

Observateurs en dimension infinie. Application à l'étude de quelques problèmes inverses.

Ghislain HAINE

Sous la direction de Karim RAMDANI et Marius TUCSNAK

Université de Lorraine (IECN) – CNRS
Inria Nancy - Grand Est – Équipe CORIDA

22 Octobre 2012

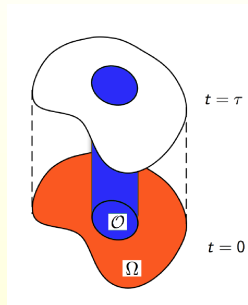
Motivation

On considère le système

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t), & \forall t \geq 0, \\ z(0) = z_0. \end{cases}$$

On observe z pendant un intervalle de temps fini

$$y(t) = Cz(t), \quad \forall t \in (0, \tau).$$



PROBLÈME INVERSE

Peut-on reconstruire z_0 à partir de $y(t)$, $t \in (0, \tau)$?

Applications : Tomographie thermo-acoustique, assimilation de données,

...

K. RAMDANI, M. TUCSNAK ET G. WEISS

Recovering the initial state of an infinite-dimensional system using observers (AUTOMATICA, 2010)

D. AUROUX ET J. BLUM

A nudging-based data assimilation method for oceanographic problems : the Back and Forth Nudging (BFN) algorithm (NONLIN. PROC. GEOPHYS., 2008)

Un cas particulier

- $A : D(A) \rightarrow X$ tel que $A^* = -A$,
- $C \in \mathcal{L}(X, Y)$

Notons Ψ_τ l'opérateur associant y à z_0 : $y = \Psi_\tau z_0$.

- (A, C) est exactement observable en temps $\tau \Leftrightarrow \Psi_\tau$ est inversible.

Sous cette condition, le problème inverse est bien posé

$$\Psi_\tau z_0 = y(t) \implies z_0 = \Psi_\tau^{-1} y(t).$$

OBSERVATEUR DIRECT

Notons $A^+ = A - \gamma C^*C$, $\gamma > 0$, et considérons le système

$$\begin{cases} \dot{z}^+(t) = A^+z^+(t) + \gamma C^*y(t), & \forall t \in (0, \tau), \\ z^+(0) = z_0^+ \in \mathcal{D}(A). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{e}^+(t) &= \dot{z}^+(t) - \dot{z}(t), \\ &= A^+z^+(t) + \gamma C^*y(t) - Az(t), \\ &= A^+(z^+(t) - z(t)), \\ &= A^+e^+(t). \end{aligned}$$

(A, C) exactement observable \Rightarrow stabilité exponentielle (Liu 1997).

Il existe $M^+ \geq 1$ et $\omega^+ > 0$ tels que

$$\|z^+(t) - z(t)\| \leq M^+ e^{-\omega^+ t} \|z_0^+ - z_0\|, \quad \forall t \in [0, \tau].$$

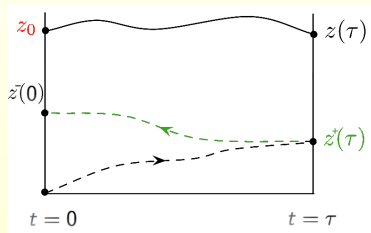
OBSERVATEUR DIRECT = APPROXIMATION DE L'ÉTAT FINAL

L'observateur direct z^+ tend vers z quand τ et t tendent vers l'infini.

OBSERVATEUR RÉTROGRADE

Notons $A^- = -A - \gamma C^* C$, $\gamma > 0$, et considérons le système

$$\begin{cases} \dot{z}^-(t) = -A^- z^-(t) - \gamma C^* y(t), & \forall t \in (0, \tau), \\ z^-(\tau) = z^+(\tau). \end{cases}$$



(A, C) exactement observable \Rightarrow stabilité exponentielle (Liu 1997).

Il existe deux constantes $M^- \geq 1$ et $\omega^- > 0$ telles que

$$\|z^-(t) - z(t)\| \leq M^- e^{-\omega^-(\tau-t)} \|z^+(\tau) - z(\tau)\|, \quad \forall t \in [0, \tau].$$

D'après la première estimation de $\|z^+(t) - z(t)\|$, on a

$$\begin{aligned} \|z^-(0) - z_0\| &\leq M^- e^{-\omega^- \tau} \|z^+(\tau) - z(\tau)\|, \\ &\leq \underbrace{M^+ M^- e^{-(\omega^- + \omega^+) \tau}}_{=: \alpha} \|z_0^+ - z_0\|. \end{aligned}$$

τ SUFFISAMMENT GRAND ?

L'observabilité exacte en temps τ implique $\alpha < 1$, d'après un résultat de Ito, Ramdani et Tucsnak.

