HAL open science

Observateurs en dimension infinie. Application à l'étude de quelques problèmes inverses

Ghislain Haine

▶ To cite this version:

Ghislain Haine. Observateurs en dimension infinie. Application à l'étude de quelques problèmes inverses. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université de Lorraine, 2012. Français. NNT : . tel-01749298v3

HAL Id: tel-01749298

https://theses.hal.science/tel-01749298v3

Submitted on 5 Dec 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Faculté des Sciences et Technologies
Université de Lorraine
École Doctorale IAEM
D.F.D. Mathématiques

Observateurs en dimension infinie. Application à l'étude de quelques problèmes inverses.

THÈSE

présentée pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Lorraine

Spécialité : Mathématiques Appliquées

par

Ghislain Haine

Soutenue publiquement le 22 octobre 2012

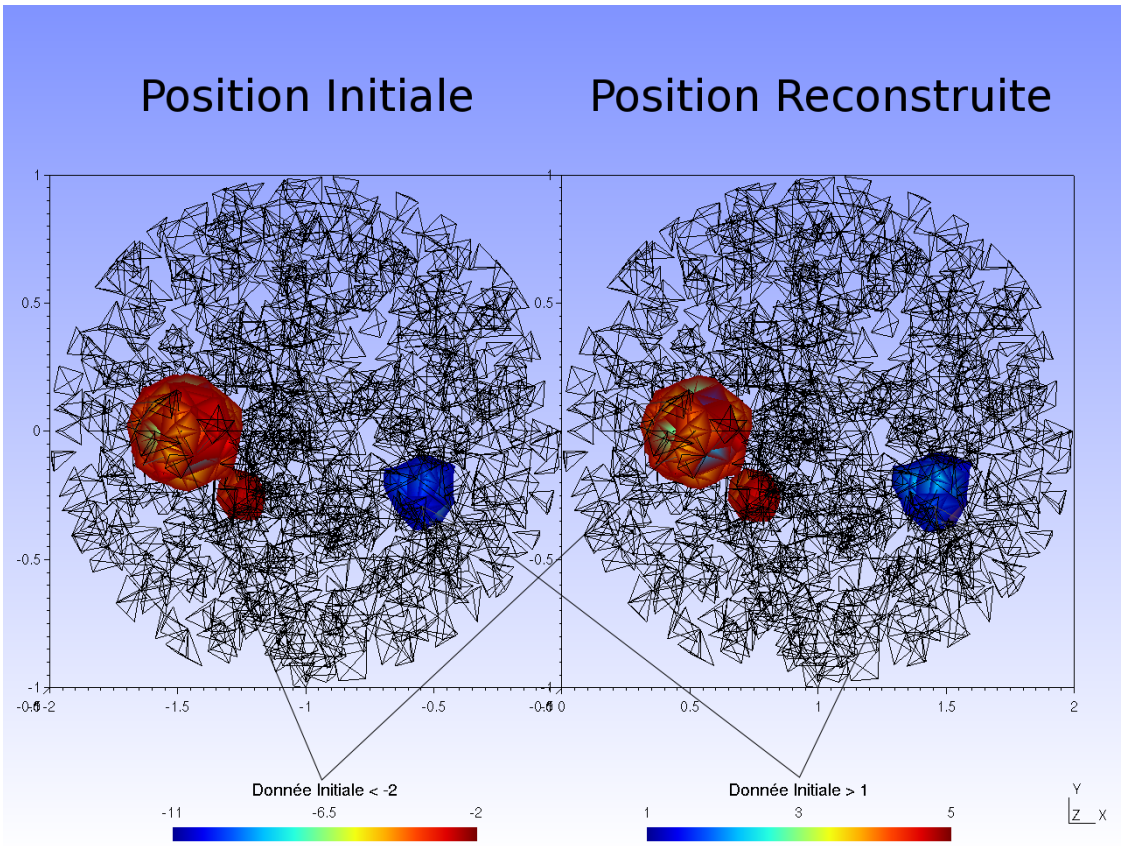
après avis des rapporteurs et devant le jury composé de :

Jacques Blum	Professeur, Université de Nice	*Président*
Patrick Joly	Directeur de Recherche, Inria	*Rapporteur*
Jean-Pierre Raymond	Professeur, Université Paul Sabatier	*Rapporteur*
Assia Benabdallah	Professeur, Université de Provence	*Examinatrice*
Serge Nicaise	Professeur, Université de Valenciennes	*Examinateur*
Emmanuel Trélat	Professeur, Université Pierre et Marie Curie	*Examinateur*
Karim Ramdani	Directeur de Recherche, Inria	*Directeur*
Marius Tucsnak	Professeur, Université de Lorraine	*Directeur*

Institut Élie Cartan Nancy, Laboratoire de Mathématiques, BP 239,
54 506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex

Observateurs en dimension infinie. Application à l'étude de quelques problèmes inverses.

Ghislain Haine



Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu Karim et Marius, pour leur disponibilité et leurs qualités de directeur, tant sur le plan scientifique qu'humain. Je les remercie chaleureusement de m'avoir supporté dans tous les sens admis de ce terme. J'espère qu'ils ont partagé le plaisir que j'ai eu à travailler avec eux durant ces trois années.
Un grand merci à Patrick Joly et Jean-Pierre Raymond d'avoir accepté de rapporter ce travail, à Jacques Blum d'avoir présidé mon jury, ainsi qu'à Assia Benabdallah, Serge Nicaise et Emmanuel Trélat d'en avoir fait partie. J'ai été très touché de l'attention qu'ils ont porté à mes travaux.

Je remercie Christophe Geuzaine pour avoir si rapidement ajouté une fonctionnalité à GetDP qui m'a permis de réaliser mes simulations 3D, sans oublier Ruth Vazquez Sabariego, Axel Modave et Bertrand Thierry pour leur aide précieuse. J'adresse également mes remerciements à Didier Gemmerlé, pour l'aide qu'il m'a apporté pour l'utilisation des machines de calcul du laboratoire.
Merci également à Vincent Mouysset de l'ONERA de Toulouse, qui nous a fait cette remarque si fructueuse et dont les conversations nous ont permis de mieux appréhender notre problème.

Ces remerciements ne pourraient même pas être rédigés sans l'aide inconditionnelle du personnel administratif et technique, qui m'ont sorti de bien des difficultés logistiques ! En particulier, je voudrais remercier Laurence, Hélène, Patricia, Élodie, Nathalie, Sophie, Isabelle, et Didier (encore lui !). Je n'oublie pas non plus les responsables de la bibliothèque, Raymonde et Estelle, toujours très compétentes. Enfin, souvent oubliées, je souhaite remercier les agents d'entretien. Sans elles, nous travaillerions tous dans des bureaux sales aux poubelles débordantes, je remercie en particulier Muriel pour son efficacité et sa gentillesse.

J'ai découvert au laboratoire de mathématiques plus qu'une ambiance de travail motivante, puisque j'y ai aussi rencontré des collègues intéressants et enrichissants au delà du cadre de l'enseignement et de la recherche. Je ne réussirai pas à être exhaustif, je demande par avance pardon à ceux que j'oublierais dans la liste qui va suivre. Je remercie Nicole, Régine, Anne, Alexandre, Koléhè, Jean-Sébastien, Julien, Emmanuel, Renaud, Jean-François, Julie, Xavier, Didier (un autre ;-)), Simon, Aline, Céline, Thomas, Bruno, Séraphin, Olivier,

Vladimir, El Haj, et j'en oublie probablement. À toutes ces personnes, ainsi qu'aux autres, merci pour toutes les discussions sur tous les sujets possibles en salle café !

Parmi les collègues, je n'ai pas cité ceux qui m'étaient les plus proches, ceux qui ont partagé les galères d'inscription, les formations CIES, et le stress des premières présentations : les doctorants. Une liste exhaustive serait encore improbable tant ils sont nombreux à avoir croisé mon chemin en y laissant leur marque. Merci à Julien, Aurélien, Nicu, Christophe, Erica, Romain, Jérôme, Joseph, Yuning, Li, Antoine, Ibrahim, Mohamed, Cyril, Fernando, Julie, Takashi, Michaël, Lucas, Bertrand, Pauline, Arnaud, Paul, Armand, Aurélia, Jérémy, et tous les autres. Je ne pourrai pas finir ce paragraphe sans remercier aussi Corinna, ainsi que tous les doctorants d'info pour les pique-niques du mercredi midi !

Ces trois années ont aussi été pour moi l'occasion de m'impliquer dans les manifestations de diffusion du savoir auprès du grand public. Ces expériences, la fête de la science en tête, ont été parmi les plus agréables à vivre. Je remercie les collègues de la commission de médiation scientifique d'Inria, parmi lesquels je ne citerai que Véronique et Sylvain (par défaut de mémoire). Enfin, je n'oublie pas non plus les deux enseignants passionnés avec qui je participe à MATh.en.JEANS : Stephan et Denis ! Merci aussi à monsieur Blanchard et à madame Trivier, professeurs de physique et de maths au lycée Varoquaux, qui m'ont encouragé dès la seconde.

À toutes ces personnes qui m'ont entouré dans mon cursus académique, s'ajoutent ceux qui m'ont entouré dans ma vie personnelle. Je remercie mes parents, ma sœur, mes tantes et oncles, en particulier Mireille, et mes cousins et cousines, parmi lesquels je nommerai Sandrine, Yannick, Manu et Sébastien, qui sont plus proches d'être des frères et sœurs que des cousins/cousines ! Merci pour tout ! Je ne pourrai pas parler de ma famille sans parler de ceux qui m'ont accepté parmi la leur, et m'ont autorisé à emmener leur fille ! Angèle, Eugène, un immense merci pour votre soutien permanent, vos encouragements, et de m'avoir hébergé durant la première année de cette thèse. Bien entendu, Franck et Arnaud, je ne vous oublie pas non plus !

Que serait-on sans nos amis ? Ces personnes qui n'attendent rien en échange de ce qu'ils donnent, qui croisent notre route, la suivent pendant un moment avec nous puis s'en vont, sans animosité ni colère, juste parce qu'ils avaient un autre chemin à prendre. Merci à vous tous : S(c)hmack, Krok, Alice, Romu, Baba, Bak's, Lorie, Pierre-Éric, Mary, Tof, et tous les autres que j'ai pu croiser, et avec qui j'ai partagé plus qu'un simple bonjour. J'ai une pensée toute particulière pour Momo, qui a eu la mauvaise idée de nous abandonner, six ans jour pour jour avant qu'on m'accorde le titre de Docteur. Il était petit, chiant, partisan du moindre effort, l'esprit de contradiction le plus aiguisé que j'ai jamais rencontré, mais aussi d'une finesse et d'une subtilité impressionnante, toujours présent lorsqu'on en avait besoin, et un dénicheur de groupes de musique underground hors pair, et c'est pour tout ça qu'il

nous manque à tous.

Sur une note plus légère, je remercie Blizzard Entertainment© d'avoir patiemment attendu que je dépose mon manuscrit de thèse avant de sortir Diablo 3, sans quoi mes travaux auraient pu se retrouver réduit de moitié.

Je remercie encore une fois ma mère : Moumoune, merci pour tout, sans exception ! C'est tout ce qu'on a enduré qui m'a fait tel que je suis.

À ma petite sœur, je rappelle qu'il ne faut jamais s'arrêter, et que je serais toujours là pour elle, même à l'autre bout de la France.

Mais surtout je dois remercier Élodie, la femme de ma vie, celle qui a osé me dire oui après huit ans de vie commune, dont une à travailler sur cette thèse. La folie présumée des chercheurs ne semble pas l'avoir dissuadée de m'épouser, c'est probablement la question à laquelle je puis affirmer ne jamais pouvoir répondre, mais cela m'est bien égal.

Une solution qui vous démolit vaut mieux que n'importe quelle incertitude.

Boris Vian (L'herbe Rouge)

Table des matières

Introduction **9**

0 Préliminaires **21**

0.1 Rappels d'analyse fonctionnelle et notations 21

0.2 Reconstruction de données initiales 32

0.2.1 Observateur direct, observateur rétrograde 32

0.2.2 Itérations des observateurs 36

0.3 Application à la reconstruction de source 39

1 Équation de Schrödinger **41**

1.1 Le problème continu 41

1.2 Discrétisation en espace 43

1.2.1 Résultat principal 43

1.2.2 Démonstration 45

1.3 Discrétisation totale 51

1.3.1 Résultat principal 51

1.3.2 Démonstration 53

1.4 Simulations numériques 60

2 Équation des ondes **67**

2.1 Le problème continu 68

2.2 Discrétisation en espace 70

2.2.1 Résultat principal 70

2.2.2 Démonstrations 73

2.3 Discrétisation totale 75

2.3.1 Résultat principal 75

2.3.2 Démonstrations 77

2.4 Simulations numériques 82

2.4.1 Tests en dimension un 82

2.4.2 Tests en dimension deux 91

2.4.3 Un exemple en dimension trois 99

3 Équations de Maxwell **103**
3.1 Préliminaires 104
3.1.1 Espaces fonctionnels 104
3.1.2 Un résultat de stabilisation interne 106
3.1.3 Un résultat de stabilisation frontière 108
3.2 Reconstruction des données initiales 111
3.2.1 Avec observation interne 111
3.2.2 Avec observation frontière 114
3.3 Reconstruction d'un terme source 120
3.3.1 Avec observation interne 121
3.3.2 Avec observation frontière 121

4 Quelques variations autour des observateurs **123**
4.1 Perturbations 124
4.1.1 Perturbations linéaires 125
4.1.2 Perturbations non linéaires 140
4.2 Sans observabilité exacte 161
4.3 Les ondes en domaine non-borné 173
4.3.1 En dimension un 177
4.3.2 En dimension trois 179

Conclusion et perspectives **183**

Table des figures

1 On cherche à reconstruire la donnée initiale ($t = 0$) en rouge, définie sur Ω, à partir de la connaissance du cylindre vert $\mathcal{O} \times [0, \tau]$. 9

2 Observateurs itératifs convergeant vers la donnée initiale z_0 inconnue. 12

1.1 Parties réelle et imaginaire initiales reconstruites, après 15 itérations, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 500$ et 5% de bruit. 61

1.2 Erreur de reconstruction de donnée initiale, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 500$ et 5% de bruit. 61

1.3 Parties réelle et imaginaire initiales très oscillante, après 15 itérations, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 500$ et 5% de bruit. 62

1.4 Erreur de reconstruction de donnée initiale très oscillante, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 500$ et 5% de bruit. 62

1.5 Modification de l'erreur de reconstruction en fonction du gain, sans bruit. . . 63

1.6 Robustesse de la reconstruction à un bruit composé de sinusoïdes de fréquences différentes et d'aléatoire uniforme : 0%, 2%, 5% et 10%. 64

1.7 Robustesse de la reconstruction à un bruit composé de sinusoïdes de fréquence de plus en plus élevées. 65

1.8 Parties réelle et imaginaire initiales, après 15 itérations, avec $\tau = 0,1$, $\tau = 0,2$ puis $\tau = 0,3$, $\gamma = 500$ et sans bruit. 66

2.1 Corde vibrante, dont les extrémités sont fixées, avec observation de la vitesse sur la partie en rouge. 82

2.2 Position et vitesse initiales reconstruites, à la convergence, avec $\tau = 2$, $\gamma = 10$ et 5% de bruit. 83

2.3 Erreur de reconstruction de donnée initiale régulière dans différents espaces d'énergie, avec $\tau = 2$, $\gamma = 10$ et 5% de bruit. 83

2.4 Position et vitesse initiales très oscillantes, à la convergence, avec $\tau = 2$, $\gamma = 10$ et 5% de bruit. 84

2.5 Erreur de reconstruction de donnée initiale régulière mais très oscillante dans différents espaces d'énergie, avec $\tau = 2$, $\gamma = 10$ et 5% de bruit. 84

2.6 Modification de l'erreur de reconstruction en fonction du gain (attention, la première figure n'est pas à la même échelle que les trois autres), sans bruit. . 85
2.7 Robustesse de la reconstruction à un bruit composé de sinusoïdes de fréquence différente et d'aléatoire uniforme : 0%, 5% et 15%. 86
2.8 Robustesse de la reconstruction à un bruit composé d'une sinusoïde de fréquence de plus en plus élevée : $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{50}$ et $\frac{1}{100}$. 87
2.9 Vérification de l'ordre de convergence en Δt. 88
2.10 Vérification de l'ordre de convergence en h. 88
2.11 Influence du temps d'observation, et existence d'un temps minimal. 89
2.12 Erreur de reconstruction de donnée initiale discontinue dans différents espaces d'énergie, avec $\tau = 2$ et 5% de bruit, et zoom sur la convergence L^2 de la position. 90
2.13 Position et vitesse initiales reconstruites, après 14 itérations, avec $\tau = 2$, $\gamma = 10$ et 5% de bruit. 90
2.14 Influence du placement du sous-domaine d'observation sur l'algorithme itératif. Reconstruction avec observation sur un intervalle de $\frac{1}{10}$ de longueur à gauche de la corde, au centre de la corde, puis de $\frac{1}{20}$ de longueur à chaque extrémité de la corde, avec $\tau = 2$, $\gamma = 15$ et sans bruit. 91
2.15 Membrane vibrante, avec observation de la vitesse sur la partie en rouge. . . 92
2.16 Erreur de reconstruction de donnée initiale régulière dans différents espaces d'énergie, avec $\tau = 3$, $\gamma = 20$ et 5% de bruit. 93
2.17 Position et vitesse initiales reconstruites, à la convergence, avec $\tau = 3$, $\gamma = 20$ et 5% de bruit aléatoire. 94
2.18 Modification de l'erreur de reconstruction en fonction du gain, sans bruit. . . 95
2.19 Robustesse de la reconstruction à un bruit aléatoire uniforme : 0%, 5%, 10% et 20% de la mesure (en norme L^2). 96
2.20 Robustesse de la reconstruction à des bruits (à 20%) de fréquence différente : $(k_1, k_2) = (1, 1)$, $(5, 5)$, $(15, 5)$ et $(15, 15)$. 97
2.21 Influence du temps d'observation, et existence d'un temps minimal. 98
2.22 Membrane vibrante, avec observation de la vitesse sur la partie en rouge, et un exemple de rayon piégé en bleu. 98
2.23 Influence de la zone d'observation, et existence de "mauvaises configurations" : cas exactement observable (FIGURE 2.15), puis sans observabilité exacte avec observation à gauche et au centre (FIGURE 2.22). 99
2.24 Erreur de reconstruction de donnée initiale régulière dans différents espaces d'énergie, avec $\tau = 2$, $\gamma = 15$ et sans bruit. 100

2.25 Projections dans les plans XY, YZ et XZ de la position initiale (à gauche) et de la reconstruction (à droite) obtenue après 5 itérations. Nous n'avons affiché que les données de valeur absolue supérieure à 1. L'échelle des couleurs est identique pour la donnée exacte et la donnée reconstruite. 101
2.26 Projections dans les plans XY, YZ et XZ de la vitesse initiale (à gauche) et de la reconstruction (à droite) obtenue après 5 itérations. Nous n'avons affiché que les données de valeur absolue supérieure à 0,4. L'échelle des couleurs est identique pour la donnée exacte et la donnée reconstruite. 102

3.1 Configurations (en deux dimensions) respectant la condition d'optique géométrique **(COG)**. 107
3.2 Configuration (Ω, Γ, τ) respectant la condition d'optique géométrique **(COGF)** : $\Sigma \cup \Gamma = \partial\Omega$ et $\Sigma \cap \Gamma = \emptyset$ (en prenant τ suffisamment grand). 109

4.1 Parties réelle et imaginaire initiales reconstruites de l'équation de Schrödinger avec potentiel, après 15 itérations, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 500$, sans bruit et $M = 25$. 134
4.2 Erreur de reconstruction de donnée initiale pour l'équation de Schrödinger avec potentiel, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 500$, sans bruit et $M = 25$. 135
4.3 Parties réelle et imaginaire initiales reconstruites de l'équation de Schrödinger avec potentiel, après 15 itérations, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 500$, sans bruit et $M = 90$. 135
4.4 Erreur de reconstruction de donnée initiale pour l'équation de Schrödinger avec potentiel, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 500$, sans bruit et $M = 90$. 136
4.5 Parties réelle et imaginaire initiales reconstruites de l'équation de Schrödinger avec potentiel, après 15 itérations, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 500$, sans bruit et $M = 100$. 136
4.6 Erreur de reconstruction de donnée initiale pour l'équation de Schrödinger avec potentiel, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 500$, sans bruit et $M = 100$. 137
4.7 Parties réelle et imaginaire initiales reconstruites de l'équation de Schrödinger avec potentiel, après 15 itérations, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 1000000$, sans bruit et $M = 100$. 137
4.8 Erreur de reconstruction de donnée initiale pour l'équation de Schrödinger avec potentiel, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 1000000$, sans bruit et $M = 100$. 138
4.9 Parties réelle et imaginaire initiales reconstruites de l'équation de Schrödinger avec potentiel répulsif, après 15 itérations, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 250$, sans bruit et $M = 50$. 139
4.10 Erreur de reconstruction de donnée initiale pour l'équation de Schrödinger avec potentiel répulsif, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 250$, sans bruit et $M = 50$. 139
4.11 Parties réelle et imaginaire initiales reconstruites de l'équation de Schrödinger avec potentiel attractif, après 15 itérations, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 250$, sans bruit et $M = 50$. 140

4.12 Erreur de reconstruction de donnée initiale pour l'équation de Schrödinger avec potentiel attractif, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 250$, sans bruit et $M = 50$. 140

4.13 Erreur relative entre le système et son observateur au cours du temps, puis état du système et de l'observateur à l'instant $T = 20$, avec $\gamma = 1$. 154

4.14 Recherche d'un gain optimal en comparant les erreurs à l'instant $T = 20$ ($\gamma = 1, 10, 20, \cdots, 150$). 154

4.15 Erreur relative entre le système et son observateur au cours du temps, puis état du système et de l'observateur à l'instant $T = 20$, avec $\gamma = 90$. 155

4.16 Erreur relative entre le système et son observateur au cours du temps, puis état du système et de l'observateur à l'instant $T = 20$, avec $\gamma = 90$, sans dissipation. 156

4.17 Erreur relative entre le système et son observateur au cours du temps, puis état du système et de l'observateur à l'instant $T = 20$, avec $\gamma = 90$, avec de grandes données initiales. 157

4.18 Erreur relative entre le système et son observateur au cours du temps, puis état du système et de l'observateur à l'instant $T = 20$, avec $\gamma = 90$, avec de grandes données initiales, sans dissipation. 158

4.19 Erreur relative entre le système et son observateur au cours du temps, puis état du système et de l'observateur à l'instant $T = 60$, avec $\gamma = 90$, avec de grandes données initiales, avec dissipation. 159

4.20 Erreur relative entre le système et son observateur au cours du temps, puis état du système et de l'observateur à l'instant $T = 400$, avec $\gamma = 90$, avec de grandes données initiales, sans dissipation. 160

4.21 Coupe dans le plan contenant la plus grande corde de Ω d'un exemple de configuration en trois dimensions vérifiant **(O)**. 174

4.22 Coupe dans le plan contenant la plus grande corde de Ω d'un exemple de configuration en trois dimensions d'espace, vérifiant **(O)**, avec frontière artificielle, sans observabilité exacte. Le rayon bleu est piégé, il ne rencontrera jamais $\mathcal{O}$. 176

4.23 Position et vitesse initiale reconstruites, en domaine non borné, à la convergence, avec $\tau = 1$, $\gamma = 15$, sans bruit. 178

4.24 Erreur de reconstruction de donnée initiale régulière en domaine non borné 1D, dans l'espace d'énergie, avec $\tau = 1$, $\gamma = 15$, sans bruit. 179

4.25 Erreur de reconstruction de donnée initiale régulière en domaine non borné 3D, dans l'espace d'énergie, avec $\tau = 1$, $\gamma = 15$, sans bruit. 180

4.26 Projections dans les plans XY, YZ et XZ de la position initiale (à gauche) et de la reconstruction (à droite) obtenue après 5 itérations. Nous n'avons affiché que les données de valeur absolue supérieure à 1, et une couronne fictive pour situer la zone d'observation utilisée. L'échelle des couleurs est identique pour la donnée exacte et la donnée reconstruite. 181

Introduction

Motivation

Dans un grand nombre d'applications modernes, on est amené à estimer l'état initial (ou final) d'un système infini-dimensionnel (typiquement un système gouverné par une Équation aux Dérivées Partielles (EDP) d'évolution) à partir de la connaissance partielle du système sur un intervalle de temps limité, comme on le schématise sur la FIGURE 1.

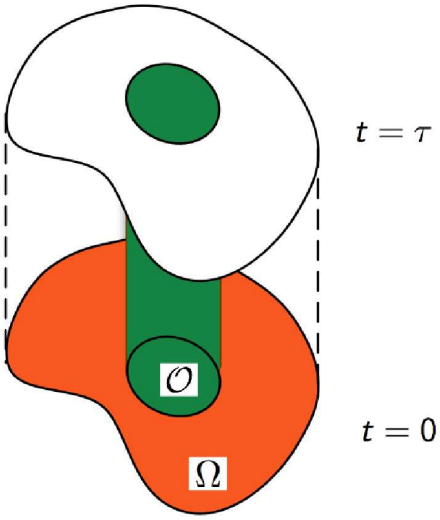


FIGURE 1 – On cherche à reconstruire la donnée initiale ($t = 0$) en rouge, définie sur Ω, à partir de la connaissance du cylindre vert $\mathcal{O} \times [0, \tau]$.

Un champ d'applications dans lequel apparaît fréquemment ce type de problème d'identification est celui de la médecine. Ainsi, la détection de tumeurs par tomographie thermo-acoustique peut se ramener à des problèmes de reconstruction de données initiales [55]. D'autres méthodes nécessitent l'identification d'un terme source, qui, sous certaines hypothèses, peut également se réécrire sous la forme d'un problème de reconstruction de données initiales [2].
Une approche naïve pour identifier la donnée initiale recherchée consiste à inverser un certain opérateur associé au système appelé le Grammien. Une première solution, conduisant aux

méthodes variationnelles en assimilation de données [57, 84, 12, 70, 71, 39, 78], consiste alors à régulariser le problème et à utiliser les techniques issues de l'optimisation. Une seconde approche, initialement développée pour le cas des données bruitées, repose sur l'utilisation des filtres de Kalman [51]. La première solution est souvent très coûteuse numériquement (en raison du nombre élevé d'inconnues et du fait qu'elle requiert le calcul du gradient de la fonctionnelle à minimiser), alors que la seconde concerne essentiellement les systèmes de dimension finie (par exemple ceux obtenus après semi-discrétisation du problème en espace).

On s'intéresse dans cette thèse à la reconstruction de la donnée initiale d'un système d'évolution, en travaillant autant que possible sur le système infini-dimensionnel, à l'aide de l'algorithme développé dans Ramdani, Tucsnak et Weiss [72]. Dans la dernière décennie, de nouveaux algorithmes basés sur la construction de deux systèmes d'évolution, l'un direct, l'autre rétrograde (en tirant partie du retournement temporel [37, 38]), ont vu le jour. Ces deux systèmes ont l'avantage d'être uniquement déterminés par la mesure que l'on a du système initial. En 2005, Auroux et Blum [4, 5, 6] ont proposé le premier de ces algorithmes, nommé "Back and Forth Nudging". Dans leurs travaux, Auroux et Blum justifient mathématiquement l'utilisation de ce type de méthode en dimension finie (avec observation totale). Ils ont également montré numériquement l'efficacité de l'algorithme dans des cas plus généraux (en particulier non-linéaires). Par la suite, Phung et Zhang ont proposé, pour l'équation de Kirchhoff [69], l'algorithme "Time Reversal Focusing", qui a inspiré les travaux de Ramdani, Tucsnak et Weiss. Ces nouvelles méthodes de reconstruction de données initiales s'appuient sur la généralisation infini-dimensionnelle d'un outil bien connu des automaticiens depuis les années soixante : les observateurs de Luenberger [59].

La généralisation du concept d'observateurs à la dimension infinie est apparu il y a une trentaine d'année (voir par exemple [45, 44]), et fait suite aux travaux de la décennie précédente sur la stabilisation des systèmes infini-dimensionnels [79, 80, 85, 30], dans le but d'estimer l'état d'un système à partir d'une observation partielle de celui-ci. Cet outil est depuis souvent utilisé, et constitue toujours un champ de recherche actif, dans les problèmes linéaires [54, 81, 25] ou non-linéaires [1, 15, 13, 14, 41].

Le cas de la dimension finie

En guise d'introduction, nous présentons l'algorithme en dimension finie. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in M_n(\mathbb{C})$. On considère le système dynamique

$$\dot{z}(t) = Az(t), \qquad \forall\, t \geq 0, \tag{1}$$

où $z(t)$ désigne l'état du système et $\dot{z}(t)$ sa dérivée temporelle à l'instant t. On suppose que l'on dispose d'une mesure partielle $y(t)$ obtenue à partir de l'état du système via un opérateur linéaire d'observation $C \in M_{n,m}(\mathbb{C})$, $m \in \mathbb{N}^*$ (éventuellement distinct de n) :

$$y(t) = Cz(t), \qquad \forall\, t \geq 0. \tag{2}$$

Le problème qui nous intéresse ici est de pouvoir reconstruire z_0, la donnée initiale du système (1), à partir de la connaissance de la mesure y. Notons Ψ_τ l'opérateur qui à z_0 associe la mesure $y(t)$ sur $[0, \tau]$. Autrement dit $(\Psi_\tau z_0)(t) = Cz(t) = Ce^{tA}z_0$ pour $t \in [0, \tau]$. Le problème se réduit alors à

$$\Psi_\tau z_0 = y,$$

et reconstruire z_0 à partir de y sera possible si Ψ_τ est injectif (et en particulier borné inférieurement puisque nous sommes en dimension finie). On dit alors que le système est observable. Remarquons qu'en dimension finie, le temps τ n'a pas d'influence sur l'observabilité : un système observable en un certain temps $T > 0$, le sera pour tout $\tau > 0$. Nous verrons par la suite que cette hypothèse d'observabilité se généralise en dimension infinie par l'observabilité exacte, et conduit toujours à des problèmes bien posés.

Le Grammien d'observabilité, que nous avons mentionné plus haut, est donné en fonction de Ψ_τ par $G = \Psi_\tau^* \Psi_\tau$, et la méthode de reconstruction de données initiales s'appuyant sur cet opérateur consiste à l'inverser dans la relation

$$Gz_0 = \int_0^\tau e^{tA^*} C^* C e^{tA} z_0 dt = \Psi_\tau^* y.$$

De nombreuses méthodes ont été élaborées pour calculer G (directement ou approximativement) comme la solution d'une certaine équation de Lyapunov (voir par exemple [65, 62] et leurs références). Nous proposons d'utiliser une alternative à ces méthodes, qui se révèlent souvent trop coûteuses numériquement. Par ailleurs, le système à résoudre est parfois mal conditionné à cause des données "difficilement observables" (voir par exemple [31]).

Nous supposerons dans la majeure partie de ce travail que le problème inverse considéré est bien posé (autrement dit, que G est inversible). Nous allons construire deux autres systèmes d'évolution, l'un direct, l'autre rétrograde, ne faisant appel qu'à y défini par (2). En itérant ces deux systèmes, on espère reconstruire la donnée initiale $z_0 \in \mathbb{C}^n$ de (1), comme on le schématise sur la FIGURE 2.

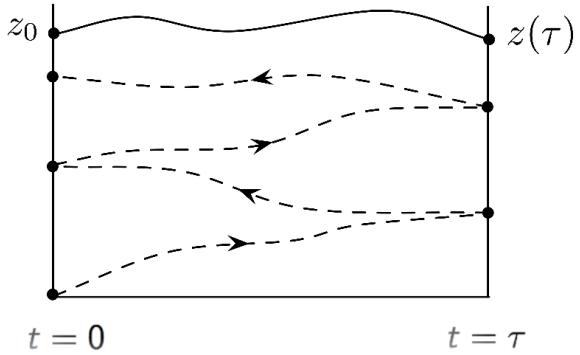


FIGURE 2 – Observateurs itératifs convergeant vers la donnée initiale z_0 inconnue.

On suppose que le système (A, C) est détectable dans les sens direct et rétrograde. Autrement dit, on suppose qu'il existe deux matrices de gain H^+, $H^- \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ telles que $A^+ = A + H^+C$ et $A^- = -A + H^-C$ soient de Hurwitz (c'est-à-dire dont le spectre est situé dans le demi-plan complexe $\operatorname{Re} s < 0$). Nous allons voir que sous cette hypothèse (et en s'assurant que (6) est vérifiée), on peut obtenir un algorithme itératif de reconstruction de z_0. Remarquons que ces hypothèses impliquent en particulier l'observabilité du système par le principe de Russell (voir par exemple la Proposition 0.2.2).

Si l'on note $\omega^+ = \max_{\lambda \in \sigma(A^+)} \operatorname{Re} \lambda < 0$ et $\omega^- = \max_{\lambda \in \sigma(A^-)} \operatorname{Re} \lambda < 0$, et que l'on choisit ω de sorte que $\max\{\omega^+, \omega^-\} < \omega < 0$, alors il existe un $M_\omega > 0$ tel que

$$\begin{cases} \|e^{tA^+} z\| \leq M_\omega e^{\omega t} \|z\|, & \forall\, z \in \mathbb{C}^n, \\ \|e^{tA^-} z\| \leq M_\omega e^{\omega t} \|z\|, & \forall\, z \in \mathbb{C}^n. \end{cases} \tag{3}$$

Considérons alors l'observateur (direct)

$$\begin{cases} \dot{z}^+(t) = A^+ z^+(t) - H^+ y(t), & \forall\, t \in [0, \tau], \\ z^+(0) = z_0^+ \in \mathbb{C}^n, \end{cases} \tag{4}$$

ainsi que l'observateur rétrograde

$$\begin{cases} \dot{z}^-(t) = -A^- z^-(t) + H^- y(t), & \forall\, t \in [0, \tau], \\ z^-(\tau) = z^+(\tau) \in \mathbb{C}^n, \end{cases} \tag{5}$$

où $\tau > 0$ est suffisamment grand pour que

$$\alpha_\omega = M_\omega e^{\omega \tau} < 1. \tag{6}$$

Posons $e^+(t) = z^+(t) - z(t)$, on a alors

$$\begin{aligned}\dot{e}^+(t) &= \dot{z}^+(t) - \dot{z}(t),\\ &= A^+z^+(t) - H^+Cz(t) - Az(t),\\ &= A^+z^+(t) - A^+z(t) = A^+e^+(t),\end{aligned}$$

d'où $e^+(\tau) = e^{\tau A^+}e^+(0)$. Posant $e^-(t) = z^-(t) - z(t)$, on a également $\dot{e}^-(t) = -A^-e^-(t)$, ce qui nous donne $e^-(0) = e^{\tau A^-}e^-(\tau)$. Or $e^+(\tau) = e^-(\tau)$, donc

$$e^-(0) = e^{\tau A^-}e^{\tau A^+}e^+(0),$$

ou encore

$$z^-(0) - z_0 = e^{\tau A^-}e^{\tau A^+}\left(z_0^+ - z_0\right),$$

ce qui implique par (3) que

$$\|z^-(0) - z_0\| \leq \alpha_\omega^2\|z_0^+ - z_0\|. \tag{7}$$

On voit qu'en horizon infini, *i.e.* quand τ tend vers l'infini, $z^-(0)$ constitue une bonne approximation de l'état initial recherché. Si on se place en horizon fini, il suffit d'itérer le processus décrit ci-dessus. Plus précisément, en résolvant de nouveau (4) et (5) mais en posant cette fois-ci $z_0^+ = z_1^-(0)$ (la première estimation de z_0), on obtient une nouvelle estimée de z_0 notée $z_2^-(0)$. Par (7), on obtient

$$\|z_2^-(0) - z_0\| \leq \alpha_\omega^2\|z_1^-(0) - z_0\| \leq \alpha_\omega^4\|z_0^+ - z_0\|.$$

De cette façon, en itérant N fois ce procédé, on obtient par récurrence l'estimation suivante pour la qualité de la reconstruction

$$\|z_N^-(0) - z_0\| \leq \alpha_\omega^{2N}\|z_0^+ - z_0\|,$$

de sorte que, grâce à (6), la différence entre la donnée reconstruite $z_N^-(0)$ et la donnée initiale z_0 tend bien vers zéro exponentiellement quand le nombre d'itérations N tend vers l'infini.

En résumé, l'algorithme de reconstruction consiste à résoudre de manière itérative deux équations d'évolution (à savoir (4) et (5)) ayant un terme de rappel à la mesure et dont seules les conditions initiales ou finales changent. Plus précisément, l'algorithme itératif prend la

forme suivante : pour tout $k \geq 1$

$$\begin{cases} \dot{z}_k^+(t) = A^+ z_k^+(t) - H^+ y(t), & \forall\, t \in [0,\tau], \\ z_k^+(0) = z_{k-1}^-(0), \\ z_0^+(0) = z_0^+, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_k^-(t) = -A^- z_k^-(t) + H^- y(t), & \forall\, t \in [0,\tau], \\ z_k^-(\tau) = z_k^+(\tau). \end{cases}$$

Contenu de la thèse

Les deux aspects qui nous intéressent dans cette thèse sont les suivants :

- **Applications de l'algorithme à quelques équations conservatives, avec analyse numérique et/ou simulations.**
- **Les extensions et autres utilisations possibles de cet algorithme.**

Nous abordons en particulier l'analyse numérique de l'algorithme de reconstruction de données initiales présenté plus haut dans le cadre des équations de Schrödinger et des ondes avec observation interne. Nous étudions les espaces fonctionnels adéquates pour l'utilisation de cet algorithme dans les équations de Maxwell, avec observations interne et frontière. Enfin, nous tentons d'étendre le cadre d'application de cet algorithme lorsque le système initial est perturbé ou que le problème inverse n'est plus bien posé, avec application à la tomographie thermo-acoustique.

Préliminaires

Dans le Chapitre 0, nous rappelons les définitions et résultats d'analyse fonctionnelle qui nous seront nécessaires tout au long de ce manuscrit. Nous poursuivons par le rappel de l'algorithme de reconstruction proposé par Ramdani, Tucsnak et Weiss [72] dans un cadre général, et introduit ci-dessus en dimension finie.

Cette partie se termine par un rappel sur la façon de transformer un problème de reconstruction de source (vérifiant certaines hypothèses) en un problème de reconstruction de donnée initiale, comme cela est fait dans Alves, Silvestre, Takahashi et Tucsnak [2].

Équation de Schrödinger

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné, $d \in \mathbb{N}^*$, de frontière $\partial\Omega$ régulière. On s'intéresse dans le Chapitre 1 à l'équation de Schrödinger sur Ω avec condition de Dirichlet homogène au

bord, qui s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} z(x,t) = -i \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2} z(x,t), & \forall\, x \in \Omega, t \geq 0, \\ z(x,t) = 0, & \forall\, x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ z(x,0) = z_0(x) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

On suppose que l'on observe l'état z, sur un sous-domaine non vide de Ω durant un intervalle de temps $[0, \tau]$, conduisant à l'observabilité exacte du système (voir par exemple [52, 88]).

Après une réécriture sous forme abstraite de cette EDP, nous écrivons l'algorithme de reconstruction de données initiales rappelé au Chapitre 0. L'algorithme itératif permet alors de reconstruire la donnée initiale z_0 dans $L^2(\Omega)$.

Nous donnons ensuite l'analyse numérique de la discrétisation spatiale (de type Galerkin) de l'algorithme de reconstruction, puis l'analyse numérique de sa discrétisation totale (avec un Schéma d'Euler implicite en temps). Ces travaux, parus dans [43], sont rédigés sous forme abstraite, c'est-à-dire en considérant un opérateur auto-adjoint positif A_0 général en lieu et place du Laplacien–Dirichlet $\Delta_{\text{Dir}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ de l'EDP précédente et un opérateur d'observation borné C "suffisamment régulier". Remarquons en particulier que le cas d'une observation frontière n'entre pas dans le cadre de ce Chapitre 1.

Nous concluons par quelques simulations numériques en une dimension d'espace pour illustrer nos résultats. Nous exhibons en particulier la robustesse de l'algorithme au bruit, ainsi que pour la reconstruction de données initiales à haute fréquence.

Équation des ondes

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné, $d \in \mathbb{N}^*$, de frontière $\partial\Omega$ régulière. On s'intéresse dans le Chapitre 2 à l'équation des ondes sur Ω avec condition de Dirichlet homogène au bord, qui s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} w(x,t) - \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2} w(x,t) = 0, & \forall\, x \in \Omega, t \geq 0, \\ w(x,t) = 0, & \forall\, x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ w(x,0) = w_0(x) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \\ \dfrac{\partial}{\partial t} w(x,0) = w_1(x) \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

On suppose que l'on observe la vitesse de l'état $\dfrac{\partial}{\partial t} w$, sur un sous-domaine non vide de Ω durant un intervalle de temps $[0, \tau]$, conduisant à l'observabilité exacte du système (voir par

exemple [8, 58, 88]).

Après avoir réécrit, comme dans le cas de l'équation de Schrödinger, le problème sous forme abstraite, puis sous forme d'équation du premier ordre, nous pouvons définir l'algorithme de reconstruction du Chapitre 0 qui nous permet de reconstruire la donnée initiale (w_0, w_1) dans l'espace d'énergie $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Nous donnons ensuite l'analyse numérique des discrétisations spatiale et totale de l'algorithme. Les méthodes utilisées et les résultats obtenus sont très proches de ceux du Chapitre 1, et sont parus dans [42, 43]. Encore une fois, nous considérons un opérateur auto-adjoint positif A_0 quelconque en lieu et place du Laplacien–Dirichlet et un opérateur d'observation borné C "suffisamment régulier" (ne permettant pas de considérer une observation frontière). Bien que la démarche soit similaire, nous ne pouvons pas appliquer les résultats obtenus au Chapitre 1 pour obtenir ceux du Chapitre 2.

Nous concluons par des simulations numériques pour illustrer nos résultats. Nous commençons par des tests en dimension un, où nous vérifions en particulier l'ordre de convergence obtenu théoriquement. Quelques simulations en deux dimensions d'espace sont ensuite proposées, avant de terminer par un exemple en trois dimensions.

Équations de Maxwell

Les travaux de ce Chapitre 3 sont issus d'une collaboration avec Kim Dang Phung, Maître de Conférence à l'Université d'Orléans.

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^3$, situé localement d'un seul coté de sa frontière $\partial\Omega$ régulière. On note ν la normale extérieure à Ω. On suppose que le domaine Ω est constitué d'un matériau parfaitement conducteur et caractérisé par une permittivité diélectrique ε et une perméabilité magnétique μ, supposés constants. Les champs électrique E et magnétique H vérifient alors les équations de Maxwell

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t} E(x,t) - \operatorname{rot} H(x,t) = 0, & \forall\, x \in \Omega, t \geq 0, \\ \mu \dfrac{\partial}{\partial t} H(x,t) + \operatorname{rot} E(x,t) = 0, & \forall\, x \in \Omega, t \geq 0, \\ \operatorname{div} E(x,t) = 0, & \forall\, x \in \Omega, t \geq 0, \\ \operatorname{div} H(x,t) = 0, & \forall\, x \in \Omega, t \geq 0, \\ E(x,t) \wedge \nu(x) = 0,\ H(x,t) \cdot \nu(x) = 0, & \forall\, x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ E(x,0) = E_0(x), & \forall\, x \in \Omega, \\ H(x,0) = H_0(x), & \forall\, x \in \Omega. \end{cases}$$

Dans ce Chapitre 3, nous nous intéressons à la reconstruction des champs initiaux (E_0, H_0) par l'algorithme itératif du Chapitre 0. La principale difficulté de ces travaux

consiste à déterminer le bon cadre fonctionnel permettant l'utilisation de l'algorithme.

Nous rappellerons dans un premier temps les espaces fonctionnels et notations utilisés (nous utilisons principalement les monographies de Dautray et Lions [29], Cessenat [19] et Monk [61]), puis des résultats de stabilisation interne et frontière des équations de Maxwell. Ce domaine fut très actif à la fin des années quatre-vingt-dix, on peut citer par exemple les travaux de Barucq [10, 11], Nicaise [64, 32] et Phung [66, 67, 68].

De ces résultats de stabilisation, on déduit des opérateurs d'observation permettant la reconstruction des champs initiaux. Dans le cas interne, on observe le champ électrique E sur un sous-domaine non vide de Ω, ce qui conduit à un opérateur d'observation borné. Dans le cas frontière, on observe le courant surfacique induit $\nu \wedge H$ sur une partie de la frontière $\partial\Omega$. Bien entendu, des conditions sur le domaine d'observation seront nécessaires pour obtenir observabilité exacte, et donc convergence de l'algorithme.

Nous verrons ensuite que l'on peut reconstruire certains termes source dans les équations de Maxwell.

Quelques variations autour des observateurs

Nous essayons dans ce Chapitre 4 d'étendre le cadre d'application de l'algorithme de reconstruction de données initiales.

Dans la première Section, nous abordons un problème naturel, concernant la robustesse de l'algorithme vis à vis des perturbations de la dynamique du système étudié. En d'autres termes, si l'on peut reconstruire la donnée initiale z_0 du système

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t), & \forall\, t \geq 0, \\ z(0) = z_0 \in \mathcal{D}(A), & \\ y(t) = Cz(t), & \forall\, t \in [0, \tau], \end{cases}$$

où A est le générateur d'un C_0-semi-groupe et C un opérateur d'observation, peut-on encore reconstruire la donnée initiale z_0 de

$$\begin{cases} \dot{z}_P(t) = (A + P)z_P(t), & \forall\, t \geq 0, \\ z_P(0) = z_0 \in \mathcal{D}(A), & \\ y(t) = Cz_P(t), & \forall\, t \in [0, \tau], \end{cases}$$

où P est un opérateur tel que $A + P$ soit encore le générateur d'un C_0-semi-groupe, en utilisant les mêmes observateurs direct et rétrograde auxquels nous aurions ajouté la perturbation P ?

Nous donnons une réponse positive dans le cas d'un opérateur A anti-adjoint, avec C

borné tel que (A, C) soit exactement observable et d'une perturbation P bornée, suffisamment "petite" (voir la Proposition 4.1.6). En particulier, on en déduit un résultat de robustesse de l'observabilité exacte, par le principe de Russel [75, 76].

Nous illustrons nos résultats par quelques simulations sur l'équation de Schrödinger avec potentiel (indépendant du temps) en une dimension d'espace.

Nous abordons ensuite la question de systèmes semi-linéaires. Cependant, la construction d'un observateur direct dans ce cas se révèle être une tâche difficile (voir [17, 23]). On démontre toutefois un résultat abstrait, en généralisant un Théorème issu de la dimension finie [28], qui dit que si la perturbation est localement Lipschitzienne, et si la donnée initiale est suffisamment petite, alors l'observateur direct du système linéaire, auquel on ajoute la perturbation, constitue un observateur direct du système semi-linéaire. Nous n'avons cependant pas réussi à construire d'observateur rétrograde, et donc *a fortiori*, à adapter l'algorithme itératif dans ce cas. En particulier, nous n'avons pas d'information sur la "taille" de l'estimation de l'état final obtenu, qui est censé initialiser l'observateur rétrograde.

Nous illustrons notre résultat sur une équation des ondes semi-linéaires en une dimension d'espace.

Dans la Section suivante, nous nous intéressons au comportement de l'algorithme itératif en l'absence de l'hypothèse d'observabilité exacte (toujours dans le cas de systèmes conservatifs avec opérateur d'observation borné). En effet, cette hypothèse n'est pas nécessaire pour que les systèmes direct et rétrograde soient bien posés (on ne peut cependant plus les qualifier d'observateur). On démontre dans ce cas, *i.e.* pour un opérateur d'observation C borné et un $\tau > 0$ quelconques, avec les *pseudo*-observateurs suivant

$$\begin{cases} \dot{z}_n^+(t) = (A - \gamma C^* C) z_n(t) + \gamma C^* y(t), & \forall\, t \in [0, \tau], \\ z_1^+(0) = z_0^+ \in X, \\ z_n^+(0) = z_n^-(0), & \forall\, n \geq 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_n^-(t) = (A + \gamma C^* C) z_n(t) - \gamma C^* y(t), & \forall\, t \in [0, \tau], \\ z_n^-(\tau) = z_n^+(\tau), & \forall\, n \geq 1, \end{cases}$$

que l'espace des états s'écrit en somme directe $X = X_1 \oplus X_2$. L'espace X_1 représente alors l'espace des données "non observables", qui n'a aucune influence sur l'algorithme, et X_2 l'espace des "atteignables", ou encore des "observables", que l'algorithme reconstruira. Nous ne sommes pas parvenu cependant, en toute généralité, à caractériser l'ordre de convergence de l'algorithme (exponentiel dans le cas exactement observable). L'argument principal utilisé dans ces travaux est l'invariance des espaces X_1 et X_2 sous l'action d'un certain opérateur, associé au cycle de résolution direct–rétrograde de l'algorithme.

Dans la dernière Section de ce Chapitre 4, nous revenons au problème de la tomographie thermo-acoustique. Le premier obstacle que l'on rencontre pour appliquer la méthode des observateurs à ce problème concerne le caractère non-borné du domaine dans lequel évolue l'onde ultra-sonore. En effet, l'observabilité exacte n'est pas une hypothèse physique raisonnable dans ce cas. Nous supposons que la vitesse initiale est nulle, et l'on souhaite reconstruire la position initiale à partir de la mesure de la vitesse sur un domaine "entourant" son support pendant un intervalle de temps suffisamment grand $[0, \tau]$ (voir par exemple la FIGURE 4.21). Nous bornons artificiellement le domaine à l'aide du principe de Huygens, c'est-à-dire en supposant la condition de Dirichlet homogène suffisamment loin pour que l'onde ne rencontre pas la frontière en temps τ, en particulier il n'y a pas observabilité exacte. Nous montrons cependant que les données initiales que l'on considère (en dimension un et trois) appartiennent à l'espace des "observables" et les résultats de la Section précédente nous permettent de dire que l'on peut reconstruire la position initiale de l'onde à l'aide de l'algorithme.

Nous concluons par deux exemples numériques (en dimension un et en dimension trois) pour illustrer nos propos.

Chapitre 0

Préliminaires

Sommaire

0.1 Rappels d'analyse fonctionnelle et notations **21**

0.2 Reconstruction de données initiales **32**

0.2.1 Observateur direct, observateur rétrograde 32

0.2.2 Itérations des observateurs 36

0.3 Application à la reconstruction de source **39**

Nous présentons dans ce chapitre 0 les principaux outils utilisés dans cette thèse. La première Section est dévolue aux rappels d'analyse fonctionnelle, qui peuvent être omis par les lecteurs familiers avec la théorie des semi-groupes et la théorie du contrôle. La seconde Section rappelle l'algorithme (abstrait) de reconstruction de données initiales proposé dans l'article de Ramdani, Tucsnak et Weiss [72]. Enfin, nous utilisons cet algorithme pour la reconstruction de certains termes sources.

0.1 Rappels d'analyse fonctionnelle et notations

Nous présentons ici les définitions et résultats d'analyse fonctionnelle qui nous seront utiles. Nous n'en donnons pas les démonstrations, elles pourront être lues dans la monographie de Marius Tucsnak et George Weiss [88].

Soit X un espace de Hilbert (complexe) muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa norme associée $\| \cdot \|$. Lorsqu'une confusion est possible, nous indiçons ces notations. L'espace des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert X dans un autre espace de Hilbert Z est noté $\mathcal{L}(X, Z)$, et si $Z = X$, on note $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$. La convergence en norme est indiquée par une flèche $x_n \to x$, alors que la convergence faible est notée $x_n \rightharpoonup x$. Si T est un opéra-

teur linéaire, nous notons $\mathcal{D}(T)$ son domaine, $\operatorname{Im} T$ son image, $\operatorname{Ker} T$ son noyau, $\rho(T)$ son ensemble résolvant et $\sigma(T)$ son spectre. On note T^* l'adjoint d'un opérateur T lorsqu'il est bien défini. L'opérateur identité de X dans X est noté I que nous indiçons I_X s'il peut y avoir confusion. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $\mathbb{C}_\alpha$ le demi-plan droit $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > \alpha\}$. Nous noterons souvent les constantes M, qui pourront différer d'une ligne à l'autre, et seront indicées par les paramètres dont elles dépendent lorsque cela sera utile.

Commençons par rappeler les définitions des outils principaux de cette thèse.

Définition 0.1.1 (C_0-semi-groupe)**.** Un *C_0-semi-groupe* sur X, ou *semi-groupe fortement continu* sur X, est une famille $\mathbb{T} = (\mathbb{T})_{t\geq 0}$ d'opérateurs dans $\mathcal{L}(X)$ tel que

- $\mathbb{T}_0 = I$,
- $\mathbb{T}_{t+\tau} = \mathbb{T}_t\mathbb{T}_\tau$ pour tout $t, \tau \geq 0$ (*Propriété de semi-groupe*),
- $\lim\limits_{t\to 0, t>0} \mathbb{T}_t z = z$ pour tout $z \in X$ (*Continuité forte*).

Définition 0.1.2 (Taux de croissance)**.** Soit $\mathbb{T}$ un C_0-semi-groupe sur X, on appelle *taux de croissance* de $\mathbb{T}$ le réel $\omega_0(\mathbb{T})$ défini par

$$\omega_0(\mathbb{T}) = \inf_{t\in(0,\infty)} \frac{1}{t} \ln \|\mathbb{T}_t\|.$$

Proposition 0.1.1. *Soit $\mathbb{T}$ un C_0-semi-groupe sur X, de taux de croissance $\omega_0(\mathbb{T})$.*

- $\omega_0(\mathbb{T}) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t} \ln \|\mathbb{T}_t\|$,
- *pour tout $\omega > \omega_0(\mathbb{T})$, il existe une constante $M_\omega \in [1, \infty)$ telle que*

$$\|\mathbb{T}_t\| \leq M_\omega e^{\omega t}, \qquad \forall\, t \in [0, \infty), \tag{0.1.1}$$

- *la fonction $\varphi : [0, \infty) \times X \to X$ définie par $\varphi(t, z) = \mathbb{T}_t z$ est continue pour la topologie produit.*

De cette proposition, nous déduisons un critère de stabilité que nous utilisons comme définition.

Définition 0.1.3 (Stabilité exponentielle)**.** Un C_0-semi-groupe $\mathbb{T}$ sur X est *exponentiellement stable* si $\omega_0(\mathbb{T}) < 0$.

Définition 0.1.4 (Générateur infinitésimal)**.** Soit $\mathbb{T}$ un C_0-semi-groupe sur X, l'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \to X$ défini par

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ z \in X \mid \lim_{t\to 0, t>0} \frac{\mathbb{T}_t z - z}{t} \text{ existe.} \right\},$$

$$Az = \lim_{t\to 0, t>0} \frac{\mathbb{T}_t z - z}{t}, \qquad \forall\, z \in \mathcal{D}(A),$$

est appelé le *générateur infinitésimal*, ou plus simplement *générateur*, du C_0-semi-groupe $\mathbb{T}$.

Proposition 0.1.2. *Soit $\mathbb{T}$ un C_0-semi-groupe sur X, de générateur A. Alors $\mathbb{C}_{\omega_0(\mathbb{T})} \subset \rho(A)$, en particulier $\rho(A) \neq \emptyset$. De plus, pour tout $s \in \mathbb{C}_{\omega_0(\mathbb{T})}$, on a*

$$(sI - A)^{-1}z = \int_0^\infty e^{-st}\mathbb{T}_t z dt, \qquad \forall\, z \in X. \tag{0.1.2}$$

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante sur l'ensemble résolvant de A (caractérisation fréquentielle) pour qu'il soit générateur.

Théorème 0.1.3 (Hille-Yosida)**.** *Un opérateur A densément défini sur X est le générateur d'un C_0-semi-groupe $\mathbb{T}$ sur X vérifiant la relation (0.1.1) si et seulement si $\mathbb{C}_\omega \subset \rho(A)$ et pour tout $s \in \mathbb{C}_\omega$*

$$\|(sI - A)^{-n}\| \leq \frac{M_\omega}{(\operatorname{Re} s - \omega)^n}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{0.1.3}$$

On a également une caractérisation fréquentielle de la stabilité exponentielle.

Théorème 0.1.4 (Gearhart-Huang-Prüss)**.** *Soit $\mathbb{T}$ un C_0-semi-groupe sur X, de générateur A. Il y a équivalence entre les affirmations suivantes.*

- *$\mathbb{T}$ est exponentiellement stable.*
- *$\mathbb{C}_0 \subset \rho(A)$ et $\sup_{s \in i\mathbb{R}}\{\|(sI - A)^{-1}\|\} < \infty$.*

Proposition 0.1.5. *Soit $\mathbb{T}$ un C_0-semi-groupe sur X, de générateur A. Alors $\mathcal{D}(A)$ est dense dans X, et pour tout $z \in \mathcal{D}(A)$ et $t \geq 0$, on a $\mathbb{T}_t z \in \mathcal{D}(A)$ et*

$$\frac{d}{dt}\mathbb{T}_t z = A\mathbb{T}_t z = \mathbb{T}_t A z.$$

Proposition 0.1.6. *Soit $A : \mathcal{D}(A) \to X$ et $\beta \in \rho(A)$. On note X_1 l'ensemble $\mathcal{D}(A)$ muni de la norme du graphe, et X_{-1} la complétion de l'espace X par la norme*

$$\|z\|_{-1} = \|(\beta I - A)^{-1}z\|_X, \qquad \forall\, z \in X,$$

que l'on muni de cette norme. Alors X_1 et X_{-1} sont encore des espaces de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X_1, X)$ et admet une unique extension à $\mathcal{L}(X, X_{-1})$. De plus

$$(\beta I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X, X_1), \qquad (\beta I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X_{-1}, X),$$

et ces opérateurs sont unitaires.

Cette proposition nous permet de montrer que la restriction de $\mathbb{T}$ à X_1 est encore un C_0-semi-groupe, qui est l'image de $\mathbb{T}$ par $(\beta I - A)^{-1}$, de générateur la restriction de A à $\mathcal{D}(A^2)$. De la même façon, l'image de $\mathbb{T}$ par $(\beta I - A)$ forme encore un semi-groupe sur X_{-1}

de générateur l'extension de A à X. L'itération de ces procédés de restriction et d'extension conduit à une suite infinie d'espaces de Hilbert

$$\cdots \subset X_2 \subset X_1 \subset X \subset X_{-1} \subset X_{-2} \subset \cdots, \tag{0.1.4}$$

toutes les inclusions étant denses et continues. On peut également démontrer que, lorsque ces objets ont un sens, on a $\mathcal{D}(A^\alpha) \subset \mathcal{D}(A^\beta)$ pour tout $\alpha \geq \beta$, avec injections denses et continues.

Si V et H sont deux espaces de Hilbert avec inclusion dense et continue $V \subset H$, on rappelle la chaîne d'inclusion $V \subset H \subset V'$, où V' est l'espace dual de V par rapport à l'espace pivot H. En particulier, on a

$$\langle z, \varphi \rangle_{V',V} = \langle z, \varphi \rangle_H, \qquad \forall\, z \in H, \varphi \in V. \tag{0.1.5}$$

On peut alors montrer que les espaces X_{K-k} sont les duaux des X_{K+k} par rapport à l'espace pivot X_K, pour tout $K \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}$.

Théorème 0.1.7 (Théorème 4.1.6. de [88])**.** *Soient $\mathbb{T}$ un C_0-semi-groupe sur X, de générateur A, $f \in H^1_{\ell oc}((0,\infty), X_{-1})$ et $z_0 \in X$. Alors l'équation différentielle*

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + f(t), & \forall\, t \geq 0, \\ z(0) = z_0, \end{cases}$$

possède une unique solution forte donnée par la formule de Duhamel

$$z(t) = \mathbb{T}_t z_0 + \int_0^t \mathbb{T}_{t-s} f(s) ds. \tag{0.1.6}$$

De plus, on a $z \in C([0,\infty), X) \cap C^1([0,\infty), X_{-1})$.

Remarque 0.1.1. En utilisant la Proposition 0.1.6 (par l'intermédiaire de la chaîne d'inclusion (0.1.4)), le Théorème précédent peut s'écrire en prenant n'importe quel X_k ($k \in \mathbb{Z}$), avec $f \in H^1_{\ell oc}((0,\infty), X_{k-1})$. Dans ce cas, la solution unique vérifie

$$z \in C([0,\infty), X_k) \cap C^1([0,\infty), X_{k-1}). \tag{0.1.7}$$

Les définitions et résultats qui suivent sont des cas particuliers importants de générateurs et C_0-semi-groupes.

Définition 0.1.5 (C_0-Semi-groupe de contraction)**.** On dit d'un C_0-semi-groupe qu'il est *de contraction* si $\|\mathbb{T}_t\| \leq 1$ pour tout $t \geq 0$.

Définition 0.1.6 (Opérateur m-dissipatif)**.** Un opérateur A est dit *dissipatif* si

$$\mathrm{Re}\,\langle Az, z\rangle \leq 0, \qquad \forall\, z \in \mathcal{D}(A).$$

Il est dit *m-dissipatif*, s'il existe un $s \in \mathbb{C}_0$ tel que $\mathrm{Im}\,(sI - A) = X$.

Proposition 0.1.8. *Un opérateur A est m-dissipatif si et seulement si A^* est m-dissipatif.*

Définition 0.1.7 (Opérateur positif)**.** Un opérateur A est dit *positif* si

$$\langle Az, z\rangle \geq 0, \qquad \forall\, z \in \mathcal{D}(A).$$

Il est dit *défini positif*, s'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\langle Az, z\rangle \geq M\|z\|^2, \qquad \forall\, z \in \mathcal{D}(A).$$

Proposition 0.1.9. *Soit A est un opérateur positif, alors $-A$ est m-dissipatif.*

Théorème 0.1.10 (Lumer-Phillips)**.** *Soit $\mathbb{T}$ un C_0-semi-groupe sur X, de générateur A. Alors les deux affirmations suivantes sont équivalentes.*

- *$\mathbb{T}$ est un C_0-semi-groupe de contraction.*
- *A est m-dissipatif.*

Définition 0.1.8 (Opérateur anti-adjoint)**.** Un opérateur A est dit *anti-symétrique* si

$$\langle Az_1, z_2\rangle = -\langle z_1, Az_2\rangle, \qquad \forall\, z_1, z_2 \in \mathcal{D}(A).$$

Il est dit *anti-adjoint*, si $A^* = -A$ (c'est-à-dire s'il est anti-symétrique et si $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A)$).

Proposition 0.1.11. *Les deux affirmations suivantes sont équivalentes.*

- *A est anti-adjoint.*
- *A et $-A$ sont m-dissipatifs.*

On appelle *C_0-groupe* un C_0-semi-groupe inversible. On montre facilement que dans ce cas $\mathbb{T}_t^{-1} = \mathbb{T}_{-t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On dit que le C_0-groupe est *unitaire*, si de plus $\|\mathbb{T}_t\| = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Un système dont la solution est donnée par un groupe unitaire est dit *conservatif*.

Théorème 0.1.12 (Stone)**.** *Soit $A : \mathcal{D}(A) \to X$, alors il y a équivalence entre les affirmations suivantes.*

- *A est le générateur d'un C_0-groupe unitaire sur X.*
- *A est anti-adjoint.*

Nous noterons $\mathbb{S}$ les C_0-groupes unitaires dans la suite.

Nous introduisons maintenant deux classes particulières d'opérateurs : les opérateurs de contrôle et d'observation admissibles. Il s'agit d'une forme de régularité des opérateurs non-bornés, par rapport aux trajectoires d'un C_0-semi-groupe.
On note $\mathbb{T}$ un C_0-semi-groupe sur X (appelé *espace des états*), de générateur A.

Soit $B \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$, où U est un autre espace de Hilbert (appelé *espace des entrées*). On considère le système

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), & \forall \ \in [0, \tau], \\ z(0) = z_0 \in X, \end{cases}$$

où $u \in L^2_{\ell oc}([0, \infty), U)$.
B est appelé *opérateur de contrôle*, puisqu'il permet de contrôler l'état z du système sur l'intervalle de temps $[0, \tau]$ *via* la fonction $u(t)$.

On définit l'*opérateur entrée–état* $\Phi_\tau \in \mathcal{L}(L^2([0, \infty), U), X_{-1})$ par

$$\Phi_\tau u = \int_0^\tau \mathbb{T}_{\tau - t} Bu(t) dt. \tag{0.1.8}$$

Définition 0.1.9 (Opérateur de contrôle admissible)**.** Soient $\mathbb{T}$ un C_0-semi-groupe sur X, de générateur A, et $B \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$. On dit que B est un opérateur de contrôle *admissible pour* $\mathbb{T}$, si $\operatorname{Im} \Phi_\tau \subset X$ pour un certain τ (donc pour tout $\tau > 0$).

Clairement, tout opérateur borné, *i.e.* dans $\mathcal{L}(U, X)$, est un opérateur de contrôle admissible, pour n'importe quel C_0-semi-groupe.

Soit $C \in \mathcal{L}(X_1, Y)$, où Y est un autre espace de Hilbert (appelé *espace des sorties*). On considère le système

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t), & \forall \, t \geq 0, \\ z(0) = z_0 \in \mathcal{D}(A), & \\ y(t) = Cz(t), & \forall \, t \in [0, \tau]. \end{cases}$$

C est appelé *opérateur d'observation*, puisqu'il permet d'observer l'état z du système sur l'intervalle de temps $[0, \tau]$ *via* la sortie y.

Par le Théorème 0.1.7, on sait que $z(t) = \mathbb{T}_t z_0$. On introduit alors l'*opérateur état–sortie* Ψ_τ défini par

$$(\Psi_\tau z_0)(t) = \begin{cases} C\mathbb{T}_\tau z_0, & \forall \, t \in [0, \tau], \\ 0, & \forall \, t > \tau. \end{cases} \tag{0.1.9}$$

Il est clair que $\Psi_\tau \in \mathcal{L}(X_1, L^2([0, \infty), Y))$.

Définition 0.1.10 (Opérateur d'observation admissible)**.** Soient $\mathbb{T}$ un C_0-semi-groupe sur X, de générateur A, et $C \in \mathcal{L}(X_1, Y)$. On dit que C est un opérateur d'observation *admissible pour* $\mathbb{T}$, si l'opérateur état–sortie Ψ_τ admet un prolongement continu à X pour un certain τ (donc pour tout $\tau > 0$).

Remarquons que cette définition revient à dire qu'il existe un $\tau > 0$ et une constante $M_\tau > 0$ telle que

$$\int_0^\tau \|C\mathbb{T}_t z_0\|_Y^2 dt \leq M_\tau \|z_0\|_X^2, \qquad \forall\, z_0 \in \mathcal{D}(A). \tag{0.1.10}$$

Il est donc clair que tout opérateur d'observation borné, *i.e.* dans $\mathcal{L}(X, Y)$, est admissible pour n'importe quel C_0-semi-groupe.

Le théorème suivant caractérise la dualité qui existe entre observation et contrôle. Nous raisonnerons souvent dans le cadre de l'observation, et ce théorème nous permettra alors d'utiliser les résultats issus de la théorie du contrôle.

Théorème 0.1.13. *Soit $B \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$. B est un opérateur de contrôle admissible pour $\mathbb{T}$ si et seulement si B^* est un opérateur d'observation admissible pour $\mathbb{T}^*$.*

Théorème 0.1.14. *Soient $\mathbb{T}$ un C_0-semi-groupe sur X, de générateur A, de taux de croissance $\omega_0(\mathbb{T})$, et C un opérateur d'observation admissible pour $\mathbb{T}$ en temps infini, autrement dit, vérifiant l'existence d'une constante $M > 0$ telle que*

$$\int_0^\infty \|C\mathbb{T}_t z_0\|_Y^2 dt \leq M \|z_0\|_X^2, \qquad \forall\, z_0 \in \mathcal{D}(A).$$

On note $\Psi = \Psi_\infty$ l'opérateur état–sortie étendu*, qui est bien défini par l'inégalité précédente. Pour tout $z_0 \in X$ et tout $s \in \mathbb{C}_{\omega_0(\mathbb{T})}$, la transformée de de Laplace de Ψz_0, notée $\widehat{\Psi z_0}$, existe en s et est donnée par*

$$\widehat{\Psi z_0}(s) = C(sI - A)^{-1} z_0.$$

De plus, pour tout $\alpha > \omega_0(\mathbb{T})$, il existe un $M_\alpha \geq 0$ tel que

$$\|C(sI - A)^{-1}\| \leq \frac{M_\alpha}{\sqrt{\operatorname{Re} s - \alpha}}, \qquad \forall\, s \in \mathbb{C}_\alpha.$$

Nous donnons maintenant une définition primordiale dans ces travaux, qui nous servira souvent à montrer que les opérateurs d'observation que l'on considère sont pertinents, en un certain sens.

Définition 0.1.11 (Observabilité exacte)**.** Soient $\mathbb{T}$ un C_0-semi-groupe sur X, de générateur A, et $C \in \mathcal{L}(X_1, Y)$ un opérateur d'observation. On dit du couple (A, C) qu'il est *exactement observable en temps τ* si l'opérateur état–sortie Ψ_τ est borné inférieurement, *i.e.* il existe

une constante $k_\tau > 0$ tel que

$$\|\Psi_\tau z_0\|_{L^2([0,\tau],Y)} \geq k_\tau \|z_0\|_X, \qquad \forall\, z_0 \in \mathcal{D}(A).$$

On dit que (A, C) est *exactement observable* s'il existe un $\tau > 0$ vérifiant cette propriété.

Remarque 0.1.2. En particulier, l'observabilité exacte est équivalente à l'existence d'une constante $m_\tau (= k_\tau^2) > 0$ telle que

$$\int_0^\tau \|C\mathbb{T}_t z_0\|_Y^2 dt \geq m_\tau \|z_0\|_X^2, \qquad \forall\, z_0 \in \mathcal{D}(A). \tag{0.1.11}$$

Remarquons que si (A, C) est exactement observable en temps τ, alors il l'est en temps $t \geq \tau$.
Bien qu'il ne soit pas nécessaire de supposer l'admissibilité de l'opérateur d'observation pour définir l'observabilité exacte, nous ne considèrerons pas d'exemple d'opérateur d'observation non-admissible dans la suite. Nous supposerons donc toujours que l'opérateur d'observation considéré est admissible.

Définition 0.1.12 (Contrôlabilité exacte)**.** Soient $\mathbb{T}$ un C_0-semi-groupe sur X, de générateur A, et $B \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$ un opérateur de contrôle. On dit du couple (A, B) qu'il est *exactement contrôlable en temps* τ si $\operatorname{Im} \Phi_\tau = X$. Autrement dit si pour tout $z_0, z_1 \in X$, il existe un contrôle $u \in L^2([0, \tau], U)$ tel que la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), & \forall\ \in [0, \tau], \\ z(0) = z_0 \in X, \end{cases}$$

vérifie $z(\tau) = z_1$. On dit que (A, B) est *exactement contrôlable* s'il existe un $\tau > 0$ vérifiant cette propriété.

Comme nous l'avons déjà dit, l'observabilité et la contrôlabilité sont duales. Plus précisément, on a la proposition suivante.

Proposition 0.1.15. *Soient $\mathbb{T}$ un C_0-semi-groupe sur X, de générateur A, et $B \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$ un opérateur de contrôle admissible pour $\mathbb{T}$. Alors (A, B) est exactement contrôlable en temps τ si et seulement si (A^*, B^*) est exactement observable en temps τ.*

Définition 0.1.13 (Stabilisabilité)**.** Soient $\mathbb{T}$ un C_0-semi-groupe sur X, de générateur A, et $B \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$ un opérateur de contrôle admissible pour $\mathbb{T}$. On dit du couple (A, B) qu'il est *exponentiellement stabilisable* s'il existe un opérateur $K \in \mathcal{L}(X_1, U)$ tel que $A + BK$ soit le générateur d'un C_0-semi-groupe exponentiellement stable sur X.

Nous concluons ces rappels sur l'observabilité par deux résultats très importants dans les problèmes qui seront traités par la suite. Ils expliquent, comme annoncé ci-dessus, pourquoi

l'on s'intéresse à l'hypothèse d'observabilité exacte. L'un de ces résultats est dû à Liu [58]. Il donne une suite d'équivalence à l'observabilité exacte dans le cas d'un générateur anti-adjoint avec opérateur d'observation borné. L'autre, de Urquiza [89] (donnée ici sous une forme duale), généralise un résultat de Slemrod [80] (utilisé dans l'une des équivalences du théorème de Liu).

Théorème 0.1.16 (Liu [58]). *Soient $A^* = -A$ et $C \in \mathcal{L}(X, Y)$. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes.*

- *(A, C^*) est exponentiellement stabilisable avec un taux de décroissance exponentielle préfixé.*
- *(A, C^*) est exponentiellement stabilisable.*
- *Pour tout opérateur $S \in \mathcal{L}(Y)$ auto-adjoint défini positif, $A - C^*SC$ est le générateur d'un C_0-semi-groupe exponentiellement stable sur X.*
- *(A, C^*) est exactement contrôlable.*
- *(A, C) est exactement observable.*
- *On a la caractérisation fréquentielle*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(A - C^*C), \qquad \sup_{s \in i\mathbb{R}} \{\|(sI - A + C^*C)^{-1}\|\} < \infty.$$

Théorème 0.1.17 (Urquiza [89]). *Soient A le générateur d'un C_0-groupe $\mathbb{T}$ sur X, et $C \in \mathcal{L}(X_1, Y)$ un opérateur d'observation admissible pour $\mathbb{T}^{-1}$. Si $(-A, C)$ est exactement observable, alors il existe un opérateur $S \in \mathcal{L}(X)$ auto-adjoint défini positif tel que $A - S^{-1}C^*C$, défini sur $\mathcal{D}(A - S^{-1}C^*C) = S\mathcal{D}(A^*)$, soit le générateur d'un C_0-semi-groupe $\mathbb{T}^+$ exponentiellement stable avec un taux de décroissance exponentielle préfixé.*

Remarque 0.1.3 (sur la preuve). L'opérateur S est donné explicitement par une modification du *grammien*, plus précisément

$$\langle Sx, z\rangle_X = \int_0^\infty e^{-2\omega t} \langle C\mathbb{T}_{-t}x, C\mathbb{T}_{-t}z\rangle_Y dt, \qquad \forall\, x, z \in X_1.$$

Il est clair que cet opérateur est auto-adjoint et défini positif (voir Définition 0.1.7), sa positivité venant de l'hypothèse d'observabilité exacte sur $(-A, C)$, qui est donc essentielle puisqu'elle permet l'inversion. De plus, on a la valeur exacte de la modification du taux de croissance avec un tel S : $\omega_0(\mathbb{T}^+) = \omega_0(\mathbb{T}^{-1}) - 2\omega$.

