



HAL
open science

Contribution sur la synthèse d'observateurs pour les systèmes dynamiques hybrides

Abderazik Birouche

► **To cite this version:**

Abderazik Birouche. Contribution sur la synthèse d'observateurs pour les systèmes dynamiques hybrides. Automatique / Robotique. Institut National Polytechnique de Lorraine - INPL, 2006. Français. NNT : 2006INPL086N . tel-01752778v2

HAL Id: tel-01752778

<https://theses.hal.science/tel-01752778v2>

Submitted on 21 Dec 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Contribution sur la synthèse d'observateurs pour les systèmes dynamiques hybrides

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 28 novembre 2006

pour l'obtention du

Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine

(spécialité automatique et traitement du signal)

par

Abderazik Birouche

Composition du jury

<i>Président :</i>	M. DAROUACH	Professeur à UHP, Nancy 1
<i>Rapporteurs :</i>	J. BUISSON	Professeur à Supélec, Rennes
	M. M'SAAD	Professeur à ENSI, CAEN
<i>Examineurs :</i>	J.P BARBOT	Professeur à l'ENSEA, Cergy-Pontoise
	J. DAAFOUZ	Professeur à l'INPL, Nancy
	C. IUNG	Professeur à l'INPL, Nancy

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire de thèse a été effectué au de au centre de recherche en automatique de Nancy CRAN une unité mixte de recherche UMR 7039 CNRS-INPL-UHP sous la direction de Monsieur le Professeur Claude Iung et de Monsieur le Professeur Jamal Daafouz. Je leur témoigne toute ma gratitude pour m'avoir accueilli dans leur équipe, pour leurs aide et leur confiance qu'ils m'ont accordé. J'exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur M. Daarouach, qui me fait l'honneur de présider ce jury. J'adresse mes profonds remerciements à Monsieur J. Buisson, Professeur à Supélec, Rennes, et à Monsieur M. M'Saad Professeur à ENSI, CAEN, pour avoir accepté de rapporter sur ce travail. J'exprime mes sincères remerciements à Monsieur J.P. Barbot Professeur à l'ENSEA, Cergy-Pontoise de m'avoir fait l'honneur de participer au jury.

J'associe aussi à ces remerciements, l'ensemble des chercheurs, permanents, techniciens et secrétaires du laboratoire pour l'ambiance amicale dans laquelle s'est déroulé ce travail.

A ma famille.
A tous les gens qui m'ont encouragé.

Table des matières

Table des figures	3
Références personnelles	5
Introduction générale	7

Chapitre 1

Introduction aux systèmes dynamiques hybrides

1.1	Introduction	15
1.1.1	Les motivations d'un modèle hybride	16
1.2	Systèmes hybrides : présentation générale	17
1.2.1	Exécution d'un système hybride	20
1.3	Quelques classes particulières de systèmes dynamiques hybrides	22
1.3.1	Les systèmes linéaires à saut	22
1.3.2	Les systèmes linéaires à commutation SLS	23
1.3.3	Les systèmes linéaires affines constants par morceaux PWA	24
1.3.3.1	La forme MLD d'un système affine constant par morceaux en temps discret	26
1.4	Sur l'observabilité des systèmes hybrides	27
1.4.1	Observabilité d'un système linéaire	28
1.4.2	De la discernabilité à l'observabilité	29
1.5	Observabilité des systèmes linéaires à saut	30
1.5.1	Observabilité des systèmes JLS : Cas temps continu	31
1.5.2	Transposition au cas temps discret	35

1.5.3	Observabilité des systèmes JSL : cas temps discret	35
1.6	Observabilité des systèmes à commutation SLS	38
1.7	Observabilité des systèmes MLD	39
1.8	La particularité de l'observabilité en temps discret	40
1.9	Estimation d'état pour les systèmes hybrides	42
1.9.1	Observateur avec l'état discret connu	44
1.9.2	Observateur hybride : état discret inconnu	46
1.10	Conclusion	47

Chapitre 2

Synthèse d'observateur commuté à entrée inconnue

2.1	Introduction	51
2.2	Formulation du problème	52
2.3	Stabilité des systèmes à commutation	54
2.3.1	La stabilité quadratique des systèmes à commutation	55
2.3.2	La stabilité poly-quadratique	58
2.4	Technique de placement de pôles	60
2.4.1	Placement de pôles dans le cas d'un système linéaire	61
2.4.2	Placement de pôles dans le cas d'un système à commutation	62
2.5	Application à la synchronisation du chaos	66
2.5.1	Problème de la synchronisation du chaos sans message : observateur commuté	67
2.6	Synchronisation du chaos avec message : observateur commuté à entrée inconnue	69
2.7	Schéma de chiffrage utilisant un observateur commuté à entrée inconnue	71
2.8	Exemples d'application	73
2.8.1	Exemple de synchronisation sans message	73
2.8.1.1	Exemple.1	73
2.8.1.2	Exemple 2	75
2.8.2	Exemple d'application à synchronisation avec message incorporé	78
2.8.2.1	Exemple.1	79
2.8.2.2	Exemple.2	80
2.9	Conclusion	82

Chapitre 3**Synthèse d'observateur hybride pour une classe de systèmes linéaires par morceaux**

3.1	Introduction	87
3.2	Position du problème	88
3.3	Observateur discret : détection du mode actif	89
3.3.1	Cas de systèmes linéaires par morceaux sans entrée	91
3.3.1.1	Méthode calcul des coefficients	93
3.3.1.2	Solution proposée	97
3.3.1.3	La procédure de détection	98
3.3.2	Généralisation au cas non autonome	100
3.4	Observateur hybride	102
3.4.1	Observateur continu : estimation hors-ligne	103
3.4.2	Observateur continu : estimation en-ligne	104
3.5	Exemple illustratif	107
3.6	Conclusion	110

Chapitre 4**Synthèse d'un observateur hybride pour une classe de systèmes hybrides**

4.1	Introduction	113
4.2	Présentation de la classe de SDH considérée	114
4.2.1	Synthèse d'un RdP à partir d'un système état-transition	115
4.2.2	Modèle d'état d'un RdP	118
4.3	Formulation du problème	121
4.4	Observateur hybride	122
4.5	Observateur discret : observateur de RdP	124
4.5.1	Exemple illustratif	126
4.6	Observateur continu	128
4.7	Conclusion	132

Conclusion et perspectives **133**

Bibliographie **137**

143

Table des figures

1.1	Système hybride : interaction du continu et du discret	17
1.2	Exemple d'une exécution d'un système hybride	21
1.3	Trajectoire de x dans l'espace d'état	25
2.1	Schéma général d'un système de transmission	69
2.2	Evolution de la trajectoire dans l'espace d'état	74
2.3	Evolution de l'état discret (indice de région)	75
2.4	L'évolution des trois composantes de l'erreur de synchronisation et la fonction de Lyapunov	76
2.5	Evolution de la trajectoire dans l'espace d'état	77
2.6	Evolution de l'état discret (indice de région)	78
2.7	Evolution de deux composantes de l'erreur de synchronisation et l'allure de la fonction de Lyapunov	79
2.8	Evolution des trois composantes de l'erreur de synchronisation et la fonction de Lyapunov associée à l'erreur	80
2.9	Message original, message reconstruit et l'erreur de reconstruction du message	81
2.10	Evolution des deux composantes de l'erreur de synchronisation et la fonction de Lyapunov associée à l'erreur	82
2.11	Message original, message reconstruit et l'erreur de reconstruction du message	83

3.1	Exemple d'une partition de l'espace d'état du à la loi de commutation Hx	89
3.2	Structure de l'observateur hybride proposé	90
3.3	La vraie valeur Hx_k , la valeur estimée $[Hx_k]_{\alpha^c}$ et l'indice du mode actif	96
3.4	Illustration de la méthode de détection utilisant une fenêtre glissant	98
3.5	Cas d'estimation d'état hors-ligne : évaluation du mode (en haut) et la norme de l'erreur d'estimation (en bas).	108
3.6	Cas d'estimation d'état en-ligne : évaluation du mode (en haut) et la norme de l'erreur d'estimation (en bas).	109
4.1	Couplage entre RdP et systèmes d'équations dynamiques	114
4.2	Les trois situations définissant une région dans un graphe	116
4.3	Exemple d'un système de transition	116
4.4	Un automate à états finis (à gauche) et le RdP synthétisé (à droite)	117
4.5	Système hybride considéré : un ensemble de systèmes linéaire pilotés par un RdP	121
4.6	Structure de l'observateur hybride proposé	123
4.7	Exemple illustratif	127
4.8	Erreur d'estimation des quatres transitions T_1, T_2, T_{11} et T_{12}	128
4.9	Erreur d'estimation des trois places p_6, p_7 et p_8	129

Références personnelles

Revue avec comité de lecture

- A. Birouche, J. Daafouz and C. Iung. *Une méthode pour l'estimation d'état pour une classe de SdH*. SEE Sciences et Technologies de l'Automatique, vol. 2, no. 3, revue en ligne (<http://www.see.asso.fr/esta/>), 2005
- A. Birouche and C. Iung. *Observateur pour les systèmes hybrides* Journal Européen des Système Automatisés Jesa 2006. Soumis.

Congrès internationaux avec comité de lecture et actes

- A. Birouche, J. Daafouz, C. Iung. *Observer design for a class of discrete time piecewise-linear systems*, 2nd IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems ADHS'06. Alghero, Italie, june, 2006.
- A. Birouche, J. Daafouz, C. Iung *Synthèse d'observateur hybride pour la classe des systèmes linéaires par morceaux*, Conférence Internationale Francophone d'Automatique CIFA'2006. Bordeaux, France, may 2006.
- A. Birouche, J. Daafouz, C. Iung and G. Millerioux. *Hybrid observers and message-embedded chaos synchronization for encryption purpose*, 17th World Congress Scientific Computation, Applied Mathematics and Simulation IMACS. Paris, july 2005.
- A. Birouche, J. Daafouz, C. Iung and G. Millerioux. *Sur la synthèse d'observateurs hybrides et leur application à la synchronisation du chaos*. Conférence Internationale Francophone d'Automatique CIFA'2004. Tunisie, november 2004.

Séminaires avec comité de lecture

- A.Birouche, J.Daafouz and C.Iung. *Une Méthode pour l'estimation d'état pour une classe de système dynamique hybride*. Journées Doctorales Modélisation, Analyse et Conduite des Systèmes dynamiques JDMACS'2005. Lyon, september 2005.

Introduction générale

Contexte et motivation

Ces dernières années, des efforts particuliers de recherches se sont intéressés à l'étude des systèmes hybrides. Ces recherches sont motivées non seulement parce que beaucoup de systèmes réels s'avèrent exhiber des comportements hybride, mais également parce que la commande de beaucoup de systèmes complexes est seulement possible par l'intermédiaire de combinaison des lois de commande continues classiques avec une logique de surveillance discrète. De ce fait, les systèmes hybrides sont un concept rigoureux pour modéliser les systèmes complexes. Ils sont notamment employés dans le but de fournir des modèles reflétant mieux la nature des problèmes de commande. Leurs propriétés théoriques sont toujours le sujet de recherches intenses. Parmi les problèmes à traiter, celui de l'observation est particulièrement important pour le contrôle. En effet, de nombreuses méthodes de commande des processus sont élaborées à partir de la connaissance de l'état du système. En général, seules les variables d'entrée et de sortie sont connues. Il est alors nécessaire, à partir de ces informations de reconstruire l'état du modèle choisi afin d'élaborer la commande. Bien que la théorie de l'observation d'état ait atteint une certaine maturité dans les domaines des systèmes continus et des systèmes à événements discrets, beaucoup de points méritent d'être approfondie sur le concept de l'observabilité et de la synthèse d'observateurs : en particulier, l'observation conjointe de l'état discret de l'état continu.

L'équipe de recherche du projet stabilisation, commande et observation des systèmes du

Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN) s'est intéressée au problème de l'observation et de commande de la classe des systèmes dynamiques hybrides modélisables par des systèmes à paramètres variants (LPV) (Bara, 2001). Ils sont formés de sous-systèmes linéaires à temps continu ou à temps discret et d'une loi de commutation décrivant le passage d'un sous-système à un autre. Parmi les solutions proposées on trouve l'approche observateur commuté (Daafouz et al., 2002). Ce résultat exploite la notion de stabilité poly-quadratique (Daafouz and Bernussou, 2001) pour les systèmes linéaires LPV polytopiques moins pessimiste que les résultats fondés sur l'existence d'une même fonction de Lyapunov ou sur l'hypothèse de commutativité des matrices des différents sous-systèmes. Ils sont exploitables numériquement sans difficulté. En effet, les conditions de stabilité de l'erreur d'observation sont données sous la forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI) dont la résolution revient à résoudre un problème d'optimisation convexe pour lequel il existe des algorithmes efficaces implantés dans différentes boîtes à outils (Lmitool de Matlab par exemple). Grâce à ces résultats, l'étude de la stabilité de l'erreur d'observation peut être considérée pour des lois de commutations arbitraires, dépendantes de l'état, dépendantes du temps ou générées par un automate. Cependant, l'implémentation de l'observateur se fait sous l'hypothèse de connaissance de l'état discret en temps réel.

Pour la classe de systèmes à commutation en temps continu le problème d'observateur à modes glissants a fait l'objet de travaux de recherche à ENSEA (Barbot et al., 2006), (Saadaoui et al., 2006a). Des résultats pour les systèmes mis sous forme canoniques d'observabilité sont donnés dans (Saadaoui et al., 2006b). Pour la classe de systèmes affines constants par morceaux, l'approche estimation à horizon glissant est présentée dans (Ferrari-Trecate et al., 2002). Cette approche ne nécessite pas la connaissance de l'état discret car elle fait appel à la résolution de problème de d'optimisation (minimisation d'un critère) pour la reconstruction de l'état continu. L'état discret est obtenu implicitement par la partition de l'espace d'état. Cependant, la mise en œuvre de cette méthode se heurte à l'obstacle du temps de calcul important. Dans le cas général d'un système hybride où la partie discrète est représentée par un système à événements discrets, Balluchi et al. (2002) proposent une méthode pour la synthèse d'un observateur composé d'un ob-

servateur discret et d'un observateur continu. L'observateur discret est un observateur de systèmes à événement discret utilisant les entrées-les sorties discrètes du système hybride pour obtenir une évaluation de l'état discret en cours d'évolution.

Objectif de la thèse

Cette thèse a pour but la recherche de méthodes de synthèse d'observateurs permettant l'observation conjointe de l'état discret et de l'état continu de quelques classes de systèmes hybrides. On s'intéresse particulièrement aux classes de systèmes hybrides décrit par un ensemble fini de sous-systèmes linéaires en temps discret et une loi de commutation. Le sous-système actif et les commutations d'un sous-système à un autre sont définis soit par une commande externe contrôlable, des transitions de modes autonomes ou régies par un réseau de Petri.

Organisation des chapitres

Ce mémoire est organisée en 4 chapitres qui traitent d'une part sur le problème d'observabilité des systèmes hybride (chapitre 1) et d'autre part de méthodes de synthèse observateur pour certaines classes de systèmes hybrides (chapitre 2 à 4). Voici quelques points présentés dans chacun des chapitres :

Chapitre.1 :

Dans ce premier chapitre, nous introduirons quelques notions relatives de la théorie de la modélisation, d'observabilité et synthèse d'observateurs pour les systèmes dynamiques hybrides. Le but est de présenter quelques classes particulières de systèmes hybrides auxquelles on s'intéresse dans ce mémoire. Il s'agit des systèmes hybrides linéaires à saut, des systèmes hybrides affines par morceaux et des systèmes hybrides linéaires à commutation. Ensuite, nous présenterons brièvement quelques travaux récents consacrés à l'observabilité de ces classes particulières. Puis nous discuterons des difficultés pour cerner quelques points relatifs au concept de l'observabilité des systèmes hybrides. Finalement, un bref

aperçu du problème de construction d'observateur pour les systèmes hybrides est abordé dans un cadre général.

Chapitre.2 :

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à la synthèse d'observateur pour la classe de systèmes hybrides linéaires à commutation à temps discret avec un état discret connu à chaque instant. Nous présenterons d'abord quelques résultats sur la stabilité quadratique et la stabilité poly-quadratique pour des systèmes à commutation. Ces résultats sont la base de plusieurs méthodes de synthèse d'observateur. Nous limiterons l'étude à l'approche observateur commuté. Ensuite, nous présenterons la technique de placement de pôles dans le cas de systèmes linéaires et de systèmes linéaires à commutation. Grâce à cette technique de placement de pôles, en plus la contrainte de la stabilité, une contrainte de placement peut être ajoutée dans les conditions de la synthèse de l'observateur. Dans la dernière partie du chapitre, nous attarderons sur l'utilisation de l'observateur commuté avec contraintes de placement de pôles pour la synthèse d'observateur avec entrée inconnue pour résoudre le problème de la synchronisation du chaos sans message et avec présence de message.

Chapitre.3 :

Dans ce chapitre, nous allons aborder le problème de l'estimation simultanée de l'état discret et de l'état continu en utilisant uniquement les entrées et les sorties continues disponibles à la mesure. L'étude sera centrée sur une classe de systèmes hybrides PWA en temps discret composée d'un ensemble de sous-systèmes linéaires avec des commutations autonomes. L'observateur hybride que nous proposons se compose d'un observateur discret et d'un observateur continu. Pour s'affranchir de la connaissance de l'état discret à chaque instant pour la synthèse de l'observateur commuté, nous présenterons d'abord une méthode pour la détection des instants de commutation et l'identification de l'état discret. Cette méthode se base sur la reconstruction de loi de commutation dépendante d'état comme une combinaison linéaire des sorties et des entrées prises sur un horizon de temps

sous l'hypothèse de temps de séjour minimum dans chaque sous-systèmes. Le schéma d'observation hybride combinant la méthode de reconstruction de la loi de commutation et d'un observateur commuté est ensuite analysé suivant deux stratégies d'observation : l'estimation en-ligne et l'estimation hors-ligne.

Chapitre.4 :

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la synthèse d'observateur pour une classe de systèmes hybrides composés d'un ensemble de sous-systèmes linéaires avec des commutations régies par un réseau de Petri. Au début du chapitre, nous présenterons cette classe de systèmes hybrides. Nous donnerons ensuite les motivations de l'étude de cette classe tels que la dualité automate réseaux de Petri et la forme d'équation d'état de l'évolution du marquage. Pour cette classe de systèmes hybrides, nous proposons un schéma d'observation couplant un observateur de réseau de Petri et un observateur commuté. Le but de schéma d'observation est l'estimation conjointe de l'état discret et de l'état continu. Nous démontrerons dans la dernière partie du chapitre la convergence exponentielle de l'observateur.

1

Introduction aux systèmes dynamiques hybrides : modèles, observabilité et observateurs

Sommaire

1.1	Introduction	15
1.1.1	Les motivations d'un modèle hybride	16
1.2	Systèmes hybrides : présentation générale	17
1.2.1	Exécution d'un système hybride	20
1.3	Quelques classes particulières de systèmes dynamiques hybrides	22
1.3.1	Les systèmes linéaires à saut	22
1.3.2	Les systèmes linéaires à commutation SLS	23
1.3.3	Les systèmes linéaires affines constants par morceaux PWA	24
1.4	Sur l'observabilité des systèmes hybrides	27
1.4.1	Observabilité d'un système linéaire	28
1.4.2	De la discernabilité à l'observabilité	29
1.5	Observabilité des systèmes linéaires à saut	30
1.5.1	Observabilité des systèmes JLS : Cas temps continu	31
1.5.2	Transposition au cas temps discret	35
1.5.3	Observabilité des systèmes JSL : cas temps discret	35
1.6	Observabilité des systèmes à commutation SLS	38
1.7	Observabilité des systèmes MLD	39
1.8	La particularité de l'observabilité en temps discret	40
1.9	Estimation d'état pour les systèmes hybrides	42
1.9.1	Observateur avec l'état discret connu	44
1.9.2	Observateur hybride : état discret inconnu	46
1.10	Conclusion	47

1.1 Introduction

Les innovations technologiques ont eu un impact considérable sur l'apparition des processus dynamiques ayant une nature hétérogène mélangeant le continu et le discret. Ces progrès technologiques ont un impact similaire dans le domaine de la recherche scientifique où on constate un intérêt particulier pour l'étude de ces systèmes dits "hybrides". De tels systèmes sont caractérisés par l'interaction des parties continues régies par des équations différentielles (ou de différence) et des parties discrètes, décrites par des machines à états finis (ou des règles logiques de type "si-alors-sinon" et des propositions logiques). Ces systèmes hybrides représentent un enjeu économique d'envergure dans les technologies de l'information et de la communication. Par conséquent ces systèmes intéressent à la fois la communauté des informaticiens et des chercheurs en automatique. Les deux communautés n'utilisent pas nécessairement les mêmes outils et approches pour traiter les problèmes posés par l'étude de ces systèmes. Depuis les années 90, une nouvelle communauté de chercheurs réunissant informaticiens et automaticiens a vu le jour. Des ateliers annuels sur les systèmes hybrides ont attiré des industriels et des chercheurs du milieu universitaire tels que les séries d'ateliers organisés par HSCC (Hybrid Systems Computation and Control).

Ce chapitre est consacré à l'introduction du formalisme des systèmes dynamiques hybrides (SDH), à l'étude de l'observabilité et des observateurs pour les SDH. Nous présenterons dans la première partie du chapitre une définition générale permettant de présenter, dans un cadre unifié, une large classe de SDH. Cette définition nous servira d'environnement théorique pour décrire quelques classes de SDH. Il s'agit des systèmes hybrides linéaires à saut JLS (jump linear systems), des systèmes hybrides affines par morceaux PWA (piecewise affines linear systems) et des systèmes hybrides linéaires à commutation SLS (switched linear systems). Nous présenterons brièvement dans la deuxième partie du chapitre quelques travaux récents consacrés à l'observabilité de ces classes particulières. Nous terminerons par une revue des méthodes de synthèse d'observateurs pour les systèmes hybrides.

1.1.1 Les motivations d'un modèle hybride

En automatique, les systèmes physiques sont souvent représentés par un modèle dynamique continu ou par un modèle à événements discrets. La nature de chaque modèle est définie selon les variables utilisées pour décrire l'état du système et la variable caractérisant le temps. Il est important dans de nombreux cas d'utiliser l'une de ces deux catégories de modèles. Cependant la majorité des systèmes complexes réalistes mélangeant le continu et le discret ne peuvent pas être classés ni dans la catégorie "système continu" ni dans la catégorie "système discret". Il est nécessaire alors d'utiliser des modèles hybrides permettant la prise en compte à la fois des variables continues et des variables discrètes ainsi que l'interaction entre elles. Plusieurs modélisations hybrides ont été développées dans la littérature. Elles peuvent être classées en trois catégories principales (Zaytoon, 2001) :

- Les approches basées sur une extension de techniques de modélisation de systèmes continus comme le formalisme de bond-graph mixte.
- Les approches basées sur l'extension de modèles de systèmes à événements discrets. Nous pouvons citer les réseaux de Petri hybrides.
- Les approches mixtes, combinant à la fois le continu et le discret dans une structure unique.

L'approche mixte repose sur une collaboration de deux modèles. Chaque aspect est décrit sous une forme classique et l'aspect hybride est pris en compte dans l'interface entre les deux modèles. La figure (1.1) illustre la structure mixte d'un SDH où la partie événementielle est décrite par un automate à états finis et la partie continue est donnée par une collection de modèles. Chaque partie du SDH dispose des entrées (discrète σ , continue u) et des sorties (discrète ψ , continue y). L'état discret q détermine la dynamique continue spécifique de la partie continue du SDH par l'interface discret-continu (D/C). Par l'intermédiaire de l'interface continu-discret (C/D), les signaux provenant de la partie continue déterminent des événements permettant des transitions de l'état discret d'une situation vers une autre. Ainsi l'interface (D/C- C/D) permet l'interaction des variables discrètes

et des variables continues.

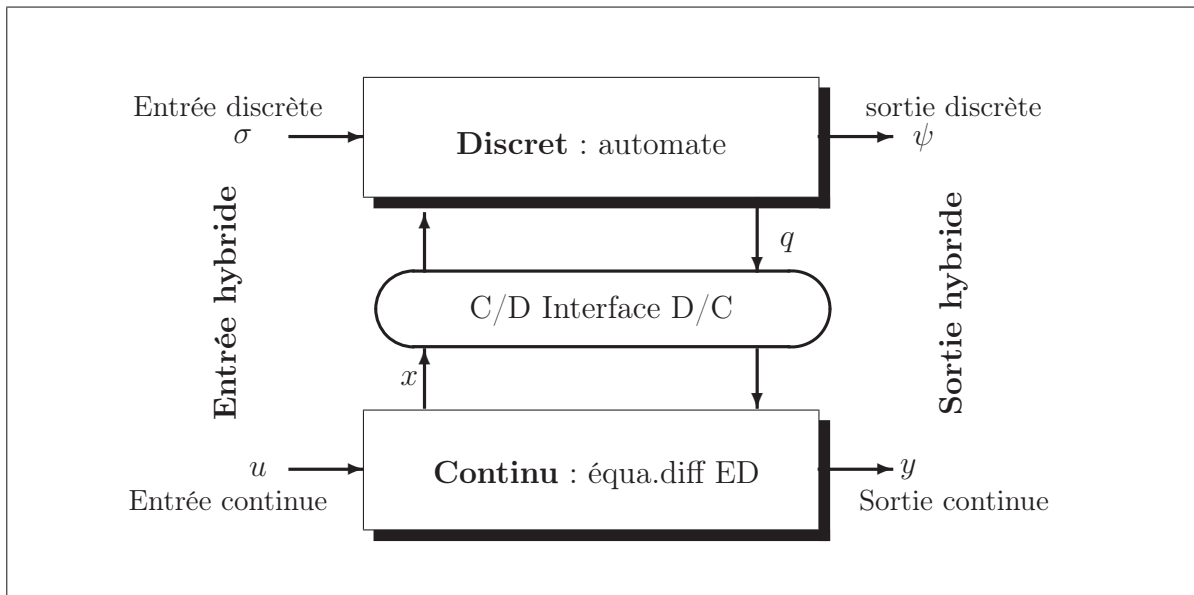


FIG. 1.1 – Système hybride : interaction du continu et du discret

1.2 Systèmes hybrides : présentation générale

Les SDH commutent entre plusieurs modes de fonctionnement où chaque mode est régi par sa propre loi dynamique. Ces commutations (ou transitions) de mode sont engendrées par plusieurs facteurs. Par conséquent, un modèle pouvant décrire ces phénomènes est difficile. Nous allons, nous intéresser dans notre travail uniquement aux transitions de mode dues :

- aux variables croisant des seuils spécifiques. On obtient ainsi des événements d'état.
- à une commande externe ou une perturbation. Nous sommes alors en présence des événements d'entrée.

Le modèle présenté dans (Santis et al., 2003) nous semble relativement plus général et peut englober une très large classe de SDH. La définition donnée par les auteurs nous servira ensuite d'environnement théorique pour présenter les classes des systèmes hybrides linéaires à saut JLS (jump linear systems), des systèmes hybrides affines par morceaux

PWA (piecewise affines linear systems) et des systèmes hybrides linéaires à commutation SLS (switched linear systems).

Définition 1.1 (*Santis et al., 2003*) Un système dynamique hybride en temps discret (respectivement en temps continu) est défini comme

$$\mathcal{H} = (Q, \Sigma, \Psi, X, U, Y, Init, S_c, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \gamma, Inv, Guard, Rest) \quad (1.1)$$

où :

- $Q = \{q_i, i \in \{1, 2, \dots, s\}\}$ est un ensemble fini d'états discrets.
- $\Sigma = \Sigma_{Ext} \cup \Sigma_{Cont} \cup \{\varepsilon_\sigma\}$ est un ensemble fini d'entrées discrètes avec ε_σ l'événement d'entrée "vide" (utilisé pour désigner les événements d'entrée non observables) .
- $\Psi = \{\psi_i, i \in Q\} \cup \{\varepsilon_\psi\}$ est un ensemble fini de sorties discrètes, ε_ψ la sortie discrète "vide" (utilisé pour désigner les événements de sortie non observables).
- X, U, Y sont des espaces de dimensions finies. Ils sont respectivement associés à l'état continu, à l'entrée continue et à la sortie continue. Pour chaque $x \in X$, $u \in U$ et un $q \in Q$, la sortie continue est tel que $y = h(x, q, u) \in Y$, avec $h : X \times U \times Q \rightarrow Y$.
- $Init \in X \times Q$ est l'ensemble d'états initiaux.
- S_c est une sous-classe de systèmes dynamiques en temps discret (respectivement en temps continu) . $S_i \in S_c$ est définie par l'équation en temps discret suivante :

$$x(t+1) = f_i(x(t), u(t)), i \in \mathbb{N}$$

(respectivement $\dot{x}(t) = f_i(x(t), u(t)), i \in \mathbb{N}$ en temps continu) , où $t \in \mathbb{N}$ (respectivement en temps continu $t \in \mathbb{R}$) est l'indice de temps.

- \mathcal{S} est une application qui associe à chaque état discret $q \in Q$ une dynamique continue $S_i \in S_c$.
- $\mathcal{T} \in Q \times \Sigma \times Q$ est l'ensemble de transitions discrètes. Nous notons par (q, σ, q') une transition de l'état discret q à l'état discret q' suite à l'arrivée de l'entrée discrète σ

- $\gamma : \mathcal{T} \rightarrow \Psi$ est une fonction qui associe à chaque transition $T \in \mathcal{T}$ une sortie discrète $\psi \in \Psi$. On schématise la transition (q, σ, q') et la sortie discrète associée par $q \xrightarrow{\sigma/\psi} q'$.
- $Inv : Q \rightarrow 2^{X \times U}$ est une collection de domaines d'invariant.
- $Guard : \mathcal{T} \rightarrow 2^{X \times U}$ est une collection de domaines de conditions de garde.
- $Reset : \mathcal{T} \times X \times U \rightarrow 2^X$ une collection de fonctions d'actualisation (ou d'initialisation) qui permettent, lors du franchissement d'une transition discrète, d'actualiser la variable d'état continu à $x = Reset(., x)$.

Les transitions discrètes définies par \mathcal{T} peuvent être de différentes natures :

- Des transitions de commutation : elles sont forcées par des entrées discrètes externes $\sigma \in \Sigma_{Ext}$ non contrôlables (l'exemple : perturbation externe).
- Des transitions contrôlables : elles sont déterminées par des entrées externes contrôlables $\sigma \in \Sigma_{Cont}$ (exemple : commande externe).
- Des transitions d'invariant : elles se produisent lorsque la condition d'invariant n'est plus respectée (exemple : variable d'état atteignant un certain seuil).

Les transitions de commutation et les transitions d'invariant sont considérées comme des transitions incontrôlables.

Pour analyser les propriétés structurelles (telles que la stabilité et l'observabilité), quelques hypothèses de travail doivent être émises au début de chaque formulation du problème considéré. Il arrive lors de l'évolution d'un système hybride que les trois types de transitions (transitions de commutation, transitions contrôlables et transitions d'invariant) agissent au même temps. C'est une situation particulière où un ordre de priorités doit être assigné pour chaque type de transition. Dans ce cas, si n'importe quelle combinaison des trois transitions se produit en même temps, c'est celle où la priorité est la plus élevée qui sera retenue, les autres seront ignorées.

Hypothèse 1.1 (*La priorité des transitions*) *Étant donné un système hybride, nous définissons l'ordre de priorité des transitions comme suit : les transitions de commutation*

ont la priorité la plus élevée, les transitions d'invariance lui succèdent et les transitions contrôlables ont la priorité la plus faible.

Dans la littérature, on introduit souvent l'hypothèse de temps de séjour minimum pendant lequel aucune transition discrète ne se produit. Le temps de séjour maximum est aussi une hypothèse qui peut être considérée. Il correspond au fait qu'une transition discrète est obligatoirement franchie sur cet intervalle de temps.

Hypothèse 1.2 (*Temps de séjour minimum et Temps de séjour maximum*) *Étant donné un système hybride, il existe un $\tau_{max} > \tau_{min} > 0$ tels qu'aucune transition n'est autorisée sur l'intervalle de temps $[0, \tau_{min}]$ et une transition est garantie sur l'intervalle $[\tau_{min}, \tau_{max}]$*

1.2.1 Exécution d'un système hybride

Un système hybride est caractérisé à chaque instant par une évolution de l'état discret $q(t)$ et une évolution de l'état continu $x(t)$. La paire (q, x) compose le vecteur d'état hybride (respectivement les paires (σ, u) et (ψ, y) composent les entrées hybrides et les sorties hybrides). La variable discrète $q(t)$ est constante entre deux instants de commutation successifs t_i, t_{i+1} . Par conséquent $q(t)$ est constant par intervalles de temps $\mathcal{I}_i = [t_i, t_{i+1}], \{t_i, i = 1, \dots, N\}$ où N est le nombre de commutations. Une trajectoire temporisée est une séquence finie ou infinie d'intervalles de temps $\mathcal{I} = \{\mathcal{I}_i, i = 1, \dots, N\}$. Suivant les valeurs de N et de \mathcal{I}_i , les trajectoires temporisées peuvent être classées comme des trajectoires

- de longueur finie et illimitée : le système hybride effectue un nombre fini de transitions en un temps infini.
- de longueur infinie et illimitée : le système hybride effectue une infinité de transitions en un temps infini.
- de longueur infinie et limitée : le système hybride effectue une infinité de transitions en un temps fini.

Le dernier cas, concernant l'exécution infinie et limitée, est appelé exécution Zénon.

Ainsi, une exécution d'un système hybride est représentée par des séquences d'intervalles de temps sur lesquels le vecteur hybride $(q(t), x(t))$ évolue. La figure (1.2) illustre un exemple d'exécution d'un SDH où nous avons mentionné l'évolution des trois variables hybrides (x, q) , (σ, u) et (ψ, y) . L'entrée discrète et la sortie discrète sont indiquées par des impulsions car nous supposons que le franchissement d'une transition est instantané.

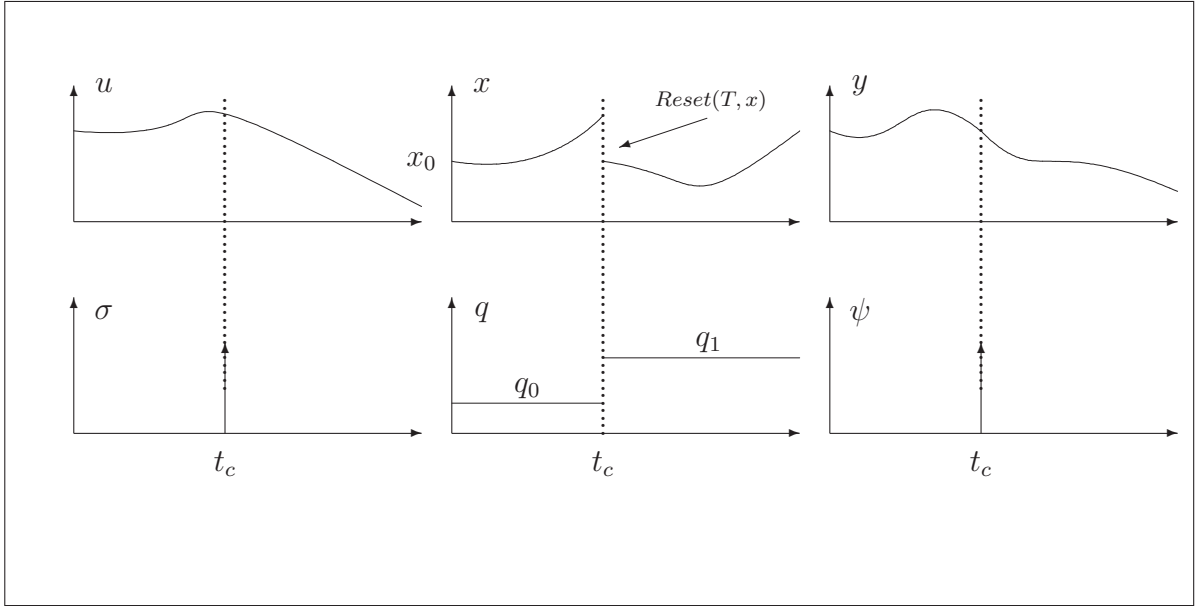


FIG. 1.2 – Exemple d'une exécution d'un système hybride

A l'instant $t_0 = 0$, l'état hybride initial est (q_0, x_0) tel que $x_0 \in Inv(q_0)$ et $q_0 \in Q$. Sur l'intervalle de temps $\mathcal{I}_0 = [t_0, t_c]$, l'état discret est constant $q(t) = q_0$ et $\dot{x}(t)$ évolue suivant l'équation $\dot{x}(t) = f_{q_0}(x(t), u(t))$ avec x_0 comme condition initiale. Enfin, lorsqu'à l'instant t_c une transition $T = (q_0, \sigma, q_1)$ (due à l'arrivée d'une entrée discrète $\sigma \in \Sigma$) se produit, la variable discrète $q(t)$ prend alors une nouvelle valeur q_1 . La sortie discrète devient $\psi = \gamma(T)$ et la variable continue x est actualisée à une nouvelle valeur $Reset(T, x)$. Nous répétons alors le même processus avec une nouvelle dynamique $\dot{x}(t) = f_{q_1}(x(t), u(t))$.

Exemple classique : la balle bondissante

Considérons une balle de masse M soumise à l'action de la gravité terrestre g située à une hauteur h_0 avec une vitesse initiale nulle. La hauteur $h(t)$ de la balle est régie par $M\ddot{h}(t) = -Mg$. Quand la balle touche le sol ($h(t) = 0$), elle rebondit en perdant de

l'énergie suivant la loi :

$$\dot{h}(t^+) = -c \dot{h}(t^-)$$

En choisissant les variables d'état $x_1 = h, x_2 = \dot{h}$, nous obtenons l'équation d'état

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -g$$

L'exemple de la balle bondissante correspond à un système hybride avec un seul mode ($Q = q$) et une seule transition $T = (q, \sigma, q)$ (due la condition de $Guard(x) : x_1 = 0$ et $Inv(x) : x_1 \geq 0$). Lors du franchissement de la transition, la variable continue x_2 est actualisée par la fonction $Reset(T, x_2) = -cx_2$.

1.3 Quelques classes particulières de systèmes dynamiques hybrides

Le formalisme des SDH est très général et englobe de nombreuses classes de modèles, Il est évidemment impossible de passer en revue la totalité des classes. Par conséquent, nous présentons dans ce paragraphe celles qui ont un rapport avec notre thèse : les systèmes linéaires à saut JLS (jump linear systems) caractérisés par des transitions discrètes type commutation. Les systèmes linéaires à commutation SLS (switched linear systems) ont des transitions contrôlables. Les systèmes affines par morceaux PWA (piecewise affines linear systems) définis par des transitions d'invariant.

