



**HAL**  
open science

# Thermoformage du verre - Développement numérique d'un modèle thermomécanique

Benjamin Le Corre

► **To cite this version:**

Benjamin Le Corre. Thermoformage du verre - Développement numérique d'un modèle thermomécanique. Modélisation et simulation. Université de Lorraine, 2014. Français. NNT : 2014LORR0004 . tel-01750665v2

**HAL Id: tel-01750665**

**<https://theses.hal.science/tel-01750665v2>**

Submitted on 8 Apr 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 16 Janvier 2014 pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université de Lorraine

en Mécanique et Énergétique

par

Benjamin Le Corre

**Thermoformage du verre**

**Développement numérique d'un modèle thermomécanique**

**Composition du Jury :**

<i>Présidente :</i>	D. Baillis-Doermann	Professeur, INSA Lyon
<i>Rapporteurs :</i>	M. El Hafi	Professeur, École des Mines d'Albi
	A. Gasser	Professeur, Université d'Orléans
<i>Directeurs de thèse :</i>	G. Jeandel	Professeur, Université de Lorraine
	Y. Meshaka	Maître de conférences, Université de Lorraine
<i>Examineur :</i>	A. Collin	Maître de conférences, Université de Lorraine
<i>Invités :</i>	P. Boulet	Professeur, Université de Lorraine
	M.-A. Skaper	Directrice Recherche et Innovation, CERFAV







# THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 16 Janvier 2014 pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université de Lorraine

en Mécanique et Énergétique

par

Benjamin Le Corre

**Thermoformage du verre**

**Développement numérique d'un modèle thermomécanique**

**Composition du Jury :**

<i>Présidente :</i>	D. Baillis-Doermann	Professeur, INSA Lyon
<i>Rapporteurs :</i>	M. El Hafi	Professeur, École des Mines d'Albi
	A. Gasser	Professeur, Université d'Orléans
<i>Directeurs de thèse :</i>	G. Jeandel	Professeur, Université de Lorraine
	Y. Meshaka	Maître de conférences, Université de Lorraine
<i>Examineur :</i>	A. Collin	Maître de conférences, Université de Lorraine
<i>Invités :</i>	P. Boulet	Professeur, Université de Lorraine
	M.-A. Skaper	Directrice Recherche et Innovation, CERFAV



# Remerciements

J'aimerais tout d'abord remercier les personnes qui ont initié ce projet, à savoir Gérard Jeandel (directeur de thèse, professeur au LEMTA), Yves Meshaka (co-directeur de thèse, enseignant-chercheur à l'IJL), Marie-Alice Skaper (Directrice Recherche et Innovation du CERFAV) et Denis Garcia (Directeur du CERFAV) et je souhaiterais souligner le plaisir que j'ai eu de travailler avec eux.

Gérard, merci pour ta bonne humeur, ton optimisme et ta volonté de toujours valoriser le travail effectué au cours de cette thèse, cela m'a été d'ailleurs d'un grand soutien dans les quelques moments de doute qui ont jalonné ce projet. Yves, grâce à tes remarques justes, souvent distillées avec un humour subtil, parfois grinçant, j'ai pu découvrir une nouvelle dimension du mot « rigueur ». Cela me permet aujourd'hui de mieux saisir le niveau d'exigence qui est attendu de la part d'un docteur, c'est pourquoi je te suis reconnaissant de m'avoir aidé à progresser, particulièrement sur cet aspect. Marie-Alice, Denis, j'ai beaucoup apprécié votre disponibilité, ainsi que votre volonté de mettre en place un environnement offrant des conditions de travail optimales, une grande part de la réussite de ce projet vous échoit.

Je voudrais maintenant exprimer ma sympathie auprès des membres des différentes équipes du CERFAV, du LEMTA et de l'IJL avec lesquels j'ai eu la chance de travailler. Je ne pourrai pas citer tout le monde, néanmoins, chacune des personnes rencontrées a apporté sa pierre à l'édifice. En premier lieu, je ne peux que remercier Anthony Collin pour sa grande disponibilité et un investissement remarquable qui ont donné lieu, notamment, au développement d'un code de Monte-Carlo utilisé pour le calcul des transferts radiatifs dans le verre. Merci aussi à Laëtitia Soudre-Bau, Pascal Boulet, David Lacroix d'avoir répondu à mes questions diverses et variées. Ce fut un plaisir d'avoir travaillé aux côtés de Bader, Bernard, Damien, Gilles, Issiaka, Jérôme, Jonathan, Julien, Lionel, Mickaël, Mohamed, Omar, Sébastien, Simon, Valentin, Zoubir.

Je ne voudrais pas oublier non plus le rôle de Valérie, Irène, Édith et Christine qui m'ont sauvé la vie plusieurs fois en ce qui concerne la gestion des dossiers administratifs !

J'exprime ma gratitude aux professeurs Mouna El Hafi, Alain Gasser et Dominique Baillis-Doermann pour m'avoir fait l'honneur de participer à mon Jury de thèse et pour avoir évalué ce travail.

J'ai une pensée particulière pour les personnes rencontrées au cours de mon périple nancéen ; Charles, David, Salima et Aurélien bien sûr, mais aussi les membres du club d'échecs et du club de karaté, ainsi que ceux du groupe franco-zoreillo-sino-malbar-créole.

Pour leur soutien et leur présence, je dédie ce travail à mes proches et souhaitent qu'ils y trouvent ici la preuve de ma reconnaissance et la récompense de leurs efforts.





# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Tables des matières</b>	<b>5</b>
<b>Table des figures</b>	<b>9</b>
<b>Nomenclature</b>	<b>13</b>
<b>Introduction</b>	<b>17</b>
<b>1 Le verre</b>	<b>21</b>
1.1 Définition et microstructure du verre . . . . .	22
1.2 Composition et élaboration du verre . . . . .	24
1.3 Caractéristiques du verre . . . . .	27
1.3.1 Propriétés thermiques . . . . .	27
1.3.2 Propriétés optiques . . . . .	31
1.3.3 Masse volumique et coefficient de dilatation thermique . . . . .	35
1.3.4 Module d'Young et coefficient de Poisson . . . . .	36
1.3.5 Viscosité . . . . .	37
1.4 Conclusion . . . . .	38
<b>2 Le thermoformage</b>	<b>41</b>
2.1 Description du procédé . . . . .	41
2.2 Exemples d'application . . . . .	43
2.3 Intérêt de l'étude . . . . .	49
2.3.1 Les paramètres de l'essai . . . . .	50
2.3.2 Description du banc d'essai de thermoformage . . . . .	53
2.3.3 Développement d'un modèle numérique - Objectifs . . . . .	55
<b>3 Modélisation du comportement thermomécanique du verre</b>	<b>57</b>
3.1 Modélisation du comportement mécanique . . . . .	58

3.1.1	Équations de base . . . . .	58
3.1.2	Loi de comportement . . . . .	60
3.1.3	Variation de la viscosité en fonction de la température . . . . .	61
3.1.4	Conditions aux limites mécaniques . . . . .	64
3.2	Modélisation du transfert thermique . . . . .	64
3.2.1	Résolution de l'équation de la chaleur . . . . .	64
3.2.2	Transfert thermique par conduction . . . . .	65
3.2.3	Transfert thermique par rayonnement . . . . .	65
3.2.4	Conditions aux limites thermiques . . . . .	73
<b>4</b>	<b>Développement d'un code de calcul du transfert radiatif</b>	<b>75</b>
4.1	Méthodes de calcul du transfert radiatif . . . . .	75
4.1.1	Méthode des harmoniques sphériques (ou différentielles P-N) . . . . .	76
4.1.2	Méthode des zones . . . . .	76
4.1.3	Méthode des transferts discrets . . . . .	76
4.1.4	Méthode des ordonnées discrètes . . . . .	76
4.1.5	Méthode de Rosseland . . . . .	77
4.1.6	Méthodes alternatives : éléments finis et différences finies . . . . .	77
4.1.7	Méthode de Monte-Carlo . . . . .	78
4.2	Développement de la méthode de Monte-Carlo . . . . .	78
4.2.1	Quelques bases théoriques . . . . .	78
4.2.2	Représentation en 2D, calcul en 3D . . . . .	80
4.2.3	Choix des éléments . . . . .	81
4.2.4	Tirage du point d'émission et de la direction d'un quantum . . . . .	84
4.2.5	Gestion de l'énergie d'un quantum . . . . .	86
4.2.6	Transmission ou réflexion du quantum au dioptre . . . . .	88
4.2.7	Bilan d'énergie sur un élément . . . . .	89
4.2.8	Propriétés optiques du verre et choix de la fréquence d'un quantum . . . . .	92
4.2.9	Validation numérique en rayonnement pur . . . . .	93
4.2.10	Validation numérique en thermique pure . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Simulation thermomécanique</b>	<b>103</b>
5.1	Problématique du couplage thermique . . . . .	104
5.2	Étude de la mise en forme du verre avec différents modèles thermiques . . . . .	106
5.2.1	Thermoformage sur moule . . . . .	106
5.2.2	Thermoformage en suspension . . . . .	115
5.2.3	Bilan de l'essai en suspension . . . . .	119
	<b>Conclusion</b>	<b>121</b>

**Bibliographie**

**124**

**Annexes**

**135**



# Table des figures

1.1	Variation du volume spécifique du matériau en fonction de la température . . . . .	22
1.2	Structures atomiques de la silice (Zachariasen, 1932) . . . . .	23
1.3	Structure d'une couche de silice déposée sur un substrat de graphène (Huang <i>et al.</i> , 2012) . . . . .	23
1.4	Représentation schématique en deux dimensions du verre silico-sodique (Warren, 1942) . . . . .	24
1.5	Conductivité phonique $k_c$ et capacité thermique massique $c_p$ de la silice (Kittel, 1949) . . . . .	28
1.6	Conductivité phonique du verre sodo-silico-calcique . . . . .	29
1.7	Capacité thermique massique du verre sodo-silico-calcique . . . . .	30
1.8	Indice de réfraction $n_\lambda$ en fonction de la longueur d'onde $\lambda$ ( $\mu\text{m}$ ) . . . . .	31
1.9	Indice de réfraction du verre float (Synowicki <i>et al.</i> , 2011) . . . . .	32
1.10	Coefficient d'absorption $\kappa_\lambda$ en fonction de la longueur d'onde $\lambda$ ( $\mu\text{m}$ ) . . . . .	33
1.11	Variations du coefficient d'absorption $\kappa_\lambda$ en fonction de la température (Viskanta et Lim, 2002) . . . . .	34
1.12	Module d'Young et coefficient de Poisson d'un verre sodo-silico-calcique . . . . .	36
1.13	Viscosité d'un verre silico-sodo-calcique en fonction de la température . . . . .	37
2.1	Les différentes techniques de thermoformage . . . . .	42
2.2	Exemple d'une courbe de température d'un cycle de thermoformage . . . . .	42
2.3	Cycle de mise en forme du pare-brise dans le four . . . . .	45
2.4	Phénomène de reverse pouvant apparaître sur un pare-brise . . . . .	46
2.5	Mise en forme d'une pièce d'optique . . . . .	47
2.6	Cycle de température en fonction de l'épaisseur d'une plaque de verre de $35 \times 30$ mm <sup>2</sup> (données CERFAV) . . . . .	50
2.7	Vue du four de thermoformage . . . . .	53
2.8	Appareillage de mesure du four de thermoformage . . . . .	54
2.9	Température de l'air à différentes hauteurs dans le four . . . . .	54
3.1	Couplage thermomécanique . . . . .	57

3.2	Modèle rhéologique de Maxwell . . . . .	60
3.3	Viscosité de différents verres (Zarzycki, 1982) . . . . .	62
3.4	Courbes WLF et VFT obtenues en utilisant les données expérimentales de (Parsa <i>et al.</i> , 2005) . . . . .	63
3.5	Bande de longueurs d'onde du rayonnement thermique . . . . .	65
3.6	Représentation d'un angle solide . . . . .	66
3.7	Configuration d'échange entre un élément de surface $dS_1$ et un élément de surface $dS_2$ . . . . .	67
3.8	Luminance dans la direction $\vec{s}$ . . . . .	67
3.9	Angle solide représenté en utilisant les coordonnées sphériques . . . . .	68
3.10	Luminance du corps noir en fonction de la longueur d'onde . . . . .	69
3.11	Bilan du transfert radiatif à la surface d'un milieu opaque . . . . .	70
3.12	Type de réflexion . . . . .	71
3.13	Représentation des échanges thermiques à la frontière verre/air . . . . .	74
4.1	Définition de la direction d'un quantum . . . . .	80
4.2	Envoi de quanta depuis un élément dans un maillage 2D . . . . .	81
4.3	Gamme d'éléments disponibles en 2D dans Abaqus® . . . . .	82
4.4	Transformation d'un élément fini du repère de référence au repère réel . . . . .	83
4.5	Tirage du point d'émission d'un quantum . . . . .	85
4.6	Tirage de la direction d'un quantum . . . . .	86
4.7	Traversée d'un quadrangle par un quantum . . . . .	87
4.8	Échanges radiatifs le long d'un chemin optique entre deux éléments de volume $dV_i$ et $dV_j$ . . . . .	90
4.9	Enceinte à 300K . . . . .	94
4.10	Variance de la divergence de flux en fonction du nombre de quanta envoyés . . . . .	94
4.11	Enceinte à la température $T_m$ et frontières noires à température nulle . . . . .	95
4.12	Flux radiatif adimensionné reçu par la frontière inférieure de l'enceinte . . . . .	95
4.13	Enceinte carrée absorbante avec face inférieure à la température $T_m$ et les autres faces à la température $0.5T_m$ . . . . .	96
4.14	Comparaison du code de volumes finis avec les résultats de D. Rouse (Rouse <i>et al.</i> , 2000) . . . . .	97
4.15	Température de l'air mesurée dans le four au niveau du moule . . . . .	98
4.16	Conditions aux limites thermiques . . . . .	98
4.17	Représentation de la plaque en deux dimensions et maillage . . . . .	99
4.18	Température au centre de la plaque et sensibilité à la méthode utilisée et au nombre de quanta envoyés . . . . .	99
4.19	Profils de température de la plaque de verre à $t = 3000$ s . . . . .	100

5.1	Principe du couplage thermique fort et du couplage thermique faible . . . . .	104
5.2	Température du centre de la plaque de verre et écart entre couplage fort et couplage faible. . . . .	105
5.3	Géométrie de l'essai sur moule et maillage de la plaque de verre . . . . .	107
5.4	Température et déplacement du centre de la plaque de verre au cours de l'essai sur moule . . . . .	109
5.5	Température le long de l'axe $x$ à $t = 2000$ s . . . . .	110
5.6	Formes de la plaque de verre à $t = 3855$ s et $t = 12000$ s . . . . .	111
5.7	Température et déplacement du centre de la plaque en faisant varier la valeur de $K_g$ . . . . .	112
5.8	Température et déplacement du centre de la plaque en faisant varier la valeur de $c_p$ . . . . .	113
5.9	Modification des conditions aux limites radiatives . . . . .	114
5.10	Température et déplacement du centre de la plaque avec les nouvelles conditions aux limites . . . . .	114
5.11	Géométrie de l'essai en suspension . . . . .	116
5.12	Température de l'air imposée pour les conditions aux limites . . . . .	116
5.13	Température et déplacement du centre de la plaque de verre au cours de l'essai en suspension . . . . .	117
5.14	Ecart absolu et relatif du déplacement du centre de la plaque . . . . .	118
5.15	Formes de la plaque à $t = 8000$ s . . . . .	119
A.1	Milieu optiquement épais de coefficient d'extinction $\beta_\nu$ . . . . .	135
A.2	Algorigramme du code de Monte-Carlo (méthode réciproque) . . . . .	138
A.3	Glass sagging process . . . . .	140
A.4	Numerical benchmark . . . . .	146
A.5	Results of the radiative code . . . . .	147
A.6	Geometry of the studied case . . . . .	147
A.7	Mesh . . . . .	148
A.8	Radiative conductivity as a function of temperature . . . . .	149
A.9	Air temperature during the process . . . . .	150
A.10	Temperature (a) and displacement (b) of the plate center . . . . .	151
A.11	Temperature along the x-axis at $t = 2000$ s . . . . .	152
A.12	Plate shape at 3855 s (a) and 12000 s (b) . . . . .	153
A.13	Modification of the boundary conditions . . . . .	155
A.14	Temperature (a) and displacement (b) evolution after modification of the boundary conditions . . . . .	156





# Nomenclature

## Grandeurs - Lettres romaines

$c$	Vitesse de la lumière [m.s <sup>-1</sup> ]
$c_p$	Capacité thermique massique à pression constante [J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]
$c_v$	Capacité thermique massique à volume constant [J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]
$E$	Module d'Young [Pa]
$G$	Module de cisaillement [Pa]
$k$	Indice optique d'absorption [-]
$K$	Module de compression [Pa]
$K_g$	Coefficient d'échange global [W.m <sup>-2</sup> .K <sup>-1</sup> ]
$k_c$	Conductivité phonique [W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]
$L$	Luminance [W.m <sup>-2</sup> .sr <sup>-1</sup> ]
$L^0$	Luminance spectrale du corps noir [W.m <sup>-2</sup> .sr <sup>-1</sup> ]
$M$	Émittance [W.m <sup>-2</sup> ]
$M^0$	Émittance du corps noir [W.m <sup>-2</sup> ]
$n$	Indice optique de réfraction [-]
$P$	Puissance [W]
$Q$	Flux thermique [W]
$s$	Abscisse curviligne [m]
$S$	Surface [m <sup>2</sup> ]
$t$	Temps [s]
$T$	Température [°C ou K]
$T_f$	Température de fusion ou de solidification du verre [°C ou K]
$T_g$	Température de transition vitreuse [°C ou K]
$V$	Volume [m <sup>3</sup> ]

## Grandeurs - Lettres grecques

$\alpha_l$	Coefficient de dilatation thermique au-dessus de $T_g$ [ $K^{-1}$ ]
$\alpha_s$	Coefficient de dilatation thermique en-dessous de $T_g$ [ $K^{-1}$ ]
$\alpha$	Absorptivité [-]
$\beta$	Coefficient d'extinction [ $m^{-1}$ ]
$\dot{\gamma}$	Vitesse de cisaillement [ $s^{-1}$ ]
$\varepsilon$	Émissivité [-]
$\eta$	Viscosité dynamique [Pa.s]
$\eta_b$	Module visqueux de compressibilité [Pa.s]
$\eta_s$	Module visqueux de cisaillement [Pa.s]
$\theta$	Angle polaire [rad]
$\kappa$	Coefficient d'absorption [ $m^{-1}$ ]
$\lambda$	Longueur d'onde [m]
$\nu$	Fréquence [ $s^{-1}$ ]
$\nu_p$	Coefficient de Poisson [-]
$\nu_\eta$	Coefficient de Poisson visqueux [-]
$\rho$	Réflexivité [-]
$\rho_v$	Masse volumique [ $kg.m^{-3}$ ]
$\sigma$	Contrainte [Pa]
$\sigma_d$	Coefficient de diffusion [ $m^{-1}$ ]
$\tau$	Transmittivité [-]
$\varphi$	Angle azimutal [rad]
$\Phi$	Fonction de phase [-]
$\Omega$	Angle solide [sr]

## Vecteurs

$\vec{f}$	Vecteur des forces volumiques [N.m <sup>-3</sup> ]
$\vec{q}$	Vecteur densité de flux thermique [W.m <sup>-2</sup> ]
$\vec{q}_c$	Vecteur densité de flux thermique conductif [W.m <sup>-2</sup> ]
$\vec{q}_r$	Vecteur densité de flux thermique radiatif [W.m <sup>-2</sup> ]
$\vec{s}$	Vecteur unitaire associé à la direction d'émission [-]
$\vec{T}_s$	Vecteur des efforts surfaciques [Pa]
$\vec{u}$	Vecteur déplacement [m]
$\vec{X}$	Vecteur coordonnées [m]
$\vec{\gamma}$	Vecteur accélération [m.s <sup>-2</sup> ]

## Tenseurs

$\overline{\overline{E}}$	Tenseur de Green-Lagrange [-]
$\overline{\overline{F}}$	Tenseur gradient de la déformation [-]
$\overline{\overline{\epsilon}}$	Tenseur des déformations [-]
$\overline{\overline{\sigma}}$	Tenseur des contraintes [Pa]

## Constantes

$c_0$	Vitesse de la lumière dans le vide [2,998.10 <sup>8</sup> m.s <sup>-1</sup> ]
$h$	Constante de Planck [6,626.10 <sup>-34</sup> J.s]
$k_B$	Constante de Boltzmann [1,381.10 <sup>-23</sup> J.K <sup>-1</sup> ]
$\sigma_B$	Constante de Stefan-Boltzmann [5,67.10 <sup>-8</sup> W.m <sup>-2</sup> .K <sup>-4</sup> ]

## Notations mathématiques

$\vec{a}$	Vecteur
$\overline{\overline{a}}$	Matrice
${}^t\overline{\overline{a}}$	Matrice transposée
$\overrightarrow{\text{grad}}$	Opérateur gradient
div	Opérateur divergence
$\partial$	Dérivée partielle
d	Différentielle totale



# Introduction

## Un bref historique du verre

Le verre est un des plus anciens matériaux utilisé par l'Homme. Dès la préhistoire, l'obsidienne, roche volcanique à base de silice, était taillée pour confectionner des outils et des armes (Scholze, 1980; Zarzycki, 1982). La fusion du verre a été mise en œuvre vers 2500 avant JC : des perles étaient réalisées par pressage et des baguettes par étirage à des fins de décoration. L'invention de la canne à souffler au 1<sup>er</sup> siècle avant J.-C. va révolutionner la fabrication du verre. Elle permettra notamment de créer des formes beaucoup plus complexes. Une seconde révolution apparaîtra presque 20 siècles plus tard avec la mécanisation et l'industrialisation des procédés de fabrication. Citons notamment, dans les années 1950, l'invention du procédé float, solidification du verre sur bain d'étain, qui permet de produire du verre plat à des cadences qui peuvent atteindre jusque 1000 tonnes/jour (Lehmann, 2010). Aujourd'hui, les procédés de mise en forme sont très diversifiés. Parmi les plus utilisés, on retrouve le pressage, le soufflage, l'étirage, le fibrage et le thermoformage. C'est ce dernier qui fait l'objet de ce travail de thèse.

## Contexte et problématique

Les artisans éprouvent des difficultés à maîtriser parfaitement la mise en forme du verre par thermoformage. Conscient des problèmes rencontrés par les verriers, le CERFAV<sup>1</sup>, en association avec le LEMTA<sup>2</sup>, l'IJL<sup>3</sup>, le CIRTES<sup>4</sup> et les cristalleries de Daum et Baccarat, ont initié le projet MIPIVERRE<sup>5</sup>. Celui-ci a été déposé en 2006 et soutenu financièrement par l'ANR<sup>6</sup>, le FEDER<sup>7</sup>, la Région Lorraine et le Conseil Général de Meurthe-et-Moselle. L'objectif est de permettre une meilleure maîtrise du procédé de mise en forme du verre en réduisant les coûts et délais de fabrication, d'objets de géométries complexes vendus en petites ou moyennes séries. Le projet a fait l'objet de deux thèses, l'une portant sur le remplissage de moule (Nguyen, 2009) et l'autre

- 
1. Centre Européen de Recherches et de Formation aux Arts Verriers
  2. Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée
  3. Institut Jean Lamour
  4. Centre français de développement rapide de produits en Europe
  5. labellisé par le pôle de compétitivité lorrain MIPI : Matériaux Innovants, Produits Intelligents
  6. Agence Nationale de la Recherche
  7. Fonds Européen de Développement Régional

sur le thermoformage du verre (Soudre, 2008). La présente thèse s'inscrit dans la continuité de cette dernière.

À long terme, la problématique à laquelle doit répondre la section du projet sur le thermoformage du verre est la suivante : **connaissant le type de verre, la géométrie du four et la forme finale souhaitée, quels sont le chargement thermique, le moule (matériau et géométrie) et la forme initiale à imposer pour obtenir le produit conforme ?**

Afin d'apporter des éléments de réponse, L. Soudre a conçu et développé un banc d'essais original et novateur dédié au thermoformage qui permet la mesure sans contact du champ de température dans le four et à la surface du verre ainsi que la mesure du champ de déplacements. Le four utilisé est équipé de 6 résistances, placées sur la voûte, qui rayonnent dans la gamme de l'infrarouge. Le verre étant un matériau optiquement semi-transparent, le chauffage se fait par absorption de l'énergie radiative émise depuis les résistances et par convection avec des échanges entre l'air et la surface du verre.

Le développement d'un modèle numérique complet incluant mécanique et thermique ou tenant compte des transferts par conduction et rayonnement, n'a pas pu être mené à son terme. C'est pourquoi le CERFAV a financé une deuxième thèse, labellisée par le pôle de compétitivité lorrain MATERIALIA (fusion de MIPI et P2MI<sup>8</sup>), qui fait l'objet de ce présent rapport et dont **l'objectif principal est la mise en place d'un modèle numérique complet pour simuler la mise en forme du verre lors du thermoformage.**

Le fait de simuler le procédé de thermoformage présente trois intérêts. Le premier consiste à étudier l'influence des paramètres sur la mise en forme du verre. Ainsi, il est possible de s'affranchir d'une campagne d'essais qui est plus coûteuse en matière et qui peut aussi s'avérer plus longue (ce dernier point dépend néanmoins de la puissance de calcul et de la précision du modèle numérique). Le second intérêt repose sur une étude approfondie de l'influence du transfert radiatif durant la mise en forme. Dans la majorité des travaux de simulation numérique, les hypothèses retenues pour prendre en compte le rayonnement sont assez basiques. Or, à une température qui dépasse nécessairement 600°C, le mode de transfert par rayonnement a un impact non négligeable. Le troisième intérêt s'inscrit sur le long terme, au-delà du projet de thèse. Une fois qu'un modèle numérique performant sera développé en 3D, il sera possible d'inverser le problème : connaissant la géométrie finale de la pièce que l'on souhaite obtenir, les paramètres qu'il faut imposer pour obtenir le résultat voulu seront déterminés numériquement.

## Plan du rapport

Le document s'organise de la façon suivante :

---

8. Procédés de Mise en œuvre des Matériaux Innovants

- le chapitre 1 donne la définition scientifique d'un verre et se focalise plus particulièrement sur la composition, l'élaboration et les propriétés physiques du verre à vitre de composition silico-sodo-calcique ;
- le chapitre 2 introduit le thermoformage. Il y est expliqué en quoi consiste le procédé et plusieurs exemples d'application sont abordés. La façon dont la modélisation sera mise en œuvre est précisée à la fin du chapitre ;
- la modélisation du comportement thermomécanique du verre est décrite dans le chapitre 3. Une attention particulière est accordée au transfert radiatif ;
- le chapitre 4 détaille le fonctionnement et le développement du code de Monte Carlo permettant de calculer le transfert radiatif ayant lieu au sein du verre. Ce code est ensuite validé sur plusieurs cas-tests ;
- les simulations numériques couplant le programme éléments finis Abaqus<sup>®</sup> avec le code basé sur la méthode de Monte Carlo sont présentées dans le chapitre 5. Le transfert radiatif est abordé de manière exhaustive.





# Chapitre 1

## Le verre

Selon les récits de Pline l'ancien (23 - 79 ap. J.-C.), le verre aurait été élaboré involontairement par des marchands phéniciens, lorsque ceux-ci préparaient leur repas sur les rives du fleuve Belus. Ne trouvant pas de pierre pour soutenir leurs marmites, ils utilisèrent des blocs de natron (carbonate de sodium) issus de leur cargaison. Sous l'effet de la chaleur dégagée par le feu, le sable aurait fusionné avec le natron pour donner naissance au verre.

Cette histoire est aujourd'hui considérée comme une légende, car la température atteinte par le feu dans les conditions susmentionnées est vraisemblablement inférieure à la température de fusion du verre.

Devenu un matériau indispensable dans notre vie quotidienne, le verre est à l'heure actuelle produit en grande quantité. Par exemple, pour l'année 2011, il représente un volume de 5 millions de tonnes en France (d'après les chiffres de la fédération de l'industrie du verre).

Dans le sens commun, on entend par verre un matériau constituant le vitrage, les ampoules, les récipients, qui pourrait être défini de manière empirique comme étant dur, fragile et transparent. D'un point de vue scientifique, cette définition est, si ce n'est incorrecte, du moins incomplète : le verre est décrit non pas en termes d'utilisation ou de propriétés physiques mais défini d'un point de vue thermodynamique et structural, ce que nous proposons d'expliquer ici dans la première partie de ce chapitre.

Dans la seconde partie du chapitre, sont répertoriées les caractéristiques physiques du verre. La mise en forme du verre est pilotée par la viscosité qui est elle-même très dépendante de la température. C'est pourquoi une attention particulière a été accordée aux propriétés thermiques. Les propriétés mécaniques sont aussi abordées dans ce chapitre et cela se traduit par le recensement des valeurs usuelles de masse volumique, module d'Young, coefficient de Poisson, que l'on peut retrouver dans la littérature scientifique.

## 1.1 Définition et microstructure du verre

Lorsque qu'un liquide est refroidi, celui-ci commence à se solidifier après avoir atteint la température de fusion (ou solidification)  $T_f$ . Si la vitesse de refroidissement est suffisamment lente, le liquide devient alors un cristal comme le montre la figure 1.1 (Scholze, 1980).

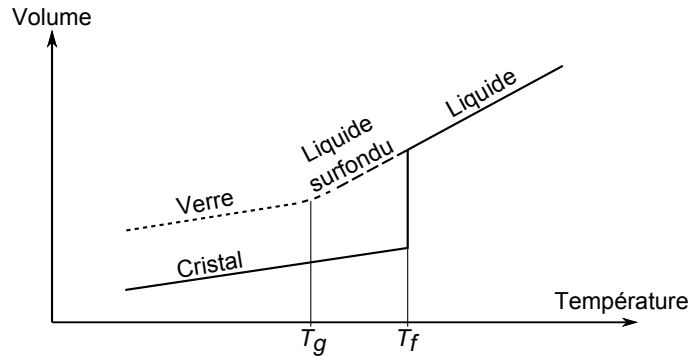


FIGURE 1.1 – Variation du volume spécifique du matériau en fonction de la température

À l'opposé, un verre est généralement défini comme un solide issu du refroidissement d'un liquide sans qu'il n'ait subi de cristallisation (Scholze, 1980; Zarzycki, 1982; Phalippou, 2001). Pour obtenir un verre, il est donc nécessaire de refroidir rapidement le liquide qui se retrouve alors sous l'état de liquide surfondu (en-dessous de  $T_f$ ) dans un équilibre métastable. Cela implique que si le refroidissement s'arrête ou qu'il n'est pas assez rapide, le liquide surfondu se réorganise d'un point de vue atomique pour finalement former un cristal. Cependant, cette réorganisation est d'autant plus lente que l'on se rapproche de la température dite de transition vitreuse  $T_g$  car la viscosité augmente et limite le mouvement des atomes.

Dans le cas où le liquide surfondu continue à être refroidi assez rapidement, la cristallisation ne s'opère pas. En-dessous de  $T_g$ , la viscosité est tellement importante que le matériau peut être considéré comme figé. On obtient alors l'état vitreux qui caractérise un solide hors équilibre non cristallisé qui se trouve dans un état configurationnel stable. La valeur de la viscosité à  $T_g$  est généralement comprise entre  $10^{12}$  et  $10^{14}$  Pa.s (Mazurin, 2007). Par ailleurs, la température de transition vitreuse peut dépendre de différents facteurs (par exemple la vitesse de refroidissement) et il est alors recommandé de parler d'un domaine de transition.

Comme le verre est le produit d'un liquide figé, sa structure atomique est amorphe. Cela signifie qu'il n'existe pas d'ordre atomique à longue distance. L'adjectif amorphe est à distinguer de l'adjectif vitreux. En effet, amorphe renvoie à l'ordre atomique, vitreux renvoie à la définition plus générale du verre et notamment au fait qu'il présente une très forte viscosité en-dessous du domaine de transition vitreuse. Ainsi, cela permet de distinguer le verre de certains polymères ou gels présentant des structures amorphes.

La figure 1.2 représente les différentes structures atomiques prises par la silice telles qu'elles

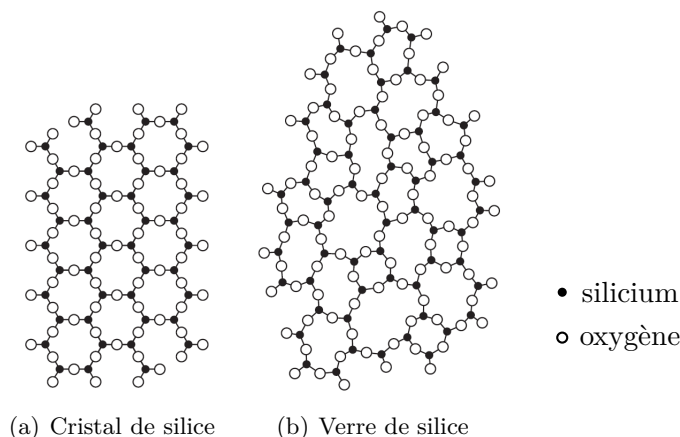
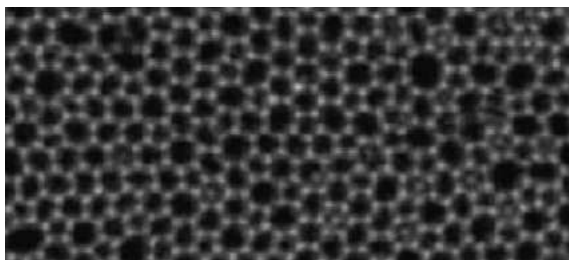


FIGURE 1.2 – Structures atomiques de la silice (Zachariasen, 1932)

ont été pensées par (Zachariasen, 1932) et validées par diffraction des rayons X par (Warren, 1937). Dans le cristal de silice, les motifs se répètent et il existe un ordre à longue distance. Ce n'est pas le cas du verre de silice qui présente une structure amorphe. Comme il s'agit d'une représentation plane, il faut en fait concevoir que la structure est composée de tétraèdres dont les sommets sont les atomes d'oxygène et dont le centre est un atome de silicium.

Assez remarquablement, deux études assez récentes viennent encore confirmer l'hypothèse de Zachariasen (Poggemann *et al.*, 2001; Huang *et al.*, 2012). Dans le cas de ce dernière article, l'image d'une couche 2D de silice déposée sur un substrat de graphène et prise à l'aide d'un microscope électronique à balayage par transmission peut s'observer sur la figure 1.3.

FIGURE 1.3 – Structure d'une couche de silice déposée sur un substrat de graphène (Huang *et al.*, 2012)

Cette image correspond bien à celle de la silice amorphe.

La théorie de Zachariasen et Warren, précédemment citée, met aussi en évidence le rôle spécifique des atomes que l'on retrouve dans un verre. Ainsi, les oxydes  $\text{SiO}_2$ ,  $\text{B}_2\text{O}_3$  ou encore  $\text{P}_2\text{O}_5$  sont appelés formateurs de réseau. Ces espèces, lorsqu'elles sont portées à haute température puis refroidies, vont former un verre.

Il existe aussi des oxydes dits modificateurs qui peuvent rompre les liaisons du réseau. En effet, dans la silice pure, un atome d'oxygène dit « pontant » est relié à deux atomes de silice formant

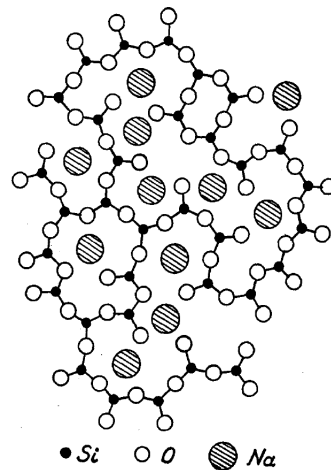


FIGURE 1.4 – Représentation schématique en deux dimensions du verre silico-sodique (Warren, 1942)

la liaison Si-O-Si. L'inclusion d'oxyde de sodium qui apparaît dans le réseau sous la forme d'un ion  $\text{Na}^+$  vient rompre cette liaison Si-O-Si. L'oxygène, qui n'est alors plus relié qu'à un seul atome de silice, est qualifié de « non pontant ». La représentation schématique du réseau est alors celle de la figure 1.4. Les oxydes  $\text{Na}_2\text{O}$ ,  $\text{K}_2\text{O}$ ,  $\text{CaO}$ ,  $\text{MgO}$  et  $\text{PbO}$  sont identifiés par Warren comme des modificateurs de réseau.

## 1.2 Composition et élaboration du verre

Les caractéristiques et l'usage d'un verre dépendent principalement de sa composition. Ainsi, les verres utilisés pour le vitrage, la cuisine, les arts, l'isolation (fibres de verre), le confinement des matières radioactives, ont tous une structure atomique amorphe mais des compositions très différentes. Dans le cas des verres à usage courant, il est possible de distinguer globalement 4 classes de composants, certaines ayant déjà été mentionnées dans le paragraphe précédent.

- Les vitrifiants : ils conduisent, par refroidissement, à la formation d'un verre.
  - la silice  $\text{SiO}_2$ , il s'agit du matériau de base du verre à vitre. Le sable de Fontainebleau, souvent utilisé comme matière première, est composé à plus de 99,5 % de silice ;
  - le borax  $\text{B}_2\text{O}_3$ , il est notamment utilisé pour les verres de cuisine ou de laboratoire et permet de diminuer le coefficient d'expansion thermique et ainsi d'améliorer la résistance du verre aux chocs thermiques ;
  - l'anhydride phosphorique  $\text{P}_2\text{O}_5$  que l'on retrouve dans les verres d'optique.
- Les fondants : ils permettent d'abaisser la température de fusion de la silice qui est de l'ordre de 1750 °C aux alentours de 1500 °C, afin d'économiser de l'énergie et d'augmenter la durabilité

des réfractaires en contact avec la fonte de verre.

- l'oxyde de sodium  $\text{Na}_2\text{O}$ , obtenu par décomposition de carbonates synthétiques ;
- l'oxyde de potassium  $\text{K}_2\text{O}$ , provenant de nitrate de potassium  $\text{KNO}_3$ . Il est notamment utilisé pour les verres de soufflage car il permet une meilleure malléabilité sur une plus grande gamme de température (appelé un verre long dans le jargon) ;
- l'oxyde de magnésium  $\text{MgO}$ , extrait d'un minerai appelé dolomite. Au-delà de son rôle de fondant, il augmente la résistance chimique du verre.

○ Les stabilisants : ils améliorent la stabilité chimique du verre. Sans eux, le verre serait soluble au contact de l'eau.

- l'oxyde de calcium  $\text{CaO}$  (chaux vive) qui est issu du calcaire  $\text{CaCO}_3$  ;
- l'oxyde de plomb  $\text{PbO}$  qui entre dans la composition du cristal et qui accroît aussi sa masse volumique et son éclat.<sup>1</sup> ;
- l'alumine  $\text{Al}_2\text{O}_3$  extraite du minerai de bauxite.

○ Les agents secondaires ou additifs : ils donnent des propriétés particulières au verre.

- l'oxyde de fer  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  pour colorer le verre. Il fait aussi office de stabilisant ;
- les oxydes métalliques  $\text{Cr}_2\text{O}_3$ ,  $\text{CoO}$ ,  $\text{CuO}$  et les lanthanides  $\text{CeO}_2$ ,  $\text{Nd}_2\text{O}_3$  utilisés pour la coloration (Pajean, 2007) ;
- l'oxyde de soufre  $\text{SO}_3$  pour ajuster l'état d'oxydoréduction.

Type de verre	$\text{SiO}_2$	$\text{B}_2\text{O}_3$	$\text{Al}_2\text{O}_3$	$\text{PbO}$	$\text{CaO}$	$\text{MgO}$	$\text{Na}_2\text{O}$	$\text{K}_2\text{O}$
Silico-sodo-calcique	72		2		9	3	14	
Borosilicate	80	12,5	2				5,5	
Cristal	51			39			1,7	7,6

Tableau 1.1 – Pourcentage massique des principaux constituants de différents types de verre (Phalippou, 2001)

Le tableau 1.1 fournit des compositions usuelles d'un verre à vitre silico-sodo-calcique, d'un verre de cuisine borosilicaté et d'un verre de cristal. Il existe des gammes de variation assez importantes pour chaque type de verre. Ainsi, pour un verre à vitre, les pourcentages massiques de  $\text{SiO}_2$ ,  $\text{Na}_2\text{O}$  et des autres éléments peuvent respectivement varier entre 70 et 75 %, entre 11 et 16 % et entre 10 et 15 % (Fourment et Fromentin, 2000). De ces compositions vont dépendre les caractéristiques du verre. La plus dépendante de toutes est probablement la viscosité. Cependant, la composition affecte aussi les propriétés mécaniques (masse volumique, module d'Young, coefficient de dilatation thermique), thermiques (chaleur spécifique, conductivité thermique) et

1. Cependant, le plomb est aujourd'hui peu à peu remplacé par des matériaux de substitution à cause de son impact sur la santé et l'environnement (Hynes et Jonson, 1997). Le cristal doit être suffisamment stable pour éviter la migration du plomb dans les liquides en contact du verre. Les normes à respecter, imposées par l'union européenne, sont entrées en vigueur le 18 Décembre 2006 dans le cadre du règlement REACH.

optiques (coefficient d'absorption, indices optiques) du verre.

Concernant l'élaboration du verre, celle-ci peut se décomposer en 4 phases (Falipou, 1998; Fourment et Fromentin, 2000) :

- la fusion : les matières premières du verre sont chauffées à une température de l'ordre de 1500 °C. Il est intéressant de noter qu'une quantité importante de verre broyé appelé calcin est ajoutée au mélange. Dans le cadre d'une politique de développement durable et d'économie des coûts, cette proportion augmente toujours plus et peut atteindre jusqu'à 90% de la composition ;
- l'affinage : lors de la fusion, les composés gazeux produits par les diverses réactions chimiques doivent être éliminés. Cela peut être réalisé par agitation mécanique ou par introduction d'air, de vapeur d'eau ou encore de dioxyde de soufre qui entraîne la formation de bulles qui emmènent les composés gazeux vers la surface ;
- l'homogénéisation : il s'agit d'assurer que la composition chimique et physique de la masse vitreuse est uniforme. Généralement, cette étape a lieu dans le bassin de fusion en même temps que l'affinage ;
- le conditionnement : le verre doit être porté à température de travail en vue d'être mis en forme. Les canaux, appelés « feeders » dans l'industrie verrière, assurent la transition entre le four et les machines de formage et sont équipés d'appareillage de chauffage et refroidissement.

Deux grandes technologies existent pour l'élaboration des produits verriers : le four à pot ou le four à bassin.

Le four à pot est la plus ancienne des deux. Dans un grand four, les matières premières sont placées dans des pots ou creusets qui sont ensuite chauffés jusqu'à la température de fusion du verre. L'affinage et l'homogénéisation sont réalisés par le courant induit à l'intérieur des pots qui subissent des changements de température au cours du cycle d'élaboration. La durée de vie des pots est limitée à 5 ou 6 mois d'utilisation. Avant l'industrialisation des procédés, les fours à pot étaient alimentés en bois. Depuis, les fours sont alimentés au gaz ou au fioul. Compte-tenu de leurs rendements de production plus faibles que les fours à bassin, l'intérêt des fours à pot réside dans leur capacité à travailler avec différentes compositions (si besoin, une par creuset).

Le four à bassin est aujourd'hui la technologie la plus utilisée. Dans le cas de la production du verre à vitre silico-sodo-calcique, le procédé « float » a amené une véritable révolution industrielle. Développé dans les années 50 par Alastair Pilkington, il consiste à déposer un verre fondu sur un bain d'étain en fusion. Contrairement aux fours à pots, les fours à bassin permettent de réaliser les 4 étapes de l'élaboration du verre de manière continue. En termes d'alimentation, l'énergie peut être apportée par des combustibles fossiles s'il s'agit de fours à flammes ou par effet Joule pour des fours électriques.

## 1.3 Caractéristiques du verre

La mise en forme du verre va dépendre du chargement thermique imposé, de la géométrie de la pièce et de ses propriétés physiques. Dans le cadre du thermoformage, la caractéristique du verre la plus importante est la viscosité. C'est elle qui contrôle la vitesse de déformation en fonction de la contrainte appliquée et elle est très dépendante de la température. C'est pourquoi les propriétés thermiques et optiques ont aussi leur importance. Elles ont une influence sur la répartition des flux thermiques au sein du verre et donc sur le champ de température de la pièce. Quant à la masse volumique du verre, au module d'Young, au coefficient de Poisson ou au coefficient d'expansion thermique, ils ont une influence non négligeable sur la déformation du verre.

Ainsi, la présente section propose de répertorier les valeurs des propriétés du verre issues de la littérature scientifique.

### 1.3.1 Propriétés thermiques

On distingue ici les propriétés thermiques du verre de ses propriétés optiques. Les propriétés optiques influent sur le transfert radiatif mais n'apparaissent pas explicitement dans l'équation de la chaleur, au contraire de la capacité thermique massique à pression constante  $c_p$  et de la conductivité thermique  $k_c$ .

Il y a plus de 60 ans, Kittel (1949), se basant sur l'hypothèse du réseau désordonné de Zachariasen (Zachariasen, 1932), proposait de relier la conductivité phonique du verre à sa capacité thermique massique (à volume constant)  $c_v$ , la vitesse de propagation d'un phonon  $v$  et le libre parcours moyen des phonons  $l_m$  de la façon suivante :

$$k_c = \frac{1}{4} c_v v l_m \quad (1.1)$$

Le facteur 1/4 est choisi arbitrairement et a depuis été remplacé par un facteur 1/3 (Mann *et al.*, 1992). Kittel fait ensuite l'hypothèse que la vitesse des phonons au sein du verre varie peu, de même que le libre parcours moyen à une température égale ou supérieure à l'ambiante.

Pour un solide, la différence entre  $c_p$  et  $c_v$  peut être considérée comme négligeable et il est donc possible de partir du principe que  $c_p \simeq c_v$ . L'équation 1.1 permet alors d'expliquer pourquoi  $c_p$  et  $k_c$  ont globalement le même comportement pour le verre de silice, comme l'illustre la figure 1.5. On pourra remarquer que si les valeurs proposées ici ont été mesurées avec plus de précision depuis, elles restent réalistes (André et Degiovanni, 1995). Néanmoins, bien que l'équation 1.1 présente un intérêt évident, il s'agit d'un modèle. Il est donc préférable de pas déduire  $c_p$  à partir de  $k_c$  et inversement mais de mesurer séparément l'un et l'autre.



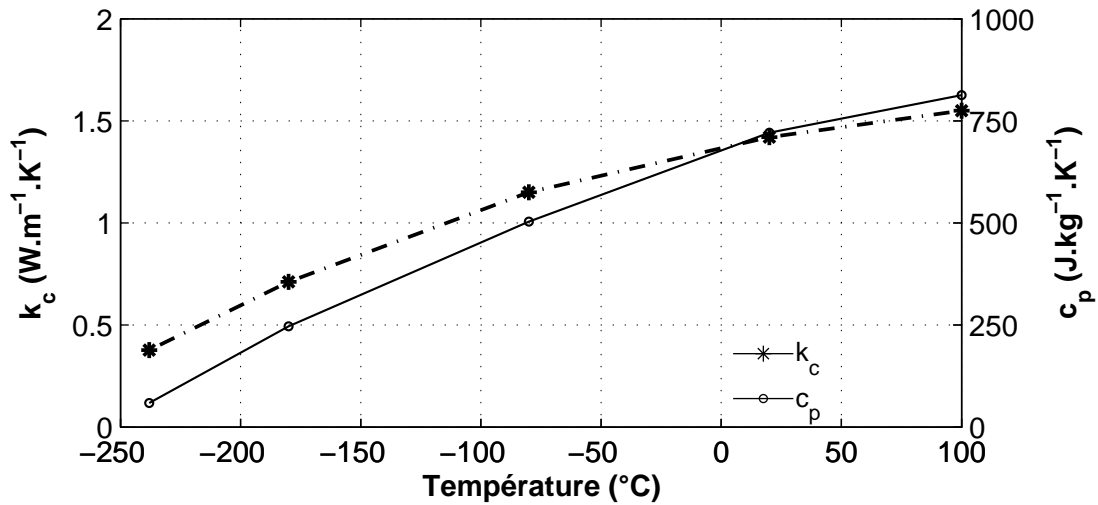


FIGURE 1.5 – Conductivité phonique  $k_c$  et capacité thermique massique  $c_p$  de la silice (Kittel, 1949)

### Conductivité thermique

Lors de la résolution numérique de l'équation de la chaleur, il est nécessaire de connaître la puissance qu'une cellule échange par conduction  $\text{div}(\vec{q}_c)$  et par rayonnement  $\text{div}(\vec{q}_r)$ . Dans le cas d'un matériau isotrope, le vecteur densité de flux conductif s'écrit, d'après la loi de Fourier :

$$\vec{q}_c = -k_c \overrightarrow{\text{grad}}(T) \quad (1.2)$$

$k_c$  correspond à la conductivité thermique phonique et elle caractérise le transfert d'énergie ayant lieu dans le verre en s'affranchissant de la part d'échange thermique dû au transfert radiatif. En pratique, déterminer la part de transfert due à la conduction et la part due au rayonnement s'avère complexe. Cela est d'autant plus vrai que la température est élevée et que le transfert radiatif est important.

Comme le souligne (Degiovanni, 1994), les méthodes à régime transitoire sont généralement préférées aux méthodes à régime permanent. Elle consistent à générer une perturbation thermique à l'intérieur d'un matériau initialement à l'équilibre et à mesurer ensuite l'évolution de la température ou des flux thermiques au cours du temps pour en déduire ses caractéristiques.

Parmi les méthodes transitoires, il en existe deux grandes classes : les méthodes par contact et les méthodes photothermiques. Dans le premier cas, la perturbation thermique est amenée par contact direct entre le dispositif de chauffage et le matériau étudié. Cependant, ce contact n'est pas parfait et il est, de ce fait, la principale source d'erreur pour des méthodes régulièrement utilisées comme le fil chaud ou la plaque chaude. Dans le second cas, la perturbation thermique provient d'une source de rayonnement comme, par exemple, pour la méthode flash. Les sources d'erreur peuvent provenir des incertitudes sur la mesure du flux incident et des propriétés ra-

diatives et optiques du matériau. Nous ne décrivons pas ici en détail le fonctionnement de ces méthodes car ce n'est pas l'objet de ce travail et certains documents en font déjà la synthèse (Degiovanni, 1994; Krapez, 2007).

On pourra néanmoins préciser que la détermination de  $k_c$  est généralement réalisée de la façon suivante : dans un premier temps, le milieu est thermiquement perturbé et la température en un point précis de l'échantillon est mesurée en fonction du temps. Ensuite, en confrontant les données obtenues à des modèles théoriques représentant la façon dont s'établit le transfert thermique à l'intérieur du verre, il est possible de déterminer la valeur de  $k_c$ . Comme ces modèles tiennent compte du couplage entre conduction et rayonnement, ils reposent souvent sur des équations très complexes.

La figure 1.6 présente les valeurs de conductivité phonique obtenues par différents auteurs. (André, 1992) a utilisé une méthode flash, (Kiyohashi *et al.*, 2002) ont mis en œuvre une méthode à fil chaud et (Mann *et al.*, 1992) ont développé un dispositif original. Les valeurs fournies par

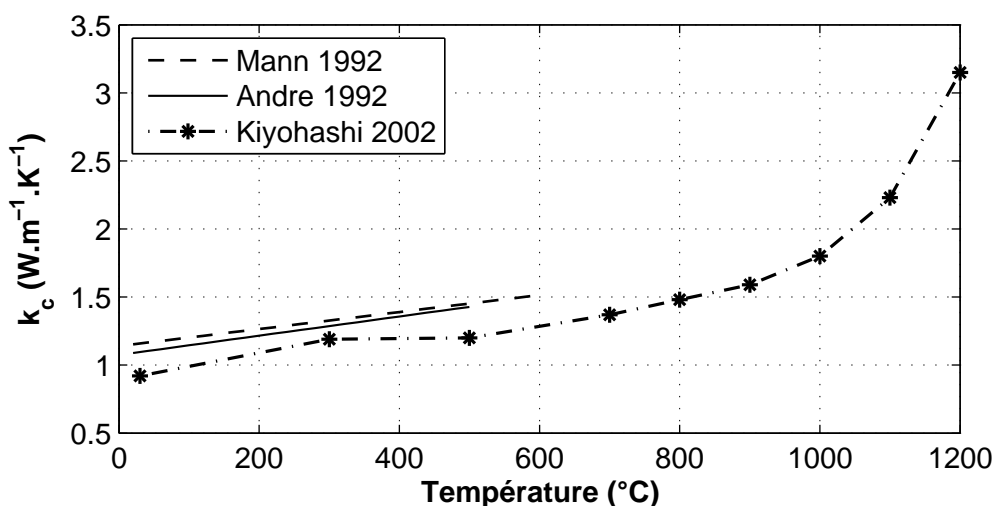


FIGURE 1.6 – Conductivité phonique du verre sodo-silico-calciq

Andre sont régulièrement citées dans la littérature, par exemple (Carré, 1996; Bernard *et al.*, 2005; Devos *et al.*, 2006) et les résultats obtenus par Mann *et al.* sont très proches. Par ailleurs, ces derniers remarquent que la conductivité phonique est généralement considérée comme ayant une dépendance linéaire en fonction de la température dans la plupart des travaux sur le sujet. En ce qui concerne les valeurs obtenues par Kiyohashi *et al.*, celles-ci sont légèrement décalées. La façon dont Kiyohashi *et al.* s'affranchissent du rayonnement n'est pas explicitée de manière claire dans l'article en question et il est donc possible que le modèle utilisé soit, par certains aspects, moins précis que les modèles de Andre et Mann *et al.*, ce qui expliquerait les écarts.

### Capacité thermique massique

Dans une étude sur la valeur de la capacité thermique massique en fonction de la composition du verre, (Sharp et Ginther, 1951) font la synthèse des valeurs disponibles à l'époque. Dans un premier temps, ils reportent l'approche de (Winkelmann, 1893) qui consiste à calculer  $c_p$  en l'écrivant comme la somme d'un facteur attribué à une espèce présente dans le verre multiplié par le pourcentage massique de l'espèce. Ils en concluent que la démarche de Winkelmann donne des résultats satisfaisants mais qu'elle est limitée à son application sur un faible intervalle de température (en l'occurrence de 16 °C à 100 °C). Ils proposent alors d'utiliser une relation de la forme :

$$c_p = \frac{0,00146 aT^2 + 2 aT + b}{(0,00146T + 1)^2} \quad (1.3)$$

Les coefficients  $a$  et  $b$  sont calculés en fonction du pourcentage de chaque espèce présente dans le verre.

