



**HAL**  
open science

# ” Le simple est-il robuste? ” : une étude de la robustesse des systèmes complexes par les automates cellulaires

Olivier Bouré

## ► To cite this version:

Olivier Bouré. ” Le simple est-il robuste? ” : une étude de la robustesse des systèmes complexes par les automates cellulaires. Intelligence artificielle [cs.AI]. Université de Lorraine, 2013. Français. NNT : 2013LORR0162 . tel-01750342v2

**HAL Id: tel-01750342**

**<https://theses.hal.science/tel-01750342v2>**

Submitted on 18 Dec 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# “Le simple est-il robuste ?” : une étude de la robustesse des systèmes complexes par les automates cellulaires

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 13 septembre 2013

pour l’obtention du

**Doctorat de l’université de Lorraine**  
(spécialité informatique)

par

Olivier Bouré

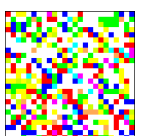
### Composition du jury

- Président :* Jean-Yves Marion, Professeur, LORIA – Université de Lorraine
- Rapporteurs :* Gilles Bernot, Professeur, Université de Nice Sophia-Antipolis  
Jacques Demongeot, Professeur, Université Joseph Fourier de Grenoble
- Examineurs :* Bastien Chopard, Professeur associé, CUI Université de Genève  
Jean Mairesse, Directeur de recherches, CNRS, Université Paris 7  
Jean-Yves Marion, Professeur, LORIA – Université de Lorraine
- Directeurs de Thèse :* Vincent Chevrier, Maître de Conférences HDR, LORIA – Université de Lorraine  
Nazim Fatès, Chargé de recherche, Inria Nancy Grand-Est

Mis en page avec la classe thloria.

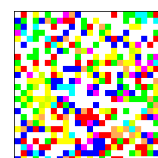
# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Automates cellulaires et robustesse</b>	<b>11</b>
1.1 Définitions . . . . .	12
1.1.1 Automates cellulaires synchrones . . . . .	12
1.1.2 Analyse du comportement . . . . .	13
1.1.3 Modèles d'automates cellulaires usuels . . . . .	14
1.1.4 Quelle définition de la robustesse? . . . . .	15
1.2 Quel comportement? . . . . .	16
1.2.1 Les modèles de calcul . . . . .	16
1.2.2 La simulation de phénomènes naturels . . . . .	17
1.2.3 Les systèmes dynamiques . . . . .	18
1.3 Quelle perturbation? . . . . .	19
1.3.1 Perturbation de la grille . . . . .	19
1.3.2 Perturbation de la topologie . . . . .	20
1.3.3 Perturbation de la mise à jour locale . . . . .	21
1.3.4 Perturbation de la mise à jour globale . . . . .	21
1.4 Position de notre travail . . . . .	21
<b>I Exploration de la robustesse à l'asynchronisme des automates cellulaires</b>	<b>23</b>
<b>2 Définition d'un asynchronisme de la transmission d'information</b>	<b>27</b>
2.1 L'asynchronisme dans les automates cellulaires . . . . .	28
2.1.1 La remise en cause du synchronisme parfait . . . . .	28
2.1.2 L'insuffisance de l'asynchronisme de la mise à jour . . . . .	29
2.1.3 La remise en cause de la transmission d'information parfaite . . . . .	30
2.1.4 Définitions de deux nouveaux asynchronismes . . . . .	32
2.2 Définitions formelles . . . . .	34
2.2.1 Asynchronisme de la mise à jour : $\alpha$ -synchronisme . . . . .	34



2.2.2	Asynchronisme de la transmission d'information . . . . .	34
2.2.3	$\beta$ -synchronisme . . . . .	36
2.2.4	$\gamma$ -synchronisme . . . . .	37
2.3	Synthèse . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Étude expérimentale de la robustesse à différents asynchronismes</b>	<b>39</b>
3.1	Définition du protocole expérimental . . . . .	39
3.1.1	Conditions expérimentales . . . . .	40
3.1.2	Lecture et interprétation des résultats . . . . .	40
3.2	Observations préliminaires . . . . .	41
3.2.1	Règles sans différence observable, ou divergence négligeable . . . . .	41
3.2.2	Règles suggérant des différences quantitatives . . . . .	43
3.2.3	Règles faisant apparaître des changements du comportement qualitatifs . . . . .	46
3.2.4	Résumé des observations . . . . .	47
3.3	Étude des transitions de phases . . . . .	50
3.3.1	Transitions de phase . . . . .	50
3.3.2	Classe d'universalité de la percolation dirigée . . . . .	51
3.3.3	Modification du protocole expérimental . . . . .	52
3.3.4	Quantification de la transition . . . . .	53
3.4	Synthèse . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Approche microscopique du comportement asynchrone</b>	<b>57</b>
4.1	ACE 51 : un cas trivial de $\beta$ -invariance . . . . .	58
4.2	ACE 50 : percolation dirigée . . . . .	59
4.2.1	Interprétation des diagrammes espace-temps . . . . .	59
4.2.2	Approche analytique du comportement $\beta$ -synchrone . . . . .	61
4.2.3	Lien à la percolation dirigée . . . . .	63
4.3	ACE 6 : divergence $\alpha/\beta$ en densité . . . . .	64
4.3.1	Analyse du comportement $\alpha$ -synchrone . . . . .	65
4.3.2	Passage au $\beta$ -synchronisme . . . . .	67
4.4	ACE 58 : divergence $\gamma$ -synchrone . . . . .	68
4.5	Synthèse . . . . .	68
	<b>Conclusion de la Partie I</b>	<b>71</b>
<b>II</b>	<b>Robustesse d'un modèle discret de formation d'essaim</b>	<b>73</b>
<b>5</b>	<b>Comportement métastable d'un modèle discret de formation d'essaim</b>	<b>77</b>
5.1	Le mouvement collectif et la formation d'essaim . . . . .	78
5.1.1	De la modélisation du mouvement collectif ... . . . .	78
5.1.2	... à l'étude discrète du comportement de formation d'essaim . . . . .	79
5.2	Définitions formelles . . . . .	79

5.2.1	Automates de gaz sur réseau . . . . .	80
5.2.2	Modèle de formation d'essaim . . . . .	81
5.2.3	Propriétés dynamiques particulières du modèle . . . . .	82
5.3	Observation du comportement métastable . . . . .	85
5.3.1	Protocole expérimental . . . . .	86
5.3.2	Description des motifs . . . . .	88
5.3.3	Quantification des motifs . . . . .	91
5.4	Synthèse . . . . .	93
<b>6</b>	<b>Étude de la robustesse du modèle à la forme de la grille cellulaire</b>	<b>95</b>
6.1	Exploration du cas d'une grille finie carrée . . . . .	96
6.1.1	Influence de la parité . . . . .	96
6.1.2	Influence de l'échelle . . . . .	97
6.2	Exploration du cas d'une grille finie rectangulaire . . . . .	98
6.2.1	Ratios entiers . . . . .	99
6.2.2	Ratios non-entiers . . . . .	99
6.2.3	Influence de la sensibilité à l'alignement . . . . .	100
6.3	Du fini à l'infini . . . . .	101
6.3.1	Vers l'étude d'une grille infinie . . . . .	101
6.3.2	Application au modèle de formation d'essaim . . . . .	102
<b>7</b>	<b>Étude de la robustesse du modèle à l'asynchronisme</b>	<b>105</b>
7.1	Construction d'un asynchronisme pour les AGR . . . . .	105
7.1.1	Asynchronisme de l'interaction . . . . .	106
7.1.2	Asynchronisme de la propagation classique . . . . .	106
7.1.3	Asynchronisme de la propagation conservatif . . . . .	107
7.1.4	Composition des asynchronismes . . . . .	109
7.2	Application à la formation d'essaim . . . . .	110
7.2.1	Robustesse à l'asynchronisme de l'interaction . . . . .	110
7.2.2	Robustesse à l'asynchronisme de la propagation . . . . .	112
7.2.3	Quantification expérimentale des transitions . . . . .	113
7.3	Synthèse . . . . .	114
	<b>Conclusion de la Partie II</b>	<b>115</b>
	<b>Conclusion générale</b>	<b>117</b>
	<b>Pour finir ...</b>	<b>121</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>125</b>





## Remerciements

“Un [automate cellulaire] est un animal qui, tué en quantité suffisante et dans des conditions contrôlées, produit une thèse de doctorat [en informatique].”

– adapté de Woody Allen, citation attribuée.

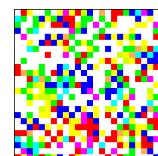
Le tout premier et le plus important contributeur de cette thèse est aussi le plus méconnu : le **hasard**. Alors même que j’achevais ma seconde année à l’École des Mines de Nancy et que je m’apprêtais à entrer au Master d’informatique de l’India Institute of Technology de Mumbai, un “accident” administratif aussi soudain qu’inattendu me priva de cette opportunité et m’obligea à recommencer mes plans de zéro. Je me vis cependant proposer une ultime alternative : choisir un programme à Chalmers en Suède dans les vingt-quatre heures, ou bien faire une troisième année à la maison. Bien décidé à m’expatrier, mon choix se porta un peu aveuglément sur les *Complex Adaptive Systems*, ce qui a été jusqu’à présent ma plus importante décision. J’y trouvai non seulement amis, amours et voyages mais aussi un émerveillement et une passion pour un monde nouveau que je découvrais alors et qui m’a amené à l’endroit où je suis. Aujourd’hui encore dans ma recherche, le hasard joue un rôle de premier plan, tant à travers les événements heureux ou malheureux qui sont à l’origine de mes découvertes et réflexions, que lorsque nous inversons les rôles et que je cherche à l’étudier à travers mes simulations.

Fort heureusement, tout n’est pas qu’hasardeux dans ce travail de thèse car un nombre important de personnes ont d’une manière ou d’une autre influencé ce travail et méritent toute la gratitude que je leur porte. Je commencerai donc sans hésitation aucune par remercier mes directeurs de thèse, Vincent et Nazim.

En premier lieu, **Vincent**, je t’adresse mon plus grand respect pour avoir été responsable d’un facteur des plus déterminants dans le succès de ce travail : à savoir des conditions idéales pour se construire une doctrine. Que ce soit par ta confiance, ta présence, voire ta persistance à me demander “pourquoi?”, ton encadrement m’aura non seulement permis de produire de beaux résultats, mais également – et je pense que tu l’as particulièrement réussi – de faire de ton doctorant l’inventeur de ses propres idées. Je resterai donc probablement à jamais marqué par ta curiosité scientifique et ton goût pour les questions bien posées.

Quant à toi, **Nazim**, je voudrais te témoigner ma reconnaissance éternelle pour le temps passé à me conseiller, à souffrir avec patience ma naïveté navrante (parfois) et mes questions incessantes (toujours). Tes connaissances et ton enthousiasme pour la recherche ont été pour mon travail à la fois un moteur et une mine intarissable d’information. Puisse ce manuscrit en être le reflet fidèle! Enfin, le doctorat étant avant tout une aventure humaine, je te remercie aussi pour ton amitié et ta compagnie, que ce soit dans un sauna au bord de la Baltique ou sur les chemins pierreux de Santorin.

Je témoigne évidemment toute ma reconnaissance à **Jacques Demongeot** et **Gilles Bernot** pour avoir aimablement accepté de consacrer un peu de leur temps pour lire et rapporter sur cette thèse à un moment de l’année qui n’était pas forcément évident, ainsi que pour leurs interventions clairvoyantes pendant la soutenance. J’adresse également mes chaleureux remerciements à **Bastien Chopard**, **Jean Mairesse** et **Jean-Yves Marion** pour m’honorer de leur présence au jury de cette thèse et ainsi qu’à l’intérêt qu’ils portent individuellement à ce travail. Cette dernière version a pour vocation de faire écho aux remarques des uns et des autres; j’espère que vous y trouverez votre compte, et que nous aurons l’occasion de nous re-rencontrer pour poursuivre les discussions passionnantes du jour J.





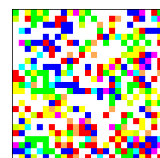
J'ai maintenant une pensée pour un autre contributeur majeur de cette thèse, à l'origine de toutes les idées qui la composent, j'ai nommé les membres de l'équipe MaIA. Sans vos remarques, questions et critiques, cette thèse ne serait sans doute pas ce qu'elle est aujourd'hui et pour cela, je remercie infiniment mon équipe, et plus particulièrement Olivier Buffet, Alain Dutech, François Charpillet, Bruno Scherrer, Olivier Simonin, Vincent Thomas et Nikolaos Vlassopoulos. Je pense également aux "extérieurs" qui ont croisé ma route à un moment donné de ma thèse et ont participé, directement ou indirectement, aux idées qui la compose : Hugues Berry, Sylvain Contassot-Viver, Andreas Deutsch, Jacques Gautrais, Anaïs Khuong, Pierre-Yves Louis, Irène Marcovici, Fabien Michel, Damien Regnault, Jean-Baptiste Rouquier, Sylvain Séné, Antoine Spicher, Anja Voss-Böhme ...

À chaque thèse son lot de *potos* thésards et postdocs et celle-ci ne fait pas exception. Ceux-ci ont été le sel et le sésame de ces quatre années au LORIA. Spéciale *kassédi* à mon *crew* du LORIA composé d'Aurélien Monot, Arnaud Glad, Jano Yazbeck, Tomás Navarrete, Mauricio Araya, Mohamed Tlig, Sylvain Castagnos, Carolina Saavedra, Sylvain Raybaud, Florent Pompigne, Dorin et Cristian Maxim, Patricia Kelbert, Julien Siebert, Paul Bédaride, Jean-Christophe Bach, Nicolas Estibals, Guillaume Hoffmann, Maxime Rio, Henri Debrat ...

Je n'oublie pas non plus les plus "jeunes" : Mihai Andries, Benjamin Camus, Arsène Fansi-Tchango et Nassim Kaldé en leur souhaitant autant de plaisir que j'en ai eu à m'initier au monde de la recherche.

Enfin – j'ai gardé le meilleur pour la fin, je remercie sans réserve mes proches et amis qui ont fait partie de ce quotidien et ont été présents dans les moments faciles comme difficiles. Je pense notamment à ma famille mais aussi et surtout à l'éternel trio de choc Aurélien Monot, Stephanie Schöneck et Alban Ragier pour leur inconditionnel soutien et ce tout au long de ces quatre années. Merci encore une fois.

*à Nazim et Vincent,  
aux Bouré & co.,*





# Notations

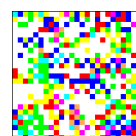
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$	ensemble des entiers naturels, relatifs, ensemble des réels
$(\mathbb{Z}/L\mathbb{Z})$	anneau de cardinal $L$
$\mathcal{P}(\mathcal{L})$	ensemble des parties de $\mathcal{L}$

## Automates cellulaires

$\mathcal{L}$	grille cellulaire
$L, L_x, L_y$	taille des côtés de la grille selon l'axe $x, y \dots$
$d$	dimension de l'espace
$\mathcal{Q}$	ensemble fini d'états
$\mathcal{V}$	voisinage
$v_i$	$i$ -ème voisin
$f$	fonction de transition locale
$F$	fonction de transition globale
$x, y$	configuration
$x^t$	configuration au temps $t$
$x_c$	état de la cellule $c$ dans la configuration $x$
$\rho$	densité initiale
$\bar{\rho}$	densité moyenne

## Asynchronisme

$\alpha$	taux de synchronisme de l' $\alpha$ -synchronisme
$\beta$	taux de synchronisme du $\beta$ -synchronisme
$\gamma$	taux de synchronisme du $\gamma$ -synchronisme
$\Delta_\alpha, \Delta_\beta, \Delta_\gamma$	fonctions de sélection
$e$	état propre
$\mathbf{o}$	état observable
$m$	dimension de l'état observable $\mathbf{o}$
$e_i, \mathbf{o}_i$	état propre/observable du $i$ -ème voisin
$e^{(\mathbf{o})}$	notation d'un état cellulaire en $\beta$ -synchronisme
$f_{\text{maj}}$	fonction locale de mise à jour
$f_{\text{tra}}$	fonction locale de transmission
$\theta_i^{t,c}$	fonction de transmission vers le $i$ -ème élément de $\mathbf{o}$
$\delta$	exposant critique du comportement critique de la classe d'universalité



**Gaz sur réseau et modèle de formation d'essaim**

$\mathcal{V}$	voisinage d'interaction
$\mathcal{W}$	voisinage de propagation
$f_I$	fonction locale d'interaction
$f_P$	fonction locale de propagation
$I$	fonction globale d'interaction
$P$	fonction globale de propagation
$d_i(c)$	$i$ -ème canal de la cellule $c$
$x_i(c)$	état du $i$ -ème canal de la cellule $c$ dans l'état $x_c$
$\nu(x_c)$	nombre de particules contenues dans l'état $x_c$
$\mathbf{J}_c(x)$	flux cellulaire de la cellule $c$ dans la configuration $x$
$\mathbf{D}_c(x)$	champ directeur à la cellule $c$ dans la configuration $x$
$\rho$	densité initiale
$\sigma$	sensitivité à l'alignement
$\bar{\phi}$	transport moyen
$\bar{\gamma}$	alignement moyen
$\mathcal{B}^t$	ensemble des canaux bloqués au temps $t$
$\alpha_I$	taux de synchronisme de l'interaction
$\alpha_P$	taux de synchronisme de la propagation

**Abbréviations**

<b>AC</b>	Automate cellulaire
<b>ACE</b>	Automate cellulaire élémentaire
<b>AGR</b>	Automate de Gaz sur Réseau

# Introduction

“On ne peut guère nier que le but suprême de toute théorie est de rendre les éléments irréductibles de base aussi simples et aussi peu nombreux que possible sans avoir à céder une représentation adéquate d’une seule donnée de l’expérience.”

– Albert Einstein, *Au sujet de la méthode de la physique théorique*, 1933

Dans le *Discours de la méthode* (1637), Descartes expose les principes qui vont devenir les préceptes de la méthode scientifique moderne. Son approche, fondée sur l’analyse et la synthèse, cherche à étudier les problèmes en les décomposant en sous-parties, qui peuvent être étudiées indépendamment puis intégrées afin d’obtenir une connaissance de l’ensemble. Dans le cadre de l’étude de phénomènes et de systèmes réels, la méthode cartésienne est ainsi mise en œuvre dans la démarche de *modélisation*, qui construit une représentation simplifiée d’un système cible, ou *modèle*, et l’étudie en vue d’améliorer la connaissance et la compréhension du phénomène.

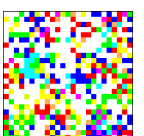
Pour un grand nombre de systèmes, il est possible de prédire précisément leur évolution avec des modèles extrêmement simples, sous forme d’équations : les orbites planétaires avec Kepler, les réactions chimiques avec Lavoisier... En revanche, la simplification des modèles trouve ses limites dans un certain nombre de systèmes où des interactions entre de nombreux composants simples jouent un rôle prépondérant dans la dynamique générale : les *systèmes complexes*.

## Les systèmes complexes

Il est généralement admis que les systèmes complexes partagent un certain nombre de caractéristiques qu’il est possible de rassembler afin d’en former une définition fonctionnelle [Mai97]. Étymologiquement, le mot *complexe* est construit à partir du latin *cum* (avec, ensemble) et *plecto* (tresser). Un système complexe se définit donc d’abord comme un système constitué d’un ensemble d’éléments en interaction, et dont la dynamique est le résultat de ces interactions. En particulier, on dit qu’un système complexe “peut être analysé en de nombreux composants ayant un certain nombre de relations entre eux, de telle manière que le comportement de chaque composant puisse dépendre du comportement de plusieurs autres” [Sim81]. Cependant cette définition est incomplète : de nombreux systèmes sont constitués d’un grand nombre d’entités en interaction sans qu’ils soient considérés comme complexes. Par exemple, la plupart des réactions chimiques ne sont pas considérées comme complexes car elles sont généralement homogènes et peuvent donc être quasi-parfaitement prédites par des équations. En revanche, il existe des familles de réactions oscillantes, comme celles de Briggs-Rauscher ou Belousov-Zhabotinsky, où des motifs macroscopiques peuvent apparaître spontanément (voir Figure 1).

## Émergence et auto-organisation

Dans les systèmes complexes, on considère généralement que les composants individuels évoluent selon des règles relativement simples et réactives – typiquement avec des capacités limitées de perception et de raisonnement – mais que le comportement de l’ensemble s’organise de manière “intelligente” (voir exemples dans le tableau 1).



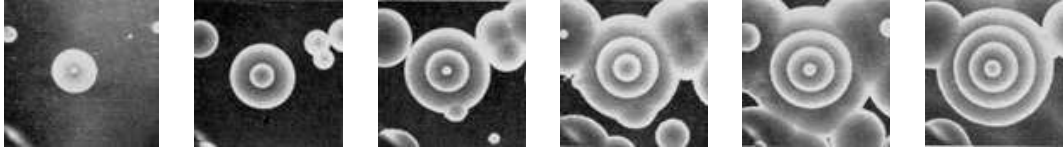


FIGURE 1 – Génération d’ondes concentriques dans une réaction chimique de type Belousov-Zhabotinsky. (source : [www.scholarpedia.org/article/Belousov-Zhabotinsky\\_reaction](http://www.scholarpedia.org/article/Belousov-Zhabotinsky_reaction))

TABLE 1 – Exemples de systèmes complexes et de leurs attributs.

Système	Entités	Interactions	Comportement intelligent
protéine	acides aminés	liaisons peptidiques	fonction de protéine
embryon	gènes	activation/inhibitions	morphogenèse
espèce	organismes	reproduction/compétition	évolution
système nerveux	neurones	synapses	capacités cognitives

Qu’il s’agisse d’abeilles dans une ruche, de neurones dans un cerveau ou d’acheteurs dans une économie de marché, tous ces systèmes reposent sur une caractéristique commune : l’*émergence*, à savoir l’apparition, à partir des interactions de composants simples, d’un comportement global qui “ne peut pas être dérivé de la somme des comportements individuels des composants” [Roc03]. Comme la causalité entre le global et le local est un thème largement sujet à débat [Bro07], l’étude de la dynamique des systèmes complexes se réduit souvent à la notion d’*auto-organisation*, définie comme la capacité d’un système à s’organiser de manière autonome, c’est-à-dire sans influence extérieure. Cette notion, pour laquelle n’existe à l’heure actuelle ni définition précise ni critère formel d’identification<sup>1</sup>, est généralement traitée comme l’apparition d’un motif global dans le système considéré : “Un objet  $\mathcal{O}$  possède un motif  $\mathcal{P}$  –  $\mathcal{O}$  possède un motif représenté, décrit, capturé, etc. par  $\mathcal{P}$  – si et seulement si on peut utiliser  $\mathcal{P}$  pour prédire ou compresser  $\mathcal{O}$ ” [Sha01]. En d’autres termes, le comportement d’un système est dit auto-organisé dès lors que l’on peut formuler une propriété sur l’état du système ou son évolution à l’échelle globale.

Dans ce contexte, un des enjeux majeurs de l’étude des systèmes complexes consiste à comprendre comment un système peut présenter un comportement microscopique simple et un comportement macroscopique bien plus complexe. Comme ce problème est difficile à appréhender directement<sup>2</sup>, nous allons l’étudier à travers une autre propriété associée aux systèmes complexes, la robustesse.

## Robustesse

Dans l’étude des propriétés des systèmes complexes, la *robustesse* occupe une place centrale. Elle se définit comme la capacité d’un système à maintenir son comportement lorsqu’il est soumis à des perturbations, qu’elles concernent les entités constituantes ou la structure globale. Autrement dit, comme le comportement d’un système complexe est défini sur le plan macroscopique, il ne dépend en principe pas de petites variations locales, comme la suppression de quelques composants, une modification légère sur les comportements individuels des entités ou l’ajout de bruit dans leurs interactions.

La robustesse est souvent associée à l’émergence et aux systèmes complexes. En effet, si d’un côté, la plupart des systèmes artificiels reposent sur l’exactitude des comportements<sup>3</sup>, un certain nombre de systèmes complexes réels présentent un comportement complexe et intelligent, en dépit d’un environnement bruité et de pannes fonctionnelles (exemple : ruche, Internet). L’étude de la robustesse est donc pertinente à double titre :

1. D’une part, en mettant en évidence les attributs du système qui sont nécessaires à l’émergence du comportement, la robustesse permet de mieux comprendre les mécanismes liés aux phénomènes observés [Les08].

1. Cette idée est illustrée ironiquement chez Shalizi par la phrase “je le saurai quand je le verrai” [Sha01].

2. “[L’émergence] ne se rend pas à un assaut frontal” [Sha01].

3. En particulier, les programmes et systèmes informatiques ; pour exemple, la suppression d’un unique bit dans la mémoire vive d’un ordinateur est suffisante pour corrompre l’ensemble des données.

2. Ensuite, la robustesse est une propriété activement recherchée dans les systèmes artificiels qui sont continuellement confrontés des erreurs de conception ou à des situations non prévues.

Dans le cadre de cette thèse, nous placerons donc la robustesse au centre de nos réflexions, car elle nous permet d'étudier indirectement l'auto-organisation dans les systèmes complexes. En particulier, nous allons nous intéresser au rôle joué par la robustesse dans le contexte de la modélisation, en nous demandant si les modèles simples de systèmes complexes sont également robustes. Nous allons maintenant détailler notre cadre d'étude afin de préciser la définition prise par la robustesse.

## Modélisation et robustesse

Comme l'auto-organisation, l'étude de la robustesse dans les systèmes réels se révèle souvent difficile, par manque d'outils d'analyse adéquats. Pour pallier cette difficulté, nous allons chercher à étudier ces propriétés dans un cadre simplifié et par conséquent plus approprié, en passant par une démarche de modélisation des systèmes considérés.

### Modéliser les systèmes complexes

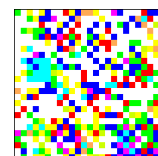
D'après Minsky, un modèle est construit à partir d'une questionnement sur un système cible, et n'est considéré un bon modèle que si les réponses qu'il fournit sont en accord avec les observations du système [Min65]. Dans une démarche de l'étude de propriétés telles que l'auto-organisation et de la robustesse, il est donc naturel de chercher à reproduire le comportement émergent dans un modèle qui reprend plus ou moins fidèlement la forme du système étudié. Par ailleurs, le modèle considéré se doit d'être aussi simple que possible, et ce pour plusieurs raisons :

1. Premièrement, la simplicité dans les modèles permet d'apporter des définitions précises et sans ambiguïté des composants et de leurs interactions, et par conséquent de maîtriser tous les aspects de la définition qui rentre en compte dans l'évolution du système.
2. La formulation de modèles dans des cadres mathématiques bien formalisés permet d'appréhender analytiquement sa dynamique en utilisant les outils et résultats propres au domaine ; dans la plupart des cas, il s'agit de preuves d'indécidabilité, d'ergodicité, de transition de phase...
3. Un modèle simple se combine bien avec les algorithmes et l'outil informatique : cela facilite l'implémentation du modèle et assure une reproductibilité des résultats ainsi qu'une certaine performance en termes de temps de calcul dans le cas simulation, ce qui va permettre de multiplier les simulations pour obtenir de bonnes statistiques.

La modélisation des systèmes complexes relève donc d'un compromis entre le réalisme du modèle, qui cherche à reproduire aussi fidèlement que possible la structure et le comportement du système étudiée [Mic04], et la simplicité, qui permet de faciliter l'étude des propriétés du modèle. Nous déterminons que les modèles que nous allons considérer se trouvent à la croisée de cadres paradigmatiques :

1. Les *systèmes multi-agents* sont un point de vue de modélisation dont la structure générale est proche des systèmes complexes [Fro04]. On y décrit un système selon deux niveaux d'abstraction : un niveau microscopique qui représente des agents avec leurs comportements et interactions propres, et un niveau macroscopique qui décrit un environnement et organise l'ensemble des interactions [Fer95].
2. Dans les *systèmes dynamiques*, l'évolution du système considéré est représentée comme la trajectoire d'un point dans un espace d'états. Plus concrètement, on est amené à y décrire précisément un ensemble de *règles de transitions* qui déterminent l'évolution temporelle de l'état du système.

Les modèles qui décrivent des systèmes complexes reposent donc sur un ensemble d'entités qui évoluent et interagissent selon des règles fixes et locales. Les modèles que nous considérons dans ce travail se veulent aussi simples que possible, car ils sont plus faciles à appréhender et correspondent à cette volonté de généralité des résultats. Cependant, cette approche n'est pas sans limites : un modèle n'est jamais qu'une approximation ou une abstraction du système cible. Comment alors s'assurer que les modèles utilisés ne sont pas "trop simples", et que leurs comportements correspondent bien aux phénomènes observés ?





## Robustesse des modèles

Dans ce contexte de la modélisation, la robustesse prend un sens tout particulier : dans le cas où l'on souhaite étudier des systèmes dont le comportement est émergent et robuste, qu'en est-il de leurs modèles ? Si le recours à la modélisation permet de faciliter l'étude de ces systèmes, elle soulève également la question de la validité des observations. Dans la plupart des cas, lorsqu'un modèle qui reproduit la structure des systèmes fait apparaître des motifs macroscopiques semblables au phénomène étudié, on aura tendance à penser qu'on observe le même comportement émergent. Cependant, comment savoir si le comportement du modèle correspond bien au phénomène étudié, ou si le processus de simplification a induit de nouveaux comportements qui ne correspondent pas au phénomène étudié ?

Cette question est historique dans les études sur les modèles de systèmes complexes. En effet, dès les premières tentatives de modélisation simple du vivant, par exemple avec l'auto-reproduction de von Neumann [vN66] ou le Jeu de la Vie de Conway [Gar70] (cf. Figure 2(a) et (b)), la portée biologique de ces modèles a été remise en question car ils dépendent du synchronisme parfait des mises à jour locales [Tof94]. À l'inverse, d'autres modèles comme le rassemblement décentralisé de Fatès [Fat10] ne semble *a priori* pas dépendre d'une définition particulière du modèle (cf. Figure 2(c) et (d)). Dans ces exemples, la robustesse est utilisée pour estimer le réalisme du modèle en mettant en évidence la dépendance du comportement aux hypothèses du modèle.

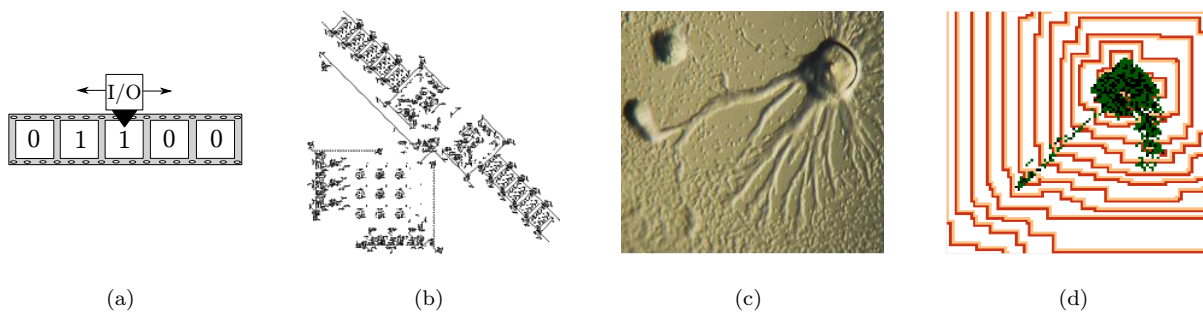


FIGURE 2 – Exemples de systèmes complexes et de leur modélisation. À gauche : (a) représentation schématique d'une machine de Turing et (b) sa simulation dans le Jeu de la Vie par Rendell [Ren10]. À droite : (c) rassemblement décentralisé observé dans l'espèce *dictyostelium discoideum* et (d) son modèle en automate cellulaire, développé par Fatès [Fat10].

(sources : [www.conwaylife.com/wiki/Turing\\_machine](http://www.conwaylife.com/wiki/Turing_machine) ; [en.wikipedia.org/wiki/Dictyostelium\\_discoideum](http://en.wikipedia.org/wiki/Dictyostelium_discoideum))

Plutôt que de chercher à comparer quantitativement (par comparaison des données) ou qualitativement (par comparaison des propriétés) le comportement avec un phénomène, notre approche va s'intéresser la *robustesse du modèle* : c'est-à-dire que, pour un modèle donné, nous allons chercher à établir si le comportement dépend d'une définition précise du modèle, ou bien s'il est le résultat des interactions entre les entités constituantes et tolère donc des modifications du modèle de faible amplitude. Cette formulation de la robustesse des modèles se retrouve à plusieurs reprises dans la littérature. Ainsi Ingerson et Buvel ont cherché à déterminer "*quelle part du comportement vient [de la synchronicité du modèle], et quelle part est intrinsèque aux règles de mises à jour*" [IB84], et Huberman et Glance ont remis en cause la validité des modèles discrets qui peuvent "*générer des comportements qui n'auraient pas d'équivalents dans le passage à la limite du continu*" [HG93]. Dans ce contexte, la robustesse va consister à perturber le modèle et à observer si le comportement est conservé.

## L'exploration de la robustesse

Pour savoir si le comportement d'un modèle est valide, il faut donc le perturber en vue d'en étudier la robustesse. Mais que perturber ? Slotine définit la robustesse comme "*le degré auquel un système est*

*insensible aux effets qui ne sont pas considérés dans sa conception*” [SL<sup>+</sup>91]<sup>4</sup>. Comme pour un système réel, pour un modèle dont le comportement est suggéré émergent, de petites variations locales sur les comportements et les interactions microscopiques ne devraient pas influencer le comportement. Pour cette raison, nous nous attacherons à fixer les comportements des entités du modèle, puis à remettre en cause ce qui dans le modèle relève de choix macroscopiques. Nous espérons ainsi montrer qu’un comportement ne dépend *a priori* pas d’un attribut particulier du modèle s’il est robuste à une perturbation sur cet attribut.

Pour aller plus loin, nous proposons d’étendre cette approche de remise en cause du modèle par une véritable exploration de la robustesse du comportement. En d’autres termes, plutôt que de considérer une perturbation sur un aspect particulier du modèle, nous allons considérer un ensemble de perturbations, et chercher à mesurer les effets des perturbations par rapport au cas non-perturbé mais également à les comparer entre les perturbations elles-mêmes. Cette extension se justifie par deux arguments :

- D’une part, une perturbation, si elle montre des différences de comportement avec le modèle non-perturbé, peut induire de nouveaux effets qui influencent le comportement. Comparer différentes perturbations peut permettre d’ajouter une indication sur les influences respectives des perturbations sur les comportements observés.
- D’autre part, l’exploration de la robustesse permet de cerner les comportements plutôt que de les exclure. En effet, si l’on s’attend à observer des différences comportementales, les similarités sont également une observation intéressante en ce qu’elles permettent de mieux comprendre les mécanismes responsables des comportements observés.

## Les automates cellulaires

En toute généralité, il est difficile de traiter la question de la robustesse pour tout modèle de système complexe. C’est pourquoi nous décidons de restreindre notre étude à une classe spécifique de modèles, que nous souhaitons aussi simple que possible. En effet, cette simplicité permet d’une part de garantir une base formelle précise et facile à manipuler, ce qui permet d’explorer rapidement les comportements et de maîtriser tous les aspects du modèle ; et d’autre part de minimiser la complexité du modèle en vue d’isoler les composants responsables du phénomène d’émergence (principe de parcimonie).

Nous avons choisi les automates cellulaires qui, de par leur structure discrète et spatialement distribuée et leur formalisme rigide, sont un contexte adapté qui constituera le cœur de nos travaux. Dans ce modèle classique des systèmes complexes, introduit formellement au Chapitre 1, les entités constituantes sont des cellules disposés régulièrement sur une grille et dont l’état évolue en fonction de l’état des cellules voisines selon une unique règle de mise à jour appliquée à toutes les cellules simultanément.

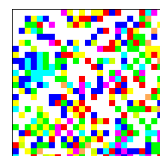
### La robustesse dans les automates cellulaires

La robustesse est un thème activement étudié dans les automates cellulaires et concerne un large panel de modèles, s’appliquant aussi bien à la recherche de modèles de calcul qu’à la simulation de phénomènes naturels (cf. paragraphe 1.2). Or si l’étude de la robustesse dans la littérature s’est majoritairement exprimée par la question “que perturber ?” [Les08] – remettant en cause les hypothèses de la définition classique des automates cellulaires, comme la dynamique générale synchrone [IB84, SdR99] ou l’unicité de la règle locale (cf. paragraphe 1.3) – relativement peu d’études s’attachent à se demander “comment perturber ?” et explorent les effets de différents types de perturbations.

Or dans une démarche de l’étude de la robustesse, on s’attache généralement à remettre en cause une propriété spécifique du modèle étudié. Les perturbations sont alors considérées comme une négation de cette propriété, ce qui laisse une grande liberté de choix dans leur définition. Il est donc intéressant de considérer parallèlement plusieurs perturbations aux définitions “proches” afin d’explorer le comportement sous différents angles et de comparer les résultats obtenus pour chaque perturbation.

---

4. Nous retrouvons ici l’idée d’intentionnalité du modèle comme représentation d’un système cible [Min65].



## Approche du comportement

Avant de nous lancer dans l'étude de la robustesse, il convient de préciser notre approche pour l'étude des comportements des automates cellulaires. Tout d'abord, les modèles que nous présenterons doivent être considérés à la loupe des systèmes complexes : il ne s'agit donc pas d'étudier microscopiquement cellule par cellule les comportements de nos modèles, mais de choisir une mesure adéquate et représentative d'éventuels phénomènes d'auto-organisation.

À ce stade, deux approches s'ouvrent à nous pour explorer les comportements des systèmes : l'analyse, qui consiste à chercher des propriétés générales des modèles étudiés, et la simulation, qui vise à "essayer" nos modèles en les instanciant et en les plongeant dans le temps.

De par la taille et la complexité des systèmes considérés, l'approche analytique va être difficile à mettre en œuvre et lorsque cela est possible, les observations sont généralement limitées dans leur portée, ou restreintes à des cas bien particuliers. Nous avons donc choisi d'appréhender les comportements des modèles sous l'angle de la simulation, qui permet d'obtenir facilement une estimation du comportement des modèles à partir de quantifications, et ainsi d'automatiser l'étude des variations de comportements dans l'espace des modèles et des perturbations considérés. Cependant, comme la simulation est limitée par de nombreux paramètres, nous nous réservons le droit d'apporter occasionnellement quelques arguments analytiques, afin de préciser la nature des effets des perturbations sur la dynamique des modèles.

## Plan de la thèse

Dans cette thèse, nous explorons la définition de la robustesse dans le contexte de la modélisation de systèmes complexes par les automates cellulaires. Si la robustesse se définit généralement par rapport à un comportement et une perturbation, nous allons considérer un autre type de robustesse, la robustesse des modèles, qui cherche à estimer si le comportement dépend d'une définition précise du modèle, ou bien s'il est invariant par rapport à de petites perturbations sur le modèle. Ce point de vue va donc nous amener à considérer le comportement du modèle et à en explorer la robustesse en considérant différents types de perturbations. L'objectif principal de cette thèse est donc de développer des outils et méthodes pour faciliter l'étude de la robustesse des modèles. Notre réflexion s'organisera en deux parties, correspondant aux questions suivantes :

- Premièrement, comment explorer la robustesse du comportement d'un modèle ? Quels types de perturbations considérer ? Comment comparer les observations ?
- Deuxièmement, à partir des observations de la robustesse du comportement d'un modèle, comment les interpréter pour déterminer la robustesse du modèle ?

Dans la Partie I, nous allons nous concentrer sur un attribut spécifique des automates cellulaires, à savoir le mode de mise à jour, et le perturber pour étudier la robustesse des comportements. Nous allons ainsi définir plusieurs modes de mise à jour asynchrones proches en considérant différentes hypothèses de modélisation, comme la non-simultanéité des mises à jour cellulaires ou des échanges d'information imparfaits entre cellules. Nous voulons alors savoir si le choix de l'une ou de l'autre des perturbations peut avoir une incidence sur les comportements observés. Pour répondre à cette question, nous allons les appliquer à une famille d'automates cellulaires, les automates cellulaires élémentaires, que nous choisissons *primo* car ils constituent les modèles d'automates cellulaires les plus simples et *secundo* car ils présentent une grande variété de comportements.

- Le Chapitre 2 pose le point de départ de notre réflexion sur l'asynchronisme en revenant sur son idée originale, remettre en cause l'hypothèse de synchronisme parfait des automates cellulaires classiques. Revenant sur les diverses définitions trouvées dans la littérature, nous construisons notre propre définition de l'asynchronisme, en le considérant non pas comme une remise en cause de la simultanéité des mises à jour, mais comme une perturbation des échanges d'information entre cellules.
- Le Chapitre 3 constitue une étude expérimentale de la robustesse des automates cellulaires à différents types d'asynchronisme. En considérant les automates cellulaires élémentaires comme un ensemble représentatif, nous cherchons à mesurer les effets d'un changement de définition de l'asyn-

chronisme sur les comportements. En particulier, nous caractériserons ces changements par l'observation de transitions de phase.

- Le Chapitre 4 reprend les transitions de phase observées au chapitre précédent et cherche à les étudier par une approche plus analytique. En effet, en adoptant un point de vue microscopique sur le comportement des automates cellulaires, il est possible d'étudier localement les effets des asynchronismes sur la dynamique en vue d'en déduire des propriétés du comportement global.

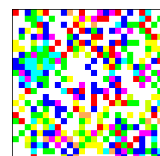
Dans un second temps, la Partie II va chercher à appliquer les enseignements acquis dans la partie précédente en explorant la robustesse d'un modèle particulier d'automate cellulaire, la formation d'essaim en gaz sur réseau, qui d'une part est plus complexe que les automates cellulaires élémentaires, et d'autre part possède une certaine valeur biologique en cherchant explicitement à reproduire un phénomène naturel. Il s'agira dans un premier temps de décrire le plus précisément possible le comportement du modèle, puis nous appliquerons notre méthodologie d'exploration de la robustesse, en nous intéressant à la définition de la grille et de la transition globale.

- Le Chapitre 5 rassemble un certain nombre de connaissances sur les modèles de formation d'essaim. On y trouve une généalogie des modèles qui ont conduit les scientifiques à considérer ce phénomène dans le cadre des automates cellulaires ainsi qu'une définition formelle des automates de gaz sur réseau ainsi que du modèle de formation d'essaim. Enfin, ce chapitre cherche à caractériser le comportement global du système, en en résumant les propriétés et décrivant la dynamique en termes de motifs macroscopiques.
- Le Chapitre 6 étudie les transformations du comportement pour diverses définitions de la grille cellulaire. À partir de la description des motifs macroscopiques, on cherche à observer les changements quantitatifs lorsque la grille est finie, infinie, rectangulaire, carrée, etc. Ces observations nous mèneront à établir quels motifs sont observés indépendamment de la forme considérée pour la grille cellulaire.
- Le Chapitre 7 étudie quant à lui l'influence de la perturbation de la mise à jour sur le comportement du système. Dans un premier lieu, nous entreprenons une réflexion sur la définition de l'asynchronisme appliqué à ce système. En montrant qu'un asynchronisme classique remet en cause les hypothèses du modèle, nous serons amenés à construire des transitions globales adaptées à la spécificité des gaz sur réseau. Ces nouvelles perturbations sont ensuite appliquées au modèle de formation d'essaim pour étudier la robustesse des motifs.

Enfin, nous revenons sur les enseignements tirés des Parties I et II pour conclure sur l'exploration de la robustesse.

Le travail sur l'asynchronisme de la transmission d'information et son application aux automates cellulaires élémentaires décrit aux Chapitres 2 et 3 a fait l'objet d'une publication dans les actes de la conférence *Unconventional Computation 2011* [BFC11b]. L'approche microscopique du Chapitre 4 a fait son apparition à l'occasion d'une version longue de cette article, publiée dans une édition spéciale de la revue *Natural Computing* [BFC12b].

Le travail sur la robustesse du modèle de formation d'essaim a donné lieu à plusieurs publications : premièrement, le comportement synchrone a été initialement décrit en détail dans deux rapports techniques [BFC11a, BFC13b]. La robustesse à l'asynchronisme a quant à elle fait l'objet d'une première publication dans la conférence *ACRI 2012* [BFC12a] et a depuis donné lieu à une version étendue dans la revue *Natural Computing* [BFC13a].





# Chapitre 1

## Automates cellulaires et robustesse

“Les trois théorèmes de la quantitativité psychohistorique :

1. la population examinée est inconsciente de l’existence de la psychohistoire ;
2. les périodes temporelles concernées sont de l’ordre de trois générations ;
3. la population doit être de l’ordre du milliard [...] pour avoir une validité psychohistorique.”

– Isaac Asimov, *Foundation*, 1942

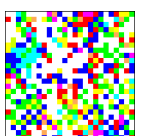
### Sommaire

---

<b>1.1 Définitions</b> . . . . .	<b>12</b>
1.1.1 Automates cellulaires synchrones . . . . .	12
1.1.2 Analyse du comportement . . . . .	13
1.1.3 Modèles d’automates cellulaires usuels . . . . .	14
1.1.4 Quelle définition de la robustesse ? . . . . .	15
<b>1.2 Quel comportement ?</b> . . . . .	<b>16</b>
1.2.1 Les modèles de calcul . . . . .	16
1.2.2 La simulation de phénomènes naturels . . . . .	17
1.2.3 Les systèmes dynamiques . . . . .	18
<b>1.3 Quelle perturbation ?</b> . . . . .	<b>19</b>
1.3.1 Perturbation de la grille . . . . .	19
1.3.2 Perturbation de la topologie . . . . .	20
1.3.3 Perturbation de la mise à jour locale . . . . .	21
1.3.4 Perturbation de la mise à jour globale . . . . .	21
<b>1.4 Position de notre travail</b> . . . . .	<b>21</b>

---

*Notre travail de thèse se place dans le contexte des automates cellulaires. Ce chapitre a donc pour objectif d’introduire les automates cellulaires, aussi bien du point de vue formel que de leur étude. Dans un premier temps, nous présentons la définition classique des automates cellulaires, ainsi que les concepts et notations associés qui seront utilisés tout au long de ce travail. Ensuite nous nous attachons à passer en revue les principales approches dans l’étude des automates cellulaires ainsi que la manière dont la question de la robustesse a été traitée.*



## 1.1 Définitions

### 1.1.1 Automates cellulaires synchrones

Concrètement, un automate cellulaire est défini comme une distribution spatiale d'un ensemble de cellules, dont l'état évolue au cours du temps selon une fonction de transition unique. Cette fonction est également dite *locale* dans la mesure où, pour une cellule donnée, la fonction ne prend en compte que les états des cellules voisines.

**Définition 1** (Automates cellulaires).

Un automate cellulaire (AC) est un quadruplet  $(\mathcal{L}, \mathcal{Q}, \mathcal{V}, f)$  où :

- $\mathcal{L}$  représente l'ensemble des cellules de l'automate.
- $\mathcal{Q}$  est l'ensemble fini des états des cellules.
- $\mathcal{V}$  est le voisinage.
- $f$  est la fonction de transition locale.

#### Définition de l'espace cellulaire

**Définition 2** (Ensemble cellulaire).

L'ensemble des cellules de l'automate  $\mathcal{L}$ , ou grille, est défini comme un sous-ensemble fini ou infini de l'espace de dimension  $d \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^d$ .

Dans l'ensemble  $\mathcal{L}$  ainsi défini, on représente une cellule à chaque sommet du graphe formé par la base canonique de  $\mathbb{Z}^d$ . À cause de la régularité de la répartition spatiale des cellules, il est d'usage d'utiliser le terme de *grille* pour désigner un espace cellulaire de dimension 1 ou 2.

#### Construction du voisinage

**Définition 3** (Voisinage).

Pour toute cellule  $c \in \mathcal{L}$ , le voisinage noté  $\mathcal{V}(c) \subset \mathcal{L}$  est une partie finie de l'espace cellulaire  $\mathcal{V} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{L})$  qui vérifie l'hypothèse de symétrie suivante :  $\forall c \in \mathcal{L}, \forall c' \in \mathcal{V}(c), c \in \mathcal{V}(c')$ .

On peut définir le voisinage de plusieurs manières :

- soit par une boule de rayon  $r \in \mathbb{R} : \forall c \in \mathcal{L}, c' \in \mathcal{V}(c)$  si et seulement si  $\|c - c'\| < r$  où  $\|c - c'\|$  est la distance entre les cellules  $c$  et  $c'$ ,
- soit par un vecteur de cellules  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_k\} \subset (\mathbb{Z}^d)^k$ . Dans ce cas, le voisinage pour une cellule  $c \in \mathcal{L}$  est donné par  $\mathcal{V}(c) = \{c + v_1, \dots, c + v_k\}$ .

Dans ce travail, nous donnerons préférence à la seconde option qui est plus générale. En particulier, cette expression du voisinage rend explicite sa cardinalité  $k = \text{card}(\mathcal{V})$  (le nombre de voisins pour chaque cellule) ainsi que l'ordonnancement des voisins (les indices correspondant à chaque composante du vecteur).

**Remarque.** Dans les cas où la grille cellulaire est finie ( $\mathcal{L} \neq \mathbb{Z}^d$ ), il peut se produire que pour une cellule  $c \in \mathcal{L}$ , il existe un  $v_i \in \mathcal{V}(c)$  tel que  $c + v_i \notin \mathcal{L}$ . Pour cette raison, les automates considérés dans l'ensemble de cette étude sont généralement définis par des grilles périodiques  $\mathcal{L} = (\mathbb{Z}/L_x\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/L_y\mathbb{Z})$ , où  $(L_x, L_y) \in \mathbb{N}^2$  sont les dimensions de la grille.

**Définition 4** (Configuration).

Une configuration  $x$  est l'association d'un état de  $\mathcal{Q}$  à chaque cellule de  $\mathcal{L}$ .

Les configurations servent à représenter l'ensemble des états des cellules à un instant donné. Par conséquent, une configuration  $x$  est un élément de l'espace des configurations  $\mathcal{Q}^{\mathcal{L}}$ , ou une fonction  $x : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{Q}$  qui associe à chaque cellule  $c \in \mathcal{L}$  un élément de  $\mathcal{Q}$ .

**Notation 1.1.1.** Pour un temps  $t$  donné, une configuration se note  $x^t = (x_c^t)_{c \in \mathcal{L}}$ . Pour faciliter la lecture, on s'autorise occasionnellement à ne pas noter le temps  $t$  dans une expression lorsque celui-ci est implicite.

## Dynamique synchrone des automates cellulaires

Classiquement, les automates cellulaires sont itérés de manière synchrone, ce qui veut dire qu'étant donnée une configuration  $x^t$ , la configuration au temps  $t + 1$  résulte de l'application de la fonction de transition locale simultanément pour toutes les cellules  $c \in \mathcal{L}$ .

**Définition 5** (Fonction de mise à jour globale synchrone).

La fonction de transition globale synchrone est la fonction  $F : \mathcal{Q}^{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{Q}^{\mathcal{L}}$  qui associe à chaque configuration  $x$  une configuration  $y$  telle que  $y_c = f(x_c, x_{c+v_1}, \dots, x_{c+v_k})$ , où  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_k\}$ .

Cette définition est importante car elle apporte un élément non conventionnel dans l'étude des automates qu'il nous revient de souligner dès maintenant. En effet, traditionnellement, on suggère que la fonction locale  $f$  s'applique à chaque élément du voisinage  $\mathcal{V}$ , que l'élément 0 (correspondant à la cellule considérée elle-même) y soit comprise ou non. Dans notre notation, on impose que la cellule  $c$  sur laquelle s'applique la transition est par définition comprise par la fonction de transition locale, que l'on place par convention en première position des paramètres de la fonction. Cet aspect, qui aura une importance dans la définition des perturbations en Partie I, n'a cependant pas d'incidence sur la généralité de notre approche.

La définition d'une transition globale  $F$  sur l'espace des configurations nous permet alors de déterminer la dynamique globale du système.

**Définition 6** (Dynamique globale).

La dynamique globale du système est définie pour un temps  $t$  comme le passage d'une configuration  $x^t$  à une configuration  $x^{t+1}$ , donnée par la relation :

$$x^{t+1} = F(x^t)$$

La description mathématique des automates cellulaires étant maintenant achevée, nous pouvons présenter les différentes visions que l'on peut avoir d'un automate cellulaire, afin de pouvoir considérer des perturbations du modèle sur lesquelles étudier la robustesse des comportements.

### 1.1.2 Analyse du comportement

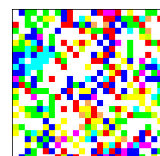
Ayant défini l'espace d'états des automates cellulaires, nous posons maintenant la question des outils dont nous disposons pour évaluer le comportement de notre système. Deux possibilités s'offrent à nous.

#### Visualisation des configurations

Premièrement, il nous faut disposer d'un moyen pour obtenir rapidement et intuitivement des informations sur l'état d'un système. Ici, il ne s'agit donc pas de classer ou quantifier un comportement mais de laisser à l'observateur le soin de se faire sa propre idée du caractère émergent du comportement, pour par la suite, pouvoir orienter ses observations et obtenir plus précisément des informations sur la dynamique du système. La construction d'une visualisation consiste à générer une image correspondant à la grille ou une partie de la grille cellulaire, que l'on découpe de manière à délimiter et dessiner les cellules. L'affichage d'une cellule résulte de la coloration de cette zone en assignant à chaque état possible une couleur. Deux représentations de la grille sont possibles selon la dimension de l'espace de l'automate :

1. Pour un espace de dimension 1, nous pouvons afficher le *diagramme espace-temps* qui représente par  $n + 1$  lignes empilées verticalement la configuration de l'automate aux temps successifs  $t - n$  à  $t$  (voir Figure 1.1(a)).
2. Pour un espace à 2 dimensions, nous pouvons afficher le *diagramme spatial* qui correspond à l'affichage de la configuration à un instant  $t$  donné (voir Figure 1.1(b)).

Si l'observation des diagrammes espace-temps permet généralement d'avoir une bonne idée du comportement et de repérer intuitivement les éventuels changements, elle ne permet pas toujours d'établir de manière tranchée si un comportement spécifique est observé ou non. De plus, il est souhaitable de disposer d'un moyen de "mesurer" les comportements, afin de pouvoir les comparer et par la suite quantifier les changements.





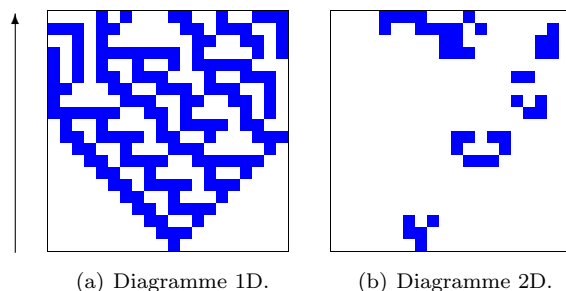


FIGURE 1.1 – Exemples de visualisation de configuration pour des automates cellulaires binaires de taille  $L = 20$ . Un carré blanc représente une cellule à l'état 0 et un carré bleu une cellule à l'état 1. À gauche (a) un diagramme espace-temps pour l'ACE 30, où la flèche donne le sens de parcours du temps. À droite (b), un diagramme spatial du Jeu de la Vie.

### Quantification des configurations

Pour quantifier un comportement, nous allons utiliser un paramètre sous la forme d'une fonction  $Q : \mathcal{Q}^{\mathcal{L}} \rightarrow \mathbb{R}$  qui pour une configuration donnée associe un réel représentant une quantité sur la configuration. Comme nous nous intéressons avant tout à des configurations globales formées à partir des états des composants, une approche simple consiste à chercher s'il existe un consensus sur les états des cellules. Pour cela, on va considérer une forme locale du paramètre désiré  $q : \mathcal{Q}^{1+\text{card}(\mathcal{V})} \rightarrow \mathbb{R}$  et tirer une moyenne de cette fonction sur l'ensemble des cellules de l'automate. On obtient alors une expression de la forme :

$$Q(\mathbf{x}) = \frac{1}{\text{card}(\mathcal{L})} \sum_{c \in \mathcal{L}} q(x_c, x_{c+v_1}, \dots, x_{c+v_k}), \mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_k\}$$

Pour exemple, dans le cas des automates cellulaires binaires, un paramètre couramment utilisé est la *densité*, qui dénote le ratio de cellules dans l'état 1, et que l'on définit localement par :  $q_{\text{dens}}(x_c, \dots) = x_c$ .

### 1.1.3 Modèles d'automates cellulaires usuels

#### Automates cellulaires élémentaires

Les automates cellulaires élémentaires représentent un exemple simple et classique d'automates cellulaires. Il repose sur une interprétation "au plus simple" et généralisée des automates cellulaires en considérant un espace d'état binaire, une unique dimension spatiale et un voisinage de plus proches voisins, ce qui permet d'explorer exhaustivement l'espace des transitions locales.