1.3.1 Les systèmes linéaires à saut

Les systèmes JLS sont une classe de SDH caractérisée par un état hybride (q, x) composé d'un état discret q dont l'évolution est régie par des entrées discrètes externes non contrôlables (inconnues) et d'un état continu x dont l'évolution est régie par une équation différentielle sans entrée (un système autonome) . Les transitions associées aux systèmes JLS sont uniquement de type transitions de commutation. Nous allons présenter la classe de systèmes JLS donnée dans (Vidal et al., 2002) dans le cadre de la définition générale

des systèmes hybrides (1.1).

Un système JLS \mathcal{H}_{JLS} est donc défini comme

$$\mathcal{H}_{JLS} = (Q, \Sigma, \Psi, X, U, Y, Init, S_c, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \gamma, Inv, Guard, Rest) \quad (1.2)$$

où $Q = \{1, 2, \dots, s\}$ est un ensemble fini d'états discrets avec s le nombre de sous-systèmes. Cette notation est utilisée pour désigner l'indice du mode du sous-système en cours d'évolution. Les entrées discrètes sont caractérisées par $\Sigma_{Cont} = \emptyset$ car aucune entrée n'est contrôlable. L'ensemble des sorties discrètes Ψ se résume à l'événement non observable "vide" ε parce qu'aucune sortie discrète n'est accessible à la mesure. Les espaces d'état, de sortie et d'entrée sont tel que $X = \mathbb{R}^n, Y \in \mathbb{R}^p$ et $U = \emptyset$ car le système est considéré autonome (absence de commande). Pour chaque $i \in Q$ un sous-système dynamique linéaire indexé par i :

$$\begin{cases} x(t+1) = A_i x(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

est actif, où $A_i \in \mathbb{R}^n$ et $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Puisque les transitions \mathcal{T} sont toutes de type non contrôlable, les domaines d'invariant et de garde sont caractérisés par $Inv(\cdot) = \mathbb{R}^n, Guard(\cdot) = \mathbb{R}^n$. Lors du franchissement des transitions aucune sortie discrète mesurable n'est émise $\gamma(\cdot) = \varepsilon$ et aucune actualisation de vecteur d'état n'est faite $Rest(\cdot, x) = x$. Pour une version en temps continu, il suffit de remplacer dans l'équation (1.3) $x(t+1)$ par $\dot{x}(t)$.

1.3.2 Les systèmes linéaires à commutation SLS

Les systèmes SLS sont caractérisés par une évolution continue régie par une collection de sous-systèmes linéaires et une évolution discrète régie par des entrées contrôlables. Ces entrées sont souvent le résultat d'une stratégie de commande discrète. Par conséquent,

d'après la définition (1.1), un système hybride SLS vérifie

$$\mathcal{H}_{SLS} = (Q, \Sigma, \Psi, X, U, Y, Init, S_c, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \gamma, Inv, Guard, Rest) \quad (1.4)$$

avec $Q = \{1, 2, \dots, s\}$ un ensemble fini d'états discrets. L'ensemble des transitions \mathcal{T} est composé uniquement de transitions type contrôlable donc $\Sigma_{Ext} = \emptyset$ et $Inv = \mathbb{R}^n$ (aucune transition d'invariant). Lors de franchissements d'une transition aucune sortie discrète accessible à la mesure $\Psi = \{\varepsilon\}$ ($\gamma(T) = \varepsilon$). Les espaces d'état, de sortie et d'entrée sont tel que $X = \mathbb{R}^n, Y \in \mathbb{R}^p, U \in \mathbb{R}^m$.

Pour chaque $i \in Q$ un sous-système dynamique linéaire indexé par i

$$\begin{cases} x(t+1) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad (1.5)$$

est actif, où $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$. La valeur de la variable d'état continu x n'est pas actualisée lors d'une commutation $Reset(., x) = x$.

1.3.3 Les systèmes linéaires affines constants par morceaux PWA

Les systèmes PWA sont caractérisés par un état hybride composé d'un état continu et d'un état discret. L'évolution de l'état continu est régie par un système dynamique linéaire par morceaux et l'évolution de l'état discret est régie par des transitions de type invariant. Suivant la définition (1.1), un système PWA est défini comme

$$\mathcal{H}_{PWA} = (Q, \Sigma, \Psi, X, U, Y, Init, S_c, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \gamma, Inv, Guard, Rest) \quad (1.6)$$

avec $Q = \{1, \dots, s\}$ un ensemble d'indice de mode en cours d'évolution. $\Sigma_{Ext} = \emptyset, \Sigma_{Cont} = \emptyset$ car l'ensemble des transitions discrètes \mathcal{T} est uniquement composé de transitions de type invariant. Le franchissement de ces transitions ne produit aucune sortie discrète accessible à la mesure $\Psi = \{\varepsilon\}$ et $\gamma(T) = \varepsilon$. L'invariant $Inv = Guard$ est défini pour tout $q, q' \in Q$

comme

$$Inv(q) \subset Q \times X, \text{ tel que } Inv(q) \cap Inv(q') = \emptyset$$

Pour chaque $i \in Q$ un sous-système linéaire indexé par i est actif :

$$\begin{cases} x(t+1) = A_i x(t) + B_i u(t) + f_i \\ y(t) = C_i x(t) + g_i \end{cases} \quad (1.7)$$

où $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $f_i \in \mathbb{R}^m$, $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $g_i \in \mathbb{R}^p$. Le vecteur d'état n'est pas actualisé lors des commutations $Reset(., x) = x$.

En résumé un système PWA évolue suivant plusieurs dynamiques différentes. Chaque dynamique est définie dans une région de l'espace d'état-entrée. Ces dernières sont obtenues grâce à la condition d'invariant $Inv(q)$ qui permet de partitionner l'espace d'état-entrée en s régions $\mathcal{X}_i, i = 1, \dots, s$. La figure (1.3) montre un exemple de trajectoire du vecteur d'état continu x dans deux régions voisines \mathcal{X}_i et \mathcal{X}_j . L'état initial $x_0 \in \mathcal{X}_i$ et l'évolution de x est régie par le sous-système i . Lorsqu'à un instant donné x atteint (ou dépasse) la frontière séparant les deux régions, l'évolution de x sera régie par un nouveau sous-système j .

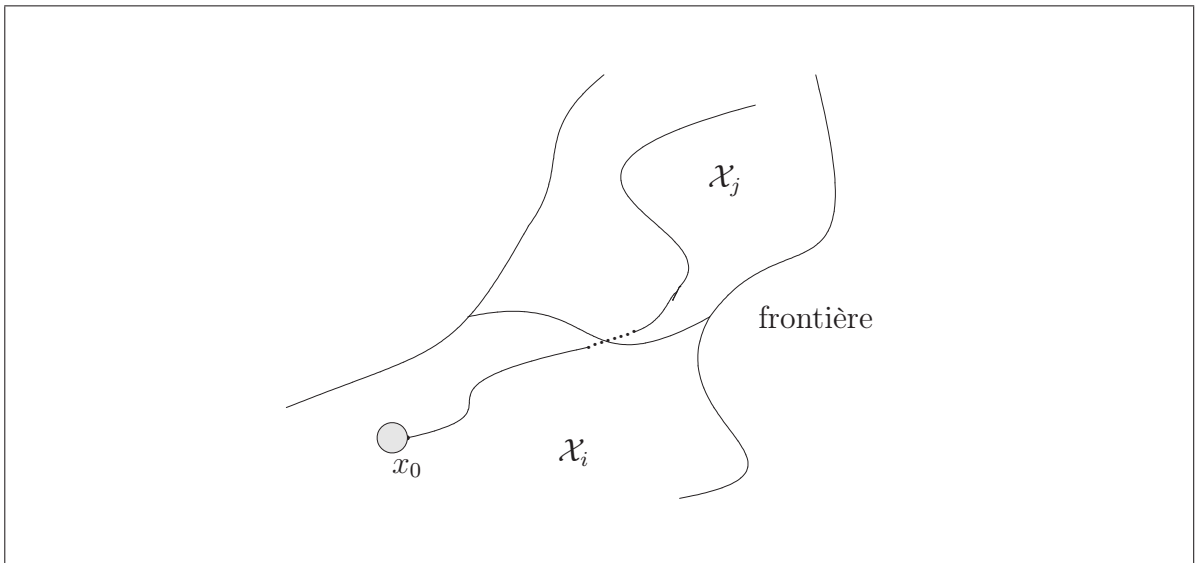


FIG. 1.3 – Trajectoire de x dans l'espace d'état

1.3.3.1 La forme MLD d'un système affine constant par morceaux en temps discret

Une modélisation MLD (mixed logical dynamical) à été introduite dans (Bemporad and Morari, 1999). Un système MLD est de la forme générale :

$$x(t+1) = Ax(t) + B_1u(t) + B_2\delta(t) + B_3z(t) \quad (1.8a)$$

$$y(t) = Cx(t) + D_1u(t) + D_2\delta(t) + D_3z(t) \quad (1.8b)$$

$$E_2\delta(t) + E_3z(t) \leq E_1u(t) + E_4x(t) + E_5 \quad (1.8c)$$

où $x(t), u(t)$ et $y(t)$ sont respectivement de la forme $x(t) = [x_c(t)^T, x_d(t)^T]^T$, $u(t) = [u_c(t)^T, u_d(t)^T]^T$ et $y(t) = [y_c(t)^T, y_d(t)^T]^T$. Il s'agit de la concaténation d'une variable continue indiquée par la lettre "c" et d'une variable discrète désignée par la lettre "d". Le vecteur obtenu par cette concaténation est appelé vecteur mixte. L'état mixte x , l'entrée mixte u et la sortie mixte y sont respectivement de dimension $x \in \mathbb{R}^{n_c} \times \{0, 1\}^{n_d}$, $u \in \mathbb{R}^{m_c} \times \{0, 1\}^{m_d}$ et $y \in \mathbb{R}^{p_c} \times \{0, 1\}^{p_d}$. $\delta \in \{0, 1\}^{r_d}$ et $z \in \mathbb{R}^{r_c}$ sont des variables auxiliaires introduites pour pouvoir transformer des propositions logiques sous forme d'inégalités linéaires (Bemporad and Morari, 1999). L'inégalité indiquée dans l'équation (1.8c) permet de regrouper toutes les contraintes liées à l'état x , à l'entrée u et aux variables auxiliaires δ, z .

Les auteurs démontrent qu'une large classe de systèmes hybrides peut être écrites sous forme MLD. Une équivalence particulière entre la forme MLD et la forme PWA a été démontrée (Heemels et al., 2001). En effet, dans le cas d'une partition de l'espace d'état-entrée sous forme de polyèdres (Bemporad, 2004) :

$$\mathcal{X}_i = \{X = [x^T, u^T] \text{ tel que } H_i X \leq K_i\}$$

il est simple d'établir l'équivalence MLD-PWA en introduisant des variables binaires δ_i vérifiant

$$[\delta_i = 1] \rightarrow [x^T, u^T] \in \text{Inv}(q_i)$$

et en imposant une condition de type "ou exclusif" :

$$\bigoplus_{i=1,2,\dots,s} [\delta_i = 1]$$

L'équipe de recherche sur les systèmes hybrides de l'université de Zurich a développé un compilateur appelé HYSDEL (Torrise and Bemporad, 2004) permettant de traduire des données de système PWA sous une forme équivalente MLD (Geyer et al., 2003) et inversement. Le modèle MLD obtenu est souvent employé pour résoudre des problèmes de commande optimale (Borrelli et al., 2005), d'observabilité (Bemporad and Morari, 1999), d'identification (Ferrari-Trecate et al., 2003),...etc

1.4 Sur l'observabilité des systèmes hybrides

La majeure partie des travaux sur les SDH s'est concentrée sur les domaines de la modélisation, de la stabilité et de la contrôlabilité. Jusqu'au début des années 2000, on trouve très peu de travaux de recherche sur l'observabilité. A notre connaissance la première tentative pour caractériser l'observabilité des systèmes hybrides peut être trouvée dans les travaux de (Ezzine and Haddad, 1989) où les auteurs ont étudié l'observabilité et la contrôlabilité de la classe des systèmes linéaires à commutation en temps continu où les commutations sont connues et périodiques. Pour la classe des systèmes linéaires par morceaux, l'observabilité a été analysée pour la première fois dans les travaux de (Sontag, 1981). Dans les années 90 avec l'avènement des systèmes hybrides comme un domaine de recherche important, la question de l'observabilité a été examinée pour quelques classes particulières de SDH.

Dans (Vidal et al., 2002), une caractérisation de l'observabilité pour la classe des systèmes JLS en temps continu et des conditions suffisantes pour l'observabilité des systèmes JLS ont été données. Ces conditions sont vérifiées par des tests de rang de matrices liées aux paramètres du système JLS. Dans (Babaali and Egerstedt, 2004), l'étude de l'observabilité des systèmes JLS en temps discret a été abordée. Dans (Sun et al., 2002), l'observabilité est considérée comme propriété duale de l'atteignabilité. Les auteurs ont donné des conditions d'observabilité pour la classe particulière des systèmes SLS où l'état discret est connu. Dans (Bemporad et al., 2000), la définition de l'observabilité par incrémentation pour la classe des systèmes PWA sous forme MLD est proposée. La condition d'observabilité sous-jacente est vérifiée par la résolution d'un programme linéaire mixte (mixed-integer

linear program MILP).

Nous allons dans les paragraphes suivants présenter brièvement les différentes caractérisations de l'observabilité. Rappelons d'abord ce qu'est l'observabilité d'un système ?

1.4.1 Observabilité d'un système linéaire

La notion d'observabilité a été introduite par Kalman ([Kalman, 1963](#)) pour les systèmes linéaires

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.9)$$

avec x le vecteur d'état, u le vecteur d'entrée et y le vecteur de sortie. On appelle observabilité d'un système, la possibilité d'évaluer le vecteur d'état x à partir de mesures effectuées sur le système. On dit que le système (1.9) est observable à l'instant t_1 si à partir de la connaissance du vecteur de sortie y et du vecteur d'entrée u , il est possible en un temps fini $t_2 > t_1$ de déterminer l'état $x(t_1)$. Le critère d'observabilité de Kalman est donné par la matrice d'observabilité

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

La dimension du sous-espace d'état observable est égale au rang de la matrice d'observabilité. Autrement dit, le système (1.9) est observable si $\text{rang}(\mathcal{O}) = n$.

En temps discret, l'observabilité d'un système linéaire

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad (1.10)$$

est définie comme la possibilité d'évaluer l'état initial x_1 en utilisant les échantillons de

sortie $y(k)$ disponibles sur un horizon de taille N . Les sorties sont données par

$$\mathcal{Y}_N(x_1) = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{O}_N} x_1$$

Par conséquent, l'observabilité est garantie si la matrice de d'observabilité \mathcal{O}_N est de rang plein.

1.4.2 De la discernabilité à l'observabilité

Le critère de Kalman est un concept clé pour la compréhension de l'observabilité des systèmes linéaires. L'extension de l'observabilité à la classe de systèmes linéaires avec commutation de modèles a suscité une littérature abondante. La plupart des auteurs ont considéré des généralisations naturelles du concept de Kalman en introduisant la notion d'indiscernabilité de deux conditions initiales.

Définition 1.2 (*Indiscernabilité*) Deux états initiaux x_1, x_2 sont dits indiscernables sur l'intervalle de temps T si leurs sorties respectives sont identiques sur cet intervalle. Nous notons par $\mathcal{I}(x)$ l'ensemble des états indiscernables de x .

La notion d'indiscernabilité de deux conditions initiales a permis de donner une nouvelle définition de l'observabilité :

Définition 1.3 (*Observabilité*) Un état x est dit observable sur l'intervalle de temps T si $\mathcal{I}(x) = \{x\}$ sur le même intervalle. Le système est dit complètement observable si chaque état admissible est observable.

Pour comprendre cette définition, considérons le système linéaire (1.10). Deux états initiaux différents $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ seront indiscernables sur un horizon N si leurs sorties respectives $\mathcal{Y}_N(x_1), \mathcal{Y}_N(x_2)$ sont identiques. D'une manière générale, le système n'est pas observable si

$$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \text{ et } x_1 \neq x_2 \text{ tel que } \mathcal{O}_N x_1 = \mathcal{O}_N x_2$$

Il est simple à remarquer que cette condition n'est pas vérifiée dans le cas où la matrice d'observabilité \mathcal{O}_N serait de rang plein. En effet :

$$\text{si } \text{rang}(\mathcal{O}_N) = n, \text{ et } \mathcal{O}_N x_1 = \mathcal{O}_N x_2 \implies x_1 = x_2$$

Ainsi le critère d'observabilité de Kalman pour les systèmes linéaires peut être simplement déduit à partir de la notion d'indiscernabilité de deux états initiaux différents.

La définition d'indiscernabilité (1.2) de deux conditions initiales peut être aussi utilisée pour le cas des systèmes hybrides. La notion d'indiscernabilité de deux états hybrides initiaux est donc donnée suivant la définition (1.2) en remplaçant l'état continu x par l'état hybride (q, x) . Nous allons voir dans le prochain paragraphe que la caractérisation de l'observabilité pour les systèmes JLS en temps continu ou en temps discret se déduira en utilisant la notion d'indiscernabilité. Les conditions établies pour d'observabilité seront résumées sous forme de tests de rang de matrices similaire à celle correspondant au cas des systèmes linéaires.

1.5 Observabilité des systèmes linéaires à saut

Comme nous l'avons déjà présenté dans les paragraphes précédents, la classe des systèmes JLS est caractérisée par un état hybride (q, x) où la dynamique de l'état continu $x \in \mathbb{R}^n$ est déterminée par une collection de plusieurs modèles linéaires $S_i = (A_i, C_i), i \in Q = \{1, 2, \dots, s\}$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \text{ resp } \begin{cases} x(k+1) = A_i x(k) \\ y(k) = C_i x(k) \end{cases} \quad (1.11)$$

auxquels sont associées des commutations de modèles. L'état discret $q \in Q$ représente l'indice du sous-système actif. Il est régi par un processus externe inconnu donc les transitions discrètes sont toutes de type incontrôlable. Nous allons présenter dans un premier temps les résultats concernant l'observabilité de cette classe des systèmes JLS en temps continu. Ensuite, le cas temps discret sera considéré.

1.5.1 Observabilité des systèmes JLS : Cas temps continu

Sous l'hypothèse d'un temps minimum séparant deux commutations consécutives (hypothèse 1.2), (Vidal et al., 2002) ont caractérisé le concept d'observabilité pour la classe des systèmes JLS en temps continu en terme de possibilité de récupérer

1. l'état hybride initial (q_0, x_0) ;
2. le premier instant de commutation ;

en utilisant la sortie $y(t)$ et ses dérivées successives. Pour comprendre ce résultat, nous allons d'abord donner quelques définitions.

Définition 1.5.1 (*Matrice d'observabilité étendue d'ordre k*) Pour un sous-système $S_i = (A_i, C_i)$, la matrice définie par

$$\mathcal{O}_k(i) = \begin{bmatrix} C_i \\ C_i A_i \\ \vdots \\ C_i A_i^{k-1} \end{bmatrix}$$

est appelée matrice d'observabilité étendue.

Définition 1.5.2 (*Matrice commune d'observabilité étendue*) Pour deux sous-systèmes différents S_i, S_j , la matrice commune d'observabilité étendue associée aux deux sous-systèmes est obtenue par la concaténation de deux matrices d'observabilité étendues :

$$\mathcal{O}_k(i, j) = [\mathcal{O}_k(i), \mathcal{O}_k(j)]$$

Définition 1.5.3 (*Indice commun d'observabilité*) L'indice commun d'observabilité est le plus petit entier k tel que le rang de la matrice $\mathcal{O}_k(i, j)$ cesse d'augmenter. Il est noté par $\nu(i, j)$.

Observabilité de l'état hybride initial

Le lemme fondamental donné dans (Vidal et al., 2002) repose sur les idées qui suivent. Considérons le système JLS (1.11) tel que les instants de commutation

$$t_1 < t_2 < \dots < t_i < \dots$$

vérifient la condition de temps de séjour minimum : il existe une durée τ telle que $t_{i+1} - t_i < \tau$.

Analysons d'abord sous quelle conditions nous pouvons déterminer l'état hybride initial $(q(t_0), x(t_0))$ avant l'arrivée de la première commutation à l'instant t_1 . Rappelons que deux états hybrides initiaux $(q_1, x_1), (q_2, x_2)$ sont indiscernables sur l'intervalle $t \in [t_0, t_1)$ si leurs sorties respectives sont identiques, c'est-à-dire :

$$C_{q_1} e^{A_{q_1}(t-t_0)} x_1 = C_{q_2} e^{A_{q_2}(t-t_0)} x_2 \quad t \in [t_0, t_1). \quad (1.12)$$

Le développement en série de Taylor autour de t_0 des deux côtés de l'égalité donne

$$C_{q_1} A_{q_1}^k x_1 = C_{q_2} A_{q_2}^k x_2 \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

En introduisant la notation de la matrice d'observabilité étendue \mathcal{O}_∞ (définition 1.5.2), l'équation (1.12) devient

$$\mathcal{O}_\infty(q_1) x_1 = \mathcal{O}_\infty(q_2) x_2 \quad (1.13)$$

Par conséquent, l'état hybride initial $(q(t_0), x(t_0))$ peut être déterminé si

$$\forall q_1, q_2 \in Q, \text{ si } q_1 \neq q_2, \text{ rang} \left(\begin{bmatrix} \mathcal{O}_\infty(q_1) & \mathcal{O}_\infty(q_2) \end{bmatrix} \right) = 2n \quad (1.14)$$

Comme $\nu(q_1, q_2)$ (définition 1.5.3) est le plus petit entier tel que le rang de la matrice commune d'observabilité étendue cesse d'augmenter, alors nous pouvons réécrire cette condition en utilisant $\nu(q_1, q_2)$. Pour tenir compte de toutes les combinaisons possibles de $(q_1, q_2) \in (Q \times Q)$, le plus grand indice commun d'observabilité $\nu = \max_{q_1 \neq q_2 \in Q} \{\nu(q_1, q_2)\}$ est utilisé pour reformuler l'équation (1.14) sous la forme générale

$$\forall q_1, q_2 \in Q, \text{ si } q_1 \neq q_2 \text{ rang} \left(\begin{bmatrix} \mathcal{O}_\nu(q_1) & \mathcal{O}_\nu(q_2) \end{bmatrix} \right) = 2n \quad (1.15)$$

La sortie $y(t)$ et ses dérivées successives s'écrivent

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(t_0) \\ y(t_0)^{(1)} \\ \vdots \\ y(t_0)^{(\nu-1)} \end{bmatrix}}_{\mathcal{Y}_\nu(t_0)} = O_\nu(q_1) x_0$$

A partir de cette équation, nous pouvons énoncer le résultat de (Vidal et al., 2002) :

Lemme 1 (Vidal et al., 2002) (Observabilité de l'état hybride initial) *Étant donné un système JLS, si l'hypothèse de temps séjour est respectée $t_1 - t_0 < \tau$, alors l'état hybride initial $(q(t_0), x(t_0))$ est observable si pour tout $q_1 \neq q_2 \in \{1, 2, \dots, s\}$, nous avons*

$$\text{rang} \left(\begin{bmatrix} O_\nu(q_1) & O_\nu(q_2) \end{bmatrix} \right) = 2n \quad (1.16)$$

l'état discret initial est donné par :

$$q(t_0) = \{q_i \in Q : \text{rang} \left(\begin{bmatrix} O_\nu(q_i) & \mathcal{Y}_\nu(t_0) \end{bmatrix} \right) = n\} \quad (1.17)$$

l'état continu initial est donné par :

$$x(t_0) = O_\nu q(t_0)^\dagger \mathcal{Y}_\nu(t_0) \quad (1.18)$$

Les équations (1.17), (1.18) sont obtenues en utilisant un résultat bien connu sur la résolution des systèmes linéaires $Ax = y$

Théorème 1.5.1.1 *Le système $Ax = y$ est soluble si et seulement si*

$$\text{rang}(A) = \text{rang}([A \ y])$$

L'ensemble des solutions x est donné par

$$x = A^\dagger y + (I_n - A^\dagger A)z$$

où $(A)^\dagger$ est une inverse généralisée de A et $z \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur arbitraire.

Observabilité du premier instant de commutation

Puisque $q(t)$ est constant entre deux instants de commutation, nous allons nous focaliser sur les conditions dans lesquelles le premier instant de commutation t_1 peut être observé (ou détecté). Les sorties $y(t)$ sur les intervalles $[t_0, t_1)$ (avant la commutation) et $[t_1, t_2)$ (après la commutation) s'expriment comme

$$\begin{aligned} & C_{q(t_0)} e^{A_{q(t_0)}(t-t_0)} x(t_0) \quad \text{pour } t \in [t_0, t_1) \\ & C_{q(t_1)} e^{A_{q(t_1)}(t-t_1)} e^{A_{q(t_0)}(t_1-t_0)} x(t_0) \quad \text{pour } t \in [t_1, t_2) \end{aligned}$$

L'instant de commutation t_1 n'est pas donc indiscernable sur l'intervalle $[t_1, t)$ si :

$$C_{q(t_0)} e^{A_{q(t_0)}(t-t_1)} e^{A_{q(t_0)}(t_1-t_0)} x(t_0) = C_{q(t_1)} e^{A_{q(t_1)}(t-t_1)} e^{A_{q(t_0)}(t_1-t_0)} x(t_0)$$

Le développement en série de Taylor autour de t_1 des deux côtés de l'égalité donne

$$C_{q(t_1)} A_{q(t_1)}^k x(t_1) = C_{q(t_0)} A_{q(t_0)}^k x(t_0), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

De la même manière que l'équation (1.19), nous pouvons exprimer la condition d'indiscernabilité de l'instant t_1 comme

$$\mathcal{O}_\nu(q(t_0)) x(t_0) = \mathcal{O}_\nu(q(t_1)) x(t_0) \tag{1.19}$$

Nous pouvons maintenant annoncer le deuxième résultat de (Vidal et al., 2002) :

Lemme 2 (Vidal et al., 2002) (Observabilité du premier instant de commutation)

Étant donné un système JLS, si $t_1 - t_0 < \tau$, alors le premier instant de commutation t_1 est observable si pour tout $q_1 \neq q_2 \in \{1, 2, \dots, s\}$, nous avons

$$\text{rang} \left(\left[\mathcal{O}_\nu(q_1) - \mathcal{O}_\nu(q_2) \right] \right) = n$$

le premier instant de commutation t_1 est donné par

$$t_1 = \min\{t > t_0 : \mathcal{Y}_\nu(t^-) \neq \mathcal{Y}_\nu(t^+)\}$$

Il est à remarquer que l'instant de commutation t_1 est détecté lorsqu'une discontinuité apparaît au niveau de \mathcal{Y}_ν .

Une fois l'état hybride initial $(q(t_0), x(t_0))$ et le premier instant de commutation t_1 obtenus, il est évident que la même démarche sera utilisée pour les commutations suivantes. Il suffit de répéter la même procédure en considérant $(q(t_1), x(t_1))$ comme le nouveau état initial et l'instant t_2 comme le nouveau premier instant de commutation.

1.5.2 Transposition au cas temps discret

Alors que l'analyse d'observabilité pour les systèmes linéaires en temps discret et en temps continu est pratiquement semblable, une différence importante existe dans le cas des systèmes linéaires à commutation. Dans le cas temps continu, l'observabilité d'un système hybride est définie comme la capacité de reconstruire l'état initial uniquement en utilisant la sortie et ses dérivées successives issues d'un même mode. Le critère d'observabilité formulée par (Vidal et al., 2002) repose sur l'analyse de la sortie et de ν dérivées successives \mathcal{Y}_ν . La transposition en temps discret revient donc à analyser des échantillons de la sortie sur un horizon de temps de taille ν

$$\mathcal{Y}_\nu(k_0) = [y(k_0)^T, y(k_0 + 1)^T, \dots, y(k_0 + \nu - 1)^T]^T$$

Les conditions données dans le Lemme-1 concernant l'observabilité de l'état hybride initial sont valables si les ν échantillons proviennent bien d'un même mode. Cette hypothèse n'est pas forcément vérifiée dans le cas temps discret. Par conséquent, les résultats obtenus en temps continu ne peuvent pas être transposés directement au cas temps discret. Nous reviendrons dans le chapitre.3 en détail sur ce point.

1.5.3 Observabilité des systèmes JSL : cas temps discret

Pour décrire un système linéaire à saut (ou un système à commutation en temps discret) sans imposer un temps de séjour minimum dans chaque mode (Babaali and Egerstedt,

2004) utilise la formulation bien connue des systèmes linéaires à paramètres variants dans le temps pour proposer le modèle suivant :

$$\begin{cases} x(k+1) = A_{\theta_k} x(k) \\ y(k) = C_{\theta_k} x(k) \end{cases} \quad (1.20)$$

où $\theta_k \in Q = \{1, 2, \dots, s\}$ est l'indice du sous-système actif à l'instant de temps k . Une séquence d'indice de mode (ou une séquence de commutation) $\theta = \theta_1 \dots \theta_N$ forme un chemin de longueur N . Les matrices A_i, B_i et C_i sont de dimension appropriée. Le modèle (1.20) a l'avantage de fournir un cadre plus général pour décrire un système à commutation en temps discret sans aucune hypothèse sur l'instant séparant deux commutations successives. Cependant, ce modèle n'est pas adapté pour décrire les systèmes PWA car avec cette formulation, un chemin θ est supposé régi par un certain processus externe alors que les commutations associées aux systèmes PWA sont dues aux conditions d'invariant, condition liées à la valeur de x .

Alors que l'observabilité des systèmes JLS en temps continu est formulée en terme d'observabilité de l'état hybride initial et du premier instant de commutation, le problème d'observabilité en temps discret est formulé en terme de

1. l'observabilité de l'état continu sous un chemin connu.
2. l'observabilité de l'état discret sous un chemin inconnu.

Observabilité sous un chemin connu

Considérons un chemin $\theta = \theta_1 \theta_2 \dots \theta_N$ composé par N indices de modes connus. Les θ_i ne sont pas forcément tous différents. Les sorties $y(k), k = 1, \dots, N$, à partir de l'état initial

$x_1 \in \mathbb{R}^n$ suivant le chemin discret θ sont définies par

$$\mathcal{Y}_\theta(x_1) = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\theta_1} \\ C_{\theta_2} A_{\theta_1} \\ \vdots \\ \underbrace{C_{\theta_N} A_{\theta_{N-1}} \cdots A_{\theta_1}}_{\mathcal{O}_{\theta_N}} \end{bmatrix} x_0$$

Nous remarquons que la matrice \mathcal{O}_{θ_N} est semblable à matrice d'observabilité de Kalman pour les systèmes linéaires. L'observabilité de l'état initial x_1 peut être vérifiée par le test de rang de la matrice \mathcal{O}_{θ_N} .

Définition 1.5.4 (*Babaali and Egerstedt, 2004*) (Matrice d'observabilité associée à un chemin) La matrice d'observabilité associée au chemin $\theta = \theta_1 \theta_2 \dots \theta_N$ est définie comme :

$$\mathcal{O}(\theta) = \begin{bmatrix} C(\theta_1) \\ C(\theta_2) A(\theta_1) \\ \vdots \\ C(\theta_N) A(\theta_{N-1}) \cdots A(\theta_1) \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

Un chemin est observable si et seulement si la matrice d'observabilité associée à ce chemin est de rang plein.

L'ensemble des paires $(A_i, C_i), \dots, (A_s, C_s)$ sont observables sur un chemin si et seulement s'il existe un nombre entier N tel que tous les chemins de longueur N sont observables.

Observabilité de l'état discret sous un chemin inconnu

Considérons maintenant deux chemins $\theta^1, \theta^2 \in \Theta_N$ inconnus avec Θ_N l'ensemble de tous les chemins de longueur N . Les deux chemins différents θ^1, θ^2 sont indiscernables si à partir de deux conditions initiales différentes x_1, x_2 , les sorties associées aux deux chemins sont identiques.

Définition 1.5.5 (*Babaali and Egerstedt, 2004*) Deux chemins $\theta^1, \theta^2 \in \Theta_N$ sont discernables si $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, nous avons

$$\theta_1 \neq \theta_2 \in \Theta_N \implies \mathcal{Y}_{\theta^1}(x_1) \neq \mathcal{Y}_{\theta^2}(x_2)$$

En utilisant la propriété donnée dans le théorème 1.5.1.1, nous pouvons donc trouver un chemin $\theta \in \Theta_N$ en utilisant l'équation suivante :

$$\theta = \arg_{\vartheta \in \Theta_N} \{rang([\mathcal{Y}_\vartheta(x_1) \ \mathcal{O}_\vartheta]) = rang(\mathcal{O}_\vartheta)\}$$

1.6 Observabilité des systèmes à commutation SLS

Les systèmes SLS sont caractérisés par des commutations contrôlables ce qui implique que l'ordre d'exécution des transitions est connu a priori. Une caractérisation de l'atteignabilité, de la contrôlabilité et de l'observabilité a été donnée par (Sun et al., 2002). Dans cet article, la notion observabilité est abordée en terme de conditions permettant de reconstruire l'état initial continu à partir des sorties continues et des entrées continues sachant que l'état discret est connu. Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'observabilité énoncées par les auteurs ne sont qu'une transposition des conditions déjà établies pour caractériser l'atteignabilité. Pour expliquer ce résultat il est nécessaire de présenter quelques notations.

Nous allons noter $\mathcal{R}(M)$ pour désigner le sous-espace engendré par les lignes de la matrice M . Pour deux matrices $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et un sous espace $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^n$ nous définissons

$$\Gamma_{M_1} \mathcal{S} = \mathcal{S} + M_1 \mathcal{S} + \dots + M_1^{n-1} \mathcal{S} \quad (1.22a)$$

$$\Gamma_{M_2} \Gamma_{M_1} \mathcal{S} = \Gamma_{M_2} (\Gamma_{M_1} \mathcal{S}) \quad (1.22b)$$

Le résultat de (Sun et al., 2002) sur l'observabilité de la classe des systèmes SLS s'énonce comme suit :

Théorème 1.6.0.1 (Sun et al., 2002) (observabilité des systèmes linéaires à commutation) *Un système SLS est observable si et seulement si $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$ où*

$$\mathcal{O} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{O}_j \text{ et } \mathcal{O}_1 = \sum_{i \in Q} \mathcal{R}(C_i^T); \mathcal{O}_{j+1} = \sum_{i \in Q} \Gamma_{A_i^T} \mathcal{O}_j$$

On peut voir assez facilement que ce test d'observabilité est déduit de l'atteignabilité. En effet, au début nous construisons un sous-espace \mathcal{O}_1 union de toutes les combinaisons linéaires des lignes des matrices $C_i^T, i = 1, \dots, s$. Ensuite, à partir de \mathcal{O}_1 , nous calculons l'ensemble des sous-espaces atteignables

$$\Gamma_{A_i^T} \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_1 + A_i^T \mathcal{O}_1 + \dots + (A_i^{n-1})^T \mathcal{O}_1$$

L'union des ensembles des sous-espaces atteignables donne \mathcal{O}_2 . Nous répétons la même procédure avec \mathcal{O}_2 afin obtenir \mathcal{O}_3 . Finalement, nous testons si tous les sous-espaces $\mathcal{O}_j = 1, \dots, \infty$ forment \mathbb{R}^n . Autrement dit $\forall x \in \mathbb{R}^n$, l'état continu est observable.

1.7 Observabilité des systèmes MLD

Une nouvelle définition de l'observabilité par incrémentation pour les systèmes MLD a été donnée dans (Bemporad and Morari, 1999).

Définition 1.7.1 (*Observabilité*) (Bemporad and Morari, 1999) *Considérons un système hybride de la forme MLD (1.8) (ou de la forme équivalente PWA), l'ensemble des états initiaux $\mathcal{X}(0) \subseteq \mathbb{R}^{n_c} \times \{0, 1\}^{n_i}$ et l'ensemble des entrées $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{m_c} \times \{0, 1\}^{m_i}$. Un système PWA est dit observable par incrémentation en T étapes à partir de $\mathcal{X}(0)$ s'il existe deux normes $\|\cdot\|_a$ (sur $\mathbb{R}^{n_c+n_i}$) et $\|\cdot\|_b$ (sur $\mathbb{R}^{p_c+p_i}$) et un scalaire positif w tel que $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{X}(0)$ et \forall la séquence d'entrée $u(t)_t^{T-1} = 0 \subseteq \mathcal{U}$*

$$\sum_{t=0}^{T-1} \|y(t, x_1, u) - y(t, x_2, u)\|_b \geq w \|x_1 - x_2\|_a \quad (1.23)$$

où $y(t, x_0, u)$ est la sortie à l'instant t à partir de l'état initial $x(0) = x_0$.

Cette définition peut être vue comme la notion de discernabilité, c'est-à-dire à partir de deux états initiaux différents, les sorties correspondantes sont toujours distinctes, indépendamment des entrées appliquées. La condition d'observabilité est donnée par l'équation (1.23) mais le but pratique est de trouver l'horizon minimum de l'observabilité T . Les auteurs proposent un algorithme pour calculer cet horizon et vérifier l'observabilité sur cet

horizon. L'algorithme utilise la programmation linéaire mixte (MILP) d'où la complexité de mise en œuvre et le temps de calcul important.

1.8 La particularité de l'observabilité en temps discret

Il est bien connu, qu'à partir d'un ensemble de sous-systèmes stables, on peut obtenir un SDH stable où un SDH instable. Il est de même pour l'observabilité : en commutant deux sous-systèmes observables, on peut avoir un système hybride observable ou un système hybride non observable. L'observabilité ne se résume pas à l'étude de l'observabilité de chaque sous-système d'une manière indépendante. Comme nous allons le voir sur quelques exemples simples, en plus de la structure de chaque sous-système, la loi de commutation joue un rôle capital dans l'observabilité.

Considérons deux sous-systèmes $S_i = (A_i, C_i)$, $i = 1, 2$ linéaires définis par

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_i x(k) \\ y(k) &= C_i x(k) \end{aligned} \tag{1.24}$$

avec $x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $C_i = \mathbb{R}^{p \times n}$. Nous définissons l'observabilité comme les conditions pour lesquelles nous pouvons récupérer l'état initial x_1 à partir des sorties disponibles sur une fenêtre de taille N :

$$\mathcal{Y}_{T,x_1} = [y(1), y(2), \dots, y(N-1)]^T$$

Pour tenir compte des différentes situations possibles, nous considérons le cas général où d_1 échantillons proviennent du sous-système 1 et d_2 échantillons du sous-système 2.