On ajoute à ces résultats classiques deux lemmes faciles à démontrer qui nous serviront régulièrement dans les Chapitres 1 et 2.

Lemme 0.1.18. *Soient $A : \mathcal{D}(A) \to X$ un opérateur anti-adjoint et $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ tel que $C^*C \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A))$. Si $A - C^*C$ engendre un C_0-semi-groupe de contraction sur X, alors $A - C^*C$ engendre encore un C_0-semi-groupe de contraction sur $\mathcal{D}(A)$ et $\mathcal{D}(A^2)$.*

Démonstration. Puisque $C \in \mathcal{L}(X,Y)$ est borné, on a clairement $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A - C^*C)$. De plus, de $C^*C \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A))$, on déduit que $\mathcal{D}(A^2) = \mathcal{D}\left((A - C^*C)^2\right)$. Le reste provient de la Proposition 0.1.6. ■

Lemme 0.1.19. *Soient $A : \mathcal{D}(A) \to X$ un opérateur anti-adjoint et $C \in \mathcal{L}(X,Y)$ tel que $C^*C \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A))$. Si $z_0 \in \mathcal{D}(A^2)$, $F \in C([0,\tau], \mathcal{D}(A^2)) \cap C^1([0,\tau], \mathcal{D}(A))$ et z est la solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) - C^*Cz(t) + F(t), & \forall\, t \in [0,\tau], \\ z(0) = z_0. \end{cases}$$

Alors, les affirmations suivantes sont vérifiées.

1. *Régularité*

$$z \in C\left([0,\tau], \mathcal{D}(A^2)\right) \cap C^1([0,\tau], \mathcal{D}(A)) \cap C^2([0,\tau], X), \tag{0.1.12}$$

2. *z est borné*

$$\|z(t)\|_\alpha \leq \|z_0\|_\alpha + t\|F\|_{\alpha,\infty}, \qquad \textit{pour } \alpha = 0,1,2, \tag{0.1.13}$$

3. *$\dot{z}$ est borné : il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\|\dot{z}(t)\|_\alpha \leq M\left(\|z_0\|_{\alpha+1} + t\|F\|_{\alpha+1,\infty}\right) + \|F\|_{\alpha,\infty}, \qquad \textit{pour } \alpha = 0,1, \tag{0.1.14}$$

où $\|F\|_{\alpha,\infty} = \sup\limits_{t\in[0,\tau]} \|F(t)\|_\alpha$.

Démonstration.

1. Par le Théorème 0.1.7, et plus précisément l'inégalité (0.1.7), on sait que

$$z \in C\left([0,\tau], \mathcal{D}(A^2)\right) \cap C^1([0,\tau], \mathcal{D}(A)).$$

Puisque $C^*C \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A))$ et $F \in C([0,\tau], \mathcal{D}(A^2)) \cap C^1([0,\tau], \mathcal{D}(A))$, on a

$$(A - C^*C)\, z(t) \in C([0,\tau], \mathcal{D}(A)) \cap C^1([0,\tau], X).$$

La conclusion vient de l'égalité $\dot{z}(t) = (A - C^*C)z(t)$ dans $\mathcal{D}(A)$.

2. Par la formule de Duhamel (0.1.6), on a

$$\begin{aligned} \|z(t)\|_\alpha &= \left\| \mathbb{T}_t z_0 + \int_0^t \mathbb{T}_{t-s} F(s) ds \right\|_\alpha, \\ &\leq \|\mathbb{T}_t z_0\|_\alpha + \int_0^t \|\mathbb{T}_{t-s} F(s)\|_\alpha \, ds, \\ &\leq \|z_0\|_\alpha + t\|F\|_{\alpha,\infty}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le Lemme 0.1.18 précédent dans la dernière inégalité.

3. En utilisant l'inégalité (0.1.13) obtenue pour $z(t)$ et les inclusions continues $\mathcal{D}(A^2) \hookrightarrow \mathcal{D}(A) \hookrightarrow X$, on obtient

$$\begin{aligned}\|\dot{z}(t)\|_\alpha &= \|(A - C^*C)z(t) + F(t)\|_\alpha, \\ &\leq \|z(t)\|_{\alpha+1} + M\|z(t)\|_\alpha + \|F\|_{\alpha,\infty}, \\ &\leq M\left(\|z_0\|_{\alpha+1} + t\|F\|_{\alpha+1,\infty}\right) + \|F\|_{\alpha,\infty}.\end{aligned}$$

■

On donne enfin quelques résultats de perturbations. On s'intéresse plus particulièrement aux perturbations $P \in \mathcal{L}(X_1, X)$ telles que si A est un générateur, $A + P$ l'est encore.

Théorème 0.1.20. *Soient A le générateur d'un C_0-semi-groupe $\mathbb{T}$ sur X, et $P \in \mathcal{L}(X)$. On note $\omega > \omega_0(\mathbb{T})$ et $M_\omega \geq 1$ deux constantes vérifiant*

$$\|\mathbb{T}_t\| \leq M_\omega e^{\omega t},$$

Posons $\alpha = \omega + M_\omega\|P\|$, alors $A + P$ est le générateur d'un C_0-semi-groupe $\mathbb{T}^P$ sur X vérifiant

$$\|\mathbb{T}_t^P\| \leq M_\omega e^{\alpha t}.$$

De plus, $\mathbb{T}^P$ satisfait

$$\mathbb{T}_t^P z = \mathbb{T}_t z + \int_0^t \mathbb{T}_{t-s} P \mathbb{T}_s^P z ds, \qquad \forall\, z \in X, t \geq 0.$$

Remarquons que la dernière égalité implique en particulier que tout opérateur d'observation admissible pour $\mathbb{T}$ l'est encore pour $\mathbb{T}^P$. Ce résultat se généralise dans le cas de perturbations composées d'un opérateur borné par un opérateur d'observation admissible.

Théorème 0.1.21 (Théorème 5.4.2. de [88])**.** *Soient A le générateur d'un C_0-semi-groupe $\mathbb{T}$ sur X, $B \in \mathcal{L}(Y, X)$ et $C \in \mathcal{L}(X_1, Y)$ un opérateur d'observation admissible pour $\mathbb{T}$. Alors $A + BC : \mathcal{D}(A) \to X$ est le générateur d'un C_0-semi-groupe $\mathbb{T}^P$ sur X. Il satisfait*

$$\mathbb{T}_t^P z = \mathbb{T}_t z + \int_0^t \mathbb{T}_{t-s} BC \mathbb{T}_s^P z ds, \qquad \forall\, z \in \mathcal{D}(A), t \geq 0.$$

De plus, la classe des opérateurs d'observation admissibles pour $\mathbb{T}^P$ est égale à celle pour $\mathbb{T}$.

Par dualité, on obtient également

Corollaire 0.1.22 (Corollaire 5.5.1. de [88])**.** *Soient A le générateur d'un C_0-semi-groupe $\mathbb{T}$ sur X, $B \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$ un opérateur de contrôle admissible pour $\mathbb{T}$ et $C \in \mathcal{L}(X, U)$. Alors*

$A + BC : \mathcal{D}(A + BC) \to X$, avec

$$\mathcal{D}(A + BC) = \{z \in X \mid (A + BC)z \in X\},$$

est le générateur d'un C_0-semi-groupe $\mathbb{T}^P$ sur X. Il satisfait

$$\mathbb{T}_t^P z = \mathbb{T}_t z + \int_0^t \mathbb{T}_{t-s} BC \mathbb{T}_s^P z ds, \qquad \forall\, z \in \mathcal{D}(A + BC), t \geq 0.$$

De plus, la classe des opérateurs de contrôle admissibles pour $\mathbb{T}^P$ est égale à celle pour $\mathbb{T}$.

0.2 Reconstruction de données initiales

Cette Section correspond à l'article de Ramdani, Tucsnak et Weiss [72], qui constitue le point de départ de cette thèse. On en rappelle les principaux résultats.

Soient X un espace de Hilbert et $A : \mathcal{D}(A) \to X$ le générateur d'un C_0-semi-groupe $\mathbb{T}$ sur X. On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t), & \forall\, t \geq 0, \\ z(0) = z_0 \in \mathcal{D}(A). \end{cases} \tag{0.2.1}$$

On observe ce système au travers d'un opérateur d'observation $C \in \mathcal{L}(X_1, Y)$, où Y est un autre espace de Hilbert, pendant un intervalle de temps $[0, \tau]$ avec $\tau > 0$. Ceci conduit à la mesure

$$y(t) = Cz(t), \qquad \forall\, t \in [0, \tau]. \tag{0.2.2}$$

On montre dans [72] que l'on peut reconstruire z_0 (la donnée initiale inconnue) à partir de la connaissance de la mesure $y(t)$ sur $[0, \tau]$ et de l'opérateur A qui régit l'état z, sous certaines hypothèses, par une méthode utilisant des observateurs itératifs. C'est cette méthode que nous allons décrire ici, et que nous utiliserons par la suite dans nos travaux.
Rappelons que l'on s'intéresse dans cette thèse aux applications de l'algorithme à quelques équations conservatives, avec analyse numérique et/ou simulations, ainsi qu'à ses extensions et autres utilisations possibles.

0.2.1 Observateur direct, observateur rétrograde

Nous commençons par donner une définition.

Définition 0.2.1 (Estimabilité)**.** Soient A le générateur d'un C_0-semi-groupe $\mathbb{T}$ sur X, et $C \in \mathcal{L}(X_1, Y)$ un opérateur d'observation non nécessairement admissible pour $\mathbb{T}$. On dit du couple (A, C) qu'il est *estimable* s'il existe

- un opérateur $A^+ : \mathcal{D}(A^+) \to X$ générateur d'un C_0-semi-groupe $\mathbb{T}^+$ exponentiellement stable sur X,
- et un opérateur de contrôle $H^+ \in \mathcal{L}(Y, X^+_{-1})$ admissible pour $\mathbb{T}^+$ tel que

$$Az = A^+z - H^+Cz, \qquad \forall\, z \in \mathcal{D}(A).$$

On dit alors que (A, C) est estimable par (A^+, H^+).

Remarque 0.2.1. Notons que les termes A^+z et H^+Cz sont en fait dans X^+_{-1}, mais que leur différence est dans X. On peut réécrire cette égalité sous une forme faible équivalente, *i.e.*

$$\langle Az, \phi\rangle_X = \langle z, \left(A^+\right)^* \phi\rangle_X - \langle Cz, (H^+)^*\phi\rangle_Y, \qquad \forall\, z \in \mathcal{D}(A), \phi \in \mathcal{D}\left(\left(A^+\right)^*\right). \tag{0.2.3}$$

Remarque 0.2.2. Remarquons que dans le cas d'un opérateur d'observation admissible, l'observabilité exacte implique l'estimabilité (voir Rebarber et Weiss [74]).

Supposons dorénavant que (A, C) soit estimable par (A^+, H^+), et prenons $\tau = +\infty$ pour un moment. On considère l'équation différentielle suivante, appelé *observateur direct*, généralisation infini-dimensionnelle des observateurs de Luenberger [59].

$$\begin{cases} \dot{z}^+(t) = A^+z^+(t) - H^+y(t), & \forall\, t \geq 0, \\ z^+(0) = z_0^+ \in X. \end{cases} \tag{0.2.4}$$

Notons que ce système est bien posé. En effet, $z_0 \in \mathcal{D}(A)$ implique par le Théorème 0.1.7 (avec X_1 à la place de X et $f \equiv 0$) que $y \in C^1([0, \tau], Y)$, et donc $H^+y \in H^1_{\ell oc}([0, \tau], X^+_{-1})$ et l'on peut à nouveau appliquer le Théorème 0.1.7.

Alors, en soustrayant (0.2.1) à (0.2.4), on obtient (formellement, voir [72, Proposition 2.5] pour la démonstration rigoureuse)

$$z^+(t) - z(t) = \mathbb{T}^+_\tau(z_0^+ - z_0), \qquad \forall\, t \geq 0.$$

En particulier, il existe un $\omega > 0$ et un $M_\omega \geq 1$ tel que

$$\|z^+(t) - z(t)\| = M_\omega e^{-\omega t}\|z_0^+ - z_0\|, \qquad \forall\, t \geq 0. \tag{0.2.5}$$

En d'autres termes, z^+ approche (dans X) l'état z en temps long.

Pour reconstruire la donné initiale z_0, on construit maintenant un autre système, analogue au précédent, qui permet de remonter (dans le temps) d'une approximation de l'état finale de z (en fait $z(\tau)$, pour τ assez grand) vers z_0.

Définition 0.2.2 (Estimabilité rétrograde)**.** Soient A le générateur d'un C_0-semi-groupe $\mathbb{T}$ sur X, et $C \in \mathcal{L}(X_1, Y)$ un opérateur d'observation non nécessairement admissible pour $\mathbb{T}$. On dit du couple (A, C) qu'il est *estimable dans le sens rétrograde* s'il existe

- un opérateur $A^- : \mathcal{D}(A^-) \to X$ générateur d'un C_0-semi-groupe $\mathbb{T}^-$ exponentiellement stable sur X,
- et un opérateur de contrôle $H^- \in \mathcal{L}(Y, X_{-1}^-)$ admissible pour $\mathbb{T}^-$ tel que

$$-Az = A^- z - H^- Cz, \qquad \forall\, z \in \mathcal{D}(A).$$

On dit alors que (A, C) est estimable dans le sens rétrograde par (A^-, H^-).

Remarque 0.2.3. Encore une fois, les termes $A^- z$ et $H^- Cz$ sont en fait dans X_{-1}^-, mais leur différence est dans X, et on peut alors réécrire cette égalité sous une forme faible équivalente, *i.e.*

$$-\langle Az, \phi\rangle_X = \langle z, \left(A^-\right)^* \phi\rangle_X - \langle Cz, (H^-)^* \phi\rangle_Y, \qquad \forall\, z \in \mathcal{D}(A), \phi \in \mathcal{D}\left(\left(A^-\right)^*\right). \quad (0.2.6)$$

Remarque 0.2.4. Dans le cas où A est le générateur d'un C_0-groupe $\mathbb{T}$ sur X (en particulier, $-A$ est encore un générateur) et $C \in \mathcal{L}(X_1, Y)$ un opérateur d'observation admissible pour $\mathbb{T}$, alors (A, C) est estimable dans le sens rétrograde si et seulement si $(-A, C)$ est estimable.

Proposition 0.2.1. *Soient A le générateur d'un C_0-groupe $\mathbb{T}$ sur X, et $C \in \mathcal{L}(X_1, Y)$ un opérateur d'observation admissible pour $\mathbb{T}$. Si (A, C) est exactement observable, alors (A, C) est estimable et estimable dans le sens rétrograde.*

Démonstration. La Remarque 0.2.2 nous dit que (A, C) est estimable. Comme (A, C) est exactement observable (en temps τ), alors $(-A, C)$ est encore exactement observable (en temps τ). En effet, quelque soit $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{T}_t$ est inversible. En particulier, pour tout $x \in X$, il existe un unique $z \in X$ tel que $\mathbb{T}_\tau z = x$ et il existe une constante $k_\tau > 0$ telle que $\|\mathbb{T}_{-\tau} z\| \geq k_\tau \|z\|$ pour tout $z \in X$. On écrit alors pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$

$$\begin{aligned}
\int_0^\tau \|C\mathbb{T}_{-t} x\|^2 dt &= \int_0^\tau \|C\mathbb{T}_{-t}\mathbb{T}_\tau z\|^2 dt, \\
&= \int_0^\tau \|C\mathbb{T}_{\tau-t} z\|^2 dt, \\
&= \int_0^\tau \|C\mathbb{T}_s z\|^2 ds, \\
&\geq m_\tau \|z\|^2, \\
&\geq m_\tau k_\tau \|x\|^2,
\end{aligned}$$

où m_τ est la constante d'observabilité apparaissant dans l'inégalité (0.1.11).

De nouveau, la Remarque 0.2.2 nous dit que $(-A, C)$ est estimable et la Remarque 0.2.4 permet de conclure. ■

Supposons que (A, C) soit aussi estimable dans le sens rétrograde par (A^-, H^-), et prenons $0 < \tau < \infty$. On considère l'équation différentielle suivante, appelée *observateur rétrograde*, qui peut être vu (formellement) comme un observateur direct de l'équation différentielle (0.2.1) retournée temporellement.

$$\begin{cases} \dot{z}^-(t) = -A^- z^-(t) + H^- y(t), & \forall\, t \in [0, \tau], \\ z^-(\tau) = z^+(\tau). \end{cases} \tag{0.2.7}$$

On montre encore une fois que ce système est bien posé à l'aide du Théorème 0.1.7.

Alors, en soustrayant (0.2.1) à (0.2.7), on obtient (voir [72, Proposition 3.3])

$$z^-(0) - z_0 = \mathbb{T}^-_\tau \mathbb{T}^+_\tau (z_0^+ - z_0).$$

Puisque les C_0-semi-groupes $\mathbb{T}^+$ et $\mathbb{T}^-$ sont exponentiellement stables, $z^-(0) \to z_0$ quand $\tau \to \infty$. On en déduit le *principe de Russell* suivant (voir Russell [75, 76] et Russell et Weiss [77])

Proposition 0.2.2. *Soient A le générateur d'un C_0-semi-groupe $\mathbb{T}$ sur X, et $C \in \mathcal{L}(X_1, Y)$ un opérateur d'observation non nécessairement admissible pour $\mathbb{T}$. Si (A, C) est estimable et estimable dans le sens rétrograde, alors (A, C) est exactement observable en tout temps $\tau > 0$ tel que $\|\mathbb{T}^-_\tau \mathbb{T}^+_\tau\| < 1$.*

Démonstration. Prenons $z_0^+ = 0$, alors

$$z^-(0) = (I - \mathbb{T}^-_\tau \mathbb{T}^+_\tau) z_0.$$

Comme $\|\mathbb{T}^-_\tau \mathbb{T}^+_\tau\| < 1$, on peut inverser cette égalité et obtenir

$$z_0 = (I - \mathbb{T}^-_\tau \mathbb{T}^+_\tau)^{-1} z^-(0). \tag{0.2.8}$$

Mais par la formule de Duhamel (0.1.6),

$$z^-(0) = -\mathbb{T}^-_\tau \int_0^\tau \mathbb{T}^+_{\tau-t} H^+ y(t) dt - \int_0^\tau \mathbb{T}^-_{\tau-t} H^- y(t) dt.$$

Se rappelant que $y(t) = Cz(t) = C\mathbb{T}_t z_0$, l'admissibilité de H^+ et H^- implique alors l'existence d'une constante $K_\tau > 0$ telle que $\|z^-(0)\|^2 \leq K_\tau \int_0^\tau \|C\mathbb{T}_t z_0\|^2 ds$. Finalement, posant $M_\tau = \|(I - \mathbb{T}^-_\tau \mathbb{T}^+_\tau)^{-1}\|^2$, on obtient l'inégalité d'observabilité exacte (0.1.11) avec

$m_\tau = (M_\tau K_\tau)^{-1}$ puisque

$$\|z_0\|^2 = \|(I - \mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+)^{-1} z^-(0)\|^2 \leq M_\tau K_\tau \int_0^\tau \|C\mathbb{T}_t z_0\|^2 ds, \qquad \forall\, z_0 \in \mathcal{D}(A).$$

■

Proposition 0.2.3. *Soient A le générateur d'un C_0-groupe $\mathbb{T}$, et $C \in \mathcal{L}(X_1, Y)$ un opérateur d'observation admissible pour $\mathbb{T}$, alors il y a équivalence entre les affirmations suivantes*

- *(A, C) est estimable et estimable dans le sens rétrograde.*
- *(A, C) est exactement observable.*

Démonstration. Il s'agit des Propositions 0.2.2 et 0.2.1. ■

0.2.2 Itérations des observateurs

Nous sommes capables, à ce stade, de reconstruire une approximation de z_0 dans X aussi précise que souhaitée, pourvu que le temps de mesure τ puisse être aussi grand que nécessaire. En effet, l'égalité

$$z^-(0) - z_0 = \mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+ (z_0^+ - z_0)$$

implique en particulier, puisque $\mathbb{T}^+$ et $\mathbb{T}^-$ sont exponentiellement stables, l'existence de deux constantes $\omega > 0$ et $M_\omega \geq 1$ telles que

$$\|z^-(0) - z_0\| = M_\omega e^{-\omega\tau}(z_0^+ - z_0), \qquad \forall\, z_0 \in \mathcal{D}(A), z_0^+ \in X.$$

Cependant, il est peu envisageable en pratique de mesurer un système pendant un très grand laps de temps. On impose alors la contrainte supplémentaire de mesurer sur un intervalle de temps $[0, \tau]$ fini, que l'on espère le plus petit possible. Il faut donc trouver une méthode qui permette d'améliorer la qualité de la reconstruction, sans avoir recours à la modification du temps de mesure.

Un premier algorithme itératif, appelé "Back and Forth Nudging", a été proposé par Auroux et Blum dans [4, 5]. Puis Phung et Zhang [69] ont introduit un algorithme pour l'équation de Kirchhoff, en se basant sur des méthodes de retournement temporel [37, 38], qui sera généralisé par Ramdani, Tucsnak et Weiss [72].

L'idée consiste à répéter le cycle d'approximation décrit précédemment, conduisant à l'algorithme suivant. Soit $\tau > 0$ tel que $\|\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+\| < 1$. Pour tout $z_0 \in \mathcal{D}(A)$, $z_0^+ \in X$ une première estimation arbitraire de z_0 (souvent prise égale à 0 par la suite), on considère les

suites $(z_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $C([0,\tau],X)$ définies par les équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{z}_n^+(t) = A^+ z_n^+(t) - H^+ y(t), & \forall\, t \in [0,\tau], \\ z_n^+(0) = z_{n-1}^-(0), & \forall\, n \geq 1, \\ z_0^+(0) = z_0^+ \in X, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_n^-(t) = -A^- z_n^-(t) + H^- y(t), & \forall\, t \in [0,\tau], \\ z_n^-(\tau) = z_n^+(\tau). \end{cases}$$

Alors après $N \geq 1$ itérations, on a

$$z_N^-(0) - z_0 = (\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+)^{N+1}(z_0^+ - z_0).$$

En particulier, en posant $\alpha = \|\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+\| < 1$, ceci implique

$$\|z_N^-(0) - z_0\| \leq \alpha^{N+1}\|z_0^+ - z_0\| \to 0, \qquad N \to \infty. \tag{0.2.9}$$

La question de trouver un $\tau > 0$ tel que $\|\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+\| < 1$ est en partie résolue dans le cadre des systèmes conservatifs ($A^* = -A$) avec opérateur d'observation borné $C \in \mathcal{L}(X,Y)$. En effet, Ito, Ramdani et Tucsnak [48] ont montré la proposition suivante.

Proposition 0.2.4. *Soient $A^* = -A$ et $C \in \mathcal{L}(X,Y)$. Si (A,C) est exactement observable en τ_{obs}, alors pour tout $\gamma > 0$, $A - \gamma C^* C$ est le générateur d'un C_0-semi-groupe $\mathbb{T}$ exponentiellement stable sur X et pour tout $\tau \geq \tau_{\text{obs}}$, $\|\mathbb{T}_\tau\| < 1$.*

Démonstration. Le fait que $A - \gamma C^* C$ soit le générateur d'un C_0-semi-groupe $\mathbb{T}$ exponentiellement stable sur X provient de la troisième équivalence du Théorème de Liu 0.1.16 avec $S = \gamma I$.

Soit $z_0 \in \mathcal{D}(A)$ et $t \geq 0$. On note $\mathbb{S}$ le C_0-groupe d'isométrie engendré par A (voir Théorème 0.1.12) et on pose $z(t) = \mathbb{S}_t z_0$ et $v(t) = \mathbb{T}_t z_0$. La différence $w = z - v$ vérifie

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = Aw(t) - \gamma C^* C v(t), & \forall\, t \geq 0, \\ w(0) = 0. \end{cases}$$

La formule de Duhamel (0.1.6) nous donne alors

$$w(t) = -\gamma \int_0^t \mathbb{S}_{t-s} C^* C v(s) ds.$$

Ceci implique facilement

$$\sup_{t\in[0,\tau]} \|w(t)\| \leq \gamma \int_0^\tau \|C^* C v(t)\| dt,$$

et on montre donc que

$$\int_0^\tau \|Cw(t)\|_Y^2 dt \leq \gamma^2 \tau \|C\|^4 \int_0^\tau \|C\mathbb{T}_t z_0\|_Y^2 dt.$$

D'où, puisque $Cz = Cv - Cw$

$$\int_0^\tau \|C\mathbb{S}_t z_0\|_Y^2 dt \leq 2(1 + \gamma^2 \tau \|C\|^4) \int_0^\tau \|C\mathbb{T}_t z_0\|_Y^2 dt,$$

ce qui, par observabilité exacte de (A, C) en temps τ_{obs}, nous dit que $(A - \gamma C^* C, C)$ est exactement observable en temps τ_{obs}. En particulier, pour tout $\tau \geq \tau_{\text{obs}}$, il existe une constante $m_\tau > 0$ telle que

$$\int_0^\tau \|C\mathbb{T}_t z_0\|_Y^2 dt \geq m_\tau \|z_0\|^2, \qquad \forall\, z_0 \in \mathcal{D}(A).$$

Finalement, en multipliant par v l'équation différentielle vérifiée par v, et en intégrant de 0 à τ, on obtient pour tout $z_0 \in \mathcal{D}(A)$

$$\|\mathbb{T}_\tau z_0\|^2 = \|v(\tau)\|^2 = \|z_0\|^2 - 2\gamma \int_0^\tau \|C\mathbb{T}_t z_0\|_Y^2 dt \leq (1 - 2\gamma m_\tau)\|z_0\|^2,$$

d'où

$$\|\mathbb{T}_\tau\| \leq \sqrt{(1 - 2\gamma m_\tau)} < 1.$$

■

On déduit facilement de cette Proposition le Corollaire suivant.

Corollaire 0.2.5. *Si A est anti-adjoint, $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ et (A, C) exactement observable en temps $\tau_{\text{obs}} > 0$, alors $\|\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+\| < 1$ pour tout $\tau \geq \tau_{\text{obs}}$, où $\mathbb{T}^+$ et $\mathbb{T}^-$ sont les C_0-semi-groupes engendrés par $A - \gamma C^* C$ et $-A - \gamma C^* C$ respectivement, pour tout $\gamma > 0$.*

Enfin, nous terminons par deux remarques qui nous seront utiles par la suite.

Remarque 0.2.5. Lorsque $C \in \mathcal{L}(X_1, Y)$ est un opérateur d'observation admissible, l'algorithme s'étend par continuité et permet la reconstruction de données initiales $z_0 \in X$ (et pas seulement dans $\mathcal{D}(A)$).

Remarque 0.2.6. Lorsque l'on choisit la première estimation de z_0 égale à 0, l'identité $(I - \mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+) z_0 = z^-(0)$ peut être inversée à l'aide d'une série de Neumann

$$z_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+)^n z^-(0). \tag{0.2.10}$$

Donc, au moins théoriquement, la reconstruction nécessite un premier cycle d'estimation (0.2.4)-(0.2.7) pour calculer $z^-(0)$ puis la résolution successive de systèmes linéaires homogènes (*i.e.* (0.2.4)-(0.2.7) avec $y \equiv 0$) en adaptant les données initiales et finales.

0.3 Application à la reconstruction de source

Nous montrons maintenant que l'on peut utiliser l'algorithme de reconstruction de données initiales pour la reconstruction de certains termes source (*i.e.* à variables séparées). On peut se référer à l'article de Alves, Silvestre, Takahashi et Tucsnak [2] pour la théorie générale, dans lequel les auteurs montrent en particulier que l'hypothèse d'observabilité exacte est suffisante pour que le problème soit bien posé.

Soient X un espace de Hilbert, $A : \mathcal{D}(A) \to X$ le générateur d'un C_0-semi-groupe $\mathbb{T}$ sur X et $F \in H^1_{\ell oc}((0,\infty), X_1)$ une fonction inconnue. On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + F(t), & \forall\, t \geq 0, \\ z(0) = z_0 \in X. \end{cases} \tag{0.3.1}$$

Notons que ce système est bien posé d'après le Théorème 0.1.7.
On l'observe au travers d'un opérateur d'observation $C \in \mathcal{L}(X_1, Y)$, où Y est un autre espace de Hilbert, pendant un intervalle de temps $[0,\tau]$ avec $\tau > 0$. Ceci conduit à la mesure

$$y(t) = Cz(t), \qquad \forall\, t \in [0,\tau]. \tag{0.3.2}$$

On se pose la question suivante : peut-on reconstruire l'inconnue F à partir de l'observation y ?

Pour répondre à cette question, on suppose que

- F est à variables séparées $F(x,t) = \lambda(t)f(x)$,
- l'intensité, c'est-à-dire la dépendance temporelle λ, est connue,
- $\lambda(0) \neq 0$.

Par la formule de Duhamel (0.1.6), $y(t)$ peut s'écrire

$$y(t) = \mathbb{T}_t z_0 + \int_0^t \lambda(t-s) C\mathbb{T}_s f ds, \qquad \forall\, t \in [0,\tau].$$

La donnée initiale z_0 étant connue, on peut construire

$$\widetilde{y}(t) = y(t) - \mathbb{T}_t z_0 = \int_0^t \lambda(t-s) Y(s) ds, \qquad \forall\, t \in [0,\tau]. \tag{0.3.3}$$

où $Y(t) = C\mathbb{T}_t f$.

Remarquons que $Y(t) = C\mathbb{T}_t f$ n'est rien d'autre que l'observation, au travers de l'opérateur C, durant l'intervalle de temps $[0, \tau]$, de la solution du système

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = AZ(t), & \forall\, t \geq 0, \\ Z(0) = f \in X_1. \end{cases}$$

On s'est ramené à la reconstruction d'une donnée initiale, après résolution de l'équation de Volterra (0.3.3), et on peut donc appliquer l'algorithme itératif de la Section précédente si (A, C) est estimable et estimable dans le sens rétrograde.

Remarque 0.3.1. En utilisant la Remarque 0.2.5, on peut reconstruire des sources $f \in X$ si C est admissible pour $\mathbb{T}$.

La résolution de l'équation de Volterra (0.3.3) peut se faire en utilisant la transformée de Laplace $\mathcal{L}$ (voir Arendt [3] pour la définition de la transformée de Laplace sur des espaces de Hilbert). En l'appliquant à l'équation (0.3.3), et puisque la transformée de Laplace d'une convolution est égale au produit des tranformées de Laplace, on obtient

$$\mathcal{L}(\widetilde{y}(t))(\xi) = \mathcal{L}(\lambda(t))(\xi)\mathcal{L}(Y(t))(\xi),$$

et donc

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathcal{L}(\widetilde{y}(t))(\xi)}{\mathcal{L}(\lambda(t))(\xi)}\right)(t).$$

Il est possible d'éviter le calcul de la transformée de Laplace de l'observation $\widetilde{y}$. D'après Manzhirov et Polyanin [60, p. 114], on a

$$Y(t) = \dot{\widetilde{y}}(t) + \int_0^t R(t-s)\dot{\widetilde{y}}(s)ds, \qquad \forall\, t \in [0, \tau], \tag{0.3.4}$$

où

$$R(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\xi\mathcal{L}(\lambda(t))(\xi)} - 1\right)(t).$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(Y(t))(\xi) &= \frac{\mathcal{L}(\widetilde{y}(t))(\xi)}{\mathcal{L}(\lambda(t))(\xi)}, \\ &= \frac{\xi\mathcal{L}(\widetilde{y}(t))(\xi)}{\xi\mathcal{L}(\lambda(t))(\xi)}, \\ &= \mathcal{L}(\dot{\widetilde{y}}(t))(\xi) + \left(\frac{1}{\xi\mathcal{L}(\lambda(t))(\xi)} - 1\right)\mathcal{L}(\dot{\widetilde{y}}(t))(\xi), \\ &= \mathcal{L}(\dot{\widetilde{y}}(t))(\xi) + \mathcal{L}(R(t))(\xi)\mathcal{L}(\dot{\widetilde{y}}(t))(\xi), \\ &= \mathcal{L}(\dot{\widetilde{y}}(t))(\xi) + \mathcal{L}\left(\int_0^t R(t-s)\dot{\widetilde{y}}(s)ds\right)(\xi), \end{aligned}$$

d'où l'égalité (0.3.4) annoncée.

Chapitre 1

Équation de Schrödinger

Sommaire

1.1 Le problème continu **41**

1.2 Discrétisation en espace **43**

1.2.1 Résultat principal 43

1.2.2 Démonstration 45

1.3 Discrétisation totale **51**

1.3.1 Résultat principal 51

1.3.2 Démonstration 53

1.4 Simulations numériques **60**

Une grande partie des résultats de ce chapitre ont été publiés dans l'article [43] écrit conjointement avec Karim Ramdani.

Nous présentons dans ce Chapitre 1 des résultats d'analyse numérique sur la discrétisation spatiale (dans un premier temps) puis totale de l'algorithme de reconstruction de données initiales, rappelé au Chapitre 0, appliqué à une équation de Schrödinger abstraite avec opérateur d'observation borné. En particulier, nous donnons dans les Corollaires 1.2.2 et 1.3.2 le nombre d'itérations optimal à calculer, et l'ordre de convergence correspondant. Nous concluons par quelques simulations MATLAB numériques en une dimension d'espace.

1.1 Le problème continu

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné, $d \in \mathbb{N}^*$, de frontière $\partial\Omega$ régulière. On s'intéresse dans ce chapitre à l'équation de Schrödinger sur Ω avec condition de Dirichlet homogène au bord,

qui s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} z(x,t) = -i \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2} z(x,t), & \forall\, x \in \Omega, t \geq 0, \\ z(x,t) = 0, & \forall\, x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ z(x,0) = z_0(x) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

La question qui nous intéresse dans cette Section concerne la possibilité de reconstruire z_0 dans $L^2(\Omega)$ à partir de la connaissance de l'état $z(x,t)$ sur un sous-domaine $\mathcal{O} \subset \Omega$ pendant un intervalle de temps $[0,\tau]$, d'où le terme d'*observation interne*. On réécrit ce problème de manière abstraite, en posant

$$A_0 = -\Delta = -\sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \;:\; \mathcal{D}(A_0) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to X = L^2(\Omega),$$

et

$$C : X \to Y = L^2(\Omega), \qquad Cz = \chi_{|\mathcal{O}} z, \qquad \forall\, z \in X,$$

où $\chi_{|\mathcal{O}}$ est la fonction caractéristique de $\mathcal{O}$. On obtient alors l'équation différentielle (1.1.1) à laquelle nous allons appliquer la méthode de reconstruction par observateurs décrite dans les préliminaires. Plus précisément, on se place dans le cadre suivant.

Soient X un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa norme associée $\| \cdot \|$ et $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \to X$ un opérateur auto-adjoint défini positif. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on notera $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ et $\| \cdot \|_\alpha$, le produit scalaire et la norme associée dans $\mathcal{D}(A_0^\alpha)$. L'équation de (type) Schrödinger est donnée par

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = iA_0 z(t), & \forall\, t \geq 0, \\ z(0) = z_0 \in \mathcal{D}(A_0). \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Soient $C \in \mathcal{L}(X,Y)$ un opérateur d'observation, où Y est un autre espace de Hilbert, et $y(t)$, la mesure sur $[0,\tau]$ donnée par (0.2.2). On suppose que $\tau > 0$ est tel que (iA_0, C) est exactement observable en temps τ. En particulier, si Ω est un rectangle dans $\mathbb{R}^d$, alors (iA_0, C) est exactement observable en tout temps $\tau > 0$, quelque soit la zone d'observation (voir par exemple Komornik [52] ou Tucsnak et Weiss [88, Théorème 8.5.1.]).

On commence par remarquer que iA_0 est anti-adjoint, en d'autres termes, l'équation de Schrödinger (1.1.1) est conservative. Alors par le Théorème de Liu 0.1.16, $A^+ = iA_0 - C^*C$ (resp. $A^- = -iA_0 - C^*C$) est le générateur d'un C_0-semi-groupe $\mathbb{T}^+$ (resp. $\mathbb{T}^-$) exponentiellement stable. Alors les observateurs direct et rétrograde (0.2.4) et (0.2.7) sont donnés par

(on choisit $z_0^+ = 0$ comme première estimation de z_0)

$$\begin{cases} \dot{z}^+(t) = iA_0 z^+(t) - C^*Cz^+(t) + C^*y(t), & \forall\, t \in [0,\tau], \\ z^+(0) = 0, \end{cases} \tag{1.1.2}$$

$$\begin{cases} \dot{z}^-(t) = iA_0 z^-(t) + C^*Cz^-(t) - C^*y(t), & \forall\, t \in [0,\tau], \\ z^-(\tau) = z^+(\tau). \end{cases} \tag{1.1.3}$$

D'après la Remarque (0.2.6), on a l'équation (0.2.10), que l'on rappelle

$$z_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+)^n z^-(0).$$

En pratique, il faut donc discrétiser les observateurs (1.1.2)-(1.1.3) et tronquer la série de Neumann pour reconstruire numériquement z_0. Nous allons dans la suite faire l'analyse numérique d'un schéma combinant la méthode de Galerkin en espace et la méthode d'Euler implicite en temps. Pour cela, nous avons besoin de supposer quelques hypothèses de régularité supplémentaires.

- On ne reconstruit que les données initiales $z_0 \in \mathcal{D}\left(A_0^2\right)$.
- On suppose que $C^*C \in \mathcal{L}(\mathcal{D}\left(A_0^2\right)) \cap \mathcal{L}(\mathcal{D}(A_0))$ (en pratique, cela signifie que la fonction $\chi_{|\mathcal{O}}$ est approchée par une fonction lisse).

1.2 Discrétisation en espace

1.2.1 Résultat principal

Clairement, les deux systèmes (1.1.2)-(1.1.3) peuvent se réécrire sous la forme plus générale d'un problème de Cauchy avec donnée initiale (le second est simplement retourné temporellement)

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = \pm iA_0 q(t) - C^*Cq(t) + F(t), & \forall\, t \in [0,\tau], \\ q(0) = q_0, \end{cases} \tag{1.2.1}$$

où l'on a posé

- pour l'observateur direct (1.1.2) : $F(t) = C^*y(t) = C^*Cz(t)$ et $q_0 = 0$,
- pour l'observateur rétrograde (1.1.3) : $F(t) = C^*y(\tau - t) = C^*Cz(\tau - t)$ et $q_0 = z^+(\tau)$.

Nous allons utiliser la méthode de Galerkin pour discrétiser l'équation (1.2.1). Plus précisément, on suppose que l'on dispose d'une suite de sous-espaces de dimension finie $(X_h)_{h>0}$ dans $\mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right)$, muni de la norme héritée de X. On note π_h la projection de $\mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right)$ dans

X_h, et on suppose qu'il existe $M > 0$, $\theta > 0$ et $h^* > 0$ tels que pour tout $h \in (0, h^*)$, on ait

$$\|\pi_h \varphi - \varphi\| \leq M h^\theta \|\varphi\|_{\frac{1}{2}}, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right). \tag{1.2.2}$$

Pour tout $q_0 \in \mathcal{D}\left(A_0^2\right)$, la formulation variationnelle de (1.2.1) s'écrit

$$\begin{cases} \langle \dot{q}(t), \varphi \rangle = \pm i \langle q(t), \varphi \rangle_{\frac{1}{2}} - \langle C^* C q(t), \varphi \rangle + \langle F(t), \varphi \rangle, & \forall\, t \in [0, \tau], \varphi \in \mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right), \\ q(0) = q_0. \end{cases} \tag{1.2.3}$$

On suppose que l'on dispose d'approximations de q_0 et F, notées $q_{0,h} \in X_h$ et F_h, dans leurs espaces respectifs X et $L^1([0, \tau], X)$. Pour tout $t \in [0, \tau]$, on définit $q_h(t) \in X_h$ comme l'unique solution du problème variationnel

$$\begin{cases} \langle \dot{q}_h(t), \varphi_h \rangle = \pm i \langle q_h(t), \varphi_h \rangle_{\frac{1}{2}} - \langle C^* C q_h(t), \varphi_h \rangle + \langle F_h(t), \varphi_h \rangle, & \forall\, \varphi_h \in X_h, \\ q_h(0) = q_{0,h}. \end{cases} \tag{1.2.4}$$

Ceci conduit en particulier à la définition des versions semi-discrétisées $\mathbb{T}_h^{\pm}$ des C_0 -semi-groupes $\mathbb{T}^{\pm}$. En effet, il suffit de poser

$$\mathbb{T}_{h,t}^{+} q_0 = q_h(t), \qquad \mathbb{T}_{h,t}^{-} q_0 = q_h(\tau - t),$$

où q_h est la solution de (1.2.4) avec le signe correspondant, $F_h \equiv 0$ et $q_{0,h} = \pi_h q_0$.

On suppose maintenant que l'on dispose d'une approximation y_h de y (correspondant à notre pas de discrétisation h) dans $L^1([0, \tau], Y)$. Soient z_h^+ et z_h^- les approximations respectives de z^+, solution de (1.1.2), et z^-, solution de (1.1.3), données par le schéma (1.2.4). Autrement dit, z_h^+ et z_h^- sont les solutions de

$$\begin{cases} \langle \dot{z}_h^+(t), \varphi_h \rangle = i \langle z_h^+(t), \varphi_h \rangle_{\frac{1}{2}} - \langle C^* C z_h^+(t), \varphi_h \rangle + \langle C^* y_h(t), \varphi_h \rangle, \\ z_h^+(0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle \dot{z}_h^-(t), \varphi_h \rangle = -i \langle z_h^-(t), \varphi_h \rangle_{\frac{1}{2}} + \langle C^* C z_h^-(t), \varphi_h \rangle - \langle C^* y_h(t), \varphi_h \rangle, \\ z_h^-(\tau) = z_h^+(\tau), \end{cases}$$

pour tout $t \in [0, \tau]$ et tout $\varphi_h \in X_h$. On écrit alors une version discrétisée de l'égalité (0.2.10)

$$z_{0,h} = \sum_{n=0}^{N_h} (\mathbb{T}_{h,\tau}^{-} \mathbb{T}_{h,\tau}^{+})^n z_h^-(0), \tag{1.2.5}$$

où N_h est un réel positif (on somme donc jusqu'à sa partie entière). En particulier, nous verrons qu'il existe un nombre d'itérations optimal (on exclut donc de faire tendre N_h vers l'infini) en fonction du pas de discrétisation.

Les résultats suivants nous garantissent que $z_{0,h}$ est une "bonne" approximation de z_0.

Théorème 1.2.1. *Soient $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \to X$ un opérateur auto-adjoint défini positif et $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ tel que $C^*C \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A_0^2)) \cap \mathcal{L}(\mathcal{D}(A_0))$. On suppose que (iA_0, C) est exactement observable en temps $\tau > 0$ et on pose $\eta = \|\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+\| < 1$. Si $z_0 \in \mathcal{D}(A_0^2)$ est la donnée initiale de (1.1.1), on définit $z_{0,h}$ par (1.2.5).*

Alors il existe $M \geq 0$ et $h^* > 0$ tels que pour tout $h \in (0, h^*)$

$$\|z_0 - z_{0,h}\| \leq M \left[\left(\frac{\eta^{N_h+1}}{1-\eta} + h^\theta \tau N_h^2 \right) \|z_0\|_2 + N_h \int_0^\tau \|C^*(y(t) - y_h(t))\| dt \right].$$

Un choix particulier de N_h permet d'obtenir une erreur uniquement en fonction de h.

Corollaire 1.2.2. *Sous les hypothèses du Théorème 1.2.1, on pose*

$$N_h = \theta \frac{\ln h}{\ln \eta}.$$

Alors il existe $M_\tau > 0$ et $h^* > 0$ tels que pour tout $h \in (0, h^*)$

$$\|z_0 - z_{0,h}\| \leq M_\tau \left(h^\theta \ln^2 h \|z_0\|_2 + |\ln h| \int_0^\tau \|C^*(y(t) - y_h(t))\| dt \right).$$

Remarque 1.2.1. En fait, ces résultats restent vrais pour $z_0 \in \mathcal{D}\left(A_0^{\frac{3}{2}}\right)$, avec les mêmes preuves (il suffit d'adapter les espaces). Cependant, ce n'est plus vrai dans le cas totalement discrétisé, on limitera donc notre analyse aux données initiales $z_0 \in \mathcal{D}(A_0^2)$.

Remarque 1.2.2. Remarquons que le dernier terme de cette estimation donne directement une borne pour le bruit maximum admissible, en fonction de h, garantissant la convergence.

1.2.2 Démonstration

Avant de démontrer le Théorème 1.2.1, nous avons besoin de quelques résultats préliminaires. La proposition suivante donne une estimation entre l'approximation en espace q_h donnée par (1.2.4) et $\pi_h q$, projection sur X_h de la solution de (1.2.3), dans X. On peut retrouver ce type d'approximation dans le livre de Raviart et Thomas [73] ou dans le papier de Johnson et Thomée [49]. Bien que classique, il s'agit de l'étape la plus importante dans la démonstration du Théorème 1.2.1.

Proposition 1.2.3. *Soient $q_0 \in \mathcal{D}(A_0^2)$, $q_{0,h} \in X_h$, q et q_h les solutions respectives de (1.2.3) et (1.2.4). Supposons que $C^*C \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A_0))$, alors il existe $M > 0$ et $h^* > 0$ tels que*

pour tout $t \in [0,\tau]$ *et tout* $h \in (0,h^*)$

$$\|\pi_h q(t) - q_h(t)\| \leq \|\pi_h q_0 - q_{0,h}\| + Mh^\theta \left[t\left(\|q_0\|_2 + \|F\|_{1,\infty}\right) + t^2\|F\|_{2,\infty}\right] + \int_0^t \|F(s) - F_h(s)\| ds,$$

où $\|F\|_{\alpha,\infty} = \sup_{t\in[0,\tau]} \|F(t)\|_\alpha$.

Démonstration. Premièrement, on soustrait (1.2.4) de (1.2.3). On obtient (on omet la dépendance en temps pour plus de clarté)

$$\langle \dot{q} - \dot{q}_h, \varphi_h\rangle = \pm i\langle q - q_h, \varphi_h\rangle_{\frac{1}{2}} - \langle C^*C(q - q_h), \varphi_h\rangle + \langle F - F_h, \varphi_h\rangle, \qquad \forall\, \varphi_h \in X_h.$$

En se rappelant que $\langle \pi_h q - q, \varphi_h\rangle_{\frac{1}{2}} = 0$ (par propriété de la projection) pour tout $\varphi_h \in X_h$ et que $\pi_h \dot{q}$ a un sens par la régularité de q (voir (0.1.7) avec $\mathcal{D}\left(A_0^2\right)$ à la place de X), on obtient de l'égalité précédente que pour tout $\varphi_h \in X_h$

$$\langle \pi_h\dot{q} - \dot{q}_h, \varphi_h\rangle = \langle \pi_h\dot{q} - \dot{q}, \varphi_h\rangle \pm i\left\langle \pi_h q - q_h, \varphi_h\right\rangle_{\frac{1}{2}} - \left\langle C^*C\left(q - q_h\right), \varphi_h\right\rangle + \left\langle F - F_h, \varphi_h\right\rangle. \tag{1.2.6}$$

D'un autre coté, en posant

$$\mathcal{E}_h = \frac{1}{2}\|\pi_h q - q_h\|^2,$$

on obtient

$$\dot{\mathcal{E}}_h = \mathrm{Re}\left\langle \pi_h\dot{q} - \dot{q}_h, \pi_h q - q_h\right\rangle.$$

En appliquant (1.2.6) avec $\varphi_h = \pi_h q - q_h$ et en substituant le résultat dans l'équation précédente, on obtient en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que C est borné qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\dot{\mathcal{E}}_h \leq \left(\|\pi_h\dot{q} - \dot{q}\| + M\|\pi_h q - q\| + \|F - F_h\|\right) \underbrace{\|\pi_h q - q_h\|}_{=\sqrt{2\mathcal{E}_h}}.$$

Puisque $\dfrac{\dot{\mathcal{E}}_h}{\sqrt{2\mathcal{E}_h}} = \dfrac{d}{dt}\sqrt{2\mathcal{E}_h}$, intégrer de 0 à t nous donne

$$\|\pi_h q(t) - q_h(t)\| \leq \|\pi_h q_0 - q_{0,h}\| + \int_0^t \left(\|\pi_h\dot{q}(s) - \dot{q}(s)\| + M\|\pi_h q(s) - q(s)\|\right) ds + \int_0^t \|F(s) - F_h(s)\| ds. \tag{1.2.7}$$

Il nous reste à borner $\|\pi_h\dot{q}(t) - \dot{q}(t)\|$ et $\|\pi_h q(t) - q(t)\|$ pour tout $t \in [0,\tau]$. En utilisant

(1.2.2) et l'injection continue de $\mathcal{D}(A_0^\alpha)$ dans $\mathcal{D}(A_0^\beta)$ pour $\alpha \geq \beta$, on obtient

$$\begin{cases} \|\pi_h \dot{q}(t) - \dot{q}(t)\| \leq M h^\theta \|\dot{q}(t)\|_{\frac{1}{2}} \leq M h^\theta \|\dot{q}(t)\|_1, \\ \|\pi_h q(t) - q(t)\| \leq M h^\theta \|q(t)\|_{\frac{1}{2}} \leq M h^\theta \|q(t)\|_2, \end{cases} \qquad \forall\, t \in [0,\tau], h \in (0,h^*).$$

En utilisant les relations (0.1.13) et (0.1.14) prouvées dans le Lemme 0.1.19, on obtient pour tout $t \in [0,\tau]$ et tout $h \in (0,h^*)$

$$\|\pi_h \dot{q}(t) - \dot{q}(t)\| + \|\pi_h q(t) - q(t)\| \leq M h^\theta \left(\|q_0\|_2 + t\|F\|_{2,\infty} + \|F\|_{1,\infty}\right).$$

En substituant cette inégalité dans (1.2.7), on obtient le résultat. ■

En utilisant ce dernier résultat, on déduit une estimation d'erreur sur les discrétisations des C_0-semi-groupes $\mathbb{T}^\pm$.

Proposition 1.2.4. *Sous les hypothèses de la Proposition 1.2.3, les affirmations suivantes sont vraies.*

1. *Il existe un $M > 0$ et un $h^* > 0$ tels que pour tout $t \in (0,\tau)$ et tout $h \in (0,h^*)$, on ait*

$$\left\|\pi_h \mathbb{T}_t^+ q_0 - \mathbb{T}_{h,t}^+ q_0\right\| \leq M t h^\theta \|q_0\|_2, \tag{1.2.8}$$

$$\left\|\pi_h \mathbb{T}_t^- q_0 - \mathbb{T}_{h,t}^- q_0\right\| \leq M(\tau - t) h^\theta \|q_0\|_2. \tag{1.2.9}$$

2. *Il existe un $M > 0$ et un $h^* > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $t \in [0,\tau]$ et tout $h \in (0,h^*)$, on ait*

$$\|(\mathbb{T}_t^- \mathbb{T}_t^+)^n q_0 - (\mathbb{T}_{h,t}^- \mathbb{T}_{h,t}^+)^n q_0\| \leq M(1 + n\tau) h^\theta \|q_0\|_2. \tag{1.2.10}$$

Démonstration.

1. Il suffit de prendre $F = F_h = 0$ et $q_{0,h} = \pi_h q_0$ dans la Proposition 1.2.3.
2. On remarque en premier lieu que

$$\|(\mathbb{T}_t^- \mathbb{T}_t^+)^n q_0 - (\mathbb{T}_{h,t}^- \mathbb{T}_{h,t}^+)^n q_0\| \leq \|(\mathbb{T}_t^- \mathbb{T}_t^+)^n q_0 - \pi_h (\mathbb{T}_t^- \mathbb{T}_t^+)^n q_0\| + \|\pi_h (\mathbb{T}_t^- \mathbb{T}_t^+)^n q_0 - (\mathbb{T}_{h,t}^- \mathbb{T}_{h,t}^+)^n q_0\|. \tag{1.2.11}$$

En utilisant (1.2.2) et le fait que $\|\mathbb{T}_t^- \mathbb{T}_t^+\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}(A))} \leq 1$ prouvé dans le Lemme 0.1.18, le premier terme de l'inégalité précédente peut être estimé par

$$\|(\mathbb{T}_t^- \mathbb{T}_t^+)^n q_0 - \pi_h (\mathbb{T}_t^- \mathbb{T}_t^+)^n q_0\| \leq M h^\theta \|q_0\|_2, \qquad \forall\, h \in (0,h^*). \tag{1.2.12}$$

Pour le second terme de (1.2.11), on prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|\pi_h (\mathbb{T}_t^- \mathbb{T}_t^+)^n q_0 - (\mathbb{T}_{h,t}^- \mathbb{T}_{h,t}^+)^n q_0\| \leq M n \tau h^\theta \|q_0\|_2, \qquad \forall\, h \in (0,h^*). \tag{1.2.13}$$

En effet

$$\left\|\pi_h \mathbb{T}_t^- \mathbb{T}_t^+ q_0 - \mathbb{T}_{h,t}^- \mathbb{T}_{h,t}^+ q_0\right\| \leq \left\|\pi_h \mathbb{T}_t^- \mathbb{T}_t^+ q_0 - \mathbb{T}_{h,t}^- \mathbb{T}_t^+ q_0\right\| + \left\|\mathbb{T}_{h,t}^- (\mathbb{T}_t^+ q_0 - \mathbb{T}_{h,t}^+ q_0)\right\|.$$

Par le Lemme 0.1.18 et la relation (1.2.9), on obtient

$$\|\pi_h \mathbb{T}_t^- \mathbb{T}_t^+ q_0 - \mathbb{T}_{h,t}^- \mathbb{T}_t^+ q_0\| \leq M(\tau - t)h^\theta \|q_0\|_2, \qquad \forall\, h \in (0, h^*).$$

Évidemment, $\|\mathbb{T}_h^-\|_{\mathcal{L}(X)}$ est uniformément borné en h (cela vient par exemple de (1.2.9)), et donc par (1.2.2) et la relation (1.2.8), on a pour tout $h \in (0, h^*)$

$$\begin{aligned}\|\mathbb{T}_{h,t}^- (\mathbb{T}_t^+ q_0 - \mathbb{T}_{h,t}^+ q_0)\| &\leq \|\mathbb{T}_t^+ q_0 - \pi_h \mathbb{T}_t^+ q_0\| + \|\pi_h \mathbb{T}_t^+ q_0 - \mathbb{T}_{h,t}^+ q_0\|, \\ &\leq M t h^\theta \|q_0\|_2.\end{aligned}$$

En conséquence

$$\|\pi_h \mathbb{T}_t^- \mathbb{T}_t^+ q_0 - \mathbb{T}_{h,t}^- \mathbb{T}_{h,t}^+ q_0\| \leq M\tau h^\theta \|q_0\|_2, \qquad \forall\, h \in (0, h^*), \tag{1.2.14}$$

ce qui montre que (1.2.13) est vrai pour $n = 1$. Supposons maintenant qu'elle soit vérifiée pour $n \geq 1$, alors

$$\|\pi_h (\mathbb{T}_t^- \mathbb{T}_t^+)^{n-1} q_0 - (\mathbb{T}_{h,t}^- \mathbb{T}_{h,t}^+)^{n-1} q_0\| \leq M(n-1)\tau h^\theta \|q_0\|_2. \tag{1.2.15}$$

On écrit

$$\begin{aligned}\|\pi_h (\mathbb{T}_t^- \mathbb{T}_t^+)^n q_0 - \mathbb{T}_{h,t}^- \mathbb{T}_{h,t}^+ q_0\| \leq{}& \|\pi_h \mathbb{T}_t^- \mathbb{T}_t^+ (\mathbb{T}_t^- \mathbb{T}_t^+)^{n-1} q_0 - \mathbb{T}_{h,t}^- \mathbb{T}_{h,t}^+ (\mathbb{T}_t^- \mathbb{T}_t^+)^{n-1} q_0\| \\ &+ \|\mathbb{T}_{h,t}^- \mathbb{T}_{h,t}^+ ((\mathbb{T}_t^- \mathbb{T}_t^+)^{n-1} q_0 - (\mathbb{T}_{h,t}^- \mathbb{T}_{h,t}^+)^{n-1} q_0)\|.\end{aligned}$$

Grâce au Lemme 0.1.18 et au fait que $\|\mathbb{T}_{h,t}^- \mathbb{T}_{h,t}^+\|_{\mathcal{L}(X)}$ est uniformément borné en h (puisque c'est le cas pour $\|\mathbb{T}_{h,t}^\pm\|$), en utilisant (1.2.14) et (1.2.15), on obtient

$$\|\pi_h (\mathbb{T}_t^- \mathbb{T}_t^+)^n q_0 - (\mathbb{T}_t^- \mathbb{T}_t^+)^n q_0\| \leq M(\tau + (n-1)\tau) h^\theta \|q_0\|_2,$$

qui est exactement (1.2.13). En substituant (1.2.12) et (1.2.13) dans (1.2.11), on obtient le résultat annoncé. ■

Nous somme dorénavant capable de démontrer le Théorème 1.2.1.

Démonstration du Théorème 1.2.1. En ajoutant le terme $\displaystyle\sum_{n=0}^{N_h} (\mathbb{T}_{h,t}^- \mathbb{T}_{h,t}^+)^n z^-(0)$, on réécrit la

différence $z_0 - z_{0,h}$ de la façon suivante

$$\begin{aligned} z_0 - z_{0,h} &= \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+)^n z^-(0) - \sum_{n=0}^{N_h} (\mathbb{T}_{h,\tau}^- \mathbb{T}_{h,\tau}^+)^n z_h^-(0), \\ &= \sum_{n>N_h} (\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+)^n z^-(0) + \sum_{n=0}^{N_h} \left((\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+)^n - (\mathbb{T}_{h,\tau}^- \mathbb{T}_{h,\tau}^+)^n \right) z^-(0) \\ &\qquad + \sum_{n=0}^{N_h} (\mathbb{T}_{h,\tau}^- \mathbb{T}_{h,\tau}^+)^n \left(z^-(0) - z_h^-(0) \right). \end{aligned}$$

Alors

$$\|z_0 - z_{0,h}\| \leq S_1 + S_2 + S_3, \tag{1.2.16}$$

où l'on a posé

$$\begin{cases} S_1 = \displaystyle\sum_{n>N_h} \left\| (\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+)^n z^-(0) \right\|, \\ S_2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{N_h} \left\| \left((\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+)^n - (\mathbb{T}_{h,\tau}^- \mathbb{T}_{h,\tau}^+)^n \right) z^-(0) \right\|, \\ S_3 = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{N_h} \left\| (\mathbb{T}_{h,\tau}^- \mathbb{T}_{h,\tau}^+)^n \right\|_{\mathcal{L}(X)} \right) \left\| z^-(0) - z_h^-(0) \right\|. \end{cases}$$

Remarquons que le terme S_1 est le reste de la série (0.2.10) tronquée à N_h itérations, que le terme S_2 représente l'erreur cumulée (à chaque itération) due à l'approximation des semi-groupes $\mathbb{T}^\pm$ alors que le terme S_3 provient de l'approximation de $z^-(0)$.

Puisque $\eta = \|\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$, en utilisant (0.2.8), le premier terme ne pose pas de problème

$$S_1 \leq M \frac{\eta^{N_h+1}}{1-\eta} \|z_0\|_2. \tag{1.2.17}$$

S_2 peut être estimé en utilisant la relation (1.2.10) de la Proposition 1.2.4

$$S_2 \leq M \left(\sum_{n=0}^{N_h} (1 + n\tau) \right) h^\theta \|z^-(0)\|_2, \qquad \forall\, h \in (0, h^*).$$

De plus, en utilisant encore une fois (0.2.8) et le fait que $\|\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+\|_{\mathcal{D}(A^2)} < 1$ dans la relation précédente, on obtient finalement

$$S_2 \leq M \Big[1 + (1+\tau) N_h + N_h^2 \tau \Big] h^\theta \|z_0\|_2, \qquad \forall\, h \in (0, h^*). \tag{1.2.18}$$

Il reste à borner le terme S_3. Puisque $\|\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$, l'erreur sur la composition des semi-groupes (1.2.10) implique que $\|\mathbb{T}_{h,\tau}^- \mathbb{T}_{h,\tau}^+\|_{\mathcal{L}(X)}$ est uniformément borné en h par 1, pour

h suffisamment petit. Alors, on a

$$\begin{aligned} S_3 &\leq MN_h \left\| z^-(0) - z_h^-(0) \right\|, \\ &\leq MN_h \left(\left\| z^-(0) - \pi_h z^-(0) \right\| + \left\| \pi_h z^-(0) - z_h^-(0) \right\| \right). \end{aligned} \tag{1.2.19}$$

Par (1.2.2) et (0.2.8), on obtient immédiatement

$$\left\| z^-(0) - \pi_h z^-(0) \right\| \leq Mh^\theta \|z_0\|_2. \tag{1.2.20}$$

Pour borner le second terme $\pi_h z^-(0) - z_h^-(0)$, on applique deux fois la Proposition 1.2.3. Premièrement pour l'observateur rétrograde retourné temporellement $z^-(\tau - \cdot)$ et pour l'observateur direct z^+ (le retournement temporel n'est nécessaire que parce que l'on a écrit la Proposition 1.2.3 pour des problèmes de Cauchy avec donnée initiale et non finale). Après quelques calculs, on obtient pour tout $h \in (0, h^*)$

$$\begin{aligned} \left\| \pi_h z^-(0) - z_h^-(0) \right\| &\leq Mh^\theta \Big[\tau(\|z^+(\tau)\|_2 + \|C^* y\|_{1,\infty}) + \tau^2 \|C^* y\|_{2,\infty} \Big] \\ &\quad + \int_0^\tau \|C^* \left(y(\tau - s) - y_h(\tau - s) \right) \| ds + \int_0^\tau \|C^* \left(y(s) - y_h(s) \right) \| ds. \end{aligned} \tag{1.2.21}$$

Grâce à l'estimation d'énergie (0.1.13) du Lemme 0.1.19, avec une donnée initiale nulle, on a

$$\|z^+(\tau)\|_2 \leq \tau \|C^* y\|_{2,\infty}.$$

Alors (1.2.21) peut s'écrire

$$\left\| \pi_h z^-(0) - z_h^-(0) \right\| \leq Mh^\theta (\tau + \tau^2) \|C^* y\|_{2,\infty} + 2 \int_0^\tau \|C^* \left(y(s) - y_h(s) \right) \| ds.$$

Puisque $C^* C \in \mathcal{L}\left(\mathcal{D}\left(A_0^2\right)\right) \cap \mathcal{L}\left(\mathcal{D}(A_0)\right)$ et $\|z\|_{2,\infty} = \|z_0\|_2$ (iA_0 est anti-adjoint), la dernière relation devient

$$\left\| \pi_h z^-(0) - z_h^-(0) \right\| \leq Mh^\theta (\tau + \tau^2) \|z_0\|_2 + 2 \int_0^\tau \|C^* \left(y(s) - y_h(s) \right) \| ds.$$

En substituant l'inégalité précédente et (1.2.20) dans (1.2.19), il vient

$$S_3 \leq MN_h \left(h^\theta (1 + \tau + \tau^2) \|z_0\|_2 + \int_0^\tau \|C^* \left(y(s) - y_h(s) \right) \| ds \right). \tag{1.2.22}$$

En substituant (1.2.17), (1.2.18) et (1.2.22) dans (1.2.16), on obtient pour tout $h \in (0, h^*)$

$$\|z_0 - z_{0,h}\| \leq M \left[\left(\frac{\eta^{N_h+1}}{1-\eta} + h^\theta \left[1 + (1+\tau+\tau^2)N_h + \tau N_h^2 \right] \right) \|z_0\|_2 \right.$$
$$\left. + N_h \int_0^\tau \|C^* \left(y(s) - y_h(s) \right) \| ds \right],$$

ce qui amène au résultat annoncé (en réduisant h^* si nécessaire). ■

Le Corollaire 1.2.2 n'est alors qu'un choix particulier de N_h dans ce Théorème.

Démonstration du Corollaire 1.2.2. On souhaite faire en sorte que le terme

$$\left(\frac{\eta^{N_h+1}}{1-\eta} + h^\theta \tau N_h^2 \right) \|z_0\|_2,$$

tende vers zéro, quand h tend vers zéro, dans le Théorème 1.2.1. En posant

$$N_h = \theta \frac{\ln h}{\ln \eta},$$

il existe un $M_\tau > 0$ tel que

$$\left(\frac{\eta^{N_h+1}}{1-\eta} + h^\theta \tau N_h^2 \right) \|z_0\|_2 = M_\tau h^\theta \ln^2 h \|z_0\|_2 \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

■

1.3 Discrétisation totale

1.3.1 Résultat principal

L'objectif de cette sous-section est de discrétiser totalement les observateurs direct et rétrograde pour reconstruire la donnée initiale z_0 du problème (1.1.1). On va pour cela ajouter un schéma d'Euler implicite en temps au schéma de Galerkin en espace, en repartant de la forme faible (1.2.3). En d'autres termes, on discrétise l'intervalle $[0, \tau]$ par un pas de temps $\Delta t > 0$, en posant $t_k = k\Delta t$ pour tout entier $0 \leq k \leq K$, où l'on suppose, sans perte de généralité, que $\tau = K\Delta t$. Alors la dérivée d'une fonction du temps f continument dérivable sera approchée en t_k par

$$f'(t_k) \simeq D_t f(t_k) = \frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{\Delta t}.$$

On suppose que $q_{0,h} \in X$ et F_h^k, pour $0 \leq k \leq K$, sont des approximations de q_0 et $F(t_k)$ dans X. On définit $(q_h^k)_{0\leq k\leq K}$ comme la solution du problème suivant : pour tout $0 \leq k \leq K$

$$\begin{cases} \left\langle D_t q_h^k, \varphi_h \right\rangle = \pm i \left\langle q_h^k, \varphi_h \right\rangle_{\frac{1}{2}} - \left\langle C^* C q_h^k, \varphi_h \right\rangle + \left\langle F_h^k, \varphi_h \right\rangle, & \forall\, \varphi_h \in X_h, \\ q_h^0 = q_{0,h}. \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Cette formulation conduit en particulier à une approximation naturelle $\mathbb{T}^{\pm}_{h,\Delta t,k}$ des C_0-semi-groupes $\mathbb{T}^{\pm}_{t_k}$ en posant

$$\mathbb{T}^{+}_{h,\Delta t,k} q_0 = q_h^k, \qquad \mathbb{T}^{-}_{h,\Delta t,k} q_0 = q_h^{K-k},$$

où q_h^k est solution de (1.3.1) avec $F_h^k = 0$ pour tout $0 \leq k \leq K$ et $q_{0,h} = \pi_h q_0$.

Si l'on dispose, pour tout $0 \leq k \leq K$, de y_h^k, une approximation de $y(t_k)$ dans Y, on définit les suites $\left(\left(z_h^+\right)^k\right)_{0\leq k\leq K}$ et $\left(\left(z_h^-\right)^k\right)_{0\leq k\leq K}$, approximations respectives de (1.1.2) et (1.1.3), vérifiant

$$\begin{cases} \left\langle D_t (z_h^+)^k, \varphi_h \right\rangle = i \left\langle (z_h^+)^k, \varphi_h \right\rangle_{\frac{1}{2}} - \left\langle C^* C (z_h^+)^k, \varphi_h \right\rangle + \left\langle C^* y_h^k, \varphi_h \right\rangle, & \forall\, \varphi_h \in X_h, \\ (z_h^+)^0 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left\langle D_t (z_h^-)^k, \varphi_h \right\rangle = i \left\langle (z_h^-)^k, \varphi_h \right\rangle_{\frac{1}{2}} + \left\langle C^* C (z_h^-)^k, \varphi_h \right\rangle - \left\langle C^* y_h^k, \varphi_h \right\rangle, & \forall\, \varphi_h \in X_h, \\ (z_h^-)^K = (z_h^+)^K. \end{cases}$$

De cette discrétisation, on déduit une version totalement discrétisée de l'égalité (0.2.10)

$$z_{0,h,\Delta t} = \sum_{n=0}^{N_{h,\Delta t}} (\mathbb{T}^{-}_{h,\Delta t,K} \mathbb{T}^{+}_{h,\Delta t,K})^n (z_h^-)^0, \tag{1.3.2}$$

où $N_{h,\Delta t}$ est un réel positif (on somme donc jusqu'à sa partie entière).

Alors on a le résultat principal de cette sous-section, qui est la contre-partie totalement discrétisée du Théorème 1.2.1, qui garantit le fait que $z_{0,h,\Delta t}$ est une "bonne" approximation de z_0.

Théorème 1.3.1. *Soient $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \to X$ un opérateur auto-adjoint défini positif et $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ tel que $C^*C \in \mathcal{L}\left(\mathcal{D}\left(A_0^2\right)\right) \cap \mathcal{L}\left(\mathcal{D}(A_0)\right)$. On suppose que (iA_0, C) est exactement observable en temps $\tau > 0$ et on pose $\eta = \|\mathbb{T}^-_\tau \mathbb{T}^+_\tau\| < 1$. Si $z_0 \in \mathcal{D}\left(A_0^2\right)$ est la donnée initiale de (1.1.1), on définit $z_{0,h,\Delta t}$ par (1.3.2).*

Alors il existe $M > 0$, $h^* > 0$ et $\Delta t^* > 0$ tels que pour tout $h \in (0, h^*)$ et tout $\Delta t \in$

$(0, \Delta t^*)$

$$\|z_0 - z_{0,h,\Delta t}\| \leq M \left[\left(\frac{\eta^{N_{h,\Delta t}+1}}{1-\eta} + (h^\theta + \Delta t)(1+\tau) N_{h,\Delta t}^2 \right) \|z_0\|_2 \right.$$
$$\left. + N_{h,\Delta t} \Delta t \sum_{\ell=0}^{K} \left\| C^* \left(y(t_\ell) - y_h^\ell \right) \right\| \right].$$

Un choix particulier de $N_{h,\Delta t}$ permet d'obtenir une erreur uniquement en fonction de h et Δt.

Corollaire 1.3.2. *Sous les hypothèses du Théorème 1.3.1, on pose*

$$N_{h,\Delta t} = \frac{\ln(h^\theta + \Delta t)}{\ln \eta}.$$

Alors il existe $M_\tau > 0$, $h^* > 0$ et $\Delta t^* > 0$ tels que pour tout $h \in (0, h^*)$ et $\Delta t \in (0, \Delta t^*)$

$$\|z_0 - z_{0,h,\Delta t}\| \leq M_\tau \left[(h^\theta + \Delta t) \ln^2(h^\theta + \Delta t) \|z_0\|_2 + \left| \ln(h^\theta + \Delta t) \right| \Delta t \sum_{\ell=0}^{K} \left\| C^* \left(y(t_\ell) - y_h^\ell \right) \right\| \right].$$

Remarque 1.3.1. Remarquons que le dernier terme de cette estimation donne directement, comme dans le cas semi-discrétisé, une borne pour le bruit maximum admissible, en fonction de h et Δt, permettant la convergence.

1.3.2 Démonstration

Comme dans le cas semi-discret, la proposition qui suit (la contre-partie de la Proposition 1.2.3) est l'outil principal de ce résultat. Elle donne une estimation de l'erreur de la discrétisation totale de (1.2.3) par (1.3.1).