#### **Définition 7** (Automate cellulaire élémentaire).

Un automate cellulaire élémentaire (ACE) est défini comme un automate cellulaire unidimensionnel binaire de voisinage de rayon 1.

Selon la notation du paragraphe 1.1.1, définir un ACE revient à fixer l'espace d'états  $\mathcal{Q} = \{0, 1\}$ , le voisinage  $\mathcal{V}(c) = \{c-1, c, c+1\}$  et à déterminer la fonction de transition locale  $f : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}^3$  définie par  $x_c^{t+1} = f(x_{c-1}^t, x_c^t, x_{c+1}^t)$ . Il y a donc  $2^3$  configurations possibles pour les triplets  $(x_{c-1}^t, x_c^t, x_{c+1}^t)$  et  $2^{2^3} = 256$  ACE correspondant à l'association d'un état de  $\mathcal{Q}$  à chacune des configurations possibles. Nous associons un entier  $\mathfrak{R}(f)$  entre 0 et 255 à chaque règle selon la notation établie par [Wol84] :

$$\mathfrak{R}(f) = f(0, 0, 0) \cdot 2^0 + f(0, 0, 1) \cdot 2^1 + \dots + f(1, 1, 0) \cdot 2^6 + f(1, 1, 1) \cdot 2^7.$$

Dans la suite, nous noterons chaque ACE par sa règle associée  $\mathfrak{R}$  (e.g. la règle identité se note 204).

En pratique, on s'aperçoit que certaines règles sont *équivalentes*, c'est-à-dire que pour toute configuration  $\forall x \in \mathcal{Q}^{\mathcal{L}}$  et deux règles  $f$  et  $f'$ , ces règles sont équivalentes s'il existe une transformation  $T$  de

$x$  telle que  $T(f'(T(x))) = f(x)$ . L'intérêt de l'équivalence entre règles ACE est qu'il a été montré que ces relations sont conservées pour des relations globales, et que connaissant l'évolution temporelle d'une configuration  $x$  par une règle  $f$ , il était possible de prédire l'évolution de  $T(x)$  par la règle équivalente  $f'$ .

En particulier, on note trois types d'équivalence possibles pour les ACE :

1. Si deux règles  $f$  et  $f'$  sont telles que  $\forall (q_1, q_2, q_3) \in \mathcal{Q}^3$ ,  $f'(q_1, q_2, q_3) = f(q_3, q_2, q_1)$ , alors la transformation de symétrie spatiale  $T_s$  d'une configuration est une transformation qui vérifie l'équivalence entre  $f$  et  $f'$ .
2. Si deux règles  $f$  et  $f'$  sont telles que  $\forall (q_1, q_2, q_3) \in \mathcal{Q}^3$ ,  $f'(q_1, q_2, q_3) = 1 - f(1 - q_3, 1 - q_2, 1 - q_1)$ , alors la transformation de conjugaison  $T_c$  d'une configuration est une transformation qui vérifie l'équivalence entre  $f$  et  $f'$ .
3. Enfin, la composition des transformations de symétrie et de conjugaison conserve également les équivalences.

Par conséquent, il n'est pas nécessaire d'étudier l'évolution de règles équivalentes et on peut alors réduire l'espace des ACE à étudier, en sélectionnant pour chaque classe d'équivalence la règle de plus petit entier. On arrive alors à 88 règles non-équivalentes, que l'on appelle règles *minimales*, et dont nous pouvons étudier les propriétés indépendamment.

## Le Jeu de la Vie

Le Jeu de la Vie est un modèle d'automate cellulaire créé par le mathématicien Conway, où chaque cellule est associée à un des deux états *vivante* (1) ou *morte* (0) et interagit avec ses huit plus proches voisins selon les règles suivantes :

- toute cellule morte avec exactement trois voisins vivants devient une cellule vivante et reste morte sinon ;
- toute cellule vivante avec deux ou trois voisins vivants reste vivante et meurt sinon.

Mathématiquement, cela se traduit de la manière suivante :

**Définition 8** (Jeu de la Vie (d'après Conway [Gar70])).

L'automate cellulaire appelé Jeu de la Vie est un automate cellulaire défini par :

- une grille cellulaire de dimension 2 ;
- un espace d'état binaire  $\mathcal{Q} = \{0, 1\}$  ;
- le voisinage de Moore, comprenant les huit plus proches cellules voisines  $\mathcal{V} = \{c + v, 1, \dots, c + v_8\}$  ;
- la fonction de transition locale  $y_c = f_{\text{Life}}(x_c, x_{c+v_1}, \dots, x_{c+v_8})$  définie par :

$$f_{\text{Life}}(0, q_1, \dots, q_8) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_i q_i = 3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

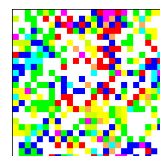
$$f_{\text{Life}}(1, q_1, \dots, q_8) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_i q_i = 2 \text{ ou } 3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ayant défini formellement les automates cellulaires, nous allons maintenant présenter la définition fonctionnelle de la robustesse et montrer comment celle-ci s'est déclinée dans les études sur différents modèles d'automates cellulaires. Ce travail nous permettra ainsi de prendre position par rapport aux travaux antérieurs et d'annoncer le sens de nos contributions.

### 1.1.4 Quelle définition de la robustesse ?

Étymologiquement, le terme *robustesse* est créé à partir de l'adjectif *robuste* dérivé du latin *robustus* (solide, puissant), lui-même venant de *robur*, le chêne. La robustesse est donc généralement synonyme de solidité, de stabilité, de constance face à des perturbations extérieures.

Comme pour les systèmes complexes, il n'existe pas de définition communément acceptée pour la robustesse. On est ainsi souvent amené à lui donner une définition en fonction du modèle et du domaine considéré :



- En mathématiques et en analyse numérique, la robustesse cherche à quantifier l'évolution des erreurs relatives dans une suite d'opérations [Hub96] (recherche de barycentre, résolution d'équation matricielle, interpolation ...).
- En physique, on entend par robustesse la stabilité au sens des systèmes dynamiques ; on parle alors en termes d'attracteurs, de paysages énergétiques [NMMF97], voire de propriétés universelles telle que des classes d'universalité ou des modèles minimaux [Hin00].
- Enfin en biologie, la robustesse d'un système s'exprime par sa capacité à réaliser une fonction spécifique en dépit des perturbations extérieures [Kit04].

Si la robustesse s'identifie à des techniques relativement connues dans les mathématiques et la physique, la robustesse biologique, qui nous intéresse particulièrement dans le cadre de l'étude des phénomènes d'auto-organisation, ne possède pas de cadre formel particulier, avec ses outils et théories.

### Les questions de la robustesse

Un certain nombre de formalisations mathématiques ont été proposées pour l'estimation de la robustesse dans un système donné. En particulier, Siegel *et al.* ont proposé de définir la robustesse, pour un modèle donné, à partir de trois questions [ASM04] :

1. Quel est le comportement ou la propriété étudiés ?
2. Quelles sont les perturbations auxquelles le système va être soumis ?
3. Comment quantifier les changements observés ?

Si la question de la quantification des changements se traite relativement facilement dans le cadre des automates cellulaires (cf. paragraphe 1.1.2), les deux premières questions "robustesse de quoi" et "robustesse par rapport à quoi?" sont fondamentalement liées au contexte du modèle et de son utilisation [Les08].

## 1.2 Quel comportement ?

Les automates cellulaires ont fait l'objet de nombreuses études sur leur comportement, qu'on peut distinguer en trois axes principaux selon l'utilisation que l'on souhaite en faire. Les automates cellulaires peuvent être alors considérés en tant que :

- *modèle de calcul* : on cherche à réaliser un calcul ou une tâche ;
- *simulation d'un phénomène naturel* : on veut reproduire un phénomène préexistant ;
- *système dynamique* : on étudie les propriétés générales et théoriques du modèle.

En ce qui concerne la robustesse, ces approches ne sont pas équivalentes, car les comportements étudiés se situent sur des plans différents.

### 1.2.1 Les modèles de calcul

Les pères fondateurs des automates cellulaires sont généralement reconnus comme étant von Neumann et Ulam. Alors que ce dernier étudiait le développement de cristaux sur des mailles régulières, il présente à von Neumann, travaillant alors à la conception d'une machine capable de s'auto-reproduire, un modèle mathématique spatialement distribué sur une grille et évoluant à temps discrets capables de générer des motifs complexes à partir de règles élémentaires simples. À partir de ce formalisme, von Neumann va construire un automate à 29 états qui réalise l'auto-reproduction [vN66]. Cette contribution a posé les fondations de la définition actuelle des automates cellulaires et ouvert la voie à de nombreuses études qui ont vocation à établir ce que l'on peut calculer avec un automate cellulaire. Pour la plus grande partie de ces travaux, cette question s'exprime soit par la recherche de modèles, de préférence simples, répondant à un problème donné, soit à la démonstration de propriété sur l'existence ou la calculabilité d'une solution à un problème donné.

Dans ce type d'approche, les définitions considérées pour le comportement reposent sur la recherche de modèles qui vérifient un ensemble de propriétés non-triviales. Les automates cellulaires considérés sont donc par nature peu robustes à des perturbations bien qu'il existe des approches prenant en considération cet aspect.

Pour plus d'information, on trouvera des articles de synthèse des propriétés computationnelles des automates cellulaires chez Mitchell *et al.* [MHC93] et plus récemment chez Kari [Kar05].

### La robustesse dans les modèles de calcul

Parmi les problèmes classiques des automates cellulaires, un des plus étudiés est le *problème de synchronisation du peloton de fusiliers* (en anglais *firing squad synchronization problem* [Moo64]), qui cherche à définir un automate cellulaire unidimensionnel où, partant d'une configuration où seule cellule est activée, celle-ci doit propager un signal tel qu'à un instant donné, toutes les cellules sont simultanément dans un même état (dit de 'feu'). Les recherches récentes dans ce domaine ont cherché à déterminer les modèles les plus simples en temps ou en taille de l'espace d'états qui résolvent ce problème. D'autres approches s'intéressent au contraire à trouver des modèles robustes, c'est-à-dire qui s'adaptent à différentes variations sur le problème initial : plusieurs généraux, taille dynamique, etc. Plus récemment, les travaux de Maignan constituent une proposition intéressante pour la construction de solutions robustes à des perturbations stochastiques [Mai10, MY12].

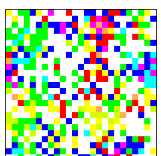
Plus généralement, un certain nombre d'études visent à construire des règles d'automates cellulaires qui simulent une *machine de Turing*, voire présentent la propriété d'*universalité*. Cette propriété a été entre autres démontrée pour le Jeu de la Vie par Berlekamp *et al.* [BCG82], et pour l'automate élémentaire 110 par Cook [Coo04]. Dans ce contexte, la question de la robustesse à des perturbations stochastiques a été principalement étudiée dans le but de modifier les modèles considérés en ajoutant des constructions adaptées afin de "réparer" les dommages causés par la perturbation. L'universalité des automates cellulaires asynchrones a ainsi été traitée par Peper [PITM02], en maintenant la synchronicité de la mise à jour par l'ajout d'états spécifiques. Ces méthodes ont été depuis éprouvées par la simulation exacte de modèles synchrones par des automates cellulaires asynchrones, comme le Jeu de la Vie [LAPM04] ou des machines auto-répliquatives [LAP07].

### 1.2.2 La simulation de phénomènes naturels

En parallèle des recherches sur les modèles de calcul, une autre approche de l'étude des automates cellulaires consiste à les considérer comme des modèles d'un phénomène existant, naturel ou artificiel, biologique ou physique, afin d'étudier leurs propriétés en vue d'acquérir de la connaissance sur le système cible. Dans ce contexte où les automates cellulaires servent de support pour représenter son sujet de manière simplifiée, il ne s'agit alors pas de reproduire exactement la réalité, mais de chercher à obtenir des phénomènes d'auto-organisation analogues à ceux du système considéré.

Un exemple des plus célèbres et des plus anciens dans le domaine est probablement le modèle proposé par Turing en 1952 [Tur52] : celui-ci propose de montrer comment la symétrie d'une masse homogène de cellules identiques peut être brisée pour former des motifs macroscopiques observés dans la nature, en reproduisant un mécanisme de réaction-diffusion sur un ensemble de cellules en anneau. Si la formulation mathématiquement commode du problème est également singulière et peu réaliste sur le plan de la biologie, cette étude montre qu'il est possible d'obtenir des comportements aussi complexes et surprenants que des ruptures de symétrie à partir de modèles relativement simples et discrets. Le modèle d'auto-reproduction de von Neumann [vN66], présenté jusqu'ici comme modèle de calcul, est également parfois considéré comme une abstraction de comportements biologiques. À ce propos, Toffoli explicite le lien entre l'approche des systèmes dynamiques discrets et la physique en soulignant que "le modèle de von Neumann n'essaie d'appréhender les phénomènes physiques et chimiques sous-jacents, mais utilise des règles 'imbriquées' qui reproduisent directement les aspects macroscopiques de la phénoménologie d'agrégats" [Tof94]. *L'objectif de cette approche n'est pas donc pas de construire un modèle physiquement réaliste du phénomène considéré, mais de chercher les composants nécessaires pour obtenir un comportement global particulier.*

Aujourd'hui, les modèles d'automates cellulaires qui simulent avec succès des phénomènes naturels sont nombreux et se trouvent à tous les niveaux : en physique avec la morphologie des flocons de neige [GG07], la dynamique des fluides [CD98] ou les automates de sable [DGM09], en biologie cellulaire avec la re-



production de comportements comme la chémotaxie [Fat10] ou le développement de tumeurs [dFHD11], en biologie comportementale pour les comportements de mouvements collectifs [Wol99] ou de formation de colonies de fourmis [KTJ+11]. Pour un exemple plus précis sur la modélisation d'un phénomène biologique avec des modèles simples, le lecteur est renvoyé au Chapitre 5 où est le phénomène collectif de formation d'essaim est considéré.

### La robustesse dans la simulation de phénomènes naturels

D'après Sené [Sen12], la robustesse dans les modèles de systèmes biologiques se décline selon plusieurs catégories. D'une part, la robustesse comportementale et environnementale s'intéresse à étudier la stabilité des comportements par rapport à des perturbations internes au modèle : on est ainsi amenés à observer si un comportement donné est conservé quelle que soit la configuration initiale, pour différentes plages de paramètres de contrôle. Dans ce cas, l'étude de la robustesse cherche avant tout à décrire précisément le comportement du modèle, en établissant le domaine de validité des comportements observés. Cette approche s'avère donc particulièrement adaptée à une comparaison entre les comportements du modèle d'automate cellulaire et la dynamique du système étudié.

D'autre part, la robustesse structurelle et architecturale cherche à perturber des éléments précis du modèle afin d'observer si ces variations ont une influence sur le comportement du modèle. Fatès et Morvan ont ainsi considéré l'influence de perturbations de la topologie et de la mise à jour globale pour le Jeu de la Vie [FM04] et Berry et Fatès [BF11] ont étudié la robustesse dynamique d'un automate cellulaire de réaction-diffusion à des perturbations de la loi locale et de la topologie. Cette seconde approche est par conséquent "auto-suffisante" dans la mesure où elle permet de s'affranchir de comparaisons avec le système cible pour se concentrer sur une étude du comportement du modèle. Dans ce cadre, l'étude de la robustesse se rapproche ici de l'étude des automates cellulaires en tant que systèmes dynamiques.

### 1.2.3 Les systèmes dynamiques

Enfin, une autre approche des automates cellulaires cherche à construire des classifications pertinentes des automates cellulaires. L'objectif de cette approche est de chercher à réaliser des classifications des modèles en fonction de leurs propriétés dynamiques, afin de comprendre leurs évolutions et de fournir des outils pertinents pour étudier ces modèles dans un cadre donné. Une des premières tentatives de classification des dynamiques est proposée par Wolfram en 1984 [Wol84]. Celui-ci s'intéresse à l'espace des automates cellulaires élémentaires, qui présente un large spectre de comportements visuellement différents, et tente de produire une classification empirique des 256 règles en observant les diagrammes espace-temps obtenus pour chacune et propose quatre classes de complexité :

**Classe 1** : la dynamique est simple et converge vers un même état uniforme.

**Classe 2** : la dynamique évolue vers un ensemble de structures simples stables ou périodiques ;

**Classe 3** ou classe *chaotique* : la dynamique semble aléatoire et ne converge pas de manière simple, le diagramme espace-temps présente des motifs structurés récurrents ;

**Classe 4** ou classe *complexe* : des structures simples apparaissent localement dans le diagramme espace-temps, et évoluent et interagissent de manière compliquée.

Si cette première classification est largement discutable dans sa formalisation<sup>5</sup>, elle permet de poser une question importante et inédite dans l'étude des automates cellulaires : comment et sur quels critères regrouper les modèles d'automates cellulaires ?

Pour un certain nombre de modèles comme le Jeu de la Vie ou les ACE classés comme complexes, la complexité des comportements observés a amené les chercheurs à rechercher de nouveaux outils pour les étudier et à les considérer sous l'angle des systèmes dynamiques [BKM97] et de la physique, auxquels on emprunte les outils et concepts principaux : systèmes conservatifs [Tak89], paysages énergétiques [NMMF97], ergodicité, entropie, méthodes du champ moyen, expansion, transitions de phase. Cette

5. À ce propos, lire le Chapitre 1 de la thèse de Ollinger qui passe en revue cette classification et différentes tentatives de formalisation [Oll02].

approche est donc particulièrement adaptée à l'étude de la robustesse dans des automates cellulaires et des systèmes complexes, dans la mesure où :

1. l'utilisation des statistiques est compatible avec l'hypothèse d'un double niveau de description macroscopique/microscopique, propre aux phénomènes d'auto-organisation des systèmes considérés ;
2. elle fournit un ensemble d'outils et de mesure qu'il est possible d'utiliser pour quantifier les comportements et les comparer dans le cadre d'une étude de la robustesse.

### 1.3 Quelle perturbation ?

La définition générale classique des automates cellulaires laisse place à beaucoup de liberté quant aux choix portés sur les divers éléments du modèle. On remarque en effet que dans un grand nombre d'études, ces éléments sont relativement indépendants les uns des autres. Si les définitions de ces éléments sont parfois intrinsèquement liées, comme c'est par exemple le cas pour le voisinage et la fonction de transition locale, il est cependant possible de considérer ces éléments séparément, en construisant des définitions générales de ces éléments, qui respectent une définition pour un modèle donné. Par conséquent, on est capable de représenter les modèles d'automate cellulaire dans un paradigme modulaire, qui décrit un modèle à partir de ses composants comme illustré par la Figure 1.2. L'avantage d'une telle représentation est qu'elle facilite l'appréhension de la robustesse d'un modèle, en considérant chaque élément du modèle de manière indépendante.

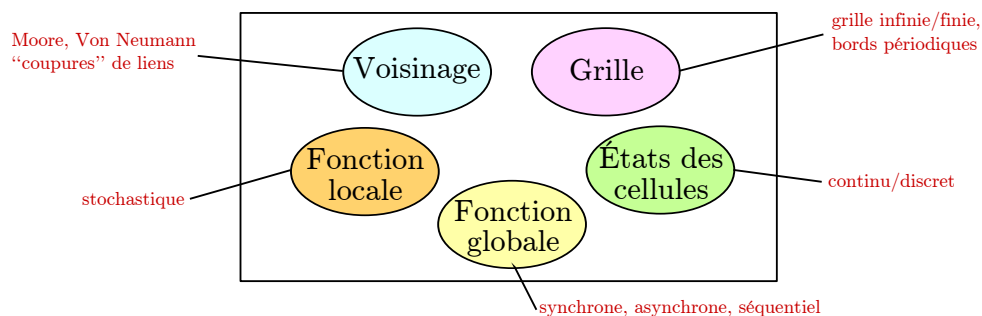


FIGURE 1.2 – Description modulaire des automates cellulaires. Dans cette représentation, plusieurs éléments de la définition peuvent être considérés indépendamment et composés pour former un modèle complet.

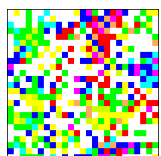
#### 1.3.1 Perturbation de la grille

Dans la définition classique des automates cellulaires, l'espace des cellules est décrit comme un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^d$  où  $d$  est la dimension spatiale du système. Perturber la définition de la grille, c'est donc considérer différentes possibilités pour les propriétés qui lui sont associées.

##### Fini ou infini

Une première piste concerne le caractère fini ou infini de la grille cellulaire. Si les simulations ne sont trivialement faisables que pour des cas finis (à cause de la limitation en temps et en espace), le point de vue et par conséquent les interprétations sur le comportement observé auront une portée différente sur les conclusions selon que l'on considère que la grille est finie ou infinie.

Un certain nombre d'approches de type modèle de calcul cherchent à prendre en compte l'aspect fini ou infini de la grille dans les propriétés du modèle. Pour exemple, dans le problème de la classification de la densité, il a été montré par Marcovici *et al.* que la règle de Toom réalisait une classification parfaite



sur des grilles bidimensionnelles infinies [BFMM12] alors que le cas d'une grille finie reste un problème ouvert [Fat12]<sup>6</sup>.

Dans le cas des systèmes dynamiques, le caractère fini ou infini du système étudié a des répercussions importantes sur les comportements observés. En particulier, les outils de la physique statistique nécessitent parfois des hypothèses sur la finitude du système.

Premier exemple : les transitions de phases, qui sont exprimées pour des systèmes d'échelle thermodynamique, définissent des changements de comportement dans des systèmes de taille infinie [Vio12]. En pratique, on peut cependant les observer expérimentalement grâce à la simulation mais la taille des systèmes et de l'échelle des temps considérés a une importance primordiale dans les résultats obtenus [FS88]. Typiquement, il faut s'assurer que la taille des grilles considérées n'influence pas les résultats obtenus (voir Chapitre 3), et que l'utilisation de configurations finies n'interdit pas la généralisation de ces observations aux configurations infinies.

Second exemple : l'hypothèse d'ergodicité sur un système de taille finie dit que toute configuration d'un ensemble donné est visitée un nombre infini de fois sur des temps de simulations infinis. Nous verrons également au Chapitre 6 ce que le passage à une grille infinie implique pour un automate cellulaire dont la dynamique est ergodique.

### Influence de la dimension

La dimension  $d$  de la grille cellulaire fait parfois l'objet d'études de robustesse. Il s'agit alors, à partir d'un modèle donné d'automate cellulaire, d'adapter certains composants comme le voisinage et la fonction locale afin de reproduire un comportement individuel similaire et d'observer si le même comportement global est observé. Une telle approche est considérée par exemple par Figueredo *et al.* qui ont étudié pour un modèle d'infection du VIH des variations quantitatives significatives lorsque l'espace cellulaire passe de dimension 2 à 3 [FCdS08].

### 1.3.2 Perturbation de la topologie

Par perturbation de la topologie, on entend ici l'étude des comportements de certaines règles d'automates cellulaires pour différents voisinages. En raison de la forte connexion entre la définition de la mise à jour et du voisinage, le nombre d'études qui traitent de la robustesse à la topologie est limité, et concerne le plus souvent des approches expérimentales sur des règles locales dont la définition est *a priori* indépendante du voisinage (par exemple la minorité, la majorité). Dans ce domaine, deux approches pour la perturbation de la topologie se distinguent : l'une qualitative, qui explore plusieurs types prédéfinis de voisinages, et la l'autre quantitative, qui modifie aléatoirement un voisinage de référence.

Dans la première approche, l'approche qualitative, on considère des modèles particuliers d'automate cellulaire, en particulier définis pour une règle locale et un voisinage, et on cherche à vérifier que le même comportement est observé pour différents types de voisinage. Pour exemple, les travaux de Fatès sur le comportement d'agrégation des amibes sociales montre une robustesse du modèle d'automate cellulaire entre un voisinage de von Neumann (4 voisins) et de Moore (8 voisins) [Fat10].

Dans la seconde approche, l'approche quantitative, on part d'un voisinage spécifique et on crée, coupe ou modifie des liens de voisinage aléatoirement. Ainsi Serra et Villani étudient le comportement de la règle majorité sur une ligne en réassignant des liens vers des cellules aléatoires, résultant dans un graphe hybride entre automate cellulaire et petit-monde [SV02]. Dans une autre approche, Fatès et Morvan observent que le comportement du Jeu de la Vie asynchrone est plus proche de la dynamique synchrone lorsque l'on coupe aléatoirement des liens entre des cellules [FM04]. De même, la thèse de Rouquier présente des perturbations de la topologie dites dynamiques, en admettant que les coupures de liens ne durent que le temps d'une mise à jour globale [Rou08] et étudie la robustesse par une approche expérimentale pour les automates cellulaires élémentaires, puis analytique pour la règle de minorité.

Ces approches ne sont pas forcément exclusives : Berry et Fatès ont étudié l'influence de modifications qualitatives et quantitatives de la topologie sur le comportement d'un modèle automate cellulaire de

6. De manière surprenante, le problème inverse se pose dans le cas unidimensionnel : si l'on sait réaliser une classification de la densité avec une précision arbitraire pour le cas d'un automate fini [Fat11], le cas infini est beaucoup plus difficile.

réaction-diffusion [BF11].

### 1.3.3 Perturbation de la mise à jour locale

Une des premières études à considérer la perturbation d'un automate cellulaire a été réalisée par Toom [Too80]. Il y présente un automate cellulaire stochastique, dans lequel chaque cellule applique la règle de transition locale avec une certaine probabilité  $p$ , ou admet un nouvel état aléatoire sinon. L'idée de ce type d'étude est de trouver des règles locales qui permettent de mémoriser une information sur la configuration initiale malgré une transition "bruitée". Ce résultat a été par la suite concrétisé par exemple par les travaux de Gács qui introduisent la construction d'un automate cellulaire unidimensionnel universel bien que stochastique [Gác97].

### 1.3.4 Perturbation de la mise à jour globale

Les contributions présentées dans cette thèse ont pris le parti de se concentrer sur une exploration de plusieurs définitions du mode de mise à jour. La perturbation de la transition globale va donc faire l'objet d'une étude plus poussée au Chapitre 2.

## 1.4 Position de notre travail

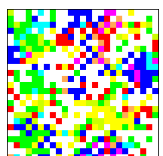
Dans ce chapitre, nous avons vu que la plupart des modèles étudiés se déclinent selon différents axes en fonction de leur contexte d'utilisation et des outils utilisées pour appréhender leur comportement. Nous avons ensuite cherché à représenter l'espace des perturbations possibles en représentant les modèles d'automates cellulaires de manière modulaire, et nous avons montré que l'exploration de la robustesse dans les automates cellulaires dispose d'une grande variété de perturbations des différents éléments du modèle de base. Ce tour d'horizon des différentes approches dans l'étude de la robustesse des automates cellulaires va maintenant nous permettre de définir précisément notre travail.

Dans le cadre d'une étude des phénomènes d'émergence, les modèles que nous serons amenés à manipuler sont la plupart du temps d'inspiration biologique, c'est-à-dire que ces modèles cherchent à imiter la structure de systèmes biologiques afin de reproduire de manière analogue le comportement auto-organisé. On se place donc *a priori* dans le cas de la simulation de systèmes naturels.

Cependant, l'étude des comportements des modèles de simulation de systèmes naturels peut être difficile à appréhender, car elle suggère un lien au système cible et par conséquent à un ensemble de théories et d'outils qui ne sont pas nécessairement à la portée des spécialistes d'automates cellulaires. De plus, la validation de tels modèles passe généralement par un protocole expérimental qui confronte les données du modèle au système cible, ce qui n'est pas toujours évident dans le cas des automates cellulaires. Dans notre approche, nous faisons donc volontairement le choix de nous affranchir du système cible et de nous concentrer sur la robustesse du comportement du modèle. En effet dans une hypothèse de comportement auto-organisé, on va chercher à montrer que le comportement n'est pas influencé par de petites perturbations locales sur le modèle.

Le premier point de difficulté qui va nous préoccuper est la question de la perturbation à considérer. Comme nous l'avons vu, le champ des perturbations possibles pour un automate cellulaire est riche et largement méconnu. Comment alors choisir une "bonne" perturbation à appliquer au modèle considéré pour étudier la robustesse de son comportement ? Cette question étant difficile à traiter en toute généralité, nous proposons de démontrer sa richesse en étudiant les effets de plusieurs perturbations sur un même exemple. À l'instar d'auteurs comme Ingerson et Buvel, Schönfisch et de Roos, Fatès, etc., nous allons considérer ces perturbations dans le cadre des automates cellulaires élémentaires, car ces modèles présentent des comportements variés, et sont simples à simuler et à quantifier.

Dans un second temps, nous considérons un modèle particulier de simulation de phénomène naturel, la formation d'essaim, et explorons la robustesse de son comportement à la lumière des techniques développées en première partie. En particulier, nous sélectionnons différentes perturbations pertinentes

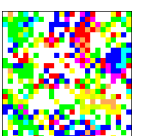




par rapport aux hypothèses propres au modèle, et estimons la robustesse du comportement pour chaque perturbation, afin d'obtenir une connaissance et une compréhension plus précise des phénomènes d'auto-organisation.

Première partie

Exploration de la robustesse à  
l'asynchronisme des automates  
cellulaires





La recherche sur la robustesse des automates cellulaires s'est surtout attachée à remettre en cause les principes fondamentaux des automates cellulaires, afin de montrer que la formulation classique des automates cellulaires, tels que la régularité du graphe des voisinages ou la synchronicité de la mise à jour globale, joue un rôle de premier plan dans le comportement du système. Ce constat met en cause leur validité en tant que modèles de systèmes complexes : pour un automate cellulaire donné, comment savoir quelle partie du comportement est liée à l'émergence de comportements individuels et laquelle est liée à la définition particulière du modèle ?

L'étude de la robustesse des comportements va nous permettre d'apporter une réponse à cette question : en effet, si on arrive à montrer qu'un comportement est observé pour un ensemble de modèles "proches", on peut supposer que ce comportement ne dépend pas de la formulation du modèle et obéit donc à des principes émergents. On se propose donc d'**explorer la robustesse** d'un modèle, en considérant un ensemble de perturbations et en comparant leurs effets sur les comportements.

Dans cette partie, nous allons nous concentrer sur un type de perturbation particulier, l'asynchronisme, et chercher à déterminer **plusieurs formes de perturbations** proches, pour ensuite les comparer dans leurs effets. On espère ainsi montrer que la définition de la perturbation considérée peut, comme la formulation classique, jouer un rôle important dans les comportements des automates cellulaires. Par ailleurs, étudier des comportements sur un ensemble de perturbations nous permet de mieux comprendre les mécanismes de l'émergence et les liens qui existent entre le modèle, ses entités composantes et le comportement observé.

Comment montrer dans le cas général l'intérêt de cette méthodologie ? Notre approche, plutôt que de prendre un modèle particulier d'automate cellulaire, consiste à considérer un **ensemble de modèles** et de chercher à étudier la robustesse de ces règles à notre panel de perturbations. Dans ce contexte, nous avons intérêt à restreindre l'espace d'exploration à des automates cellulaires aussi simples que possible, mais pas au détriment de la diversité des comportements observés. Pour cette raison, nous choisirons de considérer la classe des **automates cellulaires élémentaires**.

---

Dans le Chapitre 2, nous allons revenir sur les définitions associées à l'asynchronisme dans les automates cellulaires, en mettant l'accent sur ses origines liées à la remise en cause du synchronisme classique. À partir d'une définition indépendante et stochastique de la mise à jour globale – concrétisée par l' $\alpha$ -synchronisme, où à chaque pas de temps chaque cellule a une probabilité  $\alpha$  de se mettre à jour et  $1-\alpha$  de rester inchangée – nous allons développer deux autres types d'asynchronisme d'automate cellulaire. En effet, s'inspirant de problématiques liées au domaine des systèmes multi-agent et des réseaux, nous allons nous demander ce qu'il se passe si les informations qui concernent les états ne sont pas transmises de manière parfaite entre les cellules. Ceci nous amènera à considérer en plus de l' $\alpha$ -synchronisme deux autres types d'asynchronisme aux définitions proches : le  $\beta$ -synchronisme et le  $\gamma$ -synchronisme.

Dans le Chapitre 3, nous allons chercher à estimer dans quelle mesure nos asynchronismes diffèrent dans leurs effets sur les automates cellulaires. Pour tenter de capturer aussi généralement que possible ces différences de comportement, nous allons donc considérer les automates cellulaires élémentaires, introduits au Chapitre 1, qui présentent le double avantage d'être unidimensionnels et donc simples à simuler pour de grandes tailles, et de présenter une grande variété de comportements. En particulier, cette étude nous amènera à détecter un certain type de comportement réagissant à l'asynchronisme, les transitions de phase, qui nous permettront d'étudier qualitativement les différences entre nos trois asynchronismes.

Enfin, dans le Chapitre 4, nous continuerons notre étude des transitions de phase dans les automates cellulaires élémentaires soumis à l'asynchronisme, en essayant cette fois-ci de chercher analytiquement les causes des changements observés. Pour ce faire, nous adopterons une approche dite microscopique, qui consiste non pas à "prouver" le comportement en l'intégrant analytiquement, mais à décrire la dynamique du système par des mécanismes d'évolution des règles considérées localement pour en tirer des conclusions sur le comportement global. On espère ainsi montrer que des choix fins sur l'interprétation



donnée à l'asynchronisme dans les automates cellulaires a des effets potentiellement importants sur les comportements locaux, et déterminent le comportement global.

## Chapitre 2

# Définition d'un asynchronisme de la transmission d'information

“Une erreur commune que les gens font en essayant de concevoir quelque-chose de complètement infallible consiste à sous-estimer l'ingéniosité des imbéciles complets.”

– Douglas Adams, *Globalement inoffensive*, 1992.

### Sommaire

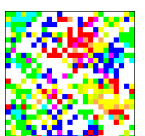
---

<b>2.1</b>	<b>L'asynchronisme dans les automates cellulaires . . . . .</b>	<b>28</b>
2.1.1	La remise en cause du synchronisme parfait . . . . .	28
2.1.2	L'insuffisance de l'asynchronisme de la mise à jour . . . . .	29
2.1.3	La remise en cause de la transmission d'information parfaite . . . . .	30
2.1.4	Définitions de deux nouveaux asynchronismes . . . . .	32
<b>2.2</b>	<b>Définitions formelles . . . . .</b>	<b>34</b>
2.2.1	Asynchronisme de la mise à jour : $\alpha$ -synchronisme . . . . .	34
2.2.2	Asynchronisme de la transmission d'information . . . . .	34
2.2.3	$\beta$ -synchronisme . . . . .	36
2.2.4	$\gamma$ -synchronisme . . . . .	37
<b>2.3</b>	<b>Synthèse . . . . .</b>	<b>37</b>

---

Dans ce chapitre, on se propose de discuter l'étude de la robustesse d'un modèle en concentrant notre point de vue sur une perturbation du mode de mise à jour afin d'en explorer les définitions. Après avoir exposé les travaux en relation avec l'étude de la robustesse à l'asynchronisme ainsi que la plupart des résultats majeurs dans le domaine, nous montrons que si une définition “intuitive” de l'asynchronisme, comme la remise en cause de l'hypothèse du synchronisme parfait, permet dans la plupart des cas de tester la robustesse du comportement d'un modèle, il arrive qu'une telle définition soit incompatible avec un certain nombre de modèles, où des entités ou de l'information sont représentées et évoluent sur l'espace cellulaire.

En particulier, en nous basant sur l'idée que l'asynchronisme porte non pas sur la non-simultanéité des mises à jour, mais sur une transmission imparfaite de l'information, nous serons amenés à proposer deux nouveaux modes de mise à jour asynchrone, qui perturbent l'émission et la réception des informations sur les états des cellules. Enfin, nous présentons une formalisation des divers asynchronismes proposés qui seront étudiés dans les chapitres suivants.



## 2.1 L'asynchronisme dans les automates cellulaires

La perturbation de la mise à jour globale, aussi appelée *asynchronisme*, est une des perturbations les plus explorées dans le cadre des automates cellulaires. En effet, la définition classique des automates cellulaires (cf. paragraphe 1.1.1) définit ainsi la mise à jour globale du système comme synchrone, c'est-à-dire que l'ensemble des cellules qui composent l'automate appliquent la fonction de mise à jour locale simultanément. Or si cette propriété est généralement nécessaire dans les approches de type modèles de calcul, elle peut également poser problème dans d'autres approches, comme les modèles de systèmes dynamiques ou de systèmes complexes, où le synchronisme ne répond pas à une hypothèse précise de modélisation.

En particulier, dans les modèles où l'étude des phénomènes d'auto-organisation est centrale, on s'attend à ce que le comportement global dépende uniquement des règles de transition locales, et non des mécanismes définis à l'échelle globale, comme le synchronisme ou la taille de la grille considérée. Aussi, pour reprendre Slotine *et al.*, un modèle robuste doit être "insensible aux effets qui ne sont pas considérés dans sa conception" [SL+91]. Dans le cas du synchronisme, il est donc nécessaire de vérifier que la dynamique du système ne dépend pas directement de la définition de la mise à jour globale.

### 2.1.1 La remise en cause du synchronisme parfait

Une première approche de la robustesse à l'asynchronisme consiste à remettre en cause l'hypothèse de synchronisme parfait en considérant différents modes de mise à jour globaux asynchrones et en observant si les comportements résultants correspondent ou non au cas synchrone.

#### L'asynchronisme de la mise à jour

Interprétée comme une négation de l'hypothèse de synchronisme parfait, une première approche, que nous appellerons *asynchronisme de la mise à jour*, consiste à s'opposer à la simultanéité des mises à jour individuelles, en imposant qu'à chaque pas de temps, la règle de transition locale est appliquée à un sous-ensemble de l'espace cellulaire  $\mathcal{L}$ , alors que les cellules du complémentaire sont laissées inchangées. Une définition précise d'un asynchronisme de ce type nécessite donc simplement d'explicitier les règles de construction de ce sous-ensemble à chaque pas de temps. Ce type d'asynchronisme s'est ainsi traduit de différentes manières dans la littérature sur les automates cellulaires asynchrones [BBV12].

D'une part, un certain nombre d'études considèrent une mise à jour *séquentielle*, c'est-à-dire où seule une cellule est mise à jour à chaque pas de temps. Là encore, on dispose de plusieurs choix selon la manière dont la cellule mise à jour est sélectionnée : selon un cycle fixe, par un tirage aléatoire avec ou sans remise... En revanche, on peut soutenir que le passage d'une mise à jour synchrone à une mise à jour séquentielle est un changement radical, qui à ce titre peut difficilement être utilisée pour juger de la robustesse du comportement synchrone.

Dans une démarche d'étude de la robustesse, on préfère considérer de petites perturbations des composants, ou mieux des perturbations continues qu'il est possible d'étudier quantitativement. En particulier, l' $\alpha$ -synchronisme [FM05], aussi connu sous le nom de *mise à jour chronométrée aléatoire* (random clocked) [SdR99], constitue une des propositions les plus simples d'un asynchronisme continu. Il est défini intuitivement de la manière suivante :

**Définition 9** ( $\alpha$ -synchronisme – définition intuitive).

*Dans un mode de mise à jour  $\alpha$ -synchrone, à chaque pas de temps, chaque composant est considéré indépendamment et mis à jour avec une probabilité  $\alpha$ , et laissé inchangé avec une probabilité  $1 - \alpha$ .*

L' $\alpha$ -synchronisme se caractérise donc comme un mode de mise à jour stochastique qui utilise un unique paramètre  $\alpha$  pour représenter linéairement un spectre continu de modes de mise à jour s'étendant du synchronisme pour  $\alpha = 1$  à un asynchronisme quasi-séquentiel pour  $\alpha \rightarrow 0$ , voire parfois par convention à une mise à jour séquentielle aléatoire (aussi appelée *totalelement asynchrone*) pour  $\alpha = 0$ .

La plupart des travaux récents qui traitent de la définition attribuée à l'asynchronisme cherchent à généraliser l'asynchronisme de la mise à jour selon un concept unifié. Cette volonté a donné lieu à des propositions comme le  $m$ -synchronisme [DFMM12] où l'asynchronisme est défini par rapport à une mesure de probabilité, qui décrit comment les cellules sont sélectionnées à chaque pas de temps.

### L'étude de la robustesse à l'asynchronisme de la mise à jour

En 1984, Ingerson et Buvel ont remis en question les observations issues de la dynamique synchrone des automates cellulaires élémentaires, en “voul[ant] estimer dans quelle mesure les comportements intéressants des automates cellulaires proviennent de la mise à jour synchrone, et dans quelle mesure ils sont intrinsèques au comportement individuel” [IB84]. En considérant différents types de mise à jour, les auteurs montrent que des changements de comportement importants interviennent pour un certain nombre de règles, alors que d'autres ne sont que peu affectées. De même, lorsque Huberman et Glance étudient la robustesse du modèle spatial du “dilemme du prisonnier”, ils remarquent qu'une remise en cause de l'hypothèse de synchronisme parfait modifie qualitativement le comportement asymptotique observé [HG93].

Les études sur l'asynchronisme ont ensuite cherché à quantifier les changements de comportements apparaissant pour certains modèles d'automates cellulaires, comme le Jeu de la Vie. En effet, Conway, alors qu'il étudie ce modèle, observe que le comportement asymptotique de ce système se compose d'un ensemble de motifs périodiques apparaissant à certains endroits de l'espace cellulaire<sup>7</sup>. Première observation : une perturbation infinitésimale du mode de la mise à jour détruit les motifs de période supérieure ou égale à 2 pour laisser place à une configuration point fixe. Ce saut de comportement apparaît dans les expériences comme une discontinuité du comportement entre les cas synchrones et asynchrones [BB99].

Une seconde observation sur le Jeu de la Vie asynchrone a pendant longtemps intrigué les chercheurs : en effet, pour une valeur critique non-triviale du taux d'asynchronisme  $\alpha_c$ , le comportement du système change en passant d'un point fixe de faible densité à une configuration en labyrinthe de densité modérée [BD94]. Si ce phénomène est aujourd'hui relativement bien connu et identifié comme une transition de phase du second ordre appartenant à la classe d'universalité de la percolation dirigée [BB99], il n'existe à notre connaissance pas de preuve ou de critère analytique qui permettent de prévoir ce type de comportement (voir paragraphe 3.3.1).

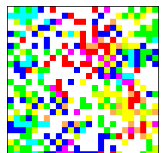
En parallèle, des expériences similaires ont été menées dans l'ensemble des automates cellulaires élémentaires et ont montré une grande variété de réactions à l'asynchronisme. Ingerson et Buvel ont observé dès 1984 que si certaines règles restent relativement insensibles à l'asynchronisme, d'autres montrent des changements drastiques de comportement [IB84]. Plus tard, Blok et Bergersen ont étudié quantitativement ces changements pour le Jeu de la Vie et identifié des transitions de phase de second ordre appartenant à la classe d'universalité de la percolation dirigée [BB99]. Des résultats similaires ont par ailleurs été trouvés pour les automates cellulaires élémentaires dans une étude de Fatès [Fat06].

L' $\alpha$ -synchronisme en tant que mode de mise à jour non-synchrone s'est donc révélé riche en découvertes sur les dynamiques des automates cellulaires, et constitue donc une “bonne” définition d'un asynchronisme de la mise à jour, car il permet d'explorer tout un spectre de mises à jour s'étendant du synchrone au séquentiel et considère pour la sélection toutes les cellules de manière homogène et équiprobable à chaque pas de temps. En revanche, il arrive que l' $\alpha$ -synchronisme, et l'asynchronisme de la mise à jour de surcroît, trouvent leurs limites dans un certain nombre de modèles.

#### 2.1.2 L'insuffisance de l'asynchronisme de la mise à jour

Les modes de mises à jour présentés jusqu'à maintenant reposent sur un principe identique, celui d'un asynchronisme de la mise à jour, c'est-à-dire qu'à chaque pas de temps, seul un sous-ensemble, d'une ou plusieurs cellules de l'automate est mis à jour. Si cette perturbation est intuitivement et relativement facile à étudier et à mettre en œuvre, de par sa proximité avec les automates cellulaires probabilistes, il

7. C'est d'ailleurs sur ces motifs que s'est construite une preuve de l'universalité de Turing du Jeu de la Vie synchrone [Ren10].





a été observé en diverses occasions que ce mode de mise à jour pouvait être incompatible avec un certain nombre de modèles à temps discret disposant d'hypothèses supplémentaires sur l'évolution du système.

Un des premiers exemples sur le sujet nous vient de Ferber et Müller, qui considèrent le problème de la concurrence dans un modèle à temps discret d'agents situés en mouvement dans un espace [FM96]. En effet, si un mode de mise à jour séquentiel ne pose pas problème dans un tel modèle, il arrive dans le cas d'une mise à jour synchrone ou partiellement synchrone que deux composants réalisent simultanément des actions contradictoires (par exemple pousser une porte de part et d'autre). Cette situation pose problème, car elle induit une indétermination sur le résultat d'un tel événement : les agents se traversent-ils ou bien sont-ils bloqués ? Les auteurs sont donc amenés à proposer un cadre formel, le principe d'*Influence-Réaction*, dans lequel sont dissociées les actions entreprises par les composants du système et la résolution de ces actions.

De même, Fatès et Chevrier ont montré dans un automate cellulaire synchrone simulant des agents aux règles simples évoluant sur la grille cellulaire (dits *fourmis de Langton* [Lan86] ou *turmites*), que des petites différences dans les politiques de résolution des cas conflictuelles amènent à des différences majeures dans les motifs observés [FC10]. Belgacem et Fatès ont par ailleurs combiné mises à jour synchrone et asynchrone avec différentes politiques de résolution de conflit, et montré expérimentalement que les trajectoires observées dans la plupart des cas divergent, même si les auteurs ont également noté la présence de motifs robustes [BF12].

Un autre problème récurrent concerne les modèles d'automates cellulaires qui décrivent des entités se déplaçant spatialement sur la grille. En effet, comme les positions des agents sont représentées dans les états des cellules, comment faire voyager ces agents d'une cellule à l'autre sous une mise à jour stochastique, sans créer ni supprimer d'agents ? Ce type de situation, où les hypothèses du modèle impose des conservations à une échelle supérieure aux cellules impose de mettre en place des contraintes ou des structures supplémentaires. Différentes techniques ont été utilisées pour résoudre de type de situation, comme les mécanismes de synchronisation de Peper *et al.* [PITM02] (voir paragraphe 1.2.1), l'utilisation d'automates cellulaires dits transactionnels, comme chez Spicher *et al.* [SFS10], où les cellules s'échangent des signaux pour s'accorder sur le transfert d'un agent... Cette question est centrale aux modèles de *processus d'exclusion simple totalement asymétrique* (TASEP) qui cherchent à construire des modes de mises à jour asynchrones qui maintiennent une conservation d'un nombre de particules voyageant à travers les nœuds du système. Dans le cadre des automates cellulaires, cette thèse proposera de se poser cette question dans le cadre des automates de gaz sur réseau, au Chapitre 7.

### 2.1.3 La remise en cause de la transmission d'information parfaite

Nous présentons maintenant deux exemples qui illustrent des visions différentes de l'asynchronisme, et qui vont "inspirer" notre définition d'asynchronismes proches.

#### Exemple 1 : le modèle MIC\*

Dans sa thèse de doctorat [Mic04], Michel s'intéresse au problème de la simultanéité dans les systèmes multi-agents. En effet, dans un paradigme qui représente des agents en interaction avec un environnement, il arrive que deux agents tentent de réaliser simultanément des actions conflictuelles (comme saisir un objet, pousser une porte). Comment alors résoudre ou éviter ce conflit, et ainsi lever les ambiguïtés qui peuvent provenir des actions des agents ? Après une présentation détaillée du problème, l'auteur propose une adaptation du cadre formel de l'Influence-réaction proposé par Ferber et Müller [FM96], afin de proposer un modèle formel d'exécution de systèmes multi-agents, le modèle MIC\* [GMG05]. Dans ce cadre formel, le système est décrit en séparant distinctement les agents, qui sont présentés comme des boîtes noires avec des entrées et des sorties, les objets d'interactions, qui représentent les actions des agents, et l'espace d'interaction, le milieu d'échange et de résolution des conflits. Son évolution, quant à elle, est découpée en trois étapes : (1) le *Mouvement*, qui correspond à la distribution des sorties sur l'espace d'interaction, (2) l'*Interaction*, qui résout la somme des objets d'interactions sur l'espace d'interaction et modifie les entrées des agents, et (3) le *Calcul* qui est l'application des processus décisionnels des agents sur leurs entrées pour générer des sorties. Le modèle MIC\* a été ensuite appliqué aux modèles

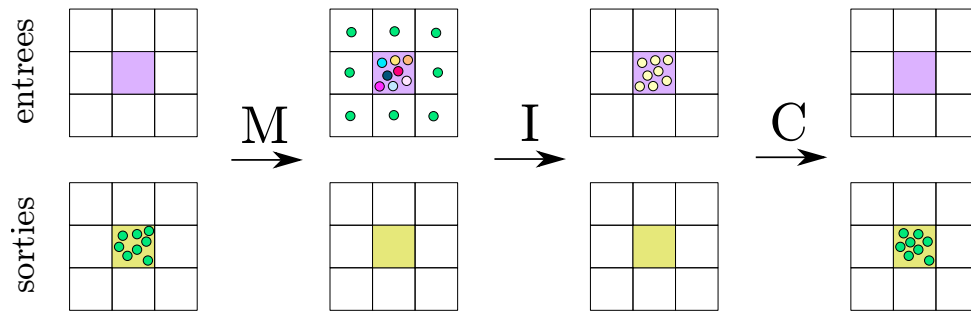


FIGURE 2.1 – Le modèle MIC\* appliqué à un automate cellulaire.

d'automates cellulaires, et en particulier au Jeu de la Vie (voir Figure 2.1). Dans ce contexte particulier, les automates cellulaires ne sont plus considérés simplement comme des objets mathématiques mais bel et bien comme des systèmes multi-agents à part entière, où chaque cellule est un agent avec sa perception et ses actions limitées, qui se résument pour une cellule à transmettre aux cellules voisines une information sur son état.

Cette approche constitue un point de vue “agentifié” des automates cellulaires, et trouve un intérêt particulier dans les études qui s'intéressent à la construction d'ordinateurs ou de réseaux avec une architecture proches des automates cellulaires [ACW12].

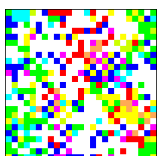
### Exemple 2 : avions en oscillations périodiques

Commençons par cibler notre approche sur le problème particulier de la synchronicité parfaite en considérant un exemple adapté. Considérons un modèle unidimensionnel à temps discret représentant deux avions volant dans des directions opposées. À chaque pas de temps, chacun doit donc décider d'orienter son assiette vers le haut ou le bas afin d'éviter une collision. De plus, on suppose que les avions ne peuvent communiquer que par leurs états propres, et que leur processus de décision est déterministe et identique pour chaque avion : “si l'avion opposé se dirige vers le bas, je me dirige vers le haut, et inversement”. Dans une modélisation synchrone, si les deux avions sont initialement orientés dans des directions similaires, ceux-ci vont corriger leur trajectoire à chaque pas de temps de manière identique, jusqu'à entrer en collision (cf. Figure 2.2(a)).

D'un point de vue intuitif, il apparaît que cette représentation est bien entendu peu réaliste par rapport à une simulation réelle, car les décisions prises par chacun des avions ne sont jamais exactement simultanées. On considère maintenant une modélisation asynchrone où à chaque itération du temps, les avions appliquent leur fonction de décision avec une certaine probabilité  $p_1$  et ne changent pas d'état sinon. On s'aperçoit que si  $p_1$  n'est ni nul ni égal à 1, le système trouve un nouvel équilibre où les avions arrivent à s'éviter (cf. Figure 2.2(b)).

Il est cependant possible d'entrevoir une autre interprétation d'un mode de mise à jour non-synchrone. Considérons cette fois-ci que les décisions des avions sont simultanées, mais que la mise à jour effective de l'état de l'avion (comprendre : changer effectivement la direction) nécessite un certain temps pour être réalisée, ou plus simplement est soumise à une probabilité  $p_2$ . Cela signifie qu'un avion peut avoir entamé son changement de direction, mais sans que cela soit apparent pour l'autre. Le résultat de ce nouveau mode de mise à jour est similaire au cas précédent : le système converge dans le nouvel équilibre et les avions s'évitent (cf. Figure 2.2(c)).

*Ces exemples suggèrent qu'il est possible, à partir d'une formulation synchrone d'un problème, d'entrevoir plusieurs interprétations pour un asynchronisme stochastique. Si une interruption aléatoire de la mise à jour locale ( $\alpha$ -synchronisme) est a priori la solution la plus intuitive, nous pouvons proposer de nouveaux modes de mises à jour qui perturbent non pas les mises à jour locales, mais les transmissions d'information sur les états des cellules.*



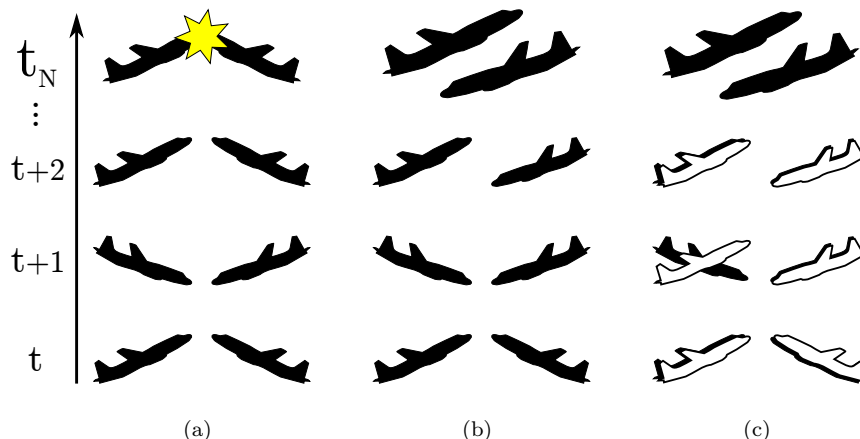


FIGURE 2.2 – Exemple 1 : avions en oscillations périodiques. Différents modes de mises à jour d'un même système peut résulter dans des modifications qualitatives des comportements asymptotiques. Le cas (a) correspond à une mise à jour synchrone, (b) à un mode de mise à jour asynchrone où les décisions ne sont pas simultanées et (c) à une situation où l'information sur les changements d'états peut induire des erreurs d'information.

#### 2.1.4 Définitions de deux nouveaux asynchronismes

Nous allons maintenant étendre notre vision des automates cellulaires, afin de proposer un cadre qui distingue explicitement les mises à jour des cellules et les échanges d'information entre les cellules de l'automate. En particulier, nous allons redéfinir le cycle cellulaire traditionnel en représentant précisément les flux d'informations à l'intérieur et à l'extérieur d'une cellule.

##### Extension du cycle cellulaire

Considérons la représentation d'une mise à jour locale pour une cellule. Comme illustré par la Figure 2.3(a), l'état au temps  $t + 1$  d'une cellule, noté  $y'$ , est classiquement le résultat direct de la fonction  $y' \leftarrow f(x, y, z)$ , où  $(x, y, z)$  sont les états au temps  $t$  de la cellule et de ses voisines. Dans cette première représentation, on remarque qu'il est possible de perturber cette transition, en l'interrompant avec une probabilité  $\alpha$ , et laissant l'état inchangé sinon ( $y' = y$ ).

Considérons maintenant que la transition de mise à jour ne peut utiliser directement les états  $x$  et  $z$  des cellules voisines, mais à la place doit utiliser des représentations  $x_D$  et  $z_G$  comme perception par la cellule centrale des états des cellules voisines (cf. Figure 2.3(b)). Ce point de vue introduit une extension de l'espace d'états du système, où l'on doit distinguer explicitement :

- l'état externe, ou *état observable*, qui correspond à la perception de l'état d'une cellule par une ou plusieurs cellules voisines ;
- l'état interne, ou *état propre*, qui représente l'état de référence d'une cellule<sup>8</sup>.

On se réserve pour l'instant la liberté de définir plus tard la structure de l'état observable et son utilisation dans la fonction de mise à jour locale de l'automate cellulaire. On peut néanmoins déterminer intuitivement que deux implémentations évidentes de l'état observable se profilent : la première suggère un unique état observable, accessible de manière identique par tous les membres du voisinage ; la seconde est un vecteur d'états qui correspondent chacun à un élément du voisinage.