Remarque

En notant \mathbb{T}^+ et \mathbb{T}^- les semi-groupes engendrés par A^+ et A^- , on voit que $\alpha = \|\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+\|$.

K. ITO, K. RAMDANI ET M. TUCSNAK

A time reversal based algorithm for solving initial data inverse problems
(DISCRETE CONTIN. DYN. SYST. SER. S, 2011)

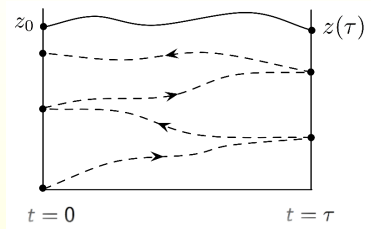
En itérant le processus en prenant à chaque cycle $z_0^+ = z^-(0)$, on obtient l'algorithme itératif

$$\begin{cases} \dot{z}_n^+(t) = A^+ z_n^+(t) + \gamma C^* y(t), & \forall t \in (0, \tau), \\ z_1^+(0) = 0, \\ z_n^+(0) = z_{n-1}^-(0), & \forall n \geq 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_n^-(t) = -A^- z_n^-(t) - \gamma C^* y(t), & \forall t \in (0, \tau), \\ z_n^-(\tau) = z_n^+(\tau), & \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Alors avec $\alpha = \|\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+\| < 1$, on a

$$\|z_n^-(0) - z_0\| \leq \alpha^n \|z_0\| \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$



Remarque

En prenant $z_0^+ = 0$, on a ($\alpha = \|\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+\| < 1$)

$$z^-(0) - z_0 = -\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+ z_0 \iff z_0 = (I - \mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+)^{-1} z^-(0)$$

Et l'algorithme peut se voir comme la troncature de la série de Neumann

$$z_0 = \sum_{n \geq 0} (\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+)^n z^-(0).$$

Dans le cas général : *Estimabilité dans les sens direct et rétrograde.*
Existence d'opérateurs H^+ et H^- (avec certaines propriétés) de telle sorte que

$$A^+ = A + H^+C$$

et

$$A^- = -A + H^-C$$

soient les générateurs des semi-groupes \mathbb{T}^+ et \mathbb{T}^- exponentiellement stables.

Difficultés additionnelles

- La construction (pratique) des opérateurs H^\pm est difficile.
- On ne sait pas comment choisir le temps d'observation τ .
- On ne peut reconstruire que les éléments de $\mathcal{D}(A)$.

Krstic, Guo et Smyshlyaev 2011,
Guo et Zhao 2011

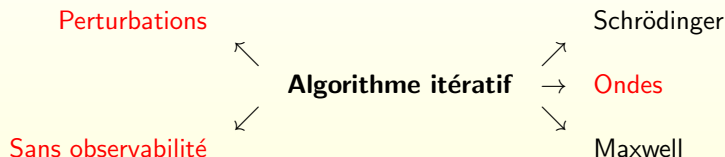
Ces définitions permettent de généraliser le principe de Russell

Proposition (Ramdani *et al.* 2010)

Si (A, C) est estimable dans les sens direct et rétrograde, alors (A, C) est exactement observable en tout temps τ tel que $\alpha = \|\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+\| < 1$.

Dans cet exposé, A sera toujours le générateur d'un groupe, et C sera toujours borné. On a donc équivalence entre l'observabilité exacte et l'estimabilité dans les sens direct et rétrograde.

Travaux réalisés



- *Perturbations* : Linéaires, Non-linéaires
- *Sans observabilité* : Convergence vers la partie observable. Application aux ondes dans \mathbb{R}^3 et simulations
- *Équation des ondes et de Schrödinger* : Analyse numérique (semi-discret, totalement discret) et simulations
- *Équation de Maxwell (en collaboration avec Kim Dang Phung)* : Étude du cadre fonctionnel, avec observation interne et frontière

- 1 Applications à l'équation des ondes
 - Le problème continu
 - Analyse numérique
 - Simulations numériques

- 2 Généralisations
 - Sans observabilité exacte
 - Perturbations linéaires
 - Perturbations non-linéaires

- 3 Conclusion, problèmes ouverts et perspectives

- 1 Applications à l'équation des ondes
 - Le problème continu
 - Analyse numérique
 - Simulations numériques

- 2 Généralisations
 - Sans observabilité exacte
 - Perturbations linéaires
 - Perturbations non-linéaires

- 3 Conclusion, problèmes ouverts et perspectives

Le problème continu

Soient

- H et Y deux espaces de Hilbert,
- $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \rightarrow H$ un opérateur auto-adjoint positif,
- $C_0 \in \mathcal{L}(H, Y)$.

