1 \min_{u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+N_H-1} \in U^{N_H}} V(z_{k+N_H}) \quad (2.14)$$

où \arg_1 est le premier argument de la séquence optimale $u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+N_H-1}$. Comme précédemment, il est à noter que par la discrétisation, la relation $V(z_{k+N_H}) - V(z_k) < 0$ n'est a priori pas vérifiée.

Il est important de remarquer que pour ces deux dernières stratégies, la commande est choisie dans le domaine fini de commande U et non dans son enveloppe convexe $\text{co}(U)$.

2.3 Stabilité de la boucle fermée

Afin d'étudier le comportement du système commuté sous l'une des trois stratégies énoncées précédemment et d'en déduire des garanties de stabilité, nous allons nous intéresser à la boucle fermée obtenue par la commande par retour d'état sur le système commuté. En effet, il est important de noter que les stratégies de commutations définies précédemment définissent de manière explicite ou implicite une commande par retour d'état constante par morceaux de la forme

$$v(t, T_e) = u_k^* \quad kT_e \leq t < (k+1)T_e \quad (2.15)$$

$$= \kappa_s(t, z(t), T_e) \quad (2.16)$$

avec u_k^* donné par (2.12) ou (2.14). La discrétisation du système (2.6) en boucle fermée avec l'une des trois commandes énoncées précédemment sera nommée par la suite le Système Commuté à Temps Discret (SCTD) et est donnée par :

$$z_{k+1} = A_s(\kappa_s)z_k + B_s(\kappa_s). \quad (2.17)$$

Dans le cas où la stratégie utilisée est la stratégie prédictive ou la stratégie de plus grande pente, on obtient $A_s(\kappa_s) = e^{A(u_k)T_e}$ et $B_s(\kappa_s) = \left(\int_0^{T_e} e^{A(u_k)(T_e-\tau)} d\tau \right) B(u_k)$ avec u_k donné par les équations (2.12) ou (2.14). Dans le cas de la PWM, l'expression est obtenue de manière récursive : en effet, la PWM définit une commande constante par morceaux sur chaque intervalle (t_k, t_{k+1}) selon la valeur de u_k définie à l'équation (2.10). Afin d'illustrer ce propos, intéressons nous à l'exemple suivant :

Exemple 1. *Considérons un système bimodal de la forme (2.6) possédant un vecteur de commande de dimension un. Sur une période T_e , on a la commande v qui vaut :*

$$v(t, T_e) = \begin{cases} 0 & \text{si } t_k \leq t < t_k + u_k T_e \\ 1 & \text{si } t_k + u_k T_e \leq t < t_{k+1} T_e \end{cases} \quad (2.18)$$

On a donc sur une période T_e , un système possédant deux dynamiques, l'une donnée par $v(t, T_e) = 0$ pendant une durée $u_k T_e$ et l'autre donnée par $v(t, T_e) = 1$ pendant une durée $(1 - u_k) T_e$. Dans un souci de clarté, on note A_{v_0} et B_{v_0} les matrices associées à la première commande et A_{v_1} et B_{v_1} les matrices associées à la seconde. Pour obtenir la dynamique du système discrétisé, on intègre alors la trajectoire sur les deux durées successives avec les commandes appropriées.

On obtient pour $t_k \leq t < t_k + u_k T_e$, la relation

$$z(t_k + u_k T_e) = e^{A_{v_0} u_k T_e} z_k + \left(\int_0^{u_k T_e} e^{A_{v_0}(T_e-\tau)} d\tau \right) B_{v_0} \quad (2.19)$$

Rappelons que, sous condition que A est inversible, on a la primitive de e^{At} qui est $A^{-1}e^{At}$, on obtient alors

$$z(t_k + u_k T_e) = e^{A_{v_0} u_k T_e} z_k + A_{v_0}^{-1} \left(e^{A_{v_0} T_e} - e^{A_{v_0}(1-u_k)T_e} \right) B_{v_0} \quad (2.20)$$

De manière similaire, on obtient

$$z_{k+1} = z(t_{k+1}) = e^{A_{v_1}(1-u_k)T_e} z_k + A_{v_1}^{-1} \left(e^{A_{v_1} T_e} - e^{A_{v_1} u_k T_e} \right) B_{v_1} \quad (2.21)$$

On obtient alors pour équation de récurrence :

$$z_{k+1} = A_s z_k + B_s \quad (2.22)$$

avec $A_s = e^{A_{v_1}(1-u_k)T_e} e^{A_{v_0} u_k T_e}$

et $B_s = e^{A_{v_1}(1-u_k)T_e} A_{v_0}^{-1} \left(e^{A_{v_0} T_e} - e^{A_{v_0}(1-u_k)T_e} \right) B_{v_0} + A_{v_1}^{-1} \left(e^{A_{v_1} T_e} - e^{A_{v_1} u_k T_e} \right) B_{v_1}$.

2.3.1 Formulation du problème

Afin de formuler le problème de stabilité du (SCTD), nous allons définir deux notions qui nous serviront pour la suite de ce chapitre.

Définition 25 (Suite de lignes de niveaux et suite de boules fermées). *Soit une suite $\{z_0, \dots, z_N\}$ de longueur $N + 1$ générée par (SCTD) depuis une condition initiale z_0 . Une suite de lignes de niveaux est définie par :*

$$\mathcal{L}_k(z_0) = V(z_k), \quad k \in \{0, \dots, N\}. \quad (2.23)$$

On associe à chaque ligne de niveau \mathcal{L}_k , la boule fermée :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{L}_k}(z_0) = \{z : V(z) \leq \mathcal{L}_k(z_0)\}, \quad k \in \{0, \dots, N\}. \quad (2.24)$$

Remarque 7. *Il est à noter que l'on parle de boule fermée, mais celle-ci est une boule uniquement si l'on considère pour norme la fonction V . Ainsi, en norme euclidienne et en supposant que V est quadratique en l'état, l'ensemble inclus dans cette boule est un ellipsoïde. On en a une illustration dans le cas bidimensionnel à la figure 2.1.*

On a fait remarquer précédemment qu'une commande $u_{ref} \in \text{co}(U) \setminus U$ n'est pas admissible pour le système commuté. Il est donc impossible de maintenir le système commuté sur une référence x_{ref} associée à cette commande. On peut alors supposer qu'il existe des suites $\mathcal{L}_k(z_0)$, $k \in \{0, \dots, N\}$ qui sont non monotones-décroissantes pour une condition initiale z_0 , c'est-à-dire pour lesquelles la trajectoire "s'éloigne" de la référence. Cependant, bien que l'état du système ne puisse être maintenu sur cette référence, il reste dans un voisinage de celle-ci : le système fait apparaître alors un comportement cyclique. De manière intuitive, il est évident que ce cycle dépendra, entre autres choses, de la période d'échantillonnage T_e . Cependant, on sait que si on choisit une période d'échantillonnage T_e très grande, on peut obtenir une boucle fermée qui n'est pas stable. Enfin, on peut se demander quel peut être l'effet d'une incertitude, sur le modèle ou sur les instants de commutations, sur le comportement de la boucle.

On a pu voir dans le chapitre précédent (partie 1.6) qu'il existe quelques résultats dans la littérature s'interrogeant sur l'effet de l'échantillonnage sur la stabilité et la stabilisation des systèmes commutés. Cependant l'effet de l'échantillonnage du retour d'état sur la stabilité de la boucle fermée constituée du retour d'état échantillonné et du système commuté en temps continu n'a pas été étudié à ce jour. Une exception notable est à signaler toutefois. On a vu dans le chapitre précédent que [SV85] a montré que les solutions du modèle moyen glissant sont proches des solutions du modèle standard pourvu que la période T du modèle glissant est petite par rapport à la dynamique du système. On peut donc garantir la convergence de l'état du système si celui du modèle moyen converge, pourvu que T est petit. On cherche donc, par le formalisme des systèmes commutés, à obtenir un résultat vérifiant ceux acquis dans le cadre des modèles moyens et permettant en plus d'obtenir des garanties quant à la stabilité du système bouclé. On peut résumer nos objectifs de la manière suivante :

- obtenir des garanties de stabilité du système en boucle fermée composée du système commuté (2.1) en temps continu et du retour d'état échantillonné $\kappa_s(t, z(t), T_e)$;
- obtenir des garanties de robustesse en présence d'incertitudes paramétriques et d'échantillonnage non uniforme ;
- prouver la convergence globale des trajectoires vers un voisinage de la référence et évaluer ce voisinage, ce qui nous permettra de garantir la stabilité de la boucle.

Du fait du caractère cyclique des trajectoires, il semble intéressant d'utiliser la notion de stabilité pratique définie dans le chapitre précédent (partie 1.6). Le principe que nous allons utiliser est le suivant : soit une suite $\{z_0, \dots, z_N\}$ issue du (SCTD) pour une condition initiale donnée, nous obtenons une ligne de niveau $\mathcal{L}_N(z_0)$ atteinte. Pour chaque condition initiale z_0 , on associe une ligne de niveau $\mathcal{L}_0(z_0)$. On cherche alors sur l'ensemble des conditions initiales possibles, la plus haute ligne de niveau atteinte $\mathcal{L}_N(z_0)$. Autrement dit, on cherche la "pire" suite possible, respectant les contraintes de dynamique du système et de son retour d'état. Si cette pire suite reste dans un voisinage borné de la référence, donc que la trajectoire ne s'éloigne pas indéfiniment de la référence, alors le système en boucle fermée est stable.

La figure 2.1 illustre les différents cas possibles que l'on peut rencontrer. Une trajectoire issue de z_0^1 converge vers l'origine, elle n'est donc pas intéressante pour notre étude. Les trajectoires issues de z_0^2 et z_0^3 ne convergent pas, elles sont donc des solutions candidates. Cependant, on retiendra z_0^3 car la condition initiale se situe sur une ligne de niveau plus haute que celle de z_0^2 .

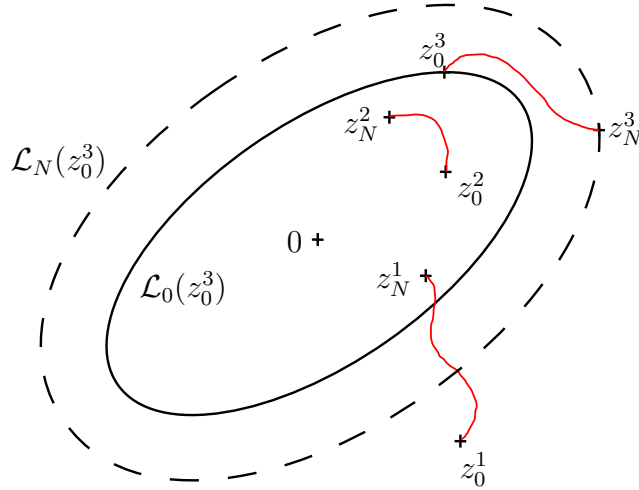


FIGURE 2.1 – Illustration des différents cas possibles selon la condition initiale z_0 dans \mathbb{R}^2

De manière formelle, on peut alors écrire cette recherche comme le problème d'optimisation sous contraintes suivant :

$$\mathcal{P}_N : \quad \max_{z_0 \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}_N(z_0) \quad (2.25)$$

$$\text{s.c. } z_{k+1} = A_s(\kappa_s)z_k + B_s(\kappa_s), \quad k \in \{0, \dots, N-1\} \quad (2.26)$$

$$\mathcal{L}_N(z_0) \geq \mathcal{L}_0(z_0) \quad (2.27)$$

où la contrainte (2.26) impose que la dynamique de la suite considérée soit celle du (SCTD) et la contrainte (2.27) ne permet de considérer comme solutions candidates que les trajectoires correspondant à un accroissement de ligne de niveau.

Remarque 8. *On remarquera que dans la formulation du problème d'optimisation \mathcal{P}_N , on ne fait pas apparaître la dépendance par rapport à la période d'échantillonnage, afin de simplifier les notations.*

Avant de s'intéresser aux éventuelles solutions de ce problème, il est intéressant de se poser la question de sa faisabilité, c'est-à-dire existe-t-il au moins une trajectoire satisfaisant les contraintes (2.26) et (2.27). On peut répondre aisément à la question de faisabilité en considérant une trajectoire ayant pour condition initiale $z_0 = 0$. Cette solution est toujours une trajectoire candidate telle que les contraintes (2.26) et (2.27) sont toujours trivialement satisfaites.

Si z_0^* est un argument optimal du problème \mathcal{P}_N , on notera alors $\mathcal{L}_N^* = \mathcal{L}_N(z_0^*)$ la ligne de niveau optimale correspondant à la plus haute ligne de niveau atteinte par une trajectoire issue de z_0^* avec une commande admissible de longueur N . De plus, on notera $\mathcal{S}_{\mathcal{L}_N^*}^* = \mathcal{S}_{\mathcal{L}_N}(z_0^*)$ la boule fermée correspondante.

Définition 26 (Faisabilité). *Le problème d'optimisation \mathcal{P}_N est dit borné si sa solution optimale est finie.*

2.3.2 Ensembles attractifs

Avant de nous intéresser aux solutions de ce problème d'optimisation, commençons par rappeler quelques définitions concernant les ensembles invariants.

Définition 27 (Ensemble positivement invariant [Bla99]). *Un ensemble Ω est dit positivement invariant pour le système (2.17) si, quelque soit la condition initiale $z_0 \in \Omega$, la solution $z_k \in \Omega$, $\forall k > 0$.*

Définition 28 (Approche d'un ensemble [Per01]). *Une trajectoire $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ approche un ensemble Ω si la distance $d(z_k, \Omega) = \min_{\omega \in \Omega} \|z_k - \omega\| \rightarrow 0$ pour $k \rightarrow \infty$.*

Définition 29 (Ensemble globalement attractif [Per01]). *Un ensemble fermé positivement invariant Ω est un ensemble globalement attractif pour le système (2.17) si, quelque soit la condition initiale $z_0 \in \mathbb{R}^n$, toutes les trajectoires issues de z_0 approchent Ω .*

À partir de ces définitions, nous allons pouvoir exhiber une des premières propriétés intéressantes des solutions du problème \mathcal{P}_N .

Proposition 3. [HRI11b] *En supposant qu'il existe une CLF pour le système relaxé (hypothèse 2), si le problème \mathcal{P}_N est borné pour un N donné, alors l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{L}_N^*}^*$ est un ensemble globalement attractif pour toute trajectoire de (SCTD).*

Démonstration. Soit une trajectoire $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de (SCTD) issue d'une condition initiale arbitraire z_0 . Deux affirmations peuvent alors être démontrées :

- l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{L}_N^*}^*$ est un ensemble positivement invariant pour toutes les suites extraites (z_{pN+r}) , avec N et $r \in \{0, \dots, N-1\}$ fixés, p étant l'indice de la suite ;
- l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{L}_N^*}^*$ est un ensemble globalement attractif pour le système (2.17).

Afin de démontrer ces deux affirmations, nous procéderons avec un raisonnement par l'absurde.

Supposons tout d'abord qu'il existe un état $z_r \in \mathcal{S}_{\mathcal{L}_N^*}^*$ pour lequel $V(z_r) \leq \mathcal{L}_N^* < V(z_{r+N})$. On peut alors en conclure que z_r donne une solution bornée meilleure pour

le problème \mathcal{P}_N , ce qui est en contradiction avec la définition de \mathcal{L}_N^* . Par conséquent, si $V(z_r) \leq \mathcal{L}_N^*$ alors $V(z_{pN+r}) \leq \mathcal{L}_N^*$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ ce qui signifie que $\mathcal{S}_{\mathcal{L}_N}^*$ est un ensemble positivement invariant pour les suites extraites de la forme $(z_{pN+r})_{p \in \mathbb{N}}$, $\forall r \in \{0, \dots, N-1\}$.

Pour prouver la seconde affirmation, supposons qu'il existe un indice $s \in \{0, \dots, N-1\}$ tel que $z_s \notin \mathcal{S}_{\mathcal{L}_N}^*$, on peut alors distinguer deux cas :

- soit il existe un indice $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $V(z_{p_0N+s}) \leq \mathcal{L}_N^*$, on revient alors au fait que $\mathcal{S}_{\mathcal{L}_N}^*$ est un ensemble positivement invariant, ce qui implique que $z_{pN+s} \in \mathcal{S}_{\mathcal{L}_N}^*$, $\forall p \geq p_0 \in \mathbb{N}^*$;
- soit cet indice p_0 n'existe pas. De ce fait, la suite $V(z_{pN+s})_{p \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante (car ne respecte pas la contrainte (2.27)) et la relation $V(z_{pN+s}) > V(z_{(p+1)N+s}) > \mathcal{L}_N^*$ est nécessairement vérifiée. Par continuité de V et du fait que la suite est bornée, il existe une limite ℓ_s telle que $\lim_{p \rightarrow \infty} V(z_{pN+s}) = \ell_s$.

Supposons dans un premier temps que $\ell_s > \mathcal{L}_N^*$. Notons $\varphi_s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, une fonction strictement croissante. Par compacité, on peut extraire une suite de la forme $(z_{\varphi_s(pN+s)})_{p \in \mathbb{N}}$ convergeant vers un point limite y_s . Or, y_s satisfait nécessairement la relation $V(y_s) = \ell_s$. En considérant y_s^+ la $N^{\text{ième}}$ itérée de y_s par (SCTD), on obtient que la relation $V(y_s^+) = V(y_s) = \ell_s$ est nécessairement vérifiée. Cependant, la relation $V(y_s^+) = V(y_s)$ satisfait la contrainte (2.27) et par définition, la contrainte (2.26), y_s est alors l'argument optimal de \mathcal{P}_N ce qui est en contraction avec le fait que $V(y_s) = \ell_s > \mathcal{L}_N^*$. De ce fait, la suite $(z_{pN+s})_{p \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation $\lim_{p \rightarrow \infty} V(z_{pN+s}) = \mathcal{L}_N^*$.

Du fait que toutes les séquences extraites de la forme $(z_{pN+s})_{p \in \mathbb{N}}$, $s \in \{0, \dots, N-1\}$ appartiennent à l'un des deux cas précédents, la séquence $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ approche $\mathcal{S}_{\mathcal{L}_N}^*$. On peut donc conclure que $\mathcal{S}_{\mathcal{L}_N}^*$ est un ensemble attractif global pour (SCTD). \square

La figure 2.2 illustre les différents cas possibles que l'on trouve dans la preuve. La trajectoire rouge illustre le premier cas, la bleue, le second, et la verte le troisième cas possible.

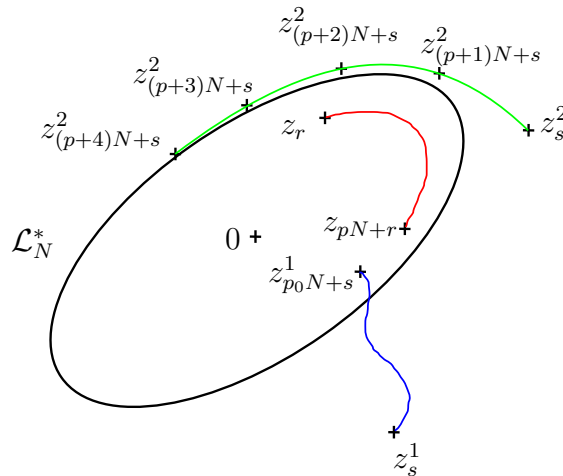


FIGURE 2.2 – Illustration des cas possibles donnés dans la preuve de la proposition 3

De ce résultat, on peut directement obtenir un corollaire intéressant, permettant de caractériser la stabilité du (SCTD) :

Corollaire 1. *Une condition suffisante pour la stabilité pratique de (SCTD) est qu'il existe au moins un entier N tel que le problème \mathcal{P}_N soit borné.*

2.3.3 Relations d'inclusion

L'entier N du problème d'optimisation \mathcal{P}_N peut être choisi dans l'ensemble des entiers naturels positifs \mathbb{N}^* . On peut résoudre pour différentes longueurs $N \in \mathbb{N}^*$ de séquences de commande ce problème \mathcal{P}_N . Se pose naturellement la question de l'imbrication des boules fermées $\mathcal{S}_{\mathcal{L}_N}^*$, $N \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 4. *[HRI11b] Supposons que le problème \mathcal{P}_N est borné. Alors $\forall p \in \mathbb{N}^*$, le problème \mathcal{P}_{pN} est borné et la relation d'inclusion suivante est vérifiée :*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{L}_{pN}}^* \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{L}_N}^*.$$

Démonstration. Comme nous l'avons déjà fait remarqué précédemment, l'ensemble des arguments faisables pour \mathcal{P}_{pN} est non vide, du fait que $z_0 = 0$ est toujours une condition initiale valide quelque soit N . Considérons alors une suite $(z_k)_{k \in \{0, \dots, pN\}}$, et supposons que $z_{pN} \notin \mathcal{S}_{\mathcal{L}_N}^*$. La suite extraite $V(z_{jN})$, $j \in \{0, \dots, p\}$ est nécessairement strictement décroissante si \mathcal{P}_N est borné. Cette suite n'est donc pas une suite admissible pour le problème \mathcal{P}_{pN} , ce qui implique que pour la suite optimale z_k^* , $k \in \{0, \dots, pN\}$ du problème \mathcal{P}_{pN} , la relation $z_{pN}^* \in \mathcal{S}_{\mathcal{L}_N}^*$ est vérifiée. De ce fait, \mathcal{P}_{pN} est borné si \mathcal{P}_N est borné. \square

Remarque 9. *Un cas particulier intéressant est celui où le problème \mathcal{P}_1 est borné. Du fait de la relation d'inclusion précédente, on peut en déduire immédiatement que les problèmes \mathcal{P}_k , $\forall k \in \mathbb{N}^*$ sont bornés. On pourra en conclure de plus que la relation suivante est vérifiée pour tout k :*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{L}_k}^* \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{L}_1}^*.$$

Il aurait été naturel de s'attendre à une inclusion des ensembles $\mathcal{S}_{\mathcal{L}_k}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$. Cependant, la proposition précédente ne l'indique pas et en effet, ce n'est pas vrai dans le cas général. Il est relativement simple de construire un exemple montrant que la relation $\mathcal{L}_k^* \geq \mathcal{L}_{k+1}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$ n'est pas vérifiée. Nous obtiendrons des résultats de simulation dans la partie 2.6 qui illustrent ce point.

Cette proposition nous permet d'obtenir une estimation la plus fine possible de l'ensemble attractif du (SCTD). En effet, pour obtenir l'ensemble attractif exact du (SCTD), il faudrait résoudre le problème \mathcal{P}_N pour des séquences de commande de longueur infinie ce qui n'irait pas sans engendrer des calculs de durée infinie. On verra dans les exemples donnés dans la partie 2.6 qu'on peut obtenir une estimation très intéressante avec des valeurs de N relativement faibles. Le corollaire 2 nous donne la meilleure approximation possible que l'on peut obtenir de l'ensemble attractif du (SCTD).

Corollaire 2. *[HRI11b] Soit un ensemble \mathcal{I} d'entiers (nécessairement infini du fait de la proposition 4) rendant l'ensemble des problèmes \mathcal{P}_i , $i \in \mathcal{I}$ borné. Alors $\mathcal{S}_\infty = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{S}_{\mathcal{L}_i}^* =$*

$\liminf_{i \rightarrow \infty} \mathcal{S}_{\mathcal{L}_i}^$ est l'approximation la plus fine de l'ensemble globalement attractif du (SCTD) donné par l'ensemble des problème \mathcal{P}_N , $N \in \mathbb{N}^*$.*

2.4 Stabilisation robuste

Dans la partie précédente, nous avons étudié la stabilité du (SCTD). Cependant, cette étude ne prend pas en compte les problèmes d'incertitudes inhérents à la modélisation des systèmes. De plus, le temps d'échantillonnage est considéré constant durant le processus. Nous allons donc étudier dans cette partie l'effet d'incertitudes ainsi que celui d'un échantillonnage non uniforme sur la stabilité du système en boucle fermée. L'utilisation du formalisme de la stabilité entrée-état (ISS), présentée en partie 1.4, va permettre la prise en compte de ces incertitudes. Ceci nous permettra alors de conclure quant à la stabilisation du système commuté (2.1) par les commandes échantillonnées présentées précédemment.

2.4.1 Robustesse vis-à-vis du temps d'échantillonnage

En premier lieu, notre étude se porte sur l'effet de la durée de la période d'échantillonnage T_e sur la stabilité de la boucle fermée (SCTD). La proposition suivante nous permet d'obtenir un premier lien :

Proposition 5. [HRI11b] *En supposant qu'il existe une CLF pour le système relaxé (hypothèse 2) et en supposant que pour toute période d'échantillonnage $T_e \in]0, T_{e_{max}}]$, il existe un entier $N(T_e)$ tel que le problème \mathcal{P}_N est borné, alors (SCTD) est 0–Globalement Asymptotiquement Stable (0–GAS) pour $T_e \rightarrow 0$.*

Démonstration. Cette preuve va être construite pour les trois retours d'état considérés.

- pour le cas de la PWM, du fait que $\liminf_{T_e \rightarrow 0} v(t, T_e) = u(t) = \kappa(z(t))$ est vérifiée presque partout, la loi de commande correspond alors exactement au retour d'état donné par la CLF. Par l'existence de la CLF, on peut conclure que (SCTD) est Globalement Asymptotiquement Stable (GAS) pour $T_e \rightarrow 0$, donc 0–GAS.
- pour la stratégie prédictive sur un horizon N_H , en considérant que $T_e \rightarrow 0$, l'argument permettant la plus forte décroissance de $V(z_{k+N_H})$ par rapport à $V(z_k)$ est le même que celui permettant de minimiser la dérivée directionnelle de V , c'est-à-dire $\arg \min_{u \in U} \dot{V}(z_k; u)$ ce qui correspond à la stratégie de plus grande pente. Il reste donc à montrer que la stratégie de plus grande pente rend (SCTD) GAS quand $T_e \rightarrow 0$.
- pour la stratégie de plus grande pente, remarquons tout d'abord que la loi de commutations en temps continu à partir d'une position z le long de la trajectoire est donnée par $\arg \min_{u \in U} \dot{V}(z; u)$. La propriété GAS pour (SCTD) avec la stratégie de plus grande pente en loi de commutations est validée si la relation suivante est vérifiée :

$$\min_{u \in U} \dot{V}(z; u) \leq \dot{V}(z; \kappa(z)) < -\gamma(\|z\|) \quad (2.28)$$

où γ est une fonction de classe \mathcal{K} . Il est important de remarquer que cette relation n'est pas triviale. En effet, la relation $\dot{V}(z; \kappa(z)) < -\gamma(\|z\|)$ est directement déduite de la définition d'une CLF car κ correspond à la stratégie de commutation en temps continu pour le système relaxé. Cependant, le domaine de commande est réduit à

un ensemble fini de points quand on considère le système commuté, et donc la relation $\min_{u \in U} \dot{V}(z; u) \leq \dot{V}(z; \kappa(z))$ ne semble a priori pas garantie. Il reste donc à prouver la partie gauche de l'inégalité (2.28). Pour cela, rappelons la définition suivante :

Définition 30 (Hyperplan d'appui). *Un hyperplan \mathcal{H} de dimension $(n-1)$ est dit supporter un ensemble fermé et convexe $M(\subset \mathbb{R}^n)$ au point $y \in (\partial M \cap \mathcal{H})$ si M se situe complètement dans l'un des deux demi-espaces déterminés par l'hyperplan \mathcal{H} . Si un vecteur λ est normal entrant à cet hyperplan d'appui \mathcal{H} de M au point y alors $\lambda^T y = \inf_{z \in M} \lambda^T z$.*

Observons alors que la dérivée directionnelle de V est donnée par

$$\dot{V}(z(t); u) = \frac{\partial V^T}{\partial z} f(z, u).$$

Pour un z fixé, $f(z, u) = A(u)z + B(u)$ est affine en la commande u . L'ensemble défini par $\{f(z, u), u \in \text{co}(U)\}$ correspond donc à l'ensemble $\Lambda = \text{co}\{f(z, u), u \in U\}$, qui est un polyèdre fermé. Soit $\lambda = \frac{\partial V}{\partial z}(z)$ et \mathcal{G} l'hyperplan d'appui sur Λ . Notons $u^* = \arg \min_u \lambda^T f(z, u)$. Nous avons alors au point $\rho = f(z, u^*)$, $\lambda^T \rho = \min_{w \in \Lambda} \lambda^T w$. Deux cas doivent alors être distingués : soit ρ est unique, alors ρ est un sommet du polyèdre Λ et $u^* \in U$; soit ρ n'est pas unique, alors ρ appartient à une arête ou à une face de Λ : au moins un sommet δ existe alors tel que $\delta \in \partial \Lambda \cap \mathcal{G}$ (voir figure 2.3). Donc, une commande $u^* \in U$ existe toujours telle que la relation (2.28) est vérifiée.