En modifiant ainsi la représentation des états des cellules, on peut maintenant étendre le cycle d'une cellule en distinguant :

8. Plus pragmatiquement, on peut voir l'état propre comme la perception de l'état d'une cellule par elle-même.

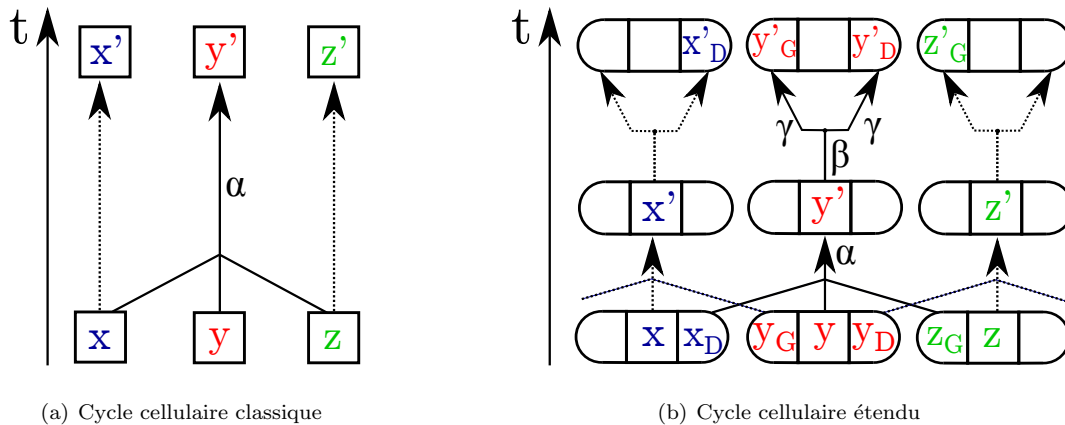


FIGURE 2.3 – Représentations classique et étendue du cycle cellulaire. Dans le cas classique (a), la transition locale revient à réaliser  $y' \leftarrow f(x, y, z)$ . Dans le cas étendu (b), la transition locale est divisée en étape de mise à jour  $y' \leftarrow f(x_D, y, z_G)$  et étape de transmission de mise à jour qui réalise parallèlement  $y'_G = y'$  et  $y'_D = y'$ . les symboles  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  représentent les différents flux d'information que l'on peut perturber par interruption aléatoire.

- l'étape de *mise à jour*, qui consiste pour une cellule à modifier son état propre à partir de celui-ci et de la perception des états des cellules voisines ;
- l'étape de *transmission*, où la cellule transmet aux cellules voisines la valeur mise à jour de son état propre. Cette étape revient à modifier l'état observable d'une cellule en propageant la valeur contenue dans l'état propre.

On remarque que si l'on ne considère pas de perturbation des transitions locales, le cycle cellulaire étendu est rigoureusement identique au cas synchrone. En effet, si la précondition  $\{y_G = y\} \wedge \{y_D = y\}$  est vérifiée au début d'un cycle cellulaire, on a bien la même expression de  $y' = f(x_D, y, z_G) = f(x, y, z)$ .

### Perturbation du cycle cellulaire étendu

On se place maintenant dans le cas où le cycle cellulaire est perturbé. Comme illustré dans la Figure 2.3, l' $\alpha$ -synchronisme consiste à réaliser la mise à jour de l'état d'une cellule avec une probabilité  $\alpha$ , et à le laisser inchangé sinon. Cette perturbation peut donc être exprimée dans le cadre du cycle cellulaire classique comme étendu, en l'explicitant comme une interruption aléatoire de l'étape de mise à jour, comme le montre la Figure 2.3(b).

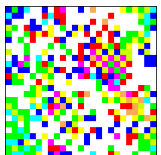
De la même manière, il est possible de considérer une perturbation de la transmission, appelée asynchronisme de la transmission d'information, en l'exprimant comme une interruption aléatoire de l'étape de transmission de la manière suivante :

**Définition 10** (Asynchronisme de la transmission d'information – définition intuitive).

L'asynchronisme de la transmission d'information est un mode de mise à jour défini dans le cadre du cycle cellulaire étendu, qui consiste à perturber l'étape de transmission en appliquant la transition sur les états observables avec une probabilité  $P$ , et à les laisser inchangés avec une probabilité  $1 - P$ .

Si cette définition du mode de mise à jour globale asynchrone est *a priori* indépendante de la forme donnée à l'état observable des cellules, il peut être utile à cette étape de notre réflexion de l'exprimer en des termes plus simples qui dépendent de l'état observable considéré. On sera alors amenés à déterminer deux cas :

- Premièrement, on peut considérer que l'état propre est unique et accessible de manière identique par tout le voisinage. Dans ce cas, l'asynchronisme de la transmission d'information revient à considérer une interruption de l'émission de l'état propre vers les cellules voisines. On appelle ce mode de mise à jour le  $\beta$ -synchronisme. Bien qu'il soit défini pour un état observable particulier, le  $\beta$ -synchronisme



peut également se définir pour d'autres formes d'état propre, simplement en corrélant chacune des transmissions individuelles, comme le montre la Figure 2.3(b)).

- Deuxièmement, on peut au contraire définir que l'état propre est un vecteur dont chaque composante correspond à un membre du voisinage. Ici, l'asynchronisme de la transmission d'information revient à considérer une interruption des *transmissions indépendantes* de l'état propre vers chacune des cellules voisines. Ce mode de mise à jour sera appelé  $\gamma$ -synchronisme (cf. Figure 2.3(b)).

La Figure 2.4 donne un aperçu des dynamiques possibles pour les différents modes de mise à jour ((a) synchrone, (b)  $\alpha$ -synchrone, (c)  $\beta$ -synchrone et (d)  $\gamma$ -synchrone). On souhaite maintenant définir formellement ces asynchronismes dans le cadre des automates cellulaires.

## 2.2 Définitions formelles

### 2.2.1 Asynchronisme de la mise à jour : $\alpha$ -synchronisme

Pour rappel, l' $\alpha$ -synchronisme s'exprime de la manière suivante : à chaque pas de temps, chaque cellule a indépendamment une probabilité  $\alpha$  de se mettre à jour et  $1-\alpha$  de rester inchangée. Formellement, cela consiste à introduire une fonction de sélection  $\Delta_\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{L})$  qui retourne pour un temps  $t$  entier l'ensemble des cellules de  $\mathcal{L}$  à mettre à jour, où chaque cellule a une probabilité  $\alpha$  d'être sélectionnée.

La nouvelle fonction de transition de l'automate cellulaire  $\alpha$ -synchrone devient pour tout temps  $t \in \mathbb{N}^*$  et toute cellule  $c \in \mathcal{L}$ , avec le voisinage  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_k\}$  :

$$x_c^{t+1} = (F_\Delta(x^t))_c = \begin{cases} f(x_c^t, x_{c+v_1}^t, \dots, x_{c+v_k}^t) & \text{si } c \in \Delta(t) \\ x_c^t & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est à noter que pour  $\alpha = 1$ , l'ensemble  $\Delta_\alpha(t)$  est égal à  $\mathcal{L}$  pour tout temps  $t$  et on se ramène donc à une dynamique synchrone et déterministe. En revanche, pour  $\alpha \rightarrow 0$ , l'ensemble  $\Delta_\alpha(t)$  tend à être égal à l'ensemble vide ou à un singleton, ce qui suppose que l'on s'approche d'une dynamique totalement asynchrone.

### 2.2.2 Asynchronisme de la transmission d'information

Par contraste avec l'asynchronisme de la mise à jour, l'asynchronisme de la transmission d'information vise à représenter une perturbation non pas de la mise à jour de l'état d'une cellule, mais de la transmission de l'état mis à jour au voisinage. Avant de décrire précisément la dynamique  $\beta$ - et  $\gamma$ -synchrone, il nous faut donc modifier le formalisme des automates cellulaires de manière à rendre compte de la différence que l'on veut représenter entre l'état propre d'une cellule, qui désigne son état réel mis à jour à chaque pas de temps de son état observable qui représente quel état est perçues par les cellules voisines.

Pour commencer, considérons un automate cellulaire  $\mathcal{A} = \{\mathcal{L}, \mathcal{Q}, \mathcal{V}, f\}$ . De  $\mathcal{A}$  nous dérivons un nouvel automate cellulaire  $\mathcal{A}' = \{\mathcal{L}, \mathcal{Q}', \mathcal{V}, f'\}$  tel que :

- $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}^m$  est le nouvel espace d'état des cellules, qui représente l'état propre ( $\mathcal{Q}$ ) ainsi qu'un état observable sous la forme d'un vecteur de  $m \in \mathbb{N}$  éléments de  $\mathcal{Q}$  ( $\mathcal{Q}^m$ ).
- $f' = f_{\text{tra}} \circ f_{\text{maj}}$  est la nouvelle fonction de transition locale, qui se décompose en deux sous-fonctions appliquées séquentiellement qui représentent respectivement la mise à jour de l'état propre de la cellule et sa transmission au voisinage.

En élargissant l'espace d'états cellulaires et en décomposant la fonction de transition locale comme indiqué précédemment, on se donne les moyens de représenter explicitement les perceptions que les cellules ont les unes des autres. La représentation sous forme de vecteur de l'état observable permet de laisser à plus tard la détermination de la représentation de l'état observable d'une cellule par une autre. Pour l'instant, nous allons nous attacher à décrire comment la fonction de mise à jour représente la mise à jour de l'état propre et sa transmission au voisinage par l'intermédiaire de l'état observable.

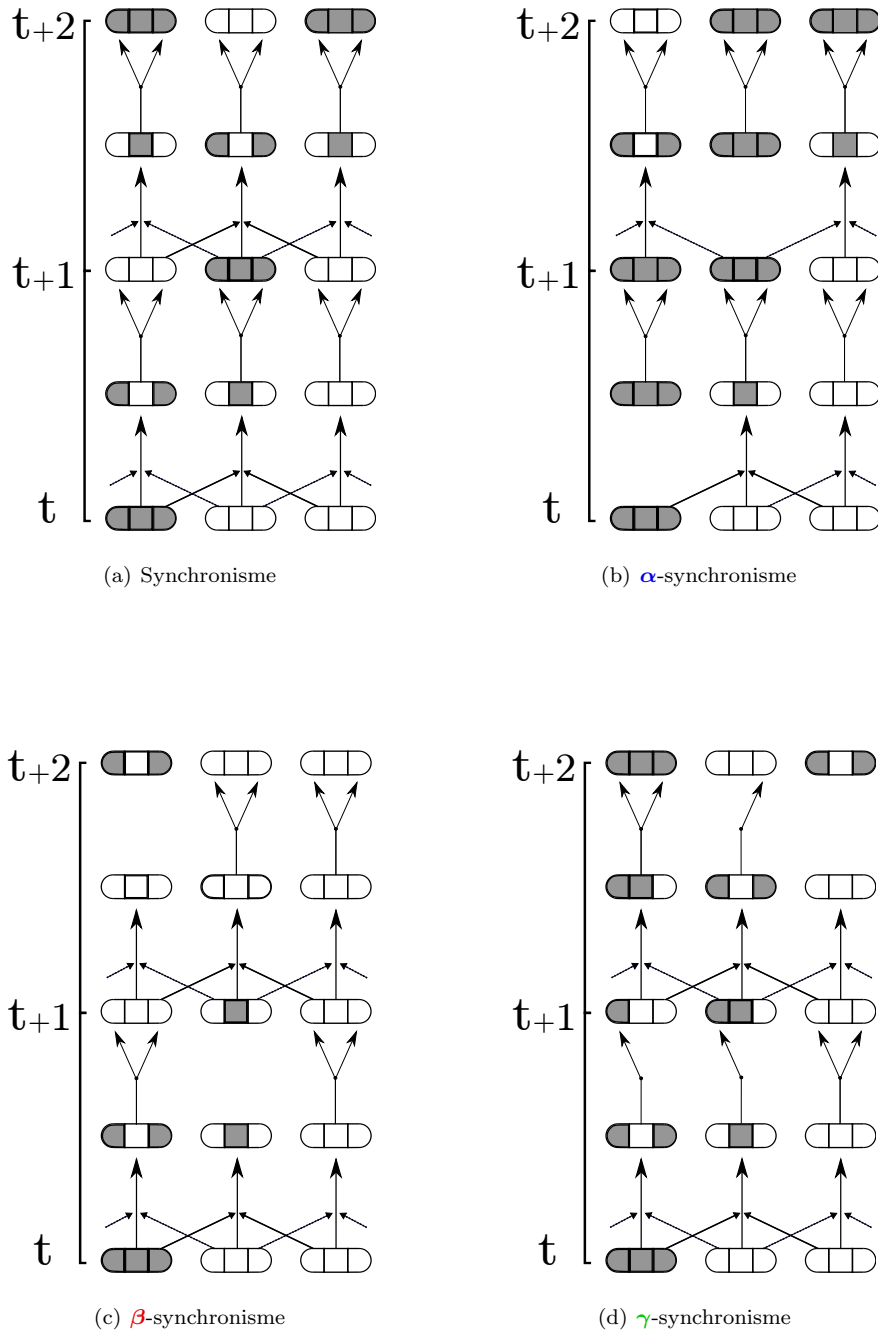
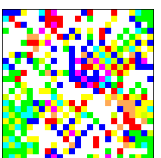


FIGURE 2.4 – Les différents modes de mise à jour appliqués à une portion de l’automate cellulaire élémentaire 50 (cf. Chapitre 1). Le lecteur remarquera qu’en partant de la même configuration initiale à  $t$ , on arrive à différents résultats à  $t + 2$ .



La fonction de mise à jour locale est donnée par  $f' = f_{\text{tra}} \circ f_{\text{maj}}$  où  $f_{\text{maj}}$  réalise la mise à jour de l'état propre de la cellule et  $f_{\text{tra}}$  représente la transmission de l'état. Nous allons maintenant détailler l'écriture de chacune de ces fonctions.

### Mise à jour de l'état propre

La fonction  $f_{\text{maj}} : \mathcal{Q}^{k+1} \rightarrow \mathcal{Q}'$  est la *fonction de mise à jour* ; elle applique la fonction  $f$  à l'état propre de la cellule considérée ainsi qu'aux états propres des cellules du voisinage :

$$f_{\text{maj}} \left( \begin{pmatrix} e \\ \mathbf{o} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdot \\ \mathbf{o}_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \cdot \\ \mathbf{o}_k \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \phi(e, \mathbf{o}_1, \dots, \mathbf{o}_k) \\ \mathbf{o} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

où la fonction  $\phi : \mathcal{Q} \times (\mathcal{Q}^m)^k \rightarrow \mathcal{Q}$  donne le résultat de la fonction de transition  $f$  appliquée à l'état propre  $e$  de la cellule considérée ainsi qu'aux états observables  $\mathbf{o}_i$  des cellules voisines. Comme pour la construction de l'état observable, la définition de la fonction  $\phi$  est laissée à plus tard.

### Transmission de l'état propre à l'état observable

La fonction  $f_{\text{tra}} : \mathcal{Q}' \rightarrow \mathcal{Q}'$  est la *fonction de transmission* ; elle effectue la propagation de l'état propre  $e$  de la cellule considérée à son voisinage. Cette opération consiste algorithmiquement à remplacer les valeurs de l'état observable par l'état propre.

À cette fin, nous introduisons un ensemble de variables aléatoires  $\theta_i^{t,c}$  – pour un temps  $t \in \mathbb{N}$ , une cellule  $c \in \mathcal{L}$ , et le  $i^{\text{ème}}$  élément de  $\mathbf{o} : i \in \llbracket 1, m \rrbracket$  – qui vont représenter les transmissions atomiques de l'état propre  $e$  au  $i^{\text{ème}}$  élément de l'état observable  $\mathbf{o}$ , tel que :

$$\forall t \in \mathbb{N}, \forall c \in \mathcal{L}, \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \theta_i^{t,c}(e, o) = \begin{cases} e & \text{avec une probabilité } P, \\ o & \text{avec une probabilité } 1 - P, \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $P$  correspond au taux de synchronisme défini par l'asynchronisme considéré.

La fonction de transmission  $f_{\text{tra}}$  s'écrit donc, pour une configuration  $(e, \mathbf{o})$  à une cellule  $c$  et un temps  $t$  :

$$f_{\text{tra}} \begin{pmatrix} e \\ o_1 \\ \vdots \\ o_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ \theta_1^{t,c}(e, o_1) \\ \vdots \\ \theta_m^{t,c}(e, o_m) \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

### 2.2.3 $\beta$ -synchronisme

Le  $\beta$ -synchronisme, comme mentionné précédemment, consiste à mettre à jour toutes les cellules à chaque pas de temps, puis à effectuer une transmission de l'information de changement d'état avec une probabilité  $\beta$ , et à ne pas transmettre cette information avec une probabilité  $1-\beta$ . La transmission d'information est donc une fonction binaire : soit l'état propre mis à jour est transmis à toutes les cellules du voisinage, soit il n'est transmis à aucun et l'état observable demeure inchangé.

Par conséquent, on peut représenter l'état observable par un unique élément de l'espace d'état  $\mathcal{Q}$ , ce qui revient à dire que la taille du vecteur  $\mathbf{o}$  est égale à  $m = 1$ . On détermine alors :

#### Définition 11 ( $\beta$ -synchronisme).

Le  $\beta$ -synchronisme est un asynchronisme de la transmission d'information déterminé par :

- l'état observable d'une cellule  $o(c)$ , donnée par  $x(c) = (e^t(c), o(c))$  avec  $e \in \mathcal{Q}$  et  $o \in \mathcal{Q}$  ;
- la fonction de mise à jour  $\phi(e, o_1, \dots, o_k) = f(e, o_1, \dots, o_k)$ .

Alternativement, on peut exprimer les fonctions de mise à jour et de transmission de manière simplifiée en posant

$$f_{\text{maj}} \left( \begin{pmatrix} e \\ o \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdot \\ o_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \cdot \\ o_k \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} f(e, o_1, \dots, o_k) \\ o \end{pmatrix} \text{ et } f_{\text{tra}} \begin{pmatrix} e \\ o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ o \end{pmatrix}$$

et en modifiant la fonction de transition globale de manière à appliquer  $f_{\text{tra}} \circ f_{\text{maj}}$  ou  $f_{\text{maj}}$  selon que la transmission d'état est effectuée ou non.

En particulier, on posera une fonction de sélection  $\Delta_\beta$ , similaire à  $\Delta_\alpha$ , où les cellules de  $\mathcal{L}$  sont sélectionnées avec une probabilité  $\beta$ , et définir la fonction de transition globale, pour tout temps  $t \in \mathbb{N}$  et toute cellule  $c \in \mathcal{L}$ , avec le voisinage  $\mathcal{V} = \{n_1, \dots, n_k\}$  :

$$F_\Delta(x^t(c)) = \begin{cases} f_{\text{tra}} \circ f_{\text{maj}}(x_c^t, x_{c+v_1}^t, \dots, x_{c+v_k}^t) & \text{si } c \in \Delta(t) \\ f_{\text{maj}}(x_c^t, x_{c+v_1}^t, \dots, x_{c+v_k}^t) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme le  $\beta$ -synchronisme ne fait qu'élever au carré l'espace d'états  $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}^2$ , il est possible de représenter en notation l'état de la cellule dans une configuration donnée, en y représentant à la fois l'état propre et l'état observable.

**Notation 2.2.1** (Configuration d'une cellule en  $\beta$ -synchronisme).

Soit  $x \in \mathcal{Q}^{\mathcal{L}}$  une configuration et  $c \in \mathcal{L}$  une cellule. Si on note  $e = e^t(c)$  l'état propre et  $o = o^t(c)$  l'état observable de  $x^t(c)$ , on écrira  $x^t(c)$  sous la forme  $e^{(o)}$ .

### 2.2.4 $\gamma$ -synchronisme

De même, le  $\gamma$ -synchronisme est défini comme suit : à chaque pas de temps, chaque cellule met à jour son état propre mais transmet le nouvel état à chaque voisin indépendamment avec une probabilité  $\gamma$ . Autrement dit, là où le  $\beta$ -synchronisme simule une perturbation globale de la transmission du nouvel état au voisinage, le  $\gamma$ -synchronisme considère indépendamment chaque échange d'information entre cellules. Il en résulte que l'état observable dans  $\gamma$ -synchronisme se doit de représenter la perception de l'état d'une cellule  $c$  par chacun des voisins indépendamment, et qu'il s'écrit donc comme un vecteur de  $k$  éléments correspondant chacun à un voisin, soit  $m = k$ .

On définit alors :

**Définition 12** ( $\gamma$ -synchronisme).

Le  $\gamma$ -synchronisme est un asynchronisme de la transmission d'information déterminé par :

- l'état observable d'une cellule  $\mathbf{o}(c)$ , donnée par  $x(c) = (e(c), \mathbf{o}(c))$  avec  $e \in \mathcal{Q}$  et  $\mathbf{o} \in \mathcal{Q}^k$  ;
- la fonction de mise à jour  $\phi$  est donnée par :

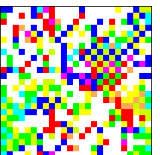
$$\phi(e, \mathbf{o}_1, \dots, \mathbf{o}_k) = \phi \left( e, \begin{pmatrix} o_{1,1} \\ \vdots \\ o_{1,k} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} o_{k,1} \\ \vdots \\ o_{k,k} \end{pmatrix} \right) = (e, o_{1,1}, \dots, o_{k,k}).$$

Ici encore, une manière alternative de représenter ce mode de mise à jour passe par une écriture légèrement différente des fonctions de mise à jour et de transmission :

$$f_{\text{maj}} \begin{pmatrix} e & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & o_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & o_{k,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(e, o_{1,1}, \dots, o_{k,k}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}, \text{ et } f_{\text{tra}} \begin{pmatrix} e \\ o_1 \\ \vdots \\ o_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ \theta_1(e, o_1) \\ \vdots \\ \theta_k(e, o_k) \end{pmatrix}$$

## 2.3 Synthèse

À l'issue de ce chapitre, nous avons défini les perturbations qui nous serviront à explorer la robustesse des modèles d'automates cellulaires. En partant de la remise en cause de l'hypothèse classique du synchronisme parfait, nous avons vu que plusieurs modes de mise à jour peuvent répondre à ce critère et constituer autant de définitions possibles de l'asynchronisme. Dans une volonté de minimiser les biais liés à la mise à jour globale, nous avons choisi de prendre comme point de départ de nos définitions





l' **$\alpha$ -synchronisme**, défini comme l'application à chaque pas de temps de la mise à jour locale avec une probabilité  $\alpha$ , et de l'identité sinon, ce qui permet de contrôler la mise à jour avec un unique paramètre  $\alpha$ , se déclinant du synchronisme parfait pour  $\alpha = 1$  au séquentiel indépendant pour  $\alpha \rightarrow 0$ .

Nous avons alors voulu considérer d'autres asynchronismes proches de l' **$\alpha$ -synchronisme**. En présentant des exemples choisis, nous avons montré que l'asynchronisme pouvait se définir, non seulement comme la non-simultanéité des mises à jour des cellules, mais comme la présence de perturbations dans les échanges d'information entre cellules. Ce qui nous a amené à définir intuitivement puis formellement deux nouveaux asynchronismes, le  **$\beta$ -** et le  **$\gamma$ -synchronismes**, définis respectivement comme l'interruption aléatoire de l'envoi et de la transmission des états mis à jour aux cellules voisines.

Maintenant que nous disposons de différentes perturbations, nous voulons savoir si celles-ci ont des effets similaires sur les comportements des automates cellulaires.

## Chapitre 3

# Étude expérimentale de la robustesse à différents asynchronismes

“La réalité, c’est ce qui refuse de disparaître quand on cesse d’y croire.”

– Philip K. Dick, *SIVA*, 1981.

### Sommaire

---

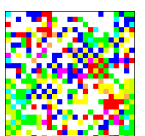
<b>3.1 Définition du protocole expérimental</b> . . . . .	<b>39</b>
3.1.1 Conditions expérimentales . . . . .	40
3.1.2 Lecture et interprétation des résultats . . . . .	40
<b>3.2 Observations préliminaires</b> . . . . .	<b>41</b>
3.2.1 Règles sans différence observable, ou divergence négligeable . . . . .	41
3.2.2 Règles suggérant des différences quantitatives . . . . .	43
3.2.3 Règles faisant apparaître des changements du comportement qualitatifs . . . . .	46
3.2.4 Résumé des observations . . . . .	47
<b>3.3 Étude des transitions de phases</b> . . . . .	<b>50</b>
3.3.1 Transitions de phase . . . . .	50
3.3.2 Classe d’universalité de la percolation dirigée . . . . .	51
3.3.3 Modification du protocole expérimental . . . . .	52
3.3.4 Quantification de la transition . . . . .	53
<b>3.4 Synthèse</b> . . . . .	<b>55</b>

---

*Le chapitre précédent s’intéressait à la construction de nouveaux modes de mises à jour basés sur une dynamique globale stochastique. Ici, on veut estimer les effets des différents asynchronismes sur les automates cellulaires. Afin de donner un aperçu rapide et diversifié des comportements observés, nous allons considérer la classe des automates cellulaires élémentaires, qui présentent le double avantage d’être un exemple des plus simples de modèles d’automates cellulaires et néanmoins de présenter une grande diversité de comportements. Dans ce chapitre, nous adoptons une approche expérimentale, qui cherche à automatiser la recherche de différences de comportements entre modèles pour différents types d’asynchronismes. En particulier, nous allons utiliser le paramètre densité pour repérer les différences de comportement, et, quand cela est possible, les quantifier.*

### 3.1 Définition du protocole expérimental

Avant toute considération de simulation, il est nécessaire de réfléchir aux paramètres des expériences que nous désirons mener afin de déterminer le comportement des automates cellulaires.



### 3.1.1 Conditions expérimentales

#### Construction de la grille cellulaire

Une question centrale lorsque l'on veut simuler un automate cellulaire est celle de la taille des configurations. Une taille trop petite (e.g.  $L = 10$ ) limite l'espace des configurations et par conséquent multiplie les chances de tomber dans une configuration singulière (pour un cas particulier, voir le Chapitre 5). En revanche, une taille trop grande (e.g.  $L = 10^{10}$ ) garantit des effets de taille finie minimes, mais rend le calcul des transitions long et peu pratique.

#### Choix de la configuration initiale

Avant de considérer toute itération temporelle du système, il nous faut déterminer quelle configuration  $x \in \mathcal{Q}^{\mathcal{L}}$  prendre au temps origine  $t = 0$ . Dans notre conception des automates cellulaires, il est important que le comportement ne soit pas influencé par une configuration initiale particulière. Celle-ci se doit donc d'être aléatoire.

Une réponse simple consiste à sélectionner une configuration parmi toutes les possibilités de  $\mathcal{Q}^{\mathcal{L}}$ . Dans le cas des automates cellulaires binaires, une méthode consiste à échantillonner un élément de  $\{0;1\}^{\mathcal{L}}$  avec une loi de Bernoulli de paramètre  $\rho_i$ , où  $\rho_i$  est appelé *densité initiale*. Algorithmiquement, cela revient à considérer indépendamment chaque cellule et à lui assigner l'état 1 avec une probabilité  $\rho_i$ , et 0 avec une probabilité  $1 - \rho_i$ . On obtient ainsi une distribution de configurations dont les densités suivent une loi binomiale centrée sur  $\rho_i$ . Lorsque  $\rho_i = 1/2$ , toutes les configurations de  $\mathcal{Q}^{\mathcal{L}}$  sont équiprobables.

#### Temps de simulation

Nos simulations cherchent à rendre compte le plus fidèlement possible du comportement des automates cellulaires sous des conditions données. Pour pallier l'influence des conditions initiales et comparer sur un même plan des comportements, nous allons chercher à donner une estimation du comportement asymptotique de l'automate cellulaire. Or, parce qu'en pratique nous sommes contraints de travailler sur des dimensions d'espace et de temps limités, un choix argumenté des temps retenus pour l'échantillonnage s'impose.

Nos simulations seront donc soumises au même protocole :

1. Pour commencer, le système est itéré sur un nombre  $T_{\text{trans}}$  de pas, appelé *temps transitoire*. Il est à noter que la longueur de cette période est arbitrairement fixée par l'observateur, et ne correspond en aucun cas au temps réel que met l'automate pour atteindre un comportement asymptotique. Une méthode possible pour définir cette valeur consiste à réaliser plusieurs fois l'expérience en observant en temps réel le temps mis par l'automate pour se stabiliser. Dans notre cas, nous considérerons un temps transitoire de 10000 pas de temps pour les automates cellulaires élémentaires.
2. Une fois le temps transitoire passé, nous itérons notre système un nombre  $T_{\text{ech}}$  de pas, appelé *temps d'échantillonnage*, en enregistrant à chaque fois la valeur du ou des paramètres utilisés. Comme le temps transitoire, le temps d'échantillonnage est arbitrairement fixé par l'observateur, et correspond à une valeur suffisamment grande pour gommer les effets liés à d'éventuels effets périodiques à l'échelle de quelques cellules. Un temps d'échantillonnage de l'ordre de 1 et 10% du temps transitoire est généralement suffisant.

Une fois le temps d'échantillonnage dépassé, l'observateur détient une série de valeurs réelles pour chaque temps. Il faut donc en faire une moyenne afin d'obtenir une valeur approximative du paramètre sur le comportement asymptotique.

### 3.1.2 Lecture et interprétation des résultats

En utilisant le protocole expérimental détaillé précédemment, nous obtenons pour chaque règle ACE et pour chaque mode d'asynchronisme, un ensemble de points correspondant à la valeur moyenne du paramètre densité pour un taux d'asynchronisme échantillonné. Nous rassemblons ces données dans un graphique confrontant les courbes obtenues pour les trois types de synchronisme, que nous désignerons par *profil (de) densité*.

Nous allons appliquer le même protocole expérimental à l'ensemble des automates cellulaires élémentaires minimaux, pour chacun des trois asynchronismes, en utilisant :

- le paramètre densité pour quantifier les différentes réponses des ACE,
- les diagrammes espace-temps pour vérifier les correspondances de comportements “à la main”.

## 3.2 Observations préliminaires

Le comportement  $\alpha$ -synchrone des ACE a été étudié en détail par Fatès grâce à un protocole expérimental similaire [Fat09]. Nous rappelons la question qui nous intéresse ici : la réponse des automates cellulaires est-elle différente avec nos trois modes de mise à jour : l' $\alpha$ -synchronisme, le  $\beta$ -synchronisme et le  $\gamma$ -synchronisme. Nous obtenons alors une grande quantité de résultats qu'il va falloir traiter afin de mettre en évidence des divergences de comportements, qu'elles soient quantitatives ou qualitatives. Nous proposons donc de classer les ACE en plusieurs catégories, sensées représenter la similarité des comportements du point de vue de la densité.

### 3.2.1 Règles sans différence observable, ou divergence négligeable

Pour commencer, nous allons considérer les règles pour lesquelles l'étude du comportement grâce au paramètre densité ne révèle aucune différence notable. Dans la plupart de ces cas, la réponse des ACE est une constante, dépendante ou non des paramètres d'initialisation du système.

#### Classe des automates nilpotents ( $N$ )

Par définition, la classe nilpotente réunit les règles pour lesquelles l'ensemble des configurations initiales atteint la configuration nulle. Ces cas sont particulièrement faciles à repérer, car leur densité après un long temps de simulation est systématiquement nulle, et ce quelle que soit la nature de l'asynchronisme ou le taux associé. Elle se compose des règles :

$$N = \{0, 8, 32, 40, 128, 136, 160, 168\}.$$

On constate que les règles de cette classe sont parfaitement robustes à l'asynchronisme, puisque des dynamiques synchrones comme asynchrones convergent toujours vers la configuration nulle.

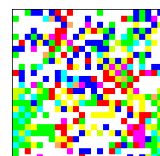
#### Classe des automates nilpotents avec saut synchrone ( $N^*$ )

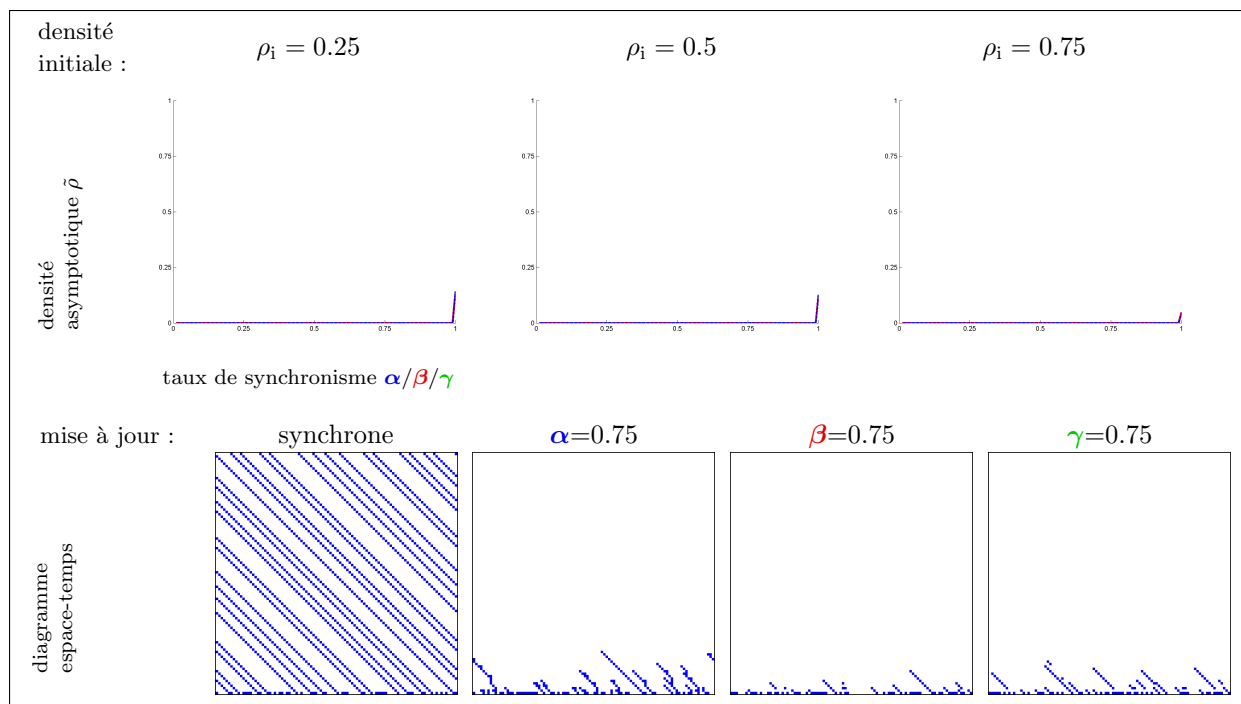
Cette classe rassemble les règles pour lesquelles l'ensemble des configurations initiales convergent vers la configuration nulle, sauf pour le cas synchrone  $\alpha=1$  (et respectivement  $\beta$  et  $\gamma$ ). Ce phénomène ponctuel suggère une transition de phase de premier ordre, c'est à dire une discontinuité de la courbe densité. Elle se compose des règles suivantes :

$$N^* = \{2, 10, 24, 34, 42, 56, 74, 130, 152, 162\}.$$

Il est intéressant de remarquer les diagrammes espace-temps des règles concernées se ressemblent fortement, comme par exemple l'ACE 2 sur la Figure 3.1. En mode synchrone, ces règles se comportent comme une translation périodique des états 1 dans une direction donnée, ce qui justifie une densité non-nulle. En revanche, lorsque ces systèmes sont soumis à un asynchronisme, leur simulation forme des branches similaires plus ou moins régulières, qui disparaissent après quelques itérations, laissant place à une configuration nulle.

Nous sommes donc bien en présence d'une discontinuité de comportement entre les modes synchrone et asynchrone. Aucun écart de comportement n'est cependant observable entre les différents modes de mise à jour.



FIGURE 3.1 – Profils de densité et diagrammes espace-temps pour l’ACE 2 (classe  $N^*$ ).

### Classe des automates constants ( $C$ )

Cette classe rassemble les règles pour lesquelles la densité du système converge vers une valeur fixe non nulle pour chaque asynchronisme. Cette classe se compose des règles :

$$C = \{13, 15, 23, 28, 29, 43, 51, 105, 140, 150, 156, 200, 204\}.$$

Comme pour la classe des règles nilpotentes ( $N$ ) et nilpotentes avec sauts ( $N^*$ ), il est possible de trouver une régularité dans les diagrammes espace-temps de ces règles, qui se divisent en quatre catégories.

Tout d’abord, un certain nombre de ces règles, comme 15, tendent à produire des configurations sous forme de bandes verticales d’une densité égale à  $\rho = 0.5$  indépendamment de la densité de la configuration initiale. La règle 94 rentre également dans cette description, même si des motifs locaux apparaissent dans le cas synchrone et disparaissent dans le cas asynchrone.

D’autre part, on trouve des règles classifiées comme chaotiques dans le cas synchrone (classe IV de Wolfram), à l’instar de 105 illustrée par la Figure 3.2, et dont la dynamique asynchrone reste visuellement proche du cas synchrone. La densité ici encore converge systématiquement vers  $\rho = 0.5$ , quelle que soit la densité de la configuration initiale.

On mentionnera également trois règles reconnues comme étant parfaitement robustes à l’asynchronisme, c’est à dire pour lesquelles le comportement asymptotique est indépendant de l’asynchronisme considéré. En particulier, la règle *identité* (204) conserve la configuration initiale à chaque pas de temps et est donc invariante par rapport au mode de mise à jour. De même, les règles 140 et 200, qui diffèrent de la règle identité d’une unique transition (respectivement  $f_{140}(110) = 0$  et  $f_{200}(101) = 0$ ), ne sont pas influencées par la perturbation du synchronisme. De plus, ces trois règles sont également les seules de la classe  $C$  dont la densité du comportement asymptotique dépend de la densité initiale.

Enfin les deux règles restantes, 23 et 51, affichent une dynamique périodique dans le cas synchrone (classe II de Wolfram) et un comportement asynchrone perturbé dans le cas de l’ $\alpha$ -synchronisme, et au contraire étonnamment stable dans les cas  $\beta$ - et  $\gamma$ -synchrones. En réalité, on montrera au Chapitre 4 que si la règle *inverse* (51) est perturbée par l’ $\alpha$ -synchronisme, elle est invariante par l’asynchronisme de la transmission d’information.

### Classe des automates constants avec saut synchrone ( $C^*$ )

La classe  $C^*$  est à  $C$  ce que la classe  $N^*$  est à  $N$  : elle rassemble les règles constantes pour lesquelles une discontinuité apparaît dans la courbe de la densité pour le synchronisme total. Seules quatre règles composent cette classe<sup>9</sup> :

$$C^* = \{57, 60, 90, 142\}.$$

Comment justifier le “saut synchrone”, c’est-à-dire une transition de premier ordre, observé pour ces règles non-triviales? Contrairement à la classe  $N^*$  où le saut synchrone peut se justifier par une quantification forte – la survie des motifs ou la convergence vers la configuration nulle – il est beaucoup plus difficile de proposer des explications pour le saut synchrone dans cette classe.

En effet pour les règles 60 et 90, la dynamique synchrone est chaotique et difficilement distincte des cas asynchrones par un simple examen des diagrammes espace-temps, ou des profils densité pour lesquels le saut observé est peu significatif.

En revanche, le saut synchrone apparaît plus évident pour la règle 57, bien qu’il n’y ait pas d’argument simple pour justifier d’une différence dans la densité des configurations. En effet, comme on peut le voir dans la Figure 3.3, si le diagramme espace-temps synchrone de 57 semble structuré et régulier, ses équivalents asynchrones apparaissent complètement chaotiques.

Enfin, la règle 142 apparaît comme une translation vers la gauche de la configuration initiale dans le cas synchrone, alors que les diagrammes espace-temps asynchrones affichent des “bandes” diagonales similaires, mais dont l’épaisseur varie fortement au cours du temps. Là encore, si l’on peut voir un changement radical des propriétés dynamiques du modèle pour un mode de mise à jour asynchrone, cela ne permet pas de déduire trivialement la discontinuité observée pour la densité.

Les règles considérées jusqu’ici présentent des propriétés surprenantes et intéressantes, qui mériteraient à elles-seules d’être étudiées. Cependant, elles ne permettent pas de répondre à notre question de départ, à savoir s’il existe des règles ACE sur lesquelles différentes définitions de l’asynchronisme a des effets quantifiables en densité sur leur comportement.

### 3.2.2 Règles suggérant des différences quantitatives

Nous allons maintenant considérer les règles d’ACE présentant des différences observables. Notre approche, basée avant tout sur une observation visuelle des profils densité et des diagrammes espace-temps, se heurte néanmoins au problème de la quantification de ces différences, problème qui le plus souvent ne sera pas résolu.

#### Classe des automates présentant des différences affines ( $D$ )

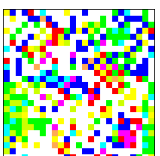
Dans cette classe, les règles rassemblées présentent toutes un profil densité similaire : la densité pour chacun des trois asynchronismes ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) suit une fonction affine du taux de synchronisme associé, mais les paramètres de cette fonction varient en fonction de l’asynchronisme considéré. Elle se compose des règles suivantes :

$$D = \{4, 12, 36, 44, 72, 76, 77, 78, 94, 132, 164, 232\}.$$

Ici encore, on constate une certaine régularité des motifs observés dans les diagrammes espace-temps de ces automates. En effet, comme présenté dans l’exemple de la Figure 3.4, ces configurations prennent la forme de lignes verticales, d’une ou plusieurs cellules d’épaisseur selon les cas.

Si les différences observées pour les différents modes de mises à jour sont significatives, leur analyse se heurte à la difficulté de leur quantification. En effet, les profils densité étant a priori continus et dérivables, comment utiliser les données pour interpréter les effets de l’asynchronisme sur la dynamique ?

9. Les sauts pour les règles 60 et 90 sont extrêmement faibles et n’apparaissent que pour des densités initiales différentes de  $\rho_i = 0.5$



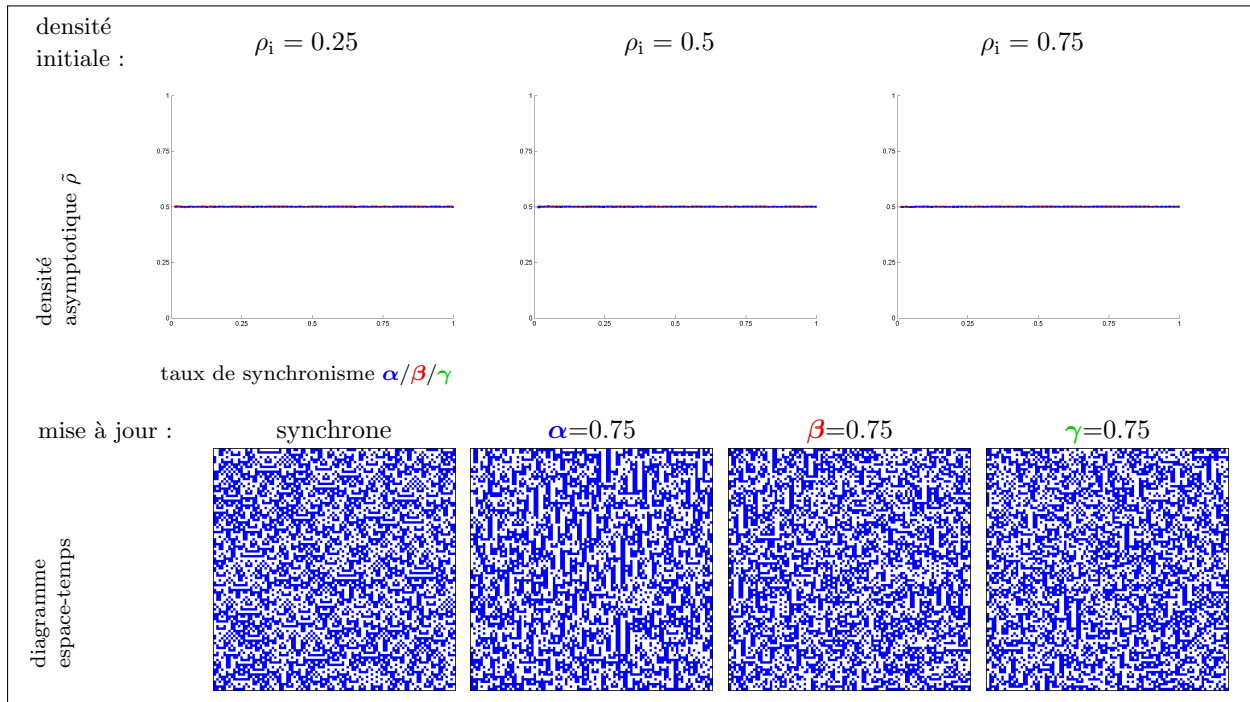


FIGURE 3.2 – Profils de densité et diagrammes espace-temps pour l'ACE 105 (classe C).

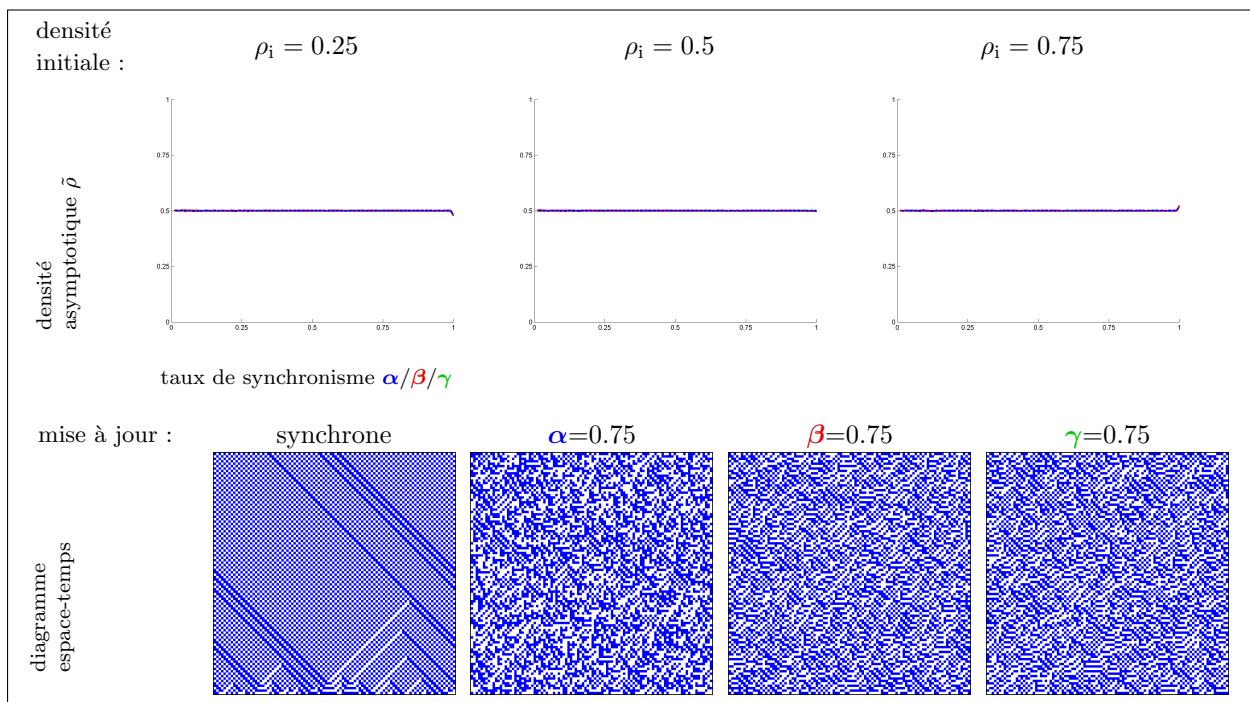
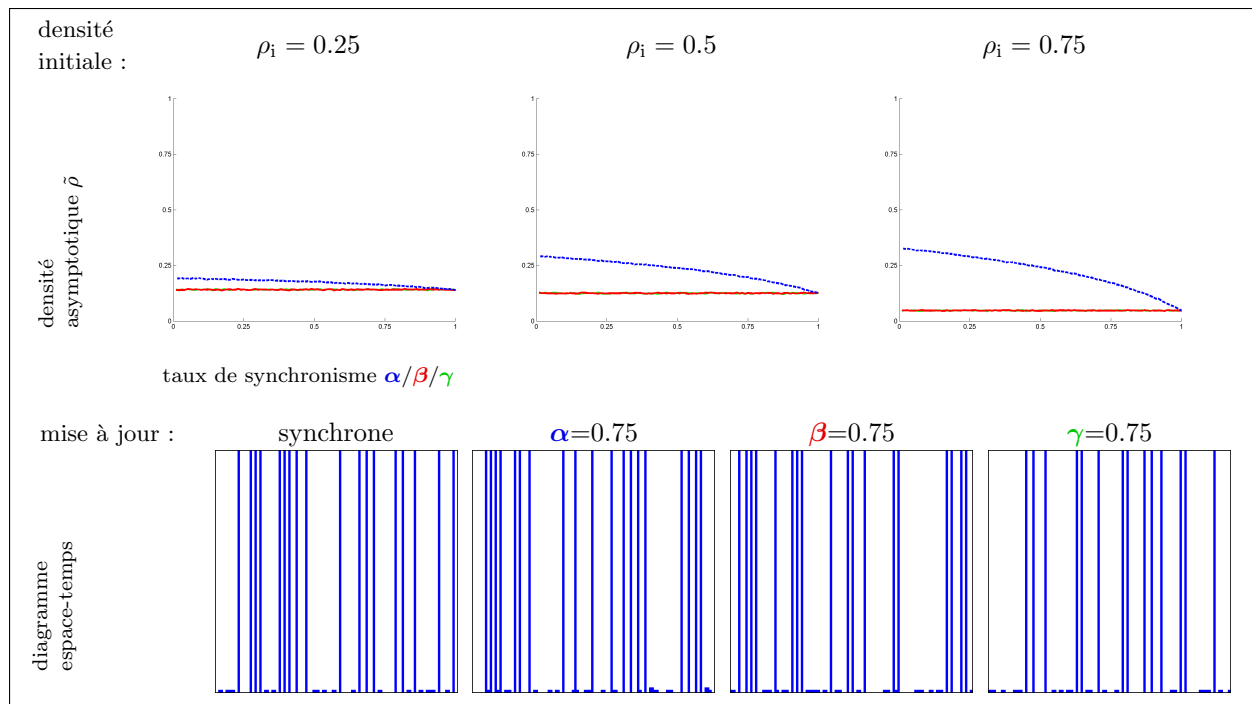


FIGURE 3.3 – Profils de densité et diagrammes espace-temps pour l'ACE 57 (classe C\*).

FIGURE 3.4 – Profils de densité et diagrammes espace-temps pour l'ACE 4 (classe  $D$ ).

### Classe des automates accidentés ( $A$ )

Dans cette classe, les profils de densité des règles font apparaître des valeurs très disparates pour des changements de synchronisme minimes, sans pour autant faire apparaître de nouveau comportement. On range dans cette classe trois automates :

$$A = \{138, 170, 184\}.$$

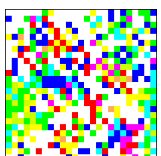
Que signifie le fait que les profils densité pour ces règles soient aussi accidentés ? Tout d'abord, si l'on considère les diagrammes espace-temps synchrones pour ces règles (voir 184 dans la Figure 3.5), on s'aperçoit qu'elle reviennent après quelques pas de temps à une translation de la configuration globale. Dans le cas asynchrone, on observe au contraire l'apparition de "régions" de cellules dans l'état 0 ou 1, dont la largeur varie avec le temps jusqu'à favoriser un des deux états de manière globale.

Ces règles font en fait partie des règles doublement quiescentes, c'est-à-dire que les règles de transitions vérifient  $f(000) = 0$  et  $f(111) = 1$ . Une étude approfondie des dynamiques des règles présentant cette propriété ainsi que de leurs temps de convergence se trouve chez Fatès *et al.* [FRST06].

Là encore, il est possible d'observer sur certains profils densité la présence de sauts synchrones. Dans le cas très précis de la règle 184, aussi appelée règle de *trafic*, on peut expliquer cela par le fait que la règle conserve la densité en régime synchrone alors que cette hypothèse n'est plus vérifiée pour de synchronisme infinitésimal.

### Classe des automates complexes ( $X$ )

Dans cette classe, on rassemble les règles pour lesquelles les profils densité présentent des différences quantitatives observables, mais dont l'évolution de la densité en fonction du taux de synchronisme ne permet pas d'entrevoir une analyse plus poussée des données obtenues. En effet, les courbes obtenues présentent des formes qu'il est difficile d'appréhender quantitativement, comme des points d'inflexion,





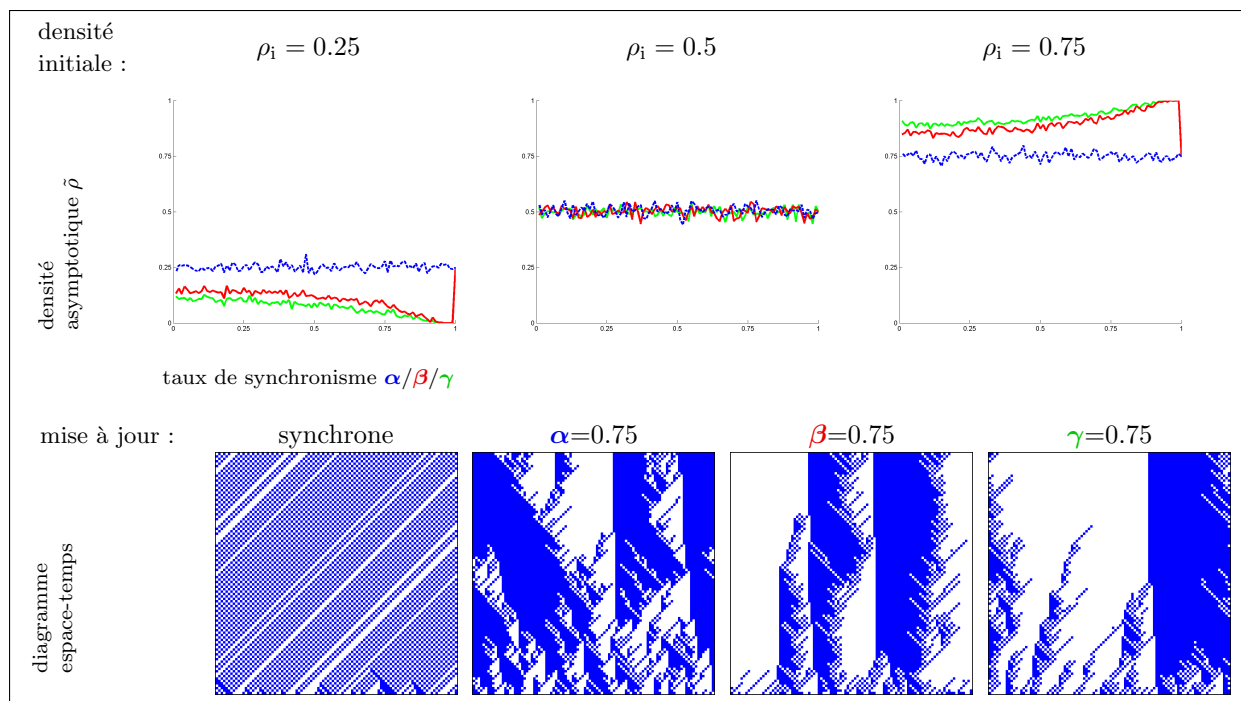


FIGURE 3.5 – Profils de densité et diagrammes espace-temps pour l'ACE 184 (classe A).

des changements de courbure. Les règles ACE appartenant à cette classe sont les suivantes :

$$X = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 14, 22, 25, 27, 30, 33, 35, 37, 41, 45, 46, 54, 62, 73, 94, 110, 122, 126\}.$$

Les profils densité comme les diagrammes espace-temps de ces règles restent variés, si bien qu'il est difficile d'en donner une description complète. De plus, comme pour la classe *D* des règles présentant des différences affines, il est difficile d'étudier quantitativement les comportements de cette classe.

Dans cette deuxième partie de classes de réponses, nous avons qu'un certain nombre de règles ACE présentent des différences qui sont observables systématiquement, ce qui justifie bien une différence dans les effets entre les asynchronismes proposés. Cependant, la continuité des comportements observés ne nous permet pas de nous y "accrocher" afin d'étudier de manière plus avancée les changements de comportements. Dans les dernières classes à venir, nous verrons que certaines règles présentent des modifications qualitatives du comportement, qu'il est possible d'appréhender quantitativement afin de véritablement mesurer les effets des différents asynchronismes sur les comportements.