Les valeurs de capacité thermique massique obtenues pour un verre float de composition usuelle, comme celle donnée dans le tableau 1.1, sont tracées sur la figure 1.7.

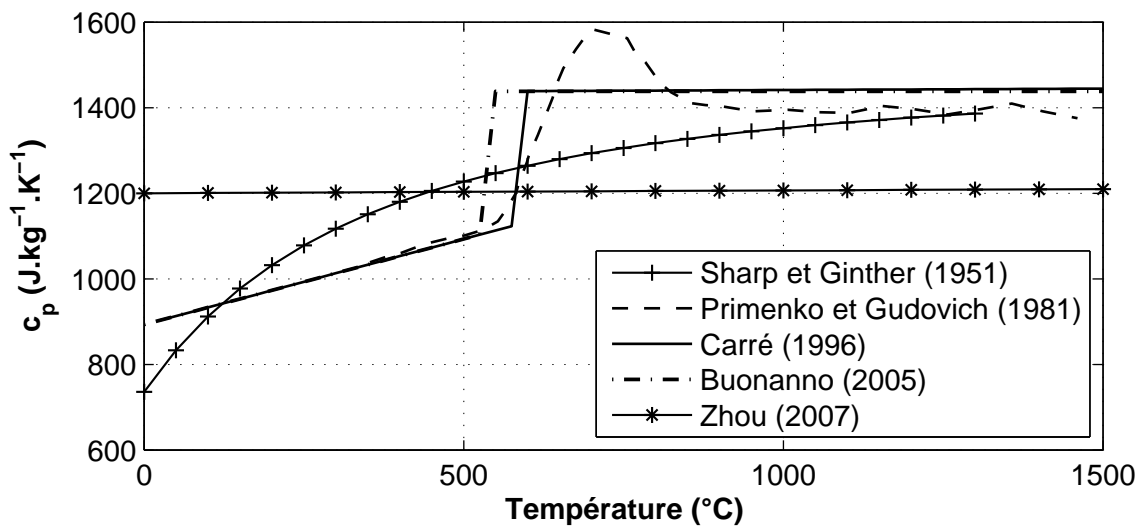


FIGURE 1.7 – Capacité thermique massique du verre sodo-silico-calciique

(Mann *et al.*, 1992) comparent les valeurs de Sharp et Ginther avec les mesures de (Primenko et Gudovich, 1981). Ils remarquent que la formule donnée par Sharp *et al.* ne peut rendre compte de la soudaine augmentation de la capacité thermique massique autour de la transition vitreuse mais aussi du fait que  $c_p$  se stabilise à une valeur fixe au-dessus de la transition vitreuse. En revanche, (Carré, 1996) et (Buonanno *et al.*, 2005), dans des travaux plus récents, en tiennent compte, à l'inverse de (Zhou *et al.*, 2007) qui retient une valeur quasi-constante. Aux vues de tous ces éléments, il apparaît donc que les valeurs de Primenko et Gudovich sont probablement les plus représentatives de  $c_p$  et que les approximations retenues par Carré et Buonanno *et al.* leur sont relativement fidèles.

### 1.3.2 Propriétés optiques

Un milieu semi-transparent comme le verre peut être caractérisé par son indice complexe de réfraction  $n^* = n - ik$ .  $n$  est l'indice de réfraction du verre et  $k$  l'indice d'absorption.  $n$  contrôle les échanges au dioptre (interface verre/air) puisqu'il a un impact sur la part de rayonnement incident transmis à l'interface et sur l'angle d'incidence. Il joue aussi sur l'émission propre du milieu car la luminance est pondérée par un facteur  $n^2$  (voir chapitre 3, partie rayonnement). Le coefficient d'absorption  $\kappa$  peut être calculé à partir de l'indice d'absorption  $k$  grâce à la relation :

$$\kappa = \frac{4\pi\nu k}{c_0} \quad (1.4)$$

Avec  $\nu$  la fréquence de l'onde électromagnétique et  $c_0$  la vitesse de la lumière dans le vide. Le coefficient d'absorption  $\kappa$  est très important puisque la puissance radiative émise ou absorbée par un matériau lui est proportionnelle.

#### Indice de réfraction

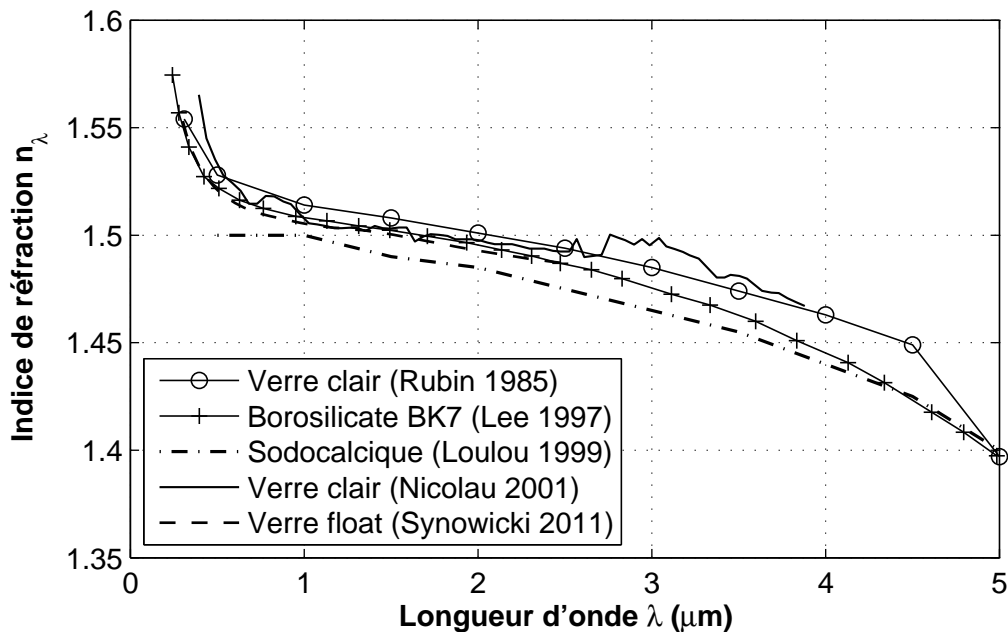


FIGURE 1.8 – Indice de réfraction  $n_\lambda$  en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$  ( $\mu\text{m}$ )

La figure 1.8 présente les valeurs d'indice de réfraction spectral  $n_\lambda$  entre 0  $\mu\text{m}$  et 5  $\mu\text{m}$ . Les auteurs des différentes études n'indiquent pas tous de quel type de verre il s'agit. (Loulou *et al.*, 1999) précise qu'il s'agit d'un verre sodocalcique et (Rubin, 1985) d'un verre clair. Cependant, beaucoup d'éléments de ces articles, qui indiquent généralement que le verre étudié correspond à un verre industriel à usage commun, laissent supposer qu'il s'agit de verre float, à l'exception de (Lee et Viskanta, 1997) dont le borosilicate BK7 a une composition sensiblement différente

avec notamment une proportion de bore plus importante.

Plusieurs méthodes ont été mises en œuvre pour obtenir ces résultats. (Rubin, 1985) a utilisé un spectromètre à transformée de Fourier pour mesurer la réflectance et la transmittance du verre. Les indices spectraux ont ensuite été obtenus en appliquant les relations de Kramers-Krönig. (Synowicki *et al.*, 2011) ont eu recours à un ellipsomètre spectrométrique et (Nicolau et Maluf, 2001) ont développé un montage expérimental qui intègre un monochromateur. (Loulou *et al.*, 1999) ne précisent pas comment les données ont été obtenues et (Lee et Viskanta, 1997) fournissent les données du fabricant (Schott®).

Les indices obtenus en fonction de la longueur d'onde ont globalement la même allure. En-dessous de  $0,5 \mu\text{m}$ , l'indice de réfraction prend des valeurs situées autour de 1,55. Ensuite, de  $1 \mu\text{m}$  à  $4 \mu\text{m}$ , l'indice diminue de façon quasi-linéaire d'une valeur légèrement supérieure à 1,5 pour atteindre 1,45. De  $4 \mu\text{m}$  à  $5 \mu\text{m}$ , l'indice diminue de 1,45 à 1,4. Globalement, les valeurs obtenues en croisant les différentes sources sont relativement similaires.

Cependant, Synowicki *et al.* montrent que le procédé de fabrication float peut avoir un impact sur la valeur de l'indice de réfraction. En effet, les valeurs d'indice de réfraction présentées en figure 1.9 ne sont pas les mêmes dans l'épaisseur du verre et les couches inférieure (face étain) et supérieure (face air) de la plaque. En ce qui concerne la face étain, l'indice de réfraction est

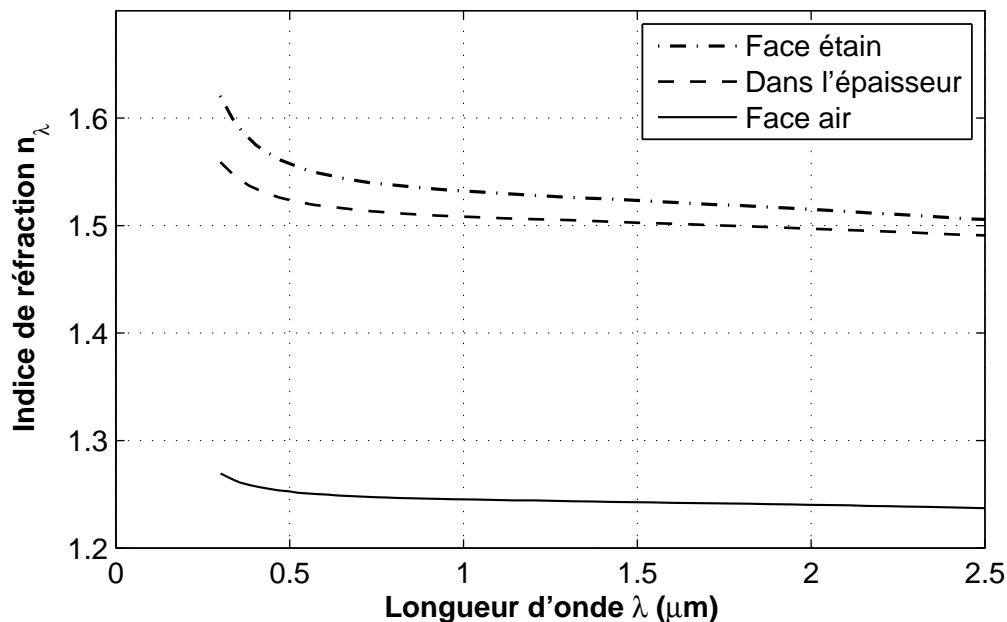


FIGURE 1.9 – Indice de réfraction du verre float (Synowicki *et al.*, 2011)

légèrement supérieur à celui dans l'épaisseur. Cela s'explique notamment par la diffusion d'étain dans le verre. Pour la face air, les valeurs des indices de réfraction ont été obtenues à partir des mesures de transmittance et réflectance en faisant l'hypothèse que la couche en contact avec l'air est constituée de 50% de vide. Cela explique pourquoi l'indice de réfraction en face air est

très inférieur à l'indice dans l'épaisseur. De ce fait, il faut garder à l'esprit que les résultats sont dépendants du modèle choisi pour le calcul de l'indice de réfraction.

Pour résumer, Synowicki *et al.* mettent donc en évidence le fait qu'il existe un gradient d'indice de réfraction dans l'épaisseur d'un verre float et qu'il devrait être pris en compte dans un cas idéal.

### Coefficient d'absorption

Le coefficient d'absorption spectral est tracé sur la figure 1.10 en fonction de la longueur d'onde.

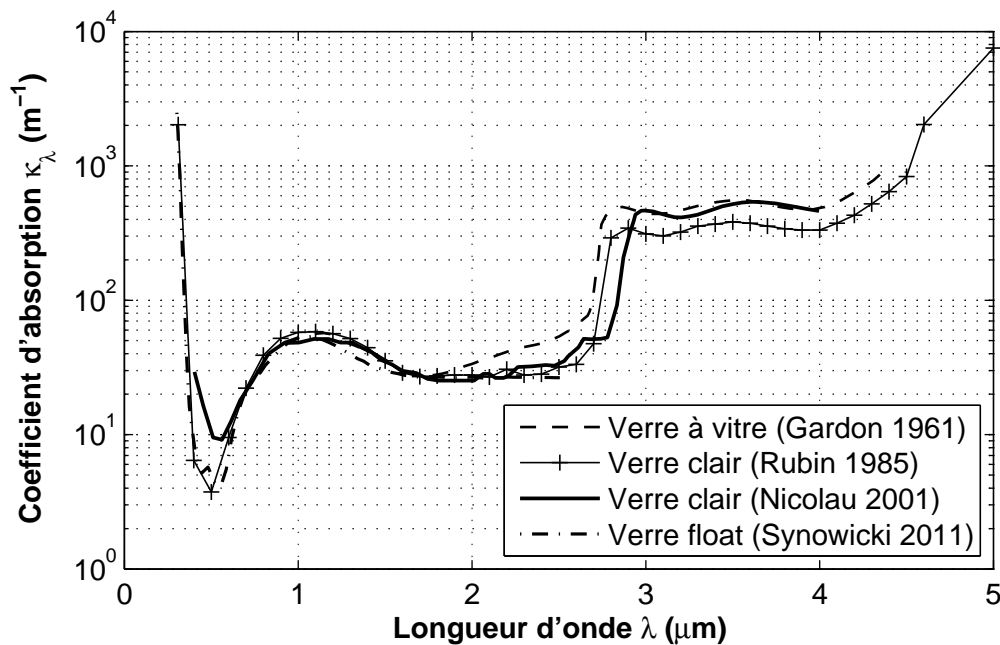


FIGURE 1.10 – Coefficient d'absorption  $\kappa_\lambda$  en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$  ( $\mu\text{m}$ )

$\kappa_\lambda$  peut prendre des valeurs qui varient de plusieurs ordres de grandeur sur la plage  $[0 \mu\text{m}; 5 \mu\text{m}]$ . Les compositions des verres ne sont pas données mais celles-ci doivent être proches puisqu'il s'agit, dans chaque cas, d'un verre silico-sodo-calcique classique. Les mesures du coefficient d'absorption spectral montrent une assez bonne similitude entre les différentes sources. Ce qui est plutôt remarquable compte-tenu du fait que les caractéristiques du verre à vitre présentées par (Gardon, 1961) ne correspondent pas, a priori, à un verre float, car une partie des données date de 1952, soit avant que le procédé d'élaboration du verre sur bain d'étain ne soit développé à l'échelle industrielle.

La température peut avoir une influence non négligeable sur les valeurs du coefficient d'absorption spectral comme le montre la figure 1.11.

Le fait de passer d'une température de 500 °C à 1100 °C peut doubler voire tripler le coefficient d'absorption spectral. Notons toutefois que ces courbes sont obtenues pour un verre d'écran de télévision (les éléments principaux sont : 62,7%  $\text{SiO}_2$  ; 8,4%  $\text{BaO}$  ; 7,6%  $\text{SrO}$  ; 7,4%  $\text{Na}_2\text{O}$  ; 7,1%

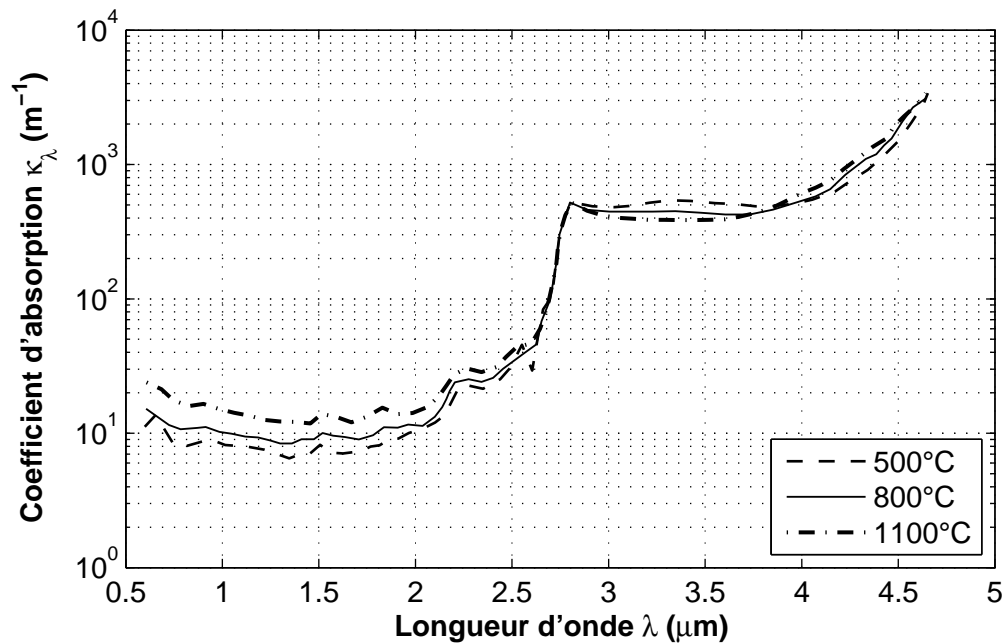


FIGURE 1.11 – Variations du coefficient d'absorption  $\kappa_\lambda$  en fonction de la température (Viskanta et Lim, 2002)

$\text{K}_2\text{O}$  (Dondi *et al.*, 2009)).

Le même phénomène de variation de  $\kappa_\lambda$  est observable pour du verre silico-sodo-calcique. Il est par exemple mis en évidence par (Gardon, 1961; Krupa *et al.*, 2001; Faber, 2002).

Par ailleurs, Krupa *et al.* ont étudié l'influence de la proportion de  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  et  $\text{FeO}$  dans un verre float classique (75%  $\text{SiO}_2$ ; 15,6%  $\text{Na}_2\text{O}$ ; 8,8%  $\text{CaO}$ ; 0,8%  $\text{SO}_3$ ; 0,2%  $\text{MgO}$ ). Le fait d'augmenter la proportion d'oxyde  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  de 0,05% à 0,53% peut élever la valeur du coefficient d'absorption spectral de 2 à 10 fois sa valeur initiale.

### Bilan pour le verre silico-sodo-calcique

Pour résumer les données présentées sur les propriétés thermiques du verre utilisé pour le thermoformage :

- l'indice de réfraction dépend peu de la composition du verre et les différentes sources bibliographiques s'accordent sur une valeur de  $n$  d'environ 1,5 à  $1\ \mu\text{m}$  et 1,4 à  $5\ \mu\text{m}$  avec une variation quasi-linéaire sur la plage [ $1\ \mu\text{m}$ ;  $5\ \mu\text{m}$ ]. Par ailleurs, bien que les variations de  $\kappa$  en fonction de la température soient étudiées, nous n'avons répertorié aucun résultat sur la variation de l'indice de réfraction en fonction de la température dans les documents cités précédemment. Néanmoins, il est généralement admis que l'indice de réfraction varie faiblement en fonction de la température (Mann *et al.*, 1992) ;
- l'allure globale du coefficient d'absorption en fonction de la longueur d'onde est similaire pour tous les verres silico-sodo-calciques. Cependant, un changement de température du verre

ou une variation de la proportion d'oxydes de fer ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ,  $\text{FeO}$ ) dans la composition peut modifier de presque un ordre de grandeur, dans les cas les plus critiques, la valeur du coefficient d'absorption.

Il apparait donc que les valeurs d'indice de réfraction varient peu en fonction des différents paramètres. De ce fait, même dans le cadre d'un travail spécifique, des mesures de  $n_\lambda$  ne sont pas forcément indispensables. En revanche, une mesure du coefficient d'absorption en fonction de la longueur d'onde, sans être obligatoire, peut s'avérer très utile car  $\kappa_\lambda$  varie fortement en fonction de la composition du verre et de la température.

### 1.3.3 Masse volumique et coefficient de dilatation thermique

Les valeurs de masse volumique et de coefficients de dilatation thermique du verre sont regroupées dans le tableau 1.2.

Référence	Masse volumique ( $\text{kg.m}^{-3}$ )	$\alpha_s$ ( $\text{K}^{-1}$ )	$\alpha_l$ ( $\text{K}^{-1}$ )
(Duffrène, 1994)	2508,4	$9.10^{-6}$	$3,2.10^{-5}$
(Zhou <i>et al.</i> , 2007)	$2583[1 - 9,05.10^{-5}(T - 1300)]$	$9.10^{-6}$	$3,02.10^{-5}$
(Soudre, 2008)	2527,5	$9,56.10^{-6}$	$2,72.10^{-5}$
(Su <i>et al.</i> , 2011)	2483	$8.36.10^{-6}$	/

Tableau 1.2 – Masse volumique et coefficients de dilatation thermique du verre

Les coefficients  $\alpha_s$  et  $\alpha_l$  correspondent respectivement aux coefficients de dilatation linéaire à l'état solide (en-dessous de  $T_g$ ) et liquide (au-dessus de  $T_g$ ). Les valeurs obtenues, aussi bien pour la masse volumique que pour les coefficients de dilatation, sont assez similaires. Ainsi, il est généralement accepté que le verre silico-sodo-calcique a une masse volumique proche de  $2500 \text{ kg.m}^{-3}$  à température ambiante. Cette valeur est légèrement variable en fonction de la composition du verre. Concernant les coefficients de dilatation thermique, en-dessous de  $T_g$ ,  $\alpha_s$  prend une valeur autour de  $9.10^{-6} (\text{K}^{-1})$  et au-dessus de  $T_g$ ,  $\alpha_l$  vaut environ  $3.10^{-5} (\text{K}^{-1})$ . Dans le cas de (Soudre, 2008), les mesures de masse volumique ont été effectuées en utilisant un ultrapycnomètre 1000 de Quantachrome instruments dont le fonctionnement se base sur le principe d'Archimède. Les coefficients de dilatation thermiques ont, quant à eux, été déterminés par un dilatomètre qui consiste à mesurer le changement de volume d'un échantillon en fonction de sa température.

Pour les valeurs de coefficients de dilatation, (Duffrène, 1994) reprend les données du National Bureau of Standards (NBS) devenu depuis le National Institute of Standards and Technology (NIST). Quant aux autres sources, l'appareillage utilisé pour mesurer la masse volumique ou le coefficient de dilatation thermique n'est pas précisé.



### 1.3.4 Module d'Young et coefficient de Poisson

Le module d'Young d'un matériau caractérise le rapport entre la contrainte appliquée et la déformation instantanée du matériau. Le coefficient de Poisson correspond au rapport de la déformation dans la direction perpendiculaire à l'effort par rapport à la déformation subie dans la direction de l'effort.

En-dessous de la température de transition vitreuse, ces paramètres varient peu. En revanche, à plus haute température, le verre devenant moins visqueux, la déformation élastique augmente pour une même contrainte imposée, ce qui implique que le module d'Young diminue. Cependant, comme l'expliquent (Duffrène *et al.*, 1998), il peut s'avérer difficile de mesurer les variations de  $E$  à haute température par des méthodes dites statiques. On leur préfère alors les méthodes dynamiques à hautes fréquences utilisant les ultrasons ou la diffusion Brillouin. C'est cette dernière que Duffrène *et al.* mettent en oeuvre pour obtenir les valeurs de  $E$ . Celles-ci sont représentées, après régression linéaire, sur la figure 1.12.

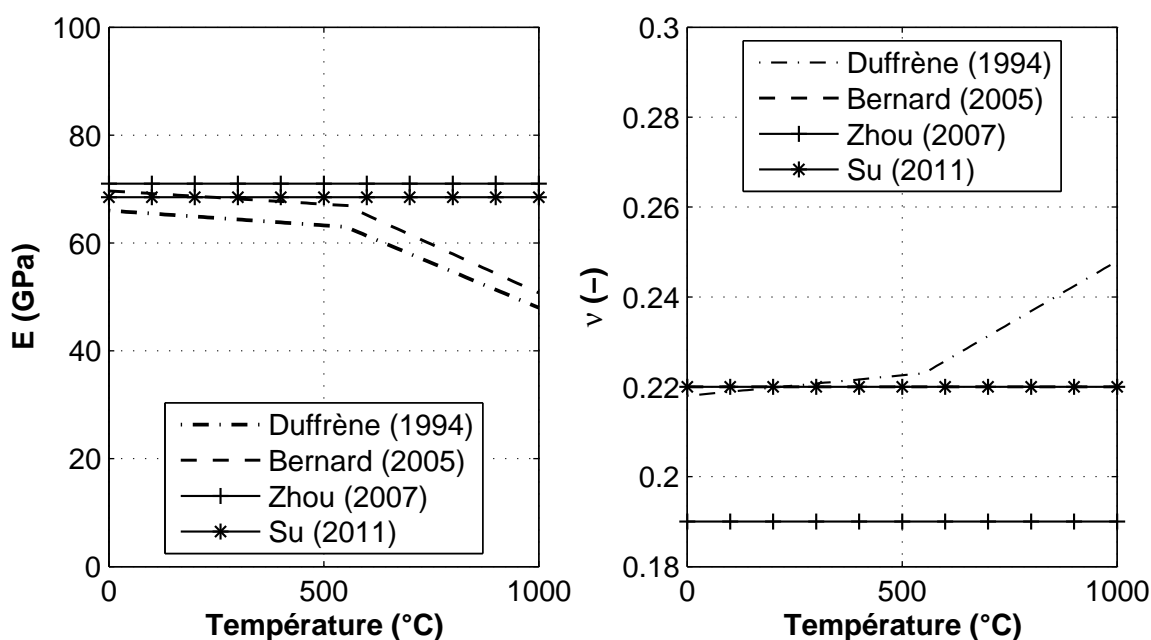


FIGURE 1.12 – Module d'Young et coefficient de Poisson d'un verre sodo-silico-calcique

Les valeurs données par (Bernard *et al.*, 2005) ont la même allure que celles de Duffrène *et al.* même si la méthode de mesure n'est pas précisée. (Zhou *et al.*, 2007) et (Su *et al.*, 2011) retiennent des valeurs de module d'Young qui correspondent à celles de la température ambiante. Concernant le coefficient de Poisson, Duffrène *et al.* montrent que celui-ci augmente très légèrement avec la température en-dessous de la transition vitreuse. Au-dessus, cette évolution est un peu plus rapide mais reste limitée. Ainsi, Bernard *et al.* prennent une valeur constante de 0,22, comme Su *et al.* De ce fait, la valeur de 0,19 retenue par Zhou *et al.* paraît légèrement sous-évaluée.

### 1.3.5 Viscosité

La viscosité dynamique  $\eta$  est probablement la propriété la plus importante d'un verre pour le thermoformage. D'un point de vue opérationnel, elle traduit sa capacité de mise en forme. Plus la température est élevée, plus la viscosité est basse et plus le verre est malléable.

Ce phénomène peut s'expliquer d'un point de vue structural. À température ambiante, l'énergie nécessaire pour rompre les liaisons Si-O dans le verre n'est pas assez importante pour qu'il y ait un réarrangement de la matière et on ne constate donc aucune déformation, même sur de grandes échelles de temps. En revanche, plus la température augmente, plus le nombre de liaisons rompues dans le verre est important, les possibilités de déplacement ne sont donc plus limitées et l'on observe une déformation du verre d'un point de vue macroscopique.

Analytiquement,  $\eta$  traduit le rapport entre la contrainte appliquée  $\sigma$  et la vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}$  :

$$\eta = \frac{\sigma}{\dot{\gamma}} \quad (1.5)$$

La figure 1.13 représente la viscosité en fonction de la température. Du fait de sa grande variabilité, elle est tracée en échelle logarithmique.

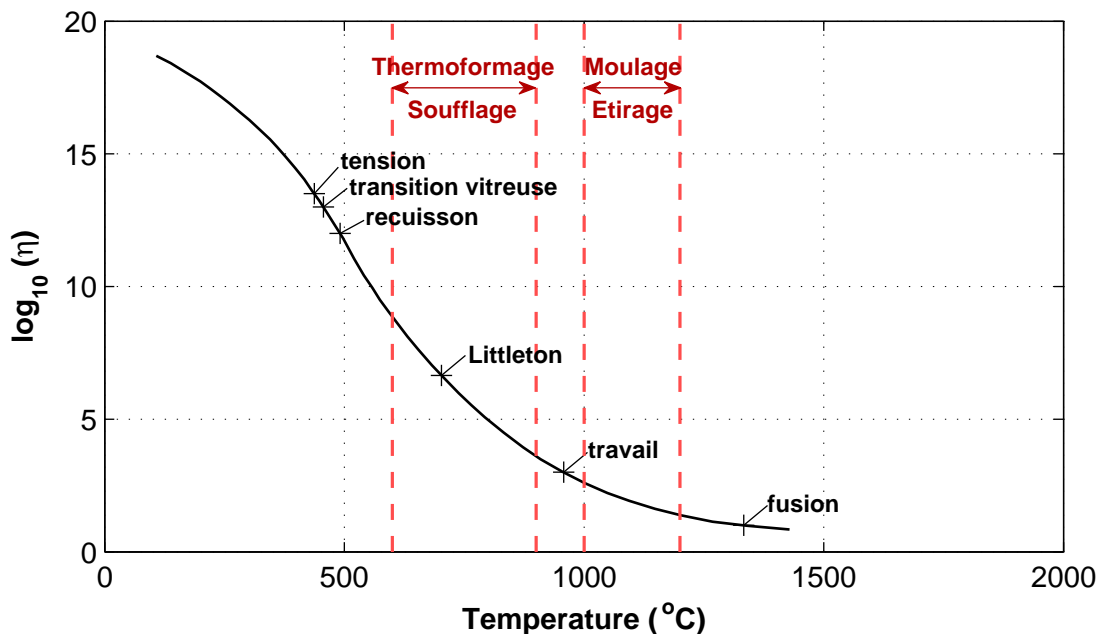


FIGURE 1.13 – Viscosité d'un verre silico-sodo-calcique en fonction de la température

Au point de tension ( $\eta = 10^{13,5}$  Pa.s), un maintien en température de 4 heures élimine les contraintes mécaniques résiduelles du verre. Si celles-ci sont trop importantes, le verre peut rompre en conditions d'utilisation. Dans le même ordre d'idées, un maintien de 15 minutes à la température du point de recuisson ( $\eta = 10^{12}$  Pa.s) permet d'obtenir des valeurs de contraintes résiduelles commercialement acceptables. Comme il a déjà été précisé dans la section « défini-

tion » du verre, la transition vitreuse correspond à l'intervalle de viscosité compris entre  $10^{12}$  et  $10^{14}$  Pa.s avec  $T_g$  généralement comprise entre 500 °C et 600 °C. Au-delà de 600 °C, la viscosité devient suffisamment basse pour permettre les opérations de thermoformage. Le point fixe de Littleton, ou point de ramollissement, indique une viscosité  $\eta = 10^{6,6}$  Pa.s, valeur à laquelle les opérations de soufflage peuvent être réalisées. Pour des températures de l'ordre de 1000 °C et au-delà, la viscosité chute autour de  $10^3$  Pa.s et le verre devient suffisamment malléable pour être mis en forme par moulage ou étirage. À la température de fusion, la viscosité du verre n'est plus que de 10 Pa.s.

Un verre est dit « court » lorsque sa viscosité varie rapidement en fonction de la température. À l'inverse, si sa viscosité varie lentement sur un grand intervalle de température, il s'agit d'un verre long. Ce dernier type de verre est mieux adapté aux opérations de soufflage des artisans verriers car cela leur laisse plus de temps pour le travailler.

En général, les valeurs de viscosité en fonction de la température sont traduites sous la forme de lois. Elles dépendent de différents paramètres qui sont déterminés soit théoriquement, soit de manière empirique. Cet aspect sera abordé plus en détails dans le chapitre 3 dédié à la modélisation du comportement thermomécanique du verre.

## 1.4 Conclusion

Le verre peut être défini comme un solide obtenu par le refroidissement rapide d'un liquide surfondu n'ayant pas cristallisé. Lorsque la température d'un verre est inférieure à sa température de transition vitreuse  $T_g$ , son état structural est figé. En effet, la viscosité à  $T_g$  est généralement comprise entre  $10^{12}$  et  $10^{14}$ , ce qui empêche la relaxation du verre à une échelle macroscopique. Le verre présente une structure amorphe, c'est-à-dire que les atomes ne présentent pas de motif répétitif sur de grandes distances, à l'inverse d'une structure cristallisée. Cette hypothèse dite du réseau désordonné a été proposée en 1932 par Zachariasen puis confirmée quelques années plus tard par Warren, par diffraction des rayons X. Bien que perfectionné depuis, ce modèle est devenu un classique de la littérature scientifique sur le verre.

Le verre de composition silico-sodo-calcique classique, qui constitue le vitrage des bâtiments et d'un grand nombre de véhicules, est composé majoritairement de silice  $\text{SiO}_2$  assurant un rôle de formateur de réseau, d'oxydes de sodium  $\text{Na}_2\text{O}$  et de potassium  $\text{MgO}$  qui vont abaisser le point de fusion, d'alumine  $\text{Al}_2\text{O}_3$  et d'oxyde de calcium  $\text{CaO}$  qui vont renforcer la stabilité chimique du verre. Dans un premier temps, ces matières premières sont chauffées à une température de l'ordre de 1500 °C avant d'être mélangées puis débarrassées de leurs composés gazeux, pour être finalement transportées par des feeders jusqu'aux machines de formage pour l'obtention du produit final.

Des caractéristiques physiques du verre va dépendre sa mise en forme. La viscosité apparaît comme le paramètre-clé car elle varie très fortement en fonction de la température et traduit le

degré de formabilité du verre.

Concernant les autres propriétés, certaines sont très dépendantes de la composition du verre et d'autres moins. Pour les propriétés mécaniques, à l'exception de la viscosité, la composition du verre importe peu sur les valeurs des différentes grandeurs. En revanche, elle peut avoir un impact non négligeable sur les propriétés thermiques et elle affecte très fortement les propriétés optiques du verre.

Tout ceci nous amène à l'idée que dans un cas idéal, une campagne d'essais doit être menée afin de caractériser précisément les propriétés physiques du verre étudié, tout en tenant compte de la dépendance à la température.

Notons que dans le cadre de ce travail, entièrement consacré à la modélisation numérique, aucune mesure expérimentale n'a été réalisée. Les propriétés du verre implémentées pour valider le modèle numérique proviennent des articles de (Su *et al.*, 2011), (Rubin, 1985) et (Parsa *et al.*, 2005).

Les aspects théoriques concernant le verre ayant été détaillés, le chapitre suivant se focalise plus particulièrement sur le procédé de thermoformage.



## Chapitre 2

# Le thermoformage

Il existe un grand nombre de procédés de mise en forme du verre. Comparativement aux techniques de moulage ou de pressage, l'opération de thermoformage est relativement longue et peut s'avérer plus coûteuse en pratique. Néanmoins, dans l'industrie, le procédé est particulièrement intéressant lorsqu'il s'agit d'obtenir des pièces dont l'état de surface est excellent. En effet, le verre, mis en forme soit en suspension, soit sur un moule, présente au moins une face qui ne rentre en contact avec aucun dispositif de formage. Dans le cadre de l'artisanat et de plus petites productions, le procédé a l'avantage de pouvoir être mis en œuvre avec des moyens matériels relativement limités : un four et un support pour la mise en forme.

La première section de ce chapitre définit ce qu'est le thermoformage et les différentes options de mise en forme. Une courbe type d'un cycle thermique permet d'illustrer chaque phase de l'opération. Dans un second temps, sont présentés des exemples d'application du procédé pour la production de pièces industrielles ou de haute technologie. En l'occurrence, il s'agit de pare-brises ou de moules et miroirs utilisés dans le domaine de l'optique. Le contexte de l'étude est ensuite détaillé, en faisant le point notamment sur les paramètres influant sur le résultat d'un essai de thermoformage et sur les travaux déjà réalisés par L. Soudre au cours de la précédente thèse. En guise de conclusion, sont décrits les objectifs de la modélisation numérique et les moyens dont nous disposons pour la développer.

### 2.1 Description du procédé

Le mot thermoformage renvoie à un procédé en particulier, et pas uniquement, d'un point de vue étymologique, à la mise en forme à chaud, sans quoi tous les procédés de mise en forme du verre pourraient être assimilés à du thermoformage. Concrètement, selon (Beveridge *et al.*, 2005), le thermoformage du verre est un « procédé qui consiste à mettre en forme le verre, en général plat, en le faisant ramollir dans un four sur un support d'une forme déterminée, mais sans qu'il dépasse un certain degré de fluidité ». Il convient de préciser que d'un point de vue mécanique, la variable usitée n'est généralement pas la fluidité mais la viscosité.

Très souvent utilisé pour la conception de pièces en polymères (Jammet, 1998; Illig, 1999), le thermoformage peut être employé dans l'industrie verrière pour la mise en forme :

- des pare-brises (Guardian<sup>®</sup>, Saint-Gobain<sup>®</sup>)(Groombridge *et al.*, 2003) ;
- des lentilles (Schott<sup>®</sup>, Corning<sup>®</sup>)(Stokes, 2000) et autres appareillages d'optique comme les télescopes (Zhang *et al.*, 2003) ;
- des pièces de décoration, de mobilier ou d'art de la table (Arc International<sup>®</sup>, FIAM<sup>®</sup>, Daum<sup>®</sup>, Baccarat<sup>®</sup>) (Beveridge *et al.*, 2005; Soudre, 2008).

Dans le cas des pare-brises, le thermoformage est aussi appelé *bombage*. Par ailleurs, la traduction anglaise courante du thermoformage est *slumping* ou encore *sagging*.

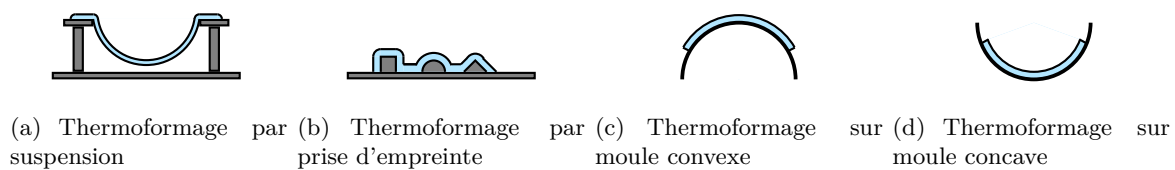


FIGURE 2.1 – Les différentes techniques de thermoformage

Il est possible de distinguer plusieurs types de thermoformage : par suspension, par prise d'empreinte, sur moule convexe ou sur moule concave, avec utilisation ou non d'un pressage mécanique. Ces différentes possibilités sont illustrées sur la figure 2.1. Le thermoformage par suspension est par exemple utilisé pour la mise en forme des pare-brises. Les bords de la plaque de verre sont posés sur des renforts métalliques, l'ensemble de ce cadre pouvant être dénommé squelette (Haussonne *et al.*, 2005). Le thermoformage par prise d'empreinte ou sur moule convexe est plus souvent réservé aux artisans verriers pour la réalisation de pièces d'art et de décoration.

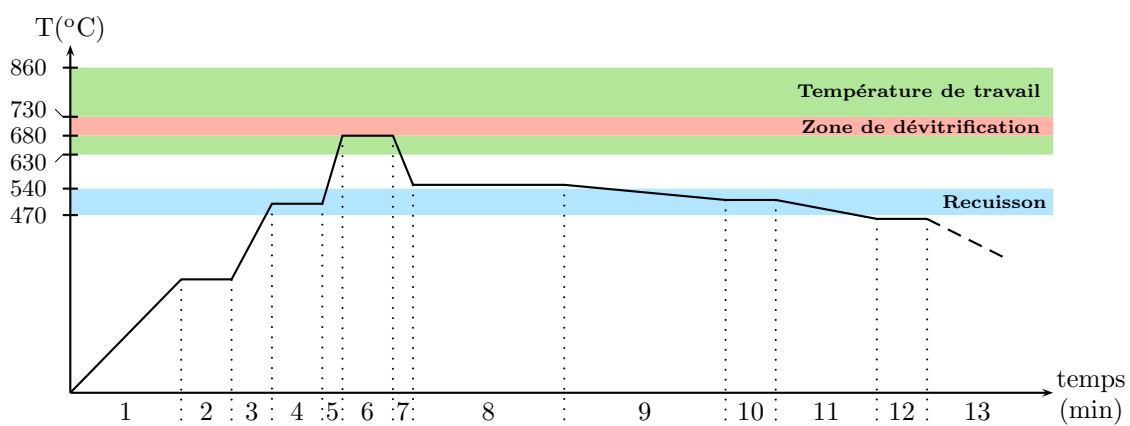


FIGURE 2.2 – Exemple d'une courbe de température d'un cycle de thermoformage

La figure 2.2 montre un exemple type de courbe de thermoformage. La température de consigne du four est tracée en fonction du temps et l'ensemble représente le cycle de mise en forme d'une plaque de 6 mm d'épaisseur.

Lors de la montée en température, les paliers **2** et **4** servent à homogénéiser la température de la pièce pour éviter les chocs thermiques. Le palier **6** correspond à la température de travail. Dans cette gamme de 630°C à 860°C, la viscosité du verre atteint une valeur suffisamment faible pour qu'il soit mis en forme sous l'effet de son propre poids. Dans le cas présenté ici, la température de travail est de l'ordre de 680°C. Il est à noter que si celle-ci avait été supérieure à 730°C, les phases de montée et descente **5** et **7** auraient dues être les plus rapides possibles afin de raccourcir au maximum le passage dans la zone de dévitrification du verre, comprise entre 680°C et 730°C. Si cette condition n'est pas respectée, il existe un risque que la structure atomique du verre soit modifiée et que celui-ci cristallise. La phase **8** consiste en un maintien à la température dite de recuisson qui sert à éviter les contraintes mécaniques résiduelles. Cette phase peut être suivie de deux paliers **10** et **12**, respectivement 40°C et 90°C en-dessous de la température de recuisson, toujours dans un souci d'éviter les chocs thermiques et d'évacuer les contraintes résiduelles. La durée et la température des paliers, ainsi que les phases de montée et descente en température, **1**, **3**, **9**, **11** et **13** sont choisies en fonction du type de verre, de sa géométrie et du résultat final souhaité.

## **2.2 Exemples d'application**

On s'intéresse ici à la mise en œuvre du thermoformage pour des pare-brises ou des pièces d'optique. Les pare-brises sont produits en très grandes quantités d'où l'intérêt d'étudier et d'optimiser le procédé : il est important de réduire les coûts de production ou d'apprendre à concevoir des formes de plus en plus complexes. Pour les pièces d'optique, il s'agit de produire des miroirs qui permettent de focaliser la lumière dans des installations de hautes technologies comme des télescopes ou des dispositifs photovoltaïques. Certains spécialistes cherchent aussi à concevoir des moules pour lentilles polymères, cependant la forme obtenue n'est, pour l'instant, pas optimale.

Sachant que le thermoformage est le procédé le plus utilisé pour la production de pare-brises, le fait de ne retrouver dans la littérature scientifique qu'un faible nombre d'études traitant de sa mise en forme est assez regrettable. Cela s'explique par une volonté de la part des industriels de protéger leur savoir-faire.

Généralement, l'optimisation du thermoformage va s'appuyer sur l'expérience ou la simulation numérique. La première repose sur une méthode d'essais-erreurs. La recherche des paramètres optimaux est menée en répétant les essais et en ajustant les conditions opératoires, ce qui peut représenter un coût matière et une perte de temps élevés. C'est pour cette raison que la simulation numérique est de plus en plus privilégiée : elle permet d'économiser le coût matière. De plus, à long terme, il est possible de mener une analyse inverse. Idéalement, elle consiste à déterminer numériquement et du premier coup les paramètres à imposer pour obtenir le produit final désiré. Pour pouvoir mettre en place une analyse inverse, il est indispensable de disposer d'un modèle



numérique qui respecte fidèlement le comportement réel du verre.

Tous ces aspects sont abordés plus en détail dans les paragraphes suivants.

### **Les pare-brises**

(Manservigi, 2000) remarque que si l'étape de conception d'un pare-brise n'est généralement pas la priorité des concepteurs, qui s'intéressent plus à l'allure globale d'un véhicule, elle n'en reste pas moins une étape cruciale du projet. En effet, si le problème de faisabilité du pare-brise n'a pas été traité en amont, cela peut entraîner des retards dans la conception du prototype. Dans les cas critiques, les concepteurs peuvent être amenés à devoir simplifier la forme du pare-brise pour pouvoir le réaliser.

On distingue deux grandes techniques de mise en forme : par pressage ou par thermoformage (ou bombage dans le cas du pare-brise, « gravity bending process » étant son équivalent anglais). Par pressage, la machine exerce une poussée sur l'ensemble de la surface qu'elle vient plaquer contre une matrice pour lui donner sa forme finale. Cette opération peut se faire de manière verticale (la plaque est perpendiculaire au sol) ou horizontale (la plaque est parallèle au sol). Le procédé de pressage vertical est de moins en moins utilisé car il nécessite le recours à des pinces pour tenir la plaque de verre et elles laissent des marques. On lui préfère alors le pressage horizontal (Lochegnies *et al.*, 1995).

Néanmoins, le thermoformage est de plus en plus privilégié aux dépens du pressage. (Buonanno *et al.*, 2005) affirment même qu'il s'agit du seul procédé qui permette de préserver ses qualités optiques. On notera cependant que cela concerne uniquement le pare-brise avant d'un véhicule. Pour le pare-brise arrière, les contraintes sont différentes car il est généralement élaboré par un pressage suivi d'une trempe.

Bien qu'il apparaisse sous la forme d'une pièce unique, le pare-brise est en fait un assemblage de deux plaques de verre entre lesquelles est placée une feuille de PVB (polyvinyle de butyral). Ce PVB permet d'éviter que le pare-brise vole en éclats lors d'un choc trop violent. L'épaisseur totale du pare-brise est d'environ 4 mm. Une méthode classique pour déterminer la géométrie de la plaque initiale et la forme du squelette consiste à modéliser mathématiquement la forme finale par des courbes de Bézier. (Lochegnies *et al.*, 1996)

Le procédé de fabrication commence par le découpage des deux vitres dans une plaque de verre. Une peinture noire est appliquée sur les bords du pare-brise, ainsi qu'à l'endroit où sera fixé le rétroviseur. Un séparateur est ensuite déposé entre les deux vitres pour éviter qu'elles ne collent lors de la mise en forme puis celles-ci sont placées sur un squelette à l'intérieur d'un « box ». Le squelette a l'avantage, par rapport à un moule, de ne pas marquer le verre sur sa partie centrale. Il permet aussi de réduire le transfert thermique entre le verre et le moule et donc de garder une température relativement homogène à l'intérieur du verre.

Dans le four, le box est mobile et il va se déplacer, par à-coups, à travers les différentes sections

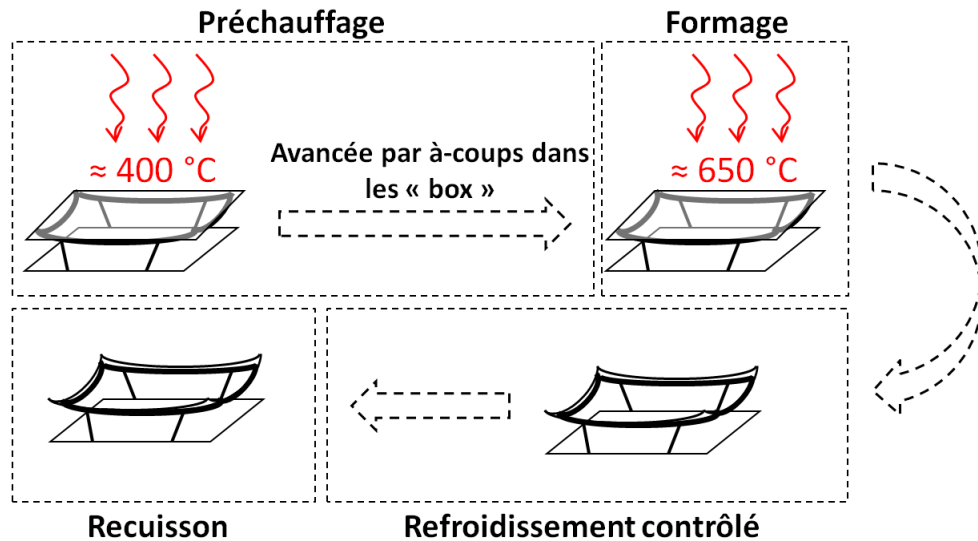


FIGURE 2.3 – Cycle de mise en forme du pare-brise dans le four

qui peuvent elles-mêmes être séparées en plusieurs compartiments. Le nombre total de compartiments est de l'ordre de 15. Dans un premier temps, le verre est préchauffé par des résistances rayonnantes dans l'infrarouge et amené à une température relativement homogène et légèrement inférieure à la température de formage (figure 2.3). S'ensuit la mise en forme, qui s'effectue autour de  $650\text{ °C}$ . Le refroidissement est contrôlé de sorte à éviter les chocs thermiques et l'étape de recuisson va permettre d'évacuer les contraintes résiduelles.

Après la mise en forme, la couche de PVB est insérée entre les deux plaques et l'assemblage est réalisé sous autoclave à une température de  $120\text{ °C}$  et une pression de 10 bars, afin d'évacuer les bulles qui auraient pu se former entre le PVB et le verre. La qualité du pare-brise peut être testée, principalement les rayons de courbure, pour pouvoir s'assurer de sa conformité. Ensuite, lors d'une dernière étape de finition, les supports en mousse ou en plastique sont collés, les branchements pour les différents détecteurs, capteurs, etc., sont alors mis en place.

Les problèmes de mise en forme rencontrés sont majoritairement des défauts géométriques. Afin d'obtenir un pare-brise conforme, celui-ci doit respecter les rayons de courbure spécifiés par les designers. Lors de la montée en température, si le chauffage n'est pas optimal, il peut apparaître des zones dites de « reverse » où le rayon de courbure s'inverse comme illustré sur la figure 2.4. Ces phénomènes sont d'autant plus fréquents que la forme du pare-brise est complexe. Le lien entre le chargement thermique imposé d'une part et la forme obtenue d'autre part est très difficile à établir d'un point de vue expérimental. D'autres problèmes de mise en forme peuvent survenir comme des ondulations au niveau des coins du pare-brise (Manservisi, 2000) ou de non-homogénéité de l'épaisseur (Parsa *et al.*, 2005).

Plusieurs travaux de recherche portent sur cette problématique et la plupart des auteurs tentent

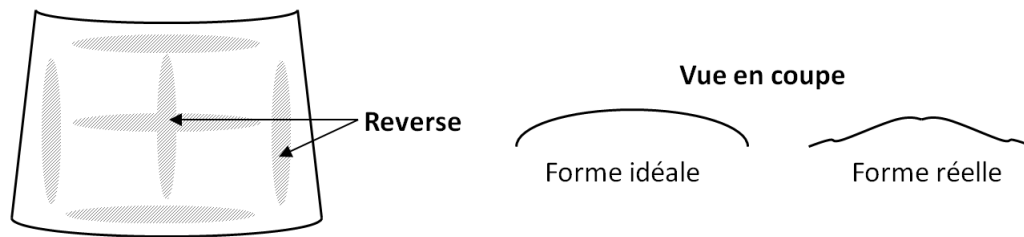


FIGURE 2.4 – Phénomène de reverse pouvant apparaître sur un pare-brise

d’y répondre en procédant à une analyse inverse. Comme le rappelle Manservisi, sans la simulation numérique, l’amélioration du procédé passe par une méthode d’essais-erreurs coûteuse. Parsa *et al.* étudient par exemple la mise en forme d’un pare-brise à 610 °C. À cette température, l’opération dure 60 s (il s’agit ici du maintien à la température de palier et non pas de l’ensemble du cycle thermique). Ils montrent alors qu’il est possible d’augmenter la cadence de production en modifiant la température de palier imposée. En montant à 615 °C et 625 °C, les temps de production passent respectivement à 30 s et 15 s, soit un gain de temps d’un rapport 2 ou 4. Parsa *et al.* proposent aussi d’optimiser le procédé en appliquant un chargement thermique légèrement hétérogène (5 °C d’écart entre la zone la plus chaude et la zone la plus froide). Ceci permet d’obtenir un produit de meilleure qualité d’un point de vue géométrique, ce qui est confirmé aussi bien expérimentalement que numériquement. Cette condition de non-hétérogénéité des températures (jusqu’à un certain point bien évidemment, sans quoi le verre subirait, du fait de la dilatation thermique, des contraintes mécaniques trop importantes) est même jugée comme indispensable par (Buonanno *et al.*, 2005) pour produire des formes complexes. Un chauffage homogène risquerait de générer un rayon de courbure excessif, particulièrement aux bords de la plaque. Afin de s’affranchir de ce problème, il est possible de placer des écrans devant certaines zones du pare-brise pour limiter la quantité de rayonnement reçu.

Au-delà de la modification du chargement thermique non uniforme, (Lochegnies *et al.*, 1995) montrent qu’il est possible d’obtenir la forme finale voulue en changeant la forme initiale de la plaque ou en modifiant la structure du squelette, par un système d’ajustement par vissage. Cependant, dans les cas de géométries complexes, il faut parfois recourir à un pressage dans les zones du pare-brise où le maintien de la qualité optique n’est pas indispensable (généralement en périphérie de la pièce) pour s’assurer de la conformité du produit.

On peut finalement noter qu’il existe expérimentalement de très fortes incertitudes sur la température du verre. Tandis que Parsa *et al.* parlent d’une température de mise en forme entre 610 °C et 625 °C, Manservisi ou Lochegnies *et al.* donnent une température de formage de 650 °C. Bien que cet écart puisse s’expliquer par une différence entre les installations et les modèles de pare-brise étudiés, cela peut aussi être dû aux incertitudes de mesure sur la température. Par exemple, Buonanno *et al.* mettent en place une série de mesures de la température du verre avec

des thermocouples de type K. Sur la base de données fournisseurs, l'incertitude sur les valeurs de température de l'ensemble de la chaîne de mesures est évaluée à  $\pm 30$  °C. Numériquement, les incertitudes sont plutôt dues aux propriétés thermiques du verre et au maillage utilisé.

À ces températures, sachant que la viscosité peut varier de plusieurs ordres de grandeur sur quelques dizaines de degrés, on comprend alors mieux l'intérêt de disposer de modèles numériques fiables et d'appareillages de mesure précis, sans quoi la difficulté inhérente à la maîtrise du procédé devient insurmontable.

### Le matériel d'optique

Il est possible de distinguer deux types d'objets réalisés par thermoformage et applicables au domaine de l'optique : les moules pour les lentilles optiques et les miroirs.

