HAL
open science

Etude mathématique de la convergence de la PGD variationnelle dans certains espaces fonctionnels

Hala Ossman

To cite this version:

Hala Ossman. Etude mathématique de la convergence de la PGD variationnelle dans certains espaces fonctionnels. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université de La Rochelle; Université Libanaise, 2017. Français. NNT : 2017LAROS006 . tel-01753445

HAL Id: tel-01753445

https://theses.hal.science/tel-01753445v1

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse en cotutelle

pour l'obtention du Grade de Docteur

de l'Université de La Rochelle
École Doctorale : SI-MMEA, ED 522,
Laboratoire : **LaSIE**
et l'Université Libanaise
Ecole Doctorale des Sciences et de Technologie,
Laboratoire : **LaMA-Liban**

Mention : Mécanique des fluides

Etude Mathématique de la convergence de la PGD variationnelle dans certains espaces fonctionnels

présenté par :

Hala OSSMAN [1]

Directeurs de thèse :

Abdallah EL Hamidi, Université de La Rochelle
Mustapha Jazar, Université Libanaise

Thèse soutenue le 23 Mai 2017
devant la commission d'Examen, **Jury**

Rapporteurs

Antonio Falco	Professeur, Universidad CEU Cardenal Herrera
Mejdi Azaiez	Professeur, Université de Bordeaux I

Examinateurs

Ali Wehbe	Professeur, Université Libanaise
Toni Sayah	Professeur, Université Saint-Joseph-Beyrouth
M. Jean-Michel Rakotoson	Professeur, Université de Poitiers
Abdallah El Hamidi	Professeur, Université de La Rochelle
Mustapha Jazar	Professeur, Université Libanaise

[1] Email : hala-ossman@live.com

À mes parents,
À mon mari,
À mes fils Omar et Zayd,
je vous dédie ce travail !

Remerciements

Il me sera très difficile de remercier tout le monde car c'est grâce à l'aide de nombreuses personnes que j'ai pu mener cette thèse à son terme.

Je tiens d'abord à adresser mes sincères remerciements à mes directeurs de thèse, les professeurs Mustapha JAZAR et Abdallah EL HAMIDI pour la confiance qu'ils m'ont accordée en acceptant d'encadrer cette thèse en cotutelle entre l'Université Libanaise et l'Université de La Rochelle.
Je leur exprime toute ma reconnaissance et mon profond respect pour toutes les heures qu'ils ont consacrées à diriger cette recherche et je leur remercie pour leur aide sur les plans scientifique, administratif et humain.

Je voudrais remercier messieurs Antonio FALCO et Mejdi AZAIEZ d'avoir accepté de rapporter cette thèse et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Je remercie également messieurs Jean-Michel RAKOTOSON, Ali WEHBE et Toni SAYYAH d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

J'adresse mes meilleurs remerciements à tous les membres de l'association Libanaise pour la recherche scientifique (LASeR) pour leur soutien. Je remercie également toute l'équipe du centre Azm de l'école doctorale EDST de l'Université Libanaise et l'équipe du Campus Numérique Francophone tripoli (CNF).

Je suis reconnaissante envers l'équipe du LaSIE pour m'avoir acceuillie au sein de ce laboratoire pendant mes séjours à La Rochelle. Je remercie aussi Madame Jennifer De LACORTE GOMEZ et Madame Isabelle HIRSCH pour leur aide dans les démarches administratives à l'Université de La Rochelle.

Je remercie amplement mon amie la plus sincère Jana AL KHAYAl. Nous avons commencé à préparer nos thèses ensemble et nous avons partagé toujours la joie et la déception. Merci également à Jana HAMDI et Salam KOUZAYHA qui m'ont toujours appuyée et aidée. Vous méritez tout le bonheur et la réussite.

Je voudrais remercier profondément tous mes amis au Liban : Hayat MOUSTAPHA, Samar ISSA, Ghada CHMAYCEM, Batoul ABDEL AZIZ, Hind EL BABA, Omar KALAWOUN, Youssof TARABOULSI, Moustapha HAZIM, Mayssaa MERHI, Souha NAZIR, Aya KABBARA ..., pour leurs conseils.

Merci également à tous mes amis à La Rochelle : Jana HAMDI, Marwan Saleh, Saadallah EL ASMAR, Rayane SAWALHI et Ahmad DEEB pour leur aide et leur bon accueil pour moi à La Rochelle.

Au terme de ce parcours, je remercie enfin celles et ceux qui me sont les plus chers et qui ont toujours été là pour moi. Leurs attentions et encouragements m'ont accompagnée tout au long de ces années. Je suis redevable à mes parents pour leur soutien moral et matériel et leur confiance dans mon travail. Je suis également redevable à mon mari pour sa compréhenion et son soutien permanent pendant toutes les années de mes études et à mes fils que j'ai quelque peu délaissés pour achever cette thèse. Merci à mes frères Rabih, Bahaa et Ahmad, à mes soeurs Jamila, Amina et Razane, à ma cousine Taghrid et à toute ma famille qui m'a toujours encouragée et soutenue.

Table des matières

Résumé **1**

Introduction et organisation du travail **2**

1 Etat de l'art et Préliminaires **7**
1.1 Littérature 8
1.1.1 Domaines d'application de la PGD 8
1.1.2 Travaux théoriques 10
1.1.3 Définitions de la méthode PGD 11
1.1.4 Des conditions aux bords de type Dirichlet non homogènes 13
1.2 Préliminaires et définitions 15
1.2.1 Espaces tensoriels de Banach 15
1.2.2 Minimisation d'une fonctionnelle sur un espace de Banach 17
1.2.3 PGD progressive - Algorithme glouton 22
1.3 La PGD appliquée à l'équation de Poisson 24
1.4 Théorèmes utilisés dans la thèse 30

2 La convergence de l'algorithme de minimisation alternée **31**
2.1 Introduction 32
2.1.1 Espaces de Hilbert Tensoriel et PGD variationnelle 32
2.2 Minimisation alternée pour une direction de descente optimale 34
2.3 Convergence de la méthode de minimisation alternée 36
2.3.1 Compacité de (AM) dans le cas de l'équation de Poisson 37
2.3.2 Compacité dans un cas général de diffusion 43

3 La PGD pour une classe de problèmes aux dérivées fractionnaires **47**
3.1 Introduction 48
3.1.1 Histoire 48
3.1.2 Domaines d'applications des équations fractionnaires 48
3.1.3 Contribution à la PGD 49
3.2 Espaces de Sobolev Fractionnaires et Dérivation Fractionnaire 49
3.2.1 Espaces de Sobolev Fractionnaires 49
3.2.2 Opérateurs différentiels de Riemann-Liouville 53
3.3 Problème variationnel et convergence de la méthode PGD 62

3.3.1 PGD et sa convergence 66
3.4 Calcul des modes PGD 70

4 La méthode PGD dans le cadre des espaces des fonctions à variation bornée 75
4.1 Introduction 76
4.2 Rappels généraux 76
4.2.1 Rappels sur la théorie des mesures 76
4.2.2 Fonctions à variation bornée dans $\mathbb{R}$ 78
4.2.3 Fonctions à variation bornée dans $\mathbb{R}^d$ 79
4.3 Structure tensorielle des espaces BV 82
4.4 Ensemble faiblement fermé dans $BV(\Omega)$ 89
4.5 PGD pour un problème bien défini dans $BV(\Omega)$ 90
4.5.1 Construction de la suite PGD 91

5 La PGD dans le cadre de l'équation de la chaleur 93
5.1 Introduction 94
5.2 Stratégie suivie 95
5.3 Problème variationnel et convergence de la PGD 96
5.4 Calcul des modes PGD à chaque pas de temps 102
5.5 Preuve du Lemme 5.1 104
5.6 Preuve du Lemme 5.2 106

Bibliographie 113

Résumé

On s'intéresse dans cette thèse à la PGD (Proper Generalized Decomposition), l'une des méthodes de réduction de modèles qui consiste à chercher, à priori, la solution d'une équation aux dérivées partielles sous forme de variables séparées. Ce travail est formé de cinq chapitres dans lesquels on vise à étendre la PGD aux espaces fractionnaires et aux espaces des fonctions à variation bornée et à donner des interprétations théoriques de cette méthode pour une classe de problèmes elliptiques et paraboliques. Dans le premier chapitre, on fait un bref aperçu sur la littérature puis on présente les notions et outils mathématiques utilisés dans le corps de la thèse. Dans le second chapitre, la convergence des suites des directions alternées (AM) pour une classe de problèmes variationnels elliptiques est étudiée. Sous une condition de non-orthogonalité uniforme entre les itérés et le terme source, on montre que ces suites sont en général bornées et compactes. Alors, si en particulier la suite (AM) converge faiblement alors elle converge fortement et la limite serait la solution du problème de minimisation alternée. Dans le troisième chapitre, on introduit la notion des dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville puis on considère un problème variationnel qui est une généralisation d'ordre fractionnaire de l'équation de Poisson. En se basant sur la nature quadratique et la décomposabilité de l'énergie associée, on démontre que la suite PGD progressive converge fortement vers la solution faible de ce problème. Dans le quatrième chapitre, on profite de la structure tensorielle des espaces BV par rapport à la topologie faible étoile pour définir les suites PGD dans ce type d'espaces. La convergence de telle suite reste une question ouverte. Le dernier chapitre est consacré à l'équation de la chaleur $d-$dimensionnelle, où on discrétise en temps puis à chaque pas de temps on cherche la solution de l'équation elliptique en utilisant la PGD. On montre alors que la fonction affine par morceaux en temps obtenue à partir des solutions construites en utilisant la PGD converge vers la solution faible de l'équation.

Mots-clés : PGD, tenseurs élémentaires, minimisation alternée, dérivée de Riemann-Liouville, espace fractionnaire, variation bornée.

Abstract

In this thesis, we are interested in the PGD (Proper Generalized Decomposition), one of the reduced order models which consists in searching, a priori, the solution of a partial differential equation in a separated form. This work is composed of five chapters in which we aim to extend the PGD to the fractional spaces and the spaces of functions of bounded variation and to give theoretical interpretations of this method for a class of elliptic and parabolic problems. In the first chapter, we give a brief review of the litterature and then we introduce the mathematical notions and tools used in this work. In the second chapter, the convergence of rank-one alternating minimisation AM algorithms for a class of variational linear elliptic equations is studied. We show that rank-one AM sequences are in general bounded in the ambient Hilbert space and are compact if a uniform non-orthogonality condition between iterates and the reaction term is fulfilled. In particular, if a rank-one (AM) sequence is weakly convergent then it converges strongly and the common limit is a solution of the alternating minimization problem. In the third chapter, we introduce the notion of fractional derivatives in the sense of Riemann-Liouville and then we consider a variational problem which is a generalization of fractional order of the Poisson equation. Basing on the quadratic nature and the decomposability of the associated energy, we prove that the progressive PGD sequence converges strongly towards the weak solution of this problem. In the fourth chapter, we benefit from tensorial structure of the spaces BV with respect to the weak-star topology to define the PGD sequences in this type of spaces. The convergence of this sequence remains an open question. The last chapter is devoted to the d-dimensional heat equation, we discretize in time and then at each time step one seeks the solution of the elliptic equation using the PGD. Then, we show that the piecewise linear function in time obtained from the solutions constructed using the PGD converges to the weak solution of the equation.

Keywords: PGD, rank-one tensor, alternating minimisation, Riemann-Liouville derivative, fractional space, bounded variation.

Introduction

De nos jours, les simulations numériques, utilisées surtout pour la prédiction et la prise de décision, ou tout simplement pour une meilleure compréhension des phénomènes physiques, occupent une place très importante dans de nombreuses branches des sciences de l'ingénieur et des techniques de la communication et de l'information.

Toutefois, afin de donner une représentation exacte du monde réel, on a besoin d'introduire un grand nombre de paramètres dans les modèles mathématiques impliquées dans la simulation, puis d'utiliser une discrétisation assez fine dans le monde numérique, pour s'assurer que la solution numérique est une bonne approximation de la solution exacte. Ce qui peut conduire à des quantités de calcul très écrasantes. Dans certains cas, et surtout lorsque la dimension de l'espace est suffisamment grande, les méthodes standards seront impossibles à implémenter. Ainsi, la mémoire de l'ordinateur nécessaire lors de la simulation sera comparable avec le nombre total d'atomes dans l'univers [29]. Ce phénomène est communément connu sous le nom "curse of dimensionality".
Afin d'illustrer le problème, on considère une équation aux dérivées partielles (EDP) définie dans un espace de dimension d ayant une solution $u(x_1, \cdots, x_d)$. On définit une base de discrétisation V_N, avec N degré de liberté pour chacune des variables ($N \in \mathbb{N}^*$) par :

$$V_N := \text{vect}\Big\{ h_{i_1}^{(1)}(x_1) \cdots h_{i_d}^{(d)}(x_d), \;\; 1 \leq i_1, \cdots, i_d \leq N \Big\},$$

tel que pour tout $1 \leq j \leq d$, $\big(h_{i_j}^{(j)}\big)_{1 \leq i \leq N}$ est une famille de N fonctions dépendant uniquement de la variable x_j. La méthode de Galerkin standard consiste à chercher une représentation de la solution de l'EDP de la forme suivante :

$$u_N(x_1, \cdots, x_d) = \sum_{1 \leq i_1, \cdots, i_d \leq N} \lambda_{i_1, \cdots, i_d} \, h_{i_1}^{(1)}(x_1) \cdots h_{i_d}^{(d)}(x_d), \tag{1}$$

et à calculer les N^d réels $(\lambda_{i_1, \cdots, i_d})_{1 \leq i_1, \cdots, i_d \leq N}$. Par conséquence, la complexité du problème croît exponentiellement avec la croissance de la dimension d, ce qui cause clairement un problématique en termes de calcul lorsque d est suffisamment grand.

Afin de remédier à ce problème, plusieurs approches ont été récemment proposées. Citons à titre d'exemples : "sparse grids" [99], "tensor formats" [55], "adaptive polynomial approximations" [33], et les méthodes de réduction de modèles. Parmi ces approches, on se limite dans cette thèse à la réduction de modèle qui consiste à construire une base réduite de taille bien inférieure au nombre de degrés de liberté du problème, puis à projeter le problème sur cette base réduite afin d'obtenir un système d'équations ayant un nombre d'inconnus très petit relativement à celui obtenu par une discrétisation classique. La manière de la construction de la base réduite est celle qui différencie une méthode d'une autre. Il est possible de distinguer deux familles des méthodes de réduction de modèles : celles dites "a-postériori" qui nécessitent une connaissance préalable de la solution, citons par exemple : la POD (Proper Orthogonal Decomposition) introduite dans [69] dans le contexte de la turbulence, puis

utilisée dans [16, 20, 17, 21, 56, 5, 3, 4, 67], la CVT (Central Voronoi Tesselations) qui a été utilisé avec succès dans [38, 40, 39, 24] et la méthode de troncature équilibrée introduite par Moore [74] puis développée par d'autres auteurs dans [13, 14, 54, 92] ; et celles dites "a-priori" qui ne nécessitent aucune information sur la solution : on cite ici la méthode de réduction à priori (APR) qui a été développée par Ryckelnyck [83, 84] dans le cadre des problèmes thermomécaniques puis appliquée aux problèmes d'éléments de frontière et aux problèmes d'élasticité non-linéaire [85, 12], elle a été aussi utilisée pour résoudre les équations de transfert et les équations de Navier-Stocks [98, 97, 96] et pour la modélisation de la propagation des fissures [57]. Une autre méthode de réduction de modèles a-priori, c'est celle qu'on va traiter dans ce travail, est la PGD (Proper Generalized Decomposition) développée dans [9, 10, 62] et qui consiste à chercher la solution d'un problème sous forme de variables séparées. Ainsi, une représentation séparée d'une solution est donnée par

$$u_m(x_1, \cdots, x_d) := \sum_{i=1}^{m} R_i^1(x_1) \times \cdots \times R_i^d(x_d),$$

où R_i^j est une fonction dépendant uniquement de la variable x_j pour tout $i = 1, \cdots, d$, $j = 1, \cdots, m$. Au contraire à la méthode utilisée dans (1), si on discrétise maintenant les fonctions de base R_i^j, en prenant N degré de liberté pour chacune des variables, alors le nombre total d'inconnus sera $m \times N \times d$, ce qui signifie que la complexité croît linéairment avec la dimension et parsuite on pourrait traiter d'une manière très efficace des problèmes définies dans des espaces de haute dimension.

Organisation de cette thèse

Cette thèse est composée de cinq chapitres qui peuvent être résumés comme suit :

Résumé du chapitre 1 "Etat de l'art et préliminaires"

Dans ce chapitre, on fait d'abord un aperçu général sur la méthode PGD : ses domaines d'applications, ses définitions et les travaux théoriques existants. Puis, afin d'avoir une thèse "self-contained" on présente toutes les définitions ainsi que les outils généraux nécessaires pour comprendre ce tarvail. Finalement, on décrit la méthode PGD dans le cadre de l'équation de Poisson $2D$ en présentant les deux aspects algorithmique et théorique.

Résumé du chapitre 2 : "Convergence des algorithmes de minimisation alternée effectués dans la PGD variationnelle"

La résolution numérique des équations aux dérivées partielles en utilisant des représentations tensorielles de la solution est l'un des traitements numériques les plus efficaces pour les problèmes définis dans des espaces de haute dimension. L'étape principale de telles méthodes consiste à calculer le meilleur tenseur élémentaire afin d'enrichir l'approximation tensorielle itérative. Pour les problèmes variationnels, cette étape pourrait être effectuée en utilisant une méthode de minimisation alternée, mais la convergence de tels techniques présente un

véritable défi entre les chercheurs. On étudie alors dans ce chapitre la convergence des suites des directions alternées pour une classe de problèmes variationnels elliptiques. On commence par le traitement de l'équation de la chaleur puis on passe à un cas de diffusion plus général. En imposant une condtion de non-orthoonalité uniforme entre les itérés et le terme source, on montre que ces suites sont compactes. En particulier si toute la suite des directions alternées converge faiblement alors elle converge fortement et la limite serait la solution du problème de minimisation alternée.

Résumé du chapitre 3 "La PGD pour une classe de problèmes aux dérivées fractionnaires"

Une équation différentielle est dite fractionnaire si elle contient un opérateur d'ordre non entier. Elle est dite de plus d'ordre fractionnaire si cet opérateur admet le plus grand ordre dans l'équation. L'équation de diffusion est par exemple d'ordre 2 mais on peut considérer une équation analogue d'ordre $2s$ $(0 < s < 1)$ où le laplacien est remplacé par le "laplacien fractionnaire". Ce type d'EDP avec des ordres de dérivation non entiers ont été validés par plusieurs études expérimentales et théoriques pour des problèmes de transport de polluants en milieu aquifères, pour des problèmes d'origine biologique ou électromagnétique où un phénomène d'anomalie de diffusion intervient.
L'étude des équations fractionnaires est difficile : d'une part, les opérateurs d'ordre fractionnaire sont non locaux, i.e. la valeur de la dérivée fractionnaire d'une fonction en un point dépend de la valeur de la fonction dans tout le domaine, d'autre part, les opérateurs de trace n'admettent pas un sens dans les espaces de Sobolev fractionnaires d'ordre $s \leq \frac{1}{2}$.
Vu le grand intérêt du domaine fractionnaire, on vise dans ce chapitre à étendre la PGD à ce type de problèmes et essayer de dégager des résulats de convergence théoriques.
On rappelle d'abord les notions des espaces de Sobolev fractionnaires et des opérateurs d'ordre fractionnaires au sens de Riemann-liouville et les propriétés les plus importantes qui nous permettent de se lancer dans ce travail. Puis, on considère le problème aux limites suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \left(\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k} + \mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}\right)[u] & = & f & \text{in } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{2}$$

où $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d$, $\Omega_i =]a_k, b_k[$ est un ouvert non vide borné dans $\mathbb{R}$ pour tout $k = 1, \cdots, d$, $(\mathbf{e}_k)_{k=1,\cdots,d}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^d$, $\frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}$, et f est une fontion donnée dans $L^2(\Omega)$. $\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}$ et $\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}$ désignent la dérivée d'ordre s au sens de Riemann-Liouville dans la direction $\mathbf{e}_k$ et $\mathbf{e}_k$ respectivement. On démontre alors que la suite PGD progressive associée à ce problème est bien définie et que cette suite PGD converge fortement vers la solution faible du problème, en se basant sur la nature quadratique et la décomposabilité de l'énergie associée à ce problème.

Résumé du chapitre 4 "La méthode PGD dans le cadre des espaces des fonctions à variation bornée"

On vise dans ce chapitre à étudier l'existence et la convergence des suites PGD dans

le cadre des espaces BV. Ce type d'espaces n'admet pas une structure tensorielle pour la topologie forte, mais on montre qu'il admet une structure tensorielle pour la topologie faible étoile. On arrive alors à définir une suite PGD pour des problèmes de minimisation d'une énergie convexe mais non différentiable définis dans les espaces BV, mais c'est très difficile de trouver des résultats de convergence théoriques, On donne alors un contre-exemple pour affirmer que l'étude de la convergence dans ce cadre ne se fait pas comme dans le cas des problèmes différentiables.

Résumé du chapitre 5 "Interprétation théorique de la PGD dans le cadre de l'équation de la chaleur"

On considère dans ce chapitre l'équation de la chaleur suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) &= f(x,t) \qquad \text{pour tout } (x,t) \in \Omega \times (0,T], \\ u(x,t) &= 0 \qquad \text{pour tout } (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \\ u(0,x) &:= u_0(x) \in L^2(\Omega), \end{cases} \tag{3}$$

définie sur un domaine ouvert de $\mathbb{R}^d$ ayant la forme suivante :

$$\Omega := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d,$$

où les Ω_i sont des ouverts bornés de $\mathbb{R}$ et on s'intéresse à la PGD incrémentale pour résoudre cette équation. Cette approche consiste à discrétiser en temps l'équation de la chaleur puis à chercher la solution de l'équation elliptique à chaque pas de temps en utilisant la méthode PGD.

On montre alors que la solution affine par morceaux en temps définie à travers les solutions des équations elliptiques à chaque pas de temps converge vers la solution faible de l'équation de la chaleur. L'étude de la convergence de la suite PGD vers la solution du problème, en utilisant l'approche non incrémentale, sera l'une des perspectives de cette thèse.

Chapitre 1

Etat de l'art et Préliminaires

Sommaire

1.1 Littérature **8**

1.1.1 Domaines d'application de la PGD 8

1.1.2 Travaux théoriques 10

1.1.3 Définitions de la méthode PGD 11

1.1.4 Des conditions aux bords de type Dirichlet non homogènes 13

1.2 Préliminaires et définitions **15**

1.2.1 Espaces tensoriels de Banach 15

1.2.2 Minimisation d'une fonctionnelle sur un espace de Banach 17

1.2.3 PGD progressive - Algorithme glouton 22

1.3 La PGD appliquée à l'équation de Poisson **24**

1.4 Théorèmes utilisés dans la thèse **30**

1.1 Littérature

La PGD est une famille des méthodes, très récente. Le premier article sur la PGD a été publié en 2006 par Ammar et al. [9] et le premier livre sur cette méthode a été réalisé par Chinesta et al. en $2013 - 2014$ [31].

La représentation séparée de la solution n'est pas spécifique pour la PGD. Une telle décomposition a été proposée depuis les années 80 par Pierre Ladevèze dans sa méthode LATIN (Large Time Incremental method) [59, 60], où il a considéré une sépration espace-temps :

$$u(x,t) \approx \sum_{i=1}^{m} X_i(x) \times T_i(t),$$

ce qui fait de la PGD une généralisation de la méthode LATIN de Ladevèze. Plusieurs améliorations sur la méthode LATIN ont été réalisées par le groupe de Ladevèze avant l'introduction de la PGD [61, 78, 62]. Ce type de représentation a été aussi largement employé dans la chimie quantique. Ainsi, les approches de Hartree-Fock et Post-Hartree-Fock utilisent des approximations sous forme séparée de la fonction d'onde pour l'équation de Schrödinger [26]. La POD (Décomposition Propre Orthogonale) est une méthode qui utilise également une représentation séparée de la solution.

1.1.1 Domaines d'application de la PGD

La PGD est utilisée dans plusieurs domaines et travaux de recherches. On cite ici quelques applications à titre indicatif. Pourtant, on peut se référer au travail de Chinesta et al. [32] en 2011 et les articles [29, 30] pour savoir plus de détails concernant les applications de la PGD et les différentes challenges.

PGD pour les problèmes multidimensionnels

La première application sur la PGD était sur l'équation de Fokker-Planck définie en haute dimension dans le cadre de la théorie cinétique afin de traiter des problèmes de description des fluides complexes [9, 10], où dans ce cas, le nombre d'inconnus utilisés pour résoudre l'équation de Fokker-Planck est égale à 10^5 au lieu de 10^{40} pour la résolution classique. La PGD est aussi appliquée à l'équation de Schrödinger en chimie quantique [8], aux modèles financiers pour les prix des options avec un nombre élevé de facteurs de risque [45] et pour résoudre l'équation maîtresse multidimensionnelle [28] qui conduit à des applications intéressantes dans les systèmes biologiques.

PGD pour séparer l'espace physique

La PGD est encore utilisée efficacement pour obtenir les solutions des problèmes définies dans des espaces de dimension modérée. On cite par exemple les travaux de Dumon [41] où il a considéré les équations de Navier Stockes définies dans un domaine cubique en dimension 3 ; l'espace alors est traité comme trois espaces unidimensionnels et parsuite la décomposition dans le domaine cubique sera très efficace.

La séparation des variables a été étendue à des domaines non cubiques par Gonzalez [52], où l'approximation de la solution par la PGD est cherchée de la forme suivante :

$$u_m(x_1, \cdots, x_d) = w(x_1, \cdots, x_d) \sum_{j=1}^{m} F_j^1(x_1) \times \cdots \times F_j^d(x_d),$$

avec $w : \Omega^\star \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction vérifiant : $\begin{cases} w(x_1, \cdots, x_d) > 0, & \text{si } (x_1, \cdots, x_d) \in \Omega, \\ w(x_1, \cdots, x_d) = 0, & \text{si } (x_1, \cdots, x_d) \in \Omega^\star \backslash \Omega, \end{cases}$
où $\Omega^\star$ est le plus petit cube contenant Ω.

Parfois des décomopositions incomplètes sont utilisées. Ainsi, pour les problèmes définis dans des géométries sous forme des plaques, la PGD est prouvée d'être très fructueuse dans [22]. La représentation séparée suivante a été alors considérée :

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^{m} X_i(x, y) \cdot Z_i(z).$$

La surface de la plaque est définie dans le plan (x, y) et peut avoir des géométries complexes et la coordonnée z est associée à l'épaisseur de la plaque. Une telle représentation permet la résolution des problèmes $3D$ avec une complexité $2D$.

PGD pour les problèmes paramétriques

L'une des applications de la PGD les plus intéressantes et populaires pour les sciences de l'ingénieur est la résolution des modèles paramétriques. L'idée ici est que les paramètres (par exemple le nombre de Reynold dans les problèms d'écoulement, la conductivité thermique dans l'équation de la chaleur $\cdots$) seront considérés comme des extra-variables, ce qui augmente la dimension du problème. Ainsi, étant donné un problème défini dans un espace de dimension modérée avec des paramètres $\beta_1, \cdots, \beta_p$, une approximation d'ordre J de la solution sera cherchée sous la forme suivante :

$$u(x; \beta_1, \cdots, \beta_p) \approx \sum_{j=1}^{J} X_j(x) \Psi_j^1(\beta_1) \times \cdots \times \Psi_j^p(\beta_p).$$

De cette manière, $(\beta_1, \cdots, \beta_p)$ appartient à un rectangle de dimension p, ce qui constitue un domaine naturel pour l'application de la PGD. Notons que les conditions aux limites et aux bords peuvent être aussi considérées comme des variables supplémentaires.
Ce type de problème paramétrique a été traité par exemple dans les calculs d'homogénéisation linéaire et non linéaire par Lamari [64, 63] qui a considéré la température macroscopique et son évolution temporelle ainsi que la conductivité thermique comme des avariables supplémentaires. Dans [22, 11], les paramètres des matériaux sont les coordonnées supplémentaires et dans [81] la solution générale de l'équation de la chaleur a été calculé pour une large gamme des valeurs de la conductivité thermique qui a été considéré comme une variable supplémentaire.

PGD pour la simulation en temps réel
Après la recherche de la solution d'un problème à l'aide de la PGD, en considérant les paramètres comme des variables supplémentaires, on pourrait traiter facilement et à postériori des problèmes d'identification inverse et d'optimisation. Ainsi, ces tâches seront effectuées comme étant des opérations de post-traitement agissant sur la solution générale calculée une fois pour toute par la méthode PGD (calcul offline). On pourrait alors déduire la solution pour différentes valeurs des paramètres instantanément (calcul online). Parmi les applications traitées on cite [49, 66] dans le cadre des problèmes d'optimisation du procédé et de forme et [22, 50] où cette étape est utilisée pour les téléphones portables.

Le problème d'identification inverse a été couplé avec des stratégies de contrôle dans le contexte de la DDDAS [50].

Concernant les simulations chirurgicales, une haute fréquence est indispensable pour un bon fonctionnement des simulateurs, alors le temps de calcul doit être instantanné. Les résultats issus des conférences où la PGD est testée sur ce type de problème semblent encourageants.

PGD pour les problèmes stochastiques
La PGD a montré ses capacités dans la résolution des problèmes stochastiques. C'était un concept proposé par Nouy [75] et nommé "Generalized Spectral Decomposition" où les variables stochastiques sont séparées des variables déterministes. La solution u d'un problème stochastique est alors recherchée sous la forme suivante

$$u \approx \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i,$$

où les λ_i sont des coefficients aléatoires et les F_i sont des fonctions déterministes. On cite dans ce cadre le travail de Tamellini et al. [93] pour la recherche de la solution des équations de Navier-Stockes stochastiques stationnaires, dans lequel le nombre de Reynolds et le terme force ont été considérés comme des variables aléatoires. Dans [75, 76], Nouy a appliqué la méthode pour résoudre des problèmes stochastiques linéaires, et l'a étendue à un plus grand nombre d'équations stochastiques. Finalement, les auteurs de [79] ont proposé une extension pour résoudre des équations stochastiques non-linéaires.

1.1.2 Travaux théoriques

La convergence de la méthode PGD est la question qui nous intéresse le plus dans cette thèse. Cette question a été d'abord traitée par Le Bris et al. [65] où la PGD progressive est comparée aux algorithmes gloutons. Plus particulièrement, les auteurs ont démontré que la version variationnelle de la PGD, basée sur la minimisation de l'énergie associée à l'équation de Poisson converge vers la solution du problème. Ce travail a été étendue par Cancès et al. [27] au cas plus général des problèmes elliptiques non linéaires auto-adjoints, définis dans des espaces de Hilbert tensoriels, et par Falcó et Nouy [48] dans le cas des espaces de Banach

tensoriels. Dans [47], les auteurs ont introduit une généralisation du Théorème d'Ekart et Young ce qui leur permet de démontrer la convergence de la PGD pour certains problèmes définis dans des espaces de Hilbert tensoriels. Dans [7], Ammar et al. ont démontré que la solution obtenue par la PGD pour une classe des systèmes linéaires converge vers la solution du modèle complet. D'autres avancements théoriques ont été élaborées ; on cite le travail de Nouy [77] qui a exprimé la PGD comme un pseudo problème aux valeurs propres, ce qui, à son tour, conduit à différentes définitions de la PGD.

1.1.3 Définitions de la méthode PGD

Il existe dans la littérature plusieurs définitions de la PGD ; citons les définitions classiques basées sur l'orthogonalité de Galerkin [9, 10, 78], celles basées sur la minimisation résiduelle [78, 62], introduites surtout pour les problèmes non symétriques afin d'améliorer la robutesse de la méthode, et une nouvelle définition basée sur un critère de Petrov-Galerkin introduite par Nouy [77] dans le cadre des problèmes d'évolution afin d'améliorer la précision de l'approximation PGD. Dans cette nouvelle définition l'orthogonalité du résidu est imposé par rapport à un autre ensemble des fonctions temporelles et spatiales qui sont les solutions d'un problème adjoint. Le lecteur intéressé peut se référer à [77] où les différentes définitions de la PGD sont détaillées.

Dans la suite de ce travail, on va considérer la PGD progressive de Galerkin qui est la plus simple dans l'implémentation. Nous détaillons alors la PGD progressive de Galerkin dans le cas d'un problème multidimensionnel. Les variables peuvent être des variables spatiales, temporelles ou des paramètres du problème.

On considère le problème faible suivant : Trouver $u \in V(\Omega)$ tel que

$$a(u, u^*) = L(u^*), \quad \forall\, u^* \in V(\Omega),$$

où $\Omega := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d$ est un ouvert cartésien de $\mathbb{R}^d$, $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire, $L(\cdot)$ est une forme linéaire et $V(\Omega)$ est un espace fonctionnel approprié avec des conditions de Dirichlet homogènes.
La PGD consiste à chercher u sous la forme séparée suivante :

$$u(x_1, \cdots, x_d) \approx u_m(x_1, \cdots, x_d) = \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{d} R_j^i(x_j),$$

où les "meilleurs" tenseurs élémentaires $R_1^j(x_1) \times \cdots \times R_d^j(x_d)$, pour tout $j = 1, \cdots, m$ seront cherchés d'une manière itérative, de façon à vérifier l'orthogonalité de Galerkin. Ces meilleurs tenseurs élémentaires sont appelés les "modes" de la PGD.

Enrichissement de la base

Supposons qu'à l'ordre $m-1$, $u_{m-1} = \sum_{i=1}^{m-1} \prod_{j=1}^{d} R_j^i(x_j)$ est connu. La solution à l'ordre m est alors cherchée sous la forme suivante

$$u_m = \sum_{i=1}^{m-1} \prod_{j=1}^{d} R_j^i(x_j) + \prod_{j=1}^{d} R_j^m(x_j)$$

où les R_j^m sont à priori inconnus.
On calcule les R_j^m, $j = 1, \cdots, d$, en exigeant que l'approximation enrichissée satisfait l'orthogonalité de Galerkin. En d'autres termes,

$$a(u_m, u^*) = L(u^*), \quad \forall\, u^* \in V_m(\Omega),$$

où $V_m(\Omega) \subset V(\Omega)$ est un espace approximatif de $V(\Omega)$, i.e. les R_j^m doivent satisfaire l'équation suivante :

$$a\left(\prod_{j=1}^{d} R_j^m(x_j), u^*\right) = L(u^*) - a(u_{m-1}, u^*), \quad \forall\, u^* \in V_m(\Omega). \tag{1.1}$$

Pour tout $i = 1, \cdots, d$, on définit la fonction

$$Q_i^* := R_i^{m*}(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{d} R_j^m(x_j)$$

où $R_i^{m*}(x_i)$ est une fonction test dépendant de la variable x_i. On injecte Q_i^* dans (1.1), on obtient alors un système non linéaire en R_j^m, $j = 1, \cdots, d$. Un algorithme de point fixe sera utilisé afin de résoudre ce système.

Critère d'arrêt
On continue l'enrichissement de la base associée à la solution de la même manière jusqu'à la satisfaction d'un certain critère d'arrêt.
Pour les problèmes ayant une solution exacte u_{ex} connue, on arrête lorsque :

$$\frac{\|u - u_{ex}\|}{\|u_{ex}\|} < \epsilon.$$

Pour les problèmes n'ayant pas une solution exacte connue, on choisit comme critère d'arrêt :

$$\frac{\|\mathcal{A}(u) - f\|}{\|f\|} < \epsilon,$$

pour une certaine norme appropriée, avec ϵ est assez petit déjà indiqué par l'utilisateur et

$$\mathcal{A}(u) = f$$

est l'équation d'Euler-Lagrange associé au problème variationnel.

1.1.4 Des conditions aux bords de type Dirichlet non homogènes

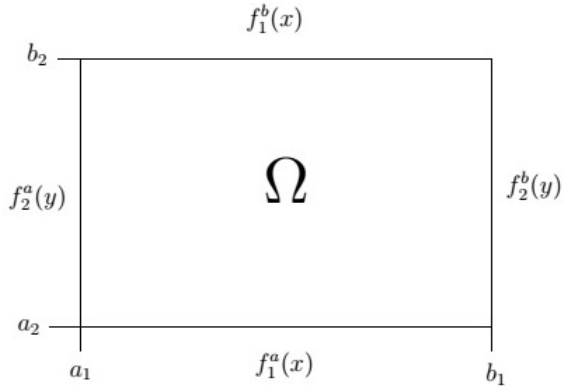
Dans la section précédente, on a considéré les problèmes avec des conditions de Dirichlet homogènes. Ceci se traduit explicitement en imposant que les conditions aux bords soient nulles sur chacune des modes de la PGD. Les conditions non-Dirichlet comme celles de Neumann ou Robin ne constituent pas un problème à implémenter car elles ne sont pas imposées explicitement. Ce type de problèmes est traité d'abord par González et al [52] qui proposent une méthode appelée "transfinite interpolation" pour construire une fonction satisfaisant les conditions aux bords et qui peut être utilisée pour remplacer le problème original par un autre avec des conditions de Dirichlet homogènes.

Dans cete section, on introduit la notion d'interpolation transfinie sur un rectangle puis on décrit comment cette fonction peut être utilisée pour imposer des conditions de Dirichlet non-homogènes. Notons que cette notion peut être généralisée à des orthotopes de dimension d.

Interpolation transfinie sur un rectangle On considère le domaine rectangulaire $\overline{\Omega} := [a_1, b_1] \times [a_1, b_2]$ avec les valeurs aux bords $f_1^a(x)$, $f_1^b(x)$, $f_2^a(y)$ et $f_2^b(y)$ comme l'indique la figure 1.1.4. En utilisant l'interpolation transfinie, on pourrait construire une fonction continue $W(x, y)$, vérifiant ces conditions aux bords. D'après [53], W est de la forme

$$\begin{aligned} W(x,y) = \; & \frac{-1}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\Big[(x-a_1)(b_2-y)f_1^a(b_1) + (x-a_1)(y-a_2)f_1^b(b_1) \\ & \qquad + (b_1-x)(b_2-y)f_1^a(a_1) + (b_1-x)(y-a_2)f_1^b(a_1)\Big] \\ & + \frac{1}{(b_1-a_1)}\Big((b_1-x)f_2^a(y) + (x-a_1)f_2^b(y)\Big) \\ & + \frac{1}{(b_2-a_2)}\Big((b_2-y)f_2^a(y) + (y-a_2)f_1^b(x)\Big). \end{aligned} \tag{1.2}$$

FIGURE 1.1 : Domaine rectangulaire



Puisque W est imposée d'être continue, alors on peut supposer que les valeurs aux bords coïncident sur les sommets du domaine Ω. Autrement dit, on a

$$f_2^a(a_2) = f_1^a(a_1),\ f_2^a(b_2) = f_2^b(b_2),\ f_2^b(b_2) = f_1^b(b_1),\ f_2^b(a_2) = f_1^a(b_1).$$

De cette manière, la fonction d'interpolation W est simplement dérivable et les valeurs de W aux bords de Ω peuvent être facilement évaluées. Par exemple,

$$\begin{aligned} W(x, b_2) &= \frac{-1}{b_1 - a_1}\big[(x - a_1)f_1^b(b_1) + (b_1 - x)f_1^b(a_1)\big] \\ &\quad + \frac{1}{(b_1 - a_1)}\ \big[(b_1 - x)f_2^a(b_2) + (x - a_1)f_2^b(b_2)\big]\ +\ f_1^b(x) \\ &= f_1^b(x). \end{aligned}$$

Maintenant, si on considère le problème suivant

$$\begin{cases} \mathcal{D}u = f & \text{sur} \quad \Omega =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[, \\ u = g \neq 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\mathcal{D}$ est un opérateur différentiel, alors en faisant le changement des variables suivant

$$v := u - W,$$

où W est la fonction d'interpolation transfinie vérifiant

$$W = g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega,$$

on obtient le problème suivant

$$\begin{cases} \mathcal{D}v = f + \mathcal{D}W & \text{sur} \quad \Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2], \\ v = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

C'est un problème avec des conditions de Dirichlet homogènes qui peut être résolu de la même façon que la section précédente afin de chercher v.

L'algorithme qu'on vient de détailler est appliqué en pratique. Mais pour démontrer la convergence de la PGD progressive, on a besoin de traiter cette méthode comme étant un algorithme glouton, c.à.d de transformer le problème à un problème de minimisation, où à chaque itération, on cherche le "meilleur" tenseur élémentaire en minimisant une certaine quantité. Le dictionnaire de l'algorithme sera l'ensemble des tenseurs élémentaires.

Dans la section suivante, on rappelle tous les outils nécessaires pour présenter la PGD comme un algorithme glouton.