Proposition 1.3.3. *Soient $q_0 \in \mathcal{D}(A_0^2)$, $q_{0,h} \in X_h$, q et $(q_h^k)_{0 \leq k \leq K}$ les solutions respectives de (1.2.3) et (1.3.1). Supposons que $C^*C \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A_0))$, alors il existe $M > 0$, $h^* > 0$ et $\Delta t^* > 0$ tels que pour tout $h \in (0, h^*)$, tout $\Delta t \in (0, \Delta t^*)$ et tout $0 \leq k \leq K$*

$$\|\pi_h q(t_k) - q_h^k\| \leq \|\pi_h q_0 - q_{0,h}\|$$
$$+ M \left(\Delta t \sum_{\ell=1}^{k} \|F(t_\ell) - F_h^\ell\| + \left(h^\theta + \Delta t\right) \left[t_k \left(\|q_0\|_2 + \|F\|_{1,\infty} + \|\dot{F}\|_\infty \right) + t_k^2 \|F\|_{2,\infty} \right] \right).$$

Démonstration. On note $r_1(t_k)$ le reste d'ordre un du développement en série de Taylor de q autour de t_{k-1}, alors

$$\dot{q}(t_k) = \frac{q(t_k) - q(t_{k-1})}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta t} r_1(t_k) = D_t q(t_k) - \frac{1}{\Delta t} r_1(t_k). \tag{1.3.3}$$

En soustrayant (1.3.1) de (1.2.3), on obtient pour tout $1 \leq k \leq K$ pour tout $\varphi_h \in X_h$

$$\begin{aligned}\left\langle D_t\left(\pi_h q(t_k) - q_h^k\right), \varphi_h\right\rangle &= \left\langle D_t\left(\pi_h q(t_k) - q(t_k)\right), \varphi_h\right\rangle \pm i\left\langle \pi_h q(t_k) - q_h^k, \varphi_h\right\rangle_{\frac{1}{2}} \\ &\quad - \left\langle C^* C\left(q(t_k) - q_h^k\right), \varphi_h\right\rangle + \frac{1}{\Delta t}\left\langle r_1(t_k), \varphi_h\right\rangle + \left\langle F(t_k) - F_h^k, \varphi_h\right\rangle. \quad (1.3.4)\end{aligned}$$

Pour tout $1 \leq k \leq K$, on pose

$$\mathcal{E}_h^k = \frac{1}{2}\|\pi_h q(t_k) - q_h^k\|^2.$$

En utilisant l'identité

$$\frac{1}{2}\left(\|u\|^2 - \|v\|^2 + \|u - v\|^2\right) = \mathrm{Re}\,\langle u - v, u\rangle, \qquad \forall\, u, v \in X,$$

on obtient facilement pour tout $1 \leq k \leq K$

$$D_t \mathcal{E}_h^k \leq \mathrm{Re}\left\langle D_t\left(\pi_h q(t_k) - q_h^k\right), \pi_h q(t_k) - q_h^k\right\rangle. \quad (1.3.5)$$

En substituant (1.3.4) avec $\varphi_h = \pi_h q(t_k) - q_h^k$ dans la précédente inégalité et en utilisant le fait que C soit borné, on obtient l'existence d'un $M > 0$ tel que pour tout $1 \leq k \leq K$

$$\begin{aligned}D_t \mathcal{E}_h^k \leq \Big[&\|D_t\left(\pi_h q(t_k) - q(t_k)\right)\| + M\|\pi_h q(t_k) - q(t_k)\| \\ &+ \frac{1}{\Delta t}\|r_1(t_k)\| + \|F(t_k) - F_h^k\|\Big]\|\pi_h q(t_k) - q_h^k\|. \quad (1.3.6)\end{aligned}$$

En utilisant les relations (faciles à vérifier)

$$D_t \mathcal{E}_h^k = D_t\sqrt{\mathcal{E}_h^k}\left(\sqrt{\mathcal{E}_h^k} + \sqrt{\mathcal{E}_h^{k-1}}\right), \quad (1.3.7)$$

et

$$\|\pi_h q(t_k) - q_h^k\| \leq \sqrt{2}\left(\sqrt{\mathcal{E}_h^k} + \sqrt{\mathcal{E}_h^{k-1}}\right), \quad (1.3.8)$$

on obtient de (1.2.2) and (1.3.6) que pour tout $h \in (0, h^*)$

$$D_t\sqrt{\mathcal{E}_h^k} \leq M\left(h^\theta\left(\|D_t q(t_k)\|_{\frac{1}{2}} + \|q(t_k)\|_{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{\Delta t}\|r_1(t_k)\| + \|F(t_k) - F_h^k\|\right).$$

D'après (1.3.3) et en utilisant les estimations d'énergie (0.1.13) et (0.1.14) du Lemme 0.1.19,

la dernière inégalité nous donne

$$D_t\sqrt{\mathcal{E}_h^k} \leq M\Bigg(h^\theta\left(\|q_0\|_2 + t_k\|F\|_{2,\infty} + \|F\|_{1,\infty}\right) + \|F(t_k) - F_h^k\| \\ + \frac{h^\theta}{\Delta t}\|r_1(t_k)\|_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\Delta t}\|r_1(t_k)\|\Bigg). \quad (1.3.9)$$

Pour finir, il faut borner les deux derniers termes provenant du développement de Taylor. Par définition de r_1, on a

$$r_1(t_k) = q(t_{k-1}) - q(t_k) + \Delta t\, \dot{q}(t_k),$$

dans $\mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right)$, et par le théorème des accroissements finis, on obtient

$$\|r_1(t_k)\|_{\frac{1}{2}} \leq \Delta t \sup_{s\in[t_{k-1},t_k]} \|\dot{q}(s)\|_{\frac{1}{2}} + \Delta t\|\dot{q}(t_k)\|_{\frac{1}{2}}.$$

En utilisant encore une fois (0.1.14), on obtient l'existence d'un $M > 0$ tel que

$$\|r_1(t_k)\|_{\frac{1}{2}} \leq M\Delta t\left(\|q_0\|_2 + t_k\|F\|_{2,\infty} + \|F\|_{1,\infty}\right). \quad (1.3.10)$$

Alors par la régularité de q (voir le Lemme 0.1.19), le reste r_1 peut s'écrire sous forme intégrale

$$r_1(t_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \ddot{q}(s)\,(t_{k-1} - s)\,ds,$$

dans X, et donc

$$\|r_1(t_k)\| \leq \Delta t^2 \sup_{s\in[t_{k-1},t_k]} \|\ddot{q}(s)\|.$$

En utilisant l'équation (1.2.1) verifiée par q et le fait que C soit borné, on a

$$\|\ddot{q}(t)\| = \left\|\frac{d\dot{q}}{dt}(t)\right\| = \left\|\frac{d}{dt}\Big\{\pm iA_0q(t) - C^*Cq(t) + F(t)\Big\}\right\|, \\ \leq \|\dot{q}(t)\|_1 + M\|\dot{q}(t)\| + \|\dot{F}(t)\|.$$

D'où, encore une fois par (0.1.14), il vient

$$\|r_1(t_k)\| \leq \Delta t^2\left(\|q_0\|_2 + t_k\|F\|_{2,\infty} + \|F\|_{1,\infty} + \|\dot{F}\|_\infty\right). \quad (1.3.11)$$

En substituant (1.3.10) et (1.3.11) dans (1.3.9), on obtient le résultat. ■

Remarque 1.3.2. C'est l'inégalité (1.3.5) qui nous dicte d'utiliser un schéma implicite. Un autre schéma en temps sera utilisable (sans modifier cette démonstration), si une telle relation est vérifiée. On pourra aussi s'intéresser aux travaux d'Ervedoza, Zheng et Zuazua [34, 35], qui ajoutent une viscosité numérique pour conserver le caractère dissipatif du

problème discrétisé lors de l'utilisation d'autres schémas.

De cette Proposition, on dérive une estimation de l'erreur pour $\mathbb{T}^{\pm}_{t_k}$ (pour tout $1 \leq k \leq K$), la contrepartie de la Proposition 1.2.4.

Proposition 1.3.4. *Sous les hypothèses de la Proposition 1.3.3, les affirmations suivantes sont vérifiées.*

1. *Il existe $M > 0$, $h^* > 0$ et $\Delta t^* > 0$ tels que pour tout $h \in (0, h^*)$, tout $\Delta t \in (0, \Delta t^*)$ et tout $0 \leq k \leq K$*

$$\left\|\pi_h \mathbb{T}^+_{t_k} q_0 - \mathbb{T}^+_{h,\Delta t,k} q_0\right\| \leq M t_k (h^\theta + \Delta t) \|q_0\|_2, \tag{1.3.12}$$

$$\left\|\pi_h \mathbb{T}^-_{t_k} q_0 - \mathbb{T}^-_{h,\Delta t,k} q_0\right\| \leq M (\tau - t_k)(h^\theta + \Delta t) \|q_0\|_2. \tag{1.3.13}$$

2. *Il existe $M > 0$, $h^* > 0$ et $\Delta t^* > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $h \in (0, h^*)$, tout $\Delta t \in (0, \Delta t^*)$ et tout $0 \leq k \leq K$*

$$\|((\mathbb{T}^-_{t_k}\mathbb{T}^+_{t_k})^n - (\mathbb{T}^-_{h,\Delta t,k}\mathbb{T}^+_{h,\Delta t,k})^n) q_0\| \leq M \left[h^\theta + n\tau \left(h^\theta + \Delta t\right)\right] \|q_0\|_2. \tag{1.3.14}$$

Démonstration.

1. Il suffit d'appliquer la Proposition 1.3.3 avec $F(t_k) = F^k_h = 0$ pour tout $0 \leq k \leq K$ et $q_{0,h,\Delta t} = \pi_h q_0$.

2. Remarquons dans un premier temps que

$$\begin{aligned}\|(\mathbb{T}^-_{t_k}\mathbb{T}^+_{t_k})^n q_0 - (\mathbb{T}^-_{h,\Delta t,k}\mathbb{T}^+_{h,\Delta t,k})^n q_0\| &\leq \|(\mathbb{T}^-_{t_k}\mathbb{T}^+_{t_k})^n q_0 - \pi_h(\mathbb{T}^-_{t_k}\mathbb{T}^+_{t_k})^n q_0\| \\ &\quad + \|\pi_h(\mathbb{T}^-_{t_k}\mathbb{T}^+_{t_k})^n q_0 - (\mathbb{T}^-_{h,\Delta t,k}\mathbb{T}^+_{h,\Delta t,k})^n q_0\|. \end{aligned} \tag{1.3.15}$$

En utilisant (1.2.2), le fait que $\|(\mathbb{T}^-_t\mathbb{T}^+_t)^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}(A))} \leq 1$ (voir le Lemme 0.1.18), le premier terme de l'inégalité précédente devient

$$\|(\mathbb{T}^-_{t_k}\mathbb{T}^+_{t_k})^n q_0 - \pi_h(\mathbb{T}^-_{t_k}\mathbb{T}^+_{t_k})^n q_0\| \leq M h^\theta \|q_0\|_2, \qquad \forall\, h \in (0, h^*). \tag{1.3.16}$$

Pour le second terme de (1.3.15), on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $h \in (0, h^*)$ et tout $\Delta t \in (0, \Delta t^*)$ (pour un certain $\Delta t^* > 0$), on a

$$\|\pi_h(\mathbb{T}^-_{t_k}\mathbb{T}^+_{t_k})^n q_0 - (\mathbb{T}^-_{h,\Delta t,k}\mathbb{T}^+_{h,\Delta t,k})^n q_0\| \leq M n t_k \left(h^\theta + \Delta t\right) \|q_0\|_2. \tag{1.3.17}$$

En effet

$$\begin{aligned}&\left\|\pi_h \mathbb{T}^-_{t_k}\mathbb{T}^+_{t_k} q_0 - \mathbb{T}^-_{h,\Delta t,k}\mathbb{T}^+_{h,\Delta t,k} q_0\right\| \\ &\qquad \leq \left\|\pi_h \mathbb{T}^-_{t_k}\mathbb{T}^+_{t_k} q_0 - \mathbb{T}^-_{h,\Delta t,k}\mathbb{T}^+_{t_k} q_0\right\| + \left\|\mathbb{T}^-_{h,\Delta t,k}\left(\mathbb{T}^+_{t_k} q_0 - \mathbb{T}^+_{h,\Delta t,k} q_0\right)\right\|.\end{aligned}$$

En utilisant (1.3.13) et le Lemme 0.1.18, on obtient

$$\left\|\pi_h \mathbb{T}^-_{t_k}\mathbb{T}^+_{t_k} q_0 - \mathbb{T}^-_{h,\Delta t,k}\mathbb{T}^+_{t_k} q_0\right\| \leq M t_k \left(h^\theta + \Delta t\right) \|q_0\|_2.$$

Évidemment $\|\mathbb{T}^-_{h,\Delta t,k}\|_{\mathcal{L}(X)}$ est uniformément borné en h et Δt, et donc par (1.2.2) et (1.3.12), on obtient

$$\begin{aligned}\left\|\mathbb{T}^-_{h,\Delta t,k}\left(\mathbb{T}^+_{t_k} - \mathbb{T}^+_{h,\Delta t,k}\right) q_0\right\| &\leq \left\|\mathbb{T}^+_{t_k} q_0 - \pi_h \mathbb{T}^+_{t_k} q_0\right\| + \left\|\pi_h \mathbb{T}^+_{t_k} q_0 - \mathbb{T}^+_{h,\Delta t,k} q_0\right\| \\ &\leq M t_k \left(h^\theta + \Delta t\right) \|q_0\|_2.\end{aligned}$$

Donc

$$\left\|\pi_h \mathbb{T}^-_{t_k}\mathbb{T}^+_{t_k} q_0 - \mathbb{T}^-_{h,\Delta t,k}\mathbb{T}^+_{h,\Delta t,k} q_0\right\| \leq M t_k \left(h^\theta + \Delta t\right) \|q_0\|_2, \tag{1.3.18}$$

ce qui montre que (1.3.17) est vérifiée pour $n = 1$. Supposons maintenant qu'elle soit vérifiée pour $n \geq 1$

$$\|\pi_h (\mathbb{T}^-_{t_k}\mathbb{T}^+_{t_k})^{n-1} q_0 - (\mathbb{T}^-_{h,\Delta t,k}\mathbb{T}^+_{h,\Delta t,k})^{n-1} q_0\| \leq M(n-1) t_k \left(h^\theta + \Delta t\right) \|q_0\|_2. \tag{1.3.19}$$

En écrivant

$$\begin{aligned}&\|\pi_h (\mathbb{T}^-_{t_k}\mathbb{T}^+_{t_k})^{n} q_0 - (\mathbb{T}^-_{h,\Delta t,k}\mathbb{T}^+_{h,\Delta t,k})^{n} q_0\| \\ &\qquad \leq \|\pi_h \mathbb{T}^-_{t_k}\mathbb{T}^+_{t_k} (\mathbb{T}^-_{t_k}\mathbb{T}^+_{t_k})^{n-1} q_0 - \mathbb{T}^-_{h,\Delta t,k}\mathbb{T}^+_{h,\Delta t,k} (\mathbb{T}^-_{t_k}\mathbb{T}^+_{t_k})^{n-1} q_0\| \\ &\qquad\qquad + \|\mathbb{T}^-_{h,\Delta t,k}\mathbb{T}^+_{h,\Delta t,k}((\mathbb{T}^-_{t_k}\mathbb{T}^+_{t_k})^{n-1} q_0 - (\mathbb{T}^-_{h,\Delta t,k}\mathbb{T}^+_{h,\Delta t,k})^{n-1} q_0)\|,\end{aligned}$$

on obtient par le Lemme 0.1.18, le fait que $\|\mathbb{T}^-_{h,\Delta t,k}\mathbb{T}^+_{h,\Delta t,k}\|_{\mathcal{L}(X)}$ soit uniformément borné en h et Δt, (1.3.18) et (1.3.19) que

$$\|\pi_h (\mathbb{T}^-_{t_k}\mathbb{T}^+_{t_k})^{n} q_0 - (\mathbb{T}^-_{h,\Delta t,k}\mathbb{T}^+_{h,\Delta t,k})^{n} q_0\| \leq M \left[(1 + (n-1)) t_k \left(h^\theta + \Delta t\right)\right] \|q_0\|_2,$$

qui est exactement (1.3.17). En substituant (1.3.16) et (1.3.17) dans (1.3.15), on obtient le résultat annoncé. ■

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le Théorème 1.3.1.

Démonstration du Théorème 1.3.1. Comme dans le cas de la semi-discrétisation, on com-

mence par introduire le terme $\sum_{n=0}^{N_{h,\Delta t}} (\mathbb{T}^-_{h,\Delta t,K}\mathbb{T}^+_{h,\Delta t,K})^n z^-(0)$ dans la différence $z_0 - z_{0,h,\Delta t}$

$$\begin{aligned} z_0 - z_{0,h,\Delta t} &= \sum_{n=0}^{\infty}(\mathbb{T}^-_\tau\mathbb{T}^+_\tau)^n z^-(0) - \sum_{n=0}^{N_{h,\Delta t}} (\mathbb{T}^-_{h,\Delta t,K}\mathbb{T}^+_{h,\Delta t,K})^n \left(z_h^-\right)^0, \\ &= \sum_{n>N_{h,\Delta t}} (\mathbb{T}^-_\tau\mathbb{T}^+_\tau)^n z^-(0) + \sum_{n=0}^{N_{h,\Delta t}} \left((\mathbb{T}^-_\tau\mathbb{T}^+_\tau)^n - (\mathbb{T}^-_{h,\Delta t,K}\mathbb{T}^+_{h,\Delta t,K})^n\right) z^-(0) \\ &\qquad + \sum_{n=0}^{N_h}(\mathbb{T}^-_{h,\Delta t,K}\mathbb{T}^+_{h,\Delta t,K})^n \left(z^-(0) - \left(z_h^-\right)^0\right). \end{aligned}$$

Alors on a

$$\|z_0 - z_{0,h,\Delta t}\| \leq S_1 + S_2 + S_3, \tag{1.3.20}$$

avec

$$\begin{cases} S_1 = \displaystyle\sum_{n>N_{h,\Delta t}} \left\|(\mathbb{T}^-_\tau\mathbb{T}^+_\tau)^n z^-(0)\right\|, \\ S_2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{N_{h,\Delta t}} \left\|\left((\mathbb{T}^-_\tau\mathbb{T}^+_\tau)^n - (\mathbb{T}^-_{h,\Delta t,K}\mathbb{T}^+_{h,\Delta t,K})^n\right) z^-(0)\right\|, \\ S_3 = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{N_h} \left\|(\mathbb{T}^-_{h,\Delta t,K}\mathbb{T}^+_{h,\Delta t,K})^n\right\|_{\mathcal{L}(X)}\right) \left\|z^-(0) - \left(z_h^-\right)^0\right\|. \end{cases}$$

Puisque $\eta = \|\mathbb{T}^-_\tau\mathbb{T}^+_\tau\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$, Le premier terme est facilement borné

$$S_1 \leq M\frac{\eta^{N_{h,\Delta t}+1}}{1-\eta}\|z_0\|_2. \tag{1.3.21}$$

S_2 quant à lui peut être borné par l'estimation (1.3.14) de la Proposition 1.3.4

$$S_2 \leq M\left(\sum_{n=0}^{N_{h,\Delta t}} \left(h^\theta + n\tau(h^\theta + \Delta t)\right)\right)\|z^-(0)\|_2, \qquad \forall\, h \in (0,h^*), \Delta t \in (0,\Delta t^*).$$

D'après (0.2.8) et le fait que $\|\mathbb{T}^-_\tau\mathbb{T}^+_\tau\|_{\mathcal{D}(A^2)} < 1$ (voir Lemme 0.1.18), on a pour tout $h \in (0,h^*)$ et tout $\Delta t \in (0,\Delta t^*)$

$$S_2 \leq M\left[1 + (1+\tau)N_{h,\Delta t} + (1+\tau)N_{h,\Delta t}^2\right]\left(h^\theta + \Delta t\right)\|z_0\|_2. \tag{1.3.22}$$

Il reste le terme S_3, mais puisque $\|\mathbb{T}^-_{h,\Delta t,K}\mathbb{T}^+_{h,\Delta t,K}\|_{\mathcal{L}(X)}$ est uniformément borné en h et Δt, on a

$$\begin{aligned} S_3 &\leq MN_{h,\Delta t}\left\|z^-(0) - (z_h^-)^0\right\|, \\ &\leq MN_{h,\Delta t}\left(\left\|z^-(0) - \pi_h z^-(0)\right\| + \left\|\pi_h z^-(0) - (z_h^-)^0\right\|\right). \end{aligned} \tag{1.3.23}$$

Par (1.2.2) et (0.2.8), on obtient immédiatement que

$$\left\|z^-(0) - \pi_h z^-(0)\right\| \leq M h^\theta \|z_0\|_2. \tag{1.3.24}$$

Pour le second terme $\pi_h z^-(0) - (z_h^-)^0$, on applique deux fois la Proposition 1.3.3. Une première fois à l'observateur rétrograde retourné en temps $z^-(\tau - \cdot)$ puis à l'observateur direct z^+ (le retournement temporel n'est là que parce que la Proposition 1.3.3 est écrite pour des problèmes de Cauchy avec donnée initiale et non finale). Après quelques calculs, on obtient pour tout $h \in (0, h^*)$ et tout $\Delta t \in (0, \Delta t^*)$

$$\begin{aligned}\left\|\pi_h z^-(0) - (z_h^-)^0\right\| \leq M(h^\theta + \Delta t)\left[\tau(\|z^+(\tau)\|_2 + \|C^* y\|_{1,\infty} + \|C^* \dot{y}\|_\infty) + \tau^2 \|C^* y\|_{2,\infty}\right] \\ + \Delta t \sum_{\ell=1}^{K} \|C^*\left(y(\tau - t_\ell) - y_h^{K-\ell}\right)\| + \Delta t \sum_{\ell=1}^{K} \|C^*\left(y(t_\ell) - y_h^\ell\right)\|. \end{aligned} \tag{1.3.25}$$

En appliquant le résultat de régularité (0.1.13) du Lemme 0.1.19 avec une donnée initiale nulle, on obtient

$$\|z^+(\tau)\|_2 \leq \tau \|C^* y\|_{2,\infty}.$$

Puisque $C^*C \in \mathcal{L}\left(\mathcal{D}\left(A_0^2\right)\right) \cap \mathcal{L}\left(\mathcal{D}(A_0)\right)$ et $\|z\|_{2,\infty} = \|z_0\|_2$ (iA_0 est anti-adjoint), (1.3.25) devient

$$\left\|\pi_h z^-(0) - (z_h^-)^0\right\| \leq M(h^\theta + \Delta t)(\tau + \tau^2)\|z_0\|_2 + 2\Delta t \sum_{\ell=0}^{K} \|C^*\left(y(t_\ell) - y_h^\ell\right)\|.$$

En substituant la relation précédente et (1.3.24) dans (1.3.23), on obtient

$$S_3 \leq M N_{h,\Delta t}\left((h^\theta + \Delta t)(1 + \tau + \tau^2)\|z_0\|_2 + \Delta t \sum_{\ell=0}^{K} \|C^*\left(y(t_\ell) - y_h^\ell\right)\|\right). \tag{1.3.26}$$

En substituant (1.3.21), (1.3.22) et (1.3.26) dans (1.3.20), on obtient pour tout $h \in (0, h^*)$ et tout $\Delta t \in (0, \Delta t^*)$

$$\begin{aligned}\|z_0 - z_{0,h,\Delta t}\| \leq M\Bigg(N_{h,\Delta t}\Delta t \sum_{\ell=0}^{K} \left\|C^*\left(y(t_\ell) - y_h^\ell\right)\right\| + \frac{\eta^{N_{h,\Delta t}+1}}{1-\eta}\|z_0\|_2 \\ + (h^\theta + \Delta t)\left[1 + (1 + \tau + \tau^2)N_{h,\Delta t} + (1+\tau)N_{h,\Delta t}^2\right]\|z_0\|_2\Bigg),\end{aligned}$$

ce qui amène au résultat (en réduisant h^* et Δt^* si nécessaire). ■

Le Corollaire 1.3.2 n'est alors, comme dans le cas semi-discrétisé, qu'un choix particulier de $N_{h,\Delta t}$ dans ce Théorème.

Démonstration du Corollaire 1.3.2. On souhaite faire en sorte que le terme

$$\left(\frac{\eta^{N_{h,\Delta t}+1}}{1-\eta} + (h^\theta + \Delta t)(1+\tau)N_{h,\Delta t}^2\right)\|z_0\|_2$$

tende vers zéro, quand h et Δt tendent vers zéro, dans le Théorème 1.3.1. En posant

$$N_{h,\Delta t} = \theta\frac{\ln(h^\theta + \Delta t)}{\ln \eta},$$

il existe un $M_\tau > 0$ tel que

$$\left(\frac{\eta^{N_{h,\Delta t}+1}}{1-\eta} + (h^\theta + \Delta t)(1+\tau)N_{h,\Delta t}^2\right)\|z_0\|_2 = M_\tau(h^\theta + \Delta t)\ln^2(h^\theta + \Delta t)\|z_0\|_2 \underset{h,\Delta t\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

■

Remarque 1.3.3. Remarquons qu'en particulier, nous n'avons pas besoin de condition de type CFL.

1.4 Simulations numériques

Les simulations numériques de cette section ont été effectuées sous MATLAB.

Nous allons étudier numériquement l'estimation d'erreur du Théorème 1.3.1 sur l'exemple de l'équation de Schrödinger sur l'intervalle $[0, 1]$, avec condition de Dirichlet. On discrétise pour cela les observateurs continus (1.1.2)–(1.1.3), en utilisant une discrétisation en espace (paramètre h) par éléments finis d'ordre un, et par différence finie implicite en temps (paramètre Δt). On suppose que l'on observe l'état sur l'intervalle $[0, \frac{1}{10}]$, durant un intervalle de temps $[0, \tau]$, $\tau > 0$. D'après Tucsnak et Weiss [88, Théorème 8.5.1.] (voir aussi Komornik [52] dont la démonstration pour l'équation de Petrowski est identique à celle pour l'équation de Schrödinger), le système continu est alors exactement observable en tout temps $\tau > 0$.

Qualité de la reconstruction

Nous commençons par tester la qualité de la reconstruction, en choisissant $\tau = 0,2$. On ajoute 5% de bruit composé de sinusoïdes de fréquence différente et d'aléatoire uniforme. Le nombre d'itérations $N_{h,\Delta t}$ est choisi égal à 15. Le choix du gain $\gamma = 500$ sera discuté plus loin.

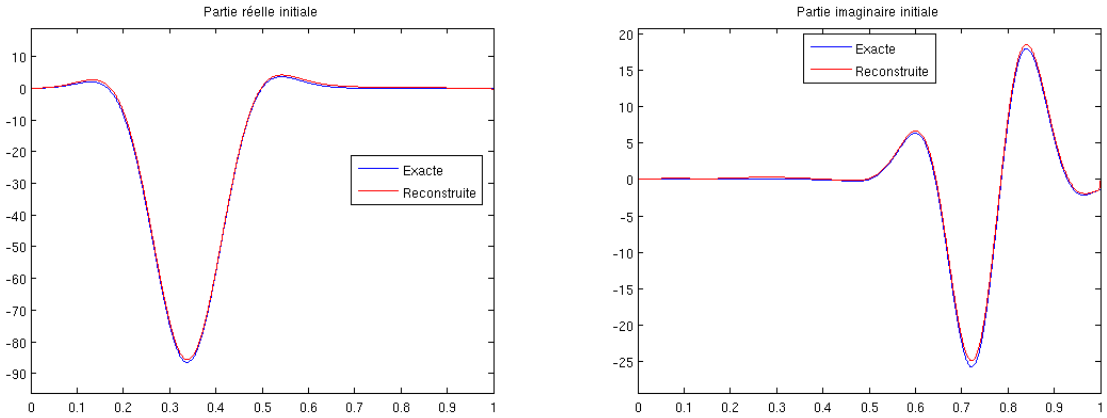


FIGURE 1.1 – Parties réelle et imaginaire initiales reconstruites, après 15 itérations, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 500$ et 5% de bruit.

La donnée initiale z_0 à reconstruire est la suivante

$$z_0(x) = 100\cos(2\pi x)\sin(\pi x)\exp\left\{-50(x-0,325)^2\right\} \\ + 30i\cos(7\pi x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\exp\left\{-50(x-0,75)^2\right\}, \qquad \forall\, x \in [0,1].$$

On peut apprécier sur la FIGURE 1.1 la qualité remarquable de la reconstruction.

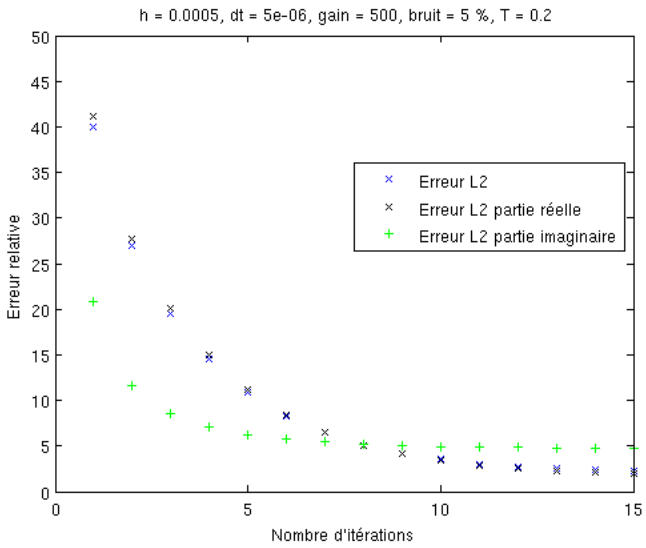


FIGURE 1.2 – Erreur de reconstruction de donnée initiale, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 500$ et 5% de bruit.

On remarque sur la FIGURE 1.2 que l'erreur totale de reconstruction est inférieure à 5% après une dizaine d'itérations, et continue de décroître.

Une question naturelle concerne la possibilité de reconstruire des données initiales à

haute fréquence. On teste avec la donnée initiale z_0 suivante

$$z_0(x) = 100\cos(150\pi x)\sin(\pi x)\exp\{-50(x-0,325)^2\} \\ + 30i\cos(7\pi x)\sin(75\pi x)\exp\{-50(x-0,75)^2\}, \qquad \forall\, x \in [0,1].$$

Contrairement aux cas de l'équation des ondes (comme on le verra sur les FIGURE 2.4 et

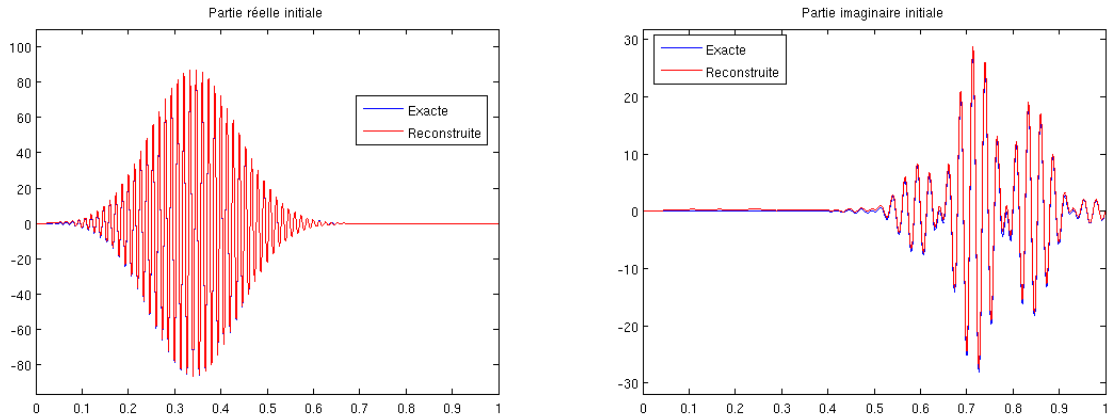


FIGURE 1.3 – Parties réelle et imaginaire initiales très oscillante, après 15 itérations, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 500$ et 5% de bruit.

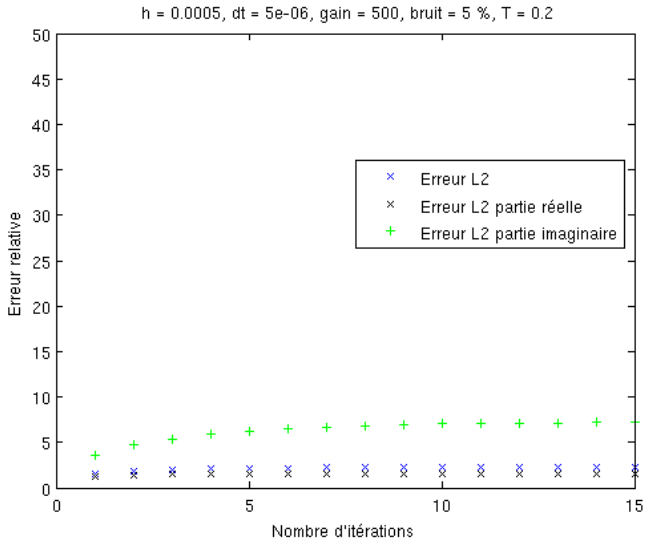


FIGURE 1.4 – Erreur de reconstruction de donnée initiale très oscillante, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 500$ et 5% de bruit.

FIGURE 2.5), il semble que les données haute fréquence soient bien, voire mieux reconstruites, que les données basse fréquence, comme on peut le voir sur la FIGURE 1.3. Dès la première itération, l'erreur relative est déjà sous la barre des 5% (voir FIGURE 1.4). Le profil croissant des erreurs est dû aux 5% de bruit ajouté à la mesure, on retrouve bien le profil exponentiel lorsqu'on ne bruite pas la mesure.

On choisira maintenant la première donnée initiale pour le reste de nos tests.

Influence du gain

Les simulations numériques montrent qu'en faisant varier le paramètre de gain γ, on peut sensiblement agir sur le taux de décroissance exponentielle de l'erreur (voir FIGURE 1.5). Ainsi, l'erreur relative globale n'atteint pas les 50% pour $\gamma = 5$, même après 15 itérations. Elle est de 32% pour $\gamma = 50$, après 5 itérations, alors qu'elle est inférieure à 10% pour $\gamma = 250$ et $\gamma = 500$. Nous choisirons dorénavant un gain $\gamma = 500$ (arbitrairement en comparaison avec les résultats obtenus pour $\gamma = 250$).

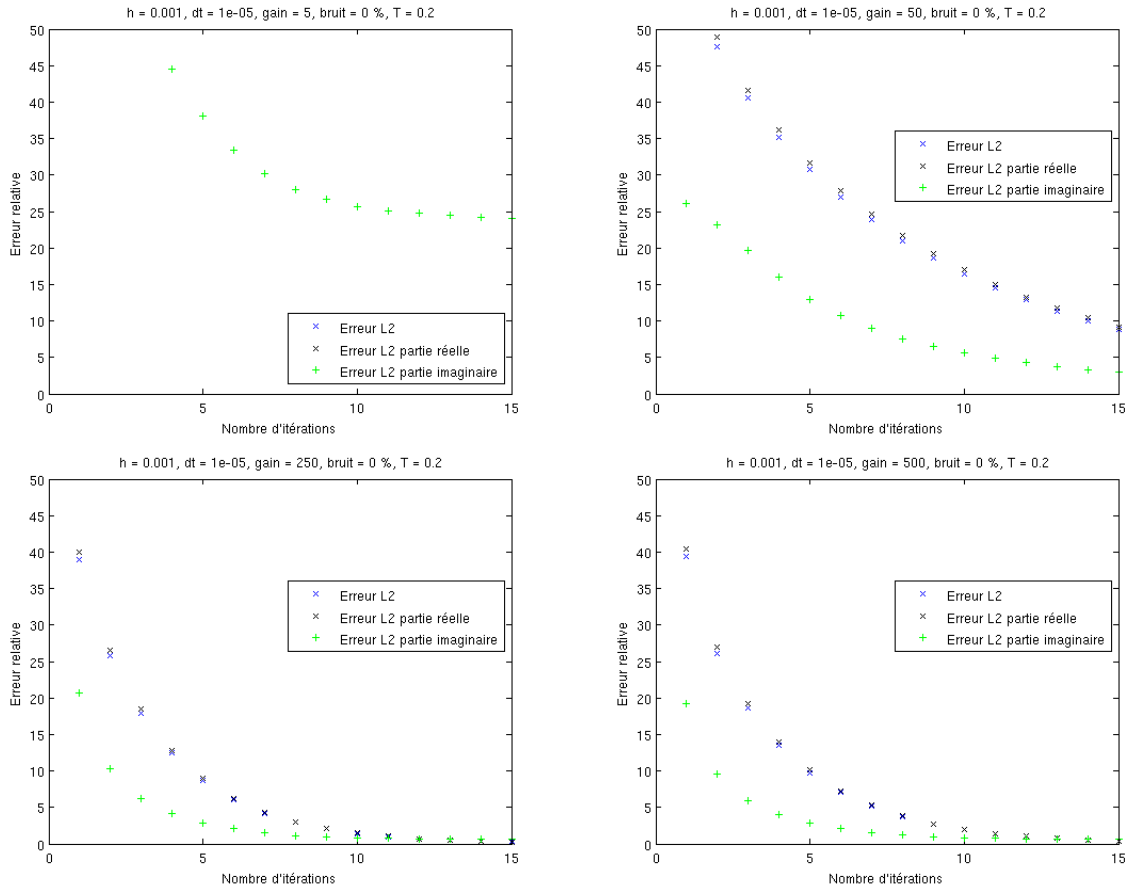


FIGURE 1.5 – Modification de l'erreur de reconstruction en fonction du gain, sans bruit.

Robustesse au bruit

On teste dans un premier temps la robustesse de l'algorithme à un bruit composé de sinusoïdes de fréquence différente et d'aléatoire uniforme. Sur la FIGURE 1.6, on compare la reconstruction avec respectivement 0, 2, 5 et 15% de bruit (par rapport à la norme L^2 de la mesure). On remarque que le bruit agit essentiellement, dans notre exemple, sur la reconstruction de la partie imaginaire. On peut raisonnablement dire que l'algorithme est

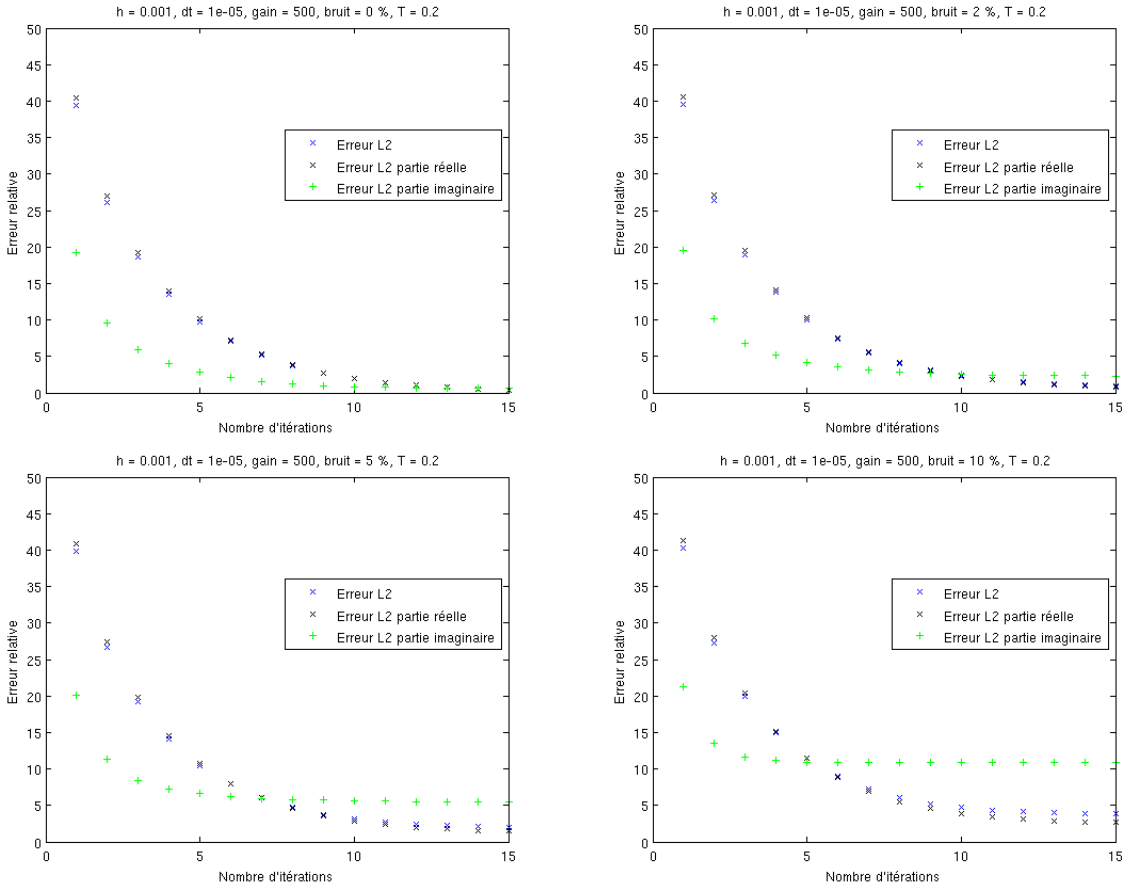


FIGURE 1.6 – Robustesse de la reconstruction à un bruit composé de sinusoïdes de fréquences différentes et d'aléatoire uniforme : 0%, 2%, 5% et 10%.

robuste. Nous nous sommes cependant posé une autre question, concernant la robustesse à des bruits de même intensité, mais de fréquences différentes.

En regardant la FIGURE 1.7, il semble que les bruits basse fréquence, comme on pouvait s'en douter, affectent plus l'algorithme de reconstruction que les bruits haute fréquence. On peut même remarquer une augmentation de l'erreur sur la reconstruction de la partie imaginaire de la donnée initiale dans le premier cas. Remarquons également que le bruit choisi dans les tests sur la qualité de reconstruction avait plus affecté l'algorithme lorsque la donnée initiale était très oscillante (voir FIGURE 1.4). Ceci étant probablement dû à l'excellente qualité obtenue dès la première itération.

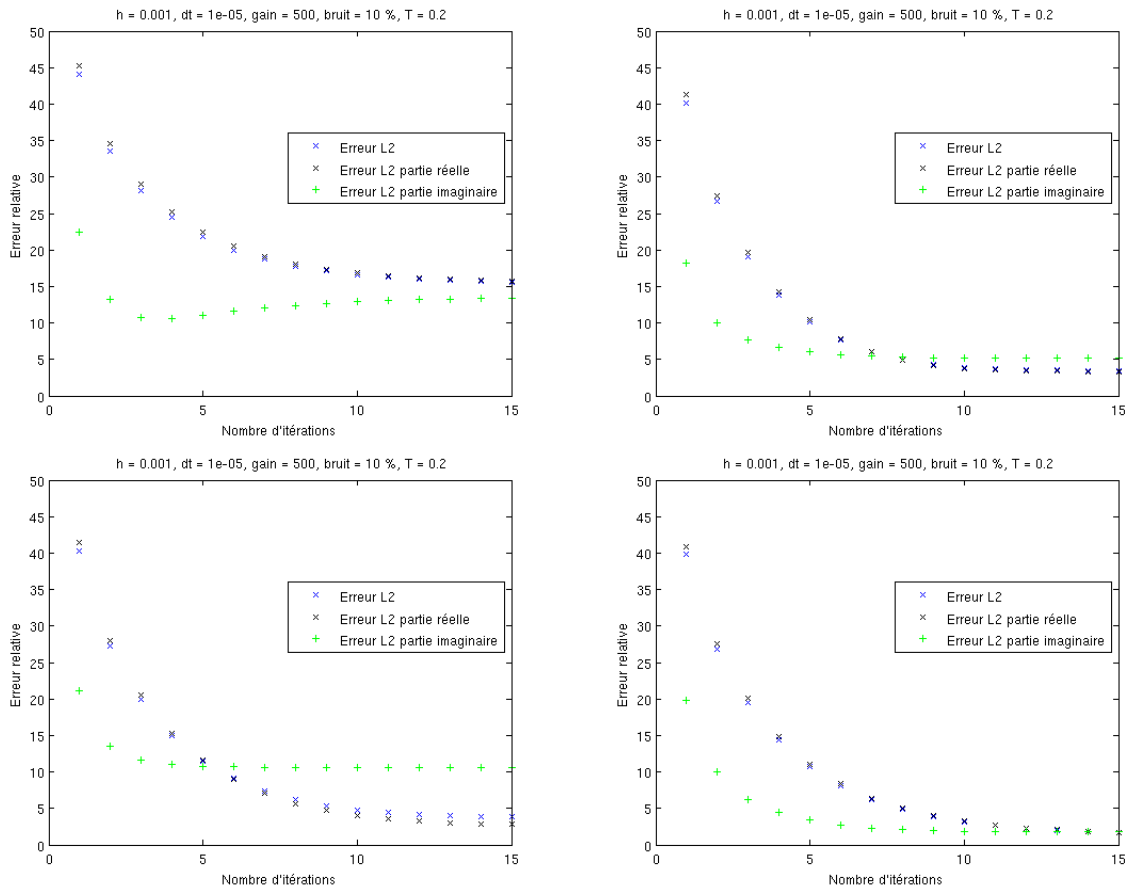


FIGURE 1.7 – Robustesse de la reconstruction à un bruit composé de sinusoïdes de fréquence de plus en plus élevées.

Temps d'observation

Comme nous l'avons dit, l'exemple que nous considérons est exactement observable en tout temps $\tau > 0$. Nous allons donc regarder l'influence du temps d'observation sur la qualité de la reconstruction.

Bien que la qualité finale de la reconstruction n'est pas efficacement améliorée, le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre cette précision est d'autant plus réduit qu'on augmente le temps d'observation, comme on le voit sur la FIGURE 1.8. En particulier, avec un temps d'observation $\tau = 0,1$, il faut plus de 50 itérations pour atteindre moins de 2% d'erreur relative, alors que 8 itérations suffisent lorsque $\tau = 0,3$.

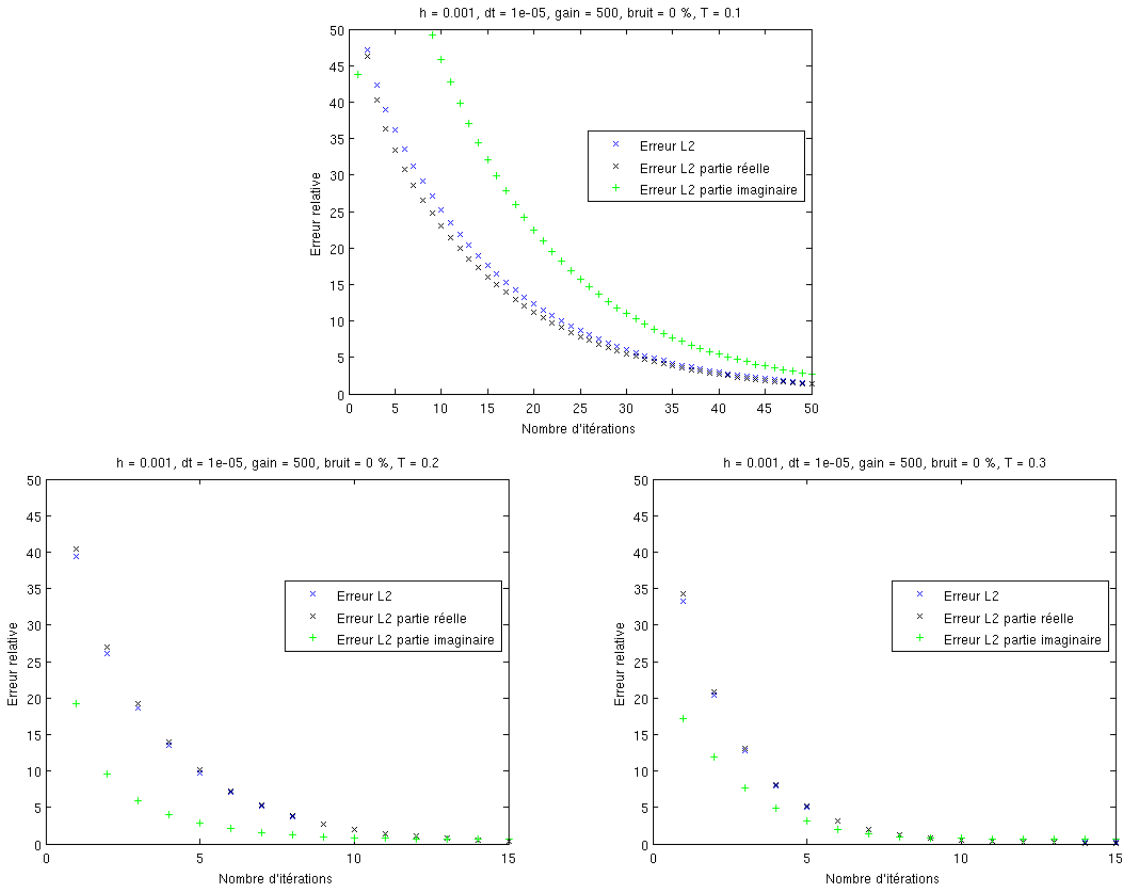


FIGURE 1.8 – Parties réelle et imaginaire initiales, après 15 itérations, avec $\tau = 0,1$, $\tau = 0,2$ puis $\tau = 0,3$, $\gamma = 500$ et sans bruit.

Chapitre 2

Équation des ondes

Sommaire

2.1 Le problème continu **68**

2.2 Discrétisation en espace **70**

2.2.1 Résultat principal 70

2.2.2 Démonstrations 73

2.3 Discrétisation totale **75**

2.3.1 Résultat principal 75

2.3.2 Démonstrations 77

2.4 Simulations numériques **82**

2.4.1 Tests en dimension un 82

2.4.2 Tests en dimension deux 91

2.4.3 Un exemple en dimension trois 99

Une grande partie des résultats de ce chapitre ont été publiés dans les articles [42, 43] écrit conjointement avec Karim Ramdani.

Dans ce Chapitre 2, nous montrons des résultats d'analyse numérique sur la discrétisation spatiale, puis totale, de l'algorithme de reconstruction de données initiales appliqué à une équation des ondes abstraite avec opérateur d'observation borné. En particulier, nous donnons dans les Corollaires 2.2.2 et 2.3.2 le nombre d'itérations optimal à calculer, et l'ordre de convergence correspondant. Nous concluons par quelques simulations numériques (avec MATLAB) en une dimension d'espace, où l'on pousse l'étude plus loin que dans le Chapitre 1 pour l'équation de Schrödinger, en vérifiant par exemple l'ordre de convergence. Quelques exemples (avec MATLAB) en deux dimensions d'espaces sont également présentés, et nous terminons par un exemple en trois dimensions (avec Gmsh et GetDP).

La méthode est sensiblement la même que pour l'équation de Schrödinger traitée dans le Chapitre 1, et les calculs, lorsqu'ils diffèrent, ne sont que des adaptations de ceux déjà effectués, c'est pourquoi nous réduirons succinctement les démonstrations.

2.1 Le problème continu

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné, $d \in \mathbb{N}^*$, de frontière $\partial\Omega$ régulière. On s'intéresse dans ce chapitre à l'équation des ondes sur Ω avec condition de Dirichlet homogène au bord, qui s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} w(x,t) - \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2} w(x,t) = 0, & \forall\, x \in \Omega, t \geq 0, \\ w(x,t) = 0, & \forall\, x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ w(x,0) = w_0(x) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), & \\ \dfrac{\partial}{\partial t} w(x,0) = w_1(x) \in H_0^1(\Omega). & \end{cases}$$

La question qui nous intéresse ici concerne la possibilité de reconstruire le couple (w_0, w_1) dans $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ à partir de la connaissance de la vitesse de déplacement de l'état $\dot{w}(x,t)$ sur un sous-domaine $\mathcal{O} \subset \Omega$ pendant un intervalle de temps $[0, \tau]$, d'où le terme d'*observation interne*. On réécrit ce problème de manière abstraite, en posant

$$A_0 = -\Delta = -\sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \,:\, \mathcal{D}(A_0) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to H = L^2(\Omega),$$

et

$$C_0 : H \to Y = L^2(\Omega), \qquad C_0 z = \chi_{|\mathcal{O}} z, \qquad \forall\, z \in H,$$

où $\chi_{|\mathcal{O}}$ est la fonction caractéristique de $\mathcal{O}$. On obtient alors l'équation différentielle

$$\begin{cases} \ddot{w}(t) + A_0 w(t) = 0, & \forall\, t \geq 0, \\ w(0) = w_0 \in \mathcal{D}(A_0), & \dot{w}(0) = w_1 \in \mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right). \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Cependant, notre méthode est écrite pour des systèmes du premier ordre. On pose donc également les définitions suivantes.

$$z(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix}, \qquad X = \mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right) \times H, \tag{2.1.2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A_0) \times \mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right), \tag{2.1.3}$$

$$C \in \mathcal{L}(X, Y), \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & C_0 \end{bmatrix}. \tag{2.1.4}$$

L'espace X est muni de la norme produit définie par

$$\|z\| = \sqrt{\|z_1\|^2_{\frac{1}{2}} + \|z_2\|^2}, \qquad \forall\, z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in X.$$

On obtient alors l'équation différentielle (2.1.5) à laquelle nous allons appliquer la méthode de reconstruction par observateurs décrite dans les préliminaires. Plus précisément, on se place dans le cadre suivant.

Soient H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa norme associée $\| \cdot \|$ et $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \to H$ un opérateur auto-adjoint défini positif. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on notera $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ et $\| \cdot \|_\alpha$, le produit scalaire et la norme associée dans $\mathcal{D}(A_0^\alpha)$. L'équation de (type) ondes sous forme du premier ordre, avec les définitions (2.1.2) et (2.1.3), est donnée par

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t), & \forall\, t \geq 0, \\ z(0) = z_0 \in \mathcal{D}(A). \end{cases} \tag{2.1.5}$$

Soit $C_0 \in \mathcal{L}(H, Y)$ un opérateur d'observation, où Y est un autre espace de Hilbert. En définissant C par (2.1.4), on considère $y(t)$ la mesure sur $[0, \tau]$ donnée par (0.2.2). On suppose que $\tau > 0$ est tel que (A, C) soit exactement observable en temps τ.

On commence par remarquer que A est anti-adjoint, en d'autres termes, l'équation des ondes est conservative. Cependant, si iA est auto-adjoint, il n'a pas de signe, et le problème que l'on regarde ici ne rentre donc pas dans le cadre de l'équation de Schrödinger traitée dans le Chapitre 1.
Par le Théorème de Liu 0.1.16, $A^+ = A - C^*C$ (resp. $A^- = -A - C^*C$) est le générateur d'un C_0-semi-groupe $\mathbb{T}^+$ (resp. $\mathbb{T}^-$). Alors les observateurs direct et rétrograde (0.2.4) et (0.2.7) sont donnés par (on choisit $z_0^+ = 0$ comme première estimation de z_0)

$$\begin{cases} \dot{z}^+(t) = Az^+(t) - C^*Cz^+(t) + C^*y(t), & \forall\, t \in [0, \tau], \\ z^+(0) = 0, \end{cases} \tag{2.1.6}$$

$$\begin{cases} \dot{z}^-(t) = Az^-(t) + C^*Cz^-(t) - C^*y(t), & \forall\, t \in [0, \tau], \\ z^-(\tau) = z^+(\tau). \end{cases} \tag{2.1.7}$$

D'après la Remarque (0.2.6), on a l'équation (0.2.10), que l'on rappelle

$$z_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+)^n z^-(0).$$

En pratique, il faut donc discrétiser les observateurs (2.1.6)-(2.1.7) et tronquer la série de Neumann pour reconstruire numériquement z_0. Nous allons dans la suite faire l'analyse

numérique d'un schéma combinant la méthode de Galerkin en espace et la méthode d'Euler implicite en temps. Pour cela, nous avons besoin de supposer quelques hypothèses de régularité supplémentaires.

- On ne reconstruit que les données initiales $z_0 \in \mathcal{D}(A^2) = \mathcal{D}\left(A_0^{\frac{3}{2}}\right) \times \mathcal{D}(A_0)$.
- On suppose que $C_0^* C_0 \in \mathcal{L}\left(\mathcal{D}\left(A_0^{\frac{3}{2}}\right)\right) \cap \mathcal{L}\left(\mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right)\right)$ (en pratique, cela signifie que la fonction $\chi_{|\mathcal{O}}$ est approchée par une fonction lisse).

Dans l'analyse numérique que nous allons faire, nous travaillons plus souvent sur les équations du second ordre. On réécrit donc les observateurs (2.1.6) et (2.1.7) sous cette forme.

$$\begin{cases} \ddot{w}^+(t) + A_0 w^+(t) + C_0^* C_0 \dot{w}^+(t) = C_0^* y(t), & \forall\, t \in [0,\tau], \\ w^+(0) = 0, \quad \dot{w}^+(0) = 0, \end{cases} \tag{2.1.8}$$

$$\begin{cases} \ddot{w}^-(t) + A_0 w^-(t) - C_0^* C_0 \dot{w}^-(t) = -C_0^* y(t), & \forall\, t \in [0,\tau], \\ w^-(\tau) = w^+(\tau), \quad \dot{w}^-(\tau) = \dot{w}^+(\tau). \end{cases} \tag{2.1.9}$$

Nos preuves sont basées sur l'analyse de convergence des discrétisations spatiale et totale des equations différentielles du second ordre. Pour plus de clarté, nous omettons les démonstrations redondantes avec le cas de l'équation de Schrödinger traité au Chapitre 1. À notre connaissance, seuls les cas particuliers des systèmes conservatifs (*i.e.* sans amortissement), voir par exemple Raviart et Thomas [73, p. 197] ou Dautray et Lions [29, p. 921], et des systèmes avec amortissement constant, voir Geveci et Kok [40], sont traités dans la littérature sur l'analyse de convergence de la discrétisation totale d'un système de type ondes. Pour un récent panorama de l'approximation numérique des équations des ondes dans la théorie du contrôle, nous recommandons le papier de Zuazua [92] au lecteur.

2.2 Discrétisation en espace

2.2.1 Résultat principal

Clairement, les deux observateurs (2.1.8)-(2.1.9) peuvent se réécrire sous la forme plus générale d'un problème de Cauchy avec donnée initiale (le second est simplement retourné temporellement)

$$\begin{cases} \ddot{p}(t) + A_0 p(t) + C_0^* C_0 \dot{p}(t) = f(t), & \forall\, t \in [0,\tau], \\ p(0) = p_0, \quad \dot{p}(0) = p_1, \end{cases} \tag{2.2.1}$$

où l'on a posé

- pour l'observateur direct (2.1.8) : $f(t) = C_0^* y(t) = C_0^* C_0 \dot{w}(t)$ et $(p_0, p_1) = (0,0)$,
- pour l'observateur rétrograde (2.1.9) :
  $f(t) = -C_0^* y(\tau - t) = -C_0^* C_0 \dot{w}(\tau - t)$ et $(p_0, p_1) = (w^+(\tau), -\dot{w}^+(\tau)) \in \mathcal{D}(A^2)$.

Remarquons qu'avec ces notations, les C_0-semi-groupes $\mathbb{T}^{\pm}$ sont donnés par

$$\mathbb{T}_t^+ \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} \qquad \mathbb{T}_t^- \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(\tau - t) \\ -\dot{p}(\tau - t) \end{bmatrix}$$

où p est la solution de (2.2.1) avec $f = 0$.

Nous allons utiliser la méthode de Galerkin pour discrétiser l'équation (2.2.1). Plus précisement, on suppose que l'on dispose d'une suite de sous-espaces de dimension finie $(H_h)_{h>0}$ dans $\mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right)$, muni de la norme héritée de H. On note π_h la projection de $\mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right)$ dans H_h, et on suppose qu'il existe $M > 0$, $\theta > 0$ et $h^* > 0$ tels que pour tout $h \in (0, h^*)$, on ait

$$\|\pi_h \varphi - \varphi\| \leq M h^\theta \|\varphi\|_{\frac{1}{2}}, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right). \tag{2.2.2}$$

Pour tout $(p_0, p_1) \in \mathcal{D}(A^2)$, la formulation variationnelle de (2.2.1) s'écrit

$$\begin{cases} \langle \ddot{p}(t), \varphi \rangle + \langle p(t), \varphi \rangle_{\frac{1}{2}} + \langle C_0^* C_0 \dot{p}(t), \varphi \rangle = \langle f(t), \varphi \rangle, \\ p(0) = p_0, \quad \dot{p}(0) = p_1, \end{cases} \tag{2.2.3}$$

pour tout $t \in [0, \tau]$ et tout $\varphi \in \mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right)$. On suppose que l'on dispose d'approximations de p_0, p_1 et f, notées $p_{0,h} \in H_h$, $p_{1,h} \in H_h$ et f_h, dans leurs espaces respectifs $\mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right)$, H et $L^1([0, \tau], H)$. Pour tout $t \in [0, \tau]$, on définit $p_h(t) \in H_h$ comme l'unique solution du problème variationnel

$$\begin{cases} \langle \ddot{p}_h(t), \varphi_h \rangle + \langle p_h(t), \varphi_h \rangle_{\frac{1}{2}} + \langle C_0^* C_0 \dot{p}_h(t), \varphi_h \rangle = \langle f_h(t), \varphi_h \rangle, \\ p_h(0) = p_{0,h}, \quad \dot{p}_h(0) = p_{1,h}. \end{cases} \tag{2.2.4}$$

pour tout $\varphi_h \in H_h$.

Ceci conduit en particulier à la définition des versions semi-discrétisées $\mathbb{T}_h^{\pm}$ des C_0-semi-groupes $\mathbb{T}^{\pm}$. En effet, il suffit de poser

$$\mathbb{T}_{h,t}^+ \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_h(t) \\ \dot{p}_h(t) \end{bmatrix} \qquad \mathbb{T}_{h,t}^- \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_h(\tau - t) \\ -\dot{p}_h(\tau - t) \end{bmatrix}$$

où p_h est la solution de (2.2.4), avec $f_h = 0$ et $(p_{0,h}, p_{1,h}) = (\pi_h p_0, \pi_h p_1)$.

On suppose maintenant que l'on dispose d'une approximation y_h de y (correspondant au pas de discrétisation h) dans $L^1([0, \tau], Y)$. Soient w_h^+ et w_h^- les approximations respectives de w^+, solution de (2.1.8), et w^-, solution de (2.1.9), données par le schéma (2.2.4). Autrement dit, w_h^+ et w_h^- sont les solutions de

$$\begin{cases} \left\langle \ddot{w}_h^+(t), \varphi_h \right\rangle + \left\langle w_h^+(t), \varphi_h \right\rangle_{\frac{1}{2}} + \left\langle C_0^* C_0 \dot{w}_h^+(t), \varphi_h \right\rangle = \left\langle C_0^* y_h(t), \varphi_h \right\rangle, \\ w_h^+(0) = 0, \quad \dot{w}_h^+(0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left\langle \ddot{w}_h^-(t), \varphi_h \right\rangle + \left\langle w_h^-(t), \varphi_h \right\rangle_{\frac{1}{2}} - \left\langle C_0^* C_0 \dot{w}_h^-(t), \varphi_h \right\rangle = - \left\langle C_0^* y_h(t), \varphi_h \right\rangle, \\ w_h^-(\tau) = w_h^+(\tau), \quad \dot{w}_h^-(\tau) = \dot{w}_h^+(\tau), \end{cases}$$

pour tout $t \in [0, \tau]$ et tout $\varphi_h \in H_h$. On écrit alors une version discrétisée de l'égalité (0.2.10)

$$\begin{bmatrix} w_{0,h} \\ w_{1,h} \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{N_h} (\mathbb{T}_{h,\tau}^- \mathbb{T}_{h,\tau}^+)^n \begin{bmatrix} w_h^-(0) \\ \dot{w}_h^-(0) \end{bmatrix}, \tag{2.2.5}$$

où N_h est un réel positif (on somme donc jusqu'à sa partie entière).

Les résultats suivants nous garantissent que $(w_{0,h}, w_{1,h})$ est une "bonne" approximation de (w_0, w_1).

Théorème 2.2.1. *Soient $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \to H$ un opérateur auto-adjoint défini positif et $C_0 \in \mathcal{L}(H, Y)$ tel que $C_0^* C_0 \in \mathcal{L}\left(\mathcal{D}\left(A_0^{\frac{3}{2}}\right)\right) \cap \mathcal{L}\left(\mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right)\right)$. On définit (A, C) par (2.1.3) et (2.1.4), on suppose que (A, C) est exactement observable en temps $\tau > 0$ et on pose $\eta = \|\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$. Si $(w_0, w_1) \in \mathcal{D}\left(A_0^{\frac{3}{2}}\right) \times \mathcal{D}(A_0)$ est la donnée initiale de (2.1.1), on définit $(w_{0,h}, w_{1,h})$ par (2.2.5).*

Alors il existe $M > 0$ et $h^* > 0$ tels que pour tout $h \in (0, h^*)$

$$\|w_0 - w_{0,h}\|_{\frac{1}{2}} + \|w_1 - w_{1,h}\| \leq M \Bigg[\left(\frac{\eta^{N_h+1}}{1-\eta} + h^\theta \tau N_h^2 \right) \left(\|w_0\|_{\frac{3}{2}} + \|w_1\|_1 \right) + N_h \int_0^\tau \|C_0^* (y(s) - y_h(s))\| ds \Bigg].$$

Un choix particulier de N_h permet d'obtenir une erreur uniquement en fonction de h.

Corollaire 2.2.2. *Sous les hypothèses du Théorème 2.2.1, on pose*

$$N_h = \theta \frac{\ln h}{\ln \eta}.$$

Alors il existe $M_\tau > 0$ et $h^* > 0$ tels que pour tout $h \in (0, h^*)$

$$\|w_0 - w_{0,h}\|_{\frac{1}{2}} + \|w_1 - w_{1,h}\| \leq M_\tau \Bigg[h^\theta \ln^2 h \left(\|w_0\|_{\frac{3}{2}} + \|w_1\|_1 \right) + |\ln h| \int_0^\tau \|C_0^* (y(s) - y_h(s))\| ds \Bigg].$$

Remarque 2.2.1. Remarquons que le dernier terme de cette estimation donne directement une borne pour le bruit maximum admissible, en fonction de h, permettant la convergence.

2.2.2 Démonstrations

La Proposition suivante nous donne une estimation de l'erreur d'approximation de (2.2.3) par le schéma de Galerkin (2.2.4). Ce type d'estimation est connu, on peut se référer par exemple à [73, 7].

Proposition 2.2.3. *Soient* $(p_0, p_1) \in \mathcal{D}\left(A_0^{\frac{3}{2}}\right) \times \mathcal{D}(A_0)$, $(p_{0,h}, p_{1,h}) \in H_h \times H_h$, p, *solution de* (2.2.3), *et* p_h, *solution de* (2.2.4). *Supposons que* $C_0^* C_0 \in \mathcal{L}\left(\mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right)\right)$, *alors il existe* $M > 0$ *et* $h^* > 0$ *tels que pour tout* $t \in [0, \tau]$ *et tout* $h \in (0, h^*)$

$$\|\pi_h p(t) - p_h(t)\|_{\frac{1}{2}} + \|\pi_h \dot{p}(t) - \dot{p}_h(t)\| \leq M\Bigg(\|\pi_h p_0 - p_{0,h}\|_{\frac{1}{2}} + \|\pi_h p_1 - p_{1,h}\| + h^\theta \left[t\left(\|p_0\|_{\frac{3}{2}} + \|p_1\|_1 + \|f\|_{\frac{1}{2},\infty}\right) + t^2 \|f\|_{1,\infty}\right]\Bigg) + \int_0^t \|f(s) - f_h(s)\| ds.$$

Démonstration. En soustrayant (2.2.3) de (2.2.4), on obtient (on omet la dépendance en temps pour plus de lisibilité) pour tout $\varphi_h \in H_h$

$$\langle \ddot{p} - \ddot{p}_h, \varphi_h \rangle + \langle p - p_h, \varphi_h \rangle_{\frac{1}{2}} + \langle C_0^* C_0 (\dot{p} - \dot{p}_h), \varphi_h \rangle = \langle f - f_h, \varphi_h \rangle .$$

En se rappelant que $\langle \pi_h p - p, \varphi_h \rangle_{\frac{1}{2}} = 0$ pour tout $\varphi_h \in H_h$ (propriété de la projection) et que $\pi_h \ddot{p}$ a un sens grâce à la régularité de p (c'est une conséquence directe de l'affirmation (0.1.12) avec $q = \begin{bmatrix} p \\ \dot{p} \end{bmatrix}$), on obtient de l'égalité précédente, pour tout $\varphi_h \in H_h$

$$\langle \pi_h \ddot{p} - \ddot{p}_h, \varphi_h \rangle + \langle \pi_h p - p_h, \varphi_h \rangle_{\frac{1}{2}} = \langle \pi_h \ddot{p} - \ddot{p}, \varphi_h \rangle + \langle C_0^* C_0 (\dot{p}_h - \dot{p}), \varphi_h \rangle + \langle f - f_h, \varphi_h \rangle . \tag{2.2.6}$$

En posant

$$\mathcal{E}_h = \frac{1}{2}\|\pi_h \dot{p} - \dot{p}_h\|^2 + \frac{1}{2}\|\pi_h p - p_h\|_{\frac{1}{2}}^2,$$

on a

$$\dot{\mathcal{E}}_h = \langle \pi_h \ddot{p} - \ddot{p}_h, \pi_h \dot{p} - \dot{p}_h \rangle + \langle \pi_h p - p_h, \pi_h \dot{p} - \dot{p}_h \rangle_{\frac{1}{2}} .$$

En appliquant (2.2.6) avec $\varphi_h = \pi_h \dot{p} - \dot{p}_h$ et en substituant le résultat dans l'équatin précédente, on obtient par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que C_0 soit borné et l'existence d'un $M > 0$ tel que

$$\dot{\mathcal{E}}_h \leq \left(\|\pi_h \ddot{p} - \ddot{p}\| + M\|\pi_h \dot{p} - \dot{p}\| + \|f - f_h\|\right) \underbrace{\|\pi_h \dot{p} - \dot{p}_h\|}_{\leq \sqrt{2\mathcal{E}_h}} .$$

Puisque $\dfrac{\dot{\mathcal{E}}_h}{\sqrt{2\mathcal{E}_h}} = \dfrac{d}{dt}\sqrt{2\mathcal{E}_h}$, en obtient en intégrant de 0 à t

$$\|\pi_h p(t) - p_h(t)\|_{\frac{1}{2}} + \|\pi_h \dot{p}(t) - \dot{p}_h(t)\| \leq M\Bigg(\|\pi_h p_0 - p_{0,h}\|_{\frac{1}{2}} + \|\pi_h p_1 - p_{1,h}\| \\ + \int_0^t \left(\|\pi_h \ddot{p}(s) - \ddot{p}(s)\| + \|\pi_h \dot{p}(s) - \dot{p}(s)\|\right) ds + \int_0^t \|f(s) - f_h(s)\| ds \Bigg). \quad (2.2.7)$$

Il reste alors à borner $\|\pi_h \ddot{p}(t) - \ddot{p}(t)\|$ et $\|\pi_h \dot{p}(t) - \dot{p}(t)\|$ pour tout $t \in [0, \tau]$. En utilisant (2.2.2) et l'injection continue de $\mathcal{D}(A^\alpha)$ dans $\mathcal{D}(A^\beta)$ pour $\alpha \geq \beta$, on obtient

$$\begin{cases} \|\pi_h \ddot{p}(t) - \ddot{p}(t)\| \leq M h^\theta \|\ddot{p}(t)\|_{\frac{1}{2}}, \\ \|\pi_h \dot{p}(t) - \dot{p}(t)\| \leq M h^\theta \|\dot{p}(t)\|_{\frac{1}{2}} \leq M h^\theta \|\dot{p}(t)\|_1, \end{cases} \qquad \forall\, t \in [0, \tau],\ h \in (0, h^*).$$

Alors par la relation (0.1.14) prouvée dans le Lemme 0.1.19 pour l'équation d'ordre 1 (obtenue en posant $q = \begin{bmatrix} p \\ \dot{p} \end{bmatrix}$ et $F = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}$), on obtient pour tout $t \in [0, \tau]$ et tout $h \in (0, h^*)$

$$\|\pi_h \ddot{p}(t) - \ddot{p}(t)\| + \|\pi_h \dot{p}(t) - \dot{p}(t)\| \leq M h^\theta \left(\|p_0\|_{\frac{3}{2}} + \|p_1\|_1 + t\|f\|_{1,\infty} + \|f\|_{\frac{1}{2},\infty} \right).$$

En substituant cette inégalité dans (2.2.7), on obtient le résultat. ■

Ce résultat nous permet d'obtenir une estimation des erreurs de discrétisation de $\mathbb{T}^\pm$. Soulignons le fait que ce résultat a été prouvé récemment dans [21], on ne donnera donc pas la démonstration, qui est très proche de celle de la Proposition 1.2.4.

Proposition 2.2.4. *Soit* $\Pi_h = \begin{bmatrix} \pi_h & 0 \\ 0 & \pi_h \end{bmatrix}$. *Sous les hypothèses de la Proposition 2.2.3, les affirmations suivantes sont vérifiées.*

1. *Il existe $M > 0$ et $h^* > 0$ tels que pour tout $t \in (0, \tau)$ et tout $h \in (0, h^*)$*

$$\left\| (\Pi_h \mathbb{T}_t^+ - \mathbb{T}_{h,t}^+) \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} \right\| \leq M t h^\theta \left(\|p_0\|_{\frac{3}{2}} + \|p_1\|_1 \right),$$

$$\left\| (\Pi_h \mathbb{T}_t^- - \mathbb{T}_{h,t}^-) \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} \right\| \leq M(\tau - t) h^\theta \left(\|p_0\|_{\frac{3}{2}} + \|p_1\|_1 \right).$$

2. *Il existe $M > 0$ et $h^* > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $t \in [0, \tau]$ et tout $h \in (0, h^*)$, on ait*

$$\left\| ((\mathbb{T}_t^- \mathbb{T}_t^+)^n - (\mathbb{T}_{h,t}^- \mathbb{T}_{h,t}^+)^n) \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} \right\| \leq M(1 + n\tau) h^\theta \left(\|p_0\|_{\frac{3}{2}} + \|p_1\|_1 \right).$$

On peut maintenant démontrer le Théorème 2.2.1

Démonstration du Théorème 2.2.1. En introduisant le terme $\sum_{n=0}^{N_h}(\mathbb{T}_{h,\tau}^{-}\mathbb{T}_{h,\tau}^{+})^n \begin{bmatrix} w^-(0) \\ \dot{w}^-(0) \end{bmatrix}$, on peut réécrire la différence $\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_{0,h} \\ w_{1,h} \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty}(\mathbb{T}_{\tau}^{-}\mathbb{T}_{\tau}^{+})^n \begin{bmatrix} w^-(0) \\ \dot{w}^-(0) \end{bmatrix} - \sum_{n=0}^{N_h}(\mathbb{T}_{h,\tau}^{-}\mathbb{T}_{h,\tau}^{+})^n \begin{bmatrix} w_h^-(0) \\ \dot{w}_h^-(0) \end{bmatrix}$ sous la forme

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_{0,h} \\ w_{1,h} \end{bmatrix} = \sum_{n>N_h}(\mathbb{T}_{\tau}^{-}\mathbb{T}_{\tau}^{+})^n \begin{bmatrix} w^-(0) \\ \dot{w}^-(0) \end{bmatrix} + \sum_{n=0}^{N_h}\left((\mathbb{T}_{\tau}^{-}\mathbb{T}_{\tau}^{+})^n - (\mathbb{T}_{h,\tau}^{-}\mathbb{T}_{h,\tau}^{+})^n\right) \begin{bmatrix} w^-(0) \\ \dot{w}^-(0) \end{bmatrix} + \sum_{n=0}^{N_h}(\mathbb{T}_{h,\tau}^{-}\mathbb{T}_{h,\tau}^{+})^n \begin{bmatrix} w^-(0) - w_h^-(0) \\ \dot{w}^-(0) - \dot{w}_h^-(0) \end{bmatrix}.$$

Alors

$$\left\| \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_{0,h} \\ w_{1,h} \end{bmatrix} \right\| \leq S_1 + S_2 + S_3,$$

où l'on a posé

$$\begin{cases} S_1 = \sum_{n>N_h} \left\| (\mathbb{T}_{\tau}^{-}\mathbb{T}_{\tau}^{+})^n \begin{bmatrix} w^-(0) \\ \dot{w}^-(0) \end{bmatrix} \right\|, \\ S_2 = \sum_{n=0}^{N_h} \left\| \left((\mathbb{T}_{\tau}^{-}\mathbb{T}_{\tau}^{+})^n - (\mathbb{T}_{h,\tau}^{-}\mathbb{T}_{h,\tau}^{+})^n\right) \begin{bmatrix} w^-(0) \\ \dot{w}^-(0) \end{bmatrix} \right\|, \\ S_3 = \left(\sum_{n=0}^{N_h} \left\| (\mathbb{T}_{h,\tau}^{-}\mathbb{T}_{h,\tau}^{+})^n \right\|_{\mathcal{L}(X)} \right) \left\| \begin{bmatrix} w^-(0) - w_h^-(0) \\ \dot{w}^-(0) - \dot{w}_h^-(0) \end{bmatrix} \right\|. \end{cases}$$

En suivant exactement la même méthode que dans la démonstration du Théorème 1.2.1 du Chapitre 1 dans le cas de l'équation de Schrödinger, on obtient le résultat annoncé. ■

2.3 Discrétisation totale

2.3.1 Résultat principal

Pour approcher numériquement la solution de (2.2.3) en espace et en temps, on combine un schéma d'Euler implicite en temps avec la méthode de Galerkin utilisée précédemment. On discrétise l'intervalle $[0, \tau]$ par un pas de temps $\Delta t > 0$, en posant $t_k = k\Delta t$ pour tout entier $0 \leq k \leq K$, où l'on suppose, sans perte de généralité, que $\tau = K\Delta t$. Alors les dérivées première et seconde d'une fonction du temps f deux fois continument dérivable seront approchées en t_k par

$$f'(t_k) \simeq D_t f(t_k) = \frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{\Delta t}.$$

$$f''(t_k) \simeq D_{tt} f(t_k) = \frac{f(t_k) - 2f(t_{k-1}) + f(t_{k-2})}{\Delta t^2}.$$

On suppose que $(p_{0,h,\Delta t}, p_{1,h,\Delta t}) \in H_h \times H_h$ et f_h^k, pour $0 \leq k \leq K$, sont des approximations de (p_0, p_1) et $f(t_k)$ dans X et H respectivement. On définit $(p_h^k)_{0\leq k\leq K}$ comme la solution du problème suivant : pour tout $\varphi_h \in H_h$

$$\begin{cases} \left\langle D_{tt} p_h^k, \varphi_h \right\rangle + \left\langle p_h^k, \varphi_h \right\rangle_{\frac{1}{2}} + \left\langle C_0^* C_0 D_t p_h^k, \varphi_h \right\rangle = \left\langle f_h^k, \varphi_h \right\rangle, \qquad 2 \leq k \leq K, \\ p_h^0 = p_{0,h,\Delta t}, \quad p_h^1 = p_h^0 + \Delta t\, p_{1,h,\Delta t}. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Cela conduit en particulier à des approximations $\mathbb{T}^{\pm}_{h,\Delta t,k}$ des opérateurs $\mathbb{T}^{\pm}_{t_k}$ en posant

$$\begin{cases} \mathbb{T}^+_{t_k} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} \simeq \mathbb{T}^+_{h,\Delta t,k} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} p_h^k \\ D_t p_h^k \end{bmatrix}, \\ \mathbb{T}^-_{t_k} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} \simeq \mathbb{T}^-_{h,\Delta t,k} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} p_h^{K-k} \\ -D_t p_h^{K-k} \end{bmatrix}, \end{cases}$$

où p_h^k est solution de (2.3.1) avec $f_h^k = 0$ pour tout $0 \leq k \leq K$ et $(p_{0,h,\Delta t}, p_{1,h,\Delta t}) = (\pi_h p_0, \pi_h p_1)$.