Le vecteur d'observation \mathcal{Y}_{T,x_1} est

$$\mathcal{Y}_{T,x_1} = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_1 A_1^{d_1-1} \\ C_2 A_1^{d_1} \\ \vdots \\ C_2 A_2^{d_2-1} A_1^{d_1} \end{bmatrix} x_0 = \mathcal{O}_N x_1$$

L'état initial x_1 peut être récupéré en utilisant \mathcal{Y}_T si x_1 est solution unique de $\mathcal{O}_N x_1 = \mathcal{Y}_{T,x_1}$. En d'autres termes,

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \text{ si } x_1 \neq x_2, \text{ alors } \mathcal{Y}_{T,x_1} \neq \mathcal{Y}_{T,x_2}$$

Il s'agit de la condition de discernabilité de deux états. Elle est vérifiée si $\text{rang}(\mathcal{O}_N) = n$. Il est à remarquer que la structure de la matrice d'observabilité \mathcal{O}_N dépend d'une part de la taille de l'horizon d'observation $N = d_1 + d_2$ et d'autre part de la loi de commutation. En effet, les valeurs de d_1 et de d_2 forment le temps de séjour dans chaque mode et la loi de commutation donne la séquence de commutation (ordre des transitions). Pour illustrer ce fait, nous allons emprunter quelques exemples cités dans (Bemporad et al., 2000).

Deux systèmes non observables

Considérons le cas du système à commutation (1.24) avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [1 \ 0], \quad C_2 = [0 \ 1]$$

Par un simple test du rang de la matrice d'observabilité de Kalman, nous pouvons conclure que les deux sous-systèmes sont non observables. Si le système change de mode à chaque instant, autrement dit $d_1 = d_2 = 1$, et la séquence des modes visités (séquence de commutation) est de la forme ...1212.... La matrice d'observabilité \mathcal{O}_N est donnée d'une manière générale comme

$$\mathcal{O}_N = \begin{bmatrix} C_i \\ C_j A_i \end{bmatrix}$$

$\forall i = 1, 2, \forall j = 1, 2$ la matrice \mathcal{O}_N est de rang plein, alors le système global est observable sur un horizon $N = 2$. Par conséquent, par une simple commutation de modèle à chaque instant, nous avons pu construire un système observable à partir de deux sous-systèmes non observables.

Deux systèmes observables

Considérons maintenant les matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [1 \ 0], \quad C_2 = [0 \ 1]$$

Les deux sous-systèmes sont observables. Considérons une situation semblable à celle du premier exemple où $d_1 = d_2 = 1$ et le système change de mode à chaque instant (séquence de commutation de la forme ...1212...). Le test du rang de la matrice d'observabilité vérifie

$$\text{rang} \left(\begin{bmatrix} C_i \\ C_j A_i \end{bmatrix} \right) = 1 < n$$

Alors le système global n'est pas observable sur un horizon $N = 2$. L'observabilité d'un système à commutation ne peut donc pas être déduite uniquement de l'observabilité de chaque sous-système.

La taille de l'horizon d'observation

Il est simple à vérifier que l'horizon N joue aussi un rôle capital dans l'observabilité. Pour illustrer ce rôle revenons au deuxième exemple où nous avons conclu que le système global n'est observable sur un horizon $N = 2$. Analysons la même situation avec une commutation de modèle à chaque instant avec nouveau horizon de longueur $N = 3$. La matrice d'observabilité \mathcal{O}_N est de la forme

$$\mathcal{O}_N = \begin{bmatrix} C_i \\ C_j A_i \\ C_i A_j A_i \end{bmatrix}$$

Cette matrice est de rang plein $\forall i = 1, 2 \quad \forall j = 1, 2$. Alors le système global est observable. Il est à noter que dans les trois exemples, nous avons omis d'indiquer le rôle que joue le choix de l'état initial x_1 lui même. En effet, dans des situations particulières, l'état x peut appartenir à l'espace nul de la matrice d'observabilité \mathcal{O}_N .

En résumé, lors de l'étude de l'observabilité des systèmes à commutation en temps discret, l'observabilité est fortement liée à la loi de commutation, à l'horizon d'observation et à l'état initial continu.

1.9 Estimation d'état pour les systèmes hybrides

Beaucoup de méthodes de commande et d'asservissement des processus dynamique utilisent le principe du retour d'état. Dans la plupart des systèmes dynamiques, les seules variables accessibles sont les entrées et les sorties. Il est donc souvent nécessaire de reconstruire l'état du système pour élaborer la commande. Pour les systèmes linéaires, les observateurs ont habituellement la structure suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (1.25)$$

Le gain de l'observateur L est à déterminer pour que l'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ converge vers 0 lorsque t tend vers l'infini. Lorsque cette propriété est satisfaite, l'observateur est dit asymptotique. En conséquence, il faudra choisir L telle que la matrice $A - LC$ est stable. Si la paire (A, C) est observable, alors les valeurs propres de $A - LC$ peuvent être fixées arbitrairement.

Les systèmes hybrides ont un comportement mixte à cause du couplage d'une structure continue avec une structure événementielle. Ainsi un observateur hybride apparaît comme une association d'un observateur pour la partie continue et d'un observateur pour la partie discrète. Un exemple typique d'un observateur pour les systèmes hybrides peut être trouvé dans les travaux de (Balluchi et al., 2002). Le schéma d'observation est composé d'un observateur discret, basé sur la théorie des systèmes à événements discrets, et d'un observateur continu basé sur la théorie classique des observateurs. Le premier identifie l'état discret du système hybride, le deuxième donne une estimation de l'état continu du système hybride. Cependant, dans la littérature, la majorité des travaux sur la synthèse d'observateurs pour les systèmes hybrides ne tiennent pas compte de la partie discrète. En supposant que le sous-système actif est connu à chaque instant, la synthèse d'observateur se simplifie considérablement.

1.9.1 Observateur avec l'état discret connu

Considérons un système à commutation composé de s sous-systèmes linéaires :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{q(t)}x(t) + B_{q(t)}u(t) \\ y(t) = C_{q(t)}x(t) \end{cases} \quad (1.26)$$

où $q(t) \in Q = 1, 2, \dots, s$ est l'état discret (indice de mode) à instant t . Les commutations sont supposées arbitraires mais connues à chaque instant. L'observateur proposé est de la forme : [(Alessandri and Coletta, 2001), (Balluchi et al., 2001), (Daafouz and Millerioux, 2002), ...]

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_{q(t)}\hat{x}(t) + B_{q(t)}u(t) + L_{q(t)}(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_{q(t)}\hat{x}(t) \end{cases} \quad (1.27)$$

La synthèse de cet observateur à commutation consiste à déterminer les gains $L_i, i = 1, \dots, s$ tels que la dynamique de l'erreur d'estimation $e = x - \hat{x}$

$$\dot{e}(t) = (A_{q(t)} - L_{q(t)}C_{q(t)})e(t) \quad (1.28)$$

est stable. Par conséquent la synthèse d'observateur pour les systèmes hybrides avec l'état discret connu rejoint l'étude de la stabilité des systèmes à commutation.

Il est bien connu que la stabilité d'un système hybride n'est pas systématiquement déduite à partir de la stabilité de chaque sous-système composant le SDH. Il est possible de trouver des exemples très simples (voir (Branicky, 1994)) qui illustrent le cas d'un système hybride avec une dynamique stable dans chaque mode et un comportement global instable. Dans (Hespanha and Morse, 1999), on s'intéresse à l'étude de la stabilité d'un système à commutation composé d'une famille de sous-systèmes stables et d'une autre famille de sous-systèmes instables. Une condition de stabilité est formulée en terme de rapport entre nombre de commutation et le temps moyen de séjour dans chaque sous-système. Une vue globale sur la stabilité des systèmes hybrides peut être trouvée par

exemple dans (R.DeCarlo et al., 2000; Liberzon and Morse, 1999).

Pour garantir la stabilité d'un système on a souvent recourt aux fonctions de Lyapunov. Malheureusement, aucune méthode générale n'est disponible pour calculer ces fonctions. Cependant, le choix de fonctions de Lyapunov de type quadratique permet souvent de formuler la stabilité des systèmes à commutation sous forme d'inégalités matricielles linéaires LMI (Boyd et al., 1994). La stabilité est alors garantie par

- l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune à tous les sous-systèmes (Liberzon and Morse, 1999) .
- l'existence de fonctions de Lyapunov quadratiques multiples (Branicky, 1998) .

L'existence d'une fonction Lyapunov quadratique (commune ou multiple) est une condition suffisante pour garantir la stabilité d'un SDH. Cette formulation présente l'avantage d'être facilement exploitable. En effet, il suffit d'écrire les conditions de stabilité sous forme LMIs pour lesquelles il existe de nombreuses boites à outils efficaces (Lmitool de Matlab, Scilab, Sedumi et l'interface tklimitool par exemple...) .

Fonction de Lyapunov quadratique commune

La fonction de Lyapunov quadratique commune est donnée par

$$V(e(t)) = e(t)^T P e(t)$$

où $P = P^T$. La stabilité est analysée en vérifiant que

$$\dot{V}(e(t)) < 0$$

au long de la trajectoire de l'erreur.

Dans (Alessandri and Coletta, 2001) une approche de synthèse de l'observateur (1.27) a été donnée. Cette méthode permet de trouver la matrice de Lyapunov commune P qui garantit la stabilité de l'erreur d'estimation (1.28), ensuite de déduire les gains $L_{q(t)}$ correspondants à chaque mode.

Proposition 1.9.1 (*Alessandri and Coletta, 2001*) *Considérons le système à commutation (1.26) et son observateur (1.27). S'il existe une matrice définie positive P et des gains de l'observateur $L_i, i = 1, \dots, s$ tel que :*

$$(A_i - L_i C_i)^T P + P(A_i - L_i C_i) < 0, \text{ pour } i = 1, \dots, s. \quad (1.29)$$

alors l'observateur est asymptotiquement stable.

Trouver une fonction de Lyapunov commune pour un système hybride est un critère trop conservatif surtout si le nombre de sous-systèmes est important. Pour réduire ce conservatisme, nous sommes souvent amené au choix de fonctions de Lyapunov quadratiques multiples même si le nombre de LMIs à résoudre est supérieur à celui correspondant à l'utilisation d'une fonction de Lyapunov commune. Nous allons revenir en détail sur ce type de solution dans le deuxième chapitre.

1.9.2 Observateur hybride : état discret inconnu

Dans le cas où l'état discret $q(t)$ ne serait pas disponible, l'estimation d'état pour un SDH revient à identifier l'état discret en cours d'évolution et à calculer une estimation du vecteur d'état continu, c'est-à-dire fournir une estimation du vecteur d'état hybride (\hat{q}, \hat{x}) . Nous avons mentionné dans les paragraphes précédents qu'il existe des classes particulières de SDH où ni les entrées discrètes, ni les sorties discrètes ne sont accessibles à la mesure. C'est le cas notamment des classes des systèmes JLS et PWA. Par conséquent, l'utilisation des entrées et des sorties continues est nécessaire pour estimer l'état discret q .

Une approche basée sur un banc d'observateurs de Lunberger a été proposée par ([Balluchi et al., 2002](#)). Les auteurs utilisent les outils de la littérature de détection de défauts pour générer des résidus. En raison du temps de convergence de chaque d'observateur, la détection de la commutation et l'identification du mode actif n'est pas instantanée mais elles sont l'objet d'un retard δ . Cette approche a été appliquée dans ([Balluchi et al., 2001](#)). Les

gains des différents observateurs sont fixés afin de garantir leur convergence avant l'écoulement de δ unité de temps. Ce dernier est considéré comme le temps de séjour minimum dans chaque mode. Il est à remarquer qu'à l'instant δ , l'erreur d'estimation n'est pas nulle, donc nous pouvons rencontrer des situations de conflit où nous pouvons pas prendre de décision. C'est le cas par exemple lorsque deux observateurs convergent au même temps.

Une approche basée sur l'estimation à horizon glissant a été présentée dans (Ferrari-Trecate et al., 2002). La technique d'estimation repose sur la minimisation d'un critère mettant en jeu les données de la sortie continue sur un horizon glissant. La structure particulière de cette approche ne nécessite pas la connaissance de l'état discret. La stratégie d'estimation a pour objectif d'assurer la reconstruction de l'état continu. La partition de l'espace d'état fait que la reconstruction de l'état continu implique celle de l'état discret puisqu'il y a une unique correspondance entre l'état discret et la partition de l'espace d'état continu. La reconstruction de l'état continu et de l'état discret est donc assurée de manière implicite. Cependant, la mise en œuvre de cette méthode se heurte à l'obstacle du temps de calcul important. Une utilisation de cette solution pour le problème de la synchronisation du chaos (Birouche et al., 2004) a montré des limites lorsque les commutations surviennent rapidement, c'est-à-dire lorsque l'aspect hybride devient important. L'approche devient alors très sensible, comme toute méthode d'optimisation, aux réglages des paramètres, à savoir la largeur de la fenêtre, les matrices de pondérations et du critère à minimiser.

1.10 Conclusion

Le domaine des systèmes dynamiques hybrides est riche de problèmes théoriques et pratiques largement susceptible de s'étendre dans les années qui viennent, compte tenu des développements industriels récents et les activités de recherches intensives. Si les travaux des dix dernières années sur l'étude de la stabilité ont montré leur maturité, à la fois en termes de formulation et mise en œuvre pratique, l'observabilité mérite d'être encore approfondie. En effet, il est remarquable qu'on trouve de nombreuses variantes d'obser-

vabilité complètement différentes pour les systèmes hybrides. L'observabilité doit donc recevoir une définition intrinsèque, indépendante de toute représentation particulière.

Concernant l'estimation de l'état continu et l'état discret des systèmes hybrides constitue un problème ouvert de synthèse d'observateurs. Les solutions disponibles aujourd'hui, et qui généralement sont fondées sur une extension de résultats de l'automatique continue, montrent leur limitation dès que l'aspect hybride devient important. Une approche prenant en compte dès la formulation du problème ce l'aspect hybride (interaction d'un comportement continu et d'un comportement discret) est nécessaire pour aboutir à une solution satisfaisante.

2

Synthèse d'observateur commuté à entrée
inconnue appliqué à un problème de
synchronisation du chaos

Sommaire

2.1	Introduction	51
2.2	Formulation du problème	52
2.3	Stabilité des systèmes à commutation	54
2.3.1	La stabilité quadratique des systèmes à commutation	55
2.3.2	La stabilité poly-quadratique	58
2.4	Technique de placement de pôles	60
2.4.1	Placement de pôles dans le cas d'un système linéaire	61
2.4.2	Placement de pôles dans le cas d'un système à commutation	62
2.5	Application à la synchronisation du chaos	66
2.5.1	Problème de la synchronisation du chaos sans message : observateur commuté	67
2.6	Synchronisation du chaos avec message : observateur commuté à entrée inconnue	69
2.7	Schéma de chiffrage utilisant un observateur commuté à entrée inconnue	71
2.8	Exemples d'application	73
2.8.1	Exemple de synchronisation sans message	73
2.8.2	Exemple d'application à synchronisation avec message incorporé	78
2.9	Conclusion	82

2.1 Introduction

Après avoir présenté, au chapitre précédent, les principales théories concernant l'observabilité de quelques classes de systèmes hybrides, nous nous intéressons dans ce chapitre à la synthèse d'observateurs. Nous allons aborder l'estimation d'état pour les classes de systèmes hybrides en temps discret JLS, SLS et PWA lorsque l'état discret est connu à chaque instant. La solution sera centrée sur la synthèse d'un observateur commuté avec une contrainte de placement de pôles. L'objectif de cette approche est double : d'une part assurer la convergence asymptotique de l'erreur d'observation, d'autre part satisfaire certaines spécifications de la dynamique de l'erreur d'estimation en utilisant un placement de pôles.

Lors de l'évolution d'un SDH, on constate parfois que l'état discret reste constant sur un intervalle de temps. Cette situation apparaît particulièrement lorsqu'une hypothèse de temps de séjour minimum dans chaque mode est imposée. Par conséquent, l'état continu évolue suivant une dynamique linéaire fixe sur des intervalles de temps. Dans ce cas, il est avantageux de pouvoir fixer la dynamique de l'erreur d'observation afin d'avoir un comportement désiré pour chaque sous-système sur chaque intervalle de temps. Pour les systèmes linéaires, on utilise souvent la technique bien connue de placement de pôles. Cette dernière se fait en choisissant le gain L telle que la dynamique de l'erreur d'estimation donnée par la matrice $(A - LC)$ est stable. Cela revient à choisir les valeurs propres de la matrice $(A - LC)$ à partie réelle strictement négative dans le cas temps continu (respectivement dans un cercle unité dans le cas temps discret).

Le problème de synthèse d'observateurs pour les systèmes SLS se traduit souvent, comme nous allons le voir dans le présent chapitre, par l'analyse de stabilité de l'erreur d'observation. Il s'agit de trouver des gains L_i associés à chaque sous-système linéaire telle que l'erreur d'observation est asymptotiquement stable. La stabilité n'est pas garantie systématiquement en choisissant séparément les gains L_i qui stabilisent chacune des matrices $(A_i - L_i C_i)$. Il faut tenir compte du phénomène de commutation entre les modes.

Sans cette contrainte de placement de pôles, on sait calculer les gains L_i qui garantissent une erreur d'observation stable. Par exemple une approche de type LMI permet de ramener le problème en une résolution de programmes d'optimisation convexes. Elle permet aussi d'incorporer des contraintes sur la qualité de la convergence de l'erreur telle que les contraintes du type "decay rate" (Boyd et al., 1994). Cependant, les valeurs propres de la matrices $(A_i - L_i C_i)$ ne peuvent pas être imposées. Dans ce chapitre, on montrera que cette approche peut être étendue pour concevoir un observateur satisfaisant à la fois la contrainte stabilité de Lyapunov et la contrainte de placement de pôles.

Ce chapitre est organisé comme suit : la première partie du chapitre est consacrée à la présentation de quelques résultats récents sur la stabilité quadratique et la stabilité poly-quadratique des systèmes SLS. Une approche permettant la synthèse d'observateur à commutation est déduite de ces résultats. Dans la deuxième partie du chapitre, nous rappellerons la technique de placement de pôles dans le cadre d'une commande par retour d'état pour un système SLS. Cette technique nous permettra de donner l'approche d'observateur commuté avec un placement de pôles partiel. Nous montrerons dans la dernière partie du chapitre comment utiliser l'approche d'observateurs commutés avec une contrainte de placement de pôles partiel pour résoudre le problème de la synchronisation du chaos dans le cadre d'une application au cryptage de l'information. On terminera par une conclusion.

2.2 Formulation du problème

Nous considérons ici une classe de SDH en temps discret composé de s sous-systèmes linéaires LTI auxquels des commutations de modèles sont associées. Chaque sous-système S_i est défini par l'équation suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_i x_k + B_i u_k \\ y_k = C_i x_k \end{cases} \quad (2.1)$$

avec $i \in Q = \{1, \dots, s\}$. $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^m$ et $y_k \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement le vecteur d'état,

le vecteur d'entrée et le vecteur de sortie. La dynamique de chaque sous-système S_i est régie par le triplet de matrices (A_i, B_i, C_i) avec $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$. L'état discret du système $q_k \in Q$ est représenté par l'indice du sous-système actif i à l'instant de temps k .

Hypothèse 2.1 (*Connaissance de l'état discret*) :

Nous supposons que la loi de commutation caractérisant l'évolution de l'état discret q_k est inconnue a priori, mais pour des contraintes d'implémentation l'état discret est supposé disponible en temps réel.

Cette hypothèse est justifiée pour la classe des systèmes hybrides SLS car l'évolution de l'état discret est régie par des entrées discrètes contrôlables. Les commutations sont déterminées suivant une stratégie de commande discrète appropriée au système SLS justifiant ainsi la disponibilité de l'état discret en temps réel.

La formulation donnée dans l'équation (2.1) est principalement employée pour représenter la classe des systèmes hybrides SLS. Comme l'état discret est supposé connu à chaque instant (hypothèse-2.1), cette formulation peut être aussi étendue pour décrire les classes de systèmes hybrides JLS et PWA. Par conséquent, tous les résultats présentés ici seront valables pour tout SDH en temps discret représenté par un ensemble de systèmes LTI avec des commutations de modes connues à chaque instant.

La structure de l'observateur associé pour de tels systèmes hybrides est généralement donnée par :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} = A_i \hat{x}_k + B_i u_k + L_i (y_k - \hat{y}_k) \\ \hat{y}_k = C_i \hat{x}_k \end{cases} \quad (2.2)$$

Comme l'indice du mode en cours d'évolution i est disponible à chaque instant, la synthèse de l'observateur (2.2) dit "observateur commuté" (switched observer) consiste à trouver les différents gains $L_i \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $i = 1, \dots, s$ associés à chaque sous-système. Ces gains sont

calculés afin que l'état estimé \hat{x}_k converge vers l'état x_k quelles que soient les conditions initiales, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon_0 \in \mathbb{R}^n \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|\varepsilon_k\| = 0 \quad (2.3)$$

où $\varepsilon_k = x_k - \hat{x}_k$ est l'erreur d'observation.

A partir des équations (2.1) et (2.2), l'évolution de l'erreur d'observation est régie par l'équation suivante :

$$\varepsilon_{k+1} = (A_i - L_i C_i) \varepsilon_k \quad (2.4)$$

La synthèse de l'observateur (2.2) revient donc à déterminer les matrices gains L_i garantissant la stabilité asymptotique de l'erreur de l'observation (2.4). L'évolution de cette dernière est décrite par un système SLS de la forme

$$\varepsilon_{k+1} = \tilde{A}_i \varepsilon_k \quad (2.5)$$

avec $\tilde{A}_i = (A_i - L_i C_i)$. Par conséquent, la synthèse de l'observateur (2.2) sous l'hypothèse 2.1 rejoint les problèmes posés par l'étude de la stabilité des systèmes SLS.

Nous avons déjà donné dans la dernière partie du premier chapitre quelques résultats concernant la stabilité des SDH. Dans la suite, seuls les résultats exploitables pour la synthèse observateurs seront présentés. Il s'agit particulièrement des résultats sur la stabilité au sens de Lyapunov pour les systèmes SLS en temps discret.

2.3 Stabilité des systèmes à commutation

Le théorème suivant donne un résultat standard relatif à la stabilité asymptotique des systèmes SLS en utilisant des fonctions de Lyapunov.

Théorème 2.1 *Le système SLS (2.5) est asymptotiquement stable si et seulement si il existe une fonction de Lyapunov*

$$V(\varepsilon_k, k) \tag{2.6}$$

telle que :

$$\alpha_1(\|\varepsilon_k\|) \leq V(\varepsilon_k, k) \leq \alpha_2(\|\varepsilon_k\|) \tag{2.7}$$

et sa différence le long de la solution de (2.5) vérifie

$$\mathcal{L} = V(\varepsilon_{k+1}, k+1) - V(\varepsilon_k, k) \leq \alpha_0(\|\varepsilon_k\|) \tag{2.8}$$

avec α_0 , α_1 et α_2 des fonctions k_∞ ¹

Ce théorème présente un résultat très général et difficile à exploiter en pratique car il ne donne pas de méthode systématique pour tester l'existence de $V(\varepsilon_k, k)$. Les fonctions de Lyapunov quadratiques sont un outil très utilisé pour l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques linéaires. Récemment des travaux ont étendu ce concept avec succès pour le cas des SDH en général et des systèmes SLS en particulier. Dans le cadre de notre travail de thèse nous retenons uniquement deux approches. La première aborde l'analyse de la stabilité par une fonction de Lyapunov quadratique unique pour tous les systèmes, c'est la stabilité quadratique. La deuxième utilise des fonctions de Lyapunov quadratiques multiples.

2.3.1 La stabilité quadratique des systèmes à commutation

La stabilité quadratique d'un système SLS est une extension directe du concept de la stabilité bien connu des systèmes linéaires. L'étude de la stabilité s'effectue en choisissant

¹ Une fonction $\alpha_0 : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ est dite k_∞ si elle est continue, strictement croissante, $\alpha_0(0) = 0$ et non bornée.

une matrice de Lyapunov constante P pour tous les sous-systèmes, c'est-à-dire

$$V(\varepsilon_k, k) = \varepsilon_k^T P \varepsilon_k \quad (2.9)$$

avec $P = P^T$ une matrice constante $\forall k$.

D'après le théorème-2.1, la stabilité asymptotique du système (2.5) est garantie s'il existe une fonction de Lyapunov $V(\varepsilon_k)$ telle que sa différence au long de la trajectoire ε_k vérifie

$$\mathcal{L} = V(\varepsilon_{k+1}) - V(\varepsilon_k) < 0 \quad (2.10)$$

Pour calculer la matrice P , on traduit souvent les conditions de stabilité (2.10) sous forme d'un problème d'optimisation donnée sous forme d'un ensemble de LMI. Ce dernier s'obtient ainsi : il suffit de remplacer (2.5) dans l'équation (2.10) pour arriver à la forme suivante :

$$\tilde{A}_i^T P \tilde{A}_i - P < 0 \text{ pour } i \in Q \quad (2.11)$$

En utilisant le complément de Schur, nous obtenons facilement la forme matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} -P & \tilde{A}_i^T P \\ P \tilde{A}_i & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (2.12)$$

En utilisant ce résultat de stabilité quadratique, la synthèse d'observateur commuté est facile à obtenir. Il suffit de remplacer $\tilde{A}_i = A_i - L_i C_i$ dans l'équation (2.12). Pour découpler le terme non linéaire PL_i , on introduit des matrices auxiliaires $F_i = PL_i$. Finalement, les gains de l'observateur sont obtenus suivant cette proposition :

Proposition 2.3.1 *La stabilité asymptotique globale de l'erreur d'observation (2.4) est garantie s'il existe des matrices F_i et une matrice symétrique définie positive P solution de :*

$$\begin{bmatrix} -P & A_i^T P - C_i^T F_i^T \\ P A_i - F_i C_i & -P \end{bmatrix} < 0. \quad (2.13)$$

pour tout $i \in Q$. Dans ce cas, les matrices gain L_i de l'observateur sont données par

$$L_i = P^{-1}F_i$$

Cette procédure est peu utilisée pour calculer les gains de l'observateur commuté (2.2). Il existe d'autres formes plus avantageuses donnant plus de degrés de liberté pour le calcul des matrices gains en introduisant une matrice auxiliaire G dans les conditions de stabilité. L'introduction de cette matrice permet de découpler la matrice de Lyapunov et les gains de l'observateur. Le théorème suivant donne quelques formes équivalentes :

Théorème 2.3.1.1 *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

– $\exists P$:

$$\begin{bmatrix} -P & A^T P \\ PA & -P \end{bmatrix} < 0$$

– $\exists P$ et $\exists G$

$$\begin{bmatrix} P & A^T G^T \\ GA & G + G^T - P \end{bmatrix} > 0$$

– $\exists S$ et $\exists G$

$$\begin{bmatrix} G + G^T - S & G^T A \\ A^T G & S \end{bmatrix} > 0, \quad \text{avec } S = P^{-1}$$

Ces formes sont intéressantes car elles permettent d'introduire plus aisément des contraintes sur les gains. Nous garderons donc dans la suite la troisième forme, la stabilité de l'erreur d'estimation est assurée s'il existe une matrice définie positives S , des matrices G et F_i solution de :

$$\begin{bmatrix} G + G^T - S & G^T A_i - F_i^T C_i \\ A_i^T G - C_i^T F_i & S \end{bmatrix} > 0 \quad (2.14)$$

pour tout $i \in Q$. Les matrices gain de l'observateur sont données par $L_i = (G^T)^{-1}F_i^T$.

La matrice de Lyapunov commune et les gains L_i sont donnés par la résolution d'un ensemble de s LMI. Trouver une fonction de Lyapunov quadratique commune pour un ensemble de sous-systèmes est un critère trop fort. Par conséquent, l'approche de calcul des gains L_i avec une matrice de Lyapunov commune à tous les sous-systèmes est très conservatrice. Pour réduire ce conservatisme, un choix d'une fonction de Lyapunov distinct pour chaque sous-système est envisagé, c'est la stabilité poly-quadratique.

2.3.2 La stabilité poly-quadratique

À l'inverse de la stabilité quadratique, la stabilité poly-quadratique utilise une matrice de Lyapunov P_i pour chaque sous-système. La fonction de Lyapunov utilisée est

$$V(\varepsilon_k, k) = \varepsilon_k^T P_i \varepsilon_k$$

où i l'indice du sous-système S_i .

Pour établir une correspondance entre l'indice du mode actif i et le triplets (A_i, B_i, C_i) associé à ce mode, on définit un vecteur de paramètres $\xi_k = (\xi_k^1, \xi_k^2, \dots, \xi_k^s)^T$ tels que

$$\xi_k^i = \begin{cases} 1 & \text{si le système est décrit par le triplet } (A_i, B_i, C_i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.15)$$

En remplaçant l'expression de l'indicateur de mode (2.15) dans équation (2.5), on obtient la forme polytopique suivante

$$\varepsilon_{k+1} = \sum_{l=1}^s \xi_k^l \tilde{A}_l \varepsilon_k \quad (2.16)$$

avec $\xi_k^l > 0$ et $\sum_{l=1}^s \xi_k^l = 1$.

Dans ce cas, nous pouvons utiliser une fonction de Lyapunov polytopique de la forme

$$V(\varepsilon_k, \xi_k) = \varepsilon_k^T \mathcal{P}(\xi_k) \varepsilon_k \quad (2.17)$$

avec $\mathcal{P}(\xi_k) = \sum_{l=1}^s \xi_k^l P_l$ où $(P_l, l = 1, \dots, s)$ des matrices constantes définies positives. Les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité poly-quadratique sont données par le théorème suivant

Théorème 2.2 (*Daafouz and Bernussou, 2001*) *Le système (2.16) est poly-quadratiquement stable si et seulement si il existe des matrices symétriques définies positives S_i , des matrices G_i avec $i \in Q$ de dimensions appropriées tels que :*

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_i & G_i^T \tilde{A}_i \\ \tilde{A}_i^T G_i & S_j \end{bmatrix} > 0 \quad (2.18)$$

pour tous $(i, j) \in Q \times Q$. Dans ce cas, la fonction de Lyapunov est donnée par l'équation (2.17) avec

$$\mathcal{P}(\xi_k) = \sum_{l=1}^s \xi_k^l S_l^{-1}$$

Les conditions données dans ce théorème sont établies indépendamment de la loi de commutation. Elles sont vérifiées par la résolution de s^2 LMI relatives au nombre de combinaisons possible $(i, j) \in Q \times Q$ (commutations arbitraires). Le nombre de LMI à résoudre est largement supérieur à celui établi pour le cas de stabilité quadratique. Cependant les conditions (2.18) sont moins conservatives que celles données dans (2.12). Les difficultés de résolution ne dépendent pas uniquement du nombre de LMI à résoudre mais aussi du nombre d'inconnues et du conditionnement numérique du problème à résoudre. Il est évident que les conditions données dans le théorème sont moins conservatives que celles basées sur l'existence d'une seule fonction de Lyapunov : les condition de stabilité quadratique s'obtient comme un cas particulier de (2.18) en imposant $S_i = G_i = P^{-1}$.

A partir de ce nouveau résultat sur la stabilité poly-quadratique, de nouvelles méthodes de synthèse de commande par retour d'état et d'observateurs ont été proposées. Concernant la synthèse d'un observateur commuté, une approche LMI pour le calcul des gains L_i garantissant la stabilité de l'erreur d'estimation à été développée dans (*Daafouz et al., 2002*).

Proposition 2.3.2 (*Daafouz et al., 2002*) *La stabilité asymptotique globale de l'erreur d'estimation est garantie s'il existe des matrices définies positives S_i , des matrices G_i et*

F_i avec $(i, j) \in (Q \times Q)$ tels que :

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_i & G_i^T A_i - F_i^T C_i \\ A_i^T G_i - C_i^T F_i & S_j \end{bmatrix} > 0 \quad (2.19)$$

Dans ce cas, les gains de l'observateur L_i sont donnés par

$$L_i = (G_i^T)^{-1} F_i^T$$

On remarque que l'équation (2.19) est obtenue en remplaçant $\tilde{A}_i = A_i - L_i C_i$ dans (2.18) suivi d'un changement de variable $F_i = L_i^T G_i$.

Pour la question de la synthèse d'une commande par retour d'état commuté $u = K_i x$, nous considérons $\tilde{A}_i = A_i + B_i K_i$ et $K_i = F_i G_i^{-1}$ avec F_i et G_i solution de :

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_i & G_i^T A_i^T + F_i^T B_i^T \\ A_i G_i + B_i F_i & S_j \end{bmatrix} > 0 \quad (2.20)$$

pour $(i, j) \in Q \times Q$.

Nous pouvons aussi ajouter des contraintes sur la qualité de la convergence de l'erreur de d'observation (Boyd et al., 1994) (contraintes du type "decay rate" par exemple) et sur le rejet de perturbation (critère type gain \mathcal{L}_2 , peak to peak ...). Cependant, les conditions (2.19) n'intègrent pas de contraintes sur une partie ou la totalité des valeurs propres des matrices $(A_i - L_i C_i)$.

Imaginons, qu'au delà de la stabilité asymptotique de l'erreur d'observation nous pouvons fixer les pôles de $(A_i - L_i C_i)$ aux valeurs désirées. Ainsi, nous aurons un double objectif : calculer les gains L_i permettant d'une part une stabilité asymptotique de l'erreur d'estimation avec des commutations arbitraires et d'autre part effectuer un placement (partiel ou total) des matrices $(A_i - L_i C_i)$.

2.4 Technique de placement de pôles

Pour satisfaire conjointement les deux contraintes de la stabilité et du placement de pôles, nous pouvons employer le résultat présenté dans (Daafouz et al., 2003). L'approche développée a pour objectif la synthèse d'une commande par retour d'état commuté pour un système SLS. Elle a comme but de fixer une partie des valeurs propres des matrices $(A_i + B_i K_i)$ tout en assurant sa stabilité en boucle fermée. Pour comprendre ce résultat, il est nécessaire de rappeler d'abord la technique de placement de pôles pour le cas des systèmes linéaires.

2.4.1 Placement de pôles dans le cas d'un système linéaire

Considérons un problème de synthèse d'une commande par retour d'état $u = Kx$ pour un système linéaire décrit par la paire de matrices (A, B) avec $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Ce problème de commande est souvent résolu en déterminant le gain K stabilisant le système en boucle fermée. La matrice K permettant d'avoir les valeurs propres $\lambda_{\bar{p}}, \bar{p} = 1, \dots, n$ de la matrice en boucle fermée $A + BK$ peut être obtenue en utilisant la procédure décrite par (Moore, 1976).

Cas des valeurs propres réelles

Si l'ensemble des valeurs propres $\lambda_{\bar{p}}, \bar{p} = 1, \dots, n$ est composé uniquement de valeurs réelles, la technique de placement de pôles se résume en deux étapes :

1. Pour $\bar{p} = 1, \dots, n$ calculer

$$\begin{bmatrix} M_{\bar{p}} \\ N_{\bar{p}} \end{bmatrix} \text{ Espace nul de } \begin{bmatrix} A - \lambda_{\bar{p}} I & B \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

2. Pour des vecteurs colonnes $v_{\bar{p}}$ de dimension m calculer le gain

$$K = RG^{-1} \quad (2.22)$$

où

$$R = \begin{bmatrix} N_1 & \cdots & N_n \end{bmatrix} \text{diag}_{\bar{p}=1}^n v_{\bar{p}} ; \quad G = \begin{bmatrix} M_1 & \cdots & M_n \end{bmatrix} \text{diag}_{\bar{p}=1}^n v_{\bar{p}} ;$$

Cas des valeurs propres complexes

Si l'ensemble des valeurs propres est composé à la fois de valeurs propres réelles \bar{p} et de valeurs propres complexes $\lambda_{\bar{r}} = (Re(\lambda_{\bar{r}}) + j(Im(\lambda_{\bar{r}})))$. On associe pour chaque valeur propre complexe son conjugué $\lambda_{\bar{r}+1} = \lambda_{\bar{r}}^* = (Re(\lambda_{\bar{r}}) - j(Im(\lambda_{\bar{r}})))$. La procédure de calcul de gain K est modifiée de la manière suivante :

– Calculer

$$\begin{bmatrix} M_{\bar{r}} \\ N_{\bar{r}} \\ M_{\bar{r}+1} \\ N_{\bar{r}+1} \end{bmatrix} \text{Espace nul de } \begin{bmatrix} A - Re(\lambda_{\bar{r}})I & B & Im(\lambda_{\bar{r}})I & 0 \\ -Im(\lambda_{\bar{r}})I & 0 & A - Re(\lambda_{\bar{r}})I & B \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

– La matrice K est donnée par $K = RG^{-1}$ avec

$$R = N\Psi, \quad G = M\Psi$$

avec

$$M = [\dots, M_{\bar{p}}, \dots, M_{\bar{r}}, M_{\bar{r}+1}, \dots] ; \quad N = [\dots, N_{\bar{p}}, \dots, N_{\bar{r}}, N_{\bar{r}+1}, \dots] ; \quad \Psi = \text{diag}(\dots, v_{\bar{p}}, \dots, v_r, v_{\bar{r}+1} \dots)$$

La technique de placement de pôles décrite précédemment est évidemment valide pour calculer le gain d'un observateur de Luenberger pour un système LTI : il suffit de remplacer le système (A, B) par son dual (A^T, C^T) .

2.4.2 Placement de pôles dans le cas d'un système à commutation

Pour les systèmes SLS, la commande par retour d'état avec un placement de pôles consistera donc à fixer les valeurs propres $\lambda_{\bar{p}}^i$, ($\bar{p} = 1, \dots, n$), $i = (1, \dots, s)$ des matrices $(A_i + B_i K_i)$ aux valeurs désirées tout en garantissant la stabilité du système en boucle fermée. Par conséquent, nous recherchons une commande par retour d'état commuté $u = K_i x$ telle que :

◇ Les valeurs propres de $A_i + B_i K_i$ doivent satisfaire :

$$\text{spect}(A_i - B_i K_i) = \{\lambda_1^i, \lambda_2^i, \dots, \lambda_n^i\} \quad (2.24)$$

où $\lambda_{\bar{p}}^i, \bar{p} = 1, \dots, n$ sont les valeurs propres désirées.

