



Modélisation de la rupture dans les structures en béton armé par des éléments finis poutres généralisées et multifibres

Ibrahim Bitar

► To cite this version:

Ibrahim Bitar. Modélisation de la rupture dans les structures en béton armé par des éléments finis poutres généralisées et multifibres. Génie civil. École centrale de Nantes, 2017. Français. NNT : 2017ECDN0013 . tel-01755118v2

HAL Id: tel-01755118

<https://theses.hal.science/tel-01755118v2>

Submitted on 10 May 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat

Ibrahim BITAR

*Mémoire présenté en vue de l'obtention
du grade de Docteur de l'École Centrale de Nantes
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire*

École doctorale : Sciences pour l'ingénieur

Discipline : Génie Civil

Unité de recherche : Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique

Soutenue le 05 Juin 2017

Modélisation de la rupture dans les structures en béton armé par des éléments finis poutres généralisées et multifibres

JURY

Président :	Frédéric RAGUENEAU , Professeur des Universités, École Normale Supérieure de Cachan
Rapporteurs :	Luc DAVENNE , Professeur des Universités, Université Paris Nanterre Benjamin RICHARD , Ingénieur chercheur, CEA
Examineurs :	Pierre LABBE , Expert EDF, Electricité de France Silvano ERLICHER , Directeur scientifique, EGIS Industries
Directeur de thèse :	Panagiotis KOTRONIS , Professeur des Universités, Ecole Centrale de Nantes
Co-directeur de thèse :	Stéphane GRANGE , Professeur des Universités, INSA de Lyon
Co-encadrant de thèse :	Nathan BENKEMOUN , Maître de conférences, Université de Nantes

“C’est ce que nous pensons déjà connaître qui nous empêche souvent d’apprendre.”
— Claude Bernard

Résumé

Cette thèse, réalisée au sein du projet SINAPS@ (Séisme et Installation Nucléaire : Améliorer et Pérenniser la Sureté), a pour objectif de développer un nouvel élément fini poutre capable de modéliser le comportement d'une structure en béton armé jusqu'à la rupture.

Pour prendre en compte l'influence des contraintes de cisaillement, la théorie de Timoshenko a été choisie et formulée dans une approche de poutre multifibres. Ainsi, la section est divisée en fibres qui peuvent être modélisées par des matériaux différents. La nouvelle formulation, récemment développée par (Caillerie, et al., 2015) a été adoptée. Cette formulation est libre de blocage en cisaillement et ses fonctions de forme sont indépendantes des paramètres matériau car elle utilise des fonctions de forme d'ordre plus élevé pour interpoler les champs de déplacement transversal et de rotation (en introduisant à l'élément fini des degrés de liberté internes).

Dans ce travail de thèse cette nouvelle formulation est tout d'abord comparée avec d'autres formulations éléments finis (Bitar, et al., 2016) et validée par des calculs linéaires et non linéaires. De plus, un enrichissement cinématique du champ de déplacement axial pour cette formulation est proposé afin d'améliorer sa capacité à reproduire l'interaction entre l'effort axial de l'élément et le moment de flexion.

Afin de modéliser le comportement complet de la structure et de prendre en compte l'effet de la fissuration, la méthode des éléments finis intégrés (E-FEM) est ensuite utilisée. Cette méthode consiste à enrichir la cinématique en introduisant une variable de discontinuité de déplacement au sein de la section (ou au sein des fibres) ayant pour rôle de décrire une ouverture dans le matériau pour le cas d'une fissure ou encore le comportement adoucissant d'une rotule plastique. Cette technique est d'abord appliquée au niveau de la section puis au niveau des fibres de la section, afin d'y incorporer le couplage entre un modèle de comportement continu et un modèle de comportement cohésif liant un saut de déplacement à une force de traction. Cet enrichissement cinématique du champ de déplacement permet à la fois de rendre les réponses globales des structures plus objectives mais aussi de fournir des informations locales comme l'endommagement et/ou l'ouverture de fissures.

Le fonctionnement et l'efficacité des modèles proposés sont finalement validés par des études numériques ainsi que par la comparaison avec des résultats expérimentaux.

Abstract

This thesis aims to develop a new finite beam element to simulate the behavior of reinforced concrete structures till failure. In order to take into consideration the shear stress, the Timoshenko theory has been chosen in the framework of the multifiber approach. The section is divided into fibers which can be modeled using different materials. Furthermore, a new finite element formulation recently proposed by Caillerie et al. 2015 has been adopted. This formulation uses cubic shape functions for the transverse displacements and quadratic functions for the rotations with additional internal node. This results to a finite element free of shear locking and to shape functions independent of the material properties. In the first part of this work, this new formulation has been compared with other finite element formulations in Bitar et al. 2016 and has been validated for linear and non-linear calculations. Furthermore, shape functions of order three are proposed for the axial displacements of this formulation in order to improve its ability to reproduce the interaction between the axial force of the element and the flexure moment.

In order to model the complete behavior of the structure, the embedded finite element (E-FEM) method is adopted. The kinematic of the structure is enhanced by introducing a displacement discontinuity variable within the section (or within the fibers). The discontinuity variable can describe a material opening for the case of a crack or a softening behavior for the case of a plastic hinge. The material behavior at the discontinuity is characterized by a cohesive law linking the axial stress and the displacement jump by a linear relation, which allows capturing the released fracture energy. The kinematic enhancement of the displacement field helps in limiting the mesh dependency of the global response and provides local information such as damage and/or opening of cracks.

The performance and the efficiency of the proposed models are finally validated by numerical studies and by comparison with experimental results.

This work was supported by National Agency of Research (ANR) following the RSNR 2012 call for projects on future investments post-Fukushima [SINAPS@ ANR-11-RSNR-0022].

Remerciements

Mes premiers remerciements sont pour Panagiotis KOTRONIS, mon directeur de thèse, une personne rare que j'apprécie énormément. Panos était toujours disponible, jour et nuit, dans son bureau ou par Skype, pour m'aider à avancer et surmonter les difficultés techniques auxquelles j'ai été confronté et surtout pour ses encouragements. Panos, un grand merci à toi.

Je tiens à remercier Nathan BENKEMOUN, avec qui j'ai pu travailler environ quatre ans, depuis mon stage de Master à l'Ecole Centrale de Nantes. Le travail avec Nathan était toujours enrichissant et ses remarques et commentaires toujours clairs et précis. Je te remercie Nathan pour nos discussions même si elles n'ont pas été nombreuses vue la contrainte géographique.

Je remercie également Stéphane GRANGE qui était toujours présent par mail ou par Skype. Malgré la distance géographique qui sépare Grenoble (et Lyon depuis septembre 2016) et Nantes, Stéphane n'a jamais tardé à répondre à mes questions par mails et à m'éclairer avec des commentaires très intéressants. Merci Stéphane pour ta sympathie et ton encouragement.

Je suis reconnaissant envers Luc DAVENNE et Benjamin RICHARD pour avoir accepté de rapporter ce travail. Je souhaite aussi remercier Frédéric RAGUENEAU pour avoir accepté d'être le président de mon jury mais aussi pour ses encouragements. Mes remerciements s'adressent également à Silvano ERLICHER et Pierre LABBE pour accepter d'examiner ce travail. Je remercie l'ensemble des membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et pour leur déplacement un jour a priori férié.

Je suis très fier d'avoir eu l'opportunité de travailler au sein d'un excellent laboratoire (GeM) avec des chercheurs brillants pendant mes années de formation doctorale. Je pense à tous les membres de l'équipe (MEO) du laboratoire (GeM), en particulier à mes anciens et nouveaux collègues/ami(e)s. Je mentionne tout d'abord ceux avec qui j'ai pu partagé le bureau F212bis : Gwendal et sa grande curiosité et son sage silence, Marc et sa bonne humeur, Miquel et notre voyage aux États Unis, YinFu et son visage souriant, Zhuang et sa passion musicale, Jésus et sa gentillesse. Je pense aussi à Sanaa et Roxana avec qui j'ai passé beaucoup du temps en parlant des sujets intéressants et assez divers. Je pense à Benoît parmi les scientifiques hyper-sportifs de l'école, à Georges le libanais le plus gentil, à Anass et Younes mes anciens collègues très intelligents de Master, à Chaofa et sa grande passion scientifique, à Gildas et ses activités expérimentales sans fin, à Menghuan qui m'a fait découvrir le confucianisme, à Francesca qui m'a fait visiter quelques paradis de l'Italie, à Siyimane et son énergie inépuisable, à Reda qui m'a fait découvrir davantage le Maroc, à Rocio et les repas dans sa maison, à Zheng et sa passion pour la programmation. Je pense aussi aux autres doctorants de l'école et particulièrement à Cyril avec qui j'ai eu des discussions philosophiques passionnantes pendant les pauses cafés, et à mes amis Libanais de l'école Haitham, Hasan, Rabih, Yassine et les deux Ali et aussi aux autres Libanais avec qui j'ai souvent déjeuné. Mes pensées vont aussi à l'association des chercheurs et doctorants de Centrale Nantes (ACDC) et particulièrement aux membres du bureau de l'année 2014.

Je pense aussi au directeur de l'École doctorale Ahmed LOUKILI avec qui j'ai eu l'occasion de voyager aux États Unis en 2016 avec d'autres doctorants. J'exprime ma gratitude à Katia, la secrétaire de l'équipe (MEO), pour sa sympathie et pour tout ce qu'elle a fait pour faciliter nos déplacements. J'aimerais remercier l'ensemble des personnes qui travaillent à l'École Centrale de Nantes pour les confé-

rences et les activités d'enseignements et de vulgarisation scientifique proposées tout au cours du temps et particulièrement aux Rencontres Jules Verne 2014 pendant lesquelles j'ai assisté à une conférence de Étienne Klein.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont assisté à ma soutenance. Un grand merci à tous ceux qui ont participé à la mise en place du pot qui a suivi la soutenance.

Je pense à mes amis nantais, libanais et internationaux, ceux qui j'ai eu l'honneur de rencontrer. Je pense particulièrement à Hussein, Perrine, Fadel, Harkous, Nader, Ghaddar, Trabulsi, Khaled, Lina, Carine, Zakaria, Mariam, Mohammad, Livier, Floriane, Taleb, Roxane, Claude, Anita et Assaf.

Je suis reconnaissant envers la Faculté de Génie de l'Université Libanaise pour la belle opportunité qui m'a été offerte en 2013 pour venir en France et commencer à bâtir ma carrière dans le monde d'enseignement et de recherche.

Enfin, j'adresse mes sincères remerciements à mes parents, mes trois frères et ma petite sœur, pour leur soutien et encouragements.

Ibrahim BITAR

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	v
Remerciements	vii
Table des matières	xii
1 Introduction	1
1.1 Contexte général	1
1.2 Contexte scientifique	2
1.3 Plan de la thèse	3
2 Quelques notions sur les poutres	5
2.1 Introduction	7
2.2 Théories des poutres	7
2.2.1 Théorie de Bernoulli	8
2.2.2 Théorie de Timoshenko	9
2.2.2.1 Coefficient de correction de cisaillement	9
2.3 Différentes formulations des éléments finis poutres	10
2.3.1 Interpolation en forces	10
2.3.2 Interpolation en déplacements	11
2.4 Modélisation longitudinale	11
2.4.1 Approche concentrée	11
2.4.2 Approche distribuée	11
2.5 Modélisation de la section	12
2.5.1 Approche généralisée	12
2.5.2 Approche multifibres	12
2.6 Conclusion	14
3 Comparaison des formulations poutres Timoshenko	17
3.1 Introduction	19
3.2 Différentes formulations éléments finis poutre Timoshenko	19
3.2.1 Introduction	19
3.2.2 Formulation variationnelle	21
3.2.2.1 Introduction	21
3.2.2.2 Principe des travaux virtuels	21
3.2.2.3 Matrices de rigidité	22
3.2.2.4 Vecteurs de forces	23
3.2.3 Matrice de rigidité analytique	24
3.2.4 Différents formulations éléments finis poutre Timoshenko	25
3.2.4.1 Full-Linear-Independent (FLI)	25
3.2.4.2 Full-Cubic-Quadratic-Material (FCQM)	26

3.2.4.3	Full-Qubic-Quadratic (FCQ)	27
3.2.5	Blocage par cisaillement	29
3.2.6	Matrices de masse	30
3.2.6.1	Matrice de masse de la formulation FLI	31
3.2.6.2	Matrice de masse de la formulation FCQM	32
3.2.6.3	Matrice de masse de la formulation FCQ	32
3.3	Comparaison des formulations FLI, FCQM et FCQ	32
3.3.1	Solution analytique	32
3.3.2	Poutre élastique encastrée soumise à un déplacement transversal	34
3.3.3	Poutre élastique encastrée soumise à une force transversale polynomiale $p(x) = qx^n$	35
3.3.4	Poutre élasto-plastique encastrée soumise à un déplacement transversal	36
3.3.5	Poutre élasto-plastique simple soumise à une force axiale et une rotation	38
3.3.5.1	Analyse et interprétation du couplage N-M	39
3.3.5.2	Solutions pour la prise en compte du couplage N-M	42
3.3.6	Réponse dynamique	43
3.4	Conclusions	45
4	Formulation EF enrichie, déplacements généralisés	47
4.1	Introduction	49
4.2	Localisation des déformations	49
4.2.1	Le phénomène de la localisation des déformations	49
4.2.2	Illustration de la dépendance pathologique au maillage	51
4.2.3	Les limiteurs de localisation	52
4.2.3.1	Approches discrètes	52
4.2.3.2	Approches continues	52
4.2.3.3	Approches enrichies par discontinuités	54
4.3	Enrichissement cinématique par une discontinuité	55
4.3.1	Discontinuité faible	56
4.3.2	Discontinuité forte	56
4.3.3	Méthodes d'implémentation numérique des discontinuités	57
4.3.3.1	Éléments finis étendus (X-FEM)	58
4.3.3.2	Éléments finis intégrés (E-FEM)	59
4.3.4	E-FEM : quelques travaux antérieurs	60
4.4	Barre enrichie	63
4.4.1	Cinématique de la discontinuité	64
4.5	Poutre Timoshenko enrichie	66
4.5.1	Détermination de la matrice $\overline{\mathbf{G}}_r$	68
4.5.1.1	Élément FLI enrichi	69
4.5.1.2	Élément FCQ enrichi pour la rotation	69
4.6	Formulation variationnelle	73
4.6.1	Détermination des fonctions $\overline{\mathbf{G}}_v$	74
4.6.2	Patch test	76
4.7	Modèles de comportement continu et cohésif	76
4.7.1	Modèle continu	77
4.7.1.1	Énergie libre	77
4.7.1.2	Surface de charge	77
4.7.1.3	Dissipation plastique	77
4.7.1.4	Évolution des variables internes	78
4.7.1.5	Conditions de cohérence et de Kuhn-Tucker	78
4.7.2	Modèle cohésif	79
4.7.2.1	Énergie libre	80
4.7.2.2	Surface de rupture	80
4.7.2.3	Dissipation à la discontinuité	80
4.7.2.4	Évolution des variables internes	80

4.7.2.5	Conditions de cohérence et de Kuhn-Tucker	81
4.8	Implémentation numérique	81
4.8.1	Linéarisation des équations d'équilibre	81
4.8.2	Calcul à l'échelle de l'élément	85
4.8.2.1	Évolution des variables plastiques	86
4.8.2.2	Évolution des variables cohésives	88
4.9	Applications numériques	90
4.9.1	Poutre en traction simple	90
4.9.2	Poutre en flexion pure	90
4.9.3	Portique à double niveau en béton armé	94
4.10	Conclusion	97
5	Formulation EF enrichie pour l'approche multifibres	99
5.1	Introduction	101
5.2	Travaux antérieurs	101
5.2.1	Éléments poutres multifibres	101
5.2.2	Localisation des déformations et poutres multifibres	102
5.3	Formulation poutre multifibres	103
5.3.1	Enrichissement cinématique des fibres	105
5.3.2	Formulation variationnelle	105
5.3.3	Détermination des fonctions d'enrichissement \bar{G}_r et \bar{G}_v	107
5.3.3.1	Opérateur de compatibilité \bar{G}_r	107
5.3.3.2	Opérateur d'équilibre \bar{G}_v	109
5.4	Modèles de comportement continu et cohésif	109
5.4.1	Modèle d'endommagement pour le comportement axial des fibres en béton	109
5.4.1.1	Modèle continu	109
5.4.1.2	Modèle cohésif	112
5.4.2	Modèle élasto-plastique pour le comportement axial des fibres en acier	114
5.5	Implémentation numérique	115
5.5.1	Linéarisation des équations d'équilibre	115
5.5.2	Intégration des modèles de comportement continu et cohésif au niveau de la fibre	117
5.5.2.1	Évolution des variables d'endommagement	117
5.5.2.2	Évolution des variables cohésives	118
5.6	Applications numériques	121
5.6.1	Poutre multifibres en flexion avec une loi de comportement élastique-cohésive à seuils symétriques en traction et compression	121
5.6.2	Poutre multifibres en flexion avec une loi de comportement élastique-cohésive à seuils non-symétriques en traction et compression	125
5.6.3	Poutre en béton armé en flexion	129
5.7	Conclusions	132
6	Enrichissement des fibres aux points d'intégration	135
6.1	Introduction	137
6.2	Cinématique des discontinuités	137
6.3	Formulation variationnelle	139
6.4	Modèles de comportement	141
6.5	Implémentation numérique	142
6.5.1	Linéarisation des équations d'équilibre	142
6.5.2	Intégration du modèle cohésif associé à un modèle continu élasto-plastique	143
6.5.2.1	Deux discontinuités actives par fibre	144
6.5.2.2	Rupture complète au niveau des deux discontinuités	146
6.5.2.3	Rupture complète au niveau d'une seule discontinuité	146
6.5.3	Intégration du modèle cohésif associé à un modèle continu d'endommagement	146
6.5.3.1	Deux discontinuités actives par fibre	148

6.5.3.2	Rupture complète au niveau des deux discontinuités	149
6.5.3.3	Rupture complète au niveau d'une seule discontinuité	150
6.6	Applications numériques	151
6.6.1	Poutre en béton armé en flexion	151
6.6.2	Portique en béton armé	152
6.7	Conclusions	155
7	Conclusions et perspectives	157
	Bibliographie	159
A	Code Matlab	171
A.1	Introduction	171
A.2	Structure du code	171
A.2.1	Données du problème	172
A.2.2	Algorithme de résolution de Newton-Raphson	172
A.2.3	Post traitement	173
A.3	Les différents algorithmes	174
A.3.1	Algorithme général du code	174
A.3.2	Algorithme d'intégration du modèle de comportement continu élasto-plastique	175
A.3.3	Algorithme d'intégration du modèle de comportement cohésif associé au modèle élasto-plastique	176
A.3.4	Algorithme d'intégration du modèle de comportement continu d'endommagement	177
A.3.5	Algorithme d'intégration du modèle de comportement cohésif associé au modèle d'endommagement	178
A.3.6	Algorithme d'intégration du modèle de comportement cohésif associé au modèle élasto-plastique pour le modèle à plusieurs discontinuités par fibre	179
A.3.7	Algorithme d'intégration du modèle de comportement cohésif associé au modèle d'endommagement pour le modèle à plusieurs discontinuités par fibre	180
B	Classification des discontinuités selon Jirasek	181
B.1	Types d'enrichissement	182

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte général

Les dégâts causés par le séisme et le tsunami de 2011 sur la côte Pacifique du Tōhoku au Japon ont incité la communauté scientifique internationale à investir plus de ressources dans des études visant à renforcer la sécurité des ouvrages face à de telles catastrophes. En France, l'Agence Nationale de la Recherche (ANR) a lancé un appel à projets suite à l'accident nucléaire de Fukushima pour la recherche en sûreté nucléaire et en radioprotection. Dans le cadre des Projets d'Investissement d'Avenir (PIA), un projet intitulé Séisme et Installations Nucléaires, Améliorer et Pérenniser la Sûreté (SINAPS@, [SINAPS@, 2013]) a été déposé, projet qui vise, comme indiqué sur son site <http://www.institut-seism.fr/projets/sinaps/>, à explorer les incertitudes inhérentes : aux bases de données, à la connaissance des processus physiques, aux méthodes utilisées à chaque étape de l'évaluation de l'aléa sismique et de la vulnérabilité des structures et des composantes nucléaires.

Il y a une nécessité de comprendre d'où viennent les marges sismiques et de mieux les maîtriser dans le but d'augmenter la durée des vies des sites de production d'énergie. Le projet SINAPS@ a deux objectifs principaux : définir une démarche d'identification des incertitudes sur les données mais aussi sur les étapes de l'évaluation du risque sismique en se focalisant sur les pays à faible sismicité ; de porter un regard critique sur les approches de modélisation et de simulation retenues dans le domaine du génie parasismique. Ce projet d'envergure comprend 12 thèses de doctorat et 19 années de Post-doc et il intègre les incertitudes à tous les niveaux, de l'aléa aux incertitudes des données matériaux et des modèles pour évaluer la vulnérabilité des ouvrages.

Le projet SINAPS@ s'articule en six volets illustrés dans la figure 1.1 : le premier volet consiste à analyser les méthodes d'évaluation de l'aléa sismique au regard des connaissances de la sismicité et des processus physiques dans une zone à sismicité modérée et aussi à fournir une description de l'aléa sismique adaptée aux besoins de l'ingénierie des ouvrages. Le deuxième volet concerne le couplage des modèles de sources et d'ISS (Interaction-Sol-Structure) pour mieux quantifier l'aléa au niveau de la fondation. Le troisième volet a pour objectif d'étudier la réponse sismique des ouvrages afin d'améliorer les modèles de structures des plus complexes aux plus simples (dans le cadre d'études probabilistes). Le quatrième volet se focalise principalement sur l'évaluation du risque sismique en bénéficiant du retour des volets 1 et 3. Le volet cinq porte sur l'interaction entre les bâtiments par le biais des campagnes expérimentales.

La présente thèse, financée par le projet SINAPS@, s'inscrit dans le troisième volet intitulé "Comportement de Structures et Équipements". Plus spécifiquement, elle concerne *le développement d'un nouvel élément fini poutre capable de simuler le comportement d'une structure jusqu'à la rupture avec un coût de calcul acceptable*. Ce nouvel outil numérique pourra répondre aux besoins pratiques de l'ingénierie et des bureaux d'étude nationaux dans les procédures de conception des ouvrages en génie civil. Le travail a été effectué au sein de l'institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM) de l'École Centrale de Nantes.

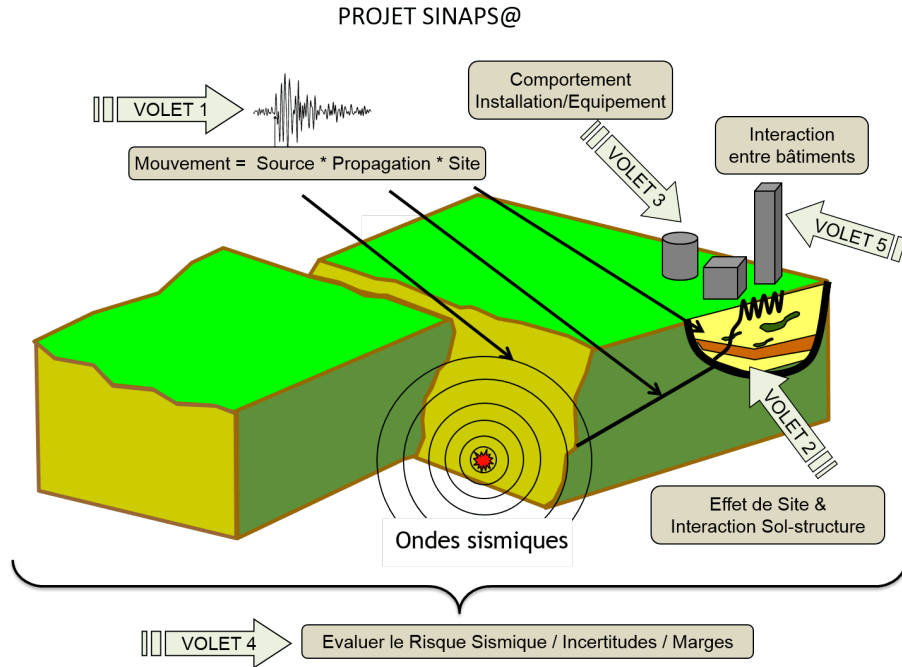


FIGURE 1.1 – Les six volets du projet [SINAPS@, 2013]

1.2 Contexte scientifique

En statique ou en dynamique, une fois dépassée leur capacité à se déformer élastiquement les matériaux entrent dans le domaine non-linéaire. Les observations in situ montrent que les non-linéarités ont tendance à se localiser dans certaines parties des ouvrages du génie civil, appelées communément “rotules plastiques”. Les déformations se localisent dans ces zones et les contraintes se trouvent fortement diminuées (comportement adoucissant des matériaux), ce qui peut entraîner la ruine partielle ou totale de la structure.

Parmi les différentes approches utilisées pour modéliser ce comportement, deux méthodes sont d’intérêt dans ce travail de thèse :

- L’approche *macroscopique* où des éléments finis 2D ou 3D avec les lois de comportement en contraintes - déformations sont adoptés. Pour des structures en béton armé, cette approche est capable de décrire l’initiation et sous certaines conditions la propagation des fissures, le glissement acier/béton, l’inter-verrouillage des granulats. L’approche nécessite souvent des temps de calcul importants, puisque elle conduit à des maillages ayant un grand nombre de degrés de liberté.
- L’approche *globale*, basée sur des modèles de type poutres, plaques et coques où des hypothèses cinématiques sont adoptées afin de réduire le nombre nécessaire de degrés de liberté et diminuer ainsi le temps de calcul.

Plus spécifiquement, la modélisation par éléments poutres suit généralement deux grandes théories basées sur des hypothèses cinématiques : les sections restant planes et perpendiculaires à la ligne moyenne (la ligne qui joint les centres de gravité des sections) de la poutre (Bernoulli), les sections restant planes mais pas nécessairement perpendiculaires à la ligne moyenne (Timoshenko). Les éléments finis poutres sont formulés en déplacements ou en forces et les non-linéarités le long de la poutre sont prises en compte par une approche concentrée ou distribuée ; les non-linéarités dans la section sont modélisées par une approche généralisée ou multifibres.