Si l'on dispose, pour tout $0 \leq k \leq K$, de y_h^k, une approximation de $y(t_k)$ dans Y, on définit les suites $\left((w_h^+)^k\right)_{0\leq k\leq K}$ et $\left((w_h^-)^k\right)_{0\leq k\leq K}$, approximations respectives de (2.1.8) et (2.1.9), vérifiant pour tout $\varphi_h \in H_h$

$$\begin{cases} \left\langle D_{tt}(w_h^+)^k, \varphi_h \right\rangle + \left\langle (w_h^+)^k, \varphi_h \right\rangle_{\frac{1}{2}} + \left\langle C_0^* C_0 D_t (w_h^+)^k, \varphi_h \right\rangle = \left\langle C_0^*(y_h)^k, \varphi_h \right\rangle, \quad 2 \leq k \leq K, \\ (w_h^+)^0 = 0, \quad (w_h^+)^1 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left\langle D_{tt}(w_h^-)^k, \varphi_h \right\rangle + \left\langle (w_h^-)^k, \varphi_h \right\rangle_{\frac{1}{2}} - \left\langle C_0^* C_0 D_t (w_h^-)^k, \varphi_h \right\rangle = -\left\langle C_0^*(y_h)^k, \varphi_h \right\rangle, \quad 2 \leq k \leq K, \\ (w_h^-)^K = (w_h^+)^K, \quad (w_h^-)^{K-1} = (w_h^+)^{K-1}. \end{cases}$$

De cette discrétisation, on déduit une version totalement discrétisée de l'égalité (0.2.10)

$$\begin{bmatrix} w_{0,h,\Delta t} \\ w_{1,h,\Delta t} \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{N_h} (\mathbb{T}^-_{h,\Delta t,K} \mathbb{T}^+_{h,\Delta t,K})^n \begin{bmatrix} (w_h^-)^0 \\ D_t (w_h^-)^1 \end{bmatrix}. \tag{2.3.2}$$

Alors notre résultat principal, qui est la contre-partie totalement discrétisée du Théorème 2.2.1, garantit le fait que $(w_{0,h,\Delta t}, w_{1,h,\Delta t})$ est une "bonne" approximation de (w_0, w_1).

Théorème 2.3.1. *Soient $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \to H$ un opérateur auto-adjoint défini positif et $C_0 \in \mathcal{L}(H, Y)$ tel que $C_0^* C_0 \in \mathcal{L}\left(\mathcal{D}\left(A_0^{\frac{3}{2}}\right)\right) \cap \mathcal{L}\left(\mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right)\right)$. On définit (A, C) par (2.1.3) et (2.1.4), on suppose que (A, C) est exactement observable en temps $\tau > 0$ et on pose $\eta = \|\mathbb{T}^-_\tau \mathbb{T}^+_\tau\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$. Si $(w_0, w_1) \in \mathcal{D}\left(A_0^{\frac{3}{2}}\right) \times \mathcal{D}(A_0)$ est la donnée initiale de (2.1.1), on définit $(w_{0,h,\Delta t}, w_{1,h,\Delta t})$ par (2.3.2)*

Alors il existe $M > 0$, $h^* > 0$ et $\Delta t^* > 0$ tels que pour tout $h \in (0, h^*)$ et tout $\Delta t \in$

$(0, \Delta t^*)$

$$\|w_0 - w_{0,h,\Delta t}\|_{\frac{1}{2}} + \|w_1 - w_{1,h,\Delta t}\| \leq M\left[\left(\frac{\eta^{N_{h,\Delta t}+1}}{1-\eta} + \left(h^\theta + \Delta t\right)(1+\tau)\, N_{h,\Delta t}^2\right)\left(\|w_0\|_{\frac{3}{2}} + \|w_1\|_1\right) + N_{h,\Delta t}\Delta t \sum_{\ell=0}^{K} \left\|C_0^*(y(t_\ell) - y_h^\ell)\right\|\right].$$

Comme dans le cas semi-discrétisé, on peut choisir $N_{h,\Delta t}$ de telle façon que l'on ait une erreur en h et Δt uniquement.

Corollaire 2.3.2. *Sous les hypothèses du Théorème 2.3.1, on pose*

$$N_{h,\Delta t} = \frac{\ln(h^\theta + \Delta t)}{\ln \eta}. \tag{2.3.3}$$

Alors il existe $M_\tau > 0$, $h^* > 0$ et $\Delta t^* > 0$ tels que pour tout $h \in (0, h^*)$ et $\Delta t \in (0, \Delta t^*)$

$$\|w_0 - w_{0,h,\Delta t}\|_{\frac{1}{2}} + \|w_1 - w_{1,h,\Delta t}\| \leq M_\tau\left[(h^\theta + \Delta t)\ln^2(h^\theta + \Delta t)\left(\|w_0\|_{\frac{3}{2}} + \|w_1\|_1\right) + \left|\ln(h^\theta + \Delta t)\right| \Delta t \sum_{\ell=0}^{K} \left\|C_0^*\left(y(t_\ell) - y_h^\ell\right)\right\|\right].$$

2.3.2 Démonstrations

Encore une fois, l'outil principal de ces résultats est une estimation de l'erreur de la discrétisation totale (2.3.1) de l'équation (2.2.3), contre-partie de la Proposition 2.2.3.

Proposition 2.3.3. *Soient $(p_0, p_1) \in \mathcal{D}\left(A_0^{\frac{3}{2}}\right) \times \mathcal{D}(A_0)$, $(p_{0,h,\Delta t}, p_{1,h,\Delta t}) \in H_h \times H_h$, p, la solution de (2.2.3), et $(p_h^k)_k$, la solution de (2.3.1). Supposons que $C_0^* C_0 \in \mathcal{L}\left(\mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right)\right)$, alors il existe $M > 0$, $h^* > 0$ et $\Delta t^* > 0$ tels que pour tout $1 \leq k \leq K$, tout $h \in (0, h^*)$ et tout $\Delta t \in (0, \Delta t^*)$*

$$\|\pi_h p(t_k) - p_h^k\|_{\frac{1}{2}} + \|\pi_h \dot{p}(t_k) - D_t p_h^k\| \leq M\Bigg(\|\pi_h p_0 - p_{0,h,\Delta t}\|_{\frac{1}{2}} + \|\pi_h p_1 - p_{1,h,\Delta t}\| + \left(h^\theta + \Delta t\right)\left[t_k\left(\|p_0\|_{\frac{3}{2}} + \|p_1\|_1 + \|f\|_{\frac{1}{2},\infty} + \|\dot{f}\|_\infty\right) + t_k^2\|f\|_{1,\infty}\right] + \Delta t \sum_{\ell=1}^{k} \|f(t_\ell) - f_h^\ell\|\Bigg).$$

Démonstration. On note $r_1(t_k)$ le reste d'ordre un du développement en série de Taylor p autour de t_{k-1}. Alors

$$\dot{p}(t_k) = \frac{p(t_k) - p(t_{k-1})}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta t} r_1(t_k) = D_t p(t_k) - \frac{1}{\Delta t} r_1(t_k), \tag{2.3.4}$$

On a

$$\begin{aligned}\|\pi_h\dot{p}(t_k) - D_t p_h^k\| &\leq \|\pi_h\dot{p}(t_k) - \pi_h D_t p(t_k)\| + \|D_t(\pi_h p(t_k) - p_h^k)\|,\\ &\leq \frac{1}{\Delta t}\|r_1(t_k)\| + \|D_t(\pi_h p(t_k) - p_h^k)\|.\end{aligned}$$

De là, l'erreur que l'on a à borner devient

$$\|\pi_h p(t_k) - p_h^k\|_{\frac{1}{2}} + \|\pi_h\dot{p}(t_k) - D_t p_h^k\| \leq 2\sqrt{\mathcal{E}_h^k} + \frac{1}{\Delta t}\|r_1(t_k)\| \tag{2.3.5}$$

où l'on a posé pour tout $1 \leq k \leq K$

$$\mathcal{E}_h^k = \frac{1}{2}\left\{\left\|D_t\left(\pi_h p(t_k) - p_h^k\right)\right\|^2 + \left\|\pi_h p(t_k) - p_h^k\right\|_{\frac{1}{2}}^2\right\}.$$

D'un autre coté, si on note $r_2(t_k)$ le reste d'ordre un du développement de $\dot{p}$ autour de t_{k-1}, alors

$$\ddot{p}(t_k) = D_{tt}p(t_k) - \gamma^k, \tag{2.3.6}$$

où

$$\gamma^k = \frac{1}{\Delta t^2}\left(r_1(t_k) - r_1(t_{k-1})\right) + \frac{1}{\Delta t}r_2(t_k).$$

En utilisant (2.3.4) et (2.3.6), en soustrayant (2.3.1) de la formulation variationnelle (2.2.3) en $t = t_k$ et pour tout $\varphi = \varphi_h \in H_h$, on obtient facilement

$$\begin{aligned}&\left\langle D_{tt}\left(\pi_h p(t_k) - p_h^k\right), \varphi_h\right\rangle + \left\langle \pi_h p(t_k) - p_h^k, \varphi_h\right\rangle_{\frac{1}{2}} = \left\langle D_{tt}\left(\pi_h p(t_k) - p(t_k)\right), \varphi_h\right\rangle\\ &\quad - \left\langle C_0^* C_0 D_t\left(p(t_k) - p_h^k\right), \varphi_h\right\rangle + \left\langle \gamma^k, \varphi_h\right\rangle + \frac{1}{\Delta t}\left\langle C_0^* C_0 r_1(t_k), \varphi_h\right\rangle + \left\langle f(t_k) - f_h^k, \varphi_h\right\rangle.\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

D'après l'identité

$$\frac{1}{2}\left(\|u\|^2 - \|v\|^2 + \|u - v\|^2\right) = \mathrm{Re}\,\langle u - v, u\rangle, \qquad \forall\, u, v \in H,$$

on a pour tout $2 \leq k \leq K$

$$D_t\mathcal{E}_h^k \leq \left\langle D_{tt}\left(\pi_h p(t_k) - p_h^k\right), D_t\left(\pi_h p(t_k) - p_h^k\right)\right\rangle + \left\langle \pi_h p(t_k) - p_h^k, D_t\left(\pi_h p(t_k) - p_h^k\right)\right\rangle_{\frac{1}{2}}.$$

En prenant $\varphi_h = D_t\left(\pi_h p(t_k) - p_h^k\right)$ dans (2.3.7), en substituant l'inégalité précédente et en utilisant le fait que C_0 soit borné, on obtient l'existence d'un $M > 0$ tels que pour tout

$2 \leq k \leq K$

$$D_t\mathcal{E}_h^k \leq M\Bigg[\|D_{tt}\left(\pi_h p(t_k) - p(t_k)\right)\| + \|D_t\left(\pi_h p(t_k) - p(t_k)\right)\| + \|\gamma^k\| + \frac{1}{\Delta t}\|r_1(t_k)\| + \|f(t_k) - f_h^k\|\Bigg]\left\|D_t(\pi_h p(t_k) - p_h^k)\right\|. \quad (2.3.8)$$

En utilisant les relations (1.3.7) et (1.3.8), on obtient des estimations (2.2.2), (2.3.8), (2.3.4), (2.3.6) et des inégalités (0.1.13) et (0.1.14) du Lemme 0.1.19 appliquées à l'équation générale des observateurs (2.2.1) sous leur forme du premier ordre, que pour tout $h \in (0, h^*)$

$$D_t\sqrt{\mathcal{E}_h^k} \leq M\Bigg\{h^\theta\left(\|p_0\|_{\frac{3}{2}} + \|p_1\|_1 + t_k\|f\|_{1,\infty} + \|f\|_{\frac{1}{2},\infty}\right) + \|f(t_k) - f_h^k\| + \frac{h^\theta}{\Delta t^2}\|r_1(t_k) - r_1(t_{k-1})\|_{\frac{1}{2}} + \frac{h^\theta}{\Delta t}\left(\|r_1(t_k)\|_{\frac{1}{2}} + \|r_2(t_k)\|_{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{\Delta t^2}\|r_1(t_k) - r_1(t_{k-1})\| + \frac{1}{\Delta t}\Big(\|r_1(t_k)\| + \|r_2(t_k)\|\Big)\Bigg\}. \quad (2.3.9)$$

Pour conclure, il reste les termes résiduels r_1 et r_2 à borner. Par définition de r_2, le théorème des accroissements finis et (0.1.14), on obtient l'existence d'un $M > 0$ tel que

$$\|r_2(t_k)\|_{\frac{1}{2}} \leq M\Delta t\left(\|p_0\|_{\frac{3}{2}} + \|p_1\|_1 + t_k\|f\|_{1,\infty} + \|f\|_{\frac{1}{2},\infty}\right). \quad (2.3.10)$$

Par régularité de p (voir le Lemme 0.1.19 appliquée à la forme générale des observateurs (2.2.1) sous leur forme du premier ordre), le terme r_2 peut s'écrire sous forme intégrale

$$r_2(t_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{d^3p}{ds^3}(s)\,(t_{k-1} - s)\,ds,$$

dans H. D'après l'équation générale (2.2.1) vérifiée par p et le fait que C_0 soit borné, on a

$$\left\|\frac{d^3p}{dt^3}(t)\right\| = \left\|\frac{d\ddot{p}}{dt}(t)\right\| = \left\|\frac{d}{dt}\Big\{-A_0p(t) - C_0^*C_0\dot{p}(t) + f(t)\Big\}\right\|, \leq \|\dot{p}(t)\|_1 + M\|\ddot{p}(t)\| + \|\dot{f}(t)\|. \quad (2.3.11)$$

D'où, encore une fois par (0.1.14)

$$\|r_2(t_k)\| \leq M\Delta t^2\left(\|p_0\|_{\frac{3}{2}} + \|p_1\|_1 + t_k\|f\|_{1,\infty} + \|f\|_{\frac{1}{2},\infty} + \|\dot{f}\|_\infty\right). \quad (2.3.12)$$

Pour le terme impliquant r_1, on remarque que

$$r_1(t_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \ddot{p}(s)(t_{k-1} - s)ds,$$

dans $\mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right)$. Alors par des arguments similaires et toujours grâce à (0.1.14)

$$\|r_1(t_k)\| \leq M\|r_1(t_k)\|_{\frac{1}{2}} \leq M\Delta t^2 \left(\|p_0\|_{\frac{3}{2}} + \|p_1\|_1 + t_k\|f\|_{1,\infty} + \|f\|_{\frac{1}{2},\infty}\right). \tag{2.3.13}$$

On écrit ensuite la différence $r_1(t_k) - r_1(t_{k-1})$ sous forme intégrale dans $\mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right)$. En utilisant la relation précédente, il vient, toujours par (0.1.14)

$$\begin{aligned} \|r_1(t_k) - r_1(t_{k-1})\|_{\frac{1}{2}} &\leq M\Delta t^2 \sup_{s\in(t_{k-2},t_{k-1})} \|\ddot{p}(s)\|_{\frac{1}{2}}, \\ &\leq M\Delta t^2 \left(\|p_0\|_{\frac{3}{2}} + \|p_1\|_1 + t_{k-1}\|f\|_{1,\infty} + \|f\|_{\frac{1}{2},\infty}\right). \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \|r_1(t_k) - r_1(t_{k-1})\| &\leq \Delta t \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} \int_{s-\Delta t}^{s} \left\|\frac{d^3p}{d\sigma^3}(\sigma)\right\| d\sigma\, ds, \\ &\leq M\Delta t^3 \sup_{s\in(t_{k-3},t_{k-1})} \left\|\frac{d^3p}{ds^3}(s)\right\|. \end{aligned}$$

Par (2.3.11) et (0.1.14), on obtient

$$\|r_1(t_k) - r_1(t_{k-1})\| \leq M\Delta t^3 \left(\|p_0\|_{\frac{3}{2}} + \|p_1\|_1 + t_{k-1}\|f\|_{1,\infty} + \|f\|_{\frac{1}{2},\infty} + \|\dot{f}\|_\infty\right). \tag{2.3.15}$$

En substituant (2.3.10), (2.3.12), (2.3.13), (2.3.14) et (2.3.15) dans la relation (2.3.9) on obtient une estimation pour $D_t\sqrt{\mathcal{E}_h^k} = \dfrac{\sqrt{\mathcal{E}_h^k} - \sqrt{\mathcal{E}_h^{k-1}}}{\Delta t}$, pour $k = 1, \ldots, K$. En additionnant toutes ces inégalités, on obtient immédiatement une borne supérieure pour $\sqrt{\mathcal{E}_h^k}$, et donc l'inégalité recherchée par (2.3.5) et (2.3.13). ■

Cette Proposition nous donne une estimation de l'erreur de discrétisation des opérateurs $\mathbb{T}_{t_k}^{\pm}$ (pour tout $0 \leq k \leq K$). On omet la preuve, qui est presque la même que celle de la Proposition 1.3.4.

Proposition 2.3.4. *Soit* $\Pi_h = \begin{bmatrix} \pi_h & 0 \\ 0 & \pi_h \end{bmatrix}$. *Sous les hypothèses de la Proposition 2.3.3, les affirmations suivantes sont vérifiées.*

1. *Il existe* $M > 0$, $h^* > 0$ *et* $\Delta t^* > 0$ *tels que pour tout* $h \in (0, h^*)$, *tout* $\Delta t \in (0, \Delta t^*)$ *et tout* $0 \leq k \leq K$

$$\left\|(\Pi_h\mathbb{T}_{t_k}^+ - \mathbb{T}_{h,\Delta t,k}^+)\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix}\right\| \leq Mt_k(h^\theta + \Delta t)\left(\|p_0\|_{\frac{3}{2}} + \|p_1\|_1\right),$$

$$\left\|(\Pi_h \mathbb{T}^-_{t_k} - \mathbb{T}^-_{h,\Delta t,k}) \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix}\right\| \leq M(\tau - t_k)(h^\theta + \Delta t)\left(\|p_0\|_{\frac{3}{2}} + \|p_1\|_1\right).$$

2. *Il existe* $M > 0$, $h^* > 0$ *et* $\Delta t^* > 0$ *tels que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *tout* $h \in (0, h^*)$, *tout* $\Delta t \in (0, \Delta t^*)$ *et tout* $0 \leq k \leq K$

$$\left\|((\mathbb{T}^-_{t_k}\mathbb{T}^+_{t_k})^n - (\mathbb{T}^-_{h,\Delta t,k}\mathbb{T}^+_{h,\Delta t,k})^n) \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix}\right\| \leq M\left[h^\theta + n\tau(h^\theta + \Delta t)\right]\left(\|p_0\|_{\frac{3}{2}} + \|p_1\|_1\right).$$

On démontre maintenant le Théorème 2.3.1.

Démonstration du Théorème 2.3.1. On introduit le terme $\displaystyle\sum_{n=0}^{N_{h,\Delta t}} (\mathbb{T}^-_{h,\Delta t,K}\mathbb{T}^+_{h,\Delta t,K})^n \begin{bmatrix} w^-(0) \\ \dot{w}^-(0) \end{bmatrix}$ dans la différence

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_{0,h,\Delta t} \\ w_{1,h,\Delta t} \end{bmatrix} &= \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbb{T}^-_\tau \mathbb{T}^+_\tau)^n \begin{bmatrix} w^-(0) \\ \dot{w}^-(0) \end{bmatrix} - \sum_{n=0}^{N_{h,\Delta t}} (\mathbb{T}^-_{h,\Delta t,K}\mathbb{T}^+_{h,\Delta t,K})^n \begin{bmatrix} (w_h^-)^0 \\ D_t(w_h^-)^1 \end{bmatrix}, \\
&= \sum_{n > N_{h,\Delta t}} (\mathbb{T}^-_\tau \mathbb{T}^+_\tau)^n \begin{bmatrix} w^-(0) \\ \dot{w}^-(0) \end{bmatrix} + \sum_{n=0}^{N_{h,\Delta t}} \left((\mathbb{T}^-_\tau \mathbb{T}^+_\tau)^n - (\mathbb{T}^-_{h,\Delta t,K}\mathbb{T}^+_{h,\Delta t,K})^n\right) \begin{bmatrix} w^-(0) \\ \dot{w}^-(0) \end{bmatrix} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{N_{h,\Delta t}} (\mathbb{T}^-_{h,\Delta t,K}\mathbb{T}^+_{h,\Delta t,K})^n \left(\begin{bmatrix} w^-(0) - (w_h^-)^0 \\ \dot{w}^-(0) - D_t(w_h^-)^1 \end{bmatrix}\right).
\end{aligned}$$

alors on a

$$\|w_0 - w_{0,h,\Delta t}\|_{\frac{1}{2}} + \|w_1 - w_{1,h,\Delta t}\| \leq S_1 + S_2 + S_3,$$

où l'on a posé

$$\begin{cases}
S_1 = \displaystyle\sum_{n > N_{h,\Delta t}} \left\|(\mathbb{T}^-_\tau \mathbb{T}^+_\tau)^n \begin{bmatrix} w^-(0) \\ \dot{w}^-(0) \end{bmatrix}\right\|, \\
S_2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{N_{h,\Delta t}} \left\|\left((\mathbb{T}^-_\tau \mathbb{T}^+_\tau)^n - (\mathbb{T}^-_{h,\Delta t,K}\mathbb{T}^+_{h,\Delta t,K})^n\right) \begin{bmatrix} w^-(0) \\ \dot{w}^-(0) \end{bmatrix}\right\|, \\
S_3 = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{N_{h,\Delta t,K}} \left\|(\mathbb{T}^-_{h,\Delta t,K}\mathbb{T}^+_{h,\Delta t,K})^n\right\|_{\mathcal{L}(X)}\right) \left\|\begin{bmatrix} w^-(0) - (w_h^-)^0 \\ \dot{w}^-(0) - D_t(w_h^-)^1 \end{bmatrix}\right\|.
\end{cases}$$

Encore une fois, le résultat annoncé vient en utilisant des méthodes similaires à celles de la démonstration dans le cas de l'équation de Schrödinger du Chapitre 1. ■

2.4 Simulations numériques

2.4.1 Tests en dimension un

Nous allons maintenant présenter quelques résultats numériques sur l'exemple de l'équation de la corde vibrante obtenus par la discrétisation des observateurs continus (2.1.8)–(2.1.9).

On considère une corde de longueur 1, dont les extrémités sont fixées (condition de Dirichlet homogène). On suppose que la vitesse de propagation est constante égale à un et on observe la vitesse de déplacement de la corde sur l'intervalle $[0, \frac{1}{10}]$, durant un intervalle de temps $[0, \tau]$, avec $\tau \geq 2$, conduisant à l'observabilité exacte de la corde, par la condition d'optique géométrique de Bardos, Lebeau et Rauch [8]. On reconstruit alors la position et la vitesse initiale à l'aide de l'algorithme itératif. Nous discrétisons les observateurs par éléments finis d'ordre un en espace (paramètre de discrétisation h), et par différence finie implicite en temps (paramètre de discrétisation Δt).

FIGURE 2.1 – Corde vibrante, dont les extrémités sont fixées, avec observation de la vitesse sur la partie en rouge.

Remarque 2.4.1. Pour générer la mesure $y(t)$ utilisée dans les simulations, nous choisissons une donnée initiale nous permettant de calculer analytiquement la solution exacte du système à tout instant. Cette précaution supplémentaire est prise afin d'éviter le risque de commettre un *crime inverse*[1], au moins dans les tests en dimension un.

Qualité de la reconstruction

Nous commençons par tester la qualité de reconstruction. On ajoute 5% (en norme L^2) de bruit composé de sinusoïdes de fréquences différentes et d'aléatoire uniforme. Le nombre d'itérations $N_{h,\Delta t}$ est choisi par la formule donnée par (2.3.3), avec une estimation "numérique" du paramètre $\eta = \|\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+\|_{\mathcal{L}(H_0^1([0,1])\times L^2([0,1]))} = 0,25$. Le choix du gain $\gamma = 10$ sera discuté plus loin.

La donnée initiale (w_0, w_1) à reconstruire est la suivante

$$w_0(x) = w_1(x) = \sin(3\pi x) + 2\sin(4\pi x) + \frac{1}{4}\sin(15\pi x) + \frac{1}{2}\sin(7\pi x), \qquad \forall\, x \in [0,1].$$

1. On désigne par ce terme des reconstructions dont l'excellente qualité est un artefact dû à une interaction entre les schémas numériques utilisés pour résoudre les problèmes direct (pour générer les données) et inverse ; voir par exemple Colton et Kress [22].

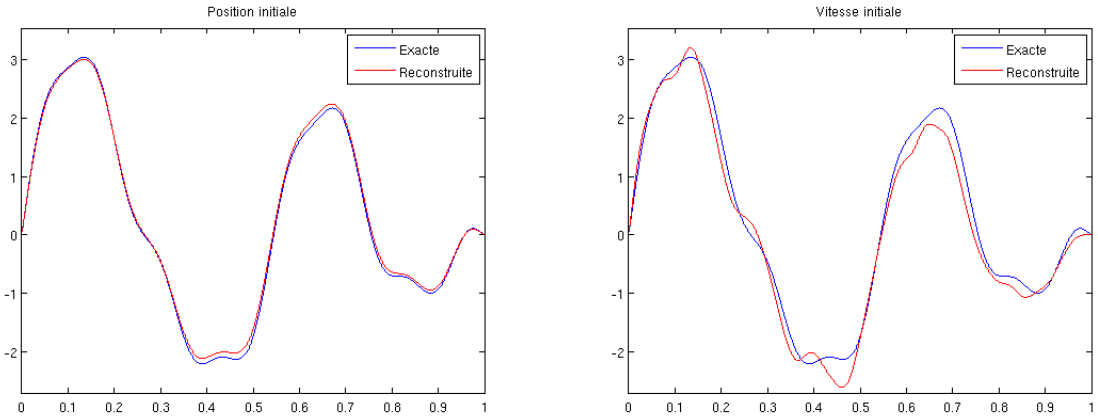


FIGURE 2.2 – Position et vitesse initiales reconstruites, à la convergence, avec $\tau = 2$, $\gamma = 10$ et 5% de bruit.

On peut apprécier sur la FIGURE 2.2 le peu de différences entre données exactes et données reconstruites.

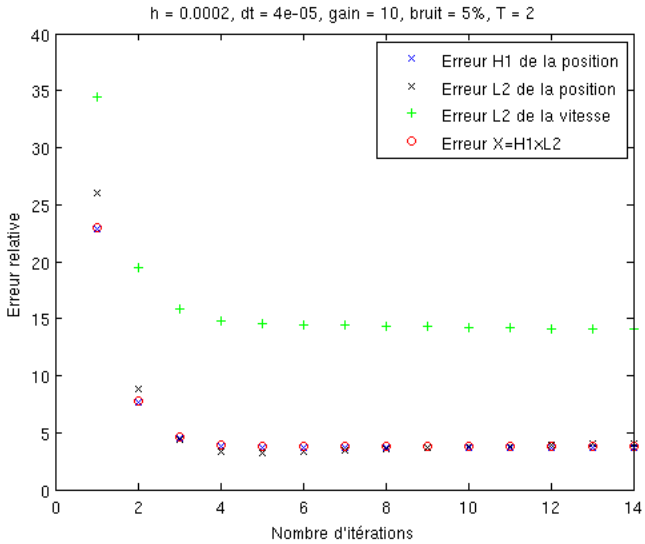


FIGURE 2.3 – Erreur de reconstruction de donnée initiale régulière dans différents espaces d'énergie, avec $\tau = 2$, $\gamma = 10$ et 5% de bruit.

On voit sur la FIGURE 2.3 que dès la troisième itération, l'erreur sur la position, en norme L^2 et H^1, est déjà inférieur à 5%, ainsi que l'erreur dans l'espace d'énergie $H_0^1([0,1]) \times L^2([0,1])$. L'erreur sur la vitesse, quant à elle, atteint les 14% après 6 itérations. On pourrait penser que le manque de qualité sur la reconstruction de la vitesse est dû au schéma d'ordre 2 utilisé en temps, cependant, les résultats ne sont pas significativement améliorés en utilisant le schéma d'ordre 4 proposé par Joly et Rodríguez [50]. Les erreurs de reconstruction sur la vitesse semblent donc être dues principalement à l'algorithme (et particulièrement au choix du gain, comme on peut le remarquer sur la FIGURE 2.6), et non à l'ordre du schéma de discrétisation en temps. On peut toutefois améliorer cette qualité en diminuant le pas de

temps comme nous le verrons plus loin.

Une question naturelle concerne la possibilité de reconstruire des données initiales à haute fréquence. Comme on peut s'en douter, on perd en qualité dans ce cas là puisque les normes H^3 et H^2 des position et vitesse dans le terme de droite du Corollaire 2.3.2 sont plus élevées.

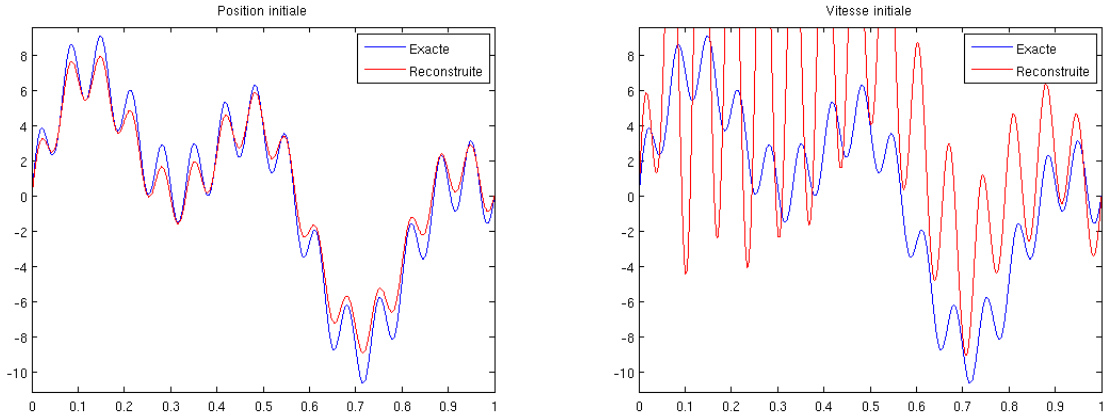


FIGURE 2.4 – Position et vitesse initiales très oscillantes, à la convergence, avec $\tau = 2$, $\gamma = 10$ et 5% de bruit.

La donnée initiale (w_0, w_1) à reconstruire ici est la suivante

$$w_0(x) = w_1(x) = 5\sin(2\pi x) + 2\sin(30\pi x) + \frac{1}{4}\sin(4\pi x) + 4\sin(5\pi x), \qquad \forall\, x \in [0,1].$$

On peut remarquer sur la FIGURE 2.4 que si la position est relativement bien reconstruite,

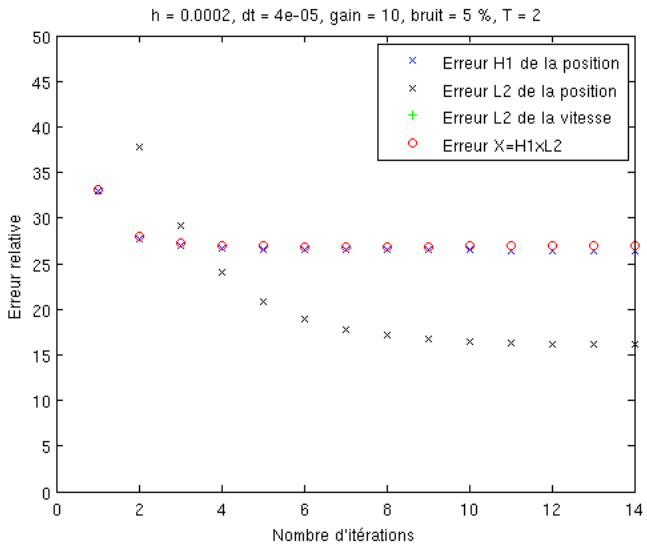


FIGURE 2.5 – Erreur de reconstruction de donnée initiale régulière mais très oscillante dans différents espaces d'énergie, avec $\tau = 2$, $\gamma = 10$ et 5% de bruit.

la vitesse initiale ne l'est pas, avec une erreur relative supérieure à 150% (et donc non visible sur la FIGURE 2.5).

On reprendra les premières données initiales testées dans la suite des simulations.

Influence du gain

Les simulations numériques effectuées montrent qu'en faisant varier le paramètre de gain γ, on peut sensiblement agir sur le taux de décroissance exponentielle de l'erreur (voir FIGURE 2.6). Ainsi, dès la première itération, l'erreur relative globale (dans X) est de l'ordre de 13% pour $\gamma = 15$, de 23% pour $\gamma = 10$ alors qu'elle est supérieure à 85% pour $\gamma = 1$. Nous choisirons dorénavant un gain $\gamma = 10$, qui est proche de la valeur numérique optimale permettant de réduire le plus rapidement et simultanément les erreurs relatives sur la position et la vitesse.

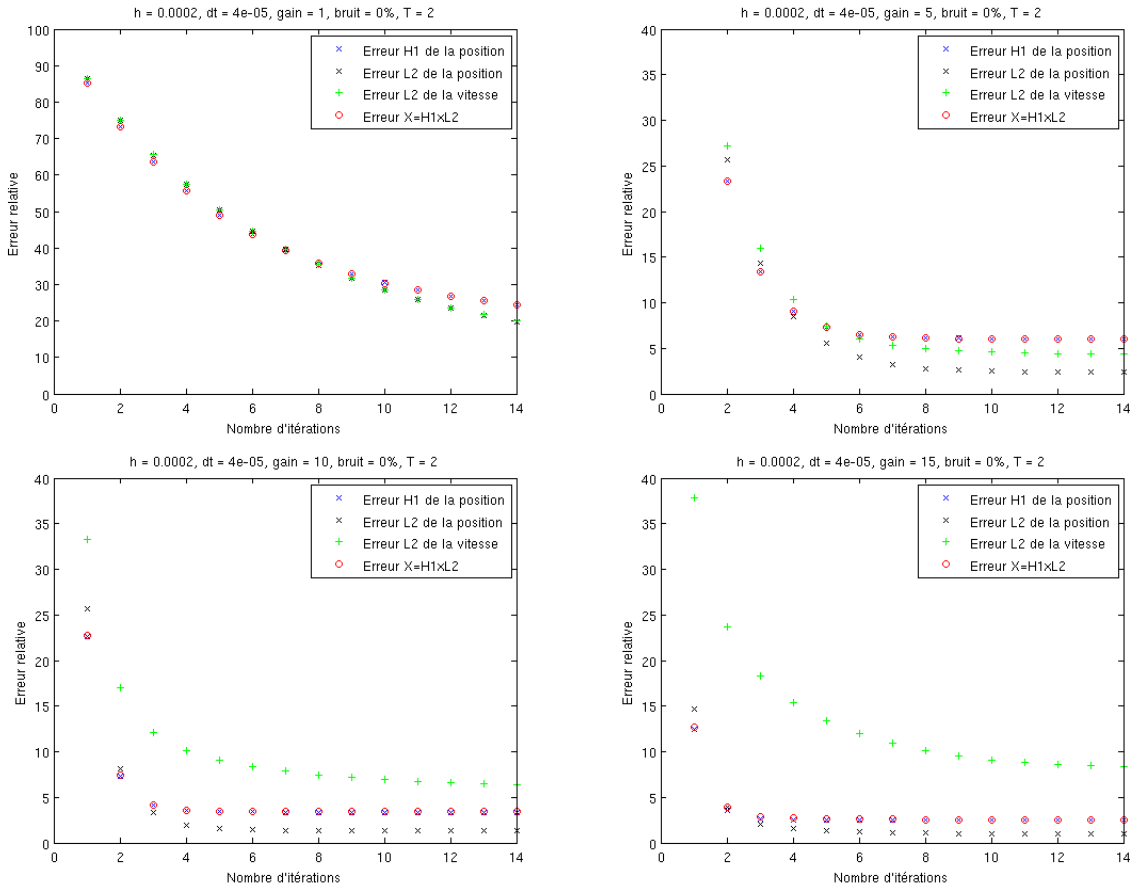


FIGURE 2.6 – Modification de l'erreur de reconstruction en fonction du gain (attention, la première figure n'est pas à la même échelle que les trois autres), sans bruit.

Robustesse au bruit

On teste dans un premier temps la robustesse de l'algorithme à un bruit composé de sinusoïdes de fréquence différente et d'aléatoire uniforme. Sur la FIGURE 2.7, on compare la reconstruction avec respectivement 0, 5 et 15% de bruit (par rapport à la norme L^2 de la mesure).

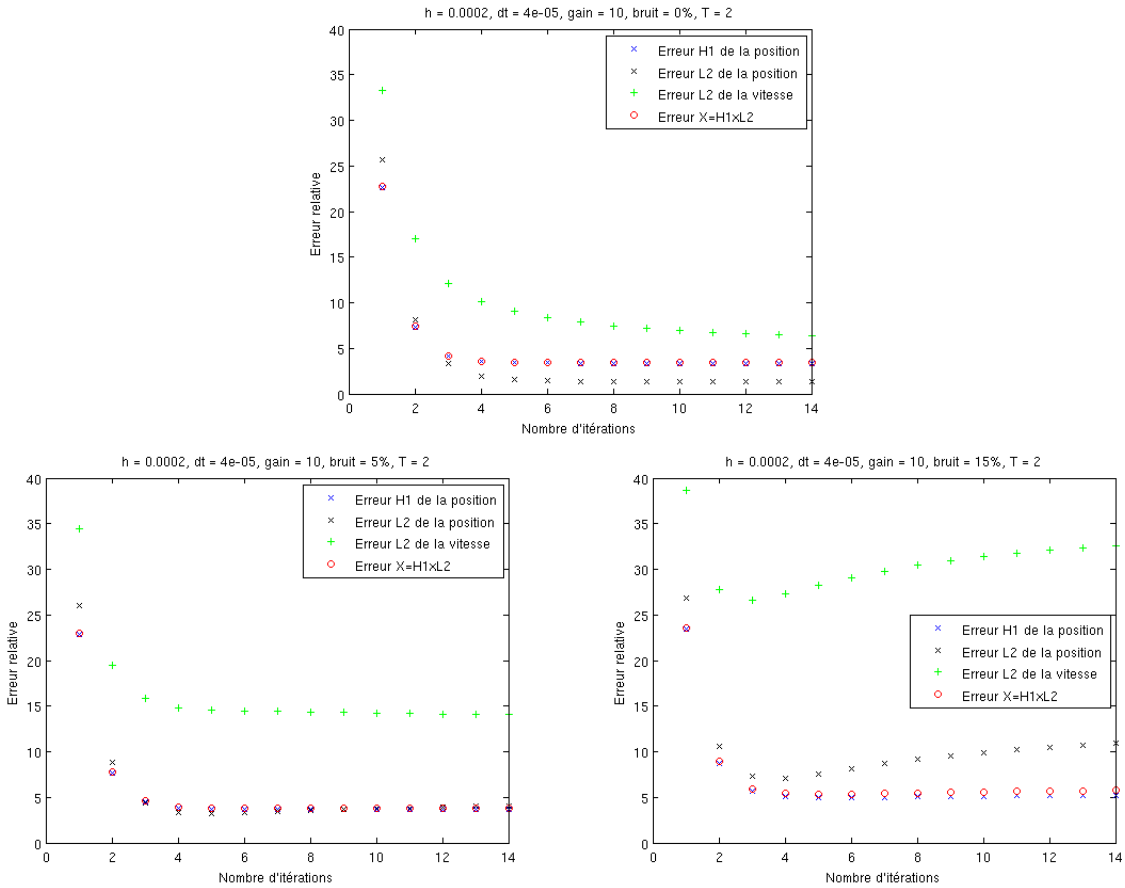


FIGURE 2.7 – Robustesse de la reconstruction à un bruit composé de sinusoïdes de fréquence différente et d'aléatoire uniforme : 0%, 5% et 15%.

On remarque que le bruit agit essentiellement (avec perte de convergence) sur les normes L^2 des reconstructions, alors que la convergence de la position en norme H^1 et de l'état en norme d'énergie semble peu affectée malgré une augmentation de l'erreur relative au final (de 3 à 6% en passant de 0 à 15% de bruit). On peut raisonnablement dire qu'en norme d'énergie, l'algorithme est robuste. Nous nous sommes cependant posé une autre question, concernant la robustesse à des bruits de même intensité, mais de fréquence différente.

Comme on pouvait s'en douter, en se rappelant par exemple que l'on perd en efficacité face à des données initiales très oscillantes (voir FIGURE 2.5), l'algorithme est plus sensible au bruit basse fréquence, comme on peut s'en apercevoir sur la FIGURE 2.8. Dans cette simulation, nous avons pris 15% de bruit composé uniquement d'une sinusoïde, dont on a fait varier la fréquence : $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{50}$ et $\frac{1}{100}$. Dans le premier cas, la convergence de la méthode

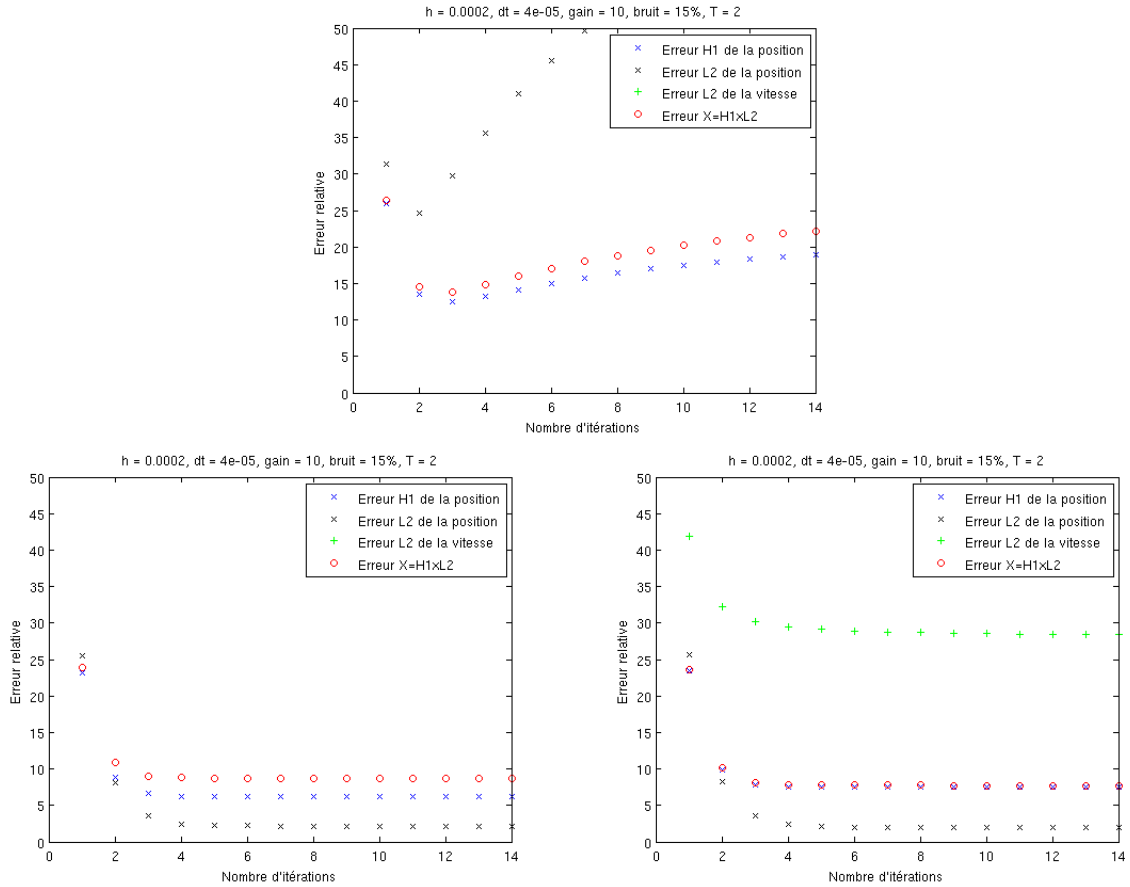


FIGURE 2.8 – Robustesse de la reconstruction à un bruit composé d'une sinusoïde de fréquence de plus en plus élevée : $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{50}$ et $\frac{1}{100}$.

n'est même plus assurée, quelque soit la norme. Dans le deuxième cas, la reconstruction de la vitesse initiale de la corde dans L^2 n'est toujours pas assurée, bien que les trois autres erreurs observées convergent à nouveau. Enfin, à haute fréquence, l'algorithme ne semble plus gêné par le bruit pour converger, bien que l'erreur relative ait augmenté significativement par rapport à la reconstruction sans aucun bruit (voir la première image de la FIGURE 2.7).

Vitesse de convergence

Dans ces tests numériques, nous nous interrogeons sur l'optimalité de l'ordre de convergence du Corollaire 2.3.2 sans bruit. Nous avons donc, dans un premier temps, fixé $h = 0.0002$ et fait varier Δt. Nous avons approché $M_\tau \left(\|w_0\|_{\frac{3}{2}} + \|w_1\|_1 \right)$ dans le Corollaire 2.3.2 par la moyenne du rapport $\frac{\text{erreur}(h,\Delta t)}{(h^2+\Delta t)\ln^2(h^2+\Delta t)}$, pour pouvoir comparer les profils. Les erreurs théoriques apparaissant dans les FIGURE 2.9 et FIGURE 2.10 sont donc à comprendre à une constante multiplicative près. Ensuite, nous fixons $\Delta t = 4.10^{-5}$, et faisons varier h. La constante utilisée pour comparer les profils est la même que dans le cas précédent.

Les images de droite dans les figures sont des zooms des zones d'accumulation de points des images de gauche. Clairement, l'ordre de convergence obtenu dans le Corollaire 2.3.2

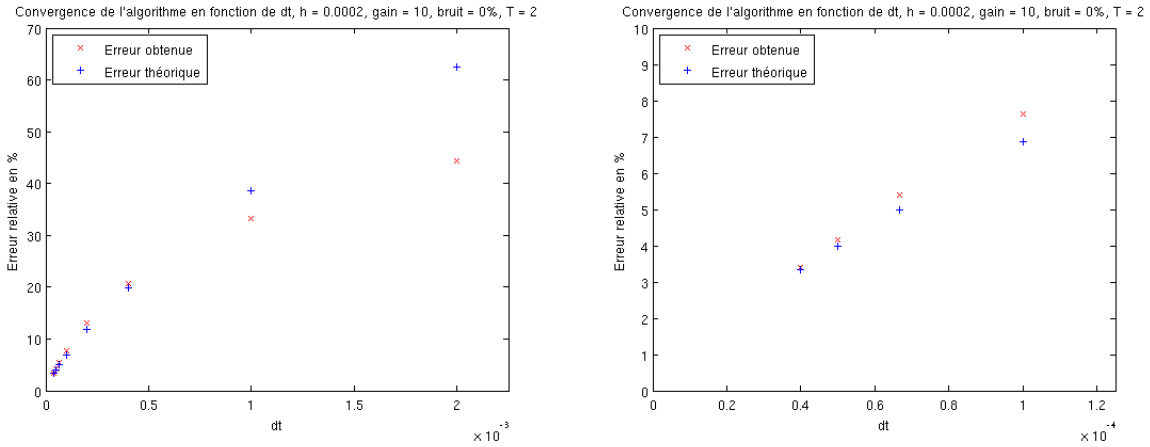


FIGURE 2.9 – Vérification de l'ordre de convergence en Δt.

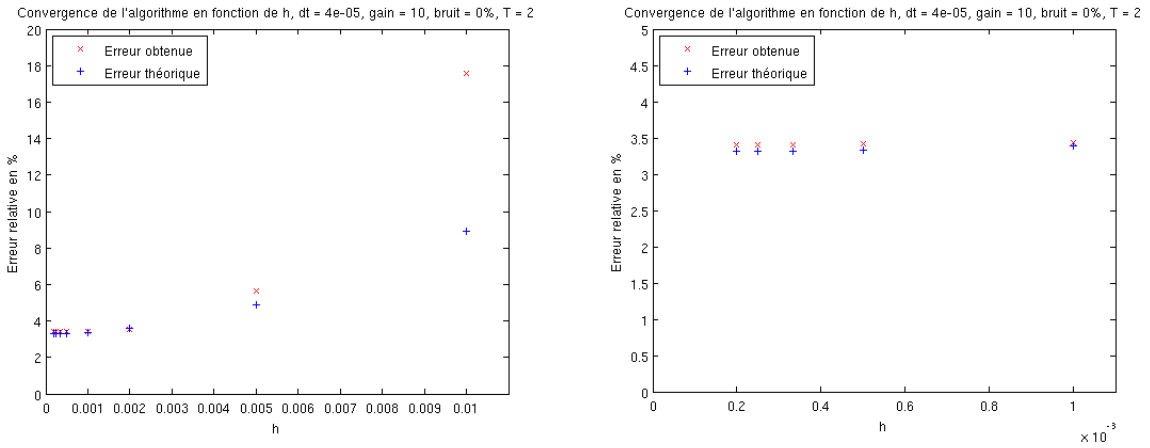


FIGURE 2.10 – Vérification de l'ordre de convergence en h.

semble être optimal. Comme on l'imaginait, on améliore également plus rapidement la reconstruction en diminuant le pas de discrétisation en temps qu'en diminuant le pas en espace.

Temps d'observation

Rappelons que nous avons montré que l'algorithme continu est convergent sous l'hypothèse d'observabilité exacte du système. Dans le cas d'étude que nous considérons ici, le temps d'observabilité exacte est égal à 1,8 (le temps que tout rayon atteigne le premier dixième de la corde). On peut alors se demander ce que l'on obtient lorsque le temps d'observation est trop petit, ou beaucoup plus grand.

La FIGURE 2.11 nous montre que lorsque le temps d'observation est inférieur ($\tau = 1$) au temps d'observabilité exacte, la reconstruction n'a pas lieu. On montre cependant dans le Chapitre 4, Section 4.2, que l'algorithme converge vers la "partie observable" de la donnée initiale. Intuitivement, toutes les informations n'ont pas encore atteint la zone d'observation, et la mesure utilisée n'est donc pas assez riche pour reconstruire complètement les données

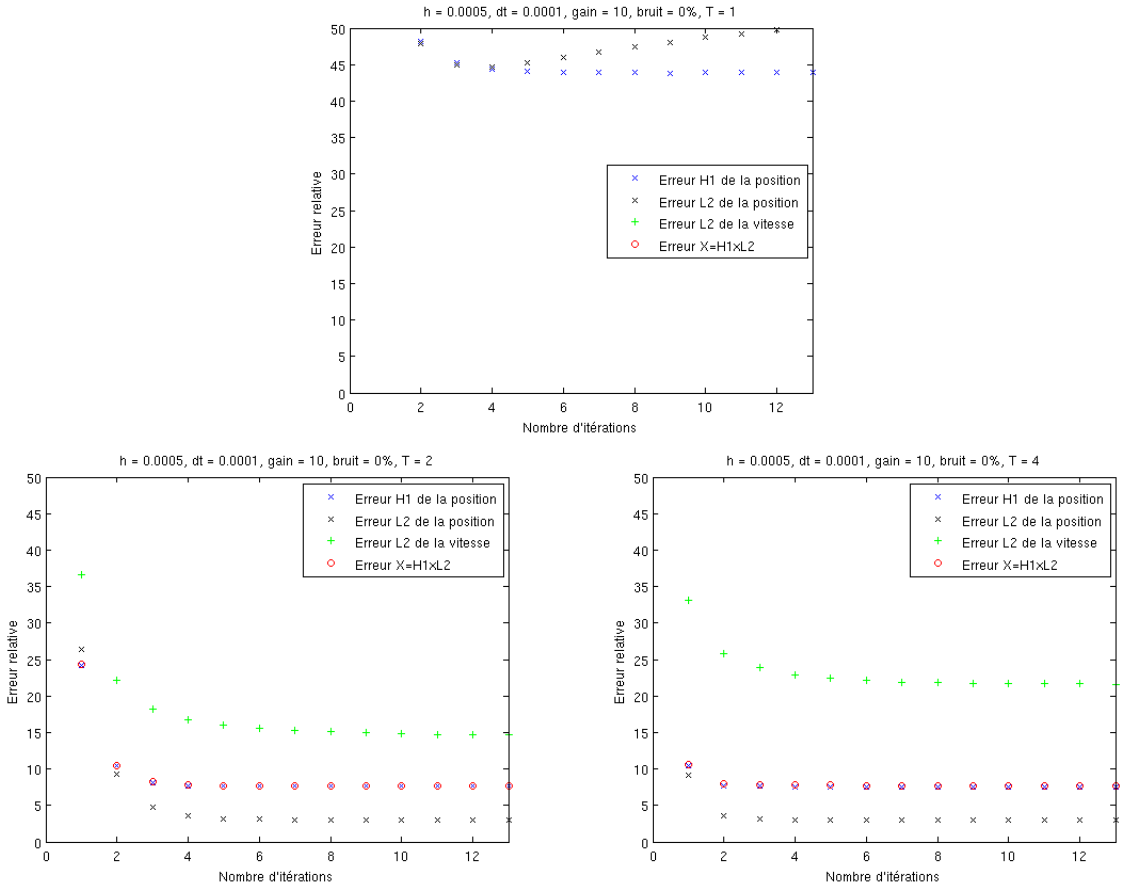


FIGURE 2.11 – Influence du temps d'observation, et existence d'un temps minimal.

initiales. La deuxième image de la figure est le cas $\tau = 2$ que l'on a considéré jusqu'à présent. Lorsque l'on double ce temps d'observation, il est naturel de s'attendre à améliorer, d'une certaine manière, la reconstruction, puisque l'on a enrichi la mesure. C'est effectivement le cas, on peut voir qu'il n'est nécessaire d'attendre que 2 itérations, contre 4, pour obtenir 8% d'erreur, même si la qualité finale de la reconstruction ne s'en trouve pas améliorée.

Reconstruction de donnée moins régulière

Nous avons montré, et vérifié numériquement, que l'algorithme était convergent dans le cas où les données initiales étaient régulières ($w_0 \in \mathcal{D}\left(A_0^{\frac{3}{2}}\right)$, $w_1 \in \mathcal{D}(A_0)$). Nous testons maintenant l'utilisation de cette méthode pour la reconstruction d'une position initiale discontinue, avec vitesse initiale très régulière.

Comme nous nous en doutions, la reconstruction dans l'espace d'énergie n'a pas lieu. Cependant, la position est bien reconstruite dans l'espace L^2, avec 18% d'erreur relative après 14 itérations (voir FIGURE 2.12). Il semblerait que l'algorithme converge en fait, dans ce cas là, dans l'espace extrapolé $X_{-1} = L^2([0,1]) \times H^{-1}([0,1])$ (voir par exemple la Proposition 0.1.6). Visuellement, on peut apprécier le profil de la position reconstruite sur la FIGURE 2.13.

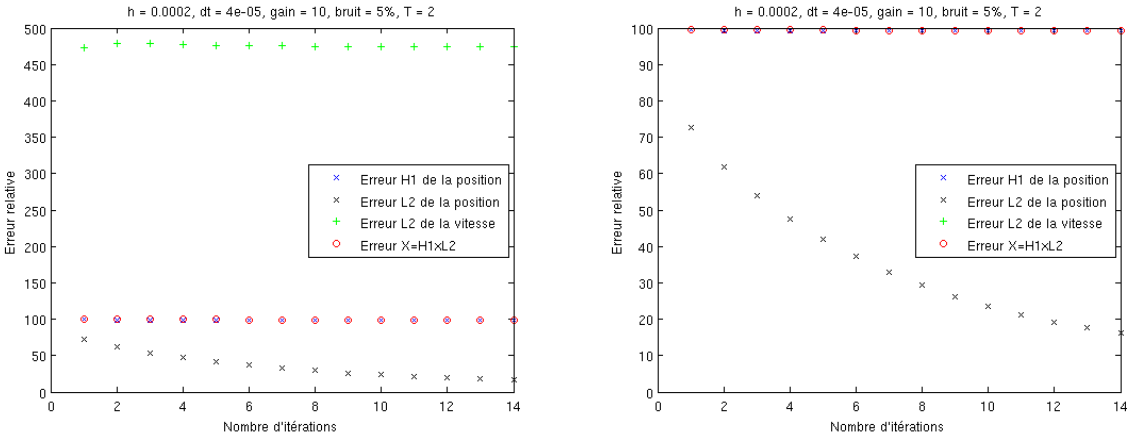


FIGURE 2.12 – Erreur de reconstruction de donnée initiale discontinue dans différents espaces d'énergie, avec $\tau = 2$ et 5% de bruit, et zoom sur la convergence L^2 de la position.

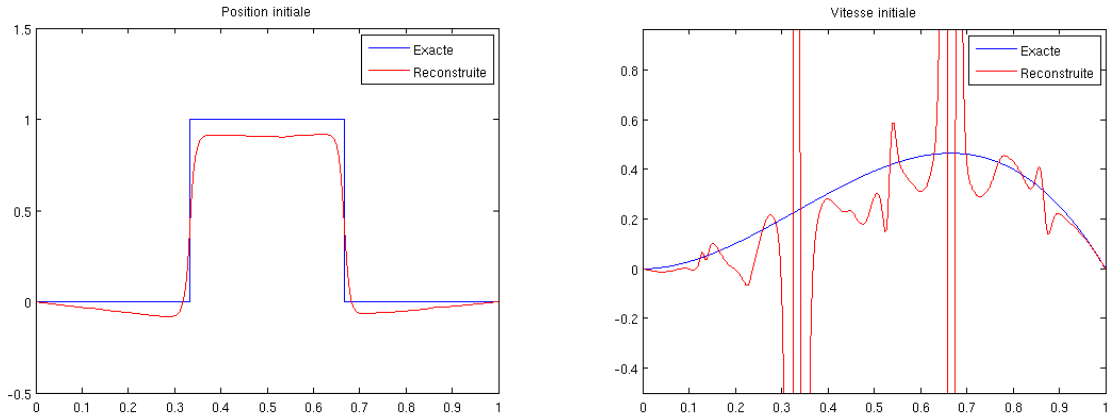


FIGURE 2.13 – Position et vitesse initiales reconstruites, après 14 itérations, avec $\tau = 2$, $\gamma = 10$ et 5% de bruit.

Placement du sous-domaine d'observation

Bien que le système soit toujours exactement observable dans le cas unidimensionnel, le placement du sous-domaine influe sur la norme de $\|\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+\|_{\mathcal{L}(X)}$, même si elle est toujours strictement inférieure à 1 (voir la Proposition 4.1.2). En effet, d'après Hébrard et Henrot [46] (on peut aussi citer Cox et Zuazua [24]), un placement judicieux du sous-domaine d'amortissement, et donc d'observation, permet d'optimiser la première valeur propre du Laplacien Dirichlet, et donc le taux de décroissance exponentielle de $\mathbb{T}^+$ et $\mathbb{T}^-$. De plus, la valeur optimale du gain dépend également de ce placement comme on le voit par exemple sur la figure [46, Fig. 1]. On pourrait penser, d'après ces travaux, qu'il est préférable d'observer au centre de la corde, et non sur l'une des extrémités.

On s'aperçoit sur la FIGURE 2.14 qu'il n'en est rien. La raison de ce phénomène est que si nous avons amélioré le taux de décroissance exponentielle ω des C_0-semi-groupes $\mathbb{T}^+$ et $\mathbb{T}^-$, nous avons probablement augmenté la constante $M_\omega \geq 1$ apparaissant dans (0.1.1),

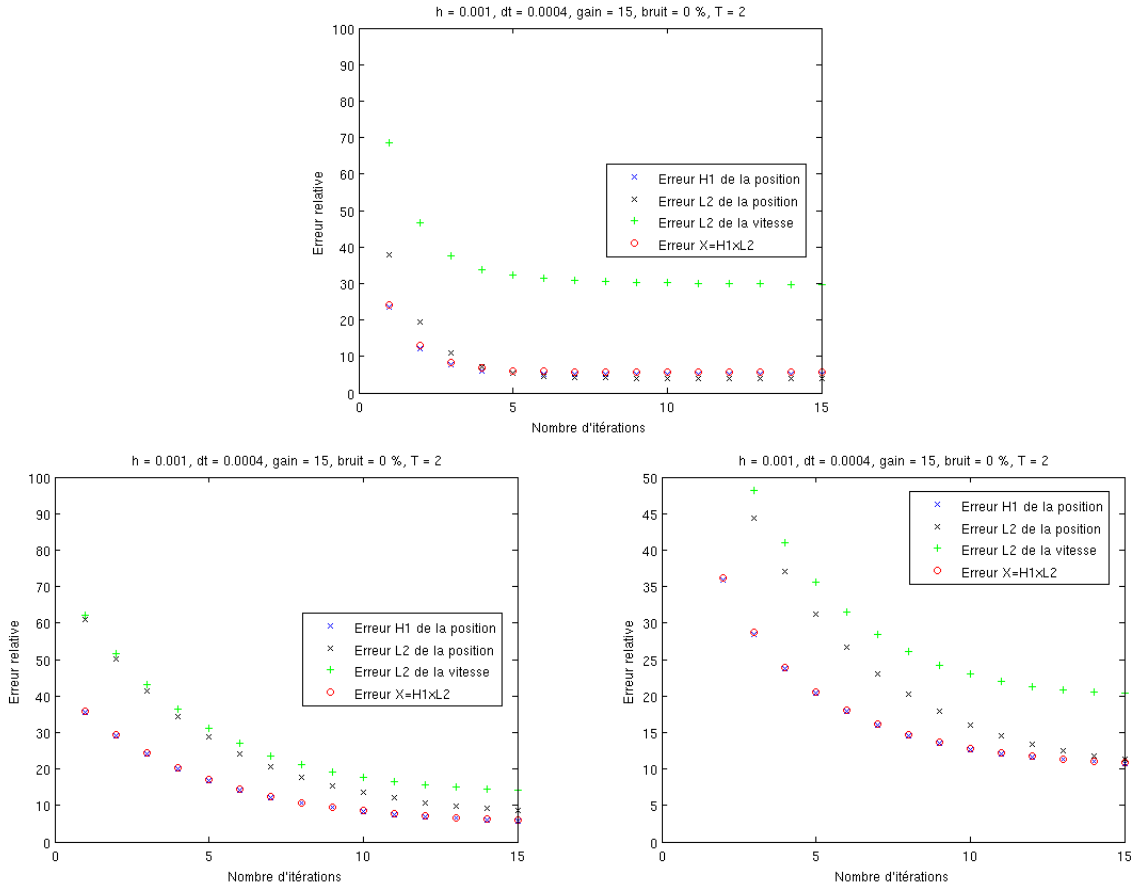


FIGURE 2.14 – Influence du placement du sous-domaine d'observation sur l'algorithme itératif. Reconstruction avec observation sur un intervalle de $\frac{1}{10}$ de longueur à gauche de la corde, au centre de la corde, puis de $\frac{1}{20}$ de longueur à chaque extrémité de la corde, avec $\tau = 2$, $\gamma = 15$ et sans bruit.

et donc la valeur de $\|\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+\|_{\mathcal{L}(X)}$. Le phénomène s'accroît encore lorsque l'on observe sur un vingtième à chaque extrémité de la corde (malgré la réduction du temps d'observation minimal que cela entraîne).

2.4.2 Tests en dimension deux

Nous considérons dans ces tests l'équation des ondes sur un carré de coté 1. On suppose que les bords de la membrane vibrante sont fixés (condition de Dirichlet homogène) et que la vitesse de propagation des ondes est constante égale à un. On suppose que l'on observe la vitesse de déplacement de la membrane sur le sous-domaine du carré formé par une bande de un dixième de large le long du bord gauche et du bord bas (FIGURE 2.15) durant un intervalle de temps $\tau = 3$ (conduisant à l'observabilité exacte du système par la condition d'optique géométrique de Bardos, Lebeau et Rauch [8]).

On reconstruit alors la position et la vitesse initiales de la membrane en discrétisant les observateurs par éléments finis en espace (pas de discrétisation h), et par différence finie

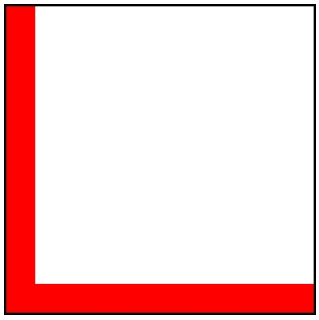


FIGURE 2.15 – Membrane vibrante, avec observation de la vitesse sur la partie en rouge.

implicite en temps (paramètre de discrétisation Δt).

Qualité de la reconstruction

Nous commençons par tester la qualité de la reconstruction. On ajoute 5% (en norme L^2) de bruit aléatoire uniforme. Le nombre d'itérations est 15 et le choix du gain $\gamma = 20$ sera discuté plus loin. La donnée initiale (w_0, w_1) à reconstruire est la suivante

$$\begin{aligned} w_0(x,y) &= 10\cos(3\pi y)\sin(\pi y)\exp\{-50((x-0,325)^2+(y-0,625)^2)\} \\ &\quad +3\cos(7\pi y)\sin(\tfrac{\pi}{2}y)\exp\{-50((x-0,75)^2+(y-0,625)^2)\}, \qquad \forall\, x,y\in[0,1], \\ w_1(x,y) &= 30\cos(5\pi y)\sin(5\pi y)\exp\{-50((x-0,25)^2+(y-0,75)^2)\} \\ &\quad +25\cos(2\pi y)\sin(\tfrac{\pi}{2}y)\exp\{-35((x-0,5)^2+(y-0,5)^2)\}, \qquad \forall\, x,y\in[0,1]. \end{aligned}$$

On voit sur la FIGURE 2.16 que dès la troisième itération, l'erreur sur la position, en norme

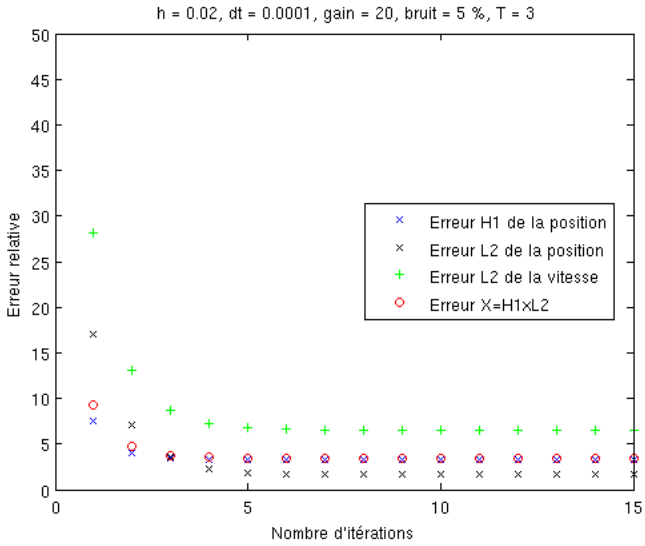


FIGURE 2.16 – Erreur de reconstruction de donnée initiale régulière dans différents espaces d'énergie, avec $\tau = 3$, $\gamma = 20$ et 5% de bruit.

L^2 et H^1, est déjà inférieur à 4%, ainsi que l'erreur dans l'espace d'énergie $H_0^1([0,1]) \times L^2([0,1])$. L'erreur sur la vitesse, quant à elle, atteint les 7% après 5 itérations. Comme dans le cas unidimensionnel, on peut améliorer la qualité de la reconstruction de la vitesse en diminuant le pas de discrétisation. On peut apprécier sur la FIGURE 2.17 le peu de différences entre données exactes et données reconstruites.

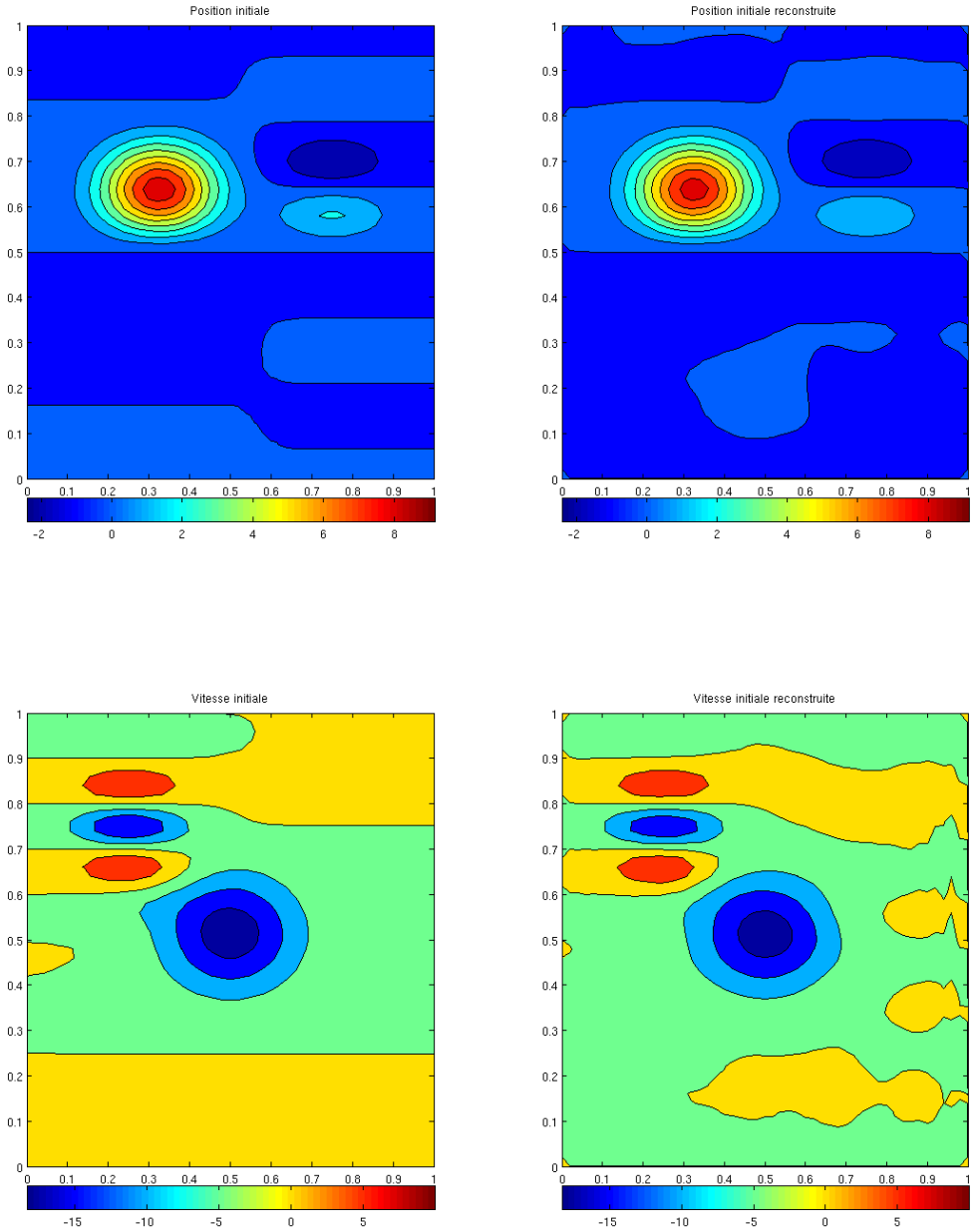


FIGURE 2.17 – Position et vitesse initiales reconstruites, à la convergence, avec $\tau = 3$, $\gamma = 20$ et 5% de bruit aléatoire.

Influence du gain

Comme dans le cas de la dimension un, on voit sur la FIGURE 2.18 que le gain joue un rôle très important dans l'efficacité de l'algorithme de reconstruction. Cependant, on retrouve également l'effet de seuil (appelé "overdamping", Münch, Pedregal et Periago ont exhibé ce phénomène dans leur papier [63]) au-delà duquel on n'améliore plus la qualité de la reconstruction, voire on l'empire. On choisira dorénavant $\gamma = 20$ dans le reste des

simulations.