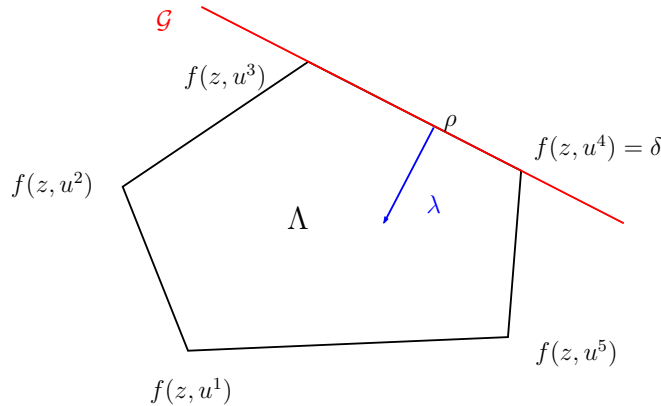


FIGURE 2.3 – Hyperplan d'appui \mathcal{G} sur le polyèdre Λ .

□

En se fondant sur la proposition précédente, on peut alors formuler ce corollaire :

Corollaire 3. [HRI11b] *Supposons que pour toute période d'échantillonnage $T_e \in]0, T_{e_{max}}]$, il existe un entier $N(T_e)$ tel que le problème \mathcal{P}_N est borné, alors (SCTD) est ISS par rapport à la classe des entrées constantes T_e .*

Démonstration. Comme nous avons pu le voir dans la partie 1.4, [SW96] établissent que la propriété d'ISS d'un système vis-à-vis d'une entrée est équivalente à ce que ce système est 0-GAS par rapport à cette entrée et qu'il possède la propriété de gain asymptotique. La propriété de 0-GAS par rapport à la période d'échantillonnage a été démontrée pour la proposition 5. La propriété de gain asymptotique revient à montrer que les solutions de (SCTD) sont ultimement bornées, c'est-à-dire $\limsup_{k \rightarrow \infty} \|z_k(z_0, T_e)\| \leq \gamma(T_e)$ avec γ une fonction de classe \mathcal{N}_0 pour $T_e \in]0, T_{e_{max}}]$. De par la définition de l'ensemble \mathcal{S}_∞ , on peut définir la ligne de niveau associée $\mathcal{L}_\infty = \liminf_{i \rightarrow \infty} \mathcal{L}_i^*$. Si $\mathcal{L}_\infty(T_e)$ est une fonction de classe \mathcal{N}_0 pour $T_e \in]0, T_{e_{max}}]$, on obtient alors le résultat en considérant $\gamma(T_e) = \mathcal{L}_\infty(T_e)$. Si $\mathcal{L}_\infty(T_e)$ n'est pas une fonction de classe \mathcal{N}_0 on peut tout de même définir une fonction γ de classe \mathcal{N}_0 en choisissant $\gamma(T_e) \geq \sup_{0 < T \leq T_e} \mathcal{L}_\infty(T)$ puisque $\sup_{0 < T \leq T_e} \mathcal{L}_\infty(T)$ est bornée et non décroissante pour tout $T_e \leq T_{e_{max}}$. \square

2.4.2 Robustesse aux incertitudes paramétriques et aux instants de commutations

On peut obtenir une extension des résultats précédents si la classe des lois de commutations considérées est relaxée de la manière suivante : définissons un temps de maintien par mode minimum (respectivement maximum) δ_{min} (respectivement δ_{max}) comme la durée minimale (respectivement maximale) entre deux commutations. On définit alors la séquence des temps de commutations t_k , $k \in \mathbb{N}$ avec les contraintes

$$\delta_{min} < \tau_k = |t_{k+1} - t_k| < \delta_{max}, \quad (2.29)$$

correspondant aux instants où le système (2.6) commute d'un mode à un autre.

L'effet d'incertitudes paramétriques θ sur les matrices d'état A_i et B_i des sous-systèmes de (2.6) est un second point que l'on va aborder. On traite par la suite d'incertitudes de type intervalle de la forme :

$$-\theta_{max} \leq \theta \leq \theta_{max}. \quad (2.30)$$

Afin de prendre en compte ces nouveaux paramètres, nous allons récrire le problème \mathcal{P}_N ainsi :

$$\mathcal{P}_N(\delta_{min}, \delta_{max}, \theta_{max}) : \quad \max_{z_0, \theta, \tau_k} \mathcal{L}_N(z_0) \quad (2.31)$$

$$\text{s.c. } z_{k+1} = A_s(\star)z_k + B_s(\star), \quad k \in \{0, \dots, N-1\} \quad (2.32)$$

$$\delta_{min} \leq \tau_k = |t_{k+1} - t_k| \leq \delta_{max} \quad (2.33)$$

$$-\theta_{max} \leq \theta \leq \theta_{max} \quad (2.34)$$

$$\mathcal{L}_N(z_0) \geq \mathcal{L}_0(z_0) \quad (2.35)$$

avec $(\star) = (\tau_k, \theta, \kappa_s)$.

Dans ce nouveau problème, l'optimum dépend de trois facteurs : la condition initiale z_0 , les instants de commutations t_k et les incertitudes paramétriques θ . Il est important de noter que l'ensemble de contraintes 2.32 est à présent dépendant du temps, car celles-ci sont liées à la durée d'intégration τ_k . Du fait que la CLF est fondée sur le modèle sans

perturbations, le retour d'état κ_s est inchangé par rapport au problème \mathcal{P}_N . De plus, les résultats précédents concernant les ensembles globalement attractifs $\mathcal{S}_{\mathcal{L}_k}^*$ sont toujours valides puisque ne dépendant pas de la manière dont est synthétisée la séquence $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à partir d'une condition initiale z_0 .

Propriété 1. *La valeur optimale du problème $\mathcal{P}_N(\delta_{min}, \delta_{max}, \theta_{max})$ est non-décroissante par rapport au temps de maintien maximum δ_{max} ou à l'incertitude maximale θ_{max} , et non-croissante par rapport au temps de maintien minimum δ_{min} .*

Démonstration. Il est simple de montrer qu'un argument optimum $(z_0^*, \theta^*, \tau_k^*, k \in \{0, \dots, N-1\})$ pour le problème $\mathcal{P}_N(\delta_{min}, \delta_{max}, \theta_{max})$ est un argument admissible (voire optimum) pour le problème $\mathcal{P}_N(\delta_{min}, \delta_{max} + \delta, \theta_{max})$ pour tout $\delta \geq 0$. De manière similaire, on peut montrer les propriétés restantes. \square

Par la propriété précédente, on peut alors obtenir le résultat suivant :

Proposition 6 ([HRI11b]). *Supposons qu'il existe $(\Delta_{max}, \Theta_{max}) > 0$ tel que pour tout $\delta_{min} > 0$ ($\Delta_{max} \geq \delta_{max} \geq \delta_{min}$), il existe un entier $N(\Delta_{max}, \delta_{min}, \Theta_{max})$ tel que le problème $\mathcal{P}_N(\delta_{min}, \Delta_{max}, \Theta_{max})$ est borné. Alors (SCTD) avec les lois de commutations relaxées (2.29) et les incertitudes paramétriques (2.30), est ISS par rapport à l'entrée (τ, θ) , $\tau = (\tau_0, \tau_1, \dots)$ correspondant à la suite des durées entre commutations.*

Démonstration. Comme pour le corollaire précédent, la construction de cette preuve se fonde sur les résultats de Sontag et Wang [SW96] concernant l'équivalence entre ISS et (0-GAS + propriété de gain asymptotique). La propriété de 0-GAS de la proposition 5 est toujours vraie si l'on se place dans le cas où $\delta_{min} < \delta_{max} \rightarrow 0$ et $\theta_{max} \rightarrow 0$. Afin de montrer la propriété de gain asymptotique, c'est-à-dire que l'on peut trouver une fonction γ de classe \mathcal{N}_0 telle que la relation $\limsup_{k \rightarrow \infty} \|z_k(z_0, \theta, \tau_i, i \in \{0, \dots, k-1\})\| \leq \gamma(\|\tau, \theta\|_\infty)$, avec $\|\tau, \theta\|_\infty = \max(\sup_k \tau_k, \theta)$, est vérifiée. Considérons la fonction $\phi(\delta_{max}, \theta_{max}) = \sup_{0 < \delta_{min} < \delta_{max}} \mathcal{L}_\infty(\delta_{min}, \delta_{max}, \theta_{max})$. Remarquons alors que $\phi(\delta_{max}, \theta_{max})$ est bornée et non-décroissante par rapport à δ_{max} pour tout $\delta_{max} \leq \Delta_{max}$ et par rapport à θ_{max} pour tout $\theta_{max} \leq \Theta_{max}$. On peut donc toujours définir une fonction γ de classe \mathcal{N}_0 en choisissant par exemple $\gamma(s) \geq \phi(s, s)$ avec $s = \|\tau, \theta\|_\infty$. \square

Ce résultat possède deux intérêts. D'une part, il permet de lier l'ensemble attractif du (SCTD) avec les incertitudes paramétriques et un échantillonnage non uniforme. D'autre part, il permet de faire le lien entre les résultats de stabilité obtenus pour (SCTD) et la stabilisation du système commuté (2.1). En effet, du fait que tous les sous-systèmes sont à Entrée Bornée-Sortie Bornée et que la période d'échantillonnage T_e est petite comparée aux dynamiques des différents sous-systèmes, il est évident qu'entre deux instants d'échantillonnage, les trajectoires du système restent dans un voisinage de $\mathcal{S}_{\mathcal{L}_N}^*$. Cependant, grâce à cette proposition, on peut déduire un résultat important concernant la stabilité de la boucle fermée constituée du système commuté en temps continu et du retour d'état échantillonné :

Corollaire 4. *En supposant qu'il existe une CLF pour le système relaxé (hypothèse 2), s'il existe au moins un entier N pour lequel le problème $\mathcal{P}_N(0, \delta_{max}, \theta_{max})$ est borné, alors la boucle fermée constituée du système commuté en temps continu et du retour d'état échantillonné est globalement pratiquement stable.*

Démonstration. Ce corollaire est directement déduit de la proposition 6. Il suffit de considérer $\delta_{min} = 0$ pour la contrainte 2.29. On peut alors garantir que les trajectoires issues de la boucle fermée restent à l'intérieur de la boule $\mathcal{S}_{\mathcal{L}_N}^*$, même entre les instants d'échantillonnage. \square

2.5 Implémentation

Dans l'ensemble de ce chapitre, on a considéré la résolution d'un problème d'optimisation. On a montré qu'il existait toujours une solution à ce problème. Cependant, il faut s'intéresser aussi à savoir si celui-ci est numériquement solvable. C'est le but de cette partie.

Dans le cas général, c'est-à-dire si on ne fait aucune hypothèse sur la forme de la CLF ou sur la continuité du retour d'état, le problème est clairement non-linéaire et non régulier. Cependant, dans les cas qui nous intéressent ici, on peut se ramener à un problème plus simple. En effet, les stratégies prédictive ou de plus grande pente donnent lieu à une partition de l'espace d'état selon les valeurs de la commande $u(z) \in U$. Le problème de régularité quant à lui peut être résolu en considérant une résolution séquence par séquence du problème \mathcal{P}_N : au lieu de résoudre un unique problème non-régulier, on va résoudre 2^{mN} problèmes réguliers, c'est-à-dire pour chacune des séquences de commutations fixées. On considérera alors pour optimum du problème \mathcal{P}_N la meilleure des solutions faisables pour les 2^{mN} problèmes.

La prise en compte de la loi de commutations choisie se fait par l'ajout de contraintes au problème original. Pour chacune des séquences de commande considérée $\sigma^* = [u_0^*, \dots, u_{N-1}^*] \in U^N$:

- stratégie de plus grande pente : la séquence de commande σ^* doit vérifier les $N(2^m - 1)$ contraintes :

$$\dot{V}(z_k; u_k^*) \leq \dot{V}(z_k; u), u \in U, u \neq u_k^*, k \in \{0, \dots, N-1\}. \quad (2.36)$$

Le problème devient alors régulier dans le cas où la CLF l'est.

- stratégie prédictive sur un horizon N_H : la séquence de commande σ^* doit vérifier les N contraintes :

$$\min_{\rho_k^* \in \{u_k^*\} \times U^{N_H-1}} V(z_{k+N_H}) \leq \min_{\rho \in U^{N_H}} V(z_{k+N_H}) \quad (2.37)$$

avec $u_k \neq u_k^*$, $k \in \{0, \dots, N-1\}$. On peut constater que les termes de gauche et de droite sont linéaires. Cependant ils ne sont pas différentiables en tout point. On peut se libérer de cette difficulté en partitionnant à nouveau le problème : pour chaque séquence de commande considérée σ^* , on teste chaque élément u_i^* , $i \in \{0, \dots, N-$

1} pour qu'il soit le premier élément de la séquence optimale $\rho_k^* \in \{u_k^*\} \times U^{N_H-1}$ du problème de stratégie prédictive. Ce test s'effectuant séparément pour chacune des séquences possibles, on obtient une séparation en $2^{m(N_H-1)}$ sous-problèmes réguliers. Le nombre total de problèmes à résoudre s'élève alors à $2^{m^2 N(N_H-1)}$. On considérera alors pour optimum du problème \mathcal{P}_N la meilleure des solutions faisables.

- PWM : dans le cas général, les retours d'état ne sont pas des fonctions continues en l'état, le problème d'optimisation sera donc non régulier. Il existe néanmoins deux cas notables où \mathcal{P}_N peut être résolu numériquement de manière simple : si $u(z)$ est une fonction continue, ou si $u(z)$ définit une partition de l'espace d'état. Dans les 2 cas, on peut alors se ramener à la méthodologie précédemment décrite.

Il est maintenant important de noter que dans un grand nombre de cas pratiques, il est possible de trouver une fonction de Lyapunov quadratique. On le verra dans la partie suivante traitant deux applications sur les convertisseurs de puissance. Dans le cas d'une CLF quadratique, on obtient un problème d'optimisation \mathcal{P}_N dont la fonction coût et les contraintes sont quadratiques. Il existe alors des programmes de résolutions efficaces de type QCQP (Quadratically Constrained Quadratic Program). Dans les résolutions numériques effectuées par la suite, nous utilisons un algorithme de résolution d'optimisation globale de minimisation de fonctions polynomiales sous contraintes polynomiales nommé GloptiPoly [HL03]. À titre illustratif, le tableau 2.1 donne une comparaison des temps de calcul entre un algorithme de résolution non linéaire standard (fmincon de Matlab) et GloptiPoly pour le cas d'un système bimodal à deux dimensions avec la stratégie de plus grande pente.

Algorithme	Temps de calcul (s)		
	\mathcal{L}_1^*	\mathcal{L}_4^*	\mathcal{L}_6^*
NL Matlab	0.98	399.2	4080
GloptiPoly	1.36	3.91	14.9

TABLE 2.1 – Comparaison de temps de calcul (en secondes)

La méthodologie exposée précédemment nous permet de résoudre le problème dans le cas où il n'y a pas d'incertitudes paramétriques et d'échantillonnage non uniforme. Dans le cas où ceux-ci existent, on ne peut plus obtenir une formulation pour une résolution par un QCQP. Cependant, on peut approcher la dynamique du (SCTD) par un développement limité. Une manière encore plus précise d'approcher la dynamique (2.32) est d'utiliser une approximation polytopique, utilisée par exemple par [HDI06]. En utilisant l'une de ces deux approches, on peut alors à nouveau utiliser l'algorithme de résolution de problèmes polynomiaux proposé précédemment.

2.6 Application

Dans cette partie, nous allons illustrer les résultats mis en évidence dans les parties précédentes par deux exemples. Le premier sera une application des trois stratégies échantillonnées présentées dans la partie 2.2 sur un convertisseur buck-boost. Le cas des perturbations sera de plus traité. Cet exemple relativement simple nous permettra d'illustrer les différentes propriétés énoncées précédemment. Le deuxième exemple sera celui d'une application sur un convertisseur multicellulaire à 3 cellules. Cet exemple nous permettra d'illustrer l'efficacité du problème d'optimisation dans un cas plus complexe. Nous considérerons dans ce cas là, uniquement une stratégie de plus grande pente, en incluant des perturbations.

2.6.1 Convertisseur buck-boost

2.6.1.1 Description du convertisseur

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à l'application des lois de commandes échantillonnées précédemment développées sur un convertisseur buck-boost (figure 2.4) dont les équations en mode de conduction continue s'écrivent :

$$\dot{x} = A_0x + B_0 + u(A_1x + B_1) \quad (2.38)$$

où $x = [i_L, v_C]^T$ et

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} & A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \\ B_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T & B_1 &= \begin{bmatrix} \frac{E}{L} \\ 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (2.39)$$

avec R une résistance de charge, C une capacité de charge, L une inductance et E une tension continue. Lorsqu'on parle de mode de conduction continue, le courant i_L passant dans l'inductance ne s'annule jamais, ce qui a pour effet qu'il restera toujours positif dans les conventions utilisées.

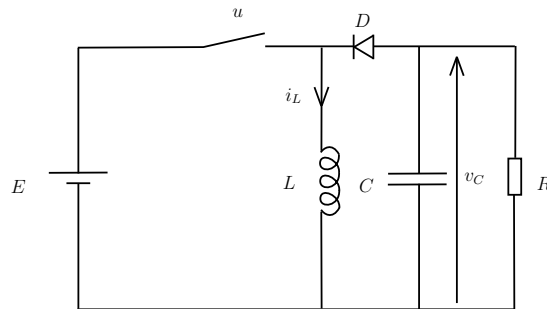


FIGURE 2.4 – Convertisseur buck-boost

2.6.1.2 Stabilisation sans perturbations

Nous allons tout d'abord nous intéresser aux différentes lois de commandes échantillonnées appliquées sur un système ne présentant pas de perturbation.

Stratégie PWM :

Dans le cas de la stratégie PWM, nous mènerons notre étude sur un système unitaire, c'est-à-dire tel que les paramètres $R = L = C = E = 1$. Ce cas particulier est physiquement irréaliste. Néanmoins, il nous permet d'illustrer quelques cas intéressants. On choisit de plus la période d'échantillonnage $T_e = 0.1s$. Nous choisissons un point de fonctionnement $x_{ref} = [2, -1]^T$. Remarquons qu'en prenant une commande constante $u \equiv u_{ref}$, on obtient $A(u_{ref}) = A_{ref} = A_0 + u_{ref}A_1$ une matrice Hurwitz (ce qui est toujours le cas pour $u_{ref} \in]0, 1[$). Par la définition des points de fonctionnement (2.5), on obtient $B(u_{ref}) = 0$, ce qui signifie que le système (2.6) est GAS. Il existe alors une CLF quadratique $V(z) = z^T P z$ telle que, $\forall Q = Q^T > 0$, il existe $P = P^T > 0$ permettant de vérifier la relation $A_{ref}^T P + P A_{ref} + Q = 0$. Nous choisissons, une commande constante $u_{ref} = 0.5$ associée au point de fonctionnement x_{ref} . On prendra alors pour Q la matrice identité, ce qui nous donne

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

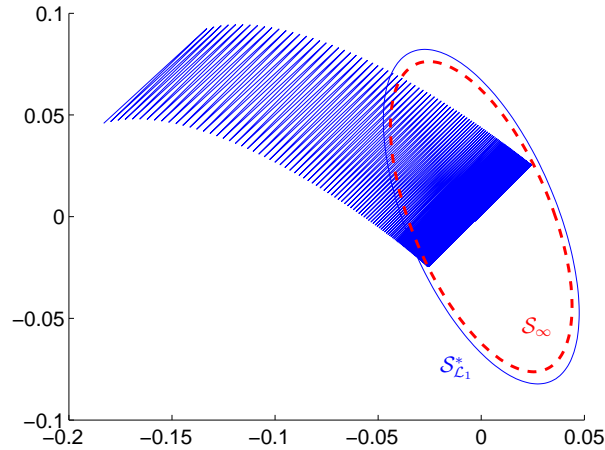
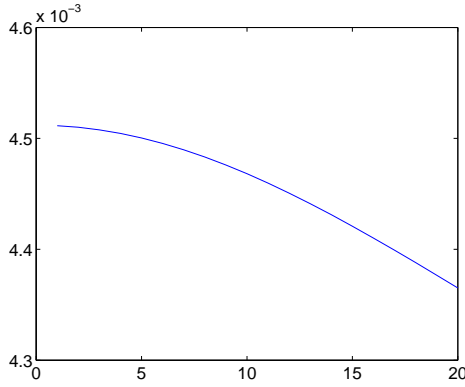
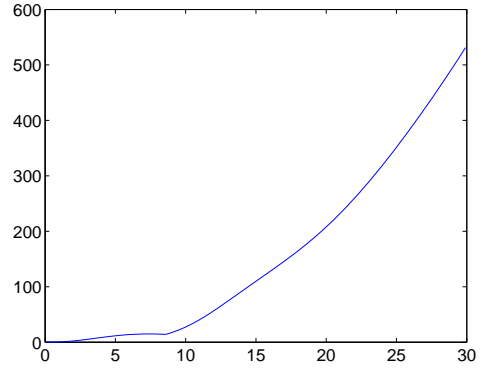
La proposition 3 est illustrée par la figure 2.5. En effet, la boule fermée $\mathcal{S}_{\mathcal{L}_N}^*$ est un ensemble globalement attractif pour les trajectoires de (SCTD), sous condition que le problème \mathcal{P}_N est borné. On considère uniquement ici deux boules $\mathcal{S}_{\mathcal{L}_1}^*$ et \mathcal{S}_∞ . \mathcal{S}_∞ est la boule fermée pour laquelle on considère qu'une augmentation dans la longueur de la séquence N n'entraîne pas une diminution significative du rayon. En pratique, on obtient $\mathcal{L}_1^* = 4.51.10^{-3}$ et $\mathcal{L}_\infty = 3.88.10^{-3}$. On peut constater que dans le cas de la PWM, en prenant le problème le plus simple, c'est-à-dire avec une séquence de commande de longueur $N = 1$, $\mathcal{S}_{\mathcal{L}_1}^*$ est une très bonne sur-approximation de \mathcal{S}_∞ .

Sur la figure 2.6, on peut remarquer qu'on obtient une inclusion successive des boules fermées, c'est-à-dire vérifiant la relation $\mathcal{S}_{\mathcal{L}_{k+1}}^* \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{L}_k}^*$, ceci est un cas particulier de la proposition 4.

L'évolution de \mathcal{L}_∞ en fonction de T_e est représentée à la figure 2.7. Comme suggéré au corollaire 3, on peut aisément exhiber une fonction γ de classe \mathcal{N}_0 qui majore $\mathcal{L}_\infty(T_e)$.

Stratégie de la plus grande pente :

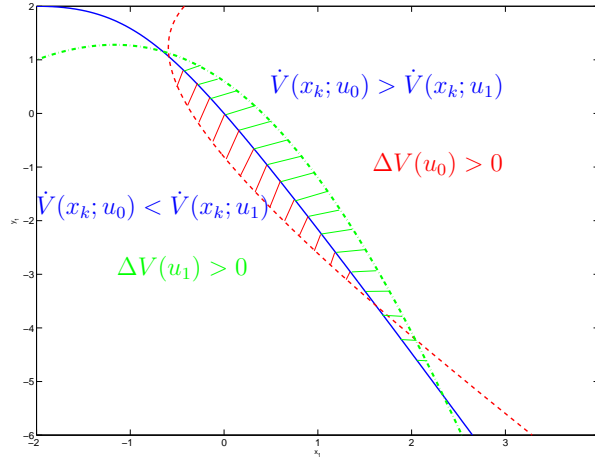
Avant d'illustrer plus avant les propositions démontrées précédemment, montrons le problème rencontré lors de l'échantillonnage de lois continues appliquées sur un système commuté. D'après l'équation (2.12) et le système (2.38), on résout à chaque instant le problème de commande $u_k^* = \arg \min_{u_k \in U} x_k^T P (A(u_k)x_k + B(u_k))$. On obtient alors une partition de l'espace d'état, comme présentée sur la figure 2.8. Notons par la suite, pour un état x_k donné, la commande $u = 0$ comme u_0 et $u = 1$ comme u_1 . La relation $\dot{V}(x_k; u_0) - \dot{V}(x_k; u_1) = 0$ définit alors les surfaces sur lesquelles le système doit commuter (ligne bleue continue). En dérivant la CLF quadratique, la relation précédente donne


 FIGURE 2.5 – $\mathcal{S}_{\mathcal{L}_1}^*$ et \mathcal{S}_{∞} sont des ensembles attractifs pour (SCTD)

 FIGURE 2.6 – Évolution de \mathcal{L}_N^* en fonction de N .

 FIGURE 2.7 – Évolution de \mathcal{L}_{∞} en fonction de T_e pour $T_e \in [0.01, 30]$

$x_k^T P(A(u_0) - A(u_1))x_k + x_k^T P(B(u_0) - B(u_1)) = 0$, qui est l'équation d'une conique. Dans le cas de deux modes, soit la relation $\dot{V}(x_k; u_0) > \dot{V}(x_k; u_1)$ (côté droit de la figure par rapport au trait bleu), soit $\dot{V}(x_k; u_0) < \dot{V}(x_k; u_1)$ (côté gauche) est vérifiée pour un état x_k .

De plus, afin d'identifier le maintien de la commande pendant une durée T_e , nous devons considérer la différence de la fonction de Lyapunov entre l'instant d'échantillonnage actuel t_k et le suivant. Pour une commande $u_i \forall i \in \{0, 1\}$, la différence est donnée par la relation suivante $\Delta V(u_i) = V(x_{k+1}) - V(x_k)$. La relation $\Delta V(u_i) = 0$ est aussi l'équation d'une conique (pour $u = u_0$, trait pointillé rouge, for $u = u_1$, trait-point vert).

Dans la figure 2.8, deux zones importantes sont à examiner : la première, en hachuré vert, est la zone pour laquelle la commande u_1 est utilisée bien que $\Delta V(u_1) > 0$; la seconde, en hachuré rouge, est la zone pour laquelle la commande u_0 est utilisée bien que $\Delta V(u_0) > 0$. Ces deux zones correspondent à une aire pour laquelle la commande u_k^* force les trajectoires à s'éloigner du point de référence x_{ref} . La détermination de ces


 FIGURE 2.8 – Partition de l'espace d'état pour $T_e = 0.5$ s

surfaces, et surtout savoir si celles-ci sont fermées, nous renseignera directement sur la stabilité du système en boucle fermée. Cependant, il est coûteux en calcul de déterminer des intersections de coniques, d'autant plus pour des dimensions élevées. De ce fait, on comprend l'intérêt de la résolution du problème d'optimisation \mathcal{P}_N : il est moins coûteux de déterminer une sur-approximation d'un domaine que de calculer ses frontières exactes.

Par la suite et pour les deux commandes suivantes, nous allons nous intéresser au modèle d'un système réel. Pour ceci, nous allons considérer les paramètres suivant : $R = 50 \Omega$, $C = 220 \mu F$, $L = 20 mH$, $E = 6 V$ et $T_e = 2.5 \cdot 10^{-5} s$. En gardant la commande $u_{ref} = 0.5$, on obtient alors pour référence $x_{ref} = [0.24, -6]^T \in X_{ref}$. De plus, en choisissant $Q = 180 \times Id$, on obtient

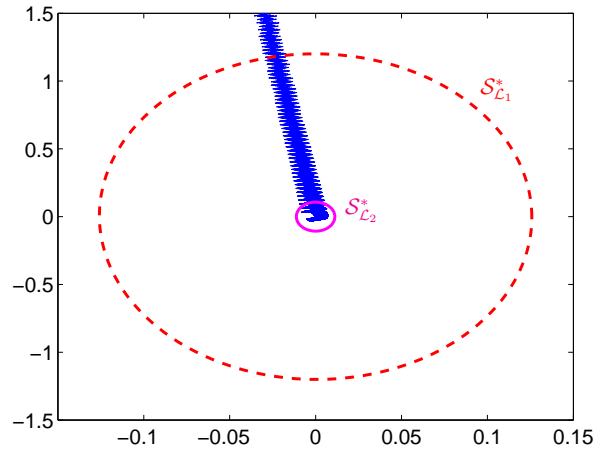
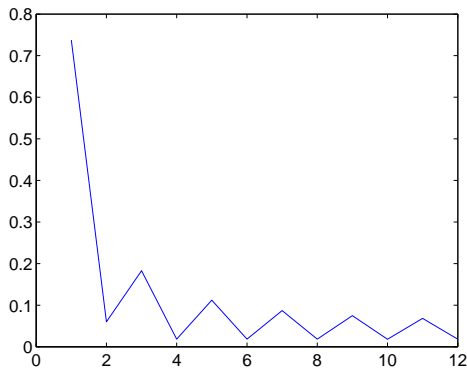
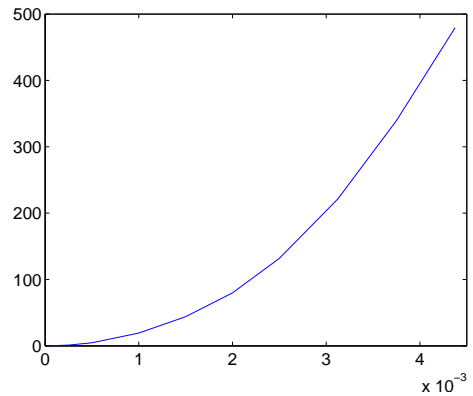
$$P = \begin{bmatrix} 91.05 & 0.04 \\ 0.04 & 1 \end{bmatrix}.$$

Une trajectoire issue d'une condition initiale z_0 arbitraire ainsi que les ensembles attractifs déterminés par la résolution de \mathcal{P}_N pour des séquences de commande de longueur $N = 1$ (trait pointillé rouge) et $N = 2$ (trait plein bleu) sont tracés à la figure 2.9. On peut remarquer que $\mathcal{S}_{\mathcal{L}_2}^*$ semble être une bonne sur-approximation de \mathcal{S}_∞ . En utilisant l'algorithme GloptiPoly, on obtient des temps de calcul respectifs de 1.36 s et de 0.94 s.