◇ Le système SLS en boucle fermée est globalement asymptotiquement stable.

Nous cherchons donc les gains K_i associés à chaque sous-système (A_i, B_i) pour satisfaire d'une part l'équation (2.24) et d'autre part la condition de stabilité en boucle fermée.

Nous avons expliqué au paragraphe précédent que les gains de la commande sont donnés par $K_i = F_i(G_i)^{-1}$ solution de l'ensemble de LMI donné dans l'équation (2.20). Supposons que nous ayons calculé, en utilisant la technique de placement de pôles indiquée précédemment, les matrices M_i et N_i pour chacun des sous-systèmes. En remplaçant l'expression des gains $K_i = (N_i \Psi_i)(M_i \Psi_i)^{-1}$ dans les LMI (2.20), nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} M_i \Psi_i + \Psi_i^T M_i^T - S_i & \Psi_i^T M_i^T A_i^T - \Psi_i^T N_i^T B_i^T \\ A_i M_i \Psi_i - B_i N_i \Psi_i & S_j \end{bmatrix} > 0 \quad (2.25)$$

Par conséquent, s'il existe des matrices symétriques S_i et des matrices Ψ_i vérifiant (2.25) pour tout $(i, j) \in Q \times Q$, alors les gains K_i garantissent la stabilité en boucle fermée et vérifient $\text{spect}(A_i + B_i K_i) = \{\lambda_1^i, \lambda_2^i, \dots, \lambda_n^i\}$.

Pour des systèmes mono-entrée, on ne dispose d'aucun degré de liberté supplémentaire pour calculer les matrices Ψ_i . Dans ce cas l'ensemble de LMI (2.25) est considéré comme

un simple outil de vérification. Par conséquent, un placement de pôles complet est employé seulement pour les systèmes multi-entrées. Cependant, un placement de pôles partiel est intéressant pour les systèmes mono-entrée. Lors d'un placement partiel, un sous-ensemble de vecteurs colonne G_i et R_i doit satisfaire (2.26), (2.23). L'ensemble des vecteurs restant peut être utilisé pour satisfaire la contrainte de stabilité.

Pour fixer un nombre l de valeurs propres, la procédure de placement de pôles sera donc reformulée comme suit :

- Pour $\bar{r} = 1, \dots, l$ avec $l < n$ calculer les bases

$$\begin{bmatrix} M_{\bar{p}} \\ N_{\bar{p}} \end{bmatrix} \text{ Espace nul de } \begin{bmatrix} A - \lambda_{\bar{p}} I & B \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

- Les matrices des gains sont données comme

$$K_i \triangleq R_i G_i^{-1}, \quad R_i \triangleq N_i \Psi_{N_i}, \quad G_i \triangleq M_i \Psi_{M_i}$$

avec

$$\begin{aligned} M_i &\triangleq [M_{i1}, \dots, M_{il}, \underbrace{\mathbf{I}, \mathbf{I}, \dots, \mathbf{I}}_{n-l \text{ fois}}], \\ N_i &\triangleq [N_{i1}, \dots, N_{il}, \underbrace{\mathbf{I}, \mathbf{I}, \dots, \mathbf{I}}_{n-l \text{ fois}}] \\ \Psi_{M_i} &\triangleq \text{diag}(v_{i1}, \dots, v_{il}, s_{i1}, \dots, s_{i(n-l)}), \\ v_{i\bar{p}} &\in \mathbb{R}^p, \quad v_{i\bar{r}} = v_{i(\bar{r}+1)} \in \mathbb{R}^{2p}, \quad s_{ik} \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{N_i} &\triangleq \text{diag}(v_{i1}, \dots, v_{il}, t_{i1}, \dots, t_{i(n-l)}), \\ v_{i\bar{p}} &\in \mathbb{R}^p, \quad v_{i\bar{r}} = v_{i(\bar{r}+1)} \in \mathbb{R}^{2p}, \quad t_{ik} \in \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

Les matrices K_i satisfaisant les deux contraintes sont obtenues en utilisant le théorème suivant :

Théorème 2.3 (*Daafouz et al., 2003*) *S'il existe des matrices S_i , des matrices Ψ_{M_i} , Ψ_{N_i} solution de :*

$$\begin{bmatrix} M_i \Psi_{M_i} + (M_i \Psi_{M_i})^T - S_i & \Psi_{M_i}^T M_i^T A_i T + \Psi_{N_i}^T N_i^T B_i^T \\ A_i M_i \Psi_{M_i} + B_i N_i \Psi_{N_i} & S_j \end{bmatrix} > 0, \quad (2.28)$$

$\forall (i, j) \in Q \times Q$, alors une commande par retour d'état stabilisant le système SLS existe et les gains K_i sont donnés par

$$K_i = (N_i \Psi_{N_i})(M_i \Psi_{M_i})^{-1}$$

De tels gains garantissent que la dynamique de l'état en boucle fermée est caractérisée par $\{\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{il}\} \subset \text{spect}(A_i + B_i K_i)$.

La technique de placement de pôles est un outil très intéressant permettant de résoudre quelques problèmes de commande et d'observation des systèmes SLS. Sous des conditions de commandabilité et d'observabilité des différents systèmes les résultats peuvent se simplifier de la manière suivante :

- Systèmes mono-entrée/mono-sortie : stabilité asymptotique avec un placement de pôles partiel pour la synthèse de commande commutée et la pour synthèse d'observateur commuté.
- Systèmes à mono-entrée/multi-sorties : stabilité asymptotique avec un placement de pôles partiel pour la synthèse d'une commande commuté et un placement de pôles complet pour la synthèse d'observateur commuté.
- Systèmes à multi-entrées /mono-sortie : stabilité asymptotique avec un placement de pôles complet pour la synthèse de la commande commutée et un placement de pôles partiel pour la synthèse d'observateur commuté.
- Systèmes à multi-entrées /multi-sorties : stabilité asymptotique avec un placement de pôles complet pour la synthèse de la commande commutée et un placement de pôles complet pour la synthèse d'observateur commuté.

Ces résultats peuvent être considérés comme une généralisation aux systèmes à commutation du théorème de séparation bien connu dans le cas de système linéaire invariant. En effet, la synthèse de la commande par retour d'état commuté et de l'observateur commuté se fait indépendamment. Le principe de séparation est assuré en jouant sur les vitesses de convergence de l'observateur et de la commande.

L'intérêt de l'approche stabilité et placement de pôles est aussi de proposer un observateur à entrée inconnue particulier pour les systèmes SLS applicable au problème de la synchronisation des systèmes hybrides chaotique pour une application au cryptage de l'information.

2.5 Application à la synchronisation du chaos

Depuis que Carroll et Pecora ont démontré l'intérêt de reproduire un comportement chaotique par synchronisation pour la sécurité des communications (Carroll and Pecora, 1991)(Pecora and Carroll, 1991)(Cuomo et al., 1993), les travaux de recherche liés à la synchronisation du chaos n'ont cessé de se développer (Kolumban et al., 1998). Le schéma de synchronisation du chaos consiste en un système chaotique appelé "Émetteur" (Transmitter) auquel l'information à transmettre est mélangée et un autre système chaotique appelé "Récepteur" (receiver) dont le but est de récupérer cette information. Seule une partie de l'état de l'émetteur est transmise au récepteur. Pour récupérer l'information, il est nécessaire de synchroniser le récepteur et l'émetteur c'est-à-dire faire converger l'état du récepteur vers l'état de l'émetteur quelles que soient les conditions initiales. C'est ce problème qu'on appelle la synchronisation du chaos.

La synchronisation du chaos a été formulé par Nijmeijer comme un problème de synthèse d'observateurs (Nijmeijer and Mareels, 1997). Le chaos étant un comportement non-linéaire, la synchronisation est en général un problème d'observation (ou de stabilité) non linéaire. La nécessité d'une convergence globale fait que ce problème est très difficile

à résoudre dans le cas général. Cependant, des résultats intéressants ont été obtenus pour une classe de systèmes chaotiques linéaires par morceaux (Daafouz et al., 2002), (Daafouz and Millerioux, 2004). La formulation hybride d'un schéma de synchronisation de chaos consiste à utiliser un système PWA pour l'émetteur et le récepteur. Dans ce cadre, les difficultés de résolution du problème de synchronisation de chaos correspondent aux difficultés de résolution du problème de l'observation d'état des systèmes PWA.

2.5.1 Problème de la synchronisation du chaos sans message : observateur commuté

Considérons un schéma de synchronisation du chaos où l'émetteur et le récepteur sont représentés sous forme de systèmes PWA, leur dynamique respective est régie par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x_{k+1}^t = A_i x_k^t + B_i \\ y_k^t = C_i x_k^t \end{cases} \quad (2.29)$$

pour l'émetteur, et :

$$\begin{cases} x_{k+1}^r = A_i x_k^r + B_i + L_i(y_k^t - y_k^r) \\ y_k^r = C_i x_k^r \end{cases} \quad (2.30)$$

pour le récepteur, avec :

- x_k^t et x_{k+1}^t (respectivement x_k^r et x_{k+1}^r) les vecteurs d'état de dimension n de l'émetteur (respectivement récepteur) aux instants k et $k+1$. La lettre ' t ' est utilisée pour désigner l'émetteur et ' r ' pour le récepteur.
- Le vecteur de sortie $y_k^t = C_i x_k^t$ de dimension m est le signal à transmettre.
- L'espace d'état est divisé en s régions \mathcal{X}_i avec $\bigcup_{i=1}^{i=s} \mathcal{X}_i \subseteq \mathbb{R}^n$.
- A_i et B_i C_i sont des matrices de dimension respectives $(n \times n)$, $(n \times m)$ et $(p \times n)$. Chaque triplet (A_i, B_i, C_i) caractérise la dynamique du système dans la région \mathcal{X}_i . Ces matrices et la partition de l'espace d'état sont choisies pour obtenir un comportement chaotique.

Les comportements de chaos dépendent non seulement de la dynamique locale mais également de la loi de commutation entre les différentes dynamiques linéaires.

La solution du problème de la synchronisation du chaos a pour objectif la reconstruction de l'état continu de l'émetteur. La synchronisation émetteur-récepteur est un problème d'observation de systèmes PWA car le récepteur (2.30) est considéré comme un observateur de l'émetteur (2.29) ($x_k^r = \hat{x}_k^t$). La conception du récepteur consiste donc à calculer les gains du récepteur L_i permettant de garantir la stabilité asymptotique l'erreur de synchronisation $\varepsilon_k = x_k^t - x_k^r$ donnée par

$$\varepsilon_{k+1} = (A_i - L_i C_i) \varepsilon_k \quad (2.31)$$

Dans ce cas, nous pouvons utiliser les résultats présentés aux paragraphes précédents (proposition-2.3.2). Se basant sur la stabilité poly-quadratique, la synchronisation global est garantie si $\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, s\}^2$, il existe des matrices définies positives S_i, S_j , des matrices G_i, F_i telles que :

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_i & G_i^T A_i - F_i^T C_i \\ A_i^T G_i - C_i^T F_i & S_j \end{bmatrix} > 0 \quad (2.32)$$

Les matrices L_i sont données par $L_i = (G_i^T)^{-1} F_i^T$ et la stabilité asymptotique de l'erreur de synchronisation est garantie par une fonction de Lyapunov poly-quadratique.

Dans le cas où seule la sortie de l'émetteur est transmise, l'indicateur de région doit être reconstruit. Les travaux présentés dans (Millerioux and Bloch., 2002) constituent une tentative de reconstruction de cet indicateur. L'approche repose sur des techniques de classification et un processus d'apprentissage par réseaux de neurones. La qualité des résultats dépend énormément de la machine d'apprentissage. Elle dépend aussi de la nature du système et la reconstruction devient très difficile pour des systèmes qui commutent souvent. Nous avons proposé dans (Birouche et al., 2004) d'appliquer un résultat récent

concernant l'estimation à horizon glissant développée dans (Ferrari-Trecate et al., 2002) pour les systèmes PWA. Ce résultat permet effectivement de s'affranchir de la transmission de l'indicateur de région. Cependant les résultats obtenus montrent toutefois des limites lorsque les commutations surviennent rapidement, c'est-à-dire lorsque l'aspect hybride devient important. C'est le cas où l'émetteur change de région de l'espace d'état presque à chaque instant. L'approche devient très sensible, comme toute méthode d'optimisation. Par ailleurs, seul le problème de synchronisation du chaos sans message peut être abordé avec cette approche. L'application au cryptage de l'information nécessite une étape supplémentaire. Cette étape consiste dans la façon de rajouter le message à transmettre à l'état de l'émetteur et la façon de l'extraire une fois le récepteur synchronisé. Les techniques utilisées jusqu'à présent utilisent une configuration type observateur à entrée inconnue (Millerioux and Daafouz, 2004).

2.6 Synchronisation du chaos avec message : observateur commuté à entrée inconnue

Un des intérêts pratique bien connu de synchronisation de chaos se situe dans les applications potentielles dans les communications et plus spécifiquement dans les possibilités de coder ou de masquer des messages avec des schémas appropriés.

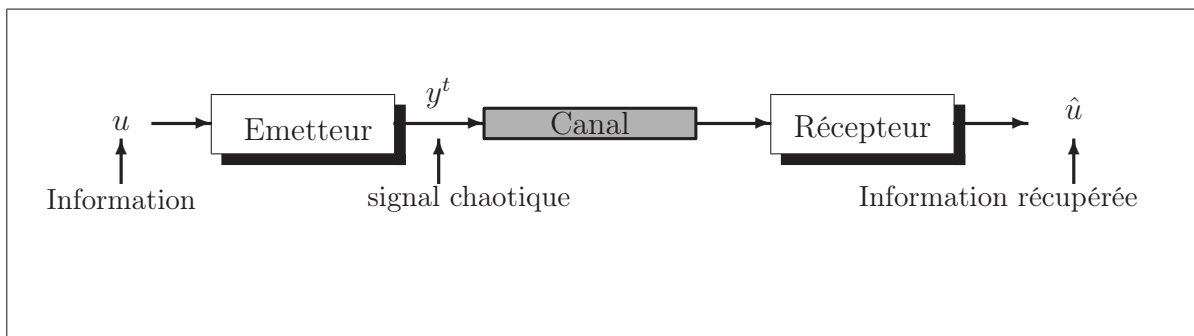


FIG. 2.1 – Schéma général d'un système de transmission

La figure (2.1) représente le schéma général d'un système de transmission crypté par chaos. L'émetteur génère un signal chaotique, ensuite l'information à coder est mélangée

avec ce signal. L'ensemble "chaos+signal" est finalement envoyé sur un canal de transmission. Un récepteur chaotique est conçu de manière à réaliser une synchronisation et extraire l'information initialement noyée. Le message à transmettre est mélangé à la dynamique chaotique avant de l'envoyer par la voie de transmission. Une façon de mélanger l'information est décrite par l'équation d'état pour l'émetteur (Daafouz and Millerieux, 2004) :

$$\begin{cases} x_{k+1}^t = A_i \bar{x}_k^t + B_i \\ y_k^t = C_i \bar{x}_k^t \end{cases} \quad (2.33)$$

avec $\bar{x}_k^t = x_k^t + \alpha \Pi_i u(k)$. Les vecteurs $y_k^t \in \mathbb{R}^m$, $u_k \in \mathbb{R}^m$ sont respectivement la sortie à transmettre et l'information à masquer. Π_i sont des matrices de dimension $n \times m$ appelées matrices de mélange. Elles caractérisent la façon de mélanger l'information u_k avec le signal chaotique x_k . α est un scalaire positif permettant au terme $\alpha \Pi_i u_k$ d'être très petit afin de garder le comportement chaotique de \bar{x}_k^t tout en respectant le minimum et maximum de x_k^t .

Pour le récepteur, nous maintenons la même structure PWA, c'état-à-dire :

$$\begin{cases} x_{k+1}^r = A_i x_k^r + B_i + L_i (y_k^t - y_k^r) \\ y_k^r = C_i x_k^r \end{cases} \quad (2.34)$$

L'erreur de synchronisation avec message incorporé $\epsilon_k = x_k^t - x_k^r$ est régie cette fois-ci par l'équation :

$$\epsilon_{k+1} = (A_i - L_i C_i) \epsilon_k + (A_i - L_i C_i) \alpha \Pi_i u_k \quad (2.35)$$

Pour des raisons de sécurité, l'information u_k ne peut pas être transmise au récepteur. Par conséquent, le récepteur doit être conçu telle que u_k peut être récupéré en utilisant uniquement les sorties disponibles y_k^t . Le message u_k joue donc le rôle d'une entrée inconnue.

Il est évident que la reconstruction de u_k exige au moins la synchronisation de l'émetteur et du récepteur. Par conséquent, la synchronisation globale de l'émetteur et du récepteur doit être réalisée indépendamment de l'entrée. Cela est vérifié si x_k^t converge vers x_k^r pour n'importe quel état initial x_0^r et n'importe quelle valeur u_k .

A partir de l'équation (2.35), l'erreur de synchronisation est indépendante de l'entrée inconnue u_k s'il existe un ensemble de paires des matrices $(\Pi_i, L_i), i = 1, \dots, s$ de dimensions appropriées vérifiant :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k^t - x_k^r\| = 0 \quad \forall x_0^r \quad \text{et} \quad \forall u_k \quad (2.36)$$

Dans (Daafouz and Millerioux, 2004) on propose une solution basée sur l'approche observateur commuté avec entrée inconnue. Dans la suite, nous allons proposer une approche systématique permettant de réaliser la synchronisation et ensuite récupérer l'information. Cette solution est basée sur l'approche observateur commuté avec contrainte de placement de pôles. Cette méthode améliore celle présentée dans (Daafouz and Millerioux, 2004) dans le sens où elle permet de fournir une solution pour des exemples qui ne peuvent pas être résolus en utilisant la première procédure.

2.7 Schéma de chiffrage utilisant un observateur commuté avec entrée inconnue

A partir de l'équation (2.35), l'erreur de synchronisation avec message incorporé est indépendante de u_k si les matrices de gain du récepteur L_i et matrices de mélange Π_i sont telles que

$$(A_i - L_i C_i) \Pi_i = 0 \quad (2.37)$$

Pour résoudre ce problème, nous nous fixons deux contraintes :

- Une contrainte de type placement de pôles : pour garantir que l'espace nul de $(A_i - L_i C_i)$ n'est pas vide. Pour satisfaire cette contrainte il suffit de fixer quelques valeurs propres à zéro, c'est-à-dire $0 \in \text{spect}(A_i - L_i C_i)$. Si cette contrainte est satisfaite les matrices de mélange Π_i vérifiant l'équation (2.37) sont choisies tel que les colonnes de la matrice Π_i engendrent l'espace nul de $(A_i - L_i C_i)$.
- Une contrainte de type Lyapunov : pour garantir la convergence globale de la dynamique de l'erreur restante

$$\epsilon_{k+1} = (A_i - L_i C_i) \epsilon_k \quad (2.38)$$

Pour calculer les matrices de gain L_i du récepteur satisfaisant les deux contraintes nous proposons la procédure suivante :

- ◇ Pour $i = 1, \dots, s$ calculer les bases $\begin{bmatrix} M_i \\ N_i \end{bmatrix}$ à partir de l'espace nul de $\begin{bmatrix} A_i' & C_i' \end{bmatrix}$
- ◇ Pour $i = 1, \dots, s$, construire les matrices

$$\mathcal{M}_i = \begin{bmatrix} \underbrace{M_i, \dots, M_i}_{m \text{ fois}} & \underbrace{I, \dots, I}_{(n-m) \text{ fois}} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N}_i = \begin{bmatrix} \underbrace{N_i, \dots, N_i}_{m \text{ fois}} & \underbrace{I, \dots, I}_{(n-m) \text{ fois}} \end{bmatrix}$$

- ◇ Calculer les matrices de gain de récepteur L_i en utilisant le théorème suivant.

Théorème 2.4 (*Birouche et al., 2005*) *S'il existe des matrices symétriques S_i , des matrices $\Psi_{\mathcal{M}_i}, \Psi_{\mathcal{N}_i}$ solution de :*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_i \Psi_{\mathcal{M}_i} + (\mathcal{M}_i \Psi_{\mathcal{M}_i})^T - S_i & (\mathcal{M}_i \Psi_{\mathcal{M}_i})^T A_i - (\mathcal{N}_i \Psi_{\mathcal{N}_i})^T C_i \\ A_i^T (\mathcal{M}_i \Psi_{\mathcal{M}_i}) - C_i^T (\mathcal{N}_i \Psi_{\mathcal{N}_i}) & S_j \end{bmatrix} > 0 \quad (2.39)$$

$\forall (i, j) \in Q \times Q$, alors le récepteur (2.30) peut garantir la synchronisation globale de l'erreur, les matrices gain sont données par

$$L_i = ((\mathcal{M}_i \Psi_{\mathcal{M}_i})^T)^{-1} (\mathcal{N}_i \Psi_{\mathcal{N}_i})^T$$

Ce théorème assure une convergence globale de l'erreur de synchronisation indépendamment de l'information u_k . La preuve du théorème est identique à celle du théorème (2.3) en utilisant la dualité observateur/commande.

Rappelons que l'information u_k est peut être reconstruite à condition que la synchronisation soit réalisée, c'est-à-dire $x^t = x^r$. L'équation de sortie vérifie

$$y_k = C_i(x_k^t + \alpha \Pi_i u_k) = y_k^r + \alpha C_i \Pi_i u_k$$

si la matrice $C_i \Pi_i$ carré et inversible, l'information \hat{u}_k est donc donnée par

$$\hat{u}_k = (\alpha C_i \Pi_i)^{-1} (y_k^t - y_k^r) \quad (2.40)$$

qui coïncide avec l'information originale u_k .

2.8 Exemples d'application

Tout au long de ce paragraphe, nous allons chaque fois illustrer les méthodes et résultats par deux exemples d'applications empruntés à (Daafouz and Millerioux, 2004). Les deux exemples représentent deux systèmes hybrides chaotiques. Le premier est caractérisé par un espace d'état composé de deux régions. L'espace d'état associé au deuxième exemple est subdivisé en quatre régions. Les motivations de notre choix des exemples sont doubles. D'une part, ces exemples sont souvent cités dans la littérature concernant les systèmes hybrides chaotiques. D'autre part, l'aspect hybride important causé par les commutations rapides entre les sous-systèmes.

2.8.1 Exemple de synchronisation sans message

2.8.1.1 Exemple.1

Dans ce premier exemple, l'émetteur est décrit par :

$$x_{k+1}^2 = \begin{cases} x_{k+1}^1 = 0.89x_k^2 + 0.5x_k^3 \\ -ax_k^1 + 0.89x_k^2 & \text{si } x_k^1 < 6 \\ \lambda x_k^1 + 0.89x_k^2 - 6(a + \lambda) & \text{si } x_k^1 \geq 6 \\ x_{k+1}^3 = -0.1x_k^1 + 0.9x_k^3 \end{cases} \quad (2.41)$$

avec $x_k^t = [x_k^1, x_k^2, x_k^3]^T$.

C'est un système PWA de la forme (2.29) avec :

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0.89 & 0.5 \\ h_i & 0.89 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0.9 \end{bmatrix}, i = 1, 2; \quad h_1 = -a, h_2 = \lambda,$$

$$B_1 = [0 \ 0 \ 0]^T, B_2 = [0 \ -6(a + \lambda) \ 0]^T$$

Les deux régions de l'espace d'état sont séparées par un hyper plan d'équation $Hx = 6$ avec $H = [1 \ 0 \ 0]$. La simulation du système avec $a = 1.28$, $\lambda = 1.99$, met en évidence, après une phase transitoire, le comportement chaotique de l'émetteur. L'évolution de la trajectoire de l'espace d'état est donnée dans la figure (2.2) et permet de voir l'allure de l'attracteur chaotique.

La notion d'attracteur implique une convergence de la trajectoire obtenue vers un ou plusieurs points de l'espace. Aussi, quelles que soient les conditions initiales appliquées au système et après un temps suffisamment long, la trajectoire se concentre dans une partie de l'espace d'état.

La figure (2.3) montre l'indicateur de région représentant l'évolution de l'état discret. Il sera transmis simultanément avec la sortie y au récepteur.

Le calcul des gains du récepteur est obtenu en résolvant l'ensemble de LMIs (2.32). Ces dernières sont solvables pour $C_1 = C_2 = [1 \ 0 \ 0]$:

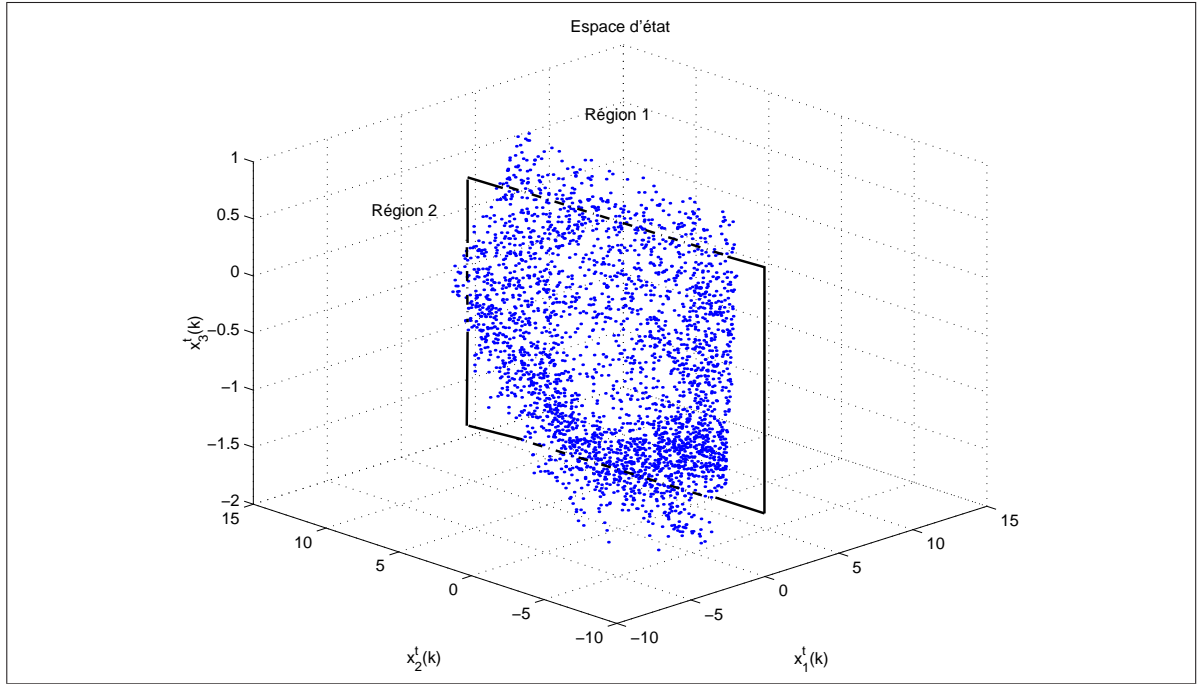


FIG. 2.2 – Evolution de la trajectoire dans l'espace d'état

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0.5590 \\ -0.8599 \\ 0.1500 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0.5616 \\ 2.4121 \\ 0.1512 \end{bmatrix}$$

La figure (2.4) montre l'évolution des trois composantes de l'erreur de synchronisation $\varepsilon_k = x^t - x^r$ et l'allure de la fonction poly-quadratique $\varepsilon_k^T \mathcal{P}(\xi_k) \varepsilon_k$.

La convergence de l'erreur d'estimation confirmant la synchronisation.

2.8.1.2 Exemple 2

Nous traiterons dans cet exemple, le cas d'une synchronisation du chaos où l'émetteur est représenté par un système PWA pour lequel l'espace d'état est divisé en quatre régions.

Dans chaque région la dynamique est régie par l'équation :

$$x_{k+1}^t = A_i x_k^t + B_i$$

où

$$x_k^t = [x_k^{t,1} \quad x_k^{t,2}]^T$$

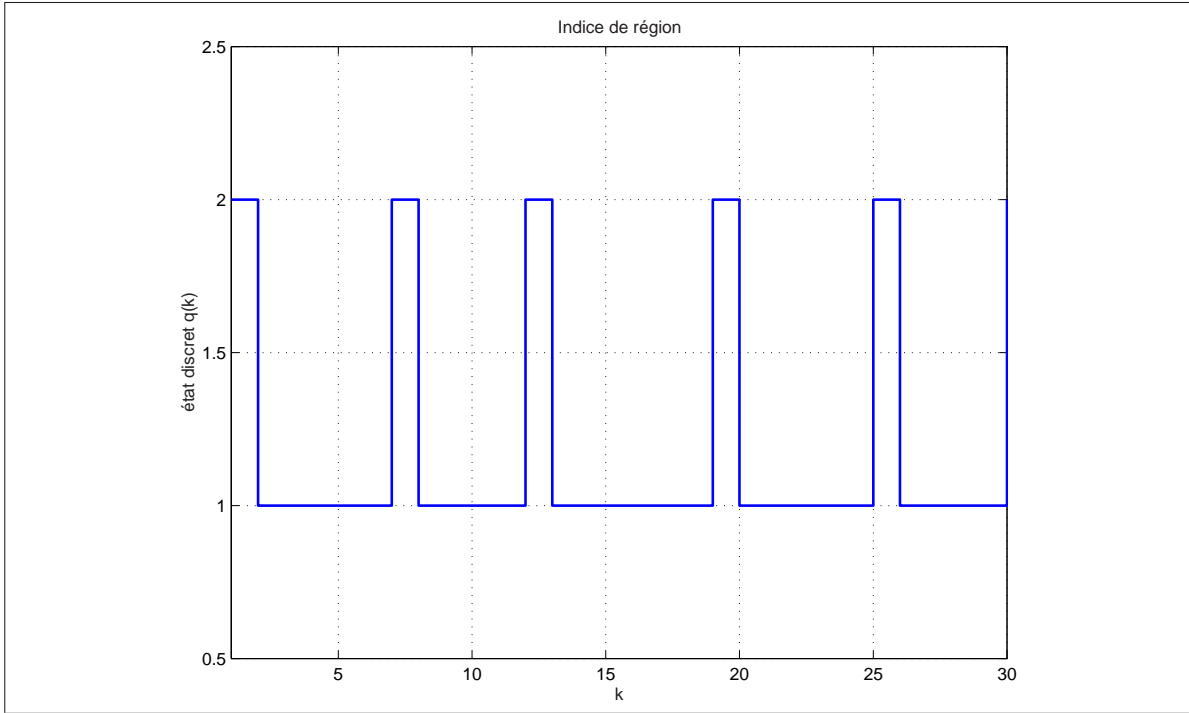


FIG. 2.3 – Evolution de l'état discret (indice de région)

Les différentes matrices sont données par :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{1+b} \\ \frac{2}{1+a} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-2}{1+b} \\ \frac{-2}{1-a} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-2}{1-b} \\ \frac{-2}{1+a} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{1-b} \\ \frac{2}{1-a} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \frac{1-b}{1+b} \\ \frac{1-a}{1+a} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1+b}{1+b} \\ \frac{1+a}{1-a} \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} \frac{1+b}{1-b} \\ \frac{-1+a}{1+a} \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} \frac{-1-b}{1-b} \\ \frac{-1-a}{1-a} \end{bmatrix}$$

Les quatres régions sont définies par :

\mathcal{X}_1 , l'ensemble $\{x_k^t | -1 \leq x_k^{t,1} < a \text{ et } x_k^t | -1 \leq x_k^{t,2} < b\}$;

\mathcal{X}_2 , l'ensemble $\{x_k^t | a \leq x_k^{t,1} < 1 \text{ et } x_k^t | -1 \leq x_k^{t,2} < b\}$;

\mathcal{X}_3 , l'ensemble $\{x_k^t | -1 \leq x_k^{t,1} < a \text{ et } x_k^t | b \leq x_k^{t,2} < 1\}$;

\mathcal{X}_4 , l'ensemble $\{x_k^t | a \leq x_k^{t,1} < 1 \text{ et } x_k^t | b \leq x_k^{t,2} < 1\}$.

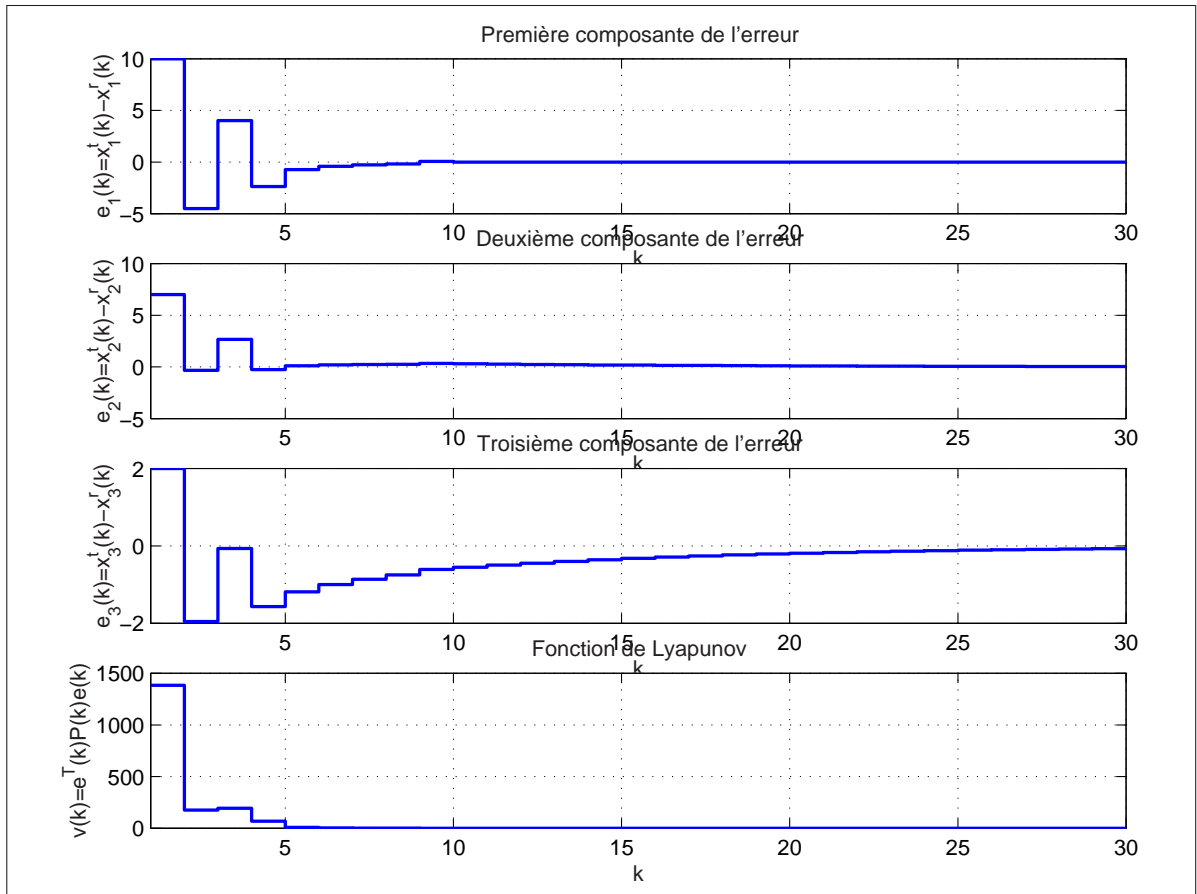


FIG. 2.4 – L'évolution des trois composantes de l'erreur de synchronisation et la fonction de de Lyapunov

avec $a = -0.48$, $b = 0.56$.

L'évolution de la trajectoire dans l'espace d'état est donnée sur la figure (2.5) et permet de voir l'allure de l'attracteur chaotique.

L'évolution de l'état discret est schématisée sur la figure (2.6). Nous remarquons que l'état discret change souvent de mode.

Les LMIs (2.32) sont solvables pour $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = [1 \ 0]$ et les gains L_i sont

$$L_1 = \begin{bmatrix} -0.0000 \\ 3.8462 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} -0.0000 \\ -1.3514 \end{bmatrix}, \quad L_3 = \begin{bmatrix} -0.0000 \\ -3.8462 \end{bmatrix}, \quad L_4 = \begin{bmatrix} -0.0000 \\ 1.3514 \end{bmatrix}$$

La figure (2.7) montre la convergence des deux composantes du vecteur d'erreur d'esti-

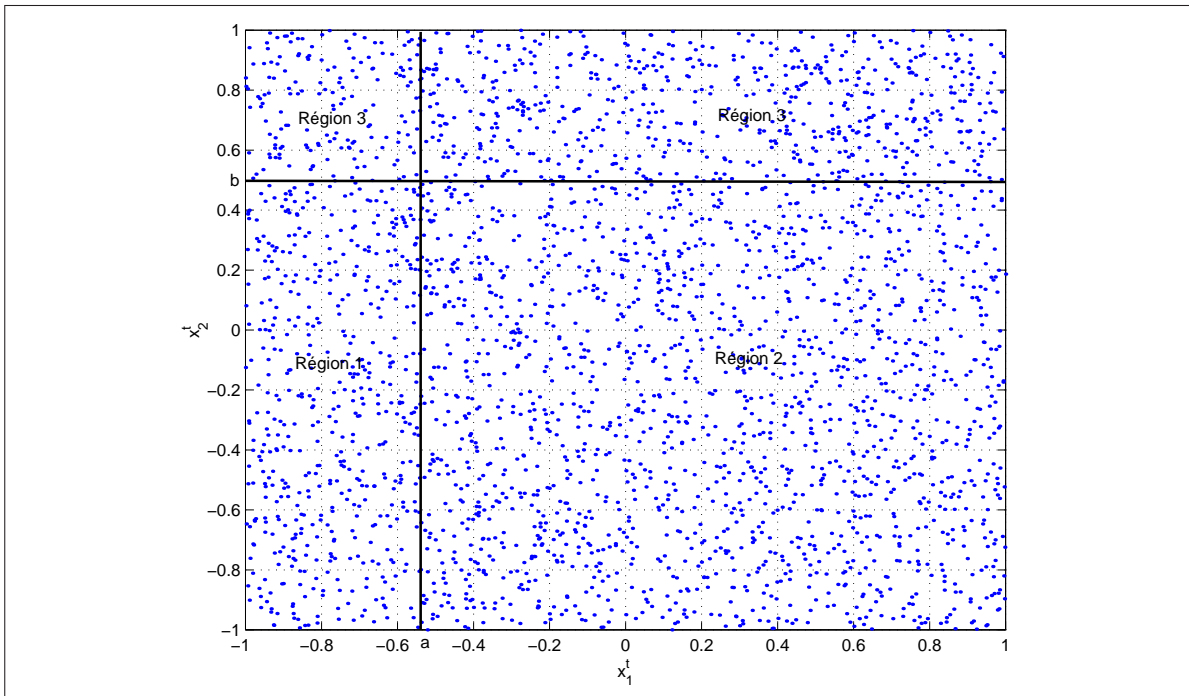


FIG. 2.5 – Evolution de la trajectoire dans l'espace d'état

mation et l'allure de la fonction de Lyapunov confirmant ainsi la synchronisation.