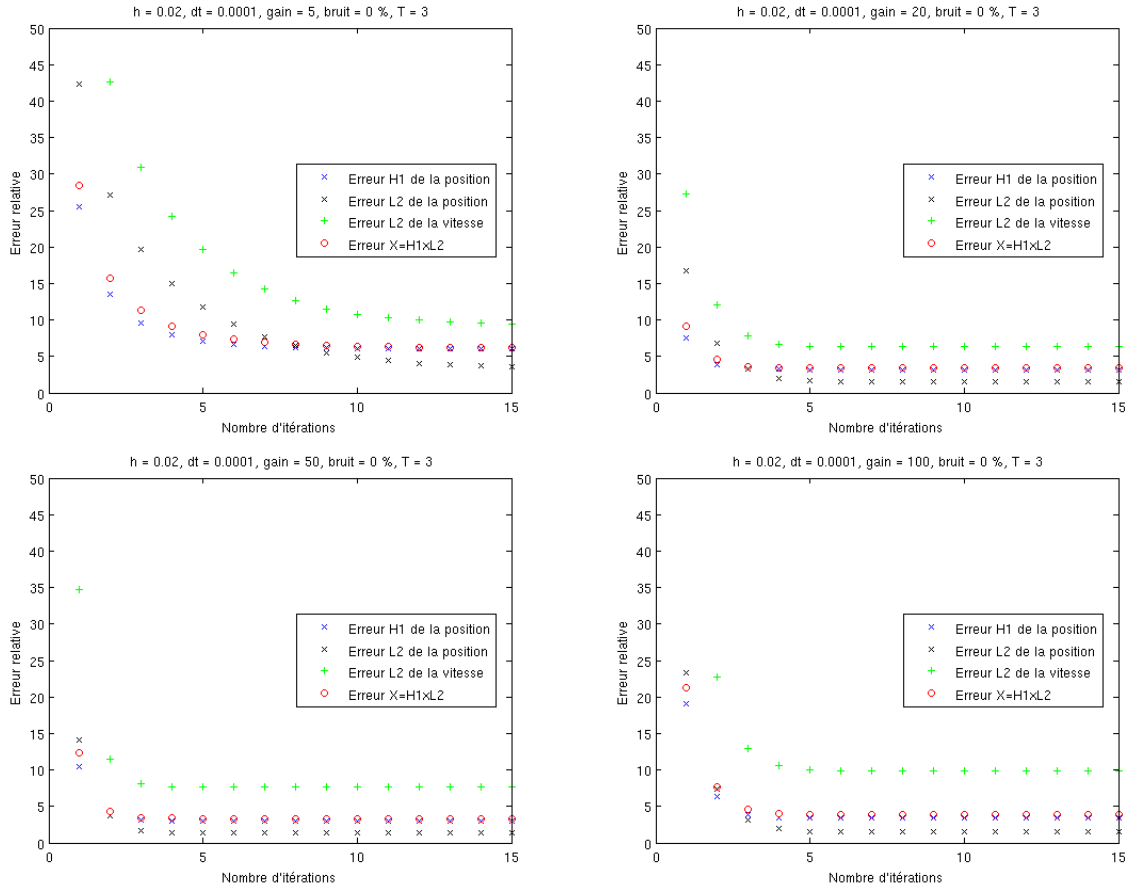


FIGURE 2.18 – Modification de l'erreur de reconstruction en fonction du gain, sans bruit.

Robustesse au bruit

On teste dans un premier temps la robustesse à un bruit aléatoire quelconque. Comme on le voit sur la FIGURE 2.19, il n'a que très peu d'influence. D'après ce que nous avons vu en une dimension d'espace, nous aurions pu le prédire puisque qu'un bruit uniformément aléatoire peut s'apparenter à un bruit très haute fréquence. On ajoute alors un bruit à variables séparées, de la forme suivante

$$\begin{aligned} b(x,y,t) &= \left(\sin(k_1\pi(x-t)) + \sin(k_1\pi(x+t))\right) y(y-1) \\ &\quad + \left(\sin(k_2\pi(y-t)) + \sin(k_2\pi(y+t))\right) x(x-1), \qquad \forall\, x,y \in [0,1], t \in [0,3], \end{aligned}$$

où $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$ sont les réelles sur lesquelles nous allons jouer (en gardant toujours 20% de bruit en norme L^2).

On observe sur la FIGURE 2.20 que les bruits basse fréquence perturbent plus l'algorithme de reconstruction que les bruits haute fréquence, comme dans le cas unidimensionnel. En particulier, on peut remarquer que dans le cas $(k_1, k_2) = (1, 1)$, les erreurs croissent et que

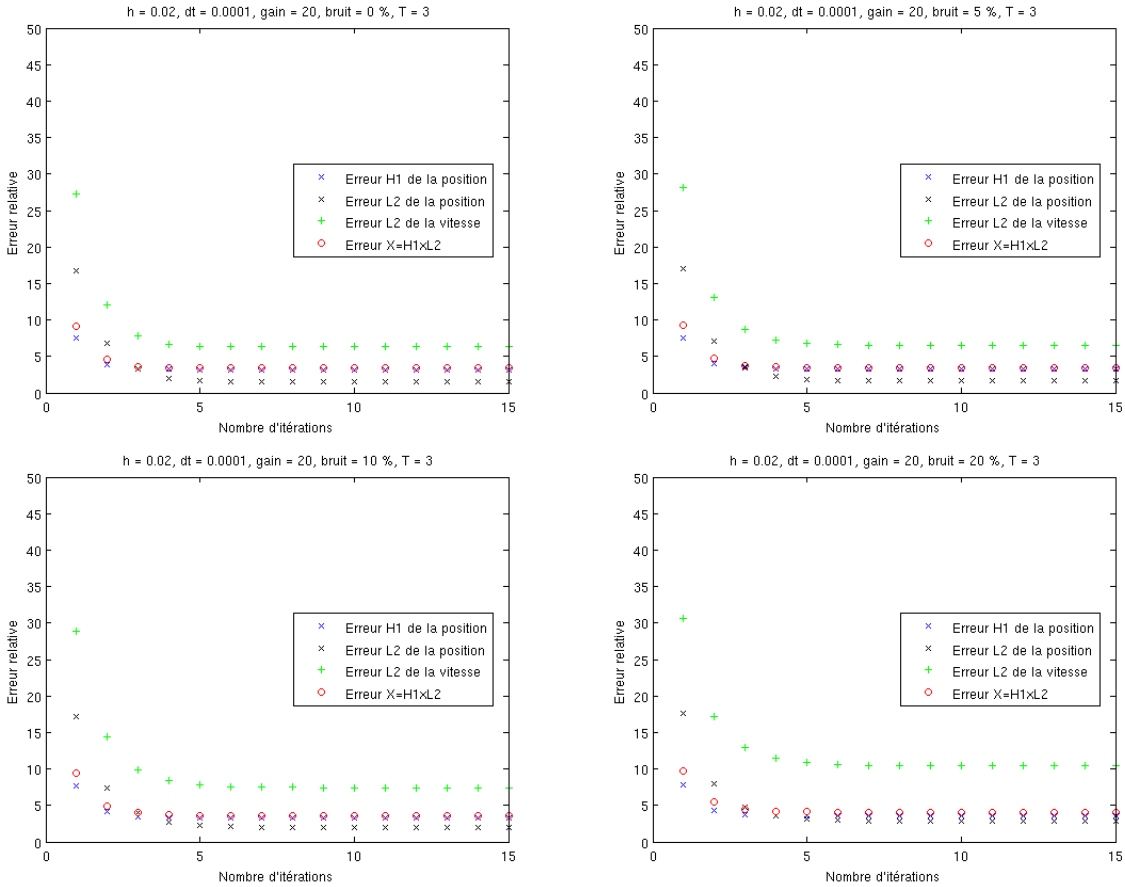


FIGURE 2.19 – Robustesse de la reconstruction à un bruit aléatoire uniforme : 0%, 5%, 10% et 20% de la mesure (en norme L^2).

le seul cas reconstruisant la dérivée de manière acceptable est $(k_1, k_2) = (15, 15)$ (rappelons toutefois que nous avons pris ici 20% de bruit !). L'algorithme de reconstruction de données initiales semble donc, encore une fois, robuste à des bruits haute fréquence.

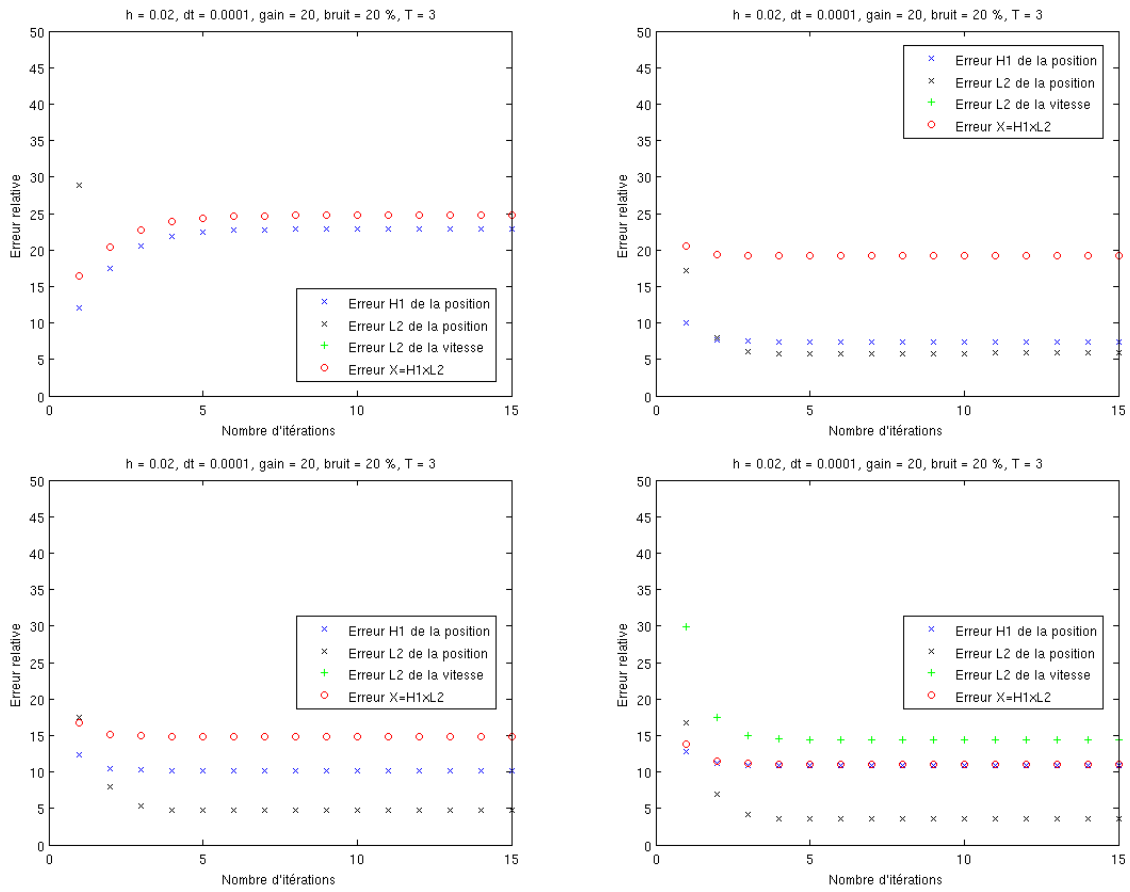


FIGURE 2.20 – Robustesse de la reconstruction à des bruits (à 20%) de fréquence différente : $(k_1, k_2) = (1, 1)$, $(5, 5)$, $(15, 5)$ et $(15, 15)$.

Temps d'observation

On retrouve ici le même phénomène qu'en dimension un concernant l'existence d'un temps d'observation minimal nécessaire. Rappelons que ceci est dû au fait que la vitesse de propagation est finie. Les erreurs de reconstruction obtenues sur la FIGURE 2.21 montrent bien que si l'on observe le système pendant un temps trop court, alors on ne dispose plus de toutes les informations nécessaires à la reconstruction des données initiales. Dans notre cas, on pourra toujours reconstruire les données si le temps d'observation τ vérifie $\tau \geq 2\sqrt{2}$, ce qui correspond à deux fois la diagonale du carré (la vitesse de propagation étant constante égale à un). C'est pourquoi on peut observer l'absence de reconstruction sur le premier tracé (avec $\tau = 1$) de la FIGURE 2.21. Comme précédemment, augmenter le temps d'observation n'améliore pas efficacement la qualité finale de la reconstruction, mais permet de diminuer le nombre d'itérations pour l'atteindre.

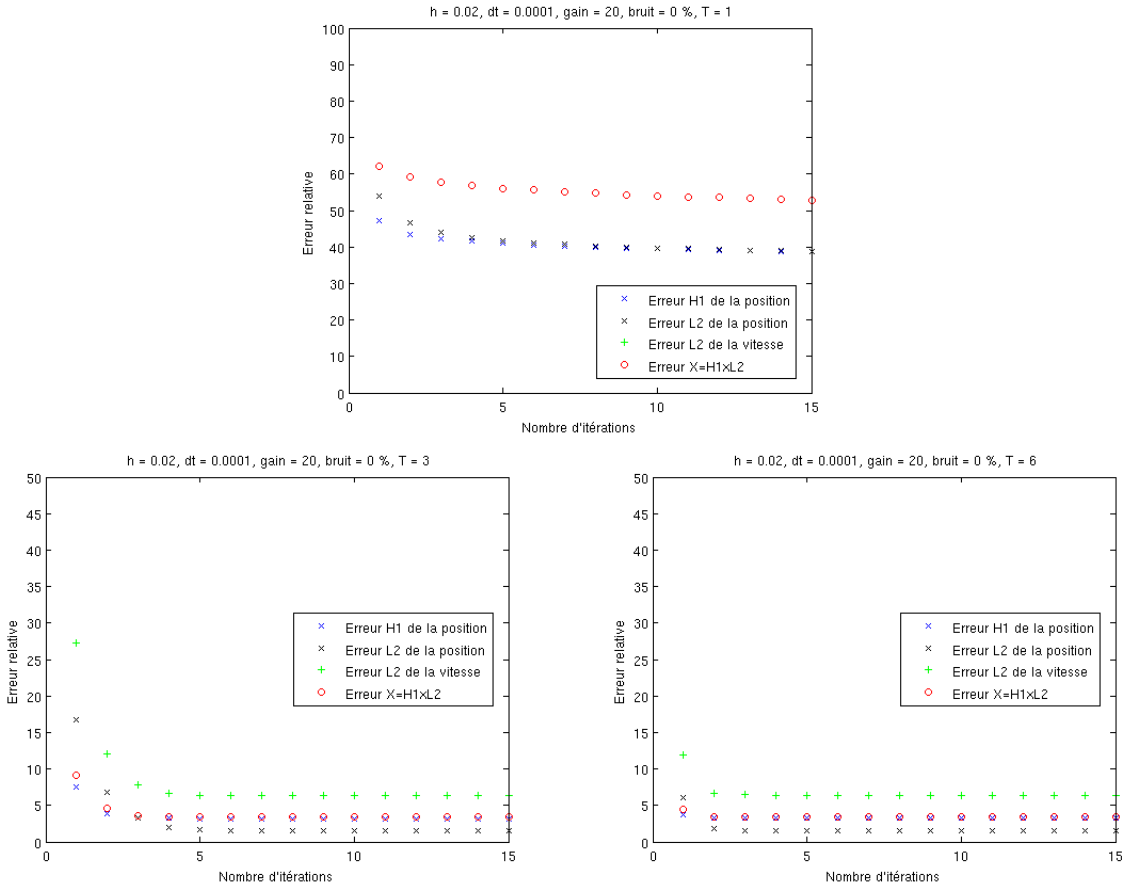


FIGURE 2.21 – Influence du temps d'observation, et existence d'un temps minimal.

Placement du sous-domaine d'observation

Nous nous intéressons dans cette partie à un phénomène qui n'apparaît pas en dimension 1. En effet, dans le cas unidimensionnel, si le temps d'observation est suffisamment long, toute l'information aura atteint l'intervalle où l'on observe (par la condition d'optique géométrique), autrement dit, il n'y aucune configuration ayant des rayons piégés. En dimension 2, c'est possible, et nous observons alors que les simulations n'aboutissent plus, comme la théorie le prévoyait. Nous considérons les deux configurations de la FIGURE 2.22. On obtient

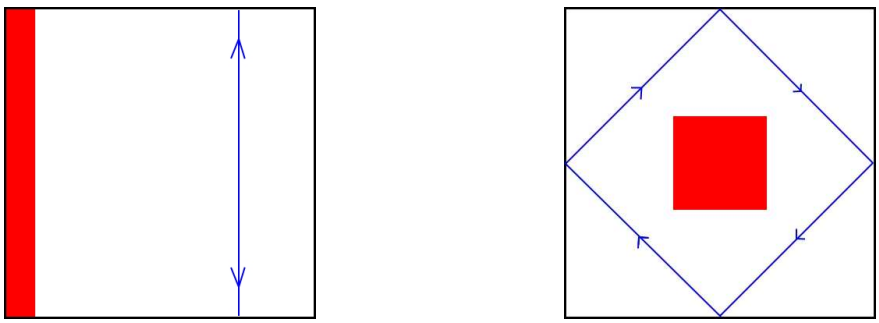


FIGURE 2.22 – Membrane vibrante, avec observation de la vitesse sur la partie en rouge, et un exemple de rayon piégé en bleu.

les tracés de la FIGURE 2.23. Le premier correspond au cas exactement observable que nous avions jusqu'à présent. Le deuxième correspond à une observation sur le bord gauche et le dernier à une observation au centre du carré (voir la FIGURE 2.22).

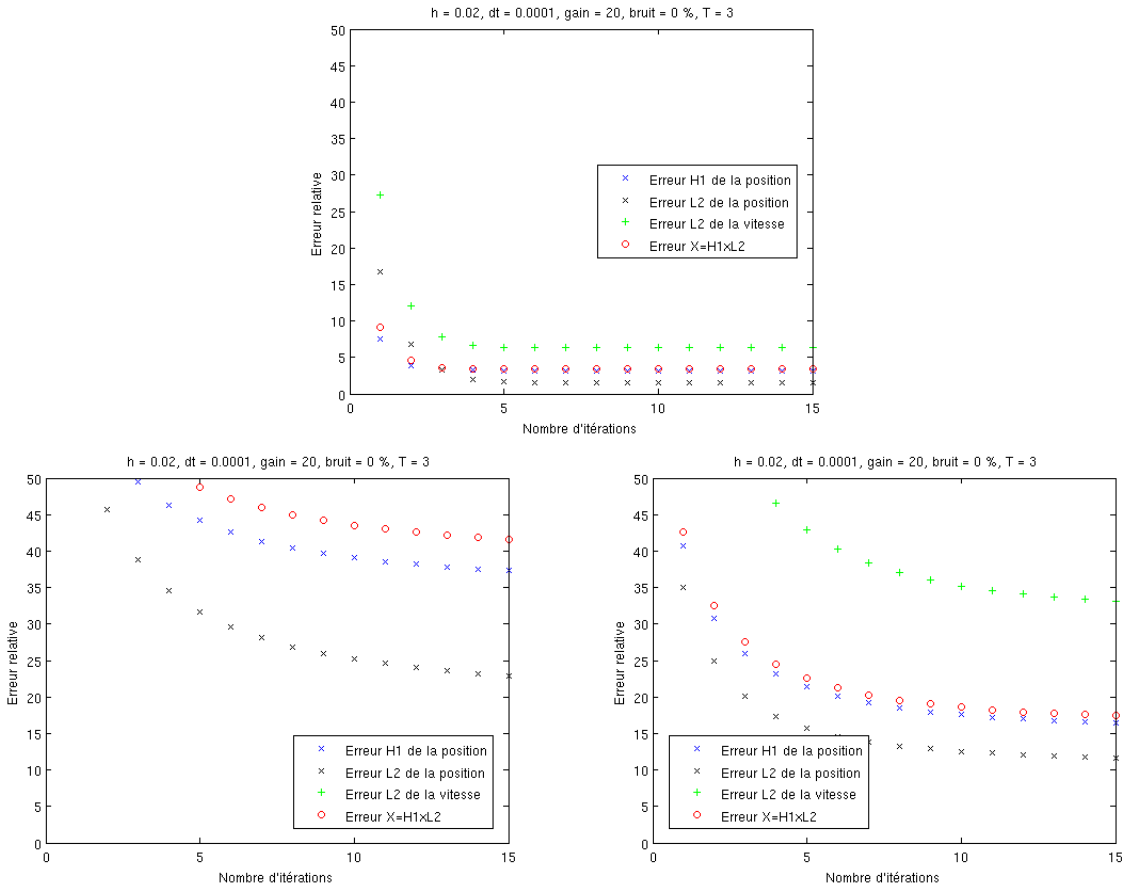


FIGURE 2.23 – Influence de la zone d'observation, et existence de "mauvaises configurations" : cas exactement observable (FIGURE 2.15), puis sans observabilité exacte avec observation à gauche et au centre (FIGURE 2.22).

2.4.3 Un exemple en dimension trois

Pour le cas tri-dimensionnel, nous avons préféré utiliser le couple de logiciels Gmsh–GetDP [2] développés par Christophe Geuzaine et son équipe à l'université de Liège. Les deux grands avantages de ces logiciels sont qu'ils permettent de changer rapidement de géométrie, le passage de la dimension deux à la dimension trois ne requiert alors que peu de temps dans Gmsh, et la rapidité d'écriture des codes puisque GetDP interprète directement l'équation variationnelle du problème à résoudre.

On considère l'équation des ondes avec condition de Dirichlet homogène sur une sphère de rayon un, et l'on observe la vitesse de déplacement de l'onde sur la couronne $\mathcal{B}_0(1)\backslash\mathcal{B}_0(\frac{4}{5})$, *i.e.* sur un cinquième le long du bord. Nous discrétisons les observateurs direct et rétrograde

2. http ://geuz.org/gmsh/, http ://geuz.org/getdp/

continus (2.1.8)–(2.1.9), en utilisant des éléments finis en espace, et un schéma de Crank-Nicholson en temps. Les position et vitesse initiales à reconstruire sont les suivantes

$$\begin{aligned} w_0(x,y,z) = \sin(\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \\ \times \Big\{ 10\exp\left[-50((x-0,5)^2+(y-0,25)^2+(z+0,75)^2)\right] \\ + 5\exp\left[-75((x-0,25)^2+(y+0,25)^2+(z+0,2)^2)\right] \\ - 15\exp\left[-35((x+0,5)^2+y^2+(z-0,5)^2)\right] \Big\}, \end{aligned}$$

$$w_1(x,y,z) = 2\exp\left[-50((x-0,75)^2+(y-0,25)^2+(z+0,125)^2)\right] + x^2 - yz.$$

Compte-tenu des limitations techniques (plus de sept heures ont été nécessaires pour obtenir ces résultats sur les machines de calcul du laboratoire [3]), les discrétisations que l'on considère sont assez grossières et le nombre d'itérations est choisi égal à 5. On peut remarquer sur la FIGURE 2.24 que les erreurs relatives obtenues sont, par suite, assez élevées. L'erreur sur la vitesse initiale n'est même pas visible sur la FIGURE 2.24 (ceci est peut-être également dû à sa faible norme).

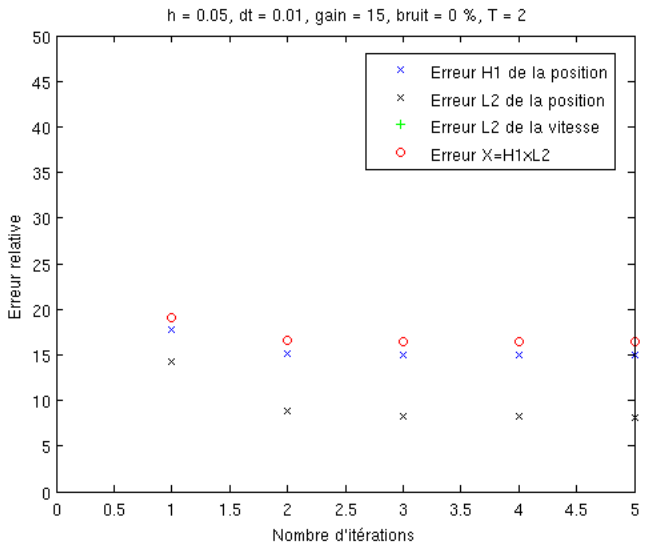


FIGURE 2.24 – Erreur de reconstruction de donnée initiale régulière dans différents espaces d'énergie, avec $\tau = 2$, $\gamma = 15$ et sans bruit.

Cependant, on peut tout de même apprécier la qualité des reconstructions obtenues sur les FIGURE 2.25 et FIGURE 2.26. On remarque toutefois une perturbation sur la reconstruction de la vitesse initiale à l'emplacement de la position initiale, probablement due à la faible discrétisation en temps (ce phénomène apparaît déjà en deux dimensions d'espace, et est d'autant plus faible que la discrétisation temporelle est fine).

3. Le laboratoire dispose de machines dédiées au calcul, reliées ensemble et constituant le BabyCluster.

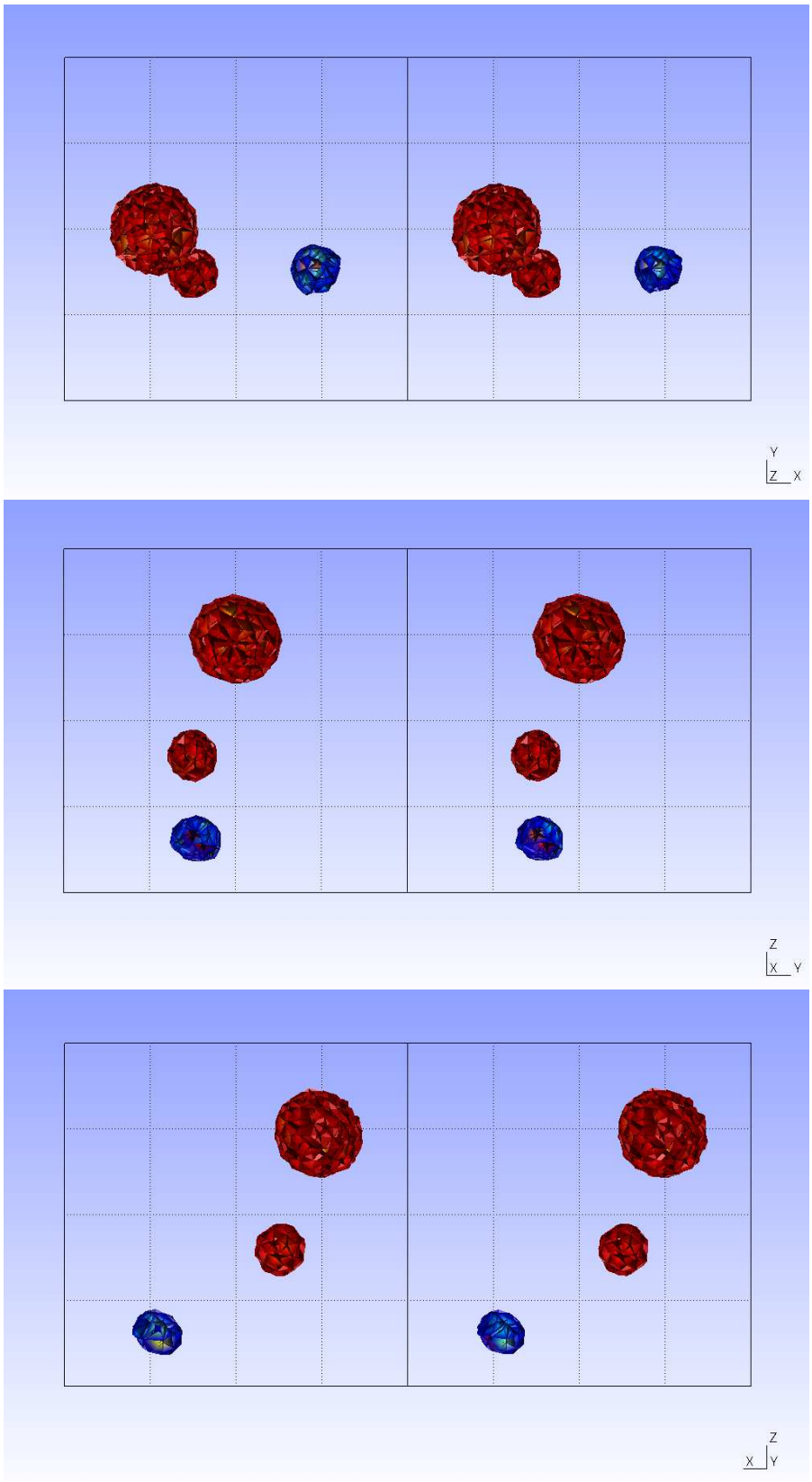


FIGURE 2.25 – Projections dans les plans XY, YZ et XZ de la position initiale (à gauche) et de la reconstruction (à droite) obtenue après 5 itérations. Nous n'avons affiché que les données de valeur absolue supérieure à 1. L'échelle des couleurs est identique pour la donnée exacte et la donnée reconstruite.

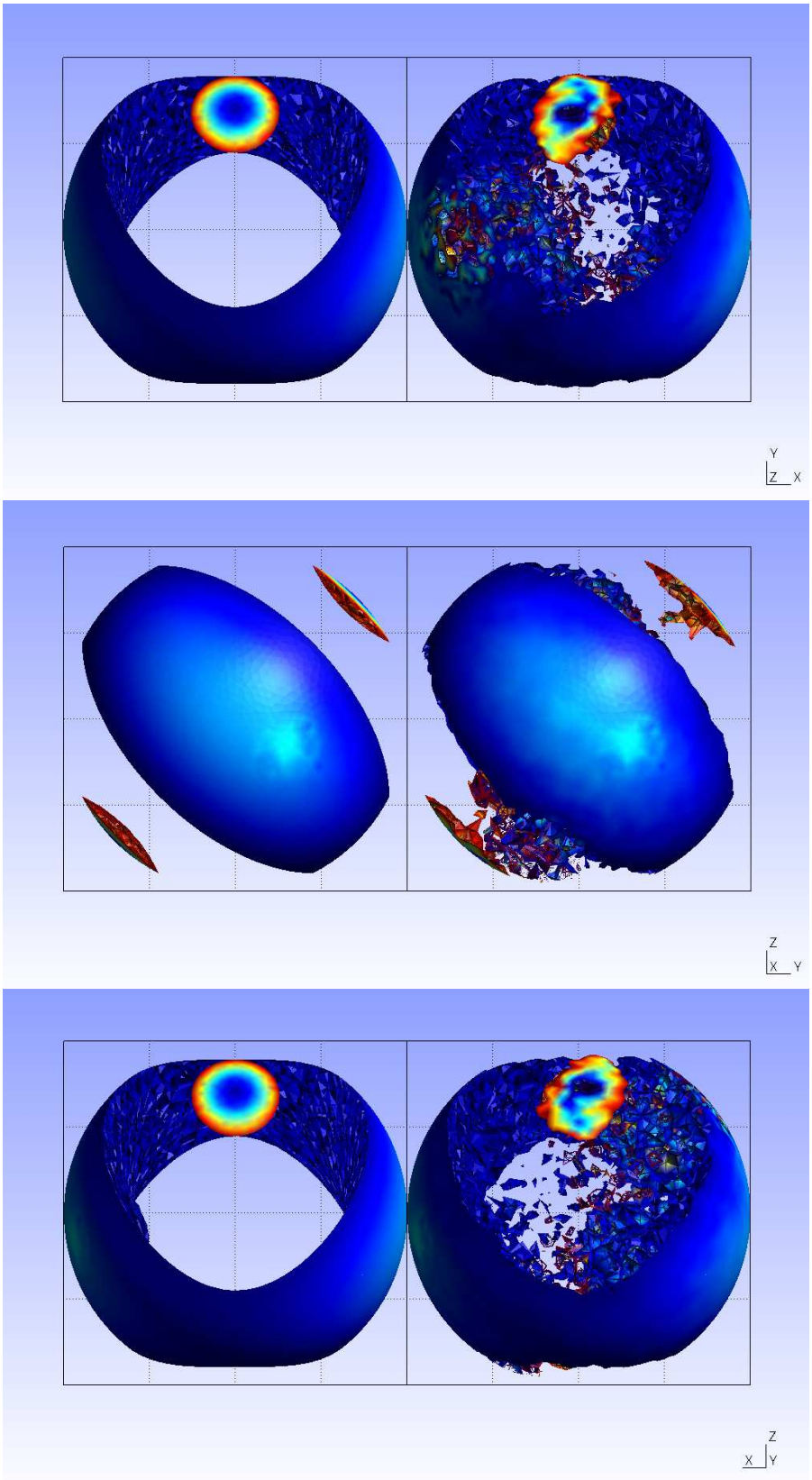


FIGURE 2.26 – Projections dans les plans XY, YZ et XZ de la vitesse initiale (à gauche) et de la reconstruction (à droite) obtenue après 5 itérations. Nous n'avons affiché que les données de valeur absolue supérieure à 0,4. L'échelle des couleurs est identique pour la donnée exacte et la donnée reconstruite.

Chapitre 3

Équations de Maxwell

Sommaire

3.1 Préliminaires 104

3.1.1 Espaces fonctionnels 104

3.1.2 Un résultat de stabilisation interne 106

3.1.3 Un résultat de stabilisation frontière 108

3.2 Reconstruction des données initiales 111

3.2.1 Avec observation interne 111

3.2.2 Avec observation frontière 114

3.3 Reconstruction d'un terme source 120

3.3.1 Avec observation interne 121

3.3.2 Avec observation frontière 121

Les travaux présentés dans ce chapitre ont été menés en collaboration avec Kim Dang Phung.

On montre dans ce Chapitre 3 que l'on peut appliquer l'algorithme itératif de reconstruction de données initiales aux équations de Maxwell dans un domaine borné de $\mathbb{R}^3$. Nous considérons dans un premier temps avec observation du champ électrique sur un sous-domaine *suffisamment grand*, puis du courant surfacique induit sur une partie *bien choisie* du bord du domaine. Remarquons que physiquement, il est plus réaliste de considérer le cas frontière. On pourra s'intéresser aux travaux récents de Staffans et Weiss [82, 83] pour une étude théorique des équations de Maxwell avec contrôle et observation frontières.

On commence par rappeler des résultats de stabilisation interne et frontière des équations de Maxwell. Nous les utilisons ensuite pour montrer que l'on peut construire les observateurs

direct (0.2.4) et rétrograde (0.2.7) et obtenir les Théorèmes 3.2.2 et 3.2.5, ainsi que les Théorèmes 3.3.1 et 3.3.2 pour la reconstruction de termes sources.

3.1 Préliminaires

3.1.1 Espaces fonctionnels

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^3$, situé localement d'un seul coté de sa frontière $\partial\Omega$ régulière. On note ν la normale extérieure à Ω. On suppose que le domaine Ω est constitué d'un matériau parfaitement conducteur et caractérisé par une permittivité diélectrique ε et une perméabilité magnétique μ, supposés strictement positifs et constants. Les champs électrique E et magnétique H vérifient alors les équations de Maxwell

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t} E(x,t) - \operatorname{rot} H(x,t) = 0, & \forall\, x \in \Omega, t \geq 0, \\ \mu \dfrac{\partial}{\partial t} H(x,t) + \operatorname{rot} E(x,t) = 0, & \forall\, x \in \Omega, t \geq 0, \\ \operatorname{div} E(x,t) = 0, & \forall\, x \in \Omega, t \geq 0, \\ \operatorname{div} H(x,t) = 0, & \forall\, x \in \Omega, t \geq 0, \\ E(x,t) \wedge \nu(x) = 0,\ H(x,t) \cdot \nu(x) = 0, & \forall\, x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ E(x,0) = E_0(x), & \forall\, x \in \Omega, \\ H(x,0) = H_0(x), & \forall\, x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Nous utilisons les espaces fonctionnels suivants dans ce chapitre

$$\begin{aligned} &\mathbf{H} = (L^2(\Omega))^3, \\ &\mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega) = \{f \in \mathbf{H} \mid \operatorname{rot} f \in \mathbf{H}\}, \\ &\mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega) = \{f \in \mathbf{H} \mid \operatorname{div} f \in L^2(\Omega)\}. \end{aligned}$$

Ces espaces sont des espaces de Hilbert (voir [61, Chapitre 3]) quand on les munit des normes respectives suivantes

$$\begin{aligned} \|f\| &= \left(\textstyle\int_\Omega |f|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|f\|_{\mathrm{rot}} &= \left(\|f\|^2 + \|\operatorname{rot} f\|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|f\|_{\mathrm{div}} &= \left(\|f\|^2 + \|\operatorname{div} f\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Le produit scalaire sur $\mathbf{H}$ sera noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Nous aurons également besoin du sous-espace des fonctions à divergence nulle, ainsi qu'à rotationnel nul

$$\begin{aligned} &\mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega) = \{f \in \mathbf{H} \mid \operatorname{div} f = 0\}, \\ &\mathbf{H}_0(\operatorname{rot}, \Omega) = \{f \in \mathbf{H} \mid \operatorname{rot} f = 0\}. \end{aligned}$$

Pour prendre en compte la condition aux limites de conducteur parfait, on introduit égale-

ment les sous-espaces suivants

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}^N(\mathrm{rot}\,,\Omega) &= \{f \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,,\Omega),\ f \wedge \nu|_{\partial\Omega} = 0\},\\
\mathbf{H}^T(\mathrm{div}\,,\Omega) &= \{f \in \mathbf{H}(\mathrm{div}\,,\Omega),\ f \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0\},\\
\mathbf{H}_0^N(\mathrm{rot}\,,\Omega) &= \mathbf{H}_0(\mathrm{rot}\,,\Omega) \cap \mathbf{H}^N(\mathrm{rot}\,,\Omega),\\
\mathbf{H}_0^T(\mathrm{div}\,,\Omega) &= \mathbf{H}_0(\mathrm{div}\,,\Omega) \cap \mathbf{H}^T(\mathrm{div}\,,\Omega).
\end{aligned}$$

Finalement, on rappelle ce résultat (d'intégration par partie) utile dans les calculs (voir par exemple [61, p. 55]).

Proposition 3.1.1. *On a l'identité*

$$\langle \mathrm{rot}\, u, v\rangle = \langle u, \mathrm{rot}\, v\rangle, \qquad \forall\ (u,v) \in \mathbf{H}^N(\mathrm{rot}\,,\Omega) \times \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,,\Omega).$$

On montre maintenant que le système de Maxwell (3.1.1) que l'on considère est bien posé (en suivant Cessenat [19, p. 255]). Soit $X = \mathbf{H} \times \mathbf{H}$ muni de la norme $\|(f,g)\|_X^2 = \varepsilon\|f\|_{\mathbf{H}}^2 + \mu\|g\|_{\mathbf{H}}^2$ pour tout $(f,g) \in X$. On définit l'opérateur différentiel non-borné

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-1}\mathrm{rot} \\ -\mu^{-1}\mathrm{rot} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.1.2}$$

de domaine

$$\mathcal{D}(A) = \mathbf{H}^N(\mathrm{rot}\,,\Omega) \times \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,,\Omega).$$

Clairement, A est fermé et de domaine dense. En adaptant légèrement la preuve du Théorème 1 de [29, p. 299], on obtient facilement que A est anti-adjoint (la seule différence, mineure, entre notre cas et celui de [29] vient de la dépendance en ε et μ, mais la norme que l'on a choisie sur X permet de contourner le problème).

Pour prendre en compte les divergences nulles et la condition de conducteur parfait du matériau, on introduit les sous-espaces de X suivants

$$\mathbf{V} = \mathbf{H}_0(\mathrm{div}\,,\Omega) \times \mathbf{H}_0^T(\mathrm{div}\,,\Omega), \qquad \mathbf{W} = \mathcal{D}(A) \cap \mathbf{V}.$$

Remarquons que $\mathbf{W}$ est invariant sous le groupe $\mathbb{S}$ engendré par l'opérateur anti-adjoint A (Théorème de Stone 0.1.12). En effet, étant donnée $(E_0, H_0) \in \mathcal{D}(A)$, on a $(E(t), H(t)) = \mathbb{S}_t(E_0, H_0) \in C^1(\mathbb{R}, X) \cap C(\mathbb{R}, \mathcal{D}(A))$ (Théorème 0.1.7) et $(E(t), H(t))$ est la solution du

problème suivant

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t} E(x,t) - \operatorname{rot} H(x,t) = 0, & \forall\, x \in \Omega, t \geq 0, \\ \mu \dfrac{\partial}{\partial t} H(x,t) + \operatorname{rot} E(x,t) = 0, & \forall\, x \in \Omega, t \geq 0, \\ E(x,t) \wedge \nu(x) = 0, & \forall\, x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ E(x,0) = E_0(x) \in \mathbf{H}^N(\operatorname{rot}, \Omega), & \forall\, x \in \Omega, \\ H(x,0) = H_0(x) \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega), & \forall\, x \in \Omega. \end{cases}$$

En prenant la divergence des deux premières équations, on obtient directement

$$\operatorname{div} E(t) = \operatorname{div} E_0 \qquad \operatorname{div} H(t) = \operatorname{div} H_0, \qquad \forall\, t \geq 0.$$

D'un autre coté, puisque $\operatorname{rot}\big(\mathbf{H}^N(\operatorname{rot}, \Omega)\big) \subset \mathbf{H}_0^T(\operatorname{div}, \Omega)$ (voir [61, Theorem 3.40]) et $E(t) \in \mathbf{H}^N(\operatorname{rot}, \Omega)$ pour tout $t \geq 0$ on a

$$\operatorname{rot} E(t) = -\mu \dot{H}(t) \in \mathbf{H}^T(\operatorname{div}, \Omega), \qquad \forall\, t \geq 0.$$

En conséquence

$$H(t) \cdot \nu_{|\partial\Omega} = H_0 \cdot \nu_{|\partial\Omega}, \qquad \forall\, t \geq 0.$$

Donc, si $(E_0, H_0) \in \mathbf{W}$, on obtient que $(E(t), H(t)) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbf{V}) \cap C(\mathbb{R}, \mathbf{W})$ est une solution de (3.1.1).
Puisque $\mathbf{V}$ est fermé et A de domaine dense, le sous-espace $\mathbf{V}$ est la fermeture de $\mathbf{W}$ dans X. Ainsi, $\mathbf{V}$ est aussi $\mathbb{S}-$invariant et le système (3.1.1) se réécrit sous la forme (0.2.1) sur l'espace des états $\mathbf{V}$.

3.1.2 Un résultat de stabilisation interne

Pour pouvoir appliquer l'algorithme itératif dans la suite, nous utilisons un résultat de stabilisation interne, montré par Phung [68, Théorème 5.5.], que nous rappelons ici.

Soit $\mathcal{O}$ un sous-domaine non vide de Ω, et $\tau > 0$ un réel positif. Nous supposons que $\mathcal{O}$ et τ satisfont une condition d'optique géométrique (voir par exemple [68, 91, 90]), qui assure la stabilisabilité du système de Maxwell, lorsque $\partial\Omega$ est connexe.
De manière équivalente, sous cette condition, l'opérateur état–sortie Ψ_τ (voir (0.1.9)) qui associe les données initiales à la mesure du champ électrique E de (3.1.1) sur $\mathcal{O}$ est borné inférieurement, *i.e.* vérifie l'inégalité d'observabilité (0.1.11).

Cette condition d'optique géométrique, notée **(COG)**, est équivalente à celle des ondes de Bardos, Lebeau et Rauch [8]. Phung montre dans son article [68] que l'on peut réécrire,

de manière équivalente grâce à l'hypothèse de divergence nulle, les équations de Maxwell (3.1.1) sous la forme d'une équation des ondes vectorielles (en éliminant le champ électrique ou le champ magnétique).
On peut par exemple imaginer des configurations en trois dimensions du même type que celle (en deux dimensions pour plus de lisibilité) de la FIGURE 3.1.

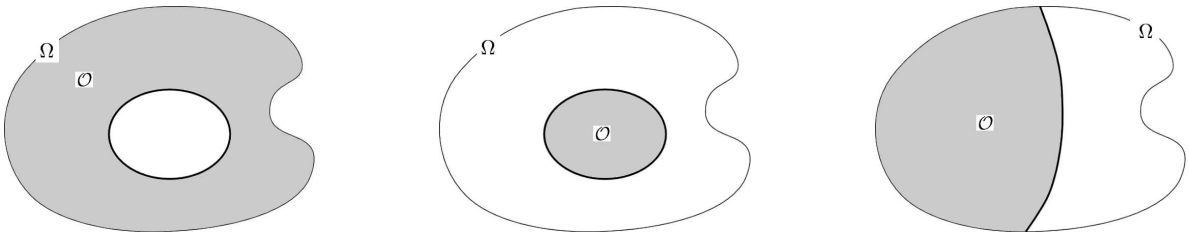


FIGURE 3.1 – Configurations (en deux dimensions) respectant la condition d'optique géométrique **(COG)**.

Nous avons vu que la condition de divergence nulle sur le champ électrique E dans (3.1.1) est une conséquence de la divergence nulle de la donnée initiale. La stabilisation interne du système (3.1.1) que nous allons utiliser ne permet pas de conserver cette condition. En particulier, la stabilisation n'a pas lieu dans l'espace des états $\mathbf{V}$. On introduit alors un autre sous-espace de X qui est aussi $\mathbb{S}-$invariant (avec la même démonstration)

$$X_{\mathcal{O}} = \left\{ f \in \mathbf{H} \mid f \in \mathbf{H}_0(\mathrm{div}\,, \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}) \right\} \times \mathbf{H}_0^T(\mathrm{div}\,, \Omega).$$

Cependant, ce sous-espace n'est toujours pas celui permettant la stabilisation. En effet, les équations de Maxwell admettent des solutions stationnaires non nécessairement nulles. En suivant Monk [61, Section 3.7], ces solutions stationnaires sont données par les espaces de cohomologie normal et tangentiel. On note l'espace de cohomologie tangentiel

$$K^T(\Omega) = \mathbf{H}_0^T(\mathrm{div}\,, \Omega) \cap \mathbf{H}_0(\mathrm{rot}\,, \Omega).$$

On sait (voir [61, Théorème 3.44.]) que $K^T(\Omega)$ est de dimension égale au nombre de découpages intérieurs nécessaires pour rendre Ω simplement connexe (en particulier, si Ω est déjà simplement connexe, $K^T(\Omega) = \{0\}$). Notons $\mathcal{S} = \mathbf{H} \times \left(K^T(\Omega)\right)^{\perp}$.

Nous nous plaçons sur

$$\mathbf{V}_{\mathrm{obs}} = X_{\mathcal{O}} \cap \mathcal{S}.$$

On montre aisément que $\mathbf{V}_{\mathrm{obs}}$ est $\mathbb{S}-$invariant par invariance de $X_{\mathcal{O}}$ et de $\mathcal{S}$, l'invariance de $\mathcal{S}$ se démontrant en multipliant $\mu \frac{\partial}{\partial t} H(x,t) + \mathrm{rot}\, E(x,t) = 0$ (dans (3.1.1)) par un élément de $K^T(\Omega)$ et en intégrant par parties.
C'est sur ce sous-espace stable que Phung a démontré que (3.1.1) est exponentiellement stabilisable, en agissant sur $\mathcal{O}$.

Théorème 3.1.2. *On suppose que $(\Omega, \mathcal{O}, \tau)$ satisfait la condition d'optique géométrique* ***(COG)*** *et que $\partial\Omega$, $\mathcal{O}$ et $\Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}$ sont connexes. Alors le système*

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t} e(x,t) - \operatorname{rot} h(x,t) + \chi_{|\mathcal{O}}(x) e(x,t) = 0, & \forall\, x \in \Omega, t \geq 0, \\ \mu \dfrac{\partial}{\partial t} h(x,t) + \operatorname{rot} e(x,t) = 0, & \forall\, x \in \Omega, t \geq 0, \\ \operatorname{div} e(x,t) = 0, & \forall\, x \in \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}, t \geq 0, \\ \operatorname{div} h(x,t) = 0, & \forall\, x \in \Omega, t \geq 0, \\ e(x,t) \wedge \nu(x) = 0,\ h(x,t) \cdot \nu(x) = 0, & \forall\, x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ e(x,0) = e_0(x), & \forall\, x \in \Omega, \\ h(x,0) = h_0(x), & \forall\, x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.1.3}$$

est exponentiellement stable sur $\mathbf{V}_{\text{obs}}$.

Autrement dit, il existe deux constantes $M, \beta > 0$ telles que

$$\varepsilon \int_\Omega |e(t)|^2 + \mu \int_\Omega |h(t)|^2 \leq M e^{-\beta t} \left\{ \varepsilon \int_\Omega |e_0|^2 + \mu \int_\Omega |h_0|^2 \right\}, \quad \forall (e_0, h_0) \in \mathbf{V}_{\text{obs}}, t \geq 0.$$

Remarque 3.1.1. La nécessité d'introduire le sous-espace $X_{\mathcal{O}}$ provient du fait que le terme dissipatif de l'équation (3.1.3) ne permet pas d'obtenir la divergence nulle du champ électrique dans tout Ω (un saut apparaît sur $\partial\mathcal{O} \cap \Omega$). On agrandit donc l'espace des états $\mathbf{V}$ pour pallier ce problème.

Remarque 3.1.2. La condition de connexité imposée à la frontière $\partial\Omega$ assure la convergence vers zéro. Sans elle, le système précédent convergerait vers une solution stationnaire non nécessairement nulle (l'espace de cohomologie normal n'est pas réduit à l'espace trivial).

3.1.3 Un résultat de stabilisation frontière

Nous nous appuyons sur des résultats de stabilisation des équations de Maxwell par la condition absorbante de Silver-Müller (voir par exemple Barucq [10], Barucq et Hanouzet [11], Eller, Lagnese et Nicaise [32], Eller et Masters [33], Komornik [53], Lagnese [56], Nicaise [64] et Phung [66, 68]) pour appliquer l'algorithme itératif de reconstruction de données initiales du Chapitre 0.

Soit Γ un sous-espace du bord $\partial\Omega$ (on notera $\Sigma = \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}$). La stabilisabilité du système de Maxwell (3.1.1) par la condition de Silver-Müller a lieu sous certaines hypothèses sur le couple (Ω, Γ). Phung [68] montre par exemple que sous une hypothèse de type optique géométrique (toujours analogue à celle donnée par Bardos, Lebeau et Rauch [8] pour l'équation des ondes), les équations de Maxwell avec condition de Silver-Müller sont exponentiellement stables.

On suppose dorénavant que Ω est de classe C^∞, que $\Sigma \cup \Gamma = \partial\Omega$ et $\Sigma \cap \Gamma = \emptyset$, et que Γ contrôle géométriquement Ω en temps $\tau > 0$ au sens de Phung [68, Définition 1.2]. On dira que (Ω, Γ, τ) vérifie **(COGF)**. On peut par exemple imaginer deux tores concentriques, en observant sur le tore extérieur Γ, comme sur la FIGURE 3.2, où l'on peut calculer la plus grande corde assez facilement (en fonction des rayons des tores).

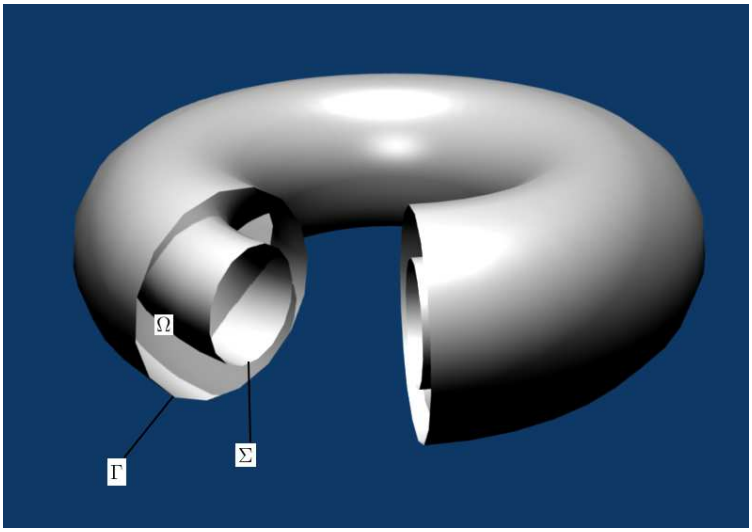


FIGURE 3.2 – Configuration (Ω, Γ, τ) respectant la condition d'optique géométrique **(COGF)** : $\Sigma \cup \Gamma = \partial\Omega$ et $\Sigma \cap \Gamma = \emptyset$ (en prenant τ suffisamment grand).

Avant toute chose, nous rappelons quelques résultats classiques sur les opérateurs de trace pour le système de Maxwell (voir par exemple [29, 19, 61]).

Quelques rappels sur les opérateurs de trace

On définit un opérateur linéaire de trace γ_t par

$$\gamma_t \varphi = \varphi_{|\partial\Omega} \wedge \nu, \qquad \forall\, \varphi \in \left(\mathcal{D}(\overline{\Omega})\right)^3.$$

Théorème 3.1.3. *Si Ω est borné, situé localement d'un seul coté de sa frontière lipschitzienne, l'application γ_t s'étend par continuité en une application linéaire continue de $\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,, \Omega)$ dans $\left(H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right)^3$.*

On a de plus la formule de Green

$$\langle \mathrm{rot}\, u, v\rangle = \langle u, \mathrm{rot}\, v\rangle - \langle \gamma_t u, v_{|\partial\Omega}\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}, \qquad \forall\, u \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,, \Omega), v \in \left(H^1(\Omega)\right)^3, \tag{3.1.4}$$

où $\langle \cdot, \cdot\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ désigne le crochet de dualité $\left(H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right)^3, \left(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right)^3$.

Démonstration. Voir Dautray-Lions [29, pp. 240-243]. L'essentiel de la démonstration repose sur la formule de Green pour des fonctions régulières et la densité de $\left(\mathcal{D}(\overline{\Omega})\right)^3$ dans les espaces $\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,, \Omega)$ et $(H^1(\Omega))^3$. ■

On notera dans la suite $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{div}\,,\partial\Omega) = \gamma_t\mathbf{H}(\mathrm{rot}\,,\Omega)$. On pourra se référer à Cessenat [19] ou Monk [61] pour plus de détails sur cet espace.

On peut aussi écrire la formule de Green pour tout élément dans $\phi \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,,\Omega)$ ayant une trace $\gamma_t\phi \in (L^2(\partial\Omega))^3$, ce qui permet d'éviter le crochet de dualité dans les calculs.

Théorème 3.1.4. *Sous les mêmes hypothèses que le Théorème 3.1.3, soit*

$$\mathbf{U} = \left\{\phi \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,,\Omega) \mid \gamma_t\phi \in \left(L^2(\partial\Omega)\right)^3\right\}, \tag{3.1.5}$$

alors on a

$$\langle \mathrm{rot}\, u, v\rangle = \langle u, \mathrm{rot}\, v\rangle - \langle \gamma_t u, v_{|\partial\Omega}\rangle_{(L^2(\partial\Omega))^3}, \qquad \forall\, u, v \in \mathbf{U}. \tag{3.1.6}$$

Démonstration. Voir Eller, Lagnese et Nicaise [32, Lemme 2.2.]. La démonstration utilise un résultat de densité de $(H^1(\Omega))^3$ dans $\mathbf{W}$. ■

Théorème 3.1.5. (Dautray-Lions [29, p. 247])
Si Ω est de classe C^2, on a identification entre $(H^1(\Omega))^3$ et les espaces

$$\left\{z \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,,\Omega) \cap \mathbf{H}(\mathrm{div}\,,\Omega) \mid z_{|\partial\Omega} \cdot \nu \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right\},$$

$$\left\{z \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,,\Omega) \cap \mathbf{H}(\mathrm{div}\,,\Omega) \mid z_{|\partial\Omega} \wedge \nu \in \left(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right)^3\right\}.$$

Stabilisation frontière

Nous commençons par nous placer sur les bons espaces fonctionnels. On définit

$$\mathbf{V}^+ = \mathbf{H}_0(\mathrm{div}\,,\Omega) \times \mathbf{H}_0^{\Sigma}(\mathrm{div}\,,\Omega),$$

où

$$\mathbf{H}_0^{\Sigma}(\mathrm{div}\,,\Omega) = \{\varphi \in \mathbf{H}_0(\mathrm{div}\,,\Omega) \mid \varphi_{|\Sigma} \cdot \nu = 0\}.$$

Cependant, comme nous l'avons déjà expliqué, les équations de Maxwell admettent des solutions stationnaires non nulles en toute généralité. Notons l'espace de cohomologie normal (voir Monk [61, p. 66])

$$K^N(\Omega) = \mathbf{H}_0^N(\mathrm{rot}\,,\Omega) \cap \mathbf{H}_0(\mathrm{div}\,,\Omega).$$

On sait alors (voir [61, Théorème 4.42]) que $K^N(\Omega)$ est de dimension égale au nombre de composantes connexes du bord, moins un. En particulier, si $\partial\Omega$ est connexe, $K^N(\Omega) = \{0\}$ (remarquons que ceci implique que $\Sigma = \emptyset$, et que l'on observe donc sur toute la frontière). Notons $\mathcal{M} = \left(K^N(\Omega)\right)^{\perp} \times \mathbf{H}$ et

$$\mathbf{V}^+_{\mathrm{obs}} = \mathbf{V}^+ \cap \mathcal{M}. \tag{3.1.7}$$

On montre aisément que $\mathbf{V}^+_{\text{obs}}$ est $\mathbb{S}-$invariant par invariance de $\mathbf{V}^+$ et de $\mathcal{M}$, l'invariance de $\mathcal{M}$ se démontrant en multipliant $\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}E(x,t) - \operatorname{rot} H(x,t) = 0$ (dans (3.1.1)) par un élément de $K^N(\Omega)$ et en intégrant par parties.

C'est sur ce sous-espace $\mathbb{S}-$invariant que Phung a démontré que (3.1.1) est exponentiellement stabilisable par la condition de Silver-Müller sur Γ.

Théorème 3.1.6 (Théorème 4.1, Phung [68]). *On suppose que (Ω, Γ, τ) satisfait la condition d'optique géométrique **(COGF)**. Soit $\xi = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$, alors le système*

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{\partial}{\partial t}e(x,t) - \operatorname{rot} h(x,t) = 0, & \forall\, x \in \Omega, t \geq 0, \\ \mu\dfrac{\partial}{\partial t}h(x,t) + \operatorname{rot} e(x,t) = 0, & \forall\, x \in \Omega, t \geq 0, \\ \operatorname{div} e(x,t) = 0, & \forall\, x \in \Omega, t \geq 0, \\ \operatorname{div} h(x,t) = 0, & \forall\, x \in \Omega, t \geq 0, \\ e(x,t) \wedge \nu(x) = 0,\ h(x,t) \cdot \nu(x) = 0, & \forall\, x \in \Sigma, t \geq 0, \\ e(x,t) \wedge \nu(x) + \xi\nu(x) \wedge (h(x,t) \wedge \nu(x)) = 0, & \forall\, x \in \Gamma, t \geq 0, \\ e(x,0) = e_0(x), & \forall\, x \in \Omega, \\ h(x,0) = h_0(x), & \forall\, x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.1.8}$$

est exponentiellement stable sur $\mathbf{V}^+_{\text{obs}}$.

Autrement dit, il existe deux constantes $M, \beta > 0$ telles que

$$\varepsilon\int_\Omega |e(t)|^2 + \mu\int_\Omega |h(t)|^2 \leq Me^{-\beta t}\left\{\varepsilon\int_\Omega |e_0|^2 + \mu\int_\Omega |h_0|^2\right\}, \quad \forall (e_0, h_0) \in \mathbf{V}^+_{\text{obs}}, t \geq 0.$$

3.2 Reconstruction des données initiales

3.2.1 Avec observation interne

On suppose que le champ électrique E de la solution de (3.1.1) est mesuré sur un sous-domaine non vide $\mathcal{O}$ de Ω, durant un intervalle de temps $[0, \tau]$, $\tau > 0$, conduisant à l'observation

$$y(t) = \chi_{|\mathcal{O}} E(t), \qquad \forall\, t \in [0, \tau], \tag{3.2.1}$$

où $\chi_{|\mathcal{O}}$ est la fonction caractéristique de $\mathcal{O}$.
En définissant $C = \begin{bmatrix} \chi_{|\mathcal{O}} & 0 \end{bmatrix}$, on peut réécrire (3.2.1) sous la forme (0.2.2).

Le problème inverse qui nous intéresse est la reconstruction de (E_0, H_0) à partir de la connaissance de la mesure y. Clairement, cette question n'est pas pertinente si le domaine d'observation $\mathcal{O}$ et le temps τ ne sont pas bien choisis. Nous supposons donc que $(\Omega, \mathcal{O}, \tau)$ vérifie la condition d'optique géométrique **(COG)**.

On souhaite utiliser l'algorithme décrit dans les préliminaires de cette thèse pour résoudre ce problème inverse. Nous avons besoin pour cela de montrer l'estimabilité et l'estimabilité dans le sens rétrograde de (A, C), où A est défini par (3.1.2), sur $\mathbf{V}_{\text{obs}}$.

Lemme 3.2.1. *Sous les hypothèses du Théorème 3.1.2, l'opérateur $A^+ = A - \varepsilon^{-1}C^*C$ est le générateur d'un C_0-groupe $\mathbb{T}^+$ exponentiellement stable sur $\mathbf{V}_{\text{obs}}$.*

Démonstration. Remarquons dans un premier temps que l'opérateur $A^+ = A - \varepsilon^{-1}C^*C$ est une perturbation bornée de l'opérateur A sur $X = \mathbf{H} \times \mathbf{H}$, et engendre donc un C_0-semi-groupe que l'on notera $\mathbb{T}^+$.

Il reste alors à montrer que $\mathbf{V}_{\text{obs}}$ est $\mathbb{T}^+-$invariant et à appliquer le Théorème 3.1.2.

On commence par montrer que $X_{\mathcal{O}}$ est $\mathbb{T}^+-$invariant en remarquant que la perturbation $\varepsilon^{-1}C^*C$ n'agit que sur la partie du champ électrique e dans $\mathcal{O}$. En prenant la divergence de la première ligne de (3.1.3), on obtient alors que $\operatorname{div} e(x,t)$ est nulle sur $\Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}$ pour tout $t \geq 0$.
L'invariance de $\mathcal{S}$ sous $\mathbb{T}^+$ se montre de la même façon que pour $\mathbb{S}$, c'est-à-dire en multipliant $\mu \frac{\partial}{\partial t} h(x,t) + \operatorname{rot} e(x,t) = 0$ par un élément de $K^T(\Omega)$ et en intégrant par parties.

Ainsi, $\mathbf{V}_{\text{obs}}$ est $\mathbb{T}^+-$invariant.

Enfin, en remarquant que $\begin{bmatrix} e(t) \\ h(t) \end{bmatrix} = \mathbb{T}_t^+ \begin{bmatrix} e_0 \\ h_0 \end{bmatrix}$ est solution de (3.1.3), le Théorème 3.1.2 permet de conclure. ■

Le Lemme précédent nous dit que (A, C) est estimable (voir Définition 0.2.1) en prenant $H^+ = -\varepsilon^{-1}C^*$ sur l'espace des états $\mathbf{V}_{\text{obs}}$.

On déduit facilement de ce résultat que (A, C) est estimable dans le sens rétrograde sur $\mathbf{V}_{\text{obs}}$ en prenant $A^- = -A - \varepsilon^{-1}C^*C$. En effet, d'après le Théorème de Liu 0.1.16, (A, C) est exponentiellement stabilisable si et seulement si (A, C^*) est exactement contrôlable. La dualité entre contrôlabilité exacte et observabilité exacte (Proposition 0.1.15) nous dit que $(-A, C)$ est exactement observable, et le Théorème de Liu permet alors de conclure.

Nous sommes donc en mesure d'appliquer l'algorithme itératif sur $\mathbf{V}_{\text{obs}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les observateurs direct $z_n^+ = \begin{bmatrix} E_n^+ \\ H_n^+ \end{bmatrix}$ et rétrograde $z_n^- = \begin{bmatrix} E_n^- \\ H_n^- \end{bmatrix}$ solutions de (0.2.4), respectivement (0.2.7). Réécrits sous forme d'équations aux dérivées

partielles, on obtient

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t} E_n^+(x,t) - \operatorname{rot} H_n^+(x,t) + \chi_{|\mathcal{O}}(x) E_n^+(x,t) = y(x,t), & \forall (x,t) \in \Omega \times [0,\tau], \\ \mu \dfrac{\partial}{\partial t} H_n^+(x,t) + \operatorname{rot} E_n^+(x,t) = 0, & \forall (x,t) \in \Omega \times [0,\tau], \\ \operatorname{div} E_n^+(x,t) = 0, & \forall x \in \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}, t \in [0,\tau], \\ \operatorname{div} H_n^+(x,t) = 0, & \forall (x,t) \in \Omega \times [0,\tau], \\ E_n^+(x,t) \wedge \nu(x) = 0, \ H_n^+(x,t) \cdot \nu(x) = 0, & \forall (x,t) \in \partial\Omega \times [0,\tau], \\ E_n^+(x,0) = E_{n-1}^-(x,0), & \forall x \in \Omega, \\ H_n^+(x,0) = H_{n-1}^-(x,0), & \forall x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.2.2}$$

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t} E_n^-(x,t) - \operatorname{rot} H_n^-(x,t) - \chi_{|\mathcal{O}}(x) E_n^-(x,t) = -y(x,t), & \forall (x,t) \in \Omega \times [0,\tau], \\ \mu \dfrac{\partial}{\partial t} H_n^-(x,t) + \operatorname{rot} E_n^-(x,t) = 0, & \forall (x,t) \in \Omega \times [0,\tau], \\ \operatorname{div} E_n^-(x,t) = 0, & \forall x \in \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}, t \in [0,\tau], \\ \operatorname{div} H_n^-(x,t) = 0, & \forall (x,t) \in \Omega \times [0,\tau], \\ E_n^-(x,t) \wedge \nu = 0, \ H_n^-(x,t) \cdot \nu = 0, & \forall (x,t) \in \partial\Omega \times [0,\tau], \\ E_n^-(x,\tau) = E_n^+(x,\tau), & \forall x \in \Omega, \\ H_n^-(x,\tau) = H_n^+(x,\tau), & \forall x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.2.3}$$

où l'on a posé

$$E_0^+(x,0) = 0, \qquad H_0^+(x,0) = 0, \qquad \forall x \in \Omega.$$

En appliquant le résultat théorique (0.2.9), on obtient directement le théorème principal de cette Section pour τ suffisamment grand. Cependant, nous sommes dans le cas où A est anti-adjoint, C est borné et (A, C) est exactement observable. Le Corollaire (0.2.5) nous dit alors que l'algorithme est convergent dès que $\tau \geq \tau_{obs}$ où τ_{obs} est le temps minimal donnant l'observabilité exacte de (A, C). Or, Phung démontre ([67, 68]) que (A, C) est exactement contrôlable en tout temps $\tau_{obs} > 0$ donnant le contrôle géométrique **(COG)**.

Théorème 3.2.2. *Soient Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^3$, de frontière $\partial\Omega$ connexe et $\mathcal{O} \subset \Omega$ tel que $(\Omega, \mathcal{O}, \tau)$ vérifie **(COG)**, avec $\mathcal{O}$ et $\Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}$ connexes. Alors il existe une constante $0 < \alpha < 1$ telle que pour toute donnée initiale $E_0 \in (L^2(\Omega))^3$, $H_0 \in \left(K^T(\Omega)\right)^\perp$ vérifiant*

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} E_0(x) = \operatorname{div} H_0(x) = 0, && \forall\, x \in \Omega, \\ &H_0(x) \cdot \nu(x) = 0, && \forall\, x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

on ait pour tout $n \geq 1$

$$\varepsilon \int_\Omega \left|E_0 - E_n^-(0)\right|^2 + \mu \int_\Omega \left|H_0 - H_n^-(0)\right|^2 \leq \alpha^n \left\{ \varepsilon \int_\Omega |E_0|^2 + \mu \int_\Omega |H_0|^2 \right\}.$$

3.2.2 Avec observation frontière

On suppose maintenant que la composante tangentielle du champ magnétique H de la solution de (3.1.1) est observée sur un sous-espace Γ du bord $\partial\Omega$ (on notera $\Sigma = \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}$), durant un intervalle de temps $[0, \tau]$, conduisant à l'observation

$$y(t) = \nu \wedge H(t)|_{\Gamma}, \qquad \forall\, t \in [0, \tau], \tag{3.2.4}$$

où l'on rappelle que ν est la normale extérieure à Ω.

Le problème inverse qui nous intéresse est toujours la reconstruction des champs initiaux (E_0, H_0) à partir de y. Évidemment, ce problème n'est pertinent que si Γ et τ sont bien choisis. Nous nous appuyons pour cela sur les résultats de stabilisation frontière rappelés dans la Sous-Section 3.1.3. Nous supposons donc que (Ω, Γ, τ) vérifie la condition d'optique géométrique **(COGF)**.

Cadre fonctionnel abstrait

Nous commençons par un Lemme qui étend le cadre d'application de l'algorithme itératif donné par Ramdani, Tucsnak et Weiss [72] et rappelé au chapitre 0. Ce Lemme dit que les observateurs direct et rétrograde ne doivent pas nécessairement être restreints à l'espace des états X.

Lemme 3.2.3. *L'algorithme itératif rappelé au chapitre 0 est encore valable si l'espace des états X est un sous-espace fermé de l'*espace des observateurs X^+.

Démonstration. Il suffit de reprendre les démonstrations des Propositions 2.5 et 3.3 de [72], qui aboutissent au résultat sans modification. En effet, il suffit de remarquer que la solution z de (0.2.1) est continue dans X (par le Théorème 0.1.7), donc dans X^+. Le reste de la démonstration est identique en prenant X^+ au lieu de X, et la reconstruction a donc lieu dans X^+. ■

Remarque 3.2.1. Dans le paragraphe précédent, nous avons implicitement utilisé un espace X^+, lorsque nous avons remplacé $\mathbf{V}$ par $\mathbf{V}_{\text{obs}}$.

Les observateurs développés dans ce paragraphe ne vérifie pas la condition $H \cdot \nu = 0$. On pourrait être tenté de "l'oublier" comme on l'a fait précédemment pour la condition de divergence nulle (avec l'introduction du sous-espace $\mathbf{V}_{\text{obs}}$). Toutefois, cette condition est utile à notre analyse car c'est elle qui garantira suffisamment de régularité sur H (par le Théorème 3.1.5). Autrement dit, le système observé (3.1.1) est regardé sur l'espace $\mathbf{V} = \mathbf{H}_0(\text{div}\,, \Omega) \times \mathbf{H}_0^T(\text{div}\,, \Omega)$, alors que les observateurs sont vus sur l'espace $\mathbf{V}_{\text{obs}}^+$ défini par (3.1.7).

Le système (3.1.8) se réécrit en posant $q(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ h(t) \end{bmatrix}$ et $q_0 = \begin{bmatrix} e_0 \\ h_0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = A^+ q(t), & \forall\, t \geq 0, \\ q(0) = q_0, \end{cases}$$

où l'on a défini

$$A^+ = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-1}\mathrm{rot} \\ -\mu^{-1}\mathrm{rot} & 0 \end{pmatrix},$$

de domaine

$$\mathcal{D}(A^+) = \mathbf{V}^+_{\mathrm{obs}} \bigcap \left\{ (u,v) \in \mathbf{U} \times \mathbf{U} \mid u_{|\Sigma} \wedge \nu = 0,\ u_{|\Gamma} \wedge \nu + \xi \nu \wedge \left(v_{|\Gamma} \wedge \nu \right) = 0 \right\},$$

avec $\mathbf{U}$ défini par (3.1.5).
On peut montrer facilement que A^+ est m-dissipatif. De plus, si (Ω, Γ, τ) vérifie **(COGF)**, le Théorème 3.1.6 nous dit que A^+ est le générateur d'un C_0-semi-groupe exponentiellement stable sur $\mathbf{V}^+_{\mathrm{obs}}$.

On définit maintenant l'opérateur d'observation linéaire

$$C \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \psi_{|\Gamma} \wedge \nu = \chi_{|\Gamma} \gamma_t \psi, \qquad \forall \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \times \mathbf{H}(\mathrm{rot}\,, \Omega),$$

où $\chi_{|\Gamma}$ est la fonction caractéristique de la partie Γ de la frontière $\partial\Omega$.
Si on pose $Y = (L^2(\partial\Omega))^3$, on a $C \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A), Y)$ par les Théorèmes 3.1.3 et 3.1.5.