On considère l'équation de type ondes

$$\begin{cases} \ddot{w}(t) + A_0 w(t) = 0, & \forall t \in [0, \infty), \\ w(0) = w_0 \in \mathcal{D}(A_0), \\ \dot{w}(0) = w_1 \in \mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right), \end{cases}$$

que l'on observe au travers de C_0 sur l'intervalle de temps $[0, \tau]$, avec $\tau > 0$

$$y(t) = C_0 \dot{w}(t), \quad \forall t \in (0, \tau).$$

Exemple : $H = Y = L^2(\Omega)$, $A_0 = -\Delta$ sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, avec de "bonnes conditions au bord" et $C_0 = \chi_{\mathcal{O}}$ la troncature à $\mathcal{O} \subset \Omega$.

En posant

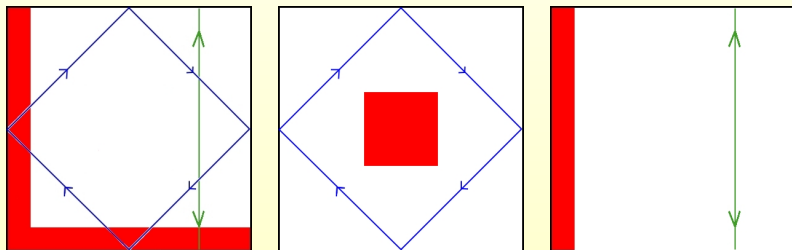
$$z(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix}, \quad X = \mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right) \times H,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A_0) \times \mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$C \in \mathcal{L}(X, Y), \quad C = [0 \quad C_0].$$

Le problème s'écrit au premier ordre, avec $A^* = -A$ et C borné.

Condition d'optique géométrique (Bardos, Lebeau et Rauch 1992)



Sous forme du second ordre, l'algorithme s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{w}_n^+(t) + A_0 w_n^+(t) + \gamma C_0^* \dot{w}_n^+(t) = \gamma C_0^* y(t), \\ w_n^+(0) = w_{n-1}^-(0), \\ w_0^+(0) = 0, \\ \dot{w}_n^+(0) = \dot{w}_{n-1}^-(0), \\ \dot{w}_0^+(0) = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \forall t \in [0, \tau], \\ \forall n \geq 1, \\ \\ \forall n \geq 1, \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{w}_n^-(t) + A_0 w_n^-(t) - \gamma C_0^* \dot{w}_n^-(t) = -\gamma C_0^* y(t), \\ w_n^-(\tau) = w_n^+(\tau), \\ \dot{w}_n^-(\tau) = \dot{w}_n^+(\tau), \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \forall t \in [0, \tau], \\ \forall n \geq 0, \\ \forall n \geq 0. \end{array}$$

Si (A, C) est exactement observable en $\tau > 0$, il existe un $\alpha < 1$ tel que pour tout $N \geq 1$, on ait

$$\|\dot{w}_N^-(0) - w_1\| + \|w_N^-(0) - w_0\|_{\frac{1}{2}} \leq \alpha^N \left(\|w_1\| + \|w_0\|_{\frac{1}{2}} \right).$$

Analyse numérique

QUESTION

Peut-on obtenir une estimation d'erreur pour l'algorithme totalement discrétisé ?

On a besoin de quelques hypothèses de régularité pour répondre

- $w_0 \in \mathcal{D}\left(A_0^{\frac{3}{2}}\right), w_1 \in \mathcal{D}(A_0),$
- $C_0 \in \mathcal{L}\left(\mathcal{D}\left(A_0^{\frac{3}{2}}\right)\right) \cap \mathcal{L}\left(\mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right)\right).$

On prendra par exemple une approximation lisse de la fonction de troncature sur \mathcal{O} dans le cas classique.

Dans la suite

- h sera le paramètre de discrétisation spatiale,
- Δt sera le paramètre de discrétisation temporelle,
- $N_{h,\Delta t}$ sera le nombre (fini) d'itérations.

- **Discrétisation en espace par éléments finis**

$(H_h)_{h>0}$ est une famille de sous-espaces de dimension finie de $\mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right)$ tel qu'il existe $M > 0$, $\theta > 0$ et $h^* > 0$ tels que

$$\|\pi_h \varphi - \varphi\| \leq M h^\theta \|\varphi\|_{\frac{1}{2}}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right), h \in (0, h^*).$$

- **Discrétisation en temps par une méthode d'Euler implicite**

$[0, \tau]$ est coupé en intervalles de taille $\Delta t > 0$: $t_k = k\Delta t$, avec $0 \leq k \leq K$. On approche la première et seconde dérivée en temps à l'instant t_k d'une fonction f par

$$f'(t_k) \simeq \frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{\Delta t},$$

$$f''(t_k) \simeq \frac{f(t_k) - 2f(t_{k-1}) + f(t_{k-2}))}{\Delta t^2}.$$

Théorème

Soit $(w_0, w_1) \in \mathcal{D}\left(A_0^{\frac{3}{2}}\right) \times \mathcal{D}(A_0)$ et notons $(w_{0,h,\Delta t}, w_{1,h,\Delta t})$ la reconstruction numérique de w_0, w_1 .