2.8.2 Exemple d'application à synchronisation avec message incorporé

Nous allons illustrer le schéma de synchronisation du chaos avec message incorporé sur les deux exemples que nous avons utilisé précédemment. L'information à masquer est une sinusoïde $u_k = 0.01 \sin(2\pi f k)$ avec $f = 0.08$. Le facteur de graduation est choisi comme $\alpha = 1$.

2.8.2.1 Exemple.1

Pour $C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, l'approche proposée dans (Daafouz and Millerioux, 2004) échoue. Cependant, la procédure que nous avons proposée donne une solution. Les LMI

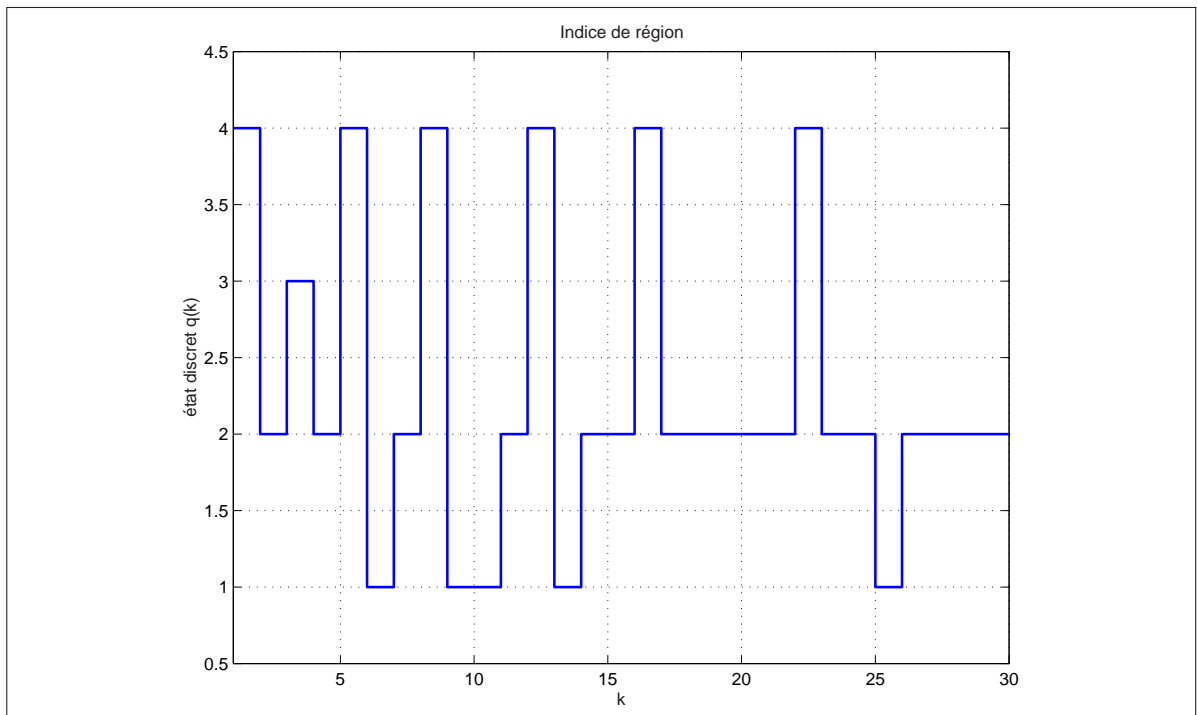


FIG. 2.6 – Evolution de l'état discret (indice de région)

(2.39) sont faisables et les matrices gain L_i et les matrices mélange Π_i sont :

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0.5967 \\ -0.8352 \\ 0.1734 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 0.5967 \\ 2.4348 \\ 0.1734 \end{bmatrix}, \Pi_1 = \Pi_2 = \begin{bmatrix} 0.8632 \\ 0.4314 \\ 0.2622 \end{bmatrix}$$

La figure (2.8) montre la convergence des trois composantes de l'erreur de synchronisation ε_k , et de la fonction de Lyapunov. Ceci confirme la synchronisation indépendamment de l'information ajoutée.

L'information originale u_k (trait plein) et l'information récupérée \hat{u}_k (trait discontinu) et l'erreur sur information $u_k - \hat{u}_k$ sont schématisés sur la figure (2.9) attestant que le message original est correctement reconstruit.

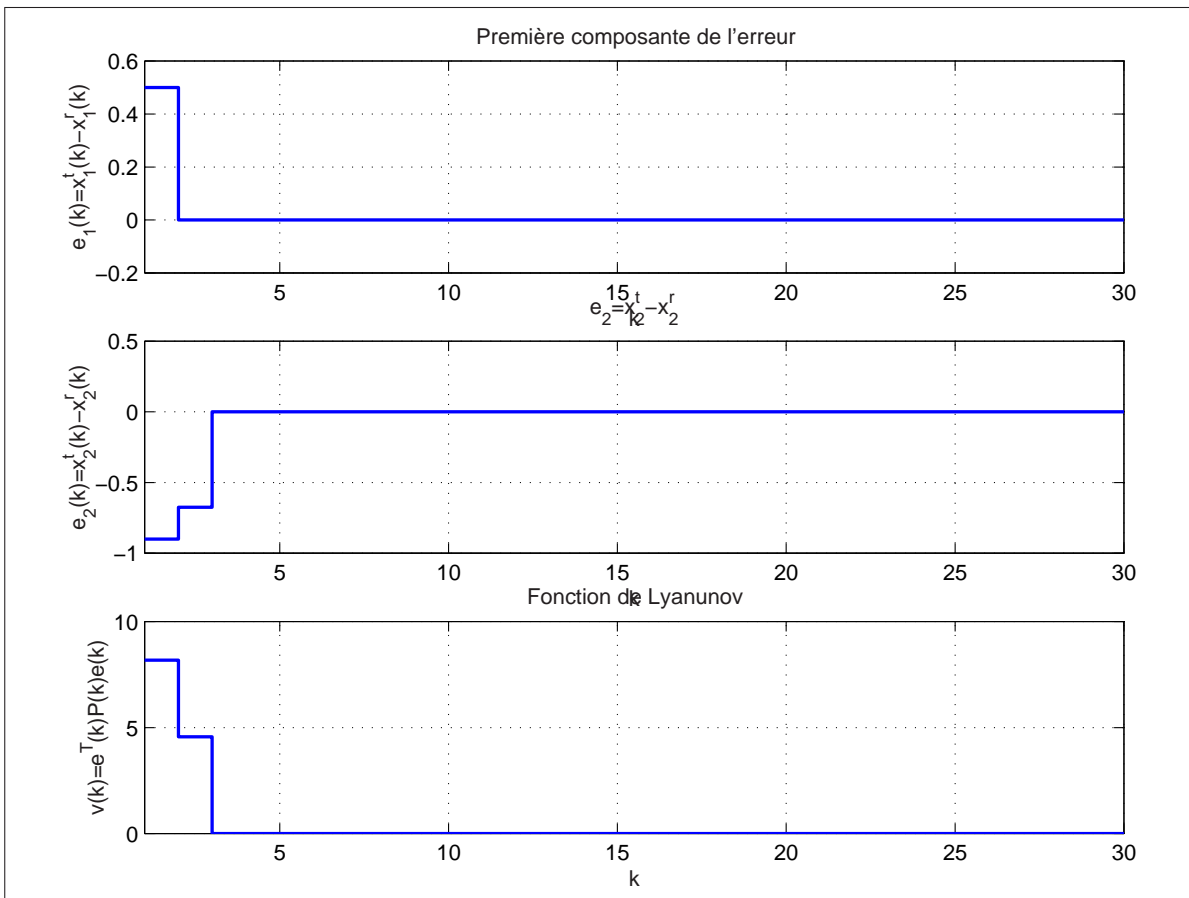


FIG. 2.7 – Evolution de deux composantes de l'erreur de synchronisation et l'allure de la fonction de Lyapunov

2.8.2.2 Exemple.2

Avec le système chaotique la procédure proposée dans (Daafouz and Millerieux, 2004) échoue. En utilisant l'approche d'observateur avec placement de pôles, pour $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = [0 \ 1]$ nous trouvons :

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 3.8462 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -1.3514 \end{bmatrix}, L_3 = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -3.8462 \end{bmatrix}, L_4 = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 1.3514 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3 = \Pi_4 = \begin{bmatrix} -1.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

La figures (2.10) montre la convergence des deux composantes de l'erreur de synchronisation ε_k , et l'allure de la fonction de Lyapunov confirment la synchronisation.

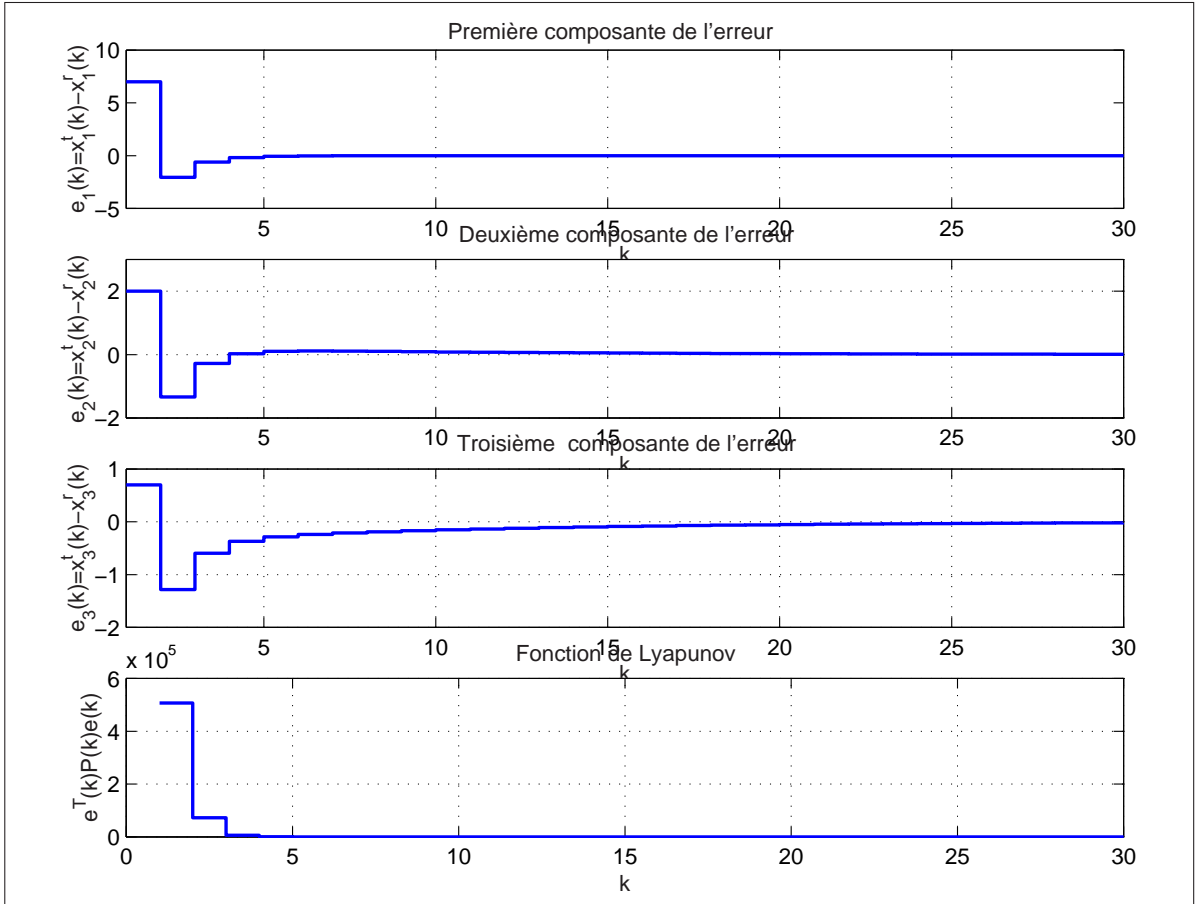


FIG. 2.8 – Evolution des trois composantes de l'erreur de synchronisation et la fonction de Lyapunov associée à l'erreur

Le message original (trait plein) et message reconstruit (trait discontinu) sont montrés en haut de la figure (2.11). L'erreur de reconstruction du message est montrée sur en bas de la même figure attestant que le message original est correctement reconstruit.

D'un point de vue pratique, un démonstrateur réalisant la transmission temps réel de données multimedia via Internet et utilisant cette technique a été mis au point au CRAN (Millerioux et al., 2003). Ce démonstrateur atteste de la qualité et de la rapidité de la synchronisation. L'inconvénient principal de la solution proposée ici est lié à la transmission au récepteur de l'indice de mode i indiquant le sous-ensemble linéaire actif i . La question importante est l'applicabilité de cette méthode et sa capacité à résister aux attaques. Il serait intéressant d'une part de savoir s'il peut avoir des procédures algébriques permettant de casser le système de cryptage. D'une autre part, d'affranchir de la connaissance de

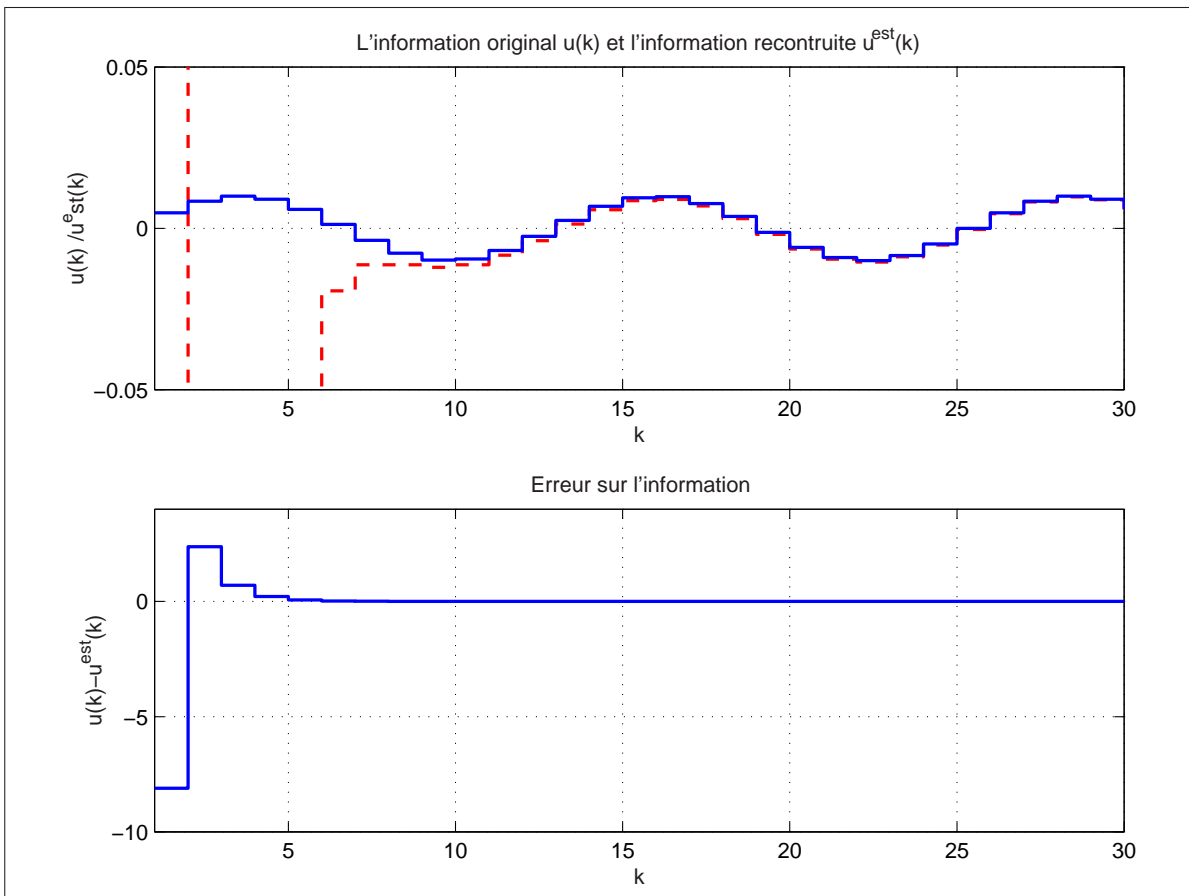


FIG. 2.9 – Message original, message reconstruit et l'erreur de reconstruction du message

l'état discret en construisant des observateurs hybrides capables de fournir une estimation conjointe de l'état continu et de l'état discret.

2.9 Conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressé à la synthèse d'un observateur pour la classe de système SLS en temps discret lorsque l'état discret est connu à chaque instant. Nous avons vu tout d'abord quelques résultats sur la stabilité quadratique et la stabilité polyquadratique des systèmes SLS. Ensuite, les approches de synthèse d'observateur commuté basées sur ces résultats de stabilité ont été présentées. Grâce à la technique de placement de pôles, en plus la contrainte de la stabilité de l'erreur d'observation, une contrainte de placement peut être ajoutée dans les conditions de la synthèse de l'observateur.

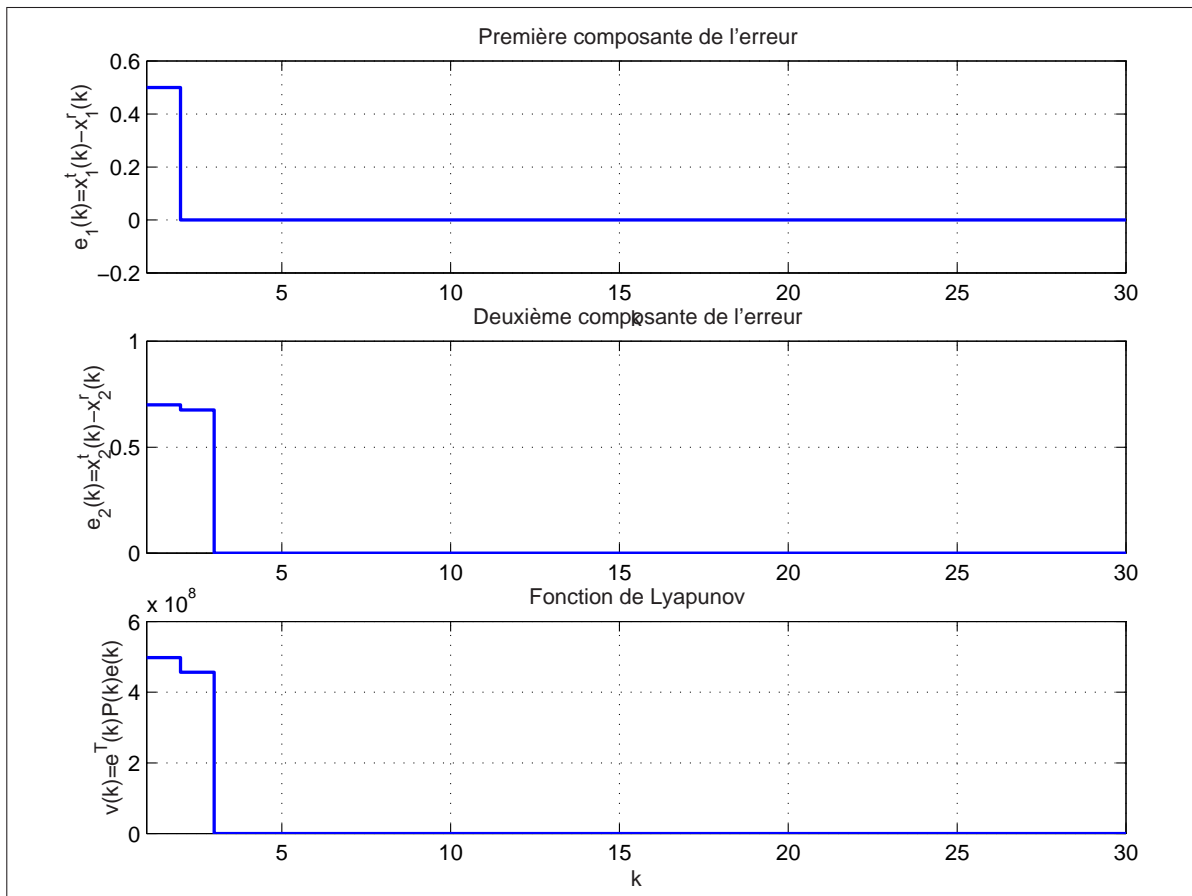


FIG. 2.10 – Evolution des deux composantes de l'erreur de synchronisation et la fonction de Lyapunov associée à l'erreur

Au cours de ce chapitre, nous nous sommes longuement penché sur l'intérêt de l'approche stabilité et placement de pôles pour la synthèse d'un observateur commuté à entrée inconnue particulier applicable au problème de la synchronisation du chaos. Nous avons montré comment se servir des observateurs commuté avec contraintes de placement de pôles pour résoudre le problème de la synchronisation du chaos avec message dans le but de la sécurité des communications. On a constaté que certains exemples non résolus avec l'approche [Daafouz and Millerioux \(2004\)](#) ont pu l'être avec notre méthode.

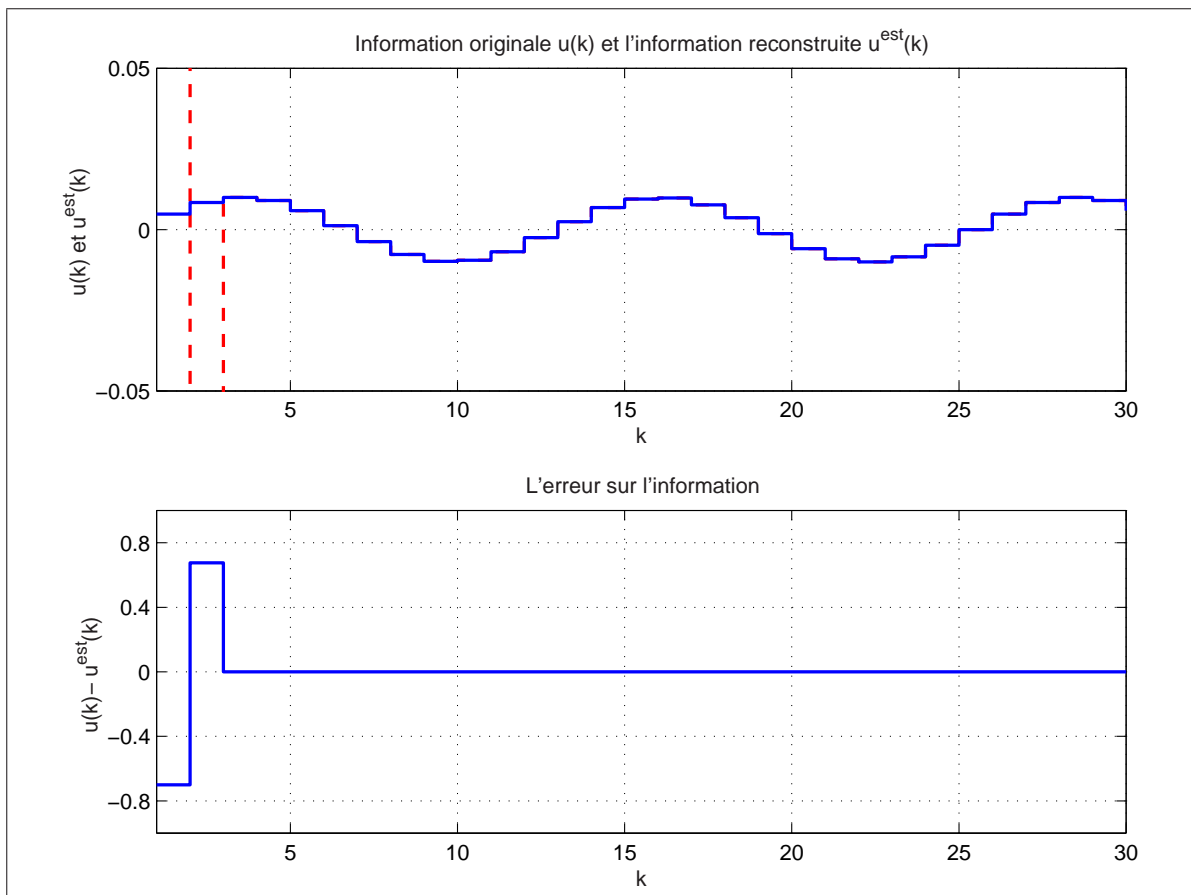


FIG. 2.11 – Message original, message reconstruit et l'erreur de reconstruction du message

3

Synthèse d'observateur hybride pour une
classe de systèmes linéaires par morceaux

Sommaire

3.1	Introduction	87
3.2	Position du problème	88
3.3	Observateur discret : détection du mode actif	89
3.3.1	Cas de systèmes linéaires par morceaux sans entrée	91
3.3.2	Généralisation au cas non autonome	100
3.4	Observateur hybride	102
3.4.1	Observateur continu : estimation hors-ligne	103
3.4.2	Observateur continu : estimation en-ligne	104
3.5	Exemple illustratif	107
3.6	Conclusion	110

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent le problème d'estimation d'état pour les SDH est réduit uniquement à l'estimation de l'état continu sous l'hypothèse de l'état discret disponible à la mesure à chaque instant. Cette hypothèse est justifiée lorsque l'évolution de l'état discret est régie par des entrées discrètes contrôlables et mesurables. C'est le cas de la classe des systèmes hybrides SLS où les commutations sont déterminées suivant une stratégie de commande discrète appropriée au système. Cependant, lorsque les commutations dépendent uniquement des variables internes du système, l'hypothèse de la connaissance de l'état discret n'est plus justifiée. C'est le cas de la classe de systèmes hybrides PWA où l'évolution de l'état discret est régie par une loi de commutation dépendante de l'état continu du SDH.

Dans ce chapitre, nous allons aborder le problème de l'estimation simultanée de l'état discret et de l'état continu lorsque uniquement les entrées et les sorties continues sont disponibles à la mesure. L'étude sera centrée sur une classe de systèmes hybrides PWA en temps discret composée d'un ensemble de sous-systèmes linéaires LTI avec des commutations autonomes. Le schéma d'observation que nous allons proposer combine la méthode de reconstruction de la loi de commutation et l'observateur affine par morceaux. Nous présenterons dans la première partie du chapitre une méthode pour la détection des instants de commutation et l'identification de l'état discret. Cette méthode se base sur la reconstruction de loi de commutation dépendante d'état comme une combinaison linéaire des sorties prises sur un horizon de temps sous l'hypothèse de temps de séjour minimum dans chaque mode. Cette méthode nous permettra de s'affranchir de la connaissance de l'état discret lors de la synthèse de l'observateur continu. Dans la deuxième partie du chapitre, nous allons nous intéresser au calcul des gains de l'observateur continu selon deux configurations possibles, attribution de gain en-ligne, où l'observateur et le système hybride fonctionnent simultanément, attribution de gain hors-ligne, où l'observateur hybride fonctionne avec un retard par rapport au système réel.

3.2 Position du problème

Nous considérons ici la classe des SDH en temps discret décrits par l'équation suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_i x_k + B_i u_k & \text{si } Hx_k \in [a_i, a_{i+1}] \\ y_k = C_i x_k & \text{pour } i = 1, 2, \dots, s \end{cases} \quad (3.1)$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, y_k est le vecteur de sortie et u_k est le vecteur de commande avec k l'indice de l'échantillon. $q_k = i$ est l'indice du mode actif, il représente aussi l'état discret du système hybride, il prend valeur dans un ensemble fini $i \in Q = \{1, 2, \dots, s\}$. A_i est la matrice dynamique, B_i est la matrice d'entrée et C_i est la matrice de sortie. Chaque triplet de matrices (A_i, B_i, C_i) caractérise la dynamique du système dans une région de l'espace d'état, qu'on appellera sous-système (mode) S_i . s est le nombre de régions (aussi le nombre de sous-système). Les commutations sont spécifiées par une forme linéaire Hx_k avec H de dimension $(1 \times n)$. La loi de commutation définit ainsi une partition de l'espace d'état où les différentes régions sont séparées par des hyper-plans de type $Hx_k = a_i$, avec $a_i \in \mathbb{R}$ et $a_1 < \dots < a_i < \dots$. Sur la figure (3.1), on donne un exemple de partition de l'espace d'état d'un système PWA de dimension deux.

On souhaite construire un observateur hybride pour la classe de système PWA (3.1) capable de fournir une évaluation de mode en cours d'évolution $\hat{q}_k \in Q$, et une estimation du vecteur d'état \hat{x}_k , pour cela l'observateur hybride que nous proposons se compose de deux parties *observateur discret* et *observateur continu* comme indiqué sur la figure (3.2).

L'observateur discret : en utilisant les données entrée-sortie continues disponibles sur un horizon de taille N ($y_k, u_k, k = 1, \dots, N$), une évaluation de l'indice du mode actif (l'état discret) $\hat{q} = i \in \{1, 2, \dots, s\}$ est calculée.

L'observateur continu : c'est un observateur affine par morceaux (ou un observateur commuté) dont la dynamique dépend de l'information \hat{q}_k transmise par l'observateur discret. En utilisant les données u_k, y_k et \hat{q}_k , l'observateur continu construit \hat{x} l'évaluation

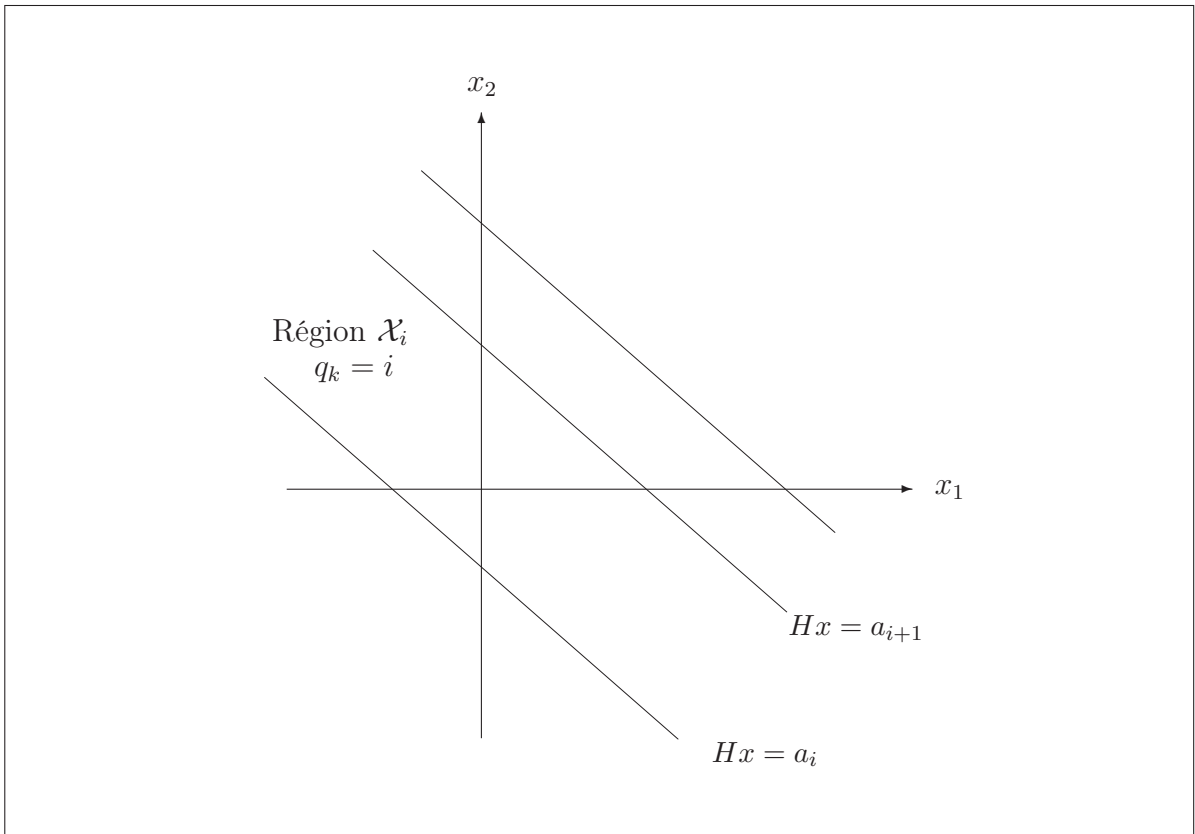


FIG. 3.1 – Exemple d’une partition de l’espace d’état du à la loi de commutation Hx du vecteur d’état continu tout en garantissant sa convergence vers le vecteur d’état x .

Les deux parties de l’observateur seront décrites dans les paragraphes suivants. Nous allons commencer d’abord par la méthode de détection du mode actif.

3.3 Observateur discret : détection du mode actif

Dans cette section, nous proposons une méthode permettant la détection des instants de commutation et d’identification du mode en cours d’évolution en analysant les données entrées-sorties sur un horizon de temps. Pour se faire dans un premier temps, nous considérons les systèmes sans entrée. Dans le prochain paragraphe, nous généraliserons la méthode pour les systèmes avec entrée. Avant d’expliquer la méthode nous introduisons d’abord quelques hypothèses.

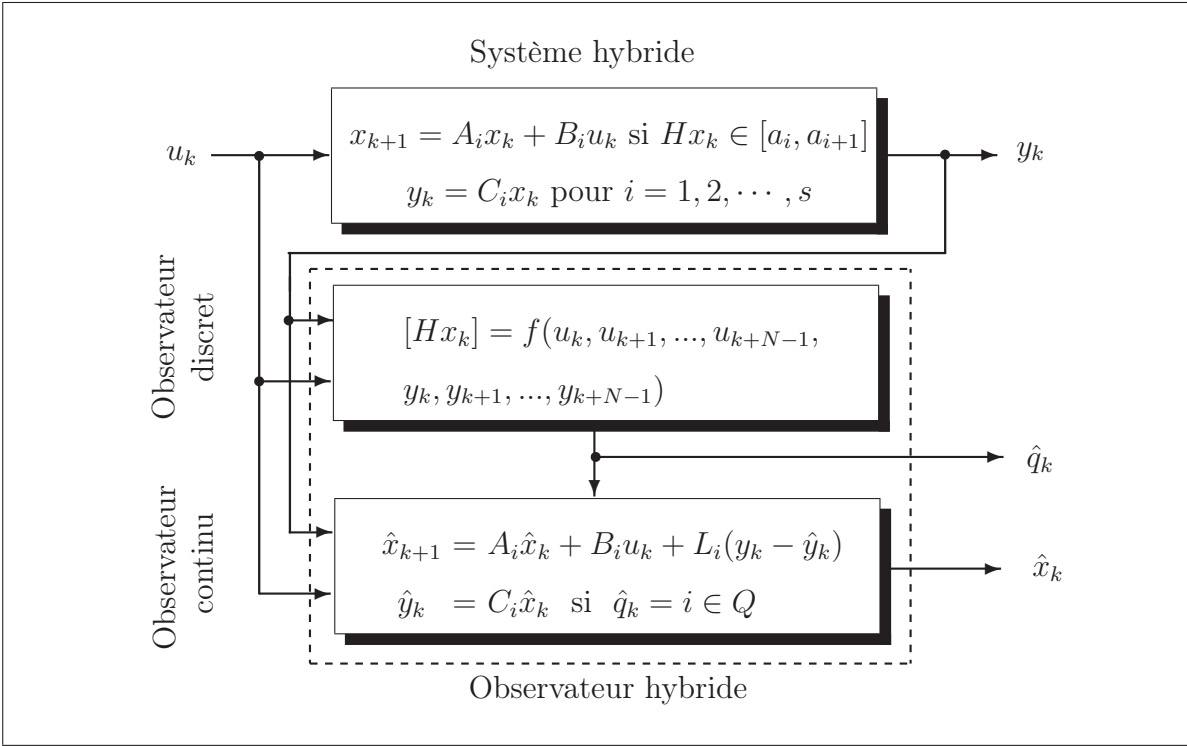


FIG. 3.2 – Structure de l'observateur hybride proposé

Hypothèse 3.1 (*Observabilité de chaque sous-système et temps minimum de séjour*)

Nous supposons que :

- 1- Pour $i = 1, 2, \dots, s$, tous les sous-systèmes $S_i = (A_i, C_i)$ sont observables.
- 2- Le système hybride (3.1) a des commutations avec un temps de séparation supérieur ou égal à une certaine valeur $\mu > 0$.

La première hypothèse est relative à l'observabilité intrinsèque de chaque sous-système. Elle est obligatoire à partir du moment où nous cherchons à construire un observateur qui fonctionne quelle que soit la loi de commutation donc où le système peut rester indéfiniment dans un mode. La deuxième hypothèse concerne le temps de séjour minimum dans chaque mode (dwell time). Son emploi sera justifié lors de l'analyse des conditions d'application de la méthode de détection que nous allons proposer. On traitera d'abord le cas autonome.

3.3.1 Cas de systèmes linéaires par morceaux sans entrée

Considérons la classe des systèmes PWA en temps discret autonome décrits par l'équation (3.1) avec $B_i = 0$.

Les instants de commutation et l'indice du sous-système actif sont déterminés suivant la valeur de la quantité Hx_k . Si on arrive à exprimer cette dernière, on peut facilement détecter lequel des sous-systèmes est en cours d'évolution. Vu qu'on dispose uniquement des sorties y_k sur un horizon fini, l'idée la plus simple est d'exprimer Hx_k en fonction de ces sorties disponibles. Cette idée a été étudiée dans (Benali et al., 2004) dans le cas temps continu : il est possible d'exprimer la loi de commutation $Hx(t)$ comme combinaison linéaire de la sortie $y(t)$ et de ses dérivées successives sans aucune hypothèse. La transposition au cas temps discret, consistera donc à exprimer Hx_k comme combinaison linéaire des échantillons de la sortie y_k pris sur un horizon de temps de longueur N . Nous cherchons à calculer la valeur de $Hx_k = \sum_{i=1}^n h_i x_k^i$ par la relation suivante :

$$[Hx_k]_\alpha = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j y_{k+j} \quad (3.2)$$

où $\alpha = [\alpha_0 \ \alpha_1 \ \dots \ \alpha_{N-1}]$ est le vecteur des coefficients de pondération. La notation $[Hx_k]_\alpha$ désigne le résultat obtenu par ce calcul.