Le modèle développé dans cette thèse de doctorat s’inscrit dans le cadre d’une modélisation par éléments finis poutres Timoshenko formulés en déplacement, selon une approche distribuée (chapitre 4) et multifibres (chapitres 5 et 6). Les arguments nécessaires pour justifier ces choix sont présentés dans le chapitre suivant élaborant l’état de l’art des éléments poutres (chapitre 2). Afin de simuler le

comportement jusqu'à la ruine, la méthode d'enrichissement cinématique (discontinuités de déplacement) est adoptée. Plus spécifiquement, le nouvel élément fini poutre développé repose sur trois axes fondamentaux :

1. L'utilisation d'une formulation élément fini poutre Timoshenko en déplacements introduite par [Caillerie et al., 2015]. Cette formulation utilise des fonctions de forme d'ordre élevé pour interpoler les champs de déplacement transversal et de rotation, en introduisant des degrés de liberté internes ; la performance de cet nouvel élément est étudiée dans le chapitre 3 et dans [Bitar et al., 2016].
2. L'adoption d'une approche généralisée (dont le principe est de définir des relations généralisées entre les forces et les déformations de la section) et une approche multifibres (la section est divisée en fibres, chacune ayant sa loi de comportement).
3. L'utilisation de la méthode des éléments finis intégrés (*E-FEM*) au niveau de la section et au niveau des fibres de la section, pour assurer le couplage entre un modèle de comportement continu et un modèle de comportement cohésif (lien entre un saut de déplacement et une force de traction). Cette méthode introduit une variable de discontinuité au sein de l'élément ou au sein des fibres ayant pour rôle de décrire le comportement jusqu'à la ruine.

1.3 Plan de la thèse

Le chapitre 2 présente un bref état de l'art sur les éléments poutres, centré plus spécifiquement sur les objectifs de ce travail de thèse de doctorat. Les différentes modélisations longitudinales, les approches concentrées et distribuées ainsi que les deux types de formulations éléments finis à base de forces et de déplacements sont abordés. Ensuite, les principes de la théorie des poutres de Bernoulli et de Timoshenko sont passés en revue. L'accent est mis sur la théorie de Timoshenko sur laquelle les modèles développés dans cette thèse se sont fondés. La modélisation de la section par les approches généralisées et multifibres est décrite. Quelques exemples de la littérature motivant l'utilisation des poutres Timoshenko multifibres sont aussi donnés. Enfin, le chapitre se termine sur quelques mots concernant la modélisation éléments finis et le code utilisé dans cette thèse.

Dans le chapitre 3, trois formulations en déplacements des éléments poutre Timoshenko multifibres sont présentées. Les formulations diffèrent par le choix des fonctions qui interpolent les champs de déplacements et de rotation. La formulation variationnelle est décrite conduisant à la construction des matrices de rigidité et de masse et de vecteur des forces nodales. Ensuite, des comparaisons entre les trois formulations poutres sont faites en utilisant des lois de comportement sous différentes conditions de chargement statique. Les avantages et les inconvénients de chaque formulation sont mis en évidence. Le cas des interactions non linéaires entre l'effort axial et le moment de flexion est étudié en détail et de nouvelles fonctions de forme pour le déplacement axial sont proposées afin d'améliorer la performance de l'élément.

Un premier modèle poutre, capable de tenir compte du comportement adoucissant lors de l'apparition des fissures est proposé dans le chapitre 4. Le modèle s'inscrit dans le cadre d'une approche généralisée. Un travail d'enrichissement cinématique du champ des déplacements généralisés est mené afin de construire un modèle macroscopique capable de modéliser le comportement global d'une structure jusqu'à la rupture.

Le chapitre 5 est consacré au développement d'un élément poutre Timoshenko multifibres dont l'enrichissement se fait cette fois-ci au niveau des fibres. Ainsi, chaque fibre est considérée comme un élément barre dont le champ de déplacement axial est enrichi par une variable de discontinuité. Cette variable fournit une information sur l'état local du matériau dans la fibre, ce qui permet une modélisation simplifiée de la fissuration dans la section de la poutre.

Le principe d'un autre modèle proposé dans le chapitre 6 est d'enrichir les fibres par plus qu'une seule discontinuité au niveau des points d'intégration. Les détails analytiques et numériques sont ainsi abordés et le chapitre se termine par des applications numériques et des comparaisons avec des résultats expérimentaux pour valider l'efficacité du modèle proposé. Le manuscrit se termine par des conclusions générales et des perspectives.

Chapitre 2

Quelques notions sur les poutres

Sommaire

2.1	Introduction	7
2.2	Théories des poutres	7
2.2.1	Théorie de Bernoulli	8
2.2.2	Théorie de Timoshenko	9
2.2.2.1	Coefficient de correction de cisaillement	9
2.3	Différentes formulations des éléments finis poutres	10
2.3.1	Interpolation en forces	10
2.3.2	Interpolation en déplacements	11
2.4	Modélisation longitudinale	11
2.4.1	Approche concentrée	11
2.4.2	Approche distribuée	11
2.5	Modélisation de la section	12
2.5.1	Approche généralisée	12
2.5.2	Approche multifibres	12
2.6	Conclusion	14

2.1 Introduction

La théorie des poutres est une simplification de la théorie de l'élasticité. Un élément poutre est un élément structurel dont une des dimensions est bien plus grande devant les deux autres. Afin de simplifier les équations différentes hypothèses cinématiques sont adoptées ; on peut distinguer la *théorie de Bernoulli* qui considère qu'une section plane reste plane et normale à la ligne moyenne, la *théorie de Timoshenko* qui considère qu'une section plane reste plane et des théories d'ordre supérieur qui considèrent qu'une section plane peut se voiler. Les éléments finis poutres sont formulés *en déplacements* ou *en forces* et on peut distinguer deux niveaux de modélisation, une *modélisation longitudinale* et une *modélisation transversale*. Les non-linéarités le long de la poutre sont prises en compte par une approche *concentrée* ou une approche *distribuée*, alors que les non-linéarités dans la section sont modélisées par une *approche généralisée* ou une approche *multifibres*. Ces notions sont explicitées schématiquement à la figure 2.1 et détaillées ci-dessous.

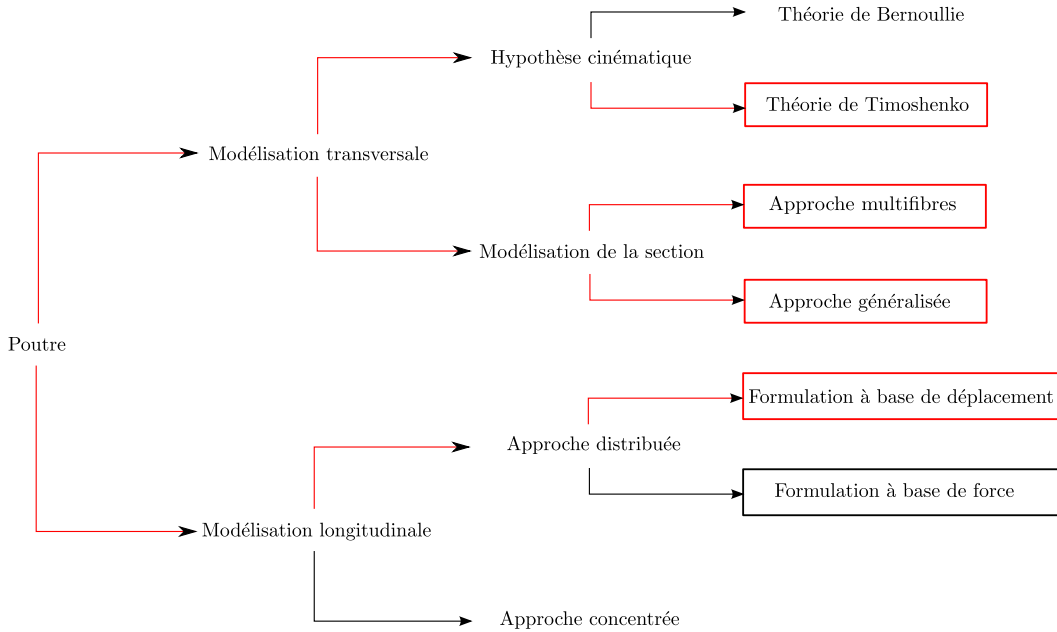


FIGURE 2.1 – Terminologie utilisée pour la modélisation des structures poutres

2.2 Théories des poutres

La poutre considérée a une longueur L et une section S (figure 2.2). Soit $G(X, Y)$ le centre de gravité de la section. La ligne moyenne est la ligne qui joint les centres de gravité de toutes les sections de la poutre. Soit $P(x, y)$ un point sur la section (la présentation est faite ci-dessous pour une poutre 2D). On suppose que G_x et G_y sont les axes d'inertie principale. On exprime le déplacement $\vec{u} = (u_x, v_y)$ de P en fonction du déplacement généralisé de la section en G : $\vec{U} = (U_x, V_y)$. On peut écrire la forme vectoriel suivant (torseur de déplacement) :

$$\vec{u}_P = \vec{U}_G + \vec{\Theta} \wedge \vec{GP} \quad (2.1)$$

$\vec{\Theta}_z$ représente la rotation de la section.

La projection de (2.1) sur les axes x et y donne naissance à deux composantes du déplacement :

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= U_x(x) - y\Theta_z(x) \\ v_y(x, y) &= V_y(x) \end{aligned} \quad (2.2)$$

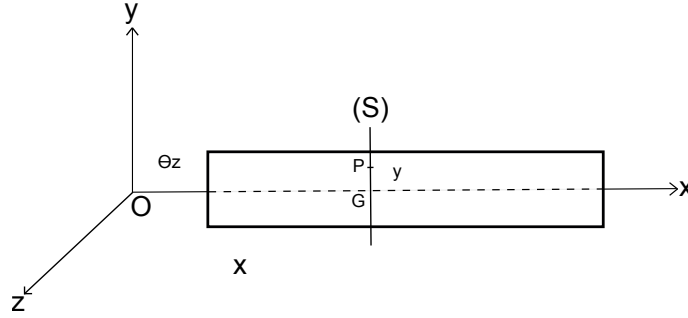


FIGURE 2.2 – Element poutre

=

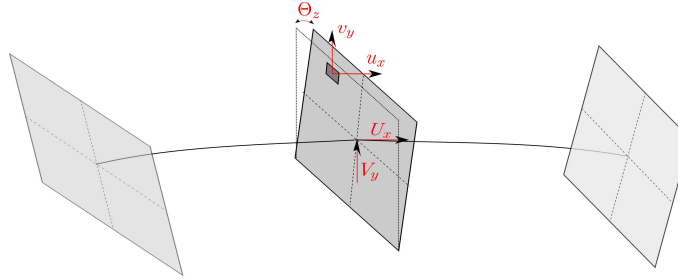


FIGURE 2.3 – Déplacements dans la section

Dans la suite, on va formuler le problème en élasticité linéaire avec les hypothèses cinématiques d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko en appliquant le principe des travaux virtuels. La présentation est faite en 2D avec l'hypothèse de petites perturbations (petits déplacements, petites déformations). La cinématique au point P est écrite donc au travers de la relation suivante :

$$\vec{\varepsilon}_P = \frac{1}{2}(\nabla \vec{u}_P + \nabla \vec{u}_P^t) \quad (2.3)$$

Les deux hypothèses cinématiques adoptées par les théories de Bernoulli et de Timoshenko sont explicitées ci-dessous.

2.2.1 Théorie de Bernoulli

Les origines de cette théorie datent de XVIII siècle. C'est la première théorie traitant les poutres en considérant que la section plane reste plane et perpendiculaire à la ligne moyenne après déformation. Autrement dit, la rotation généralisée de la section Θ_z vaut la dérivée du déplacement généralisé transversal V_y par rapport à x . Le champ de déformations obtenu est :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x, y) &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = U'_x(x) - y\Theta'_z(x) \\ \gamma_{xy}(x, y) &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} = U'_y(x) - \Theta_z(x) = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Une des conséquences de l'hypothèse cinématique de la théorie de Bernoulli est donc que les déformations de cisaillement sont nulles. Par conséquent, les contraintes de cisaillement ne peuvent pas être prises en compte. Ceci limite le domaine de l'utilisation de la théorie Bernoulli aux poutres élancées. En effet, dans le cas des poutres courtes l'effet de cisaillement est important et ne peut pas être négligé.

2.2.2 Théorie de Timoshenko

La théorie de Timoshenko considère que les sections planes restent planes après la déformation (pas nécessairement perpendiculaires à l'axe moyen), voir figure 2.4. Cette théorie introduit donc une liberté de rotation à la section, appelé *angle de distorsion*, qui permet de calculer la déformation de cisaillement.

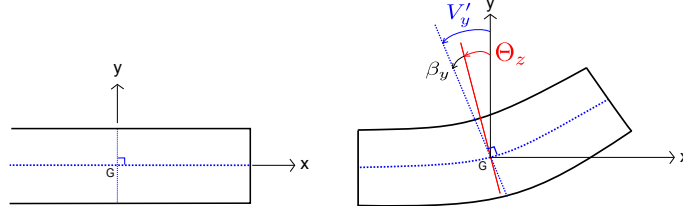


FIGURE 2.4 – Cinématique de la poutre, théorie de Timoshenko

Le champ des déformations s'écrit :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x(x, y) &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = U'_x(x) - y\Theta'_z(x) \\ \gamma_{xy}(x, y) &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} = U'_y(x) - \Theta_z(x) = \beta_y \neq 0\end{aligned}\quad (2.5)$$

La théorie de Timoshenko permet par conséquent de calculer une déformation de cisaillement constante le long de la section. Ceci n'est évidemment pas conforme avec la distribution parabolique qu'on trouve selon la théorie d'élasticité et ne respecte pas les conditions aux limites. Pour améliorer la performance de l'approche, un *coefficient de correction de cisaillement* est donc introduit pour le calcul des contraintes ([Cowper, 1966], [Klaus-Jurgen Bathe, 1996], [Dong et al., 2010], [Zhao, 2015]).

2.2.2.1 Coefficient de correction de cisaillement

Prenons une poutre de section rectangulaire soumise à une force de cisaillement T comme exemple. La contrainte de cisaillement σ_{xy} se calcule analytiquement en faisant l'équilibre d'un élément de volume de la poutre. Cet équilibre fait alors apparaître le moment statique à l'abscisse. L'équation du moment statique le long de l'ordonnée de la section a une forme parabolique.

$$\sigma_{xy} = \frac{T}{I_z} \frac{S(y)}{b(y)} = \frac{3T}{2S} \left(1 - 4\frac{y^2}{h^2}\right) \quad (2.6)$$

Cette expression donne des valeurs nulles aux extrêmes ($y = \pm \frac{h}{2}$), or la théorie de Timoshenko suppose des valeurs non nulles mais constantes ($\sigma_{xy} = \frac{T}{S}$).

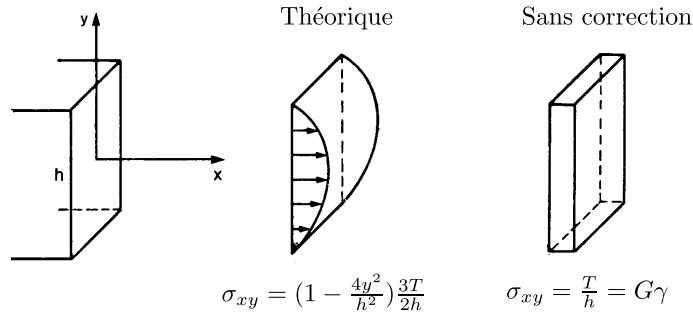


FIGURE 2.5 – Contrainte de cisaillement : théorique (à gauche), sans correction (à droite) [ICAB, 1991]

Différentes propositions existent pour le coefficient de correction de cisaillement. Reissner a proposé de déduire ce coefficient en assurant une équivalence énergétique entre l'énergie interne de déformation

associée à la distribution réelle de la contrainte de cisaillement U_1 et l'énergie de déformation associée au modèle de Timoshenko U_2 , [Klaus-Jurgen Bathe, 1996] :

$$\begin{aligned} U_1 &= U_2 \\ \int_S \frac{1}{2G} \sigma_{xy}^2 dS &= \int_{S^*} \frac{1}{2G} \left(\frac{T}{S^*}\right)^2 dS^* \\ \int_S \sigma_{xy}^2 dS &= \frac{T^2}{S^*} \end{aligned} \quad (2.7)$$

avec $k = \frac{S^*}{S}$ le coefficient de correction. On trouve :

$$k = \frac{T^2}{S \int_S \sigma_{xy}^2 dS}. \quad (2.8)$$

Pour une section rectangulaire, le coefficient de correction de cisaillement de Reissner vaut $k = 5/6$.

Cowper a proposé une autre méthode pour trouver le coefficient de correction en fonction du coefficient de poisson ν [Cowper, 1966]. Sa méthode consiste à calculer k à partir du problème d'élasticité tridimensionnelle d'une poutre console. Pour une section rectangulaire pleine, il trouve :

$$k = \frac{10(1 + \nu)}{12 + 11\nu} \quad (2.9)$$

Une discussion détaillée concernant les coefficients de cisaillement peut être consultée dans le travail de [Dong et al., 2010] ou encore dans la thèse de [Zhao, 2015] qui a développé un modèle de poutre Timoshenko pour les structures élancées possédant une section hétérogène en utilisant la méthode d'homogénéisation asymptotique.

2.3 Différentes formulations des éléments finis poutres

Deux formulations sont typiquement utilisées pour construire un modèle élément fini poutre de cinématique Bernoulli ou Timoshenko pour des calculs non linéaires :

2.3.1 Interpolation en forces

Dans ce type d'élément poutre, les forces internes sont exprimées en fonction des forces nodales par le biais des fonctions d'interpolation. Cette formulation permet une description adéquate de la distribution des forces le long de l'élément, puisque quel que soit le comportement du matériau la distribution des forces internes satisfait l'équilibre [Taucer et al., 1991]. L'inconvénient de cette approche est la relative complexité de son implémentation dans le cadre d'un code élément finis classiquement formulé en déplacements ; l'interpolation à base de forces ne respecte pas la compatibilité cinématique entre les éléments mais seulement la compatibilité statique. [Ciampi and Carlesimo, 1986] sont les premiers à proposer un chemin d'implémentation numérique pour ce type d'élément. [Spacone and Filippou, 1996], [Spacone et al., 1996a] ont présenté un élément poutre à base de forces avec un algorithme stable, capable de décrire le comportement non linéaire d'une structure poutre-colonne en béton armé sous des sollicitations cycliques. Les auteurs ont également utilisé l'approche multifibres pour la discrétisation de la section afin de reproduire le couplage entre l'effort axial et le moment de flexion et ont démontré son efficacité.

Les premiers éléments finis poutres à base de forces ont été formulés dans le cadre du principe des travaux virtuels, en utilisant le champ des contraintes comme champ indépendant. Ceci s'est avéré problématique lors de l'implémentation numérique, c'est pourquoi des formulations mixtes ont été ensuite introduites. Le principe des formulations mixtes est d'utiliser deux champs indépendants ou plus. Par exemple, la formulation mixte de Hellinger-Reissner possède deux champs indépendants (le déplacement et la contrainte) [Souza and Magalhães, 2000], [Hjelmstad and Tacioglu, 2005], la formulation mixte de Hu-Washizu utilise trois champs indépendants (le déplacement, la déformation et la contrainte), [Taylor et al., 2003], [Saritas and Filippou, 2009], [Saritas and Soydas, 2012], [Soydas and Saritas, 2013].

2.3.2 Interpolation en déplacements

Ce type de formulation est plus classique (voir chapitre 3 pour plus de détails). Le champ de déplacement est interpolé le long de l'élément par le biais des fonctions de forme en fonction des déplacements nodaux. Le principal avantage de cette formulation est d'assurer la compatibilité cinématique entre les éléments. En effet, il suffit de choisir des fonctions de forme de sorte que leurs coefficients reproduisent les valeurs des déplacements nodaux de l'élément. Contrairement aux éléments formulés en forces, l'équilibre statique n'est pas assurée au niveau local (au niveau de l'élément).

2.4 Modélisation longitudinale

Les non-linéarités sont introduites dans chaque élément poutre selon deux approches : soit concentrées aux extrémités (*approche concentrée, lumped approach*) soit distribuées le long de l'élément (*approche distribuée*).

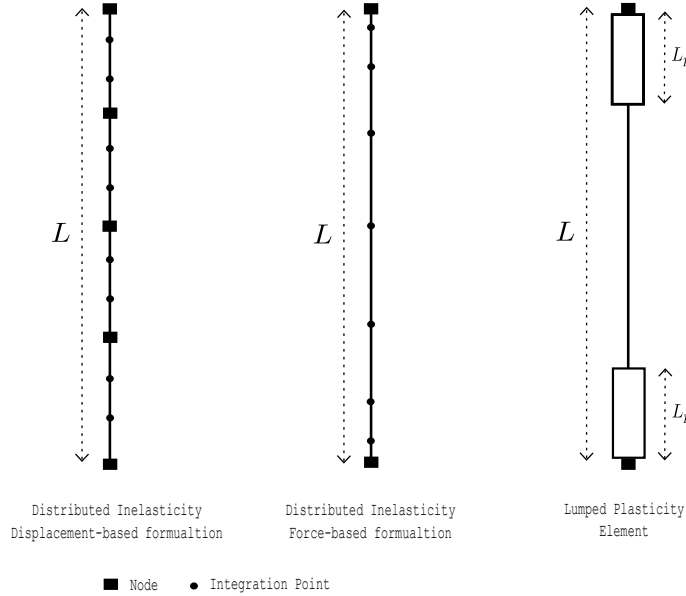


FIGURE 2.6 – Non-linéarités le long des éléments finis poutres (illustration inspirée de [Huang, 2012])

2.4.1 Approche concentrée

Cette approche est une approche simplifiée qui permet de diminuer dans certains cas le temps de calcul (par exemple dans le cas des portiques en béton armé où le comportement non-linéaire se trouve souvent concentré aux extrémités des poteaux et des poutres). Le premier élément basé sur cette approche a été proposé par [Clough and Johnston, 1966]. Il consiste à utiliser deux éléments en parallèle, le premier se comportant élastiquement et l'autre dans le domaine non-linéaire. Des éléments plus efficaces ont été ensuite introduits : [Giberson, 1967], [Clough and Benuska, 1967], [Takeda et al., 1970], [Otani, 1974], [Banan et al., 1981], [Taucer et al., 1991], [Fajfar et al., 2006] et [Dolsek, 2010]. Les limitations de cette approche ont été étudiées les années quatre-vingt par [Charney and Bertero, 1982], [Bertero et al., 1984].

2.4.2 Approche distribuée

Une description plus exacte est l'approche distribuée où le comportement non linéaire des poutres est cette fois-ci distribué le long de l'élément et non plus localisé aux extrémités. De plus, la non-linéarité peut prendre effet à n'importe quelle section située à l'intérieur de l'élément. Par conséquent,

le comportement de l'élément est désormais obtenu par l'intégration des réponses d'un nombre limité de sections situées aux points d'intégration pondérées par un certain poids selon le schéma d'intégration utilisé. Un des premiers éléments à non-linéarité distribuée est celui introduit par [Soleimani et al., 1979].

2.5 Modélisation de la section

Deux modélisations de la section sont souvent utilisées : l'approche *généralisée* et l'approche *multi-fibres*.

2.5.1 Approche généralisée

L'approche généralisée consiste à modéliser la section avec *une seule loi* décrivant le comportement de la section même si elle est constituée de plusieurs matériaux. Cette loi *généralisée* prend la forme d'une relation forces - déplacements.

Un des avantages de cette approche est la simplification et la rapidité du calcul. En effet, la méthode permet d'avoir des résultats globaux (à l'échelle de la structure) sans descendre à l'échelle du matériau. Néanmoins, la calibration de ses paramètres reste très délicate, surtout pour des chargements multi-directionnels où des essais expérimentaux sont nécessaires. De plus, l'approche généralisée néglige les phénomènes locaux (endommagement, plastification, fissuration...), ce qui ne permet pas d'identifier précisément les causes de non-linéarité ou encore de la rupture et limite fortement sa capacité de prédiction.

Plusieurs auteurs ont proposé des éléments poutres basés sur l'approche généralisée [Rasheed and Dinno, 1994], [Royer-Carfagni, 2001] et [Kwak and Kim, 2010], [Dujc et al., 2010], [Pham et al., 2010], [Jukić et al., 2012], [Bui et al., 2014]. Dans cette catégorie, on peut également intégrer le concept de macro-élément introduit en géotechnique par [Nova and Montrasio, 1991]. Ce concept consiste à considérer les non-linéarités de sol et de la fondation d'une manière globale en un seul point. Il a été étendu pour la modélisation de liaisons d'éléments structuraux, comme par exemple les liaisons poteaux poutres [Fléjou, 1993], l'analyse sismique des portiques en béton armé [Davenne, 1998], des structures en bois [Richard et al., 1999] ou aussi pour l'étude d'interaction sol-structure [Grange, 2008].

Le chapitre 4 de ce mémoire est centré autour de l'approche généralisée appliquée aux poutres. On s'intéresse plus particulièrement à la modélisation des éléments structuraux en béton armé avec une loi généralisée capable de reproduire le comportement jusqu'à la ruine.

2.5.2 Approche multifibres

L'idée de cette approche est de diviser la section en plusieurs "fibres" ayant chacune une relation de comportement locale (en contraintes - déformations). On peut trouver cette idée dans le livre de [Owen and Hinton, 1980b], suivi par les travaux de [Chan, 1983], [Scordelis, 1984], [Izzuddin, 1990], [Guedes et al., 1994], [Spacone and Filippou, 1996], [Kotronis and Mazars, 2005], [Kotronis et al., 2005].

L'approche multifibres s'est avérée d'une grande efficacité en génie civil. On peut mentionner par exemple l'analyse non linéaire des poutres ou des murs porteurs en béton armé [Kotronis and Mazars, 2005], [Kotronis et al., 2005], [Ile et al., 2008], [Grange et al., 2008], les problèmes d'Interaction Sol Structure [Grange et al., 2011], l'étude des interactions de l'effort axial avec le moment de flexion [Chan, 1983], [Scordelis, 1984], [Kotronis et al., 2005], [Spacone and Limkatanyu, 2000], [Pinho and Elnashai, 2000], les sections soumises à la flexion au cisaillement ou encore à la torsion [Mazars et al., 2006], le renforcement des poteaux confinés [Desprez et al., 2013], la modélisation des éléments structuraux renforcés ayant des sections géométriques arbitraires ou des sections creuses [Desprez et al., 2015], l'évaluation de la vulnérabilité des ouvrages en béton armé [Desprez et al., 2015]...

Loin de vouloir être exhaustif, on montre ci-après quelques exemples de l'utilisation des poutres multi-fibres afin de démontrer leur capacité d'appréhender le comportement non-linéaire global et local des structures en béton armé.

Benchmark NEES/UCSD : En 2006, le comportement sismique d'une structure en béton armé de 7 étages a été étudié expérimentalement dans le cadre d'un partenariat entre l'Université de Californie

de San Diego, l'Association de Ciment Portland de Skokie et le consortium Américain NEESinc. La structure a été construite à l'échelle 1 sur une table sismique de haute performance (masse embarquable 400 tonnes) située proche de l'Université de Californie à San Diego (pour plus d'informations sur les détails expérimentaux voir [Restrepo, 2006]). Des études dynamiques non linéaires “en aveugle” par une discrétisation de la structure à l'aide d'éléments poutres multifibres Timoshenko et l'utilisation de lois d'endommagement pour le béton et de plasticité pour l'acier sont présentées dans [Grange et al., 2008]. La comparaison a montré que la stratégie de modélisation adoptée est capable de reproduire le comportement expérimental de la structure en termes de déplacement et de distribution de l'endommagement, voir figures (2.8).