La figure 2.10 illustre la proposition 4 : on obtient ici un exemple où on ne peut obtenir une inclusion de tous les ensembles les uns dans les autres, cependant on vérifie toujours la relation $\mathcal{S}_{\mathcal{L}_{pN}}^* \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{L}_N}^*$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$. En observant la figure 2.11, on constate que l'évolution de \mathcal{L}_2^* en fonction de T_e est strictement croissante et par prolongement, on peut obtenir $\mathcal{L}_2^*(T_e = 0) = 0$ donc une fonction de classe \mathcal{N}_0 .

Stratégie prédictive :

L'argument présentant l'intérêt de la résolution du problème d'optimisation \mathcal{P}_N est identique à celui du cas de la stratégie de plus grande pente. En effet, la stratégie prédictive

FIGURE 2.9 – Trajectoire dans l'espace d'état et ensembles attractifs pour $N = 1$ et $N = 2$ FIGURE 2.10 – Évolution de \mathcal{L}_N^* en fonction de N FIGURE 2.11 – Évolution de \mathcal{L}_2^* en fonction de $T_e \in [2.5, 4500]\mu s$

revient à la partition de l'espace d'état, celle-ci est cependant dépendante de l'horizon de prédiction N_H choisi. Par la suite, nous nous intéresserons au cas où $N_H = 2$.

La figure 2.12 représente une trajectoire issue d'une condition initiale z_0 arbitraire. L'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{L}_1}^*$ est tracé en trait plein noir, l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{L}_8}^*$ en trait pointillé rouge. On peut constater que dans ce cas l'estimation semble grande par rapport au cycle décrit par la trajectoire. Cependant, ce n'est pas une erreur de calcul, car il est possible de montrer (en fixant z_0 par l'argument du problème \mathcal{P}_8 , la séquence de commutation étant solution du problème de commande prédictive) qu'une trajectoire commençant à l'intérieur de l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{L}_8}^*$ et finissant sur la ligne de niveau \mathcal{L}_8^* existe bien.

Il est donc important de préciser que la taille relativement grande de l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{L}_8}^*$ provient de la manière dont est synthétisée la stratégie. En effet, une stratégie plus intéressante serait de ne pas prendre en compte pour le choix du critère de la commande prédictive uniquement le dernier terme, mais plutôt une somme des états composant la

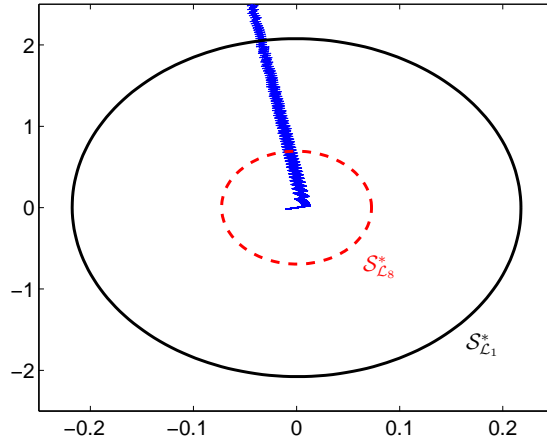


FIGURE 2.12 – Trajectoire dans l'espace d'état et ensembles attractifs pour $N = 1$ et $N = 8$

trajectoire, c'est-à-dire remplacer la stratégie (2.14) par :

$$u_k = \arg_1 \min_{u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+N_H-1} \in U^{N_H}} \sum_{i=1}^{N_H} \rho_i V(z_{k+i}) \quad (2.40)$$

avec ρ_i une pondération des termes de la suite.

La figure 2.13 confirme à nouveau la proposition 4. De plus, il est intéressant de remarquer qu'une augmentation de la longueur de la séquence n'amène pas à une estimation de \mathcal{S}_∞ grandement meilleure. L'évolution de \mathcal{L}_2^* en fonction de T_e de la figure 2.14 peut à nouveau être facilement bornée par une fonction de classe \mathcal{N}_0 .

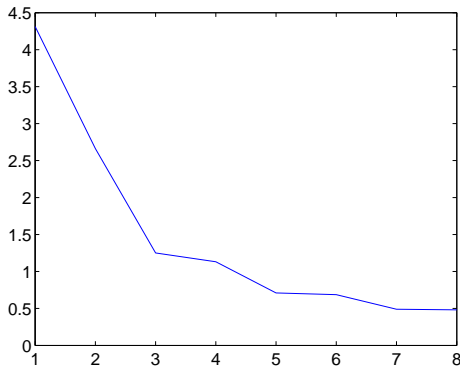


FIGURE 2.13 – Évolution de \mathcal{L}_N^* en fonction de N

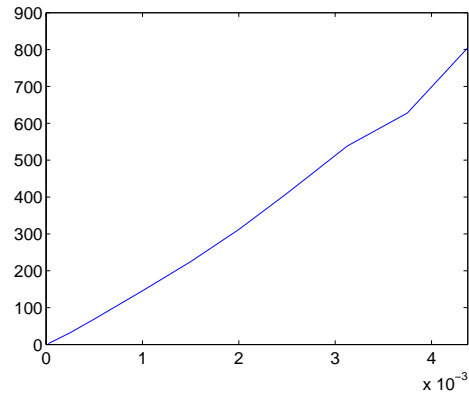
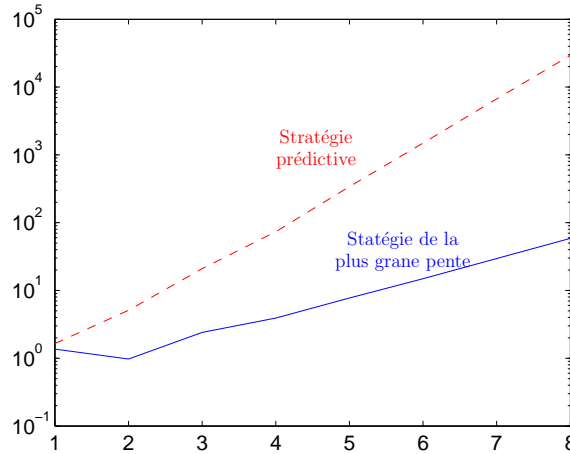


FIGURE 2.14 – Évolution de \mathcal{L}_2^* en fonction de $T_e \in [2.5, 4500]\mu s$

La figure 2.15 montre la croissance exponentielle du temps de calcul pour la stratégie prédictive et la stratégie de la plus grande pente. Du fait de la grande simplicité de la commande appliquée par PWM, le temps de calcul pour cette stratégie reste négligeable quelque soit la longueur de séquence N considérée.

FIGURE 2.15 – Temps de calcul (en secondes) en fonction de N

2.6.1.3 Stabilisation avec perturbations

On s'intéresse maintenant à (SCTD) dans le cas d'incertitudes paramétriques définies par les équations (2.29)-(2.30). La stratégie de retour d'état κ est, quant à elle, construite sur le modèle nominal. On choisit dans cet exemple d'illustrer le cas de la stratégie de plus grande pente. Afin de montrer l'intérêt de cette nouvelle détermination, nous allons d'abord appliquer les résultats sur le système unitaire défini précédemment. Chaque paramètre R , L , E et C aura une incertitude de 10% et T_e sera dépendant du temps et aura une plage de variations de 10% autour de sa valeur nominale selon une loi de distribution uniforme. Le problème $\mathcal{P}_N(\delta_{min}, \delta_{max}, \theta_{max})$ nous permet d'obtenir les ensembles invariants dans le pire cas.

La figure 2.16 montre en ligne continue les résultats de $\mathcal{P}_N(\delta_{min}, \delta_{max}, \theta_{max})$ pour $N = 1$ (en bleu), $N = 2$ (en rouge) et $N = 3$ (en vert). En ligne discontinue apparaissent les résultats de la résolution des \mathcal{P}_N correspondant, sans incertitudes paramétriques. On constate une augmentation de la taille des ensembles invariants, ce qui corrobore les résultats précédents.

On inclut dans la figure 2.17 une trajectoire issue d'une condition initiale arbitraire avec des variations arbitraires sur les temps d'échantillonnage. On constate que la trajectoire n'est plus à l'intérieur des ensembles invariants estimés sans perturbations, mais reste cependant dans les nouvelles estimations avec perturbations.

La figure 2.18 représente les ensembles invariants dans le cas du modèle du système réel précédemment défini. On s'intéresse ici à des variations sur les paramètres et le temps d'échantillonnage de 5% autour de leur valeur nominale. Sont représentées les solutions des problèmes pour $N = 1$ en rouge et $N = 8$ en noir.

On peut remarquer que les trajectoires tracées sur la figure 2.18 n'atteignent pas la référence. Ceci provient du fait que le calcul de la référence s'effectue sur le modèle nominal et non sur le modèle réel. En effet, l'équation (2.4) :

$$X_{ref} = \left\{ x_{ref} \in \mathbb{R}^n : A_0 x_{ref} + B_0 + \sum_{i=1}^m u_{ref}^i (A_i x_{ref} + B_i) = 0, u_{ref}^i \in [0, 1] \right\} \quad (2.41)$$

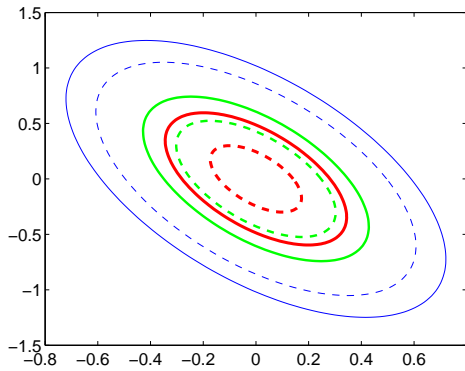


FIGURE 2.16 – Ensembles invariants de (SCTD) avec incertitudes paramétriques

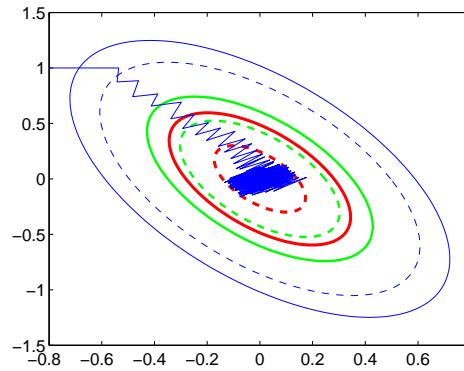


FIGURE 2.17 – Ensembles invariants et trajectoire

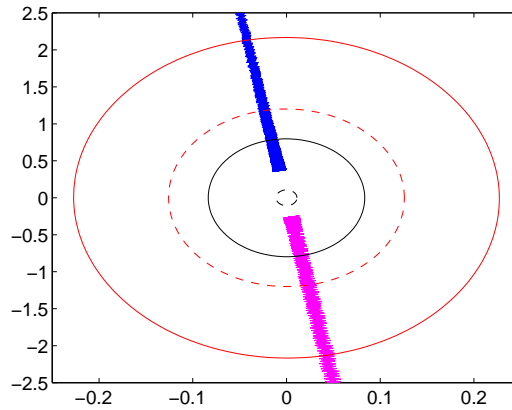


FIGURE 2.18 – Trajectoires dans l'espace d'état et ensembles invariants pour $N = 1$ et $N = 8$ dans le cas d'incertitudes

nous donne la relation entre le point de référence désiré x_{ref} et la commande à choisir pour atteindre ce point u_{ref} . Mais cette relation est basée sur le modèle nominal. Ainsi, en imposant une commande u_{ref} au modèle réel, on obtient une référence \tilde{x}_{ref} différente de x_{ref} . Le problème est similaire à celui rencontré dans le cas de la régulation par retour d'état d'un système linéaire rappelé ici.

Exemple 2. Soit un système linéaire (figure 2.19) de la forme

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

et un retour d'état de la forme

$$u = e - Kx.$$

Ce retour d'état induit, pour une consigne échelon e non nulle, une erreur statique sur la sortie. En notant e_c la valeur de cet échelon, et s_c la valeur de consigne de la sortie, on obtient :

$$e_c = -(C(A - BK)^{-1}B)^{-1}s_c.$$

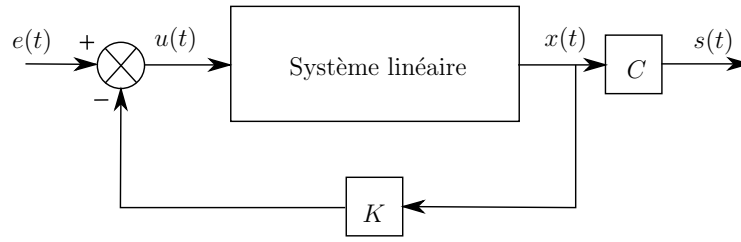


FIGURE 2.19 – Commande par retour d'état d'un système linéaire

Afin d'annuler l'erreur statique, on considère l'erreur $z(t) = s(t) - s_c(t)$ entre la valeur de la sortie et la valeur de la consigne de sortie comme une perturbation. Afin d'annuler celle-ci, on utilise un intégrateur comme indiqué sur le schéma (2.20).

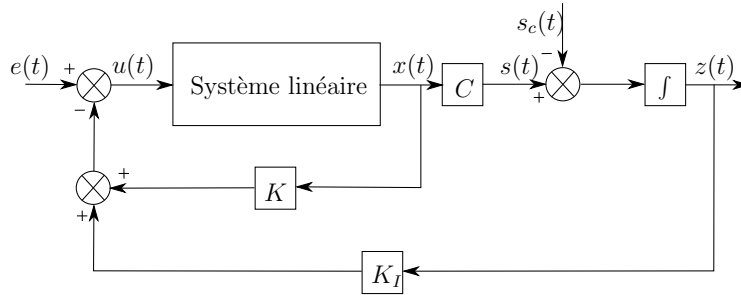


FIGURE 2.20 – Retour d'état et intégrateur

On a un système possédant un vecteur d'état augmenté $[x, z]^T$, où z est l'intégrale de l'erreur entre la sortie et la sortie de consigne. On cherche en régime permanent à atteindre $[\dot{x}, \dot{z}]^T = 0$ ce qui est fait en assurant que la matrice

$$\begin{bmatrix} A - BK & -BK_I \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

est stable. Ceci permet alors d'annuler l'erreur entre $s(t)$ et $s_c(t)$, garantissant ainsi une erreur statique nulle.

La technique qu'on peut utiliser dans le cas du convertisseur multicellulaire est identique. On ajoute une $n + 1^e$ composante au vecteur d'état :

$$x_{n+1} = \int G(x(t) - x_{ref}) dt \quad (2.42)$$

où G est la matrice de sortie du système. Cette composante correspond à l'action intégrale dont on a parlé précédemment. On obtient ainsi des trajectoires qui atteignent correctement la référence désirée pour l'une des composantes.

2.6.2 Convertisseur multicellulaire

La section précédente a présenté une application sur un convertisseur relativement simple, avec un vecteur d'état à deux dimensions et deux sous-systèmes. Cependant les

algorithmes donnés précédemment permettent de prendre en compte des systèmes relativement plus complexes. Nous allons nous intéresser ici à un système dont le vecteur d'état est de dimension 3 et possédant 8 modes : le convertisseur multicellulaire.

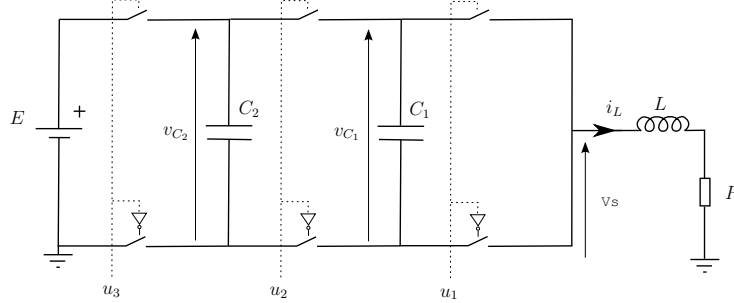


FIGURE 2.21 – Convertisseur multicellulaire

En notant l'état $x = [v_{C_1}, v_{C_2}, i_L]^T \in \mathbb{R}^3$ et en respectant les conventions de la figure précédente, les équations d'état du convertisseur s'écrivent :

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + B_0 + \sum_{i=1}^3 u_i(t)(A_i x(t) + B_i) \quad (2.43)$$

Les matrices A_i , $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ sont définies par

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}$$

et les matrices B_i par $B_0 = B_1 = B_2 = 0$ et $B_3 = [0, 0, E/L]^T$. La commande $u = [u_1, u_2, u_3] \in \{0, 1\}^3$ correspond à la position des différents interrupteurs : $u_j = 0$ signifie que l'interrupteur du haut est ouvert et celui du bas de la même cellule est fermé, $u_j = 1$ signifie que l'interrupteur du haut est fermé et celui du bas de la même cellule est ouvert. Soit une commande $u_{ref} = [u_{1ref}, u_{2ref}, u_{3ref}] \in \text{co}(U)$ avec $u_{1ref} = u_{2ref} = u_{3ref}$, correspondant à $x_{ref} = [E/3, 2E/3, u_{3ref}E/R]^T$. Le but de la commande [MH07] est d'une part, de réguler le courant circulant dans la charge, et d'autre part, de maintenir une tension moyenne aux bornes de chacune des capacités flottantes constante : pour C_1 , la valeur est de $E/3$ et pour C_2 , la valeur est de $2E/3$. On choisit alors pour matrice P :

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{bmatrix}.$$

Il est simple de montrer que $PA(u_{ref}) + A(u_{ref})^T P \leq 0$, ainsi la proposition 2 nous indique que la fonction quadratique $V(z) = z^T P z$ est une CLF pour le système relaxé (2.4) pour

le point de fonctionnement x_{ref} . Par la suite, nous imposons les valeurs de paramètres suivantes : $R = 10 \Omega$, $C_1 = C_2 = 40 \mu\text{F}$, $L = 10 \text{ mH}$ et $E = 30 \text{ V}$. On définit de plus la période d'échantillonnage $T_e = 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ s}$.

Du fait de l'existence de la CLF V , et pour le cas de la stratégie de plus grande pente, la proposition 6 est vérifiée. Afin d'illustrer les propriétés de stabilité et de robustesse de cette commande, nous allons considérer une boucle fermée constituée du système précédent avec des incertitudes paramétriques θ , un échantillonnage non-uniforme τ et une stratégie par retour d'état κ construite sur le système nominal. On fera l'hypothèse que chaque paramètre précédemment défini est connu avec une marge d'erreur δ entre 0 et 20% et que la période d'échantillonnage est dépendante du temps et est réalisé suivant une loi uniforme avec une variation maximale δ entre 0 et 20%. Il est à noter que ces variations sont au-delà de celles constatées généralement en pratique, en particulier pour le cas de la source de tension E .

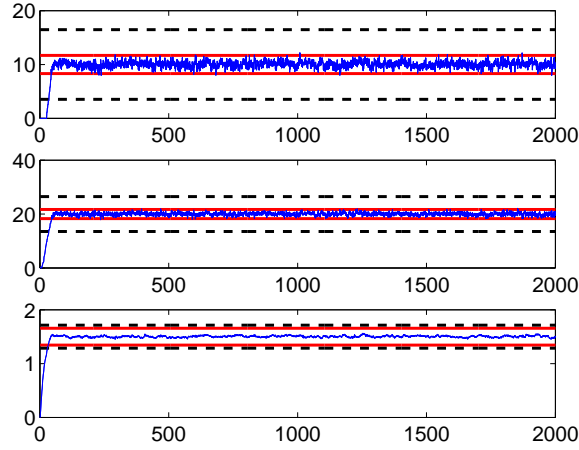


FIGURE 2.22 – Évolutions de v_{C_1} , v_{C_2} et i_L avec les solutions de $\mathcal{P}_4(0)$ et de $\mathcal{P}_4(20)$

La figure 2.22 représente l'évolution des composantes, v_{C_1} , v_{C_2} et i_L , du vecteur d'état avec des variations maximales sur les paramètres et sur la période d'échantillonnage de 20%. Les bornes sont données par les solutions de $\mathcal{P}_N(\delta_{min}, \delta_{max}, \theta_{max})$ pour $N = 4$ dans le cas sans incertitudes (trait continu rouge) et avec 20% de variation maximale (trait pointillé noir). On note $\mathcal{P}_i(X)$, le problème d'optimisation avec une séquence de longueur i et des incertitudes $\delta_{min} = 0$ et $\delta_{max} = \theta_{max} = X$. On associe à ce problème, la ligne de niveau $\mathcal{L}_i^*(X)$ et la boule fermée $\mathcal{S}_{\mathcal{L}_i}^*(X)$. Les bornes sont les valeurs maximales des projections des ensembles $\mathcal{S}_{\mathcal{L}_4}^*(\delta)$ sur les plans $v_{C_1} = 0$, $v_{C_2} = 0$ et $i_L = 0$. Il est à remarquer que, comme attendu, le vecteur d'état est borné par les limites données par $\mathcal{P}_4(20)$ mais pas par celles données par $\mathcal{P}_4(0)$.

L'évolution des lignes de niveaux déterminées par \mathcal{P}_i , $i \in \{1, \dots, 4\}$ en fonction de la valeur maximale des incertitudes est représentée à la figure. 2.23. La valeur de $\mathcal{S}_{\mathcal{L}_1}^*(\delta)$ augmente jusque 2900 pour $\delta = 20\%$. Comme spécifié dans la proposition 4, la relation $\mathcal{S}_{\mathcal{L}_{pN}}^* \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{L}_N}^*$, $(p, N) \in \mathbb{N}_*$ est vérifiée. De plus, pour chacun des problèmes, la taille des ensembles attractifs augmente avec la valeur maximale des incertitudes possibles.

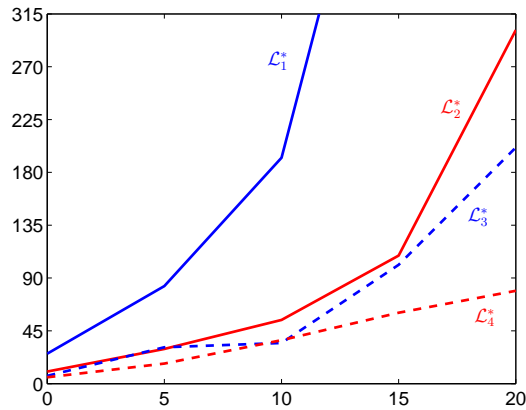


FIGURE 2.23 – Évolution des lignes de niveaux \mathcal{L}_N^* en fonction de la valeur maximale de variations

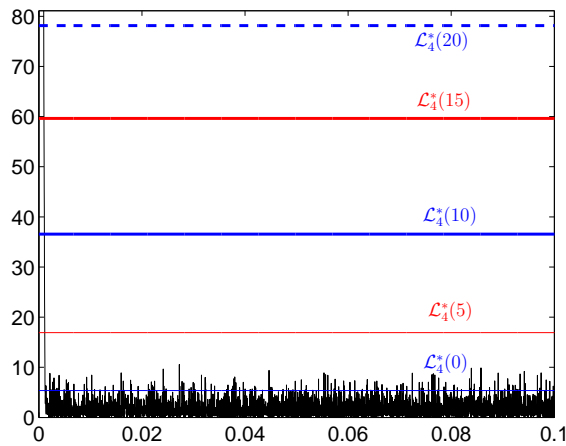


FIGURE 2.24 – Évolution de la fonction V en fonction du temps et lignes de niveau

La figure 2.24 montre l'évolution de la fonction V en fonction du temps pour une valeur d'incertitudes maximale $\delta = 20\%$. À titre de comparaison, on donne les lignes de niveaux pour une suite de commande de longueur 4 avec des incertitudes paramétriques dont la valeur relative maximale est $\delta = \{0, 5, 10, 15, 20\}\%$. On peut remarquer que si les incertitudes ne sont pas prises en compte lors de la résolution du problème d'optimisation \mathcal{P}_N , les trajectoires issues de (SCTD) ne vérifient pas la relation $V(z_k) \leq \mathcal{L}_4^*(0)$. La prise en compte des incertitudes permet de vérifier $V(z_k) < \mathcal{L}_4^*(\delta)$. Nous pouvons observer que $\mathcal{L}_4^*(20)$ est très grand vis-à-vis du niveau réellement atteint par la trajectoire simulée. Ceci peut être expliqué par le fait que $\mathcal{L}_4^*(20)$ est la prise en compte du pire cas, c'est-à-dire qu'à chaque instant, la commande et la période d'échantillonnage sont choisies de manière à maximiser la valeur de $V(x_k)$ à un instant k donné, et ce en fonction des paramètres incertains. Du fait de la loi de répartition uniforme, ce cas de figure est peu probable en pratique.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la stabilisation robuste d'un système affine commuté. En se fondant sur l'existence d'une fonction de commande de Lyapunov pour un système relaxé, nous avons pu proposer des lois de commutations échantillonnées permettant de stabiliser de manière robuste le système commuté en temps continu, autour d'un point de fonctionnement choisi.

Le formalisme adopté nous permet de déterminer des ensembles globalement attractifs qui sont une sur-approximation relativement fine de l'ensemble attractif global du système. Les problèmes proposés sont réalisables d'un point de vue numérique dans le cas de CLF quadratiques par l'utilisation d'algorithmes de type QCQP, voire polynomiaux non-convexe. De plus, nous avons formulé des résultats de stabilité entrée-état vis-à-vis de la période d'échantillonnage et d'incertitudes paramétriques.

Afin de montrer l'applicabilité des méthodes, deux applications ont été proposées : tout d'abord sur un système relativement simple, le convertisseur buck-boost, puis sur un système plus complexe, le convertisseur multicellulaire. Il est cependant important de préciser que, bien que l'utilisation d'algorithmes de résolution polynomiaux réduise significativement le temps de calcul, celui-ci peut devenir très important si l'on considère des séquences de commande longues et des incertitudes paramétriques. Mais on a pu constater en pratique qu'il n'est pas forcément nécessaire de considérer des séquences de longueur importante pour obtenir une approximation correcte de l'ensemble attractif du système. Des travaux sur l'application de ces lois de commandes et l'évaluation des ensembles invariants auraient été intéressants à réaliser sur une maquette réelle, mais n'ont pu être effectués par manque de temps.

Un autre intérêt de la méthode que nous avons proposé réside dans son utilisation pour l'analyse de la sensibilité du système. On peut ainsi déterminer l'effet qu'a une variation d'un paramètre sur la stabilité globale du système. Pour finir, on peut ajouter, qu'en supposant le système observable, on peut utiliser cette méthode dans le cas où on s'intéresse à la stabilisabilité du système par une commande par retour de sortie. Celle-ci n'a pas été appliquée ici car les systèmes considérés ne sont pas observables indépendamment de la loi de commutations. On discute, dans le prochain chapitre, de ce problème de conception d'une loi de commutations par retour de sortie sur le convertisseur multicellulaire.

3

Du retour d'état à la commande basée observateur d'un multicellulaire

3.1 Préliminaires

Les convertisseurs de puissance sont des outils essentiels pour le transfert d'énergie d'une source à une autre. Les vingt dernières années ont vu naître d'une part des améliorations des composants de l'électronique de puissance (en particulier au niveau des semi-conducteurs [Lie06]) et d'autre part de nouvelles structures de conversions de l'énergie [EM01]. Afin d'exploiter au maximum ces convertisseurs, des commandes avancées, issues généralement de commande pour les systèmes non-linéaires, ont vu le jour. Celles-ci utilisant un certain nombre de grandeurs du système, l'implantation de capteurs est devenue nécessaire. Cependant, une mesure par capteur n'est pas toujours aisée, et reste un coût supplémentaire dans la conception du convertisseur : il devient alors important de s'intéresser à l'observabilité de ces systèmes ainsi qu'à la synthèse d'observateurs pour ceux-ci.

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord dresser un bref récapitulatif des travaux effectués sur l'observation des systèmes hybrides en général, rappelant les avancées sur ce sujet, selon la manière dont est formulé le système. Nous allons ensuite nous intéresser à une structure particulière de conversion de l'énergie que l'on a vu dans la partie Applications du chapitre précédent : le convertisseur multicellulaire. On rappellera les modélisations qui sont utilisées pour le représenter, ce qui nous amènera aux problèmes liés à sa structure concernant l'équilibrage des capacités flottantes. Nous présenterons ensuite différentes techniques d'observation pour les tensions de ces capacités flottantes qui sont toutes fondées sur une hypothèse : le système doit être observable, ce qui, en pratique, n'est pas aisé à vérifier. En effet, les tensions des capacités flottantes ne sont pas observables au sens classique, c'est-à-dire qu'elles ne peuvent pas être estimées de manière

instantanée. Mais il est possible de les estimer en utilisant des informations collectées sur une durée suffisamment longue, et d'obtenir ainsi une estimation entre deux commutations. Cependant, ceci nécessite que la loi de commutations satisfasse quelques propriétés. Nous montrerons alors qu'il est possible de synthétiser une loi de commutations garantissant ces propriétés, et donc l'observabilité du système tout en amenant celui-ci à un point de fonctionnement donné. Nous présenterons enfin des résultats de simulation validant les propriétés démontrées dans ce chapitre.

3.1.1 Observation des systèmes hybrides

À notre connaissance, les premiers travaux concernant les observateurs sur les systèmes hybrides datent de la fin des années 80. [JC87, JC90] considèrent un système hybride en temps continu, affine en l'état et en la commande, la commutation entre les différents sous-systèmes étant assimilée à un processus de Markov. Ces travaux donnent des conditions nécessaires et suffisantes quant à l'observabilité de cette classe de systèmes. Cette équipe obtient de plus des conditions similaires dans le cas de systèmes hybrides à temps discret [JC88]. Pour ces mêmes systèmes en temps continu, [VCSS03] établit un cadre formel pour l'observabilité de l'état initial, du premier instant de commutation et l'observabilité du système au sens général en donnant des conditions nécessaires et suffisantes pour chacune d'entre elles sous forme de simples conditions de rang. Une équivalence en temps discret de ces notions est étudiée dans [BE04]. [EH88, EH89] caractérisent l'observabilité de systèmes linéaires commutés en temps continu pour des commutations périodiques. Pour ces mêmes systèmes, [SGL02] formule des conditions nécessaires et suffisantes fondées sur leurs résultats concernant l'atteignabilité, et la dualité observation/contrôle. Un test pour l'observabilité des systèmes hybrides mis sous la forme MLD est établi dans [BFM00], celui-ci inclut, entre autres, le cas des systèmes affines par morceaux. La notion d'observabilité partielle dans le cas des systèmes commutés est abordée dans [KBX09] sous le nom de $Z(T_N)$ -observabilité. Une généralisation de la notion de $Z(T_N)$ -observabilité pour le cas des systèmes commutés possédant des discontinuités de l'état est faite dans [TSL11]. Nous détaillerons ces deux approches dans les parties qui vont suivre.

De nombreuses synthèses d'observateurs pour les systèmes hybrides se fondent sur les travaux de Luenberger [Lue64] concernant l'observation des systèmes linéaires. On peut citer les travaux de [AC01] qui s'intéressent à la synthèse d'observateurs commutés par une approche LMI. La synthèse des gains de l'observateur et la recherche de la fonction quadratique de Lyapunov commune se font simultanément. Dans le cas des systèmes bimodaux linéaires par morceaux, [JHW07] synthétise un observateur commuté de Luenberger à deux modes. Dans les deux cas précédents, on fait l'hypothèse que la loi de commutation est connue. Un problème plus complexe encore est de considérer que cette loi n'est pas connue : [BBV02, BBBV02] synthétisent un observateur pour l'état discret, dit *observateur de position* et un observateur pour l'état continu, dit *observateur continu*. Moyennant un certain nombre d'hypothèses, dont celle d'un temps de maintien dans chaque mode, les auteurs montrent que l'*observateur de position* converge en temps fini, puis l'*observateur continu* qui est un observateur de Luenberger commuté, converge de manière exponentielle. En modélisant les systèmes commutés sous forme d'un système linéaire de complémentarité, [HCSB11] construit un observateur à convergence

exponentielle et garantit la stabilité de la commande basée observateur. L'intérêt de cette approche est un modèle très général, incluant par exemple la possibilité de sauts sur la variable d'état continu.

3.1.2 Modélisation du convertisseur multicellulaire

Comme nous avons pu le voir dans le premier chapitre de ce manuscrit (partie 1.2), il existe de nombreuses manières de modéliser les convertisseurs de puissance continu-continu. La suite de ce chapitre s'appuie sur une structure particulière de conversion d'énergie continu-continu : le convertisseur multicellulaire en fonctionnement hacheur, c'est-à-dire pour lequel une tension et un courant de sortie de référence sont fixés. Afin de modéliser ce convertisseur, nous allons utiliser deux des approches présentées au premier chapitre. Celles-ci nous serviront dans l'étude de l'observabilité puis dans la recherche d'une commande garantissant l'observabilité du système.

Dans la suite de ce manuscrit, sauf mention contraire, nous utiliserons un convertisseur multicellulaire à p cellules dont le schéma est donné en figure 3.1.

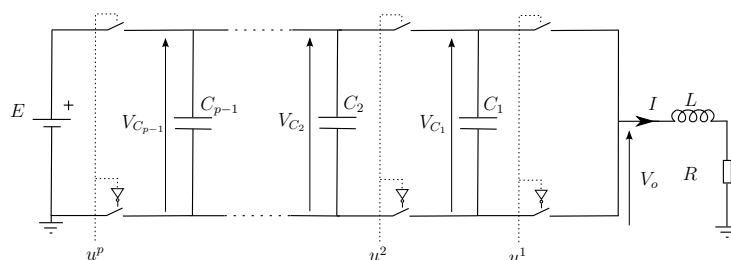


FIGURE 3.1 – Convertisseur multicellulaire à p cellules

R et L sont respectivement la résistance et l'inductance de charge, I est le courant circulant dans celle-ci, V_s la tension à ses bornes et E la tension de la source. De plus, on note pour une capacité C_j , $\forall j \in \{1, \dots, p-1\}$ donnée, V_{C_j} la tension à ses bornes. Enfin le système est constitué de $2p$ interrupteurs fonctionnant par paires : une commande u^k est envoyée à l'interrupteur situé en haut de la cellule et son complément \bar{u}^k est envoyé à celui du bas de la même cellule. $\forall k \in \{1, \dots, p\}$, $u^k \in \{0, 1\}$:

- $u^k = 0$ signifie que l'interrupteur du haut de la cellule k est ouvert (donc celui du bas fermé) ;
- $u^k = 1$ signifie que l'interrupteur du haut de la cellule k est fermé (donc celui du bas ouvert).

Dans les modélisations qui vont suivre, le fonctionnement du convertisseur sera idéalisé :

- interrupteurs parfaits : la commutation est instantanée, l'impédance quand l'interrupteur est ouvert est infinie, et quand il est fermé, est nulle ;
- source et composants parfaits : la source de tension est constante, les condensateurs et l'inductance ne possèdent pas de résistance parasite.

3.1.2.1 Modèle instantané

Le modèle instantané permet de décrire le convertisseur multicellulaire comme un système non-linéaire. On pourra ainsi utiliser des techniques d'analyse ou de synthèse liées aux systèmes non-linéaires.

Le modèle instantané du convertisseur est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{I} = -\frac{R}{L}I + \frac{E}{L}u^p - \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{p-1} V_{C_j}(u^{j+1} - u^j) \\ \dot{V}_{C_j} = \frac{I}{C_j}(u^{j+1} - u^j) \quad j = 1, \dots, p-1 \\ y = I \end{cases} \quad (3.1)$$

On remarque que l'on considère pour notre modèle une seule mesure disponible, celle du courant traversant la charge. Par la suite, on écrira le système (3.1) comme un système non-linéaire de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3.2)$$

où f et h sont des fonctions se déduisant simplement du système (3.1) et où x est le vecteur $x = [I, V_{C_1}, \dots, V_{C_{p-1}}]^T \in \mathbb{R}^p$.

3.1.2.2 Système à commutations

Le modèle sous forme de système à commutations permet de mettre en évidence le caractère hybride du convertisseur multicellulaire et ainsi d'utiliser des approches qui prendront directement en compte l'effet des commutations. Plus précisément, le convertisseur multicellulaire peut être mis sous forme d'un système affine commuté, que l'on écrit ainsi :

$$\begin{cases} \dot{x} = \tilde{A}(u)x + \tilde{B}(u) \\ y = \tilde{C}x \end{cases} \quad (3.3)$$

avec $x = [I, V_{C_1}, \dots, V_{C_{p-1}}]^T \in \mathbb{R}^p$ le vecteur d'état et $u \in U = \{0, 1\}^p$ la commande discrète. Les matrices $\tilde{A}(u)$, $\tilde{B}(u)$ et \tilde{C} sont définies par :

$$\tilde{A}(u) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{u^2 - u^1}{L} & \cdots & -\frac{u^p - u^{p-1}}{L} \\ \frac{u^2 - u^1}{C_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{u^p - u^{p-1}}{C_{p-1}} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{B}(u) = \begin{bmatrix} \frac{E}{L}u^p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\tilde{C} = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

Il existe bien entendu d'autres modèles permettant de décrire le convertisseur multicellulaire, comme celles présentées en partie 1.2. Dans le cas de ce convertisseur, une approche harmonique [FM96] a été développée où le courant circulant dans la charge est considéré comme un paramètre du modèle. Celle-ci permet de mettre en évidence les propriétés de l'équilibrage naturel, que l'on voit dans la section qui suit.

3.2 De l'équilibre des tensions des capacités flottantes

Afin d'assurer le bon fonctionnement du convertisseur multicellulaire, il est important de garantir un certain niveau de tension pour chacune des capacités flottantes. Ce niveau n'est pas assuré de manière évidente car il dépend par exemple des éléments composant le système, de ceux composant la charge, ou bien encore des valeurs d'intensité et de tension requises en sortie. Ce maintien des tensions est important car il garantit d'une part le fonctionnement sécurisé du convertisseur (pas de surtension au niveau des commutateurs) et d'autre part, une qualité de la grandeur de sortie (qualité harmonique par exemple). Pour un convertisseur à p cellules, les tensions de références des capacités sont de $V_{C_{j\text{ref}}} = jE/p$, $j \in \{1, \dots, p-1\}$. En maintenant cette référence, on garantit l'un des principaux intérêts de ce convertisseur qui est une tension réduite au niveau des interrupteurs par rapport à la tension d'entrée. Il y a deux classes de techniques permettant l'équilibrage des tensions intermédiaires :

- l'équilibrage en boucle ouverte, fondé sur la structure même du convertisseur ;
- l'équilibrage en boucle fermée, utilisant la connaissance des grandeurs électriques du convertisseur pour la commande des interrupteurs.

Nous allons exposer quelques techniques appartenant à l'une ou l'autre de ces classes dans les sections qui suivent.

3.2.1 Équilibrage en boucle ouverte

L'équilibrage en boucle ouverte peut se faire de différentes manières :

- par équilibrage naturel : afin de réaliser celui-ci, on considère l'application d'une commande continue par une technique de Modulation par Largeur d'Impulsion (PWM : *Pulse Width Modulation*). Il existe différentes sortes de PWM, nous allons présenter ici la plus classique d'entre elles, la PWM dite intersective.

Elle consiste en la comparaison du signal continu de commande, qu'on appelle modulante avec un signal de porteuse, de fréquence beaucoup plus élevée. Par l'utilisation d'un simple comparateur, si la modulante est supérieure à la porteuse, le signal de sortie prend la valeur 1, sinon elle prend la valeur 0. La figure 3.2 illustre la PWM intersective dans le cas d'une modulante sinusoïdale et d'une porteuse en dent de scie.

L'utilisation d'un modèle harmonique [Car96] permet de mettre en évidence le phénomène d'équilibrage naturel : en utilisant trois porteuses identiques déphasées chacune de $2\pi/p$ pour une même modulante, pour chaque paire d'interrupteurs, on obtient une répartition équilibrée des tensions pour chacun des condensateurs. Ce phénomène dépend directement des harmoniques du courant circulant dans la charge. De ce fait, l'équilibrage naturel dépend directement de la nature de la charge : une charge purement résistive permet un équilibrage optimal, celui-ci est d'autant plus dégradé que la charge est inductive, et il n'existe pas d'équilibrage naturel pour un fonctionnement du convertisseur à vide (impédance infinie). Dans le cas d'un déphasage différent de $2\pi/p$, l'équilibrage tend vers un régime permanent qui est lié à la charge, et donc n'est pas nécessairement celui souhaité. La figure

3.3 illustre l'équilibrage naturel pour une charge faiblement inductive avec une modulante constante et un déphasage optimal.

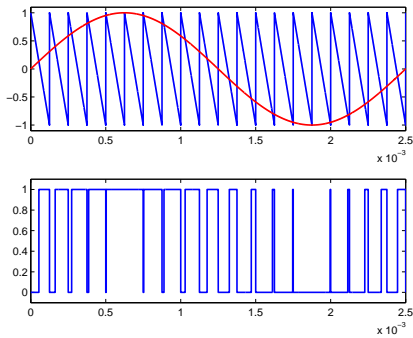


FIGURE 3.2 – Exemple d'une PWM intersective analogique

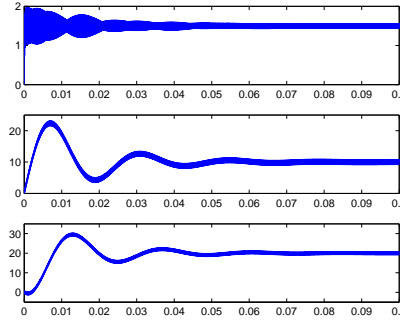


FIGURE 3.3 – Évolution des composantes du vecteur d'état pour une commande PWM

Bien que cette technique soit très simple à mettre en oeuvre, elle a des défauts importants. En particulier, la dynamique d'équilibrage peut être très lente pour une charge fortement inductive (par un exemple un système de conversion électromécanique) et amène à des commutations dont la fréquence n'est pas directement contrôlée. De plus, [Gat97] a montré que dans le cas des convertisseurs à nombre de cellules non premier, il existe des points de fonctionnement pour lesquels l'équilibrage naturel n'est pas assuré.

- par utilisation d'un circuit d'équilibrage : à partir du phénomène d'équilibrage naturel, [Pri95, Car96, MFT⁺02] utilisent un filtre RLC série en parallèle de la charge afin d'amplifier les harmoniques permettant l'équilibrage naturel des tensions. Cependant, il est important d'être attentif lors de la conception, au fait que l'amplification des harmoniques peut mener à des harmoniques de grande intensité pouvant entraîner la destruction des semi-conducteurs. Le schéma du convertisseur avec le filtre est donné en figure 3.4. Cette structure a l'intérêt, par rapport à l'équilibrage naturel, de permettre un équilibrage rapide et l'utilisation du convertisseur à vide. Cependant l'ajout de cette structure est un coût supplémentaire par rapport à l'équilibrage naturel.

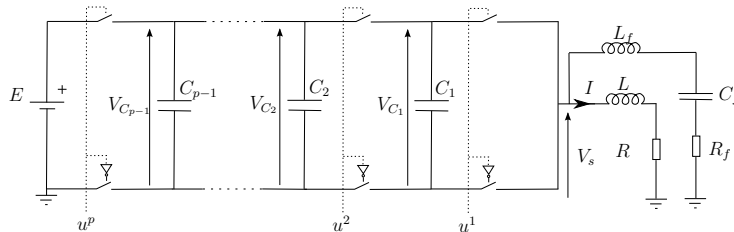


FIGURE 3.4 – Convertisseur multicellulaire à p cellules et filtre RLC série

- par utilisation de machines d'états : du fait de sa structure, le convertisseur multicellulaire possède des redondances de niveaux de tensions (illustrées dans le tableau 3.1, c'est-à-dire que plusieurs modes mènent à une tension de sortie identique, mais par des dynamiques différentes. Dans le cas des convertisseurs multicellulaires superposés, [MMGH07] a pour idée d'utiliser ces redondances pour permettre l'équilibrage des tensions intermédiaires, tout en assurant un contrôle indépendant de la tension de sortie. Cette méthode est utilisée en complément d'un modulateur PWM de type *Phase Disposition* (voir ses caractéristiques dans [Lie06]). De manière simplifiée, le modulateur définit un niveau de tension désiré en sortie et la machine d'états attribue de manière cyclique les signaux de commande aux cellules de commutations afin de parvenir à ce niveau de tension. La machine d'états est formée de plusieurs lignes, une par niveau de tension de sortie et pour chaque ligne, toutes les configurations de commande permettant d'obtenir la tension désirée sont référencées. Enfin, on donne les liens permettant de passer d'une configuration à une autre. Cette technique est intéressante, car relativement simple à mettre en oeuvre

u^3	u^2	u^1	V_s
0	0	0	0
0	0	1	$\frac{E}{3}$
0	1	0	$\frac{E}{3}$
0	1	1	$\frac{2E}{3}$
1	0	0	$\frac{E}{3}$
1	0	1	$\frac{2E}{3}$
1	1	0	$\frac{2E}{3}$
1	1	1	E

TABLE 3.1 – Mode utilisé et niveaux de tensions pour un convertisseur à 3 cellules

(dans le cas où le nombre de cellules reste faible), mais possède tout de même l'inconvénient de toute boucle ouverte : aucune garantie concernant la robustesse du contrôle ne peut être donnée.

L'équilibrage en boucle ouverte des tensions intermédiaires permet d'obtenir de bons résultats. De plus, elles ont le grand intérêt de ne pas nécessiter la connaissance des tensions intermédiaires, et donc de ne pas entraîner un coût supplémentaire pour l'implémentation de capteurs. Cependant, en pratique, les commandes en boucle fermée sont plus intéressantes, afin de pallier, par exemple, des problèmes de robustesse et pour garantir un équilibrage plus rapide. Nous allons en présenter quelques unes ici.

3.2.2 Équilibrage en boucle fermée

Nous présentons ici quelques techniques générales d'équilibrage en boucle fermée. Celles-ci ne seront pas détaillées, car ne sont pas l'objet de notre étude. Cependant, elles

possèdent un point commun : la connaissance des valeurs des tensions intermédiaires est requise pour le bon fonctionnement de chacune de ces techniques.

- Équilibrage par algorithme externe : la méthode CoDiFI (Contrôle Directe à Fréquence de commutations Imposée) [Mar00, MRMC00] utilise le principe de redondance des différents modes concernant le niveau de tension. Cette méthode est exclusivement dédiée au contrôle du couple d'une machine asynchrone. Celle-ci est fondée sur la commande DTC (Direct Torque Control) [Vas98] qui consiste à commander directement la fermeture et l'ouverture des interrupteurs de l'onduleur (en l'occurrence le convertisseur multicellulaire) à partir des valeurs calculées du flux statorique et du couple de la machine. Cette commande a pour but d'imposer au flux statorique une direction déterminée par des valeurs de consigne. En utilisant un modèle inverse, on recherche les vecteurs tensions à appliquer à la machine. L'utilisation du modèle inverse revient à prédire le comportement de la machine aux instants suivants. Le niveau de tension de sortie est imposé par la commande DTC. En considérant que pour un même niveau de tension en sortie atteint, on peut utiliser des modes, donc des dynamiques différentes (voir tableau 3.2), ce degré de liberté permet, pour un niveau de tension en sortie donné, de s'approcher des tensions intermédiaires de référence.

				$i_L > 0$		$i_L < 0$	
u^3	u^2	u^1	V_s	ΔV_{C_2}	ΔV_{C_1}	ΔV_{C_2}	ΔV_{C_1}
0	0	0	0	→	→	→	→
0	0	1	$\frac{E}{3}$	→	↘	→	↗
0	1	0	$\frac{E}{3}$	↘	↗	↗	↘
0	1	1	$\frac{2E}{3}$	↘	→	↗	→
1	0	0	$\frac{E}{3}$	↗	→	↘	→
1	0	1	$\frac{2E}{3}$	↗	↘	↘	↗
1	1	0	$\frac{2E}{3}$	→	↗	→	↗
1	1	1	E	→	→	→	→

TABLE 3.2 – Mode utilisé et variations générées [Def08] pour un convertisseur à 3 cellules

- Commande en durée : la conversion d'énergie s'effectue par la variation du temps de conduction des interrupteurs. Il existe deux types de commandes en durée :
 - 1 - le premier type est fondé sur des techniques PWM. Notons α^j , $j = 1, \dots, p$, le rapport cyclique de la paire d'interrupteurs j . On définit alors la commande de la paire d'interrupteurs j sur un intervalle de temps T ainsi :

$$u^j = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \alpha^j T[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.5)$$

Les commandes en durée sont fondées sur l'utilisation du modèle moyen (partie 1.2.2) du convertisseur multicellulaire. Il est ensuite nécessaire de linéariser le système obtenu. Deux approches sont alors envisagées :

- la linéarisation autour du point de fonctionnement choisi. Cette approche constitue la commande découplante linéaire [Tac98]. Son objectif est de synthétiser une commande constituée d'un retour d'état de la forme Rx et d'une précompensation de la forme Lx_{ref} ;
 - la linéarisation exacte du système. Cette approche constitue la commande par découplage entrées/sorties [Gat97, GFM⁺02]. On cherche dans cette commande à obtenir un modèle découplé du système par application d'un retour d'état non linéaire. Ensuite, des boucles de régulation classique de type proportionnel ou proportionnel intégral sont appliquées au système découplé.
- 2 - le second type utilise une stratégie prédictive [PRI08] afin de pallier le manque de contrôle du régime permanent des techniques PWM. Après avoir synthétisé un cycle optimal de commutation, les instants de commutations en régime cyclique sont calculés par une méthode prédictive permettant d'assurer le comportement désiré autour du point de référence déterminé.
- Commande par déphasage : cette commande utilise [Gat97] un modèle harmonique et est fondée sur le concept de logique floue. Les rapports cycliques α^j , $j = 1, \dots, p$ sont constants et permettent de fixer la valeur du courant circulant dans la charge. Les déphasages entre les signaux de commande permettent l'équilibrage des tensions intermédiaires.
 - Commande prédictive : bien que le terme prédictif ne soit pas employé par ses auteurs, la commande sur horizon court [DB00, BDPT01] est une commande prédictive dans le sens où elle estime la valeur des tensions intermédiaires à la fin de la prochaine période d'échantillonnage et cherche la commande permettant de minimiser un critère lié à la référence désirée. Différents critères sont utilisés : soit la meilleure direction possible, en minimisant l'angle fait entre la droite liant l'état courant à la référence et la droite liant l'état courant aux états prédits, soit la meilleure vitesse de déplacement, qui choisit la commande permettant la meilleure direction instantannée en norme vers l'état de référence, soit enfin la meilleure vitesse de déplacement dans la direction de référence, qui optimise à la fois la direction et la norme du vecteur des tensions intermédiaires à choisir.
 - Commande par mode glissant : la commande par modes glissants [Pin00, MCRB04, AGB11] se base sur le modèle instantané du convertisseur et est dérivée de la théorie sur la stabilité de Lyapunov. Cette approche permet d'obtenir des résultats intéressants quant à la dynamique d'équilibrage des tensions intermédiaires. Il est cependant à noter qu'elle donne lieu à une fréquence de commutations variable, et tendant vers l'infini pour les trajectoires s'approchant de certaines surfaces, dite de commutations.
 - Commande optimale : la commande optimale a été appliquée au convertisseur multicellulaire dans [PRI09]. Celle-ci nécessite un calcul hors-ligne des trajectoires

singulières, qui sont des surfaces de commutations optimales pour le système. Afin d'éviter un phénomène de glissement similaire à la commande par mode glissant, les auteurs considèrent une application où la commande est échantillonnée.

On a vu dans cette section que l'équilibrage de tension des capacités flottantes peut se faire en boucle ouverte ou en boucle fermée. L'avantage des techniques boucle ouverte est une grande simplicité de mise en oeuvre mais une dynamique d'équilibrage lente. Les techniques boucle fermée, moyennant une complexité accrue dans la mise en oeuvre permettent d'obtenir une dynamique d'équilibrage rapide. Cependant, celles-ci nécessitent la connaissance des tensions intermédiaires. Technologiquement, ces mesures peuvent être faites par une sonde de tension différentielle (pour chacun des condensateurs). Afin d'obtenir une valeur "flottante" de la tension, il est nécessaire que la référence de la sonde soit la masse du montage de puissance. De ce fait, il est impératif d'utiliser en supplément un système permettant d'isoler la partie puissance de la partie commande. Il est alors évident que l'ajout de ces structures supplémentaires entraîne un surcoût, c'est pourquoi par la suite nous allons nous intéresser à une méthode permettant d'obtenir la valeur des tensions intermédiaires sans mesure directe : l'observation.

3.3 Observation de la tension des capacités flottantes

Nous avons pu voir précédemment que l'observation de la tension des capacités flottantes est importante pour la mise en oeuvre, à moindre coût, de stratégies de commutations en boucle fermée, permettant d'une part d'obtenir le courant désiré en sortie, et d'autre part, un équilibrage des tensions des capacités flottantes. Cependant, du fait de la structure commutée du convertisseur multicellulaire, l'observation de ces tensions flottantes est directement liée à la stratégie de commutation. En effet, physiquement, on conçoit parfaitement qu'il ne sera pas possible de déduire la tension d'une capacité flottante à partir du courant traversant la charge, si ce même courant ne traverse pas la capacité en question. Ainsi une commande de type "bang-bang", c'est-à-dire pour laquelle tous les interrupteurs du haut sont ouverts, puis fermés, ne permettra l'observation d'aucune des tensions flottantes. Nous allons dans cette partie voir les techniques utilisées dans la littérature pour décrire l'observabilité de ce système. Différents observateurs utilisés pour l'observation des capacités flottantes seront ensuite décrits.

3.3.1 Une observation sous conditions

Il existe quatre approches [Ben09, KBX09, TSL11, RSD10] dans la littérature pour analyser l'observabilité du convertisseur multicellulaire. La première d'entre elles se fonde sur une approche statique du système. Les trois suivantes sont, quant à elles, issues de la modélisation commutée du système. Avant de commencer cette analyse, rappelons la définition 6 d'une loi de commutations, en considérant cette fois u un vecteur de commande, à laquelle on associe la séquence $T_N = \{t_j\}_{j=0,\dots,N}$ des instants de commutations.

Définition 31 (Loi de commutations). *Soit $T_N = \{t_j\}_{j=0,\dots,N}$ la séquence des instants où la commutation d'au moins l'une des paires d'interrupteurs se produit. La commande*

$u : \mathbb{R}^+ \rightarrow U = \{0, 1\}^p$ est une fonction constante par morceaux telle que

$$u(t) = u(t_i) = u_i \in U = \{0, 1\}^p,$$

$\forall t \in [t_i, t_{i+1}[$, $i = 0, \dots, N - 1$. On notera la suite des commandes la suite $\sigma_N = \{u_i\}_{i=0, \dots, N-1}$.

3.3.1.1 Approche statique

Cette approche n'est pas directement une approche permettant de traiter de l'observabilité du convertisseur multicellulaire en tant que système non-linéaire, cependant celle-ci a permis la formulation d'une méthode permettant la reconstruction de la tension des capacités flottante. Cette approche étant statique, on considère une commande u fixée. De ce fait, quelque soit la commande choisie, le convertisseur multicellulaire devient un système affine en l'état.

Pour les systèmes affines en l'état, il suffit de s'intéresser au rang de la matrice d'observabilité \mathcal{O} défini par :

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \tilde{C} & \tilde{C}\tilde{A}(u) & \dots & \tilde{C}\tilde{A}^{p-1}(u) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Si le rang de \mathcal{O} est égal à la dimension du système, alors le système est observable pour la commande u considérée. On peut aisément remarquer que, quelque soit la commande, le rang de \mathcal{O} est au plus égal à deux. Le système n'est donc pas observable.

Récrivons le système (3.1) sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{I} = -\frac{R}{L}I + \frac{E}{L}u^p + V_s \\ \dot{V}_s = -\sum_{j=1}^{p-1} \frac{I}{LC_j}(u^{j+1} - u^j)^2 \end{cases} \quad (3.7)$$

où $V_s = -\frac{1}{L} \sum_{j=1}^{p-1} (u^{j+1} - u^j)V_{C_j}$. En utilisant la condition de rang, on obtient à nouveau un rang égal à deux, quelque soit la commande considérée. D'un point de vue statique, le courant traversant la charge et la tension aux bornes de celle-ci sont donc simultanément observables.

Fondée sur ces observations, [Gat97] propose de retrouver les valeurs des tensions V_{C_j} des capacités intermédiaires par la mesure de la tension V_s sur un intervalle de temps suffisant. À un instant i donné, on a la tension V_s qui vaut $V_{s_i} = -\frac{1}{L} \sum_{j=1}^{p-1} (u_i^{j+1} - u_i^j)V_{C_j}$, ou, écrit de manière vectorielle :

$$V_{s_i} = -\frac{1}{L} [u_i^2 - u_i^1 \dots u_i^p - u_i^{p-1}] \begin{bmatrix} V_{C_1} \\ \vdots \\ V_{C_{p-1}} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

En supposant que les tensions intermédiaires ne varient pas dans l'intervalle de temps de mesure, on peut alors effectuer $p - 1$ mesures permettant d'obtenir une estimation des

tensions intermédiaires. Il suffit d'inverser le système suivant :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_{s_1} \\ \vdots \\ V_{s_{p-1}} \end{bmatrix} &= -\frac{1}{L} \begin{bmatrix} u_1^2 - u_1^1 & \dots & u_1^p - u_1^{p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{p-1}^2 - u_{p-1}^1 & \dots & u_{p-1}^p - u_{p-1}^{p-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{V}_{C_1} \\ \vdots \\ \tilde{V}_{C_{p-1}} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{L} \mathcal{U}^{p-1} \begin{bmatrix} \tilde{V}_{C_1} \\ \vdots \\ \tilde{V}_{C_{p-1}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Il est alors nécessaire que la matrice \mathcal{U}^{p-1} soit inversible. L'hypothèse que les tensions intermédiaires ne varient pas dans l'intervalle de temps de mesure permet d'assurer que les tensions intermédiaires reconstruites \tilde{V}_{C_j} sont égales aux tensions V_{C_j} .