En prenant $N_{h,\Delta t} = \frac{\ln(h^\theta + \Delta t)}{\ln \alpha}$ itérations, il existe $M_\tau > 0$, $h^* > 0$ et $\Delta t^* > 0$ tels que pour $h \in (0, h^*)$ et $\Delta t \in (0, \Delta t^*)$

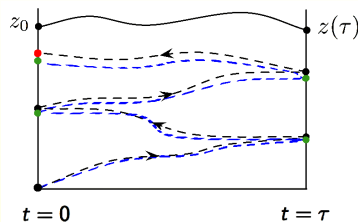
$$\begin{aligned} & \|w_0 - w_{0,h,\Delta t}\|_{\frac{1}{2}} + \|w_1 - w_{1,h,\Delta t}\| \\ & \leq M_\tau \left[(h^\theta + \Delta t) \ln^2(h^\theta + \Delta t) \left(\|w_0\|_{\frac{3}{2}} + \|w_1\|_1 \right) \right. \\ & \quad \left. + |\ln(h^\theta + \Delta t)| \Delta t \sum_{\ell=0}^K \|y(t_\ell) - y_h^\ell\| \right]. \end{aligned}$$

Pour montrer ce théorème, on décompose l'erreur

$$\|w_0 - w_{0,h,\Delta t}\|_{\frac{1}{2}} + \|w_1 - w_{1,h,\Delta t}\|$$

en trois parties, prenant en compte le fait que l'on

- ① stoppe les itérations,
- ② discrétise les observateurs,
- ③ prend des approximations comme données initiales et finales.



3 types d'erreur

Remarque

La décomposition de l'erreur se fait à l'aide de la série de Neumann

$$z_0 = \sum_{n \geq 0} (\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+)^n z^-(0) \rightarrow z_{0,h,\Delta t} = \sum_{n=0}^{N_{h,\Delta t}} \left(\mathbb{T}_{h,\Delta t,K}^- \mathbb{T}_{h,\Delta t,K}^+ \right)^n z_{h,\Delta t}^-(0).$$

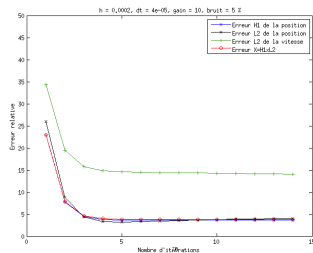
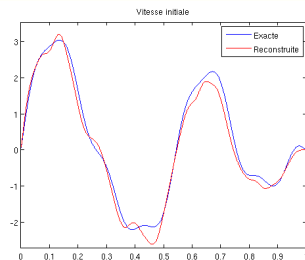
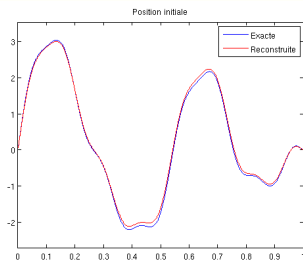
Simulations numériques



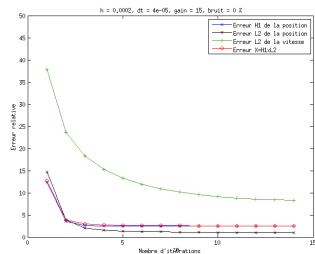
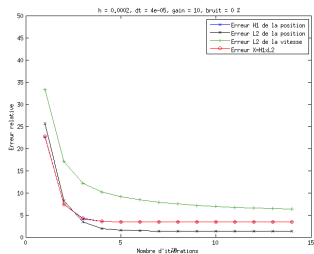
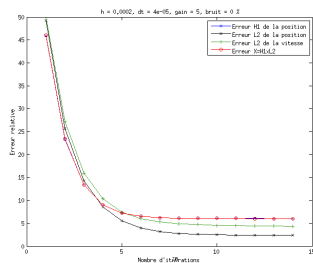
Considérons l'équation de la corde sur $(0, 1)$, avec vitesse constante égale à 1. On observe la vitesse de la corde sur le premier dixième de la corde, pendant $\tau = 2$ secondes.