FIGURE 2.7 – Benchmark NEES/UCSD [Grange et al., 2008]

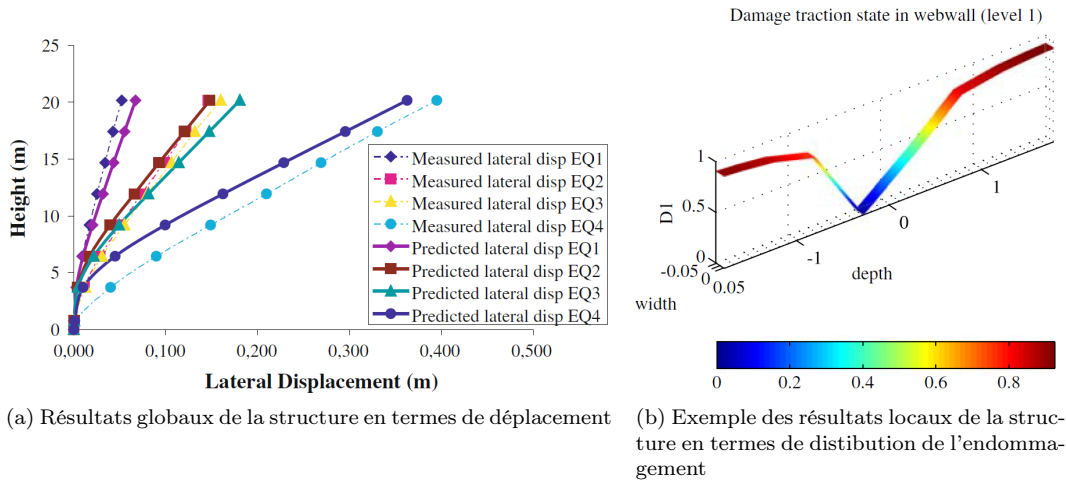
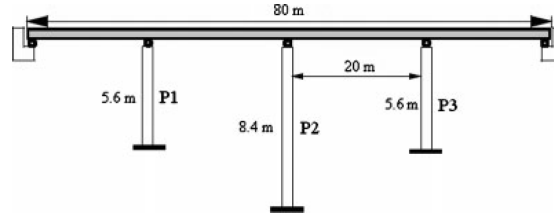
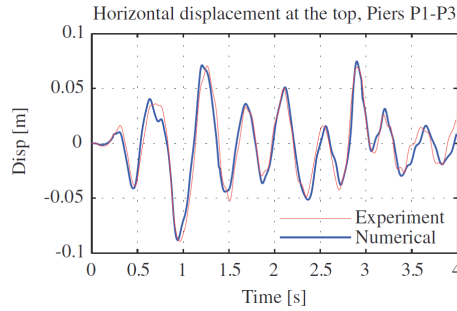


FIGURE 2.8 – Validation des résultats numériques globaux et locaux issus de la stratégie de modélisation multifibres avec les résultats expérimentaux [Grange et al., 2008].

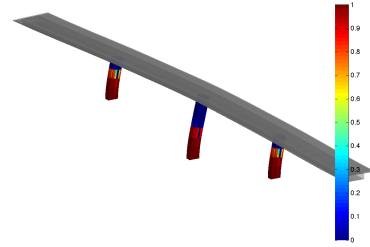
Viaduc - Ispra, Italy : On présente ci-dessous un autre exemple, la modélisation d'un Viaduc à trois colonnes avec des poutres multifibres Timoshenko (2.9). Le viaduc a été testé pseudo-dynamiquement au laboratoire ELSA de la Communauté Européenne (JRC Ispra, Italie, [Pinto, 1996]). Dans [Grange et al., 2011], les trois colonnes ont été modélisées avec des éléments poutres Timoshenko multifibres en béton armé alors que le tablier avec des poutres élastiques. Les auteurs ont également pris en compte l'interaction de Sol avec la Structure en introduisant des macro-éléments à la base des trois colonnes. Les résultats numériques sont en accord avec les résultats expérimentaux malgré le faible nombre de degrés de liberté utilisé, voir (2.9b) et (2.9c).



(a) Géométrie de la structure Viaduc avec ses trois colonnes



(b) Résultats globaux : comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux pour un séisme fort.



(c) Résultats locaux : distribution de l'endommagement

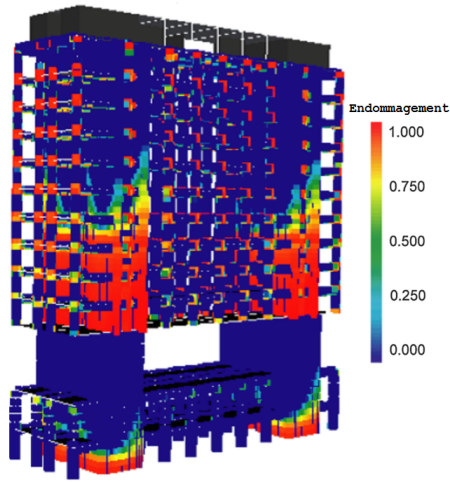
FIGURE 2.9 – Validation des résultats numériques globaux et locaux issus de la stratégie de modélisation multifibres avec les résultats expérimentaux pour une structure Viaduc [Grange et al., 2011].

Hôtel de ville de Grenoble : Un dernier exemple illustré ci-dessous concerne la modélisation de l'Hôtel de Ville de Grenoble. L'utilisation des éléments poutres Timoshenko multifibres conduit à un nombre réduit de degrés de liberté ce qui réduit considérablement le temps de calcul nécessaire [Desprez et al., 2015]. La comparaison des résultats numériques avec les mesures de bruit ambiant montre que le modèle proposé réussit à reproduire les modes propres du bâtiment. La modélisation du comportement non-linéaire a permis d'identifier les zones du bâtiment à renforcer mais également d'optimiser la solution de renforcement adoptée [Desprez et al., 2015].

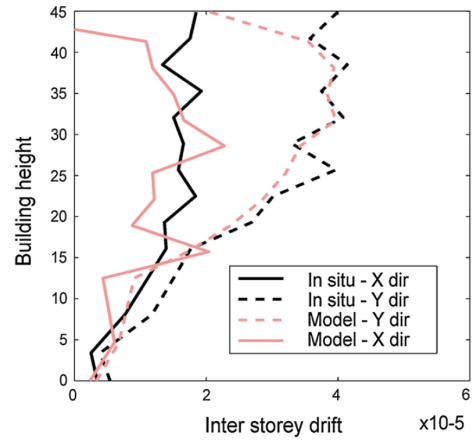
Dans la suite, on se concentre sur des éléments finis poutres Timoshenko, formulés en déplacements, avec une approche distribuée et une modélisation de la section généralisée (chapitre 4) ou multifibres (chapitre 5).

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a passé brièvement en revue quelques notions et la terminologie souvent utilisées pour les éléments poutres. Les hypothèses cinématiques principales ainsi que différents types de discrétisation ont été abordés. Le chapitre suivant fournit plus de détails sur différentes formulations éléments finis poutres Timoshenko existantes ainsi qu'une étude sur leur performance. Une amélioration sera enfin proposée pour le couplage effort normal - moment.



(a) Exemple des résultats locaux de la structure en termes de distribution de l'endommagement



(b) Résultats globaux de la structure en termes de déplacement

FIGURE 2.10 – Validation des résultats numériques globaux et locaux issus de la stratégie de modélisation multifibres avec les résultats in-situ de l'hôtel de ville de Grenoble [Desprez et al., 2015].

Chapitre 3

Comparaison des formulations poutres Timoshenko

Sommaire

3.1	Introduction	19
3.2	Différentes formulations éléments finis poutre Timoshenko	19
3.2.1	Introduction	19
3.2.2	Formulation variationnelle	21
3.2.2.1	Introduction	21
3.2.2.2	Principe des travaux virtuels	21
3.2.2.3	Matrices de rigidité	22
3.2.2.4	Vecteurs de forces	23
3.2.3	Matrice de rigidité analytique	24
3.2.4	Différents formulations éléments finis poutre Timoshenko	25
3.2.4.1	Full-Linear-Independent (FLI)	25
3.2.4.2	Full-Cubic-Quadratic-Material (FCQM)	26
3.2.4.3	Full-Qubic-Quadratic (FCQ)	27
3.2.5	Blocage par cisaillement	29
3.2.6	Matrices de masse	30
3.2.6.1	Matrice de masse de la formulation FLI	31
3.2.6.2	Matrice de masse de la formulation FCQM	32
3.2.6.3	Matrice de masse de la formulation FCQ	32
3.3	Comparaison des formulations FLI, FCQM et FCQ	32
3.3.1	Solution analytique	32
3.3.2	Poutre élastique encastrée soumise à un déplacement transversal	34
3.3.3	Poutre élastique encastrée soumise à une force transversale polynomiale $p(x) = qx^n$	35
3.3.4	Poutre élasto-plastique encastrée soumise à un déplacement transversal	36
3.3.5	Poutre élasto-plastique simple soumise à une force axiale et une rotation	38
3.3.5.1	Analyse et interprétation du couplage N-M	39
3.3.5.2	Solutions pour la prise en compte du couplage N-M	42
3.3.6	Réponse dynamique	43
3.4	Conclusions	45

3.1 Introduction

Dans le but de choisir la formulation éléments finis à utiliser pour la suite du travail, ce chapitre présente une comparaison de trois formulations éléments finis poutres Timoshenko de la littérature formulées en déplacements. Ces trois formulations diffèrent par le choix des fonctions qui interpolent les champs de déplacement et de rotation.

La première formulation - nommée ici **FLI** (Full-Linear-Independent) - adopte des fonctions linéaires et des interpolations indépendantes pour le champ de déplacement transversal et le champ de rotation, [Pegon, 1994] et [Guedes et al., 1994]. Le faible degré de ces polynômes et le fait qu'ils sont indépendants induit le problème de blocage par cisaillement, [Stolarski and Belytschko, 1983], [de Goyet, 1989], [Crisfield, 1991], [Ibrahimbegović and Frey, 1993]. Une des méthodes pour s'affranchir de ce problème numérique est de calculer approximativement les déformations de cisaillement, comme proposé dans [Donea and Lamain, 1987] et adopté par [Pegon, 1994] et [Guedes et al., 1994]. La seconde formulation - nommée ici **FCQM** (Full-Cubic-Quadratic-Material) - adopte des fonctions de forme d'ordre élevé, trois pour le déplacement transversal et deux pour la rotation. Avec cette formulation les déplacements et les rotations sont interdépendants et le problème de blocage par cisaillement n'existe plus. Cependant, la particularité de cette formulation est que les fonctions de forme dépendent des propriétés du matériau. Son utilisation pour des calculs non linéaires s'avère donc problématique. La troisième formulation, - nommée **FCQ** (Full-Qubic-Quadratic) - proposée récemment par [Caillerie et al., 2015], possède un noeud interne, ce qui permet d'utiliser des fonctions d'interpolation d'ordre trois pour le déplacement transversal et deux pour la rotation. La formulation conduit à un élément exempt de blocage par cisaillement possédant des fonctions de forme indépendantes des caractéristiques matériau. En effet, les auteurs [Caillerie et al., 2015] ont montré que la formulation **FCQM** est un cas particulier de la nouvelle formulation **FCQ**. D'autres articles de référence sur les éléments finis poutres Timoshenko sont [Nickel and Secor, 1972], [Thomas and Abbas, 1975] et [Tessler and Dong, 1981]. Une partie des résultats de ce chapitre a été publiée dans [Bitar et al., 2016].

Le chapitre est organisé de la manière suivante : en premier lieu, les équations de la théorie des poutres Timoshenko ainsi que la forme générale des champs de déplacements et de déformations est rappelée. Puis, dans le cadre d'une discrétisation multifibres de la section, la formulation variationnelle est décrite conduisant à la construction de la matrice de rigidité et de vecteur des forces nodales. Les équations spécifiques pour les formulations **FLI**, **FCQM** et **FCQ** sont fournies et le blocage par cisaillement est illustré par le biais d'une analyse aux valeurs propres. Par ailleurs, les matrices de masse des trois formulations sont également développées afin d'étudier le comportement dynamique. Enfin, la performance de chaque formulation est étudiée en considérant des cas tests avec un comportement élastique ou élasto-plastique sous différents chargements statiques. Le cas des interactions non linéaires entre l'effort axial et le moment de flexion est étudié en détail et de nouvelles fonctions de forme d'ordre trois pour le déplacement axial sont proposées afin d'améliorer la performance de l'élément **FCQ**.

3.2 Différentes formulations éléments finis poutre Timoshenko

3.2.1 Introduction

La formulation éléments finis adoptée ici est une formulation en déplacements (voir paragraphe 2.3.2). On considère une structure poutre linéique de longueur L discrétisée en n éléments finis poutres de longueur L_e composées (au minimum) de 2 noeuds i et j . Chaque noeud possède trois degrés de liberté : un déplacement axial U_x , un déplacement transversal V_y et une rotation Θ_z . Les déplacements aux noeuds des éléments sont les inconnues du problème. Dans la suite de ce mémoire, les matrices et les vecteurs sont écrits en caractère **gras**.

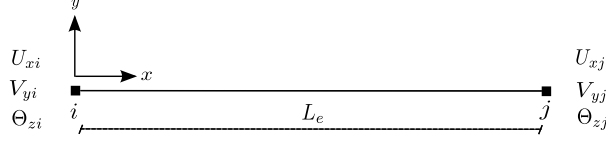


FIGURE 3.1 – Élément fini poutre à 2 noeuds

Dans un élément fini e , le champ des déplacements généralisés est approximé par :

$$\mathbf{U}(x, t) = \mathbf{N}(x) \mathbf{d}_e^l(t) \quad (3.1)$$

avec $\mathbf{N}(x)$ la matrice contenant les fonctions d'interpolation et $\mathbf{d}_e^l(t)$ le vecteur des déplacements nodaux de l'élément e dans le repère local (index l). Afin d'écrire le vecteur local $\mathbf{d}_e^l(t)$ dans le repère globale $\mathbf{d}_e^g(t)$, il suffit de le multiplier par l'inverse de la matrice de rotation \mathbf{R}_e définie ci-dessous (avec ϕ l'angle entre les repères local et global, voir figure 3.2) :

$$\mathbf{R}_e = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

En d'autres termes,

$$\mathbf{d}_e^l(t) = \mathbf{R}_e \mathbf{d}_e^g(t) \quad (3.3)$$

avec

$$\mathbf{d}_e^l(t) = [U_{xi}^l \quad V_{yi}^l \quad \Theta_{zi}^l \quad U_{xj}^l \quad V_{yj}^l \quad \Theta_{zj}^l] \quad (3.4)$$

et

$$\mathbf{d}_e^g(t) = [U_{xi}^g \quad V_{yi}^g \quad \Theta_{zi}^g \quad U_{xj}^g \quad V_{yj}^g \quad \Theta_{zj}^g] \quad (3.5)$$

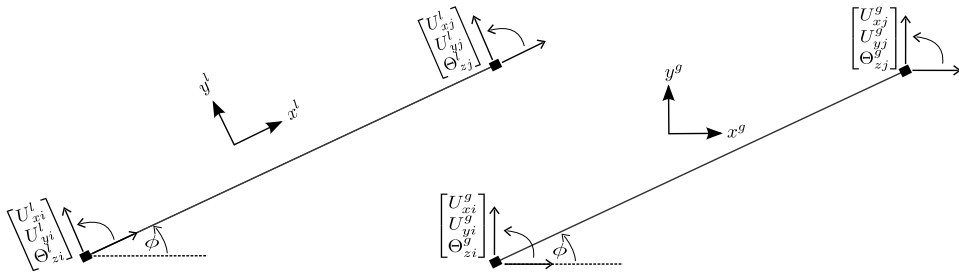


FIGURE 3.2 – Transformation de l'échelle locale à l'échelle globale

Les degrés de libertés nodaux \mathbf{d}_e^g de l'élément e sont liés aux déplacements globaux de la structure poutre $\mathbf{d}_{str}(t)$ par le biais d'une matrice de location \mathbf{Z}_e tel que :

$$\mathbf{d}_e^g(t) = \mathbf{Z}_e \mathbf{d}_{str}(t) \quad (3.6)$$

avec

$$\mathbf{d}_{str}(t) = [U_{x1}^g \quad U_{y1}^g \quad \Theta_{z1}^g \quad U_{x2}^g \quad U_{y2}^g \quad \Theta_{z2}^g \quad \dots \quad U_{xn}^g \quad U_{yn}^g \quad \Theta_{zn}^g]$$

où x_i, y_i, z_i ($i = 1 \dots n$) représentent les coordonnées des points. En combinant (3.3) et (3.6), il devient :

$$\mathbf{U}(x, t) = \mathbf{N}(x) \mathbf{R}_e \mathbf{Z}_e \mathbf{d}_{str}(t) \quad (3.7)$$

3.2.2 Formulation variationnelle

3.2.2.1 Introduction

L'écriture variationnelle permet de développer des méthodes d'analyse numérique. Plus spécifiquement, la méthode des éléments finis sera utilisée pour déterminer des solutions approchées du problème initial. La formulation variationnelle peut être obtenue de plusieurs façons : soit par le principe de conservation de la quantité de mouvement, soit par le principe des travaux virtuels [Ibrahimbegović, 2006]. Nous choisissons ici le principe des travaux virtuels qui exprime la forme faible de l'équilibre. Cette formulation faible est considérée comme une formulation variationnelle puisqu'elle exprime la stationnarité d'une fonctionnelle [Bonnet and Frangi, 2007].

Considérons une structure poutre Timoshenko multifibres de longueur L discrétisée en n éléments finis poutres $e = [x_i; x_j]$ de longueur $L_e = x_j - x_i$ ayant i et j comme noeuds externes. On note $f(x, y)$ la fibre d'ordonnée y de la section $S(x)$ située à l'abscisse x . Dans un premier temps, on se place dans le cadre de la statique, en petites déformations, en élasticité linéaire. Les relations de comportement du matériau constituant chaque fibre prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y) &= E_f(x, y)\varepsilon_x(x, y) \\ \tau_{xy}(x, y) &= kG_f(x, y)\gamma_{xy}(x, y)\end{aligned}\tag{3.8}$$

avec $E_f(x, y)$ et $G_f(x, y)$ le module de Young et le module de cisaillement respectivement. k est le coefficient de correction du cisaillement (voir paragraphe 2.2.2.1). Dans ce qui suit et pour des raisons de clarté les dépendances en x et y sont omises ainsi que les indices pour les axes locaux, globaux. Le principe des travaux virtuels pour une poutre Timoshenko multifibres est présentée ci-dessous.

3.2.2.2 Principe des travaux virtuels

Les déplacements virtuels forment des variations des déplacements réels cinématiquement admissibles (i.e. nulles où les conditions aux limites sont appliquées). Dans la suite, les déplacements virtuels sont interpolés par le biais des mêmes fonctions de forme que les déplacements réels (méthode de Galerkin). Ainsi, les déformations virtuelles peuvent se déduire simplement des déplacements virtuels aux noeuds.

Le travail virtuel pour une structure poutre Timoshenko de longueur L s'écrit [Pegon, 1994], [Guedes et al., 1994] :

$$\int_0^L \int_S (\delta\varepsilon_x \sigma_x + \delta\gamma_{xy} \tau_{xy}) dS dx - w_{externe} = 0\tag{3.9}$$

avec $\delta\varepsilon_x$ et $\delta\gamma_{xy}$ les déformations virtuelles calculées à partir des déplacements virtuels et $w_{externe}$ le travail des actions mécaniques extérieurs.

En combinant (2.5) et (3.9) on obtient :

$$\int_0^L \int_S (\delta(U'_x - y\Theta'_z)\sigma_x + (\delta U'_y - \delta\Theta_z)\tau_{xy}) dS dx - w_{external} = 0\tag{3.10}$$

avec δU_x le déplacement axial virtuel, δV_y le déplacement transversal virtuel et $\delta\Theta_z$ la rotation virtuelle.

Par ailleurs, les définitions suivantes sont adoptées pour les forces généralisées :

$$\begin{array}{lll} F_x = \int_S \sigma_x dS, & F_y = \int_S \tau_{xy} dS, & M_z = - \int_S y \sigma_x dS \\ \text{Effort normal} & \text{Effort tranchant} & \text{Moment de flexion} \end{array}\tag{3.11}$$

En introduisant (3.11) dans (3.10), on a :

$$\int_0^L (F_x \frac{d}{dx} \delta U_x + F_y \frac{d}{dx} \delta \beta_y + M_z \frac{d}{dx} \delta \Theta_z) dx - w_{external} = 0\tag{3.12}$$

avec β_y l'angle de distorsion moyen de la section

$$\beta_y = \frac{dV_y}{dx} - \Theta_z = U'_y - \Theta_z\tag{3.13}$$

3.2.2.3 Matrices de rigidité

La loi de comportement (élasticité linéaire) prend la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_f & 0 \\ 0 & kG_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Par ailleurs, les expressions (2.5), (3.14) et (3.11) donnent :

$$\begin{aligned} F_x &= \int_S \sigma_x dS = \int_S E_f \varepsilon_x dS = \int_S E_f \left(\frac{dU_x}{dx} - y \frac{d\Theta_z}{dx} \right) dS = \int_S E_f dS U'_x - \int_S E_f y dS \Theta'_z \\ F_y &= \int_S \tau_{xy} dS = \int_S kG_f \gamma_{xy} dS = \int_S kG_f (\beta_y) dS = \int_S kG_f dS \beta_y \\ M_z &= - \int_S y \sigma_x dS = - \int_S y E_f \varepsilon_x dS = - \int_S y E_f \left(\frac{dU_x}{dx} - y \frac{d\Theta_z}{dx} \right) dS = - \int_S E_f y dS U'_x + \int_S E_f y^2 dS \Theta'_z \end{aligned} \quad (3.15)$$

Par conséquent, le vecteur des forces généralisées \mathbf{F}_S a la forme suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_S} = \underbrace{\begin{bmatrix} \int_S E_f dS & 0 & - \int_S E_f y dS \\ 0 & \int_S kG_f dS & 0 \\ - \int_S E_f y dS & 0 & \int_S E_f y^2 dS \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_S} \cdot \begin{bmatrix} U'_x \\ \beta_y \\ \Theta'_z \end{bmatrix} = \mathbf{K}_S \cdot \begin{bmatrix} U'_x \\ \beta_y \\ \Theta'_z \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

avec U'_x , β_y , Θ'_z les déformations généralisées et \mathbf{K}_S la matrice représentant la rigidité de la section, indépendante de la position de l'axe neutre [Guedes et al., 1994].

Enfin, en considérant (3.12) et (3.16), le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\int_0^L \delta [U'_x \quad \beta_y \quad \Theta'_z]^T \mathbf{K}_S [U'_x \quad \beta_y \quad \Theta'_z]^T dx - w_{external} = 0 \quad (3.17)$$

Le vecteur des déplacements généralisés est donné par :

$$\begin{bmatrix} U_x \\ V_y \\ \Theta_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1^u & N_2^u & N_3^u & N_4^u & N_5^u & N_6^u \\ N_1^v & N_2^v & N_3^v & N_4^v & N_5^v & N_6^v \\ N_1^\theta & N_2^\theta & N_3^\theta & N_4^\theta & N_5^\theta & N_6^\theta \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} U_{xi} \\ V_{yi} \\ \Theta_{zi} \\ U_{xj} \\ V_{yj} \\ \Theta_{zj} \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e} \quad (3.18)$$

où \mathbf{d}_e est le vecteur contenant les déplacements nœuds de l'élément e et \mathbf{N} la matrice des fonctions de forme dépendant de x (u pour les déplacements et $^\theta$ pour les rotations). Les déformations généralisées sont calculées comme :

$$\begin{bmatrix} U'_x \\ \beta_y \\ \Theta'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U'_x \\ U'_y - \Theta'_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} B_1^\varepsilon & B_2^\varepsilon & B_3^\varepsilon & B_4^\varepsilon & B_5^\varepsilon & B_6^\varepsilon \\ B_1^\gamma & B_2^\gamma & B_3^\gamma & B_4^\gamma & B_5^\gamma & B_6^\gamma \\ B_1^\kappa & B_2^\kappa & B_3^\kappa & B_4^\kappa & B_5^\kappa & B_6^\kappa \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} U_{xi} \\ V_{yi} \\ \Theta_{zi} \\ U_{xj} \\ V_{yj} \\ \Theta_{zj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^\varepsilon \\ \mathbf{B}^\gamma \\ \mathbf{B}^\kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{xi} \\ V_{yi} \\ \Theta_{zi} \\ U_{xj} \\ V_{yj} \\ \Theta_{zj} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

avec \mathbf{B} la matrice contenant les dérivées par rapport à x des fonctions de forme N ($^\varepsilon$ pour le axial, $^\gamma$ pour le cisaillement et $^\kappa$ pour les rotations).

L'introduction de (3.19) dans le principe des travaux virtuels (3.17) donne les expressions de la matrice de rigidité \mathbf{K}_e de l'élément e :

$$\mathbf{K}_e = \int_0^{L_e} \mathbf{B}^T \mathbf{K}_S \mathbf{B} dx \quad (3.20)$$

L'assemblage donne la matrice de rigidité totale de la structure poutre :

$$\mathbf{K}_{tot} = \sum_{e=1}^n \int_0^{L_e} \mathbf{B}^T \mathbf{K}_S \mathbf{B} dx \quad (3.21)$$

L'extension des équations précédentes en 3D est simple et suit les mêmes étapes [Guedes et al., 1994].

3.2.2.4 Vecteurs de forces

Comme mentionné précédemment, le vecteur des forces généralisées \mathbf{F}_S de la section a la forme suivante :

$$\mathbf{F}_S = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix} = \mathbf{K}_S \cdot \begin{bmatrix} U'_x \\ \beta_y \\ \Theta'_z \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

avec U'_x , β_y , Θ'_z les déformations généralisées et \mathbf{K}_S la matrice représentant la rigidité de la section (voir (3.16)).

Le vecteur des forces internes de l'élément est :

$$\mathbf{F}_{int,e} = \int_0^{L_e} \mathbf{B}^T \mathbf{F}_S dx \quad (3.23)$$

Après assemblage on obtient le vecteur total des forces internes, pour toute la structure poutre :

$$\mathbf{F}_{int,tot} = \sum_{e=1}^n \int_0^{L_e} \mathbf{B}^T \mathbf{F}_S dx \quad (3.24)$$

Pour un chargement externe transversal distribué $p(x)$ (figure (3.3)), le vecteur des forces externes est évalué en utilisant également le principe des travaux virtuels.