Théorème 3.2.4. *Si (Ω, Γ, τ) vérifie la condition d'optique géométrique **(COGF)**, alors le couple (A, C) est estimable par $(A^+, -\xi C^*)$ et estimable dans le sens rétrograde par $((A^+)^*, -\xi C^*)$.*

Démonstration. Notons $\mathbb{T}^+$ le semi-groupe de contraction exponentiellement stable engendré par A^+ (par hypothèse sur (Ω, Γ) et parce que A^+ est m-dissipatif par le Théorème 0.1.10). Il faut montrer que

1. $-\xi C^*$ est un opérateur de contrôle admissible pour $\mathbb{T}^+$, *i.e.* (par dualité d'après le Théorème 0.1.13)

$$\exists T > 0, M_T > 0, \quad \int_0^T \|C(\mathbb{T}^+_s)^* z\|_Y^2 ds \leq M_T \|z\|_X^2, \qquad \forall\, z \in \mathcal{D}((A^+)^*).$$

2. On utilise la formulation faible de l'estimabilité, donnée dans la Remarque 0.2.1.

$$\langle A z_1, z_2 \rangle_X = \langle z_1, \left(A^+\right)^* z_2 \rangle_X + \xi \langle C z_1, C z_2 \rangle_Y, \qquad \forall\, z_1 \in \mathcal{D}(A), z_2 \in \mathcal{D}((A^+)^*).$$

3. $-\xi C^*$ est un opérateur de contrôle admissible pour $(\mathbb{T}^+)^*$

$$\exists T > 0, M_T > 0, \quad \int_0^T \|C\mathbb{T}_s^+ z\|_Y^2 ds \leq M_T \|z\|_X^2, \qquad \forall\, z \in \mathcal{D}(A^+).$$

4. De la même façon, on utilise la formulation faible de l'estimabilité dans le sens rétrograde, donnée dans la Remarque 0.2.3.

$$-\langle Az_1, z_2\rangle_X = \langle z_1, A^+ z_2\rangle_X + \xi\langle Cz_1, Cz_2\rangle_Y, \qquad \forall\, z_1 \in \mathcal{D}(A), z_2 \in \mathcal{D}(A^+).$$

Remarquons dans un premier temps que $(\mathbb{T}^+)^*$ est engendré par

$$(A^+)^* = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon^{-1}\mathrm{rot} \\ \mu^{-1}\mathrm{rot} & 0 \end{pmatrix},$$

de domaine

$$\mathcal{D}((A^+)^*) = \mathbf{V}_{\mathrm{obs}}^+ \bigcap \left\{(u,v) \in \mathbf{U}^2 \mid u_{|\Sigma} \wedge \nu = 0,\ u_{|\Gamma} \wedge \nu = \xi\nu \wedge \left(v_{|\Gamma} \wedge \nu\right)\right\}.$$

En effet, par la formule de Green (3.1.6), on a pour tous $\begin{pmatrix}\phi\\ \psi\end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A^+)$, $\begin{pmatrix}\widetilde{\phi}\\ \widetilde{\psi}\end{pmatrix} \in \mathcal{D}((A^+)^*)$

$$\left\langle A^+\begin{pmatrix}\phi\\ \psi\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\widetilde{\phi}\\ \widetilde{\psi}\end{pmatrix}\right\rangle = -\left\langle \begin{pmatrix}\phi\\ \psi\end{pmatrix}, A^+\begin{pmatrix}\widetilde{\phi}\\ \widetilde{\psi}\end{pmatrix}\right\rangle - \left\langle \psi_{|\Sigma}, \widetilde{\phi}_{|\Sigma} \wedge \nu\right\rangle_Y$$
$$+ \left\langle \psi_{|\Gamma}, \widetilde{\phi}_{|\Gamma} \wedge \nu - \xi\nu \wedge \left(\widetilde{\psi}_{|\Gamma} \wedge \nu\right)\right\rangle_Y.$$

1. Notons $\begin{pmatrix}e_0\\ h_0\end{pmatrix} = z \in \mathcal{D}((A^+)^*)$ et $\begin{pmatrix}e(t)\\ h(t)\end{pmatrix} = (\mathbb{T}_t^+)^* \begin{pmatrix}e_0\\ h_0\end{pmatrix}$. Alors $\begin{pmatrix}e(t)\\ h(t)\end{pmatrix}$ est solution de

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{\partial}{\partial t}e(x,t) + \mathrm{rot}\, h(x,t) = 0, & \forall\, x \in \Omega, t \geq 0, \\ \mu\dfrac{\partial}{\partial t}h(x,t) - \mathrm{rot}\, e(x,t) = 0, & \forall\, x \in \Omega, t \geq 0, \\ \mathrm{div}\, e(x,t) = 0, & \forall\, x \in \Omega, t \geq 0, \\ \mathrm{div}\, h(x,t) = 0, & \forall\, x \in \Omega, t \geq 0, \\ e(x,t) \wedge \nu(x) = 0,\ h(x,t) \cdot \nu(x) = 0, & \forall\, x \in \Sigma, t \geq 0, \\ e(x,t) \wedge \nu(x) = \xi\nu(x) \wedge (h(x,t) \wedge \nu(x)), & \forall\, x \in \Gamma, t \geq 0, \\ e(x,0) = e_0(x), & \forall\, x \in \Omega, \\ h(x,0) = h_0(x), & \forall\, x \in \Omega. \end{cases}$$

A^+ étant m-dissipatif, il en est de même pour $(A^+)^*$ (par la Proposition 0.1.8), et

$(\mathbb{T}^+)^*$ est donc de contraction (par le Théorème 0.1.10). En particulier, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\begin{pmatrix}e(t)\\h(t)\end{pmatrix}\right\|_X^2 &= \mathrm{Re}\left\langle\begin{pmatrix}\dot{e}(t)\\\dot{h}(t)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}e(t)\\h(t)\end{pmatrix}\right\rangle_X,\\ &= -\xi\|\chi_{|\Gamma}\gamma_t h(t)\|_Y^2.\end{aligned}$$

En intégrant de 0 à $T>0$, on obtient

$$\left\|\begin{pmatrix}e(T)\\h(T)\end{pmatrix}\right\|_X^2-\left\|\begin{pmatrix}e_0\\h_0\end{pmatrix}\right\|_X^2=-2\xi\int_0^T\|\chi_{|\Gamma}\gamma_t h(s)\|_Y^2 ds.$$

Or

$$\int_0^T\|C(\mathbb{T}_s^+)^*z\|_Y^2 ds=\int_0^T\|\chi_{|\Gamma}\gamma_t h(s)\|_Y^2 ds,$$

et on obtient donc l'admissibilité de C pour $(\mathbb{T}^+)^*$, *i.e.*

$$\int_0^T\|C(\mathbb{T}_s^+)^*z\|_Y^2 ds\leq\frac{1}{2\xi}\|z\|_X^2,\qquad\forall\, z\in\mathcal{D}((A^+)^*).$$

Par dualité, C^* est un opérateur de contrôle admissible pour $\mathbb{T}^+$.

2. Pour tout $\begin{pmatrix}\phi\\\psi\end{pmatrix}\in\mathcal{D}(A)$ et $\begin{pmatrix}\widetilde{\phi}\\\widetilde{\psi}\end{pmatrix}\in\mathcal{D}((A^+)^*)$, on a

$$\left\langle A\begin{pmatrix}\phi\\\psi\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\widetilde{\phi}\\\widetilde{\psi}\end{pmatrix}\right\rangle_X=\langle\mathrm{rot}\,\psi,\widetilde{\phi}\rangle-\langle\mathrm{rot}\,\phi,\widetilde{\psi}\rangle.$$

Par ailleurs, par le Thèorème 3.1.5, on a $\mathcal{D}(A)\subset(H^1(\Omega))^3\times(H^1(\Omega))^3$, et on peut alors utiliser la formule de Green (3.1.4) pour obtenir

$$\left\langle\begin{pmatrix}\phi\\\psi\end{pmatrix},(A^+)^*\begin{pmatrix}\widetilde{\phi}\\\widetilde{\psi}\end{pmatrix}\right\rangle_X=\langle\mathrm{rot}\,\psi,\widetilde{\phi}\rangle-\langle\mathrm{rot}\,\phi,\widetilde{\psi}\rangle+\langle\phi_{|\partial\Omega},\gamma_t\widetilde{\psi}\rangle_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}-\langle\psi_{|\partial\Omega},\gamma_t\widetilde{\phi}\rangle_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}.$$

Or $\gamma_t\widetilde{\psi}$ et $\gamma_t\widetilde{\phi}\in(L^2(\partial\Omega))^3$ puisque $\mathcal{D}((A^+)^*)\subset\mathbf{U}$ (défini par (3.1.5)), et les crochets de dualité s'identifie donc au produit scalaire dans $(L^2(\partial\Omega))^3$ par l'égalité (0.1.5) puisque $\left(H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right)^3$ est le dual de $\left(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right)^3$ par rapport à l'espace pivot $(L^2(\partial\Omega))^3$. Alors

$$\begin{aligned}\langle\phi_{|\partial\Omega},\gamma_t\widetilde{\psi}\rangle_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} &= \langle\phi_{|\partial\Omega},\gamma_t\widetilde{\psi}\rangle_Y,\\ &= -\langle\phi_{|\partial\Omega},\nu\wedge\widetilde{\psi}_{|\partial\Omega}\rangle_Y,\\ &= -\langle\phi_{|\partial\Omega}\wedge\nu,\widetilde{\psi}_{|\partial\Omega}\rangle_Y,\\ &= 0.\end{aligned}$$

De la même façon

$$\begin{aligned}\langle \psi_{|\partial\Omega}, \gamma_t \widetilde{\phi}\rangle_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} &= \langle \psi_{|\partial\Omega}, \gamma_t \widetilde{\phi}\rangle_Y, \\ &= \xi \langle \psi_{|\Gamma}, \nu \wedge \left(\widetilde{\psi}_{|\Gamma} \wedge \nu\right)\rangle_Y, \\ &= \xi \langle \psi_{|\Gamma} \wedge \nu, \widetilde{\psi}_{|\Gamma} \wedge \nu\rangle_Y,\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $\widetilde{\phi}_{|\Gamma} \wedge \nu = \xi \nu \wedge \left(\widetilde{\psi}_{|\Gamma} \wedge \nu\right)$. Et on a donc

$$\left\langle \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}, \left(A^+\right)^* \begin{pmatrix} \widetilde{\phi} \\ \widetilde{\psi} \end{pmatrix} \right\rangle_X = \langle \operatorname{rot} \psi, \widetilde{\phi}\rangle - \langle \operatorname{rot} \phi, \widetilde{\psi}\rangle - \xi \langle \psi_{|\Gamma} \wedge \nu, \widetilde{\psi}_{|\Gamma} \wedge \nu\rangle_Y.$$

Enfin, on a

$$\left\langle C \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} \widetilde{\phi} \\ \widetilde{\psi} \end{pmatrix} \right\rangle_Y = \langle \psi_{|\Gamma} \wedge \nu, \widetilde{\psi}_{|\Gamma} \wedge \nu\rangle_Y.$$

En combinant les égalités précédentes, on obtient

$$\langle A z_1, z_2\rangle_X = \langle z_1, \left(A^+\right)^* z_2\rangle_X + \xi \langle C z_1, C z_2\rangle_Y, \qquad \forall\, z_1 \in \mathcal{D}(A), z_2 \in \mathcal{D}((A^+)^*).$$

3. On peut refaire le même type de calculs pour obtenir l'admissibilité de C pour $\mathbb{T}^+$, *i.e.*

$$\int_0^T \|C\mathbb{T}_s^+ z\|_Y^2 ds \leq \frac{1}{2\xi}\|z\|_X^2, \qquad \forall\, z \in \mathcal{D}(A^+).$$

Autrement dit, par le Théorème 0.1.13, C^* est un opérateur de contrôle admissible pour $(\mathbb{T}^+)^*$.

4. Les calculs sont similaires à l'estimabilité.

■

On reconstruit alors les champs initiaux en définissant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les observateurs direct et rétrograde z_n^+ et z_n^- solutions de (0.2.4) et (0.2.7). En réécrivant les observateurs sous forme d'équations aux dérivées partielles, en posant $\begin{bmatrix} E_n^+ \\ H_n^+ \end{bmatrix} = z_n^+$ et rétrograde $\begin{bmatrix} E_n^- \\ H_n^- \end{bmatrix} = z_n^-$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on a réécrit la condition de Silver-Müller autrement pour faire

apparaître directement y)

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t} E_n^+(x,t) - \operatorname{rot} H_n^+(x,t) = 0, & \forall (x,t) \in \Omega \times [0,\tau], \\ \mu \dfrac{\partial}{\partial t} H_n^+(x,t) + \operatorname{rot} E_n^+(x,t) = 0, & \forall (x,t) \in \Omega \times [0,\tau], \\ \operatorname{div} E_n^+(x,t) = 0, & \forall (x,t) \in \Omega \times [0,\tau], \\ \operatorname{div} H_n^+(x,t) = 0, & \forall (x,t) \in \Omega \times [0,\tau], \\ E_n^+(x,t) \wedge \nu(x) = 0, \ H_n^+(x,t) \cdot \nu(x) = 0, & \forall (x,t) \in \Sigma \times [0,\tau], \\ (E_n^+(x,t) \wedge \nu(x)) \wedge \nu(x) + \xi H_n^+(x,t) \wedge \nu(x) = \xi y(x,t), & \forall (x,t) \in \Gamma \times [0,\tau], \\ E_n^+(x,0) = E_{n-1}^-(x,0), & \forall x \in \Omega, \\ H_n^+(x,0) = H_{n-1}^-(x,0), & \forall x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.2.5}$$

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t} E_n^-(x,t) - \operatorname{rot} H_n^-(x,t) = 0, & \forall (x,t) \in \Omega \times [0,\tau], \\ \mu \dfrac{\partial}{\partial t} H_n^-(x,t) + \operatorname{rot} E_n^-(x,t) = 0, & \forall (x,t) \in \Omega \times [0,\tau], \\ \operatorname{div} E_n^-(x,t) = 0, & \forall (x,t) \in \Omega \times [0,\tau], \\ \operatorname{div} H_n^-(x,t) = 0, & \forall (x,t) \in \Omega \times [0,\tau], \\ E_n^-(x,t) \wedge \nu = 0, \ H_n^-(x,t) \cdot \nu = 0, & \forall (x,t) \in \Sigma \times [0,\tau], \\ (E_n^-(x,t) \wedge \nu(x)) \wedge \nu(x) - \xi H_n^-(x,t) \wedge \nu(x) = -\xi y(x,t), & \forall (x,t) \in \Gamma \times [0,\tau], \\ E_n^-(x,\tau) = E_n^+(x,\tau), & \forall x \in \Omega, \\ H_n^-(x,\tau) = H_n^+(x,\tau), & \forall x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.2.6}$$

où l'on a posé

$$E_0^+(x,0) = 0, \qquad H_0^+(x,0) = 0, \qquad \forall x \in \Omega.$$

Remarque 3.2.2. Si l'on raisonne directement sur ces équations, on remarque qu'il est aisé de leur donner un sens (*i.e.* l'existence d'une solution forte) si la condition d'impédance sur Γ a un sens. Or en toute généralité, $y(x,t) = H_{|\Gamma}(x,t) \wedge \nu(x) \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}, \partial\Omega)$, et l'égalité n'a donc pas lieu dans $(L^2(\partial\Omega))^3$. Mais la régularité présente dans le système initial (conséquence du fait que $H \cdot \nu = 0$ sur tout le bord), montre (par le Théorème 3.1.5) que l'on peut considérer cette égalité dans $(L^2(\partial\Omega))^3$. On pourrait par exemple s'inspirer des méthodes développées dans Tucsnak et Weiss [86, 87] pour les équations du second ordre.

Contrairement au cas précédent, où l'opérateur d'observation était borné, nous n'avons pas de critère permettant de choisir τ de telle sorte que l'algorithme itératif du Chapitre 0 soit convergent.

En utilisant les observateurs (3.2.5)–(3.2.6), on obtient le théorème suivant.

Théorème 3.2.5. *Soient Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^3$, de frontière $\partial\Omega$ et $\Gamma \subset \partial\Omega$ tel que $(\Omega, \Gamma, \tau_{obs})$ vérifie **(COGF)**. Alors si τ_{obs} est suffisamment grand, il existe une constante*

$0 < \alpha < 1$ *telle que pour toute donnée initiale* $E_0 \in \left(K^N(\Omega)\right)^\perp$, $H_0 \in \left(L^2(\Omega)\right)^3$ *vérifiant*

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} E_0(x) = \operatorname{div} H_0(x) = 0, && \forall\, x \in \Omega, \\ &H_0(x) \cdot \nu(x) = 0, && \forall\, x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

on ait pour tout $n \geq 1$

$$\varepsilon \int_\Omega \left|E_0 - E_n^-(0)\right|^2 + \mu \int_\Omega \left|H_0 - H_n^-(0)\right|^2 \leq \alpha^n \left\{ \varepsilon \int_\Omega |E_0|^2 + \mu \int_\Omega |H_0|^2 \right\}.$$

Démonstration. Il s'agit d'une application directe de l'algorithme itératif de reconstruction de données initiales, à l'aide du Théorème 3.2.4. ■

3.3 Reconstruction d'un terme source

On s'intéresse dans cette Section à la reconstruction d'un terme source dans les équations de Maxwell. On utilisera pour cela la méthode décrite dans la Section 0.3 du Chapitre 0.

Soient $\lambda \in H^1_{\ell oc}((0,\infty),\mathbb{R})$ connue, telle que $\lambda(0) \neq 0$, et $(f,g) \in \mathbf{V}$ inconnue. On considère le système

$$\left\{ \begin{aligned} &\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E(x,t) - \operatorname{rot} H(x,t) + \lambda(t) f(x) = 0, && \forall\, x \in \Omega, t \geq 0, \\ &\mu \frac{\partial}{\partial t} H(x,t) + \operatorname{rot} E(x,t) + \lambda(t) g(x) = 0, && \forall\, x \in \Omega, t \geq 0, \\ &\operatorname{div} E(x,t) = 0, && \forall\, x \in \Omega, t \geq 0, \\ &\operatorname{div} H(x,t) = 0, && \forall\, x \in \Omega, t \geq 0, \\ &E(x,t) \wedge \nu(x) = 0,\ H(x,t) \cdot \nu(x) = 0, && \forall\, x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ &E(x,0) = E_0(x), && \forall\, x \in \Omega, \\ &H(x,0) = H_0(x), && \forall\, x \in \Omega. \end{aligned} \right. \tag{3.3.1}$$

On souhaite reconstruire (f,g) à partir d'une observation $y(t)$ de ce système, sur un intervalle de temps $[0,\tau]$.

En utilisant les définitions du début de ce chapitre, et en posant $F = \lambda \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$, on peut réécrire (3.3.1) sous la forme

$$\left\{ \begin{aligned} &\dot{z}(t) = Az(t) + F(t), && \forall\, t \geq 0, \\ &z(0) = z_0, \end{aligned} \right.$$

Remarquons dans un premier temps que ce système est bien posé d'après le Théorème 0.1.7, et en remarquant que les conditions additionnelles $\operatorname{div} E = \operatorname{div} H = 0$ et $\mathbf{H} \cdot \nu = 0$ sont encore vérifiées. En effet, $\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \in \mathbf{V}$, *i.e.* $\operatorname{div} f = \operatorname{div} g = 0$ et $g \wedge \nu = 0$ et le terme source n'a

donc aucune influence.

3.3.1 Avec observation interne

On suppose que l'on dispose du champ électrique E sur un sous-domaine $\mathcal{O}$ de Ω, pendant un intervalle de temps $[0, \tau]$ (Sous-section 3.2.1). Alors on a le théorème suivant.

Théorème 3.3.1. *Si Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^3$, de frontière $\partial\Omega$ connexe et $\mathcal{O} \subset \Omega$ tel que $(\Omega, \mathcal{O})$ vérifie **(COG)** en temps $\tau > 0$, avec $\mathcal{O}$ et $\Omega \backslash \overline{\mathcal{O}}$ connexes. Si de plus $f \in (L^2(\Omega))^3$, $g \in \left(K^T(\Omega)\right)^\perp$ vérifient*

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} f(x) = \operatorname{div} g(x) = 0, && \forall\, x \in \Omega, \\ &g(x) \cdot \nu(x) = 0, && \forall\, x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

alors on peut reconstruire (f, g) à l'aide de l'algorithme de la Section 0.3.

3.3.2 Avec observation frontière

On suppose maintenant que l'on dispose de $H \wedge \nu$ sur un sous-ensemble Γ de $\partial\Omega$ (Sous-section 3.2.2). Alors on a le théorème suivant.

Théorème 3.3.2. *Si Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^3$, de frontière $\partial\Omega$ et $\Gamma \subset \partial\Omega$ tel que (Ω, Γ) vérifie **(COGF)** en temps $\tau_{obs} > 0$. Si de plus τ est suffisamment grand, et si $f \in \left(K^N(\Omega)\right)^\perp$, $g \in \left(L^2(\Omega)\right)^3$ vérifient*

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} f(x) = \operatorname{div} g(x) = 0, && \forall\, x \in \Omega, \\ &g(x) \cdot \nu(x) = 0, && \forall\, x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

alors on peut reconstruire (f, g) à l'aide de l'algorithme de la Section 0.3.

Chapitre 4

Quelques variations autour des observateurs

Sommaire

4.1 Perturbations **124**

4.1.1 Perturbations linéaires 125

4.1.2 Perturbations non linéaires 140

4.2 Sans observabilité exacte **161**

4.3 Les ondes en domaine non-borné **173**

4.3.1 En dimension un 177

4.3.2 En dimension trois 179

Nous tentons dans ce Chapitre 4 d'étendre le cadre d'application de l'algorithme de reconstruction de données initiales. Nous donnons dans une première Section quelques résultats de robustesse des observateurs aux perturbations, linéaires dans un premier temps, puis non-linéaires. Nous nous attardons plus particulièrement sur le cas des perturbations de systèmes conservatifs (*i.e.* avec $A^* = -A$), avec opérateur d'observation borné, puisque le Théorème de Liu 0.1.16 permet, lorsqu'il y a observabilité exacte, d'obtenir facilement des observateurs direct et rétrograde dans ce cas. Nous donnons quelques simulations numériques pour illustrer nos résultats. Dans la deuxième Section, nous nous posons la question de l'utilisation de l'algorithme lorsqu'il n'y a pas observabilité exacte (toujours dans le cas conservatif avec opérateur d'observation borné). En effet, les observateurs direct et rétrograde sont toujours bien définis dans ce cas, et il est naturel de se demander ce que reconstruit l'algorithme itératif s'il converge. Nous nous sommes intéressés dans la dernière Section à la reconstruction de données initiales pour les équations des ondes en domaine non borné.

4.1 Perturbations

Jusqu'à présent, nous avons toujours considéré des systèmes conservatifs, bien que l'algorithme de reconstruction de données initiales ne se limite pas à ce type de système. La principale difficulté dans le cas général concerne la construction des opérateurs H^+ et H^-. En effet, même lorsque l'on sait qu'ils existent, ils peuvent s'avérer difficile à calculer.

Supposons par exemple que (A, C) et $(A+P, C)$ soient exactement observables, avec A un opérateur anti-adjoint, $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ un opérateur d'observation borné et P une perturbation linéaire bornée. On sait, par hypothèse d'observabilité exacte, que $(A + P, C)$ est estimable et estimable dans le sens rétrograde par la Proposition 0.2.1. On peut même obtenir des opérateurs H^+ explicites en utilisant un résultat de Slemrod [80] (rappelé sous sa forme généralisée dans le Théorème 0.1.17). Cependant, le calcul effectif de ces opérateurs nécessitent l'inversion d'une modification du Grammien d'observabilité (voir Remarque 0.1.3), ce qui est numériquement très coûteux, voire plus coûteux que l'inversion directe de l'opérateur état–sortie Ψ_τ dans l'égalité $y = \Psi_\tau z_0$. Il est donc peu envisageable d'utiliser ces opérateurs en combinaison avec les résultats connus de robustesse d'observabilité exacte (voir par exemple Tucsnak et Weiss [88], Cîndea et Tucsnak [26, 27] ou encore Baroun et Jacob [9] dans le cas semi-linéaire). Dans notre exemple, (A, C) est estimable par $(A - C^*C, -C^*)$ et estimable dans le sens rétrograde par $(-A - C^*C, -C^*)$ (par le Théorème de Liu 0.1.16). Il est alors naturel de se demander si l'on peut encore utiliser $H^+ = -C^*$ après perturbation. Autrement dit, le couple $(A + P, C)$ est-il estimable par $(A + P - C^*C, -C^*)$ et estimable dans le sens rétrograde par $(-A - P - C^*C, -C^*)$?

Plus généralement, on s'intéresse à la question suivante : **si (A, C) est estimable par (A^+, H^+), et estimable dans le sens rétrograde par (A^-, H^-), a-t-on $(A + P, C)$ estimable par $(A^+ + P, H^+)$, et estimable dans le sens rétrograde par $(A^- - P, H^-)$?**

Par la Proposition 0.2.2, une réponse affirmative à la précédente question entraîne un résultat sur la robustesse de l'observabilité exacte par rapport aux perturbations. Le problème que l'on considère ici est donc le suivant. Soient X un espace de Hilbert et $A : \mathcal{D}(A) \to X$ le générateur d'un C_0-semi-groupe $\mathbb{T}$ sur X, et un opérateur d'observation $C \in \mathcal{L}(X_1, Y)$, où Y est un autre espace de Hilbert. On suppose que (A, C) est estimable par (A^+, H^+) et estimable dans le sens rétrograde par (A^-, H^-). Soit $P : \mathcal{D}(A) \to X$ un opérateur de perturbation, on considère alors l'équation différentielle (que l'on suppose bien posée)

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = (A + P)\, z(t), & \forall\, t \geq 0, \\ z(0) = z_0 \in \mathcal{D}(A). \end{cases} \tag{4.1.1}$$

Nous observons ce système au travers de l'opérateur C sur un intervalle de temps $[0, \tau]$, *i.e.*

on dispose de la mesure

$$y(t) = Cz(t), \qquad \forall\, t \in [0, \tau]. \tag{4.1.2}$$

On cherche alors à reconstruire z_0 à partir de la connaissance de y, en utilisant la méthode par observateurs itératifs. Nous allons voir dans la suite qu'il s'agit d'un problème très difficile, auquel nous n'avons apporté que quelques résultats partiels.

Nous avons pu montrer que l'algorithme est stable vis à vis des "petites" perturbations linéaires, bien que les observateurs utilisés soient alors difficilement constructibles en pratique, soit parce que les opérateurs H^+ et H^- ne sont pas aisément calculables (Proposition 4.1.3 et Théorème 4.1.5), soit parce que le gain est difficilement optimisable (Proposition 4.1.6). Nous testons numériquement la reconstruction des données initiales d'une équation de Schrödinger avec potentiel.

Nous nous sommes ensuite intéressés au cas des perturbations localement lipschitziennes, et avons construit un observateur direct sous certaines hypothèses (voir le Théorème 4.1.8). Nous donnons quelques simulations sur l'équation de Klein-Gordon dissipative. Nous ne sommes cependant pas parvenus à construire d'observateur rétrograde et n'avons donc pas pu généraliser l'algorithme aux systèmes non-linéairement perturbés.

Dans la Section 4.2, nous étudions le comportement de l'algorithme itératif dans le cas où A est anti-adjoint, C est borné, $H^+ = H^- = -\gamma C^*$, avec $\gamma > 0$, lorsque (A, C) n'est pas exactement observable. Notre principal résultat (Théorème 4.2.3) affirme que l'algorithme converge vers la "partie observable" de la donnée initiale.

Enfin, nous concluons par une application des résultats de la Section 4.2 à la tomographie thermo-acoustique en dimension un et trois (Théorèmes 4.3.2 et 4.3.3).

4.1.1 Perturbations linéaires

Dans cette Section, nous supposons que A est le générateur d'un C_0-groupe $\mathbb{T}$, et que $C \in \mathcal{L}(X, Y)$. En particulier, l'estimabilité et l'estimabilité rétrograde sont équivalentes à l'observabilité exacte (Proposition 0.2.3).

On se propose de montrer la Proposition 4.1.3 pour commencer. On y affirme que si $P \in \mathcal{L}(X)$ est de norme suffisamment petite, alors les opérateurs $H^\pm$ donnés par Slemrod [80] (Proposition 4.1.1 suivante) permettent encore d'estimer (A, C) dans les sens direct et rétrograde. Autrement dit, il n'est pas nécessaire de calculer les nouveaux $H_P^\pm$ correspondant au système perturbé, ce qui nécessiterait également de montrer que $(A + P, C)$ est encore exactement observable, alors que notre résultat l'impliquera par la Proposition 0.2.3.

Proposition 4.1.1. ***Slemrod [80, Théorème 2.1]***
Soient A le générateur d'un C_0-groupe $\mathbb{T}$ sur l'espace de Hilbert X, et $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ un opérateur d'observation borné, où Y est un autre espace de Hilbert. Supposons que (A, C)

soit exactement observable en temps $\tau > 0$.

Alors (A, C) est estimable avec un taux de décroissance exponentielle préfixé.

Plus précisément, pour tout $\omega > 0$

- *L'opérateur Λ_ω défini par*

$$\Lambda_\omega z = \int_0^\tau e^{-2\omega s}\mathbb{T}^*_{-s}C^*C\mathbb{T}_{-s}z ds, \qquad \forall\, z \in X, \tag{4.1.3}$$

  est symétrique défini positif.
- *L'opérateur $A^+ = A - \Lambda_\tau^{-1}C^*C$ est le générateur d'un C_0-groupe $\mathbb{T}^+$ exponentiellement stable et il existe une constante $M_\omega \geq 1$ telle que*

$$\|\mathbb{T}^+_t z\| \leq M_\omega e^{-\omega t}\|z\|, \qquad \forall\, t \geq 0.$$

Démonstration. Il est clair que Λ_ω est borné et auto-adjoint défini positif. En effet, le caractère borné de Λ_ω découle directement du caractère borné de C, et puisque (A, C) est exactement observable, il en va de même pour $(-A, C)$ (le calcul est fait dans la démonstration de la Proposition 0.2.1). En particulier, il existe une constante $k_\tau > 0$ telle que

$$\langle \Lambda_\omega z, z\rangle = \int_0^\tau e^{-2\omega s}\|C\mathbb{T}_{-s}z\|^2 ds \geq k_\tau\|z\|^2, \qquad \forall\, z \in X,$$

et alors Λ_ω est défini positif, et en particulier inversible.

On définit maintenant $A^+_\omega = A + H_\omega + \omega I$, où $H_\omega = -\Lambda_\omega^{-1}C^* \in \mathcal{L}(X, Y)$. A étant le générateur d'un groupe, et $H_\omega + \omega I$ étant borné, A^+_ω est encore le générateur d'un C_0-groupe $\widetilde{\mathbb{T}}^+_t$ (il suffit de se rappeler qu'un opérateur A est le générateur d'un groupe si et seulement si son spectre est compris dans une bande verticale du plan complexe).

On a alors pour tout $z \in \mathcal{D}(A)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\langle \Lambda_\omega \widetilde{\mathbb{T}}^+_t z, \widetilde{\mathbb{T}}^+_t z\right\rangle &= 2\left\langle \Lambda_\omega A\widetilde{\mathbb{T}}^+_t z, \widetilde{\mathbb{T}}^+_t z\right\rangle + 2\omega\left\langle \Lambda_\omega \widetilde{\mathbb{T}}^+_t z, \widetilde{\mathbb{T}}^+_t z\right\rangle - 2\|C\widetilde{\mathbb{T}}^+_t z\|^2,\\
&= 2\int_0^\tau e^{-2\omega s}\mathrm{Re}\left\langle C\mathbb{T}_{-s}A\widetilde{\mathbb{T}}^+_t z, C\mathbb{T}_{-s}\widetilde{\mathbb{T}}^+_t z\right\rangle ds\\
&\qquad\qquad +2\omega\left\langle \Lambda_\omega \widetilde{\mathbb{T}}^+_t z, \widetilde{\mathbb{T}}^+_t z\right\rangle - 2\|C\widetilde{\mathbb{T}}^+_t z\|^2,\\
&= -2\int_0^\tau e^{-2\omega s}\mathrm{Re}\left\langle \frac{d}{ds}C\mathbb{T}_{-s}\widetilde{\mathbb{T}}^+_t z, C\mathbb{T}_{-s}\widetilde{\mathbb{T}}^+_t z\right\rangle ds\\
&\qquad\qquad +2\omega\left\langle \Lambda_\omega \widetilde{\mathbb{T}}^+_t z, \widetilde{\mathbb{T}}^+_t z\right\rangle - 2\|C\widetilde{\mathbb{T}}^+_t z\|^2,\\
&= -\int_0^\tau \frac{d}{ds}\left(e^{-2\omega s}\|C\mathbb{T}_{-s}\widetilde{\mathbb{T}}^+_t z\|^2\right) ds - 2\|C\widetilde{\mathbb{T}}^+_t z\|^2,\\
&= -\|e^{-\omega\tau}C\mathbb{T}_{-\tau}\widetilde{\mathbb{T}}^+_t z\|^2 - \|C\widetilde{\mathbb{T}}^+_t z\|^2,\\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

En d'autres termes, par densité de $\mathcal{D}(A)$ dans X, $\left\|\Lambda_\omega^{\frac{1}{2}}\widetilde{\mathbb{T}}_t^+ z\right\|^2$ est décroissante en t pour tout $z \in X$. Puisque Λ_ω est borné inférieurement, il existe une constante $M_\omega > 0$ telle que $\|\widetilde{\mathbb{T}}_t^+\| \leq M_\omega$ pour tout $t \geq 0$. Enfin, $A^+ = A + H_\lambda C = A_\omega^+ - \omega I$ engendre un C_0-groupe $\mathbb{T}^+$ tel que $\|\mathbb{T}_t^+\| = \|e^{-\omega t}\widetilde{\mathbb{T}}_t^+\| \leq M_\omega e^{-\omega t}$ pour tout $t \geq 0$. ■

Choix de τ pour la convergence de l'algorithme ?

Bien que la stabilisation proposée par Slemrod soit difficilement calculable du fait de la nécessité d'inverser la modification du Grammien d'observabilité (4.1.3), et donc exploitable en pratique, nous montrons un résultat intéressant en soi. Les calculs développés pour ce résultat nous servirons par la suite dans la démonstration de la Proposition 4.1.3 sur la robustesse de l'algorithme itératif vis à vis des petites perturbations linéaires.

Dans le cas où A est anti-adjoint et $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ tels que (A, C) soit exactement observable en temps $\tau > 0$, Ito, Ramdani et Tucsnak [48] ont montré (voir Proposition 0.2.4) que $\|\mathbb{T}_\tau^+\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$ quand on prend $H^+ = -\gamma C^*$ pour tout $\gamma > 0$. On montre dans ce paragraphe que la stabilisation proposée par Slemrod a la même propriété, pourvu que le taux de décroissance exponentielle choisi soit suffisamment grand.

Proposition 4.1.2. *Soit A le générateur d'un C_0-groupe $\mathbb{T}$ sur l'espace de Hilbert X, et $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ un opérateur d'observation borné, où Y est un autre espace de Hilbert. Supposons que (A, C) soit exactement observable en temps $\tau > 0$, de constante $k_\tau > 0$.*
On définit Λ_ω par (4.1.3) et $\widetilde{\Lambda}_\omega$ par (4.1.3) avec $-A$ en lieu et place de A.

On suppose que

$$\omega \geq \frac{\|C\|^2}{2k_\tau} \max\left\{\|\mathbb{T}_\tau\|_{\mathcal{L}(X)}^2 M^-, M^+\right\}.$$

où $M^\pm = \sup_{s\in[0,\tau]} \|\mathbb{T}_{\pm s}\|_{\mathcal{L}(X)}^2$.

Alors (A, C) est

- *estimable par $(A - \Lambda_\omega^{-1}C^*C, -\Lambda_\omega^{-1}C^*)$,*
- *estimable dans le sens rétrograde par $(-A - \widetilde{\Lambda}_\omega^{-1}C^*C, -\widetilde{\Lambda}_\omega^{-1}C^*)$.*

Notons $\mathbb{T}^+$ et $\mathbb{T}^-$ les deux C_0-groupes engendrés par $A - \Lambda_\omega^{-1}C^*C$ et $-A - \widetilde{\Lambda}_\omega^{-1}C^*C$ respectivement. On a

$$1 > \|\mathbb{T}_\tau^+\|_{\mathcal{L}(X)} \underset{\omega\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad 1 > \|\mathbb{T}_\tau^-\|_{\mathcal{L}(X)} \underset{\omega\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration. À partir de

$$\int_0^\tau \|C\mathbb{T}_{-s}z\|^2 ds = \int_0^\tau \|C\mathbb{T}_\sigma\mathbb{T}_{-\tau}z\|^2 d\sigma, \qquad \forall\, z \in X,$$

on obtient facilement que $(-A, C)$ est exactement observable en temps $\tau > 0$ de constante $\kappa_\tau = \dfrac{k_\tau}{\|\mathbb{T}_\tau\|_{\mathcal{L}(X)}^2}$.

D'après la Proposition 4.1.1, $A-\Lambda_\omega^{-1}C^*C$ est le générateur d'un C_0-groupe $\mathbb{T}^+$ exponentiellement stable. En regardant de plus près la démonstration de cette Proposition, on voit que

$$\left\|\Lambda_\omega^{\frac{1}{2}}\mathbb{T}_t^+ z\right\|^2 \leq e^{-2\omega t}\left\|\Lambda_\omega^{\frac{1}{2}} z\right\|^2, \qquad \forall\, z\in X.$$

D'où, d'après la définition de Λ_ω,

$$\kappa_\tau e^{-2\omega\tau}\|\mathbb{T}_t^+ z\|^2 \leq M^-\|C\|^2\frac{1-e^{-2\omega\tau}}{2\omega}e^{-2\omega t}\|z\|^2, \qquad \forall\, z\in X. \tag{4.1.4}$$

En effet, on a d'une part

$$\begin{aligned}\left\|\Lambda_\omega^{\frac{1}{2}} z\right\|^2 &= \int_0^\tau e^{-2\omega s}\|C\mathbb{T}_{-s}z\|^2 ds,\\ &\geq e^{-2\omega\tau}\int_0^\tau \|C\mathbb{T}_{-s}z\|^2 ds,\\ &\geq e^{-2\omega\tau}k_\tau\|z\|^2.\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\left\|\Lambda_\omega^{\frac{1}{2}} z\right\|^2 &= \int_0^\tau e^{-2\omega s}\|C\mathbb{T}_{-s}z\|^2 ds,\\ &\leq \|C\|^2 M^-\int_0^\tau e^{-2\omega s}ds\|z\|^2,\\ &\leq \|C\|^2 M^-\frac{1-e^{-2\omega\tau}}{2\omega}\|z\|^2.\end{aligned}$$

On peut réécrire (4.1.4) sous la forme

$$\|\mathbb{T}_t^+ z\|^2 \leq \frac{\left(e^{2\omega\tau}-1\right)M^-\|C\|^2}{2\omega\kappa_\tau}e^{-2\omega t}\|z\|^2, \qquad \forall\, z\in X.$$

Posons $K=\dfrac{M^-\|C\|^2}{2\kappa_\tau}$, on a alors

$$\|\mathbb{T}_t^+ z\|^2 \leq K\frac{e^{2\omega\tau}-1}{\omega}e^{-2\omega t}\|z\|^2, \qquad \forall\, z\in X. \tag{4.1.5}$$

En prenant $t=\tau$, on obtient

$$\|\mathbb{T}_\tau^+ z\|^2 \leq K\frac{1-e^{-2\omega\tau}}{\omega}\|z\|^2, \qquad \forall\, z\in X,$$

et si $\omega\geq K$, $K\dfrac{1-e^{-2\omega\tau}}{\omega}<1$.

Des arguments similaires pour $(-A,C)$ permettent de montrer que $-A-\widetilde{\Lambda}_\omega^{-1}C^*C$ est le

générateur d'un C_0-groupe $\mathbb{T}^-$ exponentiellement stable vérifiant

$$\|\mathbb{T}^-_\tau z\|^2 \leq \widetilde{K}\frac{1-e^{-2\omega\tau}}{\omega}\|z\|^2, \qquad \forall\, z \in X,$$

où $\widetilde{K} = \dfrac{\|C\|^2 M^+}{2k_\tau}$.

Il est clair qu'en faisant tendre ω vers l'infini, on obtient le résultat annoncé. ■

Robustesse de l'observabilité exacte

Rappelons que si A est le générateur d'un C_0-semi-groupe $\mathbb{T}$ sur X vérifiant $\|\mathbb{T}_t\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$, on sait (voir le Théorème 0.1.20) que pour toute perturbation bornée $P \in \mathcal{L}(X)$, $A+P$ est encore le générateur d'un C_0-semi-groupe $\mathbb{T}^P$ tel que

$$\|\mathbb{T}^P_t z\| \leq Me^{\left(\omega + M\|P\|_{\mathcal{L}(X)}\right)t}\|z\|, \qquad \forall\, z \in X.$$

On peut combiner l'inégalité (4.1.5) obtenue dans la preuve de la Proposition 4.1.2 avec ce résultat sur les perturbations pour en déduire la Proposition suivante.

Proposition 4.1.3. *Soit A le générateur d'un C_0-groupe $\mathbb{T}$ sur l'espace de Hilbert X, $C \in \mathcal{L}(X,Y)$ un opérateur d'observation borné, où Y est un autre espace de Hilbert et $P \in \mathcal{L}(X)$ une perturbation bornée. Supposons que (A,C) soit exactement observable en temps $\tau > 0$, de constante $k_\tau > 0$, et notons*

$$M^\pm = \sup_{s\in[0,\tau]} \|\mathbb{T}_{\pm s}\|^2_{\mathcal{L}(X)}, \qquad K = \frac{M^-\|C\|^2\|\mathbb{T}_\tau\|^2_{\mathcal{L}(X)}}{2k_\tau}, \qquad \widetilde{K} = \frac{M^+\|C\|^2}{2k_\tau}.$$

Si

$$\|P\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \left(\frac{3}{e\tau}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{k_\tau}{2\|C\|^2} \min\left\{\frac{1}{M^-\|\mathbb{T}_\tau\|^2_{\mathcal{L}(X)}}, \frac{1}{M^+}\right\},$$

alors $(A+P,C)$ est

- *estimable par $(A+P-\Lambda_\omega^{-1}C^*C, -\Lambda_\omega^{-1}C^*)$,*
- *estimable dans le sens rétrograde par $(-A-P-\widetilde{\Lambda}_\omega^{-1}C^*C, -\widetilde{\Lambda}_\omega^{-1}C^*)$.*

En particulier, $(A+P,C)$ est encore exactement observable.

Démonstration. Dans la démonstration de la Proposition 4.1.2, nous avons établi l'inégalité (4.1.5), *i.e.*

$$\|\mathbb{T}^+_t z\|^2 \leq K\frac{e^{2\omega\tau}-1}{\omega}e^{-2\omega t}\|z\|^2, \qquad \forall\, z \in X.$$

On pose dans la suite

$$M_\alpha^2 = \frac{e^{2\alpha K\tau} - 1}{\alpha}, \qquad \widetilde{M}_\beta^2 = \frac{e^{2\beta \widetilde{K}\tau} - 1}{\beta},$$

pour $\alpha, \beta > 0$. Alors en notant $\alpha = \dfrac{\omega}{K} > 0$, on a

$$\|\mathbb{T}_t^+ z\| \leq M_\alpha e^{-\alpha K t}\|z\|, \qquad \forall\, z \in X,$$

et donc $A + P - \Lambda_\tau^{-1} C^* C$ est le générateur d'un C_0-groupe $\mathbb{T}^{P+}$ vérifiant

$$\|\mathbb{T}_t^{P+} z\| \leq M_\alpha e^{\left(-\alpha K + M_\alpha \|P\|_{\mathcal{L}(X)}\right)t}\|z\|, \qquad \forall\, z \in X.$$

De la même façon, en notant $\beta = \dfrac{\omega}{\widetilde{K}} > 0$, $A + P - \widetilde{\Lambda}_\tau^{-1} C^* C$ est le générateur d'un C_0-groupe $\mathbb{T}^{P-}$ vérifiant

$$\|\mathbb{T}_t^{P-} z\| \leq \widetilde{M}_\beta e^{\left(-\beta \widetilde{K} + \widetilde{M}_\beta \|P\|_{\mathcal{L}(X)}\right)t}\|z\|, \qquad \forall\, z \in X.$$

Les C_0-groupes $\mathbb{T}^{P+}$ et $\mathbb{T}^{P-}$ seront exponentiellement stables s'il existe deux réels α et β strictement positifs tels que

$$\|P\|_{\mathcal{L}(X)} < \frac{\alpha K}{M_\alpha}, \qquad \|P\|_{\mathcal{L}(X)} < \frac{\beta \widetilde{K}}{\widetilde{M}_\beta}.$$

Puisque $M_\alpha^2 < \dfrac{e^{2\alpha K\tau}}{\alpha}$ et $\widetilde{M}_\beta^2 < \dfrac{e^{2\beta \widetilde{K}\tau}}{\beta}$, on peut calculer les valeurs maximales de $\sqrt{\alpha}\alpha K e^{-\alpha K\tau}$ et $\sqrt{\beta}\beta \widetilde{K} e^{-\beta \widetilde{K}\tau}$. Comme P doit vérifier les deux inégalités, il doit vérifier le minimum, correspondant à l'hypothèse donnée dans l'énoncé.

Le fait que $(A + P, C)$ soit encore exactement observable provient alors de la Proposition 0.2.2. ■

On montre maintenant un résultat plus abstrait de robustesse de l'estimabilité d'un couple (A, C). On utilisera ensuite une méthode similaire pour le cas particulier des systèmes conservatifs avec opérateur d'observation borné et perturbation bornée suffisamment petite (en norme). Encore une fois, l'intérêt est d'avoir explicitement les opérateurs H^+ et H^- pour l'application de l'algorithme itératif de reconstruction, *i.e.* ceux donnés par le Théorème 0.1.16 (de Liu) : $H^+ = H^- = -\gamma C^*$ pour $\gamma > 0$.

Proposition 4.1.4. *Soit (A, C) un couple estimable par le couple (A^+, H^+) (on note $\mathbb{T}^+$ le C_0-semi-groupe exponentiellement stable engendré par A^+) et soit $P = EF$ un opérateur de perturbation linéaire vérifiant*

1. *$F \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A^+), Y)$ est un opérateur d'observation admissible en temps infini pour $\mathbb{T}^+$. En particulier (voir Théorème 0.1.14), pour tout $\omega_0(\mathbb{T}^+) < \alpha < 0$ il existe une*

constante $M_\alpha > 0$ *telle que*

$$\|F(sI - A^+)^{-1}\| \leq \frac{M_\alpha}{\sqrt{Re\ s - \alpha}}, \qquad \forall\, s \in \mathbb{C}_\alpha. \tag{4.1.6}$$

2. $E \in \mathcal{L}(Y, X)$ *est tel que*

$$\|E\| < \frac{\sqrt{-\alpha}}{M_\alpha}.$$

Alors $(A + P, C)$ *est estimable par* $(A^+ + P, H^+)$.

Démonstration. Par le Théorème 0.1.21, $A^+ + P$ est encore le générateur d'un C_0-semi-groupe $\mathbb{T}^{P+}$.

Pour tout $s \in \rho(A^+ + P) \cap \rho(A^+)$, il est facile de vérifier que

$$(sI - A^+ - P)^{-1} - (sI - A^+)^{-1} = (sI - A^+ - P)^{-1} P (sI - A^+)^{-1},$$

et donc

$$(sI - A^+)^{-1} = (sI - A^+ - P)^{-1}(I - P(sI - A^+)^{-1}).$$

De $\|E\| < \dfrac{\sqrt{-\alpha}}{M_\alpha}$, on déduit qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\|P(sI - A^+)^{-1}\| \leq \frac{\|E\| M_\alpha}{\sqrt{\mathrm{Re}\ s - \alpha}} < 1, \qquad \forall\, s \in \mathbb{C}_{-\varepsilon}. \tag{4.1.7}$$

En effet, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\|E\| = \frac{\sqrt{-\alpha-\varepsilon}}{M_\alpha}$, et donc

$$\|P(sI - A^+)^{-1}\| \leq \frac{\|E\| M_\alpha}{\sqrt{\mathrm{Re}\ s - \alpha}} \leq \frac{\sqrt{-\varepsilon - \alpha}}{\sqrt{\mathrm{Re}\ s - \alpha}}, \qquad \forall\, s \in \mathbb{C}_\alpha,$$

d'où ce que nous avons annoncé, et $(I - P(sI - A^+)^{-1})$ est donc inversible. On a alors

$$(sI - A^+ - P)^{-1} = (sI - A^+)^{-1}(I - P(sI - A^+)^{-1})^{-1}, \qquad \forall\, s \in \rho(A^+ + P) \cap \rho(A^+),$$

et $(sI - A^+ - P)^{-1}$ admet donc un prolongement analytique sur $\mathbb{C}_{-\varepsilon}$. De plus, par le Théorème 0.1.3 (de Hille-Yosida), il existe une constante $M_\varepsilon > 0$ telle que

$$\|(sI - A^+)^{-1}\| \leq \frac{M_\varepsilon}{\mathrm{Re}\ s + \varepsilon}, \qquad \forall\, s \in \mathbb{C}_{-\varepsilon},$$

et puisque

$$\|(I - P(sI - A^+)^{-1})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 + \|P(sI - A^+)^{-1}\|} \leq 1, \qquad \forall\, s \in \mathbb{C}_{-\varepsilon},$$

on obtient que

$$\sup_{\mathrm{Re}\, s\geq 0} \|(sI - A^+ - P)^{-1}\| \leq M = \frac{M_\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Donc, par le Théorème 0.1.4 (de Gearhart-Huang-Prüss), $\mathbb{T}^{P+}$ est exponentiellement stable. Enfin, il est évident que

$$(A+P)x = (A^+ + P)x - HCx, \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}(A),$$

par hypothèse d'estimabilité sur (A, C), d'où le résultat. ■

Cette Proposition nous permet d'obtenir directement le Théorème suivant.

Théorème 4.1.5. *Soient (A, C) un couple estimable par (A^+, H^+) et estimable dans le sens rétrograde par (A^-, H^-) et $P = EF$ un opérateur de perturbation linéaire vérifiant*

1. *$F \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A^+), Y) \cap \mathcal{L}(\mathcal{D}(A^-), Y)$ est un opérateur d'observation admissible en temps infini pour A^+ et A^-. On note $(\alpha^+, M^+_{\alpha^+})$ et $(\alpha^-, M^-_{\alpha^-})$ les constantes correspondantes à $\mathbb{T}^+$ et $\mathbb{T}^-$ dans (4.1.6) respectivement.*
2. *$E \in \mathcal{L}(Y, X)$ est tel que*

$$\|E\| < \min\left\{\frac{\sqrt{-\alpha^+}}{M_{\alpha^+}}, \frac{\sqrt{-\alpha^-}}{M_{\alpha^-}}\right\}.$$

Alors $(A + P, C)$ est estimable par $(A^+ + P, H^+)$ et estimable dans le sens rétrograde par $(A^- - P, H^-)$. En particulier, $(A + P, C)$ est encore exactement observable.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la Proposition 4.1.4 et de la Proposition 0.2.2. ■

On obtient également, en suivant la même démonstration, la Proposition suivante, dans le cas plus simple qui nous intéressait : A anti-adjoint et C borné, avec (A, C) exactement observable, et P une perturbation bornée.

Proposition 4.1.6. *Soient A anti-adjoint sur X, $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ tel que (A, C) soit exactement observable, et $P \in \mathcal{L}(X)$. Pour tout $\gamma > 0$, on note $\mathbb{T}^+$ le C_0-semi-groupe exponentiellement stable engendré par $A - \gamma C^*C$.*

Si $\|P\|_{\mathcal{L}(X)} < -\omega_0(\mathbb{T}^+)$, alors $(A + P, C)$ est

- *estimable par $(A + P - \gamma C^*C, -\gamma C^*)$,*
- *estimable dans le sens rétrograde par $(-A - P - \gamma C^*C, -\gamma C^*)$.*

En particulier, $(A + P, C)$ est encore exactement observable.

Démonstration. Notons $A^+ = A - \gamma C^*C$ et $A^- = -A - \gamma C^*C$ et $\mathbb{T}^+$ et $\mathbb{T}^-$ les C_0-semi-groupes exeponentiellement stables (par le Théorème de Liu 0.1.16) qu'ils engendrent respectivement. De $(A^+)^* = A^-$, on déduit que $(\mathbb{T}^+)^* = \mathbb{T}^-$, et donc $\omega_0(\mathbb{T}^+) = \omega_0(\mathbb{T}^-)$. Il est

clair que A^+ et A^- sont m-dissipatif, et en particulier, par la Proposition 3.1.9 de [88] et l'égalité $\omega_0(\mathbb{T}^+) = \omega_0(\mathbb{T}^-)$, on a pour tout $\alpha \in (\omega_0(\mathbb{T}^+), 0)$

$$\|(sI - A^{\pm})\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} s - \alpha}, \qquad \forall\, s \in \mathbb{C}_\alpha.$$

Comme $\|P\| < -\omega_0(\mathbb{T}^+)$, il existe un $\alpha \in (\omega_0(\mathbb{T}^+), 0)$ et un $\varepsilon > 0$ tels que $\|P\| = -\alpha - \varepsilon$ et

$$\|P(sI - A^{\pm})\| \leq \frac{\|P\|}{\operatorname{Re} s - \alpha} = \frac{-\alpha - \varepsilon}{\operatorname{Re} s - \alpha}, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}_\alpha,$$

et donc

$$\|P(sI - A^{\pm})\| < 1, \qquad \forall\, s \in \mathbb{C}_{-\varepsilon}.$$

Alors l'inégalité stricte (4.1.7) est encore vérifiée. Le reste de la démonstration de la Proposition 4.1.4 reste encore valide et on obtient donc que (A, C) est estimable et estimable dans le sens rétrograde par $(A^+ + P, -\gamma C^*)$ et $(A^- - P, -\gamma C^*)$ respectivement. Le Proposition 0.2.2 permet de conclure que $(A + P, C)$ est encore exactement observable. ■

Remarque 4.1.1. Remarquons que le Théorème 4.1.5 nous permet d'améliorer sensiblement ce que l'on obtient de l'estimation (Théorème 0.1.20) sur le semi-groupe perturbé $\mathbb{T}^P$ engendré par $A + P - \gamma C^* C$

$$\|\mathbb{T}_t^P\| \leq M_\omega e^{\left(-\omega + M_\omega \|P\|_{\mathcal{L}(X)}\right)t},$$

c'est-à-dire $\|P\|_{\mathcal{L}(X)} < \dfrac{-\omega_0(\mathbb{T}^+)}{M_\omega}$, en se rappelant que $M_\omega \geq 1$ en général.

Une équation de Schrödinger avec potentiel

On considère dans cet exemple l'équation de Schrödinger avec un potentiel indépendant du temps $V(x) \in L^2(\Omega)$, avec condition au bord de Dirichlet homogène, sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} z(x,t) = -i \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} z(x,t) + V(x) z(x,t), & \forall\, x \in \Omega, t \geq 0, \\ z(x,t) = 0, & \forall\, x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ z(x,0) = z_0(x) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Nous reprenons les simulations faites au Chapite 1, c'est-à-dire avec $\Omega = [0,1]$ et observation interne de l'état sur l'intervalle $[0, \frac{1}{10}]$. La donnée initiale z_0 à reconstruire est

$$\begin{aligned} z_0(x) = {} & 100 \cos(5\pi x) \sin(\pi x) \exp\{-50(x - 0,325)^2\} \\ & + 30i \cos(7\pi x) \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) \exp\{-50(x - 0,75)^2\}, \qquad \forall\, x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Rappelons que le système non perturbé est exactement observable en tout temps $\tau > 0$. La Proposition 4.1.6 nous assure alors que le système est encore exactement observable lorsqu'on ajoute un potentiel suffisamment petit. Remarquons toutefois que nous n'avons aucune information sur le temps $\tau > 0$ conduisant à l'observabilité exacte du système perturbé. Nous choisissons dans nos simulations $\tau = 0,2$. On ajoute le potentiel arbitrairement choisi

$$V(x) = M\left(x^2 \sin(\pi x) + i(x(x-1)\cos(2\pi x)\right), \qquad \forall\, x \in [0,1],$$

où le paramètre $M > 0$ est l'amplitude qui nous permettra de modifier la norme de la perturbation. On commence avec $M = 25$, et on obtient

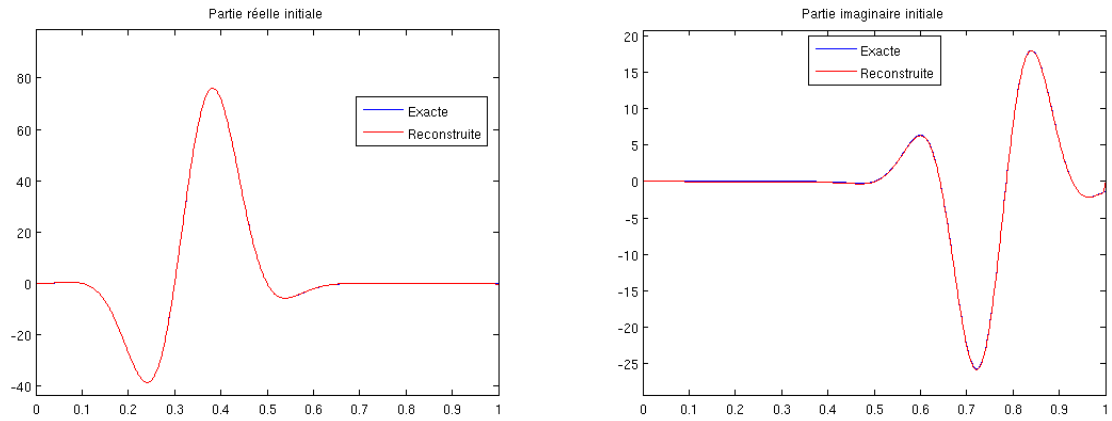


FIGURE 4.1 – Parties réelle et imaginaire initiales reconstruites de l'équation de Schrödinger avec potentiel, après 15 itérations, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 500$, sans bruit et $M = 25$.

On peut apprécier sur la FIGURE 4.1 le peu de différences entre données exactes et données reconstruites.

On voit sur la FIGURE 4.2 que la décroissance exponentielle de l'erreur a bien lieu, comme l'assurait la Proposition 4.1.6. On teste ensuite la même reconstruction avec $M = 90$, on s'attend bien entendu à perdre en qualité de reconstruction. En effet, on s'aperçoit sur les FIGURE 4.3 et FIGURE 4.4 que la reconstruction commence à se révéler difficile.

Augmenter encore un peu M fait perdre complétement la convergence de l'algorithme de reconstruction, comme on peut le voir sur les FIGURE 4.5 et FIGURE 4.6, avec $M = 100$. On pourrait penser qu'il s'agit du fait que le temps d'observation est trop faible dans ce dernier cas. En effet, comme nous l'avons déjà évoquer, si la Proposition 4.1.6 permet d'obtenir l'observabilité exacte du système perturbé (sous réserve que la perturbation soit suffisamment petite), elle ne dit rien sur le temps d'observation. Malheureusement, les tests que nous avons effectués en augmentant le temps d'observation n'ont montré aucune amélioration.

Nous avons donc cherché à voir si le gain γ pouvait améliorer ce résultat, *i.e.* peut-on retrouver la convergence en l'augmentant ? Il se trouve que c'est le cas, jusqu'à un certain point. On peut comprendre cela comme l'optimisation du taux de décroissance exponentielle

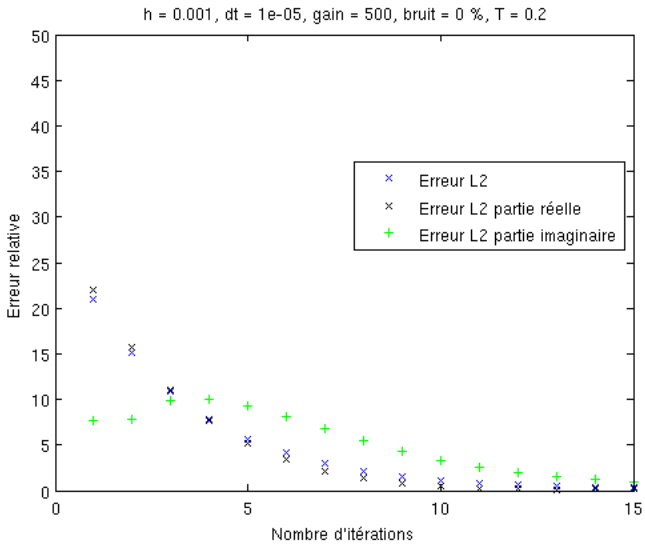


FIGURE 4.2 – Erreur de reconstruction de donnée initiale pour l'équation de Schrödinger avec potentiel, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 500$, sans bruit et $M = 25$.

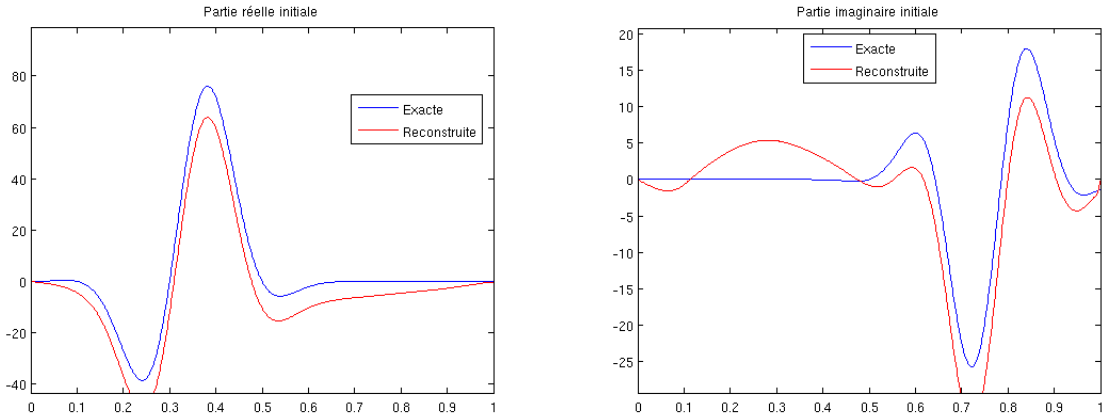


FIGURE 4.3 – Parties réelle et imaginaire initiales reconstruites de l'équation de Schrödinger avec potentiel, après 15 itérations, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 500$, sans bruit et $M = 90$.

du C_0-semi-groupe engendré par $A - \gamma C^*C$ en fonction de γ, qui permet de prendre en compte de plus grandes perturbations d'après la Proposition 4.1.6. Par exemple, si dans l'exemple précédent on prend $\gamma = 1000000$, on obtient de nouveau une courbe d'erreur ayant le bon profil sur la FIGURE 4.8, et les reconstructions des parties réelles et imaginaires sont alors plus satisfaisantes, comme on le voit sur la FIGURE 4.7. Cependant, il faudra une discrétisation beaucoup plus fine pour obtenir une qualité de reconstruction acceptable, et bien choisir le nombre d'itérations (on voit déjà la reconstruction de la partie imaginaire se détériorer sur la FIGURE 4.8).

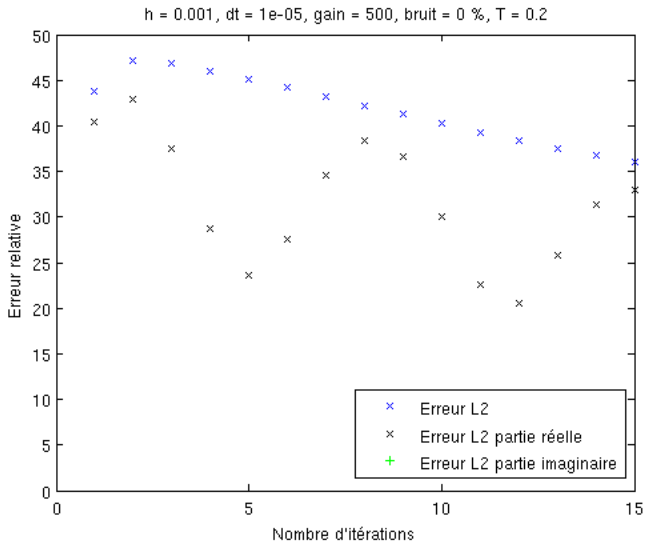


FIGURE 4.4 – Erreur de reconstruction de donnée initiale pour l'équation de Schrödinger avec potentiel, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 500$, sans bruit et $M = 90$.

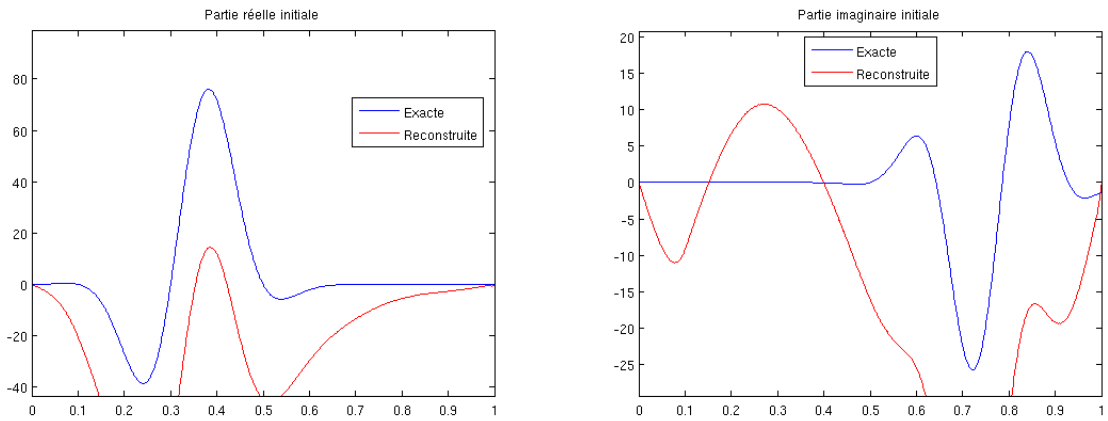


FIGURE 4.5 – Parties réelle et imaginaire initiales reconstruites de l'équation de Schrödinger avec potentiel, après 15 itérations, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 500$, sans bruit et $M = 100$.

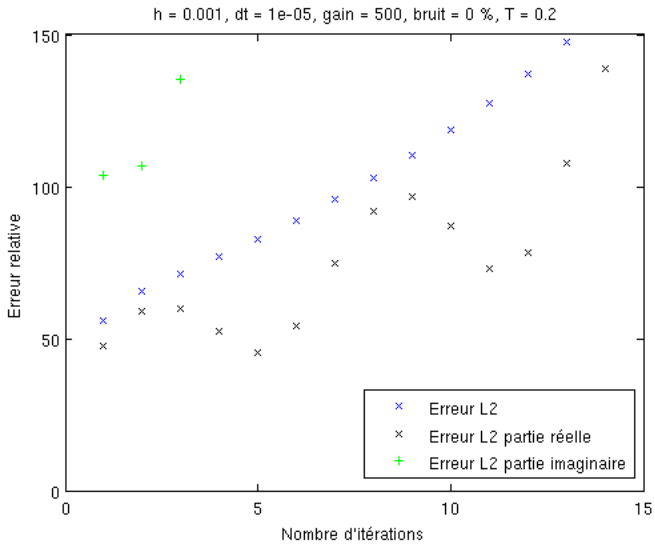


FIGURE 4.6 – Erreur de reconstruction de donnée initiale pour l'équation de Schrödinger avec potentiel, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 500$, sans bruit et $M = 100$.

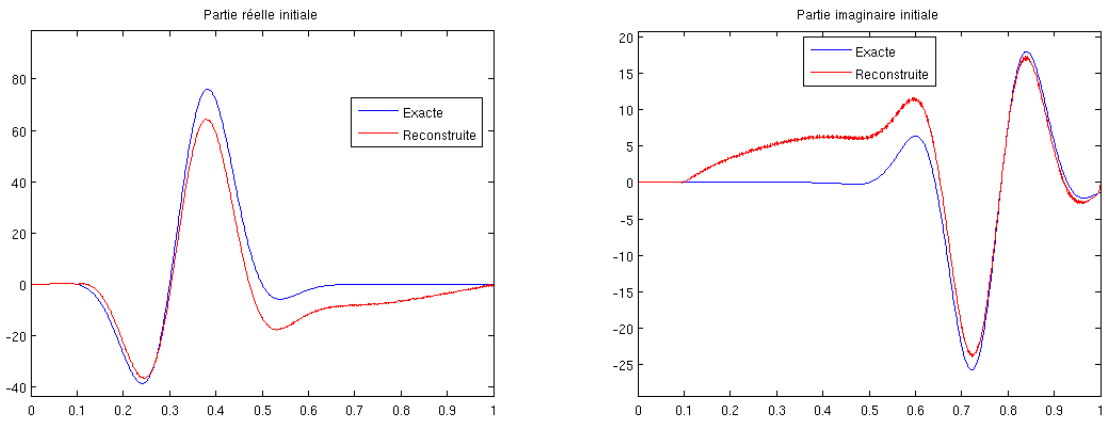


FIGURE 4.7 – Parties réelle et imaginaire initiales reconstruites de l'équation de Schrödinger avec potentiel, après 15 itérations, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 1000000$, sans bruit et $M = 100$.

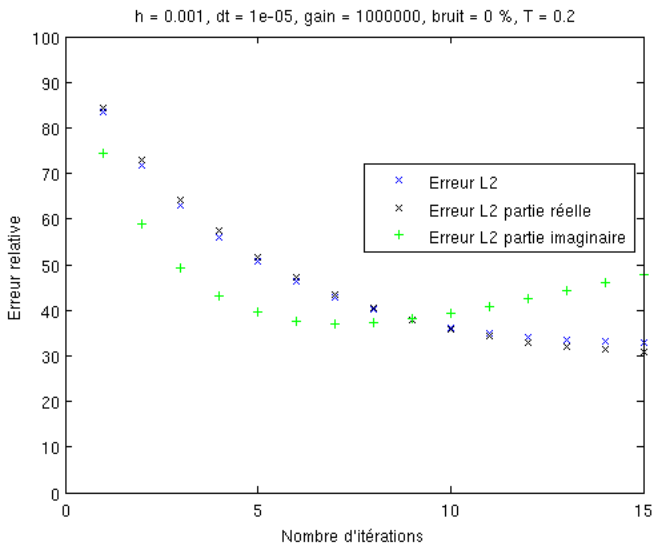


FIGURE 4.8 – Erreur de reconstruction de donnée initiale pour l'équation de Schrödinger avec potentiel, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 1000000$, sans bruit et $M = 100$.

Jusqu'à présent, le potentiel choisi était totalement arbitraire. On regarde pour conclure cette partie la reconstruction dans le cas de potentiels classiques, autrement dit de la forme Mx^2 et $-Mx^2$, $M > 0$, qualifiés respectivement de répulsif et attractif.

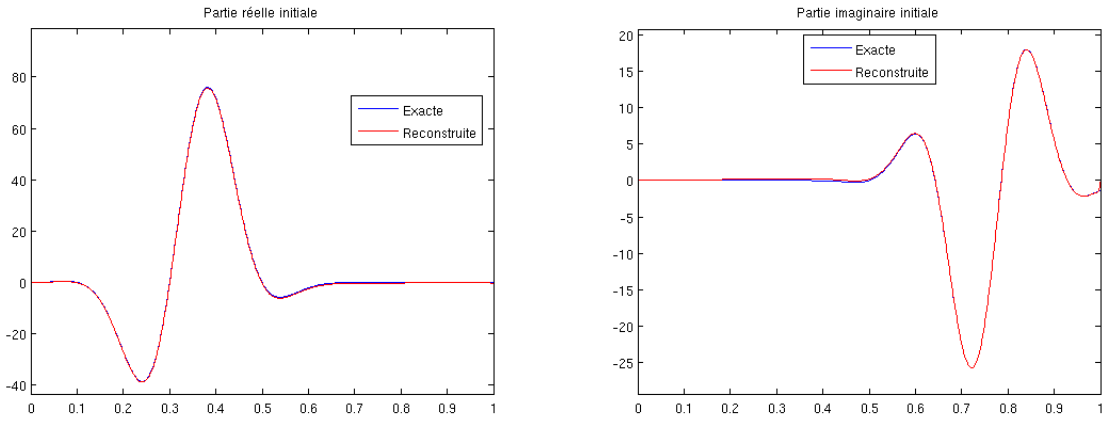


FIGURE 4.9 – Parties réelle et imaginaire initiales reconstruites de l'équation de Schrödinger avec potentiel répulsif, après 15 itérations, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 250$, sans bruit et $M = 50$.

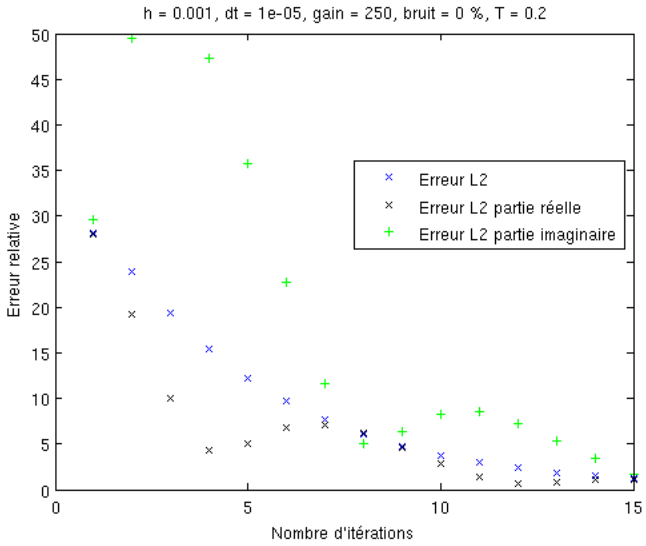


FIGURE 4.10 – Erreur de reconstruction de donnée initiale pour l'équation de Schrödinger avec potentiel répulsif, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 250$, sans bruit et $M = 50$.

Comme on le voit sur les FIGURE 4.9, FIGURE 4.10, FIGURE 4.11 et FIGURE 4.12, la qualité des reconstructions n'est que peu modifiée, que le potentiel soit répulsif ou attractif.

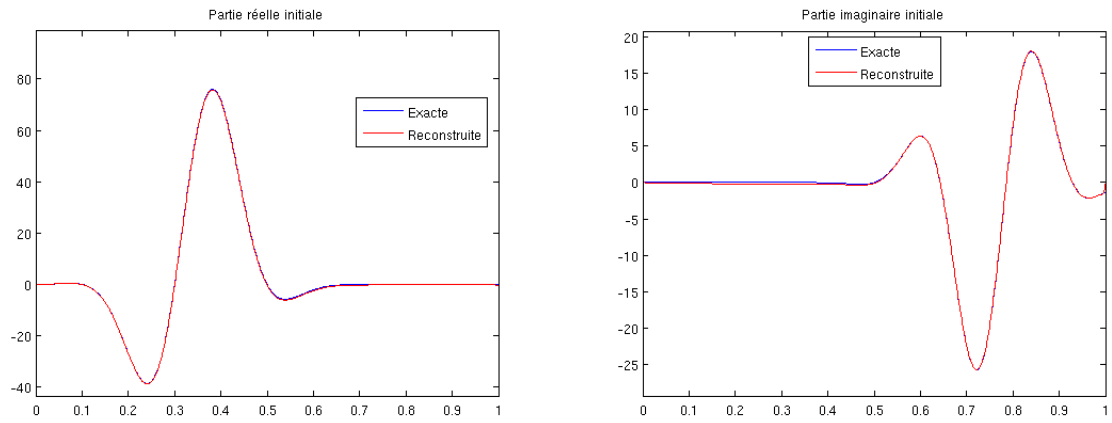


FIGURE 4.11 – Parties réelle et imaginaire initiales reconstruites de l'équation de Schrödinger avec potentiel attractif, après 15 itérations, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 250$, sans bruit et $M = 50$.

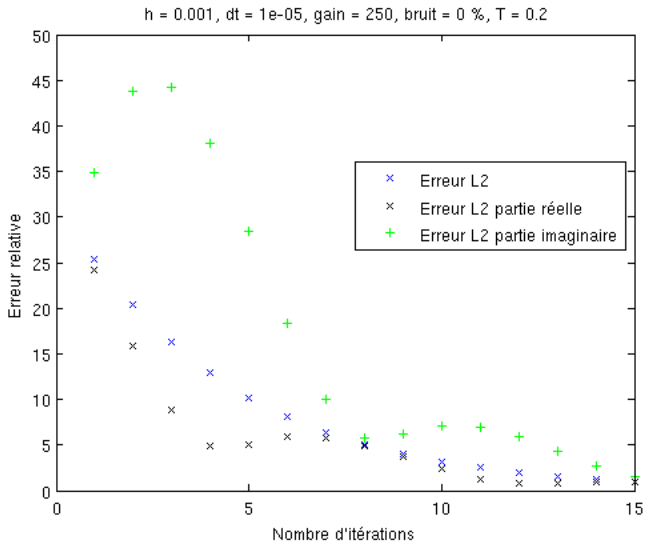


FIGURE 4.12 – Erreur de reconstruction de donnée initiale pour l'équation de Schrödinger avec potentiel attractif, avec $\tau = 0,2$, $\gamma = 250$, sans bruit et $M = 50$.

4.1.2 Perturbations non linéaires

Une question naturelle concerne la possibilité de reconstruire la donnée initiale d'un système perturbé non-linéairement. On se heurte alors à plusieurs obstacles de taille.

1. Peut-on construire un observateur direct ? Dans l'affirmative, peut-on utiliser l'observateur du linéaire perturbé ?
2. Peut-on construire un observateur rétrograde ? Et si oui, peut-on aussi utiliser l'observateur du linéaire perturbé ?
3. Peut-on itérer le procédé, pour obtenir l'algorithme itératif ?