1.2 Préliminaires et définitions

1.2.1 Espaces tensoriels de Banach

Définition 1.1. *(Espace tensoriel algébrique)*
Soit d un entier > 1 et $\big(W_i, \|\cdot\|_i\big)_{i=1,\cdots,d}$ est une famille d'espaces de Banach W_i munis chacun d'une norme $\|\cdot\|_i$. On définit l'espace tensoriel algébrique W par

$$W := {}_a\bigotimes_{k=1}^{d} W_k := vect\big\{w^{(1)} \otimes \cdots \otimes w^{(d)} : w^{(k)} \in V_k,\, k = 1, \cdots d\big\},$$

où a désigne la nature algébrique du produit tensoriel.

La représentation de Tucker d'un élément $w \in W$ est donnée par

$$w = \sum_{i \in I} c_i \bigotimes_{j=1}^{d} w_{i_j}^{(j)}, \tag{1.3}$$

où $I = I_1 \times \cdots \times I_d$ est l'ensemble des multi-indices tel que $I_j = \{1, \cdots, r_j\}$, $r_j \leq$ dim (W_j), $c_i \in \mathbb{R}$, et les $w_{i_j}^{(j)} \in W_j$ sont orthonormales et linéairement indépendantes. La taille des données est déterminée par les nombres r_j rassemblés dans $r = (r_1, \cdots, r_d)$. Pour r fixé, l'ensemble des tenseurs représentés par (1.3) est défini par $\mathcal{T}_r(W) :=$

$$\left\{ w \in W : \text{ il existe des sous espaces } U_j \subset W_j \text{ tel que dim } (U_j) = r_j \text{ et } w \in U := {}_a\bigotimes_{j=1}^{d} U_j \right\}.$$

Dans la suite, l'ensemble des tenseurs élémentaires de rang 1 sera noté $\mathcal{M}_1(W)$, c.à.d

$$\mathcal{M}_1(W) := \mathcal{T}_{(1,\cdots,1)}(W) = \left\{ \bigotimes_{i=1}^{d} w^i,\ w^i \in W_i \right\}$$

On peut définir encore $\mathcal{M}_n(W)$ tel que

$$\mathcal{M}_n(W) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} z_i, \quad z_i \in \mathcal{M}_1(W) \right\}.$$

Définition 1.2 (Espace de Banach tensoriel)**.** *On dit que $W_{\|\cdot\|}$ est un espace de Banach tensoriel s'il existe un espace tensoriel algébrique W muni de la norme $\|\cdot\|$, tel que*

$$W_{\|\cdot\|} := {}_{\|\cdot\|}\bigotimes_{j=1}^{d} W_j = \overline{{}_a\bigotimes_{j=1}^{d} W_j}^{\|\cdot\|}.$$

En d'autres termes, $W_{\|\cdot\|}$ est la complétude de W par rapport à la norme $\|\cdot\|$. Notons que si $W_{\|\cdot\|}$ est un espace de Hilbert alors on dit que $W_{\|\cdot\|}$ est un espace tensoriel de Hilbert.

On remarque que $\mathcal{M}_1(W)$ est dense dans $W_{\|\cdot\|}$, de plus $\mathcal{T}_r(W)$ est aussi dense dans $W_{\|\cdot\|}$ pour tout $r = (r_1, \cdots, r_d)$ tel que $r_j \geq 1$, $j = 1, \cdots, d$, car $\mathcal{M}_1(W) \subset \mathcal{T}_r(W)$.

Dans le lemme suivant, on démontre que $\mathcal{D}(\Omega)$, l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et à support compact dans Ω, est un espace de Banach tensoriel.

Lemme 1.1. *(Voir [102, Lemme 3.1.1, page 44]) Si $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$ où Ω_1, Ω_2 sont des ouverts respectifs de $\mathbb{R}^{n_1}$ et $\mathbb{R}^{n_2}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ alors $\mathcal{D}(\Omega_1, \mathbb{K})_a \bigotimes \mathcal{D}(\Omega_2, \mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K})$.*

Preuve. Soit $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K})$. Le prolongement de Φ par zéro en dehors de Ω sera encore noté Φ. On définie la fonction ρ sur $\mathbb{R}$ comme suit

$$\begin{array}{rccl} \rho: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \begin{cases} h \exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right) & \text{si } |t| < 1, \\ 0 & \text{si } |t| \geq 1, \end{cases} \end{array}$$

où $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \rho(t)\, dt = 1$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ par

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & g(x, y) := \rho(|x|) \cdot \rho(|y|). \end{array}$$

Pour tout $\epsilon > 0$, on pose $g_\epsilon(x, y) := \frac{1}{\epsilon^n} g(x/\epsilon, y/\epsilon)$ alors le support de g_ϵ est inclus dans $B(0, \epsilon)$, la boule de centre $0_{\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}}$ et de rayon ϵ. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on introduit la fonction Φ_k défine par

$$\begin{array}{rcccl} \Phi_k: & \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & (x, y) & \longmapsto & \Phi_k(x, y) := [\Phi * g_{1/k}](x, y) & = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \Phi(\xi, \eta) g_{1/k}(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \\ & & & & = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \Phi(x - \xi, y - \eta) g_{1/k}(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{array}$$

D'abord, il existe un compact $\overline{K} \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ tel que $\text{supp}(\Phi) \subset \overline{K}$ et $\text{supp}(\Phi_k) \subset K$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. En effet, si K_1 est le support de Φ dans Ω alors il existe $s > 0$ tel que

$$\forall u \in K_1,\ \forall v \in \partial\Omega, \quad \text{on a} \quad \|u - v\|_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \geq s.$$

Soit $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{k_0} \leq \frac{s}{2}$. Donc pour tout $k \geq k_0$, on a

$$\text{supp}(g_{1/k}) \subset B\big(0, s/2\big) \quad \text{et} \quad \text{supp}(\Phi_k) \subset K_1 + \overline{B\big(0, s/2\big)} \subset \Omega.$$

Il suffit alors de prendre $\overline{K} = K_1 + \overline{B\big(0, \frac{s}{2}\big)}$.

De plus, en utilisant le Théorème de dérivation des intégrales dépendant de paramètres, Φ_k est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n_1+n_2}, \mathbb{R})$ et on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, pour tous multi-indices $(l_1, \cdots, l_n) \in \mathbb{N}^{n_1}$ et $(l'_1, \cdots, l'_{n_2}) \in \mathbb{N}^{n_2}$,

$$\begin{aligned} &\left(\prod_{\lambda=1}^{n_1} \frac{\partial^{l_\lambda}}{\partial x_\lambda^{l_\lambda}}\right) \circ \left(\prod_{\mu=1}^{n_2} \frac{\partial^{l'_\mu}}{\partial y_\mu^{l'_\mu}}\right) [\Phi_k](x, y) = \\ &\qquad \int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \left(\prod_{\lambda=1}^{n_1} \frac{\partial^{l_\lambda}}{\partial x_\lambda^{l_\lambda}}\right) \circ \left(\prod_{\mu=1}^{n_2} \frac{\partial^{l'_\mu}}{\partial y_\mu^{l'_\mu}}\right) [\Phi(x - \xi, y - \eta)] g_{1/k}(\xi, \eta)\, d\xi d\eta. \end{aligned} \tag{1.4}$$

La suite $(\Phi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ approche la fonction Φ uniformément sur tout compact K de $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$, d'après la continuité uniforme de Φ sur tout compact de $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ et les propriétés de la fonction g. Il suffit en effet de remarquer que

$$\begin{aligned}
\sup_K |\Phi - \Phi_k| \quad &\leq \sup_{(x,y)\in K,\, \|(\xi,\eta)\|\leq \frac{\delta}{k}} |\Phi(x,y) - \Phi(x-\xi, y-\eta)| \times \int_{\|(\xi,\eta)\|\leq\frac{\delta}{k}} g_{1/k}(\xi,\eta)\, d\xi d\eta \\
&\qquad + 2\,\|\Phi\|_\infty \int_{\|(\xi,\eta)\|\geq\frac{\delta}{k}} g_{1/k}(\xi,\eta)\, d\xi d\eta \\
&\leq \sup_{(x,y)\in K,\, \|(\xi,\eta)\|\leq \frac{\delta}{k}} |\Phi(x,y) - \Phi(x-\xi, y-\eta)| \\
&\qquad + 2\,\|\Phi\|_\infty \int_{\|(\xi,\eta)\|\geq\frac{\delta}{k}} g_{1/k}(\xi,\eta)\, d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{1.5}$$

et de choisir δ assez grand, puis une fois δ fixé, k suffisamment grand pour que la somme des deux termes figurant dans le membre de droite de (1.5) soit majorée par ϵ arbitraire.
En remplaçant dans (1.5) Φ par n'importe laquelle de ses dérivées partielles à un ordre arbitraire et en utilisant (1.4), on constate que la suite $\big(\Phi_k\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers Φ dans $\mathcal{D}(\Omega,\mathbb{K})$.
Finalement, le fait que $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $g_{1/k} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_1)_a \bigotimes \mathcal{C}^\infty(\Omega_2)$ nous permet de conclure que $(\Phi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite dans $\mathcal{D}(\Omega_1)_a \bigotimes \mathcal{D}(\Omega_2)$ qui converge vers Φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$. $\square$

1.2.2 Minimisation d'une fonctionnelle sur un espace de Banach

Dans cette section on désigne par V espace de Banach réflexif muni d'une norme $\|\cdot\|$ et $J : V \to \mathbb{R}$ une fonction donnée. On considère le problème de minimisation suivant :

$$J(u) = \min_{v\in M} J(v), \tag{1.6}$$

où M est une partie inclus dans V.

Définition 1.3. *J est coercive si et seulement si*

$$\lim_{\|u\|\to+\infty} J(u) = +\infty.$$

En d'autres termes, J est coercive si

$$\exists c > 0 \quad \textit{tel que} \quad J(u) \geq c\,\|u\|^2.$$

Définition 1.4. *Soit $(v_n)_n$ une suite dans V. On dit que $(v_n)_n$ converge faiblement vers v, et on note $v_n \rightharpoonup v$ si :*

$$\lim_{n\to\infty} \langle v_n, \varphi\rangle = \langle v, \varphi\rangle \quad \textit{pour tout } \varphi \in V',$$

où V' désigne l'espace topologique dual de V et $\langle\cdot,\cdot\rangle : V' \times V \to \mathbb{R}$ est le paire de dualité.

Définition 1.5. *On dit que M est faiblement fermé dans V si pour toute suite $(v_n)_n \subset M$ telle que $v_n \rightharpoonup v$ dans V on a : $v \in M$.*

Définition 1.6. *On dit que J est faiblement semi-continue inférieurement (f.s.c.i) (resp. faiblement continue) dans $M \subset V$ si pour toute suite $(v_n)_n \subset M$ tel que $v_n \rightharpoonup v$ dans M, on a :*

$$J(v) \leq \liminf_{n\to\infty} J(v_m) \quad (\textit{resp. } J(v) = \lim_{n\to\infty} J(v_n)).$$

Définition 1.7. *La fonction J est dite convexe si pour tout $t \in [0,1]$ et u, $v \in V$ on a*

$$J(tu + (1-t)v) \leq tJ(u) + (1-t)J(v). \tag{1.7}$$

J est dite strictement convexe si le signe $\leq$ dans (1.7) est remplacé par un signe $<$ pour tout $u \neq v \in V$ et pour tout $t \in]0,1[$.

Proposition 1.1. *Si J est convexe et semi-continue inférieurement alors J est faiblement semi-continue inférieurement.*

Théorème 1.1. *Si M est faiblement fermé dans V et J est coercive et faiblement semi-continue inférieurement dans M alors le problème de minimisation (1.6) admet au moins une solution.*

Preuve. Soit $\alpha = \inf_{v\in M} J(v)$ et $(v_n)_n \subset M$ une suite minimisante de J. La coercivité de J implique que $(v_n)_n$ est bornée dans l'espace réflexif, alors $(v_n)_n$ admet une sous-suite $(v_{n_k})_k$ qui converge faiblement vers un élément $v \in V$. Puisque M est faiblement fermé, $v \in M$. Le fait que J est f.s.c.i donne :

$$J(v) \leq \liminf_{n\to\infty} J(v_{n_k}) = \alpha.$$

D'où $J(u) = \alpha$ et u est une solution du problème de minimisation. □

Lemme 1.2. *Supposons que J vérifie les conditions suivantes :*

1. *J est Fréchet différentiable.*
2. *J est elliptique, i.e. il existe $\alpha > 0$ et $s > 1$ tel que pour tout v, $w \in V$, on a :*

$$\langle J'(v) - J'(w), v - w\rangle \geq \alpha \|v - w\|^s.$$

Alors :

a) Pour tout v, $w \in V$, on a :

$$J(v) - J(w) \geq \langle J'(w), v - w\rangle + \frac{\alpha}{s}\|v - w\|^s.$$

b) J est strictement convexe, bornée inférieurement et coercive.

Preuve. (Voir [48, Lemme 3]) Pour tout v, $w \in V$, on a

$$\begin{aligned} J(v) - J(w) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} J(w + t(v-w))\, dt = \int_0^1 \langle J'(w + t(v-w)), v - w\rangle\, dt \\ &= \langle J'(w), v - w\rangle + \int_0^1 \langle J'(w + t(v-w)), v - w\rangle\, dt \\ &\geq \langle J'(w), v - w\rangle + \int_0^1 \frac{\alpha}{t} \|t(v-w)\|^s\, dt \\ &= \langle J'(w), v - w\rangle + \tfrac{\alpha}{s}\|v - w\|^s. \end{aligned}$$

Alors pour tout $v \in V$ on a

$$J(v) \geq J(0) + \langle J'(0), v\rangle + \frac{\alpha}{s}\|v\|^s \geq J(0) - \|J'(0)\|\|v\| + \frac{\alpha}{s}\|v\|^s,$$

ce qui donne la coerivité et le fait que J est bornée inférieurement.
La convexité stricte découle du fait que pour $v \neq w$ on a :

$$J(v) - J(w) > \langle J'(w), v - w\rangle.$$

□

Dans la suite, on considère un espace de Banach tensoriel $W_{\|\cdot\|}$, une fonctionnelle J vérifiant les conditions du Théorème 1.1 et une partie $\mathcal{M}_1 \subset W_{\|\cdot\|}$, faiblement fermé, tels que :

1. $0 \in \mathcal{M}_1$,
2. $\mathrm{vect}(\mathcal{M}_1)$ est dense dans $W_{\|\cdot\|}$,
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall v \in \mathcal{M}_1$, on a $\lambda v \in \mathcal{M}_1$.

Lemme 1.3. *Pour tout $v \in W_{\|\cdot\|}$, l'ensemble $v + \mathcal{M}_1 := \{v + w/\ w \in \mathcal{M}_1\}$ est faiblement fermé dans $V_{\|\cdot\|}$. De plus, le problème de minimisation*

$$\min_{w \in v + \mathcal{M}_1} J(w),$$

admet une solution.

Preuve. Soit $(z_n)_n \subset v + \mathcal{M}_1$ une suite convergente vers z dans $V_{\|\cdot\|}$. On a $z_n = v + w_n \rightharpoonup z$ où $(w_n)_n \subset \mathcal{M}_1$, alors $w_n \rightharpoonup z - v$ et puisque $\mathcal{M}_1$ est faiblement fermé dans $V_{\|\cdot\|}$ alors $z - v \in \mathcal{M}_1$ et parsuite $z \in v + \mathcal{M}_1$. L'existence d'une solution du problème de minimisation résulte du Théorème 1.1. □

Lemme 1.4. *Soit $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d$, un produit d'ouverts bornés dans $\mathbb{R}$. Pour tout $k = 1, \cdots, d$, $(u_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$est une suite de $L^2(\Omega_k)$ tel que*

$$u_k^n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} u_k \text{ dans } L^2(\Omega_k).$$

Alors

$$\bigotimes_{k=1}^{d} u_k^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \bigotimes_{k=1}^{d} u_k \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Preuve. Par abus de simplicité, on se limite au cas $d = 2$. Il suffit alors de démontrer que

$$\int_\Omega \big(u_1^n \otimes u_2^n - u_1 \otimes u_2\big) \cdot \varphi \, dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \big(u_1^n \otimes u_2^n - u_1 \otimes u_2\big) \cdot \varphi \, dx &= \int_\Omega \big(u_1^n \otimes u_2^n - u_1^n \otimes u_2\big)\varphi \, dx + \int_\Omega \big(u_1^n \otimes u_2 - u_1 \otimes u_2\big) \cdot \varphi \, dx \\
&= \int_{\Omega_1} u_1^n \int_{\Omega_2} \big(u_2^n - u_2\big)\varphi \, dx_2 dx_1 + \int_{\Omega_2} u_2 \int_{\Omega_1} \big(u_1^n - u_1\big) \cdot \varphi \, dx_1 dx_2.
\end{aligned}$$

Or la fonction $h_n : x_1 \longrightarrow \displaystyle\int_{\Omega_2} \big(u_2^n - u_2\big)\varphi \, dx_2$ est dans $\mathcal{D}(\Omega_1)$ (d'après le Théorème de dérivation sous le signe intégral). De plus, d'après le Théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$h_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega_1).$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega_1} u_1^n \int_{\Omega_2} \big(u_2^n - u_2\big)\varphi \, dx_2 dx_1 \right| &\leq \|u_1^n\|_{L^2(\Omega_1)} \|h_n\|_{L^2(\Omega_1)} \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \quad \big((u_1^n)_n \text{ converge faiblement donc bornée}\big).
\end{aligned}$$

De même on montre que

$$\int_{\Omega_2} u_2 \int_{\Omega_1} \big(u_1^n - u_1\big) \cdot \varphi \, dx_1 dx_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Lemme 1.5. *Pour tout $p \in]1, +\infty[$ et $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d$, un produit d'ouverts bornés dans $\mathbb{R}$, l'espace $\mathcal{M}_1\left({}_a\bigotimes_{j=1}^{d} L^p(\Omega_j)\right)$ est faiblement fermé dans $L^p(\Omega)$.*

Preuve. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite dans $\mathcal{M}_1\big({}_a\bigotimes_{j=1}^{d} L^p(\Omega_j)\big)$ qui converge faiblement vers $v \in L^p(\Omega)$. Le but est de démontrer que $v \in \mathcal{M}_1\big({}_a\bigotimes_{j=1}^{d} L^p(\Omega_j)\big)$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^p(\Omega)$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \bigotimes_{j=1}^{d} v_n^{(j)}$, où $v_n^{(j)} \in L^p(\Omega_j)$ pour tout $j = 1, \cdots, d$. On distingue deux cas :

1) si pour tout $j \in \{1, \cdots, d-1\}$ on a $\|v_n^{(j)}\|_{L^p(\Omega_j)} \neq 0_{\Omega_j}$, on pose

$$\tilde{v}_n^{(j)} := \frac{v_n^{(j)}}{\|v_n^{(j)}\|_{L^p(\Omega_j)}}, \quad \tilde{v}_n^{(d)} := \prod_{j=1}^{d-1} \|v_n^{(j)}\|_{L^p(\Omega_j)} \cdot v_n^d$$

On peut remarquer que pour tout $j = 1, \cdots, d-1$, la suite $(\tilde{v}_n^{(j)})_n$ est bornée dans $L^p(\Omega_j)$. D'autre part, on a

$$\big\| \bigotimes_{j=1}^{d} \tilde{v}_n^{(j)} \big\|_{L^p(\Omega)} = \prod_{j=1}^{d} \|\tilde{v}_n^{(j)}\|_{L^p(\Omega_j)} = \prod_{j=1}^{d} \|v_n^{(j)}\|_{L^p(\Omega_j)} = \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Alors la suite $(v_n^{(d)})_n$ est aussi bornée dans $L^p(\Omega_d)$. Donc pour chaque $j = 1, \cdots, d$ on peut extraire une sous suite $(\tilde{v}_{n_k}^{(j)})_k$ qui converge faiblement vers $v^{(j)} \in L^p(\Omega_j)$. Parsuite

$$\bigotimes_{j=1}^{d} \tilde{v}_n^{(j)} \longrightarrow \bigotimes_{j=1}^{d} v^{(j)} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

et alors

$$\bigotimes_{j=1}^{d} v_n^{(j)} \longrightarrow \bigotimes_{j=1}^{d} v^{(j)} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

L'unicité de la limite implique que $v = \bigotimes_{j=1}^{d} v^{(j)} \in \mathcal{M}_1\big({}_a\bigotimes_{j=1}^{d} L^p(\Omega_j)\big)$.

2) s'il existe $j = 1, \cdots, d-1$ tel que $\|v_n^{(j)}\|_{L^p(\Omega_j)} = 0$, alors on pose

$$\bigotimes_{j=1}^{d} v^{(j)} = \bigotimes_{j=1}^{d} \tilde{v}^{(j)},$$

où $\tilde{v}_n^{(j)} = 0_{\Omega_j}$ pour tout $j = 1, \cdots, d$. Alors les suites $(\tilde{v}_n^j)$ sont bornées dans $L^p(\Omega_j)$ pour tout $j = 1, \cdots, d$. On procède de la même façon que dans le premier cas pour conclure.

□

1.2.3 PGD progressive - Algorithme glouton

On considère le problème de minimisation de J sur $W_{\|\cdot\|}$ suivant :

$$J(u) = \min_{v \in W_{\|\cdot\|}} J(v). \tag{1.8}$$

On définit $(u_m)_m$, la suite PGD associée à la solution u du problème de minimisation (1.8) comme suit :

1. Initialisation : $u_0 = 0$.

2. Choisir un pas de descente $\widehat{z}_m$ tel que $\widehat{z}_m := \arg\min_{z \in \mathcal{M}_1} J(u_{m-1} + z)$.

3. On distingue trois stratégies afin d'enrichir la suite PGD et construire parsuite u_m :

   Stratégie (c) (sans mise à jour) : $u_m = u_{m-1} + \widehat{z}_m$.

   Stratégie (l)

   - Construire d'abord un sous-espace fermé inclus dans $W_{\|\cdot\|}$ et contenant $u_{m-1} + \widehat{z}_m$. Ce sous-espace sera noté $U(u_{m-1} + \hat{z}_m)$.

   - Au contraire de la stratégie (c), on minimise cette fois sur $U(u_{m-1} + \hat{z}_m)$ et on choisit u_m de telle sorte qu'elle soit la solution du problème suivant :

   $$u_m := \arg\min_{u \in U(u_{m-1} + \widehat{z}_m)} J(u).$$

   Stratégie (r)

   - Construire un sous-espace fermé, noté $U(\widehat{z}_m)$, inclus dans $W_{\|\cdot\|}$ et contenant $\widehat{z}_m$.

   - Choisir $\tilde{z}_m := \arg\min_{z \in U(\widehat{z}_m)} J(u_{m-1} + z)$.

   - $u_m := u_{m-1} + \tilde{z}_m$.

Les résultats de convergence de la suite PGD définie comme étant un algorithme glouton persistent en particulier lorsqu'on cherche l'unique solution du problème :

$$\text{chercher } u \in V \text{ tel que } \forall v \in V,\ a(u, v) = l(v),$$

où V est un espace de Hilbert, a est une forme bilinéaire, symétrique et coercive sur $V \times V$ et l est une forme linéaire continue sur V. Dans ce cas, la solution du problème faible est équivalent à la solution du problème de minimisation de l'énergie

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - l(v).$$

Néanmoins, la tâche n'est pas clair lorsque la solution du problème faible ne peut pas être définie comme une solution d'un problème de minimisation.

Lemme 1.6. *Si J vérifie les conditions du lemme 1.2 et u^* satisfait*

$$J(u^*) = \min_{z \in \mathcal{M}_1} J(u^* + z),$$

Alors u^* est la solution de (1.8).

Preuve. Pour tout $t > 0$ et $z \in \mathcal{M}_1$, on a

$$J(u^*) \leq J(u^* + tz),$$

alors

$$J'(u^*) \cdot z = \lim_{t \downarrow 0} \frac{J(u^* + tz) - J(u^*)}{t} \geq 0 \quad \forall z \in \mathcal{M}_1.$$

D'après la condition 3) sur $\mathcal{M}_1$, on peut conclure que

$$J'(u^*) \cdot z = 0 \quad \forall z \in \mathcal{M}_1.$$

La densité de $\mathcal{M}_1$ dans $W_{\|\cdot\|}$ et la continuité de J' implique que

$$J'(u^*) \cdot w = 0 \quad \forall w \in W_{\|\cdot\|},$$

ce qui termine la preuve. □

Proposition 1.2. *Si J vérifie les deux conditions du lemme 1.2 et $u \in W_{\|\cdot\|}$ est la solution de (1.8) alors la suite réele $(J(u_m))_{m \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante en m, i.e.*

$$J(u_m) \leq J(u_{m-1}), \quad \textit{pour tout} \quad m \geq 1.$$

où $(u_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ est la suite PGD associée à u en suivant la stratégie (c).
De plus, s'il existe m tel que $J(u_m) = J(u_{m-1})$ alors u_{m-1} est la solution de (1.8).

Preuve. Par définition, on a

$$J(u_m) = J(u_{m-1} + \widehat{z}_m) \leq J(u_{m-1} + z), \quad \forall z \in \mathcal{M}_1,$$

En particulier, $0 \in \mathcal{M}_1$ alors $J(u_m) \leq J(u_{m-1})$.
Si $J(u_m) = J(u_{m-1})$ alors

$$J(u_{m-1}) = \min_{z \in \mathcal{M}_1} J(u_{m-1} + z).$$

D'après le lemme 1.6, on déduit que u_{m-1} est la solution de (1.8).

1.3 La PGD appliquée à l'équation de Poisson

Dans cette section on se limite à l'une des cas les plus simples possibles : l'application de la méthode PGD progressive de Galerkin pour résoudre l'équation de Poisson définie dans un domaine cartésien de $\mathbb{R}^2$. On considère alors le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f & \text{sur } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{1.9}$$

où $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$ est un produit d'ouverts bornés dans $\mathbb{R}$ et f une fonction donnée dans $L^2(\Omega)$.

La méthode PGD consiste à chercher la solution de l'équation de Poisson sous la forme séparée suivante :

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) \times Y_i(y).$$

où les X_i et Y_i sont des fonctions dépendant uniquement de la variable x et y respectivement. Alors une approximation d'ordre m de u est définie par :

$$u_m(x,y) := \sum_{i=1}^{m} X_i(x) \times Y_i(y).$$

La formulation variationnelle de l'équation de Poisson est donnée par :

$$-\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} \Delta u \cdot u^* = \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} f \cdot u^*, \quad \forall u^* \in H_0^1(\Omega).$$

Supposons qu'à l'ordre $m-1$, u_{m-1} est déjà connu. Cherchons alors X_m et Y_m en suivant la méthode PGD progressive de Galerkin. Celle-ci consiste à résoudre le problème non linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\displaystyle\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} \Delta(u_m) \cdot X^* \otimes Y_m \, dx\, dy & = & \displaystyle\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} f \cdot X^* \otimes Y_m \, dx\, dy & \forall\, X^* \in H_0^1(\Omega_1), \\ -\displaystyle\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} \Delta(u_m) \cdot X_m \otimes Y^* \, dx\, dy & = & \displaystyle\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} f \cdot X_m \otimes Y^* \, dx\, dy & \forall\, Y^* \in H_0^1(\Omega_2). \end{array} \right.$$

Ce système est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\displaystyle\int_{\Omega_2} \Delta(X_m \otimes Y_m) \cdot Y_m \, dy & = & \displaystyle\int_{\Omega_2} (f + \Delta u_{m-1}) \cdot Y_m \, dy, \\ -\displaystyle\int_{\Omega_1} \Delta(X_m \otimes Y_m) \cdot X_m \, dx & = & \displaystyle\int_{\Omega_1} (f + \Delta u_{m-1}) \cdot X_m \, dx. \end{array} \right. \tag{1.10}$$

Ou en d'autres termes

$$\begin{cases} -\left(\int_{\Omega_1} (X_m)^2\right) Y_m{}'' + \left(\int_{\Omega_1} (X_m{}')^2\right) Y_m = \int_{\Omega_1} (f + \Delta u_{m-1}) \cdot X_m \, dx \\ -\left(\int_{\Omega_2} (Y_m)^2\right) X_m{}'' + \left(\int_{\Omega_2} (Y_m{}')^2\right) X_m = \int_{\Omega_2} (f + \Delta u_{m-1}) \cdot Y_m \, dy \end{cases} \tag{1.11}$$

Les X_m et Y_m seront cherchés d'une manière itérative. On utilise alors l'indice i pour désigner une itéarion particulière du schéma du point fixe utilisé. On considère la stratégie des directions alternées. On démarre par un Y_1^0 arbitraire, alors X_m^{i+1} sera calculé à partir de Y_m^i puis Y_m^{i+1} à partir de X_m^{i+1}. Alors le schéma considéré est le suivant :

$$\begin{cases} -\left(\int_{\Omega_1} (X_m^{i+1})^2\right) Y_m^i{}'' + \left(\int_{\Omega_1} (X_m^{i+1\prime})^2\right) Y_m^i = \int_{\Omega_1} (f + \Delta u_{m-1}) \cdot X_m^{i+1} \, dx \\ -\left(\int_{\Omega_2} (Y_m^{i+1})^2\right) X_m^{i+1\prime\prime} + \left(\int_{\Omega_2} (Y_m^{i+1\prime})^2\right) X_m^{i+1} = \int_{\Omega_2} (f + \Delta u_{m-1}) \cdot Y_m^{i+1} \, dy \end{cases} \tag{1.12}$$

Les itéartions s'arrêtent lorsqu'on arrive à un point fixe, à une tolérence δ près (déjà fixé par l'utilisateur), i.e.

$$\frac{\|X_m^{i+1} \otimes Y_m^{i+1} - X_m^i \otimes Y_m^i\|}{\|X_m^i \otimes Y_m^i\|} < \delta.$$

où la norme utilisée en pratique sera la norme $L^2(\Omega)$. On note alors X_m et Y_m les limites de $(X_m^i)_i$ et $(Y_m^i)_i$ respectivement.

Critère d'arrêt

Le processus d'enrichissement de la base s'arrête quand une mesure appropriée de l'erreur devient assez petit. Parmi les estimateurs d'erreur on peut choisir le résidu $R(m)$ obtenu en remplaçant l'approximation u_m dans l'équation de Poisson :

$$R(m) = \sum_{i=1}^{m} \left(X_i{}'' \otimes Y_i + X_i \otimes Y_i{}'' \right) - f.$$

On définit alors l'erreur par la norme L^2 du résidu, i.e. $\mathcal{E}(m) = \|R(m)\|_{L^2}$.

Afin d'exprimer la PGD associée à l'équation de Poisson comme étant un algorithme glouton, on introduit l'énergie J définie sur $H_0^1(\Omega)$ comme suit :

$$J(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x,y)|^2 \, dx \, dy - \int_\Omega f(x,y) u(x,y) \, dx \, dy. \tag{1.13}$$

Il est facile de vérifier que J est de classe $\mathcal{C}1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, avec :

$$J'(u) \cdot v = \int_\Omega \nabla u(x,y) \cdot \nabla v(x,y) \, dx \, dy - \int_\Omega f(x,y) v(x,y) \, dx \, dy \qquad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.14}$$

De plus, J est strictement convexe, minorée et coercive. En outre, si u est une solution faible de (1.9), alors $J'(u) = 0$. En d'autres termes, si u est une solution faible de (1.9) alors u est une solution du problème de minimisation suivant :

$$J(u) = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v). \tag{1.15}$$

Afin d'exprimer la PGD comme un problème de minimisation, il est nécessaire de montrer que l'espace $H_0^1(\Omega)$ admet une structure tensorielle et que l'ensemble des tenseurs élémentaires est faiblement fermé dans $H_0^1(\Omega)$. On donne alors quelques propositions et lemmes concernant la structure de l'espace en dimension $d > 1$, puis on se limite à la dimension 2 afin d'exprimer la PGD associée à l'équation (1.9).

Proposition 1.3. *Soit $\Omega := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d$, un produit cartésien d'ouverts bornés dans $\mathbb{R}$. On a*

$$H_0^1(\Omega) = \overline{{}_a\bigotimes_{k=1}^{d} H_0^1(\Omega_k)}^{H_0^1(\Omega)} .$$

Preuve. Soit $u \in H_0^1(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$, alors il existe une suite $(u_n)_n \subset \mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \ \text{ dans } H^1(\Omega) \quad \text{et alors} \quad u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \ \text{ dans } H_0^1(\Omega). \tag{1.16}$$

D'autre part, il est bien connu que

$$\mathcal{D}(\Omega) = \overline{{}_a\bigotimes_{k=1}^{d} \mathcal{D}(\Omega_k)}^{\mathcal{D}(\Omega)} ,$$

alors pour tout entier n, il existe une suite $(\varphi_m^n)_m \subset {}_a\bigotimes_{k=1}^{d} \mathcal{D}(\Omega_k) \subset {}_a\bigotimes_{k=1}^{d} H_0^1(\Omega_k)$ telle que

$$\varphi_m^n \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u_n \ \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega) \quad \text{et par conséquent} \quad \varphi_m^n \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u_n \ \text{ dans } H_0^1(\Omega). \tag{1.17}$$

Alors, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\exists N_1(n) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall p \geq N_1(n) \text{ on a } \|u_p - u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1/2^{n+1},$$

en particulier,

$$\|u_{N_1(n)} - u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1/2^{n+1}.$$

De la même façon,

$$\exists N_2(n) \in \mathbb{N} \quad \text{such that} \quad \forall m \geq N_2(n) \text{ on a } \|\varphi_m^{N_1(n)} - u_{N_1(n)}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1/2^{n+1}.$$

D'où, pour $v_n := \varphi_{N_2(n)}^{N_1(n)}$, on obtient

$$\begin{aligned} \|v_n - u\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq \|v_n - u_{N_1(n)}\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u_{N_1(n)} - u\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq \max(1, c_1)/2^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

Lemme 1.7. *Soit* $\Omega := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d$. *Pour toute famille de fonctions mesurables* $w_k : \Omega_k \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, \cdots, d$, *telle que* $\bigotimes_{j=1}^{d} w_k \neq 0$, *on a*

$$\bigotimes_{j=1}^{d} w_k \in H_0^1(\Omega) \Longleftrightarrow w_k \in H_0^1(\Omega_k), \quad \textit{pour tout } k = 1, \cdots, d.$$

Preuve. Si $\bigotimes_{j=1}^{d} w_k \in H_0^1(\Omega)$ avec $\bigotimes_{k=1}^{d} w_k \neq 0$ alors il est clair que $w_{k|_{\partial\Omega_k}} = 0$, pour tout $k = 1, \cdots, d$. De plus, on a

$$0 < \Big\| \bigotimes_{j=1}^{d} w_k \Big\|_{L^2(\Omega)} = \prod_{k=1}^{d} \|w_k\|_{L^2(\Omega_k)}$$

alors $w_k \in L^2(\Omega_k)$ pour tout $k = 1, \cdots, d$. En outre,

$$\Big\|\nabla\big(\bigotimes_{j=1}^{d} w_k\big)\Big\|_{L^2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{d} \big\|w_k'\big\|_{L^2(\Omega_k)} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{d} \|w_j\|_{L^2(\Omega_j)},$$

donc $w_k' \in L^2(\Omega_k)$ pour tout $k = 1, \cdots, d$, car $0 < \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{d} \|w_j\|_{L^2(\Omega_j)} < +\infty$

Réciproquement, si $w_k \in H_0^1(\Omega_k)$ alors il est facile de vérifier que $\bigotimes_{j=1}^{d} w_{k|_{\partial\Omega}} = 0$, de plus

$$\Big\|\nabla\big(\bigotimes_{j=1}^{d} w_k\big)\Big\|_{L^2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{d} \big\|w_k'\big\|_{L^2(\Omega_k)} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{d} \|w_j\|_{L^2(\Omega_j)} < \infty,$$

donc $\bigotimes_{j=1}^{d} w_k \in H_0^1(\Omega)$. □

Proposition 1.4. *Soit* $\Omega := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d$. *On a* $\mathcal{M}_1\Big({}_a\bigotimes_{k=1}^{d} H_0^1(\Omega_k)\Big) := \Big\{ \bigotimes_{k=1}^{d} w_k \ : \ w_k \in H_0^1(\Omega_k)\Big\}$ *est faiblement fermé dans* $H_0^1(\Omega)$.

Preuve. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_1\Big({}_a\bigotimes_{k=1}^{d} H_0^1(\Omega_k)\Big)$ qui converge faiblement vers z dans $H_0^1(\Omega)$. Or on a

$$\mathcal{M}_1\Big({}_a\bigotimes_{k=1}^{d} H_0^1(\Omega_k)\Big) \subset \mathcal{M}_1\Big({}_a\bigotimes_{k=1}^{d} L^2(\Omega_k)\Big),$$

et $\mathcal{M}_1\Big({}_a\bigotimes_{k=1}^{d} L^2(\Omega_k)\Big)$ est faiblement fermé dans $L^2(\Omega)$ alors $z \in \mathcal{M}_1\Big({}_a\bigotimes_{k=1}^{d} L^2(\Omega_k)\Big)$. Ainsi, il existe $z_k \in L^2(\Omega_k)$, $k = 1, \cdots, d$, tel que $z = \bigotimes_{k=1}^{d} z_k \in H_0^1(\Omega)$. D'après le lemme 1.7, $z_k \in H_0^1(\Omega_k)$, pour tout $k = 1, \cdots, d$ et parsuite $z \in \mathcal{M}_1\Big({}_a\bigotimes_{k=1}^{d} H_0^1(\Omega_k)\Big)$. □

Proposition 1.5. *Le problème de minimisation*

$$\inf_{z \in \mathcal{M}_1\left({}_a\bigotimes_{k=1}^{d} H_0^1(\Omega_k)\right)} J(u+z),$$

admet au moins une solution.

Ainsi, on pourrait construire la suite PGD associée à l'équation de Poisson (1.9) comme suit :

$$(M) \qquad \begin{cases} \text{Initialisation : } u_0 = 0 \text{ dans } H_0^1(\Omega) \\ \text{Enrichissement : } z_m := \displaystyle\arg\min_{z \in \mathcal{M}_1\left(H_0^1(\Omega_1)\,{}_a\bigotimes H_0^1(\Omega_2)\right)} J(u_{m-1}+z), \quad \forall m \geq 1, \\ \text{Progression : } u_m := u_{m-1} + z_m. \end{cases}$$

Afin d'exprimer le lien entre la minimisation de l'énergie J et la stratégie de directions alternées définie par (1.12), on considère la fonctionnelle $\widetilde{J} : H_0^1(\Omega_1) \times H_0^1(\Omega_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\widetilde{J}(X,Y) := J(u + X \otimes Y),$$

où $u \in H_0^1(\Omega)$ est fixé.

Proposition 1.6. *La fonctionnelle $\widetilde{J}$ est de classe $\mathcal{C}^1\big(H_0^1(\Omega_1) \times H_0^1(\Omega_2), \mathbb{R}\big)$.*

Proposition 1.7. *Le problème*

$$\inf_{(X,Y) \in H_0^1(\Omega_1) \times H_0^1(\Omega_2)} \widetilde{J}(X,Y), \tag{1.18}$$

possède au moins une solution.