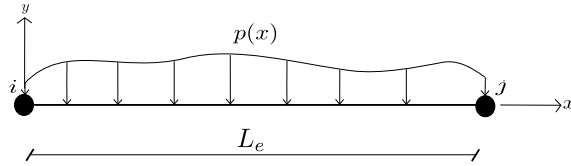


FIGURE 3.3 – Un élément fini poutre e soumis à un chargement vertical distribué $p(x)$

Le travail externe virtuel (3.17) pour un seul élément e prend la forme suivante :

$$w_{external,e} = \int_0^{L_e} \delta V_y(x) p(x) dx = \int_0^{L_e} \delta (\mathbf{N}^v \mathbf{d}_e)^T p(x) dx = \delta \mathbf{d}_e^T \int_0^{L_e} \mathbf{N}^{vT} p(x) dx = \delta \mathbf{d}_e^T \mathbf{F}_{ext,e} \quad (3.25)$$

avec $\mathbf{N}^{vT} = [N_1^v \ N_2^v \ N_3^v \ N_4^v \ N_5^v \ N_6^v]$.

Le vecteur des forces externes de l'élément devient :

$$\mathbf{F}_{ext,e} = \int_0^{L_e} \mathbf{N}^{vT} p(x) dx = \int_0^{L_e} [N_1^v \ N_2^v \ N_3^v \ N_4^v \ N_5^v \ N_6^v]^T p(x) dx \quad (3.26)$$

Avant de poursuivre avec la comparaison des formulations éléments finis poutre Timoshenko de la littérature (voir section 3.2.4), la matrice de rigidité analytique d'une poutre Timoshenko homogène élastique est présentée dans la section 3.2.3.

3.2.3 Matrice de rigidité analytique

Le développement de la matrice de rigidité analytique d'une poutre Timoshenko présenté ci-dessous suit l'article de [Caillerie et al., 2015]. Supposons qu'une poutre Timoshenko de longueur L est soumise à un chargement vertical réparti p et à un moment réparti m (voir figure (3.4a)).

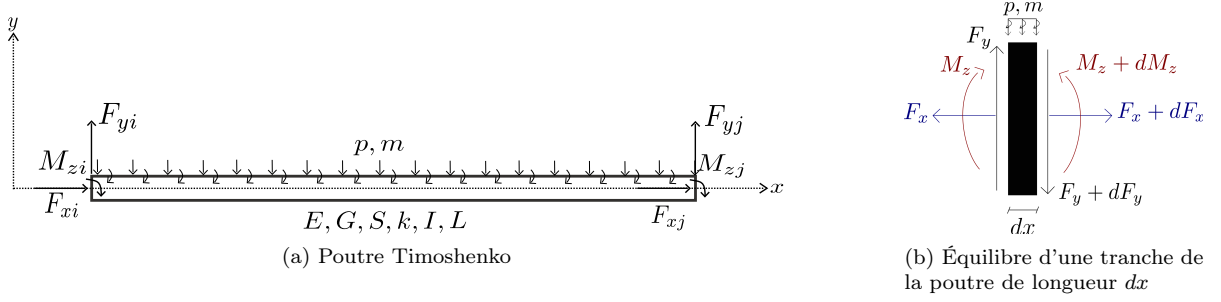


FIGURE 3.4 – (a) Poutre Timoshenko de longueur L soumise à un chargement vertical réparti p et un moment réparti m , (b) équilibre d'une tranche de la poutre

On rappelle les expressions des forces généralisées (3.15) :

$$\begin{aligned} F_x &= ESU'_x \\ F_y &= kGS(U'_x - \Theta'_z) \\ M_z &= -EI\Theta'_z \end{aligned} \quad (3.27)$$

Les équations d'équilibre pour une longueur infinitésimale dx de la poutre (figure (3.4b)) sont :

$$\begin{aligned} \frac{dF_x}{dx} &= 0 \\ \frac{dF_y}{dx} + p &= 0 \\ \frac{dM_z}{dx} - F_y + m &= 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Les équations d'équilibre (3.28) peuvent aussi s'obtenir par le principe des travaux virtuels (3.9). En effet, il suffit de remplacer les équations (3.27) dans (3.9) et de réaliser une intégration par partie.

Les conditions aux limites de la poutre sont :

$$\begin{aligned} U_x(x=0) &= U_{xi} & V_y(x=0) &= V_{yi} & \Theta_z(x=0) &= \Theta_{zi} \\ U_x(x=L) &= U_{xj} & V_y(x=L) &= V_{yj} & \Theta_z(x=L) &= \Theta_{zj} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} F_x(x=0) &= F_{xi} & F_y(x=0) &= F_{yi} & M_z(x=0) &= M_{zi} \\ F_x(x=L) &= F_{xj} & F_y(x=L) &= F_{yj} & M_z(x=L) &= M_{zj} \end{aligned} \quad (3.30)$$

On introduit les définitions [Caillerie et al., 2015] :

$$\begin{aligned} p_0(x) &= p(x) \\ p_1(x) &= \int_0^x p_0(t)dt & m_0(x) &= m(x) \\ p_2(x) &= \int_0^x p_1(t)dt & m_1(x) &= \int_0^x m_0(t)dt \\ p_3(x) &= \int_0^x p_2(t)dt & m_2(x) &= \int_0^x m_1(t)dt \\ p_4(x) &= \int_0^x p_3(t)dt & m_3(x) &= \int_0^x m_2(t)dt \end{aligned} \quad \text{et} \quad (3.31)$$

Intégrons les équations d'équilibre (3.28) en prenant en compte les relations (3.29), (3.30) et (3.31) :

$$\begin{aligned} F_x(x) &= F_{xi} = F_{xj} \\ F_y(x) &= -p_1(x) - F_{yi} \\ M_z(x) &= -xF_{yi} - M_{zi} - m_1(x) - p_2(x) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Maintenant, si on remplace ces dernières expressions dans (3.27) on trouve les expressions analytiques des champs de déplacement :

$$\begin{aligned} U_x(x) &= \frac{x}{ES} F_{xi} + U_{xi} \\ V_y(x) &= \left[-\frac{x}{kSG} + \frac{x^3}{6EI}\right] F_{xi} + \frac{x^2}{2EI} M_{zi} - x\Theta_{zi} + V_{yi} - \frac{1}{kSG} p_2 + \frac{1}{EI} (-m_3 - p_4) \\ \Theta_z(x) &= \frac{1}{EI} \left[-\frac{x^2}{2} F_{xi} - xM_{zi}\right] + \Theta_{zi} + \frac{1}{EI} [m_2 - p_3] \end{aligned} \quad (3.33)$$

Il ne reste qu'à utiliser les conditions aux limites (3.29) pour chercher les expressions des forces nodales. La matrice de rigidité analytique \mathbf{K}_{an} d'une poutre Timoshenko élastique homogène prend finalement la forme :

$$\begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ M_{zi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ M_{zj} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{kSG}{L}\alpha & -\frac{kSG}{2}\alpha & 0 & -\frac{kSG}{L}\alpha & -\frac{kSG}{2}\alpha \\ 0 & -\frac{kSG}{2}\alpha & \frac{kSGL}{4}\alpha + \frac{EI}{L} & 0 & \frac{kSG}{2}\alpha & \frac{kSGL}{4}\alpha - \frac{EI}{L} \\ -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{kSG}{L}\alpha & \frac{kSG}{2}\alpha & 0 & \frac{kSG}{L}\alpha & \frac{kSG}{2}\alpha \\ 0 & -\frac{kSG}{2}\alpha & \frac{kSGL}{4}\alpha - \frac{EI}{L} & 0 & \frac{kSG}{2}\alpha & \frac{kSGL}{4}\alpha + \frac{EI}{L} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{an}} \begin{bmatrix} U_{xi} \\ V_{yi} \\ \Theta_{zi} \\ U_{xj} \\ V_{yj} \\ \Theta_{zj} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{kSGL^2}{12EI}} = \frac{1}{1 + \frac{kG}{E} \left(\frac{L}{H}\right)^2} \quad (3.35)$$

3.2.4 Différents formulations éléments finis poutre Timoshenko

3.2.4.1 Full-Linear-Independent (FLI)

Dans cette première formulation, les fonctions de forme \mathbf{N} qui sont utilisées pour interpoler le champ des déplacements généralisés sont considérées linéaires et indépendantes [Pegon, 1994], [Guedes et al., 1994] :

$$\begin{bmatrix} U_x \\ V_y \\ \Theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^u & 0 & 0 & N_4^u & 0 & 0 \\ 0 & N_2^v & 0 & 0 & N_5^v & 0 \\ 0 & 0 & N_3^\theta & 0 & 0 & N_6^\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{xi} \\ V_{yi} \\ \Theta_{zi} \\ U_{xj} \\ V_{yj} \\ \Theta_{zj} \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

$$\text{avec } \begin{cases} N_1^u = N_2^v = N_3^\theta = 1 - \frac{x}{L_e} \\ N_4^u = N_5^v = N_6^\theta = \frac{x}{L_e} \end{cases} \quad (3.37)$$

Le champ des déformations généralisées prend la forme suivante (voir équation (2.4)) :

$$\begin{bmatrix} U'_x \\ \beta_y \\ \Theta'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_e} & 0 & 0 & \frac{1}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_e} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{L_e} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_e} & 0 & 0 & \frac{1}{L_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{xi} \\ V_{yi} \\ \Theta_{zi} \\ U_{xj} \\ V_{yj} \\ \Theta_{zj} \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

L'expression de β_y dans l'équation (3.38) se trouve en éliminant les termes linéaires dans les fonctions de forme N_3^θ et N_6^θ afin de s'affranchir de blocage par cisaillement, comme proposé par [Donea and Lamain, 1987].

Les matrices de rigidité de la section et de l'élément sont calculées à partir des équations (3.20) et (3.16). Pour le cas d'une section constituée d'un seul matériau, la matrice de rigidité de l'élément, obtenue avec (3.20), s'écrit :

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L_e} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{kSG}{L_e} & \frac{kSG}{2} & 0 & -\frac{kSG}{L_e} & \frac{kSG}{2} \\ 0 & \frac{kSG}{2} & \frac{EI}{L_e} + \frac{kSGL_e}{4} & 0 & -\frac{kSG}{2} & -\frac{EI}{L_e} + \frac{kSGL_e}{4} \\ -\frac{ES}{L_e} & 0 & 0 & \frac{ES}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{kSG}{L_e} & -\frac{kSG}{2} & 0 & \frac{kSG}{L_e} & -\frac{kSG}{2} \\ 0 & \frac{kSG}{2} & -\frac{EI}{L_e} + \frac{kSGL_e}{4} & 0 & -\frac{kSG}{2} & \frac{EI}{L_e} + \frac{kSGL_e}{4} \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

avec E le module de Young, G le module de cisaillement, I le moment quadratique et S la surface de la section. A partir de (3.26), le vecteur des forces externes de l'élément soumis à un chargement transversal distribué $p(x)$ qui a la forme d'un polynôme d'ordre n ($p(x) = qx^n$, voir figure 3.3, s'écrit :

$$\mathbf{F}_{ext,e} = \frac{qL_e^{n+1}}{(n+1)(n+2)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ n+1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

3.2.4.2 Full-Cubic-Quadratic-Material (FCQM)

Dans cette formulation proposée par [Friedman and Kosmatka, 1993], les fonctions de forme de type Lagrange sont d'ordre cubique pour le déplacement transversal et quadratique pour le champ de rotation. Les auteurs ont choisi des polynômes d'interpolation interdépendants en assurant qu'ils satisfassent les deux équations différentielles (3.41) de la théorie de Timoshenko [Timoshenko, 1921].

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \Theta_z \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Theta_z}{\partial x^2} - \frac{kGS}{EI} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \Theta_z \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

En effet, la première équation est satisfaite si l'ordre des polynômes d'interpolation associés à V_y est choisi un ordre plus élevé que celui des polynômes associés à Θ_z . [Friedman and Kosmatka, 1993] ont déterminé les coefficients de ces polynômes en les exigeant à satisfaire les deux équations (3.41), ce qui les a conduit à proposer un élément fini poutre à deux noeuds dont les coefficients dépendent des propriétés matériau. L'élément ne présente pas le problème du blocage par cisaillement.

Les champs de déplacements et de déformations généralisés sont :

$$\begin{bmatrix} U_x \\ V_y \\ \Theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^u & 0 & 0 & N_4^u & 0 & 0 \\ 0 & N_2^v & N_3^v & 0 & N_5^v & N_6^v \\ 0 & N_2^\theta & N_3^\theta & 0 & N_5^\theta & N_6^\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{xi} \\ V_{yi} \\ \Theta_{zi} \\ U_{xj} \\ V_{yj} \\ \Theta_{zj} \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

$$\begin{bmatrix} U'_x \\ \beta_y \\ \Theta'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^u}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4^u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_2^v}{\partial x} - N_2^\theta & \frac{\partial N_3^v}{\partial x} - N_3^\theta & 0 & \frac{\partial N_5^v}{\partial x} - N_5^\theta & \frac{\partial N_6^v}{\partial x} - N_6^\theta \\ 0 & \frac{\partial N_2^\theta}{\partial x} & \frac{\partial N_3^\theta}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5^\theta}{\partial x} & \frac{\partial N_6^\theta}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{xi} \\ V_{yi} \\ \Theta_{zi} \\ U_{xj} \\ V_{yj} \\ \Theta_{zj} \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

avec les fonctions de formes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = 1 - \frac{x}{L_e} \\ N_4 = \frac{x}{L_e} \\ N_2^v = \frac{1}{1+\phi} [2(\frac{x}{L_e})^3 - 3(\frac{x}{L_e})^2 - \phi(\frac{x}{L_e}) + 1 + \phi] \\ N_3^v = \frac{L_e}{1+\phi} [(\frac{x}{L_e})^3 - (2 + \frac{\phi}{2})(\frac{x}{L_e})^2 + (1 + \frac{\phi}{2})(\frac{x}{L_e})] \\ = -\frac{1}{1+\phi} [2(\frac{x}{L_e})^3 - 3(\frac{x}{L_e})^2 - \phi(\frac{x}{L_e})] \\ N_6^v = \frac{L_e}{1+\phi} [(\frac{x}{L_e})^3 - (1 - \frac{\phi}{2})(\frac{x}{L_e})^2 - \frac{\phi}{2}(\frac{x}{L_e})] \\ N_2^\theta = \frac{6}{(1+\phi)L} [(\frac{x}{L_e})^2 - (\frac{x}{L_e})] \\ N_3^\theta = \frac{1}{1+\phi} [3(\frac{x}{L_e})^2 - (4 + \phi)(\frac{x}{L_e}) + 1 + \phi] \\ N_5^\theta = -\frac{6}{(1+\phi)L} [(\frac{x}{L_e})^2 - (\frac{x}{L_e})] \\ N_6^\theta = \frac{1}{1+\phi} [3(\frac{x}{L_e})^2 - (2 - \phi)(\frac{x}{L_e})] \end{array} \right. \quad (3.44)$$

où ϕ est le rapport entre la rigidité de flexion et la rigidité de cisaillement de la poutre tel que :

$$\phi = \frac{12}{L_e^2} \left(\frac{EI}{kGA} \right) = \frac{24}{L_e^2} \left(\frac{I}{kA} \right) (1 + \nu), \quad \text{avec } \nu \text{ le coefficient de poisson.} \quad (3.45)$$

Pour le cas d'un matériau élastique et d'un chargement transversal distribué $p(x)$ qui a la forme d'un polynôme d'ordre n ($p(x) = qx^n$), la matrice de rigidité de l'élément et le vecteur des forces externes s'écrivent :

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L_e} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{(1+\phi)L_e^3} & \frac{6EI}{(1+\phi)L_e^2} & 0 & -\frac{12EI}{(1+\phi)L_e^3} & \frac{6EI}{(1+\phi)L_e^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+\phi)L_e^2} & \frac{(4+\phi)EI}{(1+\phi)L_e} & 0 & -\frac{6EI}{(1+\phi)L_e^2} & \frac{(2-\phi)EI}{(1+\phi)L_e} \\ -\frac{ES}{L_e} & 0 & 0 & \frac{ES}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{(1+\phi)L_e^3} & -\frac{6EI}{(1+\phi)L_e^2} & 0 & \frac{12EI}{(1+\phi)L_e^3} & -\frac{6EI}{(1+\phi)L_e^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+\phi)L_e^2} & \frac{(2-\phi)EI}{(1+\phi)L_e} & 0 & -\frac{6EI}{(1+\phi)L_e^2} & \frac{(4+\phi)EI}{(1+\phi)L_e} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$\mathbf{F}_{ext,e} = \frac{qL_e^{n+1}}{(1+\phi)(D)} \begin{bmatrix} 0 \\ 6n + 12 + \phi(n^2 + 7n + 12) \\ L_e(n+1)[2 + \frac{\phi}{2}(n+4)] \\ 0 \\ (n+1)[(n+2)(n+6) + \phi(n+3)(n+4)] \\ -L_e(n+1)[n+2 + \frac{\phi}{2}(n+4)] \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

En comparant la matrice de rigidité de l'élément (3.46) avec celle issue du calcul analytique (3.34), on remarque qu'elles sont identiques. En d'autres termes, un seul élément **FCQM** fournit les valeurs exactes des déplacements nodaux en élasticité pour n'importe quel type de chargement [Friedman and Kosmatka, 1993], [Caillerie et al., 2015]. Néanmoins, l'utilisation de ce type d'élément n'est pas adaptée pour des calculs non linéaires, comme ses fonctions de forme dépendent des propriétés matériau.

3.2.4.3 Full-Qubic-Quadratic (FCQ)

Cette formulation repose sur le nouvel élément fini poutre Timoshenko proposé par [Caillerie et al., 2015]. Des fonctions cubiques sont utilisées pour interpoler le champ de déplacement transversal et

quadratiques pour le champ de rotation. Le nouvel élément est libre de blocage par cisaillement et utilise trois degrés de liberté supplémentaires positionnés en un noeud interne au milieu de l'élément. De plus, les auteurs ont montré que la formulation **FCQM** peut être dérivée de l'élément **FCQ** ; ainsi un seul élément **FCQ** est capable de fournir les déplacements nodaux exacts pour n'importe quel chargement appliqué sur une poutre homogène élastique.

Le champ des déplacements nodaux prend la forme suivante :

$$\mathbf{d}_e = [U_{xi} \quad V_{yi} \quad \Theta_{zi} \quad \Delta V_{yk}^1 \quad \Delta \Theta_k \quad \Delta V_{yk}^2 \quad U_{xj} \quad V_{yj} \quad \Theta_{zj}]^T, \quad (3.48)$$

avec ΔV_{yk}^1 , $\Delta \Theta_k$ et ΔV_{yk}^2 les degrés de liberté associés au noeud interne k . Ces trois degrés de liberté additionnels n'ont pas un sens physique particulier. En effet, ils ont un rôle mathématique de compléter la construction d'une base des polynômes cubiques [Caillerie et al., 2015].

Le champ des déplacements généralisés s'écrit ainsi :

$$\begin{bmatrix} U_x \\ V_y \\ \Theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2^u & 0 & 0 \\ 0 & N_2^v & 0 & N_7^v & 0 & N_9^v & 0 & N_5^v & 0 \\ 0 & 0 & N_3^\theta & 0 & N_8^\theta & 0 & 0 & 0 & N_6^\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{xi} \\ V_{yi} \\ \Theta_{zi} \\ \Delta V_{yk}^1 \\ \Delta \Theta_k \\ \Delta V_{yk}^2 \\ U_{xj} \\ V_{yj} \\ \Theta_{zj} \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

$$\text{où} \begin{cases} N_1^u = 1 - \frac{x}{L_e} \\ N_4^u = \frac{x}{L_e} \\ N_2^v = (1 - \frac{x}{L_e})^2 (1 + 2\frac{x}{L_e}) \\ N_7^v = 2(1 - \frac{x}{L_e})^2 (\frac{x}{L_e}) \\ N_9^v = -2(\frac{x}{L_e})^2 (1 - \frac{x}{L_e}) \\ N_5^v = (\frac{x}{L_e})^2 (3 - 2\frac{x}{L_e}) \\ N_3^\theta = (1 - \frac{x}{L_e})(1 - 3\frac{x}{L_e}) \\ N_8^\theta = 1 - (1 - 2\frac{x}{L_e})^2 \\ N_6^\theta = -(\frac{x}{L_e})(2 - 3\frac{x}{L_e}) \end{cases} \quad (3.50)$$

Par conséquent, le champ des déformations généralisées s'écrit :

$$\begin{bmatrix} U'_x \\ \beta_y \\ \Theta'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^u}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2^u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_2^v}{\partial x} & -N_3^\theta & \frac{\partial N_7^v}{\partial x} & -N_8^\theta & \frac{\partial N_9^v}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5^v}{\partial x} & -N_6^\theta \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_3^\theta}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_8^\theta}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_6^\theta}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{xi} \\ V_{yi} \\ \Theta_{zi} \\ \Delta V_{yk}^1 \\ \Delta \Theta_k \\ \Delta V_{yk}^2 \\ U_{xj} \\ V_{yj} \\ \Theta_{zj} \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

Dans le cas d'une poutre constituée avec un matériau élastique homogène, la matrice de rigidité de

l'élément et le vecteur des forces externes pour un polynôme d'ordre $p(x) = qx^n$ deviennent :

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{ES}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6kGS}{5L_e} & -\frac{kGS}{10} & \frac{kGS}{5L_e} & \frac{4kGS}{5} & \frac{kGS}{5L_e} & 0 & -\frac{6kGS}{5L_e} & -\frac{kGS}{10} \\ 0 & -\frac{10}{kGS} & \frac{2kGL_eS}{15} + \frac{4EI}{L_e} & -\frac{15}{kGS} & -\frac{kGL_eS}{15} - \frac{4EI}{L_e} & \frac{kGS}{15} & 0 & \frac{kGS}{10} & \frac{2EI}{L_e} - \frac{kGL_eS}{30} \\ 0 & \frac{kGS}{5L_e} & -\frac{4kGS}{15} & \frac{8kGS}{15L_e} & \frac{2kGS}{15} & -\frac{2kGS}{15L_e} & 0 & -\frac{kGS}{5L_e} & \frac{kGS}{15} \\ 0 & \frac{4kGS}{5L_e} & -\frac{kGL_eS}{15} - \frac{4EI}{L_e} & \frac{2kGS}{15L_e} & \frac{8kGL_eS}{15} + \frac{16EI}{3L_e} & \frac{2kGS}{15} & 0 & -\frac{4kGS}{5L_e} & -\frac{kGL_eS}{15} - \frac{4EI}{L_e} \\ 0 & \frac{kGS}{5L_e} & \frac{kGS}{15} & -\frac{2kGS}{15L_e} & \frac{2kGS}{15} & \frac{8kGS}{15L_e} & 0 & -\frac{kGS}{5L_e} & -\frac{4kGS}{15} \\ -\frac{ES}{L_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{ES}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6kGS}{5L_e} & \frac{kGS}{10} & -\frac{kGS}{5L_e} & -\frac{4kGS}{5} & -\frac{kGS}{5L_e} & 0 & \frac{6kGS}{5L_e} & \frac{kGS}{10} \\ 0 & -\frac{kGS}{10} & \frac{2EI}{L_e} - \frac{kGL_eS}{30} & \frac{kGS}{15} & -\frac{kGL_eS}{15} - \frac{4EI}{L_e} & -\frac{4kGS}{15} & 0 & \frac{kGS}{10} & \frac{2kGL_eS}{15} + \frac{4EI}{L_e} \end{bmatrix}. \quad (3.52)$$

$$\mathbf{F}_{ext,e} = \frac{qL_e^{n+1}}{D} \begin{bmatrix} 0 \\ 6(n+2) \\ 0 \\ 4(n+1) \\ 0 \\ -2(n+1)(n+2) \\ 0 \\ (n+1)(n+2)(n+6) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

avec

$$D = (n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$$

L'introduction des degrés de liberté internes conduit à une matrice de dimension 9×9 au lieu de 6×6 et à un vecteur de dimension 9×1 . Pour utiliser cet élément dans un code élément fini, on peut calculer ces degrés de liberté internes selon deux méthodes : soit ils sont traités comme des degrés de liberté classiques, ils sont donc renvoyés au solveur global du code, ou alors, ils sont calculés au niveau local à l'échelle de l'élément en utilisant la méthode de condensation statique (voir [Caillerie et al., 2015] pour plus de détails et pour les expressions analytiques de la matrice de rigidité et du vecteur des forces condensés).

3.2.5 Blocage par cisaillement

Le blocage par cisaillement est un problème numérique que l'on rencontre dans plusieurs types des éléments finis, comme par exemple les éléments finis poutres Timoshenko. Par exemple, l'interpolation du champ des déplacements et des rotations avec des fonctions linéaires, comme dans le cas de l'élément **FLI**, conduit à une surestimation de la rigidité des poutres élancées si les termes linéaires ne sont pas éliminés dans le calcul des déformations [Donea and Lamain, 1987], voir également [Crisfield, 1991], [Ibrahimbegović and Frey, 1993], [Reddy, 1997], [Yunhua, 1998], [Mukherjee et al., 2001], [Ceresa et al., 2009], [Beirão da Veiga et al., 2012].

Une façon d'illustrer le blocage par cisaillement est de faire une analyse aux valeurs propres de la matrice de rigidité analytique et des matrices de rigidité élémentaires des trois formulations Timoshenko. Ces valeurs propres correspondent aux modes axiale, de cisaillement et de flexion et sont résumées dans le tableau (3.1).

Valeurs propres	λ_{axiale}	$\lambda_{cisaillement}$	$\lambda_{flexion}$
Analytique	$\frac{2ES}{L_e}$	$\frac{kSG}{2L_e}(4 + L_e^2)\alpha$	$\frac{2EI}{L_e}$
FLI (sans modif)	$\frac{2ES}{L_e}$	$\frac{kSG}{2L_e}(4 + L_e^2)$	$\frac{2EI}{L_e} \frac{1}{\alpha}$
FLI (modifiée)	$\frac{2ES}{L_e}$	$\frac{kSG}{2L_e}(4 + L_e^2)$	$\frac{2EI}{L_e}$
FCQM	$\frac{2ES}{L_e}$	$\frac{kSG}{2L_e}(4 + L_e^2)\alpha$	$\frac{2EI}{L_e}$
FCQ	$\frac{2ES}{L_e}$	$\frac{kSG}{2L_e}(4 + L_e^2)\alpha$	$\frac{2EI}{L_e}$

TABLE 3.1 – Comparaison des valeurs propres des matrices de rigidité

où

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{kSGL_e^2}{12EI}} = \frac{1}{1 + \frac{kG}{E} \left(\frac{L_e}{H}\right)^2}$$

Remarque : la formulation **FLI** (sans modif) correspond au calcul exact des déformations et la formulation **FLI** (modifiée) au calcul des déformations en éliminant les termes linéaires [Donea and Lamain, 1987], [Pegon, 1994], [Guedes et al., 1994]. La matrice de rigidité condensée [Caillerie et al., 2015] est utilisée pour le calcul des valeurs propres pour l'élément **FCQ**.