Nous donnons une réponse positive au premier point sous certaines conditions, pour de petites données initiales. Nous n'avons cependant pas de réponse satisfaisante pour la

construction d'un observateur rétrograde, et *a fortiori*, pour adapter l'algorithme de reconstruction de données initiales. Le manque d'information sur l'état final et son estimation constitue le principal obstacle à la construction de l'observateur rétrograde à l'aide des résultats développés pour la construction de l'observateur direct.

La construction d'observateur pour un système non-linéaire est déjà une tâche difficile en elle-même, même en dimension finie. On peut citer Ciccarella, Dalla Mora et Germani [20] et Dalla Mora, Germani et Manes [28] pour la dimension finie, et Carmichael, Pritchard et Quinn [17] et Couchouron et Ligarius [23] pour la dimension infinie.

Un résultat abstrait

Soient A le générateur d'un C_0-semi-groupe $\mathbb{T}$ sur X un espace de Hilbert, $B \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur surjectif et $N : X \to X$ un opérateur non-linéaire localement lipschitzien. Pour tout $z_0 \in \mathcal{D}(A)$, on suppose que le système suivant est bien posé,

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + BNz(t), & \forall\, t \geq 0, \\ z(0) = z_0 \in \mathcal{D}(A). \end{cases} \tag{4.1.8}$$

On observe ce système au travers d'un opérateur d'observation $C \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A), Y)$, où Y est un autre espace de Hilbert, conduisant à la mesure

$$y(t) = Cz(t), \qquad \forall\, t \geq 0. \tag{4.1.9}$$

Notre objectif étant (dans un premier temps) de construire un observateur direct, remarquons que nous observons le système "en temps long" (*i.e.* pour tout $t \geq 0$), et non sur un intervalle fini.

On suppose que le couple (A, C) est estimable par (A^+, H^+) dans le sens direct. Pour tout $z_0^+ \in \mathcal{D}(A^+)$, on définit l'observateur direct, que l'on suppose bien posé,

$$\begin{cases} \dot{z}^+(t) = A^+z(t) + BNz(t) - H^+y(t), & \forall\, t \geq 0, \\ z^+(0) = z_0^+ \in \mathcal{D}(A^+). \end{cases} \tag{4.1.10}$$

On suppose de plus qu'il existe deux constantes positives M_{z_0} et M_{z_0,z_0^+} telles que

$$\|z(t)\| \leq M_{z_0}, \quad \|z^+(t)\| \leq M_{z_0,z_0^+}, \qquad \forall\, t \geq 0. \tag{4.1.11}$$

En d'autres termes, on suppose que les trajectoires $z(t)$ et $z^+(t)$ restent dans la boule de rayon $R = \max\left\{M_{z_0}, M_{z_0,z_0^+}\right\}$. On note ℓ la constante de Lipschitz de l'opérateur N sur cette boule, *i.e.*

$$\|Nz_1 - Nz_2\| \leq \ell\|z_1 - z_2\|, \qquad \forall\, z_1, z_2 \in \mathcal{B}(0, R).$$

On note $e(t) = z^+(t) - z(t)$ l'erreur entre le système initial et l'observateur. Alors e est solution de

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = A^+ e(t) + B\left(Nz^+(t) - Nz(t)\right), & \forall\, t \geq 0, \\ e(0) = z_0^+ - z_0. \end{cases}$$

On se propose de montrer dans la Proposition suivante que cette erreur tend exponentiellement vers 0 si une inégalité de type Riccati est vérifiée. Il s'agit d'une adaptation au cas de la dimension infinie d'un résultat de Dalla Mora, Germani et Manes [28].

Proposition 4.1.7. *Soient $z_0 \in \mathcal{D}(A)$ et $z_0^+ \in \mathcal{D}(A^+)$. On suppose que (A, C) est estimable par (A^+, H^+) et on définit z et z^+ par (4.1.8) et (4.1.10) respectivement. On suppose de plus que (4.1.11) est vérifiée et on note ℓ la constante de Lipschitz correspondante.*

S'il existe un opérateur auto-adjoint défini positif $\Pi \in \mathcal{L}(X)$ et une constante $\alpha > 0$ tels que

$$A^+\Pi + \Pi(A^+)^* + BB^* + 2\alpha\Pi + \ell^2\Pi^2 \leq 0, \tag{4.1.12}$$

alors il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\|e(t)\| \leq Me^{-\alpha t}\|e(0)\|, \qquad \forall\, t \geq 0.$$

Démonstration. L'idée consiste à construire une fonctionnelle de Lyapunov [18, Chapitre 9] adaptée. Soit $v(t) = \langle \Pi^{-1}e(t), e(t)\rangle$, on a

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) = &\left\langle \left(\Pi^{-1}A^+ + (A^+)^*\Pi^{-1}\right) e(t), e(t)\right\rangle \\ &+ \left\langle B^*\Pi^{-1}e(t), Nz^+(t) - Nz(t)\right\rangle + \left\langle Nz^+(t) - Nz(t), B^*\Pi^{-1}e(t)\right\rangle. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $\langle a, b\rangle + \langle b, a\rangle \leq \|a\|^2 + \|b\|^2$, on obtient

$$\dot{v}(t) \leq \left\langle \left(\Pi^{-1}A^+ + (A^+)^*\Pi^{-1}\right) e(t), e(t)\right\rangle + \left\langle \Pi^{-1}BB^*\Pi^{-1}e(t), e(t)\right\rangle + \|Nz^+(t) - Nz(t)\|^2.$$

Puisque N est localement lipschitzien, de constante ℓ sur la boule $\mathcal{B}(0, R)$, on déduit de l'hypothèse (4.1.11) que pour tout $t \geq 0$

$$\dot{v}(t) \leq \left\langle \left(\Pi^{-1}A^+ + (A^+)^*\Pi^{-1}\right) e(t), e(t)\right\rangle + \left\langle \Pi^{-1}BB^*\Pi^{-1}e(t), e(t)\right\rangle + \ell^2\|e(t)\|^2,$$

ou autrement dit

$$\dot{v}(t) \leq \left\langle \left(\Pi^{-1}A^+ + (A^+)^*\Pi^{-1} + \Pi^{-1}BB^*\Pi^{-1} + \ell^2 I\right) e(t), e(t)\right\rangle.$$

On obtient alors facilement

$$\dot{v}(t) \leq \left\langle \left(A^+\Pi + \Pi(A^+)^* + BB^* + \ell^2\Pi^2\right) \Pi^{-1}e(t), \Pi^{-1}e(t)\right\rangle.$$

Or par l'inégalité de Riccati (4.1.12), cette inégalité devient

$$\dot{v}(t) \leq -2\alpha v(t).$$

Le Lemme de Gronwall permet de conclure que

$$v(t) \leq e^{-2\alpha t} v(0).$$

Enfin, $\Pi > 0$ implique que $\Pi^{-\frac{1}{2}} > 0$, et donc l'existence d'une constante $M > 0$ telle que

$$\|e(t)\| \leq M e^{-\alpha t} \|e(0)\|, \qquad \forall\, t \geq 0,$$

par définition même de $v(t)$. ■

On utilise cette Proposition pour obtenir le Théorème suivant.

Théorème 4.1.8. *Soient $z_0 \in \mathcal{D}(A)$ et $z_0^+ \in \mathcal{D}(A^+)$. On suppose que (A, C) est estimable par (A^+, H^+), on note $\mathbb{T}^+$ le C_0-semi-groupe exponentiellement stable engendré par A^+ et on définit z et z^+ par (4.1.8) et (4.1.10) respectivement. On suppose de plus que $\mathbb{T}^+$ est un C_0-groupe et qu'il existe une boule $\mathcal{B}(0, R)$ telle que (4.1.11) soit vérifiée et telle que la constante de Lipschitz $\ell > 0$ de N vérifie*

$$\ell < \frac{\omega}{M_\omega \|B\| \sqrt{2}}, \tag{4.1.13}$$

où ω et M_ω sont les constantes apparaissant dans

$$\|\mathbb{T}_t^+ z\| \leq M_\omega e^{-\omega t} \|z\|, \qquad \forall\, z \in X, t \geq 0.$$

Alors il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\|z^+(t) - z(t)\| \leq M e^{-\alpha t} \|z_0^+ - z_0\|, \qquad \forall\, t \geq 0,$$

où $\alpha = \dfrac{\omega^2 - 2\ell^2 M_\omega^2 \|B\|^2}{2\omega} > 0.$

Remarque 4.1.2. Remarquons que la vérification de (4.1.13) implique plus de connaissance sur M_ω que sa simple existence.

Remarque 4.1.3. Remarquons que dans le cas où $BN = P \in \mathcal{L}(X)$, le Théorème 4.1.8 est moins performant (d'un facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$) que ce que permet d'obtenir l'estimation (Théorème 0.1.20) sur le semi-groupe perturbé $\mathbb{T}^P$ engendré par $A^+ + P$

$$\|\mathbb{T}_t^P\| \leq M_\omega e^{\left(-\omega + M_\omega \|P\|_{\mathcal{L}(X)}\right) t},$$

c'est-à-dire $\|P\|_{\mathcal{L}(X)} < \dfrac{-\omega_0(\mathbb{T}^+)}{M_\omega}$.

Démonstration du Théorème 4.1.8. Soit $\beta \in (0,\omega)$, le C_0-semi-groupe $\mathbb{T}_t^\beta = e^{\beta t}\mathbb{T}_t^+$, engendré par $A^+ + \beta I$, est encore exponentiellement stable. B^* étant borné, c'est un opérateur d'observation admissible en temps infini pour $\left(\mathbb{T}^\beta\right)^*$ (par stabilité exponentielle). D'après Tucsnak et Weiss [88, Théorème 5.1.1], il existe un opérateur auto-adjoint $\Pi \in \mathcal{L}(X)$ tel que

$$\left(A^+ + \beta I\right)\Pi + \Pi\left(A^+ + \beta I\right)^* + BB^* = 0.$$

Autrement dit

$$A^+\Pi + \Pi\left(A^+\right)^* + BB^* + 2\beta\Pi = 0. \tag{4.1.14}$$

On commence par montrer que Π est défini positif. De manière équivalente, cela revient à montrer que $(A^+ + \beta I, B)$ est exactement contrôlable (puisque l'on a $\Pi = \Psi_B^*\Psi_B$ par [88, Théorème 5.1.1] où $(\Psi_B z)(t) = B^*\left(\mathbb{T}^\beta\right)_t^* z$). Autrement dit, il faut montrer qu'il existe un $\tau > 0$ tel qu'il existe une constante $k_\tau > 0$ telle que

$$\|\Psi_B z\|^2 \geq \int_0^\tau \|B^*\left(\mathbb{T}_t^\beta\right)^* z\|^2 dt \geq k_\tau \|z\|^2, \qquad \forall\, z \in X.$$

Par hypothèse, B est surjectif, donc B^* est borné inférieurement (voir par exemple [88, Proposition 12.1.3]), et donc il existe une constante $m > 0$ telle que

$$\int_0^\tau \left\|B^*\left(\mathbb{T}_t^\beta\right)^* z\right\|^2 dt \geq m^2 \int_0^\tau \left\|\left(\mathbb{T}_t^\beta\right)^* z\right\|^2 dt, \qquad \forall\, z \in X.$$

Comme $\mathbb{T}_t^\beta$ est une perturbation bornée d'un C_0-groupe (par hypothèse), c'est encore un C_0-groupe, donc inversible à gauche. On en déduit que Π est défini positif.

Par ailleurs, on a

$$\|\Pi^{\frac{1}{2}} z\|^2 = \langle \Pi z, z\rangle = \|\Psi_B z\|^2 = \int_0^\infty \left\|B^*\left(\mathbb{T}^\beta\right)_t^* z\right\|^2 dt \leq \frac{M_\omega^2\|B\|^2}{2(\omega-\beta)}\|z\|^2, \qquad \forall\, z \in X.$$

Posons $K = K_{\beta,\omega} = \dfrac{M_\omega^2\|B\|^2}{2(\omega-\beta)}$. On a

$$\|\Pi^{\frac{1}{2}}\|^2 \leq K,$$

et on obtient alors

$$\left\langle \Pi^2 z, z\right\rangle - K\left\langle \Pi z, z\right\rangle = \|\Pi z\|^2 - K\|\Pi^{\frac{1}{2}} z\|^2 \leq 0, \qquad \forall\, z \in X.$$

Finalement (4.1.14) devient

$$A^+\Pi + \Pi(A^+)^* + BB^* + 2\alpha_\beta \Pi + \ell^2\Pi^2 \leq 0,$$

où $\alpha_\beta = \beta - \ell^2 K$. On peut alors appliquer la Proposition 4.1.7 si on trouve un réel $\beta \in (0, \omega)$ tel que $\alpha_\beta > 0$. Or

$$\alpha_\beta > 0 \Longleftrightarrow \beta - \frac{\ell^2 M_\omega^2 \|B\|^2}{2(\omega - \beta)} > 0,$$

et comme $\beta \in (0, \omega)$, on a

$$\alpha_\beta > 0 \Longleftrightarrow -2\beta^2 + 2\omega\beta - (\ell M_\omega \|B\|)^2 > 0.$$

Mais par l'hypothèse (4.1.13), on obtient que $\alpha_\beta > 0$ si et seulement si

$$\frac{\omega - \sqrt{\omega^2 - \left(\sqrt{2}\ell M_\omega \|B\|\right)^2}}{2} < \beta < \frac{\omega + \sqrt{\omega^2 - \left(\sqrt{2}\ell M_\omega \|B\|\right)^2}}{2}.$$

En prenant $\beta = \dfrac{\omega}{2}$, le résultat suit en appliquant directement la Proposition 4.1.7. ■

Une équation des ondes semi-linéaire

Pour illustrer le résultat démontré dans le Théorème 4.1.8, nous nous intéressons à une équation de Klein-Gordon semi-linéaire avec dissipation, en une dimension d'espace,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} w(x,t) - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} w(x,t) + d\dfrac{\partial}{\partial t} w(x,t) + w^3(x,t) = 0, & \forall\, x \in [0,1], t \geq 0, \\ w(0,t) = w(1,t) = 0, & \forall\, t \geq 0, \\ w(x,0) = w_0(x) \in H_0^1(0,1), \\ \dfrac{\partial}{\partial t} w(x,0) = w_1(x) \in L^2(0,1), \end{cases} \tag{4.1.15}$$

où $d > 0$ est un coefficient de dissipation. On observe ce système (4.1.15) de la façon suivante

$$y(x,t) = \chi \frac{\partial}{\partial t} w(x,t), \qquad \forall\, t \geq 0, \tag{4.1.16}$$

où χ est la fonction caractéristique d'un sous-intervalle de mesure non nulle de $[0,1]$.

On se propose d'illustrer le Théorème 4.1.8 en montrant que le système suivant est un observateur direct du système (4.1.15), si les données initiales sont suffisamment petites. On

note comme avant $\gamma > 0$ le gain de l'observateur, défini par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} w^+(x,t) - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} w^+(x,t) + (d + \gamma\chi(x)) \dfrac{\partial}{\partial t} w^+(x,t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + (w^+)^3(x,t) = \gamma y(x,t), & \forall x \in [0,1], t \geq 0 \\ w^+(0,t) = w(1,t) = 0, & \forall t \geq 0, \\ w^+(x,0) = w_0^+(x) \in H_0^1(0,1), \\ \dfrac{\partial}{\partial t} w^+(x,0) = w_1^+(x) \in L^2(0,1), \end{cases} \tag{4.1.17}$$

Remarque 4.1.4. Le lecteur pourrait se demander pourquoi nous avons considéré des systèmes dissipatifs. Nous verrons que nous en avons besoin pour garantir la condition (4.1.11) nécessaire dans notre construction d'un observateur direct.

Posons

$$X = H_0^1(0,1) \times L^2(0,1), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(A^+) = (H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)) \times H_0^1(0,1),$$

$$Y = L^2(0,1), \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \chi \end{pmatrix}, \quad A^+ = A - \gamma C^* C, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & dI \end{pmatrix},$$

$$z = \begin{pmatrix} w \\ \dfrac{\partial}{\partial t} w \end{pmatrix}, \quad z^+ = \begin{pmatrix} w^+ \\ \dfrac{\partial}{\partial t} w^+ \end{pmatrix}, \quad B = I, \quad N \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\phi^3 \end{pmatrix}.$$

On montre facilement que A est le générateur d'un C_0-groupe unitaire $\mathbb{S}$, $C \in \mathcal{L}(X,Y)$, et (4.1.15) se réécrit

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = (A - D)z(t) + BNz(t), & \forall\, t \geq 0, \\ z(0) = z_0 \in \mathcal{D}(A). \end{cases} \tag{4.1.18}$$

D'autre part, (4.1.17) se réécrit

$$\begin{cases} \dot{z}^+(t) = (A^+ - D)z^+(t) + BNz^+(t), & \forall\, t \geq 0, \\ z^+(0) = z_0^+ \in \mathcal{D}(A). \end{cases} \tag{4.1.19}$$

La condition d'optique géométrique (voir Bardos, Lebeau et Rauch [8]) implique que (A, C) est exactement observable en tout temps $\tau \geq 2$. Ainsi, le Théorème de Liu 0.1.16 nous dit que A^+ est le générateur d'un C_0-groupe $\mathbb{T}$ exponentiellement stable, pour tout $\gamma > 0$. Par ailleurs, rappelons le résultat suivant.

Théorème 4.1.9 (Théorème 3.5 [58])**.** *Soit $\mathcal{A}$ est le générateur d'un C_0-semi-groupe exponentiellement stable sur un espace de Hilbert X. Si $\mathcal{P} \in \mathcal{L}(X)$ satisfait*

1. $\operatorname{Re} \langle \mathcal{P}z, z \rangle \leq 0$, *pour tout $z \in X$,*

2. Re $\langle \mathcal{P}z_n, z_n\rangle \to 0 \Longrightarrow \|\mathcal{P}z_n\| \to 0$, *pour toute suite* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$,

alors $\mathcal{A}+\mathcal{P}$ *est encore le générateur d'un* C_0*-semi-groupe exponentiellement stable.*

On appliquant ce Théorème avec $\mathcal{A} = A^+$ et $\mathcal{P} = -D$, l'opérateur $A^+ - D$ est encore le générateur d'un C_0-groupe $\mathbb{T}^+$ exponentiellement stable sur X.

Avant toute chose, il faut montrer que les systèmes (4.1.15) et (4.1.17) sont bien posés.

Proposition 4.1.10. *Soit* $g \in L^2_{\ell oc}((0,\infty), L^2(0,1))$, *on considère le système suivant*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}v(x,t) - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,t) + (d+\gamma\chi(x))\dfrac{\partial}{\partial t}v(x,t) + v^3(x,t) = g(x,t), & \forall x\in[0,1], t\geq 0 \\ v(0,t) = v(1,t) = 0, & \forall t \geq 0, \\ v(x,0) = v_0(x) \in H^1_0(0,1), & \forall x \in [0,1], \\ \dfrac{\partial}{\partial t}v(x,0) = v_1(x) \in L^2(0,1), & \forall x\in[0,1], \end{cases} \tag{4.1.20}$$

Alors pour tout $d > 0$, $\gamma \geq 0$, *il existe une unique solution globale* v *vérifiant*

$$v \in C([0,\infty), H^1_0(0,1)) \cap C^1([0,\infty), L^2(0,1)).$$

Démonstration. On décompose la démonstration en trois parties.

Étape ***I***

Soient $T > 0$ et $f \in L^2((0,T), L^2(0,1))$, on montre dans un premier temps que le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}v(x,t) - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,t) + (d+\gamma\chi(x))\dfrac{\partial}{\partial t}v(x,t) + f(x,t) = g(x,t), & \forall x\in[0,1], t\in[0,T] \\ v(0,t) = v(1,t) = 0, & \forall t \in [0,T], \\ v(x,0) = v_0(x) \in H^1_0(0,1), & \forall x \in [0,1], \\ \dfrac{\partial}{\partial t}v(x,0) = v_1(x) \in L^2(0,1), & \forall x\in[0,1], \end{cases} \tag{4.1.21}$$

est bien posé. On pose $V = \begin{pmatrix} v \\ \dfrac{\partial}{\partial t}v \end{pmatrix}$, $V_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 0 \\ g-f \end{pmatrix}$. Avec les notations qui précèdent, on obtient

$$\begin{cases} \dot{V}(t) = (A^+ - D)V(t) + F(t), & t\in[0,T], \\ V(0) = V_0 \in \mathcal{D}(A^+ - D). \end{cases} \tag{4.1.22}$$

En prolongeant f par 0 pour $t > T$, on obtient $f \in L^2((0,\infty), L^2(0,1))$. Ainsi, $F \in L^1_{\ell oc}((0,\infty), X)$ et en suivant la Section 1 du Chapitre 4 de [88], il existe alors une solution V à (4.1.22) vérifiant

$$V \in C([0,T), X) \cap L^1_{\ell oc}([0,T), \mathcal{D}(A^+ - D)), \qquad \forall\, V_0 \in \mathcal{D}(A^+ - D).$$

Par injection de Sobolev, on a $H_0^1(0,1) \subset C([0,1])$ et on obtient que $v \in C([0,T] \times [0,1])$ et donc $v^3 \in C([0,T] \times [0,1])$.

Étape ***II***

Notons S l'opérateur qui à f associe v^3 où v est la solution de (4.1.21). D'après la première étape, S est défini de $L^2((0,T), L^2(0,1))$ dans $C([0,T] \times [0,1]) \hookrightarrow L^2((0,T), L^2(0,1))$. Nous allons montrer que pour tout $K > 0$, il existe un $T > 0$ tel que S soit une contraction stricte sur

$$B_{T,K} = \{f \in L^2((0,T), L^2(0,1)) \mid \|f\|_{L^2(L^2)} < K\}.$$

En multipliant (4.1.22) par V, on obtient pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|V(t)\|^2 &= -\gamma^2\|CV(t)\|^2 - \|DV(t)\|^2 + \langle F(t), V(t)\rangle \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\|F(t)\|^2 + \|V(t)\|^2\right) - \gamma^2\|CV(t)\|^2 - \|DV(t)\|^2. \end{aligned}$$

En multipliant l'inégalité par e^{-t}, il vient

$$\frac{d}{dt}\left(\|V(t)\|^2 e^{-t}\right) \leq \|F(t)\|^2 e^{-t}, \qquad \forall\, t \in [0,T].$$

En intégrant de 0 à t, cette inégalité devient

$$\|V(t)\|^2 \leq e^T \left(\|F\|^2_{L^2(H^1 \times L^2)} + \|V_0\|^2\right), \qquad \forall\, t \in [0,T].$$

Et par définition de V, F et C

$$\|v(t)\|^2_{H^1} \leq e^T \left(\|g - f\|^2_{L^2(L^2)} + \|v_0\|^2_{H^1} + \|v_1\|^2_{L^2}\right), \qquad \forall\, t \in [0,T].$$

L'injection continue $H^1(0,1) \hookrightarrow C([0,1])$ implique l'existence d'une constante $M > 0$ telle que

$$\|v\|^2_\infty \leq M e^T \left(\|g\|^2_{L^2(L^2)} + \|f\|^2_{L^2(L^2)} + \|v_0\|^2_{H^1} + \|v_1\|^2_{L^2}\right), \tag{4.1.23}$$

où $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme dans L^∞. On a

$$\|S(f)\|^2_{L^2(L^2)} = \|v^3\|^2_{L^2(L^2)} = \int_0^T \int_0^1 |v^3(x,t)|^2 dxdt.$$

Mais par (4.1.23)

$$\int_0^T \int_0^1 |v^3(x,t)|^2 dxdt \leq T M^3 e^{3T} \left(\|g\|^2_{L^2(L^2)} + \underbrace{\|f\|^2_{L^2(L^2)}}_{\leq K^2} + \|v_0\|^2_{H^1} + \|v_1\|^2_{L^2}\right)^3.$$

Donc pour $T > 0$ suffisamment petit

$$\|S(f)\|^2_{L^2(L^2)} \leq K^2.$$

Autrement dit $S(B_{T,K}) \subset B_{T,K}$.

Soient f_1 et $f_2 \in L^2((0,T), L^2(0,1))$, on note respectivement v_1 et v_2 les solutions de (4.1.21). Une démarche similaire permet d'obtenir

$$\|v_1 - v_2\|^2_\infty \leq TMe^T \|f_1 - f_2\|^2_{L^2(L^2)}, \tag{4.1.24}$$

Comme

$$\|v_1^3 - v_2^3\|^2_\infty \leq \|v_1^2 + v_1 v_2 + v_2^2\|^2_\infty \|v_1 - v_2\|^2_\infty,$$

en utilisant (4.1.23) et (4.1.24), on obtient

$$\|v_1^3 - v_2^3\|^2_\infty \leq 3M^2 e^{2T} \left(\|g\|^2_{L^2(L^2)} + \|v_0\|^2_{H^1} + \|v_1\|^2_{L^2} + K^2 \right) \|f_1 - f_2\|^2_{L^2(L^2)},$$

Ainsi

$$\|S(f_1) - S(f_2)\|^2_{L^2(L^2)} \leq 3M^2 T e^{2T} \left(\|g\|^2_{L^2(L^2)} + \|v_0\|^2_{H^1} + \|v_1\|^2_{L^2} + K^2 \right) \|f_1 - f_2\|^2_{L^2(L^2)}.$$

Donc S est une contraction stricte de $B_{T,K}$ pour $T > 0$ suffisamment petit.

Étape ***III***

Le Théorème du point fixe de Banach (voir par exemple [47]) implique l'existence d'une solution locale v à (4.1.20) sur un intervalle de temps $[0, T_{\max})$ pour un certain $T_{\max} > 0$. Cette solution vérifie

$$v \in C([0, T_{\max}), H^1_0(0,1)) \cap C^1([0, T_{\max}), L^2(0,1)).$$

Une analyse de l'énergie (en multipliant (4.1.20) par $\dfrac{\partial}{\partial t} v$) nous donne

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{ \left\| \frac{d}{dt} v(t) \right\|^2_{L^2} + \|v(t)\|^2_{H^1} \right\} + \gamma \left\| \chi \frac{d}{dt} v(t) \right\|^2_{L^2} + d \left\| \frac{d}{dt} v(t) \right\|^2_{L^2} + \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^4_{L^4} = \left\langle g(t), \frac{d}{dt} v(t) \right\rangle, \qquad \forall\, t \in [0, T_{\max}).$$

L'inégalité de Young

$$\langle a, b \rangle \leq \frac{1}{2}\left(\varepsilon \|a\|^2_{L^2} + \frac{1}{\varepsilon}\|b\|^2_{L^2} \right), \qquad \forall\, \varepsilon > 0,$$

nous donne après intégration de 0 à t

$$\left\|\frac{d}{dt}v(t)\right\|_{L^2}^2 + \|v(t)\|_{H^1}^2 \leq \|v_1\|_{L^2}^2 + \|v_0\|_{H^1}^2 + \frac{1}{2}\|v_0\|_{L^4}^4 - \frac{1}{2}\|v(t)\|_{L^4}^4 - \int_0^t 2\gamma \left\|\chi\frac{d}{ds}v(s)\right\|_{L^2}^2 + d\left\|\frac{d}{ds}v(s)\right\|_{L^2}^2 ds + \frac{1}{d}\int_0^t \|g(s)\|_{L^2}^2 ds, \qquad \forall\, t \in [0, T_{\max}). \quad (4.1.25)$$

$T_{\max}$ étant donné par le temps minimal d'explosion des solutions, l'inégalité précédente nous montre que la solution est globale. ■

La Proposition 4.1.10 que nous venons de voir permet de montrer que les systèmes (4.1.15) et (4.1.17) que l'on considère sont bien posés. En effet, il suffit de prendre $\gamma = 0$ et $g \equiv 0$ pour le système initial et $\gamma > 0$ et $g = \gamma\chi w$ pour l'observateur. Il faut encore montrer que l'hypothèse (4.1.11) du Théorème 4.1.8 est vérifiée. Autrement dit, que les solutions w et w^+ de (4.1.15) et (4.1.17) respectivement, vivent dans une boule en temps long.

C'est à cette étape que la dissipation d intervenant dans notre exemple va jouer. En effet, l'estimation d'énergie (4.1.25) nous dit en particulier que si l'on veut que w^+ reste dans une boule en norme X, il suffit que la mesure $y = \chi w$ soit $L^2([0,\infty), L^2([0,1]))$.

Proposition 4.1.11. *Sous les hypothèses de la Proposition 4.1.10, si $\gamma = 0$, $g \equiv 0$ et $d > 0$, alors il existe deux constantes $M > 0$ et $\delta > 0$ telles que la solution v du système (4.1.20) vérifie*

$$\left\|\frac{d}{dt}v(t)\right\|_{L^2}^2 + \|v(t)\|_{H^1}^2 \leq Me^{-\delta t}, \qquad \forall\, t \geq 0.$$

Démonstration. Nous suivons la démonstration du Théorème 8.4.5 de Cazenave et Haraux [18], que nous réécrivons sous la forme simplifiée correspondant à notre exemple.

Soit $\varepsilon > 0$, on définit

$$f(t) = \left\|\frac{d}{dt}v(t)\right\|_{L^2}^2 + \|v(t)\|_{H^1}^2 + \frac{1}{2}\|v(t)\|_{L^4}^4 + \varepsilon\left\langle v(t), \frac{d}{dt}v(t)\right\rangle.$$

Soit $\delta \in (0, \varepsilon)$, on calcule facilement que

$$f'(t) + \delta f(t) = -(d - \varepsilon - \delta)\left\|\frac{d}{dt}v(t)\right\|_{L^2}^2 - (\varepsilon - \delta)\|v(t)\|_{H^1}^2 - \varepsilon(d - \delta)\left\langle v(t), \frac{d}{dt}v(t)\right\rangle - \left(\varepsilon - \frac{\delta}{2}\right)\|v(t)\|_{L^4}^4.$$

Notons $k > 0$ la constante de Poincaré dans

$$\|v\|_{L^2}^2 \leq k\|v\|_{H_1}, \qquad \forall\, v \in H_0^1(0,1), \tag{4.1.26}$$

alors on a

$$\begin{aligned} f'(t) + \delta f(t) \leq -(d-\varepsilon-\delta)\left\|\frac{d}{dt}v(t)\right\|_{L^2}^2 - k(\varepsilon-\delta)\|v(t)\|_{L^2}^2 \\ - \varepsilon(d-\delta)\left\langle v(t), \frac{d}{dt}v(t)\right\rangle - \left(\varepsilon - \frac{\delta}{2}\right)\|v(t)\|_{L^4}^4. \end{aligned}$$

De l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{c}{2}a^2 + \frac{1}{2c}b^2, \tag{4.1.27}$$

on déduit en prenant $c = \dfrac{2\varepsilon(d-\delta)}{d}$ que

$$-\varepsilon(d-\delta)\left\langle v(t), \frac{d}{dt}v(t)\right\rangle \leq \varepsilon^2 d\|v(t)\|_{L^2}^2 + \frac{d}{4}\left\|\frac{d}{dt}v(t)\right\|_{L^2}^2,$$

et donc

$$\begin{aligned} f'(t) + \delta f(t) \leq -\left(\frac{3}{4}d - \varepsilon - \delta\right)\left\|\frac{d}{dt}v(t)\right\|_{L^2}^2 \\ - (k(\varepsilon-\delta) - \varepsilon^2 d)\|v(t)\|_{L^2}^2 - \left(\varepsilon - \frac{\delta}{2}\right)\|v(t)\|_{L^4}^4. \end{aligned}$$

Donc si $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, on obtient que

$$f(t) \leq e^{-\delta t} f(0), \qquad \forall\, t \geq 0. \tag{4.1.28}$$

Enfin, l'inégalité de Young (4.1.27) avec $c = 2\varepsilon$ et l'inégalité (4.1.26) nous donne

$$\varepsilon\left|\left\langle v(t), \frac{d}{dt}v(t)\right\rangle\right| \leq k\varepsilon^2\|v(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\left\|\frac{d}{dt}v(t)\right\|_{L^2}^2, \qquad \forall\, t \geq 0,$$

et donc

$$\begin{aligned} f(t) &\geq \left\|\frac{d}{dt}v(t)\right\|_{L^2}^2 + \|v(t)\|_{H^1}^2 - \varepsilon\left|\left\langle v(t), \frac{d}{dt}v(t)\right\rangle\right|, \\ &\geq \frac{3}{4}\left\|\frac{d}{dt}v(t)\right\|_{L^2}^2 + (1-k\varepsilon^2)\|v(t)\|_{H^1}^2, \end{aligned}$$

Ainsi pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe une constante $m > 0$ telle que

$$f(t) \geq m \left(\left\| \frac{d}{dt} v(t) \right\|_{L^2}^2 + \|v(t)\|_{H^1}^2 \right), \qquad \forall\, t \geq 0.$$

Finalement, à l'aide de (4.1.28), on obtient

$$\left\| \frac{d}{dt} v(t) \right\|_{L^2}^2 + \|v(t)\|_{H^1}^2 \leq \frac{f(0)}{m} e^{-\delta t}, \qquad \forall\, t \geq 0.$$

■

On utilise cette Proposition 4.1.11 et l'estimation d'énergie (4.1.25) pour montrer que l'hypothèse (4.1.11) est bien vérifiée. Autrement dit, les solutions z et z^+ des systèmes abstraits (4.1.18) et (4.1.19) restent dans la boule $\mathcal{B}(0, R)$ de rayon R donné par

$$R = \|w_1^+\|_{L^2}^2 + \|w_0^+\|_{H^1}^2 + \frac{1}{2}\|w_0^+\|_{L^4}^4 + \frac{1}{d}\|z\|_{L^2([0,\infty),X)}^2.$$

On notera $\ell > 0$ la constante de Lipschitz de la non-linéarité sur cette boule.

Théorème 4.1.12. *Si les données initiales w_0, w_1, w_0^+ et w_1^+ sont suffisamment petites, alors il existe deux constantes $M > 0$ et $\alpha > 0$ telles que les solutions w et w^+ des systèmes (4.1.15) et (4.1.17) vérifient*

$$\left\| \frac{d}{dt} w^+(t) - \frac{d}{dt} w(t) \right\|_{L^2}^2 + \|w^+(t) - w(t)\|_{H^1}^2$$
$$\leq M e^{-\alpha t} \left(\|w_1^+ - w_1\|_{L^2}^2 + \|w_0^+ - w_0\|_{H^1}^2 \right), \qquad \forall\, t \geq 0.$$

Démonstration. On reprend les notations du début de Section, que l'on rappelle ici

$$X = H_0^1(0,1) \times L^2(0,1), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(A) = (H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)) \times H_0^1(0,1),$$

$$Y = L^2(0,1), \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \chi \end{pmatrix}, \quad A^+ = A - \gamma C^* C, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & dI \end{pmatrix},$$

$$z = \begin{pmatrix} w \\ \frac{\partial}{\partial t} w \end{pmatrix}, \quad z^+ = \begin{pmatrix} w^+ \\ \frac{\partial}{\partial t} w^+ \end{pmatrix}, \quad B = I, \quad N \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\phi^3 \end{pmatrix}.$$

En utilisant l'identité

$$a^3 - b^3 = (a^2 + ab + b^2)(a - b),$$

On obtient (avec k la constante de Poincaré apparaissant dans (4.1.26))

$$\|Nz_1 - Nz_2\| \leq 3kR^2\|z_1 - z_2\|, \qquad \forall\, z_1, z_2 \in \mathcal{B}(0,R) \cap \mathcal{D}(A).$$

Autrement dit, N est localement lipschitzien, de constante $\ell \leq 3kR^2$ sur la boule $\mathcal{B}(0,R)$.

On souhaite maintenant appliquer le Théorème 4.1.8 pour conclure. Il faut pour cela vérifier l'hypothèse (4.1.13), *i.e.* (car $B = I$)

$$\ell < \frac{\omega}{M_\omega\sqrt{2}}, \tag{4.1.29}$$

où ω et M_ω sont les constantes apparaissant dans

$$\|\mathbb{T}_t^+ z\| \leq M_\omega e^{-\omega t}\|z\|, \qquad \forall\, z \in X, t \geq 0.$$

avec $\mathbb{T}^+$ le C_0-groupe exponentiellement stable engendré par l'opérateur $A - \gamma C^*C - D$. Clairement, l'hypothèse (4.1.29) sera vérifiée si

$$3kR^2 < \frac{\omega}{M_\omega\sqrt{2}},$$

c'est-à-dire si

$$R < \sqrt{\frac{\omega}{3kM_\omega\sqrt{2}}},$$

ce qui revient à dire qu'il faut des données initiales suffisamment petites. ■

Simulations numériques

On considère toujours le système (4.1.15), que l'on observe sur le premier dixième de l'intervalle $[0,1]$ conduisant à la mesure (4.1.16). Nous effectuons quelques simulations numériques en utilisant $H^+ = -\gamma C^*$, où $\gamma > 0$ est le coefficient de gain, conduisant à l'observateur (4.1.17). Nous regardons en particulier l'influence de la dissipation (paramètre d) et de la taille des données initiales.

Avec dissipation et petites données initiales

On considère (4.1.15), avec $d = 0.15$, $w_0(x) = 10^{-4}(\sin(2\pi x^2) + \sin(\pi x))$ et $w_1 = 0$ sur l'intervalle $[0,20]$. On discrétise l'observateur par éléments finis en espace et un schéma d'Euler implicite en temps. Soit $h = 0.005$ le pas de discrétisation en espace, et $\Delta t = 2.5 \times 10^{-5}$ le pas de temps.

On prend dans un premier temps $\gamma = 1$. La FIGURE 4.13 représente l'erreur d'approximation de l'état par l'observateur au cours du temps. Comme on peut s'en douter, augmenter la valeur du gain permet d'optimiser l'efficacité de l'observateur (FIGURE 4.14). Nous prenons

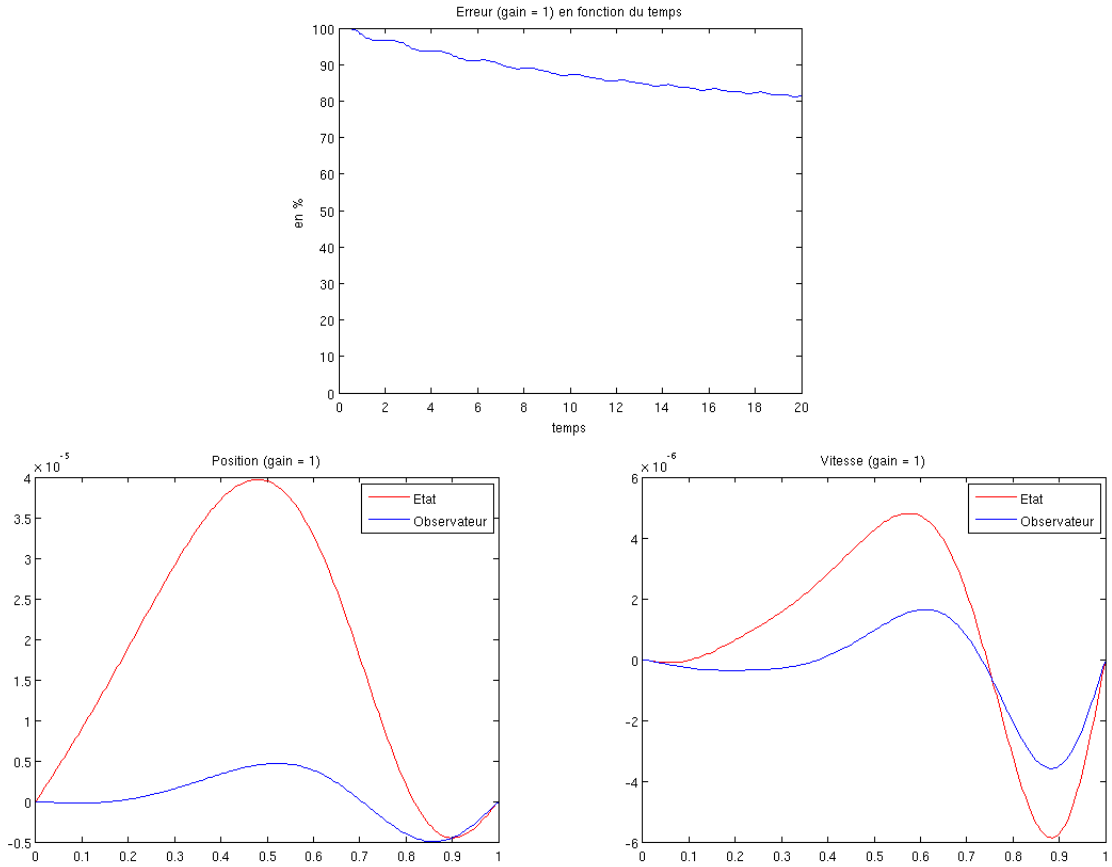


FIGURE 4.13 – Erreur relative entre le système et son observateur au cours du temps, puis état du système et de l'observateur à l'instant $T = 20$, avec $\gamma = 1$.

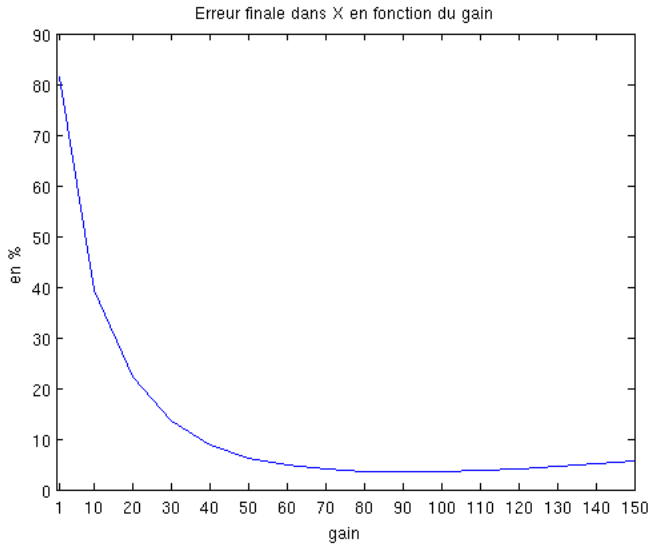


FIGURE 4.14 – Recherche d'un gain optimal en comparant les erreurs à l'instant $T = 20$ ($\gamma = 1, 10, 20, \cdots, 150$).

alors $\gamma = 90$, et on obtient la FIGURE 4.15.

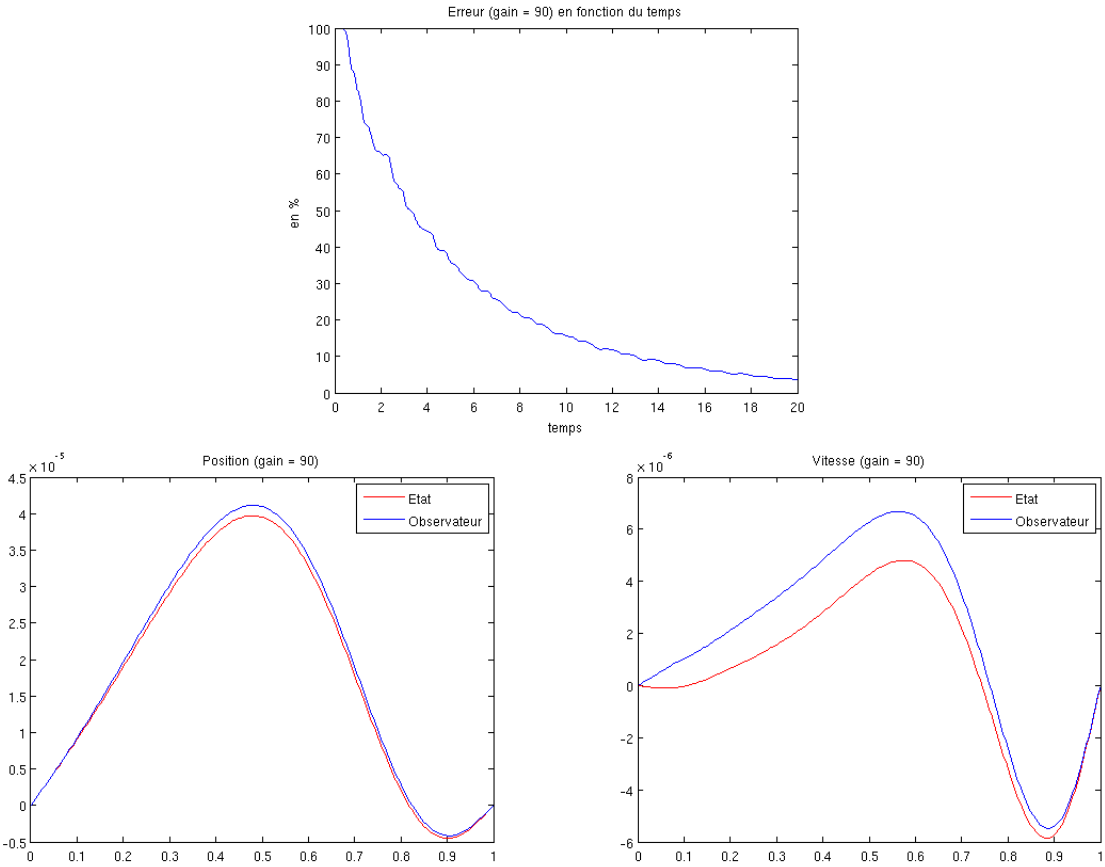


FIGURE 4.15 – Erreur relative entre le système et son observateur au cours du temps, puis état du système et de l'observateur à l'instant $T = 20$, avec $\gamma = 90$.

Sans dissipation et/ou avec de grandes données initiales

Il semble que les résultats précédents soient encore valables sans dissipation ($d = 0$) comme on peut le voir sur la FIGURE 4.16. On peut voir sur la FIGURE 4.17 qu'augmenter la taille des données initiales (en supprimant le terme multiplicatif 10^{-4}) est suffisant pour perdre la convergence à l'instant $T = 20$. Comme nous l'avons déjà vu, le gain joue un rôle important dans l'algorithme que nous utilisons. Nous nous sommes alors demandé si l'on pouvait améliorer les résultats de la FIGURE 4.17 en faisant varier ce paramètre, mais les tests effectués n'ont rien donné. Évidemment, la situation est encore pire sans dissipation (voire la FIGURE 4.18). Cependant, il semble que la convergence ait bien lieu pour de grandes valeurs de T, confirmant la décroissance exponentielle ($T = 60$ FIGURE 4.19 avec de la dissipation, $T = 400$ FIGURE 4.20 sans dissipation).

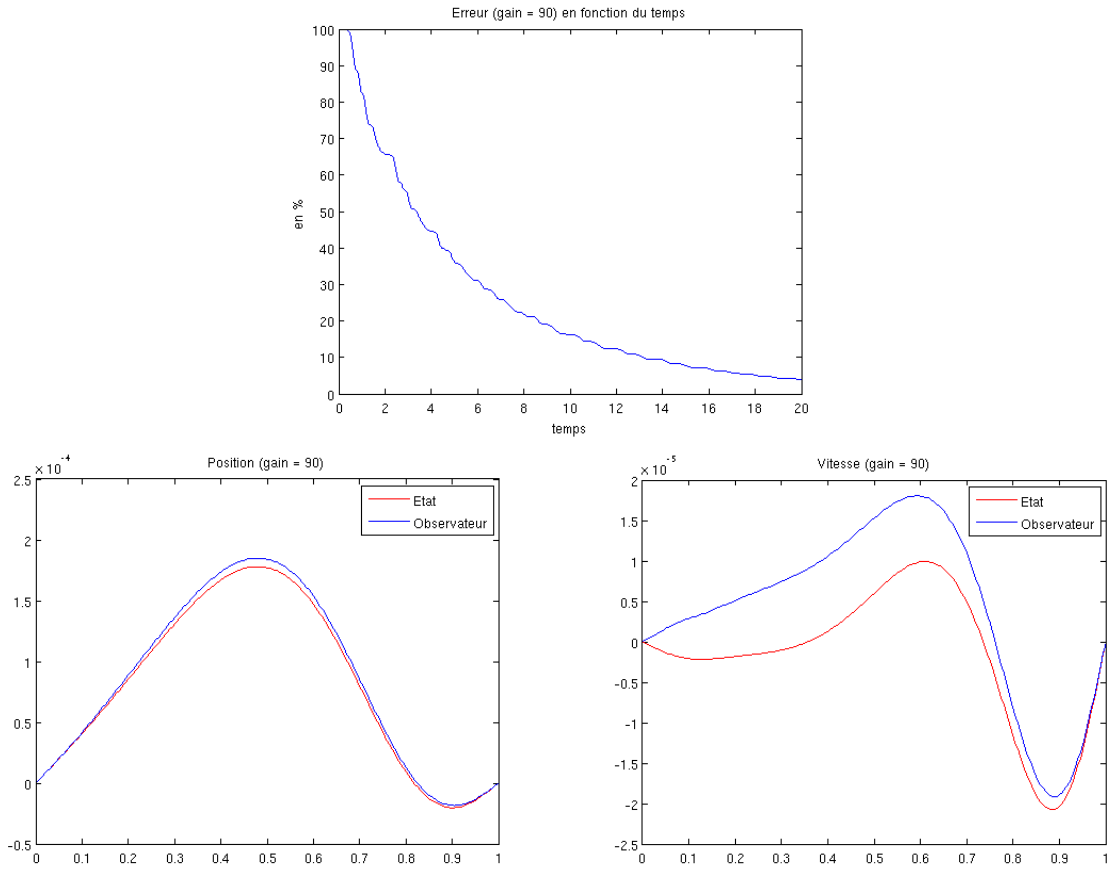


FIGURE 4.16 – Erreur relative entre le système et son observateur au cours du temps, puis état du système et de l'observateur à l'instant $T = 20$, avec $\gamma = 90$, sans dissipation.

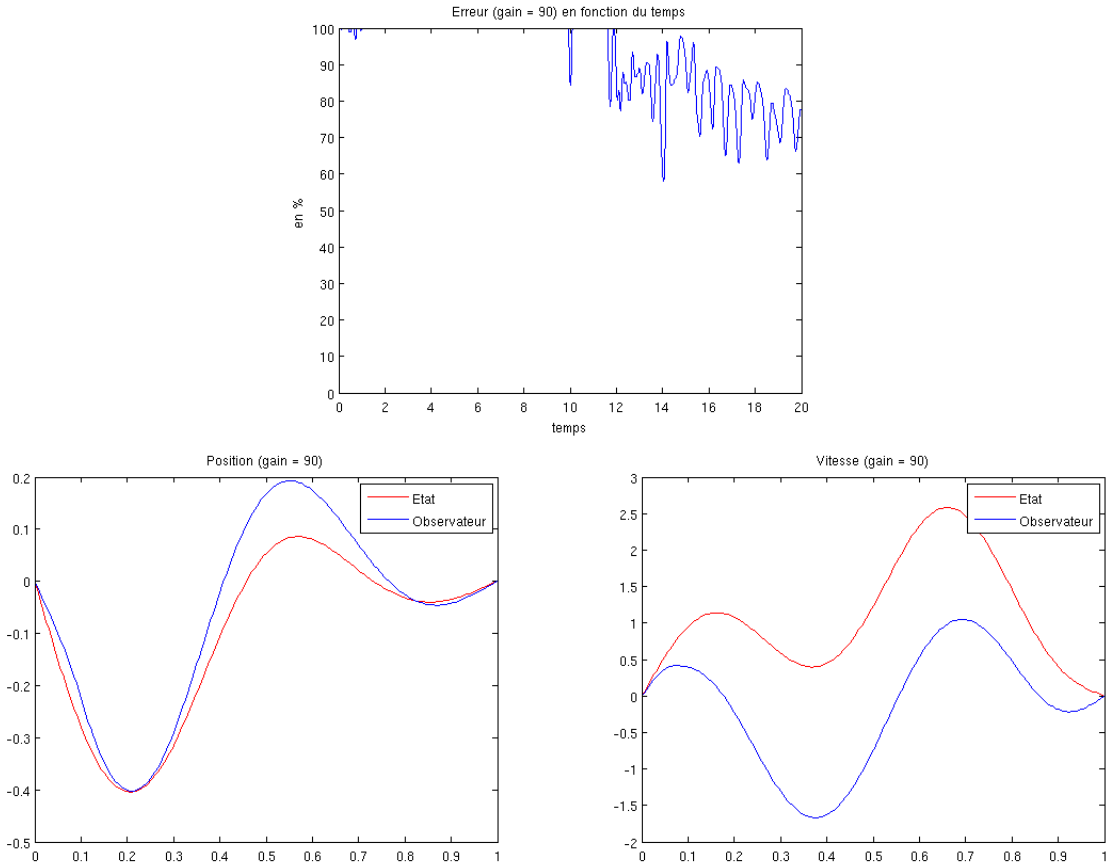


FIGURE 4.17 – Erreur relative entre le système et son observateur au cours du temps, puis état du système et de l'observateur à l'instant $T = 20$, avec $\gamma = 90$, avec de grandes données initiales.

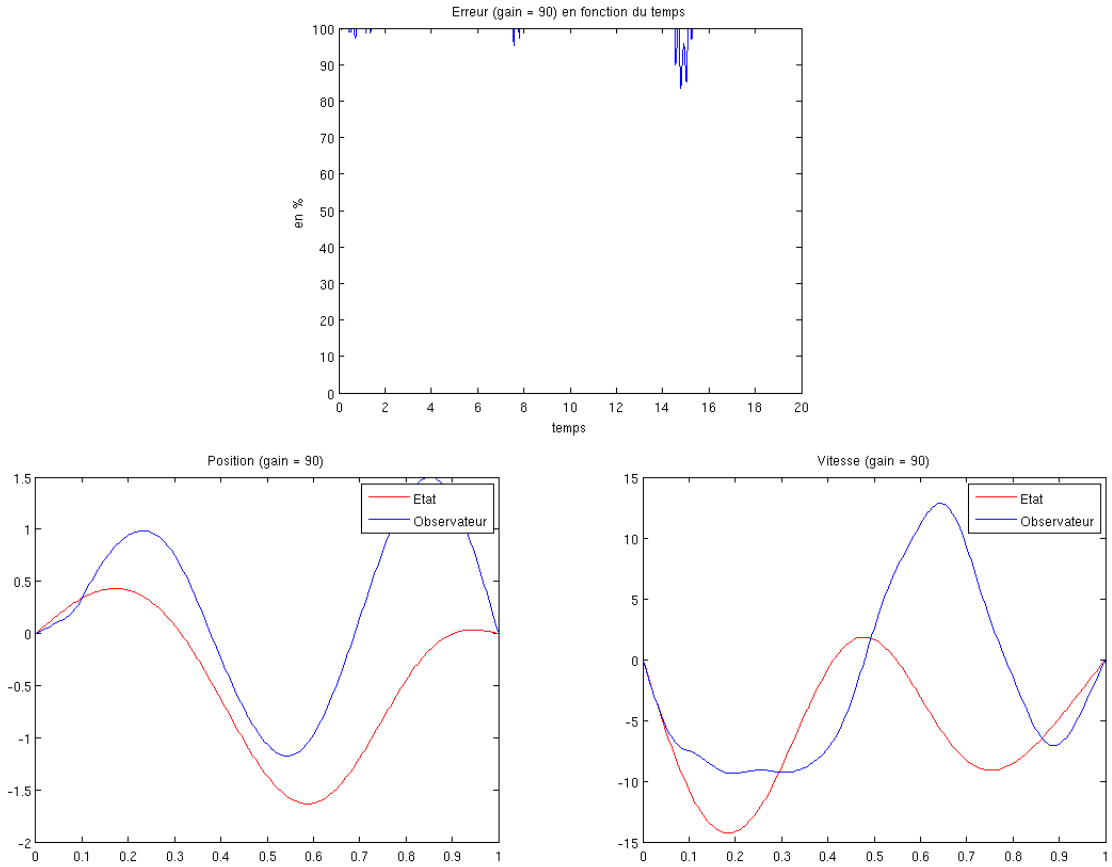


FIGURE 4.18 – Erreur relative entre le système et son observateur au cours du temps, puis état du système et de l'observateur à l'instant $T = 20$, avec $\gamma = 90$, avec de grandes données initiales, sans dissipation.

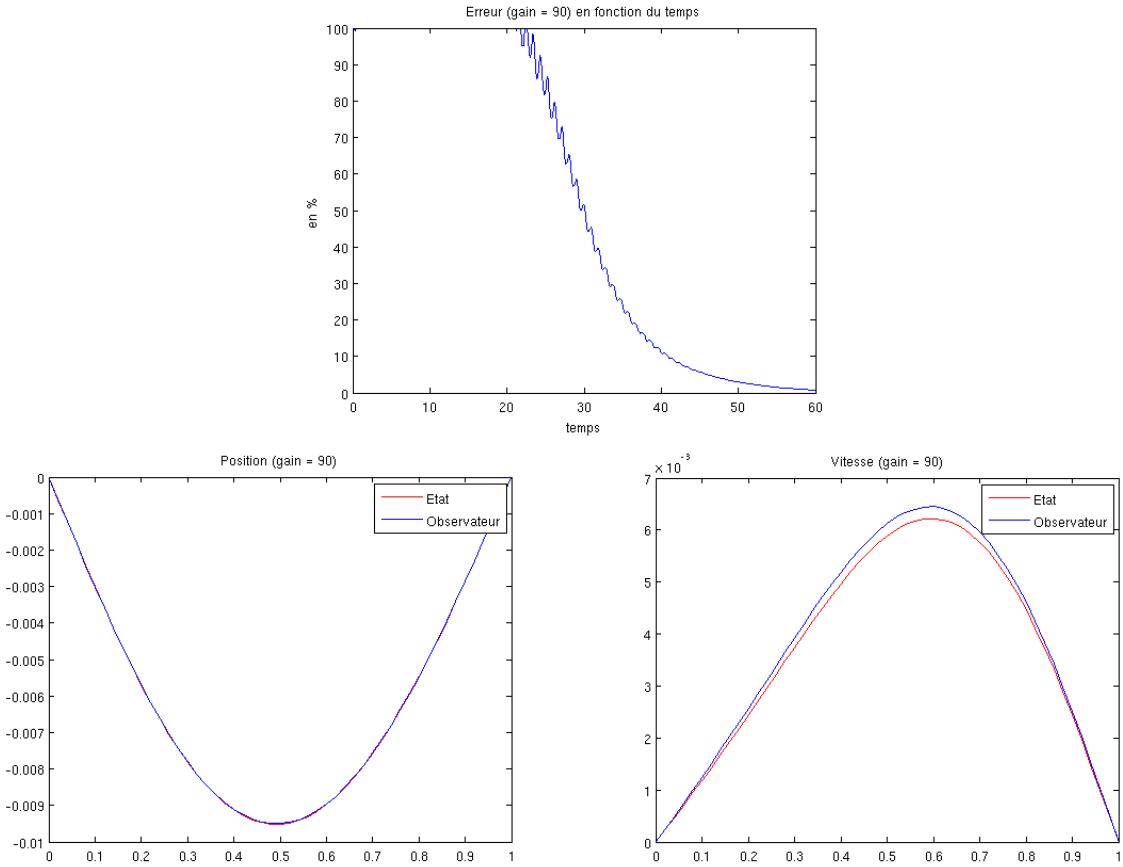


FIGURE 4.19 – Erreur relative entre le système et son observateur au cours du temps, puis état du système et de l'observateur à l'instant $T = 60$, avec $\gamma = 90$, avec de grandes données initiales, avec dissipation.

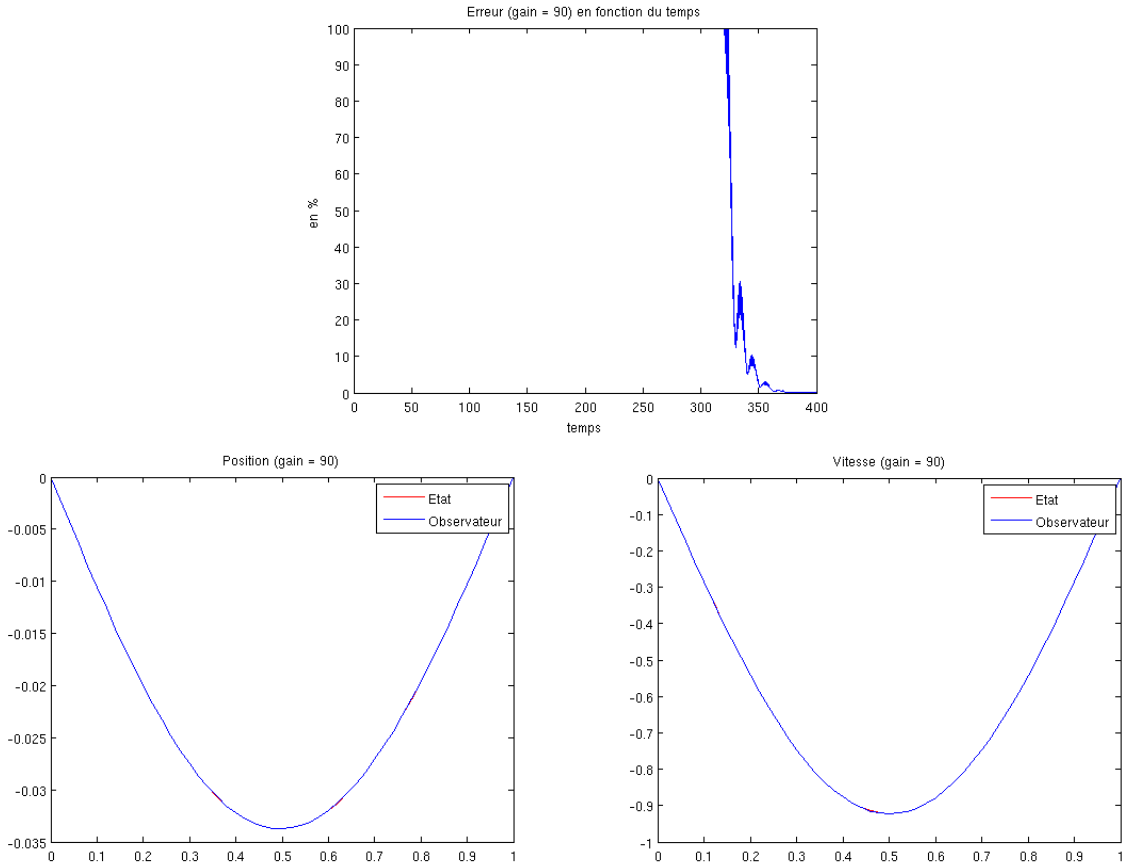


FIGURE 4.20 – Erreur relative entre le système et son observateur au cours du temps, puis état du système et de l'observateur à l'instant $T = 400$, avec $\gamma = 90$, avec de grandes données initiales, sans dissipation.

4.2 Sans observabilité exacte

Soient X et Y deux espace de Hilbert, A le générateur d'un C_0-groupe unitaire $\mathbb{S}$ sur X et $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ un opérateur d'observation. Nous nous intéressons encore une fois à la reconstruction de la donnée initiale z_0 du système suivant

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t), & \forall\, t \geq 0, \\ z(0) = z_0 \in X. \end{cases}$$

On suppose que nous avons accès à z au travers de l'opérateur C, durant un intervalle de temps $[0, \tau]$, conduisant à la mesure

$$y(t) = Cz(t), \qquad \forall\, t \in [0, \tau].$$

Nous avons vu dans le Chapitre 0 que lorsque (A, C) est exactement observable en temps $\tau > 0$, ce problème inverse est bien posé. Sachant que les observateurs direct (0.2.4) et rétrograde (0.2.7) sont bien définis, même lorsque cette hypothèse n'est pas vérifiée, nous nous posons ici les questions suivantes :

1. **Est-ce que l'algorithme du Chapitre 0 converge ?**
2. **Si oui, que reconstruit-il pour un opérateur d'observation $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ et un temps $\tau > 0$ donnés ?**

À partir de maintenant, C et $\tau > 0$ sont supposés fixés, et tels que (A, C) ne soit pas exactement observable.
Rappelons les définitions des opérateurs entrée–état Φ_τ et état–sortie Ψ_τ données au Chapitre 0. L'opérateur entrée–état $\Phi_\tau \in \mathcal{L}\left(L^2([0, \infty), Y), X\right)$, est donné par

$$\Phi_\tau u = \int_0^\tau \mathbb{S}^*_{\tau - t} C^* u(t) dt.$$

Remarquons que $\Phi_\tau u = w(\tau)$ où w est solution de

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = A^* w(t) + C^* u(t), & \forall\, t \geq 0, \\ w(0) = 0 \in X. \end{cases}$$

L'opérateur état–sortie $\Psi_\tau \in \mathcal{L}\left(X, L^2([0, \infty), Y)\right)$, qui à $z_0 \in X$ associe la mesure correspondante y, est donné par

$$(\Psi_\tau z_0)(t) = \begin{cases} C\mathbb{S}_t z_0, & \forall\, t \in [0, \tau], \\ 0, & \forall\, t > \tau. \end{cases}$$

On définit également l'opérateur de retournement temporel $\mathcal{R}_\tau \in \mathcal{L}\left(L^2([0,\infty),Y)\right)$ par

$$(\mathcal{R}_\tau u)(t) = \begin{cases} u(\tau - t), & \forall\, t \in [0,\tau], \\ 0, & \forall\, t > \tau, \end{cases}$$

et l'opérateur de troncature $\mathcal{P}_\tau \in \mathcal{L}\left(L^2([0,\infty),Y)\right)$ par

$$(\mathcal{P}_\tau u)(t) = \begin{cases} u(t), & \forall\, t \in [0,\tau], \\ 0, & \forall\, t > \tau. \end{cases}$$

On peut facilement montrer la Proposition suivante.

Proposition 4.2.1. *On a les propriétés suivantes*

- $\mathcal{R}_\tau^* = \mathcal{R}_\tau$,
- $\mathcal{R}_\tau^2 = \mathcal{P}_\tau$,
- $\Phi_\tau \mathcal{P}_\tau = \Phi_\tau$,
- $\mathcal{P}_\tau \Psi_\tau = \Psi_\tau$,
- $\Phi_\tau^* = \mathcal{R}_\tau \Psi_\tau$,
- $\Psi_\tau^* = \Phi_\tau \mathcal{R}_\tau$,
- $\operatorname{Ker} \mathcal{R}_\tau \Psi_\tau = \operatorname{Ker} \Psi_\tau$,
- $\operatorname{Im} \Phi_\tau \mathcal{R}_\tau = \operatorname{Im} \Phi_\tau$.

On en déduit facilement le Corollaire suivant.

Corollaire 4.2.2. *On a la décomposition orthogonale* $X = \operatorname{Ker} \Psi_\tau \oplus \overline{\operatorname{Im} \Phi_\tau}$.

Tout $z_0 \in X$ s'écrit donc de manière unique sous la forme $z_0 = z_1 + z_2$. $z_1 \in \overline{\operatorname{Im} \Psi_\tau}$ correspond alors à la partie observable de z_0 et $z_2 \in \operatorname{Ker} \Psi_\tau$ à sa partie non observable.

Soient $\mathbb{T}^+$ le C_0-semi-groupe engendré par $A - \gamma C^* C$, respectivement $\mathbb{T}^-$ engendré par $-A - \gamma C^* C$, pour un certain $\gamma > 0$. On définit deux systèmes que nous appellerons *pseudo-observateurs* (puisqu'ils correspondent aux observateurs classiques (0.2.4) et (0.2.7) dans le cas où l'on a observabilité exacte)

$$\begin{cases} \dot{z}_n^+(t) = (A - \gamma C^* C) z_n(t) + \gamma C^* y(t), & \forall\, t \in [0,\tau], \\ z_1^+(0) = z_0^+ \in X, \\ z_n^+(0) = z_n^-(0), \qquad \forall\, n \geq 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_n^-(t) = (A + \gamma C^* C) z_n(t) - \gamma C^* y(t), & \forall\, t \in [0,\tau], \\ z_n^-(\tau) = z_n^+(\tau), \qquad \forall\, n \geq 1. \end{cases}$$

L'erreur dans le sens direct $e_n^+(t) = z_n^+(t) - z(t)$ vérifie

$$\begin{cases} \dot{e}_n^+(t) = (A - \gamma C^* C) e_n^+(t), & \forall\, t \in [0, \tau], \\ e_1^+(0) = z_0^+ - z_0 \in X, \\ e_n^+(0) = e_n^-(0), & \forall\, n \geq 2, \end{cases}$$

et l'erreur dans le sens rétrograde $e_n^-(t) = z_n^-(t) - z(t)$ vérifie

$$\begin{cases} \dot{e}_n^-(t) = (A + \gamma C^* C) e_n^-(t), & \forall\, t \in [0, \tau], \\ e_n^-(\tau) = e_n^+(\tau), & \forall\, n \geq 1. \end{cases}$$

Alors on a

$$e_n^-(0) = \left(\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+\right)^n e_1^+(0). \tag{4.2.1}$$

Encore une fois, on a vu dans le Chapitre 0 que quand (A, C) est exactement observable en temps τ, il existe une constante $\alpha \in (0, 1)$ telle que $\|e_n^-(0)\| \leq \alpha^n \|e_1^+(0)\| \to 0$ quand $n \to \infty$. Or ici, nous avons supposé qu'il n'y avait pas observabilité exacte. Dans ce cas, on le Théorème suivant, qui est le résultat principal de cette partie.

Théorème 4.2.3. *Reprenons les hypothèses, définitions et notations précédentes et notons $\mathcal{P}$ la projection orthogonale sur $\overline{\operatorname{Im} \Phi_\tau}$. Pour tout $z_0, z_0^+ \in X$, on a*

1. $$\left\|(I - \mathcal{P})\left(z_n^-(0) - z_0\right)\right\| = \left\|(I - \mathcal{P})\left(z_0^+ - z_0\right)\right\|, \qquad \forall\, n \geq 1.$$

2. *La suite $\left(\|\mathcal{P}\left(z_n^-(0) - z_0\right)\|\right)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante et vérifie*

$$\left\|\mathcal{P}\left(z_n^-(0) - z_0\right)\right\| \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

3. *De plus, la décroissance est exponentielle, i.e. il existe une constante $\alpha \in (0, 1)$, indépendante de z_0 et z_0^+, telle que*

$$\left\|\mathcal{P}\left(z_n^-(0) - z_0\right)\right\| \leq \alpha^n \left\|\mathcal{P}\left(z_0^+ - z_0\right)\right\|, \qquad \forall\, n \geq 1,$$

si et seulement si $\operatorname{Im} \Phi_\tau$ est fermé dans X.

Autrement dit, ce Théorème confirme ce que l'intuition nous suggère : on reconstruira la partie de la donnée initiale qui contribue à la mesure, et on ne verra pas la partie non observable.

Corollaire 4.2.4. *Si A est anti-adjoint sur X, $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ et (A, C) est approximativement observable en temps $\tau > 0$, i.e. $\operatorname{Ker} \Psi_\tau = \{0\}$, alors pour tout $z_0, z_0^+ \in X$, on a*

$$\|z_n^-(0) - z_0\| \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Théorème 4.2.3 en remarquant que

$$\overline{\operatorname{Im}\Phi_\tau} = (\operatorname{Ker}\Psi_\tau)^\perp = \{0\}^\perp = X.$$

■

Le Théorème 4.2.3 nous permet de dire que la projection de $z_n^-(0)$ sur $\overline{\operatorname{Im}\Phi_\tau}$ converge bien vers la projection de z_0. Cependant, il est difficile dans les exemples de caractériser $\overline{\operatorname{Im}\Phi_\tau}$, et donc la projection associée. Le Corollaire suivant nous assure que lorsque l'initialisation z_0^+ de l'algorithme appartient à $\overline{\operatorname{Im}\Phi_\tau}$ (en prenant par exemple $z_0^+ = 0$), alors c'est le cas pour toutes les reconstructions successives. Cela signifie que c'est alors directement $z_n^-(0)$, et non sa projection, qui converge vers la projection de z_0.

Corollaire 4.2.5. *Sous les hypothèses du Théorème 4.2.3, et si de plus $z_0^+ \in \overline{\operatorname{Im}\Phi_\tau}$, alors on a*

$$\left\|z_n^-(0) - \mathcal{P}z_0\right\| \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

De plus, la décroissance est exponentielle si et seulement si $\operatorname{Im}\Phi_\tau$ est fermé dans X.

Nous démontrerons ce Corollaire après la démonstration du Théorème principal.

Nous aurons besoin de plusieurs résultats intermédiaires avant de pouvoir démontrer le Théorème 4.2.3.

Lemme 4.2.6. *Pour tout $z \in X$, on définit*

$$(\Psi_\tau^+ z)(t) = \begin{cases} C\mathbb{T}_t^+ z, & \forall\, t \in [0,\tau], \\ 0, & \forall\, t > \tau. \end{cases}$$

Alors il existe deux constantes $m, M > 0$ telles que

$$m\left\|\Psi_\tau z\right\|_{L^2([0,\infty),Y)} \leq \left\|\Psi_\tau^+ z\right\|_{L^2([0,\infty),Y)} \leq M\left\|\Psi_\tau z\right\|_{L^2([0,\infty),Y)}, \qquad \forall\, z \in X. \tag{4.2.2}$$

Démonstration. Reprenons le début de la démonstration de la Proposition 0.2.4.