Preuve. Il est facile de vérifier que le problème (1.18) est équivalent à

$$\inf_{X \otimes Y \in \mathcal{M}_1\left(H_0^1(\Omega_1)_a \bigotimes H_0^1(\Omega_2)\right)} J(u + X \otimes Y),$$

qui est à son tour équivalent à

$$\inf_{u + \mathcal{M}_1\left(H_0^1(\Omega_1)_a \bigotimes H_0^1(\Omega_2)\right)} J(z).$$

le résultat découle ainsi du lemme 1.3. □

Proposition 1.8. *Si $(\widehat{X},\widehat{Y})$ est une solution de (1.18), alors $\widehat{X}$ est une solution faible du problème aux limites :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} -A(\widehat{Y})\widehat{X}''(x)+B(\widehat{Y})\widehat{X}(x) & = & \displaystyle\int_{\Omega_2}[f(x,y)+\Delta u(x,y)]\,\widehat{Y}(y)\,dy \\ \widehat{X}_{|\partial\Omega_1}=0. & & \end{array}\right. \tag{1.19}$$

avec

$$A(\widehat{Y})=\int_{\Omega_2}[\widehat{Y}(y)]^2\,dy \quad et \quad B(\widehat{Y})=\int_{\Omega_2}[\widehat{Y}'(y)]^2\,dy,$$

et $\widehat{Y}$ est une solution faible du problème aux limites

$$\left\{\begin{array}{rcl} -C(\widehat{X})\widehat{Y}''(y)+D(\widehat{X})\widehat{Y}(y) & = & \displaystyle\int_{\Omega_1}[f(x,y)+\Delta u(x,y)]\,\widehat{X}(x)\,dx \\ \widehat{Y}_{|\partial\Omega_2}=0. & & \end{array}\right. \tag{1.20}$$

avec

$$C(\widehat{X})=\int_{\Omega_1}[\widehat{X}(x)]^2\,dx \quad et \quad D(\widehat{Y})=\int_{\Omega_1}[\widehat{X}'(x)]^2\,dx,$$

Preuve. $(\widehat{X},\widehat{Y})$ est une solution de (1.5) implique que $\nabla\widetilde{J}(\widehat{X},\widehat{Y})=0$, c.à. d $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial\widetilde{J}}{\partial X}(\widehat{X},\widehat{Y})=0,\\[2ex] \dfrac{\partial\widetilde{J}}{\partial Y}(\widehat{X},\widehat{Y})=0.\end{array}\right.$

Pour tout $\varphi\in H_0^1(\Omega_1)$ et $t>0$ on a

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{J}(X+t\varphi,Y) & = & J(u+(X+t\varphi)\otimes Y) \\ & = & \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega|\nabla(u+(X+t\varphi)\otimes Y)|^2-\int_\Omega f\,[u+(X+t\varphi)\otimes Y] \\ & = & \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega|\nabla(u+X\otimes Y)|^2-\int_\Omega f\,[u+X\otimes Y]+\dfrac{t^2}{2}\int_\Omega|\nabla(\varphi\otimes Y)|^2+ \\ & & +t\displaystyle\int_\Omega\nabla(u+X\otimes Y)\nabla(\varphi\otimes Y)-t\int_\Omega f\,[\varphi\otimes Y], \end{array}$$

D'où

$$\frac{\partial\widetilde{J}}{\partial X}(\widehat{X},\widehat{Y})\cdot\varphi=\int_\Omega\nabla(u+\widehat{X}\otimes\widehat{Y})\nabla(\varphi\otimes\widehat{Y})-\int_\Omega f\,[\varphi\otimes\widehat{Y}]=0.$$

Ainsi,

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\varphi'\otimes\widehat{Y}+\varphi'\widehat{X}'\otimes\widehat{Y}^2+\frac{\partial u}{\partial y}\,\varphi\otimes\widehat{Y}'+\varphi\widehat{X}\otimes\widehat{Y}'^2\right)-\int_\Omega f\,[\varphi\otimes\widehat{Y}]=0$$

Parsuite

$$\begin{aligned} A(\widehat{Y})\int_{\Omega_1}\varphi'(x)\widehat{X}'(x)\,dx + B(\widehat{Y})\int_{\Omega_1}\varphi(x)\widehat{X}(x)\,dx &= \int_{\Omega_1}\varphi(x)\Big[f(x,y)\widehat{Y}(y)\,dy\Big]\,dx \\ &- \int_{\Omega_1}\varphi'(x)\Big[\int_{\Omega_2}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\;\widehat{Y}(y)\,dy\Big]\,dx \\ &- \int_{\Omega_1}\varphi(x)\Big[\int_{\Omega_2}\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\;\widehat{Y}'(y)\,dy\Big]\,dx. \end{aligned}$$

Alors $\widehat{X}$ est une solution faible du problème (1.19). En utilisant le fait que $\dfrac{\partial \widetilde{J}}{\partial Y}(\widehat{X},\widehat{Y}) = 0$, on peut démontrer de la même façon que $\widehat{Y}$ est une solution faible de (1.20). □

1.4 Théorèmes utilisés dans la thèse

Théorème 1.2 (Théorème de Banach-Steinhaus)**.** *(Voir [23, Théorème II.1]) Soit E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. Si $H \subset \mathcal{L}(E,F)$ alors*

soit $(\|f\|)_{f\in H}$ est bornée,

soit il existe $x \in E$ tel que $sup_{f\in H}\|f(x)\| = \infty$.

Définition 1.8. *Soit X un espace de Hausdorff compact et Y un espace métrique muni d'une distance d. On désigne par $\mathcal{C}(X,Y)$ l'espace des fonctions continues de X dan Y. On dit que $F \subset \mathcal{C}(X,Y)$ est équicontinue si pour tout $x \in X$ et $\epsilon > 0$, il existe un voisinage V_x de x tel que*

$$\forall y \in V_x,\ \forall f \in F:\ \ d\big(f(y), f(x)\big) < \epsilon.$$

F est dite simplement relativement compact si pour tout $x \in X$, l'ensemble $\big\{f(x);\ f \in F\big\}$ est relativement compact dans Y.

Théorème 1.3 (Arzelà-Ascoli)**.** *(Voir [89]) Soit X un espace de Hausdorff compact et Y un espace métrique. Si on munit $\mathcal{C}(X,Y)$ par la norme uniforme, alors une partie $F \subset \mathcal{C}(X,Y)$ est relativement compacte ssi*

1. *F est équicontinue,*
2. *F est simplement relativement compacte.*

En particulier, une partie $F \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$, fermée bornée, est relativement compacte si elle est équicontinue.

Chapitre 2

Convergence des algorithmes de minimisation alternée effectués dans la PGD variationnelle

Sommaire

2.1 Introduction 32

2.1.1 Espaces de Hilbert Tensoriel et PGD variationnelle 32

2.2 Minimisation alternée pour une direction de descente optimale 34

2.3 Convergence de la méthode de minimisation alternée 36

2.3.1 Compacité de (AM) dans le cas de l'équation de Poisson 37

2.3.2 Compacité dans un cas général de diffusion 43

2.1 Introduction

La résolution numérique des équations aux dérivées partielles en utilisant des représentations tensorielles de la solution est l'un des traitements numériques les plus efficaces pour les problèmes définis dans des espaces de haute dimension. L'étape principale de ces méthodes consiste à calculer itérativement le meilleur tenseur élémentaire afin d'enrichir l'approximation tensorielle. Parmi ces méthodes, la PGD progressive fournit une approximation $d-$dimensionnelle sous la forme séparée suivante

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_d) \simeq \sum_{k=1}^{m} u_k^{(1)}(x_1) \times u_k^{(2)}(x_2) \times \cdots u_k^{(d)}(x_d)$$

où les x_k, $k \in \{1, 2, \cdots m\}$, sont de dimension modérée. Cette approximation serait construite sans aucune information *a priori* de la solution u.
Dans le cadre des problèmes variationnels, l'étape du calcul du meilleur tenseur élémentaire serait faite en utilisant des algorithmes de minimisation alternée. La convergence de tels techniques présente un véritable défi et, à notre connaissance, cette question n'a pas encore été étudiée dans le cadre de la PGD. Cependant, dans le cadre des espaces euclidiens, un théoème de convergence locale pour les approximations tensorielles canoniques de rang faible a été abordée par Uschmajew [95] et la convergence des algorithmes des moindres carrés alternées utilisées pour les représentations tensorielles a été prouvé dans [43].
On étudie alors dans ce chapitre la convergence des suites des directions alternées pour une classe de problèmes variationnels elliptiques, dans le cadre d'espaces de Hilbert. Sous une condition de "non-orthogonalité uniforme", on montre que ces suites sont en général bornées et compactes. En particulier, si la suite des directions alternées converge faiblement alors elle converge fortement et la limite serait la solution du problème de minimisation alternée.

2.1.1 Espaces de Hilbert Tensoriel et PGD variationnelle

Cette section traite des problèmes de minimisation de fonctionnelles convexes définies dans des espaces de Hilbert tensoriel. La structure tensorielle des espaces de Hilbert permet de minimiser d'une manière progressive via les méthodes de réduction dimensionnelle. Pour la commodité du lecteur, nous reprenons brièvement les grandes lignes de la PGD variationnelle.

On considère une famille finie des espaces de Hilbert réels $(V_k\ , \|\cdot\|_k)_{1\leq k\leq d}$, où $d \geq 2$ est un entier. L'espace tensoriel algébrique de Hilbert engendré par la famille $(V_k\ , \|\cdot\|_k)_{1\leq k\leq d}$, et noté

$$V := {}_a\bigotimes_{k=1}^{d} V_k,$$

est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des tenseurs élémentaires $v = \bigotimes_{k=1}^{d} v_k$, avec $v_k \in V_k$. Le suffixe "a" dans "${}_a\bigotimes$" revient à la nature "algébrique" du produit tensoriel, i.e,

$$V = \left\{ \sum_{j=1}^{m} v_1^{(j)} \otimes v_2^{(j)} \otimes \cdots \otimes v_d^{(j)} \quad : \quad m \in \mathbb{N}^* \text{ et } v_k^{(j)} \in V_k \text{ pour tout } k = 1, 2, \cdots, d \right\}. \quad (2.1)$$

On dit que $V_{\|\cdot\|}$ est un espace de Hilbert tensoriel s'il existe un espace tensoriel algébrique V et une norme $\|\cdot\|$ sur V tel que $V_{\|\cdot\|}$ soit le complété de V pour la norme $\|\cdot\|$, *i.e.*

$$V_{\|\cdot\|} = \overline{{}_a\bigotimes_{k=1}^{d} V_k}^{\|\cdot\|} .$$

Dans la suite, le cône des tenseurs élémentaires dans V sera noté $\mathcal{M}_1(V)$, *i.e.*

$$\mathcal{M}_1(V) = \left\{ v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_d \quad : \quad v_k \in V_k \text{ for } k = 1, 2, \cdots, d \right\}. \quad (2.2)$$

Alors l'espace engendré par $\mathcal{M}_1(V)$ est V qui est à son tour une partie dense dans $V_{\|\cdot\|}$.

Maintenant, on considère une fonctionnelle $J : V_{\|\cdot\|} \longrightarrow \mathbb{R}$, où $V_{\|\cdot\|}$ est un espace tensoriel de Hilbert et on s'intéresse au problème de minimisation suivant

$$\inf_{u \in V_{\|\cdot\|}} J(u), \quad (2.3)$$

où J satisfait les hypothèses suivantes

(H_1) J est différentiable,
(H_2) J est coercive,
(H_3) J est strictement convexe.

En appliquant les arguments standards du calcul variationnel, on montre que le problème (2.3) admet une solution unique $\widehat{u} \in V_{\|\cdot\|}$, et que cette solution est un point critique de J, c.à.d $J'(\widehat{u}) = 0$. Pour définir la méthode PGD, on suppose de plus que

(H_4) $\mathcal{M}_1(V)$ est faiblement fermé dans $V_{\|\cdot\|}$,

Notons que pour tout $u \in V$, le problème de minimisation

$$\inf_{z \in \mathcal{M}_1(V)} J(u + z) \quad (2.4)$$

admet au moins une solution, sous les hypothèses $(H_1)-(H_4)$. La possibilité d'avoir plusieurs solutions du problème (2.4) revient à la non-convexité de $\mathcal{M}_1(V)$.

La méthode PGD progressive associée au problème (2.3) consiste à construire une suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset V$ comme suit

(i) Initialisation : $u_0 := 0$.

(ii) Direction de descente : choisir $\widehat{z}_m \in \underset{z\in\mathcal{M}_1(V)}{\arg\min}\, J(u_{m-1}+z)$.

(iii) Progression : $u_m := u_{m-1} + \widehat{z}_m$.

Dans la suite, nous nous concentrerons sur l'étape clé (ii) qui consiste à calculer la direction de descente optimale $\widehat{z}_m \in \underset{z\in\mathcal{M}_1(V)}{\arg\min}\, J(u_{m-1}+z)$.

2.2 Minimisation alternée pour une direction de descente optimale

Dans cette section, on décrit une procédure numérique largement utilisée pour trouver une direction possible de descente optimale

$$\widehat{z}_m \in \underset{z\in\mathcal{M}_1(V)}{\arg\min}\, J(u_{m-1}+z), \tag{2.5}$$

à la m-ème itération de la PGD. Il est facile de vérifier que

$$\underset{z\in\mathcal{R}_1(V)}{\arg\min}\, J(u_{m-1}+z) = \{0\} \Longleftrightarrow u_{m-1} \text{ est la solution du Problème (2.3).}$$

Pour cela, on suppose dans la suite que $J'(u_{m-1}) \neq 0$.

On introduit maintenant l'application "produit tensoriel"

$$\begin{aligned} \mathbb{T} : \quad V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_d &\longrightarrow \mathcal{M}_1(V) \\ (v_1, v_2, \cdots, v_d) &\longmapsto v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_d, \end{aligned}$$

et la fonctionnelle

$$\begin{aligned} J_m : \quad V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, v_2, \cdots, v_d) &\longmapsto = J(u_{m-1} + \mathbb{T}(v_1, v_2, \cdots, v_d)) \end{aligned}$$

L'application $\mathbb{T}$ est clairement différentiable et on a

$$\mathbb{T}'(v_1, v_2, \cdots, v_d)\cdot(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_d) = \sum_{k=1}^{d} \Big[v_1 \otimes \cdots \otimes v_{k-1} \otimes \varphi_k \otimes v_{k+1} \otimes \cdots \otimes v_d \Big].$$

Alors le Problème (2.5) se réécrit comme suit

$$\widehat{z}_m := (\widehat{z}_1, \widehat{z}_2, \cdots, \widehat{z}_d) \in \underset{(v_1,v_2,\cdots,v_d)\in V_1\times V_2\times\cdots\times V_d}{\arg\min} J_m(v_1, v_2, \cdots, v_d). \tag{2.6}$$

Arrêtons-nous un instant sur l'avantage de la formulation (2.6) au lieu de (2.5). D'une part, dans (2.5) l'ensemble $\mathcal{M}_1(V)$ n'est pas convexe mais la fonctionnelle $J\ :\ z\ \mapsto J(u_{m-1}+z)$ est strictement convexe alors que dans (2.6) l'ensemble $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_d$ est convexe mais la fonctionnelle J_m n'est pas convexe. D'autre part, il est important de remarquer que dans (2.6), la fonctionnelle J_m est strictement convexe par rapport à chaque variable v_k, $k = 1,\, 2, \cdots, d$. Donc le calcul de la direction de descente optimal $\widehat{z}_m$ dans (2.5) sera effectué par minimisation alternée via (2.6).
Notons que la condition d'optimalité du Problème (2.6) en $(\widehat{z}_1, \widehat{z}_2, \cdots, \widehat{z}_d)$ est donnée par le système non linéaire suivant

$$\frac{\partial J_m}{\partial z_k}(\widehat{z}_1, \widehat{z}_2, \cdots, \widehat{z}_d) = 0, \quad k \in \{1,\, 2,\, \cdots,\, d\}, \tag{2.7}$$

où $\dfrac{\partial}{\partial z_k}$ représente la dérivée partielle dans la direction de V_k pour tout $k \in \{1,\, 2,\, \cdots,\, d\}$. Plus précisément, une direction de descente optimale $(\widehat{z}_1, \widehat{z}_2, \cdots, \widehat{z}_d)$ du Problème (2.6) doit satisfaire : pour tout $k \in \{1,\, 2,\, \cdots,\, d\}$ et tout $\varphi \in V_k$ on a

$$\frac{\partial J_m}{\partial z_k}(\widehat{z}_1, \widehat{z}_2, \cdots, \widehat{z}_d)\cdot\varphi = J'(u_{m-1}+\widehat{z}_1\otimes\widehat{z}_2\otimes\cdots\otimes\widehat{z}_d)\cdot(\widehat{z}_1\otimes\cdots\otimes\widehat{z}_{k-1}\otimes\varphi\otimes\widehat{z}_{k+1}\otimes\cdots\otimes\widehat{z}_d) = 0.$$

Un algorithme de minimisation alternée pour résoudre le Problème (2.7) pourrait être résumé comme suit

i. Initialisation : Fixer $(z_1^0, \cdots, z_{d-1}^0) \in V_1 \times V_2 \times \cdots V_{d-1}$
ii. calcul de z_d^0

z_d^0 est l'unique solution de l'équation, où la variable est v :
$$\frac{\partial J_m}{\partial z_d}(z_1^0, z_2^0, \cdots, z_{d-1}^0, v) = 0$$

iii. Etant donnée la n-ème itŕation $(z_1^n, z_2^n, \cdots, z_d^n)$, on calcule la $(n+1)$-ème itération $(z_1^{n+1}, z_2^{n+1}, \cdots, z_d^{n+1})$ itérativement comme suit

Pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, d\}$, z_k^{n+1} est l'unique solution de l'équation, où l'inconnu est v :

$$\frac{\partial J_m}{\partial z_k}(z_1^{n+1}, z_2^{n+1}, \cdots, z_{k-1}^{n+1}, v, z_{k+1}^n, \cdots, z_d^n) = 0$$

Tableau 1 : Algorithme de Minimisation Alternée

Dans la suite, on désigne par AM la méthode ou l'algorithme des directions alternées et par (AM) la suite $\big((z_1^n, z_2^n, \cdots, z_d^n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ générée par cette méthode.

Remarque 2.1. *Il est important de noter ici que s'il existe $k \in \{1, 2, \cdots, d\}$, tel que l'unique solution de*

$$\frac{\partial J_m}{\partial v_k}(z_1^{n+1}, z_2^{n+1}, \cdots, z_{k-1}^{n+1}, v, z_{k+1}^n, \cdots, z_d^n) = 0$$

soit zéro, alors $J_m(z_1, \cdots, z_{k-1}, 0, z_{k+1}, \cdots, z_d) = J(u_{m-1})$, *pour tout* $(z_1, \cdots, z_{k-1}, z_{k+1}, \cdots, z_d) \in V_1 \times \cdots \times V_{k-1} \times V_{k+1} \times \cdots \times V_d$. *Alors, aucune équation n'est disponible pour mettre à jour la composante* z_{k+1}^n *afin de calculer* z_{k+1}^{n+1}. *Dans cette situation, la méthode de minimisation alternée décrite ci-dessus s'arrête. Ceci suggère la définition suivante :*

Définition 2.1. *La suite (AM) définie dans le Tableau 1 est bien-définie, si*

$$z_1^n \otimes z_2^n \otimes \cdots \otimes z_d^n \neq 0, \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Lemme 2.1 (Bornitude de la suite (AM))**.** *Si la suite (AM) est bien-définie alors la suite* $(z_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée dans* V_k *pour tout* $k = 1, \cdots, d$.

Preuve. On fixe d'abord $(z_1^0, z_2^0, \cdots, z_{d-1}^0) \in V_1 \times V_2 \times \cdots V_{d-1}$ pour initialiser l'algorithme et on suppose que toutes les itérations $z_1^n \otimes z_2^n \otimes \cdots \otimes z_d^n \neq 0$, avec $n \in \mathbb{N}$. D'une part, comme la fonctionnelle J_m est strictement convexe par rapport à chacune de ses d variables, soit z_d^0 l'unique solution de l'équation, ayant comme variable v :

$$\frac{\partial J_m}{\partial z_d}(z_1^0, z_2^0, \cdots, z_{d-1}^0, v) = 0.$$

La stricte convexité *partielle* de J_m implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} J_m(z_1^n, z_2^n, z_3^n, \cdots, z_d^n) &> J_m(z_1^{n+1}, z_2^n, z_3^n, \cdots, z_d^n) \\ &> J_m(z_1^{n+1}, z_2^{n+1}, z_3^n, \cdots, z_d^n) \\ &\vdots \\ &> J_m(z_1^{n+1}, z_2^{n+1}, z_3^{n+1}, \cdots, z_d^{n+1}) \end{aligned}$$

Alors, la suite $\big(J_m(z_1^n, z_2^n, \cdots, z_d^n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. D'autre part, on sait que J (et par conséquence J_m) est bornée inférieurement sur $V_{\|\cdot\|}$, alors $\big(J_m(z_1^n, z_2^n, \cdots, z_d^n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Or J_m est coercive sur $V_1^* \times V_2^* \times \cdots \times V_d^*$, où $V_k^* := V_k \backslash \{0_V\}$ pour tout $k = 1, \cdots, d$ (d'après la coercivité de J) et la suite (AM) est bien définie alors $\big((z_1^n, z_2^n \cdots, z_d^n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_d$, ce qui termine la preuve. □

2.3 Convergence de la méthode de minimisation alternée

La convergence de l'algorithme AM est une question très difficile à traiter dans le cas variationnel général. Pour cela, on se limite au cas où $V_{\|\cdot\|} = H_0^1(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d)$ et la fonctionnelle J est définie par

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla u(x) \cdot M(x)\, \nabla u(x)\, dx - \int_\Omega f(x)\, u(x)\, dx,$$

où $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d$, M est une matrice définie et continûment différentiable sur $\overline{\Omega}$ et $f \in L^2(\Omega)$. Dans la suite, pour tout $k \in \{1, \cdots, d\}$, on désigne par Ω_k un domaine

borné de $\mathbb{R}^{n_k}$ où n_k est un entier non nul. Parsuite Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, avec $N := n_1 + n_2 + \cdots + n_d$.

D'abord, on donne un résultat de compacité de (AM) dans le cas de l'équation de Poisson puis on généralise aux cas des problèmes de diffusion où le coefficient de diffusion est une matrice $M := (m_{ij})_{1\leq i\leq d}$ telle les m_{ii} soient continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$.

Dans la suite, pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, d\}$, on pose $\omega_k = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{k-1} \times \Omega_{k+1} \times \cdots \times \Omega_d$ et $d\omega_k := dx_1 \cdots dx_{k-1} dx_{k+1} \cdots dx_d$. On désigne par ∇_k, div_k and Δ_k le gradient, la divergence et le laplacien dans la direction de Ω_k et par ∇_{w_k} le gradient dans le domaine ω_k.

2.3.1 Compacité de (AM) dans le cas de l'équation de Poisson

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \in L^2(\Omega) \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \qquad\qquad\quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.8}$$

où l'énergie associée J est définie sur $H_0^1(\Omega)$ par

$$J(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx - \int_\Omega f(x)u(x)\, dx. \tag{2.9}$$

On considère la suite (AM) associée à l'énergie (2.9) et définie par le Tableau 1 avec le terme d'initialisation $(z_1^0, \cdots, z_{d-1}^0)$. La fonction z_d^0 est la solution de l'équation en v

$$\frac{\partial J_m}{\partial z_d}(z_1^0, z_2^0, \cdots, z_{d-1}^0, v) = 0. \tag{2.10}$$

Par un clacul direct, on montre que l'équation (2.10) est équivalent à

$$\begin{cases} -\alpha_d^0\, \Delta_d v + \beta_d^0\, v &= f_d^0 \quad \text{dans } \Omega_d \\ v &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_d \end{cases}$$

où

$$\alpha_d^0 = \prod_{i=1}^{d-1} \|z_i^0\|^2_{L^2(\Omega_i)}, \tag{2.11}$$

$$\beta_d^0 = \sum_{i=1}^{d-1} \left[\left\|\nabla_i z_i^0\right\|^2_{L^2(\Omega_i)} \times \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d-1} \|z_j^0\|^2_{L^2(\Omega_j)} \right], \tag{2.12}$$

et

$$f_d^0(x_d) = \int_{\omega_d} (f + \Delta u_{m-1}) \times \bigotimes_{j=1}^{d-1} z_j^0\, d\omega_d. \tag{2.13}$$

De plus, il est important de remarquer que Δu_{m-1} est dans $L^2(\Omega)$, pour tout entier positif m. En effet, pour $m = 1$, l'approximation initiale $u_0 = 0$, alors dans ce cas on obtient en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le théorème de Fubini que

$$f_d^0(x_d) = \int_{\omega_d} f \times \bigotimes_{j=1}^{d-1} z_j^0 \, d\omega_d \in L^2(\Omega_d) \tag{2.14}$$

et par conséquence $\Delta z_d^0 \in L^2(\Omega_d)$. Le même argument implique que $\Delta z_1^1 \in L^2(\Omega_1)$, $\Delta z_2^1 \in L^2(\Omega_2), \cdots, \Delta z_d^1 \in L^2(\Omega_d)$ et parsuite $\Delta\left(z_1^1 \otimes z_2^1 \otimes \cdots \otimes z_d^1\right) \in L^2(\Omega)$, *i.e.,* $\Delta u_1 \in L^2(\Omega)$. De même, on peut le vérifier pour tout entier $m > 0$. D'où, on peut supposer par la suite que $(f + \Delta u_{m-1}) \in L^2(\Omega)$.

Théorème 2.1. *Soient la $(m-1)-$ème approximation $u_{m-1} \in H_0^1(\Omega)$ et le terme d'initialisation $(z_1^0, z_2^0, \cdots, z_{d-1}^0) \in \prod_{i=1}^{d-1} H_0^1(\Omega_i)$ tel que la condition de non-orthogonalité*

$$\int_{\omega_d} (f + \Delta u_{m-1}) \times \bigotimes_{j=1}^{d-1} z_j^0 \, d\omega_d \quad \neq \quad 0 \tag{2.15}$$

soit satisfaite. Alors la suite (AM) associée au Problème (2.8) est bien-définie.

Preuve. Soit $(z_1^0, z_2^0, \cdots, z_{d-1}^0) \in \prod_{i=1}^{d-1} H_0^1(\Omega_i)$ tel que

$$\int_{\omega_d} (f + \Delta u_{m-1}) \times \bigotimes_{j=1}^{d-1} z_j^0 \, dw_d \quad \neq \quad 0.$$

D'abord, on rappelle que z_d^0 est la solution de l'équation en v

$$\frac{\partial J_m}{\partial z_d}(z_1^0, z_2^0, \cdots, z_{d-1}^0, v) = 0, \tag{2.16}$$

qui consiste au problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\alpha_d^0 \, \Delta_d v + \beta_d^0 \, v & = & f_d^0(x_d) & \text{dans } \Omega_d \\ \\ v & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega_d \end{cases}$$

où α_d^0, β_d^0 and $f_d^0(x_d)$ sont donnés par (2.11), (2.12) et (2.13), respectivement.

On a $z_1^1 \otimes z_2^1 \otimes \cdots \otimes z_d^1 \neq 0$. En effet, il est clair que $z_d^0 \neq 0$, alors

$$\alpha_d^0 \times \left\|\nabla_d \, z_d^0\right\|_{L^2(\Omega_d)}^2 + \beta_d^0 \times \left\|z_d^0\right\|_{L^2(\Omega_d)}^2 = \int_\Omega (\Delta u_{m-1} + f) \times \bigotimes_{j=1}^{d} z_j^0 \, dx \neq 0.$$

Mais

$$\int_\Omega (\Delta u_{m-1} + f) \times \bigotimes_{j=1}^{d} z_j^0 \, dx \neq 0 \implies \int_{\omega_1} (f + \Delta u_{m-1}) \times \bigotimes_{j=2}^{d} z_j^0 \, d\omega_1 \neq 0,$$

alors, $z_1^1 \neq 0$. De la même façon,

$$\alpha_1^1 \times \left\|\nabla_d z_1^1\right\|^2_{L^2(\Omega_1)} + \beta_1^1 \times \left\|z_1^1\right\|^2_{L^2(\Omega_1)} = \int_\Omega (\Delta u_{m-1} + f) \times \left[z_1^1 \otimes \bigotimes_{j=2}^{d} z_j^0\right] dx \neq 0.$$

Donc,

$$\int_\Omega (\Delta u_{m-1} + f) \times \left[z_1^1 \otimes \bigotimes_{j=3}^{d} z_j^0\right] dx \neq 0,$$

ce qui implique que $z_2^1 \neq 0$, de même $z_i^1 \neq 0$, $i \in \{1, 2, \cdots d\}$. En utilisant les mêmes arguments, on montre que la suite (AM) est bien-définie. □

Le fait que la suite (AM) est bien-définie implique que $\|z_k^n\|_{L^2(\Omega_k)} > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ et $\forall\, k \in \{1, 2, \cdots, d\}$. Mais pour démontrer la compacité de (AM), il faut que cette suite soit loin de l'origine. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Théorème 2.2. *Si la suite $(z_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ déjà définie satisfait la condition suivante*

$$\exists\, \alpha > 0 \ \ \textit{tel que} \ \ \|z_k^n\|_{L^2(\Omega_k)} \geq \alpha,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \ \textit{et} \ \forall\, k \in \{1, 2, \cdots, d\} \tag{2.17}$$

alors $(z_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est compacte dans $H_0^1(\Omega_k)$ pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, d\}$.

Preuve. On a déjà démontré que $(z_k^n)_n$ est bornée dans $H_0^1(\Omega_k)$ pour tout $k \in \{1, \cdots, d\}$.

Soit maintenant $k \in \{1, \cdots, d\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On peut vérifier par un calcul direct que z_k^n est l'unique solution de l'équation suivante

$$\begin{cases} -\alpha_k^n\, \Delta_k v + \beta_k^n\, v &= f_k^n \in L^2(\Omega_k) \quad \text{dans } \ \Omega_k \\ \qquad v &= \qquad 0 \qquad\quad \text{sur } \ \partial\Omega_k \end{cases}$$

avec

$$\alpha_k^n := \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{d} \|\zeta_i^n\|^2_{L^2(\Omega_i)},$$

$$\beta_k^n := \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{d} \left[\|\zeta_i^{n\prime}\|^2_{L^2(\Omega_i)} \times \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i, j\neq k}}^{d} \|\zeta_j^n\|^2_{L^2(\Omega_j)} \right],$$

$$\begin{aligned} f_k^n(x_k) &:= \big\langle f + \Delta u_{m-1} \ , \ \bigotimes_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{d} \zeta_j^n \big\rangle_{H^{-1}(\omega_k), H_0^1(\omega_k)} \\ &= \int_{w_k} (f + \Delta u_{m-1}) \cdot \bigotimes_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{d} \zeta_j^n \, dw_k \\ &= \langle f(x), \bigotimes_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{d} \zeta_j^n \rangle_{L^2(\omega_k)} + \sum_{i=1}^{m} \Bigg[\Delta_k(z_k^i) \int_{w_k} \bigotimes_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{d} z_j^i \cdot \zeta_j^n \, dw_k \\ &\quad - z_k^i \int_{\omega_k} \nabla_{w_k} \Big[\bigotimes_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{d} z_j^i \Big] \cdot \nabla_{w_k} \Big[\bigotimes_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{d} \zeta_j^n \Big] \, d\omega_k \Bigg], \end{aligned}$$

où

$u_{m-1} := \sum_{i=1}^{m-1} z_1^i \otimes \cdots \otimes z_d^i, \quad (z_1^i, \cdots, z_d^i)$ est la solution du Problème (2.7) à l'étape précédente i,

et

$$\zeta_i^n = \begin{cases} z_i^n & \text{si } \ i \in \{1, \cdots, k-1\}, \\ z_i^{n-1} & \text{si } \ i \in \{k+1, \cdots, d\}. \end{cases} \tag{2.18}$$

On introduit maintenant les espaces

$$\mathbb{S}_k = \{u \in H_0^1(\Omega_k) \ : \ \Delta_k \, u \in L^2(\Omega_k)\}, \tag{2.19}$$

munis de la norme de $H_0^1(\Omega_k)$ et on définit les opérateurs A_k^n et B_k^n sur $\mathbb{S}_k$ comme suit

$$\begin{aligned} A_k^n \ : \ \mathbb{S}_k &\longrightarrow L^2(\Omega_k) \\ u &\longmapsto -\alpha_k^n \, \Delta_k u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_k^n \ : \ \mathbb{S}_k &\longrightarrow L^2(\Omega_k) \\ u &\longmapsto \beta_k^n \, u. \end{aligned}$$

Il est connu que A_k^n est un isomorphisme de $\mathbb{S}_k$ vers $L^2(\Omega_k)$ et son inverse $(A_k^n)^{-1}$ est continu. D'autre part, puisque $\beta_k^n > 0$, pour tout k et n, on déduit facilement que $A_k^n + B_k^n$ est un isomorphisme de $\mathbb{S}_k$ vers $L^2(\Omega_k)$ et son inverse $(A_k^n + B_k^n)^{-1}$ est continu. De plus, la solution de $(A_k^n + B_k^n)u = f_k^n$ dans $H_0^1(\Omega_k)$ satisfait l'identité suivante

$$\alpha_k^n \times \left\|\nabla_k u\right\|^2_{L^2(\Omega_k)} + \beta_k^n \times \left\|u\right\|^2_{L^2(\Omega_k)} \quad = \quad \int_{\Omega_k} f_k^n(x_k)\, u(x_k)\, dx_k,$$

alors

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega_k)} \leq \frac{C_k}{\alpha^{2(d-1)}} \|f_k^n\|_{L^2(\Omega_k)},$$

où C_k est la constante de Sobolev dans l'injection continue $H_0^1(\Omega_k) \subset L^2(\Omega_k)$ et α est la constante apparaîssant dans (2.17). On conclut qu'il existe $C \geq 0$ tel que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega_k)} \leq C,$$

puisque $\bigotimes_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{d} \zeta_j^n$ est uniformément bornée dans $\prod_{j=1, j\neq k}^{d} H_0^1(\Omega_j)$. On obtient alors que la suite des opérateurs $\left((A_k^n + B_k^n)^{-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $\mathcal{L}(L^2(\Omega_k), \mathbb{S}_k)$.
Les suites $\left(\alpha_k^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\beta_k^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans $\mathbb{R}$, alors il existe $\widehat{\alpha}_k > 0$ et $\widehat{\beta}_k > 0$ tels que, à une sous-suite près, on a

$$\alpha_k^n \longrightarrow \widehat{\alpha}_k, \quad \beta_k^n \longrightarrow \widehat{\beta}_k, \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

D'où en définissant

$$\begin{array}{rcccl} A_k & : & \mathbb{S}_k & \longrightarrow & L^2(\Omega_k) \\ & & u & \longmapsto & -\widehat{\alpha}_k\, \Delta_k\,(u), \\ B_k & : & \mathbb{S}_k & \longrightarrow & L^2(\Omega_k) \\ & & u & \longmapsto & -\widehat{\beta}_k\, u, \end{array}$$

on a, à une sous-suite près, les convergences suivantes

$$\begin{array}{rcl} A_k^n & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & A_k \quad \text{simplement} \\ B_k^n & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & B_k \quad \text{simplement.} \end{array}$$

De plus, on a

$$\left(A_k^n + B_k^n\right)^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left(A_k + B_k\right)^{-1} \quad \text{simplement.}$$

En effet, il suffit d'écrire

$$\left(A_k^n + B_k^n\right)^{-1} - \left(A_k + B_k\right)^{-1} = \left(A_k^n + B_k^n\right)^{-1} \Big(\left(A_k + B_k\right) - \left(A_k^n + B_k^n\right) \Big) \left(A_k + B_k\right)^{-1},$$

puis utiliser les convergences simples de A_k^n, B_k^n et la continuité de $\left(A_k^n+B_k^n\right)^{-1}$. De nouveau, la suite $\bigotimes_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{d} \zeta_j^n$ est uniformément bornée dans $\prod_{j=1,j\neq k}^{d} H_0^1(\Omega_j)$, alors (à une sous-suite près) elle converge fortement dans $\prod_{j=1,j\neq k}^{d} L^2(\Omega_j)$ et parsuite $(f_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement dans $L^2(\Omega_k)$. D'où, il existe $f_k \in L^2(\Omega_k)$ telle que, à une sous-suite près, on a

$$f_k^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f_k \text{ dans } L^2(\Omega_k).$$

D'où, on conclut qu'il existe une sous-suite telle que

$$\left(A_k^n + B_k^n\right)^{-1} f_k^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left(A_k + B_k\right)^{-1} f_k \text{ dans } H_0^1(\Omega_k).$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\left\|\left(A_k^n + B_k^n\right)^{-1} f_k^n - \left(A_k + B_k\right)^{-1} f_k\right\|_{H_0^1(\Omega_k)} &\leq \left\|\left(A_k^n + B_k^n\right)^{-1}(f_k^n - f_k)\right\|_{H_0^1(\Omega_k)} \\
&+ \left\|\left[\left(A_k^n + B_k^n\right)^{-1} - \left(A_k + B_k\right)^{-1}\right] f_k\right\|_{H_0^1(\Omega_k)} \\
&\longrightarrow 0 \text{ quand } n \to \infty.
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\left\|\left(A_k^n + B_k^n\right)^{-1}(f_k^n - f_k)\right\|_{H_0^1(\Omega_k)} \leq C \left\|f_k^n - f_k\right\|_{L^2(\Omega_k)}$. □

Corollaire 2.1. *Sous les mêmes conditions du théorème précédent, si toute la suite (AM) converge faiblement vers $z := (z_1, \cdots, z_d)$ dans $H_0^1(\Omega_1) \times \cdots \times H_0^1(\Omega_d)$ tel que $z_k \neq 0_{H_0^1(\Omega_k)}$ $\forall k = 1, \cdots, d$ alors (AM) converge fortement vers z dans $H_0^1(\Omega_1) \times \cdots \times H_0^1(\Omega_d)$. De plus, z est un point critique de l'énergie J_m.*

Preuve. D'après le Théorème 2.2, $(z_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est compacte dans $H_0^1(\Omega_k)$ pour tout $k \in \{1, \cdots, d\}$. Donc, si $\widehat{z}_k$ est une valeur d'adhérence forte de $(z_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors $\widehat{z}_k$ est égale à la limite faible z_k (unicité des limites). Alors $(z_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers z_k dans $H_0^1(\Omega)$ comme ayant une unique valeur d'adhérence forte. Parsuite la suite (AM) converge fortement vers z dans $H_0^1(\Omega_1) \times \cdots \times H_0^1(\Omega_d)$. De plus, le fait que ${J_m}'$ soit continue dans $H_0^1(\Omega_1) \times \cdots \times H_0^1(\Omega_d)$ implique

$$\frac{\partial J_m}{\partial z_k}(z_1^{n+1}, \cdots, z_{k-1}^{n+1}, z_k^{n+1}, z_{k+1}^n, \cdots, z_d^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\partial J_m}{\partial z_k}(z_1, \cdots, z_d), \quad \forall k \in \{1, \cdots, d\}.$$

D'où,

$$\frac{\partial J_m}{\partial z_k}(z_1, \cdots, z_d) = 0, \quad \forall k \in \{1, \cdots, d\}.$$

□

2.3.2 Compacité dans un cas général de diffusion

On considère dans cette section le problème de diffusion suivant

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{rcll} -\mathrm{div}\,(M(x)\nabla u(x)) & = & f & \text{dans } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{2.20}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et $M := (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq d}$ est une matrice réelle diagonale de taille $d \times d$. On suppose que M est définie positive et $m_{ii} := m_i \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ pour tout $i \in \{1, \cdots, d\}$. Alors il existe $0 < \gamma_i \leq \delta_i$ tels que

$$\gamma_i \leq m_i, \partial_i m_i \leq \delta_i, \quad \forall i \in \{1, \cdots, d\}.$$

L'énergie associée au Problème (P) est définie pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ par

$$\begin{aligned} J(u) &:= \frac{1}{2}\int_\Omega \Big[M(x)\nabla(u(x))\Big] \cdot \nabla(u(x))\,dx - \int_\Omega f(x)u(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \int_\Omega m_i(x)|\nabla_k u(x)|^2\,dx - \int_\Omega f(x)u(x)\,dx. \end{aligned} \tag{2.21}$$

On peut vérifier simplement que J est elliptique et $2-$Fréchet différentiable. Alors J est strictement convexe, coercive et bornée inférieurement. Ainsi le problème de minimisation

$$\arg\min_{z\in\mathcal{M}_1} J(u_{m-1} + z) \tag{2.22}$$

admet au moins une solution qui serait cherchée par minimisation alternée. De plus, comme dans la section précédente, on peut vérifier que

$$\mathrm{div}_k\,(a_k^n \nabla_k u_{m-1}) \in L^2(\Omega_k), \text{ pour tout } k \in \{1, 2, \cdots, d\},$$

ce qui est équivalent à

$$f + \mathrm{div}(M\,\nabla u_{m-1}) \in L^2(\Omega).$$

Théorème 2.3. *Soit la $(m-1)-$ème approximation $u_{m-1} \in H_0^1(\Omega)$ et le terme d'initialisation $(z_1^0, z_2^0, \cdots, z_{d-1}^0) \in \prod_{i=1}^{d-1} H_0^1(\Omega_i)$ tel que la condition de non orthogonalité*

$$\int_{\omega_d} (f(x) + \mathrm{div}(M(x)\nabla u_{m-1}(x))) \times \bigotimes_{j=1}^{d-1} z_j^0\,d\omega_d \quad \neq \quad 0 \tag{2.23}$$

soit satisfaite. Alors la suite (AM) associée au Problème (2.20) est bien-définie.

Preuve. La preuve se fait de la même manière que la section précédente. □

Théorème 2.4. *Si la suite (AM) associée au Problème (2.20) vérifie la propriété suivante*

$$\exists\,\alpha > 0,\ \forall\,n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall\,k \in \{1, 2, \cdots, d\} \text{ on a } \|z_k^n\|_{L^2(\Omega_k)} \geq \alpha, \tag{2.24}$$

alors la suite $(z_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est compacte dans $H_0^1(\Omega_k)$ pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, d\}$.