Les moules en verre produits par thermoformage ont comme avantage de présenter une surface très lisse. Ainsi, il est possible de réaliser des lentilles en PVB avec une grande précision (Lochegnies *et al.*, 2010). La mise en forme de la pièce de verre est relativement classique. Le schéma proposé par (Chen et Yi, 2011) représente l'opération en figure 2.5. Dans un premier temps, une préforme de verre est placée sur un moule et chauffée progressivement (figure 2.5-a). Dès que le verre atteint une température de l'ordre de 600 °C, il se déforme suffisamment, par gravité, pour prendre la forme du moule situé en-dessous (figure 2.5-b). Puis la pièce ainsi mise en forme est refroidie puis démoulée (figure 2.5-c). La surface d'intérêt correspond à la surface supérieure

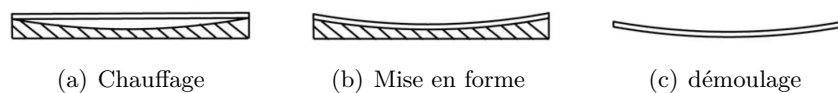


FIGURE 2.5 – Mise en forme d'une pièce d'optique

qui n'est pas en contact avec le moule car son état de surface est préservé.

Les premiers travaux dans le domaine ont été publiés par (Stokes, 2000). Le terme « thermal replication » employé en anglais fait référence à l'idée de dupliquer la forme du moule sur la surface supérieure de la pièce. En pratique, cette opération pose de gros problèmes. Le rayon de courbure de la pièce de verre ne correspond pas exactement à celui du moule, ce qui signifie que la copie n'est pas parfaite.

(Lochegnies *et al.*, 2010) d'une part, Agnon et Stokes (Agnon et Stokes, 2005) d'autre part, proposent d'utiliser la simulation numérique pour résoudre le problème par analyse inverse. Contrairement à la mise en forme du pare-brise, la température ne joue pas un rôle aussi important. Dans le cas où le cycle de consigne est bien contrôlé, la forme finale de la pièce va plutôt dépendre du design du moule et de la géométrie initiale de la préforme. De ce fait, les axes d'amélioration proposés par les auteurs sont de modifier légèrement la forme du moule et de diminuer l'épaisseur de la préforme. En effet, plus l'épaisseur de la préforme est faible, plus la forme finale de la surface supérieure de la pièce ressemble à celle du moule.

Concernant les miroirs, ceux-ci peuvent être utilisés pour le photovoltaïque ou dans le domaine de l'astronomie pour les télescopes. Le moule peut être concave ou convexe, ce qui change complètement la nature du problème. En effet, comme il l'a été montré précédemment, lorsque le moule est concave, la surface supérieure de la pièce est la surface utilisée pour concentrer le rayonnement. Or, cette surface ne correspond pas exactement à la forme du moule. Les problématiques et les conclusions obtenues par (Su *et al.*, 2011; Chen et Yi, 2011) sont donc très proches de celles concernant les moules en verre pour lentilles PVB.

Dans le cas d'un moule convexe, c'est la surface inférieure en contact avec le moule qui sera utilisée pour ses propriétés optiques. Cependant, le moule n'est pas exempt de petits défauts, de rugosité, voire de poussières qui se sont déposées à sa surface. Tous ces éléments peuvent marquer le verre et abîmer sa surface. Cela signifie donc que le rayon de courbure obtenu peut être meilleur qu'avec un moule concave mais au détriment de son état de surface.

Pour se débarrasser des poussières venant polluer le verre, (Ghigo *et al.*, 2009) réalisent la mise en forme sous vide. Pour éviter les problèmes de marquage, le moule est en Zerodur<sup>®</sup>, une céramique à base silicate qui supporte les hautes températures et possède une micro-porosité acceptable. Quant au verre, il s'agit d'un borosilicate. Dans cette étude, l'objectif est de réaliser des miroirs de grande taille : une plaque de 500 mm de diamètre pour 1,7 mm d'épaisseur est mise en forme. Lors de la phase de formage, une pression est appliquée sur le verre pour s'assurer que celui-ci prenne au mieux la forme du moule. Les contraintes résiduelles doivent être évitées à tout prix. Ainsi Ghigo *et al.* ont dû utiliser un cycle en température s'étalant sur 4 jours au lieu de 3 pour diminuer au maximum toutes les contraintes.

Malgré toutes ces précautions, plusieurs problèmes sont apparus. Quelques poussières se sont incrustées dans le verre même si le fait de travailler sous vide a fortement réduit leur nombre. Le verre présente aussi une courbure non homogène. Le rayon de courbure théorique est de 10 m. Après essai, le rayon de courbure est conforme au centre mais plus important sur les bords, et peut atteindre jusque 11,5 m, soit 15 % d'erreur. Ce phénomène serait dû au maintien de la pression de mise en forme pendant le refroidissement. Quand le verre est démoulé, les contraintes induites par la pression se relâchent et le rayon de courbure augmente.

Pour obtenir un rayon de courbure plus conforme, les auteurs proposent de ne plus appliquer la pression pendant de la phase de refroidissement, peu de temps avant d'atteindre la température de transition vitreuse. Pour améliorer l'état de surface de la pièce, ils préconisent de réduire encore la pollution due aux poussières en étant plus méticuleux lors de la mise sous vide.

### **Les méthodes numériques adoptées**

La majorité des simulations numériques du procédé utilisent, pour le modèle mécanique, une approche lagrangienne associée à la méthode des éléments finis (Manservigi, 2000; Parsa *et al.*, 2005; Chen et Yi, 2011). Plus rarement, une approche de type mécanique des fluides est adoptée

(Hunt, 2002). À la température de travail, le verre est souvent considéré comme un fluide purement newtonien (Lochegnies *et al.*, 1996; Chen et Yi, 2011). En ce qui concerne les différents modèles rhéologiques disponibles dans la littérature scientifique, ces aspects ont déjà été traités dans le rapport de thèse de L. Soudre (Soudre, 2008).

Pour la partie thermique, une attention particulière doit être accordée au transfert par rayonnement. En effet, au-dessus de la température de transition vitreuse, le rayonnement peut devenir un mode de transfert majeur. Différentes approches sont adoptées dans la littérature scientifique. Dans les cas les plus basiques, le transfert par rayonnement est purement négligé à l'intérieur du verre ou aux frontières (Chen et Yi, 2011). Une autre possibilité assez simple consiste à imposer la température du verre en la considérant comme homogène sur tout le domaine (Stokes, 2000). D'autres auteurs font le choix de modéliser beaucoup plus finement le transfert radiatif, comme (Buonanno *et al.*, 2005) qui mettent en œuvre une méthode des ordonnées discrètes. Plus globalement, le verre étant un milieu semi-transparent, un grand nombre de méthodes existe. Ces méthodes sont présentées dans le chapitre 4 en faisant le point sur les forces et faiblesses de chacune.

La thermodépendance de la viscosité, paramètre-clé du procédé, est souvent prise en compte par une loi dite VFT (Parsa *et al.*, 2005; Lochegnies *et al.*, 2010) et plus rarement par une loi WLF (Su *et al.*, 2011). Ces aspects sont développés plus en détails dans le chapitre 3.

## 2.3 Intérêt de l'étude

Comme on vient de le montrer précédemment sur plusieurs cas concrets, le thermoformage n'est pas complètement maîtrisé par les verriers. Des problèmes de non-conformité de la pièce sont observés : la géométrie obtenue ne correspond pas à celle souhaitée ou des contraintes résiduelles trop importantes mettent en péril l'intégrité de la pièce.

Cela s'explique par la difficulté de contrôler parfaitement tous les paramètres et de trouver les conditions opératoires optimales. Ce problème concerne d'autant plus les artisans verriers car leurs moyens financiers sont souvent bien moindres que ceux des industriels ou des laboratoires de recherche. Pour réaliser un objet original, il ne leur est pas possible d'avoir recours à la simulation numérique. Seule la coûteuse méthode d'essais-erreurs permettra de respecter le cahier des charges de la pièce. Dans les cas les plus défavorables, il arrive même après plusieurs essais que la pièce ne puisse pas être produite car la géométrie est trop complexe : il est difficile, voire impossible d'obtenir les paramètres qui conviennent.

Il existe une grande diversité des techniques de thermoformage et des objets conçus : englober l'ensemble de ces cas en une seule étude est simplement impossible. Dans un premier temps, il apparait donc comme beaucoup plus raisonnable de recentrer l'étude sur un mode opératoire en particulier, puis, sur du long terme, d'essayer d'extrapoler les résultats obtenus à d'autres configurations d'essai. En l'occurrence, le cas retenu ici est le thermoformage d'une plaque de

verre sur moule concave. Il s'inscrit dans la continuité des travaux de (Soudre, 2008) qui a développé un banc d'essais permettant de mesurer le champ de température et le champ de déplacements en temps réel.

Dans cette section, les paramètres qui influent sur le déroulement d'un essai sont répertoriés puis reliés aux problèmes qui peuvent survenir s'ils ne sont pas maîtrisés. Nous présentons ensuite le four de thermoformage et le banc d'essais développé par Laëtitia Soudre pour étudier le procédé. Finalement, nous nous intéressons aux détails du modèle numérique que nous souhaitons développer et les moyens mis en œuvre pour y parvenir.

### 2.3.1 Les paramètres de l'essai

Il est possible de distinguer globalement trois types de paramètres, ceux associés aux propriétés intrinsèques de la pièce, ceux liés au support choisi et ceux qui dépendent du four. Les principaux problèmes pouvant survenir sont les chocs thermiques, les contraintes résiduelles, la non conformité géométrique de la pièce, le collage ou le marquage du moule sur la surface du verre.

#### La plaque de verre

Avant de procéder à un essai, il est nécessaire de connaître le type de verre mis en forme et les caractéristiques qui lui sont associées. Si ce n'est pas le cas, il existe un risque de mal dimensionner le cycle de température. Lorsque le palier de formage est trop long, cela représente en premier lieu une perte de temps et d'énergie et peut mener, dans un cas critique, à une déformation excessive de la pièce. À l'inverse, lorsque le palier de formage est trop court, la pièce ne peut pas se déformer suffisamment. Il existe aussi le risque d'introduire des contraintes résiduelles si le cycle de refroidissement n'est pas adapté. Plus rarement, des chocs thermiques peuvent survenir si les montées ou descentes en température sont trop rapides.

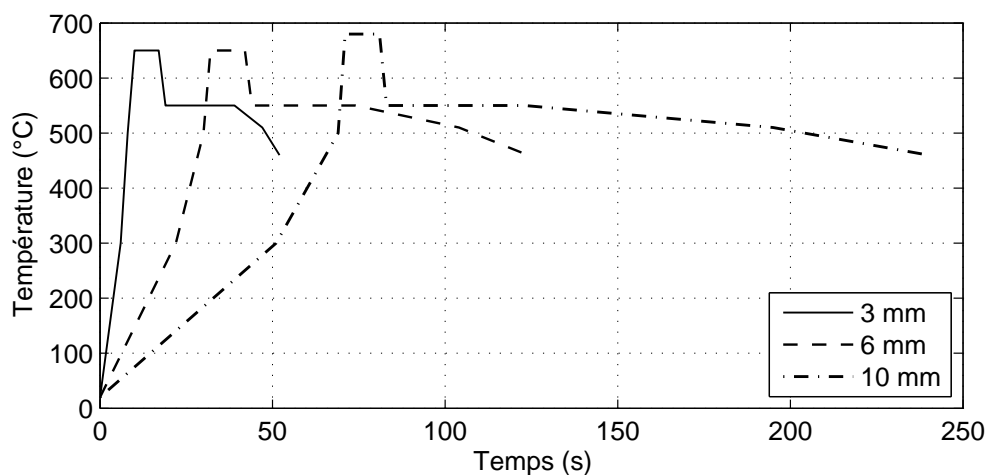


FIGURE 2.6 – Cycle de température en fonction de l'épaisseur d'une plaque de verre de  $35 \times 30$  mm<sup>2</sup> (données CERFAV)

La géométrie du verre a aussi une influence sur l'essai. Plus une pièce est épaisse, plus sa température met du temps à s'homogénéiser. Les cycles de température utilisés par le CERFAV, pour une plaque de verre de  $35 \times 30 \text{ mm}^2$ , le mettent en évidence sur la figure 2.6. La température du palier de mise en forme peut être légèrement augmentée si la pièce est particulièrement massive.

Finalement, la forme initiale de la plaque de verre peut aussi avoir un impact sur l'essai, comme l'ont montré les études citées précédemment concernant les pièces d'optique.

### **Le type de support**

Il est possible de distinguer deux types de support : le moule et le squelette. Dans le premier cas, le verre vient épouser la forme du moule. Dans le second cas, il s'agit de thermoformage en suspension et la géométrie obtenue dépend de la durée et de la température de palier. Pour l'un comme pour l'autre, la forme de la pièce obtenue ne correspond pas exactement à celle désirée (cf. la mise en forme des pare-brises et pièces d'optique), ce qui n'est pas sans poser problème. L'analyse inverse apparaît comme un outil puissant pour améliorer la forme du moule ou du squelette.

Les pare-brises sont généralement produits en utilisant des squelettes en acier inoxydable (Buonanno *et al.*, 2005; Groombridge *et al.*, 2003) tandis que pour les pièces d'optique, il s'agit de moules en céramique (Lochegnies *et al.*, 2010; Agnon et Stokes, 2005). Le fait de favoriser l'acier ou la céramique n'est pas forcément justifié dans les articles cités précédemment. En revanche, une certitude s'en dégage, il ne s'agit pas d'un problème de collage puisque les deux peuvent subir ce phénomène. Dans un article sur le pressage du verre, (Rieser *et al.*, 2008) affirment que ce problème ne dépend pas du matériau utilisé et que le fait de réaliser un dépôt de surface n'a aucune influence. Ils soulignent aussi que les résultats de la littérature scientifique sur le sujet sont contradictoires. Leurs propres expériences montrent que le phénomène de collage peut apparaître pour une température aux alentours de  $550 \text{ }^\circ\text{C}$  et qu'au-delà de  $650 \text{ }^\circ\text{C}$ , il est très probable d'observer un collage entre le moule et le verre. Ces résultats sont confirmés par les études de (Su *et al.*, 2011) et (Chen et Yi, 2011). Dans ces deux études réalisées par le même laboratoire (Department of Integrated Systems Engineering, The Ohio State University, USA), le verre utilisé est un silico-sodo-calcique et le matériau du moule est une céramique MACOR<sup>®</sup>. Dans les travaux de Chen et Yi, la température du palier de mise en forme est de  $620 \text{ }^\circ\text{C}$  et aucun collage n'est observé. En revanche, Su *et al.* observent un collage pour une température de mise en forme de  $680 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Pour éviter ce problème, il est possible d'appliquer un séparateur entre le moule et le verre. Mais celui-ci peut marquer le verre, ce qui dégrade ses qualités optiques. Une alternative consiste à abaisser la température de travail et allonger la durée du palier.

La rugosité du moule et ses propriétés thermiques vont aussi avoir une influence sur le produit



final. La rugosité peut poser problème dans le cas où la face en contact avec le moule représente la surface d'intérêt. Elle aura aussi une influence sur la résistance thermique de contact entre le verre et le moule (Falipou, 1998). En effet, les propriétés thermiques du moule et la qualité du contact vont avoir un impact sur les flux thermiques échangés à l'interface verre/moule. Le champ de température du verre en sera affecté et sa mise en forme aussi.

Pour conclure, à la question « Quel type de moule choisir ? », la simulation numérique et les essais expérimentaux apportent des éléments de réponse et il est nécessaire de rechercher, au cas par cas, le meilleur compromis entre géométrie, propriétés du matériau et qualité optique du moule et ce, sans négliger sa faisabilité et son coût.

### **Le four de thermoformage**

Comme la viscosité du verre dépend de sa température, le cycle thermique de consigne est le paramètre le plus important du procédé puisqu'il conditionne la mise en forme du verre.

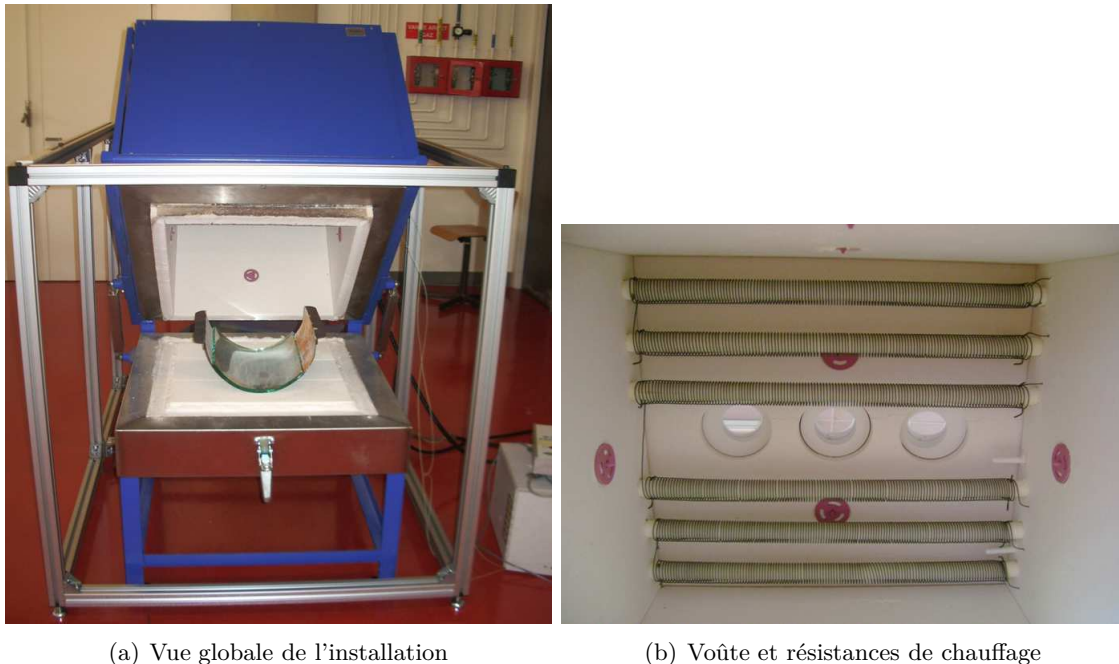
Plusieurs technologies pour le chauffage de la pièce de verre existent. Il peut s'agir d'un chauffage par contact. Cela implique que l'élément chauffant touche le verre, ce qui peut être gênant lors de la phase de déformation. De plus, le chauffage par contact peut induire un fort gradient thermique, ce que nous cherchons à éviter pour avoir une déformation homogène de la pièce et minimiser les contraintes à l'intérieur du verre. Le chauffage par convection est mieux adapté. Seulement, le verre étant un assez mauvais conducteur thermique, le chauffage peut s'avérer beaucoup trop long en pratique.

C'est pourquoi la majorité des fours retenus pour le thermoformage sont équipés de résistances qui rayonnent dans l'infrarouge. Une partie de ce rayonnement est directement reçu par le verre. Une autre partie est réfléchi ou émise par les parois du four ou par le moule. Comme le verre est un matériau semi-transparent sur les courtes longueurs d'onde, une partie du rayonnement est absorbée de manière volumique par la pièce. Sur les plus grandes longueurs d'onde (en général, au-dessus de  $5 \mu\text{m}$  comme le montre la bibliographie sur le sujet), le verre est considéré comme opaque : il absorbe et réfléchit le rayonnement directement à la surface. Sauf dans le cas stationnaire, la température moyenne dans le four est différente de la température de la plaque de verre, cela occasionne donc des échanges par convection entre l'air et la plaque.

De ce fait, au-delà de la température de consigne, la qualité du chauffage influe fortement sur le procédé. Tout d'abord la disposition des résistances peut jouer sur la répartition des flux thermiques dans le four et générer des gradients thermiques plus ou moins importants. Dans le cas du four de thermoformage dont nous disposons au laboratoire ou des fours du CERFAV, les résistances sont placées sur la voûte. Ainsi, une grande quantité de rayonnement arrive directement sur la plaque de verre et permet d'homogénéiser assez rapidement sa température. La puissance totale pouvant être dissipée par les résistances doit être suffisamment forte pour pouvoir élever la température rapidement dans les zones de dévitrification.

### 2.3.2 Description du banc d'essai de thermoformage

Le four de thermoformage, de l'Institut Jean Lamour, est installé dans les locaux de l'École Européenne d'Ingénieurs en Génie des Matériaux (EEIGM). Il s'agit d'un four à cloche électrique à chauffage radiant par le haut, dont la technologie est identique à ceux appartenant au CERFAV. La figure 2.7-a présente une vue globale de l'installation. On observe une plaque de verre qui



(a) Vue globale de l'installation

(b) Voûte et résistances de chauffage

FIGURE 2.7 – Vue du four de thermoformage

vient d'être mise en forme sur le moule, lui-même posé sur la sole. La vue de la figure 2.7-b montre la voûte du four et les résistances de chauffage. La sole, les parois latérales du four et la voûte sont composées de matériaux réfractaires qui réduisent les pertes thermiques et offrent une bonne tenue à haute température.

Le four est équipé d'un appareillage de mesure décrit en détails dans l'article (Soudre-Bau *et al.*, 2013) dont nous allons succinctement décrire le fonctionnement. La voûte du four a été percée pour y placer trois hublots transparents qui permettent de recevoir (ou d'envoyer) un signal depuis l'intérieur du four tout en assurant l'isolation thermique. Par le hublot central (figure 2.8), une caméra infrarouge équipée d'un filtre de Christiansen permet de mesurer la température de surface du verre.

La surface supérieure du verre est recouverte d'une couche d'oxyde blanc sur laquelle est déposé un mouchetis de peinture noire résistante aux hautes températures. Une caméra CCD filme le déplacement de ces points au cours de l'essai. Par une technique de corrélation d'image, il est possible d'obtenir les déplacements dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$  de la plaque de verre (en partant du principe que l'axe  $\vec{z}$  du repère en trois dimensions est orienté vers le haut).

Par le hublot de gauche, un vidéo-projecteur projette des franges sur la surface du verre. La

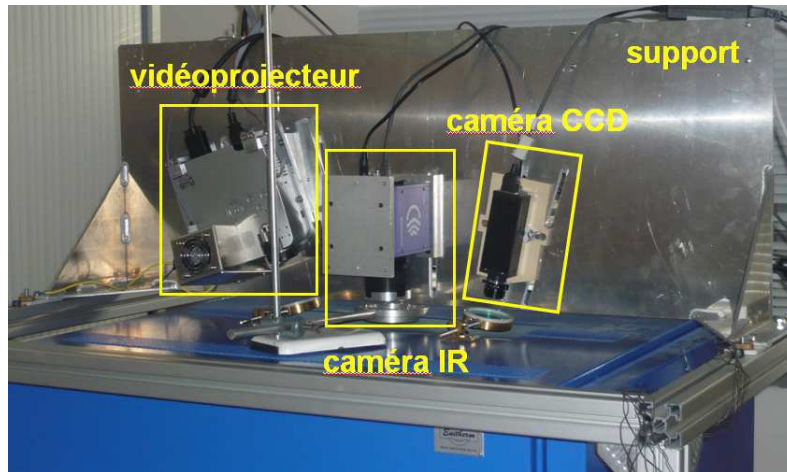


FIGURE 2.8 – Appareillage de mesure du four de thermoformage

largeur de ces franges est modifiée en fonction de la hauteur de la plaque. Cela permet d'évaluer le déplacement de la plaque sur l'axe  $z$ . Le four est donc équipé d'un matériel de mesure des champs de déplacements et de température en temps réel.

Sur la figure 2.9, la température relevée à différentes hauteurs dans le four est tracée en imposant comme température de consigne la courbe typique d'un essai de thermoformage. Les mesures ont été prises par 36 thermocouples de type K, disposés sur une grille qui est parallèle à la sole.

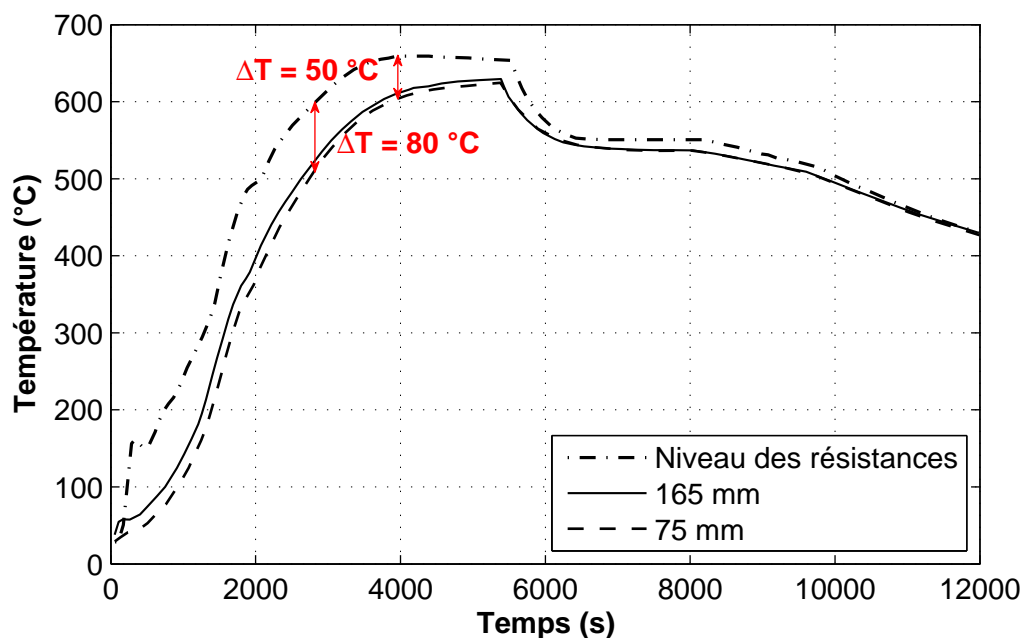


FIGURE 2.9 – Température de l'air à différentes hauteurs dans le four

Ces résultats sont très importants. Ils montrent que l'écart de température relevé entre l'air au niveau des résistances et l'air au niveau du moule (à respectivement 75 et 165 mm de hauteur) peut atteindre jusque 80 °C lorsque la température au niveau des résistances est de 600 °C (à

$t = 2800$  s). La température de  $600$  °C correspond généralement au début du fluage du verre. Or, on voit bien ici qu'il faut distinguer la température des résistances de la température du verre. C'est d'autant plus critique que lors du palier de mise en forme, l'écart reste assez important, autour de  $50$  °C. À cette température,  $50$  °C peut décaler les valeurs prises par la viscosité de plusieurs décades.

Ainsi, il existe des axes d'amélioration concernant le chauffage du verre en choisissant, par exemple, d'imposer la température de consigne en prenant comme référence non plus la température du four mais la température du verre. Cette problématique fait d'ailleurs l'objet d'un projet ANR PROTHERMOVERRE lancé en 2011 (LEMTA, IJL, CRAN, IECN, CERFAV).

### 2.3.3 Développement d'un modèle numérique - Objectifs

Resituons le contexte : le CERFAV a été sollicité par les artisans verriers qui éprouvaient des difficultés à maîtriser le thermoformage. Dans les cas critiques, les artisans sont confrontés à des problèmes de rentabilité du procédé. La méthode d'essais-erreurs s'avère coûteuse sans garantir que la pièce pourra être réalisée à coup sûr, surtout pour les géométries complexes. Pour palier à ce problème, la modélisation numérique apparaît comme un outil très puissant car :

- la simulation numérique permet de se mettre en conditions d'essai en économisant le coût matière ;
- à long terme, un modèle inverse peut être développé avec en ligne de mire, la détermination des paramètres optimaux de l'essai en vue de créer un objet dont on connaît la géométrie finale.

La mise en place d'un modèle numérique passe globalement par trois phases :

- le problème physique est exprimé sous la forme d'équations qui dérivent de modèles théoriques ou de lois empiriques ;
- ensuite, le système d'équations valables pour un problème continu est résolu par des méthodes s'appuyant sur une formulation discrète du problème ;
- finalement, le problème discret est résolu en implémentant les données dans un programme dédié ou en développant son propre code de calcul.

Les deux premières phases reposent sur diverses hypothèses et simplifications qui peuvent être sources d'approximations entre les résultats obtenus numériquement et les résultats de l'essai réel. Pour la dernière phase, il est crucial d'éviter au maximum les erreurs de programmation et donc de valider les codes sur des cas-tests de la littérature.

Dans notre étude, le problème physique peut être séparé en une partie mécanique et une partie thermique. La partie mécanique peut être prise en charge par le logiciel commercial Abaqus<sup>®</sup> qui utilise une méthode éléments finis. Ce type de logiciel est utilisé en industrie depuis des années avec des résultats très satisfaisants. La question de savoir si Abaqus résout la partie

thermique est plus délicate. En effet, Abaqus<sup>®</sup> ne peut pas tenir compte de la complexité des transferts radiatifs dans le verre. Il est donc nécessaire de réaliser un travail de fond pour savoir si le logiciel peut prendre en charge la conduction en traitant la partie rayonnement en externe ou bien s'il faut externaliser l'ensemble du calcul thermique. Cet aspect sera abordé plus en détails dans la suite du rapport.

Par rapport aux éléments exposés ci-dessus, pour développer la modélisation numérique du thermoformage, il sera nécessaire de répondre aux questions suivantes :

- D'un point de vue thermomécanique, quelles sont les lois de comportement retenues pour modéliser le comportement du verre ?
- Comment modéliser les transferts radiatifs et quelle méthode utiliser ?
- Abaqus<sup>®</sup> peut-il prendre en charge une partie du calcul thermique ? Quelle solution est adoptée, comment est-elle mise en place et pour quels résultats ?

Afin de mener à bien le projet, nous disposons d'une station de travail HP Z820 équipée d'un processeur Intel Xeon.

## Chapitre 3

# Modélisation du comportement thermomécanique du verre

Les aspects mécaniques et thermiques sont fortement liés en ce qui concerne la modélisation de la mise en forme du verre.

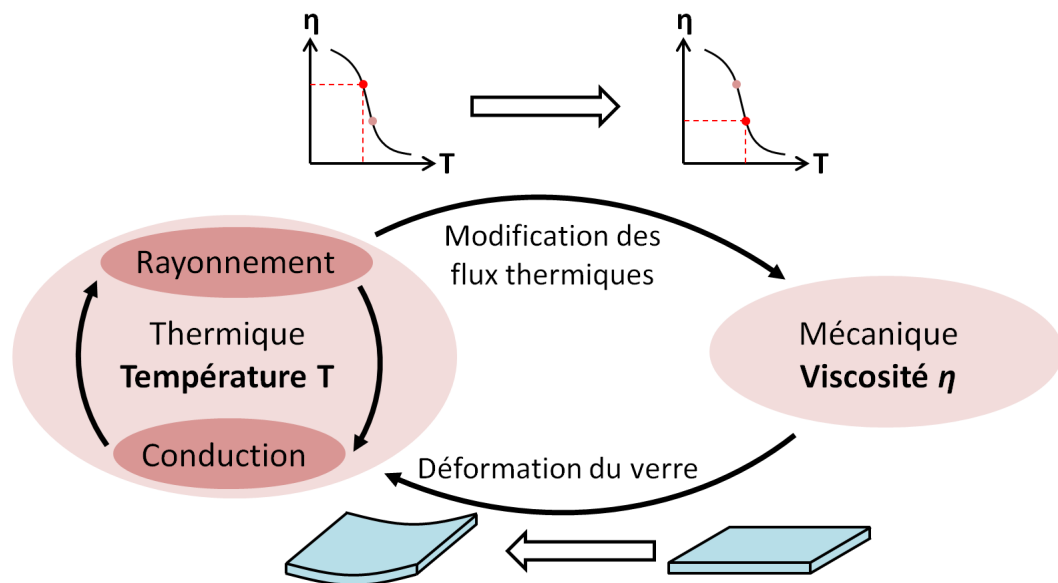


FIGURE 3.1 – Couplage thermomécanique

La figure 3.1 illustre la problématique. D'une part, la viscosité  $\eta$  (mais aussi, dans une moindre mesure, le module d'Young  $E$ , le coefficient de Poisson  $\nu$ , etc.) est fortement thermodépendante et contrôle la vitesse de déformation du verre : dans la zone de formage, une variation de 10 °C peut entraîner une chute d'une décade de la viscosité. D'autre part, lorsque la plaque de verre change de forme, cela amène une modification sensible des flux thermiques et la température du verre varie. Cela signifie que la déformation mécanique du verre affecte sa température et vice versa, ce qui induit un fort couplage thermomécanique.

Un couplage existe aussi entre conduction et rayonnement. En effet, dans l'équation de la chaleur,

qui régit le transfert thermique, la variation de température d'un élément de volume dépend aussi bien du transfert par conduction que du transfert par rayonnement.

Afin de modéliser le comportement du verre, les équations associées à la partie mécanique sont présentées dans la première partie du chapitre et la deuxième partie est consacrée au transfert thermique.

### 3.1 Modélisation du comportement mécanique

En premier lieu, on retient l'hypothèse que le verre est un milieu continu. Cela signifie que le domaine étudié est suffisamment grand pour être considéré comme homogène et traité d'un point de vue macroscopique.

Dans le cadre de la modélisation de la mise en forme du verre par thermoformage, deux grandeurs mécaniques présentent un intérêt primordial :

- le vecteur déplacement  $\vec{u}$  qui permet de déterminer la forme finale de la pièce à partir de sa forme initiale à la condition qu'il soit connu en tous points et à tout instant  $t$  ;
- le tenseur des contraintes  $\overline{\sigma}$  dont les valeurs permettent d'indiquer l'état de tension dans lequel se trouve le verre et ainsi de savoir s'il est susceptible de subir un choc thermique ou s'il existe des contraintes résiduelles.

Le principe fondamental de la dynamique (PFD), aussi appelé équation locale du mouvement, fait intervenir trois équations dont les inconnues sont les composantes du vecteur déplacement  $\vec{u}$ . Afin de résoudre le système, il est nécessaire de relier, d'une part, les déplacements  $\vec{u}$  au tenseur des déformations  $\overline{\epsilon}$ , et d'autre part, le tenseur des déformations  $\overline{\epsilon}$  au tenseur des contraintes  $\overline{\sigma}$  en utilisant une loi de comportement. Dans le cas du verre à la température de travail, la loi de comportement est relativement complexe puisqu'elle fait intervenir un modèle rhéologique, ce qui induit une relation non-linéaire entre contraintes et déformations. Il est nécessaire de disposer des valeurs de viscosité en fonction de la température. Elles seront calculées grâce à des lois semi-empiriques.

#### 3.1.1 Équations de base

##### Principe fondamental de la dynamique

Le PFD est une application de la seconde loi de Newton. Il associe le vecteur accélération  $\vec{\gamma}$  aux tenseur des contraintes  $\overline{\sigma}$  et au vecteur des forces volumiques  $\vec{f}$  (Maya, 2013) :

$$\rho_v \vec{\gamma} = \rho_v \frac{D}{Dt} \left( \frac{D\vec{u}}{Dt} \right) = \overline{\text{div}(\overline{\sigma})} + \vec{f} \quad (3.1)$$

$\rho_v$  est la masse volumique du matériau,  $t$  est le temps. Dans notre cas,  $\vec{f}$  est associé à la pesanteur et s'exprime comme  $\vec{f} = \rho_v \vec{g}$ .

L'opérateur différentiel  $D/Dt$  (dérivée particulière) est défini comme :

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(f) \quad (3.2)$$

Avec  $f$  une fonction quelconque définie et dérivable sur l'ensemble du domaine.

### Lien entre déplacements et déformations

Soit un point matériel dont les coordonnées sont définies par le vecteur  $\vec{X}_0$  à l'état initial et le vecteur  $\vec{X}(\vec{X}_0, t)$  au cours du temps. Le tenseur gradient de la déformation, aussi appelé matrice jacobienne s'écrit par définition :

$$\overline{\overline{F}}(\vec{X}, t) = \frac{\partial \vec{X}(\vec{X}_0, t)}{\partial \vec{X}_0} \quad (3.3)$$

On définit ensuite le tenseur  $\overline{\overline{E}}$  de Green-Lagrange comme :

$$\overline{\overline{E}} = \frac{1}{2} \left( {}^t \overline{\overline{F}} \cdot \overline{\overline{F}} - \overline{\overline{I}} \right) \quad (3.4)$$

$\overline{\overline{I}}$  est la matrice identité. Le tenseur  $\overline{\overline{E}}$  est symétrique. D'un point de vue physique, la composante  $E_{ii}$  du tenseur  $\overline{\overline{E}}$  représente le changement relatif de longueur d'un vecteur orienté dans la direction  $i$ . La composante  $E_{ij}$  traduit la variation d'angle entre un vecteur orienté dans la direction  $i$  et la direction  $j$ . Sachant que le tenseur gradient de déformations peut s'écrire en fonction des déplacements :

$$\overline{\overline{F}} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \vec{X}_0} = \frac{\partial (\vec{X}_0 + \vec{u})}{\partial \vec{X}_0} = \overline{\overline{I}} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}_0} = \overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\text{grad}}}(\vec{u}) \quad (3.5)$$

En substituant dans 3.4, on obtient :

$$\overline{\overline{E}} = \frac{1}{2} \left( \overline{\overline{\text{grad}}}(\vec{u}) + {}^t \overline{\overline{\text{grad}}}(\vec{u}) + \overline{\overline{\text{grad}}}(\vec{u}) \cdot {}^t \overline{\overline{\text{grad}}}(\vec{u}) \right) \quad (3.6)$$

Dans le cas où la matière se déforme peu, c'est-à-dire pour des déformations inférieures à 10% (Lemaitre *et al.*, 2007), il est possible de retenir l'hypothèse des petites perturbations (ou petits gradients de déplacement). Elle implique que le lien entre le vecteur déplacement et le tenseur des déformations est :

$$\overline{\overline{E}} \simeq \overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left( \overline{\overline{\text{grad}}}(\vec{u}) + {}^t \overline{\overline{\text{grad}}}(\vec{u}) \right) \quad (3.7)$$

$\overline{\overline{\varepsilon}}$  est la notation usuelle du tenseur des déformations sous l'hypothèse des petites perturbations.



Dans certains cas, comme celui de la conception d'un pare-brise, les déformations du verre lors de la mise en forme sont cependant trop importantes pour négliger le terme  $\overline{\text{grad}}(\vec{u}) \cdot {}^t \overline{\text{grad}}(\vec{u})$ . Les équations liées aux grandes déformations sont relativement chargées, nous nous limiterons donc dans ce mémoire à l'écriture des lois de comportement en petites déformations bien que les grandes déformations soient utilisées numériquement. Pour plus de détails sur les grandes déformations, il est possible de consulter des ouvrages spécialisés (Rougee, 1997; Dimitrienko, 2011).

### 3.1.2 Loi de comportement

On supposera que le comportement unidimensionnel du verre suit un modèle de Maxwell simple comme illustré sur la figure 3.2 et qu'il est sujet à de la dilatation thermique. L'amortisseur symbolise le comportement du solide visqueux qui correspond à celui d'un fluide newtonien. En 1D, la loi de comportement s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}_\eta = \frac{1}{\eta(T)} \sigma_\eta \quad (3.8)$$

$\eta$  est la viscosité qui caractérise la vitesse de déformation du matériau en fonction de la contrainte imposée. Cela signifie que lorsque le solide est sollicité, il se déforme continûment et lorsque cette contrainte cesse, la déformation est rémanente.

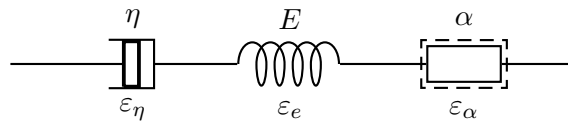


FIGURE 3.2 – Modèle rhéologique de Maxwell

Le ressort représente le comportement linéaire élastique qui s'écrit en 1D sous la forme de la loi de Hooke :

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma_e}{E} \quad (3.9)$$

La déformation est proportionnelle à la force appliquée. Lorsqu'un solide est mis sous contraintes puis relâché, il revient instantanément dans sa position initiale.

A température ambiante, c'est la déformation élastique qui est prépondérante. La déformation visqueuse est quasi-inexistante car la viscosité est très grande. A l'inverse, pour une température supérieure à 600 °C, la viscosité devient suffisamment faible pour que le verre soit mis en forme par gravité. La déformation élastique est alors négligeable.

Il existe aussi un phénomène de dilatation thermique qui implique une déformation  $\varepsilon_\alpha$  lors d'une variation de température  $\dot{T}$  :

$$\varepsilon_\alpha = \alpha_L \dot{T} \quad (3.10)$$

$\alpha_L$  caractérise la variation de longueur.

Dans le cas du modèle de Maxwell, la contrainte  $\sigma$  appliquée au système est identique pour chaque élément :  $\sigma = \sigma_\eta = \sigma_e = \sigma_\alpha$ . En revanche, la déformation totale est égale à la somme de la déformation élastique, de la déformation visqueuse et de la dilatation thermique :

$$\varepsilon = \varepsilon_\eta + \varepsilon_e + \varepsilon_\alpha \quad (3.11)$$

En associant toutes les équations de 3.8 à 3.11, il est possible de relier déformation et contrainte :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} + \alpha_L \dot{T} \quad (3.12)$$

Il s'agit de la forme 1D de l'équation. Lorsque celle-ci est généralisée en trois dimensions (Richter, 2006; Richter et Hoffmann, 2011), elle devient :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2G} \dot{\sigma} + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3K} - \frac{1}{2G} \right) \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + \frac{1}{2\eta_s} \sigma_{ij} + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3\eta_b} - \frac{1}{2\eta_s} \right) \sigma_{kk} \delta_{ij} + \alpha \dot{T} \delta_{ij} \quad (3.13)$$

$\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si  $i = j$  et 0 sinon.  $G$  et  $K$  sont respectivement les modules de cisaillement et de compressibilité. Par analogie  $\eta_s$  et  $\eta_b$  peuvent être assimilés aux modules visqueux de cisaillement et de compressibilité. Les indices  $s$  et  $b$  correspondent aux termes anglais *shear* et *bulk*. Leur expression est :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu_p)} \quad (3.14)$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu_p)} \quad (3.15)$$

$$\eta_s = \frac{\eta}{2(1 + \nu_\eta)} \quad (3.16)$$

$$\eta_b = \frac{\eta}{3(1 - 2\nu_\eta)} \quad (3.17)$$

Dans la réalité,  $E$ ,  $\nu_p$  et  $\nu_\eta$  ( $\nu_p$  et  $\nu_\eta$  sont supposés égaux) sont dépendants de la température (Duffrène et Gy, 1997; Duffrène *et al.*, 1998). Cependant les supposer constants est une hypothèse acceptable car bien que ces coefficients varient fortement à haute température, le comportement élastique du verre n'est plus aussi prépondérant qu'à basse température. Certains auteurs considèrent donc le verre comme un fluide Newtonien parfait à haute température (Hyre, 2002; Yi et Jain, 2005), ce qui équivaut à négliger le comportement élastique.

### 3.1.3 Variation de la viscosité en fonction de la température

Différentes lois existent pour modéliser le comportement de la viscosité en fonction de la température. La plus simple est la loi d'Arrhénius. Elle dérive d'un modèle de glissement des plans

d'atomes dû à un processus thermiquement activé (Zarzycki, 1982) qui peut s'écrire comme :

$$\eta = \eta_0 \exp\left(\frac{\Delta G}{k_B T}\right) \quad (3.18)$$

$\Delta G$  correspond à la barrière de potentiel qu'il faut vaincre pour générer un mouvement à l'échelle atomique.  $k_B$  correspond à la constante de Boltzmann. En pratique, l'équation s'exprime en fonction de deux paramètres  $A$  et  $B$  (Mishra et Dubey, 2009; Hirma et Han, 2012) :

$$\log \eta(T) = A + \frac{B}{T} \quad (3.19)$$

$A$  et  $B$  sont identifiés en utilisant au minimum deux valeurs de viscosité à des températures différentes. Cependant, comme le remarque (Scholze, 1980), les valeurs sont correctes soit pour des viscosités très élevées, soit pour des viscosités très faibles. En effet, sur la figure 3.3 où la

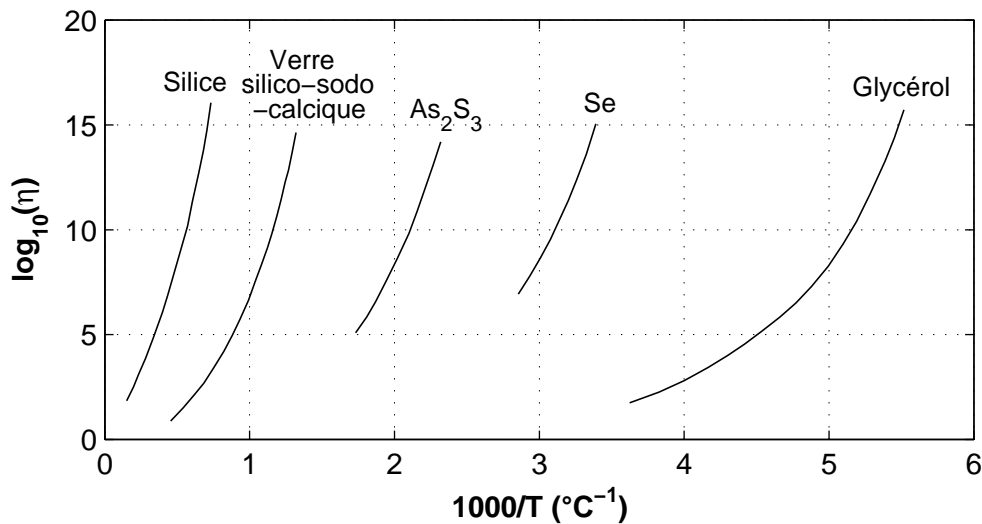


FIGURE 3.3 – Viscosité de différents verres (Zarzycki, 1982)

viscosité est représentée sur une échelle logarithmique en fonction de l'inverse de la température, on constate que les courbes obtenues pour différents types de verres ne sont pas linéaires. De ce fait, la relation 3.19 est difficilement applicable pour les valeurs de viscosité dans la gamme de température proche de  $T_g$  et au-delà.

Ainsi, les lois empiriques de Vogel-Fulcher-Tamman (VFT) ou Williams-Landel-Ferry (WLF) sont souvent préférées à la loi d'Arrhénius (Grégoire *et al.* (2007); Chen et Yi (2011); Su *et al.* (2011)).

La loi VFT (Fulcher, 1925) s'écrit sous la forme :

$$\log \eta(T) = A + \frac{B}{T - T_0} \quad (3.20)$$

La VFT permet une bonne représentation des valeurs de viscosité notamment pour les températures de travail. Pour pouvoir identifier les paramètres  $A$ ,  $B$ , et  $T_0$ , les trois points de viscosité fixes peuvent être utilisés.

La loi WLF (Williams *et al.*, 1955) s'exprime comme :

$$\eta(T) = \eta(T_0) \times 10^{\left(\frac{C_1(T-T_0)}{C_2+(T-T_0)}\right)} \quad (3.21)$$

Avec  $\eta(T_0)$ ,  $C_1$  et  $C_2$  les paramètres à déterminer. Il existe des études théoriques afin de justifier les équations VFT (Dagdug, 2000) et WLF (Macedo et Litovitz, 1965) mais nous ne rentrerons pas ici dans les détails.

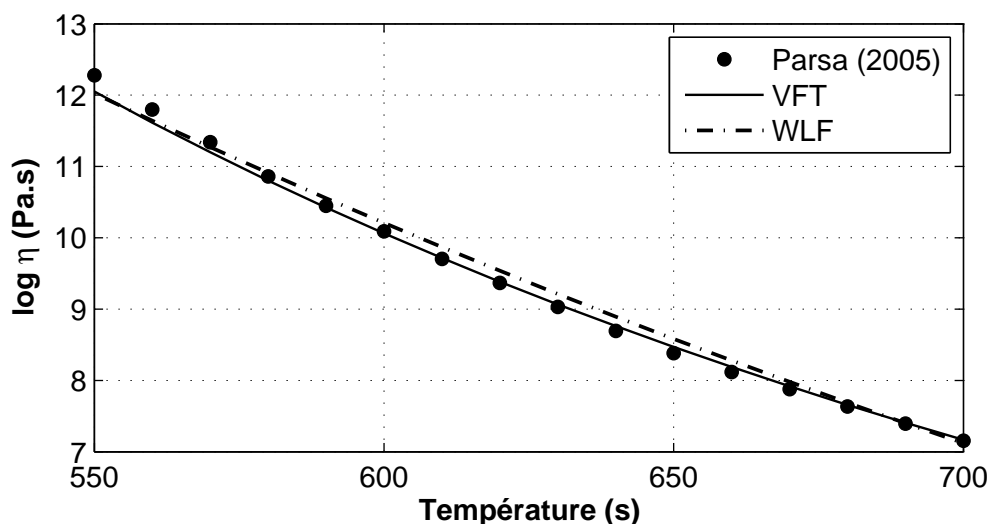


FIGURE 3.4 – Courbes WLF et VFT obtenues en utilisant les données expérimentales de (Parsa *et al.*, 2005)

Utiliser la loi VFT ou la loi WLF présente peu de différences. Mathématiquement, il n'y a pas d'équivalence théorique entre les deux courbes, cependant elles offrent des variations similaires pour des températures proche de  $T_g$  et au-delà. Ce dernier point est mis en évidence sur la figure 3.4. Les données expérimentales pour un verre silico-sodo-calcique sont les valeurs de viscosité mesurées par (Parsa *et al.*, 2005). Dans ce cas précis, l'identification des paramètres de la loi VFT donne  $A = -13.5$ ,  $B = 16500$ ,  $T_0 = 150$  °C. Pour la loi WLF,  $T_0 = 400$  °C est imposée arbitrairement puis les trois paramètres identifiés sont  $\eta(T_0 = 400$  °C) =  $10^{19}$ ,  $C_1 = -40$  et  $C_2 = 710$ . Sur la plage de température allant de 550 à 700 °C, les deux lois présentent la même allure. En général, la loi VFT est plus souvent utilisée car les paramètres  $A$ ,  $B$  et  $T_0$  sont comparables d'une étude à une autre alors que dans le cas de la WLF, les coefficients  $C_1$ ,  $C_2$  et  $\eta(T_0)$  vont dépendre de la température de référence  $T_0$  choisie.

### 3.1.4 Conditions aux limites mécaniques

Les conditions aux limites peuvent être imposées en déplacement ou en contraintes.

Dans le cas de conditions limites en déplacement :

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{u}) \quad \forall \vec{x} \in \partial\Omega \quad (3.22)$$

$\partial\Omega$  désigne la frontière du domaine  $\Omega$  considéré.

Dans le cas de conditions limites en contraintes :

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T}_s(\vec{u}) \quad \forall \vec{x} \in \partial\Omega \quad (3.23)$$

$\vec{n}$  est le vecteur normal à la surface orienté vers l'extérieur.  $\vec{T}_s$  est le vecteur des efforts surfaciques. Dans le cas où les deux types de conditions aux limites sont présents, il s'agit de conditions limites dites mixtes.

## 3.2 Modélisation du transfert thermique

Comme cela a été souligné dans le paragraphe précédent, les caractéristiques mécaniques du verre, particulièrement la viscosité, varient fortement en fonction de la température. C'est pourquoi la connaissance précise du champ de température dans le verre est primordiale pour modéliser finement le thermoformage du verre. De manière générale, il existe trois modes de transfert thermique : conduction, convection et rayonnement. A l'intérieur du verre, les échanges se font par conduction et rayonnement. Les mouvements de matière au sein du verre sont suffisamment faibles pour que le transfert par convection ne soit pas pris en compte. En revanche, les conditions aux limites sont établies en faisant le bilan des flux conductif, convectif et radiatif entrant et sortant à la surface du verre.

### 3.2.1 Résolution de l'équation de la chaleur

En faisant l'hypothèse qu'il n'existe ni source d'énergie, ni convection au sein du verre, l'équation de la chaleur sous sa forme locale s'écrit :

$$\rho_v c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div}(\vec{q}_c + \vec{q}_r) \quad (3.24)$$

$c_p$  est la capacité thermique massique,  $T$  est la température,  $\vec{q}_c$  est le vecteur densité de flux thermique conductif et  $\vec{q}_r$  le vecteur densité de flux radiatif.

### 3.2.2 Transfert thermique par conduction

Un gradient de températures au sein d'un milieu continu génère un transfert d'énergie thermique par conduction. Ce mode de transfert est lié à la diffusion de l'énergie cinétique moyenne des particules, de la zone où l'énergie est la plus élevée à la zone où elle est la plus faible. D'après la loi établie par J. Fourier en 1822 (Sacadura, 1980), le vecteur densité de flux thermique  $\vec{q}_c$  s'exprime comme :

$$\vec{q}_c = -k_c(T) \overrightarrow{\text{grad}}(T) \quad (3.25)$$

La capacité à diffuser l'énergie thermique est caractérisée par la conductivité  $k_c$  qui peut être considérée comme un scalaire dans le cas d'un matériau isotrope comme le verre.

### 3.2.3 Transfert thermique par rayonnement

Tout corps à une température différente de 0K rayonne : il émet ou absorbe des ondes électromagnétiques qui peuvent se propager dans le vide. Le transfert d'énergie par rayonnement est le seul pouvant se produire sans support matériel, à l'inverse du transfert par conduction ou par convection.

Dans le vide, les ondes électromagnétiques se propagent à la vitesse de la lumière  $c_0 = 299792458$  m.s<sup>-1</sup>. Dans un milieu d'indice de réfraction  $n$ , la vitesse de propagation de la lumière  $c$  se calcule par la relation :

$$c = \frac{c_0}{n} \quad (3.26)$$

Chaque onde électromagnétique possède une longueur d'onde  $\lambda$ , qui peut s'exprimer en fonction de sa fréquence  $\nu$  et de sa vitesse  $c$  :

$$\lambda\nu = c \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{c}{\nu} \quad (3.27)$$

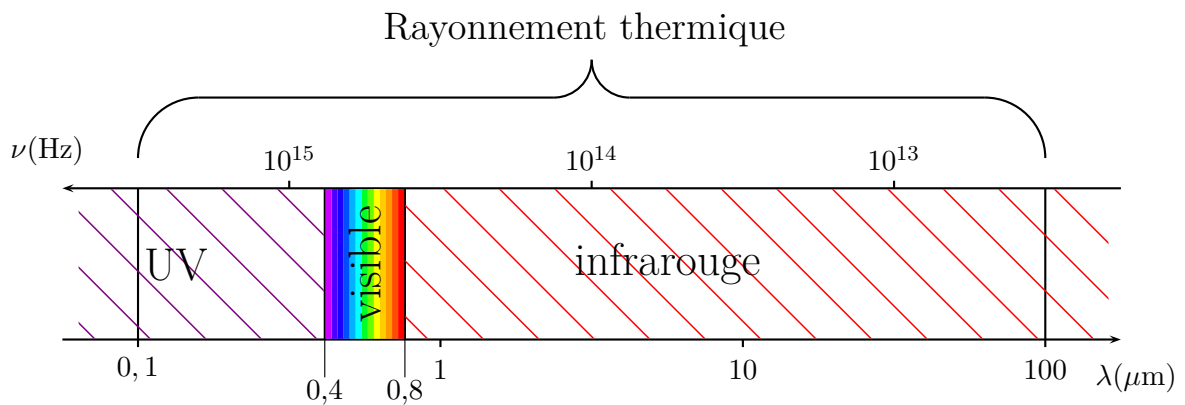


FIGURE 3.5 – Bande de longueurs d'onde du rayonnement thermique

Il existe une grande gamme de longueurs d'onde qui va des ondes gamma (de l'ordre de  $10^{-12}$ m)

aux ondes radios (supérieures à 10m). Comme le montre la figure 3.5, les ondes ayant une influence sur la température de la matière sont comprises dans la gamme UV-visible-infrarouge entre  $0,1\mu\text{m}$  et  $100\mu\text{m}$  (Modest (1993); Sacadura (1980)).