3.3.1.2 Approche hybride

3.3.1.2.1 Z -observabilité :

Cette approche est fondée sur la notion de $Z(T_N)$ -observabilité développée dans [KBX09]. Rappelons tout d'abord cette définition :

Définition 32 ($Z(T_N)$ -observabilité [KBX09]). *La fonction $z = Z(t, x, \sigma)$ est $Z(T_N)$ observable le long de la suite des instants de commutations T_N si pour tout couple de trajectoires $(t, x^i(t), \sigma^i(t))$, $i = 1, 2$ définies dans l'intervalle de temps $[t_0, t_N]$, l'égalité*

$$h^1(t, x^1, \sigma^1) = h^2(t, x^2, \sigma^2) \quad p.p. \text{ pour } t \in [t_0, t_N] \quad (3.10)$$

implique l'égalité

$$Z(t, x^1, \sigma^1) = Z(t, x^2, \sigma^2) \quad p.p. \text{ pour } t \in [t_0, t_N]. \quad (3.11)$$

Cette définition permet d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 10 ([KBX09]). *Soit le système (3.3) et une séquence de temps T_N . Supposons que pour n'importe quelle commande admissible, $z = Z(t, x, u)$ est toujours continue. S'il existe une suite de projections linéaires $\{P_i\}_{i=0, \dots, N-1}$ telle que :*

- pour tout $i \in \{0, \dots, N-1\}$, $P_i Z(t, x, \sigma)$ est Z -observable pour tout $t \in \mathcal{I}_i = [t_i, t_{i+1}[$,
- $\text{rang}([P_0^T, \dots, P_{N-1}^T]) = \dim(z)$,
- $\frac{d\bar{P}_i Z(t, x, \sigma)}{dt} = 0$ pour $t \in \mathcal{I}_i$, où \bar{P}_i est le complément de P_i tel que $\{P_i^T, \bar{P}_i^T\}$ est de plein rang dans $\mathbb{R}^{\dim(z) \times \dim(z)}$,

alors z est Z -observable le long de la suite des instants de commutations T_N .

La première condition de ce théorème implique que chacune des projections $P_i Z(t, x, u)$ est Z -observable sur un intervalle de temps non nul. La seconde condition garantit que l'on peut projeter chacune des composantes de Z , c'est-à-dire que l'ensemble des composantes de Z est observable le long de la séquence de temps T_N . La dernière condition

demande à ce que lorsqu'une composante de Z n'est pas observable sur un instant donné, elle reste constante. Il est important de remarquer que cette dernière condition n'est pas restrictive dans notre cas, car une capacité dont la tension n'est pas observable n'a pas de courant qui la traverse, donc ne peut pas se charger ou se décharger.

L'application du résultat précédent sur le convertisseur multicellulaire fournit le lemme suivant :

Lemme 1 ([BGB10]). *Considérons le système (3.3), l'état x est $Z(T_N)$ –observable le long de la suite T_N si la famille de vecteurs $\{[u_i^2 - u_i^1, \dots, u_i^p - u_i^{p-1}]^T\}_{i=0, \dots, N-1}$ génère \mathbb{R}^{p-1} avec u_i^j la commande discrète de l'interrupteur j durant l'intervalle de temps $[t_i, t_{i+1}[$.*

Ce lemme permet d'obtenir le nombre d'intervalles de temps nécessaire afin d'obtenir une observation complète du vecteur d'état x . Ainsi $p - 1$ mesures de la sortie I suffisent à reconstruire l'état, si la loi de commutations σ garantit que les tensions ne sont pas liées entre elles par des relations linéaires pour chacun des intervalles de mesure.

3.3.1.2.2 $[t_0, T^+)$ –observabilité :

Cette approche est similaire à celle de la Z –observabilité. La différence est que le concept de $[t_0, T^+)$ –observabilité permet de considérer des systèmes dont l'état présente des sauts. En ceci, cette approche représente une généralisation de la Z –observabilité.

Avant de définir formellement la notion de $[t_0, T^+)$ –observabilité, précisons la notation $[t_0, T^+)$. Celle-ci est utilisée pour représenter l'intervalle $[t_0, T + \epsilon)$ où $\epsilon > 0$ est arbitrairement petit. En effet, le signal de commutations σ est continu à droite, donc la sortie $y(T)$ appartient au mode suivant pour T un instant de commutation. La prise de mesure de la sortie uniquement à l'instant T est insuffisante pour obtenir des informations sur le nouveau mode, il est alors nécessaire de considérer un signal de sortie sur un intervalle $[t_0, T + \epsilon)$ avec $\epsilon > 0$.

Définition 33 ($[t_0, T^+)$ –observabilité [TSL11]). *Considérons un couple de trajectoires $(t, x^i(t), \sigma^i(t), y^i(t))$, $i = 1, 2$ issues du système (3.3) définies sur l'intervalle de temps $[t_0, T^+)$. Le système (3.3) est dit $[t_0, T^+)$ –observable, si l'égalité*

$$(t, x^1, \sigma^1, y^1) = (t, x^2, \sigma^2, y^2) \quad p.p. \text{ pour } t \in [t_0, T^+) \quad (3.12)$$

implique l'égalité

$$x^1(t_0) = x^2(t_0). \quad (3.13)$$

Proposition 7 ([TSL11]). *Pour un signal de commutations σ , le système (3.3) est $[t_0, T^+)$ –observable si et seulement si, une entrée nulle et une sortie nulle sur $[t_0, T^+)$ implique que $x(t_0) = 0$.*

Cette proposition implique dans notre cas de considérer pour l'étude de l'observabilité le système (3.3) avec une source de tension E nulle, cela revient alors à étudier le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = \tilde{A}(u)x \\ y = \tilde{C}x \end{cases} \quad (3.14)$$

Notons \mathcal{N}_k^m , ($m \geq k$) le sous-espace non-observable de l'intervalle de temps $[t_{k-1}, t_{m-1}^+]$. On le définit par :

$$\mathcal{N}_k^m = \left\{ x(t_{k-1}) \in \mathbb{R}^p \mid y(t) = 0, t \in [t_{k-1}, t_{m-1}^+] \right\}. \quad (3.15)$$

Remarquons que sur un intervalle de temps $[t_{k-1}, t_k]$, le signal de commutation vaut $\sigma(t) = u_{k-1}$ pour $t \in [t_{k-1}, t_k]$, et le système (3.14) est un simple système linéaire. De ce fait, sur un intervalle de temps $[t_{k-1}, t_{k-1}^+]$, on peut écrire sa matrice d'observabilité comme :

$$\mathcal{O}_{u_{k-1}} = \left[\tilde{C} \quad \tilde{C}\tilde{A}(u_{k-1}) \quad \dots \quad \tilde{C}\tilde{A}^{m-k}(u_{k-1}) \right]^T. \quad (3.16)$$

On obtient alors la relation $\mathcal{N}_k^k = \ker(\mathcal{O}_{u_{k-1}})$. Si l'on considère maintenant un intervalle de temps plus grand $[t_{k-1}, t_{m-1}^+]$, le nombre d'informations disponibles sur l'état augmente, et le sous-espace non-observable devient plus petit. [TSL11] détermine la taille du sous-espace non-observable pour $m \geq k$ sur l'intervalle $[t_{k-1}, t_{m-1}^+]$:

$$\mathcal{N}_k^m = \ker(\mathcal{O}_{u_{k-1}}) \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^m \prod_{j=k}^{i-1} e^{-A_{u_{j-1}}\tau_j} \ker(\mathcal{O}_{u_{i-1}}) \right) \quad (3.17)$$

avec $\tau_j = t_j - t_{j-1}$. Une condition nécessaire et suffisante pour l'observabilité du système (3.3) peut alors être établie :

Théorème 11 ([TSL11]). *Le système (3.14) avec la loi de commutations σ est $[t_0, t_{m-1}^+]$ -observable si et seulement si :*

$$\mathcal{N}_1^m = \{0\} \quad (3.18)$$

Dans le cas où l'intervalle de temps que l'on considère n'est pas fini et sous hypothèse que les commutations se produisent suffisamment souvent, l'existence d'un entier m tel que la relation (3.18) est vérifiée garantit l'observabilité du système (3.3). On peut voir m comme le nombre minimum de commutations permettant de rendre le système observable.

Remarque 10. *Il est intéressant de noter que cette approche considère une loi de commutations dépendante du temps, mais non dépendante de l'état : le cas d'une loi de commutations sous la forme d'un retour d'état n'est pas pris en compte.*

3.3.1.3 Approche algébrique

Les trois approches précédentes supposent l'existence d'un temps de séjour minimum par modes. Cette supposition n'existe pas dans le cas de l'approche algébrique. En utilisant le principe d'invariance de LaSalle, [RSD10] propose la caractérisation des ensembles invariants et des lois de commandes associées pour des systèmes linéaires commutés en temps continu. Ces résultats permettent alors d'analyser l'observabilité du convertisseur multicellulaire. Notons e_1 l'erreur d'estimation du courant traversant la charge et e_j , $j = 2, \dots, p$ l'erreur d'estimation des tensions intermédiaires $V_{C_{j-1}}$. Si la relation

$$\sum_{j=1}^{p-1} (w^{j+1} - w^j) e_{j+1} = 0, \quad w^j, w^{j+1} \in [0, 1] \quad (3.19)$$

est satisfaite presque partout, l'erreur d'estimation $e = [e_1, e_2, \dots, e_p]^T$ ne converge pas vers l'origine. En d'autres mots, si la relation précédente est satisfaite, peu importe la loi de commutation considérée, les tensions flottantes du convertisseur ne peuvent pas être observées.

3.3.1.4 Hypothèses pour l'observation

Les quatre approches précédentes sont similaires : en considérant qu'il existe une condition de temps de séjour minimum sur les commutations pour l'approche algébrique, la relation (3.19) ne peut pas être vérifiée presque partout si \mathcal{U}^{p-1} est inversible. Cependant, la condition d'inversibilité est une condition trop restrictive. En effet, il n'est pas nécessaire que la relation (3.19) ne soit jamais vérifiée, seulement, qu'il existe des intervalles de temps pour lesquels ce n'est pas le cas. En ce sens, les conditions fournies par les deux approches hybrides sont des relaxations de la condition fournie par l'approche non-linéaire.

Avant de présenter différents observateurs existant dans la littérature, nous allons formuler les hypothèses permettant d'assurer l'observabilité du convertisseur et donc la reconstruction des tensions intermédiaires.

Hypothèse 3. *Considérons une suite d'instants de commutations T_N . Pour l'intervalle de temps $[t_0, t_N]$, les tensions intermédiaires V_{C_j} ne varient pas.*

Hypothèse 4. *Considérons une suite de commutations σ_N de longueur $N \geq p - 1$, la matrice \mathcal{U}^N est plein rang ligne, où \mathcal{U}^N est définie par :*

$$\mathcal{U}^N = \begin{bmatrix} u_0^2 - u_0^1 & \dots & u_0^p - u_0^{p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{N-1}^2 - u_{N-1}^1 & \dots & u_{N-1}^p - u_{N-1}^{p-1} \end{bmatrix}$$

avec u_i^j la commande discrète de l'interrupteur j durant l'intervalle de temps $[t_i, t_{i+1}[$.

Remarque 11. *Il est intéressant de remarquer que cette hypothèse s'apparente à la condition d'excitation persistante [NA87] concernant les systèmes adaptatifs.*

Hypothèse 5. *La suite des instants de commutations T_N vérifie une condition de temps de séjour minimum par mode $\exists \tau > 0$, $|t_{i+1} - t_i| \geq \tau$, $\forall i \in \mathbb{N}$.*

L'hypothèse 3 permet d'assurer la bonne reconstruction des tensions intermédiaires V_{C_j} , $j = 1, \dots, p - 1$ à partir des mesures de la tension V_s , grâce à la relation (3.9). L'hypothèse 4 permet d'assurer l'observabilité du convertisseur, c'est-à-dire que la loi de commutations ne rend pas le système inobservable. En effet, on peut remarquer que si la matrice \mathcal{U}^N est de plein rang ligne alors la famille de vecteurs $\{[u_i^2 - u_i^1, \dots, u_i^p - u_i^{p-1}]^T\}_{i=0, \dots, N-1}$ génère \mathbb{R}^{p-1} rendant ainsi l'état x , $Z(T_N)$ -observable. On pourra alors reconstruire le vecteur d'état par la connaissance de $p - 1$ estimations de la tension V_s .

Afin de pouvoir reconstruire le vecteur d'état par la relation (3.9), il est nécessaire d'obtenir une connaissance exacte de la tension V_s , c'est-à-dire que l'erreur d'estimation entre la tension V_s réelle et estimée doit être nulle avant qu'une nouvelle commutation ne

se produise. On va donc s'intéresser à un observateur permettant de garantir la convergence de l'estimation vers la valeur réelle de la tension V_s en un temps fini T_i pour un intervalle de temps \mathcal{I}_i . L'hypothèse 5 garantit l'existence d'une durée minimale τ entre deux commutations. Il suffit alors de concevoir l'observateur en temps fini de telle manière à ce que la relation $T_i < \tau$ soit vérifiée. Ceci permet alors d'obtenir une estimée correcte de la tension V_s à la fin d'un intervalle \mathcal{I}_i .

3.3.2 Les observateurs du convertisseur multicellulaire

De manière générale, lors de la conception d'observateurs pour le convertisseur multicellulaire, le problème de l'observabilité est occulté. En effet, la plupart des résultats présents dans la littérature pallient le problème d'observabilité de l'une des deux manières suivantes :

- en synthétisant une loi de commande dans le domaine de commande convexe, et en l'appliquant par des méthodes PWM. Ces méthodes permettent en pratique d'exciter le système, et de le rendre ainsi observable [GBB09, BGB10, GDDM12]. Cependant, à notre connaissance, aucune preuve que cette excitation est suffisante n'a été donnée ;
- en utilisant des lois de commutations particulières, c'est-à-dire en imposant directement une loi de commutations rendant le système observable, ou bien indirectement en imposant par exemple une référence sinusoïdale au courant de charge, référence nécessitant un passage régulier par tous les modes du système [Ben09, DDFP11].

Nous allons ici faire un bref état de l'art concernant les observateurs qui ont été appliqués au convertisseur multicellulaire.

3.3.2.1 Filtres de Kalman

L'un des premiers observateurs appliqué sur le convertisseur multicellulaire est un filtre de Kalman récursif en temps discret [BFM99]. Celui-ci est fondé sur l'utilisation d'un modèle moyen sur tiers de période. Ce modèle revient à calculer trois rapports cycliques qui représentent la moyenne de la commande appliquée aux interrupteurs sur chaque intervalle de durée $T_d/3$ avec T_d la durée fixée entre deux commutations. [BFM99, GFM⁺02] utilisent cet observateur avec une commande appliquée par PWM. L'observateur possède de bonnes propriétés par rapport au bruit ainsi qu'aux incertitudes paramétriques. Aucune garantie n'est formulée quant à la stabilité du système bouclé. Une seconde application du filtre de Kalman sur le convertisseur multicellulaire est faite dans [AQ09]. Celle-ci se fonde sur un modèle en temps discret du convertisseur. Une commande prédictive est utilisée pour amener le système à la référence donnée formant ainsi une commande basée observateur. Cependant, la question de l'observabilité n'est pas discutée et, du fait de l'utilisation d'une référence sinusoïdale, le problème est occulté.

3.3.2.2 Observateurs adaptatifs

Les observateurs adaptatifs pour les convertisseurs multicellulaires sont fondés sur les résultats [Zha02, BMG06] concernant les observateurs adaptatifs pour les systèmes affines

en l'état. Un observateur à convergence exponentielle peut être donné pour le système affine en l'état sous l'hypothèse que l'entrée du système satisfasse l'hypothèse d'excitation persistante, c'est-à-dire que pour une entrée u , il existe 4 réels $\alpha, \beta, T > 0$ et $t_0 > 0$ tels que pour toute condition initiale x_0 , l'inégalité

$$\alpha I \leq \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi_{u,x_0}^T(\tau, t) H^T H \Phi_{u,x_0}(\tau, t) d\tau \leq \beta I \quad (3.20)$$

est satisfaite, avec Φ_{u,x_0} la matrice de transition du système $\dot{x} = Fx, y = Hx$. Dans le cas du convertisseur multicellulaire, le système affine en l'état est donné par le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} = FX + G(u, y) \\ y = Hx \end{cases} \quad (3.21)$$

avec $X = \left[I \quad \sum_{j=1}^{p-1} (u^{j+1} - u^j) V_{C_j} \right]^T$ et

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G(u, y) = \begin{bmatrix} \frac{E}{L} u^p - \frac{R}{L} I \\ \sum_{j=1}^{p-1} \frac{|u^{j+1} - u^j|}{C_j} I \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il est important de remarquer que ce système est observable car le courant est mesuré et la quantité $\sum_{j=1}^{p-1} (u^{j+1} - u^j) V_{C_j}$ est, à une constante multiplicative près, la tension aux bornes de la charge. [GBB09, BGB10] font la synthèse d'un observateur adaptatif à convergence exponentielle pour le convertisseur multicellulaire. Sous l'hypothèse de l'excitation persistante, il est alors possible de reconstruire, à partir de la connaissance de la tension V_s , les différentes tensions intermédiaires. En pratique, cette condition d'excitation persistante peut être validée en vérifiant que le courant passe au travers de chacune des capacités grâce à la suite de commutations se produisant durant la durée T du grammien d'observabilité (3.20). À notre connaissance, aucun résultat théorique ne permet de valider la condition d'excitation persistante pour une stratégie de commutation donnée.

3.3.2.3 Observateurs de Luenberger commutés

Le principe de cet observateur est d'utiliser les informations partielles obtenues des différents modes du système afin d'estimer les tensions des capacités. Cet observateur hybride est basé sur l'approche géométrique développé par [TSL11]. Il possède l'intérêt notable de ne pas nécessiter la connaissance explicite d'un temps de séjour minimum par modes, contrairement aux autres observateurs vus dans cette section. L'application de cet observateur au cas du convertisseur multicellulaire est développée par [GDDM12].

Les équations de l'observateur hybride sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A(u_{k-1})\hat{x}(t) + B(u_{k-1}), & t \in [t_{k-1}, t_k) \\ \hat{x}(t_k) = \hat{x}(t_k^-) - \xi(u_{k-1}, t_k^-) \end{cases} \quad (3.23)$$

Cet observateur est constitué de deux équations. La première donne la dynamique du système que l'on cherche à observer alors que la seconde assure la convergence de l'erreur d'estimation. Cette seconde équation sert de réinitialisation au vecteur d'estimée : à chaque commutation, un peu plus d'informations est connu concernant l'état et est obtenu par un observateur de type Luenberger afin d'assurer la convergence de l'erreur $\tilde{x} = \hat{x} - x$. La procédure détaillée de l'obtention de cette fonction $\xi(u_{k-1}, t_k^-)$ n'est pas développée dans cette thèse, mais peut être retrouvée dans [TSL11] pour le cas général des systèmes commutés avec saut de l'état et dans [GDDM12] pour le cas particulier du convertisseur multicellulaire (où l'état ne présente pas de discontinuité). De manière simplifiée, l'état étant partiellement observable pour chacun des modes, les auteurs synthétisent un observateur de Luenberger permettant l'observation des composantes de l'état observable. Il y a donc autant d'observateurs de Luenberger que de modes composant le système. Du fait que cet observateur est basé sur l'approche géométrique présentée précédemment (section 3.3.1.2.2), la remarque 10 s'applique, c'est-à-dire que l'observateur considéré converge dans le cas où la loi de commutations vérifie l'hypothèse 4 d'excitation persistante.

3.3.2.4 Observateurs en temps fini

Une quatrième classe d'observateurs est largement étudiée dans la littérature pour les convertisseurs multicellulaires : les observateurs en temps fini. En effet, ceux-ci possèdent l'avantage d'une convergence en temps fini, et donc de pouvoir garantir un temps maximal pour la convergence de l'observateur. Comme précédemment, la reconstruction des tensions intermédiaires se fait en deux étapes : tout d'abord l'observation de la tension aux bornes de la charge, par la connaissance du courant traversant celle-ci, puis, sous l'hypothèse que le système est observable (du point de vue des tensions intermédiaires), la reconstruction des tensions intermédiaires. On peut trouver dans la littérature différents observateurs en temps fini :

- observateur à modes glissants d'ordre un [Utk92, PB02, BDB03] ;
- observateur à modes glissants d'ordre deux, ou *super twisting* [DFL05, SMD⁺06, FB07, BGB10] ;
- observateur en temps finis [DDFP10, DDFP11].

L'observateur à modes glissants d'ordre un possède une robustesse vis-à-vis des variations et des incertitudes paramétriques plus importante que les observateurs adaptatifs. Cependant, en pratique, des oscillations de fortes amplitudes apparaissent en hautes fréquences provenant du fait que le glissement théorique ne peut être réalisé car les interrupteurs possèdent une fréquence limite de commutation : ce phénomène est appelé *chattering*. Une première amélioration a été donnée en utilisant, à la place de la fonction signe, une fonction sigmoïde, qui ne possède pas de discontinuité. Cependant, ceci détériore grandement la robustesse de l'observateur. Afin de palier le problème de *chattering* tout en conservant les propriétés de robustesse de l'observateur à modes glissants, l'algorithme *super twisting* est apparu.

Afin de pouvoir reconstruire les tensions intermédiaires à la fin d'une période entre deux commutations, il est nécessaire d'imposer que le temps de séjour minimum de l'hypothèse 5 est supérieur au temps de convergence de l'observateur. Une approche plus

générale des observateurs en temps fini est donnée dans [DDFP10, DDFP11] où il est montré qu'un observateur possédant un exposant $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$ (voir système (3.24)) peut posséder de meilleures propriétés de robustesse qu'un observateur de Luenberger ($\alpha = 1$) ou qu'un algorithme *super twisting* ($\alpha = \frac{1}{2}$). Nous allons par la suite nous intéresser aux observateurs à temps fini décrits par le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{I}} = -\frac{R}{L}I + \frac{E}{L}u^p + \hat{V}_s + K_1|I - \hat{I}|^\alpha \text{sign}(I - \hat{I}) \\ \dot{\hat{V}}_s = -\sum_{j=1}^{p-1} \frac{I}{LC_j} (u^{j+1} - u^j)^2 + K_2|I - \hat{I}|^{2\alpha-1} \text{sign}(I - \hat{I}) \end{cases} \quad (3.24)$$

où \hat{I} correspond à l'estimée du courant I et \hat{V}_s à l'estimée de la tension V_s . On notera par la suite $\hat{x} = [\hat{I}, \hat{V}_{C_1}, \dots, \hat{V}_{C_{p-1}}]^T \in \mathbb{R}^p$. En utilisant une approche fondée sur la méthode de Lyapunov, développée dans [DMF09], il est montré dans [DDFP11] que cet observateur converge en temps fini, c'est-à-dire que l'on obtient une estimation de la tension, \hat{V}_s , identique à la tension réelle V_s , si l'on choisit $K_1, K_2, \frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ tels que

$$A_0 = \begin{bmatrix} -\alpha K_1 & \alpha \\ -K_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

est Hurwitz. Supposons que la matrice \mathcal{U}^N des vecteurs de commande est de rang plein (hypothèse 4) et qu'il existe un temps de séjour minimum τ entre deux commutations (hypothèse 5). Par la connaissance de \hat{V}_s , on obtient l'estimée des tensions intermédiaires \hat{V}_{C_j} , $j = 1, \dots, p-1$, c'est-à-dire que les tensions intermédiaires peuvent être reconstruites par l'observateur. On montrera dans la suite de ce chapitre comment il est possible de garantir ces deux hypothèses.

Remarque 12. *Du fait que l'observateur converge en temps fini, on peut conclure qu'il existe une durée $T > 0$ telle que $\hat{x}(t, u) = x(t, u)$, $\forall t \geq T$.*

3.3.3 Commande par retour de sortie du convertisseur multicellulaire

Cette partie nous a permis d'obtenir une vue d'ensemble du problème de l'observation du convertisseur multicellulaire et de la synthèse d'observateurs pour celui-ci. Afin de simplifier la synthèse d'une commande par retour de sortie, nous allons nous intéresser à un observateur à temps fini permettant d'obtenir à la fin de chaque intervalle de temps une estimation exacte \hat{V}_s de la tension V_s du système. À partir de cette estimation, il sera alors possible d'obtenir, par l'utilisation de la relation (3.9), la valeur des estimées des tensions intermédiaires \hat{V}_{C_j} . La connaissance du courant I et des estimées des tensions intermédiaires \hat{V}_{C_j} nous permet alors de synthétiser un contrôleur pour le système. Ce contrôleur fournissant une suite de commutations σ_N , il est alors nécessaire de vérifier que cette suite satisfait bien les hypothèses d'excitation persistante et de temps de séjour minimum. De plus, afin d'assurer la stabilité asymptotique de ce schéma de commande, le contrôleur doit garantir que \hat{x} converge vers x ainsi que \hat{x} converge vers une référence

désirée x_{ref} . C'est le problème qui va nous intéresser dans la partie qui va suivre. La figure 3.5 représente le schéma de commande par retour de sortie basé observateur du convertisseur multicellulaire.

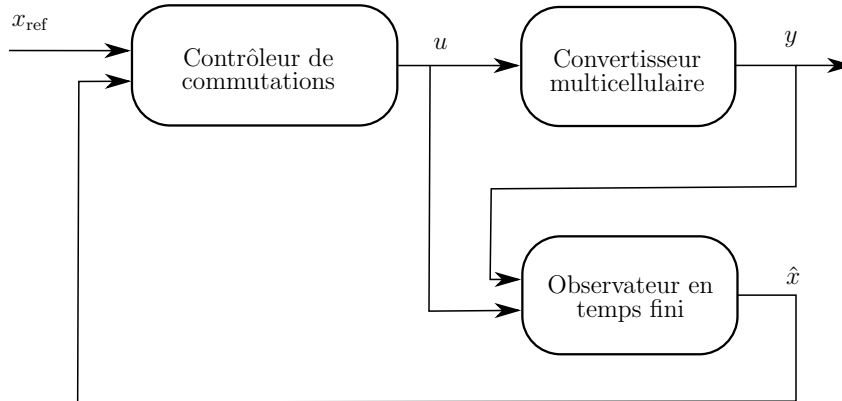


FIGURE 3.5 – Boucle fermée {Système – Contrôleur – Observateur}

3.4 Commande du convertisseur

Nous avons vu dans la partie précédente que plusieurs observateurs permettant de reconstruire les tensions intermédiaires existent dans la littérature. Cependant, il est nécessaire de garantir l'observabilité du système et la reconstruction des tensions intermédiaires. Ainsi, l'élaboration d'une loi de commutations pour le convertisseur doit vérifier les hypothèses d'excitation persistante (hypothèse 4) et de temps de séjour minimum (hypothèse 5). Le but de cette section est de construire une loi de commutations permettant de contrôler le système vers une référence donnée et de garantir son observabilité. Par la suite, nous considérerons le cas de l'observateur en temps fini. En premier lieu, nous allons chercher à obtenir une CLF pour le convertisseur multicellulaire. À partir de celle-ci, on pourra alors en déduire une stratégie de commutations. Afin de respecter la condition de rang sur la matrice \mathcal{U}^N de la séquence de commutation, on ajoutera une contrainte dans le choix de la commande, contrainte dépendante des commandes choisies précédemment. De plus, on s'intéressera à une loi de commutations échantillonnées afin de garantir une durée minimale entre deux commutations. On devra enfin vérifier que l'ajout de la contrainte et l'échantillonnage de la commande ne perturbent pas le caractère stabilisant de la commande à base de CLF.

3.4.1 Existence d'une fonction de Lyapunov de commande

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, il est possible de définir des points de fonctionnement du système affine commuté en étendant son domaine de commande à son enveloppe convexe. Le système ainsi obtenu est nommé système relaxé. On nomme alors points de fonctionnement du système (3.3), les points d'équilibre du système relaxé. On

définit l'ensemble des points de fonctionnement de (3.3) par l'ensemble suivant :

$$X_{ref} = \left\{ x_{ref} \in \mathbb{R}^n : \tilde{A}(u_{ref})x_{ref} + \tilde{B}(u_{ref}) = 0, u_{ref} \in [0, 1]^p \right\}. \quad (3.26)$$

Remarque 13. Il est intéressant de noter que dans le cas d'un convertisseur multicellulaire, la relation $\tilde{A}(u_{ref})x_{ref} + \tilde{B}(u_{ref}) = 0$ admet une unique solution $u_{ref}^i = u_{ref}^j, \forall i, j \in \{1, \dots, p\}$ du fait de la structure des matrices $\tilde{A}(u)$ et $\tilde{B}(u)$. Par abus de notation, on écrira alors de manière similaire u_{ref} un composant du vecteur de commandes discrètes et le vecteur de commandes discrètes $u_{ref} = [u_{ref}, \dots, u_{ref}]$ lui-même.