Le problème est donc de trouver ces coefficients α tel que :

$$Hx_k = [Hx_k]_\alpha$$

Il existe une différence importante entre le cas temps discret et le cas temps continu. La transposition dans le cas temps discret ne peut pas être effectuée sans l'hypothèse additionnelle relative au temps de séjour minimum dans chaque sous-système. Pour expliquer cette différence calculons l'expression des dérivées successives $y^{(j)}, j = 1, \dots, N - 1$ du système PWA en temps continu suivant

$$\dot{x}(t) = A_i x(t)$$

$$y(t) = C_i x(t)$$

Les dérivés sont exprimées comme $y^{(j)}(t) = C_i A_i^j x(t)$. Il est clair qu'en temps continu le calcul de $Hx(t)$ met toujours en jeu le même mode. Dans le cas temps discret les échantillons $y_{k+j}, j = 0, \dots, N-1$ ne correspondent pas nécessairement au même mode. C'est le cas où une ou plusieurs commutations se produisent sur l'intervalle $[k, \dots, k+N-1]$. Dans cette situation, il est impossible de trouver α vérifiant l'équation (3.2). Pour résoudre ce problème, l'idée est de :

1. trouver α indépendamment du mode q telle que l'équation (3.2) est vérifiée tant que l'état discret reste constant sur l'intervalle $[k, \dots, k+N-1]$.
2. détecter la commutation lorsqu'elle arrive.
3. trouver le nouveau mode après commutation.

D'abord, étudions le cas où l'état discret reste constant sur un intervalle $[k, \dots, k+N-1]$. Dans cette situation, les sorties correspondent toutes au même mode, c'est une situation semblable au cas temps continu. Pour chaque mode (exemple i) : il existe

$$\alpha^i = \left[\alpha_0^i \ \alpha_1^i \ \dots \ \alpha_{N-1}^i \right]$$

tel que

$$Hx_k = [Hx_k]_{\alpha^i} = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j^i y_{k+j} = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j^i C_i A_i^j x_k$$

Ce résultat découle directement de l'hypothèse de l'observabilité de chaque mode. Puisque le mode i n'est pas connu, cette relation nous permet de calculer s valeurs a priori différentes de Hx_k , donc on ne peut pas conclure. Si par contre il existe un jeu de coefficients α^c tel que

$$\alpha^1 = \alpha^2 = \dots = \alpha^s = \alpha^c$$

on peut alors calculer la valeur de Hx_k sans connaître le mode actif. Dans ce cas l'expression H est écrite sous la forme suivante :

$$H = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j^c C_1 A_1^j = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j^c C_2 A_2^j = \dots = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j^c C_s A_s^j \quad (3.3)$$

3.3.1.1 Méthode calcul des coefficients

Avant d'indiquer la taille N de fenêtre d'observation et la méthode de calcul du vecteur de coefficients α^c , rappelons quelques notions liées au problème de l'observabilité des systèmes à commutation (Vidal et al., 2002). La matrice suivante, appelée la matrice commune d'observabilité d'ordre k , est introduite :

$$G_k = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_s \\ C_1 A_1 & C_2 A_2 & \cdots & C_s A_s \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_1 A_1^{k-1} & C_2 A_2^{k-1} & \cdots & C_s A_s^{k-1} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

L'indice global d'observabilité de notre système est défini comme

$$\mu = \max_k (\text{rang}(G_k))$$

Comme nous l'avons vu au chapitre-1 l'indice d'observabilité global μ renseigne sur l'observabilité globale du système hybride. Le système est dit observable si $\mu = s \times n$. Dans le cas où on dispose d'informations supplémentaires sur la loi de commutation, nous pouvons trouver des systèmes PWA observables même lorsque l'indice global d'observabilité est $\mu < n \times s$ (Benali et al., 2004).

On définit G_μ par :

$$G_\mu = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_s \\ C_1 A_1 & C_2 A_2 & \cdots & C_s A_s \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_1 A_1^{\mu-1} & C_2 A_2^{\mu-1} & \cdots & C_s A_s^{\mu-1} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Le lemme suivant donne les conditions nécessaires pour trouver α^c indépendamment de l'état discret.

Lemme 3 (*Birouche et al., 2006*) Il existe $\alpha^c = [\alpha_0^c \ \alpha_1^c \ \dots \ \alpha_{\mu-1}^c]$ tel que : $Hx_k = [Hx_k]_{\alpha^c}$, où

$$[Hx_k]_{\alpha^c} = \sum_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j^c y_{k+j} \quad (3.6)$$

pour tout $q \in Q$ restant constant sur $[k, \dots, k + \mu - 1]$ si et seulement si

$$\text{rang} \left(\begin{bmatrix} G_\mu^T & L^T \end{bmatrix} \right) = \mu \quad (3.7)$$

avec

$$L = \underbrace{[H \ H \ \dots \ H]}_{s \text{ fois}}$$

si tout $S_i = (A_i, C_i)$ est observable $\mu \leq n \times s$.

Preuve du lemme :

Si : si $\text{rang} \left(\begin{bmatrix} G_\mu^T & L^T \end{bmatrix} \right) = \mu$ alors L est une combinaison linéaire des lignes de la matrice G_μ , et il existe $[\alpha_0^c \ \alpha_1^c \ \dots \ \alpha_{\mu-1}^c]$ tel que

$$H = \sum_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j^c C_i A_i^j \quad \forall i \in Q \quad (3.8)$$

alors $[Hx_k]_{\alpha^c} = \sum_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j^c C_i A_i^j x_k = \sum_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j^c y_{k+j}$ où y_{k+j} est la sortie du sous-système S_i .

Seulement si : s'il existe $[\alpha_0^c \ \alpha_1^c \ \dots \ \alpha_{\mu-1}^c]$ tel que

$$Hx_k = \sum_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j^c y_{k+j}, \forall x_k$$

où y_{k+1} est la sortie du sous-système S_i (q reste constant sur $[k, \dots, k + \mu - 1]$), alors

$$Hx_k = \sum_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j^c C_i A_i^j x_k, \forall x_k, \forall i \in Q$$

et

$$H = \sum_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j^c C_i A_i^j, \forall i \in Q \quad (3.9)$$

et L est une combinaison linéaire des lignes de G_μ . Si $\mu = n \times s$, $\forall H$, il existe toujours α_c vérifiant la relation (3.9).

□

Il suffit donc de considérer un horizon de longueur μ au lieu de N . A partir de l'équation (3.9), les coefficients

$$\alpha^c = \left[\alpha_0^c \ \alpha_1^c \ \cdots \ \alpha_{\mu-1}^c \right]$$

sont obtenus donc par la résolution de l'équation algébrique linéaire suivante :

$$G_\mu^T \begin{pmatrix} \alpha_0^c \\ \alpha_1^c \\ \cdots \\ \alpha_{\mu-1}^c \end{pmatrix} = L^T \quad (3.10)$$

En conclusion, ayant les coefficients α^c , la quantité $[Hx_k]_{\alpha^c}$ (exprimée comme une combinaison linéaire des sorties y_k avec les coefficients α^c) peut être évaluée par :

$$[Hx_k]_{\alpha^c} = \sum_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j^c y_{k+j} \quad (3.11)$$

Rappelons que cette relation n'est valable que si les μ échantillons y_k proviennent bien du même mode. Cela signifie que μ est considéré comme le temps minimum de séjour dans

chaque mode. Deux instants de commutation doivent être séparés par au moins d'une durée équivalente à μ justifiant ainsi l'hypothèse (3.1-2) posée au début du paragraphe. Pour illustrer ce fait, considérons un exemple d'un système PWA avec les matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.05 & 1 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, nous avons $\mu = 4$.

En haut de la figure (3.3), on montre l'allure de la vraie courbe Hx_k (trait continu) et $[Hx_k]_{\alpha^c}$ (trait discontinu) calculé en utilisant l'équation (3.11). L'indice du mode actif est indiqué en bas de la même figure.

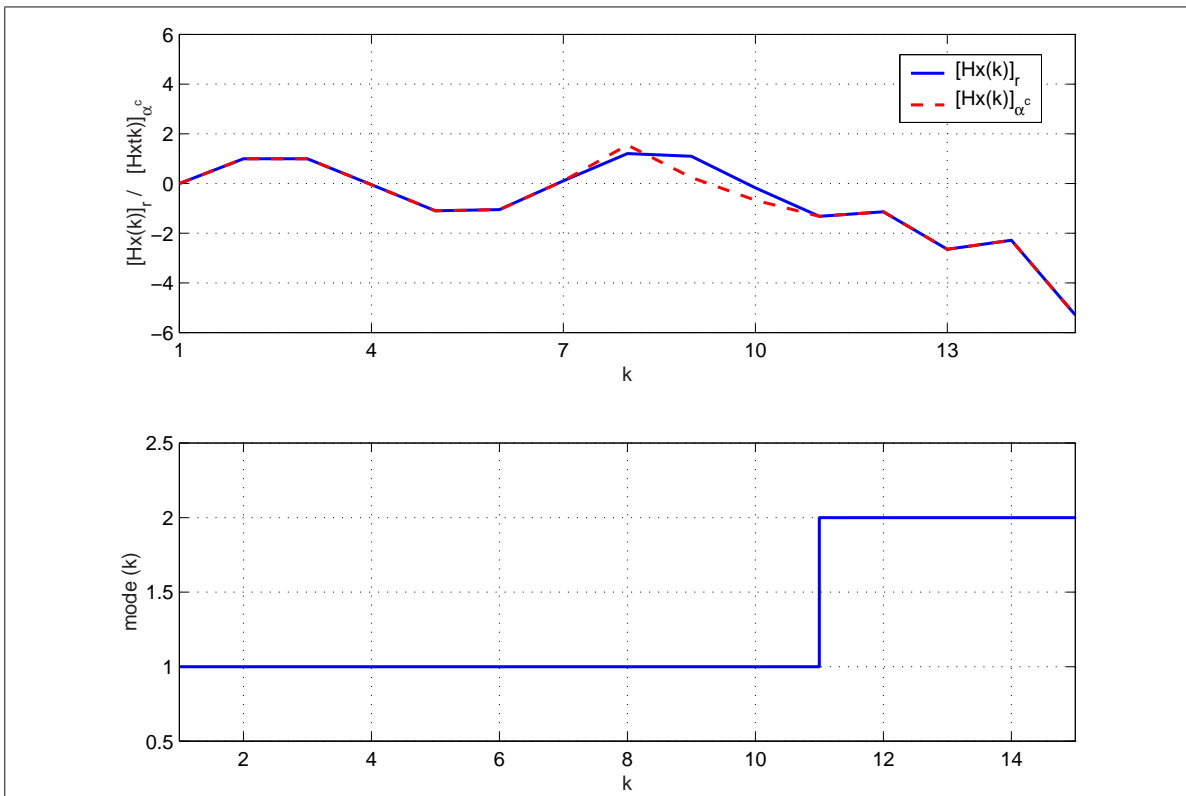


FIG. 3.3 – La vraie valeur Hx_k , la valeur estimée $[Hx_k]_{\alpha^c}$ et l'indice du mode actif

Sur cet exemple, nous remarquons que lorsque les échantillons proviennent d'un même

mode (pour $1 < k < 8$) $Hx_k = [Hx_k]_{\alpha^c}$. Pour $k = 8, 9, 10$, on constate que $Hx_k \neq [Hx_k]_{\alpha^c}$ à cause de la commutation qui s'est produite à l'instant $k = 11$. En effet, sur l'intervalle $[8, 10]$ la fenêtre de mesure de taille μ englobe des échantillons provenant de deux modes différents, dans ce cas l'équation (3.11) ne garantit pas que $[Hx_k]_{\alpha^c}$ coïncide avec la vraie valeur de Hx_k . Lors d'une commutation, Hx_k est mesurée avec $(\mu - 1)$ échantillons d'un mode i (mode avant commutation), et un échantillon d'un autre mode j (mode après commutation). Si cette valeur de Hx_k n'appartient pas à l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, on détecte l'instant de commutation. Dans le cas contraire, il y a une ambiguïté dans la détection de l'instant de commutation. Il est à remarquer qu'une telle situation ne se produit pas dans le cas temps continu.

3.3.1.2 Solution proposée

Pour enlever l'ambiguïté dans la détection des instants de commutation, nous proposons d'utiliser en plus du coefficients α^c commun à tous les sous-systèmes des coefficients distincts

$$\alpha^i = \left[\alpha_0^i \ \alpha_1^i \ \cdots \ \alpha_{\mu-1}^i \right]$$

pour les sous-systèmes composants le système PWA. En effet, si $S_i = (A_i, C_i)$ est observable alors x_k est une combinaison linéaire des sorties $y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+\mu-1}$ alors Hx_k est aussi combinaison linéaire de $y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+\mu-1}$, alors il existe

$$\alpha^i = \left[\alpha_0^i \ \alpha_1^i \ \cdots \ \alpha_{\mu-1}^i \right], \quad \text{pour tout } i \in Q$$

tel que

$$[Hx_k]_{\alpha^i} = \sum_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j^i y_{k+j} = \sum_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j^i C_i A_i^j x_k \quad (3.12)$$

alors

$$H = \sum_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j^i C_i A_i^j \quad (3.13)$$

3.3.1.3 La procédure de détection

Pour détecter le mode actif, nous utilisons les échantillons disponibles sur une fenêtre glissant de longueur μ comme indiquée sur la figure (3.4).

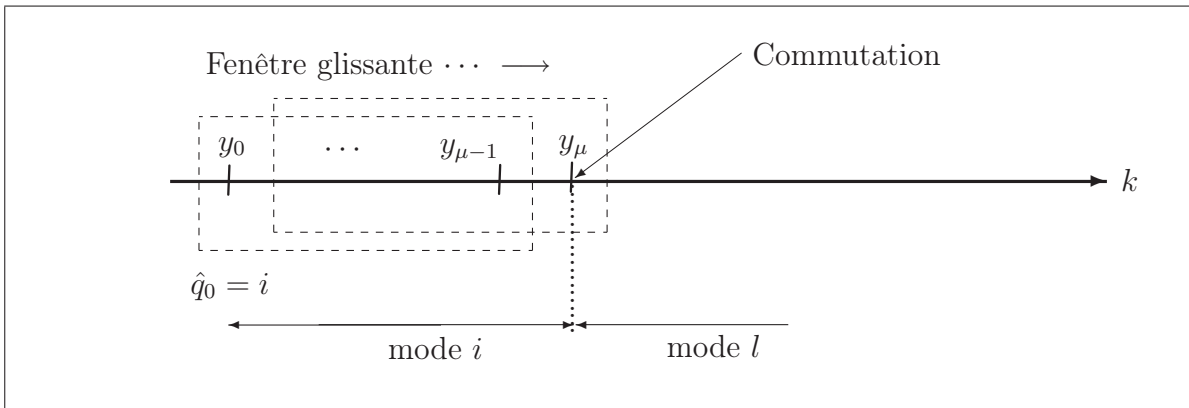


FIG. 3.4 – Illustration de la méthode de détection utilisant une fenêtre glissant

Théorème 3.3.1.1 *Posons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

1. $S_i, i = 1, \dots, s$ observable.
2. $\text{rang} \left(\begin{bmatrix} G_{\mu}^T & L^T \end{bmatrix} \right) = \mu$.
3. Le système a des commutations avec un temps de séparation supérieur ou égal à $\mu + n$ (hypothèse de temps de séjour minimum).

Alors on peut obtenir l'état discret avec une observation de durée $\mu + n$.

Preuve du théorème

Nous donnerons la preuve du théorème sur l'intervalle $[0, N]$, $N \geq \mu + n$. Quand une commutation est détectée à l'instant $k \in [0, N]$, nous allons réinitialiser la procédure de détection.

Analysons les données de la sortie prises sur une fenêtre glissante de taille μ .

$[Hx_0]_{\alpha_c}$ confirme que l'état discret est $q_0 = i$ sur $[0, \mu - 1]$ grace au lemme 3 et à l'hypothèse de temps de séjour.

Examinons maintenant $[Hx_1]_{\alpha_c}$.

Cas 1 : $[Hx_1]_{\alpha_c} \neq [Hx_1]_{\alpha_{q_0}}$ indique qu'une commutation s'est produite à μ .

Cas 2 : $[Hx_1]_{\alpha_c} = [Hx_1]_{\alpha_{q_0}}$.

Supposant qu'une commutation (de $q_0 = i$ à $q_1 = l \neq i$) s'est produite à l'instant $t_c = \mu$ alors

$$[Hx_1]_{\alpha^i} = \sum_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j^i y_{j+1} = \sum_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j^i C_i A_i^j x_1 + (\alpha_{\mu-1}^i C_l A_l A_i^{\mu-2} - \alpha_{\mu-1}^i C_i A_i^{\mu-1}) x_1$$

et

$$[Hx_1]_{\alpha^c} = \sum_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j^c y_{j+1} = \sum_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j^c C_i A_i^j x_1 + (\alpha_{\mu-1}^c C_l A_l A_i^{\mu-2} - \alpha_{\mu-1}^c C_i A_i^{\mu-1}) x_1$$

Nous avons

$$\sum_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j^i C_i A_i^j x_k = \sum_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j^c C_i A_i^j x_k \quad \forall k$$

donc vrai pour x_1 alors

$$[Hx_1]_{\alpha^c} - [Hx_1]_{\alpha^i} = (\alpha_{\mu-1}^c - \alpha_{\mu-1}^i)(C_l A_l - C_i A_i) A_i^{\mu-2} x_1 = 0$$

Par conséquent, on ne peut pas déterminer l'instant de commutation du mode i vers le mode l si :

1. $\alpha_{\mu-1}^c = \alpha_{\mu-1}^i$
ou
2. $(C_l A_l - C_i A_i) = 0$
ou
3. $A_i^{\mu-2} x_1 \in \ker(C_l A_l - C_i A_i)$

Les deux premières situations peuvent être évitées en ajoutant des hypothèses additionnelles. Cependant, la dernière situation est inévitable car elle ne dépendant que de l'état x_1 , arbitraire a priori. Analysons le cas où cette situation se reproduit lorsqu'on calcule $[Hx_2]_{\alpha_c} = [Hx_2]_{\alpha_{q_0}}$ c'est-à-dire :

$$A_i^{\mu-2} x_1 \in \ker(C_l A_l^2 - C_i A_i^2)$$

D'une manière générale, l'instant de commutation n'est pas détecté instantanément si :

$$\begin{aligned}
 A_i^{\mu-2}x_1 &\in \ker(C_l A_l - C_i A_i) \\
 A_i^{\mu-2}x_1 &\in \ker(C_l A_l^2 - C_i A_i^2) \\
 &\dots \\
 A_i^{\mu-2}x_1 &\in \ker(C_l A_l^{n-1} - C_i A_i^{n-1})
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Ces égalités signifient que les sorties des modèles i et l sont identiques pour l'état initial x_1 , il n'est donc évidemment pas possible de détecter la commutation.

L'hypothèse d'observabilité de chaque sous-système garantit que cette situation ne peut pas persister au delà de l'ordre n :

$$A_i^{\mu-2}x_1 \notin \ker(C_l A_l^n - C_i A_i^n)$$

Par conséquent, la situation la plus extreme qu'on peut rencontrer est celle où la commutation se produit à l'instant μ et son identification se fera à l'instant $\mu + n$. \square

3.3.2 Généralisation au cas non autonome

En suivant la même procédure décrite pour les systèmes PWA sans entrée, une quantité Q_k est exprimée comme une combinaison linéaire des échantillons de sortie pris sur un horizon de temps μ :

$$Q_k = \sum_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j y_{k+j}$$

Sous forme vectorielle :

$$Q_k = \alpha Y_k \tag{3.15}$$

où $\alpha = [\alpha_0 \ \alpha_1 \ \dots \ \alpha_{\mu-1}]$ et $Y_k = [y_k \ y_{k+1} \ \dots \ y_{k+\mu-1}]^T$.

Pour chaque mode, nous avons :

$$Y_k = \mathcal{O}_i x_k + \Gamma_i U_k \tag{3.16}$$

où \mathcal{O}_i est la matrice d'observabilité de la forme

$$\mathcal{O}_i = \begin{bmatrix} C_i \\ C_i A_i \\ \vdots \\ C_i A_i^{\mu-1} \end{bmatrix}$$

et Γ_i est une matrice de Toeplitz définie comme :

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ C_i B_i & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ C_i A_i^{\mu-2} B_i & \cdots & C_i B_i & 0 \end{bmatrix}$$

et $U_k = \begin{bmatrix} u_k & u_{k+1} & \cdots & u_{k+\mu-1} \end{bmatrix}^T$.

En remplaçant l'équation (3.16) dans (3.15), on obtient :

$$Q_k = \alpha \mathcal{O}_i x_k + \alpha \Gamma_i U_k$$

Nous avons

$$\alpha \mathcal{O}_i = \sum_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j C_i A_i^j$$

si $\alpha = \alpha^c$, à partir de l'équation (3.10), $\alpha^c \mathcal{O}_i = H$ alors

$$Q_k = H x_k + \alpha^c \Gamma_i U_k$$

En utilisant (3.15) avec $\alpha = \alpha^c$, la loi de commutation $H x_k$ donnée par :

$$H x_k = \alpha^c Y_k + \beta_i^c U_k \tag{3.17}$$

où $\beta_i^c = -\alpha^c \Gamma_i$.

Pour chaque sous-système, la quantité $H x_k$ est exprimée comme combinaison linéaire des échantillons d'entrée et de sortie pris sur un horizon de temps μ . Le terme β_i^c atteste que s différentes évaluations de $H x_k$ sont calculées. Par conséquent on ne peut pas conclure.

Comme dans le cas sans entrée, les différents coefficients α^i sont utilisés. Pour chaque sous-système, la quantité Hx_k est évaluée de deux manières différentes, $[Hx_k]_{\alpha^c, \beta_i^c}$ et $[Hx_k]_{\alpha^i, \beta^i}$ données par :

$$\begin{cases} [Hx_k]_{\alpha^c, \beta_i^c} = \alpha^c Y_k + \beta_i^c U_k \\ [Hx_k]_{\alpha^i, \beta^i} = \alpha^i Y_k + \beta^i U_k \end{cases} \quad (3.18)$$

où $\beta^i = -\alpha^i \Gamma_i$.

Le sous-système actif \hat{q}_k et l'instant de commutation t_c sont donnés comme pour le cas autonome en analysant les quantités $[Hx_k]_{\alpha^c, \beta_i^c}$, $[Hx_k]_{\alpha^i, \beta^i}$.

3.4 Observateur hybride

Dans ce paragraphe nous allons analyser l'observateur continu en considérant le système complet obtenu en composant le système hybride et l'observateur hybride. L'observateur continu est un observateur affine par morceaux de la forme :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} = A_i \hat{x}_k + B_i u_k + L_i (y_k - \hat{y}_k) \\ \hat{y}_k = C_i \hat{x}_k \quad \text{si } \hat{q}_k = i \in Q \end{cases} \quad (3.19)$$

où l'état discret estimé \hat{q} est donné par l'observateur discret. Pour chaque état discret \hat{q}_k estimé par l'observateur de mode actif, on associe un quadruplet $(A_{\hat{q}_k}, B_{\hat{q}_k}, C_{\hat{q}_k}, L_{\hat{q}_k})$ pour caractériser la dynamique de l'observateur.

Suivant l'état discret estimé et le vrai état discret, nous avons $(s \times s)$ situations possibles de type $(q_i, \hat{q}_i) \in Q \times Q$. Pour chaque (q_k, \hat{q}_k) , la dynamique de l'erreur d'estimation est donnée par :

$$\varepsilon_{k+1} = (A_i - L_i C_i) \varepsilon_k \quad \text{si } q_k = \hat{q}_k = i \quad (3.20a)$$

$$\varepsilon_{k+1} = (A_i - L_i C_i) \varepsilon_k + v_k \quad \text{si } q_k = j, \hat{q}_k = i \quad (3.20b)$$

avec

$$v_k = ((A_j - A_i) - L_i(C_j - C_i))x_k + (B_j - B_i)u_k \quad (3.21)$$

L'équation (3.20a) décrit la situation où le mode actif est correctement identifié, la deuxième équation (3.20b) est celle où le mode fourni par le bloc d'évaluation du mode est différent du vrai mode actif.

Le problème de la synthèse d'observateur continu consiste à l'analyse de stabilité de l'erreur d'estimation (3.20) et le calcul des matrices gains L_i . Nous allons étudier deux schémas d'estimation :

1. **Estimation hors-ligne** : L'observateur discret analyse les données $[(u_1, y_1), \dots, (u_{t_f}, y_{t_f})]$ et donne une estimation de l'état discret $\hat{q}_k = q_k \forall k \in [1, \dots, t_f]$. L'observateur continu utilise l'état discret exacte q_k pour construire \hat{x}_k .
2. **Estimation en-ligne** : L'observateur hybride et le système hybride fonctionnent simultanément. Dans ce cas les données entrée/sortie du système hybride sont analysées en temps réel.

3.4.1 Observateur continu : estimation hors-ligne

Pour analyser le cas d'une estimation hors-ligne, considérons un instant de temps $t_f > \mu + n$. Les informations entrée-sortie sont disponibles pour tout $k \leq t_f$. En utilisant une fenêtre glissante de taille μ l'observateur discret analyse ces données et fournit \hat{q}_k une évaluation du mode à tout instant k . La méthode que nous avons proposée dans les sections précédentes garantit, sous certaines conditions, que l'état discret $\hat{q}_k = q_k$. Cette information est utilisée par l'observateur (3.19). La dynamique de l'erreur d'estimation

est régie par l'équation suivante :

$$\varepsilon_{k+1} = (A_i - L_i C_i) \varepsilon_k \quad (3.22)$$

La synthèse de l'observateur continu revient à calculer les gains L_i garantissant la stabilité asymptotique de l'erreur d'estimation. Pour cela, nous pouvons utiliser les approches de synthèse d'observateur commuté lorsque l'état discret est connu. L'approche basée sur la stabilité poly-quadratique est utilisée. Elle consiste à trouver des matrices définies positives S_i , des matrices G_i pour $i = 1, \dots, s$ telles que :

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_i & G_i^T A_i - F_i^T C_i \\ A_i^T G_i - C_i^T F_i & S_j \end{bmatrix} > 0 \quad (3.23)$$

avec $j = 1, \dots, s$. Les matrices L_i sont données par

$$L_i = (G_i^T)^{-1} F_i^T$$

3.4.2 Observateur continu : estimation en-ligne

Dans ce paragraphe, nous allons considérer le cas d'une estimation en-ligne où l'observateur hybride et le système hybride fonctionnent simultanément. Dans ce cas les données entrée-sortie fournies par le système hybride sont traitées en temps réel par l'observateur hybride. Rappelons que pour détecter le mode actif, nous avons utilisé les échantillons entrée-sortie disponibles sur un horizon de taille μ . Considérons une commutation qui parvient à l'instant de temps t_c , l'observateur discret détecte cette commutation au plus à l'instant $t_c + n$. Cependant le nouveau mode, après commutation, n'est au mieux identifié qu'à l'instant $t_c + \mu$ et au pire à $t_c + \mu + n$.

Dans le cas d'une évaluation en-ligne l'observateur continu fonctionne simultanément avec l'observateur discret, donc sur l'intervalle de retard $[t_c, t_c + \mu - 1]$, où l'observateur de mode ne peut pas fournir une estimation du mode, nous devons fournir une valeur à \hat{q}_k pour que la partie continue de l'observateur hybride puisse fonctionner. Différents arrangements

peuvent être étudiés sur d'intervalle $[t_c, t_c + \mu - 1]$ où l'état discret est inconnu et l'état continu ne peut pas être correctement calculé. Nous proposons de maintenir l'état discret avec sa dernière valeur connue à l'instant $t_c - 1$ et estimer l'état continu avec l'observateur conçu pour la valeur q_{t_c-1} . En effet, ce choix permet de montrer que l'erreur d'estimation (3.20) est bornée.

Pour établir une correspondance entre l'état discret estimé \hat{q}_i le triplet de matrice (A_i, B_i, C_i) , nous définissons un nouveau vecteur d'indicateur de mode estimé $\hat{\xi}_k = (\hat{\xi}_k^1, \hat{\xi}_k^2, \dots, \hat{\xi}_k^s)^T$ définie comme

$$\hat{\xi}_k^i = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{q}_k = i \\ 0 & \text{si } \hat{q}_k \neq i \\ \hat{\xi}_k^i = \hat{\xi}_{k-1}^i & \text{si } \hat{q}_k \text{ n'est pas disponible.} \end{cases} \quad (3.24)$$

L'erreur d'estimation est donnée par :

$$\varepsilon_{k+1} = \sum_{i=1}^s \hat{\xi}_k^i (A_i - L_i C_i) \varepsilon_k + v_k \quad (3.25)$$

Cette erreur ne peut être asymptotiquement stable à cause de la présence du terme v_k . En revanche, on pourrait calculer les gains L_i , tel que l'erreur d'estimation soit bornée. Dans ce cas nous pouvons utiliser la notion de stabilité entrée-état (Input-to-State stability).

Définition 3.4.1 (*Jiang et al., 1999*) (*Stabilité entrée-état*) *Le système (3.25) est dit entrée-état stable s'il existe une \mathcal{KL} fonction $\beta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et une \mathcal{K} fonction γ tel que, pour chaque séquence d'entrée v satisfaisant $\|v\|_\infty < \infty$ pour chaque $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^n$, la trajectoire à partir de la condition initiale ε_0 et l'entrée v satisfait :*

$$\|\varepsilon_k\| \leq \beta(\|\varepsilon_0\|, k) + \gamma(\|v\|_\infty) \quad \forall k \quad (3.26)$$

On peut montrer que le calcul des gains de l'observateur en résolvant les inégalités matricielles linéaires (3.23) garantit que l'erreur d'observation est entrée-état stable, c'est à dire qu'il existe une \mathcal{KL} fonction et un scalaire η strictement positif tel que :

$$\|\varepsilon_k\| \leq \beta(\|\varepsilon_0\|, k) + \eta\|v\|_\infty \quad \forall k \quad (3.27)$$

La borne η est obtenue en utilisant des majorations qui peuvent être très conservatives. Dans ce cas, l'écart entre cette borne et l'évolution réelle de l'erreur d'observation peut être très grand. C'est pourquoi on propose dans cette partie d'utiliser le résultat proposé dans (Daafouz et al., 2005) qui intègre une minimisation de cette borne. La méthode consiste résoudre le problème d'optimisation suivant pour le calcul des gains de l'observateur :

Min η

$$P_i = P_i^T$$

$$G_i = G_i^T$$

$$F_i, \eta$$

SOUS

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} - P_i & A_i^T G_i - C_i^T F_i^T & A_i^T G_i - C_i^T F_i^T \\ G_i A_i - F_i C_i & P_j - 2G_i & \mathbf{0} \\ G_i A_i - F_i C_i & \mathbf{0} & 2G_i - \eta \mathbf{1} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (3.28)$$

Si ce problème de minimisation admet une solution $P_i^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_i^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F_i^* \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $\eta^* \in]1, \infty[$, les gains L_i sont donnés par

$$L_i = G_i^{*-1} F_i^*$$

L'erreur d'estimation vérifie :

$$\|\varepsilon_k\| \leq \sqrt{\eta^*} \left(1 - \frac{1}{\eta^*}\right)^{k/2} \|\varepsilon_0\| + \eta^* \|v\|_\infty \quad (3.29)$$

Autrement dit, quand $k \rightarrow \infty$, l'erreur d'estimation est bornée $\|\varepsilon_k\| \leq \eta^* \|v\|_\infty$ si v_k est borné. Cela veut dire, compte de l'expression v_k (3.21), qu'il existe un $X > 0$ et un $U > 0$,

tel que $\|x_k\|_\infty \leq X$, $\|u_k\|_\infty \leq U$ et

$$\|v_k\|_\infty \leq V = \max_{i \neq j} \|((A_j - A_i) - L_i(C_j - C_i))\| X + \|(B_j - B_i)\| U \quad (3.30)$$

Pour analyser ce schéma d'observation considérons deux commutations successives qui parviennent aux instants de temps T_c^i et T_c^{i+1} . L'hypothèse de temps de séjour garantit que $T_c^{i+1} - T_c^i \geq \mu + n$. L'observateur discret identifie le mode après commutation à l'instant $T_c^i + \mu$. Donc sur l'intervalle $]T_c^i + \mu, T_c^{i+1}]$, le mode estimé vérifie $\hat{q} = q$ et la norme de l'erreur d'estimation vérifie (3.29) avec $v = 0$ (stabilité asymptotique de l'erreur). Cependant, sur l'intervalle $]T_c^{i+1}, T_c^{i+1} + \mu]$ le mode estimé $\hat{q} \neq q$ et la norme de l'erreur d'estimation vérifie (3.29) avec $v \neq 0$ (stabilité entrée-état de l'erreur). L'utilisation de (3.28) pour le calcul des gains de l'observateur garantit que l'erreur d'observation est bornée. Ainsi entre deux instants de commutation, nous avons deux situations distinctes : la première avec une convergence asymptotique et la deuxième avec une convergence entrée-état.

3.5 Exemple illustratif

Le schéma d'observation proposé est illustré ici, pour un système linéaire par morceaux où la dynamique est gouvernée par des équations du type (3.1), avec :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.80 & 0.22 \\ -0.22 & 0.80 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.79 & 0.29 \\ -0.29 & 0.50 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.20 \\ 0.20 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.50 \\ -0.50 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = C_2 = [1 \ 1], \quad H = [0 \ 1]$$

La fonction de commutation Hx_k est définie par :

$$\begin{cases} \text{Si } (0.2 \leq Hx_k \leq 10) & \text{Alors } i = 1 \\ \text{Sinon} & i = 2 \end{cases}$$

On trouve $\mu = 4$, et la résolution de l'équation (3.10), donne :

$$\alpha^c = \begin{bmatrix} -11.87 & 39.65 & -45.18 & 18.65 \end{bmatrix}$$

Dans le cas d'une estimation hors-ligne, le calcul des gains de l'observateur continu, se fait par la résolution des LMI (3.23), on obtient :

$$L_1 = \begin{bmatrix} -0.7660 \\ 2.5341 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0.5441 \\ 0.1030 \end{bmatrix}$$

Sur la figure (3.5), on trace, le mode réel (*) et le mode estimé (trait plein) et la norme de l'erreur d'estimation.

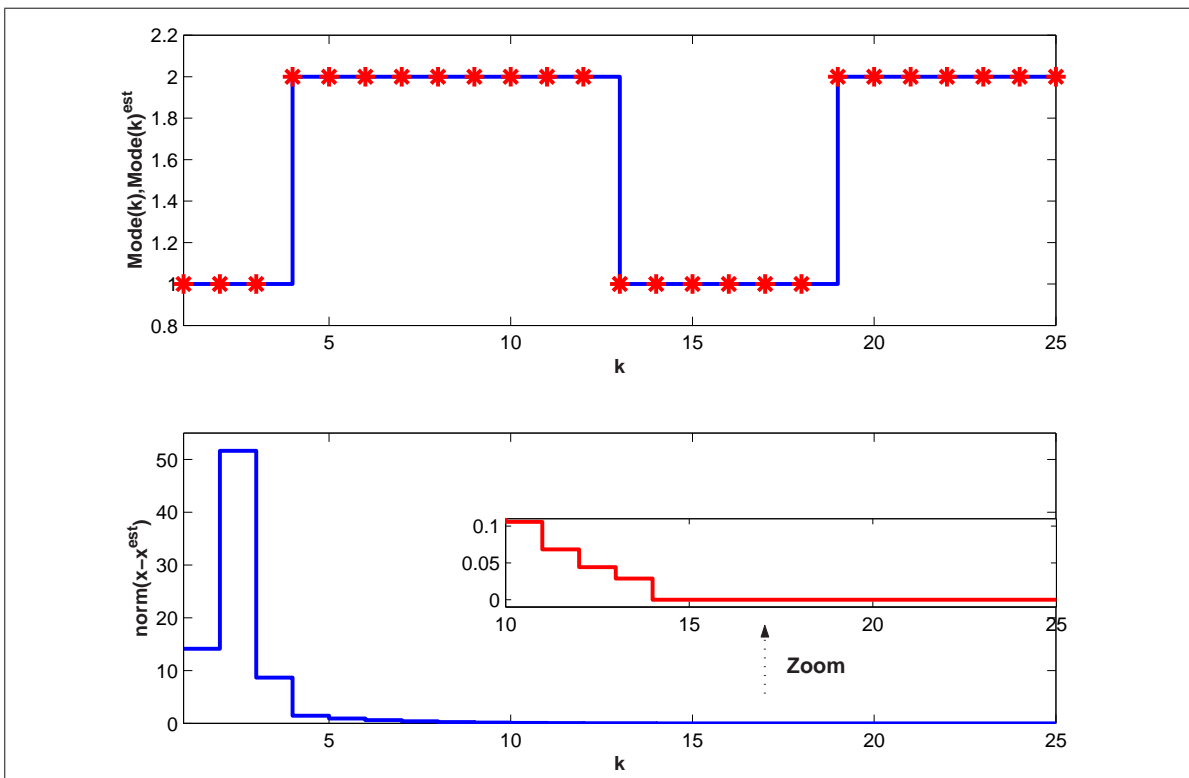


FIG. 3.5 – Cas d'estimation d'état hors-ligne : évaluation du mode (en haut) et la norme de l'erreur d'estimation (en bas).

On remarque que les modes sont parfaitement identifiés, et que la norme de l'erreur d'estimation décroît vers le zéro. Un zoom sur la figure nous montre qu'après le 15^{ème} échantillon la norme de l'erreur est quasiment nulle.

Dans le cas d'une estimation en-ligne, le calcul des gains de l'observateur continu, se fait en résolvant le problème d'optimisation (3.28), on obtient :

$$\eta^* = 11.3122, \quad L_1 = \begin{bmatrix} -0.0621 \\ 1.3035 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0.0524 \\ 0.8879 \end{bmatrix}$$

Le mode réel (trait plein) et le mode estimé (*) et la norme de l'erreur d'estimation sont schématisés sur la figure (3.6).