Un échange par rayonnement ne tenant compte que d'une seule longueur d'onde (ou un intervalle de longueur d'onde infinitésimal  $[\lambda; \lambda + d\lambda]$ ) est appelé rayonnement monochromatique.

Dans le cadre des milieux solides dits semi-absorbants, comme le verre, les modèles régissant le transfert radiatif sont généralement plus complexes que ceux décrivant les transferts conductif et convectif. La suite de cette section est donc consacrée à la définition des notions de base du rayonnement thermique.

### Définitions

o Angle solide :

Une source ponctuelle, de coordonnées  $\vec{X}(x, y, z)$  émet du rayonnement dans un ensemble de directions privilégiées centrées autour de la direction  $\vec{s}$ . Cet ensemble de directions est assimilé à un cône comme l'illustre la figure 3.6.

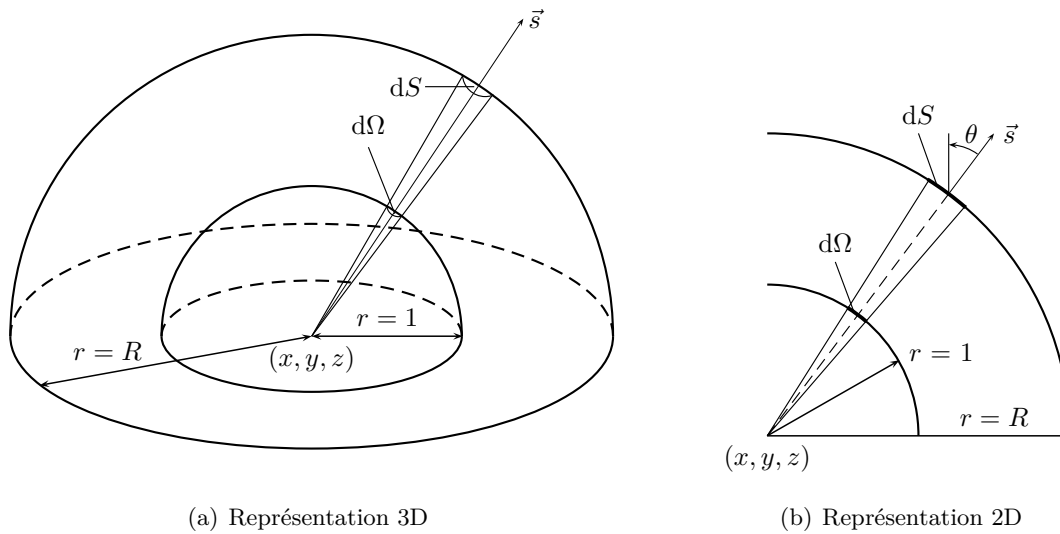


FIGURE 3.6 – Représentation d'un angle solide

L'angle solide infinitésimal  $d\Omega$  est défini comme la surface interceptée par le cône d'émission et la sphère de rayon unité centrée autour de la source ponctuelle. Il s'exprime en stéradians (abrégé : sr). La relation entre  $dS$ , qui est la surface interceptée par le cône et une sphère de rayon  $R$ , et l'angle solide  $d\Omega$  s'écrit :

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2} \quad (3.28)$$

◦ Luminance :

Soient deux éléments de surface  $dS_1$  et  $dS_2$  à une température différente de 0K et séparés par un milieu transparent (qui n'interagit pas avec le rayonnement) comme sur la figure 3.7.

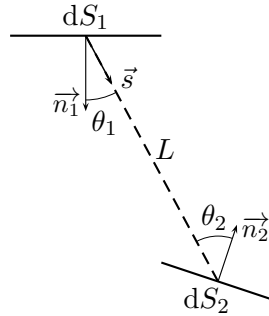


FIGURE 3.7 – Configuration d'échange entre un élément de surface  $dS_1$  et un élément de surface  $dS_2$

Le flux thermique radiatif monochromatique  $dQ_{\nu,1\rightarrow 2}$  émis par l'élément de surface  $dS_1$  et reçu par un élément de surface  $dS_2$  s'exprime comme :

$$dQ_{\nu,1\rightarrow 2} = L_{\nu}(\vec{X}, \vec{s}, T) \frac{dS_1 \cos \theta_1 dS_2 \cos \theta_2}{L^2} d\nu \quad (3.29)$$

$L_{\nu}(\vec{X}, \vec{s}, T)$  est appelée luminance monochromatique ou spectrale. Il est possible d'écrire la luminance en fonction du flux thermique radiatif comme :

$$L_{\nu}(\vec{X}, \vec{s}, T) = dQ_{\nu,1\rightarrow 2} \frac{L^2}{dS_1 \cos \theta_1 dS_2 \cos \theta_2 d\nu} = \frac{dQ_{\nu,1\rightarrow 2}}{d\Omega_1 dS_2 \cos \theta_2 d\nu} \quad (3.30)$$

En générale, l'unité de la luminance spectrale est le  $\text{W.m}^{-2}.\text{sr}^{-1}.\mu\text{m}^{-1}$  lorsqu'elle est exprimée en fonction de la longueur d'onde ( $\mu\text{m}$ ). La luminance spectrale correspond donc à la puissance envoyée par unité de surface projetée (perpendiculairement à la direction) par unité d'angle solide dans une direction  $\vec{s}$  (figure 3.8) par unité spectrale (en longueur d'onde ou en fréquence).

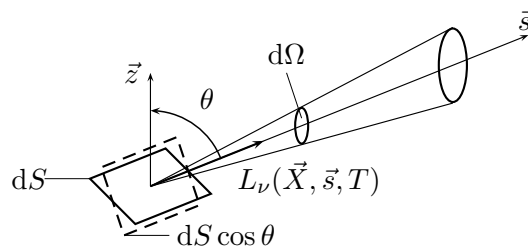


FIGURE 3.8 – Luminance dans la direction  $\vec{s}$



## Notion de corps noir

### ◦ Définition :

Il est défini comme un corps qui absorbe toute l'énergie radiative reçue à sa surface. Dans le même ordre d'idées, il émet le maximum d'énergie thermique radiative que peut rayonner un matériau à une température  $T$  d'équilibre. Il s'agit d'un idéal théorique, en pratique, il n'existe pas de corps noir parfait. Cependant, certains matériaux peuvent se rapprocher du comportement d'un corps noir dans des conditions particulières, comme le plâtre au-delà de  $3 \mu\text{m}$  (Taine *et al.*, 2008). Une enceinte à une température  $T$  dotée d'une très légère ouverture peut faire office de corps noir (Sacadura, 1980).

### ◦ Luminance du corps noir :

Soit un corps noir dont la surface est en contact avec un milieu d'indice  $n$ . Selon la loi de Planck, établie en 1901 (Modest, 1993), la luminance du corps noir, notée  $L_\nu^0(T)$ , s'écrit :

$$L_\nu^0(T) = 2h\nu^3 n^2 \left[ c_0^2 \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1 \right]^{-1} \quad (3.31)$$

Avec :

- la constante de Planck  $h = 6,626.10^{-34}$  J.s
- la constante de Boltzmann  $k_B = 1,3805.10^{-23}$  J.K $^{-1}$

La luminance d'un corps noir ne dépend pas du point d'émission  $\vec{X}$  ou de la direction  $\vec{s}$  mais de la fréquence  $\nu$ , de la température  $T$  et de l'indice  $n$  du milieu environnant. Afin de connaître la puissance rayonnée par un corps noir, il est nécessaire d'intégrer la luminance sur tout le spectre de longueurs d'onde et sur l'ensemble de l'angle solide. Pour ce faire, il faut exprimer l'angle solide en fonction des angles polaire  $\theta$  et azimutal  $\varphi$  comme sur la figure 3.9.

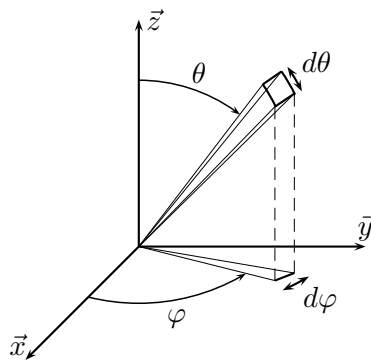


FIGURE 3.9 – Angle solide représenté en utilisant les coordonnées sphériques

La puissance rayonnée par unité de surface, appelée émittance, se calcule alors comme :

$$M^0(T) = \int_0^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} L_\nu(\vec{X}, \vec{s}, T) \cos \theta \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, d\nu = \int_0^{+\infty} \pi L_\nu^0(T) \, d\nu = \sigma_B T^4 \quad (3.32)$$

avec  $\sigma_B$  la constante de Stefan-Boltzmann égale à  $5,67 \cdot 10^{-8} \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ .

◦ Loi de Wien :

La luminance du corps noir en fonction de la longueur d'onde est représentée sur la figure 3.10 pour différentes températures.

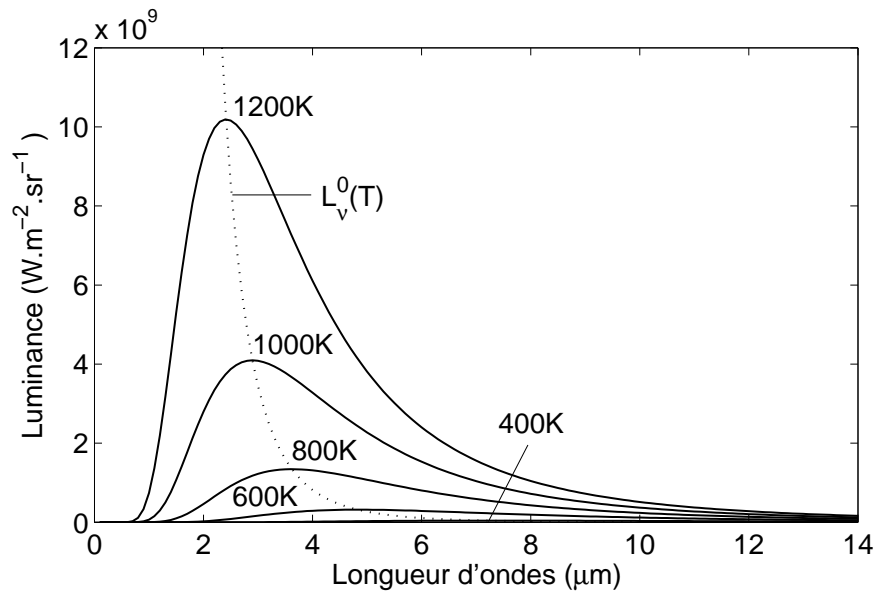


FIGURE 3.10 – Luminance du corps noir en fonction de la longueur d'onde

Pour un corps noir à une température  $T$ , la loi de Wien donne la longueur d'onde  $\lambda_{max}$  à laquelle la luminance spectrale est la plus élevée :

$$T \lambda_{max} = 2898 \text{K} \cdot \mu\text{m} \quad (3.33)$$

Ainsi, plus la température d'un corps est élevée plus le maximum d'énergie radiative émis se déplace vers les courtes longueurs d'onde et donc les hautes fréquences. Cette loi est pratique pour délimiter l'intervalle utile de longueur d'onde ou de fréquence à considérer pour effectuer les calculs radiatifs. Pour donner un ordre d'idées, un intervalle compris entre  $0,5\lambda_{max}$  et  $5\lambda_{max}$  correspond à un peu plus de 95% de l'énergie totale rayonnée par un corps noir (Sacadura, 1980).

### Types de milieux

Il existe des milieux opaques, semi-transparents et transparents. La distinction entre ces trois milieux dépend de la quantité de rayonnement absorbé après avoir parcouru une certaine distance.

◦ Loi de Beer-Lambert :

Soit un flux radiatif de luminance  $L_\nu(s, \vec{s})$  traversant un milieu d'épaisseur  $ds$  dans lequel est négligé, dans un premier temps, les phénomènes dits d'émission propre et de diffusion (qui seront explicités ultérieurement). La loi de Beer-Lambert s'exprime ainsi :

$$dL_\nu(s, \vec{s}) = -\kappa_\nu L_\nu(s, \vec{s}) ds \quad (3.34)$$

$\kappa_\nu$  est le coefficient d'absorption du milieu.

Dans le cas où le coefficient d'absorption est très important, le rayonnement est absorbé sur une très courte distance et il est possible alors d'effectuer les bilans de transfert radiatif à la frontière. Il s'agit alors d'un matériau opaque. Si le coefficient d'absorption est nul ou négligeable, le matériau est alors considéré comme transparent. Si le coefficient d'absorption n'est ni très grand, ni négligeable, le rayonnement est absorbé au fur et à mesure de son trajet et l'on parle alors de milieu semi-transparent.

◦ Le milieu opaque :

Pour un milieu opaque, aussi appelé corps opaque, les échanges par rayonnement s'effectuent uniquement à sa frontière. Ces échanges ont lieu sous la forme d'émission, d'absorption ou de réflexion comme l'illustre la figure 3.11. Lorsqu'un flux incident spectral de luminance  $L_\nu^i(\vec{s}_i, T)$  éclaire la frontière d'un corps opaque, une part caractérisée par la luminance  $L_\nu^a(\vec{s}_a, T)$  est absorbée, l'autre part  $L_\nu^r(\vec{s}_r, T)$  est réfléchi. Le corps opaque émet aussi une part d'énergie radiative qui s'exprime en fonction de la luminance  $L_\nu^e(\vec{s}, T)$ .

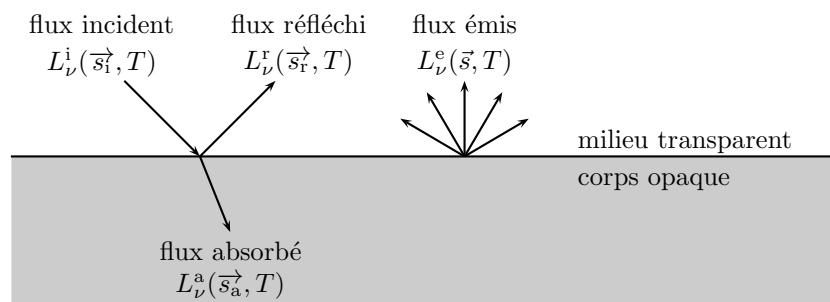


FIGURE 3.11 – Bilan du transfert radiatif à la surface d'un milieu opaque

Afin de quantifier expérimentalement la proportion d'énergie radiative émise, réfléchie ou absorbée, des caractéristiques comme l'émissivité, la réflectivité ou l'absorptivité sont définies.

L'absorptivité spectrale  $\alpha_\nu$  s'écrit comme la part du flux incident à la surface, provenant de toutes les directions et traversant la frontière, qui est absorbée par le matériau :

$$\alpha_\nu = \frac{\int_{2\pi} L_\nu^a(\vec{s}_a, T) \cos \theta_a d\Omega_a}{\int_{2\pi} L_\nu^i(\vec{s}_i, T) \cos \theta_i d\Omega_i} \quad (3.35)$$

Dans le même ordre d'idées, la réflectivité spectrale s'écrit :

$$\rho_\nu = \frac{\int_{2\pi} L_\nu^r(\vec{s}_r, T) \cos \theta_r d\Omega_r}{\int_{2\pi} L_\nu^i(\vec{s}_i, T) \cos \theta_i d\Omega_i} \quad (3.36)$$

Comme le flux incident ne peut être qu'absorbé ou transmis, cela implique :

$$\alpha_\nu + \rho_\nu = 1 \quad (3.37)$$

L'émissivité spectrale, sans unité, correspond au rapport du flux spectral émis par le matériau dans toutes les directions sur le flux émis par un corps noir à la même température :

$$\varepsilon_\nu = \frac{\int_{2\pi} L_\nu^e(\vec{s}, T) \cos \theta d\Omega}{\int_{2\pi} L_\nu^0(\vec{s}, T) \cos \theta d\Omega} = \frac{M_\nu(T)}{M_\nu^0(T)} \quad (3.38)$$

Dans le cas d'un équilibre thermodynamique local, la loi de Kirchhoff induit que :

$$\alpha_\nu = \varepsilon_\nu \quad (3.39)$$

Elle est valable pour des grandeurs directionnelles et peut être étendue aux grandeurs hémisphériques sous l'hypothèse d'un rayonnement diffus.

Remarque : un corps noir est un cas particulier de corps opaque pour lequel  $\varepsilon_\nu = \alpha_\nu = 1$  et  $\rho_\nu = 0$

En général, la réflexion du rayonnement est considérée comme étant soit spéculaire, soit diffuse, comme le montre la figure 3.12.

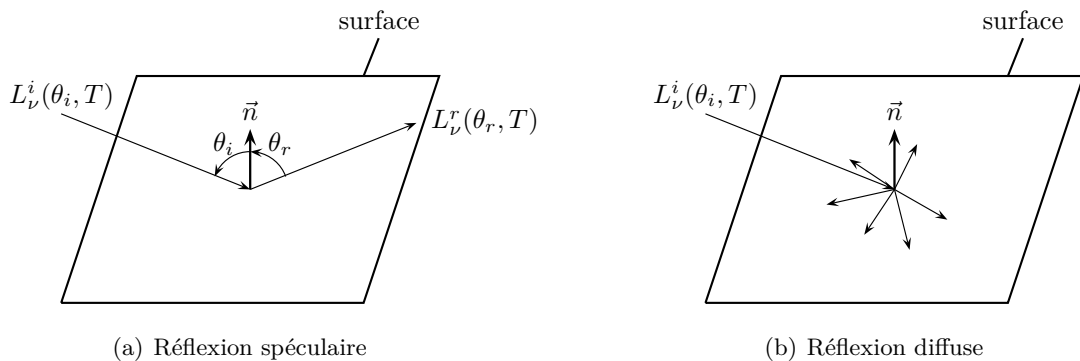


FIGURE 3.12 – Type de réflexion

Lorsque la réflexion est spéculaire, le rayonnement est réfléchi dans le même plan que le rayonnement incident et  $\theta_i = \theta_r$ . Dans le cas d'une réflexion diffuse, il n'existe pas de direction préférentielle et le rayonnement est réfléchi de manière homogène dans toutes les directions.

◦ Le milieu transparent :

Un milieu transparent n'interagit pas avec les ondes électromagnétiques le traversant. Le vide est un milieu transparent et son coefficient d'absorption  $\kappa$  est nul. En faisant l'hypothèse que l'air contient des quantités négligeables de vapeur d'eau ou de dioxyde de carbone, il peut être considéré comme un milieu transparent.

◦ Le milieu semi-transparent :

Dans un milieu semi-transparent, le rayonnement peut être absorbé mais aussi renforcé par émission propre. Il existe aussi un phénomène de diffusion, c'est-à-dire modification de la direction de propagation du rayonnement, qui peut soit renforcer, soit atténuer le rayonnement. En général, les flux radiatifs dans un milieu semi-transparent sont calculés en établissant l'Équation de Transfert Radiatif (E.T.R.) et en la résolvant via des méthodes numériques. Ainsi, il faut exprimer la variation de luminance  $dL_\nu(s, \vec{s}, T)$  le long d'un chemin optique d'abscisse  $s$  orienté dans la direction  $\vec{s}$ .

Le phénomène d'absorption a été abordé précédemment et se traduit analytiquement par la loi de Beer-Lambert (éq. (3.34)). Le renforcement de la luminance par émission propre du milieu s'écrit (Modest, 1993) :

$$dL_\nu^e(s, \vec{s}, T) = \kappa_\nu L_\nu^0(T) ds \quad (3.40)$$

Le phénomène de diffusion du rayonnement peut entraîner :

- une atténuation du rayonnement car une partie du rayonnement orienté dans la direction  $\vec{s}$  se réoriente dans une nouvelle direction  $\vec{s}'$ ,
- un renforcement du rayonnement car le rayonnement orienté dans une direction  $\vec{s}'$  peut se réorienter dans la direction  $\vec{s}$ .

La proportion de pertes par diffusion est donnée par le coefficient de diffusion spectral  $\sigma_{d,\nu}$  comme :

$$dL_\nu^{d-}(s, \vec{s}, T) = -\sigma_{d,\nu} L_\nu(s, \vec{s}, T) ds \quad (3.41)$$

Le renforcement du flux par diffusion s'écrit :

$$dL_\nu^{d+}(s, \vec{s}, T) = \frac{\sigma_{d,\nu}}{4\pi} \int_{4\pi} \Phi_\nu(\vec{s}' \rightarrow \vec{s}) L_\nu(s, \vec{s}', T) d\Omega ds \quad (3.42)$$

$\Phi_\nu(\vec{s}' \rightarrow \vec{s})$  est la fonction de phase. Elle traduit la densité de probabilité du changement de direction de  $\vec{s}'$  vers  $\vec{s}$ .

En regroupant tous les termes de pertes par diffusion et absorption ainsi que les gains par diffusion et émission propre, il est possible d'établir l'équation de transfert radiatif :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial L_\nu(\vec{s})}{\partial t} + \frac{\partial L_\nu(\vec{s})}{\partial s} &= -\frac{dL_\nu^a(\vec{s})}{ds} - \frac{dL_\nu^{d^-}(\vec{s})}{ds} + \frac{dL_\nu^{d^+}(\vec{s})}{ds} + \frac{dL_\nu^e(\vec{s})}{ds} \\ &= -\kappa_\nu L_\nu(\vec{s}) - \sigma_{d,\nu} L_\nu(\vec{s}) + \frac{\sigma_{d,\nu}}{4\pi} \int_{4\pi} \Phi_\nu(\vec{s}' \rightarrow \vec{s}) L_\nu(\vec{s}') d\Omega + \kappa_\nu L_\nu^0(\vec{s}) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Afin d'alléger les notations, les variables  $s$  et  $T$  sont sous-entendues.

Dans le cas des transferts radiatifs au sein du verre, le phénomène de diffusion est inexistant sur la gamme du rayonnement thermique (de  $0,1 \mu\text{m}$  à  $100 \mu\text{m}$ ). Compte-tenu du fait que l'évolution du système est très lente pendant l'opération de thermoformage, il est possible de négliger le terme de variation temporelle de la luminance. Ce qui permet de simplifier l'équation de transfert radiatif :

$$\frac{\partial L_\nu(\vec{s})}{\partial s} = -\kappa_\nu L_\nu(\vec{s}) + \kappa_\nu L_\nu^0(\vec{s}) \quad (3.44)$$

La méthode de Monte-Carlo, présentée dans le chapitre suivant, permettra de résoudre cette équation de manière stochastique et non pas déterministe.

### 3.2.4 Conditions aux limites thermiques

En supposant que le verre est entouré d'air, les conditions aux limites peuvent s'écrire comme :

$$K_g(T_a - T_v) + \overrightarrow{q_r^{a \rightarrow v}} \cdot \vec{n} = \left[ \overrightarrow{q_r^{v \rightarrow a}} + k_c \overrightarrow{\text{grad}}(T) \right] \cdot \vec{n} \quad (3.45)$$

$K_g$  est un coefficient d'échange global en  $\text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-2}$ .  $\vec{n}$  est le vecteur normal à la surface orienté vers l'extérieur.  $q_r^{i \rightarrow j}$  est le flux radiatif qui traverse l'interface du milieu  $i$  vers le milieu  $j$ . Dans notre cas, les indices  $a$  et  $v$  désignent respectivement l'air et le verre. La figure 3.13 schématise l'ensemble de ces échanges.

En ce qui concerne le rayonnement, les échanges au dioptre (interface verre/air) sont pilotés par la transmittivité  $\tau_\nu$  qui dépend des indices de réfraction spectraux du verre  $n_{\nu,v}$  et de l'air  $n_{\nu,a}$  mais aussi de l'angle polaire qui correspond à l'angle formé entre la surface et le flux incident.

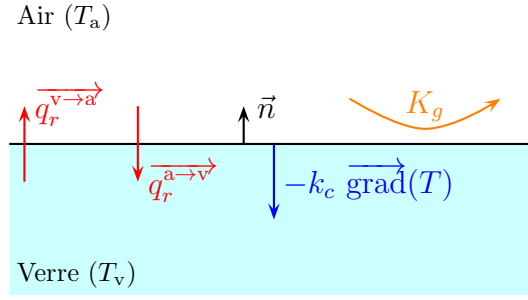


FIGURE 3.13 – Représentation des échanges thermiques à la frontière verre/air

Les relations de Fresnel permettent de calculer  $\tau_\nu$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \tau_\nu &= 1 - \rho_\nu(\theta_\nu, n_\nu) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\cos \theta_\nu - n_\nu \sqrt{1 - (n_\nu)^2 \sin^2 \theta_\nu}}{\cos \theta_\nu + n_\nu \sqrt{1 - (n_\nu)^2 \sin^2 \theta_\nu}} \right)^2 + \left( \frac{\cos \theta_\nu - \sqrt{1 - (n_\nu)^2 \sin^2 \theta_\nu}}{\cos \theta_\nu + \sqrt{1 - (n_\nu)^2 \sin^2 \theta_\nu}} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.46)$$

Avec  $\theta_\nu$  l'angle polaire formé entre la direction du flux radiatif incident et l'axe  $\vec{z}_i$  orthogonal à la surface.  $n_\nu$  est le rapport des indices spectraux du verre et de l'air :  $n_\nu = n_{\nu,a}/n_{\nu,v}$ .

Sur la gamme spectrale correspondant à la semi-transparence, en supposant que le flux incident de la figure 3.13 provenant de l'air peut être caractérisé par sa luminance spectrale  $L_\nu^0(T_a, n_\nu)$ , la part transmise au verre peut être calculée de la façon suivante :

$$\overrightarrow{q_{r(\text{ST})}^{a \rightarrow v}} \cdot \vec{n} = \int_{\nu_{\text{ST}}^{\min}}^{\nu_{\text{ST}}^{\max}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \tau(\theta_a, n_\nu) L_\nu^0(T_a, n_\nu) \times \cos \theta_a \sin \theta_a \, d\theta_a \, d\varphi_a \, d\nu$$

Avec, respectivement, les dénominations *ST* pour la gamme semi-transparente, *a* pour l'air et *v* pour verre.  $\nu^{\min}$  et  $\nu^{\max}$  indiquent les bornes de l'intervalle semi-transparent.

Sur la gamme opaque, au-delà de  $5 \mu\text{m}$  (Rubin, 1985), le verre est assimilé à un corps gris :

$$\overrightarrow{q_{r(\text{opaque})}^{a \rightarrow v}} \cdot \vec{n} = \int_{\nu_{\text{opaque}}^{\min}}^{\nu_{\text{opaque}}^{\max}} \pi \varepsilon_\nu I_\nu^0(T_a, n_\nu) \, d\nu \quad (3.47)$$

L'émissivité du verre peut alors être considérée comme constante en retenant la valeur  $\varepsilon_\nu = 0,9$  (Lee et Viskanta, 2001).

## Chapitre 4

# Développement d'un code de calcul du transfert radiatif

Sur l'intervalle de longueurs d'onde compris entre 0,1 et 5  $\mu\text{m}$ , le verre est un matériau semi-transparent absorbant et non diffusant. La modélisation du transfert radiatif dans ce type de milieu est relativement complexe. Contrairement à un corps noir, le rayonnement n'est pas absorbé en surface mais de manière volumique. Il est donc nécessaire de tenir compte des propriétés optiques du verre, de son coefficient d'absorption, de son indice de réfraction et de la variation spectrale de toutes ces grandeurs.

Dans ce chapitre, nous évoquons dans un premier temps les principales méthodes numériques qui existent pour résoudre le transfert radiatif dans le but d'exposer les forces et faiblesses de chacune d'entre elles. Ensuite, nous expliquons pourquoi la méthode de Rosseland a été retenue en première approximation et pourquoi nous utilisons la méthode de Monte-Carlo pour des calculs nécessitant une précision optimale. Le reste du chapitre est dédié au fonctionnement global du code de Monte-Carlo et à sa validation.

### 4.1 Méthodes de calcul du transfert radiatif

Dans la littérature scientifique, de nombreuses méthodes permettent de résoudre l'équation de transfert radiatif avec des hypothèses plus ou moins fortes ayant un impact sur la précision des résultats et la durée des temps de calcul. Les principales méthodes sont recensées ici en explicitant rapidement le principe de résolution et les cas dans lesquels elles sont utilisées. Parmi celles-ci, dans le cadre de notre étude, nous avons retenu la méthode de Rosseland en première approximation et la méthode de Monte-Carlo qui sera décrite plus en détail à la suite de cette section.



#### 4.1.1 Méthode des harmoniques sphériques (ou différentielles P-N)

Les méthodes d'approximation différentielle permettent d'écrire l'expression de la luminance sous la forme d'une somme infinie d'harmoniques sphériques ne dépendant que de la direction. Développée par (Jeans, 1917), la méthode des harmoniques sphériques est généralement mise en œuvre en choisissant des ordres faibles (P1 ou P3), mais ces troncatures conduisent souvent à des approximations trop importantes, notamment pour les milieux optiquement épais (Modest, 1993).

#### 4.1.2 Méthode des zones

Cette méthode a été développée par (Hottel et Cohen, 1958) : des facteurs d'échange sont calculés entre chaque zone du domaine et le bilan radiatif est ensuite écrit sous la forme d'une matrice  $N \times N$ , avec  $N$  le nombre d'inconnues. Elle se limite à des milieux simples car elle s'avère peu performante si les géométries étudiées sont complexes ou si le milieu est semi-transparent et très hétérogène. Le fait d'utiliser une discrétisation spectrale rend la méthode difficilement applicable car il est alors nécessaire de calculer les facteurs d'échange sur chaque bande considérée.

#### 4.1.3 Méthode des transferts discrets

La méthode des transferts discrets (ou suivi de rayons) est relativement récente et a été exposée pour la première fois par (Lockwood et Shah, 1981). Elle est basée sur une technique de résolution de l'équation de transfert radiatif sur l'ensemble du chemin optique parcouru par le rayon. La méthode peut souffrir du problème appelé « effet de rayons » car, comme le souligne (Collin, 2006), la qualité des résultats peut être affectée si le nombre de directions discrètes choisi n'est pas suffisant.

#### 4.1.4 Méthode des ordonnées discrètes

La méthode des ordonnées discrètes a été développée par (Chandrasekhar, 1960) pour le calcul du transfert radiatif unidimensionnel en astrophysique puis appliquée aux problèmes de transfert radiatif multidimensionnel par (Truelove et Hyde, 2007; Fiveland, 1982). Certains auteurs se sont intéressés à sa mise en œuvre pour modéliser les transferts dans le verre (Lacroix *et al.*, 2002). La méthode se base sur la transformation de l'équation de transfert en équations différentielles partielles. L'espace angulaire est discrétisé en un nombre fini de directions et le calcul du flux radiatif est réalisé en intégrant numériquement la luminance dans toutes les directions. La méthode est sujette à des problèmes dits de "fausse diffusion" qui peuvent mener à la surestimation des températures du milieu (Lee et Viskanta, 2001) ou encore des effets de rayons qui génèrent des discontinuités dans les valeurs de flux (Coelho, 2002; Trovalet, 2011). Elle nécessite souvent un processus itératif afin d'obtenir les bonnes valeurs de luminance. Elle conduit à des

résultats fiables mais les temps de calcul seront d'autant plus importants que le milieu étudié est complexe.

La méthode des volumes finis repose sur le même principe.

#### 4.1.5 Méthode de Rosseland

La méthode de Rosseland, aussi connue sous l'appellation "méthode d'approximation de diffusion", doit son nom à un astrophysicien norvégien (Rosseland, 1936). Retenue en première approximation pour nos simulations numériques, elle sera un peu plus détaillée que les précédentes sur le plan théorique. En premier lieu, la méthode de Rosseland est préconisée pour les milieux optiquement épais (la distance moyenne d'absorption du rayonnement doit être inférieure à la dimension caractéristique du domaine) sans quoi les résultats obtenus peuvent être trop grossiers et donc inexploitable. Comparativement à d'autres méthodes, elle est relativement simple à mettre en place et les temps de calcul sont raisonnables. En revanche, elle peut conduire à une sous-estimation des températures au niveau de la frontière (Lee et Viskanta, 2001).

Le principe de la méthode se base sur l'hypothèse que lorsque le milieu est suffisamment épais, le transfert par rayonnement peut être considéré comme diffusif. Le vecteur densité de flux radiatif peut alors s'écrire sous la forme :

$$\vec{q}_r = -k_r \overrightarrow{\text{grad}}(T) \quad (4.1)$$

$k_r$ , appelée conductivité radiative, s'écrit (Siegel et Howell, 1992) :

$$k_r = \int_0^\infty \frac{4\pi}{3\kappa_\nu} \frac{\partial L_\nu^0(T)}{\partial(T)} d\nu \quad (4.2)$$

Lorsque le milieu est absorbant et diffusant, il faut prendre en compte le coefficient d'extinction  $\beta_\nu$  au lieu du coefficient d'absorption  $\kappa_\nu$ . La démonstration permettant d'obtenir l'expression de  $k_r$  est fournie en annexe 1.

Après dérivation,  $k_r$  a pour expression :

$$k_r = \int_0^{+\infty} \frac{4\pi}{3\kappa_\nu} \left[ \frac{2h^2\nu^4 n^2}{c_0^2 k} \right] \times \left( \frac{(1/T^2)(e^{h\nu/kT})}{[e^{h\nu/kT} - 1]^2} \right) d\nu \quad (4.3)$$

Concernant les conditions aux limites, le rayonnement incident reçu et transmis à la frontière est considéré comme directement absorbé par le matériau. La conductivité radiative va ensuite traduire la capacité du matériau à diffuser le rayonnement en son sein.

#### 4.1.6 Méthodes alternatives : éléments finis et différences finies

Nous nous contentons ici de citer des études utilisant ces méthodes de calcul, moins souvent rencontrées pour la résolution du transfert radiatif, comme la méthode des éléments finis (Rousse

*et al.*, 2000) ou la méthode des différences finies (Siegel et Howell, 1992).

#### 4.1.7 Méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo, lorsqu'elle est appliquée au rayonnement thermique, consiste à émettre et absorber l'énergie radiative sous la forme de transferts de paquets d'énergie, dits quanta, sur l'ensemble du domaine. Les quanta peuvent subir différents événements comme l'émission, l'absorption, la réflexion ou la transmission. Tous ces événements sont déterminés de manière aléatoire mais doivent respecter les lois du rayonnement thermique d'un point de vue statistique. Comme il s'agit d'une méthode probabiliste, cela implique que lors d'une simulation numérique, plus le nombre de quanta envoyés est important, plus la probabilité d'obtenir un résultat précis est élevée.

La force de la méthode réside dans le fait qu'elle est adaptable à tout type de milieu et d'autant plus recommandable que la modélisation est complexe (Modest, 1993). La théorie n'est pas trop compliquée à assimiler, ce qui rend la méthode relativement simple à programmer. En revanche, elle peut souffrir de temps de calcul particulièrement longs (Howell, 1998) : il est donc préférable d'utiliser des ordinateurs puissants et de paralléliser les calculs quand cela s'avère possible.

## 4.2 Développement de la méthode de Monte-Carlo

Dans un premier temps, les bases théoriques de la méthode de Monte-Carlo sont rappelées. Il s'ensuit une seconde partie concernant le principe de fonctionnement du code. Le choix des éléments numériques est abordé, de même que la façon dont les événements aléatoires sont tirés ou encore comment la divergence de flux radiatif d'un élément du maillage est calculée. Pour finir, une partie validation numérique doit permettre de vérifier le bon fonctionnement du code.

### 4.2.1 Quelques bases théoriques

La méthode de Monte-Carlo se base sur des tirages aléatoires ou techniques probabilistes pour résoudre un système déterministe. Soit  $f(x)$  une fonction positive continûment dérivable définie sur l'intervalle  $[a, b]$ . On souhaite tirer aléatoirement une variable  $X$  qui respecte, sur un grand nombre de tirs, la façon dont les valeurs de la fonction  $f(x)$  sont réparties. Pour ce faire, on doit rechercher la valeur de  $X$  telle que :

$$R = P(X \leq x) \tag{4.4}$$

Avec  $R$  une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle  $[0,1]$ . Cela signifie que la densité de probabilité de  $R$  est constante entre 0 et 1.  $P(X \leq x)$  est la probabilité que  $X \leq x$

et peut aussi s'exprimer comme :

$$P(X \leq x) = F_X(x) = \frac{\int_a^x f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx} = \int_a^x \frac{f(x)}{S_x} dx \quad (4.5)$$

Avec  $S_x = \int_a^b f(x)dx$ .  $F_X(x)$  est la fonction de répartition et  $f(x)/S_x$  est la densité de probabilité associée à la variable  $X$ .

Afin d'illustrer la méthode, nous appliquons le principe de Monte-Carlo à la loi de Beer-Lambert qui, comme nous le rappelons, stipule que :

$$dL_\nu(s, \vec{s}) = -\kappa_\nu L_\nu(s, \vec{s}) ds \quad (4.6)$$

Ce qui peut aussi s'écrire sous la forme :

$$L_\nu(s, \vec{s}) = L_\nu(0, \vec{s})e^{-\kappa_\nu s} \quad (4.7)$$

On obtient alors une densité de probabilité  $p(s)$  égale à :

$$p(s) = \frac{L_\nu(0, \vec{s})e^{-\kappa_\nu s}}{\int_0^{+\infty} L_\nu(0, \vec{s})e^{-\kappa_\nu s} ds} = \kappa_\nu e^{-\kappa_\nu s} \quad (4.8)$$

Ce qui correspond bien à la relation donnée par (Wong et Menguc, 2002). Physiquement, cela signifie que la probabilité que le quantum parcoure une distance  $S_\kappa$  sans être absorbé est égale à :

$$P(S_\kappa \leq s) = F_{S_\kappa(s)} = \int_0^{S_\kappa} \kappa_\nu e^{-\kappa_\nu s} ds = 1 - e^{-\kappa_\nu S_\kappa} \quad (4.9)$$

Pour tirer aléatoirement la distance  $S_\kappa$  d'absorption du quantum, on assimile la fonction de répartition  $F_{S_\kappa(s)}$  à une variable aléatoire  $R_\kappa$  respectant une loi aléatoire dans  $[0;1]$  :

$$R_\kappa = 1 - e^{-\kappa_\nu S_\kappa} \implies S_\kappa = -\frac{1}{\kappa_\nu} \ln(1 - R_\kappa) = -\frac{1}{\kappa_\nu} \ln(R'_\kappa) \quad (4.10)$$

$R'_\kappa$  peut remplacer le terme  $1 - R_\kappa$  car il s'agit, dans les deux cas, d'une variable aléatoire respectant une loi uniforme sur l'intervalle  $[0;1]$ .

Dans la suite du chapitre, la formule permettant de tirer la valeur d'une grandeur en fonction d'une variable aléatoire ne sera pas forcément démontrée mais la démarche est absolument identique à celle qui a été mise en œuvre ici.

**Remarque :** afin d'éviter les répétitions, toutes les variables de ce chapitre commençant par un  $R$  majuscule seront considérées comme des variables aléatoires respectant une loi uniforme sur l'intervalle  $[0;1]$ .

### 4.2.2 Représentation en 2D, calcul en 3D

La méthode de Monte-Carlo doit permettre de modéliser le transfert radiatif sur l'ensemble du domaine étudié. Dans notre cas la représentation du problème se fait en deux dimensions. Le maillage du domaine utilisé pour les calculs radiatifs sera identique à celui généré par Abaqus® pour effectuer les calculs par éléments finis. Le choix de l'élément fini utilisé est donc particulièrement important puisqu'il conditionnera l'ensemble du calcul thermomécanique.

Un point qu'il convient de préciser néanmoins concerne le calcul des transferts radiatifs. Contrairement à la mécanique ou aux transferts conductifs et convectifs, le rayonnement doit être traité comme un phénomène physique faisant intervenir trois dimensions.

En se plaçant dans le cadre de la méthode de Monte-Carlo, cela s'explique par le fait qu'un quantum se propage le long d'une direction définie par le vecteur unitaire  $\vec{d}_q$ , à trois composantes  $dx, dy, dz$ , dont les valeurs dépendent des angles polaire  $\theta$  et azimutal  $\varphi$ , comme cela est illustré sur la figure 4.1-a.

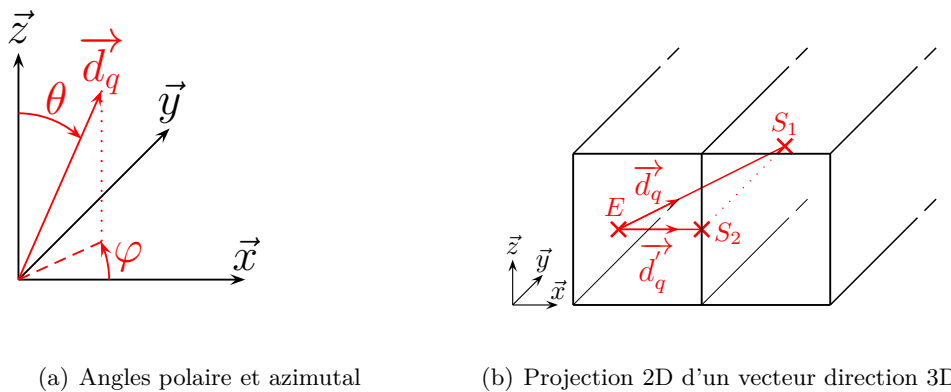


FIGURE 4.1 – Définition de la direction d'un quantum

Concrètement, le fait d'assimiler le rayonnement à un phénomène physique en deux dimensions rendrait les calculs radiatifs faux. Il est possible de démontrer cette idée en effectuant le raisonnement suivant : la quantité dissipée par un quantum va dépendre de la distance qu'il va parcourir dans un élément (loi de Beer-Lambert, équation 4.6). Cette distance peut se calculer facilement connaissant la direction du quantum en trois dimensions et les coordonnées du maillage. On comprend aisément, en regardant la figure 4.1-b, que la distance ES1 parcourue en 3D est plus grande que la distance projetée sur le plan  $(\vec{x}, \vec{z})$ , qui correspond à ES2.

Ainsi, pour obtenir les bonnes valeurs de flux radiatifs, il faut considérer que les éléments constituant le maillage 2D ont une profondeur infinie d'où la nécessité de traiter le rayonnement en trois dimensions.

Pour modéliser le transfert, des quanta sont envoyés sur l'ensemble du domaine. Ils sont émis depuis les éléments de matière (vus sous la forme d'éléments de surface dans une représentation 2D) mais aussi depuis les éléments de surface à l'interface air/verre (vus sous la forme de seg-

ments dans une représentation 2D). Le point et la direction d'émission sont tirés aléatoirement. Le paragraphe 4.2.4 précise comment ces opérations sont réalisées. Tout au long de leur trajet, différents évènements peuvent leur arriver et sont représentés sur la figure 4.2. Un quantum transporte une certaine quantité d'énergie qui dépend de la puissance

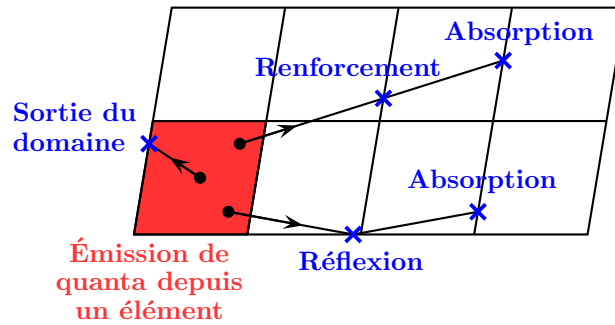


FIGURE 4.2 – Envoi de quanta depuis un élément dans un maillage 2D

propre émise par un élément et du nombre de quanta envoyés. Selon la méthode d'absorption choisie, l'énergie du quantum peut être soit absorbée complètement à l'issue de son parcours, soit déposée au fur et à mesure. Dans notre cas, c'est cette dernière solution qui a été retenue. Par ailleurs, à chaque fois qu'un quantum intercepte la frontière d'un élément, un test est réalisé pour savoir si l'énergie qu'il transporte est négligeable ou non et si le suivi doit s'arrêter. Tous ces éléments sont abordés dans la partie 4.2.5.

Lorsque le quantum arrive à la frontière du domaine, il peut être soit réfléchi, soit transmis. Dans le cas où il est transmis, le devenir du quantum n'a plus d'importance et il est simplement abandonné. À l'inverse, s'il est réfléchi alors sa direction de propagation change et il continue son parcours dans le domaine. Ces aspects sont traités en détails dans le paragraphe 4.2.6. Il reste ensuite à effectuer le bilan d'énergie sur un élément. La méthode la plus simple, appelée méthode directe, consiste à calculer la variation d'énergie d'un élément comme la somme de l'énergie des quanta reçus moins l'énergie des quanta émis. Il existe des méthodes plus complexes comme la méthode réciproque. Il est alors nécessaire d'établir des relations entre chaque couple d'éléments susceptibles d'échanger des quanta. Les formules utilisées sont établies dans le paragraphe 4.2.7.

### 4.2.3 Choix des éléments

En deux dimensions, la méthode des éléments finis, appliquée aux milieux continus, nécessite de discrétiser le domaine étudié en éléments géométriquement simples, généralement des triangles ou des quadrangles. Ces éléments possèdent un certain nombre de points d'intégration, utilisés pour la résolution des calculs, et de nœuds dont le nombre conditionne la qualité des résultats mais aussi le temps de calcul.

Dans Abaqus<sup>®</sup>, les éléments disponibles sont représentés en figure 4.3. Il existe donc des triangles

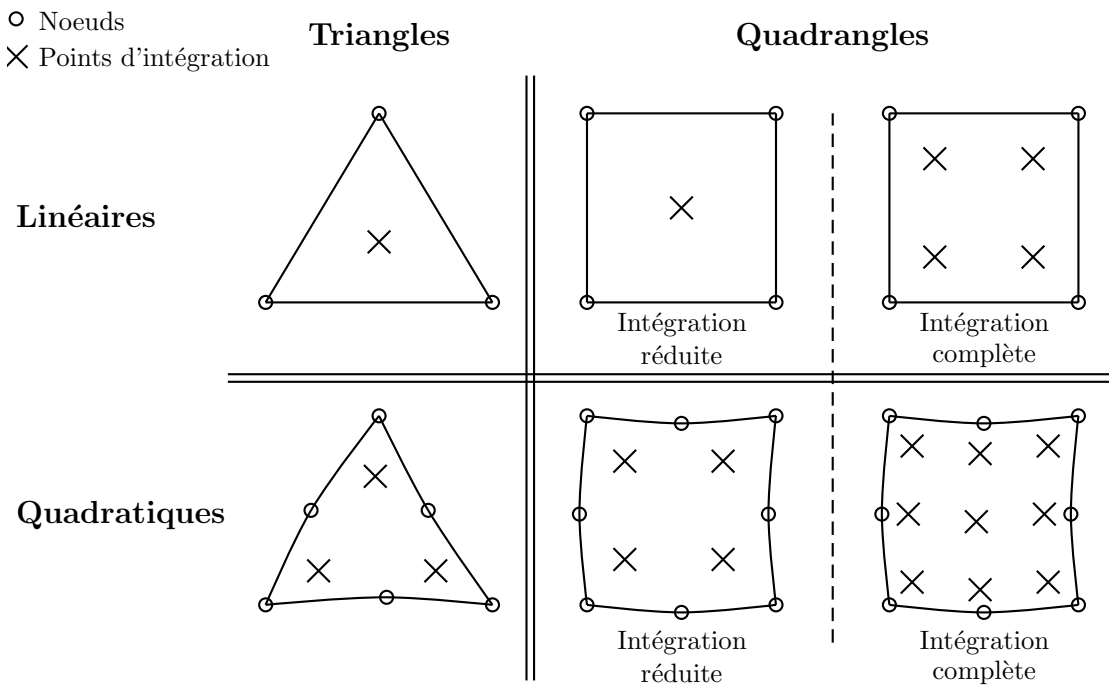


FIGURE 4.3 – Gamme d'éléments disponibles en 2D dans Abaqus®

linéaires à intégration complète ou réduite et des quadrangles linéaires ou quadratiques à intégration complète ou réduite, soit un total de 6 éléments. Les éléments quadratiques possèdent 3 nœuds par frontières, ce qui leur permet de se déformer d'une manière non-linéaire et de représenter des formes plus complexe. Il faut néanmoins garder à l'idée que les éléments quadratiques sont beaucoup plus coûteux que les éléments linéaires en termes de temps de calcul.

Concernant le choix des éléments, les triangles ne sont pas retenus car les quadrangles sont généralement plus performants pour la résolution des calculs mécaniques (cf. Abaqus Analysis User's Manual, § Solid (continuum) elements - Choosing between bricks/quadrilaterals and tetrahedra/triangles). Par ailleurs, le quadrangle quadratique à intégration réduite est souvent préféré au quadrangle à intégration complète. D'une part, le fait d'utiliser un élément à intégration réduite permet d'économiser du temps de calcul, d'autre part, le quadrangle quadratique à intégration complète peut présenter un problème numérique dit de blocage (cf. Abaqus Analysis User's Manual, § Solid (continuum) elements - Choosing between full and reduced-integration elements ou voir la référence (Dhatt *et al.*, 2005)). Le quadrangle linéaire à intégration réduite peut aussi présenter des problèmes d'instabilité numérique et il ne sera donc pas retenu.

Cela laisse donc le choix entre deux éléments : le quadrangle linéaire à intégration complète et le quadrangle quadratique à intégration réduite. Ils représentent généralement un bon compromis entre précision des résultats et temps de calcul. Ainsi, le choix d'un des deux éléments repose sur leur compatibilité avec la méthode de Monte-Carlo.

La méthode de Monte-Carlo requiert de calculer les points d'intersection entre la trajectoire d'un quantum et les frontières de l'élément qu'il traverse. La façon dont la méthode de Monte-Carlo

est mise en œuvre induit que la trajectoire du quantum est connue. En revanche, il est plus difficile de déterminer l'équation de la frontière d'un élément en fonction des données fournies par le logiciel et de la théorie des éléments finis.

En effet, lorsqu'une simulation fait appel à la méthode des éléments finis, tous les calculs sont en fait réalisés dans un repère de référence. Une fois que les variables ont été calculées dans le repère de référence, elle sont transformées et représentées dans le repère réel. Cela concerne aussi les coordonnées de chaque point d'un élément.

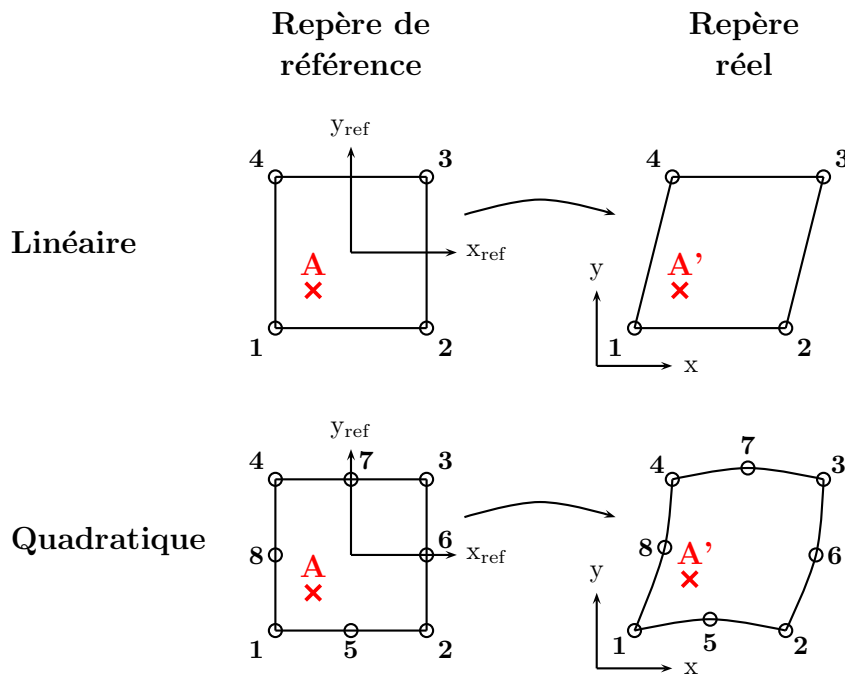


FIGURE 4.4 – Transformation d'un élément fini du repère de référence au repère réel

Cela implique qu'à chaque point  $A$  de l'élément du repère de référence correspond un point  $A'$  du repère réel. La figure 4.4 schématise cette transformation dans le cas d'un quadrangle linéaire et d'un quadrangle quadratique. Les chiffres allant de 1 à 4 pour le quadrangle linéaire et de 1 à 8 pour le quadrangle quadratique correspondent au numéro des nœuds. Les coordonnées du point  $A'(x, y)$  en fonction du point  $A(x_{\text{ref}}, y_{\text{ref}})$  s'écrivent :

$$x = \sum_{i=1}^{N_n} N_i(x_{\text{ref}}, y_{\text{ref}}) x_i \quad (4.11)$$

$$y = \sum_{i=1}^{N_n} N_i(x_{\text{ref}}, y_{\text{ref}}) y_i \quad (4.12)$$

Avec  $x_i$  et  $y_i$  les coordonnées dans le repère réel d'un nœud  $i$ ,  $N_i$  la fonction d'interpolation associée au nœud  $i$  et  $N_n$  le nombre total de nœuds. Les fonctions d'interpolation sont de la



forme suivante pour le quadrangle linéaire :

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}(1 - x_{\text{ref}})(1 - y_{\text{ref}}); & N_2 &= \frac{1}{4}(1 + x_{\text{ref}})(1 - y_{\text{ref}}) \\
 N_3 &= \frac{1}{4}(1 + x_{\text{ref}})(1 + y_{\text{ref}}); & N_4 &= \frac{1}{4}(1 - x_{\text{ref}})(1 + y_{\text{ref}})
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Pour le quadrangle quadratique, les fonctions d'interpolation sont :

$$\begin{aligned}
 N_1 &= -\frac{1}{4}(1 - x_{\text{ref}})(1 - y_{\text{ref}})(1 + x_{\text{ref}} + y_{\text{ref}}); & N_2 &= -\frac{1}{4}(1 + x_{\text{ref}})(1 - y_{\text{ref}})(1 - x_{\text{ref}} + y_{\text{ref}}) \\
 N_3 &= -\frac{1}{4}(1 + x_{\text{ref}})(1 + y_{\text{ref}})(1 - x_{\text{ref}} - y_{\text{ref}}); & N_4 &= -\frac{1}{4}(1 - x_{\text{ref}})(1 + y_{\text{ref}})(1 + x_{\text{ref}} - y_{\text{ref}}) \\
 N_5 &= \frac{1}{2}(1 - x_{\text{ref}})(1 + x_{\text{ref}})(1 - y_{\text{ref}}); & N_6 &= \frac{1}{2}(1 - y_{\text{ref}})(1 + y_{\text{ref}})(1 + x_{\text{ref}}) \\
 N_7 &= \frac{1}{2}(1 - x_{\text{ref}})(1 + x_{\text{ref}})(1 + y_{\text{ref}}); & N_8 &= \frac{1}{2}(1 - y_{\text{ref}})(1 + y_{\text{ref}})(1 - x_{\text{ref}})
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Dans le cas du quadrangle linéaire, déterminer l'équation de frontière dans le repère réel est trivial, il suffit de connaître les coordonnées des nœuds à chaque extrémité. En revanche, pour le quadrangle quadratique, bien que les fonctions de transformation et d'interpolation soient connues, nous n'avons trouvé aucune solution pour exprimer de manière claire l'équation de frontière  $f(x, y) = 0$ , ce qui constitue un blocage évident. De plus, même dans le cas où cette équation  $f(x, y) = 0$  existe, le temps de calcul numérique nécessaire pour obtenir le point d'intersection de la direction du quantum avec le quadrangle quadratique sera forcément plus long que pour le quadrangle linéaire.