On peut de plus noter que la matrice $\tilde{A}(u_{ref})$ n'est constituée que de 0 hormis à la première colonne de la première ligne qui vaut $-\frac{R}{L}$. De ce fait, la relation $\tilde{A}(u_{ref})x_{ref} + \tilde{B}(u_{ref}) = 0$ se simplifie en

$$-\frac{R}{L}x_{1_{ref}} + \frac{E}{L}u_{ref} = 0. \quad (3.27)$$

On constate donc que le point d'équilibre choisi est indépendant des $x_{i_{ref}}, \forall i \in \{2, \dots, p\}$. Afin de garantir un équilibrage correct des tensions intermédiaires, on choisit alors

$$x_{i_{ref}} = (i-1)\frac{E}{p} \quad \forall i \in \{2, \dots, p\}. \quad (3.28)$$

Dans la suite de ce chapitre, on ramène le problème de commande vers un point quelconque x_{ref} à celui d'un problème de commande à l'origine en posant le changement de variable $z = x - x_{ref}$. Le système (3.3) devient alors

$$\dot{z} = A(u)z + B(u) \quad (3.29)$$

avec $A(u) = \tilde{A}(u)$ et $B(u) = \tilde{A}(u)x_{ref} + \tilde{B}(u)$.

Remarque 14. De manière similaire, le même changement de variable sera effectué pour l'état de l'observateur. On note alors $\hat{z} = \hat{x} - x_{ref}$ l'état de l'observateur dans le nouveau repère. Du fait de la remarque 12, il existe la même durée T pour laquelle la relation $\hat{z}(t, u) = z(t, u), \forall t \geq T$ est vérifiée.

On s'intéresse alors aux propriétés des matrices $A(u)$ et $B(u)$:

Propriété 2 ([HRI12]). Pour un nombre de cellules p donné, il existe une matrice symétrique définie positive P telle que la relation $A(u)^T P + P A(u) \leq 0$ est vérifiée $\forall u \in U$.

Démonstration. Pour montrer cette propriété, il suffit de prouver que $A(u)$ est une matrice définie non-positive. On a $\tilde{A}(u) = A(u)$, donc :

$$A(u) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{u^2-u^1}{L} & \cdots & -\frac{u^p-u^{p-1}}{L} \\ \frac{u^2-u^1}{C_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{u^p-u^{p-1}}{C_{p-1}} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Considérons le cas où $p = 2$ et notons λ_i , $i = 1, 2$ les valeurs propres de $A_{p=2}$. Du fait que $\text{Tr}(A_{p=2}) = \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{R}{L} < 0$ et que $\det(A_{p=2}) = \lambda_1\lambda_2 = \frac{(u^2 - u^1)^2}{LC_1} \geq 0$, on a $\lambda_i \leq 0$, $\forall i = 1, 2$. Son polynôme caractéristique est donc

$$P_{A_{p=2}} = \lambda^2 + \lambda \frac{R}{L} + \frac{(u^2 - u^1)^2}{LC_1}. \quad (3.31)$$

Dans le cas où $p = 3$, le polynôme caractéristique est

$$P_{A_{p=3}} = \lambda \left(\lambda^2 + \lambda \frac{R}{L} + \left(\frac{(u^3 - u^2)^2}{LC_2} + \frac{(u^2 - u^1)^2}{LC_1} \right) \right). \quad (3.32)$$

On a donc l'une des valeurs propres qui est nulle et les deux autres qui sont négative et non-positive. De manière récurrente, on obtient $\forall p$

$$P_{A_p} = \lambda^{p-2} \left(\lambda^2 + \lambda \frac{R}{L} + \sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{(u^{i+1} - u^i)^2}{LC_i} \right) \right). \quad (3.33)$$

A possède alors une valeur propre nulle de multiplicité $p-2$ et deux autres valeurs propres négative et non-positive de multiplicité un. On obtient donc que $A(u)$ est une matrice définie non-positive. \square

Dans la suite on ne considère pas le cas $u_{ref} = 0$ ou 1 : ce cas n'utilise pas la structure du convertisseur multicellulaire, car nécessite une suite de commande discrète constante, suite rendant clairement le système inobservable.

L'ensemble des vecteurs $B(u)$ possède deux propriétés. Tout d'abord :

Propriété 3 ([HRI12]). *L'ensemble des vecteurs $\{B(u) : u \in U\}$ est une famille génératrice de \mathbb{R}^p .*

Démonstration. En reprenant les matrices $\tilde{A}(u)$ et $\tilde{B}(u)$ de la relation (3.4) ainsi que les relations donnant le point de référence (3.27-3.28), le vecteur $B(u)$ s'écrit :

$$B(u) = \begin{bmatrix} -\frac{E}{L}u_{ref} - \frac{E}{pL} \sum_{k=1}^{p-1} k(u^{k+1} - u^k) + \frac{E}{L}u^p \\ \frac{Eu_{ref}}{RC_1}(u^2 - u^1) \\ \vdots \\ \frac{Eu_{ref}}{RC_{p-1}}(u^p - u^{p-1}) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

On peut écrire $B(u)$ sous la forme factorisée suivante $B(u) = \sum_{i=1}^p (u^i - u_{ref})M_i$, où :

$$M_1 = \begin{bmatrix} \frac{E}{pL} \\ -\frac{Eu_{ref}}{RC_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M_i = \begin{bmatrix} \frac{E}{pL} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{Eu_{ref}}{RC_{i-1}} \\ -\frac{Eu_{ref}}{RC_i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M_p = \begin{bmatrix} \frac{E}{pL} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{Eu_{ref}}{RC_{p-1}} \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Rappelons que u_{ref} est différent de 0 ou 1 et que $u^i \in \{0, 1\}$, on a donc, pour un u_{ref} fixé et $\forall u^i \in \{0, 1\}$, $(u^i - u_{ref}) \neq 0$. Si $\{M_i : i \in \{1, \dots, p\}\}$ est une base de \mathbb{R}^p alors $\{B(u) : u \in U\}$ est une famille génératrice de \mathbb{R}^p .

Pour un $k \in \{1, \dots, p\}$ fixé, notons $D^k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ la concaténation horizontale des vecteurs M_i , $i \in \{1, \dots, k\}$, soit :

$$D^k = [M_1 \quad \dots \quad M_i \quad \dots \quad M_k]. \quad (3.36)$$

Notons $\det(D^k)$ le déterminant de D^k . On peut développer le calcul du déterminant suivant la dernière colonne de D^k

$$\det(D^k) = \sum_{j=1}^k d_{j;k}^k (-1)^{k+j} \det(D_{j,k}^k) \quad (3.37)$$

où $d_{j;k}^k$ est le terme de la matrice D^k situé à la ligne j et à la colonne k , et où $\det(D_{j,k}^k)$ est le mineur du terme $d_{j;k}^k$. Il est alors à noter que seuls deux termes de la dernière colonne sont non nuls, le premier, égal à $\frac{E}{kL}$ et le dernier, égal à $\frac{Eu_{ref}}{RC_{k-1}}$. On peut alors écrire le déterminant comme :

$$\det(D^k) = (-1)^{2k} \frac{Eu_{ref}}{RC_{k-1}} \det(D_{k,k}^k) + (-1)^{1+k} \frac{E}{kL} \det(D_{1,k}^k) \quad (3.38)$$

où $\det(D_{k,k}^k) = \det(D^{k-1})$ et où $D_{1,k}^k$ est une matrice triangulaire supérieure de la forme

$$D_{1,k}^k = \begin{bmatrix} -\frac{Eu_{ref}}{RC_1} & \frac{Eu_{ref}}{RC_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{Eu_{ref}}{RC_2} & \frac{Eu_{ref}}{RC_2} & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & -\frac{Eu_{ref}}{RC_{k-2}} & \frac{Eu_{ref}}{RC_{k-2}} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{Eu_{ref}}{RC_{k-1}} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

dont le déterminant (égal au produit de ses termes diagonaux) vaut

$$\det(D_{1,k}^k) = (-1)^{k-1} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{Eu_{ref}}{RC_i}. \quad (3.40)$$

On a alors

$$\det(D^k) = (-1)^{2k} \frac{Eu_{ref}}{RC_{k-1}} \det(D^{k-1}) + \frac{E}{kL} (-1)^{2k} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{Eu_{ref}}{RC_i}. \quad (3.41)$$

$2k$ étant toujours pair, on obtient :

$$\det(D^k) = \frac{Eu_{ref}}{RC_{k-1}} \det(D^{k-1}) + \frac{E}{kL} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{Eu_{ref}}{RC_i}. \quad (3.42)$$

On a de plus $\det(D^2) = \frac{E}{L} \frac{Eu_{ref}}{RC_1}$. On peut donc écrire pour $k \in \{2, \dots, p\}$, le déterminant de D^k :

$$\det D^k = \frac{E}{L} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{Eu_{ref}}{RC_i}. \quad (3.43)$$

Ce déterminant étant non nul quelque soit $k \in \{2, \dots, p\}$ et quelque soit $u_{ref} \in]0, 1[$, alors $\{M_i : i \in \{1, \dots, p\}\}$ est une base de \mathbb{R}^p , donc $\{B(u) : u \in U\}$ est une famille génératrice de \mathbb{R}^p , ce qui conclut la démonstration. \square

Une seconde propriété de l'ensemble $\{B(u) : u \in U\}$ est :

Propriété 4 ([HRI12]). *L'ensemble $\{B(u) : u \in U\}$ est tel que $0 \in \text{int}(\mathcal{C})$ avec $\mathcal{C} = \text{co}(\{B(u) : u \in U\})$.*

Démonstration. Le vecteur

$$B(u) = \begin{bmatrix} \frac{E}{pL} \sum_{i=1}^p (u^i - u_{ref}) \\ (u^2 - u^1) \frac{Eu_{ref}}{RC_1} \\ \vdots \\ (u^{i+1} - u^i) \frac{Eu_{ref}}{RC_i} \\ \vdots \\ (u^p - u^{p-1}) \frac{Eu_{ref}}{RC_{p-1}} \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

peut s'écrire comme la somme des vecteurs W et $S(u)$ telle que

$$B(u) = W + S(u) \quad (3.45)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{E}{L} \left(\frac{1}{2} - u_{ref}\right) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E}{pL} \sum_{i=1}^p (u^i - u_{ref}) - \frac{E}{L} \left(\frac{1}{2} - u_{ref}\right) \\ (u^2 - u^1) \frac{Eu_{ref}}{RC_1} \\ \vdots \\ (u^p - u^{p-1}) \frac{Eu_{ref}}{RC_{p-1}} \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

On peut montrer (voir annexe) que l'origine est centre de symétrie de l'ensemble $\{S(u) : u \in U\}$. Sachant que $\text{co}(\{S(u) : u \in U\})$ est un ensemble convexe et que $\{B(u) : u \in U\}$ génère \mathbb{R}^p (donc $\{S(u) : u \in U\}$ génère \mathbb{R}^p aussi car W est colinéaire à deux vecteurs de $\{S(u) : u \in U\}$), alors $0 \in \text{int}(\text{co}\{S(u) : u \in U\})$.

Considérons les vecteurs de commandes $\nu^1 = [0, \dots, 0]$ et $\nu^{2^p} = [1, \dots, 1]$. On a

$$S(\nu^1) = \begin{bmatrix} -\frac{E}{2L} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad S(\nu^{2^p}) = \begin{bmatrix} \frac{E}{2L} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ces deux vecteurs sont colinéaires de direction opposée et sont colinéaires au vecteur W . De plus, on peut remarquer que la norme de W est inférieure à la norme de ces vecteurs, $\forall u_{ref} \in]0, 1[$, on a donc $0 \in \text{int}\left(\text{co}\{B(u) : u \in U\}\right)$. □

Considérons à présent une fonction quadratique $V(z) = \frac{1}{2}z^T P z$, continue, propre et telle que $P = P^T > 0$. On posera cette matrice P identique à celle de la propriété 2. En notant $\dot{V}(z; u)$ la dérivée directionnelle de V le long de la trajectoire dans la direction donnée par $A(u)z + B(u)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z; u) &= z^T P (A(u)z + B(u)) \\ &= z^T P A(u)z + z^T P B(u). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Par la propriété 2, la première partie du côté droit de la relation est nécessairement non-positive. Du fait de la propriété 4, il existe une commande discrète $u \in U$ telle que la relation $z^T P B(u) < 0$ est satisfaite. De ce fait, on peut conclure que

$$\forall z \in \mathbb{R}^p, \exists u \in U, \quad \dot{V}(z; u) < 0, \quad (3.48)$$

c'est-à-dire que V est une CLF pour le système (3.29).

3.4.2 Commande échantillonnée basée observateur

Par l'existence d'une CLF pour le système (3.29), on peut en déduire une stratégie en temps continu. Nous allons nous intéresser à la stratégie de plus grande pente, dont le principe est rappelé ici : à l'instant t , la direction permettant la plus forte décroissance de la fonction V est choisie parmi un ensemble fini de valeurs déterminées par $u \in U$:

$$u^*(t) = \arg \min_{u \in U} \dot{V}(z; u). \quad (3.49)$$

Comme nous avons montré précédemment que V est une CLF, on peut en déduire que la stratégie (3.49) rend le système (3.29) asymptotiquement stable. Le problème auquel on s'intéresse est la synthèse d'une stratégie de commutation basée observateur. La loi de commutation (3.49) permet de stabiliser le système (3.29) en temps continu. Cependant, afin de permettre la reconstruction de la tension V_s par l'observateur, il est nécessaire qu'une durée minimale entre deux instants de commutations existe. De ce fait, on s'intéresse par la suite à une stratégie de commutation échantillonnée garantissant l'existence d'un temps minimum entre deux commutations (hypothèse 5). On doit alors vérifier que la stabilité assurée par la stratégie en temps continu est conservée : on verra dans la suite de cette section que l'échantillonnage a pour effet de ne pouvoir garantir la stabilité du système que dans un ensemble, c'est-à-dire qu'on obtient un résultat de stabilité pratique. Nous nous assurerons de plus que la condition d'excitation persistante (hypothèse 4) est bien vérifiée par la stratégie de commutations. Afin de garantir que cette hypothèse est vérifiée, nous allons ajouter une contrainte à la stratégie précédente. Si l'on peut vérifier que cette stratégie sous contrainte rend toujours le système (3.29) stable, on aura alors

réussi à synthétiser une stratégie permettant de stabiliser le convertisseur multicellulaire en boucle fermée avec son observateur.

Notons T_e la période entre deux échantillons, et posons $N > p - 1$ un horizon glissant. On s'intéresse à une stratégie échantillonnée de commutations de type plus grande pente. À chaque instant $t_k = kT_e$, $k \in \mathbb{N}$, la direction permettant la décroissance la plus forte de la fonction V est choisie parmi un ensemble fini de valeurs. u_k^* est la commande choisie sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}[$, définie de la manière suivante :

$$u_k^* = \arg \min_{u \in U} \hat{z}_k^T P (A(u)\hat{z}_k + B(u)) \quad (3.50)$$

$$s.c. \text{ rang } \mathcal{U}_k^N = p - 1 \quad (3.51)$$

$$\text{où } \mathcal{U}_k^N = \begin{bmatrix} u_{k-N+1}^2 - u_{k-N+1}^1 & \cdots & u_{k-N+1}^p - u_{k-N+1}^{p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_k^2 - u_k^1 & \cdots & u_k^p - u_k^{p-1} \end{bmatrix}, \text{ avec } u_i^j \text{ la commande discrète}$$

de l'interrupteur j durant l'intervalle de temps $[t_i, t_{i+1}[$ et $\hat{z}_k = \hat{z}(t_k)$. Il est important de noter que c'est l'état estimé \hat{z} , donné par l'équation (3.24), qui est utilisé dans la stratégie (3.50)-(3.51). On s'intéresse à la dérivée directionnelle de V le long de la trajectoire $\hat{z}(t)$ dans la direction donnée par $A(u)\hat{z} + B(u)$ à l'instant t_k . De plus, signalons que dans le cas où il n'existe pas de condition de temps minimum entre deux commutations, la condition de rang (3.51) n'a pas de sens. Puisque l'on s'intéresse à une stratégie échantillonnée, la condition de rang est bien définie.

Remarque 15. Il est important de noter que la matrice \mathcal{U}_k^N est exactement celle de l'hypothèse 4 pour une suite de commutations de longueur N . Partant d'un instant initial t_{k-N+1} , une suite de commutation $\{u_{k-N+1}, \dots, u_k\}$ a déjà été appliquée au système (3.29) jusqu'à l'instant t_k .

Par la suite, notons $\tilde{U}(k, u_{k-N+1}, \dots, u_{k-1}) \subset U$ le domaine de commande défini par :

$$\tilde{U} = \left\{ v \in U \text{ tel que } \text{rang} \left(\begin{bmatrix} \mathcal{U}_{k-1}^{N-1} & \\ v_k^2 - v_k^1 & \cdots & v_k^p - v_k^{p-1} \end{bmatrix} \right) = p - 1 \right\}. \quad (3.52)$$

où \mathcal{U}_{k-1}^{N-1} est la matrice des $N - 1$ commandes passées à l'instant de commutation t_{k-1} et où, afin de simplifier les notations, $\tilde{U} = \tilde{U}(k, u_{k-N+1}, \dots, u_{k-1})$. Ce domaine de commande \tilde{U} représente le domaine dans lequel la commande u à l'instant t_k doit être choisie si la contrainte (3.51) est active. De plus, notons :

- \mathcal{I}^U la concaténation des intervalles de temps $[t_i, t_{i+1}[$ où $u \in U$ c'est-à-dire pour lesquels la contrainte (3.51) n'est pas active ;
- $\mathcal{I}^{\tilde{U}}$ la concaténation des intervalles de temps $[t_i, t_{i+1}[$ où $u \in \tilde{U}$, c'est-à-dire pour lesquels la contrainte (3.51) est active ;
- $\mathcal{I} = \mathcal{I}^U \cup \mathcal{I}^{\tilde{U}}$ de durée NT_e .

Nous pouvons donner un premier résultat concernant la durée d'activation de la contrainte (3.51) :

Proposition 8 ([HRI12]). *La contrainte (3.51) est active sur une durée au plus égale à $(p - 1)T_e$ sur un intervalle de durée NT_e .*

Démonstration. Supposons que la contrainte (3.51) a été activée $(p - 1)$ fois depuis un instant t_{k_0} tel que $k_0 \geq k - N$, alors :

- les $(p - 1)$ lignes associées à ces commandes sont nécessairement indépendantes, car chaque ligne ajoutée est, par construction, indépendante des précédentes ;
- ces $(p - 1)$ lignes appartiennent à la matrice \mathcal{U}_k^N car $k_0 + N \geq k$,

donc la contrainte ne peut pas être activée une $p^{\text{ème}}$ fois à l'instant $t_k \leq t_{k_0 + N}$. Sachant que chaque intervalle est de durée T_e , on obtient que la contrainte (3.51) est active sur une durée au plus égale à $(p - 1)T_e$ sur un intervalle de durée NT_e . \square

Remarque 16. *Sachant que $\mathcal{I}^U \cup \mathcal{I}^{\tilde{U}}$ est de taille NT_e et que $\mathcal{I}^U \cap \mathcal{I}^{\tilde{U}} = \emptyset$, la taille de \mathcal{I}^U est donc égale à $(N - p + 1)T_e$.*

On peut maintenant donner le résultat suivant :

Proposition 9 ([HRI12]). *La stratégie (3.50)-(3.51) rend la boucle fermée {Système (3.29) – Contrôleur (3.50)-(3.51) – Observateur (3.24)} pratiquement stable pour un paramètre N suffisamment grand et une durée T_e suffisamment petit.*

Démonstration. Cette démonstration se décompose en deux parties : dans un premier temps, nous montrons que la convergence de l'observateur nous permet de nous intéresser directement à l'état du système et non à son estimée, puis nous prouvons que la stratégie de commutation en temps échantillonnée (3.50) avec la contrainte (3.51) rend le système (3.29) pratiquement stable.

Dans cette seconde partie, on cherche à majorer la fonction V par une fonction du temps f continue et parabolique par morceaux. En distinguant les intervalles de temps où la contrainte (3.51) est active (et où f croît) et ceux où la contrainte (3.51) n'est pas active (et où f décroît), on montre qu'on peut assurer la décroissance de la fonction V sur l'intervalle $[t_{k-N+1}, t_{k+1}[$ sous certaines conditions explicitées dans la suite de cette section.

Convergence de l'observateur : comme la stratégie (3.50) est échantillonnée, il existe un temps minimum entre deux instants de commutations, l'hypothèse 5 est donc satisfaite. La contrainte (3.51) garantissant l'hypothèse 4 d'excitation persistante, l'observateur (3.24) permet de reconstruire en temps fini une estimée \hat{V}_s de la tension V_s . De plus, en considérant que la durée NT_e de l'intervalle \mathcal{I} est choisie (ce point est éclairci à la remarque 17) de telle manière à assurer (hypothèse 3) que les tensions intermédiaires n'ont que peu évolué, on peut affirmer qu'il existe un instant T pour lequel $\hat{z}(t) = z(t)$, $\forall t \geq T$. Il est à signaler que du fait que les tensions V_{C_j} évoluent tout de même durant l'intervalle \mathcal{I} , on obtient $\hat{z}(t) = z(t) + \epsilon(t)$, $\forall t \geq T$. La fonction $\epsilon(t)$ est liée à la variation des tensions intermédiaires sur la durée NT_e . Cette fonction peut être vue comme un bruit sur l'état z . On peut alors supposer que la stratégie (3.50)-(3.51) est inchangée si l'on remplace \hat{z} par z , c'est-à-dire si l'on considère la reconstruction des tensions intermédiaires comme parfaite. Afin d'étudier la stabilité de la boucle fermée, on peut donc s'intéresser à la fonction

$V(z(t))$. En supposant la reconstruction parfaite, on remplace \hat{z} par z dans (3.50)-(3.51) et on peut récrire la stratégie de la manière suivante :

$$u_k^* = \arg \min_{u \in U} \dot{V}(z_k; u) \quad (3.53)$$

$$s.c. \text{ rang } \mathcal{U}_k^N = p - 1 \quad (3.54)$$

avec $z_k = z(t_k)$. Enfin, après l'instant T on peut s'intéresser directement à la décroissance de la fonction $V(z(t))$ car la relation $V(\hat{z}(t)) = V(z(t))$ est vérifiée $\forall t \geq T$.

Stabilité pratique : la démonstration de la stabilité pratique de la boucle formée par (3.29)-(3.53)-(3.54) se décompose en plusieurs étapes. Nous allons montrer d'abord qu'il existe une boule (par rapport à la norme V) définie par $\mathcal{B}(0, R_1) = \{z \in \mathbb{R}^p : V(z) < R_1\}$ telle que si $\forall i \in \{k - N + 1, \dots, k + 1\}$, $z_i \notin \mathcal{B}(0, R_1)$ et si T_e est suffisamment petit, alors la relation $V(z_k) - V(z_{k-N}) < 0$ est vérifiée.

Sur un intervalle de temps $[t_i, t_{i+1}[$, on obtient à l'instant t_i la commande u_i^* donnée par (3.50). On a une commande maintenue sur la durée de l'intervalle de la forme :

$$\nu(t) = u_i^* \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}[. \quad (3.55)$$

On obtient pour trajectoire de l'état avec cette commande u_i^* maintenue :

$$\dot{z}(t) = A(u_i^*)z(t) + B(u_i^*), \quad z(t_i) = z_i, \forall t \in [t_i, t_{i+1}[. \quad (3.56)$$

Intéressons nous maintenant à la dérivée de la fonction V le long de la trajectoire $z(t)$ dans la direction donnée par la commande u_i^* :

$$\dot{V}(z(t); u_i^*) = z(t)^T P A(u_i^*) z(t) + z(t)^T P B(u_i^*) \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}[. \quad (3.57)$$

De par la propriété 2, le premier terme de (3.57) n'est pas positif, quelque soit $u_i^* \in U$ (et donc $u_i^* \in \tilde{U}$) et quelque soit $z \in \mathbb{R}^p$. On a donc

$$\dot{V}(z(t); u_i^*) \leq z(t)^T P B(u_i^*) \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}[. \quad (3.58)$$

Sur un intervalle $[t_i, t_{i+1}[$, on peut maintenant distinguer deux cas :

- cas où u_i^* appartient à un domaine restreint \tilde{U} :

dans le pire des cas, le terme $z(t)^T P B(u_i^*)$ peut être positif, mais une borne supérieure peut être donnée. Notons $\dot{V}(z(t); u_i^* \in \tilde{U})$ la dérivée de V le long de la trajectoire dans la direction donnée par la commande $u_i^* \in \tilde{U}$ maintenue sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}[$. À tout instant $t \in [t_i, t_{i+1}[$, on a :

$$\dot{V}(z(t); u_i^* \in \tilde{U}) \leq z(t)^T P B(u_i^*) \quad (3.59)$$

$$\leq z(t)^T P (W + S(u_i^*)) \quad (3.60)$$

$$\leq \|z(t)\|_2 \|P\|_2 \left(\|W\|_2 + \|S(u_i^*)\|_2 \right) \quad (3.61)$$

W possédant une unique composante non nulle et sachant que $\|P\|_2 = \lambda_{\max}\{P\}$, on a :

$$\dot{V}(z(t); u_i^* \in \tilde{U}) \leq \|z(t)\|_2 \lambda_{\max}\{P\} \left(\left| \frac{E}{L} \left(\frac{1}{2} - u_{ref} \right) \right| + \|S(u_i^*)\|_2 \right). \quad (3.62)$$

De plus, afin d'obtenir une majoration qui soit vraie quelque soit le domaine restreint \tilde{U} , on majore $\|S(u_i^*)\|_2$ par $\max_{u \in U} \|S(u)\|_2$. $S(u)$ dépendant uniquement de u et le domaine U étant borné, cette borne existe. On a alors :

$$\dot{V}(z(t); u_i^* \in \tilde{U}) \leq \|z(t)\|_2 \lambda_{\max}\{P\} \left(\left| \frac{E}{L} \left(\frac{1}{2} - u_{ref} \right) \right| + \max_{u \in U} \|S(u)\|_2 \right). \quad (3.63)$$

Par l'inégalité des formes quadratiques

$$\frac{1}{2} \lambda_{\min}\{P\} \|z\|_2^2 \leq V(z) \leq \frac{1}{2} \lambda_{\max}\{P\} \|z\|_2^2 \quad (3.64)$$

on peut obtenir

$$\|z\|_2 \leq \frac{\sqrt{2}V(z)^{1/2}}{\lambda_{\min}\{P\}^{1/2}}. \quad (3.65)$$

D'où :

$$\dot{V}(z(t); u_i^* \in \tilde{U}) \leq \alpha V(z(t))^{1/2} \quad (3.66)$$

avec $\alpha = \frac{\sqrt{2} \lambda_{\max}\{P\}}{\lambda_{\min}\{P\}^{1/2}} \left(\left| \frac{E}{L} \left(\frac{1}{2} - u_{ref} \right) \right| + \max_{u \in U} \|S(u)\|_2 \right)$. De plus, la solution de l'équation différentielle

$$\dot{v} = \alpha v^{1/2}, \quad v(0) = v_0 \geq 0 \quad (3.67)$$

est donnée par

$$v(t) = \left(v_0^{1/2} + \frac{\alpha}{2} t \right)^2. \quad (3.68)$$

Considérons un intervalle $[t_i, t_{i+1}[$ où la commande u_i^* est choisie dans un domaine restreint \tilde{U} . Par le principe de comparaison [Kha01], $V \leq v$ si $V(z_i) \leq v_0$. On obtient alors $\forall t \in [t_i, t_{i+1}[$

$$V(z(t)) \leq \left(V(z_i)^{1/2} + \frac{\alpha}{2} (t - t_i) \right)^2. \quad (3.69)$$

La durée entre deux instants de commutations étant égale à T_e , on obtient :

$$V(z_{i+1}) \leq \left(V(z_i)^{1/2} + \frac{\alpha}{2} T_e \right)^2. \quad (3.70)$$

- cas où u_i^* appartient au domaine U :

on s'intéresse tout d'abord au cas où l'on peut choisir une commande u^* à tout instant t sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}[$. On désigne par $\dot{V}(z(t); u^*(t) \in U)$ la dérivée de V le long de la trajectoire $z(t)$ dans la direction donnée par la commande $u^*(t) \in U$ choisie à tout instant t . On a :

$$\dot{V}(z(t); u^*(t) \in U) \leq \min_{u \in U} z(t)^T P B(u) = z(t)^T P B(u^*(t)). \quad (3.71)$$

D'après la propriété 4, l'origine est telle que $0 \in \text{int}(\mathcal{C})$ avec $\mathcal{C} = \text{co}\left(\{B(u) : u \in U\}\right)$. Il existe donc une boule $\mathcal{B}(0, \rho) = \{z \in \mathbb{R}^p : \|z\|_2 < \rho\}$ telle que celle-ci

est contenue dans l'ensemble \mathcal{C} . Quelque soit le vecteur z considéré, on peut alors définir un vecteur r tel que :

$$r = -\rho \frac{z}{\|z\|_2}. \quad (3.72)$$

On peut alors écrire

$$\min_{u \in U} z(t)^T P B(u) \leq z(t)^T P r(t) \leq -\frac{\rho}{\|z(t)\|_2} z(t)^T P z(t). \quad (3.73)$$

Par l'inégalité des formes quadratiques (3.64), on obtient :

$$\dot{V}(z(t); u^*(t) \in U) \leq -\beta' V(z(t))^{1/2} \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}[\quad (3.74)$$

avec $\beta' = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_{\min}^{1/2}\{P\} \rho$.

