



HAL
open science

Continuité des connaissances d'énumération et conséquences sur les savoirs : mieux comprendre les difficultés des élèves confrontés à des problèmes d'énumération

Olivier Rivière

► **To cite this version:**

Olivier Rivière. Continuité des connaissances d'énumération et conséquences sur les savoirs : mieux comprendre les difficultés des élèves confrontés à des problèmes d'énumération. Education. Université Clermont Auvergne [2017-2020], 2017. Français. NNT : 2017CLFAL027 . tel-01754817

HAL Id: tel-01754817

<https://theses.hal.science/tel-01754817>

Submitted on 30 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université Clermont-Auvergne

Ecole doctorale Lettres Langues et Sciences Humaines

UFR de Psychologie et Sciences de l'Éducation

**Continuité des connaissances d'énumération et
conséquences sur les savoirs :**

**mieux comprendre les difficultés des élèves confrontés à des
problèmes d'énumération**

Olivier Rivière

Thèse sous la direction de Claire Margolinas

Maître de Conférences, Habilitée à Diriger les Recherches

Laboratoire ACTÉ

Soutenue le 7 décembre 2017

Jury

Hamid Chaachoua, Université de Grenoble Alpes (Rapporteur)

Jean-Luc Dorier, Université de Genève (Rapporteur)

Marceline Laparra, Université de Lorraine (Invitée)

Claire Margolinas, Université Clermont Auvergne (Directrice)

Ludovic Morge, Université Clermont Auvergne (Examinateur)

Floriane Wozniak, Université de Montpellier (Invitée)

Remerciements

A Claire pour son aide si précieuse pendant toutes ces années. Sa compréhension de la situation du chercheur débutant et sa confiance sans faille ont grandement contribué à ce que ce projet aille à son terme.

A Floriane pour son énergie, ses encouragements constamment renouvelés et son soutien vital dans les moments difficiles.

Je n'oublie pas que c'est à l'issue de ce séminaire de didactique des mathématiques qu'a germé l'idée que je pouvais contribuer à faire avancer les questions autour de l'énumération.

A Marie-Christine et Bruno qui, de Marseille à Lyon, en passant par Foix et Clermont, m'ont donné le goût du déplacement.

A Annie, Catherine et Eva, fidèles complices et organisatrices de nos bilans annuels qui ont rythmé ces années.

A Agnès et Caroline avec qui j'ai partagé doutes et enthousiasmes lors nos avancées respectives.

Sommaire

Introduction	1
Partie A : Énumération en contextes logiques et mathématiques.....	5
Chapitre 1 - Cadre et objectifs de la recherche	7
1. A l'origine de notre recherche : le projet DéMathÉ.....	7
2. Cadre théorique et méthode de recherche	11
3. Des travaux fondateurs sur l'énumération.....	25
4. Recherche de situation fondamentale de l'énumération de Briand.....	29
5. Directions de recherche	48
Chapitre 2 - Le cas des collections d'objets non déplaçables.....	51
1. Instance de la situation fondamentale de l'énumération : la situation des sucres	52
2. Analyse des données de la situation des sucres.....	85
3. Conclusion du chapitre.....	209
Chapitre 3 - Le cas des configurations modifiables.....	213
1. Énumérer une collection dans une configuration modifiable.....	214
2. Trier une collection dans une configuration modifiable	243
3. Situations de tri, de classement et d'énumération	268
4. Production de situations favorisant le tri systématique	273
5. Conclusion du chapitre.....	330
Chapitre 4 - Développements théoriques et intégration de la matérialité.....	333
1. Vers une nouvelle définition de l'énumération	333
2. Énumération et matérialité	388
3. Conclusion du chapitre.....	439

Partie B : Énumération en contextes non mathématiques	441
Chapitre 5 - Place de l'énumération dans les manuels scolaires de français	443
1. Mise en évidence du caractère massif de l'énumération	444
2. Étude détaillée d'une situation	464
3. Conclusion du chapitre	478
Chapitre 6 - Etude de situations d'énumération en français	481
1. Choix des situations expérimentales	482
2. Analyse logique des situations	484
3. Conditions matérielles des situations	507
4. Analyse a priori des situations.....	509
5. Dispositif expérimental	522
6. Analyse a posteriori des situations	523
7. Conclusion du chapitre	579
Chapitre 7 - Énumération : Retour sur la modélisation	581
1. Des hypothèses autour de l'énumération validées	581
2. Un nouveau regard sur la question de la matérialité	582
3. Nouvelle modélisation du traitement	583
4. Variations dans le pilotage de l'énumération	589
Conclusion	593
1. Des développements théoriques	593
2. Aspects méthodologiques.....	599
3. Transformations du champ de l'énumération.....	601
Bibliographie	607

Introduction

Nous ne pouvons pas commencer cette thèse sans revenir quelques années en arrière sur ce que nous considérons comme l'origine de notre recherche. C'est le travail du groupe DéMathÉ¹ qui est à l'origine de cette recherche. Initié en 2003, ce travail avait pour objectif de produire des documents à destination des enseignants du premier degré, documents centrés sur des unités conceptuelles. L'ambition de ce travail était de rendre accessibles les connaissances qui permettent de fonder des choix pour l'enseignement du thème mathématique concerné, et ceci au niveau de l'ensemble des cycles de l'école concernés.

Le thème mathématique choisi a été l'énumération. Pour cela, le groupe s'est largement appuyé sur le travail de Briand, et notamment sa thèse (1993), « L'énumération dans le mesurage des collections : un dysfonctionnement dans la transposition didactique ». Ce travail nous apparaissait particulièrement robuste, permettant ainsi de construire les instruments épistémologiques solides pour nos documents. De plus, nous voulions choisir un thème pour lequel le travail de recherche conduit soit suffisamment abouti pour que nous puissions nous appuyer sur des éléments stables. L'absence de reprises dans le domaine de la recherche semblait confirmer ce caractère abouti.

Briand a poursuivi son étude de l'énumération. Ainsi, l'article « Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques : étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine pré-numérique » (Briand, 1999) constitue une référence pour notre travail. En effet, c'est dans cet article qu'est présentée la situation des allumettes, situation qui est un appui fondamental et permanent dans notre travail.

¹ Le projet Développement des Mathématiques à l'École (DéMathÉ) a fonctionné de 2003 à 2010, sous la direction de Claire Margolinas, avec Olivier Rivière et Floriane Wozniak et la collaboration technique de Bruno Mastellone ; de 2003 à 2007 avec Bruno Canivenc et Marie-Christine de Redon ; de 2005 à 2007 avec Catherine Aurand ; de 2003 à 2004 avec Colette Andreucci et Alain Mercier. Ce groupe a été créé à l'UMR ADEF (INRP – Université de Provence – IUFM d'Aix-Marseille) puis soutenu par le projet EducMath (INRP) et l'IUFM d'Auvergne. Certaines situations étudiées dans cet article ont été conçues et expérimentées dans le cadre de ce projet.

La diffusion de ce travail auprès de la profession enseignante a été limitée, malgré la publication dans une revue d'interface de « Enseigner l'énumération en moyenne section » (Briand, Lacave-Luciani, Harvouët, Bedere, & Goua de Baix, 2000) qui reprend la situation des allumettes, puis dans un document institutionnel de « Premières compétences pour accéder au dénombrement » (Emprin & Emprin, s. d., p. 23-34) qui réfère au travail de Briand en proposant une nouvelle situation. Cette description fait apparaître un besoin de transposition qui demeure.

De plus, ce travail de transposition sur l'énumération est apparu plus ambitieux que ce que nous pouvions le penser quand DéMathÉ a choisi ce thème. Le travail conduit par DéMathÉ a fait apparaître la nécessité de poursuivre la recherche sur l'énumération.

Cette recherche s'est développée en appui sur des études de données. Nous présentons ces études, les analyses dont le niveau de détail varie qui sont conduites et les conséquences que nous en tirons quant à l'élaboration de la situation fondamentale de l'énumération.

Notre travail prend appui sur des données d'origines diverses. Certaines sont issues du travail de Briand (1993, 1999), d'autres ont été produites dans le cadre de DéMathÉ et d'autres enfin ont été collectées spécifiquement pour cette recherche. Même si la question de l'enseignement est centrale dans ce travail, la méthodologie que nous développons nous conduit à collecter ces données hors classe, avec des dispositifs matériels qui nous permettent d'avoir des observations précises des actions réalisées par les sujets que nous filmons.

Un autre aspect de la méthodologie développée dans ce travail réside dans le rapport que nous avons développé à nos données. Certaines de nos données apparaissent tout au long de ce travail. Pour autant, ces différentes apparitions ne relèvent pas de la répétition. Elles témoignent des analyses successives que nous conduisons, et qui nous permettent de compléter les développements que nous produisons sur l'énumération.

Brousseau (1984) avait introduit le mot « énumération » pour désigner une connaissance présente dans des situations issues des mathématiques, qui, bien que différentes, pouvaient être rapprochées, au moins intuitivement. C'est aussi dans la lignée de Brousseau que se place notre travail. Nous partageons l'intuition que l'énumération est présente dans une variété de situations plus grande que celles qui ont été décrites jusqu'à présent. Notre travail a pour objectif d'étendre le champ de l'énumération.

Présentons maintenant une vue d'ensemble de cette thèse.

Notre recherche est organisée en deux parties, qui se distinguent par les corpus sur lesquels elles s'appuient. L'ordre dans lequel les corpus sont introduits dans ce texte est l'ordre dans lequel ils ont été constitués. A cet appui chronologique s'ajoute une distinction d'une autre nature.

La partie A s'appuie sur des corpus qui documentent des situations dans des contextes proches des mathématiques. La plupart des corpus de cette partie ont été recueillis dans le cadre du groupe DéMathÉ par des membres de ce groupe et avec des finalités qui n'étaient pas des finalités de recherche.

La partie B s'appuie sur des corpus collectés spécifiquement dans le cadre de cette thèse. Les situations support de cette partie sont issues de contextes qui peuvent être identifiés comme ne relevant pas des mathématiques (les situations choisies relèvent de contextes issus de la discipline scolaire « français »).

Nous avons caractérisé la partie A par la nature de ses données. Elle se caractérise aussi par la finalité du travail qui est conduit : la production d'une nouvelle définition permettant de rapprocher des situations dont nous montrons qu'elles sont proches.

Le chapitre 1 présente le cadre général de ce travail. Après avoir décrit le contexte qui a permis l'émergence de cette recherche, nous présentons les travaux de didactique des mathématiques qui ont produit l'énumération comme savoir. Cette présentation intègre la description des conditions dans lesquelles ce savoir a été élaboré. Dans la seconde partie de ce chapitre, nous revenons sur des situations sur lesquelles nous nous sommes appuyés tout au long de notre travail, et notamment sur la situation des allumettes. Nous concluons ce chapitre par la description de nos objectifs de recherche et des directions que prend ce travail.

Le chapitre 2 est un chapitre de données. Il est construit autour de l'étude détaillée des données d'une situation d'énumération, la situation des sucres. Le processus d'analyse de ces données et de construction d'une modélisation fait l'objet d'une description détaillée. Nous avons laissé visibles les mécanismes de construction de notre modèle comme réponse à un questionnement. Nous décrivons comment nous cherchons à comprendre les difficultés rencontrées par les sujets que nous avons confrontés à la situation des sucres.

Le chapitre 3 poursuit l'étude de l'énumération en s'appuyant sur une variable structurante de l'énumération, la nature de la configuration. De nouvelles situations servent d'appui à la description et l'analyse des difficultés de nouveaux sujets. Les stratégies spécifiques à cette configuration sont exhibées.

Le chapitre 4 clôt cette partie A en produisant des développements dans deux directions. La première direction propose des développements théoriques autour de l'énumération. Les chapitres 2 et 3 ont fait émerger la nécessité d'une nouvelle définition qui est présentée dans la première partie de ce chapitre. La seconde direction interroge la place de la matérialité dans les situations d'énumération en revenant sur les situations présentées dans la première partie.

La partie B a pour objectif de faire fonctionner la nouvelle définition produite et d'étendre ainsi le champ de l'énumération en investiguant des domaines externes aux mathématiques.

Le chapitre 5 est préparatoire aux chapitres suivants. Il a pour objectif de montrer que l'analyse avec les outils développés dans la première partie de situations issues de contextes non mathématiques peut fonctionner. Le contexte choisi est celui de la discipline scolaire « français ». Cette première utilisation de nos outils d'analyse permet d'investiguer des manuels scolaires par l'identification de situations candidates à une expérimentation.

Le chapitre 6 décrit la mise en œuvre de nos outils d'analyse sur deux situations de français. Une méthodologie identique à celle conduite dans la partie A est utilisée, fondée sur l'observation hors classe de sujets individuels confrontés à une situation non didactique et sur des analyses successives.

Le chapitre 7 clôt la partie B en revenant sur des considérations théoriques. La définition de l'énumération est réinterrogée et le traitement est intégré au modèle, ce qui permet de produire un nouveau questionnement autour des situations étudiées dans les parties A et B, centré cette-fois sur la nature des collections en jeu et sur le lien avec les stratégies.

Partie A : Énumération en contextes logiques et mathématiques

Cette thèse s'intéresse à la question de l'exploration d'ensembles discrets. Ces ensembles ne sont jamais explorés sans intention. Une collection de jetons est explorée parce que son cardinal doit être déterminé ; une collection de perles de couleur est explorée parce qu'il faut trouver quelques perles bleues pour fabriquer un collier ...

La finalité de l'action qui doit être réalisée occulte très souvent la question spécifique de l'organisation de cette exploration, des difficultés rencontrées pour la réaliser, des stratégies les plus efficaces, des erreurs régulières et/ou résistantes qui surviennent.

Cette thèse s'intéresse donc à cette question spécifique de l'organisation de l'exploration. Notre travail prend appui sur des travaux de didactique des mathématiques qui ont construit des savoirs sur cette question. Les didacticiens ont nommé ces savoirs « énumération ». Notre thèse est donc une thèse sur l'énumération.

Dans cette première partie, les contextes dans lesquels nous nous plaçons sont des contextes logiques ou mathématiques.

Les analyses qui sont produites le sont dans des cadres qui sont issus de la didactique des mathématiques. La situation est l'objet support aux connaissances dont il est question dans ce travail. Le cadre théorique dans lequel se développe cette étude est celui de la théorie des situations didactiques. La référence aux situations est un dispositif régulier de notre travail.

Les quatre chapitres de cette partie s'organisent ainsi : entre un chapitre d'introduction et un chapitre de conclusion se trouvent deux chapitres, qui sont structurés autour du jeu sur une variable d'énumération.

Cette partie décrit un développement interne à la didactique des mathématiques qui présente les développements théoriques produits dans le chapitre 4. Elle décrit également comment les dimensions liées à la matérialité trouvent leur place dans les analyses, au fur et à mesure que celles-ci s'affinent. Le chapitre 4 traite donc aussi de la question de l'intégration de la matérialité aux modélisations et de leurs articulations avec les dimensions didactiques.

Chapitre 1 - Cadre et objectifs de la recherche

Ce chapitre présente le contexte dans lequel ce travail de recherche a été conduit. Nous commençons par revenir sur le travail réalisé par l'équipe DémathÉ, travail qui a permis de faire émerger la nécessité de poursuivre le travail de recherche préalablement réalisé par Brousseau et Briand sur l'énumération. Nous présentons ensuite le cadre théorique dans lequel ce travail est réalisé. Nous revenons ensuite sur les travaux fondateurs qui ont permis de constituer l'énumération comme savoir, avant de présenter de manière détaillée deux situations, décrites par Briand, qui nous ont permis de développer nos directions de recherche.

1. A l'origine de notre recherche : le projet DéMathÉ

Après avoir exposé les grandes lignes du projet DéMathÉ, nous expliquerons comment le projet de recherche a pu émerger.

1.1 Objectif du projet

Nous avons déjà évoqué en introduction l'importance du projet DéMathÉ dans l'émergence de notre questionnement. DéMathÉ n'était pas un projet de recherche, mais bien un projet de production de ressources à destination des enseignants du premier degré. Les ressources devaient être organisées en unités conceptuelles dont l'ambition était de rendre accessibles les connaissances qui permettent de fonder des choix pour l'enseignement du thème mathématique concerné.

La réalisation de ces documents s'appuyait sur une analyse de la situation des enseignants du premier degré que nous décrivons ici.

Le style pédagogique de chaque enseignant dépend de nombreux facteurs : conception de l'éducation, niveau scolaire de la classe, attentes sociales, manuel scolaire et matériel disponibles, nombre de niveaux, nombre d'élèves, etc.

C'est pourquoi le projet des documents DéMathÉ ne cherchait pas à donner aux maîtres une conception « clé en main » de situations, mais plutôt des instruments épistémologiques permettant des choix didactiques : choix de document supports des activités, choix de gestion de la classe, choix d'aides spécifiques aux enfants en difficulté, etc.

En effet, les enseignants du premier degré ont à leur disposition de nombreux livres concernant la lecture, la poésie, l'écriture, et d'une façon plus générale la maîtrise de la langue française. Pour toutes sortes de raisons, qui tiennent notamment à la frilosité de la communauté des didacticiens des mathématiques en matière de diffusion de leur travaux, ce n'est pas le cas en mathématiques. Dans cette discipline, de nombreux maîtres ignorent tout ou presque sur les sujets de base comme : « Les différents aspects de la numération », « La construction des connaissances spatiales », « L'élaboration des connaissances logiques », « La mesure ».

Or les travaux concernant ces sujets existent, mais ils sont à chercher dans des documents inaccessibles et illisibles par des maîtres (thèses, par exemple). Le COREM de Bordeaux a par ailleurs produit des séquences expérimentales en classe et des vidéos de ces séquences qui sont archivées sous forme numérique et dont nous pensons qu'elles pourraient aider la profession.

Le projet était donc de rendre accessible et lisible une présentation des connaissances existantes sur les objets mathématiques à enseigner à l'école.

S'il nous semblait réalisable, c'est parce que les travaux de recherche universitaire existaient déjà, tout en continuant à se développer.

1.2 Type de document envisagé et choix du thème

Pour déterminer la nature des documents que nous voulions produire, nous nous sommes appuyés sur le travail de Neyret (1995, p. 4) qui fondait notre démarche. L'auteur y considère notamment les manuels et plus généralement les documents à destination des enseignants comme des institutions de formation à part entière. Il met en évidence l'existence de documents intermédiaires entre le monde de la production des connaissances mathématiques

et celui de l'enseignement : les traités. L'étude historique montre l'absence de traités depuis le début du 20^e siècle. Notre travail visait à travailler à combler cette lacune.

Le projet DéMathÉ était de construire une collection, donc une suite de publications sur des thèmes pour lesquels le travail de recherche était suffisamment développé et stabilisé. C'est pour cette raison que nous avons choisi l'énumération.

En effet, la robustesse du travail de Briand (1993) sur cet objet devait permettre la construction d'instruments épistémologiques solides pour nos documents.

1.3 Forme du document envisagé

Du point de vue de la forme, le projet DéMathÉ se proposait de construire un objet dynamique, en utilisant les possibilités multimédia. Citons ici la description que nous faisons en 2008 de la forme qu'allait prendre notre document dans notre rapport d'activité.

« Notre document se présente comme un diaporama, c'est-à-dire d'une certaine manière comme un livre sonore. Une certaine liberté de navigation est tout de même possible, mais elle n'est pas privilégiée. Il s'agit d'un document qui, comme un livre, a un début et procède selon une certaine logique. Comme un livre, il est possible de commencer au chapitre 2 en ayant « sauté » le chapitre 1 mais, comme dans un livre, l'auteur ne garantit pas la compréhension, dans ce cas !

Les pages présentent peu ou pas de texte, les explications étant, le plus souvent, présentées sous une forme sonore, ces « sons » n'ont pas pour vocation d'être édités sous forme d'un texte : on ne peut pas les citer, ni les détacher de leur contexte. Le document présente quelques textes, qui peuvent être enregistrés sur l'ordinateur de l'utilisateur et bien sûr imprimés, il s'agit de textes très courts (une page) qui donnent essentiellement des définitions ou des bibliographies.

Nous partons de difficultés des élèves, car nous avons réalisé une enquête en 2003-2004 qui nous a permis de comprendre qu'un document complémentaire ne pouvait prendre sa place parmi les documents utilisés par le professeur que s'il avait pour caractéristique de permettre au professeur de mieux comprendre ces difficultés » (extrait rapport d'activité DéMathÉ, 2008)

Nous souhaitons que notre document intègre des vidéos et des animations. En effet, les publications à destination de la profession commençaient à ce moment à intégrer ces dimensions dynamiques dont il nous semblait qu'elles pouvaient permettre de nous aider dans la description de notre objet.

« Dans le document numérique, les difficultés sont montrées sur de courts clips vidéo et ceci pour plusieurs raisons. D'une part parce que la description fine des actions appelle le plus souvent un vocabulaire technique qui permet d'être compris (essayez de décrire les gestes que vous faites quand vous triez des jetons selon les couleurs, par exemple), ce qui peut rendre difficile la lecture au moment où l'on donne les exemples qui sont sensés faciliter ou en tout cas illustrer les explications. D'autre part parce que le professeur est justement confronté quotidiennement à l'observation « à la volée » des élèves pendant la classe, il a rarement le temps de s'installer à côté d'un élève pour le regarder travailler. Nous pensons que si le professeur est entraîné à considérer certains gestes, certaines dispositions, comme importants, il pourra les repérer dans son observation rapide » (extrait rapport d'activité DéMathÉ, 2008)

L'acquisition de ces courts clips vidéo est un point qui nous a posé problème. Ces clips étaient nécessaires pour notre travail mais en même temps difficiles à obtenir dans le cadre d'une activité ordinaire de la classe.

Pour autant, cette dimension était fondamentale dans notre travail puisque l'ambition était de pouvoir outiller les professeurs en appui sur des observations des élèves dans le cadre quotidien de la classe. (Margolinas, 2002)

Cette nécessité de disposer de ces courts clips vidéo qui mettent en évidence un aspect très précis et finalement parfois assez petit nous a conduit à les produire directement, dans des reconstitutions dans lesquelles nous avons joué les rôles d'élève et/ou de maître. Ces reconstitutions ont été tournées dans des cadres et dans des conditions qui ne laissent pas à penser que l'on se trouve dans une situation réelle. Pour autant, la nature de ce qui est montré dans ces reconstitutions présente un caractère authentique, car observé de nombreuses fois dans des situations qui sont la plupart du temps des situations de classe très banales.

Ce dispositif présente l'avantage de nous permettre d'éliminer dans le clip tous les aspects que nous considérons comme non essentiels à ce que nous cherchons à exhiber à un instant donné.

1.4 Emergence d'une nécessité de clarification

La conception du document a conduit l'équipe à produire des données dont la fonction première était de constituer des illustrations pour alimenter notre ouvrage. C'est en organisant des observations destinées à devenir les supports de nos vidéos que nous nous sommes rendus compte de la nécessité de clarifier certains points concernant l'énumération.

« Cette année, nous avons travaillé à l'unification du concept d'énumération, que les collections soient déplaçables ou non. Cette difficulté épistémologique est en passe d'être résolue, ce qui va nous conduire à retourner dans les classes pour tourner de nouveaux clips vidéo qui devraient trouver leur place dans le CD-ROM » (extrait rapport d'activité DéMathÉ, 2008)

Au moment où nous écrivons ces lignes, nous pensons encore que de légers ajustements de l'organisation générale de notre document et de nos données vont nous permettre d'opérer cette clarification. Une phrase quasi-identique figure dans le rapport d'activité 2009.

C'est cette nécessité de clarification de l'énumération et l'impossibilité de la réaliser dans des temps courts qui est à l'origine de cette thèse.

2. Cadre théorique et méthode de recherche

L'objectif de cette partie est de présenter le cadre théorique dans lequel s'est développée cette thèse sur l'énumération. Au-delà d'un cadrage théorique, il s'agit aussi d'explicitier les conséquences que nous tirons de ces appuis pour construire notre méthode de recherche.

Il s'agit bien de commencer à mettre en évidence dans cette partie un aspect que nous considérons comme central dans notre travail, à savoir la construction de mécanismes ad hoc permettant d'avancer dans la compréhension de notre objet d'étude.

2.1 Un appui sur la théorie des situations didactiques

Notre thèse est une recherche qui s'inscrit dans le cadre de la didactique des mathématiques. Examinons la définition que donne Douady de cette discipline :

« La didactique des mathématiques est l'étude de processus de transmission et d'acquisition des différents contenus de cette science, et qui se propose de décrire et d'expliquer les phénomènes relatifs aux rapports entre son enseignement et son apprentissage. Elle ne se réduit pas à chercher une bonne manière d'enseigner une notion fixée » (Artigue & Douady, 1986, p. 69)

Cette première définition met en avant les processus de transmission et d'acquisition des contenus mathématiques. Ce qui nous intéresse dans cette définition est qu'elle ne réduit pas le champ de la didactique des mathématiques à une technique d'enseignement. La didactique des mathématiques a pour projet de décrire de manière précise ce qui se passe quand un sujet utilise les mathématiques. Cette volonté de description se double d'une volonté d'explication des phénomènes en jeu dans ces moments.

Les précisions que nous apportons à cette définition nous placent d'emblée dans la question de la place du sujet dans ce processus et dans la relation qui se construit avec le contenu de cette science.

Brousseau (1997) précise la nature des différents acteurs qui interviennent dans ce qu'il appelle un processus de diffusion.

« La didactique des mathématiques désigne l'étude scientifique des conditions spécifiques de la diffusion des connaissances mathématiques entre les hommes ou les institutions humaines » (G. Brousseau, 1997, p. 2)

Le projet de Brousseau est d'étudier des processus de diffusion des connaissances mathématiques. Pour mener à bien cette étude, Brousseau produit une modélisation du système qu'il étudie. C'est dans ce cadre qu'il développe la théorie des situations didactiques (Guy Brousseau, 1998). C'est cette théorie qui nous sert de support à l'analyse des situations que nous observons. C'est ce modèle auquel nous nous référons quand nous décrivons nos objets d'étude.

Dans ce vaste ensemble que constitue la théorie des situations didactiques, nous allons exhiber les éléments qui nous apparaissent les plus saillants dans notre travail.

2.1.1 Savoirs et connaissances

Brousseau (cité par Rouchier, 1996) définit la notion de connaissance en la plaçant dans une dualité avec la notion de savoir.

« Il a été proposé de désigner par le terme connaissances ce qui n'est pas directement sous le contrôle du système didactique, réservant en cela le terme de savoir à ce qui sera placé comme enjeu dans ce même système et qui reste sous la responsabilité du professeur » (Rouchier, 1996, p. 183)

Le travail de Rouchier (1996) permet de mieux comprendre ces deux notions en les interrogeant au regard de la place qu'elles occupent dans des perspectives théoriques différentes, la théorie des situations et l'approche anthropologique. Comment cette question est-elle prise en compte dans chacune de ces deux perspectives théoriques ?

Le point d'ancrage de cette distinction apparaît dans la théorie des situations par la nécessité de distinguer ce qui relève de l'élève de ce qui relève du professeur.

« Dans l'ordre de la connaissance mise en jeu (mise en enjeu d'enseignement) dans le système didactique, il y a toujours une partie de « toute » la connaissance qui apparaît qui ne paraît pas touchée par le professeur, qui n'apparaît pas dans le débat didactique de manière explicite mais qui peut être exigée ne serait-ce que pour entrer dans le système qui se noue à propos d'un objet de savoir déterminé [...] Dans l'ordre des savoirs ou du moins de ce que nous pouvons identifier comme tel à cette étape de notre travail, on va faire opérer le savoir visé. C'est lui qui est directement concerné par l'installation du système didactique, qui va faire l'objet d'explicitations, dont on va installer les symboles, les règles de fonctionnement et d'utilisation » (Rouchier, 1996, p. 183)

L'approche anthropologique fait d'emblée une large place à la question des institutions. Ce qui nous apparaît comme le point d'entrée de cette perspective théorique n'est pas la situation, mais plutôt la place que les notions occupent dans un ensemble que le modèle définit comme d'emblée plus vaste. Ce choix de point d'entrée différent engendre une modélisation des savoirs et des connaissances légèrement différente.

« Les savoirs sont les objets institutionnels, accompagnés de rapports institutionnels, autrement dit, si on particularise des objets (savoirs), les lieux (institutions), on particularise aussi les rapports et de

R(X, O) on passe à $R_i(X,O)$, rapport institutionnel à O pour un sujet donné, X, dans une institution donnée » (Rouchier, 1996, p. 187)

Dans l'approche anthropologique, le même mot est employé pour désigner savoirs et connaissances, car ce sont les rapports (personnels, institutionnels) qui sont distingués.

« La personne se complique, elle apparaît comme composée de ses assujettissements. Il y a ici une forme de négation du sujet cognitif classique comme construction autonome, produit d'une série d'interactions directes avec des connaissances qu'il s'agit d'intérioriser. Dans le modèle anthropologique, les connaissances n'apparaissent pas, il n'y a pas lieu d'identifier une catégorie d'objets particulier, distincts des objets de savoirs, qui sont les seuls à apparaître dans les institutions dans lesquels ils ont à apparaître. Les institutions didactiques ont pour objet de faire évoluer les rapports des personnes à l'objet de savoir» (Rouchier, 1996, p. 187)

Dans ce cadre, deux conséquences peuvent être tirées de cette modélisation dans l'approche anthropologique,

Du point de vue de l'individu :

« Les institutions didactiques ont pour objet de faire évoluer les rapports des personnes à l'objet de savoir (pour les rapprocher du rapport institutionnel)» (Rouchier, 1996, p. 187)

Du point de vue de l'objet savoir :

« Ainsi O n'existe pas indépendamment d'une ou plusieurs institutions dans lesquelles il peut être connu » (Rouchier, 1996, p. 187)

Dans le cadre de la théorie des situations, Laparra et Margolinas (2010) reprennent la question de la dualité savoirs/ connaissances. Pour Laparra et Margolinas (2010), une connaissance est « *ce qui réalise l'équilibre entre le sujet et le milieu, ce que le sujet met en jeu quand il investit une situation.* » (p.145). Le concept de connaissances est ici plus large que l'acception antérieure puisque les connaissances incluent « *à la fois des connaissances du corps, des connaissances dans l'action, des connaissances de l'interaction, des connaissances mémorisées, etc.* » (p. 145)

Le savoir est par nature radicalement différent de la connaissance.

« Il s'agit d'une construction sociale et culturelle, qui vit dans une institution (Douglas, 1986/2004) et qui est par nature un texte (ce qui ne veut pas dire qu'il soit toujours matériellement écrit). Le savoir est dépersonnalisé, décontextualisé, détemporalisé. Il est formulé, formalisé, validé et mémorisé. Il peut être linéarisé, ce qui correspond à sa nature textuelle. » (Laparra & Margolinas, 2010, p. 145)

Le savoir est donc un construit culturel qui vit dans une institution.

La didactique a pour projet de modéliser la dynamique de circulation des savoirs et des connaissances. (Laparra & Margolinas, 2010) réaffirme l'importance de la situation dans la construction des savoirs.

« Les savoirs sont accumulés par la culture, mais ils sont issus de connaissances, de rencontres avec des situations. Si les savoirs ne sont « que du texte » et qu'ils ne se constituent pas en connaissances

en situation alors ils sont inutiles, comme peut l'être un texte anonné dont la fonction s'est perdue. » (Laparra & Margolinas, 2010, p. 145)

Les savoirs sont issus de connaissances. Les connaissances sont le résultat de la rencontre d'individus avec des situations et des équilibres qui se créent. La perte de la référence aux situations dans lesquelles ils sont fonctionnels est mortifère pour les savoirs car elle leur fait perdre leur légitimité, leur raison d'être.

Le projet du didactique est d'étudier la question de la transmission. Ce projet est intrinsèquement dynamique. Il y a donc une nécessité à modéliser cette dynamique, ce que les concepts de dévolution et d'institutionnalisation permettent de réaliser.

« La transmission des savoirs implique l'acquisition de connaissances et donc l'investissement de situations qui permettent leur rencontre (c'est le processus de dévolution). Dans un mouvement inverse, un équilibre fugitivement rencontré dans une situation singulière ne peut devenir une ressource pour de futures situations. La formulation, la formalisation, la mémorisation, la reconnaissance d'une valeur culturelle et sociale sont nécessaires pour permettre de qualifier la connaissance comme savoir (c'est le processus d'institutionnalisation). Il a ainsi une circulation entre connaissance et savoir, et une complémentarité entre processus d'institutionnalisation et de dévolution (voir fig. 1). » (Laparra & Margolinas, 2010, p. 145)

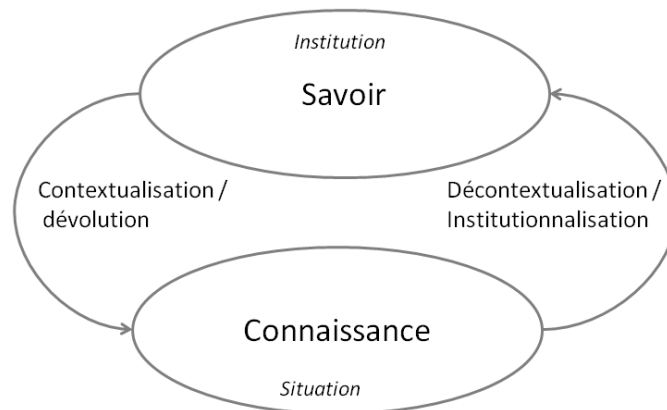


Figure 1 : les rapports savoirs/ connaissances dans la théorie des situations(Laparra & Margolinas, 2010, p. 6)

2.1.2 Du coté des savoirs : quelles institutions de référence ?

Pour décrire les objets sur lesquels nous travaillons, le choix des mots employés pour les désigner va être induit par le cadre dans lequel nous nous plaçons. Quand nous employons le mot *mathématique*, nous référons à un savoir constitué, donc à une institution qui a reconnu ce savoir.

Pour autant, une même connaissance en situation peut être constituée en savoirs dans plusieurs institutions. Ainsi, en informatique, on est très souvent confronté à la nécessité d'organiser des données, de les ranger. Parmi les savoirs ordinaires de cette communauté figure ce qu'elle nomme « algorithmes de tri ». Ce qui nous intéresse ici est le savoir représenté par le mot *tri*. Pour un membre de la communauté informatique, trier, c'est organiser une collection d'objets selon un ordre déterminé. Dès que le mot *ordre* est prononcé, le mathématicien comprend qu'il est question d'une relation mathématique qu'il connaît bien. Le mathématicien dirait donc plutôt qu'il s'agit d'ordonner la collection d'objets. Dans ces deux communautés, la même connaissance engendre deux savoirs que les institutions dans lesquelles ils ont été construits ont désigné de manière différente.

Un même mot peut désigner des savoirs différents, donc référer à plusieurs institutions. Le mot seul ne suffit donc pas à désigner le savoir. Ce mot doit être compris dans le contexte dans lequel il est employé, dans la référence à l'institution dans laquelle il est défini. Revenons sur le mot *tri*. Nous avons précisé quelle était la nature de ce savoir dans la communauté des informaticiens. Ce terme est largement employé par les enseignants de maternelle. Dans ce contexte, dans cette institution (l'institution scolaire), il ne veut jamais dire mettre en ordre. Il a un sens proche que celui que lui donne la communauté des mathématiciens. Le mot *tri* ne peut donc pas être compris sans connaissance du contexte ou de l'institution dans lequel il est employé.

2.1.3 Du côté des connaissances : Le concept de situation

2.1.3.1 Situation

En didactique des mathématiques, le projet est l'étude des processus de diffusion de la connaissance.

« Prendre comme objet d'études les circonstances qui président à la diffusion et à l'acquisition de connaissances conduit donc à s'intéresser aux situations » (G. Brousseau, 1997, p. 2)

L'étude des processus de diffusion conduit à s'intéresser aux circonstances de cette diffusion, ce qui permet à Brousseau de définir l'objet de base de la théorie des situations.

« Une situation est l'ensemble des circonstances dans lesquelles une personne se trouve, et des relations qui l'unissent à son milieu » (G. Brousseau, 1997, p. 2)

L'objet situation est défini. Une situation n'est pas qu'un ensemble de circonstances. C'est aussi un ensemble de relations entre un sujet et son milieu.

2.1.3.2 Situation didactique

Parmi l'ensemble des circonstances auxquelles on pourrait s'intéresser figurent celles qui président à la diffusion délibérée des connaissances. Brousseau spécifie ce sous-ensemble de l'ensemble général des situations en donnant un nom particulier à ces situations.

« Les situations didactiques sont, dans la langue française, des situations qui servent à enseigner » (G. Brousseau, 1997, p. 2)

Appliquons ces définitions au cadre scolaire. Le maître a pour projet de faire acquérir à un élève des connaissances. Dans le modèle que développe Brousseau, le professeur est contenu dans la situation. La modélisation conduit à étudier les dispositifs d'enseignement. Ce ne sont pas les dispositifs eux-mêmes qui produisent la connaissance, mais leur mise en œuvre auprès de sujets. Et ce sont les effets de la mise en œuvre du dispositif qu'il convient d'étudier pour comprendre d'éventuels effets d'enseignement.

2.1.3.3 Un double objectif

La modélisation du processus de diffusion de la connaissance ne peut se réduire à la seule étude des situations didactiques. Afin de pouvoir étudier ce processus de diffusion, il convient de produire également de modéliser les situations qui sont caractéristiques des connaissances mathématiques.

« Quelles relations à quels objets sont-elles caractéristiques des diverses connaissances mathématiques ? Quelles propriétés doivent présenter les situations qui provoquent et permettent les adaptations spécifiques à chacune ? » (G. Brousseau, 1997, p. 3)

Il conviendrait alors de modéliser et d'inventorier l'ensemble de ces situations. L'ampleur de cette tâche apparaît à Brousseau comme déraisonnable.

« Modéliser les situations qui font utiliser ou découvrir les connaissances aux hommes revient à vouloir modéliser non seulement le monde – le monde réel et le monde des idées – mais également son histoire (vaste programme !) » (G. Brousseau, 1997, p. 3)

Cependant, la nécessité de produire un modèle demeure.

Par ailleurs, le caractère dynamique de la situation nécessite d'intégrer à l'analyse des éléments qui puissent permettre de rendre compte de cette dynamique.

« Les connaissances se manifestent comme des instruments de contrôle des situations » (G. Brousseau, 1997, p. 3)

La situation est un objet qui évolue comme évoluent les circonstances dans lesquelles se trouve le sujet confronté à cette situation. C'est le caractère dynamique de la situation qui permet d'observer des manifestations de la connaissance chez le sujet

Il y a donc là une double dynamique qui a des conséquences sur les objectifs de production de modèles.

« Les modèles doivent être alors envisagés sous deux formes qu'il s'agit de faire « coïncider » :

- Comme nécessité théorique, déduite du savoir lui-même, et d'un fonctionnement minimal supposé de l'élève,
- Comme représentation des situations réelles, didactiques ou non, où la connaissance devrait « se déduire » des décisions et des comportements du sujet » (G. Brousseau, 1997, p. 3)

Le premier point apparaît comme tout à fait original car il fait de la situation un objet théorique dont une des fonctions est de décrire le savoir. Il installe comme élément premier du modèle de la diffusion de la connaissance une modélisation du savoir par des situations.

Le second point nous fournit des clés d'observation de la connaissance. C'est par l'observation des décisions et des actions du sujet que nous pourrions en déduire des manifestations de la connaissance. Par ailleurs, Brousseau dit que la situation n'a pas de nécessité d'être didactique pour que cette manifestation ait lieu.

Il y a donc une double dimension au processus d'étude des situations, l'une du côté du savoir et l'autre du côté de la connaissance.

2.1.3.4 Les variables

Ces modèles ne sont pas des objets figés ou statufiés. Ils sont sujets à la modification et c'est par l'action sur ce que Brousseau nomme variables que nous allons pouvoir rendre compte du caractère dynamique de l'apprentissage. Nous pourrions ainsi associer la mise en œuvre de stratégies optimales ou erronées à des choix de valeurs de variables. Nous pourrions alors chercher à déterminer les valeurs des variables qui optimisent les conditions de diffusion des connaissances.

Brousseau définit la variable cognitive comme

« [...]une variable de la situation telle que par le choix de valeurs différentes on peut provoquer des changements de la connaissance optimale » (G. Brousseau, 1997, p. 3)

2.1.3.5 La situation au centre du modèle

Installer une situation pour un sujet est donc un moyen de tester, de révéler les caractéristiques de cette situation. Il y a là un point de vue tout à fait original qui renverse les positions ordinaires en plaçant la situation au centre du modèle et en utilisant le sujet pour caractériser la situation. Le sujet n'est pas objet d'étude, c'est la situation. Le sujet est une ressource pour cette étude.

Par ailleurs, le sujet dont il est question ici est un sujet générique. Cela ne signifie pas pour autant que la théorie des situations ne s'intéresse pas à des sujets particuliers, mais que pour des nécessités théoriques, l'étude de la situation précède l'étude des sujets. De la même manière que certains ont cherché à modéliser le comportement humain par des automates, le projet est ici de modéliser la connaissance et « [...] de représenter les situations à usage didactique par des « automates mathématiques » (G. Brousseau, 1997, p. 4)

Le projet de la TSD est donc d'associer à tout savoir un ensemble (une classe) de situations « qui font apparaître cette connaissance comme le moyen optimal et autonome de solutions de cette situation ». Produire un représentant de cette classe permettant par le jeu des variables d'engendrer l'ensemble des caractéristiques du savoir répond à cette nécessité. C'est ce représentant que Brousseau nomme situation fondamentale.

2.1.3.6 Le jeu comme outil de modélisation de la connaissance

Pour Brousseau (1998), la modélisation a une double finalité, au regard de la connaissance d'une part et au regard de l'activité d'enseignement d'autre part. C'est le premier aspect que nous développerons dans cette recherche. Le jeu est, pour Brousseau, l'instrument de la modélisation des situations.

« Modéliser une situation d'enseignement consiste à produire un jeu spécifique du savoir visé » (Guy Brousseau, 1998, p. 81)

Dans le projet de description de la connaissance, le jeu apparaît comme un outil.

« Le jeu doit être tel que la connaissance apparaisse sous la forme choisie, comme la solution, ou comme le moyen d'établir la stratégie optimale :

- Est-ce que connaître telle propriété est le seul moyen de passer de telle stratégie à telle autre ?
- Pourquoi l'élève chercherait-il à remplacer celle-ci par celle-là ?
- Quelle motivation cognitive conduit à produire telle formulation d'une propriété ou telle démonstration ?
- Quelles raisons de produire ce savoir est-elle meilleure, plus juste, plus accessible ou plus efficace que telle autre ? » (Guy Brousseau, 1998, p. 3)

Brousseau donne des indications sur une méthode pour conduire cette étude.

« Ce genre de questions peut être posée a priori. Dans un premier temps, les réponses peuvent être puisées dans la logique du jeu, dans l'histoire des sciences ou dans l'analyse mathématique ou didactique : le jeu spécifique d'un savoir doit en justifier l'emploi ou l'apparition, conformément à la didactique théorique » (Guy Brousseau, 1998, p. 81)

Le jeu est donc un outil plus précis, plus facile à produire ou imaginer que la notion de situation pour décrire la connaissance.

Le participant au jeu, le joueur, réalise une activité gratuite, non finalisée.

Les décisions et les actions au cours du jeu ne sont réglées que par le plaisir que le joueur éprouve à les accomplir, en éprouve à leurs effets, mais la décision de se livrer au jeu lui-même n'est finalisée par aucun but » (Guy Brousseau, 1998, p. 82)

Le but du joueur est de gagner la partie, de maximiser le gain.

On peut donc considérer le jeu comme un automate discret, qui prend une suite finie de positions et permet donc d'envisager l'idée de stratégies. Brousseau peut alors définir les deux types de stratégie.

« Une stratégie gagnante fournit contre toute défense une partie de gain positif, mais on peut évaluer divers caractéristiques :

- son cout, par exemple le nombre de coups amenant la fin de la partie,
- le gain qu'elle procure ...

Une stratégie non gagnante à tout coup pourra néanmoins être meilleure qu'une autre du point de vue des risques de pertes qu'elle entraîne, des gains qu'elle permet d'espérer, etc. La théorie des jeux permet alors d'étudier les dilemmes qui se présentent. La plupart des exercices d'apprentissage fondamentaux sont envisagés contre un adversaire qui est la nature » (Guy Brousseau, 1998, p. 85)

Le concept de jeu nous fournit donc un outil pour donner une description des connaissances en jeu dans les situations.

2.1 Un appui sur la matérialité

Nous venons de montrer que la notion de situation est centrale dans notre travail. Nous ne pouvons pas dissocier la notion de situation de la notion d'observation. L'observation de ce qui se passe de manière très précise dans une situation est consubstantielle de notre travail. L'observation est l'outil qui nous aide à construire la compréhension des objets quand nous observons en situation.

Notre pratique de l'observation en situation nous conduit, sans que cela soit toujours explicite pour nous-même, à regarder de manière précise ce que font les sujets que nous observons. Pour comprendre ou interpréter les décisions prises par les sujets dans les actions qu'ils réalisent, nous avons été contraints de nous intéresser aux conditions dans lesquelles ces sujets étaient placés pour réaliser ces actions.

La théorie des situations met en évidence l'importance de l'observation pour comprendre les conditions effectives dans lequel le sujet est placé. Les observations réalisées dans le cadre

de cette thèse nous ont conduits à intégrer la multiplicité des contraintes dans lesquelles se trouvaient les sujets que nous avons observés.

Parmi les conditions effectives dans lequel les sujets sont placés, la prise en compte des conditions matérielles dans lesquelles ils se trouvent se sont avérées nécessaires dans notre travail. De ce point de vue, nous nous appuyons sur le cadre développé par Margolinas et Laparra (2016).

« Notre originalité , en didactique, se situe dans le fait que nous e considérons pas le savoir comme une donnée, ce qui nous conduit à interroger les disciplines scolaires mais aussi à considérer les situations dans toutes leurs dimensions, y compris matérielles » (Margolinas & Laparra, 2016, p. 12) (page 12)

Il s'agit ici de considérer les conditions matérielles au sens large, ce qui nous amène à intégrer à ces conditions matérielles le sujet lui-même.

Pour cela, le cadre anthropologique sur lequel nous nous appuyons est celui de Goody (Goody, 1977), et notamment son travail sur la raison graphique, qui vise à comprendre les spécificités du registre de l'écrit par rapport à celui de l'oral.

« Raison graphique : capacité que fournit l'écrit à celui qui vit dans une société littératiée d'exercer une action sur le monde et une réflexion sur la langue » (Margolinas & Laparra, 2016, p. 169)

Le développement d'une compréhension des règles spécifiques qui définissent le monde de l'écrit est un élément structurant pour notre recherche, en ce qu'il nous permet de mieux intégrer ces dimensions à nos analyses. En creux, il nous permet d'interroger le rapport à la matérialité, et donc prendre en charge les dimensions corporelles nécessaires à nos analyses (ces dimensions intégrant de facto la question de l'évolution dans un monde régi par l'écrit).

Ces éléments d'analyse doivent nous permettre d'intégrer à nos analyses la présence d'objets matériels et leur impact sur la nature des procédures qui sont mises en œuvre en situation.

La suite de ce travail nous conduit à utiliser deux termes dont nous produisons ici la définition donnée par Margolinas et Laparra.

« Littératie : il y a littératie quand un groupe humain utilise les ressources de l'écrit non seulement pour noter la langue mais aussi pour organiser les corps et les objets du monde et qu'il en a un usage raisonné » (Margolinas & Laparra, 2016, p. 168)

« Oralité : il y a oralité quand un groupe humain pratique en coprésence des échanges verbaux ou non, à l'aide d'objets du monde et sur ceux-ci, en mettant en jeu les ressources verbales et corporelles dont il dispose de manière fortement routinisée » (Margolinas & Laparra, 2016, p. 169)

Cela nous amène à considérer de manière distincte deux univers, avec chacun leurs règles propres :

- l'univers de l'oralité, un univers dans lequel les sujets manipulent des objets, où la question des conditions matérielles effectives prend tout son sens. Cette caractérisation va jusqu'à prendre en compte les dimensions corporelles des sujets
- l'univers de la littératie, un univers dans lequel l'écrit est présent et modifie la pensée en la structurant selon des règles propres à l'écrit, en conduisant notamment à une spatialisation de la pensée.

Dans les faits, ces deux univers n'existent pas de manière séparée (Laparra & Margolinas, 2012).

« À l'école, comme dans le reste de la société, l'oralité et la littératie n'appartiennent pas à deux univers distincts. Elles s'interpénètrent l'une l'autre constamment, et cela d'autant que les élèves sont plus jeunes » (Laparra & Margolinas, 2012, p. 57)

Cette interpénétration invite à la vigilance du point de vue de l'analyse.

« D'un point de vue méthodologique, s'intéresser aux situations effectives dans lesquelles les individus pensent et agissent nous conduit à considérer que la simple présence de l'écrit ou de l'oral ne permet pas de déterminer la nature (oralité ou littératie) de la pratique du groupe humain observé. En effet, nous avons montré ailleurs (Margolinas et Laparra 2010, 2011) qu'il pouvait y avoir de l'oralité dans l'univers de la littératie et de la littératie dans l'univers de l'oralité » (Laparra & Margolinas, 2012, p. 57)

Nous étudions donc un objet dont nous mettons en évidence la présence dans ces deux univers qui s'interpénètrent.

Ces dimensions théoriques (littératie / oralité) sont intervenues tardivement dans notre travail et trouvent leur place en fin de thèse.

2.2 Méthode de la recherche

Notre objet d'étude est l'énumération. L'objectif de cette partie est d'expliquer la méthode qui est mise en œuvre pour travailler sur cet objet.

Comme tout processus, cette méthode présente des dimensions dynamiques qui génèrent des interactions entre les différentes dimensions de cette recherche. Avant de décrire la nature des relations entre ces différentes dimensions, commençons par décrire les dimensions elles-mêmes.

Les trois dimensions de notre recherche sont donc :

- Un appui sur les situations pour observer la connaissance
- Un appui sur les situations pour construire des savoirs épistémologiques
- La prise en compte de dimensions anthropologiques liées à la matérialité

2.2.1 Un appui sur les situations pour observer la connaissance

Ce qui est premier dans cette recherche est l'appui sur les situations dans lesquelles l'énumération intervient. La situation est l'outil de base de notre travail, celui sur lequel nous construisons nos analyses, nous élaborons notre questionnement. Cet appui sur les situations est la conséquence méthodologique de la difficulté à cerner et décrire *a priori* l'objet sur lequel nous travaillons.

Nous observons cet objet en situation. En fait, plus que cet objet, ce que nous observons de manière première est la difficulté que rencontrent des sujets dans des situations relevant de l'énumération. Et c'est la volonté de mieux comprendre la nature des difficultés qui est le moteur de développement de cette recherche.

Notre volonté de mieux comprendre des difficultés nous oblige à produire des analyses des situations observées et à essayer de formaliser la nature des connaissances en jeu dans ces situations. C'est dans ce contexte un outil qui permet de construire un questionnement sur la nature des objets qui sont en jeu.

C'est donc cet appui sur l'observation de la difficulté qui va permettre de produire des propositions de structuration de la connaissance en jeu.

De ce point de vue, nous nous situons dans une utilisation de la situation comme outil pour observer, mettre en évidence la connaissance.

2.2.2 Un appui sur les situations pour concevoir des connaissances épistémologiques

La situation n'intervient pas que dans des phases d'observation, de repérage des difficultés et de la connaissance. La situation intervient également dans des phases de conceptualisation et de conception des connaissances en jeu. Une fois qu'une proposition d'explication et de structuration de la connaissance a été réalisée, la situation intervient comme un outil de production d'un modèle qui doit permettre de valider ou d'invalider la proposition de structuration de la connaissance.

De ce point de vue, la situation intervient d'une manière un peu différente de celle que propose Brousseau. Nous conservons la nécessité théorique de la situation. Par contre, la situation n'est pas, dans le cadre de notre recherche, exclusivement déduite du savoir. Elle

devient un outil qui permet de construire de la connaissance. Cette nécessité est imposée par la nature même de l'objet sur lequel porte notre étude.

Du point de vue de la méthode mise en œuvre dans cette recherche, nous pouvons donc caractériser le processus qui est décrit ici comme une série d'interactions et d'aller-retour entre les phases dans lesquelles des situations interviennent et des phases d'élaboration de connaissances.

Le point de vue qui est adopté ici n'est pas un point de vue didactique, mais bien épistémologique.

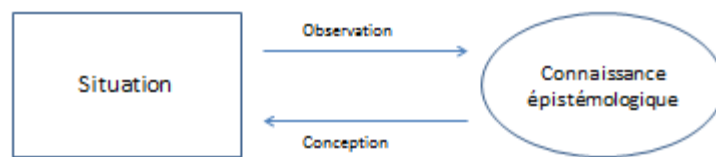


Figure 2 : la méthode de recherche - interactions situation/ connaissances épistémologiques

C'est la position de chercheur que nous avons adoptée dans ce travail que nous décrivons ici.

Ce processus d'observation/conception schématisé ci-dessus est itéré, et les allers-retours sont multiples. Il est donc parfois difficile de reconstituer l'origine du processus que nous venons de décrire. Cependant, dans la suite de ce texte, nous avons fait le choix de mettre en œuvre des formes de régularité de présentation des différentes étapes du développement de notre recherche. Ce choix de régularité nous amène à mettre en évidence de manière systématique la situation comme origine, point de départ de notre réflexion.

C'est cette volonté de placer la situation au cœur de notre recherche qui nous conduit à analyser à plusieurs moments de ce texte les mêmes situations. C'est bien parce que nous soumettons les situations sur lesquelles nous travaillons à des analyses successives que nous pouvons avancer dans la compréhension de notre objet d'étude.

Par ailleurs, nous appuierons la description des connaissances par un recours au concept de jeu, tel que l'a défini Brousseau.

2.2.3 La prise en compte de dimensions anthropologiques liées à la matérialité

Le seul appui sur les connaissances épistémologiques ne nous suffit pas ; l'observation et l'analyse des situations nous contraignent à faire intervenir des dimensions autres que les dimensions exclusivement centrées sur l'analyse du savoir. Pour pouvoir analyser les actions des sujets qui interviennent dans ces situations, nous sommes contraints de faire intervenir dans nos analyses des dimensions qui prennent en compte la situation du sujet. Cela nous conduit à intégrer le caractère matériel des actions réalisées par ces sujets.

Le sujet est un être qui a un corps et qui évolue dans un environnement. L'environnement qui entoure le sujet présente un certain nombre de caractéristiques matérielles. La présence de ce corps dans cet environnement génère un certain nombre de contraintes et de possibles que nous cherchons à prendre en compte. C'est bien l'intervention de la matérialité dans notre analyse qui nous permet de pousser plus avant la compréhension de la situation. Ce sont ces dimensions liées à la prise en compte de la matérialité que nous nommons prise en compte de dimensions anthropologiques.

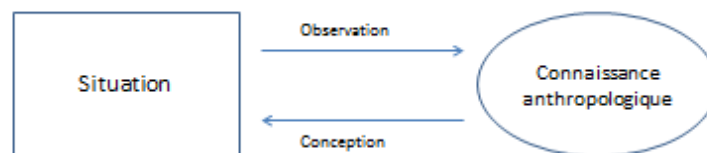


Figure 3 : la méthode de recherche - interactions situation/ connaissances anthropologiques

C'est bien la volonté de prendre en compte le réel, même dans les dimensions qui ne nous sont pas familières, qui nous contraint à étendre notre cadre d'analyse.

2.2.4 Développement d'un double point de vue sur les situations

Nous portons donc un double point de vue sur les situations : un point de vue de didacticien des mathématiques et un point de vue d'anthropologue pour prendre en compte les dimensions de la matérialité des situations observées.

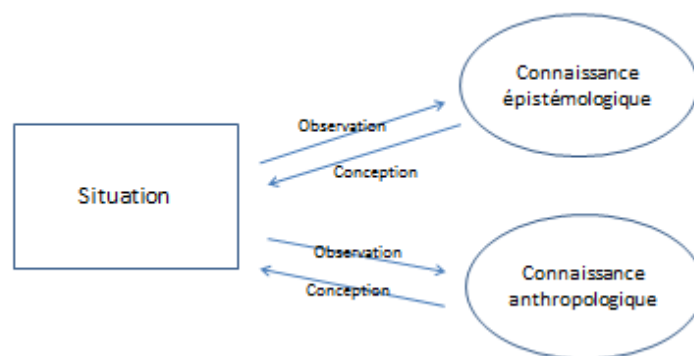


Figure 4 :la méthode de recherche - relations entre la situation et la double dimension des connaissances

Le regard que nous portons sur l'objet énumération est donc double.

Pour autant, nous ne nous considérons pas comme des anthropologues, mais comme des didacticiens confrontés par leurs analyses à la nécessité de faire intervenir des dimensions qu'ils n'imaginaient *a priori* pas. Nous conduisons donc des analyses épistémologiques à visée didactique, tenus par les situations observées de prendre en compte des dimensions anthropologiques.

Nous nous situons donc dans le cadre développé par Margolinas et Laparra (2016) du point de vue au rapport aux situations que nous développons.

«C'est dans cette perspective que nous construisons un point de vue didactique qui ne se veut pas prescriptif, comme d'autres didacticiens considèrent leur travail dans une perspective anthropologique » (Margolinas & Laparra, 2016, p. 12)

3. Des travaux fondateurs sur l'énumération

L'objectif de cette partie est de présenter les travaux qui ont permis de fonder l'énumération comme savoir de didactique des mathématiques. Cette partie reprend en partie des travaux que nous avons conduits et publiés. (Margolinas, Wozniak, & Rivière, 2015)

3.1 Le travail pionnier de Guy Brousseau

Brousseau (1984) identifie l'énumération comme une connaissance, à partir d'observations portant sur le dénombrement témoignant d'un déséquilibre et donc de connaissances erronées ou absentes :

« 1) À l'Université il est fréquent de voir des étudiants attendre la correction d'un exercice de combinatoire pour être sûrs que leur réponse est correcte. [...]

2) Dans l'enseignement secondaire les dénombrements posent aussi des problèmes difficiles aux élèves : écrire tous les termes d'un produit de polynômes en troisième année ou faire la liste de tous les éléments d'un ensemble qui ont une certaine propriété en première année ne va pas sans mal parfois même pour de bons élèves.

3) À l'école élémentaire certains élèves n'arrivent pas à savoir quelle opération il convient de faire dans les problèmes même si les manipulations évoquées leur sont familières et s'il est clair qu'ils les conçoivent parfaitement.

4) En première année d'école primaire on peut observer des enfants qui « savent compter » mais qui ne mettent pas en œuvre ce savoir pour effectuer des tâches qu'ils comprennent bien pourtant et qui requièrent le comptage : Ils ne comptent qu'en réponse à une demande sociale bien précise et n'ont aucune idée de ce à quoi cette tâche sert ni ce qu'elle permet de maîtriser » (Guy Brousseau, 1984, p. 2-3)

Il procède alors à une comparaison de ces difficultés :

« Quoique assez différents, ces divers problèmes peuvent être rapprochés intuitivement, il s'agit chaque fois de dénombrer mentalement un ensemble qui n'est pas concrètement présent ou réalisé » (Guy Brousseau, 1984, p. 3)

Cette étude lui permet de donner une première définition mathématique de ce qu'il appelle « l'énumération » :

« Une énumération d'un ensemble est une injection de cet ensemble sur une section commençante de \mathbb{N} » (Guy Brousseau, 1984, p. 4)

Il formule alors les hypothèses suivantes :

« Ce serait donc la possibilité de produire et de contrôler la production effective de telles énumérations qui ferait défaut aux élèves en difficulté sur les questions évoquées plus haut. [...]

i) Les élèves doivent passer très brutalement d'un contrôle perceptif de l'énumération de petites collections d'objets déplaçables mais immobiles à un contrôle complètement mental et verbal d'ensembles quelconques.

ii) Les professeurs ne disposent pas de situations d'enseignement qui leur permettraient de faire développer par leurs élèves des savoir-faire, des anticipations, des stratégies dans des rapports expérimentaux avec le milieu. Ils ne disposent pas non plus de ce fait de moyens de négocier avec eux des contrats didactiques raisonnables à propos de ces questions ni même d'évoquer avec eux ce genre de difficultés.

iii) Ces conditions seraient une cause principale des difficultés observées » (Guy Brousseau, 1984, p. 4-5)

C'est sur la base de ces hypothèses que Briand (1993) commence son travail de thèse, principalement dans le domaine des savoirs « pré-numériques » et numériques.

3.2 Le travail de Briand

Dans sa thèse, Briand construit une caractérisation de l'énumération à partir du dénombrement par comptage. Il s'intéresse aussi aux connaissances d'énumération en jeu dans les situations de construction des opérations arithmétiques élémentaires.

Dans la suite de ce travail, nous prenons appui sur les résultats qu'il a produits dans le cadre du comptage.

Le dénombrement par comptage a été étudié également dans le cadre de la psychologie (Gelman & Gallistel, 1986). Le dénombrement par comptage organise la mise en correspondance terme à terme entre la liste (stable et ordonnée) des mots-nombres et l'ensemble des éléments de la collection d'objets qu'il s'agit de dénombrer.

Briand (1993) en donne une description algorithmique.

« Pour compter le nombre d'éléments d'une collection donnée en ostension, l'élève doit nécessairement :

- 1- Être capable de distinguer deux éléments différents d'un ensemble donné.
- 2- Choisir un premier élément de la collection.
- 3- Énoncer le premier mot nombre (un).
- 4- Déterminer un successeur dans l'ensemble des éléments non déjà choisis.
- 5- Attribuer un mot-nombre (successeur du précédent dans une suite de mot-nombres).
- 6- Conserver la mémoire des choix précédents.
- 7 Recommencer 3 et 4 en les synchronisant.
- 8- Savoir que l'on a choisi le dernier élément.
- 9- Énoncer le dernier mot nombre. » (Briand, 1993, p. 21)

Briand élimine de cette description les parties de l'algorithme référant à la connaissance de la comptine numérique.

- « 1- Être capable de distinguer deux éléments différents d'un ensemble donné.
- 2- Choisir un premier élément de la collection.
- 4- Déterminer un successeur dans l'ensemble des éléments non déjà choisis.
- 6- Conserver la mémoire des choix précédents.
- 7- Recommencer 4.
- 8- Savoir que l'on a choisi le dernier élément." (Briand, 1993, p. 21)

Une fois les aspects numériques éliminés du comptage, reste une activité, non numérique par construction, et que Briand nomme énumération. L'énumération est donc une technique assurant le passage en revue une et une seule fois de chaque élément d'un ensemble.

Pour Briand (1993), l'énumération est une connaissance permettant de contrôler une situation de comptage:

« [...] pour contrôler une situation de comptage, l'enfant doit faire fonctionner une connaissance (l'énumération) qui se réfère à l'exploration de la collection et qui conditionne complètement le bon déroulement de l'activité. [...] » (Briand, 1993, p. 52)

Dans le cas classique du dénombrement d'un ensemble de points dessinés sur une feuille, comme sur la figure 1, le doigt pointe un à un les points à dénombrer. Ce faisant, l'ensemble des points est parcouru selon un certain « ordre » qui peut être représenté par le chemin réalisé par le doigt.

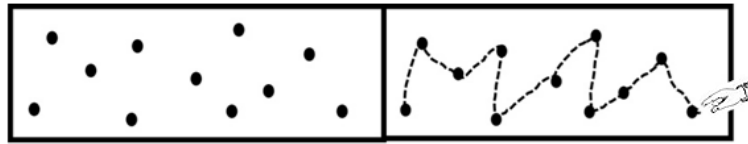


Figure 1. – Ensemble de 11 points épars (Margolinas et al., 2015, p. 188).

C'est ainsi que Briand va constater que :

« dans la réalisation effective de l'énumération d'une collection, la relation d'ordre n'est pas nécessaire. Elle est une conséquence d'une énumération » (Briand, 1993, p. 30)

Ceci le conduit à faire une étude mathématique de l'énumération comme production d'une relation d'ordre et à proposer une première définition pour un ensemble fini : « une énumération de l'ensemble E est un ordre total sur cet ensemble » (Briand, 1993, p. 23).

Cette première définition s'avère peu fonctionnelle, dans la mesure où elle ne permet pas de rendre compte « de la façon dont l'énumération se réalise », il va introduire la notion de chemin.

« Soit un ensemble E et une relation binaire antisymétrique notée R . Un chemin C de E selon R est une suite d'éléments de E ($a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$) telle que $\forall i \in [1, n-1]$ alors $(a_i, a_{i+1}) \in R$ » (Briand, 1993, p. 24)

Muni de la notion de chemin, il peut produire une seconde définition.

« Soit un ensemble E fini muni d'une relation antisymétrique R . Tout chemin (relatif à R) maximal sans cycle de E est une énumération de l'ensemble E » (Briand, 1993, p. 25).

Dans la situation de comptage, Briand met en évidence deux conceptions des collections vis-à-vis de l'énumération : « ce sont les énumérations directes qui mettent en jeu un rangement de la collection et les énumérations fondées sur un partitionnement de celle-ci » (1993, p. 264). Ces deux conceptions sont présentées de manière détaillées dans le paragraphe suivant.

Son travail sur la situation fondamentale de l'énumération le conduit à identifier les variables qui modifient les conditions de l'énumération.

Par ailleurs, au-delà des domaines du dénombrement, des opérations arithmétiques et de l'analyse combinatoire, Briand affirme l'existence « d'autres domaines mathématiques de

l'enseignement obligatoire dans lesquels l'énumération est présente et ignorée ». (1993, p. 264)

4. Recherche de situation fondamentale de l'énumération de Briand

Briand (1993) suit la méthode fondatrice de la théorie des situations didactiques, qui est de « faire correspondre [...], à chaque connaissance, sa situation fondamentale. » (Guy Brousseau, 1984, p. 4).

4.1 La situation des chênes

Dans la recherche de la situation fondamentale, Briand (1993) étudie les relations qu'entretiennent dénombrement par comptage et pratiques d'énumération. Il conduit des expérimentations qui l'amènent notamment à proposer plusieurs situations de dénombrement à des sujets qui sont des élèves de CP. Il s'agit pour lui de valider des hypothèses sur la nature des stratégies mises en œuvre par les sujets et sur la concurrence qui s'exerce entre ces stratégies d'énumération.

Commençons par rappeler la définition de la notion de partition, dont nous ferons un usage massif dans cette recherche. Pour cela, nous nous appuyons sur la définition produite par Bouvier et al. (2013) dans son dictionnaire des mathématiques.

« Partition d'un ensemble E – Ensemble non vide de parties de E qui sont non vides, disjointes deux à deux et dont la réunion est égale à E » (Bouvier et al., 2013, p. 630)

Le schéma ci-dessous montre la réalisation d'une partition d'un ensemble en deux sous-parties.

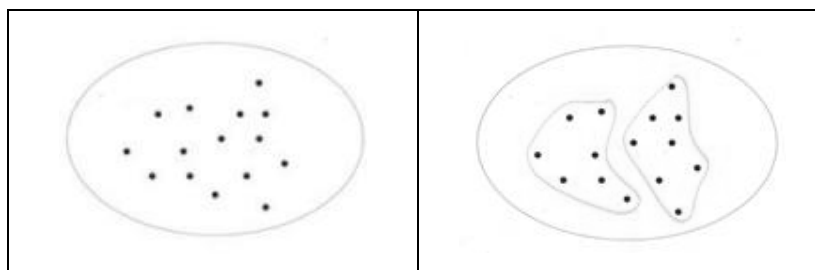


Figure 5 : Schéma de la partition d'un ensemble en deux sous-parties

Dans ces situations, les sujets doivent dénombrer une collection d'objets dessinés sur une feuille, des arbres en l'occurrence. Pour ce faire, les sujets ont la possibilité d'écrire sur le

support qui leur est proposé. Briand étudie les procédures mises en œuvre par les sujets en focalisant son analyse sur les dimensions d'organisation pour produire une énumération de cette collection d'objets.

Trois situations sont proposées. Nous nous intéressons ici à la situation des chênes. Ce qui caractérise cette situation par rapport aux deux autres proposées est l'absence de structure évidente de la collection proposée. Dans les autres situations, des structures apparaissent plus spontanément, et permettent la mise en œuvre d'une énumération par appui sur les structures lignes et/ou colonnes des collections ou sur des partitions suggérées.

Nous choisissons de ne revenir que sur les collections sans structure évidente dans la mesure où ce sont celles-là qui font apparaître chez le sujet la nécessité de produire une organisation pour pouvoir énumérer correctement, « *le choix de la structuration incombe à l'élève* » (Briand, 1993, p. 133)

Ainsi cette absence de structure évidente permet à Briand d'observer les stratégies mises en œuvre par les sujets pour essayer de répondre à la question posée.

Commençons par insister sur les conditions matérielles qui sont proposées au sujet pour investir cette situation. Les sujets disposent de la collection des chênes représentée sur un support écrit de la taille d'une feuille A4. Les sujets disposent d'un crayon. Ils ont le droit d'écrire sur cette feuille. *A priori* l'absence de référence à un dispositif de type gomme dans la description de l'organisation matérielle nous laisse penser que les sujets ne peuvent pas effacer les signes graphiques produits.

Briand repère les procédures mises en œuvre par les sujets lors d'observations et structure une analyse de ces procédures en décrivant deux stratégies :

- Une stratégie R qui repose sur « un rangement de la collection »
- Une stratégie P fondée sur un partitionnement de la collection

Examinons, en appui sur des travaux d'élèves, ce que Briand entend par là. Nous compléterons les analyses de Briand en appui sur la matérialité.

4.1.1 La stratégie (R)

Cette première stratégie que Briand décrit est directement fondée sur la seconde définition qu'il a produit de l'énumération, à savoir la réalisation d'un chemin qui va passer par l'ensemble des éléments de la collection.

Pour Briand, cette stratégie est la stratégie de base, celle qui se déduit directement de la définition. Le caractère premier de la stratégie est renforcé par l'adjonction du qualificatif « directe » à l'énumération.

Illustrons nos propos en appui sur une présentation de quelques-unes des données produites par Briand, suivies de l'analyse que nous en faisons. Nous allons détailler le travail réalisé par quatre élèves de CP.

4.1.1.1 Le travail de Mylène

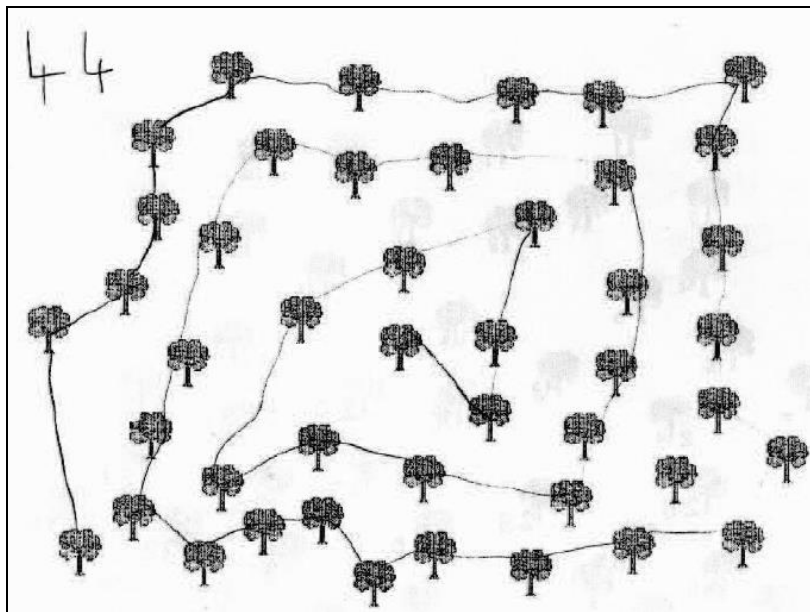


Figure 6: « Travail de Mylène, exemple de chemin organisé en escargot » (Briand, 1993, p. 311)

Pour Briand, Mylène a mis en œuvre une procédure d'énumération directe, par chainage, par fabrication d'un rangement qu'il nomme stratégie R.

Introduisons des dimensions matérielles à l'analyse de la procédure de Mylène.

Mylène a tracé avec son crayon un chemin qui passe une fois et une seule par chaque élément de la collection. Elle a dessiné un trait continu en commençant par les éléments les plus extérieurs de la collection. Le point de départ de son tracé est l'élément qui figure dans le coin bas et gauche de sa feuille. Ce tracé s'organise autour d'un sens de rotation, celui des aiguilles d'une montre et passe par les éléments qui apparaissent comme les plus extérieurs à ce principe de rotation. Le tracé se termine par un élément que l'on peut à ce moment qualifier de central.

La stratégie (R) décrite par Briand est une stratégie qui repose sur le traitement un par un des éléments de la collection.

Bien que nous n'ayons pas observé Mylène en situation, nous avons formulé une hypothèse sur le sens du chemin qu'elle a produit. En effet, orienter le chemin dans le sens inverse signifierait choisir comme premier élément celui que nous avons qualifié de central dans notre description. Cela nous semble peu plausible dans la mesure où le repérage de cet élément central comme premier élément nous semble peu évident perceptivement.

4.1.1.2 Le travail de Mélissa

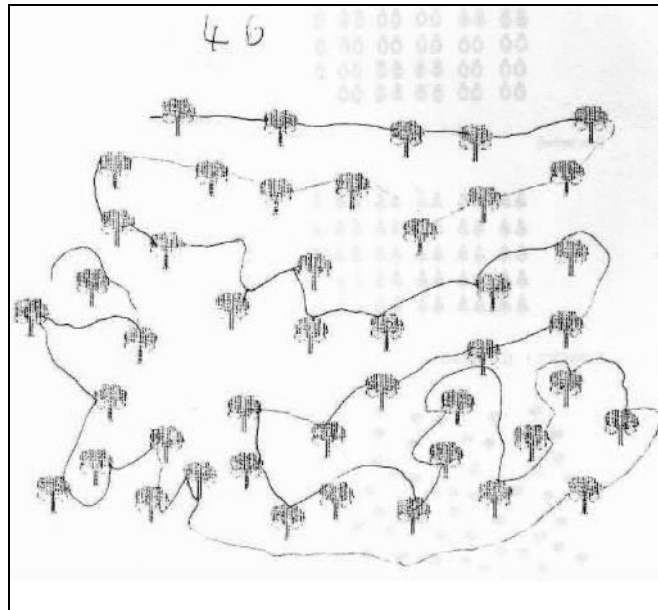


Figure 7 : « Travail de Mélissa, réalise une piste à partir d'un tracé continu » (Briand, 1993, p. 310)

Pour cette élève, nous disposons d'une indication sur les mots qu'elle a prononcé lors de la collecte des données : « je fais la promenade et après je compte ».

Comme Mylène, Mélissa a tracé avec son crayon un chemin qui passe une fois et une seule par chaque élément de la collection. Elle a dessiné un trait continu qui s'appuie sur le repérage d'une série de lignes, au moins pour le démarrage de l'exploration.

Pour Briand, Mélissa met en œuvre une stratégie d'énumération directe par rangement. Ce qui diffère ici par rapport à la stratégie de Mylène est l'appui sur une structure, ici une structure ligne.

Au sein des stratégies d'énumération directes, apparaissent deux variantes liées à la nature de l'appui sur une structure (escargot pour Mylène et lignes pour Mélissa).

Poursuivons notre introduction des dimensions matérielles à l'analyse de la procédure de Mélissa.

Là encore, nous formulons une hypothèse sur le sens du chemin qui a été produit. Le point de départ du tracé nous semble être l'élément qui figure premièrement le plus haut dans sa feuille et deuxièmement le plus à gauche. Pour s'en convaincre il suffit de raisonner par l'absurde. Imaginons que Mélissa ait commencé par ce que nous considérons comme étant le dernier élément du chemin. Cela semble peu plausible qu'elle puisse produire un chemin de la forme attendue, avec un parcours des éléments de la collection qui semble très désorganisé à son démarrage pour terminer par une dernière ligne parfaitement organisée.

4.1.1.3 Le travail de Mathilde

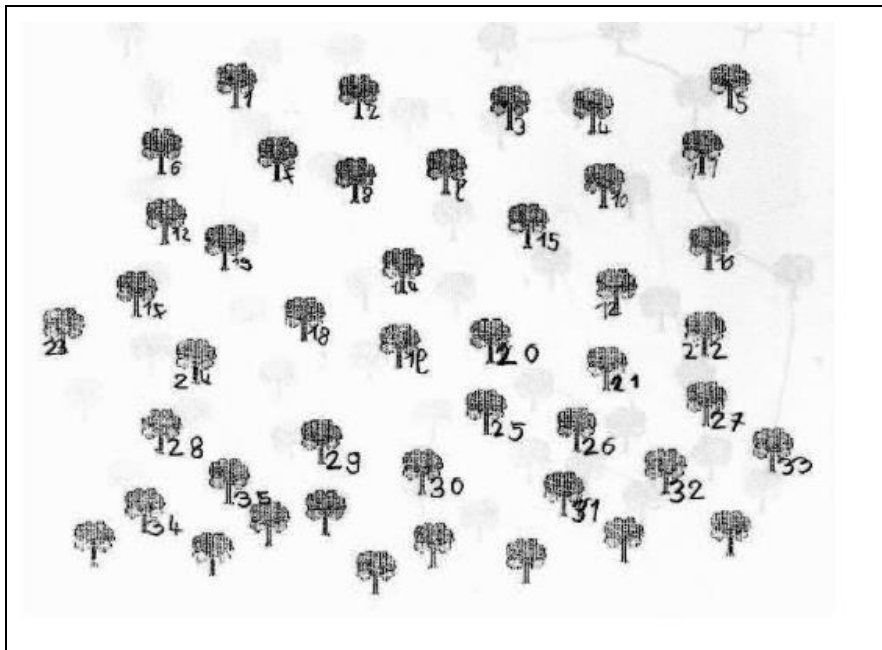


Figure 8 : « Travail de Mathilde, exploration de la collection en ligne » (Briand, 1993, p. 312)

Pour Briand, « les nombres sont inscrits, mais ne viennent pas au secours de Mathilde lorsque se pose le problème du choix du 36^e élément »

La stratégie mise en œuvre par Mathilde apparaît comme une variation de la stratégie mise en œuvre par Mélissa, le marquage remplaçant le chemin. C'est encore une stratégie d'énumération directe au sens de Briand, « d'énumération chainage », puisque les éléments sont traités un à un.

Complétons l'analyse en référence à la matérialité.

Mathilde met en œuvre une stratégie qui par certains aspects apparaît en rupture avec les stratégies observées précédemment. Il n'y a pas ici de fabrication d'un tracé continu comme nous l'observons dans les deux cas précédents. Les éléments de la collection sont marqués par un signe graphique au fur et à mesure que l'exploration se poursuit. Ce signe graphique est

l'écriture chiffrée de la suite des nombres. C'est une collection de symboles qui permet de reconstituer, visuellement par exemple, le chemin qui est suivi par Mathilde pour explorer sa collection. La fabrication de ce marquage apparaît comme la mise en œuvre d'un processus discret qui colle au plus près du caractère discret de la collection d'éléments qu'il fallait énumérer. De ce point de vue, la forme du geste mis en œuvre ne présente plus le caractère continu qui apparaissait dans le geste graphique qui était réalisé précédemment.

Le marquage des éléments de la collection n'est pas réalisé jusqu'à son terme. Nous ne pouvons donc pas savoir quel aurait été le dernier élément. Le marquage des éléments s'interrompt après l'écriture de l'étiquette 35 sur le dernier élément de la collection qui a été traité. On peut imaginer que le travail n'est pas conduit à son terme.

Remarquons que, pour les éléments qui ont été marqués, le marquage est plutôt toujours positionné au même endroit, sous le feuillage du chêne et plutôt à droite du tronc.

Une structuration en lignes a été élaborée par Mathilde, avec un choix de premier élément qui est identique à celui qui avait été réalisé par Mélissa.

Le marquage qui est réalisé ici est fait avec une collection d'objets ordonnés (la collection des écritures chiffrées des nombres). Le choix du premier élément est donc ici tout à fait explicite.

4.1.1.4 Le travail de Juliette

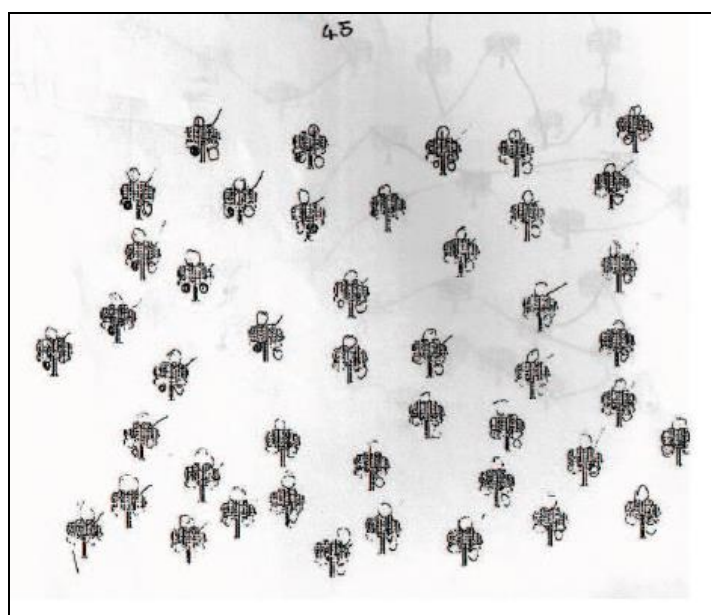


Figure 9 : Travail de Juliette (Briand, 1993, p. 318)

Pour Briand, Juliette «*exécute un marquage sans se préoccuper du comptage. A la fin du marquage, elle s'aperçoit que le marquage ne convient pas. Elle recommence alors un autre marquage en comptant*».

Complétons l'analyse en référence à la matérialité.

Comme chez Mathilde, il n'y a pas de chemin continu qui lie les chênes les uns aux autres. Un symbole graphique a été inscrit sur chaque élément de la collection de chênes, au fur et à mesure qu'ils étaient traités.

Nous ne pouvons pas reconstituer l'ordre dans lequel la collection de chênes a été énumérée, puisque contrairement à la collection des écritures chiffrées, c'est une collection de symboles tous identiques qui est utilisée ici. La collection des signes utilisés a certaines caractéristiques que l'on trouve dans les stratégies de fabrication d'un chemin continu. Le premier élément traité n'apparaît pas explicitement. Nous n'avons ici aucune indication qui nous permette de conjecturer sur l'ordre dans lequel les éléments ont été traités. La stratégie mise en œuvre pourrait tout autant relever du chemin en escargot que de la stratégie ligne.

4.1.2 La stratégie (P)

Dans son analyse *a priori*, Briand anticipe sur une seconde stratégie d'énumération qui repose sur la réalisation d'un partitionnement de la collection de chênes. Il nomme cette stratégie (P).

Quand le sujet met en œuvre cette stratégie pour dénombrer sa collection, il se retrouve avec un algorithme que Briand décrit :

« La stratégie P se décompose en actions qui doivent être coordonnées :

- Explorer la collection en effectuant des paquets (selon une règle implicite ou explicite qui peut varier). Cette classification peut contribuer à une énumération finale ou non.
- Faire un bilan numérique de chaque classe à l'aide d'une stratégie R.
- Effectuer une énumération sur l'ensemble des cardinaux de chaque classe afin de produire soit une concaténation de nombres, soit une suite additive, soit éventuellement une écriture canonique du cardinal de l'ensemble. Cette énumération suppose que l'enfant conçoive le remplacement d'une classe par le cardinal. » (Briand, 1993, p. 131)

Briand observe plusieurs modalités graphiques de réalisation de cette stratégie. Nous allons en présenter deux ici.

4.1.2.1 Le travail de Christian

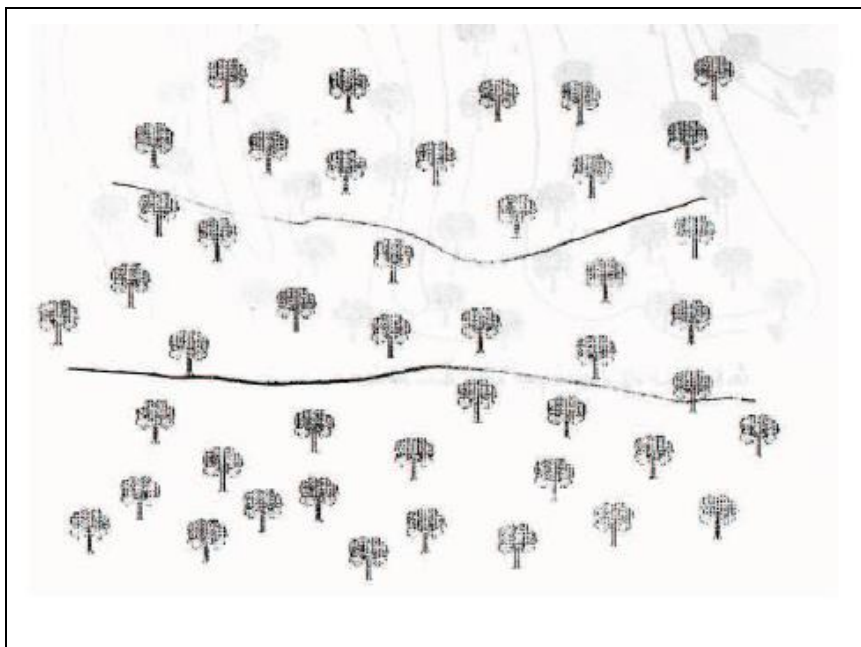


Figure 10 : « Travail de Christian, réalisation de classes à l'aide de frontières » (Briand, 1993, p. 315)

Briand nous indique que « l'enfant de moitié, de partage ».

Nous complétons l'analyse en référence à la matérialité en indiquant que Christian se contente d'un simple trait pour représenter la fabrication des sous-ensembles.

4.1.2.2 Le travail d'Arnaud

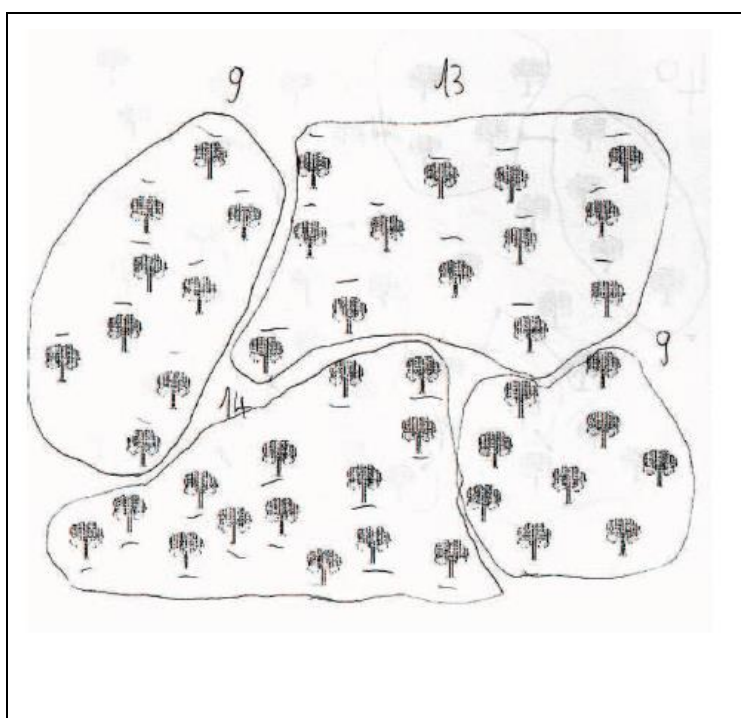


Figure 11 : travail d'Arnaud (Briand, 1993, p. 314)

Briand nous indique qu' « une classe est réalisée par exploration spatiale et comptage. L'enfant s'arrête à, 9. Les trois autres classes sont obtenues de la même façon ».

En appui sur la matérialité, nous pouvons dire qu'Arnaud met en œuvre un geste graphique différent dans la mesure où il fabrique un trait continu fermé pour représenter chacun des sous-ensembles fabriqués.

Nous n'entrons pas ici dans les détails de l'analyse de la question de la production du résultat numérique. Notons cependant que, au sens de Briand :

- Christian n'a pas fait le bilan numérique de chaque classe
- Arnaud a bien fait le bilan numérique de chaque sous-ensemble à l'aide de la stratégie R (en mettant en œuvre une stratégie de fabrication de signes graphiques identiques sur certains sous-ensembles, comme Juliette l'avait fait sur l'ensemble entier)

4.1.3 Des observations qui posent question

Lors de ses expérimentations, Briand va rencontrer des stratégies non prévues. Nous allons revenir sur deux de ces observations et qui vont lui permettre de revenir sur son analyse *a priori* des stratégies.

Commençons par analyser le travail réalisé par Claire.

4.1.3.1 Le travail de Claire

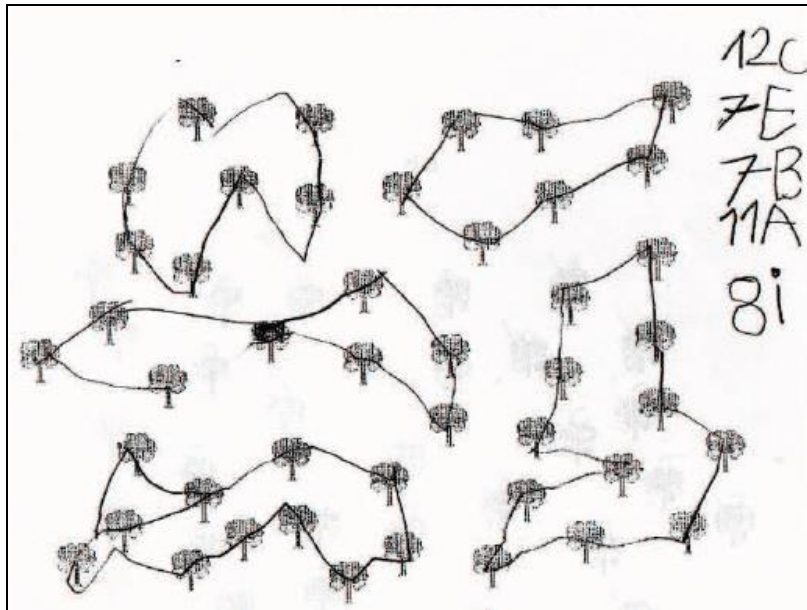


Figure 12 : Travail de Claire (Briand, 1993, p. 317)

Briand nous indique que Claire mis en œuvre un « *chainage comme moyen de constituer une partition. Claire effectue en même temps, la désignation des classes* ».

Claire met en œuvre une stratégie en œuvre une stratégie (P). Elle partitionne bien son ensemble de départ en cinq sous-ensembles.

En appui sur la matérialité, revenons sur la forme graphique que Claire met en œuvre pour symboliser la fabrication des sous-ensembles. Claire a dessiné un trait continu qui passe par chacun des éléments du sous-ensemble. Donc de ce point de vue, elle met en œuvre une stratégie (R) sur chaque sous-ensemble. Le trait qui est réalisé pour symboliser les sous-ensembles est un trait continu fermé, qui boucle sur lui-même. Pour autant, ce n'est pas une stratégie (R) qui est mise en œuvre sur l'ensemble lui-même.

La mise en œuvre d'une procédure de ce type pour fabriquer des sous-ensembles ne permet pas tout type de fabrication dans la mesure où « l'épaisseur » du sous-ensemble est limitée, contrairement à la représentation d'Arnaud. Nous nous trouvons face à une représentation qui apparaît comme entre le trait continu représentant le chemin et la ligne fermée représentant le sous-ensemble.

De plus, notons que Claire a construit les traits, des chemins, dont certains passent plusieurs fois sur le même élément. Pour autant, ce double passage sur un élément ne perturbe pas la production du cardinal du sous-ensemble (ensembles I pour 8I et A pour 11A).

Intéressons-nous maintenant aux écritures à côté de la collection de chênes.

Briand a décrit le processus mis en œuvre dans cette situation et a repéré deux variantes.

« Ceux qui prévoient l'énumération des nombres (ils disposent les nombres à part) et ceux qui ne prévoient pas : ceux-ci écrivent le nombre à côté de la classe concernée.

Des enfants entourent d'abord et ne se préoccupent pas de tenir la comptabilité pour chaque classe constituée. Ainsi, des enfants travaillant de façon très organisée sous contrôle numérique "faire des paquets de 5", mais qui ne marquent pas les 5 au fur et à mesure, n'ont plus la possibilité de produire une énumération des paquets ou bien commettent des erreurs. D'où des oublis du 5 dans la suite additive. Dans le domaine étudié dans le cadre de notre observation, les enfants peuvent énumérer les classes parce qu'elles sont dans un domaine de contrôle que nous qualifions de proche de la perception globale. Certains enfants sont toutefois très hésitants sur la façon d'explorer ce nouvel ensemble. » (Briand, 1993, p. 148)

Claire n'a pas fabriqué des sous-ensembles de taille fixe. Par contre, elle se préoccupe bien de tenir la comptabilité de chaque classe, vraisemblablement au fur et à mesure que chaque classe est fabriquée. En tout cas, elle n'en n'a oublié aucune.

Entrons dans l'analyse de la matérialité de la forme écrite qu'elle a produite. Cette série d'écritures chiffrées, soigneusement positionnées les unes sous les autres, est une forme graphique qui, dans le registre de l'écrit est un chemin. En appui sur des considérations anthropologique de l'écrit, nous pouvons affirmer que Claire met en œuvre une stratégie d'énumération directe de sa collection écrite des cardinaux des sous-ensembles qu'elle a fabriqués.

Examinons maintenant le travail d'Alexandre.

4.1.3.2 Le travail d'Alexandre

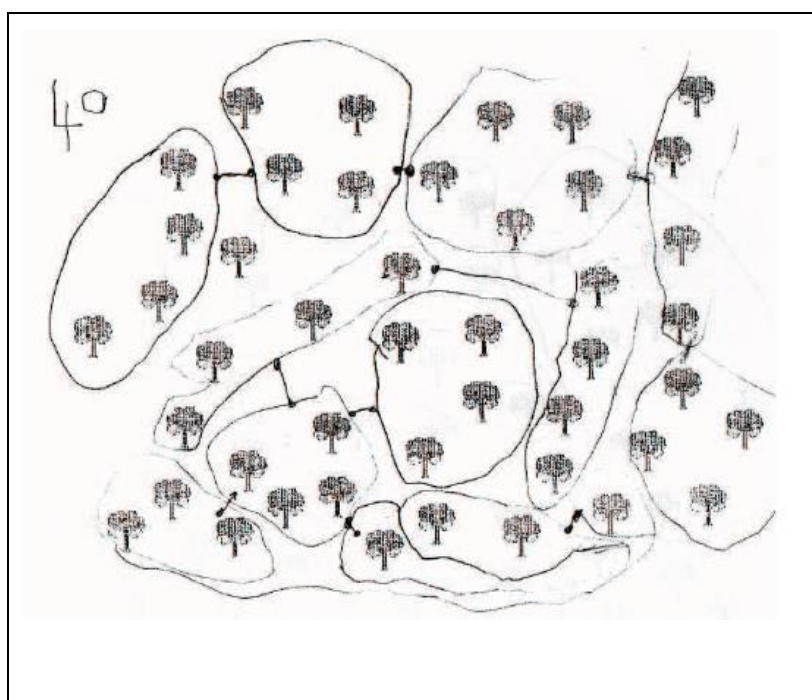


Figure 13 : Travail d'Alexandre (Briand, 1993, p. 313)

Briand nous indique que « *la constitution des classes se fait à partir du choix d'un nombre : (paquets de 4)* ». Alexandre a partitionné la collection d'éléments en sous-ensembles. Il met donc bien en œuvre une stratégie de type (P).

Par ailleurs, Alexandre réalise une partition de sous-ensembles qui ont tous même cardinal, ce qui correspond à une des formes attendues par Briand.

Du point de vue de la matérialité, nous remarquons que le signe graphique réalisé pour symboliser l'ensemble est du type ligne fermée, comme ceux réalisés par Arnaud.

Par contre, Briand remarque que le travail d'Alexandre va au-delà du simple partitionnement, puisqu'en plus de la fabrication de signes graphiques matérialisant les sous-ensembles de 4 éléments figurent aussi des signes graphiques qui matérialisent un lien entre ces différents sous-ensembles. Il qualifie la stratégie mise en œuvre par Alexandre de « *mixte* » (Briand, 1993, p. 148).

La fabrication d'une partition a certes réduit le nombre d'éléments à traiter. Cette fabrication ne règle pas pour autant la question de l'énumération de la collection des nouveaux objets que constituent ces sous-ensembles.

On peut légitimement formuler l'hypothèse que cette suite de liens entre les différentes sous-ensembles peut s'interpréter comme un chemin, et que c'est l'appui sur ce chemin qui va permettre d'organiser l'exploration des différents sous-ensembles de la collection.

Alexandre met donc en œuvre une stratégie qui combine les deux stratégies élaborées par Briand.

Claire et Alexandre fournissent donc deux exemples de combinaisons différentes des stratégies (R) et (P).

4.1.4 Les limites du comptage dans le développement des stratégie d'énumération

Briand identifie les limites de la situation de comptage dans le développement des connaissances d'énumération :

« Le comptage constitue un obstacle à la mise en concurrence des pratiques énumératives, par surdétermination de la stratégie de chaînage d'une part, par la confusion qu'il entretient entre les activités d'exploration de collection et lui-même » (Briand, 1993, p. 132)

Il a identifié au sein de son échantillon deux groupes distincts qui ont chacun une conception distincte de l'énumération. Certains conçoivent *« plutôt l'énumération chaînage comme une technique de base »* (Briand, 1993, p. 145) alors que d'autres conçoivent des techniques mettant en œuvre des partitionnements

Il poursuit l'analyse des résultats de son expérimentation en référence à la construction du nombre.

Cette conclusion pose un réel problème pour l'enseignement du nombre. Une énumération féconde pour la construction de la numération [...] ne constitue pas la stratégie la plus performante pour effectuer le comptage. Or, c'est le comptage qui est demandé. Il y a ainsi des risques à voir les enfants ne pas s'investir dans l'exploration de type partition parce que cette exploration ne constitue pas une solution efficace dans l'immédiat du cours préparatoire » (Briand, 1993, p. 145)

Il perçoit l'importance des stratégies de partitionnement et dans le même temps, ses données sur la situation des chênes lui indiquent que les élèves de son échantillon qui réussissent le moins bien sont ceux qui utilisent cette stratégie.

4.1.5 Ce que nous tirons de la situation des chênes pour notre recherche

La situation des chênes permet d'exhiber certaines stratégies mises en œuvre quand on énumère une collection. Briand montre que cette situation comptage ne permet pas de développer la stratégie de partitionnement chez tous les sujets.

Nous tirons de cette situation des pistes du point de vue de la question des stratégies d'énumération.

Du point de vue des stratégies, nous pouvons affirmer que :

- il y a donc même dans ces situations très simples une complexité, liée aux combinaisons possibles de stratégies. Nous cherchons à mieux décrire cette complexité
- il semble difficile d'envisager séparément et indépendamment les deux stratégies (R) et (P). Nous cherchons à construire un modèle qui rende compatible l'utilisation simultanée de ces deux stratégies

4.2 La situation des allumettes

Briand (1999) prolonge son travail de recherche en construisant une ingénierie pédagogique sur l'énumération pour des enfants de 4-5 ans.

Dans la situation de dénombrement par comptage, l'énumération apparaît comme une connaissance nécessaire à la réussite, sans pour autant qu'elle soit la seule connaissance nécessaire.

Ce qui caractérise une connaissance est l'existence d'une situation dans laquelle la connaissance est la solution optimale du problème posé. Briand cherche à construire une situation de ce type, qui s'affranchisse du recours au nombre.

« Comment alors mettre en place des situations dans lesquelles l'énumération d'une collection soit seule (indépendamment du nombre) la solution à un problème posé ? » (Briand, 1999, p. 57)

Même si Briand a pour objectif de produire une situation qui puisse permettre de fabriquer des ingénieries d'enseignement, c'est bien une nécessité théorique qui guide la fabrication de la situation.

4.2.1 Description de la situation

Briand (1999) donne une description de la situation.

« Un élève dispose devant lui (sur une table) d'un tas de boîtes d'allumettes identiques percées sur le côté d'un petit trou permettant le passage d'une allumette. Des bâtonnets (sans le phosphore) sont les allumettes. Ces bâtonnets, en grand nombre, sont dans une boîte plastique. Il s'agit de placer une allumette et une seule dans chaque boîte sans l'ouvrir, de savoir lorsque l'on a terminé, puis de s'assurer si l'on a réussi ou échoué en ouvrant les boîtes. S'il y a une seule allumette dans chaque boîte et si aucune boîte n'est vide, alors l'élève a réussi. » (Briand, 1999, p. 57)

Nous allons maintenant revenir sur quelques aspects de cette description, en les reformulant ou en précisant ce que nous en avons compris.

4.2.1.1 Les conditions de réussite, une double contrainte

Briand produit un jeu, au sens de Brousseau, qui a pour objectif de modéliser le savoir visé. Le jeu consiste à placer une allumette et une seule dans chacune des boîtes d'une collection. L'expression « une et une seule » est une expression mathématique qui permet de décrire de manière très condensée la réalisation d'une double contrainte.

Explicitons plus avant cette double contrainte.

Deux conditions doivent être réalisées simultanément pour que la partie soit gagnée. Ces deux conditions peuvent être formellement décrites de la manière suivante :

- Mettre au moins une allumette dans chaque boîte
- Mettre au plus une allumette dans chaque boîte

Là encore, la description donnée reste très formelle. Une manière de mieux faire comprendre ce que sous-entend chacune de ces conditions peut consister à donner une description de leur non-réalisation.

- Mettre au moins une allumette dans chaque boîte devient « Le sujet ne doit pas mettre deux allumettes dans une même boîte »
- Mettre au plus une allumette dans chaque boîte devient « Le sujet ne doit pas oublier de mettre une allumette dans chacune des boîtes »

Ce système de double contrainte réapparaît dans le texte de Briand dans la description des conditions de validation :

« S'il y a une seule allumette dans chaque boîte et si aucune boîte n'est vide, alors l'élève a réussi. » (Briand, 1999, p. 57)

4.2.1.2 Le caractère non visible du traitement réalisé

La difficulté de la situation réside dans l'impossibilité pour le sujet de voir le résultat des actions qu'il réalise (mettre une allumette dans une boîte) au fur et à mesure qu'il les effectue.

A cet effet, les côtés des boîtes d'allumettes sont perforés afin de laisser passer l'allumette quand le sujet cherche à la mettre dans la boîte mais pas suffisamment pour voir le contenu de la boîte.

Le sujet ne peut pas, pendant la phase de jeu, ouvrir une boîte et observer ainsi le nombre d'allumettes qu'elle contient.

Briand a choisi de rendre non visible le caractère du traitement réalisé.

4.2.1.3 La fin du jeu

Le jeu s'arrête quand le sujet le décide, donc soit quand il pense qu'il a réalisé les deux conditions, soit pour toute autre raison.

4.2.1.4 Le contrôle de la réussite

C'est une fois que le sujet a décidé que le jeu était terminé que les boîtes peuvent être ouvertes pour savoir si le sujet a gagné.

Le sujet gagne si chaque élément de la collection de boîtes d'allumettes est traité une fois et une seule. Le traitement d'une boîte consiste ici à insérer une allumette dans cette boîte. Une stratégie gagnante consiste à s'organiser pour énumérer la collection de boîtes et les traiter au fur et à mesure que le sujet les énumère.

Pour gagner, le sujet doit donc énumérer la collection des boîtes d'allumettes et réaliser une action sur chacune de ces boîtes. Cette action est de nature non numérique. La situation produite a pour stratégie optimale la mise en œuvre d'une énumération et ne requiert aucune connaissance numérique.

4.2.2 Les variables de la situation et les variantes du jeu

Briand identifie les variables de la situation :

« V1- Le type d'espace dans lequel l'élève va travailler. Ici, nous avons choisi de fixer cette variable. Il s'agit du micro-espace du plan de travail de la table. Chaque enfant travaille sur une table 120x80.

V2- Le nombre de boîtes.

V3- Le fait que les objets (boîtes d'allumettes) soient effectivement déplaçables ou non.

V4- La possibilité de déplacer les boîtes dans un espace restreint ou plus large. (liée à V1 et V3)

Remarque : le marquage des boîtes n'est ni suggéré, ni institué. »(Briand, 1999, p. 58)

Une série de 5 jeux est proposée et étudiée pour Briand.

	<i>Configuration matérielle</i>	<i>Raison des choix</i>	<i>Analyses effectuées après l'expérimentation</i>
<i>Jeu 1</i>	<i>8 boîtes déplaçables.</i>		<ul style="list-style-type: none"> – <i>Stratégies pour remplir des boîtes, élaborer une collection.</i> – <i>Etude d'énumérations induites involontairement.</i>
<i>Jeu 2</i>	<i>20 boîtes déplaçables.</i>	<i>Changement significatif du nombre de boîtes.</i>	– <i>Influence du passage de 8 à 20 sur les résultats, et sur les stratégies mises en œuvre.</i>
<i>Première phase collective</i>		<i>Faire formuler les stratégies, faire anticiper un résultat.</i>	<ul style="list-style-type: none"> – <i>Passage des propositions aux prédicats puis aux calculs sur prédicats.</i> – <i>Traitement des erreurs par l'enseignant.</i>
<i>Jeu 3</i>	<i>20 boîtes déplaçables.</i>		
<i>Jeu 4</i>	<i>15 boîtes déplaçables. Une allumette déjà présente dans la boîte.</i>	<i>Le secouage (deux allumettes) 15 : 20 rend trop long la validation.</i>	– <i>Etude détaillée du «secouage».</i>
<i>Deuxième phase collective</i>	<i>15 boîtes déplaçables. Une allumette déjà présente dans la boîte.</i>	<i>Faire formuler les stratégies. faire anticiper un résultat.</i>	<ul style="list-style-type: none"> – <i>Un savoir et son enseignement possible ou impossible.</i> – <i>Limites de ce type de séances.</i> – <i>Absence d'une situation a-didactique de formulation.</i>
<i>Jeu 5</i>	<i>15 boîtes non déplaçables. A nouveau une seule allumette.</i>	<i>Énumérer une collection d'objets non déplaçables. Faire des marques.</i>	– <i>Analyse de la complexité de la tâche.</i>

Tableau 1 : les variantes du jeu des allumettes (Briand, 1999, p. 59)

Même si cela n'apparaît pas explicitement, on peut conjecturer que la variable qui structure l'évolution de la situation est la variable V3, caractère déplaçable ou non de la collection des boîtes d'allumettes (boîtes déplaçables pour les jeux 1 à 4 et boîtes non déplaçables pour le jeu 5).

La variable V1 n'est pas activée dans cette proposition puisque la taille de l'espace est inchangée dans les 5 jeux.

La variable V2 (nombre de boîtes en jeu dans la situation) est activée pour créer des variantes dans les trois premiers jeux.

Le jeu 4 est produit suite aux observations des premiers jeux qui voient les sujets secouer les boîtes d'allumettes pour contrôler la présence ou non d'une allumette à l'intérieur.

4.2.3 Les stratégies du jeu 5

Dans la continuité du travail sur la situation des chênes, ne vont être étudiées dans le jeu 5 que les stratégies qui permettent de faire des marques, comme c'était le cas quand un sujet cherchait à dénombrer les arbres dessinés sur une feuille.

<i>Elève</i>	<i>Action bouclée</i>	<i>Ruptures visuelles</i>	<i>Charge mémoire</i>	<i>Contrôle</i>
<i>S.</i>	<i>Ai : (rupture), prendre une allumette, choisir une boîte non entourée, mettre l'allumette, (rupture) prendre le stylo, entourer, (rupture) poser le stylo. Ai+1 : prendre une allumette, etc.</i>	<i>3 ruptures par boucle, autant de boucles que d'éléments N de la collection.</i>	<i>A partir de A2, l'élève doit mémoriser la dernière boîte entourée non encore remplie.</i>	<i>Contrôle par une mémorisation spatiale. N Contrôles à effectuer.</i>
<i>M.</i>	<i>Ai : entoure n boîtes (ne pose pas le stylo), (rupture) prend n allumettes et met n allumettes. Ai+1 : entoure n boîtes, met n allumettes : à partir de A2.</i>	<i>(n=2) 2 ruptures par boucle. N/2 boucles.</i>	<i>A partir de A2, l'élève doit mémoriser les n (n=2) dernières boîtes entourées non encore remplies.</i>	<i>Contrôle par une mémorisation spatiale. N/2 contrôles à effectuer.</i>
<i>E.</i>	<i>A1 : met une marque au pied de chaque boîte. Ai : met une allumette, efface la marque correspondante. (rupture) Ai+1 : met une allumette, efface la marque correspondante.</i>	<i>Une rupture par boucle.</i>	<i>Il n'y a rien à mémoriser.</i>	<i>Aucun contrôle à effectuer.</i>
<i>C.</i>	<i>Ai : (rupture) prendre une allumette, choisir une boîte non entourée, mettre l'allumette, (rupture) prendre le stylo, entourer, (rupture) poser le stylo. Ai+1 : prendre une allumette, etc.</i>	<i>3 ruptures par boucle, autant de boucles que d'éléments N de la collection.</i>	<i>A partir de A2, l'élève doit mémoriser (spatialement) la dernière boîte entourée non encore remplie.</i>	<i>Clément laisse la main sur la boîte. Ou bien il garde les yeux dessus.</i>

Tableau 2: Stratégies rencontrées dans le jeu 5 (Briand, 1999, p. 69)

Le jeu 5 tel qu'il est présenté ici est donc une situation d'énumération qui présente les mêmes caractéristiques du point de vue de l'énumération que la situation des chênes. Les éléments de la collection ne sont pas déplaçables et le sujet peut utiliser un crayon pour marquer ceux qui ont été traités.

Si nous reprenons la dénomination des stratégies choisies par Briand (1993), nous pouvons décrire les stratégies mises en œuvre soit en termes d'énumération directe (R) (pour les sujets S, E et C) soit en termes d'énumération par partitionnement (P) (pour le sujet M).

4.2.4 Ce que nous tirons de la situation des allumettes pour notre recherche

4.2.4.1 Une organisation de l'étude autour d'une variable

Briand propose une organisation générale du travail sur l'énumération qui se structure autour de la variable V3 (le fait que les boîtes soient déplaçables ou non) :

- le premier temps, autour des jeux 1 à 4, permet au sujet de se confronter à des énumérations de collections déplaçables,
- le second temps, autour du jeu 5, permet au sujet de se confronter à des énumérations de collections d'objets non déplaçables.

De fait, Briand considère le caractère déplaçable ou pas des objets de la collection comme une variable importante, qui structure l'étude.

Nous allons maintenant discuter le choix des variables réalisées par Briand dans le jeu 5.

4.2.4.2 Le marquage des éléments dans le cas «déplaçable»

Dans le jeu 5, le recours à l'écrit permet de marquer les boîtes, éléments de la collection, et donc de produire des signes qui peuvent permettre à tout instant de savoir si l'allumette a été enlevée ou pas de la boîte considérée. Dans ces conditions, la collection sera bien énumérée si le sujet marque une fois et une seule chacune des boîtes de la collection et enlève au fur et à mesure l'allumette de la boîte qu'il a ou va marquer.

La possibilité d'utiliser un crayon pour marquer les éléments de la collection au fur et à mesure qu'ils sont énumérés affaiblit beaucoup la nécessité de s'organiser. En effet le contrôle visuel que le sujet réalise de l'espace dans lequel sont placées les boîtes suffit pour qu'il soit déchargé de la mise en œuvre de toute stratégie. Au mieux, des organisations systématiques du balayage des éléments de la collection doivent améliorer la vitesse à laquelle la collection est énumérée.

Si le marquage est utilisé, la nécessité de s'organiser pour contrôler l'énumération est affaiblie. Donc, si le contrôle visuel est affaibli ou empêché, la nécessité de s'organiser pour énumérer est renforcée.

Remarquons que nous ne nous posons pas ces questions dans le cas où les collections d'objets sont déplaçables, car nous savons qu'il existe une solution qui ne fait pas appel au marquage qui s'appuie sur des considérations spatiales.

Poursuivons ce questionnement autour du marquage en revenant à la situation des chênes.

La situation des chênes n'a pas les mêmes caractéristiques matérielles que la situation des allumettes. Dans la situation des chênes, sans recours à l'écrit, il n'y a pas de moyen de savoir quels sont les éléments qui ont été ou pas traités.

Dans ces conditions, il est alors :

- nécessaire pour le sujet de s'organiser
- difficile pour l'observateur de voir comment le sujet s'est organisé pour traiter les éléments de cette collection.

Donc, nous nous trouvons face à un paradoxe pour le chercheur, qui souhaite observer des sujets. L'écrit affaiblit la nécessité pour le sujet de s'organiser mais dans le même temps, l'écrit est nécessaire pour que l'observateur comprenne comment le sujet s'organise pour énumérer.

De ce point de vue, la situation des allumettes règle cette question. C'est bien la présence d'une allumette dans la boîte qui permet de témoigner du caractère effectif du traitement qui a été ou pas réalisé. Il n'y a donc plus ici de nécessité de recourir à l'écrit pour qu'observateur et sujet sachent si un élément a ou pas été traité.

Pourtant, Briand n'envisage le jeu 5 qu'avec « marquage ». En effet, le choix du marquage dans le jeu 5 permet de produire une situation qui a des caractéristiques identiques du point de vue de l'énumération à la situation des chênes.

Le recours à l'écrit dans le cadre du jeu 5 ne nous semble donc pas guidé par la nécessité d'observer des organisations.

5. Directions de recherche

Les travaux de Brousseau et de Briand permettent de mieux comprendre ce qu'est l'énumération. L'objet est maintenant défini et sa présence identifiée dans un certain nombre de situations numériques.

Notre projet est de poursuivre cette étude en montrant que ces «connaissances d'énumération» :

- ne sont spécifiques ni au champ numérique, ni même aux mathématiques. Elles se retrouvent dans de nombreuses situations scolaires et présentent un caractère transdisciplinaire
- permettent de mieux comprendre certaines difficultés que rencontrent les élèves et que les enseignants ont du mal à décrire de manière précise (« il est lent », « il ne sait pas s'organiser »)
- sont présentes dans de très nombreuses situations, car elles n'interviennent jamais de manière isolée, dans les classes ordinaires. L'analyse des situations que l'on rencontre dans ces classes doit permettre de mieux comprendre et définir ce que sont ces connaissances.

Ce projet général va s'articuler autour d'un certain nombre de directions plus précises que nous présentons ici.

Des stratégies pour énumérer ont été identifiées. Ce sont les stratégies qui reposent sur la fabrication d'un chemin et sur le partitionnement.

Nous souhaitons pouvoir poursuivre et développer l'étude des stratégies d'énumération.

Les deux stratégies repérées pour l'instant apparaissent antagonistes et leur antagonisme empêche de considérer l'énumération comme un objet homogène.

Nous souhaitons, en appui sur l'étude des stratégies d'énumération, poursuivre la description des connaissances d'énumération et l'étude de l'antagonisme entre les stratégies déjà identifiées.

Nous disposons de données sur une situation d'énumération d'une collection d'objets non déplaçables dans laquelle le sujet peut recourir au marquage.

Nous souhaitons recueillir des données d'observation sur une situation d'énumération qui présenterait des caractéristiques identiques au jeu 5 de la situation des allumettes, sans possibilité pour le sujet de recourir à l'écrit ou à un quelconque marquage.

Nous avons intégré à notre cadre des dimensions anthropologiques qui permettent d'intégrer la question de la matérialité aux analyses des actions des sujets.

Nous souhaitons poursuivre la prise en compte de ces dimensions anthropologiques dans l'analyse des données que nous allons produire et étudier comment celles-ci peuvent s'articuler avec notre cadre didactique.

Le travail de définition de l'énumération a permis d'élaborer un texte de savoir autour de cette connaissance. Le travail que nous conduisons doit permettre de compléter ces définitions, de contribuer à mieux définir cet objet.

Nous souhaitons produire le texte du savoir en relation avec les connaissances que nous allons développer sur l'énumération.

Chapitre 2 - Le cas des collections d'objets non déplaçables

En appui sur le travail de Briand, nous considérons que le caractère déplaçable ou pas des objets de la collection est une variable qui structure l'étude. Ce caractère déplaçable ou non déplaçable constitue la variable sur laquelle nous articulons notre recherche. Ce chapitre est consacré au premier des deux cas de notre étude, le cas des collections d'objets non déplaçables.

Ce chapitre va donc être consacré à la présentation des données que nous avons collectées dans le cas des collections d'objet non déplaçables. Ces données vont être soumises à l'analyse des stratégies identifiées par Briand, ce qui va nous permettre de poursuivre notre description des connaissances d'énumération.

Pour collecter des données, nous avons besoin d'une situation à proposer aux sujets. Plutôt que de reprendre la situation des allumettes dans le cas non déplaçable et sans marquage, nous allons proposer une nouvelle situation. L'ambition de ce chapitre est d'exhiber les mécanismes mis en œuvre pour construire cette nouvelle situation. La mise en évidence des décisions successives qui sont prises lors de la construction a pour fonction de contribuer à la mise en évidence des variables de la situation fondamentale de l'énumération.

Ce chapitre est donc un chapitre qui est centré sur les données. Il se présente en deux temps : un premier temps consacré à la description de l'élaboration de la situation et son analyse *a priori* et un second temps consacré à l'analyse de données via le développement d'un jeu autour de la génération de questions sur ces données.

Chacun des deux temps poursuit un double objectif : développer des connaissances sur l'énumération et exhiber des méthodologies de recherche.

1. Instance de la situation fondamentale de l'énumération : la situation des sucres

Nous avons fait le choix de travailler sur une collection d'objets non déplaçables. En effet, dans (Briand, 1999), nous disposons de commentaires détaillés sur la nature des gestes qui sont réalisés quand la collection des allumettes est déplaçable. L'influence de la position du tas d'allumettes est étudiée, tout comme l'effet produit par le secouage de chacune des boîtes. Par contre, dans le cas où les allumettes sont collées à un support (jeu 5), nous devons nous contenter d'une analyse quantitative sur les progrès observés auprès des sujets. Nous cherchons donc ici à produire des analyses qualitatives sur les stratégies effectives mises en œuvre par les sujets dans le cas où les collections ne sont pas déplaçables.

Briand avait décrit le caractère général de l'énumération en décrivant les connaissances d'énumération dans plusieurs situations. Ces situations avaient été pour chacune d'elles proposées à différents niveaux scolaires : des élèves de Cours Préparatoire pour la situation des chênes (6/7 ans) et des élèves de Moyenne Section pour la situation des allumettes (4/5 ans). Le second objectif est de conforter ce caractère général en proposant une même situation à des sujets élèves de niveaux scolaires très différents. Il s'agit donc bien ici par la description des stratégies et également par la mise en évidence des difficultés de confirmer ce caractère général.

1.1 Elaboration de la situation

Une des situations sur lesquelles s'appuie du travail de Briand est la situation des chênes. Rappelons qu'il s'agit ici de dénombrer une collection d'arbres dessinés sur un support papier sur lequel les sujets peuvent écrire. Cela permet donc par le recours à l'écrit de marquer les éléments de cette collection et donc de produire des signes qui vont permettre à tout instant de savoir si un élément a été compté.

Nous sommes à la recherche d'une situation dans laquelle nous voudrions que la seule connaissance en jeu soit l'énumération. Comme Briand, nous ne pensons pas que la situation des arbres nous permette de bien comprendre la nature des connaissances en jeu.

Nous voulons donc construire une situation sans connaissance numérique. En effet, Briand a montré comment le comptage impactait les stratégies mises en œuvre pour énumérer la

collection de chênes. Nous cherchons ainsi à nous affranchir intellectuellement du lien qui a été fait à l'origine entre numération et énumération.

Commençons par considérer une situation des chênes dans laquelle les aspects numériques auraient été éliminés. Les sujets doivent énumérer la collection des chênes sans avoir pour objectif d'en produire le cardinal. La collection sera bien énumérée si le sujet pointe une fois et une seule chacun des éléments de cette collection.

La possibilité d'utiliser un crayon pour marquer les éléments de la collection au fur et à mesure qu'ils sont énumérés affaiblit beaucoup la nécessité de s'organiser. En effet la permanence de la trace du traitement que réalise l'écrit suffit pour se décharger de la mise en œuvre de certaines stratégies.

Si on peut marquer les éléments, alors le contrôle de l'énumération va s'appuyer sur le repérage visuel des marques produites. Dans ce cas, la décision de pointer un élément s'appuie sur la capacité à effectuer le repérage de la marques. Il n'est alors plus nécessaire de contrôler l'énumération par la mise en œuvre d'une organisation qui distinguerait les éléments traités des éléments non traités par d'uniques considérations spatiales. Si la perception visuelle de la marque du traitement est affaiblie ou empêchée alors la nécessité de s'organiser pour énumérer est renforcée.

Une manière d'affaiblir le contrôle visuel est de le rendre plus compliqué, par exemple en augmentant la taille de l'espace dans lequel est proposée cette situation.

Imaginons qu'un garde forestier souhaite dénombrer les arbres d'une forêt. Imaginons aussi qu'il faille que ce dénombrement soit de même nature que celui qui est demandé aux sujets dans la situation des chênes, à savoir produire avec certitude une valeur exacte. Nous voyons bien ici qu'au-delà du caractère numérique de la situation, la nécessité de s'organiser pour ne compter qu'une seule fois chacun des arbres va faire émerger une connaissance tout à fait importante.

De la même manière, le fait de pouvoir marquer chaque arbre par une croix ne règle pas complètement la question de l'organisation. Le marquage doit nous empêcher de compter deux fois le même arbre (en recomptant un arbre qui aurait déjà été marqué lors d'un comptage précédent). Mais comme il n'est pas possible de percevoir à tout moment la totalité des arbres de la forêt, nous ne savons pas si nous avons compté tous les arbres ou si nous en avons oublié. Donc, contrairement à ce que nous pouvions penser, le recours au marquage ne règle pas de facto la question de l'énumération.

Taille de l'espace dans lequel le sujet évolue et possibilité de marquer ou pas les éléments de la collection sont donc deux variables de notre situation. Remarquons qu'il faut faire le tour de chaque arbre pour voir s'il est marqué ou non.

Revenons à la situation des chênes (Briand, 1993). Cette situation est une situation qui se déroule dans le micro-espace et qui permet le marquage. Il n'y a aucune action spécifique à réaliser, autre que porter son regard sur un chêne pour percevoir visuellement s'il a été ou non traité. La conjonction des choix concernant ces variables ne permet pas qu'une validation par rétroaction du milieu (Margolinas, 1993).

Nous voulons construire une situation dans le micro-espace. Pour que cette rétroaction puisse être produite, nous ne pouvons pas autoriser le marquage des éléments de la collection. Ce n'est donc pas par l'écrit que va être réalisée la trace du traitement des éléments de la collection.

Nous pouvons décrire maintenant les choix réalisés par Briand quand il a conçu la situation des allumettes. Le marquage et le comptage de l'élément marqué sont remplacés par l'action de mettre une allumette dans la boîte. Cette solution permet d'éliminer le recours au numérique et à l'écrit dans les premières phases du jeu (jusqu'au jeu 4). Chaque boîte d'allumette est énumérée et la preuve du traitement de chaque élément réside dans la présence de cette allumette, preuve qui sera dévoilée en fin d'activité quand les sujets seront autorisés à ouvrir l'ensemble des boîtes. Le sujet voit alors si un élément a été énuméré ou pas en observant la présence ou non d'une allumette dans la boîte.

Nous construisons une situation qui va se dérouler dans le micro-espace. Pour permettre une rétroaction lors de la validation, il faut que le traitement qui est fait de chaque élément ne soit pas visible pendant la durée du traitement. Par contre, il faut qu'à un moment donné le traitement qui a été réalisé (ou pas) sur les éléments de la collection puisse être rendu visible. À ce moment c'est bien l'appui sur la perception visuelle qui permet de valider l'énumération.

Il y a donc deux phases dans le travail :

- une phase d'action pendant laquelle la collection va être énumérée
- une phase de validation pendant laquelle on constate que chaque élément a bien été traité.

Il ne faut pas que la situation boucle pour autant (Margolinas, s. d., p. 36). Nous voulons que la phase de validation ne repose pas sur les mêmes connaissances que la phase d'action. Pourtant la validation consiste à vérifier que chaque élément de la collection a bien été traité et donc que la collection a bien été énumérée. Nous ne voyons pas comment un sujet peut

valider une énumération sans énumérer. Mais nous pouvons au moins transformer les ressorts de cette énumération de validation en nous appuyant à nouveau dans cette phase sur la perception visuelle. La validation s'appuiera donc sur une énumération visuelle.

Résumons les choix de la situation d'énumération :

- Nous avons choisi de travailler dans le micro-espace.
- L'empêchement du marquage nous contraint à mettre en œuvre un traitement des éléments de la collection qui restera masqué pendant la phase d'action et sera rendu visible pour la phase de contrôle.
- La situation des chênes et les quatre premiers jeux de la situation des allumettes proposent une configuration que le sujet ne peut pas transformer. Le jeu 5 de la situation des allumettes propose une configuration dans laquelle les éléments ne sont pas déplaçables. Nous pressentons que les situations diffèrent du point de vue des stratégies de résolution. Nous nous intéressons dans un premier temps aux configurations dans lesquelles les éléments ne sont pas déplaçables.

Les éléments de la collection doivent donc rester cachés pour masquer le traitement pendant le temps de la résolution. Ils doivent en même temps rester visibles dans ce micro-espace pour que le sujet puisse les énumérer. Nous réglons cette contradiction en dupliquant la collection à énumérer. Une seconde collection va nous servir à masquer le traitement qui est réalisé sur la première tout en gardant visible la position occupée par chacun des éléments de la première.

La première collection est une collection de ronds dessinés sur une feuille. La seconde est une collection d'objets qui masquent les ronds. Au fur et à mesure du traitement, chaque élément de cette seconde collection est reposé sur le rond qui le recouvre au démarrage. Les éléments de la seconde collection ont le droit d'être soulevés par les sujets, mais pour en soulever un second, il faut avoir replacé le premier au-dessus de son rond.

Lors de la phase de validation, le sujet peut enlever tous les éléments de la seconde collection pour vérifier que tous les ronds ont bien été traités. Formellement, ce sont donc bien les deux collections qui sont énumérées, celle des ronds sur laquelle le sujet n'a pas d'action directe et celle de cette seconde collection que le sujet peut déplacer soit un à un, soit tous. Le sujet ne peut pas déplacer les ronds ; le sujet peut par contre déplacer les éléments de la seconde collection, mais comme ils doivent être remis à un emplacement fixe, le sujet ne peut pas modifier la position qu'ils occupent les uns par rapport aux autres.

Ce dispositif matériel remplit l'objectif assigné ; il reste à déterminer la nature de cette seconde collection et le traitement que nous souhaitons mettre en œuvre dans cette situation.

Nous choisissons comme objets de la seconde collection des petits moules à pâtisserie opaque en papier sulfurisé. Ce petit moule est appelé chapeau dans la suite de ce texte.

En ce qui concerne le traitement, nous choisissons d'utiliser des sucres qui peuvent être placés sur chacun des ronds et en même temps recouverts par les chapeaux. Nous décidons que le traitement consiste à enlever chaque sucre qui figure sous chaque chapeau, plutôt que d'en mettre un sous chapeau. Les deux solutions sont équivalentes du point de vue de l'énumération, mais différent pour la validation. En effet, une fois que le sujet considèrera que le traitement est terminé, il pourra enlever tous les chapeaux. Il lui sera alors très facile de constater s'il reste ou pas des sucres. La validation de l'énumération se fait donc une énumération visuelle globale dans un micro-espace.

1.2 Description de la situation expérimentale

Une collection de ronds dessinés sur une feuille est présentée au sujet. Le sujet est invité à poser un sucre sur chaque rond et un chapeau sur chaque sucre.

A l'issue de ce travail de préparation, chaque rond de la collection de départ est recouvert par un sucre qui est lui-même recouvert par un chapeau.

Le jeu consiste à ramasser la totalité des sucres de la manière suivante : il faut attraper un chapeau, ramasser le sucre et reposer le chapeau sur le rond de la collection.

A chaque instant il ne peut y avoir plus d'un rond qui ne figure pas sous le chapeau qui lui est associé. Quand tous les chapeaux sont posés sur le support, aucun rond n'est visible. Quand le sujet soulève un chapeau et saisit le sucre qui y figurait, le rond qui était sous le sucre devient visible.

Le sujet n'aura le droit de soulever un autre chapeau que lorsqu'il aura replacer le chapeau sur le rond qu'il recouvrait initialement. L'expérimentateur contrôle le ramassage effectif des sucres et le retour effectif des chapeaux dans leur position initiale.

Le jeu est constitué *a priori* de deux phases : une phase d'action pendant laquelle le sujet ramasse les sucres et une phase de validation pendant laquelle le sujet vérifie que tous les sucres ont bien été ramassés.

Dans la phase de validation, la règle sur les chapeaux évolue. Le sujet a alors le droit de ramasser tous les chapeaux. S'il ne reste pas de sucre, alors il a gagné. Par contre, s'il reste au moins un sucre, alors la partie est perdue.

Le jeu peut s'arrêter dans la phase d'action si le sujet soulève un chapeau et qu'il n'y a pas de sucre sous ce chapeau. Dans ce cas la partie est perdue, ce qui va être justifié dans le paragraphe suivant.



Figure 14: la configuration matérielle de la situation

1.3 Prise en charge des contraintes d'énumération

Examinons maintenant comment notre situation pourrait permettre de traduire les différents types d'échecs de l'énumération. Pour réussir l'énumération d'une collection, il faut que chaque élément soit traité une fois et une seule. Il faut donc que tous les éléments soient traités et que chaque élément ne soit pas traité plus d'une fois.

L'absence de sucres lors de la phase de validation atteste du traitement de la totalité des éléments de collection. La présence de sucres lors de la phase de validation révèle que certains éléments n'ont pas été traités. De cette manière, la situation prend en charge la question du traitement de tous les éléments.

Il reste à organiser la prise en charge de la seconde contrainte, à savoir la limitation à un du nombre de traitement de chaque élément.

Lors du démarrage, un sucre figure sur chaque rond et sous chaque chapeau. Quand un élément de la collection est traité, le sujet ramasse le sucre qui figure sous le chapeau et replace le chapeau pour recouvrir le rond. Si jamais un sujet veut traiter une seconde fois cet élément, il va soulever le chapeau et ne pas trouver de sucre. Il a donc échoué dans ce cas car il vient de traiter une seconde fois un des éléments de la collection.

1.4 Analyse des conditions de réussite au jeu

C'est le sujet qui décide de passer de la phase d'action à la phase de validation. Il prend cette décision quand il pense que tous les sucres ont été ramassés.

Pour gagner, il faut que chaque chapeau ait été soulevé une fois et une seule (et que le sucre présent sous le chapeau ait été ramassé à cette occasion, ce que contrôle l'expérimentateur).

Nous retrouvons bien ici une contrainte du type de celle qui pesait sur chacun des chènes de la situation de dénombrement.

Le sujet perd dans deux cas :

- Dans la phase de validation, nous constatons qu'il reste un sucre sous un des chapeaux (cas 1)
- Dans la phase d'action, le sujet soulève un chapeau sous lequel ne figure pas de sucre (cas 2)

Le cas 1 correspond à la situation où un élément de la collection des chapeaux n'a pas été traité (puisque le sucre n'a pas été enlevé). Il y a donc dans ce cas au moins un élément de la collection de chapeaux qui n'a pas été traité.

Le cas 2 correspond à la situation où un élément de la collection des chapeaux est traité deux fois par le sujet, ou au moins où le sujet essaye de traiter deux fois le même élément (une première fois quand le chapeau est soulevé et le sucre enlevé et une seconde fois quand ce même chapeau est de nouveau soulevé sans qu'il soit possible à ce moment –là d'enlever un sucre). Il y a donc dans ce cas un élément de la collection que le sujet essaye de traiter deux fois.

Le cas 1 correspond au non-respect de la contrainte « chaque élément doit être traité au moins une fois », alors que le cas 2 correspond quant à lui au non-respect de la contrainte « chaque élément doit être traité au plus une fois ».

Quand ni le cas 1, ni le cas 2 ne sont rencontrés, c'est que la collection a été bien énumérée.

1.5 Une dissymétrie des conditions de réussite

Les deux contraintes ne sont pas prises en charge de manière symétrique par la situation. En effet, le non-respect de chacune des contraintes ne se manifeste pas au même moment, ni de la même manière.

Le non-respect de la nécessité de traiter au moins une fois chaque élément de la collection est visible dans la phase de validation alors que le non-respect de la nécessité de traiter au plus une fois chaque élément de la collection intervient dans la phase d'action.

De plus, le non-respect de la nécessité de traiter au plus une fois chaque élément de la collection provoque un arrêt immédiat du jeu alors que le non-respect de la nécessité de traiter au moins une fois chaque élément de la collection intervient à un moment où le jeu est déjà terminé (puisque le sujet a décidé de passer de la phase d'action à la phase de validation).

Dans la situation des allumettes, la rétroaction sur le non-respect de l'une des deux contraintes intervenait dans la même phase, la phase de validation, quand le sujet était invité à ouvrir les boîtes et contrôler la présence d'une seule allumette dans chaque boîte.

Contrairement à la situation des allumettes, la situation des sucres est donc une situation qui gère de manière dissymétrique le respect des deux contraintes de l'énumération.

C'est la conception d'une nouvelle situation d'énumération qui a conduit à proposer, un peu par hasard au début, une gestion dissymétrique des deux conditions de l'énumération. Même si elle n'était pas à l'origine délibérée, cette gestion dissymétrique apparaît réellement intéressante dans la mesure où elle permet de provoquer des rétroactions fortement différenciées en cas d'échec du sujet.

1.6 Analyse *a priori* des stratégies

Pour conduire cette analyse *a priori*, nous nous appuyons sur les stratégies mises en évidence par Briand (1993) dans la situation des chènes.

Nous avons besoin d'une collection support sur laquelle appuyer notre présentation. Nous choisissons de nous appuyer sur un des supports dont nous détaillerons le processus de fabrication dans la suite de ce chapitre. Ce support est nommé « feuille A ».

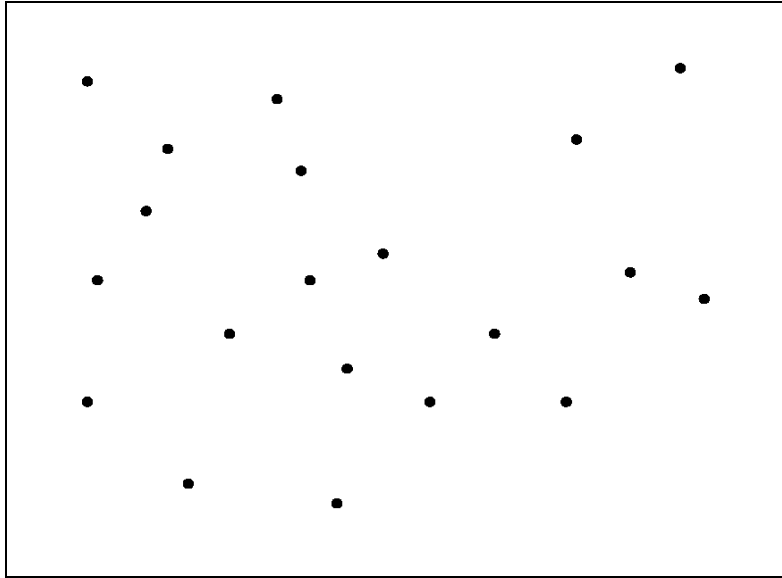


Figure 15 : Collection de ronds - feuille A

Briand décrit deux stratégies :

- Une stratégie fondée sur un partitionnement de la collection
- Une stratégie fondée sur la fabrication d'un chemin

Rappelons que dans la situation des chênes, les sujets ont la possibilité de recourir à l'écrit pour marquer les organisations mises en œuvre. Dans la situation des sucres, le recours à l'écrit n'est pas possible. Les stratégies que nous décrivons ici sont donc des stratégies qui sont conçues dans un milieu sans écrit. Dans le cadre de ce travail de recherche qui est un écrit, nous rendons compte de ces stratégies par un dispositif écrit.

Explicitons ces différentes stratégies sur notre support « feuille A ».

1.6.1 Partitionner la collection

Cette stratégie repose sur la décomposition de la collection à énumérer en sous-collections. Elle se traduit mathématiquement par la construction d'une partition de l'ensemble considéré. La partition peut être constituée de deux sous-ensembles.

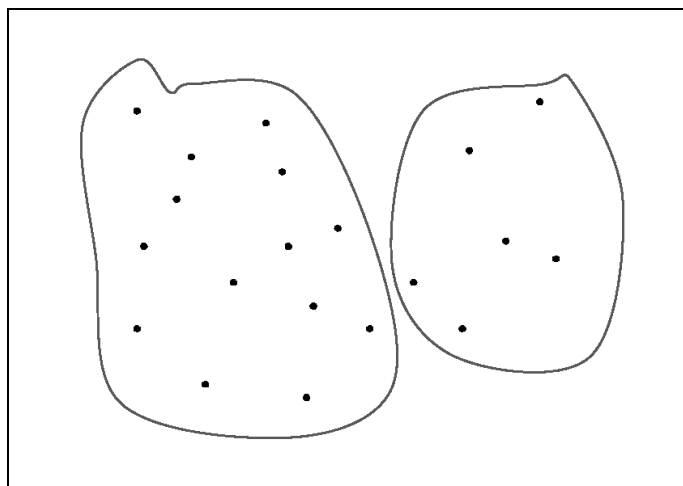


Figure 16 : Feuille A – stratégie de partitionnement en deux sous-ensembles

La partition peut aussi être constituée de plus de deux sous-ensembles.

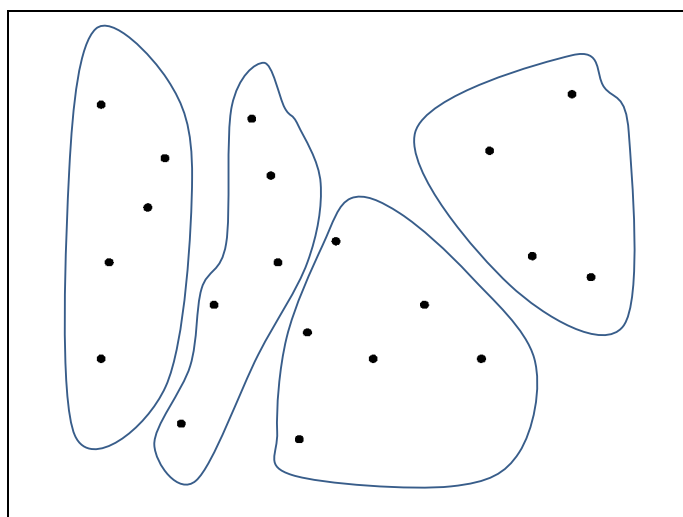


Figure 17 : Feuille A – stratégie de partitionnement en plus de deux sous-ensembles

1.6.2 Concevoir un chemin

La seconde stratégie proposée par Briand est la stratégie qui repose sur la fabrication d'un chemin permettant de passer d'un rond à l'autre. Employons ici le mot « passer » plutôt que « relier » à dessein. Rappelons que le chemin qui va être construit ici ne bénéficie pas de la permanence de l'écrit.

Les stratégies de cheminement les plus faciles à contrôler sont alors clairement organisées autour de l'une des deux directions des bords de la feuille qui coïncident avec les bords de la table dans la configuration matérielle de l'expérimentation, ce que l'on appelle parfois, en analogie avec l'espace physique : horizontale et verticale. (Margolinas & Laparra, 2016) Il s'agit en effet d'une caractéristique anthropologique fondamentale des sociétés de l'écrit, qui

organisent non seulement l'écriture mais aussi l'espace et les corps suivant des directions perpendiculaires. (Goody, 1977; Privat, 2006).

Nous faisons l'hypothèse que, bien que notre situation soit sans écrit, ces caractéristiques vont émerger dans cette stratégies, proposant ainsi deux types de structurations :

- Une structuration en lignes
- Une structuration en colonnes

1.6.3 Structuration en lignes

La figure suivante propose un exemple d'une structuration en lignes de la collection de ronds de notre feuille support.

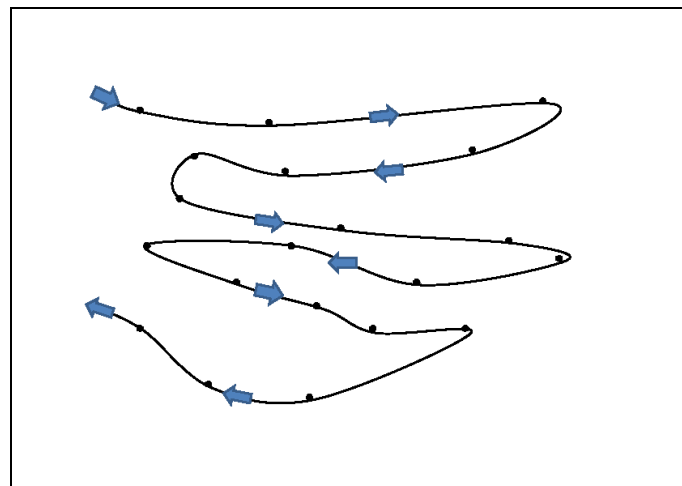


Figure 18 : Feuille A - exemple de structuration en lignes

1.6.4 Structuration en colonnes

La figure suivante propose un exemple d'une structuration en colonnes de la collection de ronds de notre feuille support..

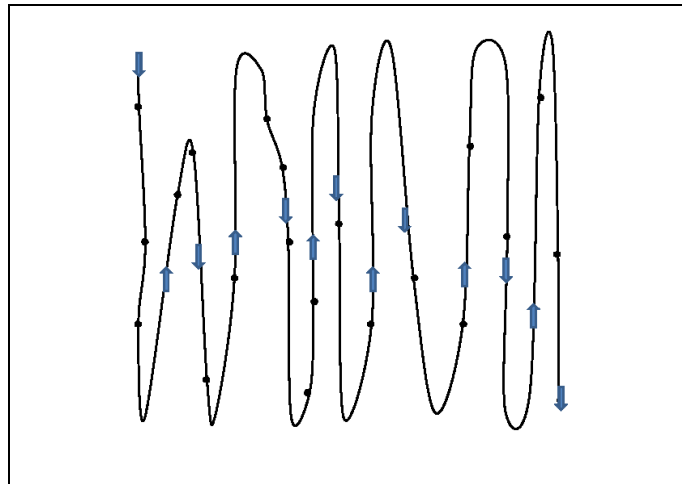


Figure 19 : Feuille A - exemple de structuration en colonnes

1.6.5 Continuité et discontinuité des chemins

De manière générale, sur chacune des deux familles de stratégies *Lignes* et *Colonnes*, nous nous attendons à trouver des formes de parcours qui intègrent des éléments de discontinuité : Ainsi la mise en œuvre de l'énumération par la stratégie *Lignes* pourra conduire à la fabrication de deux types de chemins. Pour une stratégie *Lignes*, le sujet peut aller d'abord du bord gauche de la feuille vers le bord droit puis revenir au bord gauche etc.(Figure 20) ou bien, comme lorsque l'on écrit, une fois arrivé au bout de la ligne, le sujet peut repartir du bord gauche de la feuille (Figure 21).

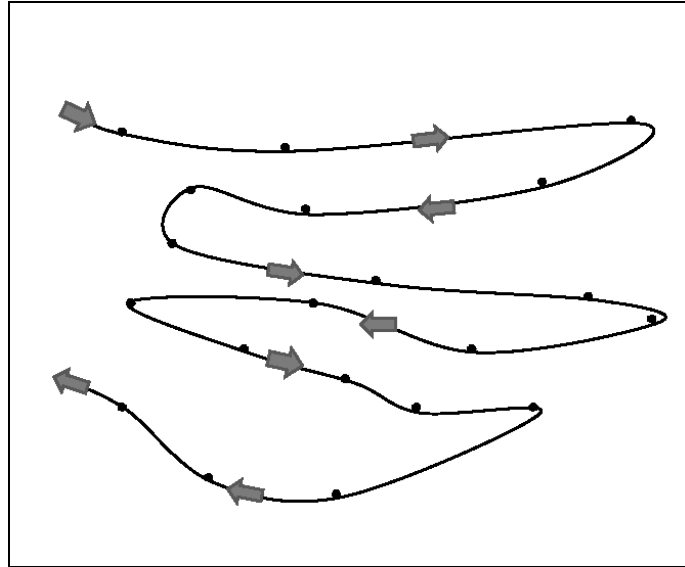


Figure 20 Feuille A - Ligne "continue"

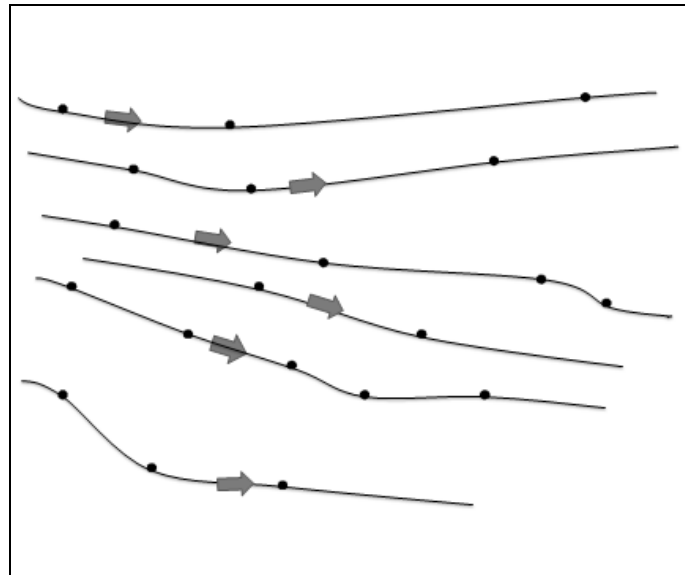


Figure 21: Feuille A- Ligne "discontinue"

Bien sûr, d'autres stratégies de parcours sont possibles comme les « escargots », que Briand a rencontrées dans son travail sur la situation des chênes (1993). Nous écartons *a priori* cette autre stratégie, du fait de la difficulté à la contrôler dans un milieu sans marquage possible. Dans notre situation les sujets ne disposent pas de crayons pour marquer les éléments qui ont déjà été traités. L'énumération par cette procédure ne peut être contrôlée que par l'écrit ou par une organisation spatiale que ne permettent pas les configurations et les règles du jeu que nous proposons.

Les stratégies que nous avons décrites ne sont pas nécessairement incompatibles : il est possible en particulier de partitionner puis de faire un chemin ou bien (même si c'est plus hasardeux) de commencer par énumérer en lignes une partie de la collection puis en colonnes.

Donc, en appui sur ce que Briand évoque (1993, p. 148), nous faisons l'hypothèse d'une combinaison possible des stratégies.

1.7 Conception des supports

Munis de ces éléments d'analyse *a priori*, nous pouvons maintenant décrire le processus de fabrication de notre collection de ronds.

Nous avons pour objectif de proposer une « même » situation à des sujets d'âges très différents (de 4 ans à 11 ans). Nous entendons ici par « même » situation le fait que tous les sujets se verront proposer un jeu avec les mêmes règles. Le seul élément qui peut être amené à varier d'un sujet à l'autre est le support proposé.

Nous choisissons donc de constituer plusieurs supports dont nous allons décrire les mécanismes de construction. Cette description se construit en relation avec l'analyse *a priori* que nous venons de conduire.

L'analyse des données permettra *a posteriori* de constater dans quelle mesure des difficultés différentes du point de vue de l'énumération sont rencontrées sur chaque support.

La variable sur laquelle nous nous appuyons pour décrire cette construction est le « nombre de ronds ».

1.7.1 Présentation des trois supports

Dans le premier support (feuille A), la variable « nombre de ronds » est maximale (20 ronds).

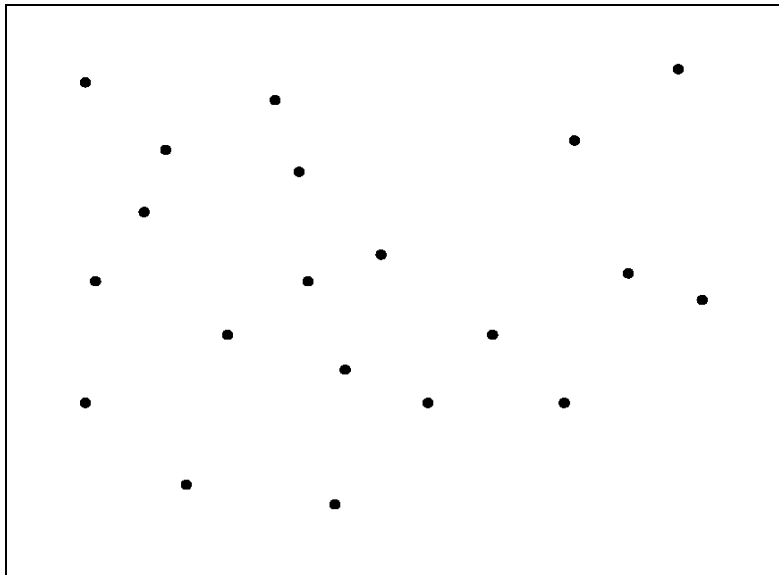


Figure 22: Feuille A - Collection de ronds

Ce premier support est constitué d'un ensemble de 20 ronds dont nous percevons qu'il sera difficile à énumérer. Nous allons revenir dans le paragraphe suivant sur les choix de l'organisation spatiale de cette collection et les conséquences que nous en tirons en relation avec l'analyse *a priori*.

Pour produire le support suivant (feuille B), nous décidons de nous appuyer sur la feuille A et d'éliminer des ronds qui complexifient certaines stratégies d'énumération. La figure suivante présente les ronds que nous avons supprimés.

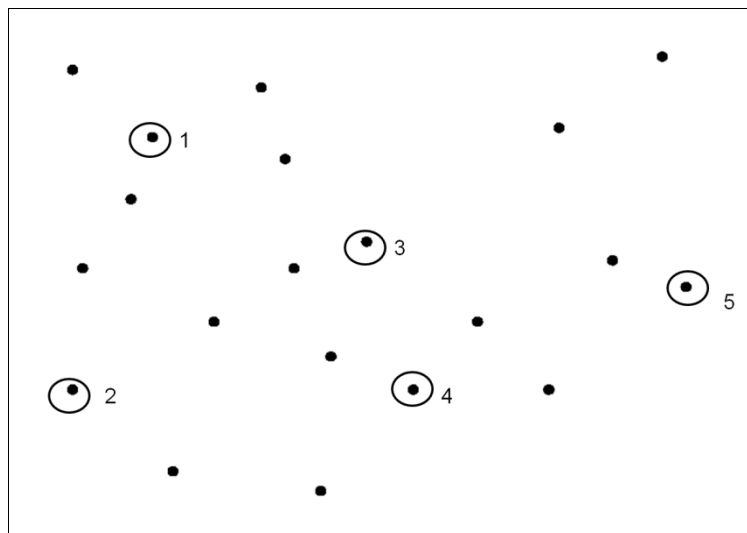


Figure 23 : Conception de la feuille B - ronds éliminés de la feuille A

La suppression de ces 5 ronds permet de concevoir plus facilement une partition entre les différents sous-ensembles. Le nombre d'éléments de la collection passe donc de 20 à 15.

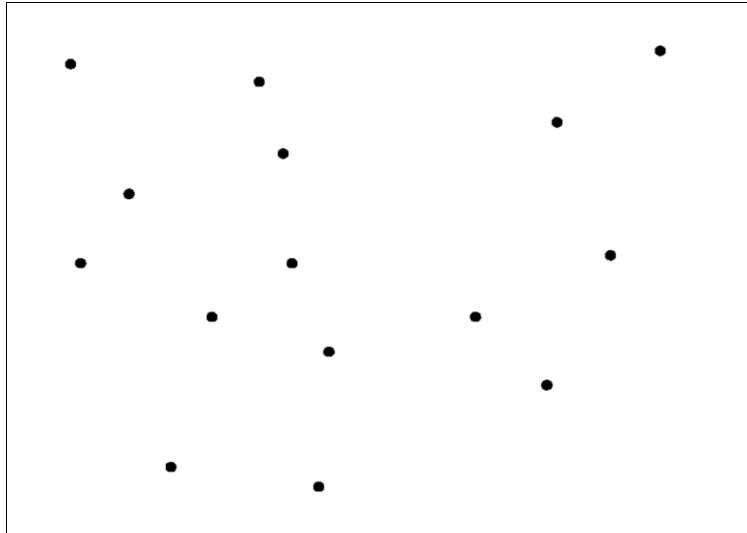


Figure 24 : Feuille B - Collection de ronds

Le procédé est reproduit pour construire le support suivant, la feuille C. 4 nouveaux ronds sont supprimés. La figure suivante présente les ronds que nous avons supprimés pour passer de la feuille B à la feuille C. Les ronds supprimés sont numérotés de 6 à 9.

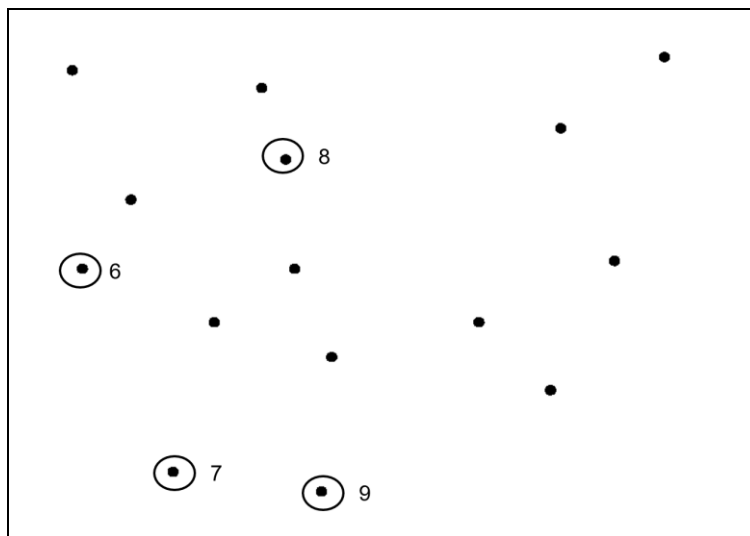


Figure 25 : Conception de la feuille C - ronds éliminés de la feuille B

Cette nouvelle suppression de ronds a pour objectif de rendre des partitions possibles plus visibles que sur le support précédent et des sous-ensembles au nombre limité d'éléments.

La figure suivante présente notre dernier support, la feuille C.

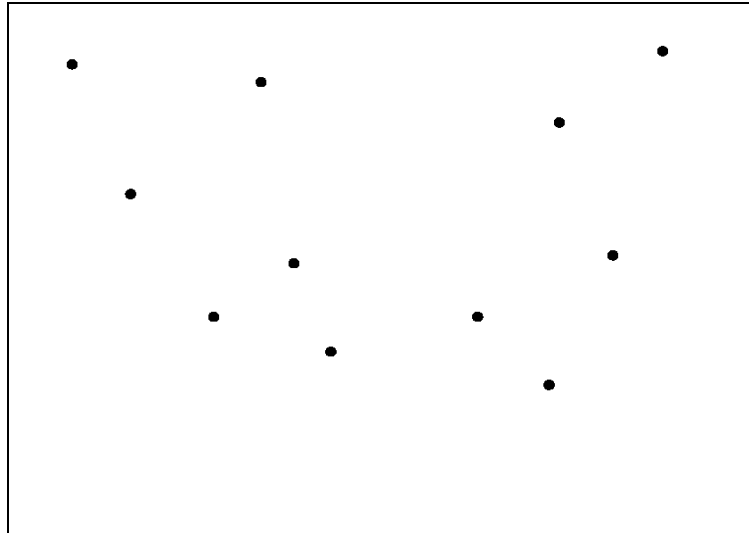


Figure 26 : Feuille C - Collection de ronds

Notre processus de transformation de la collection de ronds s'appuie sur une réduction de la taille de la collection qui va devoir être énumérée. Pour autant, la stratégie d'élimination d'éléments répond à la volonté de rendre certaines stratégies moins difficiles à mettre en œuvre.

Nous allons donc maintenant pouvoir revenir, en appui sur l'analyse *a priori*, sur les raisons qui nous ont amenés à choisir tel rond plutôt que tel autre dans notre processus d'élimination de ronds.

1.7.2 Retour sur la conception des support en relation avec l'analyse *a priori*

Nous pouvons maintenant expliquer le choix de la position des ronds que nous avons fait, ainsi que les raisons des éliminations successives.

Le premier support (feuille A) a été conçu pour qu'il n'induisse *a priori* aucune des deux stratégies. Les ronds sont donc dispersées sur la totalité de l'espace disponible. Nous avons veillé, à ce que le moins de ronds possible soient alignés en lignes ou en colonnes et à ce que la dispersion des ronds sur la feuille soit la plus uniforme possible, tout en présentant suffisamment d'irrégularités pour qu'aucune structure n'émerge de manière évidente.

Examinons maintenant les raisons des choix des positions des ronds et de leurs éliminations successives

1.7.2.1 Possibilités de partitionner la collection

Pour chacun des trois supports, la configuration spatiale des ronds permet la conception d'au moins une partition, aussi élémentaire soit-elle. Nous avons déjà décrit des partitions possibles élaborées à partir de la feuille A.

Des partitions possibles

Examinons quelques-unes des possibilités de partitions possibles de la collection des ronds sur les feuilles B et C.

Les collections peuvent être conçues comme des partitions des deux sous-collections, comme représenté ci-dessous.

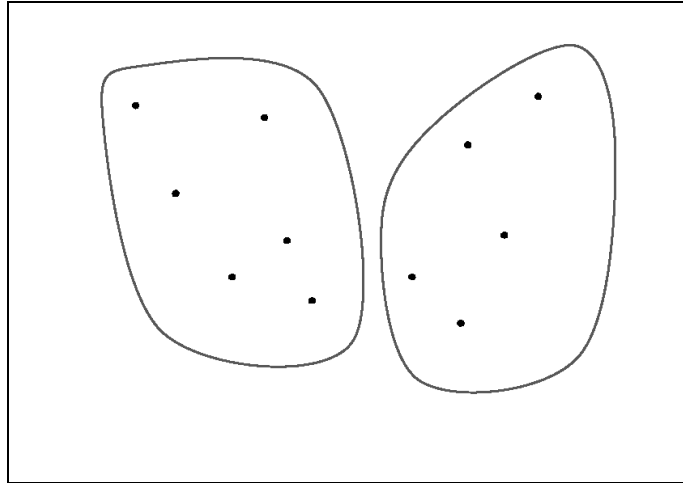


Figure 27: Feuille C - partition possible en deux sous-ensembles

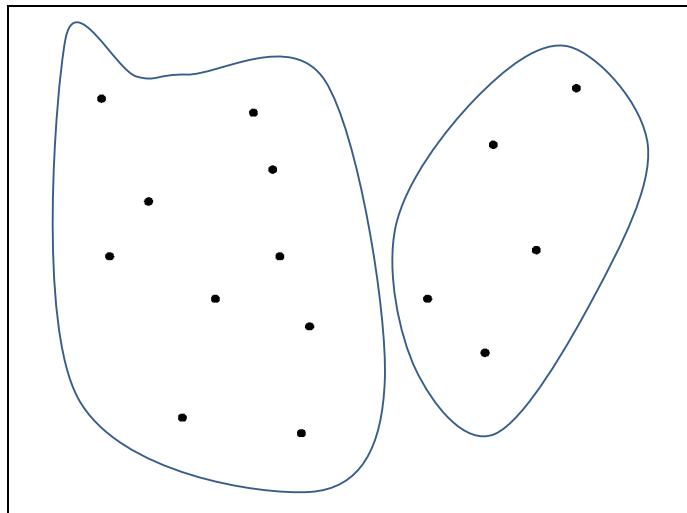


Figure 28 : Feuille B - partition possible en deux sous-ensembles

Nous venons de décrire comment la collection des ronds pouvait être conçue en termes de partition en deux sous-ensembles pour pouvoir être énumérée. Des partitions plus fines (nécessitant la fabrication de plus de deux sous-ensembles) sont également possibles.

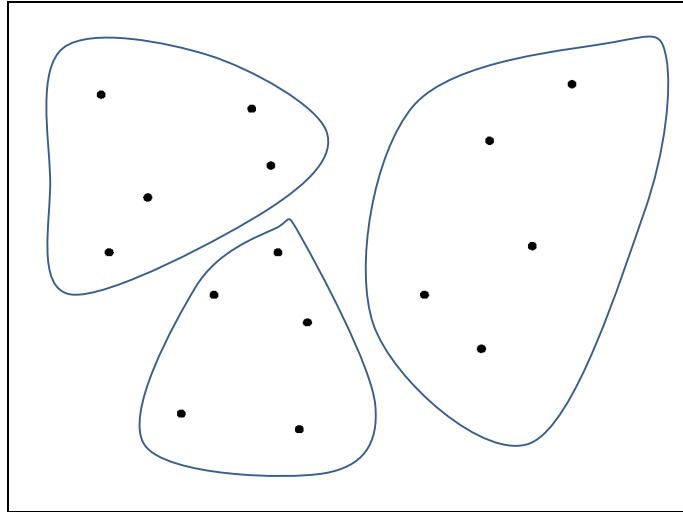


Figure 29: Feuille B - exemple de fabrication d'une partition de plus de deux sous-ensembles

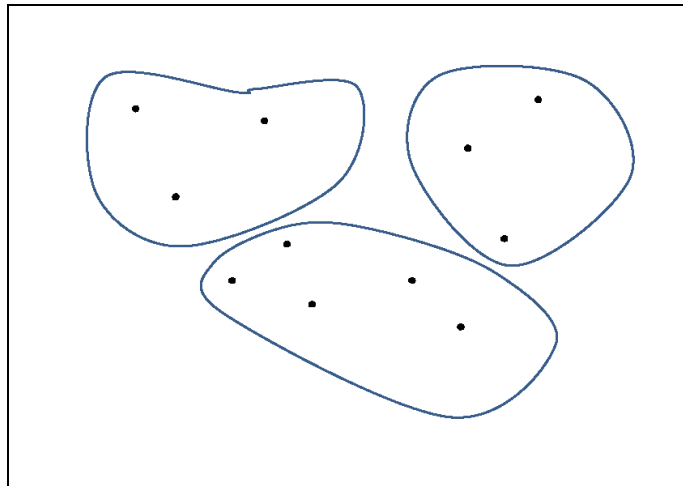


Figure 30: Feuille C - exemple de fabrication d'une partition de plus de deux sous-ensembles

Le rond frontière

Pour la feuille A, une conception identique peut être développée. Il convient de faire attention à ce que le rond entouré dans la figure suivante fasse bien partie de l'un seulement des deux sous-ensembles de la partition pour que la collection des ronds soit correctement énumérée.

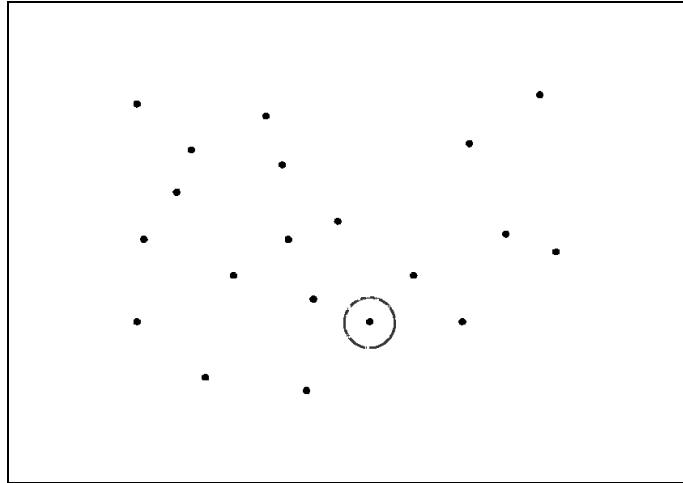


Figure 31: Feuille A - Mise en évidence d'un rond frontière

Voici deux conceptions possibles d'une partition de la collection des ronds de la feuille A (Figure 32 et Figure 33). La gestion de la concurrence exercée par la position du point frontière est réalisée par intégration de cet élément dans l'un des deux sous-ensembles.

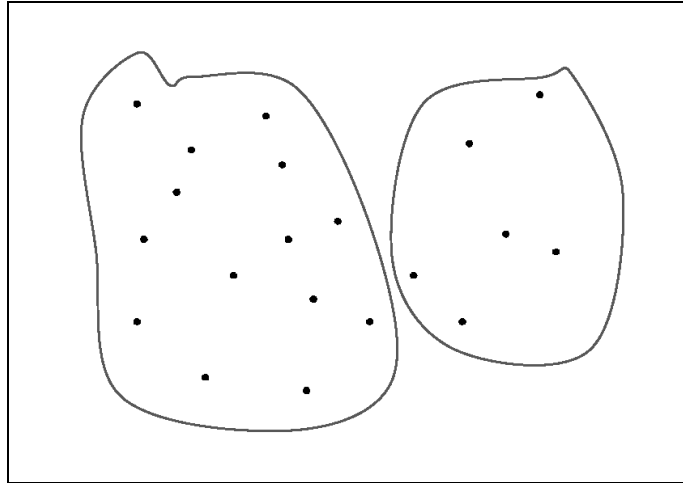


Figure 32: Feuille A - partition possible avec intégration du rond frontière dans le sous-ensemble de gauche

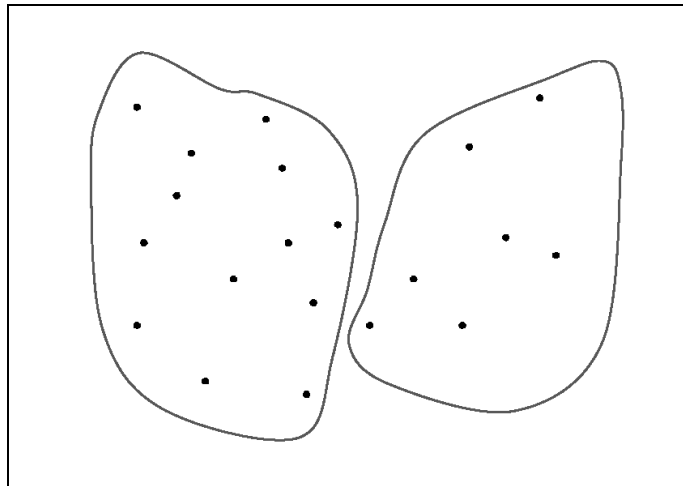


Figure 33: Feuille A - partition possible avec intégration du rond frontière dans le sous-ensemble de droite

Une stratégie erronée consisterait à produire une décomposition de l'ensemble total de ronds qui ne soit pas une partition :

Soit un élément de la collection de ronds appartient simultanément à deux sous-ensembles de cette collection

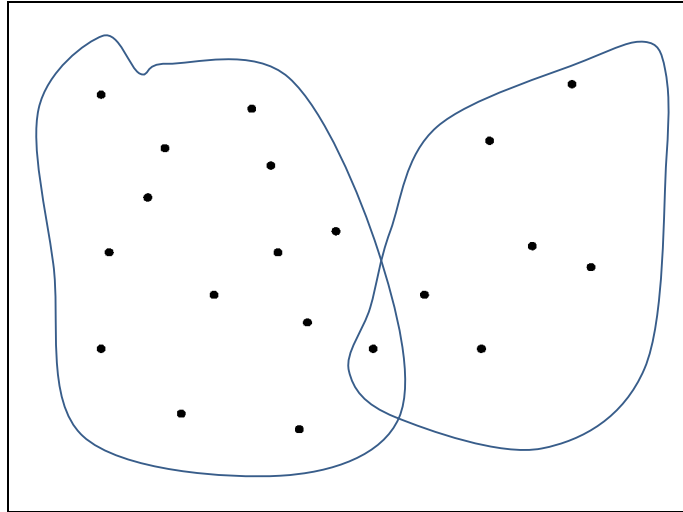


Figure 34 : Feuille A - un rond est présent dans deux sous-ensembles simultanément

Soit un élément de la collection de ronds n'appartient à aucun des deux sous-ensembles de cette collection.

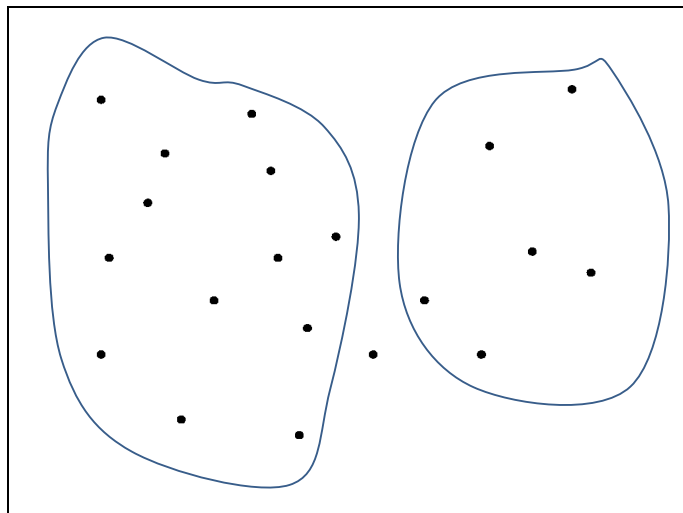


Figure 35 : Feuille A - un rond n'appartient à aucun des deux sous-ensembles

Choix des ronds éliminés

Revenons maintenant à la question de la conception de nos différents supports. Les ronds n°3 et n° 4 (cf. Figure 23) ont été choisis pour concevoir la feuille B afin de rendre plus facilement perceptible la possibilité de partitionner la collection des ronds en deux.

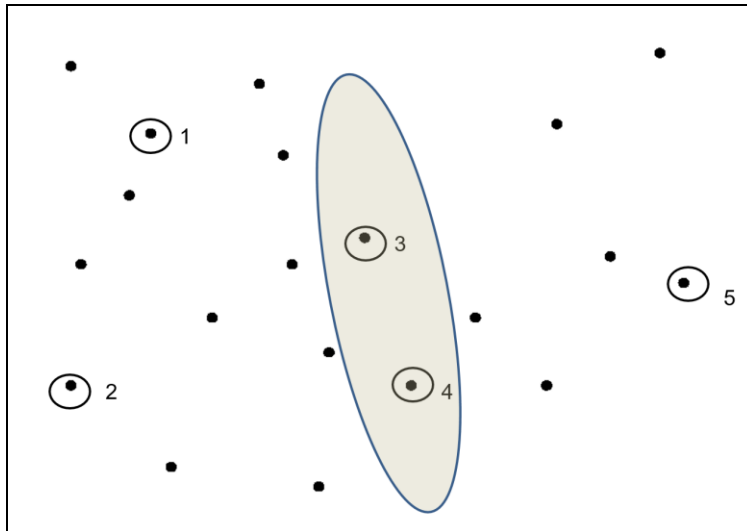


Figure 36 : Mise en évidence de l'espace construit par la suppression des ronds 3 et 4

La présence de ces deux éléments complexifie pour le sujet la perception d'une partition. Leur absence libère un espace qui va permettre de concevoir plus facilement la partition présentée ci-avant (Figure 36).

Nous venons de décrire comment la collection des ronds pouvait être conçue en termes de partition en deux pour pouvoir être énumérée. Des partitions plus fines (nécessitant la fabrication de plus de deux sous-ensembles) nous semblaient possibles.

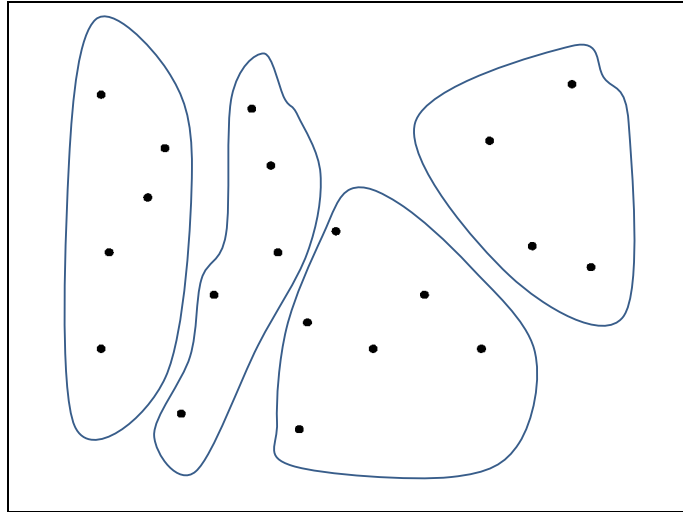


Figure 37 : Feuille A - exemple de fabrication d'une partition de plus de deux sous-ensembles

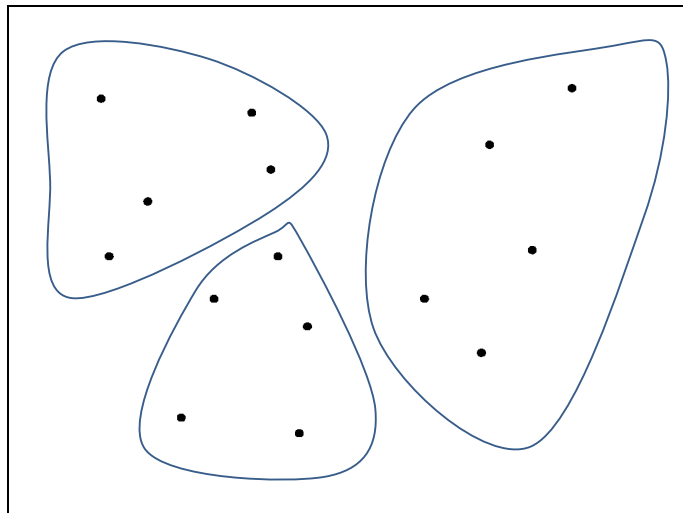


Figure 38 : feuille B - exemple de fabrication d'une partition de plus de deux sous-ensembles

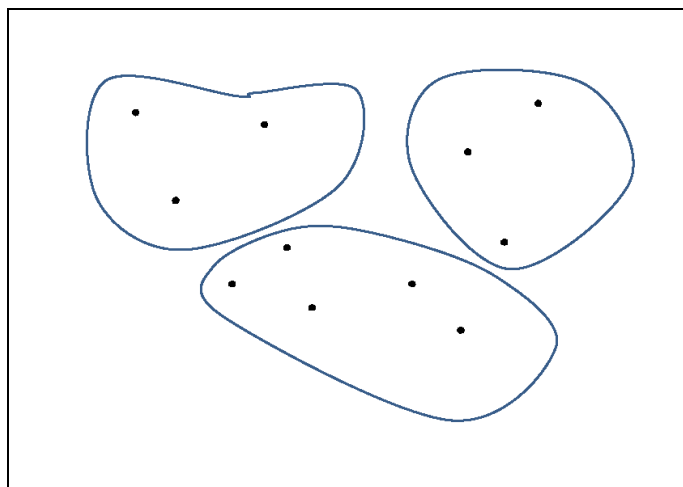


Figure 39 : Feuille C - exemple de fabrication d'une partition de plus de deux sous-ensembles

Nous n'avons pas fait de recherche exhaustive des différentes partitions qui auraient pu être mises en œuvre par des sujets. Nous nous sommes contentés de ces quelques possibilités.

1.7.2.2 Possibilités de concevoir un chemin

Notre analyse *a priori* nous conduit à penser l'ensemble des objets de la collection comme étant aussi une série de ronds que l'on va pouvoir relier par un chemin pour les énumérer.

Explicitons les raisons qui nous conduisent à éliminer certains ronds dans les élaborations successives des supports.

1.7.2.3 Structuration en lignes

Nous avons déjà donné un exemple de structuration en lignes de la collection des ronds pour la feuille A (Figure 18 : Feuille A - exemple de structuration en lignes). Revenons sur les raisons de choix de certains ronds pour élaborer la feuille B

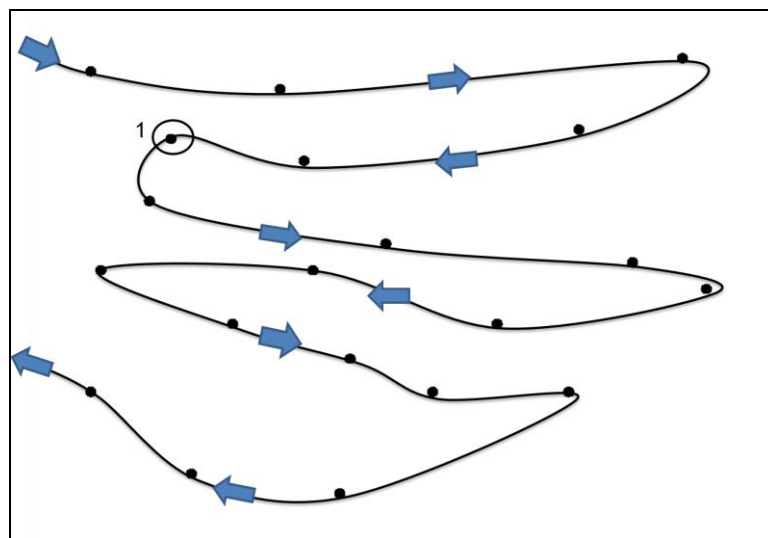


Figure 40 : Feuille A - Mise en évidence d'un rond perturbateur

Le point n° 1 apparaît comme perturbateur dans la perception d'une structuration en ligne de la collection des points de la feuille A. Dans le tracé des lignes successives, il contraint à modifier la courbure pour remonter.

La série de lignes tracées dans la figure suivante présente un caractère beaucoup plus régulier.

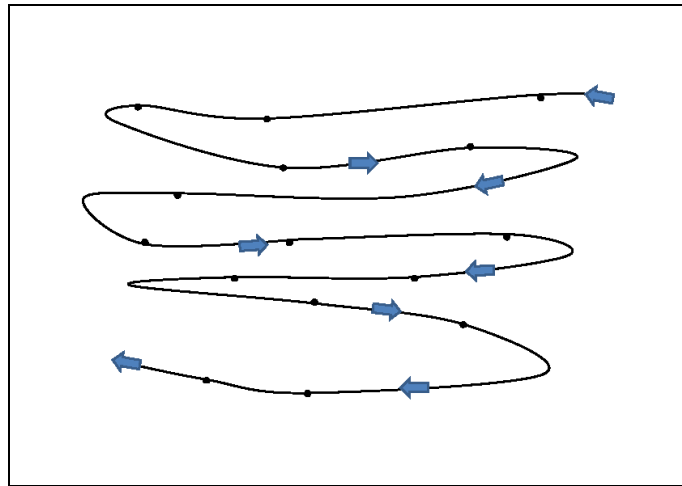


Figure 41 : Feuille B - exemple de structuration en lignes

Un tel tracé n'est pas possible tant que le point n° 1 reste dans la configuration.

Examinons maintenant quelques-unes des raisons des choix pour la conception de la feuille C.

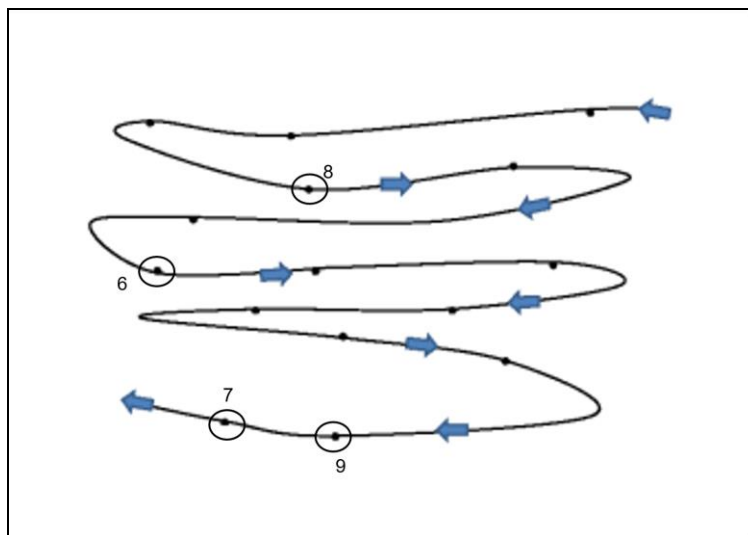


Figure 42 : Feuille B- mise en évidence de ronds perturbateurs

Concernant la conception de la feuille C, la suppression des points n° 7 et n° 9 réduit le nombre de lignes de la collection. La suppression des points n° 6 et n° 8 réduit la longueur d'une des lignes centrales parmi les plus difficiles à contrôler car entourée au- dessus et en dessous d'éléments à traiter.

Pour la feuille C, le chemin peut alors être le suivant.

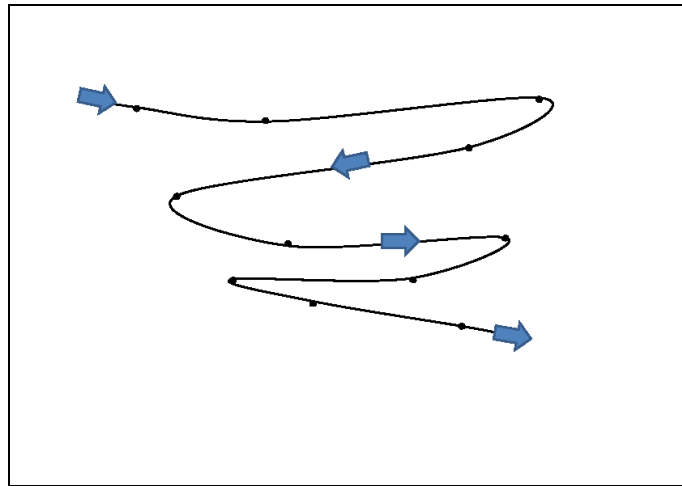


Figure 43 : Feuille C - exemple de structuration en lignes

Structuration en colonnes

Les schémas suivants donnent des exemples d'une structuration en colonne de la collection de ronds.

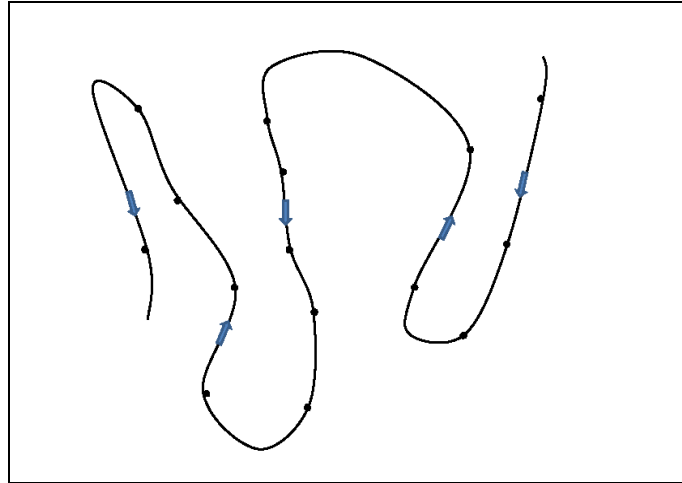


Figure 44 : Feuille B - exemple de structuration en colonnes

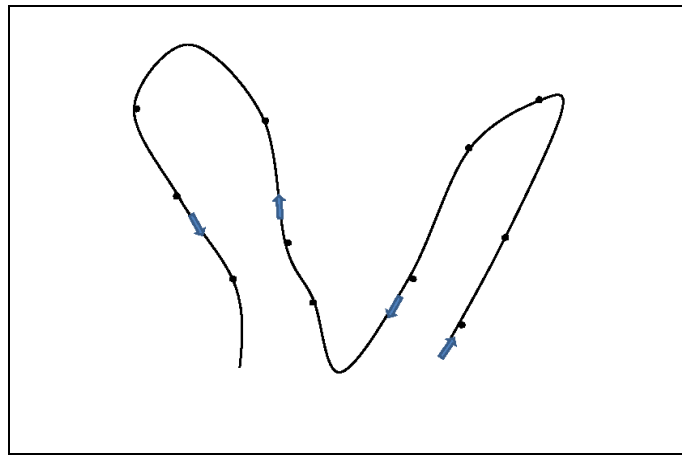


Figure 45 : Feuille C - exemple de structuration en colonnes

En observant l'évolution graphique des propositions relatives à la structuration en colonnes (Figure 19, Figure 44 et Figure 45), nous pouvons observer que les ronds supprimés d'une configuration à l'autre ont un impact à la fois sur le nombre de colonnes de la structuration et sur l'amplitude des différentes colonnes. Les ronds éliminés ont donc une conséquence directe sur la complexité à mettre en œuvre une stratégie reposant sur une structuration en colonnes.

Ainsi, en construisant *a priori* les structurations en ligne et en colonne suivant les différents supports, nous constatons que l'énumération en lignes ou en colonnes peut être affaiblie ou assouplie suivant la configuration spatiale proposée. Les dernières représentations mettent en évidence le fait qu'une structuration stricte en lignes et en colonnes n'est parfois pas possible, voire même non adaptée à la configuration spatiale proposée.

1.8 Description de la passation

Ces données ont été collectées dans le cadre du projet DéMathÉ² pour servir d'illustration au projet d'ouvrage. L'analyse présentée dans ce texte s'est déroulée bien après.

1.8.1 Installation de la configuration matérielle

Le support est placé sur une table. La feuille support est scotchée pour qu'elle ne puisse pas bouger lors de l'expérience.

Les sucres sont dans une boîte en plastique qui se trouve à droite du sujet. Les chapeaux sont disposés dans un sac en plastique placé à côté de la feuille support, à gauche de celle-ci.

Dans la vidéo dont sont extraites les photos qui suivent, la consigne est présentée simultanément à deux sujets.



Figure 46 : photo de la configuration initiale de la situation

L'expérimentateur invite le(s) sujet(s) à poser un sucre sur chacun des points dessinés sur la feuille.

² Données collectées par Bruno Canivenc et Marie-Christine de Redon en 2006 dans des écoles primaires de la région PACA



Figure 47 : installation des sucres sur les points

Une fois chaque rond recouvert par un sucre, expérimentateur et sujets recouvrent chaque sucre par un chapeau.



Figure 48 : installation des chapeaux sur les sucres

Le contrôle visuel qui est exercé par le sujet pendant ces deux phases lui permet d'avoir la garantie qu'il y a bien un sucre sur chaque rond et un chapeau sur chaque sucre.

1.8.2 Passation de consigne/ Explication des règles du jeu

Sur la même table, à côté de la feuille support, figure une feuille sur laquelle est dessiné un rond. L'expérimentateur pose un sucre sur ce rond et le recouvre avec un chapeau. Une fois ces conditions matérielles mises en place, l'expérimentateur explique les règles du jeu au sujet.

« Tu n'as le droit de soulever qu'un seul chapeau à la fois. » (extrait de la consigne prononcée)

La suite des actions qui doivent être réalisées sont décrites à l'oral et effectuées en même temps par l'expérimentateur sur la feuille ne comportant qu'un seul rond :

« Une fois le chapeau soulevé, il faut saisir le sucre, mettre le sucre dans la boîte en plastique et, tout de suite après, remettre le chapeau sur le rond. Ceci doit être réalisé pour chaque sucre, un seul à la fois » (extrait de la consigne prononcée)



Figure 49 : explication des règles du jeu

L'objectif du jeu est que tous les sucres soient enlevés et déposés dans la boîte.

Quand le sujet pense qu'il a terminé, il doit dire « j'ai fini ». A ce moment-là, expérimentateur et sujet vérifient que tous les sucres ont bien été enlevés. Pour cela, il leur suffit de ramasser la totalité des chapeaux et de constater qu'il y a plus de sucre sur chacun des ronds. Si c'est le cas, et donc si tous les sucres ont bien été enlevés, le sujet a gagné. Dans le cas contraire, le sujet a perdu.

Le jeu peut prendre fin pendant la phase de ramassage des sucres. En effet, quand le sujet soulève un chapeau et qu'il n'y a pas de sucre dessous, cela veut dire que le sucre a déjà été enlevé. Dans ce cas, cela veut dire que la partie est perdue et le jeu s'arrête immédiatement.

1.8.3 Dispositif de collecte de données

Comme constaté sur les photos précédentes, une caméra est placée de telle façon que sujet, feuille et caméra soient sur le même axe. La caméra est fixée sur un pied de manière à pouvoir filmer les gestes réalisés par les sujets, et notamment ce que font leurs mains. Elle ne filme pas les visages des sujets.

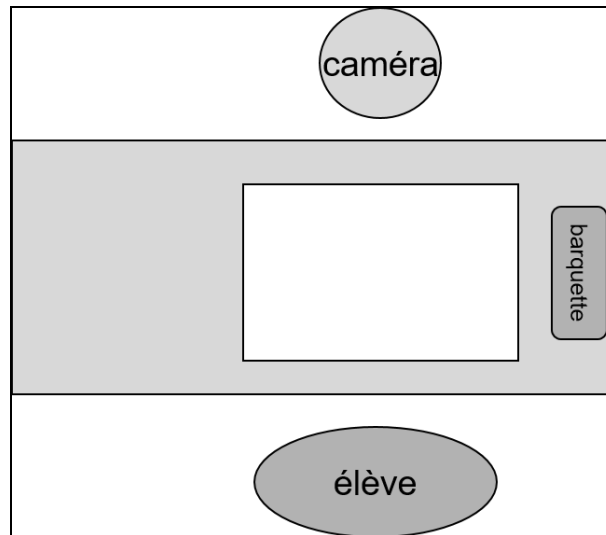


Figure 50 : organisation matérielle de la collecte de données

La caméra collecte donc des données avec un point de vue qui est inversé par rapport à celui du sujet face à son support. Sauf avis contraire, les descriptions proposées dans cette thèse adoptent le point de vue du sujet.

1.8.4 Le public auquel nous avons proposé la situation des sucres

La situation des sucres a été proposée à 44 sujets de l'école primaire. Le support A a été proposé aux élèves de cycle 3, le support B aux élèves de cycle 2 et le support C des élèves de MS et GS de maternelle.

Ces données sont présentées sous forme de tableau dans l'annexe 1.

L'expérimentateur propose à chaque sujet qui échoue la première fois de faire un second essai sur le même support, ce que tous ont accepté. Ce second essai se passe dans la continuité du premier, sans aucune interaction du sujet avec l'expérimentateur.

Même en cas de nouvel échec, aucun nouvel essai n'a été proposé.

2. Analyse des données de la situation des sucres

2.1 Aspects méthodologiques dans le traitement systématique des données filmées

Analyser des données, c'est chercher à répondre à des questions. La nature des questions posées amène à porter des regards successifs sur les données.

Cette succession de regards conduit à élaborer des choix sur la présentation pour répondre aux questions qui sont posées, à prendre une succession de décisions concernant la transcription des données filmées dont la logique va être restituée.

La suite de ce texte va donc être articulée autour de questions que nous nous posons suite aux expérimentations qui ont été conduites. Pour produire des réponses à ces questions successives, nous nous demanderons de manière systématique de quelles informations sur nos données nous avons besoin et de quelle manière nous pourrions les traduire dans un texte écrit. Cela nous amènera à interroger les choix successifs de transcription et de modélisation que nous avons réalisés.

2.2 Les données

Revenons sur les conditions de collecte des données. Nous avons déjà précisé que nous n'avons pas collecté ces données. Les seuls éléments dont nous disposons sur ce qui s'est passé sont les traces vidéo produites. Le seul regard que nous avons sur ce qui s'est passé s'est construit à travers le visionnage des clips vidéo. Nous sommes donc dans une forme d'extériorité par rapport à ces données.

Nos données primaires sont des films numériques du déroulement des 78 parties, stockés sur des cassettes DV. Après acquisition, ces films ont été fractionnés en 78 clips vidéo, ce qui permet un accès direct à chacune des 78 parties. Par ailleurs, ce travail de segmentation a permis d'éliminer des clips des éléments redondants et non spécifiques aux parties, telles que la donnée de la consigne, strictement identique dans chacune des parties.

En plus des données filmées, nous avons pour chacune des parties :

- La nature de la feuille support (A, B ou C)
- Le niveau scolaire du sujet
- Le numéro d'essai

Ces différentes informations sont transcrites dans un fichier Exel qui se présente de la manière suivante :

<i>Partie</i>	<i>Sujet</i>	<i>Feuille</i>	<i>Niveau</i>	<i>Essai</i>
1	1	A	CM2	1
2	1	A	CM2	2
3	2	A	CM2	1
4	2	A	CM2	2
5	3	A	CM2	1
6	4	A	CM2	1
7	5	A	CM2	1
8	5	A	CM2	2
9	6	A	CM2	1
10	6	A	CM2	2
11	7	A	CM2	1
12	8	A	CM2	1
13	8	A	CM2	2
14	9	A	CM2	1

Tableau 3 : Codage des informations sur les parties (extrait)

2.3 Analyse des données en termes d'échec ou de réussite

Face à ces données, la première question que nous nous posons est le nombre de réussites. Cela interroge sur la collection de référence choisie puisque cette question peut être posée relativement aux parties ou aux sujets.

Commençons par considérer l'objet Partie. Ce qui nous amène à reformuler notre question de la manière suivante :

2.3.1 Parmi les 78 parties, combien de réussites ?

Pour répondre à cette question, nous devons connaître le résultat de chacune des parties. Il nous faut transcrire une information binaire pour chaque élément de notre collection de partie, l'échec ou la réussite du sujet à la partie.

Pour coder cette nouvelle information, une nouvelle colonne se constitue.

<i>Partie</i>	<i>Sujet</i>	<i>Feuille</i>	<i>Niveau</i>	<i>Essai</i>	<i>R=I</i>
1	1	A	CM2	1	0
2	1	A	CM2	2	0
3	2	A	CM2	1	0
4	2	A	CM2	2	1
5	3	A	CM2	1	1
6	4	A	CM2	1	1
7	5	A	CM2	1	0
8	5	A	CM2	2	0
9	6	A	CM2	1	0
10	6	A	CM2	2	1
11	7	A	CM2	1	1
12	8	A	CM2	1	0
13	8	A	CM2	2	1
14	9	A	CM2	1	1

Tableau 4 : Codage de la réussite ou de l'échec sur les parties (extrait)

La réussite à la partie est codée 1 et l'échec 0.

Les résultats des 78 parties sont transcrits dans le tableau suivant :

	<i>Partie</i>	<i>Réussite à la partie</i>	<i>Echec à la partie</i>
<i>Effectif</i>	78	25	53
<i>Pourcentage</i>	100%	32%	68%

Tableau 5 : réussites et échecs par partie

Dans les 78 parties, 25 conduisent à des énumérations réussies de la collection de ronds et 53 à des énumérations non réussies. Le nombre d'échecs à une partie est élevé. Nous pouvons donc nous demander si nous retrouvons des résultats du même ordre quand nous regardons plus précisément ce qui se passe pour chacun des trois supports.

2.3.2 Parmi les 78 parties, observe-t-on des différences de réussite en fonction du support ?

Chaque support a été présenté aux sujets d'un même cycle scolaire. Nous pourrions donc nous poser la question de manière un peu différente en nous demandant si nous observons des différences de réussites en fonction du niveau scolaire. Nos échantillons étant petits, nous décidons de ne pas considérer cette variable, d'où la formulation de la question que nous avons produite.

Formellement, il s'agit donc de reprendre la structure de données précédente en en produisant une présentation qui explicite la variable support.

<i>Support</i>		<i>Partie</i>	<i>Réussite à la partie</i>	<i>Echec à la partie</i>
<i>Feuille A</i>	<i>Effectif</i>	32	10	22
	<i>Pourcentage</i>	100%	31%	69%
<i>Feuille B</i>	<i>Effectif</i>	17	6	11
	<i>Pourcentage</i>	100%	35%	65%
<i>Feuille C</i>	<i>Effectif</i>	29	9	20
	<i>Pourcentage</i>	100%	31%	69%

Tableau 6: réussites et échecs par partie et par support

Nous retrouvons pour chacun des supports des pourcentages de réussites et d'échecs qui sont proches des résultats globaux. Nous pouvons donc considérer que le couple constitué du support et du niveau scolaire a été calibré de manière à présenter une difficulté proche pour tous les sujets, ce qui était notre intention.

Nous avons commencé notre série de questions en nous demandant « Combien de réussites ? » Revenons à une analyse qui intègre la dimension du sujet en reconsidérant globalement la séquence des deux essais.

2.3.3 Parmi les 44 sujets, combien de réussites ?

La première collection de référence considérée était la collection des 78 parties. Mais le dispositif prévoit de proposer à chacun des 44 sujets qui a échoué la possibilité de refaire une partie. Nous pouvons donc nous demander combien de réussites, mais en changeant d'objet d'étude pour ne plus considérer la partie, mais plutôt le sujet.

Il nous faut donc ici définir ici l’assertion « un sujet a réussi ». Cette assertion sera vraie dans le cas où le sujet aura réussi au moins l’un de ses deux essais. Cela permet de définir par la négation l’échec d’un sujet à la situation. On dira que le sujet échoue s’il échoue à chacun de ses deux essais. Les deux évènements Réussite et Echec sont bien contraires et permettent ainsi de proposer une description qui prenne en compte la totalité des essais considérés.

Pour répondre à cette question, nous devons procéder à une réorganisation de nos données en les structurant autour de la nouvelle collection de référence, le sujet.

La transcription de nos données évolue et se transforme en tableau de 44 lignes. C’est un travail interne à la définition de la structure de données, qui ne nécessite pas de regarder les clips vidéo une nouvelle fois.

<i>Sujet</i>	<i>Feuille</i>	<i>Niveau</i>	<i>R=1</i>
1	A	CM2	0
2	A	CM2	1
3	A	CM2	1
4	A	CM2	1
5	A	CM2	0
6	A	CM2	1
7	A	CM2	1
8	A	CM2	0
9	A	CM2	1

Tableau 7 : réussite ou échec par sujet (extrait)

Le tableau suivant présente donc le bilan des réussites par sujet.

	<i>Sujet</i>	<i>Réussite à la situation</i>	<i>Echec à la situation</i>
<i>Effectif</i>	44	25	19
<i>Pourcentage</i>	100%	57%	43%

Tableau 8 : réussites et échecs à la situation par sujet

Le changement de collection de référence modifie la perception globale que nous avons de la difficulté de la situation. Le panorama de notre situation apparaît plus contrasté qu’il n’apparaissait à l’issue de la seule étude des réussites et des échecs. La majorité des éléments de notre échantillon (57%) a réussi. La situation présente de réelles difficultés pour une partie importante de notre échantillon (43%) qui n’a pas réussi à l’issue des deux essais proposés.

2.3.4 Parmi les 44 sujets, observe-t-on des différences de réussite en fonction du support ?

Comme nous l'avons déjà fait lors de l'étude des réussites et des échecs considérés indépendamment, nous nous demandons maintenant si nous allons obtenir les mêmes conclusions si nous observons les réussites des sujets en intégrant la variable support.

<i>Support</i>		<i>Sujet</i>	<i>Réussite à la situation</i>	<i>Echec à la situation</i>
<i>Feuille A</i>	<i>Effectif</i>	18	10	8
	<i>Pourcentage</i>	100%	56%	44%
<i>Feuille B</i>	<i>Effectif</i>	9	6	3
	<i>Pourcentage</i>	100%	67%	33%
<i>Feuille C</i>	<i>Effectif</i>	17	9	8
	<i>Pourcentage</i>	100%	53%	47%

Tableau 9 : réussites et échecs à la situation par élève et par support

Comme pour l'analyse des réussites aux parties, les résultats des sujets ne font pas apparaître de différence significative de réussite entre support.

Que nous les analysons par partie ou par sujet, ces résultats mettent en évidence un nombre d'échecs élevé, même après un second essai. La moitié seulement des élèves réussissent dans ces situations. Ce qui nous semble le plus significatif dans ces résultats est que le pourcentage d'échec à la situation reste non négligeable, quel que soit le support (et donc quelque que soit le niveau scolaire des sujets).

Maintenant que nous sommes capables de partitionner notre collection de sujets entre réussites et échecs, nous pouvons aller plus loin dans notre analyse de la réussite et de l'échec.

2.3.5 Parmi les 44 sujets, combien réussissent au premier essai ?

Nous poursuivons notre étude des parties et des sujets et nous interrogeons le numéro d'essai dans le cadre de la réussite.

Notre structure de données sur les sujets continue de se transformer en faisant maintenant apparaître une information, transcrite dans une nouvelle colonne de manière binaire : pour les sujets qui ont réussi, le numéro de l'essai de la réussite.

<i>Sujet</i>	<i>Feuille</i>	<i>Niveau</i>	<i>R=1</i>	<i>Essai de la réussite</i>
1	A	CM2	0	
2	A	CM2	1	2
3	A	CM2	1	1
4	A	CM2	1	1
5	A	CM2	0	
6	A	CM2	1	2
7	A	CM2	1	1
8	A	CM2	0	
9	A	CM2	1	1

Tableau 10 : introduction du numéro d'essai de la réussite des sujets (extrait)

Nous centrons notre question sur la réussite des sujets à leur premier essai. Notons que la réponse à cette question est la même que celle que nous produirions pour la question « Parmi les premiers essais, combien de parties réussies ? ».

	<i>Sujets</i>	<i>Réussite au 1^{er} essai</i>	<i>Echec au 1^{er} essai</i>
<i>Effectif</i>	44	10	34
<i>Pourcentage</i>	100%	23%	77%

Tableau 11 : résultats des sujets au premier essai

Commençons par analyser ces résultats du point de vue des sujets. Ils confortent les résultats précédents en mettant en évidence une réussite limitée des sujets au premier essai. Seulement 10 des 44 sujets réussissent dès le premier essai.

Pour autant, retrouvons-nous ce résultat sur tous les supports ?

<i>Support</i>		<i>Sujets</i>	<i>Réussite au 1^{er} essai</i>	<i>Echec au 1^{er} essai</i>
<i>Feuille A</i>	<i>Effectif</i>	18	4	14
	<i>Pourcentage</i>	100%	22%	78%
<i>Feuille B</i>	<i>Effectif</i>	9	1	8
	<i>Pourcentage</i>	100%	11%	89%
<i>Feuille C</i>	<i>Effectif</i>	17	5	12
	<i>Pourcentage</i>	100%	29%	71%

Tableau 12 : résultats des sujets au premier essai par support

L'échec au premier essai est important sur tous les supports puisqu'il varie de 71% à 89%. Là encore, nous constatons peu de variations selon les supports.

2.3.6 Parmi les sujets qui ont échoué au premier essai, combien réussissent au second ?

Là encore, la réponse à cette question est la même que la réponse à la question : Parmi les seconds essais, combien de parties échouées ? ».

Pour répondre à cette question, il nous faut transcrire davantage d'informations sur nos sujets, notamment savoir quelle est la réussite à chaque essai réalisé par le sujet.

<i>Sujet</i>	<i>Feuille</i>	<i>Niveau</i>	<i>R=1</i>	<i>Essai 1 (R=1)</i>	<i>Essai 2 (R=1)</i>
1	A	CM2	0	0	0
2	A	CM2	1	0	1
3	A	CM2	1	1	
4	A	CM2	1	1	
5	A	CM2	0	0	0
6	A	CM2	1	0	1
7	A	CM2	1	1	
8	A	CM2	0	0	0
9	A	CM2	1	1	

Tableau 13 : Codage de la réussite ou de l'échec par partie – collection de référence : les sujets

	<i>Sujets qui ont échoué au 1^e essai</i>	<i>Réussite au 2nd essai</i>	<i>Echec au 2nd essai</i>
<i>Effectif</i>	34	15	19
<i>Pourcentage</i>	100%	44%	56%

Tableau 14 : résultats des sujets au second essai

Parmi les 34 sujets qui ont échoué au premier essai, seulement 15 réussissent au second essai.

Obtient-on des résultats analogues sur tous les supports ?

Support		Sujets qui ont échoué au 1 ^e essai	Réussite au 2 nd essai	Echec au 2 nd essai
Feuille A	Effectif	14	6	8
	Pourcentage	100%	43%	57%
Feuille B	Effectif	8	5	3
	Pourcentage	100%	63%	37%
Feuille C	Effectif	12	4	8
	Pourcentage	100%	33%	67%

Tableau 15 : résultats des sujets au second essai par support

L'étude de la réussite des sujets au second essai fait apparaître une part plus importante de sujets ayant réussi sur le support B. D'une certaine manière, ce résultat (63% de réussite au second essai) vient corriger le résultat observé lors du premier essai (11% de réussite au premier essai).

2.3.7 Parmi les 25 sujets qui réussissent, combien réussissent au premier essai ?

L'étude de la réussite nous amène à nous intéresser aux sujets qui n'ont pas réussi à leur premier essai et qui par contre ont réussi leur second essai.

Nous nous demandons quelle place les sujets ayant cette caractéristique occupent dans notre ensemble de sujets.

	Sujets qui ont réussi	Réussite au 1 ^{er} essai	Réussite au 2 nd essai
Effectif	25	10	15
Pourcentage	100%	40%	60%

Tableau 16 : résultats des élèves par essai (hors niveau scolaire)

Comme pour les questions précédentes, on peut se poser cette question globalement, mais aussi localement par support.

<i>Support</i>		<i>Sujets qui ont réussi</i>	<i>Réussite au 1^{er} essai</i>	<i>Réussite au 2nd essai</i>
<i>Feuille A</i>	<i>Effectif</i>	10	4	6
	<i>Pourcentage</i>	100%	40%	60%
<i>Feuille B</i>	<i>Effectif</i>	6	1	5
	<i>Pourcentage</i>	100%	17%	83%
<i>Feuille C</i>	<i>Effectif</i>	9	5	4
	<i>Pourcentage</i>	100%	56%	44%

Tableau 17 : étude de la répartition de la réussite des sujets entre essais

Pour les sujets qui ont réussi, les réussites ne se répartissent pas de la même manière en fonction du support. Quand le sujet réussit, c'est plutôt au second essai quand il est confronté à la feuille B, alors que la réussite se répartit de manière moins dissymétrique pour les feuilles A et C. Les données nous indiquent que la feuille B est plus difficile que les feuilles A et C.

Dans le même temps, la taille des échantillons manipulés nous incite à la prudence dans les conclusions que nous tirons de cette analyse particulière.

2.3.8 Conclusions de l'analyse des données en termes d'échec ou de réussite

Que retenons-nous de cette analyse quantitative des réussites et des échecs ?

Tout d'abord, des sujets de tous les niveaux scolaires à qui nous avons proposé cette situation ont rencontré des difficultés en cherchant à ramasser tous les sucres dans les conditions que nous avons proposées. Briand avait mis en évidence les difficultés rencontrées par des élèves de moyenne section pour la situation des allumettes et de CP pour la situation des chênes. Les sujets, élèves de Maternelle (feuille C) et de CP/CE1 (feuille B) à qui nous avons proposé la situation, ont rencontré les mêmes difficultés.

Les sujets, élèves de CE2 et de CM2 à qui nous avons proposé cette même situation (feuille A), ont rencontré les mêmes difficultés que les sujets plus jeunes à qui nous avons présenté la situation.

Les difficultés à mettre en œuvre une énumération d'une collection d'objets non déplaçables ne sont pas spécifiques à un niveau scolaire particulier.

Il existe une part significative de notre échantillon qui échoue à mettre en œuvre une énumération, même à l'issue du second essai. Dans nos observations, cette part varie de 33%

à 47% de l'échantillon en fonction du niveau scolaire (Tableau 9 : réussites et échecs à la situation par élève et par support). Nous pouvons donc conclure qu'une part significative des sujets fréquentant l'institution scolaire ont des difficultés dans la mise en œuvre d'une énumération.

Permettre à un sujet de se confronter après un échec à une même situation permet à certains de réussir. 44% des sujets qui font un second essai réussissent à la situation (Tableau 14 : résultats des sujets au second essai). Il suffit donc pour une part importante de notre échantillon de proposer de nouveau une même situation pour générer une réussite.

Permettre à un sujet de se confronter de nouveau à la même situation génère de la réussite quel que soit le support . Ce taux de réussite au second essai est compris entre 33% et 63% selon les supports (Tableau 15 : résultats des sujets au second essai par support).

Cette réussite a été générée par le seul fait de proposer la même situation. Ce second essai s'est déroulé dans la continuité immédiate du premier. Il n'y a eu aucune intervention de l'expérimentateur pour commenter l'action mise en œuvre lors du premier essai. Par ailleurs, le sujet n'a à aucun moment été en situation d'observation de ce que d'autres sujets ont pu réaliser. Il n'a donc pas procédé par imitation. Il ne s'est appuyé que sur la seule action qu'il avait réalisée lors du premier essai pour réussir au second.

2.4 Analyse des échecs en termes de conditions de l'énumération

Revenons à l'étude des échecs. Deux conditions peuvent provoquer l'échec du sujet dans la réalisation de l'énumération : soit un élément est traité deux fois, soit au moins un élément a été oublié.

Nous nous demandons si l'une des conditions est majoritaire par rapport à l'autre ou bien si les deux causes d'échecs ont des occurrences proches.

2.4.1 Dans les parties où le sujet échoue, quelle est la raison de l'échec ?

Cela nous amène à retravailler sur le tableau codant les informations sur les parties. Nous devons produire une nouvelle information binaire : chapeau oublié (0) ou chapeau levé deux fois (1).

Voici la nouvelle forme de la structure de données transcrivant les parties.

<i>Partie</i>	<i>Sujet</i>	<i>Feuille</i>	<i>Niveau</i>	<i>Essai</i>	<i>R=1</i>	<i>oubli(0) ou répétition (1)</i>
1	1	A	CM2	1	0	0
2	1	A	CM2	2		1
3	2	A	CM2	1	0	0
4	2	A	CM2	2		
5	3	A	CM2	1	1	
6	4	A	CM2	1	1	
7	5	A	CM2	1	0	1
8	5	A	CM2	2		0
9	6	A	CM2	1	0	1
10	6	A	CM2	2		
11	7	A	CM2	1	1	
12	8	A	CM2	1	0	1
13	8	A	CM2	2		1
14	9	A	CM2	1	1	

Tableau 18 : Codage des causes d'échecs sur les parties

Transcrivons la répartition des raisons des échecs dans les parties où le sujet échoue.

	<i>Partie</i>	<i>Oubli (0)</i>	<i>Répétition (1)</i>
<i>Effectif</i>	53	11	42
<i>Pourcentage</i>	100%	21%	79%

Tableau 19 : Répartition des causes d'échecs aux parties

Les deux raisons qui provoquent l'échec dans la partie ne sont pas présentes dans les mêmes proportions. Traiter un élément deux fois apparaît presque quatre fois plus qu'oublier de traiter un élément. Retrouvons-nous ce type de résultat pour chaque support ?

<i>Support</i>		<i>Partie échouée</i>	<i>Oubli (0)</i>	<i>Répétition (1)</i>
<i>Feuille A</i>	<i>Effectif</i>	22	4	18
	<i>Pourcentage</i>	100%	18%	82%
<i>Feuille B</i>	<i>Effectif</i>	11	3	8
	<i>Pourcentage</i>	100%	27%	73%
<i>Feuille C</i>	<i>Effectif</i>	20	4	16
	<i>Pourcentage</i>	100%	20%	80%

Tableau 20 : Répartition des causes d'échecs aux parties par support

Nous ne remarquons pas de différence significative des causes d'échecs par support. Les causes d'échec se répartissent dans des proportions proches, quel que soit l'âge des sujets (de 18% à 27%).

Attention à l'interprétation qui pourrait être faite de ce résultat. Cela ne signifie en aucun cas que les erreurs de répétitions sont quatre fois plus présentes que les erreurs d'oubli.

Les sujets qui échouent à cause d'un oubli sont des sujets dont nous pouvons garantir qu'ils n'ont pas commis d'erreur de répétition, puisque ce sont eux qui ont décidé d'arrêter le jeu en pensant avoir ramasser tous les sucres.

Les sujets qui échouent à cause d'une répétition sont des sujets qui, la plupart du temps, échouent tôt. Ce sont des sujets dont on ne peut pas garantir qu'ils n'auraient pas commis aussi des erreurs d'oubli.

La dysmétrie des conditions de non-réussite sur-représente donc la condition liée à l'occurrence d'une répétition. Cela explique pourquoi mécaniquement les parties où le sujet échoue à cause d'un oubli sont surreprésentées par rapport aux parties où le sujet échoue à cause d'une répétition.

En reprenant le même mécanisme que celui qui a été mis en œuvre précédemment, nous pouvons aussi étudier la raison de l'échec du point de vue des sujets. Quand un sujet échoue, c'est parce qu'il échoue à ses deux essais. Nous pouvons donc formuler une nouvelle question.

2.4.2 Parmi les sujets qui échouent, échouent-ils aux deux essais pour la même raison ?

Pour répondre à cette question, nous codons une nouvelle information dans la structure de données qui synthétise les éléments sur les sujets. Cette nouvelle information binaire prendra la valeur 1 si les sujets échouent aux deux essais pour les mêmes raisons et prendra la valeur 0 dans le cas contraire.

Sujet	Feuille	Niveau	R=1	Essai 1		Essai 2		Même raison échec
				R=1	oubli(0) ou répétition (1)	R=1	oubli(0) ou répétition (1)	
1	A	CM2	0	0	0	0	1	0
2	A	CM2	1	0	0	1		
3	A	CM2	1	1				
4	A	CM2	1	1				
5	A	CM2	0	0	1	0	0	0
6	A	CM2	1	0	1	1		
7	A	CM2	1	1				
8	A	CM2	0	0	1	0	1	1
9	A	CM2	1	1				

Tableau 21 : Codage de la raison de l'échec sur les sujets

Les sujets qui échouent deux fois de suite se répartissent de la manière suivante :

	Sujets qui échouent	Même raison échec	Raison différente
Effectif	15	9	6
Pourcentage	100%	60%	40%

Tableau 22 : Répartition de la même raison de l'échec sur les sujets

Détaillons les raisons de l'échec de ces 9 sujets et les supports sur lesquels ces sujets jouent leurs parties.

	<i>Deux oublis</i>	<i>Deux répétitions</i>
<i>Feuille A</i>	<i>0</i>	<i>6</i>
<i>Feuille B</i>	<i>0</i>	<i>2</i>
<i>Feuille C</i>	<i>0</i>	<i>1</i>

Tableau 23 : Détail des causes d'échec identique par support

Ces 9 sujets qui échouent deux fois de suite pour les raisons le font systématiquement parce qu'ils traitent un élément deux fois.

Nous avons repéré, pour un sujet qui échoue, la condition de l'énumération qui n'a pas été remplie. Pour pouvoir affiner cette description, nous sommes maintenant contraints de nous intéresser aux chapeaux qui sont oubliés ou soulevés deux fois.

Cela nous amène à formuler une nouvelle question : Parmi les sujets qui ont échoué dans une partie, quels sont les sucres qui ont été oubliés, quels sont les chapeaux qui ont été soulevés deux fois ?

Pour répondre à cette question, il faut que nous puissions différencier les sucres qui ont été posés sur les ronds de notre feuille. Or, ces sucres sont *a priori* tous identiques. Ils ne se différencient que par la position qu'ils occupent dans la feuille. C'est donc une information de position dans le plan qu'il nous faut transcrire ici. Si nous pouvons repérer le sucre, nous pourrions de facto repérer le chapeau qui le recouvre.

2.4.3 Aspects méthodologiques : élaboration d'une transcription détaillée

Choix d'une représentation des positions

Pour cette première série de transcriptions, nous choisissons de représenter chaque triplet (rond ; sucre ; chapeau) par le seul rond. Les différents ronds sont positionnés à l'intérieur d'un rectangle. Ce rectangle représente la feuille A3 sur laquelle sont disposés les objets matériels de notre situation.

Le dessin de chaque rond dans le rectangle permet donc de transcrire la position qu'occupe chaque triplet dans l'espace de la feuille.

Dans la suite de ce texte, nous nous appuyerons sur un exemple fictif pour mettre en exergue les choix de représentation que nous avons faits. Pour ne confondre à aucun moment notre exemple fictif avec une des situations effectives que nous avons observée, nous

choisissons pour notre exemple fictif un nombre de ronds nettement inférieur à celui des situations observées. Les descriptions qui seront produites sur l'exemple fictif ne revendiquent donc aucun caractère de vraisemblance et ne sont là que pour que nous puissions comprendre les choix de transcription réalisés.

La figure suivante présente les positions spatiales occupées par nos triplets (rond ; sucre ; chapeau) dans notre exemple fictif.

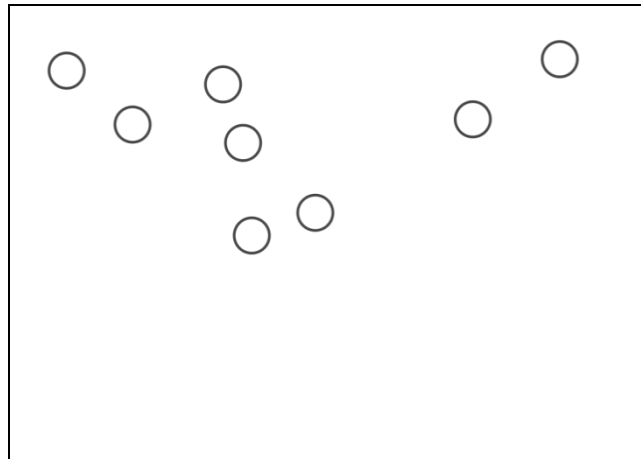


Figure 51 : positions spatiales des triplets de notre exemple fictif

Pourquoi avons-nous choisi de représenter nos triplets par des ronds ? Nous reviendrons sur les raisons de cette décision quand nous traiterons de la question de la prise en compte de l'ordre. Contentons-nous pour l'instant d'avancer l'idée de produire une transcription qui rende compte, au moins a minima, de la réalité matérielle du sujet. Or, ce que le sujet voit quand il est en situation, c'est bien une collection de chapeaux. Le rond est une bonne approximation de la vue de dessus d'un chapeau posé sur une feuille. Le rond apparaît donc à ce stade comme une décision raisonnable de choix de codage conventionnel des triplets.

Transcription des positions des triplets dans nos trois configurations

Si nous appliquons cette méthodologie aux situations que nous avons observées, cela nous permet une cartographie de la collection, la représentation de l'ensemble des positions occupées par les objets étudiés pour les trois configurations sur lesquelles nous avons travaillé.

Les trois figures suivantes présentent la transcription que nous avons faite des positions des triplets dans nos trois configurations.

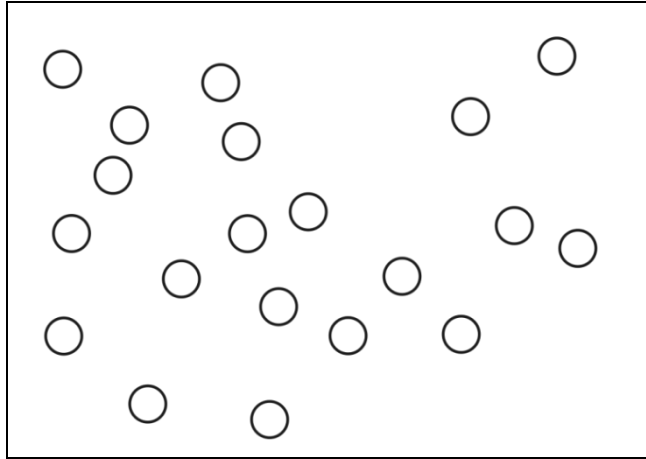


Figure 52 : transcription des positions des triplets (feuille A)

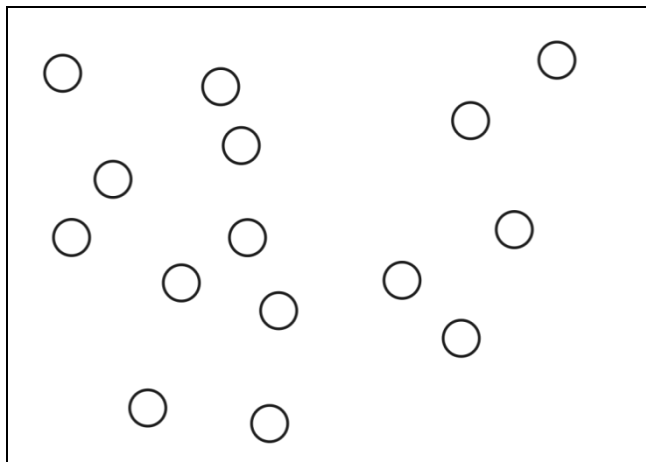


Figure 53 : transcription des positions des triplets (feuille B)

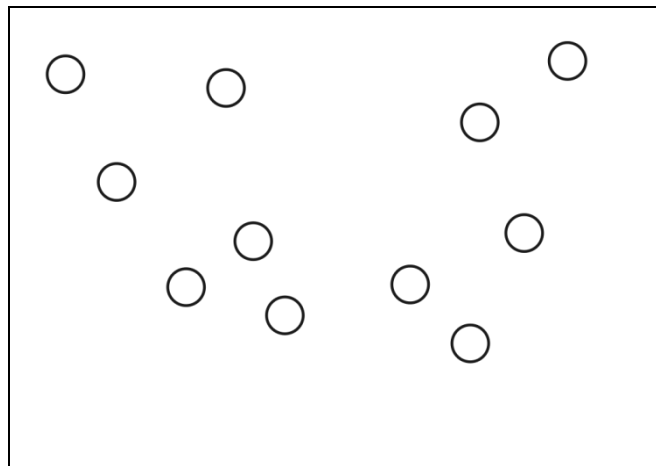


Figure 54 : transcription des positions des triplets (feuille C)

Nous disposons donc maintenant d'un moyen de repérer la position de chaque triplet.

2.4.4 Dans les parties où le sujet échoue, échoue-t-il toujours sur les mêmes sucres ?

Nous sommes maintenant capables de repérer la position des chapeaux traités deux fois ou oubliés. Pour transcrire le nombre de fois où un sucre a été oublié ou traité deux fois, nous choisissons d'écrire le nombre d'occurrences de la caractéristique étudiée directement dans le rond qui modélise la position du triplet.

2.4.4.1 Transcriptions des positions des sucres oubliés

Les figures suivantes présentent les occurrences et les positions des sucres qui ont été oubliés.

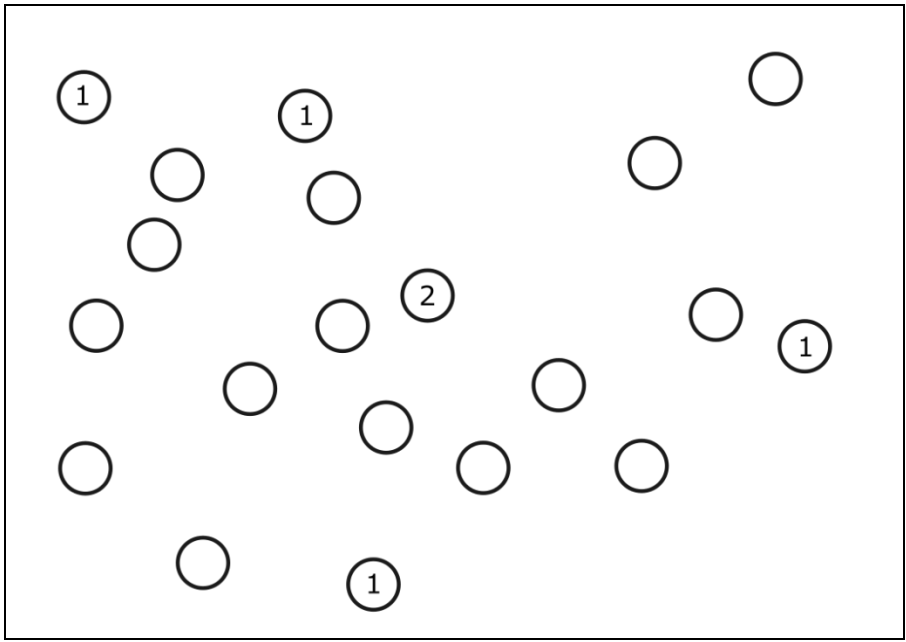


Figure 55 : Transcription des positions des sucres oubliés (feuille A)

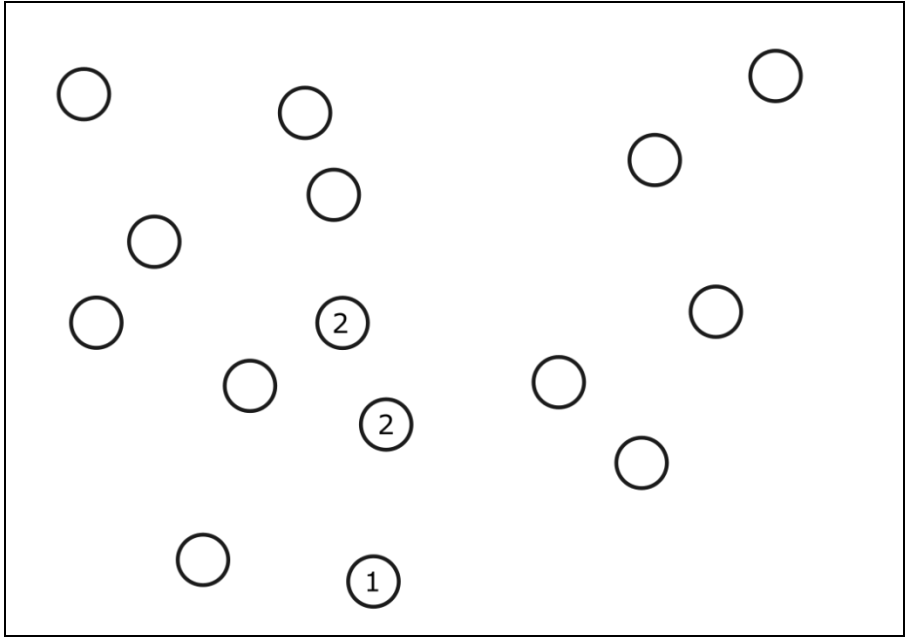


Figure 56 : Transcription des positions des sucres oubliés (feuille B)

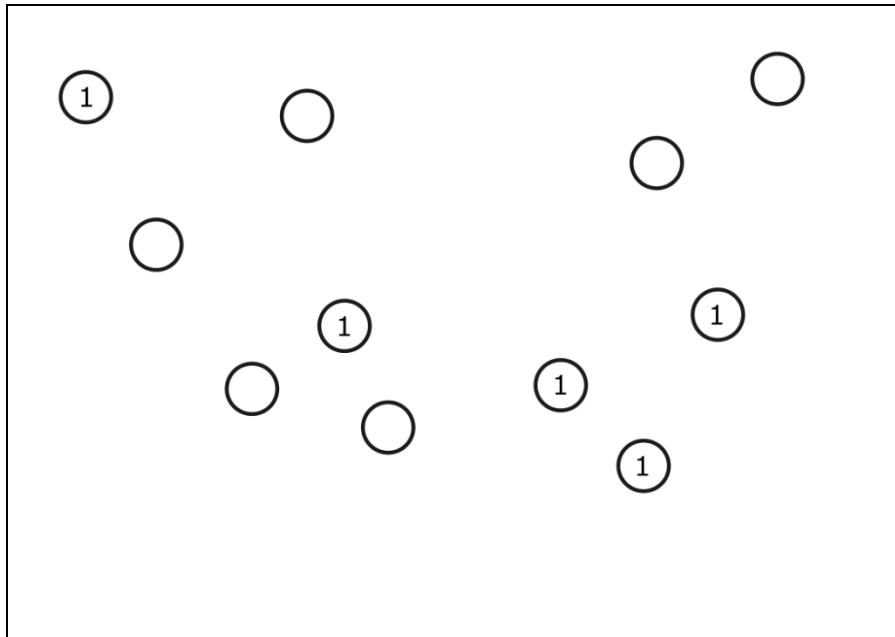


Figure 57 : Transcription des positions des sucres oubliés (feuille C)

Les sucres oubliés figurent soit sur les contours de l'ensemble soit au cœur de celui-ci.

2.4.4.2 Transcriptions des positions des chapeaux traités deux fois

Les figures suivantes présentent les occurrences et les positions des ronds qui ont été soulevés deux fois et dont le soulèvement a donc entraîné une interruption du traitement par le sujet.

Nous avons fait le choix de faire apparaître les ronds remplissant ces conditions sur un fond noir pour distinguer clairement la différence de statut entre les informations que nous codons ici et celles que nous étudions dans le paragraphe précédent.

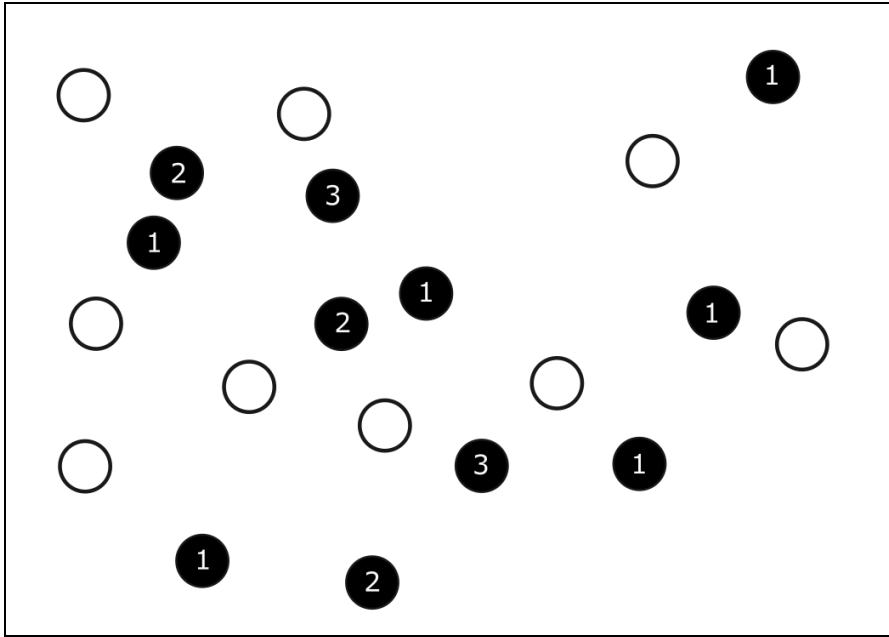


Figure 58 : Transcription des positions des chapeaux traités deux fois (feuille A)

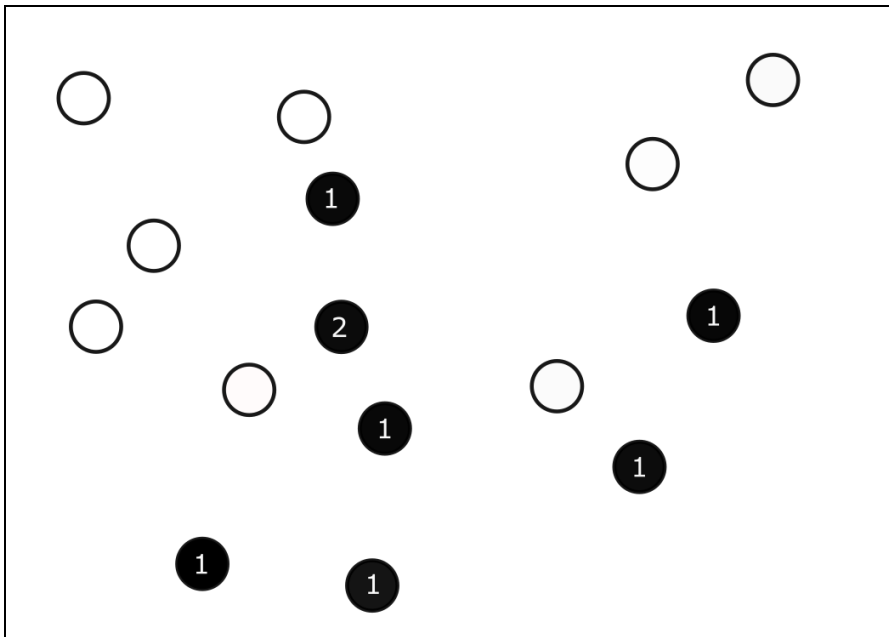


Figure 59 : Transcription des positions des chapeaux traités deux fois (feuille B)

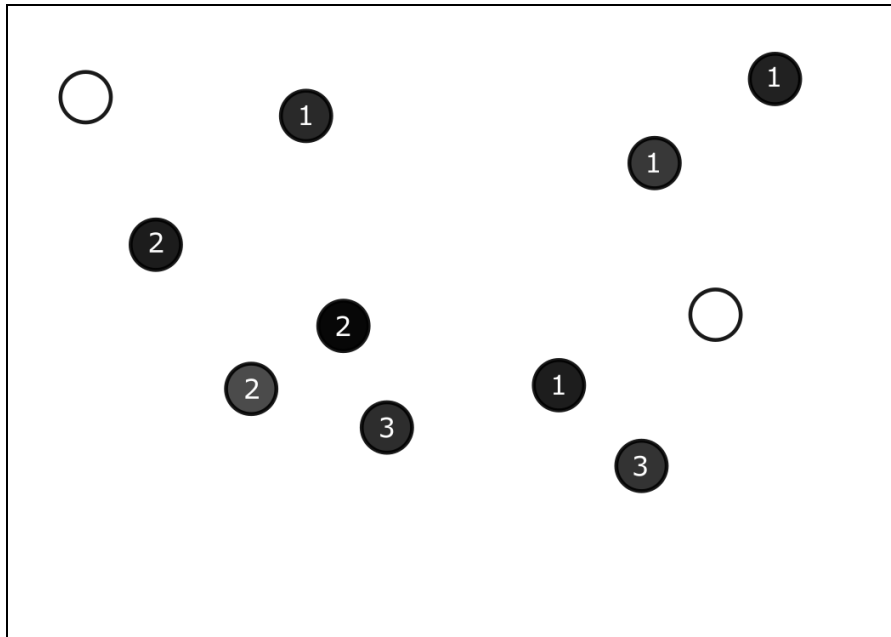


Figure 60 : Transcription des positions des chapeaux traités deux fois (feuille C)

Les sucres soulevés deux fois figurent aussi soit sur les contours de l'ensemble soit au cœur de celui-ci.

Pour autant, ces données brutes ne nous permettent pas de comprendre pourquoi les sujets n'ont pas traité ces chapeaux correctement. Nous sommes contraints de produire une description plus détaillée de la suite d'actions que les sujets ont réalisées.

2.4.5 Aspects méthodologiques : affiner la transcription détaillée

Maintenant que nous avons décrit la réussite ou l'échec ainsi que certaines des raisons de l'échec d'un sujet, nous souhaitons aller plus loin dans notre analyse.

Nous voulons comprendre comment les sujets réussissent ou échouent. Il nous faut rentrer dans le détail de la suite des traitements que chaque sujet a réalisés.

En effet, nous pensons que l'ordre dans lequel ils soulèvent les chapeaux a une importance sur la réussite à la situation. Nous allons donc maintenant chercher à produire une transcription qui permette de rendre compte de l'ordre dans lequel chaque chapeau a été soulevé.

2.4.5.1 Choix d'une représentation de l'ordre des traitements

Premières pistes

Une transcription pour la situation des chapeaux est une représentation qui a pour objectif de décrire la suite des actions de soulèvement d'un chapeau réalisées par un sujet.

Il nous faut rendre compte dans l'espace 2D de la feuille de ce qui est mis en œuvre par le sujet. Les clips vidéo montrent une suite d'actions qui sont presque toutes identiques, à savoir le sujet soulève un chapeau, attrape le sucre, le pose dans la boîte et repose le chapeau sur le point.

A ce point de l'analyse, nous ne nous intéressons pas à tous les aspects du traitement. Nous voulons indiquer quels sont les points qui sont traités et dans quel ordre ils le sont. Il y a donc une double information à transcrire :

- Une information sur la position occupée par le rond dans l'espace-plan de la feuille,
- Une information sur l'ordre dans lequel la suite des ronds est traitée.

L'ordre, dont il est question ici, est une information sur la temporalité qui doit permettre, une fois chaque rond repéré par sa position, de savoir pour n'importe quel point quel est le rond qui a été traité avant et quel est le rond qui a été traité après.

La transcription doit permettre de rendre compte de dimensions spatiales mais aussi de dimensions temporelles.

Pour rendre compte de la position, nous décidons de conserver la représentation des ronds sur les feuilles que nous avons développée précédemment.

Pour rendre compte de l'ordre, une première possibilité consiste à considérer une transcription comme une succession de représentations des ronds de la feuille, chaque représentation permettant d'indiquer la position du nouveau chapeau qui vient d'être soulevé. Pour transcrire cette information, il suffit de pouvoir repérer par un codage couleur la position du rond qui a été traité

Examinons ce que cela pourrait donner sur notre exemple fictif.

Une première piste pour la transcription de l'ordre

La vue 1 de la suite des traitements permet de repérer quelle est la position du premier chapeau qui est soulevé.

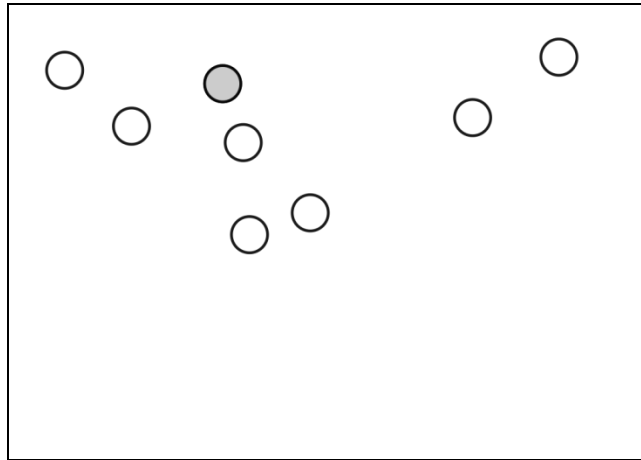


Figure 61 : Vue 1 de la transcription de la suite des traitements (exemple fictif)

La figure précédente permet au lecteur de repérer quel est le chapeau qui vient d'être soulevé. C'est d'autant plus facile que cette vue 1 représente la première action réalisée.

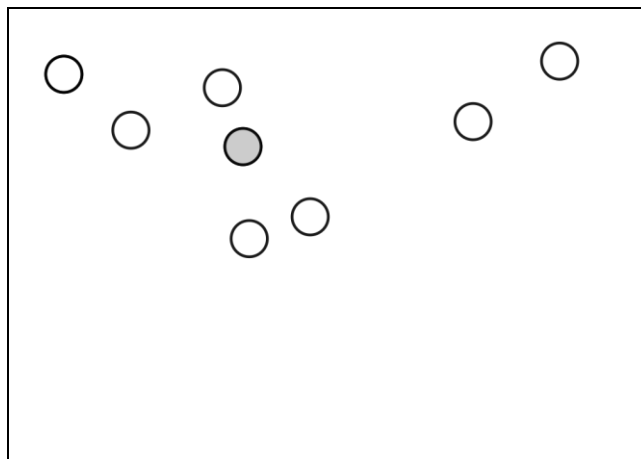


Figure 62 : Vue 2 de la transcription de la suite des traitements (exemple fictif)

La vue 2 est construite sur le même principe que la vue 1, à savoir le repérage par une couleur de la position du chapeau qui est soulevé.

La transcription est donc une suite de vues qui font apparaître pour chacune d'elle la position du rond qui est traité. Cette suite de vues est une suite ordonnée. C'est l'ordre sur la suite des vues qui permet de reconstituer l'ordre des traitements.

Avec ce codage, une transcription est donc une suite de représentations du support sur lequel nous travaillons, à l'image d'un folioscope qui reconstitue le mouvement quand on l'effeuille avec le pouce.

Ce premier choix de transcription est difficile à lire dans un texte écrit. En ne repérant à chaque étape que le chapeau qui vient d'être soulevé, nous n'avons pas la possibilité de repérer a minima sur une vue les chapeaux qui ont déjà été soulevés.

Nous allons donc faire évoluer notre transcription pour permettre à un lecteur de comprendre la nature et la suite des actions que réalise un sujet . Cependant, la transcription que nous venons de présenter nous permet de mieux comprendre quelle est la situation effective du sujet pendant la partie : une absence de prise en charge par la situation à chaque instant de la mémoire des actions de soulèvement réalisées précédemment.

Une seconde piste pour la transcription de l'ordre

Nous choisissons de modifier le dispositif de transcription pour intégrer à chacune des vues la mémoire de la position des chapeaux qui ont été soulevés antérieurement.

Examinons la nouvelle vue 2 de la transcription.

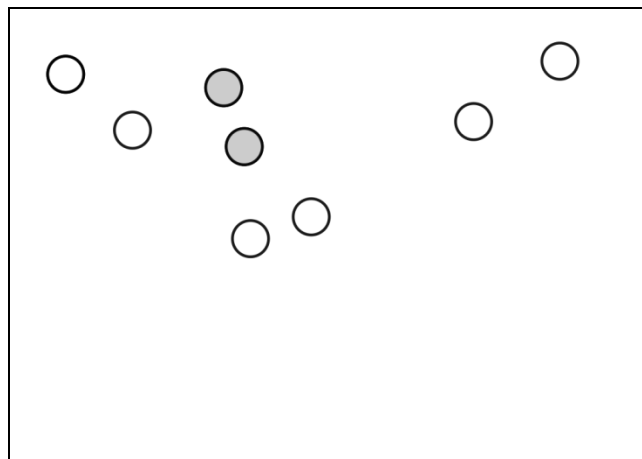


Figure 63 : Vue 2 de la nouvelle transcription de la suite des traitements (exemple fictif)

Cette vue 2 permet de repérer quels sont tous les chapeaux qui ont été soulevés à cet instant et quelle est la position du nouveau sucre qui vient d'être ramassé. Pour déterminer cette position, il suffit de repérer entre les vues 1 et 2 quel est le nouveau rond dans lequel un fond grisé apparaît.

Pour transcrire ce que nous avons représenté dans notre exemple fictif, nous pourrions avoir la suite de vues suivantes.

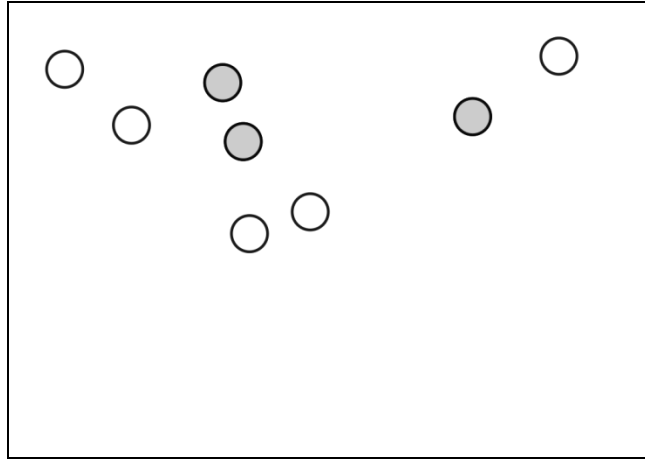


Figure 64 : Vue 3 de la nouvelle transcription de la suite des traitements (exemple fictif)

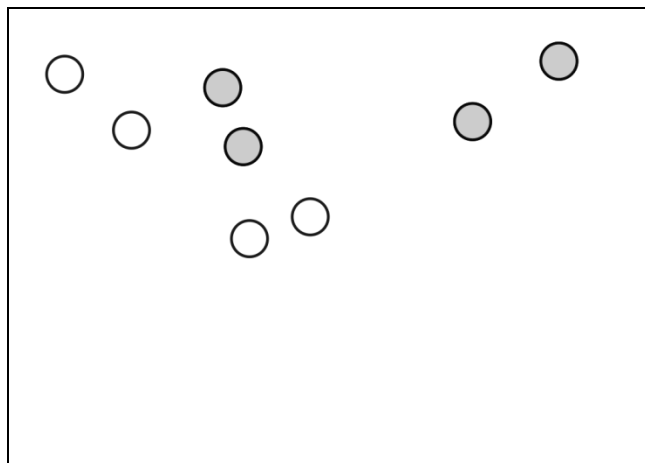


Figure 65 : Vue 4 de la nouvelle transcription de la suite des traitements (exemple fictif)

Dans une transcription de ce type, il y a autant de vues que d'actions de soulèvement de chapeau par le sujet.

Une transcription est donc une suite ordonnée de représentations de l'état de la feuille aux différentes étapes de son traitement. Elle permet de repérer à chaque instant la position des chapeaux qui ont été soulevés.

Cette nouvelle transcription est lourde. Elle peut comporter de nombreuses vues, mais surtout elle est difficile à lire. Il faut repérer entre deux vues successives quel est le rond qui vient de changer de statut (passer d'un fond blanc à un fond grisé entre autre).

La représentation dans le cadre d'un texte écrit de la suite des traitements n'est pas encore bien pris en charge par cette transcription, d'où la nécessité de la faire encore évoluer.

Intégration d'une représentation de l'ordre des traitements

Nous essayons de produire une description dont l'objectif est de pouvoir décrire de la manière la plus synthétique et surtout lisible la suite des actions réalisées par le sujet dans le cadre d'un texte écrit.

Il nous faut trouver une transcription constituée d'une seule représentation de la collection des ronds et c'est sur cette seule représentation que le lecteur doit pouvoir reconstituer l'ordre des actions de ramassage des sucres.

Il nous faut utiliser une suite de signes distinctifs qui puisse permettre de rendre compte de l'ordre dans lequel les sucres sont ramassés.

La suite numérique est une suite ordonnée qui permet de décrire une chronologie. La plupart du temps, c'est dans le contexte oral qu'elle est utilisée pour décrire une chronologie. Si ce n'est pas dans le contexte oral, c'est dans un contexte écrit, le plus souvent spatialement fortement structuré par la raison graphique.

Nous allons donc faire figurer un nombre dans chaque sucre qui est soulevé, ce qui nous permettra de mémoriser l'ordre dans lequel il l'a été.

Appliquons ce choix à notre exemple fictif.

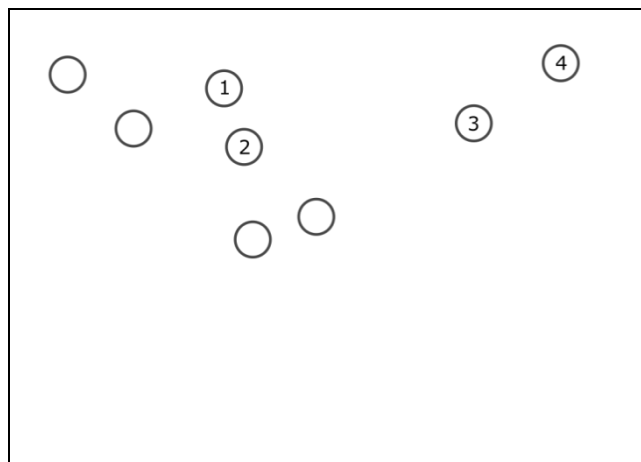


Figure 66 : Transcription de la suite des traitements (exemple fictif)

La figure ci-dessus permet de reconstituer certaines des actions des sujets que nous avons choisis de transcrire. Les ronds qui contiennent un numéro représentent des positions des sucres qui ont été ramassés par le sujet, ceux sans aucun signe représentent des positions de sucres qui n'ont pas été ramassés. Par ailleurs, l'appui sur l'ordre induit par la numérotation des ronds permet de reconstituer l'ordre dans lequel ont été ramassés les quatre sucres de notre exemple fictif et donc l'ordre dans lequel ont été soulevés les quatre chapeaux qui contiennent un symbole.

La question de la fin du traitement

Le traitement se termine soit quand le sujet l'a décidé (parce qu'il le manifeste), soit quand le sujet soulève un chapeau qui a déjà été soulevé.

Dans le premier cas, nous avons montré qu'aucun codage supplémentaire n'était nécessaire puisque l'arrêt du traitement est le résultat d'une décision du sujet. C'est cette absence de tout codage ou signe supplémentaire qui permet de transcrire la fin du traitement.

Par contre, dans le cas où le traitement s'arrête car un chapeau qui ne recouvre plus de sucre est soulevé, il nous faut transcrire le caractère particulier de cette action.

Cette action est le soulèvement d'un chapeau qui manifeste la volonté de ramasser un sucre. De ce point de vue, elle n'est pas différente des autres actions que réalise le sujet. Il faut là encore transcrire la position du rond qui a été saisi et l'ordre dans lequel le sujet l'a fait.

La caractéristique de ce type d'actions est qu'elles ne peuvent avoir lieu plus d'une fois lors d'un essai. Nous avons donc au plus une tentative de ramassage de sucre à coder.

Pour cette seconde saisie d'un même chapeau, nous décidons de faire apparaître le rond considéré sur un fond noir.

La présence de ce rond noir permet bien de repérer la position du chapeau que le sujet a doublement saisi.

Il nous reste à coder l'ordre dans lequel cela s'est produit.

Comme cette action ne peut pas se produire plus d'une fois, nous n'avons pas besoin de codage supplémentaire. Si un rond noir figure sur notre transcription, cela sera nécessairement le dernier chapeau qui aura été saisi, le dernier élément que le sujet aura essayé d'énumérer.

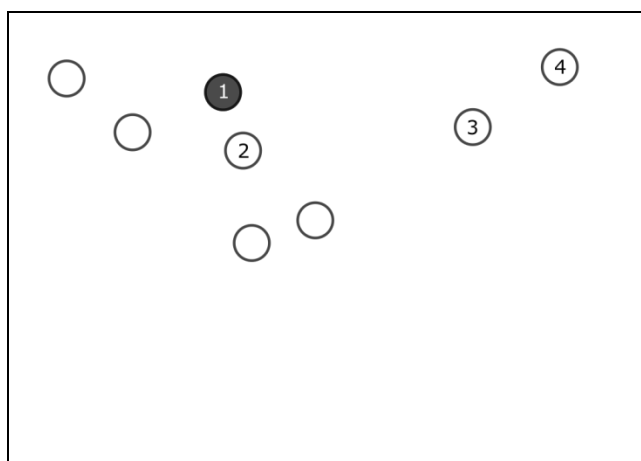


Figure 67 : codage de l'action de soulèvement d'un chapeau déjà soulevé (exemple fictif)

La figure ci-dessus permet bien de reconstituer les actions du sujet. Ce sujet a soulevé une deuxième fois un chapeau qu'il avait déjà soulevé. Le premier soulèvement avait été un soulèvement réalisé en position 1 par ce sujet., le second soulèvement après le soulèvement du chapeau soulevé en position 4. C'est donc le cinquième soulèvement qui est erroné.

L'exemple fictif sur lequel nous nous sommes appuyés comporte peu d'éléments. Le nombre de ronds est plus important dans les support que nous allons étudier. Pour des raisons ergonomiques, nous choisissons de renforcer la perception des ronds correctement traités en les représentant avec un fond gris.

Nous avons donc plusieurs types de formes dans nos transcriptions :

- Des ronds sur fond blanc qui ne contiennent pas de symboles. Ils représentent des chapeaux qui n'ont pas été soulevés.
- Des ronds sur fond gris qui contiennent un numéro. Ceux-là représentent des chapeaux saisis par le sujet. Ces chapeaux ont été saisis une fois et une seule.
- Des ronds sur fond noir qui contiennent un numéro. Ils représentent des chapeaux qui ont été saisis deux fois par le sujet.

Nous construisons une suite de numéros qui permet de reconstituer l'ordre dans lequel les chapeaux ont été soulevés.

Compte tenu des règles du jeu, il ne peut y avoir plus d'un rond sur fond noir dans la transcription des actions d'un sujet puisque l'action que transcrit ce code provoque l'arrêt immédiat du jeu.

Essais de transcriptions de cas observés

Nous testons ici la robustesse de notre transcription. Nous cherchons à déterminer si les conclusions que nous tirons de la transcription sont bien les mêmes que celles qui résultent du film du sujet confronté à la situation.

Observons maintenant ce que donnent ces choix dans le cadre d'une des situations que nous avons observées. La figure suivante est la transcription de la suite des actions réalisées par un sujet confronté à la feuille A dont nous savons qu'il a réussi.

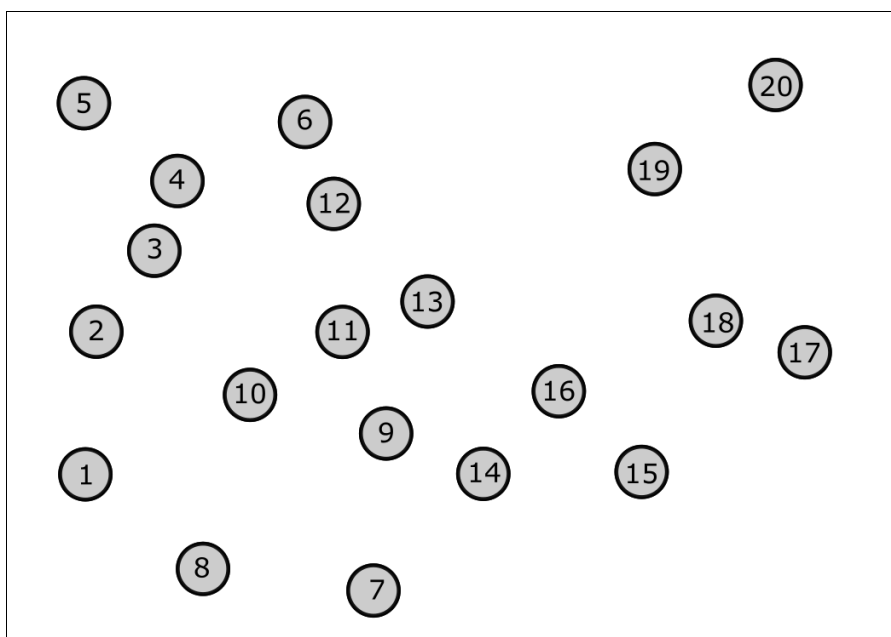


Figure 68 : transcription d'un essai observé (essai 2 de l'élève 2 - feuille A)

Tous les ronds sont numérotés. C'est bien la présence d'un numéro, d'un symbole dans chaque rond, qui nous indique que le sujet a réussi. Nous disposons déjà de ces informations. Par contre, nous pouvons maintenant reconstituer l'ordre dans lequel il a soulevé les chapeaux.

Examinons maintenant les transcriptions produites quand le sujet ne réussit pas.

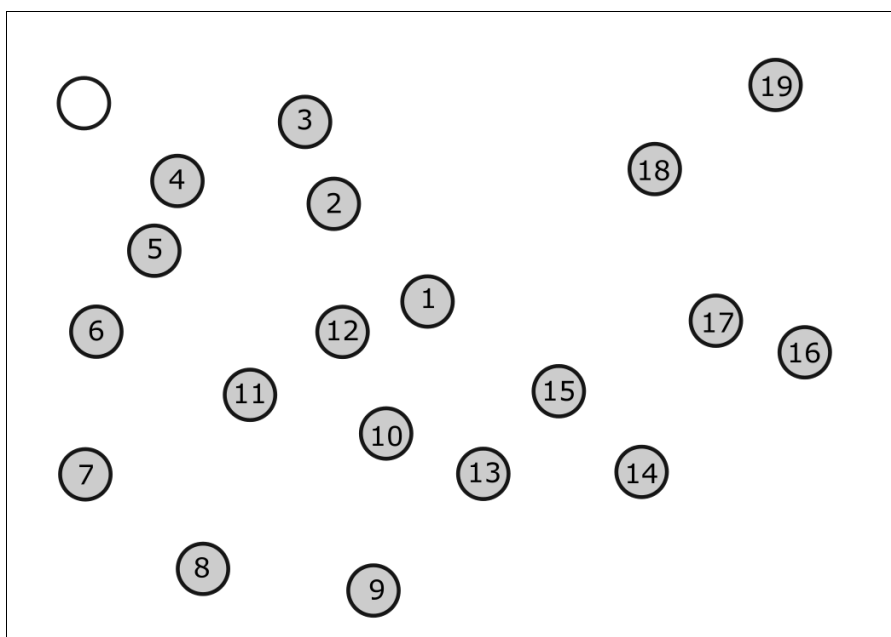


Figure 69 : transcription d'un essai observé (essai 1 de l'élève 1 - feuille A)

Ce sujet a soulevé de nombreux sucres. Le repérage du numéro le plus grand de l'ensemble de ceux qui figurent dans les ronds nous permet d'affirmer que ce sujet a ramassé 19 sucres. Nous observons aussi qu'un des ronds ne comporte pas de numéro, ce qui signifie que le sucre caché sous le chapeau correspondant n'a pas été ramassé. Nous pouvons en déduire que c'est le sujet qui a manifesté qu'il pensait avoir ramassé tous les sucres. Cette situation correspond bien à l'un des deux cas que nous avons défini et qui met fin au traitement. Le sujet n'a pas réussi dans cet essai à ramasser tous les sucres. Nous pouvons là encore reconstituer l'ordre dans lequel il a ramassé les sucres.

Examinons la transcription que nous avons produite pour décrire le second essai de l'élève 1 sur la feuille A.

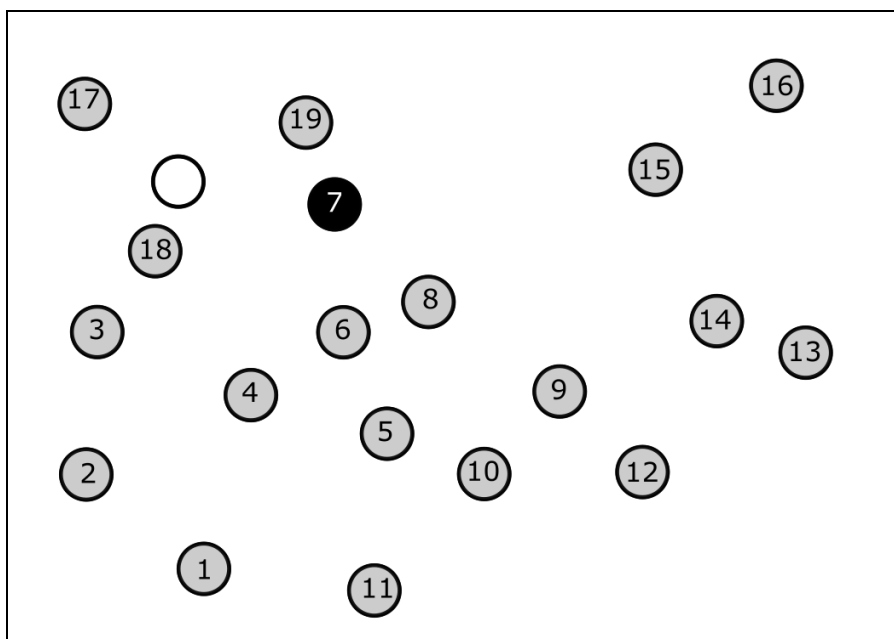


Figure 70 : transcription du second essai de l'élève 1 (feuille A)

Cette transcription fait bien apparaitre que le sujet n'a pas réussi à énumérer la collection des ronds. Un rond noir figure sur la transcription. Nous pouvons donc dire que le jeu s'est arrêté lorsqu'un chapeau a été soulevé pour la seconde fois. Nous identifions la position du chapeau soulevé deux fois (le chapeau qui est repéré par le nombre 7).

Le numéro le plus grand écrit dans les ronds est le numéro 19. Nous pouvons donc reconstituer la suite d'actions réalisées par le sujet. Il a soulevé 19 chapeaux sous lesquels figurait à chaque fois un sucre avant un 20^e soulèvement de chapeau dont il avait déjà ramassé le sucre.

Nous disposons donc maintenant de 78 transcriptions de nos clips vidéo qui vont nous permettre d'avancer dans l'analyse des raisons de la réussite ou de l'échec des sujets aux parties.

2.4.5.2 Quelle transcription pour aider à la détermination des stratégies ?

Nous pouvons maintenant décrire dans quel ordre les éléments de la collection ont été traités. Pour pouvoir produire des interprétations en termes de stratégies, nous nous demandons comment nous pouvons transcrire la suite des traitements réalisées pour rendre explicite les décisions de classification que nous prenons.

Qu'est-ce qu'une stratégie ?

Nous ne pouvons pas accéder aux intentions du sujet. Pourtant, nous cherchons à comprendre comment le sujet s'organise quand il cherche à résoudre le problème des sucres. Brousseau (1990, 1998) décrit une stratégie comme une suite d'états qui détermine les choix du joueur. C'est sur cette hypothèse qu'il existe des principes organisateurs pour résoudre ce problème que nous nous appuyons. Ce sont ces principes organisateurs que notre analyse *a priori* nous a permis d'identifier.

Ce que nous observons est la suite des actions que le sujet réalise. Une stratégie est une modélisation de cette suite d'actions, suite d'actions cohérentes et que nous serions capable de décrire pour qu'un automate les réalise comme le sujet. L'objectif de cette modélisation est de comprendre quels sont les principes organisateurs mis en œuvre de manière effective par le sujet. C'est ce que nous convenons d'appeler stratégie.

Une stratégie est donc une modélisation des actions du sujet qui ne soit pas incompatible avec les actions qu'il réalise effectivement.

Quelles conséquences pour la transcription ?

L'objectif de l'étude des stratégies est de confronter l'analyse *a priori* à nos observations pour étudier dans quelle mesure les stratégies que nous avons identifiées sont effectivement présentes ou pas, quels écarts nous observons par rapport à ce qui était attendu et quelles conséquences nous en tirons du point de vue de la compréhension de la situation et de ses variables.

Améliorer la perception visuelle de la transcription de l'ordre

La dimension temporelle est déjà prise en compte par la mise en œuvre de la numérotation des ronds. Pour autant, l'écriture de cette suite de numéros ne rend pas compte de la dimension dynamique de ce que nous percevons quand nous observons un sujet qui joue aux sucres.

Nous cherchons donc à répondre à la question suivante: comment repérer les sujets qui mettent en œuvre les stratégies que nous avons décrites dans l'analyse *a priori* ?

Pour rappel, ces stratégies reposent sur le repérage dans la suite des actions réalisées soit de certaines directions de traitements privilégiées pour les stratégies *Lignes* et *Colonnes*, soit de certains ensembles d'éléments privilégiés pour la stratégie *Partition*.

Imaginons une planche de bande dessinée sur laquelle il faille lire les bulles dans l'ordre indiqué par une référence numérique placée en bas à droite de chaque bulle. C'est épuisant pour le lecteur ! Il dépense une partie de son énergie à reconstituer l'ordre des bulles qu'il ne dépense pas à lire l'histoire qui lui est proposée. En fait, nous sommes confrontés un peu au même problème. Il nous faut un moyen de transcrire l'ordre des actions pour mobiliser toute notre énergie dans la compréhension des stratégies qui sont mises en œuvre par le sujet.

Nous cherchons à transcrire par un procédé visuel le caractère dynamique et lié de la suite d'actions que le sujet exécute. D'où l'idée de construire un geste graphique pour représenter l'ordre dans lequel les chapeaux sont soulevés.

Nous décidons de joindre par un trait deux chapeaux éléments qui sont traités consécutivement. D'une certaine manière, nous reprenons ici l'idée de chemin développée par Briand dans sa situation des chênes, même si ici nos sujets n'ont pas de crayon pour réaliser ce geste.

En faisant cela, nous prenons le risque que le lecteur pense que le sujet ne fait que « suivre un chemin » alors que le chemin n'existe pas. Nous pouvons faire une analogie avec la situation du promeneur en forêt qui quitterait les chemins balisés pour évoluer dans un espace sans repère de chemin. Le dilemme résulte ici d'une tension entre la reconstitution de l'action du sujet et la compréhension du lecteur qui ne dispose que de l'écrit. (Goody, 1977, p. 110-11)

Quelle forme pour le tracé des chemins ?

Briand avait évoqué des chemins en définissant l'énumération. C'est donc par un trait, à la manière d'un chemin que nous allons joindre deux ronds traités consécutivement.

Nous nous demandons quel type de trait choisir pour représenter le caractère consécutif des traitements. En effet, notre logiciel de dessin nous propose de lier les points soit par des segments, soit par des traits courbes.

Voici le rendu graphique produit par les deux possibilités que nous offre notre dispositif technologique sur le premier essai de notre élève 1.

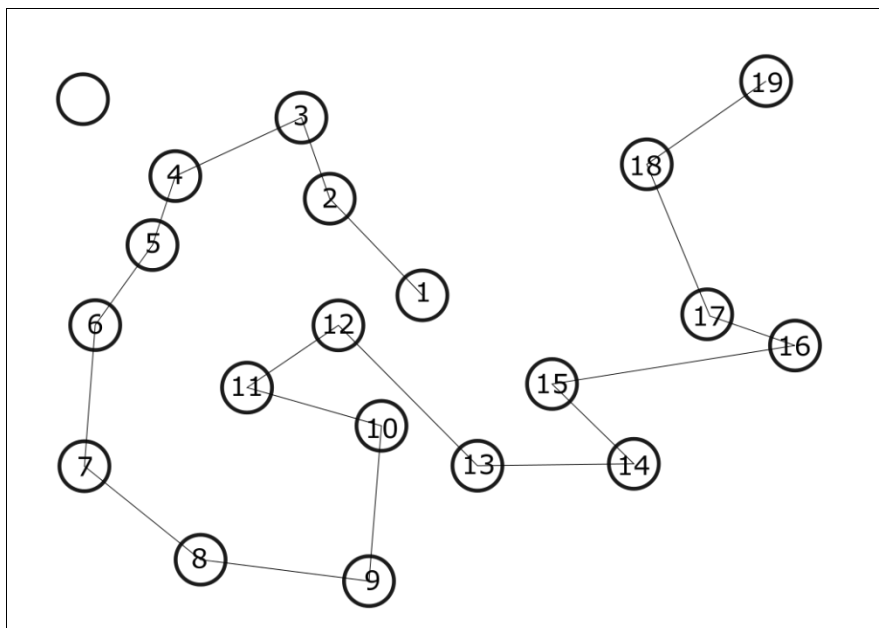


Figure 71 : Représentation de l'ordre des traitements par une suite de segment (essai 1 du sujet 1)

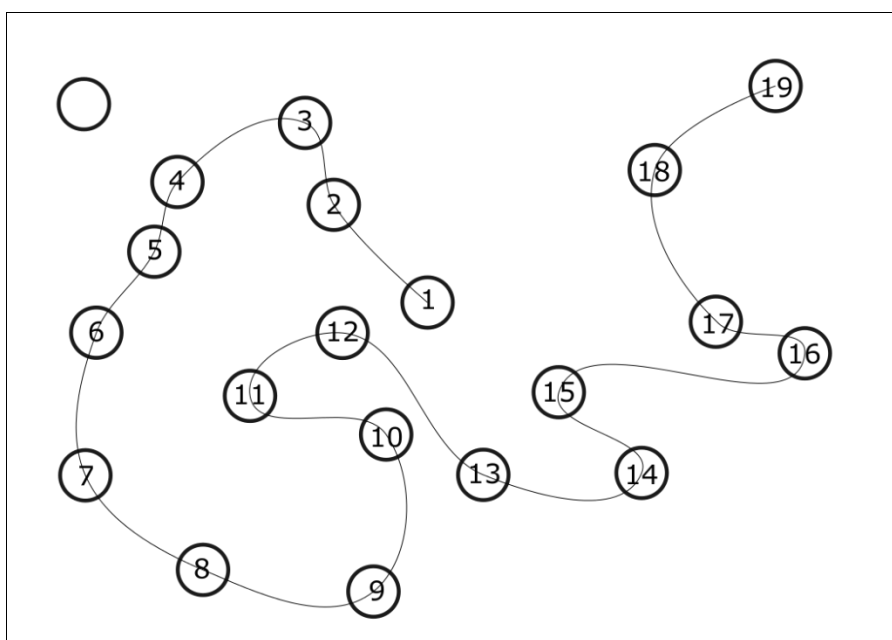


Figure 72 : Représentation de l'ordre des traitements par une suite de traits courbes (essai 1 du sujet 1)

Cette transcription n'a pas pour objet de rendre compte des déplacements effectifs de la ou des mains du sujet confronté à la situation des sucres. Pour autant et sans élément décisif autre qu'esthétique pour trancher sur ce point, nous décidons d'adapter la représentation traits courbes.

Dans le travail que nous sommes en train d'effectuer sur la nature des choix pour transcrire notre situation, nous nous demandons dans quelle mesure la référence aux numéros demeure encore nécessaire. Voici le même essai sans numéro.

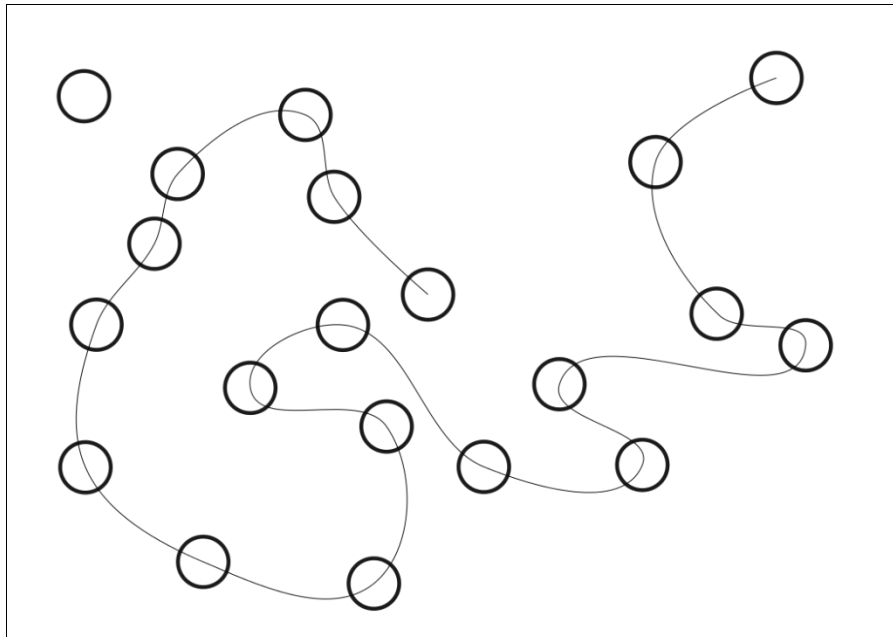


Figure 73 : Représentation de l'ordre des traitements par une suite de traits courbes – ronds sans numéro (essai 1 du sujet 1)

La réalisation d'un chemin qui relie des ronds non numérotés entre eux perd une information. Nous ne savons pas dans quel sens ce chemin a été construit par le sujet. Nous ne savons donc pas quel est le premier élément traité. Nous retrouvons ici un aspect que nous avons déjà observé dans la situation des chênes avec le travail de Mylène (Briand, 1993, p. 311). Nous conservons quand même l'information sur un ordre relatif dans lequel les éléments ont été traités. Il ne nous manque que le sens de parcours du chemin.

Nous avons pour objectif de repérer des stratégies. Dans notre volonté d'éliminer les éléments pouvant perturber le repérage de lignes ou de blocs traités par le sujet, nous présentons ci-dessous une transcription, suite logique de la transcription précédente, dans laquelle le rond du chapeau a laissé sa place au point de la feuille originale qu'il recouvre.

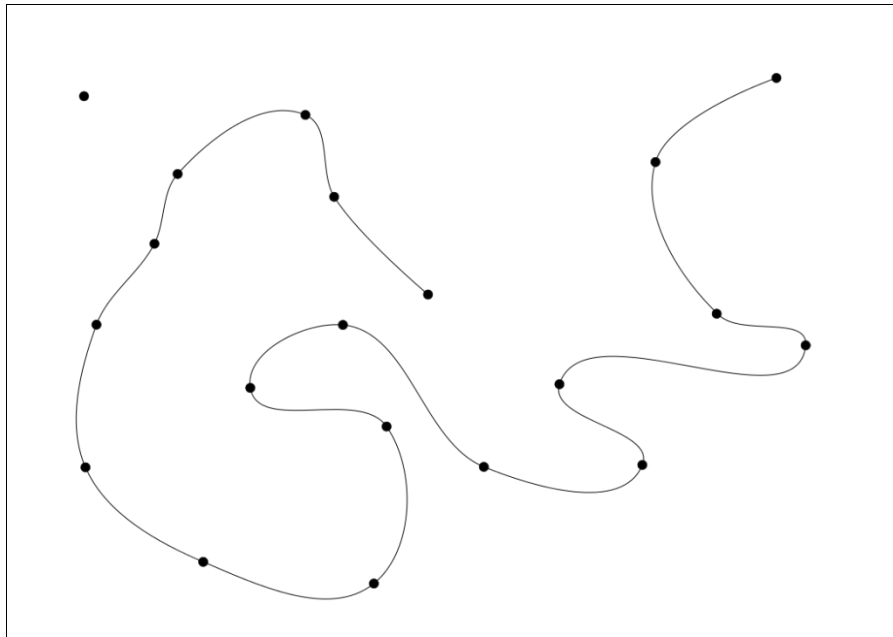


Figure 74 : Représentation de l'ordre des traitements par une suite de traits courbe – points sans numéro (essai 1 du sujet 1)

Cette dernière transcription, très dépouillée, permet de bien focaliser son attention sur la forme générale des traits qui sont produits par la suite des traitements du sujet et de repérer plus facilement certaines des stratégies attendues.

Cependant, nous n'avons pas adopté aucune des alternatives que nous venons d'évoquer ci-dessus (la suppression de la numérotation et le remplacement des ronds par des points).

Le remplacement des ronds par des points n'est pas une bonne idée. Ce remplacement modifie chez le lecteur la perception de certains aspects de la situation du sujet qui nous semblent nécessaires à la compréhension des stratégies.

Portons notre attention sur les éléments entourés dans la figure suivante.

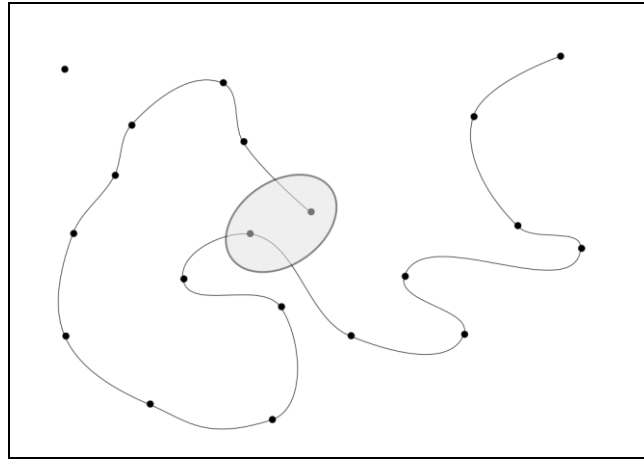


Figure 75 : La perception de l'éloignement spatial des ronds

Nous venons d'entourer deux points qui apparaissent sensiblement plus proches (donc plus faciles à confondre) dans la Figure 72 que dans la Figure 74. Nous décidons donc de conserver la représentation des éléments la collection à énumérer à l'aide de ronds. A partir du moment où les ronds sont conservés, il y a peu à gagner perceptivement à éliminer les numéros à l'intérieur des ronds.

Application à des cas observés

Nous venons d'examiner la transcription produite quand le sujet oublie un des éléments de la collection lors du traitement. Nous choisissons de produire des transcriptions qui intègrent la dimension du chemin, mais également le code couleur que nous avons produit pour repérer plus facilement la nature des erreurs produites.

Commençons par le cas où la collection est bien énumérée. Pour cela, reprenons la partie sur laquelle nous venons de nous appuyer. La nouvelle transcription de la suite des traitements se présente de la manière suivante :

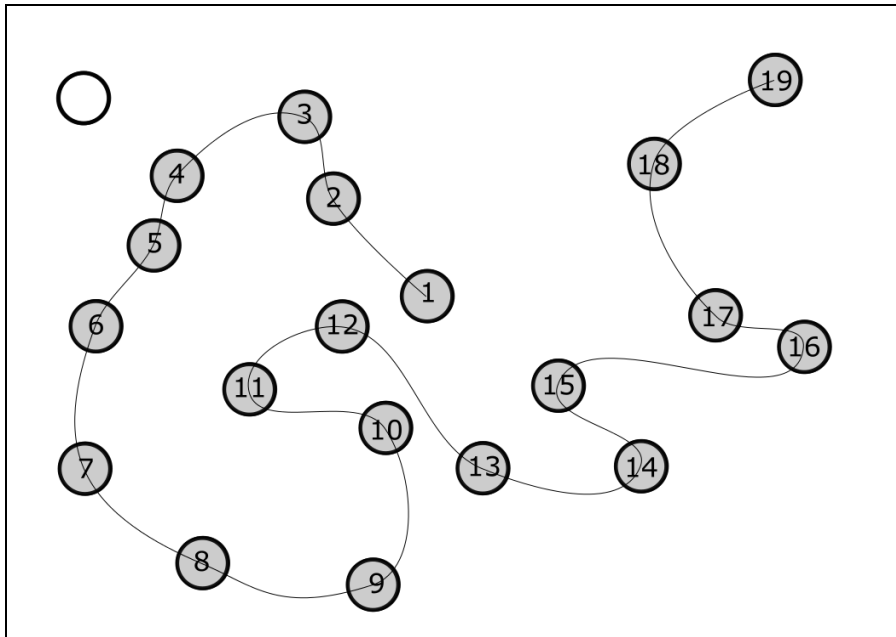


Figure 76 : Représentation de l'ordre des traitements par une suite de traits courbe (essai 1 du sujet 1)

Le chemin renforce la perception que nous avons de l'ordre des traitements. Le rond qui est oublié par le sujet est repérable immédiatement, par un fond blanc, une absence de numéro et une absence de trait courbe qui le traverse.

Examinons maintenant la transcription produite dans un cas où un rond est soulevé deux fois.

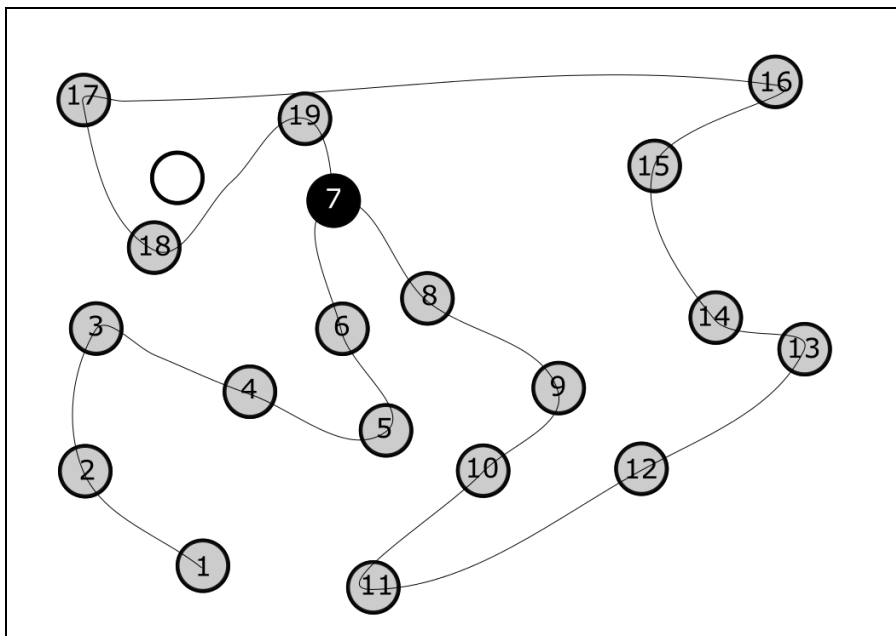


Figure 77 : Représentation de l'ordre des traitements par une suite de traits courbe (essai 2 du sujet 1)

La couleur noire du fond d'un des ronds de la collection indique immédiatement la nature de l'erreur commise : un rond a été saisi deux fois. Le rond considéré est traversé par un trait

courbe, mais il est aussi l'extrémité finale du chemin. C'est le seul rond par lequel passe trois traits du chemin.

Il nous reste à examiner le cas où la collection est énumérée correctement.

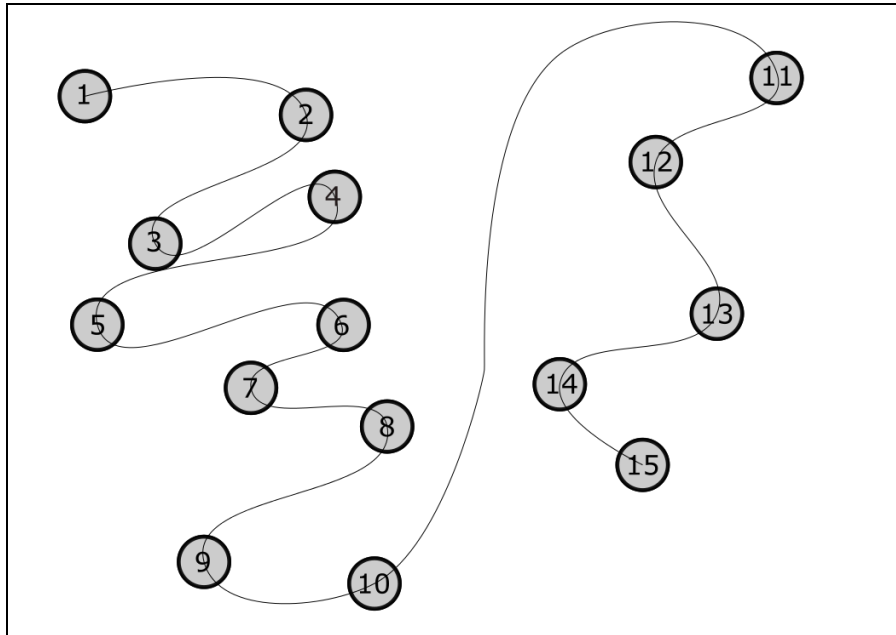


Figure 78 : Représentation de l'ordre des traitements par une suite de traits courbe (essai 1 du sujet 19)

Aucun des ronds n'a un fond blanc ou noir. Tous les fonds sont tous gris, avec un numéro et un trait courbe qui les traverse (sauf les extrémités de notre chemin).

Les choix que nous avons fait pour ces transcriptions ne sont pas les plus simples s'il s'agit de répondre à la question « la collection a-t-elle été bien énumérée ou pas ? », ce qui est assez rassurant puisque ce n'est pas leur objectif premier. Ces choix donnent clairement des indications perceptives sur l'analyse spatiale et temporelle que nous pouvons faire de la suite des traitements (que la collection soit ou non correctement énumérée).

Les transcriptions des 78 parties constituent l'annexe 2. Nous présentons deux transcriptions pour chaque parties : la transcription de l'ordre des traitements avec ronds numérotés et la transcription des traitements avec rond numérotés et chemin courbe.

2.5 Etude des stratégies mises en œuvre

Nous sommes maintenant outillés pour pouvoir développer une modélisation des stratégies mises en œuvre lors des parties.

Le double appui qui est le nôtre nous amène à chercher à mettre en évidence la présence de stratégies reposant sur le partitionnement de la collection (Briand, 1993) ou sur les directions qui structurent l'écrit (Goody, 1977).

2.5.1 Etude de la stratégie *Partition*

Notre analyse *a priori* nous avait conduit à nous attendre à observer un certain nombre de stratégies, dont la stratégie *Partition*. Avant d'étudier les occurrences de cette stratégie, nous allons revenir sur sa caractérisation.

2.5.1.1 Construction du modèle de la stratégie *Partition*

Le modèle de *Partition* que nous développons sur nos données est un modèle simple. Nous avons conjecturé que la collection des chapeaux pouvait être perçue par le sujet comme la partition de deux sous-collections.

Choix de la partition pour le modèle

Nous avons cherché une possibilité de partitionnement en deux raisonnable et qui puisse s'appliquer à l'identique à nos trois supports.

Pour comprendre les raisons de ce choix, il faut que nous décrivions, au moins a minima, certaines des caractéristiques des outils que nous utilisons pour produire les schémas de cette thèse. Nous utilisons un logiciel de dessin (Inkscape) et la fonctionnalité Calque qui lui est associée. Une fois nos configurations de ronds dessinées et les traitements transcrits, nous appliquons un même calque à l'ensemble de ces données, ce qui nous permet de développer ainsi des outils d'analyse systématique.

Notre volonté de systématisation nous conduit à la production du même calque et donc d'un même partitionnement des supports. C'est donc la partition en deux la plus raisonnable qui puisse s'appliquer à nos trois supports que nous cherchons et que nous présentons dans la figure suivante.

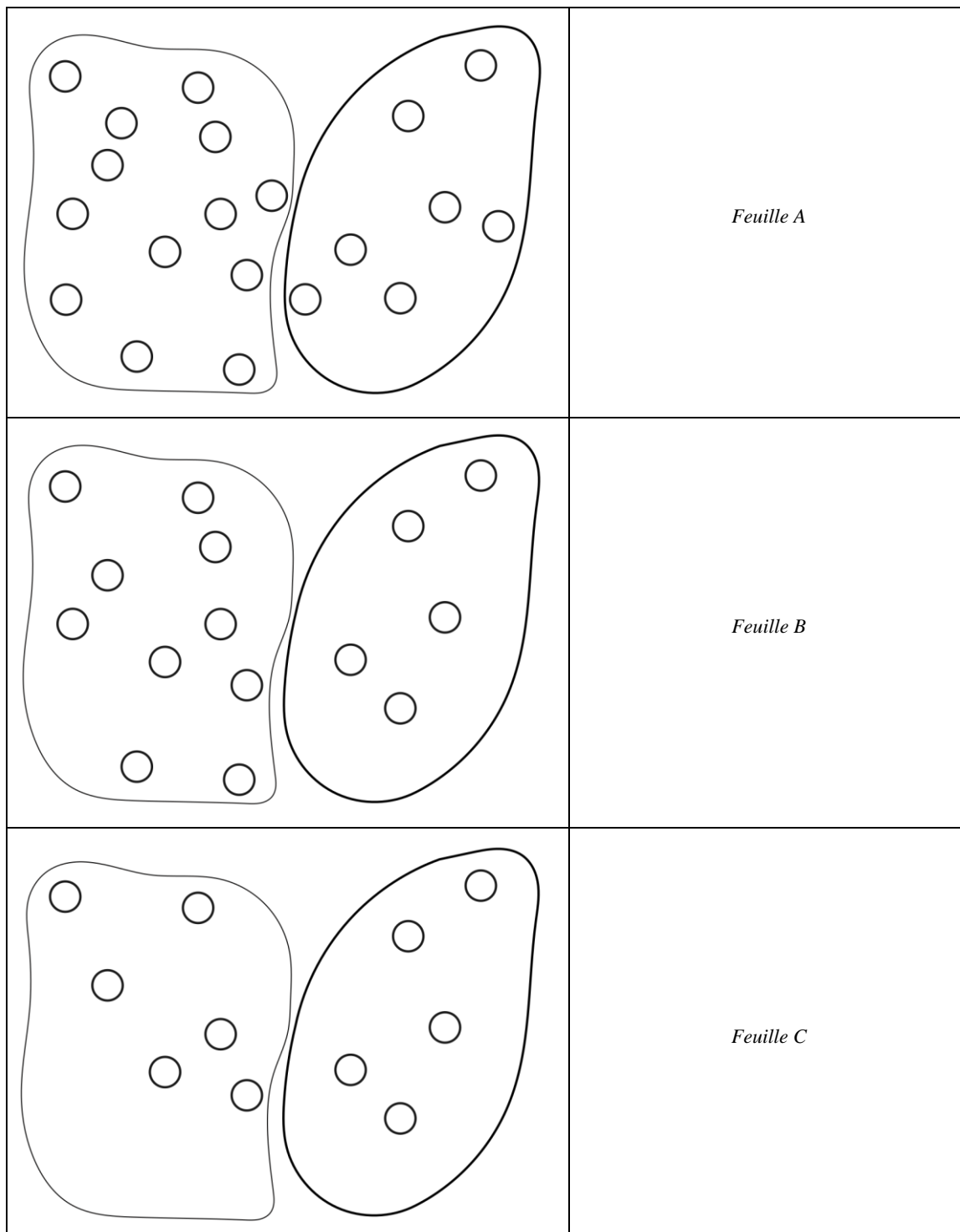


Figure 79 : Partitionnement en deux des collections des trois supports

Nous disposons maintenant de considérations spatiales pour observer des partitionnements. Pour autant, le sujet ne produit pas de discours sur les actions qu'il réalise. Il se contente de soulever les chapeaux les uns après les autres. Nous ne pouvons donc pas nous contenter de ces considérations spatiales pour repérer des occurrences d'une stratégie *Partition*.

Nous décidons de considérer qu'un sujet met en œuvre une stratégie *Partition* à partir du moment où il traite de manière consécutive les éléments du sous-ensemble qu'il a repéré. C'est ce caractère consécutif du traitement qui est un indicateur pour nous de la constitution d'un sous-ensemble.

Nous réduisons encore plus le champ de notre analyse en faisant porter notre étude sur un seul des deux sous-ensembles, le sous-ensemble de la partie droite de la collection.

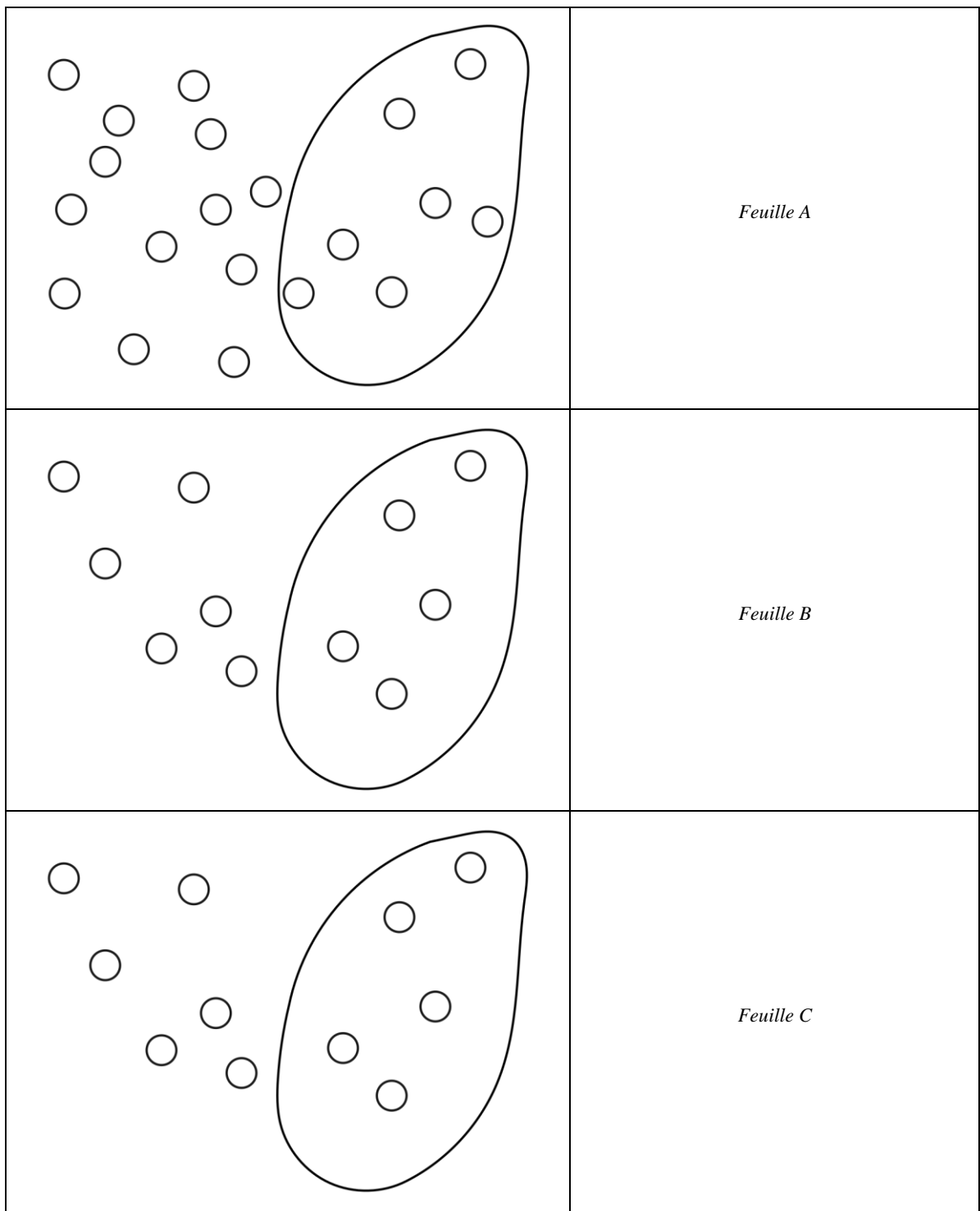


Figure 80 : Modélisation de la stratégie *Partition*

En conclusion, nous considérons que la stratégie *Partition* est mise en œuvre si les éléments de la sous-collection repérée dans la Figure 80 sont traités de manière consécutive.

Appliquons le modèle que nous venons de développer au cas particulier qui nous a servi d'exemple support dans la production de nos explicitations, la partie 1 (feuille A, sujet 1, essai 1).

Nous commençons par appliquer notre calque à la transcription numérotée.

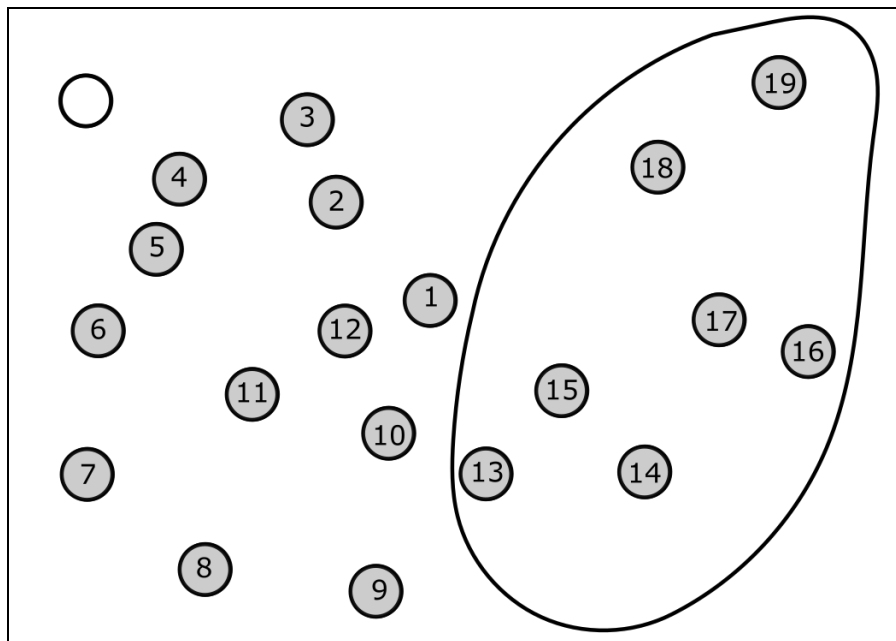


Figure 81 :Application du modèle *Partition*, transcription numéros (feuille A, sujet 1, essai 1

Pour que l'on puisse identifier la présence de la stratégie *Partition*, il faut donc que les ronds qui figurent dans l'ensemble dessiné aient été traités de manière consécutive.

La transcription « ronds numérotés » est peu efficace pour le repérage de la stratégie *Partition*. Cela nous oblige à reconstruire un chemin au sein du sous-ensemble en nous appuyant sur la numérotation des ronds.

Nous disposons d'une transcription qui propose des chemins pour modéliser l'ordre des traitements. Appliquons notre calque à cette transcription de notre exemple support.

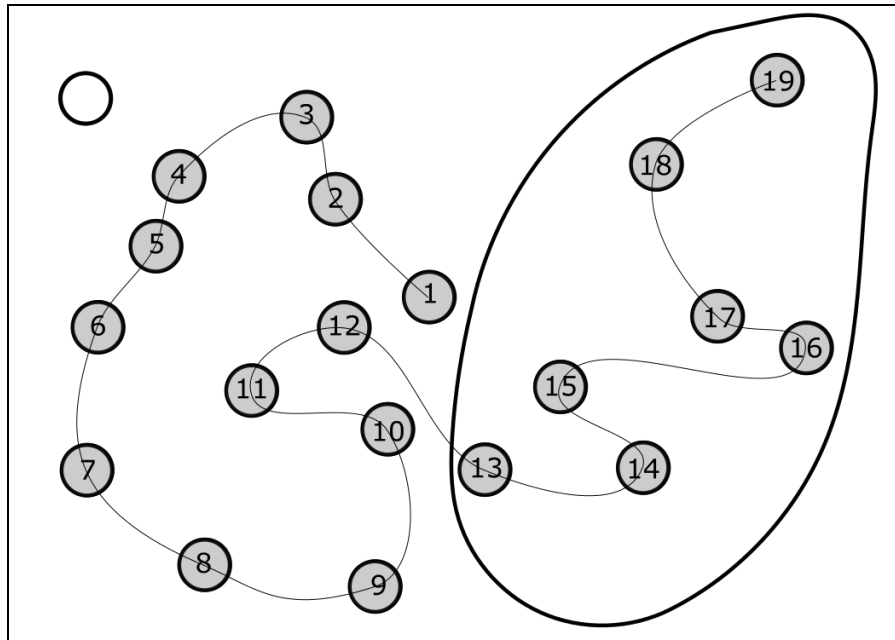


Figure 82: Application du modèle Partition, transcription numéros et chemin (feuille A, sujet 1, essai 1)

Le chemin rend parfaitement compte de la dynamique de la suite des traitements et s'avère beaucoup plus efficace pour repérer la présence de la stratégie *Partition*.

Nous observons la présence d'un chemin qui lie entre eux tous les ronds de la sous-collection repérée par le calque.

Sans transcription avec trait, il faut une observation fine de la suite des numéros qui apparaissent dans la transcription pour nous rendre compte de ce phénomène.

La nouvelle transcription (avec ou sans numéro) facilite donc le repérage de cette stratégie.

Nous pouvons maintenant rajouter à la transcription le dessin sous forme d'ensemble de la sous-collection qui est traité consécutivement.

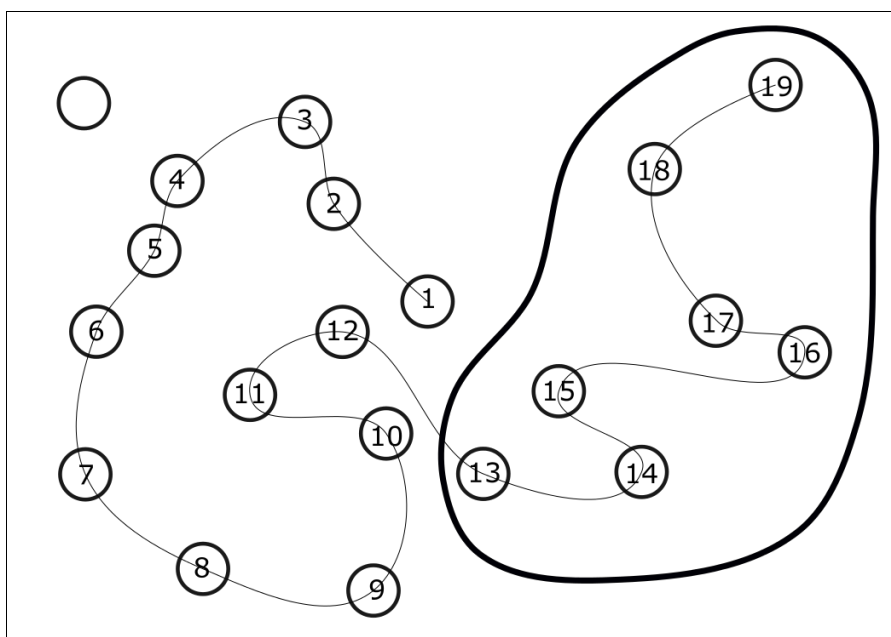


Figure 83 : Mise en évidence de la stratégie partition (feuille A, sujet 1, essai 1)

Le modèle de la stratégie que nous développons nous permet de modifier la transcription déjà réalisée. Nous décidons d'introduire une discontinuité du trait symbolisant la suite des traitements, ici entre le rond 12 et le rond 13, décrivant que la procédure du sujet peut être décrite comme une partition.

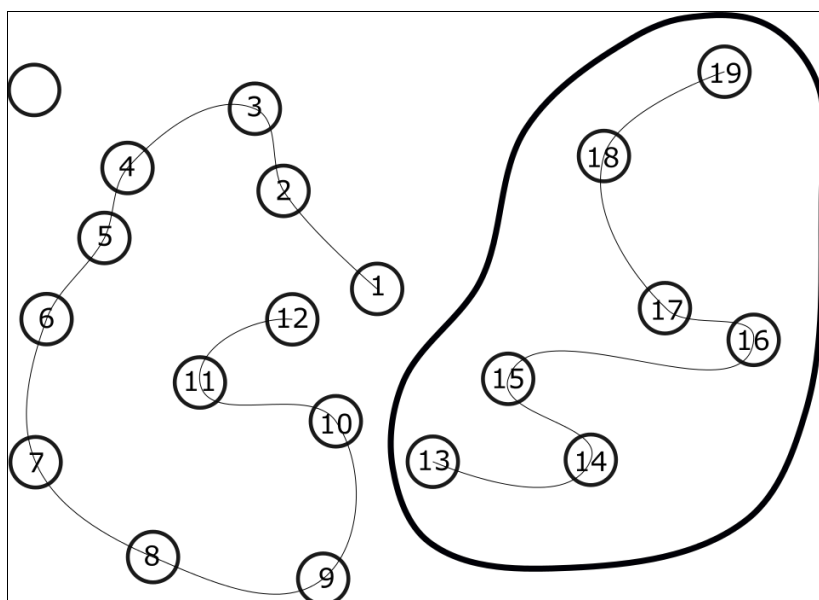


Figure 84 : Introduction d'une discontinuité du chemin pour marquer la partition (feuille A, sujet 1, essai 1)

Pour repérer les occurrences de cette stratégie, nous avons appliqué le calque décrit précédemment aux transcriptions numérotées avec chemin des 78 parties.

Examinons quelques une de nos transcriptions de parties pour les confronter à notre modèle de stratégie.

Des parties qui vérifient le modèle de la stratégie Partition

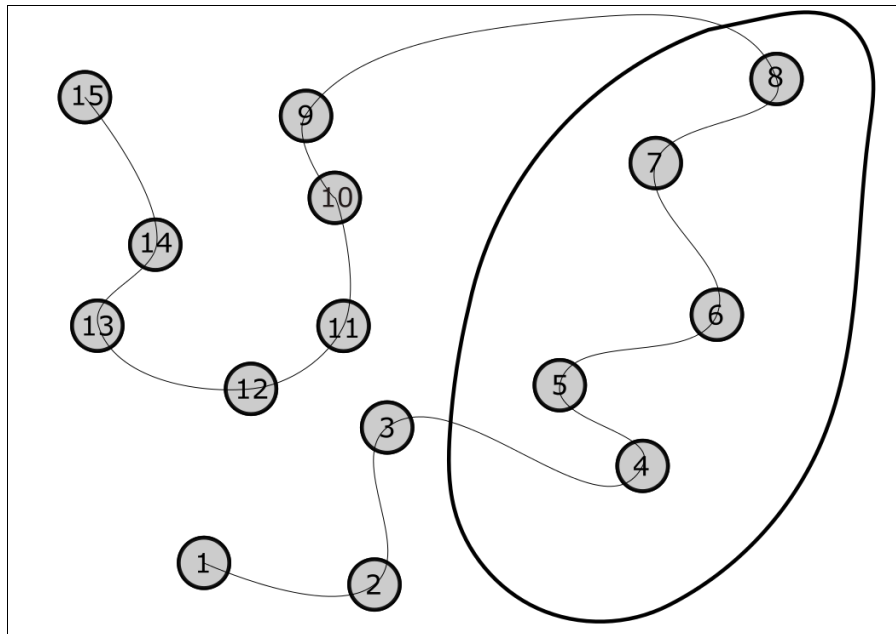


Figure 85 : Etude de la présence du modèle de la stratégie Partition (feuille B, sujet 27, essai 2)

Dans cette partie (feuille B, sujet 27, essai 2), le modèle de la stratégie Partition est encore présent. En effet, il y a un chemin qui lie les cinq éléments de la sous-collection repérée. Par ailleurs, ces cinq éléments sont des éléments qui n'ont été traités ni en premier, ni dernier par le sujet. Pour autant, le modèle s'applique.

Des parties qui ne vérifient pas le modèle de la stratégie Partition

Examinons dans le détail deux parties pour lesquelles le modèle de la stratégie *Partition* n'est pas vérifié.

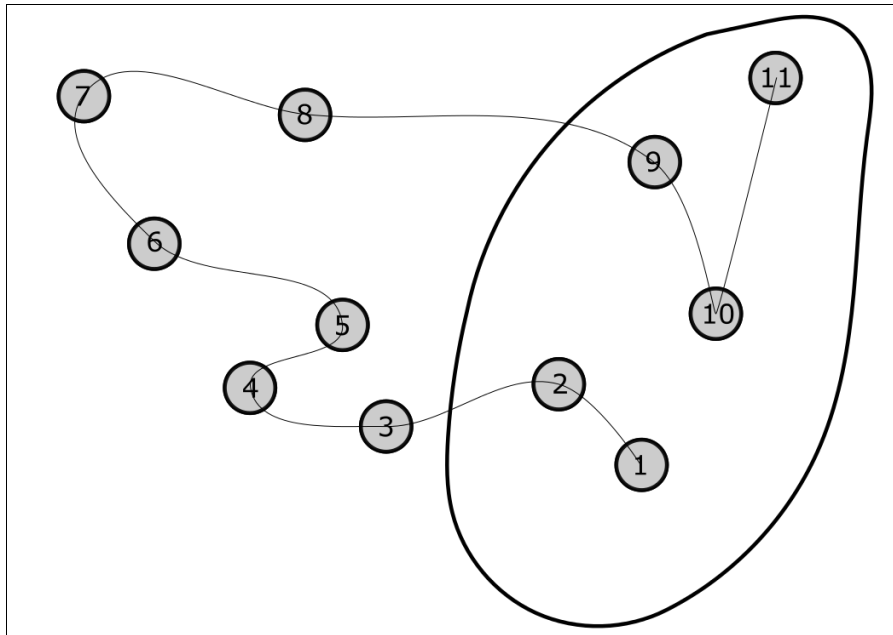


Figure 86 : Etude de la présence du modèle de la stratégie Partition (feuille C, sujet 35, essai 2)

Dans cette partie (feuille C, sujet 35, essai 2), les cinq éléments de la sous-collection repérée ne sont pas traités consécutivement. Nous concluons à l'absence de la stratégie que nous avons modélisée.

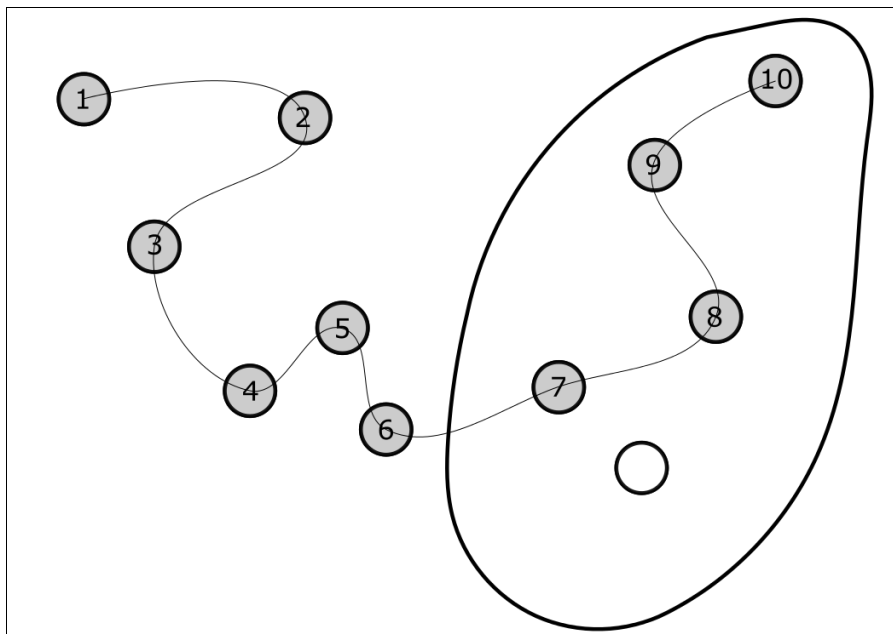


Figure 87 : Etude de la présence du modèle de la stratégie Partition (feuille C, sujet 31, essai 2)

Dans cette partie (feuille B, sujet 31, essai 2), certains des points du sous-ensemble n'ont pas été traités. Le non-traitement de la totalité des points du sous-ensemble nous conduit à affirmer l'absence de de la stratégie Partition.

L'application du calque de la partition aux 78 parties constitue l'annexe 3 de cette recherche.

2.5.1.2 Questions, résultats et analyse

Nous disposons d'un modèle que nous pouvons appliquer la collection des parties et nous pouvons répondre aux questions suivantes :

Dans quelles parties le modèle Partition est mis en œuvre par les sujets ?

L'analyse de nos 78 transcriptions de la stratégie Partition nous permet d'intégrer à notre structure de données l'information binaire sur la présence ou non de la stratégie Partition.

<i>Partie</i>	<i>Sujet</i>	<i>Feuille</i>	<i>Niveau</i>	<i>R=1</i>	<i>Partition</i>
1	1	A	CM2	0	1
2	1	A	CM2	0	0
3	2	A	CM2	0	1
4	2	A	CM2	1	1
5	3	A	CM2	1	0
6	4	A	CM2	1	0
7	5	A	CM2	0	1
8	5	A	CM2	0	0
9	6	A	CM2	0	0
10	6	A	CM2	1	0
11	7	A	CM2	1	0
12	8	A	CM2	0	0
13	8	A	CM2	1	0
14	9	A	CM2	1	1

Figure 88 : occurrence de la stratégie Partition par sujet (extrait du tableau)

Maintenant que nous avons repéré les occurrences de la stratégie *Partition* dans l'ensemble des parties, nous pouvons répondre à la question : « Combien de sujets ont mis en œuvre la stratégie partition ? »

Nous transcrivons les résultats dans le tableau suivant, en les différenciant par support.

<i>Support</i>	<i>Nombre d'occurrences de la stratégie Partition</i>	<i>Nombre de parties</i>	<i>Pourcentage de parties avec stratégie Partition</i>
<i>Feuille A</i>	8	32	25%
<i>Feuille B</i>	12	17	70%
<i>Feuille C</i>	15	29	45%
<i>Total</i>	35	78	45%

Figure 89 : Répartition des occurrences de la stratégie *Partition* par parties

Nous observons une variation importante du repérage de la stratégie *Partition* en fonction des supports. La stratégie *Partition* apparaît très minoritaire avec le support A.

Examinons maintenant ce qui se passe dans le cas des réussites.

La stratégie *Partition* est-elle mise en œuvre lors des réussites ?

Étudions maintenant le lien entre la présence de cette stratégie et la réussite à la partie.

<i>Support</i>	<i>Nombre d'occurrences de la stratégie Partition dans une partie réussie</i>	<i>Nombre de parties réussies</i>	<i>Pourcentage de parties avec stratégie Partition</i>
<i>Feuille A</i>	3	10	30%
<i>Feuille B</i>	6	6	100%
<i>Feuille C</i>	7	9	78%
<i>Total</i>	16	25	40%

La quasi-totalité des sujets, confrontés aux supports B ou C, et qui ont réussi, ont mis en œuvre la stratégie *Partition*. C'est beaucoup moins vrai en ce qui concerne les sujets confrontés au support A.

La stratégie *Partition* est mise en œuvre dans près d'une partie sur deux (35 sur 78 parties). Les sujets ont mis en œuvre cette stratégie dans 16 des 25 parties où ils ont réussi. Dans les 53 parties où ils ont échoué, cette stratégie n'apparaît que 19 fois. On peut donc affirmer que la mise en œuvre de la stratégie *Partition* favorise la réussite.

Pour autant, la présence de cette stratégie n'est pas une condition expérimentalement suffisante pour réussir.

2.5.2 Etude de la stratégie *Colonnes*

Nous allons décrire l'élaboration du modèle *Colonnes*, puis nous présenterons les résultats de l'application du modèle aux données.

2.5.2.1 Construction du modèle de la stratégie *Colonnes*

La sous-collection que le modèle *Partition* étudie est la sous-collection la moins grande des deux sous-collections de la partition. Nous faisons l'hypothèse que la nécessité de s'organiser va être plus grande lors de l'énumération de la seconde sous-collection.

La modélisation de la stratégie *Colonnes* repose sur l'étude du traitement de la sous-collection qui n'est pas repérée dans le modèle de stratégie *Partition*. Nous cherchons à identifier une stratégie reposant sur un repérage spatial articulé autour de colonnes dans le traitement de cette sous-collection.

Le principe de cette modélisation repose sur le pavage en rectangles de la sous-collection considérée.

La question qui se pose à nous est la suivante : Quels rectangles faut-il fabriquer pour obtenir une modélisation conforme ou suffisamment proche ce que nous percevons quand nous observons les clips vidéo ?

Elaboration du modèle avec la feuille A

L'observation des procédures mises en œuvre par les sujets travaillant sur la feuille A fait apparaître le rôle particulier joué par deux des ronds de la collection.

Deux ronds particuliers dans la feuille A

Ces ronds sont nommés R1 et R2 et repérés par des flèches dans le schéma suivant.

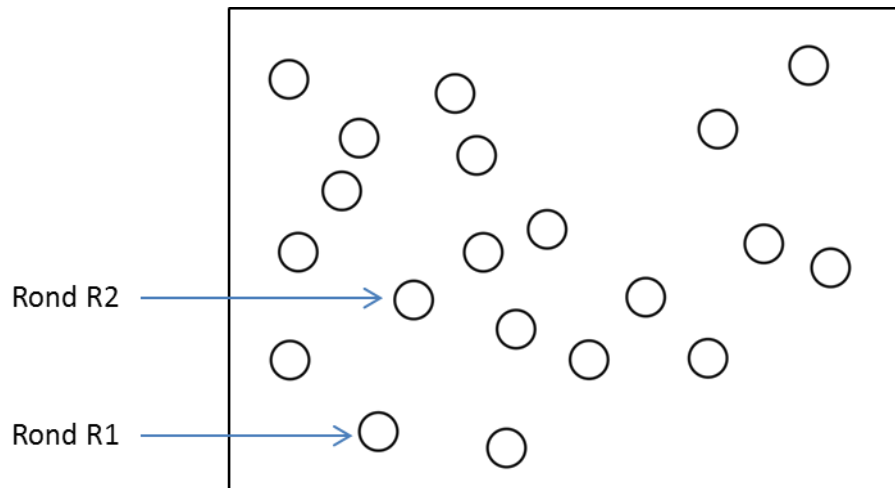


Figure 90 : Indentification des deux ronds particuliers de la feuille A

Compte tenu du rôle que vont jouer ces deux ronds dans l'élaboration de notre modèle, nous partitionnons la sous-collection en trois sous-ensembles de forme rectangulaire.

Les trois colonnes de la feuille A

Nous définissons ainsi trois colonnes qui seront repérées par leurs positions les unes par rapport aux autres.

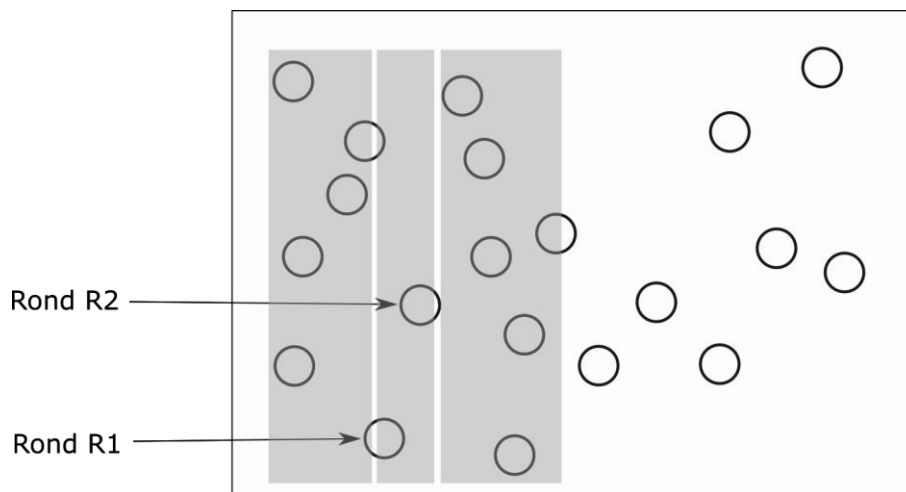


Figure 91 : Modélisation de la stratégie Colonnes - Feuille A

Nous nommons « colonne neutre » la colonne qui occupe une position centrale. Nous qualifions cette colonne de neutre, car c'est autour d'elle que nous allons procéder aux ajustements pour étudier la stratégie Colonnes.

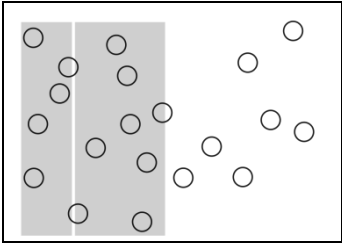
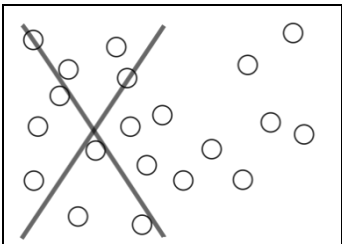
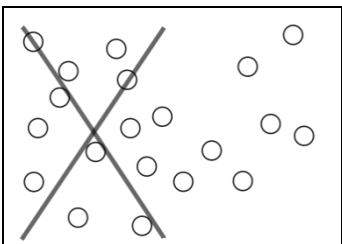
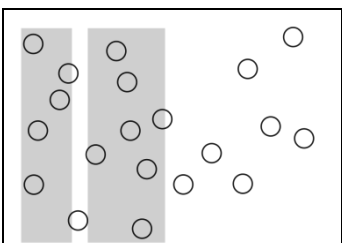
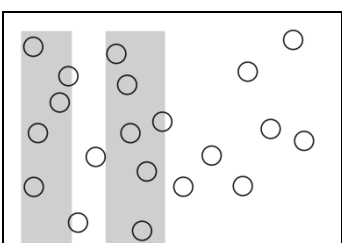
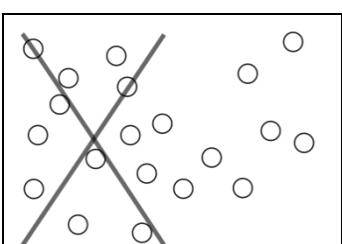
Les deux autres colonnes sont placées de chaque côté de cette colonne neutre. Elles seront donc nommées colonne de droite et colonne de gauche.

Les deux ronds R1 et R2 sont qualifiés de « libres » dans la mesure où ils vont pouvoir appartenir à l'une des trois colonnes et définir ainsi des configurations que nous allons décrire de manière exhaustive.

De plus, les deux ronds libres R1 et R2 occupent une position relative l'un par rapport à l'autre. R1 est à gauche de R2. Donc R1 peut être dans la même colonne que R2, mais si ce n'est pas le cas, la colonne occupée par R1 doit être à gauche de la colonne occupée par R2.

Elaboration des différentes configurations de la feuille A

Ces différentes contraintes permettent de produire des configurations spatiales que nous présentons ici.

<i>Position occupée par R1</i>	<i>Position occupée par R2</i>	<i>Configuration</i>	<i>Schéma de la configuration</i>
<i>Colonne de droite</i>	<i>Colonne de droite</i>	<i>Configuration 1 : Les deux ronds libres sont dans la colonne de droite.</i>	
	<i>Colonne centrale</i>	<i>Impossible : R1 ne peut pas être à droite de R2.</i>	
	<i>Colonne de gauche</i>	<i>Impossible : R1 ne peut pas être à droite de R2.</i>	
<i>Colonne centrale</i>	<i>Colonne de droite</i>	<i>Configuration 2 : Un des ronds libres (R2) est dans la colonne de droite, l'autre (R1) est dans la colonne neutre.</i>	
	<i>Colonne centrale</i>	<i>Configuration 3 : Les deux ronds libres sont dans la colonne neutre.</i>	
	<i>Colonne de gauche</i>	<i>Impossible : R1 ne peut pas être à droite de R2.</i>	

<i>Colonne de gauche</i>	<i>Colonne de droite</i>	<i>Configuration 4 :</i> <i>Un des ronds libres (R2) est dans la colonne de droite, l'autre (R1) est dans la colonne de gauche.</i>	
	<i>Colonne centrale</i>	<i>Configuration 5 :</i> <i>Un des ronds libres (R2) est dans la colonne neutre, l'autre (R1) est dans la colonne de gauche.</i>	
	<i>Colonne de gauche</i>	<i>Configuration 6 :</i> <i>Les deux ronds libres sont dans la colonne de gauche.</i>	

Figure 92 : Configuration du modèle Colonnes pour la feuille A

Nous disposons maintenant de 6 configurations qui vont permettre la modélisation par la stratégie *Colonnes*.

Elaboration d'un code par partie (feuille A)

Nous allons maintenant produire un code par partie pour nous permettre de repérer les occurrences de la stratégie colonnes. Nous allons étudier ce qui se passe dans la colonne de droite et la colonne de gauche. Pour chacune de ces deux colonnes, nous allons dénombrer les ronds qui ont été traités en respectant un certain ordre (nous allons revenir sur cette expression « *un certain ordre* »). Ce nombre de ronds respectant cette condition va constituer le code de la colonne.

Nous décrirons ensuite comment sera produit le code de la partie à partir du code des deux colonnes.

Revenons à la description de l'élaboration du code de la colonne.

Les conditions imposées sur l'appartenance à un rectangle et le caractère traité de l'élément considéré sont définies de manière précise. La condition imposée sur la question de l'ordre de traitement est plus souple. Nous allons la préciser à travers l'étude d'un certain nombre d'exemples fictifs.

Dans chacun des exemples qui suivent, nous avons dessiné le chemin qui relie quelques points dont on considère qu'ils remplissent la condition sur l'ordre.

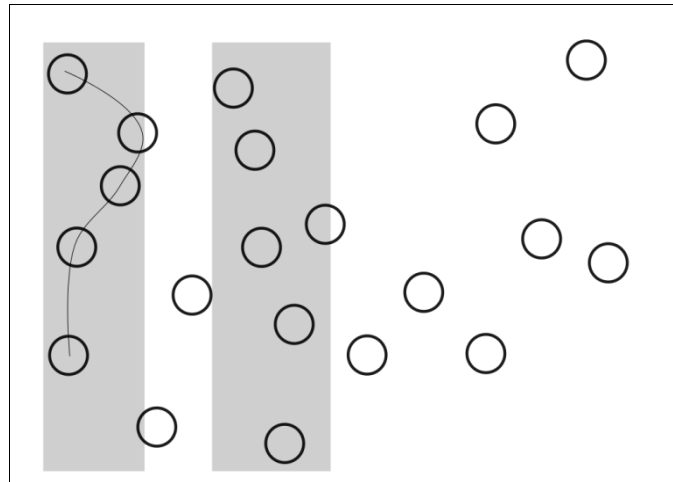


Figure 93 : Précisions sur la condition sur l'ordre de traitement des points (stratégie Colonnes) – exemple 1

Dans ce premier exemple, cinq ronds du rectangle de gauche ont bien été traités. Même si la figure proposée ne donne pas d'indication sur le sens dans lequel les éléments ont été traités, on observe que le traitement s'est effectué en conservant le même sens de déplacement (soit de haut en bas, soit le contraire). Nous considérerons que cinq ronds ont été traités en respectant la condition portant sur l'ordre. Un code 5 pourra être produit.

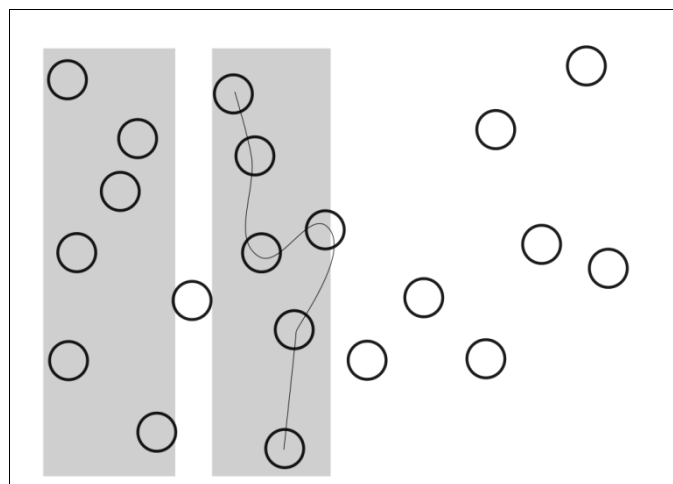


Figure 94 : Précisions sur la condition sur l'ordre de traitement des points (stratégie Colonnes) – exemple 2

Dans ce second exemple, six ronds de la colonne de gauche sont traités. Le traitement respecte la propriété de conservation du sens de déplacement avec une tolérance que nous considérons comme acceptable. La variation de sens est considérée comme mineure. Nous considérerons que les six ronds ont bien été traités en respectant la condition portant sur l'ordre. Un code 6 pourra être produit.

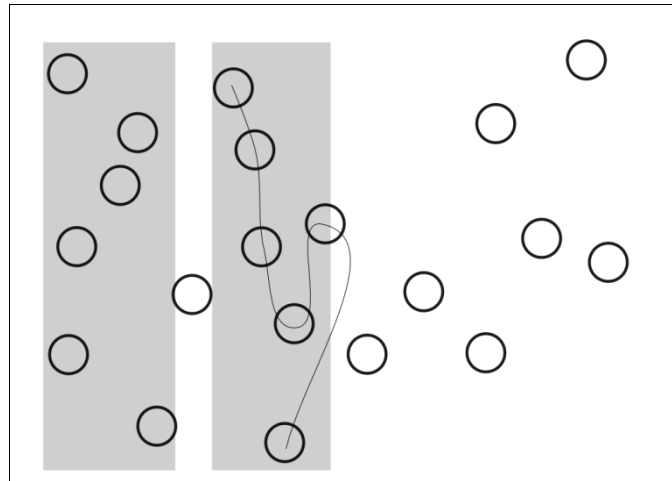


Figure 95 : Précisions sur la condition sur l'ordre de traitement des points (stratégie Colonnes) – exemple 3

Ce troisième exemple présente lui aussi six ronds du rectangle de gauche qui ont été traités. Par contre, le changement de sens dans le traitement n'entre plus dans la tolérance acceptée. La variation de sens n'est plus considérée comme mineure. Seuls quatre ronds pourront être considérés comme ayant été traités en respectant la condition sur l'ordre. Seul un code 4 pourra être produit.

Nous sommes maintenant capables de produire un code pour chacune des colonnes des différentes configurations que nous avons définies.

Le codage de chaque partie sera un nombre à deux chiffres, constitué de la concaténation des deux nombres produits par le codage de chaque colonne. On choisit pour chaque partie la configuration qui maximise les valeurs du code pour chaque rectangle, ce que nous allons décrire maintenant.

Observation du fonctionnement du modèle sur des cas observés

Faisons fonctionner notre modèle sur quelques éléments de nos données.

Examinons le premier essai de notre premier sujet.

Nous devons commencer par déterminer la configuration qui maximise les codes produits. Cette configuration est la configuration dans laquelle le rond R1 se trouve dans le rectangle de gauche et le rond R2 dans le rectangle de gauche, soit la configuration 4.

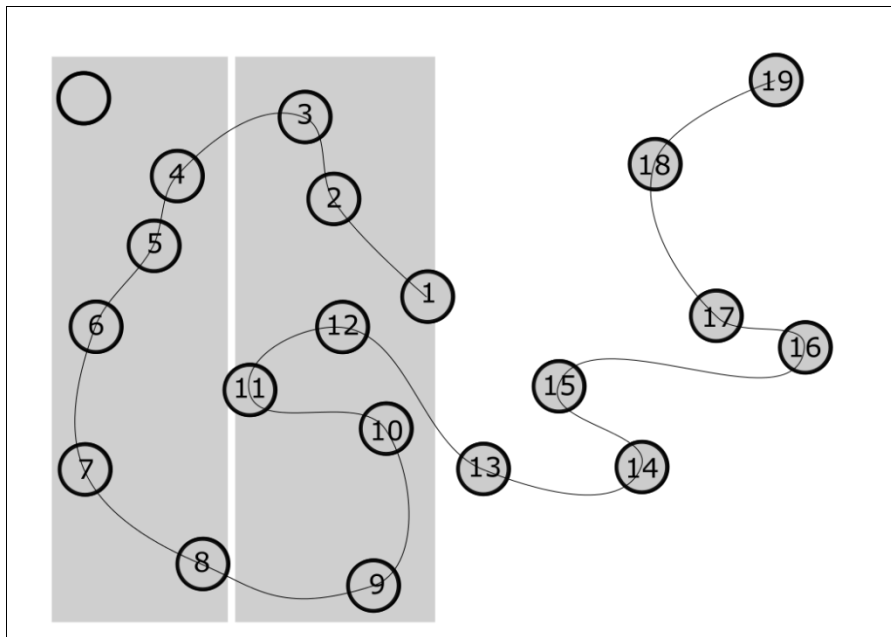


Figure 96 : Production du code pour le modèle Colonnes - Configuration 4 (feuille A, sujet 1, essai 1)

- Dans le rectangle de gauche, les ronds numérotés 4, 5, 6, 7 et 8 sont traités en respectant l'ordre. Nous affectons donc à cette colonne le code « 5 ».
- Dans le rectangle de droite, les ronds numérotés 9, 10, 11 et 12 sont traités en respectant l'ordre. Nous affectons donc à cette colonne le code « 4 ».

Dans la configuration 4, cette partie est codée « 54 ».

Examinons maintenant le codage produit par l'application de la configuration 1 à cette même situation (rond R1 considéré comme appartenant au rectangle de droite).

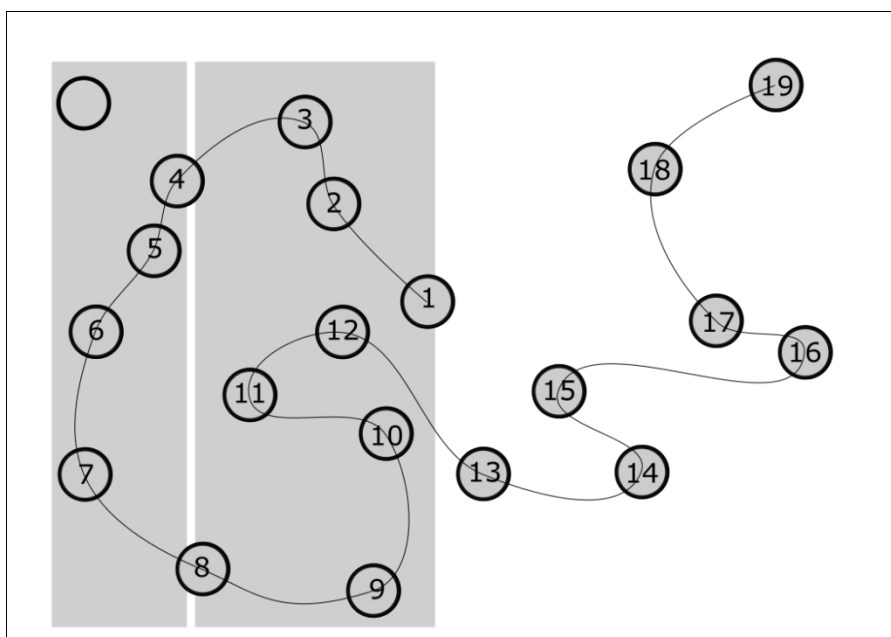


Figure 97 : Etude de la production du code pour le modèle Colonnes – Configuration 1 - Sujet 1 essai 1

- Dans le rectangle de gauche, les ronds numérotés 4, 5, 6 et 7 sont traités en respectant l'ordre. Nous affectons donc à cette colonne le code « 4 ».
- Dans le rectangle de droite, les ronds numérotés 8, 9, 10, 11 et 12 sont traités en respectant l'ordre. Nous affectons donc à cette colonne le code « 5 ».

Dans la configuration 1, cette partie est codée « 45 ».

Lien entre production du code pour la feuille A et occurrence du modèle *Colonnes*

Nous allons maintenant définir le critère d'appartenance à la stratégie *Colonnes* pour la feuille A.

Pour que le modèle *Colonnes* soit déclaré présent, il faut que l'une de ces deux conditions soit remplie :

- La somme des deux nombres qui constituent le code Colonnes est supérieure ou égal à 8
- Un des deux nombres des codes Colonnes de la partie est supérieur ou égal à 5

Appliquons le modèle que nous avons défini à quelques-unes des parties que nous avons observées.

Des parties qui vérifient le modèle de la stratégie *Colonnes* (feuille A)

Commençons par quelques parties où le modèle *Colonnes* s'applique.

La figure suivante présente la modélisation que nous avons réalisée pour l'essai 1 du sujet 11.

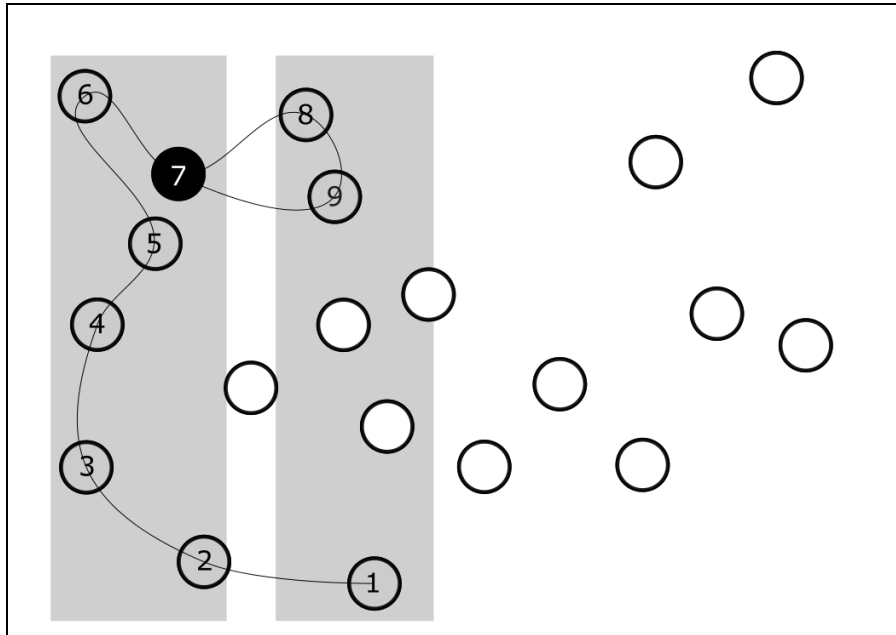


Figure 98 : application du modèle *Colonnes* (feuille A, sujet 11, essai 1)

Pour ce sujet, c'est la configuration 5 qui est appliquée. Elle produit le code « 52 ». La présence du chiffre 5 dans le code permet de déclarer l'occurrence du modèle *Colonnes*.

La figure suivante présente la modélisation que nous avons réalisée pour l'essai 1 du sujet 7.

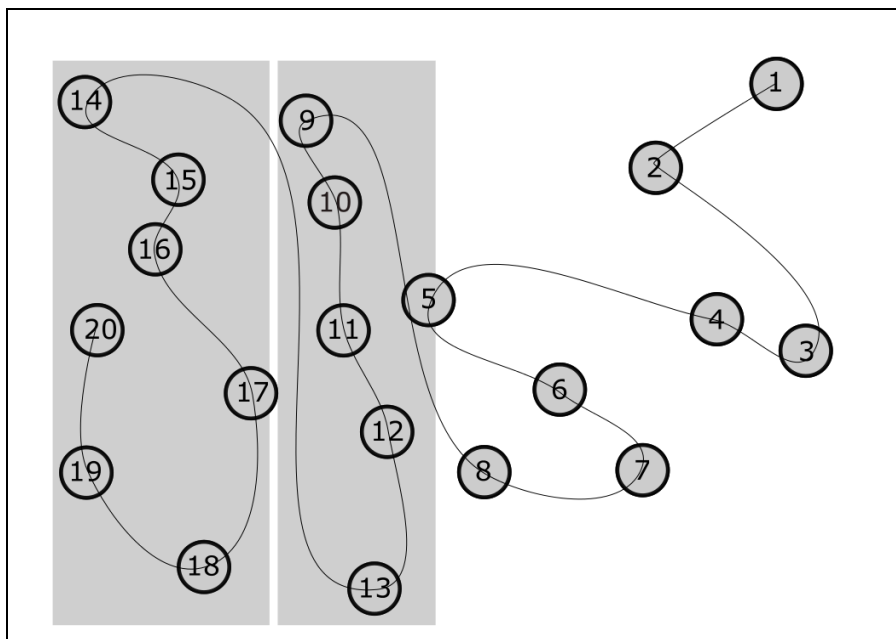


Figure 99 : application du modèle Colonnes(feuille A, sujet 7,essai 1)

Pour ce sujet, c'est la configuration 6 qui est appliquée. Elle produit le code « 75 ». L'application de la première règle ($7+5=12$) permet de déclarer l'occurrence du modèle *Colonnes*.

Nous pourrions ordonner les essais pour la stratégie *Colonnes* (ce que nous en ferons pas dans le cadre de ce travail).

Des parties qui ne vérifient pas le modèle de la stratégie *Colonnes* (feuille A)

Examinons maintenant des parties où le modèle *Colonnes* ne s'applique pas.

La figure suivante présente la modélisation que nous avons réalisée pour l'essai 1 du sujet 5.

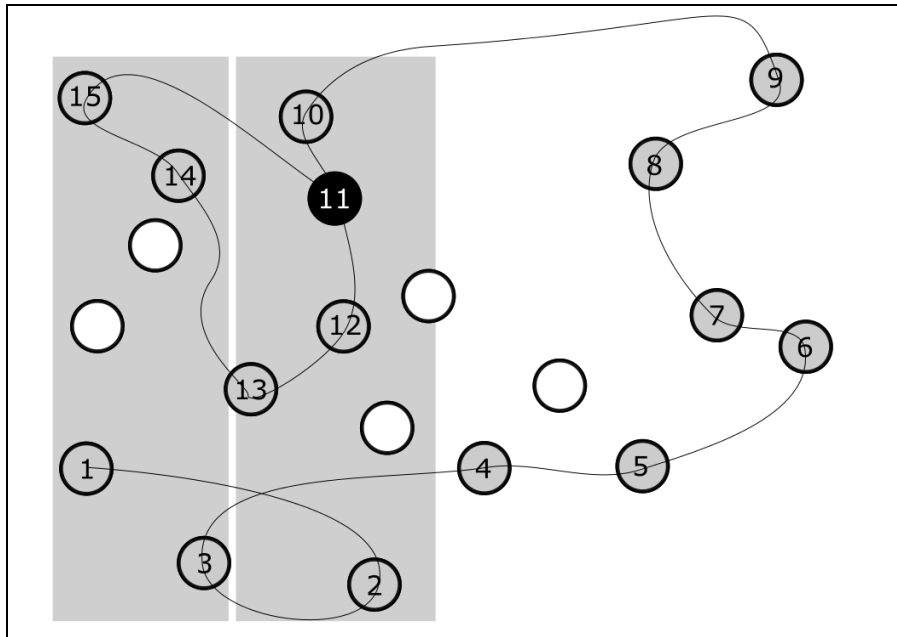


Figure 100 : application du modèle Colonnes (feuille A, sujet 5, essai 1)

Pour ce sujet, c'est la configuration 4 qui est appliquée. Elle produit le code « 24 ». Comme aucune des deux conditions n'est remplie, le modèle *Colonnes* est déclaré absent de la partie.

Adaptation du modèle aux feuilles B et C

Maintenant que nous avons construit un modèle pour analyser les occurrences de la stratégie Colonnes avec la feuille A, nous nous demandons dans quelle mesure il convient de garder ou d'adapter le modèle existant aux feuilles B et C.

La feuille B contient les deux ronds que nous avons repéré comme jouant un rôle central dans la détermination d'une des configurations *Colonnes*.

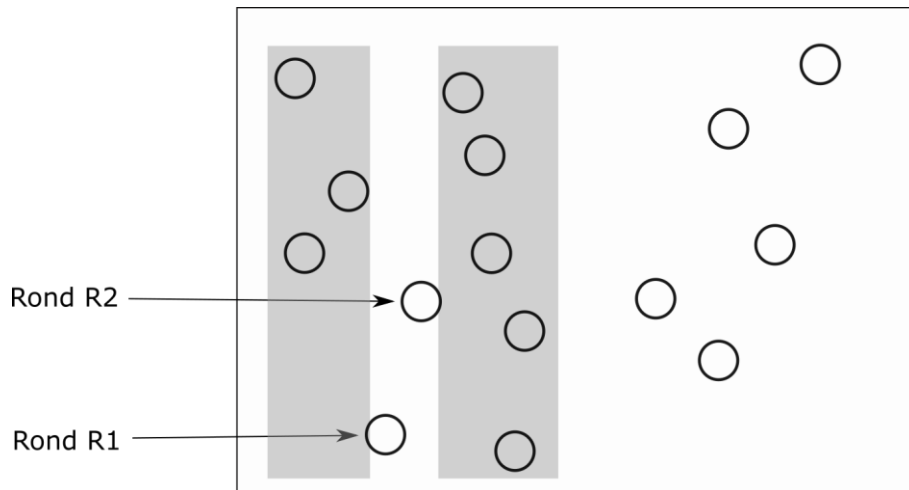


Figure 101 : Modélisation de la stratégie Colonnes - Feuille B

Nous allons donc pouvoir appliquer le même modèle avec les mêmes conditions à la feuille B que celui que nous avons défini pour la feuille A.

La situation est un peu différentes pour la feuille C.

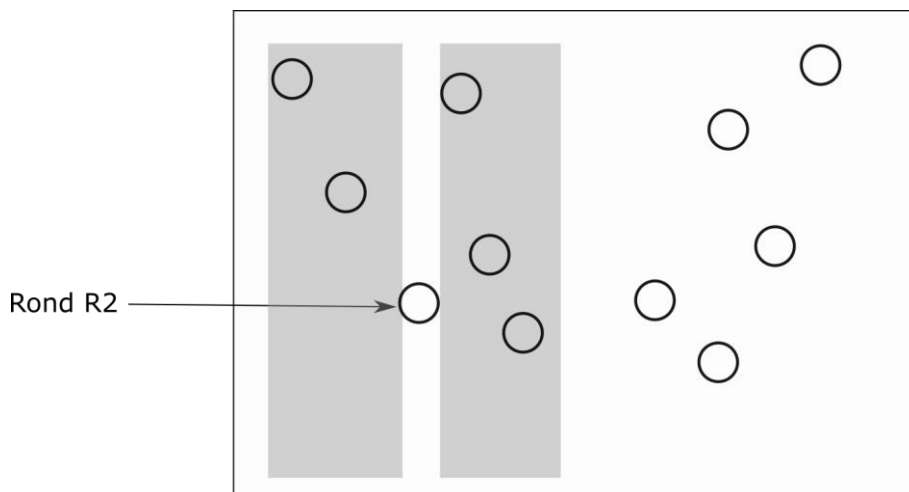


Figure 102 : Modélisation de la stratégie Colonnes - Feuille C

Pour la feuille C, le rond repéré R1 dans les feuilles A et B n'apparaît pas. Il ne reste donc que trois configurations possibles. Elles sont présentées dans le tableau suivant.

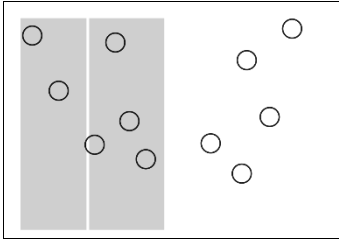
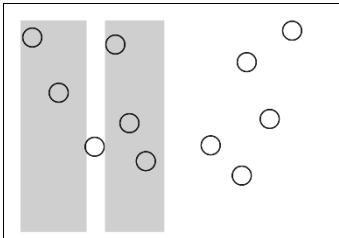
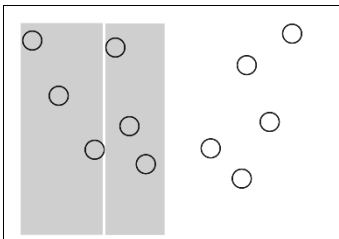
<i>Position occupée par R2</i>	<i>Configuration</i>	<i>Schéma de la configuration</i>
<i>Colonne de droite</i>	<i>Configuration 4 :</i> <i>Le rond libre (R2) est dans la colonne de droite.</i>	
<i>Colonne centrale</i>	<i>Configuration 5 :</i> <i>Le rond libre (R2) est dans la colonne neutre.</i>	
<i>Colonne de gauche</i>	<i>Configuration 6 :</i> <i>Le rond libre R2 est dans la colonne de gauche.</i>	

Figure 103 : Configuration du modèle Colonnes pour la feuille C

Le nombre de points présents sur la feuille C est beaucoup moins important que celui présent sur les deux autres feuilles. Cela nous conduit à adapter le critère d'appartenance à la stratégie *Colonnes* pour la feuille C.

Pour que le modèle *Colonnes* soit déclaré présent, les conditions applicables aux parties réalisées sur la feuille C sont les suivantes :

- La somme des deux nombres qui constituent le code Colonnes est supérieure ou égal à 5
- Un des deux nombres des codes Colonnes de la partie est supérieur ou égal à 4

Appliquons le modèle que nous avons défini à quelques-unes des parties que nous avons observées.

Des parties qui vérifient le modèle de la stratégie *Colonnes* (feuilles B et C)

Commençons par quelques parties où le modèle *Colonnes* va s'appliquer.

La figure suivante présente la modélisation que nous avons réalisée pour l'essai 2 du sujet 24.

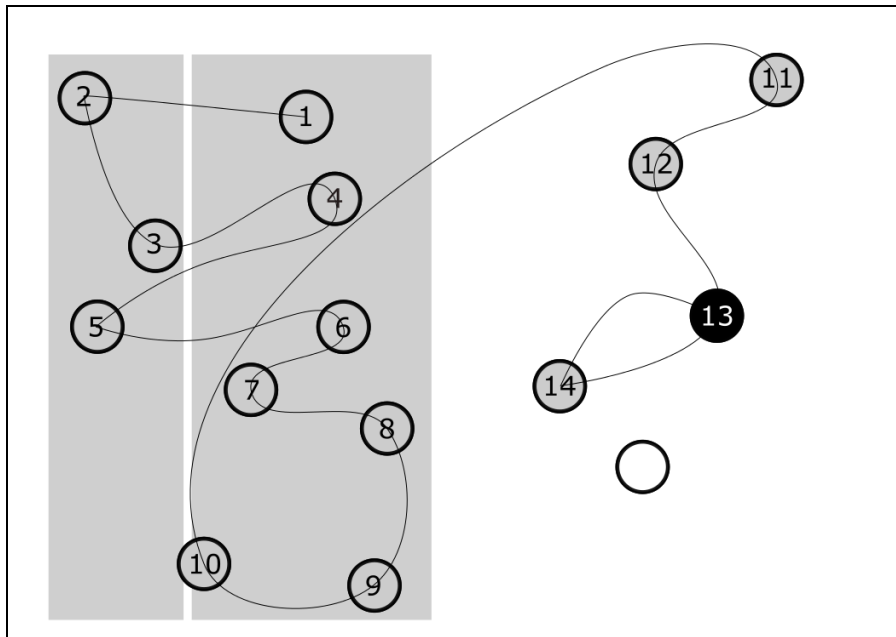


Figure 104 : application du modèle Colonnes (feuille B, sujet 24, essai 2)

Pour ce sujet, c'est la configuration 1 qui est appliquée. Elle produit le code « 05 ». La présence du chiffre 5 dans le code permet de déclarer l'occurrence du modèle *Colonnes*.

La figure suivante présente la modélisation que nous avons réalisée pour l'essai 2 du sujet 32.

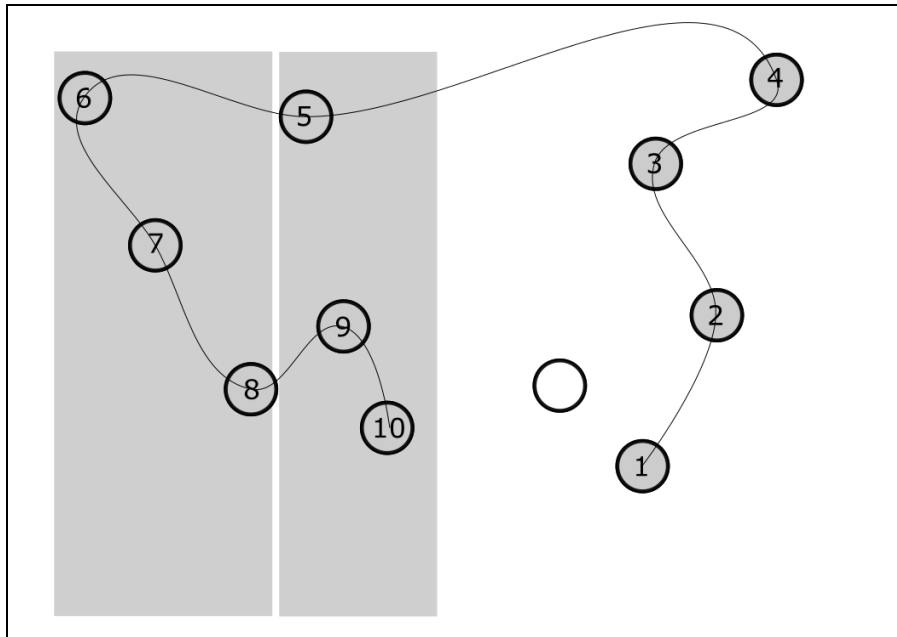


Figure 105 : application du modèle Colonnes (feuille C, sujet 32, essai 2)

Pour ce sujet, c'est la configuration 6 qui est appliquée. Elle produit le code « 32 ». L'application de la première règle ($3+2=5$) permet de déclarer l'occurrence du modèle *Colonnes*.

Des parties qui ne vérifient pas le modèle de la stratégie *Colonnes* (feuilles B et C)

Examinons maintenant des parties où le modèle *Colonnes* ne s'applique pas.

La figure suivante présente la modélisation que nous avons réalisée pour l'essai 1 du sujet 24.

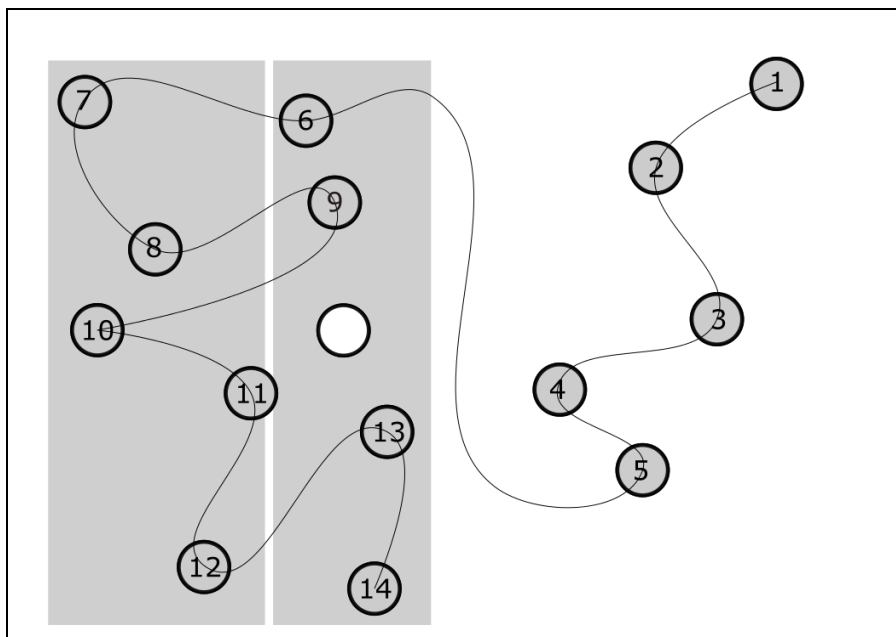


Figure 106 : application du modèle Colonnes (feuille B, sujet 24 essai 1)

Pour ce sujet, c'est la configuration 6 qui est appliquée. Elle produit le code « 32 ». Comme aucune des deux conditions n'est remplie, le modèle *Colonnes* est déclaré absent de la partie.

La figure suivante présente la modélisation que nous avons réalisée pour l'essai 2 du sujet 32.

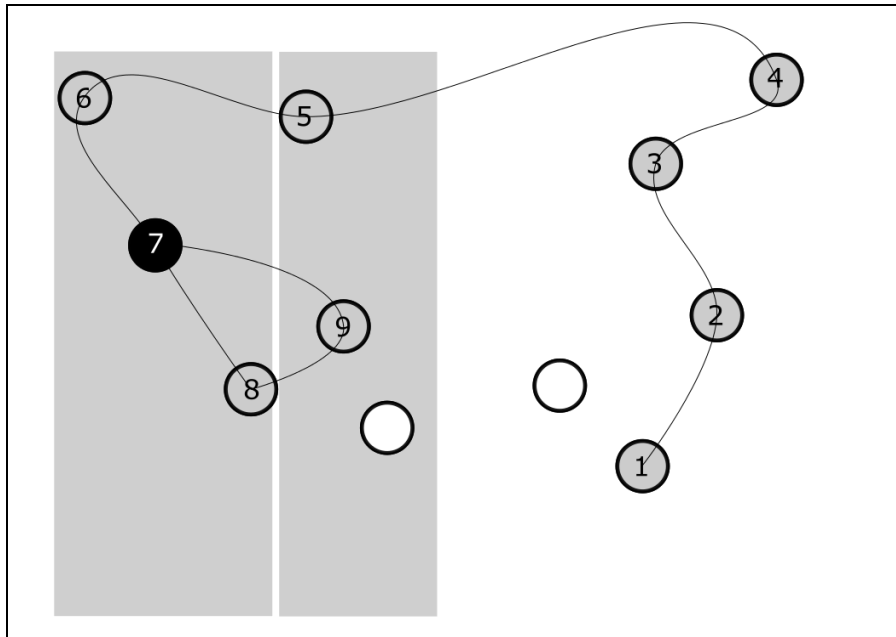


Figure 107 : application du modèle *Colonnes* (feuille C, sujet 32, essai 2)

Pour ce sujet, c'est la configuration 6 qui est appliquée. Elle produit le code « 30 ». Comme aucune des deux conditions n'est remplie, le modèle *Colonnes* est déclaré absent de la partie.

L'application de la configuration rectangulaire choisie et la détermination du code pour la stratégie *Colonnes* de chacune des 78 parties constituent l'annexe 4 de cette recherche.

2.5.2.2 Questions, résultats et analyse

Nous disposons d'un modèle que nous pouvons appliquer la collection des parties et nous pouvons répondre aux questions suivantes :

Dans quelles parties le modèle *Colonnes* est mis en œuvre par les sujets ?

L'analyse de nos 78 transcriptions de la stratégie *Colonnes* nous permet d'intégrer à notre structure de données l'information binaire sur la présence ou non de la stratégie *Colonnes*.

<i>Partie</i>	<i>Sujet</i>	<i>Feuille</i>	<i>Niveau</i>	<i>R=I</i>	<i>Colonnes</i>
1	1	A	CM2	0	1
2	1	A	CM2	0	0
3	2	A	CM2	0	0
4	2	A	CM2	1	1
5	3	A	CM2	1	1
6	4	A	CM2	1	1
7	5	A	CM2	0	0
8	5	A	CM2	0	0
9	6	A	CM2	0	0
10	6	A	CM2	1	1
11	7	A	CM2	1	1
12	8	A	CM2	0	0
13	8	A	CM2	1	0
14	9	A	CM2	1	1

Figure 108 : occurrence de la stratégie Colonnes par sujet (extrait du tableau)

Maintenant que nous avons repéré les occurrences de la stratégie *Colonnes* dans l'ensemble des parties, nous pouvons répondre à la question : « Combien de sujets ont mis en œuvre la stratégie *Colonnes* ? »

La stratégie *Colonnes* est mise en œuvre dans 31 parties.

Nous transcrivons les résultats dans le tableau suivant, en les différenciant par support.

<i>Support</i>	<i>Nombre d'occurrences de la stratégie Colonnes</i>	<i>Nombre de parties</i>	<i>Pourcentage des parties avec stratégie Colonnes</i>
<i>Feuille A</i>	11	32	34%
<i>Feuille B</i>	12	17	71%
<i>Feuille C</i>	8	29	26%
<i>Total</i>	31	78	40%

Figure 109 : Répartition des occurrences de la stratégie Colonnes par parties

Nous observons une variation importante du repérage de la stratégie *Colonnes* en fonction des supports. La stratégie *Colonnes* apparaît très majoritaire avec le support B.

La stratégie Colonnes est-elle mise en œuvre lors des réussites ?

Etudions maintenant le lien entre la présence de cette stratégie et la réussite à la partie.

<i>Support</i>	<i>Nombre d'occurrences de la stratégie Colonnes dans une partie réussie</i>	<i>Nombre de parties réussies</i>	<i>Pourcentage des parties avec stratégie Colonnes parmi les parties réussies</i>
<i>Feuille A</i>	7	10	70%
<i>Feuille B</i>	6	6	100%
<i>Feuille C</i>	4	9	44%
<i>Total</i>	17	25	68%

La totalité des sujets confrontés au support B et qui ont réussi ont mis en œuvre la stratégie *Colonnes*. Une part importante des sujets confrontés au support A et qui ont réussi ont mis en œuvre une stratégie *Colonnes*. Par contre, moins de la moitié des sujets confrontés au support C ont réussi en mettant en œuvre une stratégie *Colonnes*.

La stratégie *Colonnes* est mise en œuvre dans près d'une partie sur deux (31 sur 78 parties). Les sujets ont mis en œuvre cette stratégie dans 17 des 25 parties où ils ont réussi. Dans les 53 parties où ils ont échoué, cette stratégie n'apparaît que 14 fois. Ces proportions sont proches de celles que nous avons observées pour la stratégie *Partition*.

On peut donc aussi affirmer que la mise en œuvre de la stratégie *Colonnes* favorise la réussite et que ce n'est pas une condition expérimentalement suffisante pour réussir.

2.5.3 Etude de la stratégie *Lignes*

2.5.3.1 Construction du modèle de la stratégie *Lignes*

Pour construire un modèle de la stratégie *Lignes*, nous faisons le choix de nous appuyer sur un principe identique à celui mis en œuvre dans la stratégie *Colonnes*, un pavage des différentes feuilles avec des rectangles.

Une première modélisation de la stratégie *Lignes*

Nous allons donc partitionner chacun des supports en utilisant des rectangles. La question qui se pose à nous est la même que celle que nous nous sommes posés pour la stratégie *Colonnes* : Quels rectangles faut-il fabriquer pour obtenir une modélisation conforme ou au moins proche de ce que nous percevons quand nous observons les clips vidéo ? Nous cherchons ici à déterminer le nombre et la largeur des rectangles que nous allons considérer.

Le premier modèle que nous produisons repose sur une partition assez fine de la sous-collection de ronds. Ce modèle est composé de 5 rectangles qui partitionnent la feuille A selon le schéma suivant.

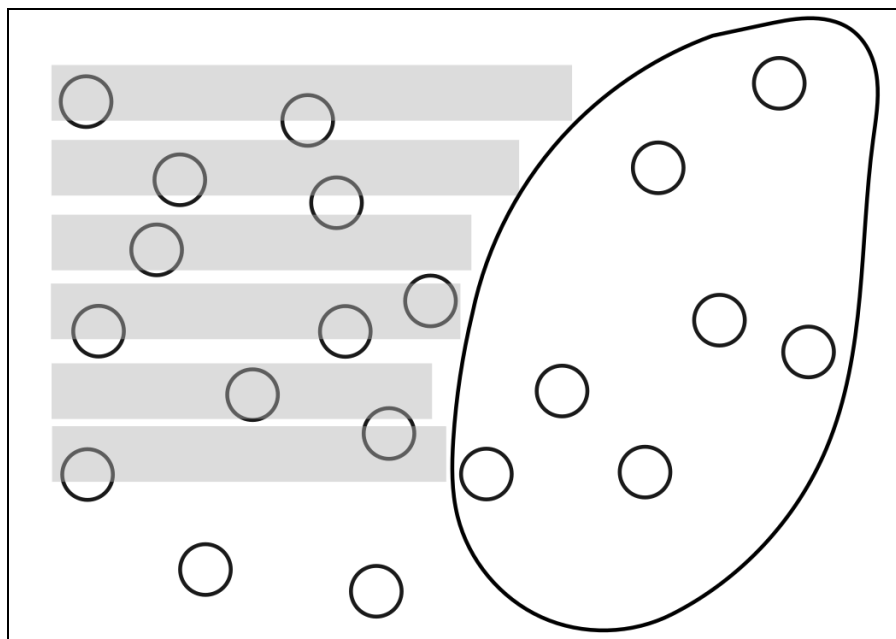


Figure 110 : Première modélisation de la stratégie Lignes (feuille A)

Dans un premier temps, nous choisissons de construire un pavage de la sous-collection qui n'est pas repérée dans le modèle de stratégie *Partition*. Cette décision nous confronte à une difficulté.

Cette modélisation est construite *a posteriori*, après visionnage des vidéos. Elle doit être compatible avec la perception développée lors de ces visionnages.

La confrontation du modèle initial (pavage de la sous-collection) à la production suivante a remis en question le modèle initial. Observons l'essai suivant, présenté avec numéros et chemin.

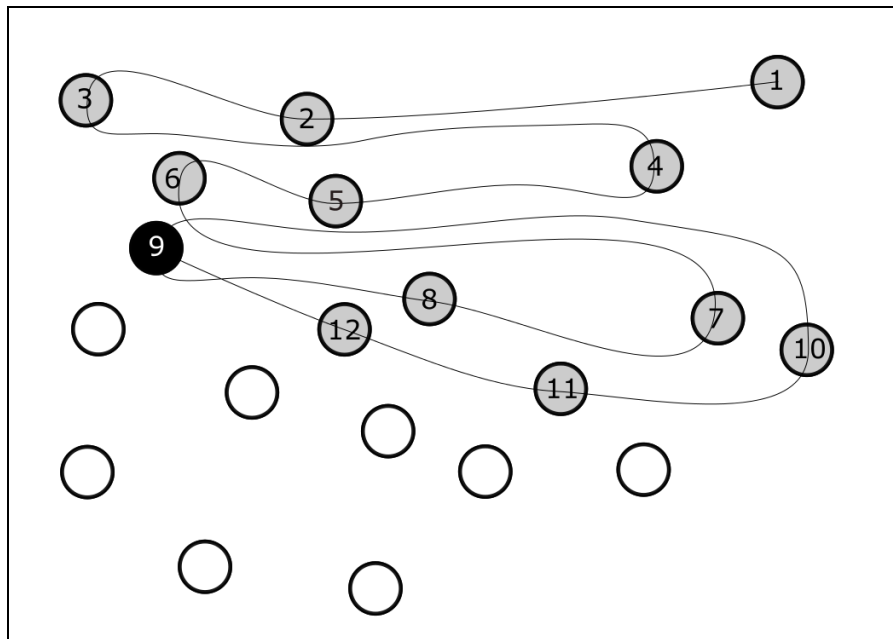


Figure 111 : Transcription sous forme de chemin numéroté (feuille A, sujet 6, essai 1)

Dans cet essai, la procédure mise en œuvre par le sujet relève clairement de l'appui sur la structure de lignes.

L'application du premier modèle (par application du calque) ne permet pas de faire apparaître cet essai comme relevant du modèle *Lignes*.

Le modèle construit doit faire apparaître que cet essai relève de la stratégie *Lignes*. Cela nous contraint à modifier le pavage proposé en considérant que nous allons appliquer notre pavage de rectangles à la collection entière.

Cette première analyse permet de produire un résultat non obtenu antérieurement, qui apparaît évident *a posteriori*. Le modèle *Partition* que nous avons construit s'appuie sur la verticalité. Il décompose la collection en deux sous-collections de type colonne.

Examinons comment le modèle initial évolue.

Une seconde modélisation de la stratégie *Lignes*

Le second modèle est une évolution du premier, puisqu'il en reprend la structure en l'appliquant à la collection entière.

Nous conservons l'idée d'une partition de 5 rectangles.

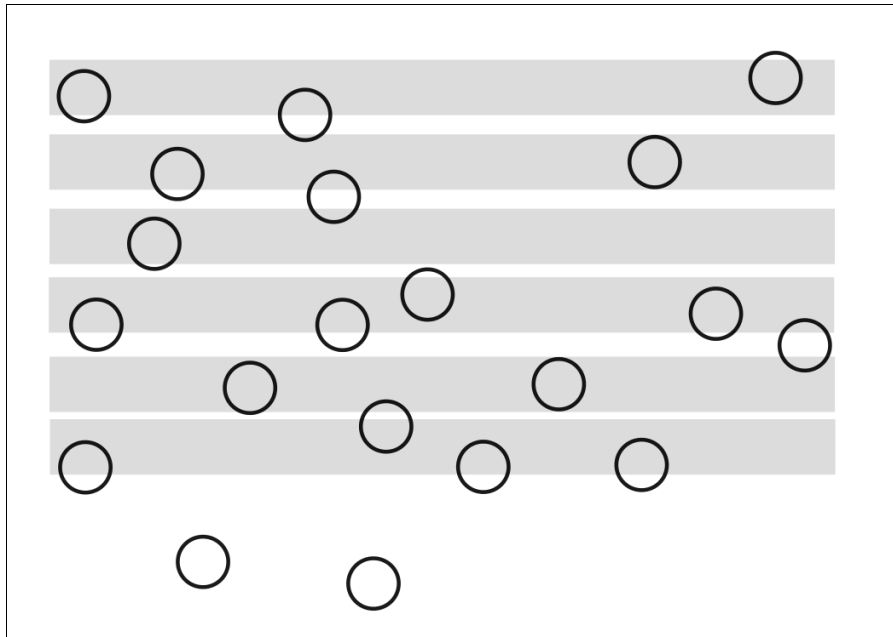


Figure 112 : Seconde modélisation de la stratégie Lignes (feuille A)

Ce second modèle permet de rendre compte d'un traitement qui s'appuie sur un balayage selon un faisceau d'horizontales. Par ailleurs, les rectangles ainsi positionnés autorisent peu de variations par rapport au repérage *a priori* que nous avons établi.

Testons la validité de la modélisation et appliquons-la à la partie évoquée précédemment (feuille A, sujet 6, essai 1).

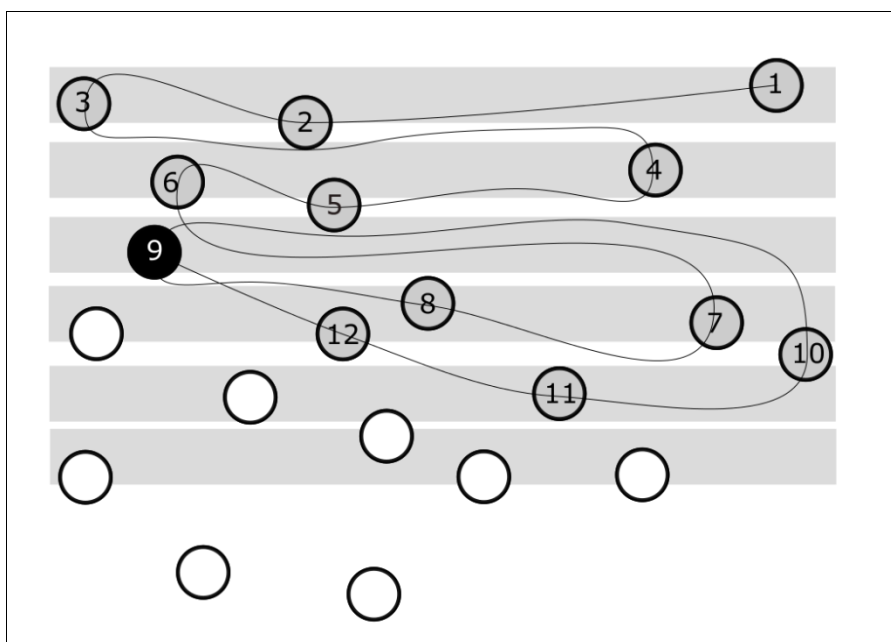


Figure 113 : Application du second modèle de la stratégie *Lignes* (feuille A, sujet 6, essai 1)

La stratégie mise en œuvre par ce sujet dans cette partie est caractéristique de la stratégie *Lignes* que nous imaginions. Nous observons la présence de grandes lignes, qui ignorent la partition.

La confrontation de ce modèle à nos données s'avère problématique dans la mesure où elle fait apparaître une quasi-absence de cette stratégie. La mise en œuvre de ce modèle sur nos données nous permet d'affirmer qu'il n'y a presque aucun sujet qui met en œuvre une stratégie qui s'appuie sur le repérage des rectangles tels que nous les avons définis précédemment.

Cela constitue déjà un résultat en soi. Mise à part la partie décrite ci-dessus, nous n'observons pas de traitement de la collection de ronds qui s'appuie sur un découpage en rectangles fins.

Or, nous avons pourtant l'impression en regardant les vidéos pour réaliser les transcriptions que la stratégie *Lignes* apparaît malgré tout quelques fois.

Ce résultat nous contraint à construire une nouvelle modélisation de la stratégie *Lignes*, qui permette de mieux rendre compte de la perception que nous avons eue.

Une troisième modélisation de la stratégie *Lignes*

Les deux rectangles de la feuille A

Ce qui rend notre modèle peu fonctionnel dans le repérage de stratégies *Lignes* tient au fait que nous n'autorisons quasi-aucune variation par rapport à l'analyse *a priori* que nous avons élaborée.

Si nous considérons que les rectangles que nous avons fabriqués sont des lignes, nous dirons que nos lignes sont trop peu épaisses.

Pour confirmer cette impression, observons la transcription suivante :

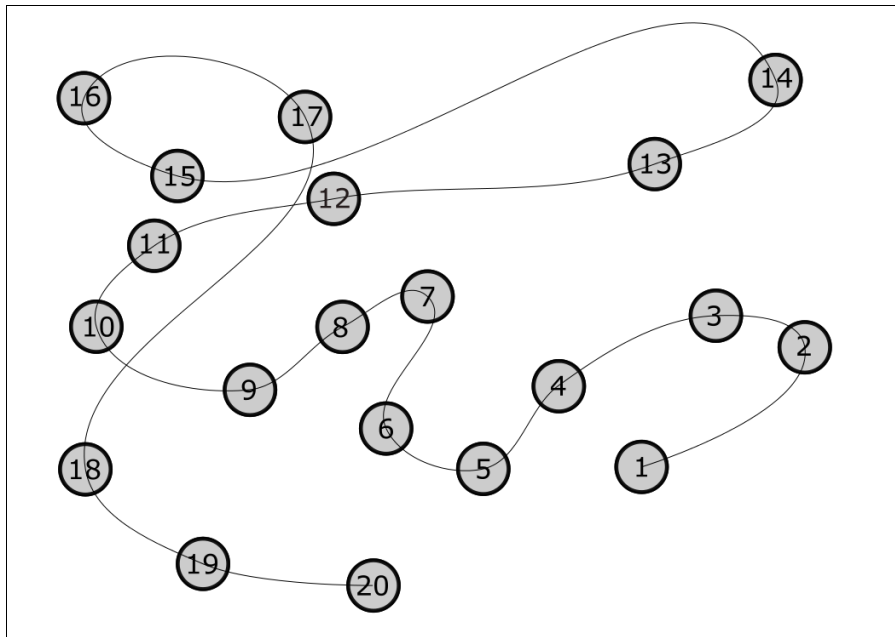


Figure 114 : Transcription de la suite des traitements (feuille A, sujet 13, essai 2)

Nous allons cibler notre observation sur le traitement des dix premiers éléments. On peut considérer que le sujet les perçoit comme une ligne puisqu'il y a un développement des traitements selon l'horizontalité.

Dessignons la ligne ou le rectangle qui matérialise ce que nous avons perçu visuellement.

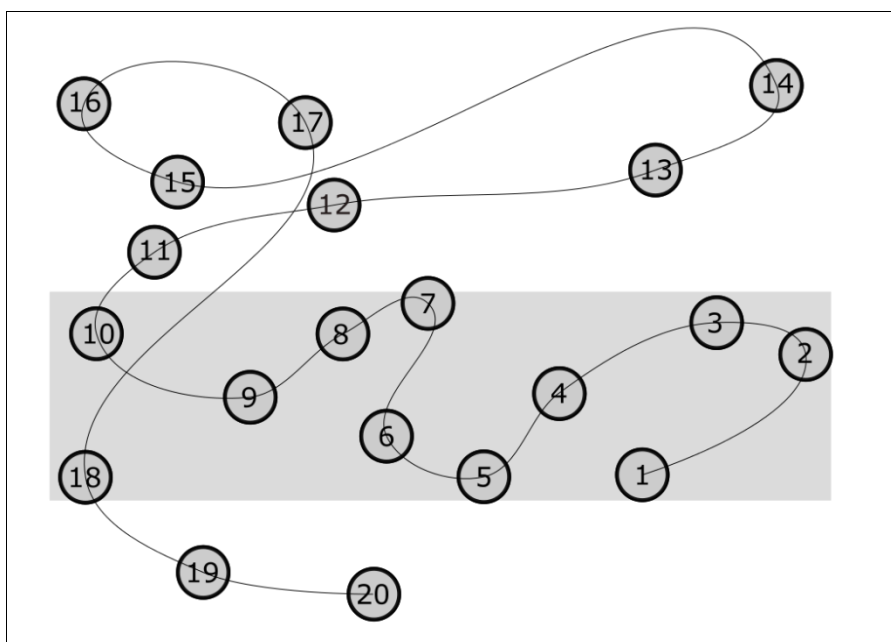


Figure 115 : Repérage d'une structure ligne dans la suite des traitements (feuille A, sujet 13, essai 2)

Pour rendre visible ce développement horizontal, nous avons été contraints d'augmenter l'épaisseur de notre ligne. Nous avons dû modifier la largeur des rectangles pour pouvoir percevoir la régularité mise en œuvre par ce sujet.

L'observation de nos transcriptions nous amène à penser que la zone que nous venons de définir est suffisamment significative pour que nous décidions de produire une nouvelle modélisation autour de ce rectangle.

Observons la suite des traitements réalisés par le sujet. Cet appui sur l'horizontalité se poursuit pour le traitement des éléments de 11 à 14, voire même 15 à 17.

Cela nous amène donc à reconsidérer notre modèle, en modifiant le tamis qu'il réalise sur la structure Ligne. Nous décidons de produire un modèle qui se réduit à deux rectangles.

La figure suivante montrent l'application du nouveau modèle *Lignes* à la feuille A.

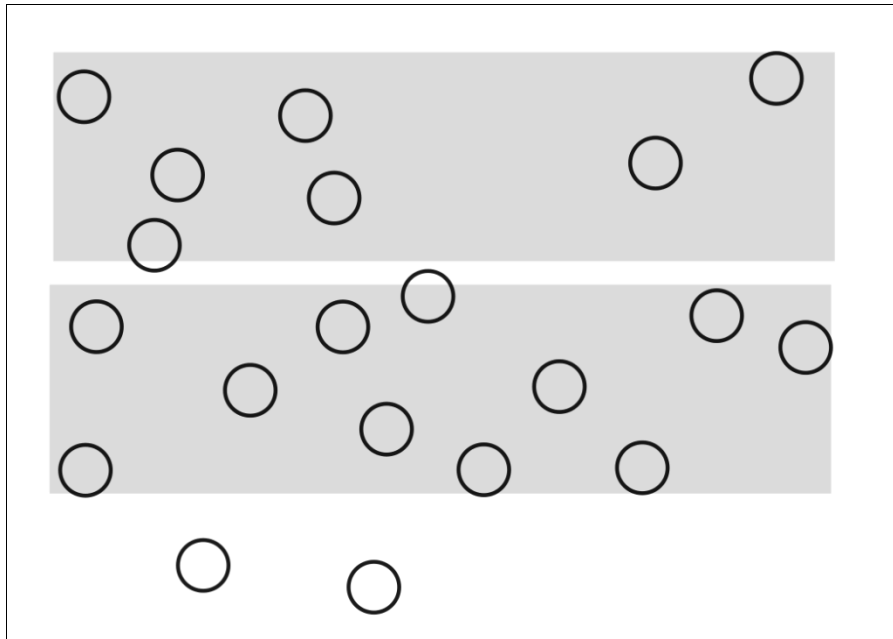


Figure 116 : Application du nouveau modèle *Lignes* à la feuille A

Elaboration du code par partie (feuille A)

Nous continuerons d'appliquer la même méthodologie pour l'élaboration de la stratégie *Lignes* que celle que nous avons mise en œuvre pour élaborer la stratégie *Colonnes*. L'étape suivante consiste à décrire les mécanismes de production d'un code nous permettant de détecter les occurrences de notre modèle.

Cette fois-ci, nous allons étudier ce qui se passe dans chacun des deux rectangles du calque que nous avons élaboré.

Nous appliquerons les mêmes mécanismes de production du code que ceux qui ont été mis en œuvre pour la stratégie *Colonnes*.

Reprenons l'exemple sur lequel nous nous sommes appuyés pour élaborer le calque *Lignes*. Pour repérer les deux rectangles du calque, nous les nommerons rectangle Haut et rectangle Bas.

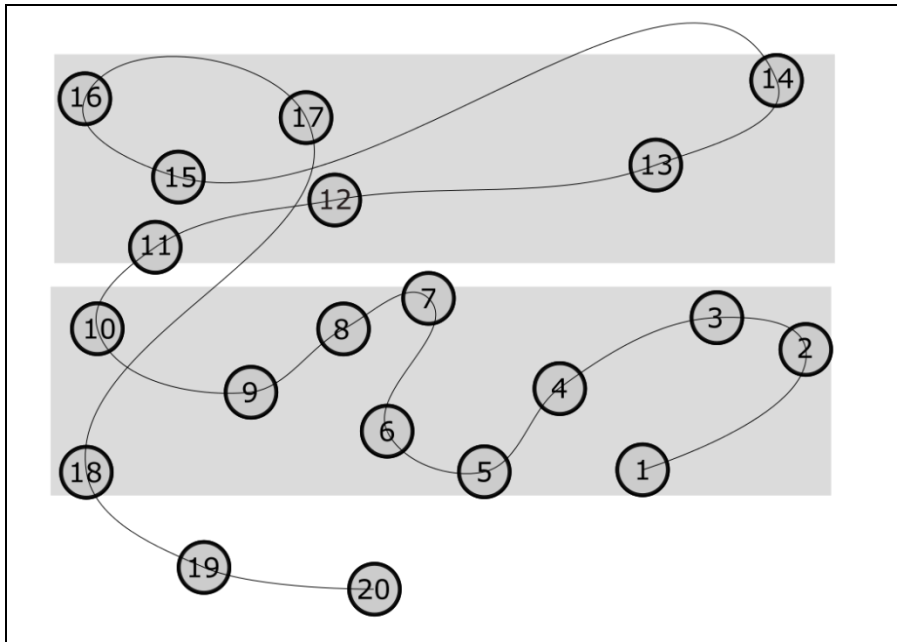


Figure 117 : Application du modèle Lignes (feuille A, sujet 13, essai 2)

- Dans le rectangle Haut, les ronds numérotés 11, 12, 13 et 14 sont traités en respectant l'ordre d'une ligne, tout comme les ronds 15, 16 voire même 17. Nous considérons que ces 7 éléments sont perçus comme une série de lignes. Nous affectons donc à cette ligne le code « 7 ».
- Dans le rectangle Bas, les ronds numérotés de 1 à 10 sont traités en respectant l'ordre. Il y a donc 10 éléments qui vérifient la condition d'ordre de traitement. Il nous faut coder cette information avec un chiffre. Nous affectons donc à cette ligne le plus grand nombre à un chiffre, « 9 ».

Finalement, cette partie est codée « 79 ».

Examinons maintenant une nouvelle partie.

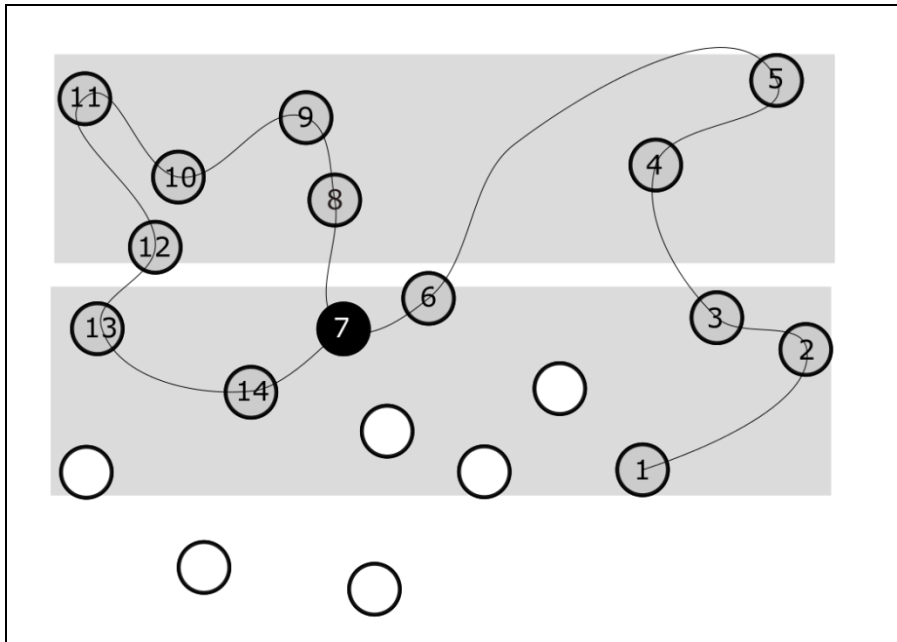


Figure 118 : Application du modèle *Lignes*(feuille A, sujet 12, essai 1)

- Dans le rectangle Bas, les ronds numérotés 8 à 12 sont traités en respectant l'ordre d'une ligne. Nous affectons donc à cette ligne le code « 5 ».
- Dans le rectangle Haut, les ronds numérotés de 1 à 3 sont traités en respectant l'ordre. Nous affectons donc à cette ligne le code « 3 ».

Cette partie est donc codée « 53 ».

Lien entre production du code pour la feuille A et occurrence du modèle *Lignes*

Pour que le modèle *Lignes* soit déclaré présent, il faut que l'une de ces deux conditions soit remplie :

- lorsque l'on fait la somme des deux nombres qui constituent le code *Lignes*, le résultat obtenu est supérieur ou égal à 9
- un des deux nombres du code *Lignes* est un nombre supérieur ou égal à 6

Appliquons le modèle que nous avons défini à quelques-unes des parties que nous avons observées.

Ainsi la stratégie *Lignes* sera déclarée dans l'essai 2 du sujet 13 (code « 79 ») et absente dans l'essai 1 du sujet 12 (code « 53 »).

Adaptation du modèle aux feuilles B et C

La structure des deux rectangles et les règles de codage sont conservées pour étendre le modèle aux feuilles B et C. Seules les règles de détection de la structure *Lignes* sont adaptées.

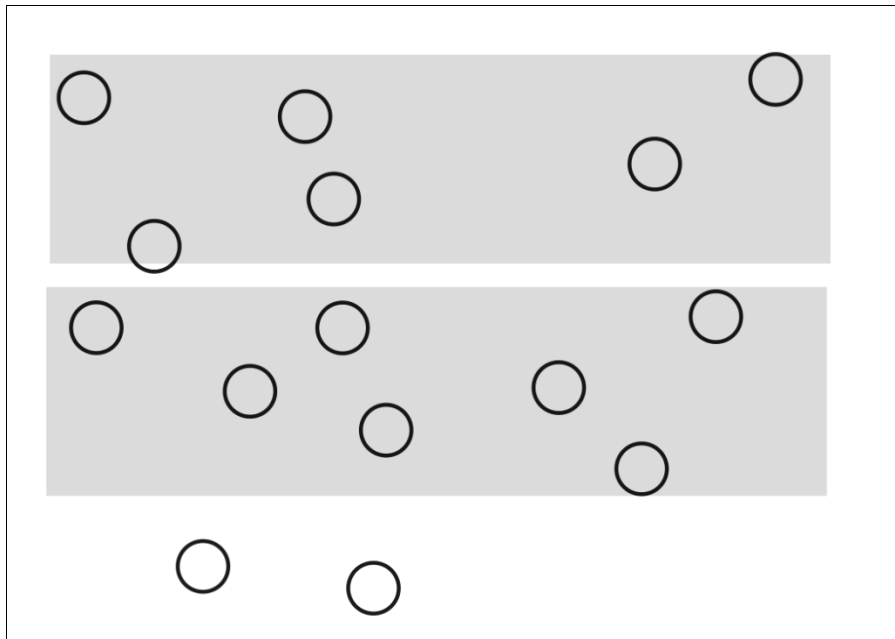


Figure 119 : Application du nouveau modèle *Lignes* à la feuille B

Pour que le modèle *Lignes* soit déclaré présent sur la feuille B, il faut que l'une de ces deux conditions soit remplie :

- lorsque l'on fait la somme des deux nombres qui constituent le code *Lignes*, le résultat obtenu est supérieur ou égal à 8
- un des deux nombres du code *Lignes* est un nombre supérieur ou égal à 6

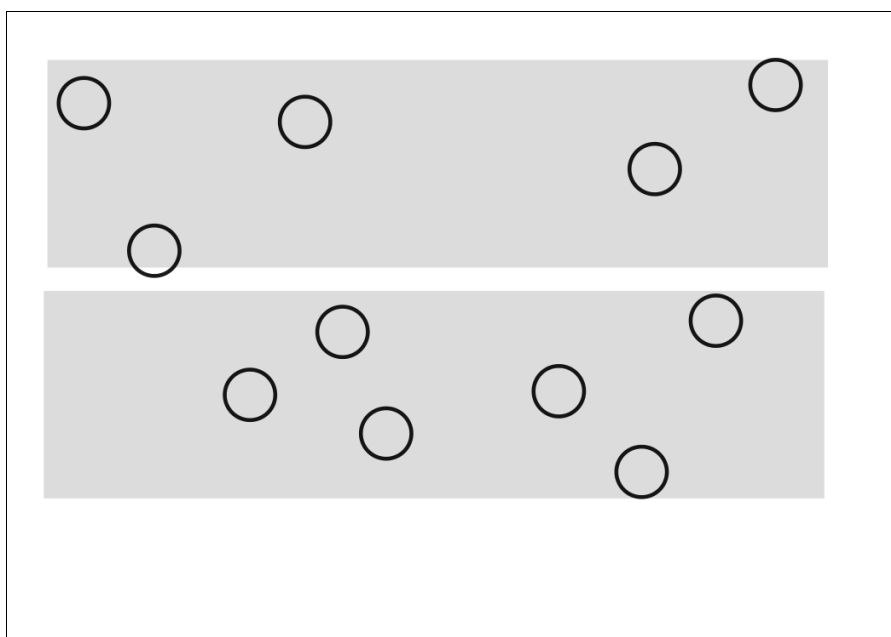


Figure 120 : Application du nouveau modèle *Lignes* à la feuille C

Pour que le modèle *Lignes* soit déclaré présent dans la feuille C, il faut que l'une de ces deux conditions soit remplie :

- lorsque l'on fait la somme des deux nombres qui constituent le code *Lignes*, le résultat obtenu est supérieur ou égal à 7
- un des deux nombres du code *Lignes* est un nombre supérieur ou égal à 5

Mettons maintenant en œuvre notre modèle sur quelques parties.

Des parties qui vérifient le modèle de la stratégie *Lignes* (feuilles B et C)

Commençons par quelques parties où le modèle *Lignes* va s'appliquer.

La figure suivante présente la modélisation que nous avons réalisée pour l'essai 2 du sujet 27.

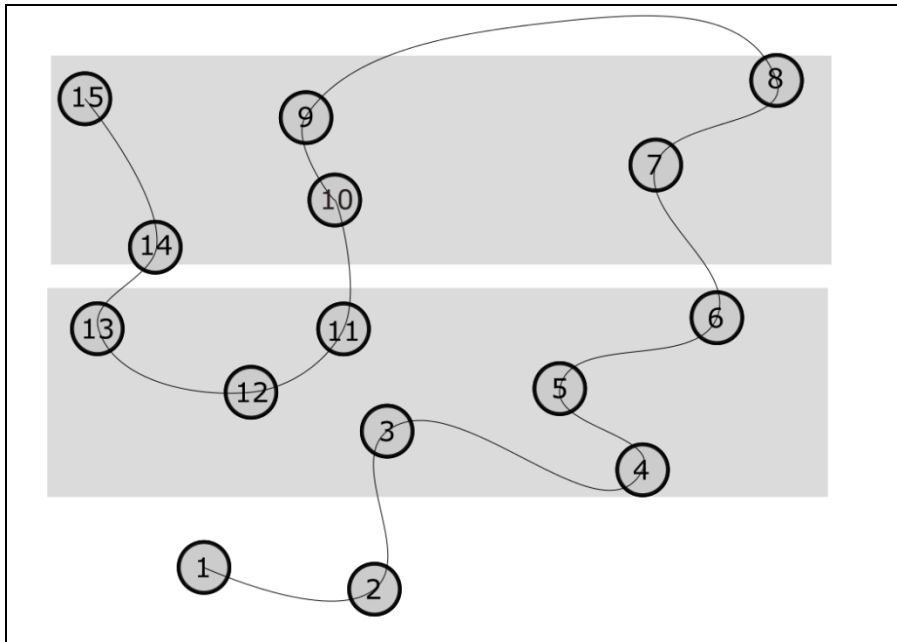


Figure 121 : application du modèle Lignes (feuille B, sujet 27 essai 2)

Les ronds 7, 8, 9 et 10 du rectangle Haut sont traités en respectant le critère, tout comme les ronds 3, 4, 5 et 6 du rectangle Bas. Le code « 44 » est produit et c'est la vérification du critère sur la somme des chiffres du code qui permet de déclarer l'occurrence du modèle *Lignes*.

La figure suivante présente la modélisation que nous avons réalisée pour l'essai 1 du sujet 36.

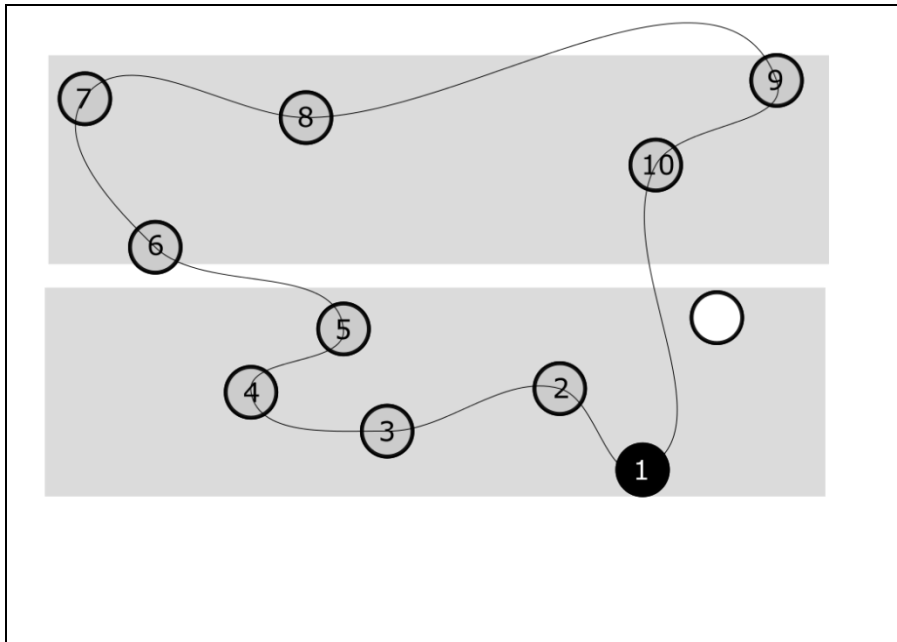


Figure 122 : application du modèle *Lignes* (feuille C, sujet 36, essai 1)

Les ronds 1, 2, 3, 4 et 5 du rectangle Bas sont traités en respectant le critère, tout comme les ronds 6, 7, 8 et 9 du rectangle Haut. Le code «45» est produit. La présence du chiffre 5 dans le code permet de déclarer l'occurrence du modèle *Lignes*.

Nous percevons ici certaines limites de notre modélisation. Notre modèle *Lignes* est bien adapté à cette partie car elle ne s'appuie pas sur la construction d'une partition au sens où nous l'avons défini dans cette thèse.

Des parties qui ne vérifient pas le modèle de la stratégie *Lignes* (feuilles B et C)

Examinons maintenant des parties où le modèle *Lignes* ne va pas s'appliquer. La figure suivante présente la modélisation que nous avons réalisée pour l'essai 2 du sujet 22.

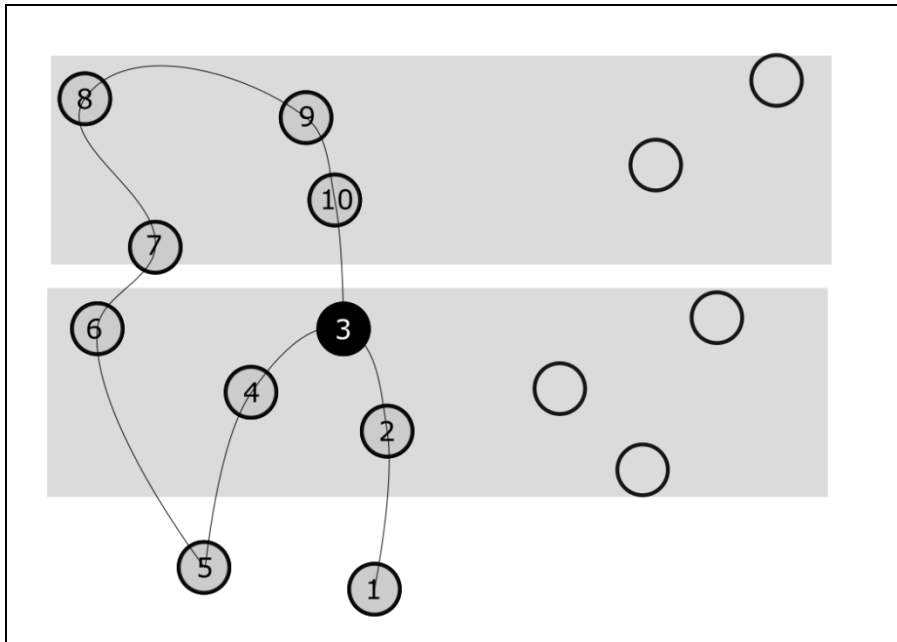


Figure 123 : application du modèle Lignes (feuille B, sujet 22, essai 2)

Les ronds 7, 8, 9 et 10 du rectangle Haut sont traités en respectant le critère, tout comme les ronds 2, 3 et 4 du rectangle Bas. Le code « 43 » est produit. Aucun des critères permettant de valider la présence du modèle n'est validé.

La figure suivante présente la modélisation que nous avons réalisée pour l'essai 1 du sujet 34.

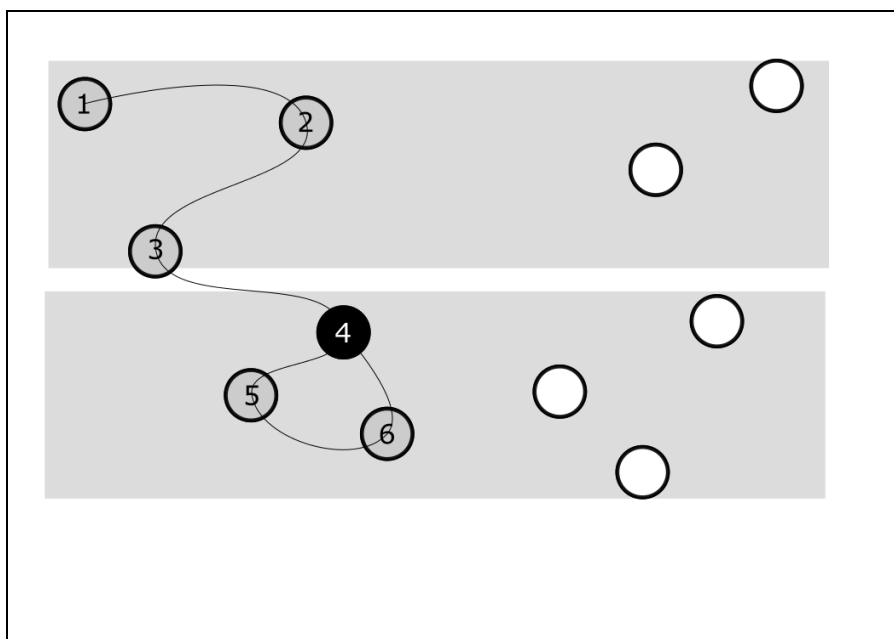


Figure 124 : application du modèle *Lignes* (feuille C, sujet 34, essai 1)

Le code produit est « 23 ». L'arrêt rapide de la partie fait que peu d'éléments ont été traités. Les conditions définies sur le code ne permettent pas à la stratégie *Lignes* d'être déclarée présente.

L'application de la configuration rectangulaire choisie et la détermination du code de chacune pour la stratégie *Lignes* des 78 parties constituent l'annexe 5 de cette recherche.

2.5.3.2 Questions, résultats et analyse

Nous disposons d'un modèle que nous pouvons appliquer à la collection des parties et nous pouvons répondre aux questions suivantes :

Dans quelles parties le modèle *Lignes* est mis en œuvre par les sujets ?

L'analyse de nos 78 transcriptions de la stratégie *Lignes* nous permet d'intégrer à notre structure de données l'information binaire sur la présence ou non de la stratégie *Lignes*.

<i>Partie</i>	<i>Sujet</i>	<i>Feuille</i>	<i>Niveau</i>	<i>R=1</i>	<i>Colonnes</i>	<i>Lignes</i>
1	1	A	CM2	0	1	1
2	1	A	CM2	0	0	0
3	2	A	CM2	0	0	1
4	2	A	CM2	1	1	1
5	3	A	CM2	1	1	1
6	4	A	CM2	1	1	1
7	5	A	CM2	0	0	0
8	5	A	CM2	0	0	0
9	6	A	CM2	0	0	1
10	6	A	CM2	1	1	1
11	7	A	CM2	1	1	1
12	8	A	CM2	0	0	0
13	8	A	CM2	1	0	0
14	9	A	CM2	1	1	0

Figure 125 : occurrence de la stratégie Lignes par sujet (extrait)

Maintenant que nous avons repéré les occurrences de la stratégie que nous avons appelée *Lignes* dans l'ensemble des parties, nous pouvons répondre à la question : « Combien de sujets ont mis en œuvre la stratégie *Lignes* ? »

La stratégie *Lignes* est mise en œuvre dans 39 parties.

Nous transcrivons les résultats dans le tableau suivant, en les différenciant par support.

<i>Support</i>	<i>Nombre d'occurrences de la stratégie Lignes</i>	<i>Nombre de parties</i>	<i>Pourcentage des parties avec stratégie Lignes</i>
<i>Feuille A</i>	18	32	56%
<i>Feuille B</i>	6	17	35%
<i>Feuille C</i>	15	29	52%
<i>Total</i>	39	78	50%

Figure 126 : Répartition des occurrences de la stratégie Colonnes par parties

Notre modèle produit un nombre de présences de la stratégie *Lignes* qui est égal à la moitié de notre effectif total. Il permet donc de discriminer par ce critère la moitié de notre population.

La stratégie *Lignes* est-elle mise en œuvre lors des réussites ?

Etudions maintenant le lien entre la présence de cette stratégie et la réussite à la partie.

<i>Support</i>	<i>Nombre d'occurrences de la stratégie Lignes dans une partie réussie</i>	<i>Nombre de parties réussies</i>	<i>Pourcentage des parties avec stratégie Lignes parmi les parties réussies</i>
<i>Feuille A</i>	9	10	90%
<i>Feuille B</i>	4	6	67%
<i>Feuille C</i>	6	9	67%
<i>Total</i>	19	25	76%

La stratégie *Lignes* apparaît dans la moitié des parties. La proportion de sujets ayant mis en œuvre la stratégie *Lignes* lors des réussites très majoritaire pour la feuille A (90%) et reste très supérieure à la moyenne pour les feuilles B et C (67%).

Comme pour les stratégies précédentes, on peut donc aussi affirmer que la mise en œuvre de la stratégie *Lignes* favorise la réussite. Cela reste une condition qui expérimentalement ne suffit pas pour réussir.

Nous allons maintenant étudier la part respective de chacune des trois stratégies de notre analyse *a priori*.

2.5.4 Etude de la part respective de chacune des trois stratégies dans les parties

Après avoir étudié la présence individuelle de chacune de ces trois stratégies dans les parties, nous allons nous demander quelle est la part respective de chaque stratégie dans les parties et si une des stratégies apparaît plus que les autres.

2.5.4.1 Etude de l'ensemble des parties

Nous allons compiler dans un même tableau des données numériques concernant les trois stratégies.

<i>Support</i>	<i>Nombre d'occurrences de la stratégie Partition</i>	<i>Nombre d'occurrences de la stratégie Colonnes</i>	<i>Nombre d'occurrences de la stratégie Lignes</i>	<i>Nombre d'occurrences de stratégies</i>
<i>Total</i>	35	31	39	105
<i>Pourcentage</i>	33%	30%	37%	100%

Tableau 24 : Nombre d'occurrences des stratégies

Rappelons que nos données sont constituées de 78 parties. Le nombre d'occurrences d'une stratégie est supérieur au nombre de parties, ce qui signifie que dans certaines parties, plusieurs stratégies sont repérées.

Nos différents modèles ont un nombre d'occurrences qui est proche. Nous ne voyons pas à ce stade de stratégie qui serait majoritaire par rapport aux autres.

Nous nous demandons si cette hypothèse va rester vraie quand on va passer à l'examen par support. Le tableau suivant compile les résultats par support.

Support		Nombre d'occurrences de la stratégie Partition	Nombre d'occurrences de la stratégie Colonnes	Nombre d'occurrences de la stratégie Lignes	Nombre d'occurrences de stratégies
Feuille A	Effectif	8	11	18	37
	Pourcentage	21%	30%	49%	100%
Feuille B	Effectif	12	12	6	30
	Pourcentage	40%	40%	20%	100%
Feuille C	Effectif	15	8	15	38
	Pourcentage	39%	22%	39%	100%

Tableau 25 : Nombre d'occurrences des stratégies par support

Ce tableau nous permet de constater que :

- La stratégie *Lignes* est sur-représentée quand le support est la feuille A
- La stratégie *Lignes* est sous-représentée quand le support est la feuille B
- La stratégie *Colonnes* est sous-représentée quand le support est la feuille C

Nous nous demandons si ces résultats sont dus au modèle de stratégie que nous venons de produire ou au support. Le modèle ne nous permet pas de faire d'hypothèses intéressante à ce stade.

2.5.4.2 Etude des parties gagnantes

Commençons donc par examiner les occurrences des différentes stratégies dans les parties réussies.

Support		Nombre d'occurrences de la stratégie Partition dans les parties réussies	Nombre d'occurrences de la stratégie Colonnes dans les parties réussies	Nombre d'occurrences de la stratégie Lignes dans les parties réussies	Nombre d'occurrences de stratégies dans les parties réussies
Feuille A	Effectif	3	7	9	19
	Pourcentage	16%	37%	47%	100%
Feuille B	Effectif	6	6	4	16
	Pourcentage	37,5%	37,5%	25%	100%
Feuille C	Effectif	7	4	6	17
	Pourcentage	41%	24%	35%	100%
Total	Effectif	16	17	19	52
	Pourcentage	31%	33%	36%	100%

Tableau 26 : Nombre d'occurrences des stratégies dans les parties gagnantes

Aucune stratégie n'est majoritaire parmi les parties réussies, que ce soit globalement ou par support.

2.5.5 Observe-t-on d'autres stratégies que celles produites par l'analyse *a priori* ?

Le visionnage des films fait apparaître des suites de gestes qui semblent organisés et qui ne relèvent pas de stratégies que nous avons identifiées *a priori*. Nous avons focalisé nos descriptions sur des stratégies dont nous imaginions qu'elles étaient susceptibles de conduire à une réussite. Dans une première acceptation du terme, le mot stratégie recouvrait l'idée de produire une description de la réussite.

En nous intéressant à l'ensemble des essais, nous observons aussi des suites de gestes qui apparaissent et semblent obéir à une logique commune, qu'ils conduisent ou non à une réussite. Il y a donc là une forme de cohérence et de régularité dans les mécanismes mis en œuvre qui peuvent être considérés eux aussi comme des stratégies.

2.5.5.1 La stratégie *Ilots*

Commençons par une stratégie que nous ne pouvions pas ne pas voir. En effet, la série de gestes réalisés par le sujet présente certains caractères très spectaculaires. Examinons la transcription d'une des parties considérées.

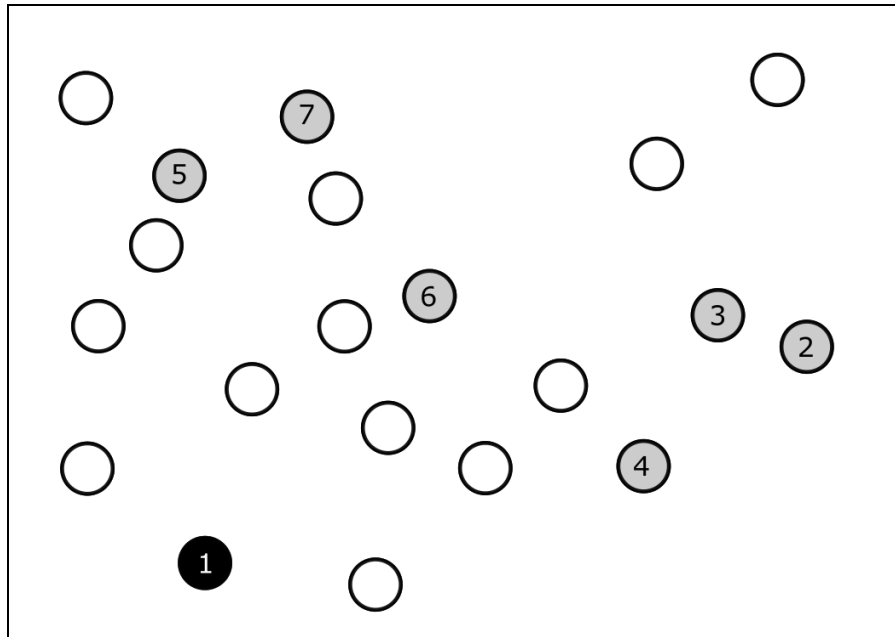


Figure 127 : Transcription de la suite des traitements (feuille A, sujet 8, essai 1)

Ainsi, si vous devons décrire plus précisément ce que fait le sujet dans cette partie, nous dirons qu'il commence par traiter un élément isolé (repéré 1 dans la transcription). Il traite ensuite un bloc de 3 éléments (repérés 2, 3 et 4) dont la caractéristique est d'être non contigu au premier élément traité. Une fois ce bloc traité, il passe au traitement d'un nouveau bloc (repéré 5, 6 et 7), non contigu du bloc précédent. Il veut ensuite enchaîner avec le traitement d'un nouveau bloc, non contigu au bloc précédent. La partie s'arrête car il retombe sur un élément déjà traité.

Nous trouvons ici une forme d'organisation que nous n'avions pas anticipée. Le sujet met en œuvre une stratégie de groupements qui consiste à traiter un ou plusieurs éléments selon des considérations de proximités, puis à choisir de traiter un autre groupement selon des considérations d'éloignement.

Nous avons choisi de nommer cette stratégie *Ilots*.

Nous allons maintenant essayer de produire une description qui rende mieux compte de la suite des décisions prises par le sujet.

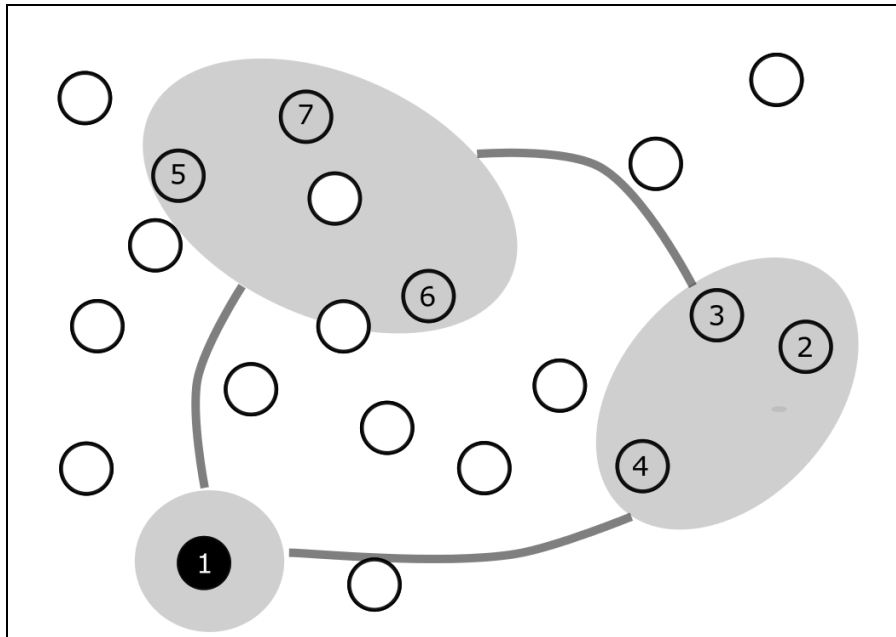


Figure 128 : Modélisation de la stratégie *Ilots* (feuille A, sujet 8, essai 1)

Représentée de cette manière, la stratégie apparaît spectaculaire car nous la percevons, dès le choix du second élément, comme une stratégie perdante. La suite des traitements n'est qu'une tentative pour retarder le moment où la partie va s'arrêter. C'est cette caractéristique qui la rend très visible par rapport à d'autres stratégies que nous n'avons peut-être pas identifiées.

Maintenant que cette stratégie est identifiée, notre souci d'analyse nous contraint à donner une description des mécanismes qui soutiennent la stratégie *Ilots*. C'est cette même contrainte qui va nous permettre de réinterroger ce que les stratégies que nous avons décrites précédemment ont de communs entre elles, et ce en quoi elles diffèrent fondamentalement de la stratégie *Ilots*.

Dans une première tentative, nous avons décrit cette stratégie *Ilots* comme une stratégie qui pouvait se caractériser par des ruptures de continuités dans l'élaboration d'un chemin. Cette description est correcte si nous pouvons expliciter les continuités dont il est question ici.

Les stratégies *Lignes*, *Colonnes* ou *Partition* reposent sur la mise en œuvre d'une organisation spatiale de la collection des chapeaux. La suite des traitements qui se déroule en appui sur cette organisation met toujours en œuvre à un moment donné des aspects liés à la proximité des ronds les uns par rapport aux autres. La proximité dont il est question ici est une proximité articulée autour du repérage spatial. Quand un sujet met en œuvre une stratégie *Lignes*, pour choisir l'élément suivant de son traitement, il cherche quel est l'élément qui est

le plus proche de celui qu'il vient de traiter (proche doit s'entendre ici au sens de « proche dans le cadre de la configuration *Lignes* »).

La stratégie *Ilots* que mettent en œuvre les sujets observés se déroule en deux temps. Le premier temps est consacré aux traitements d'ensembles, éventuellement réduits à un élément. Quand ces ensembles sont composés de plus d'un élément, ce sont des considérations de proximité spatiale qui président à la constitution de l'ensemble.

Quand le sujet a terminé le traitement d'un ensemble, il passe au traitement d'un ensemble suivant en utilisant un principe antagoniste à celui qui a servi à la constitution des stratégies précédentes, un principe d'éloignement en termes de distance de l'ensemble qui vient d'être traité. C'est cette régularité dans la recherche d'un éloignement qui nous a permis de repérer que des sujets mettaient en œuvre cette stratégie.

Nous observons sept occurrences de cette stratégie dans nos données.

<i>Partie</i>	<i>Sujet</i>	<i>Feuille</i>	<i>Essai</i>	<i>Réussite</i>	<i>oubli(0) ou 2 fois (1)</i>	<i>Partition</i>	<i>Lignes</i>	<i>Colonnes</i>	<i>Ilots</i>
8	5	A	2	0	0	0	0	0	1
12	8	A	1	0	1	0	0	0	1
13	8	A	2	0	1	0	0	0	1
27	16	A	1	0	1	0	0	0	1
28	16	A	2	0	1	0	0	0	1
44	25	B	1	0	1	0	0	0	1
73	42	C	1	0	1	0	0	0	1

Tableau 27 : Extraction des parties dans lesquelles sont mises en œuvre la stratégie *Ilots*

Ces sept parties sont toutes perdues. Comme attendu, cette stratégie n'est compatible avec aucune des stratégies que nous avons décrites précédemment.

Ce sont 5 sujets différents qui mettent en œuvre au moins une fois une stratégie *Ilots* :

- Les sujets 8 et 16 mettent en œuvre cette stratégie lors de leurs deux essais.
- Les sujets 25 et 42 la mettent en œuvre sur leur premier essai et l'abandonnent lors de leur second essai.
- Le sujet 5 met en œuvre une stratégie *Ilots* lors de son second essai. Au premier essai, il met en œuvre une stratégie sur laquelle nous allons revenir.

2.5.5.2 La stratégie *Contours*

Cette stratégie, décrite par Briand (1999), consiste à énumérer la collection en la parcourant à partir des bords de la feuille, ce qui conduit à réaliser une ligne circulaire dont le rayon de courbure diminue jusqu'à parvenir au dernier élément de la collection, désigné centre. Cette stratégie, nommée escargot (1999, p. 311), sera nommée stratégie *Contours* dans la suite de cette thèse.

Le schéma suivant présente ce que pourrait être la mise en œuvre d'une telle stratégie sur le support A.

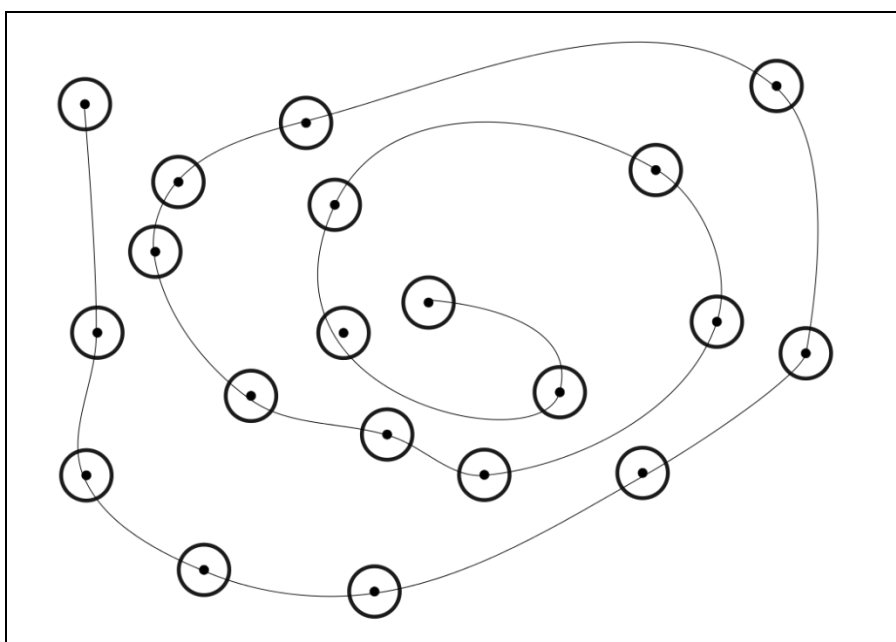


Figure 129 : une stratégie *Contours* - feuille A

Nous n'avions pas imaginé qu'une telle stratégie pouvait surgir, du fait du contexte matériel de notre situation. Sans recours possible à l'écrit, le contrôle à chaque instant de l'ensemble des chapeaux traités et non traités est difficile.

Pour autant, il est possible de concevoir qu'une telle stratégie puisse être mise en œuvre, et même de manière gagnante. Une condition pour que cela puisse se produire est qu'il y ait peu d'éléments à l'intérieur de la première spirale, condition que peut remplir le support C.

Effectivement, c'est bien sur le support C que nous avons observé cette stratégie.

Examinons ce qu'a fait le sujet 32 dans lors de son deuxième essai.

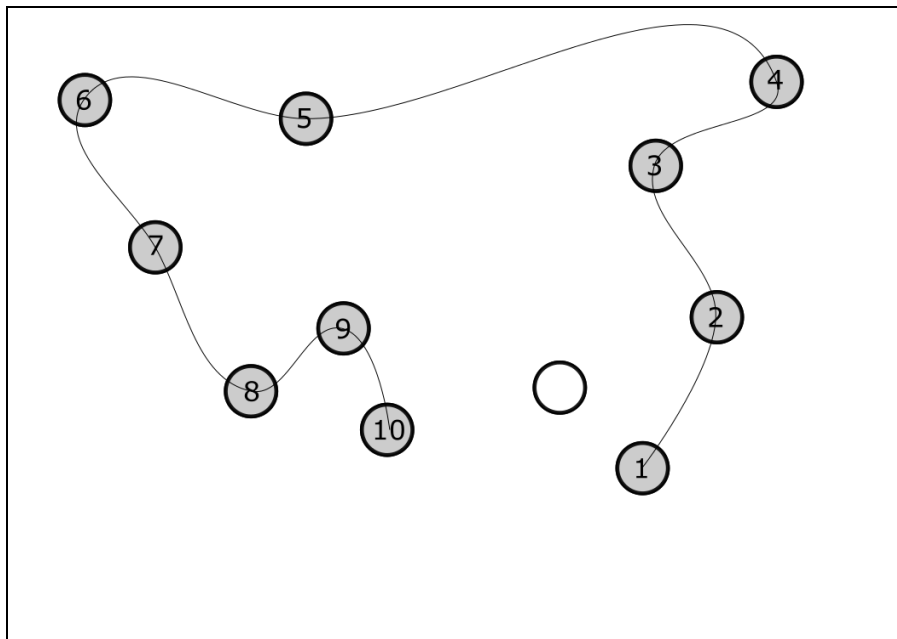


Figure 130 : Stratégie Contours (feuille C, sujet 32, essai 2)

Sa stratégie consiste bien à suivre le contour de la feuille pour former cette ligne évoquée précédemment. Il ne réussit pas car il oublie de traiter un élément. Il n'a pas su où terminer sa ligne car il n'a pas mémorisé où il l'avait commencée.

Dans cette partie, l'absence de mémorisation du point de départ conduit le sujet à oublier de traiter un élément.

Examinons ce qui se passe dans une nouvelle partie.

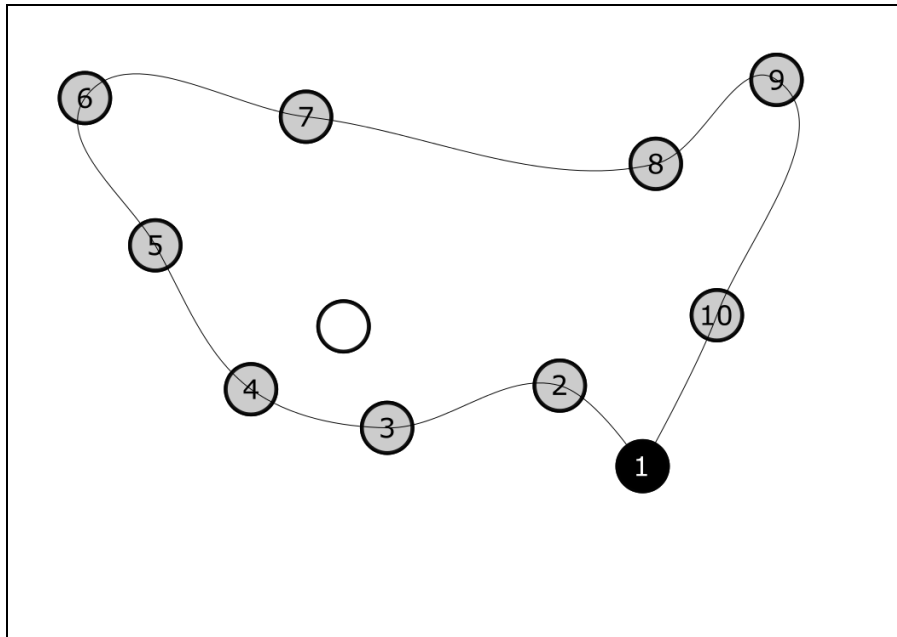


Tableau 28 : Stratégie Contours (feuille C, sujet 42, essai 2)

Dans cette partie, l'absence de mémorisation du point de départ conduit le sujet à le traiter deux fois. Notons que le rond à l'intérieur n'avait pas été traité, ce qui valide la présence de notre modèle pour cette partie.

Dans les deux cas, c'est bien cette absence de mémorisation de l'origine qui est la cause de l'échec.

Nous avons pensé dans un premier temps que cette stratégie était incompatible avec la stratégie *Partition*, que le contour ne pouvait être que le contour du support matériel sur lequel sont posés les chapeaux. Cette hypothèse n'est pas validée. Pour cela, examinons la partie suivante.

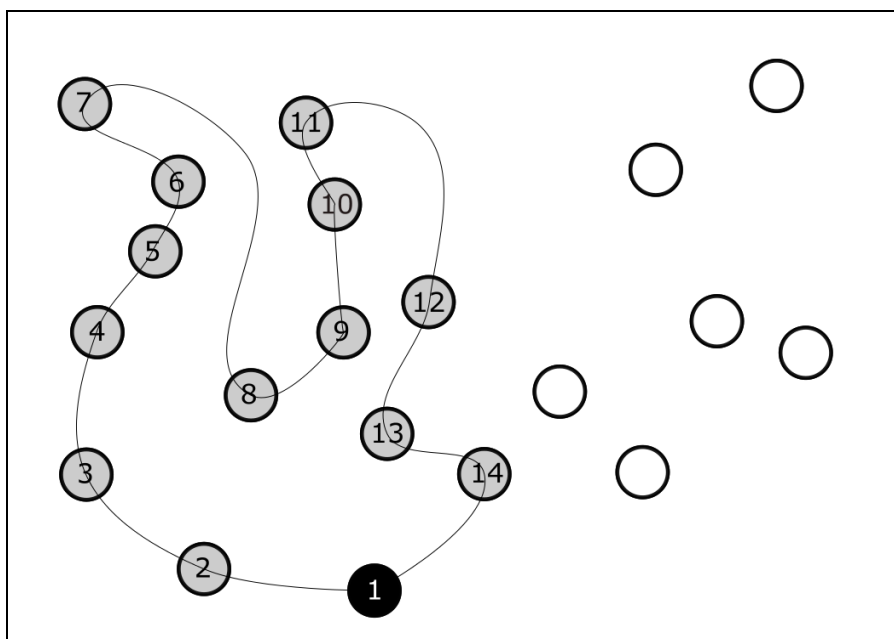


Tableau 29 : Stratégie Contours (feuille A, sujet 11, essai 2)

Dans cette partie, le sujet a mis en œuvre la stratégie *Contours* sur le sous-ensemble le plus important. Ce qui nous conforte dans la présence de cette stratégie est la nature de l'erreur commise par le sujet, que nous interprétons comme vu précédemment, à savoir l'absence de mémorisation de l'origine de la ligne qui conduit, dans ce cas, à un double traitement de cet élément.

Nous observons quatre occurrences de cette stratégie.

Partie	Sujet	Feuille	Essai	Réussite	Ilots	Contours
18	11	A	2	0	0	1
55	32	C	1	0	0	1
56	32	C	2	0	0	1
74	42	C	2	0	0	1

Tableau 30 : Extraction des parties dans lesquelles sont mises en œuvre la stratégie *Contours*

Comme attendu, aucune de ces parties ne conduit à une réussite. Par ailleurs, cette stratégie est incompatible avec la stratégie *Ilots*.

Nous sommes capables de décrire en termes de stratégie le processus mis en œuvre par certains sujets qui conduit à un échec probable. Le moteur du développement de notre modélisation s'est appuyé sur l'étude des processus mis en œuvre par les sujets qui réussissent. L'analyse détaillée des échecs fait apparaître des aspects nouveaux que la seule étude des réussites n'aurait pas permis de produire.

Nous décidons donc de poursuivre dans cette direction.

2.5.6 Quels sont les ronds qui sont oubliés ou traités deux fois ?

Nous nous demandons si certains ronds ne sont pas oubliés ou traités deux fois de manière massive par rapport aux autres. Nous avons déjà produit une description de la position et des occurrences des ronds oubliés ou traités deux fois. A ce stade, nous décidons de cumuler sur la même représentation ces deux caractéristiques. Nous obtenons donc ainsi une description pour chacun des trois supports.

2.5.6.1 Cumul des ronds oubliés ou traités deux fois

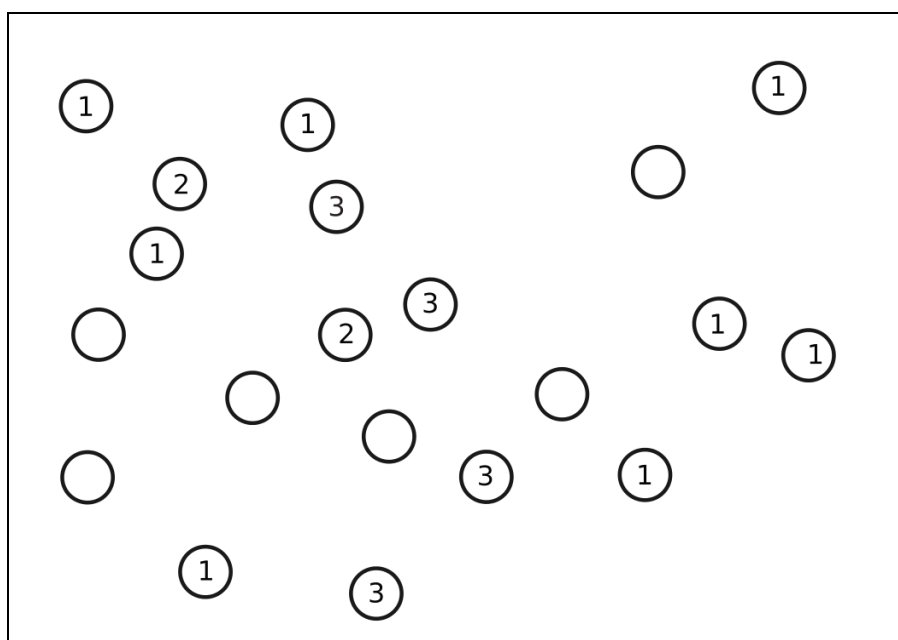


Figure 131 : Ronds oubliés ou traités deux fois - feuille A

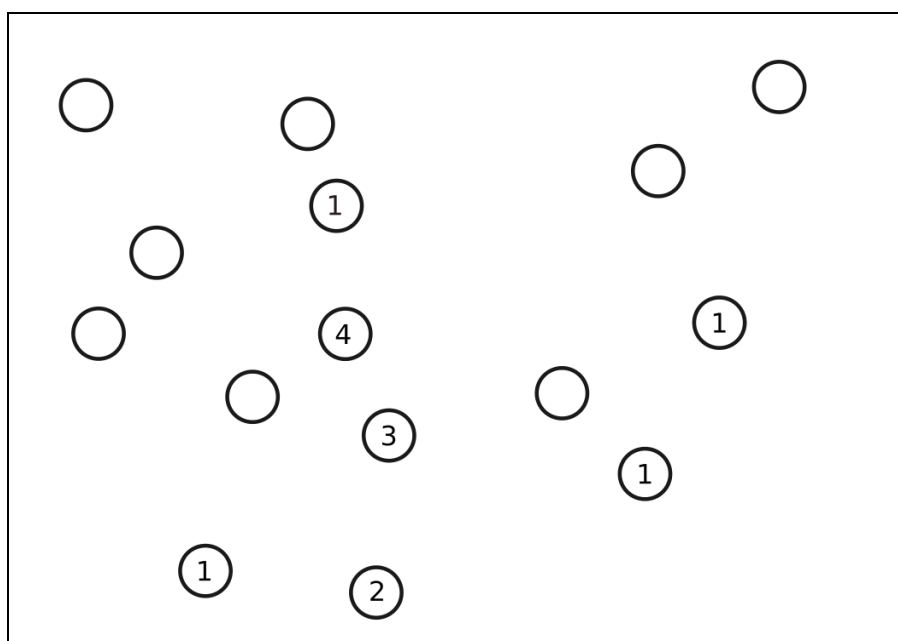


Figure 132 : Ronds oubliés ou traités deux fois - feuille B

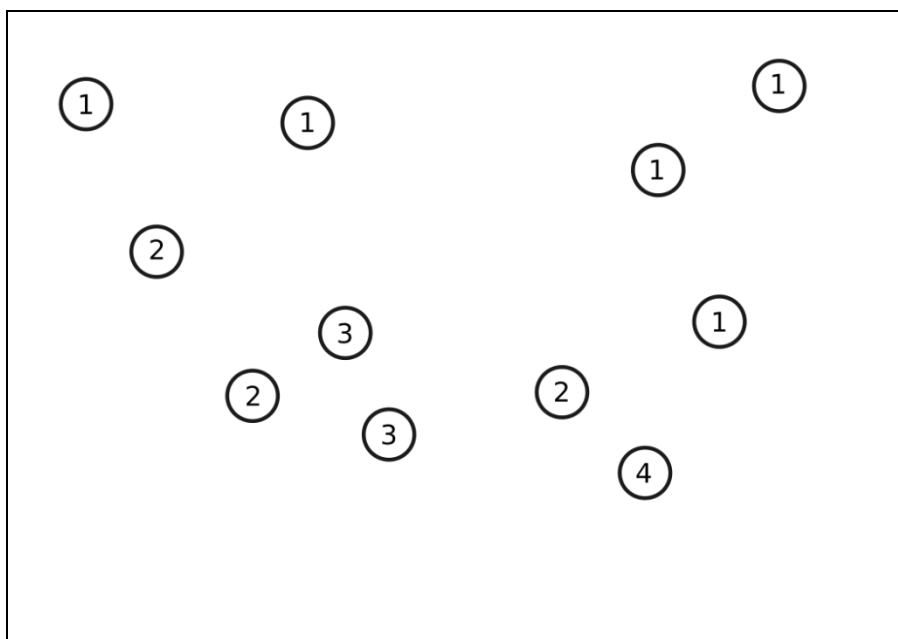


Figure 133 : Ronds oubliés ou traités deux fois - feuille C

Maintenant que nous avons repéré la position et les occurrences de ces ronds problématiques, nous allons chercher à comprendre les raisons du caractère problématique de ces ronds.

2.5.6.2 La proximité par rapport au sujet

Parmi les ronds qui ont posé problème, certains occupent une place particulière par rapport à la position qu'occupe le sujet lors du traitement. Ils font partie des ronds qui sont les plus proches du sujet.

Cette idée est née du repérage dans les vidéos de la variété des attitudes corporelles des sujets face à la collection.

Pour représenter ce phénomène, nous construisons une suite d'ellipses dont les centres se trouvent sur la position du sujet lors du traitement.

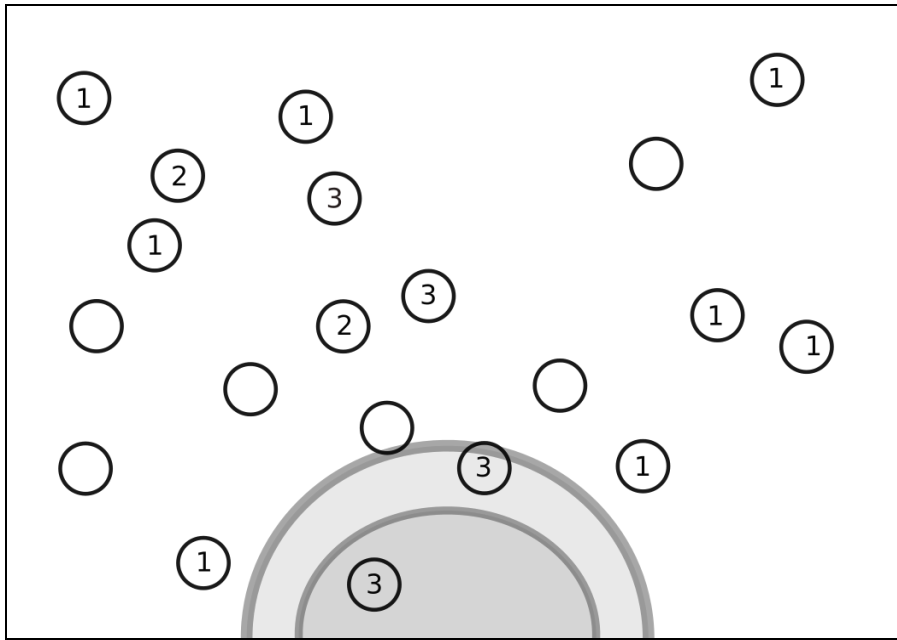


Figure 134 : Ronds oubliés ou traités deux fois et proximité - feuille A

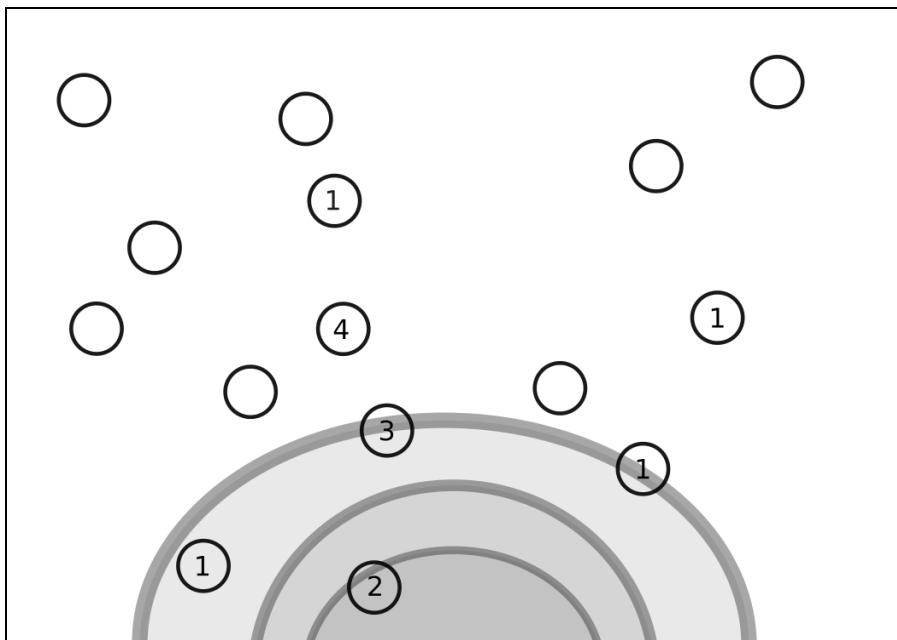


Figure 135 : Ronds oubliés ou traités deux fois et proximité - feuille B

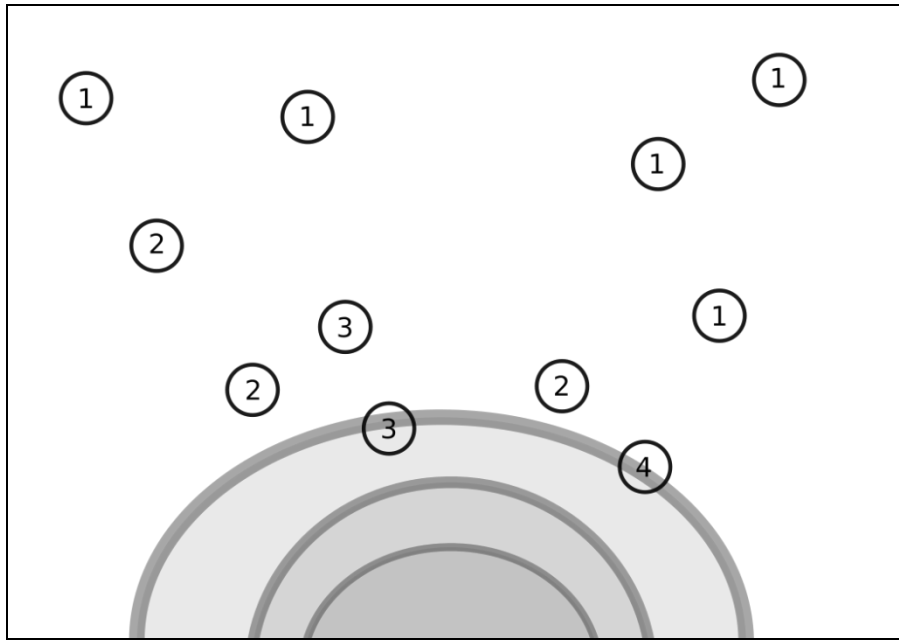


Figure 136 : Ronds oubliés ou traités deux fois et proximité - feuille C

Cette modélisation produit des résultats variables en fonction des supports.

Elle ne produit pas d'explication raisonnable sur un certain nombre de ronds problématiques pour la feuille A, et dans une moindre mesure pour la feuille B. Les ellipses ont été construites pour inclure des ronds problématiques. Pour autant, elles n'incluent pas la totalité des ronds les plus problématiques pour ces deux supports.

La modélisation semble mieux fonctionner pour le support C. Elle permet d'inclure la plus grande partie des ronds problématiques. Pour ce support, la proximité du rond de la position initiale du sujet semble être un indicateur quant à l'éventualité que le rond pose problème. En tout cas, et contrairement à ce qu'une analyse *a priori* sur le sujet aurait pu produire, les ronds les plus proches ne sont pas ceux qui sont traités avec le plus de réussite. Cette hypothèse nous semble compatible avec des caractéristiques physiques spécifiques des sujets qui ont été confrontés à la feuille A. Nous reviendrons sur cet aspect dans le chapitre 4.

Devant les limites du modèle construit, nous poursuivons notre étude en nous intéressant de manière spécifique à la feuille A.

2.5.6.3 Aux frontières des partitions spontanées

Comme décrit dans l'analyse *a priori*, nous retrouvons le fait que le rond qui peut être considéré comme à la frontière de deux partitions spontanées peut s'avérer problématique.

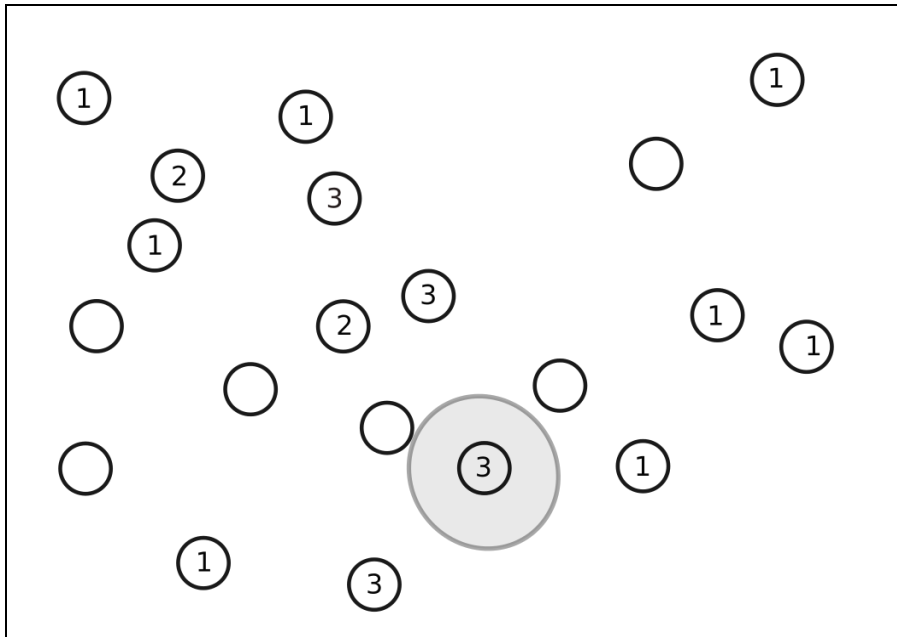


Figure 137 : Ronds oubliés ou traités deux fois, un rond déjà identifié - feuille A

La configuration définie dans le support A se prête plus facilement que les deux autres supports à cette possibilité. Le rond que nous venons d'identifier faisait déjà partie des deux ronds les plus proches du sujet et constituait donc déjà à ce titre un rond qui pouvait s'avérer problématique. L'hypothèse que nous venons de produire renforce encore le caractère problématique de ce rond.

Cette étude permet de mettre en évidence que ce rond n'est pas le seul présent aux frontières de la partition spontanée.

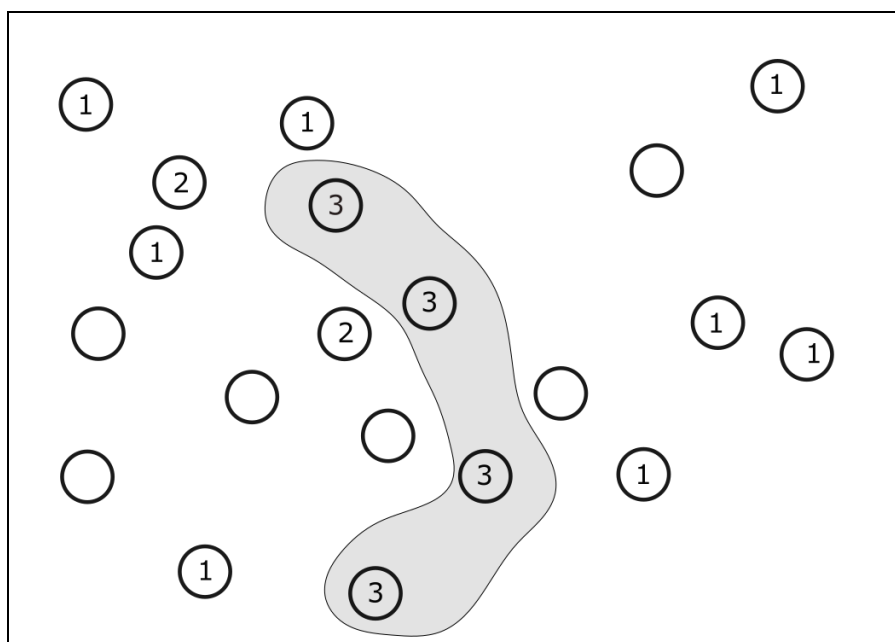


Figure 138: Ronds oubliés ou traités deux fois et frontière de partitions - feuille A

Cet appui sur le repérage de la frontière de la partition spontanée fonctionne en partie aussi sur le support B.

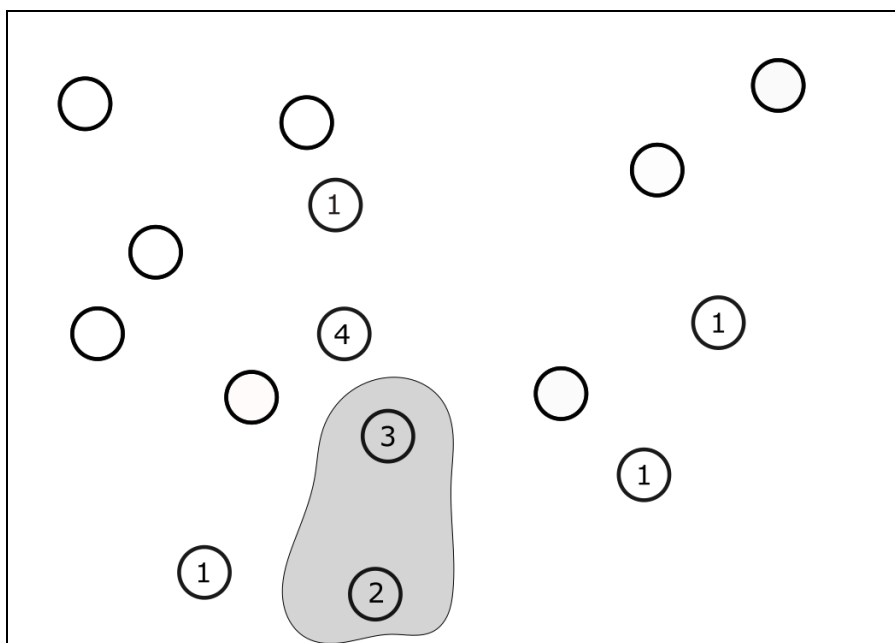


Figure 139 : Ronds oubliés ou traités deux fois et frontière de partitions - feuille B

Certains des ronds les plus problématiques apparaissent comme appartenant à la frontière de la partition spontanée qui peut être construite de la collection.

Nous venons de montrer que les points situés sur la frontière de la partition spontanée sont problématiques lors de l'énumération.

Poursuivons notre étude des régions qui restent problématiques et que les modèles précédents n'ont pas pris en charge.

2.5.6.4 D'autres régions problématiques

Nous identifions deux autres régions dans lesquelles les occurrences d'erreur sont importantes, une dans la feuille A et une autre dans la feuille B.

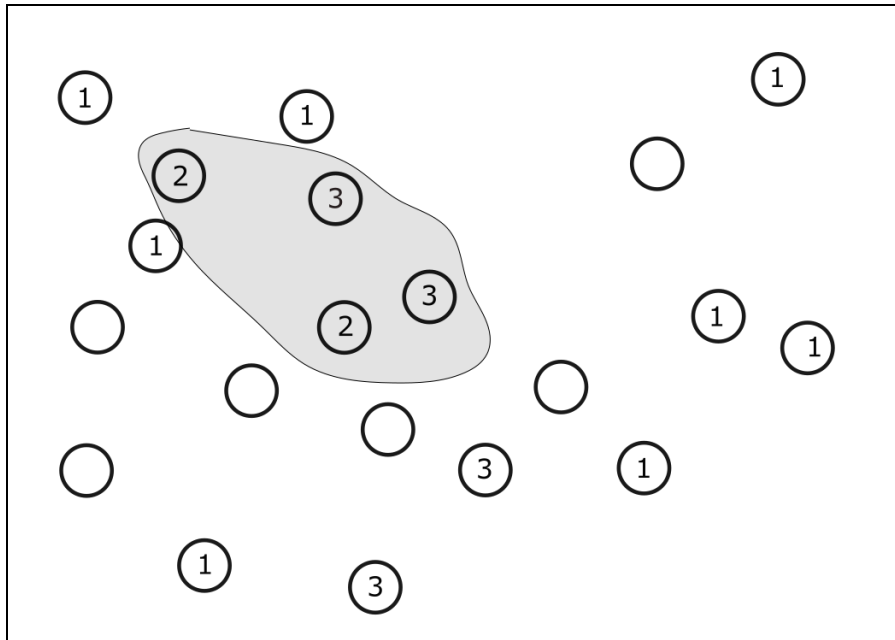


Figure 140 : Autre région à rond problématique - feuille A

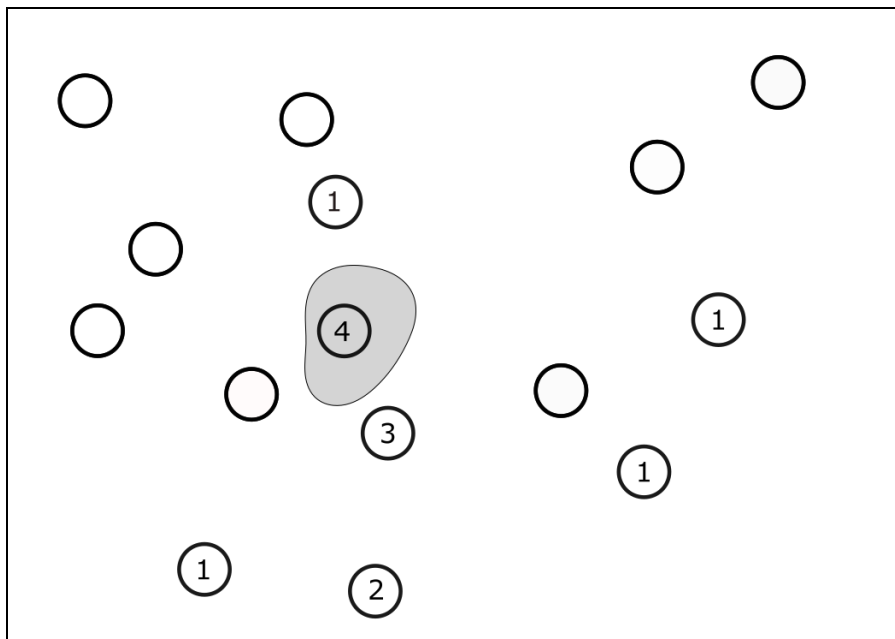


Figure 141 : Autre région à rond problématique- feuille B

Pourquoi ces ronds sont-ils source d'erreurs plus que d'autres ? Pour essayer de répondre à cette question, nous allons être conduits à décrire une nouvelle stratégie.

2.5.7 La stratégie *Obliques*

Le visionnage des vidéos met en évidence le fait que certains sujets semblent développer des appuis sur des régularités spatiales qui ne relèvent ni de l'horizontalité, ni de la verticalité. Observons l'organisation qui est mise en œuvre par le sujet 3 dans son premier essai.

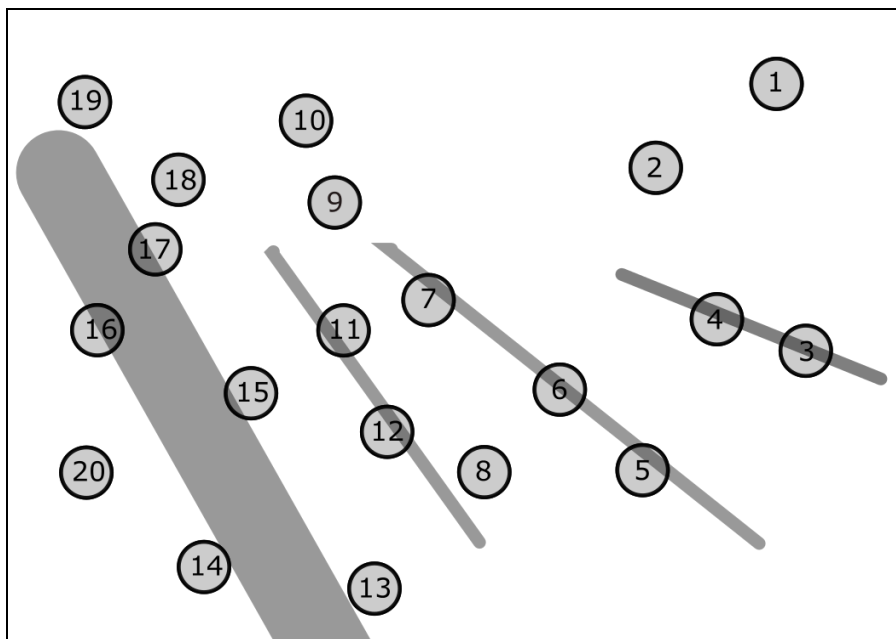


Figure 142 : Stratégie Obliques (feuille A, sujet 3, essai 1)

Cet essai peut s'analyser comme des morceaux de courbes que nous assimilons à des portions rectilignes. Ces portions ne prennent appui sur aucune des deux directions qui nous ont servies à définir les stratégies *Lignes* et *Colonnes*. Nous retrouvons bien ici l'idée fondamentale de construire des séries de droites parallèles pour partitionner la collection et contrôler ainsi l'énumération.

Les éléments qui servent à la construction de ces séries de parallèles peuvent être plus ou moins épais comme l'ont montré les modélisations des stratégies *Lignes* et *Colonnes* et comme le confirme la transcription de la partie suivante.

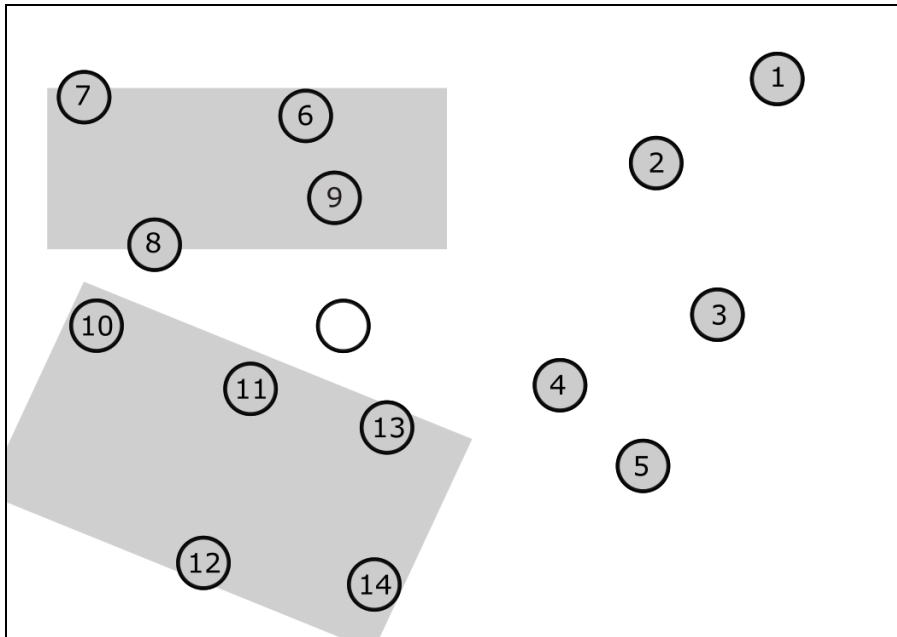


Figure 143: Stratégie Obliques (Feuille B, sujet 24, essai 1)

La mise en œuvre de cette stratégie n'est pas une garantie de réussite. En effet, nous observons dans cet essai qu'un sucre a été oublié. Ce sucre est bien associé à un des triplets que nous avons identifiés comme problématiques.

Observons une nouvelle occurrence de cette stratégie.

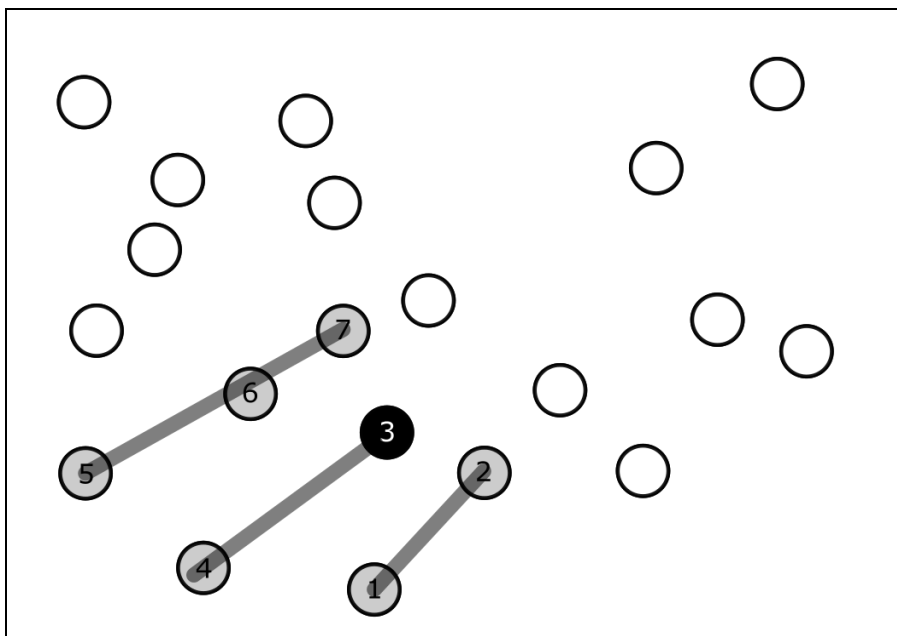


Tableau 31 : Stratégie Obliques (feuille A, sujet 10, essai 1)

Dans cette partie, nous pouvons considérer que la stratégie *Obliques* est bien mise en œuvre même si les limites du modèle semblent ici atteintes. Ce qui nous intéresse ici tient à la

présence d'un des triplets identifiés comme problématiques, avec cette fois-ci un rond qui est traité deux fois.

Cette nouvelle stratégie est de nature différente par rapport aux stratégies *Ilots* et *Contours*. Sa mise en œuvre doit pouvoir conduire à des réussites puisque c'est une autre manière de contrôler l'énumération en partitionnant la collection par des lignes parallèles. Les stratégies *Ilots* et *Contours* peuvent marginalement conduire à des réussites, mais cela relèvera plutôt du hasard. Avec la stratégie *Obliques*, l'échec va provenir de la perte de contrôle de la mise en œuvre de la stratégie avec un non-respect du parallélisme des partitions ainsi construites.

Cette étude fait émerger une stratégie complémentaire des stratégies que nous avons imaginées : la stratégie *Obliques*. Les directions choisies par les sujets peuvent ne pas être celles que nous avons décrites de l'analyse *a priori*. Cette stratégie apparaît comme une variation des stratégies *Lignes* et *Colonnes*, variation obtenue par un changement de la direction de référence.

Nous avons identifié cette stratégie auprès de sujets confrontés aux supports A et B. Le nombre de points présents sur ces supports rendait possible l'observation de l'apparition d'une telle stratégie. Le nombre de points est trop peu élevé avec le support C pour que l'on puisse considérer que se constitue un faisceau de droites parallèles. Dans ces conditions il devient difficile pour l'observateur de décrire le traitement des points en ces termes.

On peut considérer finalement les stratégies *Lignes* et *Colonnes* comme des variations d'une stratégie plus globale, la stratégie *Faisceaux de parallèles*, dont la stratégie *Obliques* apparaît, elle aussi, comme une de ses occurrences.

Nous pouvons donc maintenant produire une hypothèse pour expliquer des raisons pour lesquelles des sujets ont pu oublier ou traiter deux fois des ronds dans la région considérée. Dans son essai 1, le sujet 24 a modifié pendant le traitement la direction du faisceau de parallèles sur lequel il s'appuyait pour contrôler l'énumération. Il y a donc deux faisceaux de parallèles qui cohabitent lors de l'énumération de la collection. Ce sont les points à l'intersection de ces deux directions qui posent problèmes. Dans le cas du sujet 24, le point oublié apparaît comme un point aveugle de la structuration qui a été mis en œuvre.

La région problématique que nous sommes en train d'étudier est une région où la densité des points est importante. Cette densité renforce la nécessité de mettre en place un contrôle de l'énumération. C'est une région où la mise en œuvre d'une stratégie *Faisceau de parallèles* apparaît le plus nécessaire. Mais la disposition proposée peut inciter à modifier la direction

d'appui du faisceau de parallèles, car les points ne sont pas disposés selon les directions horizontales et verticales. Cela génère la possibilité de points aveugles ou de points traités deux fois. La densité de points problématiques dans cette région s'explique par l'absence de contrôle dans les changements de direction dans la mise en œuvre de la stratégie *Faisceaux de parallèles*.

Nous venons donc de constituer une stratégie générique qui permet de décrire très globalement l'action réalisée par un sujet, indépendamment de la direction particulière choisie par ce sujet pour réaliser l'énumération d'une collection d'objets non déplaçables.

Munis de cette analyse complémentaire sur les stratégies, nous pouvons revenir à l'étude des réussites.

Reprenons nos données concernant la réussite en intégrant cette stratégie générique *Faisceau de parallèles* que nous venons de définir.

2.5.8 Une nouvelle structuration des stratégies

2.5.8.1 Elaboration de la nouvelle structuration des stratégies

A ce titre, la stratégie *Partition* peut aussi être considérée comme une stratégie générique, même si les occurrences que nous avons observées le font peu apparaître. En effet, les supports que nous avons proposés conduisent à partitionner de manière triviale la collection en deux collections distinctes. Mais nous savons par ailleurs que les sujets mettent parfois en œuvre des stratégies plus raffinées. Les observations de Briand (1993, p. 314) ont bien mis en évidence des mécanismes de partitionnement beaucoup plus élaborés que ceux que nous décrivons ici.

Nous avons cherché à distinguer par la dénomination la stratégie générique de ses instances. Ceci nous a amené à parler de stratégies *Lignes*, *Colonnes* et *Obliques*, toutes les trois instances d'une stratégie générique *Faisceaux de parallèles*. Nous pourrions faire la même chose avec la question du partitionnement. La stratégie générique pourrait être nommée *Partition*. Il conviendrait alors de nommer l'instance que nous avons choisi d'observer stratégie *Partition en deux*.

A ce stade de notre analyse des stratégies observées lors des réussites, nous pouvons donc considérer deux stratégies génériques : la stratégie *Faisceaux de parallèles* et la stratégie *Partition*.

2.5.8.2 Questions, résultats et analyse

Nous pouvons maintenant reformuler des questions que nous avons déjà posées en intégrant la nouvelle structuration des stratégies.

Quelles sont les stratégies mises en œuvre dans les parties lors des réussites ?

Reprenons nos données en classant les stratégies dans la nouvelle organisation proposée, à savoir des stratégies génériques. Nous avons un troisième ensemble qui est constitué des instances des stratégies que nous avons identifiées dans l'analyse des mises en œuvre qui nous avaient surpris. Nous nommons ce troisième ensemble *Autres* (stratégies *Ilots* et *Contours*).

Nous sommes maintenant capables de savoir quelles sont les stratégies qui sont mises en œuvre lors des différentes parties. Nous commençons par étudier les occurrences des différentes stratégies dans les parties réussies.

Support		Réussite à la partie	Stratégie Partition	Stratégie Faisceaux de parallèles	Stratégie Autres
Feuille A	Effectif	10	3	10	0
	Pourcentage	100%	30%	100%	0%
Feuille B	Effectif	6	6	6	0
	Pourcentage	100%	100%	100%	0%
Feuille C	Effectif	9	7	9	0
	Pourcentage	100%	78%	78%	0%

Tableau 32: occurrences des stratégies génériques utilisées lors des essais réussis

Que retenons-nous de cette analyse des stratégies gagnantes ?

Compte tenu des difficultés à modéliser la stratégie *Faisceau de Parallèles* dans le cas de la feuille C, nous commençons par exclure de notre analyse les parties qui concernent ce support.

Cette nouvelle présentation de nos résultats fait apparaître que les sujets qui réussissent ont mis en œuvre une stratégie qui repose sur la fabrication de faisceaux de parallèles. C'est une

condition expérimentalement nécessaire pour réussir. L'analyse *a posteriori* montre qu'il n'y a pas de réussite à cette situation sans la mise en œuvre de cette stratégie. Les sujets qui ne mettent pas en œuvre cette stratégie échouent.

Certains procédures adjoignent à la mise en œuvre de cette stratégie un partitionnement de la collection. Ces sujets sont nombreux parmi ceux qui sont confrontés aux supports B et moins nombreux parmi ceux confrontés au support A. Nous retrouvons ici des éléments d'analyse déjà produits sur l'influence du support sur la perception d'une possibilité de partitionner.

Nous n'observons que les deux stratégies génériques lors des réussites. Nous n'observons pas de réussite quand les stratégies *Ilots* et *Contours* sont mises en œuvre dans la situation des sucres.

Revenons maintenant sur les parties réussies ayant pour support la feuille C. Examinons un peu plus en détail les 9 réussites.

<i>Partie</i>	<i>Sujet</i>	<i>Feuille</i>	<i>Niveau</i>	<i>Réussite à la partie</i>	<i>Stratégie Partition</i>	<i>Stratégie Faisceaux de parallèles</i>	<i>Stratégie Autres</i>
50	28	C	Mat	1	1	0	0
51	29	C	Mat	1	1	0	0
52	30	C	Mat	1	1	1	0
58	33	C	Mat	1	1	1	0
60	34	C	Mat	1	1	1	0
62	35	C	Mat	1	0	1	0
69	39	C	Mat	1	1	1	0
70	40	C	Mat	1	1	1	0
76	43	C	Mat	1	0	1	0

Tableau 33 : Stratégies mises en œuvre lors des réussites (support C)

Nous observons que 4 sujets sur les 9 qui réussissent ne mettent pas en œuvre de manière simultanée les stratégies *Faisceaux de parallèles* et *Partition*. Ces 4 sujets mettent en œuvre l'une au moins de ces stratégies.

Examinons comment ont procédé les deux sujets qui ont mis en œuvre une stratégie *Partition* sans mettre en œuvre de stratégie *Faisceaux de parallèles* (leurs deux solutions sont identiques).

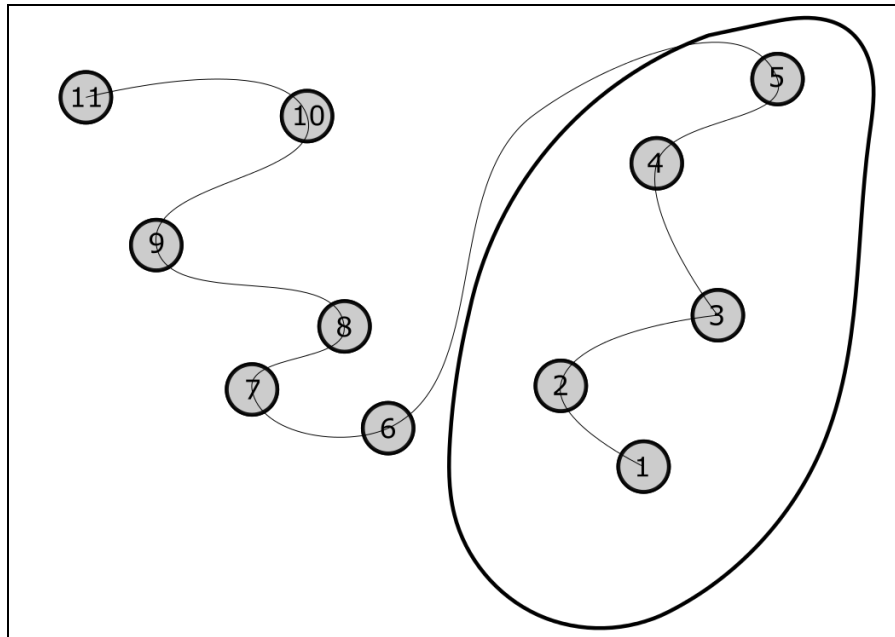


Figure 144 : Mise en évidence de la stratégie Partition (feuille C, sujet 28, essai 1)

C'est bien une stratégie *Partition* que le sujet met en œuvre.

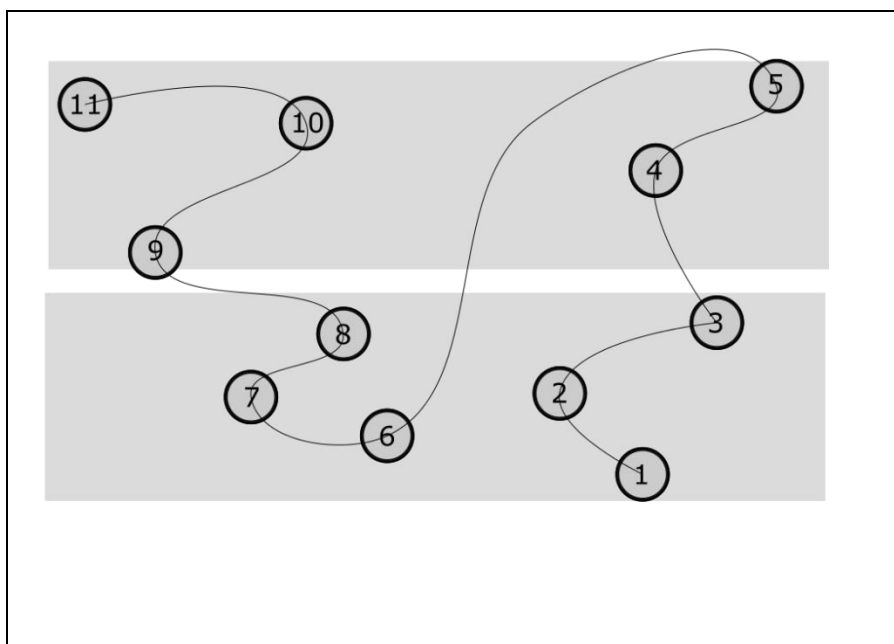


Figure 145 : Mise en évidence de l'absence de la stratégie Lignes (feuille C, sujet 28, essai 1)

Nous observons que le modèle de la stratégie *Lignes* aboutit à la construction d'un code « 03 » pour l'essai 1 du sujet 28. Le modèle de stratégies *Lignes* n'est pas mis en évidence, ni aucun des autres modèles de la stratégie générique *Faisceaux de parallèles*. La seule mise en œuvre de la stratégie *Partition* permet à ce sujet de réussir.

Examinons comment a procédé un des deux sujets qui ont mis en œuvre une stratégie *Faisceaux de parallèles* sans mettre en œuvre la stratégie *Partition*.

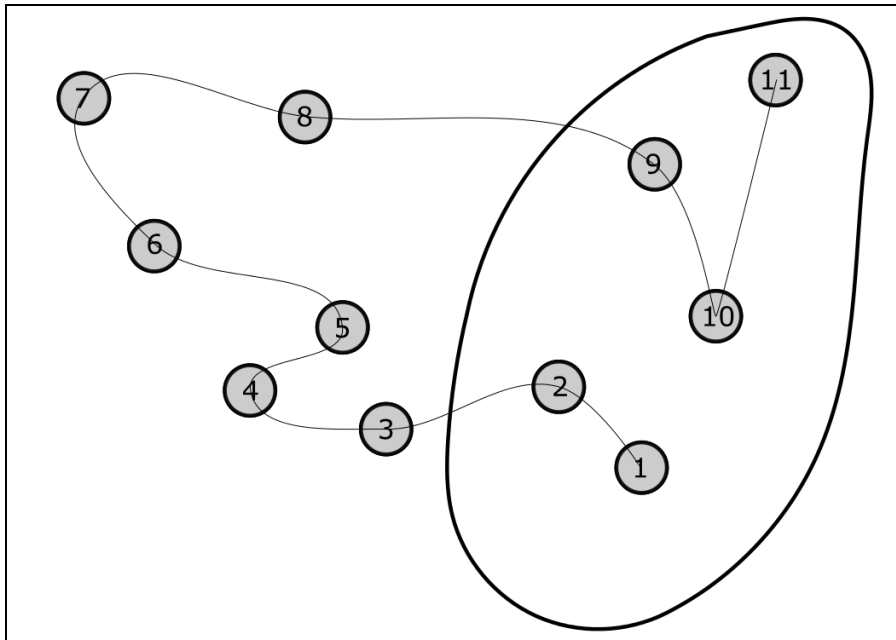


Figure 146 : Mise en évidence de l'absence de la stratégie Partition (feuille C, sujet 35, essai 2)

La figure ci-dessus montre que le modèle de la stratégie *Partition* n'est pas présent dans la mise en œuvre du sujet.

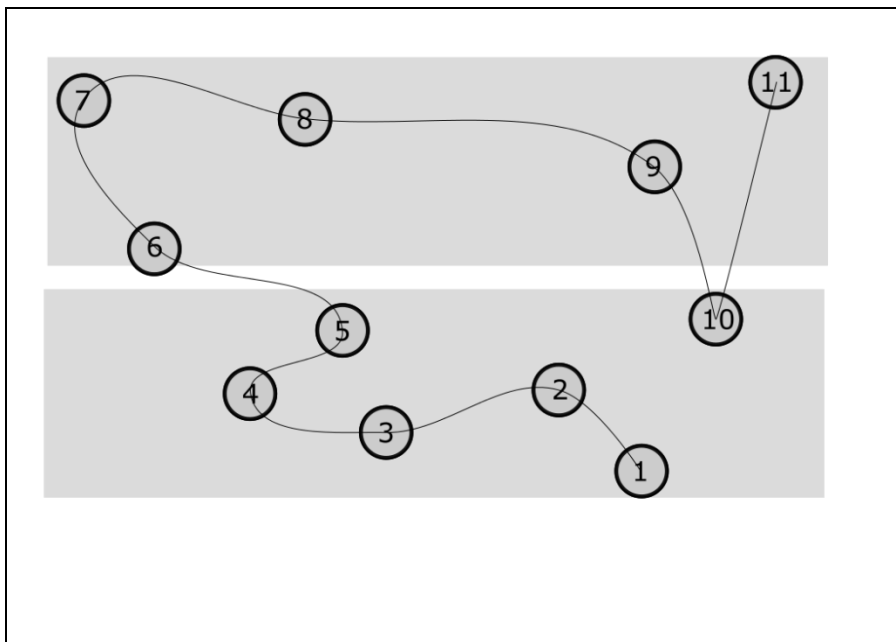


Figure 147 : Mise en évidence de la stratégie Lignes (feuille C, sujet 35, essai 2)

Nous observons par contre que ce sujet met en œuvre une stratégie *Lignes*, que les lignes qui sont constituées s'affranchissent de la partition « naturelle » que nous avons imaginée dans notre analyse *a priori*. Nous avons ici un exemple de mise en œuvre sur le support C d'une stratégie *Lignes* à l'échelle du support entier.

Notre hypothèse de vouloir appliquer le même calque, la même partition aux trois supports était vraisemblablement trop forte et ne prenait pas suffisamment en compte les caractéristiques spatiales des trois supports.

L'étude de ces deux cas montre que notre modélisation atteint ses limites dans le cadre du support C. Pour autant, cela n'invalide l'organisation en familles de stratégies que nous avons produite.

Examinons une autre hypothèse sur la nature de la procédure. Pour cela, faisons faire à notre transcription une rotation de 90° à droite.

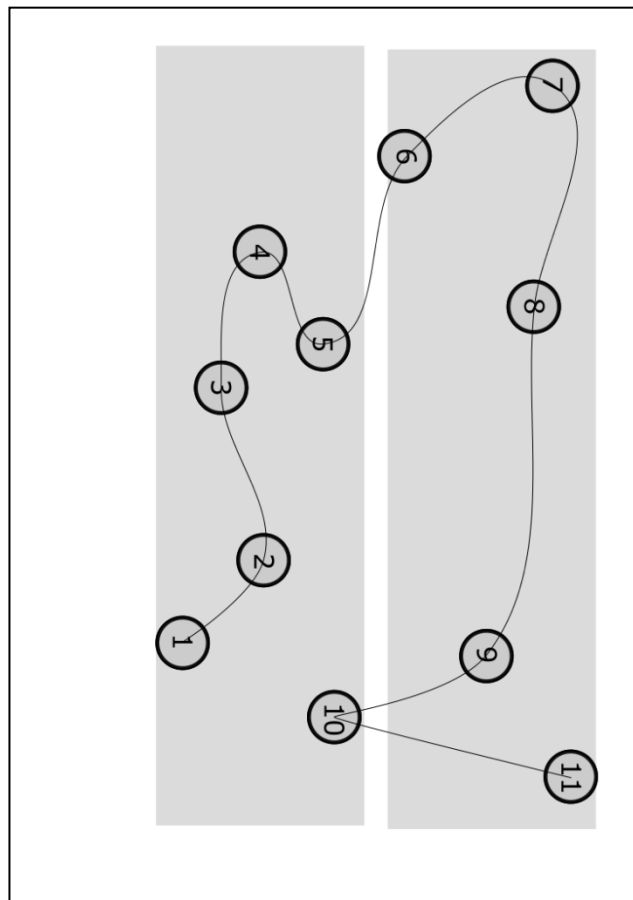


Figure 148 : Rotation de 90° de la transcription (feuille C, sujet 35, essai 2)

La rotation permet de percevoir une caractéristique que nous avons déjà évoquée quand nous avons décrit la construction de la stratégie *Lignes* (Figure 111 : Transcription sous forme de chemin numéroté (feuille A, sujet 6, essai 1)).

Cela permet de considérer la stratégie *Partition en deux*, instance de la stratégie générique *Partition* comme un cas particulier d'une stratégie *Colonnes*.

Par ailleurs, cette étude met en évidence que l'absence de stratégie *Autres* est une condition nécessaire pour réussir. La présence de la stratégie *Ilots* ou de la stratégie *Contours* garantit l'échec à l'essai. L'absence de cette stratégie *Autres* est nécessaire, tout comme l'est la présence de l'une au moins des stratégies *Partition* et *Faisceaux de parallèles*.

Quelles sont les stratégies mises en œuvre dans les parties lors des échecs ?

Examinons maintenant les stratégies repérées lors des échecs dans les parties.

<i>Support</i>		<i>Echec à la partie</i>	<i>Stratégie Partition</i>	<i>Stratégie Faisceaux de parallèles</i>	<i>Stratégie Autres</i>
<i>Feuille A</i>	<i>Effectif</i>	22	5	13	6
	<i>Pourcentage</i>	100%	23%	59%	27%
<i>Feuille B</i>	<i>Effectif</i>	11	6	7	1
	<i>Pourcentage</i>	100%	55%	64%	9%
<i>Feuille C</i>	<i>Effectif</i>	20	8	11	4
	<i>Pourcentage</i>	100%	40%	55%	20%

Tableau 34: occurrences des stratégies génériques utilisées lors des essais non réussis

Le tableau ci-dessus permet d'observer que de nombreux sujets qui mettent en œuvre une stratégie *Partition* ou une stratégie *Faisceaux de parallèles* échouent. La mise en œuvre d'une de ces deux stratégies n'est donc pas une condition expérimentale suffisante pour réussir.

Examinons quelques essais pour confirmer cette assertion.

Nous commençons notre examen détaillé par un essai dans lequel nous avons identifié la présence de la stratégie *Faisceau de parallèles* et l'absence de la stratégie *Partition*.

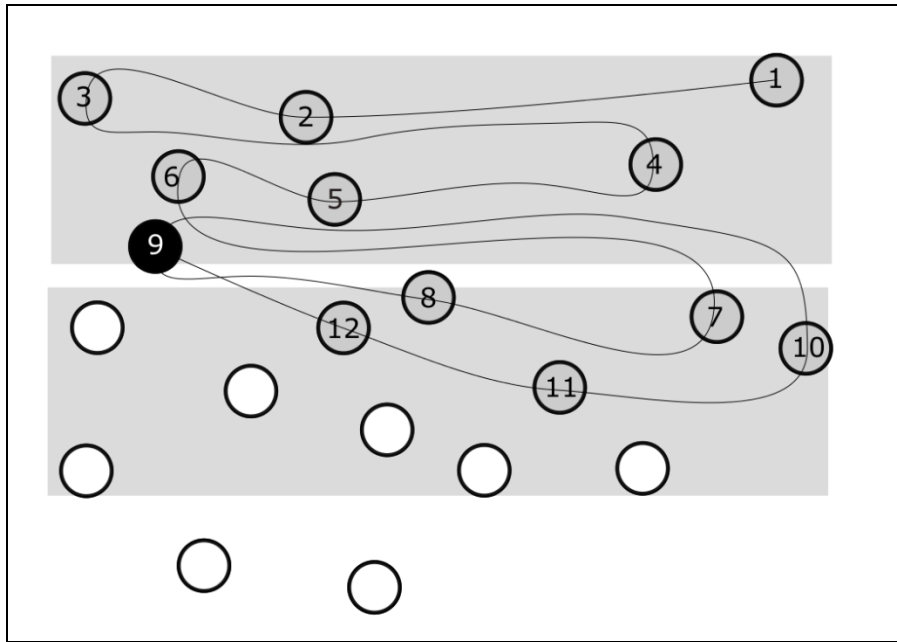


Figure 149 : Mise en évidence de la stratégie *Lignes*(feuille A, sujet 6, essai 1)

La figure ci-dessus montre que la présence de la stratégie *Lignes* ne peut garantir la réussite. En effet, l'examen de cette partie montre la mise en œuvre d'une forme peu observée de la stratégie *Lignes*, en appuyant cette stratégie sur la construction de lignes qui s'affranchissent de la partition que nous avons considérée comme première dans cette étude. Pour autant, le sujet contrôle mal le parallélisme des lignes qu'il construit, ce qui l'amène à soulever deux fois le même chapeau et interrompt ainsi sa procédure.

Nous poursuivons notre examen détaillé par un essai dans lequel nous avons identifié cette fois-ci l'absence de la stratégie *Faisceau de parallèles* et la présence de la stratégie *Partition*.

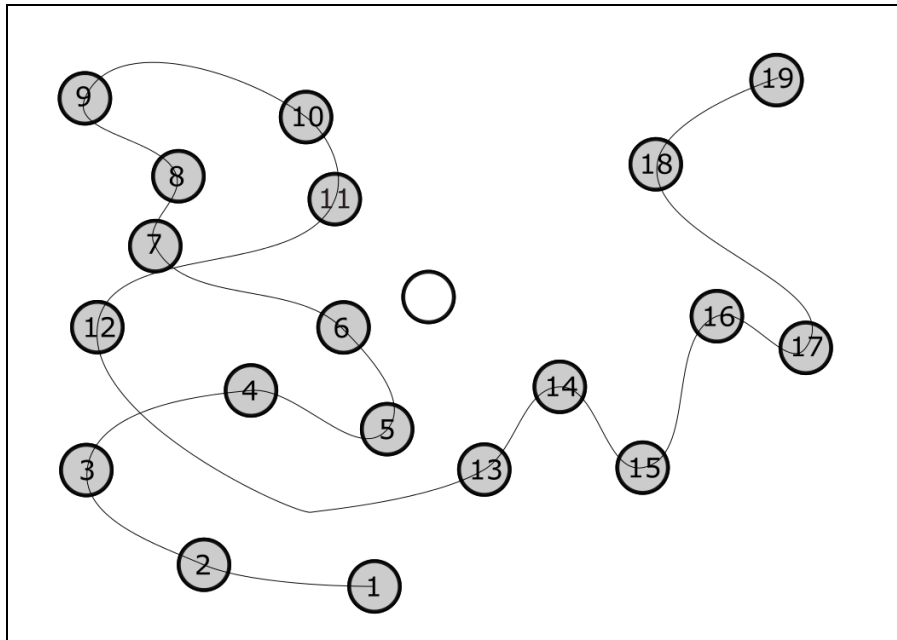


Figure 150 : Mise en évidence de la stratégie *Partition* (feuille A, sujet 18, essai 1)

La figure ci-dessus nous permet d'observer une procédure pour laquelle s'applique le modèle de stratégie *Partition* que nous avons élaboré (puisque les 7 derniers éléments constituant un des deux sous-ensembles de la collection sont traités consécutivement). Si la présence de cette stratégie est un indicateur de la manière dont est traité un des deux sous-ensembles, elle ne dit rien du traitement du second sous-ensemble.

Par ailleurs,, nous avons ici une instance de la difficulté à intégrer à la partition les points frontières.

Nous terminons cette étude avec l'examen détaillé d'un essai dans lequel nous avons identifié la présence des stratégies *Faisceau de parallèles* et *Partition*.

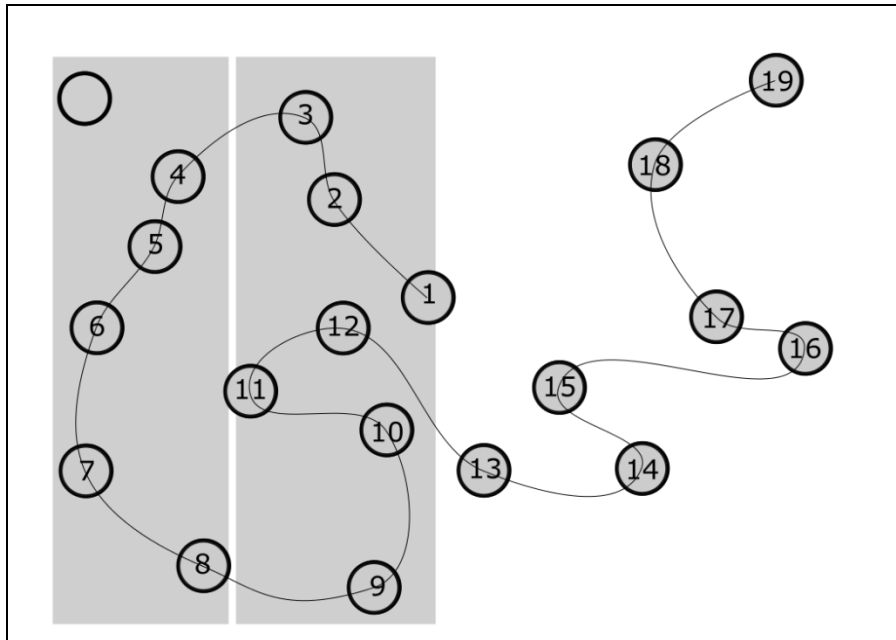


Figure 151 : Mise en évidence de la stratégie Colonnes (feuille A, sujet 1, essai 1)

Le code « 54 » a été produit pour cette partie, ce qui permet de lui affecter notre modèle de stratégie *Colonnes*. Par ailleurs, les sept éléments du sous-ensemble de la partie droite de la collection sont traités consécutivement, ce qui permet de lui affecter aussi le modèle de la stratégie *Partition*.

L'application de ces deux modèles de stratégie à cette partie ne garantit pour autant pas la réussite à l'essai.

L'analyse *a posteriori* des données est donc un outil de construction de modèles. Ces modèles de stratégies agissent comme des indicateurs de la manière dont le sujet s'organise pour construire l'énumération de la collection.

2.5.9 Etude des changements de stratégie entre deux essais

Nous connaissons les stratégies mises en œuvre par les sujets à chaque essai. Nous nous demandons maintenant si les sujets qui réussissent au second essai le font suite à une modification de la stratégie mise en œuvre lors du premier essai.

2.5.9.1 Etude des stratégies mises en œuvre par les élèves qui réussissent au second essai

Nous allons nous intéresser aux stratégies qui sont mises en œuvre par les sujets qui réussissent à la situation sans pour autant réussir au premier essai. Nous nous intéressons donc de fait à des sujets qui ont échoué à leur premier essai et qui ont réussi leur second essai en mettant en œuvre une stratégie *Faisceaux de parallèles*.

Le tableau suivant présente les données brutes des stratégies mises en œuvre par les sujets qui réussissent la tâche au second essai, après avoir échoué au premier essai.

		<i>Premier essai</i> (échec)			<i>Second essai</i> (réussite)		
<i>Sujet</i>	<i>Feuille</i>	<i>Partition</i>	<i>Faisceaux de parallèles</i>	<i>Autres</i>	<i>Partition</i>	<i>Faisceaux de parallèles</i>	<i>Autres</i>
2	A	1	1	0	1	1	0
6	A	0	1	0	0	1	0
13	A	0	0	0	0	1	0
15	A	0	0	0	0	1	0
17	A	0	1	0	0	1	0
18	A	1	1	0	1	1	0
20	B	1	1	0	1	1	0
21	B	0	1	0	1	1	0
23	B	1	1	0	1	1	0
25	B	0	0	1	1	1	0
27	B	1	0	0	1	1	0
33	C	1	0	0	1	1	0
34	C	0	0	0	1	1	0
35	C	1	0	0	0	1	0
43	C	0	1	0	0	1	0

Tableau 35 : Données brutes des stratégies génériques (échec à l'essai 1 et réussite à l'essai 2)

Commençons par remarquer que tous les sujets qui réussissent au second essai ont mis en œuvre soit la stratégie *Faisceaux de parallèles* seules, soit des combinaisons de cette stratégie avec la stratégie *Partition*. Nous n'avons pas observé de présences de stratégies *Autres*, même

partielles dans ces réussites au second essai (le sujet 25 a mis en œuvre une stratégie *Ilots* au premier essai)

Intéressons-nous aux variations de stratégies réalisées par ces sujets qui réussissent le second essai.

<i>Support</i>	<i>Sujets qui conservent les mêmes stratégies au second essai</i>	<i>Sujets qui modifient leurs stratégies au second essai</i>	<i>Total</i>
<i>C</i>	<i>1</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
<i>B</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>5</i>
<i>A</i>	<i>4</i>	<i>2</i>	<i>6</i>
<i>Tous les supports</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>15</i>

Tableau 36: Modifications de stratégies entre deux essais des sujets qui réussissent leur second essai

7 des 15 sujets qui réussissent leur second essai conservent les mêmes stratégies aux deux essais, 8 sur 15 changent de stratégies.

Pour autant, ce changement de stratégie recouvre des réalités très diverses. Revenons dans l'analyse de ce qui se passe en termes de stratégies pour ces 8 sujets.

Nous savons déjà ce qui se passe pour ceux qui ne modifient pas leur stratégie (puisque nous avons une description de la stratégie globale gagnante). Il nous reste à examiner ce qui se passe pour les 8 sujets qui modifient leur stratégie entre le premier et le second essai.

		<i>Premier essai (échec)</i>			<i>Second essai (réussite)</i>		
<i>Sujet</i>	<i>Feuille</i>	<i>Partition</i>	<i>Faisceaux de parallèles</i>	<i>Autres</i>	<i>Partition</i>	<i>Faisceaux de parallèles</i>	<i>Autres</i>
13	A	0	0	0	0	1	0
15	A	0	0	0	0	1	0
21	B	0	1	0	1	1	0
25	B	0	0	1	1	1	0
27	B	1	0	0	1	1	0
33	C	1	0	0	1	1	0
34	C	0	0	0	1	1	0
35	C	1	0	0	0	1	0

Tableau 37: comparaison des stratégies utilisées entre deux essais des sujets qui changent de stratégie et réussissent leur second essai

Parmi ces 8 sujets, tous échouent car un même élément est traité deux fois. 4 mettent déjà en œuvre une stratégie globale qui utilise une des stratégies génériques. Seul un de ces 4 sujets (le sujet 21) met en œuvre la stratégie *Faisceaux de parallèles*. L'apparition de la stratégie *Partition* dans son second essai tient au fait qu'il ne se trompe plus en énumérant le premier des deux sous-ensembles.

Notre modèle nous conduit à observer une stratégie dans le second essai que nous n'avions pas observée lors du premier. Pour autant on ne peut pas dire que le second essai génère une modification de stratégie. Nous devons nous contenter de dire que notre modèle nous permet d'observer des occurrences de nouvelles stratégies dans les seconds essais, en partie parce que la réussite à l'essai permet à une plus grande partie de la collection d'être traitée (toute la collection ici) et donc à notre modèle de mieux détecter une quelconque stratégie.

2.5.9.2 Etude des stratégies mises en œuvre par les élèves qui échouent aux deux essais

Nous allons maintenant nous intéresser, toujours du point de vue des stratégies, aux élèves qui ne réussissent pas à la situation. Nous nous demandons quelles sont les stratégies qu'ils utilisent et dans quelle mesure ils en changent entre le premier essai et le second essai.

Sujet	Feuille	Premier essai (échec)			Second essai (échec)		
		Partition	Faisceaux de parallèles	Autres	Partition	Faisceaux de parallèles	Autres
1	A	1	0	1	0	0	0
5	A	1	0	0	0	1	0
8	A	0	1	0	0	1	0
10	A	0	0	1	0	0	1
11	A	0	0	1	0	1	1
12	A	1	0	1	0	0	1
14	A	0	0	1	0	0	1
16	A	0	1	0	0	1	0
22	B	1	0	1	0	0	1
24	B	1	0	0	1	0	1
26	B	0	0	1	0	0	0
31	C	0	0	1	1	0	1
32	C	1	1	1	1	1	1
36	C	1	0	1	0	0	0
37	C	0	0	0	0	0	0
38	C	0	0	1	1	0	0
41	C	0	0	1	1	0	1
42	C	0	1	0	0	1	1
44	C	0	0	0	0	0	1

Tableau 38 : Données brutes des stratégies génériques mises en œuvre (échec aux deux essais)

Comment analyser ces résultats ? Nous ne pouvons pas procéder comme nous l'avons fait avec les sujets qui réussissent au premier ou au second essai. En effet, nous sommes dans une situation où nous devons analyser les relations entre les stratégies mises en œuvre dans deux essais successifs qui se caractérisent tous les deux par une absence de réussite.

Nous avons cependant démontré que ces stratégies ne sont pas toutes égales par ailleurs. Au-delà de la réussite, la présence des stratégies génériques apparaît comme un indicateur d'une adéquation entre la situation et la mise en place d'une stratégie qui peut être gagnante.

Dix-neuf sujets ne réussissent pas à l'issue du second essai.

Parmi ces dix-neuf sujets, dix mettent en œuvre au second essai une stratégie globale qui intègre tout ou partie des stratégies génériques gagnantes.

- cinq de ces dix sujets mettent en œuvre des stratégies identiques au premier essai et au second essai (sujet 8, sujet 16, sujet 24, sujet 32, sujet 42). La stratégie *Faisceaux de parallèles* est présente dans chacun des deux essais de ces cinq sujets.
- chez quatre de ces dix sujets (sujet 11, sujet 31, sujet 38, sujet 41), nous voyons apparaître lors du second essai des traces d'une des stratégies gagnantes.
- Chez un sujet (sujet 5), nous observons l'apparition de la stratégie *Faisceaux de parallèles* au second essai et nous n'observons plus de trace de la stratégie *Partition*.

Ces dix sujets ont pris des décisions lors du second essai qui sont soit des confirmations des choix mis en œuvre lors du premier essai, soit des modifications adéquates de ces choix. Ces décisions auraient pu leur permettre de réussir lors du second essai. A ce stade de l'analyse, nous considérons que ces dix sujets ont mis en œuvre des stratégies qui les rapprochent d'une bonne réponse.

Parmi les dix-neuf sujets, nous ne repérons aucune trace d'un début de stratégie gagnante lors du second essai pour neuf de ces sujets

- Chez cinq de ces neuf sujets (sujet 10, sujet 12, sujet 14, sujet 22, sujet 44), la stratégie *Autres* est la seule observée lors du second essai.
- Chez quatre de ces neuf sujets (sujet 1, sujet 26, sujet 36, sujet 37), aucune des stratégies que nous avons modélisées ne peut s'appliquer.

Ces neuf sujets ne semblent pas avoir modifié et amélioré leur stratégie entre les deux essais.

A ce stade de l'analyse, nous sommes capables d'identifier parmi les sujets qui n'ont pas réussi ceux qui nous semblent avoir su profiter d'une seconde confrontation pour améliorer la stratégie mise en œuvre et ceux qui semblent ne pas avoir bougé entre les deux essais, voire même régresser dans la résolution du problème.

3. Conclusion du chapitre

Le travail conduit dans ce premier chapitre a été riche et a permis d'avancer dans plusieurs des directions de recherche annoncées dans le chapitre 1.

3.1 Du point de vue de la production de données

Nous souhaitons recueillir des données d'observation sur une situation d'énumération qui présenterait des caractéristiques identiques au jeu 5 de la situation des allumettes de Briand (1999), sans possibilité pour le sujet de recourir à l'écrit ou à un quelconque marquage.

Nous avons collecté ces données en appui sur situation d'énumération que nous avons conçue.

3.2 Du point de vue de l'étude des stratégies

Nous souhaitons poursuivre et développer l'étude des stratégies d'énumération, en travaillant notamment sur l'antagonisme identifié par Briand entre les stratégies en appui sur des chemins et les stratégies en appui sur les partitions.

L'analyse des données collectées a été génératrice d'une réflexion sur la transcription des procédures qui a permis de réinterroger les stratégies qui avaient été exhibées jusqu'à présent. Ce chapitre a donc permis la poursuite et le développement de l'étude des stratégies d'énumération. C'est en travaillant sur l'analyse *a posteriori*, que nous avons été contraints à la rigueur, et c'est cette rigueur qui nous apprend ce qui est en jeu en termes de connaissances.

C'est le travail sur les transcriptions qui a permis cette prise de conscience. Les premières transcriptions opéraient une traduction spatiale des actions réalisées par les sujets.

La prise en compte des dimensions spatiales dans l'analyse de nos données a permis de produire une réorganisation *a posteriori* des stratégies qui peuvent être mises en œuvre pour énumérer une collection d'objets non déplaçables. Cette réorganisation fait apparaître les stratégies *Lignes* et *Colonnes* comme des instances particulières d'une stratégie plus générale, la stratégie générique *Faisceaux de parallèles*.

Les limites du modèle produit ont permis de réinterroger la stratégie *Partition*, que nous avons conçue de manière restrictive, comme une variation de la stratégie *Lignes*. C'est parce

que les données nous indiquaient que la seule stratégie gagnante était la stratégie *Faisceaux de Parallèles* que cette limite est apparue.

Pour autant, au-delà de ce qui se passe spatialement, a émergé la nécessité de traduire par un codage la temporalité de la suite d'actions qui étaient réalisées. Cette prise en compte de la temporalité a été réalisé par l'appui sur la suite numérique ou sur les traits orientés. C'est parce qu'il n'est pas possible de recourir à l'écrit ou au marquage des éléments que cette nécessité émerge.

L'énumération ne se réduit pas à un problème spatial. C'est également un problème temporel dont nous avons rendu compte dans les transcriptions par la construction d'un ordre sur les éléments de la collection.

Nous souhaitons poursuivre l'étude de l'antagonisme entre les stratégies déjà identifiées.

A l'issue de cette étude, nous pouvons préciser la nature de l'antagonisme entre les stratégies.

Décrire l'énumération en terme de partition, c'est mettre en avant les dimensions spatiales de l'énumération. Décrire l'énumération en terme de chemin, c'est mettre en avant les dimensions temporelles. L'antagonisme dont il est question peut se reformuler en la nécessité d'articuler ces deux dimensions.

C'est parce que nous avons travaillé dans un cadre sans écrit ni marquage que nous avons fait apparaître cette tension chez les sujets.

Au-delà d'une dimension théorique sur l'énumération, ce travail a des conséquences pour l'enseignement. Par la description des stratégies et des difficultés qu'ont rencontré les sujets, il donne des outils sur comment construire la collection de points. Par le repérage des variables, il donne des indications sur comment faire évoluer la position des points au sein de la collection en fonction des réussites ou des difficultés des élèves. Il fournit pour l'enseignement une situation pour travailler sur la tension entre les dimensions spatiales et temporelles que nous avons décrites.

3.3 Du point de vue de la compréhension des connaissances d'énumération

Nous souhaitons poursuivre la description des connaissances d'énumération.

Le dispositif de conception d'une nouvelle situation d'énumération que nous venons de conduire nous permet de mieux comprendre l'énumération et les caractéristiques des situations dans lesquelles elle intervient.

A l'issue de cette étude, nous portons un nouveau regard sur la situation des allumettes et sur la fonction des différentes collections qui interviennent dans cette situation.

Dans la situation des allumettes, nous disposons *a priori* de deux collections : une collection de boîtes d'allumettes et une collection d'allumettes. Le rôle des allumettes est en tout point similaire à celui des sucres dans la situation que nous venons de décrire. La fonction de cette collection est de symboliser le traitement réalisé sur une collection tiers. L'allumette est l'indicateur du traitement des boîtes.

Les boîtes d'allumettes jouent donc un rôle similaire à celui qui est rempli par les chapeaux. La boîte permet de rendre non immédiatement visible le traitement opéré sur des éléments, comme le chapeau cache le sucre.

Dans l'analyse de la situation des sucres figurait une troisième collection, la collection des points dessinés sur la feuille. Il n'y a que deux collections matérielles en présence dans la situation des allumettes. Avons-nous réellement besoin d'une troisième collection ou bien deux seulement peuvent-elles suffire ?

Les points dessinés sur la feuille permettent de conserver une position : la collection des points est en fait une collection des positions occupées par ces points sur la feuille. Dans le jeu 5 de la situation des allumettes, celles-ci sont collées sur un support et conservent ainsi une position fixe. La troisième collection est construite implicitement par le collage d'une boîte d'allumette sur le support

Dans les jeux précédents de la situation des allumettes, les boîtes d'allumettes ne sont pas fixées sur un support. Leur position n'est pas fixe, elles sont déplaçables et la configuration qu'elles occupent peut être modifiée à loisir par le sujet.

Nous venons de montrer que la configuration des points joue un rôle important dans la possibilité et la plus ou moins grande difficulté à concevoir des partitions et des faisceaux de parallèles.

Ces analyses qui font des allers-retours permanents entre ces deux situations nous permettent de pouvoir conclure que, dans les situations d'énumération, pour travailler avec

une configuration non modifiable, l'information sur la position doit être portée par une collection.

Nous avons observé trois fonctions différentes réalisées par les collections dans les situations d'énumération :

- Une fonction de position (réalisée par les points dans la situation des chapeaux et par le caractère collé des boîtes d'allumettes dans la situation des allumettes)
- Une fonction de traitement (réalisée par les sucres dans la situation des chapeaux et par les allumettes dans la situation des allumettes)
- Une fonction d'occultation du traitement (réalisée les chapeaux dans la situation des chapeaux et par les boîtes d'allumettes dans la situation des allumettes).

Des situations peuvent proposer tout ou partie de ces fonctions. Ainsi, si on analyse la situation des chènes du point de vue de l'énumération, seules deux des fonctions sont réalisées (position et traitement, l'occultation n'étant pas prise en charge).

C'est bien la prise en charge de la fonction d'occultation du traitement qui rend nécessaire la mise en œuvre d'une organisation pour que l'énumération puisse être conduite du point de vue du sujet.

La fonction de traitement est nécessaire pour que l'observateur et le sujet sachent à un moment donné quels sont les éléments qui ont été traités.

Ces conclusions réinterrogent la dichotomie habituelle des situations (collection déplaçable./ collection non déplaçable) en proposant une nouvelle organisation construite sur la notion de configuration c qui est une manière d'expliciter la fonction de la troisième collection (la collection des positions).

Au-delà d'une dimension théorique sur l'énumération, ce travail a des conséquences pour l'enseignement. Il explicite la fonction des différentes collections et propose une formulation des différentes fonctions des collections.

Nous pouvons reformuler les aspects de l'énumération qui ont été étudiés dans ce chapitre. Nous avons étudié l'énumération dans le cas de configurations non modifiables (et par ailleurs non marquables).

Nous allons poursuivre notre étude en nous intéressant, dans le chapitre suivant, au cas des configurations modifiables.

Chapitre 3 - Le cas des configurations modifiables

Le chapitre précédent s'est conclu en redéfinissant la variable support de cette recherche, la nature de la configuration. Ce chapitre se propose de poursuivre nos développements autour de l'énumération en nous intéressant aux configurations modifiables.

Pour étudier le cas des configurations modifiables, nous nous appuyons sur plusieurs situations. Les situations présentes dans ce chapitre ont des caractéristiques très différentes des situations rencontrées dans le chapitre précédent. Les transcriptions que nous avons élaborées sont donc, elles-aussi, différentes des transcriptions précédentes.

Ce chapitre démarre par l'étude d'une situation de dénombrement, puis un retour sur la situation des allumettes. Ce retour sur la situation développée par Briand sert d'appui à l'analyse et au développement de connaissances sur le tri et à la conception de nouvelles situations, la situation des perles de couleur et la situation des jetons marqués.

La situation reste donc au cœur de notre méthodologie. Par l'observation des sujets et l'analyse des actions qu'ils réalisent est un moteur puissant dans la compréhension des connaissances en jeu dans la situation, mais aussi dans la production de nouvelles connaissances sur notre objet d'étude.

Ce chapitre démarre par l'étude de la situation de dénombrement par comptage d'une collection de jetons.

1. Énumérer une collection dans une configuration modifiable

1.1 Le dénombrement par comptage d'une collection de jetons

Cette situation du dénombrement par comptage de jetons nous intéresse pour plusieurs raisons. Tout d'abord, elle présente un caractère qui fait que chacun l'aura vraisemblablement déjà observé à de multiples reprises. Elle est tout aussi banale qu'une situation de dénombrement par comptage d'une collection de ronds dessinés sur une feuille. Par contre, elle confronte le sujet au dénombrement d'une collection d'objets dans une configuration modifiable.

Les données sur lesquelles nous nous appuyons dans ce paragraphe sont issues d'une vidéo dans laquelle nous avons reconstitué une observation de classe. Cette observation a été réalisée un très grand nombre de fois et présente un caractère tout à fait ordinaire, voire banal. Chacun l'aura vraisemblablement lui aussi observé.

C'est d'ailleurs ce caractère ordinaire et banal qui nous intéresse dans cette situation.

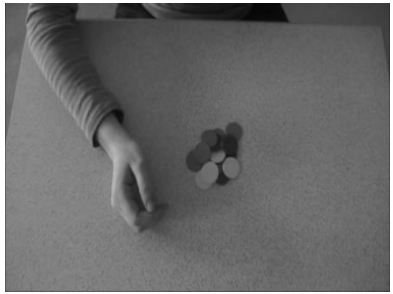




Pour entrer dans l'analyse des caractéristiques effectives de cette situation, nous commençons par donner une description de la procédure qui produit le bon résultat et que l'on rencontre de manière tout à fait banale.






1.1.1 Transcription de la situation de dénombrement des jetons par comptage

Commençons par la transcription que nous avons réalisée de la vidéo de l'observation reconstituée. Cette transcription présente la caractéristique de s'appuyer sur une série de photos extraites de la vidéo. Faire figurer ces extractions des vidéos dans les descriptions que nous produisons est apparu comme une nécessité sur laquelle nous reviendrons.

La transcriptions se présente sous la forme d'un tableau à trois colonnes : une première colonne qui donne time code de la vidéo, une seconde colonne qui est constituée de photos

extraites de la vidéo au time code considéré et une troisième colonne qui est un commentaire qui complète chacune des images.

00:01,00		<p>Nous avons ici la vision de la situation initiale. Une collection de jetons de couleurs différentes est posée sur une table. Les jetons sont les uns sur les autres et constituent un tas, placé au centre de la table. La table est une table scolaire ordinaire, de forme carrée.</p>
00:03,25		<p>Le sujet rapproche sa main droite du tas de jetons. Il étale les jetons et en saisit un.</p>
00:04,02		<p>Il fait glisser devant lui le jeton saisi sur la table. Dans le même temps, le sujet dit « un ».</p>
00:04,13		<p>Il remet sa main au-dessus du tas de jetons, en saisit un autre.</p>
00:04,21		<p>Le sujet fait glisser le jeton saisi jusqu'à un endroit proche de l'endroit qu'occupe le premier jeton qu'il a déplacé. Dans le même temps, le sujet dit « deux ».</p>

00:04,29		Il fait la même chose avec un nouveau jeton.
[...]		[...]
00:09,28		<p>Le sujet réitère le même processus. Un jeton est saisi et glisse jusqu'à rejoindre les autres et dans le même temps, un mot de la comptine des nombres est prononcé.</p> <p>Nous observons progressivement le tas de départ des jetons diminuer d'une unité à chaque itération.</p>
00:12,21		Les étapes que le sujet met en œuvre sont toutes les mêmes. Pour accélérer le processus, le sujet décide d'utiliser sa main gauche.
00:14,23		Il ne reste plus qu'un jeton dans le tas de jetons de départ.
00:15,09		Le sujet fait glisser le dernier jeton. Pendant qu'il effectue cette action, le sujet dit « seize ».

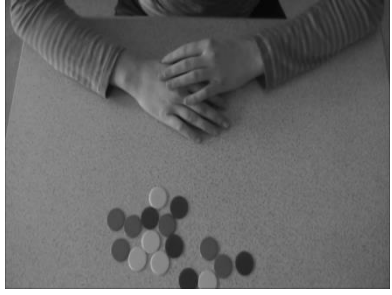
00:17,01		<p><i>Le dernier jeton a été saisi et a glissé sur table pour rejoindre les autres. Le tas de jetons de départ est vide.</i></p> <p><i>Le sujet pose ses mains sur la table. Le travail est terminé.</i></p>
----------	---	--

Tableau 39 : Extrait de transcription du film Compter_Jetons2.wmv

Nous allons maintenant analyser les actions réalisées par le sujet et comment il résout le problème qui lui est posé.

Pour comprendre la suite des actions réalisées par le sujet, commençons par revenir sur ce qu'il devait réaliser. Pour cela, nous allons nous appuyer sur un algorithme de dénombrement par comptage.

1.1.2 Un algorithme du dénombrement par comptage

Il existe plusieurs manières de présenter l'algorithme, et donc de décrire la suite des actions à réaliser pour compter les éléments d'une collection. Pour autant, c'est bien toujours la même suite d'actions que ces descriptions proposent. Ce qui nous intéresse ici est donc d'interroger cette suite d'actions.

Algorithme de dénombrement par comptage

Tant qu'il reste des éléments à compter

Choisir un élément

Lui attribuer le mot suivant de la comptine

Le cardinal de la collection est le dernier mot nombre prononcé

Dans cette situation, il s'agit pour le sujet de mettre en œuvre un processus d'association de chacun des éléments de la collection des jetons avec des mots de la comptine numérique. Cela nécessite donc que le sujet dispose :

- D'une part de connaissances qui pourraient être qualifiées de numériques et qui relèveraient de la connaissance d'une suite de mots particuliers (la comptine numérique comme collection de mots)
- D'autre part de la maîtrise de ce processus d'association entre les éléments de la collection de jetons et les mots de la comptine

Remarquons que ces connaissances sont également requises dans la situation de dénombrement d'une collection de ronds dessinés sur une feuille. En effet, que le jeton soit saisi ou que le rond soit pointé par le sujet, ce dernier doit prononcer la suite des mots nombres dans l'ordre conventionnel et prononcer ces mots à des moments qui lui permettent de réaliser ce processus d'association. Notons ici que si le sujet prononce les mots de la comptine de manière audible pour l'observateur, cela permet à ce dernier d'observer (par la vision et l'audition) que le mécanisme d'association se déroule de manière conforme.

Cet algorithme donne donc une description de la nécessaire association que le sujet doit réaliser. Nous pouvons considérer cette description comme précise et constituant une part importante de l'algorithme, une ligne complète lui étant consacré à l'intérieur d'une boucle itérative (tant que ... faire ...).

L'algorithme donne aussi une description précise de la dernière étape à réaliser pour produire le résultat. Une ligne entière de l'algorithme indique que le résultat est le dernier mot de la comptine qui a été associé.

Dans la forme que nous avons choisie, l'algorithme ne décrit pas sous forme d'actions explicites les mécanismes d'association et de répétition d'un mot. Pour autant, cette traduction apparaît assez simple à réaliser.

Poursuivons notre analyse des différentes phrases constituant l'algorithme.

Commençons par la première. C'est la phrase qui permet de structurer logiquement l'algorithme. Par l'utilisation de l'expression « tant que », elle indique qu'une série d'actions vont être réalisées. En l'occurrence, ces actions sont au nombre de deux, dont l'une a déjà été détaillée précédemment (« attribuer »). C'est cette série d'actions répétées qui constitue le cœur de l'activité de comptage.

Ce qui caractérise la structure portée par l'expression « tant que » est d'une part son caractère itératif, d'autre part la non connaissance *a priori* du nombre d'itérations qui vont devoir être réalisées pour que les éléments de la collection soient bien comptés. La suite

d'actions recommence aussi longtemps qu'une condition est réalisée. Cette condition demande d'être capable de répondre à la question « Reste-t-il des éléments à compter ? ».

A l'intérieur de la boucle figure une action que nous allons interroger maintenant. Il faut que le sujet choisisse un élément. Dans la version de l'algorithme que nous proposons, nous ne faisons pas apparaître une dimension tout à fait réelle, décrit par Briand (1993) : la question de la distinction de deux éléments de la collection.

Cette question, tout à fait importante, n'est pas l'objet de notre recherche. Nous décidons de ne pas discuter la question de la conception de la collection. Nous considérons que les sujets avec lesquels nous travaillons conçoivent les collections qui leur sont proposées, ont donc construit la notion d'élément pour chacune de ces collections et distinguent deux éléments. Pour autant, cette hypothèse ne règle pas la question de la suite des choix des éléments qui est le problème sur lequel nous centrons notre recherche.

Pour que cette suite de choix soit valide, il faut que l'élément choisi ait la propriété de ne pas avoir déjà été choisi. Pour que le sujet puisse mettre en œuvre cette action, il faut être capable de répondre à la question « Quels sont les éléments qui ont déjà été choisis ? », ou éventuellement à la question « Quels sont les éléments qui n'ont pas encore été choisis ? ».

Les réponses à ces trois questions sont liées. Si nous sommes capable de repérer parmi les jetons ceux qui ont déjà été comptés, alors nous saurons, par détermination du complémentaire, quels sont ceux qui restent à compter. Nous saurons donc aussi si ce dernier ensemble est vide ou pas.

Pour autant, la traduction en termes d'actions effectives à réaliser dans ce cas ne présente pas le même caractère d'évidence que pour le mécanisme d'association ou d'énonciation du dernier terme de la comptine.

Or, ce sont bien ces actions qui traduisent les connaissances que nous avons décrites comme relevant de l'énumération. Donc notre questionnement sur la détermination précise de la nature des actions à réaliser pour énumérer la collection de jetons est fondé.

Nous avons étudié dans notre second chapitre comment le sujet pouvait structurer sa collection pour organiser le choix des éléments. Nous avons montré comment procède le sujet pour organiser l'énumération de sa collection d'objets en s'appuyant sur les partitions spatiales issues de l'analyse de la configuration des objets et sur la fabrication de chemins. Ces stratégies étaient la conséquence du caractère non modifiable de la configuration des objets considérés.

La transcription de la situation de dénombrement des jetons met en évidence une organisation tout autre. En effet, dans le cas d'une configuration modifiable (et que le sujet va consentir à modifier), le choix des différents éléments et la détermination des éléments qui restent à compter peut ne pas s'appuyer sur la fabrication de chemins. Les modalités qui se mettent en œuvre peuvent donc être très différentes..

Selon une modalité déjà mise en œuvre dans le second chapitre, nous allons nous appuyer sur le travail fondateur de Briand (1999) pour décrire comment cette question a été prise en charge.

1.2 Retour sur la situation des allumettes (boîtes libres)

Briand a produit une situation et des données sur cette situation dans laquelle la mise en œuvre de l'énumération d'une collection d'objets est une condition nécessaire pour réussir. C'est la situation des allumettes.

Il a aussi décrit une ingénierie didactique d'enseignement de l'énumération en classe, qui, en prenant appui sur un support et un habillage matériel identiques (allumettes et boîtes d'allumettes), permet de construire une suite ordonnées d'activités, qui permettent d'enseigner l'énumération.

L'articulation entre les différentes activités est construite par un jeu sur les variables de la situation.

Par ailleurs, nous disposons de données sur une des activités proposées. Ce sont sur ces données (Briand, Loubet, & Salin, 2004) que nous prenons appui pour faire avancer notre étude.

Ces données concernent le début de l'ingénierie, quand les boîtes d'allumettes sont posées librement sur la table. Elles sont constituées de quatre clips vidéo, qui ont été tournés dans une classe de moyenne section :

- Un premier clip vidéo permet d'observer la présentation par le professeur à un groupe d'élèves de la situation des allumettes.
- Les second et troisièmes clips vidéo permettent d'observer les deux essais d'un des élève, Romain.

- Le quatrième clip montre le retour collectif qu'organise le professeur à l'issue des passations individuelles.

Avant de revenir sur l'analyse de cette situation, nous allons commencer par décrire la suite des actions réalisées par Romain lors de ses deux essais.

Un des objets de ce chapitre est de rapprocher certaines situations du point de vue des stratégies d'énumération qui peuvent être mise en œuvre par un sujet qui réussit. La configuration matérielle à laquelle sont confrontés les sujets dans la situation où les boîtes d'allumettes sont disposées librement sur la table présente des similitudes avec la configuration matérielle des jetons posés sur une table.

Comme nous l'avons fait pour la situation de dénombrement des jetons, nous allons produire une description algorithmique de la situation (allumettes posées librement sur la table).

Algorithme de traitement de la situation des allumettes

Tant qu'il reste des boîtes à remplir

Choisir un élément boîte

Mettre une allumette à l'intérieur

La ressemblance des algorithmes confirme la proximité des situations du point de vue de l'énumération. Dans la situation des allumettes, les connaissances numériques ne sont plus présentes. Elles sont remplacées par l'action qui consiste à mettre une allumette dans une boîte. Par ailleurs, l'action matérielle de mettre une allumette dans une boîte réalise de fait l'association entre une boîte et une allumette.

Notons que, contrairement à ce qui se passait dans l'algorithme de dénombrement par comptage, aucun traitement spécifique n'est à réaliser une fois la suite des traitements élémentaires effectués.

Les différences peuvent apparaître nombreuses, mais les ressemblances le sont plus encore. Dans les deux algorithmes, une structure itérative conduit à poser une question de même nature, que nous avons formulée dans la situation des allumettes par « être capable de savoir s'il reste des boîtes à remplir ». Par ailleurs, l'instruction de choix d'un élément de la collection est formulée de manière identique dans les deux algorithmes.

Les deux situations sont donc algorithmiquement proches.

Ces nombreuses ressemblances entre les deux situations nous conduisent à transcrire selon les mêmes modalités les vidéos disponibles.

Les transcriptions des deux essais de Romain se présentent donc dans un tableau à trois colonnes : time code, photo et texte de description.





Les paragraphes suivants présentent des extraits des transcriptions des clips vidéo des deux essais. L'intégralité des transcriptions des deux essais est disponible en annexe 6.






Ces extraits ont pour objectif d'exhiber pour la comprendre la nature de l'organisation mise en œuvre dans chacun des deux essais.






1.2.1 Transcription du second essai de Romain






Nous présentons en premier des extraits de la transcription du second essai de Romain, car cet essai est réussi. L'observation d'une réussite constitue un meilleur appui pour développer de la compréhension d'une stratégie gagnante et de la nature des organisations qui sont mises en œuvre.

La transcription intégrale de l'essai de Romain figure en annexe 6.

00:01,16		<p><i>Le clip commence alors que Romain a démarré le travail depuis un temps non déterminé. A ce stade de son travail, nous le voyons avec une boite d'allumettes dans chaque main.</i></p>
[...]		[...]
00:10,21		<p><i>La boite qu'il tenait dans sa main droite est posée sur la table.</i></p>
[...]		[...]
00:17,10		<p><i>La boite qu'il tenait dans sa main gauche est posée sur la table, à juste à coté de la précédente.</i></p>
00:18,19		<p><i>Romain saisit une première nouvelle boite avec sa main droite. Cette nouvelle boite est éloignée de a place où il a posé les boites précédentes.</i></p>
[...]		[...]

00:23,07		<p><i>Romain tend la main droite vers la boîte qui contient les allumettes et en saisit une.</i></p>
00:26,12		<p><i>Il a maintenant une allumette dans sa main droite. Il attrape avec sa main gauche une boîte.</i></p>
00:27,03		<p><i>Il met avec sa main droite l'allumette dans l'orifice latéral de la boîte qu'il tient dans sa main gauche.</i></p>
[...]		[...]
00:32,23		<p><i>Il pose la boîte qu'il tenait dans sa main gauche juste à côté des boîtes qu'il avait posées les unes à côté des autres.</i></p>
00:33,20		<p><i>Il attrape une nouvelle boîte avec sa main gauche pendant qu'il saisit une allumette avec sa main droite.</i></p>

00:34,23		Il met avec sa main droite l'allumette dans la boîte.
[...]		[...]
00:49,23		Il pose sur la table la boîte qu'il tenait dans sa main gauche.
00:51,07		Il attrape une nouvelle boîte avec sa main gauche.
[...]		[...]
00:52,19		Tout en conservant dans sa main droite la boîte qu'il tenait déjà, il attrape avec sa main gauche la boîte qu'il avait posée au milieu de la table.
00:53,20		Il range avec sa main gauche la boîte à côté des autres boîtes.

[...]		[...]
00:57,19		<p><i>Il met avec sa main gauche l'allumette dans la boîte qu'il tient avec sa main droite.</i></p>
01:02,22		<p><i>Il range à côté des autres la boîte qu'il tenait dans sa main droite.</i></p>
01:03,13		<p><i>Il se lève.</i></p>
01:04,21		<p><i>Il regarde la maîtresse.</i></p>
01:07,20		<p><i>Il s'éloigne de la place qu'il occupait précédemment.</i></p>


01:13,17		<p><i>Il vient se placer à côté de la maitresse et observe le contenu des boites qu'elle ouvre au fur et à mesure.</i></p>
----------	---	--

Tableau 40 : Extrait de transcription du film allumettevideo3.mpg – Second essai de Romain (Briand et al., 2004)

1.2.2 Analyse de la stratégie mise en œuvre par Romain dans ce second essai

La situation contraint le sujet à saisir les boites pour y insérer une allumette à l'intérieur. Le caractère modifiable de la configuration apparaît au moins de manière transparente au sujet.

Romain utilise les caractéristiques matérielles de la situation en s'autorisant à ne pas remettre à la place où il les a saisies les boites dans lesquelles il met des allumettes. De plus, tout au long de cet partie, il manifeste la volonté de choisir la place que vont occuper les boites qu'il dépose.



Photo 1: Photo de Romain qui place les boites avec précaution – essai 2 (00:17,10)

De ce point de vue, nous pouvons dire que Romain a compris les caractéristiques matérielles de la situation des boites.

Au fur et à mesure que la vidéo avance, nous sommes à même de comprendre la stratégie mise en œuvre et l'organisation choisie.

Le sujet a décidé de placer près de lui les boîtes dans lesquelles il a mis une allumette. D'autres boîtes restent au centre de la table. Il a donc de fait structuré sa collection de boîtes d'allumettes en deux sous-ensembles disjoints : les boîtes qu'il a déjà traitées et les boîtes qu'il n'a pas encore traitées.



Photo 2 : Agrandissement de la photo 1; zoom sur l'organisation mise en œuvre – essai 2 (00:17,10)

Cette structuration en deux sous-ensembles produit une partition de la collection.

Extrayons de la transcription précédente les moments qui montrent comment chacun des deux espaces évolue.






00:17,10		<p><i>A ce stade de son travail, le sujet a déjà structuré son espace des éléments traités.</i></p> <p><i>A cet instant, le sujet est en train de rajouter un élément à l'ensemble des éléments déjà traités.</i></p>
00:32,23		<p><i>Après avoir saisi un nouvel élément dans l'ensemble des éléments non encore traités, et après l'avoir traité, le sujet le rajoute à l'ensemble des éléments déjà traités.</i></p>
00:53,20		<p><i>Le sujet a saisi et traité deux éléments de l'ensemble des éléments non encore traités. A cet instant, le sujet est en train de rajouter le premier des deux éléments à l'ensemble des éléments déjà traités.</i></p>
01:03,13		<p><i>A cet instant, le sujet est en train de rajouter le second des deux éléments à l'ensemble des éléments déjà traités.</i></p>
01:04,21		<p><i>Le sujet écarte ses mains de l'ensemble des éléments traités.</i></p> <p><i>Il regarde la maitresse, ce que nous interprétons comme le geste produit par le sujet pour signifier qu'il a terminé le travail. Il montre qu'il sait qu'il ne reste pas de boites à remplir.</i></p>

Tableau 41 : extrait de la transcription de l'essai 2 de Romain – évolution des deux espaces

Pour renforcer le contrôle de l'organisation qui est mise en œuvre, nous repérons que le sujet dispose les objets qu'il a traités de manière différente de ceux qu'il n'a pas encore traités. Les boîtes qui sont censées contenir une allumette sont positionnées précautionneusement les unes à côté des autres.

De plus la forme de l'organisation spatiale qu'il produit pour l'ensemble des objets traités est très différente de la forme spatiale des éléments non encore traités.

Les éléments traités sont disposés les uns à côté des autres pour former une ligne. Cette ligne est une forme d'organisation spatiale que nous avons rencontrée dans le chapitre précédent, dans le cas des configurations non modifiables. Cette forme d'organisation spatiale lui permet de renforcer la distinction visuelle des deux ensembles de boîtes. Une double distinction s'opère : par l'organisation spatiale et par la forme donnée à la collection construite.

Quand le sujet saisit une boîte au milieu de la table (parmi celles qui n'ont pas encore été traitées), il peut être amené à la reposer sans la traiter. Il veille dans ce cas à bien la remettre à la place à laquelle il l'a prise. En tout cas, à aucun moment il ne saisit toutes les boîtes non traitées qui sont au milieu de la table pour aller les mettre soit plus loin du bord, soit à sa gauche ou sa droite. Il ne refabrique pas un espace de l'ensemble des objets non traités. Il choisit plutôt d'organiser ses objets traités d'une manière qui soit compatible avec la nécessité qu'il perçoit de pouvoir distinguer ces deux ensembles.

Le sujet se comporte comme s'il ne s'autorisait pas à agir sur la place occupée par les boîtes au début de l'action. Certes, les boîtes non traitées sont déplaçables, mais pour autant elles semblent condamnées à reprendre la place qu'elles occupaient. Le sujet veille à ne pas modifier la configuration des éléments qu'il n'a pas encore traités.

Nous sommes donc en présence de deux ensembles :

- un ensemble sur lequel le sujet a une action d'organisation spatiale forte et une action de structuration par fabrication d'une ligne (l'ensemble des boîtes traitées)
- un ensemble sur lequel le sujet a une action d'organisation beaucoup plus faible (l'ensemble des boîtes non traitées).

Les deux ensembles apparaissent à ce titre non symétriques. Le couple d'ensembles se fabrique par l'éloignement spatial des éléments d'une collection de leur position initiale et par construction d'une action de structuration pour l'un des ensembles. L'action de structuration renforce la distinction entre les deux ensembles.

A partir du moment où chacun des deux espaces est bien déterminé, l'algorithme de traitement peut se mettre en place.

Nous venons de produire une description de l'organisation qui est mise en œuvre par un sujet pour résoudre le problème posé par un traitement particulier d'une collection de boîtes d'allumettes.

Revenons maintenant à la situation de dénombrement de la collection de jetons.



Photo 3 : Photo des mains du sujet qui compte les jetons (00:04,29)

La situation de dénombrement des jetons présente une caractéristique différente de la situation des allumettes. C'est la nature du traitement : attribution d'une allumette ou d'un mot nombre. Pour autant, nous observons de nombreuses similitudes dans les organisations qui sont mises en œuvre par les sujets dans ces deux cas.

Le sujet fait le choix d'écartier de leur position initiale les éléments qu'il a traités.

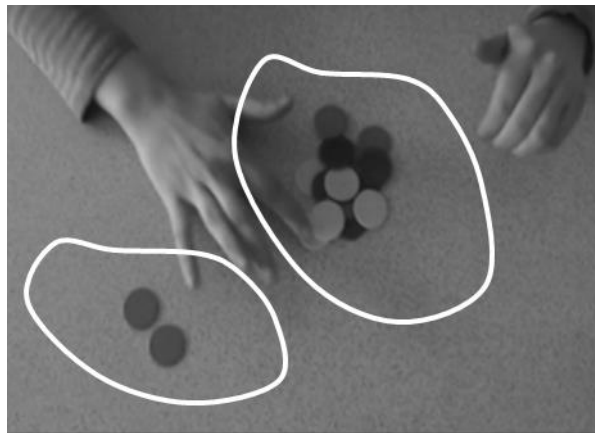


Photo 4 : Agrandissement de la photo 3; zoom sur l'organisation mise en œuvre (00:04,29)

Cela le conduit de fait à structurer la collection en deux sous-ensembles disjoints :

- les éléments sur lesquels il n'a pas agi pour l'instant. Ce sont les jetons qui sont proches de lui.

- les éléments sur lesquels il a agi et qu'il a éloignés de la position initiale qu'ils occupaient.

La nature de l'action réalisée ici consiste à compter les éléments. Dans la situation précédente, la nature de l'action consistait à mettre une allumette dans une boîte. La nature de l'action réalisée par le sujet ne nous intéresse pas ici en tant que telle. Au plan expérimental, la réalisation de cette action est une nécessité construite pour rendre l'organisation produite par le sujet.

Ce qui nous intéresse ici est que le sujet a éloigné les jetons qu'il a compté du tas des jetons qu'il n'a pas encore compté pour qu'il puisse distinguer les deux sous-ensembles.

Remarquons que les deux sujets ont la même réaction par rapport à la position occupée initialement par les objets qu'ils ont à traiter. Ils ne les déplacent pas.

Nous remarquons également que le sujet ne produit pas de forme de type ligne avec l'ensemble des éléments déjà comptés. Contrairement à Romain, il ne met pas en œuvre de dispositif de renforcement de la distinction des deux sous-ensembles.

Nous retrouvons la dissymétrie déjà évoquée. Cette dissymétrie est la conséquence des conditions matérielles dans lesquelles les sujets ont été placés. Nous ne savons pas comment Romain aurait agi s'il avait par exemple moins de place sur sa table, ce qui aurait pu le contraindre à modifier aussi la position des objets non traités, même avant tout traitement.






Les organisations mises en œuvre dans chacune des deux situations sont les mêmes. La détermination du statut des éléments de la collection est réglée par la mise en œuvre d'une séparation spatiale en deux sous-ensembles.






1.2.3 Transcription du premier essai de Romain






Après avoir examiné comment Romain s'organise pour réussir lors de son second essai, considérons maintenant comment il s'est organisé lors de son premier essai. Nous savons que cet essai ne débouche pas sur une réussite. Nous cherchons donc à produire une analyse de l'organisation mise en œuvre qui puisse permettre de comprendre la non-réussite du point de vue de l'énumération.

Nous nous appuyons sur le même dispositif méthodologique que le précédent, à savoir un appui sur des extraits de transcription de la vidéo du second essai.






Pour rendre compte des difficultés que rencontre Romain, nous avons fait le choix de présenter dans le corps de cet texte l'intégralité de la transcription de la vidéo. La transcription est longue (elle occupe les 7 pages suivantes). Pour autant, cela nous semble être le meilleur moyen pour que le lecteur se rende compte de la situation dans laquelle se trouve le sujet, et notamment du caractère répétitif d'un certain nombre d'actions qu'il conduit.






00:02,04		<p><i>Le clip commence alors que Romain a démarré le travail depuis un temps non déterminé. A ce stade de son travail, nous le voyons avec une boîte d'allumettes dans la main gauche alors qu'il est en train de saisir une allumette avec sa main droite.</i></p>
00:02,23		<p><i>Il met l'allumette dans l'orifice latéral de la boîte qu'il tient avec sa main gauche.</i></p>
00 :07,13		<p><i>Il pose sur la table la boîte qu'il tenait dans la main gauche pendant qu'il saisit une nouvelle boîte avec sa main droite.</i></p>
00 :08,00		<p><i>Il porte à son oreille droite la boîte qu'il tient dans sa main droite et la secoue.</i></p>
00 :08,21		<p><i>Alors que la boîte qu'il tient dans sa main droite est toujours à côté de son oreille droite, il saisit avec sa main gauche une nouvelle boîte.</i></p>

00 :09,06		<p><i>Il porte à son oreille gauche la boîte qu'il tient dans sa main gauche et la secoue.</i></p>
00 :11,08		<p><i>Sa main droite tient toujours la même boîte, même si cette main repose sur la table. Il se penche et après avoir posé sur la table la boîte qu'il tenait dans sa main gauche, il en saisit une nouvelle ...</i></p>
00 :11,17		<p><i>.. puis encore une autre qu'il prend juste à côté de la précédente.</i></p>
00 :12,06		<p><i>Il porte à son oreille la boîte qu'il tient dans sa main gauche et la secoue.</i></p>
00 :13,10		<p><i>Il pose sur la table la boîte qu'il tenait dans la main gauche pendant qu'il rapproche sa main droite d'une nouvelle boîte.</i></p>

00 :14,13		<p><i>Il lâche la boîte qu'il tenait dans sa main gauche et éloigne sa main de la table.</i></p>
00 :15,17		<p><i>Il porte à son oreille droite la boîte qu'il tenait dans sa main droite et la secoue.</i></p>
00 :15,18		<p><i>Il saisit une nouvelle boîte avec sa main gauche.</i></p>
00 :16,06		<p><i>Après avoir posé sur la table la boîte qu'il tenait dans sa main droite, il porte à son oreille gauche la boîte qu'il tenait dans sa main gauche.</i></p>
00 :17,17		<p><i>Il pose sur la table la boîte qu'il tenait dans la main gauche pendant qu'il saisit une nouvelle boîte avec sa main droite.</i></p>

00 :18,04		<p><i>Il porte à son oreille droite la boîte qu'il tient dans sa main droite et la secoue.</i></p>
00 :19,13		<p><i>Tout en gardant dans sa main droite la boîte qu'il tenait, il saisit avec sa main gauche une nouvelle boîte.</i></p>
00 :19,21		<p><i>Sa main droite tient toujours la même boîte, même si cette main repose sur la table. Il porte à son oreille gauche la boîte qu'il tient dans sa main gauche et la secoue.</i></p>
00 :21,15		<p><i>Après secouage, la boîte passe de la main gauche à la main droite.</i></p>
00 :22,15		<p><i>La boîte tenue par la main droite est posée sur la table.</i></p>

00 :22,17		<i>La main gauche saisit une nouvelle boîte.</i>
00 :23,00		<i>Il porte à son oreille gauche la boîte qu'il tient dans sa main gauche et la secoue.</i>
00 :24,02		<i>Il pose sur la table la boîte qu'il tenait dans la main gauche et saisit avec la main droite une nouvelle boîte</i>
00 :24,13		<i>Il porte à son oreille droite la boîte qu'il tient dans sa main droite et la secoue.</i>
00 :25,02		<i>Tout en gardant dans sa main droite la boîte qu'il tenait, il saisit avec sa main gauche une nouvelle boîte.</i>

00 :25,11		<p><i>Il porte à son oreille gauche la boîte qu'il tient dans sa main gauche et la secoue.</i></p>
00 :26,08		<p><i>Un effet « feuille d'une livre qui tourne » est mis en œuvre dans le film pour signifier l'interruption du plan-séquence.</i></p>
00 :36,08		<p><i>La maitresse sait les boites et les ouvre les uns après les autres</i></p>
00 :37,22		<p><i>Romain se penche sur chaque boîte au fur et à mesure qu'elles sont ouvertes.</i></p>
00 :50,03		<p><i>Les boites sont maintenant toutes ouvertes.</i></p>



00 :51,12		Zoom sur les boîtes
00 :57,10		Suite du zoom sur les boîtes. Le doigt d'un enfant observateur point une boîte dans laquelle figurent deux allumettes.

Tableau 42 : Transcription d film du film *allumettevideo2.mpg* – Premier de Romain (Briand et al., 2004)

1.2.4 Analyse de la stratégie mise en œuvre par Romain dans ce premier essai

Nous utilisons la modélisation développée pour analyser la réussite pour décrire ce qui se passe dans cette partie.

Le sujet a bien compris la nature du traitement qu'il devait réaliser sur chaque élément de la collection. Nous observons qu'à une reprise il saisit une allumette et l'insère dans l'un des orifices latéraux de la boîte. Donc le sujet n'a pas de difficulté dans le traitement d'un élément de la collection.

Par contre, nous observons qu'il passe la plupart du temps du temps que dure le film à saisir une boîte, la porter à son oreille et la reposer. Nous concluons là encore qu'il a bien compris quelles étaient les conditions dans lesquelles il pouvait décider de mettre ou pas une allumette dans la boîte. Il fallait que cette boîte soit vide. Il s'appuie donc sur la présence ou l'absence d'un bruit produit par l'allumette qui se déplace dans la boîte pour déterminer s'il doit ou non mettre une allumette à l'intérieur.

Par contre, il répète cette opération de saisie jusqu'au bout de la vidéo, de manière automatique. La vidéo elle-même interrompue (00 :26,08) sans que nous sachions combien de temps a duré la répétition des saisies et des secouages. Le film continu n'aurait sans doute pas apporté d'éléments complémentaires à ce que nous avons pu observer depuis le début.

En effet, ce qui caractérise la procédure mise en œuvre par le sujet dans cet essai (comme dans le suivant par ailleurs) est sa stabilité. Tout au long de l'observation, il ne change pas de procédure. Il poursuit jusqu'à la fin les mécanismes mis en œuvre.



Photo 5 : Photos de Romain qui replace une boîte – essai 1 (00 :14,13)

Observons l'organisation spatiale mise en œuvre par le sujet.



Photo 6 : Agrandissement de la photo 5; zoom sur l'organisation mise en œuvre – essai 1 (00 :14,13)

À la différence de l'observation précédente, nous constatons que le sujet ne met pas à part les boîtes d'allumettes dans lesquelles il a inséré une allumette. Il ne fabrique pas d'ensemble des éléments déjà traités. Les éléments déjà traités sont replacés à la place qu'ils occupaient.

Tout au long de sa procédure, le sujet ne construit pas d'organisation spatiale qui puisse lui permettre de distinguer les éléments traités et les éléments qui restent à traiter, ce qui est vérifiable en superposant visuellement les boîtes d'allumettes dans les photos successives.

Le plan-séquence se termine en (00 :26,08). Il est suivi jusqu'à la fin du film d'un nouveau plan séquence qui montre que le sujet a traité un élément deux fois (00 :57 ,10). Nous ne disposons pas de l'intégralité du film. Pour autant, nous comprenons ce qui s'est passé, même si le traitement une seconde fois d'un élément déjà traité ne nous semble pas figurer sur la vidéo.

De (00 :08,00) à (00 :26,08), 10 boîtes d'allumettes sont saisies par le sujet. Une fois saisies, elles sont portées à l'oreille du sujet et secouées. L'émission d'un bruit lors de cette

phase de secouage permet au sujet de contrôler qu'une allumette au moins figure bien dans la boîte.

Combinée à l'observation du résultat du traitement, cette répétition de secouage témoigne d'un processus qui boucle et dont le sujet ne peut pas sortir autrement que par une forme d'abandon lié à la lassitude. En tout cas, le sujet ne peut pas construire la certitude que l'ensemble des éléments ont bien été traités, et donc que les éléments ont bien été énumérés.

La réussite de l'énumération repose sur la séparation spatiale des éléments traités des éléments non traités.

2. Trier une collection dans une configuration modifiable

Nous avons étudié certaines caractéristiques de la situation d'énumération d'une collection d'objets dans le cas d'une configuration modifiable. Nous avons mis en évidence les difficultés d'organisation présentes dans ces situations. Nous cherchons dans quelle mesure il existe d'autres situations qui présentent des caractéristiques proches des situations que nous venons d'étudier.

L'étude des situations que nous avons réalisées nous a conduit à observer de manière fine des collections d'objets sur lesquelles les sujets agissaient. Etant conduits à observer régulièrement des élèves de maternelle, nous nous sommes intéressés aux situations auxquelles ils étaient confrontés. C'est ainsi qu'est apparue l'idée de s'intéresser aux situations de tri.

Après avoir défini ce que nous entendons par tri, nous construirons une situation mettant en œuvre des connaissances permettant de s'organiser dans une nouvelle situation. Cette construction doit nous permettre de mieux comprendre les variables en jeu dans la situation et les caractéristiques des savoirs sur lesquels nous travaillons.

2.1 Qu'est-ce que le tri ?

Nous commençons par définir ce que nous entendons par situations de tri. Définir le mot tri n'est pas si simple.

2.1.1 Comment le verbe trier est-il défini dans un dictionnaire de langue française?

Commençons par examiner les définitions proposées par un dictionnaire de langue française. Le dictionnaire (*Le Grand Larousse Illustré 2018.*, 2017) donne deux définitions de ce mot, suivie d'une instanciation de la définition dans un contexte :

« *Classer, répartir les différents éléments d'un ensemble en groupes selon quelque critère : Trier le courrier.*

Sélectionner des choses, des êtres, les retenir parmi tous les autres ; choisir : Trier les meilleures photos pour un album. »

Le dictionnaire propose comme synonyme *classer* pour la première définition et *choisir*, *répertorier*, *sélectionner* pour la seconde définition.

Dans la première définition, trier est présenté comme un synonyme de classer. Est présente l'idée de fabriquer à partir de l'ensemble de départ des sous-ensembles. Le mécanisme de fabrication repose sur « *quelque critère* ». Dans le cas du courrier, nous comprenons aisément l'utilisation qui peut être faite du code postal pour réaliser le tri, au sens donné dans le dictionnaire Larousse.

La seconde définition est un peu différente. Apparaît dans celle-ci l'idée de choix, de sélection. Choisir les meilleures photos, c'est aussi décider celles qui ne font pas partie des meilleures et qui ne trouveront pas leur place dans l'album. Les sous-ensembles se réduisent à deux, le sous-ensemble des photos qui répondent au critère et le sous-ensemble des photos qui n'y répondent pas.

Il y a des dimensions communes à ces deux définitions : l'idée d'organiser un ensemble en sous-ensembles, en faisant en sorte que tous les éléments de l'ensemble de départ trouvent une place dans un des sous-ensembles. Cela signifie que chaque élément fait partie d'un et un seul sous-ensemble. Le terme mathématique qui est utilisé pour désigner cette forme d'organisation est le mot « *partition* ». Donc, une manière de reformuler la dimension commune portée par ces deux définitions serait de dire que trier permet de produire une certaine partition de l'ensemble de départ.

Des différences apparaissent dans la nature du mécanisme producteur de la partition. L'indicateur de cette différence est le nombre de sous-ensembles produits. Dans le cas du tri du courrier par code postal, un ensemble d'enveloppes peut être partitionné en un nombre important de sous-ensembles. Dans le cas du tri des meilleures photos, deux sous-ensembles

au plus vont être produits. Le mécanisme de production de sous-ensembles n'est donc pas le même.

Nous avons donc aller plus loin sur la compréhension du mécanisme producteur de la partition. Avant cela, nous examinons dans le même dictionnaire la définition du synonyme de la première définition du verbe trier qui nous est proposée, classer.

2.1.2 Comment le verbe classer est-il défini dans un dictionnaire de langue française?

Pour classer, les définitions sont plus nombreuses que celles de trier (*Le Grand Larousse Illustre 2018.*, 2017).

« Distinguer dans un ensemble des groupes d'éléments ayant des caractéristiques communes et qui forment des classes, des catégories : Classer les mots en « verbes », « adjectifs », « noms », etc.

Faire entrer quelqu'un, quelque chose, un animal dans une catégorie : On classe cet animal parmi les mammifères.

Ranger, ordonner des choses, des personnes d'une certaine manière ; les mettre en ordre : Classer les mots par ordre alphabétique.

Mettre quelque chose à la place qu'il doit occuper dans un ordre défini ; ranger : Voulez-vous classer cette fiche dans le classeur ?

Déclarer d'intérêt historique ou artistique un monument, un site, etc., ce qui met leur conservation et leur restauration sous le contrôle de l'administration des Monuments historiques et en partie à la charge financière de l'État.

En chimie, opérer un classement ou une classification. »

Pas moins de six définitions sont proposées.

Les deux premières définitions reprennent l'idée de la structuration d'un ensemble en sous-ensembles. La première décrit un processus général qui va être mis en œuvre sur un ensemble, alors que la seconde décrit le processus particulier mis en œuvre sur un des éléments de l'ensemble, préalablement partitionné en sous-ensembles. Est présente dans ces deux définitions l'idée de caractéristiques communes pour constituer les sous-ensembles. Les mots classe et catégorie sont employés pour désigner les sous-ensembles.

Les deux définitions suivantes développent une autre idée, que nous n'avions pas rencontrée pour l'instant et qui est l'idée de ranger les ensembles d'un ensemble dans un certain ordre. C'est une idée nouvelle. Si nous reprenons l'exemple donné pour illustrer la première définition, aucune intention d'ordre dans le classement des mots en «verbes», «adjectifs», «noms» n'est présente. Quand les mots sont classés par ordre alphabétique, nous ne percevons pas spontanément une série de sous-ensembles. Par ailleurs, nous retrouvons

dans les troisième et quatrième définitions le mécanisme présent pour les deux premières : une définition globale suivie d'une plus locale.

La cinquième définition développe l'idée de l'appartenance à une catégorie particulière dans un contexte particulier, celui des monuments. C'est la reprise de la seconde définition de trier : l'ensemble des objets dont il est question est l'ensemble des monuments, des sites et certains de ces éléments accèdent au statut « *classé* », ce qui définit de fait deux sous-ensembles, ceux qui sont classés et ceux qui ne le sont pas.

La dernière définition reprend l'idée développée dans la première définition en l'instanciant dans un contexte scientifique particulier (en faisant référence au mot classification).

Les définitions du mot classer sont encore plus nombreuses que les définitions du mot trier. Elles reprennent les deux sens qui avaient été rencontrés lors de l'étude de trier et rajoutent une piste avec la question de la mise en ordre.

L'appui sur un dictionnaire de langue française ne règle pas de manière assez précise la question de la définition des mots employés. La nature de la structure produite est un aspect fondamental de notre travail et nous ne pouvons pas nous contenter d'une terminologie approximative sur cet aspect.

Par ailleurs, en tant que mathématicien, la production d'une définition est une nécessité. La production d'une définition aide à penser les structures qui sont manipulées et permet de décrire de manière précise les observations des manipulations de ces structures.

2.1.3 Que nous disent les mathématiques sur ces mots ?

La présence des mots classer et ordonner dans la même définition est un élément inducteur fort dans la nécessité pour un mathématicien de s'appuyer sur les mathématiques pour préciser le sens de ces différents mots.

En nous lançant dans cette étude, nous étions certains de trouver la définition de chacun de ces deux mots dans n'importe quel dictionnaire de mathématiques. Or, ces deux verbes n'apparaissent pas en tant que tels.

Pour trouver des définitions sur lesquelles nous appuyer, nous devons nous appuyer sur les noms communs associés à ces verbes.

Le nom commun associé au verbe classer est le mot classe. Nous trouvons la présence du mot classe dans le contexte d'un travail sur la relation d'équivalence, dans lequel apparaît la notion de classe d'équivalence.

Le nom commun associé au verbe ordonner est le mot ordre. Nous trouvons la présence du mot ordre dans le contexte d'un travail sur la relation d'ordre.

On va donc rencontrer ces deux verbes dans des contextes où on travaille avec les relations mathématiques.

Précisons ce que nous entendons par relation dans un contexte mathématique, et plus précisément par relation binaire.

2.1.3.1 Qu'est-ce qu'une relation binaire ?

Faire des mathématiques, c'est étudier les relations entre les objets. La définition de la notion de relation présente donc un caractère fondamental.

Une relation en mathématique est une propriété, un lien, qu'ont entre eux certains objets.

Examinons la définition qu'en donne un dictionnaire de mathématiques de la relation.

« Relation d'un ensemble E vers un ensemble F (ou correspondance) – Triplet d'ensembles $R = (E, F, G)$ où G est une partie du produit cartésien de $E \times F$, appelé graphe de la relation. On dit que l'élément $a \in E$ est en relation avec l'élément $b \in F$ si et seulement si $(a, b) \in G$, ce que l'on note encore $a R b$. » (Bouvier et al., 2013)

La relation définie ci-dessus fait intervenir deux variables, la première issue de E et la seconde de F . Elle est donc qualifiée de binaire.

La relation est définie par la donnée de trois ensembles : un ensemble de départ E , un ensemble d'arrivée F et un troisième ensemble G qui décrit la relation entre éléments des deux premiers.

Les ensembles E et F sont parfois confondus. Cela sera le cas dans la suite de ce chapitre.

Revenons sur la relation elle-même. Comment décrire la relation, le lien particulier qu'ont entre eux certains éléments de l'ensemble ?

Pour définir ce lien, le mathématicien s'appuie sur la notion de produit cartésien. Le produit cartésien $E \times E$ est l'ensemble de tous des couples qu'il est possible de former en considérant deux éléments de E .

On nomme graphe de la relation le sous-ensemble du produit cartésien qui décrit les éléments de E qui sont en relation entre eux. Graphe et relation sont souvent confondus.

Reprenons les notations de la définition :

Si $(x, y) \in G$, on dit que x est en relation avec y et l'on note « $x R y$ »

2.1.3.2 Qu'est-ce qu'une relation d'équivalence ?

Une relation d'équivalence est une relation binaire sur un ensemble qui a une série de propriétés : elle est à la fois réflexive, symétrique et transitive. Nous allons définir chacun de ces trois termes.

Considérons une relation binaire R sur un ensemble E .

La relation R est réflexive si et seulement si, pour tout élément x de E , x est en relation avec lui-même. Cette propriété pourrait se noter $x R x$. Une formulation en termes de graphe consisterait à dire que le couple (x, x) est un élément du graphe de la relation.

La relation R est symétrique si et seulement si, pour tout couple (x, y) d'éléments de $E \times E$, si $x R y$ alors $y R x$. Une formulation en termes de graphe consisterait à dire que si le couple (x, y) est un élément du graphe de la relation alors le couple (y, x) l'est aussi.

La relation R est transitive si et seulement si, pour tout triplet (x, y, z) d'éléments de $E \times E \times E$, si $x R y$ et $y R z$, alors $x R z$. Une formulation en termes de graphe consisterait à dire si les couples (x, y) et (y, z) sont des éléments du graphe de la relation, alors le couple (x, z) l'est aussi.

La mise en œuvre d'une relation d'équivalence sur un ensemble E génère la construction des sous-ensembles de l'ensemble E qui sont constitués d'éléments en relation entre eux. Les sous-ensembles ainsi fabriqués sont appelés classes d'équivalence. Ainsi, la classe d'équivalence d'un élément x de E est l'ensemble des éléments y de E tels que $x R y$. La relation R étant réflexive la classe de x contient bien l'élément x .

Autrement dit, une relation d'équivalence permet de partitionner un ensemble en sous-ensembles qui « se ressemblent » au sens de la relation R . Ces sous-ensembles sont les classes d'équivalence de cette relation d'équivalence.

Classer les éléments d'un ensemble, c'est réaliser une partition de cet ensemble s'appuyant sur une relation d'équivalence.

Dans la suite de cette thèse, sauf indication contraire, classer sera utilisé dans le sens qui vient d'être présenté ici.

2.1.3.3 Qu'est-ce qu'une relation d'ordre ?

Une relation d'ordre est une relation binaire sur un ensemble qui a une série de propriétés : elle est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.

Définissons le terme antisymétrique.

Considérons une relation binaire R sur un ensemble E .

La relation R est antisymétrique si et seulement si, pour tout couple (x, y) d'éléments de $E \times E$, si $x R y$ et $y R x$ alors $x = y$.

L'ordre peut être total si tous les éléments de E sont comparables. Dans le cas contraire, il est dit partiel.

Un ensemble ordonné est un ensemble que l'on peut munir d'une relation d'ordre. Il peut donc être totalement ou partiellement ordonné.

Ordonner les éléments d'un ensemble, c'est donc les soumettre à une relation d'ordre. Pour décrire la nature de l'opération réalisée sur les éléments de la collection, nous sommes obligés de faire appel à du vocabulaire spatial. Ordonner les éléments d'une collection d'objets, c'est les mettre les uns derrière les autres. Dans le langage courant, ordonner est souvent remplacé par ranger.

L'ordre alphabétique est une relation d'ordre total sur l'ensemble des 26 lettres de la langue française.

Dans la suite de cette thèse, sauf indication contraire, ordonner sera utilisé dans le sens qui vient d'être présenté ici.

2.1.3.4 Conclusion de l'étude mathématique

Nous cherchions à définir le terme « trier ».

L'étude des dictionnaires mathématiques ne nous a pas permis de trouver une définition.

Cependant, les recherches que nous avons conduites mettent en évidence la présence de deux relations fondamentales, la relation d'équivalence et la relation d'ordre. C'est l'appui sur ces deux relations qui permet de définir dans le contexte mathématique les termes « classer » et « ordonner ».

Concernant la signification du mot classer, la définition produite par les mathématiques recouvre bien les deux premières définitions extraites du dictionnaire de la langue française.

Par contre, cette définition mathématique de « classer » est incompatible avec les définitions suivantes (notamment 3 et 4) extraites du dictionnaire. Il s'agit pour ces deux cas de la mise en œuvre d'une relation qui n'est pas une relation d'équivalence, mais une relation d'ordre.

Pour en revenir au terme « trier », si nous nous appuyons sur les définitions du dictionnaire de langue française de ce mot, nous voyons que la première recouvre la définition de « classer ».

Pour mieux comprendre la nature des questions soulevées par la seconde définition, nous poursuivons nos investigations en nous penchant sur l'observation d'une situation scolaire ordinaire.

2.1.4 Etude d'une situation scolaire

Les situations courantes rencontrées à la maternelle constituent un de nos terrains d'observation. Nous allons référer dans la suite de ce texte à une situation tout à fait ordinaire, que nous observons de manière régulière dans de très nombreuses classes de maternelle.

Parmi le matériel très banal que l'on trouve dans les classes figurent les jetons de couleur. Ce matériel permet aux enseignants de disposer facilement d'une grande collection d'objets dont la seule caractéristique différente est la couleur.

Nous allons maintenant décrire quelques activités ordinaires en classe de maternelle qui permettent d'instancier les concepts que nous avons cherché à définir. Nous considérons un milieu matériel constitué d'une collection de jetons de différentes couleurs, étalés comme le montre la photographie suivante sur une table.

La collection dont il est question par la suite est donc une collection de jetons sur laquelle on se propose de réaliser un certain nombre de traitements. Ces différents traitements vont contribuer à modifier l'organisation spatiale de la collection.

La photographie montre l'état de la collection de jetons avant que le sujet ait effectué le moindre traitement sur cette collection. Nous nommons cet état « état initial ».



Photo 7 : Collection à l'état initial

Nous allons maintenant nous intéresser aux organisations produites. Le travail avec une collection de ce type présente l'intérêt d'avoir un appui fort sur les dimensions liées à la perception visuelle. Nous allons délibérément accentuer cette dimension en nous intéressant dans un premier temps à l'organisation produite sous forme de photo. Ce n'est que dans un deuxième temps que nous chercherons à produire un discours écrit sur cette organisation.

Nous allons donc commencer par montrer des organisations puis nous nous demanderons quelle est la nature des relations qui permettent de les produire et donc quelles pourraient être les consignes orales formulées à des sujets.

2.1.4.1 Un premier état final

Commençons par la photographie d'un premier état final, résultat de la mise en œuvre d'une organisation de la collection de jetons précédente.



Photo 8 : Collection à l'état final – Traitement 1

La collection de jetons a été partitionnée en quatre sous-ensembles. En effet, il existe une séparation spatiale claire entre les différents tas qui permet d'interpréter ces tas en sous-ensembles. Chacun des sous-ensembles regroupe des jetons qui présentent la caractéristique d'avoir la même couleur.

La relation mise en œuvre dans ce premier traitement est une relation binaire qu'on peut décrire sous la forme « a même couleur que ». Un jeton x va être en relation avec un jeton y si ce jeton x a la même couleur que le jeton y .

Cette relation est réflexive. Un jeton a la même couleur que lui-même.

Si un premier jeton a la même couleur qu'un second, alors ce second a bien la même couleur que le premier. La relation est donc symétrique.

Si un premier jeton a la même couleur qu'un second et que ce second a la même couleur qu'un troisième, alors le premier a bien la même couleur que le troisième. La relation est donc bien transitive.

La relation en jeu dans cette situation est donc une relation d'équivalence. Elle permet de partitionner l'ensemble des jetons en classes de jetons de même couleur.

L'organisation produite est le résultat d'un classement. Le traitement 1 est donc un classement. On peut donc dire que dans ce cas les jetons ont été classés, et de manière plus précise qu'ils ont été classés par couleur.

2.1.4.2 Un second état final

Examinons maintenant la photographie d'un second état final, résultat de la mise en œuvre d'une autre organisation de la collection de jetons précédente.



Photo 9 : Collection à l'état final – Traitement 2

La collection de jetons de couleurs a été cette fois-ci partitionnée en deux sous-ensembles. Là encore, la présence d'espaces entre les tas indique clairement le nombre de sous-ensembles construits. Examinons maintenant la nature de chacun des deux sous-ensembles.

Le premier des deux sous-ensembles est constitué de l'ensemble des jetons de couleur bleue. Les éléments de ce sous-ensemble présentent bien la caractéristique d'avoir la même couleur. Par contre, le second sous-ensemble ne regroupe pas des jetons qui ont la même couleur. Ce qui lie les éléments de ce sous-ensemble entre eux est de *ne pas être de couleur bleue*. La collection est donc structurée en deux sous-ensembles, les éléments qui vérifient la propriété « être bleu » et ceux qui ne la vérifient pas (ou encore vérifient la négation de cette propriété « ne pas être bleu »).

Pour décrire la partition produite par le traitement 2, nous avons besoin de référer à la caractéristique qui permet de constituer les deux sous-ensembles. Il a fallu choisir, sélectionner une couleur pour produire cette organisation. Nous retrouvons ici l'idée qui était développée dans la seconde définition du verbe trier et qui est de sélectionner des objets parmi d'autres. C'est donc le terme trier que nous allons adapter pour désigner ce traitement..

Nous dirons dans ce cas que le sujet a trié les jetons bleus. Il a donc bien choisi, sélectionné les jetons qui présentaient la caractéristique souhaitée pour constituer un ensemble et son complémentaire.

Quand nous classons les éléments de la collection de jetons par couleur, chaque sous-ensemble est constitué de jetons qui ont la même couleur. Nous pouvons d'ailleurs nommer facilement chacun des sous-ensembles (le sous-ensemble des jetons bleus, le sous-ensemble des jetons verts ...).

L'examen de la nature de chacun des sous-ensembles produits par un tri ne permet pas de maintenir la qualification précédente. Dans le cas d'un tri des jetons de couleur bleue, le premier sous-ensemble regroupe des jetons qui ont la même couleur, le sous-ensemble des jetons bleus ; le second sous-ensemble regroupe des jetons de couleurs différentes. La propriété qui a servi à les constituer en ensemble est le fait de ne pas avoir la couleur bleue.

Nous ne sommes plus dans le cas d'une relation d'équivalence. En effet, nous ne sommes pas capable de produire une relation binaire qui permettrait de construire les deux sous-ensembles considérés ci. Donc le traitement 2 ne peut pas être qualifié de classement.

Munis de ces éléments, nous sommes capables par exemple d'imaginer les consignes qui peuvent être données pour aboutir à certaines organisations.



Photo 10: Exemple de collection organisée par une consigne

Dans l'exemple ci-dessus, une consigne qui permet de produire cette organisation est :

- Trier les jetons jaunes



Photo 11: Exemple de collection organisée par une consigne

Par contre, dans l'exemple ci-dessus, plusieurs consignes peuvent permettre de produire une organisation de ce type :

- Classer les jetons par couleur
- Trier les jetons bleus
- Trier les jetons jaunes

L'existence de cette multiplicité de consignes possibles est un cas particulier qui est lié à la nature de la collection initiale, qui ne comportait des jetons que de deux couleurs différentes. Nous retrouvons ici la proximité de sens des mots « trier » et « classer » dans la langue française : dans certains cas, l'action réalisée aboutit au même résultat.

2.2 Analyse des stratégies de fabrication des collections

Nous nous intéressons maintenant à la nature des procédures qui sont mises en œuvre pour réaliser de manière effective le tri d'une collection d'objets.

Pour réaliser ces descriptions, nous nous appuyons sur des observations en classe. Comme pour le dénombrement par comptage des jetons, ces observations ont été répétées un grand nombre de fois. Elle sont donc d'une grande banalité.

Pour mettre en évidence les phénomènes que nous étudions, nous choisissons d'élaborer des reconstitutions e ces observations





Il n'y a pas d'enjeu sur l'existence d'occurrences de ces observations. Pour ces reconstitutions, nous dépouillons la situation des habillages qui sont parfois présents en classe. Nous constituons ainsi des vidéos qui permettent d'avoir des images de l'ensemble de états successifs de la collection dont nous contrôlons la qualité » .

L'enjeu porte sur la nature des mécanismes en œuvre dans la situation.



Pour produire ces transcriptions, nous nous appuyons sur la même technique que celle que nous avons mise en œuvre pour les situations observées dans ce chapitre, à savoir des suites de photos des différents états de la collection de jetons permettant de comprendre les mécanismes mis en œuvre.



Dans les deux cas qui vont être décrits ici, la collection de jetons avec laquelle la tâche est réalisée est la même. Les deux états initiaux sont donc proches, à défaut d'être parfaitement identiques. Les jetons sont étalés mélangés sur une table. La consigne est aussi la même. Il s'agit de « trier les bleus ».

2.2.1 Première transcription d'une observation d'un tri

	
<p><i>Etat initial</i> : les jetons sont posés sur la table. Ils sont mélangés.</p>	<p><i>Etat intermédiaire 1</i> : le sujet saisit des jetons qui vérifient la propriété recherchée et il les extrait du tas de départ. Il commence donc à constituer l'ensemble des jetons bleus.</p>
	
<p><i>Etat intermédiaire 2</i> : le sujet continue d'extraire des jetons bleus du tas de départ. L'ensemble des jetons bleus augmente à chaque étape.</p>	<p><i>Etat final</i> : le sujet a terminé le traitement qui lui était demandé..</p>

2.2.2 Deuxième transcription d'une observation d'un tri

	
<p><i>Etat initial</i> : les jetons sont posés sur la table. Ils sont mélangés.</p>	<p><i>Etat intermédiaire 1</i> : le sujet saisit les jetons dans le tas de départ. Pour chacun des jetons saisis, il le place dans l'un des deux tas qu'il est en train de constituer.</p>

	
<p><i>Etat intermédiaire 2 : le sujet continue de saisir les jetons dans le tas de départ. Les deux autres tas augmentent au fur et à mesure que l'on avance dans le traitement.</i></p>	<p><i>Etat final : le sujet a terminé le traitement qui lui était demandé. L'élaboration de l'ensemble des jetons bleus est terminée.</i></p>

2.2.3 Analyse des différentes stratégies de tri

Les observations de la mise en œuvre de tri ont été nombreuses. Les occurrences du type de la première ont été plus nombreuses que les occurrences du type de la seconde.

Les deux stratégies sont des stratégies gagnantes (dans le sens où elles peuvent permettre de gagner). A l'issue du travail, les jetons bleus sont bien triés dans les deux cas. Intéressons-nous aux ensembles qui sont fabriqués dans chacun des deux cas.

2.2.3.1 Nombre d'ensembles

Commençons par l'étude du nombre d'ensembles qui apparaissent dans chacune des deux stratégies. Dans les deux cas l'état initial se caractérise par la présence d'un seul ensemble et l'état final par la présence de deux ensembles.

Les états initiaux et finaux sont identiques dans les deux cas. L'étude du nombre d'ensembles fabriqués lors des états intermédiaires permet d'identifier une première différence.

Dans la première stratégie, deux ensembles sont présents dans les états intermédiaires. Dans la seconde stratégie, ces ensembles sont au nombre de trois.

2.2.3.2 Nature des ensembles fabriqués

Examinons maintenant leur nature pour comprendre la différence entre les deux stratégies.

Dans la seconde stratégie, les trois ensembles se structurent de la manière suivante : nous avons deux ensembles que le sujet fabrique au fur et à mesure : le tas des jetons bleus et le tas des jetons non bleus. Ils se constituent par ajouts successifs de nouveaux éléments dans

chacun des deux ensembles. Dans le même temps, le troisième tas diminue par élimination successive des jetons qui sont déplacés dans les autres tas les uns après les autres.

Dans la première stratégie, les deux ensembles se structurent de la manière suivante : le premier qui se fabrique est l'ensemble des jetons bleus. Le second ensemble diminue lui aussi à chaque itération.

2.2.3.3 Condition d'arrêt

Dans la seconde stratégie, la diminution à chaque itération du troisième tas permet d'identifier une condition d'arrêt de l'algorithme. L'algorithme est terminé quand le troisième tas est vide.

Dans la première stratégie, le second ensemble n'a pas vocation à devenir vide. La condition d'arrêt de l'algorithme est de nature différente.

Dans la seconde stratégie, l'algorithme se termine quand le tas initial est devenu vide. Ce tas constitue à chaque instant l'ensemble des jetons que le sujet n'a pas encore traité. Les deux autres tas constituent de fait le complémentaire de cet ensemble, à savoir l'ensemble des éléments qui ont été triés.

Dans la première stratégie, le tas des jetons bleus correspond aux éléments qui ont bien été traités. Pour autant, le second ensemble comporte des éléments que le sujet a repéré comme étant non bleus (à ce titre, nous pouvons considérer qu'ils ont été traités, puisque le sujet ne les a pas transportés dans l'ensemble des bleus), mais également des éléments que le sujet n'a pas encore examinés (puisque à un instant donné il reste des jetons bleus dans cet ensemble). Le statut des éléments de cet ensemble est donc plus ambivalent. L'observateur ne peut pas à chaque instant donner un statut (traité/ non traité) à chaque élément de la collection. Éléments traités et éléments non encore traités se mélangent donc dans cet ensemble.

2.2.3.4 Désignation des stratégies

La seconde stratégie présente un caractère systématique dans le traitement des éléments, puisque tous les jetons sont saisis une seule fois. La saisie est l'indicateur visuel du traitement réalisé par le sujet. Et dans ce cas, le traitement consiste pour chaque jeton à le mettre soit dans le tas des bleus, soit dans le tas des non-bleus. Nous nommons cette stratégie tri systématique, en référence au caractère systématique des gestes qui sont réalisés pour constituer les deux collections de *jetons*.

La première stratégie ne présente pas *a priori* le même caractère systématique. En effet, certains jetons ne sont jamais saisis par le sujet. Nous pourrions penser qu'ils ne sont pas traités. Or dans le cas de cette observation, le résultat produit est correct. Cela signifie que le traitement réalisé est de nature différente. Dans ce cas, le traitement consiste à laisser le jeton où il se trouve s'il est non bleu et à l'extraire de l'ensemble dans lequel il se trouve si ce jeton est bleu. Et il faut faire cela tant que des jetons bleus sont présents dans le tas de départ. Nous nommerons cette stratégie tri par extraction, en référence aux gestes qui sont réalisés pour constituer la collection des jetons bleus.

2.2.3.5 Description algorithmique des deux stratégies

Pour compléter cette étude, donnons une description algorithmique de chacune des deux stratégies.

Description algorithmique du tri par extraction :

Tant qu'il reste des jetons bleus dans le tas de départ

Extraire un jeton bleu

Le poser à côté des autres jetons bleus

Description algorithmique du tri systématique :

Tant qu'il reste des jetons dans le tas de départ

Prendre un jeton

S'il est bleu, le poser à côté des autres jetons bleus

Sinon le poser à côté des autres jetons qui ne sont pas bleus

L'examen des différences entre des deux descriptions permet de mieux comprendre encore les différences entre les deux algorithmes.

Dans le tri par extraction, il n'est pas nécessaire de concevoir et de construire explicitement l'ensemble des non-bleus. Celui-ci se fabrique presque implicitement, sans qu'à aucun moment le sujet ne fasse une action spécifique pour l'élaborer. Ce n'est pas le cas dans le tri systématique puisque le sujet peut être amené à placer dans le même ensemble un jeton

jaune et un jeton rouge pour la seule raison qu'ils vérifient tous les deux la propriété d'être non bleu.

Dans le tri systématique, l'algorithme s'arrête quand le tas des éléments non traités devient vide. Le test d'arrêt utilisé dans l'algorithme du tri par extraction nécessite de savoir que, dans un ensemble donné, il n'y a plus d'éléments à extraire. Le geste d'étalement des jetons a pu contribuer à rendre visibles des jetons qui pouvaient être cachés sous d'autres. C'est la perception qui contribue à provoquer l'arrêt de l'algorithme. Il peut exister des conditions qui rendent la décision de l'arrêt plus difficile.

2.2.4 Stratégies de classement

Appliquons notre modèle de stratégies à une situation proche de celle que nous venons d'étudier. Considérons la même collection de jetons de couleur, à laquelle nous souhaitons appliquer un autre traitement : un classement.





Que montrent nos observations de cette situation ?

Là encore, pour exhiber les organisations qui sont mises en œuvres, nous nous appuyons sur des reconstitutions d'observations de classe. Ces observations ont été réalisées de nombreuses fois et présentent toutes un caractère très banal. Nos transcriptions ne font apparaître que les ensembles fabriqués lors des différentes étapes.

Nous considérons la même situation initiale, celle d'une collection de jetons de couleur posés sur une table et qu'il faut classer par couleur. Les jetons peuvent être de quatre couleurs différentes : jaunes, bleus, verts ou rouge.

Si nous devons décrire en termes d'organisation ce que le sujet doit réaliser, nous dirons que la réalisation correcte du classement par couleur doit structurer la collection en une partition de quatre sous-ensembles (puisque'il y a quatre couleurs de jetons différentes).

2.2.4.1 Première transcription d'une observation d'un classement

	
<p><i><u>Etat initial</u> : les jetons sont posés sur la table. Ils sont mélangés.</i></p>	<p><i><u>Etat intermédiaire 1</u> : le sujet saisit des jetons uns à uns et les regroupe en fonction de leur couleur. Au moment où cette photo est prise, des jetons de trois couleurs (bleu, jaune et vert) ont déjà été saisis.</i></p>
	
<p><i><u>Etat intermédiaire 2</u> : le sujet continue de saisir les jetons uns à uns. Au moment où la photo est prise, des jetons des quatre couleurs différentes ont déjà été saisis.</i></p>	<p><i><u>Etat final</u> : le sujet a terminé le traitement qui lui était demandé. Les jetons ont bien été classés par couleur.</i></p>

Dans cette observation, les jetons sont saisis aléatoirement, indépendamment de leur couleur. La rencontre avec une nouvelle couleur entraîne la fabrication d'un nouvel ensemble. Quand nous regardons le nombre maximum d'ensembles présents lors du traitement, nous constatons que ce nombre est supérieur d'une unité au nombre de couleurs présentes dans la situation.







Pour une collection comportant des jetons de quatre couleurs différentes, la mise en œuvre de cette stratégie fait apparaître au plus cinq ensembles lors du traitement.

Cette stratégie repose sur l'examen systématique de chacun des jetons. A chaque instant, nous pouvons identifier où se trouvent les jetons qui ont été traités et où sont ceux qui restent à traiter. Les jetons déjà traités se trouvent dans les tas de jetons qui constituent des ensembles en cours de construction d'éléments classés par couleur. Les jetons qui restent à traiter sont

ceux qui sont présents dans le même espace de départ (puisque le sujet ne déplace les jetons que pour les traiter). Au-delà des différents tas qui sont fabriqués, notre espace est structuré en deux sous-ensembles disjoints : les éléments traités et les éléments non encore traités.

De ce point de vue, la stratégie qui est mise en œuvre repose sur les mêmes principes organisateurs que la stratégie de tri systématique. Par analogie des mécanismes d'organisation, nous qualifions ce classement de classement systématique.

2.2.4.2 Deuxième transcription d'une observation d'un classement

	
<p><i>Etat initial : les jetons sont posés sur la table. Ils sont mélangés.</i></p>	<p><i>Etat intermédiaire 1 : le sujet saisit des jetons uns à uns et les regroupe en fonction de leur couleur. Au moment où cette photo est prise, des jetons de deux couleurs (bleu et jaune) ont déjà été saisis.</i></p>
	
<p><i>Etat intermédiaire 2 : le sujet continue de saisir les jetons uns à uns. Au moment où la photo est prise, un troisième ensemble a été constitué, l'ensemble des jetons verts.</i></p>	<p><i>Etat intermédiaire 3 : le sujet continue de saisir les jetons uns à uns. Au moment où la photo est prise, les trois ensembles de jetons se remplissent au fur et à mesure des saisies successives.</i></p>
	
<p><i>Etat intermédiaire 4 : le sujet continue de saisir les jetons uns à uns. Au moment où la photo est prise, il y a toujours trois ensembles de jetons de la même couleur qui continuent de se remplir.</i></p>	<p><i>Etat final : le sujet a terminé le traitement qui lui était demandé. Les jetons ont bien été classés par couleur.</i></p>

Nous disposons d'un indicateur observable pour repérer que la stratégie qui est mise en œuvre dans cette seconde observation n'est pas la même que lors de la première. Dans cette observation, à aucun moment nous ne constatons la présence de cinq ensembles. Il n'y a








jamais plus de quatre ensembles dans la mise en œuvre de cette stratégie. Ce n'est donc pas un classement systématique. Il n'y a pas dans cette stratégie de cinquième ensemble.

Le cinquième ensemble était dans le cas précédent l'ensemble des éléments qui restaient à traiter. Nous pouvons repérer des éléments pour lesquels nous pouvons dire qu'ils ont bien été traités. A l'étape intermédiaire 4, trois tas de jetons, classés par couleur, peuvent être distingués. Ces trois ensembles ne comportent que des éléments qui ont été traités. Le statut des éléments du quatrième ensemble est moins clair. Figurent dans cet ensemble des jetons bleus, verts et jaunes. Ces jetons n'ont pas encore rejoint l'ensemble dans lequel ils doivent figurer pour que nous puissions dire que le traitement est terminé. Nous pouvons affirmer que ces jetons n'ont pas encore été traités. Le statut des jetons rouges est moins clair. Ils n'ont pas vocation à être déplacés. L'ensemble dans lequel ils figurent a vocation à devenir l'ensemble des jetons rouges. Il n'est pas possible de déterminer à chaque instant la nature de leur statut. Le quatrième ensemble comporte donc des jetons qui ont vocation à être déplacés et d'autres non.

L'algorithme de classement se termine quand tous les jetons bleus, jaunes ou vert auront été extraits du tas de jetons de départ. A ce moment-là, nous pouvons affirmer que le classement est terminé et que le quatrième ensemble est l'ensemble des jetons rouges.

Par analogie avec les stratégies de tri, nous qualifions le classement mis en œuvre dans cette seconde observation de classement par extraction. L'observation de ce mécanisme d'extraction se caractérise par la constitution d'un ensemble qui mêle éléments traités et éléments non encore traités.

2.2.4.3 Troisième transcription d'une observation d'un classement

	
<p><u>Etat initial</u> : les jetons sont posés sur la table. Ils sont mélangés.</p>	<p><u>Etat intermédiaire 1</u> : le sujet saisit des jetons uns à uns. Ces jetons sont jaunes. Ils sont regroupés dans un tas, le tas des jaunes.</p>
	
<p><u>Etat intermédiaire 2</u> : le sujet continue de saisir les jetons uns à uns. Au moment où la photo est prise, nous pouvons dire que tous les jaunes ont été extraits du tas des jetons de départ. Le sujet a trié les jaunes.</p>	<p><u>Etat intermédiaire 3</u> : le sujet continue de saisir les jetons uns à uns. Ces jetons sont bleus. Ils sont regroupés dans un nouveau tas, le tas des bleus.</p>
	
<p><u>Etat intermédiaire 4</u> : le sujet continue de saisir les jetons uns à uns. Au moment où la photo est prise, nous pouvons dire que tous les bleus ont été extraits du tas des jetons de départ. Le sujet a trié les bleus.</p>	<p><u>Etat intermédiaire 4</u> : le sujet continue de saisir les jetons uns à uns. Ces jetons sont verts. Ils sont regroupés dans un nouveau tas, le tas des verts.</p>
	
<p><u>Etat final</u> : le sujet a terminé le traitement qui lui était demandé. Au moment où la photo est prise, nous pouvons dire que tous les verts ont été extraits du tas des jetons de départ. Le sujet a trié les verts. Les jetons ont bien été classés bien par couleur.</p>	

Dans cette observation, nous ne voyons pas émerger plus de quatre ensembles. La stratégie mise en œuvre présente donc des points communs avec le classement par extraction décrit précédemment.

Dans cette stratégie, le sujet met en œuvre une suite de tris par extractions successives. Les jetons jaunes sont triés, puis c'est au tour des jetons bleus et enfin des verts. A l'issue du premier tri, le tas des jetons de départ s'interprète comme le tas des non bleus. A l'issue du second tri, c'est le tas des jetons qui sont non jaunes, sachant que ces jetons étaient aussi non bleus. Une caractérisation en termes de négation se rajoute à l'ensemble des éléments de départ au fur et à mesure que les tris successifs sont réalisés. Finalement, l'ensemble des jetons rouges est constitué comme étant l'ensemble des jetons ni bleus, ni jaunes, ni verts.

Cette stratégie constitue pour nous une variation de la stratégie précédente, puisque ce sont des suites d'extractions qui sont réalisées.

Cette dernière observation nous donne l'occasion de revenir sur la nature de la relation entre tri et classement que nous avons abordée à travers l'étude des définitions des termes.

2.2.4.4 Relation entre le tri et le classement

La dernière stratégie de classement examinée (classement comme tris successifs) pourrait par ailleurs faire apparaître le classement comme une généralisation du tri.

C'est une interprétation possible. Nous avons effectivement observé des sujets qui mettent en œuvre des tris par extractions successives pour classer des jetons par couleur.

Mais nous avons aussi observé le mécanisme inverse. Plongés dans une situation de tri (« trier les bleus »), nous avons observé des sujets qui commencent par classer les jetons par couleur avant de regrouper les jetons non-bleus ensemble pour terminer le tri. Le tri apparaît ici comme une variation du classement.

Nous avons même observé des sujets qui ne réalisaient pas cette dernière étape (fabriquer l'ensemble des non-bleus à partir des différents ensembles de jetons de couleur). Il existe donc des sujets qui savent classer, sans savoir trier.

Pour conclure l'étude des stratégies de tri et de classement, nous venons de mettre en évidence deux stratégies différentes : une stratégie systématique et une stratégie par extraction.

3. Situations de tri, de classement et d'énumération

Nous allons maintenant interroger le rapport entre le tri et le classement que nous venons d'étudier et l'énumération qui est notre objet de recherche.

Pour démarrer ce chapitre, nous avons étudié deux situations, le dénombrement par comptage d'une collection et le jeu des allumettes. Nous savons que l'énumération est requise dans la mise en œuvre d'une stratégie gagnante pour ces deux situations.

Nous avons ensuite étudié le tri et le classement, ce qui nous a conduit à observer le nombre et la nature des sous-ensembles, construire des stratégies et interroger la nature du traitement.

Nous allons utiliser les connaissances que nous avons développées sur le tri et le classement pour avancer dans notre compréhension de l'énumération, en essayant de rapprocher le dénombrement et le jeu des allumettes de tri et du classement.

3.1 Etude des sous-ensembles

L'étude du tri et du classement nous a conduit à observer les sous-ensembles présents dans la situation. Cette observation avait une double focale :*

- L'observation de l'état initial et de l'état final nous a aidé à caractériser le traitement.
- L'observation des sous-ensembles pendant la réalisation de la tâche nous a aidé à construire un modèle des stratégies.

Appliquons cette double focale à la situation du dénombrement et des allumettes.

Dans le cas du dénombrement par comptage d'une collection de jetons ou bien de la situation des allumettes, l'observation de l'état final et de l'état initial montre que la collection est organisée en un seul et même espace.

Nous avons mis en évidence que, lors d'états intermédiaires, deux espaces peuvent exister. Les deux espaces dont il est question quand nous dénombrons une collection de jetons ou nous jouons au jeu des allumettes avec une collection de boîtes sont des espaces qui permettent de séparer spatialement et fonctionnellement les éléments traités des éléments non encore traités.

Le caractère « en cours » du traitement fait apparaître un sous-ensemble de plus que lors de l'état initial ou de l'état final.

Nous retrouvons donc, dans certaines des stratégies qui sont mises en œuvre dans les situations de tri et de classement, des caractéristiques présentes dans les situations où nous avons considéré que l'énumération intervient.

Il y a donc une intersection non vide entre les questions d'énumération et les situations de tri et de classement.

3.2 Dans quelles stratégies une énumération est-elle mise en œuvre ?

Examinons les différentes stratégies de tri et de classement et la place de l'énumération dans celles-ci.

Dans la stratégie de tri ou de classement systématique, chaque jeton est saisi une fois et une seule par le sujet avant d'être placé dans l'ensemble correspondant à ses caractéristiques :

- dans l'ensemble des jetons de la même couleur dans le cas d'un classement de jetons par couleur
- dans l'ensemble des jetons bleus ou des jetons non bleus dans le cas d'un tri des jetons bleus.

Chaque jeton est donc bien traité une fois et une seule.

Le sujet met donc en œuvre une énumération de la collection de jetons quand il utilise la stratégie de tri ou classement systématique.

Une caractéristique de cette stratégie est que chaque jeton est saisi une fois et une seule.

Dans la stratégie de tri ou de classement par extraction, nous ne pouvons pas affirmer que chaque élément est bien traité une fois et une seule. Cette stratégie repose sur le fait qu'un certain nombre d'éléments de l'ensemble de départ ne vont pas être saisis par le sujet pour être transportés dans un autre espace. Il n'est donc pas possible de quantifier les traitements effectués sur les éléments de cette collection. Par contre, nous pouvons garantir dans ce cas que chaque jeton est saisi au plus une fois.

Le sujet ne met pas en œuvre une énumération de la collection de jetons quand il utilise la stratégie de tri ou classement systématique.

3.3 Traitement(s) et énumération

Nous avons utilisé le mot traitement pour décrire l'action réalisée sur une collection d'objets : nous avons parlé de classer des jetons par couleur, trier les jetons bleus, dénombrer une collection de jetons ou mettre une allumette dans une boîte.

Nous avons cherché à décrire de manière précise certains des gestes qui étaient mis en œuvre pour traiter ces collections.

Cela nous a amené à produire des descriptions algorithmiques qui se présentaient toutes sous la forme d'une structure itérative dans laquelle étaient décrites les actions élémentaires à réaliser sur chacun des éléments de la collection.

Ainsi, dans l'algorithme de dénombrement des jetons, la suite d'actions à réaliser était :

Choisir un élément

Lui attribuer le mot suivant de la comptine

Dans l'algorithme de traitement de la situation des allumettes, la suite des actions à réaliser était :

Choisir un élément boîte

Mettre une allumette à l'intérieur

Dans l'algorithme de tri systématique des jetons bleus, la suite d'actions à réaliser a été présentée sous la forme :

Prendre un jeton

S'il est bleu le poser à côté des autres jetons bleus

Sinon le poser à côté des autres jetons qui ne sont pas bleus

Chacun des algorithmes se décompose en deux parties.

Examinons la première partie de chacun de ces algorithmes.

Nous sommes en train d'étudier les situations dans lesquelles les collections sont constituées d'éléments déplaçables. Dans ce type de configurations matérielles modifiables, prendre un jeton est une manifestation du choix qui est réalisé. L'emploi du mot « choisir » dans l'algorithme de dénombrement relève de la volonté de produire un algorithme qui puisse s'affranchir le plus possible des conditions matérielles dans lesquelles ce dénombrement est considéré. En effet, le dénombrement par comptage concerne aussi les configurations non modifiables.

La première partie de la suite d'actions est donc toujours une indication qui vise à indiquer que la suite de l'algorithme concerne un élément particulier de la collection qui vient d'être choisi via cette première instruction.

Dans l'algorithme de tri, l'emploi du mot « prendre » plutôt que du mot « choisir » vise à traduire la prise en compte de la réalité matérielle de la situation. Le choix s'exerce par la préhension de l'objet. Nous décidons donc de nous affranchir des conditions matérielles particulières en choisissant de remplacer « prendre » par « choisir ».

Examinons maintenant la seconde partie des algorithmes.

La seconde partie de la suite d'action donne une description de ce qu'il convient de faire à chacun des éléments considérés. Il faut donc attribuer un mot de la comptine à un élément, mettre une allumette dans une boîte ou placer un jeton à un endroit particulier. Il y a donc bien ici un traitement spécifique qui est réalisé sur chacun des éléments de la collection.

Nous pouvons synthétiser ces trois algorithmes dans une forme unique pour décrire la suite d'actions:

Choisir un élément de la collection

Traiter cet élément

Les différentes situations étudiées se ressemblent donc du point de vue algorithmique.

Revenons sur une distinction qu'il nous semble important d'exhiber ici.

Nous utilisons le mot traiter dans deux sens différents.

- Dans un cas, il s'agit de désigner l'action réalisée sur la collection. Nous disons « trier une collection de jetons ». Le traitement présente ici un caractère global, puisque le mot porte sur la collection.

- Dans un autre cas, il s'agit de désigner l'action réalisée sur un élément particulier de la collection. Nous disons qu'il faut placer le jeton à un endroit particulier quand il est trié. Le traitement présente alors un caractère local, puisque le mot porte sur un élément de la collection.

Du point de vue du sujet, pour traiter (globalement) une collection, il faut traiter (localement) chaque élément de cette collection. Quand une collection est traitée, elle peut dans certains cas être énumérée. C'est ce que nous avons montré dans les exemples précédents.

Si nous voulons observer l'énumération d'une collection, il faut que cette énumération ait lieu dans cette situation qui nécessite un traitement des éléments de cette collection. Peu importe ce traitement, mais si nous voulons pouvoir l'observer, il faut qu'il soit observable. Un traitement qui consiste à ne rien faire sur les éléments d'une collection ne permet pas à un observateur d'observer l'énumération de celle-ci. Le caractère distinctif du traitement est ce qui permet à l'observateur de percevoir que le sujet est en train de considérer un élément de la collection, donc peut-être de l'énumérer.

A ce stade de notre étude, nous cherchons à construire des situations qui puissent nous permettre d'observer des mises en œuvre d'énumération de collections dans des configurations modifiables.

Nous venons d'étudier le tri en mettant en évidence deux stratégies, le tri systématique et le tri par extractions.

Nous venons de montrer que les situations de tri systématique permettent d'observer des énumérations de collections.

Trier les jetons bleus n'est pas une situation dans laquelle nous observons de manière régulière la mise en œuvre d'une stratégie de tri systématique.

.Les situations de tri sont donc un bon candidat pour observer des énumérations, sous réserve que la stratégie de tri systématique soit nécessaire à la réussite, ou tout au moins plus favorable qu'elle ne l'est dans les contextes que nous avons présentés jusqu'à présent.

4. Production de situations favorisant le tri systématique

Pour construire une situation dont la résolution favorise la mise en œuvre de la stratégie de tri systématique, nous commençons par revenir sur les raisons qui font que la stratégie de tri par extraction est souvent rencontrée pour trier dans le cas de la situation des jetons de couleurs.

4.1 Elaboration des caractéristiques de la situation

Nous présentons ici les caractéristiques dont notre situation doit disposer. Pour cela, nous commençons par revenir sur certaines des caractéristiques des situations de tri favorables à la mise en œuvre de la stratégie par extractions.

4.1.1 Les caractéristiques du tri par extraction

Dans la situation du tri des jetons bleus d'une collection de jetons de couleurs étalés sur un support, la stratégie de tri par extraction est employée de manière massive.

La caractéristique de la couleur d'un jeton est immédiatement perceptible. Ce caractère « immédiatement perceptible » rend la saisie de chaque élément inutile pour identifier ses caractéristiques et en déduire la nature du traitement qui doit être appliqué. La décision de traiter ou pas un élément est prise en appui sur la perception visuelle.

Ce caractère « immédiatement perceptible » génère aussi des bénéfices sur le contrôle de la fin de l'algorithme. La réponse à la question « reste-t-il encore des jetons bleus ? » est immédiate. Nous percevons très facilement s'il reste ou non un jeton bleu dans un tas de jetons bien étalés sur une table.

C'est donc l'appui sur la perception visuelle qui induit le recours à la stratégie de tri par extraction.

4.1.2 Limiter la perception du critère de tri

Dans la situation que nous construisons, il faut donc limiter l'appui sur la perception pour repérer qu'un élément de la collection dispose ou non du critère de tri cherché. Il faut donc construire une situation dans laquelle le critère de tri est peu visible. Cela élimine le recours à des critères de tri qui intègrent des aspects liés à la couleur qui sont faciles à repérer perceptivement.

Une autre manière d'affaiblir la perception du critère de tri est de diminuer la taille des objets. Si les objets sont petits, ils sont plus difficiles à distinguer les uns des autres. Le critère de tri associé aux objets est lui aussi moins facilement perceptible.

Résumons les décisions prises sur la construction de la situation. Ces objets doivent être petits et peu différenciables.

4.1.3 Stabilité des objets

Pour énumérer une collection d'objets, il faut contrôler à chaque instant le statut traité/ non traité de chacun de ces objets. Dans le cas d'une d'objets déplaçables, cela peut passer par la fabrication d'espaces différenciés qui permettent de rendre compte de cette différence de statut.

Nous souhaitons donc que le sujet construise ces différents espaces et donc que la séparation spatiale entre les différents ensembles ne soit pas réalisée sans action explicite du sujet. Il nous faut donc recourir à des objets sur lesquels il faudra produire une action spécifique pour qu'ils occupent une place choisie.

Nous cherchons donc des objets qui ne conservent pas spontanément la place qu'ils occupent quand ils sont posés. Nous voulons qu'une action consciente du sujet soit réalisée pour que cette place soit conservée. Il faut cependant que ces objets disposent d'une position dans laquelle ils soient en équilibre.

4.1.4 La question de la validation

Il s'agit de construire une situation qui favorise de mettre en œuvre une stratégie de tri systématique. La mise en œuvre d'un tri systématique signifie d'une part que la nature du traitement est un tri et d'autre part que la collection des objets considérés sera énumérée. Le sujet va donc mettre en œuvre des connaissances d'énumération pour réaliser le tri.

Pour autant, nous souhaitons construire une situation dans laquelle la connaissance utile à la validation ne soit pas la connaissance visée par la situation. Une fois le travail terminé, il ne faut pas que le sujet soit contraint d'énumérer les collections construites pour valider son action.

Les connaissances mises en œuvre dans un tri et dans son contrôle ne sont pas tout à fait de même nature. Cependant, elles nous apparaissaient suffisamment proches pour que nous essayons de produire une situation qui puisse proposer un dispositif de validation, moins consubstantiellement lié à la connaissance qui était mise en œuvre dans la situation de fabrication de la collection.

Il faut donc pouvoir imaginer un processus de validation assez différent du processus mis en œuvre lors de l'action. Nous cherchons à construire une situation qui ne « boucle » pas sur elle-même. (Margolinas, 2004)

4.2 La situation des perles « plombées »

4.2.1 Elaboration de la situation

Présentons maintenant la situation que nous avons construite et examinons dans quelle mesure elle respecte les contraintes que nous nous sommes fixées.

La collection avec laquelle nous décidons de travailler est une collection de perles cylindriques.

Nous avons fabriqué une collection de perles dont certaines sont creuses alors que d'autres ne le sont pas. Pour ces dernières, un bout de fil électrique rigide en cuivre a été inséré dans l'orifice des perles.

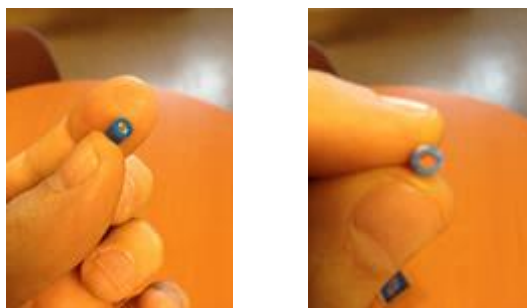


Photo 12 : une perle plombée et une perle creuse

Il y a donc formellement deux catégories de perles : des perles pleines et des perles qui ne le sont pas (ou bien les perles creuses et celles qui ne le sont pas). La collection peut donc être triée.

Le milieu matériel que nous avons construit présente des caractéristiques tout à fait différentes du milieu de la situation des jetons.

Les objets en jeu dans cette situation sont beaucoup plus petits que les jetons. Percevoir visuellement qu'une perle est pleine est moins facile que percevoir qu'un jeton est bleu. Le critère qui permet d'opérer le tri est beaucoup moins visible que la couleur. Il peut nécessiter un examen beaucoup plus attentif que celui qui est mis en œuvre dans la situation des jetons.

Moins faciles à attraper qu'un jeton, les perles peuvent rouler et tomber de la table sur laquelle elles sont manipulées. Elles peuvent cependant être placées dans un état stable en étant posées sur la tranche.



Photo 13 : perle en état stable et perle en état instable

Par ailleurs, nous nous sommes beaucoup questionnés sur la nature du support dans lequel étaient présentées les perles plombées. Nous avons finalement opté pour une présentation de la collection dans une boîte qui présente la caractéristique d'être constituée de deux parties quasi-identiques.

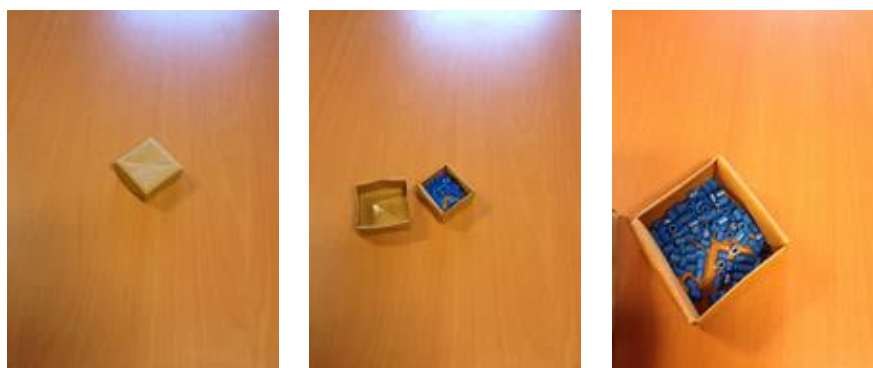


Photo 14 : boîte dans laquelle sont présentées les perles

Les deux parties de la boîte ne sont pas complètement identiques (puisque l'une s'emboîte dans l'autre). Elles présentent cependant des caractéristiques proches. Elles peuvent constituer chacune le cas échéant un récipient pour accueillir une collection de perles, permettant ainsi pour le sujet d'avoir une solution au problème posé par l'instabilité des objets (neutralisant ainsi l'effet du caractère qui roule).

Nous choisissons aussi de donner au sujet la boîte non ouverte. Il est invité à ouvrir la boîte pour observer les objets qu'elle contient. Aucune indication ne lui est donnée sur ce qu'il convient de faire du morceau qu'il peut considérer comme le couvercle.

Ces caractéristiques matérielles sont tout à fait importantes pour nous du point de vue expérimental, car nous venons de trouver, par le choix de notre collection de référence, un moyen d'observer et surtout de mieux comprendre la nature des actions réalisées par les sujets sur les éléments d'une collection. En ayant rendu le critère du tri moins visible, nous pensons contraindre le sujet à réaliser des gestes qu'il ne faisait pas dans la situation des jetons, et donc ainsi pouvoir mieux interpréter les actions réalisées.

Pour ce qui est de la construction d'une validation non basée sur la connaissance visée, nous nous sommes appuyés sur les caractéristiques physiques des deux catégories de perles. Quand une perle plombée est immergée, elle coule. Quand une perle non-plombée est immergée, elle flotte. Nous avons donc ici le moyen de contrôler que chacune des deux collections produites à l'issue du tri sont bien constituées d'objets qui ont les mêmes propriétés physiques :

- quand la collection des perles plombées est immergée, si le tri a été correctement réalisé, aucune perle ne doit flotter
- quand la collection des perles creuses est immergée, aucune perle ne doit couler.

C'est l'absence d'éléments qui flottent dans un cas et ne flottent pas dans l'autre qui valide le caractère homogène de chacun des ensembles constitués. Et c'est le caractère homogène de chacun des deux sous-ensembles qui permet de valider le tri.

Il s'agit ici certes d'un tri, mais réduit à sa plus simple expression puisque la validation repose sur le fait que le résultat du tri ne va produire qu'un seul ensemble, et donc que le sous-ensemble des objets maltraités est vide, la constatation du caractère vide de l'ensemble des éléments qui ne vérifient pas la propriété relevant d'une perception élémentaire.

4.2.2 Dispositif expérimental

Nous allons maintenant décrire notre dispositif expérimental, en présentant successivement la consigne donnée, l'organisation matérielle de la vérification et les consignes auxiliaires sur l'ouverture de la boîte.

4.2.2.1 La consigne

Montrer deux perles (plein / vide) à l'enfant dans ma main « *Tu vois j'ai des perles dans ma main, regarde les tu peux les toucher est-ce qu'elles sont pareilles ? Tout à fait pareilles ?* »

Reprendre le vocabulaire employé par l'enfant (bouché, plein, troué ou autre) Il y a des perles vides (cf. vocabulaire enfant) et des perles pleines (cf. vocabulaire enfant).

« *Maintenant je vais te demander de faire un travail, je vais te donner des perles dans cette boîte, il y en a des pleines et des vides. Il faut que tu les tries.* »

« *Est-ce que tu sais ce que ça veut dire trier ? Si oui vas-y. Si non tu vois, dans la boîte elles sont toutes mélangées, il y a des pleines et des vides. On dit qu'elles sont triées quand elles ne sont plus mélangées, quand les pleines sont seulement avec des pleines et les vides sont seulement avec des vides.* »

« *Quand tu penses que les perles sont triées, tu me le dis, on vérifiera* »

Donner la boîte fermée à l'enfant. « *Voilà la boîte, tu peux l'ouvrir* ». Laisser l'enfant faire ce qu'il veut avec le couvercle de la boîte. « *Renverse les perles sur la table sans en faire tomber* ». Laisser l'enfant faire ce qu'il veut avec la boîte.

Quand l'enfant dit qu'il a fini, on lui dit « *tu es sûr ? Elles ne sont plus mélangées ?* »

4.2.2.2 La vérification

Mettre la perle vide dans l'eau : « *Tu vois je mets la perle vide dans l'eau qu'est-ce qui se passe ? Elle flotte* »

Mettre la perle pleine dans l'eau : « *Tu vois je mets la perle pleine dans l'eau qu'est-ce qui se passe ? Elle coule.* »

« *Alors maintenant il faut mettre toutes les perles pleines [vides] dans ce verre.* » Dans les cas où les sous-ensembles sont nettement séparés, on peut aider l'enfant à réaliser la tâche matérielle qui consiste à mettre les perles dans les verres, si ce n'est pas le cas il faut laisser faire, en tout cas jusqu'au moment où (éventuellement) on se retrouve dans une situation où les sous-ensembles sont clairs.

Éventuellement on peut offrir à nouveau une possibilité de trier « *Si tu penses qu'il faut continuer à trier tu peux le faire maintenant tu nous diras quand tu auras fini* ».

Avant de mettre l'eau, « *je vais mettre de l'eau dans ce verre, à ton avis que doit-t-il se passer ?* » Si l'enfant répond on verse, s'il ne répond pas « *Dans ce verre tu as mis les perles pleines ? Donc elles doivent toutes couler au fond. Tu gagnes si elles coulent toutes au fond* ». Idem pour les vides.

4.2.2.3 Consignes auxiliaires relative à la boîte et son couvercle

Si l'enfant demande ce qu'il doit faire avec les éléments de la boîte rester très neutre du type « *Comme tu veux* » ou « *Tu peux les poser là* » sans désigner d'endroit particulier sur la table. Comme la table est isolée normalement on ne peut pas les mettre ailleurs que sur la table éventuellement on peut dire « *Tu les mets sur la table* » seulement si l'enfant essaye de les mettre ailleurs.

Si l'enfant utilise un élément de la boîte, demander à ce que ce soit dans le champ de la caméra « *Mets le là je ne le vois pas bien* »

4.3 Analyse des données de la situation des perles plombées

Nos données sont constituées des vidéos de 14 sujets, élèves de maternelle, confrontés à la situation des perles. Ces vidéos ont été transcrites sous une forme identique aux autres

vidéos de ce chapitre, à savoir des extractions d'images sur lesquelles nous appuyons les descriptions des actions réalisées. La transcription des 14 essais figure en annexe 8, le tableau des résultats en annexe 7.

Les conditions matérielles de la situation ont variées pour les 14 sujets. La boîte présentée aux trois premiers sujets comportait une centaine de perles bleues dont la moitié était plombée.

La boîte présentée aux autres sujets contenait aussi une centaine de perles. Ces perles étaient des perles jaunes et des perles bleues. Une vingtaine étaient plombées.

4.3.1 Autour des stratégies

Nous cherchons à mettre en évidence une situation de tri systématique, c'est à-dire une situation dans laquelle la mise en œuvre d'un tri systématique apparaisse comme favorable à la réussite.

Le tableau suivant présente la liste des sujets qui ont réussi la situation des perles plombées, ainsi que la présence de la stratégie tri systématique.

<i>Nom</i>	<i>Classe</i>	<i>Réussite</i>	<i>Tri systématique</i>
<i>Sujet 2</i>	<i>PS</i>	<i>1</i>	<i>1</i>
<i>Sujet 8</i>	<i>MS</i>	<i>1</i>	
<i>Sujet 9</i>	<i>GS</i>	<i>1</i>	<i>1</i>
<i>Sujet 12</i>	<i>GS</i>	<i>1</i>	<i>1</i>






Tableau 43 : Situation des perles plombées – Réussite et tri systématique (extrait annexe 7)

Sur les quatorze sujets, seuls quatre ont réussi. Parmi ces quatre réussites, trois sujets mettent en œuvre une stratégie de tri systématique.

4.3.1.1 Indices de présence du tri systématique

Décrivons les faits qui nous permettent de considérer la présence de la stratégie tri systématique.

Considérons le mécanisme mis en œuvre par le sujet 12.

01:54		<p><i>Le sujet saisit une perle avec la main droite.</i></p>
01:59		<p><i>Sujet : « (inaudible) dans la boîte »</i> <i>Expérimentateur : « Comme tu veux »</i> <i>Le sujet pose la perle dans le morceau de boîte à côté de l'endroit où il avait posé la perle.</i></p>
02:02		<p><i>Il saisit une nouvelle perle, l'observe ...</i></p>
02:04		<p><i>... et la pose dans le même morceau de boîte que la précédente.</i></p>
02:05		<p><i>Le sujet saisit une perle dans chaque main, les examine toutes les deux.</i></p>

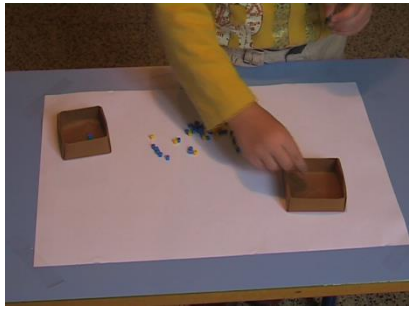


02:08		<p><i>Il pose la première dans le morceau de boîte qui figure à sa gauche et pose la seconde dans l'autre morceau de boîte.</i></p>
[...]		
04:23		<p><i>Poursuite des traitements. Le sujet choisit des perles qui se trouvent sur le bord de la partie centrale. Elles semblent choisies non pas pour des considérations liées à leur statut (pleine ou vide) mais parce qu'elles sont au bord de la région que le sujet traite.</i></p>
05:03		<p><i>Etat des traitements.</i> <i>C'est la même stratégie qui est poursuivie jusqu'à épuisement du stock de perles dans la partie centrale.</i></p>

Tableau 44 : Situation des perles plombées - extrait de la transcription du sujet 12

Le sujet 12 saisit des perles, soit une à une, soit plusieurs à la fois, les observe et décide de les placer ensuite dans un des deux morceaux de la boîte. Chaque perle est saisie une fois et une seule. Nous n'observons pas de moment où une perle est saisie, observée puis reposée sur la table sans rejoindre un des deux morceaux de boîte. Chaque perle saisie va être traitée.

Ce qui est remarquable dans cette observation est que le caractère systématique du tri est mis en œuvre dès la saisie de la première perle. L'utilisation immédiate des deux boîtes pour stocker perles plombées et perles non plombées conforte notre hypothèse : il y a dès le traitement de la troisième perle trois ensembles constitués : les perles qui ont été traitées et qui sont stockées dans un des deux morceaux de la boîte et les perles qui n'ont pas encore été traitées et qui sont sur la table dans la partie centrale.

C'est le seul sujet de notre échantillon qui réussisse en mettant en œuvre cette stratégie de tri systématique dès le début du traitement des perles.

Nom	Classe	Réussite	Tri systématique	Tri par extraction
Sujet 2	PS	1	1	1
Sujet 8	MS	1		1
Sujet 9	GS	1	1	1
Sujet 12	GS	1	1	

Tableau 45 : Situation des perles plombées – Réussite et stratégies (extrait annexe 7)

En effet, nous observons chez deux des autres sujets qui réussissent (sujet 2 et sujet 9) un traitement des perles qui démarre par la mise en œuvre de la stratégie d'extraction.

4.3.1.2 Indices de présence de changement de stratégie

Examinons quelques extraits de la transcription de ce que fait le sujet 2.

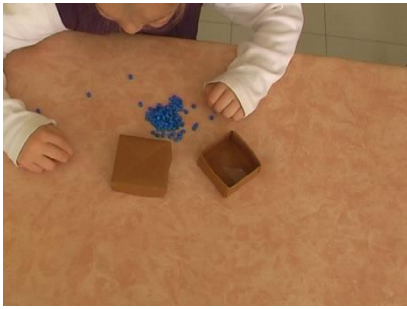


01:54		<i>Le sujet attrape une première perle avec sa main droite et la met de côté, à sa droite.</i>
01:59		<i>Le sujet attrape une seconde perle, toujours avec sa main droite, et la met à côté de la première perle.</i>
02:06		<i>De nouvelles perles sont saisies et placées à côté des précédentes. On observe qu'un tas est en train de se constituer à droite du sujet.</i>

Tableau 46 : Situation des perles plombées – premier extrait de la transcription du sujet 2

Le sujet 2 commence par extraire des perles de la partie centrale de la table. Nous considérons que le sujet met en œuvre une stratégie d'extraction car toutes les perles saisies sont de même nature (au moins sont considérées comme telles par le sujet) car elles rejoignent

le même tas. C'est l'appui sur le nombre de tas qui sont construits qui nous permet de confirmer l'hypothèse que nous formulons : les perles sont structurées en deux sous-ensembles, les perles qui ont été extraites (et donc traitées) et le reste de la collection.

Le sujet va modifier sa stratégie, comme nous allons pouvoir l'observer dans l'extrait suivant.



02:10		<p><i>La main droite du sujet vient de placer au-dessus des perles qui se trouvent devant le sujet. Une perle est saisie et posée sur la table, mais pas au même endroit que les précédentes. La perle est posée à gauche du sujet.</i></p>
02:24		<p><i>Le sujet vient de déplacer sa main droite qui empêchait de voir ce qu'il faisait. Une perle a été saisie. Un deuxième tas de perles semble avoir été constitué. La perle qui venait d'être saisie est placée dans le tas qui est à la droite du sujet. On observe clairement les deux tas qui sont en train en de se constituer de part et d'autre de l'endroit initial que les perles occupaient.</i></p>

Tableau 47 : Situation des perles plombées – second extrait de la transcription du sujet 2

L'observation n'est pas facile, la caméra est placée de manière à pouvoir observer de dessus l'organisation qui est mise en œuvre et les mains du sujet peuvent empêcher de saisir le moment où la stratégie est modifiée. Par contre, nous pouvons formuler l'hypothèse que la stratégie mise en œuvre par le sujet a changé (au moins à partir de 02 :10). Même s'il n'est pas encore très perceptible, nous pensons qu'un second tas vient d'être constitué. Cette hypothèse sera confirmée par la suite de l'observation.






02:35		<p><i>La perle saisie est posée dans le tas de gauche.</i></p>
[...]		
02:40		<p><i>Une nouvelle perle est saisie avec la main droite. On peut raisonnablement penser que le sujet est en train de l'examiner puisque sa tête, absente dans les actions qui précèdent ce moment, apparaît dans le cadre.</i></p>
02 :41		<p><i>Avant que la perle qui est dans la main droite ne soit reposée, une nouvelle perle est saisie avec la main gauche.</i></p>
02 :42		<p><i>Le sujet a maintenant une perle dans chaque main.</i></p>
02:46		<p><i>Les deux perles sont posées simultanément dans le tas qui est à sa droite.</i></p>

Tableau 48 : Situation des perles plombées – troisième extrait de la transcription du sujet 2

Cet extrait de la transcription permet d'observer que des perles qui sont saisies successivement d'une part ne sont pas reposées près de l'endroit où elles ont été saisies, et

d'autre part sont reposées dans des zones que nous avons identifiées comme regroupant soit les perles plombées, soit les perles creuses.

La stratégie de tri systématique est mise en œuvre par le sujet jusqu'à la fin du traitement des perles.



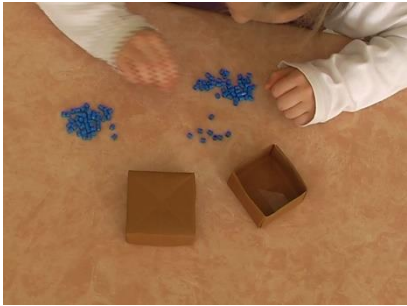
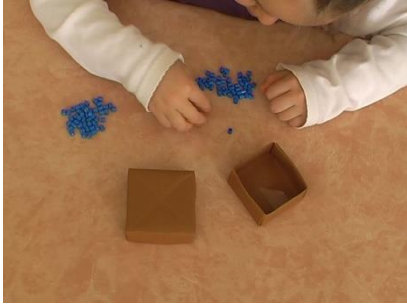
02:48		<i>Nouveau moment dans lequel les mains ne gênent pas la vision de l'ensemble des perles.</i>
[...]		
03:56		<i>Nous pouvons observer à ce moment où aucune de ses mains n'est au-dessus des perles qu'il a reconstitué un espace entre la partie centrale et le tas qui est à sa gauche et regrouper les perles de son tas de gauche.</i>
...		
06:42		<i>La saisie, l'observation et la pose des perles avec la main droite s'accélère. La partie centrale se réduit.</i>
...		
06:58		<i>Il reste une dernière perle dans la partie centrale.</i>

Tableau 49 : Situation des perles plombées – quatrième extrait de la transcription du sujet 2

Nous observons une diminution progressive du nombre de perles dans la partie centrale et un arrêt de tout mouvement une fois que la dernière perle de la partie centrale a été saisie et mise dans un des deux tas. Nous faisons l'hypothèse que cette absence de mouvement à ce moment précis est compatible avec la compréhension par le sujet que le traitement est terminé.

Le sujet 9 met en œuvre un mécanisme tout à fait identique à celui développé par le sujet 2, à savoir une courte phase d'extraction suivie d'une phase de tri systématique.

Ces trois sujets mettent donc en œuvre une stratégie de tri systématique, éventuellement précédée de la mise en œuvre d'une stratégie de tri par extraction. Il nous faut maintenant comprendre pourquoi le sujet 8, qui à aucun moment ne met en place une stratégie de tri systématique, finit malgré tout par réussir.

Avant cela, nous allons revenir sur la description de la stratégie de tri par extraction, dans un cas qui nous semble tout à fait ordinaire et qui va nous permettre de mieux comprendre pourquoi le sujet 8 réussit.

4.3.1.3 Indice de présence de non-finitude du tri par extraction

Examinons ce que fait le sujet 3 (notons par ailleurs que ce sujet échoue).




01:28		<p><i>Le sujet attrape une perle avec sa main gauche et la pose à sa gauche. « Alors là, on fait une équipe quand il y a des petits trous (inaudible)»</i></p>
01:33		<p><i>Le sujet a saisi d'autres perles avec chacune de ses mains. Il les éloigne de la position initiale qu'elles occupaient et les rapproche de lui.</i></p>
01:35		<p><i>Ses mains s'éloignent de l'endroit où il a placé les perles, ce qui nous permet de constater qu'il les a regroupées devant lui.</i></p>

Tableau 50 : Situation des perles plombées – premier extrait de la transcription du sujet 3

Contrairement à ce que pourrait laisser croire le début de cette transcription, le sujet ne va pas mettre en place de stratégie de tri systématique. En effet, il ne placera plus aucune perle à côté de la perle qu'il a posée à sa gauche. Par contre, il va construire un tas de perles qu'il extrait de la partie centrale en les rapprochant de lui.

Examinons comment le sujet 3 continue le traitement.



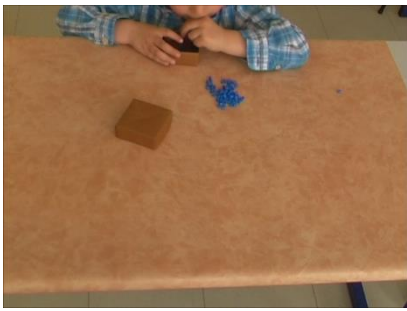
02:23		<p><i>Sujet : « et j'ai une idée ... avec les petits trous on met dedans ».</i></p> <p><i>Le sujet pose les deux perles qu'il tenait dans un premier morceau de la boîte.</i></p>
[...]		
02:40		<p><i>Le sujet continue de tenir le morceau de boîte avec sa main droite. Il saisit maintenant avec sa main gauche une perle dans le tas qui figure devant lui.</i></p>
02:42		<p><i>Il pose la perle dans le morceau de la boîte.</i></p>

Tableau 51 : Situation des perles plombées – second extrait de la transcription du sujet 3

Le sujet utilise le morceau de boîte pour stocker les perles creuses. Pour autant, cette décision matérielle va être sans conséquence sur la stratégie mis en œuvre.



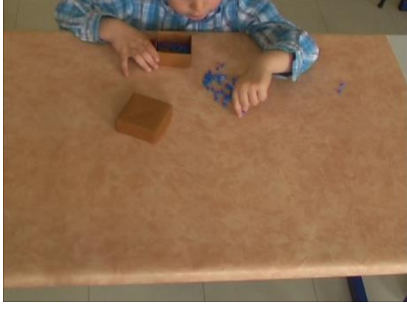

04:02		<i>Le sujet manifeste une certaine impatience ou lassitude. Il regarde l'expérimentateur puis se remet au travail. Il saisit trois perles dans le tas central. Il les place à sa gauche. Elles se trouvent entre le tas central et les deux perles qu'il a traitées.</i>
[...]		
04:51		<i>Poursuite des traitements un à un. Le sujet manifeste une certaine lassitude.</i>
05:26		<i>La main du sujet passe de plus en plus de temps à se déplacer au-dessus du tas de perles.</i>
06:07		<i>Le sujet passe aussi de plus en plus de temps à observer la collection des perles sans que sa main gauche ne se déplace au-dessus de cette collection comme elle le faisait auparavant.</i>

Tableau 52 : Situation des perles plombées – troisième extrait de la transcription du sujet 3

Ce troisième extrait de la transcription nous permet d'observer en situation les limites de la stratégie par extraction. En effet, le sujet a de plus en plus de difficulté à trouver une perle qui correspond au critère de tri qu'il recherche (« perle avec un petit trou » en l'occurrence). Il manifeste une lassitude ou une impatience, sa main se promène au-dessus de la collection perles de la partie centrale sans n'en saisir aucune. Il est confronté à l'impossibilité d'être sûr que le tri est terminé, puisque la difficulté à percevoir le critère de tri l'empêche de pouvoir garantir que tous les perles « avec des petits trous » ont bien été extraites.



06:34		<i>Il saisit l'autre morceau de boîte....</i>
...		
06:59		<i>Il saisit avec sa main droite les perles de la partie centrale et les mets dans le même morceau de boîte.</i>

Tableau 53 : Situation des perles plombées – quatrième extrait de la transcription du sujet 3

L'extrait suivant montre le moment où le sujet renonce au contrôle de l'ensemble des perles qui restent sur la partie centrale. Il se résout à les mettre dans le même morceau de boîte.

Le sujet a presque réussi puisque seulement une perle plombée se retrouve au milieu des perles creuse (validation par immersion).

4.3.1.4 Une réussite paradoxale

Nous allons maintenant revenir sur ce qu'a fait le sujet 8. Ce sujet réussit en mettant en œuvre exclusivement une stratégie de tri par extraction. Examinons comment il procède et pourquoi il réussit.




03:10		<p><i>Suite des traitements. Les perles qui sont choisies par le sujet ont les mêmes caractéristiques car toutes rejoignent le tas à droite du sujet.</i></p>
05:16		<p><i>Une perle est saisie ; elle est examinée et reposée à l'endroit où elle a été prise.</i></p>
06:51		<p><i>Etat des traitements.</i></p>

Tableau 54 : Situation des perles plombées – premier extrait de la transcription du sujet 8

Nous pouvons affirmer que le sujet met en œuvre une stratégie de tri par extraction. En effet, certains des éléments saisis sont posés à la droite du sujet dans ce qui apparaît clairement comme un ensemble alors que d'autres éléments saisis sont reposés à l'endroit où ils ont été saisis.

De plus, nous ne percevons pas de structure qui laisse penser qu'il y ait plus de deux ensembles dans le traitement qui est réalisé, l'ensemble des perles vérifiant une caractéristique (à la droite du sujet) et l'ensemble des perles de la partie centrale (qui contient des éléments traités et des éléments non traités qui ne sont pas séparés).

Le sujet ne change pas de procédure pendant toute la durée de la vidéo. C'est donc bien une procédure de tri par extraction qui est mise en œuvre de manière exclusive.

Examinons un dernier extrait du traitement.

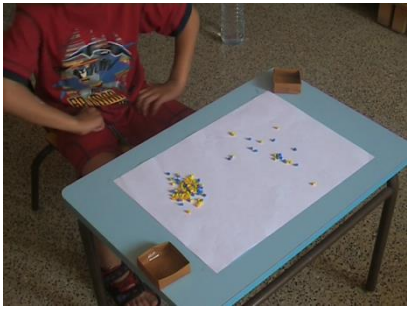
09:33		<p><i>Le sujet met ses mains sur ses cuisses et regarde l'expérimentateur.</i></p> <p><i>Expérimentateur : « c'est fini oui alors on va vérifier on va voir si c'est bien réussi »</i></p>
-------	---	--

Tableau 55 : Situation des perles plombées – second extrait de la transcription du sujet 8

La photo (Tableau 55) nous permet d'observer la taille relative des deux collections à trier. Nous savons à ce stade que la collection des perles plombées a bien été triée. En fait, il apparaît que la taille des deux sous-ensembles perles plombées et perles vides n'est pas du même ordre. L'ensemble qui apparaît à la droite du sujet est l'ensemble des perles vides, l'ensemble qui apparaît dans la partie centrale est l'ensemble des perles plombées. Le sujet a extrait les perles vides de l'ensemble des perles. Les perles vides sont plus nombreuses que les perles plombées. Les perles plombées sont une vingtaine. Pour contrôler la fin du tri, le sujet doit vérifier qu'aucune des vingt perles qui sont posées sur la table n'est une perle vide. *A priori*, le sujet n'a pas à contrôler la constitution de son tas de droite. Par construction, il n'y a que des perles vides.

Si le sujet avait extrait les perles plombées de la partie centrale, pour contrôler la fin du tri, il aurait dû vérifier qu'il ne restait aucune perle plombée au sein de cette nouvelle partie centrale. Et dans ce cas, la taille de la partie centrale aurait été beaucoup plus importante que celle que le sujet 8 doit contrôler dans le cas présent.

Le sujet 8 se trouve dans une situation de détermination de la fin de l'algorithme qui est donc beaucoup plus simple que s'il avait extrait les perles plombées.

Dans le cas du sujet 3, la taille de la collection des perles qui restaient sur la table dans la partie centrale rendait beaucoup plus difficile de savoir si le tri était terminé ou pas.

La taille respective des deux sous-collections à produire lors d'un tri est une variable que nous n'avons pas anticipée qui impacte de manière forte l'efficacité des stratégies. En effet, si une des deux sous-collections est petite alors que l'autre est grande, décider que l'algorithme de tri est terminé peut être beaucoup plus facile si les éléments de la plus grande sont triés par extraction. Et cela sera beaucoup plus difficile si ce sont les éléments de la plus petite qui sont triés par extraction.

Donc, trier les perles plombées ou trier les perles vides ne sont pas toujours des opérations de difficulté équivalente, et notamment quand la collection est constituée de manière dissymétrique. Nous n'avons pas identifié lors de notre analyse *a priori* cette variable. Notons que cette variable n'apparaît pas dans n'importe quel contexte. L'impact de cette variable n'est pas indépendant de la visibilité du critère de tri.

Dans la situation des perles plombées, trier par extraction les perles vides est plus facile que trier par extraction les perles pleines, car les perles vides sont beaucoup plus nombreuses que les perles pleines. Il nous semble pourtant que c'est assez contre-intuitif de vouloir extraire les éléments les plus nombreux. Le nombre de traitement « extraire une perle vide » est égal au nombre de perles vides, qui sont les plus nombreuses. Parmi les deux tris possibles, celui choisi est alors celui qui maximise le nombre de traitements. L'ensemble extrait est plus long à produire. Par contre, l'arrêt de l'algorithme est plus simple à contrôler.

L'étude des réussites permet de mettre en évidence des indices de présence des différentes stratégies. Que nous apprend l'étude des échecs du point de vue des stratégies ?

4.3.1.5 Une variation autour de la stratégie par extraction

Nous venons d'étudier les stratégies mises en œuvre par les sujets lors des réussites. Que s'est-il passé lors des échecs ?

Nom	Classe	Réussite	Tri systématique	Tri par extraction	Nombres de perles qui ne sont pas dans le sous-ensemble prévu
Sujet 1	PS	0			n'a pas réalisé la tâche
Sujet 3	PS	0		1	0+1
Sujet 4	MS	0		1	1+0
Sujet 5	MS	0		1	0+1
Sujet 6	MS	0		1	3+1
Sujet 7	MS	0	1		1+1
Sujet 10	GS	0	1		0+1
Sujet 11	GS	0	1	1	0+5
Sujet 13	GS	0	1		0+1
Sujet 14	GS	0	1		1+2

Tableau 56: Situation des perles plombées – Stratégies et erreurs lors des échecs (extrait annexe 7)






Commençons par observer que le nombre de perles qui ne sont pas dans le sous-ensemble prévu est faible. Si nous mettons de côté le sujet 1, qui n'a pas réalisé la tâche, le nombre de perles mal placées est au plus 5 parmi une centaine.

Intéressons-nous maintenant aux stratégies mises en œuvre lors de ces échecs.

Nous constatons que nous trouvons parmi les échecs des sujets qui ont mis en œuvre uniquement une stratégie par extraction (sujets 3, 4, 5 et 6). Lors de l'étude des réussites, seul le sujet 8 a réussi en mettant en œuvre cette stratégie. Il apparaît donc comme une exception pour laquelle nous avons formulé une hypothèse sur les raisons de la réussite.

Nous avons déjà mis en évidence les problèmes que pose la mise en œuvre de l'algorithme dans le cas de la situation des perles. Nous nous proposons de décrire la stratégie mise en œuvre par le sujet 4, dont nous pensons qu'elle présente quelques spécificités par rapport à la stratégie générique du tri par extraction et dont les mises en œuvre des sujets 3 et 8 sont emblématiques.

Examinons ce que fait le sujet 4.

02:40		<p><i>Le sujet saisit une perle dans sa main droite. Il fait passer la perle qu'il a saisie de sa main droite à sa main gauche.</i></p>
...		
03:13		<p><i>Le sujet saisit deux perles avec sa main droite. Une fois examinées, elles passent de la main droite à la main gauche du sujet.</i></p>
03:21		<p><i>La présence des trois perles dans la main gauche a obligé le sujet à modifier la tenue des perles. Il tient les trois perles dans le creux de sa main gauche. Il saisit une nouvelle perle avec sa main droite.</i></p>
03:23		<p><i>Après examen, il la repose sur la table.</i></p>
03:26		<p><i>Il en saisit une nouvelle et l'examine. Il pose la perle examinée dans le creux de sa main gauche.</i></p>

03:28		<p><i>Poursuite de la suite des traitements qui se déroulent tous de la même façon : saisie d'une perle avec la main droite, examen visuel puis pose dans le creux de la main.</i></p>
-------	---	--

Tableau 57: Situation des perles plombées – premier extrait de la transcription du sujet 4

L'essai du sujet 4 démarre de manière tout à fait ordinaire. Le sujet saisit des perles dans la partie centrale et, après examen, les stocke dans sa main gauche. Il réalise ainsi une extraction classique d'une collection dont nous ne pouvons pas voir pour l'instant les caractéristiques.


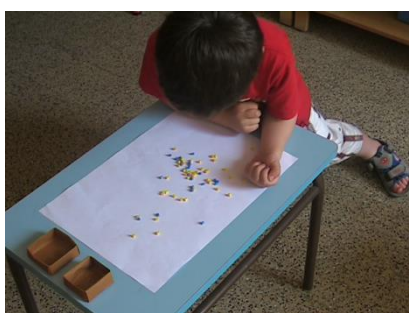
04:51		<p><i>Nous pouvons observer pour la première fois les perles qu'il a stockées dans sa main gauche. Elles sont toutes bleues.</i></p>
05:23		<p><i>Poursuite du traitement. Seules les perles bleues sont ramassées.</i></p>

Tableau 58: Situation des perles plombées – second extrait de la transcription du sujet 4

Le sujet a réalisé jusque-là des actions de déplacement et de regroupement des perles dont nous pensons qu'elles sont non fondées sur la couleur. Il semblerait ici que le sujet soit en train de constituer une collection de perles bleues. A ce stade, nous nous demandons si ces perles bleues sont toutes plombées ou toutes vides ou ni l'un ni l'autre.




05:40		Examen long et attentif de la collection des perles qui sont sur la table.
05:45		Le sujet saisit une nouvelle perle bleue....
05:50		... il l'examine, puis la repose.

Tableau 59 : Situation des perles plombées – troisième extrait de la transcription du sujet 4

Le sujet a saisi une perle bleue qu'il a observée puis reposée dans la partie centrale. Nous pouvons donc supposer que la collection de perles bleues que le sujet tient dans le creux de sa main gauche est soit plombée, soit vide. Elle est en tout cas très certainement homogène du point de vue du critère plombé.

Nous obtiendrons la réponse à cette question un peu plus tard.




09:24		<p><i>Expérimentateur : « qu'est-ce que tu as mis dans ta main ? »</i></p> <p><i>Sujet : « elles sont bleues »</i></p>
09:47		<p><i>Expérimentateur : « oui on t'avait demandé de séparer celles qui avaient quelque chose dedans, qui étaient pleines et celles qui avaient rien dedans ... c'est ce que tu as fait ? »</i></p>
09:53		<p><i>Expérimentateur : « et elles sont toutes bleues (une perle tombe de la main droite pendant l'échange oral, le sujet se penche pour ramasser la perle qui vient de tomber) donc dans ta main elles sont comment, avec quelque chose dedans ou elles ont rien dedans ? »</i></p> <p><i>Sujet : « elles ont rien dedans »</i></p> <p><i>Expérimentateur : « elles ont rien dedans/ d'accord/ donc tu continues à ranger celles qui ont rien dedans / hein c'est ça, c'est ce que tu fais ? »</i></p>

Tableau 60 : Situation des perles plombées – quatrième extrait de la transcription du sujet 4

Lors de l'échange entre l'expérimentateur et le sujet, ce dernier confirme qu'il considère que les perles qu'il tient dans sa main sont vides. Le sujet a donc mis en œuvre une stratégie d'extraction des « perles bleues vides ». Il considère la couleur comme un critère de tri pertinent même si la consigne n'en parle pas. Néanmoins, cela peut lui permettre de produire une bonne réponse.

Observons comment se poursuit l'essai.





10:15		<p><i>Le sujet pose dans un des deux morceaux de la boîte la perle qu'il tenait dans sa main gauche.</i></p>
10:24		<p><i>Il saisit de nouvelles perles du stock avec sa main gauche ...</i></p>
10:41		<p><i>... et les pose une à une dans le morceau de boîte.</i></p>
11:07		<p><i>Enfin, il rapproche sa main droite du morceau de boîte qui a déjà accueilli les perles précédentes et les fait glisser dans le morceau de boîte.</i></p> <p><i>Expérimentateur : « on continue ... allez ».</i></p>

Tableau 61 : Situation des perles plombées – cinquième extrait de la transcription du sujet 4

Le sujet décide de placer le stock des « perles bleues vides » dans un des morceaux de sa boîte. Au terme de cette opération, il se trouve donc avec ses deux mains disponibles ; il n'a notamment plus aucune perle dans sa main gauche qui servait à tenir le stock des « perles bleues vides ».





11:12		<p><i>Le sujet saisit une perle jaune avec sa main droite ...</i></p>
11:14		<p><i>.. l'examine, puis la fait glisser dans sa main gauche.</i></p>
11:17		<p><i>Le sujet saisit une nouvelle perle jaune avec sa main droite, l'examine et la fait glisser dans sa main gauche.</i></p>
11:41		<p><i>Poursuite des traitements des perles jaunes.</i></p>

Tableau 62 : Situation des perles plombées – sixième extrait de la transcription du sujet 4

Cet extrait permet d'observer que, maintenant que le sujet a de nouveau ses deux mains vides et disponibles, il peut remettre en place le même mécanisme que celui qu'il a conduit au début de l'essai. Il change cependant un élément ; il s'intéresse maintenant à des perles de couleur jaunes. A ce stade, nous pensons qu'il cherche à trier par extraction les perles jaunes vides.


16:27		<p><i>Poursuite du traitement des jaunes. A l'occasion une perle bleue est saisie et posée dans le morceau de boîte.</i></p>
-------	---	--

Tableau 63 : Situation des perles plombées – septième extrait de la transcription du sujet 4

Remarquons à ce stade que le sujet extrait des perles jaunes avec sa main droite qu'il stocke dans sa main gauche. Il dispose à ce stade de deux espaces pour stocker les perles vides : soit dans le morceau de boîte (perles vides bleues), soit dans la paume de sa main gauche (perles vides jaunes). Il peut ainsi, quand il tombe sur une perle plombée bleue, l'extraire de la partie centrale.


16:35		<p><i>Expérimentateur : « Y'en a plus /bien alors on va vérifier ... dans un verre tu vas mettre les trouées ».</i></p> <p><i>Le sujet verse le contenu de sa main gauche dans un verre (hors caméra, on entend le bruit des perles qui tombent dans le verre)</i></p> <p><i>Expérimentateur : « il y en a d'autres qui sont vides ? sur la table ...»</i></p>
17:00		<p><i>Le sujet attrape le morceau de boîte qui contient des perles bleues et le donne à l'expérimentateur. Il les verse dans le verre qui contient déjà les perles jaunes trouées.</i></p>

Tableau 64 : Situation des perles plombées – huitième extrait de la transcription du sujet 4

Le sujet répond aux demandes de l'expérimentateur en mettant dans le même verre les perles bleues vides et les perles jaunes vides. C'est à ce moment seulement que l'ensemble des perles vides est construit. Il l'est suite aux sollicitations de l'expérimentateur.

Le sujet est tout près de réussir, une seule perle creuse étant trouvée parmi les perles plombées.

La stratégie mise en œuvre par le sujet 4 est assez proche de la stratégie mise en œuvre par le sujet 8. Tous les deux trient par extraction les perles vides. Pour autant, la solution mise en œuvre par le sujet 4 peut apparaître coûteuse. En effet, deux tris sont réalisés : le tri des perles bleues vides et le tri des perles jaunes vides. Seul un tri était demandé. Pour autant, cette

stratégie peut s'avérer astucieuse dans certains cas. La mise en avant du critère de tri couleur est un moyen de diminuer la complexité des tris à réaliser. En effet, l'appui sur ce critère très visible diminue d'autant la taille de la collection de jetons de la même couleur à trier.

Donc la présence d'objets de couleurs différentes peut favoriser la réussite de la stratégie de tri par extraction, en permettant au sujet de diminuer aisément la taille des collections explorées, facilitant ainsi la réalisation d'un test d'arrêt.

Pour autant, nous ne prétendons pas que c'est ce mécanisme qui a été mis en œuvre de manière délibérée par le sujet 4. Nous faisons plutôt l'hypothèse qu'il a eu du mal à s'abstraire du critère de tri couleur, et donc que la présence de ces deux critères de tri lui est apparue comme un obstacle supplémentaire, et non comme une aide, comme l'analyse précédente que nous avons conduite pourrait le laisser penser.

4.3.2 La question des espaces

4.3.2.1 Espaces et tri systématique

Quand une stratégie de tri systématique est mise en œuvre, il convient de réaliser des partitions physiquement disjointes entre les éléments traités et les éléments non traités d'une part, et parmi les éléments traités, entre les éléments relevant du critère de tri et ceux n'en relevant pas. Dans ce cas, il apparaît trois espaces distincts. Confrontant les sujets à des objets instables, nous pensions qu'ils allaient régler le problème de la réalisation d'un espace physique à l'aide des deux morceaux de la boîte, le troisième espace étant celui sur lequel les sujets ont posé les perles. C'est l'action de renversement qui produit ce troisième espace, action dont le sujet n'est pas à l'origine (puisque l'expérimentateur lui demande de verser les perles sur la table). Dans ces conditions, il peut ne pas être construit par le sujet.

Ce problème de la réalisation d'espaces se pose aussi quand une stratégie de tri par extraction est mise en œuvre. Il y a un espace de moins à construire, mais ce principe de construction demeure.

Nous notons que le seul sujet qui a mis en œuvre de manière exclusive une stratégie de tri systématique a utilisé les deux morceaux de boîte pour construire ses deux espaces supplémentaires. Dans ce cas, nous observons de manière constante la présence des trois espaces prévus par l'analyse *a priori*.

Ce sont bien trois espaces physiquement disjointes qui apparaissent et dont la nature peut être décrite.

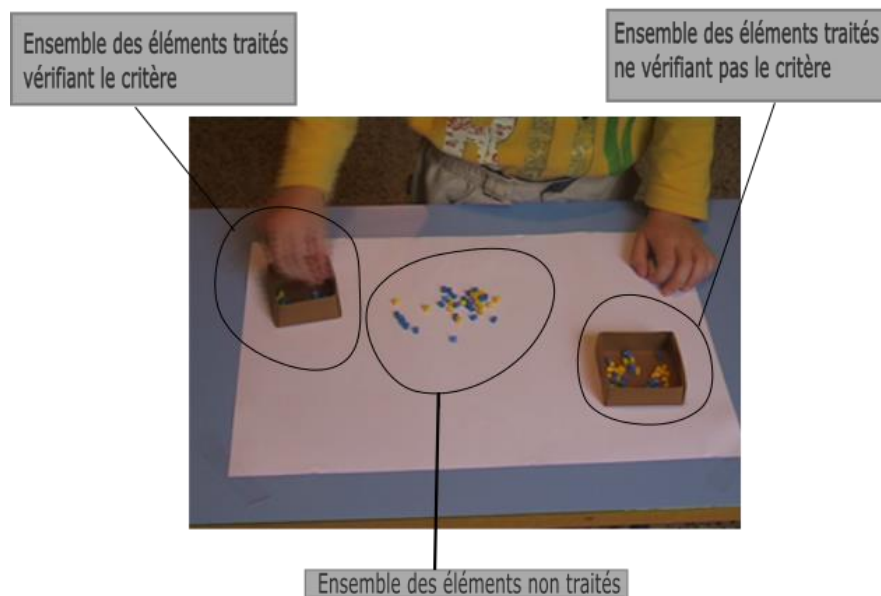


Photo 15 : Les trois espaces de la stratégie de tri systématique (sujet 12)

L'ensemble des éléments traités est structuré en deux sous-ensembles qui sont spatialement éloignés. Ils sont de chaque côté de ce que nous avons appelé la partie centrale et qui est l'ensemble des éléments non encore traités. Cette distance spatiale entre ces deux sous-ensembles d'éléments traités peut s'expliquer par la volonté de ne pas mélanger les éléments vérifiant le critère et ceux qui ne le vérifient pas. Une forme de concurrence s'organise entre deux statuts : traité/ non traité d'un côté et plombé/vide de l'autre.

Par ailleurs, la place initiale occupée par les perles que le sujet renverse sur la feuille impacte les positions des deux sous-ensembles à construire. Les perles sont souvent renversées plutôt au milieu de la feuille. Ce sont donc les bords de la feuille support qui sont disponibles pour accueillir les deux sous-ensembles.

D'après la Photo 15, le sujet a placé les boîtes de la manière la plus économique pour lui : dans le prolongement de chacune de ses mains.

Nous avons observé que l'utilisation des morceaux de boîte facilite la délimitation des espaces pour certains sujets. Pour autant, ces morceaux ne sont pas nécessaires. Ainsi, nous trouvons chez le sujet 2 les trois espaces que nous venons de décrire.

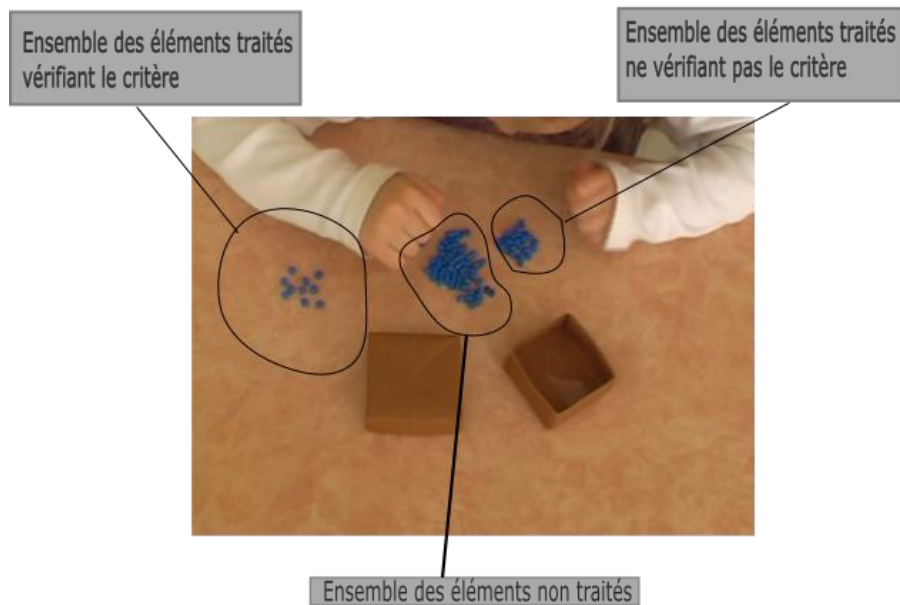


Photo 16 : Les trois espaces de la stratégie de tri systématique sans morceau de boîte (sujet 2)

4.3.2.2 Espaces et tri par extraction

Dans la mise en œuvre d'une stratégie par extraction, nous ne trouvons plus que deux espaces : l'espace des éléments qui ont déjà été extraits et un espace qui comporte des éléments qui ont déjà été examinés (et qui ne vérifient pas le critère de tri), mélangés avec des éléments qui n'ont pas encore été examinés (vérifiant ou non le critère de tri).

Dans cette série d'expérimentation, le second espace, celui qui contient les éléments déjà examinés et d'autres non encore examinés, prend une forme toujours identique, liée à la consigne qui est donnée au sujet. Il lui est demandé de verser le contenu de la boîte sur la table. Cet espace se présente donc toujours sous la même forme, des perles disposées sur une table. Par contre, le second a des formes d'organisation qui varient.

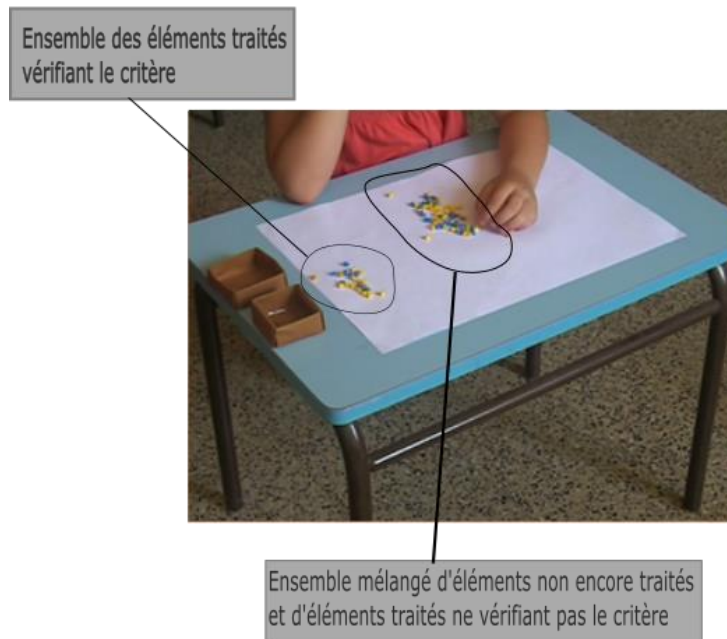


Photo 17 : Les deux espaces de la stratégie par extraction - sujet 5

Dans la Photo 15, l'espace des éléments extraits apparaît sous la forme d'un tas de perles étalées dans la partie droite de la feuille.

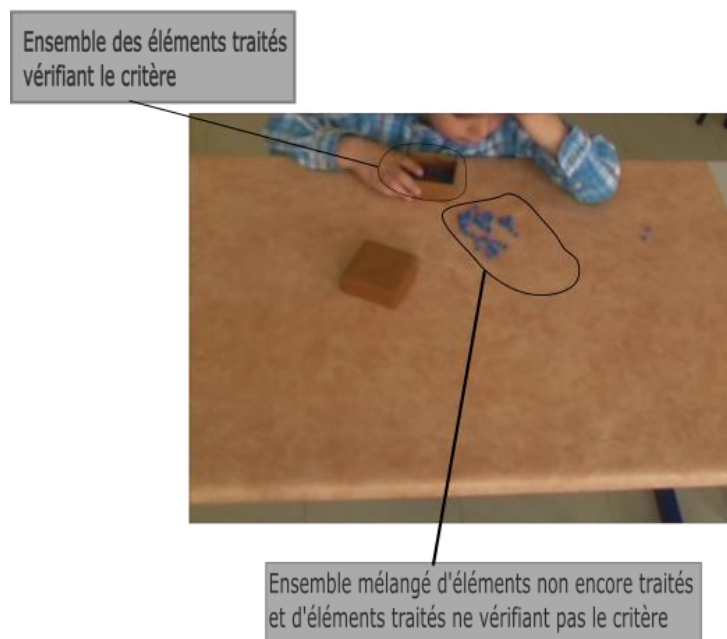


Photo 18 : Les deux espaces de la stratégie par extraction - sujet 3

Dans la Photo 18, l'espace des éléments extraits apparaît sous la forme d'un morceau de la boîte. Ce n'est pas parce qu'un morceau de la boîte est utilisé que cela va provoquer la mise en œuvre d'une stratégie de tri systématique pour autant. En effet, le sujet 3 maintiendra la stratégie de tri par extraction jusqu'au terme de l'essai.

Les lieux de constitution des ensembles peuvent prendre des formes surprenantes. Examinons comment le sujet 5 règle la question de fabrication de l'ensemble.

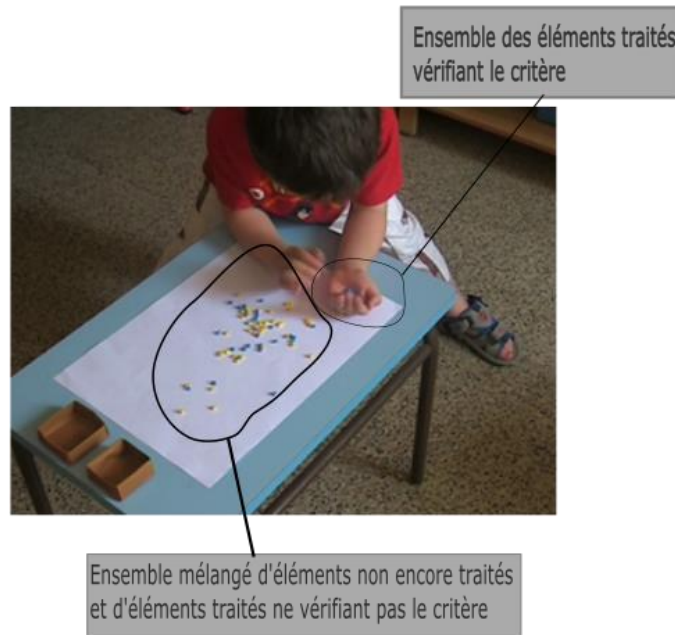


Photo 19 : Les deux espaces de la stratégie par extraction - sujet 5

Le sujet n'utilise pas ici un élément matériel de la situation, mais fait appel à son corps pour gérer la question de la constitution de l'ensemble, qui se trouve dans sa main gauche.

4.3.2.3 Un nouvel espace révélateur d'une nouvelle fonction

Les sujets commencent toujours par saisir les perles unes à unes. Le nombre de perles à trier est très important, tous se rendent compte que la réalisation du tri va être longue, voire fastidieuse. Certains continuent tout au long de l'essai de saisir les perles unes à unes. Peut-être n'ont-ils pas de meilleure idée, peut-être ne veulent-ils pas prendre le risque de diminuer le contrôle sur les objets traités.

Certains mettent en place des mécanismes dont l'objectif est d'accélérer le traitement.

Observons la stratégie mise en œuvre par le sujet 13.

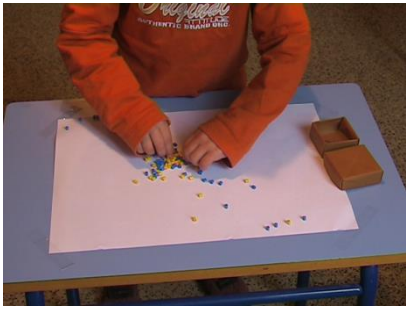
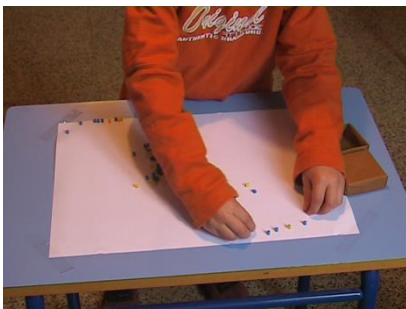
03:11		Le sujet utilise ici des deux mains pour saisir deux perles.
03:15		Les deux perles saisies rejoignent le même tas (celui de la partie haute de la feuille en l'occurrence).

Photo 20 : Saisie et traitement d'une perle dans chaque main - sujet 13

Plutôt que d'utiliser une seule main pour saisir les perles une par une, le sujet utilise ses deux mains. La nature des gestes qu'il réalise est la même que s'il utilisait une seule main, mais il y a un effet accélérateur généré par la nouvelle main disponible. Les perles continuent d'être saisies une à une.

D'autres sujets mettent en œuvre des stratégies accélératrices un peu différentes.

Ainsi les sujets 3, 5, 9, 10, 11 et 12 saisissent avec la même main plusieurs perles. Ils cherchent donc à accélérer le traitement en traitant simultanément plusieurs éléments.

Quel est pour le sujet le statut des objets qu'il tient à ce moment dans sa main ? Cela va dépendre de la nature de la stratégie qu'il met en œuvre.

S'il est en train de mettre en œuvre une stratégie de tri par extraction, nous observons rarement des sujets qui reposent les perles qu'ils ont saisies. Ce n'est pas le processus normal. Le processus normal dans le cas de l'extraction est de saisir des objets qui répondent au critère de tri de l'extraction. Le traitement (qui comporte le repérage de la caractéristique de l'objet) se déroule donc en partie avant que l'objet ne soit saisi.

S'il est en train de mettre en œuvre une stratégie de tri systématique, dans ce cas, le processus normal consiste plutôt à ne pas examiner préalablement l'objet que l'on va saisir. L'examen sera postérieur à la saisie. Il y a donc un moment pendant lequel l'objet saisi n'est plus un élément de l'ensemble des objets non traités et n'est pas encore un élément d'un des deux sous-ensembles des objets traités. A ce moment précis, l'objet est en cours de traitement.

Donc, pendant un tri systématique, chaque objet va avoir successivement le statut « non traité », puis « en cours de traitement » et enfin « traité ». C'est aussi le cas dans le tri par extraction, mais ce n'est pas observable pour tous les objets (puisque certains ne quittent jamais l'ensemble qu'ils occupent au démarrage).

Dans le tri systématique, le passage d'un ensemble à l'autre matérialise le changement de statut. Les statuts « traité » et « non traité » génèrent des ensembles. Le statut « en cours de traitement » doit donc de la même manière générer un ensemble. C'est l'observation des sujets qui saisissent plusieurs perles à la fois dans le cas d'un tri systématique qui a aidé à identifier la présence de l'espace ainsi fabriqué. La seule observation de saisies individuelles ne nous permettait pas de dépasser la difficulté à percevoir un élément comme constituant lui aussi un ensemble.

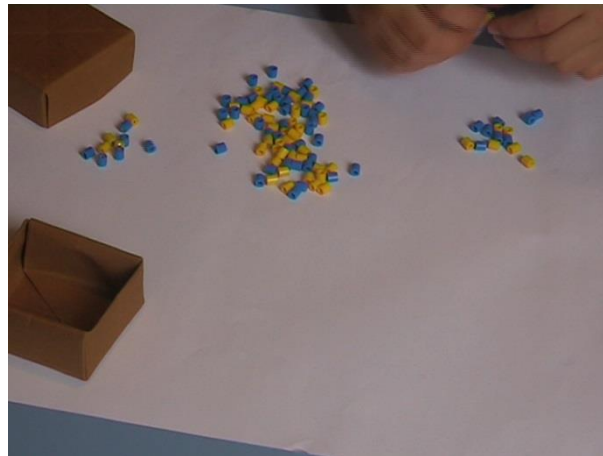


Photo 21 : Etat des différents ensembles - sujet 7 (02:30)

Au moment où cette photo est extraite, le sujet 7 a saisi plusieurs perles dans sa main droite qui sont en attente de traitement.

Ainsi, nous pouvons produire une nouvelle modélisation des différents espaces dans le cas d'un tri systématique.

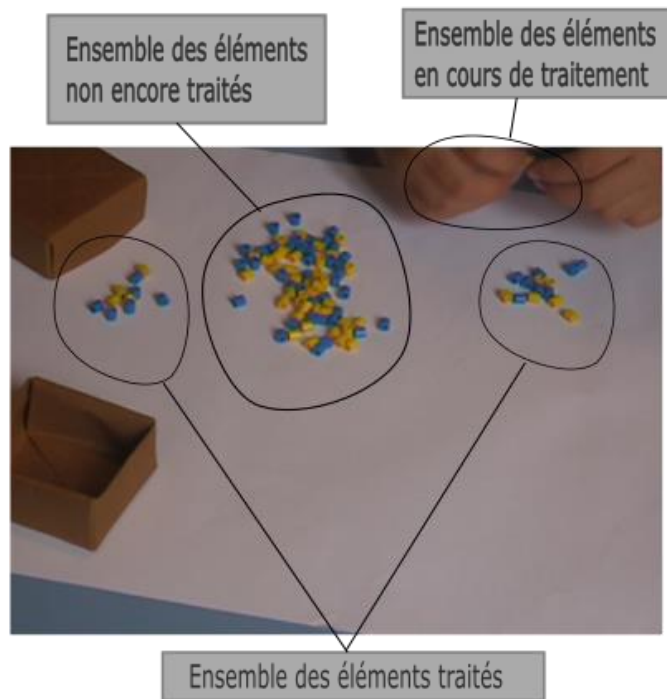


Photo 22 : Schéma des différents espaces du tri systématique

4.3.2.4 Nombre d'espaces et stratégies de tri

Revenons à la disposition des perles chez le sujet 3. Celui-ci a fabriqué un troisième ensemble à sa gauche.



Photo 23 : Un troisième espace dans la stratégie par extraction - sujet 3

Cet ensemble se réduit à des deux perles. Il y a donc trois ensembles présents quand le sujet effectue son tri. Pour autant, nous avons affirmé qu'il met en place un tri par extraction. Examinons comment cet ensemble a été amené à se constituer.



01:28		<p><i>Le sujet attrape une perle avec sa main gauche et la pose à sa gauche. « Alors là, on fait une équipe quand il y a des petits trous (inaudible)»</i></p>
[...]		
01:38		<p><i>Il saisit une perle avec sa main droite : « Moi je commence par les petits trous ».</i></p> <p><i>Il pose cette perle près de lui. Contrairement à ce que pourraient laisser croire les images, il ne tient pas de perle dans sa main gauche et ne fait rien de particulier avec cette main.</i></p>

Photo 24 : une anomalie dans le tri par extraction – cinquième extrait sujet 3

Le sujet laisse à penser qu'il va mettre en place une stratégie de tri systématique puisqu'il vient de fabriquer deux ensembles, certes réduits à un élément chacun, mais distincts spatialement et fonctionnellement.

Il va poursuivre en mettant en œuvre une stratégie de tri par extraction qui le conduit à développer l'ensemble le plus proche de lui. Examinons le moment où la seconde perle rejoint l'ensemble réduit à un élément qu'il a constitué en premier.



03:36		<p><i>Le sujet vient de saisir une perle qui était dans le morceau de la boîte.</i></p>
03:38		<p><i>Il la pose à côté de la perle qu'il avait mis de côté tout au début du travail.</i></p>

Photo 25 : une anomalie dans le tri par extraction – sixième extrait sujet 3

C'est quand le sujet tombe sur un élément non homogène avec les autres éléments du second ensemble qu'il extrait cet intrus pour le mettre à côté de la première perle qu'il avait posée.

Examinons maintenant la fin du traitement.




06:44		... et les pose dans le morceau de boîte.
06:52		Il attrape une à une les deux perles qu'il avait mis de côté à sa gauche ...
06:57		et les met dans le morceau de boîte dans lequel il a déjà mis certaines des perles de la partie centrale.

Photo 26 : une anomalie dans le tri par extraction – septième extrait sujet 3

Après avoir décidé que le traitement était terminé, le sujet attrape les perles restantes sur la partie centrale et commence à les mettre dans le second morceau de boîte. C'est entre deux saisies de ces éléments que le sujet attrape les deux perles à sa gauche pour les mettre dans le morceau de boîte. Le sujet n'hésite pas en effectuant ce geste. Cette absence d'hésitation nous conduit à penser qu'il considère comme homogènes la partie centrale et l'ensemble à sa gauche constitué de deux éléments.

4.3.2.5 Problème de délimitation des espaces

La fabrication d'espaces est la solution technique au problème de constitution d'ensembles. Quelle que soit la stratégie développée, le sujet a à construire un ou plusieurs ensembles. La disposition est une forme d'organisation spatiale qui permet de matérialiser dans l'action le concept d'ensemble. Pour autant, l'ensemble peut être conçu et sa matérialisation rencontre des difficultés liées aux caractéristiques des objets proposés.

Observons ce que réalise le sujet 2.



02:24		<p><i>Le sujet vient de déplacer sa main droite qui empêchait de voir ce qu'il faisait. Une perle a été saisie. Un deuxième tas de perles semble avoir été constitué. La perle qui venait d'être saisie est placée dans le tas qui est à la droite du sujet. On observe clairement les deux tas qui sont en train en de se constituer de part et d'autre de l'endroit initial que les perles occupaient.</i></p>
[...]		
03:56		<p><i>Nous pouvons observer à ce moment où aucune de ses mains n'est au-dessus des perles qu'il a reconstitué un espace entre la partie centrale et le tas qui est à sa gauche et regrouper les perles de son tas de gauche.</i></p>

Photo 27 : Etapes de l'élaboration des différents ensembles - sujet 2

Le sujet 2 met en œuvre une stratégie de tri systématique. Il construit deux ensembles de part et d'autre de la partie centrale. Ce qui nous intéresse ici est ce qui va se passer avec l'ensemble qu'il construit près de sa main gauche.

Observons des extraits de la transcription entre les deux moments choisis ci-dessus (02:24 et 03:56).



03:17		<p>Deux nouvelles perles ont rejoint le tas de gauche. La première est placée dans la partie centrale du tas de gauche, la seconde dans la partie droite de ce tas.</p>
03:23		<p>... puis une nouvelle encore, placée dans la partie droite du tas de gauche...</p>

Photo 28 : Absence de délimitation des espaces - sujet 2

Le sujet a eu des difficultés à maintenir une séparation physique entre la partie centrale et l'ensemble à sa gauche. La disparition de cet espace vide entre les deux ensembles s'est déroulée progressivement, au fur et à mesure que des perles passaient de la partie centrale à cet ensemble. Le risque est donc que le sujet ne contrôle plus le statut des éléments à la frontière.

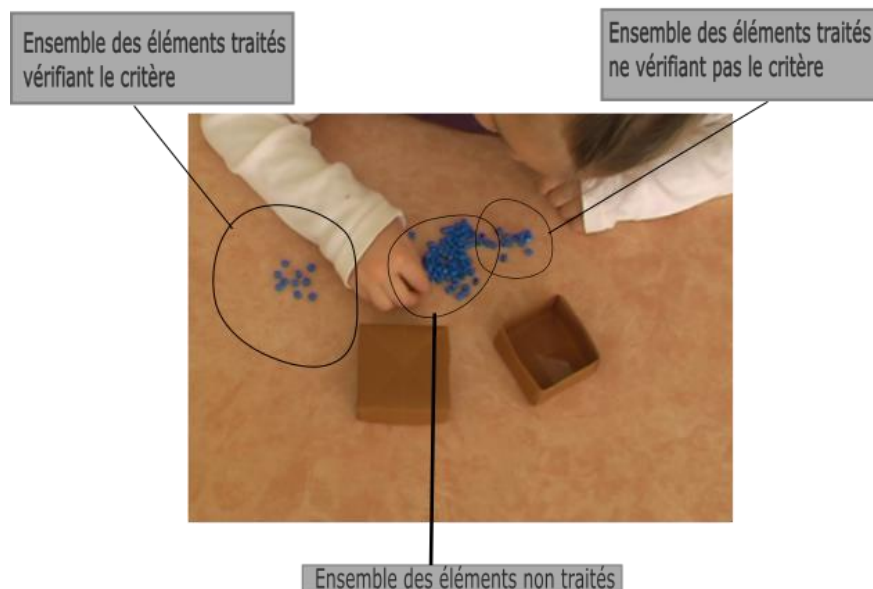


Photo 29 : Absence de délimitation des espaces et chevauchement des ensembles

Il y a donc un danger dans la mise en œuvre du tri à se retrouver avec des ensembles qui perdent le caractère homogène que leur conférait l'algorithme de tri systématique. Le sujet

doit mettre en œuvre une solution au problème de la contamination d'un espace par les éléments d'un autre lors de la mise en œuvre du tri.

4.3.2.6 Comment régler le problème de la délimitation des espaces

Nous avons vu que la solution la plus simple pour résoudre ce problème consistait à utiliser les boîtes. Certains n'ont pas hésité à mettre en œuvre d'autres solutions pour neutraliser le caractère instable des objets et constituer des ensembles stables.

Observons le mécanisme produit par le sujet 7.


06:17		<i>Les perles qui ont été traitées sont des deux couleurs. Le sujet les pose verticalement avec beaucoup de précaution.</i>
-------	--	---

Photo 30 : Stratégie de délimitation des espaces – sujet 7

Le sujet 7 pose les perles verticalement, une par une. Ainsi, elles ne bougent plus de manière intempestive.

Outre le fait de les poser verticalement, le sujet donne une forme particulière à la construction qu'il réalise. Il commence à fabriquer une ligne. Se constituent donc deux sous-espaces : le tas des perles non triées et la ligne des perles triées. La ligne organise les éléments distingués. C'est une stratégie de distinction issue de l'écrit.

Cette solution est par contre coûteuse en temps. Le sujet 7 cessera de mettre les perles debout à partir du moment où il en aura suffisamment pour les constituer en tas et limiter ainsi leurs déplacements en les mettant les unes sur les autres (08 :22).

Le sujet 6 utilise la même technique que le sujet 7, mais lui n'en changera pas.


12:10		Puis la fabrication de la ligne reprend.
-------	---	--

Photo 31 : Stratégie de délimitation des espaces – Sujet 6

Le sujet 6 met en œuvre une stratégie d'extraction. Il construit donc un ensemble de perles extraites d'un stock initial. Comme le sujet 7, il aligne les perles. Mais lui va les aligner pendant beaucoup plus longtemps que le sujet 7.


20:03		Etat de la fabrication des deux lignes.
-------	--	---

Photo 32 : Forme de l'ensemble construit par le sujet 6

L'ensemble des perles extraites est constitué de deux lignes courbes fabriquées avec des perles vides posées verticalement.

L'essai de ce sujet dure plus de 26 minutes. C'est le plus long des essais que nous avons filmés. Nous souhaitons que les sujets investissent les dimensions d'organisations structurelles des collections, ce qu'ils ont fait. Le sujet 6 a aussi investi authentiquement les dimensions matérielles dans des proportions que nous ne pensions pas possibles, ni même raisonnables. Il a aussi conduit une stratégie de distinction des espaces issue de l'écrit qu'il a conduit jusqu'à son terme.

Nous avons construit en parallèle une autre situation de tri avec les caractéristiques proches, la situation des jetons marqués.

4.4 La situation des jetons marqués

La situation des perles plombées est une situation dans laquelle la non-stabilité des objets en jeu génère des problèmes matériels qui se rajoutent aux difficultés spécifiques de l'organisation.

Nous cherchons donc maintenant à construire une situation plus facile du point de vue des aspects matériels, plus proche des pratiques scolaires ordinaires, mais qui conserve ses caractéristiques sur l'affaiblissement de la perception visuelle des caractéristiques de l'objet.

Nous cherchons donc une situation qui utilise du matériel scolaire ordinaire, sans dimension de fabrication très élaborée, et dans laquelle regarder l'objet sans aucune action ne suffise pas à régler la question de son statut.

Nous décidons de travailler avec une collection de jetons. Les jetons sont un matériel tout à fait ordinaire que les élèves de l'école maternelle peuvent avoir l'habitude de manipuler. Cela n'apparaît pas comme un matériel spécifique, ou très élaboré.

Ce matériel est stable. Posé sur une table, un jeton ne glisse pas spontanément de la table sans action du sujet qui le manipule. Le choix de travailler avec une collection d'objets de ce type doit permettre au sujet de diminuer l'impact des problèmes de stabilité dans la situation des perles plombées. Comme les objets ne bougent pas, le contrôle des espaces devrait être moindre.

Pour autant, ce matériel nécessite des transformations minimales pour avoir les caractéristiques requises pour notre situation. Nous devons fabriquer une collection d'objets avec un critère de tri discriminant qui ne soit pas complètement perceptif.

Un jeton est un cylindre presque plat qui ne peut reposer que sur l'une de ses deux bases circulaires. Ces deux bases ne sont donc jamais visibles simultanément. C'est donc sur ces deux bases qu'il convient d'agir. Il faut produire un dispositif qui permette la séparation en deux de la collection de jetons.

Nous pourrions imaginer des jetons qui ont leurs deux faces d'une couleur différente. Il y a aurait donc deux catégories de jetons : le jeton ordinaire avec ses deux faces de même couleur et le jeton que nous venons d'imaginer avec deux faces de couleur différentes. Dans leur version ordinaire, les jetons sont moulés dans un plastique unicolore. Des versions des jetons avec des faces qui ne sont pas de la même couleur n'existent pas dans le commerce. Cette idée, pour intéressante qu'elle soit, se heurte à la question de la simplicité de fabrication.

Pour construire notre collection, nous prenons appui là encore sur un matériel ordinaire de l'école maternelle, la gommette. Nous allons coller une gommette sur l'une des deux faces de certains de nos jetons. Nous construisons ainsi une collection qui se divise en deux sous-collections : les jetons qui ont une gommette sur l'une au moins des deux faces et les jetons qui n'ont pas cette caractéristique, et qui sont des jetons qui n'ont de gommette sur aucune des

deux faces. La collection est donc constituée de jetons que nous qualifions de « marqués » et de jetons « non marqués ».



Photo 33 : Exemple de jeton marqué

Nous décidons de ne mettre au plus qu'une gommette par jeton. Nous avons donc agi sur une des deux bases du cylindre.

Nous choisissons de ne pas fabriquer de jetons avec des gommettes sur chacune des faces, garantissant une forme d'homogénéité aux éléments de notre collection.

La situation matérielle que nous avons construite est bien une situation de tri (critère « marqué » ou non des jetons).

Le milieu matériel proposé est un milieu dans lequel les objets sont stables. Le seul appui sur la perception ne suffit pas à déterminer la nature d'un jeton. Certains jetons vont devoir être traités individuellement pour que le sujet détermine leur nature.

Nous n'avons pas trouvé de solution au problème de la validation du résultat. Nous convenons cependant d'aménager la difficulté du tri en demandant à l'expérimentateur de mettre en ligne les jetons des collections délimitées par le sujet. La validation de l'ensemble des jetons marqués va être plus immédiate. Lors de la validation, les jetons marqués sont disposés en ligne de manière à ce que la face sur laquelle est la gommette soit visible. La validation de l'ensemble des jetons marqués se fait en deux temps : après avoir fait constater par le sujet l'absence de gommette sur les faces visibles de l'alignement des jetons, l'expérimentateur retourne un à un les éléments de cet alignement pour que le sujet puisse constater la même chose (ou non) sur l'autre face.

Nous décidons de ne pas modifier les autres paramètres de notre situation, et notamment la manière dont la collection est présentée au sujet. Comme pour les perles plombées, le sujet reçoit la collection des jetons dans une boîte qui lui est donnée fermée et qu'il doit ouvrir. La boîte est fabriquée selon les mêmes modalités et constituée de deux morceaux identiques à quelques millimètres près.

Nous avons conscience d'une certaine dissymétrie de notre situation par rapport à la situation précédente. Dans la situation des perles plombées, chacun des deux caractères (perle plombée ou perle vide) présente le même niveau de difficulté du point de vue de la perception. Il n'est ni plus facile ni plus difficile de percevoir qu'une perle était plombée ou vide.

Avec les jetons marqués, ce n'est pas tout à fait le cas. En effet, si une gommette est visible sur une face du jeton, cela veut dire que ce jeton est marqué. Par contre, s'il n'y a pas de gommette sur la face visible, il n'est pas possible pour autant de conclure que le jeton n'est pas marqué.

Notre situation est donc bien une situation de tri dans laquelle nous avons diminué l'impact de la perception, mais cela nous a obligé à créer une dissymétrie dans la reconnaissance dans la détermination du caractère des objets de la collection.

4.5 Analyse des données de la situation des jetons marqués

Nos données sont constituées des vidéos de 14 sujets, élèves de maternelle, confrontés précédemment à la situation des perles. Ce sont les 14 sujets qui ont préalablement été confrontés à la situation des perles plombées.

La transcription des 14 essais figure en annexe 9, le tableau des résultats en annexe 7.

Nous nous appuyons sur le même type de transcriptions pour décrire les actions réalisées par les sujets.

Quelques paramètres ne sont pas les mêmes pour les trois premiers sujets et les onze suivants. Les trois premiers sujets doivent trier les jetons marqués dans une collection d'une soixantaine de jetons tous jaunes (dont la moitié sont marqués). Les onze sujets suivants doivent trier les jetons marqués d'une collection d'une vingtaine de jetons de couleurs différentes (dont la moitié sont marqués).

4.5.1 Analyse des réussites

Examinons les réussites et les stratégies mises en œuvre lors de ces réussites.

<i>Nom</i>	<i>Classe</i>	<i>Réussite</i>	<i>Tri systématique</i>	<i>Tri par extraction</i>
<i>Sujet 4</i>	<i>MS</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>
<i>Sujet 5</i>	<i>MS</i>	<i>1</i>		<i>1</i>
<i>Sujet 7</i>	<i>MS</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>
<i>Sujet 9</i>	<i>GS</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	
<i>Sujet 10</i>	<i>GS</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>
<i>Sujet 12</i>	<i>GS</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	
<i>Sujet 13</i>	<i>GS</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	
<i>Sujet 14</i>	<i>GS</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>

Tableau 65 : Situation des perles plombées – Réussites et stratégies (extrait annexe 7)

Le nombre de réussite augmente entre les deux situations. Nous passons de quatre à huit réussites. C'est conforme à ce que nous attendions : la situation est la seconde situation de tri successive qui vient d'être proposée aux sujets. Même s'il n'y a pas eu d'échange entre l'expérimentateur et le sujet sur les raisons d'un échec éventuel, la situation des perles a rétroagi sur le sujet. De plus, nous avons mis en évidence la part importante de difficultés qui étaient en liées au caractère instable des objets de la première collection. Cette fois-ci, les objets sont stables. Ils sont de plus moins nombreux. Le traitement a duré moins longtemps, (les clips vidéo des jetons marqués sont beaucoup moins longs que ceux des perles plombées).

Nous retrouvons les mêmes variations autour des stratégies que lors de la situation des perles.

Trois sujets (sujet 9, sujet 12 et sujet 13) mettent en œuvre exclusivement une stratégie de tri systématique.

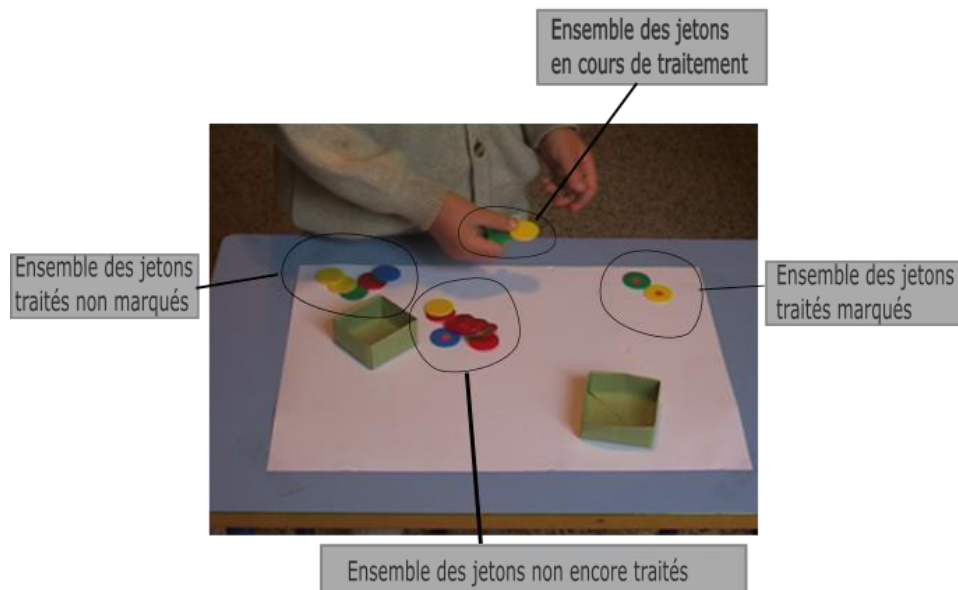


Tableau 66 : Les différents ensembles de la stratégie par tri systématique - sujet 9

Nous observons bien les différents ensembles qui se constituent dès le début du traitement : jetons non encore traités dans la partie centrale, jetons traits marqués à gauche du sujet et jetons traités non marqués à droite.

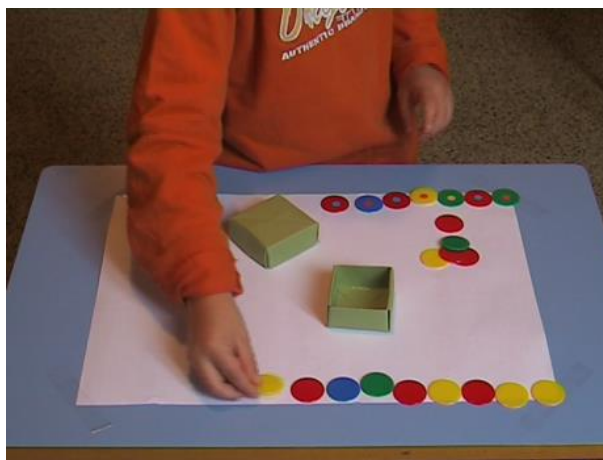


Tableau 67 : Les différents ensembles de la stratégie par tri systématique - sujet 13

Le sujet 13 met en œuvre une organisation des différents ensembles en ligne, le long des bords haut et bas de sa feuille, stratégie de distinction qu'il avait déjà mis en œuvre avec les perles plombées.

Quatre autres sujets mettent en œuvre une combinaison des stratégies de tri par extraction et systématique.

Les sujets 4 et 10 commencent par extraire les jetons qui ont une gommette visible. C'est une fois seulement que le stock de jetons qui ont une gommette visible est épuisé qu'ils basculent sur un tri systématique.

De manière assez surprenante, le sujet 7 commence par extraire les jetons qui n'ont pas de gommette. Cela l'oblige à examiner la face cachée des jetons et à reposer ceux qu'il a saisis et dont il constate qu'ils ont une gommette sur l'autre face.

Le sujet 14 met en œuvre une procédure dans laquelle il s'appuie, au moins au démarrage, sur le caractère couleur, ce qui le conduit à fabriquer de très nombreux sous-ensembles.

Le sujet 5 met en œuvre une pure stratégie d'extraction.





01:58		<p><i>Finally tous les jetons qui étaient dans la main gauche du sujet sont maintenant posés sur une ligne.</i></p>
02:00		<p><i>Le sujet attrape les jetons restants sur la partie centrale deux par deux, un dans chaque main et les retourne en les replaçant au même endroit.</i></p>
02:04		<p><i>Le sujet reproduit ce geste, sans pour autant balayer ainsi la totalité de la collection.</i></p>
02:13		<p><i>Il recommence à retourner les jetons par deux, en effectuant ceci sur des jetons qui n'avaient pas été retournés dans le mécanisme précédent (et en retournant aussi des jetons qu'il avait déjà retournés). Il recommence plusieurs fois (fin à 02 :22).</i></p>

Tableau 68 : mise en évidence des difficultés à arrêter le tri avec une stratégie par extraction

Les extraits ci-dessus mettent en évidence les difficultés à décider que le tri est terminé quand le contrôle que tous les éléments ont bien été examinés au moins une fois n'est pas réalisé. Le sujet mise sur la répétition quasi-industrielle de l'examen des jetons pour minimiser jusqu'à rendre quasi-nulle la probabilité qu'il reste un jeton marqué parmi ces jetons dont la face visible est non marquée.

4.5.2 Analyse des échecs

Examinons maintenant les échecs et les causes plausibles des échecs dans cette situation.

Nom	Classe	Réussite	Tri systématique	Tri par extraction	Nombres de perles qui ne sont pas dans le sous-ensemble prévu
Sujet 1	PS	0	1		0+1
Sujet 2	PS	0	1	1	0+1
Sujet 3	PS	0		1	1+1
Sujet 6	MS	0	1	1	0+4
Sujet 8	MS	0	1		0+2
Sujet 11	GS	0	1		0+1

Tableau 69 : Situation des jetons marqués – Stratégies et erreurs lors des échecs (extrait annexe 7)

Tout d’abord, les échecs sont moins nombreux que dans la situation des perles plombées. Mis à part pour le sujet 6, ce sont au plus deux jetons qui ne se retrouvent dans l’ensemble dans lequel ils auraient dû être.

Commençons tout de suite par le sujet 6, qui est celui qui a le plus de jetons mal placés. Les quatre jetons mal placés sont tous des jetons marqués qui se retrouvent dans l’ensemble des jetons non marqués. Le sujet 6 n’a pas examiné de manière systématique la face non visible des jetons dans le tas des jetons non marqués qu’il constituait. Il l’a fait quelques fois de manière assez fortuite, et malheureusement pour lui, à chaque fois que cela s’est produit, le jeton ne comportait pas de gommette.

Le sujet 11 se trompe de manière difficilement explicable. Il laisse un jeton marqué qu’il a bien retourné dans le tas des jetons non marqués.

Pour accélérer le traitement, le sujet 8 saisit parfois deux jetons en même temps, dans une configuration tout fait particulière où ils sont empilés. Même s’il retourne l’empilement, le sujet ne voit qu’une seule des faces des deux jetons.

Les sujets 1 et 2 construisent des ensembles qui ne sont vraisemblablement pas assez éloignés les uns des autres, ce qui permet à un élément de glisser de la partie centrale à l’un des deux sous-ensembles sans être traité.

Le sujet 3 est le seul qui met en œuvre de manière exclusive une stratégie de tri par extraction.



03:05		<p>Dès qu'un jeton avec une gomme visible apparaît, il saisit le jeton marqué et le pose dans le morceau de boîte.</p>
03:17		<p>Les jetons ont bien été étalés. Tous ont une face visible sans gomme.</p>

Tableau 70 : Extraction des jetons marqués – premier extrait sujet 3

Le sujet 3 commence par extraire les jetons marqués dont la face est visible, qu'il stocke dans un morceau de la boîte. Cela lui permet de réduire la taille de la collection qui lui reste à traiter. Il étale bien les éléments de la collection qui lui reste à traiter.



03:39		<p>Il utilise ses deux mains pour regrouper les jetons restants.</p>
03:42		<p>Pendant cette opération, il retourne un jeton par inadvertance ou bien un jeton se retourne tout seul. Il voit la gomme. Sujet : « oups on a avait oublié un »</p>

Tableau 71 : Extraction des jetons marqués – second extrait sujet 3

Comme dans toute stratégie d'extraction, il est ensuite assez démuné pour terminer son traitement. Il place dans le bon sous-ensemble les éléments dont il découvre le caractère marqué par inadvertance, notamment quand il met la seconde collection de jetons dans le second morceau de boîte.





06:22		<p><i>Le sujet se déplace et se tourne vers l'expérimentateur.</i></p> <p><i>Expérimentateur : « Ca y est, tu as fini ? »</i></p> <p><i>Sujet : « Non il en reste encore »</i></p> <p><i>Expérimentateur : « Tu me diras quand tu as fini, prends ton temps »</i></p>
06:28		<p><i>Le sujet fait passer des jetons du morceau de boîte qu'il tient dans sa main droite au morceau de boîte qui est posé sur la table. Nous observons que ces jetons sont marqués.</i></p>
07:13		<p><i>Le sujet déplace avec sa main gauche les jetons qui sont dans le morceau de boîte qu'il contient ; cela lui permet de repérer des gommettes. Les jetons marqués sont transférés dans l'autre morceau de boîte.</i></p>
07:45		<p><i>Le sujet place les deux morceaux de boîte l'un à côté de l'autre.</i></p> <p><i>Sujet : « Je finirai demain parce que je suis fatigué »</i></p> <p><i>Expérimentateur : « Tu sais, ce qu'on va faire ... tu veux qu'on vérifie ? On va vérifier »</i></p>

Tableau 72 : Extraction des jetons marqués – troisième extrait sujet 3

L'extrait de la transcription précédent montre que le sujet n'est pas dupe de la faiblesse de l'algorithme qu'il a mis en œuvre. Il évoque, comme nous l'avons déjà rencontré, la lassitude pour justifier l'arrêt du travail.

4.6 Bilan de la passation des deux situations

Nous avons construit deux situations répondant plus ou moins aux critères que nous étions fixés. Nous avons soumis quatorze sujets à l'enchaînement de ces deux situations.

Nom	Perles				Jetons			
	Réussite	Systématique	Extraction		Réussite	Systématique	Extraction	
Sujet 1	0			n'a pas réalisé la tâche	0	1		0+1
Sujet 2	1	1	1		0	1	1	0+1
Sujet 3	0		1	0+1	0		1	1+1
Sujet 4	0		1	1+0	1	1	1	
Sujet 5	0		1	0+1	1		1	
Sujet 6	0		1	3+1	0	1	1	0+4
Sujet 7	0	1		1+1	1	1	1	
Sujet 8	1		1		0	1		0+2
Sujet 9	1	1	1		1	1		
Sujet 10	0	1		0+1	1	1	1	
Sujet 11	0	1	1	0+plusieurs	0	1		0+1
Sujet 12	1	1			1	1		
Sujet 13	0	1		0+1	1	1		
Sujet 14	0	1		1+2	1	1	1	

Tableau 73 : comparaison des essais des 14 sujets

Nous observons une amélioration de la réussite entre les deux situations. La répétition de la confrontation des sujets à des situations qui mettent en jeu les mêmes connaissances peut améliorer les performances des sujets.

La situation des jetons marqués était beaucoup moins lourde matériellement pour les sujets. Elle a donc été menée beaucoup plus rapidement par ceux-ci. La réussite est meilleure, mais finalement, le nombre d'échecs reste important (un tiers de l'échantillon ne réussit pas).

Les stratégies mises en œuvre dans les deux situations sont globalement de même nature. Sont observées à la fois des mises en œuvre d'extraction seule, de tri systématique seul et de combinaisons des deux.

Le nombre d'occurrence de la stratégie de tri systématique a augmenté entre la première et la seconde situation(elle passe de 8 à 12 occurrences). Cela peut être en partie à cause des caractéristiques de la situation des jetons marqués qui contraint à la réalisation d'un geste explicite et donc observable (retournement des jetons) pour pouvoir conclure.

Mais cela peut être aussi lié à l'enchaînement des deux situations.

En effet, dans la situation des jetons marqués, six sujets mettent en œuvre une procédure de tri systématique sans commencer par une extraction. Ce résultat est surprenant car il nous apparaît assez naturel de démarrer la situation des jetons par l'extraction des jetons dont la marque est visible. Nous pouvons donc y voir un effet de la situation des perles qui peut avoir permis de développer des connaissances sur le tri systématique que les sujets cherchent à réinvestir.

Cinq sujets mettent en œuvre une pure stratégie d'extraction dans la situation des perles plombées. Ils ne sont plus que deux à le faire dans la situation des jetons marqués. Ce qui veut dire que trois sujets ont mis en œuvre dans la seconde situation une stratégie qu'ils n'avaient pas mise en œuvre dans la première situation.

Par contre, deux sujets qui avaient échoué en mettant en œuvre une pure extraction dans la situation des perles plombées ont encore échoué en mettant encore en œuvre une stratégie de pure extraction dans la situation des jetons marqués. La seule confrontation à la succession des situations n'a pas permis à ces sujets de réussir. Elle n'a pas non plus permis l'apparition, même furtive, de la stratégie de tri systématique. A ce stade de nos observations, nous pensons que ces deux sujets ne disposent que de la stratégie de tri par extraction pour conduire un tri, quel que soient les conditions dans lesquelles ce tri est organisé.

5. Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons poursuivi le développement sur l'énumération en étudiant les configurations modifiables.

Nous nous sommes appuyés sur la situation fondamentale de l'énumération développée par Briand, la situation des allumettes. En analysant cette situation, nous avons cherché à construire des situations dont les caractéristiques étaient proches du point de vue des questions d'organisation.

Cette direction de travail nous a conduit à nous intéresser à la question du tri.

La conception de deux situations de tri et leur mise en œuvre nous ont permis de collecter des données pour élaborer une modélisation des stratégies mises en œuvre dans le tri.

La production de données est le dispositif méthodologique que nous utilisons pour confronter nos analyses *a priori* à des réalités effectives. C'est l'outil indispensable qui nous a permis dans ce chapitre d'exhiber de nouvelles variables et de mieux comprendre à la fois la

variété des situations auxquelles nous confrontions nos sujets mais aussi les dimensions communes des situations que nous étudions.

Nous avons exhibé deux stratégies de tri : une stratégie de tri systématique et une stratégie de tri par extraction.

Les situations de tri n'ont pas les mêmes caractéristiques que la situation de dénombrement, la situation des allumettes ou la situation des sucres.

Pour dénombrer une collection de jetons, il ne faut les saisir (pour les compter) qu'une seule fois chacun. Pour réussir dans la situation des allumettes, il ne faut les saisir (pour insérer une allumette) qu'une seule fois. Pour ramasser les sucres, il ne faut soulever chaque sucre qu'une seule fois.

Par contre, il est possible de réussir le tri en ayant saisi et déplacé plusieurs fois une même perle plombée ou un même jeton marqué. Nos données montrent qu'il est possible de réussir dans la situation des perles plombées ou des jetons marqués sans mettre en œuvre une procédure de tris systématique. Des sujets réussissent à trier la collection ayant choisi la stratégie de tri par extraction.

Trier de manière systématique n'est donc pas nécessaire pour réussir dans ces situations de tri.

Le travail sur le tri nous a permis d'exhiber un lien entre énumération et tri.

C'est ce lien que le chapitre suivant se propose de continuer à investiguer.

Chapitre 4 - Développements théoriques et intégration de la matérialité

Le chapitre précédent a étudié le tri dans les configurations modifiables. Cette étude a mis en évidence des proximités entre les situations de tri et les situations d'énumération. L'étude de cette proximité va nous conduire à des développements théoriques sur l'énumération, avec l'élaboration d'une nouvelle définition qui rend compte de cette proximité.

Cette définition va être mise à l'épreuve d'une situation de production des éléments d'une collection qui montre la validité et l'intérêt du nouveau modèle produit.

Parallèlement à ce travail, nous maintenons notre volonté d'intégrer les dimensions matérielles à nos analyses. Cette intégration donne l'occasion de revenir sur les situations présentées dans les chapitres 2 et 3, et de mettre compléter l'analyse de la situation du sujet.

L'analyse du point de vue de la matérialité est aussi l'occasion de réinterroger l'intégration de la temporalité à nos modélisations et sa place par rapport aux dimensions spatiales.

Commençons par les développements théoriques autour de l'énumération.

1. Vers une nouvelle définition de l'énumération

L'étude de l'énumération dans les configurations modifiables et les configurations non modifiables a permis de développer une connaissance des stratégies et des variables de situation. La recherche de situations proches de l'énumération a conduit à étudier le tri, à nous interroger sur sa définition et à identifier des stratégies qui témoignent d'une proximité entre tri et énumération.

Nous comprenons mieux la nature des gestes que réalisent les sujets et nous identifions mieux les stratégies mises en œuvre pour résoudre les problèmes posés sur les collections qu'il s'agisse de dénombrement ou de tri.

L'objectif de ce chapitre est de revenir sur les situations que nous avons rencontrées précédemment pour s'interroger sur la place effective de l'énumération dans ces situations, pour mieux identifier ce qui relève de l'énumération et ce qui n'en relève pas.

Cette identification va s'appuyer sur le repérage de gestes et se poursuivre par une analyse logique des conditions qui sont remplies ou non dans les différentes situations.






Nous allons donc revisiter les situations que nous avons déjà évoquées et nous replonger dans nos données en nous appuyant sur les connaissances que l'étude des situations de tri a permis de développer.

Revenons sur la situation des allumettes, et notamment sur ce que Romain met en œuvre lors de son second essai (Briand, Loubet, & Salin, 2004).

1.1 Traitement et énumération

Rappelons pour commencer que, lors de ce second essai, Romain réussit à mettre une allumette et une seule dans chaque boîte et est capable de signifier qu'il a terminé le traitement.

Il a donc bien énuméré la collection des boîtes d'allumettes. Attardons-nous sur des extraits que nos premiers regards sur cette situation ne nous permettaient pas d'interpréter.

00:18,19		<p><i>Romain saisit une première nouvelle boîte avec sa main droite. Cette nouvelle boîte est éloignée de l'endroit où il a posé les boîtes précédentes.</i></p>
00:19,01		<p><i>Il secoue et porte à son oreille droite cette boîte</i></p>
00:19,16		<p><i>Tout en conservant dans sa main droite la boîte qu'il avait saisie, Romain saisit une nouvelle seconde boîte avec sa main gauche. Cette nouvelle boîte se trouvait juste à côté de l'endroit où il avait saisi la précédente.</i></p>
00:20,05		<p><i>Il secoue cette nouvelle boîte et la porte à son oreille gauche.</i></p>
00:21,03		<p><i>Il repose ces deux boîtes sur la table, tout près de l'endroit où il les avait prises, les lâche toutes les deux</i></p>



00:21,17		<p>... et saisit une nouvelle troisième boîte avec sa main gauche, juste à côté de l'endroit où il a posé les deux boîtes précédentes.</p>
00:22,01		<p>Il porte à son oreille gauche la boîte qu'il tient avec sa main gauche, il la secoue ...</p>

Tableau 74: extraits du second essai de Romain (Briand, Loubet, & Salin, 2004)

Appliquons les connaissances développées dans le cadre du tri. Nous pouvons identifier les ensembles que Romain est en train de construire.



Figure 152 : les différents ensembles de Romain - essai 2

Romain sépare parfaitement les éléments traités des éléments non encore traités. Au moment où la photo est extraite, il lui reste donc trois boîtes dans lesquelles il n'a pas encore mis d'allumettes.

Il peut apparaître surprenant que Romain saisisse à tour de rôle chacune des trois boîtes restantes de l'ensemble des objets non traités pour les secouer les unes après les autres. Ce secouage apparaît comme une vérification préalable du caractère non traité de l'élément qu'il saisit. Pour autant, et compte tenu de l'organisation qu'il a mise en œuvre, ce secouage apparaît comme non nécessaire ; il est redondant.

D'une certaine manière, il instille un doute sur la confiance que Romain a dans la structure qu'il a produite, et ceci d'autant plus que c'est le même geste que celui qu'il réalise dans son premier essai quand il avait mélangé éléments traités et élément non traités en les plaçant dans le même espace.

Peut-on dire dans ce cas qu'il a énuméré la collection des boîtes d'allumettes ?

1.2 Qu'est-ce qu'énumérer une collection ?

Cette question peut sembler paradoxale dans la mesure où Romain réussit la tâche dans la situation fondamentale de l'énumération. Pour autant, cette réussite nous amène à réinterroger la définition de l'énumération à travers l'observation des gestes de Romain.

L'analyse *a priori* nous conduit à penser que le sujet doit saisir une boîte, mettre une allumette à l'intérieur puis poser cette boîte dans un espace distinct de l'espace dans lequel la boîte a été saisie. Il peut éventuellement secouer la boîte après avoir inséré l'allumette à l'intérieur pour vérifier que celle-ci n'est pas tombée. Dans ce cas, on pourra dire que la collection des boîtes d'allumettes a été énumérée, que chaque boîte est traitée une fois et une seule.

Dans ce contexte, nous ne comprenons pas bien le geste de Romain. Nous ne mettons pas sur le même plan la difficulté matérielle engendrée par l'insertion d'une allumette dans une boîte et la pose d'une boîte d'allumettes sur la table. Le geste d'insertion peut présenter des risques que ne présente pas la simple pose de la boîte sur la table.

Quand nous avons décrit l'algorithme que devait mettre en œuvre le sujet pour réaliser la tâche, nous avons considéré que le traitement que le sujet avait à réaliser sur les éléments de la collection était de mettre une allumette à l'intérieur de chaque boîte. Romain met en œuvre un mécanisme dans lequel le traitement n'est pas réduit à l'insertion de l'allumette dans la boîte, mais se compose d'un secouage suivi d'une insertion.

Nous ne sommes pas en train d'interroger la question du secouage. Nous sommes en train de nous demander ce que nous appelons « traitement » d'un élément dans ces situations. Nous voyons à travers l'exemple de Romain qu'il y a au moins deux acceptions différentes du traitement d'un élément qui peuvent être considérées.

Une des choses que nous a appris le chapitre sur les configurations modifiables est qu'au-delà des stratégies épurées et parfaites que produisent nos analyses *a priori*, nous devons aussi penser en termes de combinaisons de stratégies. C'est ce que nous allons faire dans la situation suivante que nous allons imaginer.

Nous comprenons l'intérêt de Romain à contrôler l'insertion de l'allumette dans la boîte. Nous allons imaginer que le contrôle soit désynchronisé de l'insertion. Notre sujet fictif saisit une boîte, insère une allumette à l'intérieur puis pose la boîte d'allumette qu'il tenait dans sa main dans un espace éloigné du tas des boîtes de départ. Il fait cela jusqu'à ce que le tas de

départ soit vide, puis comme il sait que l'insertion est un geste risqué, il considère qu'il n'a pas encore terminé son travail. Il passe alors à une deuxième phase qui consiste à vérifier que chaque boîte contient bien une allumette (ou plutôt contient au moins une allumette). Imaginons maintenant que le sujet saisisse une boîte, la secoue et la repose au milieu des autres, qu'il répète ce geste un certain nombre de fois et finisse par s'arrêter.

Peut-on dire dans ce cas que la collection de boîtes d'allumettes a été énumérée ?

Étudions chacune des deux phases de cette situation fictive.

Dans la première phase, le traitement d'un élément consiste à insérer une allumette dans une boîte. Chaque élément est bien traité une fois et une seule. Le sujet signifie la fin de cette première phase en passant au contrôle de l'insertion. Nous pouvons dire que le sujet a énuméré la collection des boîtes d'allumettes.

Dans la deuxième phase, le sujet dispose d'une collection de boîtes d'allumettes et doit contrôler par secouage qu'il y a bien une allumette au moins dans chaque boîte. Donc formellement, le traitement d'un élément consiste ici à secouer une boîte. Si jamais une boîte ne faisait pas de bruit lors du secouage, il conviendrait de la mettre à part pour la séparer des boîtes qui font du bruit. Le sujet doit donc trier les boîtes pleines. Si la première phase a été correctement conduite, son tri ne doit produire qu'un seul ensemble, celui des boîtes pleines. L'ensemble des boîtes vides ne doit comporter aucun élément. Pour trier les boîtes pleines, il peut mettre en œuvre une stratégie de tri systématique. Dans ce cas, chaque élément sera secoué une fois et une seule et nous pourrions dire qu'il a énuméré la collection des boîtes d'allumettes. Mais s'il met en œuvre une combinaison de tri systématique et de tri par extraction, certaines boîtes seront secouées plus d'une fois, certains éléments seront traités plus d'une fois. Dans ce cas nous ne pourrions pas dire que la collection des boîtes d'allumettes a été énumérée.

Il est donc difficile d'étudier l'énumération d'une collection sans préciser le traitement considéré. Nous ne discutons pas ici la question de la réussite à la tâche, nous discutons la possibilité de répondre pour un observateur à la question « la collection a-t-elle été énumérée ? ».

La réponse à cette question ne peut être produite que si le traitement considéré a été explicité, ce qui nous conduit à reformuler la question précédente : « la collection a-t-elle été énumérée pour le traitement considéré ? »

1.3 Traitement, tri et énumération

Revenons sur le premier essai de Romain (dans lequel il ne réussit pas la tâche) et sur les difficultés qu'il rencontre dans la mise en œuvre de son organisation.




00 :07,13		<i>Il pose sur la table la boîte qu'il tenait dans la main gauche pendant qu'il saisit une nouvelle boîte avec sa main droite.</i>
00 :08,00		<i>Il porte à son oreille droite la boîte qu'il tient dans sa main droite et la secoue.</i>
00 :08,21		<i>Alors que la boîte qu'il tient dans sa main droite est toujours à côté de son oreille droite, il saisit avec sa main gauche une nouvelle boîte.</i>

Figure 153 : extraits du premier essai de Romain

Romain réussit à insérer une allumette dans une boîte. Sa difficulté réside dans la détermination des éléments qu'il doit traiter. Il pourrait mettre de côté les boîtes dans lesquelles il vient d'insérer une allumette au fur et à mesure qu'il les traite, comme c'est le cas dans son second essai. S'il ne le fait pas au fur et à mesure, il pourrait aussi au bout d'un moment mettre de côté tous les éléments qu'il a traités ou bien tous les éléments qu'il lui reste à traiter.

Analysons la structure logique de l'organisation spatiale qu'il met en œuvre, en décrivant la nature des ensembles construits.



Figure 154 : les différents ensembles de Romain - essai 1

Romain ne construit pas deux ensembles qui permettraient de séparer les éléments traités des éléments non encore traités. Sa difficulté tient à l'absence de mise en œuvre d'un tri. Ce tri pourrait être réalisé au fur et à mesure que les éléments sont traités (comme dans l'essai 2) ou bien une fois que quelques éléments ont été traités.

L'observation de l'essai 1 de Romain permet de voir que le sujet est confronté aux mêmes difficultés d'arrêt de l'algorithme que les sujets qui mettent en œuvre un tri par extraction. A l'issue de l'insertion d'une allumette dans une boîte, la boîte est reposée dans un tas dans lequel éléments traités et éléments non traités ne sont pas séparés spatialement. A ce titre, on peut dire qu'un sujet qui met en œuvre un tri par extraction ne sépare pas non plus spatialement tous les éléments qu'il a traités des éléments qu'il doit encore traiter. Il se trouve dans une situation tout à fait identique à celle de Romain dans ce premier essai.

C'est par l'observation de la non-réussite dans la situation des boîtes d'allumettes et dans les situations des perles plombées ou des jetons marqués que nous comprenons pourquoi il est légitime de considérer que les connaissances d'énumération sont investies dans les situations de tri.

Malgré les définitions que nous avons adoptées, le mot tri a de multiples sens qui dépendent du contexte dans lequel ce mot est utilisé. Pour nous en rendre compte, nous allons étudier le sens ce mot en fonction de ce sur quoi il porte.

Il peut porter sur un ensemble d'éléments. Dans ce cas, il sert à décrire le résultat d'un traitement attendu sur cet ensemble d'objets (« Il faut trier la collection des perles plombées »). À ce titre, il est de même nature que « dénombrer » (« Il faut dénombrer la collection de jetons »).

Il peut porter sur un élément de l'ensemble. Dans la situation des boîtes d'allumettes, pour réaliser l'énumération de la collection des boîtes, chaque boîte est placée dans un espace particulier au fur et à mesure qu'elle est traitée, chaque boîte est donc triée. Les connaissances de tri sont donc investies dans les situations d'énumération.

Tri et énumération sont donc liés.

Poursuivons l'étude de ce lien.

1.4 Analyse logique de l'énumération

Briand a défini l'énumération à partir de la situation de dénombrement par comptage comme l'élaboration d'un chemin maximal sans cycle. Nous avons reformulé cette définition dans le chapitre 1 en termes de passage en revue une fois et une seule de chaque élément de la collection. En nous appuyant sur les derniers développements produits, nous pouvons dire qu'énumérer, c'est parcourir une collection pour traiter une fois et une seule chaque élément de cette collection.

Nous allons maintenant porter notre analyse sur l'expression « une et une seule fois ». L'expression « une et une seule fois » est une forme langagière banale en mathématiques qui a pour objectif de traduire de manière concise une double condition.

1.4.1 Reformulation en terme de couples de conditions

Quand une tâche est prescrite, la consigne peut décrire les conditions de réussite, mais elle peut aussi décrire les conditions de l'échec à la tâche. Ainsi, dans la situation des sucres, la description de ce que le sujet devait faire (ramasser le sucre qui est caché sous chaque chapeau) est renforcée par la description des conditions qui vont soit arrêter le jeu (soulever

un chapeau sans sucre dessous), soit provoquer l'échec (à la fin de la partie, constater qu'il reste un sucre qui n'a pas été ramassé).

Ainsi, dans le comptage il y aura échec si un élément n'a pas été compté ou bien a été compté plus d'une fois.

Traiter une fois et une seule chaque élément sera réalisé si les deux conditions suivantes sont réalisées simultanément :

- Il ne faut pas oublier de traiter un élément (condition C1)
- Il ne faut pas traiter un même élément plus d'une fois (condition C2)

Reformulons les deux conditions de l'énumération avec des formes affirmatives, en indiquant ce qu'il convient de faire.

- Condition C1 : Chaque élément doit être traité au moins une fois
- Condition C2 : Chaque élément doit être traité au plus une fois

L'énumération peut donc être définie de manière logique à l'aide de ces deux conditions C1 et C2.

Nous appelons situation d'énumération une situation dans laquelle les deux conditions C1 et C2 doivent être remplies simultanément.

1.4.2 Modélisation logique des conditions de l'énumération

Représentons sous forme de table logique la combinatoire générée par la prise en compte des deux conditions C1 et C2 :

<i>C1</i>	<i>C2</i>	<i>C1 ET C2</i>	
<i>V</i>	<i>V</i>	<i>V</i>	<i>Cas 1</i>
<i>V</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>Cas 2</i>
<i>F</i>	<i>V</i>	<i>F</i>	<i>Cas 3</i>
<i>F</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>Cas 4</i>

Figure 155 : table logique de l'énumération

Cette table logique produit de manière théorique 4 cas, dont nous allons étudier les occurrences dans la situation des allumettes.

Dans la situation des allumettes, le traitement demandé consiste à mettre une allumette et une seule dans une boîte. Quand il y a une allumette et une seule dans chaque boîte, cela signifie que les deux conditions ont été remplies. Nous sommes alors dans le cas 1, seul cas de réussite (il s'agit donc bien d'une situation d'énumération).

Les trois autres cas sont des cas où la collection des boîtes d'allumettes n'a pas été énumérée.

1.4.3 Outil de description de la non-réussite de l'énumération

Poursuivons notre description de la non-réussite de l'énumération de la collection des boîtes d'allumettes.

Nous cherchons à outiller la description de la procédure du sujet dans les cas de non-réussite, notamment par une description logique.

Si la collection des boîtes d'allumettes n'a pas été énumérée, alors cela correspond aux trois cas présents dans la table de vérité :

- soit non C1,
- soit non C2,
- soit les deux.

En langage naturel, nous dirons qu'il suffit que l'une des deux conditions ne soit pas vérifiée pour que la collection des boîtes d'allumettes ne soit pas énumérée, ce qui se traduit dans le langage logique en $\text{NON } C1 \text{ OU } \text{NON } C2$.

Quand le sujet a terminé et qu'au moins une des boîtes se retrouve avec deux allumettes à l'intérieur, cela signifie que cet élément a été traité deux fois, donc que la condition C1 n'est pas respectée. Si dans le même temps, toutes les autres boîtes contiennent au moins une allumette, cela signifie que chaque élément a au moins été traité une fois, et donc que la condition C2 est respectée. Nous sommes alors dans ce que nous avons nommé cas 3.

Quand l'une des boîtes au moins se retrouve sans allumette à l'intérieur, cela signifie que cet élément n'a pas été traité, et donc que la condition C2 n'est pas respectée. Si dans le même temps, aucune boîte ne se retrouve avec plus d'une allumette, cela signifie qu'aucun élément

n'a été traité plus d'une fois, et donc que la condition C1 est respectée. Nous sommes alors dans ce que nous avons nommé cas 2.

Quand une boîte se retrouve sans allumette alors qu'une autre se retrouve avec deux allumettes, cela signifie qu'un élément n'a pas été traité alors qu'une autre était traitée deux fois. Dans ce cas, aucune des deux conditions C1 et C2 n'est respectée. Nous sommes alors dans ce que nous avons nommé cas 4.

Nous disposons donc ainsi d'un outil qui permet d'aller plus loin que dans la description de la non-réussite dans la situation des allumettes. Nous pouvons décrire ce que le sujet réussit à faire ou pas.

1.5 Nouvelles connaissances, nouvelles définitions, nouvelles situations

Énumérer une collection au sens de Briand, c'est respecter simultanément les deux conditions C1 et C2. Ce respect simultané de ces deux conditions est donc un savoir identifié, dans une communauté qui a produit un mot pour le désigner. Cette connaissance est mise en œuvre dans des situations que nous avons décrites dans les chapitres précédents. En particulier, quand une collection d'objets est dénombrée, il faut qu'elle soit énumérée.

Quand une collection d'objets est triée, indépendamment de la stratégie utilisée, il faut que chaque élément de la collection soit traité. Il faut donc que chaque élément de la collection soit traité au moins une fois. Quand une collection est triée, une exploration de cette collection qui respecte la condition C1 est mise en œuvre. Le tri peut être réussi sans pour autant que C2 soit respectée. Nous ne disposons pas pour l'instant de mot pour décrire la connaissance mise en œuvre dans ce cas.

Dans ce type de situation, tous les éléments doivent être traités : c'est la question de l'exhaustivité qui est centrale.

Comme le respect de la condition C2 n'est pas nécessaire, il s'agit ici d'une forme affaiblie d'énumération.

Ces considérations nous conduisent à faire évoluer le lexique, en proposant une modification de la définition de l'énumération.

Depuis le début de ce travail, nous avons donc rencontré deux types de situations :

- des situations où seule C1 est respectée,
- les situations dans lesquelles C1 et C2 sont vérifiées.

Nous avons besoin d'un mot pour désigner le premier type de situations évoquées ci-dessus. Nous choisissons de nommer énumération faible la connaissance en jeu quand C1 est respectée et énumération forte la connaissance en jeu quand C1 et C2 sont respectées.

Cette dénomination nous paraît pertinente car elle rend compte par le vocabulaire produit : de la proximité et de la différence des connaissances en jeu dans une situation de dénombrement et une situation de tri.

Ces sont deux situations qui requièrent la mise en œuvre d'une des deux conditions identifiées (C1 en l'occurrence). Ce sont donc deux situations d'énumération. Le nécessaire respect de la seconde condition permet de qualifier l'énumération de forte, l'absence de cette nécessité permet de qualifier l'énumération de faible.

Poursuivons notre analyse logique. La description de l'énumération forte comme la conjonction de deux conditions permet de penser une combinatoire génératrice de situations. C'est cette combinatoire que nous allons maintenant explorer.

Il existe aussi des situations dans lesquelles ni C1, ni C2 ne sont vérifiées. Ce sont des situations sur lesquelles ne pèse aucune contrainte d'énumération. Nous n'étudions pas ces situations.

Par contre, des situations dans lesquelles seule la condition C2 doit être vérifiée existent, au moins théoriquement. Et l'étude de ces situations nous intéresse. Nous donnerons des exemples de ce type de situations dans la suite de ce texte.

Les situations dans lesquelles seul le respect de C2 est requis seront nommées situations d'énumération faible.

Le raisonnement sur la combinatoire des deux contraintes logiques nous amène à mettre en évidence deux types de situations : des situations d'énumération forte qui nécessitent le respect des conditions C1 et C2 et des situations d'énumération faible qui nécessitent le respect d'une seulement des deux conditions C1 et C2.

Nous avons besoin de distinguer les deux situations d'énumération faible. Nous choisissons de nommer situations d'énumération faible + les situations dans lesquelles C1 est respectée et situations d'énumération faible - les situations dans lesquelles C2 est respectée.

1.6 Modélisation mathématique de situations d'énumération

Nous allons produire une modélisation mathématique de ces situations d'organisation en prenant appui sur notre analyse logique en termes de contraintes.

Considérons une collection d'objets sur laquelle un traitement est appliqué.

Nommons notre collection E .

E est un ensemble fini dont les éléments seront notés e .

Considérons maintenant une application m , qui à chaque élément de E lui associe le nombre de traitement qui ont été effectués sur cet élément, appelé aussi ordre de multiplicité.

$$\begin{aligned} m : E &\rightarrow N \\ e &\rightarrow m(e) \end{aligned}$$

$m(e) = 1$ signifie que l'élément e a été traité une fois.

$m(e) = 0$ signifie que l'élément e n'a pas été traité.

$m(e) > 1$ signifie que l'élément e a été traité plus d'une fois.

Traduisons maintenant les conditions C1 et C2 à l'aide de cette application m .

$$\text{Condition C1 : } \forall e \in E, m(e) \geq 1$$

$$\text{Condition C2 : } \forall e \in E, m(e) \leq 1$$

Pour que C1 et C2 soient vérifiées simultanément, il faut que chaque élément de E soit traité au moins une fois (condition C1) et au plus une fois (condition C2).

$$\text{Conditions C1 et C2 : } \forall e \in m(e) = 1$$

La situation est une situation d'énumération forte si l'image de tous les éléments de E par m est 1, ce qui veut dire que l'image réciproque de $\{1\}$ est E .

$$\text{Conditions C1 et C2 : } m^{-1}(\{1\}) = E$$

La situation est une situation d'énumération faible + si aucun élément de E n'a 0 pour image 0, ce qui veut dire qu'il n'y a pas d'élément dans l'image réciproque de $\{0\}$.

$$\text{Condition C1 : } m^{-1}(\{0\}) = \emptyset$$

La situation est une situation d'énumération faible - si aucun élément de E n'a une image supérieure strictement à 1, donc si tous les éléments de E ont une image égale à 0 ou 1, ce qui veut dire que l'image réciproque de $\{0; 1\}$ est E.

$$\text{Condition C2 : } m^{-1}(\{0; 1\}) = E$$

Munis du concept d'ordre de multiplicité, nous pouvons produire une description du résultat des traitements opérés sur un ensemble.

Le résultat d'un traitement va se présenter sous la forme d'un ensemble de couples (autant qu'il y a d'éléments dans l'ensemble), chaque couple étant constitué d'un élément de l'ensemble et de son ordre de multiplicité associé.

Soit M l'ensemble de ces couples associé à un traitement T réalisé sur un ensemble E.

$$M(E, T) = \{ (e, m(e)) ; \forall e \in E \}$$

Un ensemble E a été fortement énuméré (traitement T) si l'ordre de multiplicité de chaque élément de E est 1, donc si :

$$M(E, T) = \{ (e, 1) ; \forall e \in E \}$$

Un ensemble E a été faiblement + énuméré (traitement t+) si l'ordre de multiplicité de chaque élément est non nul.

$$M(E, t_+) = \{ (e, m(e)) ; \forall e \in E, m(e) > 0 \}$$

Ou bien

$$M(E, t_+) = \{ (e, m(e)) ; \forall e \in E, m(e) \geq 1 \}$$

Un ensemble E a faiblement - énuméré (traitement t-) si l'ordre de multiplicité de chaque élément est inférieur à 2).

$$M(E, t_-) = \{ (e, m(e)) ; \forall e \in E, m(e) < 2 \}$$

1.7 Application du modèle à la situation de tri

Nous allons maintenant appliquer ce modèle à la situation de tri. Nous avons décrit dans le chapitre précédent la variété des stratégies de tri. Nous allons maintenant les redéfinir.

Dans le cadre de la mise en œuvre d'un tri systématique, les conditions C1 et C2 sont respectées. Chaque élément est traité une fois et une seule. L'ordre de multiplicité de chaque élément de l'ensemble est 1. Le tri systématique est une énumération forte.

Dans ce cas, le tri peut être décrit de la manière suivante :

$$M(E, T_{\text{tri systématique}}) = \{(e, 1); \forall e \in E\}$$

Dans le cadre de la mise en œuvre d'un tri par extraction, la condition C1 est respectée. Certains éléments sont traités plusieurs fois. L'ordre de multiplicité des éléments est supérieur ou égal à 1. Le tri par extraction est une énumération faible +.

Dans ce cas, le tri peut être décrit de la manière suivante :

$$M(E, T_{\text{tri par extraction}}) = \{(e, m(e)); \forall e \in E, m(e) \geq 1\}$$

Nos observations sur les perles plombées et les jetons marqués font apparaître des combinaisons de ces deux tris.

Dans ce cas, nous ne pouvons pas conclure de manière générale sur la valeur de l'ordre de multiplicité de chaque élément. En effet, contrairement à la situation des sucres, nous ne disposons d'une règle qui stoppe l'énumération en cas de non-respect d'une des conditions. Un même élément peut donc être examiné plusieurs fois.

Par contre, si la combinaison des stratégies est une suite ordonnée des deux stratégies (d'abord extraction puis à partir d'un moment identifié mise en œuvre d'un tri systématique), alors nous pouvons aller plus loin dans l'analyse.

Considérons que nous soyons capables d'identifier l'instant t où le sujet passe de la stratégie par extraction à la stratégie systématique.

Si nous pouvons identifier cet instant t , alors nous pouvons aussi identifier le sous-ensemble de E qui a déjà été trié (par extraction) à cet instant.

Considérons que E se décompose en E_1 et E_2 où E_1 représente l'ensemble des éléments de E que le sujet a extraits et E_2 l'ensemble des éléments que le sujet va trier de manière systématique (à partir de l'instant t).

$$E = E_1 \cup E_2 \text{ et } E_1 \cap E_2 = \emptyset$$

$$M(E, T_{\text{combinaisons de stratégies de tri}}) = \{(e, m(e)); \forall e \in E, m(e) \geq 1\}$$

Et

$$M(E, Tri_{\text{systematique}}) = \{ (e, m(e)) ; \forall e \in E_2, m(e) = 1 \}$$

1.8 Application du modèle à la situation des sucres

Nous allons appliquer le modèle que nous avons construit à la situation des sucres.

La situation des sucres est une situation d'énumération forte.

Le résultat M d'une énumération forte est donc un ensemble de couples constitués des chapeaux ou des points dessinés sur la feuille affectés de l'ordre de multiplicité 1.

Règles du jeu :

Soit E l'ensemble des chapeaux et e un élément de E .

Tant que $m(e) \leq 1$, alors le jeu continue.

Si $m(e) = 2$, alors le jeu s'arrête et la partie est perdue.

Modélisation réussite :

Si $\forall e \in E m(e) = 1$ alors la partie est gagnée et dans ce cas la collection a été fortement énumérée.

Intéressons-nous aux cas dans lesquels la partie n'est pas gagnée.

Modélisation échec :

Commençons par le cas où le sujet a décidé d'arrêter la partie. Les chapeaux sont donc soulevés et disposés sur le côté de la feuille.

Il reste des sucres qui n'ont pas été ramassés. L'ordre de multiplicité de ces éléments est donc égale à 0.

$$\exists e \in E, m(e) = 0$$

Traduisons cette indication en référence aux deux conditions de l'énumération. Il existe des éléments qui n'ont pas été traités et des éléments qui ont été traités une fois. Tous les éléments de E ont été traités au plus une fois.

$$\forall e \in E, m(e) \leq 1$$

La condition C2 est remplie. Aucun élément n'a été traité plus d'une fois. Par contre, la condition C1 n'est pas remplie puisqu'il existe des éléments qui n'ont pas été traités.

Dans ce cas, la collection est faiblement - énumérée.

Intéressons maintenant au cas dans lequel la partie s'arrête car le sujet vient de soulever un chapeau sans sucre en dessous.

Ce chapeau est le seul élément de la collection qui a été traité deux fois.

Soit e_0 cet élément.

$$m(e_0) = 2 \text{ et } \forall e \in E, e \neq e_0 \text{ et } m(e) \leq 1$$

A e_0 près, la collection est faiblement - énumérée.

1.9 Jeu sur C1 et C2 et production de situations

Nous disposons avec la situation des allumettes et la situation des sucres de deux situations d'énumération forte, donc de situations qui permettent de travailler le respect des deux conditions C1 et C2.

L'objectif de ce paragraphe est de produire des situations qui permettent de travailler spécifiquement soit la condition C1 soit la condition C2, donc des situations d'énumération faible

Nous n'irons pas pour ces situations jusqu'à la production de données les concernant. Nous sommes simplement en train d'envisager une possibilité théorique que ces situations existent. Ces situations sont des jeux au sens de Brousseau (1998).

Pour cela, nous allons nous placer dans le cadre matériel que nous avons construit dans la situation des sucres. Nous disposons donc d'une feuille support sur laquelle sont dessinés des points. Sur chaque point de cette feuille est posé un sucre et sur chaque sucre est posé un chapeau.

1.9.1 Variations sur les sucres et énumération faible

+

L'objectif est de produire un jeu qui contraigne à respecter C1, sans pour autant être contraint de respecter C2. Dans la situation des sucres de notre chapitre 2, l'objectif était de

mettre en place une situation qui respecte simultanément C1 et C2. Le respect de C2 était réalisé par l'arrêt immédiat du jeu quand le sujet soulevait un chapeau sous lequel il n'y avait plus de sucre. C'est donc cet aspect-là qu'il convient de ne plus mettre en œuvre.

Donc dans notre jeu d'énumération faible +, la partie ne s'arrête pas si le joueur soulève un chapeau sous lequel il n'y a pas de sucre (non-respect de C2 autorisé).

Il faut que la partie s'arrête quand le joueur pense qu'il a ramassé tous les sucres (respect de C1).

Un tel jeu ne présente pas d'intérêt particulier dans la mesure où la stratégie qui repose sur une accumulation de soulèvements de chapeaux sans organisation permet de réaliser C1.

Il faut donc qu'il y ait un enjeu à limiter le nombre de soulèvements de chapeaux.

Pour créer cet enjeu, nous décidons de mettre le joueur en situation d'opposition avec un autre joueur. C'est donc un jeu à deux qui va se dérouler.

L'opposition va être différée. Les joueurs seront confrontés l'un après l'autre à la situation.

Pour gagner, le joueur doit réaliser C1 en mettant en œuvre moins de soulèvements de chapeaux que son adversaire. Pour que le jeu puisse se dérouler, il faut donc une troisième personne, maître du jeu ou un système informatique dont le rôle est de compter et de mémoriser le nombre de soulèvements de chapeaux que réalise chacun des joueurs.

Quand un joueur pense qu'il a terminé, il l'annonce au maître du jeu. A ce moment, joueur et maître du jeu ramassent les chapeaux pour contrôler que tous les sucres ont été ramassés. Si c'est le cas, alors le score qui est constitué du nombre de soulèvements réalisé par le joueur peut être porté à son crédit. S'il reste au moins un sucre, le joueur ne peut plus gagner.

Une fois que le second joueur est lui aussi passé, si les deux joueurs ont chacun un score porté à leur crédit, alors le gagnant est celui qui a le score le plus bas. Si un seul des deux joueurs a obtenu un score, c'est lui qui est déclaré gagnant. Si aucun des deux joueurs n'a obtenu de score, alors personne n'a gagné.

Dans ce jeu, il faut respecter C1 (c'est parce que tous les sucres ont été ramassés qu'un joueur peut obtenir un score) et c'est le non-respect de C2 qui diminue les possibilités de gagner. Pour optimiser ses chances de gagner, il faut minimiser le nombre de fois où le joueur va soulever un chapeau sans qu'il n'y ait de sucre dessous. Si le joueur respecte C2, il est certain que son adversaire ne pourra pas faire de meilleur score.

Le jeu ne va avoir d'intérêt que s'il est très difficile de réaliser une énumération de la collection des chapeaux, par exemple avec des collections de ronds nombreuses et désorganisées.

Le jeu peut aussi se jouer à un seul joueur. Il joue alors contre lui-même et l'enjeu porte sur la diminution (ou éventuellement la non-augmentation) du nombre de soulèvements d'une partie à l'autre.

1.9.2 Variations sur les sucres et énumération faible

-

Notre second jeu va fonctionner de manière symétrique par rapport au premier.

Il s'agit ici de respecter C2. Donc si le joueur soulève un chapeau sans sucre, la partie s'arrête et le joueur a perdu.

L'objectif du joueur est donc de ne soulever un chapeau que s'il est sûr qu'il y a bien un sucre dessous (respect de C2).

Quand le joueur n'est plus sûr de savoir quels sont les chapeaux sous lesquels il ne reste pas de sucres, alors il peut arrêter la partie.

Là encore si le joueur joue seul, le jeu a peu d'intérêt puisqu'on peut imaginer qu'il soulève quelques chapeaux et décide ensuite d'arrêter. Il faut donc qu'il y ait un enjeu à ramasser le plus de sucres possibles.

Nous mettons en œuvre la même solution que lors du sujet précédent pour créer l'enjeu, à savoir la fabrication d'un jeu d'opposition différée.

Pour gagner, le joueur doit réaliser C2 en ramassant plus de sucres que son adversaire. Le troisième intervenant, maître du jeu, n'est là que pour contrôler le respect des règles de ce jeu.

Quand un joueur soulève un chapeau sans sucre, la partie s'arrête et aucun score n'est attribué au joueur.

Quand un joueur demande à s'arrêter, le maître du sujet dénombre les sucres ramassés et mémorise ce nombre. Ce nombre constitue le score du joueur.

Quand les deux joueurs sont passés, s'ils ont tous les deux produit un score (donc tous les deux respectés C2), le gagnant est celui dont le score est le plus important. Si l'un des deux

joueurs n'a pas produit de score, alors c'est l'autre joueur qui a gagné et si aucun des deux joueurs n'a produit de score, alors personne n'a gagné.

Dans ce jeu, c'est le respect de C2 qui garantit la production d'un score. Pour autant, cela peut ne pas suffire. Il convient aussi de faire en sorte que le nombre de sucres laissés sur la feuille soit le plus faible possible pour que le score soit le plus élevé possible. Pour optimiser ses chances de gagner, il faut maximiser le nombre de sucres ramassés. Si le joueur respecte C1, il est certain que son adversaire ne pourra pas faire de meilleur score.

Nous venons d'imaginer une situation d'énumération faible + et une situation d'énumération faible -. Ces situations ont été construites avec des configurations non modifiables.

1.9.3 Variations sur les allumettes et énumération faible

Nous poursuivons notre construction de situations d'énumération faible, cette fois-ci dans le cas où la configuration est modifiable.

Pour cela, nous nous appuyons sur la situation des allumettes dans le cas où celles-ci sont mobiles (Briand, Lacave-Luciani, Harvouët, Bedere, & Goua de Baix, 2000).

Décrivons les situations telles qu'elles pourraient se présenter.

Les boîtes d'allumettes remplacent les chapeaux et les ronds et les allumettes les sucres.

Briand a étudié les effets du secouage dans la réalisation de la tâche, ce qui l'a conduit à envisager une variante de sa situation dans laquelle une allumette était préalablement insérée dans chacune des boîtes. Le jeu consistait alors à insérer une seconde allumette dans chaque boîte. Cette solution permet de neutraliser la perception auditive. Le secouage de la boîte ne permet plus au sujet de savoir si l'élément de la collection a déjà été traité ou pas.

Nous allons nous appuyer sur cette idée (neutralisation de la perception auditive par insertion préalable d'allumettes dans les boîtes) en la combinant avec une idée déjà mise en œuvre dans la situation des sucres. Dans cette situation, le traitement consiste à enlever le sucre préalablement placé sous le chapeau plutôt que de placer un sucre sous le chapeau.

La combinaison de ces deux contraintes nous conduit à proposer une situation initiale dans laquelle chaque boîte contient non pas une, mais deux allumettes.

Dans les deux jeux, le principe de ramassage est le même : Si le joueur ouvre une boîte avec deux allumettes, il a le droit d'en ramasser une. Si le joueur ouvre une boîte avec une seule allumette, il ne peut pas ramasser l'allumette restante.

Le jeu 1 consiste à ramasser une des deux allumettes de chaque boîte jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une seule allumette dans chaque boîte. Quand le joueur pense qu'il a terminé, le maître du jeu et le joueur ouvrent toutes les boîtes pour constater qu'une seule allumette reste dans chaque boîte. Si ce n'est pas le cas, le joueur n'a pas de score et donc ne peut plus gagner. Si c'est le cas, le score est constitué par le nombre de fois où une boîte a été ouverte. Le gagnant du jeu est celui qui a le score le plus petit.

Le jeu 1 reprend les caractéristiques du premier jeu construit sur la variation de la situation des sucres. Il nécessite que les joueurs produisent des énumérations faibles + pour qu'ils disposent de scores.

Le jeu 2 consiste là encore à enlever une des deux allumettes qui figurent dans la boîte. Si le joueur ouvre une boîte avec deux allumettes, il a le droit d'en ramasser une. Si le joueur ouvre une boîte avec une seule allumette, le jeu s'arrête et le joueur n'a pas de score et ne peut plus gagner. Quand le joueur ne veut plus prendre le risque d'ouvrir une boîte dans laquelle il a déjà enlevé une des deux allumettes ou quand il pense qu'il a ouvert toutes les boîtes, le score est constitué par le nombre d'allumettes ramassées. Le gagnant est celui qui a le score le plus élevé.

Le jeu 2 reprend les caractéristiques du second jeu construit sur la variation de la situation des sucres. Il nécessite que les joueurs produisent des énumérations faibles - pour qu'ils disposent de scores.

Nous pouvons imaginer une évolution des règles de ces jeux qui, continuant de contraindre à respecter l'une des deux conditions, incitent les joueurs à respecter la deuxième (en proposant un bonus dans le cas du respect de cette seconde condition).

Nous venons de construire quatre jeux qui mettent en œuvre des énumérations faibles des deux types que nous avons identifiés. Ces variations ont été construites en modifiant les règles de jeux qui mettaient en œuvre des énumérations fortes.

1.10 Tension entre les conditions C1 et C2

Jusqu'à présent, nous avons étudié des situations dans lesquelles les collections étaient données et sur lesquelles un traitement était à réaliser. Dans la situation que nous allons

maintenant étudier, la nature de la collection en jeu change radicalement. Il va s'agir de produire les éléments d'une collection vérifiant certaines contraintes.

Ce genre de problèmes relève de l'énumération puisqu'il va s'agir « *de dénombrer mentalement un ensemble qui n'est pas concrètement présent ou réalisé* » (Guy Brousseau, 1984, p. 3). Brousseau pense d'emblée à ce type de situations quand il évoque à l'Université les étudiants qui attendent « *la correction d'un exercice de combinatoire pour être sûrs que leur réponse est correcte* » (Guy Brousseau, 1984, p. 2).

Nous allons présenter une situation de combinatoire dans laquelle une collection d'objets doit être produite pour être dénombrée.

Après avoir étudié la résolution de ce problème, nous mettrons en évidence dans quelle mesure le problème permet de travailler une mise en œuvre des conditions C1 et C2 précédemment décrites.

1.10.1 Présentation de la situation des triangles colorés

La situation est issue d'un ouvrage scolaire (ERMEL, 1991), dont l'objectif est de travailler sur la résolution de problèmes. Les objectifs annoncés de la séquence sont de « *construire un ensemble de possibles* » et « *de contrôler que tous les cas ont été envisagés* » (1991, p. 92). Cette situation fait suite à une situation de construction de tours de couleurs. L'ouvrage fournit la collection solution mais n'annonce rien sur la complexité de la situation.

Les éléments de la collection que nous cherchons à construire sont des triangles équilatéraux. Ces triangles équilatéraux sont constitués de trois triangles isocèles que pour des raisons de commodité nous nommerons régions dans la suite de ce travail.

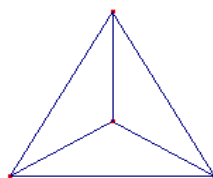


Figure 156 : Situation des triangles colorés - Un triangle constitué de ses trois régions

Chaque région doit être coloriée d'une seule couleur, en utilisant n couleurs. Toutes les régions d'un triangle doivent être coloriées.

Le problème consiste à décrire la collection des triangles colorés (quels sont les éléments de la collection ? combien sont-ils ?). Le cas envisagé dans l'ouvrage est celui pour lequel le nombre de couleurs est 4.

Les triangles dont il est question sont des objets matériels, qu'il est possible de fabriquer en découpant un triangle équilatéral dans un bout de carton et en coloriant une des deux faces de ce bout de carton.

Nous commençons la résolution du problème avec ce cas particulier ($n=4$) avant de traiter le cas général (n quelconque).

1.10.2 Solution du problème avec 4 couleurs

Pour des raisons de colorimétrie, la solution est proposée avec une variante dans laquelle le critère couleur a été remplacé par un critère style. Les quatre styles disponibles sont « hachures », « points », « nids d'abeille » et « quadrillage ». Par la suite, nous nous permettrons un certain nombre de néologismes pour que le lecteur puisse faire le lien avec le vocabulaire qui est employé dans le contexte original du problème. Ainsi, le terme « tri-style » doit être compris en référence au mot tricolore, le critère style venant remplacer le critère couleur.

La figure suivante présente un élément de la collection à construire.

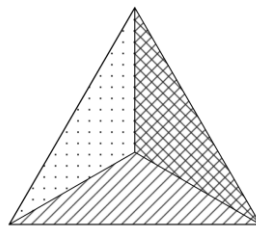


Figure 157 : Situation des triangles colorés - Un élément de la collection des triangles coloré

La difficulté consiste à contrôler l'exhaustivité de la collection produite.

L'objectif dans un premier temps est de produire une solution pragmatique qui ait un fort pouvoir de conviction auprès des acteurs de la situation, donc qui nécessite le moins de connaissances mathématiques possibles. Pour autant, nous nous autoriserons à produire une description mathématique en termes de relation des différentes étapes de la construction de l'ensemble solution.

Pour mieux contrôler l'exhaustivité de la collection, nous pouvons la partitionner. Le mécanisme retenu s'appuie sur la mise en place d'un classement des éléments produits en fonction du nombre de couleurs utilisées pour fabriquer l'élément de la collection. Comme chaque triangle est constitué de trois régions, cela conduit à partitionner la collection des triangles en trois sous-ensembles disjoints : la classe des triangles qui sont coloriés avec un seul style, la classe des triangles coloriés avec deux styles et la classe des triangles coloriés avec trois styles.

La relation d'équivalence mise en œuvre pour élaborer ce classement est donc « a le même nombre de styles (ou de couleur) que ».

Deux triangles vont être en relation et faire partie de la même classe s'ils sont coloriés avec le même nombre de styles.

Les trois sous-ensembles de la partition sont les trois classes construites par la relation « a le même nombre de styles que » : la classe des triangles uni-styles, la classe des triangles bi-styles et la classe des triangles tri-styles.

Examinons la constitution de chacun de ces trois sous-ensembles.

1.10.2.1 La classe des triangles uni-styles

Il n'y a pas de difficulté à générer les éléments de cette classe et à en contrôler l'exhaustivité. Comme quatre styles sont disponibles pour fabriquer des triangles avec un seul style, la classe est constituée de quatre éléments.

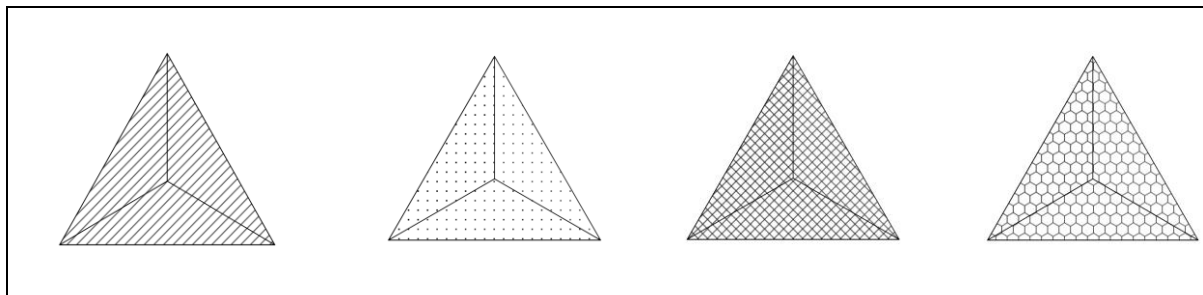


Figure 158 : Situation des triangles colorés - Classe des triangles uni-styles dans le problème à 4 styles

1.10.2.2 La classe des triangles bi-styles

Pour structurer la collection des triangles à deux styles, nous pouvons faire appel à un nouveau classement. Si un triangle a ses trois régions coloriées avec deux styles, cela signifie que deux de ses trois régions ont le même style.

Ce classement va faire figurer dans une même classe des objets qui ont les mêmes deux régions de style identique. Ainsi, cette nouvelle relation d'équivalence partitionne la collection des triangles bi-styles en quatre sous-ensembles disjoints : la classe des triangles qui ont deux régions « hachures », la classe des triangles « points », la classe des triangles « nids d'abeille » et la classe des triangles « quadrillage ».

Nous déterminons ainsi aisément le nombre d'éléments de chaque classe en attribuant un des styles restants à la région non encore remplie. Ainsi, la classe des triangles qui ont deux régions « hachures » est constituée de trois éléments puisqu'une fois le « hachures » utilisé, il ne reste que « points », « quadrillage » et « nids d'abeille » pour remplir la troisième région.

Chacune des classes est donc constituée de trois éléments, le sous-ensemble des triangles bi-styles est constitué de quatre classes, ce qui fait donc un total de douze triangles bi-styles.

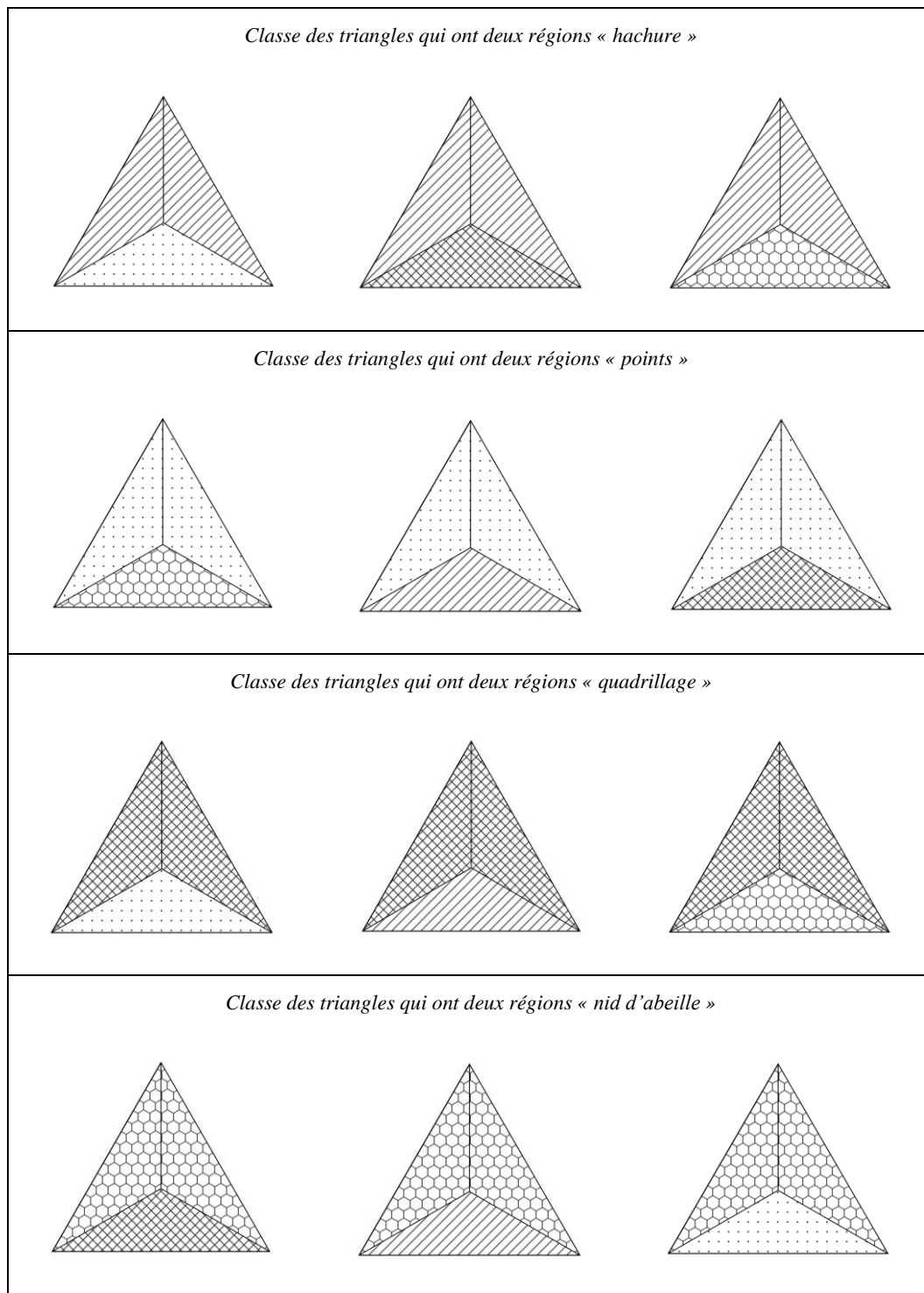


Figure 159 : Situation des triangles colorés - Classe des triangles bi-styles dans le problème à des triangles à 4 styles

1.10.2.3 La classe des triangles tri-styles

Il s'agit de concevoir l'ensemble des triangles de trois styles, de l'organiser pour en contrôler l'exhaustivité et d'en déterminer le nombre.

Dans la situation où quatre styles sont disponibles, l'ensemble des triangles tri-styles {hachures; quadrillage; points} peut être conçu comme l'ensemble qui n'utilise pas le style « nid d'abeille ». L'ensemble peut donc être décrit par le style qui n'y figure pas. Cette description est facile car nous sommes dans le cas où seulement quatre styles sont disponibles.

Les quatre ensembles de triangles tri-styles sont donc l'ensemble qui n'utilise pas le style « nids d'abeille », l'ensemble qui n'utilise pas le style « hachures », l'ensemble qui n'utilise pas le style « points » et l'ensemble qui n'utilise pas le style « quadrillage ».

Un nouveau classement qui s'appuie sur la relation « a les mêmes styles que » est élaboré, nouveau classement qui produit une nouvelle partition de l'ensemble des triangles tri-styles en quatre sous-ensembles.

Il nous faut maintenant déterminer le contenu de chacun de ces quatre sous-ensembles.

Avec trois styles, deux triangles et deux seulement peuvent être fabriqués : les triangles symétriques par rapport à l'un quelconque des trois axes de symétrie de ces triangles équilatéraux.

Finalement quatre classes de deux éléments chacune sont constituées, ce qui fait un total de huit éléments pour les triangles tri-styles.

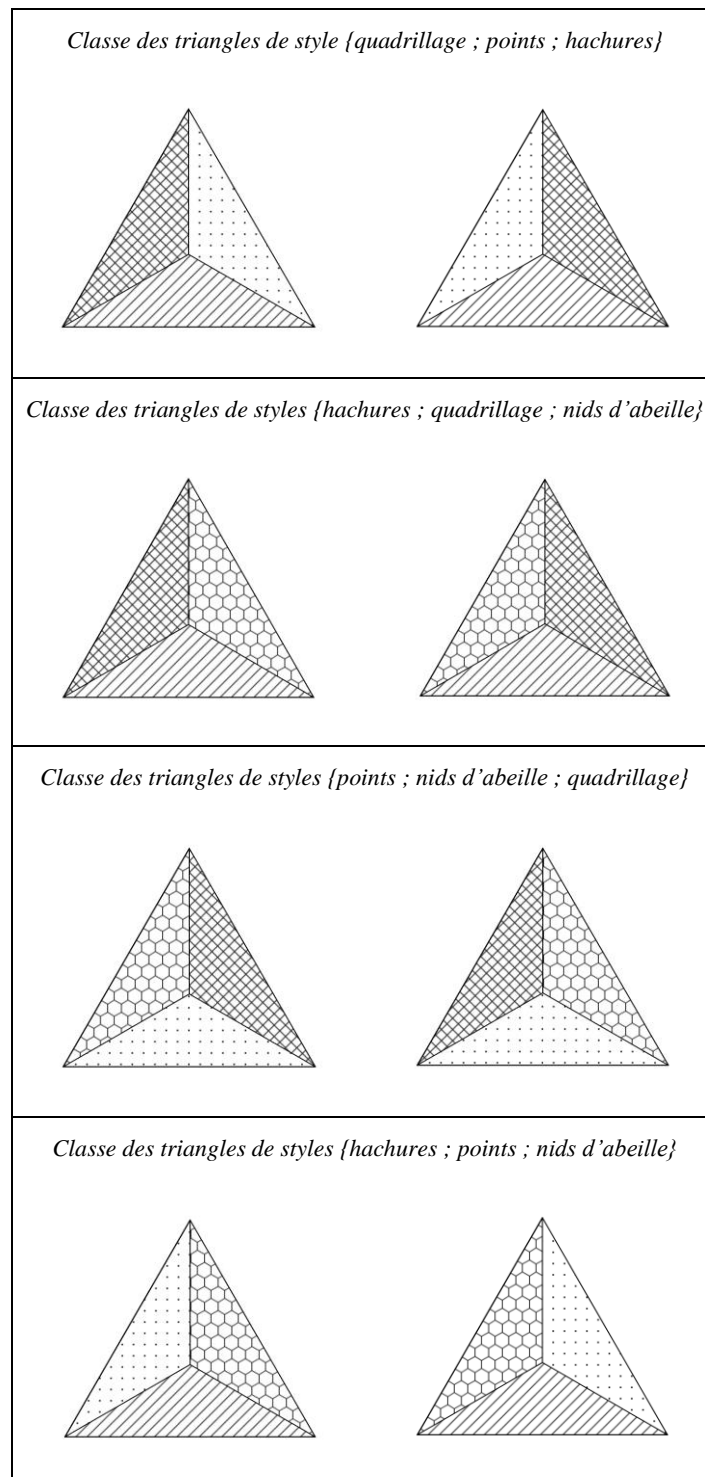


Figure 160 : Situation des triangles colorés - Classe des triangles tri-styles dans le problème des triangles à 4 styles

Pour trouver le nombre total d'éléments de la collection, il suffit d'additionner les cardinaux de chacune des trois classes.

Soit N le nombre de triangles remplis qu'il est possible de fabriquer.

$$N = 4 + 12 + 8$$

$N = 24$

1.10.3 La solution du problème avec n couleurs (ou n styles)

Le passage de 4 couleurs à n couleurs n'est en aucun cas imaginé par le manuel. Ce passage nous intéresse dans la mesure où le jeu sur le nombre de couleurs ne modifie pas certains éléments de la résolution précédente.

La structuration qui a été mise en place lors de la résolution du problème avec quatre styles va être conservée. Les éléments recherchés sont toujours des triangles à trois régions. La collection reste partitionnée en fonction du nombre de styles différents par triangle.

Le problème reste bien de dénombrer chacun des trois sous-ensembles de la partition. Le passage à n couleurs modifie le cardinal de chacun des trois sous-ensembles.

Nous allons étudier dans quelle mesure cette généralisation modifie la structure produite pour dénombrer chacune des trois classes.

1.10.3.1 La classe des triangles uni-styles

Avec n styles différents disponibles, n triangles uni-styles différents peuvent être fabriqués. Le raisonnement pour dénombrer ce sous-ensemble est en tout point identique à celui qui a été conduit dans la cas $n=4$.

1.10.3.2 La classe des triangles bi-styles

Nous partitionnons cet ensemble en n sous-ensembles disjoints, tous constitués de triangles qui ont deux régions du même style. La relation d'équivalence qui permet de partitionner la classe des bi-styles en n sous-ensembles est la même que celle mise en œuvre dans le cas $n=4$. Il reste à déterminer le cardinal de chacun de ces n sous-ensembles

Dénombrons maintenant les triangles que l'on peut fabriquer avec deux régions d'un même style. Si un style a été utilisé pour remplir deux régions du même style, il reste $(n-1)$ styles disponibles pour remplir la troisième et dernière région. $(n-1)$ triangles bi-styles peuvent être fabriqués ainsi. Chacun des n sous-ensembles est donc constitué de $(n-1)$ éléments.

On peut donc fabriquer $n(n-1)$ triangles bi-styles avec n styles différents.

1.10.3.3 La classe des triangles tri-styles

Appui sur un arbre

La stratégie pragmatique du cas « quatre styles » ne semble pas pouvoir s'appliquer ici. En effet, ce qui faisait la puissance de ce raisonnement dans le cas précédent était lié au fait que le nombre de régions et le nombre de styles disponibles étaient deux entiers consécutifs. Cet appui tombe dans le cas général, ce qui nécessite de mettre en œuvre une autre conception de la collection des triangles tri-styles.

Un premier modèle pour concevoir cet ensemble repose sur l'utilisation des arbres. L'ensemble des triangles tri-styles peut être généré à l'aide d'un arbre à trois niveaux d'arborescence :

- n branches au premier niveau correspondant aux n styles disponibles pour remplir la première région
- $n-1$ branches au second niveau d'arborescence pour remplir la deuxième région (nous éliminons des n possibilités restantes le style déjà utilisé pour remplir la première région)
- $n-2$ branches au troisième niveau d'arborescence pour remplir la troisième région, correspondant au nombre de styles qui n'ont pas encore été utilisés pour remplir l'une des deux premières régions.

Pour déterminer le nombre d'objets conçus par ce dispositif, il suffit de déterminer le nombre de branches de cet arbre. Il est égal au produit du nombre de branches des différents niveaux d'arborescence, soit $n(n-1)(n-2)$.

En procédant de la sorte, nous commettons une erreur sur la collection conçue puisque des éléments vont être produits plusieurs fois. Il s'agit des éléments qui se déduisent des précédents par rotation de centre le centre de gravité du triangle et d'angle un tiers de tour. L'erreur est donc régulière.

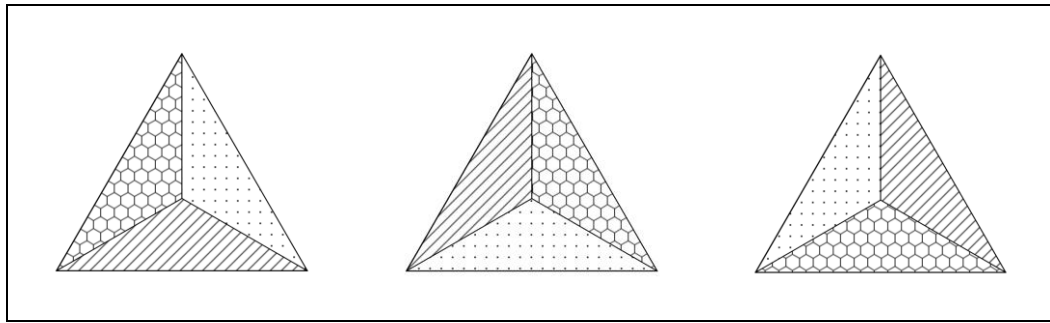


Figure 161 : Situation des triangles colorés - Triangles tri-styles identiques produits par l'arbre

L'arbre décrit ci-dessus produit ces triangles qui représentent le même élément de la collection. En effet, les conditions matérielles de présentation de la situation nous indiquent que nous avons à faire à un objet mobile du plan et que donc ces trois triangles représentent un seul et même élément de la collection.

Cette conception de la collection produit systématiquement la même erreur dans la description des éléments de la collection. Pour déterminer le nombre de triangles tri-styles différents qui peuvent être conçus, il suffit de diviser le nombre d'objets produits par l'arbre par trois.

Le nombre de triangles tri-styles est donc finalement $\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$.

La Figure 162 présente l'arbre générateur des triangles tri-styles dans le cas où le nombre de couleurs disponibles est 4.

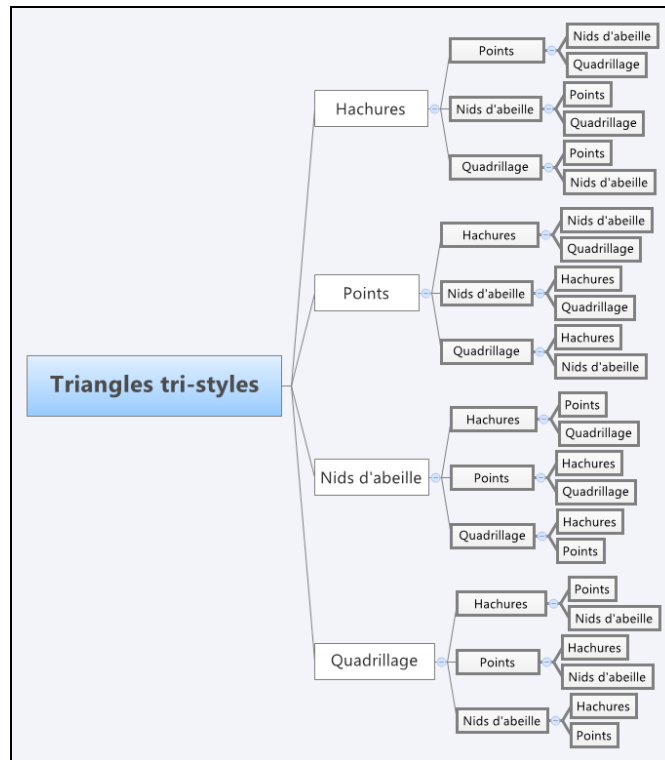


Figure 162 : Situation des triangles colorés - Arbre des triangles tri-styles (cas où $n=4$)

Dénombrement des ensembles de triangles tri-styles

Une autre manière de concevoir cette collection est de la concevoir comme la partition des triangles pouvant être fabriqués avec trois styles différents.

Il faut concevoir ici un ensemble E de n éléments constitués des n styles disponibles pour fabriquer des triangles. Le problème devient donc de dénombrer les ensembles à trois éléments qui peuvent être fabriqués à partir de cet ensemble de n éléments. Une autre formulation possible consiste à chercher le nombre de combinaisons à trois éléments dans un ensemble de n éléments.

Une combinaison est ici un ensemble de trois styles avec lesquels deux triangles différents peuvent être fabriqués. Cette partie du raisonnement est identique à celle qui a été conduite dans le problème à quatre styles.

Le nombre total de triangles tri-styles est donc $\binom{n}{3} \times 2$

$$\binom{n}{3} \times 2 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2} \times 2$$

$$\binom{n}{3} \times 2 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$$

Nous retrouvons ici le nombre trouvé en concevant la collection à partir d'un arbre.

1.10.4 Analyse *a priori* des réponses erronées possibles dans le cas de 4 styles (ou couleurs)

Il s'agit ici de décrire les procédures erronées qui peuvent être mises en œuvre et donc de comprendre les organisations produites par des sujets dont les procédures témoignent.

1.10.4.1 Non prise en compte du caractère mobile du triangle

La prise en compte des dimensions géométriques de ce problème est difficile. Les triangles peuvent être conçus comme des objets fixes, non déplaçables dans le plan. Cela revient à considérer que les trois régions occupent des positions fixes dans le plan et peuvent par exemple être numérotées.

Dans ce cas, les deux triangles ci-dessous sont considérés comme différents.

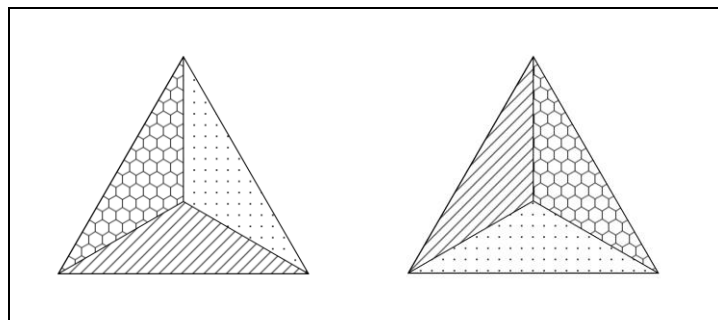


Figure 163 : Situation des triangles colorés - Exemple de deux représentations d'un même triangle

Cette conception peut conduire à produire un arbre pour représenter de manière systématique l'ensemble des éléments de la collection.

À chaque niveau d'arborescence de l'arbre correspond une des régions du triangle. Le triangle ayant trois régions, l'arbre produit a donc trois niveaux de nœuds.

A chaque niveau, quatre nœuds permettent de modéliser chacune des quatre couleurs qui peuvent colorier la région considérée. La Figure 164 présente l'arbre ainsi obtenu.

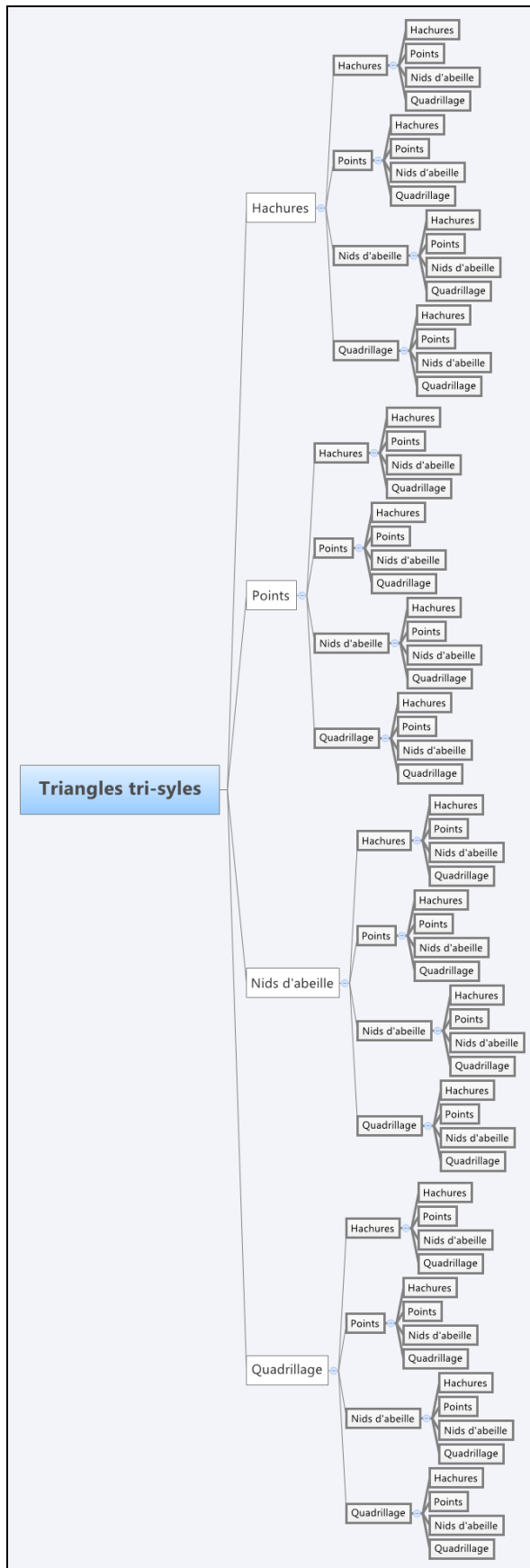


Figure 164 : Situation des triangles colorés - Arbre des triangles tri-syles avec position des régions fixe

L'arbre ainsi produit a 64 nœuds externes (4^3), correspondants aux 64 triangles produits par cette organisation.

Les mécanismes d'invalidation de cette représentation peuvent prendre appui sur les réalisations matérielles effectives d'éléments de la collection. La production effective d'éléments de la collection doit permettre de réintroduire l'ensemble des conditions matérielles de la situation, et notamment les considérations géométriques de cette situation liées au caractère déplaçable des objets fabriqués. S'il existe une isométrie directe qui permet de passer d'un triangle à l'autre, alors ces deux triangles représentent le même élément de la classe.

Pour autant, nous pouvons faire l'hypothèse que ces fabrications effectives risquent d'apparaître sans objet pour des sujets qui seraient persuadés d'avoir produits une réponse correcte.

Revenons sur les collections en jeu dans la situation. Formellement, quand il est question des triangles colorés, deux collections différentes cohabitent : la collection des objets matériels et la collection des éléments de l'ensemble des triangles colorés (objets abstraits). C'est cette seconde collection que nous cherchons à déterminer.

Pour la déterminer, il suffit de produire un objet matériel, instance de chaque élément de l'ensemble des triangles (objets abstraits).

Se pose la question de savoir si deux objets matériels sont des instances du même élément. Si les deux objets matériels peuvent être mis en relation par la relation « est l'image par une isométrie directe », alors ces deux objets matériels représentent le même élément, objet abstrait.

Nous venons de définir une relation qui est une relation d'équivalence qui structure la collection des objets matériels en classe. Déterminer l'ensemble des triangles colorés, c'est trouver un représentant de chaque classe d'équivalence de la relation construite sur l'ensemble des objets matériels.

La Figure 163 montre deux éléments « objets matériels » de la même classe d'équivalence. Nous dirons que ce sont deux instances du même triangle coloré (objet abstrait), ou bien que nous avons à faire à un doublon.

Revenons à la collection des 64 triangles objets matériels générés par l'arbre de la Figure 164. Ce mécanisme permet de générer toutes les combinaisons de couleur qu'il est possible

d'imaginer. Nous avons parmi ces 64 objets matériels une instance au moins de chaque élément de l'ensemble des triangles colorés (objets abstraits). Si l'ordre de multiplicité est le nombre d'instances d'un triangle, alors nous pouvons affirmer que l'ordre de multiplicité de chaque triangle coloré est supérieur ou égal à 1. Dans ce cas, C1 est vérifiée.

Pour autant, nous venons de mettre en évidence que deux éléments au moins de cette collection des objets matériels sont des instances du même triangle coloré (objet abstrait). L'ordre de multiplicité de ce triangle coloré est donc supérieur à 1. Un élément au moins de la collection des triangles a un ordre de multiplicité strictement supérieur à 1. Dans ce cas, C2 n'est pas vérifiée.

Dans ce cas, nous pourrions dire que la collection des triangles a été faiblement + énumérée.

1.10.4.2 Non prise en compte du retournement

Poursuivons notre raisonnement sur les isométries. Deux triangles objets matériels font partie de la même classe d'équivalence représentant un triangle (objet abstrait) s'il existe une isométrie directe permettant de passer de l'un à l'autre.

La seule mise en œuvre de la conservation des longueurs ne suffit pas. Il faut bien que la propriété de conservation des angles orientés soit vérifiée pour que les triangles objets matériels soient déclarés éléments de la même classe.

Donc le non-respect de cette seconde condition pourrait amener des sujets à considérer que deux triangles (objet matériel), images l'un de l'autre par une isométrie indirecte (antidéplacement) représente le même triangle (objet abstrait), font partie de la même classe d'équivalence.

Rappelons que les objets matériels sont construits sur des feuilles de carton, coloriées d'un seul côté.

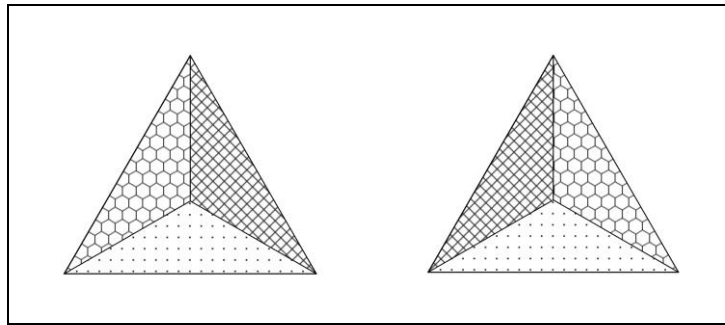


Figure 165 : Situation des triangles colorés - Triangles en relation par une isométrie indirecte

Les deux triangles présentés dans (Figure 165) ne sont pas identiques. Il n'existe pas d'isométrie directe permettant de passer de l'un à l'autre. Il est impossible de les superposer en les déplaçant.

Cette difficulté n'apparaît pas pour les triangles uni-styles et bi-styles. Elle n'apparaît que pour les triangles tri-styles.

Cette absence de prise en compte de la fabrication d'un nouvel élément par retournement se manifeste par une erreur de dénombrement de ce seul ensemble. Dans ce cas, seule la moitié de la collection des triangles tri-styles est trouvée, soit 4 éléments seulement. Cela donne pour la collection complète un total de $4 + 12 + 4$, soit 20 éléments.

La conséquence de cette conception du point de vue de l'organisation est que la collection des triangles colorés ne comporte pas de doublon. L'ordre de multiplicité de chaque élément est inférieur ou égal à 1. L'ordre de multiplicité de chaque triangle coloré est inférieur ou égal à 1. Dans ce cas, C2 est vérifiée.

Par contre la présence de tous les éléments n'est pas garantie. Nous venons de mettre en évidence que cette conception omet des éléments de l'ensemble. Certains éléments de la collection ont un ordre de multiplicité égal à 0 (donc qui n'est pas supérieur ou égal à 1). Dans ce cas, C1 n'est pas vérifiée.

Dans ce cas, nous pourrions dire que la collection des triangles a été faiblement - énumérée.

Du point de vue méthodologique, l'analyse *a priori* est un moyen très efficace d'améliorer notre compréhension épistémologique du problème et donc de rendre notre analyse de la situation plus robuste. Elle nous a permis ici de faire une distinction qui n'était pas apparue en tant que telle dans la phase de résolution du problème, à savoir que le concept de classe d'équivalence va permettre de prendre en charge le caractère déplaçable de ces triangles, concept que nous avons traduit de manière pragmatique avec les mots d'objet abstrait en opposition avec objet matériel.

Nous venons de mettre en évidence deux procédures qui vérifient l'une des deux conditions sans pour autant vérifier l'autre.

1.10.5 Analyse de données

1.10.5.1 Contexte de la collecte de données

Ce problème (recherche de la solution dans le cas où $n=4$, puis dans le cas général) a été proposé à des étudiants de M2 du Master Métiers de l'Enseignement et de la Formation. Les étudiants ont cherché la solution du problème par groupe. De plus, ils devaient réaliser une affiche pour présenter la collection des triangles qu'ils avaient trouvée.

Nous disposons de deux vidéos réalisées pendant cette phase de recherche qui suivent chacune les échanges qui se déroulent dans le groupe.

Avant de présenter ce travail, nous désignerons par la suite :

- film_1 : vidéo de la phase de recherche du premier sous-groupe et dont la transcription figure en annexe 10.
- film_2 : vidéo de la phase de recherche du second sous-groupe et dont la transcription figure en annexe 11.

Les vidéos ont été réalisées en même temps dans la même séance.

1.10.5.2 Position de la séance dans le module

Cette séance fait partie d'un module de M2 sur les questions d'organisation de collections. La séance s'intitule « Structurer pour produire ». Les étudiants ont travaillé préalablement sur des difficultés soulevées lors du dénombrement par comptage d'une collection d'objets dessinés sur une feuille et sur les relations d'équivalence et d'ordre. L'objectif qui est énoncé par le formateur pour présenter le travail est la question de la production de collections.

Les étudiants ont travaillé préalablement sur des problèmes de production de collections dans deux situations différentes. Dans une première situation, les étudiants ont dû produire l'ensemble des formes de couleur qui pouvaient être fabriquées en coloriant une forme d'une couleur donnée (cinq formes et quatre couleurs). Dans une seconde situation, les étudiants ont dû produire l'ensemble des tours de couleur qu'il est possible de fabriquer à partir de quatre cubes de couleurs différentes (une tour étant le résultat de l'empilement de ces quatre cubes). Nous ne les analyserons pas ici.

1.10.5.3 Description et analyse des difficultés rencontrées

Ces vidéos qui filment des groupes cherchant à résoudre le problème des triangles colorés mettent en évidence la dynamique de la compréhension de la situation.

Les groupes sont constitués de quatre à cinq sujets. Le travail démarre par un temps de recherche qui est la plupart du temps individuel. Cette phase individuelle permet à chacun de se constituer une conception de la collection et d'en tester la robustesse en la confrontant aux conceptions des autres membres du groupe.

Analyse de la vidéo film_1

Dans film_1, la réponse 64 que nous avons anticipée apparaît : Marjorie la formule à la ligne 81 et Elise à la ligne 91 de la transcription (annexe 10).

Nous ne trouvons pas d'indications dans la vidéo sur ce qui pousse Elise à produire un arbre. Par contre, Marjorie s'est appuyée sur ce qu'a réalisé Vanessa pour faire elle aussi un arbre :

10 Marjorie : Vanessa a l'esprit mathématique/ tout de suite elle fait un arbre

29 Marjorie : moi je vais adopter la méthode Vanessa



Figure 166 : Situation des triangles colorés - Production de Marjorie

Marjorie est en train de construire un arbre pour décrire sa collection de triangles. Elle dessine un rond de couleur à chaque nœud pour décrire de quelle couleur sera la région

Rachel a quant à elle d'emblée structuré sa collection de triangles en fonction du nombre de couleurs utilisées.

4 Rachel : donc déjà il y en a quatre d'entrée de jeu/ de couleur unie

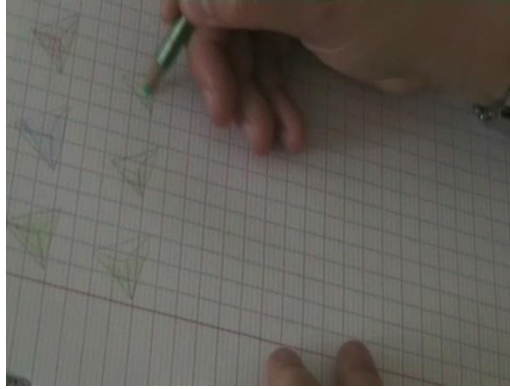


Figure 167 : Situation des triangles colorés - Production de Rachel

Cette structuration n'est pas explicitée pour les deux autres sous-ensembles.

Les deux conceptions de la collection des triangles sont donc d'emblée installées. Le fait que ce puisse être deux conceptions concurrentes n'apparaît pas dans les échanges entre les sujets.

Certaines formulations orales laissent penser que les sujets comprennent les difficultés auxquelles ils sont confrontés, difficultés qui sont la conséquence du choix de conception qui a été réalisé.

Vanessa, qui a mis en place un arbre, doute d'emblée de la pertinence de son outil.

11 Vanessa : pas forcément/ pas forcément

30 Vanessa : elle n'est pas si bonne que cela tu vois parce que c'est long et je suis sûre qu'il y a un truc plus rapide

Rachel, qui classe par nombre de couleurs, a bien compris l'intérêt exploratoire de l'arbre.

34 Rachel : c'est plutôt que tu es sûre de ne pas en oublier en faisant cela

Rachel est tout à fait explicite sur la condition de réalisation de C1.

Elise, qui a donné 64 comme réponse, a bien compris les inconvénients du caractère systématique de cette exploration et les explicite.

90 Elise : à mon avis il y en a qui doivent se recouper/ mais comment savoir lesquels

Elise exprime la non réalisation de C2.

La question du repérage de deux triangles identiques apparaît très rapidement dans ce groupe, comme en témoignent les échanges de tout début de recherche entre Elise et Rachel :

17 Elise : si tu fais vert rouge bleu (pointe avec son crayon trois des régions d'un des triangles dessinés) et si tu fais vert rouge bleu ici (pointe trois autres zones par permutation circulaire)

19 Rachel : ça je pense que c'est pareil c'est quand tu changes ouais l'ordre après (fait un cercle dans le vide avec son stylo)//après il y en a de nouveau trois pareils// (dessine trois nouveaux triangles et colorie deux des régions de ces trois triangles en vert)

Vanessa et Anaïs partagent ce point de vue également.

48 Vanessa : moi je trouve que comme c'est un triangle là et qu'il y a trois couleurs/ cela revient au même si tu as rouge vert bleu que si tu tournes (fait le geste de la permutation circulaire avec ses doigts) tu vois

51 Anaïs : surtout qu'il est équilatéral

Cette connaissance diffuse puisqu'Anaïs essaye ensuite de convaincre Marjorie.

83 Anaïs : là je pense que tu en as plusieurs qui sont pareils

84 Marjorie : eh ben non/il a dit tout ce qui n'est pas interdit on avait le droit

86 Anaïs : ouais mais tu vas avoir des triangles dans le même ordre je veux dire

C'est Rachel qui formule correctement la propriété permettant de caractériser deux triangles identiques.

120 Rachel : oui parce que du coup tu le fais tourner et 180 degrés c'est bon non même pas de 180 degrés d'ailleurs enfin un truc comme cela 120 degrés/ 120 degrés

Pour autant, la formulation de cette caractérisation ne l'empêche pas de produire une réponse erronée : 40 (aux lignes 179 et 188).

Examinons comment Rachel arrive à cette réponse. Elle a structuré sa collection de triangles par couleur. Elle a parfaitement bien dénombré la collection de triangles unicolores et la collection de triangles bicolores. Elle a bien conscience que le modèle qu'elle a développé (une forme de recherche systématique basée sur l'empirisme et la simplicité de la situation) ne va pas pouvoir être appliqué dans le cas des triangles tricolores.

Elle a vraisemblablement mis en œuvre un mécanisme arborescent (elle ne dessine pas d'arbres) dont le nombre de branches diminue d'une unité au fur et à mesure que l'on avance dans les niveaux. Elle met en œuvre l'arbre que nous avons présenté en Figure 162.

Elle produit donc quatre branches pour le premier niveau d'arborescence. Consommant une couleur pour remplir la première région, il ne lui en reste que trois pour remplir la seconde. Son arbre a donc trois branches au second niveau d'arborescence. Il ne lui reste plus que deux couleurs possibles pour remplir la troisième région, ce qui correspond aux deux branches du troisième niveau d'arborescence.

Elle obtient finalement $4 \times 3 \times 2$, soit 24 éléments pour sa collection de triangles tricolores, ce qui pour la collection complète des triangles donne un total de $4 + 12 + 24$, soit 40.

127 Rachel : si mais avec l'arbre cela doit pouvoir marcher avec l'arbre cela doit pouvoir marcher/ si tu considères en plus à chaque fois que tu peux réutiliser la couleur

Pour autant, la formulation de l'invariance n'a pas empêchée Rachel de mettre en œuvre une stratégie qui produit systématiquement des doublons. Rachel a d'emblée produit un classement par couleur, mais elle a aussi manifesté sa réceptivité au modèle arborescent développé par Vanessa (ligne 34). Le seul appui sur le classement ne réglant pas la question de la production des triangles tricolores, elle modifie son modèle en introduisant pendant un court moment des éléments qui figent le triangle en rendant les régions discernables les unes des autres.

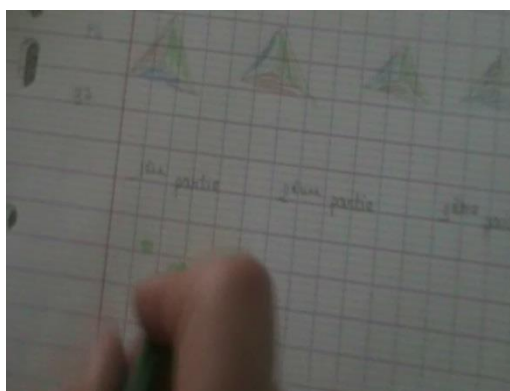


Figure 168 : Situation des triangles colorés - Production de Rachel

Les régions sont nommées parties par Rachel et reçoivent un numéro. Nous avons montré que la numération fait disparaître une des dimensions géométriques du problème et génère les doublons.

Les sujets discutent aussi beaucoup la nature des rotations qui sont effectuées. Nous avons vu que le verbe « tourner » apparaissait beaucoup dans leurs échanges. Par contre, savoir si les rotations effectuées produisent ou non un autre triangle est une question qui va demeurer longtemps en débat.

Avec le vocabulaire que nous avons introduit nous pouvons dire qu'ils se demandent si les triangles dont ils discutent sont un élément d'ordre de multiplicité 2 ou bien deux éléments distincts (dont l'ordre de multiplicité serait 1).

Extrait d'un échange entre Anaïs et Rachel

54 Anaïs : si tu tournes euh

55 Rachel : ben oui/ cela dépend comment tu vas tourner tu vois

56 Anaïs : si tu mets le vert à la place du rouge et le rouge à la place du vert

57 Rachel : si tu fais tourner celui là

58 Elise : le vert il est au même endroit

59 Rachel : tu vois le vert il est au même endroit mais le rouge est à droite du vert si tu veux // alors que là // il est à gauche (pointe un triangle avec son crayon) tu vois

C'est Rachel qui va convaincre Anaïs que les triangles symétriques par rapport à une droite sont bien différents.

95 Anaïs : parce que là si tu as bleu noir rouge/ si t'as noir rouge bleu

96 Vanessa : c'est pas forcément les mêmes

97 Anaïs : ben si si tu tournes

98 Vanessa : Oui mais justement elle disait que // explique mieux que moi/ quand tu tournes c'est pas la même chose

100 Elise : mais ça dépend des fois cela va être la même chose

Les sujets n'arrivent pas à différencier les deux isométries. Ne disposant que d'un mot pour décrire les deux processus, ils se retrouvent dans une impasse du point de vue de la formulation. Vanessa (ligne 98) invite Elise à expliquer à sa place, car elle pense qu'Elise va mieux expliquer. Mais Elise ne peut pas faire autrement que de paraphraser ce qui vient d'être dit.

Pour autant, cette connaissance va avoir des difficultés à diffuser auprès de Marjorie.

133 [Anaïs fait deux triangles rouge noir bleu, identiques à une rotation de 120 degré près]

134 Marjorie : là cela sera le même / tu l'as juste tourné

135 Anaïs : oui

136 Marjorie : attends attends

137 Anaïs : si si

138 Vanessa : tu l'as juste tourné

139 Marjorie : oui mais comme il apparait deux fois tu peux te dire qu'il a une autre disposition

140 Anaïs : oui mais c'est un triangle équilatéral tu peux bien le prendre dans tous les sens

141 Vanessa : par contre celui (pointe avec son stylo) tu peux faire une autre où c'est pas le même

143 Marjorie : avec les mêmes couleurs oui ben voilà donc cela fait à chaque fois trois

144 Vanessa : oui mais là c'est les deux mêmes// oui oui mais y a aussi une fois où tu peux faire les mêmes couleurs et cela sera pas le même triangle

Pour pouvoir décrire ce qui se passe, les sujets sont obligés de donner une description exhaustive de la couleur et de la position de chacune des régions considérées.

109 Rachel : si on se met vert alors le rouge est à gauche à droite alors que là il est à gauche donc si on tourne le triangle alors ces deux-là c'est pas les mêmes

111 Vanessa : euh

112 Anaïs : oui là je suis d'accord ils sont pas dans le même ordre mais si ils sont dans le même ordre

La description en termes de position devenant complexe, les régions sont montrées à l'aide d'un pointage avec un stylo. Cela permet à chacun d'être certain de parler à chaque fois de la même région.

114 Vanessa : si t'avais [pointe une région avec son stylo]

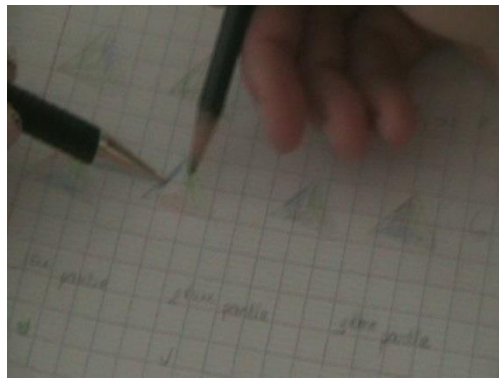


Figure 169 : Situation des triangles colorés - Production de Rachel

117 Rachel : oui (pointe une autre région avec son stylo)

Les mots ne suffisant pas, il leur faut revenir à des gestes de désignation.

Dans la suite de leurs échanges, les discussions vont se poursuivre sur le nombre de triangles qui peuvent être fabriqués avec des couleurs données. La difficulté à circonscrire la discussion réside dans le fait que les deux conceptions de collections que nous avons décrites vont venir parasiter les échanges.

169 Anaïs : en fait à chaque trois couleurs t'en auras deux (fait un trait rouge sous les deux triangles) chaque fois que tu auras trois couleurs

172 Marjorie : oui quand tu as trois couleurs mais quand tu as deux couleurs identiques t'as plus que// et comme tu peux intervertir les couleurs

Marjorie accepte la proposition d'Anaïs. Pour autant, cette proposition ne règle pas son problème car elle ne considère pas que la question des triangles bicolores soit réglée.

Peut-on concevoir autrement la collection des triangles bicolores que comme nous l'avons conçue ?

227 Marjorie : donc même trois couleurs combien t'as de possibilités quand t'utilises les mêmes trois couleurs

229 Rachel : les mêmes trois couleurs t'as deux possibilités

230 Anaïs : deux

231 Marjorie : t'as que deux possibilités

232 Rachel : ah oui mais attend il faut en enlever

233 Elise : donc du coup il faut faire fois quatre

234 Anaïs : oui

235 Elise : donc c'est quatre fois quatre

236 Vanessa : non quatre fois deux

237 Elise : mais non/ parce que il y a quatre couleurs/ regarde sur un truc comme cela par exemple [attrape la feuille t'as vert bleu rouge ou vert rouge bleu tu vois ça t'en fait deux et t'as aussi vert gris rouge ou et vert rouge gris

240 Marjorie : c'est la même chose

Ces échanges sont une indication sur la conception qu'a développée Marjorie de la collection des tricolores. Elle a parfaitement intégré les contraintes géométriques.

Dans l'analyse *a priori*, nous avons partitionné la collection des triangles bicolores en quatre sous-ensembles, chaque sous-ensemble contenant tous les triangles ayant les mêmes deux régions de la même couleur. Nous avons décrit précédemment l'organisation qui est produite avec cette conception de la collection des bicolores. Essayons maintenant de concevoir la collection des triangles bicolores en nous appuyant sur la remarque de Marjorie. Considérons-la exactement pour ce qu'elle exprime. Combien peut-on former de triangles différents avec deux couleurs différentes ? Intervertissons les couleurs dans le cas où deux couleurs seulement sont disponibles.

Résolvons ce problème avec le contexte style plutôt que couleur. Nous disposons des styles « nids d'abeille » et « points. Seuls deux triangles peuvent être fabriqués (Figure 170Figure 156).

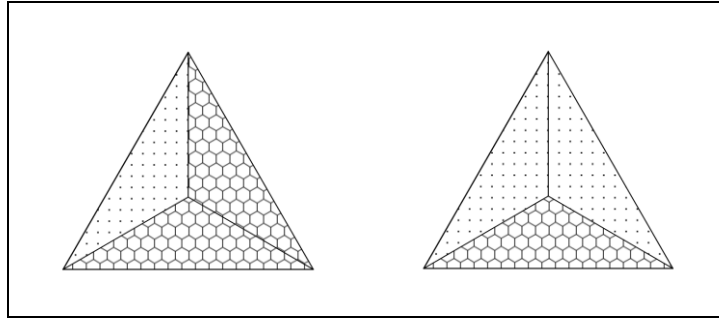


Figure 170 : Situation des triangles colorés - Classe des triangles avec les styles "nids d'abeille" et "points"

Marjorie peut imaginer qu'elle va appliquer à la classe des triangles bicolores le même mécanisme que celui qui est mis en œuvre pour produire les triangles tricolores. Son problème est donc bien de dénombrer les couples de couleurs que l'on peut fabriquer avec quatre couleurs. Ce raisonnement s'apparente bien au raisonnement que nous avons conduit dans notre analyse *a priori*, notamment dans le cas n couleurs. Avec quatre couleurs, nous pouvons fabriquer six couples de couleurs différents, ce qui donne bien douze triangles différents.

L'analyse de la procédure d'Elise sur le problème à cinq couleurs met en évidence la conception dominante qui est mise en œuvre pour résoudre le problème.

363 Elise : *bon ben là ça fait cinq (montre les unicolores)*

Les triangles unicolores sont dénombrés instantanément. Si la procédure démarre par le tri des triangles unicolores, il peut être assez cohérent de transformer ce tri en classement en cherchant à produire l'ensemble des bicolores.

381 Rachel : *en fait pour chaque fois que tu fixes une couleur en haut tu vas faire varier quatre couleurs en bas*

383 Elise : *quatre couleurs en bas et ça cinq fois parce qu'y a cinq couleurs*

Analyse de la vidéo film_2

Dans film_2, la collection des triangles unicolores va être très rapidement conçue.

9 Lolita : *y a quatre couleurs*

10 Marion : *ouais*

11 Lise : *on peut faire des tout noirs*

12 Alexandra : *il a dit tout ce qui n'est pas interdit est autorisé*

13 Marion : *donc y en a un tout vert un tout tout*

Cette organisation est immédiatement étendue aux triangles qui ont deux régions de la même couleur.

16 Marion : je prends une couleur donc on le choix cela va être deux identiques

19 Marion : à chaque fois y'a trois solutions

22 Marion : à chaque fois il y a deux fois la même couleur et une des trois autres

23 Lise : je suis d'accord

Dans ce groupe, la question de la fabrication d'un arbre permettant de réaliser C1 et de fabriquer la totalité de la collection n'apparaît pas dans les premiers échanges.

La représentation qui est adoptée est celle d'un point de couleur pour représenter les triangles unicolores et de deux points de couleur sur une même ligne suivie d'une structure arborescente pour décrire la couleur de la troisième région.

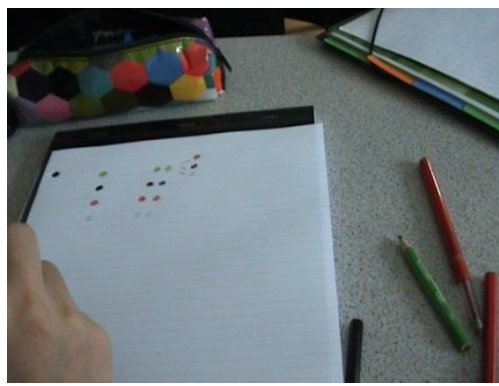


Figure 171 : Situation des triangles colorés - Représentation de Marion

Le dénombrement de ces deux premières classes est lui aussi réalisé très rapidement.

24 Marion : et il faut compter le nombre de possibilités / donc là cela fait déjà quatre [écrit 4 au-dessus de la colonne de points de couleur] un deux trois / là cela refera trois du coup-là cela refera trois là cela refera trois/ là en tout trois/douze (écrit 12)

Les nombres 4 et 12 sont écrits au-dessus de ces deux colonnes. Puisque cette organisation fait consensus, il reste à traiter le problème du dénombrement des triangles tricolores.

La représentation qui va être adoptée pour les tricolores est dans la continuité des mécanismes mis en œuvre pour représenter les deux premières classes, à savoir une structure d'arbre. Les couleurs des régions sont représentées par des ronds de couleur chez Marion et par la première lettre du mot chez Lolita.

Les difficultés spécifiques de la question des triangles tricolores apparaissent très rapidement.

32 Marion : faut pas que je refasse les mêmes déjà/ sinon on est mort/ ensuite j'ai droit au rouge

Et malgré les précautions qui sont prises, des doublons apparaissent.

44 Alexandra : mais là aussi en fait / regarde cela fait celui-là (montre une branche de l'arbre) et c'est le même

46 Marion : ouais c'est le même / attend je le fais quand même pour le plaisir des yeux/ tu peux en faire que deux quoi

48 Alexandra : ben oui

Quand ils sont nommés, les triangles le sont par la suite des couleurs attribuées aux régions. Sinon, ce sont des gestes qui servent à les désigner, par pointage des branches de l'arbre.

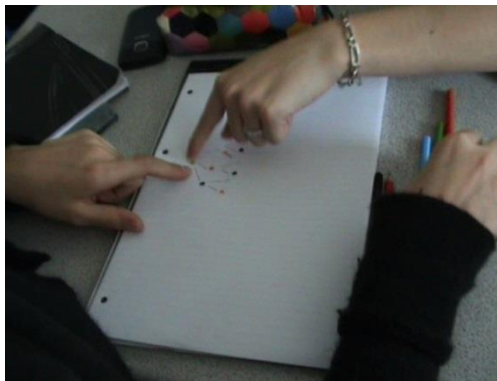


Figure 172 : Situation des triangles colorés - Gestes mis en œuvre lors des échanges

Ces balayages successifs des branches de l'arbre permettent de repérer des doublons. La décision est prise de marquer certains triangles.

64 Lolita : valide-le

65 Marion : cela fait un [entoure la branche de l'arbre et écrit 1]

66 Alexandra : là celui-là

67 Marion : deux [écrit deux en terminaison de branche]

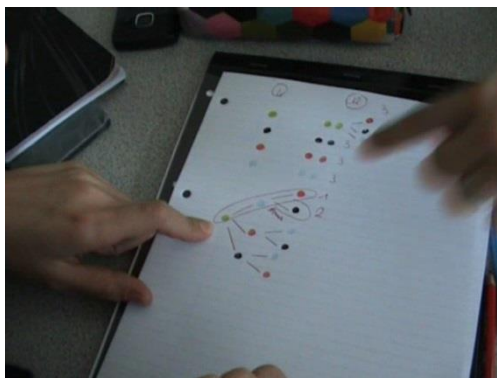


Figure 173 : Situation des triangles colorés - Marquage de certains triangles

Tous les sujets se retrouvent à balayer des arbres de possibilité et à marquer les éléments qui apparaissent pour la première fois.

Tous trouvent 20 sauf Lolita qui a trouvé 24. Elle se laisse convaincre de barrer quatre branches de ses arbres.

188 Lise : t'en trouves combien Marion

189 Marion : t'as les douze tous tous ensemble là/ ouais/ et les autres

190 Etudiant (qui filme) : je comprends pas c'est quoi tes douze là

191 Marion : eh ben c'est qu't'en as deux/ là c'est qu'les quatre sont pareils/ là c'est qu'les deux premiers/ enfin y'en a deux sont pareils et après une autre couleur

193 Laura : trois fois la même couleur/ deux couleur plus un

194 Etudiant [qui filme] : ouais d'accord

195 Marion : ça fait vingt [écrit vingt et l'entoure]//// on est brillantes

Il va ensuite être difficile pour le professeur de remettre en cause la réponse produite qui s'est élaborée par une confrontation et un échange vivant entre les participants.

222 Professeur : trop fort/ euh/ les autres groupes n'ont pas trouvé cela

223 Lolita : et ils ont faux

224 Laura : ils sont mauvais [rires]

225 Professeur : ils en ont trouvé plus

226 Lolita : c'est faux

227 Marion : c'est faux

228 Professeur : vous êtes sûr

229 Etudiants : oui [tous en cœur]

230 Laura : on a toutes trouvé cela indépendamment

231 Professeur : c'est vrai

232 Etudiants : oui [toutes en cœur]

233 Professeur : donc soit vous avez toutes raison soit vous avez toutes fait la même erreur

234 Etudiants : non on a toutes raison [toutes en cœur]

235 Laura : on est sûres de nous

Dans ce groupe, les choix de structuration se sont dégagés très rapidement et les recherches qui ont été conduites l'ont été de manière individuelle, mais autour de ce seul choix de structuration qui n'a pas permis d'interroger les contraintes géométriques de la situation.

250 Professeur : vous êtes sûres de ne pas en avoir oublié là [montre la zone des unicolores sur le dessin]

254 Etudiants : *ah ben/ non [tous en cœur]*

255 Professeur : *vous êtes sûrs de ne pas en avoir oublié là [montre la zone des bicolores sur le dessin]*

257 Marion : *oui*

258 Laura : *et est-ce qu'on pouvait ne pas utiliser de couleurs / non*

259 Professeur : *non/ non non non// [montre la zone des tricolores du dessin] vous êtes sûres de ne pas en avoir oublié là*

263 Marion : *là moins sûres/ non mais là c'est plus compliqué pour dire/ ou là il faudrait qu'on le refasse mais je pense pas franchement/ on s'est mis à plusieurs*

Les sujets ont bien conscience que le dispositif mis en œuvre pour produire le cardinal de la collection des triangles tricolores est de nature différente de celui mis en œuvre pour les deux autres collections. Cette fabrication de doublons et leur élimination par exploration de la collection augmente la possibilité que soit oublié un triangle déjà considéré. Les sujets ont parfaitement conscience que C1 est réalisée et qu'un processus d'élimination ou au moins de contrôle des éléments produits permet de réaliser C2.

La fabrication de deux triangles symétriques va permettre de relancer la question « qu'est-ce que deux triangles identiques ? ».

280 Lise : *mets-toi de mon point de vue c'est pas le même/ il est inversé/ regarde*

281 Lolita : *oui mais il voulait juste des couleurs différentes il nous a dit/ eh ben c'était bien la consigne*

282 Marion : *oui mais/ il voulait des triangles différents*

283 Lolita : *des triangles différents ou des triangles avec des couleurs différentes*

284 Marion : *ben moi j'ai compris des triangles différents/ mais du coup moi j'ai coupé court à couleurs différentes/ mais c'était pas la même chose*

1.10.5.4 Conclusion de cette analyse de données

Nous avons vu apparaître les deux stratégies de notre analyse *a priori* : la fabrication de l'arbre qui témoigne du processus d'exploration mis en œuvre (réalisation de C1 sans que C2 soit nécessairement réalisé) et le classement par couleur qui naît de la volonté de mieux contrôler la production de doublons (réalisation de C2 sans que C1 soit nécessairement réalisé).

Une technique de production de la collection

Revenons sur l'interprétation qui peut être donnée de la mise en œuvre du classement par couleur. Au-delà de la partition des triangles qui est fabriquée, c'est aussi une partition du problème qui est réalisée. Les sujets sont confrontés à trois problèmes *a priori* plus simples que le problème de départ.

C'est une technique que nous avons déjà rencontrée dans la situation des sucres où les sujets partitionnaient les collections pour avoir à énumérer des ensembles plus petits. C'est cette même technique qui est employée spontanément par les sujets.

Apparition d'une nouvelle stratégie

L'analyse du déroulement de la séance nous a permis de renforcer notre analyse mathématique de la situation. Nous avons identifié une stratégie que nous n'avions pas anticipée et qui s'appuie sur le dénombrement des couples ou des triplets de couleurs pouvant être fabriqués à partir d'un ensemble de couleurs données. La deuxième étape de cette stratégie consiste à dénombrer les triangles pouvant être fabriqués à partir d'un couple ou d'un triplet de couleurs.

Nous avons trouvé des traces de cette stratégie dans certains échanges entre sujets. Cette stratégie en deux temps résout dans un premier temps un problème de combinatoire et dans un deuxième temps un problème géométrique.

La nouvelle stratégie que nous avons mise en évidence met bien en œuvre des techniques de partitionnement de problèmes (dénombrer les couleurs puis les triangles). La seule différence entre cette stratégie et la stratégie de classement par couleurs consiste à modifier l'ordre dans lequel sont hiérarchisées les deux questions. Le problème de la fabrication des triangles est mis en avant dans le classement par couleur alors que c'est le problème de combinatoire des couleurs qui est mis en avant dans la dernière stratégie exhibée.

Un problème d'énumération

Le problème de production de collection que nous avons présenté est un problème d'énumération forte. En effet, pour que le problème soit résolu, il faut que les conditions C1 et C2 soient simultanément vérifiées. Or, c'est cette vérification simultanée qui caractérise l'énumération forte.

Les sujets identifient les difficultés qu'ils rencontrent. Ils les décrivent dans des termes identiques aux difficultés qu'ils connaissent dans la situation du dénombrement par comptage d'une collection d'objets.

Ils disposent du mot «énumération» pour nommer la connaissance en jeu dans la situation de dénombrement par comptage. Pour autant, leurs échanges ne font pas apparaître qu'ils établissent un quelconque lien entre les difficultés d'un élève dans une situation de dénombrement et les difficultés d'un étudiant dans la situation des triangles colorés, et encore moins qu'ils nomment la connaissance en jeu.

Des moments successifs de respect de chacune des deux conditions

Les sujets à qui ce problème est proposé sont confrontés à une série d'injonctions contradictoires que nous allons essayer de décrire ici.

Ils doivent produire une énumération forte de la collection de triangles.

Certains n'ont pas de doute sur leur capacité à trouver tous les éléments de la collection puisqu'ils disposent la plupart du temps d'un modèle mathématique pour résoudre les problèmes de ce type, modèle qui repose sur la mise en place d'un arbre. Que l'arbre apparaisse explicitement ou pas dans la trace écrite de résolution ne change pas grand-chose à la disponibilité implicite de ce modèle. Certains sujets passent donc par une phase dans laquelle ils reconnaissent qu'il y a 64 solutions. Cette phase correspond à un moment de la résolution où C1 est réalisée sans que C2 le soit. Certains éléments ont été produits plusieurs fois, leur ordre de multiplicité est supérieur à 1. Ils ont alors faiblement + énuméré la collection des triangles.

La prise en compte d'une partie des contraintes géométriques remet en cause la validité de cette réponse, en leur permettant de se convaincre que C2 n'est pas remplie. C'est l'acquisition de cette conviction qui entraîne une nécessaire réorganisation de la collection.

La non-réalisation de C2 les contraint à modifier la structuration de la collection, à la réorganiser. La mise en œuvre du classement par couleur est une trace de cette réorganisation. Nous repérons cette mise en œuvre par l'occurrence de la réponse 20. Nous analysons cette réponse comme étant un moment de la résolution pendant lequel C2 est réalisé sans pour autant que C1 ne le soit. L'ordre de multiplicité de chaque élément de la collection est à ce moment inférieur ou égal à 1. Ils ont alors faiblement - énuméré la collection.

Le processus de remise en cause de la réponse produite fonctionne de la même manière qu'il avait fonctionné lors de la première phase, à savoir en appui sur la non-certitude du

caractère total de l'exploration réalisée. C'est la prise en compte des contraintes géométriques restantes qui permet cette remise en cause.

Nous observons ainsi une tension qui s'exerce entre les deux conditions de l'énumération et qui provoque des réajustements permanents dans la conception de la collection et des bascules du respect d'une condition au respect de l'autre.

À la première stratégie d'arbre succède une seconde stratégie de classement. Cette seconde stratégie apparaît comme une réponse au problème de fabrication des doublons. Cette seconde stratégie ne va plus fabriquer de doublons. Par contre l'exhaustivité de l'exploration ne sera plus garantie. La solution du problème vient de la mise en œuvre d'une combinaison de ces deux stratégies, qui s'élabore progressivement dans une succession de phases où chacune des deux conditions sera successivement vérifiée alors que l'erreur commise sur la seconde sera progressivement réduite.

Nous avons présenté ici une situation d'énumération forte dans laquelle il n'est pas nécessaire de réaliser en un seul geste le respect simultané des deux conditions C1 et C2. C'est dans la gestion de la tension qui s'exerce sur la réalisation de chacune des deux conditions que s'élabore la solution du problème.

Chacune des deux conditions obéit à des logiques différentes de conception de la collection. La solution du problème est obtenue comme le résultat d'oscillations dans des mises en œuvre successives d'énumérations faibles.

Une nouvelle définition confortée

L'étude de la situation des triangles colorés conforte la définition que nous avons donnée de l'énumération. Nous avons montré que, pour énumérer la collection de manière forte, les sujets réalisaient une succession d'énumérations faibles.

L'énumération est une connaissance qui permet de décrire comment des collections peuvent être organisées. Que le même mot soit employé pour désigner des connaissances proches permet de renforcer la légitimité de ce savoir, dans la mesure où nous étendons la classe des problèmes dans lesquels il est présent.

Dans la situation des triangles colorés, les sujets sont toujours en train d'énumérer des collections. C'est le même mot qui rend compte de la constance de l'activité mise en œuvre.

Cette activité présente des variations. Il existe différents types d'énumération, nécessitant la mise en œuvre des conditions C1 et C2, l'une ou l'autre ou bien les deux simultanément.

Nous pouvons maintenant revenir sur la question de l'intégration des dimensions matérielles et leur articulation avec la nouvelle définition de l'énumération.

2. Énumération et matérialité

Nous poursuivons la mise en évidence des variables dans les situations d'énumération que nous avons étudiées. L'étude mathématique nous a permis de construire une modélisation des stratégies et de redéfinir l'énumération. Ces développements se sont réalisés sur des observations de sujets en situation.

Dans les paragraphes suivants, nous reprenons appui sur l'observation. L'observation de sujets en situation nous a permis de développer une sensibilité à un certain nombre d'aspects liés aux dimensions matérielles de ces situations.

Ce sont ces aspects sur lesquels nous allons revenir maintenant. Nous allons nous appuyer sur la matérialité comme moteur de développement des variables de situation de notre réflexion sur l'énumération. Nous allons montrer comment la matérialité impacte, voire envahit l'activité du sujet.

L'observation et l'analyse des difficultés rencontrées par les sujets doit permettre de compléter l'étude des variables des différentes situations étudiées, et principalement les variables non spécifiquement mathématiques.

Ce chapitre fait une place aux dimensions méthodologiques du travail qui est conduit en prenant le parti de ne pas gommer les difficultés rencontrées dans le processus de modélisation. Ces difficultés nous conduisent à faire des choix parmi des alternatives que nous avons cherchées à rendre visibles, en exhibant intérêts et limites de ces choix.

2.1 Caractéristiques matérielles du milieu (cas des configurations modifiables)

Après avoir présenté la situation qui a permis l'indentification de variables liées à la matérialité, nous réinterrogeons les situations des allumettes, des perles plombées et de des jetons marqués à la lumière de ces nouvelles variables.

L'émergence de ces nouvelles caractéristiques sur la nature des éléments de la collection nous conduit à produire une nouvelle situation. Cette nouvelle situation est analysée et se voit appliquer les modèles développés précédemment.

2.1.1 Une observation fondatrice

(Margolinas & De Redon, 2008) est à l'origine de notre réflexion sur ce point. Cette situation a été observée en classe de Grande Section, en maternelle. Pour pouvoir en rendre compte, elle a fait l'objet d'une reconstitution dans le cadre du travail réalisé par DéMathÉ. Ce sont des photos extraites de cette reconstitution qui illustrent notre propos.

Dans cette situation, les propriétés matérielles des objets ont une influence directe et immédiate sur la réussite ou non des sujets à la situation. C'est ce caractère immédiat qui a permis la prise de conscience de l'importance de ces propriétés matérielles.

Décrivons la situation. Un élève doit dénombrer une collection de ballons stockés dans un grand récipient. L'élève saisit les ballons un à un et énonce au fur et à mesure les termes de la comptine. Il n'a pas de difficulté à mettre en œuvre l'algorithme de comptage. Dans d'autres conditions matérielles, il produirait sans doute le bon résultat.

La collection d'objets qu'il doit dénombrer présente la caractéristique matérielle de rouler. L'élève ne peut donc pas, comme il le ferait dans d'autres conditions, poser au sol les ballons qu'il a déjà comptés. S'il faisait cela, il risquerait de voir son dénombrement interrompu par ce déplacement intempestif de ces ballons.

Donc l'élève prend la décision de stocker les ballons déjà comptés dans ses bras.



Photo 34 : Extrait 1 de la reconstitution de la situation des ballons – le stockage des éléments déjà comptés

Comme le nombre de ballons à dénombrer est important les bras de l'élève observé se révèlent incapables de pouvoir contenir tous les ballons déjà comptés. Au bout d'un moment, des ballons déjà comptés tombent des bras.



Photo 35 : Extrait 2 de la reconstitution de la situation des ballons – le moment où les ballons tombent

Les bras se révèlent un espace insuffisant pour résoudre le problème du stockage des ballons déjà comptés. Les ballons déjà comptés retombent dans le récipient et se mélangent avec des éléments non encore traités.

Pour autant, la solution mise en œuvre par l'élève était mathématiquement adaptée au problème. L'élève avait la volonté de séparer les éléments déjà traités des éléments non encore traités. Ce sont les conditions matérielles qui ont rendu cette solution non pertinente.

Les conditions matérielles favorisent ainsi le mélange des objets traités et non traités. L'observation de telles situations nous permet de développer une sensibilité aux questions des conditions matérielles dans lesquelles les sujets sont placés. Cette sensibilité nous permet de mieux comprendre *a posteriori* l'impact des caractéristiques matérielles sur les solutions que doivent produire les sujets pour contrôler l'énumération.

Cette sensibilité permet aussi de mieux contrôler *a priori* les caractéristiques matérielles des collections d'objets quand nous concevons des situations.

Commençons par revenir sur des éléments d'analyse *a posteriori* concernant les caractéristiques matérielles des éléments des collections avec lesquelles nous avons déjà travaillé.

Ces éléments sont des objets qui présentent des propriétés matérielles entraînant des difficultés du type de celles rencontrées par l'élève dans la situation des ballons.

2.1.2 Des objets instables

Boîtes d'allumettes et jetons (marqués ou non marqués) sont des objets qui, posés sur une table, conservent la position dans laquelle ils sont placés.

Ce n'est pas le cas des perles avec lesquelles nous avons travaillé. Plombées ou non, ces perles sont des objets qui présentent un caractère instable. Sans attention particulière, elles ne

conservent pas la position dans laquelle elles sont placées sur le support. Elles peuvent rouler sur la table.

Les sujets ont été avisés par les expérimentateurs avant même de vider le contenu de la boîte sur la table.

L'analyse *a priori* nous avait amené à construire deux morceaux de boîte qui pouvaient accueillir les objets appartenant aux sous-ensembles produits par le tri. En tant que concepteur de la situation, nous avons produit une difficulté spécifique liée à une propriété matérielle des objets et un matériel permettant de trouver une solution pour prendre en charge de manière acceptable cette difficulté.

Dans cette situation, certains sujets ont su reconnaître l'utilité des morceaux de boîtes et donc ils se sont adaptés au milieu que nous avons construit pour prendre en charge cette dimension matérielle. D'autres par contre n'ont pas utilisé les morceaux de boîte pour contenir les problèmes matériels pendant la durée des traitements. Certains ont fini par utiliser les morceaux de boîte une fois le tri terminé pour stocker les perles des deux ensembles qu'ils avaient construits, mais les morceaux de boîte n'ont pas eu de fonction pendant le tri.

Les perles se sont pas sphériques, mais plutôt cylindriques. Parmi ceux qui n'ont pas utilisé les morceaux de boîte, certains sujets ont posé les perles sur une des bases du cylindre, ce qui a limité leur instabilité.

Cette procédure est très couteuse en temps. Elle demande une attention soutenue lors de la pose de chaque perle sur la table.

De plus, au fur et à mesure que le traitement avance, la table est envahie par les perles traitées posées de la sorte. Ces perles occupent un espace de plus en plus important sur la table, ce qui réduit l'espace disponible pour poser les perles qui vont être traitées.

Un réel enjeu d'optimisation de la place occupée par les perles traitées apparaît.

Les sujets produisent différentes solutions à ce problème.

2.1.2.1 Une première solution : construction de tas

Une première solution est de constituer un tas, matérialisation spatiale de l'ensemble des éléments déjà traités. Cette solution est difficile à mettre en œuvre au démarrage car l'instabilité des perles rend délicat le maintien de la proximité des objets qui sont placés les uns à côté des autres. Cependant, une fois que suffisamment d'objets sont disposés les uns à côté des autres, quand un tas de perles est déjà construit, que des perles assez nombreuses sont

posées les unes sur les autres, en posant une nouvelle sans que celle-ci ne roule jusqu'à quitter le tas devient de plus en plus facile. Il suffit de poser la nouvelle perle sur les précédentes. Celle-ci est alors bloquée et limitée dans ses déplacements car elle ne repose plus sur une surface plane. C'est donc au moment où le tas démarre, quand les premières perles sont posées que l'attention et la précision dans la dépose des perles sur la table est maximale.

2.1.2.2 Une seconde solution : construction de lignes

Une seconde solution consiste à produire une organisation spatiale particulière. Certains sujets règlent la question de l'optimisation de la place occupée sur la table en construisant des alignements de perles.


12:10		Puis la fabrication de la ligne reprend.
-------	--	--

Photo 36 : Situation des perles plombées - Extrait 1 de l'essai du sujet 6 - les perles traitées sont posées sur leur base

L'extrait 1 de la transcription ci-dessus montre que le sujet construit en bas de sa feuille, à sa gauche, un alignement de perles.

Certains sujets maintiennent ce mécanisme pendant une durée importante, ce qui conduit à des productions parfois spectaculaires.

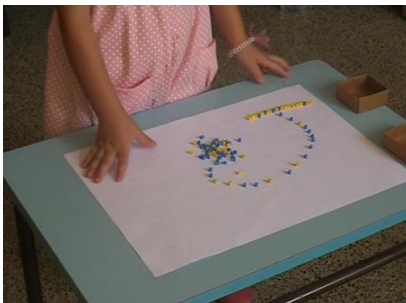
15:05		Etat de la fabrication des deux lignes.
-------	---	---

Photo 37 : Situation des perles plombées - Extrait 2 de l'essai du sujet 6- les perles traitées sont posées sur leur base

Dans ce second extrait de l'essai du sujet 6, nous observons que le sujet a mis en œuvre le dispositif de construction de lignes pour une seconde collection de perles. Le nombre de

perles qu'il a dû positionner en équilibre sur leur base contribue à expliquer la durée de l'essai.

2.1.2.3 Une combinaison des deux solutions précédentes

Certains sujets trouvent une solution au caractère chronophage de la seconde solution. Ils mettent en œuvre une combinaison des deux solutions que nous venons de décrire.

Examinons la variation des stratégies mises en œuvre par le sujet 7.


06:17		<i>Les perles qui ont été traitées sont des deux couleurs. Le sujet les pose verticalement avec beaucoup de précaution.</i>
-------	---	---

Photo 38 : Situation des perles plombées - Extrait 1 de l'essai du sujet 7- les perles traitées sont posées sur leur base

Pour démarrer la fabrication de ses ensembles d'objets traités, le sujet 7 pose les perles sur leur base le long du bord de la feuille. La juxtaposition des perles s'effectue selon une direction constante qui constitue une ligne.

Le sujet prolonge cette stratégie jusqu'à 08 :22.

Au fur et à mesure qu'il poursuit le traitement des éléments, le nombre de perles de son alignement augmente et commence à envahir la totalité de l'espace disponible le long du bord de la feuille

Il lui reste encore un peu de place pour poursuivre la ligne qu'il a fabriquée. Peut-être se rend-il compte qu'il n'en aura pas assez quoiqu'il arrive.

Toujours est-il qu'il procède à la transformation de la forme de son ensemble de perles traitées.

08:22		<p><i>Le sujet utilise sa main pour regrouper les perles qui sont sur sa droite. Un tas se forme.</i></p>
-------	---	---

Photo 39 : Situation des perles plombées - Extrait 2 de l'essai du sujet – les perles sont regroupées en tas

Le sujet change de stratégie d'organisation de l'ensemble des perles traitées.

Nous observons dans la photo ci-dessus l'utilisation de la main du sujet pour procéder à la transformation de la nature de l'ensemble des perles traitées.

Cet ensemble passe d'une ligne de perles posées sur leur base les unes à côté des autres à un tas de perles posées les unes sur les autres.

Observons les conséquences de cette modification de l'organisation de son stockage des perles.


13:05		<p><i>Le traitement des perles s'est accéléré. Le sujet utilise ses deux mains pour saisir les perles (en fonction de la position origine qu'elles occupent). Il lui arrive d'en avoir plusieurs dans les mains. Elles sont examinées et posées une à une. Le tas de droite est maintenant plus important ce qui lui facilite les choses quand il cherche à poser une perle dans ce tas. Il n'est plus nécessaire de la poser verticalement pour qu'elle ne roule pas.</i></p>
-------	---	--

Photo 40 : Situation des perles plombées - Extrait 3 de l'essai du sujet 7 – les effets sur le traitement de la modification des organisations du stockage

Maintenant que l'organisation du stockage des objets traités a été modifiée, le sujet peut augmenter la vitesse à laquelle il traite les éléments. Si le temps qu'il consacre à l'examen du caractère plombé ou non des objets qu'il saisit n'est pas modifié, le temps qu'il passe à poser l'objet est fortement réduit. La pose est maintenant plus simple, à tel point que le sujet peut l'effectuer avec n'importe laquelle de ses deux mains. La facilitation de la pose des objets examinés rend possible la saisie des perles des deux mains.

Donc le caractère instable des objets a des conséquences sur la vitesse à laquelle le sujet va pouvoir traiter tous les éléments de la collection.

2.1.3 Quand la taille des objets permet de partitionner la collection

Dans la situation des ballons, les objets sont gros. Le sujet place son bras contre son corps pour construire un espace de stockage des éléments traités. Il ne dispose plus que d'une main pour saisir les ballons restant dans le contenant. Il ne peut pas saisir plus d'un ballon à la fois. Si les éléments qu'il a à dénombrer étaient moins gros, on peut imaginer qu'il pourrait éventuellement les saisir deux par deux pour compter plus vite. Les éléments de la collection des ballons sont saisis et traités un par un.

Dans la situation des allumettes, à aucun moment nous n'observons Romain saisir simultanément deux boîtes pour insérer une allumette dans chacune d'elles. Les éléments de la collection des boîtes sont aussi saisis et traités un par un.

Dans la situation des jetons marqués, nous n'observons pas de saisie autre qu'un à un des éléments. Ces saisies s'effectuent parfois très rapidement, voire avec les deux mains. Cela reste néanmoins des saisies individuelles.

Dans la situation des perles plombées, nous avons fait le choix de travailler avec des objets très petits pour diminuer l'immédiateté de la perception du caractère du tri. Cette diminution de la taille a permis d'observer la mise en œuvre d'un geste spécifique que nous n'avons pas observé dans les autres situations.

Examinons comment le sujet 9 a procédé.


03:13		<i>Poursuite des traitements. Le sujet ramasse des perles avec sa main gauche, les observe attentivement et les met soit dans le creux de sa main droite, soit dans le tas qu'il a constitué à sa gauche.</i>
-------	---	---

Photo 41 : Situation des perles plombées - Extrait de l'essai du sujet 9 – traitement des perles par lots

Le sujet 9 a saisi quelques perles qu'il place dans sa main (gauche). Compte tenu de la taille des éléments dans cette situation, nous pensons qu'il a choisi des perles dont la seule caractéristique est d'être non traitées.

Une fois ce petit sous-ensemble constitué, quelques perles sont déplacées dans le creux de la main avant de rejoindre un des deux ensembles de perles traitées déjà constitués que sont la main droite du sujet ou le tas qui figure à sa droite.

Le sujet met donc en œuvre à ce moment un tri par extraction sur ce petit sous-ensemble. La limitation de la taille de l'ensemble sur lequel est réalisé le tri permet au sujet de mieux contrôler la terminaison de l'algorithme.

La mise en œuvre de cette stratégie ne génère pas de surcroît d'erreurs. La taille de l'ensemble sur lequel l'extraction s'applique est contrôlée par le sujet. Pour mener l'algorithme à son terme, il lui suffit de mettre en œuvre le même mécanisme sur la suite des sous-ensembles, partition construite par le sujet de l'ensemble des perles à trier.

2.1.4 Des effets inattendus

Par ailleurs, des problèmes liés à la préhension des objets se sont posés lors de nos observations.

2.1.4.1 Des éléments qui se lient entre eux

Dans la situation des jetons marqués, les sujets ont parfois saisis, à leur insu ou pas, deux jetons collés l'un à l'autre.

Nous avons observé ce type de phénomène chez deux sujets dans la situation des jetons marqués : chez le sujet 11 (00:51 de la transcription) et chez le sujet 8 (00 :34).

L'extrait de la transcription pointant ce qui se passe pour le sujet 8 figure ci-dessous.



00:32		<p><i>Le sujet saisit un jeton, le retourne</i></p>
00:34		<p><i>et le dépose à sa droite. En fait, on voit à ce moment que le sujet avait saisi deux jetons, collés l'un à l'autre. Les deux jetons atterrissent à la droite du sujet.</i></p>

Photo 42 : Situation des perles plombées - Extrait essai sujet 8 – cas des jetons collés

Examiner simultanément deux jetons pour voir s'ils sont marqués ne pose pas de problème en soi. Ce qui va être problématique ici est la conséquence de la manière dont ces jetons sont placés. Le sujet 8 saisit des jetons qui sont parfaitement superposés. S'ils étaient de même couleur, chacun pourrait d'ailleurs penser qu'ils ne constituent en fait qu'un seul jeton. Ce n'est pas le cas. Les jetons, au nombre de 2, se révèlent comme collés l'un à l'autre.

Considérons l'ensemble constitué de ces deux jetons. L'examen des deux faces de cet ensemble ne permet pas de contrôler la présence de gommettes sur chacune des faces des jetons qui le constitue. Même si le sujet retourne l'ensemble, seule une seule face de chaque jeton est examinée.

Tant que les deux jetons restent collés, ils ont chacun une face qui ne peut pas être observée par le sujet. Dans ce cas, le sujet peut conclure seulement si le caractère marqué est visible sur une des deux faces de l'ensemble.

La seule solution consiste à décoller les jetons pour faire un examen exhaustif de chacune de leurs faces.

Les constitutions de blocs de jetons ne sont apparues que sur des ensembles de deux éléments.

2.1.4.2 Des éléments qui se lient au corps du sujet

Ce que nous avons observé dans la situation des perles plombées est un peu différent.

Examinons ce qui est arrivé au sujet 3.


02:06		<p><i>Le tas de perles qu'il a traité est maintenant mieux regroupée, même si une perle de ce tas s'est collée à sa main pendant cette opération et a roulé.</i></p>
-------	---	--

Photo 43 : Situation des perles plombées - Extrait essai sujet 3 – cas des perles collées

Quand le sujet pose sa main sur la table pour saisir une perle, même s'il saisit cette perle avec ses doigts, une partie de sa main entre en contact avec d'autres perles posées sur la table. Cela peut suffire à déplacer ces objets instables que sont les perles. Cela peut avoir aussi une autre conséquence plus inattendue.

Des perles peuvent se retrouver collées à la main du sujet et donc être transportées quand le sujet relève sa main pour déplacer la perle qu'il a saisie avec ses doigts.

Ce phénomène est lié aux caractéristiques des objets avec lesquels nous avons choisi de travailler. Une perle est un objet très léger. Il peut facilement se coller aux parties de la main dans lesquelles il y a une partie de chair suffisamment importante pour retenir un objet aussi petit. Rajoutons à cette explication que des conditions d'humidité importante ou de transpiration des sujets renforcent encore ces phénomènes. Or, ces conditions matérielles « triviales » influent sur les conditions d'énumération.

2.1.5 Construction d'une nouvelle situation

Nous nous posons maintenant la question de la fabrication d'une situation qui conserverait certaines des propriétés de la situation des perles plombées tout en éliminant la difficulté de la préhension. En effet, la situation des perles plombées a été proposée à des sujets élèves de classes de Moyenne Section ou Grande Section de l'école maternelle. Nous souhaitons proposer une situation d'énumération à des sujets élèves de Petite Section (3 ans).

Décrivons les choix successifs que nous avons réalisés pour construire la nouvelle situation.

2.1.5.1 Taille des éléments

Nous souhaitons diminuer la difficulté de préhension des objets observée dans la situation des perles plombées. Nous choisissons donc de travailler avec des objets plus gros que les perles.

2.1.5.2 Caractère instable

Nous voulons que ces objets conservent une partie du caractère instable de la situation des perles plombées. Nous décidons de travailler avec les boules en polystyrène.

2.1.5.3 Nature du traitement

Nous pensons que certains sujets pourraient ne pas comprendre ce qui est attendu d'eux dans le cadre d'un tri. Nous choisissons donc de modifier la nature du traitement. Nous voulons que ce traitement soit parmi les plus simples possibles, qu'il ne nécessite pas de connaissance spécifique.

Nous décidons que le traitement consistera à marquer les boules de polystyrène. Ce marquage s'opérera par collage d'une gommette sur chaque boule (la gommette nous apparaissant comme un objet très ordinaire dans l'environnement des classes de maternelle).

La situation est donc la suivante. Le sujet reçoit, dans une boîte constituée de deux morceaux quasi-identiques, des boules de polystyrène. Comme pour la situation des perles, le sujet est invité à renverser le contenu de la boîte, puis à coller une gommette et une seule sur chacune des boules étalées sur la table.

2.1.5.4 Limitation de la taille de l'espace

Devant la difficulté rencontrée par les sujets pour gérer l'instabilité des objets, nous décidons d'aménager le support sur lequel se déroulera la situation. Nous limitons l'espace dans lequel va se dérouler le travail, en disposant sur la table un morceau rectangulaire de nappe en caoutchouc. Ce morceau est entouré par des bouts de carton pour limiter les possibilités de déplacement des boules.

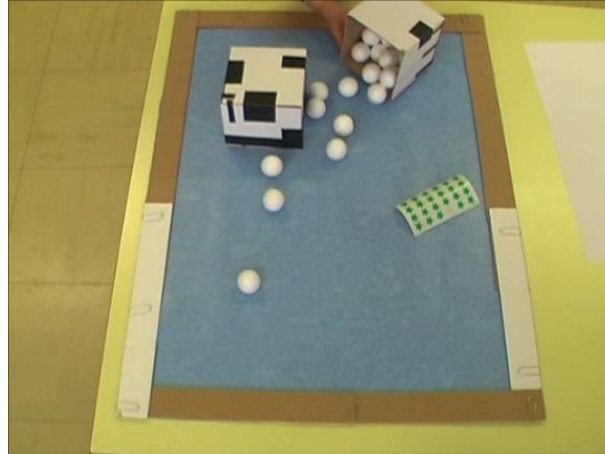


Photo 44 : Situation des boules de polystyrène- limitation de la taille de l'espace

En effet autant nous souhaitons que les boules soient instables dans l'espace de travail (pour favoriser le recours à la boîte), autant nous ne souhaitons pas que les sujets soient sans arrêt en train de ramasser les boules qui seraient tombées de la table sur laquelle est posée la nappe.

Traiter un élément, c'est coller une gommette sur cet élément. Chaque élément doit être traité une fois et une seule. La situation est donc une situation d'énumération forte.

Les conditions expérimentales sont les mêmes que celles de la situation des perles plombées. La situation a été proposée à 6 sujets, élèves de petite section. Les données ont été collectées au mois de juin. Les transcriptions des six parties figurent dans l'annexe 12.

Cette situation n'apporte pas d'éléments nouveaux sur la question des stratégies d'énumération d'une configuration modifiable. Les observations confirment les stratégies observées dans les situations des allumettes et de tri. Donc nous ne détaillerons pas ces aspects qui figurent dans les transcriptions de nos observations.

Par contre, cette situation nous est utile pour poursuivre notre réflexion sur la question de la matérialité.

Détaillons ici certains aspects de nos observations de la situation des boules de polystyrène.

2.1.6 Nature du contenant dans lequel est proposée la collection

Un des objectifs de la situation était d'observer les stratégies mises en œuvre par des sujets. L'utilisation d'un morceau de boîte apparaissait comme un indicateur pour l'observateur et un révélateur pour le sujet d'une construction en action d'un ensemble des objets traités.

Dès le passage du sujet 2, nous décidons de ne plus proposer une boîte constituée de deux morceaux comme c'était le cas dans la situation des perles plombées. En effet, la situation des boules de polystyrène n'est pas une situation de tri pour laquelle deux espaces doivent être construits. C'est une situation dans laquelle une transformation matérielle doit être réalisée sur chacun des éléments d'une collection. Une fois le traitement de tous les éléments terminé, seul un ensemble doit demeurer.

La nature du traitement demandé nécessite de ne construire qu'un seul ensemble. La fourniture d'un dispositif matériel permettant d'en construire deux est donc non nécessaire.

2.1.7 Impact du support sur la mobilité des éléments

Dès le passage du premier sujet, nous nous rendons immédiatement compte que celui-ci n'est pas gêné par le caractère instable des boules. Le support que nous avons construit a énormément limité le caractère instable des boules de polystyrène. Le caoutchouc a joué un rôle d'amortisseur qui a neutralisé une bonne partie de la variable sur laquelle nous souhaitons agir. Les boules ne sont pas devenues statiques pour autant, mais leurs déplacements ont pu être contrôlés par les sujets.

Du coup, aucun des sujets observés n'a utilisé un morceau de boîte pour contenir le déplacement des boules. La réflexion préalable que nous avons élaborée sur la question des boîtes comme outil pour matérialiser les ensembles construits s'est donc révélée sans objet.

Par ailleurs, nous décidons dès le passage du sujet 2 de diviser par deux la taille de la collection des boules proposée. Cela se révèle être une bonne décision. Le nombre d'éléments n'est pas, une fois de plus, la variable la plus sensible de la situation.

2.1.8 Utiliser le milieu pour partitionner

L'analyse *a priori* conduit à construire des morceaux de boîte pour aider le sujet à matérialiser des ensembles, partitions successives des éléments traités et non traités dans la suite des traitements.

Le morceau de boîte a pour fonction d'empêcher que ne se mélangent les éléments traités et les éléments non traités. C'est un dispositif matériel assez radical qui règle de manière définitive la possibilité du mélange en neutralisant l'instabilité.

Les sujets observés n'ont pas eu recours à ce dispositif. Ils auraient pu utiliser le morceau de boîte, non pas pour y stocker des éléments, mais au moins pour servir de séparateur de collections. Aucun n'a eu recours à cette solution. Pour autant, ils ont parfois cherché des solutions originales à la question du mélange.

Observons ce qu'a fait le sujet 2.


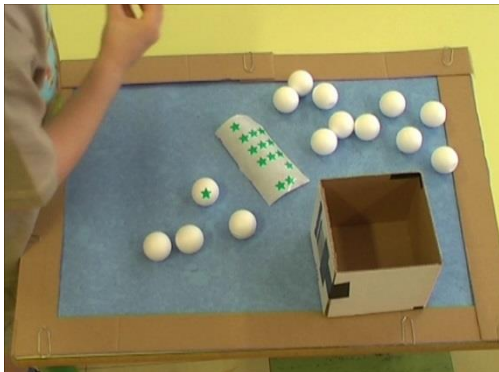
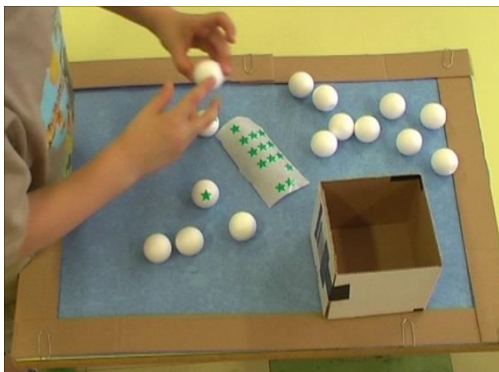
01:52		<p><i>Il pose la boule qu'il vient de traiter près des trois précédentes.</i></p>
02:01		<p><i>Poursuite des traitements. Les difficultés qu'il a à attraper une gomme l'obligent à poser près de lui la gomme qu'il a saisie.</i></p> <p><i>Sur la photo extraite de la vidéo, on voit qu'il a posé le support des gommes entre le tas des boules qui ont déjà une gomme et le tas de boules qui n'en n'ont pas encore.</i></p>
02:11		<p><i>Saisie d'une nouvelle boule.</i></p>

Photo 45 : Situation des boules de polystyrène- extrait essai sujet 2 - utilisation originale du support des gommes

Le sujet 2 met en œuvre un traitement systématique des boules en séparant spatialement de manière assez nette les boules qui ont déjà une gomme et celles qui n'en n'ont pas encore. Confronté au risque qu'une boule roule d'un ensemble à l'autre, il utilise un des éléments du milieu matériel mis à sa disposition pour matérialiser une séparation. Il pose donc le support des gommes dans l'espace vide entre les deux ensembles qu'il est en train de construire, limitant ainsi toute possibilité de passage intempestif de l'un à l'autre.

C'est une prise d'initiative tout à fait intéressante et adaptée au problème qui est posé à ce sujet. Pour autant, elle reste risquée dans le mesure où le sujet est obligé de saisir le support pour prendre une gomme et donc enlève à certains moments des traitements le séparateur

qu'il a construit. Durant la partie, ce sujet n'a pas l'idée d'utiliser le morceau de boîte pour réaliser cette fonction.

2.1.9 Les conditions matérielles du traitement d'un élément

Dans les situations à configurations modifiables que nous avons étudiées, les sujets sont confrontés à des traitements assez différents. Dire un mot de la comptine, mettre une allumette dans une boîte ou coller une gommette sur une boule en polystyrène sont des actions très différentes les unes des autres. Si énoncer les mots successifs de la comptine numérique peut apparaître comme une connaissance très spécifique, mettre une allumette dans une boîte ou coller une gommette apparaissent *a priori* comme plus ordinaire, et donc plus facile.

Intéressons-nous aux traitements réalisés dans la situation des allumettes et dans la situation des boules de polystyrène.

2.1.9.1 Dans la situation des allumettes

Nous commençons par la situation des allumettes. Détaillons certaines des difficultés rencontrées par Romain lors de ses deux essais.

00:39,00		<p><i>L'allumette qui s'était glissée entre les deux morceaux qui constituent la boîte tombe à terre.</i></p>
00:41,17		<p><i>Romain se penche et ramasse l'allumette avec sa main gauche, tout en conservant la boîte dans sa main droite.</i></p>
00:42,24		<p><i>Il remet avec sa main droite l'allumette dans la boîte.</i></p>

Photo 46 : Situation des allumettes, extrait essai 1 de Romain - difficultés matérielles du traitement

Il n'est pas facile pour Romain d'insérer une allumette dans l'orifice de la boîte. L'orifice est petit, tout comme l'allumette. Parfois, l'allumette se glisse entre les deux morceaux de la boîte et peut alors tomber à tout moment. C'est ce qui se passe dans l'extrait que nous avons sélectionné.

Même quand les objets proposés ne présentent *a priori* pas de caractère instable, ils peuvent quitter l'espace de travail. Romain décide d'aller ramasser l'allumette qui est tombée par terre. Cela l'oblige à modifier la position qu'il occupe devant son espace de travail. Cela signifie qu'il perd de vue la collection. C'est sans conséquence pour cet essai, car les espaces dans lesquels figurent les objets traités et les objets non traités sont bien délimités. Cela peut s'avérer une prise de risque très importante dans d'autres situations.

2.1.9.2 Dans la situation des boules de polystyrène

Nous allons décrire comment une modification des conditions de traitement aide à la compréhension des variables en jeu dans la situation des boules de polystyrène et conceptualisation des conditions de l'énumération d'une collection.

Description détaillée du traitement

Dans la situation des boules de polystyrène, le traitement consiste à mettre une gommette sur une boule.

Décrivons la suite des gestes réalisés par le sujet 2 pour traiter un élément de la collection.

Le sujet doit choisir une boule et coller une gommette dessus. Nous ne nous intéressons pas ici à la stratégie qu'il met en œuvre pour choisir la boule. Nous focalisons notre attention sur la question des gestes que le sujet réalise, indépendamment de la question du choix de la boule.

Il faut coller une gommette sur une boule. Pour cela, il faut avoir la gommette dans une main et la boule dans l'autre. Comment le sujet s'organise-t-il pour avoir une gommette dans une main ?

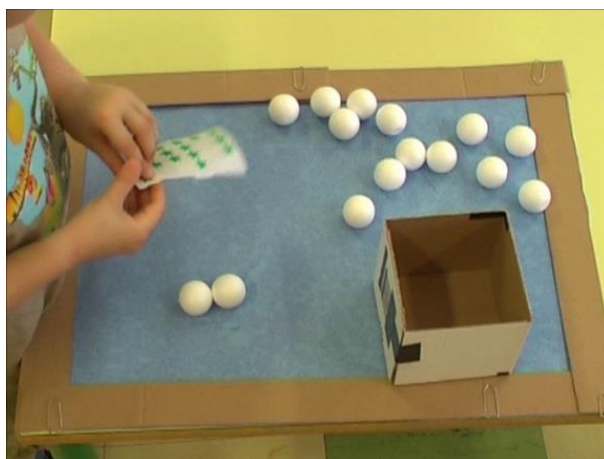


Photo 47 : Situation des boules de polystyrène- extrait du geste réalisé par le sujet 2 lors du traitement

La Photo 47 montre comment le sujet procède. Les gommettes sont stockées sur un support. Il faut décoller la gommette de ce support. Nous n'avons pas observé de sujet qui décolle la gommette du support sans tenir le support. Pour tenir le support, les sujets utilisent une de leurs mains. L'autre sert à attraper la gommette. Le sujet a donc besoin de ses deux mains pour mettre une gommette dans une de ses mains.

La suite des actions réalisées par les sujets est la suivante :

Traitement d'un élément

Choisir une boule


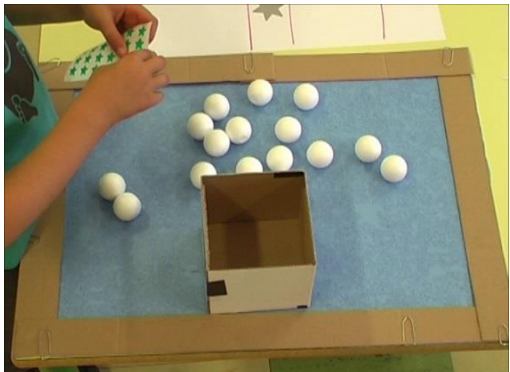
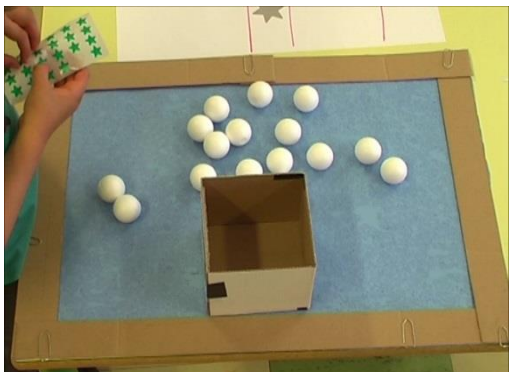
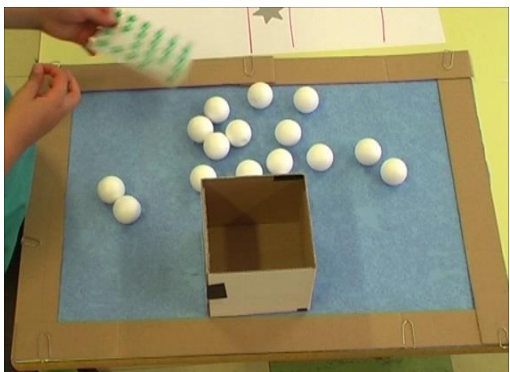
Saisir une gomme

Coller la gomme saisie sur la boule choisie

Apparition d'un nouvel espace

Pour choisir une boule, que ce choix soit pertinent ou non, le sujet a besoin d'une de ses mains. Pour coller une gomme, le sujet doit préalablement la saisir et nous venons de voir que le sujet avait besoin de ses deux mains pour cette saisie.

Observons ce qui se passe lors de l'essai du sujet 3.

<p>01:07</p>		<p><i>Il saisit la boule juste à côté de celle qu'il vient de poser.</i></p>
<p>01:12</p>		<p><i>Le sujet vient de reposer la boule qu'il avait saisie et utilise maintenant ses deux mains pour attraper une gomme.</i></p>
<p>01:22</p>		<p><i>La gomme est difficile à attraper.</i></p>
<p>01:32</p>		<p><i>Le sujet a enfin réussi à attraper la gomme.</i></p>

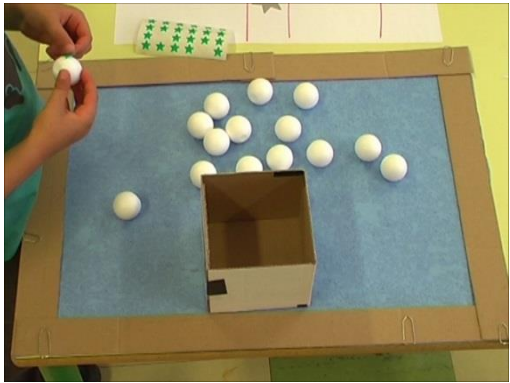
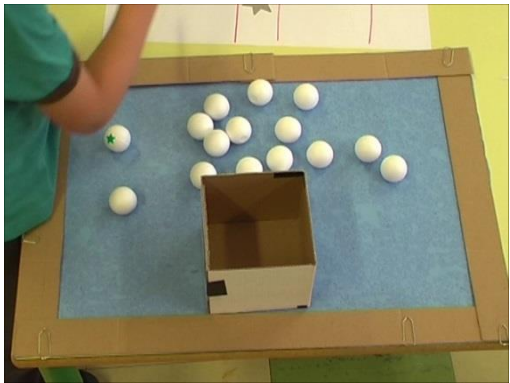
01:36		<p><i>Il peut maintenant traiter la boule qu'il avait posée.</i></p>
01:46		<p><i>La boule est posée devant lui. Elle n'est plus juste à côté de la première boule traitée. Cependant, elle est éloignée de toute autre boule.</i></p> <p><i>Le sujet est maintenant en train de saisir une nouvelle gomme.</i></p>

Photo 48 : Situation des boules de polystyrène, extrait 1 de l'essai sujet 3 – l'organisation du traitement d'un élément

Deux mains étant nécessaires pour décoller la gomme, se pose alors la question de savoir non pas ce que le sujet fait de la boule (il va devoir la poser pour libérer la main qui la tient), mais où le sujet pose cette boule.

Nous sommes au début du traitement. Le sujet a collé une gomme sur une boule et il est en train de traiter la seconde boule. Il pose la boule qu'il est en train de traiter dans le même espace que la boule qu'il a déjà traitée. S'il continue de procéder de cette manière, quand beaucoup d'éléments auront déjà été traités, il lui sera compliqué de retrouver la boule qui est en cours de traitement.

Cette nécessité pour le sujet de lâcher la boule qu'il est en train de traiter fait apparaître un espace qui va contenir des objets qui n'ont pas encore été traités, mais qui ne font plus pour autant partie des objets non traités. Pour contrôler son énumération, les conditions matérielles (lâcher l'objet instable que l'on est en train de traiter) imposent au sujet la création d'un troisième espace, un espace qui va contenir le ou les objets en cours de traitement.

Nous n'avons pas conçu la nécessité de cet espace dans la situation des allumettes car les conditions matérielles n'imposaient pas le dessaisissement de l'élément en cours de traitement. Même en cas de dessaisissement, le caractère stable des boîtes aurait limité cette

nécessité. Dans les tris que nous avons étudiés, l'absence d'action matérielle de transformation des éléments de la collection ne contraint pas non plus à se dessaisir des éléments en cours de traitement.

C'est donc la conjonction d'un certain nombre de conditions matérielles spécifiques qui fait apparaître la nécessité de construire et délimiter cet espace logique. Ce sont ces conditions matérielles qui permettent la conception même de cet espace.

Revenons à la description de l'essai du sujet 3.


02:09		<p><i>La gomme que le sujet avait attrapée vient de se coller à elle-même. Elle est maintenant inutilisable.</i></p> <p><i>L'expérimentateur intervient.</i></p> <p><i>Expérimentateur : « Je vois que tu as du mal à les décoller. Regarde, tu sais ce que je vais faire ».</i></p> <p><i>L'expérimentateur attrape une gomme sur le support et la pose sur son doigt.</i></p> <p><i>Expérimentateur : « Voilà, tu prends sur mon doigt cela sera plus facile parce que (inaudible) »</i></p>
-------	--	--

Photo 49 : : Situation des boules de polystyrène , extrait 2 de l'essai sujet 3 – modification de l'action de ramassage de la gomme

La gomme que le sujet avait eu tant de difficultés à saisir vient de se coller sur elle-même. Elle est maintenant inutilisable.

L'expérimentateur prend l'initiative de soulager le sujet d'un aspect matériel particulièrement lourd dans le traitement des boules et dont nous pensons à cet instant qu'il n'interfère pas avec la question de l'organisation de la collection.

Observons comment cette décision de l'expérimentateur modifie les conditions de traitement.

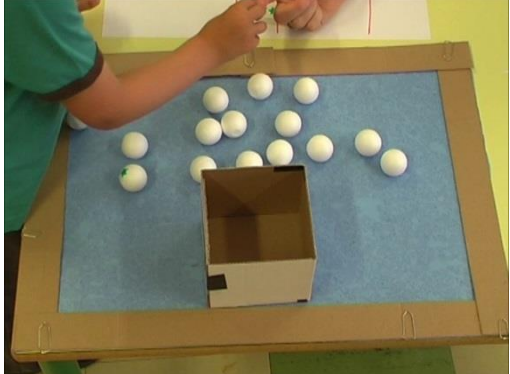
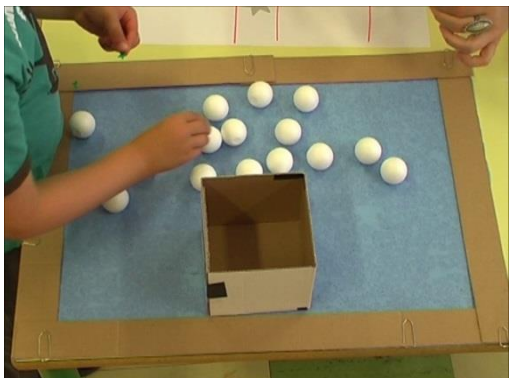

02:23		<p><i>Il saisit une nouvelle gommette avec sa main droite.</i></p>
02:28		<p><i>Il fait passer la gommette de sa main droite à sa main gauche et saisit une boule avec sa main droite.</i></p>
02:38		<p><i>Le sujet pose près de lui la boule sur laquelle il vient de mettre une gommette.</i></p>

Photo 50 : : Situation des boules de polystyrène , la nouvelle organisation du traitement d'un élément

L'expérimentateur maintient un stock de gommettes décollées de leur support disponible en permanence pour le sujet.

La conséquence de cette modification de l'organisation du traitement est que le sujet n'a plus besoin de ses deux mains pour saisir une gommette. Il peut donc conserver dans son autre main la boule qui est en cours de traitement.

La disparition de la nécessité de poser la boule en cours de traitement fait disparaître la nécessité de gérer la séparation spatiale des éléments en cours de traitement.

C'est aussi la modification des conditions de traitement qui, par la variation qu'elle introduit, permet *a posteriori* d'identifier cet espace ainsi que les conditions qui contraignent à son explicitation.

Conséquence sur l'algorithme de traitement

Revenons à la description de l'essai du sujet 3.

Suite à la décision de l'expérimentateur de mettre à disposition des gommettes pré-décollées, le sujet commence maintenant par saisir une gomme avec une main, puis ensuite par choisir une boule sur laquelle il va coller la gomme.

La mise à disposition de gommettes décollées du support a été concomitante avec une modification de l'ordre des actions du sujet.

La modification des conditions matérielles de récupération d'une gomme fait que le sujet n'a plus besoin de poser la boule avant de coller une gomme dessus. Le problème de savoir où le sujet pose la boule de polystyrène en cours de traitement a disparu.

Formellement, deux descriptions distinctes de la suite des actions réalisées par le sujet pour traiter un élément peuvent être données.

Avant la mise à disposition des gommettes :

Un premier algorithme de traitement des éléments

Choisir une boule (avec une main)

Poser la boule

Saisir une gomme (avec ses deux mains)

Reprendre la boule posée

Coller la gomme sur la boule

Après la mise à disposition des gommettes :

Un second algorithme de traitement des éléments :

Saisir une gommette (avec une main)

Choisir une boule (avec une main)

Coller la gommette saisie sur la boule choisie

La modification de la nature du traitement a permis de produire une description très détaillée du traitement. La production de cette description détaillée a permis de décrire une modification de l'ordre des actions de choix d'une boule et de saisie d'une gommette.

C'est parce que nous avons décrit jusqu'au nombre de mains nécessaires à chaque instant pour réaliser le traitement que nous identifions mieux certaines conditions rendant nécessaires la construction d'un espace de traitement.

2.2 Des variations de stratégie au sein d'un même essai

Nous disposons maintenant de deux descriptions différentes du traitement matériel d'un élément. Nous percevons maintenant des variations dans la suite des traitements qui étaient auparavant transparentes.

Certains sujets mettent en œuvre les deux suites d'actions possible pour réaliser le traitement, sans pour autant que les conditions matérielles du traitement soient modifiées.

Observons ce qui se passe lors de l'essai du sujet 4.

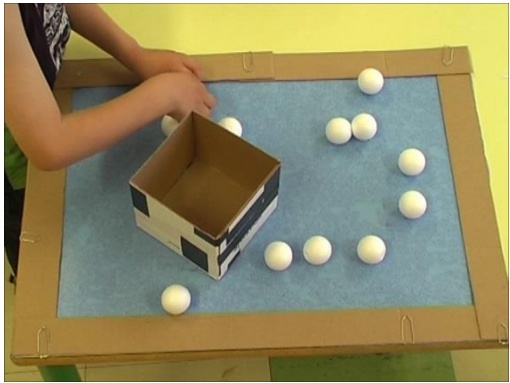
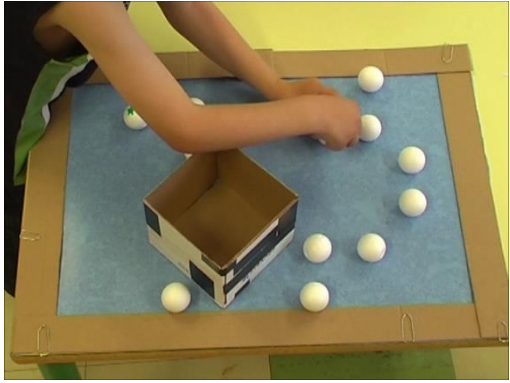
01:22		<p><i>Hors cadre, le sujet récupère une gomme dans une main et la colle sur une boule, sans saisir ni même lever la boule. Pendant la pose de la gomme, la boule bouge un peu. Une fois qu'elle se stabilise, la gomme posée sur la boule n'est plus visible.</i></p>
[...]		
02:20		<p><i>Poursuite des traitements selon les modalités observées dès le traitement de la première boule. Le sujet saisit une gomme et vient la coller sur une des gommes posées sur la table, sans jamais saisir, soulever ou déplacer les boules.</i></p>

Photo 51 : Situation des boules de polystyrène, extrait 1 de l'essai du sujet 4

L'expérimentateur met les gommettes à disposition. Pour limiter les effets du caractère instable des boules, le sujet les déplace le moins possible. Il saisit une gomme et vient la coller sur la boule, en essayant de ne pas déplacer la boule. Il applique à cette situation un mécanisme que nous avons rencontré dans le cadre des configurations non modifiables.

Pour autant, le sujet va être confronté au caractère déplaçables des boules.

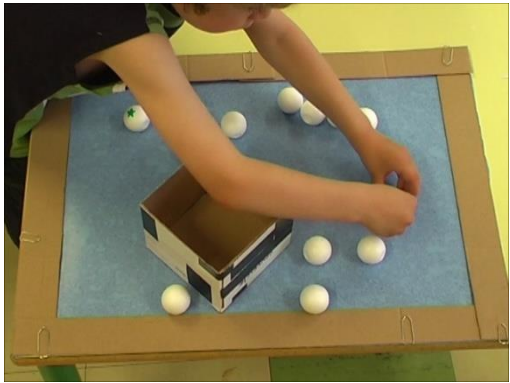
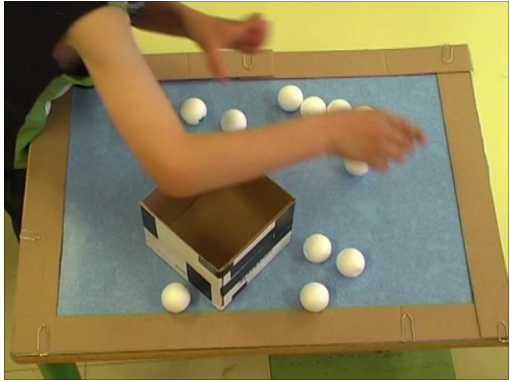
03:00		<p><i>Une gommette est posée sur une nouvelle boule. Le sujet tient la boule avec sa main gauche et colle la gommette sur la boule avec sa main droite.</i></p>
03:05		<p><i>Quand le sujet relève ses mains, la boule se déplace en direction des boules que le sujet a déjà traitée</i></p>

Photo 52 : : Situation des boules de polystyrène , extrait 2 de l'essai du sujet 4

Le traitement selon les modalités précédentes de boules qui sont proches devient compliqué. Il n'y a plus assez de place entre les boules pour que le sujet puisse y poser une main pour tenir la boule pendant qu'il pose la gommette avec l'autre main.

Le sujet est donc confronté au caractère modifiable de la configuration.

Il tire une conséquence immédiate de cette découverte.

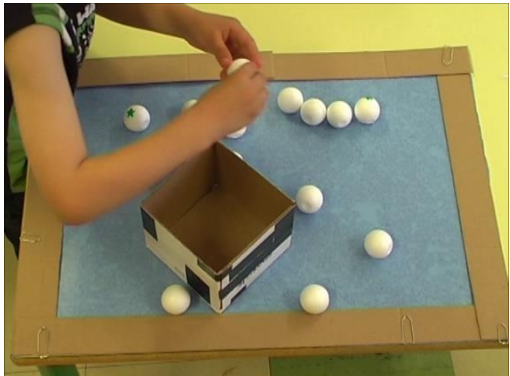

03:14		<p><i>Le sujet saisit une boule sans avoir de gommette dans les mains. C'est la première fois qu'il procède de la sorte.</i></p>
03:30		<p><i>Hors champ, le sujet colle une gommette sur cette boule. Nous le voyons ensuite replacer la boule près de l'endroit où il l'a saisie.</i></p>

Photo 53 : : Situation des boules de polystyrène , extrait 3 de l'essai du sujet 4

Le sujet saisit les boules, les soulève et donc les déplace. Cette nouvelle action s'accompagne d'une modification de l'ordre dans lequel il réalisait des actions élémentaires.

Auparavant, pour traiter une boule le sujet procédait de la sorte :

Suite des actions réalisées (première version)

Saisie d'une gommette (avec une main)

Choix d'une boule (blocage avec une main)

Pose de la gommette sur la boule

La nouvelle suite d'actions qui se met en œuvre est la suivante :

Suite des actions réalisées (seconde version)

Saisie d'une boule (avec une main)

Saisie d'une gommette (avec l'autre main)

Pose de la gommette sur la boule

L'ordre des deux actions « Saisie d'une gommette » et « Choix d'une boule » a été modifié.

Nous remarquons que la prise en compte du caractère modifiable de la configuration s'accompagne de la réalisation d'une forme particulière pour l'ensemble des éléments traités. Ceux-ci sont organisés en ligne. La forme produite vient renforcer la séparation spatiale des deux ensembles d'éléments.

Pour autant, et comme l'expérimentateur continue à décoller les gommettes, la nécessité de poser la boule n'est pas réapparue.

La question de la fabrication d'un espace de traitement dépend de facteurs très nombreux qu'une analyse *a priori* ne peut pas entièrement déterminer. L'impact de microdécisions identifiées comme d'ordre matériel est donc bien difficile à anticiper.

Ce retour sur des situations que nous avons étudiées dans le cadre des configurations modifiables a permis de mettre en évidence certains aspects qui apparaissaient *a priori* marginaux.

Leur accumulation et l'impact qu'ils ont sur les réalisations effectives des sujets permettent de compléter les analyses. Nous nous proposons maintenant de soumettre au même examen les situations à configuration non modifiable.

2.3 Caractéristiques matérielles du milieu (cas des configurations non modifiables)

La seule situation à configuration non modifiable pour laquelle nous disposons de données détaillées est la situation des sucres. Nous allons revenir sur cette situation en la soumettant à un examen détaillé des conditions effectives dans lesquelles elle a été observée.

La réalisation de cet examen détaillé passe par une meilleure compréhension de la situation du sujet. Nous cherchons à développer une compréhension de cette situation en nous appuyant sur les vidéos des parties. Nous avons développé une modélisation des parties dans le chapitre 2 qui proposait de rendre compte d'un certain nombre d'actions réalisées sur les chapeaux et de l'ordre dans lequel elles avaient été réalisées.

2.3.1 La question du point de vue du sujet

Avant de revenir sur la question des traitements, nous commençons cet examen en nous demandant : Quelle perception effective le sujet a-t-il de la collection de sucres qui lui est proposée ?

Nous allons maintenant décrire comment cette question a émergé et comment nous l'avons prise en charge.

2.3.1.1 Emergence des variables de position

Cette question n'est pas apparue dans un premier temps. Elle est restée absente de l'analyse *a priori*, analyse qui était écrasée par la focale de l'énumération. Cette question a émergé lors des visionnements successifs des vidéos des différentes parties.

Commençons par observer des photos extraites des vidéos des parties réalisées sur les trois supports.


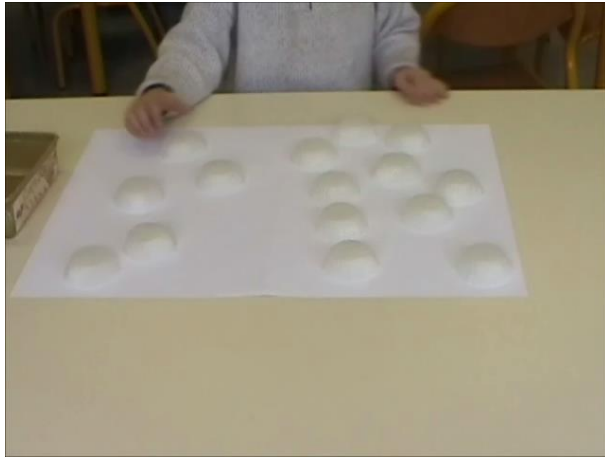

<p><i>Ce que filme la caméra de l'essai 1 du sujet 1</i> <i>Feuille A</i></p>	
<p><i>Ce que filme la caméra de l'essai 1 du sujet 20</i> <i>Feuille B</i></p>	
<p><i>Ce que filme la caméra de l'essai 1 du sujet 32</i> <i>Feuille C</i></p>	

Tableau 75 : Situation des sucres - Ce que montre la caméra de la collection des chapeaux, les trois supports

Ces trois photos font apparaître des perceptions assez différentes de la collection des chapeaux pour un observateur dont l'œil serait placé exactement dans la position de la caméra.

Rappelons l'organisation matérielle du dispositif de collecte de données.

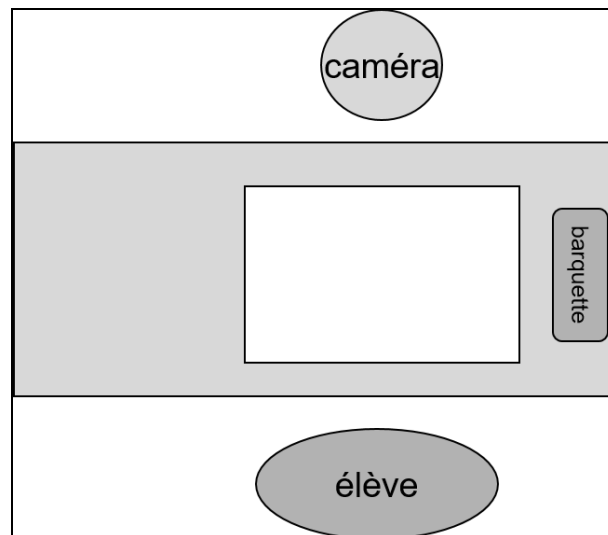


Figure 174 : Situation des sucres - Organisation matérielle de la collecte de données

Dans la situation des sucres, nous avons placé la caméra de telle façon que la feuille support se trouve entre le sujet et la caméra. C'est la position qui permet de mieux observer les actions réalisées par le sujet sur la collection.

Les données n'ont pas toutes été collectées le même jour et dans la même école. Ce sont des collectes successives qui ont eu lieu et qui se sont déroulées dans des conditions matérielles différentes. Les trois photos précédentes montrent ce que la caméra a filmé dans trois conditions différentes et permettent de se rendre compte de l'impact de la distance à la feuille et de la hauteur de la caméra par rapport à la feuille sur la vision qu'en a la personne qui visionne le film.

La caméra est positionnée selon l'organisation matérielle requise dans les trois photos précédentes. Pour autant, les visions des collections qu'offrent les trois photos sont très différentes.

Ces visions dépendent d'autres variables que celle décrite dans la Figure 174, qui ne détermine que partiellement la position de la caméra par rapport à la collection de chapeaux. Il reste deux variables de position qui impactent la vision qu'a un observateur de la collection: la distance à la collection et l'altitude. Lors de la collecte des données, nous n'avons pas déterminé *a priori* ces indications, nous nous sommes contentés de placer la caméra de manière à « voir le mieux possible » ce que faisait le sujet.

La vision qu'a l'observateur de la collection dépend de ces variables de position (distance, altitude). Il en est donc de même pour le sujet.

La vision que le sujet a de la collection dépend de la hauteur du point dont il l'observe et de la distance à laquelle il se trouve.

Dans le chapitre 2, nous avons proposé une représentation de la collection des chapeaux qui prend appui sur une vue de dessus. Nous avons veillé à ce que cette vue de dessus s'effectue depuis la position occupée par le sujet (et non depuis celle de la caméra). Pour autant, d'autres éléments matériels interviennent dans l'élaboration de ce que le sujet voit de la collection des sucres.

2.3.1.2 Transformer ce que la caméra nous montre

Nous nous demandons s'il est possible d'utiliser nos données pour nous rapprocher du point de vue du sujet. Pour cela, nous allons prendre appui sur les photos extraites des transcriptions et transformer ces photos pour opérer le rapprochement de point de vue.

Pour cela nous nous appuyons sur une photo extraite des vidéos, photo sur laquelle nous avons zoomé pour ne conserver que la vision de la collection.



Photo 54 : Situation des sucres - Zoom de la photo de la collection des chapeaux - feuille A - sujet 10

Essayons d'utiliser les dispositifs technologiques dont nous disposons pour nous rapprocher de ce qu'est la perception effective du sujet. Sujet et caméra sont placés de part et d'autre de la table. Donc la disposition que perçoit le sujet est symétrique par rapport à celle qui figure ci-dessus.

Faisons tourner la photo pour voir dans quelle mesure nous réussissons à nous rapprocher de la perception effective de l'élève.



Photo 55 : Situation des sucres - Photo retournée de la photo précédente, zoom sur la collection de chapeaux – feuille A – sujet 10

Ce retournement ne rend absolument pas compte de la perception qu'a le sujet de la collection. Le retournement présente un caractère visuellement presque choquant, car dans une perspective très éloignée de celle que nous avons l'habitude d'utiliser de manière ordinaire.

La configuration est certes bien globalement organisée comme cela, mais les règles de perception usuelles de l'espace sont profondément modifiées ; le fait que le point de concours des fuyantes soit vers soi est assez déstabilisant. La feuille A2 qui apparaissait tout à fait naturellement comme un rectangle dans la Photo 54 semble avoir tout d'un coup une forme plus étrange.

Utilisons un logiciel de retouche d'image pour essayer de nous rapprocher d'une représentation dans une perspective plus proche de celle proposée ordinairement.



Photo 56 : Situation des sucres - Photo retravaillée de la collection des chapeaux– feuille A – sujet 10

Nous avons modifié la direction des fuyantes pour que leur intersection soit un point devant nous (et non derrière comme c'était le cas sur la Photo 55). La forme de la feuille redevient visuellement acceptable. Par contre, la perception que nous avons de chacun des chapeaux devient déstabilisante.

Cette série d'essais nous conforte dans l'impossibilité pour l'observateur d'accéder au réel du sujet. On ne peut pas réduire la différence de perception de la collection des chapeaux à un simple problème de retournement.

2.3.1.3 Reconstitution du point de vue du sujet

Le travail précédent n'a permis qu'une reconstitution partielle de ce qui est effectivement perçu par les sujets. Or, nous n'avons pas pris de photographies du point de vue du sujet. Nous décidons de reconstituer la situation des sucres et de prendre une série de photographies afin de mieux rendre compte de la perception effective du sujet et d'éliminer ces distorsions de perception induites par le dispositif de captation des images.

Pour opérer ces reconstitutions, nous nous appuyons sur les variables que nous avons identifiées précédemment. L'observation des trois photos fait apparaître un élément supplémentaire que nous décidons d'intégrer au dispositif de reconstitution, la forme et la taille de la table sur laquelle est posé le support.

Les variables et les différentes valeurs de ces variables sont donc les suivantes :

- Forme et taille de la table : petite table rectangulaire (longueur 70cm ; largeur 50cm ; hauteur 76cm) ou table circulaire (diamètre 110 cm ; hauteur 73cm)
- Position d'où est prise la photo : position caméra ou position sujet
- Distance de la caméra ou du sujet à la table, notée d
- Hauteur de la caméra ou du sujet, notée h

La photo suivante montre le dispositif mis en œuvre pour ces reconstitutions. Ces reconstitutions ont été réalisées avec une petite table rectangulaire.



Photo 57 : Situation des sucres - Le dispositif de reconstitution du point de vue du sujet

Nous proposons ci-dessous quelques-unes de photos prises lors de ces reconstitutions, dans lesquelles la prise de vue s'effectue dans la position du sujet. D'autres photos de ces reconstitutions figurent en annexe 13.




<p><i>Valeur des variables :</i> <i>Petite table rectangulaire</i> <i>Position caméra</i> $d = 100 \text{ cm}$ $h = 190 \text{ cm}$</p>	
<p><i>Valeur des variables :</i> <i>Petite table rectangulaire</i> <i>Position sujet</i> $d = 30 \text{ cm}$ $h = 110 \text{ cm}$</p>	
<p><i>Valeur des variables :</i> <i>Petite table rectangulaire</i> <i>Position sujet</i> $d = 50 \text{ cm}$ $h = 90 \text{ cm}$</p>	

Photo 58 : Situation des sucres - Photo de la collection dans la position occupée par le sujet

Cette série de photos permet de se rendre compte que la vision la plus proche de la collection telle qu'elle a été modélisée dans le chapitre 2 (au-delà de la question de l'orientation) est celle qui est produite quand l'appareil est placé à 190 cm du sol. Les schémas des feuilles constituent des vues de dessus. La photo qui est prise à 190 cm du sol est celle qui se rapproche le plus de la vue de dessus.

Cette photo ($h = 190 \text{ cm}$) donne une représentation de l'espace et de l'écart entre les différents chapeaux qui ne ressemble pas du tout à la représentation qu'un sujet de taille 110 cm ou 90 cm va construire.

La différence de perception entre les photos prises à 110 cm et 90 cm est encore plus spectaculaire. Ces deux photos sont prises avec la même orientation (position sujet) et

seulement 20 cm de hauteur les séparent. Se développe le sentiment de ne pas avoir à faire à la même collection : l'espace entre les chapeaux ne semble pas être le même, les positions des objets les uns par rapport aux autres semblent également différentes, certains alignements semblent présents sur l'une et pas sur l'autre (et vice versa).

Les sujets auxquels nous avons proposés la situation des sucres avaient de 4 à 10 ans. Ceux à qui le support A a été proposé avaient entre 8 et 10 ans. L'écart de taille entre les plus petits et les plus grands de nos sujets dépassait 20 centimètres.

L'examen des photos de la reconstruction montre que les sujets confrontés au même support peuvent avoir une perception de l'organisation de la collection des chapeaux différente.

2.3.2 Impact du support sur la perception globale de la collection

Dans la situation des sucres, nous avons implicitement délimité un espace de travail. En effet, les sucres sont posés sur une collection de points dessinés sur une feuille A2. C'est cette feuille A2 qui constitue de fait l'espace dans lequel le sujet va organiser son exploration.

Cette feuille support ne s'est pas présentée aux sujets toujours de la même manière.

La collecte de données ne s'est pas déroulée le même jour au même endroit. Ce sont différents déplacements, qui ont pu avoir des organisations matérielles qui n'ont pas toutes été exactement identiques.

Observons comment est fabriqué l'espace de travail dans le cas ci-dessous.



Photo 59 : Situation des sucres - Feuille B – avant traitement

L'espace de travail est fabriqué avec une feuille A2. Pour des raisons de commodité dans le transport du matériel de l'expérience, cette feuille a été pliée en deux puis enroulée autour

d'elle-même. Ce pli laisse toujours une trace, une rupture visuelle même infime, qui peut concourir à la conception d'une partition de l'espace.

Dans ce cas précis, ce pli produit une partition qui est celle que l'analyse *a priori* a décrit, à partir de l'étude de la position des ronds dessinés sur la feuille.

Nous n'avons aucun moyen de savoir si les sujets qui ont mis en œuvre une stratégie *Partition* l'ont fait parce qu'ils se sont appuyés sur l'analyse de la position des chapeaux ou simplement parce qu'ils ont repéré le pli de la feuille support.

Nous avons ici un nouvel exemple d'irruption de dimensions matérielles que nous n'avions pas anticipées et qui viennent perturber l'analyse de nos observations.

Revenons sur la manière dont l'espace de travail a été fabriqué pour le support « feuille A » (Photo 54).

Dans ce cas, l'espace de travail est construit comme la juxtaposition de deux feuilles A3. Ces deux feuilles A3 sont raccordées par du scotch. Même parfaitement réalisé, le raccordement de deux feuilles laisse apparaître un trait, une rupture visuelle que le sujet peut percevoir.

Par ailleurs, les deux feuilles A3 ont été pliées en deux pour être transportées, produisant un nouveau pli sur chacune des deux feuilles, donc une nouvelle rupture visuelle.

Un sujet a pu percevoir une proposition de partition en quatre de la collection de ronds (Photo 60).

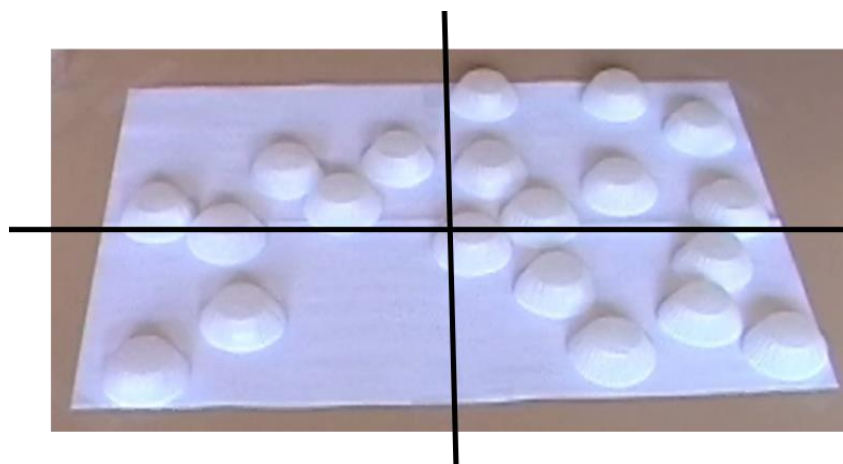


Photo 60 : Situation des sucres - Partition en quatre générée par les plis et les raccordements du support -
feuille A

Là encore, des dimensions matérielles viennent parasiter l'analyse des stratégies que nous avons conduite.

2.3.3 Impact de la position des chapeaux par rapport aux points sur la perception globale de la collection

Nous allons maintenant revenir sur la place qu'occupent les chapeaux pendant le déroulement du traitement. Cette place est déterminée de manière fonctionnelle (un chapeau sur un sucre, un sucre sur un point). Pour autant, cette contrainte fonctionnelle ne détermine pas une position précise du chapeau.

La feuille A fournit la position de chacun des points de la collection à énumérer.

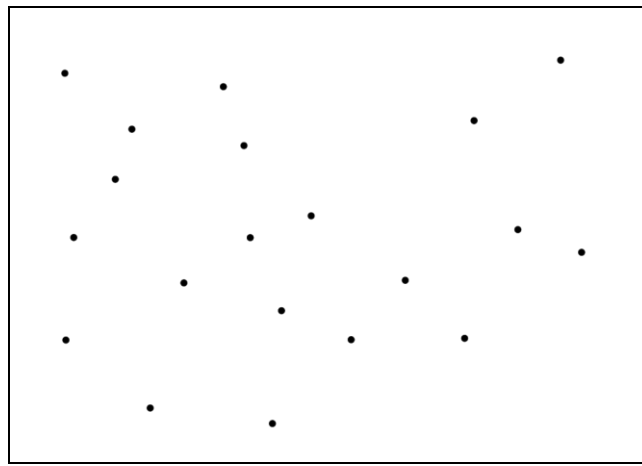


Figure 175 : Situation des sucres - Feuille A, collection de points

Quand un chapeau est posé sur le support, il n'est pas possible (ni nécessaire) de contrôler le centre du chapeau (chapeau considéré comme un disque) coïncide avec le point dessiné sur la feuille. Nous disposons d'un certain degré de liberté dans le positionnement du chapeau.

L'utilisation de ce degré de liberté peut conduire à des configurations proches du point de vue des positions respectives des chapeaux. Observons deux de ces configurations possibles.

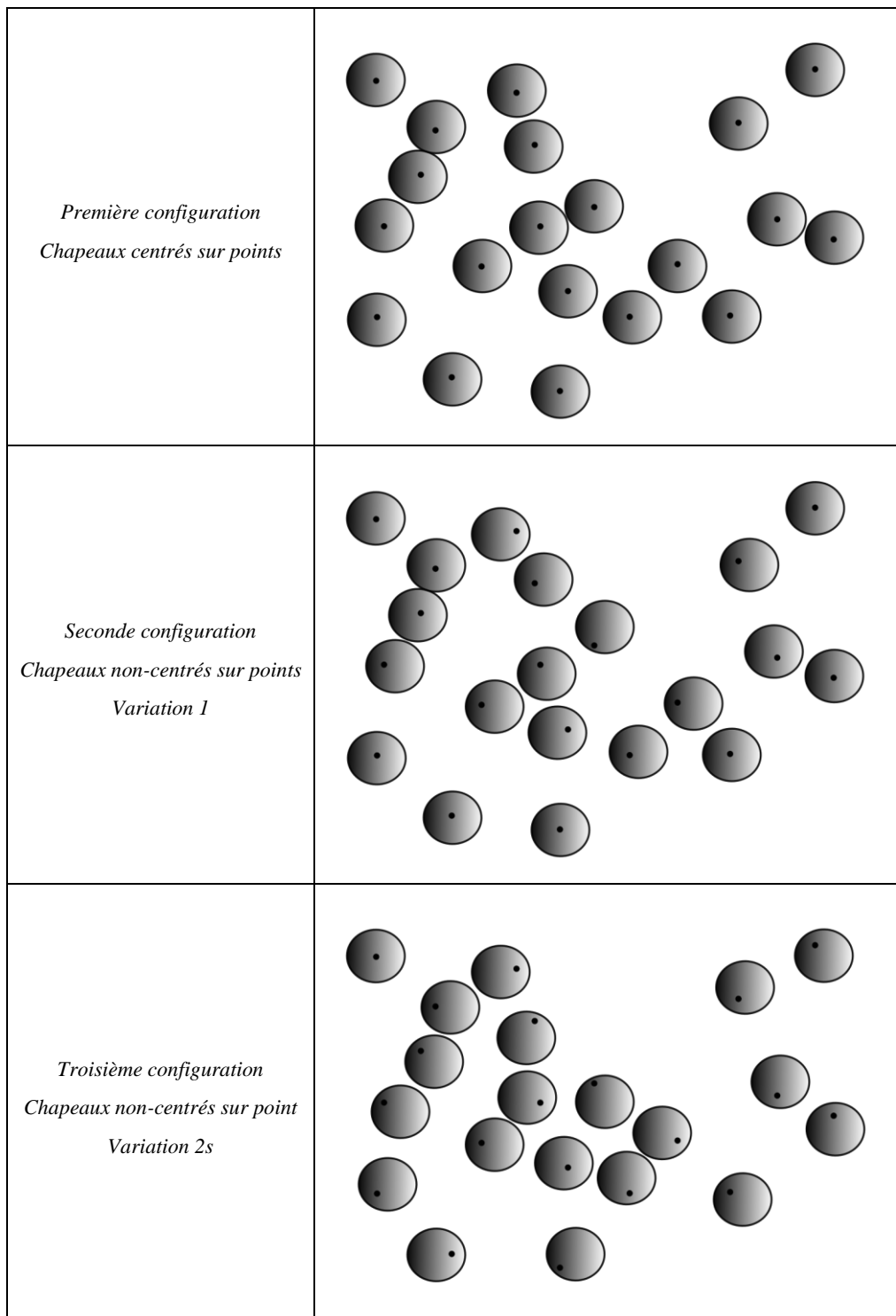


Figure 176 : Situation des sucres - Feuille A, trois configurations possibles des chapeaux placés sur les points

Ces petites variations impactent de manière significative la perception de l'ensemble.

Examinons quelques photos de la réalité matérielle effective des configurations qui ont été proposées aux sujets dans le cas de la feuille A.

Nous nous intéressons au repérage de propriétés géométriques dans la zone que nous avons repérée dans la Photo 61, située en haut à gauche du sujet.



Photo 61 : Situation des sucres - Feuille A, repérage de la zone étudiée

Examinons la configuration des chapeaux dans la partie 16 (feuille A, sujet 10, essai 1).



Photo 62 : Situation des sucres - Feuille A, sujet 10, essai 1, repérage d'un alignement de chapeaux

Nous repérons une propriété géométrique. En effet, trois des chapeaux de la zone étudiée semblent alignés. Nous matérialisons cette propriété par le tracé d'un segment passant par ces trois chapeaux.

Examinons maintenant la configuration des chapeaux dans une autre partie.



Photo 63 : Situation des sucres - Feuille A, sujet 12, essai 1, repérage d'une ligne courbe

Dans cette partie (feuille A, sujet 12, essai 1), l'alignement observé précédemment apparaît beaucoup moins visible. Les positions des chapeaux ne sont plus les mêmes, et c'est plutôt une ligne courbe qui apparaît pour matérialiser la position des chapeaux les uns par rapport aux autres.

Examinons la configuration des chapeaux dans une nouvelle partie.



Photo 64 : Situation des sucres - Feuille A, sujet 13, essai 1, un autre alignement des chapeaux

Dans cette partie (feuille A, sujet 13, essai 1), c'est une autre possibilité d'alignement que nous suggérons par un nouveau tracé.

D'une partie à l'autre, même s'ils continuent de recouvrir sucres et points, les chapeaux sont soumis à de légères variations de position qui impactent de manière forte la perception que nous pouvons avoir des propriétés géométriques qui peuvent aider à structurer la collection.

Nous venons de comparer les configurations des sucres entre parties et d'identifier des variations d'une partie à l'autre. Ces variations apparaissent parfois au sein de la même partie.

Observons ces deux photos, prises au début et à la fin de la partie 22 (feuille A, sujet 13, essai 2).

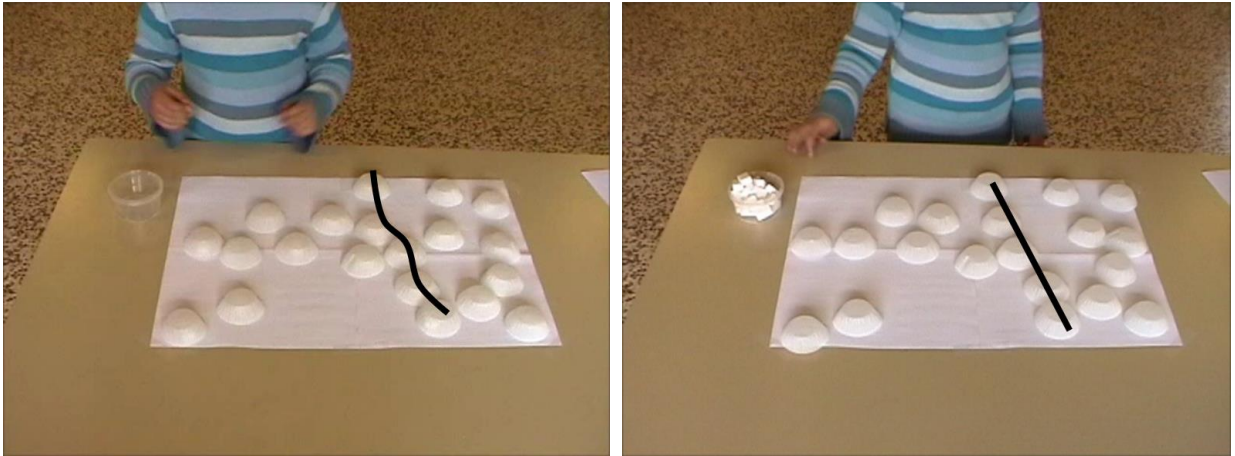


Photo 65 : Situation des sucres - Feuille A, sujet 13, essai 2, état de la configuration des chapeaux en début de partie (photo de gauche) et en fin de partie (photo de droite)

Nous repérons un alignement quasi-parfait de 5 chapeaux en fin de partie, alignement beaucoup difficile à percevoir en début de partie.

Ces variations de position des chapeaux sont courantes au sein d'une partie. En effet, en début de partie, le chapeau doit recouvrir le sucre. Une fois le sucre ramassé, le chapeau ne doit plus recouvrir que le point. Or les points occupent moins de place sur la feuille que les sucres. La contrainte spatiale qui portait sur les chapeaux a donc diminué quand il n'y a plus de sucre.

Figurent en annexe 14 les photos de la configuration des chapeaux en début et en fin de partie pour chacune des 32 parties réalisées sur la feuille A.

La matérialité de la situation a une influence très forte sur la perception que le sujet a de certaines propriétés de la configuration.

Par ailleurs, cette étude met en lumière que les configurations des sucres et des chapeaux ne sont pas identiques. Elles n'ont donc pas nécessairement les mêmes propriétés géométriques. Cette étude met en évidence que la configuration que nous avons étudiée dans la situation des sucres est au moins partiellement modifiable, ce que n'est pas le jeu 5 de la situation des allumettes dans lequel les boîtes sont collées sur un support et donc ont une position qui ne peut pas varier (Briand et al., 2000).

2.3.4 Les possibilités d'action du sujet sur la collection

Nous poursuivons l'étude des dimensions matérielles de la situation des sucres, en faisant porter notre focale sur le sujet, et sur la position qu'il occupe pour réaliser les traitements.

Nous n'avons pas évoqué ce point jusqu'à présent. Nous avons fait l'hypothèse que le sujet gardait une position fixe tout au long des traitements, la position qu'il occupe au début de la partie.

Observons les conditions matérielles proposées au sujet 9.



Photo 66: Situation des sucres - Feuille A, sujet 9, essai 1, conditions matérielles proposées

Dans cette série de collecte, les sujets sont âgés d'une dizaine d'année. La feuille A a été posée sur une grande table rectangulaire, dont la hauteur est adaptée à la taille des sujets.

Ainsi, le sujet attrape sans difficulté les chapeaux les plus éloignés de la position qu'il occupe. Cela lui permet de contrôler son énumération sans se déplacer, donc sans modifier la position du regard qu'il porte sur sa collection.

Le caractère fixe de la position qu'il occupe lui permet de ne pas avoir à gérer de changement de point de vue sur la collection.

Observons maintenant les conditions matérielles proposées à un autre sujet.



Photo 67 : Situation des sucres - Feuille C, sujet 40, essai 1, conditions matérielles proposées

Ce sujet est plus jeune (entre 4 et 6 ans). Le support qui lui est proposé est la feuille C. Cette feuille comporte moins de chapeaux que la feuille proposée au sujet précédent. Pour autant, l'espace dans lequel sont disposés ces chapeaux a la même aire.

La table sur laquelle est placée la feuille support est une grande table ovale, dont la hauteur est tout à fait ordinaire par rapport à ce que l'on trouve dans les écoles maternelles. Ce type de matériel est considéré comme adapté à des sujets de cette taille.

Observons quelques extraits vidéo de la partie.



Photo 68 : Situation des sucres - Feuille C, sujet 40, essai 1, suite des positions occupées par le sujet

La taille des bras du sujet ne lui permet pas de saisir sans se déplacer les éléments les plus éloignés de la collection. Il doit donc se déplacer, quitter la position centrale qu'il occupe pour pouvoir réaliser l'énumération.

C'est ce qu'il fait en commençant par se déplacer sur sa droite pour aller saisir des chapeaux éloignés de sa position initiale, puis en se déplaçant à gauche, en faisant même le tour de la table pour pouvoir saisir les chapeaux les plus éloignés.

Cette gestion des déplacements est encore augmentée par la contrainte que nous avons imposée de poser chaque sucre dans un récipient au fur et à mesure de la saisie. Il faut donc pouvoir imaginer ici que les déplacements sont en fait doublés d'allers-retours jusqu'à la boîte qui accueille les sucres ramassés. Cette difficulté aurait pu être surmontée en déplaçant le récipient, ce qu'aucun sujet n'a fait.

Nous ne savons pas ce que voit le sujet quand il opère ces différents déplacements. Mais une reconstitution peut nous y aider.

Nous allons recourir au dispositif de reconstitution que nous avons décrit précédemment. Nous avons placé un support de type feuille A sur une table circulaire.

Nous commençons par montrer ce que la reconstitution produit quand le sujet est dans la position initiale, face à la collection de chapeaux.

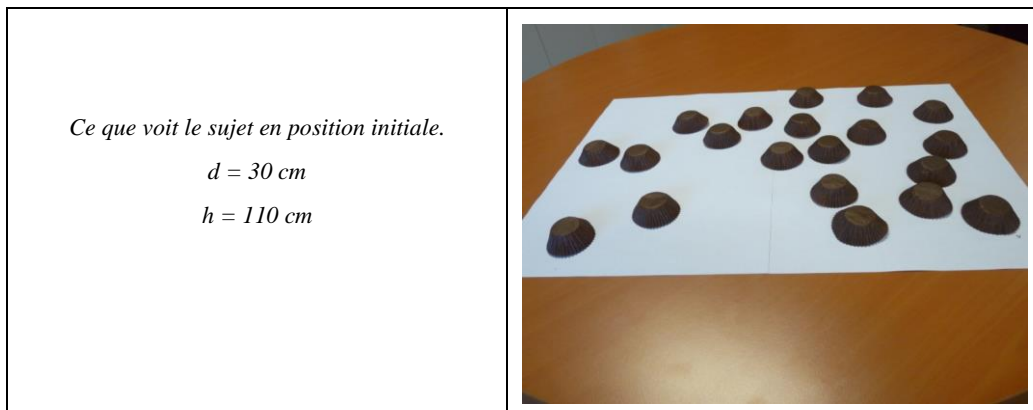


Photo 69 : Situation des sucres - Vue depuis la position qu'occupe le sujet face à une collection posée sur une table circulaire (feuille A)

Présentons maintenant les photos prises à partir des positions qu'occuperait un sujet qui tourne autour de la table et se déplace à sa droite ou à sa gauche.

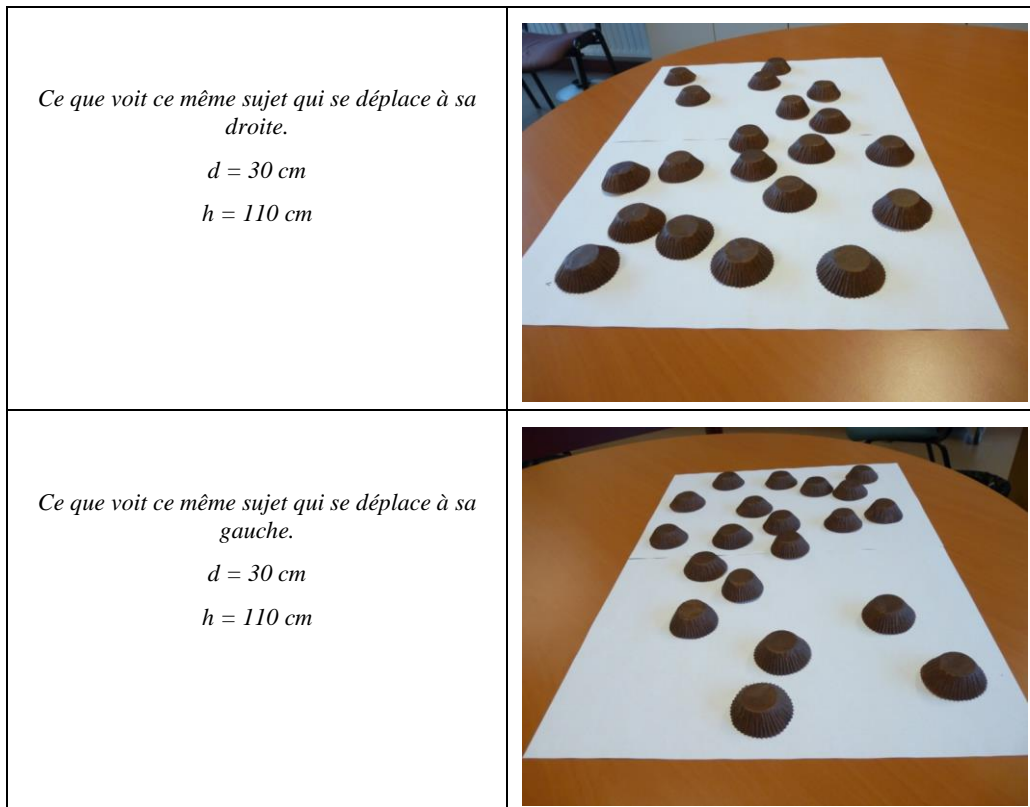


Photo 70 : Situation des sucres - Vue depuis la gauche et la droite de la position initiale qu'occupe le sujet face à une collection posée sur une table circulaire (feuille A)

La vision que le sujet a de la collection est très différente de celle qu'il a construite à partir de sa position initiale. Outre le fait que la perception d'éventuelles propriétés géométriques des chapeaux peut être fluctuante d'une position à l'autre, le changement de position implique la perte d'un repère fixe qui aide à mémoriser les chapeaux qui ont été traités et ceux qui ne l'ont pas encore été et qu'il faut reconstruire à chaque changement de point de vue.

L'analyse des conditions matérielles montre comment la nécessité de se déplacer pour réaliser les traitements peut complexifier le contrôle de l'énumération, en contraignant le sujet à opérer des changements de points de vue.

2.3.5 Les conditions matérielles du traitement

Comme nous l'avons fait pour la situation des boules de polystyrène, nous allons détailler la suite des actions réalisées pour traiter un élément.

Dans la situation des sucres, une fois le chapeau choisi, le traitement consiste à réaliser une suite de trois actions élémentaires. Il faut soulever, ramasser le sucre posé sur le rond et remettre le chapeau sur le rond.

Détaillons ces actions en examinant le nombre de mains requises pour chacune d'elles. Le soulèvement du chapeau mobilise une première main. Nos observations montrent que la plupart des sujets ne posent pas les chapeaux tout de suite après les avoir saisis. Le ramassage du sucre s'effectue donc par la seconde main. Ce sucre doit être posé dans un récipient qui peut être éloigné de l'endroit où le sucre a été saisi. Cet éloignement dépend pour le sujet de la taille de ses bras. Si ses bras sont petits, alors un geste de déplacement supplémentaire du corps peut être requis. La main qui tient le chapeau doit ensuite remettre celui-ci sur le point qui a été libéré de son sucre, ce qui peut là encore nécessiter un nouveau déplacement pour revenir dans une zone accessible par le bras pour le sujet.

Ces actions sont toutes élémentaires. Si le sujet les réalise sans poser le chapeau, il va utiliser ses deux mains dans une suite d'actions coordonnées.

Le traitement d'un élément peut s'avérer long pour un sujet.

Nous avons observé des sujets qui faisaient tomber le sucre qu'ils tenaient dans une de leur main. Cela nous fait inévitablement penser à ce qui se passe dans les vidéos des deux essais de Romain dans la situation des allumettes. Comme Romain, ils sont alors obligés de se coucher pour retrouver le sucre.

Pour autant, le temps passé à retrouver et poser le sucre est moindre que celui que Romain consacre au ramassage et à l'insertion de l'allumette dans la boîte. La durée du traitement élémentaire d'un chapeau reste inférieure à celle de traitement élémentaire d'une boîte.

Mais la situation n'est pas la même du point de vue des macro-variables engagées.

Dans le cas des allumettes où la configuration est modifiable, le sujet peut déplacer les objets et ainsi structurer pour alléger la mémorisation de l'état de chaque élément. Dans le cas des sucres, le sujet ne peut s'appuyer que sur sa mémoire de l'état d'avancement de son énumération pour garder la mémoire du statut de chaque élément. Il ne peut pas agir sur une organisation spatiale pour se décharger d'une part de mémorisation.

Un traitement long peut introduire une rupture dans la continuité de l'organisation que le sujet construit pour énumérer sa collection d'objets en configuration non modifiable.

La nature des traitements influe sur la durée de ces traitements et peut créer une difficulté supplémentaire dans le contrôle du statut des objets.

La durée du traitement dépend de nombreux facteurs. L'habileté motrice peut en être un. Nous observons des habiletés motrices très différentes parmi nos sujets. Chez certains, la

réalisation du traitement prend peu de temps et est bien contrôlée. Il est donc plus facile pour ces sujets de maintenir une régularité de rythme dans le traitement des éléments de la collection.

Appliquons cette remarque à ce qui se passe dans une situation de dénombrement de ronds sur une feuille. Dans ce cas, rappelons que le traitement consiste ici à dire un mot nombre quand chaque rond est pointé. Le traitement se réduit ici à une seule action, l'énonciation d'un mot. Il n'y a pas d'action matérielle à réaliser dans ce cas. De plus, cette énonciation est d'autant plus facile que le sujet a une bonne connaissance de la comptine. Elle est par ailleurs impossible à réaliser si le sujet ne connaît pas la comptine. Nous retrouvons ici le fait que dans cette situation, la connaissance de la comptine constitue une connaissance nécessaire au dénombrement, qui va interférer avec l'énumération des éléments. Une autre différence tient à la constitution de la comptine. Tous les mots de la comptine ne sont pas les mêmes, ce qui signifie que chaque traitement est différent. Ce n'est pas le cas dans la situation des sucres, ni dans la plupart des autres situations que nous avons étudiées.

2.3.6 Un double appui temporalité/espace

Pour traiter une collection d'objets d'une configuration non modifiable, il faut mettre en place un parcours, un chemin. L'emploi du mot chemin est révélateur d'une chronologie associée au parcours de ce chemin.

Dans le chapitre 2, nous avons produit une modélisation qui, par un geste graphique de trait continu, rend compte de la position des objets et de l'ordre dans lequel ils étaient traités.

Les observations développées dans ce chapitre montrent que notre modélisation de la situation des sucres ne transcrit qu'une partie des dimensions temporelles de la suite des traitements. Nous ne décrivons pas les hésitations, les arrêts qui interviennent dans la suite des traitements. La durée de traitement des éléments varie en fonctions de ces arrêts ou ces hésitations. Cette variation de la durée des traitements peut briser la régularité algorithmique mise en place. Notre modélisation n'intègre pas la régularité de la temporalité des traitements, ni les perturbations de cette régularité.

L'énumération d'une collection dans une configuration nécessite un appui fort sur la temporalité. C'est l'observation des ruptures dans les régularités de mise en œuvre des traitements qui rendent cette nécessité visible.

La difficulté à gérer des dimensions matérielles renforce la difficulté à maintenir cette régularité de la temporalité dans la gestion du couple énumération/traitement.

3. Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons redéfini l'énumération. Cette redéfinition s'est construite dans la volonté de proposer un cadre unificateur à des connaissances proches. Nous avons maintenant un cadre qui permet de décrire la nature des connaissances en jeu dans des situations où un traitement doit être réalisé sur les éléments d'une collection. Le cadre produit permet aussi de décrire les stratégies et leurs variations mises en œuvre dans la réalisation de la tâche.

Le caractère unificateur du cadre proposé permet de se rendre compte de l'omniprésence de l'énumération. Les situations que nous pouvons soumettre à l'investigation apparaissent tout d'un coup nombreuses et variées.

Le caractère unificateur du cadre proposé a des conséquences didactiques fortes en permettant de rapprocher certaines difficultés qui pouvaient être considérées comme indépendantes avant cette étude.

Nous avons poursuivi l'intégration de la matérialité aux analyses des actions des sujets. L'étude de la matérialité dans certaines situations d'énumération nous a permis de développer nos capacités d'observation et d'analyse de ces situations. Les connaissances développées doivent nous permettre de mieux comprendre les difficultés des sujets dans les situations plus complexes nécessitant des énumérations.

L'intégration de la matérialité transforme la nature du discours que nous produisons sur l'énumération puisque ce sont des points de vue à la fois didactique et anthropologique qui sont développés et qui permettent de modifier le regard que les didacticiens portent sur cet objet.

Cette intégration transforme par voie de conséquence la manière dont nous pensons une organisation des situations. Elle permet de dépasser la nature de la classification que nous effectuons tant que le seul regard porté sur ces situations était un regard didactique. Nous permettant de dépasser les limites du regard précédent, elle nous permet d'augmenter de manière significative la liste des situations qui relèvent de ce champ.

Nous avons mis en évidence une multiplicité de facteurs qui peuvent impacter de manière significative les stratégies mises en œuvre par les sujets.

La matérialité est omniprésente dans les situations que nous étudions. Elle les envahit. Pour autant, certains éléments de notre analyse mathématique ont montré leur robustesse au milieu de cette complexité extrême. La nature de la configuration reste plus que jamais la variable structurante de notre travail.

Nous allons poursuivre notre étude des situations d'énumération des collections en choisissant d'investiguer un cadre clairement non mathématique.

Nous allons continuer à nous intéresser aux gestes humains ordinaires que réalisent les sujets. Nous choisissons d'étudier des situations dans lesquelles figure une dimension que nous avons évoquée au début de notre travail et à laquelle nous ne nous sommes pas encore confrontés dans nos analyses, l'écrit.

Ce choix de direction d'investigation a donc pour objectif de tester la robustesse du modèle d'analyse construit, tant dans ses dimensions théoriques qu'anthropologiques. Il a aussi pour objectif de poursuivre le développement du modèle en nous confrontant à la nécessité de développer une compréhension et une structuration de situations choisies pour leur complexité.

Partie B : Énumération en contextes non mathématiques

Les chapitres précédents ont permis de redéfinir l'énumération en appui sur des situations qui pouvaient être considérées comme relevant scolairement des mathématiques ou proches de cette discipline. Les analyses développées précédemment l'ont été dans des contextes de situations considérées scolairement comme « mathématiques », qui ont été analysées avec des concepts de didactique des mathématiques.

Un des objectifs de notre travail est de montrer que les connaissances d'énumération ne sont pas spécifiques aux mathématiques et qu'elles présentent un caractère transdisciplinaire.

Nous choisissons donc maintenant de nous placer dans un contexte disciplinaire non mathématique.

Nous pensons que nos analyses peuvent se révéler fonctionnelles même dans des contextes disciplinaires qui ne sont pas ceux pour lesquels elles ont été conçues. Nous avons mis en évidence des connaissances dont nous faisons l'hypothèse qu'elles ne sont pas spécifiques au caractère mathématique des situations sur lesquelles s'appuie notre étude. Nous cherchons donc à valider cette hypothèse en cherchant à repérer des connaissances d'énumération dans ces contextes différents.

Par ailleurs, nous pensons que la confrontation de nos analyses à des situations un peu différentes peut nous amener à mieux comprendre les connaissances d'énumération en jeu, y compris dans les situations mathématiques, et peut-être aussi dans des situations plus générales.

La confrontation aux situations a été le moteur de développement de ce travail. Nous maintenons cet appui pour en confrontant ces situations issues d'autres contextes disciplinaires aux variables que nous avons déjà définies et en cherchant à en identifier de nouvelles.

Chapitre 5 - Place de l'énumération dans les manuels scolaires de français

Nous cherchons à montrer que les connaissances d'énumération sont présentes dans de très nombreuses situations dans les classes ordinaires et qu'elles n'interviennent jamais de manière isolée.

A l'issue du chapitre 4, nous avons fait le choix d'investiguer la dimension de l'écrit.

Margolinas (2016) a mis en évidence des connaissances d'énumération dans une situation de reproduction de suites de mots et des mots comme des collections ordonnées de lettres. Ce contexte est donc tout à fait favorable en termes d'identification de collections et donc d'actions d'énumération de ces collections.

Les recueils de données concernaient des sujets de 5 à 7 ans. Le choix est fait de centrer l'étude sur des sujets d'une classe d'âge différente, puisque nous avons rencontré des difficultés d'énumération chez des sujets de cet âge. Nous choisissons de travailler avec des sujets de 9 à 10 ans.

Nous étudions donc la présence de connaissances d'énumération dans le domaine scolaire « français » auprès de sujets, élèves de CM.

Nous ne sommes pas familiers de l'enseignement du français à l'école primaire. Nous n'avons pas de connaissances en didactique du français. Notre travail donc démarre par une étude des situations auxquelles sont couramment confrontés les élèves dans cet enseignement, ce qui nous conduit à analyser des manuels scolaires de cette discipline.

Notre étude porte sur deux manuels de français de cycle 3, le manuel CLEO CM1 (Fetet & Denizot, 2010) et le manuel Français, étude de la langue, CM1, CM2 (Schöttke, Tournaire, & Tauveron, 2011). Nous choisissons de focaliser notre attention sur deux manuels destinés aux élèves, dans la mesure où c'est la place de l'énumération dans le travail ordinaire de l'élève que nous étudions.

Dans un premier temps, nous montrons le caractère massif de l'énumération dans les manuels de français. Nous étudions la nature des traitements en jeu dans cette discipline scolaire. Enfin, nous procédons à l'analyse détaillée d'une des situations extraite d'un des manuels pour éprouver la robustesse des variables de la situation fondamentale de l'énumération.

1. Mise en évidence du caractère massif de l'énumération

Une condition nécessaire pour que l'énumération soit présente dans une situation est qu'une collection au moins intervienne. Le contexte matériel dans lequel nous travaillons a évolué par rapport aux chapitres précédents. Nous travaillons dans le domaine de l'écrit, nos supports sont des pages de manuels.

Les collections dont nous cherchons à exhiber la présence prennent des formes différentes de celles que nous avons rencontrées jusqu'à présent. Nous ne trouvons pas de collections d'objets matériels pouvant être déplacés dans un ouvrage écrit

Nous devons donc déterminer quelles sont les formes que peuvent prendre les collections dans des contextes écrits. Pour cela nous allons nous appuyer sur la notion de liste. Examinons la définition que donne Margolinas de cet objet.

« Liste : succession temporelle et ordonnée de divers éléments (matérielles ou non). Une liste peut être verbale ou non verbale, orale ou écrite ». (Margolinas & Laparra, 2016, p. 168)

La liste est la forme de la collection qui peut être rencontrée dans le contexte de l'écrit.

Cette forme spécifique de la collection présente des caractéristiques que Goody (1977) détaille.

« La liste implique discontinuité et non continuité. Elle suppose un certain agencement matériel, une certaine disposition spatiale ; elle peut être lue en différents sens, latéralement et verticalement, de haut en bas comme gauche à droite, ou inversement ; elle a un commencement et une fin bien marqués, une limite, un bord, tout comme une pièce d'étoffe. Elle facilite, c'est le plus important, la mise en ordre des articles par leur numérotation, par leur son initial ou par catégories. Et ces limites, tant externes qu'internes, rendent les catégories plus visibles et en même temps plus abstraites ». (Goody, 1977, p. 150)

Donc, la liste est une forme standardisée d'écrit qui permet de représenter des collections. Ces collections sont nécessairement ordonnées par la raison graphique.

Avant d'examiner la présence de listes écrites dans les situations proposées par le manuel, nous commençons par l'étude de certains aspects des formes proposées dans les manuels..

1.1 Appui sur la régularité des manuels

Un manuel se caractérise par la régularité des formes qu'il propose. Ainsi, dans (Fetet & Denizot, 2010), chaque unité d'apprentissage est organisée de la même manière :

- une partie de travail sur l'objet de la leçon (« Pour commencer »),
- une partie d'exercices d'entraînement (« Pour s'entraîner »)
- une partie d'approfondissement (« Pour aller plus loin »).

Dans la partie « Pour s'entraîner », tous les exercices ont la même forme et la même consigne. Cette consigne est la plupart du temps calquée sur la consigne donnée dans la partie « Pour commencer ». La consigne est en général différente pour les exercices de la partie « Pour aller plus loin ».

Il n'y a donc quasiment qu'une seule forme et qu'une consigne par unité d'apprentissage, ce qui va grandement faciliter l'étude. Ce caractère régulier de certaines situations est mis en évidence au niveau de l'objet leçon par l'organisation même du manuel.

Munis de cette caractérisation des manuels, nous pouvons rechercher la présence de listes.

1.2 Omniprésence des listes

Un manuel scolaire peut se caractériser par les régularités qu'il propose. Par exemple, ces régularités peuvent concerner les formes graphiques permettant de représenter des collections dans les situations.

Nous cherchons la présence visible de collections. Un manuel est un texte écrit. La forme écrite d'une collection est une liste. Ce sont donc des formes graphiques qui s'apparentent à des listes que nous chercherons.

La présence de listes ne constitue pas une condition suffisante pour que l'on puisse affirmer que des connaissances d'énumération sont requises. Elle constitue un préalable dont nous allons montrer le caractère massif.

Dans les deux manuels, les listes sont présentes de manière massive. Elles peuvent être de différentes natures et se présenter sous des formes variées.

1.2.1 Formes élémentaires des listes

Examinons un premier extrait de (Schöttke et al., 2011).

4 Trouve l'intrus dans chaque série.

1. football – goal – match – jeu – basket
2. isba – igloo – casbah – ville – yourte
3. concert – ténor – soprano – duo

Figure 177 : exercice 4, extrait de (Schöttke et al., 2011, p. 87)

Nous ne nous intéressons pas pour l'instant à ce qui doit être réalisé sur les éléments de la liste, mais uniquement à la nature et à la forme du développement proposé.

Dans cet exercice, des listes sont proposées. Ces listes sont des listes de mots, écrits en ligne et séparés par un tiret. Chaque liste est numérotée et se développe sur une seule et même ligne. Nous avons donc à faire à des listes qui proposent des développements en ligne.

Examinons un nouvel extrait de (Schöttke et al., 2011).

* **5** a. Relève les numéros de phrases dans le tableau.

1. N'avez-vous pas remis des loups dans les Alpes ?
2. On les a réintroduits depuis vingt ans.
3. Aujourd'hui, on ne les compte plus.
4. Ne savez-vous pas où ils sont allés ?
5. « Ne t'inquiète pas pour tes moutons. »
6. Les loups n'attaquent jamais l'homme.
7. Cette année, on chassera 50 loups : on équilibre ainsi leur nombre.
8. Ne craignez rien pour vos promenades.

Déclarative affirmative	Déclarative négative	Interro-négative	Injonctive négative
...

Figure 178 : exercice 5, extrait de (Schöttke et al., 2011, p. 13)

Dans cet exercice, une seule liste proposée. Cette liste est une liste dont les éléments sont des phrases, toutes sauf une écrites sur une seule ligne. Par ailleurs, les éléments de la collection liste sont numérotés. Dans ce cas, le développement de la liste se fait selon une colonne.

1.2.2 Combinaisons des formes élémentaires des listes

Examinons un extrait de (Fetet & Denizot, 2010)

Pour s'entraîner

- Range les listes de mots par ordre alphabétique.
- Puis donne un titre à chaque liste.

Sur ton cahier
n° 1 p. 48
Noms de pays
Cameroun

1

Chili Cambodge Chypre Colombie Canada Congo
Chine Cameroun Costa Rica Cap-Vert Côte-d'Ivoire Cuba

2

canari
colombe
dinde
cygne
chameau

cochon
daim
canard
corbeau
cheval

3

pomme
potiron
papaye
pastèque
pissenlit

pêche
poire
pistache
pamplemousse
persil

Figure 179: extrait de (Fetet & Denizot, 2010, p. 48)

Cet extrait propose trois exercices qui ont la même consigne et s'appuient chacun sur des listes. Dans l'exercice 1, deux listes sont proposées : une liste de mots (désignant des pays) qui se double d'une liste de drapeaux figurants juste au dessus de chaque élément de la liste de mots. Cette double liste comporte suffisamment d'éléments pour qu'une seule (double) ligne ne suffise pas à sa description. La double liste poursuit son développement en ligne juste en dessous de la première double ligne.

Les deux autres listes des exercices 2 et 3 sont des listes simples. Elles sont composées de mots et se développent en colonnes. Le développement de la liste en colonne est interrompu pour redémarrer dans une nouvelle colonne, juste à gauche de la précédente.

Cette situation se caractérise par des interruptions et des développements des listes selon des directions différentes.

Examinons un nouvel extrait de (Fetet & Denizot, 2010).

Pour s'entraîner

Complète le texte avec les verbes en orange conjugués au futur.

✦

En 2050, les enfants n' _____ plus besoin de ranger :
 une machine s'en _____ . Ils _____ un bouton et un bras
 mécanique _____ pour ramasser le linge qui traîne.
 Quand ils _____ sur un deuxième bouton, un mini-robot
 _____ remettre en ordre livres et papiers et _____ les jeux.
 Les enfants _____ le regarder sans bouger. Un troisième
 bouton _____ un aspirateur qui _____ tout seul.
 Les plus désordonnés _____ sans doute ravis de ces progrès,
 mais ils ne _____ pas toujours où retrouver les objets rangés
 par la machine !

avoir
 (se) charger - presser
 se déplier
 appuyer
 venir - trier
 pouvoir
 déclencher - avancer
 être
 savoir

Figure 180 : extrait de (Fetet & Denizot, 2010, p. 170)

Intéressons-nous dans cet extrait à la liste des verbes qui doivent servir à compléter le texte. La liste est une liste de verbes, présentés à l'infinitif. Cette liste se développe en colonne. La présence de tirets nous indique qu'elle se développe aussi en ligne, puisque les trois lignes qui ne sont pas réduites à un seul verbe, en comportent deux. Les morceaux de la liste à deux éléments de la collection des verbes se trouvent sur la même ligne qu'un morceau du texte dont il faut compléter deux espaces laissés libres. L'organisation spatiale de la liste des verbes à l'infinitif ne peut se comprendre que dans un examen simultané du texte à compléter.

Les listes font partie des objets qui sont, pour Goody (1977), des exemples typiques de formes standardisées de l'écrit. Ce sont ces formes standardisées d'écrit qui permettent de représenter ce que nous avons appelé collection. Ces collections utilisent toutes les directions de l'espace plan pour se développer : la verticalité (Figure 178), l'horizontalité (Figure 177) et une combinaison de ces deux directions (Figure 179, Figure 180).

1.2.3 Une variation graphique de présentation des listes

L'étude des manuels fait apparaître des formes graphiques de présentation des listes qu'il était difficile de ne pas remarquer.

Examinons un extrait de (Fetet & Denizot, 2010).

Pour commencer

• Lis ces mots.

malvoyant désapprendre emporter réapparaître clairvoyant

desserrer importer apprendre non-voyant porter disparaître

paraître enserrer prévoir reprendre exporter prendre

voyant resserrer apparaître surprendre serrer comprendre

• Classe ces mots dans un tableau, puis souligne la partie commune de chaque catégorie et colorie le début qui change.

Comment expliques-tu ton classement ?
À quoi servent ces préfixes ?

Figure 181 : extrait de (Fetet & Denizot, 2010, p. 56)

Ce manuel comporte un nombre important d'exercices qui présentent les collections d'éléments dans des rectangles. Ce choix graphique renforce l'indication de présence de la collection en s'appuyant sur une représentation qui évoque un cadre matériel radicalement distinct de celui présent dans un texte écrit : celui du monde de la matérialité, des étiquettes et des configurations modifiables d'objets.

Nous trouvons dans (Schöttke et al., 2011) aussi quelques situations présentées selon le même procédé.

1 Remplace chaque adjectif souligné par l'adjectif de sens contraire qui convient.

1. une forte tempête – une personne forte – être fort en mathématiques

fragile faible petite

2. un vent léger – une voix légère – un paquet léger – une brume légère

grave lourd fort épaisse

3. un soleil vif – un caractère vif – un vent vif – une couleur vive

léger doux terne pâle

Figure 182 : exercice 1, extrait de (Schöttke et al., 2011, p. 107)

Cependant, ce choix graphique pour représenter les éléments d'une collection est plus rare.

Les deux situations proposent des collections de mots. La présence du rectangle qui entoure chacun des mots aide à conférer à chaque mot le statut d'élément d'une collection.

Notre étude de la présence de collections dans des supports écrits permet de développer notre capacité à repérer des collections dans ces contextes écrits. Cela nous conduit à porter notre attention sur des situations qui, en appui sur les indices graphiques décrits précédemment, mettent explicitement en jeu plusieurs collections.

1.2.4 Présence explicite de plusieurs listes

Observons un nouvel extrait.

6 Associe chaque nom à sa définition première (étymologie).

dinosaure •	• argent pour acheter du sel
pétrole •	• caillou
salaire •	• énorme lézard
musique •	• huile de pierre
calcul •	• art des muses

Figure 183 : exercice 6 , extrait de (Schöttke et al., 2011, p. 85)

Dans cet extrait, l'analyse de la structure graphique de l'exercice fait apparaître deux collections, présentées sous forme de listes qui se développent en colonnes : la première (colonne de gauche) est une liste de mots, la seconde (colonne de droite) est une liste de suites de mots qui composent ainsi des définitions.

La présence de listes est renforcée par un indice graphique : une première puce figure à droite de chaque élément de la première liste et une seconde puce figure à gauche de chaque élément de la seconde collection.

Les deux listes ont le même nombre d'éléments et sont présentées l'une face à l'autre, sur les mêmes lignes, ce qui renforce la perception des deux collections.

Examinons un nouvel extrait.

- ① Associe chaque mot d'origine étrangère à sa définition.**
1. cow-boy (États-Unis)
 2. scénario (Italie)
 3. week-end (Angleterre)
 4. pull-over (Angleterre)
 5. judo (Japon)
- a. vêtement chaud en laine ou en coton que l'on enfile
 - b. sport de lutte très règlementé
 - c. présentation écrite d'une scène de théâtre ; plan détaillé d'un roman
 - d. gardien de troupeaux de bovins monté sur un cheval
 - e. congé de fin de semaine


Figure 184 : exercice 1, extrait de (Schöttke et al., 2011, p. 87)

Dans cet extrait, c'est l'appui sur des numérotations distinctes qui renforce l'indication de présence de deux listes : une première liste de mots et de pays dont sont originaires les mots et une seconde liste de suites de mots, définitions des éléments mots de la première liste.

La première liste est numérotée avec des éléments de la suite des nombres, la seconde liste est numérotée avec des éléments de la suite des lettres.

Les deux listes se développent en colonne. La particularité de cette situation tient au fait que ces développements s'effectuent dans la même colonne.

Nous observons des situations dans lesquelles se combinent les aspects que nous venons de mettre en évidence.



Je comprends les différents sens d'un mot

Pour commencer

- Lis cet article du dictionnaire pour le verbe relever.

RELEVER v.

<ol style="list-style-type: none"> 1. Remettre debout. 2. Diriger vers le haut. 3. Remarquer et noter. 	<ol style="list-style-type: none"> 4. Mettre à un niveau plus élevé. 5. Ramasser pour corriger. 6. Donner un goût plus fort. 7. <i>Se relever</i> : retrouver la force et la santé.
---	---

- Maintenant, lis ces phrases et écris pour chacune le numéro qui correspond à la définition du verbe relever.

- a. Joanna est encore bien malade, elle se relève difficilement de son angine.
- b. Il vous reste quelques minutes pour finir l'exercice, je vais relever les cahiers.
- c. Peux-tu m'aider à relever le parasol qui a été renversé par le vent ?
- d. Je n'ai relevé aucune erreur dans ta dictée.
- e. Tu pourrais relever la tête et me regarder, quand je te parle !
- f. Ce couscous manque d'épices, il n'est pas assez relevé.
- g. Les employés luttent pour que leur patron relève leur salaire.




Figure 185 : extrait de (Fetet & Denizot, 2010, p. 68)

Deux collections sont en jeu dans cette situation :

- Une première liste, suite de mots, qui sont des définitions du verbe « relever ». Ces 7 définitions sont indicées par un nombre. Cette liste est présentée dans un espace délimitée par un rectangle de fond blanc. Elle se développe verticalement dans deux colonnes successives.
- Une seconde liste, suite de phrases écrites sur une ligne et qui ont « relever » comme verbe. Ces 7 phrases sont indicées par une lettre. Cette liste se développe verticalement dans une seule et même colonne.

Par ailleurs, nous avons déjà rencontré une situation dans laquelle plusieurs collections sont présentes. La situation présentée dans la Figure 180 met en jeu deux collections : une collection de verbes à l'infinitif et une collection de trous dans un texte.

Les situations qui font apparaître plus d'une collection sont très nombreuses. Dans chacun des deux manuels.

La présence de collections est une condition nécessaire pour que des connaissances d'énumération soient requises. L'analyse se poursuit en étudiant la nature des traitements requis sur ces collections.

1.3 Nature logique des traitements

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié des situations dans lesquelles nous avons identifié et détaillé les traitements demandés sur les éléments de la collection. Nous allons chercher dans quelle mesure les traitements proposés aux élèves dans un manuel de français ressemblent aux traitements que nous avons déjà étudiés.

1.3.1 Classer les éléments

Nous repérons des situations dans lesquelles le classement des éléments d'une liste est demandé. Examinons l'extrait suivant.

Pour commencer

- **Voici la description de nombreux métiers :**

Garder un immeuble.	Poser du carrelage.	Tenir un garage.
Fabriquer du papier.	Pratiquer la chirurgie.	Faire de la boxe.
Installer l'électricité.	Coiffer les clients.	Vendre des bijoux.
Écrire des articles de journal.	Vendre des fleurs.	Conduire un véhicule.
Jouer la comédie.	Faire de la mécanique.	Jouer du piano.
	Soigner les dents.	Cultiver la terre.

- **Un élève a cherché le nom de ces métiers, puis les a classés dans ce tableau :**

-er ou -ier	-ien	-iste	-eur
papetier	gardien
...	...		

Comprends-tu comment il a fabriqué ces mots ?

- **Termine son travail.**

Figure 186 : extrait de (Fetet & Denizot, 2010, p. 50)

Dans cette situation, il s'agit de produire un nom à partir d'une expression. Le contexte est celui des métiers. Ainsi, l'expression « installer l'électricité » produit le nom « électricien » ; l'expression « soigner des dents » produit le nom « dentiste » ...

17 expressions sont proposées, il s'agit donc de produire 17 noms.

Les 17 éléments de la collection réponse vont devoir prendre place dans une forme particulière, fournie dans l'énoncé et partiellement remplie. La forme proposée est un tableau à 4 colonnes, dont la désignation est fournie.

Un élément de la collection a été produit et placé dans la bonne colonne. C'est l'élément « papetier » qui prend place dans la colonne dont la désignation est « -er ou -ier ». C'est donc la terminaison du mot qui sert à le placer dans la bonne colonne. (Leçon « Je comprends comment les mots sont fabriqués : les suffixes »). Il faut donc faire figurer dans la même colonne des noms de métiers qui ont même terminaison.

Au-delà de la production des 17 éléments de la collection, ces éléments doivent être classés dans un tableau. Le nombre de classes apparaît explicitement (les quatre colonnes du tableau). Les mots sont classés par terminaison.

Nous notons que la nature de la tâche figure dans l'énoncé (« un élève [...] a classé dans le tableau »).

Dans certains exercices, une désignation des classes et une forme graphique pour produire le résultat sont fournies (Figure 186).

Revenons à une des situations sur lesquelles nous nous sommes appuyés dans notre travail de repérage des collections.

Pour commencer

- Lis ces mots.

malvoyant désapprendre emporter réapparaître clairvoyant

desserrer importer apprendre non-voyant porter disparaître

paraître enserrer prévoir reprendre exporter prendre

voyant resserrer apparaître surprendre serrer comprendre

- Classe ces mots dans un tableau, puis souligne la partie commune de chaque catégorie et colorie le début qui change.

Comment expliques-tu ton classement ?
À quoi servent ces préfixes ?

Figure 187 : extrait de (Fetet & Denizot, 2010, p. 56)

Dans cet exercice, ne figure que l'injonction à classer. Aucune forme graphique n'est proposée, ni aucune désignation des classes. C'est à l'élève de déterminer la relation permettant produisant le classement. Une indication sur la nature de la relation est donnée (« souligne la partie commune et colorie le début qui change »).

Il faut donc classer les 23 mots en sous-ensembles ayant le même radical. Ainsi, les mots « malvoyant », « non-voyant », « clairvoyant » et « voyant » vont constituer un de ces sous-ensembles. La relation d'équivalence qui est mise en œuvre est la relation « a le même radical

que ». Notons que l'analyse du titre de la leçon peut toujours aider un élève à déterminer la relation (Leçon « Je comprends comment les mots sont fabriquées : les préfixes »).

Dans d'autres exercices ne figure que l'injonction à classer, sans détermination préalable du nombre de classes.

1.3.2 Trier les éléments

Les situations de tri sont nombreuses mais difficiles à identifier car cachées dans des habillages que nous allons maintenant chercher à dépouiller pour mettre en évidence la nature logique du traitement demandé.

1.3.2.1 Etude d'une variation

Examinons l'extrait suivant.

3 Ecris le numéro des phrases négatives dans le tableau. Attention ! Certaines peuvent être de plusieurs types.

1. Ne parlez pas sans cesse.
2. N'oubliez pas de prendre votre tenue de sport.
3. Ne répondez plus sans réfléchir.
4. Vous ne devez jamais interrompre un camarade.
5. Vous ne laisserez rien traîner sur vos tables.
6. Vous n'avez pas pris les ballons ?

Phrases déclaratives	Phrases interrogatives	Phrases injonctives
...

Figure 188 : exercice 3, extrait de (Schöttke et al., 2011, p. 13)

La collection en jeu dans cet exercice est une collection de phrases, proposées sous forme d'une liste numérotée.

Comme pour les traitements précédents, une structure de tableau est proposée pour réaliser le traitement. Le tableau comporte trois colonnes dont les libellés sont donnés. Par contre, l'énoncé précise que certaines phrases sont de plusieurs types, donc que certains éléments appartiennent à plusieurs des catégories. Les trois catégories proposées ne sont donc pas *a priori* disjointes. La collection ne va pas être partitionnée. Le traitement demandé n'est donc pas un classement, au sens où nous l'avons défini.

Déterminons la nature de ce traitement.

Il convient de déterminer pour chacune des six phrases si elle est ou non déclarative. Une question appelant une réponse oui/non est soumise pour chaque élément de la collection. Les éléments de la collection pour lesquels la réponse à la question est « oui » sont écrits dans la colonne prévue à cet effet.

Le processus qui est conduit est un tri. La collection des phrases est partitionnée en deux sous-collections distinctes : la collection des éléments qui présentent le caractère « phrases déclaratives » et la seconde collection qui ne le présente pas. La première sous-collection est écrite sous forme de liste dans la colonne du tableau, la seconde est omise.

Ce sont trois tris successifs qui sont proposés. Chacun de ces trois tris sont potentiellement indépendants des deux autres. Il n'y a donc pas de raison qu'un élément qui vérifie un des trois critères de tri ne vérifie pas spontanément les deux autres.

Notons au passage que la collection des phrases est indicée par des numéros. On peut supposer que la production de la réponse passe par l'écriture du numéro de l'élément dans la ou les colonnes correspondantes.

La numérotation de la liste a pour objectif de diminuer la tâche de recopie dans le traitement puisque écrire le numéro plutôt que la totalité de la phrase suffit.

Elle permet également d'exercer un contrôle de l'énumération de la collection en permettant de mémoriser plus facilement un élément désigné à l'aide d'une collection standard de référence.

Par ailleurs, trois tris successifs doivent être effectués. L'énumération des traitements successifs est prise en charge par la forme même tableau en colonne : les trois catégories apparaissent sur une même ligne que la raison graphique permettra d'énumérer.

Cette analyse fait apparaître que, malgré des formes proches, la nature des traitements diffère. Ce sont les libellés de la première ligne du tableau qui déterminent la nature logique du traitement.

1.3.2.2 La recherche de l'intrus

La présence du mot « intrus » dans les consignes des exercices attire notre attention.

Les occurrences de ce mot (« intrus ») sont nombreuses dans (Schöttke et al., 2011).

- 4 Trouve l'intrus dans chaque série.**
1. football – goal – match – jeu – basket
 2. isba – igloo – casbah – ville – yourte
 3. concert – ténor – soprano – duo

Figure 189 : exercice 4, extrait de (Schöttke et al., 2011, p. 87)

Examinons celle-ci.

Trouver l'intrus est une situation d'élimination d'un élément d'une liste. Cela revient donc à partitionner la collection de départ en deux sous-ensembles dont un singleton. Ce partitionnement s'élabore par un tri. Dans les énoncés observés, le critère de tri n'est pas donné.

La détermination de ce critère repose sur la nature particulière de la partition ainsi construite. Cela nécessite de pouvoir formuler des hypothèses sur le critère de tri et multiplier les tris jusqu'à ce que la forme singleton soit obtenue.

Si le mot « intrus » apparaît souvent dans (Schöttke et al., 2011), il n'apparaît qu'une seule fois dans (Fetet & Denizot, 2010) dans la situation suivante.

Pour commencer

- Trouve la (ou les) lettre(s) cachée(s) dans ces listes de mots.
- Chaque liste contient un intrus : repère-le et explique ton choix.

itare	commer ant	dé u	exi ant
télé idé	rempla ant	ridi ule	imman able
irlande	fran ais	aper u	ven ance
éner ie	aga ant	re u	découra ant
dé isement	indi ation	ger ure	infati able

Figure 190 : extrait de (Fetet & Denizot, 2010, p. 170)

Examinons la situation.

Pour répondre à la consigne, il faut structurer l'ensemble des mots de chaque colonne en deux sous-ensembles dont un des sous-ensembles est réduit à un seul mot, notre intrus. La difficulté tient dans le fait qu'il faut produire une relation qui permette cette structuration particulière. En l'occurrence, c'est bien d'un tri dont il s'agit : les deux sous-ensembles sont constitués d'une part de tous les mots sauf un qui vérifient une caractéristique phonographique commune et d'autre part de l'intrus qui ne la vérifie pas.

Comment la réponse s'élabore-t-elle ?

Nous essayons de lire les mots en recherchant un son manquant qui donne un sens aux mots lus. Une fois un son qui peut convenir obtenu, les lettres qui permettent de produire le son sont injectées dans les mots suivants. Si la lecture avec le son manquant trouvé permet de donner un sens aux éléments suivants de la liste, alors il ne reste plus qu'à déterminer le mot qui n'a pas de sens.

Quatre listes de mots sont proposées dans l'exercice. Nous remarquons que la première liste semble la plus difficile à traiter, dans la mesure où c'est la seule liste qui a un premier élément auquel il manque les premières lettres. La détermination des sons candidats est plus compliquée à élaborer puisque l'impulsion que permettait l'oralisation des premières syllabes n'est plus possible.

Trouver l'intrus dans une liste est donc une situation particulière de tri, dans laquelle le critère n'est pas donné. La détermination du critère s'opère par la forme particulière de partition qu'il doit produire.

De ce point de vue cette situation ressemble aux situations qui demandent de classer des collections d'objets (mots/groupe de mots/phrases) en fonction de critères qui doivent être produits par le sujet.

1.3.2.3 Des injonctions graphiques de tri

Une caractéristique d'un ouvrage de français est la nature particulière des consignes qui sont données.

Examinons l'énoncé suivant.

* 9 Entoure l'intrus dans chaque série.

1. voleter – volière – s'envoler – voleur – volaille
2. peinture – peine – peindre – repeindre –
peinturlurer
3. bruit – bruitage – bruissant – bruiter – bruine
4. coller – encollage – décoller – collier – décollage

Figure 191 : exercice 9, extrait de (Schöttke et al., 2011, p. 93)

Cet exercice est une situation de recherche d'intrus du type de celles que nous venons d'étudier. Il présente la caractéristique d'adjoindre au mot « intrus » une consigne de fabrication d'un geste graphique, entourer.

Cette injonction porte une indication de la nature du geste graphique à réaliser pour que le sujet puisse exhiber le résultat de sa recherche. En effet, à partir du moment où un des

éléments de la liste est entouré, ce geste partitionne de fait la collection en deux sous-ensembles dont l'un se réduit à un singleton, l'élément entouré.

D'autres injonctions graphiques sont également présentes. Parmi celles-ci l'injonction « souligner » a une occurrence importante.

Quelle est la nature du traitement qui est engagé par une consigne du type « souligner » ? Examinons la tâche de l'élève dans les exercices de la leçon «Je manipule les propositions relatives» (Fetet & Denizot, 2010)

Pour s'entraîner

- **Souligne la proposition relative, puis relie-la au nom qu'elle complète.**
- **Ensuite, quand c'est nécessaire, modifie la phrase pour qu'elle soit plus claire.**

Pour t'aider
Les propositions relatives commencent par un pronom relatif, qui ou que.

1
a J'ai lavé la voiture de maman qui était dégoûtante.
J'ai lavé la voiture de maman qui était débordée.

2
a Il y avait un billet de 50 euros dans le vieux porte-monnaie que j'ai jeté à la poubelle.
Il y avait un billet de 50 euros dans le porte-monnaie que j'ai mis dans ton portefeuille.

Sur ton cahier
n°1 p. 134
a. J'ai lavé la voiture de maman qui était dégoûtante.
La voiture de maman était dégoûtante : je...

Attention ! il faut parfois changer la ponctuation ou l'ordre des mots !

Figure 192 : extrait de (Fetet & Denizot, 2010, p. 134)

L'élève est invité à souligner chaque proposition relative d'une collection de phrases. Dans cet exercice écrit, c'est ce geste graphique qui matérialise le traitement, le repérage de la proposition relative.

Le traitement consiste à organiser la collection des mots de chaque phrase en deux sous-ensembles disjoints, ceux qui font partie de la proposition relative et ceux qui n'en font pas partie.

Pour réaliser ce traitement, l'élève doit lire le texte et repérer que la proposition relative se développe en appui sur les pronoms relatifs « que » ou « qui ». La proposition relative est donc une suite de mots dont le premier élément est ce pronom relatif.

Les pronoms sont les éléments de la collection sur lesquels se construit la partition de la phrase : un premier sous-ensemble constitué du pronom et des mots suivants de la phrase qui sont soulignés et un second sous-ensemble constitué du complémentaire du premier sous-ensemble sur lequel aucun geste graphique spécifique n'est réalisé.

Le tri réalisé dans cet exercice est assez différent des tris que nous avons étudiés dans le chapitre 3 et des tris que nous avons évoqués dans ce chapitre. Dans cette situation, les mots de la phrase ne peuvent pas être considérés comme des éléments de la collection indépendants les uns des autres. La phrase est une suite ordonnée de mots, ce qui réduit le tri au repérage du pronom.

1.3.3 Ordonner les éléments

Dans le chapitre 3, nous avons mis en évidence deux grandes relations mathématiques, la relation d'équivalence et la relation d'ordre.

L'exemple précédent rappelle qu'une phrase est un ensemble ordonné d'éléments. Il existe donc nécessairement un ordre dans l'écrit. L'ordre sur l'écrit n'est pas le seul auquel il est possible d'être confronté.

Les manuels de français proposent des situations qui mettent en œuvre des mises en ordre sur des collections, présentées sous forme de listes.

Examinons l'extrait suivant.



Figure 193 : extrait de (Fetet & Denizot, 2010, p. 48)

L'ordre en jeu dans cette situation est l'ordre alphabétique. Il s'agit ici de contrôler la mise en ordre (alphabétique) proposée par le manuel. La collection est constituée de mots qui désignent des pays.

Le traitement consiste à contrôler que les éléments de la collection sont bien ordonnés. Le contrôle de la mise en ordre alphabétique s'exerce en appui sur l'ordre que crée la raison

graphique. Le plus petit élément (du point de vue de l'ordre alphabétique) est l'élément à gauche de la ligne et le déplacement sur cette ligne de la gauche vers la droite permet de passer à des éléments de plus en plus grands.

Notons que la consigne de mise en ordre fait appel au mot « classer ». Nous avons rencontré ce sens du verbe « classer » dans le dictionnaire de la langue française (voir chapitre 3). Il est donc conforme à l'usage linguistique et c'est donc le contexte qui en détermine le sens.

Examinons un extrait suivant de la même page.

Pour s'entraîner

- Range les listes de mots par ordre alphabétique.
- Puis donne un titre à chaque liste.

1

Chili Cambodge Chypre Colombie Canada Congo

Chine Cameroun Costa Rica Cap-Vert Côte-d'Ivoire Cuba

2

canari	cochon
colombe	daim
dinde	canard
cygne	corbeau
chameau	cheval

3

pomme	pêche
potiron	poire
papaye	pistache
pastèque	pamplemousse
pissenlit	persil

Sur ton cahier
n° 1 p. 48
Noms de pays
Cameroun

Figure 194 : extrait de (Fetet & Denizot, 2010, p. 48)

La production d'une mise en ordre est maintenant demandée. Nous observons que c'est un des synonymes d'ordonner, « ranger », qui est utilisé pour demander la mise en ordre.

Examinons la suite de la leçon.

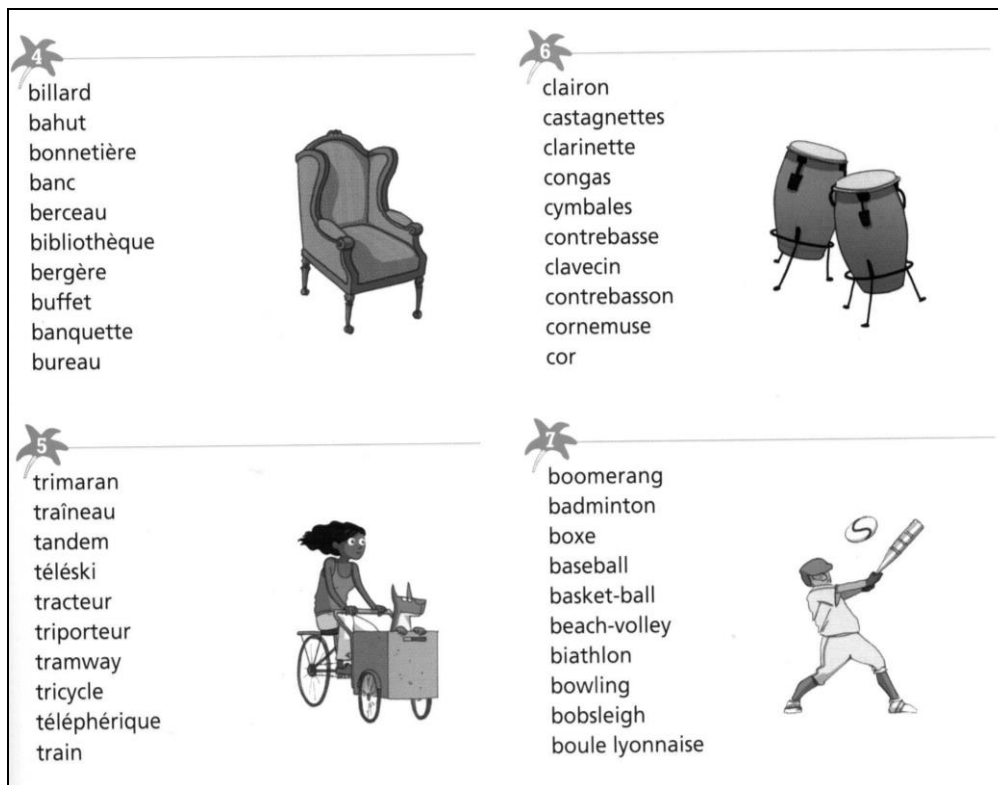


Figure 195 : extrait de (Fetet & Denizot, 2010, p. 49)

La tâche commune des exercices 1 à 7 consiste à ordonner alphabétiquement les mots des collections proposées. Ces listes présentent des variations de formes que nous avons déjà mises en évidence.

Les exercices 4 à 7 proposent des collections qui se développent chacune dans une colonne (un mot de la liste par ligne, chaque mot étant écrit à partir d'une position commune de départ des lignes).

Les exercices 2 et 3 présentent une variation l'organisation spatiale. La forme choisie dans l'énoncé pourrait laisser penser que ces deux exercices sont constitués chacun de deux listes de cinq éléments qu'il faut ordonner indépendamment. Ce n'est pas le cas. Pour se convaincre qu'il s'agit bien d'une seule et même liste pour chacun de ces deux exercices, il suffit d'examiner les premières lettres de chacun des dix mots (des c et des d pour chacun des mots des deux « pseudo-listes » de l'exercice 2 et des p pour chacun des mots des deux « pseudo-listes » de l'exercice 3). Dans ces deux exercices, le développement dans la verticalité est perturbé par la rencontre avec le bas de la page du manuel. La liste reprend son expansion en respectant la même règle (verticalement, de bas en haut) après un déplacement horizontal.

Nous retrouvons ici des variations de l'organisation spatiale des listes proposées au sein de la même leçon.

Les manuels de français confrontent donc les élèves à des relations d'équivalence et d'ordre, en utilisant un vocabulaire varié.

Cette étude nous a permis d'identifier différents traitements dans un contexte non mathématique. Cette identification s'est en partie appuyée sur une étude de la signification des injonctions de traitement soumises aux élèves.

1.3.4 Associer des éléments

Nous repérons l'utilisation de l'injonction « Associe » dans (Schöttke et al., 2011).

Cette injonction apparaît dans des situations que nous avons déjà évoquée (Figure 183, Figure 184) dans lesquelles interviennent explicitement deux collections.

Outre les variations graphiques dans la présentation des collections, elle met en jeu deux collections de même cardinal. Il s'agit de construire une relation entre les éléments de chacune des deux collections, chaque élément de l'une doit être en relation univoque avec un élément de l'autre. Du point de vue mathématique, il s'agit de construire une bijection entre les deux ensembles.

Le traitement proposé ici est donc différent des tris et classements que nous avons étudiés dans les chapitres précédents. Nous reviendrons en détail sur ce traitement dans le chapitre suivant.

L'étude de la nature logique des traitements dans des manuels de français met en évidence la présence de tri et de classement. Des énumérations doivent donc être conduites. Nous avons été capables de nommer mathématiquement deux traitements que nous avons observés dans ces manuels.

Cette étude exploratoire fait apparaître les situations proposées dans les manuels de français comme de bons candidats quant à la présence d'énumération. Pour autant, avant d'aller plus loin dans la collecte et l'analyse de données issues de ce champ, nous nous proposons d'examiner plus en détails une situation pour tester la robustesse de nos outils d'analyse à ce nouveau champ.

2. Étude détaillée d'une situation

Nous nous intéressons de manière détaillée à une situation extraite d'un des deux manuels de français. Nous étudions la possibilité de produire une analyse *a priori* qui mette en évidence les collections en jeu dans cette situation et la nature du traitement à réaliser sur les éléments de cette collection.

Ce parti pris a pour objectif de montrer qu'une telle analyse peut éclairer l'analyse des réponses possibles dans une telle situation.

Nous allons étudier l'exercice suivant.

• **Observe ces deux phrases.**
Il fait très froid aujourd'hui, je porte mon manteau.
La campagne est recouverte d'un blanc manteau de neige.
Peux-tu expliquer l'image créée par le mot en violet dans la seconde phrase ?

• **Complète ces phrases avec les mots coude, cœur ou clé.**

a. À cet endroit, la rivière change de direction en formant un .

b. Au de la bataille, les soldats entendaient les balles siffler de toute part.

c. Ce dernier indice nous a fourni la de l'énigme.

d. Je ne peux pas ouvrir la porte, ma s'est cassée dans la serrure.

e. Grégoire, le battant, offrit son bouquet de fleurs à Léontine.

f. En jouant au tennis, je me suis blessé au .

Dans quelles phrases les mots sont-ils utilisés au sens propre ? au sens figuré ?




Figure 196 : extrait de (Fetet & Denizot, 2010, p. 74)

Cette situation est extraite de la leçon « Je maîtrise le sens propre et le sens figuré » et figure dans la partie « Pour commencer ».

Il s'agit pour l'élève de compléter six phrases. Examinons la nature des indications qui sont données dans le livre du maître pour aider l'enseignant à gérer la mise en œuvre de l'exercice.

Déroulement

Pour commencer

Faites lire les deux premières phrases utilisant le mot *manteau* au sens propre ou figuré.

Demandez aux élèves d'explicitier l'image dans la deuxième phrase. Prenez le temps de reformuler leurs propositions : « C'est comme si la neige était un manteau blanc qui recouvrait la campagne, mais bien sûr il ne s'agit pas d'un véritable manteau en tissu, c'est une image. Quand on utilise un mot dans une image, on dit que ce mot est au sens figuré. En revanche, dans la première phrase, il s'agit d'un manteau bien réel : le mot est utilisé au sens propre. »

Les élèves complètent ensuite les phrases a. à f. en utilisant les mots *coude*, *cœur* et *clé*. Lors de la mise en commun, faites expliciter les différences entre sens propre et sens figuré : « Dans la phrase f., le coude fait partie du corps humain, c'est un coude bien réel, au sens propre. Dans la phrase a., la rivière forme un angle qui ressemble à un coude, c'est le sens figuré. » Etc.

Figure 197 : extrait de (Fetet, Clauzard, Denizot, & Picard, 2010, p. 88)

Aucune référence à une quelconque difficulté que pourrait rencontrer l'élève dans la production effective de la solution n'est donnée.

Nous allons donc maintenant conduire l'analyse *a priori* du point de vue des collections en jeu dans cette situation pour comprendre la tâche d'énumération qui est à mettre en œuvre.

2.1 Collections en jeu dans la situation

L'exercice se présente sous la forme d'un texte incomplet. Il manque des mots dans des phrases et ces mots manquants sont symbolisés par des rectangles qui occupent la place de ces mots manquants.

L'analyse du texte nous indique que nous disposons d'une collection de six phrases. Le caractère constitué de cette collection est renforcé par le fait qu'aucune des phrases n'occupe plus d'une ligne. Cette collection occupe spatialement six lignes du manuel.

Une seconde collection apparaît : une collection de lettres disposées au début de chacune des lignes du texte. Une bijection est réalisée entre la collection de phrases et la collection de lettres. C'est l'écrit qui réalise cette bijection en juxtaposant un élément de chacun des deux collections. La fonction de cette bijection est de produire une désignation des éléments de la collection de phrases. En effet, nous ne disposons pas de mots dans notre langue pour nommer un des éléments de la collection des phrases autrement qu'en lisant tout ou partie de cette phrase. Suite à la mise en place de ce processus de désignation, parler de la phrase « c » est non ambigu et surtout économique.

En plus d'une désignation, un ordre est mis en place sur la collection des phrases. Cet ordre apparaît de deux manières :

- par la raison graphique qui structure et ordonne l'espace dans lequel sont écrites ces phrases : les éléments de texte figurent les uns en dessous des autres ;
- par le processus de désignation qui a été mis en place sur les phrases : l'ordre alphabétique ordonne les désignations des phrases, il ordonne donc aussi les phrases elles-mêmes.

Nous reviendrons sur l'utilité de la désignation quand nous décrirons le processus de production de la réponse plus tard dans ce texte.

Revenons sur le caractère incomplet du texte. Nous savons que le texte est incomplet, que des mots sont manquants car figurent dans chacune des six phrases de notre texte des rectangles vides, symbolisant ces mots manquants. Les rectangles vides de chacune des six phrases constituent une collection. Cette collection est composée d'autant d'éléments qu'il y a de phrases.

Une troisième collection de la situation est la collection des rectangles vides.

Tous les éléments de cette collection troisième ne sont pas identiques. Même si ces rectangles vides sont indiscernables, aucun ne peut être confondu avec les autres. Par la position qu'il occupe dans le texte, il est de fait en bijection avec une des phrases du texte. Nous pouvons donc employer un article défini quand nous parlons du rectangle vide de la phrase « a ».

2.2 Nature du traitement

Pour résoudre le problème, il convient de compléter les phrases en remplaçant chaque rectangle vide par l'un des trois mots proposés (coude, cœur, clé) par l'énoncé. Il faut donc trouver parmi un ensemble de trois propositions celle qui convient pour donner du sens à la phrase.

Nous sommes ici en présence d'une nouvelle collection, qui va permettre de réaliser le traitement. Elle est constituée de trois éléments : coude, cœur et clé. Ce statut est renforcé par la couleur de la police qui est employée pour les écrire.

A ce stade de l'analyse, quatre collections sont en jeu dans ce problème. Formellement trois de ces collections (la collection des phrases, la collection des rectangles vides et la collection des lettres) sont en bijection et peuvent à ce titre être remplacées l'une par l'autre sans que la compréhension de la situation en souffre

Résoudre le problème consiste à décrire la relation entre la collection des phrases (ou des rectangles vides) et la collection des mots proposés.

Les deux collections n'ont pas le même nombre d'éléments. Nécessairement, des phrases vont être en relation avec le même mot proposé.

L'analyse du contexte d'apprentissage nous amène à penser que chacun des trois mots proposé sera utilisé deux fois, une fois au sens propre et l'autre fois au sens figuré.

A chaque élément de la collection des rectangles vides doit correspondre un des trois éléments de la collection des mots proposés. A chaque élément de la collection des mots proposés doit correspondre deux éléments de la collection des phrases.

Avant de nous intéresser à la représentation formelle de la solution, vérifions l'hypothèse que nous avons formulée concernant la présence de chacun des trois mots coude, cœur et clé.

Complétons les six phrases :

<p>A cet endroit, la rivière change de direction en formant un <input type="text" value="coude"/>.</p> <p>Au <input type="text" value="cœur"/> de la bataille, les soldats entendaient les balles siffler de toute part.</p> <p>Ce dernier indice nous a fourni la <input type="text" value="clé"/> de l'énigme.</p> <p>Je ne peux pas ouvrir la porte, ma <input type="text" value="clé"/> s'est cassée dans la serrure.</p> <p>Grégoire, le <input type="text" value="cœur"/> battant, offrit son bouquet de fleurs à Léontine ;</p> <p>En jouant au tennis, je me suis blessé au <input type="text" value="coude"/>.</p>

L'hypothèse que nous avons formulée est bien vérifiée : chacun des trois mots de la liste cœur-clé-coude apparaît deux fois, une fois au sens propre et une fois au sens figuré.

2.3 Modélisations mathématiques de la solution

2.3.1 Une première modélisation

Il s'agit donc d'associer les phrases à trous avec des mots. Le plus économique en terme de description de la solution produite est d'utiliser la désignation des phrases. L'énoncé ne proposait pas de désignation des mots proposé, ce qui peut sembler raisonnable dans la mesure où chaque élément de cette collection se réduit à un mot ; il n'y a donc pas de grande

économie de représentation à introduire une autre désignation pour cette collection. Les mots proposés seront retranscrits en toute lettre dans la solution produite.

Nous pouvons donc formaliser la solution. C'est un ensemble de six couples constitués de la désignation de la phrase et l'élément de la collection des mots proposés associé.

$$R = \{(a; coude), (b; cœur), (c; clé), (d; clé), (e; cœur), (f; coude)\}$$

Du point de vue mathématique, la solution est donc aussi une collection de nouveaux objets.

La solution du problème peut être décrite à l'aide d'un tableau à double entrée qui, en même temps qu'il montre les couples solution, permet aussi de générer les couples candidats à la solution, donc les couples qui peuvent potentiellement être étudiés pour devenir solution.

	<i>Phrase a</i>	<i>Phrase b</i>	<i>Phrase c</i>	<i>Phrase d</i>	<i>Phrase e</i>	<i>Phrase f</i>
<i>Coude</i>	<i>x</i>					<i>x</i>
<i>Cœur</i>		<i>x</i>			<i>x</i>	
<i>Clé</i>			<i>x</i>	<i>x</i>		

Tableau 76 : Présentation de la solution sous forme de tableau, tableau à double entrée

Le tableau ci-dessus donne une description de la solution.

2.3.2 Une seconde modélisation

La production de la solution a permis de vérifier l'hypothèse selon laquelle chacun des trois éléments de la collection des mots proposés apparaissait une fois avec chacune des deux significations. Nous pouvons ainsi concevoir une nouvelle collection qui intègre le sens au mot proposé.

	<i>Coude</i>	<i>Cœur</i>	<i>Clé</i>
<i>Sens propre</i>	<i>Coude au sens propre</i>	<i>Cœur au sens propre</i>	<i>Clé au sens propre</i>
<i>Sens figuré</i>	<i>Coude au sens figuré</i>	<i>Cœur au sens figuré</i>	<i>Clé au sens figuré</i>

Tableau 77 : Une nouvelle collection, tableau à double entrée

Ce tableau à double entrée fait apparaître cette nouvelle collection comme résultat d'un produit cartésien entre la collection coude-cœur-clé et la collection des sens propre-figuré. Cette collection comporte six éléments.

La première modélisation ne rend pas compte du sens du mot choisi dans chacune des phrases. Nous allons produire une modélisation qui intègre cette dimension.

La solution est toujours constituée de six couples. Le premier élément du couple reste une des six phrases. Le second élément du couple est un élément de la nouvelle collection que nous avons constituée.

Nous obtenons une nouvelle description de la solution.

$$R = \{(a; \text{coude au sens figuré}), (b; \text{cœur au sens figuré}), (c; \text{clé au sens figuré}), (d; \text{clé au sens propre}), (e; \text{cœur au sens propre}), (f; \text{coude au sens propre})\}$$

Poursuivons notre jeu formel en proposant une nouvelle représentation de la solution sous forme de tableau à double entrée, mettant en jeu la description de la relation de la collection des phrases avec cette nouvelle collection.

	<i>Coude sens propre</i>	<i>Coude sens figuré</i>	<i>Cœur sens propre</i>	<i>Cœur sens figuré</i>	<i>Clé sens propre</i>	<i>Clé sens figuré</i>
<i>Phrase a</i>		<i>x</i>				
<i>Phrase b</i>				<i>x</i>		
<i>Phrase c</i>						<i>x</i>
<i>Phrase d</i>					<i>x</i>	
<i>Phrase e</i>			<i>x</i>			
<i>Phrase f</i>	<i>x</i>					

Tableau 78 : Présentation de la solution sous forme de tableau, tableau à double entrée, seconde variation

Cette représentation n'a pas pour objectif l'économie. Elle donne par contre une indication sur la nature des mises en relation potentielles mises en jeu dans la solution. L'intégration du sens multiplie par 2 le nombre de couples candidats à la solution.

2.3.3 Une troisième modélisation

Revenons sur la nature de la nouvelle collection que nous avons construite dans la modélisation précédente. La nouvelle collection construite est en fait une collection de couples (mots, sens).

La solution du problème peut donc être décrite comme un ensemble de triplets d'une lettre désignant la phrase, d'un mot de la liste des mots proposés et d'un des deux sens de ce mot.

$$R = \{(a; \text{coude, figuré}), (b; \text{cœur, figuré}), (c; \text{clé, figuré}), (d; \text{clé, propre}), (e; \text{cœur, propre}), (f; \text{coude, propre})\}$$

Cette variation peut apparaître mineure. Pour autant, elle aide à comprendre la nature des collections et la complexité logique de la combinatoire entre collections en jeu dans la situation.

Nous ne pouvons pas représenter dans un espace plan le produit cartésien de trois ensembles. Cependant, ce produit cartésien, constitué de 36 éléments, permet de décrire les triplets candidats à la solution.

Les modélisations que nous venons de produire aident à la description des collections et des relations entre les collections. Elles doivent nous permettre de mieux comprendre la nature des énumérations qui sont réalisées sur les collections.

Dans la suite de ce texte, et compte tenu de sa proximité avec la seconde modélisation, nous ne nous référons plus à la troisième modélisation.

2.4 Forme de la réponse attendue

La solution de l'exercice est d'abord recherchée à l'oral, puis transcrite à l'écrit. C'est à ce rendu écrit que nous nous intéressons ici.

L'écrit structure et ordonne l'espace (Goody, 1977). Nous cherchons à intégrer dans nos analyses mathématiques la prise en compte de la relation d'ordre induite par l'écrit.

Appuyons nous maintenant sur le caractère ordonné de la collection des désignations pour produire une solution qui intègre cet aspect.

$R = (\text{coude} ; \text{cœur} ; \text{clé} ; \text{clé} ; \text{cœur} ; \text{coude}).$

Nous venons de produire un 6-uplet qui permet d'associer le nom manquant de chaque phrase à une phrase par appui sur la position occupée dans le 6-uplet. « clé » est le mot manquant de la troisième phrase car c'est ce mot qui apparaît dans la troisième position du 6-uplet.

Le livre du maître que nous avons examiné précédemment ne donne aucune indication sur la forme de la réponse attendue. Nous pouvons cependant faire l'hypothèse que, vu que le support sur lequel les élèves travaillent est un livre et non un cahier d'exercices, les rectangles blancs n'ont pas vocation à être complétés directement, par écriture directe sur les pages du livre.

Pour autant, l'absence d'indication sur la forme réelle attendue laisse de nombreuses décisions à la charge de l'enseignant ou des élèves, sans grande indication pour aider à trancher.

Si l'objectif principal de l'enseignant est de travailler sur la distinction sens propre/ sens figuré, alors nous pouvons imaginer qu'il cherche à ce que l'élève consacre l'essentiel de son attention à cet aspect. Cela peut l'amener à minorer au moins dans un premier temps un certain nombre de tâches distractives ou chronophages. Nous allons conserver cette hypothèse pour la suite de cette étude.

Cela doit pouvoir amener l'enseignant à privilégier des réponses dans lesquelles la tâche de recopie des mots non manquants de la phrase ne va pas être réalisée. La forme de la réponse pourrait être de ce type.

<i>coude</i>
<i>cœur</i>
<i>clé</i>
<i>clé</i>
<i>cœur</i>
<i>coude</i>

Tableau 79 : Présentation de la solution sous forme écrite, liste en colonne

Nous observons ici que la solution est une liste donnée sous une des formes que nous avons décrites.

Observons maintenant une première variation dans la présentation de la solution.

<i>coude, cœur, clé, clé, cœur, coude</i>

Tableau 80 : Présentation de la solution sous forme écrite, liste en ligne

La liste se développe en ligne. Ce développement en ligne contraint à l'utilisation d'un symbole pour marquer la séparation entre les éléments.

Un appui sur la raison graphique est réalisé pour prendre en charge la signification des couples solution. La réponse est constituée d'une série de six mots qui sont écrits sur six lignes différentes dans la première réponse et sur une seule et même ligne dans la seconde réponse. Ce qui permet de reconstituer le couple solution est la prise d'information sur la position.

<i>a- coude</i>
<i>b- cœur</i>
<i>c- clé</i>
<i>d- clé</i>
<i>e- cœur</i>
<i>f- coude</i>

Tableau 81 : Reconstitution des couples réponse, liste en colonne

Dans le cas d'une liste présentée en colonne, cette prise d'information sur la position s'effectue dans la collection ordonnée des six lignes dans la première réponse.

<i>a- coude, b- cœur, c- clé, d- clé, e- cœur, f-coude</i>
--

Tableau 82 : Reconstitution des couples réponse, liste en ligne

Dans le cas d'une liste présentée en ligne, cette prise d'information sur la position s'effectue dans la collection ordonnée des six mots dans la seconde réponse.

Pour les réponses présentées dans Tableau 80 et Tableau 81, il y a bien production explicite des couples solutions. L'ordre défini par la raison graphique vient conforter l'ordre supporté par les désignations.

Cela permet maintenant d'imaginer d'autres formes écrites de réponses telles que :

<i>f- coude</i>
<i>a- coude</i>
<i>e- cœur</i>
<i>b- cœur</i>
<i>d- clé</i>
<i>c- clé</i>

Tableau 83 : Une autre forme écrite de réponse

La réponse proposée ci-dessus est une réponse parfaitement non ambiguë mais dont l'occurrence risque d'être faible. Elle traduit aussi vraisemblablement un mécanisme de production de cette réponse qui pourrait d'ailleurs se présenter de manière un peu différente.

<i>coude - f</i>
<i>coude - a</i>
<i>cœur - e</i>
<i>cœur - b</i>
<i>clé - d</i>
<i>clé - c</i>

Tableau 84 : Une autre forme écrite de réponse, première variation

Une seconde variation de la forme de la réponse peut être obtenue en poussant plus avant la logique qui présidait la réalisation de la première variation.

<i>coude - f et a</i>
<i>cœur - e et b</i>
<i>clé - d et c</i>

Tableau 85 Une autre forme écrite de réponse, deuxième variation

Des réponses de cette forme sont peu vraisemblables compte tenu de la nature de la consigne qui invite à compléter les phrases plutôt à dire plutôt qu'à écrire les phrases qui correspondent aux mots proposés. C'est donc bien la collection de phrases qui doit être énumérée, plutôt que la collection des mots proposés.

Nous reviendrons sur l'influence de la consigne dans le processus de constitution de la relation.

2.5 Comment peut se fabriquer une réponse ?

Nous allons maintenant nous intéresser au processus de fabrication de la réponse, et donc à la manière dont la relation se constitue.

L'analyse de la situation a permis de mettre en évidence de nombreuses collections différentes.

Trois de ces collections sont en bijection : la collection des phrases, la collection des lettres et la collection des rectangles blancs représentant les mots manquants. L'identification de ces trois collections par la bijection permet de ne considérer qu'une seule de ces trois collections. Nous parlerons de la collection des phrases à compléter.

Pour répondre à la question, il faut trouver les mots manquants dans chacune des six phrases. La collection de phrases doit donc être mise en relation avec une autre collection. Deux collections peuvent alors être considérées : soit la collection des mots (première

modélisation), soit la collection des mots affectés d'un sens propre ou figuré (seconde modélisation).

2.5.1 Une première procédure

L'élève lit la première phrase et remplace mentalement le mot manquant par « coude ». S'il décide qu'avec ce choix de mots, la phrase qu'il a constituée a du sens, il va considérer qu'il n'est pas nécessaire de faire d'autres essais. Imaginons que ce soit le cas dans cette première procédure. Il peut alors d'ores et déjà produire le premier couple de la relation et l'écrire sur sa copie.

Adoptons la forme de réponse produite quand la fabrication d'une liste se développe en colonne pour décrire chronologiquement le processus de fabrication.

<i>a- coude</i>

Tableau 86 : une première procédure de fabrication de la réponse, étape 1

Il peut maintenant passer à la seconde phrase, en remplaçant mentalement le mot manquant par « coude », puis par « cœur ». Poursuivons avec notre hypothèse sur la nature du traitement « l'élève repère immédiatement le couple solution quand il l'a construit ».

<i>a- coude</i>
<i>b- cœur</i>

Tableau 87 : une première procédure de fabrication de la réponse, étape 2

Cette description permet de se rendre compte que l'élève est en train d'énumérer la collection de phrases qu'il doit compléter. Le traitement d'un élément de cette collection consiste à déterminer le mot manquant. Cette énumération est une énumération forte : chaque phrase est lue une fois et une seule ; à l'issue de cette lecture, un élément de la seconde collection est mis en relation avec la phrase lue.

Pour déterminer quel élément de la seconde collection est mis en relation avec la phrase lue, la seconde collection est aussi énumérée.

Si la seconde collection est la collection des mots (collection de trois éléments, première modélisation) alors chaque élément de cette collection est affecté deux fois à un élément de la première collection. La seconde collection est énumérée faiblement +.

Si la seconde collection est la collection des mots affectés d'un sens (collection de six éléments, seconde modélisation), alors chaque élément de cette collection est affecté une fois et une seule à un élément de la première collection. La seconde collection est énumérée fortement.

Ce sont les connaissances de la langue qui permettent de choisir le mot manquant par appui sur le sens. Ce sont des connaissances d'énumération qui permettent d'envisager les combinaisons phrase/ mot possibles.

2.5.2 Une seconde procédure

Revenons sur ce qui se passe lors du traitement du premier élément de la collection des phrases. La première procédure est celle qui est mise en œuvre par un élève qui a des connaissances de langues suffisantes pour reconnaître un couple solution dès qu'il l'examine.

Nous cherchons toujours à produire la description d'une procédure sans erreur. Considérons maintenant un élève qui ne reconnaît pas nécessairement un couple solution au moment où il l'examine.

L'élève remplace mentalement le rectangle blanc par le mot « coude ». L'élève peut ne pas avoir les connaissances de langue pour être certain d'avoir trouvé la bonne réponse. Après avoir examiné la possibilité de remplacer le mot manquant par « coude au sens propre » ou « coude au sens figuré », il poursuit l'examen des combinaisons possibles en passant au mot suivant. Se poursuit ainsi l'énumération de la collection des mots proposés (modélisation 1) ou des mots affectés d'un sens (seconde modélisation).

Une fois l'une de ces deux collections énumérée, il peut considérer qu'il doit maintenant prendre une décision quant au traitement de ce premier élément de la collection des phrases. Imaginons qu'il prenne la bonne décision. Dans ce cas, la forme de la réponse qu'il produit ne diffère en rien de la forme produite par la première stratégie. La seule différence entre les deux stratégies est le nombre d'essais qu'a dû réaliser l'élève pour produire un couple solution : dans le premier cas, la seconde collection est énumérée faiblement -, alors que dans le second cas elle est énumérée fortement.

Pour décider s'arrêter le traitement des couples candidats après l'examen du premier couple, il faut avoir confiance dans ses connaissances disciplinaires. Un élève pourra ne pas vouloir prendre ce risque et contrôler son choix de traitement en essayant les autres couples.

2.5.3 Une troisième procédure

Considérons maintenant un élève qui, à l'issue de l'énumération des mots proposés, ne trouve pas le mot manquant et qui décide de ne pas produire de réponse immédiate au traitement du premier élément de la collection des phrases.

Il passe au second élément de la collection des phrases et essaye de le traiter.

Revenons sur la fin de l'énumération de la collection des phrases. Il n'y a aucune nécessité à ce que l'élève produise un symbole graphique pour marquer la fin de l'examen du premier élément de la collection de phrases. Dans ce cas, sa feuille réponse restera vierge de toute inscription.

Il peut à ce moment produire un signe graphique témoignant de cette tentative traitement de l'élément.



Tableau 88 : Marque de tentative de traitement d'une phrase

Cette lettre « a » est écrite sur la copie, un signe graphique est mis en place qui permet de témoigner du non traitement de l'élément a de la collection des phrases. Si rien n'est écrit, il n'est pas évident pour l'élève de savoir quels sont les éléments de la collection de phrases qui ont déjà été traitées.

Nous allons étudier les réponses écrites produites dans ces deux cas. Commençons par le cas où l'élève produit une marque pour signifier la fin de la tentative de traitement d'une phrase.

Considérons que l'élève a itéré son processus de résolution et qu'il a produit quelques-uns des couples attendus. Examinons la trace écrite produite dans ces conditions.

a-
b- cœur
c-
d-
e- cœur
f- coude

Tableau 89 : Réponse produite après traitement de quelques éléments phrases, cas où une marque de tentative de traitement d'une phrase est produite

L'élève met en place ici un dispositif qui permet de mémoriser éléments traités et éléments non traités de sa collection de phrases. L'absence de mots écrits à côté des désignations de phrases est un indicateur du non traitement de cet élément. Dans le cas décrit ci-dessus, il lui reste donc trois éléments à traiter, ce que l'écrit rend visible immédiatement. Il lui faudra maintenant énumérer la collection des éléments –phrases non traités, collection que ses marques permettent de repérer facilement.

2.5.4 Une quatrième procédure

Examinons maintenant ce qui se passe si l'élève ne produit pas sur sa copie une marque de fin de traitement, donc s'il n'écrit pas la désignation des phrases dont il n'a pas trouvé les mots manquants.

Plaçons-nous dans la même situation avec réussite de la fabrication des trois mêmes couples.

b- cœur
e- cœur
f- coude

Tableau 90 : Réponse produite après traitement de quelques éléments phrases, cas où aucune marque de tentative de traitement d'une phrase n'est produite

Il n'y a plus ici de trace des éléments (les phrases) qui n'ont pas été traités. La non-écriture sur la feuille de l'élément non traité a entraîné une non –mémorisation de fait des éléments qui restaient à traiter. A l'issue de l'écriture du couple (f, coude), l'élève doit chercher dans sa collection de phrases celles pour lesquelles il n'a pas trouvé le mot manquant. Pour réaliser cela, il va devoir énumérer sa collection de phrases en se demandant pour chacune d'elles « Ai-je trouvé le mot manquant ? », variation sur le thème « Cet élément a-t-il été traité ? ». Il

doit ensuite reproduire les énumérations successives de la collection des mots qu'il a conduites en examinant des combinaisons déjà étudiées.

2.5.5 Réduction de la complexité

Nous allons examiner comment quelques connaissances lexicales peuvent réduire la complexité de la situation du point de vue de l'énumération.

Reprenons l'examen du cas de cet élève qui hésite dans la production de couples solution. Quand il examine la phrase (a), il peut repérer que le mot manquant est nécessairement masculin (puisque le rectangle blanc est précédé de l'article un »). Il peut aussi savoir que « clé » est féminin. Ces connaissances lexicales lui permettent de réduire de 3 à 2 le nombre d'éléments de la collection à énumérer (modélisation 1) ou de 6 à 4 (modélisation 2).

Lors de l'examen des phrases (c) et (d), ce même élève pourra, sans aucune connaissance sur sens propre et sens figuré, s'appuyer sur les mêmes considérations de genre pour être certain que « clé » est la bonne réponse.

Cet appui sur le genre des mots proposés permet de réduire de 36 à 16 le nombre de couples candidats pour les phrases restantes.

Donc l'appui sur quelques connaissances lexicales permet de réduire la complexité des énumérations en diminuant de manière importante le nombre d'examens de couples pour la production de la solution.

2.5.6 Influence de la consigne sur la procédure

La consigne invite l'élève à compléter les phrases. C'est dans un deuxième temps qu'est indiqué à l'élève ce par quoi il va pouvoir compléter les phrases. Quelle que soit la modélisation mise en œuvre, les deux collections en jeu dans la situation ne sont pas symétriques. La consigne est une invitation à l'énumération de la collection de phrases. Il est donc probable que des solutions du type de celles décrites dans les troisième et quatrième procédures vont avoir une occurrence très faible.

3. Conclusion du chapitre

Ce chapitre présentait des dimensions exploratoires fortes. Nous sommes allés à la recherche de situations d'énumération dans des contextes que nous connaissions mal. Nous

avons cherché à appliquer le modèle que nous avons développé dans des situations de français.

Nous sommes restés dans des dimensions assez générales du point de vue de l'analyse. Pour autant, le modèle que nous avons développé fonctionne. Nous produisons une analyse des situations qui permet d'identifier les collections en jeu et la nature des traitements sur ces collections. Cette étude exploratoire n'invalide pas le modèle produit. Nous pouvons donc continuer à l'utiliser pour modéliser des situations de français.

Suivant la situation, certains objets linguistiques (mots ou phrases) sont des éléments d'une collection qu'il faut énumérer. De telles situations sont très fréquentes dans un manuel de français. L'énumération est donc présente de manière importante dans de tels contextes.

Au-delà du repérage de collections, nous avons analysé des traitements sur les éléments de ces collections. Ces traitements nous intéressent par l'impact qu'ils ont sur les énumérations qui sont conduites dans ces situations. Nous avons rencontré des traitements nouveaux par rapport aux traitements étudiés dans les chapitres précédents, tels que la mise en ordre ou la construction d'une relation entre deux ensembles. Ces traitements existent en mathématiques, mais ils ne sont pas spécifiques aux mathématiques.

Nous sommes maintenant mieux armés pour développer des analyses d'observations de sujets en situation dans des contextes de français au cycle 3. Ce sont ces nouvelles pistes d'étude des problèmes d'énumération que nous allons conduire maintenant.

Chapitre 6 - Etude de situations d'énumération en français

Les explorations réalisées dans le chapitre précédent ont montré que des connaissances d'énumération sont présentes dans certaines situations de français. Des indicateurs permettant de repérer de telles situations ont été explicités. Ces situations sont des situations dans lesquelles une dimension logique est présente. Ce sont des situations de ce type que nous allons soumettre à une analyse plus détaillée.

Des situations qui présentent une dimension logique dans un contexte non mathématique ont déjà été étudiées (Margolinas & Laparra, 2009, 2010, 2016). Les situations étudiées portaient sur des sujets plus jeunes, chez lesquels les connaissances de lecture étaient encore en construction. Les situations proposées ici le sont à des sujets dont nous pouvons considérer qu'ils n'ont pas de difficulté à lire les mots et les phrases des énoncés proposés..

Les explorations précédentes ont permis d'exhiber des types de traitements non encore étudiés dans cette thèse. Les situations proposées dans ce chapitre mettent en œuvre des traitements ayant cette caractéristique.

Notre travail sur l'énumération se poursuit en étudiant des situations dans ce contexte de français, avec des tâches logiquement différentes des situations précédentes et des sujets avec des connaissances de lecture et de langage plus affirmées que lors de nos études précédentes.

Les données sur lesquelles ce chapitre s'est appuyé sont des données anciennes, produites pour la plus part dans le cadre du groupe DéMathÉ. Les données sur lesquelles ce chapitre s'appuient sont des données propres à ce travail.

Nous mettons en œuvre ici l'idée de Brousseau (1984) du rapprochement intuitif et pour confirmer ce rapprochement, nous cherchons à appliquer aux situations étudiées dans ce chapitre les outils d'analyse développés précédemment. Dans la partie A, l'énumération est considérée comme un objet. Ce sont des connaissances sur cet objet qui ont été développées. Ce que nous voulons ici, c'est utiliser les connaissances développées précédemment pour

analyser des situations nouvelles. L'énumération est considérée dans ce chapitre comme un outil (Douady, 1984).

Des situations vont être choisies, préalablement analysées puis proposées à des sujets. Des données produites vont être soumises à l'analyse. Ces situations sont un moyen d'éprouver la robustesse de l'outil que nous avons développé.

Le travail présenté ici comporte une part de dimension exploratoire. Les données produites dans ce chapitre ne font pas l'objet d'une étude détaillée du type de celle conduite pour la situation des sucres. Les données sont utilisées pour conforter ou infirmer certains éléments des analyses préalables ou mettre en évidence certains éléments saillants non apparus dans l'analyse *a priori*. L'analyse *a posteriori* présente la suite des différentes focales que nous avons réalisées.

Nous présentons maintenant les situations choisies et les raisons de ces choix.

1. Choix des situations expérimentales

La variable qui sert à élaborer le choix des situation que nous allons proposer est la nature logique du traitement à réaliser.

L'étude exploratoire des manuels a mis en évidence des traitements non étudiées dans les chapitres précédents.

Nous allons étudier des situations qui proposent chacune un des deux traitements logiques suivants :

- la mise en ordre des éléments d'une collection,
- la construction d'une association entre les éléments de deux collections.

Nous choisissons d'étudier des situations que nous n'avons pas conçues. Nous proposons des exercices issus des manuels rencontrés lors de notre étude exploratoire dans le chapitre précédent.

1.1 La situation du verbe

Pour la situation de construction d'une association entre les éléments de deux collections, nous choisissons une situation extraite de (Schöttke et al., 2011, p. 68).

Sept phrases qui comportent toutes le verbe relever sont proposées. Il s'agit de trouver, pour chacune de ces phrases proposées, le sens du verbe qui convient. Pour cela, sept définitions du verbe relever sont proposées.

Une association doit donc être construite entre la collection des phrases et la collection des définitions.

Les sept phrases sont :

- 1- Joanna est encore bien malade, elle se relève difficilement de son angine.
- 2- Il vous reste quelques minutes pour finir l'exercice, je vais relever les cahiers.
- 3- Peux-tu m'aider à relever le parasol qui a été renversé par le vent ?
- 4- Je n'ai relevé aucune erreur dans ta dictée.
- 5- Tu pourrais relever la tête et me regarder quand je te parle.
- 6- Ce couscous manque d'épices, il n'est pas assez relevé.
- 7- Les employées luttent pour que leur patron relève leur salaire.

Les sept définitions sont :*

- 1- Remettre debout
- 2- Diriger vers le haut
- 3- Remarquer et noter
- 4- Mettre à un niveau plus élevé
- 5- Ramasser pour corriger
- 6- Donner un goût plus fort
- 7- Se relever : retrouver la force et la santé

1.2 La situation de l'alphabet

Pour la situation de mise en ordre des éléments d'une collection, le contexte nous pousse à nous appuyer sur l'ordre construit sur les lettres de l'alphabet. La situation consiste à ordonner une collection de mots en appui sur cet ordre alphabétique.

Les mots sont les suivants :

canari – colombe – dinde – cygne -chameau – cochon – daim – canard – corbeau - cheval

Cet exercice est issu de (Fetet & Denizot, 2010, p. 48).

Nous conservons la formulation de la consigne proposée par le manuel : « Range la liste de mots suivants par ordre alphabétique ».

2. Analyse logique des situations

Nous allons analyser du point de vue logique chacune des deux situations. Cette analyse logique constitue la première partie de notre analyse *a priori*. Elle n'a pas pour objectif de représenter les comportements effectifs des sujets. Elle vise plutôt à aider à la conceptualisation des stratégies.

2.1 Analyse logique de la situation du verbe

Dans la situation du verbe, il s'agit de mettre en relation des phrases et les définitions du verbe relever.

2.1.1 Modélisation mathématique de la situation

Soit P la collection des phrases qui contiennent le verbe « relever ». Cette collection P est un ensemble de sept éléments que nous nommons de P₁ à P₇.

$$P = \{ P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 \}$$

Soit D la collection des définitions du verbe relever. Cette collection D est elle aussi un ensemble de sept éléments que nous nommons de D₁ à D₇.

$$D = \{ D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7 \}$$

Résoudre le problème consiste à construire un sous-ensemble S du produit cartésien Π de P par D, constitué de sept éléments, les sept couples (P_i, D_j) qui permettent de savoir quel est le sens de relever dans chacune des sept phrases.

$$\Pi = P \otimes D$$

Donnons une définition en compréhension du produit cartésien.

$$\Pi = \{ (P_i, D_j), P_i \in P \text{ et } D_j \in D \}$$

Le produit cartésien est donc l'ensemble des couples qui peuvent être formés en prenant un élément dans l'ensemble P et un élément dans l'ensemble D.

Le produit cartésien Π peut être décrit à l'aide d'un tableau à double entrée, composé de sept lignes, modélisant les sept phrases présentes dans P et de sept colonnes modélisant les sept définitions présentes dans D.

$P \otimes D$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
P_1	(P_1, D_1)	(P_1, D_2)	(P_1, D_3)	(P_1, D_4)	(P_1, D_5)	(P_1, D_6)	(P_1, D_7)
P_2	(P_2, D_1)	(P_2, D_2)	(P_2, D_3)	(P_2, D_4)	(P_2, D_5)	(P_2, D_6)	(P_2, D_7)
P_3	(P_3, D_1)	(P_3, D_2)	(P_3, D_3)	(P_3, D_4)	(P_3, D_5)	(P_3, D_6)	(P_3, D_7)
P_4	(P_4, D_1)	(P_4, D_2)	(P_4, D_3)	(P_4, D_4)	(P_4, D_5)	(P_4, D_6)	(P_4, D_7)
P_5	(P_5, D_1)	(P_5, D_2)	(P_5, D_3)	(P_5, D_4)	(P_5, D_5)	(P_5, D_6)	(P_5, D_7)
P_6	(P_6, D_1)	(P_6, D_2)	(P_6, D_3)	(P_6, D_4)	(P_6, D_5)	(P_6, D_6)	(P_6, D_7)
P_7	(P_7, D_1)	(P_7, D_2)	(P_7, D_3)	(P_7, D_4)	(P_7, D_5)	(P_7, D_6)	(P_7, D_7)

Tableau 91 : produit cartésien Π

Le tableau à double entrée permet de produire les 49 couples qui constituent le produit cartésien. Nous venons donc de donner une description en extension de Π .

Le sous-ensemble S de Π , solution du problème peut être donné en extension sous la forme :

$$S = \{ (P_1, D_7), (P_2, D_5), (P_3, D_1), (P_4, D_3), (P_5, D_2), (P_6, D_6), (P_7, D_4) \}$$

Pour présenter notre étude des stratégies de production de S , repérons dans le tableau à double entrée les éléments de S . Nous marquons les éléments de S en grisant les sept cases concernées.

$P \otimes D$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
P_1	(P_1, D_1)	(P_1, D_2)	(P_1, D_3)	(P_1, D_4)	(P_1, D_5)	(P_1, D_6)	(P_1, D_7)
P_2	(P_2, D_1)	(P_2, D_2)	(P_2, D_3)	(P_2, D_4)	(P_2, D_5)	(P_2, D_6)	(P_2, D_7)
P_3	(P_3, D_1)	(P_3, D_2)	(P_3, D_3)	(P_3, D_4)	(P_3, D_5)	(P_3, D_6)	(P_3, D_7)
P_4	(P_4, D_1)	(P_4, D_2)	(P_4, D_3)	(P_4, D_4)	(P_4, D_5)	(P_4, D_6)	(P_4, D_7)
P_5	(P_5, D_1)	(P_5, D_2)	(P_5, D_3)	(P_5, D_4)	(P_5, D_5)	(P_5, D_6)	(P_5, D_7)
P_6	(P_6, D_1)	(P_6, D_2)	(P_6, D_3)	(P_6, D_4)	(P_6, D_5)	(P_6, D_6)	(P_6, D_7)
P_7	(P_7, D_1)	(P_7, D_2)	(P_7, D_3)	(P_7, D_4)	(P_7, D_5)	(P_7, D_6)	(P_7, D_7)

Tableau 92 : Mise en évidence de S , sous ensemble de Π

Maintenant que nous avons exhibé la solution du problème, nous allons étudier les stratégies permettant de la construire.

Ces stratégies ne tiennent pas compte des connaissances de français mises en œuvre, non pas parce qu'elles ne sont pas centrales dans cette situation, mais parce que notre focale porte sur les connaissances d'énumération et la nature des traitements réalisés.

L'hypothèse qui est faite est que le sujet idéal qui sert à construire cette analyse *a priori* produit systématiquement la bonne réponse à la question : « cet élément de Π est-il un élément de S ? »

A ce stade, nous considérons qu'un traitement élémentaire est l'examen d'un couple de Π candidat à la solution.

2.1.2 Énumération de la collection de phrases

Compte tenu des hypothèses sur le sujet idéal, le problème consiste à produire une énumération du produit cartésien dans une situation où ce produit cartésien n'est pas représenté.

La première stratégie consiste à sélectionner les phrases les unes après les autres et déterminer la définition qui leur correspond.

2.1.2.1 Les étapes de l'algorithme

Nous présentons ici quelques étapes de la stratégie reposant sur l'énumération des phrases. La totalité de ces étapes est disponible dans l'annexe 16.

Etape 1 : Traitement de P_1

Les couples qui contiennent P_1 sont construits et examinés. Sept couples sont ainsi construits : les couples (P_1, D_1) , (P_1, D_2) , (P_1, D_3) , (P_1, D_4) , (P_1, D_5) , (P_1, D_6) et (P_1, D_7) . Ces couples sont les sept couples du produit cartésien de la ligne P_1 . Le couple (P_1, D_7) est identifié comme premier élément de l'ensemble des solutions.

Notons S_i la suite des ensembles solutions construits à chaque étape.

$$S_1 = \{ (P_1, D_7) \}$$

Dans la suite de cette modélisation, l'élément D_7 est considéré comme traité et donc ne fait plus partie de la collection des définitions restant disponibles.

Notons Ver_i l'ensemble des définitions encore disponibles et $Phra_i$ l'ensemble des phrases qui restent à traiter.

$$\text{Phra}_1 = \{P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7\}$$

$$\text{Ver}_1 = \{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6\}$$

Etape 2 : Traitement de P_2

Une nouvelle énumération de la collection des définitions est réalisée.

Cinq couples sont construits : (P_2, D_1) , (P_2, D_2) , (P_2, D_3) , (P_2, D_4) et (P_2, D_5) . Le couple (P_2, D_5) est identifié comme second élément de l'ensemble des solutions.

$$S_2 = \{ (P_1, D_7) , (P_2, D_5) \}$$

$$\text{Phra}_2 = \{ P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 \}$$

$$\text{Ver}_2 = \{ D_1, D_2, D_3, D_4, D_6 \}$$

La stratégie se poursuit ainsi jusqu'à la septième et dernière étape.

Etape 7 : Traitement de P_7

Un seul couple est construit, le couple (P_7, D_4) .

$$S_7 = \{ (P_1, D_7) , (P_2, D_5) , (P_3, D_1) , (P_4, D_3) , (P_5, D_2) , (P_6, D_6) , (P_7, D_4) \}$$

$$\text{Phra}_7 = \{ \}$$

$$\text{Ver}_7 = \{ \}$$

Remarque :

Nous pouvons représenter sur le tableau cartésien la stratégie mise en œuvre.

		—					→
		—					→
		—					→
		—					→
		—					→
		—					→
		—					→

Tableau 93 : Représentation graphique de la stratégie Énumération de la collection de phrases

En choisissant de faire figurer dans le tableau représentant le produit cartésien les phrases en lignes, la stratégie Énumération de la collection des phrases est représentée par la mise en œuvre d'une stratégie *Lignes* pour l'énumération des cases du tableau.

2.1.2.2 Dénombrement des traitements

Dénombrons maintenant les traitements réalisés pour construire les sept éléments de S (ce qui revient à déterminer le nombre de couples examinés).

<i>Élément de S contenant ...</i>	<i>Nb. traitements élémentaires</i>
P_1	7
P_2	5
P_3	1
P_4	2
P_5	1
P_6	2
P_7	1
<i>Total</i>	19

Tableau 94 Stratégie Énumération de la collection de phrases, dénombrement des traitements

Avec cette stratégie et cette configuration, 19 traitements sont réalisés pour construire les sept éléments de S.

Nous pouvons représenter graphiquement sur le tableau à double entrée l'ensemble des traitements réalisés dans la description précédente :

- Quand un couple est traité, la case correspondante du tableau est hachurée.
- Quand un couple solution est produit, tous les cases non encore examinées de la colonne sont noircies car exclues des traitements ultérieurs.

$P \otimes D$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
P_1							
P_2							
P_3							
P_4							
P_5							
P_6							
P_7							

Tableau 95 : Stratégie Énumération de la collection de phrases, représentation des traitements

Les cases restées blanches permettent de repérer les couples qui n'ont pas été traités.

Nous obtenons 19 cases hachurées, représentant les 19 traitements.

Dans cette étude, nous avons imposé un ordre aux éléments des deux collections. Les deux collections ont été considérées comme des listes.

Ce choix a des conséquences, notamment dans la détermination du nombre de traitements. Nous allons maintenant considérer deux variations de cette situation : la plus favorable et le moins favorable du point de vue du nombre de traitements. Nous produisons ainsi un encadrement du nombre de traitements réalisés dans cette situation, quel que soit l'ordre considéré sur les collections de phrases et de définitions.

2.1.2.3 La situation la plus favorable

La situation la plus favorable est celle dans laquelle chaque examen d'un couple produit un élément de S. En reprenant le code couleur développé précédemment, nous obtenons la représentation suivante.

$P \otimes D$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
P_1							
P_2							
P_3							
P_4							
P_5							
P_6							
P_7							

Tableau 96 : Stratégie Énumération de la collection de phrases, représentation des traitements dans la configuration la plus favorable

Dénombrons les traitements réalisés.

Elément de S contenant ...	Nb. traitements élémentaires
P_1	1
P_2	1
P_3	1
P_4	1
P_5	1
P_6	1
P_7	1
Total	7

Tableau 97 : Stratégie Énumération de la collection de phrases, dénombrement des traitements dans la configuration la plus favorable

Ce sont donc sept traitements seulement qui sont réalisés dans ce cas. C'est le nombre minimum pour que sept couples solutions soient construits. Tous les traitements produisent des éléments de S.

2.1.2.4 La situation la moins favorable

La situation la moins favorable est celle pour laquelle chaque construction d'un élément de S nécessite d'examiner la totalité des couples potentiels restants à chaque étape.

Représentons le tableau à double entrée de cette configuration.

$P \otimes D$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
P_1							
P_2							
P_3							
P_4							
P_5							
P_6							
P_7							

Tableau 98 : Stratégie Énumération de la collection de phrases, représentation des traitements dans la configuration la moins favorable

Dénombrons les traitements élémentaires.

Elément de S contenant ...	Nb. traitements élémentaires
P_1	7
P_2	6
P_3	5
P_4	4
P_5	3
P_6	2
P_7	1
Total	28

Ce sont donc 28 traitements qui sont réalisés dans ce cas. C'est le nombre maximum pour que S soit construit.

La situation étudiée comporte 19 traitements. Elle se situe bien entre les deux variantes que nous venons de décrire.

2.1.3 Énumération de la collection de définitions

Une seconde stratégie consiste à s'appuyer sur la collection D des phrases pour construire les éléments de S. Disposant d'une définition du verbe relever, le sujet se demande dans quelle phrase cette définition est mise en œuvre. Cette stratégie repose sur l'énumération de la collection des définitions.

2.1.3.1 Les étapes de l'algorithme

Nous présentons ici quelques étapes de la stratégie reposant sur l'énumération des définitions. La totalité de ces étapes est disponible dans l'annexe 16.

Etape 1 : Traitement de D_1

Les couples qui contiennent D_1 sont construits et examinés. Trois couples sont ainsi construits : les couples (P_1, D_1) , (P_2, D_1) et (P_3, D_1) .

Ces couples sont les trois premiers couples du produit cartésien de la colonne D_1 . Le couple (P_3, D_1) est identifié comme premier élément de l'ensemble des solutions.

Nous reprenons les notations définies précédemment pour les ensembles S_i , Ver_i et $Phra_i$.

$$S_1 = \{ (P_3, D_1) \}$$

$$Ver_1 = \{ D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7 \}$$

$$Phra_1 = \{ P_1, P_2, P_4, P_5, P_6, P_7 \}$$

Etape 2 : Traitement de D_2

Une nouvelle énumération de la collection des phrases est réalisée.

Quatre couples sont construits : (P_1, D_2) , (P_2, D_2) , (P_4, D_2) et (P_5, D_2) . Le couple (P_5, D_2) est identifié comme second élément de l'ensemble des solutions.

$$S_2 = \{ (P_3, D_1), (P_5, D_2) \}$$

$$Ver_2 = \{ D_3, D_4, D_5, D_6, D_7 \}$$

$$Phra_2 = \{ P_1, P_2, P_4, P_6, P_7 \}$$

La stratégie se poursuit ainsi jusqu'à la septième et dernière étape.

Etape 7 : Traitement de D_7

Un seul couple est construit, le couple (P_1, D_7) .

$$S_7 = \{ (P_3, D_1), (P_5, D_2), (P_4, D_3), (P_7, D_4), (P_2, D_5), (P_6, D_6), (P_1, D_7) \}$$

$$\text{Phra}_7 = \{ \}$$

$$\text{Ver}_7 = \{ \}$$

Remarque :

Nous pouvons représenter sur le tableau cartésien la stratégie mise en œuvre.

	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓

Tableau 99 : Représentation graphique de la stratégie Énumération de la collection de définitions

En choisissant de faire figurer dans le tableau représentant le produit cartésien les définitions en colonnes, la stratégie Énumération de la collection des définitions est représentée par la mise en œuvre d'une stratégie *Colonnes* pour l'énumération des cases du tableau.

2.1.3.2 Dénombrer des traitements

Dénombrons maintenant les traitements réalisés pour construire les sept éléments de S (ce qui revient à déterminer le nombre de couples examinés).

<i>Elément de S contenant ...</i>	<i>Nb. traitements élémentaires</i>
D_1	3
D_2	4
D_3	3
D_4	4
D_5	2
D_6	2
D_7	1
<i>Total</i>	<i>19</i>

Tableau 100 : Stratégie Énumération de la collection de définitions, dénombrement des traitements

Reprenons la modélisation que nous avons construite précédemment en l'appliquant à la nouvelle stratégie.

$P \otimes D$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
P_1							
P_2							
P_3							
P_4							
P_5							
P_6							
P_7							

Figure 198 : : Stratégie Énumération de la collection de définitions, représentation des traitements

Avec cette stratégie et cette organisation induite par les listes D et P, 19 traitements sont réalisés pour construire les sept éléments de S. C'est le même nombre de traitements élémentaires qu'avec la stratégie Énumération de la collection de phrases.

Le changement de stratégie ne change pas le nombre de traitements. Par contre, il modifie l'ordre dans lequel les éléments de S sont construits.

Le cas le plus favorable et le cas le moins favorable produisent des résultats identiques dans les deux stratégies. Nous ne revenons donc pas sur cette étude pour la stratégie Énumération de la collection des définitions.

2.1.4 Impact d'une non-réponse instantanée sur le nombre de traitements élémentaires

Les analyses produites reposaient sur une hypothèse commune, à savoir le sujet idéal est capable de produire instantanément une réponse à la question « Cet élément de Π est-il un élément de S ? »

Décrivons la situation d'un sujet dont les connaissances en vocabulaire ne permettent pas de répondre de manière systématique et instantanée à cette question.

Considérons que le sujet met en œuvre la stratégie Énumération de la collection de phrases.

Parmi les non-réponses instantanées qui nous apparaissent plausibles dans l'énoncé proposé, nous allons considérer la suivante :

Supposons que le sujet

- hésite quand il examine la phrase P_3 « Peux-tu m'aider à relever le parasol qui a été renversé par le vent ? » entre la définition D_1 « Remettre debout » et la définition D_2 « Diriger vers le haut ».
- ne produit pas à cet instant de couple de S contenant P_3

Quand le sujet examine la phrase P_5 « Tu pourrais relever la tête et me regarder quand je te parle. », il produit à ce moment l'élément de S contenant P_5 (D_2). La production de cet élément de S élimine de l'ensemble des définitions l'élément qui avait concouru à l'hésitation du sujet.

L'élément de S contenant P_3 est construit à l'issue de l'énumération des phrases, quand il ne reste plus que D_1 dans la liste des définitions non utilisées.

C'est le seul élément que nous décidons de modifier par rapport à la stratégie décrite précédemment.

Nous étudions maintenant dans quelle mesure cette non-réponse instantanée impacte le nombre de traitements dans la résolution.

Modélisons le déroulement possible suite à notre hypothèse.

$P \otimes D$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
P_1							
P_2							
<p><i>La construction des deux premiers éléments de S se déroule de la même manière.</i></p> <p><i>Le sujet essaye maintenant de construire l'élément de S qui contient P_3.</i></p>							
P_3							
<p><i>Il n'a pas réussi à déterminer quel élément de D pouvait s'appareiller à P_3. Il poursuit la fabrication de S en cherchant l'élément qui contient P_4. Seuls deux éléments de D ne sont plus examinés de manière systématique.</i></p>							
P_4							
<p><i>Il réussit à construire un troisième couple de S, le couple qui contient P_4. Il y a à ce stade trois éléments de D qui ne font plus partie des candidats potentiels pour les appareillages : D_7, D_5 et maintenant D_3.</i></p>							
P_5							
<p><i>Le sujet vient d'examiner D_1 et D_2. D'après notre hypothèse, il n'a à ce stade pas d'hésitation sur le fait que D_2 est le bon candidat à l'appareillement avec P_5.</i></p>							
P_6							
P_7							
P_3							

Tableau 101 : Modélisation de la suite des traitements (intégration de l'hésitation du sujet)

Dénombrons maintenant les traitements réalisés pour construire les sept éléments de S (ce qui revient à dénombrer les cases hachurées) :

<i>Elément de S contenant ...</i>	<i>Nb. traitements élémentaires</i>
P_1	7
P_2	5
P_3 (non produit)	5
P_4	3
P_5	2
P_6	3
P_7	2
P_3	1
<i>Total</i>	28

Tableau 102 : Détermination du nombre de traitements (intégration de l'hésitation du sujet)

L'intégration de la non-réponse instantanée que nous avons décrite fait passer le nombre de traitements de 19 à 28 pour construire les sept éléments de S. L'augmentation du nombre de traitements est donc très importante en proportion quand la réalisation d'un des couples de S est différée.

Cette analyse fait apparaître une explosion du nombre de traitements pour les élèves qui seraient en difficulté avec les connaissances de vocabulaire en jeu dans la situation.

2.2 Analyse logique de la situation de l'alphabet

Dans la situation de l'alphabet, il s'agit d'ordonner une collection de 10 mots. Nous commençons par préciser la nature de l'ordre dont il est question ici.

2.2.1 Différentes relations d'ordre

Nous avons déjà évoqué la relation d'ordre qui opère sur les lettres de l'alphabet. Il s'agit de l'ordre alphabétique usuel qui est construit notamment lors de l'apprentissage de comptines orales.

Ces comptines permettent de mémoriser les éléments de la collection des lettres. Ces lettres sont nommées les unes à la suite des autres, dans un certain ordre. Cette énonciation orale de la suite du nom des lettres produit un ordre.

Dans la suite de ce texte, nous nommons cette relation d'ordre qui opère sur les lettres de l'alphabet « ordre alphabétique ».

Notons A l'ensemble des lettres de l'alphabet. Considérons les lettres c et d de A .

Nous pouvons écrire $c < d$, ce qui signifie que l'élément c est en relation avec l'élément d du point de vue de l'ordre alphabétique.

L'objectif de l'exercice n'est pas d'ordonner des lettres, mais des mots. Il s'agit donc maintenant de définir la relation d'ordre qui opère sur les mots. Pour cela, il nous faut considérer les mots de la langue comme des ensembles ordonnées de lettres. Ainsi, le mot « canari » est constitué d'une suite ordonnée de lettres. La première lettre du mot est la lettre c , la seconde a , la sixième i .

Les mots peuvent donc être représentés par des n -uplets, suite ordonnée de lettres. Le mot canari peut être représenté par le 6-uplet (c, a, n, a, r, i) .

Nous pouvons maintenant définir l'ordre sur les mots, qui est un ordre sur les n -uplets.

Considérons pour commencer des 2-uplets (ce qui revient à considérer des mots à deux lettres).

Soient (a_1, a_2) et (b_1, b_2) deux éléments quelconques de $A \times A$

$$(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2) \Leftrightarrow a_1 < b_1 \text{ ou } (a_1 = b_1 \text{ et } a_2 \leq b_2)$$

Si la première lettre du 2-uplet (a_1, a_2) est inférieure à la première lettre du 2-uplet (b_1, b_2) , alors le 2-uplet (a_1, a_2) est inférieur au 2-uplet (b_1, b_2) .

Si les deux 2-uplets ont même première lettre, alors il faut comparer la deuxième lettre des 2-uplets pour déterminer le plus petit des deux 2-uplets.

La définition de l'ordre sur les 2-uplets est généralisée par récurrence aux n -uplets (Ramis, Deschamps, Odoux, & Ramis, 2001, p. 5)

Considérons deux n -uplets $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ et $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ de A^n .

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \leq (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n) \Leftrightarrow a_1 < b_1 \text{ ou } ((a_2, a_3, \dots, a_n) \leq (b_2, b_3, \dots, b_n))$$

La relation d'ordre sur les n -uplets est définie en appui sur la relation d'ordre des $(n-1)$ -uplets.

Nous définissons ainsi une nouvelle relation d'ordre à partir de la relation d'ordre alphabétique. Cette nouvelle relation porte sur les n-uplets, modélisation des mots comme suite de lettres.

Dans la suite de ce texte, nous nommons « ordre lexicographique » la relation d'ordre portant sur les n-uplets.

Dans la situation de l'alphabet, nous travaillons simultanément avec deux relations d'ordre portant sur des ensembles différents, l'ordre alphabétique qui opère sur les lettres et l'ordre lexicographique qui opère sur les mots.

2.2.2 Différentes stratégies de mise en ordre lexicographique

Nous allons maintenant produire une analyse logique de la situation de l'alphabet en donnant une description des différentes stratégies pouvant être mises en œuvre lors de la mise en ordre lexicographique les dix mots suivants :

canari – colombe – dinde – cygne -chameau – cochon – daim – canard – corbeau - cheval

Nous allons considérer que l'exercice demande d'ordonner les mots du plus petit au plus grand.

Les stratégies dont il est question ici sont les stratégies que mettrait en œuvre un automate pour résoudre le problème. La description des différentes stratégies s'accompagne de la détermination du nombre de traitements nécessaires à sa réalisation. Dans un premier temps, nous considérons qu'un traitement est le résultat de la comparaison de deux éléments de la collection des mots du point de vue de l'ordre lexicographique).

Les stratégies décrites sont rapprochées d'algorithmes informatiques de tri, un tri signifiant dans un contexte informatique une mise en ordre.

2.2.2.1 Une stratégie par insertion

Cette stratégie est nommée en référence à l'algorithme de tri par insertion qu'elle met en œuvre sur les éléments de la collection. Elle repose sur la constitution d'une liste ordonnée des éléments dont la taille va augmenter à chaque itération.

« on trie successivement les premiers éléments de la liste : à la $i^{\text{ème}}$ étape on insère le $i^{\text{ème}}$ élément à son rang parmi les $i-1$ éléments précédents qui sont déjà triés entre eux. Cette méthode s'appelle aussi la méthode du joueur de cartes. »(Froidevaux, Gaudel, & Soria, 1992, p. 320)

Décrivons la suite des traitements réalisés dans cette première stratégie.

Les deux premiers mots de la collection, canari et colombe, sont comparés.

Le premier traitement de cet algorithme est la comparaison lexicographique des deux premiers éléments de la liste. Le mot canari est inférieur au mot colombe du point de vue de l'ordre lexicographique.

À cette étape de l'algorithme, l'ensemble des mots est structuré en deux sous-ensembles. Le premier sous-ensemble est constitué des mots canari et colombe. Les éléments de cet ensemble sont organisés selon la relation d'ordre. Ce sont les éléments de la collection de départ qui ont déjà été traités. Le second sous-ensemble est constitué du reste des mots de la liste du manuel. Ces éléments n'ont pas encore été traités.

Cette description met en évidence la constitution de deux ensembles qui sont modifiés à chacune des étapes du traitement :

- Premier ensemble, l'ensemble ordonné des éléments traités. Le traitement consiste à les ordonner. Nous modéliserons le caractère ordonné de cet ensemble en le représentant par un n-uplet.

$L = (\text{canari, colombe})$, liste ordonnée par l'ordre lexicographique

- Deuxième ensemble, l'ensemble des éléments non encore traités que nous nommerons E.

$E = \{\text{dinde, cygne, chameau, cochon, daim, canard, corbeau, cheval}\}$

L'étape suivante du traitement s'intéresse à un nouvel élément de la collection des mots non traités. Cette étape lui fait quitter l'ensemble E des éléments non traités pour intégrer l'ensemble L des éléments traités. Elle consiste à insérer ce troisième élément, le mot dinde, dans la liste ordonnée déjà constituée.

Décrivons les traitements effectués pour réaliser l'insertion du mot dinde dans la liste L. L'élément dinde est comparé au plus grand élément de L. Comme dinde est plus grand que colombe, les comparaisons s'arrêtent et l'insertion de dinde dans L peut être réalisée.

L'ensemble des éléments traités L est modifié et devient (canari, colombe, dinde).

L'ensemble E a perdu son premier élément, le cardinal de l'ensemble a diminué de un.

$L = (\text{canari, colombe, dinde})$

$E = \{\text{cygne, chameau, cochon, daim, canard, corbeau, cheval}\}$

Décrivons les traitements effectués pour réaliser l'insertion du quatrième élément, le mot cygne, dans la liste L. L'élément cygne est comparé au plus grand élément de L, dinde. C'est

la première fois que l'élément issu de L (dinde) n'est pas inférieur à l'élément issu de E (cygne). L'ordre des éléments dans la liste L va devoir être modifié. Dinde et cygne sont permutés, dinde reste le plus grand élément de la liste L et une nouvelle tentative d'insertion de cygne est effectuée. Pour cela, cygne est comparé à l'ancien prédécesseur de l'élément dinde, le mot colombe. Le mot colombe est inférieur au mot cygne, ce qui stoppe l'étape en permettant l'insertion de cygne juste après colombe. A l'issue de cette étape, les deux ensembles L et E sont alors constitués de la sorte :

L= (canari, colombe, cygne, dinde)

E= {chameau, cochon, daim, canard, corbeau, cheval}

L'annexe 15 décrit de manière exhaustive les différentes étapes de l'algorithme et les comparaisons qui sont réalisées à chacune d'elles. Le numéro 0 est réservé pour la description de l'état initial de la situation. Nous montrons ici un extrait de cette annexe, qui correspond à l'insertion du mot cygne dans la liste solution.

Etape 4 : Insertion de l'élément cygne

E₄= {chameau, cochon, daim, canard, corbeau, cheval}

Traitement de l'élément cygne:

Traitement du couple (dinde, cygne).

Dinde > cygne, donc dinde et cygne ne sont pas bien ordonnés.

Dinde reste le plus grand élément.

Traitement du couple (colombe, cygne)

Colombe < cygne donc colombe et cygne sont bien ordonnés.

L₄= (canari, colombe, cygne, dinde)

L'algorithme se termine à l'issue de l'étape 10, qui consiste à insérer le mot cheval dans la liste solution.

Cette description algorithmique met en évidence que de nombreuses comparaisons de mots et manipulations sur les collections sont effectuées. Nous obtenons ainsi une description de la complexité des actions réalisées.

Dans cet algorithme, le nombre de traitements réalisés dépend à chaque étape de la composition de la liste de mots. Pour réaliser toutes les étapes de l'algorithme, 25 comparaisons lexicographiques de deux mots doivent être réalisées.

Nous allons maintenant examiner une autre stratégie de construction de la liste lexicographiquement ordonnée.

2.2.2.2 Une stratégie par sélection du plus petit élément

Cette stratégie est nommée en référence à l'algorithme de tri par sélection qu'elle met en œuvre sur les éléments de la collection.

« Dans ces méthodes, on recherche le minimum de la liste à trier. On le met à la première place, et on recommence sur la fin de la liste (augmentée de l'élément qui se trouvait à la première place). [...] On peut noter qu'après le $k^{\text{ième}}$ placement, les k plus petits éléments de la liste ont leur place définitive.. » (Froidevaux et al., 1992, p. 310)

Il s'agit donc ici de rechercher de manière systématique le plus petit élément de l'ensemble des mots et de l'extraire, de le sélectionner, pour fabriquer la liste solution. Les éléments sont placés dans la liste solution dans une position dont ils ne bougeront plus.

Décrivons la suite des traitements réalisés dans cette stratégie par sélection.

L'objectif est de déterminer le plus petit élément de l'ensemble des dix éléments mots de départ. Le premier mot, canari, est comparé avec le second mot, colombe. C'est canari qui est le plus petit. Il est conservé en mémoire pour être comparé aux mots suivants. Le mot suivant est dinde. Donc canari est comparé à dinde. C'est encore canari le plus petit. Cette suite de comparaison deux à deux se poursuit : canari est comparé aux éléments suivants de la collection. Il reste le plus petit élément jusqu'à sa comparaison avec le mot canard. C'est alors canard qui devient le nouveau plus petit élément et qui conserve ce statut jusqu'au terme de cette première série de comparaisons. |À l'issue de cette première énumération, canard est le plus petit élément de la collection ; il est donc le premier élément de la liste solution.

À cette étape de l'algorithme, l'ensemble des mots est structuré en deux sous-ensembles. Le premier sous-ensemble est constitué du mot canard. C'est le premier élément de la liste solution dont la taille va augmenter à chaque étape de l'algorithme. Le second sous-ensemble

est constitué des 9 autres mots de la liste du manuel, sous-ensemble dans lequel il faudra chercher un plus petit élément..

- Premier ensemble, le début de la liste solution. .

$L = (\text{canard})$, liste ordonnée par l'ordre lexicographique

- Deuxième ensemble, l'ensemble des éléments non encore sélectionnés pour intégrer la liste solution

$E = \{\text{canari, colombe, dinde, cygne, chameau, cochon, daim, canard, corbeau, cheval}\}$

L'algorithme se poursuit par la recherche du plus petit élément dans l'ensemble des 9 éléments restants. Une fois ce plus petit élément trouvé, il prendra place dans la liste solution, en deuxième position, juste après canard. Il restera alors un ensemble de 8 mots à ordonner.

L'annexe 15 décrit de manière exhaustive les différentes étapes de l'algorithme. Nous montrons ici un extrait de cette annexe, qui correspond à la construction du cinquième élément de la liste solution.

$L_4 = (\text{canard, canari, chameau, cheval})$

$E_4 = \{\text{colombe ; dinde ; cygne ; cochon ; daim ; corbeau}\}$

Etape 5 : Sélection du cinquième élément de la liste solution

Recherche du plus petit élément de E_4

$L_5 = (\text{canard, canari, chameau, cheval, cochon})$

$E_5 = \{\text{colombe ; dinde ; cygne ; daim ; corbeau}\}$

L'algorithme se termine à l'issue de l'étape 10, qui consiste à la construction du dixième et dernier élément de la liste solution.

Examinons le nombre de traitements mis en œuvre dans cet algorithme. 45 comparaisons sont réalisées pour produire L_{10} , soit presque le double de celles réalisées avec l'algorithme par insertion. Cet algorithme ne minimise pas le nombre de comparaisons de deux mots réalisées.

Nous allons maintenant examiner une autre stratégie de construction de la liste lexicographiquement ordonnée.

2.2.2.3 Une stratégie de partitionnement

La plupart des mots de la collection commencent par la lettre c. Seuls deux mots de cette collection ne commencent pas par cette lettre (daim et dinde). Ils commencent tous les deux par la même lettre.

Mettons en œuvre un classement de la collection des dix mots reposant sur la relation « a même première lettre que ». Ce classement permet de partitionner la collection en deux sous-ensembles, la classe des mots qui commencent par c et la classe des mots qui commencent par d.

Ce classement permet de transformer le problème de mise en ordre d'un ensemble de 10 éléments en plusieurs problèmes : ordonner l'ensemble des deux classes, puis ordonner chacune des deux classes (un ensemble de 8 éléments et un ensemble de 2 éléments).

Les étapes de l'algorithme

La fabrication des classes nécessite la mise en œuvre d'un certain nombre de comparaisons. Cette comparaison est peu coûteuse puisque elle repose sur des repérages de premières lettres. Elle ne nécessite même pas la connaissance de l'ordre alphabétique.

Examinons la mise en œuvre de la fabrication des classes.

Etape 1 : examen de canari.

L'examen du mot canari génère la fabrication de la classe des mots qui ont la même première lettre que canari. Nous noterons cette classe $C(c)$, classe des mots dont la première lettre est c.

À l'issue de cette étape, nous pouvons affirmer qu'une classe $C(c)$ existe et qu'elle contient un élément.

$C(c) = \{ \text{canari} \}$.

Etape 2 : examen de colombe.

L'examen du mot nouveau mot consiste à repérer s'il fait partie d'une classe déjà existante. C'est le cas. L'étape 2 : ne produit pas de nouvelles classes. Elle ajoute un élément à la classe déjà constituée.

$C(c) = \{ \text{canari ; colombe} \}.$

Etape 3 : examen de dinde

L'examen du mot nouveau mot permet de repérer qu'il ne fait pas partie d'une classe déjà existante L'étape 3 génère donc la fabrication d'une nouvelle classe $C(d)$, classe des mots dont la première lettre est d.

$C(c) = \{ \text{canari ; colombe} \}.$

$C(d) = \{ \text{dinde} \}$

Les étapes suivantes ne génèrent pas de nouvelles classes. Elles permettent de compléter le contenu de chacune des deux classes.

À l'issue de la dixième étape, deux classes sont constituées :

$C(c) = \{ \text{canari ; colombe ; cygne ; chameau ; cochon ; canard ; corbeau ; cheval} \}.$

$C(d) = \{ \text{dinde ; daim} \}$

En appui sur des seules connaissances alphabétiques, cette stratégie permet de transformer le problème initial. Il reste à ordonner les deux classes. La connaissance sur l'ordre alphabétique ($c < d$) permet de construire la solution comme le recollement des solutions aux deux problèmes ordonner lexicographiquement $C(c)$ et ordonner lexicographiquement $C(d)$.

Il reste maintenant à mettre en œuvre une des deux stratégies précédentes sur chacune des deux classes. Cette étude est présentée de manière détaillée dans l'annexe 15.

Nous montrons que, dans le cas étudié, le nombre de comparaisons lexicographiques varie peu quand la stratégie partitionnement est ajoutée à la stratégie par insertion. Dans ce cas, ce nombre passe de 25 à 21.

Par contre, le nombre de comparaisons lexicographiques diminue de manière importante si une phase de partitionnement précède la mise en œuvre de la stratégie par sélection du plus petit élément. Le nombre de comparaisons lexicographiques passe alors de 45 à 25.

Nous allons produire des descriptions de stratégies dans lesquelles le traitement considéré était la comparaison lexicographique de deux mots. Nous allons maintenant détailler certaines dimensions logiques mises en œuvre pour réaliser une comparaison lexicographique.

2.2.3 Analyse de la comparaison lexicographique

L'objectif est de produire une analyse des actions qui sont réalisées pour comparer lexicographiquement deux mots de la collection, et notamment des collections susceptibles d'être utilisées. Pour réaliser cette comparaison des mots, une suite de comparaisons alphabétiques est réalisée. Les mots sont considérées ici comme des collections ordonnées de lettres. Ces lettres sont ordonnées par la raison graphique puisque les mots comparés sont écrits.

Examinons le mécanisme quand les mots « colombe » et « cygne » sont comparés.

Étape 1 : Comparaison de la première lettre de chacun des deux mots.

Les deux mots ont même première lettre donc la seconde lettre est comparée.

Étape 2 : Comparaison de la seconde lettre de chacun des deux mots

Les lettres « o » et « y » doivent être comparées.

Les deux lettres « o » et « y » ne font pas partie des premiers éléments de la liste de l'alphabet. La lettre « o » est en quinzième position et la lettre « y » en vingt-cinquième position. Si le sujet n'a pas un accès direct aux positions respectives ou à la position relative de l'une par rapport à l'autre, une portion importante de la liste alphabétique doit être parcourue (au moins jusqu'au quinzième élément pour constater l'occurrence de la première des deux lettres).

Huit des dix mots de l'exercice commencent par la lettre c. Six de ces huit mots sont suivis d'une voyelle. La collection des mots commençant par c peut donc être partitionnée en deux sous-ensembles, dont un sous-ensemble de mots dont la seconde lettre est une voyelle.

L'utilisation de cette partition transforme le problème. Pour ordonner les mots dont la première lettre est « c », il faut ordonner six mots dont la seconde lettre est une voyelle, puis insérer dans la liste solution les deux mots restants (chameau et cheval).

Ainsi, pour comparer « colombe » et « cygne », il suffit de déterminer les positions relatives de « o » et « y » dans la collection des voyelles (a, e, i, o, u, y). La collection des voyelles est un sous-ensemble des lettres de l'alphabet composé de 6 éléments. Cette collection doit être explorée jusqu'à son quatrième élément pour conclure (o < y).

Cette sous-collection peut être disponible chez certains sujets, puisqu'elle peut avoir été mémorisée.

La substitution de la collection des lettres par la collection des voyelles diminue de manière importante la taille des collections à explorer pour comparer alphabétiquement deux lettres. Les mots choisis permettent d'envisager cette substitution.

3. Conditions matérielles des situations

Nous souhaitons observer la nature des procédures mises en œuvre par des sujets dans des situations qui sont identiques du point de vue de la nature des connaissances de la langue et pour lesquelles nous aurons agi sur des variables d'organisation.

Le choix des conditions matérielles proposées repose sur l'observation et la compréhension que nous avons développées de la matérialité dans les situations précédemment étudiées.

C'est donc le registre de la matérialité qui continue de guider notre choix de variable.

3.1 Les deux variables principales

La nature du traitement constitue la première variable. Nous avons en effet choisi de travailler sur deux situations qui mettent en jeu deux traitements différents :

- Une situation d'association de deux collections de même cardinal (la situation du verbe)
- Une situation de mise en ordre d'une collection (la situation de l'alphabet)

Le caractère modifiable ou non d'une configuration est un élément structurant de notre travail. Pour cette raison, il nous semble que ces observations doivent faire intervenir cette seconde variable. Dans un contexte proche d'exercice scolaire de français, le jeu sur cette variable nous amène à proposer :

- des situations dans lesquelles le sujet dispose de collections d'objets qui se présentent sous la forme d'une série d'étiquettes que le sujet peut déplacer à sa guise
- des situations dans lesquelles les positions des éléments des collections sont figées par l'écrit ; le sujet ne peut pas produire d'action de modification spatiale de la configuration

Précisons maintenant les autres choix réalisés.

3.2 Ecrire sur le support

Un des objectifs de cette étude est de confronter nos analyses à des situations dans lesquelles intervient l'écrit.

Souvent, les sujets en situation scolaire sont confrontés à des exercices issus d'un manuel. Dans ce contexte, ils ne sont pas toujours autorisés à écrire ou produire des signes sur l'énoncé qui leur est proposé.

Nous organisons le milieu pour contrôler cette variable. Dans le cas des configurations non modifiables, nous proposons des énoncés sur des feuilles indépendantes, sur lesquelles les sujets sont autorisés à écrire.

Ce qui nous intéresse est la manière dont les traitements s'enchaînent pour la construction de la réponse. Que le sujet puisse écrire sur le support peut constituer un élément de stratégie dans le contrôle de la réalisation de l'enchaînement des tâches. L'analyse de ces écrits peut aider à mieux comprendre les dispositifs de contrôle réalisés.

3.3 Nature matérielle des collections dans la situation du verbe

Dans la situation de l'alphabet, la seule collection visible est la collection des mots qu'il faut ordonner. Dans la situation du verbe, deux collections sont visibles. Nous examinons maintenant comment la relation entre les collections peut se construire en fonction de la matérialité de ces collections. La forme de la mise en relation des éléments d'une collection avec une autre dépend de la matérialité de chacune des collections.

Dans le cas où les deux collections sont non déplaçables, la relation est matérialisée par un écrit. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, la relation écrite peut prendre différentes formes. Si, comme dans l'énoncé originel, les définitions sont repérées par des nombres et les phrases par des lettres, c'est la production d'un couple (nombre, lettre) qui peut permettre de décrire la relation entre les éléments des deux collections. Si les collections sont présentées sous forme de listes qui se développent verticalement et que ces développements verticaux sont l'un à côté de l'autre, un trait joignant un élément d'une collection à l'autre suffit pour décrire cette relation. Outre le fait que les collections sont très visibles, cette disposition les présente avec une certaine symétrie.

Quand l'une au moins des collections est déplaçable, la relation peut être matérialisée par le rapprochement des éléments de chacune des collections ou la superposition des éléments d'une collection sur les éléments de l'autre. Ce sont donc des organisations spatiales des collections qui peuvent matérialiser la relation. La configuration est modifiable dans ce cas.

Si l'une seulement des collections est déplaçable, cela produit une dissymétrie entre les deux collections et peut induire une stratégie particulière d'organisation. Si les deux collections sont déplaçables, la symétrie des deux collections donne un degré de liberté au sujet sur le choix de la collection qui est énumérée en premier.

La relation peut être représentée graphiquement à l'aide d'un tracé liant un élément à un autre ou spatialement en rapprochant ou juxtaposant tel élément à tel autre.

Nous choisissons de ne pas observer de situations à deux collections visibles dans lesquelles une seulement des deux collections est non déplaçable.

Nous allons donc observer deux situations différentes du point de vue du traitement, proposée chacune dans deux variantes : l'une dans une configuration non-modifiable, l'autre dans une configuration modifiable. Dans le cas de la configuration non modifiable, les deux listes sont présentées sous la forme d'un développement vertical, l'une à côté de l'autre. Dans le cas de la configuration modifiable, les deux collections sont déplaçables et présentées toutes les deux sous forme d'étiquettes. Nous choisissons de présenter les deux collections d'étiquettes sur des papiers de couleurs différentes. Déterminer si une étiquette est une phrase ou une définition est une question que nous souhaitons neutraliser.

Nous souhaitons neutraliser la question de l'appartenance d'une étiquette à une des deux collections.

Les énoncés des situations et de leurs variantes figurent en annexe 17.

4. Analyse *a priori* des situations

Maintenant que les variables issues de la matérialité ont été choisies, nous poursuivons l'analyse *a priori* des situations en intégrant cette dimension matérielle.

4.1 Analyse *a priori* de la situation du verbe

Nous poursuivons notre intégration de la matérialité à notre analyse *a priori* en étudiant la situation du verbe.

Comme pour l'analyse logique, nous nous limitons dans le cas des configurations modifiables au cas où nous contrôlons l'ordre dans lequel les éléments sont proposés. Ainsi, nous ne prenons comme support à notre étude du cas modifiable que la situation où les deux

collections d'étiquettes se présentent spontanément dans le même ordre que l'ordre induit par l'écrit de la configuration non modifiable.

Nous produisons donc des descriptions des organisations spatiales dans le cas modifiables et des signes graphiques produits dans le cas non modifiable. Pour ce second cas, nous nous appuyons sur la schématisation suivante.

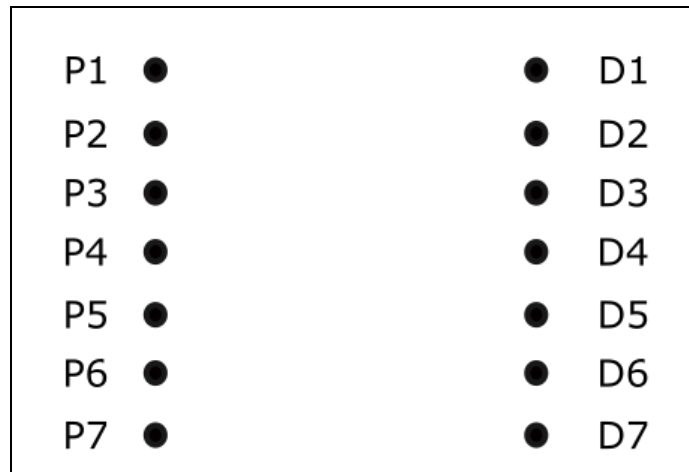


Figure 199 : Situation du verbe, configuration non modifiable, état initial

4.1.1 Présence de la stratégie d'énumération de la collection de phrases

Cette stratégie repose sur l'énumération de la collection de phrases. Nous cherchons à repérer *a priori* des observables de la présence de cette stratégie.

Après lecture de l'élément P_1 , le sujet cherche dans la collection des définitions l'élément qui est en relation avec P_1 . Pour cela, des tentatives successives de mise en relation d'éléments de D avec P_1 sont effectuées.

Dans le cas modifiable, les étiquettes considérées peuvent être saisies et rapprochées les unes des autres, puis éloignées après échec de la mise en relation.

Dans le cas non modifiable, nous pourrions observer un appui sur la règle permettant de matérialiser dans l'espace physique une tentative de mise en relation. Ainsi, les positions successives suivantes pourraient être observées.

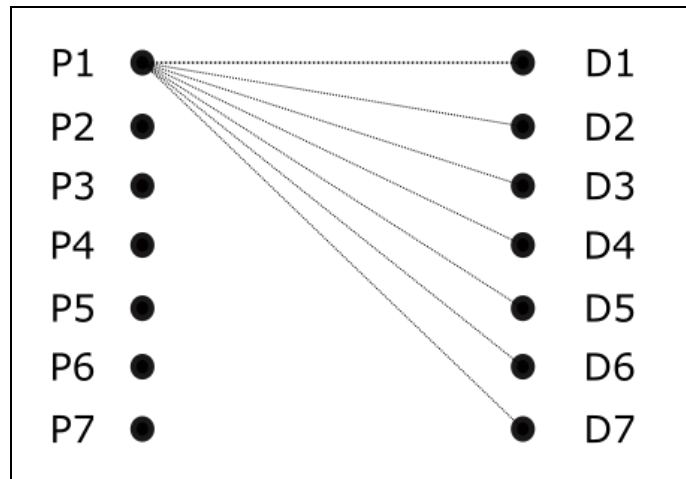


Figure 200 : Situation du verbe, configuration non modifiable, les sept premières tentatives de mise en relation

A l'issue de cette première phase, le sujet a déterminé quel élément de D pouvait être mis en relation avec P₁. Il signifie la construction de ce premier élément de S par des gestes qui vont dépendre du contexte matériel dans lequel il se trouve.

Dans le cas des configurations modifiables, il peut extraire de P et D les deux éléments qu'il vient de mettre en relation.

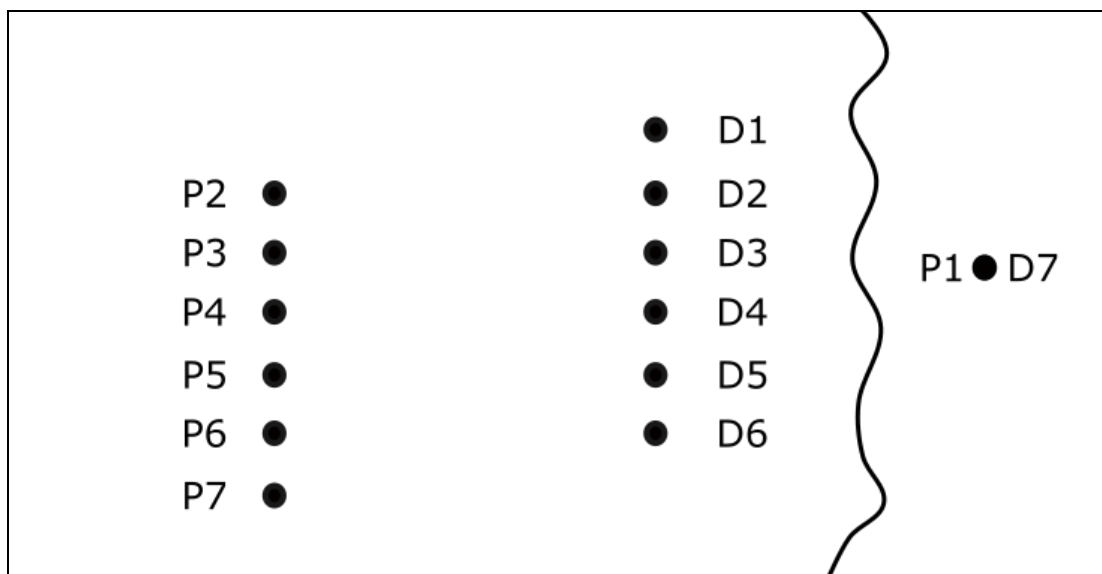


Figure 201 : Situation du verbe, configuration modifiable, geste d'extraction des éléments de P et de D qui viennent d'être mis en relation

La figure ci-dessus montre que le couple est disposé dans une zone de l'espace éloignée du lieu où se trouvent le reste des étiquettes. (le trait continu nous permettant de représenter cet éloignement spatial).

Dans le cas des configurations non modifiables, un geste graphique est réalisé pour marquer le couple ainsi construit.

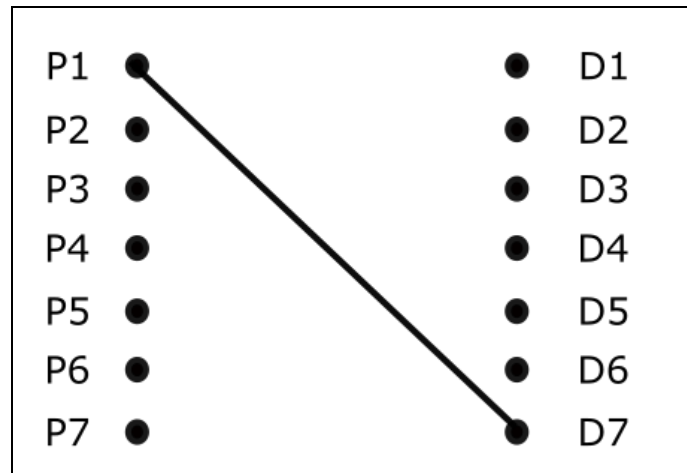


Figure 202 : Situation du verbe, configuration non modifiable, geste graphique marquant la construction du premier couple de S

Dans les deux cas, nous nous attendons à ce que le sujet produise un geste (graphique ou de déplacement) qui lui permette de contrôler que les éléments qui viennent d'être traités ne seront pas réexaminés.

Ainsi dans les deux cas, la construction de S peut se poursuivre en s'appuyant sur des ensembles de phrases et de définitions qui n'ont pas encore été associés.

4.1.2 Présence de la stratégie d'énumération de la collection de définitions

Nous décrivons maintenant les observables attendus dans le cas où la construction de la relation prend appui sur la collection de définitions. Cela signifie que, disposant d'une définition du verbe relever, le sujet se demande dans quelle phrase elle est mise en œuvre.

Le sujet construit donc des éléments de Π qui contiennent D_1 . Il cherche donc dans l'ensemble P quel élément peut être associé à D_1 . Dans cette stratégie, le premier élément de S est construit après trois tentatives de mise en relation. Ce premier élément est (P_3, D_1) .

Ces tentatives de mise en relation prennent la même forme que celles décrites précédemment (des rapprochements d'étiquettes ou des déplacements de règle).

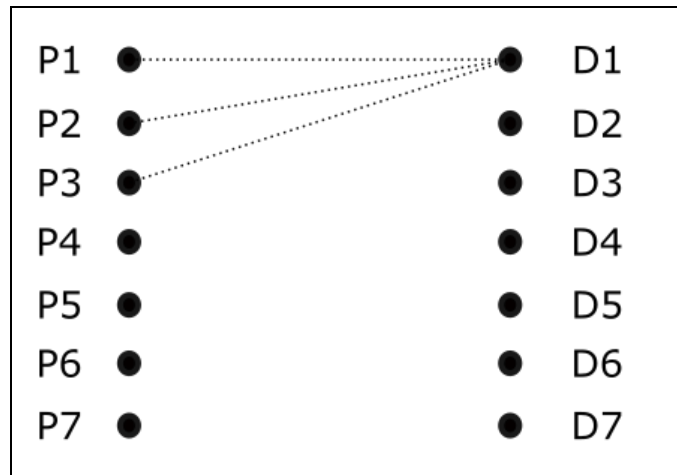


Figure 203 : Situation du verbe, configuration non modifiable, les tentatives de mise en relation pour construire le premier élément de S

La construction du premier élément de S pourrait être observée dans la configuration modifiable par le déplacement d'étiquettes suivant.

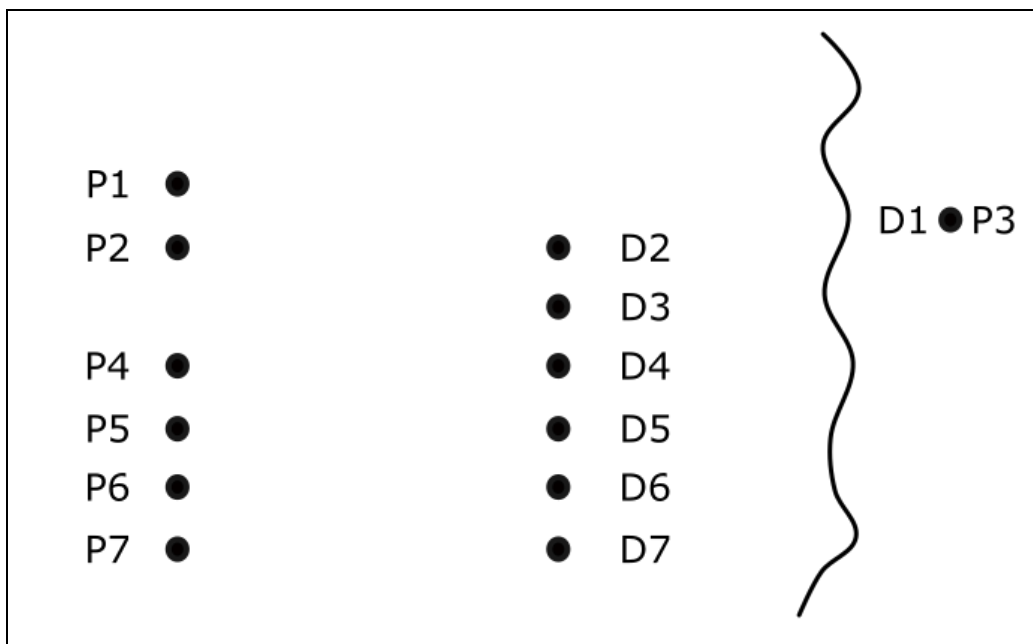


Figure 204 : : Situation du verbe, configuration modifiable, geste d'extraction des éléments de P et de D qui viennent d'être mis en relation

La construction du premier élément de S pourrait être observée dans la configuration non modifiable par la réalisation du geste graphique suivant.

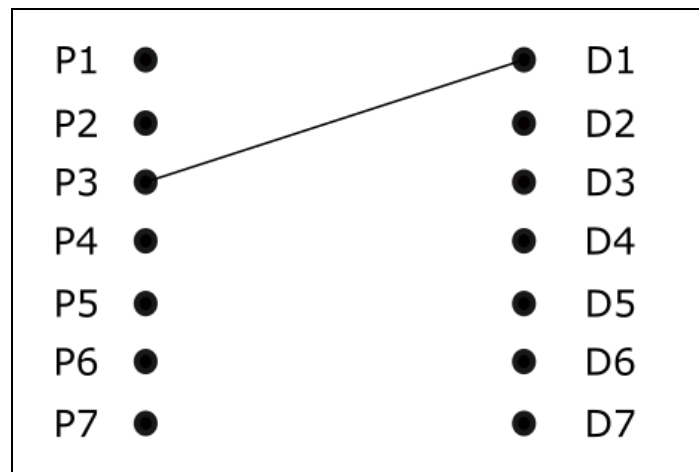


Figure 205 : : Situation du verbe, configuration non modifiable, geste graphique marquant la construction du premier couple de S

La mise en relation d'éléments de P et de D prend deux formes distinctes que nous avons exhibées. La présence de stratégies peut être identifiée en observant les tentatives de mises en relation et les mises en relation elles-mêmes. C'est l'étude de l'ordre dans elles sont réalisées qui peut permettre de repérer la stratégie mise en œuvre.

Nous nous demandons notamment si les deux collections conservent un rôle identique pendant toute la durée des traitements. Nous cherchons à observer comment s'organise l'énumération de chacune des deux collections.

Dans l'analyse du cas modifiable, nous avons verrouillé la variable spatiale en imposant la disposition des éléments des deux collections. Cela nous permet de donner une description du processus de construction de la solution qui s'appuie sur les mêmes couples dans les deux configurations. Cela ne sera pas le cas dans les situations observées puisque les sujets n'ont aucune raison de disposer les étiquettes telles que nous avons décrites précédemment.

4.2 Analyse *a priori* de la situation de l'alphabet

L'analyse logique nous a amené à considérer les éléments de la collection comme des n-uplets. Les mots dont il est question dans cette situation ne doivent donc pas être considérés comme des unités linguistiques porteuses d'un quelconque sens, mais bien comme des suites ordonnées de lettres. La réalisation de la tâche ne met pas en œuvre des connaissances de lecture.

Margolinas (2016) précise le sens du terme « mot » :

« Le terme de « mot » désigne cet usage complet qui établit un lien entre la graphie, l'oralisation et le sens » (page 20)

Le terme « graphie-mot » est introduit pour désigner l'objet considéré dans une seule dimension, sa graphie. Ainsi, le recours à ce terme permet « d'alerter le lecteur qui, sachant lire, éprouve des difficultés à comprendre le point de vue de l'élève. » (page 20)

Les sujets auxquels cette situation est proposée savent lire. Pour autant, ces connaissances de lecture ne sont pas nécessaires puisque la seule connaissance linguistique mise en œuvre dans cette situation est la connaissance de l'ordre sur l'alphabet.

La première partie de notre analyse *a priori* s'est abstrait des contingences de la matérialité dans laquelle la situation était proposée. Elle a permis de dégager trois stratégies de résolution : une stratégie par insertion, une stratégie par sélection du plus petit élément et une stratégie de partitionnement qui peut être combinée aux deux précédentes.

Nous poursuivons notre analyse *a priori* en cherchant à déterminer l'impact des conditions matérielles dans laquelle est proposée la situation sur les stratégies qui peuvent être mises en œuvre et sur les difficultés qui peuvent en découler.

Notre travail a mis en évidence l'importance de la macro-variable «configuration modifiable» sur les difficultés d'énumération. Nous faisons l'hypothèse que les stratégies d'énumération en jeu dans chacune des deux variations ne sont pas les mêmes et que nous retrouvons certains mécanismes que nous avons déjà exhibés dans l'étude des situations mathématiques précédentes.

4.2.1 Étude de la stratégie par sélection

Commençons par examiner comment la liste solution peut être matériellement fabriquée. La liste solution a été définie comme le dernier élément d'une suite de listes que nous avons notées L_i .

La stratégie par sélection du plus petit élément repose sur la production de la suite des plus petits éléments successifs.

Dans le cas de la configuration non modifiable, cette suite des plus petits éléments successifs est écrite de gauche à droite ou de haut en bas, au fur et à mesure que les étapes de la stratégie produisent un nouvel élément de cette liste.

Dans le cas de la configuration modifiable, le sujet doit produire un ordre sur les étiquettes des graphie-mots qu'il sélectionne. Cet ordre peut être construit en s'appuyant sur les

conventions spatiales de l'écrit. Il est aussi possible de superposer les étiquettes les unes sur les autres.

Dans les deux cas, des solutions existent pour construire la suite des L_i , et notamment le dernier élément de cette suite.

Examinons maintenant comment gérer la constitution de la suite des ensembles dans lesquels il faut chercher le plus petit élément. Dans cette stratégie, à chaque étape est construit un nouvel ensemble de graphie-mots dans lequel il faut déterminer le plus petit élément. La difficulté est de contrôler la fabrication de ces ensembles dont la taille diminue à chaque itération.

Dans le cas de la configuration non modifiable, cet ensemble est une liste élaborée en éliminant un des éléments de la liste précédente (le plus petit). Cet élément éliminé peut occuper *a priori* n'importe quelle place dans la liste écrite des graphie-mots. Le sujet est autorisé à écrire sur son énoncé. La production d'une marque écrite à côté des éléments ou sur les éléments de la liste-énoncé est un moyen de distinguer les éléments traités des éléments non encore traités, et donc de contrôler ainsi la constitution de la suite des E_i . La liste des éléments non encore traités est alors le sous-ensemble des éléments non marqués de la liste énoncé.

Dans le cas de la configuration modifiable, le déplacement des éléments traités vers un espace spécifique élimine les éléments traités de l'espace où sont posées les étiquettes. L'ensemble des éléments non traités est constitué des étiquettes qui n'ont pas encore été déplacées vers la liste solution.

La construction de la suite des E_i se règle de deux manières différentes : la production de signes graphiques dans la variante « configuration non modifiable » et la construction d'espaces dans la variante « configuration modifiable ».

La stratégie par sélection est donc susceptible d'apparaître dans les deux variantes proposées.

4.2.2 Etude de la stratégie par insertion

Nous étudions maintenant la place de la matérialité dans la stratégie par insertion. Cette stratégie se caractérise par la construction d'une suite de listes L_i dans lesquelles la position des éléments est susceptible d'être modifiée à chaque étape.

Dans le cas d'une configuration modifiable, les éléments de chaque L_i sont constitués en liste par une organisation spatiale. La permutation de deux éléments de la liste se fait par la permutation des deux étiquettes correspondantes.

Dans le cas d'une configuration non modifiable, la réalisation d'une permutation ne peut pas être gérée par le déplacement. Elle peut être réalisée par un geste d'écriture.

Faisons fonctionner l'algorithme en nous demandant à chaque étape ce que pourrait être la suite des écrits qui convergent vers la réponse. Nous n'interrogeons pas pour l'instant la possibilité effective que la stratégie apparaisse. Nous étudions la nature des traces écrites observées si elle est mise en œuvre.

Nous étudions comment l'écrit permet de gérer la fabrication d'une suite de listes. Notre description est constituée de la suite des traces écrites réalisés à l'issue de chaque étape.

Nous faisons figurer dans un tableau à deux colonnes le numéro d'étape dans la première colonne et la trace écrit produite dans la deuxième colonne.

Le résultat de l'étape 1 est l'écriture d'une liste d'un élément, le graphie-mot « canari »..

Etape 1	<i>canari</i>
---------	---------------

Examinons l'étape 2. Le premier traitement est la comparaison de « canari » avec « colombe ». Pour rendre compte d'un ordre entre deux graphie-mots écrits sur une feuille, deux solutions ordinaires existent. La liste peut se développer soit en ligne, soit en colonne.

Les traces écrites produites à l'issue de l'étape 2 (les différentes versions de L_2) peuvent prendre deux formes :

La liste qui se développe en ligne. Dans le cas d'un développement en ligne, l'écrit prévoit l'utilisation d'un séparateur pour distinguer deux graphie-mots consécutifs. Dans cette description, nous utilisons la virgule comme séparateur.

Etape 2	<i>canari , colombe</i>
---------	-------------------------

La liste qui se développe en colonne. Dans un développement en colonne, la séparation est prise en charge par le changement de ligne.

Etape 2	<i>canari</i> <i>colombe</i>
---------	---------------------------------

L'étape 3 de l'algorithme permet de poursuivre l'énumération de la collection des éléments non traités et examine l'élément « dinde ». Le couple (colombe, dinde) est bien ordonné.

La liste L_3 est écrite à partir de L_2 .

Présentons les deux versions de L_3 , la version ligne, puis la version colonne.

Etape 3	<i>canari , colombe, dinde</i>
---------	--------------------------------

Etape 3	<i>canari</i> <i>colombe</i> <i>dinde</i>
---------	---

La production des trois premiers éléments de la suite des L_i s'effectue en fait sans modification de la position des mots dans la liste. Elle ne nécessite pas de geste graphique spécifique pour traduire ce résultat.

L'étape 4 examine l'élément « cygne ». L'étude du couple (dinde, cygne) engendre une remise en cause de l'ordre des graphie-mots de la liste L_4 par rapport à l'ordre dans lequel ils sont écrits dans L_3 . Pour avoir une trace écrite de l'état de L_4 , le graphie-mot « dinde » doit être placé après le mot « cygne ».

Voici deux variations que pourrait prendre cette réécriture dans le contexte d'écriture en ligne.

Traces écrites produites à l'issue de l'étape 4, version ligne variation 1 :

Etape 4	<i>canari , colombe, dinde, cygne, dinde</i>
---------	---

Traces écrites produites à l'issue de l'étape 4, version ligne variation 2 :

Etape 4	<i>canari colombe dinde</i> <i>canari colombe cygne dinde</i>
---------	--

Elles sont un peu différentes sur le fond. Dans la première variation, L_4 est produite comme une modification de L_3 . Dans la seconde variation, L_4 est réécrite complètement.

Examinons une variation possible autour de la version colonne.

Etape 4	<i>canari</i> <i>colonne</i>
---------	---------------------------------

	<i>dinde cygne</i> <i>dinde</i>
--	------------------------------------

Dans cette version colonne, le graphie-mot « dinde » est barré et remplacé sur la même ligne par l'élément avec lequel il doit être permuté. Le graphie-mot « dinde » est recopié la ligne en -dessous car il est inférieur au graphie-mot étudié.

La version ci-dessus utilise deux directions de la feuille pour limiter les réécritures de mots. Cette version présente un caractère bidirectionnel qui n'est pas présent dans les deux versions ligne que nous venons d'exposer. Ces deux versions ont pour caractéristique principale d'être unidirectionnelles.

La caractéristique du nombre de directions utilisées pour écrire la liste (une ou deux) est plus fonctionnelle que les versions ligne et colonne qui ont servi de prémisses à notre analyse.

Ecrivons maintenant les différentes versions produites dans les étapes suivantes.

Traces écrites produites, version unidirectionnelle variation 1 :

Etape 2	<i>canari , colombe</i>
Etape 3	<i>canari, colombe, dinde</i>
Etape 4	<i>canari, colombe, dinde, cygne, dinde</i>
Etape 5	<i>canari, colombe, dinde, cygne, dinde, chameau, colombe, cygne, dinde</i>
Etape 6	<i>canari, colombe, dinde, cygne, dinde, chameau, colombe, cygne, dinde, cochon, colombe, cygne, dinde</i>

Traces écrites produites, version unidirectionnelle variation 2 :

Etape 2	<i>canari, colombe</i>
Etape 3	<i>canari, colombe dinde</i>
Etape 4	<i>canari, colombe, dinde</i> <i>canari, colombe, cygne, dinde</i>
Etape 5	<i>canari, colombe, dinde</i> <i>canari, colombe, cygne, dinde</i> <i>canari, chameau, colombe, cygne, dinde</i>
Etape 6	<i>canari, colombe, dinde</i> <i>canari, colombe, cygne, dinde</i> <i>canari, chameau, colombe, cygne, dinde</i> <i>canari, chameau, cochon, colombe, cygne, dinde</i>

Traces écrites produites, version bidirectionnelle :

Etape 2	canari colombe
Etape 3	canari colombe dinde
Etape 4	canari colombe dinde cygne dinde
Etape 5	canari colombe chameau dinde cygne colombe dinde cygne dinde
Etape 6	canari colombe chameau dinde cygne colombe cochon dinde cygne colombe dinde cygne dinde

La forme qui consiste à produire une liste écrite est coûteuse en écrits intermédiaires car cette liste est susceptible, à chaque traitement d'un nouvel élément, d'être réécrite. Le contexte matériel proposé par la situation du manuel scolaire rend la mise en œuvre de cette procédure très lourde.

Intéressons-nous maintenant à la production des E_i ,

Dans le cas des configurations modifiables, la production de chaque élément de cette suite d'ensembles est assurée par le déplacement des étiquettes d'un espace à l'autre. A chaque étape, une étiquette quitte l'ensemble des éléments non traités pour être insérée dans la liste

solution. Chaque graphie-mot figure sur une étiquette et une seule. Pour qu'un graphie-mot manque dans la liste solution, il faudrait par exemple qu'une étiquette tombe de la table. L'organisation matérielle prend en charge fortement le contrôle de l'énumération de cette collection.

Ce n'est pas le cas avec les configurations non modifiables. La liste solution est composée de mots recopiés. Concernant la fabrication de la liste solution, il est possible d'oublier de copier un graphie-mot, voire de le copier deux fois. Le contrôle de la fabrication des E_i est assuré par le marquage des éléments déjà traités.

La stratégie par insertion se caractérise par la fabrication d'une liste qui présente un caractère dynamique. Les éléments sont comparés deux par deux et la solution construite ne fixe la place de chaque élément qu'à la dernière étape de l'algorithme. Cette stratégie rend délicate la production des L_i dans le cas des configurations non modifiables. Elle nécessite aussi dans ce cas la réalisation d'un geste spécifique tel que le marquage pour contrôler la fabrication de la suites des E_i . Ces aspects sont en partie pris en charge par le matériel dans le cas des configurations modifiables. Une simple séparation spatiale des éléments examinés et non encore examinés suffit pour contrôler l'élaboration de ces ensembles.

L'analyse logique a permis de proposer des variations des deux stratégies reposant sur l'élaboration de partitions de l'ensemble des mots. Nous pensons pouvoir observer la production effective des partitions dans le cas de la configuration modifiable. En effet, le fait de regrouper spatialement les deux graphie-mots qui commencent par la lettre d pourra être interpréter comme la construction de fait de classes de mots ayant la même première lettre. La construction de classes nous semble plus difficile à observer dans la situation où la configuration est non modifiable.

5. Dispositif expérimental

La collecte de données s'est déroulée dans une classe de CM1/CM2 de centre-ville. La passation se déroule en fin d'année scolaire, au mois de juin, en dehors de la classe.

Quelques précisions sur les conditions matérielles de la passation.

Dans le cas où la configuration est modifiable, les collections sont des étiquettes découpées que le sujet doit organiser spatialement de manière à rendre compte de l'ordre qu'il a construit. Pour que l'état initial des collections d'étiquettes soit le plus neutre possible, celles-

ci lui sont présentées dans des enveloppes. Lors de cette présentation, l'expérimentateur demande au sujet d'ouvrir les enveloppes et de déposer leur contenu sur la table. C'est le sujet qui produit lui-même une configuration spatiale initiale.

Chaque sujet se voit proposer les deux situations, avec à chaque fois une des deux configurations.

Les sujets passent un par un et sont filmés. 18 sujets sont passés, ce qui a donné lieu à la réalisation de 36 vidéos.

Le tableau présenté en annexe 18 présente les données collectées dans les deux situations de français. Il permet de comprendre comment s'est organisée la collecte et comment ont été organisées les rotations d'énoncés entre les différents sujets.

Les 36 vidéos ont été transcrites selon des modalités identiques à celles qui ont été mises en œuvre dans les chapitres précédents. Les transcriptions de la situation du verbe figurent en annexe 19 et les transcriptions de la situation de l'alphabet figurent en annexe 20.

6. Analyse *a posteriori* des situations

L'objectif de cette collecte de données est de fournir des illustrations aux analyses *a priori* produites. L'analyse *a posteriori* ne présente donc pas le caractère détaillé mis en œuvre dans les autres situations. Pour autant, elle constitue un support essentiel à la réflexion que nous développons sur l'énumération. L'observation et l'analyse des écarts par rapport aux procédures attendues reste un moteur dans le développement de notre réflexion.

Ce sont ces analyses que nous présentons pour les deux situations observées.

6.1 Analyse *a posteriori* de la situation du verbe

La situation du verbe a été proposée à 16 sujets : 8 sujets pour le cas « configuration non modifiable » et 10 sujets pour cas « configuration modifiable ».

6.1.1 Analyse du cas « configuration non modifiable »

6.1.1.1 Une disparition de la variété des formes d'écrits

Dans cette situation, la question de l'exhaustivité s'efface complètement pour ne plus laisser apparaître que la question de la construction de la relation. Nous observons très peu de gestes donnant des indications sur la nature des explorations qui sont conduites.

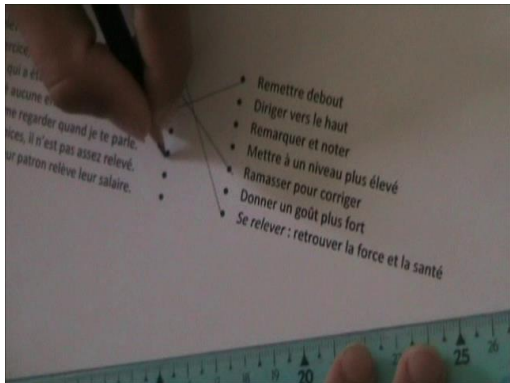
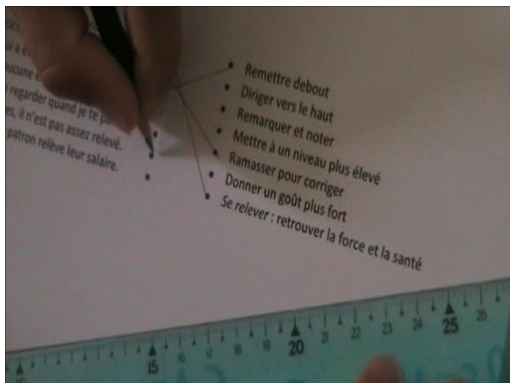
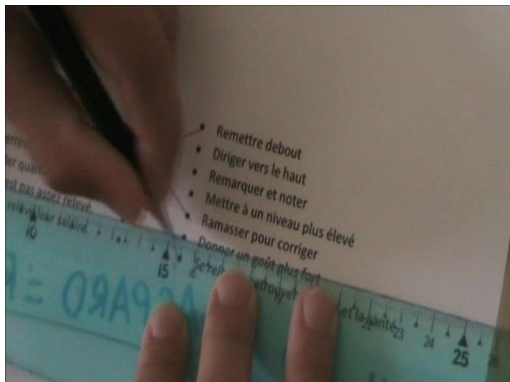
01 :08		<i>Le sujet pointe son crayon sur P5.</i>
01 :12		<i>Le sujet pointe maintenant son crayon sur P6.</i>
01 :18		<i>Le sujet relie à la règle la phrase P6 à la définition D6.</i>

Tableau 103 : Sujet 2, film 4 - Des gestes qui traduisent l'exploration des collections

Ce sujet pointe des éléments de la collection des phrases. Ces pointages successifs ne sont pas tous suivis par un tracé.

Ce geste de pointage est peu observé chez les sujets.

Par ailleurs, les sujets ne produisent pas de formes écrites autres que celles qui visent à matérialiser la relation. La feuille-énoncé est la feuille-solution. Il n'y a donc plus de support pour des marques intermédiaires. L'absence de nécessité de contrôler l'énumération tend à faire disparaître toute forme d'écrit autre que celle qui décrit la relation.

6.1.1.2 Une grande homogénéité des productions

Au-delà du fait que la relation soit correctement construite ou pas, les mécanismes de résolution que nous observons se ressemblent. Toutes les vidéos permettent d'observer la suite des traits que les sujets construisent entre les deux collections. Les conditions de la situation éliminent toute variété des gestes réalisés pour produire une réponse.

Les seuls objets d'observations qui restent sont :

- l'ordre dans lequel les éléments sont parcourus
- l'ordre dans lequel les traits sont réalisés par les sujets
- la manière dont les sujets gèrent les modifications d'une instance déjà construite de la relation.

6.1.1.3 Conséquences méthodologiques sur la transcription

Le travail de transcription s'est organisé en deux temps. Le premier temps a consisté, comme pour l'ensemble des vidéos sur lesquelles nous avons travaillé précédemment, à décrire la suite des actions que le sujet réalise. Ces descriptions se voulaient au plus proche des gestes élémentaires effectués par le sujet pour prendre en compte la matérialité. Ainsi, nous avons pris soin de mettre en évidence qu'un trait est réalisé entre deux éléments. Nous avons aussi spécifié le sens dans lequel ce geste de tracé est effectué.

Ces premières transcriptions rendaient difficilement lisibles l'ordre dans lequel les collections étaient énumérées. Nous avons donc produit une deuxième transcription, expurgée de toute dimension autre que la construction de la relation.

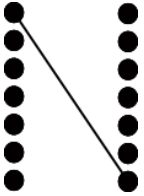
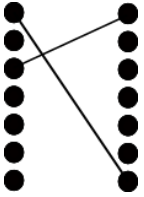
Suite des tracés réalisés	Couples formés
	(P1 ; D7)
	(P3 ; D1)

Tableau 104 : Sujet 15, film 30 - Extrait de la transcription de la suite des traitements

Nous nous appuyons donc sur des transcriptions du type de celle dont un extrait figure ci-dessus pour produire une analyse sur une des variations que nous avons repérée dans cette série d'observations.

6.1.1.4 Choix de l'ordre des collections énumérées

L'ordre dans lequel est construite la relation donne des indications sur l'ordre dans lequel les collections sont énumérées, et donc sur l'ordre dans lequel le sujet cherche à traiter les éléments.

Rappelons la disposition spatiale imposée au sujet : la collection des phrases à gauche de l'énoncé fait face à la collection des définitions à droite de l'énoncé. Chaque phrase est disposée sur une même ligne et se termine par une puce. Chaque définition est sur une ligne et commence par une puce. L'ergonomie de la situation suggère fortement d'utiliser l'espace entre les deux collections pour construire la relation en dessinant des traits qui joignent deux puces.

Nous observons des sujets qui mettent en œuvre une stratégie régulière dans la construction de la suite des traits.

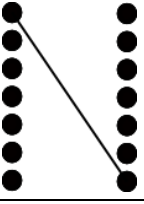
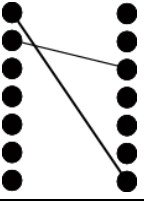
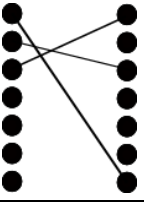
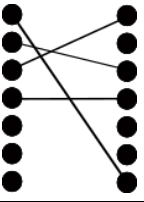
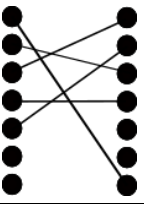
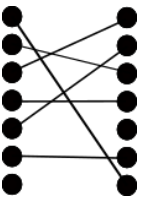
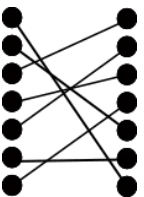
<i>Suite des tracés réalisés</i>	<i>Couples formés</i>	<i>Phrases traitées</i>	<i>Définitions traitées</i>
	<i>(P1 ; D7)</i>	<i>P1</i>	<i>D7</i>
	<i>(P2 ; D5)</i>	<i>P2</i>	<i>D5</i>
	<i>(P3 ; D1)</i>	<i>P3</i>	<i>D1</i>
	<i>(P4 ; D3)</i>	<i>P4</i>	<i>D2</i>
	<i>(P5 ; D2)</i>	<i>P5</i>	<i>D6</i>
	<i>(P6 ; D6)</i>	<i>P6</i>	<i>D4</i>
	<i>(P7 ; D4)</i>	<i>P7</i>	

Tableau 105 : Sujet 12, film 24 - Transcription de la suite des traitements

Comme d'autres (sujets 6 et 11), ce sujet construit la suite des couples en s'appuyant sur la raison graphique, l'ordre dans lequel sont présentées les phrases. Les tracés qu'il réalise le montrent. Ce sujet prend appui sur la liste des phrases pour déterminer à quelle définition du verbe « relever » elles correspondent. Il ne change pas de stratégie et la mène jusqu'à son

terme. C'est la collection des phrases qui est énumérée et chaque examen d'une phrase génère une énumération de la collection de définitions pour déterminer laquelle il convient d'associer à la phrase examinée.

Les deux collections ne jouent pas le même rôle. Il y a une collection qui est énumérée en premier. Nous observons une occurrence de la stratégie Énumération de la collection de phrases.

Nous n'avons pas observé de sujet qui mettait en œuvre la stratégie Énumération de la collection des définitions.

Les deux collections n'ont pas un rôle symétrique dans cette situation : une dissymétrie de nature (phrases/définitions) mais aussi une dissymétrie dans la disposition spatiale (la colonne des phrases est en premier dans la raison graphique par rapport à la colonne des définitions).

6.1.1.5 Une adaptation à la construction systématique de la relation

Les procédures que nous venons de décrire sont produites par des sujets qui ont réussi la tâche. Ils ont donc été capables de trouver pour chacune des phrases examinée la définition de « relever » correspondante (parmi les définitions restantes).

Que se passe-t-il quand un sujet n'est pas capable de déterminer à une des étapes de la construction de la relation le sens du verbe relever dans la phrase qu'il est en train de traiter ?

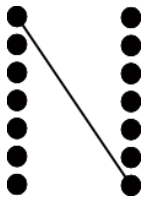
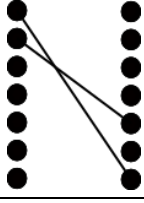
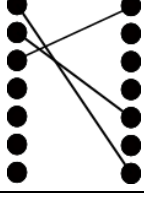
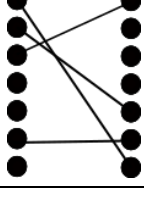
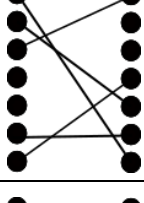
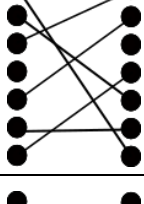
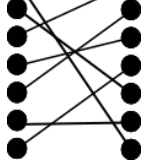
<i>Suite des tracés réalisés</i>	<i>Couples formés</i>	<i>Phrases traitées</i>	<i>Définition traitée</i>
	<i>(P1 ; D7)</i>	<i>P1</i>	<i>D7</i>
	<i>(P2 ; D5)</i>	<i>P2</i>	<i>D5</i>
	<i>(P3 ; D1)</i>	<i>P3</i>	<i>D1</i>
	<i>(P6 ; D6)</i>	<i>P6</i>	<i>D6</i>
	<i>(P7 ; D4)</i>	<i>P7</i>	<i>D4</i>
	<i>(P5 ; D2)</i>	<i>P5</i>	<i>D2</i>
	<i>(P4 ; D3)</i>	<i>P4</i>	<i>D4</i>

Tableau 106 : Sujet 2, film 4 – Une adaptation de la stratégie Énumération de la collection des phrases

Ce sujet commence à résoudre le problème en construisant la relation avec les trois premiers éléments de la collection de phrases. Ses connaissances de langue ne lui permettent sans doute pas de déterminer la définition qui doit entrer en relation avec P4.

Il choisit donc de différer la construction du couple qui fait intervenir P4. La même chose se passe avec la phrase P5.

Il poursuit l'énumération de la collection des phrases avec P6, puis P7 en construisant les deux couples qui font intervenir ces phrases.

La construction des couples faisant intervenir P4 et P5 est différée à un moment où le nombre de définitions restantes a été réduit (2 au moment de la construction du couple contenant P5, une seule définition restante pour la construction du couple contenant P4).

Ce sujet a donc été capable de différer le traitement d'un élément de la collection des phrases jusqu'au moment où la collection des définitions est réduite. C'est donc aussi sa capacité à différer le traitement qui permet à ce sujet de produire la bonne réponse.

Cette observation fait apparaître une stratégie que nous n'avions pas décrite dans l'analyse *a priori*. Produire des couples certains réduit de manière importante la taille des ensembles à énumérer. Dans la situation du verbe, si deux couples certains peuvent être déterminés, le passage de 5 à 7 de chacune des collections restant à mettre en relation fait passer le nombre de couples potentiels de 49 à 25. Construire deux couples certains divise presque par deux la taille de l'ensemble dans lequel on cherche les solutions. Si un troisième couple peut être constitué, c'est par plus de trois qu'est divisé l'ensemble des couples candidats.

La capacité à produire des couples-solutions certains est une stratégie qui permet de diminuer la taille des choix possibles, donc la complexité des énumérations..

6.1.2 Analyse du cas « configuration modifiable »

6.1.2.1 Caractéristiques de la situation

Dans le cas où les deux collections sont données sous forme d'étiquettes, l'expérimentateur ne contrôle pas la disposition spatiale produite quand le sujet sort chaque collection de son enveloppe.

Les deux enveloppes sont données dans le même geste au sujet ; il y a donc la volonté de ne pas induire d'ordre sur les enveloppes, donc sur les collections. Les sujets ouvrent d'ailleurs de manière variée l'enveloppe des étiquettes phrases ou l'enveloppe des étiquettes définitions en premier.

Tous les sujets observés vident complètement chacune des deux enveloppes avant de commencer à construire la relation d'association.

Une fois ces enveloppes vidées, les sujets produisent des organisations spatiales des collections d'étiquettes qui déterminent un ordre sur chacune des deux collections. Cet ordre est *a priori* différent pour chaque sujet.

Organisations spatiales et ordre sur les collections sont donc des éléments qui ne construisent pas le même état initial dans la situation.

Examinons la question de l'organisation spatiale produite sur les collections.

6.1.2.2 Variété des organisations spatiales

Nous observons une configuration spatiale qui rappelle celle mise en œuvre dans le cas « configuration non modifiable ».

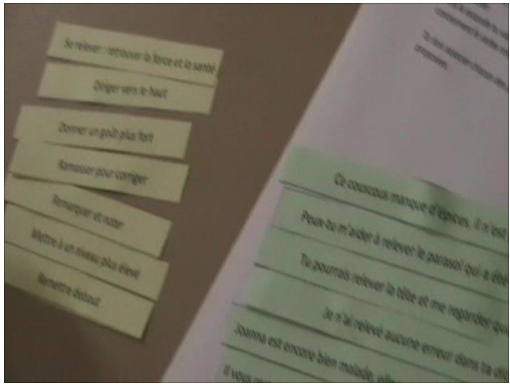
01:26		<p><i>Les deux collections d'étiquette sont maintenant disposées en colonne l'une face à l'autre.</i></p>
-------	--	---

Tableau 107 : Sujet 1, film 2 - Etat des collections au démarrage

Nous observons chez ce sujet la construction d'une disposition en colonnes de chacune des collections. Les collections sont disposées dans un espace littératié, et présentent à ce stade une même organisation, celles de listes ordonnées par la raison graphique.

Nous observons d'autres dispositions spatiales dans la construction de cet état initial.

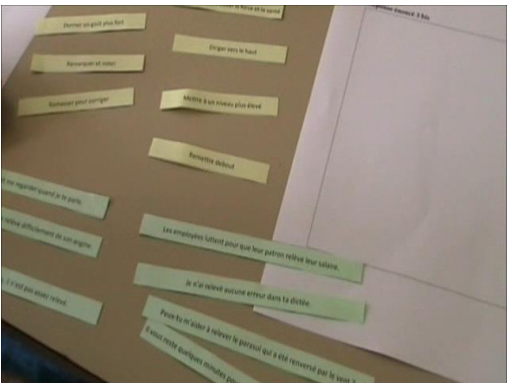
0 :57		<p><i>Il fait la même chose avec les étiquettes phrases et les étale aussi sur la table, juste en dessous des étiquettes définition.</i></p>
-------	---	--

Tableau 108 : Sujet 18, film 36 – Variation dans la construction de l'état initial des collections

Le sujet 18 a aussi produit une organisation symétrique des deux collections. Cette organisation a consisté à disposer les deux collections l'une sous l'autre. La disposition en

deux colonnes est littératié, mais elle ne correspond pas aux deux collections à traiter. Nous considérons que cet espace est partiellement littératié : la « place » du haut en (colonnes) et la place du bas (en colonne).

L'ensemble des éléments de chacune des deux collections est donc la juxtaposition de deux colonnes d'éléments. Après avoir disposé la première collection de cette manière, le sujet semble avoir cherché à prolonger avec des éléments de la seconde collection les colonnes qu'il avait construites avec des éléments de la première.

D'autres sujets ont produit des organisations dissymétriques des deux collections.

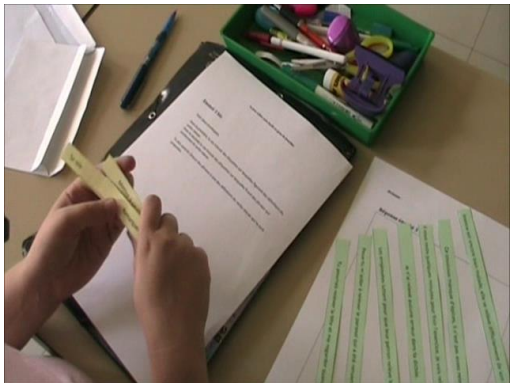
01 :00		<p><i>Le sujet sort les étiquettes définition de l'enveloppe et les tient dans sa main.</i></p>
--------	--	---

Tableau 109 : Sujet 13, film 26 - Exemple d'organisation dissymétrique de l'état initial des deux collections

Le sujet 13 a étalé la collection de phrases les uns sous les autres en faisant une colonne. Par contre, il choisit de conserver dans sa main la collection des définitions en pile (ordre). Bien que non disposées de la même manière dans l'espace, les deux collections sont toutes les deux ordonnées.

Par contre, les éléments des deux collections ne sont pas visibles de la même façon par le sujet. Seul un élément de la collection des phrases est visible à la fois sur le dessus de la pile alors que le sujet peut embrasser du regard tous les éléments de la collection des phrases et donc les lire.

6.1.2.3 Analyse des stratégies en appui sur le nombre d'espaces

Nous avons déjà produit dans la partie A des analyses des stratégies mises en œuvre en appui sur le repérage du nombre d'espace produits par les sujets. Appliquons ce type d'analyse à cette situation.

Lors de la phase de construction de la relation, certain sujets mettent en œuvre une stratégie de résolution qui s'appuie sur la construction de trois espaces de travail distincts.

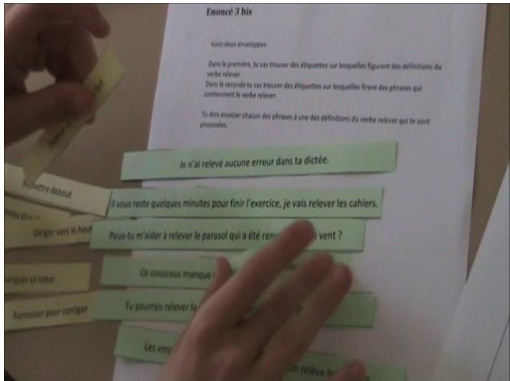
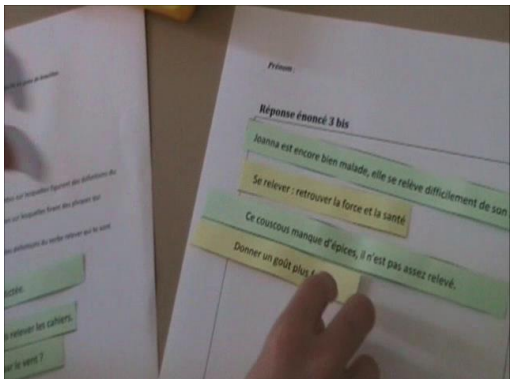
<p>02 :12</p>		<p>Après avoir observé les étiquettes phrase, il saisit avec sa main droite la quatrième à partir du haut (P6).</p>
<p>02 :18</p>		<p>Il place ces deux étiquettes sur sa feuille réponse, en dessous- des deux précédentes. Il respecte l'ordre dans lequel il a déjà placé les deux premières étiquettes (d'abord l'étiquette-phrase, puis l'étiquette-définition en dessous).</p>

Tableau 110 : Sujet 3, film 6 - Mise en évidence des trois espaces dans la construction de la relation

Les extraits de la transcription ci-dessus montrant comment le sujet 3 s'organise pour construire la relation. Après avoir construit deux espaces pour étaler les collections de phrases et de définitions, il saisit un élément de chacune de ces collections pour les transporter dans un troisième espace. Dans ce troisième espace, la relation est fugitivement matérialisée par une succession de déposes de paires d'étiquettes. L'observation de la première étape de la pose permet de comprendre que le premier élément du couple est une étiquette-phrase suivie d'une étiquette-définition. Cette organisation spatiale permet de contrôler la fin du traitement en séparant les éléments traités des éléments non encore traités.

Nous observons aussi des organisations spatiales à deux espaces.

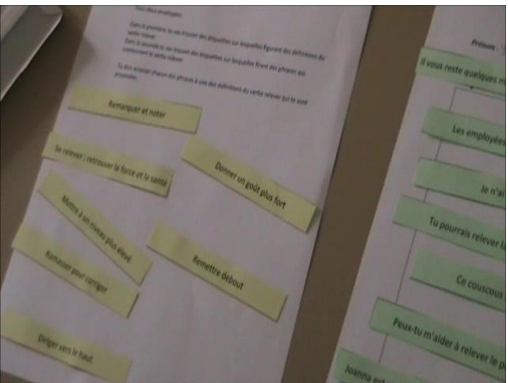
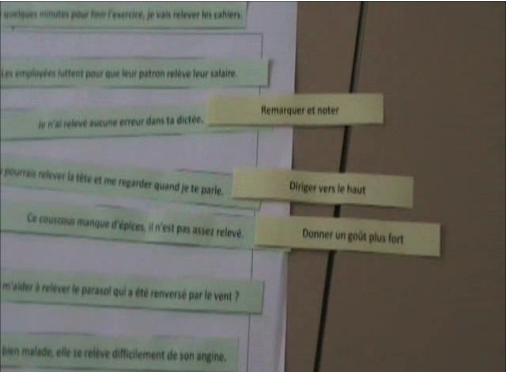
00 :44		<p>Remarquons la disposition des étiquettes définition qui ne sont pas toutes les unes sous les autres (D6 et D1 sont placées à droite de la colonne constituée par les 5 autres).</p>
[...]		
01 :48		<p>Ce que fait le sujet avec les étiquettes phrases n'est pas visible. Par contre, la pose de l'étiquette-définition D2 à côté de l'étiquette-phrase P5 est visible.</p>

Tableau 111 : Sujet 5, film 10 - Mise en évidence des trois espaces dans la construction de la relation

Le sujet 5 a lui aussi disposé les deux collections dans des espaces séparés. Notons que la collection des phrases est organisée en colonne alors que la collection des définitions ne l'est pas.

Pour construire un couple de la relation, le sujet saisit l'élément de la collection des définitions et le place dans l'alignement de l'élément de la collection des phrases qu'il lui associe.

Dans le cas de cette organisation, c'est l'épuisement du stock des étiquettes définition qui marque la fin du traitement.

Le second espace contient donc à la fois étiquettes phrases associées et des étiquettes phrases non encore associées. Comme les deux collections d'étiquettes sont présentées sur des supports de couleur différentes cela permet une discrimination visuelle immédiate des deux types d'éléments dans cet espace. Il n'y a pas de risque pour le sujet de confusion entre les deux types d'éléments.

Observons maintenant les difficultés rencontrées par un sujet dans la gestion des différents espaces.

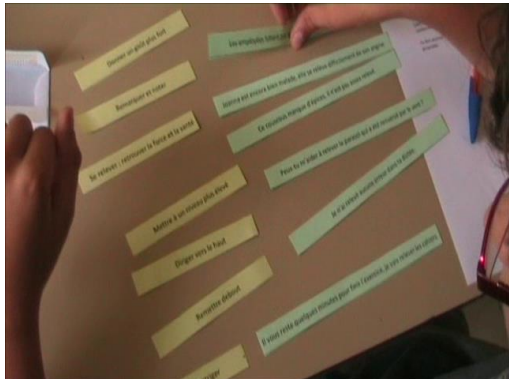
00 :54		Il saisit P7 avec sa main droite
--------	---	----------------------------------

Tableau 112 : Sujet 8, film 16 - Etat initial

Ce sujet construit un état initial tout à fait proche de ceux que nous avons décrit précédemment, dans lequel les deux collections sont face à face en deux colonnes.

Observons maintenant comment il procède pour construire la relation entre les éléments des deux collections.

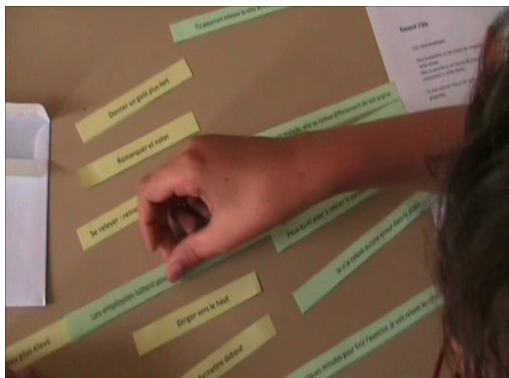
00 :58		Il juxtapose les deux étiquettes en les plaçant à la gauche de son espace de travail.
--------	--	---

Tableau 113 : Sujet 8, film 16 – Construction de la relation entre deux éléments

Les étiquettes sont étalées sur la table. Le sujet déplace par glissement des éléments des deux collections. Il fait se superposer partiellement les deux étiquettes et les place sur la gauche de l'endroit où figurent les deux stocks d'étiquettes non encore associées. Ces deux premières étiquettes se chevauchent légèrement, ce qui permet de matérialiser l'association entre ces deux éléments.

L'analyse *a priori* n'avait pas étudié les conditions matérielles de réalisation de l'association. Les observations font apparaître que l'association est matérialisée par l'organisation spatiale produite : soit les deux étiquettes du couple sont juxtaposées, soit elles sont superposées (partiellement).

Au fur et à mesure que des associations entre des étiquettes sont constituées, le sujet 8 a de plus en plus de mal à distinguer les étiquettes associées de celles qui ne le sont pas encore.

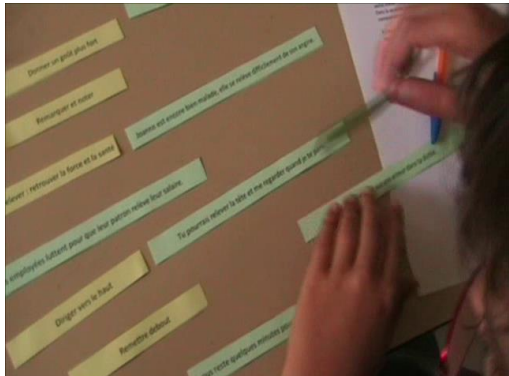
01 :44		Il écarte P4 en la déplaçant sur sa droite.
--------	---	---

Tableau 114 : Sujet 8, film 16 – Confusion du statut des paires d'étiquettes proches

A (01 :44), le sujet éloigne une étiquette-phrase d'une étiquette-définition alors que ces deux étiquettes se sont retrouvées l'une à côté de l'autre un peu par hasard, suite aux transformations qu'il a faites sur l'espace de travail quand il a eu besoin de faire de la place pour matérialiser des relations entre étiquettes.

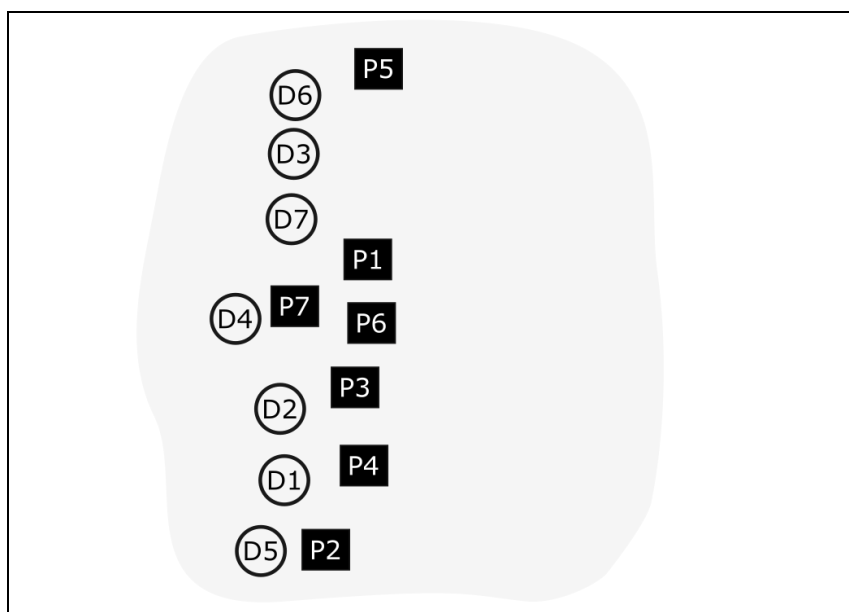


Tableau 115 : Sujet 8, film 16 - Schématisation du mélange éléments traités/ éléments non traités

Ce sujet a des difficultés à gérer son espace de travail. Il place les couples qu'il forme dans le même espace que celui où se trouvent les étiquettes phrases et les étiquettes définition qu'il n'a pas encore associées. Eléments traités et éléments non traités se mélangent dans le même espace.

6.1.2.4 Collections explorées et stratégies

Nous allons maintenant examiner comment les collections sont explorées.

Observons comment a procédé le sujet 3, en nous appuyant sur une transcription schématique de la suite des traitements.

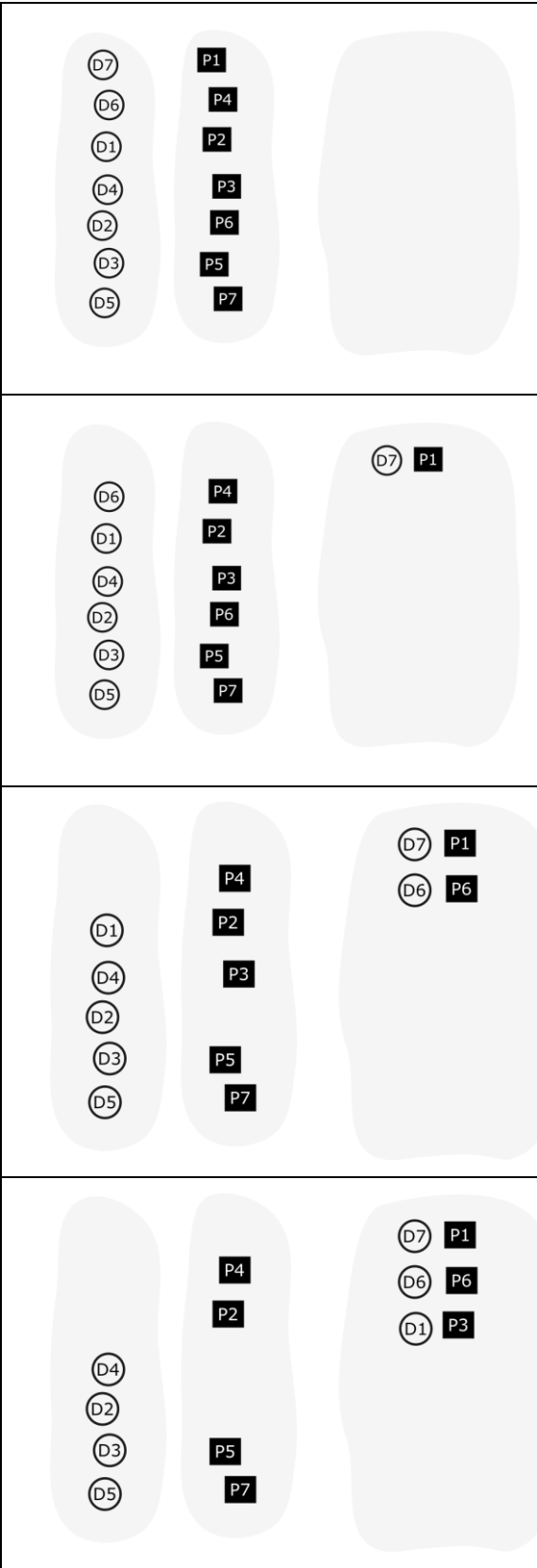


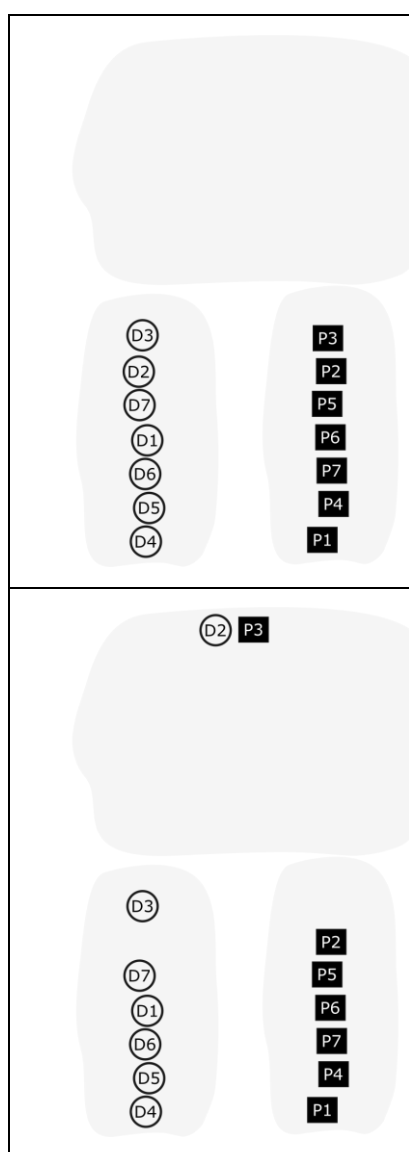
Tableau 116 : Sujet 3, film 6 – Transcription de la suite des traitements (extrait 1)

Ces extractions des transcriptions de la suite des traitements mettent en évidence que le sujet 3 a construit la relation à partir de l'exploration de la collection des définitions. En effet, les trois premiers couples qu'il construit le sont avec les trois premiers éléments de la collection des définitions telle qu'elle nous apparaît ordonnée en colonne.

L'énumération est ici pilotée par la collection des définitions. Le sujet cherche à trouver pour chacune des définitions qu'il examine à quelle phrase elles correspondent.

D'autres sujets ont piloté l'énumération par la collection des phrases.

Observons comment a procédé le sujet 17.



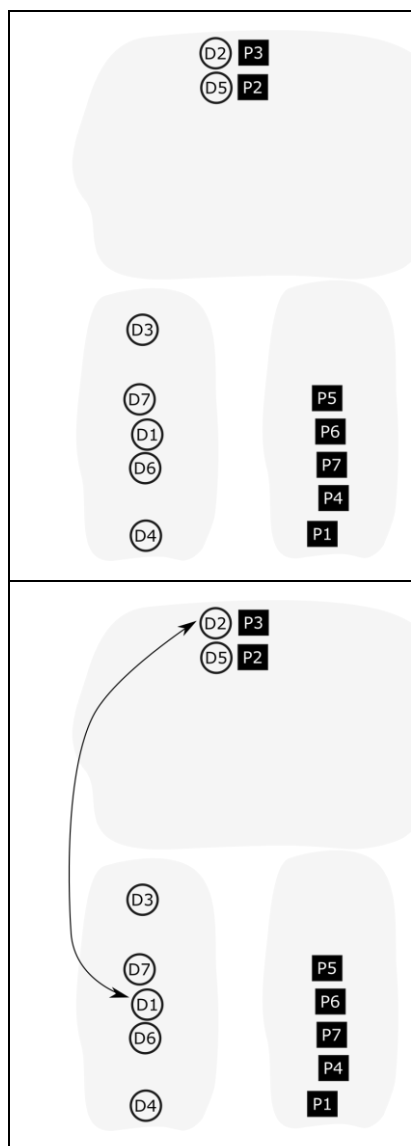
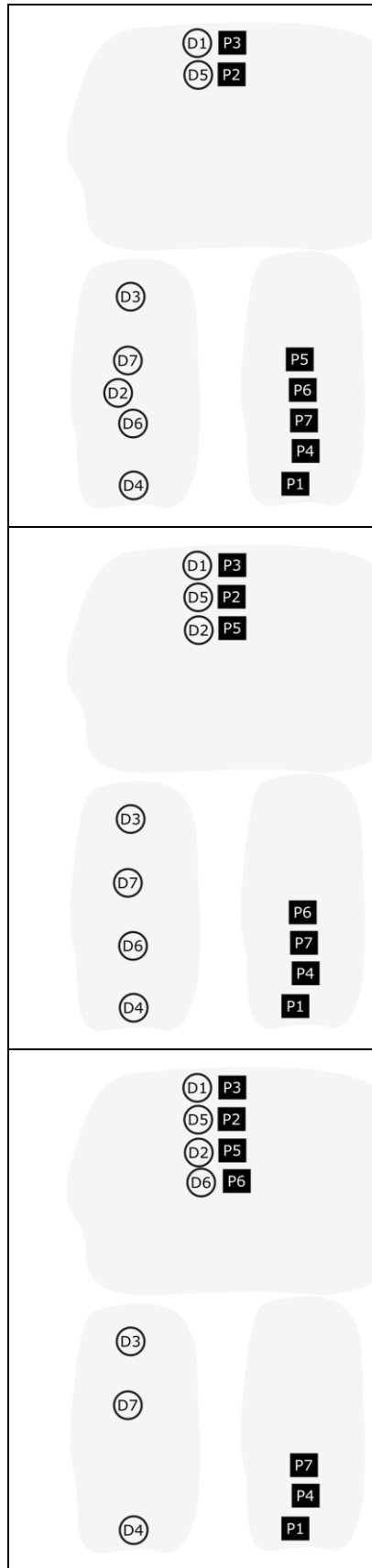


Tableau 117 : Sujet 17, film 34 – Transcription de la suite des traitements (extrait 1)

Pour ce sujet, ce sont les phrases qui servent d'appui à la construction de la relation. Les phrases sont examinées dans l'ordre où elles apparaissent (dans leur colonne, P3, puis P2, puis ...). L'énumération est donc pilotée par la collection des phrases.

Par ailleurs, le sujet modifie un couple en permutant deux éléments de la collection des définitions (et donc sans modifier la position qu'occupe l'élément de la collection des phrases).

Examinons comment le sujet 17 poursuit la construction de la relation.



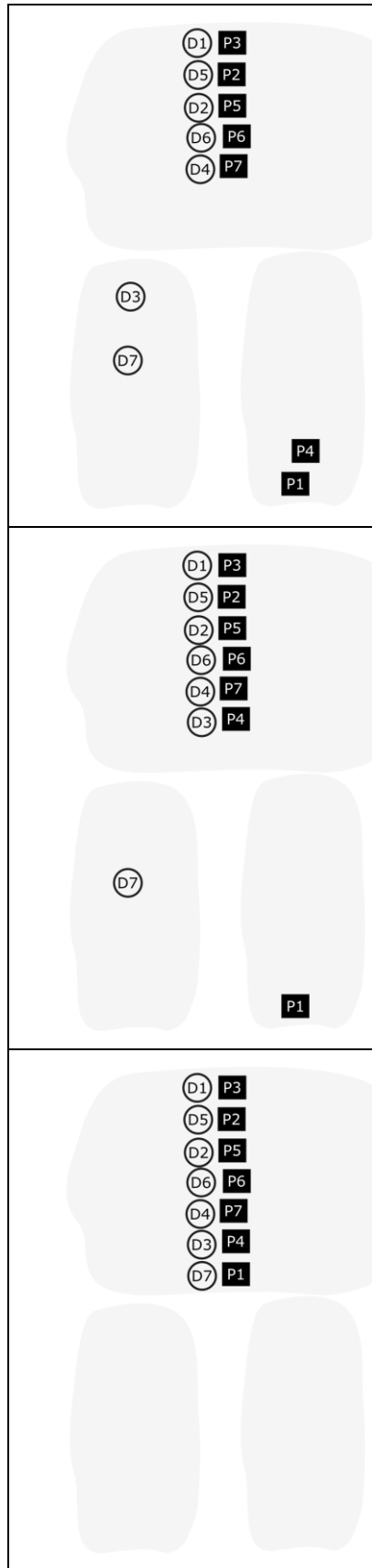


Tableau 118 : Sujet 17, film 34 – Transcription de la suite des traitements (extrait 2)

Ce sujet maintient la stratégie de construction des couples en appui sur l'ordre dans lequel les phrases apparaissent, sans chercher à différer l'association.

Nous nous sommes précédemment appuyés sur la procédure du sujet 3 pour mettre en évidence la présence de la stratégie d'énumération de la collection des phrases. Observons maintenant comment dont le sujet 3 poursuit le traitement. Nous présentons ici un second extrait de la transcription schématique de la suite des traitements, une fois les trois premiers couples constitués.

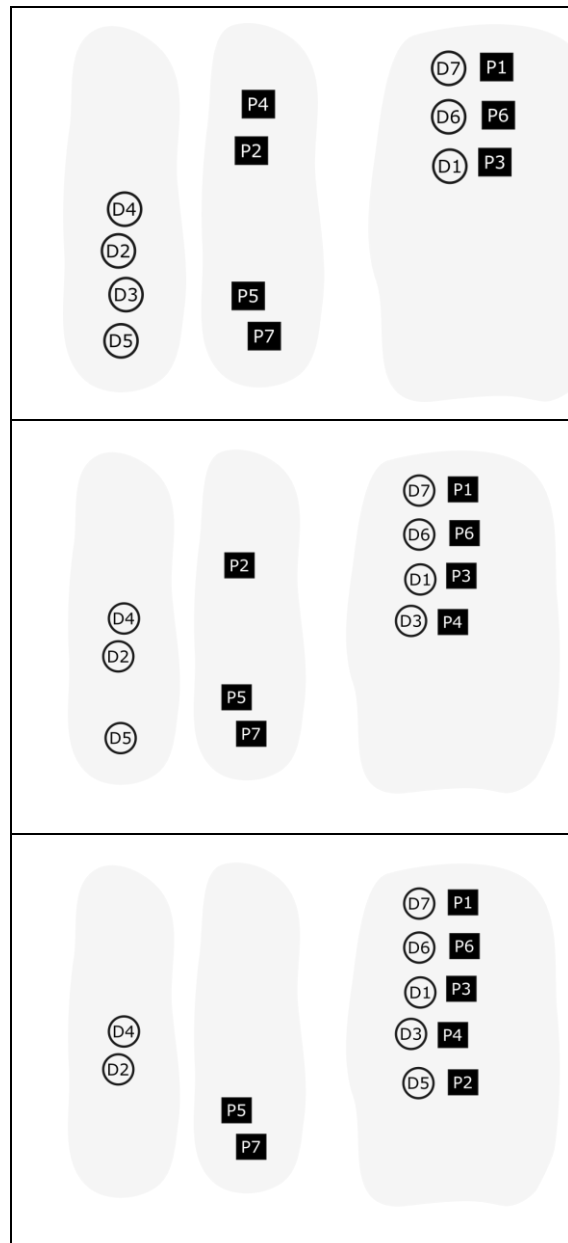


Tableau 119 : Sujet 3, film 6 – Transcription de la suite des traitements (extrait 2)

Ce sujet modifie la procédure mise en œuvre suite à la constitution des trois premiers couples. Si le sujet avait suivi la même procédure, il aurait dû constituer un couple avec l'étiquette-définition D4. Ce n'est pas ce qui se passe. Nous observons que les deux couples suivants qui sont construits ne le sont plus en appui sur l'énumération de la collection des définitions. Il semble que le sujet se soit appuyé sur la collection des phrases puisque ce sont des couples avec P4, puis P2 qui sont construits.

Le sujet met donc en œuvre ici une adaptation du même type de celle que nous avons observée dans le cas non déplaçable en modifiant la collection qui pilote l'exploration.

6.2 Analyse *a posteriori* de la situation de l'alphabet

La situation de l'alphabet a été proposée à 18 sujets : 10 sujets pour la configuration non modifiable et 8 sujets pour la configuration modifiable.

6.2.1 Analyse du cas « configuration modifiable »

6.2.1.1 Des organisations spatiales qui ont des points communs

Dans chacune des vidéos, nous observons des organisations spatiales qui conduisent à la fabrication d'au moins deux sous-ensembles disjoints : l'un qui regroupe les étiquettes qui n'ont pas encore été traitées et un autre qui regroupe les étiquettes que le sujet a déjà traité (dont il considère qu'il les a ordonnées).

Les deux extraits de transcriptions suivants mettent en évidence cet aspect.

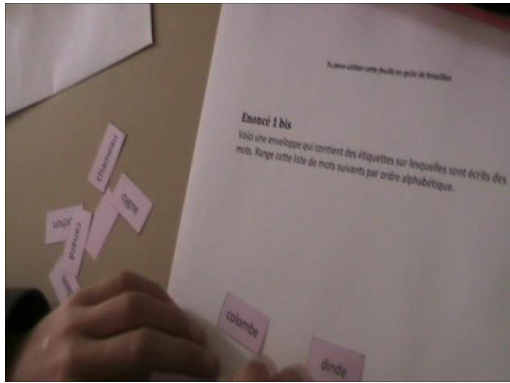
00 :19		<p><i>Il saisit l'étiquette qui se trouve au début de son travail sur la feuille réponse. Il la retourne. C'est l'étiquette <u>colombe</u>. Celle-ci est placée sur la même ligne, à gauche de l'étiquette <u>dinde</u>.</i></p> <p><i>Il saisit ensuite une nouvelle étiquette. C'est l'étiquette <u>corbeau</u>.</i></p>
--------	---	--

Tableau 120 : Sujet 4, film 7, variation sur la forme de la séparation éléments traités/ éléments non traités

Chez le sujet 4, le tas des éléments non traités est disposé en vrac, à côté de la feuille-énoncé.

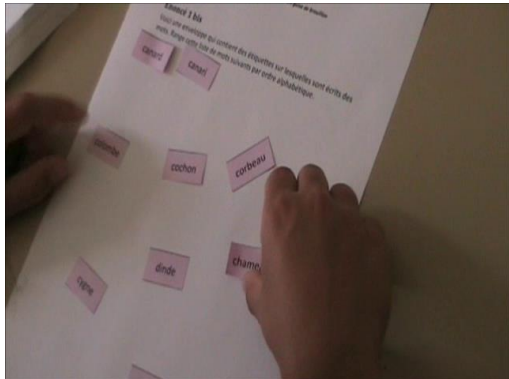
01:44		L'étiquette <u>chameau</u> est de nouveau saisie par le sujet.
-------	---	--

Tableau 121 : Sujet 2, film 3 : mise en évidence de la séparation entre éléments traités et éléments non traités

Chez le sujet 2, toutes les étiquettes sont étalées sur la feuille-énoncé et préalablement placées dans le sens de lecture.

Pour autant dans les deux cas, les deux espaces sont clairement constitués.

La conséquence de ces constructions spatiales est que le contrôle de la fin du traitement est déterminé par l'épuisement du stock des éléments à traiter.

6.2.1.2 Les stratégies rencontrées

Nous avons mis en évidence dans l'analyse *a priori* deux stratégies : une stratégie par insertion et une stratégie par sélection du plus petit élément.

La stratégie par sélection du plus petit élément

La plupart des sujets observés mettent en œuvre la stratégie de sélection du plus petit élément.

Si nous reprenons l'extrait de transcription précédent, nous observons que le sujet 2 a construit les deux premiers éléments de la réponse. Après avoir posé les étiquettes canard et canari sur la même ligne de sa feuille, il cherche dans l'ensemble des éléments non encore traités l'étiquette qui prendra place à droite de la dernière étiquette posée. Cet élément est bien le plus petit élément de l'ensemble des éléments non encore traités.

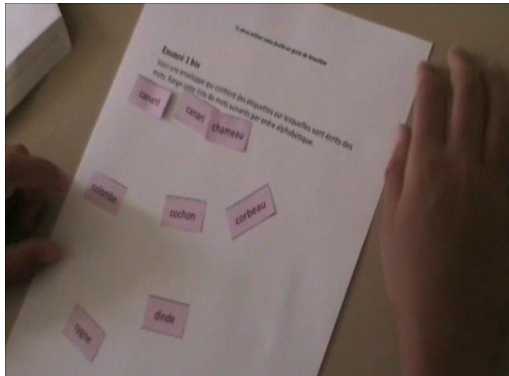
01:55		<p>L'étiquette chameau est finalement posée à côté de l'étiquette canard. Suit alors un nouveau temps d'observation sans qu'aucune autre étiquette ne soit saisie.</p>
-------	---	--

Tableau 122 : Sujet 2, film 3 - Placement du troisième élément de la liste solution

C'est l'étiquette **chameau** qui est choisie et posée juste à droite de l'étiquette qui occupait jusqu'à présent la dernière position dans la liste réponse.

Un double processus s'opère : des recherches successives du plus petit élément d'un ensemble et la constitution d'une liste ordonnée qui va être élaborée par les sélections successives du plus petit élément de l'ensemble des éléments non traités.

La stratégie par insertion

Nous avons observé chez le sujet 4 la mise en œuvre de la stratégie par insertion.

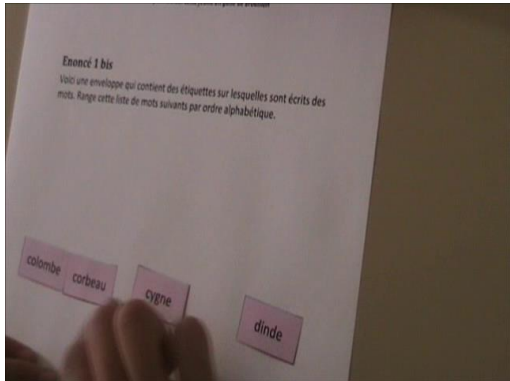
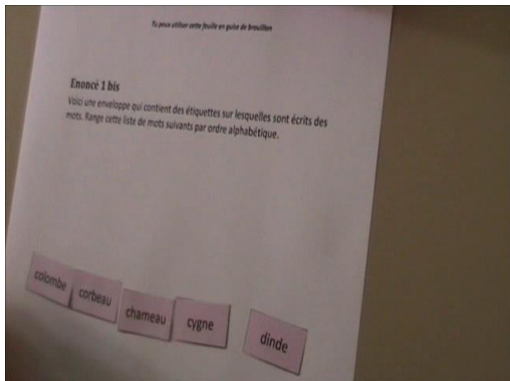
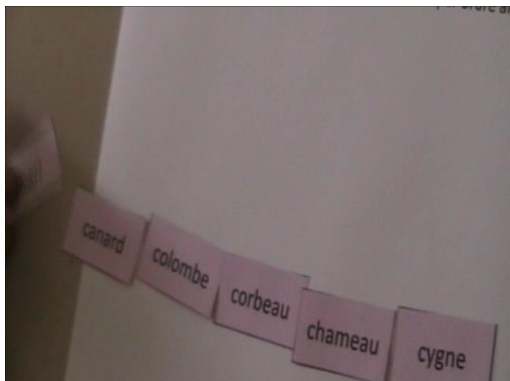
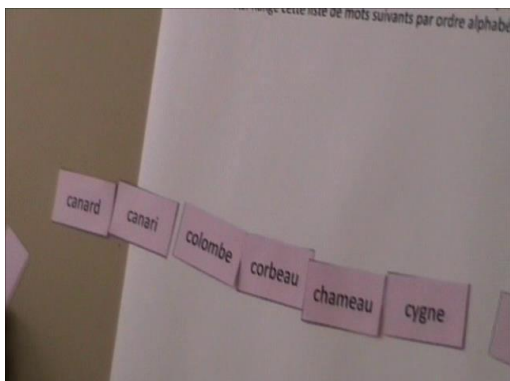
<p>00 :25</p>		<p>Le sujet a saisi l'étiquette cygne. Il écarte l'étiquette dinde (en la déplaçant sur sa droite) pour intercaler l'étiquette cygne entre l'étiquette corbeau et l'étiquette dinde.</p>
<p>00 :35</p>		<p>Le sujet a saisi une nouvelle étiquette (cygne). Il rapproche l'étiquette chameau de l'étiquette corbeau, ce qui suffit pour libérer l'espace pour intercaler l'étiquette cygne entre l'étiquette chameau et l'étiquette dinde.</p>
<p>00 :50</p>		<p>Le sujet saisit une nouvelle étiquette. C'est l'étiquette canard. Il la place au début de sa ligne.</p>
<p>00 :59</p>		<p>Le sujet saisit une nouvelle étiquette. C'est l'étiquette canari. Il est obligé de déplacer l'étiquette canard sur sa gauche pour intercaler canari entre canard et colombe. L'étiquette canard est maintenant complètement en dehors de la feuille réponse.</p>

Tableau 123 : Sujet 4, film 7 – Mise en œuvre de la stratégie de comparaison de proche en proche

Le sujet pioche dans le stock des éléments non encore traités une étiquette. Cet élément, choisi au hasard, doit trouver sa place dans la liste solution qui est en train d'être construite. L'extrait de la transcription met en évidence les gestes caractéristiques de la stratégie par

insertion. Des comparaisons de proche en proche suivies de permutations sont réalisées pour que l'élément que le sujet est en train de traiter occupe la bonne position dans la nouvelle liste réponse. Une fois l'élément positionné, la nouvelle liste réponse (la liste précédente à laquelle est en train d'être rajouté un élément) continue d'être bien ordonnée.

Le sujet 12 met en œuvre une stratégie par insertion en produisant une organisation de la liste réponse en colonne.

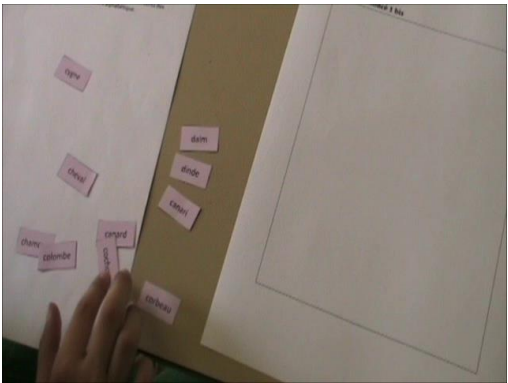
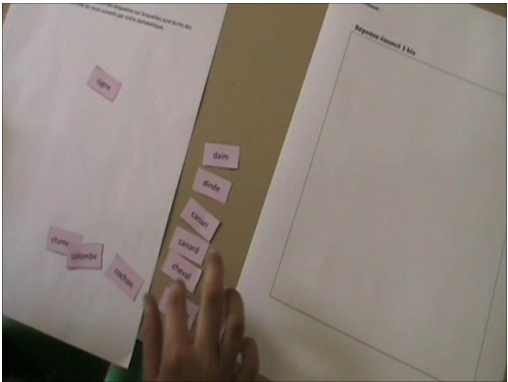
00 :56		<p>Il fait passer l'étiquette canari au-dessus de l'étiquette corbeau avant de faire glisser l'étiquette corbeau vers le bas de la table.</p>
01 :01		<p>Il fait glisser l'étiquette canard en dessous de l'étiquette canari puis fait glisser l'étiquette cheval en dessous de l'étiquette canard.</p>

Tableau 124 : Sujet 12, film 23 - – Mise en œuvre de la stratégie de comparaison de proche en proche

Même si sa liste solution est en colonne, le sujet est confronté aux mêmes problèmes d'intercalation que le sujet 4 et est contraint de procéder à des déplacements d'étiquettes pour permettre ces intercalations.

6.2.1.3 Partitionner pour diminuer la complexité

L'analyse *a priori* a montré comment la construction de partitions dans l'ensemble des éléments non encore traités permettait de diminuer le nombre de traitements.

Nous observons la présence de cette variation chez le sujet 11.

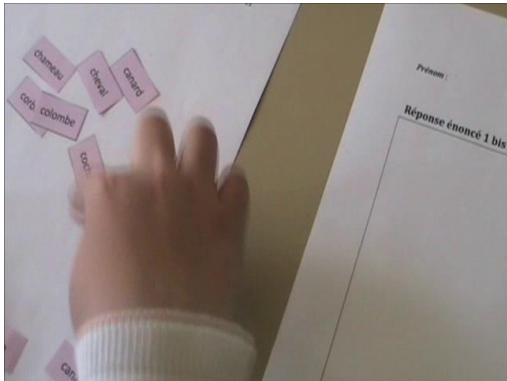
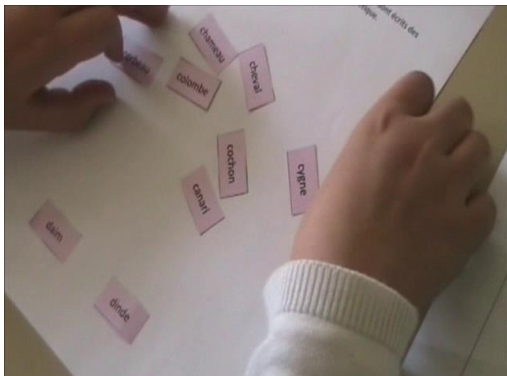
0 :18		<p>Le sujet fait glisser les étiquettes <u>chameau</u>, <u>cheval</u>, <u>colombe</u>, <u>corbeau</u>, <u>cochon</u>, <u>canari</u> et <u>cygne</u> à côté de l'étiquette <u>canard</u>.</p>
00 :27		<p>Seules deux étiquettes restent en bas de la feuille, les étiquettes <u>dinde</u> et <u>daim</u>.</p>

Tableau 125 : Sujet 11, film 21 - Constitution d'une partition pour diminuer la complexité du traitement

Dans ce cas, la partition est construite en déplaçant vers le haut toutes les étiquettes de mots qui commencent par la lettre « c ». Seules deux étiquettes ne sont pas déplacées et restent donc en bas de la feuille, séparées des précédentes : les deux étiquettes de mots qui ne commencent pas par la lettre « c ». C'est seulement après cette opération de subdivision de l'ensemble des éléments non traités que démarre la constitution de la liste réponse.

Observons une particularité spatiale mise en œuvre par le sujet 6.

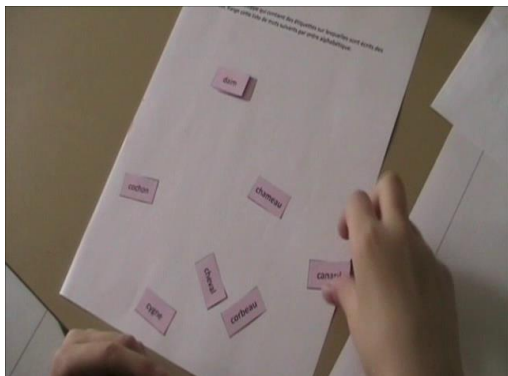
01 :03		<p>Les étiquettes <u>daim</u> et <u>dinde</u> été mises l'une sur l'autre et déplacées vers le haut de la feuille.</p>
--------	---	--

Tableau 126 : Sujet 6, film 11 - Constitution d'une partition pour diminuer la complexité du traitement

Le sujet 6 a placé les étiquettes des deux seuls mots qui commencent par la lettre « d » l'une sur l'autre en les plaçant au-dessus de l'espace dans lequel il va construire sa liste

réponse. Ce tas de deux étiquettes ne sera plus manipulé avant que toutes les étiquettes des mots commençant par la lettre « c » n'aient été placés dans la liste solution.

Revenons sur la procédure du sujet 12. Nous avons déjà décrit comment il mettait en œuvre la stratégie par insertion avec une organisation spatiale en colonne. Ce sujet a diminué le nombre de traitements élémentaires en construisant une partition dans sa liste réponse.

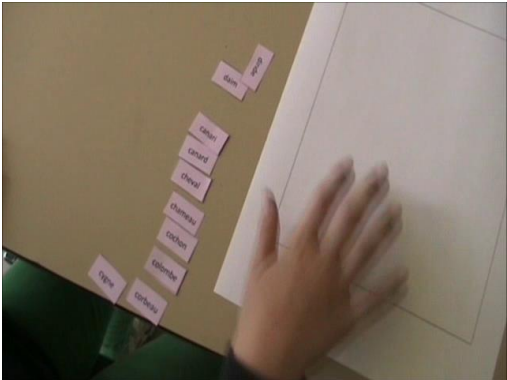
01 :26		<i>Il fait glisser sa feuille-énoncé sur sa gauche.</i>
--------	---	---

Tableau 127 : Sujet 12, film 23 – Construction d'une partition dans la liste réponse

En effet, pendant toute une partie de la phase de construction de la liste réponse, les étiquettes des mots daim et dinde sont placées au sommet de la liste, avec un espace entre des deux étiquettes et les autres étiquettes (étiquettes de mots qui commencent par la lettre « c »).

D'ailleurs, le sujet a tellement intégré que ces deux étiquettes sont à considérer comme à part par rapport aux autres qu'il les laisse au début de sa liste (alors que sa connaissance de l'alphabet lui a permis d'ordonner correctement toutes les étiquettes de mots qui commencent par la lettre « c »).

6.2.1.4 Des appuis sur la matérialité

L'orientation de l'étiquette comme indicateur du statut

Nous observons chez certains sujets la mise en œuvre de gestes qui apparaissent spécifiques aux conditions matérielles dans lesquelles nous avons placé les sujets.

Le caractère déplaçable des étiquettes permet de pouvoir positionner celles-ci dans une position qui montre qu'elles ont été examinées par le sujet.

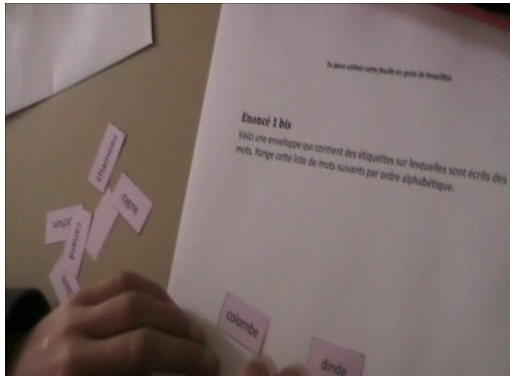
00 :19		<p>Il a saisi l'étiquette qui se trouvait au début de son travail sur la feuille réponse. Il l'a retournée. C'est l'étiquette <u>colombe</u>. Celle-ci est placée sur la même ligne, à gauche de l'étiquette <u>dinde</u>.</p> <p>Il saisit ensuite une nouvelle étiquette. C'est l'étiquette <u>corbeau</u>.</p>
--------	---	---

Tableau 128 : Sujet 2, film 4 - Disposition de l'étiquette pour indiquer son statut

Dans l'extrait sélectionné, les étiquettes qui ont été traitées sont disposées dans un ordre qui permet de les lire, alors que celles qui n'ont pas été traitées sont disposées aléatoirement, et en tout cas pas dans une position conventionnelle permettant la lecture. La réponse est conforme à la raison graphique alors que le stock est un tas.

Seuls les sujets mettant en œuvre une stratégie par insertion peuvent procéder de cette manière. Ils n'ont en effet pas à chercher le plus petit des éléments non traités puisqu'ils se contentent d'en choisir un au hasard.

Cohabitation des règles de l'espace matériel et de l'espace littéraire

Cette situation est l'occasion d'observer comment se côtoient des mécanismes de gestion d'ensembles ordonnés régis par la raison graphique et d'ensembles non ordonnés. Quelle que soit la stratégie mise en œuvre, le sujet doit construire une liste ordonnée à partir d'un ensemble non *a priori* ordonné. Nous avons mis en évidence les organisations en ligne ou en colonne des listes que le sujet construit et la variété des organisations spatiales de l'ensemble des éléments non encore traités.

Observons cet extrait de la transcription du travail du sujet 6.

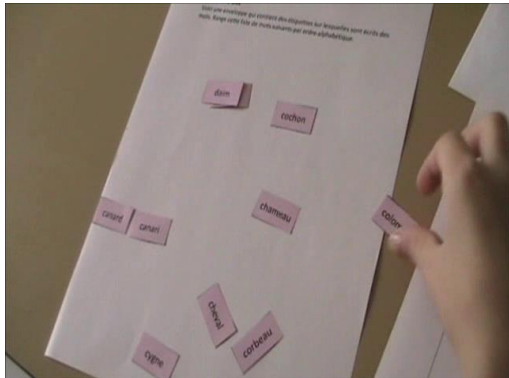
01 :12		<p>L'étiquette cochon est écartée et le sujet pose l'étiquette <u>canard</u>, puis l'étiquette <u>canari</u> juste à droite, sur une même ligne.</p>
--------	---	--

Tableau 129 : Sujet 6, film 11 – Cohabitation des règles de l'espace non écrit et de l'espace écrit

Ce sujet a disposé sur sa feuille-énoncé la liste qu'il est en train de construire et les éléments non encore ordonnés qui vont lui permettre de poursuivre la construction de sa liste.

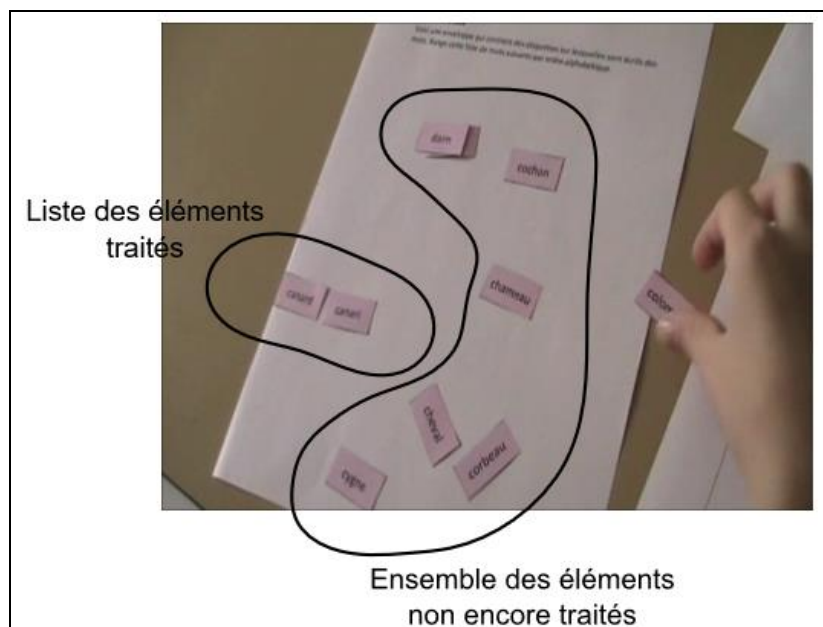


Figure 206: Description de la cohabitation de deux types d'espaces

Ainsi, le sujet fait cohabiter dans des espaces distincts mais parfois spatialement proches des mécanismes issus de l'univers de l'oralité avec ceux de la littératie.

Des gestes spécifiques de gestion de listes

Dans la construction de la liste réponse, un algorithme peut être mis en œuvre de manière incomplète et nécessiter que le sujet procède à un certain nombre de réajustements. Ainsi, le sujet peut se rendre compte que des éléments de la liste solution ne sont pas dans le bon ordre et nécessitent d'être permutés.

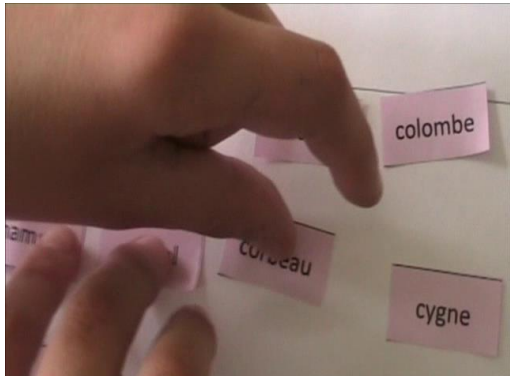
02 :08		<p>Sujet :[...] tous ceux qui ont un h je les mets avant.</p> <p>Le sujet attrape les deux étiquettes chameau et cheval et les permute avec l'étiquette corbeau.</p> <p>Sujet : et voilà et c'est bon parce que le y c'est après le h et d c'est après c</p> <p>Expérimentateur : impeccable. tu es sûr que c'est bon ? vérifie bien encore</p>
--------	---	--

Figure 207 : Sujet 16, film 31 - Permutation d'éléments dans la liste solution

Dans l'extrait de la transcription, le sujet se rend compte que le mot « corbeau » doit figurer après les mots « chameau » et « cheval », ce qui n'est pas le cas dans la liste réponse qu'il a produit à cet instant. Le problème est résolu en attrapant les deux étiquettes **chameau** et **cheval** et en les permutant avec l'étiquette **corbeau**.

Nous avons observé deux occurrences de la stratégie par insertion. Cette stratégie repose à chaque itération sur de potentielles modifications des places qu'occupe chaque élément de la liste solution.

Pour qu'un élément soit traité, le sujet doit trouver la place qu'il occupera dans la liste déjà constituée. Il peut se trouver à une extrémité de la liste, en première ou en dernière position. Ce n'est pas toujours le cas. Le sujet doit parfois insérer un élément entre deux éléments consécutifs de la liste.

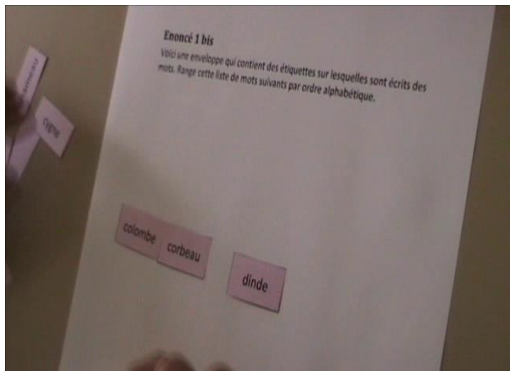
00 :22		<p>Le sujet écarte l'étiquette colombe en la déplaçant sur sa gauche pour intercaler l'étiquette corbeau entre les deux premières étiquettes.</p>
--------	---	---

Figure 208 : sujet 4, film 7 - Insertion d'un élément dans une liste

C'est ce que fait le sujet 4 dans cet extrait.

Avec des objets matériels déplaçables, ces gestes sont tout à fait ordinaires.

Situation de concurrence entre l'espace matériel et l'espace littéraire

Dans l'espace matériel, le sujet dispose d'un plan pour travailler qui est celui de la table, sur lequel il peut poser des objets : son matériel pour travailler, mais aussi les étiquettes qu'il doit ordonner.

Cela l'amène à dépasser les contraintes apparentes que nous avons produites, notamment quand nous lui demandons de produire sa réponse sur une feuille prévue à cet effet.

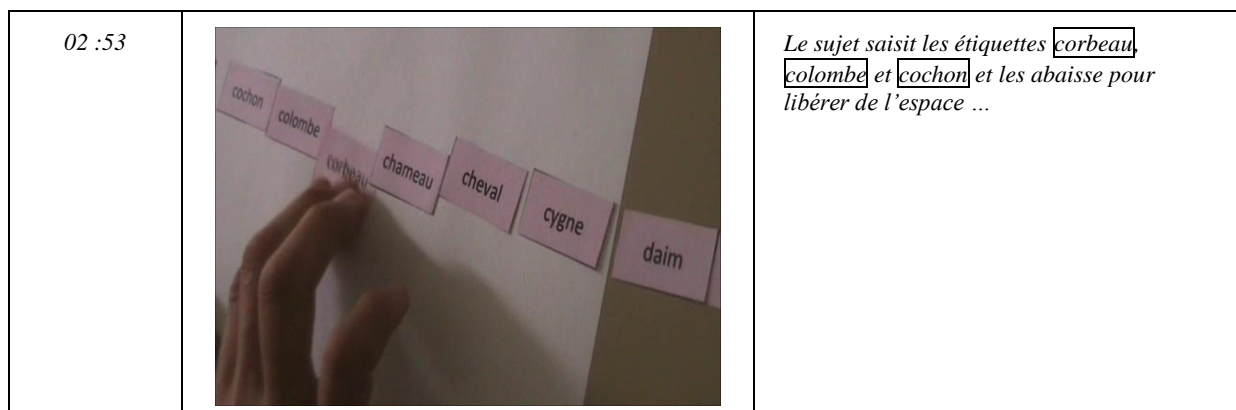


Figure 209 : Sujet 4, film 7 - Dépassement de l'espace littératié

Dans l'extrait que nous mettons ici en évidence, le sujet utilise bien certaines règles de la littératié pour produire un ordre sur sa collection d'étiquettes (puisqu'il appuie sa structure d'ordre par la réalisation d'une ligne). Cependant, il s'affranchit de certaines règles du monde de l'écrit en construisant sa liste réponse au-delà de l'espace de la feuille (sa ligne déborde largement des deux côtés de l'espace de la feuille).

D'autres sujets ont pris en compte les contraintes spatiales que nous avons proposées.

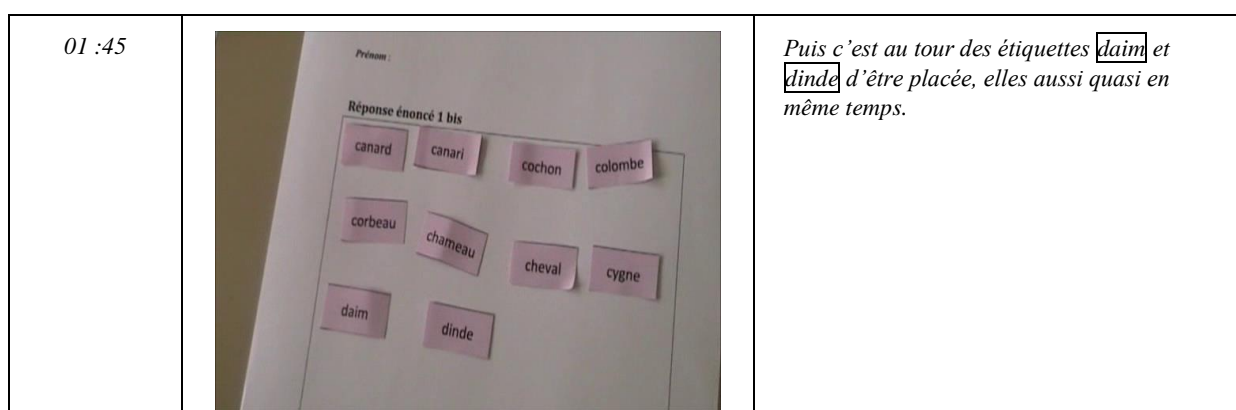


Figure 210 : Sujet 16, film 31 - Prise en compte de la contrainte spatiale sur la fabrication de la liste solution

Ainsi, le sujet 16 met en œuvre une stratégie par sélection du plus petit élément. Il construit sa liste réponse directement sur la feuille qui lui est fournie. Cette feuille est une feuille A4 sur laquelle est dessiné un rectangle dans lequel le sujet doit placer les étiquettes ordonnées. La largeur du rectangle est très nettement inférieure à la longueur de la liste, ce qui oblige le sujet à segmenter cette liste sur plusieurs lignes.

La liste solution est donc construite en appui sur l'univers de la littératie dans un développement en lignes successives qui se développent de haut en bas. Le successeur de l'élément qui est en fin de ligne est dans le premier élément de la ligne juste en dessous.

Reprenons un extrait de la transcription du travail du sujet 16 sur lequel nous nous sommes déjà appuyé pour mettre en évidence des permutations d'éléments.

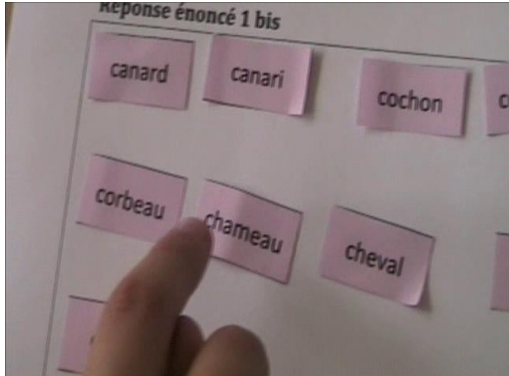
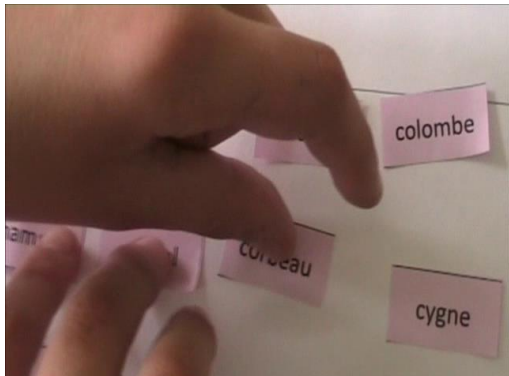
02 :04		<p><i>Sujet : [...] le o c'est après le h. alors du coup</i></p>
02 :08		<p><i>Sujet : tous ceux qui ont un h je les mets avant.</i></p> <p><i>Le sujet attrape les deux étiquettes <u>chameau</u> et <u>cheval</u> et les permute avec l'étiquette <u>corbeau</u>.</i></p> <p><i>Sujet : et voilà et c'est bon parce que le y c'est après le h et d c'est après c</i></p> <p><i>Expérimentateur : impeccable. tu es sûr que c'est bon ? vérifie bien encore</i></p>

Figure 211 : Sujet 16, film 31 - Situation de concurrence entre l'espace matériel et l'espace littératié

Le sujet se rend compte que les étiquettes des mots « chameau » et « cheval » doivent figurer avant l'étiquette du mot « corbeau ». Il limite le contrôle qu'il est en train d'effectuer à la ligne qu'il est en train de traiter. Il ne prend pas en compte à cet instant une règle spécifique de l'univers de la littératie, à savoir les règles de constitution de listes qui ne réduisent pas une liste à l'espace ligne qu'elle occupe dans l'univers de la matérialité.

Il applique donc une règle de l'univers de la matérialité dans un espace littératié. La cohabitation des deux espaces génère cet instant une concurrence que le sujet gère mal.

6.2.2 Analyse du cas « configuration non modifiable »

Examinons maintenant ce que nos observations nous apprennent du cas non déplaçable.

6.2.2.1 Comment s'opère le contrôle de l'exhaustivité du traitement ?

Dans le cas « configuration modifiable », nous n'observons pas de sujet qui perd une étiquette en la faisant tomber sous la table ou bien qui refuse de traiter une des étiquettes qui lui reste.

Dans le cas « configuration non modifiable », le contrôle de l'exhaustivité du traitement des éléments de la collection n'est plus géré implicitement par les conditions matérielles. Il redevient à la charge du sujet. Le cas « configuration non modifiable » permet d'interroger un aspect absent du cas « configuration modifiable » : le contrôle de l'exhaustivité du traitement des éléments à travers la question de la recopie des mots de la liste.

Une vérification *a posteriori*

Certains sujets procèdent à une vérification. Par nature la vérification prend toujours place *a posteriori*. Indépendamment de mécanismes de contrôle mis en œuvre au fur et à mesure du traitement, le sujet peut se contenter d'une procédure numérique comme indicateur de l'exhaustivité de l'exploration.

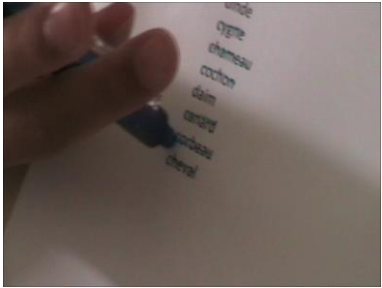
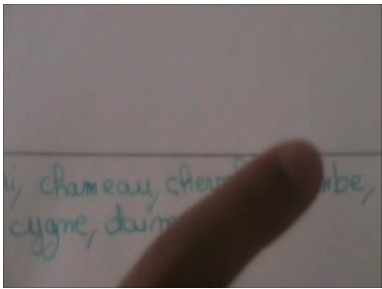
03 :41			<p><i>Expérimentateur : très bien. Tu es sûr de ne pas en avoir oublié ?</i></p> <p><i>Sujet : je sais pas</i></p>
03 :52			<p><i>Le sujet compte combien il y a de mots sur la liste de l'énoncé.</i></p>
03 :55			<p><i>Puis il compte combien il y a de mots écrits sur sa feuille réponse.</i></p> <p><i>Sujet : non je n'ai pas oublié</i></p>

Tableau 130 : Sujet 1, film 1 - vérification de l'exhaustivité de l'exhaustivité du traitement

Dans cet extrait, le sujet répond aux sollicitations de l'expérimentateur qui lui demande de se prononcer sur la sûreté de la fin du traitement. Le sujet répond par la mise en œuvre d'une procédure numérique qui l'amène à comparer le cardinal de la collection des mots écrits sur son énoncé et le cardinal de la collections des mots qu'il a écrit sur sa feuille.

L'égalité des cardinaux n'est pas suffisante pour affirmer la fin du traitement. Elle repose sur le fait que l'erreur la plus probable reste l'oubli d'un élément (non-respect de C1) plutôt que la recopie deux fois du même (non-respect de C2).

Elle fournit une condition nécessaire qui est jugée dans ce cas comme suffisante par le sujet.

Les sujets qui mettent en œuvre ce mécanisme ont bien conscience de son caractère nécessaire.

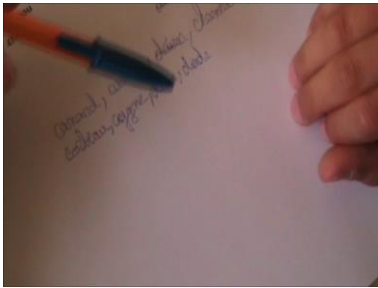

03 :10			<p><i>Expérimentateur : tu as finis tu les as tous c'est sûr</i></p> <p><i>Sujet : oui</i></p>
03 :11			<p><i>Nous voyons le sujet qui fait passer son stylo sur chacun des mots de sa liste réponse. Il les semble les compter. On ne voit pas ce qu'il fait sur la liste énoncé, mais après un temps le sujet reprend la parole</i></p> <p><i>Sujet : non</i></p>
03 :37			<p><i>Le sujet écrit le mot cheval sur la liste réponse au-dessus de sa première ligne, juste entre chameau et cochon. Il marque la position qu'il veut donner à ce mot dans la liste en traçant un trait vertical qui précise la position du mot.</i></p>
			<p><i>Expérimentateur : tu en avais oublié</i></p> <p><i>Sujet : ouais</i></p> <p><i>Expérimentateur : tu as bien fait de recompter dis moi</i></p> <p><i>Sujet : ouais</i></p>

Tableau 131 : Sujet 8, film 15 - Mise en évidence du caractère nécessaire de la procédure numérique de vérification

Dans cet extrait, nous observons que le sujet a parfaitement conscience que s'il ne trouve pas les mêmes cardinaux quand il dénombre les deux collections, c'est qu'il a commis une erreur.

Un contrôle dans l'action

Indépendamment du mécanisme de vérification que nous venons de décrire, le sujet peut mettre en œuvre des processus de contrôle dans l'action. Ces processus vont avoir pour caractéristique de permettre au sujet de savoir à chaque instant quels sont les éléments qui ont été traités et ceux qui ne l'ont pas encore été.

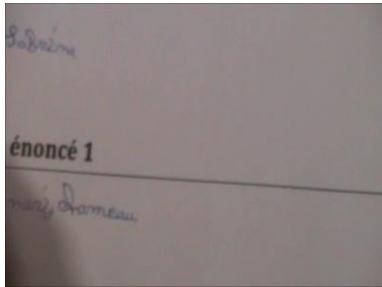

00 :46			<i>Le sujet écrit le mot chameau sur sa feuille réponse.</i>
00 :47			<i>Dans le même geste, il barre le mot chameau sur sa feuille-énoncé ...</i>
00 :53			<i>... écrit le mot cheval sur sa feuille réponse et immédiatement barre ce même mot sur sa feuille-énoncé.</i>

Tableau 132 : Sujet 5, film 9 - Contrôle systématique du traitement

Dans cet extrait, nous observons la mise en place d'un processus systématique dans lequel l'écriture d'un mot sur la feuille réponse déclenche une action sur les éléments de la collection des mots écrits sur la feuille-énoncé. Cette action est un geste graphique qui consiste à marquer les éléments traités. C'est quand tous les éléments ont été marqués que le traitement de la collection est terminé. (Cf. les chênes de Briand)

Le caractère répétitif de ce processus peut amener le sujet à le modifier.

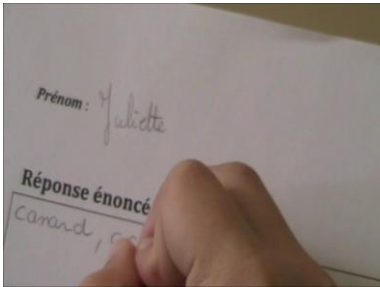
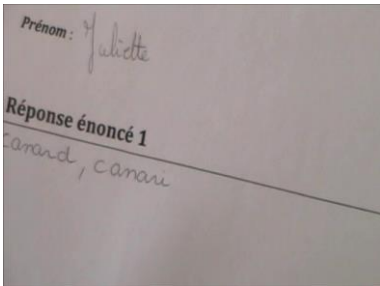
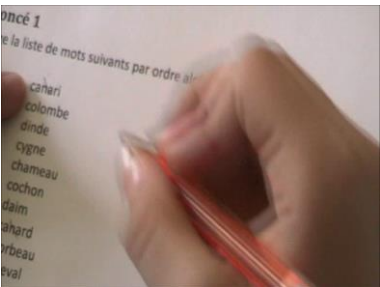
00 :21			<p><i>Le sujet écrit le mot canard sur sa feuille réponse.</i></p>
00 :26			<p><i>Dans la continuité de ce geste, il écrit le mot canari à côté du mot canard.</i></p>
00 :29			<p><i>Le sujet barre le mot canari, puis le mot canard sur sa feuille-énoncé.</i></p>

Tableau 133 : Sujet 10, film 19 : Variation du contrôle du traitement

Dans cet extrait, nous observons un sujet qui traite les éléments « canard » et « canari » comme un lot, puisque ces deux mots sont recopiés sur la feuille réponse et c'est seulement suite à cette recopie que le sujet barre ces mêmes mots sur la feuille-énoncé.

Cette variation est mineure mais elle met bien en évidence que le fait que, quand la situation le lui permet, le sujet cherche à mettre en place des variations de son processus de traitement (et de contrôle) qui soient économiques.

Affaiblissement du contrôle de l'exploration

Examinons ce qu'a fait le sujet 7. Cet extrait intervient à la fin de la passation, quand le sujet pense avoir terminé et que l'expérimentateur le sollicite pour contrôler sa réponse.

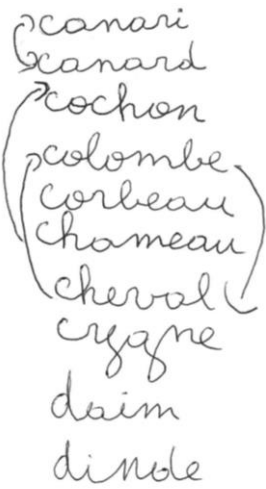
04 :04			<p><i>Expérimentateur : tu as mis chameau avant cochon, colombe, corbeau. Tu l'as mis après pardon</i></p> <p><i>Sujet : oui</i></p> <p><i>Expérimentateur : est-ce que cela veut dire que tu penses que le o est avant le h dans l'alphabet</i></p> <p><i>Sujet : ah non</i></p> <p><i>Expérimentateur : alors on va les mettre où ?</i></p> <p><i>Le sujet écrit sur la feuille réponse. Il fait des flèches sur sa feuille réponse pour modifier l'ordre des éléments</i></p> <p><i>Expérimentateur : et le cheval</i></p> <p><i>Sujet : aussi</i></p> <p><i>Expérimentateur : essaye de réécrire la liste dans l'ordre à coté // te trompe pas cette fois-ci</i></p>
--------	--	---	--

Tableau 134 : Sujet 7, film 13 - Correction d'une erreur, fabrication de signes graphiques pour représenter les permutations

Le sujet se rend compte qu'il a commis un certain d'erreurs dans l'écriture de sa liste réponse. Il produit des signes graphiques pour représenter les déplacements qu'il veut opérer sur les éléments de sa liste réponse. Ces signes graphiques sont analysés dans un des paragraphes suivants. Nous sommes intéressés ici par ce qu'il se passe quand le sujet recopie sa liste réponse modifiée. Contrairement à ce qu'il a mis en œuvre pour construire la première liste, il ne procède pas à ce stade au marquage des éléments qu'il a déjà recopiés.

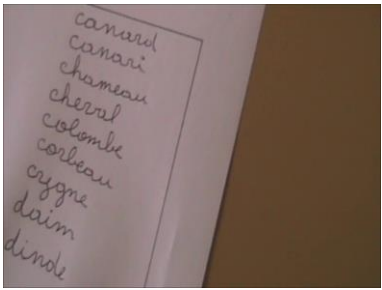
05 :49			<p><i>La liste est recopiée.</i></p> <p><i>Expérimentateur : tu as oublié cochon // tu sais où le mettre</i></p>
--------	--	--	--

Tableau 135 : Sujet 7, film 13 - Etat de la liste réponse suite à la recopie

Le sujet veut produire une réponse qui ne va pas être parasitée par des signes graphiques de déplacements évoqués ci-dessus. Il cherche donc produire une nouvelle liste écrite à côté de la première.

Pour produire la première liste, le sujet a marqué les mots de l'énoncé au fur et à mesure qu'il les a écrit. Pour la production de cette seconde liste, il recopie les mots sans faire de marquage. Lors de cette recopie, le sujet oublie de recopier un mot (le mot « cochon »).

Donc le sujet a été capable de contrôler l'exhaustivité du traitement dans le cas où il devait construire un ordre sur tous les éléments d'un ensemble pour les recopier sur une autre feuille. Il n'a pas contrôlé l'exhaustivité de la recopie lors de la production de la seconde liste.

Le caractère apparemment simple de la modification qu'il devait produire a provoqué un affaiblissement du contrôle de l'exhaustivité. Cet affaiblissement du contrôle a immédiatement généré une erreur et le non-respect de la condition C1. La première liste de mots a été énumérée faiblement -.

6.2.2.2 La fabrication d'une partition pour diminuer la complexité

L'analyse *a priori* a fait apparaître, une fois une stratégie choisie, la construction de partitions de l'ensemble des éléments qui restent à traiter comme la seule possibilité de diminuer le nombre de comparaisons lexicographiques. Pour autant, la construction de partition est difficilement observable dans le contexte de ces éléments non déplaçables. Lorsqu'il ne reste que les deux mots « daim » et « dinde », ils sont souvent traités de manière simultanée (recopie de deux, puis éventuellement production de marques près des deux mots de la liste énoncé). Même si elle n'invalide pas l'hypothèse de construction de partition, cette procédure la met pour autant peu en exergue.

Le cas de la construction du début de la liste fournit un meilleur terrain pour exhiber cette construction.

Revenons sur l'extrait présenté précédemment (Tableau 135). Dans cet extrait, nous observons comment le sujet 10 met en œuvre un traitement d'un lot des éléments « canard » et « canari ». Un temps d'arrêt suit la copie des deux mots sur la feuille réponse et le marquage des deux sur la feuille-énoncé.

Dans le sous-ensemble des éléments de l'ensemble des mots qui commencent par la lettre « c », « canard » et « canari » sont bien les deux seuls éléments dont la seconde lettre soit la lettre « a ». A ce titre, ils constituent bien un sous-ensemble de l'ensemble des mots qui commencent par la lettre « c ». Nous pouvons donc affirmer que ce sujet a produit une partition de cet ensemble qui est matérialisée par la vitesse de la recopie qui atteste d'une mise en mémoire des deux mots.

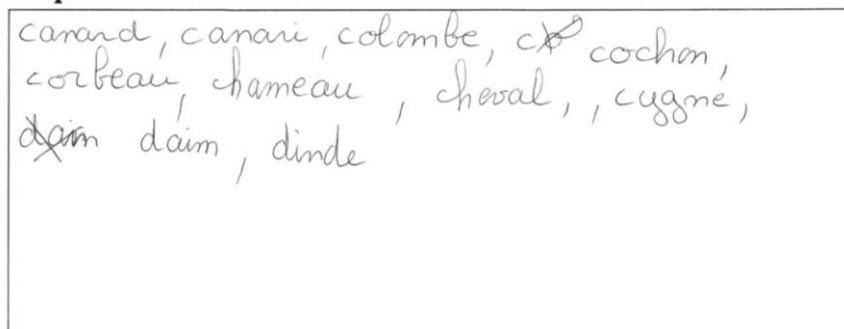
Cette stratégie est donc aussi mise en œuvre dans le cas « configuration non modifiable ».

6.2.2.3 Des formes d'écrit différentes

Des listes qui se développent dans différentes directions

Ordonner les mots nécessite la production d'une liste écrite. Pour produire cette liste écrite, les sujets utilisent les deux directions de l'univers de la littératie.

Réponse énoncé 1

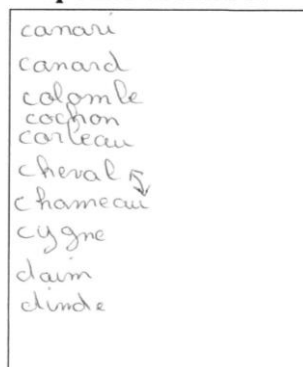


canard, canari, colombe, ~~co~~ cochon,
corbeau, hameau, cheval, cygne,
~~daim~~ daim, dinde

Figure 212 : Sujet 10, film 19 – Production d'une liste en ligne

Le sujet 10 produit les éléments de sa liste réponse dans une expansion en ligne. La taille insuffisante de l'espace dont il dispose pour produire cette expansion l'oblige à segmenter sa liste en passant à la suivante.

Réponse énoncé 1



canari
canard
colombe
cochon
corbeau
cheval
chameau
cygne
daim
dinde

Figure 213 - Production d'une liste en colonne : Sujet 14, film 27

Le sujet 14 produit les éléments de sa liste en colonne. La taille de l'espace dont il dispose lui permet de ne pas avoir à segmenter sa liste dans l'espace écrit dont il dispose. Cette différence peut sembler sans conséquence. Nous allons voir que ce n'est pas le cas lorsqu'il s'agit de procéder à des ajustements de la liste solution.

Produire une permutation, un déplacement ou une insertion

par la lettre « c » sont placés après des mots commençant par la lettre « d ») se produit alors que le sujet cherche à placer les mots dont la seconde lettre est « h » et semble ne plus considérer la première à cet instant.

Une autre production met en œuvre des symboles graphiques de cette nature.

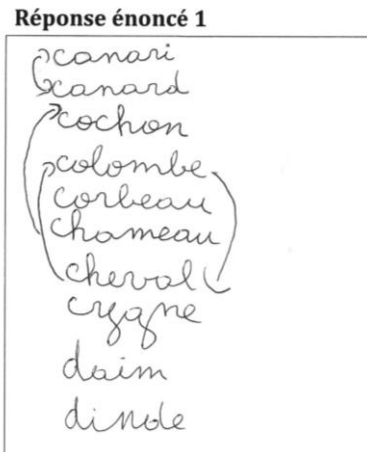


Figure 216 : Sujet 7, film 13

Nous avons déjà évoqué cet extrait de la production du sujet 7. Le sujet produit des signes graphiques dont la fonction est de modifier la position de certains éléments dans la liste réponse.

Le premier signe produit est une flèche à double sens. Cette flèche représente la permutation de deux éléments dans la liste. Les mots sur lesquels pointent les extrémités des flèches désignent les éléments qui doivent être logiquement permutés, à défaut de pouvoir l'être scripturalement.

Le second problème qu'il doit résoudre concerne plus de deux éléments de la liste. Le sujet a placé les mots « chameau » et « cheval » après les mots « cochon » et « colombe ». Il a mis en œuvre une stratégie décrite dans l'analyse a priori d'appui sur la collection des voyelles pour ordonner certains mots dont la première lettre est « c ». Il constate les limites de son algorithme et doit modifier la position de certains éléments. Il produit donc des signes graphiques pour représenter ces déplacements, à savoir une série de flèches à simple sens dont l'origine désigne l'élément à déplacer et dont l'extrémité pointe entre deux éléments pour désigner la position finale que devra occuper l'élément déplacé. Cette solution peut marcher. Cependant, la multiplication dans un espace restreint de flèches de ce type rend la reconstitution de l'ordre voulu par le sujet difficile à lire.

Une difficulté réside dans le fait que le sujet cherche à régler le problème en considérant des mots plutôt que des groupes de mots (des classes de mots ayant « c » comme première lettre et une même seconde lettre).

Une autre réside dans le fait que les signes qu'il introduit ne sont pas stables. Pour représenter une permutation, il utilise à la fois un double flèche (entre « canard » et « canari ») et deux flèches simples (entre « colombe » et « cheval »).

Des écrits supplémentaires

Pour comparer deux éléments de la liste, les sujets font appel à des connaissances de français, et notamment à la connaissance de l'ordre alphabétique.

Cette connaissance est tellement intériorisée pour certains que l'appui sur celle-ci peut apparaître transparent. La suite ordonnée des lettres est disponible, partiellement ou totalement, sans que le sujet n'ait à référer à un appui extérieur. Certains élèves utilisent l'écrit pour se décharger du travail de parcours intellectualisé de la liste des lettres.

Énoncé 1

Range la liste de mots suivants par ordre alphabétique:

canari
colombe
dinde
cygne
chameau
cochon
daim
canard
corbeau
cheval

A B C D E F G H I J K
L M N O P Q R S T U V
W X Y Z

canard - canari - chameau - cheval -
colombe - cochon - corbeau -
cygne - daim - dinde

Figure 217 : sujet 18, film 35 – Production de la collection ordonnée de référence pour comparer des mots

Le sujet 18 écrit la suite ordonnée des lettres. Il décharge sa mémoire dans la détermination des positions relatives d'une lettre par rapport à l'autre. Ce sujet est le seul de notre panel à produire un écrit supplémentaire de ce type.

L'alphabet est une des collections nécessaires à la réalisation de la tâche. Écrire la suite des lettres est une matérialisation d'une des collections en jeu dans la situation. En matérialisant cette collection, le sujet se ramène à une situation dans laquelle deux des collections en jeu

sont visibles (la collection des lettres qu'il vient de matérialiser et la collection des mots, déjà disponible dans l'énoncé).

6.2.2.4 Différentes fonctions, différents outils

Intéressons-nous à la nature des usages que les sujets font de leur stylo dans le cas « configuration non modifiable ». Ils doivent produire une collection de mots écrits sur la feuille réponse. Ils utilisent donc le stylo comme outil scripteur à un moment donné de la réalisation de la tâche. L'écrit produit peut être de nature différente.

Le type d'écrit que l'on rencontre dans toutes les observations est l'écriture des mots sur la feuille réponse.

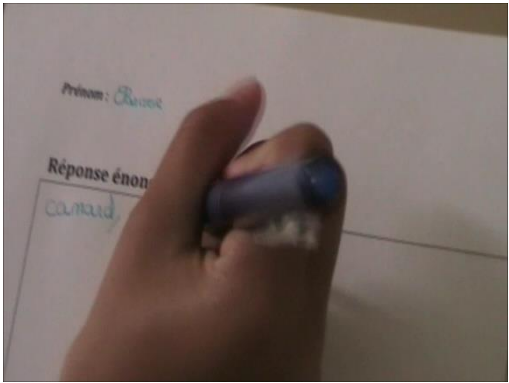
00:30			<p><i>Le sujet écrit un premier mot sur sa feuille réponse (canard) puis, sans que le stylo ne quitte la feuille, un second mot (canari).</i></p>
-------	--	---	---

Tableau 136 : sujet 1, film 5 – Geste scripteur d'écriture des mots sur la feuille réponse)

Ce geste est complètement attendu, il est inhérent à la nature de la tâche demandée. Il est la conséquence de l'organisation du milieu par l'expérimentateur.

Pour autant, le sujet utilise le stylo comme outil scripteur dans une autre fonction. Dans nos observations, certains sujets barrent les mots de la feuille-énoncé pour symboliser une action réalisée sur les éléments de cette collection.

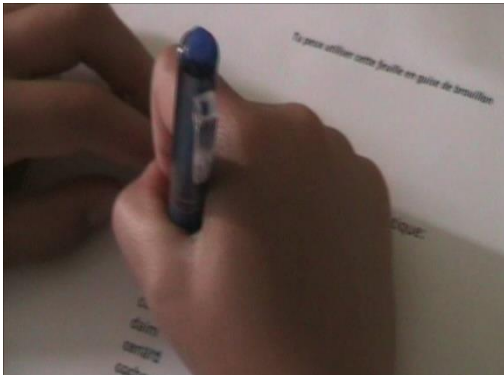
01:57			<p><i>puis le barre sur la feuille-énoncé.</i></p>
-------	---	--	--

Tableau 137 : sujet 1, film 1 - Geste scripteur de marquage des mots sur la feuille-énoncé

L'extrait ci-dessus montre le sujet en train de barrer le mot de la feuille-énoncé qu'il vient d'écrire sur la feuille réponse. A ce moment précis, l'outil scripteur est utilisé par le sujet pour marquer des éléments de la collection des mots de la feuille-énoncé qu'il a à traiter. Il utilise ici l'écrit pour distinguer les mots qu'il a déjà écrits de ceux qu'il n'a pas encore écrits. Le signe graphique produit lui permet ainsi de distinguer visuellement sur sa feuille-énoncé les éléments qu'il a traités de ceux qu'il n'a pas encore traités.

Ce sujet barre les mots de la collection pour les marquer. D'autres font des signes différents qui ont la même fonction.

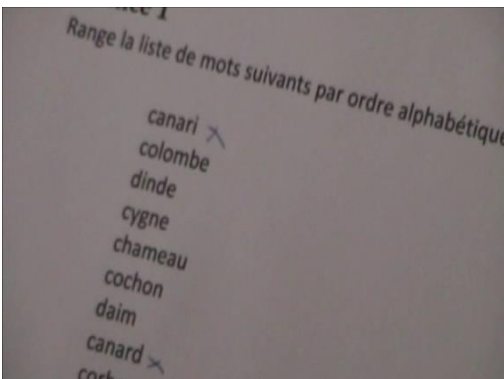
0 :28			<p><i>Le sujet fait une croix à coté canard, puis canari de la feuille-énoncé.</i></p>
-------	---	--	--

Tableau 138 : Sujet 5, film 9 - Geste scripteur de marquage des mots sur la feuille-énoncé

Ainsi, ce sujet écrit une croix sur la même ligne à droite des mots qu'il a recopiés.

Nous avons observé aussi d'autres signes dont la fonction de marquage est la même que celle réalisée précédemment.

	<p>Enoncé 1 Range la liste de mots suivants par ordre alphabétique:</p> <p style="margin-left: 40px;">canari colombe dinde cygne chameau cochon daim canard corbeau cheval</p>		
--	---	--	--

Tableau 139 : Sujet 13, film 25 - Geste scripteur de marquage des mots sur la feuille-énoncé

Ce sujet se contente de la marque de la pointe de son stylo, juste à gauche du mot qu'il traite.

Des algorithmes qui intègrent ce marquage se mettent en place : repérage de l'élément cherché/ écriture du mot dans la liste réponse/ marquage du mot dans l'énoncé. Cette suite d'actions est répétée, avec parfois des modifications de l'ordre dans lequel les deux dernières actions sont réalisées.

Dans le cas « configuration modifiable », une fois l'étiquette choisie, le sujet la saisit et la déplace. Les deux actions de marquage de l'élément choisi et de son intégration à la liste réponse ne peuvent pas être dissociées (elles ne peuvent pas être permutées). Dans le cas « configuration non modifiable », les deux actions peuvent être permutées, l'écrit autorise leur dissociation, donc la réalisation de l'une d'elles seulement, ce qui est générateur .

Le stylo est aussi utilisé avec une autre fonction. En effet, le sujet utilise parfois cet outil uniquement pour pointer des éléments de la collection des mots de l'énoncé. Ce pointage peut comporter des temps d'arrêt plus ou moins longs sur des éléments de la liste de mots. Il peut aussi à certains moments se caractériser par une absence de temps d'arrêt sur certains mots de la collection et apparaître donc comme un déplacement continu du stylo au fur et à mesure de la lecture rapide (balayage de la collection).

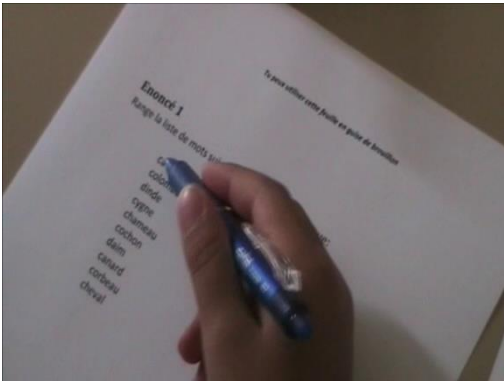
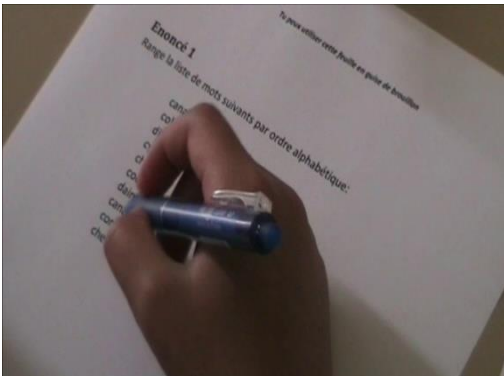
00:06			<p><i>Démarrage de la vidéo. Le sujet promène son stylo le long de la liste des mots qui figurent sur la feuille-énoncé. Il fait plusieurs allers-retours en promenant son stylo de haut en bas..</i></p>
00:10			<p><i>Le sujet marque plusieurs temps d'arrêts tandis que le stylo pointe alternativement sur les mots canard et canari.</i></p>

Tableau 140 : Sujet 1, film 1 - Geste de pointage par le stylo des mots sur la feuille-énoncé

Quand elle apparaît, la fonction de pointage est souvent observée en début de tâche, avant qu'un premier mot ne soit écrit. Dès qu'un premier mot est écrit (la fonction outil scripteur est activée), nous observons une disparition de la fonction pointage du stylo.

La fonction pointage est alors réalisée par un autre outil, disponible dans le milieu : le doigt de la main du sujet.

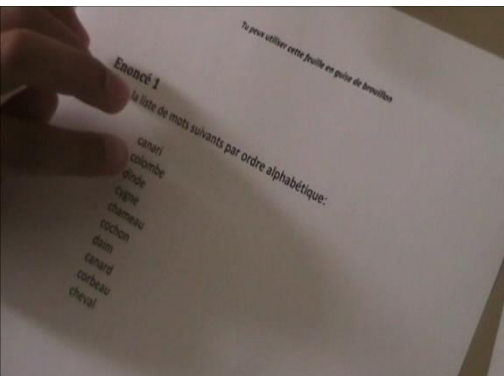
00:40			<p><i>Le sujet se sert de l'index de sa main gauche pour pointer des mots de la liste. L'index pointe successivement les mots corbeau, colombe, corbeau, colombe, chameau, corbeau, puis enfin chameau.</i></p>
-------	---	--	---

Tableau 141 : Sujet 1, film 1 - Geste de pointage par le doigt des mots sur la feuille-énoncé

Le sujet a besoin à certains moments de pouvoir pointer deux éléments simultanément de la collection des mots. Les deux instruments (doigt et stylo) que nous venons d'évoquer réalisent chacun cette fonction sur un élément à la fois. Le sujet peut donc utiliser ces deux instruments pour réaliser à un instant donné un double pointage.

01:04		<p><i>La caméra est revenue sur la feuille-énoncé. Le sujet écrit sur la feuille-énoncé. Il barre les mots canari, canard et chameau.</i></p>
-------	---	---

Tableau 142 : Sujet 1, film 1 - Double pointage simultané réalisé par deux instruments différents

D'autres sujets produisent une autre solution pour réaliser le double pointage simultané. Ils utilisent plusieurs de leurs doigts.

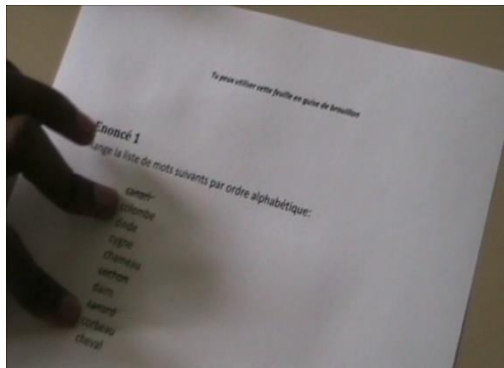
01 :25		<p><i>Le sujet pointe avec son majeur sur le mot colombe et avec son auriculaire sur le mot corbeau.</i></p>
--------	--	--

Tableau 143 : Sujet 7, film 13 - Double pointage simultané réalisé par les doigts

Même si nous ne l'avons pas nommé comme cela depuis le début de notre analyse, ce que nous nommons pointage dans cette analyse est un marquage. Il permet bien au sujet de garder en mémoire un élément de la collection des mots écrits. Mais pour autant, ce marquage n'est pas de même nature que le marquage réalisé par l'outil scripteur. Ce marquage que nous nommons pointage présente une dimension provisoire, transitoire. L'élément qui est pointé n'a pas le même statut pour le sujet que l'élément qui est marqué. C'est un élément qui est en cours de traitement. Il accédera au statut traité dès lors qu'il sera recopié sur la feuille réponse. Il pourra alors, et seulement à partir de ce moment-là être éventuellement marqué de façon pérenne (barré, précédé d'une croix, ...) sur la feuille-énoncé.

Pointage et marquage peuvent être réalisés simultanément. Ainsi, quand le sujet hésite entre deux mots, le fait de garder le doigt pointé sur l'élément non retenu pendant que l'élément retenu est marqué de façon pérenne peut permettre de diminuer la complexité dans la recherche du mot suivant à écrire.

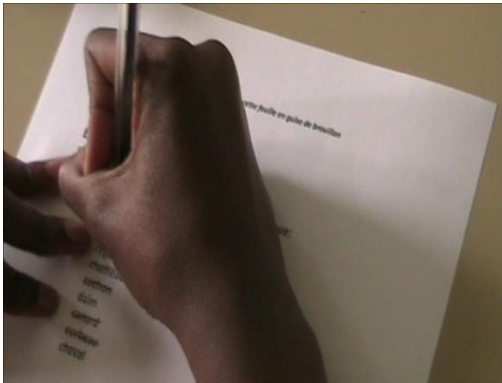
02 :26		<p><i>Il barre le mot cygne sur sa feuille-énoncé.</i></p>
--------	---	--

Tableau 144 : Sujet 7, film 13 - Réalisation simultanée des fonctions pointeur et scripteur

6.2.2.5 Des évolutions du contrôle de l'exhaustivité

Ce qui caractérise les travaux observés est la stabilité des mécanismes de contrôle mis en œuvre dans la réalisation de la tâche.

Le sujet 10 met en œuvre un mécanisme qu'il conduit à l'identique du début à la fin du traitement des éléments. Une fois le nouvel plus petit élément trouvé, celui-ci est recopié sur la feuille réponse puis ensuite systématiquement barré. Cet algorithme est conduit de manière tout à fait stable jusqu'à son terme.

Pour autant, nous sommes dans une situation dans laquelle des évolutions du contrôle, des solutions produites pour conserver la mémoire des éléments traités peuvent être mises en œuvre.

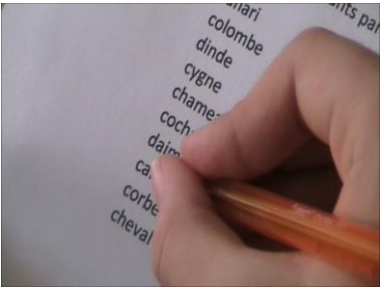
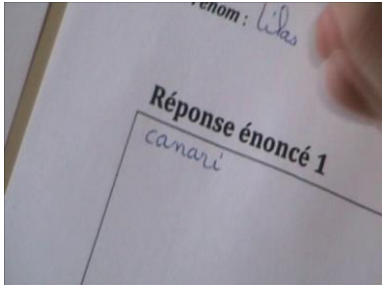
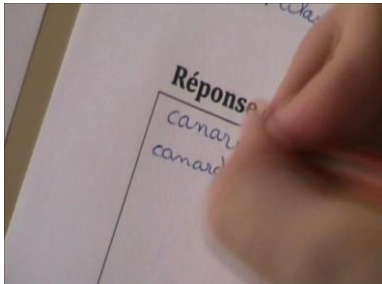
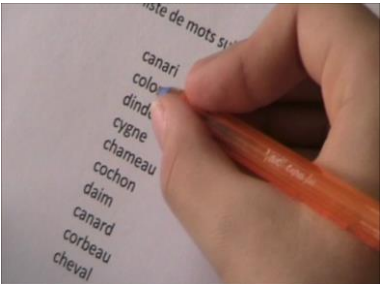
00:11			<p>Démarrage de la vidéo. Le sujet promène son stylo le long de la liste des mots qui figurent sur la feuille-énoncé. Il marque un temps d'arrêt long sur le mot canard.</p>
00:28			<p>Finally, it's the word canari that is written on the response sheet, at the top left of the frame.</p>
00:39			<p>The word canard is then written very quickly under the word canard.</p>
00:46			<p>The subject resumes its search of the list of words, marking an important stop on the word colombe.</p>
01:02			<p>The subject writes the word chameau under the word canard.</p>

Figure 218 : Sujet 17, film 33 - Le processus initial

Le sujet 17 cherche dans sa liste de mots écrits le plus petit élément. Une fois ce mot trouvé, il l'écrit sur sa feuille réponse. L'écriture du plus petit élément n'est pas suivie d'un quelconque marquage des éléments de la liste de départ.

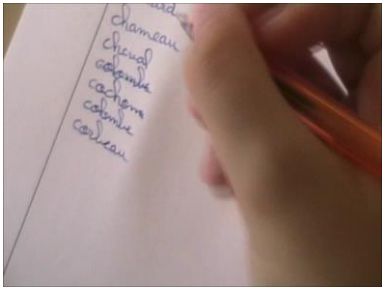
02 :10			<p>Après avoir pointé les éléments de la liste énoncé, le sujet écrit le mot colombe, revient sur la liste énoncé, barre le mot colombe de la liste réponse, écrit colombe et corbeau l'un en dessous de l'autre.</p>
--------	--	--	---

Figure 219 : Sujet 17, film 33 - Irruption du marquage

Ce n'est qu'au bout de plus de deux minutes que le sujet commence à produire des marques sur sa liste énoncé. Ces premières marques sont chaotiques. Le caractère systématique du processus mis en œuvre jusqu'à présent est perdu. Le mot « colombe » est écrit sur la liste réponse puis barré sur la liste énoncé. Ce processus (écrire puis barrer) ne se généralise pas pour l'instant car d'autres mots sont à nouveau écrits sur la feuille réponse, sans que ces écritures ne soient à cet instant associées à des marquages.

02 :18			<p>Le sujet barre les mots de la liste énoncé dans l'ordre dans lequel il les a écrit sur la feuille réponse.</p>
--------	--	--	---

Figure 220 : Sujet 17, film 33 – Réajustement du marquage

A 02 :18, le sujet procède au marquage sur sa feuille-énoncé des éléments qu'il a déjà écrits sur la feuille réponse. Seul le mot « colombe » avait eu droit à une marque sur la feuille-énoncé. A l'issue de cette phase de réajustement, tous les mots qui ont été recopiés sur la feuille réponse sont maintenant marqués sur la feuille-énoncé. Le réajustement est terminé.

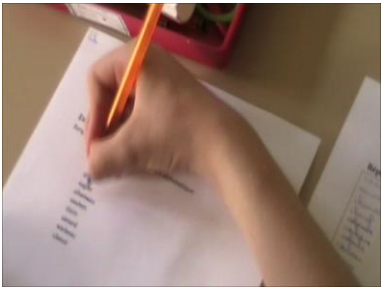
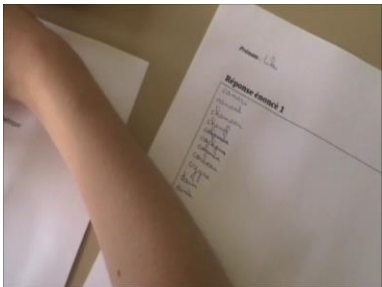
02 :43			<p><i>Le sujet barre le mot cygne sur la feuille-énoncé.</i></p>
02 :58			<p><i>Le sujet écrit le mot daim sur la feuille réponse, puis barre le mot daim sur la feuille-énoncé.</i></p> <p><i>Il écrit le mot dinde sur la feuille réponse, puis barre le mot dinde sur la feuille réponse.</i></p>

Figure 221 : Sujet 17, film 33 – Démarrage d'un nouveau processus régulier

Maintenant que le réajustement est terminé, peut se mettre en œuvre un nouveau processus régulier. Chaque écriture d'un nouveau mot est suivie du marquage de l'élément correspondant sur la feuille-énoncé, et ceci jusqu'au terme du traitement.

La stratégie mise en œuvre par le sujet est restée la même pendant tout traitement. C'est la manière dont a été géré le contrôle de l'exhaustivité qui a été modifiée.

6.2.2.6 Dépasser le caractère binaire du marquage

Nous avons mis en évidence des gestes scripteurs sur la feuille réponse et sur la feuille-énoncé. Dans les observations précédentes, ces gestes scripteurs sur la feuille-énoncé permettent de ne donner que deux statuts aux éléments de la collection, soit traités car marqués, soit non traités car non encore marqués. Cette limitation est liée à la nature de la marque réalisée sur les éléments de la collection : pour un sujet donné, les marques sont toutes identiques. C'est cette identité des marques qui limite à deux les statuts possibles.

Nous avons observé un sujet qui met en œuvre une procédure écrite tout à fait originale, permettant de distinguer les éléments traités et de constituer la liste ordonnée sur la feuille-énoncé.

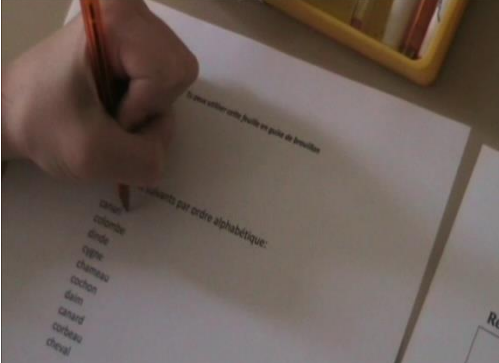
00:21			<p>Démarrage de la vidéo. Après un temps d'observation de la liste des mots, le sujet écrit 1 à gauche du mot canari.</p>
-------	---	--	---

Tableau 145 : Sujet 3, film 5 - Geste scripteur de marquage des mots sur la feuille-énoncé

Ce sujet écrit un symbole à côté d'un mot de la feuille-énoncé sans pour autant recopier ce mot sur sa feuille réponse. Ce symbole est le chiffre 1. La fabrication de cette marque ne signifie pas pour autant que c'est le mot à côté de la marque qui doit être recopié sur la feuille réponse. Le sujet poursuit son travail sur sa feuille-énoncé.

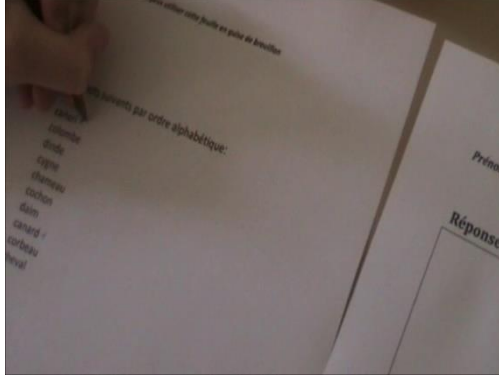
00:31			<p>Il écrit 1 à côté du mot canard, revient sur le mot canari, barre le 1 et écrit 2.</p>
-------	--	--	---

Tableau 146 : Sujet 3, film 5 - Suite de gestes scripteurs réalisés sur la feuille-énoncé

Le recours à des marques toutes distinctes permet de donner un statut spécifique à chacun des éléments de la collection des mots de l'énoncé.

Cette stratégie enrichit la stratégie précédente en l'incluant. Le sujet peut continuer de discriminer les éléments de la collection des mots qu'il a déjà traité ou qu'il n'a pas encore traité. Ceux à coté desquels une marque ont déjà été traités.

Le sujet poursuit cette écriture de nombres à côté de chaque mot. Il s'autorise à barrer les nombres déjà écrits pour en écrire d'autres à la place. Le nombre qui est affecté à chaque mot présente donc un caractère non définitif, puisqu'il est susceptible d'être remplacé par un autre nombre aux étapes suivantes de l'algorithme.

La stratégie mise en œuvre repose sur le caractère non définitif, provisoire, d'ordre porté par le signe produit à côté des mots. La marque qui est produite est susceptible d'être barrée.

D'où la nécessité pour le sujet de produire des marques concises, occupant peu de place dans l'espace de la feuille et permettre d'accueillir une nouvelle marque.

L'ordre qui est construit sur les mots de l'énoncé présente donc un caractère provisoire et dynamique.

Nous retrouvons ici certaines caractéristiques de la stratégie par insertion.

Poursuivons notre analyse de l'observation.

Preuve que ces marques ont un statut provisoire pour le sujet, celui-ci n'hésite pas à écrire deux fois la même marque à côté de deux mots distincts.

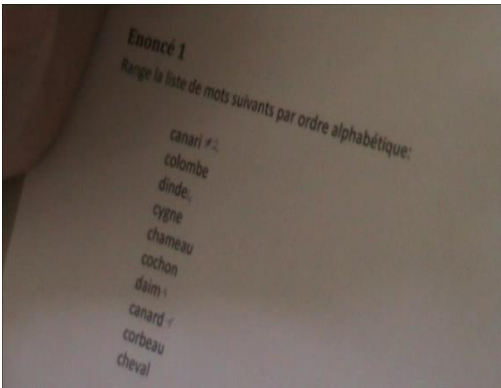
00:58		<p><i>Il écrit 4 à droite du mot dinde, puis écrit encore 4 à droite du mot daim.</i></p>
-------	--	---

Tableau 147 : Sujet 3, film 5 - Ecriture de deux marques distincts à côté de deux éléments distincts de la collection de mots

La marque 4 est écrite à côté des éléments mots « dinde » et « daim ». Il transformera un peu plus tard une de ces deux marques. Nous voyons ici apparaître des marques 4 sans qu'aucune marque 3 ne soit encore apparue.

Le sujet met en œuvre une rupture dans la numérotation que nous analysons comme la constitution d'une partition des mots dont la première lettre est « d ».

Nous retrouvons ici la mise en œuvre d'une stratégie Partitions.

La nature des marques que le sujet utilise est tout à fait spécifique. Il utilise la suite des écritures chiffrées pour produire des marques différentes. Il dispose alors d'une collection de marques aussi importante qu'il le veut. Disposer d'une grande collection de marques sans propriétés supplémentaires sur cette collection ne présente un intérêt que parce qu'il existe un ordre sur ces marques.

Ainsi, le sujet peut décrire l'ordre sur la collection des mots écrits sur la feuille en appui sur l'ordre des marques qu'il a construites. L'ordre sur les mots se déduit de l'ordre sur les marques.

A l'issue de cette phase, une marque non barrée figure à coté de chacun des dix mots. Cette marque est un nombre compris entre 1 et 10.

Il reste maintenant au sujet à produire dans la réponse sur la feuille fournie.

Nous avons décrit précédemment une procédure qui reposait sur la recherche du plus petit élément sur la feuille-énoncé, la copie du mot sur la feuille réponse et un marquage de l'élément copié. Nous retrouvons ici une partie de cet algorithme. La mise en ordre ayant été réglée par la construction d'une numérotation, restent les deux étapes de copie et de marquage.

	<p>Énoncé 1 Range la liste de mots suivants par ordre alphabétique:</p> <p>canari 2 colombe 3 dinde 4 cygne 5 chameau 6 cochon 7 daim 8 canard 9 corbeau 10 cheval 11</p>		
--	--	--	--

Tableau 148 : Sujet 3, film 5 - Etat de la feuille-énoncé quand la tâche est terminée

C'est ce que permet d'observer la figure précédente. Les marques non barrées à l'issue de la mise en ordre sont toutes barrées à l'issue de la copie des dix mots. Cette dernière série de gestes scripteurs réalisés par le sujet a donc une fonction de contrôle, qui induit une relation binaire recopié/ non recopié sur la collection des marques.

Il y a deux traitements qui utilisent l'écrit de façon différente sur la collection des mots de l'énoncé : une mise en ordre et un marquage lors de la recopie.

Ce sujet met donc en œuvre de manière successive dans la même tâche des gestes scripteurs qui traduisent une relation n-aire (la relation d'ordre sur les mots de l'énoncé) puis une relation binaire (la recopie ou non des mots de l'énoncé). Le processus observé ici apparaît tout à fait original et très élaboré pour résoudre le problème.

6.2.2.7 Un nouveau type de traitement

Dans les situations étudiées dans la partie A, les caractères étaient toujours binaires. Il n'y a dans ce cas pas de nécessité à examiner les autres éléments au moment du traitement d'un élément.

Ce n'est pas le cas dans la situation de l'alphabet. Traiter un élément nécessite d'examiner plusieurs éléments de la collection, et ce quel que soit la stratégie choisie. Le traitement requiert la mise en relation entre eux des éléments de la collection.

7. Conclusion du chapitre

Nous avons appliqué le modèle développé dans la partie A à certaines situations de français. Dans ce contexte précis, l'analyse sous l'angle des collections et des traitements à réaliser sur les éléments de ces collections fonctionne.

L'étude du cas « configurations modifiables » montre l'utilisation qui est faite de l'espace pour organiser le traitement et contrôler l'énumération. L'étude du cas « configurations non modifiables » nous confronte à des questions nouvelles telles que la prise en charge de l'énumération par la mise en œuvre de gestes graphiques.

Les analyses produites permettent de rendre compte de l'activité du sujet, des procédures qu'il met en œuvre pour réaliser la tâche. Nous observons la présence des stratégies prévues par l'analyse *a priori*. Nous observons aussi des situations plus complexes, dans lesquelles sont mises en œuvre des combinaisons des stratégies élémentaires que nous avons décrites ; Nos outils d'analyse et de description permettent de rendre compte de cette complexité.

Ces analyses permettent aussi de proposer une description des difficultés que le sujet rencontre. Nous pouvons identifier certaines difficultés qui relèvent de la mise en œuvre d'énumérations. Ces descriptions sont originales dans ce contexte.

Nous avons fait le choix de proposer chacune des deux situations dans les deux configurations. Cette combinatoire multiplie les données et les directions investiguées et renforce le caractère exploratoire du travail conduit dans ce chapitre. Les directions explorées sont multiples et complexes à synthétiser. Pour autant, c'est bien cette variété qui conforte le caractère fonctionnel du modèle. C'est ce caractère fonctionnel dont il fallait faire la preuve.

Au-delà de leur diversité, nous avons conduit des analyses *a posteriori* qui se sont appuyées sur des indices dont nous ne savons pas s'ils sont les plus pertinents. Pour autant, nous avons réussi à appliquer nos outils d'analyse, quel que soit l'indice choisi, ce qui conforte la robustesse du modèle et la présence de connaissances d'énumération.

L'étude du cas « configurations modifiables » n'est pas celui qui apporte le plus d'éléments nouveaux dans nos analyses. Dans ces situations, les contraintes matérielles sont identiques à celles de situations déjà étudiées.

L'étude du cas « configurations non modifiables » confronte nos analyses à la prise en compte de l'écrit.

Le milieu de la situation des phrases a été tellement contraint que même si elles sont écrites, les procédures développées sont assez standard. Le lien entre les deux types de configurations a été facile à réaliser. La contrainte imposée au milieu permet de décrire de manière précise les combinaisons de stratégies élémentaires à l'œuvre. L'étude montre également que la réussite à la tâche du point de vue linguistique est liée à la capacité à organiser les énumération de manière à produire d'abord des couples sûrs (ceci quel que soit le type de configuration).

La situation de l'alphabet s'est révélée plus surprenante. Nous avons observé des mises en œuvre de stratégies d'énumération dont certaines étaient attendues et d'autres très éloignées des attendues. Le contrôle réalisé par le marquage a été observé dans de nombreux cas. Des stratégies de productions de marques multiples ont permis d'observer des productions de solutions très originales. Elles ont ainsi permis d'observer toutes les stratégies de l'étude *a priori*, même celles que nous ne pensions pas observer dans ce cas. Elles ont aussi permis de réinterroger le marquage pour le caractériser par son caractère binaire.

Ces situations ont permis d'étudier des traitements nouveaux. Cette étude nous conduit à réinterroger la notion de traitement dans le modèle que nous avons développé. Ce sont les questions posées par l'intégration de ces traitements dans notre modèle que nous allons aborder maintenant.

Chapitre 7 - Énumération : Retour sur la modélisation

Nous nous sommes appuyés sur une étude des collections présentes et des énumérations réalisées sur ces collections pour produire une analyse de situations expérimentales. Au terme de cette étude, nous revenons à notre objet de recherche en nous demandant en quoi les situations observées dans cette partie B nous permettent de mieux comprendre l'énumération, de mieux structurer les situations d'énumération.

Ce chapitre a pour objectif de conclure le travail conduit dans cette partie B. Après être revenu sur les hypothèses que les expérimentations valident, nous portons à nouveau un double regard sur les aspects théoriques et sur la matérialité.

Nous montrons comment la prise en compte de la matérialité impacte la modélisation des traitements et nous amène à reconsidérer les collections en jeu dans les situations et les variations dans le pilotage de l'énumération.

1. Des hypothèses autour de l'énumération validées

Ce que l'analyse révèle et qui ne dépend pas de la discipline scolaire, c'est que : la nature de la configuration est une variable qui impacte toutes les situations observées et présentées dans cette thèse. La caractéristique commune à toutes ces situations est qu'il faut réaliser un traitement « assez exhaustif » des éléments d'une collection, ce qui nécessite d'énumérer la collection

Dans le cas « configuration non modifiable », les collections se constituent toujours en listes, soit par la raison graphique (ce qui est toujours le cas de collections « écrits »), soit par l'énumération (et dans ce cas la raison graphique intervient comme une connaissance d'énumération).

Dans le cas «configuration modifiable », les mécanismes de séparation spatiale permettent d'exercer un contrôle sur l'énumération. Les objets-éléments sont considérés comme traités à partir du moment où ils ont rejoint un espace particulier qui constitue l'ensemble des objets-éléments présentant les caractéristiques requises. Ainsi, la réalisation de la tâche nécessite la mise en œuvre de tris dans toutes les situations.

2. Un nouveau regard sur la question de la matérialité

Notre étude s'est construite autour d'un jeu de variables dont la principale a toujours été la nature de configuration (modifiable/ non modifiable). La nature de la configuration a présenté pendant la plus grande partie de ce travail un caractère indépassable que l'intégration de la matérialité aux analyses a permis de réduire. Cette distinction se clarifie avec la parution de (Margolinas & Laparra, 2016), alors que la recherche est déjà bien avancée. Les situations du cas « configuration modifiable » intègrent des dimensions issues de l'univers de l'oralité, même quand les support étiquettes proposées contiennent du texte écrit. Les situations du cas « configuration non modifiable » intègrent des dimensions issues de l'univers de la littératie, même quand les situations ne proposent pas le moindre texte écrit.

La nature de la configuration est donc une variable qui cherche à contraindre l'univers dans lequel la situation est proposée. C'est pour cette raison que la situation de l'alphabet a été proposée avec les deux types de configuration, alors que nous savons que l'appui sur des étiquettes est une pratique non ordinaire en classe de CM.

Les conditions dans lesquelles la situation de l'alphabet (dans le cas « configuration non modifiable ») a été proposée ont permis l'intégration de l'écrit à nos analyses. Cette dimension, absente de nos analyses antérieures, permet d'opérer un changement de point de vue, en substituant à l'appui sur la matérialité un appui sur l'univers dans lequel la situation est proposée.

Nos analyses *a posteriori* montrent comment les sujets se saisissent de cette possibilité d'action pour produire des solutions qui vont bien au-delà de ce que l'analyse *a priori* avait identifiée. Les procédures mises en œuvre mettent en évidence l'intrusion de stratégies que nous pensions caractéristiques de l'univers de l'oralité dans l'univers de la littératie.

Cette intrusion est révélatrice de la relativité de la dualité sur laquelle nous avons construit notre étude. Cette dualité a permis de mieux expliciter la nature des mécanismes sur lesquels nous avons élaboré notre construction de variables. Les situations que nous avons construites oscillent bien entre ces deux univers, même quand nous n'autorisons pas le recours au stylo. Ainsi, dans la situation des sucres, ce sont bien des chemins que le sujet construit pour structurer son énumération. Un chemin est un objet à une dimension qui traduit une organisation de l'espace qui est littéariée. Cette organisation littéariée produit un ordre sur les éléments de la collection que le chemin rencontre.

Plutôt que de dualité, il convient plutôt de considérer le continuum dont nous venons d'exhiber des traces entre l'univers de l'oralité et l'univers de la littéarié.

3. Nouvelle modélisation du traitement

Nous commençons notre étude par un aspect que la situation des phrases modifie de manière significative. Cette situation fait émerger la nécessité de raffiner les modélisations en réinterrogeant dans un premier temps la nature du traitement.

3.1 Quand le nombre de collections n'apparaît plus comme une variable

Dans notre première analyse, nous avons considéré qu'une caractéristique de cette situation était la présence de deux collections visibles.

Dans cette situation, les éléments d'une première collection doivent être mis en relation avec un élément spécifique d'une seconde collection. Deux éléments de la première collection ne reçoivent donc pas des traitements de même nature, puisqu'ils sont associés à des éléments distincts de la seconde collection.

C'est la première fois dans notre étude que nous rencontrons un traitement qui présente une telle caractéristique. Jusqu'à présent, les traitements mis en œuvre pouvaient être de même nature pour plusieurs éléments de la collection, et de fait, l'étaient la plupart du temps.

En effet, dans la situation des sucres ou des boîtes d'allumettes, traiter un élément consiste à réaliser la même action sur chaque élément de la collection de référence : mettre une allumette dans la boîte ou bien enlever le sucre sous le chapeau. Toutes les allumettes qui sont

rajoutées dans les boites sont identiques, tous les sucres qui sont enlevés des chapeaux le sont aussi.

Dans la situation des phrases, traiter un élément consiste à trouver l'élément particulier de la seconde collection qui lui correspond.

Quand nous avons démarré ce chapitre, les situations rencontrées jusqu'à présent nous avaient amenés à produire une modélisation dans laquelle le nombre de collections en jeu pouvait apparaître comme une variable. C'est l'appui sur la matérialité des objets présents en situation qui avait conduit à cette analyse.

Cette modélisation montre ici ses limites et contraint à considérer le traitement comme l'élément premier sur lequel doit se construire la modélisation.

3.2 Modélisation du traitement en terme de collections

En appui sur l'analyse de la situation des phrases, nous développons ici un nouveau regard sur le traitement que nous cherchons, dans un second temps, à appliquer aux situations précédentes.

3.2.1 Un nouveau regard sur le traitement

Dans la situation des phrases, nous disposons de deux collections. Une première collection est constituée de phrases contenant le verbe « relever ». Le problème consiste à retrouver le sens du mot « relever » dans chacune des phrases de la première collection. Une seconde collection est constituée d'une série de définitions du verbe « relever ». Le traitement consiste à trouver l'élément de la seconde collection pouvant être associé avec chaque élément de la première collection.

La fonction de la seconde collection est de modéliser le traitement à réaliser sur les éléments de la première.

Reprenons les notations de la modélisation mathématique mise en œuvre dans l'analyse *a priori* de la situation des phrases :

Collection des phrases : $P = \{ P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 \}$

Collection des définitions : $D = \{ D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7 \}$

Le traitement consiste à affecter à chaque élément de P l'élément de D qui convient, donc à construire l'ensemble des éléments de S, couples (P_i, D_j) qui permettent de savoir quel est le sens de relever dans chacune des sept phrases.

Le traitement est terminé quand S est constitué. Pour rappel,

$$S = \{ (P_1, D_7) , (P_2, D_5) , (P_3, D_1) , (P_4, D_3) , (P_5, D_2) , (P_6, D_6) , (P_7, D_4) \}$$

Le traitement consiste donc à affecter à chaque élément de la première collection (celle des phrases) un caractère représenté par une seconde collection. Le point de vue développé ici modifie notre regard sur le traitement et nous conduit à réinterroger les situations précédentes.

Pouvons-nous appliquer cette modélisation du traitement aux situations précédentes ? Et notamment, sommes-nous capable de déterminer une collection modélisant le traitement ?

3.2.2 Modélisation du traitement dans la situation des jetons marqués

Dans la situation des jetons marqués, la première collection disponible est la collection matérielle des jetons.

$$\text{Collection des jetons : } J = \{ J_i, 1 \leq i \leq \text{Card}(J) \}$$

où $\text{Card}(J)$ est le cardinal de l'ensemble des jetons.

Pour autant, l'analyse du traitement permet d'identifier une seconde collection. Cette seconde collection est constituée de l'ensemble des états qui peuvent être associés à chaque élément de la première collection. Dans la situation des jetons marqués, ces états sont « marqué » ou « non marqué ».

$$\text{Collection des états du traitement : } E = \{ \text{« marqué »}; \text{« non marqué »} \}$$

Dans la suite de ce paragraphe, nous notons l'état « marqué » E_1 et l'état non marqué E_2 .

Chaque élément de la première collection doit être associé à un état, à un élément de la seconde collection. Le traitement consiste donc à construire des couples tels que chaque élément de J est associé à un élément de E.

Notons S l'ensemble des solutions.

$$S = \{ (J_i, E_j), 1 \leq i \leq \text{Card}(J) \text{ et } j \in \{ 0 ; 1 \} \}$$

La solution est produite quand un état est attribué à chaque jeton de J.

Certaines caractéristiques de la situation des jetons marqués rendent difficile la conception d'une modélisation commune avec la situation des phrases.

Dans la situation des jetons marqués, les deux collections considérées sont dissymétriques du point de vue de leur cardinal. Le nombre d'éléments de la collection des objets peut varier alors que le nombre d'éléments de la collection des états reste fixé à deux. Dans la situation des jetons, plusieurs jetons sont associés au même état.

Une seconde dissymétrie est relative à la matérialité des collections. Dans la situation des jetons marqués, la seconde collection est une collection d'états. Elle permet de repérer une caractéristique des éléments de la collection des jetons, une caractéristique matérielle en l'occurrence (le fait d'avoir ou pas une gommette sur l'une des deux faces du jeton). Pour autant, elle n'existe pas en tant que collection matérielle. Nous entendons par là qu'il n'existe pas une collection de deux éléments permettant d'observer la collection des états.

De plus, cette modélisation nous amène à considérer les solutions comme des couples alors que nous ne les considérons que comme des éléments qui occupaient une position dans l'espace. C'est l'analyse mathématique *a priori* de la situation des phrases qui nous permet de concevoir les solutions du problème des jetons marqués comme un sous-ensemble d'un produit cartésien.

Le modèle que nous venons de produire nous permet de avoir une description homogène de deux situations qui nous apparaissaient au début de ce chapitre comme structurellement différentes.

Ce modèle est-il robuste avec les autres situations de notre étude ?

3.2.3 Modélisation du traitement dans la situation des allumettes

Dans la situation des allumettes, rajouter une allumette dans chaque boîte est une action matérielle. La nature même du traitement nous a engagé dans les chapitres précédents dans la prise en compte d'une matérialité forte dans la production de nos modélisations, nous amenant à considérer les allumettes qui allaient être mises dans la boîte comme une collection. L'analyse de la situation de la phrase nous amène à reconsidérer la situation des boîtes des allumettes et à produire une nouvelle description du traitement.

La première collection est la collection des boîtes d'allumettes. Notons B cet ensemble.

Collection des boîtes d'allumettes : $B = \{ B_i, 1 \leq i \leq \text{Card}(B) \}$

où $\text{Card}(B)$ est le cardinal de l'ensemble des boîtes d'allumettes.

Dans la situation, le sujet est amené à mettre des allumettes dans les boîtes. Il peut ne pas mettre d'allumettes dans une boîte, ou bien en mettre une ou plusieurs.

La seconde collection (la collection des états des boîtes) doit permettre de modéliser l'absence ou la présence (éventuellement multiple) d'allumettes dans la boîte. Elle est constituée du nombre d'allumettes qui peut dans chaque boîte. Notons A cet ensemble.

Collection des états : $A = \mathbb{N}$

Résoudre le problème des allumettes consiste donc à produire des couples pour lesquels la valeur de l'état est 1.

Notons S l'ensemble des solutions.

$S = \{ (B_i, 1), 1 \leq i \leq \text{Card}(B) \}$

De ce point de vue, la situation des boîtes d'allumettes présente certaines caractéristiques communes avec la situation des jetons marqués. Dans ces deux cas, la collection des états est une collection qui ne comporte *a priori* pas le même nombre d'éléments que la collection des boîtes ou des jetons et qui n'existe pas en tant que collection matérielle.

Les situations boîtes d'allumettes et jetons marqués diffèrent du point de vue du cardinal de la collection des états, puisque plus de deux états doivent être modélisés dans la situation des boîtes d'allumettes (plus d'une allumette pouvant figurer dans une boîte).

3.3 Modélisation des réponses erronées

Cette nouvelle modélisation du traitement et de la construction de la solution permet de disposer d'un outil pour représenter les solutions erronées produites.

Ainsi, la solution dans la situation des phrases est un sous-ensemble S du produit cartésien Π . Quand le sujet produit une solution erronée, c'est que l'ensemble S' qu'il produit est distinct de S et donc que S' contient des couples de Π qui ne sont pas éléments de S ou bien que S' ne contient pas certains éléments de S . Nous retrouvons ici les deux conditions de l'énumération que nous avons construites dans la première partie de notre travail.

Dans la situation des jetons marqués, la réponse est erronée quand l'ensemble des solutions S' est tel qu'il existe au moins un élément de S' tel que la valeur de l'état n'est pas correct.

La solution peut être aussi modélisée comme un sous-ensemble du produit cartésien de l'ensemble J par l'ensemble E.

Dans la situation des allumettes, la réponse S' est erronée quand il existe au moins un élément de S' dont l'état n'est pas 1. Par ailleurs, l'étude de l'état permet d'avoir des indications sur la nature de l'erreur commise par le sujet, à savoir soit un élément oublié (état égal à 0), soit un élément traité plus d'une fois (état strictement supérieur à 1). Nous pouvons même savoir dans ce dernier cas le nombre de fois de trop que l'élément a été traité.

Ce nouveau modèle permet de prendre en compte les réponses erronées.

Ainsi, cela nous permet de rapprocher les modélisations des réponses erronées dans les cas des situations des jetons marqués et des boîtes d'allumettes. La relation binaire qui servait à modéliser bonnes et mauvaises réponses dans la situation des jetons marqués apparaît comme un cas particulier d'une relation n-aire (n étant le nombre de valeurs maximum prise par l'état) qui a servi à modéliser bonnes et mauvaises réponses dans la situation des boîtes d'allumettes.

Nous avons rencontré un exemple de relation 7-aire dans l'étude de la situation des phrases, puisque sept états différents pouvaient être attribués à chaque élément de la collection des phrases.

Le jeu sur la taille de la collection des états par rapport à la taille de la première collection et la nature des contraintes des mécanismes d'association entre les éléments des deux collections (relation bijective ou pas) apparaissent comme des variables que l'étude de la situation des phrases a permis de faire émerger.

L'appui sur l'analyse mathématique de la situation des phrases a permis de dépasser le simple appui sur la matérialité qui nous bloquait dans l'analyse que nous conduisons des situations en terme de nombres de collections. C'est bien ce changement de cadre dans notre modélisation qui nous a permis de raffiner notre modèle.

4. Variations dans le pilotage de l'énumération

A partir d'observations de la situation des phrases, nous allons construire une nouvelle description des stratégies. Cette nouvelle description s'appuie sur les variations mises en œuvre dans le pilotage de l'énumération.

4.1 Observation fondatrice dans la situation des phrases

Les observations de la situation des phrases ont mis en évidence la présence de la stratégie d'énumération de la collection des phrases et de la stratégie d'énumération de la collection des définitions.

Les deux collections ne jouent pas le même rôle dans chacune des deux stratégies. La stratégie d'énumération de la collection des phrases donne un rôle particulier à cette collection. La solution est construite à partir de l'énumération de cette collection. Cette construction nécessite des énumérations successives de la seconde collection présente dans la situation, la collection des définitions. La stratégie d'énumération de la collection des phrases repose sur le même principe. Ce qui change, c'est que c'est la solution est alors construite à partir de l'énumération de la collection des définitions.

La différence entre les deux stratégies réside dans le choix de la collection qui sert de support à la construction de la solution, donc dans le choix de la collection qui est énumérée en premier.

Ces deux stratégies reposent sur la création d'une dissymétrie entre les deux collections. C'est dans le cas « configuration modifiable » que cette observation a eu lieu.

L'analyse mathématique décrit la solution comme des couples, les stratégies indiquent dans quel ordre chaque couple est construit (une définition est associée à une phrase préalablement choisie ou une phrase est associée à une définition préalablement choisie).

La stratégie élimine la symétrie des deux collections en indiquant l'ordre dans lequel elles sont traitées.

Dans la stratégie d'énumération des phrases, c'est la collection des phrases qui est traitée en premier et dans la stratégie d'énumération des définitions, c'est la collection des définitions qui joue ce rôle.

Dans une stratégie donnée, nous nommons collection primaire la collection traitée en premier et collection secondaire la collection traitée en second.

La différence entre les stratégies d'énumération de la collection des phrases ou de la collection des définitions tient dans le choix de la collection primaire.

Des observations de la situation des phrases ont permis de mettre en évidence comment des sujets pouvaient, dans certaines phases de la résolution, changer la collection qui servait de support à l'énumération et passer ainsi d'une stratégie à l'autre.

Nous pouvons maintenant reformuler ce changement de stratégie avec les concepts de collections primaire et secondaire. Nous dirons que, dans ce cas, les sujets permutent collection primaire et collection secondaire en cours de traitement.

Ces remarques, nées de l'observation de la situation des phrases, permettent de se poser la question d'une permutation possible entre les deux collections dans le cas des autres situations étudiées.

4.2 Variations dans le pilotage de l'énumération dans les situations de tri

Intéressons-nous maintenant aux stratégies mises en œuvre dans les situations de tri. Pour cela, nous prenons appui sur la situation des jetons marqués.

Dans le cadre d'un tri, nous avons décrit deux stratégies :

- Une stratégie de tri systématique qui consiste à saisir chacun des jetons et à se demander pour chaque jeton s'il est marqué ou pas,
- Une stratégie de tri par extraction qui consiste à saisir dans le tas de jetons les jetons dont le sujet peut observer qu'ils sont marqués, éventuellement en modifiant aléatoirement la position des jetons dans le tas.

Dans le cas de la mise en œuvre d'un tri systématique, chaque jeton est saisi un à un puis le caractère marqué de ce jeton est étudié avant que le sujet ne passe au jeton suivant. Dans ce cas, c'est la collection des jetons qui joue le rôle de collection primaire. La collection

secondaire, qui correspond à la caractéristique qui est étudiée dans un second temps, est la collection des états (marqué/non marqué).

Dans le cas de la mise en œuvre d'un tri par extraction, le sujet cherche à repérer les marques, puis une fois ces marques repérées à extraire les jetons sur lesquelles elles figurent de la collection des jetons. Dans ce cas, c'est la collection des états (réduite à deux états) qui joue le rôle de collection primaire et la collection des jetons de collection secondaire.

Nous pouvons donc expliquer les différences de stratégies de tri par une différence de choix de l'ordre des deux collections en jeu (les éléments de la collection d'objets et les éléments de la collection d'états).

Faire un tri par extraction consiste à choisir la collection des états comme collection primaire alors que faire un tri systématique consiste à choisir la collection des états comme collection primaire.

Cette nouvelle modélisation du tri nous permet d'unifier certaines de nos observations. Nous avons mis en évidence des sujets qui changeaient de stratégie de tri au milieu de l'action. Ils passent d'un tri par extraction à un tri systématique. Avec la nouvelle analyse que nous venons de produire, nous pouvons maintenant dire qu'ils ont permuté les collections primaire et secondaire au milieu du tri.

Nous avons donc produit un modèle qui permet de décrire les procédures mises en œuvre sur des situations apparemment très différentes (situations de tri et situation des phrases).

4.3 Variations dans le pilotage de l'énumération dans la situation de l'alphabet

Dans toutes les situations précédentes, la modélisation fait apparaître la solution du problème comme un ensemble de couples, sous-ensemble d'un produit cartésien qui décrit les combinaisons possibles d'éléments des collections primaire et secondaire.

Revenons à l'analyse mathématique de la situation de l'alphabet. Dans ce cas, la solution est un n -uplet, ensemble ordonné de n éléments de la collection. Cette solution est réduite à un singleton (le n -uplet cherché), qui est un élément de l'ensemble des n -uplets qui peuvent être construits à partir d'un ensemble à n éléments. Cet ensemble des n -uplets est le produit cartésien de n ensembles tous identiques.

Trouver la solution du problème consiste à trouver dans cet ensemble de n^n éléments celui qui convient.

Les éléments de la collection qu'il faut traiter sont des graphie-mots, que nous avons modélisés à l'aide de n -uplets. Le traitement consiste à ordonner les éléments d'un ensemble qui sont des suites ordonnées de lettres.

La situation de l'alphabet est très différente des situations précédentes, de par la nature des éléments qu'il faut traiter. Cette caractéristique a pour effet une explosion de la complexité.

Pour autant, nous cherchons à appliquer à cette situation le modèle développé.

Commençons par revenir sur la stratégie de partitionnement. Cette stratégie consiste à construire des classes d'éléments qui ont des caractéristiques communes. L'ensemble des graphie-mots est partitionné en deux sous-ensembles, l'ensemble des graphie-mots dont la première lettre est « c » et l'ensemble des graphie-mots dont la première lettre est « d ».

Ces deux ensembles sont construits par des extractions des graphie-mots de la collection des éléments non encore classés. Dans cette phase, ce sont les lettres de l'alphabet qui sont la collection primaire, la collection des graphie-mots jouant le rôle de collection secondaire.

Le sujet peut itérer ce processus de classement et chercher à regrouper les graphie-mots qui, ayant même première lettre, ont aussi même seconde lettre. La collection des lettres joue encore le rôle de collection primaire, et le critère fonctionne sur la seconde lettre de chaque élément de la collection secondaire. A ce stade, le critère est mis en œuvre sur le second élément du n -uplet, la seconde lettre du graphie-mot.

Les stratégies par insertion et sélection reposent sur des comparaisons lexicographiques successives de deux éléments. Dans ce cas, la collection primaire est la collection des graphie-mots et la collection secondaire est la collection des lettres de l'alphabet.

Nous avons observé des combinaisons de stratégies par insertion ou sélection avec des stratégies de partitionnement. Le passage de la stratégie de partitionnement à l'une des deux autres stratégies (insertion ou sélection) correspond à une permutation du rôle des collections primaires et secondaires.

La situation de l'alphabet est différente du point de vue de la structure des autres situations étudiées. Pour autant, nous repérons des collections dont le rôle peut varier dans le pilotage de l'énumération.

Conclusion

1. Des développements théoriques

1.1 Une nouvelle définition de l'énumération

Quand DémathÉ a cherché sa première unité conceptuelle pour son document à destination des enseignants du premier degré, son choix s'est rapidement porté sur l'énumération, objet dont l'étude par Briand (1993) apparaissait circonscrite et achevée, même si Briand envisage le caractère général à travers l'évocation de la situation de la liste de courses (2000, p. 9). C'est dans ce cadre qu'a été conçue une situation analogue à la situation proposée par Briand (1999), la situation des sucres. Une première étude détaillée des procédures rencontrées dans les données produites pour DéMathÉ a constitué une réelle surprise, surprise qui est le déclencheur de cette recherche.

Brousseau et Briand avaient considéré que les connaissances d'énumération étaient « acquises » ou « simples » si la collection était visible (Brousseau) ou déplaçable (Briand). Or, la mise en œuvre de situations dans lesquelles les éléments sont déplaçables avait déjà conduit Briand (1999) à des surprises. Dans notre cas, la surprise a résidé dans les difficultés très spectaculaires rencontrées par certains sujets dans la situation des sucres. C'est cette visibilité extrême de la difficulté qui a conforté l'intérêt de cette recherche sur l'énumération.

Brousseau (1984) avait mis en évidence cette connaissance dans des contextes mathématiques, Briand (1993) l'avait étudiée dans des contextes numériques. Les premières définitions de l'énumération ont été produites par Briand en appui sur la situation de dénombrement par comptage. Ces définitions s'appuyaient sur la réalisation d'une contrainte forte : « chaque élément doit être traité une fois et une seule ».

La condition de l'énumération au sens de Briand peut être reformulée sous la forme d'une double contrainte : « chaque élément doit être traité au moins une fois et une seule » et « chaque élément doit être traité au plus une fois et une seule ». Pour Briand, l'énumération est présente quand cette double contrainte est réalisée simultanément.

Nous avons identifié des situations dans lesquelles nous observons des difficultés et des procédures de même nature que celles rencontrées dans les situations d'énumération au sens de Briand. Ce sont les situations de tri. L'étude des caractéristiques logiques de ces situations a fait apparaître que seule une des deux conditions de l'énumération au sens de Briand était vérifiée.

Le caractère identique des difficultés rencontrées dans chaque type de situation confortait l'hypothèse du caractère général de l'énumération, dont ne rendait pas compte la définition issue du comptage. La force des contraintes de la définition issue du comptage empêchait la perception du caractère général de l'énumération.

Pour pouvoir nommer de la même manière des connaissances qui présentaient de nombreux points communs, nous avons produit une définition de l'énumération plus générale. Nous avons défini l'énumération par le respect d'au moins une des deux conditions citées précédemment.

Cette nouvelle définition est compatible avec la définition originelle qui s'appuie sur la réalisation simultanée des deux conditions en jeu dans les situations d'énumération. Cette nouvelle définition permet de qualifier dans ce cas l'énumération de forte.

Cette nouvelle définition permet d'ouvrir le champ de l'énumération. Quand une seule des conditions est réalisée, l'énumération est qualifiée de faible. L'appui sur les valeurs possibles de l'ordre de multiplicité de chaque élément permet de préciser la qualification. L'énumération est qualifiée de faible + quand chaque élément doit être traité au moins une fois. L'ordre de multiplicité de chaque élément est alors au moins égal à 1. L'énumération est qualifiée de faible – quand chaque élément doit être traité au plus une fois. L'ordre de multiplicité de chaque élément est alors au plus égal à 1.

Par la diminution des contraintes imposées, cette nouvelle définition permet de rendre compte de la proximité des situations. Par le respect simultané ou non de chacune des contraintes, cette nouvelle définition permet de rendre compte de la diversité de ces mêmes situations. Les situations que nous avons étudiées sont donc des situations d'énumération dont les spécificités vont pouvoir être qualifiées.

Les situations des perles plombées et des allumettes peuvent alors être rapprochées. Ce sont toutes les deux des situations d'énumération (l'une faible, l'autre forte). Nous avons construit un outil qui permet de décrire les ressemblances et les différences entre ces situations.

Produire une nouvelle définition a été une décision tardive dans notre travail de recherche. Dans (Margolinas, Wozniak, & Rivière, 2015), nous avons commencé par nommer « énumération » les connaissances en jeu dans les situations de tri. Des négociations avec la rédaction de la revue nous ont conduit à remplacer « énumération » par un autre mot, « organisation », puis « exploration », ce qui était légitime compte tenu de la définition d'énumération que nous utilisons à ce moment. Le travail sur l'élaboration de la définition généralisée, et notamment l'introduction des caractérisations de l'énumération faible, permet maintenant de revenir à une désignation compatible avec l'idée originelle introduite par Brousseau.

Ceci n'est pas qu'un problème de vocabulaire. L'emploi du même mot pour désigner des connaissances de même nature a des conséquences en terme de formation auprès des enseignants. Si les connaissances en jeu dans des situations sont de même nature, il faut qu'elles puissent être nommées par le même mot. C'est ce que cette nouvelle définition permet.

Briand avait évoqué l'idée d'une présence de l'énumération dans d'autres situations, notamment à travers l'évocation de la situation de la liste de courses (2000, p. 9). La définition sous forme de double contrainte rendait l'identification de telles situations très difficile. Cette difficulté peut expliquer l'absence de reprise de son travail, la réalisation simultanée des deux contraintes ayant été peu observée en dehors du comptage. Nous pensons que les situations d'énumération sont nombreuses et que la nouvelle définition va permettre de les identifier. La nouvelle définition rend possible l'extension du champ de l'énumération.

Le caractère surplombant de la nouvelle définition s'accompagne de l'introduction de qualifications qui permettent de nuancer l'énumération. Cette introduction de nuances permet la conception de proximités mais aussi d'écarts entre des situations proches. Nous contribuons ainsi à une meilleure compréhension de la continuité des connaissances d'énumération.

1.2 Etude la situation fondamentale

Dans la continuité du travail sur la situation fondamentale de l'énumération (Briand, 1993), nous avons complété l'analyse des variables. Énumérer une collection, c'est pour nous articuler la prise en compte de dimensions spatiales et de dimensions temporelles.

Notre recherche s'est structurée autour d'une variable caractérisant les contraintes pesant sur la collection à énumérer. Nous avons substitué à une caractérisation sur les éléments de la

collection (éléments déplaçables ou non déplaçables) une nouvelle caractérisation qui porte sur la collection elle-même. La prise en compte du caractère modifiable ou non de la configuration permet de généraliser la description des situations et des contraintes qui pèsent sur elles du point de vue de l'énumération.

Notre recherche décrit comment cette prise en compte est réalisée quand la configuration à énumérer est modifiable ou non. L'étude fait apparaître des stratégies qui cherchent toutes à articuler espace et temps, mais qui réalise cette articulation dans une forme qui dépend des contraintes pesant sur la configuration.

Dans le cas des configurations modifiables, les mécanismes mis en œuvre pour contrôler la réalisation d'une ou plusieurs conditions de l'énumération reposent sur des considérations spatiales. La construction d'une suite de partitions règle les questions spatiales. Les questions temporelles sont prises en charge de manière transparente par la construction d'un ordre construit par le corps, dans une suite de déplacement des objets. Dans le cas du tri, nous avons développé des modèles de stratégie qui rendent compte de l'activité du sujet.

Notre étude a permis de généraliser la description des stratégies en jeu dans les situations d'énumération dans le cas de configurations non modifiables, ce que nous avons détaillé dans le chapitre 2 à propos de la situation des sucres.

Les stratégies *Lignes* et *Colonnes* sont ainsi des instances d'une stratégie plus générale que nous avons nommée *Faisceaux de Parallèles*. Nous avons qualifié cette stratégie de générique car elle permet de regrouper des variations dont certaines ont une occurrence très forte, comme les deux instances précédemment citées, très répandues dans l'univers de la littérature. Pour autant, nous avons mis en évidence l'existence d'autres instances de cette stratégie générique. C'est l'observation de ces autres instances qui a permis de dégager la généralité de la stratégie et donc l'unification possible de stratégies *Lignes* et *Colonnes*.

Une autre stratégie générique est la stratégie *Partition*.

Nous avons décrit des procédures gagnantes en appui sur la mise en œuvre d'une de ces deux stratégies génériques ou bien d'une combinaison de ces deux stratégies.

Construire des faisceaux de parallèles est une solution pour partitionner une collection. La stratégie *Faisceaux de Parallèles* peut apparaître comme une instance de la stratégie *Partition*. Cette instance particulière transforme une collection en l'organisant comme un ensemble d'ensembles à structure rectiligne (qui peut être rapprochée d'organisations

littératiées). En effet, l'appui sur une droite règle la question de la production d'un ordre sur les éléments du sous-ensemble.

Nous dépassons ainsi l'antagonisme initial entre les deux stratégies génériques, antagonisme sur lequel s'était organisé l'analyse des variables dans le cas « Configuration non modifiable ».

Cette recherche de généricité reconstruit *a posteriori* une évidence que la finesse de l'analyse des stratégies avait fait disparaître, la construction de partitions dans tous les cas. C'est sur ce mécanisme de construction de partitions que reposent les stratégies mises en œuvre dans le cas des configurations modifiables. Elle reconstruit aussi les raisons pour lesquelles deux stratégies avaient émergées : la mise en œuvre, dans le cas de la stratégie *Faisceaux de Parallèles*, de mécanismes qui seront généralisés dans les univers littératiés.

La continuité des stratégies d'énumération entre les deux types de configuration est ainsi reconstruite. Du point de vue de la recherche, nous avons contribué à unifier et spécifier différents cas de la situation fondamentale de l'énumération.

L'étude conduite dans le chapitre 7 interroge la question de la prise en charge de l'énumération dans des contextes où l'écrit intervient. Énumérer nécessite de construire un ordre. A la prise en charge transparente de l'ordre par le corps dans le domaine de l'oralité, se substitue une construction d'un ordre dans le domaine de la littératie que l'écriture peut permettre de réaliser.

Les connaissances produites permettent de mieux comprendre les difficultés que les élèves rencontrent dans des situations dans lesquelles des énumérations sont nécessaires.

Nous avons ainsi développé des outils d'analyse qui pourraient être transformés en ressources pour aider le professeur à concevoir et analyser les situations d'apprentissage, à mieux piloter les variations qu'il propose d'une séance à l'autre, à mieux anticiper les difficultés que les élèves pourraient rencontrer. Les outils d'analyse que nous avons développés pourraient donc aider à la réalisation du projet initial de DéMathÉ.

En partant de situations, nous avons produit une analyse en termes de variables qui a permis de mettre à jour des procédures. Le raisonnement peut être utilisé dans l'autre sens. Nous avons développé une compréhension des variables qui permet de répondre à la question « Quels choix réaliser, quelle situation proposer, quelle organisation matérielle de la situation mettre en œuvre pour faire apparaître telle procédure ? »

1.3 Une modélisation du traitement

Notre partie A a permis de construire un cadre qui étend le champ de l'énumération en la redéfinissant. Nous nous appuyons sur la collection des éléments à traiter et nous jouons sur la nature des contraintes qui pèsent sur le traitement de ces éléments.

La partie B poursuit le travail d'extension du champ de l'énumération. C'est l'injection de l'écrit dans les situations qui permet cette extension. Nous avons cherché à construire un modèle qui intègre la prise en compte du traitement, non pas en tant qu'opération particulière sur les éléments d'une collection, mais en tant qu'opération générique nécessairement associée à une énumération de la collection.

Ce modèle conduit à considérer une nouvelle collection modélisant les différents états du traitement à réaliser. Dans ce nouveau modèle, quel que soit le traitement, deux collections sont toujours présentes : la collection des éléments à énumérer et la collection des différents états du traitement.

Cette nouvelle modélisation permet d'unifier les situations rencontrées dans les différentes parties. Toutes mettent en jeu ces deux collections, ce qui les distingue du point de vue de l'énumération est le nombre d'états que chaque traitement induit (et donc le cardinal de cette collection).

Cette nouvelle modélisation permet de revenir sur les stratégies exhibées dans la partie A. Les situations d'énumération sont des situations dans lesquelles interviennent deux collections : une collection d'objets et une collection d'états. Pour que les éléments de la collection des objets soient traités, les deux collections doivent être énumérées. Cette double énumération ne peut pas être simultanée.

La dissymétrie des deux collections permet de décrire les stratégies en terme de choix de la collection qui va être énumérée en premier (et que nous avons qualifiée de primaire) par rapport à la collection énumérée en second (et que nous avons qualifiée de secondaire).

Les stratégies exhibées dans le chapitre 3 de la partie A (cas « configuration modifiable ») ont donc été décrites avec ce nouveau modèle. Cette nouvelle modélisation rend également compte des variations de stratégies observées dans certaines des parties observées.

2. Aspects méthodologiques

Notre travail a été conduit dans un cadre méthodologique, dont nous réaffirmons ici les caractéristiques

2.1 Des connaissances aux savoirs

Le travail de Briand (1993) a permis de constituer dans l'institution « Recherche en didactique des mathématiques » l'énumération comme un savoir. Ce savoir « [...] *n'existe pas "in vacuo" dans un vide social : tout savoir apparaît, à un moment donné, dans une société donnée, comme ancré dans une ou des institutions* » (Chevallard, 1989, p. 13)

C'est dans cette continuité que nous nous situons.

Pour autant, ce mécanisme de construction de savoirs s'articule autour de situations. C'est l'étude des situations qui nous a permis de construire une modification de la définition de l'énumération. Cette activité mathématique et didactique s'est déroulée dans un contexte de questionnement sur les problèmes d'enseignement.

Les savoirs ont été produits en appui sur les situations dans une institution dont une des fonctions est d'étudier les problèmes d'enseignement. Pour autant, les situations observées ou proposées ne sont pas des situations didactiques.

Brousseau (Brousseau, 1998) donne une description du processus que nous avons mis en œuvre dans cette thèse.

Nous avons travaillé à la détermination du savoir en jeu.

« Avant de communiquer ce qu'il pense avoir trouvé, un chercheur doit d'abord le déterminer : il n'est pas facile de distinguer, dans le labyrinthe des réflexions, celles qui sont susceptibles de devenir un savoir nouveau et intéressant pour les autres ; les démonstrations obtenues sont rarement celles des conjectures envisagées ; tout un réaménagement des connaissances voisines, antérieures ou nouvelles, doit être entrepris ». (1998, p. 48)

Nous avons effectué certains aspects du travail de dépersonnalisation. Nous avons produit des définitions axiomatiques de l'énumération.

« Il faut supprimer toutes les réflexions inutiles, la trace des erreurs commises et des cheminements erratiques. Il faut cacher les raisons qui ont conduit dans cette direction et les conditions personnelles qui ont présidé à la réussite, problématiser habilement les remarques, même un peu banales, mais éviter les trivialités ... Il faut encore chercher la théorie la plus générale dans laquelle les résultats restent valables ... » (1998, p. 48)

Pour autant, nous n'avons pas conduit le travail du mathématicien à son terme tel que le décrit Brousseau.

« Mais cette présentation efface complètement l'histoire de ces savoirs, c'est-à-dire la succession des difficultés et des questions qui ont provoqué l'apparition des concepts fondamentaux, leurs usages pour poser de nouveaux problèmes, l'intrusion de techniques et de questions nées des progrès des autres secteurs, le rejet de certains points de vue trouvés faux ou maladroits et les innombrables querelles à leur sujet. Elle masque le « vrai » fonctionnement de la science impossible à communiquer et à décrire fidèlement de l'extérieur, pour mettre à sa place une genèse fictive. » (1998, p. 47)

Nous avons cherché à laisser la trace des raisons ainsi que les aspérités qui ont émergées dans cette recherche. La connaissance du contexte dans lequel le savoir a été produit est une donnée qui peut aider à sa légitimation et à sa diffusion. Il ne peut être question pour l'instant de pouvoir faire l'économie de cette *succession de difficultés et de questions*. Plus que la description d'un savoir, nous avons travaillé à la description de l'émergence de ce savoir.

2.2 Des analyses *a priori* successives

Notre travail s'est déroulé sur un temps long. C'est ce temps long qui nous a permis de mettre en œuvre des analyses *a priori* successives. De ce point de vue, notre méthodologie s'appuie sur (Margolinas, 1992) qui décrit des analyses *a priori* qui s'étalent sur 9 ans (de 83 à 92) et montre les transformations successives dans un processus de construction théorique.

Ces analyses sont présentées dans un ordre chronologique, *« cette chronologie permet de saisir quelque chose de la recherche en train de se faire, et des avancées permises par certains outils d'analyse »* (1992, p. 186)

Nos analyses *a priori* successives ont chacune pour objectif de permettre des avancées de la théorie. Ces avancées de la théorie modifient le cadre dans lequel nous travaillons. Les modifications successives du cadre que nous construisons permettent que de nouvelles analyses *a priori* soient conduites sur les mêmes données. Le cadre ayant changé, la nouvelle analyse *a priori* est donc différente.

Un des objectifs de ce travail était de mieux comprendre les difficultés des élèves confrontés à des problèmes d'énumération. Les données présentées dans ce travail sont des données élaborées dans des situations hors de la classe, dans lequel l'élève n'est pas assujéti à l'institution scolaire (ou tout au moins moins que dans un contexte ordinaire de classe).

C'est l'observation de sujets dans des situations isolées qui nous a permis de construire les modélisations successives. Ces modélisations nous permettent de mieux comprendre la nature des difficultés rencontrées par des sujets dans des situations isolées. Elles sont un élément

constitutif de notre méthodologie, étape nécessaire à la compréhension de la situation de l'élève.

C'est la compréhension des connaissances en jeu dans des situations isolées qui nous permet de dégager des éléments de compréhension plus généraux, dans des situations dans lesquelles la complexité explose.

Ainsi, nous pourrions reconsidérer nos analyses *a priori*, réalisées en début de thèse. L'injection de l'écrit dans la partie B a permis des avancées dans la compréhension de l'énumération que nous devons mieux articuler avec des développements théoriques récents sur le sujet (Margolinas & Laparra, 2016).

La prise en compte de la temporalité dans l'énumération est une nécessité quelle que soit la configuration. Nous sommes déjà revenus sur comment cette nécessité est prise en compte de manière souvent transparente par l'oralité. La construction d'une temporalité par la réalisation d'un ordre peut être réalisée par l'écriture. Nos données du chapitre 2 (la situation des sucres) doivent être à nouveau soumises à analyse *a priori*, munis de ces nouveaux cadres.

Nous n'en n'avons donc pas terminé avec les analyses successives de nos données.

3. Transformations du champ de l'énumération

Nous abordons dans ce paragraphe des transformations du champ de l'énumération qui nous apparaissent plus profondes que celles évoquées dans le premier paragraphe de cette conclusion. Outre la question de la détermination du champ de l'énumération, ces transformations permettent d'investiguer la question de son exportation à des institutions extérieures à l'institution dans laquelle elle s'est développée.

3.1 Extension du champ de l'énumération

Nous avons cherché à résoudre le paradoxe posé par Brousseau dans la présentation qu'il fait de l'énumération : « *quoiqu'assez différents, ces problèmes peuvent être rapprochés intuitivement* » (1984, p. 3). Le rapprochement de situations nous a conduit à produire une nouvelle définition.

Munis de cette nouvelle définition, nous avons cherché à étendre le champ des situations dans lesquelles intervenait l'énumération. Cette recherche ne s'est pas faite dans le champ numérique, champ dont Brousseau et Briand décrivent la richesse du potentiel. Nous avons choisi de nous placer dans un champ externe aux mathématiques.

Nous avons donc étudié dans quelle mesure les connaissances décrites dans notre première partie se retrouvaient dans des situations clairement non mathématiques. Le champ d'investigation choisi a été celui d'une discipline scolaire, le français.

Les situations étudiées dans ce cadre ont mis en évidence la présence de connaissances d'énumération. Nos outils d'analyse ont permis de les rendre visibles dans des situations pour lesquelles cela n'avait pas été réalisé. L'énumération est donc présente dans certaines situations d'une discipline scolaire autre que les mathématiques.

Des connaissances spécifiques à ces disciplines scolaires sont bien évidemment nécessaires pour réaliser la tâche dans ces situations. Le corollaire immédiat de la mise en évidence de l'énumération est qu'elle n'est jamais présente de manière isolée dans les situations que nous avons étudiées.

Nous n'avons pas les connaissances didactiques et disciplinaires pour étudier les situations du point de vue de la multiplicité des savoirs linguistiques en jeu. Nos analyses sont donc très incomplètes du point de vue des connaissances en jeu dans une situation d'étude de la langue. Nous n'avons donc pas les moyens d'entrer dans l'analyse détaillée de la manière dont les traitements élémentaires sont réalisés. Pour autant, la modélisation des stratégies produite en appui sur les questions d'énumération de collections fonctionne : comme pour les situations issues du champ mathématique, les procédures mises en œuvre par les sujets peuvent être décrites en terme d'actions sur les éléments des collections en jeu dans ces situations.

Des connaissances d'énumération, plus générales, sont donc aussi nécessaires pour réaliser la tâche dans certaines situations. Ces connaissances ne sont pas spécifiques au domaine disciplinaire dans lequel la situation est proposée.

Nous avons donc étendu le champ de l'énumération et nous sommes appuyés sur l'énumération et les collections comme outil d'analyse des connaissances en jeu dans des situations externes au champ mathématique.

Nous contribuons ainsi au repérage de cette connaissance dans des situations qui mettent en jeu des collections. Nous avons soumis ces nouvelles situations au même jeu sur les variables que les situations du champ mathématique. Nous avons montré l'influence de ces

variables sur la complexité de la situation et sur la nature des procédures mises en œuvre lors de la résolution.

Nous produisons donc des outils qui pourraient être transformés en ressources pour aider un professeur dans le pilotage des situations, dans le choix des variables et dans la compréhension de leur impact sur la difficulté des situations du point de vue de l'énumération. Par ailleurs, le professeur peut disposer d'éléments lui permettant de mieux comprendre certaines difficultés des élèves, parmi les difficultés non spécifiques au champ disciplinaire de la situation.

Dans le cadre de la formation des enseignants, nous avons travaillé avec les étudiants de Master MEEF à étendre le domaine de l'énumération en soumettant, dans le cadre des mémoires de Master, à l'analyse certaines situations, scolaires ou non scolaires.

Ces travaux ont permis d'investiguer des situations mathématiques (le dénombrement des faces d'un solide, le problème des tours de couleur, la constitution d'une boîte de trésor, le jeu du portait...), des situations scolaires non mathématiques (la recopie d'un texte, la reconstitution d'une phrase à partir d'étiquettes, la détermination de son étiquette nom, l'utilisation du dictionnaire, l'encodage de sons), des situations sociales (la liste de courses, le jeu du sudoku, faire des puzzles, le calendrier de l'aveugle), et des situations du professeur (la distribution des feuilles). La liste de ces travaux figure en annexe 21.

3.2 Exportation de l'énumération

Nous nous demandons dans quelle mesure les connaissances produites dans cette recherche sont exportables dans d'autres institutions. Nous commençons par interroger la question de l'exportation dans l'institution scolaire, avant de revenir à l'exportation vers d'autres institutions de recherche.

Notre recherche nous a conduit à produire des savoirs dans une institution, l'institution « Recherche en didactique des mathématiques ». L'extension de la définition de l'énumération pose la question de la scolarisation de ce savoir. L'énumération forte est un savoir scolarisable (Chevallard, 1985): l'institution scolaire commence à se référer à cet objet dans ses instructions officielles, même si cette référence ne se fait que dans des contextes de dénombrement.

L'énumération et/ou l'énumération faible doivent-elles devenir des savoirs scolarisables ?
Et si oui, le peuvent-elles ?

L'énumération forte a commencé à devenir scolarisable quand elle a été exhibée dans une situation banale et très répandue dans l'enseignement scolaire : le dénombrement. Le tri peut-il constituer un bon candidat comme appui au développement de l'énumération faible ? Le tri est une situation ordinaire et répandue ; donc de ce point de vue, la situation remplit la condition exhibée dans le cas de l'énumération pour devenir scolarisable. Pour autant, le parallèle ne peut pas être conduit jusqu'à son terme. En effet, le tri n'est pas disciplinaire. Il intervient partout, en sciences, en français, etc. Il n'est pas enseigné pour lui-même. Cela pose donc un problème de transposition.

De plus, nous avons montré que l'appui sur le comptage, qui a été un vecteur de visibilité, est maintenant un obstacle pour considérer l'énumération forte indépendamment de cet autre savoir qu'est le comptage.

Rendre l'énumération scolarisable peut trouver une légitimité si la quantité de situations reconnues comme mobilisant ces connaissances augmente. Cette augmentation n'a pas encore eu lieu. Les pistes permettant de les développer et proposées par Brousseau et Briand n'ont pas été suivies. La modification de la définition de l'énumération peut permettre ce développement au sein des mathématiques.

Cette thèse a ouvert des pistes nouvelles dans des domaines autres que ceux relevant des mathématiques scolaires. Cette piste nous semble avoir un meilleur potentiel et doit être poursuivie. La multiplication des situations s'appuyant sur ce savoir peut contribuer à rendre l'énumération scolarisable.

Multiplier les contextes dans lesquels des connaissances d'énumération sont mobilisés peut contribuer au développement de la visibilité de l'énumération. Nous ne doutons pas que de très nombreuses situations mobilisant cette connaissance dans des contextes très différents existent. L'énumération est présente de manière massive.

Nous avons montré que les collections étaient énumérées quand elles devaient être traitées. Énumérer une collection sans réaliser de traitement sur les éléments de cette collection n'a ni sens ni intérêt. Indépendamment de la finalité de l'action, traiter un élément le modifie et rend donc visible le fait qu'il a été traité. La transformation de l'élément produit une rétroaction, immédiate dans le cas des sucres ou différée dans le cas des allumettes.

L'énumération n'existe donc pas dans les situations sans traitement. Le traitement envahit naturellement la situation par la finalité qu'il introduit dans celle-ci. L'association des phrases avec les définitions du verbe relever n'a d'intérêt que parce que le verbe relever est présent

dans les phrases. L'envahissement du traitement dans la tâche occulte la présence de l'énumération. Nous retrouvons ici le paradoxe de l'énumération, présente souvent mais jamais de manière isolée, et donc visible rarement. Ce sont des outils pour dépasser cette limite que cette thèse a essayé de construire.

Chevallard a décrit les contraintes qui doivent être respectées pour que cette scolarisation soit possible.

“- la désyncrétisation du savoir [c'est à dire la possibilité de délimiter des savoirs partiels pouvant s'exprimer dans un discours autonome]

- la dépersonnalisation du savoir

- la programmabilité de l'acquisition du savoir

- la publicité du savoir

- le contrôle social des apprentissages » (Chevallard, 1985, p. 58)

La question principale reste donc celle du renforcement de la visibilité de l'énumération par l'identification de situations.

Le second aspect de notre questionnement concerne la question de diffusion de l'énumération dans des institutions de recherches.

L'énumération est un savoir de l'institution « Recherche en didactiques des mathématiques ». Le renforcement de la visibilité de l'énumération passe par l'identification de nouvelles situations mettant en jeu l'énumération. Nous avons développé cette recherche dans des contextes extérieurs à ceux habituellement utilisés en didactique des mathématiques.

Comment une institution peut-elle importer des savoirs développés dans d'autres institutions ? Les savoirs développés en didactique des mathématiques pourraient être féconds dans une analyse prenant appui sur les savoirs de langue de l'institution « Recherche en didactique du français » sur l'énumération. C'est une transposition qui n'est pas une transposition didactique, au sens de Chevallard, dans la mesure où l'institution cible n'est pas une institution d'enseignement. Cette transposition n'a pas été étudiée dans cette thèse. Pour autant, la question de la diffusion des savoirs dans les institutions est, du point de vue de la recherche, une question cruciale pour l'énumération, compte tenu des caractéristiques de ce savoir.

Bibliographie

- Artigue, M., & Douady, R. (1986). Note de synthèse [La didactique des prioris en France - Emergence d'un champ scientifique]. *La didactique des mathématiques en France - Emergence d'un champ scientifique*, 69-88.
- Bouvier, A., George, M., & Le Lionnais, F. (2013). *Dictionnaire des mathématiques*. Paris: PUF.
- Briand, J. (1993). *L'énumération dans le mesurage des collections*. Université de Bordeaux I, Didactique des mathématiques, Bordeaux.
- Briand, J. (1999). Contribution à la réorganisation des savoirs prénumériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine prénumérique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 41-76.
- Briand, J., Lacave-Luciani, M.-J., Harvouët, M., Bedere, D., & Goua de Baix, V. (2000). Enseigner l'énumération en moyenne section. *Grand N, Numéro spécial maternelle, approche du nombre, T1*, 123-138.
- Briand, J., Loubet, M., & Salin, M.-H. (2004). *Apprentissages mathématiques en maternelle*. Paris: Hatier.
- Brousseau, G. (1984). L'enseignement de l'énumération. *Congrès C.I.A.E.M., Adélaïde*.
- Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 309-336.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La pensée sauvage.
- Chevallard, Y. (1989). Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. In *Séminaire de didactique et technologies cognitives en mathématiques*. Grenoble: LSD-IMAG.
- Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire*. Université de Paris VII, Didactique des mathématiques, Paris.
- Emprin, F., & Emprin, F. (s. d.). Premières compétences pour accéder au dénombrement. In *Le nombre au cycle 2* (p. 23-34). Futuroscope: SCÉRÉN-CNDP.
- ERMEL. (1991). *Apprentissages numériques, CP*. (INRP, Éd.). Paris: Hatier.
- Fetet, A., Clauzard, P., Denizot, J.-C., & Picard, P. (2010). *C.L.É.O. français CMI guide pédagogique*. Paris: Retz.
- Fetet, A., & Denizot, J.-C. (2010). *C.L.É.O. français CMI: manuel d'entraînement*. Paris: Retz.
- Froidevaux, C., Gaudel, M.-C., & Soria, M. (1992). *Types de données et algorithmes*. Paris; Auckland: McGraw-Hill.
- Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1986). *The child's understanding of number*. Cambridge, Mass: Harvard University Press.
- Goody, J. (1977). *La raison graphique*. (A. Bensa, Éd.). Paris: Les éditions de minuit.
- Laparra, M., & Margolinas, C. (2010). Milieu, connaissance, savoir. Des concepts pour l'analyse de situations d'enseignement. *Pratiques*, 145-146.

- Laparra, M., & Margolinas, C. (2012). Oralité, littératie et production des inégalités scolaires. *Le français aujourd'hui*, 177(2), 55. <https://doi.org/10.3917/lfa.177.0055>
- Le Grand Larousse Illustré 2018*. (2017). Larousse Editions.
- Margolinas, C. (1992). Analyse de situation et analyse du rôle du maître sur un cas particulier. In *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique* (Vol. 138, p. 185-205). LSD-IMAG.
- Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et le faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Margolinas, C. (2002). Situations, milieux, connaissances : analyse de l'activité du professeur. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Éd.), *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (p. 141-156). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Margolinas, C. (2004). *Points de vue de l'élève et du professeur : Essai de développement de la théorie des situations didactiques*. Université de Provence,. Consulté à l'adresse <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00429580/fr/>
- Margolinas, C., & De Redon, M.-C. (2008). Connaissances naturalisées dans le champ du numérique à l'articulation école maternelle / école primaire. In A. Rouchier & I. Bloch (Éd.), *Perspectives en didactique des mathématiques* (p. cédérom). Grenoble: La pensée sauvage.
- Margolinas, C., & Laparra, M. (2009). Savoirs invisibles et connaissances cruciales : le cas des mathématiques en maternelle. In C. Passerieux (Éd.), *La maternelle. Première école, premiers apprentissages* (p. 99-107). Lyon: Chronique sociale.
- Margolinas, C., & Laparra, M. (2010). Analyse de situations et production des inégalités scolaires. In F. Leutenegger, M. Schubauer-Leoni, F. Ligozat, N. Lambiel, A. Forget,

- F. Audigier, ... T. Thévenaz-Christen (Éd.), *Où va la didactique comparée? Didactiques disciplinaires et approches comparatistes des pratiques d'enseignement et d'apprentissage*. Genève: Université de Genève FPSE-SSED & ARCD. Consulté à l'adresse <http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00429565/fr/>
- Margolinas, C., & Laparra, M. (2016). *Les premiers apprentissages scolaires à la loupe*. Paris: De Boeck Education. Consulté à l'adresse <http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00429565/fr/>
- Margolinas, C., Wozniak, F., & Rivière, O. (2015). Situations d'énumération et exploration des collections. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 35(2), 183-220.
- Neyret, R. (1995). *Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants: nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts de Formation des Maîtres*. Université Joseph Fourier Grenoble I, Didactique des mathématiques, Grenoble.
- Privat, J.-M. (2006). Un habitus littéraire? *Pratiques*, 131/132(La littératie. Autour de Jack Goody), 125-130.
- Ramis, E., Deschamps, C., Odoux, J., & Ramis, E. (2001). *Algèbre* (2.éd). Paris: Dunod.
- Rouchier, A. (1996). Connaissances et savoirs dans le système didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(2), 177-196.
- Schöttke, M., Tournaire, F., & Tauveron, C. (2011). *Français CM1, CM2 étude de la langue: conforme au socle commun et aux nouveaux programmes : grammaire, conjugaison, vocabulaire, orthographe*. Paris: Hatier.

Résumé

Des travaux de didactique des mathématiques, conduits par Briand, ont permis de montrer l'existence de connaissances spécifiques d'organisation dans le domaine des problèmes concernant le dénombrement et les opérations arithmétiques, connaissances qui relèvent de ce que Brousseau a appelé *l'énumération*. Cette thèse montre que ces « connaissances d'énumération » ne sont spécifiques ni au champ numérique, ni même aux mathématiques. Elles se retrouvent dans de nombreuses situations scolaires et présentent un caractère transdisciplinaire. L'étude de la situation fondamentale de l'énumération permet d'exhiber de nouvelles variables et de compléter l'étude des stratégies. Une nouvelle définition de l'énumération est proposée, permettant d'unifier la description des difficultés rencontrées. Le caractère transdisciplinaire de l'énumération est étudié dans le domaine scolaire « français ». Les situations étudiées dans ce cadre permettent d'intégrer la dimension de l'écrit dans la description de ces connaissances. Du point de vue méthodologique, des analyses a priori successives montrent comment les modifications de point de vue permettent de faire évoluer le modèle, proposant notamment une nouvelle modélisation du traitement.

Mots clés

Didactique des mathématiques

Théorie des situations

Énumération

Connaissances

Savoirs

Title

The continuity of the enumeration's knowledge and its theoretical consequences: a better understanding of the difficulties of students facing enumeration's problems

Abstract

Research work on mathematics education, carried out by Briand, have shown the existence of specific knowledge in the field of numerical problems, involving counting or arithmetic operations, which reveal what Brousseau has named "enumeration". This thesis shows that enumeration's knowledge are not specific to the numerical field, neither to mathematics. This knowledge can be founded in many scholar situation and show an interdisciplinary character. The study of the fundamental situation is down, which allows to unify the description of the subject's difficulties. The interdisciplinary character is studied in the scholar field of language. The study of these situations in this context allows us to incorporate the dimension of writing in our descriptions of the knowledge. Considering metrology, theses analyses show how modifications of point of view enable an evolution of the model, allowing in particular of new modeling of treatment.

Keywords

Mathematics education

Theory of didactical situations

Enumeration

Knowledge