Après implémentation sous Matlab, nous regardons

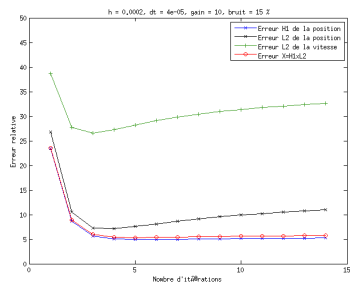
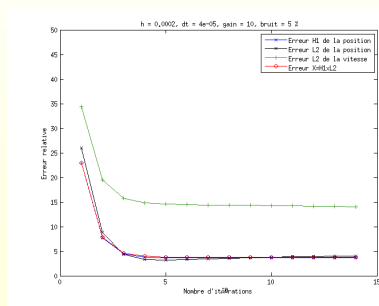
- La qualité de la reconstruction
- L'influence du gain (paramètre γ)
- La robustesse au bruit



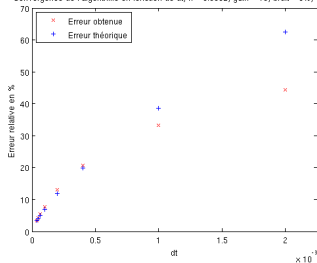
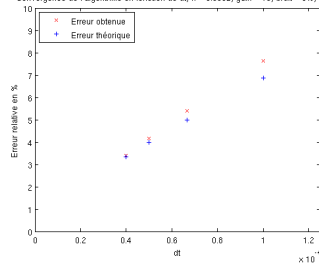
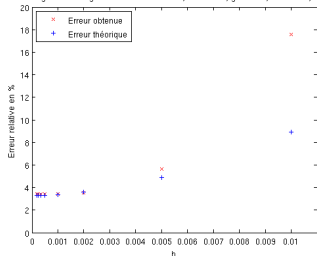
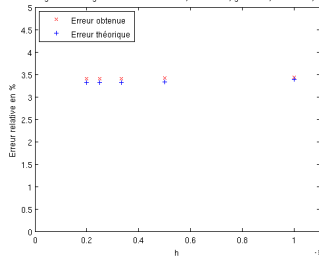
$\gamma = 10$, $h = 2.10^{-4}$, $\Delta t = 4.10^{-5}$ et 5% de bruit.



Modification de l'erreur de reconstruction en fonction du gain, sans bruit.

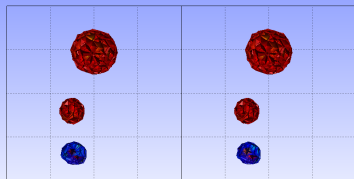
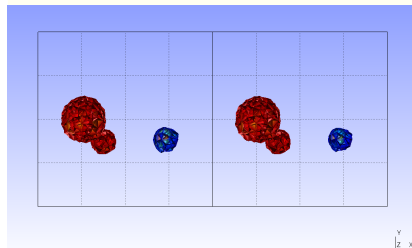
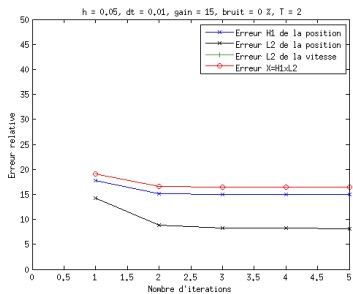


Robustesse de la reconstruction à un bruit composé de sinusoïdes de fréquence différente et d'aléatoire uniforme : 5% et 15%.

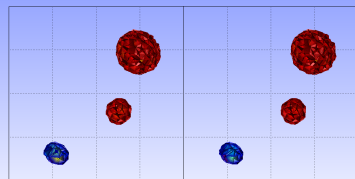
Convergence de l'algorithme en fonction de Δt , $h = 0.0002$, gain = 10, bruit = 0%, $T = 2$ Convergence de l'algorithme en fonction de Δt , $h = 0.0002$, gain = 10, bruit = 0%, $T = 2$ Convergence de l'algorithme en fonction de h, $\Delta t = 4e-05$, gain = 10, bruit = 0%, $T = 2$ Convergence de l'algorithme en fonction de h, $\Delta t = 4e-05$, gain = 10, bruit = 0%, $T = 2$ 

Vérification de l'ordre de convergence en Δt et h .