On voit clairement la dépendance de coefficient α au rapport $\frac{L_e}{H}$, avec H l'épaisseur de la poutre. Ainsi :

$$\text{pour } \frac{L_e}{H} \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{kG}{E} \left(\frac{L_e}{H}\right)^2 \rightarrow \infty$$

En se référant au tableau (3.1), on note que la valeur propre correspondant au mode de flexion pour l'élément **FLI** (sans modif) est multiplié par le rapport $\frac{1}{\alpha}$. Par conséquent, lorsque le rapport entre la longueur et l'épaisseur de la poutre est grand, la rigidité de flexion est surestimée. La formulation **FLI** (modifiée) fait disparaître le rapport $\frac{1}{\alpha}$ et par conséquent l'élément ne présente pas le problème du blocage par cisaillement.

D'autres solutions existent dans la littérature pour s'affranchir du blocage par cisaillement. On peut par exemple utiliser la méthode d'enrichissement, telle que proposée par [Ibrahimbegović and Wilson, 1991a], qui permet de retrouver les mêmes expressions modifiées pour le calcul des déformations avec celles proposées par [Donea and Lamain, 1987], ou l'utilisation des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur nécessitant l'addition de degrés de liberté supplémentaires [Ibrahimbegović and Frey, 1993]. Ceci est le cas de l'élément **FLQ**. Les valeurs propres des matrices de rigidité des formulations **FCQM** et **FCQ** coïncident avec les valeurs propres de la matrice de rigidité analytique, puisque les matrices sont cette-fois identiques. Par conséquent, les formulations **FCQM** et **FCQ** sont libres de blocage par cisaillement.

3.2.6 Matrices de masse

Afin d'étudier la réponse dynamique des différentes formulations poutres, on présente ci-dessous leurs matrices de masse. Le principe des travaux virtuels permet d'introduire les termes inertiels. Soit δu_x et δV_y les variations de déplacements virtuels axial et transversal respectivement et ρ la densité. Le travail dû aux termes inertiels prend la forme (en utilisant les équations (2.2) et en négligeant les termes

rotationnels), voir aussi [Pegon, 1994], [Guedes et al., 1994] :

$$\begin{aligned}
W_I &= \int_0^{Le} \int_S \rho \delta u_x \ddot{u}_x + \delta v_y \ddot{v}_y dS dx \\
&= \int_0^{Le} \int_S \rho ((\delta U_x - y \delta \Theta_z)(\ddot{U}_x - y \ddot{\Theta}_z) + \delta V_y \ddot{V}_y) dS dx \\
&= \int_0^{Le} \int_S \rho \begin{bmatrix} \delta U_x & 0 & \delta \Theta_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U}_x \\ 0 \\ \ddot{\Theta}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \delta V_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{V}_y \\ 0 \end{bmatrix} dS dx \\
&= \int_0^{Le} \int_S \rho \begin{bmatrix} \delta U_x & 0 & \delta \Theta_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U}_x \\ 0 \\ \ddot{\Theta}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \delta V_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{V}_y \\ 0 \end{bmatrix} dS dx \\
&= \int_0^{Le} \int_S \rho \begin{bmatrix} \delta U_x & \delta V_y & \delta \Theta_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U}_x \\ \ddot{V}_y \\ \ddot{\Theta}_z \end{bmatrix} dS dx \\
&= \int_0^{Le} \int_S \rho [\mathbf{N}(x) \delta \mathbf{d}_e]^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & y^2 \end{bmatrix} [\mathbf{N}(x) \ddot{\mathbf{d}}_e] dS dx \\
&= \delta \mathbf{d}_e^T \int_0^{Le} \int_S \rho \mathbf{N}(x)^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & y^2 \end{bmatrix} \mathbf{N}(x) dS dx \ddot{\mathbf{d}}_e
\end{aligned} \tag{3.54}$$

De cette dernière équation, la matrice de masse de l'élément prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_e &= \int_0^{Le} \int_S \mathbf{N}(x)^T \rho \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & y^2 \end{bmatrix} \mathbf{N}(x) dS dx \\
&= \int_0^{Le} \mathbf{N}(x)^T \underbrace{\begin{bmatrix} \int_S \rho dS & 0 & -\int_S y \rho dS \\ 0 & \int_S \rho dS & 0 \\ -\int_S y \rho dS & 0 & \int_S y^2 \rho dS \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_s} \mathbf{N}(x) dx
\end{aligned} \tag{3.55}$$

avec \mathbf{M}_s est la matrice de masse de la section. Pour une section homogène, elle vaut

$$\mathbf{M}_s = \begin{bmatrix} \rho S & 0 & 0 \\ 0 & \rho S & 0 \\ 0 & 0 & \rho I \end{bmatrix} \tag{3.56}$$

Les matrices de masse des trois formulations Timoshenko sont présentées ci-dessous.

3.2.6.1 Matrice de masse de la formulation FLI

En utilisant l'expression (3.55) et les fonctions de forme (3.37) la matrice de masse devient :

$$\mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} \frac{L_e S \rho}{3} & 0 & 0 & \frac{L_e S \rho}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_e S \rho}{3} & 0 & 0 & \frac{L_e S \rho}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I L_e \rho}{3} & 0 & 0 & \frac{I L_e \rho}{6} \\ \frac{L_e S \rho}{6} & 0 & 0 & \frac{L_e S \rho}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_e S \rho}{6} & 0 & 0 & \frac{L_e S \rho}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I L_e \rho}{6} & 0 & 0 & \frac{I L_e \rho}{3} \end{bmatrix} \tag{3.57}$$

3.2.6.2 Matrice de masse de la formulation FCQM

En utilisant l'expression (3.55) et les fonctions de forme (3.44) la matrice de masse devient :

$$\mathbf{M}_e = \frac{\rho S L_e}{(1 + \phi)^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & m_2 & 0 & m_3 & -m_4 \\ 0 & m_2 & m_5 & 0 & m_4 & -m_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_3 & m_4 & 0 & m_1 & -m_2 \\ 0 & -m_4 & -m_6 & 0 & -m_2 & m_5 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

avec

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{13}{35} + \frac{7\phi}{10} + \frac{\phi^2}{3} + \frac{6}{5} \frac{r^2}{L_e^2} \\ m_2 &= \left(\frac{11}{210} + \frac{11\phi}{120} + \frac{\phi^2}{24} + \left(\frac{1}{10} - \frac{\phi}{2} \right) \frac{r^2}{L_e^2} \right) L_e \\ m_3 &= \frac{9}{70} + \frac{3\phi}{10} + \frac{\phi^2}{6} - \frac{6}{5} \frac{r^2}{L_e^2} \\ m_4 &= \left(\frac{13}{420} + \frac{3\phi}{40} + \frac{\phi^2}{24} - \left(\frac{1}{10} - \frac{\phi}{2} \right) \frac{r^2}{L_e^2} \right) L_e \\ m_5 &= \left(\frac{1}{105} + \frac{\phi}{60} + \frac{\phi^2}{120} + \left(\frac{2}{15} + \frac{\phi}{6} + \frac{\phi^2}{3} \right) \frac{r^2}{L_e^2} \right) L_e^2 \\ m_6 &= \left(\frac{1}{140} + \frac{\phi}{60} + \frac{\phi^2}{120} + \left(\frac{1}{30} + \frac{\phi}{6} - \frac{\phi^2}{6} \right) \frac{r^2}{L_e^2} \right) L_e^2 \end{aligned} \quad (3.59)$$

avec $r = \sqrt{\frac{I}{S}}$ le rayon de giration de la section droite.

3.2.6.3 Matrice de masse de la formulation FCQ

En utilisant l'expression (3.55) et les fonctions de forme (3.50) la matrice de masse devient :

$$\mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} \frac{L_e S \rho}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L_e S \rho}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13 L_e S \rho}{35} & 0 & \frac{11 L_e S \rho}{105} & 0 & -\frac{13 L_e S \rho}{210} & 0 & \frac{9 L_e S \rho}{70} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2 I L_e \rho}{15} & 0 & -\frac{I L_e \rho}{15} & 0 & 0 & 0 & -\frac{I L_e \rho}{30} \\ 0 & \frac{11 L_e S \rho}{105} & 0 & \frac{4 L_e S \rho}{105} & 0 & -\frac{L_e S \rho}{35} & 0 & \frac{13 L_e S \rho}{210} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{I L_e \rho}{15} & 0 & \frac{8 I L_e \rho}{15} & 0 & 0 & 0 & -\frac{I L_e \rho}{15} \\ 0 & -\frac{13 L_e S \rho}{210} & 0 & -\frac{L_e S \rho}{35} & 0 & \frac{4 L_e S \rho}{105} & 0 & -\frac{11 L_e S \rho}{105} & 0 \\ \frac{L_e S \rho}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L_e S \rho}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9 L_e S \rho}{70} & 0 & \frac{13 L_e S \rho}{210} & 0 & -\frac{11 L_e S \rho}{105} & 0 & \frac{13 L_e S \rho}{35} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{I L_e \rho}{30} & 0 & -\frac{I L_e \rho}{15} & 0 & 0 & 0 & \frac{2 I L_e \rho}{15} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

3.3 Comparaison des formulations FLI, FCQM et FCQ

3.3.1 Solution analytique

Afin d'étudier la performance de chaque formulation, le problème présenté dans la figure (3.5) est étudié. Il s'agit d'une poutre Timoshenko homogène encastree d'un côté et libre de l'autre. La poutre a une longueur L . Elle est soumise à une force transversale F_y à l'extrémité libre ($x = L$) et à une force transversale répartie de forme polynomiale $p(x) = qx^n$. Pour ce cas de chargement, les solutions analytiques de déplacement transversal ainsi que de la rotation prennent la forme suivante (pour plus de détails voir [Caillerie et al., 2015]) :

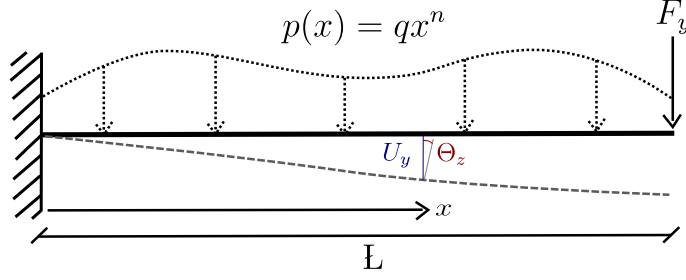


FIGURE 3.5 – Poutre encastree soumise à une force transversale répartie (polynomiale) et une force transversale ponctuelle à son extrémité

$$\Theta_z = \frac{F_y}{2EI} [x^2 - 2x] + \frac{1}{EI} \left[\frac{qL^{n+2}}{n+2} x - \frac{qL^{n+1}}{2(n+1)} x^2 + \frac{q}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right] \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} V_y = & \frac{F_y}{2EI} \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right] - \frac{F_y x}{kGS} + \frac{q}{kGS(n+1)} \left[L^{n+1} x - \frac{x^{n+2}}{n+2} \right] \\ & + \frac{q}{EI} \left[\frac{L^{n+2}}{2(n+2)} x^2 - \frac{L^{n+1}}{6(n+1)} x^3 + \frac{x^{n+4}}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \right] \end{aligned} \quad (3.62)$$

L'intégration numérique des équations doit se faire d'abord au niveau de la section (pour le calcul des intégrales de section) puis le long de l'élément (pour les intégrales le long de l'abscisse de l'élément). Chaque section est discrétisée en 64 fibres de type élément fini triangulaire à 6 noeuds (*T6*) ayant trois points d'intégration de Gauss. Avec ce type d'élément, la rigidité de la section et les vecteurs forces de la section sont intégrés exactement pour le cas des matériaux ayant un comportement élastique linéaire [Bitar, 2013]. En effet, la composante $\int_S E_f y^2 dS$ de la matrice de rigidité de la section (3.16) nécessite au moins trois points d'intégration de Gauss étant donné que les fonctions d'interpolation de l'élément *T6* sont d'ordre 2. On aurait pu utiliser qu'un seul élément *T6* par section (équivalent à 3 fibres bien placées dans la hauteur) et intégrer de manière exacte. Cependant, pour applications béton armé montrée plus loin dans le manuscrit, il faut discrétiser la section avec un grand nombre de fibres afin de capter correctement l'évolution de l'endommagement. L'intégration numérique de l'équation (3.20) le long de l'axe x de la poutre est réalisée en utilisant un point de Gauss pour **FLL**, deux pour **FCQM** car les composantes de la matrice B (3.42) sont linéaires et trois pour la formulation **FCQ** car les dérivées des fonctions d'interpolation du champ de déplacement vertical sont quadratiques (3.51) et donc une intégration numérique exacte de $\int_0^{L_e} \underbrace{B^T K_S B}_{O(4)} dx$ (3.20) nécessite au moins trois points de Gauss.

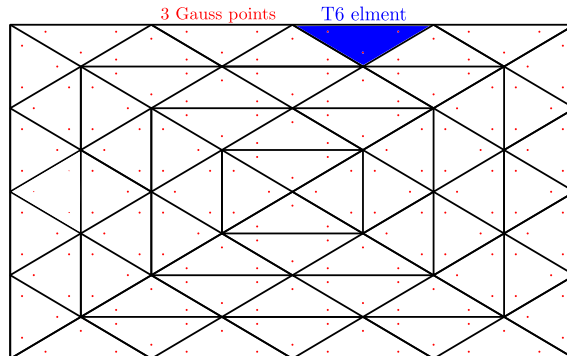


FIGURE 3.6 – Distribution des points de Gauss dans une section

Différentes simulations ont été réalisées afin d'évaluer la performance des différentes formulations. Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

3.3.2	Poutre Timoshenko élastique encastrée soumise à un déplacement transversal.
3.3.3	Poutre Timoshenko élastique encastrée soumise à une force transversale polynomiale $p(x) = qx^n$.
3.3.4	Poutre Timoshenko élasto-plastique encastrée soumise à un déplacement transversal.
3.3.5	Poutre Timoshenko élasto-plastique simple soumise à une force axiale et une rotation.

Remarque : Les fonctions de forme de la formulation **FCQM** dépendent des propriétés du matériau (3.44),(3.45). Par conséquent, la performance de cet élément peut être imprévisible dans le cas des calculs non linéaires [Caillerie et al., 2015]. C'est pour cette raison que la formulation **FCQM** n'est testée ci-dessous que pour des cas élastiques.

3.3.2 Poutre élastique encastrée soumise à un déplacement transversal

Les caractéristiques géométriques de la structure et les propriétés du matériau sont données dans la figure (3.7) et le tableau (3.2).

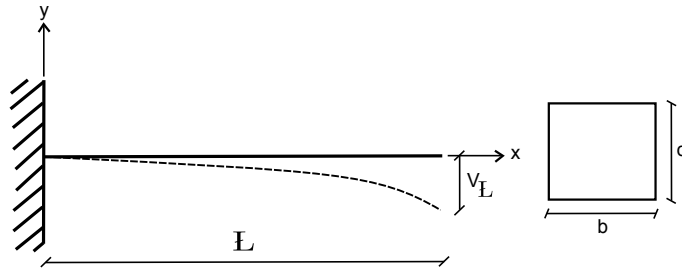


FIGURE 3.7 – Poutre encastrée

Géométrie		Propriétés du matériau			
\bar{L}	$1.53m$	Module de Young	E	$210GPa$	
b	$0.25m$	Coefficient de poisson	ν	0.3	
d	$0.25m$	Facteur de correction de cisaillement	k	$\frac{5}{6}$	

TABLE 3.2 – Poutre encastrée - caractéristiques géométriques et propriétés du matériau

Un déplacement v_L est appliqué en $x = \bar{L}$. L'expression analytique de la force de cisaillement F_y en $x = 0$ est donnée par (voir équation (3.62) en prenant $q = 0$ et $x = \bar{L}$) :

$$F_y^{ana} = \frac{v_L}{\frac{\bar{L}^3}{3EI} + \frac{\bar{L}}{kGS}} \quad (3.63)$$

et le moment correspondant est :

$$M_z^{ana} = \bar{L} \times F_y^{ana} \quad (3.64)$$

La comparaison des réponses de trois formulations est donnée dans les tableaux (3.3) et (3.4). n_{el} est le nombre des éléments finis poutres multifibres utilisés dans la discrétisation et $R_E(F_y)$ l'erreur relative sur la force de cisaillement définie par :

$$R_E(F_y) = \left| \frac{F_y^{ana} - F_y^{num}}{F_y^{ana}} \right| \quad (3.65)$$

avec F_y^{num} la valeur de la force issue du calcul numérique.

	n_{el}	$v_L(m)$	$F_y(KN)$	$M_z(KNm)$	$R_E(F_y)$
Analytique	1	0.1	5609.1	8581.9	—
FLI	1	0.1	7428.3	11365.3	32%
FCQM	1	0.1	5609.1	8581.9	0%
FCQ	1	0.1	5609.1	8581.9	0%

TABLE 3.3 – Poutre élastique encastrée soumise à un déplacement transversal - Résultats des trois formulations en considérant un seul élément poutre multifibres Timoshenko

n_{el}	$F_y(KN)$	$M_z(KNm)$	$R_E(F_y)$	n_{el}	$F_y(KN)$	$M_z(KNm)$	$R_E(F_y)$
4	5696.3	8715.3	1.5%	20	5612.2	8587.2	0.053%
8	5630.6	8614.9	0.37%	31	5610.5	8584.1	0.025%
16	5614.5	8590.1	0.087%	51	5609.6	8582.73	0.009%

TABLE 3.4 – Poutre élastique encastrée soumise à un déplacement transversal - Résultats de la formulation **FLI** en considérant n_{el} éléments poutres multifibres Timoshenko

Un seul élément **FCQM** ou **FCQ** est suffisant pour reproduire la solution exacte à l'extrémité en termes de forces et de moments. En ce qui concerne la formulation **FLI**, une erreur relative $R_E(F_y)$ de 32% apparaît (voir tableau (3.3)). Cette erreur est due au fait que les fonctions de forme qui interpolent le déplacement transversal et la rotation sont linéaires alors que les solutions analytiques de Θ_z et V_y sont des polynômes quadratique et cubique respectivement (voir équations (3.61), (3.62) en considérant $q = 0$). En augmentant le nombre d'éléments, la précision de la formulation **FLI** s'améliore rapidement (voir tableau (3.4)).

3.3.3 Poutre élastique encastrée soumise à une force transversale polynomiale $p(x) = qx^n$

Un chargement transversal réparti polynomial de forme $p(x) = qx^n$ (avec $q = 20$ et $n = 2$ pour l'application numérique) est appliqué à la poutre de l'exemple précédent. Le déplacement transversal et la rotation à l'extrémité libre de la poutre pour les trois formulations et pour différentes tailles de maillages sont donnés dans les tableaux (3.5) et (3.6). Les valeurs analytiques sont calculées avec (3.61) et (3.62) en considérant $F_y = 0$, $q = -20$ et $n = 2$, voir aussi [Caillerie et al., 2015].

	$F_y(KN)$	$M_z(KNm)$	$v(10^{-3})$	$\theta(10^{-3})$	$R_E(\theta)$
Analytique	23.9	27.4	-0.2776	-0.2453	—
FLI	23.9	27.4	-0.2411	-0.3066	25%
FCQM	23.9	27.4	-0.2776	-0.2453	0%
FCQ	23.9	27.4	-0.2776	-0.2453	0%

TABLE 3.5 – Poutre élastique encastrée soumise à une force transversale polynomiale $p(x) = -qx^n$ (avec $q = 20$ et $n = 2$). Résultats des trois formulations en considérant un seul élément poutre multifibres Timoshenko

Comme précédemment, un seul élément **FCQM** ou **FCQ** donne les solutions exactes. Comme les fonctions de forme de la formulation **FLI** sont linéaires, un seul élément **FLI** conduit à une erreur relative en rotation $R_E(\Theta)$ de 25% (définie d'une manière similaire à (3.65)). La précision de la formulation **FLI** s'améliore rapidement en augmentant le nombre des éléments poutres : l'erreur relative baisse de 25% pour un seul élément à 1.7% pour quatre éléments, voir tableau (3.6).

n_{el}	$v(10^{-3})$	$R_E(v)$	$\theta(10^{-3})$	$R_E(\theta)$
1	-0.2411	13.15%	-0.3066	25%
4	-0.2744	1.15%	-0.2495	1.7%
8	-0.2768	0.29%	-0.2464	0.45%
16	-0.2774	0.07 %	-0.2456	0.12%

TABLE 3.6 – Poutre élastique encastrée soumise à une force transversale polynomiale $p(x) = qx^n$ (avec $q = 20$ et $n = 2$). Résultats de la formulation **FLI** en considérant n_{el} éléments poutres multifibres Timoshenko

3.3.4 Poutre élasto-plastique encastrée soumise à un déplacement transversal

Pour cet exemple, un matériau élastique parfaitement plastique est considéré. Seule la composante axiale de la contrainte σ_x peut entrer en plasticité, aucune interaction n'est considérée entre les contraintes normales et les contraintes de cisaillement. La contrainte limite d'élasticité f_y est prise égale à 450 MPa. Les autres paramètres sont fournis dans le tableau (3.2).

Le moment plastique est :

$$M_{pl} = W_{pl} f_y = \frac{bd^2}{4} f_y \quad (3.66)$$

et la force de cisaillement plastique :

$$F_{yp} = \frac{M_{pl}}{\mathbb{L}} \quad (3.67)$$

Ces deux valeurs sont obtenues en considérant que toutes les fibres dans la section sont plastifiées. Ce comportement représente un état asymptotique de la section. En réalité, il ne peut pas être atteint avec les conditions cinématiques de la section plane, puisque la contrainte axiale au niveau de l'axe neutre est égale à zéro et par conséquent les fibres correspondantes ne peuvent plus plastifier. Par ailleurs, le coefficient de correction de cisaillement est pris égal à $k = 5/6$ et le cisaillement est considéré élastique.

La poutre encastrée est soumise à un déplacement imposé transversal v_L à l'extrémité libre ($x = \mathbb{L}$). La comparaison des performances des deux formulations **FLI** et **FCQ** pour différentes discrétisations est résumée dans les tableaux (3.7) et (3.8). Comme précédemment, un seul élément **FLI** ne donne pas de bons résultats. La discrétisation avec plus d'éléments améliore considérablement sa performance. Les résultats sont meilleurs avec la formulation **FCQ** qui donne la plus petite erreur pour le même nombre d'éléments n_{el} (tableau (3.8)).

	n_{el}	$v_L(m)$	$F_y(KN)$	$M_z(KNm)$	$R_E(F_y)$
Analytical	1	0.1	1148.9	1757.8	—
FLI	1	0.1	2263	3462	97%
FCQ	1	0.1	1581	2417	37.6 %

TABLE 3.7 – Poutre élasto-plastique encastrée soumise à un déplacement transversal - Résultats des formulations en considérant un seul élément poutre multifibres Timoshenko

n_{el}	FLI			FCQ		
	$F_y(KN)$	$M_z(KNm)$	$R_E(F_y)$	$F_y(KN)$	$M_z(KNm)$	$R_E(F_y)$
4	1312	2006	14%	1236	1889	7.7%
8	1225	1872	7%	1191	1819	4.1%
16	1186	1811	3.2%	1169	1785	1.7%

TABLE 3.8 – Poutre élasto-plastique encastrée soumise à un déplacement transversal - Résultats des deux formulations en considérant n_{el} éléments poutres multifibres Timoshenko

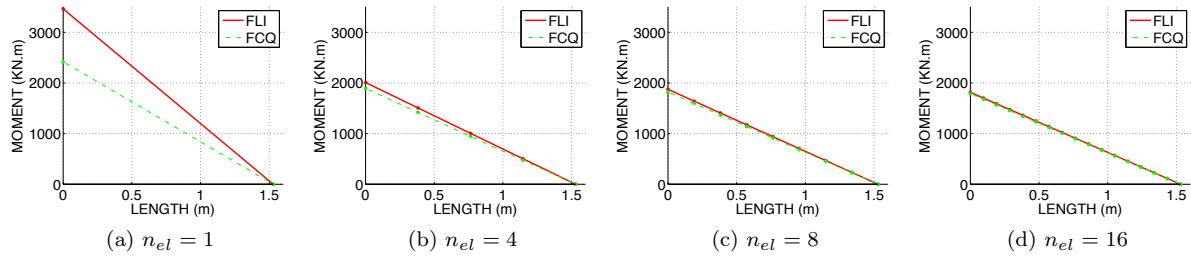


FIGURE 3.8 – Poutre élasto-plastique encastree soumise à un déplacement transversal - Les diagrammes du moment le long de la poutre pour les deux formulations en considérant n_{el} éléments poutres Timoshenko multifibres

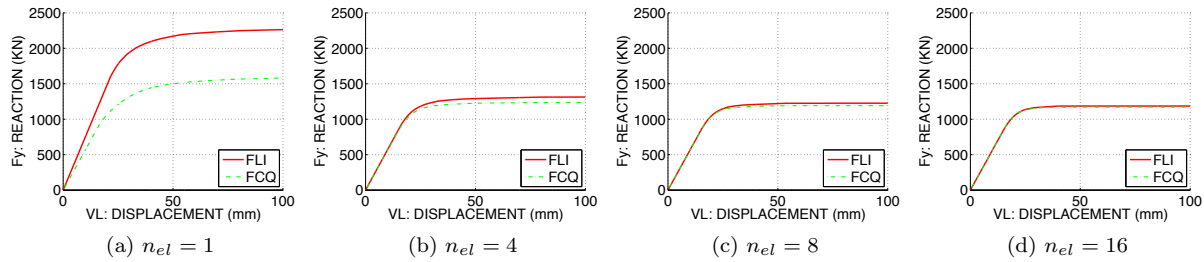


FIGURE 3.9 – Poutre élasto-plastique encastree soumise à un déplacement transversal - force de cisaillement Vs. déplacement transversal pour les deux formulations en considérant n_{el} éléments poutres Timoshenko multifibres

Les graphes (3.8), (3.9), (3.10), (3.11) et (3.12) sont obtenues à partir de valeurs nodales extrapolées à partir des points d'intégration de Gauss. La figure (3.8) représente le diagramme du moment le long de la poutre pour les deux formulations **FLI** et **FCQ** en fonction du nombre d'éléments. Les valeurs nodales du moment sont tracées et reliées par des lignes droites. On peut remarquer qu'avec l'augmentation du nombre des éléments poutres utilisés, les diagrammes de moment coïncident. La même analyse peut être faite pour la figure (3.9) représentant le diagramme de force de cisaillement en fonction du déplacement transversal pour les deux formulations **FLI** et **FCQ** et pour quatre discrétisations différentes.

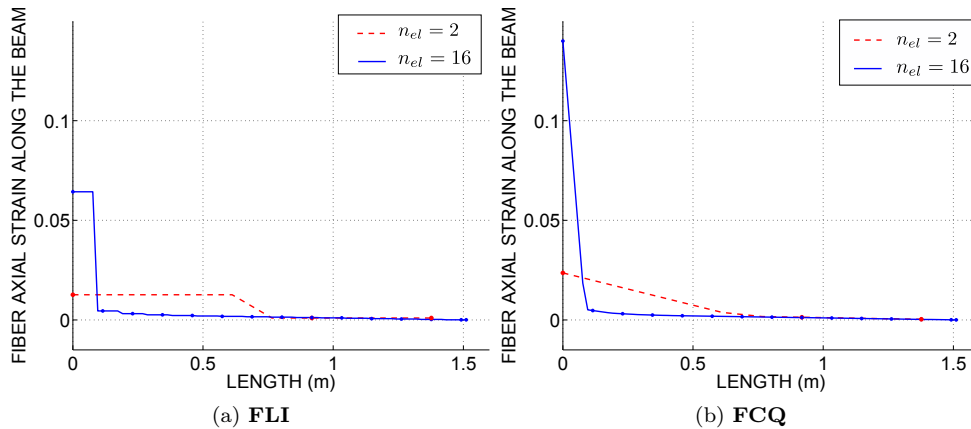


FIGURE 3.10 – Poutre élasto-plastique encastree soumise à un déplacement transversal - déformation axiale dans une fibre extrême Vs. longueur de la poutre

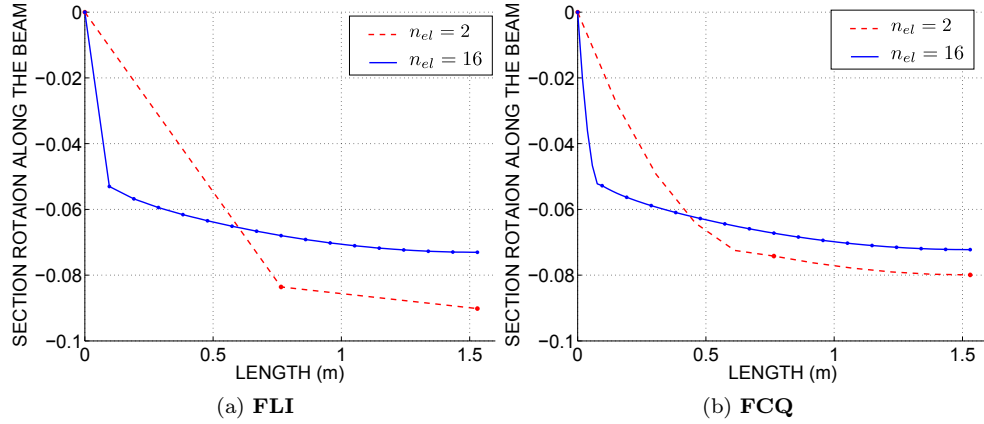


FIGURE 3.11 – Poutre élasto-plastique encastrée soumise à un déplacement transversal - rotation de la section Vs. longueur de la poutre

Afin d'illustrer la dépendance de la réponse à la taille du maillage qui apparaît lors d'utilisation d'une loi de comportement qui ne possède pas de longueur interne (voir par exemple [Armero and Ehrlich, 2004]), la déformation axiale ε_x (2.5) dans une des fibres extrêmes de la section ainsi que la rotation de la section Θ_z (3.18) le long de la poutre sont tracées respectivement sur les figures (3.10) et (3.11). Les deux formulations **FLI** et **FCQ** avec deux discrétisations différentes ($n_{el} = 2$ et $n_{el} = 16$) sont étudiées. Dans tous les cas, une rotule plastique, dépendante de la taille de l'élément et concentrée dans le premier élément de la poutre multifibres apparaît. Le chapitre suivant détaille ce problème et adresse plusieurs méthodes de régularisation.

Le problème de dépendance au maillage n'apparaît pas avec une loi élasto-plastique avec un écrouissage positif. L'exemple précédent est revisité en utilisant un module d'écrouissage positif $K_H = 20$ MPa. Les résultats sont illustrés dans la figure (3.12) : la solution n'est plus localisée dans le premier élément.

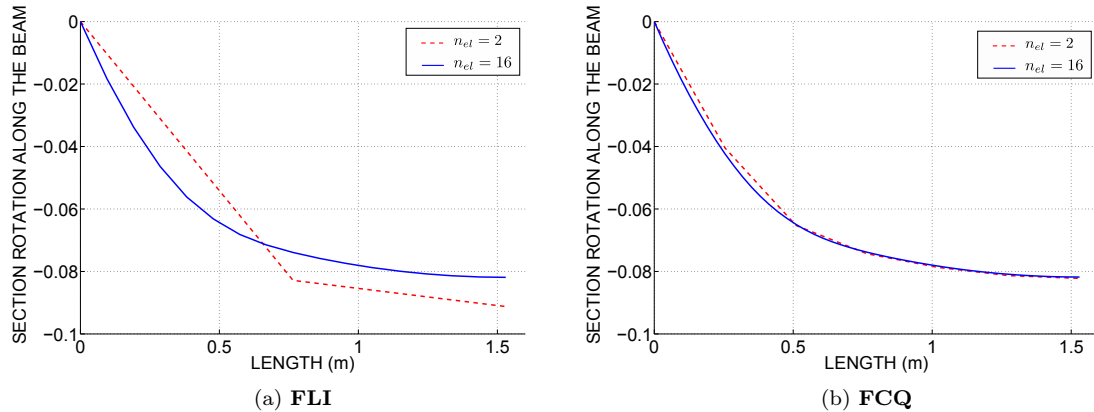


FIGURE 3.12 – Poutre élasto-plastique (avec un écrouissage positif) encastrée soumise à un déplacement transversal - rotation de la section Vs. longueur de la poutre

3.3.5 Poutre élasto-plastique simple soumise à une force axiale et une rotation

L'objectif de cet exemple est d'étudier la capacité des formulations poutres Timoshenko multifibres à reproduire l'interaction entre la force normale et le moment de flexion (voir [Casaux and Ibrahimbegović,

2011] and [Casaux, 2003]). L'interaction entre ces deux forces peut conduire à une rupture prématurée de la structure.

On considère la poutre de la figure (3.13) constituée d'un matériau élasto-plastique parfait. Les caractéristiques géométriques de la poutre et les propriétés du matériau sont données dans le tableau (3.9). Dans un premier temps, une force horizontale est appliquée à l'extrémité droite de la poutre jusqu'à une valeur maximale F_{max} . Ensuite, l'effort horizontal est maintenu constant et une rotation θ croissante est imposée à l'extrémité gauche de la poutre.

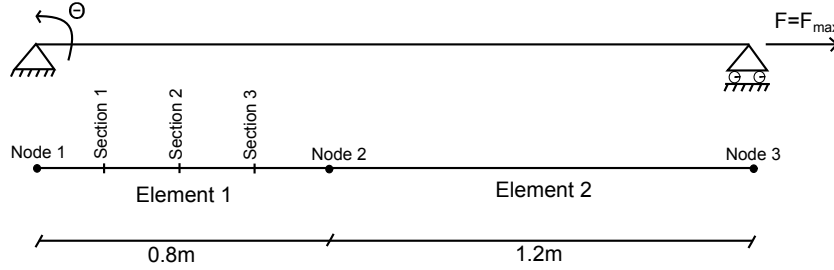


FIGURE 3.13 – Poutre à deux appuis

Longueur	L	2m	Section	S	$0.2m \times 0.2m$
Module de Young	E	200000MPa	Module d'érouissage	K	1%
Limite élastique	f_y	500MPa	Facteur de correction de cisaillement	k	5/6

TABLE 3.9 – Poutre à deux appuis - Géométrie et propriétés du matériau

La poutre est discrétisée en deux éléments de longueur $L_{e1} = 0.8m$ et $L_{e2} = 1.2m$, figure (3.13). Trois points d'intégration de Gauss sont utilisés pour l'intégration numérique le long de chaque élément fini poutre afin de comparer la réponse de la section dans trois positions différentes. Chaque section est divisée en 16 fibres. La valeur maximale de la force axiale est prise égale à $F_{max} = 19$ MN, voir figure (3.14b). L'évolution de la rotation θ est représentée dans la figure (3.14a). La figure (3.15) représente l'évolution de l'effort normal dans les trois sections S1, S2 et S3 du premier élément, ces trois sections étant situées aux positions des points d'intégration. Les performances des formulations **FLI** et **FCQ** sont étudiées ci-après.

Remarque : Un seul point de Gauss est nécessaire pour l'intégration de l'élément **FLI**. Cependant et pour cet exemple, trois points d'intégration sont utilisés afin de pouvoir comparer les résultats issus des deux formulations **FLI** et **FCQ** dans les mêmes sections.

3.3.5.1 Analyse et interprétation du couplage N-M

D'après les équations d'équilibre (3.28) $\frac{dF_x}{dx} = 0$ et par conséquent la force axiale F_x doit rester constante le long de l'élément poutre. Les résultats numériques de la formulation **FLI** reproduisent correctement la réponse analytique (voir figure (3.15a)). Les résultats ne sont pas satisfaisants pour la formulation **FCQ** (voir figure (3.15b)).

Pour comprendre la source du problème, il faut étudier l'expression numérique de la force normale (3.15) :

$$F_x(x) = \int_S E_f dS U'_x(x) - \int_S E_f y dS \Theta'_z(x) \quad (3.68)$$

La formulation **FLI** utilise des fonctions linéaires pour le champ de déplacement axial $U_x(x)$ et le champ de rotation $\Theta_z(x)$ (voir (3.37)). Ce choix conduit à des valeurs constantes pour les dérivées $U'_x(x)$ et $\Theta'_z(x)$. Par conséquent, la force axiale numérique le long de l'élément est constante, en accord avec le résultat analytique. Dès lors que les fonctions utilisées sont d'ordre supérieure, ce qui est le cas pour

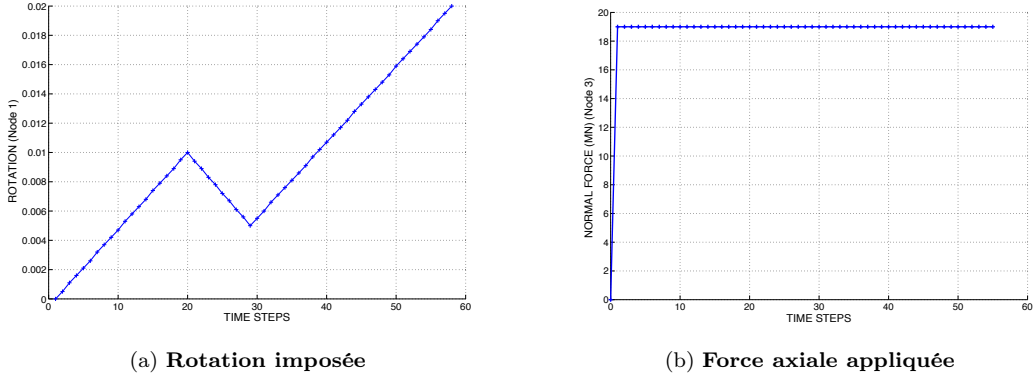


FIGURE 3.14 – Poutre élasto-plastique encastree soumise à une force axiale et une rotation - chargement

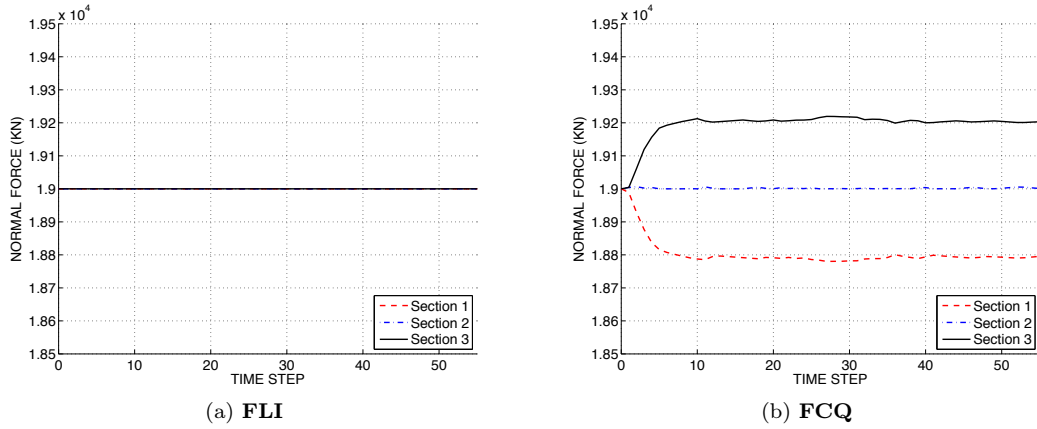


FIGURE 3.15 – Poutre élasto-plastique encastree soumise à une force axiale et une rotation -Évolution de l'effort normal aux trois sections S1, S2 et S3 du premier élément pour les deux formulations **FLI** et **FCQ**

FCQ (fonctions quadratiques pour le champs des rotations et linéaires pour le déplacement axial), les résultats peuvent ne plus être satisfaisants. L'expression de $\Theta'_z(x)$ peut être obtenue au moyen d'une simple dérivation de l'expression de $\Theta_z(x)$ (3.51) :

$$\begin{aligned}
 \Theta'_z(x) &= \frac{\partial N_3^\theta}{\partial x} \Theta_{zi} + \frac{\partial N_8^\theta}{\partial x} \Delta \Theta_i + \frac{\partial N_6^\theta}{\partial x} \Theta_{zj} \\
 &= \frac{2}{L_e} \left(-2 + \frac{3x}{L_e}\right) \Theta_{zi} + \frac{4}{L_e} \left(1 - \frac{2x}{L_e}\right) \Delta \Theta_i - \frac{2}{L_e} \left(1 - \frac{3x}{L_e}\right) \Theta_{zj}
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

Cette dernière expression montre que $\Theta'_z(x)$ est linéaire le long de l'élément alors que des valeurs constantes sont toujours obtenues pour les dérivées $U'_x(x)$. Par conséquent, selon (3.69) et comme le montre la figure (3.15b), la force axiale obtenue avec la formulation **FCQ** n'est plus constante. On note que pour la deuxième section située au milieu de l'élément ($x = \frac{L_e}{2}$) (figure (3.15b)), l'évolution de l'effort normal est similaire à celle de la formulation **FLI** (figure (3.15a)). En effet, pour $x = \frac{L_e}{2}$ l'expression (3.69) donne

$$\underbrace{\Theta'_z\left(x = \frac{L_e}{2}\right)}_{\text{pour FCQ}} = \frac{L_e}{2} (\Theta_{zj} - \Theta_{zi}) = \underbrace{\Theta'_z(x)}_{\text{pour FLI voir (3.38)}} \tag{3.70}$$

Ce problème dans la reproduction du couplage effort normal - moment de flexion est également observable lors d'utilisation de l'élément **FCQ** dans une approche multifibres avec un comportement non linéaire. Dans ce cas, l'intégrale $-\int_S E_f y dS$ dans (3.16) peut être différente de zéro dû au mouvement de l'axe neutre qui peut ne plus coïncider avec l'axe moyen de la section.

Une autre façon de comprendre le problème numérique de l'interaction effort normal - moment de flexion est d'étudier les équations analytiques. Le cas général d'une poutre multifibres est ci-dessous étudié. La relation de comportement est écrite comme suit :

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y_f) &= f(\varepsilon_x) = M_t(x, y_f) \cdot \varepsilon_x(x, y_f) \\ &= M_t(x, y_f) \cdot (U'_x(x) - y_f \Theta'_z(x))\end{aligned}\quad (3.71)$$

avec $M_t(x, y_f)$ le module tangent correspondant à la fibre d'ordonnée y_f de la section située à la position x . L'expression de l'effort normal généralisé est la somme des contraintes dans la section, soit :

$$F_x = \int_S \sigma_x(x, y_f) dS = \int_S M_t(x, y_f) dS \cdot U'_x(x) - \int_S y_f M_t(x, y_f) dS \cdot \Theta'_z(x) \quad (3.72)$$

La dérivée de l'effort axial donne :

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = \int_S \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dS = \int_S \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \cdot \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} dS = \int_S \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (U'_x - y_f \Theta'_z) dS = \int_S \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \cdot (U''_x - y_f \Theta''_z) dS \quad (3.73)$$

Or d'après (3.71) :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} = M_t, \quad (3.74)$$

par suite

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_x}{\partial x} &= \int_S M_t \cdot (U''_x - y_f \Theta''_z) dS \\ &= \left(\int_S M_t dS \right) \cdot U''_x - \left(\int_S y_f \cdot M_t dS \right) \cdot \Theta''_z\end{aligned}\quad (3.75)$$

Pour des fonctions d'interpolation linéaires du champ de déplacement axial U_x , les dérivées secondes U''_x sont nulles et l'expression de $\frac{\partial F_x}{\partial x}$ se limite par conséquent au deuxième terme de l'équation (3.75) qui dépend de Θ''_z . Ce terme a une valeur constante si les fonctions d'interpolation de Θ_z sont quadratiques et par conséquent l'équilibre peut ne pas être respectée, (3.76).

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = - \left(\int_S y_f \cdot M_t dS \right) \cdot \Theta''_z \quad (3.76)$$

Plus spécifiquement, dans le cas d'une section homogène avec un comportement élastique linéaire, où les modules tangents M_t des fibres n'évoluent pas au cours de temps/chargement, l'axe neutre de la poutre passe par l'axe moyen de la section. Ainsi, le terme $\int_S y_f \cdot M_t dS$ s'annule à son tour. Par conséquent, un effort normal constant par élément est obtenu conformément à l'équation d'équilibre et le problème numérique du couplage entre l'effort normal et le moment de flexion n'apparaît pas. Par contre, si la section est hétérogène, même si le comportement reste élastique linéaire, $\int_S y_f \cdot M_t dS$ est différent de zéro. Ainsi l'effort normal n'est plus constant le long de l'élément. Enfin, pour un comportement non linéaire, différents niveaux de non linéarité peuvent se développer pour les fibres d'une même section. Autrement dit, les modules tangents $M_t(x, y_f)$ ne sont plus les mêmes et par conséquent une valeur non nulle de $\frac{\partial F_x}{\partial x}$ apparaît violant la condition d'équilibre.

Il est clair que le problème de l'élément **FCQ** vient de fait que sa formulation initiale adopte des fonctions de forme linéaires pour le champ de déplacement axial et des fonctions d'ordre quadratique pour le champ de rotation. Dans cette configuration, l'élément **FCQ** est incapable de reproduire le couplage effort normal - moment, pourtant un des points forts de l'approche multifibres [Casaux, 2003], [Davenne et al., 2003], [Jehel, 2009]. Une nouvelle formulation, présentée ci-dessous, permet de palier définitivement ce problème.

3.3.5.2 Solutions pour la prise en compte du couplage N-M

Première solution

Plusieurs solutions existent pour améliorer la performance de l'élément **FCQ**, la plus simple étant de discrétiser avec plus d'éléments. Ce choix ne résout pas définitivement le problème mais améliore les résultats (voir figure (3.16)) tout en conduisant à une augmentation de temps de calcul.

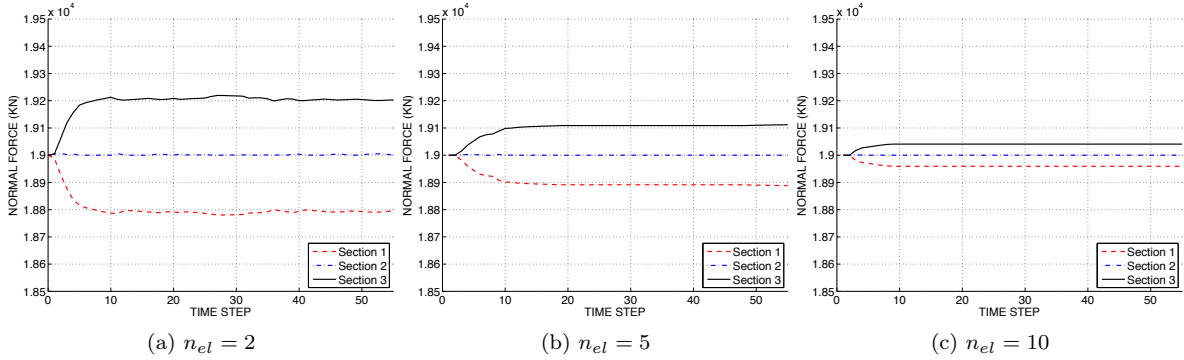


FIGURE 3.16 – Poutre élasto-plastique encastree soumise à une force axiale et une rotation - Evolution de l'effort normal aux trois sections du premier élément en considérant n_{el} éléments **FCQ**

Deuxième solution

Un deuxième choix est d'avoir recours aux méthodes d'enrichissement de la cinématique. Plus spécifiquement le champ axial peut être enrichi, comme dans les travaux de thèse de [Casaux, 2003] qui a adopté cette méthode pour résoudre le problème d'interaction effort normal - moment de flexion dans une poutre multifibres de cinématique Bernoulli (où, comme pour l'élément **FCQ**, les fonctions de forme interpolant le champ de rotation étaient quadratiques et le champ de déplacement axial linéaires). Comme les rotations de l'élément **FCQ** sont interpolées par des fonctions de forme quadratiques, des fonctions de formes d'ordre élevé doivent être également adoptées pour interpoler le déplacement axial, calibrées de cette façon afin d'annuler le terme $\frac{\partial F_x}{\partial x}$.

Une variable d'enrichissement élémentaire, notée α_e , et une fonction $N_{en}(x)$ le long de l'élément **FCQ** sont adoptées pour l'enrichissement du champ axial U_x . Ceci conduit à :

$$U_x'' = N_{en}''(x)\alpha_e \quad (3.77)$$

La nouvelle expression de $\frac{\partial F_x}{\partial x}$ s'écrit :

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = \left(\int_S M_t dS \right) \cdot N_{en}''(x)\alpha_e - \left(\int_S y \cdot M_t dS \right) \cdot \Theta_z'' \quad (3.78)$$

Le problème se résume à la recherche de la variable α_e qui assure une valeur zéro de $\frac{\partial F_x}{\partial x}$ pour toute position x de l'élément. Numériquement, on doit faire des itérations (locales) au niveau d'élément, selon l'algorithme de Newton Raphson, dont le but est de déterminer la racine α_e de l'équation $\frac{\partial F_x}{\partial x}$. A chaque itération, une redistribution des contraintes dans les fibres est effectuée à partir de la valeur de α_e^{iter} mise à jour. Les tests numériques ont montré que l'ordre de la fonction d'enrichissement doit être égale au nombre des points d'intégration nécessaire (trois dans le cas de l'élément **FCQ**) pour assurer une intégration numérique exacte.

Quatre fonctions de formes cubiques sont proposées pour l'interpolation du champ de déplacement axial de l'élément **FCQ**, ce qui nécessite l'addition de deux degrés de liberté supplémentaires internes. Effectivement, quatre polynômes linéaires indépendants sont nécessaires pour former une base pour les polynômes de degré trois, voir aussi [Caillerie et al., 2015]. Plusieurs choix sont évidemment possibles.

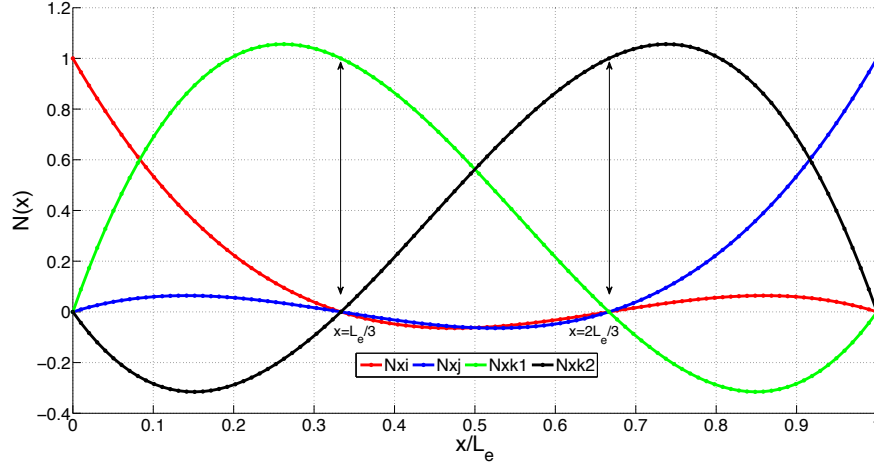


FIGURE 3.17 – Illustration des nouvelles fonctions de forme pour le déplacement axial de l'élément **FCQ**

Dans la suite, les coefficients des polynômes de degré trois sont choisis de telle sorte à obtenir des valeurs unitaires à $0, L_e/3, 2L_e/3$ et L_e , voir figure (3.17). Les polynômes sont donnés ci-dessous :

$$U_x = \begin{bmatrix} N_{xi} & N_{xk}^1 & N_{xk}^2 & N_{xj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{xi} \\ \Delta U_{xk}^1 \\ \Delta U_{xk}^2 \\ U_{xj} \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

avec

$$\begin{aligned} N_{xi} &= -\frac{9}{2} \left(\frac{x}{L_e}\right)^3 + 9 \left(\frac{x}{L_e}\right)^2 - \frac{11}{2} \frac{x}{L_e} + 1 & N_{xj} &= \frac{9}{2} \left(\frac{x}{L_e}\right)^3 - \frac{9}{2} \left(\frac{x}{L_e}\right)^2 + \frac{x}{L_e} \\ N_{xk}^1 &= \frac{27}{2} \left(\frac{x}{L_e}\right)^3 - \frac{45}{2} \left(\frac{x}{L_e}\right)^2 + 9 \frac{x}{L_e} & N_{xk}^2 &= -\frac{27}{2} \left(\frac{x}{L_e}\right)^3 + 18 \left(\frac{x}{L_e}\right)^2 - \frac{9}{2} \frac{x}{L_e} \end{aligned}$$

ΔU_{xk}^1 et ΔU_{xk}^2 sont les degrés de liberté internes supplémentaires qui peuvent être résolus à l'échelle globale ou au niveau de l'élément en utilisant la méthode de condensation statique.

La figure (3.18) illustre la réponse de la nouvelle formulation de l'élément **FCQ** pour l'exemple de la figure (3.13). Deux éléments poutres sont utilisés pour la discrétisation. La nouvelle formulation reproduit correctement l'interaction entre l'effort normal et le moment de flexion, conduisant à un effort axial constant.

3.3.6 Réponse dynamique

Afin de comparer la réponse dynamique des différentes formulations poutre, l'essai de la thèse de [Corn, 1998] est utilisé ci-dessous. Une poutre homogène de section circulaire pleine, de longueur $L = 257.8\text{mm}$ et de diamètre $D = 89.9\text{mm}$ est considérée. Le matériau constituant la poutre est du Dural (AU4G) de masse volumique $\rho = 2700\text{kg.m}^{-3}$, de module d'élasticité $E = 7.2 \times 10^{10}\text{Pa}$ et de coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. Les conditions aux limites sont libre-libre telles que les deux extrémités de la poutre sont supposées libres.

La poutre a été instrumentée comme suit : quatre pastilles piézo-électriques ont été placées sur une génératrice et deux accéléromètres piézo-électriques sur les sections terminales. Le but de cette expérience est de mesurer les modes propres de la poutre. On souhaite comparer les résultats expérimentaux avec les modes propres calculés avec les différentes formulations poutres Timoshenko étudiées.

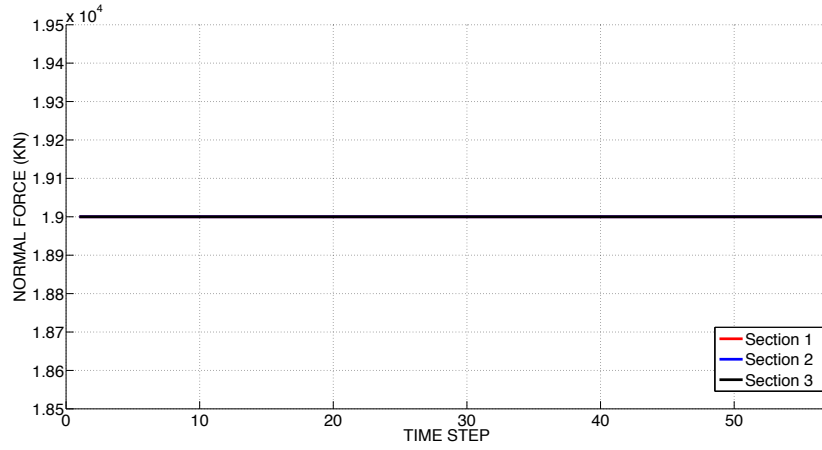


FIGURE 3.18 – Poutre élasto-plastique encastrée soumise à une force axiale et une rotation - évolution de l'effort normal aux trois sections du premier élément pour la nouvelle formulation de l'élément **FCQ**

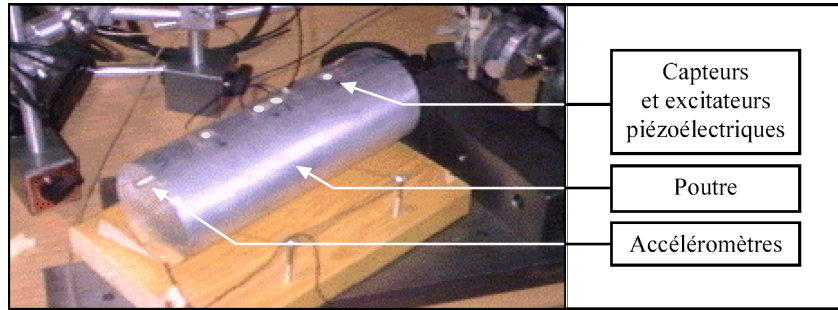


FIGURE 3.19 – Test pour mesurer les valeurs propres d'une poutre avec des conditions libre-libre, [Corn, 1998]

Pour ce faire, la poutre est discrétisée en 100 éléments poutres éléments finis. Puis les fréquences propres sont calculées en résolvant le problème aux valeurs propres suivant :

$$(K_{poutre} - w^2 M_{poutre}) U_{poutre} = 0 \quad (3.80)$$

La résolution de (3.80) nécessite de calculer les valeurs des pulsations propres w en résolvant l'équation suivante :

$$\det(K_{poutre} - w^2 M_{poutre}) = 0 \quad (3.81)$$

Enfin, les fréquences propres sont calculées comme :

$$f_i = \frac{w_i}{2\pi} \quad (3.82)$$

Les fréquences propres calculées pour les six premiers modes de flexion pour les éléments **FLI**, **FCQM** et **FCQ** ainsi que les erreurs relatives par rapport aux mesures expérimentales sont présentées dans le tableau suivant :

Mode	Expérience	FLI		FCQM		FCQ	
m	f_{exp} (Hz)	f_{EF} (Hz)	erreur (%)	f_{EF} (Hz)	erreur (%)	f_{EF} (Hz)	erreur (%)
1	4957	4936	0.42	4935	0.44	4953	0.44
2	10542	10471	0.67	10468	0.7	10467	0.71
3	16476	16388	0.53	16382	0.57	16378	0.59
4	20514	20694	0.88	20690	0.86	20684	0.83
5	24439	25022	2.39	25019	2.37	25007	2.32
6	24679	25190	2.07	25186	2.05	25174	2.01

TABLE 3.10 – Fréquences propres de la poutre expérimentales et numériques

L'erreur relative est calculée selon la formule suivante :

$$\text{erreur (\%)} = \frac{f_{EF} - f_{exp}}{f_{EF}} \times 100 \quad (3.83)$$

Les fréquences propres obtenues sont quasiment les mêmes. Les trois formulations éléments finis poutres Timoshenko étudiées ont donc un comportement similaire et reproduisent de façon satisfaisante les modes propres même d'ordre supérieur (erreur < 3%).

3.4 Conclusions

Trois formulations poutres Timoshenko (multifibres) ont été présentées dans ce chapitre : la formulation **FLI** basée sur des fonctions de forme linéaires, la formulation **FCQM** avec des fonctions de forme de degré plus élevé dépendant des propriétés du matériau et la formulation **FCQ** avec des fonctions de forme de degré plus élevé ayant un noeud interne additionnel.

Une illustration par calcul des valeurs propres de la matrice de rigidité a permis de montrer que les deux formulations d'ordre supérieur **FCQM** et **FCQ** sont libres de blocage par cisaillement alors que la formulation **FLI** nécessite un traitement particulier pour s'affranchir du problème. La comparaison entre ces trois formulations à travers des exemples numériques a également montré que **FLI** ne donne pas de résultats exacts si un seul élément poutre est utilisé. Les résultats s'améliorent néanmoins rapidement en utilisant un maillage plus fin. La formulation **FCQM** ne convient pas pour les calculs non linéaires mais sa performance est excellente pour les calculs linéaires élastiques. Enfin, la formulation **FCQ** donne les meilleurs résultats avec un minimum des éléments finis. Un enrichissement cinématique du champ de déplacement axial de l'élément **FCQ** est proposé afin d'améliorer sa capacité à reproduire l'interaction entre l'effort axial et le moment de flexion. Enfin, le calcul des valeurs propres d'une poutre obtenues avec les trois formulations donne sensiblement le même résultat.

Chapitre 4

Formulation EF enrichie, déplacements généralisés

Sommaire

4.1	Introduction	49
4.2	Localisation des déformations	49
4.2.1	Le phénomène de la localisation des déformations	49
4.2.2	Illustration de la dépendance pathologique au maillage	51
4.2.3	Les limiteurs de localisation	52
4.2.3.1	Approches discrètes	52
4.2.3.2	Approches continues	52
4.2.3.2.1	Limiteurs locaux	53
4.2.3.2.2	Limiteurs non locaux	53
4.2.3.2.3	Milieux à micro-structure	54
4.2.3.3	Approches enrichies par discontinuités	54
4.3	Enrichissement cinématique par une discontinuité	55
4.3.1	Discontinuité faible	56
4.3.2	Discontinuité forte	56
4.3.3	Méthodes d'implémentation numérique des discontinuités	57
4.3.3.1	Éléments finis étendus (X-FEM)	58
4.3.3.2	Éléments finis intégrés (E-FEM)	59
4.3.4	E-FEM : quelques travaux antérieurs	60
4.4	Barre enrichie	63
4.4.1	Cinématique de la discontinuité	64
4.5	Poutre Timoshenko enrichie	66
4.5.1	Détermination de la matrice $\overline{\mathbf{G}}_r$	68
4.5.1.1	Élément FLI enrichi	69
4.5.1.2	Élément FCQ enrichi pour la rotation	69
4.6	Formulation variationnelle	73
4.6.1	Détermination des fonctions $\overline{\mathbf{G}}_v$	74
4.6.2	Patch test	76
4.7	Modèles de comportement continu et cohésif	76
4.7.1	Modèle continu	77
4.7.1.1	Énergie libre	77
4.7.1.2	Surface de charge	77
4.7.1.3	Dissipation plastique	77
4.7.1.4	Évolution des variables internes	78
4.7.1.5	Conditions de cohérence et de Kuhn-Tucker	78
4.7.2	Modèle cohésif	79
4.7.2.1	Énergie libre	80
4.7.2.2	Surface de rupture	80
4.7.2.3	Dissipation à la discontinuité	80
4.7.2.4	Évolution des variables internes	80
4.7.2.5	Conditions de cohérence et de Kuhn-Tucker	81
4.8	Implémentation numérique	81
4.8.1	Linéarisation des équations d'équilibre	81
4.8.2	Calcul à l'échelle de l'élément	85
4.8.2.1	Évolution des variables plastiques	86
4.8.2.2	Évolution des variables cohésives	88
4.9	Applications numériques	90
4.9.1	Poutre en traction simple	90
4.9.2	Poutre en flexion pure	90
4.9.3	Portique à double niveau en béton armé	94
4.10	Conclusion	97

4.1 Introduction

La modélisation du comportement des structures en béton armé doit permettre de prendre en compte les différents phénomènes non linéaires avant pic, pic et post pic. Ce chapitre est dédié au développement d'un élément poutre enrichi pour tenir compte du comportement adoucissant lors de l'apparition des fissures.

Les premières tentatives pour modéliser le comportement des structures jusqu'à la rupture sont fondées sur des modèles de comportement sans longueur caractéristique, possédant une phase d'écrouissage et une phase d'adoucissement et s'inscrivant dans le cadre de la théorie de la mécanique des milieux continus. La modélisation de la phase d'adoucissement avec ce type de modèles se heurte à certaines difficultés et produit des résultats inexacts. En effet, du point de vue physique, pendant la phase d'adoucissement les déformations se concentrent dans les zones les plus fragiles de la structure, en formant ce qu'on appelle des zones de localisation. Du point de vue numérique, la modélisation objective (indépendante de la discrétisation spatiale) de ces zones de localisation des déformations n'est pas évidente. Ainsi, les résultats des modèles classiques, sans longueur caractéristique, présentent une forte dépendance parasite à la taille du maillage éléments finis.

Une des méthodes pour palier (régulariser) ce problème est la méthode d'enrichissement cinématique et plus particulièrement la méthode des éléments finis intégrés. Cette méthode permet de coupler un modèle de comportement continu avec un modèle cohésif. L'idée principale est d'enrichir le champ de déplacement par une variable de discontinuité. Cette variable peut représenter un saut de déplacement pour un matériau quasi fragile comme le béton ou encore une rotule plastique pour un matériau ductile comme l'acier. Le modèle cohésif est utilisé pour reproduire le comportement au niveau de la discontinuité. Par conséquent, l'énergie dissipée par le processus d'ouverture est capturée et elle est indépendante de la taille de l'élément fini. D'où la capacité de la méthode à limiter la dépendance au maillage durant le processus d'adoucissement. En résumé, l'intérêt de la méthode d'enrichissement est double : elle limite la dépendance au maillage et permet de modéliser le processus d'ouverture d'une fissure.

Dans la suite de chapitre une approche généralisée est considérée, où la section n'est pas utilisée avec des fibres mais avec une seule loi généralisée. L'enrichissement cinématique se fait donc au niveau des champs de déplacements généralisés (l'enrichissement dans le cadre de l'approche multifibres est présenté dans le chapitre 5). La localisation des déformations est tout d'abord illustrée d'un point de vue physique. Les difficultés de la modélisation de la zone de localisation, qui se manifestent par une dépendance pathologique au maillage éléments finis, sont ensuite évoquées. Les méthodes de régularisation sont passées en revue afin de détailler par la suite la méthode d'enrichissement cinématique, et particulièrement l'enrichissement du champ de déplacement par une discontinuité forte. Différentes applications de cette méthode pour les structures en génie civil sont mentionnées et les aspects théoriques et numériques de l'enrichissement au moyen d'une discontinuité forte sont présentés en détail : formulation variationnelle, modèle de comportement et algorithme de résolution. Le chapitre se termine par des illustrations numériques.

4.2 Localisation des déformations

4.2.1 Le phénomène de la localisation des déformations

La localisation des déformations est un phénomène qui apparaît dans le matériau, avant la rupture, à l'endroit où il y a des défauts [Brancherie, 2003]. Elle peut prendre différentes formes : bande de cisaillement pour les matériaux granulaires tels que les sables [Vardoulakis et al., 1978], [Vardoulakis, 1983] ou les poudres ainsi que pour les matériaux métalliques ayant un comportement élasto-plastique adoucissant [Rice, 1976]; ou encore sous la forme d'une bande de localisation pour le cas des matériaux quasi-fragiles comme le béton [Bažant, 1976], [Mazars, 1986] et les roches [Wawersik and Brace, 1971], [Read and Hegemier, 1985]. Plus particulièrement pour le béton, le phénomène de localisation en compression n'est pas le même que celui en traction [Coleman and Spacone, 2001] puisque le matériau a un comportement dissymétrique. En compression, le comportement est plus ductile et la rupture se

fait par micro-fissuration diffuse précurseur d'une forte localisation des déformations dans des bandes alignées avec la direction de compression (figure 4.1a). En traction, la rupture est brutale et qualifiée de fragile. Elle est caractérisée par le développement de nombreuses micro-fissures dont la coalescence donne naissance à une macro-fissure perpendiculaire à la direction de traction (figure 4.1b).

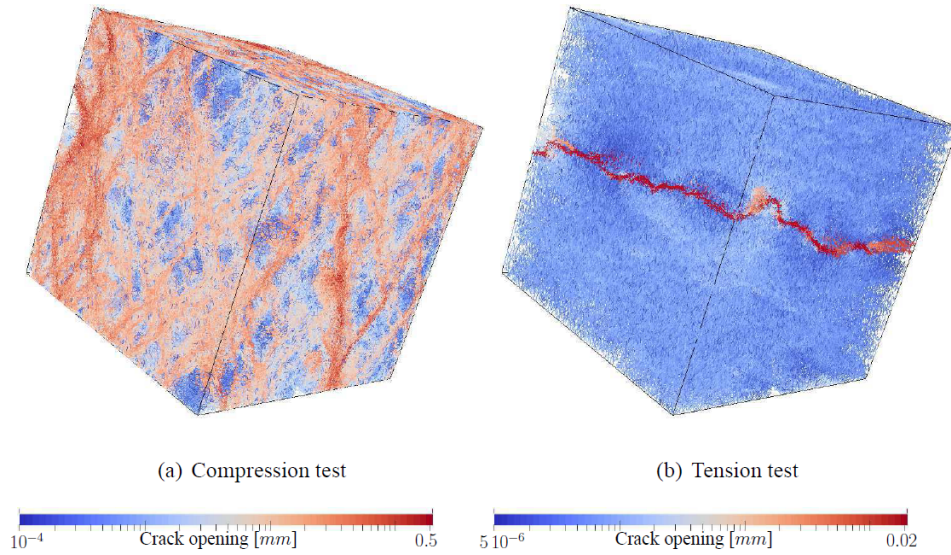


FIGURE 4.1 – Rupture du béton en compression et en traction [Roubin, 2013]

Une réponse adoucissante est définie comme la phase durant laquelle les contraintes (forces au niveau d'une structure) diminuent tandis que les déformations (déplacements) continuent à augmenter, figure (4.2).

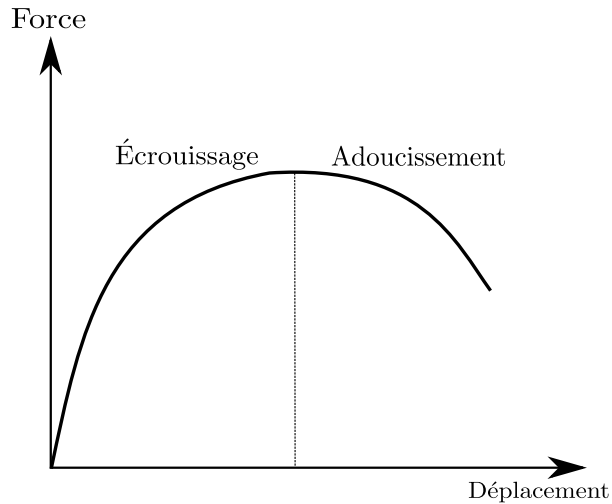


FIGURE 4.2 – Comportement adoucissant d'une structure

Le choix de la loi de comportement décrivant le matériau constituant la structure est crucial afin d'obtenir une modélisation satisfaisante du comportement adoucissant. Selon plusieurs auteurs, par exemple [Armero, 1999], [Armero and Ehrlich, 2004], la cause des problèmes vient de l'absence d'une longueur caractéristique dans la formulation de la loi de comportement, qui a pour rôle de définir une zone finie dans laquelle le matériau dissipe l'énergie durant sa phase adoucissante. Du point de vue mathématique, l'absence de cette longueur caractéristique conduit à un problème mal posé. En effet, le caractère hyperbolique de l'équation régissant le problème est perdu [Armero and Ehrlich, 2004], ce qui

provoque une dépendance pathologique au maillage éléments finis. Les analyses numériques montrent que la modélisation de la rupture se fait finalement sans dissipation d'énergie [Bažant and Belytschko, 1985]. Cette dépendance pathologique au maillage éléments finis est illustrée ci dessous.

4.2.2 Illustration de la dépendance pathologique au maillage

Pour illustrer la dépendance au maillage de la réponse adoucissante, on considère une barre homogène dont le comportement du matériau repose sur une loi élastique adoucissante comme en figure (4.3).

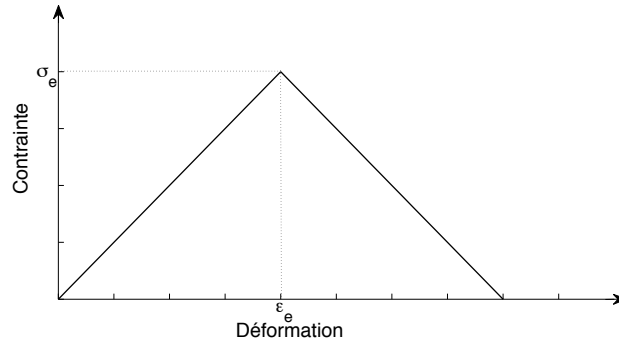


FIGURE 4.3 – Loi élastique adoucissante

La barre est encastree d'un côté et soumise à un déplacement axial imposé u du côté libre. Elle est discrétisée en 3 éléments, figure (4.4).

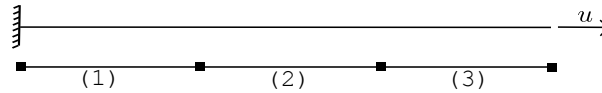


FIGURE 4.4 – Barre en traction discrétisée en trois éléments

Au fur et à mesure de l'augmentation du chargement, l'état de contrainte dans toute la barre est le même. Dès lors que l'état de contrainte atteint sa valeur maximale σ_e , le matériau se comporte de deux façons : soit la contrainte diminue mais la déformation continue à augmenter de manière à ce que le matériau entre dans sa phase d'adoucissement (chemin 2 sur la figure (4.5)), soit la contrainte et la déformation diminuent si bien que le matériau se décharge élastiquement (chemin 1 sur la figure (4.5)). Cela représente un mode de bifurcation : le problème ne possède plus une solution unique.

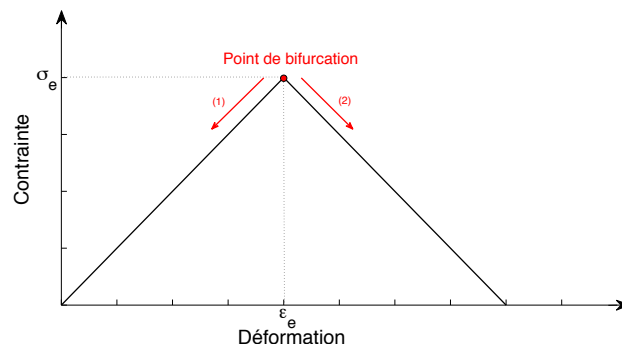


FIGURE 4.5 – Point de bifurcation

En réalité, la structure n'est pas parfaitement homogène mais il existe toujours des endroits avec des défauts. Prenons le cas où c'est le premier élément de la figure (4.4), proche de l'encastrement, qui

présente ce défaut (limite élastique plus faible par rapport aux autres éléments). Plusieurs simulations sont faites avec différents nombre d'éléments. Les résultats sont illustrés sur la figure ci-dessous.

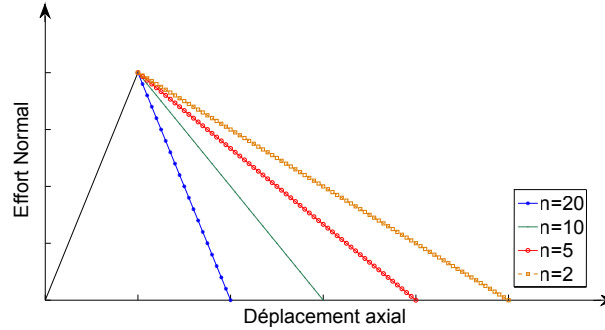


FIGURE 4.6 – Influence du maillage

La figure (4.6) montre que la réponse globale (effort normal en fonction de déplacement axial imposé) de la barre dépend du nombre d'éléments utilisés. La réponse n'est pas objective vis à vis du maillage car la quantité d'énergie dissipée, représentée par la surface sous la courbe est proportionnelle à la taille des éléments. Pour un nombre infini d'éléments l'énergie dissipée sera nulle, ce qui évidemment n'est pas réaliste. Il est donc primordial de trouver une solution pour palier cette dépendance pathologique au maillage.

Remarque : Le problème de la dépendance au maillage illustré ci-dessus est aussi bien observé dans les formulations éléments finis poutres en forces qu'en déplacements. La différence est que pour la formulation éléments finis en forces la localisation se fait au niveau d'un seul point d'intégration et non plus au niveau d'un seul élément [Coleman and Spacone, 2001].

4.2.3 Les limiteurs de localisation

Plusieurs approches sont proposées dans la littérature pour modéliser correctement la localisation des déformations. Parmi les travaux les plus anciens on trouve [Lasry and Belytschko, 1988] et [De Borst et al., 1993]. [Jirásek, 2002b] présente une vue d'ensemble sur ces méthodes. Plus récemment, l'ouvrage de [Ibrahimbegović, 2006] donne également une revue assez exhaustive.

La notion des *limiteurs de localisation* est utilisée dans la littérature pour faire référence aux différentes approches visant à surmonter les problèmes qui accompagnent la modélisation de la localisation des déformations. En général, les limiteurs de localisation sont divisés en deux groupes : les approches discrètes et les approches continues. Dans la suite, différentes méthodes de régularisation sont présentées ainsi que leurs avantages et inconvénients.

4.2.3.1 Approches discrètes

L'une des caractéristiques de ces approches est qu'elles supposent deux modèles de comportement qui fonctionnent simultanément : un modèle continu (contraintes en fonction de déformations) associé au matériau hors zone de localisation, et un modèle discret (contraintes en fonction de déplacements) associé au matériau dans la zone de localisation [Dvorkin et al., 1990]. La localisation ne peut prendre place qu'entre deux éléments finis. Les approches discrètes ne nécessitent pas un maillage très fin mais par contre la défaillance localisée ne peut se produire que dans des emplacements prédéterminés. Un remaillage est souvent nécessaire pour pouvoir suivre la propagation de la fissure. Parmi ces approches, on trouve les modèles à fissures discrètes (*discrete crack models*) [Cervenka and Saouma, 1995].

4.2.3.2 Approches continues

Ces approches conservent l'hypothèse de continuité du milieu ce qui permet de définir, partout et tout le temps, des déformations et donc des lois de comportement qui relient les contraintes avec les

déformations. Selon le type de limiteur de localisation choisi on peut les diviser en plusieurs catégories commentées ci dessous.

4.2.3.2.1 Limiteurs locaux

Une de premières solutions pour s’affranchir de la dépendance pathologique au maillage est l’approche énergétique introduite par [Hillerborg et al., 1976]. L’idée est de construire une loi de comportement ayant une sorte de longueur caractéristique prenant en compte la taille de l’élément fini utilisé. Plus spécifiquement, le module d’adoucissement de la loi est dépendant de la taille des éléments finis, ce qui nécessite de calibrer la loi afin de respecter la quantité d’énergie dissipée entre éléments. Néanmoins, le problème reste toujours mal posé du point de vue mathématique et la méthode régularise les résultats au niveau global mais pas au niveau local.

Une autre méthode de régularisation est d’introduire un paramètre de viscosité [Needleman, 1988]. La performance du modèle est améliorée mais la dépendance au maillage n’est pas définitivement résolue mais juste déplacée dans le temps.

4.2.3.2.2 Limiteurs non locaux

Ces approches introduisent des limiteurs non locaux dans la formulation : l’état de déformation dans un point de Gauss est calculé en introduisant une zone d’influence du voisinage et donc à partir d’une longueur caractéristique [Pijaudier-Cabot and Bažant, 1987] et [Bažant and Pijaudier-Cabot, 1988], [Jirásek, 1998].

Modèle non local d’endommagement Dans [Pijaudier-Cabot and Bažant, 1987], [Bažant and Pijaudier-Cabot, 1988], les auteurs présentent un modèle d’endommagement continu non local, tel que la déformation élastique garde son caractère local, alors que les paramètres qui causent la dégradation du matériau, ou encore qui décrivent le processus d’adoucissement, soient les variables d’endommagement, perdent leur caractère local. Autrement dit, la valeur de l’endommagement à un point appartenant au volume du matériau ne dépend plus de l’état du matériau à ce point uniquement mais plutôt de l’état du matériau de ce point ainsi que de son voisinage. Ce dernier est défini en fonction d’une longueur caractéristique qui est considérée comme un paramètre du matériau. On cherche désormais des valeurs moyennes pour l’endommagement et non plus des valeurs ponctuelles.

Modèle non local plastique De même dans [Bažant and Lin, 1988], les auteurs régularisent les incohérences associées à la phase d’adoucissement en rendant la déformation plastique non locale et en gardant la déformation élastique avec un caractère locale. Les déformations plastiques sont traitées par l’intermédiaire d’un opérateur de moyenne spatiale, de sorte qu’une longueur caractéristique est introduite dans le modèle caractérisant la taille de l’hétérogénéité du matériau.