Preuve. Soit $k \in \{1, \cdots, d\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Un calcul direct montre que z_k^n est l'unique solution de l'équation suivante

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_k\,(a_k^n \nabla_k u) + b_k^n u &= f_k^n \in H^{-1}(\Omega_k) \quad \text{in } \Omega_k \\ u &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega_k \end{cases}$$

où a_k^n, b_k^n et f_k^n sont définies sur Ω_k par

$$\begin{aligned} a_k^n(x_k) &= \int_{\omega_k} m_k(x) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{d} (\zeta_j^n)^2(x_j)\, d\omega_k, \\ b_k^n(x_k) &= \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{d} \int_{\omega_k} m_i(x) |\nabla_i \zeta_i^n(x_i)|^2 \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i,k}}^{d} (\zeta_j^n)^2(x_j)\, d\omega_k, \\ f_k^n(x_k) &= \int_{\omega_k} (f(x) + \mathrm{div}(M(x)\nabla u_{m-1}(x))) \times \bigotimes_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{d} \zeta_j^n \; d\omega_k. \end{aligned}$$

avec ζ_k^n est définie exactement comme avant. On définit maintenant les opérateurs F_k^n et G_k^n comme suit

$$\begin{aligned} F_k^n \;:\; \mathbb{S}_k &\longrightarrow L^2(\Omega_k) \\ u &\longmapsto -\nabla_k\, a_k^n \cdot \nabla_k\, u - a_k^n\, \Delta_k\, u = -\mathrm{div}_k\,(a_k^n \nabla_k u), \\ G_k^n \;:\; \mathbb{S}_k &\longrightarrow L^2(\Omega_k) \\ u &\longmapsto b_k^n\, u. \end{aligned}$$

On peut vérifier facilement que $(a_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont uniformément bornées et équicontinues sur $C^1(\overline{\Omega_k})$ et $C^0(\overline{\Omega_k})$ resp. (en utilisant la condition (2.24) et la régularité de m_i), alors en appliquant le Théorème d'Arzelà-Ascoli, on déduit que $(a_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est compacte dans $C^1(\overline{\Omega_k})$ et $(b_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est compacte dans $C^0(\overline{\Omega_k})$. Parsuite, il existe $\widehat{a}_k \in C^1(\overline{\Omega_k})$, $\widehat{b}_k \in C^0(\overline{\Omega_k})$ tel que, à une sous-suite près, on a

$$a_k^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widehat{a}_k, \quad \text{dans } C^1(\overline{\Omega_k}) \tag{2.25}$$

$$b_k^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widehat{b}_k, \quad \text{dans } C^0(\overline{\Omega_k}). \tag{2.26}$$

D'où, on définissant

$$\begin{aligned} F_k \;:\; \mathbb{S}_k &\longrightarrow L^2(\Omega_k) \\ u &\longmapsto -\nabla_k\, a_k \cdot \nabla_k\, u - a_k\, \Delta_k\, u = -\mathrm{div}_k\,(\widehat{a}_k \nabla_k\, u) \\ G_k \;:\; \mathbb{S}_k &\longrightarrow L^2(\Omega_k) \\ u &\longmapsto \widehat{b}_k\, u, \end{aligned}$$

on a, à une sous-suite près, les convergences simples suivantes

$$F_k^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F_k,$$

$$G_k^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} G_k.$$

En effet, si $u \in \mathbb{S}_k$ alors

$$\begin{aligned}\left\|(F_k^n - F_k)u\right\|^2_{L^2(\Omega_k)} &= \int_{\Omega_k} \left|\mathrm{div}((a_k^n - a_k)\nabla u)\right|^2 dx_k \\ &= \int_{\Omega_k} \left|\nabla_k\,(a_k^n - a_k)\,\cdot \nabla_k\, u + (a_k^n - a_k)\,\Delta_k\, u\right|^2 dx_k.\end{aligned}$$

donc en appliquant (2.25) on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \left\|(F_k^n - F_k)u\right\|^2_{L^2(\Omega_k)} = 0.$$

La dernière convergence simple est directe. Or F_k^n est un isomorphisme de $\mathbb{S}_k$ vers $L^2(\Omega_k)$ et son inerse $(F_k^n)^{-1}$ est continue. D'autre part, puisque $b_k^n > 0$ sur $\overline{\Omega_k}$, pour tout k et n, on déduit facilement que $F_k^n + G_k^n$ est un isomorphisme de $\mathbb{S}_k$ vers $L^2(\Omega_k)$ et son inverse $(F_k^n + G_k^n)^{-1}$ est continu. De plus, la solution de $(F_k^n + G_k^n)u = f_k^n$ dans $H_0^1(\Omega_k)$ satisfait l'identité suivante

$$\int_{\Omega_k} a_k^n\,|\nabla_k u|^2\; dx_k + \int_{\Omega_k} b_k^n\,|u|^2\; dx_k \;=\; \int_{\Omega_k} f_k^n(x_k)\,u(x_k)\,dx_k,$$

alors

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega_k)} \leq \frac{C_k}{\delta\alpha^{2(d-1)}}\|f_k^n\|_{L^2(\Omega_k)},$$

où $\delta = \min\limits_{x_k\in\Omega_k} m_k(x_k) > 0$, C_k est la constante de Sobolev dans l'injection continue $H_0^1(\Omega_k) \subset L^2(\Omega_k)$ et α est la constante apparaîssant dans (2.24). On conclut qu'il existe $C \geq 0$ telle que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega_k)} \leq C,$$

puisque $\bigotimes\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{d} \zeta_j^n$ est uniformément bornée dans $\prod\limits_{j=1,j\neq k}^{d} H_0^1(\Omega_j)$. On déduit parsuite que $\left((A_k^n + B_k^n)^{-1}\right)_n$ est uniformément bornée dans $\mathcal{L}(L^2(\Omega_k), \mathbb{S}_k)$, et par conséquence on a

$$\left(F_k^n + G_k^n\right)^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left(F_k + G_k\right)^{-1} \quad \text{(simplement)}.$$

Or la suite $\bigotimes\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{d} \zeta_j^n$ est uniformément bornée dans $\prod\limits_{j=1,j\neq k}^{d} H_0^1(\Omega_j)$, alors, à une sous-suite près, cette suite converge fortement dans $\prod\limits_{j=1,j\neq k}^{d} L^2(\Omega_j)$ et parsuite $(f_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement dans $L^2(\Omega_k)$.

D'où il existe $f_k \in L^2(\Omega_k)$ tel que, à une sous-suite près,

$$f_k^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f_k \text{ dans } L^2(\Omega_k).$$

Et parsuite, on conclut que

$$\left(F_k^n + G_k^n\right)^{-1} f_k^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left(F_k + G_k\right)^{-1} f_k \text{ dans } H_0^1(\Omega_k).$$

□

Finalement, on énonce le même résultat de convergence si la suite (AM) (bornée dans $H_0^1(\Omega)$) admet une unique valeur d'adhérence faible.

Corollaire 2.2. *Sous les mêmes conditions du Théorème 2.4, si toute la suite (AM) converge faiblement vers $z := (z_1, \cdots, z_d)$ dans $H_0^1(\Omega_1) \times \cdots \times H_0^1(\Omega_d)$ tel que $z_k \neq 0_{H_0^1(\Omega_k)}$ $\forall k = 1, \cdots, d$, alors (AM) converge fortement vers z dans $H_0^1(\Omega_1) \times \cdots \times H_0^1(\Omega_d)$. De plus, z est un point critique de l'énergie J_m associée au problème (2.22).*

Preuve. La preuve est exactement la même de la section précédente. □

Remarque 2.2. *Les résultats ci-dessus se généralisent aux cas des problèmes de diffusion où la matrice de diffusion M vérifie les propriétés suivantes*

- $M := (M_i)_{1\leq i\leq d}$ *est une matrice diagonale par blocs*
- $M_i := (m_{j,k}^{(i)})_{1\leq j,k\leq n_i}$ *est symétrique définie positive*
- $m_{j,k}^{(i)} \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ *pour tout* $j, k \in \{1, \cdots, n_i\}$.

Chapitre 3

La PGD pour une classe de problèmes aux dérivées fractionnaires

Sommaire

3.1 Introduction 48

3.1.1 Histoire 48

3.1.2 Domaines d'applications des équations fractionnaires 48

3.1.3 Contribution à la PGD 49

3.2 Espaces de Sobolev Fractionnaires et Dérivation Fractionnaire 49

3.2.1 Espaces de Sobolev Fractionnaires 49

3.2.2 Opérateurs différentiels de Riemann-Liouville 53

Opérateurs fractionnaires à gauche au sens de Riemann-Liouville . 53

Opérateurs fractionnaires à droite au sens de Riemann-Liouville . . 55

Opérateurs fractionnaires de Riemann-Liouville en dimension d . . 57

3.3 Problème variationnel et convergence de la méthode PGD . . 62

3.3.1 PGD et sa convergence 66

3.4 Calcul des modes PGD 70

3.1 Introduction

3.1.1 Histoire

La théorie de dérivation fractionnaire est apparue à la fin du 17ème siècle : l'époque du développement (par Newton et Leibniz) des fondements du calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a introduit le symbole $\frac{d^n f}{dx^n}$ pour désigner la dérivée d'ordre n d'une fonction f par rapport à une variable x. Dans une lettre à L'Hôpital datée du 30 Septembre 1695, Leibniz a intérrogé si la notion des dérivées d'ordres entiers pourrait être généralisée à des dérivées non entières. L'Hôpital était assez curieux par cette question et il a répondu par une autre question : "Que signifie $\frac{d^n f}{dx^n}$ si $n = \frac{1}{2}$?" Par les mots de Leibniz : "Il y a de l'apparence qu'on tirera un jour des conséquences bien utiles de ces paradoxes, car il n'y a gueres de paradoxes sans utilité", la naissance du calcul fractionnaire est été annoncée.

Après la première inquisition de L'Hôpital et Leibniz, le calcul fractionnaire a été principalement une branche d'étude réservée aux meilleurs esprits en mathématiques. Une liste de mathématiciens qui ont fournit des contributions importantes au calcul fractionnaire inclut : Laplace, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Holmegren, Grunwald, Letnikov, Laurent, Nekrassov, Krug, Hadamard, Heaviside, Widder, Riez ... Récemment, ce domaine a été aussi objet des conférences spécialisées. La première conférence a été organisée par B. Ross à l'université de New Haven en Juin 1974 et la première monographie a été publiée par K.B.Oldham et J. Spanier en 1974 après une collaboration commune, commentée en 1968.

3.1.2 Domaines d'applications des équations fractionnaires

Une équation différentielle est dite fractionnaire si elle contient un opérateur d'ordre réel. Elle est dite d'ordre fractionnaire si cet opérateur est celui qui admet le plus grand ordre de dérivation dans l'équation. Notre intérêt par les opérateurs fractionnaires provient du nombre d'applications des modèles fractionnels dans le monde réel. On cite dans ce qui suit quelques domaines d'applications mais le lecteur peut se référer à [72] et [25, Introduction] pour plus d'informations.
Le phénomème de diffusion anormale est l'une des applications les plus intéressantes. Cette diffusion peut être modélisée par

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (-\Delta)^{\alpha/2} u = 0,$$

où le Laplacien usuel d'ordre 2 est remplacé par le Laplacien fractionnel d'ordre α défini par

$$(-\Delta)^{\alpha/2} u = \mathcal{F}^{-1}\big[|\xi|^{\alpha} \mathcal{F} u\big],$$

où $\alpha \in (1, 2)$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ désignent la transformée de Fourier et sa transformée inverse respectivement.
La diffusion dans les tissues cardiaques est qualfiée d'être anormale, elle est de plus anisotropique car la diffusion le long des fibres du tissu se passe avec une vitesse différente que celle à travers les fibres. La diffusion fractionnaire a été utilisée aussi pour décrire la diffusion micro-échelle lors du revêtment de la paroi cellulaire des plantes [94]. En biologie cellulaire, la diffusion anormale a été mesurée dans la récupération de fluorescence après photoblanchiment [86] et dans l'adhésion cellulaire neuronale [91].
Dans le domaine des recources en eaux, les modèles fractionnels ont été utilisés pour décrire le transport chimique des contaminents dans les aquifères hétérogènes [1, 19, 42, 18, 82].

Dans le domanine financier, ces modèles ont été utilisés pour décrire la relation entre les processus stochastiques "heavy-tailed" et certains mécanismes d'évaluation des prix [87].
Les modèles fractionnaires en temps ont été développés pour des types simples d'équations chimiques de réaction-diffusion [103].

3.1.3 Contribution à la PGD

Concernant la résolution numérique des équations aux dérivées fractionnaires, plusieurs approches ont été considérées : Meerchaert et Tadjern ont utilisé des approximations de type différences finies [71], dans [**?**, 44, 101] des approxiamtions de type éléments finis ont été utilisées et dans [68] Liu et Turner ont utilisé la méthode des volumes finis. Cependant, ces approches admettent des limitations en termes d'efficacité computationnelle lorsqu'on traite des problèmes multidimensionnels.

La réduction drastique du nombre d'inconnus via les méthodes de réduction de modèles de type PGD a permis la résolution numérique de certains problèmes qui étaient hors de portée numériquement auparavant. Ceci est comme on a déjà marqué dans l'introduction de cette thèse dû au caractère linéaire de la complexité algorithmique de ces méthodes au contraire de la complexité exponentielle comme il est le cas pour les méthodes classiques.

On vise alors dans ce chapitre à étendre la méthode PGD aux espaces fractionnaires afin de traiter numériquement des problèmes aux dérivées fractionnaires, en diminuant le coût nécessaire en termes du temps de calcul et de stockage dans l'ordinateur.

3.2 Espaces de Sobolev Fractionnaires et Dérivation Fractionnaire

Pour la commodité du lecteur, on rappelle dans cette section quelques définitions et résultats de base sur les espaces et les opérateurs fractionnaires où on a considéré les notations de [70, 100].

3.2.1 Espaces de Sobolev Fractionnaires

Soit Ω une partie non vide de $\mathbb{R}^d$, où d est un entier ≥ 2. Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est suffisamment régulière pour qu'elles existent alors on note les dérivées partielles de u par

$$\partial^s u(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{s_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{s_d} u(x),$$

où $s = (s_1, \cdots, s_d)$ est un *multi-indice*, i.e., un d-uplet des entiers positifs. Ainsi, l'*ordre* de la dérivée partielle $\partial^s u$ est l'entier $|s| = s_1 + \cdots + s_d$.

Afin de définir les espaces de Sobolev d'ordres fractionnaires $\mu \in]0, 1[$ sur Ω, on définit la seminorme de Slobodeckii par

$$|u|_{\mu,\Omega} := \left(\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{2\mu+d}}\, dx\, dy\right)^{1/2}.$$

Définition 3.1. *Soit $s = r + \mu > 0$, où r est la* partie entière *de s, on définit l'espace de Sobolev $W^{s,2}(\Omega)$ par*

$$W^{s,2}(\Omega) := \big\{u \in W^{r,2}(\Omega) \ : \ |\partial^j u|_{\mu,\Omega} < +\infty \quad \textit{pour tout } j \textit{ multi-indice tel que } \ |j| = r\big\},$$

où $W^{r,2}(\Omega)$ est l'espace de Sobolev classique défini par

$$W^{r,2}(\Omega) := \big\{u \in L^2(\Omega) \ : \ \partial^j u \in L^2(\Omega) \quad \textit{pour tout } j \textit{ multi-indice tel que } \ |j| \leq r\big\}.$$

Muni de la norme

$$\|u\|_{W^{s,2}(\Omega)} := \left(\|u\|^2_{W^{r,2}(\Omega)} + \sum_{|j|=r} |\partial^j u|^2_{\mu,\Omega} \right)^{1/2},$$

l'espace $W^{s,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert, équipé du produit scalaire suivant

$$\langle u \, , v \, \rangle_{W^{s,2}(\Omega)} := \langle u \, , v \, \rangle_{W^{r,2}(\Omega)} + \sum_{|j|=r} \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{[\partial^j u(x) - \partial^j u(y)]}{|x-y|^{\mu+\frac{d}{2}}} \frac{[\partial^j v(x) - \partial^j v(y)]}{|x-y|^{\mu+\frac{d}{2}}} \, dx \, dy.$$

On introduit maintenant une seconde famille d'espaces de Sobolev, plus adaptée, comme cadre fonctionnel, aux opérateurs différentiels de Riemann-Liouville, et qu'on montrera plus tard son équivalence avec la première famille.

Définition 3.2. *On définit l'espace de Schwartz, espace des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ à décroissance rapide à l'infini, par*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \ : \ \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^s \partial^\beta \varphi(x)| < +\infty, \textit{ pour tout multi-indice } s \textit{ et } \beta \right\}.$$

Théorème 3.1. *La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ définie sur l'espace de Schwartz par*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \ : \ \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \ &\longrightarrow \ \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \\ u \ &\longmapsto \ \mathcal{F}[u] \ : \ \xi \longmapsto \mathcal{F}[u](\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \, e^{-i\xi\cdot x} \, dx \end{aligned}$$

est linéaire et séquentiellement continue. L'inverse de $\mathcal{F}$ noté $\mathcal{F}^{-1}$ n'est autre que la transformée de Fourier adjointe $\mathcal{F}^*$ définie par

$$\mathcal{F}^*[u] \ : \ \xi \longmapsto \mathcal{F}^*[u](\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \, e^{i\xi\cdot x} \, dx.$$

Par la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, la transformée de Fourier peut être uniquement prolongée à une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^d)$:

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\mathcal{F}[u]\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\mathcal{F}^*[u]\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Définition 3.3. *Soit $s \in]0, +\infty[$, le potentiel de Bessel d'ordre s, $\mathcal{I}^s$, est un opérateur linéaire continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, définie par*

$$\mathcal{I}^s u(x) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{u}(\xi) \, e^{i\xi\cdot x} \, d\xi, \qquad \textit{pour tout } \ x \in \mathbb{R}^d,$$

où $\widehat{u}$ est la transformée de Fourier de u.

De cette manière, on a

$$\mathcal{F}[\mathcal{I}^s u](\xi) = (1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{u}(\xi).$$

Il est facile de vérifier que pour tout t, $s \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{I}^0 = \text{ opérateur identité}$$

$$\mathcal{I}^{s+t} = \mathcal{I}^s\mathcal{I}^t, \quad (\mathcal{I}^s)^{-1} = \mathcal{I}^{-s}.$$

De plus, on a

$$\left\langle \mathcal{I}^s u\,,\, v\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \left\langle u\,,\, \mathcal{I}^s v\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Définition 3.4. *On définit sur $\mathbb{R}^d$ l'espace de Sobolev d'ordre s,*

$$H^s(\mathbb{R}^d) := \left\{ u \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d) \ : \ \mathcal{I}^s u \in L^2(\mathbb{R}^d) \right\},$$

et on équipe cet espace par le produit scalaire

$$\langle u\,, v\,\rangle_{H^s(\mathbb{R}^d)} := \langle \mathcal{I}^s u\,, \mathcal{I}^s v\,\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

et la norme induite suivante

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} := \sqrt{\langle u\,, u\,\rangle_{H^s(\mathbb{R}^d)}} = \|\mathcal{I}^s u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Notons que le potentiel de Bessel $\mathcal{I}^s \ : \ H^s(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ est une isométrie :

$$\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

Définition 3.5. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$, on définit*

$$H^s(\Omega) := \left\{ U|_\Omega \ : \ U \in H^s(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

L'espace $H^s(\Omega)$ est muni de la norme quotient suivante

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} := \inf \left\{ \|U\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \ : \ U|_\Omega = u \right\}, \quad \textit{pour tout } s > 0.$$

Il est bien connu que si Ω est un domaine Lipschitzien borné alors $H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$, où $W^{s,2}(\Omega)$ est comme définie ci-dessus.

On définit maintenant un autre espace de Sobolev sur Ω

$$H^s_0(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^s(\Omega)}, \text{ la fermeture de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ dans } H^s(\Omega).$$

En appliquant les résultats classiques concernant les opérateurs trace dans les espaces fractionnaires, et un résultat retrouvé dans [34, 36], on trouve la caractérisation suivante de $H^s_0(\Omega)$ pour un domaine borné de Lipschitz Ω

$$H^s_0(\Omega) = \begin{cases} H^s(\Omega) & \text{si} \quad 0 < s \leq 1/2, \\ \left\{ u \in H^s(\Omega) \ : \ u|_{\partial\Omega} = 0 \right\} & \text{si} \quad 1/2 < s < 3/2, \end{cases}$$

où $\partial\Omega$ désigne le bord de Ω. Une autre caractérisation importante de $H_0^s(\Omega)$, qui nous permet de prolonger par zéro en dehors de Ω les fonctions de $H_0^s(\Omega)$ afin d'avoir des fonctions de $H^s(\mathbb{R}^d)$ est

$$\text{si } 1/2 < s < 3/2 \quad \text{alors} \quad H_0^s(\Omega) = \left\{ u \in H^s(\Omega) \ : \ \widetilde{u} \in H^s(\mathbb{R}^d) \right\},$$

où $\widetilde{u}$ est le prolongement par zéro de u sur $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$. Cette dernière caractérisation nous permet par conséquence d'utiliser les outils de Fourier. On a alors

$$\|u\|_{H_0^s(\Omega)} = \|\widetilde{u}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Si aucune confusion est susceptible de se produire dans la suite, la fonction $\widetilde{u}$ sera simplement notée par u. La norme $\| \cdot \|_{H_0^s(\Omega)}$ sera notée par $\| \cdot \|$.

A cette étape, on montre que l'espace $H_0^s(\Omega)$ admet une structure tensorielle :

Proposition 3.1. *Pour tout $s \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$, on a*

$$H_0^s(\Omega) = \overline{{}_a\bigotimes_{k=1}^{d} H_0^s(\Omega_k)}^{H_0^s(\Omega)} .$$

Preuve. Soit $u \in H_0^s(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^s(\Omega)}$, alors il existe une suite $(u_n)_n \subset \mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \ \text{ in } H^s(\Omega) \quad \text{ et alors } \quad u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \ \text{ dans } H_0^s(\Omega). \tag{3.1}$$

D'autre part, on sait que

$$\mathcal{D}(\Omega) = \overline{{}_a\bigotimes_{k=1}^{d} \mathcal{D}(\Omega_k)}^{\mathcal{D}(\Omega)} ,$$

alors pour tout entier n, il existe une suite $(\varphi_m^n)_m \subset {}_a\bigotimes_{k=1}^{d} \mathcal{D}(\Omega_k) \subset {}_a\bigotimes_{k=1}^{d} H_0^s(\Omega_k)$ telle que

$$\varphi_m^n \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u_n \ \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega) \quad \text{ et par conséquence } \quad \varphi_m^n \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u_n \ \text{ dans } H_0^{[s]+1}(\Omega), \tag{3.2}$$

où $[s]$ est la partie entière de s.

Maintenant, soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\exists N_1(n) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall p \geq N_1(n) \text{ on a } \|u_p - u\|_{H_0^s(\Omega)} \leq 1/2^{n+1},$$

en particulier,

$$\|u_{N_1(n)} - u\|_{H_0^s(\Omega)} \leq 1/2^{n+1}.$$

De la même manière,

$$\exists N_2(n) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall m \geq N_2(n) \text{ on a } \|\varphi_m^{N_1(n)} - u_{N_1(n)}\|_{H_0^{[s]+1}(\Omega)} \leq 1/2^{n+1}.$$

Alors, pour $v_n := \varphi_{N_2(n)}^{N_1(n)}$, on aura

$$\begin{aligned} \|v_n - u\|_{H_0^s(\Omega)} &\leq \|v_n - u_{N_1(n)}\|_{H_0^s(\Omega)} + \|u_{N_1(n)} - u\|_{H_0^s(\Omega)} \\ &\leq c_1 \|v_n - u_{N_1(n)}\|_{H_0^{[s]+1}(\Omega)} + \|u_{N_1(n)} - u\|_{H_0^s(\Omega)} \quad [70] \\ &\leq \max(1, c_1)/2^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

3.2.2 Opérateurs différentiels de Riemann-Liouville

Il existe plusieurs définitions de la dérivée fractionnaire. On cite la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et la dérivée fractionnaire au sens de Caputo. Pourtant, on s'intéresse dans cette thèse à la dérivation au sens de Riemann-Liouville [73, 80, 58].

On commence alors par introduire la notion des opérateurs fractionnaires pour des fonctions unidimensionnelles puis on généralise aux dimensions plus élevées. On suppose d'abord qu'on opère sur des fonctions de classe C^∞ définies sur un interval réel puis on montre (dans le cas général) que la dérivation fractionnaire pourra être étendue aux espaces fractionnaires.

Opérateurs fractionnaires à gauche au sens de Riemann-Liouville

D'abord, on va rappeler les fonctions Gamma et Bêta qui jouent un rôle très important dans le calcul fractionnaire.

Définition 3.6. *La fonction* Gamma *est une généralisation de la fonction factorielle, elle est définie par*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^\star.$$

La fonction Gamma satisfait les deux propriétés suivantes

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+^\star;$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \forall x > 0.$$

Définition 3.7. *La fonction Bêta est définie par*

$$B(x,y) := \int_0^1 \tau^{x-1}(1-\tau)^{y-1}\, d\tau, \quad \forall x > 0, y > 0.$$

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

L'intégral à gauche d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) d'une fonction u suffisammment régulière sur un interval réel $]a, b[$ est défini comme étant la solution du problème aux bords suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f^{(n)}(x) & = & u(x), \quad \forall x \in]a, b[, \\ f^{(i)}(a) & = & 0, \quad i = 0, \cdots, n-1. \end{array} \right. \tag{3.3}$$

Afin de donner une généralisation de la forme de la solution de (3.3), on écrit d'abord la solution pour $n = 1$ comme suit

$$f(x) = \int_a^x u(t)\, dt,$$

où on a intégré entre a et x et appliqué la condition initiale $f(a) = 0$. Similairement, pour $n = 2$, on intègre deux fois les deux membres de $f^{(2)}(x) = u(x)$, afin d'obtenir

$$\int_a^x \int_a^t u(s)\, ds\, dt = \int_a^x \int_a^t f^{(2)}(s)\, ds\, dt = f(x).$$

En changeant l'ordre d'intégration, on obtient

$$f(x) = \int_a^x \int_s^x u(s)\, dt\, ds = \int_a^x (x - s) u(s) ds.$$

En répétant ce processus pour $n \in \mathbb{N}^*$ arbitraire, on peut trouver que la solution de (3.3) est donnée par

$$f(x) = \int_a^x \int_a^{s_1} \cdots \int_a^{s_{n-1}} u(s)\, ds\, ds_{n-1} \cdots ds_1 = \int_a^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} u(s)\, ds.$$

Une généralisation de cette forme de la solution pour un ordre de dérivation non entier est donnée par

Définition 3.8 (Intégral fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville)**.** *Soit u une fonction réelle définie sur un interval $]a, b[$ et $\sigma > 0$. Alors l'intégral fractionnaire à gauche de u, d'ordre σ au sens de Riemann-Liouville est définie par*

$${}_aD_x^{-\sigma}(u)(x) := \int_a^x \frac{(x-s)^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} u(s)\, ds.$$

La dérivée fractionnaire correspondante sera alors définie par une composition d'un opérateur différentiel ordinaire et un opérateur d'intégration fractionnaire.

Définition 3.9 (Dérivée fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville)**.** *Soit u une fonction réelle définie sur un interval $]a, b[$ et $\mu > 0$. Alors la dérivée fractionnaire à gauche de u, d'ordre μ au sens de Riemann-Liouville est définie par*

$${}_aD_x^{\mu}(u)(x) := \frac{d^\ell}{dx^\ell}\big({}_aD_x^{-\sigma} u(x)\big) = \frac{d^\ell}{dx^\ell} \int_a^x \frac{(x-s)^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} u(s)\, ds,$$

où ℓ est le plus petit entier plus grand ou égal à μ ($\ell - 1 \leq \mu \leq \ell$) et $\sigma = \ell - \mu$.

Opérateurs fractionnaires à droite au sens de Riemann-Liouville

L'intégral à droite d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) d'une fonction u suffisamment régulier sur un interval réel $]a, b[$ est défini comme étant la solution du problème aux bords suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (-1)^n f^{(n)}(x) & = & u(x), \quad \forall x \in]a, b[, \\ f^{(i)}(b) & = & 0, \quad i = 0, \cdots, n-1. \end{array} \right. \tag{3.4}$$

Afin de donner une généralisation de la forme de la solution de (3.4), on écrit d'abord la solution pour $n = 1$ comme suit

$$f(x) = \int_x^b u(t)\, dt,$$

où on a intégré entre x et b et appliqué la condition : $f(b) = 0$. Similairement, pour $n = 2$, on intègre deux fois les deux membres de $f^{(2)}(x) = u(x)$ afin d'obtenir

$$\int_x^b \int_t^b u(s)\, ds\, dt = \int_x^b \int_t^b f^{(2)}(s)\, ds\, dt = f(x).$$

En changeant l'ordre d'intégration, on obtient

$$f(x) = \int_x^b \int_x^s u(s)\, dt\, ds = \int_x^b (s - x) u(s) ds.$$

En répétant ce processus pour $n \in \mathbb{N}^*$ arbitraire, on peut trouver que la solution de (3.4) est donnée par

$$f(x) = \int_x^b \int_{s_1}^b \cdots \int_{s_{n-1}}^b u(s)\, ds\, ds_{n-1} \cdots ds_1 = \int_x^b \frac{(s-x)^{n-1}}{(n-1)!} u(s)\, ds.$$

Une généralisation de cette forme de la solution pour un ordre de dérivation non entier est donnée par

Définition 3.10 (Intégral fractionnaire à droite au sens de Riemann-Liouville)**.** *Soit u une fonction réelle définie sur un interval $]a, b[$ et $\sigma > 0$. Alors l'intégral fractionnaire à droite de u, d'ordre σ au sens de Riemann-Liouville est définie par*

$${}_xD_b^{-\sigma}(u)(x) := \int_a^x \frac{(s-x)^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} u(s)\, ds.$$

La dérivée fractionnaire correspondante sera alors définie par une composition d'un opérateur différentiel ordinaire et un opérateur d'intégration fractionnaire.

Définition 3.11 (Dérivée fractionnaire à droite au sens de Riemann-Liouville)**.** *Soit u une fonction réelle définie sur un interval $]a, b[$ et $\mu > 0$. Alors la dérivée fractionnaire à droite de u, d'ordre μ au sens de Riemann-Liouville est définie par*

$${}_xD_b^{\mu}(u)(x) := (-1)^\ell \frac{d^\ell}{dx^\ell}\big({}_xD_b^{-\sigma} u(x)\big) = (-1)^\ell \frac{d^\ell}{dx^\ell} \int_x^b \frac{(s-x)^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} u(s)\, ds,$$

où ℓ est le plus petit entier plus grand ou égal à μ ($\ell - 1 \leq \mu \leq \ell$) et $\sigma = \ell - \mu$.

Proposition 3.2 (Propriétés d'inverse et de composition)**.** *Pour tout $\mu, \nu > 0$ on a*

1) ${}_aD_x^{-\mu}\,{}_aD_x^{-\nu}u(x) = {}_aD_x^{-\mu-\nu}u(x)$,

2) ${}_aD_x^{\mu}\,{}_aD_x^{-\mu}u(x) = u(x)$,

3) ${}_xD_b^{-\mu}\,{}_xD_b^{-\nu}u(x) = {}_xD_b^{-\mu-\nu}u(x)$,

4) ${}_xD_b^{\mu}\,{}_xD_b^{-\mu}u(x) = u(x)$.

Preuve.

1)
$$\begin{aligned}
{}_aD_x^{-\mu}\,{}_aD_x^{-\nu}u(x) &= \frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}\int_a^x (x-t)^{\mu-1}\int_a^t (t-s)^{\nu-1}u(s)\,ds\,dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}\int_a^x u(s)\int_s^x (x-t)^{\mu-1}(t-s)^{\nu-1}\,ds\,dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}\int_a^x (x-s)^{\mu+\nu-1}u(s)\int_0^1 (1-\tau)^{\mu-1}\tau^{\nu-1}d\tau\,ds \\
&\qquad \left(\text{changement de variable} \quad \tau = \tfrac{(t-s)}{(x-s)}\right) \\
&= \frac{B(\mu,\nu)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}\int_a^x (x-s)^{\mu+\nu-1}u(s)\,ds \\
&= {}_aD_x^{-\mu-\nu}u(x).
\end{aligned}$$

2) En utilisant 1) on obtient

$${}_aD_x^{\mu}\,{}_aD_x^{-\mu}u(x) = \frac{d^\ell}{dx^\ell}\,{}_aD_x^{\mu-\ell}\,{}_aD_x^{-\mu}u(x) = \frac{d^\ell}{dx^\ell}\,{}_aD_x^{-\ell}u(x) = u(x),$$

où ℓ est le plus petit entier plus grand que μ.
On démontre de la même façon les propriétés des opérateurs fractionnaires à droite. □

Proposition 3.3. *Les intégrales fractionnaires à gauche et à droite au sens de Riemann-Liouville sont adjoints dans $L^2(]a,b[)$. i.e*

$$\left\langle\, {}_aD_x^{-\mu}w\,,\, v\,\right\rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle\, w\,,\, {}_xD_b^{-\mu}v\,\right\rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \mu > 0.$$

Preuve. Il suffit décrire la définition de l'intégrale de Riemann-Liouville à gauche et de changer l'ordre d'intégration. En effet,

$$\begin{aligned}
\left\langle\, {}_aD_x^{-\mu}w\,,\, v\,\right\rangle_{L^2(\Omega)} &= \int_a^b \left(\int_a^x \frac{(x-s)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}w(s)\,ds\right)v(x)\,dx \\
&= \int_a^b w(s)\left(\int_s^b \frac{(x-s)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\,v(x)\,dx\right)ds \\
&= \left\langle\, w\,,\, {}_xD_b^{-\mu}v\,\right\rangle_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Opérateurs fractionnaires de Riemann-Liouville en dimension d

Dans la suite, la base canonique de $\mathbb{R}^d$ sera notée par $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_d)$ et les points de Ω seront notés par $x = (x_1, x_2, \cdots, x_d)$. Motivé par le cadre de la PGD, on se limite aux domaines bornés de Lipschitz de la forme

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_d,$$

où $\Omega_i =]a_k, b_k[$ est un ouvert réel non vide et $a = (a_1, a_2, \cdots, a_d)$, $b = (b_1, b_2, \cdots, b_d)$ sont des points de $\mathbb{R}^d$. De plus, afin de traiter des problèmes variationnels dans un cadre fonctionnel convenable (résultats de trace et bonnes caractérisations des espaces de Sobolev fractionnaires) on suppose désormais que $1/2 < s < 3/2$.

Définition 3.12. *Soit $u \in C_0^\infty(\Omega)$ et s un paramètre réel > 0. Le s-ème intégrale de Riemann-Liouville de u dans la direction $\mathbf{e}_k$, pour $k = 1, 2, \cdots, d$, est défini par*

$$\mathcal{R}_{\mathbf{e}_k}^{-s}[u](x) := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{a_k}^{x_k} (x_k - t)^{s-1} u(x_1, \cdots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \cdots, x_n)\, dt.$$

Le s-ème intégrale de Riemann-Liouville de u dans la direction $-\mathbf{e}_k$ est défini par

$$\mathcal{R}_{-\mathbf{e}_k}^{-s}[u](x) := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{x_k}^{b_k} (t - x_k)^{s-1} u(x_1, \cdots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \cdots, x_n)\, dt.$$

Les dérivées d'ordre s de Riemann-Liouville de u dans les directions $\mathbf{e}_k$ et $-\mathbf{e}_k$ sont définies respectivement par

$$\mathcal{R}_{\mathbf{e}_k}^{s}[u](x) := \frac{\partial^\ell}{\partial x_k^\ell} \left(\mathcal{R}_{\mathbf{e}_k}^{s-\ell}[u](x) \right),$$

et

$$\mathcal{R}_{-\mathbf{e}_k}^{s}[u](x) := (-1)^\ell \frac{\partial^\ell}{\partial x_k^\ell} \left(\mathcal{R}_{-\mathbf{e}_k}^{s-\ell}[u](x) \right),$$

où ℓ est l'unique entier satisfaisant $\ell - 1 < s \leq \ell$.

Si $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, on définit similairement

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mathbf{e}_k}^{-s}[u](x) &:= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{-\infty}^{x_k} (x_k - t)^{s-1} u(x_1, \cdots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \cdots, x_n)\, dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{0}^{+\infty} t^{s-1} u(x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k - t, x_{k+1}, \cdots, x_n)\, dt. \end{aligned}$$

et $\mathcal{R}_{\mathbf{e}_k}^{s}[u]$ est définie de la même façon.

Ces intégrals sont bien définies, car u est bornée et à support compact dans Ω (resp. dans $\mathbb{R}^d$).

Lemme 3.1 (Propriété du semi-groupe)**.** *Pour tout $s, \mu > 0$ on a*

$$\mathcal{R}_{\mathbf{e}_k}^{-s} \mathcal{R}_{\mathbf{e}_k}^{-\mu} u = \mathcal{R}_{\mathbf{e}_k}^{-s-\mu} u, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\mathbf{e}_k}^{-s}\mathcal{R}_{\mathbf{e}_k}^{-\mu}u(x) &= \frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(\mu)}\int_0^{+\infty}\nu^{s-1}\int_0^{+\infty}t^{\mu-1}u\big(x-(t+\nu)\mathbf{e}_k\big)\,dt\,d\nu \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(\mu)}\int_0^{+\infty}\nu^{s-1}\int_0^{+\infty}(\xi-\nu)^{\mu-1}u\big(x-\xi\mathbf{e}_k\big)\,d\xi\,d\nu \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(\mu)}\int_0^{+\infty}u\big(x-\xi\mathbf{e}_k\big)\int_0^{\xi}\nu^{s-1}(\xi-\nu)^{\mu-1}\,d\nu\,d\xi
\end{aligned}$$

où on a utilisé le changement de variables $\xi = t+\nu$ et changé l'ordre d'intégration. De plus, si on pose $\alpha := \nu/\xi$, alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{\xi}\nu^{s-1}(\xi-\nu)^{\mu-1}\,d\nu &= \int_0^1(\alpha\xi)^{s-1}(\xi-\alpha\xi)^{\mu-1}\xi\,d\alpha \\
&= \xi^{s+\mu-1}\int_0^1\alpha^{s-1}(1-\alpha)^{\mu-1}\,d\alpha \\
&= \xi^{s+\mu-1}B(s,\mu).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\mathbf{e}_k}^{-s}\mathcal{R}_{\mathbf{e}_k}^{-\mu}u(x) &= \frac{B(s,\mu)}{\Gamma(s)\Gamma(\mu)}\int_0^{+\infty}u\big(x-\xi\mathbf{e}_k\big)\xi^{s+\mu-1}\,d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(s+\mu)}\int_0^{+\infty}\xi^{s+\mu-1}u\big(x-\xi\mathbf{e}_k\big)\,d\xi \\
&= \mathcal{R}_{\mathbf{e}_k}^{-s-\mu}u.
\end{aligned}$$

□

Lemme 3.2. *Pour tout $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et $s \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$, la transformée de Fourier de la s-ème dérivée de Riemann-Liouville de u dans la direction $\mathbf{e}_k$ satisfait*

$$\mathcal{F}(\mathcal{R}_{\mathbf{e}_k}^{s}[u])(\xi) = (i\xi_k)^s\mathcal{F}(u)(\xi). \tag{3.5}$$

De même, on a

$$\mathcal{F}(\mathcal{R}_{-\mathbf{e}_k}^{s}[u])(\xi) = (-i\xi_k)^s\mathcal{F}(u)(\xi). \tag{3.6}$$

De plus, pour tout $u \in H^s(\Omega)$,

$$\big\langle\mathcal{R}_{\mathbf{e}_k}^{s}[u],\mathcal{R}_{-\mathbf{e}_k}^{s}[u]\big\rangle_{L^2(\Omega)} = \cos(\pi\, s)\|\,\mathcal{R}_{\mathbf{e}_k}^{s}[u]\,\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{3.7}$$

Preuve. On rappelle d'abord un résultat standard concernant la fonction Gamma :

$$\forall\, s \in]0,1[,\ \text{on a}\ :\ \lim_{R\to+\infty}\int_0^R t^{s-1}e^{-it}\,dt = i^{-s}\Gamma(t) \tag{3.8}$$

Démontrons d'abord (3.5) pour $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$. Par un simple changement de variable ($t' = x-t$), on peut réécrire

$$\mathcal{R}_{\mathbf{e}_k}^{-s}[u](x) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}t^{s-1}u(x-t\mathbf{e}_k)\,dt.$$

On distingue deux cas :

Cas 1 : $\frac{1}{2} < s < 1$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathcal{R}_{\mathbf{e}_k}^{-s}[u])(\xi) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} \left(\lim_{R\to\infty} \int_0^R t^{s-1} u(x - t\mathbf{e}_k)\, dt \right) dx, \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^R e^{-ix\cdot\xi} t^{s-1} u(x - t\mathbf{e}_k)\, dt\, dx,
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle du Théorème de convergence dominée. Si $\operatorname{supp}(u) \subset B(0,\rho)$, pour $\rho > 0$, alors on a $\operatorname{supp}(u(\cdot - t\mathbf{e}_k)) \subset B(0, \rho + R)$ pour tout $t \in [0, R]$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_0^R |e^{-ix\cdot\xi} t^{s-1} u(x - t\mathbf{e}_k)|\, dt\, dx \leq \|u\|_\infty \operatorname{meas}(B(0, \rho + R))\, \frac{R^s}{s} < \infty.$$

D'après le Théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathcal{R}_{\mathbf{e}_k}^{-s}[u])(\xi) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \lim_{R\to\infty} \int_0^R t^{s-1} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} u(x - t\mathbf{e}_k)\, dx \right) dt \\
&= \frac{\widehat{u}(\xi)}{\Gamma(s)} \lim_{R\to\infty} \int_0^R t^{s-1} e^{-i(\mathbf{e}_k\cdot\xi)t}\, dt \\
&= \frac{\widehat{u}(\xi)}{\Gamma(s)} \lim_{R\to\infty} \int_0^R t^{s-1} e^{-i\xi_k t}\, dt \\
&= \frac{\xi_k^{-s}\, \widehat{u}(\xi)}{\Gamma(s)} \lim_{R\to\infty} \int_0^R t^{s-1} e^{-it}\, dt \\
&= (i\xi_k)^{-s} \mathcal{F}(u)(\xi),
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité provient de (3.8). D'où,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathcal{R}_{\mathbf{e}_k}^{s}[u])(\xi) &= \mathcal{F}\left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mathcal{R}_{\mathbf{e}_k}^{s-1}[u] \right) \right](\xi) \\
&= (i\xi_k) \mathcal{F}\left[\mathcal{R}_{\mathbf{e}_k}^{s-1}[u] \right](\xi) \\
&= (i\xi_k)(i\xi_k)^{s-1} \mathcal{F}(u)(\xi) \\
&= (i\xi_k)^{s} \mathcal{F}(u)(\xi).
\end{aligned}$$

Cas 2 : $1 < s < \frac{3}{2}$.

On utilise la propriété de semi-groupe (Lemme 3.1)

$$\mathcal{R}_{\mathbf{e}_k}^{-\alpha}\, \mathcal{R}_{\mathbf{e}_k}^{-\beta} = \mathcal{R}_{\mathbf{e}_k}^{-(\alpha+\beta)}, \text{ for any } \alpha > 0 \text{ and } \beta > 0,$$

avec $\alpha = 1$ et $\beta = s - 1$, ce qui donne le résultat.

L'opérateur linéaire $\mathcal{R}^s_{\mathbf{e_k}}$ est continue de $\Big(C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \| \, \|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\Big)$ dans $\Big(C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \| \, \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\Big)$, en effet,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[u]\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \|\mathcal{F}\left(\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[u]\right)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&= \|\,(i\,\xi_k)^s\,\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Par densité, le *s-ème* opérateur différentiel de Riemann-Liouville $\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}$ peut être prolongé d'une façon unique à un opérateur linéaire continue de $H^s(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, pour tout $k = 1, 2, \cdots, d$.
Maintenant, soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ alors il existe une suite $(\varphi_n)_n \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\varphi_n \longrightarrow u$ in $H^s(\mathbb{R}^d)$.
Alors,

$$\begin{aligned}
\big\|(i\xi_k)^s\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[u])\big\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \; & \big\|(i\xi_k)^s\big(\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(\varphi_n)\big)\big\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
& + \big\|\mathcal{F}(\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[\varphi_n]) - \mathcal{F}(\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[u])\big\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\big\|(i\xi_k)^s\big(\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(\varphi_n)\big)\big\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \|(i\xi_k)^s\mathcal{F}(u - \varphi_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq \Big\|(1 + |\xi|^2)^{s/2}\,\mathcal{F}(u - \varphi_n)\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&= \|u - \varphi_n\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\big\|\mathcal{F}(\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[\varphi_n]) - \mathcal{F}(\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[u])\big\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \big\|\mathcal{F}(\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[\varphi_n] - \mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[u])\big\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&= \big\|\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[\varphi_n] - \mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[u]\big\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq \|\varphi_n - u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty
\end{aligned}$$

On déduit alors que (3.5) est vrai pour tout $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et $s \in]\frac{1}{2}\,,\,\frac{3}{2}[$.

Pour démontrer la dernière proposition, on rappelle l'observation suivante

$$\overline{(i\,t)^s} = \begin{cases} e^{-i\pi s}\overline{(-i\,t)^s} & \text{if } t \geq 0, \\ \\ e^{i\pi s}\overline{(-i\,t)^s} & \text{if } t < 0, \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{3.9}$$

et la propriété de la transformée de Fourier

$$\int_{\mathbb{R}^d} v\,\overline{w} = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{v}\,\overline{\widehat{w}}, \tag{3.10}$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z.

Soit $s \in]\frac{1}{2}\,,\,\frac{3}{2}[$ et $u \in H^s(\Omega)$, alors

$$\begin{aligned}
\big\langle \mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[u], \mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[u]\big\rangle_{L^2(\Omega)} &\overset{(3.10)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} (i\xi_k)^s\mathcal{F}(\widetilde{u})(\xi) \times \overline{(-i\xi_k)^s\mathcal{F}(\widetilde{u})(\xi)}\,d\xi \\
&= \int_{\{\xi_k \geq 0\}} \big(i\xi_k\big)^s\mathcal{F}(\widetilde{u})(\xi) \times \overline{(-i\xi_k)^s\mathcal{F}(\widetilde{u})(\xi)}\,d\xi \\
&+ \int_{\{\xi_k \leq 0\}} \big(i\xi_k\big)^s\mathcal{F}(\widetilde{u})(\xi) \times \overline{(-i\xi_k)^s\mathcal{F}(\widetilde{u})(\xi)}\,d\xi,
\end{aligned}$$

où le prolongement de u par zéro en dehors de Ω est encore noté u. En utilisant (3.9), on peut réécrire

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[u], \mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[u] \right\rangle_{L^2(\Omega)} &= e^{i\pi s}\int_{\left\{\xi_k\geq 0\right\}} |(i\xi_k)^s \mathcal{F}(\widetilde{u})(\xi)|^2\, d\xi \,+\, e^{-i\pi s}\int_{\left\{\xi_k\leq 0\right\}} |\big(i\xi_k\big)^s \mathcal{F}(\widetilde{u})(\xi)|^2\, d\xi \\
&= i\,\sin(\pi s)\left(\int_{\left\{\xi_k\geq 0\right\}} |(i\xi_k)^s \mathcal{F}(\widetilde{u})(\xi)|^2\, d\xi \,-\, \int_{\left\{\xi_k\leq 0\right\}} |\big(i\xi_k\big)^s \mathcal{F}(\widetilde{u})(\xi)|^2\, d\xi\right) \\
&+ \cos(\pi s)\int_{\mathbb{R}^d} |(i\xi_k)^s \mathcal{F}(\widetilde{u})(\xi)|^2\, d\xi.
\end{aligned}$$

Finalement, puisque $\overline{\mathcal{F}(\widetilde{u})(-\xi)} = \mathcal{F}(\widetilde{u})(\xi)$, on a

$$\int_{\left\{\xi_k\leq 0\right\}} |\big(i\xi_k\big)^s \mathcal{F}(\widetilde{u})(\xi)|^2\, d\xi \;=\; \int_{\left\{\xi_k\geq 0\right\}} |\big(i\xi_k\big)^s \mathcal{F}(\widetilde{u})(\xi)|^2\, d\xi,$$

et parsuite,

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[u], \mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[u] \right\rangle_{L^2(\Omega)} &= \left\langle \mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[\widetilde{u}], \mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[\widetilde{u}] \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&= \cos(\pi s)\int_{\mathbb{R}^d} \left|\mathcal{F}(\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[\widetilde{u}])(\xi)\right|^2\, d\xi \\
&= \cos(\pi s)\int_{\mathbb{R}^d} \left|\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[\widetilde{u}](\xi)\right|^2\, d\xi \\
&= \cos(\pi s)\int_{\Omega} \left|\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[u](\xi)\right|^2\, d\xi
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

Lemme 3.3. *Pour tout u, $v \in H^s_0(\Omega)$ et $s \in]\frac{1}{2}\,,\,\frac{3}{2}[$, on a*

$$\left\langle \mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[u]\,,\, v\right\rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle u\,,\, \mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[v]\right\rangle_{L^2(\Omega)},$$

pour tout $k = 1,\, 2, \cdots, d$.

Preuve. Soit φ, $\psi \in C^\infty_0(\Omega)$, on désigne par $\widetilde{\varphi}$ et $\widetilde{\psi}$ les prolongements de φ et ψ par zéro en dehors de Ω. Alors pour tout $\mu > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{R}^{-\mu}_{\mathbf{e}_k}[\varphi]\,,\, \psi\right\rangle_{L^2(\Omega)} &= \left\langle \mathcal{R}^{-\mu}_{\mathbf{e}_k}[\widetilde{\varphi}]\,,\, \widetilde{\psi}\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_0^{+\infty} t^{\mu-1}\widetilde{\varphi}(x_1,\cdots,x_{k-1},x_k-t,x_{k+1},\cdots,x_n)\,dt\right)\widetilde{\psi}(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^{+\infty} t^{\mu-1}\widetilde{\varphi}(x_1,\cdots,x_{k-1},x_k-t,x_{k+1},\cdots,x_n)\,\widetilde{\psi}(x)\,dt\,dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^d} t^{\mu-1}\widetilde{\varphi}(x)\,\widetilde{\psi}(x_1,\cdots,x_{k-1},x_k+t,x_{k+1},\cdots,x_n)\,dx\,dt \\
&= \left\langle \widetilde{\varphi}\,,\, \mathcal{R}^{-\mu}_{-\mathbf{e}_k}[\widetilde{\psi}]\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \left\langle \varphi\,,\, \mathcal{R}^{-\mu}_{-\mathbf{e}_k}[\psi]\right\rangle_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

où on a utilisé deux simples changements de variables et le Théorème de Fubini pour changer l'ordre d'intégration. Or on sait que

$$\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[\varphi](x) := \frac{\partial^\ell}{\partial x_k^\ell}\left(\mathcal{R}^{s-\ell}_{\mathbf{e}_k}[\varphi](x)\right),$$

où ℓ est l'unique entier satisfaisant $\ell - 1 < s \leq \ell$, alors

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[\varphi]\,,\,\psi\right\rangle_{L^2(\Omega)} &= \left\langle \tfrac{\partial^\ell}{\partial x_k^\ell}\,\mathcal{R}^{s-\ell}_{\mathbf{e}_k}[\varphi]\,,\,\psi\right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= (-1)^l\left\langle \mathcal{R}^{s-\ell}_{\mathbf{e}_k}[\varphi]\,,\,\tfrac{\partial^\ell}{\partial x_k^\ell}\,\psi\right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= (-1)^l\left\langle \varphi\,,\,\mathcal{R}^{s-\ell}_{-\mathbf{e}_k}[\tfrac{\partial^\ell}{\partial x_k^\ell}\,\psi]\right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= (-1)^l\left\langle \varphi\,,\,\tfrac{\partial^\ell}{\partial x_k^\ell}\,\mathcal{R}^{s-\ell}_{-\mathbf{e}_k}[\psi]\right\rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{(Théorème de dérivation sous le signe intégral)} \\
&= \left\langle \varphi\,,\,\mathcal{R}^{s}_{-\mathbf{e}_k}[\psi]\right\rangle_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Maintenant, pour tout u, $v \in H^s(\Omega)$ il existe $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $C_0^\infty(\Omega)$ tel que

$$\varphi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{et} \quad \psi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \psi \quad \text{dans} \quad H_0^s(\Omega).$$

Or $\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}$ et $\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}$ sont deux application linéaires continues de $H^s(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, alors

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[u]\,,\,v\right\rangle_{L^2(\Omega)} &= \lim_{n\to\infty}\left\langle \mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[\varphi_n]\,,\,\psi_n\right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\langle \varphi_n\,,\,\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[\psi_n]\right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \left\langle u\,,\,\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[v]\right\rangle_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

□

3.3 Problème variationnel et convergence de la méthode PGD

On rappelle qu'on se limite aux domaines bornés de Lipschitz de la forme

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_d,$$

où $\Omega_i =]a_k, b_k[$ est un ouvert non vide borné dans $\mathbb{R}$ et $a = (a_1, a_2, \cdots, a_d)$, $b = (b_1, b_2, \cdots, b_d)$ sont des points donnés de $\mathbb{R}^d$.

On considère l'équation aux dérivées fractionnaires avec des conditions aux bords homogènes suivante

$$\left\{\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{d}\left(\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k} + \mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}\right)[u] &= f \quad \text{dans } \Omega, \\
u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega,
\end{aligned}\right. \tag{3.11}$$

où $(\mathbf{e}_k)_{k=1,\cdots,d}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et $\frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}$, avec f est une fontion donnée dans $L^2(\Omega)$.

Définition 3.13. *Une fonction $u \in H_0^s(\Omega)$ est dite solution faible de (3.11) si*

$$\sum_{k=1}^{d}\int_\Omega \left(\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[u](x)\,\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[v](x) + \mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[u](x)\,\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[v](x)\right)dx = \int_\Omega f(x)\,v(x)\,dx, \quad \forall\, v \in H_0^s(\Omega).$$

La fonction d'Euler-Lagrange correspondante au Problème (3.11) sur $H_0^s(\Omega)$ est donnée par

$$\begin{array}{rccl} J: & H_0^s(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{d}\int_\Omega \Big[\big(\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[u]\big)^2 + \big(\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[u]\big)^2\Big] - \int_\Omega f\,u, \end{array} \tag{3.12}$$

Il est clair que les solutions faibles de (3.11) sont les points critiques de la fonctionnelle J.

Lemme 3.4. *La fonctionnelle J est de classe $\mathcal{C}^2(H_0^s(\Omega),\mathbb{R})$ et 2-elliptic, i.e.*

$$\exists c>0,\ \forall\, u,\, v\in H_0^s(\Omega)\ :\ \langle J'(u)-J'(v)\,,\,u-v\rangle_{H^{-s}(\Omega),H_0^s(\Omega)} \geq c\,\|u-v\|^2,$$

où

$$J'(u)\cdot v = \sum_{k=1}^{d}\int_\Omega \big(\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[u](x)\,\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[v](x) + \mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[u](x)\,\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[v](x)\big)\,dx - \int_\Omega f\,v.$$

Parsuite, J est strictement convexe, bornée inférieurement et coercive.

Preuve. Pour démontrer que J est de classe $\mathcal{C}^2(H_0^s(\Omega),\mathbb{R})$, on va montrer que J admet une dérivée d'ordre 2 au sens de Gâteaux qui est continue sur $H_0^s(\Omega)$. Pour tout u, $v\in H_0^s(\Omega)$ et $t>0$, on a

$$\begin{aligned} J(u+tv) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\int_\Omega \Big[\big(\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[u+tv]\big)^2 + \big(\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[u+tv]\big)^2\Big] - \int_\Omega f(u+tv) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\int_\Omega \Big[\big(\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[u]\big)^2 + \big(\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[u]\big)^2 + t^2\big[\big(\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[v]\big)^2 + \big(\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[v]\big)^2\big] + \\ &\qquad 2\,t\big[\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[u]\,\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[v] + \mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[u]\,\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[v]\big]\Big] - \int_\Omega f(u+tv) \\ &= J(u) + t\sum_{k=1}^{d}\int_\Omega \Big[\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[u]\,\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[v] + \mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[u]\,\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[v]\Big] - t\int_\Omega fv + t\,\epsilon(t). \end{aligned}$$

Donc la dérivée de Gâteaux de J existe et on a

$$J'(u)\cdot v = \sum_{k=1}^{d}\int_\Omega \big(\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[u](x)\,\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[v](x) + \mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[u](x)\,\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[v](x)\big)\,dx - \int_\Omega f\,v.$$

Il est facile de vérifier que J' est continue sur $H_0^s(\Omega)$. Alors $J\in\mathcal{C}^1(H_0^s(\Omega))$. De plus, on a

$$\begin{aligned} \langle J'(u)-J'(v)\,,\,u-v\rangle_{H^{-s}(\Omega),H_0^s(\Omega)} &= \sum_{k=1}^{d}\int_\Omega \big(\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[v-u](x)\big)^2 + \big(\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[v-u](x)\big)^2\,dx \\ &= \sum_{k=1}^{d}\int_{\mathbb{R}^d} \big|\mathcal{F}(\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[v-u](x))(w)\big|^2 + \big|\mathcal{F}(\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[v-u](x))(w)\big|^2\,dw \\ &= 2\sum_{k=1}^{d}\int_{\mathbb{R}^d} |w_i|^{2s}\big|\mathcal{F}(v-u)(x)(w)\big|^2\,dw \\ &\geq c\int_{\mathbb{R}^d} |w|^{2s}\big|\mathcal{F}(v-u)(x)(w)\big|^2\,dw \\ &\geq c\,\|v-u\|^2_{H_0^s(\Omega)}, \end{aligned}$$

Maintenant, pour tout u, v, $w \in H_0^s(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} J'(u+tv)\cdot w &= \sum_{i=1}^{d}\int_\Omega \big(\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[u+tv](x)\,\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[w](x)+\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[u+tv](x)\,\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[w](x)\big)\,dx-\int_\Omega f\,w \\ &= J'(u)\cdot w+t\sum_{i=1}^{d}\int_\Omega \big(\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[v](x)\,\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[w](x)+\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[v](x)\,\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[w](x)\big)\,dx, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} J''(u)\cdot(v,w) &:= \lim_{t\downarrow 0}\frac{J'(u+tv)\cdot w-J'(u)\cdot w}{t} \\ &= \sum_{i=1}^{d}\int_\Omega \big(\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[v](x)\,\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[w](x)+\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[v](x)\,\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[w](x)\big)\,dx. \end{aligned}$$

Il est clair que J'' est continue. Parsuite $J\in\mathcal{C}^2(H_0^s(\Omega),\mathbb{R})$.
On déduit alors que J est strictement convexe, bornée inférieurement et coercive. □

En appliquant les méthodes directes dans le calcul des variations, on peut déduire que le problème de minimisation

$$\inf_{v\in H_0^s(\Omega)} J(v) \tag{3.13}$$

admet une solution unique.

Lemme 3.5. *Pour toute famille $u_k : \Omega_k \longrightarrow \mathbb{R}$, $1\le k\le d$, des fonctions mesurables telle que $\bigotimes_{k=1}^{d} u_k \neq 0$, on a*

$$\bigotimes_{k=1}^{d} u_k \in H_0^s(\Omega) \iff u_k\in H_0^s(\Omega_k),\ \forall\, k=1,\cdots d.$$

Preuve. Soit $u_k\in H_0^s(\Omega_k)$, $1\le k\le d$, une famille donnée des fonctions mesurables. Il est clair que $\bigotimes_{k=1}^{d} u_k|_{\partial\Omega}=0$ et $\bigotimes_{k=1}^{d} u_k\in L^2(\Omega)$. De plus, en prolongeant u_k par zéro en dehors de Ω_k, $1\le k\le d$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2s}|\mathcal{F}(\bigotimes_{k=1}^{d}u_k)(\xi)|^2\,d\xi &= \int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2s}\big|\bigotimes_{k=1}^{d}\mathcal{F}(u_k)(\xi)\big|^2\,d\xi \\ &\le c_1\int_{\mathbb{R}^d}\big(\sum_{k=1}^{d}|\xi_k|^{2s}\big)\prod_{k=1}^{d}|\mathcal{F}(u_k)(\xi_k)|^2\,d\xi_1\cdots d\xi_d \\ &= c_1\sum_{k=1}^{d}\Big(\int_{\mathbb{R}}|\xi_k|^{2s}|\mathcal{F}(u_k)(\xi_k)|^2\,d\xi_k\times\prod_{i=1,i\neq k}^{d}\int_{\mathbb{R}}|\mathcal{F}(u_i)(\xi_i)|^2\,d\xi_i\Big) \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Alors, $\bigotimes_{k=1}^{d} u_k\in H_0^s(\Omega)$.

Réciproquement, soit $(u_k)_{1\leq k\leq d}$ une famille donnée de fonctions mesurables telle que $\bigotimes_{k=1}^{d} u_k \in H_0^s(\Omega)$ et $\bigotimes_{k=1}^{d} u_k \neq 0$. Il est facile de vérifier que $u_k|_{\partial\Omega_k} = 0$, pour tout $k \in \{1, \cdots, d\}$. De plus, puisque

$$0 < \left\| \bigotimes_{k=1}^{d} u_k \right\|_{L^2(\Omega)} = \prod_{k=1}^{d} \|u_k\|_{L^2(\Omega_k)} < +\infty$$

alors $u_k \in L^2(\Omega_k)$, pour tout $k \in \{1, \cdots, d\}$. D'autre part, en prolongeant encore une fois u_k par zéro en dehors de Ω_k, $1 \leq k \leq d$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}(\bigotimes_{k=1}^{d} u_k)(\xi)|^2 \, d\xi &\geq c_2 \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\sum_{k=1}^{d} |\xi_k|^{2s}\Big) \prod_{k=1}^{d} |\mathcal{F}(u_k)(\xi_k)|^2 \, d\xi_1 \cdots d\xi_d \\
&= c_2 \sum_{k=1}^{d} \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi_k|^{2s} |\mathcal{F}(u_k)(\xi_k)|^2 \, d\xi_k \times \prod_{i=1, i\neq k}^{d} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(u_i)(\xi_i)|^2 \, d\xi_i \right) \\
&\geq c_2 \int_{\mathbb{R}} |\xi_k|^{2s} |\mathcal{F}(u_k)(\xi_k)|^2 \, d\xi_k \times \prod_{i=1, i\neq k}^{d} \|u_k\|^2_{L^2(\Omega_k)}, \quad \forall\, k \in \{1, \cdots, d\},
\end{aligned}$$

le fait que $0 < \prod_{i=1, i\neq k}^{d} \|u_k\|^2_{L^2(\Omega_k)} < +\infty$ nous permet de conclure. □

Proposition 3.4. $\mathcal{M}_1\Big({}_a\bigotimes_{k=1}^{d} H_0^s(\Omega_k)\Big)$ *est faiblement fermé dans* $H_0^s(\Omega)$.

Preuve. Soit $(z_n)_n$ une suite dans $\mathcal{M}_1\Big({}_a\bigotimes_{k=1}^{d} H_0^s(\Omega_k)\Big)$ qui converge vers z faiblement dans $H_0^s(\Omega)$. D'une part, il est clair que

$$\mathcal{M}_1\Big({}_a\bigotimes_{k=1}^{d} H_0^s(\Omega_k)\Big) \subset \mathcal{M}_1\Big({}_a\bigotimes_{k=1}^{d} L^2(\Omega_k)\Big)$$

D'autre part, on sait que $\mathcal{M}_1\big({}_a\bigotimes_{k=1}^{d} L^2(\Omega_k)\big)$ est faiblement fermé dans $L^2(\Omega)$ (voir Chapitre 1, Lemme 1.5), ce qui implique que $z \in \mathcal{M}_1\big({}_a\bigotimes_{k=1}^{d} L^2(\Omega_k)\big)$, alors $z = \bigotimes_{k=1}^{d} z_k$ avec $z_k \in L^2(\Omega_k)$, $k = 1, \cdots d$. D'où, d'après Lemme 3.5, $z \in \Big({}_a\bigotimes_{k=1}^{d} H_0^s(\Omega_k)\Big)$. □

Comme une conséquence de cette proposition, on a le corollaire suivant

Corollaire 3.1. *Le problème de minimisation*

$$\inf_{v \in \mathcal{M}_1\big({}_a\bigotimes_{k=1}^{d} H_0^s(\Omega_k)\big)} J(u+v) \tag{3.14}$$

admet au moins une solution pour tout $u \in H_0^s(\Omega)$ *fixé.*

3.3.1 PGD et sa convergence

Lemme 3.6. *Si $u \in H_0^s(\Omega)$ satisfait*

$$J(u) \leq J(u+z), \quad \forall z \in \mathcal{M}_1\Big({}_a\bigotimes_{k=1}^{d} H_0^s(\Omega_k)\Big)$$

alors u est l'unique solution faible de (3.11).

Preuve. Soit $z \in \mathcal{M}_1\Big({}_a\bigotimes_{k=1}^{d} H_0^s(\Omega_k)\Big)$ et la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = J(u + t\,z)$. Il est clair que la fonction g est différentiable sur $\mathbb{R}$ et atteint son minimum global en 0. En conséquence, $g'(0) = J'(u) \cdot (z) = 0$ et la linéarité de $J'(u)$ implique que $J'(u) = 0$ sur ${}_a\bigotimes_{k=1}^{d} H_0^s(\Omega_k)$. Finalement la densité de ${}_a\bigotimes_{k=1}^{d} H_0^s(\Omega_k)$ dans $H_0^s(\Omega)$ permet de conclure. □

On va considérer la méthode PGD en adoptant la stratégie (c) afin de construire progressivement une approximation de la solution du Problème (3.11) :

$$(M) \quad \begin{cases} (i) \quad \text{Initialisation : } u_0 := 0 \text{ dans } H_0^s(\Omega). \\ (ii) \quad \text{Direction de descente : } z_m := \displaystyle\arg\min_{z \in \mathcal{M}_1\Big({}_a\bigotimes_{k=1}^{d} H_0^s(\Omega_k)\Big)} J(u_{m-1}+z), \, \forall\, m \geq 1 \ : \\ (iii) \quad \text{Mise à jour : } \ u_m = u_{m-1} + z_m, \ \forall\, m \geq 1. \end{cases}$$

On note que la PGD progressive (c) est la méthode la plus utilisée grâce à sa simplicité dans l'implémentation.

On démontre dans la suite que toute suite PGD de type (M) est convergente dans $H_0^s(\Omega)$.

Théorème 3.2. *La suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset {}_a\bigotimes_{k=1}^{d} H_0^s(\Omega_k)$, définie par (M), converge faiblement dans $H_0^s(\Omega)$ vers l'unique solution faible de (3.11).*

Preuve. Soit $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset H_0^s(\Omega)$ une suite PGD définie par (M). Il est clair que la suite réelle $(J(u_m))_{m\in\mathbb{N}}$ est décroissante, bornée inférieurement et par conséquence convergente dans $\mathbb{R}$, on note ℓ sa limite. La coercivité de J implique que $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^s(\Omega)$.
Afin de montrer que $(u_m)_m$ converge faiblement dans $H_0^s(\Omega)$, on montre que $(u_m)_m$ admet une unique valeur d'adhérence par rapport à la topologie faible de $H_0^s(\Omega)$.
Soit $u \in H_0^s(\Omega)$ une valeur d'adhérence de $(u_m)_m$ par rapport à la topologie faible de $H_0^s(\Omega)$ et $(u_{m_n})_n$ une sous-suite de $(u_m)_m$ convergeant faiblement vers u.
Comme $u_{m_n} \rightharpoonup u$ dans $H_0^s(\Omega)$ alors $u_{m_n} + z \rightharpoonup u + z$, pour tout $z \in H_0^s(\Omega)$. Par conséquence, on aura $|\xi_k|^s \mathcal{F}(u_{m_n} + z) \rightharpoonup |\xi_k|^s \mathcal{F}(u + z)$ dans $L^2(\Omega)$, pour tout $z \in H_0^s(\Omega)$ et $k \in \{1, 2, \cdots, d\}$. D'autre

part, si les prolongements de u et u_m par zéro en dehors de Ω conservent les mêmes notations u et u_m, alors on aura

$$\begin{aligned}\||\xi_k|^s\mathcal{F}(u_{m_n}-u)\|^2_{L^2(\Omega)} &= \||\xi_k|^s\mathcal{F}(u_{m_n}+z)-|\xi_k|^s\mathcal{F}(u+z)\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &= \||\xi_k|^s\mathcal{F}(u_{m_n}+z)\|^2_{L^2(\Omega)}+\||\xi_k|^s\mathcal{F}(u+z)\|^2_{L^2(\Omega)}-\\ &\quad 2\left\langle|\xi_k|^s\mathcal{F}(u_{m_n}+z)\,,\,|\xi_k|^s\mathcal{F}(u+z)\right\rangle_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $|\xi_k|^s\mathcal{F}(u_{m_n}+z)\rightharpoonup|\xi_k|^s\mathcal{F}(u+z)$ dans $L^2(\Omega)$, on obtient

$$\||\xi_k|^s\mathcal{F}(u_{m_n}-u)\|^2_{L^2(\Omega)}=\||\xi_k|^s\mathcal{F}(u_{m_n}+z)\|^2_{L^2(\Omega)}-\||\xi_k|^s\mathcal{F}(u+z)\|^2_{L^2(\Omega)}+\mathrm{o}_n(1), \tag{3.15}$$

et par conséquence,

$$\|\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[u_{m_n}-u]\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}=\|\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[u_{m_n}+z]\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}-\|\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[u+z]\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}+\mathrm{o}_n(1). \tag{3.16}$$

De la même manière, on obtient

$$\|\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[u_{m_n}-u]\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}=\|\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[u_{m_n}+z]\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}-\|\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[u+z]\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}+\mathrm{o}_n(1). \tag{3.17}$$

On déduit alors la décomposition suivante

$$J(u_{m_n}-u)=J(u_{m_n}+z)-J(u+z)+\mathrm{o}_n(1),\ \forall\, z\in H^s_0(\Omega). \tag{3.18}$$

D'autre part,

$$J(u_{m_{n+1}})\le J(u_{m_n+1})\le J(u_{m_n}+z),\ \ \forall\, z\in\mathcal{M}_1\Big({}_a\bigotimes_{k=1}^{d}H^s_0(\Omega_k)\Big). \tag{3.19}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}J(u_{m_{n+1}}-u)+J(u) &= J(u_{m_{n+1}})+\mathrm{o}_n(1),\quad \text{en mettant } z=0 \text{ dans (3.18)}\\ &\le J(u_{m_n}+z)+\mathrm{o}_n(1),\ \forall\, z\in\mathcal{M}_1\Big({}_a\bigotimes_{k=1}^{d}H^s_0(\Omega_k)\Big),\quad \text{d'après (3.19)}\\ &= J(u_{m_n}-u)+J(u+z)+\mathrm{o}_n(1),\quad \text{by (3.18)}.\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $J(u_{m_{n+1}}-u)$ et $J(u_{m_n}-u)$ ont la même limite $\ell-J(u)$ quand $n\to+\infty$, on obtient

$$J(u)\le J(u+z),\quad \forall\, z\in\mathcal{M}_1\Big({}_a\bigotimes_{k=1}^{d}H^s_0(\Omega_k)\Big).$$

Le lemma 3.6 implique que u est l'unique solution de (3.11). D'où, la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence par rapport à la topologie faible de $H^s_0(\Omega)$, et parsuite elle converge faiblement vers l'unique solution du Problème (3.11). □

Corollaire 3.2. *Avec les mêmes conditions du Théorème 3.2, on a*

$$\lim_{m\to+\infty}J'(u_m)\cdot z=0,\quad \forall\, z\in H^s_0(\Omega).$$

Preuve. Il suffit d'écrire l'expression de $J'(u_m)\cdot z$ et utiliser la convergence faible de $(u_m)_m$ vers l'unique solution de (3.11). □

On donne maintenant quelques lemmes techniques afin de démontrer la convergence forte de la suite PGD donnée par le schéma (M).

Lemme 3.7. *La suite des directions de descente successives z_m définie par (M) associée à la suite PGD $(u_m)_m$ satisfait*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|z_k\|^2 < +\infty,$$

En particulier, $\lim_{m\to+\infty} z_m = 0$ dans $H_0^s(\Omega)$.

Preuve. Remarquons d'abord que

$$J'(u_m)\cdot z_m = 0,\ \forall m \in \mathbb{N}. \tag{3.20}$$

En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $J(u_m + t\, z_m) = J(u_{m-1} + (1+t)z_m) \geq J(u_m)$, ce qui nous permet de conclure.
Maintenant, on introduit la partie quadratique de J défine sur $H_0^s(\Omega)$ par

$$\widetilde{J}(u) := J(u) - J'(0)\cdot u.$$

Alors,

$$J'(u)\cdot w = \widetilde{J}'(u)\cdot w + J'(0)\cdot w,$$

où la forme définie sur $H_0^s(\Omega)\times H_0^s(\Omega)$ par : $(u,w)\mapsto \widetilde{J}'(u)\cdot w$ est bilinéaire et symétrique. Donc

$$\begin{aligned}
J'(u_m)\cdot u_m &= J'(u_m)\cdot u_{m-1} \quad \text{by (3.20)}\\
&= \widetilde{J}'(u_m)\cdot u_{m-1} + J'(0)\cdot u_{m-1}\\
&= \widetilde{J}'(u_{m-1})\cdot u_{m-1} + J'(0)\cdot u_{m-1} + \widetilde{J}'(z_m)\cdot u_{m-1}\\
&= J'(u_{m-1})\cdot u_{m-1} + \widetilde{J}'(u_{m-1})\cdot z_m\\
&\ \vdots\\
&= \sum_{j=1}^{m-1} \widetilde{J}'(u_j)\cdot z_{j+1}, \quad \text{car } u_0 = 0 \text{ and } \widetilde{J}'(0) = 0\\
&= \sum_{1\leq i<j\leq m} \widetilde{J}'(z_i)\cdot z_j, \quad \text{d'après la bilinéarité de } (u,w)\to \widetilde{J}'(u)\cdot w\\
&= \frac{1}{2}\left(\widetilde{J}'(u_m)\cdot u_m - \sum_{k=1}^{m} \widetilde{J}'(z_k)\cdot z_k\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(J'(u_m)\cdot u_m - J'(0)\cdot u_m - \sum_{k=1}^{m} \widetilde{J}'(z_k)\cdot z_k\right).
\end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$J'(u_m)\cdot u_m = -J'(0)\cdot u_m - \sum_{k=1}^{m} \widetilde{J}'(z_k)\cdot z_k. \tag{3.21}$$

Puisque $\widetilde{J}'(z_k)\cdot z_k \geq c_1\,\|z_k\|^2$, pour tout k et $J'(u_m)\cdot u_m \leq c_2\,\|u_m\|^2$, pour tout m, on déduit que

$$\sum_{k=1}^{m} \|z_k\|^2 < +\infty,$$

en particulier, $\lim_{m\to+\infty} \|z_m\| = 0$. □

Lemme 3.8. *Soit $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite PGD associée au Problème (3.11), alors il existe $C > 0$ tel que*

$$|J'(u_{m-1}) \cdot z| \ \leq \ C\|z_m\| \, \|z\|,$$

pour tout $z \in \mathcal{M}_1\left({}_a\bigotimes_{k=1}^{d} H_0^s(\Omega_k)\right)$, où z_m est la direction de descente à l'itération $m \geq 1$, définie par (M).

Preuve. D'abord, on remarque que $J' : H_0^s(\Omega) \longrightarrow H^{-s}(\Omega)$ est Lipschitzienne. D'autre part, la convexité de J entraîne que

$$J'(u_{m-1} + z) \cdot (z_m - z) \leq J(u_{m-1} + z_m) - J(u_{m-1} + z) \leq 0,$$

donc

$$J'(u_{m-1} + z) \cdot z_m \leq J'(u_{m-1} + z) \cdot z. \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
-J'(u_{m-1}) \cdot z &= \big(J'(u_{m-1} + z) - J'(u_{m-1})\big) \cdot z - J'(u_{m-1} + z) \cdot z \\
&\leq C\|z\|^2 - J'(u_{m-1} + z) \cdot z, \quad \text{car } J \text{ Lipschitzienne} \\
&\leq C\|z\|^2 - J'(u_{m-1} + z) \cdot z_m, \quad \text{(d'après (3.22))} \\
&= C\|z\|^2 - \big(J'(u_{m-1} + z) - J'(u_{m-1} + z_m)\big) \cdot z_m \\
&\leq C\left(\|z\|^2 + \|z - z_m\| \, \|z_m\|\right) \\
&\leq C\left(\|z\|^2 + \|z\| \, \|z_m\| + \|z_m\|^2\right).
\end{aligned}$$

D'où, en remplaçant z par $\pm\, z \dfrac{\|z_m\|}{\|z\|}$ dans la dernière inégalité, on obtient

$$|J'(u_{m-1}) \cdot z| \leq 3C\|z_m\| \, \|z\|. \qquad \square$$

Lemme 3.9. *Avec les mêmes notations du Théorème 3.2, on a*

$$\lim_{m\to+\infty} J'(u_m) \cdot u_m = 0$$

et la suite $(u_m)_m$ donnée par le schéma (M) converge vers la solution de (3.11).