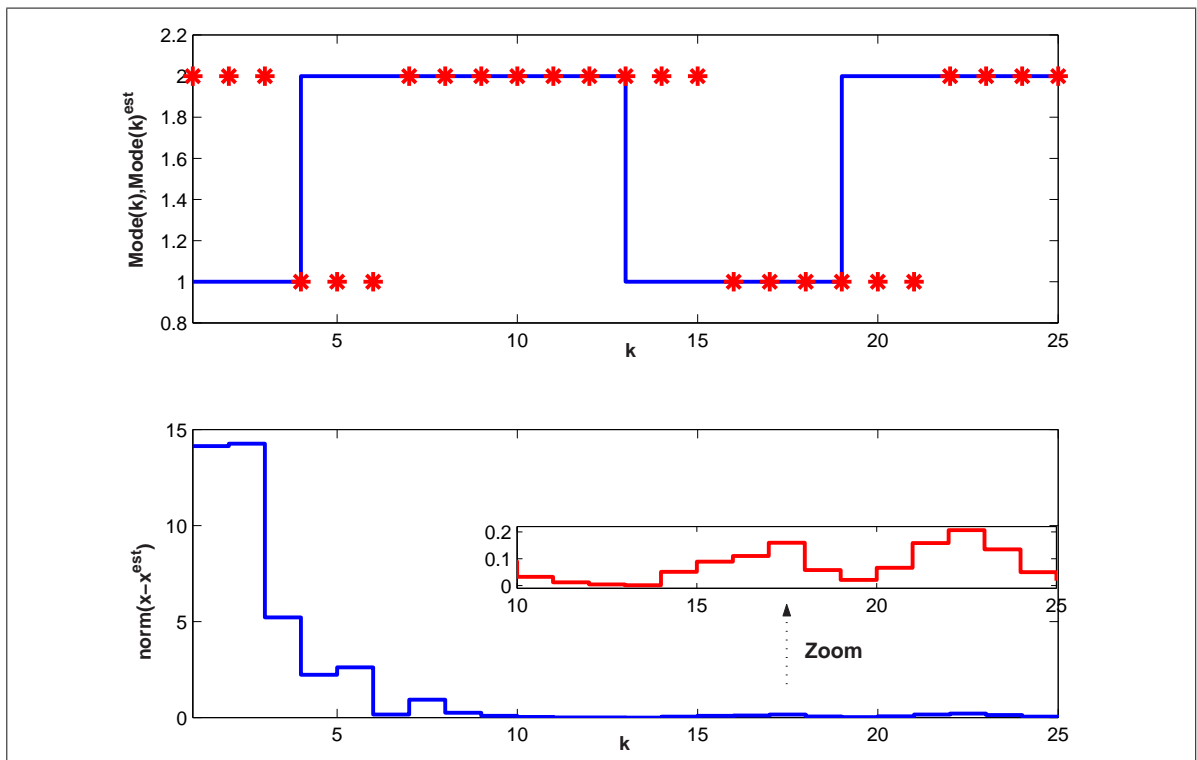


FIG. 3.6 – Cas d'estimation d'état en-ligne : évaluation du mode (en haut) et la norme de l'erreur d'estimation (en bas).

Au début de l'estimation $k = 1$, nous avons initialisé l'état discret estimé à $\hat{q}_k = 2$, $k = \{1, 2, 3\}$, or le vrai état discret est à $q_k = 1$. Il est évident que l'erreur d'estimation ne va converger au bout de ces 3 échantillons. Dès l'acquisition du 4^{ème} échantillon, l'observateur

discret fournit $\hat{q}_4 = q_4 = 1$ et la norme de l'erreur d'estimation décroît de 14 à 5. À l'instant $k = 5$ une commutation se produit donc $q_k = 2$. Cependant $\hat{q}_k = 1$: l'état discret estimé garde son ancienne valeur pour $k = \{5, 6, 7\}$, car sur cet intervalle l'observateur discret ne peut fournir aucune information sur le nouveau mode. Ainsi ce phénomène se répète dès qu'une commutation se produit. On constate qu'à partir de l'échantillon $k = 10$ (au bout de 2 commutations) la norme de l'erreur d'estimation tend à se stabiliser autour de zéro. Le zoom sur l'intervalle $[10, 25]$, montre que la norme de l'erreur d'estimation n'est pas nulle mais elle est bornée.

3.6 Conclusion

Ce chapitre constitue une partie importante de notre travail de thèse. Nous avons proposé une méthode de détection des instants de commutation et du mode actif pour un système hybride PWA en temps discret. Nous avons montré qu'une hypothèse sur le temps de séjour minimum chaque mode doit être considérée afin de pouvoir reconstruire une fonction de commutation dépendante d'état comme une combinaison linéaire des sorties prises sur un horizon de temps. Une telle hypothèse additionnelle n'est pas nécessaire dans le cas continu de temps. Cette étude a permis de proposer une solution pour s'affranchir de l'hypothèse de la connaissance de l'état discret pour la synthèse d'un observateur commuté. L'association de la méthode de détection du mode actif proposée et de la synthèse d'observateur à commutation permet de proposer un schéma d'observation hybride permettant l'estimation conjointe de l'état continu et état discret du système hybride. Deux schémas d'estimation ont été analysés, une estimation hors-ligne et une estimation en-ligne.

4

Synthèse d'un observateur hybride pour une
classe de systèmes hybrides

Sommaire

4.1	Introduction	113
4.2	Présentation de la classe de SDH considérée	114
4.2.1	Synthèse d'un RdP à partir d'un système état-transition	115
4.2.2	Modèle d'état d'un RdP	118
4.3	Formulation du problème	121
4.4	Observateur hybride	122
4.5	Observateur discret : observateur de RdP	124
4.5.1	Exemple illustratif	126
4.6	Observateur continu	128
4.7	Conclusion	132

4.1 Introduction

Nous avons mentionné, dans le premier chapitre, la difficulté d'établir un modèle plus général pouvant décrire un SDH. Cependant, une modélisation basée sur l'utilisation de deux modèles coopérants (un modèle discret et un modèle continu) permet d'englober une large classe de SDH. Un SDH est composé de deux types de composants : l'un à comportement discret et l'autre à comportement continu. L'aspect continu est modélisé habituellement par une équation différentielle ou une équation aux différences. Les modèles de type états-transitions sont les plus adaptés pour décrire l'aspect discret. Parmi ces modèles, nous pouvons citer les graphes de Markov, les automates à états finis et les réseaux de Petri. Les automates à états finis constituent le formalisme le plus utilisé pour décrire l'aspect événementiel de SDH. Afin de modéliser correctement les SDH, ce formalisme a été étendu aux automates hybrides (Henzinger, 1996). Il s'agit de l'association d'un automate à états finis pilotant un ensemble d'équations dynamiques. Les réseaux de Petri sont utilisés dans les études de sûreté de fonctionnement des systèmes dynamiques et dans la modélisation des systèmes à événements discrets. Ils se caractérisent par une évolution dans laquelle les transitions sont franchies les unes après les autres. Parmi les diverses extensions des réseaux de Petri développées pour prendre en compte l'aspect hybride on trouve deux catégories d'approches : les réseaux de Petri hybrides (Bail et al., 1991) et les réseaux de Petri associés à des équations différentielles ou/et algébriques (Champagnat et al., 1998). Dans la première approche, les variables continues sont représentées par le marquage des places continues. Dans la deuxième approche, un système d'équations différentielles et/ou algébriques est associé à chaque place du RdP pour décrire les variables continues.

Dans (Balluchi et al., 2002) une méthode de construction d'un observateur pour la classe des SDH décrite par un automate hybride est présentée. L'estimation de l'état hybride est obtenue en utilisant un observateur de systèmes à événements discrets pour la partie événementielle et d'un banc d'observateurs de Lunberger pour la partie continue. Dans le cadre de ce chapitre, nous allons nous intéresser au problème de la synthèse d'observateur pour une classe particulière de SDH où l'évolution de l'état discret est représentée par un réseau de Petri. L'observateur hybride que nous proposons est une combinaison d'un

observateur de réseau de Petri et d'un observateur commuté. Avant de donner la formulation du problème, nous allons d'abord présenter la classe de SDH à laquelle on s'intéresse dans ce chapitre.

4.2 Présentation de la classe de SDH considérée

On considère la classe de SDH définie par une variable d'état hybride (q, x) composée d'un état discret q dont l'évolution est représentée par un réseau de Petri (RdP) et d'un état continu x dont l'évolution est déterminée par un ensemble de sous-systèmes linéaires LTI. Le principe du couplage et de l'interaction entre la partie discrète et la partie continue du SDH s'effectue de la même manière qu'un modèle de type automate hybride.

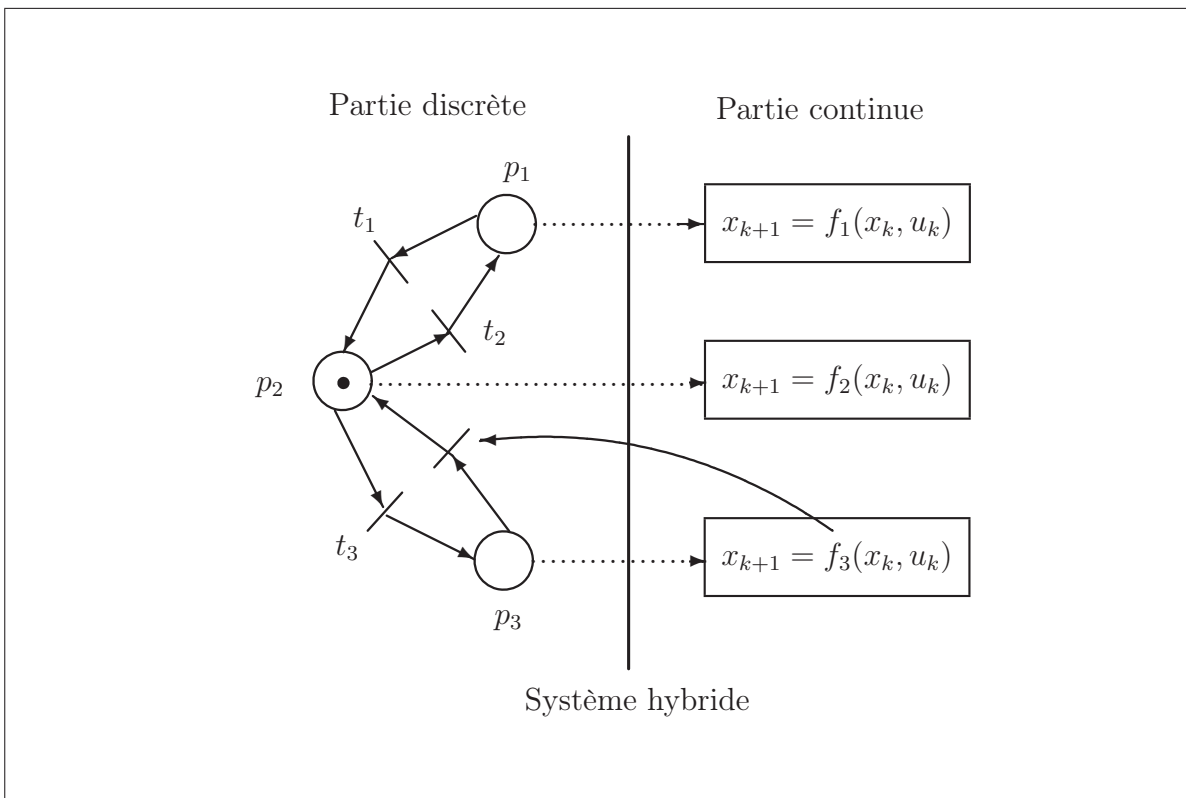


FIG. 4.1 – Couplage entre RdP et systèmes d'équations dynamiques

La figure (4.1) illustre l'interaction entre les deux parties du SDH. L'état discret (les modes de fonctionnement) est déterminé suivant l'activation des places (position du jeton dans le RdP) et l'état continu par des attributs associés à chaque place. L'interaction

entre les deux modèles se fait de la façon suivante : un jeton mis dans une place déclenche l'activation d'un sous-système linéaire S_i . Un ensemble d'événements est associé aux transitions du RdP. Ces événements sont déclenchés par des entrées discrètes ou par des franchissements de seuils par les variables continues. Lorsqu'un événement apparaît, la transition associée à cet événement est franchie et un nouveau mode est activé.

Nous avons choisi le modèle RdP pour décrire l'aspect discret du SDH parce qu'il existe des résultats pour l'observation de RdP (Bourjij and Koenig, 1999) où l'évolution du jeton dans un RdP est présentée par des équations d'état similaire à celle utilisées pour les systèmes dynamiques continus. On peut ainsi utiliser les techniques d'estimation d'état issues du domaine continu afin de résoudre le problème d'observation du RdP. Il existe aussi des méthodes permettant le passage d'une modélisation automate vers une présentation équivalente en RdP (Badouel, 1999). Par conséquent, même si on dispose d'un SDH décrit par un automate à états finis, nous pouvons utiliser un modèle équivalent en RdP. Dans la suite, nous allons aborder brièvement la dualité automate et RdP. Ensuite, nous allons présenter le modèle équation d'état régissant le RdP.

4.2.1 Synthèse d'un RdP à partir d'un système état-transition

Pour pouvoir expliquer le passage d'un automate vers un RdP, nous décrivons d'abord la notion de région. Pour présenter cette notion le plus simplement possible, on considère un système de transition (S, E, T) : un ensemble d'états S , un ensemble d'événements E et une relation de transition $T \subseteq S \times E \times S$. On note par $s \xrightarrow{e} s'$ l'abréviation de $(s, e, s') \in T$ signifiant que e valide la transition de s vers s' . Une région est définie comme un sous-ensemble $X \subseteq S$ tel que tout événement $e \in E$ possède de manière exclusive l'une des trois situations suivantes :

1. e est un événement qui fait entrer dans la région X :

$$s \xrightarrow{e} s' \Rightarrow (s \notin X \text{ et } s' \in X)$$

2. e est un événement qui fait sortir de la région X :

$$s \xrightarrow{e} s' \Rightarrow (s \in X \text{ et } s' \notin X)$$

3. e est un événement qui ne modifie pas l'appartenance à la région X :

$$s \xrightarrow{e} s' \Rightarrow (s \in X \text{ et } s' \in S) \text{ ou } (s \notin X \text{ et } s' \notin S)$$

Ces trois situations sont schématisées sur la figure (4.2)

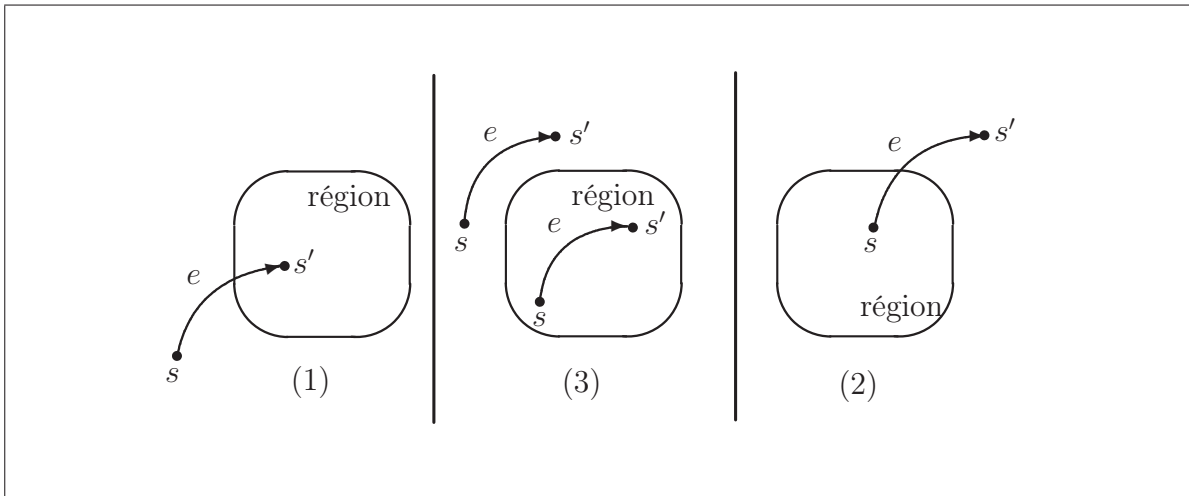


FIG. 4.2 – Les trois situations définissant une région dans un graphe

Pour comprendre ces trois situations, considérons le système de transitions illustré sur la figure (4.3). L'ensemble des états $R = \{s_2, s_3, s_6\}$ peut être considéré comme une région car les transitions marquées par les événements a et b font entrer dans cet ensemble d'état R et la transition marquée par l'événement c fait sortir de R . Cependant l'ensemble $r = \{s_2, s_3\}$ n'est pas une région parce l'événement b valide deux transitions : une transition $s_1 \xrightarrow{b} s_3$ qui fait entrer dans r , et une transition $s_4 \xrightarrow{b} s_6$ qui ne fait entrer dans r . Les différentes régions peuvent être énumérées comme suit :

$$\begin{aligned} r_1 &= \{s_1, s_3, s_5\}, r_2 = \{s_1, s_2, s_4\}, r_3 = \{s_2, s_3, s_6\}, r_4 = \{s_1, s_4, s_5\} \\ r_5 &= \{s_1, s_2, s_3\}, r_6 = \{s_4, s_5, s_6\}, r_7 = \{s_2, s_4, s_6\}, r_8 = \{s_3, s_5, s_6\} \end{aligned}$$

Il existe des méthodes systématiques pour trouver ces régions. Ces méthodes utilisent des algorithmes polynomiaux (Badouel et al., 1994) pour résoudre les problèmes de séparation

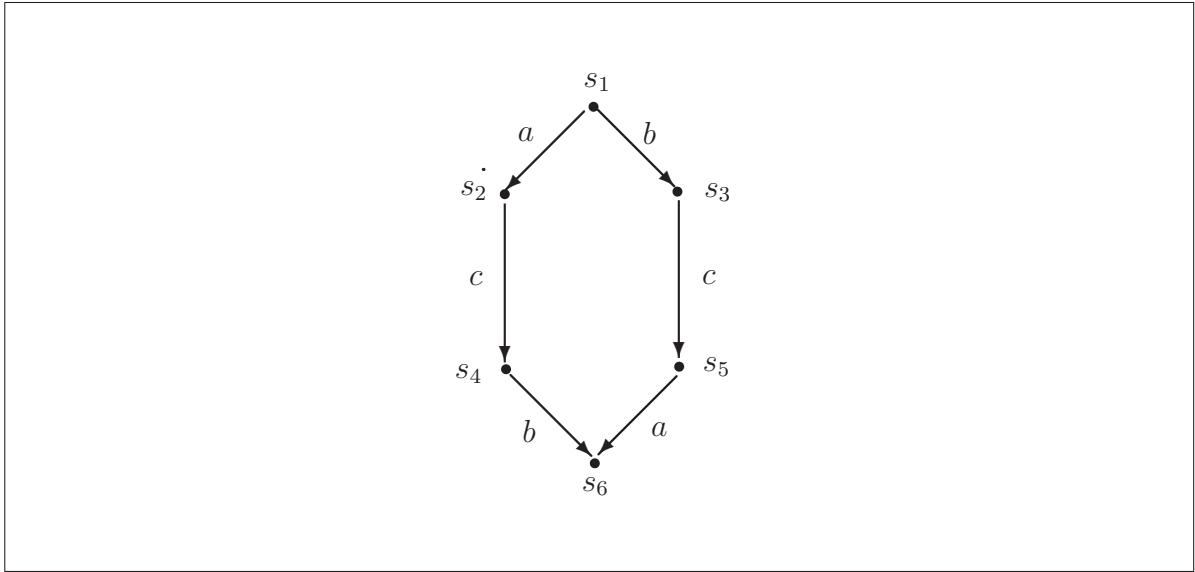


FIG. 4.3 – Exemple d’un système de transition

entre les états et les problèmes de séparation entre les états et les événements. Pour chaque problème de séparation, une région est calculée. Le RdP est synthétisé à partir de l’ensemble des régions calculée. Chaque région est représentée comme une place du RdP. Les transitions à l’aval et l’amont de chaque place sont les événements entrant et les événements sortant (arcs de flux) dans la région correspondante à la place. Pour illustrer la méthode de synthèse d’un réseau de Petri, considérons l’exemple cité dans (Badouel, 1999) indiqué sur la figure (4.4) L’automate à états finis est composé de 8 états et 6 transitions. En utilisant la procédure décrite par Badouel (1999), on trouvera 7 régions. Elles sont :

$$p_0 = \{s_0, s_3, s_4, s_7\}, p_1 = \{s_0, s_2, s_4\}, p_2 = \{s_0, s_1, s_3\}$$

$$p_3 = \{s_3, s_5, s_7\}, p_4 = \{s_4, s_6, s_7\}, p_5 = \{s_2, s_5\}, p_6 = \{s_1, s_6\}$$

Les 7 régions obtenues correspondent aux 7 places du RdP (4.4), et les événements a, b, c, a', b', c' sont les transitions d’une place à une autre dans le RdP. Ainsi, la transition entre la place p_0 et p_6 est marquée par a car l’événement a est entrant dans la région $p_6 = \{s_1, s_6\}$ et sortant de la région $p_0 = \{s_0, s_3, s_4, s_7\}$.

Pour effectuer le passage inverse, c’est à dire d’un RdP vers un automate, il suffit de construire le graphe des marquages accessibles. Les différents marquages associés au RdP

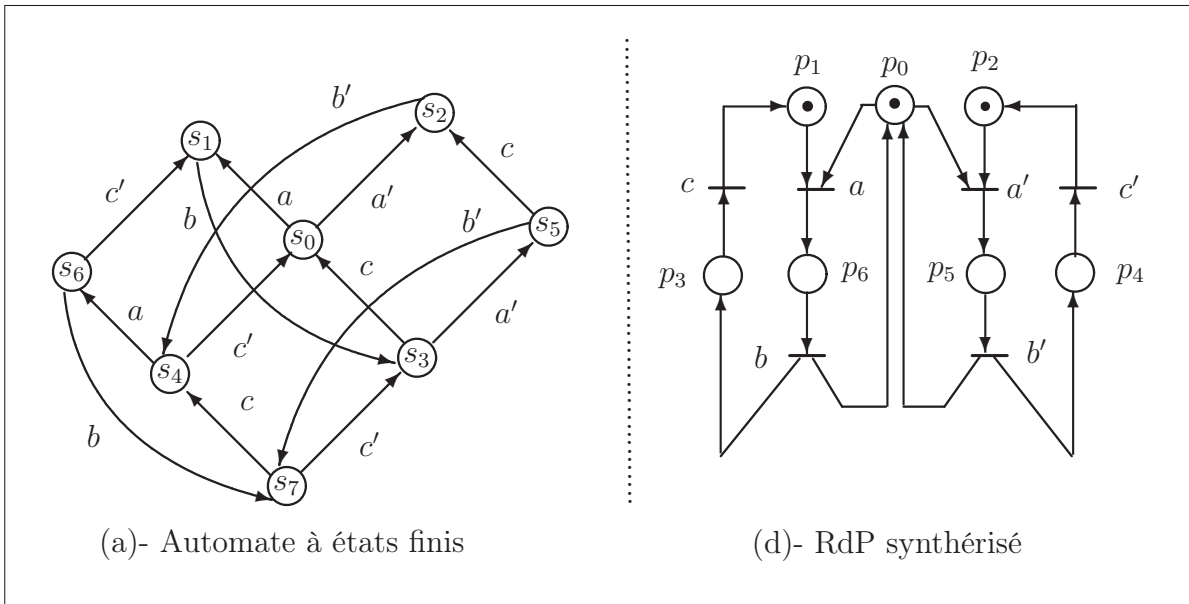


FIG. 4.4 – Un automate à états finis (à gauche) et le RdP synthétisé (à droite)

sont :

$$s_0 = \{p_1, p_0, p_2\}, s_1 = \{p_6, p_2\}, s_2 = \{p_1, p_5\}, s_3 = \{p_3, p_0, p_2\}$$

$$s_4 = \{p_1, p_0, p_4\}, s_5 = \{p_3, p_5\}, s_6 = \{p_6, p_4\}, s_7 = \{p_3, p_0, p_4\}$$

Cela conduit à l'automate initial.

4.2.2 Modèle d'état d'un RdP

Un RdP il est défini formellement par un quadruplet

$$RdP = (P, T, Pre, post, M_0)$$

avec :

- P un ensemble fini de places.
- T un ensemble fini de transitions.
- $Pré$: l'application d'incidence avant définie par $Pr : P \times T \longrightarrow \mathbb{N}$.
- $Post$: l'application d'incidence arrière définie comme $Post : P \times T \longrightarrow \mathbb{N}$.
- M_0 : le marquage initial.

Le marquage du RdP consiste à disposer un nombre entier de jetons dans chaque place du

réseau. Dans notre cas, il s'agit de RdP 1-borné à cause de l'exclusion mutuelle des places.

Le nombre de jetons contenus dans chacune des places est arrangé sous forme d'un vecteur M appelé vecteur de marquage. Il est régi par l'équation suivante :

$$M_{k+1} = M_k + C\sigma_{k+1} \quad (4.1)$$

où $M_k \in \mathbb{N}^n$ et $\sigma_k \in \mathbb{N}^m$ sont respectivement le marquage et le vecteur de transition (franchissement) à la $k^{\text{ème}}$ étape d'évolution (itération). C est la matrice d'incidence où les lignes représentent les places et les colonnes représentent les transitions. L'équation d'état (4.1) décrit l'évolution du marquage M_k atteint par le franchissement d'une séquence de transitions $\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_k$ à partir d'un marquage initial M_0 .

Pour définir l'équation de mesure donnant les sorties mesurées du RdP, énonçons l'hypothèse suivante.

Hypothèse 4.2.1 *Le RdP est caractérisé par des transitions dont le franchissement est observé (transitions observables) et des transitions dont le franchissement est inobservé (transitions non observables). Respectivement, le RdP se compose de places observables et de places non observables.*

Nous utiliserons ici le vocabulaire classiquement utilisé pour les système à événement discret, le mot "observable" signifie connu (sortie en continu), non observable signifie inconnu (n'appartient pas à l'ensemble des sorties). Nous avons introduit cette hypothèse pour définir les différents types de transitions. Nous pouvons ainsi associer une commutation de mode contrôlable à un franchissement d'une transition observable dans le RdP. Respectivement, une commutation autonome sera définie par un franchissement d'une transition non observable. Cette hypothèse permet aussi de définir les variables mesurables du RdP. Nous pouvons ainsi considérer l'ensemble des marquages des places observables et des transitions observables comme les sorties du RdP accessibles à la mesure. Nous noterons

ψ les sorties du RdP que nous appellerons sorties discrètes du SDH.

Après une permutation des variables, le vecteur de marquage et le vecteur de transitions sont arrangés de la manière suivante :

$$M_k = \begin{bmatrix} M_k^1 \\ M_k^2 \end{bmatrix} \text{ et } \sigma_k = \begin{bmatrix} \sigma_k^1 \\ \sigma_k^2 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

où $M_k^1 \in \mathbb{N}^{n_1}$, $M_k^2 \in \mathbb{N}^{n_2}$ sont respectivement le marquage des places observables et le marquage des places non observables. $\sigma_k^1 \in \mathbb{N}^{m_1}$, $\sigma_k^2 \in \mathbb{N}^{m_2}$ sont respectivement le vecteur de transitions observables, et le vecteur de transitions non observables, avec $n = n_1 + n_2$, $m = m_1 + m_2$. Le nombre de mesures disponibles est $p = n_1 + m_1$: n_1 places et m_1 transitions.

En remplaçant l'expression de (4.2) dans (4.1), nous obtenons la forme d'état suivante :

$$E\mathcal{M}_{k+1} = A\mathcal{M}_k \quad (4.3a)$$

$$\psi_k = H\mathcal{M}_k \quad (4.3b)$$

où \mathcal{M}_k , ψ_k sont respectivement le vecteur d'état généralisé et le vecteur de sortie définis comme :

$$\mathcal{M}_k = \begin{bmatrix} M_k \\ \sigma_k \end{bmatrix} \in \mathbb{N}^{n+m}, \quad \psi_k = \begin{bmatrix} M_k^1 \\ \sigma_k^1 \end{bmatrix} \in \mathbb{N}^{n_1+m_1}$$

Les matrices E , A et H sont définies comme

$$E = \begin{bmatrix} I_n & -C \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times m} \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0_{n_1 \times n_2} & 0_{n_1 \times m_1} & 0_{n_1 \times m_2} \\ 0_{m_1 \times n_1} & 0_{m_1 \times n_2} & I_{m_1} & 0_{m_1 \times m_2} \end{bmatrix}$$

Nous verrons, dans le paragraphe suivant, comment utiliser cette forme d'état pour synthétiser un observateur d'ordre réduit capable de reconstruire n_2 places et m_2 transitions non observables.

4.3 Formulation du problème

Considérons la partie continue du SDH décrite par l'équation en temps discret suivante :

$$\begin{cases} x_{t+1} = A_i x_t + B_i u_t & \text{si } q_t = i \\ y_t = C_i x_t & i = 1, 2, \dots, s \end{cases} \quad (4.4)$$

où x_t est le vecteur d'état continu, y_t est le vecteur de sortie et u_t est le vecteur de commande. $q_t = i$ est l'indice du mode actif, il prend sa valeur dans un ensemble fini d'indices $i \in Q = \{1, 2, \dots, s\}$ avec s le nombre de sous-systèmes. C'est aussi le nombre de places du RdP. L'indice du temps est noté par t pour le distinguer de l'indice k utilisé dans l'équation (4.3) associée au RdP. Pour établir une correspondance entre les deux indices, nous noterons par t_k l'instant correspondant au $k^{\text{ème}}$ franchissement de transitions dans le RdP. L'état discret q est déterminé suivant le vecteur de marquage $M_k = [M_k^1, M_k^2, \dots, M_k^s]^T$. Lorsqu'un jeton est mis dans la place i , le sous-système linéaire $S_i = (A_i, B_i, C_i)$ devient le mode actif, c'est à dire $M_k^i = 1 \Rightarrow q_k = i$.

La figure (4.5) décrit les deux modèles d'état associés aux parties discrète et continue

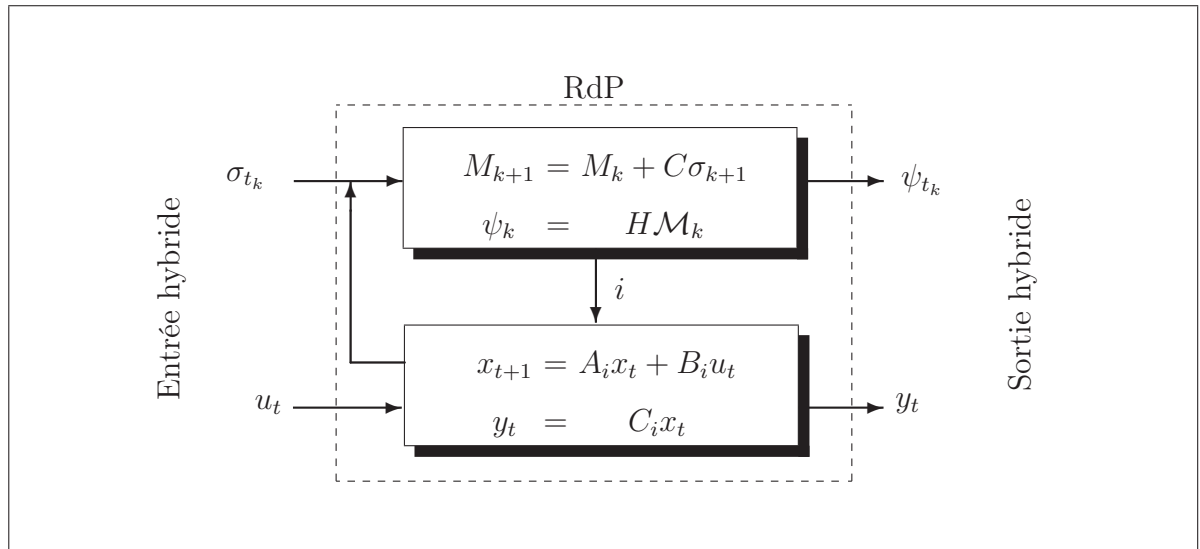


FIG. 4.5 – Système hybride considéré : un ensemble de systèmes linéaire pilotés par un RdP

du SDH. Nous avons mentionné l'entrée hybride (σ, u) et la sortie hybride (ψ, y) comme l'association d'une variable discrète et d'une variable continue. L'état discret q et les

instants de commutation sont spécifiés suivant le marquage des places et les instants de franchissement de transitions. Ces transitions peuvent être autonomes ou déclenchées par des événements externes. Le franchissement d'une transition autonome est déclenché par des variables continues atteignant un certain seuil. Lorsque le franchissement est forcé par un événement provenant de l'extérieure on parlera d'une transition contrôlable. Pour éviter la situation de conflit où différents types de transitions agissent en même temps nous devons définir un ordre de priorité pour chaque type de transition. Dans ce cas, celle ayant une priorité la plus élevée sera retenue, l'autre sera ignorée.

4.4 Observateur hybride

On souhaite construire un observateur capable, en utilisant les informations entrées/sorties du SDH disponibles à la mesure, de fournir conjointement $\hat{q}_k \in Q$ l'évaluation de l'état discret et \hat{x}_k l'estimation de l'état continu. Contrairement à la classe de systèmes PWA où nous ne disposons d'informations que sur l'entrée et la sortie continues, ici une sortie discrète est disponible. Par conséquent, les entrées de l'observateur hybride sont l'ensemble formé par la sortie discrète ψ , l'entrée continue u et la sortie continue y . Les sorties de l'observateur seront le vecteur d'état hybride estimé (\hat{q}, \hat{x}) .

Compte tenu de la structure mixte du SDH, la structure de l'observateur que nous proposons est une combinaison d'un observateur de RdP et d'un observateur commuté. La structure de l'observateur hybride est indiquée sur la figure (4.6). Il est composé d'un observateur discret et d'un observateur continu.

L'observateur discret : C'est un observateur de RdP. Il reçoit comme entrées le vecteur de mesure ψ composé des marquages des places mesurables M_k^1 et des transitions mesurables σ_k^1 . Son rôle est de fournir le vecteur des marquages des places complet M_k et le vecteur des transitions complet σ_k . Connaissant le vecteur M_k et σ_k , une évaluation de l'état discret \hat{q} est déterminée.

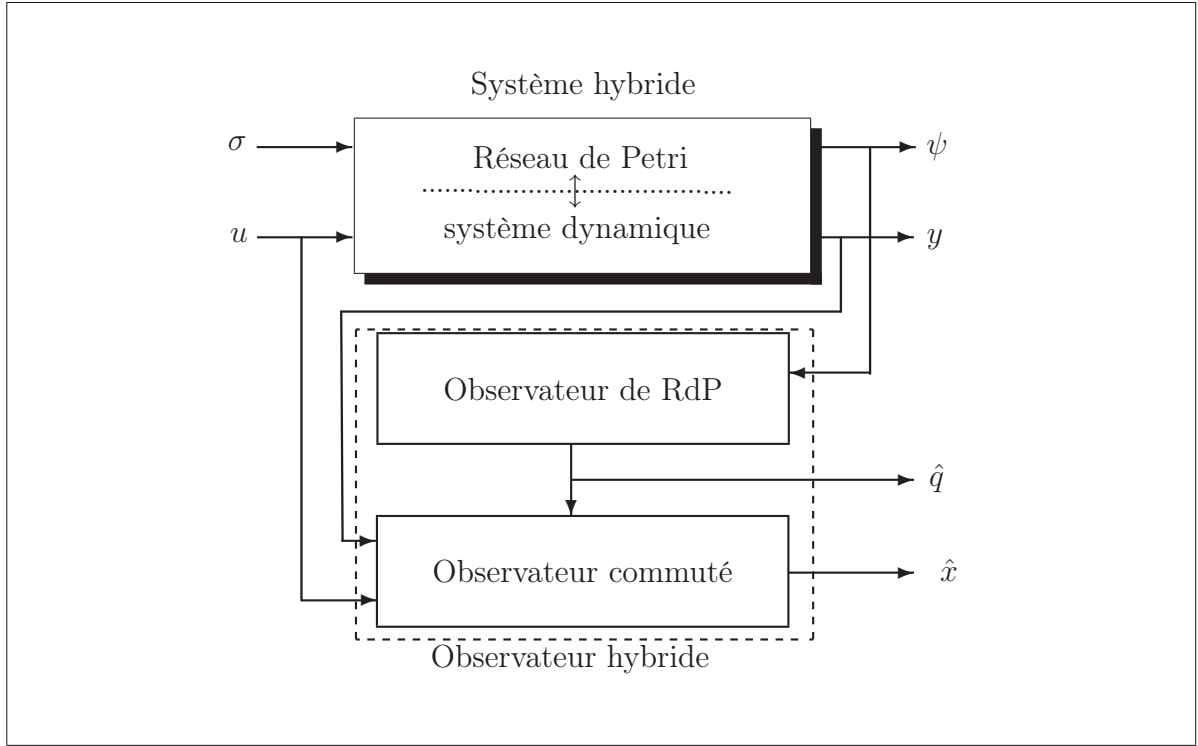


FIG. 4.6 – Structure de l'observateur hybride proposé

L'observateur continu : c'est observateur commuté. Il utilise l'information entrée continue u et sortie continue y et l'information \hat{q}_k donnée par l'observateur discret pour construire l'estimation \hat{x} .

La synthèse des deux parties de l'observateur hybride est décrite dans les paragraphes suivants. Nous cherchons à satisfaire la propriété de stabilité définie dans (Balluchi et al., 2002).

Définition 4.4.1 (*Observateur hybride exponentiellement convergent*) (Balluchi et al., 2002)

Étant donné un système hybride, un observateur hybride proposé est dit exponentiellement convergent borné s'il existe un entier K et des constantes $\mu > 0$, $b > 0$ et λ tel que

$$\hat{q}_k = q_k \quad \forall k > K \quad (4.5a)$$

$$\|\varepsilon_t\| \leq \lambda e^{-\mu t} \|\varepsilon_{t_K}\| + b \quad \forall t > t_K \quad (4.5b)$$

où $\varepsilon = x - \hat{x}$ est l'erreur d'observation.

Le scalaire μ représente la vitesse de convergence de l'erreur d'observation. La limite maximale de l'erreur est donnée par la valeur de b . Si $b = 0$, l'observateur est dit exponentiellement convergent.

4.5 Observateur discret : observateur de RdP

Dans ce paragraphe, nous allons présenter l'observateur discret capable de construire l'état discret \hat{q} en utilisant la sortie discrète ψ . Vu la forme de l'équation d'état régissant le RdP (4.3), où la sortie ψ correspond aux premières composantes de l'état \mathcal{M}_k . L'utilisation d'un observateur d'ordre réduit est plus adaptée. Nous allons utiliser l'approche développée dans (Bourjij and Koenig, 1999) pour la synthèse d'observateur de RdP d'ordre réduit. Avant de donner l'équation de l'observateur, nous allons rappeler brièvement cette approche.