Soit $z_0 \in \mathcal{D}(A)$ et $t \geq 0$. On pose $z(t) = \mathbb{S}_t z_0$ et $v(t) = \mathbb{T}_t^+ z_0$. La différence $w = z - v$ vérifie

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = Aw(t) - \gamma C^* C v(t), & \forall\, t \geq 0, \\ w(0) = 0. \end{cases}$$

La formule de Duhamel (0.1.6) nous donne alors

$$w(t) = -\gamma \int_0^t \mathbb{S}_{t-s} C^* C v(s) ds.$$

Ceci implique facilement

$$\sup_{t\in[0,\tau]} \|w(t)\| \leq \gamma \int_0^\tau \|C^*Cv(t)\|dt,$$

et on montre donc que

$$\int_0^\tau \|Cw(t)\|_Y^2 dt \leq \gamma^2\tau\|C\|^4 \int_0^\tau \|C\mathbb{T}_t^+ z_0\|_Y^2 dt.$$

D'où, puisque $Cz = Cv - Cw$

$$\int_0^\tau \|C\mathbb{S}_t z_0\|_Y^2 dt \leq 2(1+\gamma^2\tau\|C\|^4) \int_0^\tau \|C\mathbb{T}_t^+ z_0\|_Y^2 dt,$$

ou autrement dit

$$\|\Psi_\tau z\|_{L^2([0,\infty),Y)} \leq 2(1+\gamma^2\tau\|C\|^4) \left\|\Psi_\tau^+ z\right\|_{L^2([0,\infty),Y)}.$$

En inversant les rôles de A et de A^+, *i.e.* avec $z(t) = \mathbb{T}_t^+ z_0$ et $v(t) = \mathbb{S}_t z_0$, on obtient que la différence $w = z - v$ vérifie

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = A^+ w(t) + \gamma C^*Cv(t), & \forall\, t \geq 0, \\ w(0) = 0. \end{cases}$$

La formule de Duhamel (0.1.6) nous donne alors

$$w(t) = \gamma \int_0^t \mathbb{T}_{t-s}^+ C^*Cv(s)ds,$$

et en se souvenant que $\mathbb{T}^+$ est un C_0-semi-groupe de contraction, on peut refaire exactement les mêmes calculs que précédemment et obtenir que

$$\left\|\Psi_\tau^+ z\right\|_{L^2([0,\infty),Y)} \leq 2(1+\gamma^2\tau\|C\|^4) \|\Psi_\tau z\|_{L^2([0,\infty),Y)}.$$

D'où le résultat en posant $m = \dfrac{1}{2(1+\gamma^2\tau\|C\|^4)}$ et $M = 2(1+\gamma^2\tau\|C\|^4)$. ■

Proposition 4.2.7. *Les sous-espaces* $\overline{\operatorname{Im}\Phi_\tau}$ *et* $\operatorname{Ker}\Psi_\tau$ *sont stables par* $\mathbb{T}_\tau^-\mathbb{T}_\tau^+$, *i.e.*

$$\mathbb{T}_\tau^-\mathbb{T}_\tau^+\left(\overline{\operatorname{Im}\Phi_\tau}\right) \subset \overline{\operatorname{Im}\Phi_\tau}, \qquad \mathbb{T}_\tau^-\mathbb{T}_\tau^+\left(\operatorname{Ker}\Psi_\tau\right) \subset \operatorname{Ker}\Psi_\tau.$$

Cette Proposition garantit que la partie de la donnée initiale qui ne contribue pas à la mesure ne parasite pas la reconstruction, et qu'à l'inverse, on ne perd aucune information sur la partie qui contribue en itérant le procédé.

Démonstration.

1. D'après le Théorème 0.1.20, on a

$$\mathbb{T}_\tau^+ z_0 = \mathbb{S}_\tau z_0 - \gamma \int_0^\tau \mathbb{S}_{\tau-s} C^* C \mathbb{T}_s^+ z_0 ds, \qquad \forall\, z_0 \in X,$$

et

$$\mathbb{T}_\tau^- z_1 = \mathbb{S}_{-\tau} z_1 - \gamma \int_0^\tau \mathbb{S}_{s-\tau} C^* C \mathbb{T}_s^- z_1 ds, \qquad \forall\, z_1 \in X.$$

En substituant la première égalité dans la seconde en posant $z_1 = \mathbb{T}_\tau^+ z_0$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+ z_0 = z_0 - \gamma \int_0^\tau \mathbb{S}_{-s} C^* C \mathbb{T}_s^+ z_0 ds - \gamma \int_0^\tau \mathbb{S}_{s-\tau} C^* C \mathbb{T}_s^- \mathbb{S}_\tau z_0 ds \\ + \gamma^2 \int_0^\tau \int_0^\tau \mathbb{S}_{s-\tau} C^* C \mathbb{T}_s^- \mathbb{S}_{\tau-\sigma} C^* C \mathbb{T}_\sigma^+ z_0 d\sigma ds, \qquad \forall\, z_0 \in X.\end{aligned}$$

Soit $\theta \in X = \operatorname{Ker} \Psi_\tau \oplus \overline{\operatorname{Im} \Phi_\tau}$, alors

$$\begin{aligned}\left\langle \mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+ z_0, \theta \right\rangle = \langle z_0, \theta \rangle - \gamma \int_0^\tau \left\langle C \mathbb{T}_s^+ z_0, C \mathbb{S}_{-s}^* \theta \right\rangle ds - \gamma \int_0^\tau \left\langle C \mathbb{T}_s^- \mathbb{S}_\tau z_0, C \mathbb{S}_{s-\tau}^* \theta \right\rangle ds \\ + \gamma^2 \int_0^\tau \int_0^\tau \left\langle C \mathbb{T}_s^- \mathbb{S}_{\tau-\sigma} C^* C \mathbb{T}_\sigma^+ z_0, C \mathbb{S}_{s-\tau}^* \theta \right\rangle d\sigma ds.\end{aligned}$$

Puisque $A^* = -A$, $\mathbb{S}_t^* = \mathbb{S}_{-t}$ pour tout t. Si $\theta \in \operatorname{Ker} \Psi_\tau$, les trois intégrales si dessus sont nulles, et si de plus $z_0 \in \overline{\operatorname{Im} \Phi_\tau} = (\operatorname{Ker} \Psi_\tau)^\perp$, le premier terme est également nul et on a donc $\langle \mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+ z_0, \theta \rangle = 0$ pour tout $\theta \in \operatorname{Ker} \Psi_\tau$. On vient de montrer que

$$\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+ \left(\overline{\operatorname{Im} \Phi_\tau} \right) \subset \overline{\operatorname{Im} \Phi_\tau} = (\operatorname{Ker} \Psi_\tau)^\perp .$$

2. On définit

$$(\Psi_\tau^- z)(t) = \begin{cases} C \mathbb{T}_t^- z, & \forall\, t \in [0, \tau], \\ 0, & \forall\, t > \tau, \end{cases}$$

et

$$(\Psi_{-\tau} z)(t) = \begin{cases} C \mathbb{S}_{-t} z, & \forall\, t \in [0, \tau], \\ 0, & \forall\, t > \tau. \end{cases}$$

On montre que $\operatorname{Ker} \Psi_\tau^- = \operatorname{Ker} \Psi_{-\tau}$. En effet, soit $z \in \operatorname{Ker} \Psi_\tau^-$, par le Théorème 0.1.20, on a pour tout $t \in [0, \tau]$

$$0 = C \mathbb{T}_t^- z = C \mathbb{S}_{-t} z - \gamma \int_0^t C \mathbb{S}_{s-t} C^* \underbrace{C \mathbb{T}_s^- z}_{=0} ds.$$

Alors $\operatorname{Ker}\Psi_\tau^- \subset \operatorname{Ker}\Psi_{-\tau}$. De la même manière, soit $z \in \operatorname{Ker}\Psi_{-\tau}$, alors

$$0 = C\mathbb{S}_{-t}z = C\mathbb{T}_t^- z + \gamma \int_0^t C\mathbb{T}_{t-s}^- C^* \underbrace{C\mathbb{S}_{-s}z}_{=0}\, ds,$$

et donc $\operatorname{Ker}\Psi_\tau^- = \operatorname{Ker}\Psi_{-\tau}$.

Pour tout $z_0 \in \operatorname{Ker}\Psi_\tau$ et tout $\theta \in \overline{\operatorname{Im}\Phi_\tau}$, on peut facilement calculer

$$\left\langle \mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+ z_0, \theta \right\rangle = -\gamma \int_0^\tau \left\langle C\mathbb{T}_s^- \mathbb{S}_\tau z_0, C\mathbb{S}_{\tau-s}\theta \right\rangle ds.$$

Comme $z_0 \in \operatorname{Ker}\Psi_\tau$, *i.e.* $C\mathbb{S}_s z_0 = 0$ pour tout $s \in [0,\tau]$, on a

$$C\mathbb{S}_{-s}\mathbb{S}_\tau z_0 = C\mathbb{S}_{\tau-s}z_0 = \mathcal{R}_\tau C\mathbb{S}_s z_0 = 0,$$

pour tout $s \in [0,\tau]$. En d'autres termes, $\mathbb{S}_\tau z_0 \in \operatorname{Ker}\Psi_{-\tau} = \operatorname{Ker}\Psi_\tau^-$ ce qui implique que $C\mathbb{T}_s^-\mathbb{S}_\tau z_0 = 0$. Finalement

$$\left\langle \mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+ z_0, \theta \right\rangle = 0, \qquad \forall\, z_0 \in \operatorname{Ker}\Psi_\tau, \theta \in \overline{\operatorname{Im}\Phi_\tau},$$

d'où

$$\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+ \left(\operatorname{Ker}\Psi_\tau\right) \subset \operatorname{Ker}\Psi_\tau.$$

■

Corollaire 4.2.8. *Notons $\mathcal{P}$ la projection de X sur $\overline{\operatorname{Im}\Phi_\tau}$, alors on a*

$$\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+ \mathcal{P} = \mathcal{P}\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+.$$

Démonstration. Soit $z \in X$, on a

$$\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+ z = \mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+ \mathcal{P}z + \mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+ \left(I - \mathcal{P}\right) z,$$

et donc

$$\mathcal{P}\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+ z = \mathcal{P}\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+ \mathcal{P}z + \mathcal{P}\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+ \left(I - \mathcal{P}\right) z.$$

Or d'après la Proposition 4.2.7, $\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+ \mathcal{P}z \in \overline{\operatorname{Im}\Phi_\tau}$ et $\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+ \left(I - \mathcal{P}\right) z \in \left(\overline{\operatorname{Im}\Phi_\tau}\right)^\perp = \operatorname{Ker}\Psi_\tau$ et donc

$$\mathcal{P}\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+ z = \mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+ \mathcal{P}z.$$

■

Nous utiliserons dans la suite la caractérisation suivante de la fermeture de l'image d'un opérateur linéaire continu, que nous rappelons sans démonstration (voir par exemple Brézis [16, Chapitre 2]).

Lemme 4.2.9. *Un opérateur borné $T \in \mathcal{L}(Z_1, Z_2)$, où Z_1 et Z_2 sont des espaces de Hilbert, a une image fermé si et seulement s'il existe une constante $k > 0$ telle que*

$$\|T^* f\| \geq k\|(I - P)f\|, \qquad \forall\, f \in Z_2, \tag{4.2.3}$$

où P est la projection orthogonale sur $\operatorname{Ker} T^*$.

Nous avons vu dans la Proposition 4.2.7 que l'algorithme préserve la décomposition donnée par le Corollaire 4.2.2. On s'intéresse donc dans la Proposition suivante à l'opérateur $\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+$ sur la composante de X où l'on a des chances de reconstruction, *i.e.* celle qui conduit à des mesures non nulles : $\overline{\operatorname{Im} \Phi_\tau}$.

Proposition 4.2.10. *Notons L l'opérateur $\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+$ restreint au sous-espace stable $V = \overline{\operatorname{Im} \Phi_\tau}$. On a les propriétés suivantes :*

1. *$L \in \mathcal{L}(V)$ est auto-adjoint,*
2. *L est défini positif,*
3. *$\|Lz\| < \|z\|$, pour tout $z \in V \setminus \{0\}$,*
4. *$\|L\|_{\mathcal{L}(V)} < 1$ si et seulement si $\operatorname{Im} \Phi_\tau$ est fermé dans X.*

Démonstration.

1. D'après la Proposition 4.2.7, $LV \subset V$, et donc $L \in \mathcal{L}(V)$. Remarquons maintenant que $(\mathbb{T}_\tau^-)^* = \mathbb{T}_\tau^+$, puisque $(A - \gamma C^* C)^* = -A - \gamma C^* C$ (A étant anti-adjoint). Le caractère auto-adjoint de L découle immédiatement de celui de $\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+ = (\mathbb{T}_\tau^+)^* \mathbb{T}_\tau^+$.
2. Le fait que L soit borné inférieurement provient du fait que $\mathbb{T}^+$ est borné inférieurement. En effet, c'est un C_0-groupe puisque son générateur est une perturbation bornée du générateur d'un C_0-groupe, il est donc inversible en tout temps et il existe une constante $m_\tau > 0$ telle que

$$\langle Lz, z \rangle = \|\mathbb{T}_\tau^+ z\|^2 \geq m_\tau^2 \|z\|^2, \qquad \forall\, z \in V.$$

3. Soit $z \in X$, on note $v(t) = \mathbb{T}_t^+ z$. Alors v est solution du système

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = Av(t) - \gamma C^* C v(t), & \forall\, t \geq 0, \\ v(0) = z. \end{cases}$$

En multipliant cette équation par $v(t)$ et en intégrant sur $[0,\tau]$, on obtient

$$\|\mathbb{T}_\tau^+ z\|^2 = \|z\|^2 - 2\gamma \int_0^\tau \|C\mathbb{T}_s^+ z\|^2 ds.$$

On a donc

$$\langle Lz, z\rangle = \|\mathbb{T}_\tau^+ z\|^2 = \|z\|^2 - 2\gamma \left\|\Psi_\tau^+ z\right\|^2_{L^2([0,\infty),Y)}, \qquad \forall\, z \in X, \tag{4.2.4}$$

Si $z \in V\setminus\{0\} = (\operatorname{Ker}\Psi_\tau)^\perp\setminus\{0\}$, on a $\|\Psi_\tau^+ z\|^2_{L^2([0,\infty),Y)} > 0$. On obtient alors en itérant (4.2.4) que

$$\begin{aligned}
\|Lz\|^2 &= \left\langle L\left(L^{\frac12} z\right), L^{\frac12} z\right\rangle, \\
&= \|L^{\frac12} z\|^2 - 2\gamma \left\|\Psi_\tau^+ L^{\frac12} z\right\|^2_{L^2([0,\infty),Y)}, \\
&= \|z\|^2 - 2\gamma \left\{ \|\Psi_\tau^+ z\|^2_{L^2([0,\infty),Y)} + \left\|\Psi_\tau^+ L^{\frac12} z\right\|^2_{L^2([0,\infty),Y)} \right\}, \\
&\le \|z\|^2 - 2\gamma \underbrace{\left\|\Psi_\tau^+ z\right\|^2_{L^2([0,\infty),Y)}}_{>0}, \\
&< \|z\|^2.
\end{aligned}$$

4. Remarquons que la propriété précédente implique en particulier que $\|L\|_{\mathcal{L}(V)} \le 1$. Plus précisément, on a, puisque L est auto-adjoint

$$\begin{aligned}
\|L\|_{\mathcal{L}(V)} &= \sup_{z\in V,\, \|z\|=1} \langle Lz, z\rangle, \\
&= \sup_{z\in V,\, \|z\|=1} \left\{\|z\|^2 - 2\gamma \|\Psi_\tau^+ z\|^2\right\},
\end{aligned}$$

et donc

$$\|L\|_{\mathcal{L}(V)} = 1 - 2\gamma \inf_{z\in V,\, \|z\|=1} \|\Psi_\tau^+ z\|^2 \tag{4.2.5}$$

D'après l'inégalité (4.2.3) du Lemme 4.2.9, on sait que $\operatorname{Im}\Phi_\tau$ est fermé dans X si et seulement si Ψ_τ est borné inférieurement sur V. En d'autres termes, $\operatorname{Im}\Phi_\tau \neq V$ si et seulement si $\inf_{z\in V,\, \|z\|=1} \|\Psi_\tau z\| = 0$. Or, d'après (4.2.2) (Lemme 4.2.6), on a

$$\inf_{z\in V,\, \|z\|=1} \|\Psi_\tau z\| = 0 \Longleftrightarrow \inf_{z\in V,\, \|z\|=1} \|\Psi_\tau^+ z\| = 0$$

et donc par (4.2.5)

$$\operatorname{Im}\Phi_\tau \neq V \Longleftrightarrow \|L\|_{\mathcal{L}(V)} = 1.$$

Finalement, par contraposée, $\operatorname{Im}\Phi_\tau = V \left(= \overline{\operatorname{Im}\Phi_\tau}\right)$, *i.e.* est fermé dans X, si et seulement si $\|L\|_{\mathcal{L}(V)} < 1$.

■

Nous sommes dorénavant en mesure de démontrer le Théorème 4.2.3.

Démonstration du Théorème 4.2.3. Soient $z_0, z_0^+ \in X$. D'après le Corollaire 4.2.2, on peut décomposer de manière unique $z_0 = \mathcal{P}z_0 + (I-\mathcal{P})\, z_0$ et $z_0^+ = \mathcal{P}z_0^+ + (I-\mathcal{P})\, z_0^+$. Nous allons démontrer dans l'ordre les points 1, 3 et 2 du Théorème.

Avec les notations de la Proposition 4.2.10, la Proposition 4.2.7 nous assure que l'erreur (4.2.1) peut se réécrire pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left(\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+\right)^n \left(z_0^+ - z_0\right) = L^n \mathcal{P}\left(z_0^+ - z_0\right) + \left(\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+\right)^n (I-\mathcal{P})\left(z_0^+ - z_0\right). \tag{4.2.6}$$

C'est le premier terme de cette égalité qui nous intéresse.

1. On travaille d'abord sur le second terme de (4.2.6). D'après (4.2.4)

$$\left\langle \mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+ z, z\right\rangle = \left\|\mathbb{T}_\tau^+ z\right\|^2 = \|z\|^2, \qquad \forall\, z \in \operatorname{Ker}\Psi_\tau,$$

et donc par la Proposition 4.2.7, on a pour tout $z \in \operatorname{Ker}\Psi_\tau$

$$\|\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+ z\|^2 = \left\langle \mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+ \left(\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+\right)^{\frac{1}{2}} z, \left(\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+\right)^{\frac{1}{2}} z\right\rangle = \|\left(\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+\right)^{\frac{1}{2}} z\|^2 = \left\langle \mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+ z, z\right\rangle = \|z\|^2.$$

En itérant,

$$\left\|\left(\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+\right)^n z\right\|^2 = \|z\|^2, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, z \in \operatorname{Ker}\Psi_\tau.$$

Enfin, d'après le Corollaire 4.2.8, on a

$$\left(\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+\right)^n (I-\mathcal{P})\left(z_0^+ - z_0\right) = (I-\mathcal{P})\left(\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+\right)^n \left(z_0^+ - z_0\right) = (I-\mathcal{P})\left(z_n^-(0) - z_0\right),$$

et la première affirmation du Théorème est donc prouvée

$$\|\,(I-\mathcal{P})\left(z_n^-(0) - z_0\right)\|^2 = \|\,(I-\mathcal{P})\left(z_0^+ - z_0\right)\|^2, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

3. Soit $z \in V = \overline{\operatorname{Im}\Phi_\tau}$, d'après la quatrième affirmation de la Proposition 4.2.10, $\overline{\operatorname{Im}\Phi_\tau} = \operatorname{Im}\Phi_\tau$ si et seulement si $\|L\|_{\mathcal{L}(V)} < 1$. Donc si $\operatorname{Im}\Phi_\tau$ est fermé dans X, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|L^n z\| \leq \alpha^n \|z\|, \qquad \forall\, z \in V,$$

avec $\alpha = \|L\|_{\mathcal{L}(V)} < 1$. Inversement, s'il existe une constante $\alpha \in (0,1)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|L^n z\| \leq \alpha^n \|z\|, \qquad \forall\, z \in V,$$

alors $\|L\|_{\mathcal{L}(V)} \leq \alpha < 1$ (en prenant $n = 1$ dans la précédente relation), et la quatrième affirmation de la Proposition 4.2.10 nous dit à nouveau que $\operatorname{Im}\Phi_\tau$ est fermé dans X. La dernière affirmation du Théorème est donc démontrée.

2. On suppose maintenant que $\operatorname{Im}\Phi_\tau$ n'est pas fermé dans X. On sait par la Proposition 4.2.10 que L est auto-adjoint défini positif, et donc L^n l'est aussi pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|L^n\|_{\mathcal{L}(V)} = \|L\|^n_{\mathcal{L}(V)} = 1$. En itérant $n \in \mathbb{N}$ fois (4.2.4), on obtient

$$\langle L^n z, z\rangle = \|z\|^2 - 2\gamma \sum_{k=1}^{n} \left\|\Psi_\tau^+ L^{\frac{k-1}{2}} z\right\|^2_{L^2([0,\infty),Y)}, \qquad \forall\, z \in V,$$

et donc $L^{n+1} < L^n$ puisque

$$\langle L^n z, z\rangle - \left\langle L^{n+1} z, z\right\rangle = 2\gamma \left\|\Psi_\tau^+ L^{\frac{n}{2}} z\right\|^2_{L^2([0,\infty),Y)} > 0, \qquad \forall\, z \in V.$$

En particulier, ceci démontre que la suite $(\|L^n z\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante, pour tout $z \in V$. En effet, $\|L^n z\|^2 = \langle L^{2n} z, z\rangle > \left\langle L^{2(n+1)} z, z\right\rangle = \|L^{n+1} z\|^2$.

Il reste à montrer que pour tout $z \in V$, $(\|L^n z\|)_{n\in\mathbb{N}}$ admet 0 pour limite. Nous avons une suite décroissante d'opérateurs bornés auto-adjoints positifs sur l'espace de Hilbert V. Le Lemme 12.3.2 de [88] nous dit alors que cette suite converge dans $\mathcal{L}(V)$ vers un opérateur auto-adjoint positif $L_\infty \in \mathcal{L}(V)$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} L^n z = L_\infty z, \qquad \forall\, z \in V,$$

et vérifiant $L_\infty \leq L^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On montre que pour tout $z_1, z_2 \in V$

$$\begin{aligned}
\left\langle L_\infty^2 z_1, z_2\right\rangle &= \langle L_\infty z_1, L_\infty z_2\rangle, \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \langle L^n z_1, L^m z_2\rangle, \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \left\langle L^{n+m} z_1, z_2\right\rangle, \\
&= \langle L_\infty z_1, z_2\rangle.
\end{aligned}$$

Donc $L_\infty^2 = L_\infty$. De plus, on a pour tout $z \in V \setminus \{0\}$

$$\|L_\infty z\|^2 = \left\langle L_\infty^2 z, z\right\rangle = \langle L_\infty z, z\rangle \leq \left\langle L^2 z, z\right\rangle = \|Lz\|^2 < \|z\|^2.$$

Supposons que $\operatorname{Im} L_\infty \neq \{0\}$, alors il existe un $z \in V$ tel que $L_\infty z \neq 0$ et par ce qui précède

$$\|L_\infty z\| = \|L_\infty^2 z\| < \|L_\infty z\|,$$

ce qui est absurde, donc $\operatorname{Im} L_\infty = \{0\}$, ou autrement dit $L_\infty \equiv 0$. Ceci démontre que

$$\lim_{n\to\infty} L^n \mathcal{P} z = 0, \qquad \forall\, z \in X.$$

Le Corollaire 4.2.8 permet de conclure, en réécrivant

$$L^n \mathcal{P} z = \mathcal{P} L^n z = \mathcal{P}\left(z_n^-(0) - z_0\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \forall\, z \in X.$$

■

Démonstration du Corollaire 4.2.5.
On utilise la formule de Duhamel (0.1.6) pour écrire $z_1^-(0)$. On a pour tout $z_0, z_0^+ \in X$

$$z_1^+(\tau) = \mathbb{T}_\tau^+ z_0^+ + \gamma \int_0^\tau \mathbb{T}_{\tau-s}^+ C^* C \mathbb{S}_s z_0 ds,$$

et

$$z_1^-(0) = \mathbb{T}_\tau^- z_1^+(\tau) + \gamma \int_0^\tau \mathbb{T}_{\tau-s}^- C^* C \mathbb{S}_{\tau-s} z_0 ds.$$

En substituant la première égalité dans la seconde, on obtient

$$z_1^-(0) = \mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+ z_0^+ + \gamma \int_0^\tau \mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_{\tau-s}^+ C^* C \mathbb{S}_s z_0 ds + \gamma \int_0^\tau \mathbb{T}_{\tau-s}^- C^* C \mathbb{S}_{\tau-s} z_0 ds.$$

Pour tout $z_0^+, \theta \in X$, on a

$$\left\langle z_1^-(0), \theta \right\rangle = \left\langle \mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_\tau^+ z_0^+, \theta \right\rangle + \gamma \int_0^\tau \left\langle C\mathbb{S}_s z_0, C\left(\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_{\tau-s}^+\right)^* \theta \right\rangle + \gamma \int_0^\tau \left\langle C\mathbb{S}_{\tau-s} z_0, C\left(\mathbb{T}_{\tau-s}^-\right)^* \theta \right\rangle ds.$$

On suppose maintenant que $z_0^+ \in \overline{\operatorname{Im}\Phi_\tau}$ et $\theta \in \operatorname{Ker}\Psi_\tau$. On sait, d'après la Proposition 4.2.7, que le premier terme du membre de droite est nul. Rappelons maintenant que $(\mathbb{T}_\tau^-)^* = \mathbb{T}_\tau^+$, on a donc $C\left(\mathbb{T}_{\tau-s}^-\right)^* \theta = C\mathbb{T}_{\tau-s}^+ \theta$. Une conséquence du Lemme 4.2.6 est que $\operatorname{Ker}\Psi_\tau^+ = \operatorname{Ker}\Psi_\tau$, et donc que $C\mathbb{T}_{\tau-s}^+\theta = \mathcal{R}_\tau C \mathbb{T}_s^+ \theta = 0$. Enfin, $C\left(\mathbb{T}_\tau^- \mathbb{T}_{\tau-s}^+\right)^* \theta = \mathcal{R}_\tau C \mathbb{T}_s^- \mathbb{T}_\tau^+ \theta$, et ce terme sera donc nul si et seulement si $\mathbb{T}_\tau^+\theta \in \operatorname{Ker}\Psi_\tau^-$. Or on a vu que $\operatorname{Ker}\Psi_\tau^- = \operatorname{Ker}\Psi_{-\tau}$ dans la démonstration de la Proposition 4.2.7, donc $\mathbb{T}_\tau^+\theta \in \operatorname{Ker}\Psi_\tau^-$ est équivalent à $\mathbb{T}_\tau^+\theta \in \operatorname{Ker}\Psi_{-\tau}$, *i.e.* $C\mathbb{S}_{-s}\mathbb{T}_\tau^+\theta = 0$. La formule de Duhamel (0.1.6) nous donne alors

$$C\mathbb{S}_{-s}\mathbb{T}_\tau^+\theta = \underbrace{C\mathbb{S}_{\tau-s}\theta}_{=\mathcal{R}_\tau C\mathbb{S}_s\theta=0} - \gamma \int_0^\tau C\mathbb{S}_{\tau-s-\sigma} C^* \underbrace{C\mathbb{T}_s^+\theta}_{=0} ds,$$

où l'on a utilisé encore une fois $\operatorname{Ker}\Psi_\tau^+ = \operatorname{Ker}\Psi_\tau$ pour la seconde égalité. On a donc

$$\left\langle z_1^-(0), \theta \right\rangle = 0, \qquad \forall\, z_0^+ \in \overline{\operatorname{Im}\Phi_\tau}, \theta \in \operatorname{Ker}\Psi_\tau,$$

autrement dit, pour tout $z_0^+ \in \overline{\operatorname{Im}\Phi_\tau}$, $z_1^-(0) \in \overline{\operatorname{Im}\Phi_\tau}$ par la décomposition orthogonale du Corollaire 4.2.2. On peut alors itérer les cycles *pseudo*-observateurs direct et rétrograde et obtenir que

$$z_0^+ \in \overline{\operatorname{Im}\Phi_\tau} \quad \Longrightarrow \quad \left(z_n^-(0) \in \overline{\operatorname{Im}\Phi_\tau}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\right).$$

On applique pour finir le Théorème 4.2.3 avec $z_0^+ \in \overline{\operatorname{Im}\Phi_\tau}$ et ce qui précède pour obtenir

$$\left\|z_n^-(0) - \mathcal{P}z_0\right\| = \left\|\mathcal{P}\left(z_n^-(0) - z_0\right)\right\| \longrightarrow 0, \quad n \to \infty,$$

avec décroissance exponentielle si et seulement si $\operatorname{Im}\Phi_\tau$ est fermé dans X. ■

4.3 Les ondes en domaine non-borné

On s'intéresse dans cette partie à la reconstruction de certaine données initiales de l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 3$, à support localisé dans un ouvert borné Ω. Plus précisément, soient $w_0 \in H_0^1(\Omega)$ et $w_1 \in L^2(\Omega)$, on considère le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} w(x,t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2} w(x,t), & \forall\, x \in \mathbb{R}^d, t \geq 0, \\ w(x,0) = w_0(x), & \forall\, x \in \Omega, \\ w(x,0) = 0, & \forall\, x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial t} w(x,0) = w_1(x), & \forall\, x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial t} w(x,0) = 0, & \forall\, x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega. \end{cases} \tag{4.3.1}$$

On suppose que l'on observe la vitesse de déplacement de l'onde $\dfrac{\partial}{\partial t} w(x,t)$ sur $\mathcal{O} \times [0, \tau]$, vérifiant **(O)**

1. $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \setminus \overline{\mathcal{O}_0}$, où $\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_1$ sont deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ avec
   - $\mathcal{O}_0 \subset \mathcal{O}_1$,
   - $\partial\Omega \subset \mathcal{O}$,
2. $\tau \geq \operatorname{diam}(\Omega)$,

où $\operatorname{diam}(\Omega)$ est la plus grande corde de Ω. On peut par exemple imaginer le cas de la FIGURE 4.21.

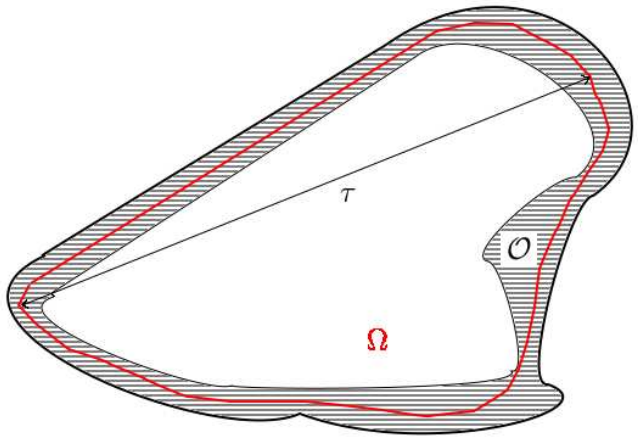


FIGURE 4.21 – Coupe dans le plan contenant la plus grande corde de Ω d'un exemple de configuration en trois dimensions vérifiant **(O)**.

On cherche alors à reconstruire (w_0, w_1) à partir de la connaissance de $y(x,t) = \dfrac{\partial}{\partial t} w(x,t)$ sur $\mathcal{O} \times [0, \tau]$. Ce type de problème en domaine non-borné avec données initiales à support localisé apparaît par exemple en tomographie thermo-acoustique. Dans cette méthode de reconstruction pour l'imagerie médicale, le support de w_0 correspond aux corps du patient, et $w_1 \equiv 0$ (voir par exemple le survey de Kuchment et Kunyansky [55]). Notre objectif principal est de proposer l'algorithme itératif sans observabilité exacte de la Section 4.2 comme alternative à la reconstruction de w_0. On supposera donc dorénavant que $w_1 = 0$.

Rappelons les formules explicites donnant la solution du système (4.3.1) dans le cas où les données initiales sont suffisamment régulières (on supposera dans la suite que les fonctions sont $C^\infty(\mathbb{R}^d)$). Pour $d = 1$, nous avons la formule bien connue de d'Alembert

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left(w_0(x+t) + w_0(x-t)\right), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, t \geq 0. \tag{4.3.2}$$

Pour $d = 3$, nous avons la formule de Poisson-Kirchhoff, dont on pourra retrouver une démonstration dans Evans [36, p. 72 équation (21)]

$$w(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(tRw_0(x)\right), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0, \tag{4.3.3}$$

où $Rf(x,t) = \displaystyle\int_{|v|=1} f(x+tv)d\sigma(v)$ est l'opérateur de moyenne sphérique. En particulier, ces formules permettent très facilement d'obtenir que le support de la solution est, à tout temps $t \geq 0$, compris dans le dilaté $\Omega_t = \{y \in \mathbb{R}^d \mid |x-y| \leq t, x \in \Omega\}$ de Ω (principe de Huygens [36, p. 80]). On peut donc, puisque l'on ne s'intéresse finalement à l'équation (4.3.1) que jusqu'à l'instant τ, ajouter une condition artificielle (par exemple de Dirichlet homogène) au bord de

$$\Omega_{\tau^+} = \{y \in \mathbb{R}^d \mid |x-y| \leq \tau + \varepsilon, x \in \Omega, \varepsilon > 0\},$$

et ainsi réécrire (4.3.1) sur $\Omega_{\tau^+} \times [0,\tau]$ avec condition de Dirichlet homogène

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} w(x,t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2} w(x,t), & \forall\, x \in \Omega_{\tau^+}, t \in [0,\tau], \\ w(x,t) = 0, & \forall\, x \in \partial\Omega_{\tau^+}, t \in [0,\tau], \\ w(x,0) = w_0(x), & \forall\, x \in \Omega, \\ w(x,0) = 0, & \forall\, x \in \Omega_{\tau^+} \setminus \Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial t} w(x,0) = 0, & \forall\, x \in \Omega_{\tau^+}. \end{cases} \tag{4.3.4}$$

Enfin, les formules (4.3.2) et (4.3.3) sur $[0,\tau]$ sont encore valables pour obtenir explicitement les solutions de (4.3.4) (par unicité). Nous ferons donc souvent dans la suite un abus de notation : nous noterons w la solution du problème non-borné (4.3.1) ainsi que celle du problème (4.3.4) (puisqu'elles sont confondues sur $[0,\tau]$).
En posant les définitions

$$A_0 = -\Delta = -\sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \;:\; \mathcal{D}(A_0) = H^2(\Omega_{\tau^+}) \cap H_0^1(\Omega_{\tau^+}) \to H = L^2(\Omega_{\tau^+}),$$

et

$$C_0 = \chi_{|\mathcal{O}} \cdot : H \to Y = H,$$

où $\chi_{|\mathcal{O}}$ est la fonction caractéristique de $\mathcal{O}$, on peut réécrire l'équation (4.3.4) sous la forme (en omettant pour un moment les hypothèses émises sur les données initiales)

$$\begin{cases} \ddot{w}(t) + A_0 w(t) = 0, & \forall\, t \in [0,\tau], \\ w(0) = w_0 \in \mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right), \\ \dot{w}(0) = w_1 \in H. \end{cases}$$

Cependant, notre méthode étant écrite pour des systèmes du premier ordre, on pose également

$$z(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix}, \qquad X = \mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right) \times H,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A_0) \times \mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$C \in \mathcal{L}(X,Y), \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & C_0 \end{bmatrix},$$

pour obtenir

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t), & \forall\, t \in [0,\tau], \\ z(0) = z_0 \in X, \end{cases}$$

et

$$y(t) = Cz(t), \qquad \forall\, t \in [0, \tau].$$

Il est clair que dans ce cas, A est anti-adjoint, C borné, mais (A, C) n'est pas (toujours) exactement observable en temps τ (et n'a aucune raison de l'être même en temps supérieur). En effet, il existe des configurations où la condition d'optique géométrique de Bardos, Lebeau et Rauch [8] ne sera pas vérifiée, comme sur la FIGURE 4.22.

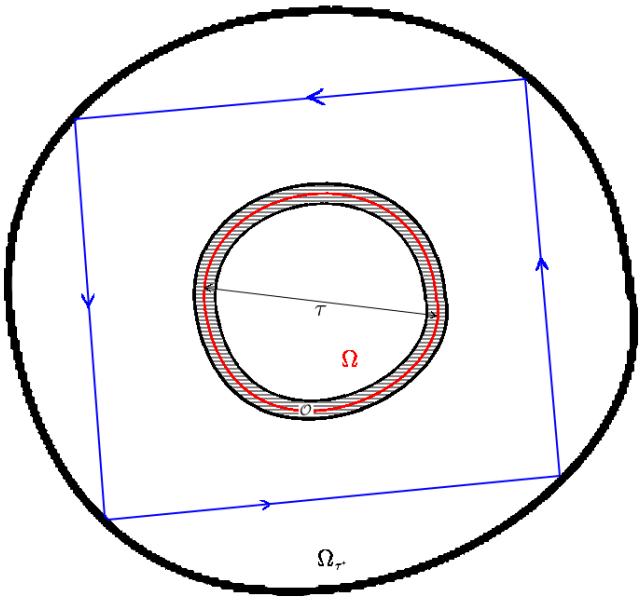


FIGURE 4.22 – Coupe dans le plan contenant la plus grande corde de Ω d'un exemple de configuration en trois dimensions d'espace, vérifiant **(O)**, avec frontière artificielle, sans observabilité exacte. Le rayon bleu est piégé, il ne rencontrera jamais $\mathcal{O}$.

On reprend les notations et notions de la Section 4.2, en particulier les opérateurs Φ_τ et Ψ_τ définis respectivement par (0.1.8) et (0.1.9). Le Théorème 4.2.3 (ou plus précisément le Corollaire 4.2.5 lorsque la première estimation est la donnée identiquement nulle) nous dit que l'algorithme itératif

$$\begin{cases} \dot{z}_n^+(t) = (A - \gamma C^* C) z_n(t) + \gamma C^* y(t), & \forall\, t \in [0, \tau], \\ z_1^+(0) = 0 \in X, \\ z_n^+(0) = z_n^-(0), \qquad \forall\, n \geq 2, \end{cases} \tag{4.3.5}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_n^-(t) = (A + \gamma C^* C) z_n(t) - \gamma C^* y(t), & \forall\, t \in [0, \tau], \\ z_n^-(\tau) = z_n^+(\tau), \qquad \forall\, n \geq 1. \end{cases} \tag{4.3.6}$$

reconstruira toutes les données $z_0 \in \overline{\operatorname{Im}\Phi_\tau}$, au sens où

$$\left\| z_n^-(0) - z_0 \right\| \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

Reprenons maintenant l'information sur le support des données initiales, que nous avions omis quelques instants. Nous allons montrer que la classe de données considérées se trouvent dans $\overline{\operatorname{Im}\Phi_\tau}$. Commençons par un résultat préliminaire.

Lemme 4.3.1. *Supposons que $w_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ soit à support dans un ouvert borné $\Omega \in \mathbb{R}^d$, $d = 1, 3$, que $w_1 \equiv 0$ et que $\mathcal{O} \times [0, \tau]$ vérifie **(O)**. Alors une mesure nulle sur $\mathcal{O} \times [0, \tau]$ implique que la solution w de (4.3.1) vérifie*

$$w(x,t) = 0, \qquad \forall\, x \in \partial\Omega, t \geq 0.$$

Démonstration. On a supposé que

$$y(x,t) = \chi_{|\mathcal{O}}(x) \frac{\partial}{\partial t} w(x,t) = 0, \qquad \forall\, x \in \Omega_{\tau^+}, t \in [0, \tau],$$

d'où

$$0 = \int_0^t y(x,s)ds = w(x,t) - w_0(x), \qquad \forall\, x \in \mathcal{O}, t \in [0, \tau].$$

Mais le support de w_0 étant dans Ω, on obtient sur sa frontière

$$w(x,t) = 0, \qquad \forall\, x \in \partial\Omega, t \in [0, \tau].$$

Enfin, des équations (4.3.2) et (4.3.3), on montre facilement que

$$w(x,t) = 0, \qquad \forall\, x \in \partial\Omega, t \geq \tau.$$

■

4.3.1 En dimension un

Théorème 4.3.2. *Supposons que $w_0 \in H_0^1(\Omega_{\tau^+})$ soit à support dans un ouvert borné $\Omega \in \mathbb{R}$, et que $\mathcal{O} \times [0, \tau]$ vérifie **(O)**. Alors $(w_0, 0) \in \overline{\operatorname{Im}\Phi_\tau}$ et*

$$\left\| w_n^-(0) - w_0 \right\|_{H_0^1(\Omega_{\tau^+})} + \left\| \frac{\partial}{\partial t} w_n^-(0) \right\|_{L^2(\Omega_{\tau^+})} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty,$$

où les $\begin{bmatrix} w_n^-(0) \\ \frac{\partial}{\partial t} w_n^-(0) \end{bmatrix} = z_n^-(0)$ *sont définis par* (4.3.5)–(4.3.6).

Démonstration. Si l'on montre que $(w_0, 0) \in \overline{\operatorname{Im} \Phi_\tau}$, le Corollaire 4.2.5 permet de conclure puisque la première itération $z_1^+(0) = 0 \in \overline{\operatorname{Im} \Phi_\tau}$.

Supposons que $w_0 \in C_0^\infty(\Omega_{\tau^+})$, à support dans Ω (que l'on suppose connexe sans perte de généralité), conduise à une mesure nulle, *i.e.* que $(w_0, 0) \in (C_0^\infty(\Omega_{\tau^+}) \times \{0\}) \cap \operatorname{Ker} \Psi_\tau$. Alors la solution au problème non-borné (4.3.1) correspondant vérifie (par le Lemme 4.3.1)

$$w(x,t) = 0, \qquad \forall\, x \in \partial\Omega, t \geq 0.$$

Autrement dit, d'après (4.3.2), on a

$$\frac{1}{2}\left(w_0(x+t) + w_0(x-t)\right) = 0, \qquad \forall\, x \in \partial\Omega, t \geq 0.$$

Comme nous sommes en dimension un, et que l'on a supposé Ω connexe, $\partial\Omega = \{x_0, x_1\}$, avec $x_0 < x_1$, et l'hypothèse sur le support nous dit que w_0 est nulle à gauche de x_0 ainsi qu'à droite de x_1. L'égalité précédente implique donc que w_0 est identiquement nulle (puisqu'impaire en x_0 et x_1).
La décomposition orthogonale $X = \operatorname{Ker} \Psi_\tau \oplus \overline{\operatorname{Im} \Phi_\tau}$ du Corollaire 4.2.2 nous affirme alors que toute donnée initiale $(w_0, 0)$, avec $w_0 \in C_0^\infty(\Omega_{\tau^+})$ à support dans Ω est dans $\overline{\operatorname{Im} \Phi_\tau}$. Et l'on termine par densité de $C_0^\infty(\Omega_{\tau^+})$ dans $H_0^1(\Omega_{\tau^+})$. ■

Nous testons numériquement ce résultat en reprenant le code développé sous Matlab dans le Chapitre 2. On considère une corde de longueur infinie, dont le support de la position initiale est dans l'intervalle $[1, 2]$ et la vitesse initiale est nulle. On observe la vitesse de déplacement de la corde sur $[1, 1 + \frac{1}{10}] \cup [2 - \frac{1}{10}, 2]$. Le temps d'observation τ est pris égal à 1, ce qui correspond à la longueur de l'intervalle contenant les support des données initiales. Ainsi, en prenant $\Omega_{\tau^+} = [0, 3]$, on garantit les hypothèses **(O)** du Théorème 4.3.2.

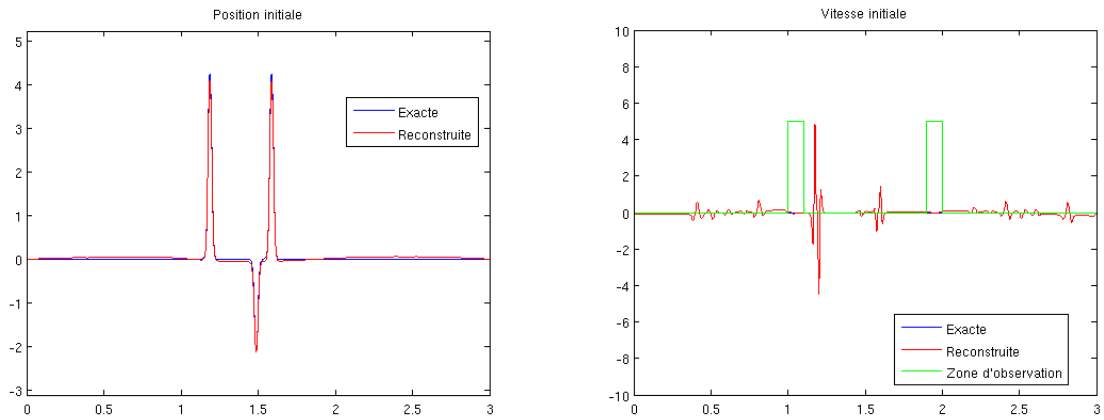


FIGURE 4.23 – Position et vitesse initiale reconstruites, en domaine non borné, à la convergence, avec $\tau = 1$, $\gamma = 15$, sans bruit.

On peut apprécier sur la FIGURE 4.23 le peu de différences entre données exactes et

données reconstruites.

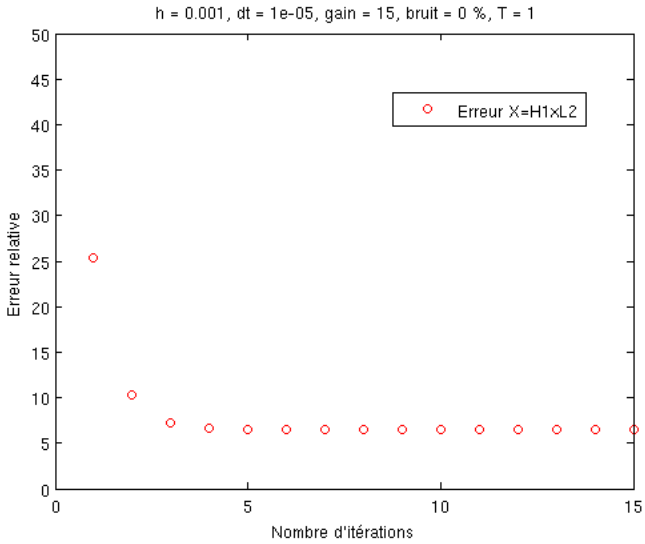


FIGURE 4.24 – Erreur de reconstruction de donnée initiale régulière en domaine non borné 1D, dans l'espace d'énergie, avec $\tau = 1$, $\gamma = 15$, sans bruit.

Bien que l'on n'ait pas obtenu théoriquement de vitesse de convergence de l'algorithme, il semble que l'on conserve une décroissance exponentielle de l'erreur de reconstruction, dans ce cas, comme on le voit sur la FIGURE 4.24.

4.3.2 En dimension trois

Théorème 4.3.3. *Supposons que $w_0 \in H_0^1(\Omega_{\tau+})$ soit à support dans un ouvert borné $\Omega \in \mathbb{R}^3$, et que $\mathcal{O} \times [0,\tau]$ vérifie **(O)**. Alors $(w_0, 0) \in \overline{\operatorname{Im} \Phi_\tau}$ et*

$$\left\| w_n^-(0) - w_0 \right\|_{H_0^1(\Omega_{\tau+})} + \left\| \frac{\partial}{\partial t} w_n^-(0) \right\|_{L^2(\Omega_{\tau+})} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty,$$

où les $\begin{bmatrix} w_n^-(0) \\ \frac{\partial}{\partial t} w_n^-(0) \end{bmatrix} = z_n^-(0)$ *sont définis par* (4.3.5)–(4.3.6).

Démonstration. La démonstration est sensiblement la même que pour le Théorème 4.3.2. La seule différence réside dans l'implication

$$w(x,t) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega, t \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad w_0 \equiv 0. \tag{4.3.7}$$

D'après la formule de Poisson-Kirchhoff (4.3.3), on montre facilement que

$$w(x,t) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega, t \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad Rw_0(x)(t) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega, t \geq 0.$$

On applique alors le Corollaire 2 de [55] pour démontrer (4.3.7). ■

Nous testons ce Théorème en reprenant le code Gmsh/GetDP utilisé au Chapitre 2. On considère l'équation des ondes en domaine non-borné, dont le support de la position initiale est dans la boule centrée en 0, de rayon $\frac{1}{2}$, notée $\mathcal{B}_0(\frac{1}{2})$, et la vitesse initiale est nulle. On observe la vitesse de déplacement de l'onde sur la couronne $\mathcal{O} = \mathcal{B}_0(\frac{1}{2}) \setminus \mathcal{B}_0(\frac{2}{5})$. Le temps d'observation τ est pris égal à 1, ce qui est supérieur à la plus grande corde de toutes les surfaces fermées contenues dans l'ouvert d'observation $\mathcal{O}$. Ainsi, en prenant $\Omega_{\tau^+} = B_0(\frac{3}{2})$, on garantit les hypothèses **(O)** du Théorème 4.3.3.

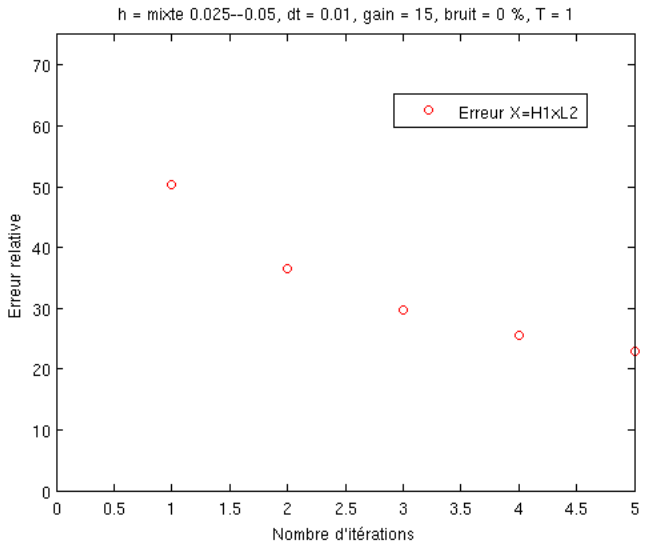


FIGURE 4.25 – Erreur de reconstruction de donnée initiale régulière en domaine non borné 3D, dans l'espace d'énergie, avec $\tau = 1$, $\gamma = 15$, sans bruit.

La FIGURE 4.25 illustre bien la décroissance de l'erreur dans l'espace d'énergie, et bien que nous n'ayons pas réussi à démontrer d'ordre de convergence pour l'algorithme dans ce cas, il semblerait que la décroissance exponentielle soit conservée pour les données initiales considérées. Le peu d'itérations effectuées (ces résultats ont pris plus de cinquante heures sur les serveurs de calcul du laboratoire) peut cependant être trompeur pour s'autoriser à conjecturer un tel résultat.

On peut juger sur la FIGURE 4.26 de la qualité de la reconstruction obtenue, malgré les 20% d'erreur relative, après 5 itérations.

Nous n'affichons pas la reconstruction de la vitesse initiale, dont nous savons *a priori* qu'elle est nulle. Le même phénomène que dans le cas exactement observable FIGURE 2.26, dû à la faible discrétisation temporelle, apparaît, et les images obtenues ne sont donc pas très parlantes.

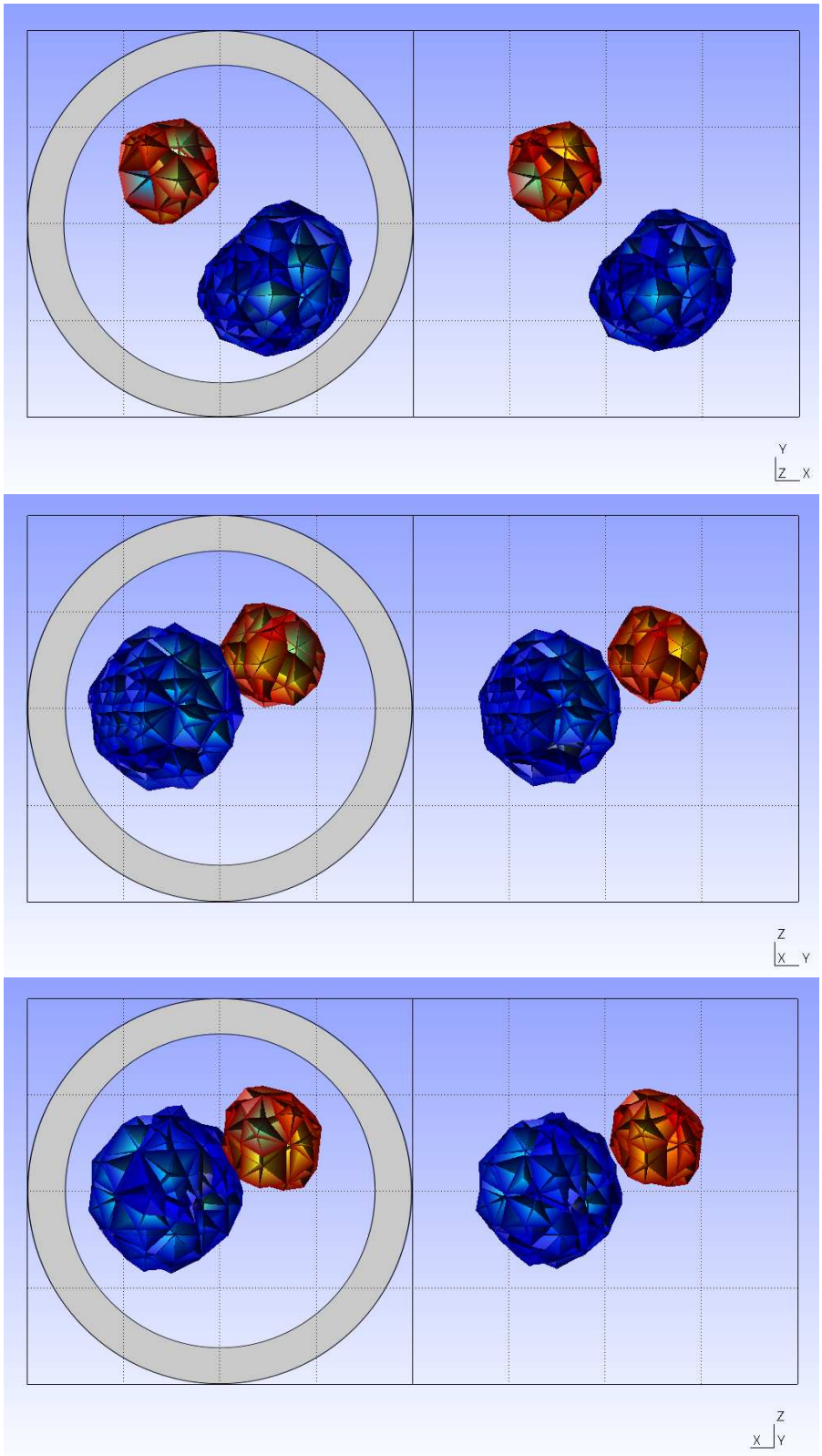


FIGURE 4.26 – Projections dans les plans XY, YZ et XZ de la position initiale (à gauche) et de la reconstruction (à droite) obtenue après 5 itérations. Nous n'avons affiché que les données de valeur absolue supérieure à 1, et une couronne fictive pour situer la zone d'observation utilisée. L'échelle des couleurs est identique pour la donnée exacte et la donnée reconstruite.

Conclusion et perspectives

Conclusion

En conclusion,

- Nous avons réussi à montrer, dans les Chapitres 1 et 2, que l'utilisation de l'algorithme de reconstruction de données initiales est pertinente, dans le sens où l'approximation numérique de cette méthode converge. Plus précisément, nous avons obtenu les Corollaires 1.2.2, 1.3.2, 2.2.2 et 2.3.2.
- Dans le Chapitre 3, nous avons montré que les équations de Maxwell, avec observation interne (Théorème 3.2.2) ou frontière (Théorème 3.2.5), vérifient encore les hypothèses d'application de l'algorithme. Nous avons ensuite appliqué ces résultats pour l'identification de certains termes source, dans les Théorèmes 3.3.1 et 3.3.2.
- Dans le Chapitre 4, nous nous sommes intéressés à la construction d'observateurs dans le cas de systèmes perturbés. Nous avons réussi à montrer que de petites perturbations linéaires bornées n'entravaient pas le bon fonctionnement de l'algorithme de reconstruction dans le Théorème 4.1.5. Lorsque la perturbation est seulement localement lipschitzienne, nous ne sommes pas parvenus à construire d'observateur rétrograde, et *a fortiori*, à appliquer l'algorithme de reconstruction. Nous avons cependant construit un observateur direct (Théorème 4.1.8), qui nécessite malgré tout de petites données initiales. Nous nous sommes ensuite intéressés à l'utilisation des observateurs dans le cas où le problème inverse que constitue la reconstruction de la donnée initiale n'est pas bien posé. Nous avons prouvé que la méthode des observateurs a toujours un sens et permet de reconstruire une certaine classe de données initiales "observables" (voir le Théorème 4.2.3 et le Corollaire 4.2.5). Nous avons finalement utilisé ces résultats pour la reconstruction de données initiales dans le cas de la tomographie thermo-acoustique. Nous avons en particulier démontré les Théorèmes 4.3.2 et 4.3.3.

Perspectives

Pour aller plus loin, les quelques pistes suivantes sont à prendre en compte

- Nous souhaiterions effectuer l'analyse numérique de l'algorithme appliqué aux équations de Schrödinger et des ondes, mais avec observation frontière.
- L'analyse numérique des algorithmes obtenus pour les équations de Maxwell reste à faire, ainsi que des tests numériques plus poussés.
- La robustesse aux perturbations linéaires bornées nous intéresse particulièrement, bien que cela semble être un problème très difficile.
- Enfin, il serait intéressant de généraliser l'utilisation de l'algorithme sans observabilité exacte en considérant des opérateurs d'observation non-bornés, ce qui conduirait au cas physiquement plus réaliste de l'observation sur une surface, et non sur un sous-domaine de mesure non-nulle, dans le cadre de la tomographie thermo-acoustique (en trois dimensions).

Bibliographie

[1] C. Aboky, G. Sallet, and J.-C. Vivalda, *Observers for Lipschitz non-linear systems*, Internat. J. Control, 75 (2002), pp. 204–212.

[2] C. Alves, A. L. Silvestre, T. Takahashi, and M. Tucsnak, *Solving inverse source problems using observability. applications to the euler-bernoulli plate equation*, SIAM J. Control Optim., 48 (2009), pp. 1632–1659.

[3] W. Arendt, *Vector-valued laplace transforms and cauchy problems*, Israel J. Math., 59 (1987), pp. 327–352.

[4] D. Auroux and J. Blum, *Back and forth nudging algorithm for data assimilation problems*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 340 (2005), pp. 873–878.

[5] ——, *A nudging-based data assimilation method : the back and forth nudging (bfn) algorithm*, Nonlinear Processes in Geophysics, 15 (2008), pp. 305–319.

[6] D. Auroux, J. Blum, and M. Nodet, *Diffusive back and forth nudging algorithm for data assimilation*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 349 (2011), pp. 849–854.

[7] G. A. Baker, *Error estimates for finite element methods for second order hyperbolic equations*, SIAM J. Numer. Anal., 13 (1976), pp. 564–576.

[8] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch, *Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary*, SIAM J. Control Optim., 30 (1992), pp. 1024–1065.

[9] M. Baroun and B. Jacob, *Admissibility and observability of observation operators for semilinear problems*, Integral Equations Operator Theory, 64 (2009), pp. 1–20.

[10] H. Barucq, *Étude asymptotique du système de Maxwell avec conditions aux limites absorbantes*, PhD thesis, Université de Bordeaux I, 1993.

[11] H. Barucq and B. Hanouzet, *Étude asymptotique du système de Maxwell avec la condition aux limites absorbante de Silver-Müller. II*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 316 (1993), pp. 1019–1024.

[12] J. Blum, F.-X. Le Dimet, and I. M. Navon, *Data assimilation for geophysical fluids*, in Handbook of numerical analysis. Vol. XIV. Special volume : computational methods for the atmosphere and the oceans, vol. 14 of Handb. Numer. Anal., Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2009, pp. 385–441.

[13] S. Bonnabel, P. Martin, and P. Rouchon, *Non-linear symmetry-preserving observers on Lie groups*, IEEE Trans. Automat. Control, 54 (2009), pp. 1709–1713.

[14] S. Bonnabel, M. Mirrahimi, and P. Rouchon, *Observer-based Hamiltonian identification for quantum systems*, Automatica J. IFAC, 45 (2009), pp. 1144–1155.

[15] S. Bonnabel and P. Rouchon, *On invariant observers*, in Control and observer design for nonlinear finite and infinite dimensional systems, vol. 322 of Lecture Notes in Control and Inform. Sci., Springer, Berlin, 2005, pp. 53–65.

[16] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree], Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].

[17] N. Carmichael, A. J. Pritchard, and M. D. Quinn, *State and parameter estimation for nonlinear systems*, Appl. Math. Optim., 9 (1982/83), pp. 133–161.

[18] T. Cazenave and A. Haraux, *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires*, vol. 1 of Mathématiques & Applications (Paris) [Mathematics and Applications], Ellipses, Paris, 1990.

[19] M. Cessenat, *Mathematical methods in electromagnetism*, vol. 41 of Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1996. Linear theory and applications.

[20] G. Ciccarella, M. Dalla Mora, and A. Germani, *A luenberger-like observer for nonlinear systems*, Internat. J. Control, 57 (1993), pp. 537–556.

[21] N. Cîndea, S. Micu, and M. Tucsnak, *An approximation method for exact controls of vibrating systems*, SIAM J. Control Optim., (2011). to appear.

[22] D. Colton and R. Kress, *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, vol. 93 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, Berlin, second ed., 1998.

[23] J.-F. Couchouron and P. Ligarius, *Nonlinear observers in reflexive banach spaces*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 9 (2003), pp. 67–104 (electronic).

[24] S. Cox and E. Zuazua, *The rate at which energy decays in a damped string*, Comm. Partial Differential Equations, 19 (1994), pp. 213–243.

[25] N. Cîndea, *Problèmes inverses et contrôlabilité avec applications en élasticité et IRM*, PhD thesis, Université Henri Poincaré - Nancy I, 2010.

[26] N. Cîndea and M. Tucsnak, *Fast and strongly localized observation for a perturbed plate equation*, in Optimal control of coupled systems of partial differential equations, vol. 158 of Internat. Ser. Numer. Math., Birkhäuser Verlag, Basel, 2009, pp. 73–83.

[27] ——, *Internal exact observability of a perturbed euler-bernoulli equation*, Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl., 2 (2010), pp. 205–221.

[28] M. Dalla Mora, A. Germani, and C. Manes, *A state observer for nonlinear dynamical systems*, in Proceedings of the Second World Congress of Nonlinear Analysts, Part 7 (Athens, 1996), vol. 30, 1997, pp. 4485–4496.

[29] R. Dautray and J.-L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Tome 3*, Collection du Commissariat à l'Énergie Atomique : Série Scientifique. [Collection of the Atomic Energy Commission : Science Series], Masson, Paris, 1985.

[30] S. Dolecki and D. L. Russell, *A general theory of observation and control*, SIAM J. Control Optimization, 15 (1977), pp. 185–220.

[31] G. E. Dullerud and F. Paganini, *A Course in Robust Control Theory*, vol. 36 of Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New-York, 2000.

[32] M. Eller, J. E. Lagnese, and S. Nicaise, *Stabilization of heterogeneous maxwell's equations by linear or nonlinear boundary feedback*, Electron. J. Differential Equations, (2002), pp. No. 21, 26 pp. (electronic).

[33] M. M. Eller and J. E. Masters, *Exact boundary controllability of electromagnetic fields in a general region*, Appl. Math. Optim., 45 (2002), pp. 99–123.

[34] S. Ervedoza, C. Zheng, and E. Zuazua, *On the observability of time-discrete conservative linear systems*, J. Funct. Anal., 254 (2008), pp. 3037–3078.

[35] S. Ervedoza and E. Zuazua, *Uniformly exponentially stable approximations for a class of damped systems*, J. Math. Pures Appl. (9), 91 (2009), pp. 20–48.

[36] L. C. Evans, *Partial differential equations*, vol. 19 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[37] M. Fink, *Time reversal of ultrasonic fields–basic principles*, IEEE Trans. Ultrasonics Ferro-electric and Frequency Control, 39 (1992), pp. 555–556.

[38] M. Fink, D. Cassereau, A. Derode, C. Prada, O. Roux, M. Tanter, J.-L. Thomas, and F. Wu, *Time-reversed acoustics*, Rep. Prog. Phys., 63 (2000), pp. 1933–1995.

[39] I. Y. Gejadze, F.-X. Le Dimet, and V. Shutyaev, *On optimal solution error covariances in variational data assimilation problems*, J. Comput. Phys., 229 (2010), pp. 2159–2178.

[40] T. Geveci and B. Kok, *The convergence of Galerkin approximation schemes for second-order hyperbolic equations with dissipation*, Math. Comp., 44 (1985), pp. 379–390, S17–S25.

[41] B.-Z. Guo and Z.-l. Zhao, *On the convergence of an extended state observer for nonlinear systems with uncertainty*, Systems Control Lett., 60 (2011), pp. 420–430.

[42] G. Haine and K. Ramdani, *Observateurs itératifs en horizon fini. application à la reconstruction de données initiales pour des edp d'évolution*, Journal Européen des Systèmes Automatisés (JESA), 45 (2011), pp. 715–724.

[43] ——, *Reconstructing initial data using observers : error analysis of the semi-discrete and fully discrete approximations*, Numerische Mathematik, 120 (2012), pp. 307–343.

[44] T. Hamatsuka and H. Akashi, *Stabilizability and observer design of a class of infinite-dimensional linear systems*, in Analysis and optimization of systems (Versailles, 1982), vol. 44 of Lecture Notes in Control and Inform. Sci., Springer, Berlin, 1982, pp. 809–830.

[45] T. Hamatsuka, A.-A. Mo'omen, and H. Akashi, *Observer design for linear contractive control systems on hilbert spaces*, SIAM J. Control Optim., 19 (1981), pp. 586–594.

[46] P. Hébrard and A. Henrot, *Optimal shape and position of the actuators for the stabilization of a string*, Systems Control Lett., 48 (2003), pp. 199–209. Optimization and control of distributed systems.

[47] V. I. Istrăţescu, *Fixed point theory*, vol. 7 of Mathematics and its Applications, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1981. An introduction, With a preface by Michiel Hazewinkel.

[48] K. Ito, K. Ramdani, and M. Tucsnak, *A time reversal based algorithm for solving initial data inverse problems*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, 4 (2011), pp. 641–652.

[49] C. Johnson and V. Thomée, *Error estimates for some mixed finite element methods for parabolic type problems*, RAIRO Anal. Numér., 15 (1981), pp. 41–78.

[50] P. Joly and J. Rodríguez, *Optimized higher order time discretization of second order hyperbolic problems : construction and numerical study*, J. Comput. Appl. Math., 234 (2010), pp. 1953–1961.

[51] R. Kalman and R. Bucy, *New results in linear filtering and prediction*, Journal of Basic Engineering (ASME), 83D (1961), pp. 98–108.

[52] V. Komornik, *On the exact internal controllability of a petrowsky system*, J. Math. Pures Appl. (9), 71 (1992), pp. 331–342.

[53] ——, *Stabilisation frontière des équations de Maxwell*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 318 (1994), pp. 535–540.

[54] M. Krstic, B.-Z. Guo, and A. Smyshlyaev, *Boundary controllers and observers for the linearized Schrödinger equation*, SIAM J. Control Optim., 49 (2011), pp. 1479–1497.

[55] P. Kuchment and L. Kunyansky, *Mathematics of thermoacoustic tomography*, European J. Appl. Math., 19 (2008), pp. 191–224.

[56] J. E. Lagnese, *Exact boundary controllability of maxwell's equations in a general region*, SIAM J. Control Optim., 27 (1989), pp. 374–388.

[57] F.-X. Le Dimet, V. Shutyaev, and I. Gejadze, *On optimal solution error in variational data assimilation : theoretical aspects*, Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling, 21 (2006), pp. 139–152.

[58] K. Liu, *Locally distributed control and damping for the conservative systems*, SIAM J. Control Optim., 35 (1997), pp. 1574–1590.

[59] D. Luenberger, *Observing the state of a linear system*, IEEE Transaction on Military Electronics, 8 (1964), pp. 74–80.

[60] A. V. Manzhirov and A. D. Polyanin, *Handbook of integral equations*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, second ed., 2008.

[61] P. Monk, *Finite element methods for Maxwell's equations*, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press, New York, 2003.

[62] K. Morris and C. Navasca, *Approximation of low rank solutions for linear quadratic control of partial differential equations*, Comput. Optim. Appl., 46 (2010), pp. 93–111.

[63] A. Münch, P. Pedregal, and F. Periago, *Optimal design of the damping set for the stabilization of the wave equation*, J. Differential Equations, 231 (2006), pp. 331–358.

[64] S. Nicaise, *Exact boundary controllability of maxwell's equations in heterogeneous media and an application to an inverse source problem*, SIAM J. Control Optim., 38 (2000), pp. 1145–1170 (electronic).

[65] T. Penzl, *A cyclic low-rank Smith method for large sparse Lyapunov equations*, SIAM J. Sci. Comput., 21 (1999/00), pp. 1401–1418 (electronic).

[66] K. D. Phung, *Stabilisation frontière du système de Maxwell avec la condition aux limites absorbante de Silver-Müller*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 320 (1995), pp. 187–192.

[67] ——, *Contrôlabilité exacte et stabilisation interne des équations de maxwell*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 323 (1996), pp. 169–174.

[68] ——, *Contrôle et stabilisation d'ondes électromagnétiques*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 5 (2000), pp. 87–137 (electronic).

[69] K. D. Phung and X. Zhang, *Time reversal focusing of the initial state for kirchhoff plate*, SIAM J. Appl. Math., 68 (2008), pp. 1535–1556.

[70] J.-P. Puel, *Une approche non classique d'un problème d'assimilation de données*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 335 (2002), pp. 161–166.

[71] ——, *A nonstandard approach to a data assimilation problem and Tychonov regularization revisited*, SIAM J. Control Optim., 48 (2009), pp. 1089–1111.

[72] K. Ramdani, M. Tucsnak, and G. Weiss, *Recovering the initial state of an infinite-dimensional system using observers*, Automatica, 46 (2010), pp. 1616–1625.

[73] P.-A. Raviart and J.-M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris, 1998.

[74] R. Rebarber and G. Weiss, *Optimizability and estimatability for infinite-dimensional linear systems*, SIAM J. Control Optim., 39 (2000), pp. 1204–1232 (electronic).

[75] D. L. Russell, *Exact boundary value controllability theorems for wave and heat processes in star-complemented regions*, in Differential games and control theory (Proc. NSF—CBMS Regional Res. Conf., Univ. Rhode Island, Kingston, R.I., 1973), Dekker, New York, 1974, pp. 291–319. Lecture Notes in Pure Appl. Math., Vol. 10.

[76] ——, *Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations : recent progress and open questions*, SIAM Rev., 20 (1978), pp. 639–739.

[77] D. L. Russell and G. Weiss, *A general necessary condition for exact observability*, SIAM J. Control Optim., 32 (1994), pp. 1–23.

[78] V. P. Shutyaev and I. Y. Gejadze, *Adjoint to the Hessian derivative and error covariances in variational data assimilation*, Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling, 26 (2011), pp. 179–188.

[79] M. Slemrod, *The linear stabilization problem in hilbert space*, J. Functional Analysis, 11 (1972), pp. 334–345.

[80] ——, *A note on complete controllability and stabilizability for linear control systems in hilbert space*, SIAM J. Control, 12 (1974), pp. 500–508.

[81] A. Smyshlyaev and M. Krstic, *Backstepping observers for a class of parabolic PDEs*, Systems Control Lett., 54 (2005), pp. 613–625.

[82] O. Staffans and G. Weiss, *A physically motivated class of scattering passive linear systems*, Submitted, (2011).

[83] ——, *Maxwell's equations as a scattering passive linear system*, Submitted, (2012).

[84] J. J. Teng, G. Zhang, and S. X. Huang, *Some theoretical problems on variational data assimilation*, Appl. Math. Mech., 28 (2007), pp. 581–591.

[85] R. Triggiani, *On the stabilizability problem in Banach space*, J. Math. Anal. Appl., 52 (1975), pp. 383–403.

[86] M. Tucsnak and G. Weiss, *How to get a conservative well-posed linear system out of thin air. I. Well-posedness and energy balance*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 9 (2003), pp. 247–274 (electronic).

[87] ——, *How to get a conservative well-posed linear system out of thin air. II. Controllability and stability*, SIAM J. Control Optim., 42 (2003), pp. 907–935 (electronic).

[88] ——, *Observation and control for operator semigroups*, Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks], Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.

[89] J. M. Urquiza, *Rapid exponential feedback stabilization with unbounded control operators*, SIAM J. Control Optim., 43 (2005), pp. 2233–2244 (electronic).

[90] X. Zhang, *Exact internal controllability of Maxwell's equations*, Appl. Math. Optim., 41 (2000), pp. 155–170.

[91] Q. Zhou, *Exact internal controllability of Maxwell's equations*, Japan J. Indust. Appl. Math., 14 (1997), pp. 245–256.

[92] E. Zuazua, *Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference methods*, SIAM Review, 47 (2005), pp. 197–243.

Faculté des Sciences et Technologies
Université de Lorraine
École Doctorale IAEM
D.F.D. Mathématiques

Résumé : Dans un grand nombre d'applications modernes, on est amené à estimer l'état initial (ou final) d'un système infini-dimensionnel (typiquement un système gouverné par une Équation aux Dérivées Partielles (EDP) d'évolution) à partir de la connaissance partielle du système sur un intervalle de temps limité. Un champ d'applications dans lequel apparaît fréquemment ce type de problème d'identification est celui de la médecine. Ainsi, la détection de tumeurs par tomographie thermo-acoustique peut se ramener à des problèmes de reconstruction de données initiales. D'autres méthodes nécessitent l'identification d'un terme source, qui, sous certaines hypothèses, peut également se réécrire sous la forme d'un problème de reconstruction de données initiales.

On s'intéresse dans cette thèse à la reconstruction de la donnée initiale d'un système d'évolution, en travaillant autant que possible sur le système infini-dimensionnel, à l'aide du nouvel algorithme développé par Ramdani, Tucsnak et Weiss (Automatica 2010).

Nous abordons en particulier l'analyse numérique de l'algorithme dans le cadre des équations de Schrödinger et des ondes avec observation interne. Nous étudions les espaces fonctionnels adéquats pour son utilisation dans les équations de Maxwell, avec observations interne et frontière. Enfin, nous tentons d'étendre le cadre d'application de cet algorithme lorsque le système initial est perturbé ou que le problème inverse n'est plus bien posé, avec application à la tomographie thermo-acoustique.

Summary : In a large class of modern applications, we have to estimate the initial (or final) state of an infinite-dimensional system (typically a system governed by a Partial Differential Equation) from its partial measurement over some finite time interval. This kind of identification problems arises in medical imaging. For instance, the detection of sick cells (tumor) by thermo-acoustic tomography can be viewed as an initial data reconstruction problem. Some other methods need the identification of a source term, which can be rewritten, under some assumptions, under the form of an initial data reconstruction problem.

In this thesis, we are dealing with the reconstruction of the initial state of a system of evolution, working as much as possible on the infinite-dimensional system, using the new algorithm developed by Ramdani, Tucsnak and Weiss (Automatica 2010).

We perform in particular the numerical analysis of the algorithm in the case of Schrödinger and wave equations, with internal observation. We study the suitable functional spaces for its use in Maxwell's equations, with internal and boundary observation. In the last chapter, we try to extend the framework of this algorithm when the initial system is perturbed or when the inverse problem is ill-posed, with application to thermoacoustic tomography.

Mots Clé

Équations aux Dérivées Partielles – Contrôle et Observation – Problèmes inverses

Rameau :

Équations aux dérivées partielles – Commande, Théorie de la – Kalman, Filtre de – Problèmes inverses – Algorithmes

Institut Élie Cartan Nancy, Laboratoire de Mathématiques, BP 239,
54 506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex