



Sur quelques modèles mathématiques issus du micromagnétisme

Mohammed Moumni

► To cite this version:

Mohammed Moumni. Sur quelques modèles mathématiques issus du micromagnétisme. Physique mathématique [math-ph]. Université de La Rochelle; Université Moulay Ismaïl (Meknès, Maroc), 2017. Français. \langle NNT : 2017LAROS004 \rangle . \langle tel-01753451 \rangle

HAL Id: tel-01753451

<https://theses.hal.science/tel-01753451v1>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization



N° d'ordre : 02/DN/2017

THÈSE DE DOCTORAT EN COTUTELLE

DE

LA FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES - ERRACHIDIA

Formation Doctorale Mathématiques, Informatique et Applications (MIA)

ET DE

L'UNIVERSITÉ DE LA ROCHELLE

École Doctorale Sciences et Ingénierie pour l'Information, Mathématiques (S2IM)

présentée par

Mohammed MOUMNI

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Sur quelques modèles mathématiques issus du micromagnétisme

Soutenue le **14 mars 2017** à la FST Errachidia

devant le jury composé de :

M. Moha HAJAR	FST Errachidia	Président (Rapporteur)
Mme Doina CIORANESCU	Université de Paris VI	Rapporteur
M. Abdelilah HAKIM	FST Marrakech	Rapporteur
Mme Natália MARTINS	Université d'Aveiro	Examineur
M. Delfim F. M. TORRES	Université d'Aveiro	Examineur
Mme Catherine CHOQUET	Université de La Rochelle	Directeur de thèse
M. Mouhcine TILIOUA	FST Errachidia	Directeur de thèse

Table des matières

Résumé	vii
Abstract	ix
Remerciements	xi
Table des figures	xiii
Notations	xv
Liste des publications	xvii
Introduction générale	1
1 Modélisation des matériaux ferromagnétiques	9
1.1 Ferromagnétisme : notions générales	10
1.2 Bases physiques régissant les mécanismes d'aimantation	12
1.2.1 Energies micromagnétiques	12
1.2.2 Energie d'échange	13
1.2.3 Energie d'anisotropie de volume	13
1.2.4 Energie du champ démagnétisant	14
1.2.5 Energie Zeeman	15
1.2.6 Energie de surface	15
1.2.7 Énergie totale et champ effectif	16
1.3 Les modèles LL et LLG	17

1.3.1	L'équation dynamique	17
1.3.2	Description de l'approche de Landau-Lifshitz	18
1.3.3	Couplage avec les équations de Maxwell	19
1.3.4	Conditions aux limites	20
1.4	Adimensionnement des équations	21
1.5	Propriétés mathématiques élémentaires	22
2	Approximation numérique de la dynamique d'aimantation avec effets d'inertie	25
2.1	Introduction	26
2.2	Rappel de quelques résultats	28
2.2.1	Résultat d'existence globale	28
2.2.2	Comportement en temps grand	28
2.3	Schéma numérique semi-implicite	29
2.4	Résultats numériques	36
3	Sur un modèle d'amortissement non local en ferromagnétisme	43
3.1	Introduction	44
3.2	Solutions faibles	46
3.3	Comportement en temps long	48
3.4	Sensibilité par rapport au coefficient d'amortissement	51
4	Homogénéisation de l'équation LLG dans un milieu hétérogène	55
4.1	Introduction	56
4.2	Rappels d'homogénéisation	57
4.2.1	Obtention formelle du modèle homogénéisé	58
4.2.2	Obtention rigoureuse du modèle homogénéisé	58
4.3	Position du problème	60
4.3.1	Le domaine	60
4.3.2	Le modèle microscopique	61
4.4	Résultat principal : modèle homogénéisé	63
4.5	Obtention formelle du modèle homogénéisé	64

4.6	Obtention rigoureuse du modèle homogénéisé	68
4.6.1	Estimations uniformes	69
4.6.2	Résultats de convergence	70
4.6.3	Comportement limite	72
4.6.4	Opérateur de dilatation et réduction de dimension par maillage emboîtés	76
5	Homogénéisation de l'équation LLG avec anisotropie de surface dans un matériau perforé	87
5.1	Introduction	88
5.1.1	Contexte général	88
5.1.2	Position du problème	90
5.1.3	Contexte mathématique	93
5.1.4	Outils mathématiques	95
5.1.4.1	Convergence à double échelle	95
5.1.4.2	Convergence à double échelle et surfaces périodiques	96
5.1.4.3	Opérateur de prolongement	97
5.1.4.4	Prolongement de la normale unitaire au bord des perforations	98
5.2	Résultats principaux	99
5.3	Dérivation rigoureuse des modèles homogénéisés	101
5.3.1	Estimations uniformes	101
5.3.2	Anisotropie de surface d'ordre 1	101
5.3.3	Anisotropie de surface d'ordre négligeable	106
5.3.4	Anisotropie de surface à l'ordre principal	106
	Conclusion et perspectives	109
	Bibliographie	111

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude de quelques problèmes mathématiques issus du micro-magnétisme. Le but est d'analyser le comportement des modèles en fonction de différents paramètres physiques, dont les fines variations sont parfois difficilement mesurables. Nous adoptons des approches numérique, asymptotique ou d'homogénéisation. Les modèles considérés reposent sur l'utilisation de l'équation de Landau-Lifshitz-Gilbert (LLG) décrivant l'évolution du champ d'aimantation dans un matériau ferromagnétique. Nous rappelons d'abord quelques notions importantes en ferromagnétisme. Ensuite, nous menons une étude numérique d'un modèle de la dynamique d'aimantation avec effets d'inertie. Nous proposons un schéma aux différences finies semi-implicite qui respecte de façon intrinsèque les propriétés du modèle continu. Des simulations numériques sont réalisées pour cerner l'effet du paramètre d'inertie. Ces simulations montrent aussi la performance du schéma et confirment l'ordre de convergence obtenu théoriquement. Nous étudions ensuite un modèle de la dynamique de l'aimantation avec amortissement non local. La sensibilité de la dynamique d'aimantation au paramètre d'amortissement non local est étudiée en donnant le problème limite pour de petites et de grandes valeurs du paramètre. Enfin, nous étudions l'homogénéisation de l'équation LLG dans deux types de matériau, à savoir les composites présentant un fort contraste des propriétés magnétiques et les matériaux périodiquement perforés avec énergie d'anisotropie de surface. Des modèles homogénéisés sont d'abord obtenus formellement puis une dérivation rigoureuse est établie en se basant principalement sur les concepts de la convergence à double échelle et de la convergence à double échelle en surface. Pour traiter les non-linéarités, nous introduisons une nouvelle méthode basée sur le couplage d'un opérateur de dilatation calibré sur les contrastes d'échelle et d'un outil de réduction de dimension, par construction de grilles emboîtées adaptées à la géométrie du domaine microscopique.

Mots clés. Ferromagnétisme, micromagnétisme, équation de Landau-Lifshitz-Gilbert, analyse asymptotique, homogénéisation, convergence à double échelle, schéma aux différences finies semi-implicite, simulations numériques.

Ce travail a bénéficié du soutien PHC VOLUBILIS MA14/301 “Élaboration et analyse de modèles asymptotiques en micro-magnétisme, magnéto-élasticité et électro-élasticité”.

Abstract

This thesis is devoted to the study of some mathematical problems arising in micromagnetism. The models considered here are based on the Landau-Lifshitz-Gilbert equation (LLG) describing the evolution of the magnetization field in a ferromagnetic material. Our aim is the analysis of the behavior of the models regarding the slight variations of some physical parameters. We first recall some important notions about ferromagnetism. Then, we carry out a numerical study of a model of magnetization dynamics with inertial effects. We propose a semi-implicit finite difference scheme which intrinsically respects the properties of the continuous model. Numerical simulations are provided for emphasizing the effect of the inertia parameter. These simulations also show the performance of the scheme and confirm the order of convergence obtained theoretically. We then study a model of magnetization dynamics with a non-local damping. The sensitivity of the magnetization dynamics to the damping coefficient is studied by giving the limiting problem for small and large values of the parameter. Finally, we study the homogenization of the LLG equation in two types of structures, namely a composite material with strongly contrasted magnetic properties, and a periodically perforated material with surface anisotropy energy. The homogenized models are first obtained formally. The rigorous derivation is then performed using mainly the concepts of two-scale convergence, two-scale convergence on surfaces together with a new homogenization procedure for handling with the nonlinear terms. More precisely, an appropriate dilation operator is applied in a embedded cells network, the network being constrained by the microscopic geometry.

Key words. Ferromagnetism, micromagnetism, Landau-Lifshitz-Gilbert equation, asymptotic analysis, homogenization, two-scale convergence, semi-implicite finite difference scheme, numerical simulations.

This work benefited of the PHC VOLUBILIS project MA14/301, “Élaboration et analyse de modèles asymptotiques en micro-magnétisme, magnéto-élasticité et électro-élasticité”.

Remerciements

Cette thèse de doctorat a été réalisée dans le cadre d'une convention de cotutelle internationale entre l'Université de La Rochelle (France) et l'Université Moulay Ismaïl - FST Errachidia (Maroc) avec le soutien financier du **projet PHC Volubilis MA/14/301 - Campus France N°30357 NA**. Les recherches qui font l'objet de ce mémoire ont été réalisées sur deux sites : en France, au sein du Laboratoire MIA de l'Université de La Rochelle et au Maroc au sein du Laboratoire M2I, Equipe MAMCS de la FST Errachidia.

Je tiens à remercier ma directrice de thèse française **PR. CATHERINE CHOQUET**. Je vous remercie pour le temps et la patience que vous m'avez accordés tout au long de ces années en me fournissant d'excellentes conditions logistiques. Je garderai dans mon cœur votre générosité, votre compréhension et votre efficacité. Pour tout ce que vous m'avez donné, je vous remercie très sincèrement.

Je tiens à remercier mon directeur de thèse marocain **PR. MOUHCINE TILIOUA** d'avoir bien assuré la direction et l'encadrement de mes travaux de thèse. Merci pour votre gentillesse, votre patience et vos précieux conseils. J'ai beaucoup apprécié travailler à vos côtés tant sur le plan scientifique que sur le plan humain. Je garde toujours beaucoup de plaisir à discuter avec vous et à bénéficier de vos conseils.

Mes sincères remerciements et ma gratitude vont aussi au **PR. MOHA HAJAR** pour avoir accepté de juger ce travail et d'en présider le jury de soutenance. Que vous soyez assuré de mon entière reconnaissance.

Je remercie **PR. DOINA CIORANESCU** et **PR. ABDELILAH HAKIM** d'avoir accepté de rapporter sur cette thèse. Vos remarques pertinentes et vos conseils précieux m'ont beaucoup aidé à améliorer la qualité de ce travail. Soyez assurés, chers professeurs, de mon estime et de ma profonde gratitude.

Je remercie également **PR. NATÁLIA MARTINS** et **PR. DELFIM F. M. TORRES** pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux. Je vous suis profondément reconnaissant d'avoir fait le déplacement depuis Aveiro (Portugal) pour participer à ce jury.

Enfin, un grand Merci à mes parents, ma femme, ma fille Hajar, mes frères, mes sœurs et tous mes proches et amis, ainsi qu'à tous ceux qui ont toujours crû en moi. Veuillez trouver ici l'expression de mon profond respect et mes vifs remerciements.

Table des figures

2.1	Evolution des moyennes des composantes de l'aimantation $\langle m_1 \rangle, \langle m_2 \rangle$, et $ m - 1 $ en fonction du temps pour $\zeta = 2 \times 10^{-4}$ et $\alpha = 10^{-1}$	37
2.2	Tracé $\log t \mapsto \log \mathcal{E}_h^k$ pour $\alpha = 10^{-1}$	38
2.3	Tracé $\log t \mapsto \log \mathcal{E}_h^k$ pour $\zeta = 10^{-13}$ et $\alpha = 10^{-1}$	39
2.4	Tracé $\log t \mapsto \log \mathcal{E}_h^k$ pour $\zeta = 10^{-5}$	40
2.5	Une comparaison entre les solutions exacte et calculée : les composantes d'aimantation m_1, m_2 et m_3 en fonction de l'espace pour $\zeta = 4 \times 10^{-4}$ et $\alpha = 10^{-1}$	41
2.6	Tracé en échelle log-log de l'erreur en norme max (en haut) en fonction du pas en temps et (en bas) en fonction du pas en espace.	42
4.1	Exemple de domaine à structure périodique et cellule standard associée	60
4.2	Un exemple simple, $\Omega =]-1/2; 3/2[$. Représentation de $\Omega^1, \Omega^{1/2}$ et $\Omega^{1/3}$ avec les points correspondants appartenant à \mathcal{C}	82

Notations

NOTATIONS	DESCRIPTION
α	coefficient d'amortissement
\mathcal{S}^2	sphère unité dans \mathbb{R}^3
M, m, \mathbf{M}	aimantation
\mathcal{H}_e	champ effectif
$n, \nu, \partial_n, \partial_\nu$	normale unitaire sortante, dérivée normale
$\langle f \rangle_X$	valeur moyenne d'une fonction f par rapport à X
$ \Omega $	mesure de Lebesgue de Ω
$\partial\Omega = \overline{\Omega} - \Omega$	frontière de Ω
$K_{\text{loc}}(\Omega)$	espace des fonctions appartenant à $K(\omega)$ pour tout sous-domaine borné $w \subset\subset \Omega$
$K(\Omega, E)$	espace des fonctions appartenant à $K(\Omega)$, à valeurs dans l'espace E
$\mathcal{C}^{k,\lambda}(\Omega)$	espace de Hölder
$\mathcal{D}(\Omega)$	espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans Ω
LL, LLG	équation de Landau-Lifshitz, équation de Landau-Lifshitz-Gilbert
$\mathbb{L}^2(\Omega)$	espace des fonctions $(L^2(\Omega))^3$
$\mathbb{H}^1(\Omega)$	espace des fonctions $(H^1(\Omega))^3$
$\mathcal{C}_\#^\infty(Y)$	espace des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^3 qui sont Y -périodiques
$L_\#^2(\Omega)$	espace des fonctions de classe $L^2(\Omega)$, Ω -périodiques
$H_\#^1(\Omega)$	espace des fonctions de classe $H^1(\Omega)$, Ω -périodiques

Liste des publications

- M. Moumni, M. Tilioua. On a non local damping model in ferromagnetism, *J. Appl. Math.*, Art. ID 317947, 2015.
- M. Moumni, M. Tilioua. A finite difference scheme for a model of magnetization dynamics with inertial effects, *J. Engineering Mathematics*, 100 :95-106, 2016.
- C. Choquet, M. Moumni, M. Tilioua. Homogenization of the Landau-Lifshitz-Gilbert equation in a contrasted composite medium, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S*, A paraître, 2017.
- C. Choquet, M. Moumni, M. Tilioua. Homogenization of the Landau-Lifshitz-Gilbert equation with surface anisotropy energy, *Preprint*.

Introduction générale

Cette introduction esquisse le cadre mathématique dans lequel ce travail se positionne. Le contexte d'application sera décrit quant à lui dans le premier chapitre. Au cœur de tous les modèles de dynamique d'aimantation que nous allons utiliser, le lecteur reconnaîtra l'équation de Landau-Lifshitz. C'est donc son étude que nous allons contextualiser.

L'équation de Landau-Lifshitz (LL) ou sa version équivalente Landau-Lifshitz-Gilbert (LLG) a fait l'objet d'un très grand nombre d'études tant numériques que théoriques.

Le cadre général de l'analyse mathématique a été établi dans des travaux précédents, voir par exemple [113], [11], [28], en utilisant la méthode d'approximation de Faedo-Galerkin & Pénalisation (FGP). Dans [67], un résultat d'existence et d'unicité de solutions globales pour le système LL couplé aux équations de Maxwell en l'absence du champ d'échange est démontré. Des résultats ont été aussi obtenus pour des systèmes LLG modifiés, *i.e.*, avec d'autres termes de dissipation. Par exemple, la modification de LLG considérée dans [96] consiste en l'ajout au terme de dissipation standard d'un autre terme, d'ordre supérieur, du type $\Delta^2 M$. La méthode FGP est également utilisée pour résoudre ce problème. Dans [100], un modèle avec dissipation additionnelle de type friction, est étudié. Notons qu'un modèle avec des effets d'hystérésis est considéré dans [27]. Le comportement du moment magnétique y est décrit par l'équation LL avec un terme supplémentaire. Ce terme prend la forme d'un opérateur maximal monotone agissant sur la dérivée temporelle du moment magnétique. L'existence locale de solutions régulières est démontrée. Notons que dans le cadre de la dynamique de l'aimantation induite par injection de courant électrique, le travail [110] traite l'existence globale de solutions faibles à une équation LLG où un terme de transport est ajouté au champ effectif tenant compte de l'effet du courant injecté. Toutes les preuves sont basées sur une certaine pénalisation et différents

types de régularisation. Les améliorations les plus récentes, à la fois des méthodes de production et des méthodes de mesure, amènent à de très nombreux raffinements phénoménologiques de LL, toujours non linéaires. Ces non-linéarités ne permettent souvent pas d'associer naturellement au problème une énergie d'entropie qui justifie l'existence mathématique de solutions et permette en particulier de prouver la convergence d'une sous-suite de solutions du problème pénalisé vers une solution du problème originel. Dans ce cadre il est intéressant de comprendre, d'analyser en amont le comportement du modèle.

En ce qui concerne les approches numériques pour l'équation LL/LLG générale, plusieurs stratégies ont été employées pour la discrétisation en temps et en espace. Nous nous limitons à mentionner quelques travaux et nous renvoyons par exemple aux articles de revue [35, 51, 73] pour un état de l'art plus complet. La discrétisation en espace est discutée dans les articles suivants : Dans [84], des méthodes de différences finies portant sur l'équation dynamique (discrétisation du champ effectif) et sur l'énergie libre (discrétisation de l'énergie) sont présentées. Une méthode d'éléments finis est utilisée dans [49]. Le champ d'aimantation est approchée par des fonctions linéaires par morceaux et le champ effectif est obtenu à partir de l'énergie discrétisée. Dans [46], une méthode d'éléments finis avec des fonctions linéaires par morceaux est appliquée à l'équation LLG. Plusieurs schémas de discrétisation en temps préservant l'amplitude de l'aimantation ont été développés. La méthode de projection de Gauss-Seidel proposée dans [115, 52] utilise une autre formulation de l'équation LL et les termes gyromagnétique et d'amortissement sont traités séparément pour surmonter la difficulté associée à la non linéarité. La méthode résultante est de premier ordre et inconditionnellement stable. Dans [65], une méthode d'intégration semi-analytique est développée en intégrant analytiquement le système d'ODE obtenu à l'issue d'une discrétisation spatiale de l'équation LL. Cette méthode est d'ordre un mais explicite, ainsi elle fait l'objet d'une contrainte CFL sur le pas en temps. Une méthode d'intégration géométrique a été appliquée dans [71], et dans un cadre plus général [79], utilisant la transformation de Cayley pour passer de l'équation LL à un groupe de Lie des rotations tridimensionnelles. A la différence des méthodes d'intégration semi-analytique, cette méthode est plus souple pour la construction des schémas numériques d'ordre élevé. Nous mentionnons aussi la méthode du point-milieu [22, 41] qui est d'ordre deux, inconditionnellement stable, et préserve l'amplitude de l'aimantation ainsi que les structures hamiltonienne et

de Lyapunov de l'équation LL. Des schémas semi-discrets sont introduits pour des formulations 2D [97] et 3D [33] pour l'équation LL et des estimations d'erreur ont été obtenues sous l'hypothèse de l'existence d'une solution forte. Des méthodes de type éléments finis pour l'équation LL sont typiquement présentées avec une analyse rigoureuse de la convergence vers des solutions faibles. Dans [8, 6, 10], une méthode d'éléments finis est développée pour une forme équivalente de l'équation LL. Cette méthode est d'ordre un en temps et en espace et nécessite un solveur linéaire à chaque pas en temps. Dans [72, 9], la méthode est améliorée pour atteindre l'ordre deux en temps. Dans [18], Bartels and Prohl ont considéré une méthode d'intégration implicite en temps pour l'équation LLG, qui est inconditionnellement stable, mais nécessite un solveur non linéaire à chaque pas en temps. Dans [35], Cimrák a proposé un schéma pour l'équation LL en utilisant une technique du point-milieu, mais la mise en œuvre d'un solveur non linéaire est nécessaire à chaque pas en temps. Plus récemment, Kim et Lipnikov [69] ont proposé et analysé des schémas aux différences finies mimétiques (explicite et implicite) pour l'équation LL. Il s'agit d'une formulation mixte de l'équation LL avec une projection sur la sphère unité pour préserver l'amplitude de l'aimantation. Des tests numériques sont réalisées sur des maillages généraux par exemple déformés ou aléatoires. D'autre part, pour des résultats concernant le couplage de l'équation LLG avec le système de Maxwell complet nous renvoyons à [29], [15], [16], [34], [78], [77]. Dans le cadre des interactions magnéto-élastiques, un schéma aux différences finies est proposé et sa stabilité discutée dans [29]. C'est également un schéma de type différences finies que nous construirons ici.

Les avancées technologiques permettent (mais aussi nécessitent) aujourd'hui la production systématique de matériaux composites, très hétérogènes, et ce à une échelle très fine (microscopique, nanoscopique). Pour déterminer les propriétés effectives de tels matériaux, le coût en terme de puissance de calcul reste encore aujourd'hui très élevé. Il s'agit d'un contexte typique qui donne du sens à des études par homogénéisation. Il existe une vraie tradition physique pour ce type d'approche dans le contexte du magnétisme (voir par exemple Maxwell Garnett [83] et Bruggeman [26]). Elle est aujourd'hui relancée par des observations surprenantes sur des nanomatériaux composites ayant des propriétés complètement différentes de celles de chacun de leurs constituants. Ceci ouvre de riches perspectives pour des travaux d'homogénéisation mathématique. Mais il n'existe encore que très peu de résultats. Pourtant, le fait que les matériaux à

modéliser soient manufacturés permet de justifier une des hypothèses classiques d'une partie de la théorie de l'homogénéisation, la périodicité. Nous ne citerons ici comme résultat général que le travail [7] qui présente l'homogénéisation de la fonctionnelle de Gibbs–Landau dans sa forme générale pour un matériau périodiquement hétérogène. Les méthodes sont la Γ -convergence et la convergence à double échelle.

Dans cette thèse, on propose une approximation numérique d'un modèle de la dynamique d'aimantation avec effets d'inertie. Nous étudions aussi un modèle mathématique décrivant l'amortissement non local dans les ferromagnétiques. Par ailleurs, la question de l'homogénéisation des structures ferromagnétiques est considérée. Plus précisément, les problèmes de composites ferromagnétiques à fort contraste des propriétés magnétiques et les matériaux périodiquement perforés avec anisotropie de surface sont étudiés et les problèmes effectifs correspondants sont obtenus.

Cette thèse est divisée en cinq chapitres.

Dans le premier chapitre, nous rappellerons des notions générales du ferromagnétisme en introduisant les bases physiques régissant les mécanismes d'aimantation et les différentes contributions d'énergies micromagnétiques qui sont responsables de la distribution de l'aimantation dans les matériaux ferromagnétiques. Nous y présenterons les modèles classiques de la dynamique d'aimantation ainsi que leurs propriétés mathématiques fondamentales.

Le deuxième chapitre concerne l'approximation numérique de la dynamique d'aimantation avec inertie. Il fait suite au travail [56] où un résultat d'existence globale est démontré. Le modèle adopté est celui proposé dans [40], voir aussi [116]. Il s'agit d'une forme modifiée de l'équation LLG pour l'évolution du champ d'aimantation dans un matériau ferromagnétique rigide. La modification réside dans la présence dans le champ effectif d'un terme d'accélération qui décrit l'inertie. Dans [93], la dynamique d'une aimantation uniforme avec effets d'inertie est étudiée dans un contexte de résonance ferromagnétique. Des prédictions analytiques et des simulations numériques des équations complètes dans le modèle LLG avec inertie sont présentées. Il est également montré que, en plus de la résonance de précession habituelle, le modèle inertiel donne un deuxième pic de résonance associé à la dynamique de nutation à condition que l'amortissement ne soit pas trop grand. La résolution analytique des équations de la dyna-

mique donne lieu à la fois à des fréquences angulaires de précession et de nutation. Dans le contexte de l'étude des domaines magnétiques, le travail [45] considère le mouvement des parois magnétiques et une discussion sur la dépendance du déplacement de ces parois en fonction des paramètres du matériau sous l'influence des effets d'inertie est proposée. Plus précisément, avec un profil d'ondes progressives, des parois magnétiques de type Bloch ont été décrites et leur déplacement a été étudié dans les cas stationnaire et précessionnel. Ici, nous proposons un schéma de type différences finies semi-implicite pour le modèle adopté tout en donnant un critère de stabilité numérique. On présente des exemples de calcul de courbes d'aimantation pour montrer l'effet d'inertie sur la dynamique. Des tests numériques illustrant la performance du schéma et vérifiant son ordre de convergence en temps et en espace sont aussi proposés. Les résultats de ce chapitre font l'objet de l'article [88] publié dans *Journal of Engineering Mathematics*, 2016.

Le troisième chapitre aborde un modèle d'amortissement non local pour lequel l'effet des courants de spin longitudinaux est négligeable [89]. Cette hypothèse de négligeabilité, induite par la physique du problème, s'avère ne pas être simplificatrice du point de vue mathématique. En effet, elle déséquilibre en quelque sorte la formulation en énergie du système. C'est emblématique des modèles modifiés proposés aujourd'hui par les physiciens. Après avoir présenté le modèle mathématique qui consiste en une forme modifiée de l'équation LLG, nous donnons la définition naturelle de solution faible associée au problème. Nous caractérisons ensuite le comportement des éventuelles solutions en temps long en montrant que tout point de l'ensemble ω -limite d'une trajectoire d'aimantation est un point stationnaire. La sensibilité du modèle par rapport au paramètre d'amortissement non local est également discutée. Les résultats de ce chapitre font l'objet de l'article [87] publié dans *Journal of Applied Mathematics*, 2015.

Dans le quatrième chapitre, on s'intéresse à l'homogénéisation de l'équation LLG dans un milieu ferromagnétique composite fortement hétérogène. La littérature n'offre que très peu de travaux portant sur l'homogénéisation des ferromagnétiques. Dans le cadre dynamique, l'homogénéisation des multicouches ferromagnétiques a été étudiée dans [57]. Les microstructures (empilements) considérées sont constituées d'une alternance de couches ferromagnétiques (FM) et de couches non magnétiques (NM) avec un couplage inter-couches aux interfaces FM/NM. Un problème homogénéisé a été obtenu lorsque le nombre de couches tend vers l'infini. Une

généralisation des résultats de [57] a été proposée dans [101] où on a étudié l’homogénéisation de l’équation LLG dans de tels systèmes en tenant compte de l’énergie d’anisotropie de surface. Dans le cadre statique, le travail [7] considère l’homogénéisation d’un matériau composite ferromagnétique où les hétérogénéités sont distribuées périodiquement dans le matériau. L’homogénéisation de la fonctionnelle d’énergie est étudiée en utilisant la Γ -convergence et la convergence à deux échelles et une dérivation rigoureuse de l’énergie libre (de Gibbs–Landau) homogénéisée est proposée lorsque la taille des hétérogénéités tend vers 0. Pour notre étude, le milieu est composé de deux matériaux ferromagnétiques différents présentant un fort contraste sur les propriétés magnétiques. Dans la partie du domaine à dynamique lente, que l’on appelle matrice, le champ effectif, le champ démagnétisant et le champ d’anisotropie sont mis à l’échelle par un petit paramètre ϵ représentant la taille des blocs de la matrice. Cette mise à l’échelle préserve la physique de l’aimantation lorsque ϵ tend vers zéro. En utilisant la théorie de l’homogénéisation, nous obtenons le modèle effectif correspondant. Plus précisément, nous utilisons le concept classique de la convergence à double échelle, mais aussi un opérateur de dilatation couplé à une nouvelle méthode de réduction de dimension par grilles emboîtées pour la manipulation des termes non linéaires. Nous montrons que la partie moins “magnétisée” du milieu contribue à travers des termes de mémoire supplémentaires dans le champ effectif du modèle homogénéisé qui est de type LLG. Les résultats de ce chapitre font l’objet de l’article [32] accepté pour publication dans *Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series S*, 2017.

Les structures ferromagnétiques perforées sont aussi considérées dans cette thèse. Plus précisément, le chapitre 5 considère un matériau ferromagnétique périodiquement perforé. Dans ce contexte, nous citons le travail [102] dans lequel l’homogénéisation de l’équation LLG a été étudiée avec des conditions aux limites de Neumann homogènes au bord de l’échantillon. L’étude présentée ici se différencie de [102] par l’introduction de la condition aux limites non linéaire de Rado–Weertman [98]. Cette condition aux limites importante dans le cas des nano-matériaux a été l’objet de l’étude [59] dans le cadre de la recherche des modèles réduits de couches minces ferromagnétiques (réductions 3D-2D et 3D-1D). La condition de Rado–Weertman étant imposée aux bords des perforations, l’homogénéisation du modèle est effectuée et le problème effectif est obtenu en prenant en compte les variations possibles de l’ordre de grandeur de la constante

d'anisotropie de surface par rapport à la taille de perforations. C'est la condition aux bords de Rado–Weertman qui fait toute la difficulté et l'originalité du problème. Formellement, la difficulté pour l'homogénéisation est comparable à celle induite par une condition aux bords de type Robin (ou Fourier) non linéaire. Dans le cas où l'effet de l'énergie de surface est pondérée par une puissance au moins 1 de la taille des perforations (on parle de condition de faible ancrage dans le contexte Ginzburg–Landau), l'homogénéisation de problèmes scalaires et linéaires (Laplacien) a été faite par Berlyand dans [20] par exemple. Les résultats ont été étendus dans [21] au vu des avancées de [37, 38]. Il est important de noter que la convergence à double échelle surfacique développée dans [5] n'est elle aussi calibrée que pour des termes de surface fortement pondérés. Si l'énergie de surface agit à l'ordre principal, d'autres difficultés s'ajoutent à cette absence d'outils mathématiques permettant une mise à l'échelle naturelle. D'abord, elle peut faire totalement dégénérer l'équation (comme dans le cas de conditions aux bords de Dirichlet), ce qui est contradictoire avec la contrainte physique de conservation de la norme du vecteur aimantation. Pour contrer ce type de comportement, on fait souvent l'hypothèse que le volume total des perforations tend vers zéro lorsque leur nombre se multiplie. On peut aussi traiter au contraire un cas où ce volume n'est pas négligeable, plus comparable à la situation envisagée par [94] (où une condition aux bords de type Robin complète une EDP parabolique quasi-linéaire). Mais cela nécessite de très fortes contraintes sur les paramètres physiques du système.

Les résultats de ce chapitre font l'objet du travail [31] soumis pour publication.

Nous terminons ce mémoire par une conclusion sur les travaux effectués et par une présentation de quelques perspectives de recherche envisagées.

Chapitre 1

Modélisation des matériaux ferromagnétiques

Sommaire

1.1	Ferromagnétisme : notions générales	10
1.2	Bases physiques régissant les mécanismes d'aimantation	12
1.3	Les modèles LL et LLG	17
1.4	Adimensionnement des équations	21
1.5	Propriétés mathématiques élémentaires	22

1.1 Ferromagnétisme : notions générales

Découverts dans l'Antiquité, les matériaux ferromagnétiques ont été surtout étudiés à partir du 19^e siècle. Ils ont connu un regain d'intérêt ces dernières décennies et sont maintenant l'objet d'études intensives. Cela est dû à leur importance dans de nombreuses applications industrielles. Parmi ces applications, citons par exemple le stockage magnétique (disques durs, disques magnéto-optiques, ...), la gestion de l'énergie où les circuits magnétiques jouent un rôle important, la protection radar (objets furtifs) et les télécommunications.

Il ne saurait être question de produire ici une véritable introduction aux matériaux magnétiques, tout d'abord parce qu'il existe d'excellents ouvrages de référence parmi lesquels nous citons par exemple Hubert-Schäfer [64], Aharoni [2], du Trémolet de Lacheisserie [44] dans lesquels cette présentation est très complète, ensuite parce que quelques pages ne sauraient y suffire. Plus modestement, nous nous contenterons de rappeler quelques notions de bases qui seront nécessaires à une bonne compréhension de certaines parties de cette thèse.

Jusqu'au 19^{ème} siècle, les effets électriques et magnétiques ont été observés comme deux phénomènes physiques indépendants. En 1820, Oersted a prouvé que les courants électriques peuvent influencer l'aiguille d'une boussole. Ampère et Faraday ont expliqué ce comportement et ont créé la base de la théorie unifiée de l'électrodynamique. Les premières investigations quantitatives sur les phénomènes électriques et magnétiques ont été faites par Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806). Leur description unifiée est le travail de James Clerk Maxwell (1831-1879) [82].

Depuis lors, les aimants permanents ont trouvé beaucoup d'applications dans l'énergie et dans les dispositifs de mémorisation. Autour des années 1900, une nouvelle application a été trouvée : l'enregistrement magnétique [48]. L'ingénieur danois W. Poulsen fut le premier à avoir enregistré les signaux acoustiques sur un fil ferromagnétique. En 1927, la bande magnétique, un ruban perforé enduit ou revêtu d'un liquide ferromagnétique, a été inventée aux Etats-Unis et en Allemagne où une bande contenant la poudre de fer a été utilisée. Le matériau magnétique n'était plus un aimant en bloc, mais composé de petites particules magnétiques. Dans les années 40, les bandes d'oxyde ont été développées et peu après l'apparition des dispositifs d'enregistrement sonore, les signaux audio-visuels ont été également enregistrés sur des bandes

magnétiques. Au cours de ces dernières années, la densité d'enregistrement magnétique n'a cessé d'augmenter, passant de 10^3 bits/mm² en 1971 à 10^7 bits/mm² en 2000. Ceci a été rendu possible grâce à l'apparition de matériaux nouveaux possédant des champs coercitifs de plus en plus élevés, passant par exemple de 22 kA. m⁻¹ en 1972 à 140 kA. m⁻¹ en 1991 [70].

Les équations de Maxwell décrivent les champs électriques et magnétiques à une échelle macroscopique. À l'échelle atomique, une autre théorie doit être utilisée pour une description microscopique appropriée des propriétés physiques de la matière. La modélisation des processus de l'aimantation dans les matériaux à particules ferromagnétiques fines doit être faite à un niveau quelque peu intermédiaire, qu'on pourrait qualifier de mésoscopique. En effet, la taille des particules est de l'ordre du nanomètre ou du micromètre. Aussi, les effets de la formation des domaines magnétiques doivent être inclus dans le modèle physique et les équations de Maxwell ne seront pas suffisantes pour une description réaliste. Plus largement, les effets qui proviennent de la structure atomique des solides doivent être considérés. Par exemple, l'anisotropie magnétocristalline induite par le treillis cristalin, les positions périodiques des atomes qui composent le solide et l'interaction d'échange entre les moments magnétiques des électrons qui est un effet typiquement quantique. Mais, dans les modèles purement quantiques, la taille des particules excède la taille des systèmes, ce qui n'est pas envisageable ici. Il faut donc inclure, phénoménologiquement, les phénomènes dans des modèles de physique classique, à l'échelle du milieu continu. Cette théorie, désormais classique, a été initiée par un article de Landau et Lifshitz en 1935 [75]. William Fuller Brown a contribué par plusieurs travaux et a donné à cette théorie le nom de Micromagnétisme [25]. Il voulait souligner le fait que cette théorie, dans laquelle les détails microscopiques de la structure atomique sont souvent "ignorés" pour pouvoir considérer le matériau d'un point de vue macroscopique comme un milieu continu, devrait tout de même décrire les effets des phénomènes microscopiques.

Ajoutons quelques mots sur les "parois magnétiques". L'aimantation d'un matériau ferromagnétique correspond à l'orientation des dipôles élémentaires dans une même direction. À la différence des paramagnétiques, cette orientation peut se faire spontanément en l'absence d'un champ extérieur. La région de l'espace dans laquelle tous les moments magnétiques sont orientés selon une même direction s'appelle un *domaine* (de Weiss) et les limites entre ces domaines, des *parois* (de Bloch). Si nous plaçons un matériau ferromagnétique dans un champ

extérieur H , les parois vont se déplacer de manière à renforcer le champ H extérieur. Lorsque H augmente à partir de zéro, les parois de Bloch se déplacent, entraînant une aimantation de l'échantillon et donc un champ B non nul. Quand H est suffisamment intense, le domaine favorablement orienté occupera tout le volume du matériau qui est alors magnétisé à saturation. Le champ est alors B_s , le champ d'induction maximal de l'échantillon. Si nous diminuons H , nous obligeons les parois à se déplacer de nouveau. Le mouvement de retour n'est pas le même que celui suivi lorsque H augmentait parce qu'une partie du mouvement des parois est irréversible. L'aimantation qui reste lorsque H est nul est dite *rémanente* et le champ rémanent sera noté B_r . Le champ nécessaire pour ramener B à zéro est appelé le *champ coercitif*.

1.2 Bases physiques régissant les mécanismes d'aimantation

Différents termes d'anisotropie sont présents dans tout objet ferromagnétique. Chacune de leurs contributions a tendance à orienter l'aimantation suivant certaines directions “*faciles*” correspondant à des minimas de l'énergie libre. Généralement, l'énergie d'une couche mince magnétique est décomposée de façon phénoménologique en différents termes d'anisotropie que nous détaillons dans les paragraphes suivants. On notera Ω le domaine occupé par le matériau ferromagnétique et $\partial\Omega$ sa surface.

1.2.1 Energies micromagnétiques

Dans la théorie du micromagnétisme, l'aimantation est représentée par une fonction continue de la position. L'aimantation est de norme constante M_s mais peut changer de direction d'un point à un autre. On a

$$|M| = \begin{cases} M_s & \text{dans } \Omega, \\ 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \end{cases}$$

et, dans Ω , chaque élément de volume, appelé aussi spin magnétique, est représenté par l'aimantation

$$M = M_s \tilde{m}$$

de norme constante M_s mais de direction \tilde{m} qui change. Le vecteur unitaire $\tilde{m}(x, y, z)$ est défini par $\tilde{m} = \tilde{m}_x u_1 + \tilde{m}_y u_2 + \tilde{m}_z u_3$ où (u_1, u_2, u_3) est une base orthonormée de \mathbb{R}^3 .

Il y a quatre contributions importantes à l'énergie libre de Landau d'un matériau ferromagnétique : l'énergie d'échange, l'énergie d'anisotropie de volume, l'énergie du champ démagnétisant, et l'énergie de Zeeman dans un champ externe [86].

Nous allons passer en revue ces différentes énergies qui sont responsables de la distribution de l'aimantation dans les matériaux ferromagnétiques en spécifiant leurs expressions.

1.2.2 Energie d'échange

Bien que les actions d'échange introduites par Heisenberg - et qui sont à l'origine du ferromagnétisme - soient d'origine électrostatique, leur effet est de courte portée. Ces interactions sont équivalentes, conformément au langage de Weiss, à l'action d'un champ fictif (le champ moléculaire) si bien que tout se passe comme si chaque atome exerçait sur l'un quelconque de ses voisins actifs un champ magnétique. L'énergie du couplage est donc minimale lorsque les moments magnétiques de ces atomes sont parallèles. Si ce n'est pas le cas, l'énergie potentielle du couple des deux atomes augmente d'une quantité qui dépend des spins des atomes qui interagissent mutuellement ainsi que de leur orientation relative. La formulation générale et phénoménologique proposée par Landau et Lifshitz [75] de la densité d'énergie d'échange est

$$\mathcal{E}_{\text{exc}}(M) = \int_{\Omega} A |\nabla \tilde{m}|^2 = \int_{\Omega} A \frac{|\nabla M|^2}{M_s^2} = \int_{\Omega} \frac{A}{M_s^2} M \cdot \nabla^2 M = \frac{1}{2} \int_{\Omega} M \cdot \left(\frac{2A}{M_s^2} \nabla^2 M \right). \quad (1.1)$$

Dans cette expression, la densité d'énergie est écrite comme produit de l'aimantation M et du champ d'échange. Le champ d'échange dépend alors du gradient de l'aimantation, du paramètre de la densité d'énergie d'échange A et de l'aimantation spontanée M_s :

$$H_{\text{exc}}(M) = \frac{2A}{M_s^2} \nabla^2 M. \quad (1.2)$$

1.2.3 Energie d'anisotropie de volume

L'énergie magnétocristalline d'un matériau ferromagnétique résulte du fait que l'aimantation tend à s'aligner selon certains axes cristallographiques, dits *axes d'aimantation facile*, qui seront notés U par la suite. L'aimantation du cristal suivant les autres directions nécessite une

dépense d'énergie bien supérieure à celle nécessaire pour l'aimanter suivant un axe d'aimantation facile. Cet excès d'énergie est défini sous le nom d'*énergie d'anisotropie*. Elle dépend de l'orientation de l'aimantation par rapport aux axes cristallins et est invariante sous l'action du groupe de symétrie du cristal. La densité volumique d'énergie d'anisotropie \mathcal{E}_{vol} , peut être exprimée sous la forme

$$\mathcal{E}_{\text{vol}}(M) = \frac{K_v}{2} \int_{\Omega} ((M \cdot U)^2 - M_s^2) dx. \quad (1.3)$$

Le paramètre K_v est appelé constante d'anisotropie de volume. Le champ d'anisotropie de volume se déduit alors comme étant la variation par rapport à l'aimantation M de la densité d'énergie $\mathcal{E}_{\text{vol}}(M)$:

$$H_v(M) = K_v U \times (U \times M) = K_v ((M \cdot U) - M). \quad (1.4)$$

1.2.4 Energie du champ démagnétisant

La répartition de l'aimantation dans un matériau ferromagnétique, ainsi que les discontinuités qui peuvent exister aux surfaces du solide et les pseudo-charges réparties sur la surface du matériau engendrent un champ démagnétisant H . Ce champ s'oppose à l'aimantation. Dans le cas d'un matériau très mince, il a tendance à coucher et maintenir l'aimantation dans le plan du film pour minimiser la densité d'énergie dipolaire. En d'autres termes, le champ démagnétisant est pratiquement nul lorsque l'aimantation demeure dans le plan de la couche. Son calcul pose de sérieux problèmes car c'est un champ non local et l'aimantation peut varier d'un point à un autre du matériau. Un matériau magnétique caractérisé par une aimantation spontanée M_s , crée un champ magnétique H qui obéit au modèle de Maxwell. Dans le cas de petits domaines, l'approximation magnétostatique des équations de Maxwell est admissible :

$$\text{div}(\mu_0 H + M) = 0, \quad \text{rot } H = 0, \quad (1.5)$$

où μ_0 est la perméabilité du vide.

Dans le cas par exemple d'une couche mince ferromagnétique, la densité d'énergie du champ démagnétisant est donc définie par

$$\mathcal{E}_d(M) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} M \cdot H dx = -\frac{\mu_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |H|^2 dx. \quad (1.6)$$

Dans le cas où l'on considère le système de Maxwell complet

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E - \text{rot } H = 0 \\ \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} + \text{rot } E = -\frac{\partial M}{\partial t}. \end{cases} \quad (1.7)$$

l'énergie que l'on considère a la forme suivante

$$\mathcal{E}_d(M) = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (\varepsilon_0 |E|^2 + \mu_0 |H|^2) dx. \quad (1.8)$$

où ε_0 est la permittivité électrique et μ_0 est la conductivité électrique.

1.2.5 Energie Zeeman

Elle correspond à l'interaction entre M et un champ extérieur H_0 appliqué au matériau. Sa densité s'écrit

$$\mathcal{E}_{\text{ext}} = - \int_{\Omega} M \cdot H_0 dx. \quad (1.9)$$

Cette énergie traduit la tendance de l'aimantation à s'aligner sur le champ magnétique appliqué. Elle est proportionnelle au volume de la couche. Pour un champ extérieur uniforme, cette énergie dépend seulement de la moyenne de l'aimantation et non de la structure particulière en domaines magnétiques du matériau ferromagnétique. Dans cette thèse, nous ne considérerons aucun champ extérieur c'est-à-dire $H_0 = 0$.

1.2.6 Energie de surface

Aux interfaces d'une couche mince, le matériau magnétique a une structure de bande très fortement perturbée par des effets d'hybridation avec le métal adjacent et par le nombre réduit de voisins magnétiques. Cet effet des interfaces modifie les propriétés magnétiques de l'état fondamental définies à la température $T = 0 \text{ K}$ (existence du ferromagnétisme, moment magnétique par atome, etc). Par exemple, un métal comme le vanadium, non magnétique à l'état massif, peut acquérir en couche mince une aimantation plus importante que celle du fer. D'autre part, une couche ultra-mince est assimilable à un système quasi-bidimensionnel, pour lequel les lois des matériaux massifs ne sont plus valables : cette "réduction de dimension" se traduit par une variation thermique différente de l'aimantation et par une modification des paramètres de

la transition de phase ferromagnétique-paramagnétique [119]. Enfin, la rupture de la symétrie à une interface crée une orientation privilégiée (cas où $K_s > 0$ ci-dessous) ou pénalisée (cas où $K_s < 0$) suivant la normale à la surface du matériau. L'une des propriétés résultantes les plus intéressantes est l'apparition d'une “*anisotropie d'interface*” pour la direction de l'aimantation. Cette contribution importante pour les couches ultra-minces s'ajoute aux termes d'anisotropie déjà présents dans le métal massif ferromagnétique. L'énergie de surface correspondante, $\mathcal{E}_{\text{surf}}(t)$, est associée au champ

$$H_{\text{surf}} = -K_s(n \cdot M)n \text{ sur } \partial\Omega$$

où n est la normale à la surface, $K_s \in \mathbb{R}$ étant le paramètre d'anisotropie de surface (qui peut être positive ou négative).

1.2.7 Énergie totale et champ effectif

En conséquence, pour $t \geq 0$, l'énergie magnétique totale est définie comme étant la somme des contributions engendrées dans le volume à savoir $(\mathcal{E}_{\text{exc}}(t), \mathcal{E}_{\text{vol}}(t), \mathcal{E}_{\text{mag}}(t))$ et celles de surface $(\mathcal{E}_{\text{surf}}(t))$. Nous avons une densité d'énergie hamiltonienne définie par

$$\mathcal{E}_{\text{tot}}(t) = \mathcal{E}_{\text{exc}}(t) + \mathcal{E}_{\text{vol}}(t) + \mathcal{E}_{\text{mag}}(t) + \mathcal{E}_{\text{surf}}(t). \quad (1.10)$$

L'état d'équilibre de l'aimantation est telle que \mathcal{E}_{tot} est minimale par rapport aux variations de M qui sont consistantes avec la contrainte $|M(x)| = M_s$. Les équations d'équilibre sont alors [25] :

$$M \times \left[H_0 + \frac{A}{M_s^2} \Delta M - K_v(M - (M \cdot U)U) + H \right] = 0 \quad (1.11)$$

dans le volume du matériau, et

$$M \times \left[\frac{A}{M_s^2} (n \cdot \nabla) M - K_s(n \cdot M)n \right] = 0, \quad (1.12)$$

sur le bord selon que l'on tient compte de l'anisotropie de surface ($K_s \neq 0$) ou non.

L'expression entre crochets dans (1.11) est appelée le *champ effectif* \mathcal{H}_e . Il correspond aux “forces” obtenues par différentiation de la densité d'énergie hamiltonienne \mathcal{E}_{tot} :

$$\mathcal{H}_e = -\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{tot}}}{\partial M} \quad (1.13)$$

dans le volume du matériau ferromagnétique.

1.3 Les modèles LL et LLG

1.3.1 L'équation dynamique

La recherche dans le micromagnétisme s'est orientée sur l'étude des mécanismes de rotation des spins magnétiques dans les matériaux ferromagnétiques. Le caractère anisotrope de l'aimantation des couches ferromagnétiques favorisait cette approche. La modélisation peut être abordée par le biais de la mécanique quantique [104] en considérant des interactions du type spin-photon. Mais ces théories microscopiques sont difficilement applicables. Nous devons nous contenter des théories macroscopiques, donc essentiellement phénoménologiques. Celles-ci doivent traduire le phénomène suivant : alors que le champ d'excitation haute fréquence, perpendiculaire à l'axe d'aimantation facile d'un matériau ferromagnétique, tend à écarter l'aimantation de sa position d'équilibre, les forces liées à l'amortissement tendent à contrecarrer la variation d'aimantation et donc à la ramener vers sa position d'équilibre. Plusieurs théories phénoménologiques ont été proposées pour représenter cet amortissement, par exemple l'approche de Landau-Lifshitz [75] et l'approche de Bloch-Bloembergen [23]. Nous ne présenterons ici que la première. Avant de donner une description de l'approche de Landau-Lifshitz, nous avons préféré écrire formellement la forme générale de l'équation de Landau-Lifshitz (LL) et sa version équivalente de Gilbert (LLG) [53] :

Equation de Landau-Lifshitz :

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\gamma_{LL} M \times \mathcal{H}_e + \alpha_{LL} M \times (M \times \mathcal{H}_e). \quad (1.14)$$

Equation de Landau-Lifshitz-Gilbert :

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\gamma_G M \times \mathcal{H}_e - \alpha_G M \times \frac{\partial M}{\partial t}. \quad (1.15)$$

Relations entre les coefficients de Landau-Lifshitz et de Gilbert

On démontre (voir par exemple [108]) que la relation liant les coefficients (α_G, γ_G) et $(\alpha_{LL}, \gamma_{LL})$ est

$$\gamma_G = \gamma_{LL} + \frac{M_s^2 \alpha_{LL}^2}{\gamma_{LL}} \quad \text{et} \quad \alpha_G = \frac{\alpha_{LL}}{\gamma_{LL}}. \quad (1.16)$$

Ici (α_G, γ_G) et $(\alpha_{LL}, \gamma_{LL})$ sont les paramètres “gyromagnétique” et “d’amortissement”. ($\alpha_G < 0$ et $\gamma_G > 0$).

1.3.2 Description de l’approche de Landau-Lifshitz

Pour décrire l’approche de Landau-Lifshitz, nous considérons des mouvements que peuvent effectuer les moments magnétiques autour de leurs positions d’équilibre. Le point de départ de cette dynamique est le fait que tout moment magnétique M est lié à un moment cinétique I par la relation

$$M = \gamma_0 I, \quad (1.17)$$

où γ_0 est le rapport gyromagnétique du système de moments magnétiques. Dans le système des unités Gaussien,

$$\gamma_0 = ge/2mc,$$

$e = -|e|$ et m sont respectivement la charge et la masse électroniques, c est la vitesse de lumière, et g le facteur de Landé est habituellement proche de 2. Lorsque le matériau est plongé dans un champ magnétique \mathcal{H} , le moment magnétique M est soumis à un couple

$$\Gamma = \mu_0 M \times \mathcal{H}. \quad (1.18)$$

Le principe fondamental de la dynamique nous permet d’écrire l’équation du mouvement

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\mu_0 M \times \mathcal{H}, \quad (1.19)$$

c’est-à-dire

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\mu_0 \gamma_0 M \times \mathcal{H}. \quad (1.20)$$

En 1935, Landau et Lifshitz [75] ont proposé une équation qui introduit formellement l'amortissement du mouvement du vecteur aimantation. Pour cela ils rajoutent à l'équation (1.20) un terme supplémentaire \mathfrak{B} , vecteur dirigé perpendiculairement à la fois à M et au couple $M \times \mathcal{H}$, qui tend ainsi à ramener M dans la direction de \mathcal{H} . Ce terme supplémentaire peut s'écrire

$$\mathfrak{B} = -\frac{\alpha}{M_s} M \times (M \times \mathcal{H}), \quad (1.21)$$

où α est une constante phénoménologique positive. L'interprétation physique de cette constante est encore mal connue. L'équation du mouvement de l'aimantation devient alors

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\mu_0 \gamma_0 (M \times \mathcal{H}) - \frac{\alpha}{M_s} \left[M \times (M \times \mathcal{H}) \right]. \quad (1.22)$$

Le champ \mathcal{H} doit être considéré comme le champ effectif \mathcal{H}_e ; l'équation précédente devient alors

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\gamma (M \times \mathcal{H}_e) - \frac{\alpha}{M_s} \left[M \times (M \times \mathcal{H}_e) \right] \quad (1.23)$$

où l'on a noté $\gamma = \mu_0 \gamma_0$.

Nous ne pousserons pas plus loin la description physique associée à (1.23) afin de nous tourner vers les aspects mathématiques liés à (1.23). La version de Gilbert s'obtient directement en utilisant les deux formules de (1.16). Nous obtenons alors l'équation de Landau-Lifshitz-Gilbert suivante

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\gamma} M \times \mathcal{H}_e + \frac{\alpha}{\gamma M_s} M \times \frac{\partial M}{\partial t}. \quad (1.24)$$

1.3.3 Couplage avec les équations de Maxwell

Ces équations bien connues sont au nombre de quatre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B}{\partial t} = -\text{rot } E, \\ \text{div } B = 0, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial D}{\partial t} = -j + \text{rot } H, \\ \text{div } D = Q. \end{array} \right. \quad (1.25)$$

Elles portent sur (i) D , l'induction électrique, (ii) E , le champ électrique, (iii) B , l'induction magnétique, (iv) H , le champ magnétique. Par ailleurs, le scalaire Q et le vecteur j désignent respectivement la densité macroscopique de charge électrique et la densité macroscopique du

courant. Dans notre cas, nous supposons toujours que $Q = 0$ et, pour les courants, que la loi d'Ohm est vérifiée :

$$j = \sigma E, \quad (1.26)$$

avec σ la conductivité, qui sera presque nulle dans le cas des ferrites. Les équations de Maxwell sont générales en ceci qu'elles s'appliquent à tous les milieux. Pour pouvoir prévoir les phénomènes électromagnétiques, il faut leur ajouter des relations particulières au milieu considéré ou relations constitutives. Dans le vide, on a par exemple

$$D = \varepsilon_0 E \quad \text{et} \quad B = \mu_0 H \quad (1.27)$$

où la permittivité électrique ε_0 et la perméabilité magnétique μ_0 sont des constantes liées à la vitesse de la lumière dans le vide c par la relation

$$\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1.$$

En ce qui concerne les matériaux ferromagnétiques, nous supposons qu'ils vérifient, comme dans un diélectrique classique la relation suivante

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E, \quad (1.28)$$

où ε_r est la permittivité relative. Par contre, à défaut de pouvoir introduire une perméabilité relative, nous devons nous contenter, pour coupler les différents champs magnétiques, de la relation

$$B = \mu_0 H + M \quad \text{ou} \quad \mu_0 H = B - M. \quad (1.29)$$

L'aimantation M étant la solution de l'équation de Landau-Lifshitz-Gilbert (1.24).

1.3.4 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont importantes dans l'analyse des matériaux ferromagnétiques, en particulier dans le cas où elles sont influencées par l'anisotropie de surface et/ou par les phénomènes de couplage aux interfaces. Notons que pour les matériaux massifs, l'anisotropie de surface n'est pas bien connue. Elle n'affecte dans le matériau massif qu'une couche mince en surface. Dans ce qui suit, n représente la normale unitaire extérieure et $\partial/\partial n$ la dérivée normale sur le bord.

L'équation de Landau-Lifshitz-Gilbert décrit le comportement de l'aimantation dans le volume du milieu ferromagnétique ; pour qu'elle reste valable jusqu'à la surface qui le borde, il est nécessaire en l'absence de tout effet additionnel de surface que la relation

$$M \times \frac{A}{M_s^2} \frac{\partial M}{\partial n} = 0 \quad (1.30)$$

soit satisfaite sur la surface. Compte tenu de la contrainte de saturation $|M| = M_s$, la condition (1.30) se réduit à

$$\frac{A}{M_s^2} \frac{\partial M}{\partial n} = 0. \quad (1.31)$$

Pour tenir compte du phénomène “*d'accrochage*” de l'aimantation à la surface, on introduit la condition au bord de Rado-Weertman [98]

$$M \times \left(\nabla_M \mathcal{E}_{\text{surf}} - \frac{A}{M_s^2} \frac{\partial M}{\partial n} \right) = 0, \quad (1.32)$$

qui devient

$$M \times \left(A \frac{\partial M}{\partial n} - K_s (M \cdot n) n \right) = 0. \quad (1.33)$$

Remarque 1.1. La condition aux limites (1.33) sera considérée en particulier dans le chapitre 5. Pour une étude détaillée des équations LLG avec la condition aux limites (1.33), nous réfèrons à [59]. Pour d'autres types de conditions aux limites faisant intervenir le couplage inter-couches dans les multicouches ferromagnétiques nous renvoyons à [108], [60], [109], [58].

1.4 Adimensionnement des équations

Nous supposerons tous nos modèles écrits avec des grandeurs adimensionnelles. Pour simplifier l'écriture des modèles considérés dans ce mémoire, nous supposerons que l'aimantation à saturation vérifie $|M_s| = 1$ et le coefficient gyromagnétique est tel que $\gamma = 1$. L'équation de Landau-Lifshitz-Gilbert (1.24) et la condition aux limites (1.30) deviennent respectivement,

Équations de Landau-Lifshitz-Gilbert :

$$\frac{\partial M}{\partial t} - \alpha M \times \frac{\partial M}{\partial t} = -(1 + \alpha^2) M \times \mathcal{H}_e, \quad (1.34)$$

Conditions aux limites :

$$A \frac{\partial M}{\partial n} = 0. \quad (1.35)$$

Quant au couplage de l'aimantation au champ électromagnétique, il est spécifié par le système de Maxwell suivant

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E - \text{rot } H = 0 \\ \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} + \text{rot } E = -\frac{\partial M}{\partial t}, \end{cases} \quad (1.36)$$

obtenu en éliminant l'induction magnétique B dans les équations (1.25) en utilisant (1.29).

Au système d'équations (1.34) – (1.36), on associe des données initiales

$$E(0, \cdot) = E_0(\cdot), \quad H(0, \cdot) = H_0(\cdot), \quad M(0, \cdot) = M_0(\cdot).$$

1.5 Propriétés mathématiques élémentaires

Conservation de la norme de l'aimantation

La propriété suivante a déjà été établie et utilisée implicitement. Rappelons-la. Faisons la multiplication scalaire de l'équation (1.34) par M . On obtient $M \cdot \partial M / \partial t = 0$. Soit

$$\frac{d}{dt} (|M|^2) = 0. \quad (1.37)$$

La condition $|M| = 1$ est donc incluse dans les équations de Landau-Lifshitz-Gilbert avec

$$M \times \Delta M = \nabla \cdot (M \times \nabla M) \quad (1.38)$$

ou

$$M \times \partial_j (a_{ij} \partial_j M) = \partial_i (M \times a_{ij} \partial_j M) \quad \text{si} \quad a_{ij} = a_{ji} \quad (1.39)$$

Lemme 1.1. *Pour tout $t \geq 0$, on a*

$$\frac{\alpha}{1 + \alpha^2} |\partial_t M|^2 = \partial_t M \cdot \mathcal{H}_e. \quad (1.40)$$

Démonstration.

Nous reprenons ici la démonstration donnée dans [12, 59]. Nous réécrivons l'équation de Landau-Lifshitz-Gilbert (1.34) sous la forme

$$(\alpha \partial_t M - (1 + \alpha^2) \mathcal{H}_e) = \alpha M \times (\alpha \partial_t M - (1 + \alpha^2) \mathcal{H}_e) - (1 + \alpha^2) \mathcal{H}_e \quad (1.41)$$

qui, en la multipliant par $(\alpha \partial_t M - (1 + \alpha^2) \mathcal{H}_e)$, donne

$$\frac{\alpha}{1 + \alpha^2} |\partial_t M|^2 = \partial_t M \cdot \mathcal{H}_e \quad (1.42)$$

pour tout $t \geq 0$ (et presque partout dans Ω au regard du sens faible donné à M comme solution faible de LLG dans le présent travail mathématique). \square

Décroissance de l'énergie électromagnétique

Nous prenons le produit scalaire de la première équation de (1.36) par E et celui de la seconde par H . On obtient alors par addition puis intégration par parties (formellement dans ce chapitre en l'absence encore de définition de la solution faible M) :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot (E \times H) dx = 0 &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\varepsilon_0 E \cdot \frac{\partial E}{\partial t} + \mu_0 H \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \right) dx + \sigma \int_{\mathbb{R}^3} |E|^2 dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} H \cdot \frac{\partial M}{\partial t} dx. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Or

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\varepsilon_0 E \cdot E + \mu_0 H \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \right) dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\varepsilon_0 |E|^2 + \mu_0 |H|^2 \right) dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathcal{E}_d. \quad (1.44)$$

L'équation (1.43) s'écrit donc

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathcal{E}_d = -\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |E|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} H \cdot \frac{\partial M}{\partial t} dx. \quad (1.45)$$

Egalité d'énergie pour le modèle simplifié

Ici, nous donnons l'égalité d'énergie obtenue pour le modèle simplifié considéré dans [12]. Ce modèle ne tient pas compte d'anisotropie de surface. Autrement dit la constante K_s dans (1.35) est égale à zéro. Une intégration de l'égalité (1.40) sur Ω (encore formelle dans ce chapitre) donne

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_{00}(t) + \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} \int_{\Omega} |\partial_t M|^2 dx = 0, \quad (1.46)$$

où $\mathcal{E}_{00}(t)$ n'est rien d'autre que l'énergie magnétique totale $\mathcal{E}_{\text{tot}}(t)$ pour $K_s = 0$.

Chapitre 2

Approximation numérique de la dynamique d'aimantation avec effets d'inertie

Sommaire

2.1	Introduction	26
2.2	Rappel de quelques résultats	28
2.3	Schéma numérique semi-implicite	29
2.4	Résultats numériques	36

2.1 Introduction

Le mouvement des spins avec inertie a été récemment discuté dans la littérature [68]. En particulier, le progrès récent dans l'étude de la dynamique ultra-rapide de l'aimantation a motivé plusieurs travaux. Dans [40], [116] l'inertie des spins a été introduite phénoménologiquement et il a été démontré qu'elle donne une nutation additionnelle au mouvement de spins. L'échelle en temps pour laquelle l'effet d'inertie est significatif est discutée et est d'un ordre inférieur à la pico-seconde. Le régime inertiel à des échelles de temps très courtes offrirait donc des possibilités de nouvelles expériences et dispositifs basés sur la dynamique d'aimantation ultra-rapide. Dans ce chapitre, nous procédons à l'approximation numérique d'un modèle mathématique issu de la théorie de la dynamique de l'aimantation avec inertie. L'équation LLG classique est une équation cinématique qui ne contient pas de termes d'accélération, *i.e.*, qui ne contient pas d'inertie. La trajectoire correspondante est réduite à une précession amortie autour de l'axe défini par le champ effectif. Le régime inertiel du processus d'aimantation est considéré comme une déviation par rapport à l'équation LLG [93].

Nous considérons le modèle proposé par Ciornei-Rubí-Wegrowe [40], voir aussi Wegrowe-Ciornei [116]. Il est donné par une équation LLG modifiée. La modification réside dans la présence d'une dérivée seconde en temps du champ d'aimantation dans le champ effectif. Pour décrire les équations du modèle, nous considérons Ω un ouvert borné et régulier dans \mathbb{R}^3 . Le point générique de \mathbb{R}^3 est noté par $x = (x_1, x_2, x_3)$. Nous supposons que le matériau ferromagnétique occupe le domaine Ω .

Le champ d'aimantation qui vit dans \mathcal{S}^2 (la sphère unité de \mathbb{R}^3) est désigné par $m(t, x)$. Son évolution est gouvernée par l'équation suivante LLG modifiée (voir [116])

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1 + \alpha^2} (\partial_t m - \alpha m \times \partial_t m) = -m \times \mathcal{H}(m) \quad \text{dans } Q = (0, T) \times \Omega, \\ m(0, x) = m_0(x) \quad \text{dans } \Omega, \quad \partial_t m(0, x) = m_1(x) \quad \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu m = 0 \quad \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Le champ magnétique effectif \mathcal{H} dépend de m et est donné par

$$\mathcal{H}(m) = a \Delta m - \zeta \partial_t^2 m + \phi(m) + \mathcal{H}_a(m). \quad (2.2)$$

Le premier terme du champ effectif représente le champ d'échange (avec $a > 0$) et le terme en $\zeta > 0$ décrit le régime inertiel.

Puisque nous allons nous concentrer uniquement sur les effets d'inertie et par souci de simplicité, nous allons négliger ici le champ démagnétisant \mathcal{H}_d et nous renvoyons par exemple aux références [29, 74] pour certains aspects du calcul de ce champ. Nous négligeons aussi le champ d'anisotropie de volume $\phi(m)$ qui est généralement linéaire en m . Toutefois, notons que ces simplifications ne limitent pas l'analyse proposée.

Avant de procéder à la discrétisation par différences finies du problème (2.1), nous passons d'abord en revue quelques résultats antérieurs. Dans [93], la dynamique d'une aimantation uniforme avec effets d'inertie est étudiée dans un contexte de résonance ferromagnétique. Des prédictions analytiques et des simulations numériques des équations complètes dans le modèle de LLG avec inertie sont présentées. Il est également montré que, en plus de la résonance de précession habituelle, le modèle inertiel donne un deuxième pic de résonance associée à la dynamique de nutation à condition que l'amortissement ne soit pas trop grand. La résolution analytique des équations de la dynamique donne lieu à la fois à des fréquences angulaires de précession et de nutation. En ce qui concerne les approches numériques pour l'équation LLG générale, plusieurs stratégies peuvent être employées pour la discrétisation en temps et en espace, où les différents termes d'énergie sont considérés. Nous nous limitons à mentionner quelques travaux et nous faisons référence à [73] pour une bibliographie plus détaillée. Le cadre général (sans les effets d'inertie, *i.e.* le cas $\zeta = 0$) a été étudié précédemment par des méthodes différences/éléments finis, voir par exemple [8], [9], [72], [6], [17], [18]. D'autres part, pour des résultats concernant le couplage de l'équation LLG avec le système de Maxwell complet nous renvoyons à [29], [15], [16], [34], [78], [77]. Dans le cadre des interactions magnéto-élastiques, un schéma aux différences finies est proposé et sa stabilité discutée dans [29]. Notre principal but ici est de proposer un schéma numérique semi-implicite de type différences finies pour le modèle (2.1), en se concentrant sur les processus d'aimantation.

L'objet du paragraphe suivant est de rappeler un résultat d'existence globale de solutions faible pour le modèle (2.1).

2.2 Rappel de quelques résultats

2.2.1 Résultat d'existence globale

L'existence globale de solutions faibles pour le problème (2.1) a été traitée dans [56]. Rappelons d'abord la définition d'une solution faible pour (2.1).

Définition 2.1 (voir [56]). Soit $m_0 \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ et $m_1 \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ tel que $|m_0|^2 = 1$ presque partout dans Ω , m est solution faible de (2.1) si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. pour tout $T > 0$, $m \in L^\infty((0, T); \mathbb{H}^1(\Omega))$, $\partial_t m \in L^2((0, T); \mathbb{L}^2(\Omega)) \cap L^\infty((0, T); \mathbb{L}^2(\Omega))$, et m vérifie la condition de saturation $|m(t, x)| = 1$ presque par tout dans $\mathbb{R}^+ \times \Omega$.
2. $m(0, \cdot) = m_0(\cdot)$ au sens de la trace ;
3. pour tout $G \in \mathbb{H}^1(Q) \cap \mathcal{C}_0(Q)$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \alpha^2} \int_Q (\partial_t m - \alpha m \times \partial_t m) \cdot G \, dx dt &= D \int_Q m \times \partial_i m \cdot \partial_i G \, dx dt \\ &\quad - \zeta \int_Q m \times \partial_t m \cdot \partial_t G \, dx dt. \end{aligned} \quad (2.3)$$

4. pour tout $t \geq 0$, on a

$$\mathcal{E}(m(t)) + \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} \int_0^t \int_\Omega |\partial_t m|^2 \, dx dt \leq \mathcal{E}(m(0)) \quad (2.4)$$

où

$$\mathcal{E}(m(t)) = D \int_\Omega |\nabla m|^2 dx + \zeta \int_\Omega |\partial_t m|^2 dx. \quad (2.5)$$

Nous avons le résultat d'existence globale suivant pour le modèle (2.1).

Théorème 2.1 (voir [56]). Soit $T > 0$ fixé et $m_0 \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ tel que $|m_0(x)|^2 = 1$ p.p. Alors il existe une solution m du problème (2.1) au sens de la définition 3.1.

2.2.2 Comportement en temps grand

Le comportement en temps grand de la solution du problème (2.1) a été aussi étudié dans [56]. Plus précisément, soit m une solution faible de (2.1). On appelle ensemble ω -limite de la trajectoire m l'ensemble suivant

$$\omega(m) = \{\tilde{m} \in \mathbb{H}^1(\Omega), \exists t_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty, m(t_n, \cdot) \rightharpoonup \tilde{m} \text{ dans } \mathbb{H}^1(\Omega) \text{ au sens faible}\}.$$

Nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.2 (voir [56]). *Si m est solution faible de (2.1), alors l'ensemble ω -limite est non vide. De plus, tout élément \tilde{m} de $\omega(m)$ est solution faible du problème stationnaire suivant*

$$\begin{aligned} \tilde{m} &\in \mathbb{H}^1(\Omega); \quad |\tilde{m}| = 1 \text{ p.p. dans } \Omega \\ \tilde{m} \times \Delta \tilde{m} &= 0 \text{ dans } \Omega. \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.3 Schéma numérique semi-implicite

L'intégration numérique de l'équation LLG générale est largement utilisée en micromagnétisme. Il est bien connu que cette équation décrit une dynamique d'aimantation pour laquelle l'amplitude de l'aimantation se conserve avec le temps. La séparation de la dépendance du temps et de l'espace nécessite le choix d'intervalles de temps qui sont suffisamment petits. Autrement dit, une solution stable ne peut être obtenue dans tous les cas [49]. En général, les simulations micromagnétiques rencontrent des difficultés en raison d'une échelle en temps très petite, qui est de l'ordre du pico-seconde [115]. Des solveurs explicites du type Runge-Kutta [99] de quatrième et cinquième ordre et des solveurs implicites de type Gauss-Seidel [115] avec un contrôle adaptatif du pas en temps sont utilisés pour la résolution de cette équation. Un solveur standard d'équations différentielles ordinaires ne prend pas en compte la contrainte de saturation. Cet aspect a été abordé dans plusieurs travaux comme par exemple [14], [85] et l'article de revue [35]. Il est difficile de préserver les propriétés intrinsèques de l'équation LLG en utilisant des méthodes de discrétisation en temps explicites (par exemple, Euler, Adams-Bashforth). En revanche, les méthodes implicites ont de bonnes performances en termes de stabilité, mais ne préservent ni l'amplitude de l'aimantation ni l'énergie dans la limite $\alpha \rightarrow 0$. De plus, l'utilisation de méthodes implicites rend généralement nécessaire la résolution de grands systèmes d'équations non linéaires couplées à chaque pas de temps, ce qui peut conduire à des coûts de calculs élevés. Par conséquent, on tente généralement d'éviter les méthodes implicites en utilisant des techniques semi-implicites [115]. Un schéma aux différences finies qui remplit les conditions précédemment mentionnées est proposé dans ce qui suit. Nous adapterons le schéma proposé dans [29] pour le cas de la dynamique d'aimantation avec des effets d'inertie.

Soit Ω un sous-ensemble connexe, borné, fermé et non vide de \mathbb{R}^2 , et soit i et j deux indices tels que $i = 0, 1, \dots, I$ et $j = 0, 1, \dots, J$. Considérons une partition uniforme de Ω en rectangles disjoints $\Omega_{i,j}$, avec des arêtes h_x, h_y et des sommets $P_{i,j} = (x_i, y_j) = (ih_x, jh_y)$. Soit $\Omega = \cup_{i,j} \Omega_{i,j}$ avec $i = 0, 1, \dots, I-1$ et $j = 0, 1, \dots, J-1$. Nous introduisons un paramètre positif δt et considérons la partition uniforme $t_n = n\delta t; n = 0, 1, \dots, N; N\delta t = T$. Pour toute fonction $f(t, x, y)$ définie dans le cylindre $\Omega \times [0, T]$ on note $f_{i,j}^n = f^n|_{P_{i,j}} = f(t_n, x_i, y_j)$.

Nous définissons les opérateurs

$$\Delta^h = \Delta^{h_x} + \Delta^{h_y}$$

avec

$$\Delta^{h_x} f_{i,j}^n = \frac{f_{i+1,j}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n}{h_x^2}$$

et

$$\Delta^{h_y} f_{i,j}^n = \frac{f_{i,j+1}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i,j-1}^n}{h_y^2}.$$

Nous proposons alors le schéma numérique semi-implicite suivant pour le problème (2.1)

- pour $n = 1, i = 1, 2, \dots, I-1$ et $j = 1, 2, \dots, J-1$

$$m_{i,j}^0 = m_0|_{P_{i,j}}; \quad m_{i,j}^1 = m_0|_{P_{i,j}} + \delta t m_1|_{P_{i,j}} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\alpha} \frac{m_{i,j}^{n+1} - m_{i,j}^n}{\delta t} &= \frac{m_{i,j}^n + m_{i,j}^{n-1}}{2} \times \left(\gamma \frac{m_{i,j}^n - m_{i,j}^{n-1}}{\delta t} - \frac{a}{2} \Delta^h (m_{i,j}^{n-1} + m_{i,j}^n) \right) \\ &\quad - \frac{m_{i,j}^n + m_{i,j}^{n-1}}{2} \times \left(\zeta \frac{m_{i,j}^{n-1} - 2m_{i,j}^n - m_{i,j}^{n+1}}{\delta t^2} \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

- pour $n = 2, 3, \dots, N-1, i = 1, 2, \dots, I-1$ et $j = 1, 2, \dots, J-1$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\alpha} \frac{m_{i,j}^{n+1} - m_{i,j}^{n-2}}{3\delta t} &= \frac{m_{i,j}^{n+1} + m_{i,j}^{n-2}}{2} \times \left(\gamma \frac{m_{i,j}^{n+1} - m_{i,j}^{n-2}}{3\delta t} - \frac{a}{2} \Delta^h (m_{i,j}^{n-1} + m_{i,j}^n) \right) \\ &\quad + \frac{m_{i,j}^{n+1} + m_{i,j}^{n-2}}{2} \times \left(\zeta \frac{m_{i,j}^{n+1} - m_{i,j}^n - m_{i,j}^{n-1} + m_{i,j}^{n-2}}{2\delta t^2} \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Pour les conditions aux limites, nous supposons

$$m_{1,j}^n - m_{0,j}^n = 0, \quad m_{I,j}^n - m_{I-1,j}^n = 0, \quad m_{i,1}^n - m_{i,0}^n = 0, \quad m_{i,J}^n - m_{i,J-1}^n = 0 \quad (2.10)$$

où $\gamma = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}$.

Lemme 2.1. *Le schéma (2.7)-(2.10) proposé pour le problème (2.1) est d'ordre $O(h^2 + \delta t)$.*

Démonstration.

Soit (u, v, w) une solution exacte du problème (2.1). L'erreur de troncature locale de la première composante de l'équation s'écrit

$$\begin{aligned}
T_{i,j}^n &= \frac{\gamma}{\alpha} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n-2}}{3\delta t} - \frac{v_{i,j}^{n+1} + v_{i,j}^{n-2}}{2} \left(\gamma \frac{w_{i,j}^{n+1} - w_{i,j}^{n-2}}{3\delta t} - \frac{a}{2} \Delta^h (w_{i,j}^{n-1} + w_{i,j}^n) \right. \\
&\quad \left. + \zeta \frac{w_{i,j}^{n+1} - w_{i,j}^n - w_{i,j}^{n-1} + w_{i,j}^{n-2}}{2\delta t^2} \right) + \frac{w_{i,j}^{n+1} + w_{i,j}^{n-2}}{2} \left(\gamma \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^{n-2}}{3\delta t} \right. \\
&\quad \left. - \frac{a}{2} \Delta^h (v_{i,j}^{n-1} + v_{i,j}^n) + \zeta \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n - v_{i,j}^{n-1} + v_{i,j}^{n-2}}{2\delta t^2} \right) \\
&= \frac{\gamma}{\alpha} ((\partial_t u)_{i,j}^n + O(\delta t)) - ((v)_{i,j}^n + O(\delta t)) \left(\gamma ((\partial_t w)_{i,j}^n + O(\delta t)) - (a(\Delta w)_{i,j}^n + O(h^2) \right. \\
&\quad \left. + O(\delta t)) + \zeta ((\partial_t^2 u)_{i,j}^n + O(\delta t)) \right) + ((w)_{i,j}^n + O(\delta t)) \left(\gamma ((\partial_t v)_{i,j}^n + O(\delta t)) - (a(\Delta v)_{i,j}^n \right. \\
&\quad \left. + O(h^2) + O(\delta t)) + \zeta ((\partial_t^2 v)_{i,j}^n + O(\delta t)) \right) \\
&= \left(\frac{\gamma}{\alpha} \partial_t u - v(a\Delta w - \gamma \partial_t w + \zeta \partial_t^2 u) + w(a\Delta v - \gamma \partial_t v + \zeta \partial_t^2 v) \right)_{i,j}^n + O(h^2) + O(\delta t)
\end{aligned}$$

Comme (u, v, w) est solution du problème (2.1) alors

$$\left(\frac{\gamma}{\alpha} \partial_t u - v(a\Delta w - \gamma \partial_t w + \zeta \partial_t^2 u) + w(a\Delta v - \gamma \partial_t v + \zeta \partial_t^2 v) \right)_{i,j}^n = 0.$$

Par conséquent, la partie principale de l'erreur de troncature locale est

$$T_{i,j}^n = O(h^2) + O(\delta t).$$

Pour la deuxième et la troisième composante de l'équation, on obtient les mêmes résultats. \square

Remarque 2.1. *Pour des raisons numériques, nous devons écrire une expression explicite de $m_{i,j}^{n+1}$ définie par (2.7), (2.8) et (2.9). Notons que l'équation (2.9) peut être écrite sous la forme générale suivante*

$$m_{i,j}^{n+1} = C m_{i,j}^{n+1} \times M_{i,j}^n + N_{i,j}^n = A_{i,j}^n m_{i,j}^{n+1} + N_{i,j}^n \quad (2.11)$$

où $C > 0$ et $M_{i,j}^n$ et $N_{i,j}^n$ dépendent de la solution calculée à chaque étape n . Nous observons qu'à chaque point $P_{i,j}$ le déterminant de la matrice $I - A_{i,j}^n$ est différent de zéro et est donné par

$$\det(I - A_{i,j}^n) = 1 + C^2 |M_{i,j}^n|^2.$$

.

La stabilité du schéma numérique (2.7), (2.8), (2.9) et (2.10) est établie dans le lemme et le théorème suivants. Nous allons donner une condition sur les pas d'espace et de temps pour le problème discret afin d'obtenir l'analogue discret de l'énergie (3.13) et de l'estimation (2.4).

Lemme 2.2. *La solution de (2.7)-(2.10) satisfait*

$$|m_{i,j}^n| = |m_{i,j}^0| = 1 \quad (2.12)$$

pour tous $i = 0, 1, \dots, I; j = 0, 1, \dots, J; n = 0, 1, \dots, N$.

Démonstration.

Pour obtenir l'égalité (2.12) on multiplie l'équation (2.8) par $m_{i,j}^{n-1} + m_{i,j}^n$ et l'équation (2.9) par $m_{i,j}^{n+1} + m_{i,j}^{n-2}$. Rappelons que pour deux vecteurs A et B , les vecteurs $A, B, A \times B$ sont orthogonaux, donc le produit scalaire $A \cdot (A \times B) = 0$. Cette propriété permet d'obtenir pour le schéma (2.8)

$$(m_{i,j}^{n+1} - m_{i,j}^n) \cdot (m_{i,j}^{n+1} - m_{i,j}^n) = 0,$$

d'où

$$(m_{i,j}^{n+1})^2 - (m_{i,j}^n)^2 = 0.$$

On en déduit

$$|m_{i,j}^n| = |m_{i,j}^{n-1}|.$$

De la même manière, on trouve

$$|m_{i,j}^{n+1}| = |m_{i,j}^{n-2}|.$$

Donc pour tous $i = 0, 1, \dots, I; j = 0, 1, \dots, J; n = 0, 1, \dots, N$, on a

$$|m_{i,j}^n| = |m_{i,j}^0|,$$

et comme $|m_{i,j}^0| = 1$ on obtient

$$|m_{i,j}^n| = |m_{i,j}^0| = 1.$$

Ceci termine la démonstration. \square

Comme dans [29], on définit les quantités suivantes

$$\|Gf^k\|^2 = \frac{h_x h_y}{3} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{s=-1}^1 \left[\left(\frac{f_{i,j}^{k+s} - f_{i-1,j}^{k+s}}{h_x} \right)^2 + \left(\frac{f_{i,j}^{k+s} - f_{i,j-1}^{k+s}}{h_y} \right)^2 \right], \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \|Df^k\|^2 &= \frac{h_x h_y}{3} \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} S_{i,j}^k + \frac{h_x h_y}{6} \left[\sum_{i=1}^{I-1} (S_{i,0}^k + S_{i,J}^k) + \sum_{j=1}^{J-1} (S_{0,j}^k + S_{I,j}^k) \right] \\ &\quad + \frac{h_x h_y}{12} [S_{0,0}^k + S_{0,J}^k + S_{I,0}^k + S_{I,J}^k], \end{aligned} \quad (2.14)$$

avec

$$S_{i,j}^k = \left[\left(\frac{f_{i,j}^{k+1} - f_{i,j}^{k-1}}{\delta t} \right)^2 + \left(\frac{f_{i,j}^k - f_{i,j}^{k-1}}{\delta t} \right)^2 + \left(\frac{f_{i,j}^{k+1} - f_{i,j}^k}{\delta t} \right)^2 \right].$$

Le résultat de stabilité numérique pour la solution approchée $m_{i,j}^{n+1}$ calculée selon le schéma (2.7)-(2.10) est donné par le théorème suivant.

Théorème 2.3. *Soit $a, \zeta > 0$. Alors pour chaque pas en espace h_x, h_y et chaque pas en temps δt on a l'inégalité suivante*

$$\mathcal{E}_h^N \leq \mathcal{E}_h^1 + \frac{\zeta}{2\delta t} \|Dm^1\|^2 \quad (2.15)$$

avec

$$\frac{\delta t^3}{h^2} \leq \frac{\zeta}{2a}, \quad h^{-2} = h_x^{-2} + h_y^{-2} \quad (2.16)$$

et \mathcal{E}_h^N définie par

$$\mathcal{E}_h^N = \frac{a}{2} \|Gm^N\|^2 + \left(\frac{\zeta}{2\delta t} - \frac{a\delta t^2}{h^2} \right) \|Dm^N\|^2 \quad (2.17)$$

Démonstration.

Nous multiplions (2.9) par

$$\frac{\alpha}{\gamma} \left(\zeta \frac{m_{i,j}^{n+1} - m_{i,j}^n - m_{i,j}^{n-1} + m_{i,j}^{n-2}}{2\delta t^2} + \gamma \frac{m_{i,j}^{n+1} - m_{i,j}^{n-2}}{3\delta t} - \frac{a}{2} \Delta^h (m_{i,j}^{n-1} + m_{i,j}^n) \right) h_x h_y \delta t.$$

On effectue une sommation par rapport à n, i et j et on pose

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{n=2}^{N-1} \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \left(\left| \frac{m_{i,j}^{n+1} - m_{i,j}^{n-2}}{3\delta t} \right|^2 + \zeta \frac{m_{i,j}^{n+1} - m_{i,j}^n - m_{i,j}^{n-1} + m_{i,j}^{n-2}}{2\delta t^2} \cdot \frac{m_{i,j}^{n+1} - m_{i,j}^{n-2}}{3\delta t} \right) h_x h_y \delta t, \\ A_2 &= \sum_{n=2}^{N-1} \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \left(\frac{\Delta^h (m_{i,j}^{n-1} + m_{i,j}^n)}{2} \cdot \frac{m_{i,j}^{n+1} - m_{i,j}^{n-2}}{3\delta t} \right) h_x h_y \delta t. \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=2}^{N-1} \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} (m_{i,j}^{n+1} - m_{i,j}^n - m_{i,j}^{n-1} + m_{i,j}^{n-2})(m_{i,j}^{n+1} - m_{i,j}^{n-2}) \\
&= \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \left((m_{i,j}^N)^2 + (m_{i,j}^{N-1})^2 + (m_{i,j}^{N-2})^2 - m_{i,j}^N m_{i,j}^{N-1} - m_{i,j}^N m_{i,j}^{N-2} - m_{i,j}^{N-1} m_{i,j}^{N-2} \right. \\
&\quad \left. - (m_{i,j}^0)^2 - (m_{i,j}^1)^2 - (m_{i,j}^2)^2 + m_{i,j}^1 m_{i,j}^0 + m_{i,j}^1 m_{i,j}^2 + m_{i,j}^0 m_{i,j}^2 \right)
\end{aligned}$$

on obtient

$$A_1 \geq \frac{\zeta}{2\delta t} (\|Dm^{N-1}\|^2 - \|Dm^1\|^2). \quad (2.18)$$

Maintenant, afin d'obtenir une borne sur A_2 , nous utilisons le fait que

$$\sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} (m_{i+1,j}^p - 2m_{i,j}^p + m_{i-1,j}^p)(m_{i,j}^s - m_{i,j}^q) = - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J-1} g_{i,j}^p (g_{i,j}^s - g_{i,j}^q)$$

et

$$\sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} (m_{i,j+1}^p - 2m_{i,j}^p + m_{i,j-1}^p)(m_{i,j}^s - m_{i,j}^q) = - \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^J R_{i,j}^p (R_{i,j}^s - R_{i,j}^q)$$

où les conditions aux limites (2.10) sont prises en considération et $g_{i,j}^k$ et $R_{i,j}^k$ sont définies par

$$g_{i,j}^k = m_{i,j}^k - m_{i-1,j}^k, \quad R_{i,j}^k = m_{i,j}^k - m_{i,j-1}^k.$$

On a

$$\begin{aligned}
A_{2,x} &:= \sum_{n=2}^{N-1} \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \frac{\Delta_{h_x}(m_{i,j}^{n-1} + m_{i,j}^n)}{2} \cdot \frac{(m_{i,j}^{n+1} - m_{i,j}^{n-2})}{3\delta t} h_x h_y \delta t \\
&= -\frac{1}{6h_x^2} \sum_{n=2}^{N-2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J-1} (g_{i,j}^{n-1} + g_{i,j}^n)(g_{i,j}^{n+1} - g_{i,j}^{n-2}) h_x h_y \\
&= -\frac{1}{6h_x^2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J-1} \left(g_{i,j}^N g_{i,j}^{N-1} + g_{i,j}^N g_{i,j}^{N-2} + g_{i,j}^{N-1} g_{i,j}^{N-2} - g_{i,j}^0 g_{i,j}^1 - g_{i,j}^1 g_{i,j}^2 - g_{i,j}^0 g_{i,j}^2 \right) h_x h_y \\
&= -\frac{1}{6h_x^2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J-1} \left((g_{i,j}^N)^2 + (g_{i,j}^{N-1})^2 + (g_{i,j}^{N-2})^2 - (g_{i,j}^0)^2 - (g_{i,j}^1)^2 - (g_{i,j}^2)^2 - \frac{1}{2}((g_{i,j}^N - g_{i,j}^{N-1})^2 \right. \\
&\quad \left. + (g_{i,j}^N - g_{i,j}^{N-2})^2 + (g_{i,j}^{N-1} - g_{i,j}^{N-2})^2) + \frac{1}{2}((g_{i,j}^1 - g_{i,j}^0)^2 + (g_{i,j}^2 - g_{i,j}^1)^2 + (g_{i,j}^2 - g_{i,j}^0)^2) \right) h_x h_y.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} A_{2,x} &\leq -\frac{1}{6h_x^2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left((g_{i,j}^N)^2 + (g_{i,j}^{N-1})^2 + (g_{i,j}^{N-2})^2 - (g_{i,j}^0)^2 - (g_{i,j}^1)^2 - (g_{i,j}^2)^2 \right) h_x h_y \\ &+ \frac{1}{6h_x^2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J-1} \left((m_{i,j}^N - m_{i,j}^{N-1})^2 + (m_{i-1,j}^N - m_{i-1,j}^{N-1})^2 + (m_{i,j}^N - m_{i,j}^{N-2})^2 + (m_{i-1,j}^N - m_{i-1,j}^{N-2})^2 \right. \\ &\left. + (m_{i,j}^{N-1} - m_{i,j}^{N-2})^2 + (m_{i-1,j}^{N-1} - m_{i-1,j}^{N-2})^2 \right) h_x h_y + \frac{1}{6h_x^2} \sum_{i=1}^I \left((g_{i,J}^N)^2 + (g_{i,J}^{N-1})^2 + (g_{i,J}^{N-2})^2 \right) h_x h_y \end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} A_{2,x} &\leq -\frac{1}{6h_x^2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left((g_{i,j}^N)^2 + (g_{i,j}^{N-1})^2 + (g_{i,j}^{N-2})^2 - (g_{i,j}^0)^2 - (g_{i,j}^1)^2 - (g_{i,j}^2)^2 \right) h_x h_y \\ &+ \frac{1}{6h_x^2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J-1} \left((m_{i,j}^N - m_{i,j}^{N-1})^2 + (m_{i-1,j}^N - m_{i-1,j}^{N-1})^2 + (m_{i,j}^N - m_{i,j}^{N-2})^2 + (m_{i-1,j}^N - m_{i-1,j}^{N-2})^2 \right. \\ &\left. + (m_{i,j}^{N-1} - m_{i,j}^{N-2})^2 + (m_{i-1,j}^{N-1} - m_{i-1,j}^{N-2})^2 \right) h_x h_y \\ &+ \frac{1}{6h_x^2} \sum_{i=1}^I \left((m_{i,J}^N - m_{i,J}^{N-1})^2 + (m_{i-1,J}^N - m_{i-1,J}^{N-1})^2 + (m_{i,J}^N - m_{i,J}^{N-2})^2 \right. \\ &\left. + (m_{i-1,J}^N - m_{i-1,J}^{N-2})^2 + (m_{i,J}^{N-1} - m_{i,J}^{N-2})^2 + (m_{i-1,J}^{N-1} - m_{i-1,J}^{N-2})^2 \right) h_x h_y. \end{aligned}$$

De la même manière on a

$$\begin{aligned} A_{2,y} &:= \sum_{n=2}^{N-1} \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \frac{\Delta_{h_y}(m_{i,j}^{n-1} + m_{i,j}^n)}{2} \cdot \frac{(m_{i,j}^{n+1} - m_{i,j}^{n-2})}{3\delta t} h_x h_y \delta t \\ &\leq -\frac{1}{6h_y^2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left((R_{i,j}^N)^2 + (R_{i,j}^{N-1})^2 + (R_{i,j}^{N-2})^2 - (R_{i,j}^0)^2 - (R_{i,j}^1)^2 - (R_{i,j}^2)^2 \right) h_x h_y \\ &+ \frac{1}{6h_y^2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J-1} \left((m_{i,j}^N - m_{i,j}^{N-1})^2 + (m_{i,j-1}^N - m_{i,j-1}^{N-1})^2 + (m_{i,j}^N - m_{i,j}^{N-2})^2 + (m_{i,j-1}^N - m_{i,j-1}^{N-2})^2 \right. \\ &\left. + (m_{i,j}^{N-1} - m_{i,j}^{N-2})^2 + (m_{i,j-1}^{N-1} - m_{i,j-1}^{N-2})^2 \right) h_x h_y \\ &+ \frac{1}{6h_y^2} \sum_{j=1}^J \left((m_{I,j}^N - m_{I,j}^{N-1})^2 + (m_{I,j-1}^N - m_{I,j-1}^{N-1})^2 + (m_{I,j}^N - m_{I,j}^{N-2})^2 + (m_{I,j-1}^N - m_{I,j-1}^{N-2})^2 \right. \\ &\left. + (m_{I,j}^{N-1} - m_{I,j}^{N-2})^2 + (m_{I,j-1}^{N-1} - m_{I,j-1}^{N-2})^2 \right) h_x h_y \end{aligned}$$

En combinant les estimations qui précèdent, nous obtenons

$$A_2 \leq \frac{1}{2} (\|Gm^1\|^2 - \|Gm^{N-1}\|^2) + \frac{\delta t^2}{h^2} \|Dm^{N-1}\|^2. \quad (2.19)$$

Maintenant, puisque $A_1 - aA_2 = 0$, on en déduit

$$-\frac{a}{2}\|Gm^1\|^2 + \frac{a}{2}\|Gm^{N-1}\|^2 + \frac{\zeta}{2\delta t}\|Dm^{N-1}\|^2 - \frac{\zeta}{2\delta t}\|Dm^1\|^2 - \frac{a\delta t^2}{h^2}\|Dm^{N-1}\|^2 \leq 0,$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} & \frac{a}{2}\|Gm^{N-1}\|^2 + \left(\frac{\zeta}{2\delta t} - \frac{a\delta t^2}{h^2}\right)\|Dm^{N-1}\|^2 \\ & \leq \frac{a}{2}\|Gm^1\|^2 + \left(\frac{\zeta}{2\delta t} - \frac{a\delta t^2}{h^2}\right)\|Dm^1\|^2 + \frac{a\delta t^2}{h^2}\|Dm^1\|^2. \end{aligned}$$

De la dernière estimation, on conclut que si la condition (2.16) est satisfaite, nous obtenons le résultat. En effet, en rappelant que

$$\mathcal{E}_h^k = \frac{a}{2}\|Gm^k\|^2 + \left(\frac{\zeta}{2\delta t} - \frac{a\delta t^2}{h^2}\right)\|Dm^k\|^2,$$

on a

$$\mathcal{E}_h^{N-1} \leq \mathcal{E}_h^1 + \frac{\zeta}{2\delta t}\|Dm^1\|^2.$$

Le résultat est ainsi démontré. □

2.4 Résultats numériques

Pour les tests numériques, nous choisissons un domaine bidimensionnel Ω , $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, qu'on discrétise de façon uniforme avec $x_i = ih_x, y_i = jh_y$ et $h_x = h_y = 10^{-1}$. Pour les valeurs des autres paramètres de l'équation, on prend $a = 1$, $\delta t = 10^{-6}$ et le temps final $T = 10^{-3}$. Comme données initiales, nous choisissons $m_0 = (0, 0, 1)$, $m_1 = (0, 0, 1)$. Rappelons que le temps final et le pas en temps sont généralement pris assez petits dans l'étude du renversement de l'aimantation. L'échelle de temps dans les applications de (2.1) est de l'ordre de la picoseconde. Sauf mention contraire, l'axe des temps dans toutes les figures suivantes est multiplié par 10^{-3} . Le code est écrit en MATLAB[®].

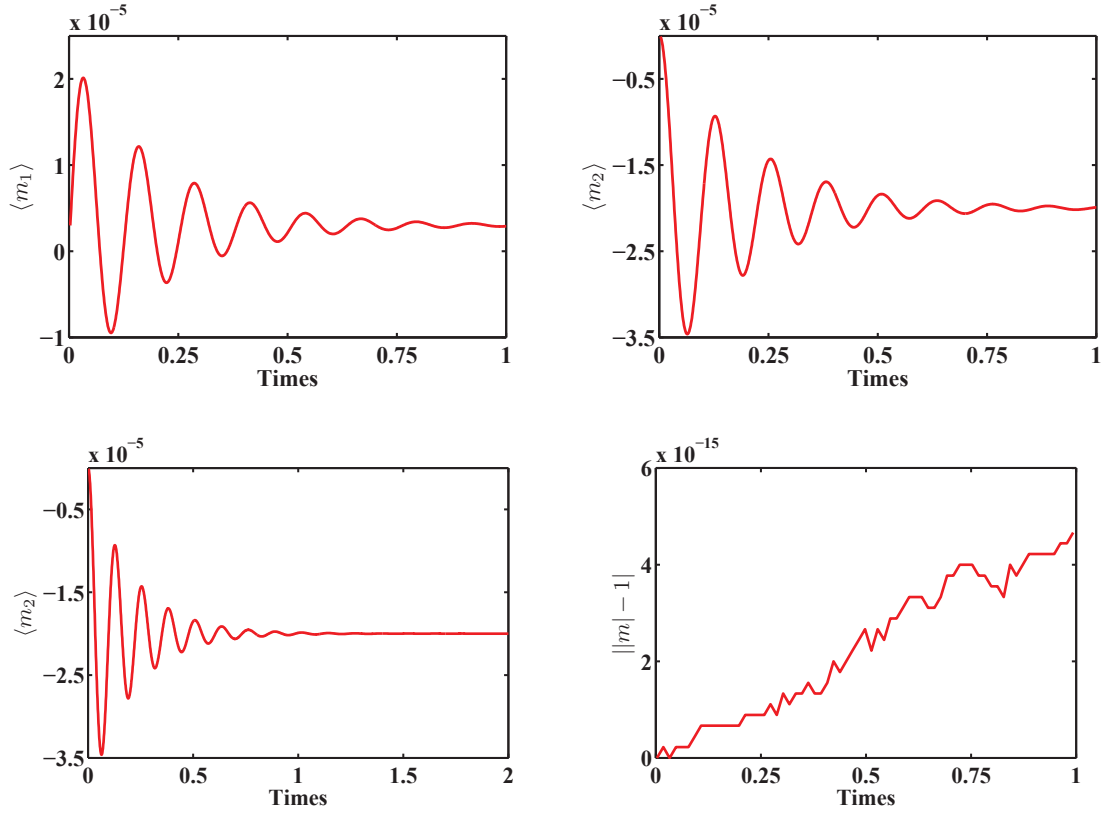


FIGURE 2.1 – Evolution des moyennes des composantes de l’aimantation $\langle m_1 \rangle, \langle m_2 \rangle$, et $||m| - 1|$ en fonction du temps pour $\zeta = 2 \times 10^{-4}$ et $\alpha = 10^{-1}$

Dans une première série d’expériences, la figure 2.1 montre un exemple de l’évolution de la moyenne des composantes de l’aimantation. Dans la dynamique d’aimantation classique, le renversement de l’aimantation est généralement accompagné d’oscillations qui sont le résultat de la précession de l’aimantation autour du champ effectif. L’amplitude de ces oscillations tend vers zéro au cours du temps pour ramener l’aimantation à sa position d’équilibre. Notons que pour certains tests numériques, nous nous attendons à l’apparition de petites oscillations qui sont superposées à l’amortissement de Gilbert dans la précession classique de l’aimantation. Ceci peut être expliqué par l’effet d’inertie introduit dans le modèle (2.1). En général, la nutation est très brièvement visible pour un temps de l’ordre de la picoseconde [40]. Pour vérifier la consistance de la performance, le troisième tracé dans la figure 2.1 présente un calcul au temps $T = 2 \times 10^{-3}$. La figure 2.1 montre aussi que le schéma préserve le module de l’aimantation

avec une erreur de l'ordre 10^{-15} au cours du temps, à chaque position spatiale, comme indiqué par le lemme 2.2. Il s'agit d'une contrainte fondamentale dans l'évolution dans le temps de la dynamique LLG qui doit être respectée par la version discrétisée.

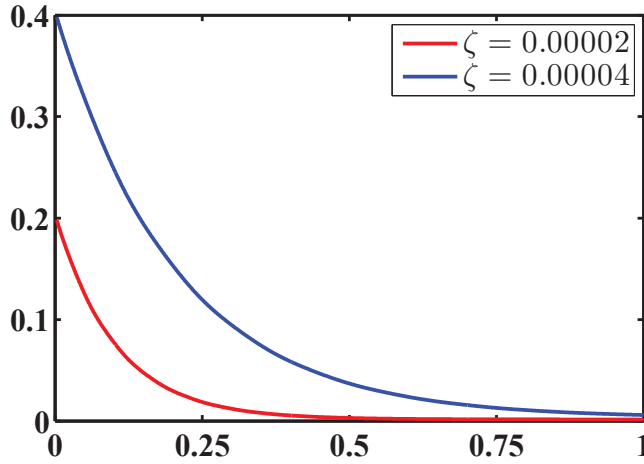


FIGURE 2.2 – Tracé $\log t \mapsto \log \mathcal{E}_h^k$ pour $\alpha = 10^{-1}$

Dans une deuxième série d'expériences et afin d'observer la bornitude de l'énergie discrète, nous avons résolu le problème avec deux valeurs pour $\zeta = 2 \times 10^{-5}$ et $\zeta = 4 \times 10^{-5}$. La figure 2.2 trace l'évolution dans le temps de l'énergie discrète \mathcal{E}_h^k . Théoriquement, l'énergie décroît avec le temps. Ceci est confirmé numériquement indiquant la relaxation de l'énergie. L'évolution temporelle de l'énergie est représentée dans la figure 2.2 qui permet de suggérer que cette énergie s'approche de 0 pour des temps assez grands.

La figure 2.2 montre aussi l'effet de ζ qui est principalement observé dans le retour à l'état d'équilibre du champ d'aimantation. Nous remarquons que plus ζ est petit plus le temps de renversement est considérablement raccourci. On remarque également que l'aimantation se rapproche de l'état final plus rapidement pour les petites valeurs du paramètre d'inertie ζ .

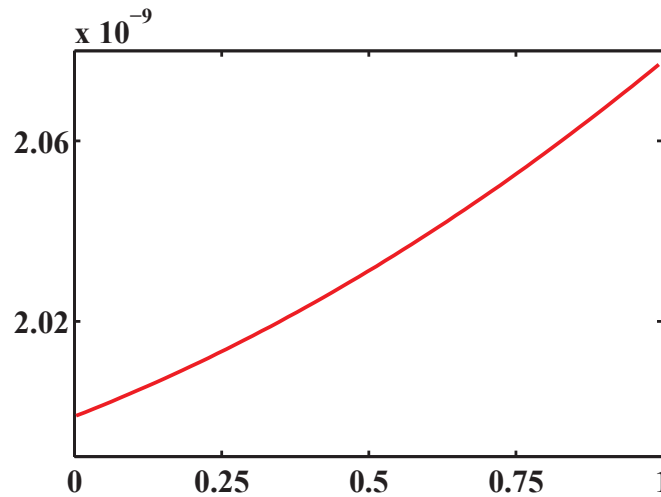


FIGURE 2.3 – Tracé $\log t \mapsto \log \mathcal{E}_h^k$ pour $\zeta = 10^{-13}$ et $\alpha = 10^{-1}$

La figure 2.3 montre un calcul lorsque le critère de stabilité (2.16) n'est pas satisfait. On voit que dans ce cas la solution calculée ne se comporte pas comme prévu. Au cours des calculs, le comportement s'aggrave et l'énergie n'est plus décroissante ce qui pourrait être interprété comme une explosion en temps fini du schéma numérique. Rappelons que l'équation LLG a une structure de type Lyapunov [95], c'est-à-dire que la fonctionnelle d'énergie libre est une fonction décroissante en temps le long des trajectoires de l'équation de LLG. Cette propriété est fondamentale car elle garantit que le système tend vers des points d'équilibre stables, qui sont des minima de l'énergie libre. Les schémas explicites en temps ne préservent cette propriété que pour des pas en temps suffisamment petits. En effet, lorsque le pas en temps est assez grand, des instabilités peuvent produire une augmentation transitoire ou même régulière de l'énergie.

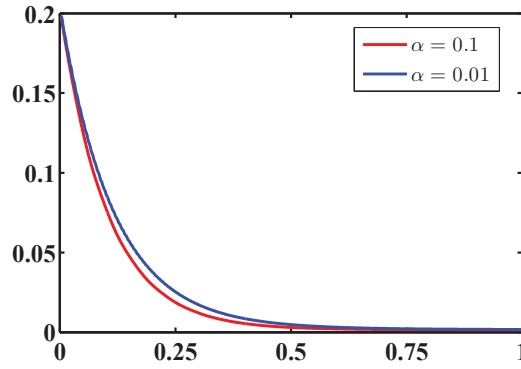


FIGURE 2.4 – Tracé $\log t \mapsto \log \mathcal{E}_h^k$ pour $\zeta = 10^{-5}$

Pour montrer la dépendance des approximations numériques en fonction de l'amortissement de Gilbert, nous avons testé la sensibilité des solutions par rapport au paramètre d'amortissement. La figure 2.4 montre pour $\zeta = 10^{-5}$, l'évolution temporelle de l'énergie pour $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.1$. La figure 2.4 montre que l'augmentation de l'amortissement diminue le temps nécessaire pour le retour à l'état d'équilibre du champ d'aimantation.

La performance du schéma numérique est également vérifiée, dans le cas unidimensionnel. En fait, on considère le cas unidimensionnel, *i.e* $\Omega = (0, 1)$, et une discrétisation uniforme avec un nombre de points N_x , un pas en espace $h = 1/N_x$, et un pas en temps $\delta t = T/N$. On définit

$$m_i^n = m(t_n, x_i)$$

pour $i = 1, \dots, N_x$ et $n = 0, 1, \dots, N$. Soit

$$m_{ex}(t, x) = \begin{pmatrix} \cos(x^2(1-x)^2) \sin t \\ \sin(x^2(1-x)^2) \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Pour que m_{ex} défini par (2.20) soit une solution exacte de (2.1), un terme de "forcing"

$$f(t, x) = \partial_t m_{ex} - \alpha m_{ex} \times \partial_t m_{ex} + (1 + \alpha^2) m_{ex} \times (a \Delta m_{ex} - \zeta \partial_t^2 m_{ex})$$

doit être ajouté au membre de droite de (2.1). Notons que m_{ex} vérifie la condition initiale $m_{ex}(t = 0) = (0, 0, 1)$ et une condition aux limites de type Neumann homogène $\partial_n m_{ex} = 0$,

i.e. $\partial_x m(t, 0) = \partial_x m(t, 1) = 0$. Par conséquent, nous posons $m_0 = m_1$ et $m_{N_x+1} = m_{N_x}$ comme conditions aux limites. La figure 2.5 propose une comparaison entre la solution exacte et la solution calculée. Le calcul a été fait avec un temps final $T = 2 \times 10^{-4}$, $h = 10^{-2}$, $\delta t = T/1000$ et $\zeta = 4 \times 10^{-4}$. Les résultats numériques concordent bien avec la solution exacte.

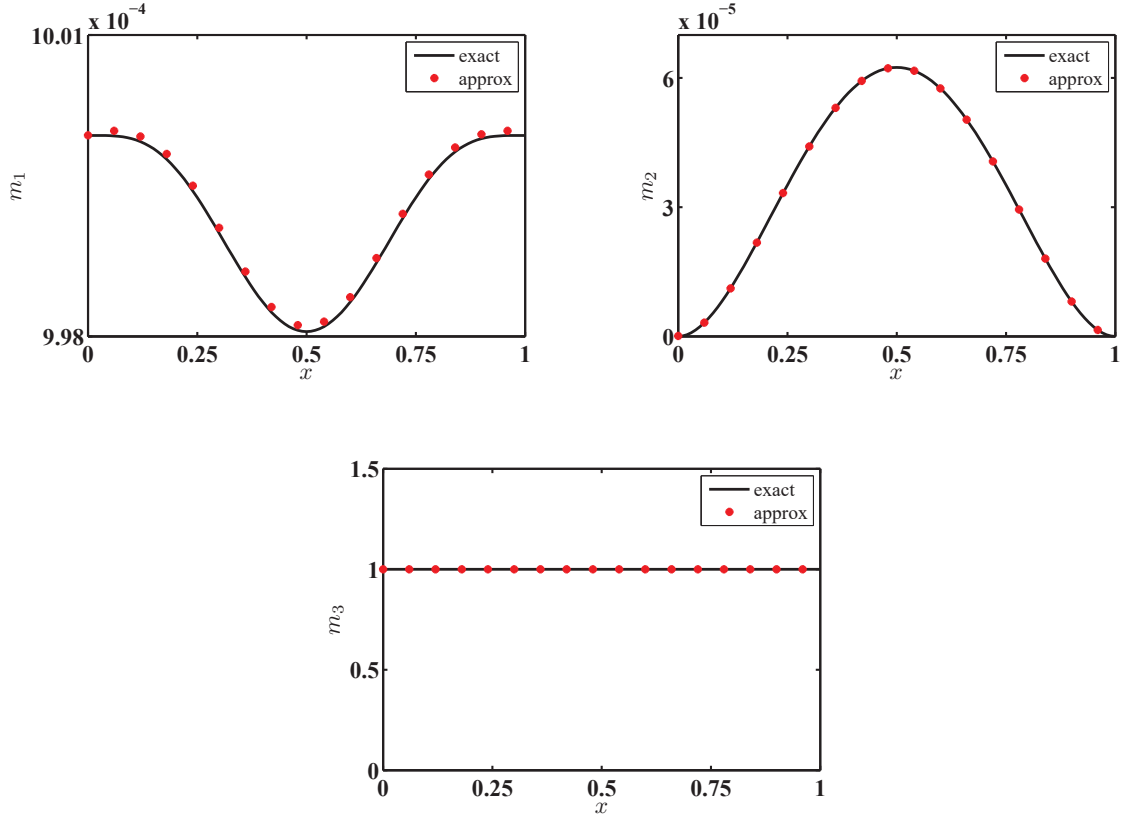


FIGURE 2.5 – Une comparaison entre les solutions exacte et calculée : les composantes d'aimantation m_1 , m_2 et m_3 en fonction de l'espace pour $\zeta = 4 \times 10^{-4}$ et $\alpha = 10^{-1}$

Nous terminons nos expériences numériques en vérifiant l'ordre de convergence en espace et en temps du schéma proposé. Nous définissons l'erreur numérique $e_i^n = m_i^n - m_{ex}(t_n, x_i)$ pour $i = 1, \dots, N_x$. Pour obtenir une estimation de la vitesse de convergence, nous avons effectué un certain nombre de simulations pour des pas en espace de plus en plus petits. Nous avons calculé les solutions numériques sur des grilles uniformes, $h = 1/N_x$ pour $N_x = 10, 20, 40, 80, 160$. Des calculs similaires sont effectués pour l'ordre de convergence en temps. Les courbes de

convergence sont présentées dans la figure 2.6. Les résultats montrent que le schéma est effectivement du second ordre en espace et du premier ordre en temps.

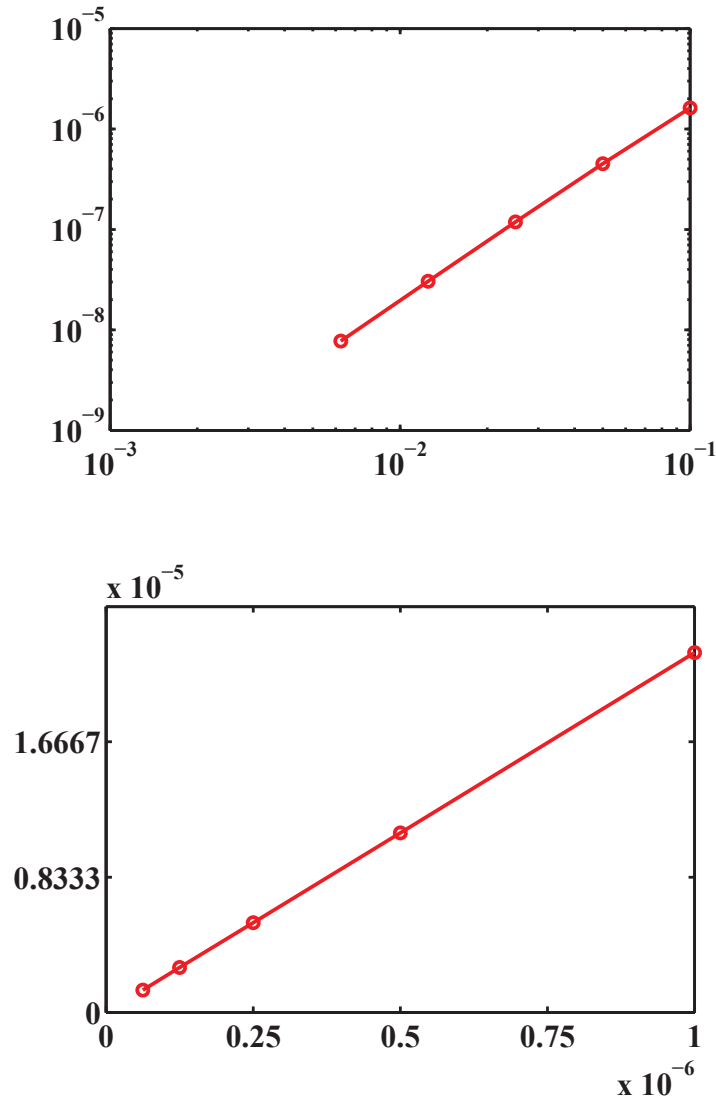


FIGURE 2.6 – Tracé en échelle log-log de l'erreur en norme max (en haut) en fonction du pas en temps et (en bas) en fonction du pas en espace.

Chapitre 3

Sur un modèle d'amortissement non local en ferromagnétisme

Sommaire

3.1	Introduction	44
3.2	Solutions faibles	46
3.3	Comportement en temps long	48
3.4	Sensibilité par rapport au coefficient d'amortissement	51

3.1 Introduction

L'amortissement de Gilbert [54] qui est local en espace, a été introduit pour décrire la dissipation d'énergie dans la dynamique d'aimantation. Il s'agit d'un paramètre phénoménologique des matériaux ferromagnétiques. La dissipation de l'énergie joue un rôle important dans la dynamique d'aimantation par injection de courant électrique [106] ou par application de champ magnétique [114]. Ces dernières décennies, une importante avancée a été réalisée dans la compréhension de l'amortissement, théoriquement et expérimentalement. Toutefois, pour des structures magnétiques assez compliquées, présentant par exemple des vortex, un amortissement non local a été prédit par plusieurs groupes de chercheurs [50, 120]. Cet amortissement non local peut être décomposé en composantes longitudinale et transversale. Par exemple, il a été découvert [61, 111] que les courants de spin transversaux ont une certaine influence sur la dissipation des ondes de spin tandis que les courants de spin longitudinaux augmentent l'amortissement effectif dans les parois de domaines magnétiques. Pour une présentation plus détaillée, nous renvoyons à [118].

On s'intéresse ici à un modèle mathématique issu de la théorie de la dynamique d'aimantation avec amortissement non local. Plus précisément, nous allons considérer le modèle proposé par Nembach *et al.* [89]. Ce modèle est donné par une équation LLG modifiée. La modification réside dans la présence d'une dérivée spatio-temporelle de l'aimantation dans le champ effectif. Pour décrire les équations du modèle, nous considérons $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné et régulier de \mathbb{R}^3 . Le point générique de \mathbb{R}^3 est noté par $x = (x_1, x_2, x_3)$. Nous supposons que le matériau ferromagnétique occupe le domaine Ω . Le champ d'aimantation qui vit dans \mathcal{S}^2 presque partout, est noté $M(t, x)$. Son évolution est gouvernée par l'équation LLG modifiée suivante (voir [89])

$$\begin{cases} \frac{1}{1 + \alpha^2}(\partial_t M - \alpha M \times \partial_t M) = -M \times \mathcal{H}_e(M) & \text{dans } Q = (0, T) \times \Omega, \\ \partial_i M \times \partial_t \partial_i M = 0 & \text{dans } Q = (0, T) \times \Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

Notons que la deuxième équation dans (3.1) est l'expression de l'hypothèse que les courants de spin longitudinaux sont négligeables. Ce cas de figure se présente par exemple dans l'étude des états stables des parois de domaines magnétiques [120]. Mais il est important de noter que la première équation de (3.1) est associée à la deuxième. On pourra consulter le modèle où les courants de spin longitudinaux ne sont pas négligés, qui est donné page 109 du présent

manuscrit. On munit (3.1) de la condition initiale

$$M(0, x) = M_0(x) \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.2)$$

et de la condition aux limites

$$\partial_\nu M = 0 \quad \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega. \quad (3.3)$$

Le champ magnétique effectif \mathcal{H}_e dépend de M et est donné par

$$\mathcal{H}_e(M) = D\Delta M + \zeta\Delta\partial_t M + \phi(M) + \mathcal{H}_d(M). \quad (3.4)$$

Le premier terme de paramètre $D > 0$ représente le champ d'échange et le terme indexé par la constante positive ζ décrit l'amortissement non locale dans la dynamique d'aimantation. Ce terme est proposé par Nembach *et al.* [89].

Par souci de simplicité, le champ d'anisotropie de volume $\phi(M)$, généralement linéaire en M , et le champ démagnétisant $\mathcal{H}_d(M)$ ne sont pas considérés ci-après.

Avant d'aborder le problème (3.1), rappelons d'abord quelques résultats antérieurs. Nous nous limitons à mentionner quelques références concernant l'existence et nous référons à [73] pour une bibliographie plus détaillée. Le cadre général (sans amortisseur non local, *i.e.*, le cas $\zeta = 0$) a été établi dans des travaux précédents, voir par exemple [113], [11], en utilisant la méthode d'approximation de Faedo-Galerkin/Pénalisation (FGP). Cette méthode donne une suite de solutions approchées qui converge vers une solution globale du problème. Des résultats ont été aussi obtenus pour des systèmes avec d'autres termes de dissipation. Par exemple, la modification considérée dans [96] consiste en l'ajout au terme de dissipation standard dans l'équation LLG d'un autre terme d'ordre supérieur du type $\Delta^2 M$. La méthode FGP est également utilisée pour résoudre ce problème. Dans [100], un modèle avec dissipation additionnelle de type friction, est étudié. Notons qu'un modèle avec des effets d'hystérésis est considéré dans [28]. Dans ce modèle, le comportement du moment magnétique est décrit par l'équation de Landau-Lifshitz non linéaire avec un terme supplémentaire modélisant l'effet d'hystérésis. Ce terme prend la forme d'un opérateur maximal monotone agissant sur la dérivée temporelle du moment magnétique. Pour ce modèle l'existence locale de solutions régulières est démontrée. On notera que dans le cadre de la dynamique de l'aimantation induite par injection de courant électrique, le travail [110] traite l'existence globale de solutions faibles à une équation LLG où

un terme de transport est ajouté au champ effectif tenant compte de l'effet du courant injecté. Toutes ces preuves sont basées sur une certaine pénalisation et différents types de régularisation.

Le reste du chapitre est organisé comme suit. Dans le paragraphe suivant, nous donnons la définition naturelle d'une solution faible du problème ainsi que l'énergie qui lui est associée. Le but du paragraphe 3 est d'étudier le comportement en temps long des éventuelles solutions. Le paragraphe suivant discute la sensibilité des solutions par rapport au paramètre d'amortissement non local ζ . Plus précisément, nous caractérisons les problèmes limites pour les asymptotiques ζ infiniment petit et infiniment grand.

3.2 Solutions faibles

Il est naturel, des points de vue mathématique et physique, que la définition d'une solution faible du problème (3.1)-(3.3) repose sur une énergie appropriée. On commence donc par établir le résultat suivant.

Lemme 3.1. *Si M est une solution régulière du problème (3.1)-(3.3) alors nous avons l'estimation d'énergie suivante*

$$\mathcal{E}(M(t)) + 2\zeta \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \partial_t M|^2 dx + \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \int_0^t \int_{\Omega} |\partial_t M|^2 dx \leq \mathcal{E}(M(0)). \quad (3.5)$$

Démonstration.

On utilise la technique proposée par exemple dans [12, 59]. On réécrit l'équation (3.1) sous la forme suivante

$$(\alpha \partial_t M - (1 + \alpha^2) \mathcal{H}_e) = \alpha M \times (\alpha \partial_t M - (1 + \alpha^2) \mathcal{H}_e(M)) - (1 + \alpha^2) \mathcal{H}_e(M) \quad (3.6)$$

Ensuite, on multiplie formellement l'équation (3.6) par $(\alpha \partial_t M - (1 + \alpha^2) \mathcal{H}_e(M))$ et on utilise la condition de saturation $|M|^2 = 1$ pour obtenir

$$\frac{\alpha}{1 + \alpha^2} |\partial_t M|^2 = \mathcal{H}_e(M) \cdot \partial_t M. \quad (3.7)$$

Si on intègre l'équation (3.7) sur Ω , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \int_{\Omega} |\partial_t M|^2 dx &= -D \int_{\Omega} \partial_i M \partial_i \partial_t M dx - \zeta \int_{\Omega} \partial_i \partial_t M \partial_i \partial_t M dx \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} (D \partial_n M + \zeta \partial_n \partial_t M) \partial_t M d\sigma \end{aligned} \quad (3.8)$$

donc

$$\frac{\alpha}{1+\alpha^2} \int_{\Omega} |\partial_t M|^2 dx = -\frac{D}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla M|^2 dx - \zeta \int_{\Omega} |\nabla \partial_t M|^2 dx \quad (3.9)$$

Une intégration sur $[0, t]$, $t \geq 0$, donne

$$\mathcal{E}(M(t)) + 2\zeta \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \partial_t M|^2 dx dt + \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \int_0^t \int_{\Omega} |\partial_t M|^2 dx dt \leq \mathcal{E}(M(0)). \quad (3.10)$$

Le lemme est prouvé. \square

Nous pouvons maintenant donner la définition naturelle d'une solution faible au problème (3.1)-(3.3).

Définition 3.1. Soit $M_0 \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ tel que $|M_0|^2 = 1$ presque partout dans Ω . Alors M est dite solution faible de (3.1)-(3.3) si

1. Pour tout $T > 0$, $M \in L^\infty((0, T); \mathbb{H}^1(\Omega))$, $\partial_t M \in L^2((0, T); \mathbb{L}^2(\Omega)) \cap L^\infty((0, T); \mathbb{L}^2(\Omega))$, et M vérifie la condition de saturation $|M(t, x)| = 1$ presque partout dans $\mathbb{R}^+ \times \Omega$.
2. $M(0, \cdot) = M_0(\cdot)$ au sens des traces.
3. Pour tout $G \in \mathbb{H}^1(Q) \cap \mathcal{C}_0(Q)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\alpha^2} \int_Q (\partial_t M - \alpha M \times \partial_t M) \cdot G \, dx dt &= D \int_Q M \times \partial_i M \cdot \partial_i G \, dx dt \\ &+ \zeta \int_Q M \times \partial_i \partial_t M \cdot \partial_i G \, dx dt. \end{aligned} \quad (3.11)$$

4. Pour tout $t \geq 0$, on a

$$\mathcal{E}(M(t)) + 2\zeta \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \partial_t M|^2 dx + \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \int_0^t \int_{\Omega} |\partial_t M|^2 dx dt \leq \mathcal{E}(M(0)) \quad (3.12)$$

où

$$\mathcal{E}(M(t)) = D \int_{\Omega} |\nabla M|^2 dx. \quad (3.13)$$

L'énergie associée à la solution faible, décrite à l'item 4 de la précédente définition, a été obtenue au lemme 3.1. Il est important de noter que la deuxième équation dans (3.1), qui traduit l'hypothèse que les courants de spin longitudinaux sont négligeables, est incluse dans la formulation faible (3.11). Du point de vue mathématique, cela signifie qu'on perd une partie de l'information de régularité apportée par un terme tel que $\zeta \Delta \partial_t M$ dans son ensemble. Par ailleurs, si

l'on pense à une approche par pénalisation pour démontrer l'existence d'une solution faible telle que donnée dans la définition 3.1, il faut garder à l'esprit qu'on a deux contraintes à traiter : la contrainte classique sur la norme du vecteur magnétisation, $|M| = 1$, mais aussi une contrainte originale portant sur les dérivées en temps et espace de ce même vecteur, $\partial_i M \times \partial_t \partial_i M = 0$. Nous revenons sur cette question dans les perspectives concluant ce manuscrit de thèse. Nous allons cependant étudier le comportement asymptotique, en temps mais aussi en fonction de ζ , des éventuelles solutions au sens de la définition 3.1.

3.3 Comportement en temps long

Dans cette section nous étudions le comportement des éventuelles solutions du problème (3.1) en temps long. De façon plus précise, nous étudions l'ensemble ω -limite des trajectoires de l'aimantation et nous caractérisons les éléments de l'ensemble ω -limite comme solutions d'un problème stationnaire approprié. On procède comme dans Carbou–Fabrie [28].

Soit M une solution faible de (3.1). On appelle ensemble ω -limite de la trajectoire de M l'ensemble suivant :

$$\omega(M) = \{\tilde{m} \in \mathbb{H}^1(\Omega), \exists t_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty, M(t_n, \cdot) \rightharpoonup \tilde{m} \text{ dans } \mathbb{H}^1(\Omega) \text{ au sens faible.}\}$$

On considère une solution faible M du problème (3.1). D'après l'estimation d'énergie (3.12), l'ensemble ω -limite $\omega(M)$ est non vide. Soit \tilde{m} un point de cet ensemble. Il existe donc une suite $(t_n)_{n \geq 1}$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$ telle que $M(t_n, \cdot)$ tend vers \tilde{m} dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$ faiblement. Puisque Ω est un domaine borné et régulier, d'après les injections classiques de Sobolev, $M(t_n, \cdot)$ tend vers \tilde{m} dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$ fortement pour $p \in [1, 6[$. En extrayant une sous suite, on suppose que $M(t_n, \cdot)$ tend vers \tilde{m} presque partout de telle sorte que la contrainte $|\tilde{m}| = 1$ est satisfaite presque partout. De plus, on remarque que pour tout n , $|M(t_n, \cdot)| = 1$ presque partout et donc $\|M(t_n, \cdot)\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} = 1$. Les inégalités d'interpolation dans les espaces \mathbb{L}^p permettent de déduire que pour $p < +\infty$, $M(t_n, \cdot)$ tend vers \tilde{m} fortement dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$.

Pour $s \in (-1, 1)$ et $x \in \Omega$ nous définissons pour n assez grand

$$m_n(s, x) = M(t_n + s, x).$$

On a le résultat de convergence suivant.

Lemme 3.2. *La suite $(m_n)_{n \geq 1}$ a les propriétés de convergence suivantes :*

$$\begin{aligned} m_n &\rightarrow \tilde{m} \text{ dans } \mathbb{L}^2((-1, 1) \times \Omega) \text{ fortement,} \\ m_n &\rightharpoonup \tilde{m} \text{ dans } \mathbb{L}^2((-1, 1); \mathbb{H}^1(\Omega)) \text{ faiblement.} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Démonstration. Dans [76] est établie l'estimation

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{\Omega} |m_n(s, x) - M(t_n, x)|^2 dx ds &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{\Omega} \left| \int_0^s \partial_t M(t_n + \tau, x) d\tau \right|^2 dx ds \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |s| \int_{\Omega} \int_{t_n-1}^{+\infty} |\partial_t M(\tau, x)|^2 d\tau dx ds \\ &\leq \int_{t_n-1}^{+\infty} \int_{\Omega} |\partial_t M(\tau, x)|^2 dx d\tau. \end{aligned}$$

Comme $\partial_t M$ est dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{\Omega} |m_n(s, x) - M(t_n, s)|^2 dx ds = 0.$$

Puisque $M(t_n, \cdot)$ tends vers \tilde{m} dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ fortement, m_n tends vers \tilde{m} dans $\mathbb{L}^2((-1, 1); \mathbb{L}^2(\Omega))$ fortement. De plus, nous avons vu que $(\nabla m_n)_{n \geq 1}$ est borné dans $\mathbb{L}^2((-1, 1) \times \Omega)$. Il existe donc une sous suite notée $(m_n)_{n \geq 1}$ telle que m_n tend vers \tilde{m} faiblement dans $\mathbb{L}^2((-1, 1), \mathbb{H}^1(\Omega))$, fortement dans $\mathbb{L}^2((-1, 1), \mathbb{L}^2(\Omega))$ et presque partout dans $(-1, 1) \times \Omega$. Ceci termine la démonstration du lemme.

Maintenant, on considère une fonction $\rho \in \mathcal{C}_0^\infty((-1, 1))$ telle que

$$0 \leq \rho(\tau) \leq 1, |\rho'(\tau)| \leq 2.$$

Dans la formulation faible (3.11) on prend comme fonction test $\rho(t - t_n)\Psi(x)$ avec Ψ une fonction dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$. En posant $s = t - t_n$, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 + \alpha^2} \left(\int_{-1}^1 \int_{\Omega} (\partial_t m_n(s, x) - \alpha m_n(s, x) \times \partial_t m_n(s, x)) \cdot \Psi(x) \rho(s) dx ds \right) \\ &- D \int_{-1}^1 \int_{\Omega} m_n(s, x) \times \partial_i m_n(s, x) \cdot \partial_i \Psi(x) \rho(s) dx ds \\ &- \zeta \int_{-1}^1 \int_{\Omega} m_n(s, x) \times \partial_i (\partial_t m_n)(s, x) \cdot \partial_i \Psi(x) \rho(s) dx ds = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Pour passer à la limite, nous devons estimer chaque terme de la formulation ci-dessus. Par exemple, pour le dernier terme, nous avons

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-1}^1 \int_{\Omega} m_n(s, x) \times \partial_i \partial_t m_n(s, x) \cdot \partial_i \Psi(x) \rho(s) dx ds \right| \\
& \leq \int_{-1}^1 \int_{\Omega} |m_n(s, x) \times \partial_i \partial_t m_n(s, x)| |\partial_i \Psi(x)| |\rho(s)| dx ds \\
& \leq \int_{-1}^1 \int_{\Omega} |m_n(s, x) \times \partial_i \partial_t m_n(s, x)| |\partial_i \Psi(x)| dx ds \\
& \leq \left(\int_{-1}^1 \int_{\Omega} |m_n(s, x) \times \partial_i \partial_t m_n(s, x)|^2 dx ds \right)^{1/2} \left(\int_{-1}^1 \int_{\Omega} |\partial_i \Psi(x)|^2 dx ds \right)^{1/2} \\
& \leq \left(\int_{-1}^1 \int_{\Omega} |\partial_i \partial_t m_n(s, x)|^2 dx ds \right)^{1/2} \left(\int_{-1}^1 \int_{\Omega} |\partial_i \Psi(x)|^2 dx ds \right)^{1/2} \\
& \leq \sqrt{2} \left(\int_{t_n-1}^{t_n+1} \int_{\Omega} |\partial_i \partial_t M(s, x)|^2 dx ds \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\partial_i \Psi(x)|^2 dx \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Puisque $\nabla \partial_t M$ appartient à $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$, le dernier terme tend vers zero lorsque n tends vers $+\infty$. De la même façon, nous passons à la limite dans les autres termes pour obtenir

$$\int_{-1}^1 \rho(s) ds \int_{\Omega} \tilde{m}(x) \times \partial_i \tilde{m}(x) \cdot \partial_i \Psi(x) dx = 0,$$

ce qui implique

$$\int_{\Omega} \tilde{m}(x) \times \partial_i \tilde{m}(x) \cdot \partial_i \Psi(x) dx = 0, \tag{3.16}$$

pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$.

Nous avons ainsi démontré le résultat suivant.

Théorème 3.1. *Si M est solution faible de (3.1), alors l'ensemble ω -limite est non vide. De plus, tout élément \tilde{m} dans $\omega(M)$ est solution faible du problème stationnaire*

$$\begin{aligned}
& \tilde{m} \in \mathbb{H}^1(\Omega); \quad |\tilde{m}| = 1 \text{ p.p. dans } \Omega, \\
& \tilde{m} \times \triangle \tilde{m} = 0 \text{ dans } \Omega.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

qui doit être considéré dans le sens faible (3.16).

Remarque 3.1. *Les solutions de l'équation (3.17) sont les flots harmoniques dans la sphère unité, qui interviennent dans plusieurs applications en physique, telles que l'équation de Ginzburg-Landau. Les flots harmoniques ont été l'objet de plusieurs études mathématiques en raison de*

leur importance, voir par exemple [47], [80]. Pour les liens qui existent entre les flots harmoniques et les solutions de l'équation LLG nous référons au livre [55, Chapter 4]. Quelques résultats sur la cas dynamique de (3.17) peuvent être trouvés dans [107].

3.4 Sensibilité par rapport au coefficient d'amortissement

Dans cette section nous étudions la sensibilité par rapport au coefficient ζ d'amortissement non local.

Commençons par le comportement lorsque ζ tend vers $+\infty$. Soit M^ζ une solution faible globale de l'équation (3.1) associée à ζ et à la donnée initiale M_0 et qui vérifie les estimations (3.10). Grâce à l'énergie associée au problème dans la définition 3.1, on a donc les estimations suivantes :

Lemme 3.3. *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de ζ telle que la suite M^ζ satisfait les estimations*

$$|M^\zeta(t, x)|^2 = 1 \text{ p.p.}$$

$$\|\nabla M^\zeta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))} \leq C$$

$$\|\nabla \partial_t M^\zeta\|_{L^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))} \leq C\zeta^{-1}$$

$$\|\partial_t M^\zeta\|_{L^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))} \leq C.$$

Un argument de type Aubin donne alors directement le résultat suivant :

Lemme 3.4. *La suite M^ζ est compacte dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$.*

Les lemmes 3.3 et 3.4 permettent d'établir les résultats de convergence suivant :

Lemme 3.5. *On peut extraire une sous-suite, toujours notée M^ζ , telle que l'on a les conver-*

gences :

$$\left\{ \begin{array}{l} M^\zeta \rightharpoonup M \text{ faiblement-} \star \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{H}^1(\Omega)) \\ \partial_t M^\zeta \rightarrow \partial_t M \text{ fortement dans } L^2(\mathbb{R}^+; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)) \\ \nabla M^\zeta \rightarrow \nabla M \text{ faiblement dans } L^2(\mathbb{R}^+; \mathbb{L}^2(\Omega)) \\ \nabla \partial_t M^\zeta \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; \mathbb{L}^2(\Omega)) \\ \partial_t M^\zeta \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; \mathbb{L}^2(\Omega)) \\ M^\zeta \rightarrow M \text{ fortement dans } L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; \mathbb{L}^2(\Omega)). \end{array} \right. \quad (3.18)$$

De plus, M satisfait le condition de saturation $|M|^2 = 1$.

On déduit des convergences précédentes le résultat suivant :

Théorème 3.2. *Il existe une sous-suite de $\zeta \rightarrow +\infty$ telle le domaine Ω est uniformément magnétisé à la limite.*

Remarque 3.2. *Le résultat du Théorème 3.2 est intéressant. En effet, il signifie que le terme ajouté au champ effectif du modèle (3.1) peut agir comme un contrôle du renversement d'aimantation dans le matériau ferromagnétique.*

Notre but maintenant est de passer à la limite lorsque ζ tends vers 0. Soit M^ζ une solution faible globale de l'équation (3.1) associée à ζ et à la donnée initiale M_0 et qui vérifie les estimations (3.10). La borne sur $\sqrt{\zeta} \nabla \partial_t M^\zeta$ dans $L^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega))$ (voir (3.1)) permet d'établir le résultat suivant.

Théorème 3.3. *Soit M la limite d'une sous-suite de M^ζ . Alors, M satisfait*

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t M - \alpha M \times \partial_t M = -(1 + \alpha^2) M \times D \triangle M \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ M(0) = M_0 \text{ dans } \Omega, \\ M \times D \partial_n M = 0 \text{ sur } \partial \Omega. \end{array} \right. \quad (3.19)$$

De plus, M vérifie la condition $|M(t, x)| = 1$ p.p. $x \in \Omega$ et pour tout $t \geq 0$.

Remarque 3.3. De (3.19) on peut conclure que, pour de petites valeurs de ζ , l'amortissement non local magnétique disparaît et la dynamique classique continue. En d'autres termes, l'aimantation est entraînée par précession plusieurs fois autour de la direction du champ effectif avant d'atteindre l'équilibre.

Chapitre 4

Homogénéisation de l'équation LLG dans un milieu hétérogène

Sommaire

4.1	Introduction	56
4.2	Rappels d'homogénéisation	57
4.3	Position du problème	60
4.4	Résultat principal : modèle homogénéisé	63
4.5	Obtention formelle du modèle homogénéisé	64
4.6	Obtention rigoureuse du modèle homogénéisé	68

4.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'homogénéisation de l'équation LLG dans un milieu fortement hétérogène. Nous citons d'abord quelques travaux portant sur l'homogénéisation des milieux ferromagnétiques. Hamdache [57] a étudié l'homogénéisation des multicouches ferromagnétiques. Ces microstructures (empilements) sont constituées d'une alternance de couches ferromagnétiques (FM) et des couches non magnétiques (NM) avec un couplage inter-couches aux interfaces FM/NM. Un problème homogénéisé a été obtenu lorsque le nombre de couches tend vers l'infini. Une généralisation de [57] a été proposée par Santugini-Repique [101] qui a étudié l'homogénéisation de l'équation LLG dans de tels systèmes en tenant en compte de l'énergie d'anisotropie de surface. Les équations homogénéisées satisfaites par la limite à deux échelles de la solution faible ont été obtenues. Santugini-Repique [102], a aussi étudié l'homogénéisation du champ démagnétisant dans des structures périodiquement perforées en utilisant la méthode de la convergence à double échelle. Comme application, l'homogénéisation de l'équation LLG est étudiée et le problème homogénéisé est obtenu. Dans le cadre statique, Alouges *et al.* [7] ont considéré l'homogénéisation d'un matériau composite ferromagnétique où les hétérogénéités sont distribuées périodiquement dans le matériau. L'homogénéisation de la fonctionnelle d'énergie est étudiée en utilisant la Γ -convergence et la convergence à deux échelles et une dérivation rigoureuse de l'énergie libre (de Gibbs–Landau) homogénéisée est proposée lorsque la taille des hétérogénéités tend vers 0.

La structure hétérogène considérée dans ce chapitre est composée de deux matériaux ferromagnétiques différents présentant un fort contraste sur les propriétés magnétiques. Dans le domaine que l'on appelle matrice, les champs effectif, démagnétisant et d'anisotropie de volume sont mis à l'échelle par un petit paramètre ϵ représentant la taille des blocs de la matrice. Cette mise à l'échelle préserve la physique de l'aimantation lorsque ϵ tend vers zéro. En utilisant la théorie de l'homogénéisation, nous obtenons le modèle effectif correspondant. Plus précisément, nous utilisons le concept de la convergence à deux échelles, un opérateur de dilatation couplés à des arguments de réduction de dimension par grilles emboîtées pour la manipulation des termes non linéaires. Nous montrons alors que la partie moins “magnétisée” du milieu contribue à travers des termes de mémoire supplémentaires dans le champ effectif du modèle

homogénéisé.

4.2 Rappels d'homogénéisation

Nous avons considéré dans les chapitre précédents des milieux homogènes. Mais les milieux (naturels et manufacturés) peuvent être très hétérogènes au sens où leurs propriétés physique peuvent varier très fortement d'un point à un autre. En principe, on sait travailler dans un tel cadre ; il "suffit" d'imposer ces fortes variations aux fonctions caractéristiques de milieux. Mais en pratique, il faudrait pouvoir déterminer leur valeur en tout point x du domaine étudié. De plus, les calculs qui s'en suivraient deviendraient vite prohibitifs. Par exemple, la finesse du maillage nécessaire à une étude numérique ne serait pas raisonnable.

Cette section est une brève introduction à la théorie de l'homogénéisation qui étudie les méthodes de moyennisation dans les équations aux dérivées partielles. En d'autres termes, l'homogénéisation cherche des paramètres effectifs (ou homogénéisés, ou macroscopiques) pour décrire des milieux désordonnés ou très hétérogènes. Pour une présentation plus complète nous référons à [4], [19], [39], [66].

L'homogénéisation a d'abord été développée pour des structures périodiques. Celles-ci sont très nombreuses, surtout dans les applications industrielles, et on dispose d'une méthode très simple et très puissante pour les homogénéiser, au moins formellement : la méthode des développements asymptotiques à deux échelles que nous présentons à la section 4.2.1. Néanmoins l'homogénéisation n'est pas réduite au cas périodique : il existe aussi une théorie de l'homogénéisation non périodique.

Dans une structure périodique, nous notons ϵ le rapport de la période sur la taille caractéristique de la structure. Lorsque ce paramètre positif ϵ est petit, l'homogénéisation consiste à effectuer une analyse asymptotique lorsque ϵ tend vers zero (voir figure 4.1). La limite ainsi obtenue sera dite homogénéisée, macroscopique, ou effective. Dans le problème homogénéisé la forte hétérogénéité de la structure périodique d'origine est moyennée et remplacée par l'utilisation de coefficients homogénéisés. Moralement, on remplace ainsi le matériau microscopique et hétérogène par un matériau composite équivalent.

4.2.1 Obtention formelle du modèle homogénéisé

Historiquement, la première technique "mathématique" utilisée pour homogénéiser de tels problèmes a été celle du développement asymptotique. Bien que purement formel, ce type de raisonnement permet d'obtenir le modèle macroscopique correspondant au modèle microscopique, tout en visualisant d'où proviennent les termes conservés à une échelle microscopique.

La solution du problème microscopique dans Ω dépend de ϵ et naturellement de la position ($x \in \Omega$). Soit $u^\epsilon(x)$ une telle solution (nous omettons ici la dépendance en temps qui n'est pas soumise à l'échelonnage en ϵ). L'hypothèse de départ est de supposer que la solution $u^\epsilon(x)$ est donnée par un développement en série de ϵ , dit à "deux échelles", du type

$$u^\epsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k u^k(x, \frac{x}{\epsilon}).$$

où chaque terme $u^k(x, y)$ est une fonction de deux variables $x \in \Omega$ et $y \in Y = (0, 1)^3$, qui est périodique en y de période Q . Le domaine Q désigne en effet la cellule standard reproduite périodiquement dans le domaine Ω , lui conférant sa structure périodique. La variable x est dite lente ou macroscopique, tandis que y est dite rapide ou microscopique. Cette série est injectée dans l'équation du modèle microscopique, et la règle de dérivation composée suivante est utilisée

$$\nabla = \epsilon^{-1} \nabla_y + \nabla_x.$$

Puis en identifiant chaque puissance de ϵ dans l'équation microscopique, on obtient une "cascade" d'équations (sur le principe qu'une série entière de ϵ est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls). En fait, seuls les trois premiers termes de cette série (ϵ^{-2} , ϵ^{-1} , et ϵ^0) suffisent pour notre propos.

4.2.2 Obtention rigoureuse du modèle homogénéisé

Le raisonnement décrit au paragraphe précédent est purement formel. L'idéal lors de ce type d'étude est de prouver rigoureusement la convergence du modèle microscopique vers le modèle macroscopique. Un outil essentiel est alors le concept de convergence à double échelle, introduit par G. Nguetseng [92] et développé par G. Allaire [3]. Donnons-en la définition de base, ici pour des fonctions dépendant du temps, dans un intervalle de temps noté J .

Définition 4.1. On dit qu'une suite de fonctions (v_ϵ) de $L^2(\Omega \times J)$ converge à double échelle vers une limite $v_0(x, y, t)$ appartenant à $L^2(\Omega' \times J; L^2_\#(Q))$, si

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \times J} v_\epsilon(x, t) \Psi\left(x, \frac{x}{\epsilon}, t\right) dx dt = \int_{\Omega \times J} \int_Q v_0(x, y, t) \Psi(x, y, t) dx dy dt.$$

pour toute fonction test $\Psi(x, y, t) \in \mathcal{D}(\Omega \times J, C^\infty_\#(Q))$. Nous noterons alors $v_\epsilon \xrightarrow{2} v_0$.

La notion de convergence à double échelle trouve sa raison d'être dans le résultat suivant (voir [3]).

Proposition 4.1.

- (i) De toute suite (v_ϵ) bornée dans $L^2(\Omega \times J)$, on peut extraire une sous-suite qui converge à double échelle.
- (ii) Soit (v_ϵ) une suite bornée de $H^1(\Omega \times J)$ qui converge faiblement vers v dans $H^1(\Omega \times J)$. Donc (v_ϵ) converge à double échelle vers v , et il existe une fonction $v_1 \in L^2(\Omega \times J, H^1_\#(Q))$ telle que, pour une sous suite extraite, $(\nabla v_\epsilon(x, t))$ converge à double échelle vers $\nabla_x v(x, t) + \nabla_y v_1(x, y, t)$.
- (iii) Soit (v_ϵ) une suite bornée de $L^2(\Omega \times J)$ qui converge à double échelle vers v_0 dans $L^2(\Omega \times J \times Q)$. Si de plus

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|v_\epsilon\|_{L^2(\Omega \times J)} = \|v_0\|_{L^2(\Omega \times J \times Q)}.$$

Alors pour toute suite $(w_\epsilon) \subset L^2(\Omega \times J)$ qui converge à double échelle vers w_0 dans $L^2(\Omega \times J \times Q)$, on a

$$v_\epsilon(x, t) w_\epsilon(x, t) \rightharpoonup \int_Q v_0(x, y, t) w_0(x, y, t) dy \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega \times J).$$

Au regard de ce dernier théorème, on peut élargir la classe des fonctions test de la Définition 4.1.

Définition 4.2. Toute fonction $\Psi(x, y, t)$, Q -périodique en y , telle que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \times J} |\Psi\left(x, \frac{x}{\epsilon}, t\right)|^2 dx dt = \int_{\Omega \times J} \int_Q |\Psi(x, y, t)|^2 dx dy dt,$$

est une fonction test admissible pour la convergence à double échelle.

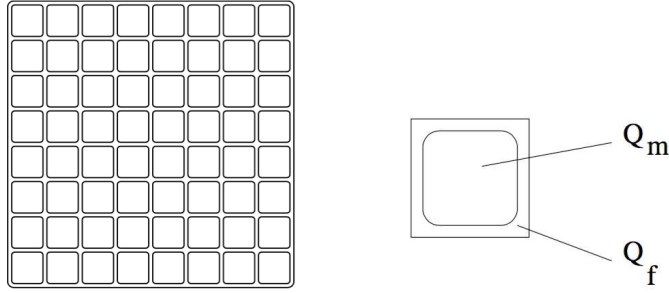


FIGURE 4.1 – Exemple de domaine à structure périodique et cellule standard associée

4.3 Position du problème

4.3.1 Le domaine

On considère un milieu hétérogène constitué de deux phases ferromagnétiques distinctes. Plus précisément, la structure ferromagnétique est constituée d'une matrice de blocs disjoints où la dynamique est lente, entouré d'une couche mince d'un autre matériau ayant de meilleures propriétés magnétiques. Le milieu occupe le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ supposé borné, à structure périodique décrite par un paramètre $\epsilon > 0$ correspondant à la taille caractéristique des blocs de la matrice (voir figure 4.1). Le domaine Ω est donc composé d' ϵ -copies d'une cellule standard Q , qui consiste en deux blocs, Q_m connexe de bord ∂Q_m régulier, entouré d'un domaine connexe Q_f . On note $\partial\Omega$ le bord de Ω (supposé Lipschitzien). La normale unitaire sortante de $\partial\Omega$ est notée γ^ϵ . On note Γ^ϵ l'interface entre Q_m et Q_f et par ν^ϵ la normale unitaire correspondante. On a donc la décomposition suivante du domaine : pour $\epsilon > 0$, en notant Ω_m^ϵ la partie de la matrice du domaine et Ω_f^ϵ l'autre partie,

$$\Omega_m^\epsilon = \Omega \cap \left\{ \bigcup_{\xi \in \mathcal{A}} \epsilon(Q_m + \xi) \right\}, \quad \Omega_f^\epsilon = \Omega \setminus \overline{\Omega_m^\epsilon}, \quad \Gamma^\epsilon = \Omega \cap \left\{ \bigcup_{\xi \in \mathcal{A}} \epsilon(\partial Q_m + \xi) \right\}$$

où \mathcal{A} désigne un maillage approprié de l'espace. L'intervalle de temps d'étude du problème sera noté $J = (0, T)$ avec $T > 0$. Pour alléger les notations, on choisit Q tel que $|Q| = 1$, plus précisément

$$Q =]-1/2; 1/2[^3.$$

4.3.2 Le modèle microscopique

Nous décrivons ici le modèle mathématique que nous étudierons dans la suite. On écrit le vecteur aimantation $\mathbf{M}^\epsilon \in \mathbb{R}^3$ sous la forme suivante

$$\mathbf{M}^\epsilon = \chi_m^\epsilon m^\epsilon + \chi_f^\epsilon M^\epsilon$$

avec χ_m^ϵ (resp. χ_f^ϵ) est la fonction caractéristique de Ω_m^ϵ (resp. Ω_f^ϵ). L'aimantation vérifie la contrainte de saturation non convexe suivante

$$|\mathbf{M}^\epsilon| = \begin{cases} 1 & \text{dans } \Omega, \\ 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

L'évolution temporelle de l'aimantation peut être décrite par l'équation LLG ([2], [59]) :

$$\frac{1}{1 + \alpha^2} \left(\partial_t \mathbf{M}^\epsilon - \alpha \mathbf{M}^\epsilon \times \partial_t \mathbf{M}^\epsilon \right) = -\mathbf{M}^\epsilon \times \mathcal{H}_e^\epsilon(\mathbf{M}^\epsilon) \quad \text{dans } \Omega \times J. \quad (4.2)$$

Le champ effectif $\mathcal{H}_e^\epsilon(\mathbf{M}^\epsilon)$ est donné par

$$\mathcal{H}_e^\epsilon(\mathbf{M}^\epsilon) = \operatorname{div}(A^\epsilon \nabla \mathbf{M}^\epsilon) + \phi_{va}^\epsilon(\mathbf{M}^\epsilon) + \mathcal{H}_d^\epsilon(\mathbf{M}^\epsilon), \quad (4.3)$$

avec

$$\chi_m^\epsilon(x) A^\epsilon(x) = \epsilon^2 \chi_m^\epsilon(x) A_m(x, x/\epsilon), \quad \chi_f^\epsilon(x) A^\epsilon(x) = \chi_f^\epsilon(x) A_f(x)$$

où $A_k = (A_{kij})_{1 \leq i, j \leq 3}$, $k = m, f$, est une matrice symétrique positive de \mathbb{R}^3 . Nous supposons que ces matrices sont dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \otimes \mathcal{C}_\#^\infty(Q)$. Nous supposons aussi la coercivité uniforme de A_k , $k = m, f$, *i.e.*, il existe une constante $A_* > 0$ telle que, pour tous (x, y) dans $\Omega \times Q$ et $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ dans \mathbb{R}^3 , on a

$$\sum_{i,j=1}^3 A_{kij}(x, y) \zeta_i \zeta_j \geq A_* \left(\sum_{i=1}^3 \zeta_i^2 \right) = A_* |\xi|^2.$$

Nous supposons également que A_m est une fonction test admissible pour la convergence à double échelle (voir [112]). Le terme ϕ_{va}^ϵ représente le champ d'anisotropie de volume. Il est donné par

$$\phi_{va}^\epsilon(\mathbf{M}^\epsilon) = K_v^\epsilon (\mathbf{M}^\epsilon - (\mathbf{M}^\epsilon \cdot u)u)$$

où K_v^ϵ est une fonction scalaire bornée et le vecteur constant u est la direction de l'axe d'aimantation facile. Dans la suite, par souci de simplicité, nous supposons que $\phi_{va}^\epsilon(\mathbf{M}^\epsilon) = \nabla \Lambda(\mathbf{M}^\epsilon)$

est une fonction gradient continue telle que $0 \leq \Lambda(m) \leq \Lambda_\infty < \infty$ si $m \in \mathcal{S}^2$ et ϕ_{va}^ϵ est telle que

$$\phi_{va}^\epsilon(\mathbf{M}^\epsilon) = \chi_m^\epsilon(x) \phi_{va,m}(x, x/\epsilon, m^\epsilon) + \chi_f^\epsilon(x) \phi_{va,f}(x, M^\epsilon),$$

La fonction $\phi_{va,m}$ étant de plus périodique par rapport à sa deuxième variable. Dans le cas d'une approximation magnétostatique ([12]), le champ démagnétisant $\mathcal{H}_d^\epsilon(\mathbf{M}^\epsilon)$ satisfait, dans $J \times \mathbb{R}^3$, $\text{curl} \mathcal{H}_d^\epsilon = 0$ et l'équation magnétostatique

$$\text{div}(\mu^\epsilon \mathcal{H}_d^\epsilon + \chi_\Omega \mathbf{M}^\epsilon) = 0$$

où μ^ϵ est la perméabilité magnétique. Les modèles classiques considèrent ces dernières équations ou simplement supposent que \mathcal{H}_d^ϵ est un potentiel en fonction de \mathbf{M}^ϵ . Nous adopterons ici les deux formulations, *i.e.*,

$$\mathcal{H}_d^\epsilon = \nabla \Xi^\epsilon(\mathbf{M}^\epsilon) + \mathbf{H}^\epsilon$$

où

$$\nabla \Xi^\epsilon(\mathbf{M}^\epsilon) = \epsilon \chi_m^\epsilon \nabla \Xi_m(m^\epsilon) + \chi_f^\epsilon \nabla \Xi_f(M^\epsilon) \quad (4.4)$$

où chaque fonction gradient continue satisfait $0 \leq \Xi_k(m) \leq \Xi_\infty < \infty$ $m \in \mathcal{S}^2$, et où le champ magnétique $\mathbf{H}^\epsilon = \epsilon \chi_m^\epsilon h^\epsilon + (\chi_f^\epsilon + \chi_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega}) H^\epsilon$ satisfait

$$\text{curl}(\mathbf{H}^\epsilon) = 0, \quad (4.5)$$

$$\text{div}(\epsilon \chi_m^\epsilon h^\epsilon + (\chi_f^\epsilon + \chi_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega}) H^\epsilon + \epsilon \chi_m^\epsilon m^\epsilon + \chi_f^\epsilon M^\epsilon) = 0, \quad (4.6)$$

Par souci de simplicité, nous avons supposé une perméabilité constante. Nous allons proposer une formulation potentielle de ce problème. En effet, (4.5) permet d'affirmer l'existence de deux potentiels scalaires p^ϵ et P^ϵ tels que

$$\mathbf{H}^\epsilon = \epsilon \chi_m^\epsilon \nabla p^\epsilon + (\chi_f^\epsilon + \chi_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega}) \nabla P^\epsilon.$$

De (4.6), (p^ϵ, P^ϵ) est défini par

$$\text{div}(\epsilon^2 \chi_m^\epsilon \nabla p^\epsilon + (\chi_f^\epsilon + \chi_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega}) \nabla P^\epsilon + \epsilon \chi_m^\epsilon m^\epsilon + \chi_f^\epsilon M^\epsilon) = 0. \quad (4.7)$$

Nous complétons le modèle avec les conditions initiales et aux bord. La donnée initiale satisfaite par l'aimantation est

$$\mathbf{M}^\epsilon(0, x) = M_{init}(x), \quad |M_{init}(x)|^2 = 1 \text{ p.p. dans } \Omega. \quad (4.8)$$

L'équation du champ démagnétisant (4.7) est complétée par la condition initiale

$$\epsilon^2 \chi_m^\epsilon p^\epsilon + (\chi_f^\epsilon + \chi_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega}) P^\epsilon = P_{init} \text{ à } t = 0,$$

avec la contrainte

$$\Delta P_{init} + \operatorname{div}(\chi_\Omega M_{init}) = 0.$$

La condition au bord extérieure est de type Neumann homogène

$$\partial_{nA^\epsilon} \mathbf{M}^\epsilon = 0 \text{ sur } J \times \partial\Omega. \quad (4.9)$$

A l'interface Γ^ϵ entre les deux constituants du milieu composite, on suppose la continuité de l'aimantation

$$m^\epsilon = M^\epsilon \text{ sur } J \times \Gamma^\epsilon \quad (4.10)$$

et la conservation des flux à travers Γ^ϵ comme suit

$$\epsilon^2 A_m^\epsilon \nabla m^\epsilon \cdot \nu^\epsilon = -A_f^\epsilon \nabla M^\epsilon \cdot \nu^\epsilon \text{ sur } J \times \Gamma^\epsilon, \quad (4.11)$$

$$p^\epsilon = P^\epsilon, \quad (\epsilon^2 \nabla p^\epsilon + \epsilon m^\epsilon) \cdot \nu^\epsilon = -(\nabla P^\epsilon + M^\epsilon) \cdot \nu^\epsilon \text{ sur } J \times \Gamma^\epsilon. \quad (4.12)$$

4.4 Résultat principal : modèle homogénéisé

Le modèle effectif correspondant à (4.2)-(4.12) est donné comme suit. Le vecteur aimantation et le champ démagnétisant effectifs vérifient

$$\begin{aligned} |Q_f| \partial_t M - \alpha |Q_f| M \times \partial_t M &= -(1 + \alpha^2) M \times \left(\operatorname{div}(A^H \nabla M) + |Q_f| \phi_{va,f}(M) \right. \\ &\quad \left. + \Xi'_f(M) W^H \nabla M + W^H \nabla P - \int_{Q_m} \operatorname{div}_y(A_m(x, y) \nabla_y m_0) dy \right) \\ &\text{dans } \Omega \times J, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$A^H \nabla M \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times J, \quad (4.14)$$

$$\operatorname{div}(\chi_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} \nabla P + \chi_\Omega W^H (\nabla P + M)) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \times J, \quad (4.15)$$

où A^H et W^H sont définies par

$$A_{ij}^H = \int_{Q_f} A_f(e_i + \nabla_y v_i) \cdot (e_j + \nabla_y v_j) dy, \quad 1 \leq i, j \leq 3, \quad (4.16)$$

$$W_{ij}^H = |Q_f| + \int_{Q_f} \partial_i w_j(y) dy, \quad 1 \leq i, j \leq 3, \quad (4.17)$$

les fonctions $(v_j)_{j=1\dots 3}$ et $(w_j)_{j=1\dots 3}$ étant les solutions Q -périodiques des problèmes auxiliaires suivants :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y(A_f(\nabla_y w_j + e_j)) = 0 \text{ dans } \Omega \times Q_f, \\ A_f(\nabla_y v_j + e_j) \cdot \nu = 0 \text{ sur } \Omega \times \partial Q_f, \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y(\nabla_y w_j + e_j) = 0 \text{ dans } Q_f, \\ \nabla_y w_j \cdot \nu = -e_j \cdot \nu \text{ sur } \partial Q_f, \end{cases} \quad (4.19)$$

où e_j est le vecteur unité dans la j ème direction. En outre, les termes sources faisant intervenir m_0 et p_0 sont calculés grâce au problème suivant :

$$\begin{aligned} \partial_t m_0 - \alpha m_0 \times \partial_t m_0 = & -(1 + \alpha^2) m_0 \times \left(\operatorname{div}_y(A_m(x, y) \nabla_y m_0) + \phi_{va,m}(x, y, m_0) \right. \\ & \left. + \nabla_y(\Xi_m(y, m_0)) + \nabla_y p_0 \right) \text{ dans } \Omega \times Q_m \times J, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\operatorname{div}_y(\nabla_y p_0 + m_0) = 0 \text{ dans } \Omega \times Q_m \times J, \quad (4.21)$$

$$m_0 = M \text{ et } p_0 = P \text{ sur } \partial Q_m. \quad (4.22)$$

Les équations (4.13), (4.14) et (4.20) sont complétées par les conditions initiales suivantes :

$$M(x, 0) = m_0(x, y, 0) = M_{init}(x), \quad P(x, 0) = p_0(x, y, 0) = P_{init}(x) \text{ sur } \Omega \times Q_m. \quad (4.23)$$

Remarque 4.1. Ainsi le modèle effectif garde la structure du modèle LLG (contrairement à ce que nous obtiendrons dans un cas traité au chapitre suivant), mais dans un milieu composite équivalent caractérisé par les paramètres effectifs A^H et W^H . De plus, apparaissent des effets de mémoire non locaux, qui peuvent être interprétés comme une excitation magnétique supplémentaire dans le champ effectif. Cet effet non local n'apparaît que dans l'équation de la magnétisation. L'équation de Maxwell magnétostatique ne change quant à elle que par les paramètres effectifs.

4.5 Obtention formelle du modèle homogénéisé

Nous utilisons maintenant des développements asymptotiques formels. Cela signifie que si $y = x/\epsilon$, nous supposons que les solutions admettent dans Ω_f^ϵ et Ω_m^ϵ les développements

localement périodiques en y suivant

$$\begin{aligned}\chi_f^\epsilon(x)M^\epsilon(x, t) &= \chi_f(y) \sum_{i \geq 0} \epsilon^i M_i(x, y, t), \\ \chi_m^\epsilon(x)m^\epsilon(x, t) &= \chi_m(y) \sum_{i \geq 0} \epsilon^i m_i(x, y, t), \\ (\chi_f + \chi_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega})(x)P^\epsilon(x, t) &= (\chi_\Omega(x)\chi_f(y) + \chi_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega}(x)) \sum_{i \geq 0} \epsilon^i P_i(x, y, t), \\ \chi_m^\epsilon(x)p^\epsilon(x, t) &= \chi_m(y) \sum_{i \geq 0} \epsilon^i p_i(x, y, t).\end{aligned}$$

où nous avons noté par χ_f (resp. χ_m) la fonction caractéristique de Q_f (resp. Q_m). Nous introduisons ces développements formels dans le système (4.2)-(4.12). Nous identifions les termes suivant les puissances en ϵ . Énumérons les résultats obtenus équation par équation. Premièrement, on considère la contrainte (4.1). Pour $f^\epsilon = M^\epsilon$ comme pour $f^\epsilon = m^\epsilon$, nous déduisons de (4.1) que $\sum_{i=1}^3 f_{0i}^2 = 1$ et $\sum_{i=1}^3 f_{0i}f_{1i} = 0$, c'est-à-dire

$$|M_0| = 1 \text{ et } M_0 \text{ est orthogonale à } M_1 \text{ sur } \Omega_f^\epsilon \times J, \quad (4.24)$$

$$|m_0| = 1 \text{ et } m_0 \text{ est orthogonale à } m_1 \text{ dans } \Omega_m^\epsilon \times J. \quad (4.25)$$

Ensuite, les termes en ϵ^{-2} , ϵ^{-1} et ϵ^0 donnent dans $\Omega_f^\epsilon \times J$ les trois équations suivantes :

$$-(1 + \alpha^2)M_0 \times \operatorname{div}_y(A_f \nabla_y M_0) = 0, \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} & -(1 + \alpha^2)M_0 \times \left(\operatorname{div}_x(A_f \nabla_y M_0) + \operatorname{div}_y(A_f \nabla_x M_0 + A_f \nabla_y M_1) \right) \\ & -(1 + \alpha^2)M_1 \times \operatorname{div}_y(A_f \nabla_y M_0) - (1 + \alpha^2)M_0 \times \nabla_y \Xi_f(M_0) \\ & -(1 + \alpha^2)M_0 \times \nabla_y P_0 = 0, \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \partial_t M_0 - \alpha M_0 \times \partial_t M_0 &= -(1 + \alpha^2)M_0 \times \left(\operatorname{div}_x(A_f(\nabla_x M_0 + \nabla_y M_1)) \right. \\ & \quad \left. + \operatorname{div}_y(A_f(\nabla_x M_1 + \nabla_y M_2)) \right) - (1 + \alpha^2)M_1 \times \left(\operatorname{div}_x(A_f \nabla_y M_0) \right. \\ & \quad \left. \operatorname{div}_y(A_f(\nabla_x M_0 + \nabla_y M_1)) \right) - (1 + \alpha^2)M_2 \times \operatorname{div}_y(A_f \nabla_y M_0) \\ & -(1 + \alpha^2)M_0 \times \left(\nabla_x \Xi_f(M_0) + \Xi'_f(M_0) \nabla_y M_1 + \Xi''_f(M_0) M_1 \nabla_y M_0 \right. \\ & \quad \left. + \Xi_f^{(3)}(M_0) M_1 M_2 \nabla_y M_0 \right) - (1 + \alpha^2)M_0 \times \phi_{va,f}(M_0) - (1 + \alpha^2)M_0 \times \\ & (\nabla_x P_0 + \nabla_y P_1) - (1 + \alpha^2)M_1 \times \nabla_y P_0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Le même processus dans $\Omega_m^\epsilon \times J$ donne :

$$\begin{aligned} \partial_t m_0 - \alpha m_0 \times \partial_t m_0 &= -(1 + \alpha^2) m_0 \times \operatorname{div}_y (A_m(x, y) \nabla_y m_0) - (1 + \alpha^2) m_0 \times \\ \phi_{va,m}(x, y, m_0) &- (1 + \alpha^2) m_0 \times \nabla_y (\Xi_m(y, m_0)) - (1 + \alpha^2) m_0 \times \nabla_y p_0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Le développement des conditions aux limites M^ϵ et m^ϵ sur $\Omega \times \partial Q_m \times J$ donne

$$M_i = m_i, \quad i \geq 0, \quad (4.30)$$

$$A_f \nabla_y M_0 \cdot \nu = 0, \quad (4.31)$$

$$A_f (\nabla_x M_0 + \nabla_y M_1) \cdot \nu = 0, \quad (4.32)$$

$$A_f(x) (\nabla_x M_1 + \nabla_y M_2) \cdot \nu = -A_m(x, y) \nabla_y m_0 \cdot \nu. \quad (4.33)$$

D'une manière similaire, les équations caractérisant le champ démagnétisant donnent :

$$\Delta_y P_0 = 0, \quad (4.34)$$

$$\operatorname{div}_x (\nabla_y P_0) + \operatorname{div}_y (\nabla_x P_0) + \Delta_y P_1 + \operatorname{div}_y (\chi_\Omega M_0) = 0, \quad (4.35)$$

$$\Delta_x P_0 + \operatorname{div}_x (\nabla_y P_1) + \operatorname{div}_x (\chi_\Omega M_0) + \operatorname{div}_y (\nabla_x P_1 + \nabla_y P_2 + \chi_\Omega M_1) = 0, \quad (4.36)$$

$$\operatorname{div}_y (\nabla_y p_0 + m_0) = 0, \quad (4.37)$$

$$P_i = p_i, \quad i \geq 0, \quad (4.38)$$

$$(\nabla_x P_1 + \nabla_y P_2 + M_1) \cdot \nu = -(\nabla_y p_0 + m_0) \cdot \nu, \quad (4.39)$$

$$\nabla_y P_0 \cdot \nu_{\partial Q_f} = 0, \quad (4.40)$$

$$(\nabla_x P_0 + \nabla_y P_1 + \chi_\Omega M_0) \cdot \nu_{\partial Q_f} = 0. \quad (4.41)$$

Notons que les trois premières équations sont satisfaites dans $((\mathbb{R}^3 \setminus \Omega) \times Q) \cup (\Omega \times Q_f) \times J$, la quatrième dans $\Omega \times Q_m \times J$, les deux équations suivantes dans $\Omega \times \partial Q_m \times J$ et les deux dernières équations dans $((\mathbb{R}^3 \setminus \Omega) \times \partial Q \times J) \cup (\Omega \times \partial Q_f \times J)$.

Maintenant, nous exploitons les dernières équations. D'abord, nous déduisons de (4.26) complétée de (4.31) que M_0 ne dépend pas de la variable rapide y . La même chose est vraie pour P_0 au vu de (4.34) et (4.40) :

$$M_0(x, y, t) = M_0(x, t) \text{ dans } \Omega \times J, \quad P_0(x, y, t) = P_0(x, t) \text{ dans } \mathbb{R}^3 \times J.$$

Ensuite, nous caractérisons la fonction M_1 . D'une part, la formulation variationnelle correspondant à (4.27) avec (4.32) est

$$\sum_{i,j} \int_{\Omega \times J} M_0 \times \left(\int_{Q_f} A_{fij} (\partial_{x_i} M_0 + \partial_{y_i} M_1) \partial_{y_j} \Phi dy \right) dx dt = 0$$

pour toute fonction test $\Phi \in L^2(\Omega \times J; H^1(Q_f))$. D'autre part, compte tenu de (4.24), nous avons aussi

$$\sum_{i,j} \int_{\Omega \times J} M_0 \cdot \left(\int_{Q_f} A_{fij} (\partial_{x_i} M_0 + \partial_{y_i} M_1) \partial_{y_j} \Phi dy \right) dx dt = 0.$$

Or $\text{div}_y(A_f \nabla_x M_0) = 0$, on peut donc caractériser M_1 par

$$\begin{aligned} \text{div}_y(A_f \nabla_y M_1) &= 0 \quad \text{dans } \Omega \times Q_f \times J, \\ A_f \nabla_y M_1 \cdot \nu &= -A_f \nabla_x M_0 \cdot \nu \quad \text{dans } \Omega \times \partial Q_m \times J. \end{aligned}$$

Alors M_1 peut s'écrire sous la forme

$$M_1(x, y, t) = \sum_{j=1}^3 w_j(x, y) \partial_{x_j} M_0(x, t) + \alpha(x, t)$$

où les fonctions w_j sont définies dans (4.19) et α est une fonction qui ne dépend pas de y .

L'équation (4.28) s'écrit maintenant

$$\text{div}_x(A_f(\nabla_x M_0 + \nabla_y M_1)) = \text{div}_x(A_f(\text{Id} + (\partial_{y_i} w_j)) \nabla_x M_0).$$

De même, nous déduisons de (4.35) et (4.41) que

$$\chi_\Omega(x) \chi_f(y) P_1(x, y, t) = \chi_\Omega(x) \chi_f(y) \sum_{j=1}^3 w_j(y) (\partial_j P_0(x, t) + M_{0j}) + \beta(x, t),$$

et les deux premiers termes de (4.36) s'écrivent

$$\begin{aligned} \text{div}_x(\nabla_x P_0 + \nabla_y P_1 + \chi_\Omega M_0) &= \text{div}_x(\chi_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega}(\nabla_x P_0 + \nabla_y P_1)) \\ &+ \text{div}_x(\chi_\Omega \chi_f(\text{Id} + (\partial_{y_i} w_j))(\nabla_x P_0 + M_0)). \end{aligned}$$

L'étape suivante consiste à intégrer sur Q les équations caractérisant les principaux termes dans le développement asymptotique, c'est-à-dire (4.28) et (4.36), en vue d'obtenir le modèle effectif.

Au vu des derniers calculs, nous obtenons d'abord les deux équations suivantes dans $\Omega \times J$:

$$\begin{aligned} |Q_f| \partial_t M_0 - \alpha |Q_f| M_0 \times \partial_t M_0 &= -(1 + \alpha^2) M_0 \times \left(\operatorname{div}_x (A^H \nabla_x M_0) \right. \\ &\quad \left. + \int_{Q_f} \operatorname{div}_y (A_f (\nabla_x M_1 + \nabla_y M_2)) dy \right) - (1 + \alpha^2) \Xi'_f(M_0) M_0 \times W^H \nabla_x M_0 \\ &\quad - (1 + \alpha^2) |Q_f| M_0 \times \phi_{va,f}(M_0) - (1 + \alpha^2) M_0 \times W^H \nabla_x P_0, \end{aligned} \quad (4.42)$$

et

$$\operatorname{div}_x (\chi_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} \nabla_x P_0 + \chi_\Omega W^H (\nabla_x P_0 + M_0)) + \int_{Q_f} \operatorname{div}_y (\nabla_x P_1 + \nabla_y P_2 + M_1) dy = 0. \quad (4.43)$$

Nous avons aussi d'après (4.33)

$$\begin{aligned} \int_{Q_f} \operatorname{div}_y (A_f (\nabla_x M_1 + \nabla_y M_2)) dy &= - \int_{\partial Q_m} A_f (\nabla_x M_1 + \nabla_y M_2) \cdot \nu d\sigma(y) \\ &= - \int_{\partial Q_m} A_m(x, y) \nabla_y m_0 \cdot \nu d\sigma(y) = - \int_{Q_m} \operatorname{div}_y (A_m(x, y) \nabla_y m_0) dy \end{aligned} \quad (4.44)$$

et, compte tenu de (4.39),

$$\begin{aligned} \int_{Q_f} \operatorname{div}_y (\nabla_x P_1 + \nabla_y P_2 + M_1) dy &= - \int_{\partial Q_m} (\nabla_x P_1 + \nabla_y P_2 + M_1) \cdot \nu d\sigma(y) \\ &= \int_{\partial Q_m} (\nabla_y p_0 + m_0) \cdot \nu d\sigma(y) = \int_{Q_m} \operatorname{div}_y (\nabla_y p_0 + m_0) dy = 0. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Maintenant, nous constatons que le modèle effectif correspond à (4.42)-(4.45) et (4.29), (4.37) si on pose $M_0 = M$ et $P_0 = P$.

4.6 Obtention rigoureuse du modèle homogénéisé

Il s'agit de la partie la principale de ce chapitre. Nous y justifions rigoureusement le modèle décrit précédemment en prouvant la convergence du problème microscopique vers le problème macroscopique.

La reste de ce chapitre est organisé comme suit : Il nous faut prouver que, lorsque le paramètre ϵ tend vers zéro, le modèle microscopique converge dans un certain sens vers le modèle macroscopique décrit au paragraphe précédent. A cette fin, nous commençons d'abord par établir des estimations uniformes sur les solutions microscopiques. Ensuite nous les exploitons pour passer à la limite lorsque ϵ tend vers zéro.

Dans ce qui suit, la lettre C désigne une constante indépendante de ϵ .

4.6.1 Estimations uniformes

Proposition 4.2. *Supposons $M_{init} \in H^1(\Omega)$. Pour toute solution faible du problème (4.2)-(4.4), (4.7)-(4.12), (4.8)-(4.12) nous avons les estimations suivantes :*

$$\|\chi_f^\epsilon \partial_t M^\epsilon + \chi_m^\epsilon \partial_t m^\epsilon\|_{L^2(\Omega \times J)} \leq C,$$

$$\|\chi_f^\epsilon \nabla M^\epsilon + \epsilon \chi_m^\epsilon \nabla m^\epsilon\|_{L^\infty(J; L^2(\Omega))} \leq C,$$

$$|\chi_f^\epsilon M^\epsilon + \chi_m^\epsilon m^\epsilon| = 1 \text{ p.p. dans } \Omega \times J,$$

et

$$\|(\chi_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} + \chi_f^\epsilon) P^\epsilon + \chi_m^\epsilon p^\epsilon\|_{L^\infty(J; L^2(\Omega))} \leq C,$$

$$\|(\chi_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} + \chi_f^\epsilon) \nabla P^\epsilon + \epsilon \chi_m^\epsilon \nabla p^\epsilon\|_{L^\infty(J; L^2(\Omega))} \leq C.$$

Démonstration. On utilise la même technique que par exemple [12]. On réécrit l'équation (4.2) sous la forme suivante

$$(\alpha \partial_t \mathbf{M}^\epsilon - (1 + \alpha^2) \mathcal{H}_e^\epsilon(\mathbf{M}^\epsilon)) = \alpha \mathbf{M}^\epsilon \times (\alpha \partial_t \mathbf{M}^\epsilon - (1 + \alpha^2) \mathcal{H}_e^\epsilon(\mathbf{M}^\epsilon)) - (1 + \alpha^2) \mathcal{H}_e^\epsilon(\mathbf{M}^\epsilon). \quad (4.46)$$

Ensuite on multiplie l'équation (4.46) par $(\alpha \partial_t \mathbf{M}^\epsilon - (1 + \alpha^2) \mathcal{H}_e^\epsilon(\mathbf{M}^\epsilon))$ pour obtenir

$$\frac{\alpha}{1 + \alpha^2} |\partial_t \mathbf{M}|^2 = \mathcal{H}_e^\epsilon(\mathbf{M}^\epsilon) \cdot \partial_t \mathbf{M}^\epsilon. \quad (4.47)$$

On intègre l'équation (4.47) d'abord en espace et ensuite en temps pour obtenir

$$\mathcal{E}(\mathbf{M}^\epsilon) + \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} \int_0^t \int_\Omega |\partial_t \mathbf{M}^\epsilon|^2 dx dt \leq \mathcal{E}(M_{init})$$

pour tout $t \geq 0$, où l'énergie $\mathcal{E}(\mathbf{M}^\epsilon)$ est définie par

$$\mathcal{E}(\mathbf{M}^\epsilon) = \int_\Omega A^\epsilon |\nabla \mathbf{M}^\epsilon|^2 dx + \int_\Omega \Lambda(\mathbf{M}^\epsilon) dx + \int_\Omega \Xi(\mathbf{M}^\epsilon) dx + \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{H}^\epsilon|^2 dx.$$

L'hypothèse $M_{init} \in H^1(\Omega)$ assure que l'énergie initiale $\mathcal{E}(M_{init})$ est bornée (voir par exemple [60]). La proposition 4.2 est donc démontrée. \square

4.6.2 Résultats de convergence

Nous avons obtenu de "bonnes" estimations dans la partie Ω_f^ϵ . Cependant, le premier obstacle à franchir est de prolonger de manière appropriée les fonctions M^ϵ et $\chi_\Omega P^\epsilon$ au domaine Ω tout entier. Dans ce but, nous vérifions d'abord que la structure de $\Omega^\epsilon = \Omega_f^\epsilon \cup \Gamma^\epsilon \cup \Omega_m^\epsilon$ satisfait aux hypothèses de [1]. Nous pouvons alors établir l'existence de trois constantes $k_i = k_i(Q_f) > 0$, $i = 1, 2, 3$, et d'un opérateur de prolongement linéaire et continu $\Pi^\epsilon : H^1(\Omega_f^\epsilon) \rightarrow H_{loc}^1(\Omega)$ tels que

$$\begin{aligned} \Pi^\epsilon V &= V \quad \text{p.p. dans } \Omega_f^\epsilon, \\ \int_{\Omega(\epsilon k_1)} |\Pi^\epsilon V|^2 dx &\leq k_2 \int_{\Omega_f^\epsilon} |V|^2 dx, \\ \int_{\Omega(\epsilon k_1)} |\nabla(\Pi^\epsilon V)|^2 dx &\leq k_3 \int_{\Omega_f^\epsilon} |\nabla V|^2 dx \end{aligned}$$

pour tout $V \in H^1(\Omega_f^\epsilon)$, et pour $\Omega(\epsilon k_1) = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon k_1\}$. Afin d'éviter tout problème de couche limite, nous supposons que le domaine Ω^ϵ est tel que les blocs matriciels ne rencontrent pas le bord de Ω et

$$\Omega_m^\epsilon = \Omega(\epsilon k_1) \cap \left\{ \bigcup_{\xi \in \mathcal{A}^\epsilon} (Q_m + \xi) \right\} \quad \text{et} \quad \Omega_f^\epsilon = \Omega \setminus \overline{\Omega_m^\epsilon}.$$

Les blocs sont retirés d'un ϵk_1 -voisinage de $\partial\Omega$. En conséquence, les estimations de la proposition 4.2 donnent

$$\|\Pi^\epsilon M^\epsilon\|_{L^\infty(J; H^1(\Omega))} + \|\Pi^\epsilon(\chi_\Omega P^\epsilon)\|_{L^\infty(J; H^1(\Omega))} \leq C. \quad (4.48)$$

Les estimations obtenues dans la proposition 4.2 et les estimations (4.48) permettent d'obtenir les résultats de convergence suivants.

Proposition 4.3. *Il existe des fonctions limites $M \in H^1(J; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(J; H^1(\Omega))$, $M_1 \in L^2(\Omega \times J; H_\#^1(Q_f))$, $P \in L^\infty(J; H^1(\mathbb{R}^3))$, $P_1 \in L^\infty(J; L^2(\mathbb{R}^3; H_\#^1(Q_f)))$ d'une part, et $m_0 \in L^2(\Omega \times J; H_\#^1(Q_m))$, $p_0 \in L^2(\Omega \times J; H_\#^1(Q_m))$ d'autre part, telles que, pour des sous-suites,*

non renommées par commodité, on a les convergences suivantes

$$\begin{aligned} \Pi^\epsilon M^\epsilon &\rightarrow M \text{ dans } L^2(\Omega \times J) \text{ et p.p. dans } \Omega \times J, \\ \Pi^\epsilon M^\epsilon &\rightharpoonup M \text{ faiblement dans } H^1(J; L^2(\Omega)) \cap L^2(J; H^1(\Omega)), \\ \nabla(\Pi^\epsilon M^\epsilon) &\xrightarrow{2} \nabla M + \nabla_y M_1, \\ \chi_f^\epsilon M^\epsilon + \chi_{\bar{\Omega}_m^\epsilon} m^\epsilon &\xrightarrow{2} m_0, \quad \partial_t(\chi_f^\epsilon M^\epsilon + \chi_{\bar{\Omega}_m^\epsilon} m^\epsilon) \xrightarrow{2} \partial_t m_0, \\ \epsilon \nabla(\chi_f^\epsilon M^\epsilon + \chi_{\bar{\Omega}_m^\epsilon} m^\epsilon) &\xrightarrow{2} \nabla_y m_0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} P^\epsilon + \Pi^\epsilon(\chi_\Omega P^\epsilon) &\rightarrow P \text{ dans } L^r(J; L^2(\mathbb{R}^3)), \forall r \geq 1, \text{ et p.p. dans } \Omega \times J, \\ \chi_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} P^\epsilon + \Pi^\epsilon(\chi_\Omega P^\epsilon) &\rightharpoonup P \text{ faiblement dans } L^2(J; H^1(\mathbb{R}^3)), \\ \nabla(\chi_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} P^\epsilon + \Pi^\epsilon(\chi_\Omega P^\epsilon)) &\xrightarrow{2} \nabla P + \nabla_y P_1, \\ \chi_f^\epsilon P^\epsilon + \chi_{\bar{\Omega}_m^\epsilon} p^\epsilon &\xrightarrow{2} p_0, \quad \epsilon \nabla(\chi_f^\epsilon P^\epsilon + \chi_{\bar{\Omega}_m^\epsilon} p^\epsilon) \xrightarrow{2} \nabla_y p_0. \end{aligned}$$

Le but maintenant est de passer à la limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ dans (4.2)-(4.4), (4.7)-(4.12), (4.8)-(4.11). Tout d'abord, notons que (4.22) est une conséquence directe de la définition des limites à deux échelles (M, m_0) et (P, P_0) .

Maintenant, nous exploitons la contrainte de saturation (4.1) dans le lemme auxiliaire suivant.

Lemme 4.1. *Pour tout $1 \leq i \leq 3$, les vecteurs $\partial_{x_i} M$, $\partial_{x_i} M + \partial_{y_i} M_1$ et $\partial_{y_i} M_1$ sont orthogonaux au vecteur M presque partout dans $\Omega \times J \times Q_f$.*

Démonstration. Regardons d'abord la dérivée de la contrainte limite. D'une part, en raison de la convergence presque partout de $\Pi^\epsilon M^\epsilon$, on a $\chi_f^\epsilon |M^\epsilon| \xrightarrow{2} \chi_f(y) |M|$ et ainsi

$$\chi_f^\epsilon |M^\epsilon| \rightharpoonup |Q_f| |M| \text{ faiblement dans } L^2(\Omega \times J). \quad (4.49)$$

D'autre part, puisque $\chi_f^\epsilon |M^\epsilon| = \chi_f^\epsilon$, on a aussi $\chi_f^\epsilon |M^\epsilon| \xrightarrow{2} \chi_f(y)$ (voir la Proposition 4.1 (iii)) et ainsi

$$\chi_f^\epsilon |M^\epsilon| \rightharpoonup |Q_f| \text{ faiblement dans } L^2(\Omega \times J). \quad (4.50)$$

De (4.49)-(4.50) on conclut que $|Q_f| |M| = |Q_f|$ et ainsi

$$|M| = 1 \text{ p.p. dans } \Omega \times J.$$

En dérivant cette dernière relation par rapport à x_i , pour tout $1 \leq i \leq 3$, on obtient $\partial_{x_i} M \cdot M = 0$ p.p. dans $\Omega \times J$. Ainsi, le premier point annoncé dans le lemme est démontré.

Maintenant, nous cherchons la limite de la dérivée de la contrainte de saturation. Soit $1 \leq i \leq 3$. Puisque $\chi_f^\epsilon |M^\epsilon| = 1$, on a $\chi_f^\epsilon \partial_{x_i} M^\epsilon \cdot M^\epsilon = 0$ p.p. dans $\Omega \times J$. Ainsi

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \times J} \chi_f^\epsilon(x) (\partial_{x_i} M^\epsilon(x, t) \cdot M^\epsilon(x, t)) \Psi(x, t, x/\epsilon) dx dt \\ &= \int_{\Omega \times J} \int_{Q_f} ((\partial_{x_i} M(x, t) + \partial_{y_i} M_1(x, y, t)) \cdot M(x, t)) \Psi(x, y, t) dx dy dt \end{aligned}$$

pour toute fonction $\Psi(x, y, t) \in \mathcal{D}(\Omega \times J; C_\#^\infty(Q))$. Cela signifie que $\partial_{x_i} M + \partial_{y_i} M_1$ est effectivement perpendiculaire à M . La première partie de la preuve permet de conclure que la même chose est vraie pour $\partial_{y_i} M_1$. \square

4.6.3 Comportement limite

Nous passons maintenant à la limite à double échelle dans (4.7)-(4.12), plus précisément dans la partie du problème ne contenant que des opérateurs linéaires. Soient

$$\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \times J), \quad \Psi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \times J; C_\#^\infty(Q)) \quad \text{et} \quad \psi \in \mathcal{D}(\Omega \times J; C_\#^\infty(Q))$$

tels que $\psi(x, y, t) = 0$ si $y \in Q_f$. On note que ces fonctions sont des fonctions test admissibles pour la convergence à double échelle (voir [112]). De (4.7)-(4.12) on déduit que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3 \times J} ((\chi_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} + \chi_f^\epsilon) \nabla P^\epsilon + \chi_f^\epsilon M^\epsilon + \epsilon^2 \chi_{\Omega_m^\epsilon} \nabla p^\epsilon + \epsilon \chi_{\Omega_m^\epsilon} m^\epsilon) \cdot (\nabla_x \Psi(x, t) \\ &\quad + \epsilon \nabla_x \Psi_1(x, x/\epsilon, t) + \nabla_y \Psi_1(x, x/\epsilon, t) + \nabla_x \psi(x, x/\epsilon, t) \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon} \nabla_y \psi(x, x/\epsilon, t)) dx dt = 0. \end{aligned}$$

Faisons tendre ϵ vers 0 dans cette dernière égalité, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3 \times J} \chi_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} \int_Q (\nabla P + \nabla_y P_1) \cdot (\nabla_x \Psi + \nabla_y \Psi_1) dy dx dt \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3 \times J} \chi_\Omega \int_{Q_f} (\nabla P + \nabla_y P_1 + M) \cdot (\nabla_x \Psi + \nabla_y \Psi_1) dy dx dt \\ &\quad + \int_{\Omega \times J} \int_{Q_m} (\nabla_y p_0 + m_0) \cdot \nabla_y \psi dy dx dt = 0. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Des arguments de densité classiques montrent que cette relation est en fait vraie pour toutes les fonctions $\Psi \in L^\infty(J; H^1(\mathbb{R}^3))$, $\Psi_1 \in L^\infty(J; H^1(\mathbb{R}^3; C_\#^\infty(Q)))$ et $\psi \in L^\infty(J; H^1(\Omega; C_\#^\infty(Q)))$ telle que $\psi(x, y, t) = 0$ si $y \in Q_f$. En choisissant $\Psi_1 = 0$ et $\psi = 0$ dans (4.51) et en tenant compte du fait que $\int_Q \nabla_y P_1 dy = 0$ car P_1 est Q -périodique, on retrouve la formulation variationnelle du problème suivant :

$$\operatorname{div}_x \left(\chi_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} \nabla P + \chi_\Omega \int_{Q_f} (\nabla P + \nabla_y P_1 + M) dy \right) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \times J, \quad (4.52)$$

où P_1 est caractérisée dans $\Omega \times J$ par (en choisissant $\Psi = \psi = \chi_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} \Psi_1 = 0$ dans (4.51))

$$\operatorname{div}_y (\nabla P + \nabla_y P_1 + M) = 0 \text{ dans } Q_f,$$

$$\nabla_y P_1 \cdot \nu = -(\nabla P + M) \cdot \nu \text{ sur } \partial Q_f.$$

Il s'ensuit que

$$\chi_\Omega(x) \chi_f(y) P_1(x, y, t) = \chi_\Omega(x) \chi_f(y) \sum_{j=1}^3 w_j(y) (\partial_j P(x, t) + M_j) + \beta(x, t),$$

où β est une fonction qui ne dépend pas de y et les w_j , $1 \leq j \leq 3$, sont définies dans (4.19). Par conséquent

$$\operatorname{div}_x (\chi_\Omega (\nabla P + \nabla_y P_1 + M)) = \operatorname{div}_x (\chi_\Omega (\operatorname{Id} + (\partial_{y_i} w_j)) (\nabla P + M))$$

et

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}_x \left(\chi_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} \nabla P + \chi_\Omega \int_{Q_f} (\nabla P + \nabla_y P_1 + M) dy \right) \\ &= \operatorname{div}_x (\chi_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} \nabla P + \chi_\Omega W^H (\nabla P + M)), \end{aligned}$$

où W^H est définie par (4.17). L'équation (4.52) est donc effectivement l'équation (4.15) annoncée dans le modèle effectif. Enfin, en prenant $\Psi = \Psi_1 = 0$, on retrouve (4.21).

Des calculs similaires pour le comportement limite de (4.2)-(4.4), (4.8)-(4.11) donnent des

résultats plus compliqués en raison de nombreuses non-linéarités. Plus précisément, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega \times J} \int_{Q_f} (\partial_t M - \alpha M \times \partial_t M) \cdot \Psi \, dy dx dt + \int_{\Omega \times J} \int_{Q_m} \partial_t m_0 \cdot (\Psi + \psi) \, dy dx dt \\
& - \alpha \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_m^\epsilon \times J} (m^\epsilon \times \partial_t m^\epsilon) \cdot (\Psi(x, t) + \psi(x, x/\epsilon, t)) \, dx dt \\
& = (1 + \alpha^2) \int_{\Omega \times J} \int_{Q_f} \sum_{i,j} (M \times A_{f,ij}(\partial_{x_i} M + \partial_{y_i} M_1)) \cdot (\partial_{x_j} \Psi + \partial_{y_j} \Psi_1) \, dy dx dt \\
& - (1 + \alpha^2) \int_{\Omega \times J} \int_{Q_f} \phi_{va,f}(M) \cdot \Psi \, dy dx dt \\
& - (1 + \alpha^2) \int_{\Omega \times J} \int_{Q_f} (M \times (\Xi_f)'(M)(\nabla M + \nabla_y M_1)) \cdot \Psi \, dy dx dt \\
& - (1 + \alpha^2) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_m^\epsilon \times J} (m^\epsilon \times (\epsilon \nabla \Xi_m^\epsilon(m^\epsilon) + \phi_{va,m}^\epsilon(m^\epsilon))) \cdot (\Psi(x, t) + \psi(x, x/\epsilon, t)) \, dx dt \\
& + (1 + \alpha^2) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_m^\epsilon \times J} \sum_{i,j} (m^\epsilon \times A_{m,ij}^\epsilon \partial_{x_i} m^\epsilon) \cdot \partial_{y_j} \psi(x, x/\epsilon, t) \, dx dt \tag{4.53}
\end{aligned}$$

pour des fonctions test

$$\Psi \in L^\infty(J; H^1(\Omega)), \quad \Psi_1 \in L^\infty(J; H^1(\Omega; C_\#^\infty(Q))) \quad \text{et} \quad \psi \in L^\infty(J; H^1(\Omega; C_\#^\infty(Q))),$$

tel que $\psi(x, y, t) = 0$ si $y \in Q_f$.

Définissons pour commencer $\ell_i \in L^2(\Omega \times J; L_\#^2(Q))$, $1 \leq i \leq 3$, par

$$m^\epsilon \times \partial_t m^\epsilon \xrightarrow{2} \ell_1,$$

$$m^\epsilon \times (\epsilon \nabla \Xi_m^\epsilon(m^\epsilon) + \phi_{va,m}^\epsilon(m^\epsilon)) \xrightarrow{2} \ell_2,$$

$$m^\epsilon \times A_m^\epsilon(\epsilon \nabla m^\epsilon) \xrightarrow{2} \ell_3.$$

En choisissant $\Psi = \Psi_1 = 0$ dans (4.53), on obtient la “caractérisation” suivante pour m_0 dans $\Omega \times J \times Q_m$:

$$\partial_t m_0 - \alpha \ell_1 = -(1 + \alpha^2) \ell_2 - (1 + \alpha^2) \operatorname{div}_y(\ell_3). \tag{4.54}$$

Ensuite, en prenant $\Psi_1 = \psi = 0$ dans (4.53) et en utilisant le lemme 4.1 pour simplifier le

produit vectoriel dans le terme de bord, nous affirmons que

$$\begin{aligned}
& |Q_f| \partial_t M - \alpha |Q_f| M \times \partial_t M + \int_{Q_m} (\partial_t m_0 - \alpha \ell_1 + (1 + \alpha^2) \ell_2) dy \\
&= -(1 + \alpha^2) M \times \operatorname{div}_x \left(\int_{Q_f} A_f (\nabla M + \nabla_y M_1) dy \right) \\
&\quad - (1 + \alpha^2) M \times \phi_{va,f}(M) \\
&\quad - (1 + \alpha^2) M \times (\Xi_f)'(M) \left(\int_{Q_f} (\nabla M + \nabla_y M_1) dy \right) \text{ dans } \Omega \times J, \tag{4.55}
\end{aligned}$$

$$\int_{Q_f} A_f (\nabla M + \nabla_y M_1) dy \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times J. \tag{4.56}$$

En prenant $\Psi = \psi = 0$ dans (4.53) on obtient de plus pour M_1

$$-\operatorname{div}_y (A_f (\nabla M + \nabla_y M_1)) = 0 \text{ dans } \Omega \times Q_f \times J,$$

$$A_f \nabla_y M_1 \cdot \nu = -A_f \nabla M \cdot \nu \text{ sur } (\partial Q_m \cap \partial Q_f) \times J,$$

ce qui permet d'exprimer M_1 en utilisant $(v_i)_{1 \leq i \leq 3}$ (voir la caractérisation formelle de M_1 dans le paragraphe 4.5). Ainsi (4.55)-(4.56) s'écrit en fait (ayant également à l'esprit (4.54) pour l'expression du terme non explicite) :

$$\begin{aligned}
& |Q_f| \partial_t M - \alpha |Q_f| M \times \partial_t M \\
&= -(1 + \alpha^2) M \times \operatorname{div} (A^H \nabla M) - (1 + \alpha^2) M \times \phi_{va,f}(M) \\
&\quad - (1 + \alpha^2) (\Xi_f)'(M) M \times W^H \nabla M + (1 + \alpha^2) \int_{Q_m} \operatorname{div}_y (\ell_3) dy \text{ dans } \Omega \times J, \tag{4.57}
\end{aligned}$$

$$A^H \nabla M \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times J. \tag{4.58}$$

Notre objectif dans ce qui suit est d'introduire une autre stratégie pour calculer les termes non-explicites ℓ_i , $1 \leq i \leq 3$. Toutefois, nous pouvons déjà prouver que le problème effectif, même avec cette formulation partielle, est bien posé.

Lemme 4.2. *Le problème (4.57)-(4.58) associé à (4.54), (4.22) et (4.23) admet une solution faible.*

Démonstration. Pour cette démonstration, il est suffisant d'établir un résultat de régularité pour le terme $\int_{Q_m} \operatorname{div}_y(\ell_3) dy$. Étant donné que toutes les limites à double échelle sont définies dans $L^2(\Omega \times J \times Q_m)$, on sait que l'équation (4.54) est satisfaite dans $H^{-1}(\Omega \times J \times Q_m)$. On peut donc écrire, pour tout $\varphi \in H_0^1(J)$,

$$\begin{aligned} \int_J \partial_t m_0 \cdot \varphi dt - \alpha \int_J \ell_1 \cdot \varphi dt &= -(1 + \alpha^2) \int_J \ell_2 \cdot \varphi dt \\ &\quad - (1 + \alpha^2) \int_J \operatorname{div}_y(\ell_3) \cdot \varphi dt \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega \times Q_m). \end{aligned}$$

Nous concluons que $\int_J \operatorname{div}_y(\ell_3) dt$ possède la même régularité que $-\int_J (m_0 \cdot \partial_t \varphi - \alpha \ell_1 \cdot \varphi + (1 + \alpha^2) \ell_2 \cdot \varphi) dt$, qui appartient à $L^2(\Omega \times Q_m)$. Nous sommes donc autorisés à faire le calcul suivant

$$-(1 + \alpha^2) \int_{Q_m} \operatorname{div}_y \left(\int_J \ell_3 \cdot \varphi dt \right) dy = -(1 + \alpha^2) \int_J \int_{\partial Q_m} ((\ell_3 \cdot \varphi) \cdot \nu) d\sigma(y) dt \in L^2(\Omega).$$

Le terme source $\int_{Q_m} \operatorname{div}_y(\ell_3) dy$ dans (4.57) appartient à $L^2(\Omega \times J)$. L'existence d'une solution faible pour (4.57)-(4.58), (4.22)-(4.23) est donc assurée par la théorie classique des problèmes paraboliques. \square

4.6.4 Opérateur de dilatation et réduction de dimension par maillage emboîtés

Il reste à passer à la limite dans les termes non linéaires de la partie matricielle du problème pour donner une forme explicite aux termes ℓ_i , $1 \leq i \leq 3$, dans (4.54). Il nous faut utiliser une autre technique que la convergence à double échelle. Une première idée consiste à introduire un opérateur de dilatation pour une mise à l'échelle de la variable rapide x/ϵ et supprimer ainsi le poids en ϵ dans les estimations H^1 . Un tel opérateur a été formellement utilisé dans [13]. Il est également à la base de la "méthode d'éclatement périodique" de Cioranescu *et al.* [36]. Pour tout $\epsilon > 0$ fixé, on définit un opérateur de dilatation $\tilde{\cdot}$, transformant des fonctions mesurables de $\Omega_m^\epsilon \times J$ en des fonctions mesurables de $\Omega \times Q_m \times J$, par

$$\tilde{u}(x, y, t) = u(c^\epsilon(x) + \epsilon y, t) \quad \text{pour } y \in Q_m, (x, t) \in \Omega \times J,$$

où $c^\epsilon(x)$ désigne le centre du bloc matriciel contenant x . Cette dilatation annihile la différence d'échelle entre la variable lente x et la variable rapide $y = x/\epsilon$.

Considérons une description simple mais non restrictive de la structure périodique de Ω^ϵ . Plus précisément, $\mathcal{A} = \mathbb{Z}^3$ et

$$\Omega^\epsilon = \Omega \cap \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^3} \epsilon(Q + k) \right).$$

Puisque $\Omega_m^\epsilon = \Omega(\epsilon k_1) \cap (\cup_{k \in \mathbb{Z}^3} \epsilon(Q_m + k))$, la quantité $c^\epsilon(x)$ est le centre de la ϵ -copie de Q contenant x et $c^\epsilon(x) = \epsilon k$ si $x \in \epsilon(Q_m + k)$. Ainsi, la fonction \tilde{u} ne dépend pas de x dans chaque bloc donné $\epsilon(Q_m + k)$, $k \in \mathbb{Z}^3$, de Ω . Nous prolongeons cet opérateur $\tilde{\cdot}$ de Q_m à $\cup_k(Q_m + k)$ par périodicité. On peut vérifier que cet opérateur de dilatation possède les propriétés suivantes (voir [13]).

Proposition 4.4. *Toute fonction $u \in L^2(J; H^1(\Omega_m^\epsilon))$ satisfait*

$$\|\tilde{u}\|_{L^2(\Omega \times J \times Q_m)} = \|u\|_{L^2(\Omega \times J)}, \quad \nabla_y \tilde{u} = \epsilon \widetilde{\nabla_x u} \text{ dans } \Omega \times J \times Q_m.$$

Si $v, w \in L^2(0, T; H^1(\Omega_m^\epsilon))$, alors on a

$$(\tilde{v}, \tilde{w})_{L^2(\Omega \times J \times Q_m)} = (v, w)_{L^2(\Omega_m^\epsilon \times J)},$$

$$\|\nabla_y \tilde{v}\|_{(L^2(\Omega \times J \times Q_m))^3} = \epsilon \|\widetilde{\nabla_x v}\|_{(L^2(\Omega_m^\epsilon \times J))^3},$$

$$(\tilde{v}, w)_{L^2(\Omega \times J \times Q)} = (v, \tilde{w})_{L^2(\Omega \times J \times Q)}.$$

De plus, si l'on considère $g \in L^2(\Omega \times J)$ comme un élément de $L^2(\Omega \times J \times Q_m)$ constant en y , alors

$$\tilde{g} \rightarrow g \text{ fortement dans } L^2(\Omega \times J \times Q_m) \text{ lorsque } \epsilon \rightarrow 0.$$

Le présent paragraphe n'est pas complètement déconnecté du précédent. En effet, le passage à la limite par la convergence à double échelle et celui basé sur la convergence faible des suites dilatées sont équivalents comme le montre le résultat suivant (voir [24]).

Proposition 4.5. *Si (v^ϵ) est une suite bornée de $L^2(\Omega_m^\epsilon \times J)$ telle que \tilde{v}^ϵ converge faiblement vers \tilde{v} dans $L^2(\Omega \times J; L^2_\#(Q_m))$ et $\chi_m^\epsilon v^\epsilon$ converge à double échelle vers v_0 , alors*

$$\tilde{v} = v_0 \quad p.p. \text{ dans } \Omega \times J \times Q_m.$$

Cela signifie que pour calculer les termes non explicites dans (4.54), il “suffit” de caractériser complètement la limite faible de $(\widetilde{m}^\epsilon, \widetilde{p}^\epsilon)$, \widetilde{m}^ϵ (resp. \widetilde{p}^ϵ), étant le champ d'aimantation

(resp. potentiel) dilaté. Il est donc naturel de commencer par écrire les équations satisfaites par $(\widetilde{m}^\epsilon, \widetilde{p}^\epsilon)$.

Lemme 4.3. *Les champs dilatés $(\widetilde{m}^\epsilon, \widetilde{p}^\epsilon)$ satisfont les équations suivantes*

$$\begin{aligned} \partial_t \widetilde{m}^\epsilon - \alpha \widetilde{m}^\epsilon \times \partial_t \widetilde{m}^\epsilon &= -(1 + \alpha^2) \widetilde{m}^\epsilon \times (\operatorname{div}_y (A_m(x, y) \nabla_y \widetilde{m}^\epsilon) \\ &\quad + \phi_{va,m}(x, y, \widetilde{m}^\epsilon) + \nabla_y \Xi_m(x, y, \widetilde{m}^\epsilon) + \nabla_y \widetilde{p}^\epsilon), \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\operatorname{div}_y (\nabla_y \widetilde{p}^\epsilon + \widetilde{m}^\epsilon) = 0, \quad (4.60)$$

dans $L^2(J; H^{-1}(Q_m))$ pour presque tout $x \in \Omega_m^\epsilon$. Les conditions aux limites et initiales sont

$$\widetilde{m}^\epsilon = \widetilde{M}^\epsilon \text{ and } \widetilde{p}^\epsilon = \widetilde{P}^\epsilon \text{ dans } H^{1/2}(Q_m) \text{ p.p. } (x, t) \in \Omega_m^\epsilon \times J, \quad (4.61)$$

$$\widetilde{m}^\epsilon|_{t=0} = \widetilde{M}_{init}, \quad \widetilde{p}^\epsilon|_{t=0} = \widetilde{P}_{init} \text{ dans } \Omega_m^\epsilon \times Q_m. \quad (4.62)$$

Démonstration. Nous détaillons par exemple l'obtention de l'équation (4.59) satisfaite par \widetilde{m}^ϵ . Le travail pour l'équation en \widetilde{p}^ϵ se fait de manière similaire. Pour toute fonction donnée $\psi \in L^2(J; H_0^1(Q_m))$, nous définissons $\hat{\psi}$ par

$$\hat{\psi}(x, z, t) = \begin{cases} \psi((z - c^\epsilon(x))/\epsilon, t) & \text{si } z \in \epsilon Q_m + c^\epsilon(x) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous multiplions l'équation (4.2) par $\hat{\psi}$ telle que $\psi|_{t=T} = 0$ et nous intégrons sur Ω_m^ϵ . Rappelons que $\Omega_m^\epsilon = \cup_{x \in \Omega} (\epsilon Q_m + c^\epsilon(x))$, et, $(\epsilon Q_m + c^\epsilon(x_1)) \cap (\epsilon Q_m + c^\epsilon(x_2)) = \emptyset$ si $c^\epsilon(x_1) \neq c^\epsilon(x_2)$.