### 3.2.3 Règles faisant apparaître des changements du comportement qualitatifs

#### Classe des automates à transition de phase (*T*)

Pour cet ensemble de règles, le profil densité montre un changement brutal du comportement pour une valeur critique et non-triviale du taux d'asynchronisme  $\alpha_c$ . On peut donc séparer le comportement de l'automate en deux phases distinctes : l'une sous-critique pour des taux d'asynchronisme  $\alpha < \alpha_c$  et l'autre sur-critique pour  $\alpha > \alpha_c$ . On détermine expérimentalement que les règles montrant une transition de phase sont :

$$T = \{6, 18, 26, 38, 50, 58, 106, 146\}.$$

On peut alors distinguer deux cas de figures pour les règles de cette classe : ou bien la phase sur-critique correspond à la phase active du comportement, où la densité ne converge pas vers zéro, ou bien

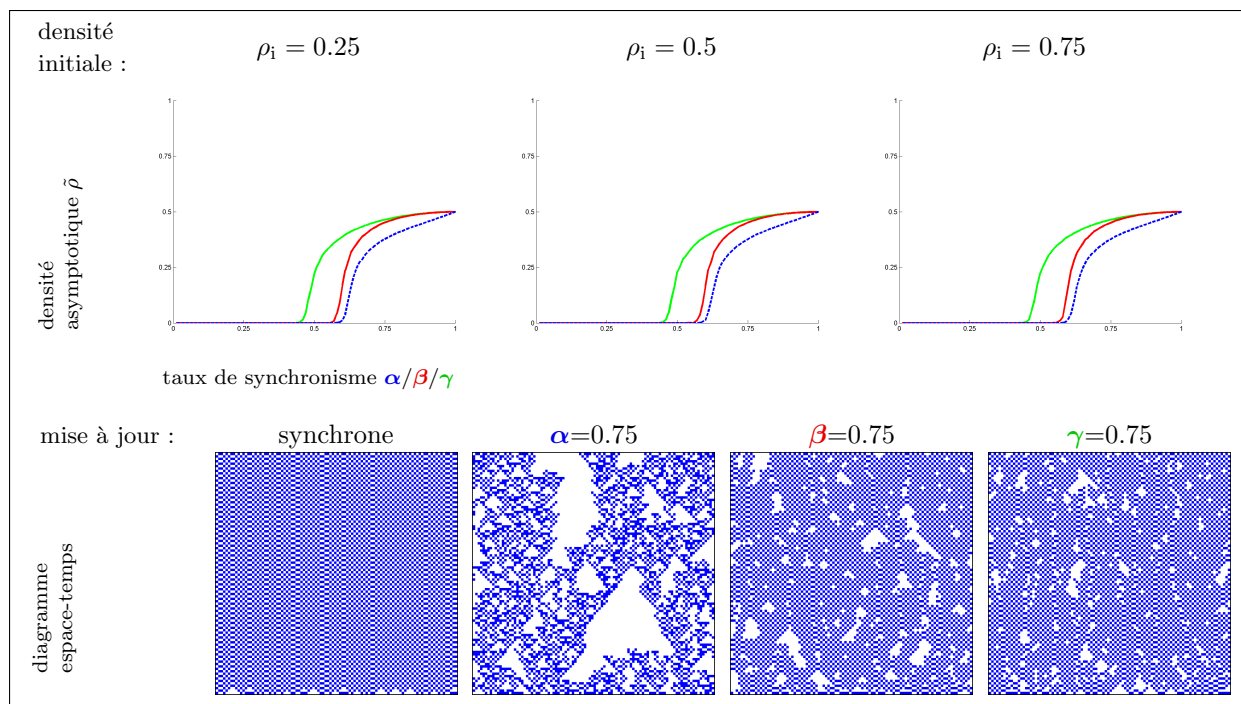


FIGURE 3.6 – Profils de densité et diagrammes espace-temps pour l’ACE 50 (classe  $T_{\text{sup}}$ ).

elle correspond à la phase passive, où le système converge effectivement vers la configuration nulle. On peut alors distinguer deux sous-classes :

- $T_{\text{sup}} = \{18, 26, 50, 58, 106, 146\}$ , pour laquelle la phase active correspond aux valeurs supérieures du taux d’asynchronisme  $\alpha$  ;
- $T_{\text{inf}} = \{6, 38, 134\}$ , pour laquelle la phase active correspond aux valeurs inférieures de  $\alpha$ .

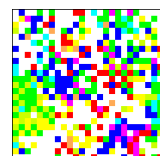
Cette distinction en sous-classes nous permet de faire une observation importante : pour  $T_{\text{sup}}$ , les changements de comportement sont observés pour tous les modes de mise à jour (à l’exception du  $\gamma$ -synchronisme pour la règle 58), alors que pour  $T_{\text{inf}}$ , les transitions ne sont observables que dans le cas de l’ $\alpha$ -synchronisme.

Il faut également noter la règle 178 qui présente une transition de phase en densité asymptotique, mais uniquement pour des densités initiales distinctes de  $\rho_i = 1/2$  (voir figure 3.8). Cette observation s’explique notamment par le fait que le comportement se divise en une phase en damier (donc de densité proche de 0.5) pour un taux d’asynchronisme supérieur, et en une phase formée de larges “blocs” contigus pour un taux inférieur, d’où une densité asymptotique  $\tilde{\rho}$  bruitée et sensible à la densité initiale  $\rho_i$ . Pour cette raison, il serait possible d’observer bien plus précisément cette transition pour des paramètres d’ordre qui quantifient le nombre de frontières 10 et 01 plutôt que la densité. En raison du caractère unique de cette règle, nous ne traiterons pas dans cette thèse la comparaison des transitions de phase pour les différents asynchronismes. Nous invitons le lecteur à se référer à la thèse de Fatès pour une étude plus approfondie [Fat04].

### 3.2.4 Résumé des observations

Ces expériences révèlent plusieurs choses sur les différents réactions des règles ACE à différents asynchronismes, dont la classification est résumée dans le tableau 3.1 :

1. Pour un grand nombre de règles (classes  $N$ ,  $N^*$ ,  $C$ ,  $C^*$ ), aucune différence de comportement macroscopique, c’est-à-dire du point de vue de la densité, n’est observée entre les différents asynchronismes.
2. En revanche, il existe parmi ces règles des cas qui ne montrent aucune différence de comportement



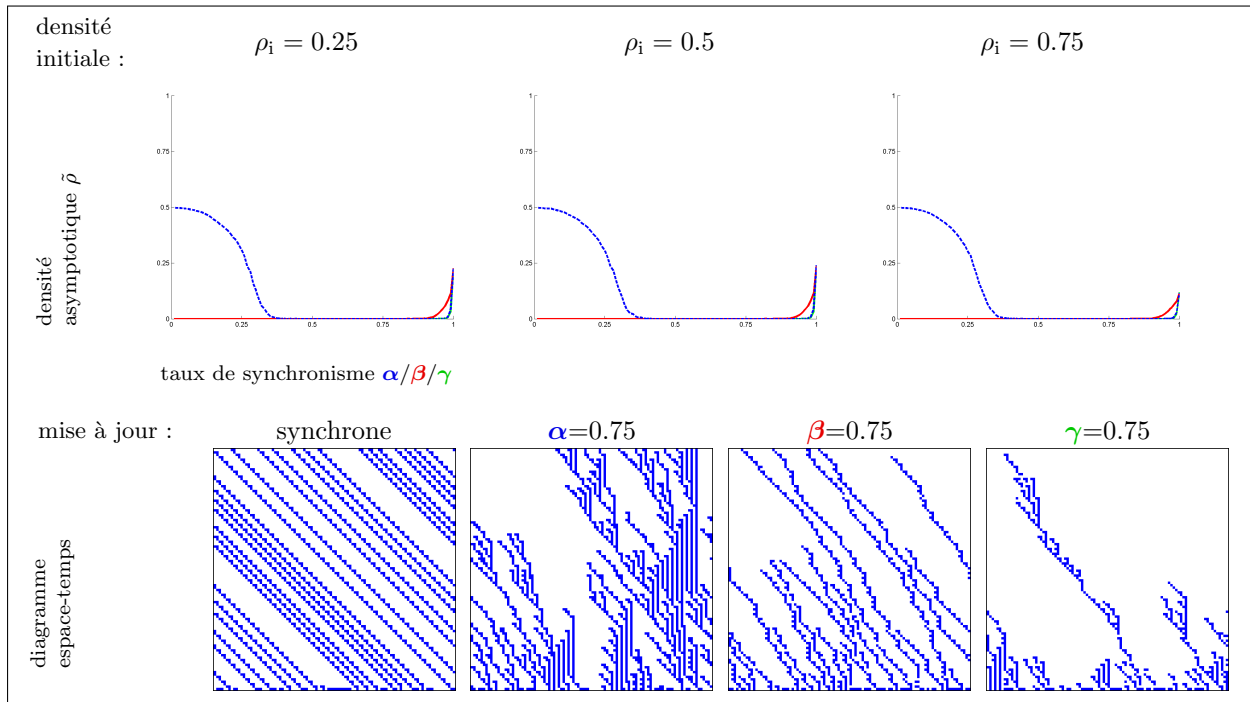
FIGURE 3.7 – Profils de densité et diagrammes espace-temps pour l'ACE 6 (classe  $T_{\text{inf}}$ ).

TABLE 3.1 – Tableau récapitulatif des appartenances des 88 automates cellulaires élémentaires aux classes de robustesse aux différents asynchronismes.

Classe	Règles
$N$	0, 8, 32, 40, 128, 136, 160, 168
$N^*$	2, 10, 24, 34, 42, 56, 74, 130, 152, 162
$C$	13, 15, 23, 28, 29, 43, 51, 105, 140, 150, 156, 200, 204
$C^*$	57, 60, 90, 142
$D$	4, 12, 36, 44, 72, 76, 77, 78, 94, 132, 164, 232
$A$	138, 170, 184
$X$	1, 3, 5, 7, 9, 11, 14, 22, 25, 27, 30, 33, 35, 37, 41, 45, 46, 54, 62, 73, 94, 110, 122, 126
$T_{\text{sup}}$	18, 26, 50, 58, 106, 146
$T_{\text{inf}}$	6, 38, 134
$T_2$	178

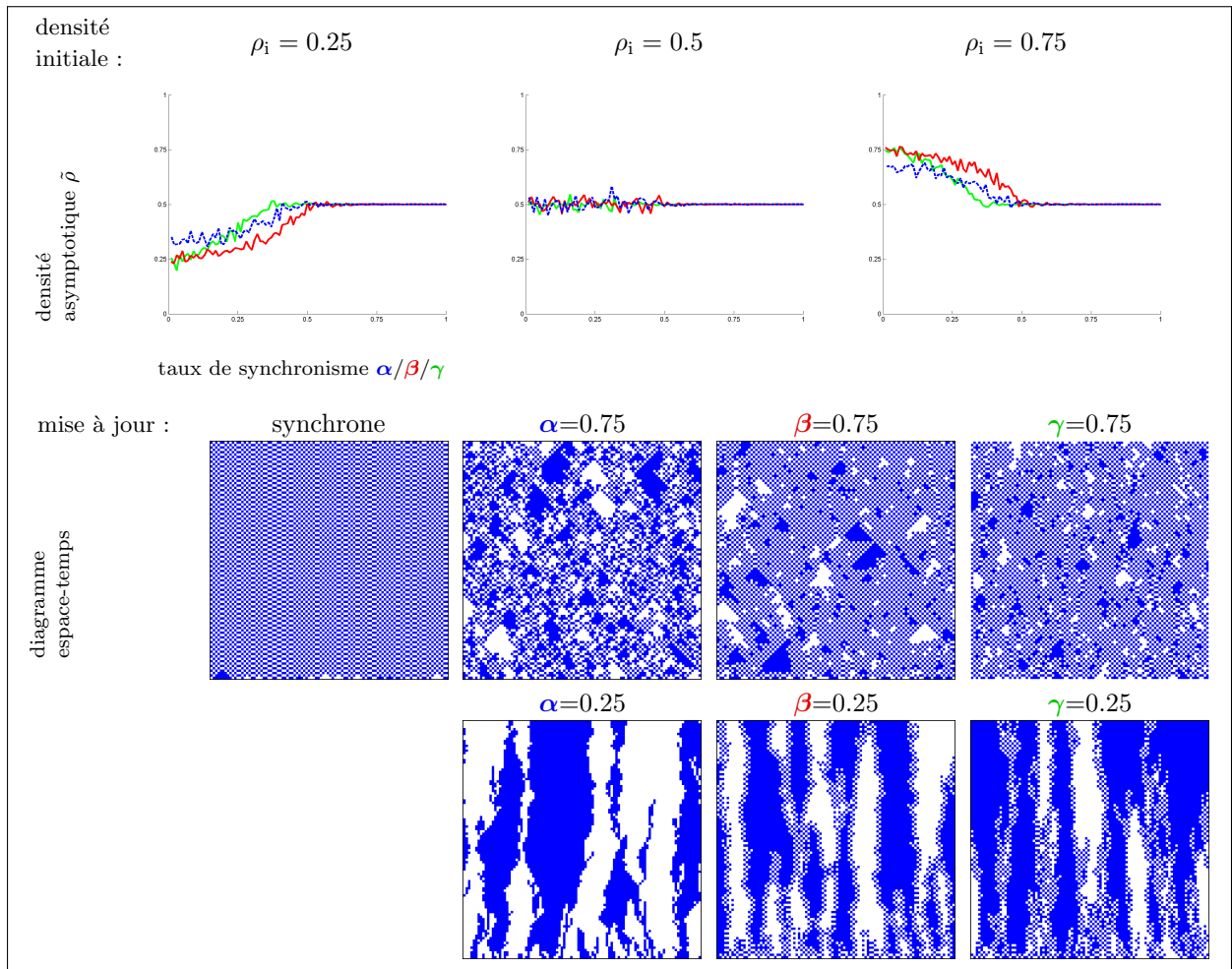
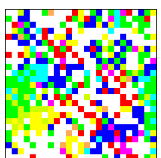


FIGURE 3.8 – Profils de densité et diagrammes espace-temps pour l'ACE 178 (classe  $T_2$ ).



macroscopique alors qu'un rapide examen des diagrammes espace-temps révèle que le comportement microscopique est radicalement différent (par exemple la règle 51).

3. Pour d'autres règles (classes  $D$ ,  $A$ ,  $X$ ), des différences de comportements sont observées sur le plan macroscopique pour les différents types d'asynchronisme. Dans la plupart des cas, il est malheureusement difficile d'appréhender la nature des effets par une approche quantitative.
4. Enfin, nous avons vu que pour quelques règles apparaissaient des différences qualitatives de comportements pour des valeurs non-triviales du taux de synchronisme. Cette observation est importante car premièrement, ces phénomènes sont une signature forte d'un comportement qu'il est possible de comparer pour plusieurs modes de mises à jour, et deuxièmement, ces phénomènes sont quantifiables par des approches statistiques qui permettent de mesurer les changements de comportements.

Il est intéressant de noter que malgré les limitations de notre expérience, en particulier le fait que notre observation du comportement se réduit à la seule densité moyenne alors que l'on aurait pu s'intéresser à d'autres fonctions de corrélation, les données recueillies ainsi que la classification qui en est tirée s'avèrent particulièrement riches.

Nous allons donc maintenant nous concentrer sur la dernière catégorie des différences *qualitatives* et tenter d'étudier *quantitativement* ces changements de comportements.

### 3.3 Étude des transitions de phases

L'étude expérimentale des automates cellulaires élémentaires permet la mise en évidence de différents types de "réaction" à l'asynchronisme, et en particulier des changements brutaux du comportement. Se pose alors la question de la nature de ces changements : ces phénomènes sont-ils un signe de comportements asymptotiques différents, ou sont-ils un phénomène lié à la définition du modèle ou au contexte expérimental auxquels nous avons soumis notre système ?

Pour répondre à cette question, nous nous concentrons sur les règles particulières pour lesquelles ce phénomène est observé.

#### 3.3.1 Transitions de phase

Une *transition de phase* est un terme emprunté à la physique qui décrit une modification de l'état d'un système causée par la variation d'un ou plusieurs paramètres. Plus précisément, ces transitions définissent des *phases*, des régions de l'espace des *paramètres de contrôle* dans lesquelles l'état du système, caractérisé par des *paramètres d'ordre*, est essentiellement uniforme. Lorsque le paramètre de contrôle noté  $T$  franchit une valeur critique  $T_c$ , le système change d'état. Les exemples de telles transitions ne manquent pas en physique :

- Les transitions entre les états solide, liquide et gazeux d'un matériau sont des transitions de phases, caractérisées par des températures critiques (ébullition, sublimation, fusion).
- L'effet Hopkinson, selon lequel l'aimantation des matériaux ferromagnétiques s'annule brutalement quand la température atteint le point de Curie (e.g. 1043K pour le fer).

Les transitions de phase sont actuellement classifiées en fonction de leur ordre, c'est-à-dire de la classe de régularité (continuité des dérivées itérées) dont elles font partie. Généralement, on distingue deux grands types de transitions : les transitions de premier ordre et les transitions de second ordre.

#### Transitions de premier ordre

En physique, les transitions de premier ordre sont des transitions pour lesquelles l'évolution du paramètre d'ordre  $T$  par rapport au paramètre de contrôle est discontinue en  $T_c$ . Par exemple, les changements d'état de l'eau font partie de cette catégorie.

Dans le cas des ACE asynchrones, les transitions de premier ordre correspondent aux "sauts synchrones" observés pour certaines règles (notamment  $N^*$  et  $C^*$ ). En effet, ces exemples font généralement apparaître un comportement synchrone ( $T = 1$ ) associé à une valeur spécifique de la densité, alors qu'une perturbation infinitésimale de la mise à jour globale ( $T = 1^-$ ) induit des changements drastiques de comportement qui ont une influence sur le comportement macroscopique. C'est par exemple le cas de

la règle 2 où les états 1 survivent pour le synchronisme parfait, et converge asymptotiquement vers la configuration nulle pour une mise à jour asynchrone.

Si ces transitions s'expliquent facilement du fait de la dépendance d'un comportement à l'hypothèse de synchronisme parfait, une explication précise du changement de comportement macroscopique peut se révéler compliquée quand la distinction entre les comportements microscopiques synchrones et asynchrones n'est pas claire, comme dans le cas des règles de la classe  $C^*$  (par exemple la règle 57).

### Transitions de second ordre

Les transitions de phase continues (ou de second ordre) se définissent comme des fonctions qui varient de manière continue, mais dont la dérivée est discontinue. Celles-ci sont généralement plus faciles à quantifier que celles de premier ordre car leur évolution autour de la valeur critique du paramètre de contrôle  $T_c$  suit une loi de puissance. En particulier, si l'on trouve un paramètre d'ordre  $C$  qui est nul dans une phase et non-nul dans une autre, la transition entre ces deux phases est caractérisée par  $C \sim |T - T_c|^\beta$  et l'évolution temporelle  $\rho(t) = d_0 \cdot t^{-\delta}$ , où  $\delta$  est appelé *exposant critique* de la transition.

Fait remarquable, de nombreux modèles qui produisent des transitions de phase présentent souvent des exposants critiques identiques (exemple en est des transitions de l'opalescence critique du gaz carbonique et du ferromagnétisme). Ce phénomène a conduit les scientifiques à introduire la notion de *classe d'universalité*, qui regroupe les transitions de phase en fonction de leurs exposants critiques. Notre objectif est donc maintenant d'étudier les phénomènes de transition de phase des comportements d'automates cellulaires observés dans ce chapitre en tentant de mettre à jour les caractéristiques de ces transitions.

### 3.3.2 Classe d'universalité de la percolation dirigée

Ayant déterminé les exposants critiques des transitions de phase, nous sommes en mesure de chercher dans la littérature les classes d'universalité qui correspondent à ces paramètres. En particulier, nous allons montrer que la classe d'universalité de la *percolation dirigée* semble correspondre à nos résultats. Nous allons donc présenter brièvement ses caractéristiques et les comparer aux données de la simulation.

#### Percolation dirigée

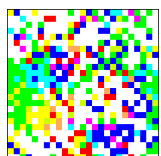
La classe d'universalité de la percolation dirigée rassemble les systèmes pour lesquels une transition de phase apparaît, caractérisée par des exposants critiques bien précis. Dans la suite de ce chapitre, on emprunte à Hinrichsen les données numériques caractéristiques de la classe d'universalité de la percolation dirigée [Hin00].

La percolation a d'abord été définie par la propagation d'un fluide dans un milieu poreux. Ce système a été modélisé par une grille carrée infinie où chaque sommet du graphe, ou *site*, est relié aux quatre nœuds les plus proches par des *liens*. La percolation des nœuds (respectivement des liens) consiste à considérer indépendamment les sites (resp. les liens) comme ouverts avec une certaine probabilité  $p$  – c'est-à-dire qu'ils laissent passer le fluide – ou fermés avec une probabilité  $1 - p$ . Lorsque  $p$  est assez grand, le fluide "inséré" en un point d'entrée donné se répandra en moyenne à l'infini dans l'espace considéré. En revanche, si  $p$  est trop petit, on détermine que le fluide tend à se cloisonner à une partie finie de l'espace. Dans la percolation dirigée (ou orientée) [Kin83], on suppose que le fluide en question est soumis à des forces globales, comme la gravité, et ne peut se propager que dans une direction, c'est-à-dire que le graphe des nœuds et des liens est un graphe orienté aperiodique.

#### Caractéristiques de la classe

Dans sa synthèse sur la percolation, Hinrichsen rassemble les données caractéristiques de la classe d'universalité que l'on va reprendre ici. Ici, on s'intéresse particulièrement à deux constantes décrivant le comportement des modèles de percolation :

- l'exposant standard  $\beta$  qui caractérise le ratio des sites dits "actifs"  $r$  en fonction de la probabilité  $p$  par la relation  $r \sim (p - p_c)^\beta$  ;
- l'exposant standard  $\delta$  qui caractérise l'évolution du ratio  $r(t)$  pour la probabilité critique  $p_c$  selon la relation  $r(t) \sim t^{-\delta}$ .



Les valeurs de  $\beta$  et  $\delta$  sont déterminées numériquement par une approche de champ moyen<sup>10</sup> en fonction de la dimension du système considéré, et sont présentées dans le Tableau 3.2.

TABLE 3.2 – Valeurs des exposants critiques pour les transitions de phase appartenant à la classe d’universalité de la percolation dirigée. Source [Hin00].

exposant	$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$	$d \geq 4$
$\beta$	0.276486	0.584	0.81	1
$\delta$	0.159464	0.451	0.73	1

### 3.3.3 Modification du protocole expérimental

Le protocole utilisé dans ce chapitre nous permettait d’obtenir un profil approché de la densité moyenne des configurations en fonction du taux de synchronisme. En choisissant avec attention la taille du système et les temps de simulation, il est possible d’approcher un encadrement du comportement critique mais pas de déterminer précisément la valeur critique du paramètre de contrôle  $T_c$  ainsi que l’exposant critique  $\delta$  de la transition. Pour vérifier l’hypothèse d’une transition de second ordre et chercher ces paramètres, il nous faut adapter notre protocole expérimental.

#### Étude de l’évolution du comportement asymptotique

La première différence avec le protocole utilisé dans la première partie de ce chapitre est que l’on ne s’intéresse plus à un comportement asymptotique, représenté par la moyenne de la densité des configurations sur un temps d’échantillonnage  $T_{ech}$  après un long temps transitoire  $T_{tra}$ , mais à l’évolution temporelle du comportement pour des longs temps de simulation.

Une conséquence de ce changement est qu’il n’est plus possible d’étudier ce phénomène sur plusieurs simulations : en effet, s’il est plausible de vouloir considérer plusieurs simulations pour des comportements asymptotiques, c’est-à-dire après un long temps transitoire, l’évolution temporelle du comportement sur ce temps transitoire peut varier fortement d’une simulation à l’autre. Pour cette raison, on préférera ici considérer une seule simulation de taille conséquente.

Aussi, comme on est intéressé par l’évolution temporelle plutôt qu’un comportement moyen éloigné dans le temps, on simule le système pendant un temps d’échantillonnage  $T_{ech}$  et on se contente maintenant de relever la valeur du paramètre densité à intervalles réguliers pendant le temps transitoire  $T_{tra}$ . À noter que comme on recherche une évolution temporelle sous la forme d’une loi de puissance, il est préférable de réaliser ces mesures à des temps en croissance exponentielle.

#### Contraintes liées à la simulation de transitions de phases

La principale difficulté qui se présente lorsque l’on veut étudier les propriétés d’une transition de phase par la simulation est que celle-ci est définie dans un cas général infini, alors que nos simulations portent nécessairement sur une taille de grille finie. Avec les outils à notre disposition, nous ne pouvons donc que simuler un système de taille aussi grande que possible, et tenter de généraliser les résultats au cas infini.

On s’expose également à ce que les trajectoires considérées présentent des anomalies statistiques qui induisent des biais dans les données du comportement. S’il est possible de diminuer l’importance de ces fluctuations par une répétition de l’expérience pour un ensemble de trajectoires, nous sommes ici limités à une seule trajectoire, comme expliqué plus tôt. Pour exemple, un des phénomènes possibles dans le cas d’une grille de taille finie est que le système rentre dans un état de “mort prématurée” alors que le système est en phase surcritique : cela peut se produire en particulier sur des systèmes de taille finie.

La solution préconisée est l’utilisation de grilles de grande taille afin de minimiser les effets de taille finie et de s’approcher le plus possible du cas infini. Comment savoir alors que la taille choisie est suffisamment grande ? Encore une fois, comme on s’attend à ce que les comportements suivent des lois continues, il faut

10. Il est à noter que la détermination analytique de ces constantes reste un problème ouvert.

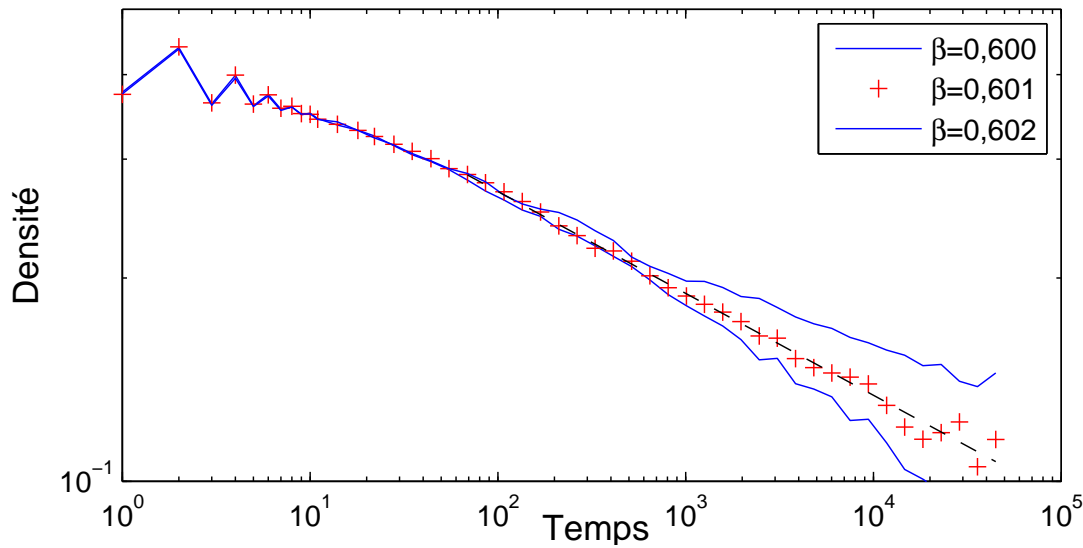


FIGURE 3.9 – Étude quantitative de la transition de la règle 50  $\beta$ -synchrone. Premièrement on cherche le taux critique de synchronisme  $\beta_c$  pour laquelle la densité suit une loi de puissance, on estime la pente de cette loi pour déterminer l'exposant critique de la transition. Les courbes bleues représentent les cas sous-critiques et sur-critiques, et les + rouges les mesures individuelles dans le cas critique. Le segment en pointillés noirs représente l'équation de la droite déterminé par la méthode des moindres carrés appliqués aux points du cas critique.

s'assurer que les données obtenues semblent le plus "continu" possible. Expérimentalement, on détermine qu'une taille de l'ordre de 10000 cellules donne de bons résultats tout en conservant la simulation du système dans des délais raisonnables.

### 3.3.4 Quantification de la transition

Pour rappel, nous voulons identifier trois paramètres pour chaque transition de phase identifiée : la valeur du taux de synchronisme critique associée  $T_c$ , l'exposant critique  $\delta$  correspondant à l'évolution temporelle de la densité pour  $T = T_c$  et l'exposant critique  $\beta$  qui donne le comportement asymptotique de la densité pour des valeurs  $T$  proches de  $T_c$ .

#### Mesure des paramètres

Pour déterminer  $T_c$  et  $\delta$ , nous commençons par réaliser l'expérience ci-dessus afin d'obtenir une évolution temporelle en temps exponentiel du comportement de la densité. La théorie des transitions de phase de second ordre prévoit que pour le régime critique  $T = T_c$ , la densité suit une loi de puissance  $\rho(t) = d_0 \cdot t^{-\delta}$ . Par conséquent la courbe  $\rho(t)$  pour le cas critique devra former une droite dans un repère logarithmique. On sait également qu'en régime sur-critique (qui correspond à la phase active), la densité diminue plus lentement que le cas critique et se stabilise une densité fixe, alors dans le cas sous-critique (qui correspond à la phase qui converge vers la configuration nulle), la densité diminue plus rapidement que dans le cas critique et converge vers 0. Dans une représentation logarithmique, les cas sur-critique et sous-critique apparaissent respectivement comme des courbes convexes et concaves. Nous allons donc utiliser cette détermination pour déterminer le taux de synchronisme critique de la transition  $T_c$ . Un exemple d'étude quantitative d'une transition est proposée dans la Figure 3.9, et les résultats obtenus pour cette méthode sont rassemblés dans le Tableau 3.3.

Une fois le taux critique obtenu, on dispose d'une représentation logarithmique du comportement

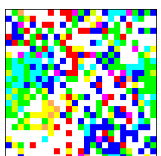




TABLE 3.3 – Mesures des taux critiques de synchronisme pour les règles ACE par classe de transition (précision estimée à  $\pm 10^{-3}$ ).

Classe	Règle ACE	$\alpha_c$	$\beta_c$	$\gamma_c$
$T_{\text{sup}}$	18	0.714	0.749	0.655
	26	0.475	0.526	0.406
	50	0.628	0.601	0.487
	58	0.340	0.289	–
	106	0.815	0.848	0.813
	146	0.675	0.732	0.635
$T_{\text{inf}}$	6	0.283	–	–
	38	0.041	–	–
	134	0.082	–	–

TABLE 3.4 – Approximation des exposants critiques  $\delta$  des transitions de phase par la méthode des moindres carrés. Pour rappel, l'exposant critique caractéristique de la percolation dirigée en dimension 1 est donnée par  $\delta_{\text{DP}} = 0,159464$ . S'il est difficile d'apprécier la précision des résultats obtenus par comparaison avec la valeur  $\delta_{\text{DP}}$  de référence, on peut raisonnablement penser qu'on identifie effectivement la signature de la percolation dans tous les cas.

Classe	Règle ACE	$\delta_\alpha$	$\delta_\beta$	$\delta_\gamma$
$T_{\text{sup}}$	18	0.1596	0.1399	0.1935
	26	0.1611	0.1612	0.1694
	50	0.1542	0.1510	0.1664
	58	0.1468	0.1397	–
	106	0.1613	0.1767	0.1580
	146	0.1590	0.1795	0.1581
$T_{\text{inf}}$	6	0.1539	–	–
	38	0.1652	–	–
	134	0.1627	–	–

critique de la densité sous la forme d'une droite de pente  $-\delta$ , où  $\delta$  est l'exposant critique que l'on souhaite mesurer. Pour ce faire, nous allons utiliser la méthode des moindres carrés afin de déterminer la valeur de  $\delta$  qui minimise l'écart entre la droite obtenue et les résultats des mesures. On comprend alors la nécessité de choisir des temps d'échantillonnage en croissance géométrique plutôt qu'arithmétique : si on considère la représentation logarithmique du comportement critique, on souhaite équilibrer la densité des points sur l'échelle logarithmique des temps et éviter une trop grande densité de points pour des grands temps de simulation selon un accroissement arithmétique. Pour cette raison, nous avons choisi une progression géométrique de paramètre  $q = 1,25$  déterminé manuellement. On souhaite également limiter l'importance des points associés aux premiers temps  $t < 100$  et on leur associe donc un poids de 0.

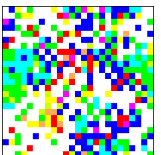
Les valeurs de l'exposant critique  $\delta$  obtenues par la méthode des moindres carrés sont compilées dans le Tableau 3.4. Il n'existe à l'heure actuelle pas de méthode généralisée pour identifier de manière analytique la présence d'un phénomène de percolation dirigée. En revanche, quelques études récentes comme celles de Regnault [Reg08a, Reg12] nous invitent à penser qu'il est possible de prouver ce résultat au cas par cas en adoptant une approche analytique et en se comparant au modèle de percolation dirigée de référence. À ce point de notre étude, il apparaît donc naturel de vouloir chercher l'origine des phénomènes observés quantitativement grâce à des considérations théoriques.

## 3.4 Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons appliqué plusieurs définitions de l'asynchronisme à un ensemble d'automates cellulaires présentant une grande variété de comportements. Nos observations confirment que les perturbations considérées ont des effets variés sur les comportements des automates cellulaires. En utilisant le paramètre densité pour quantifier les comportements, nous avons montré que pour la plupart des modèles, les différences comportementales entre  $\alpha$ -synchronisme et  $\beta$ -synchronisme sont négligeables, mais pour d'autres, des différences mesurables et parfois qualitatives ont pu être observées.

En particulier, nous sommes parvenus à quantifier les comportements des automates cellulaires en nous appuyant sur l'apparition de transitions de phase dans certains modèles asynchrones et avons associé ces transitions à la classe d'universalité de la percolation dirigée et avons montré que si ce phénomène est conservé pour certains modèles entre nos différentes perturbations (classe  $T_{\text{sup}}$ ), il disparaît totalement dans le  $\beta$ -synchronisme pour d'autres (classe  $T_{\text{inf}}$ ).

Plus surprenant, pour une règle particulière (ACE 58), une différence qualitative de comportement a pu être observée entre le  $\beta$ -synchronisme et le  $\gamma$ -synchronisme. Ce constat révèle que même pour des définitions proches de l'asynchronisme, on peut trouver des différences de comportement qualitatives sur certains modèles d'automates cellulaires, d'où l'importance d'étudier la robustesse des comportements à l'asynchronisme.





# Chapitre 4

## Approche microscopique du comportement asynchrone

“Où finit le télescope, le microscope commence. Lequel des deux a la vue la plus grande?”

– Victor Hugo, *Les Misérables*, livre 3, 1862.

### Sommaire

---

4.1	ACE 51 : un cas trivial de $\beta$ -invariance . . . . .	58
4.2	ACE 50 : percolation dirigée . . . . .	59
4.2.1	Interprétation des diagrammes espace-temps . . . . .	59
4.2.2	Approche analytique du comportement $\beta$ -synchrone . . . . .	61
4.2.3	Lien à la percolation dirigée . . . . .	63
4.3	ACE 6 : divergence $\alpha/\beta$ en densité . . . . .	64
4.3.1	Analyse du comportement $\alpha$ -synchrone . . . . .	65
4.3.2	Passage au $\beta$ -synchronisme . . . . .	67
4.4	ACE 58 : divergence $\gamma$ -synchrone . . . . .	68
4.5	Synthèse . . . . .	68

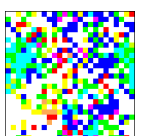
---

*Dans ce chapitre, nous présentons une approche microscopique de la dynamique de quelques règles d'ACE soumises aux différentes perturbations. En particulier, nous allons reprendre les observations majeures des comportements obtenues au chapitre précédent et tenter d'apporter des arguments analytiques sur les changements de comportements observés. Bien que ces approches ne constituent pas en soi des “preuves” du comportement global, elles ont pour objectif de mettre en évidence les différences de comportements apparaissant au niveau des interactions entre cellules.*

Pour cette approche, nous allons considérer les règles suivantes :

- la règle 51 qui est invariante sous  $\beta$ -synchronisme, mais pas en  $\alpha$ -;
- la règle 50, pour laquelle une transition est observée pour les deux asynchronismes, mais où l'aspect du diagramme espace-temps change ;
- la règle 6, pour laquelle seul l' $\alpha$ -synchronisme présente une transition de phase.
- la règle 58, pour laquelle l' $\alpha$ - et le  $\beta$ -synchronisme présentent une transition de phase, contrairement au  $\gamma$ -synchronisme.

Notons que 58 est la seule règle pour laquelle une réelle différence qualitative est observée entre le  $\beta$ - et le  $\gamma$ -synchronisme. Pour cette raison, le  $\gamma$ -synchronisme sera assimilé au  $\beta$ -synchronisme dans nos études des règles 50 et 6.



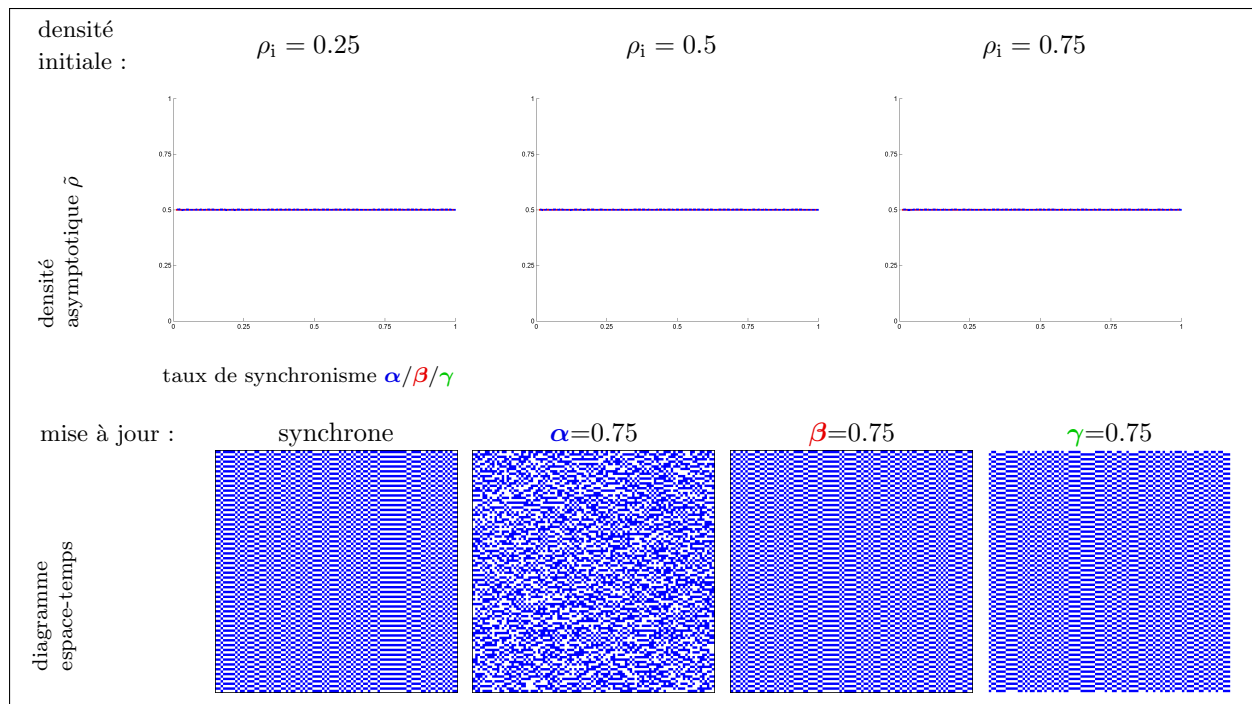


FIGURE 4.1 – Profils de densité et diagrammes espace-temps pour l'ACE 51.

#### 4.1 ACE 51 : un cas trivial de $\beta$ -invariance

Commençons notre approche microscopique de la dynamique  $\beta$ -synchrone en considérant un cas trivial, la règle d'inversion, notée ACE 51 et définie par la table de transition suivante :

000	001	010	011	100	101	110	111
1	1	0	0	1	1	0	0

Pourquoi peut-on dire que cette règle est un cas trivial? Comme nous l'avons mentionné au chapitre précédent, la règle 51 fait partie de la classe  $C$ , c'est-à-dire les automates pour lesquels aucune différence macroscopique en densité n'est identifiable dans le cas synchrone ou asynchrone. Or un rapide examen des diagrammes espace-temps  $\alpha$ - et  $\beta$ -synchrones (Figure 4.1) nous révèle que si la dynamique  $\alpha$ -synchrone est largement perturbée par rapport au cas synchrone, la dynamique  $\beta$ -synchrone quant à elle est invariante. Comment alors justifier cette différence fondamentale du comportement?

Pour répondre à cette question, nous allons commencer par construire les *tableaux d'espérance* des transitions locales de 51 en mode  $\alpha$ - et  $\beta$ -synchrone, comme illustré dans le Tableau 4.1. Ces tableaux consistent à décrire des transitions synchrones stochastiques équivalentes aux transitions asynchrones déterministes étudiées. On les obtient assez simplement, en calculant pour chaque configuration locale possible l'espérance de la variable aléatoire résultante.

Première remarque : on retrouve dans le cas  $\alpha$ -synchrone l'instabilité du comportement microscopique observé dans le diagramme espace-temps. En effet, si l'on considère chaque colonne du tableau, les sorties de la transition locale stochastique sont toutes influencées par le taux de synchronisme  $\alpha$ , ce qui indique que la configuration  $n + 1$  est aléatoire.

Dans le cas du  $\beta$ -synchronisme, il apparaît plus difficile de tirer des conclusions directes sur les propriétés du comportement à partir du seul tableau des espérances. En effet, d'après le Tableau 4.1(b), si la dynamique  $\beta$ -synchrone n'influe pas directement sur les états propres des cellules, les modifications portent sur les états observables, dont les effets ne peuvent être observés sur un unique pas de temps. Pour une approche par les tables d'espérance, il nous faudrait donc représenter les transitions sur au

TABLE 4.1 – Tables des espérances pour la mise à jour  $\alpha$ - et  $\beta$ -synchrone de l'ACE 51. Chaque colonne représente une configuration possible pour un cellule et ses deux voisines immédiates (case supérieure) ainsi que l'espérance associée pour le résultat de la fonction de transition asynchrone (case inférieure).

(a)  $\alpha$ -synchronisme

0 0 0	0 0 1	0 1 0	0 1 1	1 0 0	1 0 1	1 1 0	1 1 1
$\alpha$	$\alpha$	$1 - \alpha$	$1 - \alpha$	$\alpha$	$\alpha$	$1 - \alpha$	$1 - \alpha$

(b)  $\beta$ -synchronisme

$\begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 0^{(0)} \\ 0^{(0)} \\ 0^{(0)} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 0^{(0)} \\ 0^{(0)} \\ 1^{(1)} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1^{(1)} \\ 1^{(1)} \\ 0^{(0)} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1^{(1)} \\ 1^{(1)} \\ 1^{(1)} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 0^{(0)} \\ 0^{(0)} \\ 0^{(0)} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 0^{(0)} \\ 0^{(0)} \\ 1^{(1)} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1^{(1)} \\ 1^{(1)} \\ 0^{(0)} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1^{(1)} \\ 1^{(1)} \\ 1^{(1)} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix}$
$1^{(\beta)}$	$1^{(\beta)}$	$0^{(1-\beta)}$	$0^{(1-\beta)}$	$1^{(\beta)}$	$1^{(\beta)}$	$0^{(1-\beta)}$	$0^{(1-\beta)}$
$\begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 0^{(1)} \\ 0^{(1)} \\ 0^{(0)} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 0^{(1)} \\ 0^{(1)} \\ 1^{(1)} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1^{(0)} \\ 1^{(0)} \\ 0^{(0)} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1^{(0)} \\ 1^{(0)} \\ 1^{(1)} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 0^{(1)} \\ 0^{(1)} \\ 0^{(0)} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 0^{(1)} \\ 0^{(1)} \\ 1^{(1)} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1^{(0)} \\ 1^{(0)} \\ 0^{(0)} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1^{(0)} \\ 1^{(0)} \\ 1^{(1)} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix}$
$1^{(1)}$	$1^{(1)}$	$0^{(0)}$	$0^{(0)}$	$1^{(1)}$	$1^{(1)}$	$0^{(0)}$	$0^{(0)}$

moins deux pas de temps, et donc considérer des configurations de non plus trois mais cinq cellules, ce qui complexifie considérablement l'approche probabiliste.

Ici, on peut montrer assez simplement que la règle 51 est invariante en  $\beta$ -synchronisme, en arguant que cette règle ne prend en réalité jamais compte des états des deux voisins gauche et droite, mais n'utilise que l'état de la cellule elle-même. Or dans le cas du  $\beta$ -synchronisme, une cellule perçoit toujours son état propre et l'information "utile" est donc ici toujours transmise de manière parfaite, ce qui résulte en une dynamique identique au cas synchrone.

*Outre l'explication du cas particulier de la règle 51, ce que nous apprenons ici, c'est que même un cas aussi simple que la  $\beta$ -invariance d'une règle est en pratique une propriété difficile à prouver, parce que le  $\beta$ -synchronisme fait intervenir des perturbations qui n'influencent les configurations qu'après deux pas de temps.*

## 4.2 ACE 50 : percolation dirigée

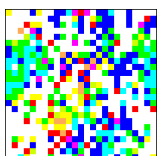
La règle 50, aussi appelée "inverser sauf si tout-0", est définie par la règle de transition suivante :

000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	0	0	1	1	0	0

L'étude quantitative dans le chapitre précédent de cette règle a révélé une observation paradoxale. Bien que l'évolution du paramètre densité soit similaire pour les différents modes de mise à jour – tant du point de vue du profil densité que de l'appartenance à une même classe d'universalité – l'observation des diagrammes espace-temps pour un taux de synchronisme super-critique présente un aspect sensiblement différent. En particulier, si les diagrammes  $\beta$ - et  $\gamma$ -synchrones se ressemblent, le diagramme  $\alpha$ -synchrone semble largement plus bruité, même pour des hauts taux de synchronisme. Cette observation nous invite à penser qu'il existe une différence fondamentale dans les mécanismes microscopiques de 50 entre le synchronisme de la mise à jour ( $\alpha$ ) et l'asynchronisme de la transmission d'état ( $\beta$  et  $\gamma$ ). Nous allons donc préciser ces observations et tenter de leur apporter une explication, en considérant les mises à jour  $\alpha$ - et  $\beta$ -synchrone pour la règle 50.

### 4.2.1 Interprétation des diagrammes espace-temps

L'observation comparative des diagrammes espace-temps  $\alpha$ - et  $\beta$ -synchrones de la règle 50 présente un certain nombre de différences. D'une part, le cas  $\alpha$  peut se décrire par l'apparition de "trous blancs"



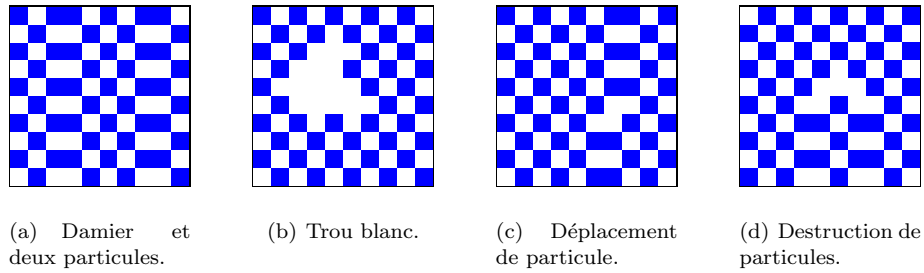


FIGURE 4.2 – Motifs  $\beta$ -synchrones apparaissant pour 50. À noter que le cas synchrone correspond uniquement au cas (a), alors que le  $\beta$ -synchronisme permet d’observer tous les motifs.

de différentes dimensions sur un fond a priori chaotique, le cas  $\beta$  présente une bien plus grande stabilité dans les configurations apparaissant.

### Motifs $\beta$ -synchrones

En effet, en comparant les diagrammes espace-temps synchrone et  $\beta$ -synchrone, par comparaison au cas  $\alpha$ -synchrone, on s’aperçoit qu’il existe une régularité dans les motifs observés. En particulier, on retrouve dans le  $\beta$ -synchrone une certaine conservation des motifs observés habituellement pour une mise à jour synchrone. En effet, les diagrammes synchrones peuvent être décrits par une répartition spatiale de deux motifs de période temporelle égale à 2 :

- des *particules*, caractérisées par un enchaînement de deux cellules à l’état identique ;
- des zones en *damier*, repérables à une alternance dans les états des cellules ;

Il est cependant à noter que font exception à la règle les configurations des premiers temps. On voit apparaître d’autres motifs, comme des groupes de plus de deux cellules à l’état identique. Ces motifs sont des effets transitoires liés à la configuration initiale aléatoirement, et sont résorbés en quelques pas de temps en dynamique synchrone.

De même, alors que l’on n’observe plus cette répartition de motifs dans les diagrammes  $\alpha$ -synchrones, on retrouve dans le  $\beta$ -synchrone des motifs similaires, à quelques différences près (voir la Figure 4.2) :

- On note l’apparition de *trous blancs*, caractérisés par des enchaînements de trois cellules ou plus à l’état 0. Ces motifs doivent donc être perçus comme des anomalies dues aux perturbations du synchronisme, et vont également modifier le comportement des particules.
- Les particules sont toujours caractérisées par des couples de cellules voisines à l’état identique, à la différence que ces particules peuvent résulter dans des trous blancs et se ainsi déplacer spatialement. Dans le cas où deux particules ou plus se rencontrent dans un trou blanc qui les englobe toutes, il en résulte si le trou blanc parvient à se résorber qu’on obtient soit une particule sortante si le nombre de particules entrantes est impair, soit zéro si leur nombre est pair (ce qui correspond à la jonction des damiers).

À partir de ces observations locales de la règle 50, nous venons donc d’établir les comportements mésoscopiques qui régissent l’évolution des configurations. Il est maintenant possible, à partir de ces observations, de formuler une généralisation du comportement global.

### Conséquences sur le comportement asymptotique

La première observation que l’on peut faire sur la dynamique globale concerne les particules. En dynamique  $\beta$ -synchrone, celles-ci peuvent, par l’intermédiaire d’anomalie apparaissant dans la périodicité des motifs, se déplacer sur la grille unidimensionnelle, voire s’annuler avec d’autres particules. Comme l’apparition des trous blancs est liée à des sauts dans la transmission d’états cellulaires mis à jour, ces

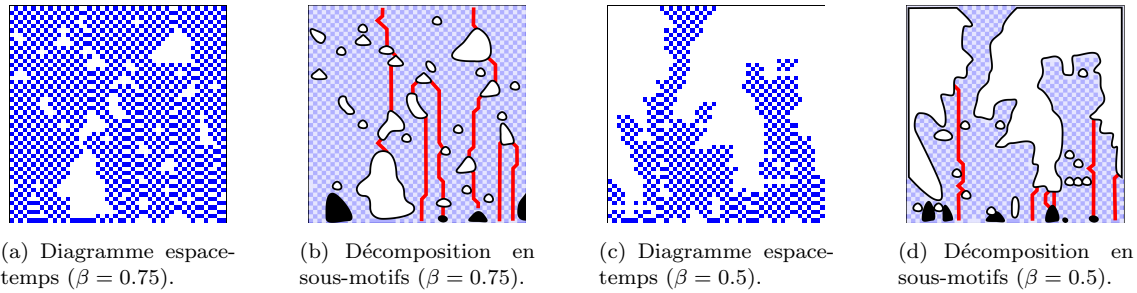


FIGURE 4.3 – Exemples de diagrammes espace-temps super-critique (a) et sous-critique (c), et leur décomposition en motifs associée (b) et (d). Les lignes rouges représentent les particules, les zones blanches les trous, les zones noires des motifs transitoires. Les zones restantes correspondent au damier.

événements sont stochastiques. En conséquence, la position pour une particule correspond à une marche aléatoire sur la grille cellulaire (cf. Figure 4.3).

Aussi, lorsque deux particules ou plus se rencontrent au sein d’un même trou blanc, au plus une particule sera reformée en sortie, en fonction de la parité du nombre de particules entrantes. On déduit de cette observation que pour une grille cellulaire finie à bords périodiques, le comportement asymptotique super-critique de 50  $\beta$ -synchrones correspond à un damier recouvrant toute la configuration (aux anomalies près) si la taille de la grille est paire, à un damier plus une particule sinon.

### Apparition des phases active et passive

Comment expliquer la séparation en phase du comportement  $\beta$ -synchrones? Intuitivement, on devine que la taille des trous blancs augmente au fur et à mesure que le taux de synchronisme  $\beta$  diminue. Il en résulte que pour un haut taux de synchronisme ( $\beta \sim 1$ ), la probabilité d’apparition des anomalies n’est pas assez importante pour compenser les effets “réparateurs” de la règle de mise à jour, qui résorbe les trous blancs en damiers. Au contraire, pour faible taux ( $\beta \ll 1$ ), les anomalies sont nombreuses et la mise à jour n’arrive plus à combler les anomalies qui s’agrandissent et se rejoignent jusqu’à couvrir l’intégralité de la grille cellulaire, ce qui correspond à la phase passive (de densité nulle) de l’automate  $\beta$ -synchrones.

Nous proposons maintenant de prendre un point de vue analytique pour d’une part mettre en évidence formellement les comportements spécifiques au  $\beta$ -synchronisme, et d’autre part tenter d’expliquer l’existence d’une transition de phase.

## 4.2.2 Approche analytique du comportement $\beta$ -synchrones

### Stabilité du damier

Lorsqu’on affiche le diagramme espace-temps de l’ACE 50  $\beta$ -synchrones, on observe une certaine régularité dans les motifs apparaissant. En particulier, les régions en damier – formées d’une alternance de cellules à l’état 1 et 0 éventuellement entrecoupée de trous blancs – semblent rester stables dans la mesure où on retrouve le motif après quelques pas de temps. Nous allons maintenant nous attacher à montrer analytiquement que les damiers sont effectivement conservés par une mise à jour  $\beta$ -synchrones.

Commençons par définir formellement ce qu’on entend par motif en damier :

**Définition 13** (Motif en damier).

*Dans un anneau de taille paire, un damier désigne un groupe continu de cellules dont les états sont alternativement 0 et 1. On considère que dans cette définition les cellules d’état 1 (bleus) peuvent éventuellement être remplacées par l’état 0 (blanc).*

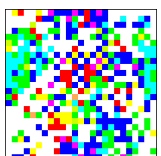




TABLE 4.2 – Tables des espérances pour la mise à jour  $\beta$ -synchrone de l'ACE 50. Chaque colonne représente une configuration possible pour un cellule et ses deux voisines immédiates (case supérieure) ainsi que l'espérance associée pour le résultat de la fonction de transition  $\beta$ -synchrone (case inférieure).

État central synchronisé :

$\begin{smallmatrix} \cdot(0) & 0^{(0)} & \cdot(0) \\ 0^{(0)} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot(0) & 0^{(0)} & \cdot(1) \\ 1^{(\beta)} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot(0) & 1^{(1)} & \cdot(0) \\ 0^{(1-\beta)} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot(0) & 1^{(1)} & \cdot(1) \\ 0^{(1-\beta)} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot(1) & 0^{(0)} & \cdot(0) \\ 1^{(\beta)} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot(1) & 0^{(0)} & \cdot(1) \\ 1^{(\beta)} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot(1) & 1^{(1)} & \cdot(0) \\ 0^{(1-\beta)} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot(1) & 1^{(1)} & \cdot(1) \\ 0^{(1-\beta)} \end{smallmatrix}$
----------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------

État central désynchronisé :

$\begin{smallmatrix} \cdot(0) & 0^{(1)} & \cdot(0) \\ 0^{(1-\beta)} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot(0) & 0^{(1)} & \cdot(1) \\ 1^{(1)} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot(0) & 1^{(0)} & \cdot(0) \\ 0^{(0)} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot(0) & 1^{(0)} & \cdot(1) \\ 0^{(0)} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot(1) & 0^{(1)} & \cdot(0) \\ 1^{(1)} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot(1) & 0^{(1)} & \cdot(1) \\ 1^{(1)} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot(1) & 1^{(0)} & \cdot(0) \\ 0^{(0)} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \cdot(1) & 1^{(0)} & \cdot(1) \\ 0^{(0)} \end{smallmatrix}$
----------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------

Les damiers sont donc des configurations où on ne trouve jamais de groupes contigus de cellules à l'état 1 et où les cellules à l'état 1 occupent toutes des positions paires, ou bien toutes occupent des positions impaires. Cela nous amène à introduire la notation suivante :

**Notation 14** (Site de damier).

Soient trois cellules consécutives aux états  $a - b - c$ . Lorsqu'on veut préciser qu'une cellule peut être dans l'état 1 dans une configuration en damier, on dit que cette cellule est un site du damier et on la souligne la représentation de son état (ici  $b$ ) pour marquer cette propriété :  $a - \underline{b} - c$ .