Preuve. En utilisnt (3.21), on obtient

$$J'(u_m) \cdot u_m = -J'(0) \cdot u_m - \sum_{k=1}^{m} \widetilde{J}'(z_k) \cdot z_k.$$

Puisque $\sum_{k=1}^{+\infty} \widetilde{J}'(z_k) \cdot z_k < +\infty$ et $\lim_{m\to+\infty} J'(0) \cdot u_m = J'(0) \cdot \widehat{u}$, où $\widehat{u}$ est la limite faible de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ (et en même temps l'unique solution de (3.11) d'après Théorème 3.2), alors la suite réelle $(J'(u_m) \cdot u_m)_m$

est convergente. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
|J'(u_m)\cdot u_m| &\leq \sum_{k=1}^{m} |J'(u_m)\cdot z_k| \\
&\leq C\sum_{k=1}^{m} \|z_{m+1}\|\,\|z_k\| \qquad \text{(Lemme 3.8)} \\
&\leq C\left(m\,\|z_{m+1}\|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{m}\|z_k\|^2\right)^{1/2} \qquad \text{(inégalité de Hölder)} \\
&\leq C\left((m+1)\,\|z_{m+1}\|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\|z_k\|^2\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Finalement, comme $\sum_{k=1}^{+\infty}\|z_k\|^2 < +\infty$ alors il existe une sous-suite $(z_{m_k})_k$ de $(z_m)_m$ telle que $\lim_{k\to+\infty} m_k\,\|z_{m_k}\|^2 = 0$. Parsuite

$$\lim_{m\to+\infty} J'(u_m)\cdot u_m = \lim_{k\to+\infty} J'(u_{m_k})\cdot u_{m_k} = 0.$$

En appliquant le fait que

$$\begin{cases} u_m & \rightharpoonup & u \quad \text{dans } W_{\|\cdot\|}, \\ J'(u_m)\cdot u_m & \to & 0 \quad \text{quand } m\to+\infty, \end{cases}$$

et les formules de décomposition (3.16) et (3.17), on déduit que

$$J'(u_m-u)\cdot(u_m-u)\to 0 \quad \text{quand } m\to+\infty.$$

Par conséquence,

$$J'(0)\cdot(u_m-u)+\widetilde{J}'(u_m-u)\cdot(u_m-u)\to 0 \quad \text{quand } m\to+\infty.$$

ce qui termine la preuve. □

3.4 Calcul des modes PGD

On se limite dans cette section au cas $d=2$. On désigne par x et y la première et la deuxième variable (resp.). Notre problème sera alors

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{2}\left(\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}+\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}\right)[u] &=& f \quad \text{dans } \Omega, \\ u &=& 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.23}$$

avec les mêmes conditions de la section précédente. La solution sera cherchée sous la forme suivante

$$u=\sum_{m=1}^{\infty} X_m\otimes Y_m,$$

où les X_m et Y_m dépendend uniquement de la variable x et y respectivement.
Supposons qu'à l'ordre $m-1$, u_{m-1} est connu. Afin de chercher $u_m := u_{m-1} + z_m$ où z_m est la solution du problème de minimisation suivant

$$\inf_{z \in \mathcal{M}_1} J(u_{m-1} + z), \tag{3.24}$$

on considère l'application $J_m : H_0^1(\Omega_1) \times H_0^1(\Omega_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$J_m(X, Y) := J(u_{m-1} + X \otimes Y).$$

alors le problème (3.24) est équivalent au problème de minimisation

$$\inf_{(X,Y) \in H_0^1(\Omega_1) \times H_0^1(\Omega_2)} J_m(X, Y),$$

Donc si $(\widehat{X}, \widehat{Y})$ est une solution de (3.24) alors on a : $\begin{cases} \dfrac{\partial J_m}{\partial X}(\widehat{X}, \widehat{Y}) = 0, \\ \\ \dfrac{\partial J_m}{\partial X}(\widehat{Y}, \widehat{Y}) = 0. \end{cases}$

Cherchons alors la dérivée de J_m : Soit $\varphi \in H_0^s(\Omega_1)$, et $t > 0$ on a

$$\begin{aligned}
&J_m(X + t\varphi, Y) = J(u + (X + t\varphi) \otimes Y) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2} \int_\Omega \left[\left(\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[u_{m-1} + (X + t\varphi) \otimes Y] \right)^2 + \left(\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[u_{m-1} + (X + t\varphi) \otimes Y] \right)^2 \right] \\
&\qquad - \int_\Omega f\,(t\,\varphi \otimes Y) \\
&= J_m(X, Y) + \epsilon(t^2) - t \int_\Omega f\,(\varphi \otimes Y) + \\
&t \sum_{k=1}^{2} \int_\Omega \left[\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[u_{m-1} + X \otimes Y] \cdot \mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[\varphi \otimes Y] + \mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[u_{m-1} + X \otimes Y] \cdot \mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[\varphi \otimes Y] \right].
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_m}{\partial X}(X, Y) \cdot \varphi \quad = \quad & \sum_{k=1}^{2} \int_\Omega \left[\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[u_{m-1} + X \otimes Y] \cdot \mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_k}[\varphi \otimes Y] + \mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[u_{m-1} + X \otimes Y] \cdot \mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_k}[\varphi \otimes Y] \right] \\
& - \int_\Omega f\,(\varphi \otimes Y).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Big[\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_1}[u_{m-1} + X \otimes Y] \cdot \mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_1}[\varphi \otimes Y] \\
&= \int_{\Omega_2} Y \int_{\Omega_1} \mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_1}[u_{m-1}] \cdot \mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_1}[\varphi]\, dx\, dy + \int_{\Omega_2} Y^2\, dy \int_{\Omega_1} \mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_1}[X] \mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_1}[\varphi]\, dx \\
&= \int_{\Omega_2} Y \int_{\Omega_1} \mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_1} \mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_1}[u_{m-1}] \cdot \varphi\, dx\, dy + \int_{\Omega_2} Y^2\, dy \int_{\Omega_1} \mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_1} \mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_1}[X] \cdot \varphi\, dx
\end{aligned}$$

et

$$\int_\Omega \Big[\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_1}[u_{m-1}+X\otimes Y]\cdot\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_1}[\varphi\otimes Y]$$

$$=\int_{\Omega_2} Y\int_{\Omega_1}\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_1}[u_{m-1}]\cdot\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_1}[\varphi]\,dx\,dy+\int_{\Omega_2}Y^2\,dy\int_{\Omega_1}\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_1}[X]\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_1}[\varphi]\,dx$$

$$=\int_{\Omega_2} Y\int_{\Omega_1}\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_1}\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_1}[u_{m-1}]\cdot\varphi\,dx\,dy+\int_{\Omega_2}Y^2\,dy\int_{\Omega_1}\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_1}\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_1}[X]\cdot\varphi\,dx$$

De même,

$$\int_\Omega \Big[\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_2}[u_{m-1}+X\otimes Y]\cdot\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_2}[\varphi\otimes Y]$$

$$=\int_{\Omega_1}\varphi\int_{\Omega_2}\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_2}[u_{m-1}]\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_2}[Y]\,dy\,dx+\int_{\Omega_2}\Big[\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_2}[Y]\Big]^2\,dy\int_{\Omega_1}X\varphi\,dx$$

et

$$\int_\Omega \Big[\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_2}[u_{m-1}+X\otimes Y]\cdot\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_2}[\varphi\otimes Y]$$

$$=\int_{\Omega_1}\varphi\int_{\Omega_2}\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_2}[u_{m-1}]\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_2}[Y]\,dy\,dx+\int_{\Omega_2}\Big[\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_2}[Y]\Big]^2\,dy\int_{\Omega_1}X\varphi\,dx$$

D'où, si $(\widehat{X},\widehat{Y})$ est une solution de (3.24) alors $\widehat{X}$ est une solution faible du problème aux bords suivant

$$\begin{cases}\|\widehat{Y}\|^2_{L^2(\Omega_2)}\Big[\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_1}\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_1}[X]+\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_1}\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_1}[X]\Big]+\Big[\displaystyle\int_{\Omega_2}\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_2}[\widehat{Y}]^2+\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_2}[\widehat{Y}]^2\,dy\Big]X=\\ \qquad-\displaystyle\int_{\Omega_2}\Big[\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_1}\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_1}+\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_1}\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_1}\Big][u_{m-1}]\cdot\widehat{Y}\,dy-\int_{\Omega_2}\Big[\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_2}\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_2}+\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_2}\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_2}\Big][u_{m-1}]\cdot\widehat{Y}\,dy\\ \qquad+\displaystyle\int_{\Omega_2}f\widehat{Y}\,dy\\ X(a)=X(b)=0.\end{cases}\tag{3.25}$$

De même on peut démontrer que $\widehat{Y}$ est une solution faible du problème aux limites suivant

$$\begin{cases}\|\widehat{X}\|^2_{L^2(\Omega_1)}\Big[\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_2}\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_2}[Y]+\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_2}\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_2}[Y]\Big]+\Big[\displaystyle\int_{\Omega_1}\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_1}[\widehat{X}]^2+\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_1}[\widehat{X}]^2\,dx\Big]Y=\\ \qquad-\displaystyle\int_{\Omega_1}\Big[\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_2}\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_2}+\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_2}\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_2}\Big][u_{m-1}]\cdot\widehat{X}\,dx-\int_{\Omega_1}\Big[\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_1}\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_1}+\mathcal{R}^s_{\mathbf{e}_1}\mathcal{R}^s_{-\mathbf{e}_1}\Big][u_{m-1}]\cdot\widehat{X}\,dx\\ \qquad+\displaystyle\int_{\Omega_1}f\widehat{X}\,dx\\ Y(c)=Y(d)=0.\end{cases}\tag{3.26}$$

On peut alors suivre une stratégie des directions alternées afin de résoudre le problème non linéaire $\{(3.25), (3.26)\}$.

Chapitre 4

La méthode PGD dans le cadre des espaces des fonctions à variation bornée

Sommaire

4.1 Introduction **76**

4.2 Rappels généraux **76**

4.2.1 Rappels sur la théorie des mesures 76

4.2.2 Fonctions à variation bornée dans $\mathbb{R}$ 78

4.2.3 Fonctions à variation bornée dans $\mathbb{R}^d$ 79

4.3 Structure tensorielle des espaces BV **82**

4.4 Ensemble faiblement fermé dans $BV(\Omega)$ **89**

4.5 PGD pour un problème bien défini dans $BV(\Omega)$ **90**

4.5.1 Construction de la suite PGD 91

4.1 Introduction

Les fonctions à variation bornée BV, introduites en 1881 par Camille Jordan, occupe une place assez importante dans le calcul des variations. Dès leur introduction, ces fonctions étaient un outil puissant pour résoudre certains problèmes mathématiques et étudier de nombreux phénomènes tel que la segmentation en traitement d'images, les fractures, les transitions de phases, les problèmes de discontinuités libres tel que la théorie des cristaux liquides, le problème des surfaces minimales...

On vise alors dans ce chapitre à étudier l'existence et la convergence des suites PGD dans le cadre des espaces des fonctions à variation bornée BV, en profitant de la structure tensorielle par rapport à la topologie faible étoile de ce type d'espaces.

4.2 Rappels généraux

Avant de rappeler les définitions et propriétés basiques des espaces des fonctions à variation bornée, on rappelle d'abord quelques notions et propriétés de la théorie des mesures [6, 15].

4.2.1 Rappels sur la théorie des mesures

Définition 4.1. *Soit X un ensemble non vide et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$.*

1. *On dit que $\mathcal{A}$ est une* algèbre *ssi*
   - *l'ensemble vide $\varnothing \in \mathcal{A}$,*
   - *pour tout E_1, $E_2 \in \mathcal{A}$ on a $E_1 \bigcup E_2 \in \mathcal{A}$ et $X \backslash E_1 \in \mathcal{A}$.*
2. *$\mathcal{A}$ est dite une $\sigma-$algèbre si elle est stable par union dénombrable.*

Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique, on note $\mathcal{B}(X)$ la tribue borélienne sur X : la plus petite $\sigma-$algèbre contenant les ouverts de X.

Soit maintenant un ensemble X non vide et $\mathcal{A}$ une $\sigma-$algèbre sur X.

Définition 4.2. *Soit $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$. On dit que μ est une mesure positive ssi*

- *$\mu(\varnothing) = 0$,*
- *μ est $\sigma-$ additive, c.à.d pour toute suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints on a*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n).$$

μ est dite bornée si $\mu(X) < \infty$.

Définition 4.3. *Soit $m \geq 1$. On dit que $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une mesure ssi*

- *$\mu(\varnothing) = 0_{\mathbb{R}^m}$,*

- *pour toute suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints on a*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n).$$

Si $m = 1$ alors μ est une mesure réelle ou signée et si $m > 1$ alors μ est dite mesure vectorielle.

On définit la variation totale d'une mesure vectorielle μ comme suit

$$|\mu|(E) = \sup\Big\{\sum_{n=0}^{\infty} |\mu(E_n)|; \quad \text{tel que } E_n \in \mathcal{A} \text{ sont 2 à 2 disjoints, } E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\Big\}.$$

La variation totale $|\mu|$ d'une mesure μ est à son tour une mesure bornée.

Définition 4.4. *Une mesure sur $\mathbb{R}^m$ est dite de Radon si elle est finie sur chaque compact K dans $\mathbb{R}^m$. L'espace des mesures bornées, réelles ou vectorielles, de Radon sur Ω est noté $\mathcal{M}(\Omega)$.*

On dit qu'une suite de mesures $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(\Omega)$ converge faiblement vers $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ et on note $\mu_n \rightharpoonup \mu$ ssi

$$\int_\Omega \varphi\, d\mu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega \varphi\, d\mu, \quad \forall \varphi \in C_0(\Omega, \mathbb{R}),$$

où $C_0(\Omega, \mathbb{R})$ est la fermeture, pour la norme sup, de l'espace des fonctions continues et à support compact dans Ω.

Définition 4.5. *Soit μ une mesure positive. On dit que $E \subset X$ est $\mu-$négligeable ssi il existe $F \in \mathcal{A}$ tel que $E \subset F$ et $\mu(F) = 0$.*

Dans la suite on va supposer que $X = \mathbb{R}^d$, d est un entier ≥ 1 et $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Définition 4.6. *Soit μ une mesure positive sur $\mathbb{R}^d$ et ν une mesure vectorielle sur $\mathbb{R}^d$. On dit que ν est absolument continue par rapport à μ ($\nu \ll \mu$) ssi*

$$\mu(E) = 0 \Longrightarrow |\nu|(E) = 0.$$

Si μ et ν sont deux mesures positives alors elles sont dites mutuellement singulières ($\mu \perp \nu$) s'il existe $E \subset \mathbb{R}^d$ tel que

$$\mu(\mathbb{R}^d \backslash E) = \nu(E) = 0.$$

Si μ et ν sont réelles ou vectorielles alors elles sont dites mutuellement singulières ssi $|\mu|$ et $|\nu|$ le sont.

Théorème 4.1 (Décomposition de Lebesgue)**.** *Soit μ une mesure positive bornée sur $\big(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\big)$ et ν une mesure vectorielle sur $\big(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\big)$. Alors il existe deux mesures uniques ν_{ac} et ν_s telles que*

$$\nu = \nu_{ac} + \nu_s, \quad \text{où } \nu_{ac} \ll \mu \;\; \text{et} \;\; \nu_s \perp \mu.$$

ν_{ac} et ν_s seront la partie absolument continue et la partie singulière de ν respectivement. De plus, il existe un unique $h \in L^1(\mathbb{R}^d, \mu)$, qui est connu sous le nom "dérivée de Radon-Nikodym", tel que

$$\nu_{ac}(A) = \int_A h\, d\mu \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Définition 4.7. *(Mesure de Hausdorff) La k-dimensionnelle mesure de Hausdorff sur $\mathbb{R}^d$ est définie par*

$$\mathcal{H}^k(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^k_\delta(A) \quad \text{pour tout } A \subset \mathbb{R}^d,$$

telle que pour tout $\delta > 0$

$$\mathcal{H}^k_\delta(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} w_k \left(\frac{\operatorname{diam} C_j}{2} \right)^k \right\},$$

où w_k est le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^k$ et l'infimum est considéré sur tous les ensembles dénombrables $C_1, C_2, \cdots$ de $\mathbb{R}^d$ tels que $\operatorname{diam} C_j < \delta$ et $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$.

Théorème 4.2. *(Cas où $k = d$) On a*

$$\mathcal{H}^d(A) = \mathcal{L}^d(A), \quad \text{pour tout } A \subset \mathbb{R}^d$$

où $\mathcal{L}^d$ est la mesure de Lebesgue d-dimensionnelle sur $\mathbb{R}^d$.

4.2.2 Fonctions à variation bornée dans $\mathbb{R}$

Soit u une fonction définie sur un interval $]a, b[\subset \mathbb{R}$.

Définition 4.8. *La variation totale de u est définie par*

$$VT(u) = \sup_{\sigma} \sum_{i=0}^{N_\sigma} |u(x_{i+1}) - u(x_i)|,$$

où le supremum est considéré sur l'ensemble des subdivisions $\sigma = \{x_0, x_1, \cdots, x_{N_\sigma}\}$ de $]a, b[$, telle que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N_\sigma} = b$.

Si u est différentiable et sa dérivée est intégrable au sens de Riemann alors

$$VT(u) = \int_a^b |f'(x)| \, dx.$$

Définition 4.9. *La fonction u est dite à variation bornée ssi sa variation totale $VT(u)$ est finie. L'ensemble des fonctions à variation bornée sur $]a, b[$ est noté $BV(]a, b[)$.*

Lemme 4.1. *Une fonction u définie sur un interval $\subset \mathbb{R}$ est à variation bornée ssi elle est la différence de deux fonctions croissantes.*

Lemme 4.2. *L'ensemble de points de discontinuité d'une fonction à variation bornée dans un intervalle réel est au plus dénombrable.*

4.2.3 Fonctions à variation bornée dans $\mathbb{R}^d$

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. On désigne par $\left(C_0^0(\Omega)\right)^d$ l'ensemble des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et à support compact inclus dans Ω. Alors pour tout $\varphi := (\varphi_1, \cdots, \varphi_d) \in \left(C_0^0(\Omega)\right)^d$, on définit la norme $\|\varphi\|_\infty$ par

$$\|\varphi\|_\infty := \sup_{x\in\Omega} \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \varphi_i^2(x)}.$$

Définition 4.10. *On définit $BV(\Omega)$, l'ensemble des fonctions à variation bornée dans Ω par*

$$BV(\Omega) = \left\{ u \in L^1(\Omega) \text{ tel que } VT(u) < +\infty \right\},$$

avec

$$VT(u) := \sup \left\{ \int_\Omega u \, div(\varphi) \, dx; \ \varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_d) \in C_0^1(\Omega)^d, \ \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\},$$

où $C_0^1(\Omega)^d$ l'ensemble des fonctions de classe $C^1(\Omega)^d$ et à support compact inclus dans Ω.

Une définition équivalente de l'espace $BV(\Omega)$ est la suivante

Définition 4.11. *L'espace $BV(\Omega)$ est défini comme étant l'ensemble des fonctions $L^1(\Omega)$ telles que la dérivée au sens des distributions est représentée par une mesure de Radon finie $Du = (D_1u, \cdots, D_du)$ dans Ω. c.à.d*

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, dx = -\int_\Omega \varphi \, d(D_j u), \ \forall \varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}), \ j = 1, \cdots, N.$$

Pour tout $u \in BV(\Omega)$, la variation totale de la mesure Du notée $|Du|(\Omega)$ est égale à $VT(u)$.

La variation totale $|Du|(\Omega)$ est une semi-norme de $BV(\Omega)$. En effet, on a clairement pour tout u, $v \in BV(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $|D(u+v)|(\Omega) \leq |Du|(\Omega) + |Dv|(\Omega)$,
2. $|D(\alpha u)| = |\alpha||Du|(\Omega)$.

Nous pourrions utiliser pour la semi-norme la notation suivante

$$|u|_{BV(\Omega)} = \int_\Omega |Du|.$$

L'espace $\left(BV(\Omega), \|\cdot\|_{BV(\Omega)}\right)$ est un espace de Banach avec

$$\|u\|_{BV(\Omega)} = \|u\|_{L^1(\Omega)} + |u|_{BV(\Omega)}, \ u \in BV(\Omega).$$

Exemple 4.1. *Pour tout $u \in W^{1,1}(\Omega)$, la dérivée au sens des distributions Du existe et appartient à $L^1(\Omega)$. Donc pour tout $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ tel que $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, on a*

$$\int_\Omega u \, div(\varphi) \, dx = -\int_\Omega Du \cdot \varphi \, dx \leq \int_\Omega |Du| < \infty.$$

Donc

$$W^{1,1}(\Omega) \subset BV(\Omega).$$

Comme Ω *est borné alors*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset BV(\Omega), \quad \forall 1 \leq p \leq \infty.$$

De plus, si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, *alors on a*

$$\int_\Omega |Du| = \int_\Omega |\nabla u| \, dx,$$

où ∇u *désigne le gradient généralisé de* u.

Exemple 4.2. *Un exemple important à considérer est le cas où* $u = \chi_A$, *la fonction caractéristique d'un sous ensemble* A *de* $\mathbb{R}^d$. *Dans ce cas,*

$$\int_\Omega |Du| = \sup \left\{ \int_A div(\varphi) \, dx; \ \varphi \in C_0^1(\Omega)^d, \ \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\},$$

est appelé le périmètre de A *par rapport à* Ω *et est noté* $Per_\Omega(A)$. *Si de plus* ∂A *est suffisamment régulier alors on peut démontrer que cette définition correspond à la notation du périmètre* $(d = 2)$ *ou d'aire* $(d = 3)$ *classique.*

On résume maintenant les propriétés principales de $BV(\Omega)$. On suppose que le bord de Ω est suffisamment régulier.

1. **Semi-continuité inférieure :**
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset BV(\Omega)$ telle que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ dans $L^1(\Omega)$. Alors $u \in BV(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |Du| \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |Du_n|.$$

2. **Trace :**
   L'opérateur trace

$$\begin{array}{rccc} \text{tr}: & BV(\Omega) & \longrightarrow & L^1(\partial\Omega, \mathcal{H}^{d-1}) \\ & u & \longmapsto & u|_{\partial\Omega} \end{array}$$

   est linéaire continue pour la topologie forte de $BV(\Omega)$. Ici, $\mathcal{H}^{d-1}$ est la mesure $(d-1)-$dimensionnelle de Hausdorff.

3. **Topologie faible$-*$ sur $BV(\Omega)$:**
   Classiquement, on travaille avec la topologie faible$-*$ des espaces BV, car la topologie forte ne possède pas de bonnes propriétés de compacité.
   On dit que'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u pour la topologie faible$-*$ et on note :

$$u_n \rightharpoonup^* u$$

   ssi

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \text{ dans } L^1(\Omega) \quad \text{et} \quad Du_n \rightharpoonup Du \text{ dans } \mathcal{M}(\Omega).$$

4. **Compacité :**
Toute suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset BV(\Omega)$ est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p \leq \frac{d}{d-1}$, $d \geq 2$, c.à.d

$$\exists (u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ telle que } u_{n_k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \text{ dans } L^p(\Omega) \quad \forall 1 \leq p \leq \frac{d}{d-1},\ d \geq 2.$$

De plus, il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $BV(\Omega)$ pour sa topologie faible$-*$.
L'espace $BV(\Omega)$ s'injecte d'une façon continue dans $L^\infty(\Omega)$ si $d = 1$ et dans $L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$ si $d \geq 2$.

5. **Décomposition :**
Si $u \in BV(\Omega)$ alors on peut montrer que Du peut être décomposé en une somme d'une mesure régulière et d'une mesure singulière

$$Du = \nabla u dx + D_s u$$

où $\nabla u \in L^1(\Omega)$ est la dérivée de Radon-Nikodym par rapport à la mesure de lebesgue et $D_s u \perp dx$. Dans [6], Ambrossio a démontré que la partie singulière de Du peut être décomposée en une partie de "saut" $\mathcal{J}_u$ et une partie de "Cantor" C_u. On introduit alors la notion de la limite supérieure approchée et la limite inférieure approchée afin de définir les deux parties de $D_s u$. Pour tout $x \in \Omega$, on définit

$$u^+(x) = \inf\left\{t \in \overline{\mathbb{R}};\ \lim_{r\to 0} \frac{dx(\{u > t\} \cap B(x,r))}{r^d} = 0\right\},$$

$$u^-(x) = \inf\left\{t \in \overline{\mathbb{R}};\ \lim_{r\to 0} \frac{dx(\{u < t\} \cap B(x,r))}{r^d} = 0\right\},$$

où $B(x,r)$ désigne la boule de centre x et rayon r dans $\mathbb{R}^d$.

On dit que $x \in \Omega$ est un point de Lebesgue ssi

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |u(x) - u(y)|\, dy = 0.$$

En ces points, la fonction est approximativement continue $\big(u(x) = u^+(x) = u^-(x)\big)$. Notons que si $u \in L^1(\Omega)$ alors presque tout les points de Ω sont des points de Lebesgue.

Pour les autres points, on définit l'ensemble de saut S_u comme étant le complémentaire de l'ensemble des points de Lebesgue pour la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^{d-1}$

$$S_u := \left\{x \in \Omega;\ u^+(x) > u^-(x)\right\}.$$

S_u est rectifiable et une normale $n_u(x)$ peut être définie $\mathcal{H}^{d-1}-$p.p $x \in \Omega$. Donc D_u se réécrit de la façon suivante

$$Du = \nabla u dx + (u^+ - u^-) n_u \mathcal{H}^{d-1}_{|S_u} + C_u.$$

Ici, $\mathcal{J}_u := (u^+ - u^-) n_u \mathcal{H}^{d-1}_{|S_u}$ est la partie de saut et C_u est la partie cantor de $D_s u$, où C_u est diffuse, i.e. $C_u\{x\} = 0$ et $C_u \perp dx$. D'où la variation totale de Du sera

$$|Du|(\Omega) = \int_\Omega |Du| = \int_\Omega |\nabla u|\, dx + \int_{S_u} |u^+ - u^-|\, d\mathcal{H}^{d-1} + \int_{\Omega\setminus S_u} |C_u|.$$

6. **Décomposition de Lebesgue et fonctions convexes :**
Soit $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction paire, croissante, convexe et linéaire à l'infini et soit Φ^∞ la fonction de récession de Φ définie par

$$\Phi^\infty(z) := \lim_{s\to\infty} \frac{\Phi(sz)}{s}.$$

Pour tout $u \in BV(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \Phi(|Du|)(\Omega) = \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)(x)\,dx + \Phi^\infty(1)\int_{S_u} |u^+ - u^-|\,d\mathcal{H}^{d-1} + \Phi^\infty(1)\int_{\Omega\setminus S_u} |C_u|.$$

Il est facile de remarquer qu'on retrouve la variation totale de u dans le cas où $\Phi(s) := s$. Le résultat le plus important dans ce cadre est que la fonctionnelle : $u \longrightarrow \displaystyle\int_\Omega \Phi(|Du|)$ est s.c.i pour la topologie faible$-*$ de $BV(\Omega)$.

4.3 Structure tensorielle des espaces BV

On se limite dans cette section aux domaines de $\mathbb{R}^N$ de frontière lipschitzienne ayant la forme suivante

$$\Omega := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d,$$

où Ω_k est un ouvert borné de $\mathbb{R}^{n_k}$ pour tout $k \in \{1, \cdots, d\}$ avec $\displaystyle\sum_{k=1}^d n_k = N$.

Lemme 4.3. *Soit u_k une fonction mesurable sur Ω_k pour tout $k = 1, \cdots, d$. Alors,*

$$\bigotimes_{k=1}^d u_k \in BV(\Omega) \quad ssi \quad u_k \in BV(\Omega_k) \text{ pour tout } k \in \{1, \cdots, d\}.$$

Preuve. Soit $u_k \in BV(\Omega_k)$ pour tout $k = 1, \cdots, d$. On distingue alors deux cas :

- Cas 1 : il existe $k \in \{1, \cdots, d\}$ tel que $u_k = 0$, dans ce cas la proposition est évidement vraie.
- Cas 2 : $u_k \neq 0$ pour tout $k \in \{1, \cdots, d\}$:

Il est facile de vérifier que $\bigotimes_{k=1}^d u_k \in L^1(\Omega)$ en utilisant le Théorème de Fubini. Soit maintenant $g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ avec $g = (g_1, \cdots, g_d)$ et $\|g\|_\infty \leq 1$. Si on désigne par $\omega_k := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{k-1} \times \Omega_{k+1} \times \cdots \times \Omega_d$ et $d\omega_k := dx_1 \cdots dx_{k-1} dx_{k+1} \cdots dx_d$, on aura alors

$$\left| \int_\Omega \bigotimes_{k=1}^d u_k \operatorname{div}(g)\,dx \right| \leq \sum_{k=1}^d \left| \int_{\Omega_k} u_k(x_k) h_k'(x_k)\,dx_k \right|,$$

où

$$h_k(x_k) := \int_{\omega_k} \left(\bigotimes_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^d u_i \right) g_k(x)\,d\omega_k.$$

avec

$$|h_k(x_k)| \leq \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{d} \|u_i\|_{L^1(\Omega_i)}, \quad \text{pour tout } \ k=1,\cdots,d.$$

En utilisant le Théorème de dérivation sous le signe intégral, on peut vérifier que $h_k \in C_0^1(\Omega_k,\mathbb{R})$ pour tout $k=1,\cdots,d$. De plus, on a

$$\left|\frac{h_k(x_k)}{\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{d} \|u_i\|_{L^1(\Omega_i)}}\right| \leq 1, \quad \forall x_k \in \Omega_k.$$

Alors, pour tout k, on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Omega_k} u_k(x_k)h_k'(x_k)\,dx_k\right| &= \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{d} \|u_i\|_{L^1(\Omega_i)} \times \int_{\Omega_k} u_k(x_k)\cdot\left(\frac{h_k(x_k)}{\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{d} \|u_i\|_{L^1(\Omega_i)}}\right)' dx_k \\
&\leq \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{d} \|u_i\|_{L^1(\Omega_i)} \cdot \int_{\Omega_k} |Du_k| < +\infty.
\end{aligned}$$

D'où

$$\int_{\Omega} |D(\bigotimes_{k=1}^{d} u_k)| < +\infty.$$

Réciproquement, si $0 \neq \bigotimes_{k=1}^{d} u_k \in BV(\Omega)$ alors pour tout $i=1,\cdots,d$, $u_i \in BV(\Omega_i)$. En effet,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \big|D\big(\bigotimes_{k=1}^{d} u_k\big)\big| &= \sup_{\substack{\varphi\in C_0^1(\Omega,\mathbb{R}^d)\\ \|\varphi\|_\infty\leq 1}} \int_{\Omega} \bigotimes_{k=1}^{d} u_k \operatorname{div}(\varphi)\,dx \\
&\geq \sup_{\substack{\varphi=(0,\cdots,0,\bigotimes_{k=1}^{d}\varphi_k,0,\cdots,0)\\ \varphi_k\in C_0^1(\Omega_k,\mathbb{R})\\ \left\|\bigotimes_{k=1}^{d}\varphi_k\right\|_\infty\leq 1}} \int_{\Omega} \bigotimes_{k=1}^{d} u_k \operatorname{div}\big(0,\cdots,0,\bigotimes_{k=1}^{d}\varphi_k,0,\cdots,0\big)\,dx \\
&\geq \sup_{\substack{\varphi_k\in C_0^1(\Omega_k,\mathbb{R})\\ \|\varphi_k\|_\infty\leq 1}} \left[\int_{\Omega_i} u_i(x_i)\varphi_i'(x_i)\,dx_i \cdot \prod_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{d} \int_{\Omega_k} u_k(x_k)\varphi_k(x_k)\,dx_k\right] \\
&= \sup_{\substack{\varphi_i\in C_0^1(\Omega_i,\mathbb{R})\\ \|\varphi_i\|_\infty\leq 1}} \int_{\Omega_i} u_i(x_i)\varphi_i'(x_i)\,dx_i \cdot \prod_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{d} \sup_{\substack{\varphi_k\in C_0^1(\Omega_k,\mathbb{R})\\ \|\varphi_k\|_\infty\leq 1}} \int_{\Omega_k} u_k(x_k)\varphi_k(x_k)\,dx_k \\
&= \int_{\Omega_i} |Du_i| \cdot \prod_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{d} \|u_k\|_{L^1(\Omega_k)}.
\end{aligned}$$

Si $\overset{d}{\underset{k=1}{\otimes}} u_k \in BV(\Omega) = 0$ alors il existe $k \in \{1, \cdots, d\}$ tel que $u_k = 0$, alors $u_k \in BV(\Omega_k)$. De plus, on peut trouver une infinité des représentants de u_i qui appartiennent à $BV(\Omega_i)$ pour tout $i \in \{1, \cdots, d\}$, $i \neq k$. □

Dans ce qui suit, on montre que l'espace $BV(\Omega)$ n'admet pas une structure tensorielle par rapport à sa topologie forte. En d'autres termes, on va démontrer la proposition suivante

Proposition 4.1. *L'espace tensoriel algébrique* ${}_a\bigotimes_{k=1}^{d} BV(\Omega_k)$ *n'est pas en général dense dans* $BV(\Omega)$ *par rapport à sa topologie forte.*

Preuve. On rappelle ici la preuve de Schmidt [88], qui se limite à la dimension 2 et montre qu'il existe une fonction dans $BV(\Omega)$ qui ne peut pas être approchée par des fonctions de ${}_a\bigotimes_{k=1}^{d} BV(\Omega_k)$ au sens forte de $BV(\Omega)$.
Soit $\Omega_1 = \Omega_2 :=]0, 1[$ et $A := \big\{(x, y) \in \Omega_1 \times \Omega_2 / \, x \geq y\big\}$. Si on considère la fonction caractéristique κ_A, on a

$$\int_\Omega |D\kappa_A| = \sqrt{2},$$

alors $\kappa_A \in BV(\Omega)$, pourtant $\kappa \notin \overline{BV(\Omega_1)_a \bigotimes BV(\Omega_2)}^{BV(\Omega)}$. En effet, soit

$$h = \sum_{i=1}^{n} X_i \otimes Y_i \in BV(\Omega_1)_a \bigotimes BV(\Omega_2),$$

pour tout $i = 1, \cdots, n$, les X_i, Y_i admettent des ensembles de discontinuité au plus dénombrable dans $]0, 1[$ (comme étant des fonctions à variations bornées en dimension 1). Alors l'ensemble de discontinuités de h est inclus dans l'union au plus dénombrable des droites parallèles à l'axe des x et l'axe des y. D'où

$$\int_\Omega |D(\kappa_A - h)| \geq \sqrt{2},$$

et parsuite h ne peut pas être proche de κ dans $BV(\Omega)$. □

Maintenant on va introduire quelques outils afin de donner un contre-exemple en dimension d. Pour cela, on suppose dans cette partie que Ω_k est un ouvert borné de $\mathbb{R}$ pour tout $k = 1, \cdots d$ et $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_d)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

On définit l'ensemble $\mathcal{S}_u^T$ et l'espace $TBV(\Omega)$ comme suit

$$\mathcal{S}_u^T := \Big\{ x \in \mathcal{S}_u \; / \; \exists i \in \{1, \cdots, d\} : \nu_u(x) = \pm \mathbf{e}_i \Big\},$$

$$TBV(\Omega) := \overline{{}_a\bigotimes_{k=1}^{d} BV(\Omega_k)}^{BV(\Omega)}.$$

où $\nu_u(x)$ est le vecteur normal à S_u au point x

Lemme 4.4. *Si* $u \in {}_a\bigotimes_{k=1}^{d} BV(\Omega_k)$ *alors* $\mathcal{S}_u = \mathcal{S}_u^T$.

Preuve. Soit $u \in {}_a\bigotimes_{k=1}^{d} BV(\Omega_k)$. Alors $\exists\, m \in \mathbb{N}^*$ et $(u_k^i)_{1\leq i\leq m} \subset BV(\Omega_k)$ pour tout $k = 1, \cdots, d$ tels que

$$u = \sum_{i=1}^{m} u_1^i \otimes \cdots \otimes u_d^i.$$

Or pour tout $k = 1, \cdots, d$, il existe f_k^i, g_k^i définis et monotones sur Ω_k telles que

$$u_k^i = f_k^i - f_k^i \quad \forall i = 1, \cdots, m.$$

u_k^i admet au plus un nombre dénombrable de discontinuités dans Ω_k implique que u admet au plus un nombre dénombrable de discontinuités dans Ω avec

$$\nu_u(x) \in \{\pm\mathbf{e_1}, \cdots, \pm\mathbf{e_d}\},$$

pour tous les points de $\mathcal{S}_u$. D'où $x \in \mathcal{S}_u^T$ pour tout $x \in \mathcal{S}_u$ et parsuite $\mathcal{S}_u = \mathcal{S}_u^T$. □

Théorème 4.3. *Soit* $u \in BV(\Omega)$ *et* $v \in TBV(\Omega)$ *alors*

$$\int_\Omega |D(u-v)| \geq \int_{\mathcal{S}_u \backslash \mathcal{S}_u^T} |u^+ - u^-| d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Preuve. Pour tout $v \in TBV(\Omega)$, il existe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset {}_a\bigotimes_{k=1}^{d} BV(\Omega_k)$ telle que

$$v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v \quad \text{dans } BV(\Omega).$$

Il est clair que $\mathcal{S}_u \backslash \mathcal{S}_u^T \subset \mathcal{S}_{u-v_n}$, alors

$$\int_\Omega |D(u-v_n)| \geq \int_{\mathcal{S}_u \backslash \mathcal{S}_u^T} \big|(u-v_n)^+ - (u-v_n)^-\big| d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Puisque v_n est continue sur $\mathcal{S}_u \backslash \mathcal{S}_u^T$ alors $(u-v_n)^+ - (u-v_n)^- = u^+ - u^- \quad$ pour tout $\quad x \in \mathcal{S}_u \backslash \mathcal{S}_u^T$. D'où

$$\int_\Omega |D(u-v_n)| \geq \int_{\mathcal{S}_u \backslash \mathcal{S}_u^T} |u^+ - u^-|\, d\mathcal{H}^{d-1},$$

et parsuite

$$\int_\Omega |D(u-v)| \geq \int_{\mathcal{S}_u \backslash \mathcal{S}_u^T} |u^+ - u^-|\, d\mathcal{H}^{d-1}.$$

□

Corollaire 4.1. *Il existe une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset BV(\Omega)$ *telle que*

$$\inf_{v\in TBV} |D(u_n - v)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

En particulier, $BV(\Omega)$ *n'admet pas une structure tensorielle.*

Preuve. Soit $\Omega_1 =]0, \pi[,\ \Omega_d =]-2, 2[$ et pour tout $i \in \{2, \cdots, d-1\}$, supposons que $\Omega_i =]a_i, b_i[$ tel que $a_i,\ b_i \in \mathbb{R}$ avec $b_i > a_i$. Posons

$$\begin{array}{rlcl} u_n : & \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x = (x_1, \cdots, x_d) & \longrightarrow & u_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x_d \geq \sin(nx_1), \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right. \end{array}$$

On a pour tout $v \in TBV(\Omega)$,

$$\int_\Omega |D(u_n - v)| \geq 2\, n \times \prod_{i=1}^{d-1} (b_i - a_i) \longrightarrow +\infty \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

□

On a déjà montré que $BV(\Omega)$ n'est pas un espace de Banach tensoriel pour la topolgie induite de la norme. Cependant on peut montrer que $BV(\Omega)$ admet une structure tensorielle par rapport à sa topologie faible$-*$.

Proposition 4.2. *$_a\bigotimes_{k=1}^{d} W^{1,1}(\Omega_k)$ est dense dans $W^{1,1}(\Omega)$ par rapport à la topolgie forte de $W^{1,1}(\Omega)$.*

Preuve. Soit $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Il existe un opérateur d'extension $P : W^{1,1}(\Omega) \longrightarrow W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$, tel que

$$Pu = u \ \text{ p.p } x \in \Omega, \ \ \|Pu\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^N)} \leq c\, \|u\|_{W^{1,1}(\Omega)}.$$

Or on sait que

$$W^{1,1}(\mathbb{R}^N) = \overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)}^{W^{1,1}(\mathbb{R}^N)},$$

alors il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\varphi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Pu \quad \text{dans } W^{1,1}(\mathbb{R}^N).$$

D'autre part, on a

$$\overline{{}_a\bigotimes_{k=1}^{d} \mathcal{D}(\mathbb{R})}^{\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),$$

alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une suite $(\varphi_n^m)_{m\in\mathbb{N}} \subset {}_a\bigotimes_{k=1}^{d} \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que

$$\varphi_n^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \varphi_n \quad \text{dans } \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\exists N_1(n) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall p \geq N_1(n),\ \|\varphi_p - Pu\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^N)} \leq 1/2^{n+1}.$$

En particulier,

$$\|\varphi_{N_1(n)} - Pu\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^N)} \leq 1/2^{n+1}.$$

De plus,

$$\exists N_2(n) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall m \geq N_2(n),\ \|\varphi^m_{N_1(n)} - \varphi_{N_1(n)}\|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)} \leq 1/2^{n+1}.$$

Soit $v_n := \varphi^{N_2(n)}_{N_1(n)}$, on a

$$\begin{aligned}
\|v_n - Pu\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^N)} &\leq \|v_n - \varphi_{N_1(n)}\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^N)} + \|\varphi_{N_1(n)} - Pu\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq c\,\|v_n - \varphi_{N_1(n)}\|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)} + \|\varphi_{N_1(n)} - Pu\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^N)} \quad \left(\|\cdot\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^N)} \leq c\,\|\cdot\|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)}\right) \\
&\leq \max(1,c)/2^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Alors $\left(v_{n|_\Omega}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans ${}_a\bigotimes_{k=1}^{d} \mathcal{D}(\overline{\Omega_k}) \subset {}_a\bigotimes_{k=1}^{d} W^{1,1}(\Omega_k)$ qui converge vers u dans $W^{1,1}(\Omega)$.
□

Théorème 4.4 (De la Vallé Poussin)**.** *(Voir [6, Théorème 1.59]) Soit X un espace localement compact et séparé. Si $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite des mesures de Radon définies sur X telle que*

$$\sup\left\{|\mu_k|(X) : k \in \mathbb{N}\right\} < +\infty,$$

alors $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite qui converge par rapport à la topologie faible de $\mathcal{M}(X)$.

Proposition 4.3. *(Voir [6, Proposition 3.13]) Une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $BV(\Omega)$ converge vers $w \in BV(\Omega)$ pour la topologie faible$-*$ de $BV(\Omega)$ si et seulement si*

$$w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} w \text{ dans } L^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \sup_n \int_\Omega |Dw_n| < +\infty.$$

Preuve. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset BV(\Omega)$ telle que

$$w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} w \text{ dans } L^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \sup_n \int_\Omega |Dw_n| < +\infty.$$

D'abord,

$$\int_\Omega |Dw| \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega |Dw_n| < +\infty,$$

donc $w \in BV(\Omega)$. Alors tout revient à vérifier que $Dw_n \rightharpoonup Dw$, c.à.d

$$\int_\Omega u\, Dw_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega u\, Dw \quad \forall u \in C_0(\Omega).$$

D'après le Théorème 4.4, $(Dw_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte pour la topologie faible$-*$, il suffit alors de démontrer que tout point limite μ de (Dw_{n_k}) coïncide avec Du.
En passant à la limite dans

$$\int_\Omega w_{n_k} \operatorname{div}(\varphi)dx = -\int_\Omega \varphi\, dDw_{n_k} \quad \text{pour tout } \varphi \in C_0(\Omega),$$

on obtient

$$\int_\Omega w \operatorname{div}(\varphi)dx = -\int_\Omega \varphi\, d\mu.$$

D'où $\mu = Dw$.

D'autre part, si $w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} w$ dans $BV(\Omega)$ pour la topologie faible$-*$, c.à.d

$$w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} w \text{ dans } L^1(\Omega) \text{ et } \int_\Omega u\, Dw_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega u\, Dw \quad \forall u \in C_0(\Omega),$$

alors $\big(\langle Dw_n, u\rangle\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est borné $\forall u \in C_0(\Omega)$. Donc d'après le Théorème de Banach-Steinhaus, on a

$$\sup_n \int_\Omega |Dw_n| < +\infty.$$

□

Théorème 4.5. $\underset{k=1}{\overset{d}{{}_a\bigotimes}} BV(\Omega_k)$ *est dense dans* $BV(\Omega)$ *par rapport à la topologie faible*$-*$ de* $BV(\Omega)$.