La relation (3.74) donne l'équation différentielle de la fonction V dans le cas où l'on choisit une commande $u^*(t) \in U$ à tout instant, c'est-à-dire sans considérer l'existence d'une durée fixée entre deux commutations. Nous nous intéressons maintenant à l'effet du maintien de cette commande, notée u_i^* , choisie à un instant de commutation t_i , sur la durée T_e entre deux instants.

Deux cas peuvent se produire :

- soit la commande u_i^* choisie à l'instant t_i est minimisante sur l'intervalle de temps $[t_i, t_{i+1}[$, donc la fonction V vérifie l'équation différentielle (3.74) pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}[$ avec $t_{i+1} - t_i = T_e$;
- soit la commande u_i^* choisie à l'instant t_i n'est pas minimisante sur tout l'intervalle $[t_i, t_{i+1}[$. Il est alors nécessaire de majorer $\dot{V}(z(t); u_i^* \in U)$ pour $t \in [t_i, t_{i+1}[$ avec $t_{i+1} - t_i = T_e$.

Intéressons nous plus particulièrement au deuxième cas.

Considérons la fonction

$$\dot{V}^*(z) = \min_{u \in U} \dot{V}(z, u). \quad (3.75)$$

Cette fonction est négative continue par rapport à z et est radialement non bornée. Il existe alors une borne supérieure pour $\dot{V}^*(z)$ à l'extérieur de la boule $\mathcal{B}(0, R_1)$ que l'on note

$$\dot{V}_{\max}^*(R_1) = \max_{z \notin \mathcal{B}(0, R_1)} \dot{V}^*(z). \quad (3.76)$$

Il est à noter que $\dot{V}_{\max}^*(R_1) < 0$. Soit une deuxième boule $\mathcal{B}(0, R_2) = \{z \in \mathbb{R}^p : V(z) \leq R_2\}$ telle que $R_2 \gg R_1$. Considérons la dérivée $\psi(z, u)$ de $\dot{V}(z, u)$ dans la direction donnée par $A(u)z + B(u)$. $\psi(z, u)$ est une fonction continue par rapport au couple (z, u) . $\mathcal{B}(0, R_2)$ et U étant compacts, $\psi(z, u)$ est bornée sur $\mathcal{B}(0, R_2) \times U$ et atteint ses bornes. Notons

$$\Psi(R_1, R_2) = \sup_{z \in \mathcal{B}(0, R_2), u \in U} |\psi(z, u)|. \quad (3.77)$$

Considérons une portion de trajectoire $z(t)$ issue de z_i ayant pour équation (3.56) avec une commande u_i^* (donnée par 3.53) maintenue sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}[$. z_i est telle que $z_i \in \mathcal{B}(0, R_2)$ et $z_i \notin \mathcal{B}(0, R_1)$.

On peut écrire

$$\dot{V}^*(z_i) \leq \dot{V}_{\max}^*(R_1) < 0. \quad (3.78)$$

Remarquons qu'à l'instant de commutation t_i , la valeur $V(z(t), u_i^*)$ coïncide avec $\dot{V}^*(z_i)$. De plus, pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}[$, on peut écrire

$$\dot{V}^*(z(t)) = \min_{u \in U} \dot{V}(z(t), u^*(t)) \leq \dot{V}(z(t), u_i^*) \leq \dot{V}(z_i, u_i^*) + \Psi t. \quad (3.79)$$

Il existe alors une durée dt pour laquelle $\forall t \in [t_i, t_i + dt]$, on peut vérifier l'inégalité suivante :

$$\dot{V}^*(z(t)) \leq \dot{V}(z(t), u_i^*) \leq \frac{1}{2} \dot{V}^*(z(t)). \quad (3.80)$$

Afin de déterminer cette durée dt , on se place dans le pire cas, c'est-à-dire pour lequel $\dot{V}^*(z(t))$ est décroissante avec une dérivée égale à $-\Psi(R_1, R_2)$ et $\dot{V}(z(t), u_i^*)$ est croissante avec une dérivée égale à $\Psi(R_1, R_2)$. On peut écrire :

$$\begin{cases} \dot{V}^*(z(t)) = \dot{V}^*(z_i) - \Psi(R_1, R_2)t \\ \dot{V}(z(t), u_i^*) = \dot{V}^*(z_i) + \Psi(R_1, R_2)t \end{cases} \quad (3.81)$$

On cherche l'instant pour lequel $\dot{V}(z(t), u_i^*) = \frac{1}{2} \dot{V}^*(z(t))$. De manière graphique, on peut représenter cette recherche par la figure 3.6 où $\dot{V}(z(t), u_i^*)$ est représentée en trait pointillé rouge et $\frac{1}{2} \dot{V}^*(z(t))$ est représentée en trait continu bleu. On obtient alors l'instant dt par :

$$dt = \frac{|\dot{V}^*(z_i)|}{3\Psi(R_1, R_2)}. \quad (3.82)$$

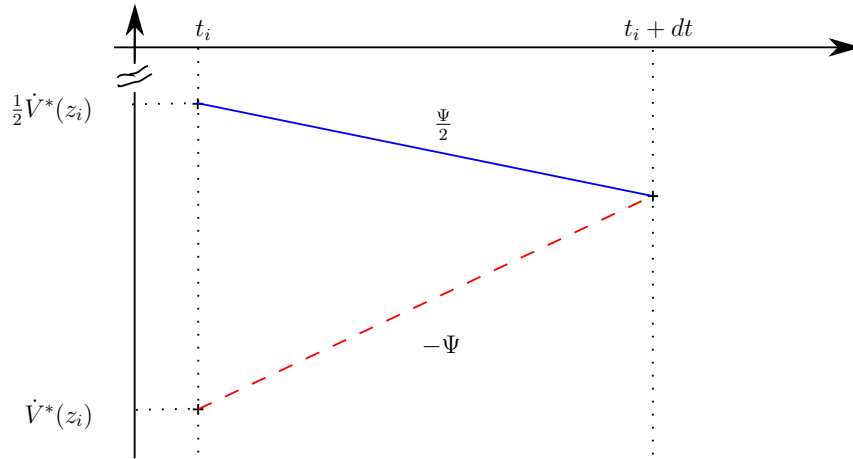


FIGURE 3.6 – Illustration de la décroissance de $\frac{1}{2} \dot{V}^*(z(t))$ et de la croissance de $\dot{V}(z(t), u_i^*)$

Afin que cette durée dt soit vérifiée pour toute trajectoire intérieure à $\mathcal{B}(0, R_2)$, il suffit de noter que $\dot{V}^*(z_i) \leq \dot{V}_{\max}^*(R_1)$, on obtient ainsi

$$dt = \frac{|\dot{V}_{\max}^*(R_1)|}{3\Psi(R_1, R_2)} > 0. \quad (3.83)$$

Sur l'intervalle $[t_i, t_i + dt]$, la relation

$$\dot{V}(z(t), u_i^*) \leq \frac{1}{2} \dot{V}^*(z(t)) \quad (3.84)$$

est vérifiée. De plus, en reprenant la relation (3.74), on a

$$\dot{V}^*(z(t)) \leq -\beta' V^{1/2}(z(t)) \quad (3.85)$$

donc la fonction V sur un intervalle où $u_i^* \in U$ vérifie

$$\dot{V}(z(t), u_i^* \in U) \leq -\beta V^{1/2}(z(t)) \quad (3.86)$$

où $\beta = \frac{\beta'}{2} = \frac{1}{2} \lambda_{\min}^{1/2}\{P\} \rho$.

De manière similaire au cas où $u_i^* \in \tilde{U}$, par le principe de comparaison, on obtient $\forall t \in [t_i, t_{i+1}[$

$$V(z(t)) \leq \left(V(z_i)^{1/2} - \frac{\beta}{2}(t - t_i) \right)^2. \quad (3.87)$$

La durée entre deux instants de commutations étant égale à T_e , on a :

$$V(z_{i+1}) \leq \left(V(z_i)^{1/2} - \frac{\beta}{2} T_e \right)^2. \quad (3.88)$$

Il est important de rappeler que cette relation est vérifiée uniquement si $V(z_i) \notin \mathcal{B}(0, R_1)$ et si T_e est suffisamment petit, c'est-à-dire que la décroissance de la fonction V n'est assurée qu'à l'extérieur de cette boule. Notons de plus que la dérivée de V le long de toutes les trajectoires $z(t)$ avec une commande constante égale à u_i^* est négative, si $z_i \notin \mathcal{B}(0, R_1)$ et si T_e est suffisamment petit, alors toute trajectoire issue de z_i reste à l'intérieur de $\mathcal{B}(0, R_2)$.

On s'intéresse par la suite au cas limite, c'est-à-dire à la fonction majorante de V en tout point sur l'intervalle $[t_{k-N+1}, t_{k+1}[$. Notons $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ cette fonction. Comme V est continue par rapport à l'état, on peut trouver cette fonction f telle qu'elle soit aussi une fonction continue par rapport à l'état. Sur les intervalles où $u_i^* \in \tilde{U}$, elle vérifie

$$f(z(t)) = \left(f(z_i)^{1/2} + \frac{\alpha}{2}(t - t_i) \right)^2 \quad (3.89)$$

et sur les intervalles où $u_i^* \in U$, elle vérifie

$$f(z(t)) = \left(f(z_i)^{1/2} - \frac{\beta}{2}(t - t_i) \right)^2. \quad (3.90)$$

On obtient alors

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{2} T_e &= f(z_{i+1})^{1/2} - f(z_i)^{1/2} & \text{si } u_i^* \in \tilde{U}, \\ -\frac{\beta}{2} T_e &= f(z_{i+1})^{1/2} - f(z_i)^{1/2} & \text{si } u_i^* \in U. \end{cases} \quad (3.91)$$

D'après la proposition 8, il existe au plus $(p - 1)$ intervalles où $u_i^* \in \tilde{U}$, la fonction f ne peut donc croître que sur un intervalle de durée $(p - 1)T_e$. Par la remarque 16, la fonction f décroît sur un intervalle de durée $(N - p + 1)T_e$. On peut alors écrire :

$$\frac{\alpha}{2}(p - 1)T_e - \frac{\beta}{2}(N - p + 1)T_e = f(z_{k+1})^{1/2} - f(z_{k-N+1})^{1/2}. \quad (3.92)$$

Afin de garantir la décroissance de la fonction V sur l'intervalle \mathcal{I} , on doit avoir la relation

$$f(z_{k-N+1}) \geq f(z_{k+1}). \quad (3.93)$$

D'où, pour garantir la décroissance sur \mathcal{I} , la relation

$$\frac{\alpha}{2}(p-1)T_e - \frac{\beta}{2}(N-p+1)T_e \leq 0 \quad (3.94)$$

doit être vérifiée. On obtient alors la relation

$$N \geq (p-1)\frac{\alpha+\beta}{\beta}. \quad (3.95)$$

Si $\forall i \in \{k-N+1, \dots, k+1\}$, $z_i \notin \mathcal{B}(0, R_1)$ et $z_i \in \mathcal{B}(0, R_2)$, si T_e est suffisamment petit (borne donnée par (3.83)) et si N est suffisamment grand (respectant (3.95)), alors la relation $V(z_{k+1}) - V(z_{k-N+1}) < 0$ est vérifiée. Dans la suite du raisonnement, T_e est considéré comme suffisamment petit et N comme suffisamment grand. Rappelons que, quelque soit la commande, la trajectoire entre deux instants de commutations possède une évolution finie. Pour une séquence $(z_i)_{i \in \{k-N+1, \dots, k+1\}}$, on peut alors trouver une boule $\mathcal{B}(0, R_3)$, $R_1 \leq R_3 < R_2$ telle que quelque soit la condition initiale $z_{k-N+1} \in \mathcal{B}(0, R_1)$, on a $z_i \in \mathcal{B}(0, R_3)$, $\forall i \in \{k-N+1, \dots, k+1\}$ et en particulier $z_{k+1} \in \mathcal{B}(0, R_3)$. Nous allons maintenant démontrer que la boule $\mathcal{B}(0, R_3)$ est un ensemble globalement attractif pour la boucle fermée {Système (3.29) – Contrôleur (3.50)-(3.51) – Observateur (3.24)}. Cette démonstration est similaire à celle faite pour la proposition 3 du chapitre 2. Pour une trajectoire $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de la boucle fermée issue d'une condition initiale arbitraire z_0 , il suffit de prouver les deux affirmations suivantes :

- la boule $\mathcal{B}(0, R_3)$ est un ensemble positivement invariant pour toutes les suites extraites $(z_{p(N+1)+r})$ avec N et $r \in \{0, \dots, N\}$ fixés, p étant l'indice de la suite ;
- la boule $\mathcal{B}(0, R_3)$ est un ensemble globalement attractif pour la boucle fermée.

Pour démontrer la première affirmation, supposons que $z_r \in \mathcal{B}(0, R_3)$, deux cas existent :

- $z_r \in \mathcal{B}(0, R_1)$ alors par construction de la boule $\mathcal{B}(0, R_3)$, $z_{r+N+1} \in \mathcal{B}(0, R_3)$;
- $z_r \notin \mathcal{B}(0, R_1)$ alors soit un indice $m \in \{0, \dots, N\}$ tel que $z_{r+m} \in \mathcal{B}(0, R_1)$ et par construction de $\mathcal{B}(0, R_3)$ alors $z_{r+N+1} \in \mathcal{B}(0, R_3)$ ou soit cet indice m n'existe pas et alors on $\forall i \in \{r, \dots, r+N+1\}$, $z_i \notin \mathcal{B}(0, R_1)$ donc la relation $V(z_{r+N+1}) - V(z_r) < 0$ est vérifiée garantissant que $z_{r+N+1} \in \mathcal{B}(0, R_3)$.

On a donc $\mathcal{B}(0, R_3)$ qui est un ensemble positivement invariant pour toutes les suites extraites $(z_{p(N+1)+r})_{p \in \mathbb{N}}$, $r \in \{0, \dots, N\}$.

Pour prouver la seconde affirmation, supposons qu'il existe un indice $s \in \{0, \dots, N-1\}$ tel que $z_s \notin \mathcal{B}(0, R_3)$, on peut alors distinguer deux cas :

- soit il existe un indice $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $z_{p_0(N+1)+s} \in \mathcal{B}(0, R_3)$, on revient alors au fait que $\mathcal{B}(0, R_3)$ est un ensemble positivement invariant, ce qui implique que $z_{p(N+1)+s} \in \mathcal{B}(0, R_3)$, $\forall p \geq p_0 \in \mathbb{N}^*$;

- soit cet indice p_0 n'existe pas. De ce fait, la suite $V(z_{p(N+1)+s})_{p \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante (car $z_{p(N+1)+s} \notin \mathcal{B}(0, R_1)$, $\forall p \in \mathbb{N}$) et la relation

$$V(z_{p(N+1)+s}) > V(z_{(p+1)(N+1)+s}) > R_3$$

est nécessairement vérifiée. Par continuité de V et du fait que la suite est bornée, il existe une limite ℓ_s telle que $\lim_{p \rightarrow \infty} V(z_{p(N+1)+s}) = \ell_s$.

Supposons dans un premier temps que $\ell_s > R_3$. Notons $\varphi_s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, une fonction strictement croissante. Par compacité, on peut extraire une suite de la forme $(z_{\varphi_s(p(N+1)+s)})_{p \in \mathbb{N}}$ convergeant vers un point limite y_s . Or, y_s satisfait nécessairement la relation $V(y_s) = \ell_s$. En considérant y_s^+ la $(N+1)^{\text{ième}}$ itérée de y_s par les équations de la boucle fermée, on obtient que la relation $V(y_s^+) = V(y_s) = \ell_s$ est nécessairement vérifiée. Cependant la relation $V(y_s^+) = V(y_s)$ ne vérifie pas la relation de décroissance stricte pour les suites extraites de longueur $N+1$. De ce fait, on a contradiction avec la relation $V(y_s) = \ell_s > R_3$. La suite $(z_{p(N+1)+s})_{p \in \mathbb{N}}$ vérifie alors la relation $\lim_{p \rightarrow \infty} V(z_{p(N+1)+s}) = R_3$.

Du fait que toutes les séquences extraites de la forme $(z_{p(N+1)+s})_{p \in \mathbb{N}}$, $s \in \{0, \dots, N-1\}$ appartiennent à l'un des deux cas précédents, la séquence $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ approche $\mathcal{B}(0, R_3)$. On peut donc conclure que $\mathcal{B}(0, R_3)$ est un ensemble attractif global pour la boucle fermée {Système (3.29) – Contrôleur (3.50)-(3.51) – Observateur (3.24)}.

On peut alors conclure que si le paramètre N est suffisamment grand (respectant (3.95)) et la durée T_e est suffisamment petite (borne donnée par (3.83)), la stratégie (3.50) rend la boucle fermée {Système (3.29) – Contrôleur (3.50)-(3.51) – Observateur (3.24)} pratiquement stable. □

Remarque 17. Afin de garantir la bonne reconstruction des tensions intermédiaires à partir de la mesure de la tension V_s , il est nécessaire d'avoir une durée NT_e qui est suffisamment petite pour que les valeurs des tensions intermédiaires ne varient peu sur cette durée. Afin de satisfaire ceci, considérons un horizon N vérifiant (3.95) et une durée T_e fixée. Si la durée NT_e n'est pas suffisamment petite, il suffit de prendre un temps entre deux commutations divisé, par exemple, par deux et permettant d'assurer que la durée NT_e est suffisamment petite. Le résultat de stabilité pratique reste alors vrai.

3.5 Simulations

Afin d'illustrer l'efficacité de la commande basée observateur synthétisée précédemment, nous allons considérer le cas d'un convertisseur multicellulaire à $p = 3$ cellules avec les paramètres suivant : $R = 10\Omega$, $L = 10 \text{ mH}$, $E = 30V$, $C_1 = C_2 = 40 \mu\text{F}$ et $T_e = 10\mu\text{s}$. Les gains de l'observateur sont choisis tels que $K_1 = 35$ et $K_2 = 350$. On fixe le paramètre $\alpha = \frac{1}{2}$, ainsi l'observateur en temps fini est un observateur à modes glissants classique. On choisit de plus pour la fonction de Lyapunov $V(z) = \frac{1}{2}z^T Pz$, la matrice suivante :

$$P = P^T = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Les figures 3.7-3.8 montrent l'évolution du vecteur d'état du système $x = [I, V_{C_1}, V_{C_2}]^T$ en trait continu bleu et celui de l'observateur $\hat{x} = [\hat{I}, \hat{V}_{C_1}, \hat{V}_{C_2}]^T$ en trait pointillé rouge. On choisit pour référence $x_{ref} = [2.5, 10, 20]^T$. La valeur des tensions intermédiaires en sortie de l'observateur (une fois reconstruite par la connaissance de la tension estimée \hat{V}_s) à l'instant initial est différente de la valeur des tensions intermédiaires du convertisseur.

La figure 3.7 illustre le cas où l'on choisit l'horizon $N = p - 1$. On peut observer que l'état du système et l'état de l'observateur coïncident, il y a donc bien observation. De plus, la convergence des estimées des tensions intermédiaires vers les tensions intermédiaires du convertisseur est très rapide. Cependant, du fait que la contrainte de la condition de rang est appliqué à chaque instant, la référence x_{ref} ne peut pas être atteinte par l'état du système. En effet, on ne laisse plus assez de degré de liberté au niveau de la loi de commutations pour assurer simultanément l'observabilité et la commandabilité du système.

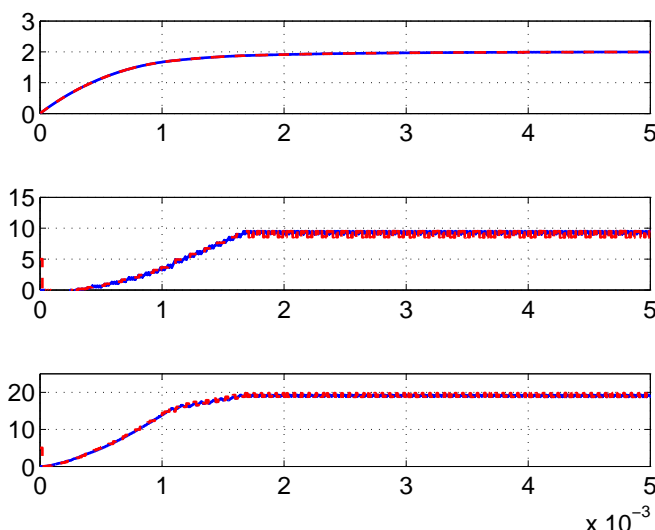


FIGURE 3.7 – Cas pour lequel $N = p - 1$

Dans le cas où l'on choisit un horizon N suffisamment grand (pour la figure 3.8, $N = 8$), on peut obtenir à la fois l'observation de l'état du système et la convergence de celui-ci à la référence voulue. Cependant, on remarque que la durée de convergence des tensions intermédiaires estimées vers les tensions intermédiaires réelles est plus importante que dans le cas précédent. Ceci s'explique du fait que la matrice (3.9) permettant la reconstruction des tensions intermédiaires nécessite la connaissance d'un plus grand nombre de commande. Il est donc nécessaire d'attendre N commandes avant de pouvoir inverser cette matrice, et d'obtenir la reconstruction des tensions intermédiaires.

3.6 Conclusion

On a pu voir dans ce chapitre que l'observation du convertisseur multicellulaire est un sujet bien étudié dans la littérature. De plus, il existe bon nombre d'observateurs synthésés pour ce convertisseur, pourvu que les conditions d'observabilité soient satisfaites.

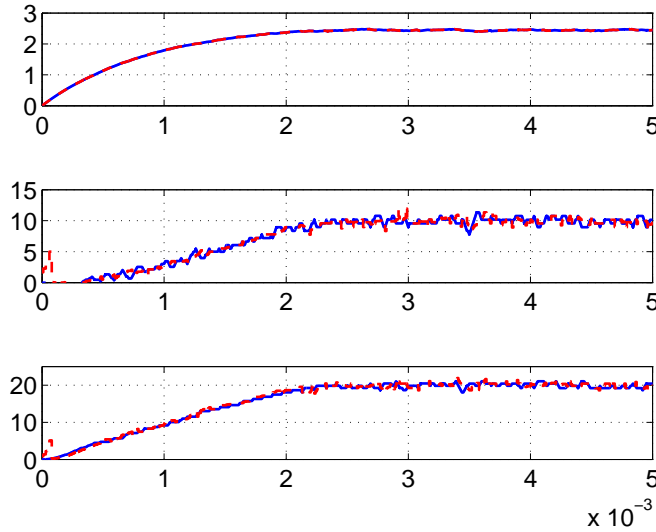


FIGURE 3.8 – Cas où N est suffisamment grand

Cependant, à notre connaissance, il n'existe pas dans la littérature de stratégie de commande par retour de sortie basée observateur qui permet de garantir à la fois l'observabilité du système, par une contrainte algébrique, et la convergence de l'état à une référence donnée, en utilisant une méthode basée sur les fonctions de contrôle de Lyapunov. Ce chapitre permet la synthèse de cette commande en utilisant une stratégie de plus grande pente à laquelle on ajoute une contrainte permettant d'assurer l'observabilité. Imposer un temps de séjour minimum par mode permet de garantir l'estimation de la tension V_s mais en impliquant un caractère pratique à la stabilité de la boucle fermée. Enfin, des simulations permettent d'illustrer le bon comportement du contrôleur synthétisé.

3.7 Annexe

Proposition 10. *L'ensemble $\{S(u) : u \in U\}$ admet l'origine pour centre de symétrie.*

Démonstration. Afin de démontrer cette proposition, on va montrer que pour quelque soit une commande ν fixée et la commande qui lui est complémentaire $\bar{\nu}$, la relation

$$S(\bar{\nu}) = -S(\nu)$$

est vérifiée. Effectuons le calcul composante par composante :

– 1^{ère} composante :

On a

$$\begin{aligned} S_1(\bar{\nu}) &= \frac{E}{pL} \sum_{i=1}^p (\bar{\nu}^i - u_{ref}) - \frac{E}{L} \left(\frac{1}{2} - u_{ref} \right) \\ &= \frac{E}{pL} \sum_{i=1}^p \bar{\nu}^i - \frac{E}{2L} \end{aligned}$$

Remarquons que pour un vecteur binaire ν de dimension p , on a $\sum_{i=1}^p \nu^i = p - \sum_{i=1}^p \bar{\nu}^i$.

$$\begin{aligned} &= \frac{E}{pL} \left(p - \sum_{i=1}^p \nu^i \right) - \frac{E}{2L} \\ &= -\frac{E}{pL} \left(\sum_{i=1}^p \nu^i \right) + \frac{E}{2L} \\ &= -S_1(\nu) \end{aligned}$$

– $i^{\text{ème}}$ composante, $i \in \{2, \dots, p\}$:

Remarquons que $\forall (\nu^i, \nu^j) \in \{0, 1\}^2$, on a $(\nu^j - \nu^i) = -(\bar{\nu}^j - \bar{\nu}^i)$. De cette relation, on a directement :

$$\begin{aligned} S_i(\bar{\nu}) &= (\bar{\nu}^i - \bar{\nu}^{i-1}) \frac{Eu_{ref}}{RC_{i-1}} \\ &= -(\nu^i - \nu^{i-1}) \frac{Eu_{ref}}{RC_{i-1}} \\ &= -S_i(\nu) \end{aligned}$$

Comme chaque élément de $S(\bar{\nu})$ est opposé à celui de $S(\nu)$, l'ensemble $\{S(u) : u \in U\}$ admet l'origine pour centre de symétrie. \square

Conclusion générale & Perspectives

Les travaux développés dans cette thèse se concentrent sur la stabilisation des systèmes affines commutés. Cette classe de systèmes a la particularité de ne pas posséder de point d'équilibre commun à l'ensemble des sous-systèmes. De ce fait, il est nécessaire de prendre en compte un ensemble de points de fonctionnement, pour lequel on considère un domaine de commande étendu. L'étude de la stabilité et de la stabilisabilité se fait alors pour un point appartenant à cet ensemble.

Dans une première partie, nous nous sommes intéressés à la stabilisation des systèmes affines commutés dans le cas où la commande est la loi de commutations, c'est-à-dire que l'on s'applique à synthétiser une stratégie rendant le système asymptotiquement stable en boucle fermée. Dans le cas où l'on n'impose pas de contraintes sur la loi de commutations, un certain nombre de stratégies existent déjà dans la littérature. Celles-ci se fondent généralement sur l'hypothèse de l'existence d'une fonction garantissant la décroissance de l'énergie globale du système au cours du temps. Cette hypothèse permet de démontrer que le point de fonctionnement choisi est asymptotiquement stable. Cependant, dans le cas où l'on impose une durée minimale entre chaque commutation, la stabilité asymptotique vers un point de référence ne peut être prouvée. En effet, seule une stabilité pratique, c'est-à-dire dans un voisinage de la référence peut être démontrée. Peu de travaux dans la littérature ont traité ce sujet. En échantillonnant le système en boucle fermée avec sa stratégie de commutations, nous formulons un problème d'optimisation permettant d'obtenir une estimation d'un ensemble attractif du système, s'il existe. La formulation ISS, stabilité entrée-état, permet alors de donner le lien entre incertitudes, qu'elles soient paramétriques ou sur les instants de commutations, et taille des ensembles attractifs. Nous donnons, sous certaines hypothèses, une possibilité d'implémenter le problème d'optimisation. Bien que celui-ci puisse prendre du temps à être résolu numériquement, il est à noter que les calculs sont faits hors-ligne.

Dans une seconde partie, nous avons étudié le problème de l'observabilité d'un système particulier pouvant être modéliser comme un système affine commuté. Bien que l'on étudie un cas particulier, le problème de l'observabilité des systèmes hybrides est encore un sujet largement ouvert, même dans le cas plus restreint des systèmes à commutations. En effet, l'observabilité du système dépend généralement de la loi de commutations. De ce fait, établir une loi de commutations sous forme d'un retour de sortie est un double challenge : cette loi doit satisfaire des conditions pour rendre d'une part le système commandable, et d'autre part observable. Dans le cas du convertisseur multicellulaire qui nous intéresse, on peut montrer que la condition d'observabilité est satisfaite si la sé-

quence de commutations satisfait une condition algébrique de rang, ce qui revient à une hypothèse d'excitation persistante de la commande. On a cependant montré qu'afin de garantir l'observabilité du système, on doit aussi assurer l'existence d'une durée minimale entre commutations. Comme vu dans la partie précédente, on échange alors une stabilité asymptotique en un point pour une stabilité pratique. Par un exemple, on illustre le fait qu'en s'intéressant au rang d'une séquence de commutations plus ou moins longue, on garantit ou non l'observabilité et la commandabilité du système.

Les commutations autonomes font partie des sujets encore peu traités dans la littérature. Dans le cadre du chapitre 2, une prise en compte de ces commutations dans la détermination des ensembles invariants pourrait être menée.

Cette thèse a permis de fournir certains résultats quant à la stabilisation des systèmes affines commutés. Cependant, une mise en œuvre expérimentale de ces résultats serait intéressante. À ce titre, une prise en compte des incertitudes paramétriques et des bruits de mesure sur les propriétés de la stratégie de commutations échantillonnée par retour de sortie basée observateur du chapitre 3 est nécessaire.