Si la matrice E est de rang plein en lignes, nous pouvons trouver une matrice P vérifiant l'équation suivante

$$E \times P = E \times \begin{bmatrix} E^+ & P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times m} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

où $P_1 = Ker(E) \in \mathbb{R}^{(n+m) \times m}$ et $E^+ = E^T \times (E \times E^T)^{-1}$ la pseudo-inverse. Le système (4.3) est équivalent à :

$$\mathcal{M}_{k+1}^1 = A_1 \mathcal{M}_k^1 + A_2 \mathcal{M}_k^2 \quad (4.7a)$$

$$\psi_k = H_1 \mathcal{M}_k^1 + H_2 \mathcal{M}_k^2 \quad (4.7b)$$

où

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_k^1 \\ \mathcal{M}_k^2 \end{bmatrix} = P^{-1} \mathcal{M}_k, \quad \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} = A \times P, \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} = H \times P$$

De la même manière si H_2 est de rang plein, nous pouvons trouver une matrice P_2 , tel que

$$P_2 \times H_2 = \begin{bmatrix} P_3 \\ H_2^+ \end{bmatrix} \times H_2 = \begin{bmatrix} 0_{(n_1+m_1-m) \times m} \\ I_m \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

où $P_3 = \ker(H_2^T)$ et $H_2^+ = \begin{bmatrix} H_2^T & H_2 \end{bmatrix}^{-1} \times H_2^T$.

Par pré-multiplication par P_2 des deux côtés de l'équation de mesure (4.7b), nous obtenons :

$$P_3 \psi_k = P_3 H_1 \mathcal{M}_k^1 \quad (4.9a)$$

$$\mathcal{M}_k^2 = H_2^+ \psi_k - H_2^+ H_1 \mathcal{M}_k^1 \quad (4.9b)$$

Ensuite, nous remplaçons, l'équation (4.9b) dans l'équation (4.7a), nous obtenons :

$$\mathcal{M}_{k+1}^1 = \bar{A} \mathcal{M}_k^1 + A_2 H_2^+ \psi_k \quad (4.10a)$$

$$\bar{\psi}_k = \bar{H} \mathcal{M}_k^1 \quad (4.10b)$$

avec $\bar{A} = (A_1 - A_2 H_2^+ H_1)$, $\bar{H} = P_3 H_1$ et $\bar{\psi}_k = P_3 \psi_k$.

Suivant le principe de construction des observateurs, on peut proposer la structure classique d'un observateur d'ordre réduit suivante :

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= F z_k + G \psi_k \\ \hat{\mathcal{M}}_k &= M z_k + N \psi_k \end{aligned} \quad (4.11)$$

où $z_k \in \mathbb{R}^n$ et (F, G, M, N) sont des matrices de dimensions appropriées à calculer. A partir de l'équation du système (4.10) et de son observateur (4.11), les estimation de $\mathcal{M}_k^1, \mathcal{M}_k^2$ et \mathcal{M}_k sont respectivement les vecteurs $z_k, \hat{\mathcal{M}}_k^2$ et $\hat{\mathcal{M}}_k$.

La construction de l'observateur consiste à trouver les matrices F, G, M et N tel que le vecteur d'état estimé $\hat{\mathcal{M}}_k$ converge asymptotiquement vers le vecteur l'état \mathcal{M}_k .

En tenant compte de la forme de l'équation d'état (4.10), l'équation de l'observateur (4.11) est

$$z_{k+1} = (\bar{A} - L\bar{H}) z_k + (A_2 H_2^+ + K P_3) \psi_k \quad (4.12a)$$

$$\hat{\mathcal{M}}_k^2 = H_2^+ (\psi_k - H_1 z_k) \quad (4.12b)$$

$$\hat{\mathcal{M}}_k = \begin{bmatrix} E^+ & P_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_k \\ \hat{\mathcal{M}}_k^2 \end{pmatrix} \quad (4.12c)$$

avec L une matrice gain à calculer. Elle est choisie pour que $(\bar{A} - L\bar{H})$ soit stable.

En résumé, la forme de l'observateur d'ordre réduit (4.11) est obtenue en choisissant les matrices F, G, M, N de la manière suivante :

$$\begin{aligned} F &= (A - L\bar{H}) \\ G &= (A_2 H_2^+ + L P_3) \\ M &= (E^+ - P_1 \bar{H}_2^+ H_1) \\ N &= (P_1 \bar{H}_2^+) \end{aligned}$$

Si l'observateur est convergent, l'erreur d'observation convergera vers zero en un temps fini K . Par conséquent, la condition (4.5a) donnée dans définition-4.4.1 est vérifiée. Autrement dit, il existe un K tel que l'état discret est correctement estimé :

$$\hat{q}_k = q_k \quad \forall k > K$$

4.5.1 Exemple illustratif

Considérons le RdP donné sur la figure (4.7). La matrice d'incidence et le marquage initial sont

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et } M_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

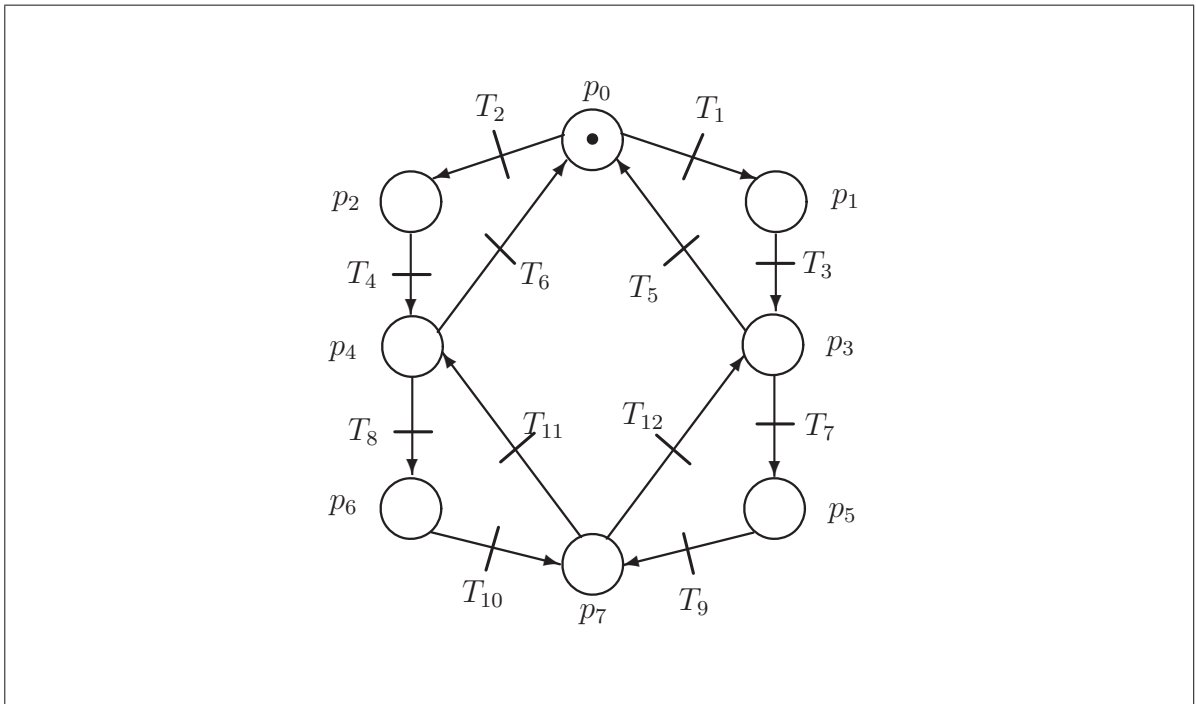


FIG. 4.7 – Exemple illustratif

Pour cet exemple, nous avons choisi T_1, T_2, T_{11}, T_{12} et p_6, p_7 comme des transitions et des places non observables. Les figures (4.8), (4.9) montrent respectivement, l'erreur de

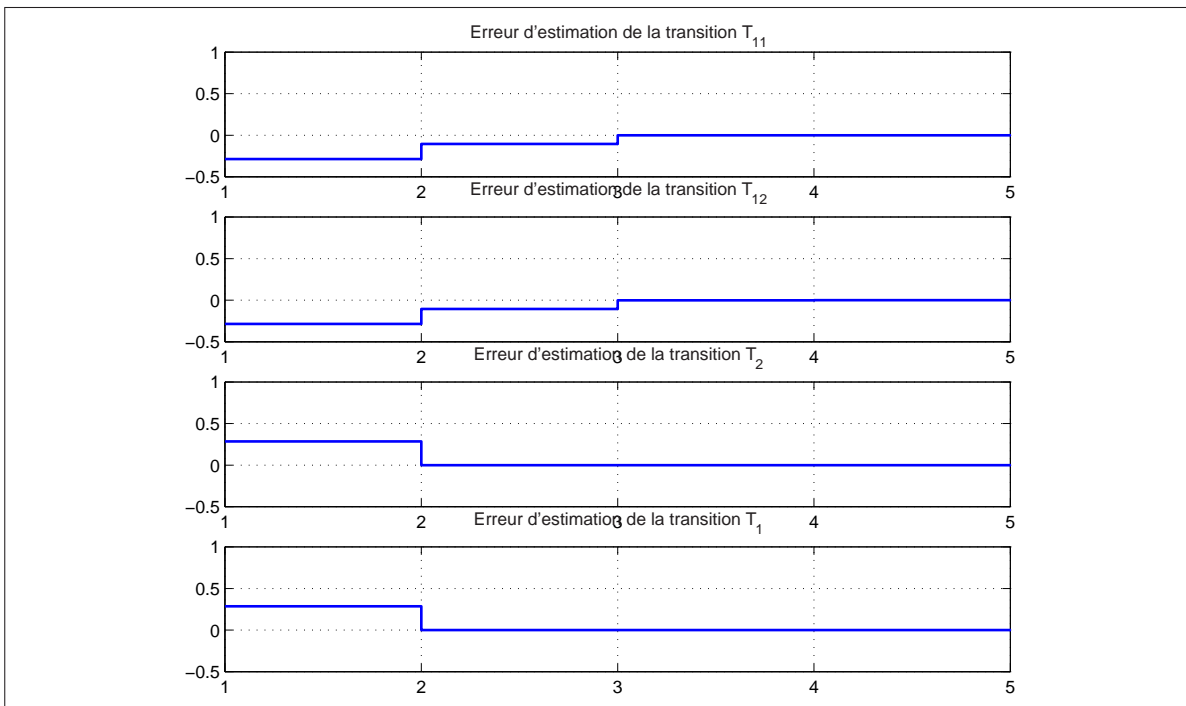


FIG. 4.8 – Erreur d'estimation des quatre transitions T_1, T_2, T_{11} et T_{12}

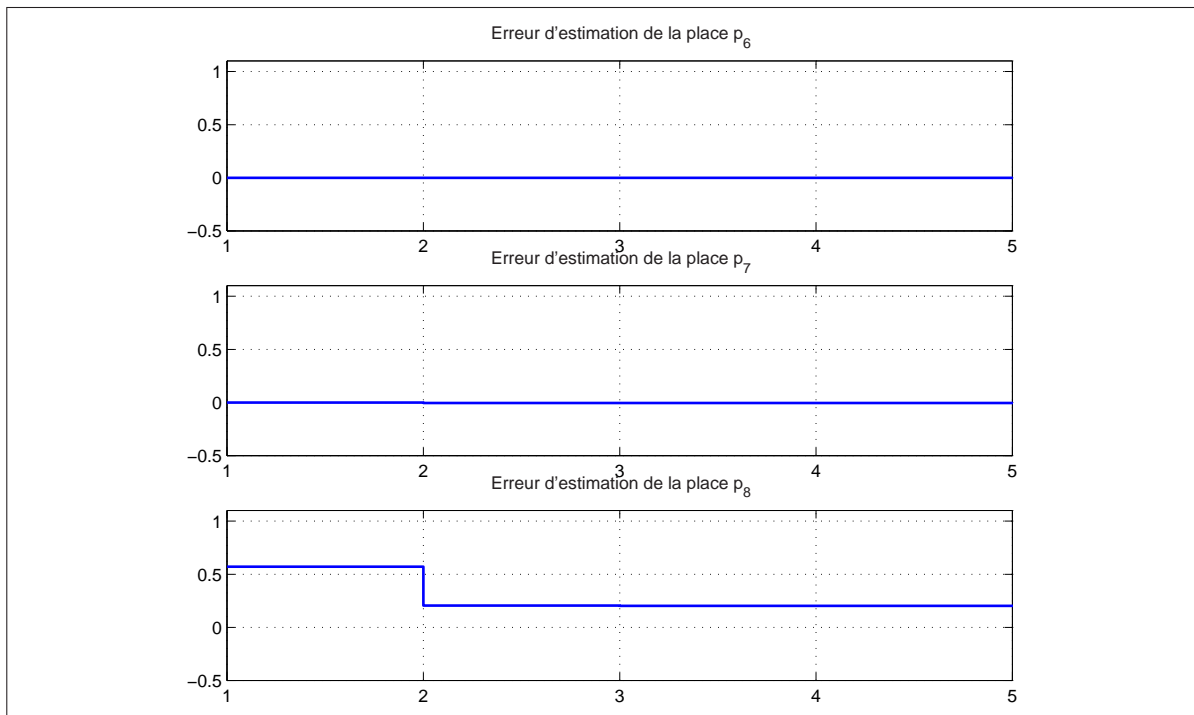
reconstruction des transitions non observables et l'erreur de reconstruction des places non observables du réseau. On remarque qu'au bout de trois itérations, les 4 transitions et 3 places non accessibles à la mesure sont parfaitement construites.

4.6 Observateur continu

L'observateur continu est un observateur commuté dont la dynamique dépend de l'état discret estimé \hat{q}_t fourni par l'observateur de RdP. L'observateur commuté est défini par

$$\begin{cases} \hat{x}_{t+1} = A_i \hat{x}_t + B_i u_t + L_i (y_t - \hat{y}_t) \\ \hat{y}_t = C_i \hat{x}_t \quad \text{si } \hat{q}_t = i \in Q \end{cases}$$

La construction de cet observateur consiste à calculer les gains L_i pour satisfaire la deuxième condition de stabilité (4.5b) donnée dans la définition-4.4.1. Pour calculer ces gains, nous devons analyser l'erreur d'observation $\varepsilon = x - \hat{x}$ en considérant l'observateur hybride complet (obtenu en couplant l'observateur de RdP avec l'observateur à commutation).

FIG. 4.9 – Erreur d'estimation des trois places p_6, p_7 et p_8

Puisque l'observateur du RdP converge en un temps fini K . L'observateur continu utilise le vrai l'état $q_t = \hat{q}_t$ pour $t > t_K$. Pour $t \leq t_K$ l'état discret n'est pas identifié et l'état continu x ne peut pas être correctement estimé. Plusieurs schémas d'observation de l'état continu peuvent être envisagés sur cet intervalle. Par exemple, nous pouvons garder l'état estimé à sa valeur initiale $\hat{x}_t = \hat{x}_0$ pour $t \leq t_K$. Dans ce cas, l'observateur continu fonctionnera à partir de l'instant $t > t_K$. Le retard t_K n'est pas connu a priori car il représente la somme des temps de séjours dans les K modes visités, c'est-à-dire :

$$t_K = \sum_{i=1}^K \tau_i$$

avec τ_i le temps de séjour dans le sous-système S_i . Vu que les temps de séjours τ_i ne sont pas connus, garder l'estimé de l'état continu à sa valeur initial est un inconvénient.

Dans ce chapitre, nous souhaitons avoir l'estimé de l'état continu même sur l'intervalle de retard $[0, t_K]$. Rappelons qu'au chapitre précédent, nous avons rencontré une situation similaire où l'état discret est estimé avec un retard fixe μ . Ce scénario se répétait à chaque commutation. Lorsque l'état discret estimé n'est pas disponible, l'état continu est

estimé en utilisant l'observateur conçu pour la dernière valeur connue de l'état discret. Cet arrangement est choisi pour que l'erreur d'estimation reste bornée. Suivant le même raisonnement, nous proposons de maintenir l'état discret estimé à sa valeur initiale $\hat{q}_t = \hat{q}_0$ pour $t \leq t_K$.

En utilisant cet arrangement, nous disposerons de deux intervalles de temps. Le premier intervalle $[0, t_K]$, l'état discret n'est pas identifié et la dynamique de l'erreur d'estimation, comme dans le chapitre-3, est donnée par l'équation suivante :

$$\varepsilon_{t+1} = (A_{\hat{q}_t} - L_{\hat{q}_t}C_{\hat{q}_t})\varepsilon_t + v_t \text{ pour } t \leq t_K \quad (4.13)$$

où $v_t = ((A_{q_t} - A_{\hat{q}_t}) - L_i(C_{q_t} - C_{\hat{q}_t}))x_t + (B_{q_t} - B_{\hat{q}_t})u_t$.

Le deuxième intervalle $t > t_K$ l'état discret est parfaitement identifié et l'erreur d'estimation est donnée par

$$\varepsilon_{t+1} = (A_{q_t} - L_{q_t}C_{q_t})\varepsilon_t \text{ pour } t > t_K \quad (4.14)$$

Pour calculer les gains de l'observateur L_i , nous pouvons utiliser les méthodes présentées au chapitre-2. La première approche est basée sur la stabilité poly-quadratique de l'erreur d'observation. Cette approche est utilisée avec $\hat{q} = q$ pour obtenir une convergence asymptotique de l'erreur d'observation. La deuxième approche est basée sur la stabilité entrée-état. Elle est utilisée lorsque $\hat{q} \neq q$. Dans ce cas, on obtient une convergence avec une limite bornée $\eta^* \|v\|_\infty$. Les gains de l'observateur et le paramètre η^* sont obtenue en résolvant le problème d'optimisation déjà présenté au chapitre-3 :

Min η

$$P_i = P_i^T$$

$$G_i = G_i^T$$

F_i, η

$$\text{sous } \begin{bmatrix} \mathbf{1} - P_i & A_i^T G_i - C_i^T F_i^T & A_i^T G_i - C_i^T F_i^T \\ G_i A_i - F_i C_i & P_j - 2G_i & \mathbf{0} \\ G_i A_i - F_i C_i & \mathbf{0} & 2G_i - \eta \mathbf{1} \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

Si ce problème de minimisation admet une solution $P_i^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_i^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F_i^* \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $\eta^* \in]1, \infty[$, les gains L_i sont donnés par

$$L_i = G_i^{*-1} F_i^*$$

L'erreur d'estimation vérifie :

$$\|\varepsilon_t\| \leq \sqrt{\eta^*} \left(1 - \frac{1}{\eta^*}\right)^{t/2} \|\varepsilon_0\| + \eta^* \|v\|_\infty \text{ pour } t \leq t_K \quad (4.15)$$

A l'instant d'identification du mode t_K l'erreur d'observation est :

$$\|\varepsilon_{t_K}\| \leq \sqrt{\eta^*} \left(1 - \frac{1}{\eta^*}\right)^{t_K/2} \|\varepsilon_0\| + \eta^* \|v\|_\infty$$

Après l'identification de l'état discret, l'erreur d'estimation vérifié (4.15) avec $v = 0$:

$$\|\varepsilon_t\| \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\eta^*}\right)^{(t_K-1)/2}} \sqrt{\eta^*} \left(1 - \frac{1}{\eta^*}\right)^{t/2} \|\varepsilon_{t_K}\| \text{ pour } t > t_K \quad (4.16)$$

Nous pouvons réécrire les équations (4.15), (4.16) sous la forme :

$$\|\varepsilon_t\| \leq e^{-\mu t} \|\varepsilon_0\| + b \quad \forall t \leq t_K \quad (4.17a)$$

$$\|\varepsilon_t\| \leq \lambda e^{-\mu t} \|\varepsilon_{t_K}\| \quad \forall t > t_K \quad (4.17b)$$

avec $\mu = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{\sqrt{\eta^*} \left(1 - \frac{1}{\eta^*}\right)}\right)$, $\lambda = -\log\left(\left(1 - \frac{1}{\eta^*}\right)^{(t_K-1)/2}\right)$ et $b = \eta^* \|v\|_\infty$. Par conséquent la deuxième condition de la définition-4.4.1 est satisfaite.

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode de synthèse d'observateur pour une classe particulière de SDH où l'évolution de l'état discret est régie par un RdP. L'observateur hybride proposé est une combinaison d'un observateur de RdP et d'un observateur commuté. Le but de ce schéma d'observation est l'estimation conjointe de l'état discret et de l'état continu du SDH en utilisant les informations entrées-sorties disponibles à la mesure. Lorsque la sortie discrète n'est pas suffisante pour observer l'état discret, nous pouvons utiliser des informations supplémentaires basées sur les données entrées-sorties continues. Nous pouvons par exemple utiliser la méthode de détection des instants de commutation et l'identification du mode actif présentée au chapitre précédent pour détecter les sauts autonomes.

Conclusion et perspectives

Cette thèse est consacrée à l'étude de l'observation d'état pour les SDH. Nous avons présenté des méthodes de synthèse d'observateurs pour quelques classes de SDH. On a considéré la classe particulière de SDH composés de sous-systèmes linéaires invariants dans le temps auxquels on associe une loi de commutation décrivant les transitions d'un sous-système vers un autre. Dans le premier chapitre nous avons donné une définition des SDH permettant de décrire les classes de SDH auxquelles on s'intéresse. Nous avons ensuite passé en revue quelques résultats disponibles dans la littérature sur l'observabilité et sur la synthèse d'observateurs pour ces classes de systèmes. Nous avons remarqué la difficulté d'établir une définition claire et unique pour cerner la notion de l'observabilité pour les SDH. Les solutions disponibles dans la littérature pour les observateurs hybrides sont généralement fondées sur une extension de résultats de l'automatique continue.

Dans le chapitre deux, nous nous sommes intéressé à la classe de systèmes à commutation où l'état discret est connu. L'estimation de l'état continu, sous l'hypothèse de connaissance de l'état discret en temps réel, est obtenue en utilisant un observateur commuté. Le calcul des gains de l'observateur garantissant la stabilité asymptotique de l'erreur d'observation s'obtient en résolvant un ensemble de LMI. Ces LMI sont basées sur des résultats de la stabilité quadratique et de la stabilité poly-quadratique. Nous avons ensuite présenté la technique de placement de pôles pour les systèmes à commutation. Nous avons montré que l'association de l'observateur commuté avec une contrainte de placement de pôles permet de proposer un schéma d'observation à entrée inconnue particulier applicable au

problème de la synchronisation du chaos avec un message incorporé. Nous avons constaté que certains exemples non résolus avec l'approche existante ont pu l'être avec cette approche.

Dans le chapitre trois, nous avons considéré le cas de commutations autonomes. Les transitions de mode sont définies par une loi de commutation dépendante de l'état continu et donc l'état discret n'est pas disponible. Par conséquent, l'observateur doit fournir l'estimation simultanée de l'état discret et de l'état continu. Nous avons présenté une méthode de détection des instants de commutation et du mode actif en temps discret. Nous avons montré qu'une hypothèse sur le temps de séjour minimum chaque mode doit être considérée afin de pouvoir reconstruire une fonction de commutation dépendante d'état comme une combinaison linéaire des informations de l'entrée et de la sortie prises sur un horizon de temps fini. L'association de la méthode de détection du mode actif et de la synthèse d'observateur à commutation permet de proposer un schéma d'observation hybride permettant l'estimation conjointe de l'état continu et état discret du système hybride. Pour calculer les gains de l'observateur commuté, nous avons étudié deux configurations : attribution de gain en-ligne, où l'observateur et le système hybride fonctionnent simultanément, attribution de gain hors-ligne, où l'observateur hybride fonctionne avec un retard par rapport au système réel. Les gains de l'observateur sont calculés pour obtenir une convergence asymptotique de l'erreur d'estimation lorsque l'état discret est correctement estimé et une convergence bornée dans le cas où l'état n'est pas correctement estimé.

Dans le quatrième chapitre, nous avons considéré le cas où l'état discret est régi un RdP. Nous avons proposé un schéma d'observation combinant un observateur de réseau de Petri et d'un observateur commuté. La convergence en un temps fini de l'observateur du RdP garantit que l'état discret du SDH est correctement identifié après un nombre fini d'étape d'évolution de RdP. Les gains de l'observateur commuté sont calculés pour obtenir une convergence exponentielle de l'observateur hybride complet.

Perspectives

La classe de SDH étudiée, en particulier la condition de commutation sur des hyperplans $Hx = a_i$ peut paraître très restrictive. En pratique on peut imaginer le cas de condition d'invariances plus complexes, polytopique par exemple en utilisant plusieurs frontières H_j qui définissent les faces du polytope. On peut ainsi construire un pavage de l'espace d'état continu. La précision sur la forme continue que l'on veut approcher dépendra de la finesse du pavage. La contre partie est évidemment une augmentation du nombre de modèles à envisager. Cette explosion peut être largement contenue lorsque le modèle discret provient de la discrétisation d'un modèle différentiel. En effet si les dérivées sont bornées, l'ensemble de l'espace d'état continu ne peut être atteint en une période d'échantillonnage en partant d'un état initial donné, le nombre de frontières franchissables sur un pas de calcul est donc en général très limité. Associé avec d'autres contraintes qui se traduisent au niveau de l'automate, on peut espérer que l'association des observateurs continus et discrets que nous avons présentés peut conduire à une observation hybride réaliste en temps de calcul.

Dans cette thèse, seul le problème d'observation est été abordé. Bien que le principe de séparation soit établi pour les systèmes à commutation lorsque l'état discret est connu, l'utilisation de cet observateur en boucle fermée pour la commande n'est pas immédiate. L'étude approfondie d'un schéma de commande hybride de ce type est nécessaire et est entrain d'être menée, elle fera l'objet de nos futurs travaux.

Bibliographie

- Alessandri, A. and P. Coletta (2001, june). Proceedings of american control conference. In *Switching observers for continuous-time and discrete-time linear systems*, Arlington, VA, pp. 2606–2611.
- Babaali, M. and M. Egerstedt (2004, december). On the observability of piecewise linear systems. In *Proceedings of 43rd IEEE Conference on Decision And Control*, The Bahamas, pp. 26–31.
- Badouel, E. (1999, april). *Automates réversibles et réseaux de Petri, dualité et représentation : le problème de la synthèse*. Thèse, Université de Rennes 1. Habilitation à diriger des recherches.
- Badouel, E., L. Bernardinello, and P. Darondeau (1994). Polynomial algorithms for the synthesis of bounded nets. Technical report, INRIA Rennes. Research report 2316.
- Bail, J. L., H. Alla, and R. David (1991, july). Hybrid petri net. In *Proceedings of the 1st European Control Conference, ECC'91*, Grenoble, France, pp. 1472–7.
- Balluchi, A., L. Benvenuti, M. D. D. Benedetto, and A. L. Sangiovanni-Vincentelli (2001, september). A hybrid observer for the driveline dynamics. In *Proceedings of 6th European Control Conference, ECC2001*, Porto, Portugal, pp. 618–623.
- Balluchi, A., L. Benvenuti, and A. L. Sangiovanni-Vincentelli (2002, july). Observers for hybrid systems with continuous state resets. In *Proceedings of 10th mediterranean conference on control and automation - Med'2002*, Lisbon, Portugal.

- Bara, G. (2001, december). *Estimation d'état des systèmes linéaires à paramètres variants*. Thèse, Institut Polytechnique de Lorraine.
- Barbot, J., H. Saadaoui, M. Djemai, and N. Manamanni (2006, may). Nonlinear observer for autonomous switching systems with jumps. In *The International Conference of Hybrid Systems and Applications*, Lafayette, Louisiana, USA.
- Bemporad, A. (2004). Efficient conversion of mixed logical dynamical systems into an equivalent piecewise affine form. *IEEE Transactions on Automatic Control* 47(5), 832–838.
- Bemporad, A., G. Ferrari-trecate, and M. Morari (2000). Observability and controllability of piecewise affine and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 45(10), 1864–1876.
- Bemporad, A. and M. Morari (1999). Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints. *Automatica* 35, 407–427.
- Benali, A., D. Boutat, and J. Barbot (2004). Une condition algébrique pour l'observabilité d'une classe de systèmes hybrides. *Proceedings of IEEE CIFA, Tunisie*.
- Birouche, A., J. Daafouz, and C. Iung (2006, june). Observer design for a class of discrete time piecewise-linear systems. In *Proceedings of 2nd IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems*, Sardinia, Italy.
- Birouche, A., J. Daafouz, C. Iung, and G. Millerioux (2004, november). Sur la synthèse d'observateurs hybrides et leur application à la synchronisation du chaos. In *Proceedings of CIFA'2004 Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Douz, Tunisie.
- Birouche, A., J. Daafouz, C. Iung, and G. Millerioux (2005, july). Hybrid observers and message-embedded chaos synchronization for encryption purpose. In *Proceedings of 17th IMACS World Congress - Scientific Computation, Applied Mathematics and Simulation*, Paris, France.

-
- Borrelli, F., M. Baotic, A. Bemporad, and M. Morari (2005). Dynamic programming for constrained optimal control of discrete-time linear hybrid system. *Automatica* 41, 1709–1721.
- Bourjij, A. and D. Koenig (1999). An original petri net state estimation by a luenberger observer. *Proceedings of the IEEE American Control Conference, ACC'99 San-Diego-Californie, USA, 2-4 Jun.*
- Boyd, S., L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Studies in Applied Mathematics.
- Branicky, M. (1994). Stability of switched and hybrids systems. In *Proceedings of 33rd Conference on Decision and Control*, Florida, pp. 3498–3503.
- Branicky, M. (1998). Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. 43(4), 475–482.
- Carroll, T. L. and L. M. Pecora (1991, april). Synchronizing chaotic circuits. *IEEE Trans. Circuits and Systems* 38(4), 453–456.
- Champagnat, R., P. Esteban, H. Pingaud, and R. Valette (1998). Modeling and simulation of a hybrid system through pr/tr pn-dae model. In *Proceedings of 3rd International Conference on Automation of Mixed Processes*, Reims, France, pp. 131–137.
- Cuomo, K. M., A. V. Oppenheim, and S. H. Strogatz (1993). Synchronization of lorenz-based chaotic circuits with applications to communications. *IEEE Trans. Circuits. Syst. II : Anal. Digit. Sign. Process* 40, 626–633.
- Daafouz, J. and J. Bernussou (2001, august). Parameter dependent lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems and Control Letters* 43, 355–359.
- Daafouz, J. and G. Millerioux (2002, march). Poly-quadratic stability and global chaos synchronization of discrete time hybrid systems. *Special Issue of Mathematics and Computers in Simulation* 58, 295–307.

- Daafouz, J. and G. Millerioux (2004, july). Input independent chaos synchronization of switched systems. *IEEE Transactions on automatic control* 49, 1182–1187.
- Daafouz, J., G. Millerioux, and C. Iung. (2002). A poly-quadratique stability based approach for linear switched systems. *Special issue on switched, piecewise and polytopic linear systems.Int.J.Control* 47(10).
- Daafouz, J., G. Millerioux, and L. Rosier (2005). Observer design with guaranteed bound for lpv systems. *Proceedings of IFAC World Congress on Automatic Control*.
- Daafouz, J., P. Riedinger, and C. Iung (2003, june). Stabilizing switched control design and pole placement. In *Proceedings of 1st IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems*, Saint-Malo, France.
- Ezzine, J. and A. H. Haddad (1989, june). Controllability and observability of hybrid systems. *International Journal of Control* 49, 2045–2055.
- Ferrari-Trecate, G., D.Mignone, and M. Morari (2002). Moving horizon estimation for hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 47(10), 1663–1676.
- Ferrari-Trecate, G., M. Muselli, D. Liberati, and M. Morari (2003, february). A clustering technique for the identification of piecewise affine systems. *Automatica* 39(2), 205–217.
- Geyer, T., F. Torrisi, and M. Morari (2003, april). Efficient mode enumeration of compositional hybrid models. *Hybrid Systems : Computation and Control* 2623, 216–232.
- Heemels, W., B. D. Schutter, and A. Bemporad (2001, december). On the equivalence of classes of hybrid dynamical models. In *Proceedings of the 40th IEEE conference on decision and control*, Orlando, Florida, pp. 364–369.
- Henzinger, T. (1996). The theory of hybrid automata. In *Proceedings of the 11th Annual Symposium on Logic in Computer Science*, pp. 278–292. IEEE Computer Society Press.
- Hespanha, J. and S. Morse (1999). Stability of switched systems with average dwell-time. In *Proceedings of 38th Conference on Decision and Control*, Phoenix.

-
- Jiang, Z.-P., E. Sontag, and Y. Wang (1999). Input-to-state stability for discrete-time nonlinear systems. *Proceedings 14th triennial World Congress*.
- Kalman, R. E. (1963). Mathematical description of linear dynamical systems. *SIAM Journal of Control and Optimization* 1, 152–192.
- Kolumban, G., M. P. Kennedy, and L. O. Chua (1998, october). The role of synchronization in digital communications using chaos - part i : Fundamentals of digital communications. *IEEE Trans. Circuits. Syst. I (Special issue on Chaos Synchronization and Control :Theory and applications)* 44.
- Liberzon, D. and A. Morse (1999). Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine* 37, 59–70.
- Millerioux, G. and G. Bloch. (2002, april). State reconstruction of piecewise linear maps using a clustering machine. In *Proceedings of ESANN'2002*, Bruges, Belgium, pp. 413–418.
- Millerioux, G., G. Bloch, J. M. Amigo, A. Bastos, and F. Anstett (2003). Real-time video communication secured by a chaotic key stream cipher. In *Proceedings of 16th European Conference on Circuits Theory and Design, ECCTD'03*, Krakow, Poland, pp. 245–248.
- Millerioux, G. and J. Daafouz (2004). Unknown input observers for message-embedded chaos synchronization of discrete-time systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 14(4).
- Moore, B. C. (1976, october). On the flexibility offered by state feedback in multivariable systems beyond closed loop eigenvalue assignment. *IEEE Transactions on Automatic Control* 49, 689–692.
- Nijmeijer, H. and I. M. Y. Mareels (1997, october). An observer looks at synchronization. *IEEE Trans. Circuits. Syst. I : Fundamental Theo. Appl* 44, 882–890.
- Pecora, L. M. and T. L. Carroll (1991, august). Driving systems with chaotic signals. *Phys. Rev. A* 44(8), 2374–2383.

- R.DeCarlo, M. Branicky, S. Pettersson, and B. Lennartson (2000). Perspectives and results on the stability and stabilisability of hybrid systems. *Proceedings of the IEEE* 88(7), 1069–1082.
- Saadaoui, H., N. Manamanni, M. Djemai, and J. Barbot (2006a, june). Exact differentiator for switched chaotic systems. In *2nd IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems*, Alghero, Italy.
- Saadaoui, H., N. Manamanni, M. Djemai, and J. Barbot (2006b, may). Observateur hybride pour systèmes à commutations avec sauts sur l'état. In *Proceedings of CIFA'2006 Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Bordeaux, France.
- Santis, E. D., M. D. Benedetto, S. D. Gennaro, and P.Giordano (2003). Hybrid observer design methodology. Technical Report ST-2001-32460 of European Commission. Distributed control and stochastic analysis of hybrid systems supporting safety critical real-time systems design (HYBRIDGE).
- Sontag, E. D. (1981). Nonlinear regulation : The piecewise linear approach. *IEEE Transactions on Automatic Control* 26, 346–358.
- Sun, Z., S. Ge, and T. Lee (2002, june). Controllability and reachability criteria for switched linear systems. *Automatica* 38, 775–786.
- Torrise, F. and A. Bemporad (2004, march). Hysdel-a tool for generating computational hybrid models for analysis and synthesis problems. *IEEE Transactions on Control System Technology* 12, 235–249.
- Vidal, R., A. Chiuso, and S. Soatto (2002, december). Observability and identifiability of jump linear systems. In *Proceedings of 41nd IEEE conference on decision and control*, Las Vegas NV, Usa, pp. 3614–3619.
- Zaytoon, J. (2001). *Systèmes dynamiques hybrides*. Collection Hermès. Paris France.

AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :
Monsieur Jean BUISSON, Professeur, SUPELEC IETR, Cesson Sevigne
Monsieur Mohammed M'SAAD, Professeur, ISMR, GREYC, Caen

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur BIROUCHE Abderazik

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE,
une thèse intitulée :

"Contribution sur la synthèse d'observateurs pour les systèmes dynamiques hybrides"

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : « **Automatique et traitement du signal** »

Fait à Vandoeuvre, le 07 novembre 2006

Le Président de l'I.N.P.L.,
L. SCHUFFENECKER



NANCY BRABOIS
2, AVENUE DE LA
FORET-DE-HAYE
BOITE POSTALE 3
F - 5 4 5 0 1
VANDŒUVRE CEDEX

Résumé : La thèse porte sur la synthèse d'observateurs pour les systèmes dynamiques hybrides. Nous considérons particulièrement les systèmes décrits par un ensemble fini de sous-systèmes linéaires à temps discret et une loi de commutation. Le sous-système actif et les commutations d'un sous-système à un autre peuvent être définis par une commande externe contrôlable (systèmes à commutation), ou par des transitions autonomes (systèmes affines par morceaux). Sous l'hypothèse du mode actif à chaque instant, nous montrons que l'association de l'observateur commuté avec une contrainte de placement de pôles permet de proposer un schéma d'observation à entrée inconnue pour résoudre le problème de la synchronisation des systèmes à commutation chaotiques avec un message incorporé. Dans le cas de les systèmes affines par morceaux, nous proposons une méthode pour détecter le mode actif. L'association de cette méthode avec l'observateur commuté permet l'estimation conjointe de l'état continu et état discret. Enfin, considérons le cas de commutations régies par un RdP. Nous proposons un schéma d'observation utilisant un observateur de RdP et un observateur commuté. **Mots-clés :** Systèmes hybrides, Systèmes à commutations, Systèmes linéaires affines par morceaux, Synthèse d'observateurs hybrides.

Abstract : The thesis is concerned with the observers synthesis for the hybrid dynamic systems. We particularly consider the systems described by a finite set of discrete-time linear subsystems and a commutation law. The active subsystem and the commutations between the subsystems can be defined by a controllable external command (switched systems), or by the autonomous transitions (piecewise affine linear systems). Under the assumption of the knowledge of the active mode, we show that the association of the switched observer with a pole placement constraint allows to propose observation scheme to solve the synchronization problem of the switched chaotic systems with an embedded message. In the case of piecewise affine systems, we propose a method to detect the active mode. The association of this method with the switched observer allows the joint estimate of the continuous state and discrete state. Finally, we consider the case of commutations governed by a PN. We propose an observation scheme using a PN observer and a switched observer.

Key Words : Hybrid systems, Switched systems, Piecewise affine systems, Hybrid observer synthesis.