Ainsi, parce qu'il est performant d'un point de vue mécanique et facilement compatible avec la méthode de Monte-Carlo, le quadrangle linéaire à intégration complète a été retenu pour effectuer les simulations numériques.

#### 4.2.4 Tirage du point d'émission et de la direction d'un quantum

Pour pouvoir émettre un quantum depuis un élément, il est nécessaire de tirer aléatoirement son point de départ et sa direction. Les deux prochains paragraphes expliquent comment procéder.

##### Tirage du point d'émission

Soit un quadrangle défini par ses 4 sommets  $A, B, C$  et  $D$ . Pour pouvoir tirer un point aléatoire depuis le quadrangle, nous avons dans un premier temps choisi de le découper en deux triangles  $ABD$  et  $BCD$ . Cette solution a été retenue dans un souci de simplicité, le tirage d'un point aléatoire dans un triangle nous est connu car déjà utilisé dans d'autres codes développés au sein du LEMTA. La probabilité de tirer le point d'émission  $E$  depuis le triangle  $ABD$  plutôt que depuis le triangle  $BCD$  est égale au rapport de la surface du triangle  $ABD$  sur la surface du

quadrangle  $ABCD$ . Concrètement :

$$\text{Si } R_0 \leq \frac{S_{ABD}}{S_{ABCD}} \text{ alors } E \in ABD \quad (4.15)$$

Dans le cas contraire, les coordonnées du point  $E$  seront tirées depuis le triangle  $BCD$ .

En supposant que le point  $E$  soit issu du triangle  $ABD$ , le tirage aléatoire s'effectue à l'aide de deux variables  $R_1$  et  $R_2$  selon le principe suivant :

1. Si  $R_1 + R_2 \leq 1$

Dans ce cas, la relation vectorielle permettant de calculer les coordonnées du point  $E$  s'exprime comme :

$$\overrightarrow{AE} = R_1 \overrightarrow{AB} + R_2 \overrightarrow{AD} \quad (4.16)$$

2. Si  $R_1 + R_2 > 1$

Dans ce cas, le point  $E$  appartient à l'image du triangle  $ABD$ , à savoir le triangle  $A'DB$ , comme illustré sur la figure 4.5-a obtenue par symétrie centrale autour du point-milieu du segment  $[BD]$ . Pour « replacer » le point  $E$  dans le triangle  $ABD$ , on écrit  $R'_1 = 1 - R_1$  et  $R'_2 = 1 - R_2$  et on remplace respectivement  $R_1$  et  $R_2$  dans l'équation (4.16) par  $R'_1$  et  $R'_2$ .

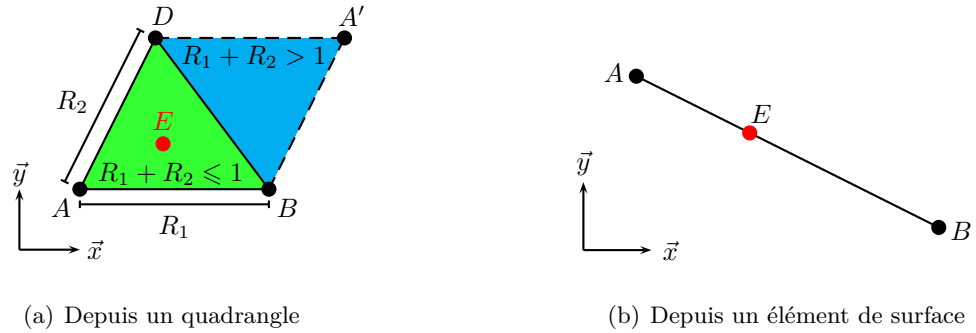


FIGURE 4.5 – Tirage du point d'émission d'un quantum

Lorsque le quantum est émis depuis un élément de surface, les coordonnées du point d'émission sont calculées en utilisant une variable aléatoire  $R_1$  et la relation vectorielle suivante :

$$\overrightarrow{AE} = R_1 \overrightarrow{AB} \quad (4.17)$$

### Tirage de la direction d'émission

La direction d'émission d'un quantum est paramétrée par l'angle polaire  $\theta$  et l'angle azimutal  $\varphi$  comme l'indique la figure 4.6.

Il est nécessaire de faire apparaître ici le repère en trois dimensions. En effet, comme cela a été déjà dit précédemment, bien que la représentation du problème soit en 2 dimensions, les calculs

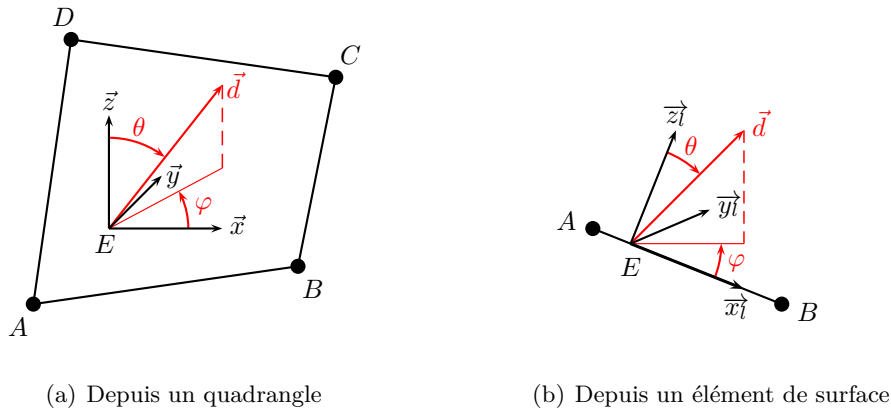


FIGURE 4.6 – Tirage de la direction d'un quantum

doivent tenir compte de la troisième dimension. Dans le cas de l'émission depuis un quadrangle (donc un volume si l'on tient compte de la profondeur dans l'axe  $\vec{y}$ ) il n'existe pas de direction préférentielle. Cela implique que les formules permettant de tirer aléatoirement les angles ne changent pas en fonction de l'orientation du repère choisie. On peut donc exprimer  $\theta$  et  $\varphi$  dans le repère global et les tirer de la façon suivante (Modest, 1993) :

$$\theta = \arccos(1 - 2R_\theta) \quad (4.18)$$

$$\varphi = 2\pi R_\varphi \quad (4.19)$$

En ce qui concerne l'émission depuis une frontière, l'émission de quanta ne peut se faire que selon des directions comprises dans une demi-sphère caractérisée par  $\theta \in [0; \pi/2]$  et  $\varphi \in [0; 2\pi]$ . Cette fois, il est indispensable de se placer dans un repère local  $(E, \vec{x}_l, \vec{y}_l, \vec{z}_l)$  tel que  $\vec{z}_l$  soit orthogonal à la frontière et que  $\vec{x}_l$  soit colinéaire. Il est nécessaire de tenir compte de l'émission lambertienne qui implique que la luminance a la même valeur dans toutes les directions mais que l'intensité dépend d'un facteur  $\cos \theta$ . Cela se traduit analytiquement par les relations suivantes (Modest, 1993) :

$$\theta = \arcsin(\sqrt{R_\theta}) \quad (4.20)$$

$$\varphi = 2\pi R_\varphi \quad (4.21)$$

#### 4.2.5 Gestion de l'énergie d'un quantum

Dès son émission, une énergie est attribuée au quantum. Deux méthodes peuvent être utilisées pour dissiper l'énergie du quantum : la méthode tout ou rien ou la méthode d'absorption progressive. Le fonctionnement de chacune d'entre elles sera expliqué sachant que c'est la dernière citée qui sera retenue.

### Puissance initialement attribuée

La puissance émise par un quadrangle ou une frontière va dépendre de sa température et des propriétés du milieu. Toutes ces grandeurs sont considérées comme homogènes sur un élément. La température utilisée pour les calculs est égale à la température moyenne aux nœuds.

La puissance émise par un quadrangle est égale à :

$$P_q^e = \int_S \int_0^{+\infty} 4\pi \kappa_\nu L_\nu^0(T_q, n_\nu) d\nu dS \quad (4.22)$$

La puissance émise par une frontière vaut :

$$P_s^e = \int_L \int_0^{+\infty} \pi \varepsilon_\nu L_\nu^0(T_s, n_\nu) d\nu dL \quad (4.23)$$

Les quanta issus d'un même élément se verront attribués la même énergie. Concrètement, si  $N_q$  quanta sont émis depuis un quadrangle ou une frontière, l'énergie qui leur est allouée correspond respectivement à  $P_q^e/N_q$  ou  $P_s^e/N_q$ .

### Distribution de la puissance d'un quantum

La méthode tout ou rien consiste à tirer aléatoirement la distance d'absorption du quantum  $S_\kappa$  à partir de la loi de Beer-Lambert. Le calcul de la distance  $S_\kappa$  à partir d'une variable aléatoire, dont on rappelle ici le résultat, a déjà été exposé dans le paragraphe 4.2.1 :

$$S_\kappa = -\frac{1}{\kappa} \ln(R_\kappa) \quad (4.24)$$

Cependant, dans le cas d'un matériau absorbant et diffusant, la méthode d'absorption tout ou rien présente de moins bonnes performances que la méthode dite d'absorption progressive (Collin, 2006).

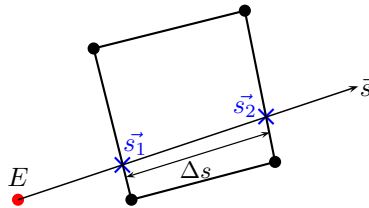


FIGURE 4.7 – Traversée d'un quadrangle par un quantum

Cette dernière implique qu'un quantum relâche de l'énergie tout au long de son parcours et que

l'énergie  $Q_{\text{abs}}$  absorbée par le quadrangle au passage du quantum (figure 4.7) est égale à :

$$Q_{\text{abs}} = Q(s_1) - Q(s_2) = Q(s_1) \times (1 - e^{-\kappa_\nu \Delta s}) \quad (4.25)$$

Pour nos simulations, nous retiendrons la méthode d'absorption progressive, partant du principe que celle-ci est plus efficace que la méthode tout ou rien lorsque le milieu est uniquement absorbant.

### Arrêt du suivi du quantum

Avec la méthode d'absorption progressive, l'énergie du quantum est absorbée progressivement mais jamais totalement. Pour éviter de suivre le quantum indéfiniment, il est possible de l'abandonner lorsqu'il transporte une énergie très petite comparée à celle qui lui a été attribuée initialement. Cependant, négliger une partie de l'énergie radiative, même si elle est très faible, pourrait générer une erreur importante sur plusieurs incréments de calcul. La technique de la roulette russe permet de s'affranchir de ce problème en introduisant un critère d'arrêt non biaisé.

Elle s'applique de la façon suivante : à la sortie d'un élément, si l'énergie  $Q_q$  du quantum devient plus petite qu'un certain seuil limite, un test est effectué. S'il est négatif, le suivi s'arrête. S'il est positif, l'énergie du quantum est alors multipliée de telle sorte à repasser au-dessus du seuil limite.

Cela se traduit mathématiquement de la façon suivante :

Si  $Q_q \leq \varepsilon_q \times Q_{\text{initiale}}$ , on tire une variable aléatoire  $R_q$

1<sup>ère</sup> possibilité :  $R_q \leq 1 - p \rightarrow$  arrêt du suivi

2<sup>ème</sup> possibilité :  $R_q > 1 - p \rightarrow$  on impose  $Q_q = Q_q/p$

Les travaux de (Kobayashi et Iwabuchi, 2008) utilisent les valeurs  $\varepsilon_q = 0,05$  et  $p = 0,1$  que nous gardons pour nos simulations.

### 4.2.6 Transmission ou réflexion du quantum au dioptre

Le quantum peut rencontrer le dioptre, c'est-à-dire la frontière air-verre au cours de son parcours. Il est alors soit réfléchi, soit transmis. La réalisation de l'un ou l'autre de ces événements est aléatoire. On calcule dans un premier temps la réflectivité  $\rho_\nu$  qui caractérise la part de rayonnement réfléchi sur l'ensemble du flux radiatif incident et dont l'expression a déjà été donnée dans le chapitre 3.

Dans notre cas, on assimile la réflectivité à la probabilité qu'un quantum soit réfléchi au dioptre. On part donc du principe que si  $\rho_\nu < R_\rho$ , le quantum est réfléchi et si  $\rho_\nu \geq R_\rho$ , le quantum est transmis. Dans le cas où le quantum est transmis, le suivi s'arrête. S'il est réfléchi, il continue

son trajet dans le domaine.

#### 4.2.7 Bilan d'énergie sur un élément

L'objectif final de la méthode de Monte-Carlo consiste à calculer la divergence de flux radiatif d'un quadrangle. Il existe plusieurs méthodes pour cela et nous en présentons deux : la méthode directe et la méthode réciproque.

##### Méthode directe

Dans la méthode directe, la divergence de flux d'un élément  $i$  peut s'écrire comme la puissance émise par l'élément  $i$  à laquelle on soustrait la somme des puissances reçues de la part de tous les éléments :

$$\operatorname{div} \vec{q}_{\text{r}(i)}^{\text{FM}} = \sum_{j=1}^N \int_{\nu_{\min}}^{\nu_{\max}} (P_{ij,\nu}^{\text{ea}} - P_{ji,\nu}^{\text{ea}}) d\nu = P_i^{\text{e}} - \sum_{j=1}^N \int_{\nu_{\min}}^{\nu_{\max}} P_{ji,\nu}^{\text{ea}} d\nu \quad (4.26)$$

$P_{ij,\nu}^{\text{ea}}$  est la part de puissance radiative spectrale émise depuis l'élément  $i$  et absorbée par l'élément  $j$ .  $P_i^{\text{e}}$  est l'énergie radiative totale émise par l'élément  $i$  dont la formule est donnée en 4.2.5.  $N$  est le nombre total d'éléments et l'exposant FM renvoie au terme anglais *Forward Method* qui signifie méthode directe.

##### Méthodes réciproques

Les méthodes de Monte-Carlo réciproques consistent à exprimer la divergence de flux radiatif d'un élément  $i$  comme la somme des puissances nettes échangées entre l'élément  $i$  et tous les autres éléments du maillage. Un des premiers auteurs à avoir exprimé la puissance nette échangée entre deux éléments est (Green, 1967). Cependant, le véritable essor des méthodes réciproques date des années 1990-2000 (Cherkaoui *et al.*, 1996; Dufresne *et al.*, 1998; de Lataillade *et al.*, 2002; Eymet *et al.*, 2005).

Les méthodes de Monte Carlo dites réciproques présentées ici sont issues d'un article de L. Tessé (Tessé *et al.*, 2002). Quelques années plus tard, (Dupoirieux *et al.*, 2006) proposent une méthode optimisée permettant de réduire la variance des résultats. Ces méthodes réciproques peuvent s'avérer beaucoup plus efficaces que la méthode directe lorsque le champ de température du domaine étudié varie peu. C'est notamment le cas du verre lors du procédé de thermoformage. En effet, la plaque de verre mise en forme est généralement peu épaisse, de l'ordre de quelques millimètres, ce qui implique que les échanges thermiques à l'intérieur du verre sont plutôt homogènes. Ce phénomène est accentué par la lente évolution de la température dans le four pendant l'essai. Les gradients de température sont donc relativement faibles à l'intérieur de la pièce et les méthodes réciproques particulièrement bien adaptées à notre cas d'étude.

La relation de réciprocité, qui est à la base du principe de fonctionnement de ces méthodes, sera établie dans un premier temps, suivie de la présentation des différentes méthodes.

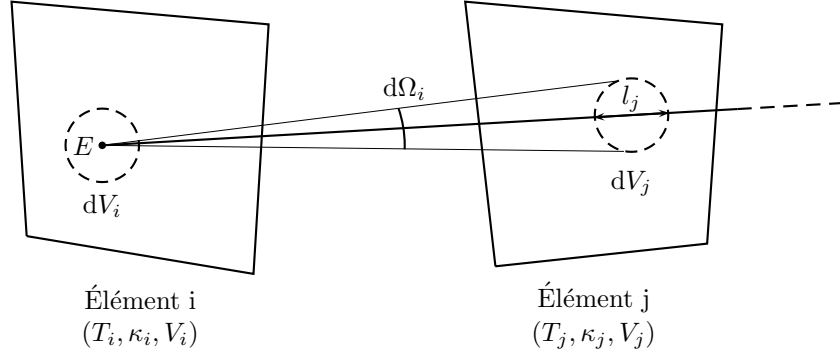


FIGURE 4.8 – Échanges radiatifs le long d'un chemin optique entre deux éléments de volume  $dV_i$  et  $dV_j$

Considérons un chemin optique généré depuis le point  $E$  de l'élément  $i$  et traversant un élément  $j$  comme illustré sur la figure 4.8. La quantité élémentaire monochromatique d'énergie radiative  $dP_{ij,\nu}^{\text{ea}}$  transmise d'un élément de volume  $dV_i$  (on parlera ici d'un élément de volume en se replaçant dans le contexte général du transfert radiatif et en considérant un domaine en 3 dimensions) à un élément de volume  $dV_j$  peut s'écrire :

$$dP_{ij,\nu}^{\text{ea}} = \kappa_{i,\nu} L_{\nu}^0(T_i, n_{i,\nu}) d\Omega_i dV_i \tau_{ij,\nu} \kappa_{j,\nu} dl_j \quad (4.27)$$

$\kappa_{i,\nu} L_{\nu}^0(T_i, n_{i,\nu}) d\Omega_i$  représente la puissance émise par l'élément  $dV_i$  orientée en direction de l'élément  $dV_j$ .  $\tau_{ij,\nu}$  quantifie la part de la puissance radiative qui n'a pas été absorbée avant d'atteindre l'élément de volume  $dV_j$ .  $\kappa_{j,\nu} dl_j$  est le taux d'énergie radiative absorbée par  $dV_j$ . Sachant que le volume élémentaire  $dV_j$  peut s'exprimer comme :

$$dV_j = r_{ij}^2 d\Omega_i dl_j \quad (4.28)$$

$r_{ij}$  est la distance séparant les deux éléments de volume  $dV_i$  et  $dV_j$ . Cela permet d'écrire :

$$dP_{ij,\nu}^{\text{ea}} = \kappa_{i,\nu} L_{\nu}^0(T_i, n_{i,\nu}) dV_i \tau_{ij,\nu} \kappa_{j,\nu} \frac{dV_j}{r_{ij}^2} \quad (4.29)$$

La puissance radiative  $P_{ij,\nu}^{\text{ea}}$  s'obtient en intégrant sur l'ensemble du volume  $i$  et du volume  $j$  :

$$P_{ij,\nu}^{\text{ea}} = \int_{V_i} \int_{V_j} \frac{\kappa_{i,\nu} L_{\nu}^0(T_i, n_{i,\nu}) \tau_{ij,\nu} \kappa_{j,\nu}}{r_{ij}^2} dV_j dV_i \quad (4.30)$$

Comme la température et l'indice de réfraction ne varient pas sur l'ensemble de l'élément  $i$ , il

est possible d'extraire la luminance de l'intégrale :

$$P_{ij,\nu}^{\text{ea}} = L_{\nu}^0(T_i, n_{i,\nu}) \int_{V_i} \int_{V_j} \frac{\kappa_{i,\nu} \kappa_{j,\nu} \tau_{ij,\nu}}{r_{ij}^2} dV_j dV_i \quad (4.31)$$

En suivant le même raisonnement pour la puissance radiative émise depuis l'élément  $j$  et absorbée par l'élément  $i$ , il est possible d'obtenir la formule « symétrique » :

$$P_{ji,\nu}^{\text{ea}} = L_{\nu}^0(T_j, n_{j,\nu}) \int_{V_i} \int_{V_j} \frac{\kappa_{i,\nu} \kappa_{j,\nu} \tau_{ij,\nu}}{r_{ij}^2} dV_j dV_i \quad (4.32)$$

En couplant les équations 4.31 et 4.32, on démontre le principe de réciprocité qui stipule que le ratio des luminances est égale aux ratio des puissances échangées entre les deux cellules :

$$\frac{P_{ji,\nu}^{\text{ea}}}{P_{ij,\nu}^{\text{ea}}} = \frac{L_{\nu}^0(T_j, n_{j,\nu})}{L_{\nu}^0(T_i, n_{i,\nu})} \quad (4.33)$$

Un des avantages des méthodes réciproques provient du fait que le transfert de la puissance radiative entre deux cellules s'effectue toujours de la plus chaude à la plus froide. Cette condition n'est pas toujours statistiquement respectée en utilisant la méthode directe.

En reprenant l'équation 4.26 et en transformant  $P_{ij,\nu}^{\text{ea}}$  grâce à la relation de réciprocité, on obtient :

$$\text{div } \overrightarrow{q_{r(i)}^{\text{ARM}}} = \sum_{j=1}^N \int_{\nu_{\min}}^{\nu_{\max}} P_{ji,\nu}^{\text{ea}} \left( \frac{L_{\nu}^0(T_i, n_{i,\nu})}{L_{\nu}^0(T_j, n_{j,\nu})} - 1 \right) d\nu \quad (4.34)$$

Cette méthode est appelée Absorption Reciprocity Method (ARM) car elle exprime la divergence de flux radiatif d'un élément  $i$  en fonction de la puissance transmise d'un élément  $j$  à un élément  $i$ . La quantité  $P_{ij,\nu}^{\text{ea}}$  est calculée comme pour la méthode directe. Seule la façon de calculer la divergence de flux change.

Dans le même ordre d'idées, la divergence de flux peut s'écrire en fonction de  $P_{ij,\nu}^{\text{ea}}$  :

$$\text{div } \overrightarrow{q_{r(i)}^{\text{ERM}}} = \sum_{j=1}^N \int_{\nu_{\min}}^{\nu_{\max}} P_{ij,\nu}^{\text{ea}} \left( 1 - \frac{L_{\nu}^0(T_j, n_{j,\nu})}{L_{\nu}^0(T_i, n_{i,\nu})} \right) d\nu \quad (4.35)$$

Il s'agit ici de l'Emission Reciprocity Method (ERM). L'ERM peut aussi être utilisée dans le cas où l'on cherche à connaître la divergence de flux radiatif d'une petite zone d'un domaine d'étude. Cela peut être, par exemple, le cas d'un capteur de flux radiatif dans une installation industrielle. En effet, la méthode ERM peut être mise en œuvre pour calculer la divergence de flux de l'élément  $i$  en envoyant uniquement des quanta depuis  $i$  vers tous les éléments  $j$  du domaine. En revanche, pour appliquer l'ARM, il est nécessaire d'envoyer des quanta de tous les éléments  $j$  vers  $i$ , comme dans la méthode directe.

(Dupoirieux *et al.*, 2006) ont montré que la puissance échangée entre deux éléments  $i$  et  $j$  devait être calculée avec l'ERM lorsque  $T_i > T_j$  et avec l'ARM lorsque  $T_i < T_j$  dans le but de minimiser



la variance du calcul de  $\overrightarrow{q_r(i)}$ .

Cette méthode qui se base sur l'utilisation de l'ARM ou de l'ERM selon la température des éléments  $i$  et  $j$  est appelée Optimized Reciprocal Method (ORM). C'est cette dernière qui sera retenue pour le calcul du transfert radiatif dans le verre.

#### 4.2.8 Propriétés optiques du verre et choix de la fréquence d'un quantum

Le verre peut être considéré comme transparent en-dessous de  $5 \mu\text{m}$  et opaque au-dessus. Sur la gamme opaque, nous rappelons que l'émissivité est d'environ 0,9 (Lee et Viskanta, 2001).

Sur la gamme semi-transparente, le verre est assimilé à un milieu gris par bandes. Cela signifie que les indices optiques  $n$  et  $k$  restent constants sur chaque intervalle de longueur d'onde ou de fréquence considéré. Le tableau 4.1 résume les valeurs retenues qui proviennent de (Rubin, 1985). Dans le code Monte-Carlo, il est nécessaire d'attribuer une fréquence à chaque quantum

Intervalle $\lambda$ ( $\mu\text{m}$ )	Intervalle $\nu$ ( $\text{cm}^{-1}$ )	$n_\nu$ (-)	$k_\nu$ (-)	$\kappa_\nu$ ( $\text{m}^{-1}$ )
[0, 25; 0, 75]	[13333; 40000]	1,528	$1,492 \times 10^{-7}$	3,8
[0, 75; 1, 25]	[8000; 13333]	1,514	$4,591 \times 10^{-6}$	57,7
[1, 25; 1, 75]	[5714; 8000]	1,508	$4,234 \times 10^{-6}$	35,5
[1, 75; 2, 25]	[4444; 5714]	1,501	$4,423 \times 10^{-6}$	27,8
[2, 25; 2, 75]	[3636; 4444]	1,494	$6,324 \times 10^{-6}$	31,8
[2, 75; 3, 25]	[3077; 3636]	1,485	$7,432 \times 10^{-5}$	311
[3, 25; 3, 75]	[2667; 3077]	1,474	$1,065 \times 10^{-4}$	382
[3, 75; 4, 25]	[2353; 2667]	1,463	$1,060 \times 10^{-4}$	333
[4, 25; 4, 75]	[2105; 2353]	1,449	$2,978 \times 10^{-4}$	832
[4, 75; 5, 25]	[1905; 2105]	1,397	$3 \times 10^{-3}$	7540

Tableau 4.1 – Propriétés optiques du verre sur l'intervalle spectral [0,25  $\mu\text{m}$ ; 5,25  $\mu\text{m}$ ]

émis. Cela conditionne notamment la valeur de l'indice  $k_\nu$  et donc du coefficient d'absorption  $\kappa_\nu$ . La valeur de l'indice de réfraction  $n_\nu$  en est affecté aussi, ce qui joue sur la valeur de réflectivité  $\rho_\nu$ .

Le choix de la fréquence d'un quantum ne se fait pas de manière probabiliste mais de manière purement statistique. Si  $N_q$  est le nombre total de quanta émis depuis un élément,  $P_t^e$  l'énergie totale et  $P_{\Delta(\nu_i)}^e$  émise sur une seule bande de fréquence  $i$ , le nombre de quanta  $N_{q,i}$  émis sur la bande de fréquence  $i$  est égal à :

$$N_{q,i} = \frac{P_{\Delta(\nu_i)}^e}{P_t^e} N_q \quad (4.36)$$

Dans le code, toutes les grandeurs sont dans un premier temps exprimées en longueur d'onde puis converties en fréquence. En effet, il est préférable d'effectuer les calculs avec la fréquence plutôt que la longueur d'onde. La fréquence d'un quantum ne varie pas, même lors d'un changement de milieu, alors que la longueur d'onde change avec l'indice de réfraction. La longueur d'onde prise par un quantum est égale à la valeur moyenne d'un intervalle de longueur d'onde. La fréquence attribuée au quantum est ensuite calculée à partir de cette longueur d'onde moyenne en utilisant la relation 3.27 du chapitre 3.

### 4.2.9 Validation numérique en rayonnement pur

Un algorithme du fonctionnement du code de Monte-Carlo est présenté en annexe 2. Dans un premier temps, le code, développé en FORTRAN, est validé en utilisant la méthode directe sur un cas-test où la température est constante dans tout le domaine. On souhaite vérifier que le terme source de rayonnement  $\text{div } \overrightarrow{q_{r(i)}}$  de tout élément  $i$  converge vers 0 lorsque le nombre de quanta augmente. Cela permet de s'assurer que les formules implémentées dans le code de Monte-Carlo concernant les tirages aléatoires des points d'émission et de la direction du quantum, les bilans d'énergie, etc. sont correctes. Utiliser la méthode de Monte-Carlo réciproque n'aurait aucun sens. Comme tous les éléments ont la même température, l'application des formules 4.34 et 4.35 fournira une divergence de flux radiatif égale à 0, ne permettant pas de constater d'éventuelles erreurs ailleurs que dans les formules de calcul des puissances du code. En revanche, cela montre bien la puissance de la méthode réciproque par rapport à la méthode directe : la somme des échanges radiatifs de deux éléments à la même température est forcément nulle.

Dans un second cas-test, une enceinte carrée à la température  $T_m$  envoie du rayonnement vers ses frontières qui sont à température nulle. Là encore, utiliser la méthode réciproque en lieu et place de la méthode directe ne présente aucun intérêt. Comme les frontières n'émettent pas de rayonnement, en supposant qu'un quadrangle  $i$  rayonne vers un élément de frontière  $j$ , l'application des formules 4.34 et 4.35 de la méthode réciproque revient à utiliser la formule de la méthode directe 4.26.

La méthode réciproque sera donc validée ultérieurement en comparant ses résultats avec ceux de la méthode directe sur un cas représentatif du chargement thermique subi par le verre à l'intérieur du four et impliquant aussi des échanges par conduction.

#### Enceinte à 300K

Il s'agit ici d'un cas-test permettant de vérifier la convergence des résultats lorsque le nombre de quanta envoyés augmente.

Les conditions du cas-test sont décrites en figure 4.9. Il s'agit d'une enceinte carrée de 1 m de côté dont la température est fixée à 300 K. L'indice du milieu et le coefficient d'absorption sont égaux à 1. Le maillage est composé de 100 éléments de volume et 40 éléments de surfaces.

En théorie, la température de l'enceinte étant homogène, la divergence de flux radiatif d'un élément est nulle. Cependant, la divergence de flux d'un élément calculée par Monte-Carlo ne sera pas égale à 0 bien qu'elle tende à s'annuler lorsque le nombre de quanta augmente. On se propose de représenter la variance de la divergence de flux calculée sur tous les éléments en fonction du nombre de quanta envoyé. Cette variance s'exprime comme :

$$\text{Variance} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \text{div } \overrightarrow{q_{r(i)}^{\text{FM}}} - \text{div } \overrightarrow{q_{r(i)}^{\text{th}}} \right)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \text{div } \overrightarrow{q_{r(i)}^{\text{FM}}} \right)^2 \quad (4.37)$$

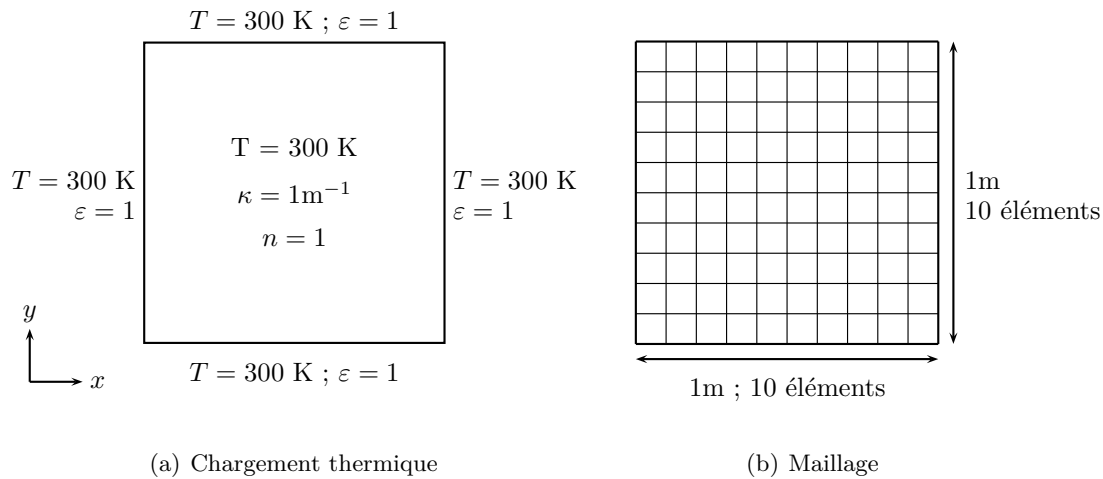


FIGURE 4.9 – Enceinte à 300K

$N$  correspond au nombre de points de mesure, donc au nombre d'éléments ( $N = 100$ ). Le terme  $\text{div } \vec{q}_r^{\text{th}}(i)$  est la divergence de flux théorique qui, dans le cas présent, est égale à zéro. Les résultats

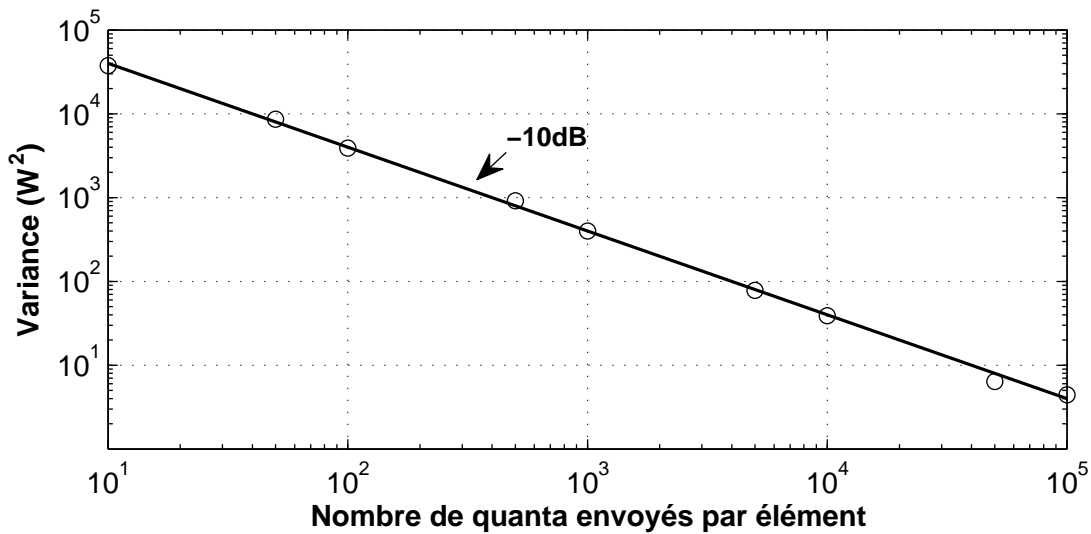
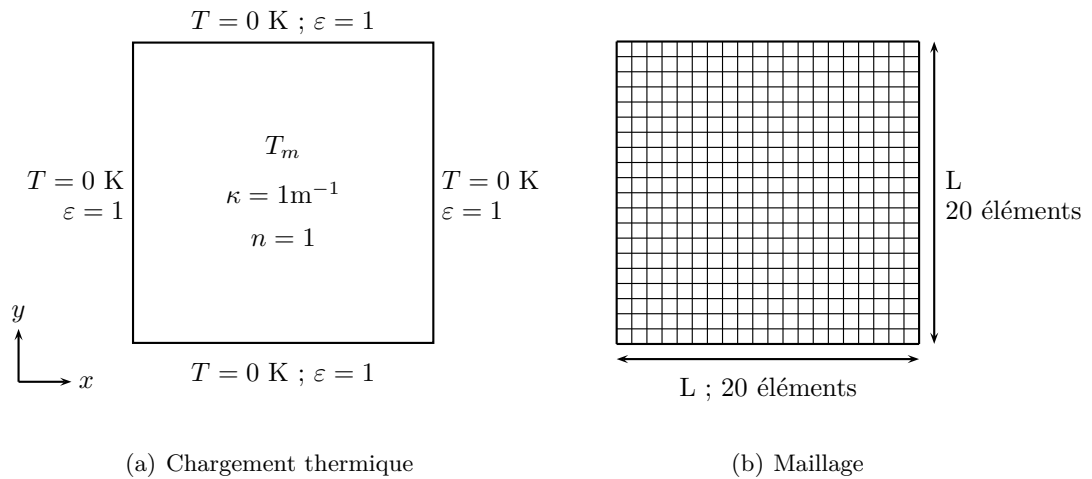


FIGURE 4.10 – Variance de la divergence de flux en fonction du nombre de quanta envoyés

sont présentés en figure 4.10. Comme prévu par la théorie, la variance varie proportionnellement à l'inverse du nombre de quanta envoyés, ce qui correspond à une pente théorique de -10 dB. Cela permet de conclure que la méthode directe fournit des résultats corrects pour ce cas-test.

### Enceinte à la température $T_m$ et frontières noires à température nulle

Ce deuxième cas-test consiste en une enceinte de longueur  $L$  dont le milieu est à une température  $T_m$  (figure 4.11). Les frontières sont noires et donc parfaitement absorbantes mais elles n'émettent pas de rayonnement ( $T = 0$  K). Le transfert radiatif est calculé en envoyant  $10^9$  quanta dans le milieu (soit 2,5 millions de quanta par élément, ce qui représente un temps CPU total de 855s en

FIGURE 4.11 – Enceinte à la température  $T_m$  et frontières noires à température nulle

utilisant une station de travail HP Z820 doté d'un processeur Intel Xeon). Le flux adimensionné reçu par la frontière inférieure de l'enceinte est représenté sur la figure 4.12.

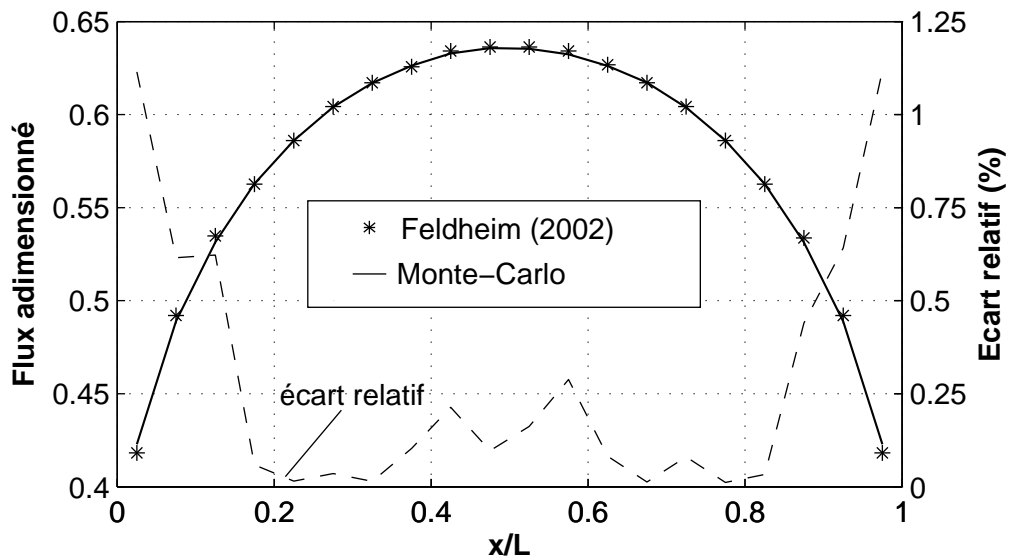


FIGURE 4.12 – Flux radiatif adimensionné reçu par la frontière inférieure de l'enceinte

Les résultats du code de Monte Carlo sur un maillage  $20 \times 20$  en prenant  $L = 1$  m sont comparés avec ceux obtenus par V. Feldheim avec une méthode des transferts discrets (Feldheim, 2002). Les écarts relatifs entre les résultats des deux codes sont faibles puisque inférieurs à 0,4% sur toute la frontière à l'exception des bords où l'écart reste néanmoins inférieur à 1,2%. Les intervalles de confiance à 99% des valeurs de flux adimensionné calculées par la méthode de Monte-Carlo sont au maximum de  $\pm 3.10^{-4}$  et ne peuvent pas être représentés à cette échelle car trop petits. Cela signifie que les calculs ont convergé, ce qui permet de valider le bon fonctionnement du code de

Monte Carlo sur ce cas-test.

#### 4.2.10 Validation numérique en thermique pure

Le code fonctionnant sur la base d'une méthode directe a été validé sur 2 cas-tests présentés précédemment. On souhaite maintenant comparer les résultats de la méthode directe avec ceux de la méthode réciproque afin de réaliser deux objectifs : valider la méthode réciproque et vérifier que les résultats obtenus avec cette dernière sont plus précis pour un même temps de calcul et dans des conditions proches de celles utilisées dans un essai de simulation de thermoformage. Cela implique de coupler conduction et rayonnement. À ce titre, un code volumes finis a été développé et validé, comme le présente le paragraphe qui suit.

#### Validation du code en thermique pure

Afin de résoudre l'équation de la chaleur, un code de volumes finis, couplé au code radiatif Monte-Carlo, est développé suivant la méthode proposée par S.V. Patankar (Patanekar, 1980). Ce code fonctionne avec un maillage régulier, linéaire dont les éléments sont rectangulaires et non déformés. Le cas-test présenté en figure 4.13 est proposé pour la validation du code.

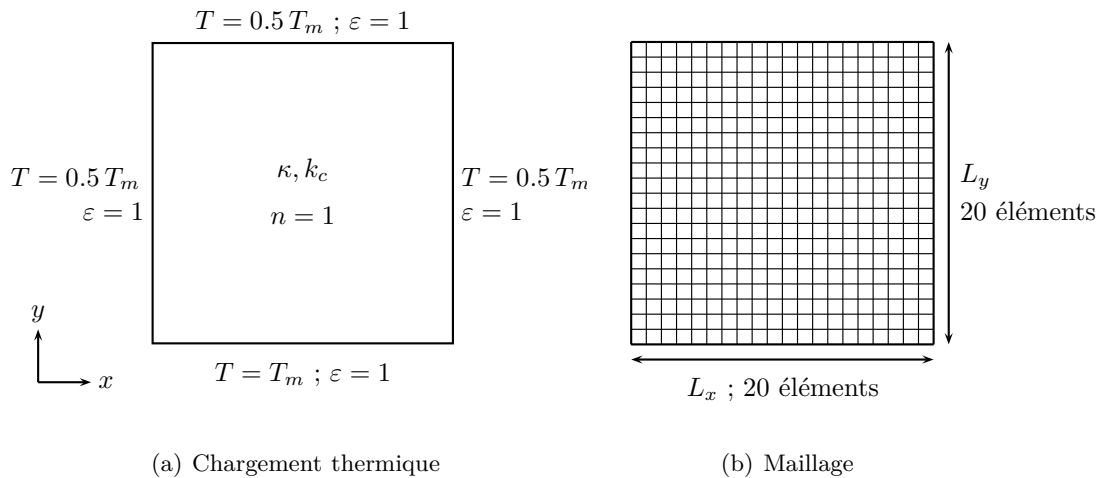


FIGURE 4.13 – Enceinte carrée absorbante avec face inférieure à la température  $T_m$  et les autres faces à la température  $0.5 T_m$

Il consiste en une enceinte carrée ( $L_x = L_y$ ) dont le milieu est absorbant ( $\kappa = 1\text{m}^{-1}$ ), non diffusant avec un indice de réfraction unitaire. La frontière inférieure est à la température  $T_m$  et les autres frontières sont à la température  $T = 0.5 T_m$ . L'émissivité est égale à 1. La conductivité thermique  $k_c$  varie en fonction de la valeur du nombre de Stark  $N = \beta k_c / 4\sigma T^3$ , qui caractérise le rapport entre le transfert conductif et le transfert radiatif. Pour cette simulation, on impose  $N = 0,05 ; 0,1 ; 1$ .

Sur la figure 4.14, la température adimensionnée, en prenant  $T_m$  comme référence, est tracée en

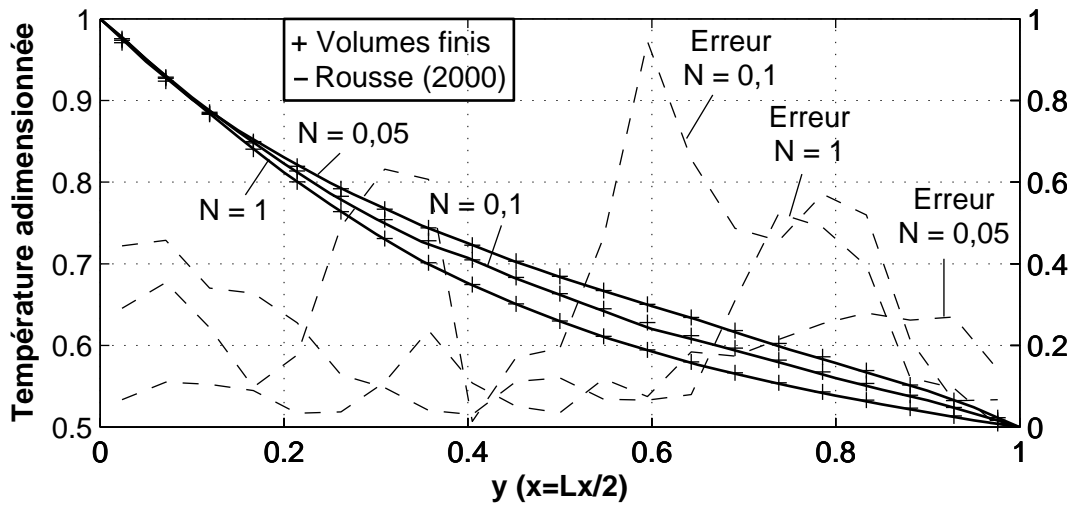


FIGURE 4.14 – Comparaison du code de volumes finis avec les résultats de D. Rouse (Rouse *et al.*, 2000)

fonction de  $y$  en  $x = L_x/2$  lorsque l'état stationnaire est atteint. Les résultats obtenus avec notre code sont comparés avec ceux de (Rouse *et al.*, 2000) obtenus avec une méthode d'éléments finis basée sur des volumes de contrôle. On constate très peu de différences entre les résultats des deux codes. Quelle que soit la valeur prise par le nombre de Stark, l'erreur relative est inférieure à 1%, ce qui permet de valider le code de volumes finis sur ce cas-test.

Comme la méthode de Monte-Carlo est une méthode probabiliste, les résultats obtenus avec le code de volumes finis couplé au code de Monte-Carlo sont sensibles aux nombres de quanta envoyés. Cela explique pourquoi les valeurs d'écart relatif peuvent varier d'une manière très hétérogène le long de l'axe  $y$ . Pour cette simulation, 10 millions de quanta ont été émis à l'intérieur du milieu et 1 million depuis chaque côté de l'enceinte.

### Comparaison des méthodes directe et réciproque

Le code volumes finis étant fonctionnel, on souhaite maintenant évaluer la précision des méthodes directe et réciproque en fonction du temps de calcul CPU. En vue du couplage avec la partie mécanique, il peut être intéressant de comparer la performance de chacun des codes dans des conditions proches du chargement thermique réel.

Bien que les valeurs de flux radiatifs ne soient pas connues, nous disposons de la température de l'air relevée dans le four au cours d'un essai réel. Cette courbe est tracée sur la figure 4.15.

Pour imposer les conditions aux limites, on retient l'hypothèse que le milieu environnant rayonne comme un corps noir dont la température est égale à celle de l'air. Une quantité du rayonnement incident est transmise tandis qu'une autre est réfléchi en fonction de la valeur de la réflectivité. Cet aspect est illustré sur la figure 4.16.

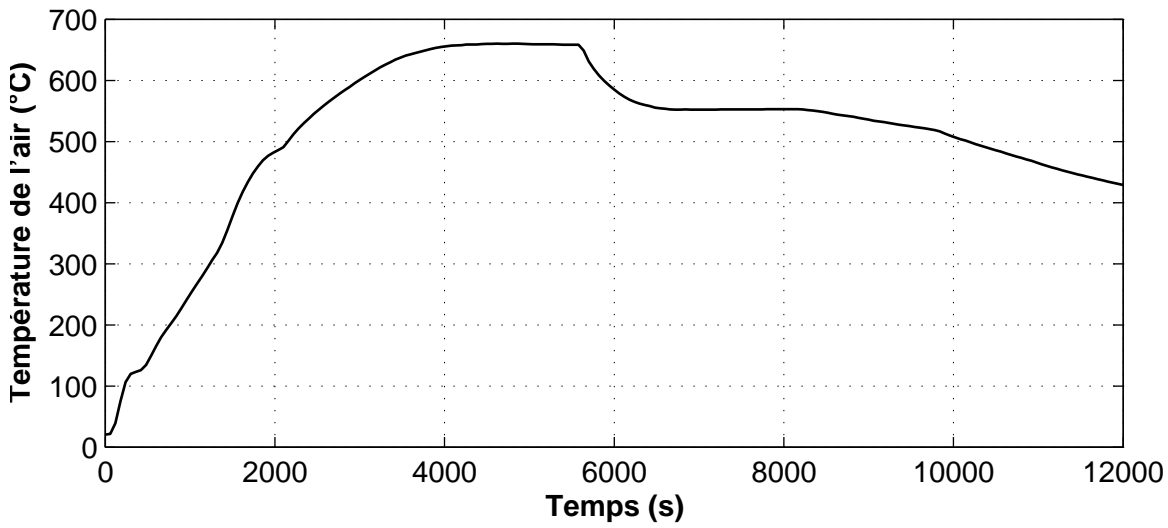


FIGURE 4.15 – Température de l'air mesurée dans le four au niveau du moule

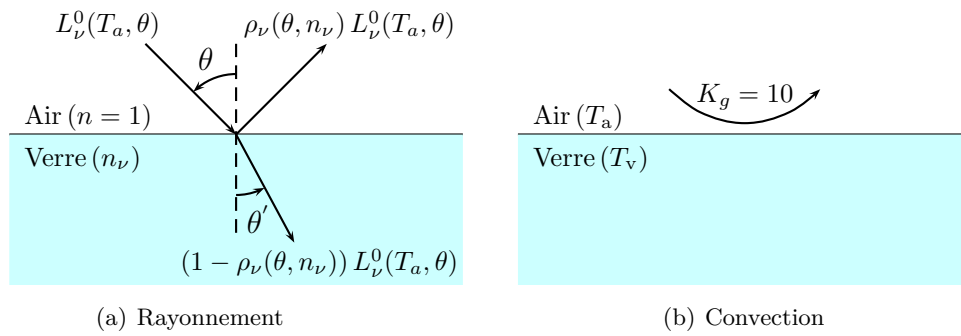


FIGURE 4.16 – Conditions aux limites thermiques

L'indice de réfraction de l'air est supposé égal à 1. La nouvelle direction du rayonnement transmis est caractérisée par l'angle polaire  $\theta'$  qui s'exprime alors selon la relation de Descartes comme :

$$\sin \theta = n_v \sin \theta' \quad (4.38)$$

Le verre et l'air échangent aussi par convection. Le coefficient d'échange  $K_g$  vaut  $10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$  (Berour *et al.*, 2006).

Les dimensions de la pièce sont de 125 mm pour la largeur et 6 mm pour l'épaisseur. Les propriétés radiatives du verre utilisées pour le calcul proviennent du tableau 4.1. Compte-tenu du fait que les conditions aux limites thermiques imposées sont identiques en tous points de la frontière, il est possible d'utiliser les axes de symétrie (figure 4.17) pour accélérer les calculs numériques.

Un quart de la plaque, soit 62,5 sur 3 mm, est représenté numériquement en prenant un maillage de  $125 \times 6$  éléments. Le point  $C$  est le centre de la plaque. Il s'agit aussi du point le plus éloigné

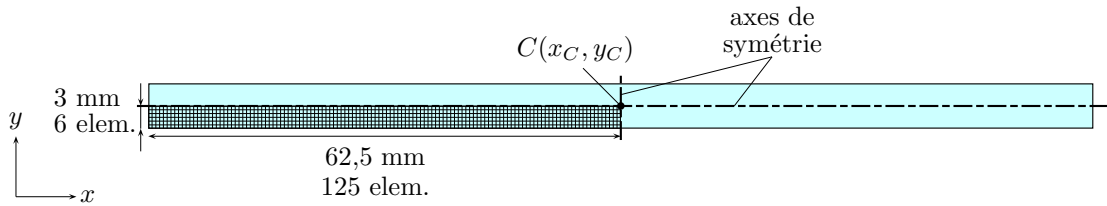


FIGURE 4.17 – Représentation de la plaque en deux dimensions et maillage

de la frontière et donc celui où l'inertie thermique est la plus importante.