Autrement dit, une configuration est un damier s'il n'existe pas de site de damier dans l'état 1. La conservation du damier par la dynamique  $\beta$ -synchrone s'énonce donc par le théorème suivant :

**Théorème 4.2.1** (Conservation du damier).

L'image d'une configuration en damier par une mise à jour  $\beta$ -synchrone de la règle 50 est un damier.

*Démonstration par l'absurde.* On part d'une configuration initiale  $x^0$  quelconque correspondant à la définition d'un damier. Supposons qu'il existe  $T \in \mathbb{N}$  tel que toutes les configurations jusqu'au temps  $T - 1$  soient des damiers, et la configuration à  $T$  ne le soit pas. Il existe donc dans la configuration  $x^T$  un trio de cellules correspondant aux états  $\underline{\cdot}(\cdot) - 1^{(\cdot)} - \underline{\cdot}(\cdot)$ , où la cellule centrale est dans l'état 1 alors qu'elle n'est pas un site du damier.

À partir de la table de transition  $\beta$ -synchrone de la règle 50 du Tableau 4.2, il est possible de dériver les images et antécédents possibles pour chacun des états d'une cellule :

$$f_{50} : \begin{cases} 0^{(0)} \rightarrow 0^{(0)}, 1^{(1)}, 1^{(0)} \\ 0^{(1)} \rightarrow 0^{(0)}, 0^{(1)}, 1^{(1)} \\ 1^{(1)} \rightarrow 0^{(0)}, 0^{(1)} \\ 1^{(0)} \rightarrow 0^{(0)} \end{cases} \quad f_{50}^{-1} : \begin{cases} 0^{(0)} \rightarrow \mathcal{Q} \\ 0^{(1)} \rightarrow 0^{(1)}, 1^{(1)} \\ 1^{(1)} \rightarrow 0^{(0)}, 0^{(1)} \\ 1^{(0)} \rightarrow 0^{(0)} \end{cases}$$

Soient une cellule  $c$  et ses deux voisines  $v$  et  $w$ . Pour que  $c$  soit dans l'état  $x_c^T = 1^{(\cdot)}$  au temps  $T$ , il faut donc qu'au temps  $T - 1$  cette cellule soit dans l'état  $x_c^{T-1} = \underline{0^{(\cdot)}}$ , ce qui implique qu'il faut qu'au moins une des cellules des cellules  $v$  ou  $w$  soit dans l'état  $0^{(1)}$  au temps  $T - 1$  car la configuration  $x^{T-1}$  est un damier et qu'il faut au moins une cellule voisine d'état observable 1 pour que  $b$  change d'état.

L'antécédent de  $x_c^{T-1} = \underline{0^{(\cdot)}}$  est nécessairement  $x_c^{T-2} = 0^{(\cdot)}$  car la configuration  $x^{T-2}$  est un damier dont la cellule  $c$  n'est plus un site. De plus, si  $v$  (ou  $w$ ) est dans l'état  $0^{(1)}$  au temps  $T - 1$ , cela implique qu'elle est dans l'état  $\underline{0^{(1)}}$  ou  $\underline{1^{(1)}}$  au temps  $T - 2$ . Or cette affirmation est en contradiction avec  $x_c^{T-1} = \underline{0^{(\cdot)}}$ , car la configuration  $x_c^{T-2} = 0^{(\cdot)}$  devrait devenir  $x_c^{T-1} = \underline{1^{(\cdot)}}$  dans le cas où au moins un des voisins est dans un état  $\underline{\cdot}^{(1)}$ . On en conclut que s'il existe un temps  $T$  tel que la configuration  $x^T$  est un damier, alors  $x^t$  est un damier pour tout  $t > T$ .  $\square$

### 4.2.3 Lien à la percolation dirigée

Dans le Chapitre 3, on a montré que la transition de phase entre la survie des états 1 et la convergence vers un état tout-0 suivant une loi de puissance dont les caractéristiques correspondent à la classe d'universalité de la percolation dirigée. Dans le cadre d'une approche microscopique se pose d'emblée la question : est-il possible de retrouver ce résultat par des considérations probabilistes sur les motifs observés dans les automates cellulaires de la classe  $T_{\text{sup}}$ , et en particulier sur l'ACE 50 ?

#### Modèle standard de la percolation dirigée

La classe d'universalité de la percolation dirigée rassemble les systèmes pour lesquels une transition de phase apparaît, caractérisée par une loi de puissance associée à des exposants critiques bien précis [Hin00].

La percolation a d'abord été définie par la propagation d'un fluide dans un milieu poreux. Ce système a été modélisé par une grille carrée infinie où chaque sommet du graphe, ou *site*, est relié aux quatre nœuds les plus proches par des *liens*. La percolation des nœuds (respectivement des liens) consiste à considérer indépendamment les sites (resp. les liens) comme ouverts avec une certaine probabilité  $p$  – c'est-à-dire qu'ils laissent passer le fluide – ou fermés avec une probabilité  $1 - p$ . Si  $p$  est assez grand, le fluide inséré en un point d'entrée donné peut traverser le milieu, mais si  $p$  est trop petit, le fluide reste emprisonné dans une partie fermée du graphe. Dans la percolation dirigée [Kin83], on suppose que le fluide en question est soumis à des forces globales, comme la gravité, et ne peut se propager que dans une direction, c'est-à-dire que le graphe des nœuds et des liens est un graphe orienté aperiodique (voir Figure 4.4(b)).

#### Percolation dirigée en $\alpha$ -synchronisme

On doit à Regnault la majorité des contributions liées aux approches analytiques de la percolation dirigée dans les automates cellulaires de la classe  $T_{\text{sup}}$ . Poursuivant les travaux de Fatès *et al.* [FRST06] sur les ACE doublement quiescents, il s'intéresse aux transitions de phase, notamment sur l'ACE 178<sup>11</sup>. En appliquant une correspondance du diagramme espace-temps du modèle 178 avec le modèle standard de percolation dirigée, il confirme un couplage entre les deux modèles et confirme par analogie la classe d'universalité pour l'ACE 178  $\alpha$ -synchrone [Reg08b]. Dans un rapport plus récent, celui-ci étudie pour le même modèle les temps de convergence polynomial et exponentiel des phases respectivement passive et active du comportement [Reg12].

Loin de constituer une preuve de la percolation dirigée pour  $T_{\text{sup}}$ , ces études constituent un élément d'importance pour expliquer les transitions de phase des modèles de cette classe : vu la proximité des règles locales des modèles concernés, qui ne diffèrent généralement que d'un bit, et la ressemblance des comportements observés, en particulier la régularité des exposants observés, on est en droit de se demander si ce n'est pas le même phénomène responsable des comportements de ces modèles d'ACE. Cette question est d'ailleurs à notre connaissance encore un problème ouvert.

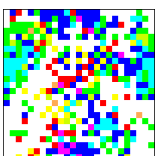
La question qui nous anime maintenant concerne le  $\beta$ -synchronisme. Si l'on a réussi à montrer le lien entre la percolation dirigée et l' $\alpha$ -synchronisme pour le modèle 178, peut-on en faire de même pour le  $\beta$ -synchronisme et le modèle 50 ?

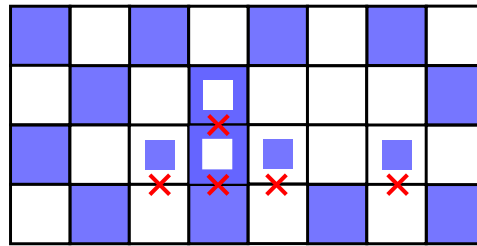
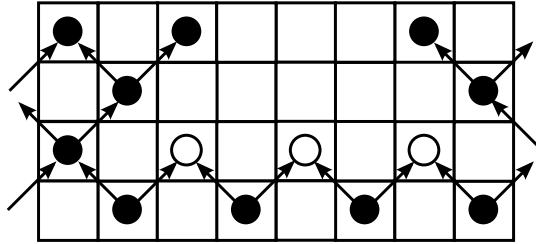
#### Percolation dirigée en beta-synchronisme

Comme chez Regnault, nous allons faire correspondre les motifs en damier des diagrammes espace-temps de l'ACE 50 avec le modèle standard de la percolation dirigée des nœuds, comme illustré par la Figure 4.4. Considérons uniquement les cellules correspondant aux sites du modèle standard de percolation dirigée :

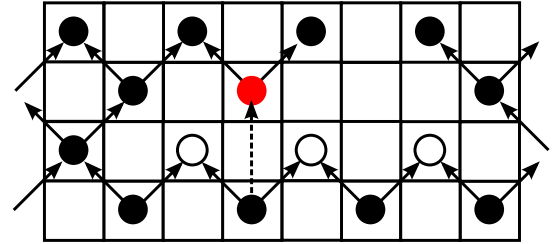
- les états  $0^{(0)}$  (bleu sur bleu) correspondent aux sites actifs ;
- les états  $0^{(1)}$  (bleu sur blanc) représentent les sites inactifs car fermés ;
- les états  $1^{(1)}$  (blanc sur blanc) sont les sites inactifs dont les parents sont inactifs ;

11. Aussi appelée "inverser si non tous égaux", la règle 178 diffère de 50 du seul bit 128 correspondant au cas  $1 - 1 - 1$ , qui donne 0 pour 50 et 1 pour 178.



(a) Diagramme de la règle 50  $\beta$ -synchrone

(b) Modèle standard de la percolation de sites



(c) Modèle modifié de percolation de sites

FIGURE 4.4 – Correspondance entre la règle ACE 50  $\beta$ -synchrone et le modèle modifié de percolation de sites. Sur le première ligne, les carrés internes représentent les états propres des cellules (bleu pour 1, blanc pour 0) et les croix les échecs de mise à jour de l'état observable. Sur la seconde ligne, les sites actifs sont colorés en noirs, les sites passifs en blancs. Le site coloré en rouge correspond au modèle modifié, où un site peut être activé sans parent actif.

- les états  $1^{(0)}$  (blanc sur bleu) sont des sites que nous appelons dormants, c'est-à-dire des sites actifs dont les parents sont inactifs.

La correspondance entre les états des cellules et des sites du modèle standard de la percolation dirigée nous permet d'associer la probabilité  $p$  au taux de synchronisme  $\beta$ . En effet, si dans le modèle standard les nœuds sont fermés avec une probabilité  $1 - p$ , la création d'un état  $0^{(1)}$  dans l'ACE 50  $\beta$ -synchrone correspond à une probabilité  $1 - \beta$ .

*Dans ce second exemple, les comportements observés pour l' $\alpha$ -synchronisme et le  $\beta$ -synchronisme sont semblables quantitativement (cf. chapitre précédent), bien qu'une observation des diagrammes espace-temps nous révèle que la dynamique est fondamentalement différente. En particulier, nous avons été en mesure de décrire précisément le comportement  $\beta$ -synchrone et même d'apporter des éléments de preuve sur la convergence du comportement asymptotique. Cette description du comportement nous a ensuite permis de nous comparer au modèle standard de la percolation dirigée, ce qui avait déjà été confirmé par les observations faites au chapitre précédent grâce à la quantification des transitions. Ce premier résultat nous donne donc un exemple de règle partiellement robuste aux différentes perturbations de la mise à jour globale : si les comportements locaux diffèrent d'un asynchronisme à l'autre, le phénomène de percolation dirigée se produit dans les deux cas, à partir de mécanismes similaires.*

### 4.3 ACE 6 : divergence $\alpha/\beta$ en densité

La règle 6 est particulièrement intéressante car, comme les autres règles de la classe  $T_{\text{inf}}$ , on observe une différence qualitative de comportement. Là où l' $\alpha$ -synchronisme montre l'apparition d'une phase active pour des faibles taux de synchronisme  $\alpha$  et une phase passive pour des hauts taux – à l'exception notable du cas synchrone  $\alpha=1$  – le  $\beta$ -synchronisme converge toujours vers la phase passive pour tout taux non égal au synchronisme parfait  $\beta=1$ . De la même manière que pour 50, nous allons donc étudier

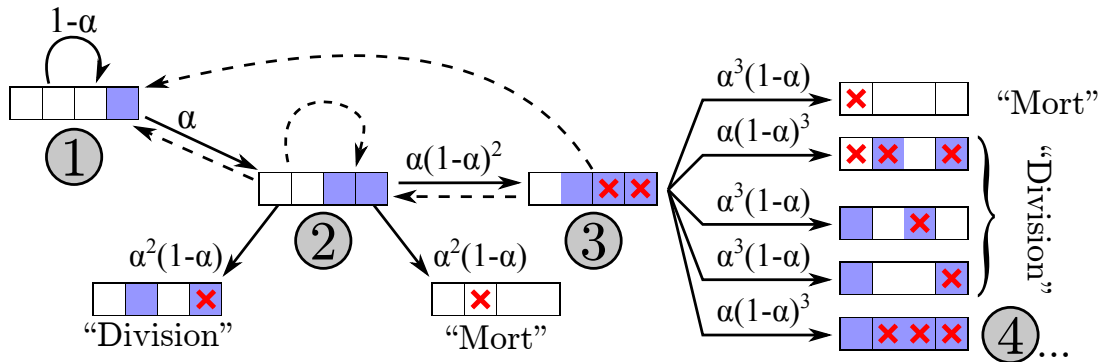


FIGURE 4.5 – Graphe de transitions illustrant la formation et destruction de branches à partir d’une unique branche, avec les probabilités associées. Les croix rouges marquent les cellules non-mises à jour (probabilité  $1 - \alpha$ ). Les états  $\textcircled{n}$  dénotent une, deux ou trois cellules d’état 1 consécutives.

les comportements microscopiques de 6, de manière à tenter d’apporter une explication probabiliste des différences observées entre l’ $\alpha$ - et le  $\beta$ -synchronisme.

La transition de la règle 6 est donnée par la table de transition suivante :

000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	1	0	0	0	0	0

Dans sa dynamique synchrone, la règle 6 correspond à la répétition d’un même motif périodique formé d’une à deux cellules d’état 1 sur fond blanc (état 0), en translation vers la “gauche” de la grille cellulaire. Dans la suite de cette étude, nous désignerons donc par *branche* tout groupe continu de cellules à l’état 1, entouré d’états 0. Pour comprendre les changements qui interviennent quand la mise à jour est perturbée, il faut donc observer comment évolue la dynamique de ces motifs pour chacun des asynchronismes. Nous allons donc considérer les  $\alpha$ - et  $\beta$ -synchronisme et observer les mécanismes locaux appliqués à un motif de type branche.

Un bref aperçu des diagrammes espace-temps asynchrones nous informe que l’interprétation des configurations en branches est toujours possible. En effet, bien que la régularité des motifs ainsi que leur vitesse de translation sont altérées, les branches semblent être relativement conservées par une dynamique asynchrone, à l’exception de deux événements notables pouvant survenir :

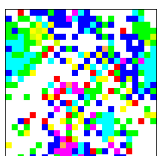
- une branche peut disparaître ;
- une branche peut se diviser pour donner lieu à deux nouvelles branches.

Un comportement en phase passive, c’est-à-dire dont la densité vers 0, correspond donc à un cas où la probabilité pour une branche de disparaître est bien supérieure à celle de créer une nouvelle branche. Inversement, la phase active signale une probabilité de destruction inférieure, résultant en une “survie” générale des états 1.

Le but de cette section sera donc de montrer que pour l’ $\alpha$ -synchronisme, il existe une phase passive pour des valeurs supérieures du taux de synchronisme  $\alpha \sim 1$  et une phase active pour des valeurs inférieures  $\alpha \ll 1$ , alors que la même observation n’est pas possible en  $\beta$ -synchronisme.

### 4.3.1 Analyse du comportement $\alpha$ -synchrone

En vue de décrire qualitativement le comportement de la règle 6  $\alpha$ -synchrone, il nous faut établir comment la destruction ou la division d’une branche peuvent se produire. Nous distinguerons pour l’instant deux cas : celui d’une branche seule, et celui de l’interaction entre deux branches.



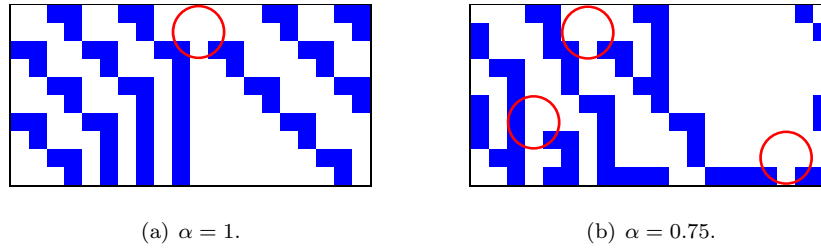


FIGURE 4.6 – Exemple de destruction de branche par interaction entre branches dans le cas synchrone (a) et  $\alpha$ -synchrone (b). Si ce phénomène se produit dans les premiers instants de la mise jour synchrone de la règle 6, les perturbations en  $\alpha$ -synchronisme entraînent des motifs qui peuvent faire intervenir ce phénomène.

### Cas d'une branche seule

Partons d'une branche seule, représentée par la configuration ① formée d'une unique cellule à l'état 1, et dérivons les possibles configurations futures sur quelques pas de temps dans le cas d'une mise à jour  $\alpha$ -synchrone, jusqu'à obtenir deux nouvelles branches ou faire disparaître la branche d'origine. La Figure 4.5 présente un graphe partiel de ces transitions avec leurs probabilités associées. On constate qu'à partir de l'état ②, les probabilités de créer ou détruire une branche en un pas de temps sont toutes deux égales à  $\alpha^2 \cdot (1 - \alpha)$ . En revanche, à partir de l'état ③, atteignable depuis l'état ②, il est possible d'obtenir (en plus des configurations de base ① et ② :

- la destruction de la branche avec une probabilité  $\alpha^3 \cdot (1 - \alpha)$  ;
- la division en deux branches séparée d'un 0, avec une probabilité  $\alpha^3 \cdot (1 - \alpha) + \alpha \cdot (1 - \alpha)^3$  ;
- la division en deux branches séparée de deux 0, avec une probabilité  $\alpha^3 \cdot (1 - \alpha)$  ;
- une configuration ④ avec probabilité  $\alpha \cdot (1 - \alpha)^3$ .

Il en résulte que pour un taux de synchronisme  $\alpha \sim 1$ , la probabilité de division est légèrement supérieure à la probabilité de destruction. En revanche, on remarque en passant par l'état ③ que cet écart sera accentué pour  $\alpha \ll 1$ .

### Cas d'une interaction entre branches

Considérons maintenant non pas une mais plusieurs branches séparées par un certain nombre de cellules à l'état 0 (Figure 4.6). En mise à jour synchrone (a), on observe qu'il est possible de détruire une branche dans les premiers instants. Dans le cas  $\alpha$ -synchrone (b), le même phénomène déterministe peut se produire, mais celui-ci n'est pas cantonné aux premiers instants des configurations : par effet de retardements dus aux perturbations  $\alpha$ -synchrones, deux branches peuvent être amenées à se rencontrer d'une manière qui entraîne la disparition de la branche "droite". Cet effet étant déterministe, il est d'autant plus important pour un important taux de synchronisme  $\alpha$ . En effet, pour un fort  $\alpha$ , dans une configuration présentant localement une grande densité en branches – ce qui est le cas pour un groupe de branches issues d'une même division, l' $\alpha$ -synchronisme peut induire des perturbations ou des délais qui après quelques pas de temps, résultent en la disparition d'une branche.

En conséquence, il apparaît que l'on puisse dériver deux types de comportements extrêmes de la règle ACE 6 en  $\alpha$ -synchronisme :

1. Pour  $\alpha \sim 1$ , les probabilités pour une branche de se diviser ou de créer une nouvelle branche sont à peu près équivalentes. En revanche, les interactions entre branches couplées aux perturbations de l' $\alpha$ -synchronisme résultent en la disparition d'un grand nombre de branches. Le comportement a donc une forte probabilité de converger vers une phase passive où toutes les branches ont disparu.
2. Pour  $\alpha \ll 1$ , la probabilité pour une branche seule de se diviser est prépondérante sur celle de sa disparition. On peut donc conjecturer que cette différence est suffisamment importante pour

contre-balancer les disparitions de branches dues aux interactions, et peut donc mener à une “survie” générale des branches.

S’il est donc possible de deviner le comportement  $\alpha$ -synchrone sur la base d’observations des comportements à l’échelle microscopique, il est également possible d’apporter des éléments de preuves sur l’explication d’une différence qualitative avec le comportement  $\beta$ -synchrone.

### 4.3.2 Passage au $\beta$ -synchronisme

L’étude quantitative du comportement asynchrone de l’ACE 6 a révélé que contrairement à l’ $\alpha$ -synchronisme, il n’existe pas de phase active pour le  $\beta$ -synchronisme. Nous allons maintenant continuer à utiliser une lecture des configurations en branches et chercher à observer comment évoluent les mécanismes de création et de destruction des branches, mais cette fois-ci en considérant uniquement des observations de diagrammes espace-temps. En effet, le passage au  $\beta$ -synchronisme suggère un doublement de l’espace d’états du système, ce qui rend difficile une approche du type graphe de transition comme dans la Figure 4.6. Ici on se propose de comparer grâce aux observations de la Figure 4.7 les mécanismes de formation/destruction de branches dans les dynamiques  $\alpha$ - et  $\beta$ -synchrones. Dans le cas

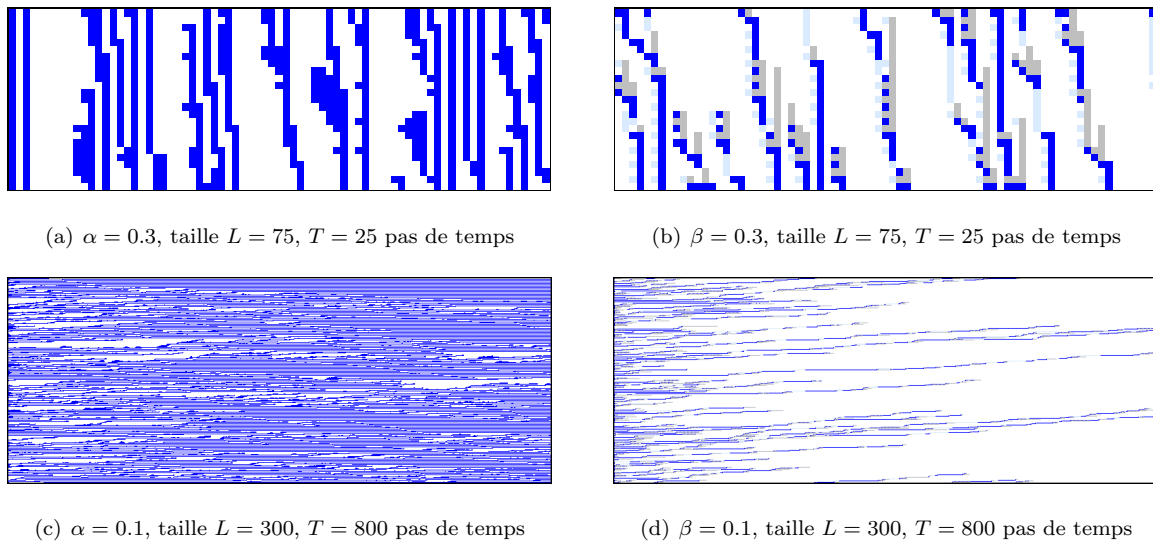
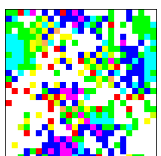


FIGURE 4.7 – Comparaison des mécanismes de création/destruction de branches dans l’ACE 6, pour l’ $\alpha$ -synchronisme et le  $\beta$ -synchronisme. Colonne gauche : l’ $\alpha$ -synchronisme dans sa phase active ( $\alpha = 0.3$  et  $\alpha = 0.1$ ), selon le mécanisme de création de branche décrit plus haut. Colonne droite : le comportement  $\beta$ -synchrone pour un taux de synchronisme comparable ( $\beta = 0.3$  et  $\beta = 0.1$ ). Les cellules blanches et bleues dénotent toujours les états  $0^{(0)}$  et  $1^{(1)}$ , le bleu/gris clair dénote l’état  $1^{(0)}$  et le gris foncé l’état  $0^{(1)}$ .

de l’ $\alpha$ -synchronisme, on remarque qu’une branche reste stable dès sa création (voir Figure 4.7(a)). Ce phénomène s’exprime par les “lignes verticales” observables dans les diagramme espace-temps des figures 4.7(a) et 4.7(c), ce qui veut dire que tant qu’une branche n’est pas détruite soit par interaction avec une autre branche soit par une mort naturelle, elle est poursuivie. Le comportement semble donc effectivement ne pas converger vers la configuration nulle.

En revanche, dans le cas  $\beta$ -synchrone, on voit que s’il est toujours possible de créer des branches par un phénomène de division, la nature même du  $\beta$ -synchronisme fait qu’une branche reste instable pendant quelques pas de temps, ce qui est visible par les “lignes gris clair” apparaissant dans la Figure 4.7(b). Ces lignes ne parviennent alors à créer une nouvelle branche que si l’espace blanc la précédant se libère à temps. La création de branches en  $\beta$ -synchronisme apparaît donc beaucoup plus compliquée que dans le cas  $\alpha$ -synchrone, ce qui explique la convergence vers la configuration nulle de la règles 6  $\beta$ -synchrone, ce qui est confirmé visuellement dans la Figure 4.7(d).



Si la divergence de comportement entre une phase active et une phase passive peut être démontrée dans le cas  $\alpha$ -synchrone – car l’espace des états est suffisamment simple pour considérer un arbre des sous-configurations – la preuve du comportement  $\beta$ -synchrone, que l’on suppose montrer que la destruction de branche est pour tout  $\beta$  plus probable que la division, reste à ce jour un problème ouvert.

#### 4.4 ACE 58 : divergence $\gamma$ -synchrone

Le résultat le plus surprenant et le plus incompréhensible de nos expérimentations est sans conteste celui de la règle 58. En effet, bien que cette règle montre un comportement similaire en  $\alpha$ -synchronisme et en  $\beta$ -synchronisme, il s’agit de la seule règle à montrer une différence qualitative entre le  $\beta$ -synchronisme et le  $\gamma$ -synchronisme. Cette observation est d’autant plus surprenante que ces deux asynchronismes ne diffèrent que d’une corrélation entre certains événements aléatoires qui régissent les transitions. En effet, on peut considérer que le  $\beta$ -synchronisme, qui consiste à perturber l’émission de l’état d’une cellule vers son voisinage, revient à perturber indépendamment chacune des transmissions indépendantes entre la cellule et ses voisins.

On ne connaît pas à ce jour les mécanismes responsables de cette observation d’une différence de comportement entre le  $\beta$ - et le  $\gamma$ -synchronisme. S’agit-il d’un nouvel effet lié aux tailles finies ? À un temps de simulation limité ? Existe-t-il un taux d’asynchronisme extrêmement petit pour lequel le  $\gamma$ -synchronisme converge vers la configuration nulle ? Cette question constitue également un problème ouvert.

#### 4.5 Synthèse

Nous avons dans ce chapitre une approche microscopique qui, si elle ne constitue une preuve formelle des comportements des ACE asynchrones, nous permet de confirmer certaines des observations quantitatives menées en amont :

- Pour la règle 51, nous avons montré non seulement que la règle  $\beta$ -synchrone était invariante par rapport au comportement synchrone, car elle ne prend pas en compte l’état du voisinage, mais nous avons aussi montré que l’approche analytique classique, qui passe par des tables d’espérance ne permettait pas de visualiser simplement le comportement.
- Pour la règle 50, nous avons décrit précisément les comportements observés et avons montré que la dynamique dans la phase active converge vers une alternance d’état 0 et 1. Cette formulation du comportement nous a ensuite permis de faire une analogie avec le modèle standard de percolation dirigée, qui avait déjà été suggéré expérimentalement dans le chapitre précédent.
- Pour la règle 6, si l’on est en mesure de prédire l’existence d’une phase active et d’une phase passive pour le cas  $\alpha$ -synchrone en analysant l’arbre des transitions possibles pour un état 1 isolé, le cas  $\beta$ -synchrone apparaît plus difficile à appréhender.
- Enfin, nous pointons du doigt la singularité des observations de la règle 58, qui présente une différence de comportement entre le  $\beta$ - et le  $\gamma$ -synchronisme.

L’approche microscopique que nous proposons ici permet donc de faire un compromis entre l’analyse et la simulation, en se basant sur des exemples obtenus par la simulation des modèles considérés et en essayant de retrouver certains résultats par des arguments théoriques. Loin de constituer une méthodologie auto-suffisante, l’approche microscopique peut nous permettre de confirmer ou de remettre en cause la validité des observations, et ainsi d’aider à la compréhension des phénomènes complexes observés.

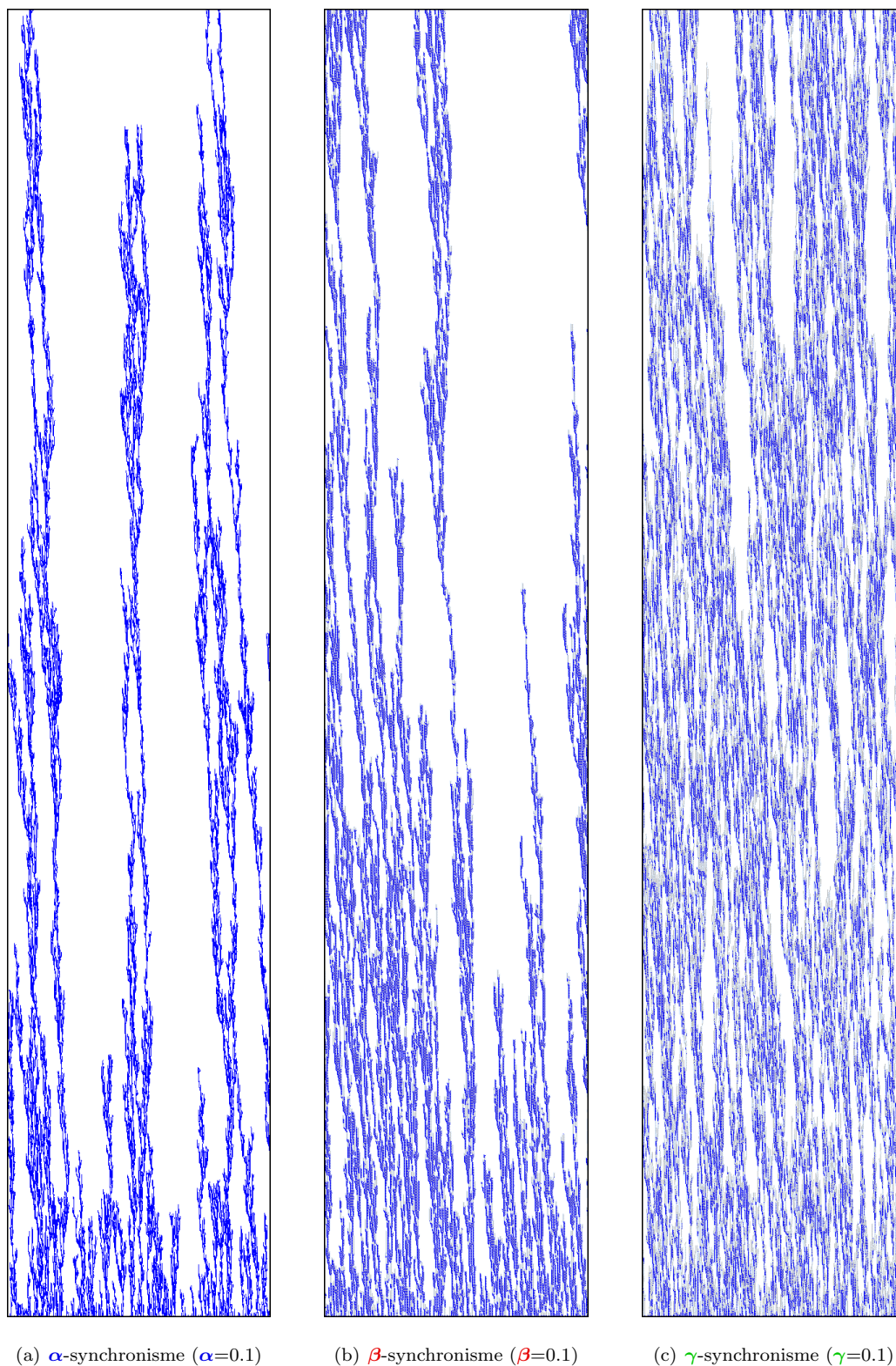
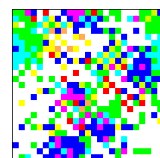


FIGURE 4.8 – Comparaison de diagrammes espace-temps pour l'ACE 58 pour différents modes de mises à jour (taille  $L = 400$  et  $T = 2000$  pas de temps). Les cellules blanches et bleues dénotent toujours les états  $0^{(0)}$  et  $1^{(1)}$ , le bleu/gris clair dénote l'état  $1^{(0)}$  et le gris foncé l'état  $0^{(1)}$ .







# Conclusion de la Partie I

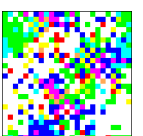
Cette première partie s'est fixé comme objectif de déterminer si différentes définitions d'une même perturbation, formées à partir des éventuelles hypothèses associées au modèle considéré, peuvent engendrer des différences de comportement. En partant d'une définition générale de l'asynchronisme qui remet en cause l'hypothèse de synchronisme parfait, nous avons considéré plusieurs exemples de modèles d'automates cellulaires où des hypothèses de modélisation supplémentaires rendent compliquée l'utilisation de cet asynchronisme, et avons déterminé qu'il était également possible de représenter l'asynchronisme par une remise en cause de la transmission d'information parfaite entre les cellules. Aussi, pour savoir si nos différents asynchronismes ont différents effets sur les modèles d'automates cellulaires, nous avons décidé d'explorer une gamme aussi large et variée que possible de comportements d'automates cellulaires simples, et avons par conséquent choisi de nous intéresser aux automates cellulaires élémentaires. Grâce à des observations aussi bien qualitatives que quantitatives, nous avons cherché à comparer les comportements des règles ACE en fonction des différents asynchronismes, et les avons classés en trois catégories : (a) aucune différence quantitative de comportement n'est observée, (b) on observe des différences de comportement mais on ne sait pas les quantifier et (c) on observe des différences de comportements que l'on peut quantifier et comparer pour chaque asynchronisme. Enfin, nous avons confirmé certaines de ces observations en observant microscopiquement des phénomènes particuliers émergeant des différentes dynamiques asynchrones.

Au terme de cette première étape de notre réflexion, nous sommes parvenus à montrer que si la plupart des règles ACE explorées montrent un changement de comportement faible voire absent, nous sommes parvenu à déterminer un certain nombre de règles pour lesquelles apparaissent de véritables différences qualitatives : les règles de la classe  $T_{\text{inf}}$  présentent une phase active pour un faible taux de synchronisme  $\alpha$  alors que cette phase n'existe pas pour les  $\beta$ - et  $\gamma$ -synchronismes ; de même, il ne semble pas exister de phase passive pour la règle 58  $\gamma$ -synchrone, contrairement aux  $\alpha$ - et  $\beta$ -synchronismes.

Ces observations nous invitent à penser que pour un modèle donné, différentes définitions de la mise à jour globale peuvent potentiellement résulter en différents comportements. Cela veut dire que pour un modèle donné, il est non seulement nécessaire de perturber la structure du modèle afin d'estimer la robustesse du comportement, mais de plus il peut s'avérer intéressant d'explorer différentes possibilités pour la définition des perturbations afin de perturber plus efficacement le comportement étudié et ainsi d'en connaître plus précisément les limites de sa robustesse.

Si les conclusions tirées de ces premières expérimentations répondent à notre question initiale, elles soulèvent également la richesse de l'approche de l'exploration de la robustesse. En particulier, en étudiant des perturbations qui visent des hypothèses particulières du modèle, comme le synchronisme parfait ou la transmission d'information parfaite, ce travail nous invite à penser qu'il existe un grand nombre de perturbations et qu'il semble pour l'instant difficile de proposer une définition unifiée ou même une description de l'espace des perturbations, tant celles-ci dépendent des modèles et des hypothèses de modélisation considérés.

Un axe prometteur de recherche dans la continuité de notre approche consisterait à considérer un ensemble de modèles structurellement variés et d'explorer un grand nombre de perturbations. Plus particulièrement, cela permettrait de pouvoir mieux définir la robustesse d'un comportement pour une perturbation donnée en se plaçant dans le contexte d'un ensemble des perturbations possibles. On pourrait alors utiliser ces observations pour dessiner de nouvelles classifications, alignées sur des propriétés intrinsèques



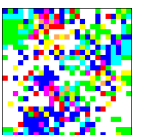
aux modèles, telle que la dépendance au synchronisme, etc.

L'exploration de la robustesse dans cette partie s'est focalisée sur la comparaison de perturbations dans un ensemble de modèles simples et sans signification particulière. Mais si nous avons montré que ces modèles présentaient divers degrés de robustesse, nous sommes amenés à nous demander si les modèles considérés ne pourraient pas être trop simples pour être robustes.

Il serait alors intéressant d'appliquer la même démarche d'exploration de la robustesse à un modèle dont la structure est plus complexe que les ACE.

Deuxième partie

**Robustesse d'un modèle discret de  
formation d'essaim**





Dans la Partie I, nous avons montré que l'exploration de l'espace des perturbations pour des modèles d'automates cellulaires permet d'étudier la robustesse de leur comportement et d'établir lorsqu'un phénomène dépend ou non d'un attribut spécifique du modèle (mode de mise à jour, taille de la grille). En effet, en considérant plusieurs perturbations d'un même attribut du modèle et en comparant les comportements obtenus, des différences qualitatives permettent de repérer les cas où des mécanismes globaux jouent un **rôle prépondérant** dans la dynamique du système. Cette observation est alors en contradiction avec l'hypothèse des systèmes complexes, selon laquelle le comportement macroscopique est le pur résultat d'entités microscopiques en interaction, et remet par conséquent en cause la validité du modèle étudié. Or les modèles étudiés jusqu'à maintenant se limitaient à des **cas abstraits** afin de rechercher la plus grande variété de comportements possibles.

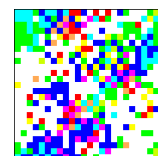
Dans cette partie, nous allons reprendre cette méthodologie de l'exploration des perturbations et l'appliquer à un cas spécifique de modèle discret, la formation d'essaim en automate cellulaire de gaz sur réseau, afin d'étudier en profondeur la robustesse des comportements observés. Le choix de ce modèle en particulier relève de plusieurs arguments :

1. Les automates cellulaires de gaz sur réseau sont une sous-classe d'automates cellulaires présentant un espace d'états plus étendu que les automates cellulaires binaires. Compte tenu de la richesse des comportements observés sur ces derniers, l'application de notre approche à des **modèles structurellement plus complexes** que les automates cellulaires élémentaires constituent donc un défi intéressant à relever.
2. Contrairement aux automates cellulaires élémentaires qui ne sont définis que comme des objets mathématiques abstraits, les automates cellulaires de gaz sur réseau représentent des particules en déplacement sur la grille cellulaire, et à ce titre peuvent être vus comme un **modèle de système multi-agent**. Cette argument aura une place centrale dans la construction des perturbations considérées.
3. Le modèle de formation d'essaim qui sera utilisé dans cette partie est le fruit de longues années de recherche en modélisation d'un phénomène biologique amplement étudié, la formation d'un essaim cohérent à partir de composants individuels en interaction, et constitue **une des tentatives de modélisation les plus simples** car toutes les dimensions du système sont discrétisées : le temps, l'espace, les états. Ce modèle a également donné lieu à de nombreuses applications, en biologie cellulaire, simulation de trafic, etc. Il existe donc un réel intérêt à étudier le comportement de ce modèle, et notamment à chercher à établir le rôle joué par la définition du modèle dans la dynamique du système.
4. Comme nous le verrons dans la définition du modèle à proprement parler, l'évolution du système est soumise à un certain nombre d'hypothèses qui rendent l'étude expérimentale difficile et une approche microscopique extrêmement complexe. En effet, nous verrons que le comportement du système est **récurrent**, c'est-à-dire que théoriquement, toutes les configurations atteignables depuis une configuration initiale donnée seront visitées un nombre infini de fois.

C'est avec ces considérations en tête que nous allons étudier le modèle de formation d'essaim en automate cellulaire de gaz sur réseau, en nous concentrant notamment sur la robustesse des comportements observés.

---

Dans le Chapitre 5, nous allons commencer par définir les automates cellulaires de gaz sur réseau et le modèle de formation d'essaim. Nous en présentons ensuite les grands principes et propriétés intrinsèques. En particulier, nous verrons que le modèle considéré suppose deux principes implicites, la conservation et l'exclusion spatiale des particules, et possède des propriétés importantes, comme la récurrence, qui se traduit par l'absence d'un comportement asymptotique stable. Dans un second temps, nous allons présenter une méthode pour caractériser le comportement du système en le décrivant sous la forme de motifs récurrents, c'est-à-dire des types de configurations qui apparaissent régulièrement dans l'évolution du système. À l'issue de ce chapitre, nous serons donc en possession d'une description aussi complète que possible du modèle en lui-même et des comportements observés, avant de procéder à l'exploration de leur robustesse.



Dans le Chapitre 6, nous entreprenons une première exploration de la robustesse des comportements présentés, en nous appuyant sur la définition de la grille cellulaire. Nous ferons varier la taille du système, sa géométrie, ce qui permettra de détecter des changements de comportements par conséquent imputables à la définition de l'espace. Ces observations nous amèneront à mettre en évidence des effets de résonance, qui marquent une différence qualitative entre les comportements des simulations finies du modèle, et les comportements théoriques de modèles dans un espace infini.

Enfin, dans le Chapitre 7, nous continuons notre exploration de la robustesse des comportements en considérant une perturbation non plus de l'espace mais de la dynamique globale du système. En reprenant les définitions de l'asynchronisme établies au Chapitre 2 et en les confrontant à la spécificité des automates de gaz sur réseau, nous définissons de nouvelles perturbations adaptées aux hypothèses du modèle. Nous appliquons ensuite ces perturbations aux comportements identifiés et concluons sur leur robustesse.

# Chapitre 5

## Comportement métastable d'un modèle discret de formation d'essaim

“Ce qui n'est pas utile à la ruche ne l'est pas non plus à l'abeille.”

– Marc-Aurèle, *Méditations IV*, 54.

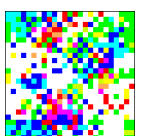
### Sommaire

---

<b>5.1 Le mouvement collectif et la formation d'essaim . . . . .</b>	<b>78</b>
5.1.1 De la modélisation du mouvement collectif ... . . . .	78
5.1.2 ... à l'étude discrète du comportement de formation d'essaim . . . . .	79
<b>5.2 Définitions formelles . . . . .</b>	<b>79</b>
5.2.1 Automates de gaz sur réseau . . . . .	80
5.2.2 Modèle de formation d'essaim . . . . .	81
5.2.3 Propriétés dynamiques particulières du modèle . . . . .	82
<b>5.3 Observation du comportement métastable . . . . .</b>	<b>85</b>
5.3.1 Protocole expérimental . . . . .	86
5.3.2 Description des motifs . . . . .	88
5.3.3 Quantification des motifs . . . . .	91
<b>5.4 Synthèse . . . . .</b>	<b>93</b>

---

*Dans ce chapitre, nous présentons le modèle de formation d'essaim et son comportement, depuis ses origines jusqu'à sa définition formelle d'automate cellulaire que nous allons utiliser tout au long de cette partie. En particulier, nous commençons par présenter la démarche de modélisation du phénomène et d'observation du comportement qui a conduit au modèle présent, en partant des travaux de Reynolds pour arriver au modèle de particules auto-propulsées de Vicsek, puis au modèle discret en automate de gaz sur réseau introduit par Deutsch. Nous nous attachons alors à détailler aussi précisément que possible le modèle et le protocole expérimental considérés. Enfin, nous présentons le comportement observé du modèle pour les différents paramètres de contrôle, qui constituera l'observation de référence sur lequel s'appliquera l'étude de la robustesse dans les chapitres suivants.*





## 5.1 Le mouvement collectif et la formation d'essaim

Le phénomène de mouvement collectif est un comportement observé chez plusieurs espèces animales (par exemple, étourneaux, abeilles, harengs, souris), où un ensemble d'individus initialement aléatoirement répartis et orientés s'organise naturellement en un groupe cohérent où tous les composants ont une direction parallèle.

### 5.1.1 De la modélisation du mouvement collectif ...

#### Le modèle de Reynolds

Une des premières simulations du phénomène nous vient de Reynolds, qui en 1986 parvient à reproduire un comportement d'essaim en simulant un ensemble de points en mouvement dans un espace continu [Rey87]. Les comportements individuels obéissent à trois règles associées à des voisinages distincts, qui cherchent à reproduire le comportement "intuitif" d'un membre de l'espèce représentée. Ces règles sont, par ordre de taille de voisinage décroissante :

**Attraction** : les entités doivent chercher à se rapprocher de leurs voisins.

**Alignement** : les entités cherchent à aligner leur vecteur vitesse avec ceux de leurs voisins les plus proches.

**Répulsion** : les entités doivent s'efforcer d'éviter d'être trop proches d'autres entités.

Initialement, le modèle de Reynolds a été conçu pour reproduire visuellement le comportement collectif et non pour le valider par comparaison avec le vivant. Cette piste a donné récemment lieu à des améliorations fort intéressantes, qui cherchent à calibrer le modèle à partir de données extraites du vivant [LGCT12]. Les chercheurs se sont également concentrés sur un autre aspect du phénomène : la formation d'essaim, soit la transition du comportement collectif entre une phase chaotique où les entités évoluent sans prendre en compte leurs voisins, et une phase organisée, où les entités s'alignent et forment des groupes cohérents (par exemple chez les criquets [TDEKB12]). Pour cette raison, dans le cadre de modèles simples du mouvement collectif, on parlera plus souvent de modèles de formation d'essaim, qui cherchent à reproduire le caractère auto-organisé du système cible en faisant apparaître plusieurs phases. Une démarche intéressante consiste donc à chercher à reproduire cette transition avec des modèles de plus en plus simples afin de déterminer quels sont comportements individuels "minimaux" qui peuvent engendrer un tel phénomène d'auto-organisation.

#### Le modèle de Vicsek

C'est dans cet esprit qu'en 1995, Vicsek *et al.* introduisent un modèle simplifié de Reynolds, appelé "particules auto-propulsées", où les entités sont cette fois-ci ponctuelles et se déplacent selon une vitesse de norme constante. En utilisant une règle dite de *ferroalignement* qui réalise une moyenne des directions des particules voisines de manière plus ou moins bruitée selon un unique paramètre de contrôle, le modèle parvient à faire apparaître deux phases du comportement :

**Une phase désorganisée** où les particules suivent un mouvement chaotique et ne forment aucun motif global détectable.

**Une phase organisée** où émergent un ou plusieurs groupes de particules colinéaires.

Ce phénomène a depuis été largement étudié dans le cadre de simulations qui cherchent à quantifier la transition entre les phases [VCBJ+95, CDW03].

#### Vers des modèles spatialement discrets

Dans la suite logique de la modélisation des phénomènes de mouvement collectif ont été proposés des analogues du modèle de Vicsek sur des représentations discrètes de l'espace. Une première proposition est formulée par Deutsch en 1996 qui utilise un automate cellulaire de gaz sur réseau pour représenter des particules se déplaçant à vitesse constante sur une grille d'automate cellulaire carrée [Deu96]. En parallèle Csahók et Vicsek développent un modèle similaire sur une grille hexagonale [CV95].

Ces deux modèles reproduisent avec succès la séparation du comportement en deux phases, chaotique et alignée, ce qui a permis de développer des simulations et approches analytiques étudiant quantitativement la transition entre les deux comportements.

### 5.1.2 ... à l'étude discrète du comportement de formation d'essaim

Plusieurs études ont cherché à étudier la transition de phase associée à la formation d'essaim. On trouvera chez Deutsch une description précise du modèle discret de formation d'essaim, ainsi qu'une compilation étendue des résultats associés [DD05].

#### Étude de la transition de phase

Ainsi, en même temps qu'ils proposent leur modèle discret de formation d'essaim, Csahók et Vicsek cherchent à étudier expérimentalement le phénomène de formation d'essaim et établissent que la transition est

faiblement de premier ordre" [CV95]. Plus tard, Bussemaker *et al.* étudient la formation d'essaim sur un automate cellulaire grâce à une approche des champs moyens et déterminent que la transition est de second ordre [BDG97]. Czirik et Vicsek ont depuis complété ces résultats par une approche unidimensionnelle du modèle continu de Vicsek qui confirme, à partir d'une approche numérique, une transition de phase de second ordre et identifie les paramètres de la classe d'universalité de la transition [CDW03].

Bien que la transition de phase de la formation d'essaim ait été largement étudiée par le passé, pour plusieurs formes du modèle et différentes approches, il n'existe pas à notre connaissance d'observation de la transition de phase qui confirme les résultats obtenus par une approche analytique. Cette différence dans les résultats nous invite donc à creuser l'étude du comportement afin de déterminer son origine.

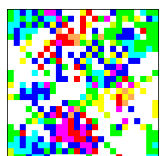
#### Étude expérimentale du comportement

Plusieurs études se sont également attachées à observer expérimentalement le comportement du modèle discret de formation d'essaim afin d'en appréhender plus précisément les phénomènes d'auto-organisation. Un exemple typique en est les travaux de Peruani *et al.* qui, pour un modèle légèrement différent du modèle d'automate de gaz sur réseau initial [Deu96, DD05], observe une division du comportement en non plus deux mais trois phases en distinguant différents types d'organisation de particules, ou *motifs* [PKDVB11]. L'intérêt d'une telle étude est de montrer qu'au-delà du simple phénomène de formation d'essaim, il peut apparaître différents motifs qu'il est intéressant d'étudier.

*On constate que s'il est difficile d'appréhender quantitativement le comportement du système à cause de la complexité du modèle, une étude expérimentale est en soit intéressante dans la mesure où elle permet d'étudier le comportement sans connaissance a priori sur sa dynamique et de révéler de multiples "motifs" qu'il est possible d'utiliser pour caractériser le comportement du modèle. On se propose maintenant de formaliser le modèle de formation d'essaim de Deutsch [DD05], d'en décrire les propriétés majeures, et de décrire sa dynamique en utilisant la notion de motif.*

## 5.2 Définitions formelles

Les *automates de gaz sur réseau*, ou AGR (*Lattice-Gas Cellular Automata* ou LGCA en anglais), sont un cas particulier d'automates cellulaires où sont représentées des particules qui voyagent sur l'espace cellulaire.



### 5.2.1 Automates de gaz sur réseau

Par définition, un AGR est assimilable à un automate cellulaire classique<sup>12</sup> où l'espace d'état  $\mathcal{Q}$  et la fonction de transition locale  $f$  sont fixés par les attributs de l'AGR.

**Définition 15** (Automates de gaz sur réseau).

Un automate de gaz sur réseau (AGR) est un quadruplet  $(\mathcal{L}, \mathcal{W}, \mathcal{V}, f_I)$  où :

- $\mathcal{L}$  est la grille cellulaire.
- $\mathcal{W}$  est le voisinage de propagation.
- $\mathcal{V}$  est le voisinage d'interaction.
- $f_I$  est la fonction locale d'interaction.

Dans un AGR, les cellules ont la possibilité d'échanger des particules avec leurs voisins. Afin de servir de support au transfert de particules, chaque cellule est donc représentée comme un ensemble d'entités appelés *canaux*, correspondant aux éléments du voisinage d'interaction.

**Définition 16** (Canal).

Un canal est un élément de  $\mathcal{L} \times \mathcal{W}$ , noté  $d_i(c) = (c, w_i)$ , avec  $c \in \mathcal{L}$  et  $w_i \in \mathcal{W}$ .

**Notation 5.2.1** (Configuration).

Pour  $x_c$  qui désigne l'état de la cellule  $c \in \mathcal{L}$  dans la configuration  $x \in \mathcal{Q}^{\mathcal{L}}$ , on note  $x_i(c)$  l'état du canal  $d_i(c)$  dans la configuration  $x$ .

Un canal  $d_i(c)$  représente un support de transfert de particules à partir d'une cellule  $c$  vers une cellule  $c + w_i$ . Par conséquent pour une configuration  $x \in \mathcal{Q}^{\mathcal{L}}$ ,  $x_i(c) \in \mathbb{N}$ . On en déduit que l'espace d'état du modèle est donné par  $\mathcal{Q} = \mathbb{N}^{(\text{card } \mathcal{W})}$ .

**Notation 5.2.2** (Nombre de particules).

Pour une configuration de cellule  $x_c \in \mathcal{Q}$  donnée, le nombre de particules contenues dans la cellule  $c$  se note  $\eta(x_c)$  et est donné par  $\eta(x_c) = \sum x_i(c)$ .

#### Hypothèses simplificatrices

Si les propositions ci-dessus sont valables pour une définition générale d'un AGR, en pratique il est relativement commun d'intégrer un certain nombre d'hypothèses pour simplifier la description du modèle :

**H1** De même que pour les automates cellulaires, on considérera que le voisinage  $\mathcal{V}$  (respectivement  $\mathcal{W}$ ) est *symétrique*. Cela signifie que pour toute cellule  $c \in \mathcal{L}$ , si  $c' \in \mathcal{L}$  est voisine de  $c$ , c'est-à-dire s'il existe  $v \in \mathcal{V}$  tel que  $c' = c + v$ , alors  $c$  est voisine de  $c'$ . Cela revient à dire que tout élément  $v \in \mathcal{V}$  a un opposé  $v' \in \mathcal{V}$  tel que  $c = c + v + v'$ .

**H2** Pour simplifier le modèle, on pourra également être amené à fusionner les voisinages d'interaction et de propagation  $\mathcal{V} = \mathcal{W}$ .

#### Mise à jour des automates de gaz sur réseau

**Définition 17** (Fonction locale de propagation).

La fonction locale de propagation des AGR est la fonction  $f_P : \mathcal{Q}^{\mathcal{W}} \rightarrow \mathcal{Q}$  telle que, pour une configuration  $x \in \mathcal{Q}^{\mathcal{L}}$ , une cellule  $c \in \mathcal{L}$  et un voisinage d'interaction  $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_k\}$  :

$$f_P(x_c, x_{c+w_1}, \dots, x_{c+w_k}) = (x_1(c - w_1), \dots, x_k(c - w_k)). \quad (5.1)$$

12. Il est à noter qu'au contraire des automates cellulaires classiques, les AGR portent une contrainte supplémentaire sur la topologie de la grille cellulaire. En effet, celle-ci doit suivre un pavage régulier construit à partir de dalles à bords opposables, afin de permettre une propagation unidirectionnelle des particules. Sur le plan, seules deux topologies correspondent à cette contrainte : la maille carrée et la maille hexagonale. Dans l'espace, seul le cube conserve cette propriété.

Autrement dit, on pourrait réduire la définition de la fonction  $f_P$  à celle d'une bijection de  $\{0, 1\}$  sur lui-même, obéissant à la relation  $x_i^P(c) = x_i(c - w_i)$ ,  $w_i \in \mathcal{V}$ .

La dynamique des AGR diffère également de la définition classique de la mise à jour globale établie pour les automates cellulaires. Là où celle-ci consiste à appliquer simultanément une unique règle locale de mise à jour à toutes les cellules, la mise à jour globale des AGR résulte de l'application successive des fonctions globales d'interaction et de propagation, qui appliquent chacune leurs fonctions locales respectives simultanément à chaque cellule.

**Définition 18** (Fonction globale d'interaction).

Pour un AGR  $(\mathcal{L}, \mathcal{V}, \mathcal{W}, f_I)$  donné, la fonction d'interaction globale est la fonction  $I : \mathcal{Q}^{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{Q}^{\mathcal{L}}$  telle que pour une configuration  $x \in \mathcal{Q}^{\mathcal{L}}$  et  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$  :

$$x^I = I(x) \implies \forall c \in \mathcal{L}, x_c^I = f_I(x_c, x_{c+v_1}, \dots, x_{c+v_n}). \quad (5.2)$$

**Définition 19** (Fonction globale de propagation).

Pour un AGR  $(\mathcal{L}, \mathcal{V}, \mathcal{W}, f_I)$  donné, la fonction de propagation globale est la fonction  $P : \mathcal{Q}^{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{Q}^{\mathcal{L}}$  telle que pour une configuration  $x \in \mathcal{Q}^{\mathcal{L}}$  et  $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$  :

$$x^P = P(x) \implies \forall c \in \mathcal{L}, x_c^P = f_P(x_c, x_{c+w_1}, \dots, x_{c+w_m}). \quad (5.3)$$

**Définition 20** (Fonction de mise à jour globale des AGR).

La fonction de transition globale pour un AGR est donnée par  $F : \mathcal{Q}^{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{Q}^{\mathcal{L}}$  telle que  $F = P \circ I$ .