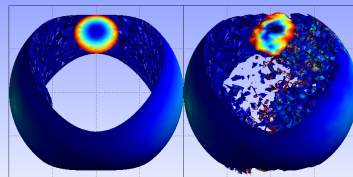
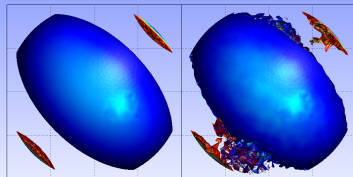
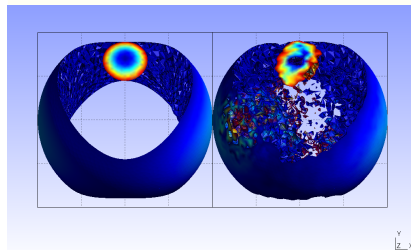
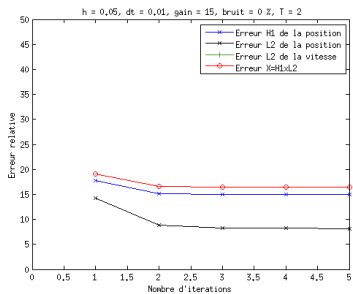
Simulations en 3D



$\begin{matrix} z \\ x \ y \end{matrix}$



$\begin{matrix} z \\ x \ y \end{matrix}$



- 1 Applications à l'équation des ondes
 - Le problème continu
 - Analyse numérique
 - Simulations numériques
- 2 Généralisations
 - Sans observabilité exacte
 - Perturbations linéaires
 - Perturbations non-linéaires
- 3 Conclusion, problèmes ouverts et perspectives

Sans observabilité exacte

MOTIVATION

Dans certains cas pratiques, **l'observabilité exacte du système n'est pas vérifiée**, mais on peut avoir accès à des informations *a priori* sur la donnée à reconstruire (placement, sens de propagation, etc.).

On suppose que $A^* = -A$, $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $\tau > 0$.

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t), & \forall t \geq 0, \\ z(0) = z_0. \end{cases}$$
$$y(t) = Cz(t), \quad \forall t \in (0, \tau).$$

On **ne suppose pas** que (A, C) est exactement observable en temps τ .

Considérons les systèmes direct et rétrograde suivants

$$\begin{cases} \dot{z}_n^+(t) = A^+ z_n^+(t) + \gamma C^* y(t), & \forall t \in (0, \tau), \\ z_1^+(0) = z_0^+, \\ z_n^+(0) = z_{n-1}^-(0), & \forall n \geq 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_n^-(t) = -A^- z_n^-(t) - \gamma C^* y(t), & \forall t \in (0, \tau), \\ z_n^-(\tau) = z_n^+(\tau), & \forall n \geq 1. \end{cases}$$

avec $A^+ = A - \gamma C^* C$ et $A^- = -A - \gamma C^* C$ générateurs respectifs de \mathbb{T}^+ et \mathbb{T}^- .

On montre simplement que

$$z_n^-(0) - z_0 = (\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+)^n (z_0^+ - z_0), \quad \forall n \geq 1.$$

QUESTION

Quel est le comportement de $(\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+)^n (z_0^+ - z_0)$ en fonction de n ?

Rappelons que $\Psi_\tau \in \mathcal{L}(X, L^2([0, \infty), Y))$ est l'opérateur qui associe y à z_0 . On peut le réécrire, en notant \mathbb{S} le groupe unitaire engendré par A

$$y(t) = (\Psi_\tau z_0)(t) = \begin{cases} C\mathbb{S}_t z_0, & \forall t \in [0, \tau], \\ 0, & \forall t > \tau. \end{cases}$$

Proposition

On a la décomposition orthogonale

$$X = \text{Ker } \Psi_\tau \oplus (\text{Ker } \Psi_\tau)^\perp = V_{\text{Nobs}} \oplus V_{\text{Obs}},$$

et cette décomposition est préservée par l'opérateur $\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+$.

De plus, $(\text{Ker } \Psi_\tau)^\perp = \overline{\text{Im } \Psi_\tau^*} = \overline{\text{Im } \Phi_\tau}$, où

$$\Phi_\tau u = \int_0^\tau \mathbb{S}_{\tau-t}^* C^* u(t) dt.$$

Théorème

Notons Π la projection orthogonale de X sur $V_{Obs} = \overline{\text{Im } \Phi_\tau}$.

- 1 Pour tout $z_0, z_0^+ \in X$, on a

$$\|(I - \Pi)(z_n^-(0) - z_0)\| = \|(I - \Pi)(z_0^+ - z_0)\|, \quad \forall n \geq 1.$$

- 2 La suite $(\|\Pi(z_n^-(0) - z_0)\|)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante et vérifie

$$\|\Pi(z_n^-(0) - z_0)\| \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

- 3 De plus, la décroissance est exponentielle, *i.e.* il existe une constante $\alpha \in (0, 1)$, indépendante de z_0 et z_0^+ , telle que

$$\|\Pi(z_n^-(0) - z_0)\| \leq \alpha^n \|\Pi(z_0^+ - z_0)\|, \quad \forall n \geq 1,$$

si et seulement si $\text{Im } \Phi_\tau$ est fermé dans X .

PROBLÈME

Calculer Π n'est pas facile !

Corollaire

Si $z_0^+ \in V_{Obs}$, on a

$$\|z_n^-(0) - \Pi z_0\| \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

De plus, la décroissance est exponentielle si et seulement si $\text{Im } \Phi_\tau$ est fermée dans X .

Application

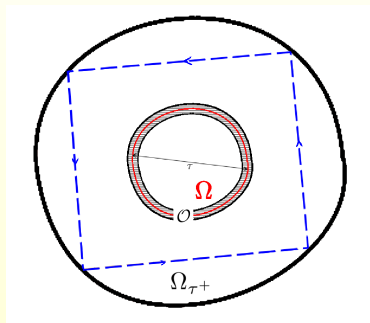
Tomographie Thermo-Acoustique (Gebauer et Scherzer 2008, Kuchment et Kunyansky 2008) :

Les ondes dans \mathbb{R}^3 .

$(w_0, 0)$ est la donnée initiale (à support localisé) de l'équation des ondes (dans \mathbb{R}^3)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x, t) - \Delta w(x, t) = 0, \\ w(x, 0) = w_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} w(x, 0) = 0, \end{cases}$$

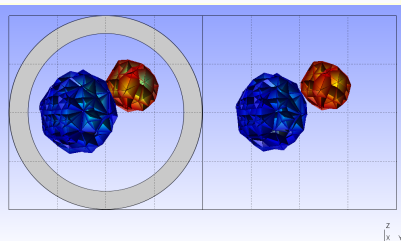
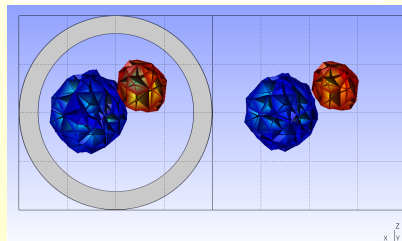
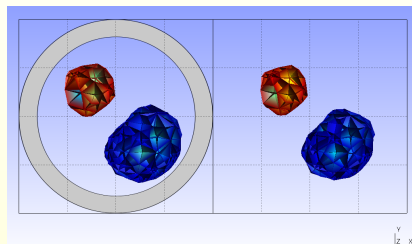
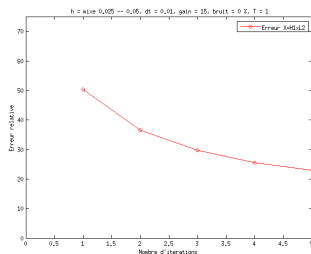
Idée : On se ramène en domaine borné, sans observabilité exacte.



- w_0 a son support dans Ω .
- On observe la vitesse de l'onde sur \mathcal{O} , pendant un intervalle de temps $(0, \tau)$ (τ bien choisi).
- On borne le domaine suffisamment loin : $\Omega_{\tau+}$.

On peut montrer que $(w_0, 0)$ est dans l'espace observable V_{Obs} et utiliser l'algorithme itératif pour reconstruire w_0 .

Logiciels utilisés : **Gmsh** / **GetDP**, discrétisation spatiale par éléments finis et temporel par le schéma de Crank–Nicolson.



Perturbations linéaires

Soit (A, C) un couple

- estimable par (A^+, H^+) ,
- estimable dans le sens rétrograde par (A^-, H^-) .

Soit $P \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur linéaire.

QUESTION

Sous quelles conditions sur P a-t-on $(A + P, C)$

- estimable par $(A^+ + P, H^+)$,
- estimable dans le sens rétrograde par $(A^- - P, H^-)$?

On se place dans le cas simple $A^* = -A$, $C \in \mathcal{L}(X, Y)$, (A, C) est exactement observable en un certain temps $\tau > 0$ et $P \in \mathcal{L}(X)$.

Proposition

Pour tout $\gamma > 0$, si

$$\|P\|_{\mathcal{L}(X)} < -\omega_0(\mathbb{T}^+),$$

où $\omega_0(\mathbb{T}^+)$ le taux de croissance du C_0 -semi-groupe engendré par $A - \gamma C^*C$, alors

- $(A + P, C)$ est estimable par $(A + P - \gamma C^*C, -\gamma C^*)$,
- $(A + P, C)$ est estimable dans le sens rétrograde par $(-A - P - \gamma C^*C, -\gamma C^*)$.

En particulier, $(A + P, C)$ est encore exactement observable en un certain temps $\tau^P > 0$.

Cette Proposition découle d'un Théorème plus général qui autorise des **perturbations non-bornées**.

Remarque

Rappelons que \mathbb{T}^+ vérifie

$$\exists M_\omega \geq 1, \omega > 0, \quad \|\mathbb{T}_t^+\| \leq M_\omega e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

L'estimation du C_0 -semi-groupe perturbé \mathbb{T}^P engendré par $A + P - \gamma C^*C$ vérifie alors

$$\|\mathbb{T}_t^P\| \leq M_\omega e^{(-\omega + M_\omega \|P\|)t}, \quad \forall t \geq 0,$$

et \mathbb{T}^P est exponentiellement stable si $\|P\| < \frac{-\omega_0(\mathbb{T}^+)}{M_\omega}$.

La Proposition précédente permet alors d'améliorer la borne maximale autorisée pour la perturbation P .

Perturbations non-linéaires

Une question naturelle concerne le cas des **perturbations non-linéaires**.
Plus exactement

QUESTIONS

- Peut-on construire un observateur direct/rétrograde ?
- Peut-on utiliser l'observateur direct/rétrograde du cas linéaire auquel on ajoute la perturbation ?
- Peut-on utiliser l'algorithme itératif pour la reconstruction de donnée initiale ?

Baroun et Jacob 2009,
Couchouron et Ligarius 2003

Soient

- A le générateur d'un C_0 -semi-groupe sur X ,
- $N : X \rightarrow X$ un opérateur localement lipschitzien,
- $C \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A), Y)$ tel que (A, C) soit estimable par (A^+, H^+) .

On suppose que les systèmes

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Nz(t), & \forall t \geq 0, \\ z(0) = z_0 \in \mathcal{D}(A), \\ y(t) = Cz(t), & \forall t \in (0, \tau), \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \dot{z}^+(t) = A^+z^+(t) + Nz^+(t) - H^+y(t), & \forall t \geq 0, \\ z^+(0) = z_0^+ \in \mathcal{D}(A^+), \end{cases}$$

sont bien posés et vérifie l'existence de deux constantes M_{z_0}, M_{z_0, z_0^+} telles que

$$\|z(t)\| \leq M_{z_0}, \quad \|z^+(t)\| \leq M_{z_0, z_0^+}, \quad \forall t \geq 0.$$

Théorème (Observateur direct)

Notons \mathbb{T}^+ le C_0 -semi-groupe exponentiellement stable engendré par A^+ et ℓ la constante de Lipschitz de l'opérateur N sur la boule de rayon

$$R = \max \left(M_{z_0}, M_{z_0, z_0^+} \right).$$

Si

$$\ell < \frac{\omega}{M_\omega \sqrt{2}},$$

où ω et M_ω sont les constantes apparaissant dans $\|\mathbb{T}_t^+\| \leq M_\omega e^{-\omega t}$ pour tout $t \geq 0$.

Alors il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\|z^+(t) - z(t)\| \leq M e^{-\alpha t} \|z_0^+ - z_0\|, \quad \forall t \geq 0,$$

avec $\alpha = \frac{\omega^2 - 2\ell^2 M_\omega^2}{2\omega} > 0$.

La démonstration repose sur une généralisation à la dimension infinie d'un résultat de Dalla Mora, Germani et Manes (1997).

- 1 Applications à l'équation des ondes
 - Le problème continu
 - Analyse numérique
 - Simulations numériques
- 2 Généralisations
 - Sans observabilité exacte
 - Perturbations linéaires
 - Perturbations non-linéaires
- 3 Conclusion, problèmes ouverts et perspectives

Conclusion, problèmes ouverts et perspectives

Conclusion

- Intérêt de l'algorithme.
- Utilisation possible sans observabilité exacte.
- Estimations d'erreur.

Problèmes ouverts

- Perturbations non-linéaires.
- Problèmes non-réversibles en temps.
- Méthode de construction des compensateurs H^\pm .

Perspectives

- Sans observabilité exacte avec C non-borné.
- Simulations numériques pour les équations de Maxwell.
- Algorithme avec perturbations aléatoires.

Articles Parus :

- G. HAINE ET K. RAMDANI
Reconstructing initial data using observers : error analysis of the semi-discrete and fully discrete approximations
(NUMERISCHE MATHEMATIK, 2012)
- G. HAINE ET K. RAMDANI
Observateurs itératifs en horizon fini. Application à la reconstruction de données initiales pour des EDP d'évolution
(JOURNAL EUROPÉEN DES SYSTÈMES AUTOMATISÉS, 2012)

Article Soumis :

- G. HAINE
Recovering the initial data of an evolution equation. Application to thermoacoustic tomography
(INVERSE PROBLEMS, 2012)

Merci pour votre attention !