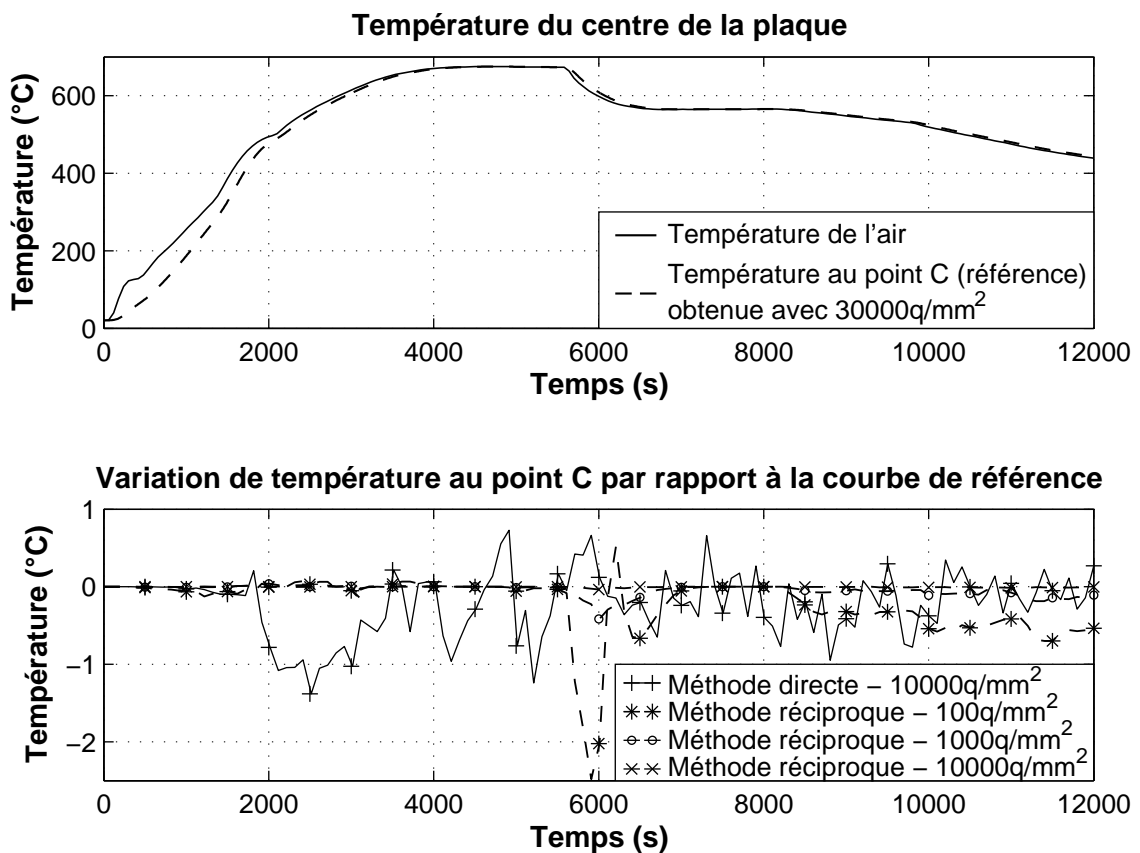


FIGURE 4.18 – Température au centre de la plaque et sensibilité à la méthode utilisée et au nombre de quanta envoyés

La figure 4.18 présente les résultats obtenus avec la méthode de Monte-Carlo directe et la méthode réciproque. Sur la figure du haut, apparaît la température du centre de la plaque au point  $C$  ainsi que la température de l'air. La température au point  $C$  a été calculée en utilisant la méthode réciproque et en prenant une densité de quanta de  $30000 \text{ q/mm}^2$ , valeur à laquelle le calcul peut être considéré comme ayant numériquement convergé.

La figure du bas montre l'écart entre la solution convergée et d'autres simulations. On constate



que globalement, la méthode réciproque converge plus rapidement. En effet, en comparant le résultat convergé avec celui obtenu en utilisant la méthode réciproque et une densité trois fois moins grande (soit 10000 q/mm<sup>2</sup> et 10000 q/mm) : les variations de température maximales sont inférieures à 0,02 °C. En revanche, le fait d'utiliser la méthode directe avec 10000 q/mm<sup>2</sup>, les écarts sont plus importants et peuvent dépasser 1°C. Cela induit qu'il est préférable d'utiliser la méthode réciproque plutôt que la méthode directe.

En gardant la méthode réciproque, il est intéressant de diminuer au maximum la densité de quanta envoyés, pour une précision acceptable, afin de réduire les temps de calcul.

Avec une densité de quanta 30 fois plus faible (1000 q/mm<sup>2</sup>), l'écart de température maximal est de 0,5 °C, ce qui reste raisonnable. À partir d'une densité de 100 q/mm<sup>2</sup>, l'écart de température au point *C* commence à devenir plus important et peut dépasser 2 °C à  $t = 5800$  s, ce qui risque d'avoir un impact sur les valeurs de viscosité.

Les temps de calcul de chaque simulation sont listés dans le tableau 4.2. La relation entre durée

Densité de quanta (quanta/mm <sup>2</sup> )	Temps CPU (heures)
10 <sup>2</sup>	0,2
10 <sup>3</sup>	0,5
10 <sup>4</sup>	1,6
3.10 <sup>4</sup>	4,3

Tableau 4.2 – Temps CPU en fonction du nombre de quanta envoyés

d'un calcul et nombre de quanta envoyés n'est pas linéaire car il faut aussi tenir compte de la résolution de l'équation de la chaleur : la durée de l'opération va donc dépendre de la méthode utilisée, du couplage thermique choisi (fort ou faible) et du schéma de résolution. Néanmoins, le nombre de quanta envoyés augmente sensiblement le temps de calcul. La densité de quanta retenue pour les calculs numériques est de 10<sup>3</sup> quanta/mm<sup>2</sup> car cette densité permet d'obtenir une précision acceptable pour un temps de calcul raisonnable.

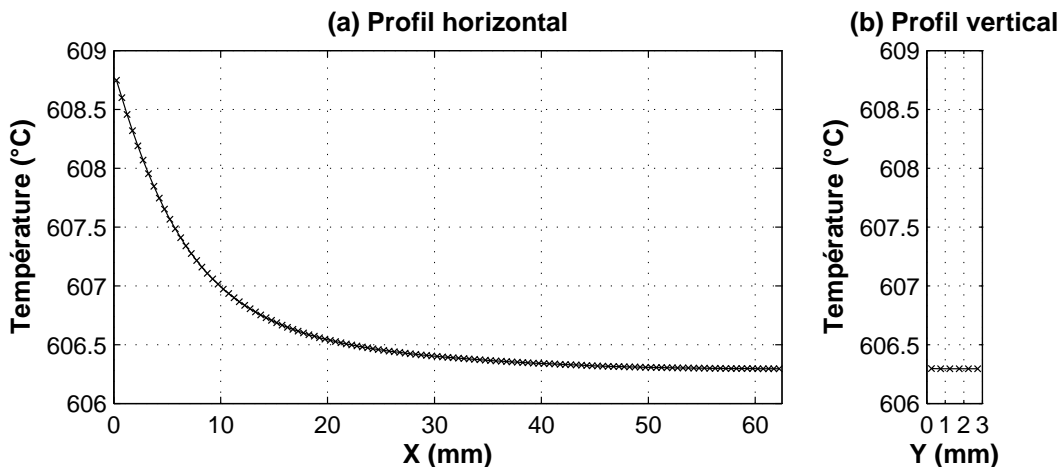


FIGURE 4.19 – Profils de température de la plaque de verre à  $t = 3000$  s

La figure 4.19 présente les profils de température horizontaux et verticaux de la plaque. Il est intéressant de relever les températures à  $t = 3000$  s car, dans le cas d'une simulation thermomécanique (voir chapitre 5), les valeurs de viscosité deviennent suffisamment faibles pour permettre la mise en forme. De plus, à 3000 s, la température de l'air évolue encore assez vite pour pouvoir observer les effets d'inertie thermique à l'intérieur de la plaque.

On constate que les gradients de température au centre de la plaque sont quasiment nulles. En revanche, dans l'axe horizontal de la plaque (selon  $x$ ), la température évolue rapidement près de la frontière, entre 0 et 20 mm. Ces variations restent cependant assez faibles avec un écart inférieur à 3 °C entre le centre de la plaque et le bord.



## Chapitre 5

# Simulation thermomécanique

Après avoir été validé, le code de calcul radiatif peut être intégré dans le code thermomécanique permettant de simuler un essai de thermoformage. Pour ce faire, deux possibilités existent. Dans le premier cas, le logiciel éléments finis Abaqus® ne gère que la partie mécanique et la résolution de l'équation de la chaleur est réalisée par un code extérieur. Dans le second cas, le logiciel prend en charge l'ensemble du problème thermomécanique, à l'exception du transfert radiatif.

Le choix de l'une ou l'autre de ces solutions peut être conditionné par le type de couplage numérique adopté. En effet, comme cela a été évoqué dans le chapitre 3, le thermoformage implique une forte influence de la température sur la déformation du verre et vice versa. À un incrément de temps donné, il est donc préférable de résoudre plusieurs fois le principe fondamental de la dynamique et l'équation de la chaleur dans le but d'obtenir des résultats précis. Cette condition est d'ailleurs remplie par Abaqus® lorsqu'il gère l'ensemble du problème, sauf le transfert radiatif. En revanche, il existe aussi un couplage en thermique entre conduction et rayonnement et il est alors judicieux de savoir s'il faut mettre en place, numériquement, un couplage fort ou un couplage faible. Cette problématique est abordée dans la première partie du chapitre. Dans la deuxième partie, une simulation d'essai de thermoformage est réalisée en se basant sur le cas étudié par (Soudre, 2008). La même géométrie (en 2 dimensions) est retenue et le chargement thermique est imposé en reprenant les mesures de température de l'air dans le four en conditions d'essai et une attention particulière est accordée au transfert par rayonnement. Les résultats de plusieurs méthodes, souvent utilisées dans la littérature scientifique portant sur la simulation de la mise en forme du verre, sont comparés à ceux obtenus avec la méthode de Monte-carlo, cette dernière faisant office de méthode de référence.

La géométrie de la plaque de verre et la forme du moule sont ensuite modifiées de telle sorte à simuler une opération de thermoformage en suspension. Il s'agit de tester, pour une autre configuration d'essai, si les conclusions obtenues pour l'essai sur moule sont toujours valables.

## 5.1 Problématique du couplage thermique

La résolution de l'équation de la chaleur repose soit sur un couplage fort entre conduction et rayonnement, soit sur un couplage faible. Comme l'illustre la figure 5.1, lorsque le couplage fort est utilisé, l'incrément de  $t_i$  à  $t_{i+1}$  est réalisée seulement lorsqu'un critère de convergence est atteint. Cela implique une ou plusieurs itérations entre la résolution de l'équation de la chaleur et le calcul du rayonnement. À l'opposé, si le couplage faible est retenu, il n'y a aucune itération entre conduction et rayonnement.

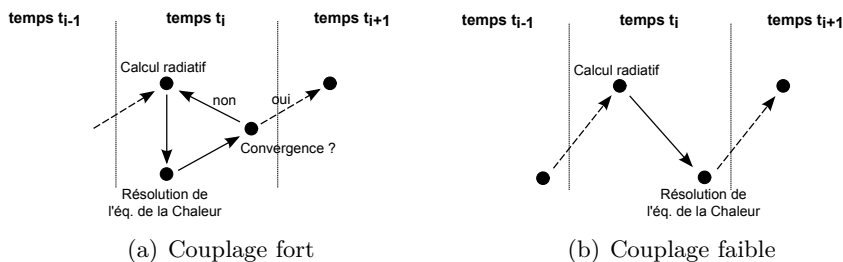


FIGURE 5.1 – Principe du couplage thermique fort et du couplage thermique faible

Grâce au critère de convergence, le couplage fort possède l'avantage de contrôler l'erreur commise à chaque incrément. Ce n'est pas le cas du couplage faible où la précision va surtout dépendre du pas de temps choisi. En effet, plus le pas de temps est petit, plus la probabilité d'obtenir un résultat précis est élevée. Comme le couplage faible n'induit aucune itération, il permet de réduire les temps de calcul par rapport au couplage fort.

Dans Abaqus<sup>®</sup>, la solution la plus simple consiste à implémenter le code de Monte-Carlo directement dans les sous-routines du logiciel. Cette solution induit un couplage faible. En effet, à chaque incrément de calcul, le logiciel ne fait appel qu'une seule fois à la sous-routine DFLUX. Celle-ci lui fournit la valeur de la divergence de flux radiatif de chaque élément renvoyée par le code de Monte-Carlo.

Ainsi cela pose la problématique suivante. Si le couplage fort est indispensable, cela implique de développer une solution de calcul thermique complètement externe à Abaqus<sup>®</sup>. À l'inverse, si le couplage faible suffit, il apparaît comme possible de coupler directement le code de Monte-Carlo avec le logiciel éléments finis.

Il faut donc vérifier la précision du couplage faible en comparant ses résultats avec ceux du couplage fort sur un cas-test purement thermique qui se veut suffisamment réaliste. À ce titre, le dernier cas simulé dans le précédent chapitre est parfaitement adapté puisqu'il utilisait les mesures de l'air dans le four au cours d'un essai.

En l'occurrence, les résultats étaient obtenus en utilisant un couplage thermique fort. Pour pouvoir tester le couplage faible, le code a été volontairement « bridé ». Les résultats des simulations sont présentés en figure 5.2.

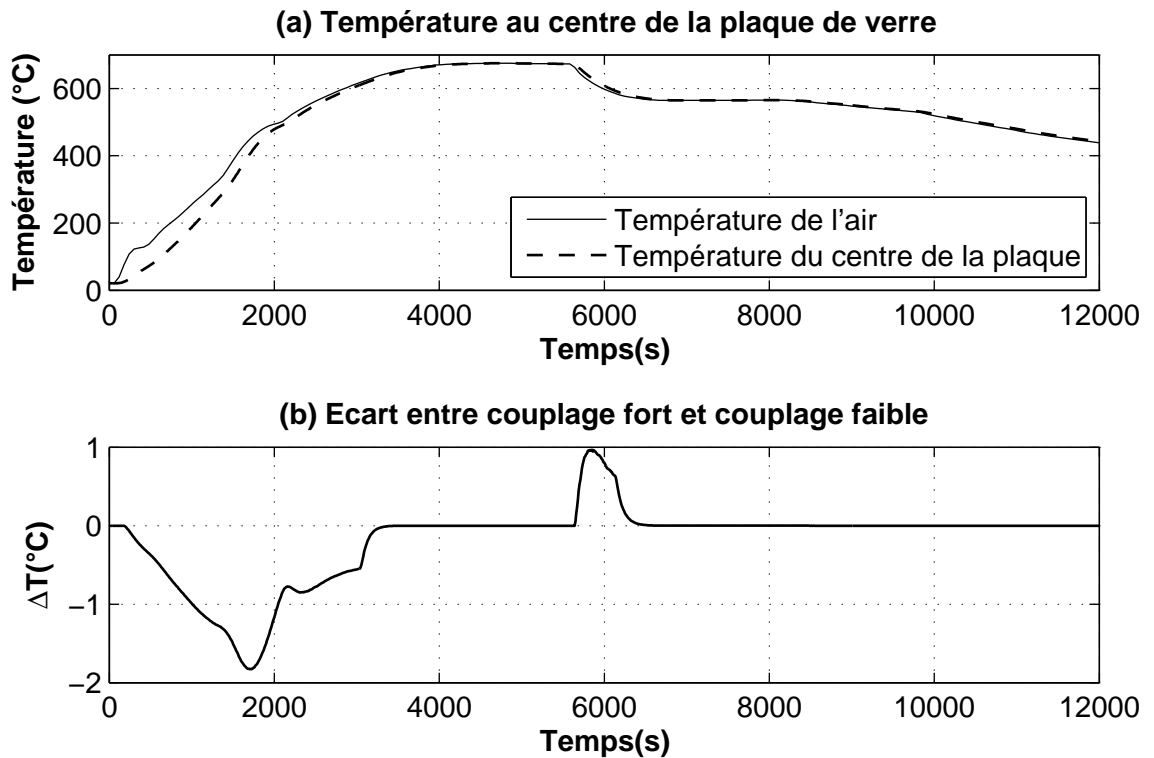


FIGURE 5.2 – Température du centre de la plaque de verre et écart entre couplage fort et couplage faible.

Les paramètres sont restés les mêmes que dans le précédent chapitre. À savoir que la plaque de verre échange toujours à sa frontière avec l'air par convection ( $K_g = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ ) et rayonnement, la luminance étant calculée en considérant que le milieu environnant émet comme un corps noir à la température de l'air. Le maillage est de  $6 \times 125$  éléments et le pas de temps  $\Delta t = 5 \text{ s}$ . La densité de quanta émis est de 1000 par  $\text{mm}^2$  dans le milieu et 1000 par  $\text{mm}$  à la frontière.

Dans la partie haute de la figure, la température de l'air est représentée en fonction du temps, de même que la température du centre de la plaque. À cette échelle, il n'est pas possible de distinguer des écarts de température entre couplage thermique fort et faible. Ces écarts sont donc tracés dans la partie basse de la figure.

Pendant la phase de chauffage, la différence de température au centre de la plaque entre couplage fort et couplage faible peut atteindre jusque 1,8 degrés. Pendant la descente, la différence maximale est de l'ordre de 1 degré. Ces écarts sont relativement faibles mais ils pourraient avoir un impact sur les valeurs de viscosité. Cependant, ce dernier point est problématique uniquement à la température de travail. Or, au-dessus de 600 °C, l'écart de température entre couplage fort et couplage faible est quasiment nul.

On peut donc raisonnablement en conclure qu'utiliser le couplage faible plutôt que le couplage

fort n'affecte pas ou très peu les résultats numériques. Pour cette raison et parce qu'il est plus facile à implémenter et un peu plus rapide en temps de calculs (1936 s contre 2406 s, soit un gain de temps d'environ 20%), le couplage faible sera retenu en prenant soin, pour chaque analyse numérique, de choisir un pas de temps maximal de 5 s.

## 5.2 Étude de la mise en forme du verre avec différents modèles thermiques

Dans cette section, deux types d'essais sont présentés. Dans le premier cas, la mise en forme d'une plaque de verre sur un moule concave est modélisée. Ce cas correspond aux essais expérimentaux menés par L. Soudre (Soudre, 2008). Dans le deuxième cas, il s'agit de la mise en forme d'une plaque de verre par suspension. Ce cas ne repose pas sur un essai déjà réalisé mais permettra de tester la validité des observations faites lors du thermoformage sur moule. En plus de vérifier le bon fonctionnement du code thermomécanique, l'intérêt de ces simulations est de comparer différents modèles thermiques et d'étudier l'influence du transfert radiatif. Parmi les simulations réalisées, les résultats obtenus en modélisant le transfert radiatif avec la méthode de Monte Carlo font office de référence.

### 5.2.1 Thermoformage sur moule

Le thermoformage du verre sur moule concave implique que la plaque vienne au contact du moule et prenne sa forme. L'accent a été particulièrement mis sur la prise en compte du transfert radiatif avec la comparaison de plusieurs modèles, chacun d'entre eux basé sur des méthodes de résolution et des hypothèses différentes.

#### Présentation du modèle numérique

La géométrie de l'essai est présentée sur la figure 5.3-a. Il s'agit d'une plaque de verre de 125 mm × 6 mm posée sur un moule concave de 65 mm de rayon. Au début de l'essai, la plaque est supposée parallèle à la sole du four. Contrairement aux cas étudiés en thermique pure, il n'est plus possible d'utiliser deux axes de symétrie et de représenter un quart de la plaque seulement, car lors de la mise en forme, la symétrie initiale selon l'axe  $y$  est rompue. En revanche, en tenant compte de l'axe de symétrie du montage selon l'axe  $x$ , seule la moitié du problème est modélisée afin d'économiser du temps de calcul.

La figure 5.3-b représente le maillage par éléments finis de la plaque de verre, composé de 12 × 125 éléments. Le point  $C$  est défini comme étant le centre de la plaque et sert de point de référence pour les résultats ( $x_C = 0$ ;  $y_C = 0$ ).

Les propriétés mécaniques et thermiques du verre utilisées pour cette simulation proviennent de la publication de Su *et al.* (Su *et al.*, 2011). Celles-ci sont données dans le tableau 5.1 et sont

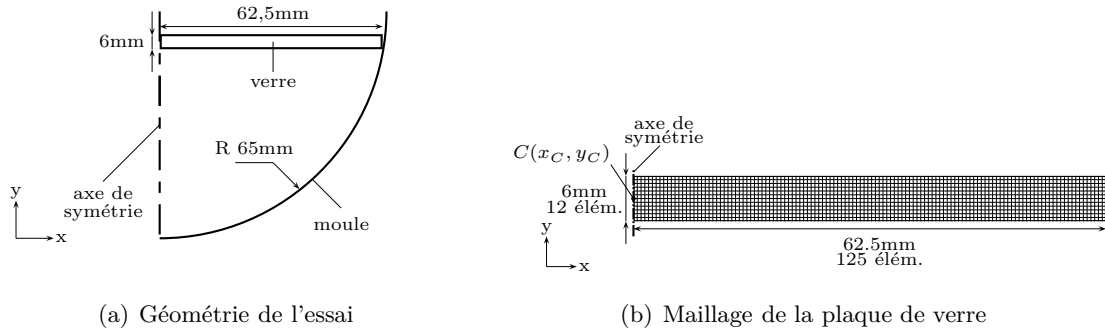


FIGURE 5.3 – Géométrie de l'essai sur moule et maillage de la plaque de verre

considérées comme indépendantes de la température.

Propriétés	Unit	Valeur
$\rho_v$	( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	2483
$k_c$	( $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ )	0,98
$c_p$	( $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ )	1140
$E$	(Pa)	$68,5 \times 10^9$
$\nu_p$	(-)	0,22
$\alpha$	( $\text{K}^{-1}$ )	$9,36 \times 10^{-6}$

Tableau 5.1 – Propriétés physiques du verre

Les propriétés optiques du verre sont identiques à celles utilisées pour l'étude en thermique pure (cf. tableau 4.1). La viscosité est modélisée par une loi WLF qui peut être directement implémentée dans Abaqus<sup>®</sup>. Les paramètres  $C_1$ ,  $C_2$  et  $\eta(T_0 = 400^\circ\text{C})$ , fournis dans le tableau 5.2, sont ceux qui ont été déterminés en recherchant la courbe qui se rapproche au mieux des données expérimentales de (Parsa *et al.*, 2005), présentées dans le chapitre 3.

Le contact entre le verre et le moule est considéré comme glissant, comme l'ont observé expérimentalement (Lochegnies *et al.*, 1995) pour des températures de mise en forme inférieures à  $680^\circ\text{C}$ .

Concernant les paramètres de simulation, le couplage thermique est faible et le pas de temps  $\Delta t$  choisi est au maximum de 5 s.

Paramètres	Unités	Valeur
$C_1$	(-)	40
$C_2$	(-)	710
$\eta(T_0 = 400^\circ\text{C})$	(Pa.s)	$10^{19}$

Tableau 5.2 – Paramètres de la loi WLF



### Prise en compte du rayonnement

En ce qui concerne l'ensemble des procédés de mise en forme du verre, très souvent, une attention particulière est accordée à la modélisation mécanique au détriment du transfert thermique et notamment du transfert radiatif. Ainsi, dans certaines études, le rayonnement est simplement négligé et seuls les échanges par conduction à l'intérieur du verre et par convection à la surface sont pris en compte (Chen et Yi, 2011; Grégoire *et al.*, 2007). Certains auteurs comme (Klar *et al.*, 2005) considèrent que cette hypothèse ne permet pas d'obtenir des résultats précis, le rayonnement devenant un mode de transfert thermique majeur à hautes températures. Dans d'autres études, l'équation de la chaleur n'est pas résolue car la température est imposée de manière uniforme dans le verre (Feulvarch *et al.*, 2005). Une autre solution consiste à imposer une conductivité radiative (Yan *et al.*, 2009), concept qui est à la base de l'approximation de Rosseland.

Afin de vérifier la validité de ces différents modèles thermiques, ils seront mis en œuvre numériquement et leurs résultats seront comparés avec ceux calculés en appliquant la méthode de Monte-Carlo. La description de chacune des options retenues est la suivante :

1. la température du verre est considérée comme égale à la température de l'air (cf. figure 4.15) ;
2. l'équation de la chaleur est résolue en négligeant le terme de rayonnement. Seule la conduction est prise en compte à l'intérieur du verre et les échanges à la surface entre air et verre ont lieu en prenant un coefficient d'échange global  $K_g$  égal à  $10 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-2}$  ;
3. la diffusion du rayonnement à l'intérieur du verre est prise en compte via une résistance radiative calculée avec l'approximation de Rosseland. La quantité de rayonnement traversant le dioptre air/verre est directement absorbée à la surface ;
4. la méthode de Monte-Carlo est utilisée comme résultat de référence. Les densités sont de 1000 quanta/ $\text{mm}^2$  dans le milieu et 1000 quanta/ $\text{mm}$  à la frontière.

Mécaniquement, la loi de comportement élasto-visco-plastique correspond au modèle de Maxwell présenté dans le chapitre 3. Les éléments utilisés reposent sur l'hypothèse des déformations planes. Dans Abaqus<sup>®</sup>, le code de calcul basé sur la méthode de Rosseland est implémenté dans la subroutine URDFIL, à l'instar du code de Monte Carlo.

### Analyse des résultats

Afin de simplifier la lecture des graphiques et éviter les répétitions, les acronymes suivants sont utilisés : (TI) pour température imposée, (CF) pour convection à la frontière et le terme de rayonnement négligé lors de la résolution de l'équation de la chaleur, (AR) pour approximation de Rosseland et (MMC) pour la méthode de Monte-Carlo. La température du centre de la plaque est représentée sur la figure 5.4-a et le déplacement sur la figure 5.4-b. En ce qui concerne le déplacement, c'est l'intervalle de temps compris entre 2000 s et 6000 s qui présente le plus d'intérêt car c'est sur cette plage que s'observe la phase de déformation de la plaque de verre.

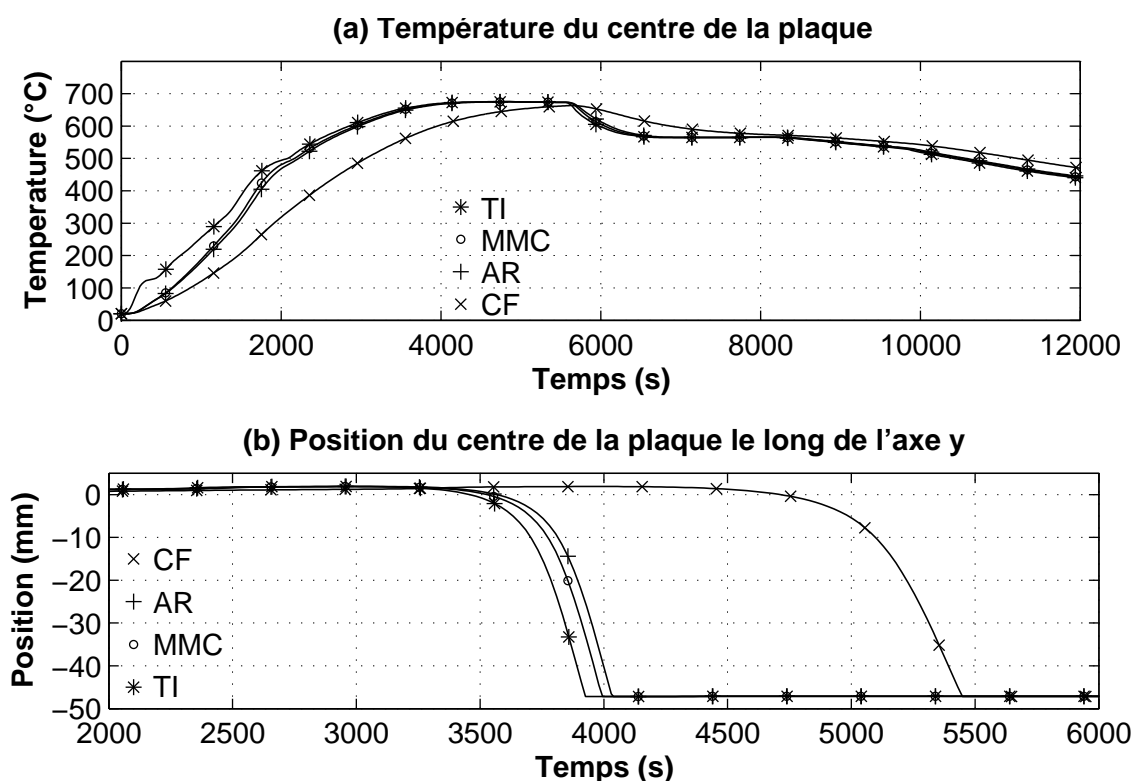


FIGURE 5.4 – Température et déplacement du centre de la plaque de verre au cours de l'essai sur moule

En premier lieu, on s'intéresse à la phase de montée en température. Il apparaît que la température du centre de la plaque dépend fortement de la méthode utilisée. Durant la phase de montée, (TI) voit sa température augmenter plus rapidement que les autres simulations. Il s'agit d'un résultat logique puisque la température du verre est égale à la température de l'air, partant du principe qu'un transfert thermique idéal a lieu entre le verre et l'air. À l'inverse, la température obtenue avec (CF) est très inférieure à celle de la courbe de référence (MMC), l'écart maximal pouvant atteindre jusque 150 °C à  $t = 2000$  s. Cet écart persiste, même lors du palier de mise en forme, ce qui risque de générer un comportement très différent, entre les deux simulations, concernant la déformation de la plaque. Finalement, l'écart entre (MMC) et (AR) est relativement faible, les deux courbes variant de la même façon.

Durant la phase de montée en température, le centre de la plaque remonte légèrement. Cela est dû à la dilatation thermique. La longueur de la plaque augmente et elle se déplace alors vers le haut par glissement sur le moule. Ce phénomène est en parfait accord avec la pratique puisqu'il a déjà été observé expérimentalement (Soudre, 2008).

À partir de  $t = 3000$  s, la température du centre de la plaque pour (TI), (MMC) et (AR) franchit 600 °C. La viscosité devient alors suffisamment faible pour permettre la mise en forme de la plaque. La partie centrale de la plaque se déforme de plus en plus vers le bas jusqu'à

ce qu'elle prenne contact sur le moule autour d'un temps  $t = 4000$  s. À ce moment précis, la température du centre de la plaque pour (TI), (MMC) et (AR) vient d'atteindre la température de palier. Cela signifie d'ailleurs que la plaque est déjà mise en forme quand commence la phase de maintien en température, il est donc possible que le chargement thermique imposé ne soit pas optimal.

Lorsque le rayonnement est négligé (CF), les résultats sont totalement différents. Tout d'abord, la température du centre de la plaque ne dépasse  $600$  °C qu'à partir de  $4000$  s, soit avec environ  $1000$  s de retard sur les autres simulations. Cela se répercute sur la mise en forme du verre, puisque la partie centrale de la pièce rentre en contact avec le moule à  $t = 5400$  s, soit  $1400$  s de plus que les autres simulations. Ces temps de mise en forme sont répertoriés dans le tableau 5.3.

Méthode	Début de la mise en forme (s)	Contact entre moule et centre de la plaque(s)
(TI)	2934	3925
(MMC)	2980	3980
(AR)	3030	4040
(CF)	3980	5449

Tableau 5.3 – Temps de mise en forme

La figure 5.5 présente la température horizontale à mi-hauteur de la plaque (qui correspond à la ligne initialement définie par  $y_C = 0$  progressivement déformée lors de la mise en forme) en fonction de  $x$ .

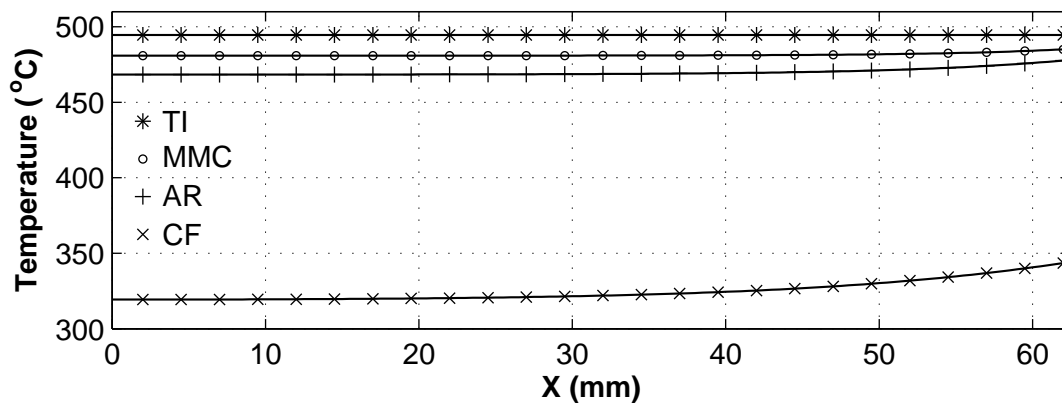


FIGURE 5.5 – Température le long de l'axe  $x$  à  $t = 2000$  s

L'intervalle de température qui comprend les courbes des simulations (TI), (MMC) et (AR) est inférieur à  $30$  °C. Cet écart est assez important mais contraste avec les  $150$  °C qui séparent (CF) des autres simulations. Pour (TI), comme la température est uniforme, il n'y a pas de variation dans la longueur de la plaque. Avec (MMC), la variation de température du centre

de la plaque à l'extrémité de la pièce est de 5 °C. Elle est de 10 °C pour (AR) et 25 °C pour (CF). La différence est plus grande pour (CF) car il n'y pas de rayonnement pour homogénéiser les flux thermiques à l'intérieur du verre. Dans le même état d'esprit, avec (AR), l'absorption du rayonnement se fait à la frontière, ce qui implique une répartition des flux légèrement plus hétérogène que (MMC) et explique la plus grande variation de température dans la longueur de la plaque.

La forme de la plaque pendant la mise en forme à  $t = 3855$  s, et après déformation à  $t = 12000$  s, est tracée en figure 5.6 pour les 4 simulations. Seule la partie droite de la plaque de verre est représentée, la forme totale de la pièce étant obtenue en procédant à une symétrie d'axe  $x = 0$ . Pendant la mise en forme (figure 5.6-a), les formes prises par la plaque sont très différentes en

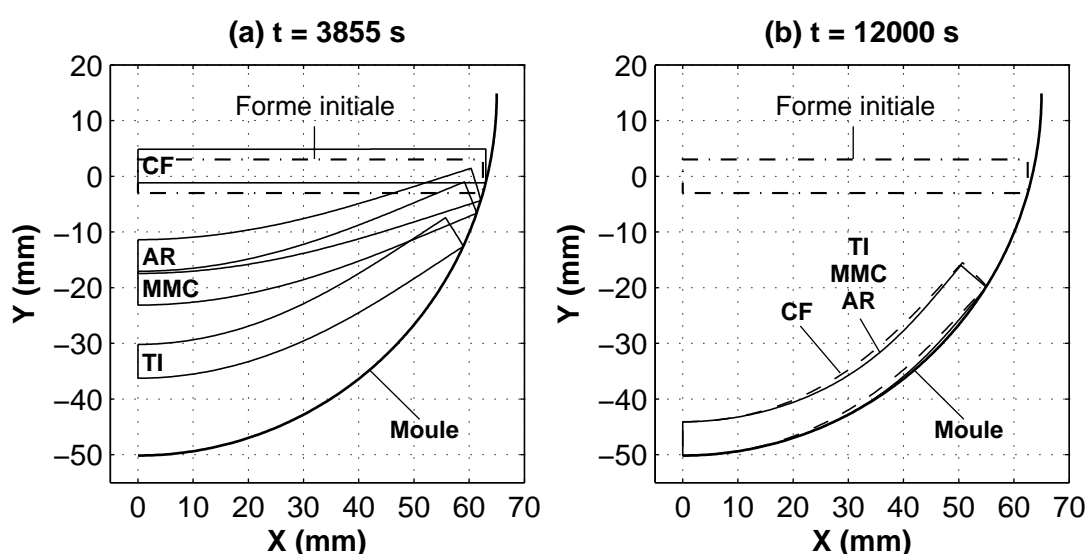


FIGURE 5.6 – Formes de la plaque de verre à  $t = 3855$  s et  $t = 12000$  s

fonction du modèle radiatif utilisé. Ainsi, le centre de la plaque est descendu 34 mm plus bas que sa position initiale pour (TI), 20 mm plus bas pour (MMC) 14 mm plus bas pour (AR). Pour (CF), la plaque n'a pas encore entamé sa phase de déformation et n'est pour l'instant sujette qu'au phénomène de dilatation thermique, ce qui explique pourquoi elle se situe 2 mm au-dessus de sa position initiale.

Après déformation (figure 5.6-b), les formes obtenues pour (TI), (MMC) et (AR), représentées en traits pleins, sont identiques. En revanche, celle obtenue avec (CF), en pointillés, épouse moins la géométrie du moule. D'un point de vue numérique, le fait de négliger le terme de rayonnement lors de la résolution de l'équation de la chaleur conduit à une sous-estimation du champ de température de la plaque, ce qui génère une mauvaise représentation de la phase de déformation du verre.

Ceci nous conduit à la conclusion que toutes les simulations proposées permettent d'obtenir une bonne représentation de la forme finale de la pièce, à l'exception de (CF). Il semble donc nécessaire de tenir compte du terme de rayonnement lors de la résolution de l'équation de la

chaleur.

Les temps CPU sont fournis dans le tableau 5.4.

Méthode	Temps CPU (min)
(TI)	24
(CF)	25
(AR)	27
(MMC)	185

Tableau 5.4 – Temps CPU de chaque méthode

### Analyse de sensibilité

Les résultats et conclusions issus des différentes simulations présentées auparavant dépendent fortement des hypothèses de modélisation. Ainsi, quelques paramètres ont été modifiés de telle sorte à étudier leur influence sur la mise en forme. Dans un premier temps, on s'intéresse à la variation du coefficient d'échange global  $K_g$  (tableau 5.5) et à la capacité thermique massique  $c_p$  (tableau 5.6). La méthode de Monte-Carlo est retenue pour les calculs puisque c'est la plus précise.

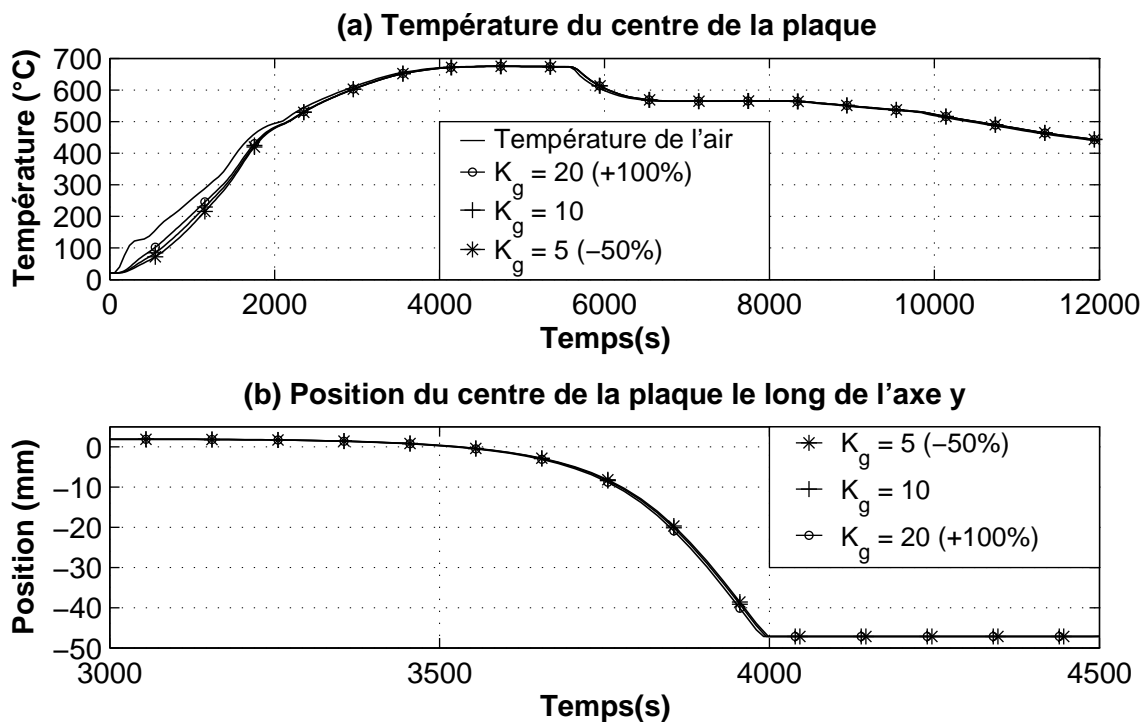


FIGURE 5.7 – Température et déplacement du centre de la plaque en faisant varier la valeur de  $K_g$

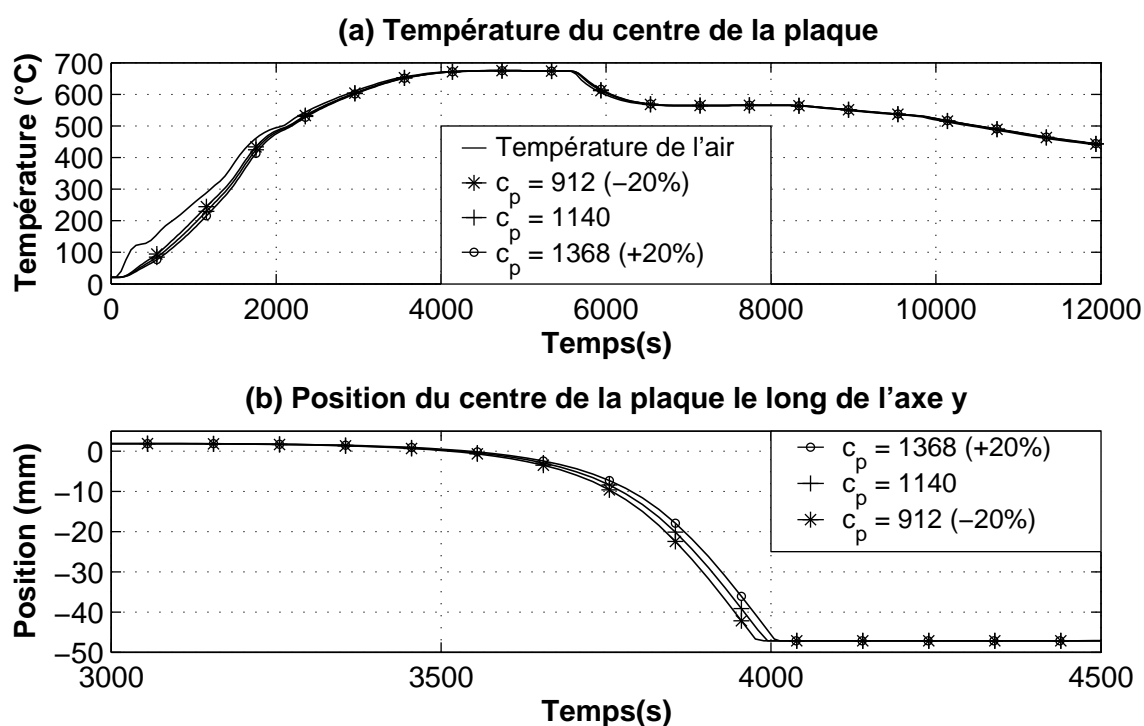
Deux simulations ont été lancées en multipliant ou divisant  $K_g$  par un facteur 2 par rapport à la simulation d'origine. Ces variations n'ont quasiment aucune influence sur les résultats du calcul comme le montre la figure 5.7.

$K_g$ ( $\text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-2}$ )	Température à $t = 3000$ s ( $^{\circ}\text{C}$ )	Contact entre verre et moule (s)
5 (-50%)	606.8 (-0.3)	3998 (+0.08%)
10 (simulation d'origine)	607.1	3995
20 (+100%)	607.6 (+0.5)	3991 (-0.11%)

Tableau 5.5 – Influence du coefficient d'échange global  $K$ 

En effet, à  $t = 3000$  s (tableau 5.5), lorsque la mise en forme de la plaque commence, la variation de température est de -0,3 degrés avec  $K_g$  divisé par 2. Cette variation est de +0,5 degrés lorsque  $K_g$  est multiplié par 2. De ce fait, le contact entre moule et verre est décalé de quelques secondes seulement, ce qui est faible. Cela impacte très peu la phase de mise en forme.

La variation du coefficient  $c_p$  a une influence un peu plus marquée comme le montre la figure 5.8.

FIGURE 5.8 – Température et déplacement du centre de la plaque en faisant varier la valeur de  $c_p$ 

Lorsque  $c_p$  diminue de 20%, la température du centre de la plaque à  $t = 3000$  s augmente de 1,5 degrés (tableau 5.6), ce qui entraîne un contact entre le verre et le moule 16 s plus tôt. Comme  $c_p$  est plus petit, la température monte plus rapidement et la plaque est plus vite mise en forme. À l'inverse, lorsque  $c_p$  augmente de 20%, la température diminue de 1,6 degrés et le contact s'établit 12 s plus tard.

Au final,  $K_g$  a un impact quasi-négligeable et la variation de  $c_p$  a peu d'influence. Précisons cependant que ces conclusions doivent être confirmées en utilisant les valeurs de flux radiatifs pour les conditions aux limites en lieu et place de la température de l'air.

$c_p$ (J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> )	Température à $t = 3000$ s (°C)	Contact entre verre et moule (s)
912 (-20%)	608.6 (+1.5)	3979 (-0.40%)
1140 (simulation d'origine)	607.1	3995
1368 (+20%)	605.5 (-1.6)	4007 (+0.30%)

Tableau 5.6 – Influence de la capacité thermique massique  $c_p$

Par ailleurs, pour vérifier l'influence des conditions aux limites, une simulation est réalisée en changeant la quantité de rayonnement reçu par la face supérieure de la plaque, comme schématisé sur la figure 5.9.

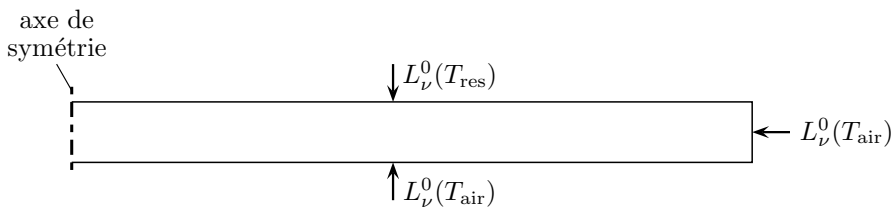


FIGURE 5.9 – Modification des conditions aux limites radiatives

La luminance est modifiée de telle sorte à simuler la puissance radiative qui pourrait être émise par des résistances à pleine puissance dès le début de l'essai ( $T_{res} = 675$  °C). Cette condition ne s'applique qu'à la face supérieure, les conditions aux limites des autres surfaces (latérales et inférieure) ne changent pas et les échanges par convection à l'interface ont toujours lieu en utilisant pour le milieu extérieur, la température de l'air mesurée dans le four.

L'évolution de la température du centre de la plaque avec les nouvelles conditions aux limites est

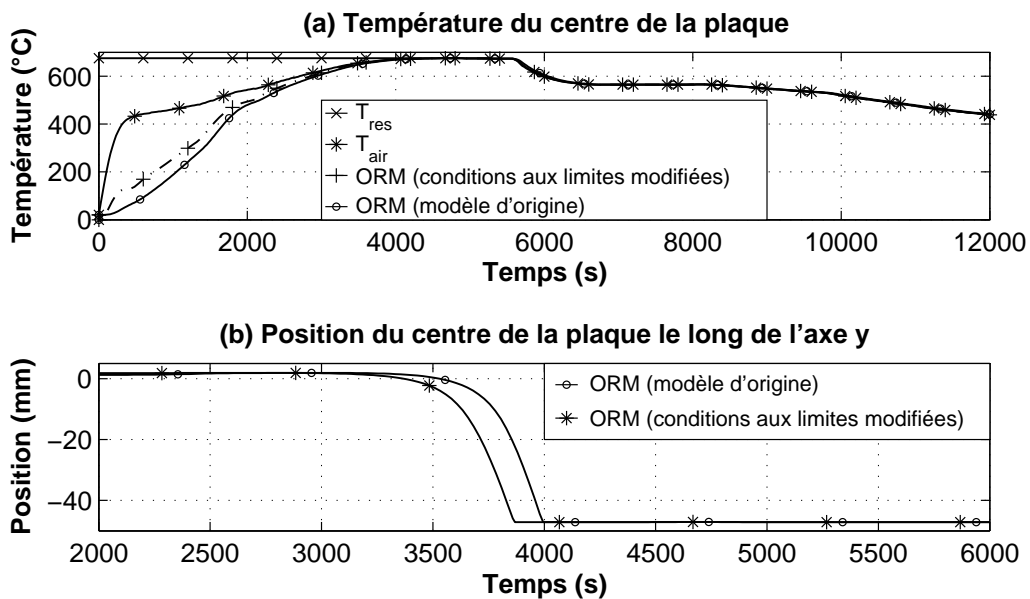


FIGURE 5.10 – Température et déplacement du centre de la plaque avec les nouvelles conditions aux limites

représentée sur la figure 5.10. Logiquement, la température du verre augmente plus rapidement avec les nouvelles conditions. Au début de la phase de mise en forme, à  $t = 3000$  s, l'écart de température entre le modèle d'origine et le nouveau modèle est de  $16$  °C ( $607$  °C contre  $623$  °C). Sans être très important, cet écart suffit pour affecter de manière sensible le déplacement du point central. Ainsi, le centre de la plaque de verre rentre en contact avec le moule  $126$  s plus tôt.

Le modèle est donc beaucoup plus sensible à une modification des conditions aux limites en température plutôt qu'à une variation du coefficient d'échange global  $K_g$  ou de la capacité thermique massique  $c_p$ .

### Bilan de l'essai sur moule

Pour le modèle en 2 dimensions présenté ici, résoudre l'équation de la chaleur en négligeant le rayonnement et en imposant uniquement de la convection aux frontières conduit à des résultats très différents de ceux obtenus avec la méthode de Monte-Carlo. Sachant que Monte-Carlo est considérée comme la méthode de référence, cela semble indiquer que négliger le rayonnement est une hypothèse trop grossière et conduit à des résultats erronés. En revanche, utiliser l'approximation de Rosseland ou imposer la température du verre à celle de l'air apparaissent comme des solutions plus acceptables dans le cadre de nos simulations. En effet, elles permettent d'obtenir un résultat final équivalent à la méthode de Monte-Carlo avec des temps de calcul environ 7 fois plus courts.

L'ensemble de ces résultats a fait l'objet d'une publication (Le Corre *et al.*, 2014) dont le contenu est disponible en annexe 3.

Cependant, il faut noter que les formes intermédiaires de la plaque lors de la phase de mise en forme (entre  $3000$  s et  $4000$  s) sont très différentes en fonction de la méthode utilisée. Cela signifie que les conclusions qui peuvent s'appliquer ici au thermoformage sur moule ne sont pas nécessairement valables pour le thermoformage en suspension. C'est ce que nous proposons de vérifier dans la partie suivante.

#### 5.2.2 Thermoformage en suspension

Par définition, la mise en forme d'une pièce par suspension implique qu'une grande partie de la surface du verre ne rentre pas en contact d'un moule et se déforme donc librement. Le contrôle de la température est donc encore plus important que pour le thermoformage sur moule car la moindre variation peut affecter sensiblement la forme du produit final. L'objectif de ce modèle est d'observer si les conclusions obtenues lors du thermoformage sur moule sont toujours valables pour le thermoformage en suspension, notamment en ce qui concerne la performance des différents modèles radiatifs. Par rapport au cas étudié précédemment, la géométrie est bien évidemment différente et le chargement thermique a été légèrement modifié. Les caractéristiques



physiques du verre sont les mêmes. Les résultats obtenus avec la méthode de Monte-Carlo seront toujours considérés comme étant la référence.

### Conditions d'essai

La géométrie de l'essai est décrite en figure 5.11. Une plaque de verre de 200 mm de longueur pour 6 mm d'épaisseur est centrée sur des supports situés à chacune de ses extrémités. L'écart entre les deux supports est de 110 mm. La symétrie de plan  $x = 0$  est prise en compte afin de réduire les temps de calcul. Ce modèle numérique ne s'appuie pas sur un essai déjà existant mais

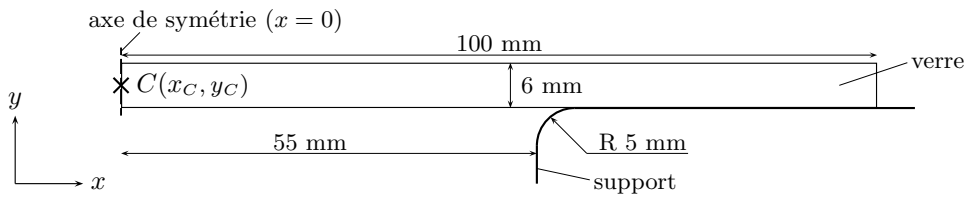


FIGURE 5.11 – Géométrie de l'essai en suspension

se veut réaliste. Le contact entre verre et moule est considéré glissant. Le chargement thermique est légèrement modifié par rapport à celui du précédent cas. En effet, le palier est fixé à 660 °C et non plus à 675 °C, car il s'avère que pour les simulations, cela permet d'obtenir une déformation ni trop faible, ni trop importante. Le nouveau cycle de température est représenté sur la figure 5.12.

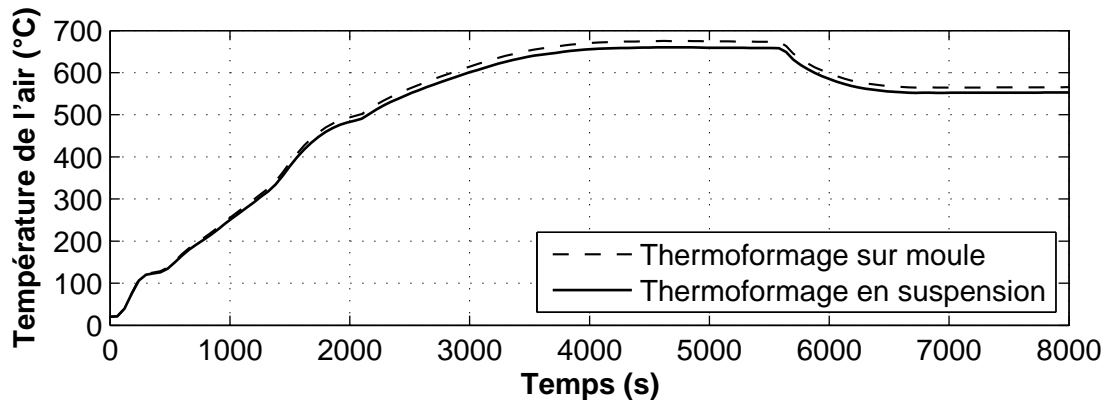


FIGURE 5.12 – Température de l'air imposée pour les conditions aux limites

### Analyse des résultats

La température du centre de la plaque pendant la mise en forme est tracée sur la figure 5.13-a. D'un point de vue thermique, on observe globalement le même comportement que pour le thermoformage sur moule. Ainsi, les écarts entre (CF) et (MMC) sont toujours très importants. En revanche, la différence de température est toujours assez faible entre (TI), (MMC) et (AR)

au-dessus de 600 °C (les courbes sont comprises dans un intervalle de 12 °C).