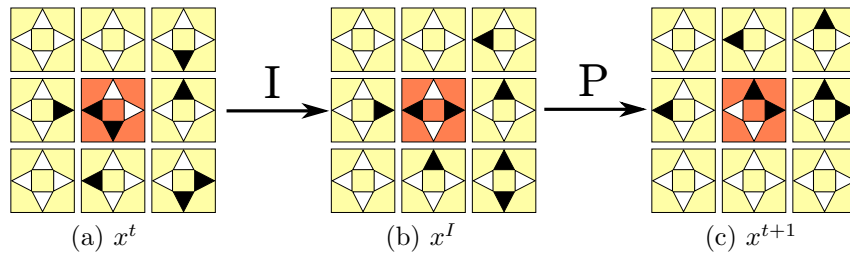


FIGURE 5.1 – Exemple de mise à jour des AGR (a) au temps  $t$ , (b) après application de l'interaction, (c) après application de la propagation, au temps  $t + 1$ . Par convention, on note les canaux vides par un triangle blanc (état 0), et les canaux possédant une particule par un triangle noir (état 1).

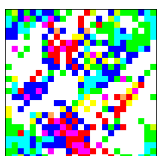
## 5.2.2 Modèle de formation d'essaim

Le modèle de formation d'essaim proposé par Deutsch et Dormann [DD05] définit une fonction d'interaction locale qui vise à réorienter les particules des cellules en les alignant avec celles de leurs voisins. Pour une cellule donnée, la fonction va considérer toutes les configurations possibles qui conservent le nombre de particules, et assigner une probabilité correspondant à l'alignement entre le nouvel état considéré et l'état du voisinage avant l'étape d'interaction. On est donc amenés à introduire pour chaque cellule deux paramètres vectoriels représentant respectivement l'orientation résultante d'une cellule et celle de son voisinage :

**Définition 21** (Flux cellulaire).

Pour une configuration  $x \in \mathcal{Q}^{\mathcal{L}}$  donnée, le flux cellulaire  $J_c(x)$  d'une cellule  $c \in \mathcal{L}$  est :

$$J_c(x) = \sum_{v_i \in \mathcal{V}} x_i(c) \cdot v_i. \quad (5.4)$$



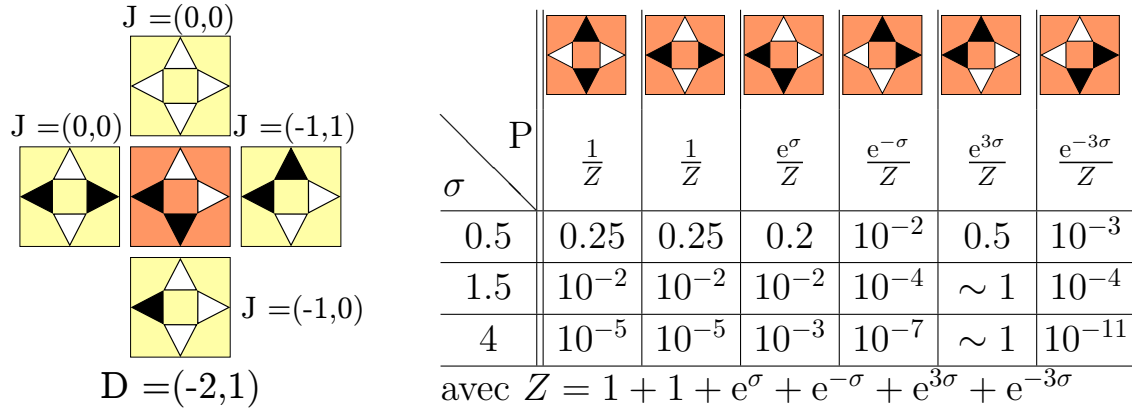


FIGURE 5.2 – Application de la fonction d'interaction du modèle de formation d'essaim à une configuration typique, la cellule  $c$  considérée est ici la cellule centrale colorée en rouge/gris foncé. À gauche : la configuration considérée avec les flux des voisins de  $c$  et le champ  $\mathbf{D}_c(x)$ . À droite : les différentes configurations possibles avec leurs probabilités correspondantes, pour différentes valeurs de la sensibilité à l'alignement  $\sigma$ .

**Définition 22** (Champ cellulaire).

Pour une configuration  $x \in \mathcal{Q}^{\mathcal{L}}$  donnée, le champ cellulaire  $\mathbf{D}_c(x)$  d'une cellule  $c \in \mathcal{L}$  est égale à la somme des flux cellulaires de ses voisins :

$$\mathbf{D}_c(x) = \sum_{v_i \in \mathcal{V}} \mathbf{J}_{c+v_i}(x). \quad (5.5)$$

Pour une configuration  $x$  et une cellule  $c$  données, la fonction d'interaction locale définit donc une distribution finie de probabilités pour chaque réagencement possible  $x_c^I$  des particules à l'intérieur de la configuration de la cellule  $x_c$ . Les probabilités sont obtenues à partir de poids, calculés comme une loi de puissance du produit scalaire entre le flux  $\mathbf{J}_c(x^I)$  et le champ  $\mathbf{D}_c(x)$ .

**Définition 23** (Fonction d'interaction d'alignement).

Pour le modèle de formation d'essaim, la fonction d'interaction locale  $f_1 : \mathcal{Q}^{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{Q}$  est une fonction stochastique telle que, pour une cellule  $c \in \mathcal{L}$  et une configuration  $x \in \mathcal{Q}^{\mathcal{L}}$ ,  $x_c^I = f_1(x_c, x_{c+v_1}, \dots, x_{c+v_n})$  suit la distribution suivante :

$$Prob(x_c \rightarrow x_c^I) = \frac{1}{Z} \exp[\sigma \cdot \mathbf{J}_c(x^I) \cdot \mathbf{D}_c(x)] \cdot \delta(\eta(x_c), \eta(x_c^I)) \quad (5.6)$$

où :

- $Z$  est un coefficient de normalisation, tel que  $\sum_{c' \in \mathcal{L}} P(x_c \rightarrow x_{c'}) = 1$ ,
- $\sigma$  est la sensibilité, un paramètre du système, qui contrôle le comportement de la fonction,
- $\delta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{0, 1\}$  est la fonction de Kronecker appliquée aux nombres de particules, qui établit que  $\delta(x_c, x_c^I) = 1$  si  $c$  contient le même nombre de particules dans les configurations  $x$  et  $x^I$ , et 0 sinon.

La Figure 5.2 présente un exemple d'application de cette fonction. Il est à noter que le paramètre  $\sigma$  permet un contrôle continu du comportement des particules, de la sélection équiprobable ( $\sigma = 0$ ) à l'alignement quasi-déterministe ( $\sigma \rightarrow \infty$ )<sup>13</sup>.

### 5.2.3 Propriétés dynamiques particulières du modèle

Nous allons maintenant présenter un certain nombre de propriétés découlant de la définition du modèle d'AGR de formation d'essaim.

13. En réalité, la transition est équiprobable entre toutes les configurations  $x_c^I$  qui maximisent le produit scalaire entre le flux de  $x_c^I$  et le champ. Dans le cas où ce  $x_c^I$  maximal est unique, alors la transition est bien déterministe.

### Principe de conservation des particules

Si la fonction de propagation conserve par définition localement le nombre de particules, la fonction d'interaction dans le contexte général des AGR ne fixe *a priori* pas de conditions sur le nombre de particules contenues dans la cellule. Ce principe doit donc provenir de la définition du modèle et de la fonction d'interaction. Dans le cas du modèle de formation d'essaim, la fonction est définie comme une table de probabilité des différentes transitions possibles, où seules les configurations conservant le nombre de particules ont une probabilité non nulle.

Par conséquent, il est important de noter que pour le modèle d'AGR de formation d'essaim, le nombre de particules total du système est invariant avec le temps. Cette propriété, implicite à la définition du modèle, se révélera pourtant centrale lorsque des perturbations du modèle seront envisagées, lesquelles pourront contrevenir aux principes des AGR.

### Réversibilité de la mise à jour

#### Définition 24 (Équivalence des configurations).

Pour un AGR, on dit que deux configurations  $x$  et  $y$  sont équivalentes si elles ont les mêmes images par la fonction d'interaction  $f_I$ .

Dire que deux configurations  $x$  et  $y$  sont équivalentes revient donc à dire que l'étape d'interaction appliquée à ces deux configurations produit le même ensemble de configurations de probabilité non nulle. Un critère pratique pour déterminer l'équivalence de deux configurations consiste à vérifier que pour chaque cellule  $c \in \mathcal{L}$ , on a le même nombre de particules dans les configurations :  $\eta(x_c) = \eta(y_c)$ .

#### Définition 25 (Réversibilité).

Pour un AGR, on dit que la mise à jour est réversible si, pour une configuration  $x^t$  donnée, la probabilité qu'il existe  $T$  tel que  $x^t$  et  $x^T$  soient équivalentes est strictement positive.

#### Théorème 5.2.3.

La transition globale  $F$  du modèle de formation d'essaim est réversible.

*Démonstration.* Soit une configuration initiale  $x \in \mathcal{Q}^{\mathcal{L}}$  et une fonction d'interaction globale  $I_1 : \mathcal{Q}^{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{Q}^{\mathcal{L}}$  de probabilité non nulle telle que  $x' = P \circ I_1(x)$ . On note  $f_R : \mathcal{Q}^{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{Q}^{\mathcal{V}}$  la fonction d'interaction locale qui inverse les états des canaux opposés deux-à-deux. Comme  $f_R$  conserve le nombre de particules de la cellule considérée, elle est toujours associée à une probabilité non-nulle. De même la fonction d'interaction globale  $I_R : \mathcal{Q}^{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{Q}^{\mathcal{L}}$  somme des interactions  $f_R$  appliquées à toutes les cellules est associée à une probabilité non nulle. Alors, si l'on note  $x'' = P \circ I_R(x')$ , on a une équivalence entre  $x$  et  $x''$  (voir la Figure 5.3).  $\square$

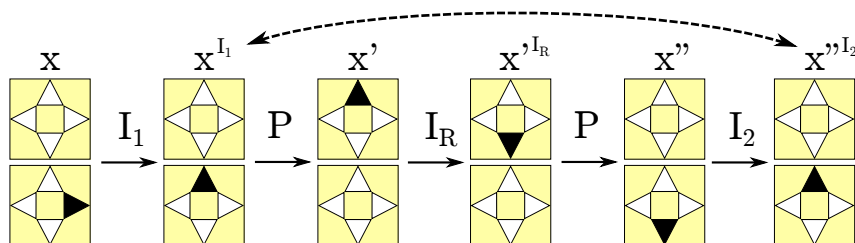
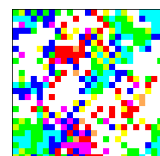


FIGURE 5.3 – Preuve de la réversibilité de la transition. Pour une interaction  $I_1$ , si l'on considère l'interaction d'inversion  $I_R$ , on s'aperçoit qu'il existe une transition  $I_2$  telle que  $x^{I_1} = x''^{I_2}$ .

Un résultat fort de cette propriété du modèle est que la probabilité de visiter des configurations antérieures est strictement positive. Dans le cas d'un système fini, ce constat a un effet important sur sa dynamique.



## Récurrence du système

### Définition 26 (Récurrence).

Un système est dit récurrent si pour toute configuration  $x_t$ ,  $t > 0$ , il existe  $T > t$  fini tel que  $x_T = x_t$ .

En d'autres termes, toute configuration rencontrée dans la trajectoire d'un système récurrent se reproduira un nombre infini de fois, potentiellement pour un grand nombre d'itérations.

### Théorème 5.2.4 (Récurrence du modèle).

Le système formé par le modèle de formation d'essaim pour une grille finie est récurrent.

*Démonstration.* Dans le cas d'une grille cellulaire de dimensions  $\mathcal{L}$  finies, l'ensemble des configurations  $\mathcal{Q}^{\mathcal{L}}$  du modèle est fini. On peut alors considérer notre système comme une chaîne de Markov finie, où les états correspondent aux configurations du système et où les probabilités de transitions sont données par la fonction de transition globale  $F$ .

On a montré précédemment que  $F$  était récurrente. Pour une chaîne de Markov, cela se traduit par la proposition suivante : si un état  $b$  est accessible depuis un état  $a$ , c'est à dire qu'il existe un chemin de probabilité non nulle joignant  $a$  à  $b$ , alors  $a$  est également accessible depuis  $b$ . Si on considère alors non pas l'ensemble des configurations, mais l'ensemble des configurations atteignables depuis une configuration initiale, la chaîne de Markov est alors dite *irréductible*.

Une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'état fini voit tous ses états récurrents positifs, c'est-à-dire que l'espérance de temps de premier retour en cet état partant de cet état est fini, ce qui correspond à notre définition de la récurrence pour les systèmes.  $\square$

## Caractérisation de l'espace des configurations atteignables

Nous allons maintenant brièvement décrire pour une configuration initiale donnée, l'ensemble des configurations atteignables, afin de savoir dans quel espace les trajectoires des configurations évoluent.

Supposons tout d'abord que  $\mathcal{L}$  puisse s'écrire  $\mathcal{L} = \{\mathbb{Z}/L_X\mathbb{Z}\} \times \{\mathbb{Z}/L_Y\mathbb{Z}\}$  où  $L_X$  et  $L_Y$  sont tous les deux pairs. Alors la proposition suivante est vérifiée :

### Proposition 5.2.5 (Espace des configurations atteignables).

Pour une configuration initiale  $x \in \mathcal{Q}^{\mathcal{L}}$  donnée, l'espace des configurations atteignable est l'ensemble des configurations  $x \in \mathcal{Q}^{\mathcal{L}}$  qui vérifient pour  $i \in \{0, 1\}$ ,  $\sum_{c \in \mathcal{L}_i} \eta(x_c) = \sum_{c \in \mathcal{L}_i} \eta(y_c)$  ou  $\sum_{c \in \mathcal{L}_i} \eta(x_c) = \sum_{c \in \mathcal{L}_{i+1}} \eta(y_c)$ , où  $\mathcal{L}_i = \{(j, k) \in \mathcal{L} \mid j + k \equiv i \pmod{2}\}$ .

Cette formulation a priori compliquée peut se résumer simplement : commençons par considérer non pas la totalité des cellules de la grille, mais les deux sous-ensembles  $\mathcal{L}_0$  et  $\mathcal{L}_1$  correspondant aux couleurs blanches et noires d'un motif en échiquier. Ce que dit la proposition, c'est que pour une configuration initiale  $x_0$ , une configuration  $x$  est accessible si le nombre de particules dans les cellules de  $\mathcal{L}_0$  et  $\mathcal{L}_1$  sont ou bien identiques, ou bien échangés.

*Démonstration.* Considérons tout d'abord la transition globale  $F = P \circ I$  appliquée à une configuration  $x^t$ . On sait que la fonction  $I$  conserve le nombre de particules pour chaque cellule. Or, la fonction  $P$  effectue un déplacement des particules de chaque cellule dans les cellules voisines. Par conséquent, si on note  $N_0(x^t) = \sum_{c \in \mathcal{L}_0} \eta(x_c)$  et  $N_1(x^t)$  respectivement, on a  $N_1(x^{t+1}) = N_0(x^t)$  et  $N_0(x^{t+1}) = N_1(x^t)$ .

Une itération de la mise à jour globale intervertit donc le nombre de particules contenues dans les cellules de  $\mathcal{L}_0$  et  $\mathcal{L}_1$ . On comprend donc aisément comment toutes les configurations atteignables vérifient le critère donné par la proposition. Il reste à prouver que toutes les configurations qui correspondent à ce critère sont atteignables.

Partons d'une configuration  $x \in \mathcal{Q}^{\mathcal{L}}$  quelconque. On va montrer qu'on peut obtenir toutes les configurations atteignables données par la proposition grâce à des transitions triviales de probabilité non nulle. Commençons par montrer que les configurations équivalentes à  $x$  sont accessibles : soit  $y$  une telle configuration. On pose  $I_x$  la fonction globale d'interaction telle que  $I_x(y)$  soit la configuration opposée à  $x$  où, dans chaque cellule, les états des canaux opposés sont échangés deux-à-deux, et  $I_R$  la fonction globale

d'interaction qui inverse simplement les canaux des cellules pour une configuration donnée. Comme  $I_x$  et  $I_R$  conservent le nombre de particules par cellule, elles sont associées à des probabilités non nulles. Or si on pose  $y' = F_x(y) = P \circ I_x(y)$  et  $y'' = F_R(y') = P \circ I_R(y')$ , on a bien  $y'' = x$ .  $\square$

### Ergodicité et récurrence

Du point de vue des systèmes dynamiques, la propriété de récurrence du système a des conséquences importantes sur l'étude de la dynamique. En effet, si l'on était capable d'étudier le comportement général d'un automate cellulaire à partir de son comportement asymptotique (pour rappel voir le Chapitre 3), la récurrence nous dit ici que pour une configuration initiale donnée, toute configuration accessible apparaîtra un nombre infini de fois sur des longs temps de simulation. Dans ce contexte, la propriété de récurrence s'apparente à de l'ergodicité sur l'ensemble des configurations atteignables. Nous nous restreindrons donc au seul terme de "récurrent" dans la suite de cette étude

*Cette formulation de la dynamique peut sembler à première vue problématique : comment étudier la dynamique d'un automate cellulaire si l'ensemble des configurations finales est exactement égal à l'ensemble des configurations accessibles ?*

### Étude de la stabilité des comportements

En pratique, s'il n'existe pas d'ensemble final simple (point fixe, cycle limite), toutes les configurations ne sont pas pour autant égales du point de vue de la stabilité : bien au contraire, il est très bien possible que certains ensembles de configurations soient largement surreprésentés par rapport aux autres configurations. C'est ce qu'on appelle la *métastabilité*. Ce concept emprunté à l'étude des systèmes dynamiques se retrouve dans de nombreux domaines tels que la chimie (états du carbone diamant et graphite), la physique (surfusion de l'eau) ou la biologie (principe d'enzymes). Il peut se résumer en quelques mots par la définition suivante : "[un état métastable] peut persister pendant de longues périodes dans une phase qui n'est pas celle favorisée par les paramètres thermodynamiques" [CNS08].

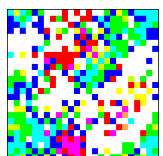
En effet, la métastabilité suggère que chaque *attracteur*, caractérisé par un ensemble relativement stable de configurations, puisse être représenté comme un puits de potentiel dans lequel une trajectoire aura tendance à rester, mais dont elle peut aussi s'échapper par l'intermédiaire de fluctuations et perturbations extérieures. Dans le cadre des automates cellulaires, cela signifie que s'il existe de tels attracteurs, nous observerons une certaine répétition ainsi qu'une persistance dans les configurations observées.

Pour caractériser cette stabilité, on va être amenés à introduire un ensemble de comportements de référence, ou *motifs*, définis comme un ensemble de configurations correspondant à une structure globale spécifique, et à estimer l'erreur existant entre une configuration à un temps  $t$  et chacun de ces motifs. Afin de pouvoir quantifier ces comportements particuliers, il nous faut introduire quelques notions supplémentaires relatives à l'étude de la stabilité d'un système dynamique :

- La *stabilité* d'un motif signifie usuellement que l'erreur entre une configuration donnée et une autre de référence doit être de faible amplitude et reste bornée dans le temps. Dans un système stochastique et récurrent de surcroît, la stabilité s'attache à essayer de quantifier le temps ou l'énergie nécessaire à une configuration pour "sortir" du puits potentiel d'un motif. En pratique, on peut étudier la stabilité d'un ou plusieurs motifs en considérant une trajectoire quelconque du système et en étudiant son évolution sur des temps de simulation très longs.
- L'*attractivité* d'un motif représente sa capacité à attirer une trajectoire à partir d'une configuration aléatoire. Expérimentalement, on peut étudier comparativement les attractivités de plusieurs motifs en simulant le modèle à plusieurs reprises à partir de configurations aléatoires et en étudiant statistiquement quels motifs sont le plus souvent observés après un temps de simulation arbitrairement long.

## 5.3 Observation du comportement métastable

Comme dans les chapitres précédents, nous voulons caractériser au mieux le comportement du modèle de formation d'essaim en AGR pour pouvoir le comparer à différents types de perturbations. Contraire-





ment à l'étude des automates cellulaires présentées dans la Partie I, nous avons montré que les comportements que nous allons observer pour ce modèle ne sont pas persistants et il faut donc adapter notre protocole expérimental.

### 5.3.1 Protocole expérimental

Comme on l'a montré précédemment, le comportement du modèle de formation d'essaim sur un AGR *fini* est récurrent, à savoir qu'on observera théoriquement sur des temps infinis toutes les configurations atteignables à partir de la configuration initiale, chacune un nombre infini de fois. En revanche, comme la règle de mise à jour n'est pas complètement aléatoire – surtout pour une haute sensibilité à l'alignement  $\sigma$  (cf. Figure 5.2) – on s'attend à trouver des comportements plus stables que d'autres, ce qui laisse supposer qu'une approche statistique pourrait fonctionner : on étudierait donc la trajectoire de la configuration du système en espérant détecter des *attracteurs*, c'est-à-dire certains types de configurations revenant de manière récurrente.

#### Espace des paramètres de contrôle

Afin d'accélérer le processus d'observation des comportements, nous serons amenés à définir quatre “points repères”<sup>14</sup> de l'espace paramétrique  $(\rho, \sigma)$  :

*P1* :  $\rho = 0.1$  ;  $\sigma = 0.5$ . Ce point correspond à la phase désorganisée du comportement. Il nous servira de témoin pour l'absence d'observation de phénomène d'organisation.

*P2* :  $\rho = 0.2$  ;  $\sigma = 1.5$ . Ce point de référence correspond à la formation du comportement émergent comme observé par les études précédentes sur ce modèle [DD05]. Ce point est considéré comme une situation moyenne. En effet, la densité initiale  $\rho$  n'est ni trop basse pour empêcher l'émergence, ni trop haute pour saturer la grille en particules. De même la sensibilité à l'alignement  $\sigma$  est assez forte pour provoquer l'auto-organisation, mais pas trop pour “radicaliser” le comportement individuel, comme on peut le voir dans la Figure 5.2.

*P3* :  $\rho = 0.2$  ;  $\sigma = 4$ . Ce point, fixé sur la même densité initiale  $\rho$  que *P2*, diffère par une sensibilité à l'alignement  $\sigma$  plus élevée, ce qui a pour effet de rendre le comportement plus “déterministe”. En effet, comme on peut le voir sur la Figure 5.2 pour  $\sigma = 4$ , les écarts entre les poids des différentes configurations sont très importants, ce qui rend plus improbable le fait d'obtenir des interactions qui ne maximisent pas l'alignement localement.

*P4* :  $\rho = 0.4$  ;  $\sigma = 1.5$ . Ce dernier point a une sensibilité à l'alignement  $\sigma$  identique à *P2* mais une densité initiale  $\rho$  doublée. En effet, pour  $\rho = 0.4$ , on est proche de la densité “maximum” qui correspond à une moyenne de deux particules par cellule.

#### Paramètres d'ordre

Afin de détecter les phénomènes d'organisation dans notre automate cellulaire, nous allons utiliser deux paramètres d'ordre destinés à capturer l'établissement d'un comportement collectif.

Le transport moyen  $\bar{\phi}$ , utilisé chez Bussemaker *et al.* pour détecter l'auto-organisation dans le modèle de formation d'essaim [BDG97], consiste à rechercher l'existence d'un consensus sur les directions des particules dans la grille  $\mathcal{L}$  de l'automate, en moyennant sur chaque axe directionnel (e.g. horizontal et vertical) le moment des particules. On le définit comme suit :

---

14. À noter que le nombre et la position de ces points ont été arbitrairement choisis afin de pouvoir observer chacun des motifs observés dans ce modèle.

**Définition 27** (Transport moyen).

Le transport moyen est la fonction  $\bar{\phi} : \mathcal{Q}^{\mathcal{L}} \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour une configuration  $\mathbf{x}$  par :

$$\bar{\phi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{H} \left\| \sum_{c \in \mathcal{L}} J_c(\mathbf{x}) \right\|_{\infty}, \quad (5.7)$$

où  $\|\mathbf{v}\|_{\infty} = |v_x| + |v_y|$  et  $H = \sum_{c \in \mathcal{L}} \eta(\mathbf{x}_c)$  est le nombre total de particules.

On remarque que le transport est en effet un paramètre d'ordre : en effet, pour une configuration générée aléatoirement, pour chaque cellule, chaque canal a une probabilité égale de contenir une particule. Il en résulte que le transport moyen  $\bar{\phi}$  est donc nul pour une configuration aléatoire. De même on peut montrer que ce paramètre est majoré par 1, en considérant une configuration  $\mathbf{x}$  où chaque cellule contient une particule orientée d'une manière unique pour tout l'automate. Dans ce cas, on a  $\bar{\phi}(\mathbf{x}) = 1$ .

Le transport moyen est un bon paramètre pour détecter la formation de consensus sur les directions des particules du système. Or on verra qu'il existe des motifs émergents qui ne favorisent aucune direction globalement et dont la valeur du transport est nul. Pour cette raison, nous avons introduit l'alignement moyen pour pallier les manques du transport moyen [BFC11a].

Au contraire de ce dernier, l'alignement moyen  $\bar{\gamma}$  cherche à détecter lorsque les particules d'une cellule sont en moyenne alignées avec les particules d'une cellule voisine. Il est basé sur une moyenne sur toutes les cellules de l'automate du produit scalaire entre le flux cellulaire et le champ directeur. On l'écrit donc :

**Définition 28** (Transport moyen).

L'alignement moyen est la fonction  $\bar{\gamma} : \mathcal{Q}^{\mathcal{L}} \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour une configuration  $\mathbf{x}$  par :

$$\bar{\gamma}(\mathbf{x}) = \frac{1}{H} \sum_{c \in \mathcal{L}} \frac{1}{V} J_c(\mathbf{x}) \cdot D_c(\mathbf{x}) \quad (5.8)$$

où  $V = \text{card}(\mathcal{V})$  et  $H = \sum_{c \in \mathcal{L}} \eta(\mathbf{x}_c)$  est le nombre total de particules.

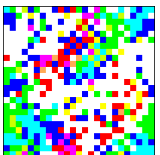
L'alignement moyen est également un paramètre d'ordre : si on considère une cellule donnée et son voisinage généré aléatoirement, le produit scalaire entre le flux et le champ est en moyenne nul. De plus, on peut montrer que ce paramètre est borné par  $\bar{\gamma}(\mathbf{x}) \in [-1; 1]$  en considérant deux cas extrêmes : le premier si toutes les cellules contiennent une particule pointant vers une même direction ( $\bar{\gamma}(\mathbf{x}) = 1$ ), le second si toutes les cellules contiennent une particule qui est dans la direction opposée à celle des cellules voisines ( $\bar{\gamma}(\mathbf{x}) = -1$ ).

Comme nous allons le voir plus loin, l'utilisation de ces deux paramètres d'ordre est nécessaire car ils permettent de détecter deux types d'apparition d'ordre : le transport détecte un consensus global sur les directions, alors que l'alignement peut potentiellement détecter des phénomènes d'alignement ou de désalignement qui ne privilégient pas forcément de direction particulière.

### Visualisation des configurations

Si les paramètres d'ordre nous permettent de détecter les phénomènes d'organisation dans le système, ils laissent peu de place à l'interprétation et plus particulièrement à la classification des configurations observées. Afin de mieux comprendre et ainsi de mieux qualifier le comportement de notre modèle, nous allons être amené à introduire un certain nombre d'outils de visualisation des configurations, qui vont nous permettre de "lire" le phénomène et interpréter la forme de l'auto-organisation. Nous proposons ainsi trois différents types de visualisations.

La *visualisation de densité* (cf. Figure 5.4(a)) représente la grille cellulaire, où chaque cellule est colorée par une nuance de gris représentant le nombre de particules qu'elle contient : une cellule blanche ne contient aucune particule alors qu'une cellule noire voit tous ses canaux occupés.



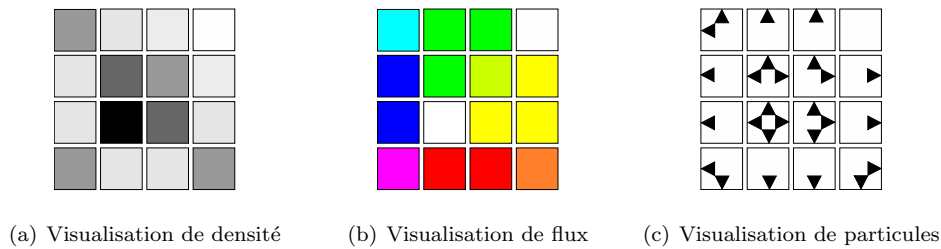


FIGURE 5.4 – Les trois types de visualisation de configuration d'AGR utilisés.

La *visualisation de flux* (cf. Figure 5.4(b)), que nous avons initialement proposée pour visualiser avec plus de facilité l'orientation des particules dans l'automate [BFC11a], associe à chaque cellule une couleur correspondant au flux cellulaire résultant de ses particules. Un flux nul sera donc signalé par une cellule blanche ; les directions de base notées (Nord-Sud) pour l'axe des  $y$  et (Ouest-Est) pour l'axe des  $x$  sont associées au couples de couleurs (vert-rouge) et (bleu-jaune). Par composition, on obtient donc les couleurs des cellules ayant des directions diagonales (N-O : cyan, N-E : lime, S-O : magenta, S-E : orange). Notons que ce type de visualisation confond des cellules dans lesquelles deux particules sont associées à des canaux opposés, car le flux cellulaire résultant est nul. La visualisation permet en revanche d'indiquer pour une configuration  $\mathbf{x}^t$  comment sont orientées les particules dans chaque cellule de l'automate.

Enfin, la *visualisation des particules* (cf. Figure 5.4(c)) n'affiche plus les cellules, mais fait apparaître l'état exact des canaux cellulaires pour une configuration donnée. Sur chaque cellule (colorée en blanc par défaut), on représente les canaux occupés par des triangles colorés de noir. On peut ainsi visualiser la répartition des particules sur l'automate ainsi que leur orientation.

### Classification des motifs

Une fois l'apparition d'un phénomène organisé avérée, comment interpréter le comportement émergent et surtout comment classer nos observations ? Plusieurs possibilités s'offrent à nous : on pourrait par exemple simuler un nombre important de trajectoires et, en suivant l'évolution des configurations, rassembler des données sur les valeurs des paramètres d'ordre pour essayer de repérer des "groupes" de configurations. Cette méthode, qui offre l'intérêt de s'affranchir de la subjectivité de l'observation en se reposant sur des quantifications formelles, n'est pas pour autant dénuée d'inconvénients. En effet, en ne cherchant à qualifier les comportements qu'à partir des paramètres d'ordre, on s'expose à amalgamer des comportements dont la différence n'est pas détectée par nos observations quantitatives. De plus, rien ne dit que les attracteurs des comportements correspondent à des valeurs particulières des paramètres d'ordre.

Pour cette raison, nous préférons ici adopter une approche plus ouverte : on utilise toujours les paramètres d'ordre pour dégager les comportements que l'on identifie d'emblée comme qualitativement différents. Une fois ce premier filtrage effectué, on se propose de reproduire l'expérience en l'associant à une visualisation des configurations. La détection du motif émergent, s'il est identifiable, ainsi que son interprétation au sens dynamique du terme sont laissées à l'observateur.

Nous allons maintenant appliquer nos expériences au modèle, en détaillant chacun des motifs repérés.

### 5.3.2 Description des motifs

Nous présentons maintenant notre proposition de description du comportement du modèle de formation d'essaim. En particulier, sept motifs ou comportements qualitativement différents ont été identifiés : le motif aléatoire, en bande diagonale, en damiers, en nuages, en ceinture, en serpent ou enfin hybride. Ces résultats sont ensuite synthétisés dans la Tableau 5.1.

### Motif Aléatoire (A)

Le motif aléatoire n'est pas un motif à proprement parler : il se caractérise plutôt par une absence de comportement émergent, ou du moins de comportement émergent détectable. Ce motif englobe toutes les configurations  $\mathbf{x}$  qui sont indifférenciables de la configuration initiale : le transport moyen  $\bar{\phi}(\mathbf{x})$  y est nul, car il n'y a pas de consensus émergent sur une direction globale, et l'alignement moyen  $\bar{\gamma}(\mathbf{x})$  est nul, car les particules ne sont en moyenne ni alignées ni anti-alignées avec les particules des cellules voisines.

Ce motif se retrouve très souvent dans une zone de basse densité initiale  $\rho$  où bien de sensibilité particulièrement faible  $\sigma$  (point paramétrique  $P1$ ). En effet, s'il n'y a que peu de particules sur la grille cellulaire, celles-ci tendent à se rencontrer moins souvent et il devient plus difficile de former des motifs émergent par interaction d'alignement. De la même manière, si on fait tendre la sensibilité à l'alignement vers 0, la règle d'interaction locale des cellules devient plus stochastique et s'approche de la règle aléatoire lorsque  $\sigma$  tend vers 0. Le cas  $\sigma = 0$  est par ailleurs traité par Marcovici dans sa thèse [Mar13], où il est montré que la probabilité pour un canal d'abriter une particule est invariante avec le temps.

### Motif en bande diagonale (B)

La bande diagonale est un motif émergent caractérisé par une division spatiale de la configuration en deux régions distinctes. La première est composée de cellules vides, c'est à dire où celles-ci ne contiennent aucune particule à quelques exceptions près. La seconde région, composée de cellules qui possèdent deux particules pointant vers deux directions orthogonales, les mêmes pour tout l'automate, s'organise selon une ou plusieurs bandes diagonales qui bouclent sur elles-mêmes à travers les bords périodiques de la grille.

La bande diagonale est identifiée par une valeur du transport moyen  $\bar{\phi}(\mathbf{x})$  proche de 1 – car presque toutes les cellules pointent dans une des deux directions dominantes – et une valeur élevée de l'alignement moyen  $\bar{\gamma}(\mathbf{x})$  également proche de 1. Ce motif est observé pour des paramètres de contrôle correspondant au point  $P2$ , c'est-à-dire une densité initiale  $\rho$  limitée, typiquement autour de 0.25, et une sensibilité à l'alignement également raisonnable  $\sigma \in [1; 2]$ .

Ce motif sera particulièrement intéressant car il correspond véritablement à la notion d'auto-organisation dans les systèmes complexes. En effet, si le comportement global apparaît extrêmement stable, on n'observe pas de stabilité particulière au niveau microscopique. En d'autres termes, les particules qui composent la bande diagonale se déplacent de manière aléatoire au sein de ce motif, et le motif global ne dépend pas des fluctuations internes. Ce phénomène est particulièrement sensible sur les bords du motif, qui apparaissent bruités et où l'on observe plusieurs particules “libres”.

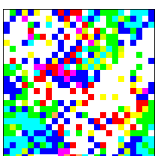
### Motif en damiers (D)

Pour des hautes densités (point paramétrique  $P4$ ), un nouveau type d'organisation apparaît. Le motif en damier se définit comme la formation de régions de l'automate construites sur une alternance dans les états des cellules. Typiquement, en calquant ce motif sur un “damier” traditionnel (blanc et noir), les cases blanches correspondent à un état de cellule contenant deux particules orientées dans des directions orthogonales  $a$  et  $b$ , alors que les cases noires correspondent aux cellules où deux particules sont orientées dans les directions opposées  $\bar{a}$  et  $\bar{b}$ .

Le damier se caractérise donc par un transport moyen  $\bar{\phi}(\mathbf{x})$  nul, car il y a en moyenne autant de “cases blanches” que de “cases noires”, et un alignement  $\bar{\gamma}(\mathbf{x})$  moyen proche de  $-1$ , car les particules d'une cellule sont en général anti-alignées avec les flux des cellules voisines. Du point de vue de la visualisation de flux, les damiers se repèrent par un alternance de couleurs opposées (par exemple orange et cyan) correspondant à deux cellules, ce qui explique son appellation.

### Motif en nuages (N)

Lorsqu'on augmente de manière significative la valeur de la sensibilité à l'alignement (point paramétrique  $P3$ ), on obtient à partir de configuration initiale aléatoire un nouveau motif. Les nuages sont caractérisés comme des groupes de particules pointant dans les mêmes directions. De formes diverses, plusieurs groupes voyageant dans différentes directions se croisent, interagissent (perdant ou gagnant



quelques particules), tout en gardant une morphologie relativement stable au cours du temps. Ce type de configuration se retrouve typiquement pour de très grandes valeurs du paramètre de sensibilité : l'alignement entre particules voisines est alors si fort que la probabilité pour une particule de "quitter" un groupe pour un autre est très faible.

Le motif en nuages est déterminé par une valeur élevée de l'alignement moyen, car toutes les particules ou presque sont incluses dans des groupes de particules alignées. En revanche, le transport moyen peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle  $[0; 1]$ . En effet, on rencontrera souvent des configurations dans lesquelles on trouve des groupes de particules voyageant dans des directions opposées à deux endroits différents de la grille cellulaire.

### Motif en ceinture (C)

Le motif en ceinture peut s'interpréter comme un motif en damier selon seulement deux directions. Dans ce type de configuration, on trouvera typiquement une unique bande, soit horizontale soit verticale, dans laquelle les cellules contiennent presque toutes une unique particule pointant dans une direction opposée aux flux des cellules voisines. Comme le damier, ce motif est donc identifié par un transport moyen nul et un alignement moyen proche de -1. On observera ce motif généralement pour les mêmes paramètres que le motif en nuage, c'est-à-dire des densités raisonnables et une forte valeur de la sensibilité (point  $P3$ ).

Visuellement, on différenciera ce motif de damier sur plusieurs points. Premièrement les particules de ce motif s'organisent en bande, contrairement au damier. Ensuite, les couleurs associées aux directions des cellules sont toujours opposées, mais représentent des flux à une direction et non deux (par exemple bleu-jaune pour une opposition Ouest-Est). En effet, là où le damier se rencontre surtout pour de hautes densités ( $\rho \sim 0.5$ ), le motif en ceinture est le motif le plus souvent observé pour des densités en particules raisonnables ( $\rho \sim 0.25$ ).

### Motif en serpent (S)

Le motif en serpent se repère à une formation unique des particules : dans une telle configuration, les états des particules dans les cellules s'organisent par une alternance, un peu comme un damier, hormis que les particules pointent dans une direction non pas opposée mais orthogonale aux flux des cellules voisines. Il en résulte une visualisation de flux qui fait penser à un damier par l'alternance des couleurs, mais où les couleurs associées aux directions ne sont pas opposées (par exemple, vert-jaune ou bleu-rouge). En ce qui concerne sa quantification, le motif en serpent est identifié par un alignement moyen  $\bar{\gamma}(\mathbf{x})$  nul, car les particules sont en moyenne orthogonales aux flux des cellules voisines, et un transport moyen proche de  $\bar{\phi}(\mathbf{x}) = 1$ , car toutes les particules ou presque pointent dans une des deux directions principales. Comme les motifs en ceinture et en nuages, le motif en serpent s'observe pour des paramètres correspondant typiquement au point  $P3$ .

### Motif hybride (H)

Enfin, le motif dit hybride peut être interprété comme un "mélange" entre des motifs de type ceinture et nuages. On l'observe donc pour un grand nombre de particules ce qui correspond au point  $P4$ , pour lequel on observe aussi le motif en damier. En effet, dans ce motif, toutes les cellules contiennent en moyenne deux particules orientées selon deux directions orthogonales. Macroscopiquement, on observera cependant que selon une direction (soit horizontale, soit verticale), les particules sont opposées aux particules des cellules voisines alors que dans l'autre direction, elles sont alignées. Par conséquent, ce motif peut être quantifié par un alignement moyen  $\bar{\gamma}(\mathbf{x})$  nul, car une moitié des particules est alignée et l'autre anti-alignée, et un transport moyen de valeur située autour de  $\bar{\phi}(\mathbf{x}) \sim 0.5$ .

### Note : mélanges entre motifs

Toutes les configurations que nous observons ne peuvent être classifiées dans un des motifs sus-cités. Il arrive que plusieurs motifs de même type, voire de types différents cohabitent dans un état métastable. Si dans le premier cas, les outils quantitatifs et visuels de détermination des motifs peuvent être appliqués

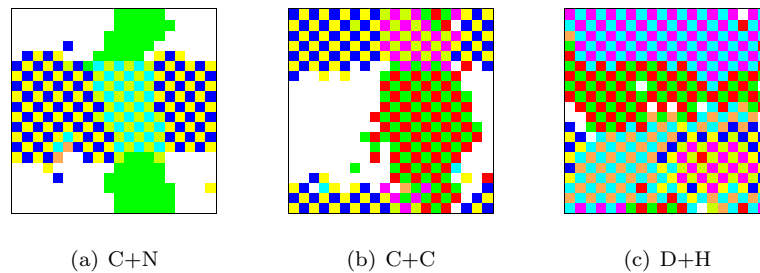


FIGURE 5.5 – Quelques exemples de configurations métastables mélangeant plusieurs motifs.

sans différence majeure, le problème se pose lorsque la configuration mélange des motifs de type différents (voir par exemple (a) et (c) sur la Figure 5.5). Par ailleurs, on pourrait déjà avancer que certains motifs sont déjà des mélanges : le motif hybride peut être considéré comme un mélange entre la ceinture et les nuages, le damier comme deux ceintures ...

### 5.3.3 Quantification des motifs

Si l'on a montré qu'il était possible de décrire la dynamique du comportement du modèle de formation d'essaim en classant les configurations en motifs, cela ne nous dit pas *a priori* comment les utiliser pour étudier quantitativement le comportement. En particulier, la propriété de récurrence établie au début du chapitre nous apprend que quelle que soit la configuration du système à un temps  $t$ , l'ensemble des motifs seront observés sur des temps de simulation asymptotiques. On ne peut donc utiliser une unique observation d'un motif pour caractériser l'ensemble du comportement.

Pour cette raison, on va chercher, afin de caractériser précisément le comportement, de caractériser non pas l'apparition occasionnelle de tel ou tel motif, mais de quantifier ses propriétés propres. Les motifs ainsi caractérisés peuvent être utilisés comme une description du comportement. Comme mentionné précédemment, deux caractéristiques s'appliquent aux motifs dans une dynamique récurrente : la stabilité et l'attractivité.

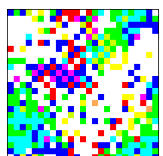
#### Approche par la stabilité

Pour rappel, la stabilité d'un motif se définit comme la capacité du système à conserver cette organisation en dépit des fluctuations dues à la règle de transition, ou en d'autres termes, à la quantité de bruit nécessaire pour quitter le motif et en rejoindre un autre. Il serait théoriquement possible d'étudier quantitativement la stabilité des motifs pour décrire le comportement : en considérant une trajectoire quelconque du système et en mesurant la fréquence et la durée de vie des motifs observés, on devrait pouvoir établir statistiquement des espérances relatives sur les différents motifs, comme illustré dans la Figure 5.6.

Le problème de cette approche est qu'elle devient extrêmement difficile et imprécise dès que l'on considère des motifs particulièrement stables, ou bien des systèmes de taille conséquente. En effet, la Figure 5.6 parvient à faire apparaître différents motifs au cours du temps uniquement parce qu'elle se place dans un cadre où il est facile d'observer des changements de comportement, d'une part en minimisant la taille du système et d'autre part en considérant des paramètres de contrôle proches des transitions (ici  $\rho = 1.4$  et  $\sigma = 0.9$  nous placent près de la phase désorganisée). En revanche, si l'on considère des cas quelconques, il devient beaucoup plus difficile ne serait-ce que d'observer ces changements de comportement, rendant impossible la quantification de la stabilité.

#### Approche par l'attractivité

Par contraste avec la stabilité, l'attractivité d'un comportement s'attache à établir, à partir d'une configuration aléatoire, la probabilité de converger en temps court vers un motif en particulier. Bien que cela ne préfigure pas de la stabilité générale d'un motif, on comprend bien que cette approche permet la



Motif	Aléatoire	Bande diagonale	Nuages	Damier	Serpent	Ceinture	Hybride
Point d'observation $(\rho, \sigma)$ de référence	P1=(0.1 ; 0.5)	P2=(0.2 ; 1.5)	P3=(0.2 ; 4)	P4=(0.4 ; 1.5)	P3	P3	P4
Visualisation de densité							
Visualisation de flux							
Visualisation des particules (agrandi)							
Valeur du transport moyen $\bar{\phi}$	$\sim 0$	$\sim 1$	$\in [0 ; 1]$	$\sim 0$	$\sim 1$	$\sim 0$	$\sim 0.5$
Valeur de l'alignement moyen $\bar{\gamma}$	$\sim 0$	$\sim 1$	$\sim 1$	$\sim -1$	$\sim 0$	$\sim -1$	$\sim 0$
Fréquence	Majeur	Majeur	Majeur	Majeur	Mineur	Mineur	Mineur

TABLE 5.1 – Tableau récapitulatif des différents motifs observé pour le modèle AGR de formation d'essaim. Chaque motif est associé à un point d'observation de référence, qui servira à observer spécifiquement sur chacun des motifs les changements observés. On rappelle ici aussi les valeurs des paramètres d'ordre associés aux motifs, ainsi que les trois visualisations.

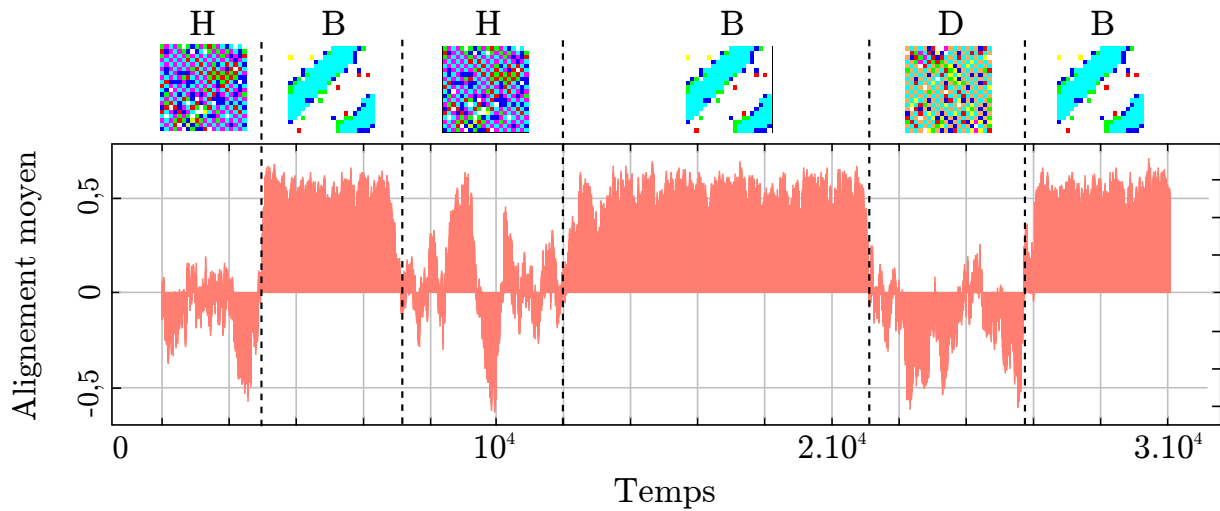


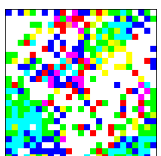
FIGURE 5.6 – Évolution du paramètre d’ordre d’alignement moyen pour de longs temps de simulation. Pour faciliter l’observation d’un motif à l’autre, on considère ici une petite taille de la grille cellulaire ( $20 \times 20$ ) et un point paramétrique proche de la transition entre organisation et désorganisation ( $\rho = 1.4; \sigma = 0.9$ ). De cette manière, on s’assure que les motifs sont moins stables, et que l’on passe donc de l’un à l’autre plus facilement. Ici trois motifs sont observés : la bande diagonale (B), le damier (D) et le motif hybride (H).

quantification d’une caractéristique particulière des motifs, qu’il est possible de reproduire et comparer pour différents paramètres d’ordre ou perturbations du modèle.

## 5.4 Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons présenté le modèle discret de formation d’essaim et passé en revue ses propriétés et comportements observés. Nous avons remarqué que la définition stochastique de la règle d’interaction entraîne une hypothèse de récurrence sur la dynamique du modèle, qui nous impose d’appréhender le comportement par une approche expérimentale. Cette approche nous a amené à élargir la description du comportement connu et à montrer que la phase “organisée” est en fait beaucoup plus riche qu’on ne le croyait jusqu’à maintenant. En particulier, nous proposons de décrire le comportement grâce à un ensemble de motifs, définis comme différents types d’organisation de particules, et dont il est possible d’étudier les caractéristiques indépendamment.

Dans la problématique de la robustesse qui nous intéresse dans cette thèse, nous allons être maintenant amenés à proposer des perturbations sur le modèle de formation d’essaim afin d’estimer la stabilité du comportement du modèle en général. L’observation des effets des perturbations se veut donc expérimentale, et s’appuie sur l’étude des propriétés dynamiques des différents motifs constituant le comportement et de leur évolution face à différentes perturbations.







# Chapitre 6

## Étude de la robustesse du modèle à la forme de la grille cellulaire

“Ô Dieu ! je pourrais être enfermé dans une coquille de noix, et me regarder comme le roi d’un espace infini [...]”

– William Shakespeare, *Hamlet*, 1610.

### Sommaire

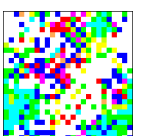
---

<b>6.1</b>	<b>Exploration du cas d’une grille finie carrée</b>	<b>96</b>
6.1.1	Influence de la parité	96
6.1.2	Influence de l’échelle	97
<b>6.2</b>	<b>Exploration du cas d’une grille finie rectangulaire</b>	<b>98</b>
6.2.1	Ratios entiers	99
6.2.2	Ratios non-entiers	99
6.2.3	Influence de la sensibilité à l’alignement	100
<b>6.3</b>	<b>Du fini à l’infini</b>	<b>101</b>
6.3.1	Vers l’étude d’une grille infinie	101
6.3.2	Application au modèle de formation d’essaim	102

---

*Ayant décrit notre compréhension du comportement au chapitre précédent, nous pouvons maintenant chercher à en estimer la robustesse, en perturbant le modèle défini et comparant les observations de motifs obtenues. Pour commencer, nous allons considérer un unique élément du modèle, la grille cellulaire. L’objectif de ce chapitre est de démontrer autant expérimentalement qu’analytiquement que différents choix portés sur un élément aussi anodin que la définition de l’espace sont déterminants dans les comportements observés.*

La définition des AGR donnée au Chapitre 5 établit que l’espace cellulaire fini en dimension 2 s’écrit  $\mathcal{L} = (\mathbb{Z}/L_x\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/L_y\mathbb{Z})$ , où  $(L_x, L_y) \in \mathbb{N}^2$  représentent la taille de la grille selon les deux axes. Or cela nous amène à une question : quelles valeurs attribuer à  $L_x$  et  $L_y$  ? Et plus important : ceci a-t-il une importance ? Réutilisant l’idée de l’exploration de la robustesse avancé en Partie I, nous allons montrer que la définition de la grille cellulaire induit des différences de comportement qualitatives.



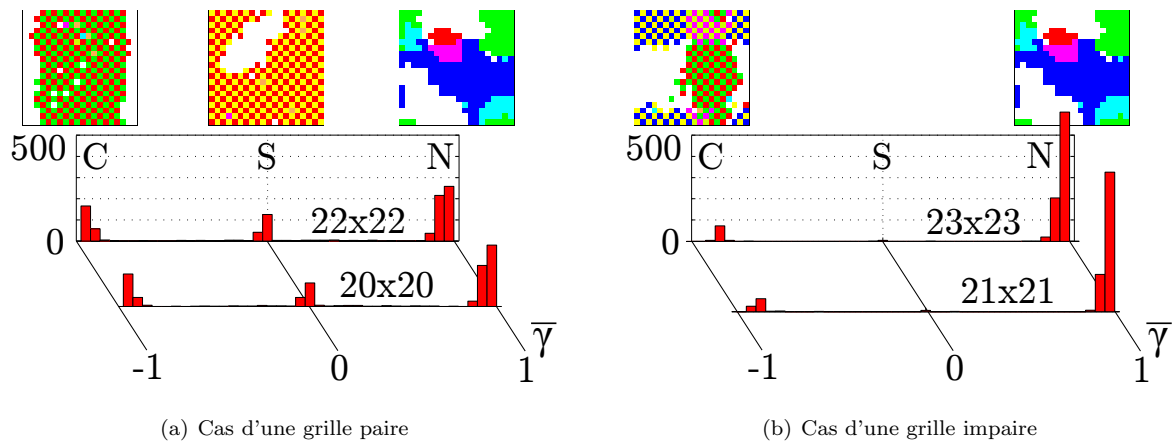


FIGURE 6.1 – Évolution de la fréquence d’observation des différents motifs pour le point  $P3$  dans le cas de différentes grilles carrées de bord pair ou impair. On affiche alors pour chaque grille un histogramme représentant la distribution de l’alignement moyen de mille échantillons, simulés pendant 10000 pas de temps à partir de configurations initiales aléatoires.

## 6.1 Exploration du cas d’une grille finie carrée

Dans le contexte d’une approche expérimentale, le choix du fini est un passage obligé : les limitations en mémoire et temps de simulation nous imposent des restrictions quant à la taille des systèmes que nous étudions. Considérons pour notre modèle de formation d’essaim le cas d’une grille cellulaire finie que l’on écrit donc  $\mathcal{L} = (\mathbb{Z}/L_x\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/L_y\mathbb{Z})$ . Nous allons maintenant explorer l’espace des valeurs  $(L_x, L_y)$  afin de chercher quel lien existe entre le comportement observé et la forme donnée à la grille cellulaire.

Un mot sur notre démarche expérimentale : nous partons des conditions utilisées pour les observations faites au Chapitre 5, à savoir un grille carrée de bord  $L = L_x = L_y = 20$ , puis nous allons élargir progressivement l’intervalle de  $L$  en nous arrêtant à chaque fois qu’une différence notable du comportement est repérée.

### 6.1.1 Influence de la parité

Commençons par considérer de petites variations sur la taille des dimensions considérées. On reproduit les expériences du Chapitre 5 pour les quatre points de références, en changeant la taille  $L$  de la grille carrée considérée. En utilisant un échantillonnage significatif de 1000 simulations, on remarque que si aucun changement n’est observé pour les points  $P1$ ,  $P2$  et  $P4$ , la proportion des comportements obtenus pour le point  $P3$  (forte sensibilité) change fortement en fonction de la parité de la grille, comme l’atteste la Figure 6.1.

En particulier, on observe que les motifs à alignement positif (les nuages) sont plus fréquents, et le pic correspondant aux motifs en serpent a disparu. En outre, la visualisation des configurations correspondant au pic d’alignement moyen négatif révèle qu’on n’observe plus de motif en ceinture “pur”, mais un mélange de ceintures en croix correspondant à la configuration montrée en Figure 6.1. Comment interpréter ce phénomène ?

En fait, le changement de comportement n’a rien de surprenant : les motifs en ceinture, tout comme les motifs en serpent, tiennent leur stabilité du fait qu’ils bouclent spatialement sur eux-mêmes. Comme leur organisation est basée sur une répartition des états en damier, un bouclage régulier nécessite que la taille de la grille  $L$  soit paire. Lorsque  $L$  est impaire, ces motifs possèdent nécessairement des extrémités où la régularité du motif n’est plus assurée. C’est par exemple le cas du motif en croix, où la zone de croisement des ceintures jouent ce rôle.

Cette observation semble suggérer que la stabilité des motifs en ceinture et en serpent repose sur la parité de la grille. Or, on s’attend à ne pas dépendre de la définition de la grille, et encore moins à de

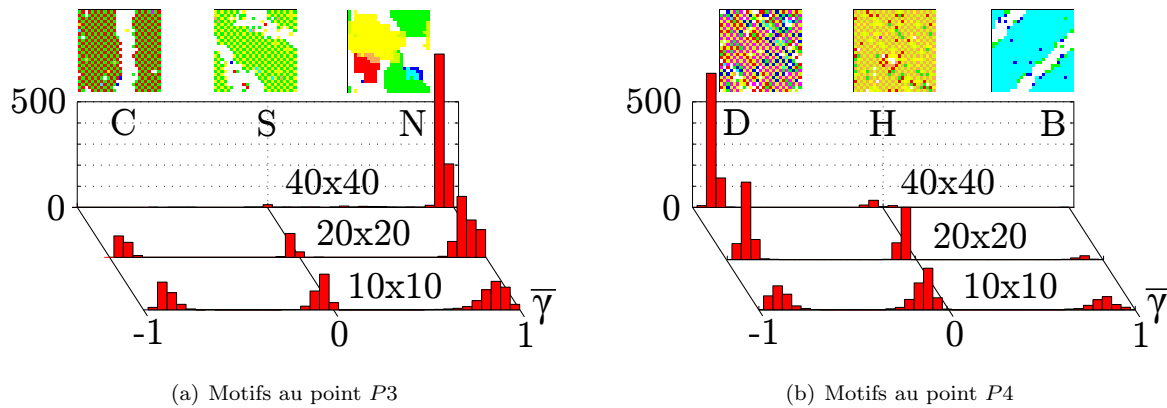


FIGURE 6.2 – Évolution de la fréquence d’observation des différents motifs pour différentes tailles de grilles, pour chacun des points  $P3$  et  $P4$ . On affiche alors pour chaque grille un histogramme représentant la distribution de l’alignement moyen de mille échantillons, simulés pendant 10000 pas de temps à partir de configurations initiales aléatoires.

petites variations sur ses dimensions. Cela confirme donc que ces motifs sont un artefact de simulation dépendant d’une hypothèse de parité sur la grille cellulaire.

### 6.1.2 Influence de l’échelle

Continuons notre exploration des grilles cellulaires, en augmentant plus encore les tailles considérées pour une grille cellulaire carrée. Nous réutilisons donc encore une fois le protocole expérimental établi au chapitre précédent et l’appliquons à des systèmes de taille  $L = 10$  et  $L = 40$ . Si les points de référence  $P1$  et  $P2$  ne montre aucune différence notable quelle que soit la taille de la grille simulée, les points  $P3$  (forte sensibilité) et  $P4$  (forte densité) montrent encore une fois des modifications de fréquences dans les motifs observés pour de grandes tailles.

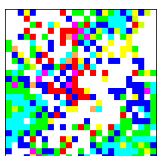
En particulier, comme le montre la figure Figure 6.2, lorsque la taille de la grille  $L$  augmente, l’observation des motifs en ceinture, serpent et hybride se fait plus rare, et le comportement converge quasi-systématiquement vers un motif en nuages pour le point  $P3$ , et en damier pour le point  $P4$ . Cette observation nous amène alors à distinguer les motifs en deux catégories (cf. Tableau 5.1) :

- Le terme *motifs mineurs* désigne les motifs qui ne se sont plus observables expérimentalement pour des grilles de grande taille. Cette catégorie comprend les motifs en ceinture, en serpent et hybride.
- Les *motifs majeurs* sont au contraire les motifs qui sont toujours régulièrement observés pour des grilles de grande taille : il s’agit du motif aléatoire, de la bande diagonale, des damiers et des nuages.

#### Disparition des motifs mineurs

Pour quelle raison l’observation du comportement change-t-elle de manière aussi drastique lorsqu’on augmente la taille de la grille cellulaire ? D’emblée, on peut noter que modifier les valeurs associées aux dimensions  $L_x$  et  $L_y$  de la grille n’a aucune incidence sur l’hypothèse de récurrence exposée au chapitre précédent, et que s’il est possible d’observer un motif donné pour un point paramétrique  $(\rho, \sigma)$ , cette observation devrait être vérifiée quelle que soit la taille de la grille considérée. En réalité, les motifs mineurs, s’ils ne sont plus observables expérimentalement, le sont toujours théoriquement : leur fréquence d’apparition pour des grilles de grande taille devient simplement très faible devant celle des motifs majeurs, ce qui explique leur disparition apparente.

En terme de stabilité, cela signifie que si les motifs mineurs sont *a priori* stables pour toute grille cellulaire finie, leur attractivité diminue fortement quand la grille s’agrandit, laissant place aux motifs majeurs qui deviennent largement majoritaires.



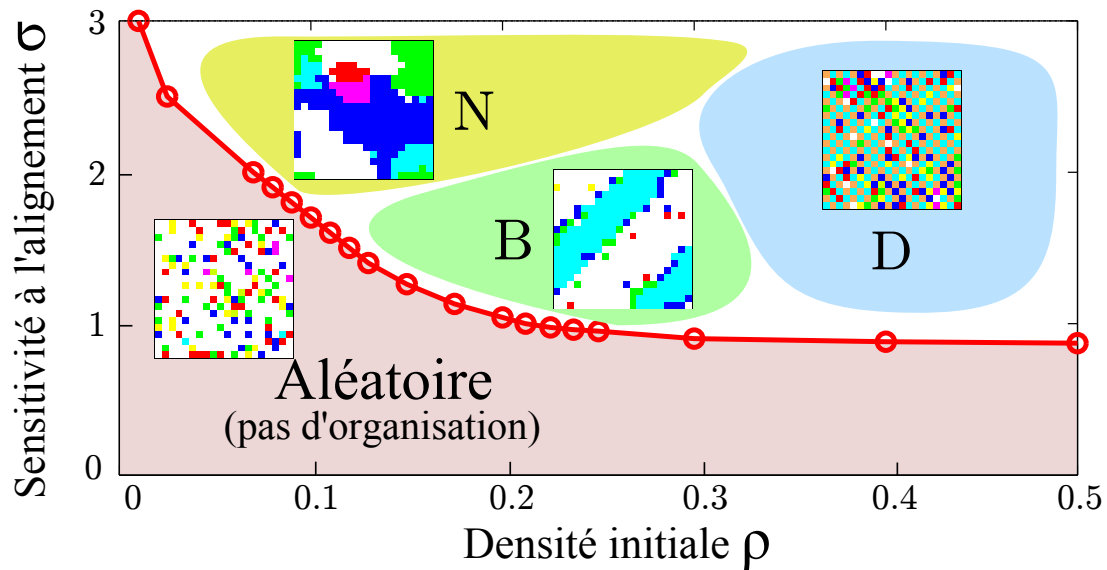


FIGURE 6.3 – Répartition des motifs majeurs sur le plan paramétrique  $(\rho, \sigma)$ . La ligne et les cercles rouges représentent des mesures précises du phénomène d'organisation.

### Répartition des motifs majeurs

Quand on agrandit la taille des grilles cellulaires, on augmente les temps et quantité d'énergie nécessaire pour converger vers un motif en particulier. En contrepartie, les motifs majeurs, qui sont caractérisés par une attractivité large et indépendante de la taille de la grille, deviennent les comportements majoritairement observés pour ce système. De plus, on remarquera que les observations sont quasiment systématiquement exclusives : pour un point paramétrique  $(\rho, \sigma)$  donné, on est en général à peu près sûr d'observer expérimentalement le même comportement émergent. Ainsi, comme montré dans la Figure 6.3 chaque point de référence définit une "région", c'est-à-dire un sous-ensemble de l'espace paramétrique  $(\rho, \sigma)$ , correspondant à chacun des motifs majeurs :  $P1$  correspond au motif aléatoire,  $P2$  à la bande diagonale,  $P3$  au motif en nuages et  $P4$  au damier.

*Dans la suite de ce chapitre, on choisit de se concentrer sur les motifs majeurs, qui ne dépendent pas de l'échelle de la grille cellulaire. L'idée est de s'affranchir des biais de simulation déjà identifiés, comme les motifs mineurs, et de poursuivre l'exploration de la robustesse avec de nouvelles perturbations. C'est dans objectif que nous considérons dans la suite de ce chapitre que la taille de la grille cellulaire doit être supérieure à  $L = 50$ .*

## 6.2 Exploration du cas d'une grille finie rectangulaire

Jusqu'à maintenant dans notre approche expérimentale, la grille a toujours été considérée comme carrée. La définition générale des automates cellulaires n'impose *a priori* pas de restriction particulière quant à la forme que doit prendre la grille cellulaire, qui est définie comme un sous-ensemble du plan  $\mathbb{Z}^d$  de dimension  $d$ . On est donc en droit de se demander si le choix d'une géométrie particulière pour la grille a une incidence sur son comportement. En effet, dans la plupart des automates cellulaires, comme par exemple le Jeu de la Vie, on considère une grille carrée suffisamment grande pour ne pas briser la symétrie spatiale de l'automate et éviter les effets de taille finie, qui peuvent potentiellement apporter de nouveaux biais de simulation. Or on va s'apercevoir que dans le cas présent, le choix d'une grille carrée peut induire des effets secondaires qui influencent l'observation quantitative du comportement.

Concentrons-nous donc maintenant sur les motifs majeurs : si la plupart des motifs ne sont pas directement liés à une géométrie de la grille particulière (ce qui peut être confirmé expérimentalement),

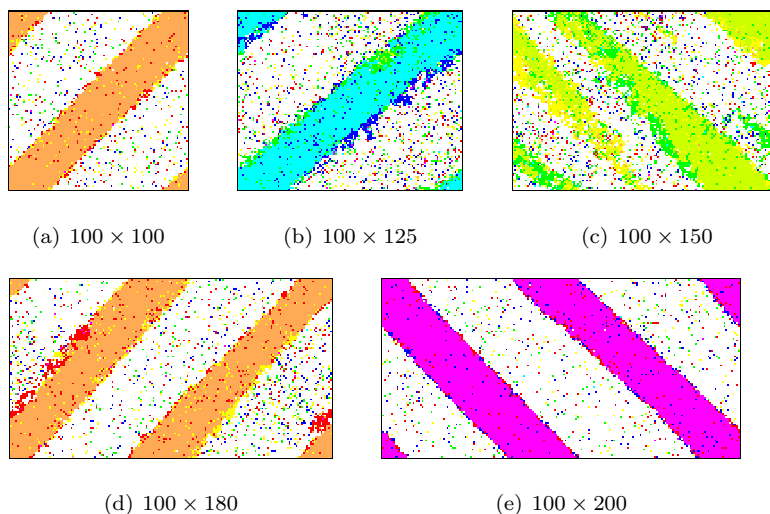


FIGURE 6.4 – Évolution de l’aspect visuel du motif en bande diagonale pour différents ratios de la grille cellulaire. Les captures sont réalisées à partir de configurations initiales aléatoires au point paramétrique  $P2$ , après 2000 pas de temps.

le motif en bande diagonale, de par la nature même du motif, qui boucle sur lui-même à travers les bords périodiques de la grille, nous invite à nous demander à quoi ressemblerait le comportement si l’hypothèse d’une grille carrée est relâchée. Nous nous concentrerons donc sur les observations relatives à ce motif.

Comme dans les paragraphes précédents, on commence par considérer un protocole expérimental identique à celui du chapitre précédent, et on réitère nos observations sur le point  $P2$ , qui correspond à la bande diagonale, pour différentes tailles  $L_x$  et  $L_y$  “suffisamment grandes” de la grille cellulaire. Aussi, pour simplifier nos descriptions, nous allons fixer la taille d’un bord  $L_y = 100$  et considérer différentes valeurs du ratio défini par  $R = L_x/L_y$ .

### 6.2.1 Ratios entiers

Considérons tout d’abord des grilles où les bords  $L_x$  et  $L_y$  sont harmoniques, c’est-à-dire où le ratio  $R = L_x/L_y$  est un entier  $R \in \mathbb{N}$  (cas (a) et (e) de la Figure 6.4). Dans les conditions paramétriques du point  $P2$  correspondant à la formation de la bande diagonale, on observe un phénomène similaire où sur la grille cellulaire rectangulaire : une bande diagonale se forme à l’échelle de toute la grille bouclant sur les bords  $L_x$  et  $L_y$ . En fait, on s’apercevra que le rapport entre le nombre de bouclages de la bande sur le bord  $L_x$  et sur le bord  $L_y$  correspond exactement au ratio entier  $R$ .

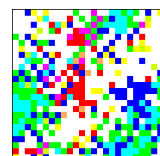
Le cas des ratios harmoniques correspond donc à la même régularité observée pour le cas d’une grille carrée : la géométrie de la grille permet à la bande diagonale de boucler sur elle-même à travers les bords périodiques, ce qui confirme nos observations et justifie la stabilité du motif observé. La question intéressante qui se pose alors porte sur les ratios irréguliers : que se passe-t-il si le ratio  $R$  n’est pas entier ?

### 6.2.2 Ratios non-entiers

Nous allons maintenant considérer que le ratio  $R = L_x/L_y$  prend des valeurs non-entières. Il n’est désormais géométriquement plus possible pour les motifs du point  $P2$  de boucler diagonalement sur les bords de la grille.

#### Ratios “presque” entiers

On considère tout d’abord que  $R$  est proche de valeurs entières (correspondant aux cas (b) et (d)). Pour les conditions paramétriques correspondant au point  $P2$ , les comportements observés montrent



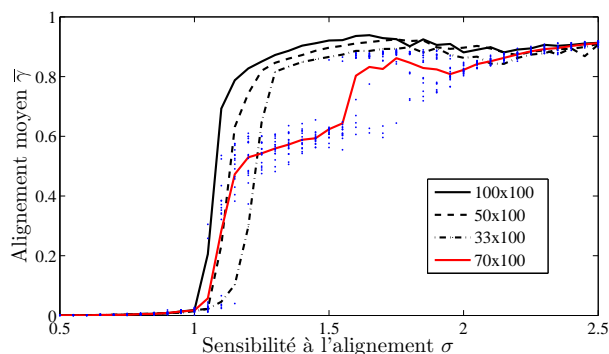


FIGURE 6.5 – Evolution de l’alignement moyen  $\bar{\gamma}$  en fonction de la sensibilité à l’alignement, pour différentes tailles de grilles cellulaires.

l’apparition d’un motif en bande diagonale, correspondant au ratio entier le plus proche. En effet, en observant avec attention les “fronts” des bandes diagonales, on s’aperçoit que ceux-ci sont beaucoup plus bruités que dans le cas entier, permettant aux bandes formées de se tordre pour atteindre des orientations obliques et ainsi boucler à nouveau sur les bords de la grille. Le motif en bande diagonale apparaît donc d’emblée robuste, puisqu’il ne dépend pas d’une géométrie précise pour la grille cellulaire.

### Ratio $R \approx 1.5$

Considérons maintenant des ratios  $R$  quelconques, et en particulier le cas le plus éloigné possible des ratios entiers, par exemple  $R = 1.5$  correspondant au cas (c), et observons l’évolution des comportements.

Pour reconnaître le terrain, nous approchons d’abord le comportement par une approche simulation et visualisation : si pour des ratios proches de  $R = 1$  et  $R = 2$ , les bandes observées sont régulières, pour  $R = 1.5$  la bande ne parvient pas à boucler elle-même à travers les bords périodiques de la grille, et on observe à la place des groupes de particules voyageant diagonalement. On détermine “à la main” que ce phénomène semble se produire pour tous les ratios dans l’intervalle  $R \in [1.4; 1.6]$ .

Afin de confirmer cette observation, nous proposons d’adopter une approche quantitative et de comparer la transition de phase observée pour  $\rho = 0.2$  pour plusieurs tailles de grilles. Les résultats sont reportés dans la Figure 6.5.

### Ratios $R > 2$

Contrairement au cas  $R \approx 1.5$ , les ratios  $R > 2$  parviennent quasi-systématiquement à former une bande diagonale qui boucle sur les bords de la grille cellulaire. Le nombre de passages à travers la grille est généralement égal au ratio entier le plus proche, mais il arrive que les deux ratios entiers supérieurs et inférieurs puissent être observés pour une même taille de grille ; c’est par exemple le cas pour  $R = 2.5$ .

### 6.2.3 Influence de la sensibilité à l’alignement

Comment la sensibilité à l’alignement influe-t-elle sur le motif observé, en fonction de la taille de la grille considérée ? En effet dans la Figure 6.5, on remarque non seulement la transition de phase attendue entre le motif aléatoire et la formation des bandes, mais on observe également des pics inattendus pour des ratios non-entiers comme  $R = 1.5$ . Comment expliquer ce phénomène ?

Nous reprenons notre approche de simulation-visualisation et, pour un ratio donné  $R = 1.5$ , observons comment évolue le comportement de la bande diagonale pour différentes valeurs de la sensibilité (voir Figure 6.6). Pour  $\sigma = 1.5$  on retrouve le comportement observé auparavant, correspondant à la visualisation du cas (b) de la figure : une bande diagonale incomplète qui arrive difficilement à rejoindre ses extrémités pour boucler sur elle-même.

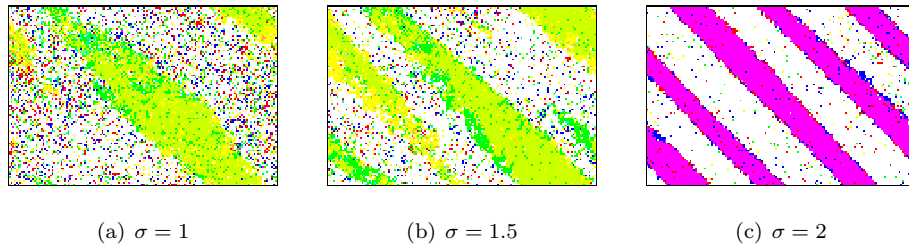


FIGURE 6.6 – Évolution de l’aspect visuel du motif en bande diagonale pour un ratio non-entier, pour différentes valeurs de la sensibilité à l’alignement. Les captures sont réalisées après 2000 pas de temps.

Lorsqu’on diminue la sensibilité à l’alignement ( $\sigma = 1$ ), on relâche la force de l’alignement sur les particules et la bande diagonale évolue en une sorte de “boule allongée” évoluant diagonalement sur la grille cellulaire, correspondant à la Figure 6.6(a). Ce changement de comportement peut s’expliquer par le fait que le bruit supplémentaire ajouté par la réduction de  $\sigma$  désagrège les extrémités de la bande, qui adopte alors une forme moins rectiligne et plus ovale.

Au contraire, lorsqu’on augmente la sensibilité à l’alignement ( $\sigma = 2$ ), on diminue le degré de liberté des particules qui sont d’autant plus “fixées” à la bande. Or, comme la grille est d’une géométrie  $R = 1.5$  non-compatible avec la régularité d’une bande diagonale, le motif forme de nouvelles bandes, plus fines, qui en bouclant plusieurs fois sur chacun des côtés de la grille, parvient à retrouver une régularité pour boucler sur elle-même. On remarquera que le rapport du nombre de fois que la bande boucle sur chaque côté de la grille forme un rapport proche du ratio de la grille cellulaire. Pour prendre l’exemple de la Figure 6.6(c), la bande boucle trois fois sur le bord  $y$  et deux fois sur le bord  $x$ , ce qui correspond exactement au ratio de la grille  $R = 3/2 = 1.5$ .

Une hypothèse plausible est que ce mécanisme est responsable du saut inattendu de l’alignement moyen observé pour le ratio  $R = 1.5$  dans la Figure 6.5.

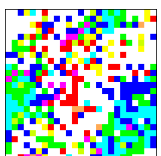
*À cette étape de notre étude de la relation entre les comportements du modèle pour différentes définitions de la grille cellulaire, il est intéressant de noter que non seulement nous avons montré que le motif en bande diagonale était quantitativement perturbé par un changement de la grille, mais également qu’il apparaissait de nouvelles propriétés qualitativement différentes pour des grilles rectangulaires. Pour poursuivre cette réflexion, on se demande donc à quoi ressemble le comportement dans le cas d’une grille infinie donc sans bords.*

## 6.3 Du fini à l’infini

Changer l’implémentation du modèle d’une grille finie à une grille infinie suggère des changements drastiques sur les hypothèses du modèle. En effet, si le nombre de configurations possibles est infini, la probabilité d’échapper à un motif donné grâce aux fluctuations tend vers zéro, et le comportement ne peut plus être considéré comme métastable. En revanche, on assistera à l’émergence de phases, c’est-à-dire un ensemble de comportements locaux qui se produisent statistiquement partout sur l’espace cellulaire et restent stable.

### 6.3.1 Vers l’étude d’une grille infinie

Pour étudier les comportements sans effets de résonance à grande échelle, nous allons considérer quelques modifications dans notre protocole expérimental. Au lieu de simuler le comportement sur des grilles de taille raisonnable et des nombres d’itérations très grands – ce qui permet normalement d’avoir une idée du comportement asymptotiquement en temps “simulable”, mais qui induit ici des effets de résonance indésirables – nous allons considérer des valeurs cohérentes pour les dimensions spatiales et temporelles. En d’autres termes, pour estimer le comportement sur un temps  $T$ , il nous faut utiliser une





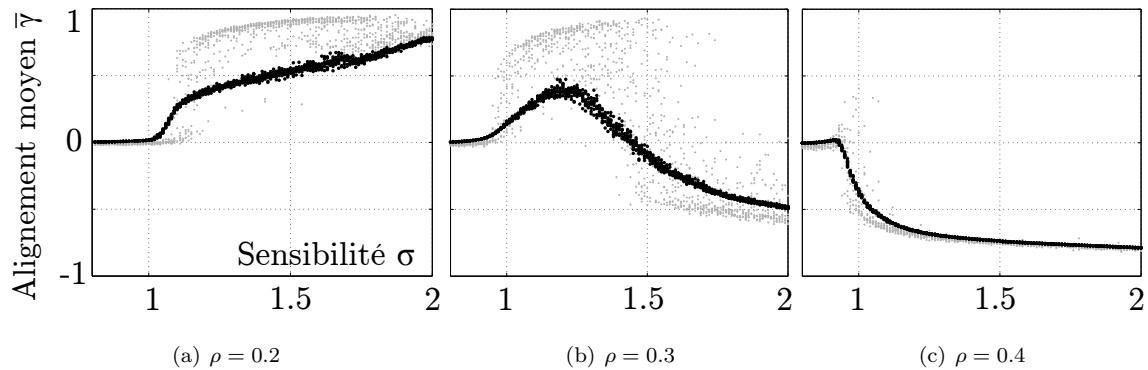


FIGURE 6.7 – La transition de phase de l’auto-organisation pour différentes valeurs de la sensibilité à l’alignement  $\sigma$  pour une densité initiale fixée  $\rho$ . Chaque point représente un échantillon après un temps transitoire de ( $T_{tr} = 1400$  et pendant un temps d’échantillonnage  $T_{ech} = 100$ ) – les points noirs correspondent à une grille de taille  $L = 1500$  et les points gris à une grille de taille  $L = 100$ .

grille de taille équivalente  $L \sim T$  pour limiter les effets liés à la taille finie. Pour étudier le comportement asymptotique en grille infinie, il faudrait alors augmenter simultanément les temps de simulation et la taille de la grille considérée.

### 6.3.2 Application au modèle de formation d’essaim

Revenons au modèle de formation d’essaim et appliquons à nouveau notre protocole expérimental en prenant compte les remarques précédentes. Nous considérons maintenant deux simulations distinctes, la première sur une grille carrée de taille  $L = 100$ , la seconde sur une grille  $L = 1500$  et nous simulons notre modèle pour un temps  $T = 1500$  (en réalité un temps transitoire  $T_{tr} = 1400$  et un temps d’échantillonnage  $T_{ech} = 100$ ). Les résultats obtenus, illustrés par les courbes de la Figure 6.7, montrent des changements significatifs dans les comportements observés :

- Les données obtenues pour  $\rho = 0.2$  et  $\rho = 0.4$  confirment nos observations de multiples motifs organisés : on retrouve une phase d’alignement négatif, correspondant au motif en damier, et une phase d’alignement positive, correspondant aux motifs en bande diagonale et en nuages.
- La distinction entre bande diagonale et nuages n’apparaît cependant pas de manière évidente.
- La forme des transitions observées pour les deux tailles de grille diffèrent grandement, malgré un temps de simulation égal : si la transition est brutale et immédiate dans le cas de  $L = 100$ , la même transition est progressive, voire linéaire dans le cas  $L = 1500$ .

Considérant cette fois-ci une visualisation des comportements correspondant aux points  $P2$ ,  $P3$  et  $P4$ , on obtient de manière similaire des visualisations de flux qui soutiennent l’idée d’une différence qualitative entre bandes diagonales et motifs en nuages (voir Figure 6.8).

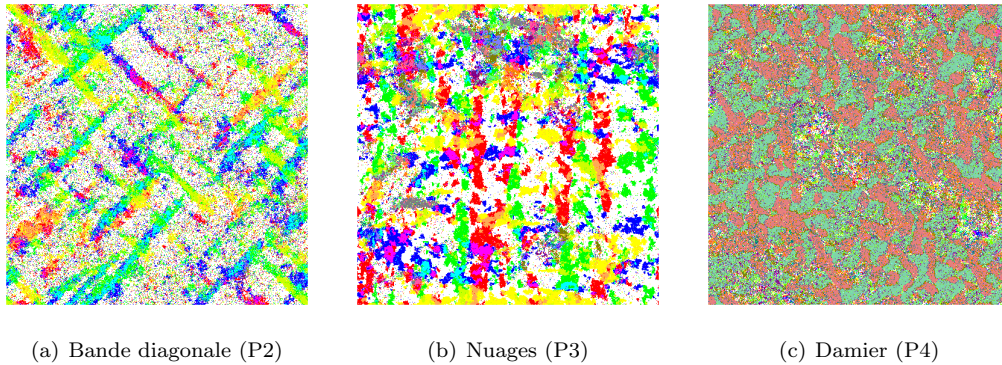


FIGURE 6.8 – Visualisation de flux de configurations à grande échelle, pour des dimensions spatiales et temporelles égales ( $t = 500, L = 500$ ).

## Synthèse

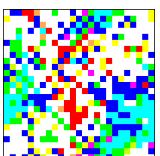
Dans ce chapitre, nous avons vu comment la définition de la grille cellulaire influençait les comportements observés dans le modèle de formation d'essaim en AGR. Tout d'abord, nous avons considéré des grilles carrées et montré que :

1. la fréquence d'observation statistique des motifs en serpent et en ceinture change lorsque l'on passe d'une grille de bords pairs à impairs ;
2. les motifs en serpent, en ceinture et hybride ne sont plus expérimentalement observables pour des grilles de taille de l'ordre de  $L = 100$ .

Ces expériences nous ont amené à introduire la notion de motifs majeurs, dont l'apparition ne dépend pas de propriétés particulières sur la taille de la grille.

Dans un second temps, nous avons considéré une grille non plus carrée mais rectangulaire, et considéré diverses possibilités pour le ratio des bords  $L_x$  et  $L_y$ . Nos expériences nous ont conduits à montrer que ces changements avaient des incidences sur les propriétés du motif en bande diagonale, mais que ce comportement conservait néanmoins une certaine stabilité et s'adaptait aux perturbations. En particulier, nous avons montré que :

1. les ratios entiers présentent la même régularité qu'une grille carrée, en permettant à la bande diagonale de boucler plusieurs fois sur les bords périodiques de la grille ;
2. les autres ratios montrent que le système arrive à converger vers une bande diagonale, en se tordant pour boucler correctement ou bien en bouclant plusieurs fois sur les bords périodiques.





# Chapitre 7

## Étude de la robustesse du modèle à l’asynchronisme

“A one-to-million shot happens nine times out of ten.”

– Terry Pratchett, *Equal rites*, 1987

### Sommaire

---

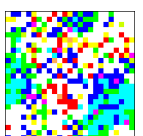
<b>7.1</b>	<b>Construction d’un asynchronisme pour les AGR . . . . .</b>	<b>105</b>
7.1.1	Asynchronisme de l’interaction . . . . .	106
7.1.2	Asynchronisme de la propagation classique . . . . .	106
7.1.3	Asynchronisme de la propagation conservatif . . . . .	107
7.1.4	Composition des asynchronismes . . . . .	109
<b>7.2</b>	<b>Application à la formation d’essaim . . . . .</b>	<b>110</b>
7.2.1	Robustesse à l’asynchronisme de l’interaction . . . . .	110
7.2.2	Robustesse à l’asynchronisme de la propagation . . . . .	112
7.2.3	Quantification expérimentale des transitions . . . . .	113
<b>7.3</b>	<b>Synthèse . . . . .</b>	<b>114</b>

---

*Dans le précédent chapitre, nous avons montré comment le comportement du modèle peut être influencé par la définition donnée à la grille cellulaire, et déterminé quels motifs étaient liés à des propriétés particulières de la grille et lesquels en étaient plus ou moins indépendants. Nous allons nous poser la même question de stabilité des comportements pour une perturbation du mode de mise à jour. Comme au Chapitre 2, nous allons réfléchir à la définition à donner à l’asynchronisme pour un automate de gaz sur réseau et observer les changements dans le cadre du modèle de formation d’essaim. Dans un premier temps, nous allons revenir sur les hypothèses des automates de gaz sur réseau et de l’asynchronisme afin de choisir les perturbations que nous explorerons. En particulier, nous noterons que les principes de conservation et d’exclusion spatiale des particules nous imposent de définir des perturbations nouvelles qui respectent ces contraintes. Ensuite, nous tenterons d’observer les changements de comportement pour nos différents asynchronismes.*

### 7.1 Construction d’un asynchronisme pour les AGR

Un premier obstacle à l’application de la définition classique de l’asynchronisme à des automates de gaz sur réseau est la spécificité de la mise à jour globale. En effet, si dans un automate cellulaire, la règle de mise à jour globale peut se définir comme l’application de la transition locale sur un ensemble (total ou partiel) de cellules, la même définition ne peut s’appliquer aux AGR dans la mesure où la mise à jour



globale du système consiste en une application successive de deux transformations globales distinctes : l'interaction et la propagation.

Pour résoudre cette ambiguïté, nous décidons de nous concentrer sur deux possibilités principales pour une définition de l'asynchronisme que nous confronterons l'une à l'autre expérimentalement : un asynchronisme de l'interaction et un asynchronisme de la propagation.

### 7.1.1 Asynchronisme de l'interaction

Intuitivement, l'asynchronisme de l'interaction peut être vu comme un  $\alpha$ -synchronisme appliqué à la seule étape d'interaction : pour chaque pas de temps, l'étape d'interaction applique la transition locale d'interaction à un sous-ensemble donné des cellules, alors que l'étape de propagation s'applique à toutes les cellules de la grille.

#### Définition formelle

D'un point de vue formel, cette perturbation revient à introduire une fonction de sélection  $\Delta_I : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{L})$  qui retourne pour un temps  $t$  entier l'ensemble des cellules de  $\mathcal{L}$  qui vont interagir, où chaque cellule a une probabilité  $\alpha_I$  d'être sélectionnée. On peut alors déterminer la nouvelle fonction d'interaction globale  $I_\Delta$  pour une configuration  $x$  avec le voisinage  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_k\}$  :

$$x^I(c) = I_\Delta(x^t(c)) = \begin{cases} f_I(x(c), x(c+v_1), \dots, x(c+v_k)) & \text{si } c \in \Delta_I(t) \\ x(c) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On reconnaît ici la définition intuitive de l' $\alpha$ -synchronisme donnée au Paragraphe 2.2.1.

#### Équivalence avec le cas synchrone

Comme mentionné au Chapitre 5 sur la définition des AGR, la plupart des modèles considèrent une fonction d'interaction qui conserve le nombre de particules dans chaque cellule, permettant de respecter le principe de conservation du nombre total de particules du système. Or on remarquera que l'asynchronisme de l'interaction défini précédemment respecte également cette propriété : laisser inchangée la configuration d'une cellule conserve le nombre de particules contenues par cette cellule. L'étape d'interaction asynchrone peut donc être assimilée à une étape d'interaction classique, où la fonction d'interaction asynchrone  $f'_I$  est une modification de la fonction synchrone  $f_I$  reproduisant les effets de l'asynchronisme sur la distribution des configurations.

Plus concrètement, si on note  $P(x(c) \rightarrow x^I(c))$  la probabilité d'obtenir une configuration  $x^I(c)$  à partir de  $x(c)$  via une fonction d'interaction  $f_I$ , et  $P'(\dots)$  la même probabilité selon  $f'_I$ , qui représente une dynamique asynchrone de taux  $\alpha_I$ , on a l'égalité :

$$P'(x(c) \rightarrow x^I(c)) = \begin{cases} \alpha_I \cdot P(x(c) \rightarrow x^I(c)) + \bar{\alpha}_I & \text{si } x(c) = x^I(c), \\ \alpha_I \cdot P(x(c) \rightarrow x^I(c)) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (7.1)$$

### 7.1.2 Asynchronisme de la propagation classique

À l'instar de l'asynchronisme de l'interaction, il est possible de définir un asynchronisme qui ne s'applique qu'à l'étape de propagation. Or, si nous avons vu que cette définition ne posait pas de problème majeur dans le cas de l'interaction, étant donné qu'elle conserve le nombre global de particules, il n'en est pas de même pour la propagation.

Nous allons donc maintenant discuter la définition d'un asynchronisme de la propagation en distinguant deux approches : une première classique ou "naïve", qui consiste à considérer le modèle comme un pur automate cellulaire sans contrainte particulière et une seconde dite conservatrice ou "adaptée" qui prend en compte les spécificités des automates de gaz sur réseau.

### Définition

Considérons dans un premier temps une définition de l'asynchronisme de la propagation qui se définit comme la simple application de la définition intuitive de l'asynchronisme : à chaque pas de temps, l'étape d'interaction est appliquée à toutes les cellules de la grille alors que la propagation n'est appliquée qu'à un sous-ensemble de ces cellules. Comme pour l'asynchronisme de l'interaction, cela revient à introduire une fonction de sélection  $\Delta_P : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{L})$  qui retourne pour un temps  $t$  entier l'ensemble des cellules de  $\mathcal{L}$  qui vont propager leurs particules, où chaque cellule a une probabilité  $\alpha_P$  d'être sélectionnée, et à appliquer la propagation pour les cellules qui sont dans  $\Delta_P(t)$  et l'identité pour les autres.

Comment appliquer cette définition pour une transition définissant une bijection sur les canaux entre cellules ? Deux cas possibles peuvent se présenter en fonction de la vision du modélisateur sur l'étape de propagation :

- Le cas *centrifuge*, où la propagation est vue comme l'envoi par une cellule de ses particules vers ses voisins. L'asynchronisme de la propagation porte alors sur toutes les particules des canaux de cette cellule. D'un point de vue formel, cela revient à transformer la fonction de propagation locale :

$$x_i^P(c + v_i) = \begin{cases} x_i^P(c) & \text{si } c \in \Delta_P(t) \\ x_i^P(c + v_i) & \text{sinon.} \end{cases}$$

pour une configuration  $x$  et une cellule  $c$ , avec  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_k\}$ .

- un cas *centripète*, où la propagation est vue comme la copie par une cellule des états des canaux des cellules voisines. L'asynchronisme s'applique alors sur toutes les particules dans les canaux qui pointent vers cette cellule. D'un point de vue formel, cela s'écrit :

$$x_i^P(c) = \begin{cases} x_i^P(c - v_i) & \text{si } c \in \Delta_P(t) \\ x_i^P(c) & \text{sinon.} \end{cases}$$

pour une configuration  $x$  et une cellule  $c$ , avec  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_k\}$ .

### Le problème de la conservation des particules

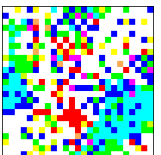
Nous allons montrer que dans les cas centrifuge et centripète, une définition classique de l'asynchronisme de la mise à jour induit un comportement en contradiction avec les hypothèses du modèle énoncées au Chapitre 5. Pour ce faire, nous allons considérer l'étape de propagation dans le cas de canaux de plusieurs cellules consécutives selon une seule direction (Figure 7.1 et 7.2). Dans le cas synchrone, les particules sont toujours correctement conservées car la propagation réalise alors une bijection sur les canaux. Or dans le cas asynchrone, nous allons considérer deux cas de figure qui posent problème :

1. Dans le cas centrifuge (respectivement centripète), si la cellule de tête (resp. la cellule la devantant) n'est pas mise à jour, il est possible de "perdre" une particule de la chaîne, comme illustré par les figures 7.1(b) et 7.2(b).
2. Dans le cas centripète (respectivement centrifuge), si la cellule de queue (resp. la cellule la précédant) n'est pas mise à jour, il est possible de "créer" une particule de la chaîne, comme illustré par les figures 7.1(c) et 7.2(c).

Par conséquent, quelle que soit la vision centripète ou centrifuge associée à l'asynchronisme de la propagation, une définition classique au sens des automates cellulaires remet en cause un des principes de base des automates de gaz sur réseau, à savoir la conservation du nombre total de particules. On doit donc réfléchir à un autre asynchronisme spécifique aux AGR, qui conserve le nombre total de particules.

#### 7.1.3 Asynchronisme de la propagation conservatif

On se place dans le cas d'une vision centrifuge de la propagation, où l'asynchronisme porte sur les particules des cellules sources et non des cellules destinations. Nous allons décrire un nouveau type d'asynchronisme de la propagation, qui conserve le nombre de particules dans tous les cas de figure.



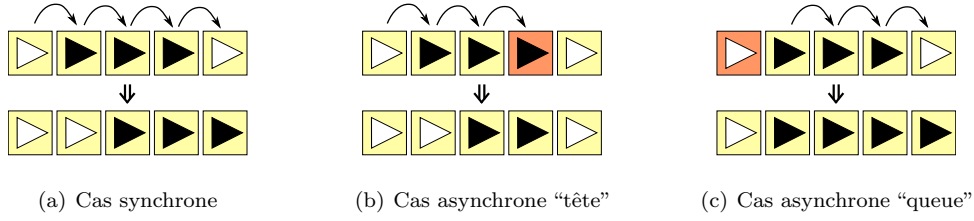


FIGURE 7.1 – Exemples d'application de l'étape de propagation, dans le cas d'un asynchronisme de la propagation classique centrifuge (les états sont propagés à partir des cellules source). Le cas (a) correspond à la dynamique synchrone. Dans le cas (b), la cellule de tête n'est pas mise à jour, résultant en une perte de particules. Dans le cas (c), la cellule précédant la cellule de queue n'est pas mise à jour, ce qui a pour effet de créer une nouvelle particule.

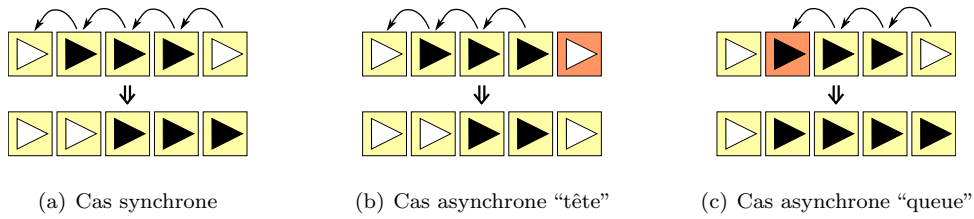


FIGURE 7.2 – Exemples d'application de l'étape de propagation, dans le cas d'un asynchronisme de la propagation classique centripète (les états sont propagés depuis la cellule destination). Le cas (a) correspond à la dynamique synchrone. Dans le cas (b), la cellule de tête n'est pas mise à jour, résultant en une perte de particules. Dans le cas (c), la cellule précédant la cellule de queue n'est pas mise à jour, ce qui a pour effet de créer une nouvelle particule.

### Définition

Premièrement, nous devons établir quelles cellules seront mises à jour, et donc quelles particules seront propagées, et lesquelles ne le sont pas, et qui gardent donc leurs particules. Pour cela, nous allons reprendre la fonction de sélection  $\Delta_P : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{L})$  qui retourne pour tout temps  $t$  le sous-ensemble des cellules qui seront mises à jour, où chaque cellule a une probabilité  $\alpha_P$  d'être sélectionnée.

Comme nous l'avons vu précédemment, un asynchronisme défini par cellule présente le risque de ne pas conserver le nombre total de particules au cours du temps. Il nous faut donc changer notre point de vue sur la mise à jour de la propagation et considérer une transition par canal et non plus par cellule. Nous définissons à partir de l'ensemble des canaux du système  $\mathcal{V} \times \mathcal{L}$  un sous-ensemble  $\mathcal{B}^t \subset \mathcal{V} \times \mathcal{L}$  comme l'ensemble des *canaux bloqués*, qui resteront inchangés pendant l'étape de propagation.

Afin de construire cet ensemble, nous établissons qu'un canal  $(i, c)^t$  (pour canal  $i$  d'une cellule  $c$  au temps  $t$ ) est *bloqué* si au moins une des deux conditions suivantes est vérifiée : (C1) la cellule  $c$  n'est pas dans l'ensemble  $\Delta_P(t)$  et n'est donc pas mise à jour, et (C2) le canal de destination est bloqué. En termes formels, cela donne alors :

$$(i, c)^t \in \mathcal{B}^t \text{ si } \begin{cases} c \notin \Delta_P(t) & (C1) \\ \text{ou} \\ (i, c + n_i)^t \in \mathcal{B}^t & (C2) \end{cases} \quad (7.2)$$

Cette définition de  $\mathcal{B}^t$  décrit une relation générale entre les particules : une fois qu'un canal est bloqué à cause de la condition (C1), la chaîne de particules qui pointe vers ce canal bloqué devient également bloquée à cause de la condition (C2). La construction d'un tel ensemble peut donc être réalisée récursivement, en bloquant des particules de part en part quand les canaux d'une cellule donnée sont bloqués.

Connaissant les canaux bloqués, on peut en déduire la fonction locale de propagation. Pour un canal  $(i, c)^t$  donné, trois cas de figure peuvent être envisagés, illustrés par la Figure 7.3 :

- Si le canal est bloqué, alors celui-ci ne change pas d'état (cf. (c)).
- Si le canal n'est pas bloqué mais que le canal qui pointe vers ce canal est bloqué, alors il se "vide", c'est à dire qu'il ne contient plus de particule et prend l'état 0 (cf. (b)).
- Sinon le canal prend l'état du canal qui pointe vers ce canal (cf. (a)).

La fonction de propagation locale s'écrit alors :

$$x_i^P(c) = \begin{cases} x_i^I(c) & \text{si } (i, c) \in \mathcal{B}^t \\ 0 & \text{si } (i, c) \notin \mathcal{B}^t \text{ et } (i, c - v_i) \in \mathcal{B}^t \\ x_i^I(c - v_i) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (7.3)$$

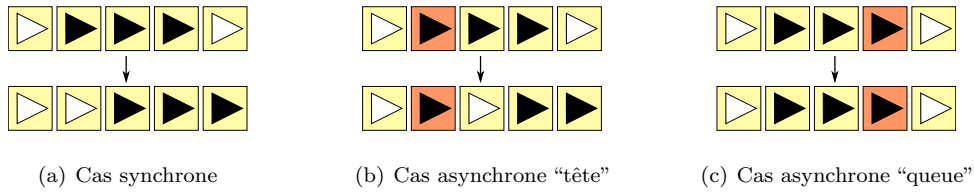


FIGURE 7.3 – Exemples d'application de l'étape de propagation, dans le cas d'un asynchronisme de la propagation conservatif.

On remarque que pour  $\alpha_P = 1$ , quel que soit le temps  $t$  considéré, les égalités  $\Delta_P(t)$  est égal à  $\mathcal{L}$  et donc  $\mathcal{B}^t = \emptyset$  sont vérifiées, ce qui correspond à la dynamique synchrone. En revanche, pour  $\alpha_P = 0$ , on a au contraire  $\Delta_P(t) = \emptyset$  et  $\mathcal{B}^t = \mathcal{V} \times \mathcal{L}$ , d'où les particules ne sont jamais propagées et restent toutes emprisonnées dans leur cellule respective.

#### 7.1.4 Composition des asynchronismes

À ce point de notre réflexion, il tient de remarquer qu'asynchronismes de l'interaction et de la propagation ne sont pas incompatibles d'un point de vue formel. En effet, on peut définir un asynchronisme hybride comme la superposition des asynchronismes précédemment décrits.

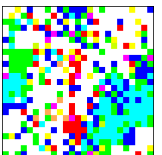
##### Superposition des asynchronismes

On peut considérer que la mise à jour globale du système s'effectue toujours en deux étapes : l'interaction, définie pour un sous-ensemble  $\Delta_I(t)$  de  $\mathcal{L}$ , et l'asynchronisme de la propagation, pour un sous-ensemble  $\Delta_P(t)$  de  $\mathcal{L}$ . Il est donc possible d'interpréter l'asynchronisme comme la superposition d'un asynchronisme de l'interaction associé à une probabilité de mise à jour  $\alpha_I$  et d'un asynchronisme de l'interaction associé à une probabilité de mise à jour  $\alpha_P$ .

##### Asynchronisme total ou corréolé

De la même manière, on peut être amené à considérer un mode de mise à jour où, pour une transition de  $t$  à  $t + 1$ , lorsqu'une cellule n'est pas sélectionnée pour la mise à jour, on n'applique ni la fonction locale d'interaction, ni la fonction locale de propagation. Cela revient à considérer un unique ensemble  $\Delta(t)$  qui se substitue à  $\Delta_I(t)$  et  $\Delta_P(t)$ .

Ayant défini nos différents modes de mise à jour synchrone, nous voulons maintenant savoir quels effets ceux-ci ont sur le comportement du modèle de formation d'essaim tel qu'il a été présenté au Chapitre 5. En particulier, nous allons considérer les deux asynchronismes principaux, qui sont l'asynchronisme de l'interaction et l'asynchronisme de la propagation conservatif.





## 7.2 Application à la formation d'essaim

Reprenons la définition du comportement que nous avons construite au Chapitre 5 pour la description en motifs et au Chapitre 6 pour la détermination des motifs majeurs qui ne sont pas directement liés à la taille de la grille cellulaire. Le comportement du modèle peut donc être divisé en quatre “régions” correspondant à trois types d'organisation de particules – motif en bande diagonale, motif en nuages et motif en damier – que nous identifions par les quatre points paramétriques  $\{P2, P3, P4\}$ .

En considérant deux perturbations du mode de mise à jour, l'asynchronisme de l'interaction et l'asynchronisme de la propagation, nous allons, pour chacun de ces points, observer l'évolution du comportement pour différentes valeurs des taux d'asynchronisme  $\alpha_I$  et  $\alpha_P$  et le comparer dans chaque cas au comportement synchrone.

### 7.2.1 Robustesse à l'asynchronisme de l'interaction

#### Observation des changements du comportement

Commençons par considérer des valeurs fixes pour  $\alpha_I \in \{0.1; 0.5; 0.9; 0.99; 1\}$  et étudions visuellement les configurations obtenues pour chacun des points paramétriques considérés. Les résultats sont compilés dans la Figure 7.4(a).

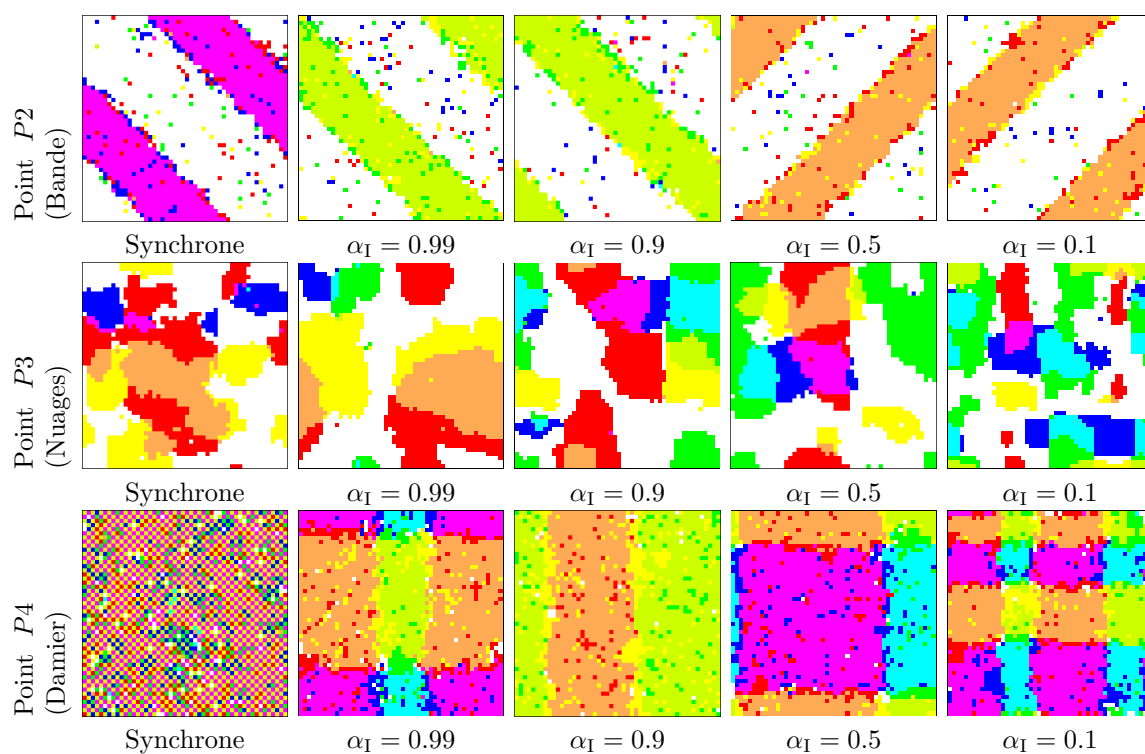
- Pour le point  $P2$  correspondant au **motif en bande diagonale**, le comportement après un long temps de simulation apparaît strictement identique au cas synchrone, et ce quelle que soit la valeur du taux d'asynchronisme  $\alpha_I$  considéré (sauf évidemment  $\alpha_I = 0$ ). En revanche, une visualisation du phénomène plongée dans le temps nous apprendra que si la forme stable du comportement est la même, les temps de simulation nécessaires pour arriver à ce motif augmentent au fur et à mesure que le taux de synchronisme  $\alpha_I$  diminue.
- Pour le point  $P3$  correspondant au **motif en nuages**, le comportement après un long temps de simulation correspond également à la définition *stricto sensu* du motif en nuages, bien que la taille des groupes observés change sensiblement avec le taux de synchronisme. En effet, il semble que le nombre des nuages augmente tandis que leur taille diminue quand le taux de synchronisme  $\alpha_I$  diminue.
- Enfin, le point  $P4$  qui correspond au **motif en damier** présente un changement radical de comportement pour une très petite quantité d'asynchronisme ( $\alpha_I \approx 0.99$ ). En effet le comportement passe d'une configuration anti-alignée à une configuration intégralement alignée, et non encore observée : le motif en tartan. L'apparence de ce motif ne semble néanmoins pas varier de manière significative pour les différents taux de synchronisme  $\alpha_I$  considérés.

Cette première approche expérimentale des comportements nous indique des différences fortes dans la robustesse de chacun des motifs : la bande diagonale est invariante, le motif en nuages semble évoluer de manière continue en formant des groupes plus nombreux et plus petits au fur et à mesure que  $\alpha_I$  diminue, alors que le motif en damier change qualitativement pour un taux d'asynchronisme très proche de 1.

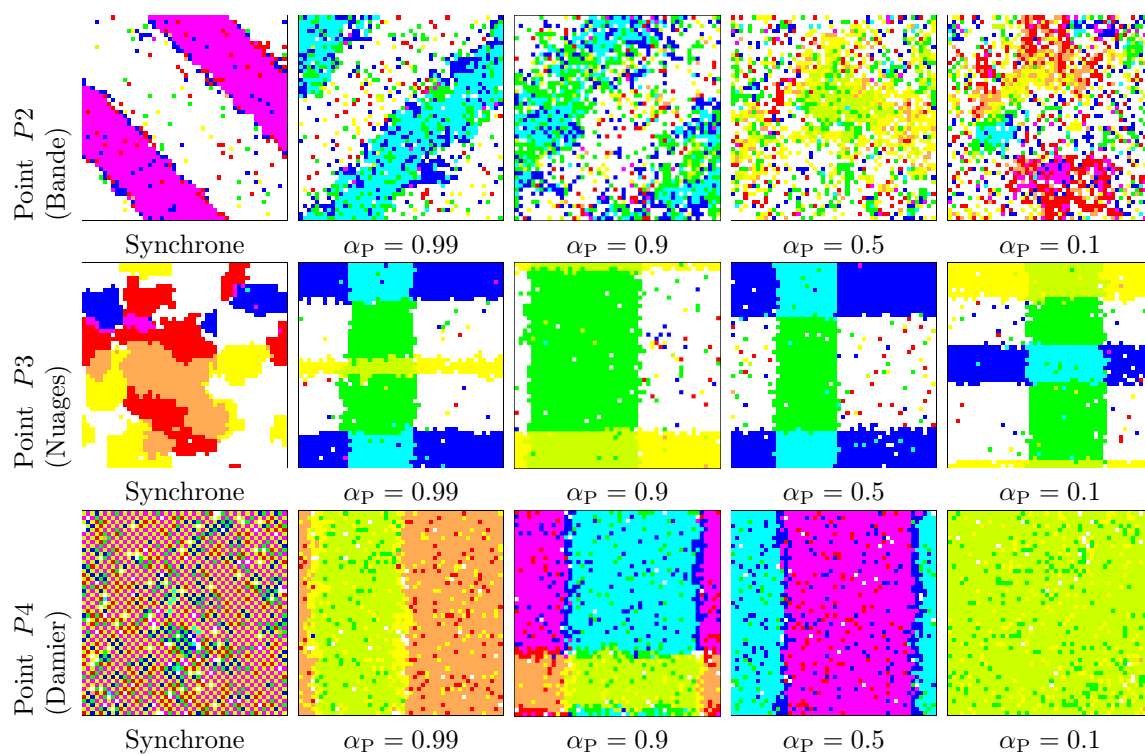
#### Approche microscopique

Dans le cas de l'asynchronisme de l'interaction, on peut utiliser une approche microscopique pour expliquer les différences de robustesse observées entre les motifs alignés (par ex. la bande diagonale) et les motifs anti-alignés, ici le damier. Nous allons procéder de la manière suivante : à partir de configurations typiques des motifs considérés, nous allons montrer que la stabilité du motif change avec le taux de synchronisme. Les arguments présentés ici ne seront donc pour l'instant que qualitatifs. Pour une approche quantitative de la stabilité des motifs, voir le paragraphe 7.2.3.

Commençons par considérer le cas d'une configuration en bande diagonale (cf. Figure 7.5(a)), où la cellule contient deux particules alignées avec les flux des cellules voisines. Dans cette situation, on constate que l'ajout d'un asynchronisme de l'interaction modifie les probabilités associées à chaque valeur possible issue de la fonction d'interaction, en multipliant par  $\alpha_I$  les probabilités des configurations, et ajoutant une probabilité  $\bar{\alpha}_I = 1 - \alpha_I$  à la configuration associée à l'identité, c'est-à-dire telle que  $x^I(c)$  soit égale à  $x(c)$  (il s'agit de la colonne colorée). Or on remarque que cette configuration est déjà la plus probable

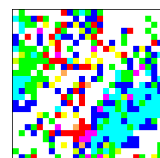


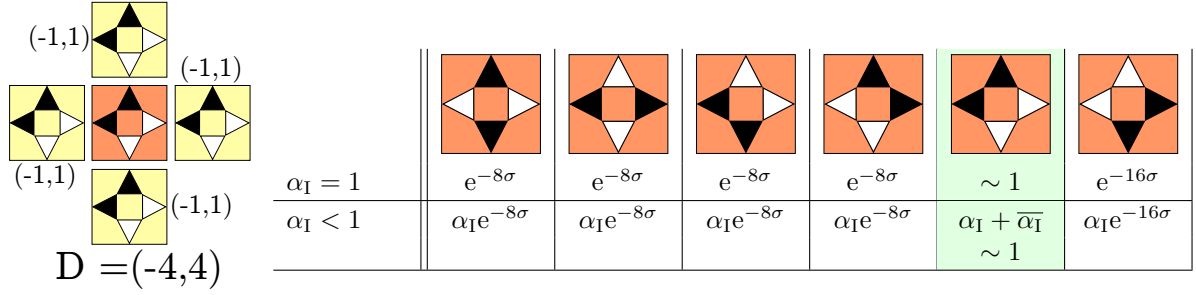
(a) Asynchronisme de l'interaction



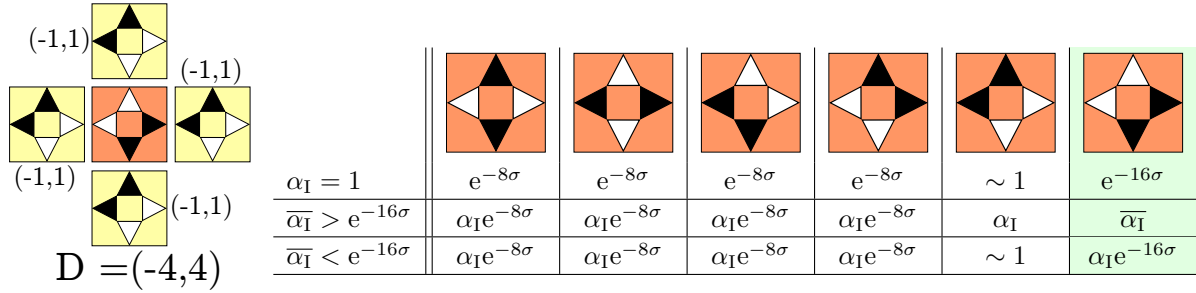
(b) Asynchronisme de la propagation

FIGURE 7.4 – Évolution des motifs majeurs pour différentes valeurs du taux d'asynchronisme de l'interaction  $\alpha_I$  (a) et de la propagation  $\alpha_P$  (b). Les visualisations sont typiquement obtenues après 5000 itérations à partir d'une configuration initiale aléatoire.





(a) Asynchronisme de l'interaction pour le motif en bande diagonale



(b) Asynchronisme de l'interaction pour le motif en damier

FIGURE 7.5 – Approche microscopique pour l'étape d'interaction asynchrone, appliqué à la formation d'essaim dans le cas de (a) la bande diagonale et (b) le motif en damier. À droite : table des probabilités des différentes possibilités dans les cas synchrones ( $\alpha_I = 1$ ) et asynchrone ( $\alpha_I < 1$ ). La colonne colorée correspond à la configuration correspondant à la non-application de l'interaction.

pour  $\alpha_I = 1$ , ce qui a pour effet de conforter cette situation dans le cas  $\alpha_I < 1$ . Il est donc raisonnable de supposer que l'asynchronisme de l'interaction n'a pas d'incidence particulière sur la stabilité de ce motif.

Considérons maintenant le cas du motif en damier (cf. Figure 7.5(b)), où la cellule considérée contient typiquement deux particules opposées au champ directeur formé par les cellules voisines, et appliquons la même méthode que précédemment. L'ajout d'un asynchronisme de l'interaction multiplie par  $\alpha_I$  les probabilités et ajoute  $\bar{\alpha}_I = 1 - \alpha_I$  à la configuration identité  $x^I(c) = x(c)$  (colonne colorée). On remarque alors que la distribution des configurations change énormément quand une petite quantité d'asynchronisme est ajoutée : si l'on considère la configuration correspondant à l'identité, on s'aperçoit que pour  $\alpha_I = 1$ , cette configuration est associée à la plus faible probabilité, de l'ordre de  $e^{-16\sigma}$ , alors qu'elle est de l'ordre de  $\bar{\pi} = 1 - \pi$  quand  $\pi \gg e^{-16\sigma}$ . Par conséquent, pour des valeurs du taux de synchronisme proches de 1, la distribution des probabilités change et le comportement change subitement d'un motif en damier à un motif en tartan.

## 7.2.2 Robustesse à l'asynchronisme de la propagation

### Observations des changements du comportement

Comme pour l'asynchronisme de l'interaction, nous considérons des valeurs fixes pour le taux de synchronisme  $\alpha_P \in \{0.1; 0.5; 0.9; 0.99; 1\}$  et étudions visuellement les configurations obtenues pour chacun des points paramétriques considérés. Les résultats sont reportés dans la Figure 7.4(b).

- Pour le point  $P2$  correspondant au **motif en bande diagonale**, le comportement est reproduit pour des valeurs de  $\alpha_P$  proches de 1, bien que le motif apparaisse fortement bruité. L'alignement et la forme de la bande sont en effet conservés jusqu'à  $\alpha_P \approx 0.9$ , puis le comportement change pour s'organiser dans des configurations instables, sans forme particulière, mais où une sorte de consensus global sur les directions des particules apparaît régulièrement. Cette observation nous invite à penser

que l'asynchronisme de la propagation ne remet pas en cause les phénomènes d'organisation observés dans le cas synchrone, mais qu'il perturbe grandement la régularité du motif de bande diagonale.

- Pour le point  $P3$  correspondant au **motif en nuages**, le comportement converge rapidement vers un motif en tartan, où les particules forment des bandes alignées bouclant sur les bords de la grille cellulaire. Bien que ces motifs ne soient pas énormément éloignés par rapport à leurs définitions, il s'agit d'une différence notable qui suggère des changements qualitatifs du comportement.
- Enfin, pour le point  $P4$  correspondant au **motif en damier**, le comportement change rapidement pour adopter une forme de motif en tartan. Il est à noter que c'est le seul comportement qui réagit de manière similaire dans les deux cas d'asynchronisme.

Là encore, différents niveaux de robustesse apparaissent pour les motifs majeurs : la bande diagonale semble montrer un certain niveau de robustesse, alors que le motif en nuage et le motif en damier semblent converger systématiquement vers un motif en tartan.

### 7.2.3 Quantification expérimentale des transitions

On essaye maintenant d'estimer quantitativement les changements observés pour chacun des motifs considérés, en soulignant la question de la robustesse du modèle : les motifs dépendent-ils d'une mise à jour parfaitement synchrone, ou sont-ils robustes à de petites variations des perturbations ?

Nous allons donc chercher à quantifier expérimentalement les changements de comportement en mesurant la valeur du paramètre d'ordre, ici l'alignement moyen, pour différentes valeurs des taux de synchronisme  $\alpha_I$  et  $\alpha_P$ . Étant donné que nos observations ont tendance à montrer des changements de comportement drastiques proche du synchronisme parfait, nous allons considérer pour les taux de synchronisme l'intervalle  $[0.95; 1]$ . Les résultats obtenus sont reportés dans la Figure 7.6.

#### Transition de l'asynchronisme de l'interaction

Dans la Figure 7.6(a), nous observons qualitativement l'alignement moyen des configurations pour chacun des motifs considérés et pour différentes valeurs du taux d'asynchronisme, toujours représentés par les points paramétriques  $P2$ ,  $P3$  et  $P4$  correspondants, et tentons de retrouver les observations établies dans les paragraphes précédents.

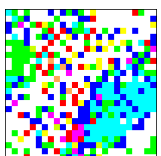
Premièrement, les alignements moyens des motifs en bande diagonale et en nuages apparaissent inchangés quel que soit le taux de synchronisme  $\alpha_I$  considéré. Cette première constatation confirme les observations réalisées auparavant : la bande diagonale reste invariante par l'asynchronisme de l'interaction, et le motif en nuages reste stable, tout en exhibant des effets sensibles sur la taille des groupes de particules.

Concernant le motif en damier, on observe la transition entre des valeurs négatives de l'alignement moyen correspondant au cas synchrone vers des valeurs positives, correspondant au motif en tartan observé plus tôt. Il est cependant intéressant de noter que l'on parvient à observer un motif en damier pour des valeurs du taux de synchronisme autour de  $\alpha_I$  entre 0.98 et 0.99. Cette observation confirme les résultats de l'approche microscopique, qui prévoyait une certaine robustesse pour des taux de synchronisme proches de 1. La transition elle-même entre le motif en damier et le motif en tartan semble se situer autour de  $\alpha_I = 0.995$ .

#### Transition de l'asynchronisme de la propagation

Dans la Figure 7.6(b), nous observons l'alignement moyen des configurations pour chacun des motifs considérés et pour différentes valeurs du taux d'asynchronisme.

On remarque d'emblée que la courbe correspondant à la bande diagonale ne présente plus la même robustesse que dans le cas de l'asynchronisme de l'interaction : en effet, l'alignement moyen diminue presque linéairement pour se stabiliser autour de  $\bar{\gamma} = 0.5$  pour un taux de synchronisme égale à  $\alpha_P = 0.95$ . Cette courbe confirme donc bien le sentiment que si la régularité du motif est perturbée par l'introduction d'un asynchronisme de la propagation, on observe toujours quantitativement un alignement moyen positif, ce qui suggère que le comportement n'est pas complètement désorganisé. En particulier, cela voudrait



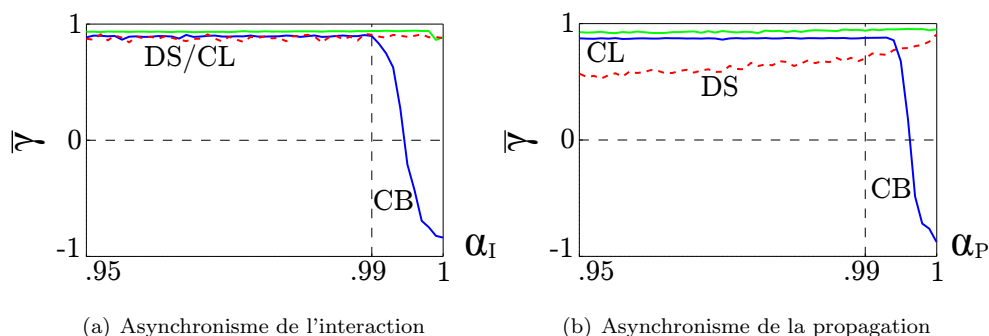


FIGURE 7.6 – L'alignement moyen  $\bar{\gamma}$  en fonction du taux de synchronisme pour l'asynchronisme de l'interaction (a) et de la propagation (b), pour chacun des motifs majeurs : bande diagonale (B), nuages (N) et damier (D).

dire que l'asynchronisme de la propagation s'oppose à la stabilité du motif lui-même, mais ne remet pas en cause le phénomène de formation d'essaim observé.

Le motif en nuages quant à lui ne montre aucune différence quantitative sur l'alignement moyen par différents taux de synchronisme. Cette observation peut s'expliquer par le fait que le motif en nuages et le motif en tartan présentent tous les deux un fort alignement moyen, et sont donc quasiment indistinguables par la seule étude du paramètre d'ordre.

Enfin, le motif en damier suggère une transition drastique du comportement, pour des taux de synchronismes très proches de 1. Là encore, nous sommes amenés à nous demander si le motif en damier n'est observé que dans le cas synchrone, où s'il est possible de l'observer pour certaines valeurs du taux de synchronisme  $\alpha_P$ . Or l'observation de l'évolution de l'alignement moyen dans la Figure 7.6(b) montre que le paramètre d'ordre converge vers des valeurs négatives de l'alignement moyen jusqu'à des valeurs de l'ordre de  $\alpha_P = 0.998$ . Bien que brusque, cette transition semble donc suggérer que le motif en damier est robuste dans une certaine mesure à l'asynchronisme de la propagation.

### 7.3 Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons commencé par remettre en cause le mode de mise à jour du modèle de formation d'essaim. En particulier, nous avons vu, comme au Chapitre 2, que des hypothèses de modélisation particulières peuvent influencer la définition des perturbations considérées. Dans notre cas, nous avons vu que pour conserver le nombre de particules du système, il nous a fallu construire une perturbation appropriée qui prenne en compte ces hypothèses.

Dans un second temps, nous avons appliqué nos différents asynchronismes aux simulations du modèle de formation d'essaim et avons noté divers types de robustesse des motifs considérés. En particulier, nous avons vu que :

- le motif en bande diagonale est invariant par rapport à l'asynchronisme de l'interaction, et voit sa régularité perturbée dans le cas de l'asynchronisme de la propagation ;
- le motif en nuages est influencé par l'asynchronisme de l'interaction dans la taille des groupes de particules, alors que l'asynchronisme de la propagation semble faire apparaître systématiquement un motif en tartan ;
- enfin, le motif en damier présente une certaine robustesse aux deux asynchronismes, en préservant des configurations anti-alignées pour certaines valeurs du taux d'asynchronisme proches mais distinctes de 1, et convergent rapidement vers un motif en tartan pour des valeurs inférieures.

Ces observations suggèrent donc que les motifs majeurs observés sont tous robustes à divers degrés à la perturbation de l'hypothèses de mise à jour parfaitement synchrone. Ce constat se trouve renforcé par l'idée que les motifs émergent d'un modèle stochastique, leur stabilité n'est pas remise en cause par l'ajout d'un bruit supplémentaire infinitésimal, même dirigé vers un attribut particulier du modèle.

# Conclusion de la Partie II

Dans cette seconde partie, nous avons considéré un modèle particulier d'automate cellulaire, le modèle de formation d'essaim en gaz sur réseau, et avons cherché à en explorer la robustesse en perturbant la forme de la grille cellulaire et le mode de mise à jour.

Nous avons commencé par décrire le comportement du modèle de formation d'essaim dans sa richesse et sa complexité. En particulier, nous avons rappelé que ce modèle, contrôlé par seulement deux paramètres, la densité de particules  $\rho$  et la sensibilité à l'alignement  $\sigma$ , exhibe une transition entre une phase désorganisée et chaotique, et une phase organisée. De plus, nous avons montré que ce modèle obéit à une évolution récurrente, ce qui signifie que toutes les configurations atteignables seront visitées un nombre infini de fois pour des temps asymptotiques. En revanche, il était possible de caractériser la phase organisée en un ensemble d'attracteurs appelés motifs macroscopiques, qu'il est possible de décrire à partir de critères quantitatifs et visuels. Nous avons alors utilisé cette description du comportement pour y appliquer des perturbations, en étudiant la robustesse de chaque motif.

Dans un premier temps, nous avons testé la robustesse de chaque motif à différentes définitions de la grille cellulaire. Nous nous sommes alors aperçu que les motifs se divisent en deux catégories : les motifs mineurs, qui dépendent d'attributs particuliers de la grille, comme la parité de la grille ou une taille spécifique, et les motifs majeurs, qui semblent apparaître pour tous types de grilles. Par ailleurs, nous avons mis en évidence des effets de résonance pour l'un des motifs (la bande diagonale) en montrant que la stabilité du motif changeait lorsqu'une grille rectangulaire est considérée.

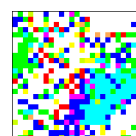
Dans un second temps, nous avons voulu remettre en question le synchronisme parfait des mises à jour, que ce soit dans l'étape d'interaction ou de propagation. Comme dans le Chapitre 2, les hypothèses du modèle nous ont amenés à considérer des perturbations adaptées, qui conservent le nombre de particules au cours du temps. Nous avons ensuite appliqué ces perturbations à nos motifs majeurs et avons montré que ceux-ci présentaient divers degrés de robustesse à l'asynchronisme.

À l'issue de cette étude de la robustesse du modèle de formation d'essaim, nous sommes en mesure de déterminer quels motifs dépendent de la définition non-perturbée du modèle, et lesquels sont *a priori* indépendants et résultent donc des interactions entre cellules. En particulier, nous prenons note que :

- les motifs mineurs sont non-robustes à des perturbations de la taille de la grille cellulaire, et dépendent donc de sa définition ;
- le motif en damier est très peu robuste à des perturbations de la mise à jour, ce qui laisse supposer qu'il s'agit d'un artefact de simulation lié à une mise à jour parfaitement synchrone.

Les motifs restants (bande diagonale et nuages) ne sont pourtant pas complètement insensibles à ces perturbations. En effet, nous avons observé par exemple que l'asynchronisme de la propagation perturbe de manière continue la régularité de la bande diagonale et que le motif en nuages se transforme en motif en tartan. Par ailleurs, nous avons montré que le motif en bande diagonale est vraisemblablement dépendant de la périodicité des bords et d'une simulation en grille finie. Ces résultats nous invitent donc à penser qu'il est nécessaire de poursuivre l'exploration de la robustesse du modèle, en considérant de nouvelles perturbations, voire des "croisements" de perturbations connues.

Cette première étude de la robustesse du modèle suggère donc que les motifs observés sont le plus souvent des expressions d'un comportement général dans un contexte particulier de temps et d'espace fini.



Ce constat nous amène à nous demander comment caractériser le comportement du modèle, y compris pour une grille infinie ou des temps asymptotiques. Dans cette optique, notre proposition de considérer un passage à la limite simultanément pour le temps et l'espace dans les simulations nous semble constituer une piste intéressante à développer dans des travaux futurs. En particulier, nous espérons être en mesure "d'approximer" le comportement infini et ainsi d'être en mesure d'étudier quantitativement les comportements sans effets indésirables liés à la taille ou la forme de la grille cellulaire. Cette approche n'est cependant pas sans limites car elle suppose l'étude de système de grande taille, qui représente un coût significatif en temps de calcul. Une piste consisterait à poursuivre la simplification du modèle, par exemple en cherchant à déterminer si la résolution des générateurs aléatoires a une influence sur les observations.

# Conclusion générale

Avant de clore cette étude, il convient de dresser un bilan des travaux de recherche réalisés au cours de doctorat. Nous allons donc en rappeler les principales contributions et former plusieurs perspectives qui nous semblent intéressantes.

## Conclusion

Dans cette thèse, nous avons cherché à étudier la possibilité de modéliser des systèmes complexes avec des modèles simples de type automates cellulaires, et en particulier nous nous sommes demandés si la simplification des modèles peut induire des propriétés inédites. Nous avons ainsi été amenés à considérer la robustesse du comportement de ces modèles par rapport à différentes perturbations afin de mettre en évidence les éventuels liens qui existent entre les propriétés dynamiques du modèle et sa définition. Notre étude s'est alors divisée en deux étapes :

- Dans une première partie, nous avons cherché à déterminer, à partir d'un ensemble de modèles simples présentant une grande variété de comportements, si de petites modifications dans la définition du modèle peuvent induire des changements importants du comportement.
- Dans une seconde partie, nous avons cherché à instancier la question directrice de cette thèse sur un exemple particulier : la formation d'essaim. Nous avons alors considéré un automate cellulaire modélisant ce phénomène et en avons étudié la robustesse du comportement afin de mettre en évidence l'influence de la définition du modèle sur sa dynamique.

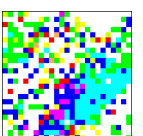
Durant notre étude, nous avons fait appel alternativement à des expérimentations destinées à approcher quantitativement le comportement et à des analyses microscopiques visant à confirmer nos observations en étudiant localement les propriétés dynamiques.

## Extension de l'espace des perturbations

Tout d'abord, notre travail dans sa globalité contribue à l'étude de la robustesse dans les automates cellulaires, en étendant le champ des perturbations considérées dans des directions jusqu'à maintenant inexplorées. En effet, d'une part, en considérant les échanges d'information entre cellules, nous avons construit un nouveau type d'asynchronisme qui, pour tout modèle d'automate cellulaire, permet d'étendre ce modèle et de représenter une perturbation des flux d'information. De la même manière, dans le cadre des gaz sur réseau, nous avons proposé des définitions de l'asynchronisme adaptées aux hypothèses spécifiques du modèle, comme une conservation locale des particules en mouvement.

Ces propositions partent donc d'un certain point de vue sur le système considéré et la manière de tester un modèle pour construire formellement de nouvelles perturbations, distinctes des approches trouvées dans la littérature. Cet argument soutient l'idée qu'il existe un large panel de perturbations possibles pour un modèle donné.

Dans ce travail, nous avons cherché à considérer deux "types" de modèles d'automates cellulaires sur lesquels étudier la robustesse des comportements.





### Application aux automates cellulaires élémentaires

En premier lieu, nous avons considéré les automates cellulaires élémentaires, parce qu'ils constituent un des exemples les plus simples de système dynamique discret. Cette étude nous a permis d'étudier les comportements de manière systématique pour différents types de perturbations et ainsi d'isoler les modèles qui présentent un comportement intéressant et quantifiable. En particulier, cela nous a permis de montrer que si dans l'ensemble les modèles réagissent de manière similaires à nos perturbations "proches", il était possible d'identifier des exemples précis de modèles qui présentent des différences qualitatives de comportement entre nos différentes perturbations :

- l'ACE 50 montre des différences de comportement microscopique entre l' $\alpha$ - et le  $\beta$ -synchronisme mais qui ne remettent pas en cause le comportement macroscopique,
- l'ACE 6 montre des différences entre l' $\alpha$ - et le  $\beta$ -synchronisme,
- l'ACE 58 montre des différences entre le  $\beta$ - et le  $\gamma$ -synchronisme.

Cette première étape a ainsi montré qu'à partir de modèles très simples, il était possible d'obtenir des comportements robustes, qui résistent à différentes perturbations, et des comportements non-robustes, qui apparaissent uniquement pour certaines perturbations. Cette observation confirme qu'il est difficile de savoir *a priori* si un certain type de modèle est robuste ou non.

### Application à un modèle "biologique" d'automate cellulaire

Nous avons ensuite cherché à étudier la robustesse d'un modèle particulier d'automate cellulaire, que nous avons choisi pour son inspiration biologique (la formation d'essaim), la représentation d'une quantité conservée (les particules) mais également une complexité supérieure aux ACE. Nous avons vu qu'en dépit d'une dynamique compliquée à décrire formellement, il est néanmoins possible d'identifier des motifs métastables qu'il est possible d'utiliser comme description du comportement afin d'en étudier la robustesse. Nous avons alors considéré deux perturbations du modèle de base, la forme de la grille cellulaire et le mode de mise à jour, et avons identifié des degrés différents de robustesse :

- des comportements très peu robustes – les motifs mineurs pour la parité de la grille, les petites tailles et asynchronisme pour le motif en damier ;
- des comportements robustes dans une certaine mesure – la bande diagonale en grille carrée, le motif en nuages pour l'asynchronisme ;
- des comportements insensibles aux perturbations – les nuages en grille infinie, la bande diagonale pour l'asynchronisme de l'interaction.

Cette application semble donc confirmer que même pour des modèles complexes d'automates cellulaires, d'inspiration biologique et représentant un certain "réalisme physique", la représentation simplifiée du modèle induit des influences sur la dynamique qui sont de nature à remettre en cause les observations expérimentales du comportement.

### Le simple est-il robuste ?

Que conclure par rapport à notre question initiale, à savoir de si une modélisation simple et discrète des systèmes complexes permettrait de conserver la robustesse de leurs comportements ? De manière générale, la littérature tend à montrer qu'un grand nombre de modèles de type automates cellulaires "perdent" leur robustesse, en induisant de nouveaux comportements plus liés à la simplification du modèle qu'à l'émergence des comportements individuels elle-même. Notre approche a alors consisté à considérer ces modèles d'automates cellulaires et à construire des perturbations qui prennent en compte des hypothèses précises de modélisation – dans un cas la transmission d'information et dans l'autre la conservation des particules. Ces études nous ont permis d'apporter des débuts de réponse.

Tout d'abord, les perturbations considérées nous ont appris que si la dynamique d'un modèle simple peut occasionnellement présenter des artefacts de comportements, l'étude de la robustesse permet en général de les révéler et ainsi de faire apparaître une observation du comportement qui est robuste à de petites variations sur la définition du modèle considéré.

En revanche, nos observations ne nous permettent pas de trancher définitivement sur la robustesse de ces comportements. En effet, si la robustesse peut identifier certains artefacts en "ciblant" les perturbations

(par exemple l'asynchronisme pour le motif en damier), elle ne permet pas de conclure sur les biais qui peuvent subsister dans nos simulations. En particulier, si l'étude du modèle de formation d'essaim tend à confirmer que les motifs en bande et en nuages sont robustes à la plupart des perturbations, leur lien à la grille finie périodique reste encore insuffisamment explorée.

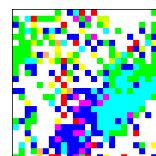
## Perspectives

Ce travail, qui constitue une poursuite des études sur la robustesse des comportements d'automates cellulaires, offre de nombreuses perspectives.

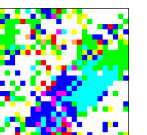
Une première piste réside dans l'espace des perturbations considérées. En effet, si l'on considère les différentes perturbations envisagées pour la mise à jour globale, on s'aperçoit que celles-ci sont généralement d'un niveau de difficulté comparable aux automates cellulaires eux-mêmes. Or, nous avons montré qu'il était possible de considérer des perturbations complexes, mais prenant en compte certaines hypothèses du modèle. Ce constat ouvre un grand nombre de possibilités pour perturber les modèles d'automates cellulaires : comment perturber un modèle donné ? Quelles perturbations possibles ? Voire : est-il possible de simplifier les perturbations ? Dans ce contexte, il serait donc intéressant pour des travaux futurs de chercher à réaliser une exploration voire un inventaire des différentes manières perturber les automates cellulaires, afin de permettre à l'avenir de mieux s'orienter dans le paysage de la robustesse.

Une seconde piste peut consister à se concentrer sur un modèle donné, voire sur une classe de modèle, et à explorer en profondeur la robustesse de sa dynamique grâce à un nombre important de perturbations. Une telle étude permettrait non seulement de connaître précisément les différents comportements du modèle ainsi que leur robustesse, mais aussi d'éclaircir les rôles et les effets potentiels de chaque perturbation considérée.

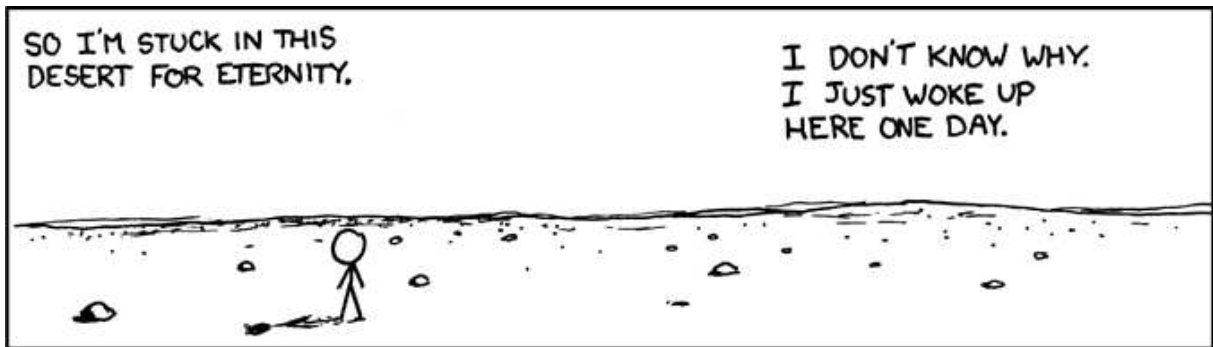
Enfin, il nous semble utile de généraliser l'étude de la robustesse dans tous les modèles de systèmes complexes étudiés, que ce soit en modélisation ou en calcul, afin de mieux connaître les fonctionnements internes et les conditions nécessaires des comportements étudiés, mais également de rechercher dans quelle mesure les observations résultent de la définition globale du modèle et non des interactions d'entités locales.







# Pour finir ...

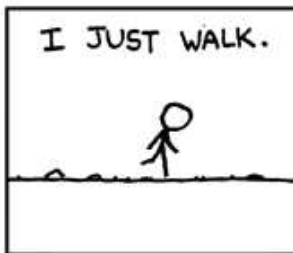


SO I'M STUCK IN THIS DESERT FOR ETERNITY.

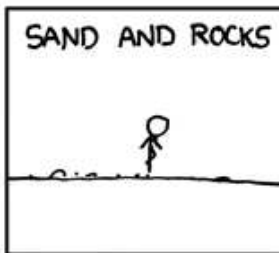
I DON'T KNOW WHY. I JUST WOKE UP HERE ONE DAY.



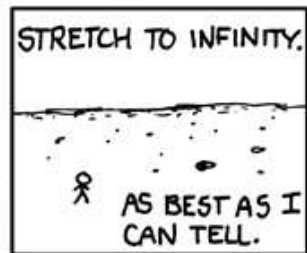
I NEVER FEEL HUNGRY OR THIRSTY.



I JUST WALK.

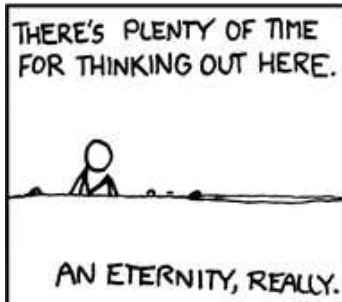


SAND AND ROCKS



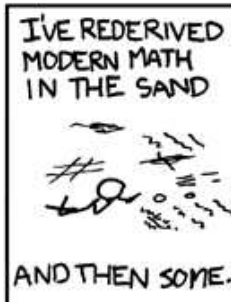
STRETCH TO INFINITY.

AS BEST AS I CAN TELL.



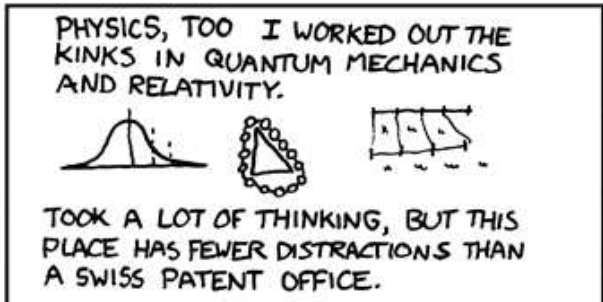
THERE'S PLENTY OF TIME FOR THINKING OUT HERE.

AN ETERNITY, REALLY.



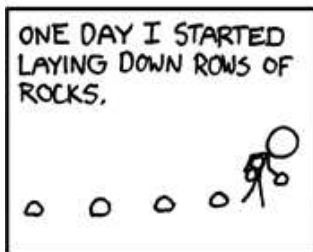
I'VE REDERIVED MODERN MATH IN THE SAND

AND THEN SOME.

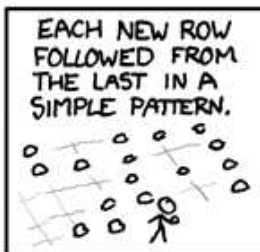


PHYSICS, TOO I WORKED OUT THE KINKS IN QUANTUM MECHANICS AND RELATIVITY.

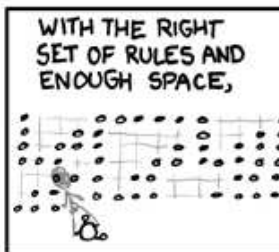
TOOK A LOT OF THINKING, BUT THIS PLACE HAS FEWER DISTRACTIONS THAN A SWISS PATENT OFFICE.



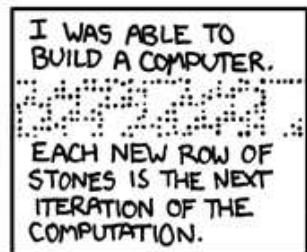
ONE DAY I STARTED LAYING DOWN ROWS OF ROCKS.



EACH NEW ROW FOLLOWED FROM THE LAST IN A SIMPLE PATTERN.

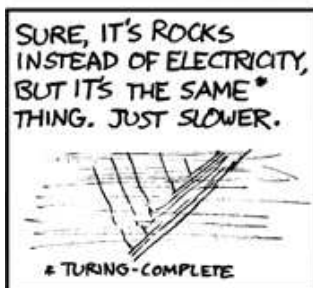


WITH THE RIGHT SET OF RULES AND ENOUGH SPACE,



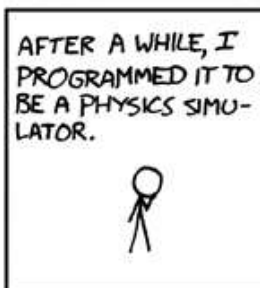
I WAS ABLE TO BUILD A COMPUTER.

EACH NEW ROW OF STONES IS THE NEXT ITERATION OF THE COMPUTATION.

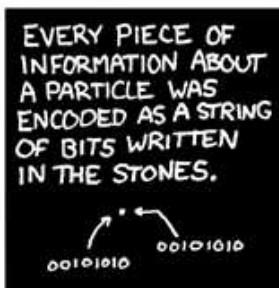


SURE, IT'S ROCKS INSTEAD OF ELECTRICITY, BUT IT'S THE SAME\* THING. JUST SLOWER.

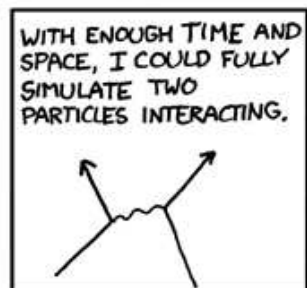
\* TURING-COMPLETE



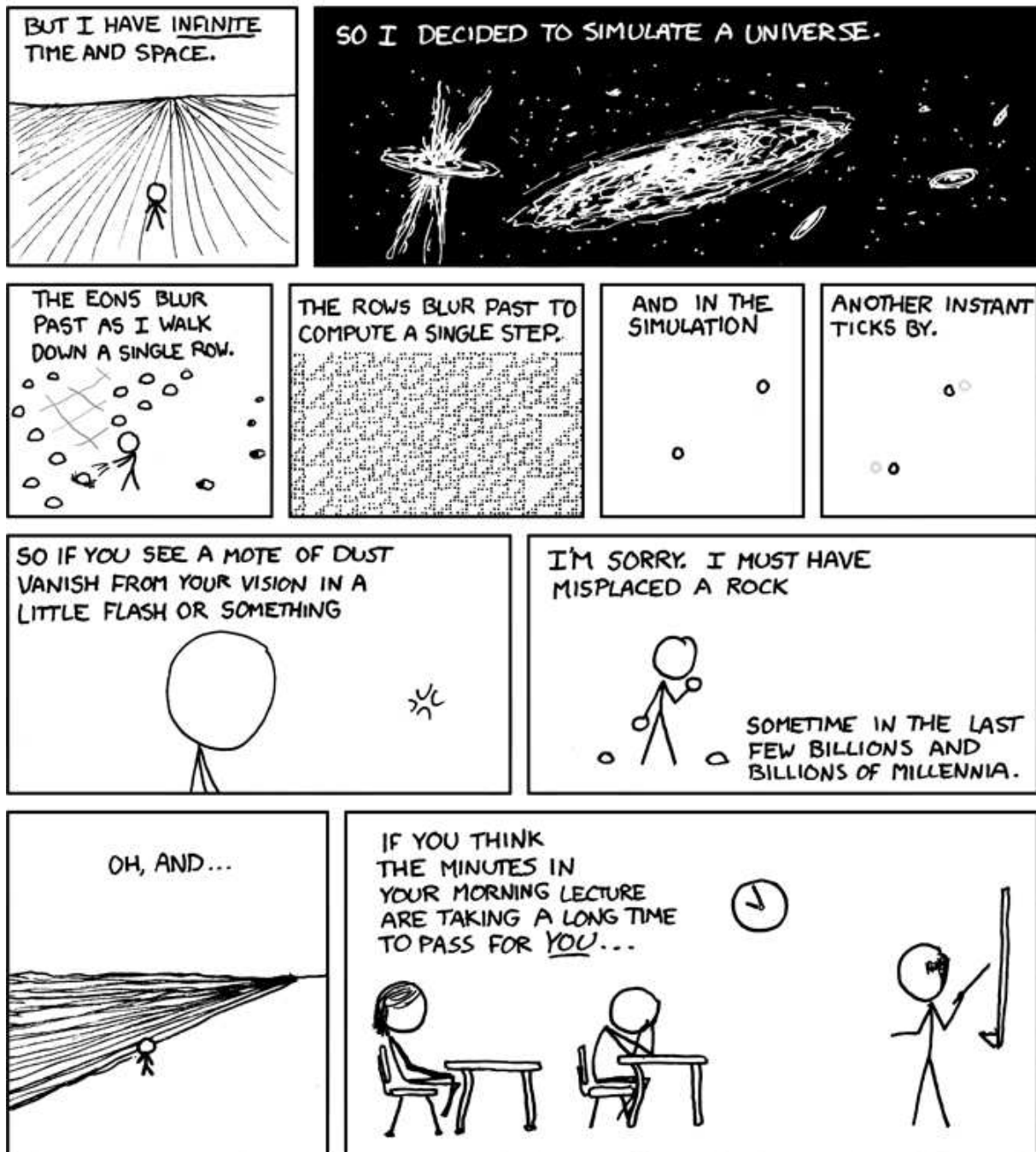
AFTER A WHILE, I PROGRAMMED IT TO BE A PHYSICS SIMULATOR.



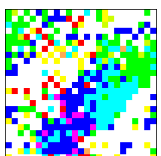
EVERY PIECE OF INFORMATION ABOUT A PARTICLE WAS ENCODED AS A STRING OF BITS WRITTEN IN THE STONES.



WITH ENOUGH TIME AND SPACE, I COULD FULLY SIMULATE TWO PARTICLES INTERACTING.



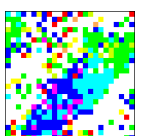
Comic reproduit avec l'aimable autorisation de XKCD et Randall Munroe (<http://xkcd.com/505/>)





# Bibliographie

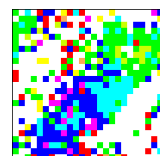
- [ACW12] David H. Ackley, Daniel C. Cannon, and Lance R. Williams. A movable architecture for robust spatial computing. *The Computer Journal*, 2012.
- [ASM04] Shoukat Ali, Howard Jay Siegel, and Anthony A. Maciejewski. The robustness of resource allocation in parallel and distributed computing systems. In *Proceedings of the Third International Symposium on Parallel and Distributed Computing/Third International Workshop on Algorithms, Models and Tools for Parallel Computing on Heterogeneous Networks*, ISPDC '04, pages 2–10, Washington, DC, USA, 2004. IEEE Computer Society.
- [BB99] Hendrik J. Blok and Birger Bergersen. Synchronous versus asynchronous updating in the "Game of Life". *Physical Review E*, 59(4) :3876–3879, Apr 1999.
- [BBV12] Stefania Bandini, Andrea Bonomi, and Giuseppe Vizzari. An analysis of different types and effects of asynchronicity in cellular automata update schemes. *Natural Computing*, pages 1–11, 2012.
- [BCG82] Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, and Richard K. Guy. *Winning ways for your mathematical plays*, volume 2. New York : Academic Press, 1982.
- [BD94] Hugues Bersini and Vincent Detours. Asynchrony induces stability in cellular automata based models. *4th International Workshop on the Synthesis and Simulation of Living Systems ArtificialLifeIV*, 4 :382–387, 1994.
- [BDG97] Harmen J. Bussemaker, Andreas Deutsch, and Edith Geigant. Mean-field analysis of a dynamical phase transition in a cellular automaton model for collective motion. *Physical Review Letters*, 78(26) :5018–5021, Jun 1997.
- [BF11] Hugues Berry and Nazim Fatès. Robustness of the critical behaviour in the stochastic Greenberg-Hastings cellular automaton model. *International Journal of Unconventional Computing*, 7(1-2) :65–85, 2011.
- [BF12] Selma Belgacem and Nazim Fatès. Robustness of multi-agent models : the example of collaboration between turmites with synchronous and asynchronous updating. *Complex Systems*, 21(3) :165–182, 2012.
- [BFC11a] Olivier Bouré, Nazim Fatès, and Vincent Chevrier. Observation of novel patterns in a stressed lattice-gas model of swarming. Technical report, LORIA, 2011.
- [BFC11b] Olivier Bouré, Nazim Fatès, and Vincent Chevrier. Robustness of Cellular Automata in the Light of Asynchronous Information Transmission. In *Unconventional Computation*, volume 6714 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 52–63, 2011.
- [BFC12a] Olivier Bouré, Nazim Fatès, and Vincent Chevrier. First steps on asynchronous lattice-gas models with an application to a swarming rule. In G. Sirakoulis and S. Bandini, editors, *Cellular Automata*, volume 7495 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 633–642. Springer, 2012.





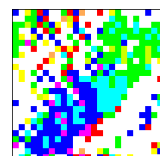
- [BFC12b] Olivier Bouré, Nazim Fatès, and Vincent Chevrier. Probing robustness of cellular automata through variations of asynchronous updating. *Natural Computing*, 11(4) :553–564, 2012.
- [BFC13a] Olivier Bouré, Nazim Fatès, and Vincent Chevrier. First steps on asynchronous lattice-gas models with an application to a swarming rule. *Natural Computing*, (to appear), 2013.
- [BFC13b] Olivier Bouré, Nazim Fatès, and Vincent Chevrier. A robustness approach to study metastable behaviours in a lattice-gas model of swarming. Technical report, LORIA – Inria Nancy Grand-Est – Université de Lorraine, 2013.
- [BFMM12] Ana Bušić, Nazim Fatès, Jean Mairesse, and Irène Marcovici. Density classification on infinite lattices and trees. In *LATIN 2012 : Theoretical Informatics*, volume 7256 of *Lecture Notes in Computer Science*, 2012.
- [BKM97] François Blanchard, Petr Kůrka, and Alejandra Maass. Topological and measure-theoretic properties of one-dimensional cellular automata. *Physica D*, 103(1-4) :86–99, 1997.
- [Bro07] Nicolas Brodu. *Practical investigations of complex systems*. Thèse de doctorat, Concordia University, 2007.
- [CD98] Bastien Chopard and Michel Droz. *Cellular automata modeling of physical systems*. Cambridge University Press, 1998.
- [CDW03] Andras Czirók, Andreas Deutsch, and Michael Wurzel. Individual-based models of cell flocking. In *Polymer and cell dynamics : multiscale modeling and numerical simulations*, 2003.
- [CNS08] Emilio Cirillo, Francesca Nardi, and Cristian Spitoni. Metastability for reversible probabilistic cellular automata with self-interaction. *Journal of Statistical Physics*, 132 :431–471, 2008.
- [Coo04] Matthew Cook. Universality in elementary cellular automata. *Complex Systems*, 15(1) :1–40, 2004.
- [CV95] Zoltan Csahók and Tamás Vicsek. lattice-gas model for collective biological motion. *Physical Review*, 52(5) :5297, 1995.
- [DD05] Andreas Deutsch and Sabine Dormann. *Cellular Automaton Modeling of Biological Pattern Formation*. Birkhauser Boston, 2005.
- [Deu96] Andreas Deutsch. Orientation-induced pattern formation : Swarm dynamics in a lattice-gas automaton model. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 06(09) :1735–1752, 1996.
- [dFHD11] Sandro de Franciscis, Haralambos Hatzikirou, and Andreas Deutsch. Analysis of lattice-gas cellular automaton models for tumor growth by means of fractal scaling. *Acta Physica Polonica B*, 4(2) :167, 2011.
- [DFMM12] Alberto Dennunzio, Enrico Formenti, Luca Manzoni, and Giancarlo Mauri.  $m$ -asynchronous cellular automata. In G. Sirakoulis and S. Bandini, editors, *Cellular Automata*, volume 7495 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 653–662. Springer, 2012.
- [DGM09] Alberto Dennunzio, Pierre Guillon, and Benoît Masson. Sand automata as cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 410(38-40) :3962 – 3974, 2009.
- [Fat04] Nazim Fatès. Robustesse de la dynamique des systèmes discrets : le cas de l’asynchronisme dans les automates cellulaires. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Lyon, 2004.
- [Fat06] Nazim Fatès. Directed percolation phenomena in asynchronous elementary cellular automata. In Samira El Yacoubi, Bastien Chopard, and Stephania Bandini, editors, *Proceedings of the 7th International Conference on Cellular Automata for Research and Industry*, volume 4173 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 667–675. Springer, 2006.

- [Fat09] Nazim Fatès. Asynchronism induces second order phase transitions in elementary cellular automata. *Journal of Cellular Automata*, 4(1) :21–38, 2009.
- [Fat10] Nazim Fatès. Solving the decentralised gathering problem with a reaction-diffusion-chemotaxis scheme - social amoebae as a source of inspiration. *Swarm Intelligence*, 4(2) :91–115, 2010.
- [Fat11] Nazim Fates. Stochastic Cellular Automata Solve the Density Classification Problem with an Arbitrary Precision. In Thomas Schwentick and Christoph Dürr, editors, *28th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2011)*, volume 9 of *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, pages 284–295, Dagstuhl, Germany, 2011. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik.
- [Fat12] Nazim Fatès. A note on the Density Classification Problem in two dimensions. In *Automata 2012 : 18th international workshop on Cellular Automata and Discrete Complex Systems*, 2012.
- [FC10] Nazim Fatès and Vincent Chevrier. How important are updating schemes in multi-agent systems? an illustration on a multi-turmite model. In *9th Int. Conf. on Autonomous Agents and Multiagent Systems - AAMAS 2010 Autonomous Agents and Multiagent Systems - AAMAS 2010*, volume 1, pages 533–540, 2010.
- [FCdS08] P. H. Figueiredo, S. Coutinho, and R.M. Zorzenon dos Santos. Robustness of a cellular automata model for the HIV infection. *Physica A*, 387 :6545–6552, 2008.
- [Fer95] Jacques Ferber. *Les Systèmes Multi-Agents, Vers une intelligence collective*. InterEditions, 1995.
- [FM96] Jacques Ferber and Jean-Pierre Müller. Influences and reaction : a model of situated multiagent systems. In *ICMAS96 - 2nd International Conference on Multiagent Systems*, pages 72–79, 1996.
- [FM04] Nazim Fatès and Michel Morvan. Perturbing the topology of the Game of Life increases its robustness to asynchrony. In *Proceedings of the 6th International Conference on Cellular Automata for Research and Industry*, volume 3305 of *LNCS*, pages 111–120. Springer, 2004.
- [FM05] Nazim Fatès and Michel Morvan. An experimental study of robustness to asynchronism for elementary cellular automata. *Complex Systems*, 16 :1–27, 2005.
- [Fro04] Jochen Fromm. *The Emergence of Complexity*. Kassel University Press, 2004.
- [FRST06] Nazim Fatès, Damien Regnault, Nicolas Schabanel, and Eric Thierry. Asynchronous behavior of double-quiescent elementary cellular automata. In José R. Correa, Alejandro Hevia, and Marcos A. Kiwi, editors, *Proceedings of LATIN 2006*, volume 3887 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 455–466. Springer, 2006.
- [FS88] Alan M. Ferrenberg and Robert H. Swendsen. New Monte Carlo technique for studying phase transitions. *Physical Review Letters*, 61 :2635–2638, Dec 1988.
- [Gar70] Martin Gardner. Mathematical games : the fantastic combinations of John Conway’s new solitaire game “Life”. *Scientific American*, 223 :120–123, 1970.
- [Gác97] Peter Gács. Reliable cellular automata with self-organization. *Journal of Statistical Physics*, 103 :90–99, 1997.
- [GG07] Janko Gravner and David Griffeath. Modeling snow crystal growth ii : A mesoscopic lattice map with plausible dynamics, 2007.

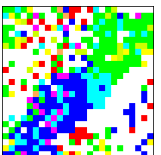


- [GMG05] Abdelkader Gouaïch, Fabien Michel, and Yves Guiraud. MIC\* : a deployment environment for autonomous agents. In *Post-Proceedings of the 1st International Workshop in Environments for Multiagent Systems*, pages 109–126. Springer-Verlag, 2005.
- [HG93] Bernardo A. Huberman and Natalie S. Glance. Evolutionary games and computer simulations. *Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America*, 90(16) :7716–7718, 1993.
- [Hin00] Haye Hinrichsen. Nonequilibrium critical phenomena and phase transitions into absorbing states. *Advances in Physics*, 49 :815–958, 2000.
- [Hub96] P.J. Huber. *Robust statistical procedures*. Number 68. Society for Industrial Mathematics, 1996.
- [IB84] Thomas E. Ingerson and Raymond L. Buvel. Structure in asynchronous cellular automata. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 10(1-2) :59 – 68, 1984.
- [Kar05] Jarkko Kari. Theory of cellular automata : A survey. *Theoretical Computer Science*, 334(1-3) :3 – 33, 2005.
- [Kin83] W. Kinzel. *Directed Percolation in Percolation Structures and processes*, volume 5, chapter 18. 1983.
- [Kit04] Hiroaki Kitano. Biological robustness. *Nature Reviews Genetics*, 5 :826–837, 2004.
- [KTJ<sup>+</sup>11] Anaïs Khuong, Guy Theraulaz, C. Jost, Andrea Perna, and Jacques Gautrais. A computational model of ant nest morphogenesis. In T. Lenaerts, M. Giacobini, H. Bersini, P. Bourguine, M. Dorigo, and R. Doursat, editors, *Proceedings of the Eleventh European Conference on the Synthesis and Simulation of Living Systems*, Advances in Artificial Life, ECAL2011, pages 404–411, 2011.
- [Lan86] Christopher G. Langton. Studying artificial life with cellular automata. *Physica D*, 22 :120–149, 1986.
- [LAP07] Jia Lee, Susumu Adachi, and Ferdinand Peper. Reliable self-replicating machines in asynchronous cellular automata. *Artificial Life*, 13(4) :397–413, 2007.
- [LAPM04] Jia Lee, Susumu Adachi, Ferdinand Peper, and Kenichi Morita. Asynchronous game of life. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 194(3-4) :369 – 384, 2004.
- [Les08] Annick Lesne. Robustness : confronting lessons from physics and biology. *Biological Reviews*, 83(4) :509–532, 2008.
- [LGCT12] Ugo Lopez, Jacques Gautrais, Iain D. Couzin, and Guy Theraulaz. From behavioural analyses to models of collective motion in fish schools. *Interface Focus*, 2(6) :693–707, 2012.
- [Mai97] K. Mainzer. Thinking in complexity : The complex dynamics of matter, mind and mankind (vol. springer-verlag). *New York*, 1997.
- [Mai10] Luidnel Maignan. *Points, Distances et Automates Cellulaires : Algorithmique Géométrique et Spatiale*. Thèse de doctorat, Université Paris-Sud XI, 2010.
- [Mar13] Irène Marcovici. *Automates cellulaires probabilistes et mesures spécifiques sur des espaces symboliques*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot – Paris 7, 2013.
- [MHC93] Melanie Mitchell, Peter T. Hraber, and James P. Crutchfield. Revisiting the edge of chaos : evolving cellular automata to perform computations. *Complex Systems*, 7 :89–130, 1993.
- [Mic04] Fabien Michel. *Formalisme, outils et éléments méthodologiques pour la modélisation et la simulation multi-agents*. Thèse de doctorat, Université Montpellier II, 2004.

- [Min65] Marvin L. Minsky. Matter, Mind and Models. *International Federation of Information Processing Congress*, 1 :45–49, 1965.
- [Moo64] Edward F. Moore. The firing squad synchronization problem. *Sequential Machines*, 4 :3537–3574, 1964.
- [MY12] Luidnel Maignan and Jean-Baptiste Yunès. A spatio-temporal algorithmic point of view on firing squad synchronisation problem. In *Cellular automata*, volume 7495 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 101–110, 2012.
- [NMMF97] G. U. Nienhaus, J. D. Müller, B. H. McMahon, and H. Frauenfelder. Exploring the conformational energy landscape of proteins. *Physica D*, 107 :297–331, 1997.
- [Oll02] Nicolas Ollinger. *Automates cellulaires : structures*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 2002.
- [PITM02] Ferdinand Peper, Tejiro Isokawa, Yousuke Takada, and Nobuyuki Matsui. Self-timed cellular automata and their computational ability. *Future Generation Computer Systems*, 18(7) :893 – 904, 2002.
- [PKDVB11] Fernando Peruani, Tobias Klaus, Andreas Deutsch, and Anja Voss-Boehme. Traffic jams, gliders, and bands in the quest for collective motion of self-propelled particles. *Physical Review Letters*, 106 :128101, Mar 2011.
- [Reg08a] Damien Regnault. Directed percolation arising in stochastic cellular automata analysis. In *Proceedings of the 33rd international symposium on Mathematical Foundations of Computer Science*, MFCS '08, pages 563–574, Berlin, Heidelberg, 2008. Springer-Verlag.
- [Reg08b] Damien Regnault. Directed percolation arising in stochastic cellular automata analysis. In *Mathematical Foundations of Computer Science*, volume 5162 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 563–574. Springer-Verlag, 2008.
- [Reg12] Damien Regnault. Proving a phase transition in cellular automata under asynchronous dynamics. Technical report, Université d'Évry-Val d'Essonne, 2012.
- [Ren10] Paul Rendell. A simple universal turing machine for the game of life turing machine. In A. Adamatzky, editor, *Game of Life Cellular Automata*. 2010.
- [Rey87] Craig W. Reynolds. Flocks, herds, and schools : A distributed behavioral model. *Computer Graphics*, 21(4) :25–34, 1987.
- [Roc03] Luis M. Rocha. Complex systems modeling : Using metaphors from nature in simulation and scientific models. Technical report, Los Alamos National Laboratory, 2003.
- [Rou08] Jean-Baptiste Rouquier. *Robustesse et émergence dans les systèmes complexes : le modèle des automates cellulaires*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Lyon, 2008.
- [SdR99] Birgitt Schönfisch and André de Roos. Synchronous and asynchronous updating in cellular automata. *BioSystems*, 51 :123–143, 1999.
- [Sen12] Sylvain Sené. *Sur la bio-informatique des réseaux d'automates*. Habilitation à diriger des recherches, Université d'Évry - Val d'Essonne, 2012.
- [SFS10] Antoine Spicher, Nazim Fatès, and Olivier Simonin. Translating discrete multi-agents systems into cellular automata : Application to diffusion-limited aggregation. In *Agents and Artificial Intelligence*, volume 67 of *Communications in Computer and Information Science*, pages 270–282. Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [Sha01] Cosma Rohilla Shalizi. *Causal architecture, complexity and self-organization in time series and cellular automata*. Thèse de doctorat, University of Wisconsin, 2001.



- [Sim81] Herbert Alexander Simon. *The Science of the Artificial*. MIT Press, 1981.
- [SL<sup>+</sup>91] J.J.E. Slotine, W. Li, et al. *Applied nonlinear control*, volume 66. Prentice hall Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.
- [SV02] Roberto Serra and Marco Villani. Perturbing the regular topology of cellular automata : implications for the dynamics. In *Cellular Automata*, volume 2493 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 168–177, 2002.
- [Tak89] Shinji Takesue. Ergodic properties and thermodynamic behavior of elementary reversible cellular automata. I. Basic properties. *Journal of Statistical Physics*, 56(3-4) :371–402, 1989.
- [TDEKB12] Chad M. Topaz, Maria R. D’Orsogna, Leah Edelstein-Keshet, and Andrew J. Bernoff. Locust dynamics : behavioural phase change and swarming. *PLoS Computational Biology*, 8(8), 2012.
- [Tof94] Tommaso Toffoli. Occam, turing, von neumann, jaynes : How much can you get for how little? (a conceptual introduction to cellular automata), 1994.
- [Too80] Andrei Toom. Stable and attractive trajectories in multicomponent systems. *Advances in Probability*, 6 :549–575, 1980.
- [Tur52] Alan Turing. On the chemical basis of morphogenesis. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 237(641) :37–72, 1952.
- [VCBJ<sup>+</sup>95] Tamás Vicsek, András Czirók, Eshel Ben-Jacob, Inon Cohen, and Ofer Shochet. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles. *Physical Review Letters*, 75(6) :1226–1229, 1995.
- [Vio12] Pascal Viot. Simulation numérique en physique statistique : “physique théorique des systèmes complexes” et “modélisation, statistique et algorithmes des systèmes hors d’équilibre”. Cours de Master 2, Université Pierre et Marie Curie, 2012.
- [vN66] John von Neumann. *Theory of Self-Reproducing Automata*. University of Illinois Press, Champaign, IL, USA, 1966.
- [Wol84] S. Wolfram. Universality and complexity in cellular automata. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 10(1-2) :1–35, January 1984.
- [Wol99] Dietrich E. Wolf. Cellular automata for traffic simulations. *Physica A*, 263 :438–451, 1999.



## Résumé

Dans cette thèse, nous étudions la robustesse dans le contexte de la modélisation de systèmes complexes par les automates cellulaires. En effet, si l'on cherche à reproduire un comportement émergent à partir d'un modèle d'automate cellulaire, il nous semble nécessaire de se demander si les comportements observés sont bien le résultat d'interactions entre entités constituantes, ou bien s'ils dépendent d'une définition particulière du modèle. Nous allons ainsi être amenés à considérer la robustesse du modèle, à savoir la résistance de son comportement à de petites variations sur les attributs de sa définition.

Dans un premier temps, nous montrons la pertinence de cette approche en considérant plusieurs définitions possibles d'une perturbation de la mise à jour globale et en les appliquant à une classe simple et représentative de modèles d'automates cellulaires, les Automates Cellulaires Élémentaires. Nous observons que, malgré le fait que nos perturbations soient proches et qu'une majorité des modèles considérés ne change pas de comportement, quelques cas particuliers montrent des changements qualitatifs du comportement que nous étudions plus en détail.

Dans un second temps, nous appliquons cette approche en nous penchant sur un modèle particulier d'automate cellulaire, qui simule le phénomène de formation d'essaim à partir d'un modèle évolué d'automate cellulaire, le gaz sur réseau. Nous explorons la robustesse du comportement du modèle en considérant la perturbation de deux attributs du modèle, la forme de la grille cellulaire et la mise à jour globale, et en tirons les conclusions sur la relation entre l'observation du comportement et la définition précise du modèle.

**Mots-clés:** Modélisation de systèmes complexes, robustesse, automates cellulaires, gaz sur réseau, dynamiques stochastiques, effets de taille finie.

## Abstract

In this thesis, we study the role of robustness in the context of the modelling of complex systems by cellular automata. In particular, if we consider a cellular automaton which aims at reproducing an emergent behaviour from a similar structure, we want to determine whether its observed behaviour is the result of the interaction of entities, or whether it depends a precise definition of the model. We thus consider the model's robustness, that is, the resistance of the behaviour to small perturbations on the model features.

First, we show the relevance of this approach by considering several definitions of a perturbation of the global updating and by applying them to a simple and representative class of cellular automata, the Elementary Cellular Automata. We observe that, despite the fact that most models show little or no change between the different perturbations, some particular cases show qualitative changes that we study in detail.

Second, we apply this approach to a particular model of cellular automata, which simulates a swarming behaviour based on a lattice-gas model. We then explore the model robustness by considering the perturbations of two of the model's attributes, the lattice shape and the global updating, and discuss the relationship between the observation of the behaviour and the precise definitions of the model.

**Keywords:** Complex systems modelling, robustness, cellular automata, lattice-gas, stochastic dynamics, finite-size effects.