Dans l'ensemble de ce manuscrit, l'hypothèse d'un point de fonctionnement fixe a été faite. Une prise en compte d'une référence variable dans l'étude permettrait de considérer le cas des convertisseurs continu-alternatif, et ainsi de s'intéresser, entre autres, au fonctionnement du convertisseur multicellulaire en tant qu'onduleur.

Bibliographie

- [AB08] V. Acary and B. Brogliato. *Numerical Methods for Nonsmooth Dynamical Systems. Applications in Mechanics and Electronics*, volume 35 of *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Springer Verlag, Berlin, 2008.
- [AC01] A. Alessandri and P. Coletta. *Design of Luenberger observers for a class of hybrid linear systems*, volume 2034 of *Lecture Notes of Computer Science. Hybrid Systems : Computation and control*, pages 7–18. Springer-verlag edition, 2001.
- [AGB11] L. Amet, M. Ghanes, and J.-P. Barbot. Direct control based on sliding mode techniques for multicell serial chopper. In *Proceedings of the IEEE American Control Conference*, pages 751–756, San Francisco, USA, june 2011.
- [AI03] S. Azuma and J. Imura. Optimal control of sampled-data piecewise affine systems and its application to CPU processing control. In *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 161–166, december 2003.
- [AQ09] R.P. Aguilera and D.E. Quevedo. Capacitor voltage estimation for predictive control algorithm of flying capacitor converters. In *Proceedings of the International Conference on Industrial Technology*, pages 1–6, february 2009.
- [Art83] Z. Artstein. Stabilization with relaxed controls. *Nonlinear Analysis*, 7(11) :1163–1173, 1983.
- [BBBV02] A. Balluchi, L. Benvenuti, M. D. Di Benedetto, and A.L. Sangiovanni Vincentelli. *Design of observers for hybrid systems*, volume 2289 of *Lecture Notes of Computer Science. Hybrid Systems : Computation and control*, pages 76–89. 2002.
- [BBV02] A. Balluchi, L. Benvenuti, and A.L. Sangiovanni Vincentelli. Observers for hybrid systems with continuous state resets. In *Proceedings of the 10th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED2002*, July 9-12 2002.
- [BDB03] T. Boukhobza, M. Djemai, and J.-P. Barbot. Implicit triangular observer form dedicated to a sliding mode observer for systems with unknown inputs. *Variable Structure System Control - New Designs and Applications of the Asian Journal of Control*, 5(4) :513–527, 2003.
- [BDPT01] G. Bornard, A. Donzel, S. Poullain, and J.L. Thomas. Convertisseur multicellulaire : commande discontinue, critère continu, régimes cycliques. In *Actes de*

- conférences des Journées Nationales d'Automatique, Autrans, France, février 2001.
- [BE04] M. Babaali and M. Egerstedt. *Observability of switched linear systems*, volume 2993 of *Lecture Notes of Computer Science. Hybrid Systems : Computation and control*, pages 48–63. Springer Berlin edition, 2004.
- [Ben09] K. Benmansour. *Réalisation d'un banc d'essai pour la commande et l'observation des convertisseurs multicellulaires série : approche hybride*. PhD thesis, Cergy Pontoise University, 2009.
- [BFM99] R. Bensaid, M. Fadel, and T. Meynard. Observer design for a three-cell chopper using a discrete-time model. In *Proceedings of ELECTROMOTION*, pages 689–694, Patras, Greece, july 1999.
- [BFM00] A. Bemporad, G. Ferrari, and M. Morari. Observability and controllability of piecewise affine and hybrid systems. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 4 :3966–2971, 2000.
- [BGB10] F.J. Bejarano, M. Ghanes, and J.-P. Barbot. Observability and observer design for hybrid multicell choppers. *International Journal of Control*, 83(3) :617–632, 2010.
- [BGFB94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in system and control theory*. SIAM, Philadelphia, 1994.
- [Bla99] F. Blanchini. Set invariance in control. *Automatica*, 35 :1747–1767, 1999.
- [BM99] A. Bemporad and M. Morari. Control of systems integrating logic, dynamics and constraints. *Automatica*, 35 :407–427, 1999.
- [BMG06] G. Besançon, J. DeLeon Morales, and D. Huerta Guevara. On adaptive observers for state affine systems. *International Journal of Control*, 79 :581–591, 2006.
- [Bra98] M. S. Branicky. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4) :475–482, 1998.
- [BS04] P. Bolzern and W. Spinelli. Quadratic stabilization of a switched affine system about a nonequilibrium point. In *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, pages 3890–3895, Boston, USA, july 2004.
- [BS08] F. Blanchini and C. Savorgnan. Stabilizability of switched linear systems does not imply the existence of convex Lyapunov functions. *Automatica*, 44 :1166–1170, 2008.
- [Bui93] J. Buisson. Analysis of switching devices with bond graphs. *Journal of the Franklin Institute*, 330(6) :1165–1175, 1993.
- [Car96] P. Carrère. *Étude et Réalisation des Convertisseurs Multicellulaires Série à IGBT – Équilibrage des Condensateurs Flottants*. PhD thesis, I.N.P. Toulouse, 1996.
- [Cor08] J. Cortes. Discontinuous dynamical systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 4 :36–73, 2008.

-
- [DB00] A. Donzel and G. Bornard. New control law for capacitor voltage balance in multilevel inverter with switching rate control. In *Proceedings of the IEEE Annual Meeting of Industry Applications Society*, volume 3, pages 2037–2044, 2000.
- [DBPL00] R.A. DeCarlo, M.S. Branicky, S. Pettersson, and B. Lennartson. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. In *Proceedings of the IEEE. Special issue of hybrid systems*, volume 88, pages 1069–1082, 2000.
- [DDFP10] M. Defoort, M. Djemai, T. Floquet, and W. Perruquetti. On finite time observer design for multicellular converter. In *International Workshop on Variable Structure Systems*, pages 56–61, 2010.
- [DDFP11] M. Defoort, M. Djemai, T. Floquet, and W. Perruquetti. Robust finite time observer design for multicellular converters. *International Journal of Control*, 42(11) :1859–1868, 2011.
- [Def08] F. Defay. *Commande prédictive directe d’un convertisseur multicellulaire triphasé pour une application de filtrage actif*. PhD thesis, I.N.P. Toulouse, 2008.
- [DFL05] J. Davila, L. Fridman, and A. Levant. Second-order sliding mode observer for mechanical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(11) :1785–1789, 2005.
- [DGGP10] G.S. Deaecto, J.C. Geromel, F.S. Garcia, and J.A. Pomilio. Switched affine systems control design with application to DC-DC converters. *IET Control Theory and Applications*, 4(7), 2010.
- [DMF09] A. Dávila, J.A. Moreno, and L. Fridman. Optimal Lyapunov function selection for reaching time estimation of super twisting algorithm. In *Proceedings of the 48th IEEE Conference On Decision and Control*, pages 8405–8410, Shanghai, P.R. China, december 2009.
- [DRI02] J. Daafouz, P. Riedinger, and C. Iung. Stability analysis and control synthesis for switched systems : a switched Lyapunov function approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(11) :1883–1887, 2002.
- [EH88] J. Ezzine and A.H. Haddad. On the controllability and observability of hybrid systems. In *Proceedings of the IEEE American Control Conference*, pages 41–46, Atlanta, USA, 1988.
- [EH89] J. Ezzine and A.H. Haddad. Controllability and observability of hybrid systems. *International Journal of Control*, 49 :2045–2055, 1989.
- [EM01] R. Erickson and D. Maksimovic. *Fundamentals of Power Electronics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, second edition, 2001.
- [FB07] T. Floquet and J.-P. Barbot. Super twisting algorithm based step-by-step sliding mode observers for nonlinear systems with unknown inputs. *International Journal of Systems Science*, 38(10) :803–815, 2007.
- [Fil88] A.F. Filippov. Differential equations with discontinuous righthand sides. *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*, Kluwer Academic Publishers, NL, 1988.

- [FM96] M. Fadel and T. Meynard. Équilibrage des tensions dans les convertisseurs statiques multicellulaires série : modélisation. *EPF, Grenoble*, pages 115–120, 1996.
- [Gat97] G. Gateau. *Contribution à la commande des convertisseurs statiques multicellulaires série*. PhD thesis, I.N.P. Toulouse, 1997.
- [GBB09] M. Ghanes, F. Bejarano, and J.-P. Barbot. On sliding mode and adaptive observers design for multicell converter. In *Proceedings of the 2009 American Control Conference*, pages 2134–2139, Saint Louis, USA, june 2009.
- [GC06] J.C. Geromel and P. Colaneri. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 45(5) :1915–1930, 2006.
- [GCB08] J.C. Geromel, P. Colaneri, and P. Bolzern. Dynamic output feedback control of switched linear systems. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 53(3) :720–733, 2008.
- [GDDM12] J. Van Gorp, M. Defoort, M. Djemai, and N. Manamanni. Hybrid observer for the multicellular converter. In *Proceedings of the 4th IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems*, pages 259–264, Eindhoven, The Netherlands, june 2012.
- [GFM⁺02] G. Gateau, M. Fadel, P. Maussion, R. Bensaïd, and T. Meynard. Multicell converters : active control and observation of flying capacitor voltages. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 49(5) :998–1008, 2002.
- [GK08] P. J. Goulart and E. C. Kerrigan. Input-to-state stability of robust receding horizon control with an expected value cost. *Automatica*, 44 :1171–1174, 2008.
- [Gur95] L. Gurvits. Stability of discrete linear inclusion. *Linear algebra and its applications*, 231 :47–85, 1995.
- [Hah67] W. Hahn. *Stability of motion*. Springer-Verlag, New York, 1967.
- [HCSB11] W.P.M.H. Heemels, M.K. Camlibel, J.M. Schumacher, and B. Brogliato. Observer-based control of linear complementarity systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 21 :1193–1218, 2011.
- [HDI06] L. Hetel, J. Daafouz, and C. Iung. Stabilization of arbitrary switched linear systems with unknown time-varying delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(10) :1668–1674, 2006.
- [HL03] D. Henrion and J.B. Lasserre. Gloptipoly : Global optimization over polynomials with Matlab and SeDuMi. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 29(2) :165–194, June 2003.
- [HM99] J. Hespanha and A. S. Morse. Stability of switched systems with average dwell-time. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2655–2660, 1999.
- [HRI11a] P. Hauroigné, P. Riedinger, and C. Iung. Sampled control design for switched affine systems : robust stabilization. In *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, pages 5453–5458, Milano, Italy, 2011.

-
- [HRI11b] P. Hauroigné, P. Riedinger, and C. Iung. Switched affine systems using sampled-data controllers : robust and guaranteed stabilization. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 12(56) :2929–2935, 2011.
- [HRI12] P. Hauroigné, P. Riedinger, and C. Iung. Observer-based output-feedback of a multicellular converter : Control Lyapunov Function – sliding mode approach. In *Proceedings of the 2012 IEEE Conference On Decision and Control*, Soumis, 2012.
- [ILG78] C. Iung, J.P. Louis, and V. Gelezevicius. Analysis of the validity of linear approximations for the regulation of DC motor fed by AC/DC converters. In *Proceedings of the International Conference on Electrical Machines*, volume 2, Brussels, Belgium, september 1978.
- [Imu03] J. Imura. Optimal continuous-time control of sampled-data piecewise affine systems. In *Proceedings of the 2003 American Control Conference*, Denver, USA, june 2003.
- [ISW03] B. Ingalls, E.D. Sontag, and Y. Wang. An infinite-time relaxation theorem for differential inclusions. In *Proceedings of the 2002 American Mathematical Society*, volume 131, pages 487–499, 2003.
- [JC87] Y. Ji and H.J. Chizeck. Controllability, observability and the jump linear quadratic problem in continuous time. In *Proceedings of the 26th IEEE Conference On Decision and Control*, pages 329–331, Los Angeles, USA, december 1987.
- [JC88] Y. Ji and H.J. Chizeck. Controllability, observability and discrete time markovian jump linear quadratic control. *International Journal of Control*, 48(2) :481–498, 1988.
- [JC90] Y. Ji and H.J. Chizeck. Controllability, stabilizability, and continuous-time markovian jump linear quadratic control. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 35(7) :777–788, 1990.
- [JHW07] A.L. Juloski, W.P.M.H. Heemels, and S. Weiland. Observer design for a class of piecewise linear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 17 :1387–1404, 2007.
- [JR98] M. Johansson and A. Rantzer. Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 43(4) :555–559, 1998.
- [JW01] Z.-P. Jiang and Y. Wang. Input-to-state stability for discrete time nonlinear systems. *Automatica*, 37 :857–869, 2001.
- [KA02] X.D. Koutsoukos and P.J. Antsaklis. Design of stabilizing switching control laws for discrete and continuous-time linear systems using piecewise-linear Lyapunov functions. *International Journal of Control*, 75(12) :932–945, 2002.
- [KBBL90] P.T. Klein, J. Bentsman, R.M. Bass, and B.L. Lesieutre. On the use of averaging for the analysis of power electronic systems. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 5(2), 1990.
- [KBX09] W. Kang, J.-P. Barbot, and L. Xu. On the observability of nonlinear and switched systems. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 393 :199–216, 2009.

- [Kha01] H.K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, second edition, 2001.
- [KP87] V.A. Kamenetski and Y.S. Pyatnitskiy. An iterative method of Lyapunov function construction for differential inclusions. *Systems and Control Letters*, 8 :445–451, 1987.
- [Kra63] N.N. Krasovskii. *Stability of motion*. Stanford University Press, Stanford, 1963.
- [KT94] D. Kazakos and J. Tsinias. The input-to-state stability condition and global stabilization of discrete time systems. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 39(10) :2111–2113, 1994.
- [Lap05] P.S. Laplace. *Traité de mécanique céleste*. Courcier, Paris, 1805.
- [LaS67] J.P. LaSalle. An invariance principle in the theory of stability. In *Differential Equations and Dynamical Systems*, pages 277–286. Academic Press, 1967.
- [LHM99] D. Liberzon, J.P. Hespanha, and A.S. Morse. Stability of switched linear systems : a Lie-algebraic condition. *Systems and Control Letters*, 37(3) :117–122, 1999.
- [Lib03] D. Liberzon. *Switching in systems and control*. Birkhäuser, Boston, 2003.
- [Lie06] A.-M. Lienhardt. *Étude de la commande et de l’observation d’une nouvelle structure de conversion d’énergie de type SMC (Convertisseur Multicellulaire Superposé)*. PhD thesis, I.N.P. Toulouse, 2006.
- [LJS⁺03] J. Lygeros, K.H. Johansson, S.N. Simić, J. Zhang, and S.S. Sastry. Dynamical properties of hybrid automata. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 48(1) :2–17, 2003.
- [LK09] Y.I. Lee and B. Kouvaritakis. Receding horizon control of switching systems. *Automatica*, 45 :2307–2311, 2009.
- [LL61] J.P. LaSalle and S. Lefschetz. *Stability by Liapunov’s direct method with applications*. Academic Press, 1961.
- [LM99] D. Liberzon and A.S. Morse. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 19(5) :59–70, 1999.
- [Lue64] D.G. Luenberger. Observing the state of a linear system. *IEEE Transactions on Military Electronics*, 8 :74–80, 1964.
- [Mar00] C.A. Martins. *Contrôle direct du couple d’une machine asynchrone alimentée par un convertisseur multiniveaux à fréquence imposée*. PhD thesis, I.N.P. Toulouse, 2000.
- [MC76] R. Middlebrook and S. Cuk. A general unified approach to modeling switching converter power stages. *IEEE Power Electronics Specialists Conference*, pages 18–34, 1976.
- [MCRB04] C. Morvan, H. Cormerais, P.Y. Richard, and J. Buisson. Sliding mode control of switching systems with boolean inputs. In *Proceedings of the 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems 2004*, pages 747–752, Stuttgart, Germany, september 2004.

-
- [MFT⁺02] T.A. Meynard, H. Foch, P. Thomas, J. Courault, R. Jakob, and M. Nahrstaedt. Multicell converters : basic concepts and industry applications. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 49(5) :955–964, 2002.
- [MH07] B.P. McGrath and D.G. Holmes. Analytical modelling of voltage balance dynamics for a flying capacitor multilevel converter. In *Proceedings of the 37th IEEE Power Electronics Specialists Conference*, pages 1810–1816, Orlando, USA, june 2007.
- [Mic70] A.N. Michel. Quantitative analysis of simple and interconnected systems : stability, boundedness and trajectory behavior. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 17 :292–301, 1970.
- [Mic71] A.N. Michel. Analysis of discontinuous large-scale systems : stability, transient behaviour and trajectory bounds. *International Journal of Systems Science*, 2(1) :77–95, 1971.
- [MMGH07] B.P. McGrath, T. Meynard, G. Gateau, and D.G. Holmes. Optimal modulation of flying capacitor and stacked multicell converters using a state machine decoder. *IEEE Transactions On Power Electronics*, 22(2) :508–516, 2007.
- [Mor96] A.S. Morse. Supervisory control of families of linear set-point controllers – part 1 : exact matching. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 41(10) :1412–1431, 1996.
- [MP89] A.P. Molchanov and Y.S. Pyatnitskiy. Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory. *Systems and Control Letters*, 13(1) :59–64, 1989.
- [MRMC00] C.A. Martins, X. Roboam, T. Meynard, and A. Carvalho. Multi-level direct torque control with imposed switching frequency and reduced ripple. In *Proceedings of the 31st Power Electronics Specialists Conference*, volume 1, pages 435–441, june 2000.
- [MRS06] L. Magni, D.M. Raimondo, and R. Scattolini. Regional input-to-state stability for nonlinear model predictive control. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 51(9) :1548–1553, 2006.
- [NA87] K.S. Narendra and A.M. Annaswamy. Persistent excitation in adaptive systems. *International Journal of Control*, 45(1) :127–160, 1987.
- [NB94] K.S. Narendra and J. Balakrishnan. A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting A-matrices. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 39(12) :2469–2471, 1994.
- [NTK99] D. Nesic, A.R. Teel, and P.V. Kokotovic. Sufficient conditions for stabilization of sampled-data nonlinear systems via discrete-time approximations. *Systems and Control Letters*, 38(4-5) :259–270, 1999.
- [PB02] W. Perruquetti and J.-P. Barbot. *Sliding modes control in Engineering*. Control Engineering Series, Marcel Dekker edition, 2002.
- [PD91] P. Peleties and R.A. DeCarlo. Asymptotic stability of m-switched systems using Lyapunov-like functions. In *Proceedings of the 1991 American Control Conference*, pages 1679–1684, Boston, USA, june 1991.

- [Per01] L. Perko. *Differential equations and dynamical systems (Third Edition)*, Springer. 2001.
- [Pin00] D. Pinon. *Commande des convertisseurs multicellulaires par mode de glissement*. PhD thesis, I.N.P. Toulouse, 2000.
- [PL01] S. Petterson and B. Lennartson. Stabilization of hybrid systems using a min-projection strategy. In *Proceedings of the 2001 American Control Conference*, pages 223–228, Arlington, USA, june 2001.
- [Pri95] L. Prisse. *Étude, conception et mise en oeuvre de convertisseurs multicellulaires série à IGBT*. PhD thesis, I.N.P. Toulouse, 1995.
- [PRI08] D. Patino, P. Riedinger, and C. Iung. Predictive control approach of a four-level three-cell DC-DC converter. In *Proceedings of the 34th IEEE Annual Conference of the Industrial Electronics Society*, Orlando, USA, november 2008.
- [PRI09] D. Patino, P. Riedinger, and C. Iung. Practical optimal state feedback control law for continuous-time switched affine systems with cyclic steady state. *International Journal of Control*, 82(7) :1357 – 1376, 2009.
- [Rod07] L. Rodrigues. Stability of sampled-data piecewise-affine systems under state feedback. *Automatica*, 43 :1249–1256, 2007.
- [Ros63] H.H. Rosenbrock. The stability of linear time-dependent control systems. *Journal of Electronics and Control*, 15 :73–80, 1963.
- [RSD10] P. Riedinger, M. Sigalotti, and J. Daafouz. On the algebraic characterization of invariant sets of switched linear systems. *Automatica*, 46(6) :1047–1052, 2010.
- [SESP99] E. Skafidas, R.J. Evans, A.V. Savkin, and I.R. Petersen. Stability results for switched controller systems. *Automatica*, 35(4) :553–564, 1999.
- [SG02] Z. Sun and S.S. Ge. Sampling and control of switched linear systems. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4413–4418, Las Vegas, USA, december 2002.
- [SGL02] Z. Sun, S.S. Ge, and T.H. Lee. Controllability and reachability criteria for switched linear systems. *Automatica*, 38(5) :775–786, 2002.
- [SJSL99] S.N. Simić, K.H. Johansson, S.S. Sastry, and J. Lygeros. Towards a geometric theory of hybrid systems. *Hybrid Systems : Computation and control*, 1999.
- [SMD⁺06] H. Saadaoui, N. Manamanni, M. Djemai, J.-P. Barbot, and T. Floquet. Exact differentiation and sliding mode observers for switched lagrangian systems. *Nonlinear Analysis*, 65(5) :1050–1069, 2006.
- [SN99] R. Shorten and K.S. Narendra. Necessary and sufficient conditions for the existence of a common quadratic Lyapunov function for two stable second order linear time-invariant systems. In *Proceedings of the IEEE American Control Conference*, pages 1410–1414, San Diego, USA, june 1999.
- [SN02] R. Shorten and K.S. Narendra. Necessary and sufficient conditions for the existence of a CQLF for a finite number of stable LTI systems. *International journal of adaptive control and signal processing*, 16(10) :709–728, 2002.

-
- [SNM03] R. Shorten, K.S. Narendra, and O. Mason. A result on common quadratic Lyapunov functions. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 48(1) :110–113, 2003.
- [Son89] E.D. Sontag. Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 34(4) :435–443, 1989.
- [Son98] E.D. Sontag. *Mathematical Control Theory : Deterministic Finite Dimensional Systems*. Springer, New York, second edition, 1998.
- [Son06] E.D. Sontag. *Nonlinear and Optimal Control Theory*, chapter Input to State Stability : Basic Concepts and Results. Springer Berlin edition, 2006.
- [SR09] B. Samadi and L. Rodrigues. Stability of sampled-data piecewise-affine systems : a time-delay approach. *Automatica*, 45 :1995–2001, 2009.
- [Sun04] Z. Sun. Sampling and control of switched linear systems. *Journal of the Franklin Institute*, 341 :657–674, 2004.
- [SV85] J.A. Sanders and F. Verhulst. *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*. Springer-verlag edition, 1985.
- [SW96] E.D. Sontag and Y. Wang. New characterizations of input-to-state stability. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 41(9) :1283–1294, 1996.
- [SWM⁺07] R. Shorten, F. Wirth, O. Mason, K. Wulff, and C. King. Stability criteria for switched and hybrid systems. *SIAM Rev.*, 49(4) :545–592, 2007.
- [SZ01] H. Sun and J. Zhao. Control Lyapunov Functions for switched control systems. In *Proceedings of the 2001 American Control Conference*, pages 1890–1891, Arlington, USA, june 2001.
- [Tac98] O. Tachon. *Commande découplante linéaire des convertisseurs multicellulaires série*. PhD thesis, I.N.P. Toulouse, 1998.
- [TASC09] A. Trofino, D. Assmann, C.C. Scharlau, and D.F. Coutinho. Switching rule design for switched dynamic systems with affine vector fields. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 54(9) :2215–2222, 2009.
- [TSL11] A. Tanwani, H. Shim, and D. Liberzon. Observability implies observer design for switched linear systems. In *Proceedings of the International Conference on Hybrid Systems : computation and control*, Chicago, USA, 2011.
- [Utk92] V.I. Utkin. *Sliding modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag, 1992.
- [Vas98] P. Vas. *Sensorless Vector and Direct Torque Control*. Oxford University Press, 1998.
- [VCL07] L. Vu, D. Chatterjee, and D. Liberzon. Input-to-state stability of switched systems and switching adaptive control. *Automatica*, 43 :639–646, 2007.
- [VCSS03] R. Vidal, A. Chiuso, S. Soatto, and S. Sastry. Observability of linear hybrid systems. *Lecture Notes in Computer Science*, 2623 :526–539, 2003.
- [vS98] A.J. van der Schaft and J.M. Schumacher. Complementarity modeling of hybrid systems. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 43(4) :483–490, 1998.

- [WPD94] M.A. Wicks, P. Peleties, and R.A. DeCarlo. Construction of piecewise Lyapunov functions for stabilizing switched systems. In *Proceedings of the 33rd IEEE Conference On Decision and Control*, pages 3492–3497, Lake Buena Vista, USA, december 1994.
- [WPD98] M.A. Wicks, P. Peleties, and R.A. DeCarlo. Switched controller synthesis for the quadratic stabilization of a pair of unstable linear systems. *European Journal of Control*, 4(2) :140–147, 1998.
- [XWL01] W. Xie, C. Wen, and Z. Li. Input-to-state stabilization of switched nonlinear systems. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 46(7) :1111–1116, 2001.
- [XZ05] X. Xu and G. Zhai. Practical stability and stabilization of hybrid and switched systems. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 50(11) :1897–1903, 2005.
- [XZH08] X. Xu, G. Zhai, and S. He. On practical asymptotic stabilizability of switched affine systems. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, pages 196–208, 2008.
- [Zay01] J. Zaytoon. *Systèmes Dynamiques Hyrides*. Hermès, 2001.
- [Zha02] Q. Zhang. Adaptive observers for MIMO linear time-varying systems. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 47(3) :525–529, 2002.
- [ZL04] G. Zhai and H. Lin. Controller failure time analysis for symmetric \mathcal{H}_∞ control systems. *International Journal of Control*, 77(6) :598–605, 2004.
- [ZLA03] G. Zhai, H. Lin, and P.J. Antsaklis. Quadratic stabilizability of switched linear systems with polytopic uncertainties. *International Journal of Control*, 76(7) :747–753, 2003.
- [ZM02] G. Zhai and A.N. Michel. On practical stability of switched systems. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3488–3493, december 2002.
- [ZXML06] G. Zhai, X. Xu, H. Lin, and A.N. Michel. Analysis and design of switched normal systems. *Nonlinear Analysis*, 65(12) :2248–2259, 2006.

**AUTORISATION DE SOUTENANCE
DU DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LORRAINE**

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

**Monsieur BUISSON Jean, Professeur, SUPELEC Cesson Sevigne,
Monsieur PRIEUR Christophe, Directeur de Recherche, GIPSA-Lab, INP Grenoble.**

Le Président de l'Université de Lorraine, autorise :

Monsieur HAUROIGNE Pascal

à soutenir devant un jury de l'UNIVERSITE DE LORRAINE, une thèse intitulée :

"Stabilisation robuste des systèmes affinis commutés. Application aux convertisseurs de puissance"

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE LORRAINE

Intitulé du doctorat : **"Automatique, Traitement du Signal et des Images, Génie Informatique"**

Fait à Vandoeuvre, le **14 septembre 2012**

Le Président de l'Université de Lorraine,

Pierre MUTZENHARDT



Résumé : Les travaux de cette thèse portent sur la stabilisation des systèmes affines commutés. Ces systèmes appartiennent à la classe des systèmes dynamiques hybrides. Ils possèdent de plus la particularité d'avoir des points de fonctionnement non auto-maintenables : il n'existe pas de loi de commutations permettant de maintenir l'état du système en ce point. De ce fait, la stabilisation de ces systèmes en imposant à la loi de commutations une durée minimale entre chaque commutation aboutit à une convergence des trajectoires dans une région de l'espace d'état. Après avoir synthétisé différentes stratégies de commutations échantillonnées construites à partir d'une fonction de commande de Lyapunov en temps continu, nous cherchons à déterminer la région de l'espace dans laquelle converge asymptotiquement l'ensemble des trajectoires du système. Par la résolution d'un problème d'optimisation, une estimation de la taille de cette région est donnée et un lien avec les incertitudes du système y est établi. Un second problème de stabilisation est étudié dans cette thèse, en considérant une stratégie de commande basée observateur par retour de sortie. Cependant, du fait de la nature hybride du système, son observabilité est directement liée à la séquence de commutations. Il est alors nécessaire de garantir à la fois l'observabilité, par une condition algébrique, et la convergence du système vers un point de fonctionnement, par l'existence d'une fonction de commande de Lyapunov.

Mots-clés : systèmes affines commutés, stabilisation, robustesse, observateurs, fonctions de commande de Lyapunov.

Abstract: This PhD thesis deals with the stabilization of switched affine systems. These systems belong to the class of hybrid dynamical systems. They exhibit a particular behavior: no switching law exists such that the state can be maintained on a chosen operating point. Hence, assuming a dwell time condition on switchings exists, the stabilization of these systems leads to a convergence of the trajectories to a region of the state space. Based on a control Lyapunov function in continuous time, we synthesize several sampled-data switching strategies. The whole trajectories asymptotically converge to a region which we attempt to determine. Solving an optimization problem, an estimation of the size of this region is given. A link with the system uncertainties is also established. This PhD thesis is dedicated to a second stabilization issue: observer-based output-feedback synthesis. By its hybrid nature, the observability of the system is connected to the switching sequence. Therefore, the synthesis of the switching strategy must respect an observability condition and guarantee the convergence to the operating point. The observability is achieved thanks to an algebraic condition. The convergence property is based on the existence of a control Lyapunov function.

Keywords: switched affine systems, stabilization, robustness, observers, control Lyapunov functions.