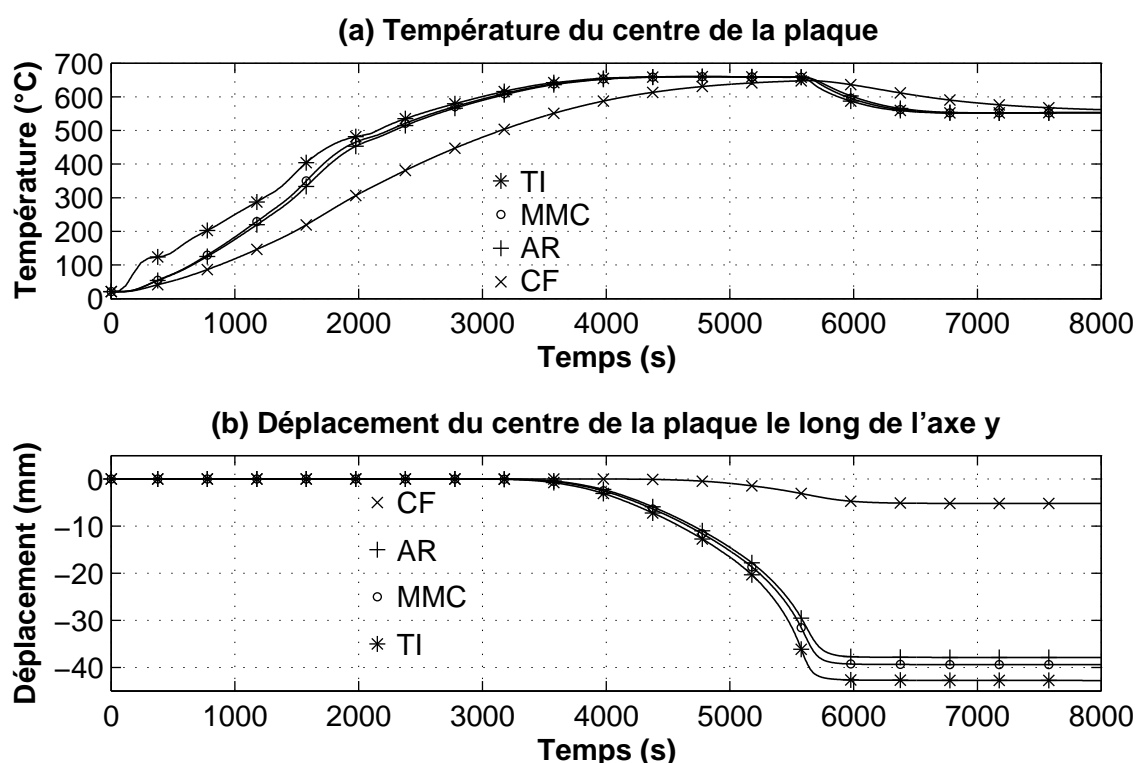


FIGURE 5.13 – Température et déplacement du centre de la plaque de verre au cours de l'essai en suspension

Cependant, le déplacement du centre de la plaque, visible sur la figure 5.13-b, est différent de ce qui a pu être observé pour le thermoformage sur moule. Ainsi, la mise en forme de la plaque commence toujours autour de 3000 s pour (TI), (MMC) et (AR). Jusqu'à  $t = 5600$  s, moment qui correspond à la fin du palier en température, l'écart de position du centre de la plaque entre les différentes simulations ne fait que s'accroître, comme le montre la figure 5.14-b. Cet écart diminue ensuite très légèrement avant de se stabiliser.

La figure 5.14 permet de visualiser l'écart entre (MMC) et (TI) d'une part, et entre (MMC) et (AR) d'autre part. Les résultats de la simulation (CF) ne sont pas affichés car ils ne représentent pas ce qui se passe dans la réalité.

Entre 5600 s et 6000 s, les écarts diminuent légèrement entre les différentes simulations. Cela s'explique par l'inertie thermique de chacun des modèles. En effet, pour (TI), la température du verre est égale à la température de l'air et il n'y a donc pas d'inertie thermique. Ainsi, la température augmente plus rapidement que pour les autres simulations lors de la phase de chauffage. Cependant, elle redescend très rapidement à la fin du palier en température et la mise en forme s'arrête de façon nette. Pour (MMC), il existe une certaine inertie thermique qui explique qu'une

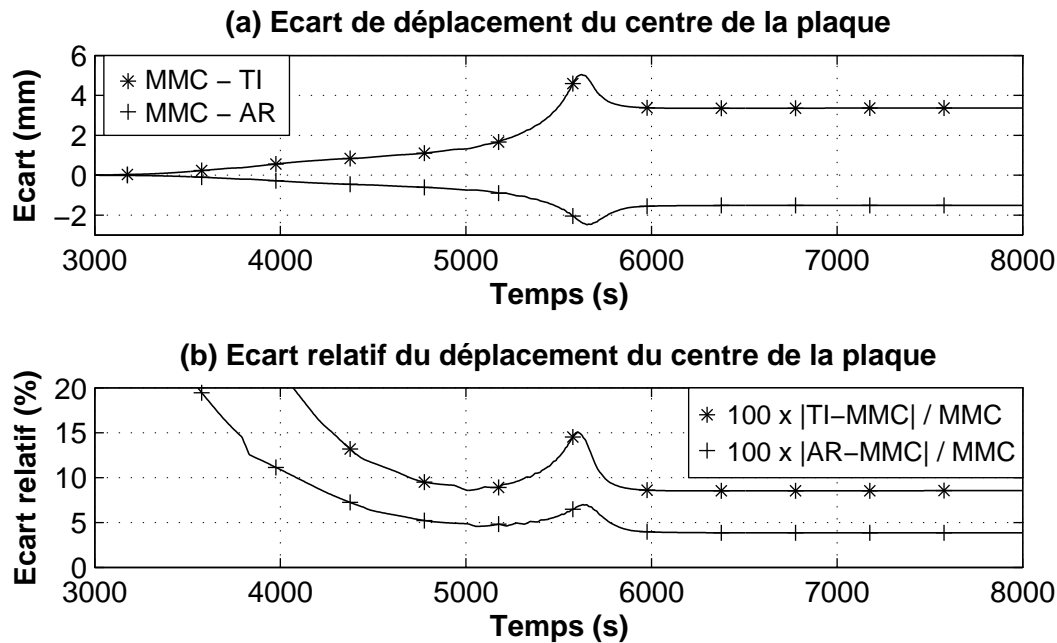
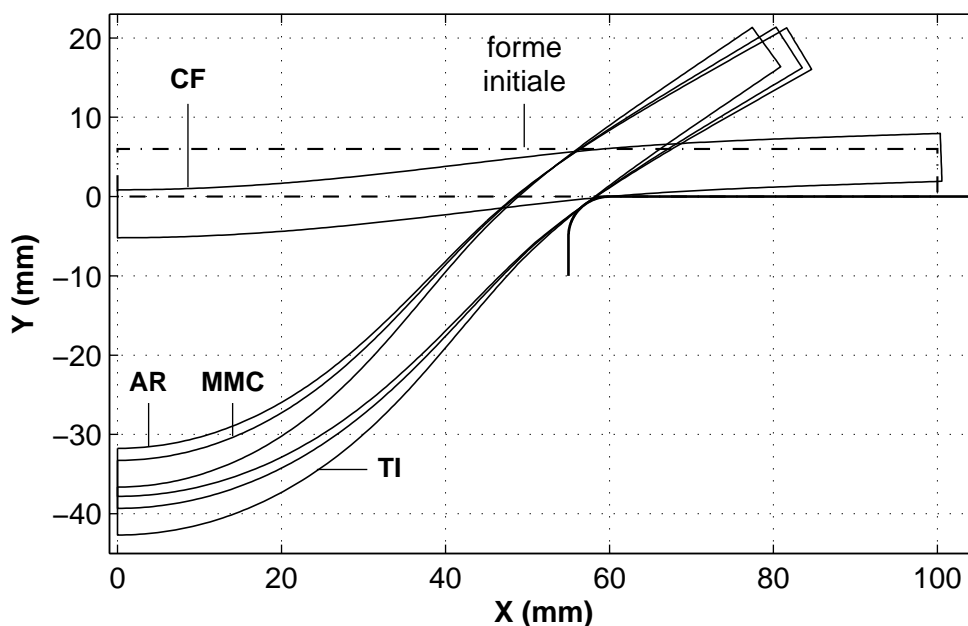


FIGURE 5.14 – Ecart absolu et relatif du déplacement du centre de la plaque

variation de température à la surface de la pièce se répercute avec un léger retard au centre de la plaque. Cela implique qu'à la fin du palier de mise en forme, pendant un court laps de temps, la température de la plaque reste suffisamment élevée pour permettre une déformation. C'est pourquoi l'écart entre (MMC) et (TI) augmente jusque 5 mm avant 5600 s et diminue ensuite pour se stabiliser à 3,4 mm. Ce même phénomène s'observe entre (MMC) et (AR).

La figure 5.14-b présente les écarts relatifs de déplacement et leur allure peut paraître surprenante au premier abord. Autour de 3000 s, les valeurs de l'écart relatif sont très importantes car elles sont égales à l'écart absolu des positions divisé par le déplacement, et ce dernier est très faible au début de la mise en forme. De 3000 s à 5000 s, l'écart absolu varie peu tandis que le déplacement du centre de la plaque augmente, ce qui fait diminuer l'écart relatif. À partir de 5000 s, l'écart absolu augmente plus rapidement que le déplacement de la plaque, ce qui explique que l'écart relatif croît à nouveau. Finalement, autour de 5600 s survient le refroidissement ; le phénomène d'inertie thermique évoqué précédemment vient niveler l'écart relatif qui se stabilise définitivement après 6400 s. Sa valeur est alors de 8,6% entre (MMC) et (TI) et 3,8% entre (MMC) et (AR). En soi, ces écarts ne sont pas très importants, cependant, ils le sont suffisamment pour que les formes finales et notamment les rayons de courbure (primordiaux d'un point de vue optique) soient différents, comme l'illustre la figure 5.15.

FIGURE 5.15 – Formes de la plaque à  $t = 8000$  s

### 5.2.3 Bilan de l'essai en suspension

Contrairement à l'essai sur moule, les résultats de l'essai en suspension montrent que le choix du modèle radiatif influe beaucoup plus sur la qualité des résultats. Comme attendu, le fait d'imposer uniquement de la convection à la frontière et de négliger le rayonnement à l'intérieur du verre donne des résultats en complet désaccord avec ce qui est observé lorsque la méthode de Monte-Carlo est retenue. Dans le cadre de nos simulations, cela semble invalider définitivement l'approche qui consiste à ignorer le terme radiatif dans l'équation de la chaleur.

Imposer la température de la plaque ou choisir l'approximation de Rosseland plutôt que Monte-Carlo, induit des écarts non négligeables. Cela plaide en faveur d'une modélisation très fine des échanges par rayonnement, par Monte-Carlo ou toute méthode offrant le même degré de précision.



# Conclusion et perspectives

## Résumé de la problématique générale du projet

Les artisans verriers peuvent éprouver des difficultés à maîtriser le procédé de mise en forme du verre par thermoformage. Les paramètres vont influencer la qualité du produit final, principalement le chargement thermique mais aussi la forme et le matériau du moule, la géométrie initiale de la pièce, etc. Pour pouvoir imposer les paramètres optimaux, les artisans verriers doivent souvent procéder à la méthode d'essais-erreurs qui est très coûteuse. Elle consiste à répéter l'essai, autant de fois que nécessaire, jusqu'à l'obtention d'un produit conforme.

Ayant pris conscience des problèmes rencontrés par les verriers au travers de leurs témoignages, le CERFAV a initié une étude sur le sujet. Elle a pour objectif principal le développement d'un modèle numérique complet permettant de réaliser des simulations d'essais. L'avantage évident du numérique sur la méthode d'essais-erreurs est l'économie réalisée en termes de coût matière. Sur le plus long terme, il peut être possible de réaliser une analyse inverse : c'est-à-dire déterminer les paramètres optimaux de l'essai connaissant la géométrie finale de la pièce à obtenir.

## Points notables de l'étude bibliographique

De toutes les caractéristiques physiques du verre, la viscosité est le paramètre-clé. Elle pilote la vitesse de mise en forme du verre. Comme elle est très dépendante de la température, cela oblige à être particulièrement précis pour la résolution des transferts thermiques.

Concernant la littérature scientifique, par rapport à la grande quantité de pièces produites par thermoformage, il existe un nombre de publications relativement limité. Cela traduit souvent la volonté de la part des entreprises de protéger leur savoir-faire.

Cela se vérifie notamment pour la fabrication des pare-brises où le thermoformage est paradoxalement le procédé industriel le plus employé. Sur ce plan, on constate d'ailleurs que la maîtrise des paramètres n'est pas assurée et que pour améliorer le mode opératoire, une grande part des travaux sur le sujet repose alors sur l'analyse inverse. De plus, les données implémentées dans les simulations numériques peuvent être affectées par les incertitudes de mesure. Par exemple, (Buonanno *et al.*, 2005) constatent que celles-ci peuvent atteindre jusque 30 °C sur l'ensemble de la chaîne de mesure. Connaissant la forte thermodépendance de la viscosité, cela peut avoir

un impact conséquent sur le résultat des calculs numériques.

Les problématiques sont globalement les mêmes pour les pièces utilisées en optique, qu'il s'agisse de la conception de moules pour lentilles polymères ou de miroirs pour des appareillages de pointe comme, par exemple, des télescopes.

## **Développement d'outils numériques**

Pour pouvoir réaliser des simulations numériques, il est nécessaire de développer un modèle thermomécanique. Sur le plan mécanique, un des aspects les plus importants concerne le choix de la loi de comportement qui relie contraintes et déformations. Dans notre cas, nous avons choisi le modèle rhéologique de Maxwell.

Pour la thermique, il est nécessaire de résoudre l'équation de la chaleur, de même que la loi de Fourier qui permet d'exprimer les transferts par conduction en fonction du gradient de température. En revanche, pour les transferts radiatifs, la théorie associée est beaucoup plus complexe car le milieu est semi-transparent. Il est donc nécessaire de modéliser les transferts radiatifs de manière volumique et non pas uniquement de manière surfacique, comme c'est le cas pour les corps dits opaques.

Sur le plan numérique, le projet de thèse a abouti notamment au développement d'une méthode de Monte-Carlo réciproque pour calculer la divergence de flux radiatifs. Cette méthode est particulièrement adaptée aux milieux complexes avec des paramètres présentant une dépendance spectrale. Elle est aussi très performante pour les milieux à faibles gradients de température, ce qui est le cas de la plaque de verre mise en forme, du fait de sa faible épaisseur.

Le code est implémenté dans les sous-routines d'Abaqus<sup>®</sup>, qui sont des modules auxquels fait appel le logiciel au cours d'une simulation numérique. À l'exception des transferts radiatifs, Abaqus<sup>®</sup> résout l'ensemble des équations thermomécaniques par une méthode des éléments finis.

## **Résultats marquants**

Le premier résultat d'importance est la mise en évidence que, dans notre étude, la méthode de Monte-Carlo réciproque est beaucoup plus efficace que la méthode directe dans le sens où elle fournit une meilleure précision pour un même temps de calcul. Cela confirme d'ailleurs les résultats déjà obtenus par (Dorey *et al.*, 2010).

Un autre point important concerne le choix du couplage thermique. Comme la température doit être déterminée avec une grande précision, il apparaissait naturel de choisir un couplage fort entre conduction et rayonnement. Cependant, la façon dont Abaqus<sup>®</sup> appelle le code de Monte-Carlo et le fait d'économiser du temps de calcul plaide plutôt en faveur d'un couplage thermique faible. Il a donc été vérifié que sous certaines conditions, celui-ci offrait satisfaction. Le paramètre le plus important à respecter est de choisir un pas de temps assez court, en l'occurrence

ici  $\Delta t_{\max} = 5s$ .

Pour les simulations, deux cas ont été étudiés : le thermoformage sur moule concave et le thermoformage en suspension. Différents modèles pour le calcul des transferts radiatifs, ont été testés. La méthode de Monte-Carlo faisait office de référence pour valider, ou non, certaines approches souvent rencontrées dans les études sur la modélisation numérique du procédé. Les trois autres modèles consistaient à, respectivement, utiliser l'approximation de Rosseland, imposer la température du verre à la température de l'air ou encore négliger tout transfert radiatif à l'intérieur du verre ou pour les échanges à la frontière entre air et verre. Cette dernière solution est à éviter. Les transferts thermiques sont clairement sous-estimés et la géométrie finale de la pièce ne correspond pas à celle déterminée avec la simulation utilisant la méthode de Monte-Carlo. En revanche, prendre l'approximation de Rosseland ou imposer la température du verre, dans le cadre de nos simulations, offrent des résultats corrects pour la mise en forme sur le moule. Ces solutions alternatives présentent un intérêt évident : elles permettent d'économiser du temps de calcul. Dans notre étude, ceux-ci sont environ 7 fois moins importants que ceux requis par la méthode de Monte-Carlo.

En revanche, pour l'opération de thermoformage en suspension, il semble qu'aucune des trois méthodes alternatives ne puisse offrir un degré de précision suffisamment proche de celui obtenu avec la méthode de Monte-Carlo. Ce point est d'autant plus critique que le thermoformage en suspension est utilisé notamment pour la production de pare-brises qui demandent des résultats d'une grande finesse.

## Perspectives

Le travail réalisé au cours de ce projet de thèse ouvre de nombreuses perspectives. La première concerne le passage d'une modélisation 2D à la modélisation 3D. L'ensemble des équations et des méthodes mises en œuvre numériquement peut être transcrit en 3 dimensions sans pour autant modifier sensiblement les codes et programmes utilisés. Cependant, un problème de taille apparaît. La méthode de Monte-Carlo développée en 2 dimensions nécessite des temps de calculs assez importants. Le passage en 3 dimensions pourrait littéralement les « faire exploser ». Ce blocage pourrait néanmoins être contourné en parallélisant la méthode de Monte-Carlo. Dans Abaqus, cette opération semble assez délicate à réaliser car nous n'avons pas accès au code source et à la manière exacte dont Abaqus effectue ses calculs et appelle les sous-routines. Cependant, si cet obstacle est levé, la parallélisation pourrait devenir réalité, ouvrant la porte à des simulations 3D dont les temps de calcul sont raisonnables.

Une autre amélioration concerne la loi de comportement du verre qui se traduit par l'utilisation d'une loi rhéologique de Maxwell. En première approximation, elle offre des résultats intéressants. Cependant, il est possible de raffiner le modèle mécanique en utilisant, par exemple, les séries de Prony sur lesquelles se base notamment (Duffrène, 1994) pour simuler le comportement



élasto-visco-plastique du verre.

Expérimentalement, le verre utilisé devra être caractérisé de manière plus précise. (Soudre, 2008) avait notamment mesuré la composition, la densité, le module d'Young et le coefficient de Poisson à température ambiante et les coefficients de dilatation thermiques jusqu'à une température de 600 °C. Des mesures complémentaires, notamment sur le plan thermique, pourraient être intégrées dans les simulations numériques afin de se rapprocher au maximum des conditions réelles d'essai.

Pour les simulations thermomécaniques, il serait intéressant de travailler avec les mesures des flux radiatifs absorbés à la surface du verre plutôt qu'avec la température de l'air. Le fait d'imposer la température de l'air est une hypothèse forte qui conduit probablement à un transfert thermique idéalisé entre l'air et le verre. Cela a donc tendance à réduire le gradient de température à l'intérieur du verre et donc l'inertie thermique.

Dans le même ordre d'idées, mesurer expérimentalement le déplacement de la plaque de verre en cours d'essai, en prenant les mêmes conditions opératoires entre simulation et essai réel, permettrait de valider définitivement le modèle numérique.

Une fois l'ensemble de ces actions réalisé, il sera alors envisageable de procéder à une analyse inverse intégrant un modèle thermomécanique extrêmement précis. Cela permettra ainsi de répondre à la problématique générale du projet qui consiste à déterminer les paramètres optimaux d'un essai quelle que soit la géométrie de la pièce à obtenir.

# Bibliographie

- Agnon, Y. et Stokes, Y. (2005). An inverse modelling technique for glass forming by gravity sagging. *European Journal Of Mechanics B/Fluids*, 24(3) :275–287.
- André, S. (1992). *Indentification de la conductivité phonique du verre par méthode flash de 20 °C à 500 °C*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine.
- André, S. et Degiovanni, A. (1995). A theoretical study of the transient coupled conduction and radiation heat transfer in glass : phonic diffusivity measurements by the flash technique. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38 :3401–3412.
- Bernard, F., Daudeville, L., et Gy, R. (2005). Calcul des contraintes résiduelles dans les zones d’assemblage de plaques en verre trempé. *Mécanique et Industries*, 6 :55–64.
- Berour, N., Lacroix, D., et Jeandel, G. (2006). Radiative and conductive heat exchanges in high-temperature glass melt with the finite-volume method approach. Influence of several spatial differencing schemes on RTE solution. *Numerical Heat Transfer, Part A*, 49 (6) :567–588.
- Beveridge, P., Domenech, I., et Pascual, E. (2005). *Le verre - L’art et les techniques du travail au four*. Editions Gründ.
- Buonanno, G., Dell’Isola, M., Frattolillo, A., et Giovinco, G. (2005). Thermal analysis of a glass bending process. *Applied Thermal Engineering*, 25 :2108–2121.
- Carré, H. (1996). *Étude du comportement à la rupture d’un matériau fragile précontraint : le verre trempé*. PhD thesis, École Nationale des Ponts et Chaussées.
- Chandrasekhar, S. (1960). *Radiative transfer*. Dover Publication.
- Chen, Y. et Yi, A. (2011). Design and fabrication of free form glass concentrating mirrors using a high volume thermal slumping process. *Solar Energy Materials & Solar Cells*, 95 :1654–1664.
- Cherkaoui, M., Dufresne, J., Fournier, R., Grandpeix, J., et Lahellec, A. (1996). Monte Carlo simulation of radiation in gases with a narrow-band model and a net-exchange formulation. *ASME Journal of Heat Transfer*, 118 :401–407.

- Coelho, P. (2002). Bounded skew high-order resolution schemes for the discrete ordinates method. *Journal of Computational Physics*, 175 :412–437.
- Collin, A. (2006). *Transferts de chaleur couplés rayonnement - conduction - convection. Application à des rideaux d'eau soumis à une intense source radiative*. PhD thesis, Université Henri Poincaré, Nancy.
- Dagdug, L. (2000). A theoretical framework for the Vogel–Fulcher–Tammann equation for covalent network glasses derived by the stochastic matrix method. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 12 :9573–9589.
- de Lataillade, A., Dufresne, J., El Hafi, M., Eymet, V., et Fournier, R. (2002). A net exchange Monte Carlo approach to radiation in optically thick systems. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 74 :863–584.
- Degiovanni, A. (1994). *Conductivité et diffusivité thermique des solides*. Editions Techniques de l'Ingénieur.
- Devos, D., Duquennoy, M., Roméro, E., Jenot, F., Lochegnies, D., Ouaftouh, M., et Ourak, M. (2006). Ultrasonic evaluation of residual stresses in flat glass tempering by an original double interferometric detection. *Ultrasonics*, 44 :923–927.
- Dhatt, G., Touzot, G., et Lefrançois, E. (2005). *Méthode des éléments finis*. Hermès - Lavoisier.
- Dimitrienko, Y. (2011). *Nonlinear continuum mechanics and large inelastic deformations*. Springer.
- Dondi, M., Guarini, G., Raimondo, M., et Zanelli, C. (2009). Recycling PC and TV waste glass in clay bricks and roof tiles. *Waste Management*, 29 :1945–1951.
- Dorey, L., Tessé, L., Roos, A., et Feyel, F. (2010). Modélisation et simulation numérique des transferts conductif et radiatif au cours des procédés de formage du verre. *Colloque International Francophone d'Energétique et Mécanique*.
- Duffrène, L. (1994). *Comportement viscoélastique d'un verre silico-sodocalcique dans le domaine des températures intermédiaires : approche phénoménologique et modélisation en triaxialité*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- Duffrène, L. et Gy, R. (1997). Viscoelastic constants of a soda-lime-silica glass. *Journal of non-crystalline solids*, 211 :30–38.
- Duffrène, L., Gy, R., Masnik, J., Kieffer, J., et Bass, J. (1998). Temperature dependence of the high-frequency viscoelastic behavior of a soda–lime–silica glass. *Journal of the American Ceramic Society*, 81 :1278–1284.

- Dufresne, J., Fournier, R., et Grandpeix, J. (1998). Méthode de Monte-Carlo par échanges pour le calcul des bilans radiatifs au sein d'une cavité 2D remplie de gaz. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Chemistry-Astronomy*, 326 :33–38.
- Dupoirieux, F., Tessé, L., Avila, S., et Taine, J. (2006). An optimized reciprocity Monte Carlo method for the calculation of radiative transfer in media of various optical thicknesses. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49 :1310–1319.
- Eymet, V., Fournier, R., Blanco, S., et Dufresne, J. (2005). A boundary-based net exchange Monte-Carlo method for absorbing and scattering thick media. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 91 :27–46.
- Faber, A. (2002). Optical properties and redox state of silicate glass. *Compte Rendus Chimie*, 5 :705–712.
- Falipou, M. (1998). *Tribologie du contact verre-métal à haute température. Application au formage du verre creux*. PhD thesis, École Centrale de Lyon.
- Feldheim, V. (2002). *Simulation numérique des transferts thermiques combinés conduction-convection-rayonnement dans des domaines de géométrie complexe*. PhD thesis, Faculté Polytechnique de Mons.
- Feulvarch, E., Moulin, N., Saillard, P., Lornage, T., et Bergheau, J. (2005). 3D simulation of glass forming process. *Journal of Materials Processing Technology*, 164-165 :1197–1203.
- Fiveland, W. (1982). A discrete ordinates method for predicting radiative heat transfer in axisymmetric enclosures. *ASME Paper 82-HT-20*.
- Fourment, J. et Fromentin, J. (2000). *Fours de verrerie*. Editions Techniques de l'Ingénieur.
- Fulcher, G. (1925). Analysis of recent measurements of the viscosity of glasses. *Journal of the American Ceramic Society*, 8 :789–794.
- Gardon, R. (1961). A review of radiant heat transfer in glass. *Journal of the American Ceramic Society*, 44 :305–312.
- Ghigo, M., Basso, S., Canestrari, R., et Proserpio, L. (2009). Development of hot slumping technique and last optical performances obtained on a 500 mm diameter slumped segment prototype for adaptative optics. *SPIE Proceedings*, 7439.
- Green, J. (1967). Division of radiative streams into internal transfer and cooling to space. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 93 :371–372.

- Grégoire, S., Cesar De Sa, J., Moreau, P., et Locheignies, D. (2007). Modelling of heat transfer at glass/mould interface in press and blow forming processes. *Computers and Structures*, 85 :1194–1205.
- Groombridge, P., Oloyede, A., et Doherty-Bigara, P. (2003). Development and implementation of visual feedback technology in automotive windscreen manufacture. *Journal of Materials Processing Technology*, 139(1-3) :357–361.
- Haussonne, J., Carry, C., Bowen, P., et Barton, J. (2005). *Traité des matériaux. Céramiques et verres (vol.16). Principes et techniques d'élaboration*. Presses polytechniques et universitaires romandes.
- Hottel, H. et Cohen, E. (1958). Radiant heat exchange in a gas-filled enclosure : allowance for nonuniformity of gas temperature. *American Institute of Chemical Engineers journal*, 4 :3–14.
- Howell, J. (1998). The Monte Carlo method in radiative heat transfer. *ASME Journal of heat transfer*, pages 547–560.
- Hrma, P. et Han, S. (2012). Effect of glass composition on activation energy of viscosity in glass-melting-temperature range. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 358 :1818–1829.
- Huang, P., Kurasch, S., Srivastava, A., Skakalova, V., Kotakoski, J., Krasheninnikov, A., Hovden, R., Mao, Q., Meyer, J., Smet, J., Muller, D., et Kaiser, U. (2012). Direct imaging of a two-dimensional silica glass on graphene. *Nano Letters*, 12 :1081–1086.
- Hunt, R. (2002). Numerical solution of the flow of thin viscous sheets under gravity and the inverse windscreen sagging problem. *International Journal for numerical methods in fluids*, 38 (6) :533–553.
- Hynes, M. et Jonson, B. (1997). Lead, glass and the environment. *Chemical Society Reviews*, 26 :133–146.
- Hyre, M. (2002). Numerical simulation of glass forming and conditioning. *Glass and Optical Materials*, 85 :1047–1056.
- Illig, A. (1999). *Pratique du thermoformage*. Lavoisier, Hermès.
- Jammet, J. (1998). *Thermoformage*. Editions Techniques de l'Ingénieur.
- Jeans, J. (1917). The equation of radiative transfer of energy. *Monthly Notices Royal Astronomical Society*, 78 :28–36.
- Kittel, C. (1949). Interpretation of the thermal conductivity of glasses. *Physical Review*, 75 :972–974.

- Kiyohashi, H., Hayakawa, N., Aratani, S., et Masuda, H. (2002). Thermal conductivity of heat-absorbed soda-lime-silicate glasses at high temperatures. *High Temperatures - High Pressures*, 34 :167–176.
- Klar, A., Lang, J., et Seaïd, M. (2005). Adaptive solutions of SPN-approximations to radiative heat transfer in glass. *International Journal of Thermal Sciences*, 44 :1013–1023.
- Kobayashi, H. et Iwabuchi, H. (2008). A coupled 1-D atmosphere and 3-D canopy radiative transfer model for canopy reflectance, light environment, and photosynthesis simulation in a heterogeneous landscape. *Remote Sensing of Environment*, 112 :173–185.
- Krapez, J. (2007). *Mesure de l'effusivité thermique - Méthodes par contact*. Editions Techniques de l'Ingénieur.
- Krupa, A., Plemyanikov, N., et Fal'kovskaya, T. (2001). High-temperature integral absorption in glasses. *Glass and Ceramics*, 58 :88–92.
- Lacroix, D., Parent, G., Asllanaj, F., et Jeandel, G. (2002). Coupled radiative and conductive heat transfer in a non-grey absorbing and emitting semitransparent media under collimated radiation. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 75 :589–609.
- Le Corre, B., Collin, A., Soudre-Bau, L., Meshaka, Y., et Jeandel, G. (2014). Glass sagging simulation with improved calculation of radiative heat transfer by the optimized reciprocity Monte Carlo method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 70 :215–223.
- Lee, K. et Viskanta, R. (1997). Prediction of spectral radiative transfer in a condensed cylindrical medium using discrete ordinates method. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 58 :329–345.
- Lee, K. et Viskanta, R. (2001). Two-dimensional combined conduction and radiation heat transfer : comparison of the discrete ordinates method and the diffusion approximation methods. *Numerical Heat Transfer, Part A*, 39 :205–225.
- Lehmann, J. (2010). *Formulation du verre et produits verriers*. Editions Techniques de l'Ingénieur.
- Lemaitre, J., Boucard, P., et Hild, F. (2007). *Résistance mécanique des solides*. Dunod.
- Lochegnies, D., Moreau, P., Hanriot, F., Navarudiger, E., et Hugonneaux, P. (2010). Experimentation and modelling of thermal replication for the design of 2D<sup>1/2</sup> aspherical glass components. *Glass Technology : European Journal of Glass Science and Technology A*, 51 :130–137.
- Lochegnies, D., Moreau, P., et Oudin, J. (1996). Finite element strategy for glass sheet manufacture by creep forming. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 12 :331–341.

- Lochegnies, D., Vicart, T., et Oudin, J. (1995). Finite element elastoviscoplastic models for optimisation of horizontal and vertical press bending of sheets of glass. *Glass Technology*, 36 :166–170.
- Lockwood, F. et Shah, N. (1981). A new radiation solution method for incorporation in general combustion prediction procedure. *In eighteenth international symposium on combustion. The combustion Institute.*
- Loulou, T., Abou-Khachfe, R., et Bardon, J. (1999). Estimation de la résistance thermique de contact durant la solidification du verre. *International Journal of Thermal Science*, 38 :984–998.
- Macedo, P. et Litovitz, T. (1965). On the relative roles of free volume and activation energy in the viscosity of liquids. *Journal of Chemical Physics*, 42 :245–256.
- Mann, D., Field, R., et Viskanta, R. (1992). Determination of specific heat and true thermal conductivity of glass from dynamic temperature data. *Wärme und Stoffübertragung*, 27 :225–231.
- Manservigi, S. (2000). An optimal control approach to an inverse nonlinear elastic shell problem applied to car windscreen design. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 189 :463–480.
- Maya, M. (2013). *Cours de mécanique des milieux continus*. Arts et Métiers ParisTech.
- Mazurin, O. (2007). Problems of compatibility of the values of glass transition temperatures published in the world literature. *Glass Physics and Chemistry*, 33 :22–36.
- Mishra, R. et Dubey, K. (2009). Glass forming ability of materials : A thermodynamic approach. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 355 :2199–2204.
- Modest, M. (1993). *Radiative heat transfer*. McGraw-Hill series in mechanical engineering.
- Nguyen, H. (2009). *Modélisation et simulation du remplissage de moules verriers : « prise en compte du transfert radiatif »*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine.
- Nicolau, V. et Maluf, F. (2001). Determination of radiative properties of commercial glass. *PLEA 2001 - The 18th Conference on Passive and Low Energy Architecture - Brazil*.
- Pajean, G. (2007). L'élaboration du verre. *Verre*, 13 :14–17.
- Parsa, M., Rad, M., Shahhosseini, M., et Shahhosseini, M. (2005). Simulation of windscreen bending using viscoplastic formulation. *Journal of Materials Processing Technology*, 150 :298–303.

- Patankar, S. (1980). *Numerical heat transfer and fluid flow*. Hemisphere Publishing Corporation.
- Phalippou, J. (2001). *Verres - Aspects théoriques*. Techniques de l'Ingénieur.
- Poggemann, J., Goß, A., Heide, G., Rädlein, E., et Frischat, G. (2001). Direct view of the structure of a silica glass fracture surface. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 281 :221–226.
- Primenko, V. et Gudovich, O. (1981). Prediction of the high-temperature specific heat of silicate glasses. *Soviet Journal of Glass Physics and Chemistry*, 34 :260–271.
- Richter, F. (2006). *Upsetting and viscoelasticity of vitreous SiO<sub>2</sub> : experiments, interpretation and simulation*. PhD thesis, Technischen Universität Berlin.
- Richter, F. et Hoffmann, H. (2011). Uniaxial compression of SiO<sub>2</sub> glass cylinders : analysis using stress-independent material coefficients. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*, 42 :172–187.
- Rieser, D., Spieß, G., et Manns, P. (2008). Investigations on glass-to-mold sticking in the hot forming process. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 354 :1393–1397.
- Rosseland, S. (1936). *Theoretical astrophysics ; Atomic theory and the analysis of stellar atmospheres and envelopes*. Clarendon Press, Oxford.
- Rougee, P. (1997). *Mécanique des grandes transformations*. Springer.
- Rousse, D., Gautier, G., et Sacadura, J. (2000). Numerical predictions of two-dimensional conduction, convection, and radiation heat transfer. ii. validation. *International Journal of Thermal Sciences*, 39 :332–353.
- Rubin, M. (1985). Optical properties of soda lime silica glasses. *Solar Energy Materials*, 12 :275–288.
- Sacadura, J. (1980). *Initiation aux transferts thermiques*. Editions lavoisier Technique & Documentation.
- Scholze, H. (1980). *Le verre - Nature, structure et propriétés*. Institut du verre.
- Sharp, D. et Ginther, L. (1951). Effect of composition and temperature on the specific heat of glass. *Journal of the American Ceramic Society*, 34 :260–271.
- Siegel, R. et Howell, J. (1992). *Thermal radiation heat transfer*. Taylor & Francis.
- Soudre, L. (2008). *Étude numérique et expérimentale du thermoformage d'une plaque de verre*. PhD thesis, Université Henri Poincaré.



- Soudre-Bau, L., Meshaka, Y., Parent, G., Boulet, P., Le Corre, B., et Jeandel, G. (2013). Combined temperature and deformation measurement during glass forming in a real scale setup. *Experimental Mechanics*, 53.
- Stokes, Y. (2000). Numerical design tools for thermal replication of optical-quality surfaces. *Computers & Fluids*, 29 :401–414.
- Su, L., He, P., et Yi, A. Y. (2011). Investigation of glass thickness effect on thermal slumping by experimental and numerical methods. *Journal of Materials Processing Technology*, 211 :1995–2003.
- Synowicki, R., Johs, B., et Martin, A. (2011). Optical properties of soda-lime float glass from spectroscopic ellipsometry. *Thin Solid Films*, 519 :2907–2913.
- Taine, J., Iacona, E., et Petit, J. (2008). *Transferts thermiques - Introduction aux transferts d'énergie*. Dunod.
- Tessé, L., Dupoirieux, F., Zamuner, B., et Taine, J. (2002). Radiative transfer in real gases using reciprocal and forward Monte Carlo methods and a correlated-k approach. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45 :2797–2814.
- Trovalet, L. (2011). *Résolution numérique des transferts par rayonnement et conduction au sein d'un milieu semi-transparent pour une géométrie 3D de forme complexe*. PhD thesis, Université Henri Poincaré.
- Truelove, J. et Hyde, D. (2007). The discrete ordinates approximation for multidimensionnal radiant heat transfer in furnaces. *Technical report VKAEA report no. AERE-R 8502, Thermodynamics division*.
- Viskanta, R. et Lim, J. (2002). Transient cooling of a cylindrical glass gob. *Journal of Quantitative and Radiative Transfer*, 73 :481–490.
- Warren, B. (1937). X-ray determination of the structure of liquids and glass. *Journal of Applied Physics*, 8 :645–654.
- Warren, B. (1942). The basic principles involved in the glassy state. *Journal of Applied Physics*, 13 :602–610.
- Williams, M., Landel, R., et Ferry, J. (1955). The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids. *Journal of the American Chemical Society*, 77 :3701–3707.
- Winkelmann, A. (1893). On the specific heat of glasses of different composition. *Annalen der Physik und Chemie*, 49.

- Wong, T. et Menguc, M. (2002). Comparison of Monte Carlo technique to predict the propagation of a collimated beam in participating media. *Numerical Heat Transfer, Part B : Fundamentals : An International Journal of Computation and Methodology*, 42 :119–140.
- Yan, J., Zhou, T., Masuda, J., et Kuriyagawa, T. (2009). Modeling high-temperature glass molding process by coupling heat transfer and viscous deformation analysis. *Precision Engineering*, 33 :150–159.
- Yi, A. et Jain, A. (2005). Compression molding of aspherical glass lenses – a combined experimental and numerical analysis. *Journal of the American Ceramic Society*, 88 :579–586.
- Zachariassen, W. (1932). The atomic arrangement in glass. *Journal of the Chemical Society*, 54 :3841–3851.
- Zarzycki, J. (1982). *Les verres et l'état vitreux*. Masson.
- Zhang, W., Content, K. C. D., Owens, S., Petre, R., Serlemitsos, P., Saha, T., et Song, Y. (2003). Development of mirror segments for the constellation-x observatory. *SPIE Proceedings*, 4851 :503–518.
- Zhou, H., G.Xi, et D.Li (2007). Modeling and simulation of shrinkage during the picture tube panel forming process. *Journal of manufacturing science and engineering*, 129 :380–387.



# Annexes

## Annexe 1 - Établissement de l'équation de Rosseland

La méthode de l'approximation de diffusion de Rosseland (Rosseland, 1936) consiste à modéliser le transfert par rayonnement sous la forme d'une équation de diffusion. Cette hypothèse est valable dans le cas d'un milieu optiquement épais à diffusion isotrope. Pour ne pas alourdir les écritures, la température n'apparaît pas dans les expressions suivantes mais il est évident que la luminance, et parfois les propriétés du milieu, en dépendent.

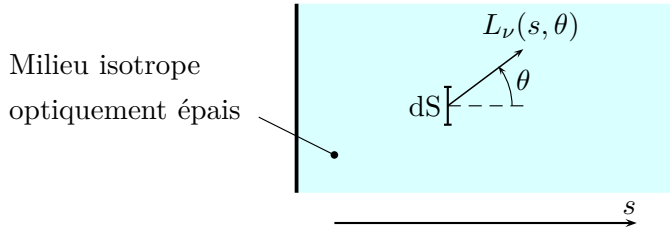


FIGURE A.1 – Milieu optiquement épais de coefficient d'extinction  $\beta_\nu$

En utilisant la relation  $dS = ds/\cos \theta$ , l'équation de transfert peut s'écrire (Siegel et Howell, 1992) :

$$\frac{\cos(\theta)}{\beta_\nu} \frac{\partial L_\nu(s, \theta)}{\partial s} = L_\nu(s, \theta) - S_\nu(s) \quad (1)$$

Avec  $S_\nu(s)$  la fonction source définie comme :

$$S_\nu(s) = (1 - \omega_\nu)L_\nu^0(s) - \frac{\omega_\nu}{4\pi} \int_{\Omega=0}^{4\pi} \Phi_\nu(\theta' \rightarrow \theta) L_\nu(s, \theta') d\Omega \quad (2)$$

Avec  $\Phi_\nu$  la fonction de phase et  $\omega_\nu$  l'albédo. Puisque la diffusion est isotrope, il est possible d'écrire que la fonction de phase est égale à 1.

Soit une distance  $D$  telle que  $1/(D \times \beta_\nu) \ll 1$  (grande épaisseur optique) :

$$\frac{\cos(\theta)}{\beta_\nu D} \frac{\partial L_\nu(s, \theta)}{\partial (s/D)} = L_\nu(s, \theta) - S_\nu(s) \quad (3)$$

La luminance  $L_\nu(s, \theta)$  est exprimée sous une forme polynomiale en posant  $x = 1/(D \times \beta_\nu)$  :

$$L_\nu(s, \theta) = L_\nu^{(0)}(s, \theta) + L_\nu^{(1)}(s, \theta)x + L_\nu^{(2)}(s, \theta)x^2 + \dots \quad (4)$$

En remplaçant dans l'équation 3 :

$$\begin{aligned} & -x \cos(\theta) \left[ \frac{\partial L_\nu^{(0)}(s, \theta)}{\partial(s/D)} + x \frac{\partial L_\nu^{(1)}(s, \theta)}{\partial(s/D)} + \dots \right] \\ & = L_\nu^{(0)}(s, \theta) + x L_\nu^{(1)}(s, \theta) + \dots - (1 - \omega_\nu) L_\nu^0(s) - \frac{\omega_\nu}{4\pi} \int_{\Omega=0}^{4\pi} (L_\nu^{(0)}(s, \theta) + x L_\nu^{(1)}(s, \theta) + \dots) d\Omega \end{aligned} \quad (5)$$

Puisque  $x = 1/(\beta_\nu D) \ll 1$ , il est possible de considérer que les termes supérieurs à l'ordre 1 peuvent être négligés sans générer une trop grande approximation.

Par identification, le terme de degré 0 s'obtient de la façon suivante :

$$(1 - \omega_\nu) L_\nu^{(0)}(s, \theta) = (1 - \omega_\nu) L_\nu^0(s) \implies L_\nu^{(0)}(s, \theta) = L_\nu^0(s) \quad (6)$$

En ce qui concerne le terme de degré 1 :

$$-\cos(\theta) \frac{\partial L_\nu^{(0)}(s, \theta)}{\partial(s/D)} = L_\nu^{(1)}(s, \theta) - \frac{\omega_\nu}{4\pi} \int_{\Omega=0}^{4\pi} L_\nu^{(1)}(s, \theta) d\Omega \quad (7)$$

On remplace le terme  $L_\nu^{(0)}(s, \theta)$  par  $L_\nu^0(s)$  :

$$-\cos(\theta) \frac{\partial L_\nu^0(s)}{\partial(s/D)} = L_\nu^{(1)}(s, \theta) - \frac{\omega_\nu}{4\pi} \int_{\Omega=0}^{4\pi} L_\nu^{(1)}(s, \theta) d\Omega \quad (8)$$

Pour simplifier l'expression et s'affranchir du terme intégral, on intègre dans toutes les directions à gauche par  $d\mu = d \cos(\theta)$  et à droite par  $d\Omega'$  (pour le différentiel de  $d\Omega$ ), ce qui donne :

$$\frac{\partial L_\nu^0(s)}{\partial(s/D)} \int_{\mu=-1}^1 2\pi\mu d\mu = \int_{\Omega'=0}^{4\pi} L_\nu^{(1)}(s, \theta) d\Omega' - \frac{\omega_\nu}{4\pi} \int_{\Omega=0}^{4\pi} L_\nu^{(1)}(s, \theta) d\Omega \int_{\Omega'=0}^{4\pi} d\Omega' \quad (9)$$

Le terme de gauche s'annule, ce qui conduit à :

$$\omega_\nu \int_{\Omega=0}^{4\pi} L_\nu^{(1)}(s, \theta) d\Omega = \int_{\Omega'=0}^{4\pi} L_\nu^{(1)}(s, \theta) d\Omega' \quad (10)$$

Comme  $\omega_\nu$  est différent de 1 (sauf pour de la diffusion pure mais on considère ici un milieu optiquement épais et donc fortement absorbant), on en déduit que :

$$\int_{\Omega=0}^{4\pi} L_\nu^{(1)}(s, \theta) d\Omega = 0 \quad (11)$$

En reprenant l'équation (8), le terme de degré 1 est identifié comme :

$$L_{\nu}^{(1)}(s, \theta) = -\cos(\theta) \frac{\partial L_{\nu}^0(s)}{\partial(s/D)} \quad (12)$$

Pour avoir le flux radiatif monochromatique dans la direction  $s$ , il faut intégrer sur l'angle solide :

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{\nu}(s)}{\partial \nu} &= 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi} L_{\nu}(s, \theta) \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta = 2\pi \int_{\mu=-1}^1 L_{\nu}(s, \mu) \mu d\mu \\ &= 2\pi L_{\nu}^0(s) \int_{\mu=-1}^1 \mu d\mu - \frac{2\pi}{\beta_{\nu}} \frac{\partial L_{\nu}^0(s)}{\partial s} \int_{\mu=-1}^1 \mu^2 d\mu \quad (13) \end{aligned}$$

Le premier terme s'annule, ce qui donne :

$$\frac{\partial q_{\nu}(s)}{\partial \nu} = -\frac{4\pi}{3\beta_{\nu}} \frac{\partial L_{\nu}^0(s)}{\partial s} \quad (14)$$

Avec le coefficient d'extinction  $\beta_{\nu} = \kappa_{\nu} + \sigma_{d,\nu}$ .

## Annexe 2 - Algorithme du code de Monte Carlo

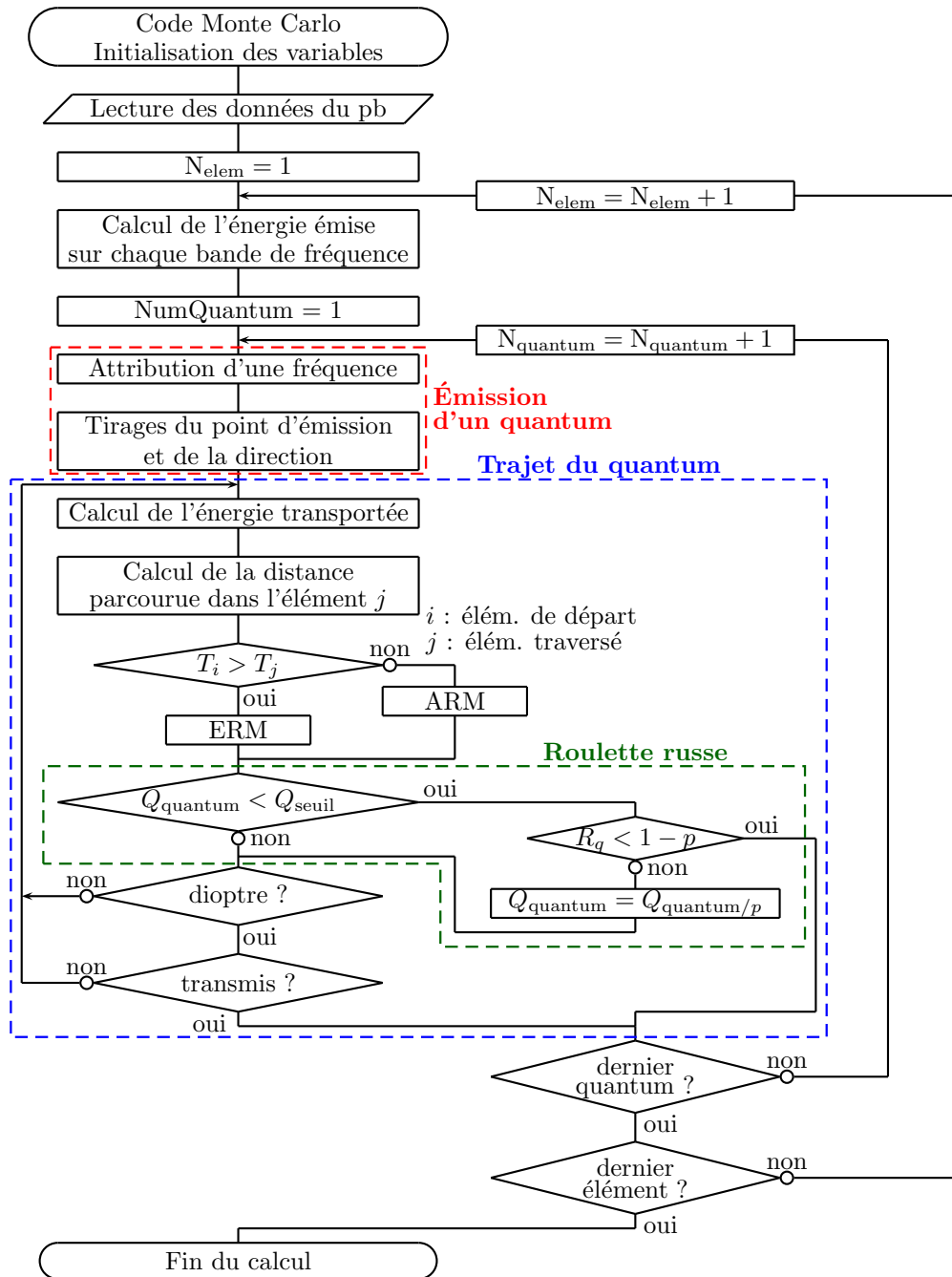


FIGURE A.2 – Algorithme du code de Monte-Carlo (méthode réciproque)

Le principe de fonctionnement est relativement simple. Les éléments du maillage sont sélectionnés un par un. Pour chacun d'entre eux, un certain nombre de quanta est envoyé, ce nombre étant proportionnel à la taille de l'élément. Chaque quantum se voit attribué une fréquence, un point de départ et une direction puis dissipe son énergie dans le domaine. Une fois que tous les quanta ont été envoyés depuis l'ensemble des éléments du maillage, le calcul est terminé.

## Annexe 3 - Article publié dans IJHMT

### Title

Glass sagging simulation with improved calculation of radiative heat transfer by the Optimized Reciprocity Monte Carlo Method

### Authors

Benjamin Le Corre<sup>a,b</sup>, Anthony Collin<sup>a</sup>, Laëtitia Soudre-Bau<sup>c</sup>, Yves Meshaka<sup>b</sup>, Gérard Jeandel<sup>a</sup>  
a LEMTA, Université de Lorraine, Vandoeuvre-lès-Nancy 54500, France

b IJL, Université de Lorraine, Nancy 54000, France

c EEIGM, Université de Lorraine, Nancy 54000, France

### Abstract

Glass sagging is used to process glass industrial products such as windscreens, mirrors or lenses. A 2D glass sagging process, simulated with the Finite Element Method (FEM), is presented in this work. Different thermal cases are reviewed with special care brought to radiative transfer model, with an optimized reciprocity Monte Carlo method used as the reference. Results show that ignoring radiative transfer is a too rough hypothesis. This leads to large errors on the glass temperature distribution, on the forming process and on the final shape in case of glass sagging without mold. However, predefining glass temperature or using Rosseland approximation give acceptable results, less accurate than Monte Carlo simulations especially for a fine prediction of the transfer as a function of time, but with smaller CPU times.

*Keywords* : Glass forming, Finite elements, Monte Carlo method, Radiative heat transfer, Rosseland approximation

### Article

#### 1. Introduction

Glass sagging operation consists in forming a sheet or a plate of glass by heating it in a furnace. Glass temperature rises and reaches a work temperature at which viscosity is low enough to allow glass to sag under its own weight due to gravity. In the case of windscreen processing, glass sagging is the most often used forming process [1, 2]. Automotive windscreen production requires glass sheet bending in order to obtain complex shapes and a good optical surface. Glass sheets are placed on a ring frame and the forming phase ends when windscreen reaches the desired shape [3]. Glass sagging is also used to produce spherical, aspherical and even freeform mirrors [4] or lenses [5]. These mirrors can be used in many industrial applications such as solar panels or scientific instruments, e.g., astronomical telescopes [6]. For these products, the process ends when the object totally fits the shape of a mold placed below as shown in figure A.3.



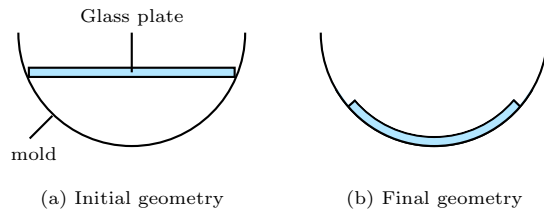


FIGURE A.3 – Glass sagging process

In theory, glass sagging looks like a simple operation process, but in practice, parameters need to be tuned accurately. If not, some flaws can happen, for example :

- sticking problems between glass and mold [7],
- heterogeneity of plate thickness [8],
- optical surface roughness [9],
- important residual mechanical stress [10, 11].

These problems lead to material waste and expensive production cost.

The main complexity of the process lies on the thermomechanical coupling. Glass viscosity is very dependent on temperature : at the working stage, a temperature variation of a few dozens degrees can change the viscosity by several decades [12]. Conversely, when glass shape changes, it modifies the thermal flux inside. Some authors conducted glass sagging experiments in order to better understand and improve the process [4]. Experimental results can also be used to validate numerical modeling of the forming operation [2, 8]. Computer simulations are generally less expensive and time consuming than experiments. They can also give many information on the influence of process parameters on the final product [13].

Numerically, mechanical equations are usually solved using a Finite Element Method (FEM) as in [14, 15]. Concerning the thermal part, different methods have been used to determine temperature fields during glass forming processes. Two main hypotheses are usually found in the literature : glass temperature is directly set without calculations [16] or temperature is evaluated thanks to a heat transfer model but neglecting radiative transfer [17]. However, this last hypothesis could be too rough to give accurate temperature distributions [18].