Preuve. Il faut démontrer que pour tout $w \in BV(\Omega)$, il existe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \underset{k=1}{\overset{d}{{}_a\bigotimes}} BV(\Omega_k)$ telle que

$$\begin{cases} z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} w \text{ dans } L^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega u\, Dz_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega u\, Dw \quad \text{pour tout } u \in C_0(\Omega). \end{cases}$$

Soit $w \in BV(\Omega)$. On sait d'après [51, Théorème 1.17] qu'il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W^{1,1}(\Omega)$ (et même $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty \cap BV(\Omega)$) telle que

$$w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} w \text{ dans } L^1(\Omega) \quad \text{et} \quad |Dw_n| := \int_\Omega |\nabla w_n| dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |Dw|.$$

Or on a

$$W^{1,1}(\Omega) = \overline{\underset{k=1}{\overset{d}{{}_a\bigotimes}} W^{1,1}(\Omega_k)}^{W^{1,1}(\Omega)},$$

donc pour chaque n, il existe $z_n \in \underset{k=1}{\overset{d}{{}_a\bigotimes}} W^{1,1}(\Omega_k)$ telle que

$$\|z_n - w_n\|_{W^{1,1}(\Omega)} \leq \frac{1}{2^n},$$

D'où l'inégalité triangulaire entraîne

$$z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} w \text{ dans } L^1(\Omega) \quad \text{et } |Dz_n| := \int_\Omega |\nabla z_n| dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |Dw|,$$

en particulier, d'après la proposition précédente : $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers w pour la topologie faible$-*$ de $BV(\Omega)$. □

4.4 Ensemble faiblement fermé dans $BV(\Omega)$

On s'intéresse maintenant à l'ensemble des tenseurs élémentaires de l'espace tensoriel algébrique ${}_a\bigotimes_{k=1}^{d} BV(\Omega_k)$, noté $\mathcal{R}_1$ et défini par

$$\mathcal{R}_1 := \mathcal{M}_1\Big({}_a\bigotimes_{k=1}^{d} BV(\Omega_k)\Big) := \Big\{ \bigotimes_{k=1}^{d} u_k : u_k \in BV(\Omega_k),\ k = 1, \cdots, d \Big\}.$$

Afin de définir une suite PGD, d'une manière progressive, associée à un problème approprié défini dans $BV(\Omega)$, on montre que $\mathcal{R}_1$ est faiblement fermé dans $BV(\Omega)$ par rapport à sa topologie faible$-*$,

Définition 4.12. *Si V_j est un espace de Banach muni d'une norme $\|\cdot\|_j$, $j = 1, \cdots, d$, alors pour tout $v \in V := {}_a\bigotimes_{j=1}^{d} V_j$, on définit la norme $\|.\|_\vee$ par*

$$\|v\|_\vee := \sup\left\{ \frac{|(\varphi^{(1)} \otimes \varphi^{(2)} \otimes \cdots \otimes \varphi^{(d)})(v)|}{\prod_{j=1}^{d} \|\varphi^{(j)}\|_j^*} : 0 \neq \varphi^{(j)} \in V_j^*,\ 1 \leq j \leq d \right\}.$$

$\|\cdot\|_\vee$ est dite la norme injective sur V.

Proposition 4.4. *(Voir [46, Proposition 4.3]) Soit $V_{\|.\|} := \overline{{}_a\bigotimes_{j=1}^{d} V_j}^{\|\cdot\|}$ un espace de Banach tensoriel muni d'une norme vérifiant*

$$\|\cdot\|_\vee \lesssim \|\cdot\| \text{ sur } {}_a\bigotimes_{j=1}^{d} V_j.$$

Alors pour tout multi-indice $r = (r_1, \cdots, r_d)$, l'ensemble $\mathcal{T}_r(V)$ est faiblement fermé, où

$$\mathcal{T}_r(V) := \left\{ v \in V : \text{ il existe des sous-espaces } U_j \subset V_j \text{ tels que } dim(U_j) = r_j \text{ et } v \in U :={}_a \bigotimes_{j=1}^{d} U_j \right\},$$

Proposition 4.5. *(Voir [35, Chapitre1, Section 7]) Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_X$. Soit $I \subset \mathbb{R}^s$, $s \geq 1$ et μ une mesure finie sur I. On considère l'espace de Bochner $L^p_\mu(I; X)$, $1 \leq p < \infty$, défini par*

$$L^p_\mu(I; X) = \left\{ v : I \to X : \int_I \|v(x)\|_X^p \, d\mu(x) < \infty \right\},$$

et muni de la norme suivante

$$\|v\|_{\Delta_p} = \left(\int_I \|v(x)\|_X^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On introduit maintenant l'espace tensoriel $V_{\|.\|_{\Delta_p}} = X \bigotimes_{\|.\|_{\Delta_p}} L^p_\mu(I)$. Pour tout $1 \leq p < \infty$, $L^p_\mu(I; X)$ peut être identifié à $V_{\|.\|_{\Delta_p}}$. De plus, la norme $\|.\|_{\Delta_p}$ satisfait $\|.\|_\vee \lesssim \|.\|_{\Delta_p}$ sur $X \, {}_a\bigotimes L^p_\mu(I)$, $1 \leq p < \infty$.

Corollaire 4.2. *Pour tout* $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{T}_r(X \underset{a}{\bigotimes} L^p_\mu(I))$ *est faiblement fermé dans* $L^p_\mu(I;X)$.

Corollaire 4.3. $\mathcal{M}_1\left(\underset{a}{\bigotimes}_{k=1}^{d} L^1(\Omega_k)\right)$ *est faiblement fermé dans* $L^1(\Omega)$.

Preuve. Pour tout $k = 1, \cdots, d$, $\mathcal{M}_1\left(L^1(\omega_k)_a \bigotimes L^1(\Omega_k)\right)$ est faiblement fermé dans $L^1(\Omega)$, où $\omega_k := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{k-1} \times \Omega_{k+1} \times \cdots \times \Omega_d$. Alors

$$\mathcal{M}_1\left(\underset{a}{\bigotimes}_{k=1}^{d} L^1(\Omega_k)\right) = \bigcap_{k=1}^{d} \mathcal{M}_1\left(L^1(\omega_k)_a \bigotimes L^1(\Omega_k)\right)$$

est faiblement fermé dans $L^1(\Omega)$. □

Proposition 4.6. $\mathcal{R}_1$ *est faiblement fermé par rapport à la topologie faible*$-*$ de* $BV(\Omega)$.

Preuve. Soient $(z_n)_n \subset \mathcal{R}_1$ et $z \in BV(\Omega)$ tels que $z_n \rightharpoonup^* z$ dans $BV(\Omega)$. On a

$$\underset{a}{\bigotimes}_{k=1}^{d} BV(\Omega_k) \subset \underset{a}{\bigotimes}_{k=1}^{d} L^1(\Omega_k).$$

Or $\mathcal{M}_1\left(\underset{a}{\bigotimes}_{k=1}^{d} L^1(\Omega_k)\right)$ est faiblement fermé dans $L^1(\Omega)$, alors $z \in \mathcal{M}_1\left(\underset{a}{\bigotimes}_{k=1}^{d} L^1(\Omega_k)\right)$. Donc il existe $z_k \in L^1(\Omega_k),\ k = 1, \cdots, d$, tels que $z = \underset{k=1}{\overset{d}{\otimes}} z_k$. D'où, en utilisant Lemme 4.3, on déduit que $z \in \mathcal{R}_1$.
□

4.5 PGD pour un problème bien défini dans $BV(\Omega)$

On s'intéresse dans cette section aux problèmes de minimisation d'une fonctionnelle J définie sur $BV(\Omega)$ par

$$J(u) = N(u) + \int_\Omega |Du|,$$

où N est une fonction équivalente à la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$. On considère par exemple le problème de restauration des images, qui consiste à retrouver l'image originale u à partir d'une image dégradée f, ce qui amène à minimiser dans $BV(\Omega)$ l'énergie J suivante

$$J(u) = \frac{1}{2}\|f - \mathcal{K}u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega |Du|,$$

où $\mathcal{K} : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ est un opérateur linéaire continue, avec $\mathcal{R} \cdot 1 \neq 0$ et $f \in L^2(\Omega)$.

Un résultat classique (voir par exemple [15, Théorème 3.3.2]) implique que le problème $\inf\limits_{v \in BV(\Omega)} J(v)$ admet une solution unique $u \in BV(\Omega)$.

Proposition 4.7. *Soit* $u \in BV(\Omega)$. *Le problème* $\inf\limits_{z \in \mathcal{R}_1} J(u+z)$ *admet au moins une solution.*

Preuve. Le problème $\inf_{z\in\mathcal{R}_1} J(u+z)$ est équivalent au problème $\inf_{v\in u+\mathcal{R}_1} J(v)$. Il est facile de vérifier que le problème $u+\mathcal{R}_1$ est faiblement fermé dans $BV(\Omega)$ pour sa topologie faible$-*$. En effet, soit $(w_n)_n \subset \mathcal{R}_1$ telle que $u+w_n \rightharpoonup^* w$ dans $BV(\Omega)$, alors $w_n \rightharpoonup^* w-u$ et puisque $\mathcal{R}_1$ est faiblement fermé dans $BV(\Omega)$ pour sa topologie faible$-*$ alors $w-u\in\mathcal{R}_1$. Parsuite, $w\in u+\mathcal{R}_1$.
Soit maintenant $(w_n)_n$ une suite minimisante de J sur $u+\mathcal{R}_1$. Puisque J est coercive, on a

$$J(w_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \inf_{v\in u+\mathcal{R}_1} J(v),$$

alors $(w_n)_n$ est bornée dans $BV(\Omega)$. Donc il existe une sous-suite $(w_{n_k})_k$ et $w\in BV(\Omega)$ telles que

$$w_{n_k} \rightharpoonup^* w \quad \text{dans} \quad BV(\Omega).$$

Parsuite, $w\in u+\mathcal{R}_1$. On conclut alors que w est une solution du problème en utilisant

$$J(w) \leq \liminf_{n\to+\infty} J(w_{n_k}) = \lim_{n\to+\infty} J(w_{n_k}) = \inf_{v\in u+\mathcal{R}_1} J(v).$$

□

4.5.1 Construction de la suite PGD

Soit u la solution du problème

$$J(u) = \min_{v\in BV(\Omega)} J(v). \tag{4.1}$$

On peut définir d'une manière progressive une suite PGD $(u_m)_m$ associée à u sur $\mathcal{R}_1$ comme suit

(i) Initialisation : $u_0 := 0$,

(ii) Choisir $\widehat{z}_m := \arg\min_{z\in\mathcal{R}_1} J(u_{m-1}+z)$,

(iii) Progression : $u_m := u_{m-1} + \widehat{z}_m$.

On vient de démontrer que la PGD est bien définie d'un point de vue théorique dans le cadre des espaces $BV(\Omega)$, mais la question la plus importante est :
La suite $(u_m)_m$ converge-t-elle vers la solution du problème de minimsation (4.1) ?

Malheureusement, on n'a pas une réponse définitive à cette question, ce qui est dû à la non différentiabilité de l'énergie. Pourtant, on peut affirmer d'après l'exemple suivant que la convergence d'une suite PGD associée à la minimisation d'une fonctionnelle convexe mais non différentiable ne se fait pas en général de la même façon que pour les fonctions différentiables.

Remarque 4.1. *Soit f une fonction convexe définie sur un espace de Banach tensoriel $X_{\|\cdot\|}$ et $\mathcal{S}\subset X_{\|\cdot\|}$ tel que*

1. *$\mathcal{S}\subset X$ avec $0\in\mathcal{S}$,*
2. *pour tout $u\in\mathcal{S}$, on a $\lambda u\in\mathcal{S}$, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$,*
3. *$\mathrm{vect}(\mathcal{S})$ est dense dans $X_{\|\cdot\|}$.*

Si 0 *minimise* f *sur* $\mathcal{S}$ *alors* 0 *ne minimise pas nécessairement* f *sur* $X_{\|\cdot\|}$.

Exemple. On considère la fonction f définie par

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & |y| - x. \end{array}$$

Il est clair que f est convexe. De plus, pour tout $d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned} f'(0,0) \cdot d &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{f\big(t(d_1,d_2)\big)}{t} \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{|td_2| - td_1}{t} \\ &= |d_2| - d_1. \end{aligned}$$

Soit $u_1 := (1,2)$, $u_2 := (0,-2)$. On a

$$f'(0,0) \cdot u_1 > 0 \quad \text{et} \quad f'(0,0) \cdot u_2 > 0.$$

On choisit maintenant $\mathcal{S} := \operatorname{vect}\{u_1\} \cup \operatorname{vect}\{u_2\}$. Il est facile de vérifier que $\mathcal{S}$ vérifie les conditions de la remarque. De plus,

$$f'(0,0) \cdot z > 0 \quad \text{pour tout} \quad z \in \mathcal{S}.$$

Alors $(0,0)$ est le minimiseur de f dans $\mathcal{S}$ mais

$$f'(0,0) \cdot (u_1 + u_2) < 0,$$

alors $f'\big((0,0)\big) \neq 0$, et parsuite $(0,0)$ n'est pas un minimiseur de f dans $\mathbb{R}^2$. $\square$

Chapitre 5

Etude théorique de la convergence de la méthode PGD dans le cadre de l'équation de la chaleur

Sommaire

5.1 Introduction **94**

5.2 Stratégie suivie **95**

5.3 Problème variationnel et convergence de la PGD **96**

5.4 Calcul des modes PGD à chaque pas de temps **102**

5.5 Preuve du Lemme 5.1 . . . . . **104**

5.6 Preuve du Lemme 5.2 . . . . . **106**

On désigne dans ce chapitre par $\mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))$ l'espace des fonctions continues sur $[0,T]$ à valeurs dans $L^2(\Omega)$.

5.1 Introduction

Soit d un entier > 1, $f \in \mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))$, $g \in L^2(\Omega)$ et $\Omega_T := (0,T] \times \Omega$, avec $T > 0$ et $\Omega := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d$ est un produit cartésien d'ouverts bornés dans $\mathbb{R}$. On considère l'équation de la chaleur suivante

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) &= f(x,t) \qquad \text{pour tout } (x,t) \in \Omega_T, \\ u(x,t) &= 0 \qquad \text{pour tout } (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \\ u(0,x) &:= u_0(x) = g(x). \end{cases} \tag{5.1}$$

Il existe trois manières pour utiliser la PGD afin de résoudre le Problème d'évolution (5.1)

- La première consiste en une décomposition spatio-temporelle :

$$u(x,t) = \sum_i F_x^i(x) F_t^i(t).$$

  La difficulté dans cette méthode provient de la nécessité de résoudre des matrices de grande taille afin de déterminer les fonctions spatiales F_x^i.

- La seconde, dite non incrémentale, consiste à faire une décomposition sur toutes les variables y compris le temps :

$$u(x_1, \cdots, x_d, t) = \sum_i F_{x_1}^i(x_1) \times \cdots \times F_{x_d}^i(x_d) \times F_t^i(t).$$

  La solution est cherchée alors à chaque étape sur l'ensemble du domaine temporel.

- La dernière, dite incrémentale, consiste à effectuer la séparation, à chaque pas de temps, uniquement sur les variables spatiales :

$$u^t(x_1, \cdots, x_d) = \sum_i F_{x_1}^{t,i}(x_1) \times \cdots \times F_{x_d}^{t,i}(x_d).$$

Bien que la PGD non incrémentale semble être la meilleur en termes de diminution du temps de calcul (CPU), la PGD incrémentale serait capable, en pratique, de résoudre des problèmes avec des degrés de liberté spatiaux plus élevés.

On considère alors dans ce chapitre l'approche incrémentale. L'objectif sera de démontrer que la solution numérique obtenue en considérant cette approche converge vers la solution faible de l'équation de la chaleur.

5.2 Stratégie suivie

D'abord, on discrétise en temps le Problème (5.1), avec un pas de temps $dt = \dfrac{T}{K}$, où $K \in \mathbb{N}^*$ tel que $K > T$ et on considère le schéma implicite suivant

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{dt} - \Delta u^{n+1} = f^{n+1}, \quad \forall n \in \{0, \cdots K-1\}, \tag{5.2}$$

où

$$u^n := u(t_n, \cdot) \ \text{ avec } \ t_n := n\,dt \ \text{ pour tout } \ n \in \{0, \cdots K-1\}.$$

Ensuite, on construit (à chaque pas de temps) l'unique solution de l'équation elliptique en utilisant la méthode PGD. On utilise à chaque étape les mêmes arguments utilisés dans Chapitre 3 pour démontrer que la suite PGD obtenue par minimisation, à chaque étape d'enrichissement sur l'ensemble des tenseurs élémentaires, converge vers la solution du problème variationnel. Finalement, l'approximation continue en temps de la solution faible de (5.1) sera obtenue par une fonction affine par morceaux en temps.

Plus pratiquement, on fixe un $\epsilon > 0$, la solution sera construite comme suit : Etant donnée u_0, on commence à chercher v^1, qui sera la solution de

$$v^1 - dt\,\Delta v^1 = dt f^1 + u_0.$$

En suivant une stratégie des directions alternées, on obtient une approximation de v^1 dans $L^2(\Omega)$, qui sera notée v^1_m, c.à.d

$$\exists\, m_1 \in \mathbb{N}^* / \ \forall m \geq m_1, \ \|v^1_m - v^1\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon.$$

On considère alors le terme $v^1_{m_1}$ et on cherche la solution v^2 de l'équation suivante

$$v^2 - dt\,\Delta v^2 = dt f^2 + v^1_{m_1}.$$

En utilisant encore une fois une stratégie des directions alternées, on aura

$$\exists\, m_2 \in \mathbb{N}^* / \ \forall m \geq m_2, \ \|v^2_m - v^2\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon.$$

Similairement, on peut vérifier qu'il existe une approximation de v^{n+1} dans $L^2(\Omega)$ où v^{n+1} est la solution de

$$v^{n+1} - dt\,\Delta v^{n+1} = dt f^{n+1} + v^n_{m_n}, \tag{5.3}$$

c.à.d

$$\exists\, m_{n+1} \in \mathbb{N}^* / \ \forall m \geq m_{n+1}, \ \|v^{n+1}_m - v^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon.$$

On considère maintenant la fonction affine par morceaux en temps V^{dt} définie sur $[0, T]$ par

$$V^{dt}(t,x) := \left(\frac{t - t_n}{dt}\right) v^{n+1}_{m_{n+1}}(x) + \left(\frac{dt - (t - t_n)}{dt}\right) v^n_{m_n}(x), \quad \text{pour } t \in (t_n, t_{n+1}], \ n \in \{0, \cdots K-1\},$$

$$v^0_{m_0} := u_0, \quad V^{dt}(0,x) := u_0(x). \tag{5.4}$$

On définit de la même manière la fonction affine par morceaux en temps U^{dt} par

$$U^{dt}(t,x) := \left(\frac{t-t_n}{dt}\right)u^{n+1}(x) + \left(\frac{dt-(t-t_n)}{dt}\right)u^n(x), \text{ pour tout } t \in (t_n, t_{n+1}],\ n \in \{0, \cdots, K\},$$

$$U^{dt}(0,x) := u_0(x). \tag{5.5}$$

Le but de ce travail est alors de démontrer que la fonction affine par morceaux V^{dt} approche la solution faible de l'équation (5.1). Autrement dit, on va démontrer la proposition suivante

Proposition 5.1. *La fonction V^{dt} converge fortement dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ vers la solution faible de l'équation de la chaleur* (5.1) *lorsque $dt \to 0$.*

Il est facile de remarquer qu'il suffit de démontrer les deux lemmes 5.1 et 5.2 afin de démontrer cette proposition.

Lemme 5.1. *$V^{dt} - U^{dt}$ converge fortement vers zéro dans $L^2(0,T,L^2(\Omega))$ quand $dt \to 0$.*

Lemme 5.2. *U^{dt} converge fortement dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ vers la solution faible de (5.1) quand $dt \to 0$.*

5.3 Problème variationnel et convergence de la PGD

Dans cette section, on montre qu'à chaque pas de temps, la suite PGD assoociée à la solution v^{n+1} de (5.3) converge vers v^{n+1}.

Définition 5.1. *Une fonction $v^{n+1} \in H_0^1(\Omega)$ est dite une solution faible du Problème (5.3) ssi*

$$\int_\Omega \big(v^{n+1}\cdot\varphi + dt\nabla v^{n+1}\cdot\nabla\varphi\big)dx = dt\int_\Omega f^{n+1}\,\varphi\,dx + \int_\Omega v^n_{m_n}\,\varphi\,dx, \quad \forall\,\varphi \in H_0^1(\Omega).$$

La fonction d'Euler-Lagrange correspondante au Problème (5.3) sur $H_0^1(\Omega)$ est donnée par

$$\begin{array}{rccl} J^n: & H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \longmapsto & J^n(v) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |v|^2 + \dfrac{dt}{2}\int_\Omega \big|\nabla v\big|^2 - dt\int_\Omega fv - \int_\Omega v^n_{m_n} v \end{array} \tag{5.6}$$

De cette manière, les solutions faibles de (5.3) sont simplement les points critiques de l'énergie J^n.

Lemme 5.3. *L'énergie J^n est de classe $\mathcal{C}^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$ et elliptique dans le sens suivant*

$$\exists\, c > 0,\ \forall\, w,\, v \in H_0^1(\Omega)\ :\ \big\langle (J^n)'(w) - (J^n)'(v)\,,\, w - v\big\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \geq c\,\|w-v\|^2_{H_0^1(\Omega)},$$

avec

$$(J^n)'(v)\cdot\varphi = \int_\Omega \big(v\varphi + dt\nabla v\nabla\varphi\big)dx - dt\int_\Omega f^{n+1}\,\varphi\,dx - \int_\Omega v^n_{m_n}\,\varphi\,dx.$$

D'où J^n est strictement convexe, bornée inférieurement et coercive.

Preuve. Pour tout v, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ et $\delta > 0$, on a

$$\begin{aligned} J^n(v+\delta\varphi) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left|v+\delta\varphi\right|^2 + \frac{dt}{2}\int_\Omega \left|\nabla(v+\delta\varphi)\right|^2 - dt\int_\Omega f^{n+1}(v+\delta\varphi) - \int_\Omega v^n_{m_n}(v+\delta\varphi) \\ &= J^n(v) + \delta\int_\Omega v\varphi + \delta\, dt\int_\Omega \nabla v\nabla\varphi - \delta\, dt\int_\Omega f\varphi - \delta\int_\Omega v^n_{m_n}\varphi + \delta\epsilon(\delta), \end{aligned}$$

Alors la dérivée au sens de Gâteaux $(J^n)'$ de J^n existe. De plus, il est facile de vérifier que $(J^n)'$ est linéaire et continue, alors J^n est de classe $\mathcal{C}^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$. La condition d'ellipticité peut être facilement vérifiée.
On peut conclure alors que J^n est strictement convexe, bornée inférieurement et coercive. □

En appliquant les méthodes directes du calcul des variations, le problème de minimisation

$$\inf_{v\in H_0^1(\Omega)} J^n(v) \tag{5.7}$$

admet une solution unique v^{n+1}.

On note $\mathcal{M}_1 := \mathcal{M}_1\left({}_a\bigotimes_{k=1}^{d} H_0^1(\Omega_k)\right) := \left\{ \bigotimes_{k=1}^{d} u_k,\ u_k \in H_0^1(\Omega_k)\right\}$, l'ensemble des tenseurs élémentaires associé à ${}_a\bigotimes_{k=1}^{d} H_0^1(\Omega_k)$. D'après Lemme 1.5 du chapitre 1, $\mathcal{M}_1$ est une partie faiblement fermé dans $H_0^1(\Omega)$, alors on peut déduire le corollaire suivant

Corollaire 5.1. *Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, le problème de minimisation*

$$\inf_{z\in\mathcal{M}_1} J^n(v+z) \tag{5.8}$$

admet au moins une solution.

Lemme 5.4. *Si $v \in H_0^1(\Omega)$ satisfait*

$$J^n(v) \le J^n(v+z), \quad \forall z \in \mathcal{M}_1$$

alors v est l'unique solution faible de (5.7).

Preuve. Soit $z \in \mathcal{M}_1$ et soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $g(t) = J^n(v + t\,z)$. Il est clair que g est différentiable sur $\mathbb{R}$ et atteint son minimum global en 0. Par conséquence $g'(0) = (J^n)'(v)\cdot(z) = 0$ et la linéarité de $J^n(v)$ implique que $(J^n)'(v) = 0$ sur ${}_a\bigotimes_{k=1}^{d} H_0^1(\Omega_k)$. Finalement la densité de ${}_a\bigotimes_{k=1}^{d} H_0^1(\Omega_k)$ dans $H_0^1(\Omega)$ nous permet de conclure. □

Dans la suite, on considère la méthode PGD en suivant la stratégie (c) pour construire une approximation progressive de la solution du probème (3.13)

$$(M)\quad \begin{cases} (i) \quad \text{Initialisation : } v_0^{n+1} := 0 \text{ dans } H_0^1(\Omega). \\ (ii) \quad \text{Direction de descente : } z_m^{n+1} := \arg\min_{z\in\mathcal{M}_1} J^n(v_{m-1}^{n+1}+z),\ \forall\, m \ge 1\ : \\ (iii) \quad \text{Mise à jour : } v_m^{n+1} = v_{m-1}^{n+1} + z_m^{n+1},\ \forall\, m \ge 1. \end{cases}$$

On démontre maintenant que toute suite PGD définie par (M) est convergente dans $H_0^1(\Omega)$. Notons que la norme $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ sera notée dans la suite par $\|\cdot\|$.

Théorème 5.1. *La suite* $(v_m^{n+1})_{m\in\mathbb{N}} \subset {}_a\bigotimes_{k=1}^{d} H_0^1(\Omega_k)$*, définie par* (M)*, converge faiblement dans* $H_0^1(\Omega)$ *vers l'unique solution faible de (5.7).*

Preuve. Soit $(v_m^{n+1})_{m\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ une suite PGD défine par (M). Il est clair la suite réelle $\big(J^n(v_m^{n+1})\big)_{m\in\mathbb{N}}$ est décroissante, bornée inférieurement alors elle est convergente dans $\mathbb{R}$ vers une limite ℓ^{n+1}. La coercivité de J^n implique que $(v_m^{n+1})_{m\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.
Afin de démontrer que $(v_m^{n+1})_{m\in\mathbb{N}}$ converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, on démontre que $(v_m^{n+1})_{m\in\mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence pour la topologie faible de $H_0^1(\Omega)$.
Soit $v \in H_0^1(\Omega)$ une valeur d'adhérence de $(v_m^{n+1})_{m\in\mathbb{N}}$ par rapport à la topologie faible de $H_0^1(\Omega)$ et $(v_{m_k}^{n+1})_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(v_m^{n+1})_{m\in\mathbb{N}}$ convergente faiblement vers v.
Comme $u_{m_k} \rightharpoonup v$ dans $H_0^1(\Omega)$ alors $v_{m_k}^{n+1} + z \rightharpoonup v + z$, pour tout $z \in H_0^1(\Omega)$. Par conséquence, on obtient

$$\|v_{m_k}^{n+1} - v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|v_{m_k}^{n+1} - z\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v - z\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2\langle v_{m_k}^{n+1} - z, v - z\rangle,$$

donc

$$\|v_{m_k}^{n+1} - v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|v_{m_k}^{n+1} - z\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|v - z\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mathrm{o}_n(1). \tag{5.9}$$

Similairement,

$$\big\|\nabla v_{m_k}^{n+1} - \nabla v\big\|_{L^2(\Omega)}^2 = \big\|\nabla v_{m_k}^{n+1} - \nabla z\big\|_{L^2(\Omega)}^2 - \big\|\nabla v - \nabla z\big\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mathrm{o}_n(1). \tag{5.10}$$

On déduit alors la décomposition suivante

$$J^n(v_{m_k}^{n+1} - v) = J^n(v_{m_k}^{n+1} + z) - J^n(v + z) + \mathrm{o}_n(1),\ \forall\, z \in H_0^1(\Omega). \tag{5.11}$$

D'autre part, on a

$$J^n(v_{m_{k+1}}^{n+1}) \le J^n(v_{m_k}^{n+1} + 1) \le J^n(v_{m_k}^{n+1} + z),\ \ \forall\, z \in \mathcal{M}_1. \tag{5.12}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} J^n(v_{m_{k+1}}^{n+1} - v) + J^n(v) &= J^n(v_{m_{k+1}}^{n+1}) + \mathrm{o}_k(1), \quad \text{prendre } z = 0 \text{ dans (5.11)} \\ &\le J^n(v_{m_k}^{n+1} + z) + \mathrm{o}_k(1),\ \forall\, z \in \mathcal{M}_1, \quad \text{d'après (5.12)} \\ &= J^n(v_{m_k}^{n+1} - u) + J^n(u + z) + \mathrm{o}_k(1), \quad \text{d'après (5.11).} \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $J^n(v_{m_{k+1}} - v)$ et $J^n(v_{m_k} - v)$ admettent la même limite $\ell^{n+1} - J^n(v)$ quand $k \to +\infty$, on obtient :

$$J^n(v) \le J^n(v + z), \quad \forall\, z \in \mathcal{M}_1.$$

Lemme 5.4 implique que v est l'unique solution faible v^{n+1} de (5.7). D'où, $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence pour la topologie faible de $H_0^1(\Omega)$, et parsuite $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers l'unique solution du Problème (5.7). □

Corollaire 5.2. *Sous les mêmes conditions du Théorème 5.1, on a*

$$\lim_{m\to+\infty} (J^n)'(v_m^{n+1}) \cdot z = 0, \quad \forall\, z \in H_0^1(\Omega).$$

Preuve. Il suffit d'écrire simplement l'expression de $(J^n)'(v_m^{n+1}) \cdot z$ et d'utiliser la convergence faible de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ vers l'unique solution de (5.7). □

On donne maintenant quelques lemmes techniques qui nous aident à démontrer la convergence forte de la suite PGD donnée par le schéma (M).

Lemme 5.5. *La suite des directions de descente* $(z_m^{n+1})_{m\in\mathbb{N}}$ *définie par* (M) *pour la suite PGD* $(v_m^{n+1})_{m\in\mathbb{N}}$ *satisfait*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|z_k^{n+1}\|^2 < +\infty.$$

En particulier, $\lim\limits_{m\to+\infty} z_m^{n+1} = 0$ *dans* $H_0^1(\Omega)$.

Preuve. On remarque d'abord que

$$(J^n)'(v_m^{n+1}) \cdot z_m^{n+1} = 0, \ \forall m \in \mathbb{N}. \tag{5.13}$$

En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $J^n(v_m^{n+1} + t\, z_m^{n+1}) = J^n(v_{m-1}^{n+1} + (1+t)z_m^{n+1}) \geq J^n(v_m^{n+1})$, ce qui donne le résultat.
Maintenant, on introduit la partie quadratique de J^n définie sur $H_0^1(\Omega)$ par

$$\widetilde{J}^n(v) := J^n(v) - (J^n)'(0) \cdot v.$$

Alors,

$$(J^n)'(v) \cdot w = (\widetilde{J}^n)'(v) \cdot w + (J^n)'(0) \cdot w,$$

et la forme définie sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ par : $(v, w) \mapsto (\widetilde{J}^n)'(v) \cdot w$ est bilinéaire et symétrique. On a alors

$$\begin{aligned}
(J^n)'(v_m^{n+1}) \cdot v_m^{n+1} &= (J^n)'(v_m^{n+1}) \cdot v_{m-1}^{n+1} \quad \text{d'après (5.13)} \\
&= (\widetilde{J}^n)'(v_m^{n+1}) \cdot v_{m-1}^{n+1} + (J^n)'(0) \cdot v_{m-1}^{n+1} \\
&= (\widetilde{J}^n)'(v_{m-1}^{n+1}) \cdot v_{m-1}^{n+1} + (J^n)'(0) \cdot v_{m-1}^{n+1} + (\widetilde{J}^n)'(z_m^{n+1}) \cdot v_{m-1}^{n+1} \\
&= (J^n)'(v_{m-1}^{n+1}) \cdot v_{m-1}^{n+1} + (\widetilde{J}^n)'(v_{m-1}^{n+1}) \cdot z_m^{n+1} \\
&\vdots \\
&= \sum_{j=1}^{m-1} (\widetilde{J}^n)'(v_j^{n+1}) \cdot z_{j+1}^{n+1}, \quad \text{car } u_0 = 0 \text{ et } (\widetilde{J}^n)'(0) = 0 \\
&= \sum_{1\leq i<j\leq m} (\widetilde{J}^n)'(z_i^{n+1}) \cdot z_j^{n+1}, \qquad \text{car } \ (u,w) \to (\widetilde{J}^n)'(u) \cdot w \ \text{ est bilinéaire} \\
&= \frac{1}{2}\left[(\widetilde{J}^n)'(v_m^{n+1}) \cdot v_m^{n+1} - \sum_{k=1}^{m} (\widetilde{J}^n)'(z_k^{n+1}) \cdot z_k^{n+1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(J^n)'(v_m^{n+1}) \cdot v_m^{n+1} - (J^n)'(0) \cdot v_m^{n+1} - \sum_{k=1}^{m} (\widetilde{J}^n)'(z_k^{n+1}) \cdot z_k^{n+1}\right].
\end{aligned}$$

Parsuite, on obtient

$$(J^n)'(v_m^{n+1}) \cdot v_m^{n+1} = -(J^n)'(0) \cdot v_m^{n+1} - \sum_{k=1}^{m} (\widetilde{J}^n)'(z_k^{n+1}) \cdot z_k^{n+1}. \tag{5.14}$$

Puisque $(\widetilde{J}^n)'(z_k^{n+1}) \cdot z_k^{n+1} \geq c_1 \|z_k^{n+1}\|^2$, pour tout k et $(J^n)'(v_m^{n+1}) \cdot v_m^{n+1} \leq c_2 \|v_m^{n+1}\|^2$, pour tout m, on déduit que

$$\sum_{k=1}^{m} \|z_k^{n+1}\|^2 < +\infty,$$

en particulier, $\lim\limits_{m \to +\infty} \|z_m^{n+1}\| = 0$. □

Lemme 5.6. *Soit $(v_m^{n+1})_{m\in\mathbb{N}}$ une suite PGD associée au Problème (3.13), alors il existe $C > 0$ tel que*

$$|(J^n)'(v_{m-1}^{n+1}) \cdot z| \ \leq \ C\|z_m^{n+1}\| \, \|z\|,$$

pour tout $z \in \mathcal{M}_1$, où z_m^{n+1} est la direction de descente à l'itération $m \geq 1$, définie par (M).

Preuve. D'une part, on remarque que $(J^n)' \ : \ H_0^1(\Omega) \ \longrightarrow \ H^{-1}(\Omega)$ est Lipschitzienne. D'autre part, la convexité de J^n implique que

$$(J^n)'(v_{m-1}^{n+1} + z) \cdot (z_m^{n+1} - z) \leq J^n(v_{m-1}^{n+1} + z_m^{n+1}) - J^n(v_{m-1}^{n+1} + z) \leq 0,$$

donc

$$(J^n)'(v_{m-1}^{n+1} + z) \cdot z_m^{n+1} \leq (J^n)'(v_{m-1}^{n+1} + z) \cdot z. \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned}
-(J^n)'(v_{m-1}^{n+1}) \cdot z \ &= \ \big((J^n)'(v_{m-1}^{n+1} + z) - (J^n)'(v_{m-1}^{n+1})\big) \cdot z - (J^n)'(v_{m-1}^{n+1} + z) \cdot z \\
&\leq \ C\|z\|^2 - (J^n)'(v_{m-1}^{n+1} + z) \cdot z, \quad \text{car } (J^n)' \text{ est Lipschitzienne} \\
&\leq \ C\|z\|^2 - (J^n)'(v_{m-1}^{n+1} + z) \cdot z_m^{n+1}, \quad \text{(d'après (5.15))} \\
&= \ C\|z\|^2 - \big((J^n)'(v_{m-1}^{n+1} + z) - (J^n)'(v_{m-1}^{n+1} + z_m^{n+1})\big) \cdot z_m^{n+1} \\
&\leq \ C\left(\|z\|^2 + \|z - z_m^{n+1}\| \, \|z_m^{n+1}\|\right) \\
&\leq \ C\left(\|z\|^2 + \|z\| \, \|z_m^{n+1}\| + \|z_m^{n+1}\|^2\right).
\end{aligned}$$

D'où, en remplaçant z par $\pm\, z \, \dfrac{\|z_m^{n+1}\|}{\|z\|}$ dans les inégalités précédentes, on obtient

$$|(J^n)'(v_{m-1}^{n+1}) \cdot z| \leq 3C\|z_m^{n+1}\| \, \|z\|. \qquad \square$$

Lemme 5.7. *Avec les mêmes notations du Théorème 5.1, on a*

$$\lim_{m \to +\infty} (J^n)'(v_m^{n+1}) \cdot v_m^{n+1} = 0$$

et la suite PGD $(v_m^{n+1})_{m\in\mathbb{N}}$ donnée par le schéma (M) converge vers la solution du Problème (5.7).

Preuve. En utilisant (5.14), on obtient

$$(J^n)'(v_m^{n+1}) \cdot v_m^{n+1} = -(J^n)'(0) \cdot v_m^{n+1} - \sum_{k=1}^{m} (\widetilde{J}^n)'(z_k^{n+1}) \cdot z_k^{n+1}.$$

Puisque $\sum_{k=1}^{+\infty} (\widetilde{J}^n)'(z_k^{n+1}) \cdot z_k^{n+1} < +\infty$ et $\lim_{m\to+\infty} (J^n)'(0) \cdot v_m^{n+1} = (J^n)'(0) \cdot \widehat{v}$, où $\widehat{v}$ est la solution faible de $(v_m^{n+1})_{m\in\mathbb{N}}$ (et en même temps l'unique solution de (3.13) d'après Théorème 5.1), alors la suite réelle $\left((J^n)'(v_m^{n+1}) \cdot v_m^{n+1}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est convergente. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\left|(J^n)'(v_m^{n+1}) \cdot v_m^{n+1}\right| &\leq \sum_{k=1}^{m} \left|(J^n)'(v_m^{n+1}) \cdot z_k^{n+1}\right| \\
&\leq C \sum_{k=1}^{m} \|z_{m+1}^{n+1}\| \, \|z_k^{n+1}\| \qquad \text{(lemma 5.6)} \\
&\leq C \left(m \, \|z_{m+1}^{n+1}\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{m} \|z_k^{n+1}\|^2\right)^{1/2} \qquad \text{(Inégalité de Hölder)} \\
&\leq C \left((m+1) \, \|z_{m+1}^{n+1}\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \|z_k^{n+1}\|^2\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Finalement, comme $\sum_{k=1}^{+\infty} \|z_k^{n+1}\|^2 < +\infty$ alors il existe une sous-suite $(z_{m_k}^{n+1})_k$ de $(z_m^{n+1})_{m\in\mathbb{N}}$ tel que

$$\lim_{k\to+\infty} m_k \, \|z_{m_k}^{n+1}\|^2 = 0.$$

D'où,

$$\lim_{m\to+\infty} (J^n)'(v_m) \cdot v_m = \lim_{k\to+\infty} (J^n)'(v_{m_k}) \cdot v_{m_k} = 0.$$

En appliquant le fait que

$$\begin{cases}
v_m^{n+1} & \rightharpoonup & v^{n+1} \quad \text{dans} \quad W_{\|\cdot\|} \\
(J^n)'(v_m^{n+1}) \cdot v_m^{n+1} & \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} & 0
\end{cases}$$

et les décompositions (5.9) et (5.10), on déduit que

$$(J^n)'(v_m^{n+1} - v^{n+1}) \cdot (v_m^{n+1} - v^{n+1}) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquence, on aura

$$(J^n)'(0) \cdot (v_m^{n+1} - v^{n+1}) + (\widetilde{J}^n)'(v_m^{n+1} - v^{n+1}) \cdot (v_m^{n+1} - v^{n+1}) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui termine la preuve. □

5.4 Calcul des modes PGD à chaque pas de temps

La méthode PGD sera décrite dans cette section dans le cadre de l'équation de la chaleur $2D$, pourtant on pourrait généraliser aux dimensions $d \geq 3$.

A chaque pas de temps $n+1$, la solution v^{n+1} de l'équation (5.3) est cherchée sous la forme séparée suivante

$$v^{n+1}(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i^{n+1}(x) \times Y_i^{n+1}(y).$$

où les X_i^{n+1} et Y_i^{n+1} sont des fonctions dépendantes uniquement des variables x et y respectivement. Alors une approximation d'ordre m de v^{n+1} est donnée par

$$v_m^{n+1}(x,y) := \sum_{i=1}^{m} X_i^{n+1}(x) \times Y_i^{n+1}(y).$$

Supposons qu'à l'ordre $m-1$, v_{m-1}^{n+1} est déjà connu et cherchons X_m^{n+1} et Y_m^{n+1}. Afin de simplifier les notations on note dans cette section $X_m := X_m^{n+1}$ et $Y_m := Y_m^{n+1}$.

On considère la fonctionnelle $\widetilde{J}_m^n : H_0^1(\Omega_1) \times H_0^1(\Omega_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\widetilde{J}_m^n(X,Y) := J^n(u_{m-1} + X \otimes Y).$$

On peut remarquer que $\widetilde{J}_m$ est strictement convexe par rapport à la variable X et par rapport à la variable Y mais $\widetilde{J}_m$ n'est pas convexe par rapport à (X,Y).

$\widetilde{J}_m$ est bornée inférieurement alors le problème

$$\inf_{X \in H^1(\Omega_1)} \widetilde{J}_m^n(X,Y), \tag{5.16}$$

admet une solution unique $\widehat{X}$ pour tout $Y \in H_0^1(\Omega_2)$. De même le problème

$$\inf_{Y \in H^1(\Omega_2)} \widetilde{J}_m^n(X,Y), \tag{5.17}$$

possède une solution unique $\widehat{Y}$ pour tout $X \in H_0^1(\Omega_1)$. Notons que la solution de (5.16) vérifie

$$\frac{\partial \widetilde{J}_m^n}{\partial X}(\widehat{X},Y) = 0,$$

alors $\widehat{X}$ est une solution faible du problème aux limites suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\left(dt \int_{\Omega_2} (Y)^2\right)\widehat{X}'' + \left(dt \int_{\Omega_2} (Y')^2 + \int_{\Omega_2} (Y)^2\right)\widehat{X} & = & \int_{\Omega_2} \left(dt\, f^{n+1} + v_{m_n}^n - v_{m-1}^{n+1} + \Delta v_{m-1}^{n-1}\right) Y. \\ \widehat{X}_{|\partial\Omega_1} = 0. & & \end{array} \right. \tag{5.18}$$

De même, si $\widehat{Y}$ est la solution de (5.17) alors $\widehat{Y}$ est une solution faible du problème aux limites suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\left(dt\int_{\Omega_1}(X)^2\right)\widehat{Y}'' + \left(dt\int_{\Omega_1}(X')^2 + \int_{\Omega_1}(X)^2\right)\widehat{Y} & = & \int_{\Omega_1}\left(dt\, f^{n+1} + v^n_{m_n} - v^{n+1}_{m-1} + \Delta v^{n-1}_{m-1}\right)X. \\ \widehat{Y}_{|\partial\Omega_2} = 0. & & \end{array}\right. \tag{5.19}$$

On cherche maintenant (X_m, Y_m) tel que

$$(X_m, Y_m) \in \underset{(X,Y)\in H^1_0(\Omega_1)\times H^1_0(\Omega_2)}{\arg\min} \widetilde{J}^n_m(X,Y),$$

alors X_m et Y_m vérifient les conditions suivantes

$$\frac{\partial}{\partial X}\widetilde{J}^n_m(X_m,Y_m) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial Y}\widetilde{J}^n_m(X_m,Y_m) = 0.$$

Donc (X_m, Y_m) est une solution du problème non linéaire suivant

$$\left\{\begin{array}{l} -\left(dt\int_{\Omega_1}(X_m)^2\right){Y_m}'' + \left(dt\int_{\Omega_1}({X_m}')^2 + \int_{\Omega_1}(X_m)^2\right)Y_m \\ \qquad\qquad = \int_{\Omega_1}\left(dt\, f^{n+1} + v^n_{m_n} - v^{n+1}_{m-1} + \Delta v^{n-1}_{m-1}\right)X_m. \\ -\left(dt\int_{\Omega_2}(Y_m)^2\right){X_m}'' + \left(dt\int_{\Omega_2}({Y_m}')^2 + \int_{\Omega_2}(Y_m)^2\right)X_m \\ \qquad\qquad = \int_{\Omega_2}\left(dt\, f^{n+1} + v^n_{m_n} - v^{n+1}_{m-1} + \Delta v^{n-1}_{m-1}\right)Y_m, \\ {X_m}_{|\partial\Omega_1} = 0, \\ {Y_m}_{|\partial\Omega_2} = 0. \end{array}\right. \tag{5.20}$$

On utilise un algorithme de point fixe pour chercher X_m et Y_m. On utilise alors l'indice i pour désigner une itération particulière du schéma du point fixe utilisé.
On considère la stratégie des directions alternées : on démarre par un X^0_m arbitraire, alors Y^{i+1}_m sera calculé à partir de X^i_m puis X^{i+1}_m à partir de Y^{i+1}_m (en respectant les conditions aux bords) selon le

schéma numérique suivant

$$\left\{\begin{array}{l} -\left(dt\displaystyle\int_{\Omega_1}(X_m^i)^2\right)Y_m^{i+1\prime\prime}+\left(dt\displaystyle\int_{\Omega_1}(X_m^{i\,\prime})^2+\displaystyle\int_{\Omega_1}(X_m^i)^2\right)Y_m^{i+1} \\ \qquad\qquad\qquad = \displaystyle\int_{\Omega_1}\left(dt\,f^{n+1}+v_{m_n}^n-v_{m-1}^{n+1}+\Delta v_{m-1}^{n-1}\right)X_m^i. \\ -\left(dt\displaystyle\int_{\Omega_2}(Y_m^{i+1})^2\right)X_m^{i+1\prime\prime}+\left(dt\displaystyle\int_{\Omega_2}(Y_m^{i+1\prime})^2+\displaystyle\int_{\Omega_2}(Y_m^{i+1})^2\right)X_m^{i+1} \\ \qquad\qquad\qquad = \displaystyle\int_{\Omega_2}\left(dt\,f^{n+1}+v_{m_n}^n-v_{m-1}^{n+1}+\Delta v_{m-1}^{n-1}\right)Y_m^{i+1}. \end{array}\right.$$

Les itéartions s'arrêtent lorsqu'on arrive à un point fixe, à une tolérence δ près (déjà fixé par l'utilisateur). On note alors X_m et Y_m les limites de $(X_m^i)_i$ et $(Y_m^i)_i$ respectivement. Le processus d'enrichissement de la base s'arrête lorsque la norme $L^2(\Omega)$ de $X_m \otimes Y_m$ sera très petit.

5.5 Preuve du Lemme 5.1

$$\begin{aligned} \int_0^T\int_\Omega \left|V^{dt}-U^{dt}\right|^2 dx\,ds &= \sum_{n=0}^{K-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_\Omega \Bigg|\left(\frac{s-t_n}{dt}\right)\left(v_{m_{n+1}}^{n+1}(x)-u^{n+1}(x)\right) \\ &\qquad + \left(\frac{dt-(s-t_n)}{dt}\right)\left(v^n(x)-u^n(x)\right)\Bigg|^2 dx\,ds \\ &\le 2\sum_{n=0}^{K-1}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_\Omega \left(\frac{s-t_n}{dt}\right)^2\left|v_{m_{n+1}}^{n+1}(x)-u^{n+1}(x)\right|^2 \\ &\qquad + \left(\frac{dt-(s-t_n)}{dt}\right)^2\left|v_{m_n}^n(x)-u^n(x)\right|^2 dx\,ds \\ &\le dt\sum_{n=0}^{K-1}\left\|v_{m_{n+1}}^{n+1}-u^{n+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|v_{m_n}^n-u^n\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\le 2\,dt\sum_{n=0}^{K-1}\left\|v_{m_{n+1}}^{n+1}-u^{n+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\le 4\,dt\sum_{n=0}^{K-1}\left(\left\|v_{m_{n+1}}^{n+1}-v^{n+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|v^{n+1}-u^{n+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right) \\ &= 4\,dt\sum_{n=0}^{K-1}\left\|v_{m_{n+1}}^{n+1}-v^{n+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + 4\,dt\sum_{n=0}^{K-1}\left\|v^{n+1}-u^{n+1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

D'une part, on a

$$dt \sum_{n=0}^{K-1} \left\| v_{m_{n+1}}^{n+1} - v^{n+1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \leq \quad \epsilon \, dt \, K = \epsilon \, T.$$

D'autre part, v^{n+1} et u^{n+1} sont respectivement les solutions des problèmes suivants

$$v^{n+1} - dt \, \Delta v^{n+1} = dt f^{n+1} + v_{m_n}^n,$$

$$u^{n+1} - dt \, \Delta u^{n+1} = dt f^{n+1} + u^n.$$

Donc en retranchant ces deux équations on obtient

$$(I - dt\Delta)(v^{n+1} - u^{n+1}) = v_{m_n}^n - u^n.$$

D'où

$$\|v^{n+1} - u^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \leq c \, \|v_{m_n}^n - u^n\|_{L^2(\Omega)},$$

avec

$$c = \|(I - dt\Delta)^{-1}\| = \frac{1}{1 + \lambda_1 \, dt} < 1$$

où $-\lambda_1 < 0$ est la plus grande valeur propre associée à l'opérateur laplacien.

Par récurrence sur n, on peut démontrer que pour tout $n = 1, \cdots, K-1$, on a

$$\|v^{n+1} - u^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon \sum_{i=1}^{n} c^i \leq \frac{\epsilon}{1-c}. \tag{5.21}$$

En effet, la proposition est évidemment vraie pour la première itération. Supposons alors que (5.21) est vraie jusqu'à l'ordre n et vérifions qu'elle reste vraie à l'ordre $n+1$. On a

$$\begin{aligned} \|v^{n+1} - u^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \leq c \, \|v_{m_n}^n - u^n\|_{L^2(\Omega)} &\leq c \left(\|v_{m_n}^n - v^n\|_{L^2(\Omega)} + \|v^n - u^n\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq c \, (\epsilon + \sum_{i=1}^{n-1} c^i) = \epsilon \sum_{i=1}^{n} c^i. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} dt \sum_{n=0}^{K-1} \left\| v^{n+1} - u^{n+1} \right\|_{L^2(\Omega)} \quad &\leq \quad \epsilon \, dt \sum_{n=0}^{K-1} \frac{1}{1-c} \\ &= \quad \epsilon \, dt \, K \frac{1}{1-c} = \frac{\epsilon \, T}{dt} \frac{(1 + \lambda_1 dt)}{\lambda_1}. \end{aligned}$$

Il suffit alors de prendre ϵ de l'ordre de dt^2 pour obtenir le résultat. □

Remarque 5.1. *On remarque que V^{dt} s'approche de U^{dt} dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ à condition d'une relation entre le pas de temps dt et l'erreur issue de la troncature à un certain ordre de la suite PGD associée à l'équation elliptique à chaque pas de temps. Ce résultat semble être raisonnable et pourrait être comparé à la condition CFL lors de la résolution numérique d'une EDP par la méthode des différences finies.*

5.6 Preuve du Lemme 5.2

Avant de commencer la preuve qui sera divisée en trois étapes, on lance quelques injections et une proposition qui donne une conservation de la condition initiale.

Lemme 5.8 (Lemme d'Aubin [90]). *Pour tout $T > 0$, on définit l'espace E comme suit*

$$E := \Big\{ g \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \text{ and } g_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \Big\},$$

muni de la norme Hilbertienne suivante

$$\|w\|_E = \Big(\|w\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|w_t\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

L'injection

$$E \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega)) \quad \text{est compacte.}$$

De plus, l'injection $E \hookrightarrow \mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))$ est continue.

Définition 5.2. *(Voir [37, Définition 4.8]) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des fonctions faiblement continues de $[0,T]$ vers $L^2(\Omega)$. On dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction $v : [0,T] \longrightarrow L^2(\Omega)$ dans $\mathcal{C}\big([0,T];L^2(\Omega)-w\big)$ ssi pour tout $\varphi \in L^2(\Omega)$, la suite des fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,T]$ vers h quand $n \to +\infty$, où*

$$\begin{array}{rccl} h_n : & [0,T] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \langle v_n(t), \varphi \rangle_{L^2(\Omega)}, \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} h : & [0,T] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \langle v(t), \varphi \rangle_{L^2(\Omega)}. \end{array}$$

De plus, v est nécessairement un élément de $\mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega)-w)$.

Proposition 5.2. *(Voir [37, Proposition 4.9]) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des fonctions mesurables réelles définies sur $[0,T]\times\Omega$. Supposons qu'il existe $q > 1$ et $R > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|v_n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \leq R, \quad \|\partial_t v_n\|_{L^q(0,T,L^2(\Omega))} \leq R.$$

Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega)-w)$.

Proposition 5.3 (Condition initiale [2]). *Si $(g_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))$ est une suite telle que*

1. *$\big(\partial_t g_m\big)_{m\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $L^q(0,T;L^2(\Omega))$ avec $1 < q \leq \infty$,*
2. *$g_{m_{|t=0}} \longrightarrow g_0$ dans $L^2(\Omega)$.*

Alors il existe une fonction $g \in \mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega)-w)$ telle que

$$g_m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} g \text{ dans } \mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega)-w) \quad \text{et} \quad g_{|t=0} = g_0 \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Preuve. Pour tout $s < t \in (0,T)$, on a

$$\begin{aligned}
\|g_m(t) - g_m(s)\|_{L^2(\Omega)} &= \left\| \int_s^t \partial_\tau g_m(\tau)\, d\tau \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \int_s^t \|\partial_\tau g_m(\tau)\|_{L^2(\Omega)}\, d\tau \\
&\leq (t-s)^{\frac{q-1}{q}} \|\partial_t g_m\|_{L^q(0,T;L^2(\Omega))} \leq (t-s)^{\frac{q-1}{q}} C,
\end{aligned}$$

où on a utilisé dans la deuxième ligne l'inégalité de Hölder et le fait que $(\partial_t g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $L^q(0,T;L^2(\Omega))$. D'après la proposition précédente, on peut déduire qu'il existe $g \in \mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))$ telle que

$$g_m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} g \quad \text{dans} \quad \mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega) - w).$$

Parsuite, pour tout $t \in [0,T]$, on a

$$g_m(t) \underset{m\to+\infty}{\rightharpoonup} g(t) \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Or $g_m(0)$ converge fortement vers g_0 dans $L^2(\Omega)$ alors $g(0) = g_0$ par unicité de la limite. □

Estimation de la solution :

La solution faible u^{n+1} de (5.2) satisfait l'estimation suivante

$$(1-dt)\|u^{n+1}\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\,dt\,\|\nabla u^{n+1}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq dt\,\|f^{n+1}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u^n\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{5.22}$$

qui est obtenue en multipliant (5.2) par $v \in H^1_0(\Omega)$ et intégrant sur Ω, puis choisissant $v = u^{n+1}$ et utilisant l'inégalité de Young.

Step 1 : Borne supérieure sur ∇U^{dt} et U^{dt}

Pour tout $n \in \{0, \cdots, K-1\}$ et $t \in (t_n, t_{n+1}]$ on a

$$\nabla U^{dt}(t,x) = \left(\frac{t-t_n}{dt}\right)\nabla u^{n+1}(x) + \left(\frac{dt-(t-t_n)}{dt}\right)\nabla u^n(x),$$

alors

$$\left\|\nabla U^{dt}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2\left(\frac{t-t_n}{dt}\right)^2 \left\|\nabla u^{n+1}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\left(\frac{dt-(t-t_n)}{dt}\right)^2 \left\|\nabla u^n\right\|^2_{L^2(\Omega)},$$

ce qui donne

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|\nabla U^{dt}(s,\cdot)\right\|^2_{L^2(\Omega)} ds \leq 2\,dt \left(\left\|\nabla u^{n+1}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\nabla u^n\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_0^T \left\|\nabla U^{dt}(s,\cdot)\right\|^2_{L^2(\Omega)} ds &= \sum_{n=0}^{K-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|\nabla U^{dt}(s,\cdot)\right\|^2_{L^2(\Omega)} ds \\ &\leq 2\,dt \sum_{n=0}^{K-1} \left(\left\|\nabla u^{n+1}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\nabla u^{n}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq 2\,dt \left\|\nabla u_0\right\|^2_{L^2(\Omega)} + 4\,dt \sum_{n=0}^{K-1} \left\|\nabla u^{n+1}\right\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

On conclut alors que $\int_0^T \left\|\nabla U^{dt}(s,\cdot)\right\|^2_{L^2(\Omega)} ds \leq C$ (C est une constante générique indépendante de dt), en utilisant le fait que $dt < 1$ afin de majorer $dt \left\|\nabla u_0\right\|^2_{L^2(\Omega)}$ et en utilisant l'estimation (5.22). En effet, on a

$$\begin{aligned}
&\underline{n=0}: && (1-dt)\|u^1\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u^0\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq -2dt\,\|\nabla u^1\|^2_{L^2(\Omega)} + dt\,\|f^1\|_{L^2(\Omega)} \\
&\underline{n=1}: && (1-dt)\|u^2\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u^1\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq -2dt\,\|\nabla u^2\|^2_{L^2(\Omega)} + dt\,\|f^2\|_{L^2(\Omega)} \\
& && \vdots \\
&\underline{n=K-2}: && (1-dt)\|u^{k-1}\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u^{K-2}\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq -2dt\,\|\nabla u^{K-1}\|^2_{L^2(\Omega)} + dt\,\|f^{K-1}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\underline{n=K-1}: && (1-dt)\|u^{k}\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u^{K-1}\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq -2dt\,\|\nabla u^{K}\|^2_{L^2(\Omega)} + dt\,\|f^{K}\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Donc en additionnant ces dernières inégalités on obtient

$$\|u^k\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u^0\|^2_{L^2(\Omega)} - dt \sum_{n=0}^{K-1} \|u^{n+1}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq -2\,dt \sum_{n=0}^{K-1} \|\nabla u^{n+1}\|^2_{L^2(\Omega)} + dt \sum_{n=0}^{K-1} \|f^{n+1}\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Parsuite on aura

$$2\,dt \sum_{n=0}^{K-1} \|\nabla u^{n+1}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u^k\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u^0\|^2_{L^2(\Omega)} + dt \sum_{n=0}^{K-1} \|u^{n+1}\|^2_{L^2(\Omega)} + dt \sum_{n=0}^{K-1} \|f^{n+1}\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Or la suite $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $L^2(\Omega)$, i.e. il existe $c > 0$ tel que

$$\|u^n\|_{L^2(\Omega)} \leq c,$$

alors

$$\begin{aligned} dt \sum_{n=0}^{K-1} \|u^{n+1}\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \sum_{n=0}^{K-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &\leq c\,T. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} dt \sum_{n=0}^{K-1} \|f^{n+1}\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \sum_{n=0}^{K-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|f^{n+1}\|^2_{L^2(\Omega)} ds \\ &\leq \int_0^T \Big(\sup_{t\in[0,T]} \|f(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \Big)^2 ds \\ &\leq T \, \|f\|^2_{\mathcal{C}([0,T],L^2(\Omega))}, \end{aligned}$$

ce qui nous permet de déduire alors la bornétude de ∇U^{dt}_{dt} dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.
En utilisant l'inégalité de Poincarré on pourrait obtenir une borne supérieure sur $\displaystyle\int_0^T \|U^{dt}\|^2_{L^2(\Omega)}$.
D'où, il existe $U \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$ tel que

$$U^{dt} \longrightarrow U \text{ faiblement dans } L^2(0,T;H^1_0(\Omega)) \text{ quand } dt \to 0.$$

Step 2 : borne supérieure sur U^{dt}_t

On a :

$$U^{dt}_t(t,x) = \frac{u^{n+1}-u^n}{dt}, \qquad \text{pour tout } t \in (t_n, t_{n+1}),\ n \in \{0,\cdots,K-1\},$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_0^T \|U^{dt}_t\|^2_{H^{-1}(\Omega)} ds &= \sum_{n=0}^{K-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|U^{dt}_t\|^2_{H^{-1}(\Omega)} ds \\ &= \sum_{n=1}^{K-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| \frac{u^{n+1}-u^n}{dt} \right\|^2_{H^{-1}(\Omega)} ds. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{K-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| \frac{u^{n+1}-u^n}{dt} \right\|^2_{H^{-1}(\Omega)} &= \sum_{n=0}^{K-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\mathrm{div}(\nabla u^{n+1}) + f^{n+1}\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \\ &\leq 2\,dt \sum_{n=0}^{K-1} \Big(\|\mathrm{div}(\nabla u^{n+1})\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \|f^{n+1}\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \Big) \\ &\leq 2\,dt \sum_{n=0}^{K-1} \Big(\|\nabla u^{n+1}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f^{n+1}\|^2_{L^2(\Omega)} \Big), \end{aligned}$$

on procède alors de la même façon que la première étape pour montrer que cette dernière quantité est bornée. D'où $(U^{dt}_t)_{dt}$ est bornée dans $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ et parsuite il existe $W \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ tel que

$$U^{dt}_t \longrightarrow W \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \text{ quand } dt \to 0.$$

Puisque $U_t^{dt} \to U_t$ quand $dt \to 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_T)$, alors $W = U_t$.

Step 3 : Passage à la limite quand $dt \to 0$

D'après les deux étapes précédentes et le Lemme 5.8, on déduit qu'il existe une fonction $U \in \big\{g \in L^2(0,T;H^1(\Omega)),\ g_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))\big\}$ telle que

$$\begin{cases} U^{dt} \longrightarrow U & \text{faiblement dans } L^2(0,T;H^1(\Omega)) \quad \text{quand } dt \to 0, \\ U_t^{dt} \longrightarrow U_t & \text{faiblement dans } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \quad \text{quand } dt \to 0, \\ U^{dt} \longrightarrow U & \text{fortement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \quad \text{quand } dt \to 0, \end{cases}$$

avec $U \in \mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))$. De plus, on a

$$U^{dt} \underset{dt\to 0}{\longrightarrow} U \text{ fortement dans } C(0,T;L^2(\Omega)) \text{ avec } U(0,x) = u_0(x).$$

On pose maintenant

$$P^{dt}(t,x) := \nabla u^{n+1}(x) \quad \text{pour tout } t \in (t_n, t_{n+1}].$$

Puisque

$$\int_0^T \|P^{dt}\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{n=0}^{K-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\nabla u^{n+1}\|^2_{L^2(\Omega)} = dt \sum_{n=0}^{K-1} \|\nabla u^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \leq C,$$

on peut déduire qu'il existe $P \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ telle que

$$P^{dt} \longrightarrow P \text{ faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ quand } dt \to 0.$$

Reste à démontrer que $P^{dt} \longrightarrow \nabla U$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_T)$ quand $dt \to 0$, afin de montrer que la limite faible de $(P^{dt})_{dt}$ dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ est égale à ∇U. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_T)$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega P^{dt}\varphi = \sum_{n=0}^{K-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_\Omega \nabla u^{n+1}\varphi &= -\sum_{n=0}^{K-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_\Omega u^{n+1}\nabla\varphi \\ &= -\sum_{n=0}^{K-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_\Omega \big[U^{dt}\nabla\varphi + (u^{n+1} - U^{dt})\nabla\varphi\big]. \end{aligned}$$

Or

$$u^{n+1} - U^{dt} = \frac{dt - (t - t_n)}{dt}(u^{n+1} - u^n) = \theta^{n,dt}(t)U_t^{dt}, \quad \forall t \in]t_n, t_{n+1}],$$

où $\theta^{n,dt}(t) := dt - (t - t_n)$. alors

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega P^{dt}\varphi &= -\int_0^T \int_\Omega \big[U^{dt}\nabla\varphi + \theta^{dt}(t)U_t^{dt}(t,x)\nabla\varphi\big] \\ &= -\int_0^T \int_\Omega \big[U^{dt}\nabla\varphi - \int_0^T \int_\Omega U_t^{dt}(t,x)\theta^{dt}(t)\nabla\varphi, \end{aligned}$$

où $\theta^{dt}(t) := \theta^{n,dt}$ pour tout $t \in (t_n, t_{n+1}]$. Alors en posant $X = L^2(0,T;L^2(\Omega))$ on obtient

$$\lim_{dt\to 0} \int_0^T \int_\Omega P^{dt}\varphi = -\int_0^T U\nabla\varphi - \lim_{dt\to 0} \big\langle U_t^{dt}(t,x), \theta^{dt}\nabla\varphi\big\rangle_X = \int_0^T \nabla U\varphi,$$

car $\theta^{dt} \longrightarrow 0$ quand $dt \to 0$.

Alors notre système discrétisé (5.2) peut être écrit comme suit

$$U_t^{dt} = \mathrm{div}(P^{dt}) + F^{dt} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega_T), \tag{5.23}$$

où F^{dt} est définie sur $(0, T]$ par

$$F(t)(\cdot) = f(t_{n+1}, \cdot) \ \text{ pour tout } t \in (t_n, t_{n+1}], \ n \in \{0, \cdots, K-1\}$$

Il est facile de vérifier que F^{dt} converge vers f dans $\mathcal{D}'(\Omega_T)$. D'où en multipliant (5.23) par une fonction test φ et intégrant sur Ω_T, puis en passant à la limite quand $dt \to 0$, on conclut que U est une solution faible de (5.1). $\square$

Bibliographie

[1] E. E. Adams and L. W. Gelhar. Field study of dispersion in a heterogeneous aquifer : 2. spatial moments analysis. *Water Resources Research*, 28(12) :3293–3307, 1992.

[2] J. Alkhayal, M. Jazar, and R. Monneau. Existence results for degenerate cross-diffusion systems with application to seawater intrusion. July 2014.

[3] C. Allery, C. Béghein, and A. Hamdouni. Applying proper orthogonal decomposition to the computation of particle dispersion in a two-dimensional ventilated cavity. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 10(8) :907–920, 2005.

[4] C. Allery, C. Béghein, and A. Hamdouni. On investigation of particle dispersion by a pod approach. *International applied mechanics*, 44(1) :110–119, 2008.

[5] C. Allery, S. Guérin, A. Hamdouni, and A. Sakout. Experimental and numerical pod study of the coanda effect used to reduce self-sustained tones. *Mechanics Research Communications*, 31(1) :105–120, 2004.

[6] L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford university press, 2000.

[7] A. Ammar, F. Chinesta, and A. Falcó. On the convergence of a greedy rank-one update algorithm for a class of linear systems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(4) :473–486, 2010.

[8] A. Ammar and P. Joyot. The nanometric and micrometric scales of the structure and mechanics of materials revisited : an introduction to the challenges of fully deterministic numerical descriptions. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 6(3), 2008.

[9] A. Ammar, B. Mokdad, F. Chinesta, and R. Keunings. A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 139(3) :153–176, 2006.

[10] A. Ammar, B. Mokdad, F. Chinesta, and R. Keunings. A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modelling of complex fluids : Part ii : Transient simulation using space-time separated representations. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 144(2) :98–121, 2007.

[11] A. Ammar, M. Normandin, and F. Chinesta. Solving parametric complex fluids models in rheometric flows. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 165(23) :1588–1601, 2010.

[12] A. Ammar, D. Ryckelynck, F. Chinesta, and R. Keunings. On the reduction of kinetic theory models related to finitely extensible dumbbells. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 134(1) :136–147, 2006.

[13] A. C. Antoulas. A new result on passivity preserving model reduction. *Systems & Control Letters*, 54(4) :361–374, 2005.

[14] A. C. Antoulas. An overview of approximation methods for large-scale dynamical systems. *Annual reviews in Control*, 29(2) :181–190, 2005.

[15] G. Aubert and P. Kornprobst. *Mathematical problems in image processing : partial differential equations and the calculus of variations*, volume 147. Springer Science & Business Media, 2006.

[16] N. Aubry, P. Holmes, J. L. Lumley, and E. Stone. The dynamics of coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 192 :115–173, 1988.

[17] N. Aubry, W.-Y. Lian, and E. S. Titi. Preserving symmetries in the proper orthogonal decomposition. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 14(2) :483–505, 1993.

[18] B. Baeumer, D. A. Benson, M. M. Meerschaert, and S. W. Wheatcraft. Subordinated advection-dispersion equation for contaminant transport. *Water Resources Research*, 37(6) :1543–1550, 2001.

[19] D. A. Benson, S. W. Wheatcraft, and M. M. Meerschaert. Application of a fractional advection-dispersion equation. *Water Resources Research*, 36(6) :1403–1412, 2000.

[20] G. Berkooz, P. Holmes, and J. L. Lumley. The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows. *Annual review of fluid mechanics*, 25(1) :539–575, 1993.

[21] G. Berkooz and E. S. Titi. Galerkin projections and the proper orthogonal decomposition for equivariant equations. *Physics Letters A*, 174(1-2) :94–102, 1993.

[22] B. Bognet, F. Bordeu, F. Chinesta, A. Leygue, and A. Poitou. Advanced simulation of models defined in plate geometries : 3d solutions with 2d computational complexity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 201 :1–12, 2012.

[23] H. Brezis. Analyse fonctionnelle. 1983.

[24] J. Burkardt, M. Gunzburger, and H.-C. Lee. Pod and cvt-based reduced-order modeling of navier–stokes flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(1) :337–355, 2006.

[25] K. Burrage, N. Hale, and D. Kay. An efficient implementation of an implicit fem scheme for fractional-in-space reaction-diffusion equations. 2011.

[26] E. Cancès, M. Defranceschi, W. Kutzelnigg, C. Le Bris, and Y. Maday. Computational quantum chemistry : a primer. *Handbook of numerical analysis*, 10 :3–270, 2003.

[27] E. Cancès, V. Ehrlacher, and T. Lelièvre. Convergence of a greedy algorithm for high-dimensional convex nonlinear problems. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 21(12) :2433–2467, 2011.

[28] F. Chinesta, A. Ammar, and E. Cueto. On the use of proper generalized decompositions for solving the multidimensional chemical master equation. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 19(1-3) :53–64, 2010.

[29] F. Chinesta, A. Ammar, and E. Cueto. Recent advances and new challenges in the use of the proper generalized decomposition for solving multidimensional models. *Archives of Computational methods in Engineering*, 17(4) :327–350, 2010.

[30] F. Chinesta, A. Ammar, A. Leygue, and R. Keunings. An overview of the proper generalized decomposition with applications in computational rheology. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 166(11) :578–592, 2011.

[31] F. Chinesta, R. Keunings, and A. Leygue. *The proper generalized decomposition for advanced numerical simulations : a primer*. Springer Science & Business Media, 2013.

[32] F. Chinesta, P. Ladeveze, and E. Cueto. A short review on model order reduction based on proper generalized decomposition. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 18(4) :395–404, 2011.

[33] A. Chkifa, A. Cohen, R. DeVore, and C. Schwab. Sparse adaptive taylor approximation algorithms for parametric and stochastic elliptic pdes. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 47(1) :253–280, 2013.

[34] M. Costabel. Boundary integral operators on lipschitz domains : elementary results. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 19(3) :613–626, 1988.

[35] A. Defant and K. Floret. *Tensor norms and operator ideals*, volume 176. Elsevier, 1992.

[36] Z. Ding. A proof of the trace theorem of sobolev spaces on lipschitz domains. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 124(2) :591–600, 1996.

[37] J. Droniou, R. Eymard, and K. S. Talbot. Convergence in c ([0, t] ; l 2 (ω)) of weak solutions to perturbed doubly degenerate parabolic equations. *Journal of Differential Equations*, 260(11) :7821–7860, 2016.

[38] Q. Du, V. Faber, and M. Gunzburger. Centroidal voronoi tessellations : applications and algorithms. *SIAM review*, 41(4) :637–676, 1999.

[39] Q. Du and M. Gunzburger. Grid generation and optimization based on centroidal voronoi tessellations. *Applied Mathematics and Computation*, 133(2) :591–607, 2002.

[40] Q. Du and M. Gunzburger. Model reduction by proper orthogonal decomposition coupled with centroidal voronoi tessellation. In *Proc. Fluids Engineering Division Summer Meeting, FEDSM2002-31051, ASME*, 2002.

[41] A. Dumon, C. Allery, and A. Ammar. Proper general decomposition (pgd) for the resolution of navier–stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 230(4) :1387–1407, 2011.

[42] J. Eggleston and S. Rojstaczer. Identification of large-scale hydraulic conductivity trends and the influence of trends on contaminant transport. *Water Resources Research*, 34(9) :2155–2168, 1998.

[43] M. Espig, W. Hackbusch, and A. Khachatryan. On the convergence of alternating least squares optimisation in tensor format representations. *arXiv preprint arXiv :1506.00062*, 2015.

[44] V. A. I. T. F. Liu, P. Zhuang and K. Burrage. Stability and convergence of the finite difference method for the space-time fractional advection-diffusion equation. In *App. Num. and Comp., 91 :12–20*, 2007.

[45] A. Falcó. Algorithms and numerical methods for high dimensional financial market models. *Revista de Economia Financiera*, 20 :51–68, 2010.

[46] A. Falcó and W. Hackbusch. On minimal subspaces in tensor representations. *Foundations of Computational Mathematics*, 12(6) :765–803, 2012.

[47] A. Falco and A. Nouy. A proper generalized decomposition for the solution of elliptic problems in abstract form by using a functional eckart–young approach. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 376(2) :469–480, 2011.

[48] A. Falcó and A. Nouy. Proper generalized decomposition for nonlinear convex problems in tensor banach spaces. *Numerische Mathematik*, 121(3) :503–530, 2012.

[49] C. Ghnatios, F. Chinesta, E. Cueto, A. Leygue, A. Poitou, P. Breitkopf, and P. Villon. Methodological approach to efficient modeling and optimization of thermal processes taking place in a die : application to pultrusion. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 42(9) :1169–1178, 2011.

[50] C. Ghnatios, F. Masson, A. Huerta, A. Leygue, E. Cueto, and F. Chinesta. Proper generalized decomposition based dynamic data-driven control of thermal processes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 213 :29–41, 2012.

[51] E. Giusti. *Minimal surfaces and functions of bounded variation.* Springer Science & Business Media, 1984.

[52] D. González, A. Ammar, F. Chinesta, and E. Cueto. Recent advances on the use of separated representations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81(5) :637, 2010.

[53] W. J. Gordon and C. A. Hall. Transfinite element methods : blending-function interpolation over arbitrary curved element domains. *Numerische Mathematik*, 21(2) :109–129, 1973.

[54] S. Gugercin and A. C. Antoulas. Model reduction of large-scale systems by least squares. *Linear algebra and its applications*, 415(2) :290–321, 2006.

[55] W. Hackbusch. *Tensor spaces and numerical tensor calculus*, volume 42. Springer Science & Business Media, 2012.

[56] P. Holmes, J. L. Lumley, and G. Berkooz. *Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry.* Cambridge university press, 1998.

[57] P. Kerfriden, P. Gosselet, S. Adhikari, and S. P.-A. Bordas. Bridging proper orthogonal decomposition methods and augmented newton–krylov algorithms : an adaptive model order reduction for highly nonlinear mechanical problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(5) :850–866, 2011.

[58] A. Kilbas, O. Marichev, and S. Samko. Fractional integral and derivatives (theory and applications). *Gordon and Breach, Switzerland*, 1(993) :1, 1993.

[59] P. Ladeveze. New algorithms : mechanical framework and development. *Compte rendu de l'académie des Sci*, 300(2) :41–44, 1985.

[60] P. Ladevèze. Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures. (An algorithm family in structural mechanics). *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. II*, 300 :41–44, 1985.

[61] P. Ladevèze. *Nonlinear computational structural mechanics : new approaches and non-incremental methods of calculation.* Springer Science & Business Media, 2012.

[62] P. Ladevèze, J.-C. Passieux, and D. Néron. The latin multiscale computational method and the proper generalized decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(21) :1287–1296, 2010.

[63] H. Lamari, A. Ammar, P. Cartraud, G. Legrain, F. Chinesta, and F. Jacquemin. Routes for efficient computational homogenization of nonlinear materials using the proper generalized decompositions. *Archives of Computational methods in Engineering*, 17(4) :373–391, 2010.

[64] H. Lamari, F. Chinesta, A. Ammar, and E. Cueto. Non-conventional numerical strategies in the advanced simulation of materials and processes. *Int J Mod Manuf Technol*, 1 :49–56, 2009.

[65] C. Le Bris, T. Lelièvre, and Y. Maday. Results and questions on a nonlinear approximation approach for solving high-dimensional partial differential equations. *Constructive Approximation*, 30(3) :621–651, 2009.

[66] A. Leygue and E. Verron. A first step towards the use of proper general decomposition method for structural optimization. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(4) :465–472, 2010.

[67] E. Liberge and A. Hamdouni. Reduced order modelling method via proper orthogonal decomposition (pod) for flow around an oscillating cylinder. *Journal of Fluids and Structures*, 26(2) :292–311, 2010.

[68] F. Liu, I. Turner, and M. Cox. A finite volume method for saltwater intrusion with heavy-tailed motions. *Applied Mathematical Modelling*, 2010.

[69] J. L. Lumley. The structure of inhomogeneous turbulent flows. *Atmospheric turbulence and radio wave propagation*, pages 166–178, 1967.

[70] W. C. H. McLean. *Strongly elliptic systems and boundary integral equations.* Cambridge university press, 2000.

[71] M. M. Meerschaert and C. Tadjeran. Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations. *Applied numerical mathematics*, 56(1) :80–90, 2006.

[72] R. Metzler and J. Klafter. The restaurant at the end of the random walk : recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 37(31) :R161, 2004.

[73] K. S. Miller and B. Ross. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. 1993.

[74] B. Moore. Principal component analysis in linear systems : Controllability, observability, and model reduction. *IEEE transactions on automatic control*, 26(1) :17–32, 1981.

[75] A. Nouy. A generalized spectral decomposition technique to solve a class of linear stochastic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(45) :4521–4537, 2007.

[76] A. Nouy. Generalized spectral decomposition method for solving stochastic finite element equations : invariant subspace problem and dedicated algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(51) :4718–4736, 2008.

[77] A. Nouy. A priori model reduction through proper generalized decomposition for solving time-dependent partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(23) :1603–1626, 2010.

[78] A. Nouy and P. Ladevèze. Multiscale computational strategy with time and space homogenization : a radial-type approximation technique for solving microproblems. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2(4), 2004.

[79] A. Nouy and O. P. Le Maître. Generalized spectral decomposition for stochastic nonlinear problems. *Journal of Computational Physics*, 228(1) :202–235, 2009.

[80] I. Podlubny. *Fractional differential equations : an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, volume 198. Academic press, 1998.

[81] E. Pruliere, F. Chinesta, and A. Ammar. On the deterministic solution of multidimensional parametric models using the proper generalized decomposition. *Mathematics and Computers in Simulation*, 81(4) :791–810, 2010.

[82] C. Ray, T. R. Ellsworth, A. J. Valocchi, and C. W. Boast. An improved dual porosity model for chemical transport in macroporous soils. *Journal of Hydrology*, 193(1) :270–292, 1997.

[83] D. Ryckelynck. Réduction a priori de modèles thermomécaniques. *Comptes Rendus Mécanique*, 330(7) :499–505, 2002.

[84] D. Ryckelynck. A priori hyperreduction method : an adaptive approach. *Journal of computational physics*, 202(1) :346–366, 2005.

[85] D. Ryckelynck, L. Hermanns, F. Chinesta, and E. Alarcon. An efficient 'a priori'model reduction for boundary element models. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29(8) :796–801, 2005.

[86] M. J. Saxton. Anomalous subdiffusion in fluorescence photobleaching recovery : a monte carlo study. *Biophysical Journal*, 81(4) :2226–2240, 2001.

[87] E. Scalas, R. Gorenflo, and F. Mainardi. Fractional calculus and continuous-time finance. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 284(1) :376–384, 2000.

[88] M. Schmitt. The (non) tensor structure of bv-spaces. *Results in Mathematics*, 39(1-2) :91–98, 2001.

[89] L. Schwartz. *Analyse. 1. Théorie des ensembles et topologie.* Hermann, 1991.

[90] J. Simon. Compact sets in the space $l^p(0,t;b)$. *Annali di Matematica pura ed applicata*, 146(1) :65–96, 1986.

[91] P. R. Smith, I. E. Morrison, K. M. Wilson, N. Fernandez, and R. J. Cherry. Anomalous diffusion of major histocompatibility complex class i molecules on hela cells determined by single particle tracking. *Biophysical journal*, 76(6) :3331–3344, 1999.

[92] T. Stykel. Balanced truncation model reduction for semidiscretized stokes equation. *Linear Algebra and its Applications*, 415(2) :262–289, 2006.

[93] L. Tamellini, O. Le Maître, and A. Nouy. Model reduction based on proper generalized decomposition for the stochastic steady incompressible navier–stokes equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 36(3) :A1089–A1117, 2014.

[94] I. Turner, M. Ilic, and P. Perre. The use of fractional-in-space diffusion equations for describing microscale diffusion in porous media. 2010.

[95] A. Uschmajew. Local convergence of the alternating least squares algorithm for canonical tensor approximation. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 33(2) :639–652, 2012.

[96] N. Verdon. *Un système dynamique d'ordre réduit basé sur une approche APR-POD pour l'étude de l'interaction écoulement turbulent-particules.* PhD thesis, Université de La Rochelle, 2007.

[97] N. Verdon, C. Allery, C. Béghein, A. Hamdouni, and D. Ryckelynck. Reduced-order modelling for solving linear and non-linear equations. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 27(1) :43–58, 2011.

[98] N. Verdon, C. Allery, D. Ryckelynck, and A. Hamdouni. An adaptive rom approach for solving transfer equations. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 15(5) :589–605, 2006.

[99] T. Von Petersdorff and C. Schwab. Numerical solution of parabolic equations in high dimensions. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 38(1) :93–127, 2004.

[100] M. Webb. Analysis and approximation of a fractional differential equation. *Master's Thesis*, 2012.

[101] Q. Yang, F. Liu, and I. Turner. Numerical methods for fractional partial differential equations with riesz space fractional derivatives. *Applied Mathematical Modelling*, 34(1) :200–218, 2010.

[102] A. Yger. Distributions. *Institut De Mathématiques, Université Bordeaux 1*, 2011.

[103] S. Yuste, L. Acedo, and K. Lindenberg. Reaction front in an $a + b \to c$ reaction-subdiffusion process. *Physical Review E*, 69(3) :036126, 2004.