Nous obtenons pour presque tout $x \in \Omega_m^\epsilon$:

$$\begin{aligned} & - \int_J \int_{\epsilon Q_m + c^\epsilon(x)} (m^\epsilon \partial_t \hat{\psi}(x, z, t) + \alpha m^\epsilon \times \partial_t m^\epsilon \hat{\psi}(x, z, t)) dz dt \\ &= -(1 + \alpha^2) \int_J \int_{\epsilon Q_m + c^\epsilon(x)} m^\epsilon \times \left(\epsilon^2 A_m^\epsilon(x, z) \nabla m^\epsilon(z, t) \cdot \nabla_z \hat{\psi}(x, z, t) \right. \\ &\quad \left. + \phi_{va,m}(x, z, m^\epsilon) \hat{\psi}(x, z, t) + \epsilon (\nabla \Xi_m^\epsilon(x, z, m^\epsilon) + \nabla p^\epsilon) \hat{\psi}(x, z, t) \right) dz dt \\ &\quad + \int_{\epsilon Q_m + c^\epsilon(x)} M_{init}(x) \hat{\psi}(x, z, 0) dz. \end{aligned}$$

Soit $x \in \Omega_m^\epsilon$ et soit $k \in \mathbb{Z}^3$ défini par $\epsilon k = c^\epsilon(x)$. Nous effectuons le changement de variable $z \mapsto \epsilon(y + k)$. On obtient

$$\begin{aligned} & - \int_J \int_{Q_m} (\widetilde{m}^\epsilon \partial_t \psi + \alpha \widetilde{m}^\epsilon \times \partial_t \widetilde{m}^\epsilon \psi) dy dt \\ = & -(1 + \alpha^2) \int_J \int_{Q_m} \widetilde{m}^\epsilon \times \left(A_m(x, y) \nabla \widetilde{m}^\epsilon(z, t) \cdot \nabla_y \psi + \phi_{va,m}(x, y, \widetilde{m}^\epsilon) \psi \right. \\ & \left. + (\nabla_y \Xi_m(x, y, \widetilde{m}^\epsilon) + \nabla_y \widetilde{p}^\epsilon) \psi \right) dy dt + \int_{Q_m} \widetilde{M}_{init}(y) \psi(y, 0) dy. \end{aligned}$$

On voit qu'il s'agit de la formulation variationnelle de l'équation (4.59) avec la condition initiale $\widetilde{m}^\epsilon|_{t=0} = \widetilde{M}_{init}$. Donnons quelques précisions sur la condition aux limites : bien évidemment, nous pouvons étendre la définition de l'opérateur de dilatation à un sous-ensemble de $\Omega(\epsilon k_1)$ contenant strictement Ω_m^ϵ ; cela donne un sens à la condition limite $\widetilde{m}^\epsilon = \widetilde{M}^\epsilon$ sur $\partial Q_m \times J$. Le résultat a été établi pour presque tous les $x \in \epsilon(Q_m + k)$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}^3$, il est alors vrai presque partout dans Ω_m^ϵ . \square

Clairement, l'avantage de (4.59)-(4.62) est que le poids en ϵ n'apparaît plus. On obtient donc naturellement les estimations uniformes conduisant aux convergences suivantes (pour des sous suites) :

$$\widetilde{m}^\epsilon \rightharpoonup m_0, \quad \widetilde{p}^\epsilon \rightharpoonup p_0 \text{ faiblement dans } L^2(\Omega \times J \times Q_m),$$

$$\nabla_y \widetilde{m}^\epsilon \rightharpoonup \nabla_y m_0, \quad \nabla_y \widetilde{p}^\epsilon \rightharpoonup \nabla_y p_0 \text{ faiblement dans } L^2(\Omega \times J \times Q_m).$$

Notons que nous avons utilisé la proposition 4.5 pour assurer que les fonctions limites (m_0, p_0) apparaissant ici sont en fait les mêmes que celles déjà définies dans la proposition 4.3. De plus, l'équation satisfaite par p_0 a déjà été obtenue dans le paragraphe précédent. Mais nous ne disposons toujours pas de résultat de compacité pour $\widetilde{m}^\epsilon(x, y, t)$ parce que nous n'avons aucune information sur le bornitude de sa dérivée partielle par rapport à x . Cette difficulté apparaît également dans [24] et [81]. Ces auteurs ont résolu ce problème soit en comparant le problème dilaté avec le résultat formel pour le problème limite ([24]) ou en démontrant qu'ils ont affaire à une suite de Cauchy ([81]). La structure complexe de notre équation ne permet pas ces démarches. Nous adoptons donc une autre méthode et nous développons rigoureusement une idée déjà présente dans [30].

Compte tenu de la définition de l'opérateur de dilatation, on vérifie aisément que les fonctions dilatées restreintes à une cellule donnée de la matrice de Ω^ϵ ne dépendent pas de x . Soit $k \in \mathbb{Z}^3$. Soit $(\widetilde{m}_k^\epsilon, \widetilde{p}_k^\epsilon)$ défini par

$$\widetilde{m}_k^\epsilon(y, t) = \begin{cases} \widetilde{m}^\epsilon(x, y, t)_{/x \in \epsilon(Q_m + k)} & \text{si } k \text{ est tel que } \epsilon(Q_m + k) \cap \Omega \neq \emptyset, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\widetilde{p}_k^\epsilon(y, t) = \begin{cases} \widetilde{p}^\epsilon(x, y, t)_{/x \in \epsilon(Q_m + k)} & \text{si } k \text{ est tel que } \epsilon(Q_m + k) \cap \Omega \neq \emptyset, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons que les quantités \widetilde{f}_k^ϵ , $f = m, p$, ont un sens même si $\widetilde{f}^\epsilon(x, \cdot, \cdot) \in L^2(Q_m \times J)$ est définie seulement p.p. $x \in \Omega$. En effet, puisque $|\epsilon(Q_m + k)| = \epsilon|Q_m| \neq 0$, alors il existe $x_m \in \epsilon(Q_m + k) \cap \Omega^\epsilon$ et $x_p \in \epsilon(Q_m + k) \cap \Omega^\epsilon$ tels que $\widetilde{m}^\epsilon(x_m, \cdot, \cdot) \in L^2(Q_m \times J)$ et $\widetilde{p}^\epsilon(x_p, \cdot, \cdot) \in L^2(Q_m \times J)$ et qui nous permettent de définir \widetilde{m}_k^ϵ et \widetilde{p}_k^ϵ par $\widetilde{m}_k^\epsilon(\cdot, \cdot) = \widetilde{m}^\epsilon(x_m, \cdot, \cdot)$ et $\widetilde{p}_k^\epsilon(\cdot, \cdot) = \widetilde{p}^\epsilon(x_p, \cdot, \cdot)$.

Pour tout $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon(Q_m + k) \cap \Omega \neq \emptyset$, $(\widetilde{m}_k^\epsilon, \widetilde{p}_k^\epsilon)$ est solution du problème (4.59)-(4.62) dans $Q_m \times J$. D'autre part, tout \widetilde{f}_k associé à un certain $f \in L^2(\Omega \times J)$, appartient à $L^2(Q_m \times J)$ avec

$$\|\widetilde{f}_k\|_{L^2(Q_m \times J)} = \frac{1}{\epsilon|Q_m|} \|\widetilde{f}\|_{L^2(\epsilon(Q_m + k) \times Q_m \times J)} \leq \frac{1}{\epsilon|Q_m|} \|\widetilde{f}\|_{L^2(\Omega \times J \times Q_m)}.$$

Ainsi, nous avons assez de régularité pour obtenir avec les équations (4.59)-(4.62) les mêmes estimations pour $(\widetilde{m}_k^\epsilon, \widetilde{p}_k^\epsilon)$ que celles obtenues pour $(\widetilde{m}^\epsilon, \widetilde{p}^\epsilon)$. Mais ici, l'estimation de $\nabla_y \widetilde{m}_k^\epsilon$ donne une borne uniforme dans $H^1(Q_m)$ pour \widetilde{m}_k^ϵ et ainsi assez de compacité pour passer à la limite $\epsilon \rightarrow 0$ dans (4.59). En outre, on note que $k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3$ est tel que $\epsilon(Q_m + k) \cap \Omega \neq \emptyset$ si $k_i < |\Omega|_i / \epsilon$, $i = 1, \dots, 3$ (où $|\Omega|_i$ désigne la mesure de Ω dans la i ème direction). Donc, pour tout $k \in \mathbb{Z}^3$, il existe $\epsilon(k) > 0$ tel que pour tout $\epsilon < \epsilon(k)$, $\epsilon(Q_m + k) \cap \Omega \neq \emptyset$. En désignant par $(\widetilde{m}_k, \widetilde{p}_k)$ la limite dans $L^2(Q_m \times J)$ de $(\widetilde{m}_k^\epsilon, \widetilde{p}_k^\epsilon)$, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{aligned} \partial_t \widetilde{m}_k - \alpha \widetilde{m}_k \times \partial_t \widetilde{m}_k &= -(1 + \alpha^2) \widetilde{m}_k \times (\operatorname{div}_y (A_m(x, y) \nabla_y \widetilde{m}_k) \\ &\quad + \phi_{va,m}(x, y, \widetilde{m}_k) + \nabla_y \Xi_m(x, y, \widetilde{m}_k) + \nabla_y \widetilde{p}_k), \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\operatorname{div}_y (\nabla_y \widetilde{p}_k + \widetilde{m}_k) = 0. \quad (4.64)$$

Une autre idée fondamentale est que le sous-ensemble de Ω défini par $\{\epsilon k \in \mathbb{Z}^3; \epsilon(Q_m + k) \cap \Omega \neq \emptyset\}$ semble devenir dense dans Ω lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Montrons que cette idée permet de passer à la limite, au moins dans une partie du domaine. Nous savons déjà que notre objectif est de montrer que la limite (m_0, p_0) satisfait également (4.63)-(4.64), c'est-à-dire (4.20)-(4.21). En bref, nous allons prouver que $m_0(x, \cdot, \cdot) = m_0^*(x)(\cdot, \cdot)$ dans $L^2(Q_m \times J)$ pour presque tous les $x \in \Omega$, où $m_0^*(x)(\cdot, \cdot)$ est définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t m_0^*(x) - \alpha m_0^*(x) \times \partial_t m_0^*(x) = -(1 + \alpha^2) m_0^*(x) \times \left(\operatorname{div}_y (A_m(x, y) \nabla_y m_0^*(x)) \right. \\ \quad \left. + \phi_{va,m}(x, y, m_0^*(x)) + \nabla_y (\Xi_m(y, m_0^*(x))) + \nabla_y p_0(x, \cdot, \cdot) \right) \text{ dans } Q_m \times J, \\ m_0^*(x)(y, 0) = M_{init}(x) \text{ dans } Q_m, \\ m_0^*(x)(y, t) = M(x, t) \text{ sur } \partial Q_m \times J. \end{array} \right. \quad (4.65)$$

Un point crucial pour établir ce résultat est que, pour toute donnée $(M_{init}(x), M(x, \cdot)) \in \mathbb{R}^3 \times L^\infty(J)$, il existe une solution unique $m_0^*(x) \in L^2(J; H_\#^1(Q_m)) \cap H^1(J; L_\#^2(Q_m))$ du problème (4.65) (voir [67], [105], [43], [42]).

Nous définissons l'ensemble $\mathcal{C} \subset \Omega$ par

$$\mathcal{C} = \{x_0 \in \Omega; \exists \epsilon_0 > 0, \exists x \in \Omega \text{ tel que } x_0 = c^{\epsilon_0}(x)\}.$$

Cela signifie que \mathcal{C} est l'ensemble de tous les points de Ω qui sont au centre d'une ϵ_0 -copie de Q (et donc Q_m) à une étape donnée, ϵ_0 , du processus de convergence $\epsilon \rightarrow 0$. Nous définissons également

$$\mathcal{C}^\epsilon = \{x_0 \in \Omega; \exists x \in \Omega \text{ tel que } x_0 = c^\epsilon(x)\}.$$

Nous avons $\mathcal{C} = \bigcup_{\epsilon > 0} \mathcal{C}^\epsilon$.

Nous commençons par restreindre le processus du passage à la limite à l'ensemble $\mathcal{C} \times J$. Pour cela, nous développons notre approche de mailles emboîtées. Soit $x_0 \in \mathcal{C}$. Il existe un certain $\epsilon_0 > 0$ tel que $x_0 \in \Omega_m^{\epsilon_0}$ et x_0 est le centre d'une ϵ_0 -copie de Q . Comme nous l'avons mentionné au début du paragraphe, pour des raisons de simplicité, on a choisi $\Omega^\epsilon = \Omega \cap (\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^3} \epsilon(Q + k))$. Cela signifie que $(0, 0, 0) \in \mathcal{C}$. Cette hypothèse est bien sûr sans importance. On vérifie aisément que x_0 demeure le centre d'une ϵ -copie de Q pour tout $\epsilon \leq \epsilon_0$. Voir aussi la figure 4.2.

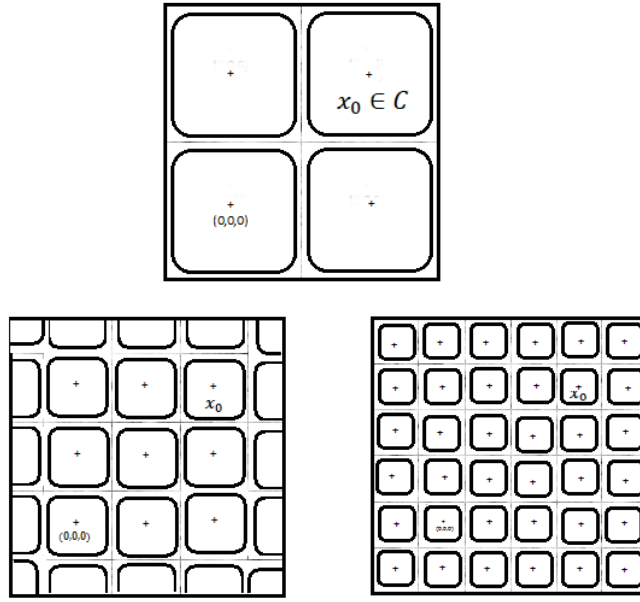


FIGURE 4.2 – Un exemple simple, $\Omega =] - 1/2; 3/2[^3$. Représentation de Ω^1 , $\Omega^{1/2}$ et $\Omega^{1/3}$ avec les points correspondants appartenant à \mathcal{C} .

On peut donc choisir une numérotation particulière pour la description des Ω^ϵ , $\epsilon \leq \epsilon_0$:

$$\Omega^\epsilon = \Omega \cap \left(x_0 + \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^3} \epsilon(Q + k) \right). \quad (4.66)$$

Cela veut dire que pour toute $\epsilon \leq \epsilon_0$, x_0 est le centre de la $(0, 0, 0)$ ème ϵ -copie de Q . Nous pouvons ainsi exploiter les dernières remarques sur les fonctions \widetilde{m}_k^ϵ pour la valeur $k = \mathbf{0} = (0, 0, 0)$. Nous posons pour $(y, t) \in Q_m \times J$

$$\widetilde{m}_{\mathbf{0}_{x_0}}^\epsilon(y, t) = \widetilde{m}_{\mathbf{0}}^\epsilon(y, t) \text{ pour la numérotation (4.66)}. \quad (4.67)$$

Lemme 4.4. Soit $x_0 \in \mathcal{C}$. Lorsque ϵ tend vers zéro, l'ensemble de la suite $\widetilde{m}_{\mathbf{0}_{x_0}}^\epsilon$ converge dans $L^2(J; L^2_\#(Q_m))$ vers la fonction $m_{\mathbf{0}}^*(x_0)$ définie de manière unique par (4.65).

Démonstration. La preuve est le cas particulier pour $k = \mathbf{0}$ de l'obtention de (4.63)-(4.64). Nous savons donc que

$$\widetilde{m}_{\mathbf{0}_{x_0}}^\epsilon \rightarrow \widetilde{m}_{\mathbf{0}} \text{ dans } L^2(J; L^2_{per}(Q_m))$$

où \widetilde{m}_0 satisfait

$$\begin{aligned} \partial_t \widetilde{m}_0 - \alpha \widetilde{m}_0 \times \partial_t \widetilde{m}_0 &= -(1 + \alpha^2) \widetilde{m}_0 \times (\operatorname{div}_y (A_m(x, y) \nabla_y \widetilde{m}_0) \\ &\quad + \phi_{va,m}(x, y, \widetilde{m}_0) + \nabla_y \Xi_m(x, y, \widetilde{m}_0) + \nabla_y \widetilde{p}_0), \\ \operatorname{div}_y (\nabla_y \widetilde{p}_0 + \widetilde{m}_0) &= 0, \end{aligned}$$

accompagnée des conditions initiales et aux limites

$$\widetilde{m}_0(y, 0) = M_{init}(x_0) \text{ dans } Q_m, \quad \widetilde{m}_0(y, t) = M(x_0, t) \text{ sur } \partial Q_m \times J.$$

Il nous faut seulement ajouter la justification de la condition aux bord ci-dessus. Comme cela a déjà été mentionné, on peut étendre la définition de l'opérateur de dilatation à un sous-ensemble $\Omega(\epsilon k_1)$ contenant strictement Ω_m^ϵ . Cela donne un sens à la condition aux limites $\widetilde{m}^\epsilon = \widetilde{M}^\epsilon$ sur $\partial Q_m \times J$. En particulier, pour la cellule centrée en x_0 ,

$$\widetilde{m}_{x_0}^\epsilon(y, t) = \widetilde{M}_{x_0}^\epsilon(y, t) \text{ sur } \partial Q_m \times J. \quad (4.68)$$

La limite faible dans L^2 de \widetilde{M}_0 est égale à la limite à double échelle de M^ϵ . Puisque $\Pi^\epsilon M^\epsilon$ converge fortement dans $L^2(\Omega \times J)$ vers M , la fonction M (qui ne dépend pas de y) est aussi la limite à double échelle de la restriction M^ϵ et donc de $\widetilde{M}_{x_0}^\epsilon$. En utilisant la continuité de l'opérateur de trace, l'égalité (4.68) donne à la limite $\epsilon \rightarrow 0$ la condition $\widetilde{m}_0(y, t) = M(x_0, t)$ sur $\partial Q_m \times J$.

Nous avons donc prouvé que \widetilde{m}_0 satisfait (4.65). La solution de (4.65) étant unique pour tout $x = x_0 \in \Omega$ fixé, c'est l'ensemble de la suite $\widetilde{m}_{x_0}^\epsilon$, et pas seulement une suite extraite, qui converge vers la solution $m_0^*(x_0)$ de (4.65). Ceci achève la preuve du lemme. \square

Remarque 4.2. Le lemme précédent signifie que l'aimantation limite m_0 est telle que $m_0|_{x=x_0} = m_0^*(x_0)$ pour p.p. $x_0 \in \mathcal{C}$. En effet, en notant $\chi_{|x_0+\epsilon Q_m}$ la fonction caractéristique de $x_0 + \epsilon Q_m$, nous avons

$$\widetilde{m}_0^\epsilon(y, t) = \widetilde{m}^\epsilon(x, y, t) \chi_{|x_0+\epsilon Q_m}(x).$$

Comme $\epsilon \rightarrow 0$, la suite d'ensembles emboîtés $(x_0 + \epsilon Q_m)$ tend vers $\{x_0\}$. Comme déjà mentionné $\widetilde{m}^\epsilon \rightharpoonup m_0$ faiblement dans $L^2(\Omega \times J; L^2_\#(Q_m))$ où m_0 est la limite à deux échelles définie

dans la proposition 4.3. Il en résulte que, pour toute fonction $\varphi \in L^2(J; L^2_{\#}(Q_m))$,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{Q_m \times J} \widetilde{m}_0^\epsilon \varphi \, dydt &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{Q_m \times J} \widetilde{m}^\epsilon(x, y, t) \chi_{|x_0 + \epsilon Q_m}(x) \varphi(y, t) \, dydt \\ &= \int_{Q_m \times J} m_0(x_0, y, t) \varphi(y, t) \, dydt \quad p.p. \, x_0 \in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Remarque 4.3. Le comportement limite de $\widetilde{m}^\epsilon|_{x=x_0}$ ne dépend pas bien sûr du choix de la numérotation des ϵ -copies de Q dans Ω_m^ϵ . Le problème (4.65) caractérise ainsi le comportement limite de la restriction de \widetilde{m}^ϵ à \mathcal{C} . Ce point n'est cependant pas suffisant pour notre objectif. En effet, d'une part \mathcal{C} est dense dans Ω , mais d'autre part, la convergence presque partout dans \mathcal{C} n'apporte aucune information puisque l'ensemble \mathcal{C} est de mesure nulle.

Le reste du chapitre consiste en l'extension du résultat du lemme précédent de \mathcal{C} à Ω . Soit m_0^* défini par $m_0^*(x, y, t) = m_0^*(x)(y, t)$ où $m_0^*(x)$ est défini par (4.65). Montrons que nous avons en fait $m_0 = m_0^*$ dans $L^2(\Omega \times J; L^2_{\#}(Q_m))$, c'est-à-dire

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \times Q_m \times J} (\widetilde{m}^\epsilon - m_0^*) \varphi \, dx dy dt = 0, \quad (4.69)$$

pour toute fonction $\varphi \in L^2(\Omega \times J; L^2_{\#}(Q_m))$, ou de manière équivalente par densité, pour toute fonction test à support compact, $\varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega \times J; \mathcal{C}_{\#}(Q_m))$. Nous avons le résultat suivant.

Lemme 4.5. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega \times J; \mathcal{C}_{\#}(Q_m))$. Soit $\eta > 0$. Il existe $\epsilon' > 0$ tel que pour tout $\epsilon < \epsilon'$,

$$\left| \int_{\Omega \times Q_m \times J} (\widetilde{m}^\epsilon - m_0^*) \varphi \, dx dy dt \right| \leq \eta.$$

Démonstration. Soit $L_\epsilon = \int_{\Omega \times Q_m \times J} (\widetilde{m}^\epsilon - m_0^*) \varphi \, dx dy dt$. La fonction \widetilde{m}^ϵ étant constante sur chaque ϵ -cellule, nous écrivons L_ϵ sous la forme suivante.

$$\begin{aligned} L_\epsilon &= \sum_{x_i^\epsilon \in \mathcal{C}^\epsilon} \int_{(x_i^\epsilon + \epsilon Q_m) \times Q_m \times J} (\widetilde{m}^\epsilon(x_i^\epsilon, y, t) - m_0^*(x, y, t)) \varphi(x, y, t) \, dx dy dt \\ &= \sum_{x_i^\epsilon \in \mathcal{C}^\epsilon} \int_{(x_i^\epsilon + \epsilon Q_m) \times Q_m \times J} (\widetilde{m}^\epsilon(x_i^\epsilon, y, t) - m_0^*(x_i^\epsilon, y, t)) \varphi(x, y, t) \, dx dy dt \\ &\quad + \sum_{x_i^\epsilon \in \mathcal{C}^\epsilon} \int_{(x_i^\epsilon + \epsilon Q_m) \times Q_m \times J} (m_0^*(x_i^\epsilon, y, t) - m_0^*(x, y, t)) \varphi(x, y, t) \, dx dy dt. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Estimons les deux termes du membre de droite de (4.70).

Tout d'abord, en utilisant les notations du lemme 4.4 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous écrivons

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{x_i^\epsilon \in \mathcal{C}^\epsilon} \int_{(x_i^\epsilon + \epsilon Q_m) \times Q_m \times J} (\widetilde{m}^\epsilon - m_0^*)(x_i^\epsilon, y, t) \varphi(x, y, t) dx dy dt \right| \\
&= \left| \sum_{x_i^\epsilon \in \mathcal{C}^\epsilon} \int_{(x_i^\epsilon + \epsilon Q_m) \times Q_m \times J} (\widetilde{m}_{0x_i^\epsilon}^\epsilon(y, t) - m_0^*(x_i^\epsilon)(y, t)) \varphi(x, y, t) dx dy dt \right| \\
&\leq \sum_{x_i^\epsilon \in \mathcal{C}^\epsilon} \|\widetilde{m}_{0x_i^\epsilon}^\epsilon - m_0^*(x_i^\epsilon)\|_{L^2(Q_m \times J)} \int_{x_i^\epsilon + \epsilon Q_m} \|\varphi\|_{L^2(Q_m \times J)} dx \\
&\leq \max_{u \in \mathcal{C}^\epsilon} \|\widetilde{m}_{0u}^\epsilon - m_0^*(u)\|_{L^2(Q_m \times J)} \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega; L^2(J; L^2_\#(Q_m)))} \sum_{x_i^\epsilon \in \mathcal{C}^\epsilon} |\epsilon Q_m| \\
&\leq C \max_{u \in \mathcal{C}^\epsilon} \|\widetilde{m}_{0u}^\epsilon - m_0^*(u)\|_{L^2(Q_m \times J)}.
\end{aligned}$$

En effet, $\sum_{x_i^\epsilon \in \mathcal{C}^\epsilon} |\epsilon Q_m| \leq C|\Omega| \leq C$. Vu le résultat du lemme 4.4, nous avons, pour tout $u \in \mathcal{C}^\epsilon \subset \mathcal{C}$, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\widetilde{m}_{0u}^\epsilon - m_0^*(u)\|_{L^2(Q_m \times J)} = 0$ ¹. Alors, il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que pour tout $\epsilon < \epsilon_1$, nous avons

$$\left| \sum_{x_i^\epsilon \in \mathcal{C}^\epsilon} \int_{(x_i^\epsilon + \epsilon Q_m) \times Q_m \times J} (\widetilde{m}^\epsilon - m_0^*)(x_i^\epsilon, y, t) \varphi(x, y, t) dx dy dt \right| \leq \eta/3. \quad (4.71)$$

Ensuite, le second terme du membre de droite de (4.70) s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \sum_{x_i^\epsilon \in \mathcal{C}^\epsilon} \int_{(x_i^\epsilon + \epsilon Q_m) \times Q_m \times J} (m_0^*(x_i^\epsilon, y, t) - m_0^*(x, y, t)) \varphi(x, y, t) dx dy dt \\
&= \int_{\Omega \times Q_m \times J} (m_0^*(c^\epsilon(x), y, t) - m_0^*(x, y, t)) \varphi(x, y, t) dx dy dt \quad (4.72)
\end{aligned}$$

Le théorème de Lusin s'applique à la fonction m_0^* . En effet, pour tout $\mu > 0$, il existe un ensemble fermé Ω_μ avec $|\Omega \setminus \Omega_\mu| < \mu$ tel que la restriction de m_0^* à Ω_μ est continue. Nous choisissons μ telle que

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{(\Omega \setminus \Omega_\mu) \times Q_m \times J} (m_0^*(c^\epsilon(x), y, t) - m_0^*(x, y, t)) \varphi(x, y, t) dx dy dt \right| \\
&\leq C \|m_0^*\|_{L^2(\Omega \times Q_m \times J)} \mu^{1/2} \leq \eta/3. \quad (4.73)
\end{aligned}$$

1. C'est pour établir cette convergence pour tout $u \in \mathcal{C}^\epsilon$ qu'il était important que le lemme 4.4 établisse une convergence pour l'ensemble de la suite $\epsilon \rightarrow 0$, et donc d'avoir le résultat d'unicité mentionné après (4.65).

Nous rappelons que $c^\epsilon(x) \rightarrow x$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Ainsi, puisque m_0^* est continu sur Ω_μ , le théorème de convergence dominée de Lebesgue assure que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\mu \times Q_m \times J} (m_0^*(c^\epsilon(x), y, t) - m_0^*(x, y, t)) \varphi(x, y, t) dx dy dt = 0,$$

et il existe $\epsilon_2 > 0$ tel que, pour tout $\epsilon < \epsilon_2$,

$$\left| \int_{\Omega_\mu \times Q_m \times J} (m_0^*(c^\epsilon(x), y, t) - m_0^*(x, y, t)) \varphi(x, y, t) dx dy dt \right| \leq \eta/3. \quad (4.74)$$

Finalement, en utilisant (4.70)-(4.74), nous concluons que, pour toute donnée $\varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega \times J; \mathcal{C}_\#(Q_m))$ et $\eta > 0$, il existe $\epsilon' = \min(\epsilon_1, \epsilon_2) > 0$ tel que $|L_\epsilon| < \eta$ pour tout $\epsilon < \epsilon'$, prouvant ainsi le résultat du lemme. \square

Chapitre 5

Homogénéisation de l'équation LLG avec anisotropie de surface dans un matériau perforé

Sommaire

5.1	Introduction	88
5.2	Résultats principaux	99
5.3	Dérivation rigoureuse des modèles homogénéisés	101

5.1 Introduction

5.1.1 Contexte général

Les matériaux ferromagnétiques hétérogènes ont connu un grand engouement ces dernières années. Les avancées technologiques permettent aujourd'hui la production systématique de matériaux composites, très hétérogènes, et ce à une échelle très fine (microscopique, nanoscopique). La réduction de la taille des composants électroniques qui s'est poursuivie régulièrement pendant plus de 40 ans a permis de fabriquer des composants de plus en plus complexes et de moins en moins chers. Des processus de fabrication sont maintenant développés pour obtenir des milieux hétérogènes, principalement avec des structures périodiques. La prédiction du comportement magnétique dans ces structures composites est de grande importance pour les applications, voir par exemple [117].

Notre objectif dans ce chapitre est de procéder, par la convergence à double échelle, à une dérivation rigoureuse des équations LLG homogénéisées associées à une structure ferromagnétique anisotrope périodiquement perforée. En particulier, l'énergie d'anisotropie de surface est incluse dans le modèle en utilisant la condition aux limites de Rado–Weertman.

Nous rappelons d'abord quelques travaux (déjà cités au début du chapitre 4) portant sur l'homogénéisation des milieux ferromagnétiques. Dans [57] l'homogénéisation des multicouches ferromagnétiques a été étudiée. Ces microstructures sont constituées d'une alternance de couches ferromagnétiques (FM) et de couches non magnétiques (NM) avec un couplage inter-couches aux interfaces FM/NM. Un problème homogénéisé a été obtenu lorsque le nombre de couches tend vers l'infini. Une généralisation de [57] a été proposée dans [101] en tenant compte de l'énergie d'anisotropie de surface. Les équations homogénéisées satisfaites par la limite à double échelle de la solution faible ont été obtenues. Dans [102], l'homogénéisation du champ démagnétisant dans des structures périodiquement perforées a été étudiée en utilisant la méthode de la convergence à double échelle. Comme application, l'homogénéisation de l'équation LLG est considérée et le problème homogénéisé est obtenu. Dans le cadre statique, Alouges *et al.* [7] ont considéré l'homogénéisation d'un matériau composite ferromagnétique où les hétérogénéités sont distribuées périodiquement dans le matériau. L'homogénéisation de la fonctionnelle d'énergie est traitée en utilisant la Γ -convergence et l'énergie libre (de Gibbs–Landau) homogé-

néisée est obtenue lorsque la taille des hétérogénéités tend vers 0. Dans tous ces travaux, aucune anisotropie de surface n'est prise en compte.

La difficulté principale et l'originalité dans ce chapitre est induite par l'énergie d'anisotropie de surface. Ses effets sont généralement négligés pour des structures ferromagnétiques massives. Toutefois, le matériau considéré ici est supposé assez mince, avec de nombreuses perforations, de telle sorte que la procédure d'homogénéisation ait un sens. Dans une telle configuration, la partie massive du matériau est très mince (et courbée) et les effets de l'énergie d'anisotropie de surface sont importants. D'un point de vue mathématique, ces effets apparaissent dans la condition non linéaire de Rado-Weertman aux bords des trous. Intuitivement une telle condition aux limites, plutôt que la classique condition aux limites de Neumann homogène, peut induire des effets intéressants dans le modèle effectif posé dans tout le domaine. Ceci est confirmé par la théorie générale d'homogénéisation pour des problèmes complétés par des conditions aux limites de Dirichlet non homogènes, ou bien avec des conditions aux bords de Robin. Ici de plus, on s'intéresse à une forme originale de conditions aux limites associée à la structure particulière des équations LLG (produit vectoriel, non linéarité sur le gradient de l'inconnue).

Des outils spécifiques d'homogénéisation ont été développés pour passer à la limite dans les termes de surface. Notons en particulier la convergence à double échelle pour les surfaces périodiques [5]. Une remarque fondamentale est la suivante. Si ϕ est une fonction continue sur $\bar{\Omega} \times Y^*$ qui est Y^* -périodique par rapport à sa seconde variable, et si Γ_ϵ est une répétition périodique de ϵ -copies du bord ∂Y^* , alors ϕ satisfait

$$\epsilon \int_{\Gamma_\epsilon} |\phi(x, x/\epsilon)|^2 d\sigma_\epsilon(x) \leq C, \quad (5.1)$$

où C désigne une constante indépendante de ϵ .

Les outils présentés dans [5] permettent alors de passer à la limite dans des termes intégraux de la forme

$$\epsilon \int_{\Gamma_\epsilon} u_\epsilon(x) \phi(x, x/\epsilon) d\sigma_\epsilon(x).$$

Cette méthode est donc calibrée pour des effets de surface pondérés par une puissance d'au moins 1 de la taille des perforations ϵ .

Une autre méthode, celle des méso-caractéristiques, nécessite aussi ce genre de pondération

(dans [20] pour l'homogénéisation d'un problème linéaire scalaire avec des conditions aux limites de Fourier, et plus tard dans [21] pour la fonctionnelle non linéaire de Ginzburg-Landau). Enfin, le même type de pondération apparaît aussi dans les références [37, 38] qui sont basées sur une méthode de la convergence à deux échelles.

Le cas des effets de surface qui se produisent à l'ordre principal est rarement étudié, en particulier si une non linéarité est introduite. Ceci dit, dans le contexte applicatif de cette thèse, des effets d'anisotropie de surface agissant à l'ordre principal sont peu réalistes. Ils ne sont donc pas considérés ici.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans les deux sous sections suivantes, on introduit le modèle et on définit la géométrie perforée. On décrit aussi les principaux outils mathématiques utilisés dans notre analyse asymptotique. Les principaux résultats sont annoncés dans la section 2. Selon l'ordre de pondération de l'anisotropie de surface par rapport à la taille des perforations, on obtient différents problèmes effectifs. Ils sont prouvés rigoureusement en section 3.

5.1.2 Position du problème

Le contexte applicatif correspond à une géométrie tridimensionnelle. Nous travaillons donc dans \mathbb{R}^3 . La base canonique est notée (e_1, e_2, e_3) . On notera $x = (x_i)_{1 \leq i \leq 3}$ un point générique. Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^3 , de bord $\partial\Omega$ supposé Lipschitz.

Les espaces de Hilbert usuels sont $\mathbb{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^3$ et $\mathbb{H}^1(\Omega) = (H^1(\Omega))^3$. L'espace $(L^\infty(\Omega))^3$ est noté par $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$, muni de la norme $|\cdot|_\infty$. Nous utiliserons parfois la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés.

Nous caractérisons maintenant le domaine d'étude à perforations périodiques. Ce domaine peut être considéré comme une répétition de copies d'une cellule standard avec trou.

Comme d'habitude dans l'homogénéisation périodique, soit $Y = [0, 1]^3$ la cellule de référence de périodicité dans l'espace auxiliaire \mathbb{R}^3 de variable $y = (y_i)_{1 \leq i \leq 3}$. La cellule Y est identifiée au tore unité $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$. Une fonction définie sur \mathbb{R}^3 est dite Y -périodique si elle est périodique de période 1 en chaque variable y_i , $1 \leq i \leq 3$. Par exemple on note par $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \otimes \mathcal{C}_\#^\infty(Y)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables dans $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^3$, qui sont Y -périodiques par rapport à la seconde variable. Soit H , le trou de référence, un domaine ouvert et connexe de Y avec un

bord Γ Lipschitz. On suppose que $\bar{H} \subset Y$ et on pose $Y^* = Y \setminus \bar{H}$ pour la partie massive de la cellule standard. Ainsi Y est partitionné sous la forme $Y = Y^* \cup \Gamma \cup H$. Soit $\chi^*(y)$ la fonction caractéristique de Y^* dans Y . Soit $\varepsilon > 0$ un nombre réel. On résume en “ $\varepsilon \rightarrow 0$ ” le fait que ε prend ses valeurs dans une suite de nombres positifs tendant vers 0. On définit le matériau perforé

$$\Omega^\varepsilon = \{x \in \Omega; \chi^*(x/\varepsilon) = 1\}$$

et la surface périodique correspondante aux bords des perforations

$$\Gamma^\varepsilon = \{x \in \Omega; x/\varepsilon \in \Gamma\}.$$

Le domaine Ω^ε représente la matrice de la partie solide de Ω , par opposition aux trous qui sont représentés par l’ouvert $H_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{\Omega^\varepsilon}$. Par construction, tous les trous sont identiques et sont périodiquement distribués dans Ω avec la période ε dans chaque direction e_i .

Le bord de Ω^ε est $\partial\Omega^\varepsilon = \partial\Omega \cup \Gamma^\varepsilon$. A cause de la forte non linéarité dans le problème que nous allons étudier, l’extension naturelle par zéro de toute fonction définie sur Ω^ε (comme par exemple dans [3]) ne sera pas suffisante dans notre contexte. Par souci de simplicité pour la construction de l’opérateur de prolongement (voir plus loin), on suppose que pour toute valeur de ε dans la suite $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\partial\Omega \cap \Gamma^\varepsilon = \emptyset.$$

Nous allons maintenant décrire le problème qui nous intéresse. Soit $T > 0$ tel que $(0, T)$ est l’intervalle de temps de notre étude. On pose $Q^\varepsilon = (0, T) \times \Omega^\varepsilon$ et $Q = (0, T) \times \Omega$. On suppose que le matériau ferromagnétique occupe le domaine Ω^ε . L’évolution temporelle du champ d’aimantation \mathbf{m}^ε , qui vit dans \mathcal{S}^2 (la sphère unité de \mathbb{R}^3), peut être décrite dans Q^ε par l’équation LLG ([2], [59])

$$\frac{1}{1 + \alpha^2} \left(\partial_t \mathbf{m}^\varepsilon - \alpha \mathbf{m}^\varepsilon \times \partial_t \mathbf{m}^\varepsilon \right) = -\mathbf{m}^\varepsilon \times \mathcal{H}_{eff}(\mathbf{m}^\varepsilon). \quad (5.2)$$

Le terme $\mathbf{m}^\varepsilon \times \partial_t \mathbf{m}^\varepsilon$ décrit l’amortissement de Gilbert et le terme de droite représente le couple exercé par le champ effectif $\mathcal{H}_{eff}(\mathbf{m}^\varepsilon)$ qui est donné par

$$\mathcal{H}_{eff}(\mathbf{m}^\varepsilon) = \operatorname{div} \left(A\left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \nabla \mathbf{m}^\varepsilon \right) + \phi(\mathbf{m}^\varepsilon) + \mathcal{H}_d(\mathbf{m}^\varepsilon). \quad (5.3)$$

où $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ est une matrice symétrique 3×3 à valeurs dans \mathbb{R}^3 . Le champ d'aimantation est associé à la contrainte non convexe $\mathbf{m}^\varepsilon \in \mathcal{S}^2$, qui s'écrit

$$|\mathbf{m}^\varepsilon| = \begin{cases} 1 & \text{dans } \Omega^\varepsilon, \\ 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega^\varepsilon. \end{cases} \quad (5.4)$$

Le paramètre sans dimension α est le facteur phénoménologique d'amortissement décrivant la dissipation d'énergie. Le champ démagnétisant $\mathcal{H}_d(\mathbf{m}^\varepsilon)$ satisfait dans $(0, T) \times \mathbb{R}^3$ l'équation

$$\operatorname{div}(\mathcal{H}_d(\mathbf{m}^\varepsilon) + \chi^*(x/\varepsilon)\mathbf{m}^\varepsilon) = 0, \quad (5.5)$$

tandis que $\phi(\mathbf{m}^\varepsilon)$ représente le champ d'anisotropie de volume qui est en général supposé linéaire en \mathbf{m}^ε . Plus précisément, soit $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, telle que $\phi(\mathbf{m}^\varepsilon) = \nabla \Xi(\mathbf{m}^\varepsilon)$ est une fonction gradient continue satisfaisant $0 \leq \Xi(\mathbf{m}^\varepsilon) \leq \Xi_\infty < \infty$ pour tout $\mathbf{m}^\varepsilon \in \mathcal{S}^2$. Le champ d'aimantation initial est

$$\mathbf{m}^\varepsilon(0, x) = \mathbf{m}_0^\varepsilon(x), \quad |\mathbf{m}_0^\varepsilon(x)|^2 = 1 \text{ p.p. dans } \Omega^\varepsilon. \quad (5.6)$$

L'équation (5.2) doit être résolue avec des conditions aux limites appropriées pour l'aimantation. L'originalité principale (et la difficulté) dans ce chapitre est l'existence de l'énergie d'anisotropie de surface. On considère la condition aux limites de Rado–Weertman ([63], [62])

$$\mathbf{m}^\varepsilon \times (\partial_{\mathbf{n}_A^\varepsilon} \mathbf{m}^\varepsilon + \varepsilon^\gamma K_s^\varepsilon(\mathbf{m}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon) \mathbf{n}^\varepsilon) = 0 \text{ sur } (0, T) \times \Gamma^\varepsilon \quad (5.7)$$

où les effets de l'énergie de surface sont pondérés par le paramètre $\gamma \in \mathbb{Z}$ et \mathbf{n}^ε est la normale unité sortante de Γ^ε . Comme d'habitude, $\partial_{\mathbf{n}_A^\varepsilon} \mathbf{m}^\varepsilon = A(\cdot, \cdot/\varepsilon) \partial_{\mathbf{n}^\varepsilon} \mathbf{m}^\varepsilon$ et $\partial_{\mathbf{n}^\varepsilon} \mathbf{m}^\varepsilon$ représente la dérivée normale sortante de \mathbf{m}^ε sur le bord Ω^ε . L'énergie d'anisotropie de surface est caractérisée par $K_s^\varepsilon = K_s(\cdot, \cdot/\varepsilon)$. La quantité K_s^ε peut être une fonction scalaire bornée ou une matrice. Toutefois, et par souci de simplicité dans les notations, on développe tous les calculs en supposant que K_s est une fonction scalaire. Nous allons expliquer maintenant comment l'anisotropie de surface a tendance soit à pénaliser la troisième composante (out-of plane) de l'aimantation sur le bord, soit à aligner \mathbf{m}^ε à la normale à la surface. Soit Γ_+^ε (resp. Γ_-^ε) la partie de Γ^ε où K_s^ε est positive (resp. K_s^ε est négative). Puisque $|\mathbf{m}^\varepsilon| = 1$, $|\mathbf{n}^\varepsilon| = 1$ et donc $1 - |\mathbf{m}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon|^2 = |\mathbf{m}^\varepsilon \times \mathbf{n}^\varepsilon|^2$, les énergies de surface correspondantes s'écrivent

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma_+^\varepsilon} \varepsilon^\gamma K_s^\varepsilon |\mathbf{m}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon|^2 d\sigma^\varepsilon \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_-^\varepsilon} \varepsilon^\gamma K_s^\varepsilon |\mathbf{m}^\varepsilon \times \mathbf{n}^\varepsilon|^2 d\sigma^\varepsilon.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'anisotropie de surface tend donc à mettre le champ d'aimantation parallèle à la partie de surface Γ_+^ε et orthogonal à la partie de surface Γ_-^ε .

Un point important dans ce travail est la pondération ε^γ dans (5.7). En fait, on pose $\mathcal{A} = \varepsilon^{-\gamma}$ où \mathcal{A} est le champ d'échange. La quantité \mathcal{A} caractérise les interactions d'échange qui ont tendance à aligner les spins dans le matériau ferromagnétique. Elles décrivent aussi l'épaisseur et l'énergie de surface des parois de domaines magnétiques dans les matériaux ferromagnétiques ([103]). Plus \mathcal{A} est petit, plus les effets de l'énergie d'anisotropie de surface sont importants. De plus, \mathcal{A} est localement donné par (voir [103])

$$\mathcal{A} = \eta \frac{zS^2J}{a_{nn}},$$

où z est le nombre de coordination, η est un facteur déterminé par la structure cristalline, S est le nombre quantique magnétique de spin, J est l'intégrale d'échange et a_{nn} est la distance entre spins proches voisins. La dernière quantité est au plus de l'ordre de ε , qui est la taille caractéristique des cellules ferromagnétiques. Ce point donne particulièrement du sens au choix $\gamma = 1$, $\mathcal{A} = 1/\varepsilon$. D'autres pondérations restent acceptables grâce à la définition complète de \mathcal{A} .

En gardant à l'esprit que $\mathbf{m}^\varepsilon \times \mathbf{m}^\varepsilon = 0$ et $|\mathbf{m}^\varepsilon| = 1$, on note finalement que la condition aux limites (5.7) est équivalente à

$$\partial_{n_A} \mathbf{m}^\varepsilon = \varepsilon^\gamma K_s^\varepsilon ((\mathbf{m}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon) \mathbf{n}^\varepsilon - (\mathbf{m}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon)^2 \mathbf{m}^\varepsilon) \text{ sur } (0, T) \times \Gamma^\varepsilon. \quad (5.8)$$

Le but de ce chapitre est l'étude du comportement asymptotique du problème (5.2)-(5.7) lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et de l'obtention de problèmes effectifs correspondants à différents choix pour γ dans (5.7).

5.1.3 Contexte mathématique

Nous commençons par donner la définition rigoureuse des solutions faibles pour le système LLG (5.2)-(5.7). Pour cela, on suppose que les composantes de A et K_s sont dans $L^\infty(\Omega \times Y)$ et que A est uniformément coercive : il existe $\beta > 0$ tel que, pour tout (x, y) dans $\Omega \times Y$, pour tout $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ dans \mathbb{R}^3 ,

$$\sum_{i,j=1}^3 A_{i,j}(x, y) \zeta_i \zeta_j \geq \beta |\zeta|^2.$$

Définition 5.1. Soit $\mathbf{m}_0^\varepsilon \in \mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon)$ telle que $|\mathbf{m}_0^\varepsilon| = 1$ presque partout dans Ω^ε , \mathbf{m}^ε est une solution faible du problème LLG (5.2)-(5.7) si

1. pour tout $T > 0$, \mathbf{m}^ε est dans $L^\infty((0, T); \mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon)) \cap W^{1,\infty}(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega^\varepsilon))$ et \mathbf{m}^ε satisfait la contrainte de saturation $|\mathbf{m}^\varepsilon(t, x)| = 1$ presque partout dans $\mathbb{R}^+ \times \Omega^\varepsilon$.
2. la condition initiale $\mathbf{m}^\varepsilon(0, \cdot) = \mathbf{m}_0^\varepsilon(\cdot)$ est satisfaite au sens des traces, dans $\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Omega)$;
3. pour tout $\mathbf{G} \in \mathbb{H}^1(Q^\varepsilon) \cap \mathcal{C}_0(Q^\varepsilon)$, on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 + \alpha^2} \int_{Q^\varepsilon} (\partial_t \mathbf{m}^\varepsilon - \alpha \mathbf{m}^\varepsilon \times \partial_t \mathbf{m}^\varepsilon) \cdot \mathbf{G} \, dx dt \\ &= \int_{Q^\varepsilon} \mathbf{m}^\varepsilon \times A_{i,j} \partial_i \mathbf{m}^\varepsilon \cdot \partial_i \mathbf{G} \, dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma^\varepsilon} \varepsilon^\gamma K_s^\varepsilon(\mathbf{m}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon) (\mathbf{m}^\varepsilon \times \mathbf{n}^\varepsilon) \cdot \mathbf{G} \, d\sigma^\varepsilon dt; \end{aligned} \quad (5.9)$$

4. pour tout $t \geq 0$, on a

$$\mathcal{E}^\varepsilon(\mathbf{m}^\varepsilon) + \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} \int_0^t \int_{\Omega^\varepsilon} |\partial_t \mathbf{m}^\varepsilon|^2 \, dx dt \leq \mathcal{E}^\varepsilon(\mathbf{m}_0^\varepsilon) \quad (5.10)$$

où $\mathcal{E}^\varepsilon(\mathbf{m}^\varepsilon)$ est définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\varepsilon(\mathbf{m}^\varepsilon) &= \int_{\Omega^\varepsilon} A_{i,j}(x, \frac{x}{\varepsilon}) \partial_{x_i} \mathbf{m}^\varepsilon \cdot \partial_{x_j} \mathbf{m}^\varepsilon \, dx \\ &+ \varepsilon^\gamma \int_{\Gamma_+^\varepsilon} K_s^\varepsilon |\mathbf{m}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon|^2 \, d\sigma^\varepsilon - \varepsilon^\gamma \int_{\Gamma_-^\varepsilon} K_s^\varepsilon |\mathbf{m}^\varepsilon \times \mathbf{n}^\varepsilon|^2 \, d\sigma^\varepsilon \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} |\mathcal{H}_d(\mathbf{m}^\varepsilon)|^2 \, dx + \int_{\Omega^\varepsilon} \Xi(\mathbf{m}^\varepsilon) \, dx. \end{aligned}$$

Le résultat d'existence globale de solutions faibles suivant est démontré dans [59].

Théorème 5.1. Soit $\mathbf{m}_0^\varepsilon \in \mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon)$ telle que $|\mathbf{m}_0^\varepsilon(x)|^2 = 1$ presque partout dans Ω^ε . Alors il existe une solution faible globale \mathbf{m}^ε du problème (5.2)-(5.7) au sens de la Définition 5.1.

Puisque on s'intéresse particulièrement aux effets de l'énergie d'anisotropie de surface sur le problème effectif et par souci de simplicité, on néglige le champ démagnétisant $\mathcal{H}_d(\mathbf{m}^\varepsilon)$. On renvoie par exemple à [102] pour l'homogénéisation de ce champ. On néglige aussi le champ d'anisotropie de volume $\phi(\mathbf{m}^\varepsilon)$. Notons cependant que ces simplifications ne limitent

pas l'analyse proposée. On réécrit alors le problème LLG avec la condition aux limites de Rado–Weertman sous la forme

$$\begin{cases} \frac{1}{1+\alpha^2}(\partial_t \mathbf{m}^\varepsilon - \alpha \mathbf{m}^\varepsilon \times \partial_t \mathbf{m}^\varepsilon) = -\mathbf{m}^\varepsilon \times \operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla \mathbf{m}^\varepsilon) \text{ dans } Q^\varepsilon, \\ \partial_{n_A} \mathbf{m}^\varepsilon = \varepsilon^\gamma K_s^\varepsilon((\mathbf{m}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon) \mathbf{n}^\varepsilon - (\mathbf{m}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon)^2 \mathbf{m}^\varepsilon) \text{ sur } (0, T) \times \partial \Gamma^\varepsilon, \\ \mathbf{m}^\varepsilon(0, x) = \mathbf{m}_0^\varepsilon(x) \text{ dans } \Omega^\varepsilon. \end{cases} \quad (5.11)$$

Nous allons donner maintenant quelques hypothèses techniques.

On suppose que :

$$\Gamma \text{ est une surface Lipschitzienne,} \quad (5.12)$$

$$A_{ij} \in L^\infty(\Omega) \otimes \mathcal{C}_\#(Y), \quad 1 \leq i, j \leq 3, \quad (5.13)$$

$$\mathbf{m}_0 \in (\mathbb{H}^1(\Omega) \otimes \mathbb{H}_\#^1(Y)) \cap (\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \otimes \mathcal{C}_\#(Y)), \quad |\mathbf{m}_0| = 1 \text{ dans } \Omega \times Y, \quad (5.14)$$

$$K_s \text{ est une fonction mesurable et bornée sur } \overline{\Omega} \times Y, \quad Y\text{-périodique,} \quad (5.15)$$

et on note $A_{ij}^\varepsilon(x) = A_{ij}(x, x/\varepsilon)$, $1 \leq i, j \leq 3$, $\mathbf{m}_0^\varepsilon(x) = \mathbf{m}_0(x, x/\varepsilon)$, $K_s^\varepsilon(x) = K_s(x, x/\varepsilon)$.

Pour l'exploitation de l'estimation d'énergie (5.10), et en gardant à l'esprit l'estimation "optimale" (5.1), on suppose au moins que la donnée initiale vérifie

$$\varepsilon \int_{\Gamma_+^\varepsilon} K_s^\varepsilon |\mathbf{m}_0^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon|^2 d\sigma^\varepsilon - \varepsilon \int_{\Gamma_-^\varepsilon} K_s^\varepsilon |\mathbf{m}_0^\varepsilon \times \mathbf{n}^\varepsilon|^2 d\sigma^\varepsilon \leq C. \quad (5.16)$$

Pour quelques pondérations, l'énergie d'anisotropie de surface agit à l'ordre principal. C'est le cas $\gamma = 0$ qui est aussi évoqué dans ce chapitre. Pour traiter ce cas, nous supposons que

$$\int_{\Gamma_+} K_s(x, y) |\mathbf{m}_0(x, y) \cdot \mathbf{n}(y)|^2 d\sigma(y) = \int_{\Gamma_-} K_s(x, y) |\mathbf{m}_0(x, y) \times \mathbf{n}(y)|^2 d\sigma(y) = 0. \quad (5.17)$$

5.1.4 Outils mathématiques

Ci-après, pour tout $\varphi \in L^2(\Omega) \otimes \mathbb{L}_\#^2(Y)$, on note par φ^ε la fonction définie par

$$\varphi^\varepsilon(x) = \varphi(x, x/\varepsilon) \text{ p.p. } x \in \Omega^\varepsilon.$$

5.1.4.1 Convergence à double échelle

Nous rappelons la définition et les résultats principaux concernant la méthode de la convergence à double échelle. Pour plus de détails, on renvoie aux références [3], [5], [92].

Définition 5.2. Une suite v^ε dans $L^2(\Omega)$ converge à double échelle vers $v \in L^2(\Omega \times Y)$ (on écrit $v^\varepsilon \xrightarrow{2} v$) si, pour toute fonction test admissible $\phi \in L^2(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} v^\varepsilon(x) \phi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx = \int_{\Omega \times Y} v(x, y) \phi(x, y) dx dy.$$

Proposition 5.1. On a les résultats de convergence suivants.

- (i) Soit v^ε une suite de fonctions uniformément bornées dans $L^2(\Omega)$. Alors, il existe $v_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ et une sous-suite de v^ε qui converge à double échelle vers v_0 . La limite faible dans L^2 de v^ε est la moyenne de v_0 sur Y .
- (ii) Soit v^ε une suite uniformément bornée dans $H^1(\Omega)$. Alors, il existe $v \in H^1(\Omega)$ et $v_1 \in L^2(\Omega; H^1_\#(Y)/\mathbb{R})$ telles que, pour une sous-suite,

$$v^\varepsilon \rightharpoonup v \text{ faiblement dans } H^1(\Omega), \quad v^\varepsilon \xrightarrow{2} v, \quad \nabla v^\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla v + \nabla_y v_1.$$

- (iii) Soit v^ε une suite de fonctions telle que v^ε et $\varepsilon \nabla v^\varepsilon$ sont uniformément bornées dans $L^2(\Omega)$. Alors, il existe $v_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ et une sous-suite de v^ε telles que

$$v^\varepsilon \xrightarrow{2} v_0, \quad \varepsilon \nabla v^\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla_y v_0.$$

La définition 5.2 de la convergence à double échelle est écrite pour des fonctions test dans $\phi \in L^2(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$. La classe des fonctions test admissibles peut toutefois être légèrement étendue. Toute fonction $\phi(x, y)$, Y -périodique dans y , et satisfaisant

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \phi(x, \frac{x}{\varepsilon})^2 dx = \int_{\Omega} \int_Y \phi(x, y)^2 dx dy$$

est une fonction test admissible. De plus toute suite u^ε telle que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = \|u_0\|_{L^2(\Omega \times Y)}$, se comporte aussi comme une fonction test admissible pour la convergence à double échelle (voir [3]). Dans l'analyse qui va suivre, on utilise ce dernier résultat dans le cas particulier d'une suite u^ε uniformément bornée dans $H^1(\Omega)$ et fortement convergente dans $L^2(\Omega)$. Notons finalement que les hypothèses (5.13)-(5.14) impliquent que A^ε et m_0^ε sont des fonctions test admissibles.

5.1.4.2 Convergence à double échelle et surfaces périodiques

La notion de la convergence à double échelle a été généralisée aux suites de fonctions définies sur des surfaces périodiques (voir [5], [90, 91]). Les résultats suivants sont utilisés dans

ce chapitre pour l'analyse asymptotique de l'énergie d'anisotropie de surface sur la surface périodique Γ_ε .

Rappelons d'abord quelques résultats fondamentaux.

Définition 5.3. Une suite u^ε in $L^2(\Gamma_\varepsilon)$ converge à double échelle vers $u_0 \in L^2(\Omega; L^2(\Gamma))$ (on écrit $u^\varepsilon \xrightarrow{2\sigma} u_0$) si, pour toute fonction test admissible $\phi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \otimes \mathcal{C}_\#(Y)$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon} u_\varepsilon(x) \phi(x, \frac{x}{\varepsilon}) d\sigma_\varepsilon = \int_{\Omega} \int_{\Gamma} u_0(x, y) \phi(x, y) d\sigma(y) dx.$$

Proposition 5.2. Nous avons les résultats de convergence suivants.

(i) Soit u_ε une suite dans $L^2(\Gamma_\varepsilon)$ telle que

$$\varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon} |u_\varepsilon(x)|^2 d\sigma_\varepsilon(x) \leq C, \quad (5.18)$$

où le nombre réel C ne dépend pas de ε . Il existe une sous suite (encore notée par ε) et une limite à double échelle $u_0 \in L^2(\Omega; L^2(\Gamma))$ telles que $u_\varepsilon \xrightarrow{2\sigma} u_0$.

(ii) Soit v_ε une suite dans $H^1(\Omega)$ telle que v^ε et $\varepsilon \nabla v^\varepsilon$ sont uniformément bornées dans $L^2(\Omega)$. Alors sa limite à double échelle au sens de la Définition 5.3 est la trace sur Γ de sa limite à double échelle usuelle au sens de la Définition 5.2. Plus précisément, il existe $v_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ et une sous suite v^ε telles que

$$v^\varepsilon \xrightarrow{2} v_0, \quad \varepsilon \nabla v^\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla_y v_0, \quad v^\varepsilon \xrightarrow{2\sigma} v_0.$$

5.1.4.3 Opérateur de prolongement

Le processus d'homogénéisation de l'équation LLG avec énergie d'anisotropie de surface consiste en l'étude du comportement asymptotique d'une suite de fonctions oscillantes m^ε , dans un domaine oscillant, Ω^ε , pour passer finalement à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ dans le problème (5.11). A cause des non linéarités, quelques résultats de compacité sont nécessaires mais ne sont pas accessibles dans le domaine oscillant. On introduit ici un opérateur de prolongement au domaine fixe Ω . Les hypothèses de régularité choisies pour Ω^ε permettent l'utilisation de l'extension introduite dans [1] qu'on rappellera ci-après. Soit $\Omega(\varepsilon k_1) = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon k_1\}$.

Lemme 5.1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $C > 0$ qui ne dépend pas de $\varepsilon > 0$ et un opérateur de prolongement linéaire et continu P_ε de $\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon)$ à $\mathbb{H}_{loc}^1(\Omega)$ tels que

$$P_\varepsilon(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \text{ p.p. dans } \Omega^\varepsilon, \quad \|P_\varepsilon \mathbf{u}\|_{\mathbb{H}^1(\Omega(\varepsilon k_1))} \leq C \|\mathbf{u}\|_{\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon)}$$

pour tout \mathbf{u} dans $\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon)$. Par souci de simplification, on note $\tilde{\mathbf{u}} = P_\varepsilon(\mathbf{u})$.

Pour éviter l'apparition de couches limites, on a fait l'hypothèse $\Gamma_\varepsilon \cap \partial\Omega = \emptyset$ sur la structure du domaine Ω^ε . Les résultats du lemme 5.1 sont alors vrais dans le domaine entier Ω au lieu de $\Omega(\varepsilon k_1)$.

Puisque les termes de bord sont d'une importance spéciale dans ce travail, nous donnons le résultat suivant.

Lemme 5.2. *Soit u dans $H^1(\Omega^\varepsilon)$. La trace de \tilde{u} sur le bord $\partial\Omega^\varepsilon$ de Ω^ε est égale à la trace de u dans $H^{1/2}(\partial\Omega^\varepsilon)$.*

Démonstration. L'extension de u est telle que $\tilde{u} = u$ p.p. dans Ω^ε . Pour toute fonction vectorielle régulière ϕ , nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega^\varepsilon} \tilde{u}(\phi \cdot \mathbf{n}^\varepsilon) d\sigma^\varepsilon(x) &= \int_{\Omega^\varepsilon} \tilde{u} \operatorname{div} \phi dx + \int_{\Omega^\varepsilon} \nabla \tilde{u} \cdot \phi dx \\ &= \int_{\Omega^\varepsilon} u \operatorname{div} \phi dx + \int_{\Omega^\varepsilon} \nabla u \cdot \phi dx = \int_{\partial\Omega^\varepsilon} u(\phi \cdot \mathbf{n}^\varepsilon) d\sigma^\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons le résultat. □

5.1.4.4 Prolongement de la normale unitaire au bord des perforations

Nous avons noté \mathbf{n}^ε la normale unitaire au bord des trous. Par périodicité de la structure, elle est définie par $\mathbf{n}^\varepsilon(x) = \mathbf{n}(x/\varepsilon)$ où \mathbf{n} est la normale unitaire de Γ . On construit maintenant un prolongement de \mathbf{n}^ε au domaine Ω tout entier. Pour simplifier, on le note $\tilde{\mathbf{n}}^\varepsilon$, même si il n'est pas définie par l'opérateur P_ε . Puisque Γ est supposé de classe $\mathcal{C}^{1,1}$, on considère d'abord l'unique prolongement de sa normale extérieure à un voisinage \mathcal{V} de Γ comme un champ de vecteurs unitaires continu et lipshitzien. En le notant de la même manière, on a maintenant une fonction lipshitzienne \mathbf{n} qui admet presque partout dans \mathcal{V} des dérivées partielles en espace appartenant à $L^\infty(\mathcal{V})$. On prolonge alors cette fonction par continuité en la fonction

$$\tilde{\mathbf{n}} \in \mathcal{C}_\#(Y) \cap \mathbb{W}_\#^{1,\infty}(Y).$$

Finalement, on note $\tilde{\mathbf{n}}^\varepsilon$ la fonction définie dans Ω par $\tilde{\mathbf{n}}^\varepsilon(x) = \tilde{\mathbf{n}}(x/\varepsilon)$. Notons que $\tilde{\mathbf{n}}^\varepsilon$ est une fonction test admissible pour la convergence à double échelle classique et la convergence à

double échelle sur les surfaces périodiques et que

$$\tilde{\mathbf{n}}^\varepsilon \xrightarrow{2} \tilde{\mathbf{n}}, \quad \tilde{\mathbf{n}}^\varepsilon \xrightarrow{2\sigma} \tilde{\mathbf{n}}|_\Gamma = \mathbf{n}, \quad \varepsilon \nabla \tilde{\mathbf{n}}^\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla_y \tilde{\mathbf{n}}.$$

5.2 Résultats principaux

On définit d'abord la version homogénéisée de l'opérateur elliptique défini par A^ε . Soient $(v_j)_{j=1\dots 3}$ les fonctions Y -périodiques solutions du problème suivant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y(A(\nabla_y v_j + \mathbf{e}_j)) = 0 \text{ dans } \Omega \times Y^*, \\ A(\nabla_y v_j + \mathbf{e}_j) \cdot \nu = 0 \text{ sur } \Omega \times \Gamma. \end{cases} \quad (5.19)$$

On définit alors $A^\#$ par

$$A_{ij}^\# = \frac{1}{|Y^*|} \int_{Y^*} A(\mathbf{e}_i + \nabla_y v_i) \cdot (\mathbf{e}_j + \nabla_y v_j) dy, \quad 1 \leq i, j \leq 3. \quad (5.20)$$

On pose

$$\widetilde{\mathbf{m}}_0^\# = \frac{1}{|Y^*|} \int_{Y^*} \widetilde{\mathbf{m}}_0(x, y) dy.$$

On peut aussi tout simplement supposer qu'il existe $\mathbf{m}_0^\#$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$ telle que \mathbf{m}_0^ε converge faiblement vers $\mathbf{m}_0^\#$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Notre résultat principal peut s'énoncer comme suit.

Théorème 5.2. *Supposons que (5.12)-(5.16) sont satisfaites. Pour tout $\varepsilon > 0$, soit \mathbf{m}^ε une solution faible du système (5.11). Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une extension \mathbf{m}^ε dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$ notée par $\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon$ telle que, à une sous suite près, $\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon$ converge à double échelle vers une fonction $\widetilde{\mathbf{m}}^0$ de $L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{H}^1(\Omega))$ et de $H^1(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega))$ pour tout $T > 0$, et satisfaisant dans $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ le problème suivant :*

(i) *Si $\gamma > 1$, on n'a aucune contribution de l'énergie d'anisotropie de surface dans le problème effectif :*

$$\begin{cases} \frac{1}{1 + \alpha^2} (\partial_t \widetilde{\mathbf{m}}^0 - \alpha \widetilde{\mathbf{m}}^0 \times \partial_t \widetilde{\mathbf{m}}^0) = -\widetilde{\mathbf{m}}^0 \times \operatorname{div} (A^\# \nabla \widetilde{\mathbf{m}}^0) \text{ dans } Q, \\ \widetilde{\mathbf{m}}^0(t = 0) = \mathbf{m}_0^\# \text{ dans } \Omega, \\ \partial_{\mathbf{n}_{A^\#}} \widetilde{\mathbf{m}}^0 = 0 \text{ sur } (0, T) \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.21)$$

Le champ d'aimantation effectif vérifie $|\widetilde{\mathbf{m}}^0| = 1$ dans $\mathbb{R}^+ \times \Omega$.

(ii) Si $\gamma = 1$, un terme de mémoire non local est induit dans l'équation effective par l'énergie d'anisotropie de surface :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1 + \alpha^2} (\partial_t \widetilde{\mathbf{m}}^0 - \alpha \widetilde{\mathbf{m}}^0 \times \partial_t \widetilde{\mathbf{m}}^0) \\ \quad = -\widetilde{\mathbf{m}}^0 \times (\operatorname{div} (A^\# \nabla \widetilde{\mathbf{m}}^0) + (K_s^\#)_i (\widetilde{\mathbf{m}}^0 \cdot \mathbf{e}_i)) \text{ dans } Q, \\ \widetilde{\mathbf{m}}^0(t = 0) = \mathbf{m}_0^\# \text{ dans } \Omega, \\ \partial_{\mathbf{n}_{A^\#}} \widetilde{\mathbf{m}}^0 = 0 \text{ sur } (0, T) \times \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (5.22)$$

où $K_s^\#$ est défini par

$$(K_s^\#)_i = \frac{1}{|Y^*|} \int_{\Gamma} (\widetilde{\mathbf{n}}(y) \cdot \mathbf{e}_i) K_s(x, y) \widetilde{\mathbf{n}}(y) \, d\sigma(y), \quad 1 \leq i \leq 3. \quad (5.23)$$

Le champ d'aimantation effectif vérifie aussi $|\widetilde{\mathbf{m}}^0| = 1$ dans $\mathbb{R}^+ \times \Omega$.

(iii) Si $\gamma = 0$, si (5.17) est vraie et s'il existe $\Gamma_+ \subset \Gamma$, $|\Gamma_+| \neq 0$ (resp. ou $\Gamma_- \subset \Gamma$, $|\Gamma_-| \neq 0$) tel que K_s est non négative dans Γ_+ (resp. $-K_s$ est non négative dans Γ_-). Supposons de plus que¹ $|m_0^\varepsilon| = M_s^\varepsilon$, $M_s^\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $M_s^\varepsilon \rightarrow M_s$ in \mathbb{R} . Alors le modèle effectif est celui de l'aimantation totalement "épinglée", c'est-à-dire à saturation d'aimantation nulle, $M_s = 0$.

Remarque 5.1. Les résultats (i)-(iii) sont conformes à l'intuition : (i)-(ii) si les effets de l'énergie d'anisotropie de surface apparaissent pour un ordre petit ou très petit, la structure de l'équation LLG est préservée dans le modèle effectif; (ii) pour des effets d'ordre microscopique, l'anisotropie de surface apparaît sous la forme d'une nouvelle contribution non locale du premier ordre dans le champ effectif; (iii) lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, formellement, tout trou microscopique H^ε se réduit à un point x_* et l'ensemble des normales unitaires $\{\mathbf{n}^\varepsilon\}$ tend vers un ensemble infini de vecteurs, pointant dans toutes les directions à partir de x_* ; si, quel que soit ε , l'énergie d'anisotropie de surface agit toujours avec les mêmes effets sur une partie donnée,

1. Ici M_s^ε est la saturation d'aimantation du problème microscopique. Jusqu'ici, toute la description du modèle et les résultats ci-dessus ont été énoncés en supposant simplement que cette saturation valait 1, $M_s^\varepsilon = 1$. Mais, sous les hypothèses de (iii), passer à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ nécessite un degré de liberté supplémentaire. Notons que dans ce cas avec saturation d'aimantation non unitaire, le premier point de la Définition 5.1 doit simplement être modifié en $|m^\varepsilon| = M_s^\varepsilon$ p.p. dans $\mathbb{R}_+ \times \Omega^\varepsilon$.

par exemple Γ_+ , $|\Gamma_+| \neq 0$, du bord du trou de référence, alors le champ d'aimantation limite $\widetilde{\mathbf{m}}^0(x_*)$ est orthogonal à un ensemble infini de vecteurs non parallèles et il doit être nul.

Remarque 5.2. L'existence de solutions faibles pour le problème (5.22) est garantie par le processus asymptotique.

5.3 Dérivation rigoureuse des modèles homogénéisés

5.3.1 Estimations uniformes

Dans ce qui suit, la lettre C représente un nombre réel positif générique qui ne dépend pas de ε . Des estimations uniformes sont obtenues à partir de (5.10) et des hypothèses sur A . Pour la démonstration de l'estimation d'énergie suivante, on renvoie à [59] : si $\mathbf{m}_0^\varepsilon \in \mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon)$, alors

$$\begin{aligned} & \|\partial_t \mathbf{m}^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2((0,T) \times \Omega^\varepsilon)}^2 + \|\mathbf{m}^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty(0,T; \mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon))}^2 \\ & \quad + \varepsilon^\gamma \int_{\Gamma_+^\varepsilon} K_s^\varepsilon |\mathbf{m}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon|^2 d\sigma^\varepsilon - \varepsilon^\gamma \int_{\Gamma_-^\varepsilon} K_s^\varepsilon |\mathbf{m}^\varepsilon \times \mathbf{n}^\varepsilon|^2 d\sigma^\varepsilon \\ & \leq C \|\mathbf{m}_0^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^1(\Omega^\varepsilon)}^2 + \varepsilon^\gamma \int_{\Gamma_+^\varepsilon} K_s^\varepsilon |\mathbf{m}_0^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon|^2 d\sigma^\varepsilon - \varepsilon^\gamma \int_{\Gamma_-^\varepsilon} K_s^\varepsilon |\mathbf{m}_0^\varepsilon \times \mathbf{n}^\varepsilon|^2 d\sigma^\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Grâce au lemme 5.1, les estimations pour $\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon$ sont les mêmes.

5.3.2 Anisotropie de surface d'ordre 1

Le présent paragraphe est réservé au cas où $\gamma = 1$ correspondant à une faible anisotropie de surface. Au vu des estimations (5.24) et de l'hypothèse (5.16), on est sûr de l'existence d'une sous suite, toujours notée par ε , et de deux fonctions

$$\widetilde{\mathbf{m}}^0 \in L^\infty(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)), \quad \widetilde{\mathbf{m}}^1 \in L^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega; \mathbb{H}_{\#}^1(Y)))$$

telles que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon &\xrightarrow{2} \widetilde{\mathbf{m}}^0, \quad \partial_t \widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon \xrightarrow{2} \partial_t \widetilde{\mathbf{m}}^0, \\
\nabla \widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon(x) &\xrightarrow{2} \nabla_x \widetilde{\mathbf{m}}^0(x, t) + \nabla_y \widetilde{\mathbf{m}}^1(x, y, t), \\
\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon &\rightharpoonup \widetilde{\mathbf{m}}^0 \text{ faiblement dans } \mathbb{H}^1(Q), \\
\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon &\rightarrow \widetilde{\mathbf{m}}^0 \text{ fortement dans } \mathbb{L}^2(Q) \text{ et p.p. dans } Q.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Le dernier résultat de convergence forte est obtenu par un argument de compacité classique de type Aubin. Nous avons l'information supplémentaire suivante.

Lemme 5.3. *Le champ d'aimantation effectif est tel que $|\widetilde{\mathbf{m}}_0(x, t)| = 1$ presque partout dans Q . De plus, pour tout $1 \leq i \leq 3$, les vecteurs $\partial_{x_i} \widetilde{\mathbf{m}}_0$, $\partial_{x_i} \widetilde{\mathbf{m}}_0 + \partial_{y_i} \widetilde{\mathbf{m}}_1$ et $\partial_{y_i} \widetilde{\mathbf{m}}_1$ sont perpendiculaires au vecteur $\widetilde{\mathbf{m}}_0$ presque partout dans $Q \times Y^*$.*

Démonstration. On regarde d'abord la dérivée de la contrainte de saturation. D'une part, grâce à la convergence presque partout de $\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon$, on sait que $\chi^{*,\varepsilon} |\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon| \xrightarrow{2} \chi^*(y) |\widetilde{\mathbf{m}}_0|$ et donc

$$\chi^{*,\varepsilon} |\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon| \rightharpoonup |Y^*| |\widetilde{\mathbf{m}}_0| \text{ faiblement dans } L^2(Q). \tag{5.26}$$

D'autre part, puisque $\chi^{*,\varepsilon} |\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon| = \chi^{*,\varepsilon}$, nous avons aussi $\chi^{*,\varepsilon} |\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon| \xrightarrow{2} \chi^*(y)$ et donc

$$\chi^{*,\varepsilon} |\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon| \rightharpoonup |Y^*| \text{ faiblement dans } L^2(Q). \tag{5.27}$$

De (5.26)-(5.27) on conclut que $|Y^*| |\widetilde{\mathbf{m}}_0| = |Y^*|$ et donc

$$|\widetilde{\mathbf{m}}_0| = 1 \text{ p.p. dans } Q.$$

En dérivant cette dernière relation par rapport à x_i , pour tout $1 \leq i \leq 3$, on obtient $\partial_{x_i} \widetilde{\mathbf{m}}_0 \cdot \widetilde{\mathbf{m}}_0 = 0$ p.p. dans Q . On obtient alors les deux premiers résultats annoncés dans le lemme.

Maintenant, on regarde la limite de la dérivée de la contrainte de saturation. Soit $1 \leq i \leq 3$. Grâce à $\chi^{*,\varepsilon} |\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon| = 1$, nous avons $\chi^{*,\varepsilon} \partial_{x_i} \widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon \cdot \widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon = 0$ p.p. dans Q . Alors

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_Q \chi^{*,\varepsilon}(x) (\partial_{x_i} \widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon(x, t) \cdot \widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon(x, t)) \Psi(x, t, x/\varepsilon) dx dt \\
&= \int_Q \int_{Y^*} ((\partial_{x_i} \widetilde{\mathbf{m}}_0(x, t) + \partial_{y_i} \widetilde{\mathbf{m}}_1(x, y, t)) \cdot \widetilde{\mathbf{m}}_0(x, t)) \Psi(x, y, t) dx dy dt
\end{aligned}$$

pour toute fonction $\Psi(x, y, t) \in \mathcal{D}(Q; C_{\#}^{\infty}(Y))$. Cela signifie que $\partial_{x_i} \widetilde{\mathbf{m}}_0 + \partial_{y_i} \widetilde{\mathbf{m}}_1$ est en fait perpendiculaire à $\widetilde{\mathbf{m}}_0$. La première partie de la démonstration permet d'affirmer la même chose pour $\partial_{y_i} \widetilde{\mathbf{m}}_1$. \square

Pour le passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ dans (5.9), on démontre le résultat suivant pour les termes de surface.

Lemme 5.4. *Nous avons le résultat de convergence suivant*

$$\widetilde{\mathbf{m}}^{\varepsilon} \times K_s^{\varepsilon}(\widetilde{\mathbf{m}}^{\varepsilon} \cdot \widetilde{\mathbf{n}}^{\varepsilon}) \widetilde{\mathbf{n}}^{\varepsilon} \xrightarrow{2\sigma} \widetilde{\mathbf{m}}^0 \times K_s(y)(\widetilde{\mathbf{m}}^0 \cdot \widetilde{\mathbf{n}}(y)) \widetilde{\mathbf{n}}(y).$$

(On rappelle que $\widetilde{\mathbf{n}}|_{\Gamma} = \mathbf{n}$).

Démonstration. Puisque $|\widetilde{\mathbf{m}}^{\varepsilon}| = 1$ p.p. dans Q , la suite $\widetilde{\mathbf{m}}^{\varepsilon}$ est uniformément bornée dans $\mathbb{L}^{\infty}(Q)$. De plus, elle vérifie l'estimation (5.24). Il en résulte que toute composante de $\widetilde{\mathbf{m}}^{\varepsilon} \times (\widetilde{\mathbf{m}}^{\varepsilon} \cdot \widetilde{\mathbf{n}}^{\varepsilon}) \widetilde{\mathbf{n}}^{\varepsilon}$ (resp. $\varepsilon \widetilde{\mathbf{m}}^{\varepsilon} \times (\widetilde{\mathbf{m}}^{\varepsilon} \cdot \widetilde{\mathbf{n}}^{\varepsilon}) \widetilde{\mathbf{n}}^{\varepsilon}$) est uniformément bornée dans $\mathbb{L}^2(Q)$ (resp. dans $L^{\infty}(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega))$). Le (ii) de la proposition 5.2 et les hypothèses sur K_s , permettent de déduire qu'il existe $\zeta_0(x, y, t)$ appartenant à $L^{\infty}(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega; \mathbb{L}^2(\Gamma)))$ tel que

$$\widetilde{\mathbf{m}}^{\varepsilon} \times K_s^{\varepsilon}(\widetilde{\mathbf{m}}^{\varepsilon} \cdot \widetilde{\mathbf{n}}^{\varepsilon}) \widetilde{\mathbf{n}}^{\varepsilon} \xrightarrow{2\sigma} \zeta_0, \quad (5.28)$$

c'est-à-dire

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^T \int_{\Gamma^{\varepsilon}} \widetilde{\mathbf{m}}^{\varepsilon} \times K_s^{\varepsilon}(\widetilde{\mathbf{m}}^{\varepsilon} \cdot \widetilde{\mathbf{n}}^{\varepsilon}) \widetilde{\mathbf{n}}^{\varepsilon} \cdot \phi \, d\sigma_{\varepsilon} dt = \int_Q \left(\int_{\Gamma} \zeta_0(x, y, t) \, d\sigma(y) \right) \cdot \phi \, dx dt \quad (5.29)$$

pour toute fonction test admissible vectorielle.

Il reste à exprimer ζ_0 en fonction de $\widetilde{\mathbf{m}}^0$. On regarde le comportement limite des termes de la forme

$$\zeta_q^{\varepsilon} = K_s^{\varepsilon} \left(\sum_{i=1}^3 \widetilde{\mathbf{m}}_i^{\varepsilon} \widetilde{\mathbf{n}}_i^{\varepsilon} \right) \widetilde{\mathbf{m}}_p^{\varepsilon} \widetilde{\mathbf{n}}_q^{\varepsilon}, \quad 1 \leq p, q \leq 3. \quad (5.30)$$

Soit $\zeta_{0,q}$ la limite à double échelle en surface de ζ_q^{ε} . Soit $\Psi \in \mathcal{C}^{\infty}(\overline{Q}; C_{\#}^{\infty}(Y))$ une fonction test admissible. Pour $1 \leq p, q \leq 3$, on définit

$$\mathbf{u}_q^{\varepsilon} = K_s^{\varepsilon} \left(\sum_{i=1}^3 \widetilde{\mathbf{m}}_i^{\varepsilon} \widetilde{\mathbf{n}}_i^{\varepsilon} \right) \widetilde{\mathbf{m}}_p^{\varepsilon} \mathbf{e}_q.$$

D'une part, une intégration par parties permet d'obtenir

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_0^T \int_{\Omega^\varepsilon} \Psi^\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{u}_q^\varepsilon dx dt &= -\varepsilon \int_0^T \int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{u}_q^\varepsilon \cdot \nabla_x \Psi^\varepsilon dx dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{u}_q^\varepsilon \cdot \nabla_y \Psi^\varepsilon dx dt + \varepsilon \int_{\Gamma^\varepsilon \times (0,T)} (\mathbf{u}_q^\varepsilon \cdot \tilde{\mathbf{n}}^\varepsilon) \Psi d\sigma^\varepsilon(x) dt. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Puisque $\mathbf{u}_q^\varepsilon \cdot \tilde{\mathbf{n}}^\varepsilon = \zeta_q^\varepsilon$, le passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ permet d'obtenir

$$\begin{aligned} \int_Q \int_{Y^*} \Psi(x, y, t) \operatorname{div}_y \mathbf{u}_{0,q}(x, y, t) dx dy dt &= - \int_Q \int_{Y^*} \mathbf{u}_{0,q}(x, y, t) \cdot \nabla_y \Psi(x, y, t) dx dy dt \\ &\quad + \int_Q \int_\Gamma \zeta_{0,q}(x, y, t) \cdot \Psi(x, y, t) d\sigma(y) dx dt \end{aligned} \quad (5.32)$$

où $\mathbf{u}_{0,q}$ et $\zeta_{0,q}$ sont respectivement les limites à double échelle dans Ω de \mathbf{u}_q^ε et ζ_q^ε . Une autre intégration par parties donne

$$\begin{aligned} - \int_Q \int_{Y^*} \mathbf{u}_{0,q} \cdot \nabla_y \Psi dx dy dt &= \int_Q \int_{Y^*} \Psi \operatorname{div}_y \mathbf{u}_{0,q} dx dy dt \\ &\quad - \int_Q \int_\Gamma (\mathbf{u}_{0,q} \cdot \mathbf{n}) \Psi d\sigma(y) dx dt. \end{aligned}$$

De (5.32) on déduit que

$$\zeta_{0,q} = \mathbf{u}_{0,q} \cdot \mathbf{n} \text{ p.p. dans } Q \times \Gamma. \quad (5.33)$$

D'autre part, puisque $\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon \rightarrow \widetilde{\mathbf{m}}^0$ fortement dans $\mathbb{L}^2(Q)$ et puisque $\tilde{\mathbf{n}}^\varepsilon$ est une fonction test admissible pour la convergence à double échelle, nous avons

$$\mathbf{u}_{0,q}(x, y, t) = K_s(x, y) \left(\sum_{i=1}^3 \widetilde{\mathbf{m}}_{0,i}(x, t) \tilde{\mathbf{n}}_i(y) \right) \widetilde{\mathbf{m}}_{0,p}(x, t) \mathbf{e}_q \text{ p.p. dans } Q \times Y. \quad (5.34)$$

Maintenant, de (5.33)-(5.34) on déduit que

$$\zeta_{0,q}(x, y, t) = K_s(x, y) \left(\sum_{i=1}^3 \widetilde{\mathbf{m}}_{0,i}(x, t) \tilde{\mathbf{n}}_i(y) \right) \widetilde{\mathbf{m}}_{0,p}(x, t) \tilde{\mathbf{n}}_q(y), \quad 1 \leq p, q \leq 3,$$

p.p. dans $Q \times \Gamma$. Alors, on conclut que

$$\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon \times K_s^\varepsilon(\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon \cdot \tilde{\mathbf{n}}^\varepsilon) \tilde{\mathbf{n}}^\varepsilon \xrightarrow{2\sigma} \zeta_0(x, y, t) = \widetilde{\mathbf{m}}^0 \times K_s(y)(\widetilde{\mathbf{m}}^0 \cdot \tilde{\mathbf{n}}(y)) \tilde{\mathbf{n}}(y)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^T \int_{\Gamma^\varepsilon} \widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon \times K_s^\varepsilon(\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon \cdot \tilde{\mathbf{n}}^\varepsilon) \tilde{\mathbf{n}}^\varepsilon \cdot \phi d\sigma_\varepsilon(x) dt \\ = \int_Q \widetilde{\mathbf{m}}^0 \times \left(\int_\Gamma K_s(x, y) (\widetilde{\mathbf{m}}^0(x, t) \cdot \tilde{\mathbf{n}}(y)) \tilde{\mathbf{n}}(y) d\sigma(y) \right) \cdot \phi dx dt \end{aligned} \quad (5.35)$$

pour toute fonction test admissible. Ceci termine la démonstration du lemme. \square

Remarque 5.3. *Notons que*

$$\int_{\Gamma} K_s(x, y) (\widetilde{\mathbf{m}}^0 \cdot \widetilde{\mathbf{n}}(y)) \widetilde{\mathbf{n}}(y) d\sigma(y) = \sum_{i=1}^3 (\widetilde{\mathbf{m}}^0 \cdot \mathbf{e}_i) (K_s^{\#})_i$$

où

$$(K_s^{\#})_i = \frac{1}{|Y^*|} \int_{\Gamma} (\widetilde{\mathbf{n}}(y) \cdot \mathbf{e}_i) K_s(x, y) \widetilde{\mathbf{n}}(y) d\sigma(y), \quad 1 \leq i \leq 3. \quad (5.36)$$

Nous avons maintenant suffisamment d'outils pour passer à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ dans (5.9) qu'on rappelle ci-après.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 + \alpha^2} \left(\int_0^T \int_{\Omega^\varepsilon} \partial_t \widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon \cdot \phi \, dx dt - \alpha \int_0^T \int_{\Omega^\varepsilon} \widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon \times \partial_t \widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon \cdot \phi \, dx dt \right) \\ &= \int_0^T \int_{\Omega^\varepsilon} \widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon \times A_{ij}^\varepsilon \partial_{x_i} \widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon \cdot \partial_{x_j} \phi \, dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma^\varepsilon} \varepsilon \widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon \times K_s^\varepsilon (\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon \cdot \widetilde{\mathbf{n}}^\varepsilon) \widetilde{\mathbf{n}}^\varepsilon \cdot \phi \, d\sigma^\varepsilon(x) dt. \end{aligned} \quad (5.37)$$

On commence par choisir $\phi = \varepsilon \chi_{\Omega^\varepsilon} \psi^\varepsilon$ où $\psi \in L^2(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega) \otimes C_\#^\infty(Y))$. En passant à la limite lorsque ε tend vers 0 dans (5.37), on obtient

$$\int_Q \int_{Y^*} \widetilde{\mathbf{m}}_0(x, t) \times A_{ij}(x, y) (\partial_{x_i} \widetilde{\mathbf{m}}_0(x, t) + \partial_{y_i} \widetilde{\mathbf{m}}_1(x, y, t)) \cdot \partial_{y_j} \psi(x, y, t) \, dx dy dt = 0.$$

D'autre part, et au vu du lemme 5.3, nous avons aussi

$$\sum_{i,j} \int_{\Omega \times J} \widetilde{\mathbf{m}}_0 \cdot \left(\int_{Y^*} A_{ij} (\partial_{x_i} \widetilde{\mathbf{m}}_0 + \partial_{y_i} \widetilde{\mathbf{m}}_1) \partial_{y_j} \psi \, dy \right) dx dt = 0.$$

Il en résulte que $\widetilde{\mathbf{m}}_1$ est caractérisée par

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_y (A(\nabla_y \widetilde{\mathbf{m}}_1 - \nabla_x \widetilde{\mathbf{m}}_0)) &= 0 \quad \text{dans } Q \times Y^*, \\ \nabla_y \widetilde{\mathbf{m}}_1 \cdot \mathbf{n} &= -A \nabla_x \widetilde{\mathbf{m}}_0 \cdot \mathbf{n} \quad \text{dans } Q \times \Gamma. \end{aligned}$$

On en conclut que

$$\widetilde{\mathbf{m}}_1(x, y, t) = \sum_{j=1}^3 v_j(x, y) \partial_{x_j} \widetilde{\mathbf{m}}_0(x, t) + \alpha(x, t) \quad (5.38)$$

où les fonctions v_j sont définies par (5.19) et α est une fonction qui ne dépend pas de y .

Maintenant, soit $\phi \in L^2(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega))$. En utilisant $\chi_{\Omega^\varepsilon} \phi$ dans (5.37), on fait tendre $\varepsilon \rightarrow 0$ (en faisant usage de (5.35) pour le terme de bord) pour obtenir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 + \alpha^2} \left(\int_Q \int_{Y^*} \partial_t \widetilde{\mathbf{m}}_0 \cdot \phi \, dy dx dt - \alpha \int_Q \int_{Y^*} \widetilde{\mathbf{m}}_0 \times \partial_t \widetilde{\mathbf{m}}_0 \cdot \phi \, dy dx dt \right) \\ &= \int_Q \int_{Y^*} \widetilde{\mathbf{m}}_0(x, t) \times A_{ij}(x, y) (\partial_{x_i} \widetilde{\mathbf{m}}_0(x, t) + \partial_{y_i} \widetilde{\mathbf{m}}_1(x, y, t)) \cdot \partial_{x_j} \phi(x, t) \, dy dx dt \\ &+ \int_Q \widetilde{\mathbf{m}}^0 \times \left(\int_\Gamma K_s(x, y) (\widetilde{\mathbf{m}}^0(x, t) \cdot \widetilde{\mathbf{n}}(y)) \widetilde{\mathbf{n}}(y) d\sigma(y) \right) \cdot \phi \, dx dt. \end{aligned}$$

En gardant à l'esprit que $\widetilde{\mathbf{n}}|_\Gamma = \mathbf{n}$, on retrouve la formulation faible du problème (5.22).

Remarque 5.4. Supposons que K_s est une fonction scalaire, alors le dernier terme dans le problème limite prend la forme $(1 + \alpha^2) \widetilde{\mathbf{m}}^0 \times K_s^\# \widetilde{\mathbf{m}}^0$ où $K_s^\#$ est définie par

$$K_s^\# = \frac{1}{|Y^*|} \int_\Gamma K_s(x, y) \widetilde{\mathbf{n}}(y) \otimes \widetilde{\mathbf{n}}(y) \, d\sigma(y).$$

5.3.3 Anisotropie de surface d'ordre négligeable

Si $\gamma > 1$, alors toutes les estimations et les résultats de convergence énoncés dans la section précédente restent vrais. Ainsi le terme de bord dans (5.37), à savoir

$$\varepsilon^{\gamma-1} \int_0^T \int_{\Gamma^\varepsilon} \varepsilon \widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon \times K_s^\varepsilon(\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon \cdot \widetilde{\mathbf{n}}^\varepsilon) \widetilde{\mathbf{n}}^\varepsilon \cdot \phi \, d\sigma^\varepsilon(x) dt,$$

tend vers 0 lorsque ε tend vers 0.

A la limite, nous n'avons aucune contribution de la condition aux bords de Rado–Weertman. Le problème effectif est alors le même que celui correspondant au modèle microscopique avec des conditions aux limites de Neumann homogènes. on retrouve le problème limite obtenu dans [102].

5.3.4 Anisotropie de surface à l'ordre principal

Le cas $\gamma \leq 0$ correspond aux importants effets de l'anisotropie de surface. On regarde ici le cas $\gamma = 0$ et on suppose maintenant que la donnée initiale vérifie (5.17). On suppose aussi qu'il existe $\Gamma_+ \subset \Gamma$, $|\Gamma_+| \neq 0$ (resp. ou $\Gamma_- \subset \Gamma$, $|\Gamma_-| \neq 0$) telle que K_s est non négative dans Γ_+ (resp. $-K_s$ est non négative dans Γ_-). Une telle condition est par exemple satisfaite si

$$K_s(x, y) = K_s(y) \text{ p.p. } x \in \Omega, y \in Y$$

et $\Gamma_{\pm} = \{y \in \Gamma ; \pm K_s(y) \text{ définie positive}\}$.

Donnons quelques précisions concernant l'hypothèse (5.17) dans ce cas. On peut penser qu'une hypothèse de la forme

$$\int_{\Gamma_+^\varepsilon} K_s^\varepsilon |\mathbf{m}_0^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon|^2 d\sigma^\varepsilon - \int_{\Gamma_-^\varepsilon} K_s^\varepsilon |\mathbf{m}_0^\varepsilon \times \mathbf{n}^\varepsilon|^2 d\sigma^\varepsilon \leq C \quad (5.39)$$

au lieu de (5.17) peut être suffisante pour obtenir des estimations uniformes (par rapport à ε) dans (5.24). Mais de (5.39) on déduit que $\chi_{\Gamma_+^\varepsilon} K_s^\varepsilon (\mathbf{m}_0^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon) \xrightarrow{2\sigma} 0$ et $\chi_{\Gamma_-^\varepsilon} K_s^\varepsilon (\mathbf{m}_0^\varepsilon \times \mathbf{n}^\varepsilon) \xrightarrow{2\sigma} 0$. D'autre part, puisque toutes les fonctions introduites, à part K_s^ε , sont admissibles pour la convergence à double échelle, on sait que $\chi_{\Gamma_+^\varepsilon} K_s^\varepsilon (\mathbf{m}_0^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon) \xrightarrow{2\sigma} \chi_{\Gamma_+} K_s (\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{n})$ et $\chi_{\Gamma_-^\varepsilon} K_s^\varepsilon (\mathbf{m}_0^\varepsilon \times \mathbf{n}^\varepsilon) \xrightarrow{2\sigma} \chi_{\Gamma_-} K_s (\mathbf{m}_0 \times \mathbf{n})$. Alors (5.39) est effectivement équivalente à (5.17), c'est-à-dire

$$\int_{\Gamma_+} K_s(x, y) |\mathbf{m}_0(x, y) \cdot \mathbf{n}(y)|^2 d\sigma(y) = \int_{\Gamma_-} K_s(x, y) |\mathbf{m}_0(x, y) \times \mathbf{n}(y)|^2 d\sigma(y) = 0.$$

Au vu de (5.17), l'estimation (5.24) nous permet d'affirmer que les résultats (5.25) et les lemmes 5.3-5.4 restent encore vrais. L'analogue de (5.37) est

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 + \alpha^2} \left(\int_0^T \int_{\Omega^\varepsilon} \partial_t \widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon \cdot \phi \, dx dt - \alpha \int_0^T \int_{\Omega^\varepsilon} \widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon \times \partial_t \widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon \cdot \phi \, dx dt \right) \\ &= \int_0^T \int_{\Omega^\varepsilon} \widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon \times A_{ij}^\varepsilon \partial_{x_i} \widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon \cdot \partial_{x_j} \phi \, dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma^\varepsilon} \varepsilon^\gamma \widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon \times K_s^\varepsilon (\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon \cdot \widetilde{\mathbf{n}}^\varepsilon) \widetilde{\mathbf{n}}^\varepsilon \cdot \phi \, d\sigma^\varepsilon(x) dt. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Maintenant, nous allons démontrer le point (iii) dans le théorème 5.2. Il découle du lemme suivant.

Lemme 5.5. *Pour tout $\phi \in L^\infty(0, T; \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \otimes \mathcal{C}_\#(Y))$ nous avons*

$$\int_Q \int_\Gamma K_s \left(\chi_{\Gamma_+} (\widetilde{\mathbf{m}}^0 \cdot \widetilde{\mathbf{n}}) + \chi_{\Gamma_-} (\widetilde{\mathbf{m}}^0 \times \widetilde{\mathbf{n}})_i \right) \phi \, d\sigma(y) dx dt = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq 3.$$

Démonstration. D'une part, on exploite l'estimation sur les termes de l'énergie de surface dans (5.24). Il s'ensuit que $\chi_{\Gamma_+^\varepsilon} K_s^\varepsilon (\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon) \xrightarrow{2\sigma} 0$ et $\chi_{\Gamma_-^\varepsilon} K_s^\varepsilon (\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon \times \mathbf{n}^\varepsilon) \xrightarrow{2\sigma} 0$. D'autre part, on utilise (iii) de la proposition 5.2. En faisant usage des propriétés du prolongement $\widetilde{\mathbf{n}}^\varepsilon$ de \mathbf{n}^ε , de la bornitude \mathbb{L}^∞ et de la convergence forte de $\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon$, on conclut que $\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon \cdot \widetilde{\mathbf{n}}^\varepsilon \xrightarrow{2\sigma} \widetilde{\mathbf{m}}^0 \cdot \widetilde{\mathbf{n}}$ et $\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon \times \widetilde{\mathbf{n}}^\varepsilon \xrightarrow{2\sigma} \widetilde{\mathbf{m}}^0 \times \widetilde{\mathbf{n}}$. Ainsi, $\chi_{\Gamma_+^\varepsilon} K_s^\varepsilon (\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon \cdot \widetilde{\mathbf{n}}^\varepsilon) \xrightarrow{2\sigma} \chi_{\Gamma_+} K_s (\widetilde{\mathbf{m}}^0 \cdot \widetilde{\mathbf{n}})$ et $\chi_{\Gamma_-^\varepsilon} K_s^\varepsilon (\widetilde{\mathbf{m}}^\varepsilon \times \widetilde{\mathbf{n}}^\varepsilon) \xrightarrow{2\sigma} \chi_{\Gamma_-} K_s (\widetilde{\mathbf{m}}^0 \times \widetilde{\mathbf{n}})$. On rappelle que $\widetilde{\mathbf{n}}_{|\Gamma^\varepsilon}^\varepsilon = \mathbf{n}^\varepsilon$. Le résultat du lemme s'obtient alors par identification des limites et la définition variationnelle de la limite à double échelle en surfaces. \square

Le vecteur $\widetilde{\mathbf{m}}^0 = 0$ qui est orthogonal presque partout à plusieurs vecteurs non colinéaires doit donc être nul :

$$\widetilde{\mathbf{m}}^0 = 0 \text{ presque partout dans } Q.$$

En supposant, comme énoncé dans le théorème 5.2, $|m_0^\varepsilon| = M_s^\varepsilon$, où $M_s^\varepsilon \rightarrow M_s$ dans \mathbb{R} , nous avons $|m^\varepsilon| = M_s^\varepsilon$ et on peut prouver, en reprenant le début de la preuve du Lemme 5.3, que $|\widetilde{\mathbf{m}}^0| = M_s$. On en conclut que $M_s = 0$.

Le théorème 5.2 est prouvé.

Conclusion et perspectives

L'objectif principal est toujours de comprendre la dynamique de l'aimantation dans les matériaux ferromagnétiques.

Dans un premier temps, on s'est intéressé à la contribution de l'inertie dans la dynamique des moments magnétiques. Nous avons considéré un modèle mathématique qui consiste en une équation LLG généralisée contenant un terme d'inertie exprimé en terme de dérivée seconde en temps dans le champ effectif de l'équation LLG. Un schéma aux différences finies semi-implicite est proposé et une analyse de stabilité est développée. Des expériences numériques sont effectuées pour tester le schéma et montrer l'effet d'inertie sur la dynamique d'aimantation. Les valeurs des paramètres d'inertie et d'amortissement sont en concordance avec celles prévues dans [93]. L'effet d'inertie est décrit comme un phénomène accompagnant la précession classique de l'aimantation. Pour une bonne compréhension du lien entre l'inertie et la précession, il est important de proposer des schémas numériques améliorant le critère de stabilité portant sur les pas en temps et en espace. Ceci sera d'une grande utilité pour extraire plus d'informations à la fois sur la dynamique d'aimantation et sur l'échelle en temps entraînant l'inertie par rapport à l'équation LLG habituelle. Enfin, l'existence dans la dynamique d'aimantation de deux régimes séparés par un temps caractéristique nécessitera d'autres investigations comme il a été souligné dans [93].

Nous avons aussi considéré l'amortissement non local dans la dynamique d'aimantation. Le modèle consiste en une généralisation de l'équation LLG par l'ajout d'un terme caractérisant l'amortissement non local. Si l'amortissement dû aux courants de spin longitudinaux qui prend la forme $\partial_i M \times \partial_i \partial_i M$ n'est pas négligé, l'équation LLG s'écrit (voir Nembach *et al.* [89])

$$\frac{1}{1 + \alpha^2} \left(\partial_t M - \alpha M \times \partial_t M \right) = -M \times D \Delta M + \zeta \partial_i (M \times \partial_i \partial_i M).$$

Mais l'amortissement dû aux courants de spin longitudinaux ne peut être écrit en termes de l'énergie libre, et donc il ne dérive pas d'une fonctionnelle dans l'énergie libre par rapport à l'aimantation locale. Ce nouveau terme peut considérablement changer la structure des parois des domaines magnétiques dans les couches minces ferromagnétiques. Il serait évidemment très intéressant d'étudier ce problème à la fois d'un point de vue théorique (existence globale de solutions faibles, analyse asymptotique, etc) et d'un point de vue numérique en proposant des schémas permettant d'élucider la vraie nature de l'amortissement non local. Ceci constitue un long programme d'étude. Nous avons choisi ici de commencer par nous restreindre à un cadre où au moins on peut associer une énergie à l'équation LLG modifiée : il s'agit du cas où les courants de spin longitudinaux sont négligeables. Le comportement des éventuelles solutions en temps long est caractérisé et la sensibilité du modèle au paramètre d'amortissement non local est discutée. L'existence de solutions faibles n'est cependant pas démontrée. Notre volonté à court terme est donc d'obtenir un tel résultat. Les résultats obtenus pourront alors être appliqués sans difficulté au cas du champ effectif avec anisotropie de volume et champ démagnétisant. Il faut cependant souligner que le fait de gagner une énergie naturelle associée au problème en négligeant les courants de spin longitudinaux a un prix. Il faut gérer dans l'approche par pénalisation une contrainte inédite, non linéaire et impliquant toutes les dérivées de premier ordre.

Nous nous sommes aussi intéressés aux structures ferromagnétiques composites et le but était de dériver le modèle effectif pour ces structures présentant un fort contraste des propriétés magnétiques. Le modèle homogénéisé est obtenu d'abord formellement et une justification rigoureuse en est ensuite proposée. Plus précisément, nous avons utilisé le concept de la convergence à double échelle et un opérateur de dilatation couplés à un nouvel argument de réduction de dimension par maillages emboîtés pour la manipulation des termes non linéaires. Nous avons montré que la partie moins "magnétisée" du milieu contribue à travers des termes de mémoire supplémentaires dans le champ effectif du modèle homogénéisé. Nous pouvons dire que la description précise de l'approche des mailles emboîtées et les arguments de densité couplés à la méthode d'éclatement périodique pour l'homogénéisation des termes non linéaires représente un outil important pour plusieurs applications. Des perspectives se présentent. En effet, les matériaux composites utilisés dans l'industrie ne sont ni idéalement périodiques ni totalement

désordonnés. Un grand nombre d'entre eux sont des arrangements périodiques perturbés, avec par exemples des défauts. Il serait intéressant de proposer un modèle à la fois fondé théoriquement et implémentable en pratique de ces structures, qui, tout en étant très simplifié, constituerait à notre avis un premier pas intéressant dans la recherche d'une approche mathématique rigoureuse et exploitable numériquement.

L'homogénéisation des milieux ferromagnétiques périodiquement perforés a aussi retenu notre attention. Plus précisément, nous avons homogénéisé l'équation LLG avec énergie d'anisotropie de surface. Par des techniques de convergence à double échelle et de convergence à double échelle en surface, des problèmes effectifs ont été obtenus, en tenant compte de l'ordre de grandeur de la constante d'anisotropie de surface par rapport à la taille des perforations et en restant dans un cadre physique raisonnable. Cette étude généralise le travail [102].

Notons finalement qu'il reste à réaliser des validations numériques comparant les solutions aux échelles microscopique et macroscopique pour les deux problèmes d'homogénéisation étudiés dans cette thèse.

Bibliographie

- [1] E. Acerbi, V. Chiadò Piat, G. Dal Maso, and D. Percivale. An extension theorem from connected sets, and homogenization in general periodic domains. *Nonlinear Anal.*, 18(5) :481–496, 1992.
- [2] A. Aharoni. *Introduction to the theory of ferromagnetism*. Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [3] G. Allaire. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM J. Math. Anal.*, 23(6) :1482–1518, 1992.
- [4] G. Allaire. *Shape optimization by the homogenization method*, volume 146 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [5] G. Allaire, A. Damlamian, and U. Hornung. Two-scale convergence on periodic surfaces and applications. In *Proceedings of the International Conference on Mathematical Modelling of Flow through Porous Media (May 1995)* (eds. A. Bourgeat, et al.), *World Scientific Pub., Singapore*, pages 15–25, 1996.
- [6] F. Alouges. A new finite element scheme for Landau-lifchitz equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 1(2) :187–196, 2008.
- [7] F. Alouges and G. Di Fratta. Homogenization of composite ferromagnetic materials. *Proc. A.*, 471(2182) :20150365, 19, 2015.
- [8] F. Alouges and P. Jaisson. Convergence of a finite element discretization for the Landau-Lifshitz equations in micromagnetism. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 16(2) :299–316, 2006.

- [9] F. Alouges, E. Kritsikis, J. Steiner, and J.-C. Toussaint. A convergent and precise finite element scheme for Landau-Lifschitz-Gilbert equation. *Numer. Math.*, 128(3) :407–430, 2014.
- [10] F. Alouges, E. Kritsikis, and J.-C. Toussaint. A convergent finite element approximation for landau-lifschitz-gilbert equation. *Physica B : Condensed Matter*, 407(9) :1345 – 1349, 2012. 8th International Symposium on Hysteresis Modeling and Micromagnetics (HMM 2011).
- [11] F. Alouges and A. Soyeur. On global weak solutions for Landau-Lifshitz equations : existence and nonuniqueness. *Nonlinear Anal.*, 18(11) :1071–1084, 1992.
- [12] H. Ammari, L. Halpern, and K. Hamdache. Asymptotic behaviour of thin ferromagnetic films. *Asymptot. Anal.*, 24(3-4) :277–294, 2000.
- [13] T. Arbogast, J. Douglas, Jr., and U. Hornung. Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory. *SIAM J. Math. Anal.*, 21(4) :823–836, 1990.
- [14] L. Bañas. Adaptive methods for dynamical micromagnetics. In *Numerical mathematics and advanced applications*, pages 531–538. Springer, Berlin, 2006.
- [15] L. Bañas, S. Bartels, and A. Prohl. A convergent implicit finite element discretization of the Maxwell-Landau-Lifshitz-Gilbert equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 46(3) :1399–1422, 2008.
- [16] L. Bañas, M. Page, and D. Praetorius. A convergent linear finite element scheme for the Maxwell-Landau-Lifshitz-Gilbert equations. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 44 :250–270, 2015.
- [17] S. Bartels, J. Ko, and A. Prohl. Numerical analysis of an explicit approximation scheme for the Landau-Lifshitz-Gilbert equation. *Math. Comp.*, 77(262) :773–788, 2008.
- [18] S. Bartels and A. Prohl. Convergence of an implicit finite element method for the Landau-Lifshitz-Gilbert equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44(4) :1405–1419, 2006.
- [19] A. Bensoussan, J.-L. Lions, and G. Papanicolaou. *Asymptotic analysis for periodic structures*, volume 5 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.

- [20] L. Berlyand. Homogenization of the Ginzburg–Landau functional with a surface energy term. *Asympt. Anal.*, 21 :37–59, 1999.
- [21] L. Berlyand and D. Cioranescu. Homogenization of a Ginzburg–Landau model for a nematic liquid crystal with inclusions. *J. Math. Pures Appl.*, 84 :97–136, 2005.
- [22] G. Bertotti, C. Serpico, and I. D. Mayergoyz. Nonlinear magnetization dynamics under circularly polarized field. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :724–727, Jan 2001.
- [23] F. Bloch. Zur theorie des ferromagnetismus. *Z. Physik*, 61(3-4) :260, 1930.
- [24] A. Bourgeat, S. Luckhaus, and A. Mikelić. Convergence of the homogenization process for a double-porosity model of immiscible two-phase flow. *SIAM J. Math. Anal.*, 27(6) :1520–1543, 1996.
- [25] W. F. Brown. *Micromagnetics*. Interscience Publishers, New York, 1963.
- [26] D. Bruggeman. Berechnung verschiedener physikalischer konstanten von heterogenen substanzen. i. dielektrizitätskonstanten und leitfähigkeiten der mischkörper aus isotropen substanzen. *Ann. Phys.*, 24 :636–664, 1935.
- [27] G. Carbou, M. A. Efendiev, and P. Fabrie. Relaxed model for the hysteresis in micromagnetism. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics*, 139(4) :759–773, 2009.
- [28] G. Carbou and P. Fabrie. Time average in micromagnetism. *J. Differential Equations*, 147(2) :383–409, 1998.
- [29] M. M. Cerimele, F. Pistella, and V. Valente. Numerical study of an evolutive model for magnetostrictive materials. *Math. Comput. Simulation*, 77(1) :22–33, 2008.
- [30] C. Choquet. Derivation of the double porosity model of a compressible miscible displacement in naturally fractured reservoirs. *Appl. Anal.*, 83(5) :477–499, 2004.
- [31] C. Choquet, M. Moumni, and M. Tilioua. Homogenization of the Landau-Lifshitz-Gilbert equation with surface anisotropy energy. *Preprint*, 2017.
- [32] C. Choquet, M. Moumni, and M. Tilioua. Homogenization of the Landau-Lifshitz-Gilbert equation in a contrasted composite medium. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, A paraître, 2017.

- [33] I. Cimrák. Error estimates for a semi-implicit numerical scheme solving the Landau-Lifshitz equation with an exchange field. *IMA J. Numer. Anal.*, 25(3) :611–634, 2005.
- [34] I. Cimrák. Error analysis of a numerical scheme for 3D Maxwell-Landau-Lifshitz system. *Math. Methods Appl. Sci.*, 30(14) :1667–1683, 2007.
- [35] I. Cimrák. A survey on the numerics and computations for the Landau-Lifshitz equation of micromagnetism. *Arch. Comput. Methods Eng.*, 15(3) :277–309, 2008.
- [36] D. Cioranescu, A. Damlamian, and G. Griso. Periodic unfolding and homogenization. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 335(1) :99–104, 2002.
- [37] D. Cioranescu and P. Donato. Homogénéisation du problème de Neumann non-homogène dans des ouverts perforés. *Asympt. Anal.*, 1 :115–138, 1988.
- [38] D. Cioranescu and P. Donato. On a Robin problem in perforated domains. in : *D. Cioranescu, A. Damlamian, P. Donato (Eds.), Homogenization and Appl. to Material Sci., in : Gakuto Internat. Ser., Math. Sci. Appl.*, 9 :123–135, 1997.
- [39] D. Cioranescu and P. Donato. *An introduction to homogenization*, volume 17 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1999.
- [40] M.-C. Ciornei, J. Rubi, and J.-E. Wegrowe. Magnetization dynamics in the inertial regime : Nutation predicted at short time scales. *Phys Rev B*, 83(2) :020410, 2011.
- [41] M. d’Aquino, C. Serpico, and G. Miano. Geometrical integration of Landau-Lifshitz-Gilbert equation based on the mid-point rule. *J. Comput. Phys.*, 209(2) :730–753, 2005.
- [42] W. Deng and B. Yan. On Landau-Lifshitz equations of no-exchange energy models in ferromagnetics. *Evol. Equ. Control Theory*, 2(4) :599–620, 2013.
- [43] W. Deng and B. Yan. Quasi-stationary limit and a degenerate Landau-Lifshitz equation of ferromagnetism. *Appl. Math. Res. Express. AMRX*, (2) :277–296, 2013.
- [44] E. du Trémolet de Lacheisserie. Magnétisme : Matériaux et Applications, Tome II, Collection Grenoble Sciences. *EDP Sciences*, 2000.
- [45] S. Dwivedi and S. Dubey. Field-driven motion of ferrofluids in ferromagnetic nanowire under the influence of inertial effects. *Procedia Engineering*, 127 :3 – 9, 2015.

- [46] W. E and X.-P. Wang. Numerical methods for the Landau-Lifshitz equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38(5) :1647–1665, 2000.
- [47] L. C. Evans. Partial regularity for stationary harmonic maps into spheres. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 116(2) :101–113, 1991.
- [48] J. Fidler. Physics of magnetic materials. *Lectures notes*, 1996.
- [49] J. Fidler and T. Schrefl. Micromagnetic modelling - the current state of the art. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 33(15) :R135, 2000.
- [50] J. Foros, A. Brataas, Y. Tserkovnyak, and G. E. W. Bauer. Current-induced noise and damping in nonuniform ferromagnets. *Phys. Rev. B*, 78 :140402, Oct 2008.
- [51] C. J. García-Cervera. Numerical micromagnetics : a review. *Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. SeMA*, (39) :103–135, 2007.
- [52] C. J. Garcia-Cervera and W. E. Improved Gauss-Seidel projection method for micromagnetics simulations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 39(3) :1766–1770, May 2003.
- [53] T. L. Gilbert. A lagrangian formulation of gyromagnetic equation of the magnetization field. *Phys. Rev.*, 100 :1243, 1955.
- [54] T. L. Gilbert. A phenomenological theory of damping in ferromagnetic materials. *IEEE Transactions on Magnetics*, 40(6) :3443–3449, 2004.
- [55] B. Guo and S. Ding. *Landau-Lifshitz equations*, volume 1 of *Frontiers of Research with the Chinese Academy of Sciences*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2008.
- [56] M. Hadda and M. Tilioua. On magnetization dynamics with inertial effects. *J. Engineering Mathematics*, 88 :197–206, 2014.
- [57] K. Hamdache. Homogenization of layered ferromagnetic media. *Preprint CMAP, Ecole Polytechnique*, 495, 2002.
- [58] K. Hamdache and D. Hamroun. Ferromagnets with biquadratic exchange coupling energy. Global existence of weak solutions. *Math. Methods Appl. Sci.*, 28(12) :1403–1421, 2005.

- [59] K. Hamdache and M. Tilioua. On the zero thickness limit of thin ferromagnetic films with surface anisotropy energy. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 11(8) :1469–1490, 2001.
- [60] K. Hamdache and M. Tilioua. Interlayer exchange coupling for ferromagnets through spacers. *SIAM J. Appl. Math.*, 64(3) :1077–1097, 2004.
- [61] E. M. Hankiewicz, G. Vignale, and Y. Tserkovnyak. Inhomogeneous Gilbert damping from impurities and electron-electron interactions. *Phys. Rev. B*, 78 :020404, 2008.
- [62] F. Hoffmann. *Ondes de spin stationnaires dans les couches couplées*. PhD thesis, Paris-Sud University, Paris, 1971.
- [63] F. Hoffmann, A. Stankoff, and H. Pascard. Evidence for an exchange coupling at the interface between two ferromagnetic films. *J. Appl. Phys.*, 41 :1022–1023, 1970.
- [64] A. Hubert and R. Schäfer. *Magnetic domains : The analysis of magnetic microstructures*. Springer, New York, 1998.
- [65] J. S. Jiang, H. G. Kaper, and G. K. Leaf. Hysteresis in layered spring magnets. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 1(2) :219–232, 2001.
- [66] V. V. Jikov, S. M. Kozlov, and O. A. Oleinik. *Homogenization of differential operators and integral functionals*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [67] J. L. Joly, G. Métivier, and J. Rauch. Global solutions to Maxwell equations in a ferromagnetic medium. *Ann. Henri Poincaré*, 1(2) :307–340, 2000.
- [68] T. Kikuchi and G. Tatara. Spin Dynamics with Inertia in Metallic Ferromagnets. *Phys. Rev. B*, 92(18) :184410, 2015.
- [69] E. Kim and K. Lipnikov. The mimetic finite difference method for the Landau-Lifshitz equation. *J. Comput. Phys.*, 328 :109–130, 2017.
- [70] O. Kohmoto. Recent development of thin film materials for magnetic heads (review). *IEEE Trans. Magn.*, 27 :3640–3647, 1991.
- [71] P. Krishnaprasad and X. Tan. Cayley transforms in micromagnetics. *Physica B : Condensed Matter*, 306(1–4) :195–199, 2001. Proceedings of the Third International Symposium on Hysteresis and Micromagnetics Modeling.

- [72] E. Kritsikis, A. Vaysset, L. D. Buda-Prejbeanu, F. Alouges, and J.-C. Toussaint. Beyond first-order finite element schemes in micromagnetics. *J. Comput. Phys.*, 256 :357–366, 2014.
- [73] M. Kružík and A. Prohl. Recent developments in the modeling, analysis, and numerics of ferromagnetism. *SIAM Rev.*, 48(3) :439–483, 2006.
- [74] S. Labbé. Fast computation for large magnetostatic systems adapted for micromagnetism. *SIAM J. Sci. Comput.*, 26(6) :2160–2175, 2005.
- [75] L. Landau and E. Lifshitz. On the theory of magnetic permeability in ferromagnetic bodies. *Phys. Zeitsch.*, 8 :153–169, 1935.
- [76] M. Langlais and D. Phillips. Stabilization of solutions of nonlinear and degenerate evolution equations. *Nonlinear Anal.*, 9(4) :321–333, 1985.
- [77] K.-N. Le and T. Tran. A finite element approximation for the quasi-static Maxwell-Landau-Lifshitz-Gilbert equations. *ANZIAM J. Electron. Suppl.*, 54(C) :C681–C698, 2012.
- [78] K.-N. Le and T. Tran. A convergent finite element approximation for the quasi-static Maxwell-Landau-Lifshitz-Gilbert equations. *Comput. Math. Appl.*, 66(8) :1389–1402, 2013.
- [79] D. Lewis and N. Nigam. Geometric integration on spheres and some interesting applications. *J. Comput. Appl. Math.*, 151(1) :141–170, 2003.
- [80] F. Lin and C. Wang. *The analysis of harmonic maps and their heat flows*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2008.
- [81] A. Marciniak-Czochra and M. Ptashnyk. Derivation of a macroscopic receptor-based model using homogenization techniques. *SIAM J. Math. Anal.*, 40(1) :215–237, 2008.
- [82] J. C. Maxwell. *Electricity and Magnetism*. Calderon Press, 1873.
- [83] J. Maxwell Garnett. Colors in metal glasses and in metallic films. *Phil. Trans. R. Soc. London*, 203 :385–420, 1904.
- [84] J. E. Miltat and M. J. Donahue. *Numerical Micromagnetics : Finite Difference Methods*. John Wiley & Sons, Ltd, 2007.

- [85] P. B. Monk and O. Vacus. Accurate discretization of a non-linear micromagnetic problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190(40-41) :5243–5269, 2001.
- [86] A. H. Morrish. The physical principles of magnetism. *pp. 696. ISBN 0-7803-6029-X. Wiley-VCH*, 1, 2001.
- [87] M. Moumni and M. Tilioua. On a nonlocal damping model in ferromagnetism. *J. Appl. Math.*, Article ID 317947, 2015.
- [88] M. Moumni and M. Tilioua. A finite-difference scheme for a model of magnetization dynamics with inertial effects. *J. Engrg. Math.*, 100 :95–106, 2016.
- [89] H. T. Nembach, J. M. Shaw, C. T. Boone, and T. J. Silva. Mode- and size-dependent Landau-Lifshitz damping in magnetic nanostructures : Evidence for nonlocal damping. *Phys. Rev. Lett.*, 110 :117201, 2013.
- [90] M. Neuss-Radu. *Homogenization techniques*. PhD thesis, University of Heidelberg, Heidelberg, Germany, 1992.
- [91] M. Neuss-Radu. Some extensions of two-scale convergence. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 322(9) :899–904, 1996.
- [92] G. Nguetseng. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. *SIAM J. Math. Anal.*, 20(3) :608–623, 1989.
- [93] E. Olive, Y. Lansac, M. Meyer, M. Hayoun, and J.-E. Wegrowe. Deviation from the Landau-Lifshitz-Gilbert equation in the inertial regime of the magnetization. *J. Appl. Phys.*, 117(21) :213904, 2015.
- [94] A. Piatnitski and V. Rybalko. Homogenization of boundary value problems for monotone operators in perforated domains with rapidly oscillating conditions of Fourier type. *J. Math. Sci.*, 177 :109–140, 2011.
- [95] P. Podio-Guidugli. On dissipation mechanisms in micromagnetics. *Eur. Phys. J. B*, 19(3) :417–424, 2001.
- [96] P. Podio-Guidugli and V. Valente. Existence of global-in-time weak solutions to a modified Gilbert equation. In *Proceedings of the Third World Congress of Nonlinear Analysts, Part I (Catania, 2000)*, volume 47, pages 147–158, 2001.

- [97] A. Prohl. *Computational micromagnetism*. B. G. Teubner, Stuttgart, 2001.
- [98] G. Rado and J. Weertman. Spin-wave resonance in a ferromagnetic metal. *J. of Phys and chemistry of solids*, 11(3-4) :315–333, 1959.
- [99] A. Romeo, G. Finocchio, M. Carpentieri, L. Torres, G. Consolo, and B. Azzerboni. A numerical solution of the magnetization reversal modeling in a permalloy thin film using fifth order Runge–Kutta method with adaptive step size control. *Physica B : Condensed Matter*, 403(2) :464–468, 2008.
- [100] T. Roubíček, G. Tomassetti, and C. Zanini. The Gilbert equation with dry-friction-type damping. *J. Math. Anal. Appl.*, 355(2) :453–468, 2009.
- [101] K. Santugini-Repique. Homogenization of ferromagnetic multilayers in the presence of surface energies. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 13(2) :305–330, 2007.
- [102] K. Santugini-Repique. Homogenization of the demagnetization field operator in periodically perforated domains. *J. Math. Anal. Appl.*, 334(1) :502–516, 2007.
- [103] D. Schmool. Spin dynamics in nanometric magnetic systems. volume 18 of *Handbook of Magnetic Materials*, pages 111 – 346. Elsevier, 2009.
- [104] M. Sparks. *Ferromagnetic-relaxation theory*. McGraw-Hill, New York, 1964.
- [105] J. Starynkévitch. Local energy estimates for the Maxwell-Landau-Lifshitz system and applications. *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 2(3) :565–594, 2005.
- [106] M. D. Stiles and J. Miltat. *Spin-Transfer Torque and Dynamics*, pages 225–308. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2006.
- [107] P.-L. Sulem, C. Sulem, and C. Bardos. On the continuous limit for a system of classical spins. *Comm. Math. Phys.*, 107(3) :431–454, 1986.
- [108] M. Tilioua. *Comportement asymptotique de matériaux ferromagnétiques minces avec énergie de surface et/ou couplage d'échange inter-couches*. PhD thesis, Palaiseau, Ecole polytechnique, 2003.
- [109] M. Tilioua. On the bilinear exchange coupling in ferromagnetic multilayers. *J. Phys. A*, 42(14) :145203, 11, 2009.
- [110] M. Tilioua. Current-induced magnetization dynamics. Global existence of weak solutions. *J. Math. Anal. Appl.*, 373(2) :635–642, 2011.

- [111] Y. Tserkovnyak, E. M. Hankiewicz, and G. Vignale. Transverse spin diffusion in ferromagnets. *Phys. Rev. B*, 79 :094415, Mar 2009.
- [112] M. Valadier. Admissible functions in two-scale convergence. *Portugal. Math.*, 54(2) :147–164, 1997.
- [113] A. Visintin. On Landau-Lifshitz’ equations for ferromagnetism. *Japan J. Appl. Math.*, 2(1) :69–84, 1985.
- [114] X. Wang, P. Yan, J. Lu, and C. He. Magnetic field driven domain-wall propagation in magnetic nanowires. *Annals of Physics*, 324(8) :1815 – 1820, 2009.
- [115] X.-P. Wang, C. J. García-Cervera, and W. E. A Gauss-Seidel projection method for micromagnetics simulations. *J. Comput. Phys.*, 171(1) :357–372, 2001.
- [116] J.-E. Wegrowe and M.-C. Ciornei. Magnetization dynamics, gyromagnetic relation, and inertial effects. *American J. Phys.*, 80(7) :607–611, 2012.
- [117] O. Yalçın, F. Yıldız, B. Z. Rameev, M. T. Tuominen, M. Bal, M. Özdemir, and B. Aktaş. *FMR Studies of Co Nanowire Arrays*, pages 345–356. Springer Netherlands, Dordrecht, 2004.
- [118] H. Y. Yuan, Z. Yuan, K. Xia, and X. R. Wang. Influence of nonlocal damping on the field-driven domain wall motion. *Phys. Rev. B*, 94 :064415, 2016.
- [119] R. Zhang. *Study of reduced dimensionality effects in thin magnetic films*. PhD thesis, The Pennsylvania State University, 2001.
- [120] S. Zhang and S. S.-L. Zhang. Generalization of the Landau-Lifshitz-Gilbert equation for conducting ferromagnets. *Phys. Rev. Lett.*, 102 :086601, 2009.