In this work, a two-dimensional glass sagging case is modeled and different hypotheses on temperature distribution are reviewed. The setup involves a glass plate processed on a concave mold. Mechanical modeling is achieved by FEM and glass behavior is assumed to obey a Maxwell law at working temperature.

Concerning the thermal part of the problem, four cases are considered :

- (i) Glass temperature is set uniform inside the plate ;
- (ii) During the sagging process, conduction inside the medium and convection at the boundaries are considered but radiative transfer is neglected ;

- (iii) Radiation is taken into account in addition to the other heat transfer modes using Rosseland approximation ;
- (iv) Radiation calculations are conducted with an Optimized Reciprocity Monte Carlo Method (ORM).

The last case (iv) is considered as the reference in this present work as Monte Carlo methods are known to give accurate results, in spite of heavier computational (CPU) times [19]. Comparison of cases (i-ii) with case (iv) will highlight the relevance of taking radiative transfer into account during the simulation of the glass sagging process. Then, comparing (iii) and (iv) simulation results will give interesting information on the accuracy of Rosseland approximation, knowing that the concept of radiative conductivity derived from Rosseland model is sometimes used for glass forming process simulation [20].

The first part of the present paper describes the physical model of sagging process. Then, the second part deals with thermal numerical schemes and the validation of the Monte Carlo code. The next section is dedicated to the numerical setup and finally simulation results are presented and discussed.

## **2. Physical model for sagging process**

Abaqus<sup>®</sup> is used in the present work in order to address the thermomechanical problem by the FEM. The model presentation is only focused on the main parameters involved in the mechanical behavior laws and the specific model of radiative transfer which has been developed and combined to the FEM code.

### **2.1. Mechanical behavior laws**

The continuity equation gives the displacement vector  $\mathbf{u}$  as a function of the stress tensor  $\boldsymbol{\sigma}$  :

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} \quad (1)$$

where  $\rho$  stands for the density and  $\mathbf{f}$  is the body forces vector. Then, in case of small deformation, displacements are linked with the strain tensor  $\boldsymbol{\epsilon}$  according to the relation :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{grad}(\mathbf{u}) + {}^t\mathbf{grad}(\mathbf{u}) \right) \quad (2)$$

Making the assumption that glass behaves like a Maxwell rheological material [21] (from a rheological point of view, it corresponds to the connection in series of a dashpot behaving like a Newtonian fluid with a spring obeying a Hooke's law) which undergoes thermal expansion, strain tensor  $\boldsymbol{\epsilon}$  can be written as the sum of elastic, viscous and thermal strains :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^v + \boldsymbol{\epsilon}^t \quad (3)$$

$\epsilon^e$  is the elastic strain tensor :

$$\epsilon^e = \frac{1}{2G}\boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3B} - \frac{1}{2G}\right)\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} \quad (4)$$

$\text{tr}$  is the matrix trace and  $\mathbf{I}$  is the identity matrix.  $G$  is the shear modulus and  $B$  is the bulk modulus. They are expressed as a function of the Young's Modulus  $E$  and the Poisson's ratio  $\nu_p$  :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu_p)} \quad (5)$$

$$B = \frac{E}{3(1 - 2\nu_p)} \quad (6)$$

The viscous strain tensor  $\epsilon^v$  is linked to the stress tensor  $\boldsymbol{\sigma}$  using the relation :

$$\epsilon^v = \frac{1}{2\eta_s}\boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\eta_b} - \frac{1}{2\eta_s}\right)\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} \quad (7)$$

By analogy with the elastic part,  $\eta_s$  and  $\eta_b$  can be assimilated to viscous shear modulus and viscous bulk modulus, respectively :

$$\eta_s = \frac{\eta}{2(1 + \nu_\eta)} \quad (8)$$

$$\eta_b = \frac{\eta}{3(1 - 2\nu_\eta)} \quad (9)$$

$\nu_\eta$  is the viscous Poisson's ratio and is assumed to be equal to the Poisson's ratio. Viscosity  $\eta$  is the key parameter during glass sagging process. Its value is directly linked to the glass speed forming and is supposed to be controlled by a Williams-Landel-Ferry (WLF) law such as :

$$\lg\left(\frac{\eta(T)}{\eta(T_0)}\right) = \frac{-C_1(T - T_0)}{C_2 + (T - T_0)} \quad (10)$$

where  $\eta(T_0)$ ,  $C_1$  and  $C_2$  are empirical coefficients.

Finally,  $\epsilon^t$  is the thermal expansion term :

$$\epsilon^t = \frac{\alpha}{3}\Delta T\mathbf{I} \quad (11)$$

$\alpha$  is the thermal expansion coefficient and  $\Delta T$  is the temperature variation.

## 2.2. Heat balance equation and boundary conditions

In its classical form, the heat balance equation can be written :

$$\rho c_p \dot{T} = -\text{div}(\mathbf{q}_c + \mathbf{q}_r) \quad (12)$$

where  $\dot{T}$  is the temperature time derivative,  $c_p$  is the heat capacity per mass unit at constant pressure,  $\mathbf{q}_c$  and  $\mathbf{q}_r$  are the conductive and radiative heat flux vectors, respectively. Convection is neglected inside glass as deformation is very slow and piece deformation has a very little influence on temperature distribution. At the glass/air interface, boundary conditions can be written :

$$K(T_a - T_g) + \mathbf{q}_r^{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{g}} \cdot \mathbf{n} = [\mathbf{q}_r^{\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{a}} + k_c \mathbf{grad}(T)] \cdot \mathbf{n} \quad (13)$$

where  $\mathbf{n}$  is the normal vector oriented outward from glass.  $T_a$  is the air temperature and  $T_g$  is the glass temperatures.  $K$  is a global heat exchange coefficient [22] and  $k_c$  is the thermal conductivity.  $\mathbf{q}_r^{\mathbf{i} \rightarrow \mathbf{j}}$  corresponds to the radiative flux density crossing the interface between two media  $i$  and  $j$ . Radiative boundary conditions depend on the glass properties, namely in the semitransparent and the opaque ranges.  $\mathbf{q}_r^{\mathbf{i} \rightarrow \mathbf{j}}$  can be written :

$$\mathbf{q}_r^{\mathbf{i} \rightarrow \mathbf{j}} \cdot \mathbf{n} = \left( \mathbf{q}_{r(\text{ST})}^{\mathbf{i} \rightarrow \mathbf{j}} + \mathbf{q}_{r(\text{opaque})}^{\mathbf{i} \rightarrow \mathbf{j}} \right) \cdot \mathbf{n} \quad (14)$$

The subscripts ST (semitransparent) and opaque correspond to the frequency ranges. The radiative heat flux in the semitransparent range is related with the transmissivity coefficient  $\tau$ , the spectral blackbody intensity  $I_\nu^0$ , the polar angle  $\theta_i$  and the azimuthal angle  $\varphi_i$  :

$$\mathbf{q}_{r(\text{ST})}^{\mathbf{i} \rightarrow \mathbf{j}} \cdot \mathbf{n} = \int_{\nu_{\text{ST}}^{\min}}^{\nu_{\text{ST}}^{\max}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \tau(\theta_i, n_\nu) I_\nu^0(T_i, n_{\nu,i}) \times \cos \theta_i \sin \theta_i d\theta_i d\varphi_i d\nu \quad (15)$$

$\nu$  is the frequency.  $\nu_{\text{ST}}^{\min}$  and  $\nu_{\text{ST}}^{\max}$  are the boundaries of the semitransparent range.  $n_{\nu,i}$  is the optical index of the medium  $i$  and  $n_\nu = n_{\nu,i}/n_{\nu,j}$  is the relative optical index.  $I_\nu^0$  is given by the Planck's law [23] :

$$I_\nu^0(T, n_\nu) = \frac{2h\nu^3 n_\nu^2}{c_0^2 (\exp h\nu/kT - 1)} \quad (16)$$

$c_0$  is the light speed in the vacuum,  $h$  and  $k$  are the Planck's and Boltzmann's constants, respectively. The transmissivity coefficient  $\tau$  is given by the Fresnel equation :

$$\tau(\theta_i, n_\nu) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\cos \theta_i - n_\nu^{-1} P(\theta_i, n_\nu)}{\cos \theta_i + n_\nu^{-1} P(\theta_i, n_\nu)} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\cos \theta_i - P(\theta_i, n_\nu)}{\cos \theta_i + P(\theta_i, n_\nu)} \right)^2 \quad (17)$$

with  $P(\theta_i, n_\nu) = \sqrt{1 - n_\nu^{-2} \sin^2 \theta_i}$ . In the opaque range, the radiative heat flux is :

$$\mathbf{q}_{r(\text{opaque})}^{\mathbf{i} \rightarrow \mathbf{j}} \cdot \mathbf{n} = \int_{\nu_{\text{opaque}}^{\min}}^{\nu_{\text{opaque}}^{\max}} \pi \varepsilon_\nu I_\nu^0(T_i, n_{\nu,i}) d\nu \quad (18)$$

$\varepsilon_\nu$  is the emissivity of the body.

### 2.3. Radiative transfer

For frequencies above  $2000 \text{ cm}^{-1}$ , glass is usually assumed to be semitransparent. Below  $2000 \text{ cm}^{-1}$ , glass is opaque and its emissivity is considered equal to 0.9 [24] as a first approximation. Many methods have been developed in order to calculate the radiative transfer in semitransparent media, i.e. approximation methods (Rosseland and two-flux approximations, among others) [25], spherical harmonics method [26], zonal method [27], discrete ordinates method [28], finite element method [29], finite volume method [30] and Monte Carlo method [31]. Rosseland and Monte Carlo methods will be used here. The Monte Carlo method is particularly suitable for complex media and gives accurate results. It consists in simulating radiative transfer by tracking quanta of energy in all the domain. These quanta undergo a set of random events (absorption, transmission, reflection) that satisfy, on a statistical basis, the general principles of thermal radiation. The main drawback of this method is a large CPU time that is progressively offset by the increasing power of computers and method improvements [19]. Assuming that the studied domain is discretized in boundary and volume elements, the idea is to calculate the radiative power  $P_{ij}^{\text{exch}}$  exchanged between two elements  $i$  and  $j$ . The spectral radiative power  $P_{ij,\nu}^{\text{exch}}$  can be expressed as :

$$P_{ij,\nu}^{\text{exch}} = P_{ij,\nu}^{\text{ea}} - P_{ji,\nu}^{\text{ea}} \quad (19)$$

$P_{ij,\nu}^{\text{ea}}$  is the spectral radiative power emitted by the cell  $i$  and absorbed by the cell  $j$ . In the Forward Monte Carlo Method (FM), the radiative source term  $\text{div } \mathbf{q}_{\mathbf{r}(i)}$  of an element  $i$  is calculated as :

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{q}_{\mathbf{r}(i)}^{\text{FM}} &= \sum_{j=1}^N \int_{\nu_{\min}}^{\nu_{\max}} (P_{ij,\nu}^{\text{ea}} - P_{ji,\nu}^{\text{ea}}) d\nu \\ &= P_i^{\text{e}} - \sum_{j=1}^N \int_{\nu_{\min}}^{\nu_{\max}} P_{ji,\nu}^{\text{ea}} d\nu \end{aligned} \quad (20)$$

where  $P_i^{\text{e}}$  is the total radiative power emitted by the element  $i$ .  $N$  is the total number of elements. Assuming that the element  $i$  of volume  $V_i$  is at uniform temperature  $T_i$  and that the absorption coefficient  $\kappa_i$  does not vary in the considered range, then  $P_i^{\text{e}}$  is equal to :

$$P_i^{\text{e}} = 4\pi\kappa_i V_i \int_{\nu_{\min}}^{\nu_{\max}} I_{\nu}^0(T_i, n_{\nu,i}) d\nu \quad (21)$$

The forward method has been widely used for the estimation of radiative power exchanges between cells [31, 32]. However, a reciprocal Monte Carlo method has been presented quite recently [33] in order to decrease the CPU time without impacting the accuracy. The method is based on the fact that the ratio between the  $P_{ij,\nu}^{\text{ea}}$  and  $P_{ji,\nu}^{\text{ea}}$  powers is equal to the ratio of

intensities emitted by the  $i$  and  $j$  elements :

$$\frac{P_{ij,\nu}^{\text{ea}}}{P_{ji,\nu}^{\text{ea}}} = \frac{I_{\nu}^0(T_i, n_i)}{I_{\nu}^0(T_j, n_j)} \quad (22)$$

Tesse *et al* [33] presented two methods called Emission Reciprocity Method (ERM) and Absorption Reciprocity Method (ARM) to calculate the source term  $\text{div } \mathbf{q}_{\mathbf{r}(i)}$  of an element  $i$ . In the ERM,  $\text{div } \mathbf{q}_{\mathbf{r}(i)}$  is expressed as a function of  $P_{ij,\nu}^{\text{ea}}$  :

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{q}_{\mathbf{r}(i)}^{\text{ERM}} &= \sum_{j=1}^N \int_{\nu_{\min}}^{\nu_{\max}} P_{ij,\nu}^{\text{exch}} d\nu \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{\nu_{\min}}^{\nu_{\max}} P_{ij,\nu}^{\text{ea}} \left( 1 - \frac{I_{\nu}^0(T_j, n_j)}{I_{\nu}^0(T_i, n_i)} \right) d\nu \end{aligned} \quad (23)$$

In the ARM,  $\text{div } \mathbf{q}_{\mathbf{r}(i)}$  is expressed as a function of  $P_{ji,\nu}^{\text{ea}}$  :

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{q}_{\mathbf{r}(i)}^{\text{ARM}} &= \sum_{j=1}^N \int_{\nu_{\min}}^{\nu_{\max}} -P_{ji,\nu}^{\text{exch}} d\nu \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{\nu_{\min}}^{\nu_{\max}} P_{ji,\nu}^{\text{ea}} \left( \frac{I_{\nu}^0(T_i, n_i)}{I_{\nu}^0(T_j, n_j)} - 1 \right) d\nu \end{aligned} \quad (24)$$

Then, Dupoirieux *et al* [34] proved that the power exchanged between elements  $i$  and  $j$  should be calculated with ERM when  $T_i > T_j$  and with ARM if  $T_i < T_j$  in order to limit the standard deviation of  $\text{div } \mathbf{q}_{\mathbf{r}(i)}$ .

This method which selects ARM or ERM depending on the temperatures of elements  $i$  and  $j$  is called Optimized Reciprocity Method (ORM). The ORM is particularly suitable for determining temperature distribution in a low temperature gradient domain. In the case of glass sagging, the plate thickness is quite thin so temperature distribution is relatively homogeneous. This last point clearly justifies the use of ORM as a reference method to calculate radiative heat transfer.

In an easier way than ORM, Rosseland approximation can be used for optically thick materials. Rosseland approximation can give acceptable results with small CPU time even if the radiative heat flux near the boundaries may be still underestimated [35]. It consists in considering radiative transfer as a diffusive flux inside glass, assuming that radiation is absorbed at boundaries :

$$\mathbf{q}_{\mathbf{r}} = -k_r \mathbf{grad}(T) \quad (25)$$

$k_r$  can be called radiative conductivity and is equal to [25] :

$$k_r = \int_0^{+\infty} \frac{4\pi}{3\beta_{\nu}} \frac{\partial I_{\nu}^0(s, n_{\nu})}{\partial T} d\nu \quad (26)$$

$\beta_\nu$  is the spectral extinction coefficient. As there is no scattering in glass,  $\beta_\nu$  can be replaced by the absorption coefficient  $\kappa_\nu$ . After some derivations and considering that the optical index  $n_\nu$  does not depend on temperature,  $k_r$  finally becomes :

$$k_r = \int_0^{+\infty} \frac{4\pi}{3\kappa_\nu} \frac{2h^2\nu^4 n_\nu^2}{c_0^2 k} \frac{(1/T^2)(\exp^{h\nu/kT})}{[e^{h\nu/kT} - 1]^2} d\nu \quad (27)$$

The validity of this assumption has to be checked considering the radiative properties of the medium of interest. In particular, the mean free path has to be shorter than the characteristics length of the medium [25]. This will be discussed in the next sections based on the actual properties of the studied glass.

### 3. Validation of the ORM radiative code in a pure thermal case

Glass temperature field is determined using the FEM combined with the ORM radiative code which calculates the radiative source term. This numerical setup is validated on a numerical benchmark consisting in a square enclosure of side length  $L$  where the medium is absorbing, non-scattering and the optical index is equal to 1 (figure A.4).  $L$  is set to 1 m and the absorption coefficient is  $1 \text{ m}^{-1}$  in order to keep an optical thickness equal to 1, allowing comparisons with available data in [29]. The bottom wall is at temperature  $T_1$  and the other walls are at

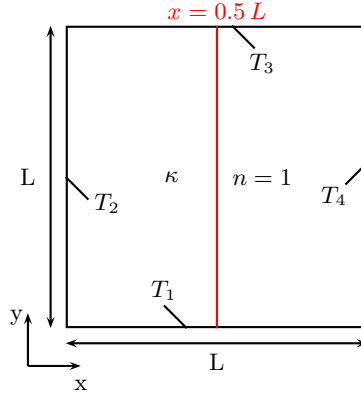


FIGURE A.4 – Numerical benchmark

temperature  $T_2 = T_3 = T_4 = 0.5T_1$ . Emissivity is equal to 1. Thermal conductivity  $k_c$  varies depending on the value of the Stark number  $N = \kappa k_c / 4\sigma T^3$ , which characterizes the ratio between conductive and radiative transfer. For the present simulations,  $N$  is set to 0.05 and 1.

In the figure A.5, the dimensionless temperature ( $T_1$  taken as the reference) is plotted versus  $y$  at  $x = 0.5L$  when the steady state is reached. The results given by our model are compared with those obtained with a Control Volume Finite Element Method on a  $41 \times 41$  nodes grid [29]. There are very few differences between the results given by the two codes. For the two values of  $N$ , the relative error is below 0.8%, which provides a verification of the present model. As the Monte Carlo method is stochastic, results are sensitive to the number of emitted quanta.

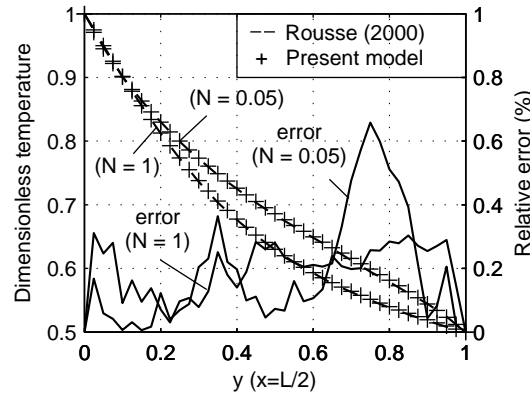


FIGURE A.5 – Results of the radiative code

It implies that results variance is inversely proportional to the sample size. It also explains why the relative error values vary along the  $y$ -axis. In this model, 10 million quanta were emitted inside the medium and 1 million from each wall.

#### 4. Numerical model

The present numerical model is now adapted from an existing experiment presented in [36]. A glass plate is placed on a concave mold in a furnace and has to fit the mold shape after heating. Details of the simulation are given below.

##### 4.1. Geometry/Mesh

The geometry is given in figure A.6. A 6 mm  $\times$  125 mm glass plate is placed on a 65 mm radius concave mold. The plane defined by  $x = 0$  is used as a symmetry plane in order to decrease the calculation cost. For all the simulations, a mesh with 12  $\times$  125 elements is used (figure A.7) with

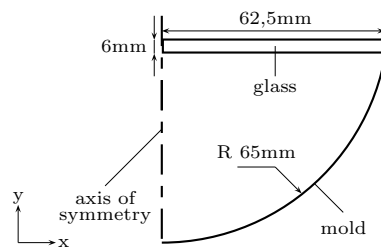


FIGURE A.6 – Geometry of the studied case

the C point corresponding to the center of the plate. The finite elements are linear quadrilateral.

##### 4.2. Glass properties

Glass characteristics [8, 37] presented in table 7 are assumed to not depend on temperature, except for viscosity (see equation (10)) and radiative conductivity (see equation (27)) when the



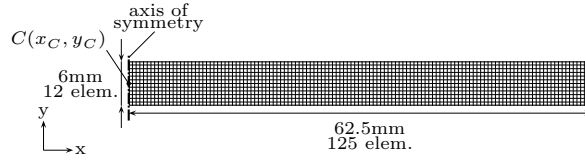


FIGURE A.7 – Mesh

Property	Unit	Value
$C_1$	(-)	40
$C_2$	(K)	710
$\eta(T_0 = 400^\circ\text{C})$	(Pa.s)	$10^{19}$
$\rho$	( $\text{kg.m}^{-3}$ )	2483
$k_c$	( $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ )	0.98
$c_p$	( $\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ )	1140
$E$	(Pa)	$68.5 \times 10^9$
$\nu_p$	(-)	0.22
$\alpha$	( $\text{K}^{-1}$ )	$9.36 \times 10^{-6}$

Tableau 7 – Physical properties of glass.

Rosseland approximation is used. Radiative calculations are done considering a band model for the spectral dependence.

The optical properties are listed in table 8. These values are taken from [38] and correspond to the properties at the center of each wavelength band, between  $0.25 \mu\text{m}$  and  $5.25 \mu\text{m}$  with a step of  $0.5 \mu\text{m}$ . The corresponding mean free path of radiation (MFP) is given in the last column in the table 8. As it can be seen in the range between  $0.25 \mu\text{m}$  and  $2.75 \mu\text{m}$ , the MFP is larger than the thickness of the glass plate (6 mm). Consequently, the use of Rosseland approximation which requires an assumption of optically thick medium (thickness equal to 3 to 5 times the MFP) may be questionable. However, one should take into account that the highest temperature of the process (during working stage) is  $672^\circ\text{C}$ , meaning that the proportion of radiative power below  $2.75 \mu\text{m}$  is about 18 % [23] in the worst case. Moreover, the thickness is taken here as a reference length, but for some of the radiation directions, total reflection will occur at the interface, which of course leads to a larger optical thickness, whatever the wavelength. Similarly, reflection phenomena will contribute to a higher effective optical thickness even for directions only concerned by partial reflection. Hence, the assumption of an optically thick medium holds. One supplementary required criterion has been proposed in [39] in terms of applied temperature gradient, as follows :

$$\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial n} < 0.033 \kappa^{\text{eff}} \quad (28)$$

involving the temperature gradient and with  $\kappa^{\text{eff}}$  being the Planck's average of the absorption coefficient. Actually,  $\kappa^{\text{eff}}$  is equal to  $535 \text{ m}^{-1}$  according to the values extracted from table 8. Assuming that the temperature gradient is smaller along the  $x$ -axis and that the temperature variation is linear along the  $y$ -axis, the criterion requires that  $\Delta T < 0.033 \kappa^{\text{eff}} T \Delta y$ . At the

$\lambda$ range ( $\mu\text{m}$ )	$n$ (-)	$k$ (-)	$\kappa$ ( $\text{m}^{-1}$ )	MFP (mm)
[0.25; 0.75]	1.528	$1.492 \times 10^{-7}$	3.8	263
[0.75; 1.25]	1.514	$4.591 \times 10^{-6}$	57.7	17.3
[1.25; 1.75]	1.508	$4.234 \times 10^{-6}$	35.5	28.2
[1.75; 2.25]	1.501	$4.423 \times 10^{-6}$	27.8	36.0
[2.25; 2.75]	1.494	$6.324 \times 10^{-6}$	31.8	31.4
[2.75; 3.25]	1.485	$7.432 \times 10^{-5}$	311	3.22
[3.25; 3.75]	1.474	$1.065 \times 10^{-4}$	382	2.62
[3.75; 4.25]	1.463	$1.060 \times 10^{-4}$	333	3.00
[4.25; 4.75]	1.449	$2.978 \times 10^{-4}$	832	1.20
[4.75; 5.25]	1.397	$3 \times 10^{-3}$	7540	0.133

Tableau 8 – Optical indices, absorption coefficient and mean free path in the  $[0.25 \mu\text{m}; 5.25 \mu\text{m}]$  range.

working stage temperature ( $T = 672 \text{ }^\circ\text{C}$ ), this means that the temperature variation  $\Delta T$  between the center of the plate and the boundary ( $\Delta y = 3 \text{ mm}$ ) must be less than  $50 \text{ }^\circ\text{C}$ . This will be checked in the results section.

Radiative conductivity  $k_r$  is plotted in figure A.8 as a function of glass temperature using the coefficients of table 8 and equation (27). As expected, it strongly increases with temperature, reaching values more than six times higher than the standard heat conductivity indicated in table 7.

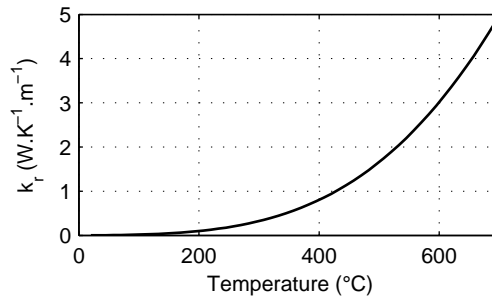


FIGURE A.8 – Radiative conductivity as a function of temperature

### 4.3. Loading

During glass sagging experiment, glass plate is heated by infrared heaters. The air temperature was measured in the furnace with thermocouples [40] and is represented as a function of time in figure A.9. The radiation coming from the heaters is not exactly simulated in a straightforward manner. It is considered that radiation is coming from the surroundings, emitting like a high temperature blackbody source and providing the exact spectral and total emissive power. Actually, radiation is mainly coming from the surrounding walls, with temperature very close to the one presented in figure A.9 and with emissivity close to one. This is of course a first approximation, which makes the calculations simpler however and which will be discussed in a dedicated sensitivity study. From a mechanical point of view, glass plate is only submitted to gravity. Sliding contact between glass and mold is considered as it is observed in practice for

temperature under 680 °C [41]. Exchanges between air and plate occurs according to a coefficient of  $K = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$  [22].

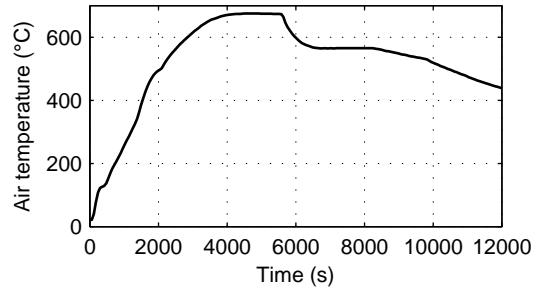


FIGURE A.9 – Air temperature during the process

#### 4.4. Numerical implementation

Glass sagging is a process where thermal and mechanical models are closely coupled. Looking at equations (10) and (11), temperature has a strong influence on strain tensor and viscosity. Then, when glass deforms, external geometry changes and so heat transfer equations (12) and (13) are affected. The model implies a strong thermomechanical coupling. It is taken into account by the FEM by using an implicit solution. It means that reaching the next time step can require several iterations before convergence between heat transfer and mechanical models.

Concerning the heat balance, a numerical study has been carried out showing that, when ORM is used, the radiative source term can be calculated only at the beginning of a time step to get the temperature field. However, this model has to be performed using a 5 s time step and a density of 1000 quanta/mm<sup>2</sup> for the medium and 1000 quanta/mm for the boundaries in the Monte Carlo code.

### 5. Results and discussion

Different models involving or neglecting radiative transfer are used and discussed in this section.

#### 5.1. Comparison of different simulation results

Figure A.10-a shows the temperature of the glass plate center (point C in figure A.7) versus process time for the four simulations. (PT) stands for Predefined Temperature (glass temperature is assumed to be equal to the surrounding temperature presented in figure A.9), (RN) for Radiation Neglected (the heat balance equation 12 is solved omitting the radiative flux term), (RA) for Rosseland Approximation and (ORM) for Optimized Reciprocity (Monte Carlo) Method. It appears that the temperature of the glass plate center strongly depends on the method used.

During the increase in temperature, (PT) shows the highest temperature. It is, of course, due to the fact that glass temperature is uniformly set to surrounding temperature, as if a perfect heat exchange occurred. Considering (ORM) and (RA), temperature shifts from (PT) results during

the first 2000 seconds. However, when the working stage temperature is reached ( $t = 4000$  s), the three curves of (PT), (ORM) and (RA) are overlapping.

(RN) shows a significantly different behavior. During the increasing step, the discrepancy in temperature is very large as compared to the other methods. The maximum difference is larger than  $150$  °C at  $t = 2000$  s. For (PT), (ORM) and (RA), the working stage temperature lasts from  $4000$  s to  $5600$  s. For (RN), the working stage temperature is reached lately at  $t = 5600$  s, then temperature begins to decrease immediately following the setpoint in air temperature.

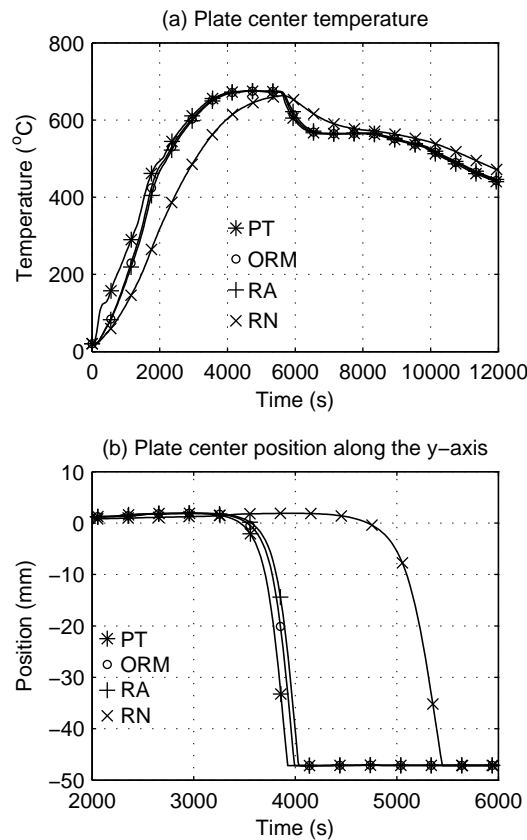


FIGURE A.10 – Temperature (a) and displacement (b) of the plate center

Vertical positions for the plate center as a function of time can be seen in figure A.10-b, in the time interval between  $2000$  s and  $6000$  s. The initial position of the plate center is at  $0$  mm. At the beginning of the process, plate lifts up slightly because of thermal expansion due to the increase in temperature. It explains why the positions are above  $0$  mm in figure A.10-b at  $t = 2000$  s.

For (PT), (ORM) and (RA) the forming phase begins at around  $t = 3000$  s when viscosity becomes low enough to allow glass to sag under its own weight. This is observed numerically through sign change in the vertical displacements. The vertical position of the plate center decreases and at around  $t = 4000$  s, the bottom surface of the plate comes into contact with the

mold. For (RN), this phase begins later (starting at  $t = 4000$  s) and plate comes into contact with the mold at 5450 s.

All the characteristic times, corresponding to the beginning of forming step and the time when the bottom surface of the plate and the mold come into contact, are summed up in table 9.

Methods	Beginning of the forming phase (s)	Glass/mold contact (s)
(PT)	2934	3925
(RN)	3980	5449
(RA)	3030	4040
(ORM)	2980	3980

Tableau 9 – Process times.

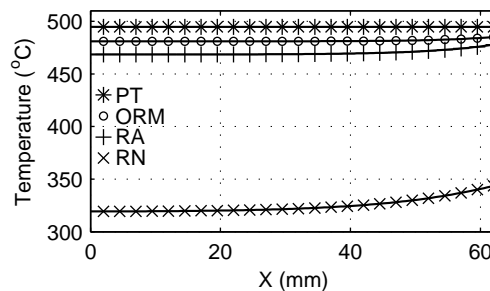


FIGURE A.11 – Temperature along the x-axis at  $t = 2000$  s

Figure A.11 shows the temperature on a central line at the middle height of the plate (line initially defined by  $y_C = 0$ , which is progressively curved) at  $t = 2000$  s. The difference in temperature between (PT), (ORM) and (RA) results is below 30 °C but reaches 150 °C when comparing (RN) results with the other methods. There is, of course, no variation of temperature along the  $x$ -axis for (PT). The variation between the center and the end of the plate is about 5 °C for (ORM), 10 °C for (RA) and 25 °C for (RN). The difference is larger for (RN) because radiation cannot contribute to distribute the energy flux inside the medium in this case. Note that the maximum temperature discrepancy in the  $y$ -direction (not shown here) is always below 3 °C, which is in accordance with the criterion presented in the previous section for the use of the Rosseland approximation and explains why results obtained with the Rosseland approximation are satisfactory. Such a small temperature gradient inside the medium even justifies the method of intensity linearization itself (which is used in the derivation of the Rosseland approximation) whatever the wavelength and the optical thickness. This is another justification for the application of a Fourier's type law for the radiative model.

Predicted plate shapes are shown in figure A.12-b at  $t = 12000$  s. The shapes provided with (PT), (ORM) and (RA) models are overlapping, whereas the shape obtained with (RN) model does not fit well to the mold.

As a whole, all these results show that the hypothesis of neglecting radiation gives too rough predictions : (i) working stage temperature is reached too late, (ii) glass temperature is clearly

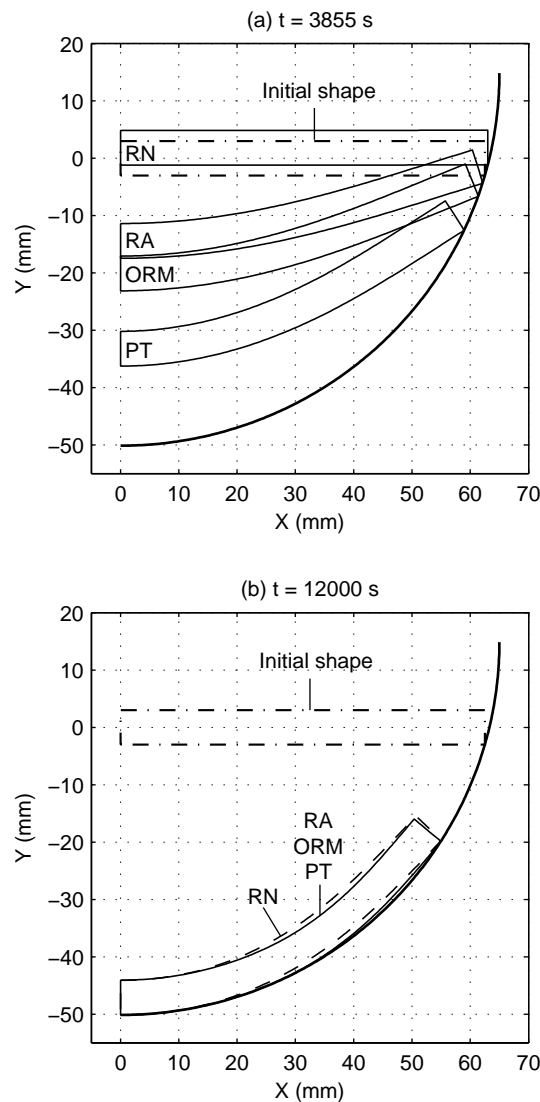


FIGURE A.12 – Plate shape at 3855 s (a) and 12000 s (b)

underestimated and (iii) the plate shape is not well simulated. When radiative transfer is taken into account however, ORM, Rosseland approximation and predefined temperature models show weak discrepancies in the predictions, except during the time period of strong deformation which may appear with a small time gap when using the less accurate methods.

Calculations were performed on a HP Z820 workstation with an Intel Xeon processor. Considering the CPU times required by each method (table 10), it seems that Rosseland approximation and to some extent, predefined temperature model, provide acceptable results with CPU times around 7 times inferior to those of ORM.

This conclusion holds for glass sagging with mold, but other forming conditions may be found. In the case of windscreen production, there is no mold under the plate, but rather a skeleton frame which does not support the glass shape as a mold does. It means that even for relatively similar time process durations, predicted final shapes can be significantly different. This can be

Methods	CPU times (min)
Predefined temperature	24
Radiation neglected	25
Rosseland approximation	27
Monte Carlo	185

Tableau 10 – CPU Times.

illustrated considering results predicted in the previous case at an intermediate instant during deformation and before contact of the whole plate with the mold, as presented in figure A.12-a at  $t = 3855$  s.

The plate center position predicted using a predefined temperature model is about 34 mm below the initial position, whereas the predictions with ORM and Rosseland approximation are 20 mm and 14 mm below the initial position, respectively. This shows the possible advantage of involving the most accurate radiation model in this case. Neglecting the radiative transfer (RN model), the forming temperature has not been reached yet at this time. The plate shape is totally wrong only illustrating the above discussed effect of an upward movement due to thermal expansion since the plate position is still above its initial position.

## 5.2 Sensitivity analysis

In this section, a sensitivity analysis is carried out in order to check the dependence of the results to some questionable parameters. The influence of the global transfer coefficient  $K$ , the heat capacity per mass unit  $c_p$  and the boundary conditions are investigated, focusing on the ORM simulation.

$K$ (W.K <sup>-1</sup> .m <sup>-2</sup> )	Temperature at $t = 3000$ s (°C)	Glass/mold contact (s)
5 (-50%)	606.8 (-0.3)	3998 (+0.08%)
10 (original model)	607.1	3995
20 (+100%)	607.6 (+0.5)	3991 (-0.11%)

Tableau 11 – Influence of  $K$  variations.

Results for simulations with  $K$  multiplied by 2 or divided by 2 are compared with the original simulation in table 11. It appears that, at  $t = 3000$  s (time at which glass forming is beginning), taking different values for  $K$  has no actual impact on the temperature of the glass plate center, the maximum difference being 0.5 °C. It does not change either the time at which the bottom surface of the plate enters into contact with the mold.

Such low influence of  $K$  can be understood because radiative transfer is the dominant heat transfer mechanism. Moreover, the plate temperature has to follow the increasing set point, but with a slow heating rate. For example at  $t = 3000$  s, the temperature rate is 0.1 K.s<sup>-1</sup>, which means that an increase about 1 K occurs in a time interval of  $t = 10$  s.  $K$  has a weak influence

with such a slow process. Coupling between heat transfer and mechanics is another possible explanation, as deformation occurs after a long stage of heating and was even little affected by the choice of the radiation model as seen in figure A.10.

$c_p$ (J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> )	Temperature at $t = 3000$ s (°C)	Glass/mold contact (s)
912 (-20%)	608.6 (+1.5)	3979 (-0.40%)
1140 (original model)	607.1	3995
1368 (+20%)	605.5 (-1.6)	4007 (+0.30%)

Tableau 12 – Influence of  $c_p$  variations.

Regarding the influence of  $c_p$  in table 12, the temperature of the glass plate center at  $t = 3000$  s is 1.5 °C higher with  $c_p = 912$  J.kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup> (-20%) than with the original value  $c_p = 1140$  J.kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>. As  $c_p$  is smaller, glass temperature is rising faster. Hence, the time required before contact between the middle of the plate and the mold is 16 s (-0.4%) shorter than in the original simulation. With  $c_p = 1368$  J.kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup> (+20%), the temperature of the glass plate center decreases by 1.6 °C and the time before contact increases by 12 s (+0.3%).

This is again a weak influence and the explanation also comes from the slow heating rate. Some discrepancy may appear in this first step in the temperature evolution but the global time before contact which is also affected by the coupling with the mechanics shows little variations. Complementary simulations have been performed checking that the actual temperature modification in relation with  $c_p$  was low. A maximum deviation of 15 K has been found between simulations carried out with average  $c_p$  value and either the minimum or the maximum  $c_p$  value. This discrepancy occurs at the early stage of the heating when the variation of set point with time is faster. However, the temperature rate decreases with time and the results of the different simulations get very close (as stated in table 12). As a whole the total time before contact is little affected.

As a conclusion, change in the  $K$  value does not affect the process and modifying  $c_p$  has little influence.

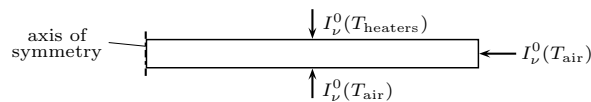


FIGURE A.13 – Modification of the boundary conditions

The radiative boundary conditions are now modified in such a way that the radiative intensity received by the top surface is different from the one of the other surfaces (figure A.13).

The top surface will receive a radiative intensity from a blackbody at the temperature  $T_{\text{heaters}}$  which corresponds to the temperature of the furnace heaters, while the other surfaces are still



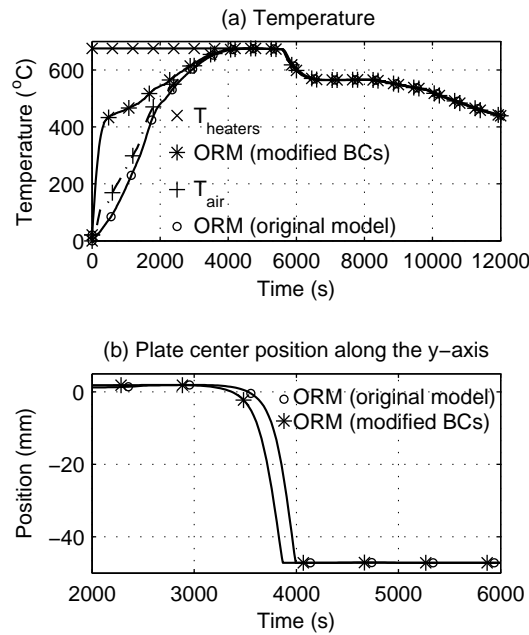


FIGURE A.14 – Temperature (a) and displacement (b) evolution after modification of the boundary conditions

submitted to radiation from black walls at temperature  $T_{\text{air}}$ . In this simulation, heaters of the furnace are considered at their maximum power (maximum temperature  $T_{\text{heaters}} = 675$  °C) from the beginning of the process until the working stage. Then, they follow the same temperature evolution as the air and the walls (figure A.14-a). Obviously, the temperature of the plate center rises much faster with the modified boundary conditions (figure A.14-b). When forming begins at around  $t = 3000$  s, the temperature difference with the original model is 16 °C (623 °C versus 607 °C). There is therefore an effect on the displacements. With the modified boundary conditions, the contact between the bottom surface of the plate and the mold occurs at  $t = 3869$  s, which is 126 s faster than the original prediction (contact at  $t = 3995$  s).

For this model, the boundary conditions have consequently a stronger influence on the temperature field of the plate and the speed of forming than the  $K$  and  $c_p$  parameters.

## 6. Conclusion

Four heat transfer models have been investigated numerically, focusing on radiative transfer on a 2D sagging glass process. It appears that neglecting radiative heat transfer leads to large errors on temperature distribution in the glass plate, which results in a significant influence on the final shape of the piece.

On the contrary, direct setting of glass temperature or use of Rosseland approximation give results relatively close to those predicted with ORM, which is considered as the reference method. Moreover, noticing that ORM requires large CPU times, Rosseland approximation seems to be a good alternative to get an acceptable accuracy with reasonable CPU times.

Note that some inaccuracies may occur at definite instants. When the plate is fastly changing after reaching a threshold temperature value, displacements predicted by the different models may be significantly different, the plate quickly reaching the same final shape however, due to the mold contact. Hence, this observation only holds for glass sagging with mold. During the forming stage, the shapes can be different and the model could be more influent for forming cases without mold.

The sensitivity analysis has shown that the  $K$  global exchange coefficient and the heat capacity per mass unit  $c_p$  have a little influence on the results.

On the contrary, modification in the boundary conditions changes the glass forming prediction. As a first approximation, the hypothesis was used that radiation comes from a surrounding blackbody source. This is a strong assumption, which allowed the evaluation of the radiative influence and various model comparisons, however. The simulation should be now improved introducing a more realistic radiative flux coming from the infrared heaters. This would definitely allow checking the validity of Rosseland approximation in comparison to ORM.

### **Acknowledgments**

The authors gratefully acknowledge the financial and technical supports provided by the CERFAV (Centre Européen de Recherches et de Formation aux Arts Verriers), the FEDER (Fonds Européen de Développement Régional) and the ANR (Agence Nationale de la Recherche).

### **References**

- [1] P. Groombridge, A. Oloyede, P. Doherty-Bigara, Development and implementation of visual feedback technology in automotive windscreen manufacture, *Journal of Materials Processing Technology* 139 (1) (2003) 357–361.
- [2] G. Buonanno, M. Dell’Isola, A. Frattolillo, G. Giovinco, Thermal analysis of a glass bending process, *Applied Thermal Engineering* 25 (2005) 2108–2121.
- [3] R. Hunt, Numerical solution of the flow of thin viscous sheets under gravity and the inverse windscreen sagging problem, *International Journal for numerical methods in fluids* 38 (6) (2002) 533–553.
- [4] Y. Chen, A. Y. Yi, Design and fabrication of freeform glass concentrating mirrors using a high volume thermal slumping process, *Solar Energy Materials & Solar Cells* 95 (7) (2011) 1654–1664.
- [5] Y. M. Stokes, Numerical design tools for thermal replication of optical quality surfaces, *Computers & Fluids* 29 (4) (2000) 401–414.
- [6] W.W. Zhang, K.W. Chang, D. A. Content, S. M. Owens, R. Petre, P. J. Serlemitsos, T. T. Saha, Y. Soong, Development of mirror segments for the constellation-x observatory, *SPIE Proceedings* 4851 (2003) 503–518.

- [7] D. Rieser, G. Spieß, P. Manns, Investigations on glass-to-mold sticking in the hot forming process, *Journal of Non-Crystalline Solids* 354 (12-13) (2008) 1393–1397.
- [8] M. H. Parsa, M. Rad, M. R. Shahhosseini, M. H. Shahhosseini, Simulation of windscreen bending using viscoplastic formulation, *Journal of Materials Processing Technology* 170 (1-2) (2005) 298–303.
- [9] A. Jain, A. Y. Yi, X. Xie, R. Sooryakumar, Finite element modelling of stress relaxation in glass lens moulding using measured temperature dependent elastic modulus and viscosity data of glass, *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering* 14 (3) (2006) 465–477.
- [10] W. Potze, F. H. Veld, J. P. V. den Brink, Structural and stress relaxation in a glass slab, *International Journal of Forming Processes* 2 (1999) 63–80.
- [11] T. Soules, R. F. Busbey, S. M. Rekhson, A. Markovsky, M. A. Burke, Finite-element calculation of stresses in glass parts undergoing viscous relaxation, *Journal of the American Ceramic Society* 70 (2) (2005) 90–95.
- [12] J. Zarzycki, *Glasses and the Vitreous State*, Cambridge University Press, 1991.
- [13] J. M. A. Cesar de Sa, Numerical modelling of glass forming processes, *Engineering Computations* 3 (4) (1986) 266–275.
- [14] S. Manservigi, An optimal control approach to an inverse nonlinear elastic shell problem applied to car windscreen design, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 189 (2) (2000) 463–480.
- [15] Y. Agnon, Y. M. Stokes, An inverse modelling technique for glass forming by gravity sagging, *European Journal of Mechanics B/Fluids* 24 (3) (2005) 275–287.
- [16] E. Feulvarch, N. Moulin, P. Saillard, T. Lornage, J.-M. Bergheau, 3D simulation of glass forming process, *Journal of Materials Processing Technology* 164-165 (2005) 1197-1203.
- [17] S. Grégoire, J. M. A. Cesar de Sa, P. Moreau, D. Locheignies, Modelling of heat transfer at glass/mould interface in press and blow forming processes, *Computers and Structures* 85 (2007) 1194–1205.
- [18] A. Klar, J. Lang, M. Seaid, Adaptive solutions of SPN-approximations to radiative heat transfer in glass, *International Journal of Thermal Sciences* 44 (2005) 1013–1023.
- [19] J. R. Howell, The Monte Carlo method in radiative heat transfer, *ASME Journal of Heat Transfer* 120 (3) (1998) 547–560.
- [20] J. Yan, T. Zhou, J. Masuda, T. Kuriyagawa, Modeling high-temperature glass molding process by coupling heat transfer and viscous deformation analysis, *Precision Engineering* 33 (2009) 150–159.
- [21] F. Richter, Upsetting and viscoelasticity of vitreous SiO<sub>2</sub> : experiments, interpretation and simulation, Ph.D. thesis, Technischen Universität Berlin, 2006.
- [22] N. Berour, D. Lacroix, G. Jeandel, Radiative and conductive heat exchanges in high-temperature glass melt with the finite-volume method approach. Influence of several spatial

- differencing schemes on RTE solution, *Numerical Heat Transfer, Part A* 49 (6) (2006) 567–588.
- [23] M. F. Modest, *Radiative heat transfer*, McGraw-Hill series in mechanical engineering, 1993.
- [24] K. H. Lee, R. Viskanta, Two-dimensional combined conduction and radiation heat transfer : comparison of the discrete ordinates method and the diffusion approximation methods, *Numerical Heat Transfer, Part A* 39 (3) (2001) 205–225.
- [25] R. Siegel, J. R. Howell, *Thermal radiation heat transfer*, Taylor & Francis, 1992.
- [26] M. Modest, S. Lei, The simplified spherical harmonics method for radiative heat transfer, *Journal of Physics : Conference Series* 369 (2012).
- [27] R. Méchi, H. Farhat, K. Guedri, K. Halouani, R. Said, Extension of the zonal method to inhomogeneous non-grey semi-transparent medium, *Energy* 35 (1) (2010) 1–15.
- [28] H. M. Koo, R. Vaillon, V. Goutiere, V. L. Dez, H. Cha, T. H. Song, Comparison of three discrete ordinates methods applied to two-dimensional curved geometries, *International Journal of Thermal Sciences* 42 (4) (2003) 343–359.
- [29] D. R. Rousse, G. Gautier, J. F. Sacadura, Numerical predictions of two-dimensional conduction, convection, and radiation heat transfer. II. Validation, *International Journal of Thermal Sciences* 39 (3) (2000) 332–353.
- [30] S. V. Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow*, Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
- [31] T. Wong, M. P. Menguc, Comparison of Monte Carlo techniques to predict the propagation of a collimated beam in participating media, *Numerical Heat Transfer, Part B* 42 (2) (2002) 119–140.
- [32] A. Collin, P. Boulet, G. Parent, D. Lacroix, Numerical simulation of a water spray - Radiation attenuation related to spray dynamics, *International Journal of Thermal Sciences* 46 (9) (2007) 856–868.
- [33] L. Tessé, F. Dupoirieux, B. Zamuner, J. Taine, Radiative transfer in real gases using reciprocal and forward Monte Carlo methods and a correlated-k approach, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 45 (13) (2002) 2797–2814.
- [34] F. Dupoirieux, L. Tessé, S. Avila, J. Taine, An optimized reciprocity Monte Carlo method for the calculation of radiative transfer in media of various optical thicknesses, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 49 (7) (2006) 1310–1319.
- [35] K. H. Lee, R. Viskanta, Comparison of the diffusion approximation and the discrete ordinates method for the investigation of heat transfer in glass, *Glastechnische Berichte-Glass Science and Technology* 72 (8) (1999) 254–265.
- [36] L. Soudre-Bau, Y. Meshaka, G. Parent, P. Boulet, B. Le Corre, G. Jeandel, Combined temperature and deformation measurement during glass forming in a real scale setup (DOI :10.1007/s11340-013-9764-z), *Experimental Mechanics* 53 (2013).
- [37] L. Su, P. He, A. Y. Yi, Investigation of glass thickness effect on thermal slumping by expe-

rimental and numerical methods, *Journal of Materials Processing Technology* 211 (12) (2011) 1995–2003.

[38] M. Rubin, Optical properties of soda lime silica glasses, *Solar Energy Materials* 12 (1985) 275–288.

[39] H. Gomart, J. Taine, Validity criterion of the radiative fourier’s law for an absorbing and scattering medium, *Physical Review E* 83 (2011, paper 021202).

[40] L. Soudre, Numerical and experimental study of glass plate forming, Ph.D. thesis, Université Henri Poincaré, 2008.

[41] D. Locheignies, T. Vicart, J. Oudin, Finite element elastoviscoplastic models for optimisation of horizontal and vertical press bending of sheets of glass, *Glass Technology* 36 (1995) 166–170.



## Résumé

Ce travail de thèse est dédié à la modélisation du thermoformage du verre. Le procédé consiste à déformer une plaque de verre sous l'effet de son propre poids. Posée sur un support et placée dans un four, la température de la pièce augmente et sa viscosité diminue, ce qui permet d'obtenir la forme désirée. Les simulations numériques, qui se basent sur un modèle thermomécanique, doivent permettre de mieux comprendre l'influence, sur le produit final, des différents paramètres d'essai, comme le chargement thermique, la géométrie et le matériau du moule ou encore la forme initiale de la pièce.

Pour ce faire, le logiciel commercial Abaqus<sup>®</sup>, qui utilise une méthode de résolution des calculs par éléments finis, prend en charge les aspects mécaniques et conductifs. En revanche, comme le verre est un milieu semi-transparent, la modélisation du transfert radiatif est complexe et nécessite le développement d'un code se basant sur une méthode de Monte Carlo dite réciproque. La méthode a été validée en deux dimensions sur des cas-tests de la littérature scientifique.

Le code a ensuite été implémenté dans le logiciel Abaqus<sup>®</sup> afin de réaliser des simulations de thermoformage sur moule et en suspension. Le verre est considéré comme un matériau élasto-visco-plastique obéissant à un modèle de Maxwell simple et la thermodépendance de la viscosité est prise en compte par une loi WLF. Une attention particulière a été accordée au modèle radiatif. Différentes hypothèses, issues de la littérature scientifique, sont testées afin de vérifier leur validité dans notre cas d'étude.

**Mots-clés : thermoformage du verre ; méthode de Monte-Carlo ; éléments finis ; transfert thermique radiatif ; approximation de Rosseland**

## Abstract

This dissertation is dedicated to the modelling of the glass sagging process. This operation consists in forming a sheet or a plate of glass by heating it in a furnace. Glass temperature rises and reaches a work temperature at which viscosity is low enough to allow glass to sag under its own weight due to gravity. Numerical simulation, based on a thermomechanical model, can help to better understand the influence of the different parameters on the final product, such as the thermal loading, the shape and material of the mould or even the initial geometry of the glass plate.

Thus, the commercial software Abaqus<sup>®</sup> is used to solve the problem by a finite elements method. However, it can not render the complexity of the radiative heat transfer in glass. So, a Monte Carlo code based on a reciprocal method was developed and validated using benchmarks from the scientific literature.

Then, the code was implemented into Abaqus<sup>®</sup> in order to simulate glass sagging on a mould or glass forming by the draping process. Glass is considered as an elasto-viscoplastic material which obeys a Maxwell model. Viscosity is dependant to temperature according to a WLF law. Special care was devoted to the radiative heat transfer. Different hypothesis are reviewed and performed to check their validity when applied to our numerical set-up.

**Keywords : Glass sagging ; Monte Carlo method ; Finite elements ; Radiative heat transfer ; Rosseland approximation**