Les approches non locales régularisent le problème d’un point de vue mathématique [Pietruszczak and Mroz, 1981] et les résultats sont objectifs au niveau global et au niveau local. Dans son livre [Ibrahimbegović, 2006], Ibrahimbegovic résume les inconvénients de l’utilisation des approches non locale. Le premier est la difficulté d’intégrer une approche non locale dans un code élément fini standard, où l’on doit faire communiquer tous les éléments dans un rayon égal à la longueur caractéristique, ce qui est assez couteux en termes de temps de calcul. De plus, la définition de la longueur caractéristique n’est pas toujours aisée.

Modèles à gradient Les modèles à gradient sont introduits par [Triantafyllidis and Aifantis, 1986], [Mühlhaus and Aifantis, 1991]. Le principe est de définir une variable donnée (e.g. déformation) par sa valeur locale et ses gradients en appliquant le développement de Taylor mais en négligeant les termes d’ordre supérieur (supérieur à 2). Ces modèles sont divisés en deux groupes : le gradient explicite et le gradient implicite [Peerlings et al., 1996a], [Peerlings et al., 1996b], [Askes, 2000]. Pour le premier, la variable non locale est exprimée explicitement en fonction des gradients du déplacement, alors que pour le second, la variable non locale est écrite implicitement en fonction des gradients de déplacement.

La différence entre les deux modèles est discutée dans [De Borst et al., 1993], [Askes, 2000], [Askes and Sluys, 2002] pour l’endommagement à gradient et dans [Coleman and Hodgdon, 1985], [Mühlhaus and Alfantis, 1991], [Pamin et al., 1999] pour la plasticité à gradient.

4.2.3.2.3 Milieux à micro-structure

Une autre famille des approches continues repose sur les milieux à micro-structure. Contrairement aux approches non locales précédentes, la micro-structure ici est décrite d’une manière explicite. Une description supplémentaire de la cinématique de la micro-structure est ajoutée à la description du milieu continu. [Germain, 1973] présente un cadre général de la formulation des milieux à micro-structure en utilisant le principe des puissances virtuelles. L’introduction de termes supplémentaires pour la description cinématique implique la présence d’une longueur interne dans le modèle.

Modèle Cosserat Ce modèle est basé sur le travail des frères Cosserat [Cosserat and Cosserat, 1909]. Le principe est d’ajouter un degré de liberté supplémentaire de rotation en chaque point matériel d’une manière indépendante des déplacements. Le degré de liberté additionnel permet de décrire les mouvements de rotation des grains dans la bande de localisation. Ces modèles nécessitent l’introduction des paramètres supplémentaires dans la formulation parmi lesquelles une longueur caractéristique, ce qui permet de régulariser le problème. D’après [Ibrahimbegović, 2006], ces modèles ne sont pas adaptés à la modélisation de problème de localisation en mode I, mais seulement à la modélisation de bandes de cisaillement (localisation en mode II) .

Modèle de second gradient Le modèle de second gradient [Chambon et al., 1998] a été développé initialement avec des lois plastiques pour s’affranchir des problèmes de modélisation de la localisation dans les bandes de cisaillement pour les sols. [Li, 2011] et [Li et al., 2011] ont utilisé le modèle pour le cas de matériaux fragiles et [Jouan, 2014] pour la modélisation de la localisation dans des structures en béton avec des lois de la mécanique de l’endommagement. Le principe de ce modèle est de considérer un milieu à micro-structure avec une cinématique plus riche en introduisant des degrés de liberté supplémentaires. Cela nécessite de définir des lois de comportement premier et second gradient. La difficulté avec le modèle de second gradient est que la signification physique des paramètres matériaux de la loi second gradient n’étant pas bien établie. Les travaux de [Jouan, 2014] donne une bonne illustration de ce modèle.

Les modèles précédents offrent une objectivité par rapport à la taille du maillage, toutefois, ils nécessitent une discrétisation fine de la zone de localisation. De plus, puisque la largeur de cette zone est généralement petite par rapport aux dimensions de la structure, le coût de calcul devient vite important pour les applications des structures à grande échelle [Mosler, 2004].

4.2.3.3 Approches enrichies par discontinuités

Cette famille de modèles propose un enrichissement cinématique par introduction des discontinuités et elle sera adoptée pour les développements numériques dans ce travail de thèse.

L’approche respecte les deux critères d’efficacité mentionnés par [Belytschko et al., 1988] : assurer une objectivité vis à vis du maillage et tenir compte du caractère multi-échelle du problème étudié. Le principe de la méthode d’enrichissement est d’incorporer la cinématique associée à la petite échelle au niveau du matériau à la cinématique associée à la grande échelle au niveau de la structure. L’idée est d’introduire une discontinuité de taille nulle dans les équations cinématiques, et donc de supposer que la localisation des déformations se fait dans cette discontinuité. Le comportement du matériau dans cette zone de taille nulle (la discontinuité) est modélisé par le biais d’une loi cohésive. Cette dernière permet de définir un mécanisme dissipatif qui permet, à son tour, de capturer la même quantité d’énergie dissipée quelque soit la taille de l’élément fini. Par conséquent, le modèle s’affranchit de la dépendance pathologique au maillage.

L’enrichissement cinématique peut être défini comme une amélioration du modèle en y ajoutant de nouvelles variables décrivant les phénomènes qui ne peuvent pas être décrits par le modèle initial.

L'enrichissement est qualifié de cinématique parce qu'il affecte les champs cinématiques de déformation ou encore de déplacement.

Dans [Lotfi and Shing, 1995], [Oliver, 1995], cette méthode d'enrichissement est présentée comme un compromis entre les approches discrètes (4.2.3.1) et les approches continues (4.2.3.2). La famille des approches continues nécessite un maillage fin, puisqu'elle doit décrire n'importe quelle partie du matériau, malgré sa taille et sa position dans la structure, ce qui lui permet de déclencher et de positionner automatiquement la localisation, avec toutefois un coût de calcul assez élevé. Cette famille souffre du verrouillage de la contrainte (*stress locking*) puisque la description cinématique des discontinuités autour des macro fissures est inadéquate [Wells and Sluys, 2000], [Jirásek, 2000].

D'un autre côté, les approches discrètes n'engendrent pas de problème concernant la finesse du maillage, puisque la zone de localisation est limitée dans un seul point où l'on introduit un mécanisme dissipatif. Par contre, la défaillance localisée ne peut se produire que dans des emplacements prédéterminés [Jukić, 2013]. Par conséquent, la famille de méthodes d'enrichissement, consistant à incorporer une discontinuité au sein des éléments finis, est construite de telle manière à regrouper les avantages des approches continues et discrètes sans en avoir certains inconvénients.

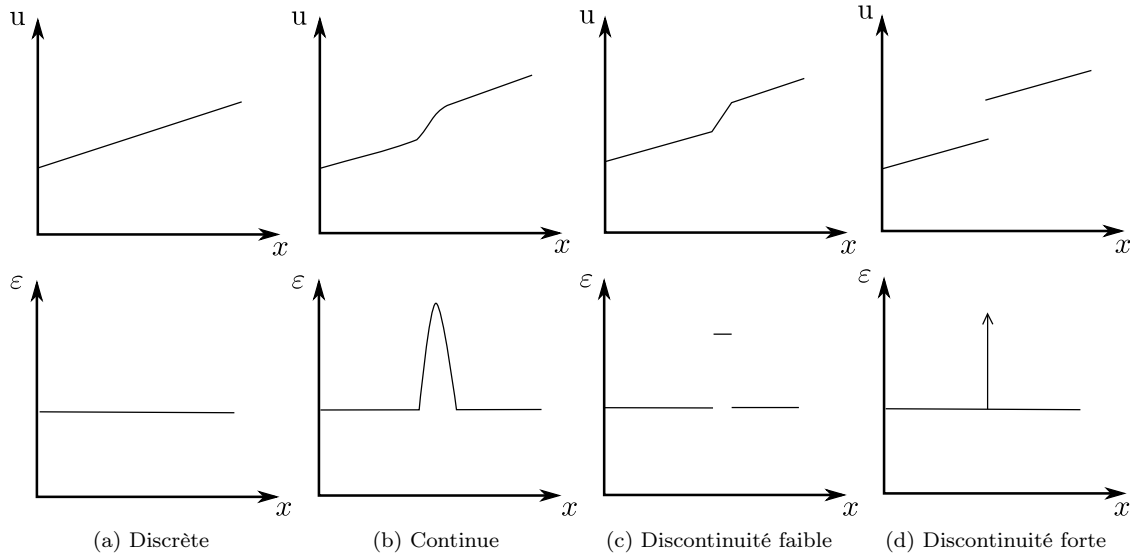


FIGURE 4.7 – Les différentes approches de régularisation (inspirée de [Jirásek, 2002b])

La figure (4.7) illustre les trois approches à travers l'allure du champ de déplacement et celui de déformation par élément, [Jirásek, 2002b]. Pour l'approche discrète (4.7a), les champs cinématiques le long de l'élément fini sont continus puisque le modèle discret est modélisé par le biais d'un élément d'interface et non pas au sein de l'élément fini. Au contraire, les autres approches présentent des champs cinématiques particulières. La figure (4.7b) montre que le champ de déplacement est continument dérivable et le champ de déformation correspondant continu, d'où l'approche est qualifiée de continue. Par contre, pour les approches enrichies, une discontinuité apparaît dans le champs de déformation (4.7c) ou de déplacement (4.7d). La différence entre ces deux types de discontinuité est l'objet de la section suivante.

4.3 Enrichissement cinématique par une discontinuité

L'enrichissement cinématique consiste à introduire une variable de discontinuité dans la formulation. Selon [Jirásek and Belytschko, 2002], la modélisation de la discontinuité peut être classée en deux catégories : les modèles de discontinuité explicites et les modèles de discontinuités implicites. La première catégorie fait introduire une variable de discontinuité dans le champ cinématique de déplacement, ce qui

produit une singularité dans le champ de déformation (voir figure (4.7d)). Cette discontinuité est dite forte. Pour la deuxième catégorie, la discontinuité est introduite dans le champ de déformation ainsi la continuité du champ de déplacement est conservée. Par ailleurs, le champ de déplacement est de classe C^0 (voir figure (4.7c)) et la discontinuité dans ce cas est dite faible.

Dans une étude comparative [Jirásek, 2000], l’auteur présente un cadre mathématique unifié et basé sur le principe variationnel de Hu-Washizu pour illustrer les différents types de discontinuités. Cette étude mène à trois différentes méthodes d’enrichissement :

1. *Statically Optimal Symmetric* (SOS) : seul le champ de déformations est enrichi, on parle d’une discontinuité faible. Cette méthode conduit à des éléments finis qui vérifient la condition de continuité du vecteur traction sur la discontinuité mais ne peuvent pas représenter proprement les cinématiques de discontinuité.
2. *Kinematically Optimal Symmetric* (KOS) : ici c’est le champ de déplacement qui est enrichi. Cette méthode donne les mêmes équations d’équilibre que celles obtenues avec la méthode SOS. La différence réside au niveau de la construction des fonctions d’enrichissement. Contrairement à la méthode SOS, la méthode KOS respecte la compatibilité entre les champs de déplacements et les champs de déformations sans nécessairement assurer la continuité du vecteur traction sur la discontinuité.
3. *Statically and Kinematically Optimal Nonsymmetric* (SKON) : cette méthode présente un compromis entre les méthodes SOS et KOS. Elle représente proprement à la fois la statique et la cinématique : la condition de continuité du vecteur traction au travers de la discontinuité est assurée et la cinématique de discontinuités est bien reflétée. Par contre la formulation linéarisée issue de cette méthode est en général dissymétrique.

L’annexe B donne plus de détails sur ces méthodes.

4.3.1 Discontinuité faible

Les premiers travaux sur des modèles à discontinuités faibles remontent aux années quatre vingt [Pietruszczak and Mroz, 1981], [Ortiz et al., 1987]. Ce type de discontinuité est utilisé dans le cas où le champ de déformation réel possède une discontinuité alors que le champ de déplacement reste continu. La discontinuité faible est initialement développée pour modéliser la localisation de déformations. Il faut noter que le travail d’ [Ortiz et al., 1987] permet d’introduire une seule discontinuité faible par élément. Néanmoins, la modélisation d’une bande de localisation nécessite l’ajout d’une autre discontinuité dans l’élément voisin, ce qui rend la modélisation entière d’une bande de localisation par cette méthode dépendante à la finesse de maillage. C’est pourquoi [Belytschko et al., 1988] ont développé un élément capable de contenir une bande de cisaillement. L’idée est simplement d’introduire deux discontinuités faibles par élément, ce qui permet d’avoir une bande de localisation au sein d’un seul élément définie par les deux discontinuités faibles. Par conséquent, la modélisation de la bande devient indépendante à la taille du maillage (sachant qu’une condition nécessaire concernant la taille minimale de l’élément doit être considérée : la taille de l’élément doit être plus grande de la largeur de la bande).

La discontinuité faible peut aussi être utilisée pour modéliser les interfaces dans un milieu hétérogène constitué de deux matériaux différents ou encore d’un seul matériau avec des trous. Dans ce type de problème, un champ de déformation continu est incapable de prendre en compte l’hétérogénéité du milieu. L’introduction d’une discontinuité dans le champ des déformations peut rendre la modélisation possible. Par exemple dans [Benkemoun, 2010], l’auteur modélise des éléments bi-phasiques constitués de deux matériaux ayant des propriétés différentes : agrégats et mortier. Par conséquent, les champs de déformations doivent contenir des sauts finis, c’est pourquoi le choix est fait d’enrichir les champs de déformations continues par des discontinuités faibles. [Roubin et al., 2015] utilise les deux types de discontinuités, faible et forte, pour modéliser la rupture d’un matériau hétérogène.

4.3.2 Discontinuité forte

Une fissuration est une ouverture représentée par un saut de déplacement. Par conséquent, sa modélisation par le biais d’une discontinuité faible n’est pas satisfaisante, une discontinuité doit être introduite

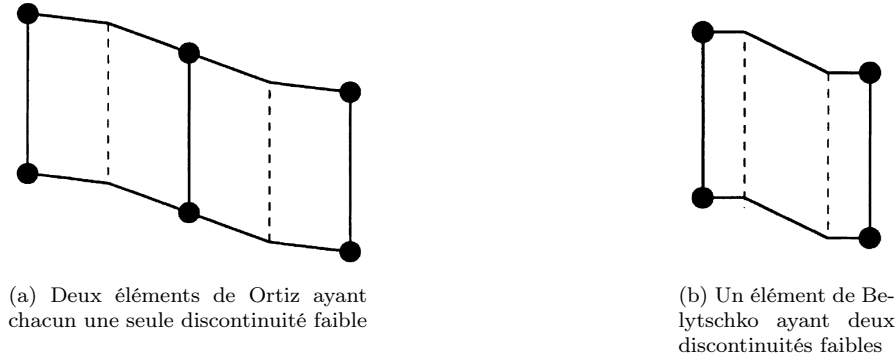


FIGURE 4.8 – Modèles à discontinuités faibles [Jirásek, 2000]

dans le champs de déplacements. Par ailleurs, la valeur de ce saut peut être interprétée comme l'ouverture de la fissure. Un autre intérêt de l'utilisation d'une discontinuité forte est, selon [Simo et al., 1993], sa capacité à capturer la dissipation d'énergie durant le processus d'adoucissement du matériau. Cela permet d'améliorer l'objectivité de la modélisation vis à vis du maillage.

La présence d'une discontinuité dans le champ de déplacement conduit à un champ de déformation singulier, ce qui nécessite un traitement particulier. Le traitement de la singularité peut être réalisé selon deux approches :

- une approche continue : [Simo et al., 1993], [Armero and Garikipati, 1996], [Oliver, 1996], [Oliver, 2000], [Oliver et al., 2002] [Brancherie, 2003]. Les auteurs supposent que la présence d'une discontinuité dans le champ de déplacement est compatible avec la loi de comportement. Par conséquent, ils proposent une méthode intégrant le champ de déformation singulier dans le cadre de la formulation thermodynamique de la loi continue sans violer les conditions de compatibilité. En effet, il faut que toutes les variables de la formulation restent bornées afin de garder un sens physique, ce qui nécessite la suppression des parties singulières. Pour cela, certaines variables (la contrainte, le taux de contrainte, le multiplicateur de Lagrange, la déformation plastique, le module d'écrouissage) doivent se décomposer à leur tour en deux parties, une partie régulière et une partie singulière. Cela permet une auto-simplification des parties singulières entre elles dans les différentes variables bornées. Deux lois de comportement sont par conséquent considérées, une pour la partie continue et une pour la discontinuité. Ces deux modèles fonctionnent en parallèle, en respectant les conditions de compatibilité de la singularité dans le champ de déformation avec la formulation continue.
- une approche discrète : [Wells and Sluys, 2001], [Oliver et al., 2002]. La discontinuité est gérée par une loi cohésive reliant une variable de traction à un saut de déplacement. Le comportement du matériau à la discontinuité est modélisé par le biais d'une loi discrète [Ibrahimbegović and Brancherie, 2003] qui contrôle la dissipation de l'énergie pendant l'adoucissement. Les conditions de compatibilité entre le champ de déformation singulier et la formulation continue sont donc abandonnées. Cette approche sera retenue dans la suite du mémoire. Elle sera développée dans la section concernant le modèle cohésif (4.7.2).

Depuis les années quatre-vingt dix, la littérature est riche de travaux basés sur la discontinuité forte [Oliver, 1995], [Mosler, 2004], [Mosler, 2005], [Oliver et al., 2012]. Une vue d'ensemble des techniques d'approximation pour la résolution des discontinuités fortes est donnée dans [Jirásek, 2002a]. La logique consiste à étendre la méthode des éléments finis pour pouvoir modéliser les discontinuités introduites. La section suivante présente les différentes méthodes numériques d'implémentation de ces discontinuités.

4.3.3 Méthodes d'implémentation numérique des discontinuités

En ce concerne l'implémentation numérique des discontinuités fortes, la méthode des éléments finis classique (FEM) montre certaines limites. En effet, le maillage de la structure doit être obligatoirement

aligné avec les discontinuités (voir figure (4.9a)). De plus, il doit être raffiné dans les zones à grands gradients. Ainsi, le maillage doit être mis à jour tout au long de la propagation de la fissuration, ce qui n'est pas numériquement aisé. Pour ces raisons, la méthode FEM classique n'est pas habituellement retenue pour ce type de modélisation.

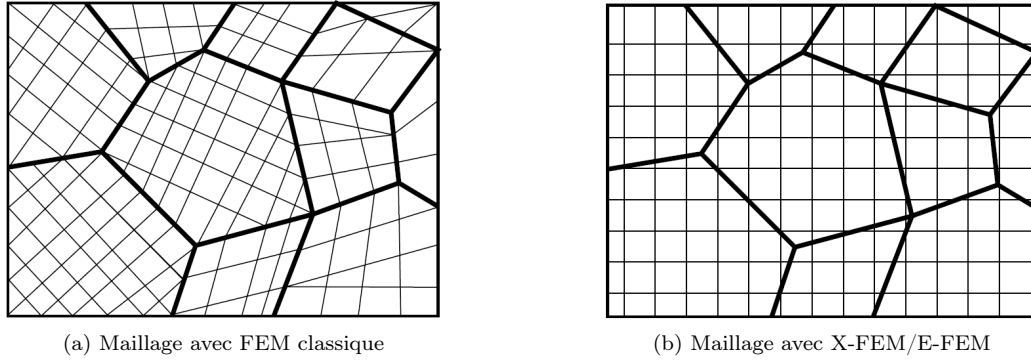


FIGURE 4.9 – Illustration du maillage avec les différentes méthodes éléments finis [Belytschko et al., 2009]

Plusieurs méthodes ont été développées dans la littérature pour prendre en compte de façon efficace les discontinuités. Le principe est d'enrichir la méthode des éléments finis classique par de nouveaux degrés de liberté pour porter les discontinuités et rendre le maillage indépendant de leur présence. Avec ces nouvelles méthodes un maillage fin n'est par conséquent plus nécessaire et la propagation de la fissuration ne nécessite plus à remailler le domaine. Les degrés de liberté supplémentaires peuvent être portés soit par les noeuds des éléments, comme c'est le cas pour la méthodes des éléments finis étendus (X-FEM), soit intégrés au sein de l'élément comme c'est le cas pour la méthode des éléments finis intégrés (E-FEM). Ces différentes méthodes ont déjà trouvées plusieurs applications dans le domaine du génie civil. On peut mentionner par exemple :

- la nucléation et la propagation d'une ou de plusieurs fissures [Daux et al., 2000], [Budyn et al., 2004],
- les trous et les inclusions dans les matériaux [Remmers et al., 2003],
- les interfaces entre les matériaux [Benkemoun et al., 2012], [Roubin et al., 2015].

Les sections suivantes présentent brièvement les deux méthodes X-FEM et E-FEM.

4.3.3.1 Éléments finis étendus (X-FEM)

La méthode des éléments finis étendus (*eXtended Finite Element Method X-FEM*), développée en 1999 par [Moës et al., 1999], [Belytschko and Black, 1999], [Dolbow et al., 2001], [Belytschko et al., 2001], est basée sur la méthode de la partition de l'unité *PUM* [Melenk and Babuskab, 1996]. La méthode *X-FEM* a été initialement employée avec les modèles de Griffith dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture et ensuite pour la résolution des problèmes présentant des surfaces de discontinuité, des modèles cohésifs [Wells and Sluys, 2001], [Cazes, 2010] ou des lois de comportement de la mécanique des milieux continus. Son principal avantage est qu'elle permet la modélisation de la fissuration sans la nécessité de remailler la structure. En effet, des fonctions de forme discontinues sont ajoutées à la formulation des éléments finis. Par ailleurs, la fissuration peut traverser un élément en le coupant en deux et les variables des discontinuités sont incorporées dans le maillage au niveau des noeuds d'éléments fissurés.

Pour illustrer cette méthode, un domaine Ω maillé et subdivisé en plusieurs sous-domaines (éléments) est considéré dans la figure (4.10). Plusieurs éléments sont supposés être traversés par une fissure. Le

champ de déplacement s'écrit de la manière suivante :

$$u(x) = \underbrace{\sum_{i \in I} N_i(x) a_i}_{\text{partie continue}} + \underbrace{\sum_{j \in J} N_j(x) H(x) b_j}_{\text{enrichissement Heaviside}} + \underbrace{\sum_{k \in K} N_k(x) \left(\sum_{l=1}^4 F^l(r, \theta) c_k^l \right)}_{\text{enrichissement asymptotique}} \quad (4.1)$$

avec a_i , b_j et c_k des fonctions de combinaison des déplacements nodaux, I l'ensemble de tous les noeuds du domaine, J l'ensemble des noeuds entourés par des cercles (figure (4.10)), K l'ensemble des noeuds entourés par des carrés (figure (4.10)), $N(x)$ les fonctions d'interpolation continues classiques, $H(x)$ la fonction de Heaviside représentant le saut du déplacement et $F^l(r, \theta)$ une fonction prenant plusieurs expressions selon l'orientation de la pointe de la fissure. Elle est définie par

$$F^l(r, \theta) = [\sqrt{r} \sin(\frac{\theta}{2}) \quad , \quad \sqrt{r} \cos(\frac{\theta}{2}) \quad , \quad \sqrt{r} \sin(\frac{\theta}{2}) \sin(\theta) \quad , \quad \sqrt{r} \cos(\frac{\theta}{2}) \sin(\theta)] \quad (4.2)$$

avec (r, θ) les coordonnées polaires locales de la pointe de la fissure. En fait, les développeurs de cette méthode séparent entre les noeuds d'éléments coupés entièrement par la fissure (les noeuds entourés par des cercles) et ceux des éléments partiellement coupés (les noeuds entourés par des carrés), c'est à dire, les éléments dans lesquels se trouve la pointe de la fissure, voir figure (4.10).

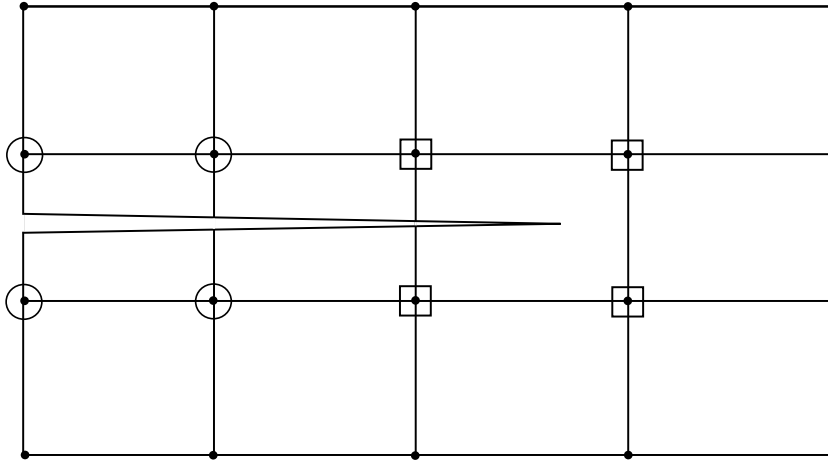


FIGURE 4.10 – Le domaine Ω divisé en éléments [Moës et al., 1999]

La méthode des éléments finis peut être retrouvée comme un cas particulier de la méthode X-FEM, en supprimant les termes d'enrichissement dans l'expression (4.1).

Dans la même logique, la méthode des éléments finis généralisés (G-FEM) [Strouboulis et al., 2000] est également fondé sur le concept de la partition de l'unité. Contrairement à la méthode X-FEM qui utilise la partition de l'unité au sens local pour la modélisation de la fissuration, la méthode G-FEM utilise la partition de l'unité dans le sens global, au niveau de la structure. [Belytschko et al., 2009] présente une vue d'ensemble de ces deux méthodes X-FEM et G-FEM et montre les similitudes.

4.3.3.2 Éléments finis intégrés (E-FEM)

La méthode des éléments finis intégrés (*Embedded Finite Element Method E-FEM*), initialement développée par [Dvorkin et al., 1990] pour la modélisation de la localisation des déformations, est basée sur le *Mixed Assumed Strain Approach* [Simo and Rifai, 1990], et plus particulièrement, sur la méthode des modes incompatibles. Les éléments peuvent être traversés par la fissure comme c'est le cas pour les éléments finis étendus. Par contre, les variables d'enrichissement sont considérées comme des variables élémentaires et non plus nodales. Cela conduit à deux types d'équations d'équilibre, un au niveau global à l'échelle de la structure et un au niveau local à l'échelle de l'élément. Les variables d'enrichissement sont résolues à l'échelle locale par condensation statique et par conséquent la résolution globale à l'échelle

de la structure reste la même comme dans le cas de la méthode des éléments finis classiques (sans enrichissement). Du point de vue numérique, l'avantage de la méthode E-FEM est qu'elle peut être implémentée facilement dans un code élément fini sans modification de son architecture.

Le champ de déplacement enrichi s'écrit :

$$U(x) = \mathbf{N}(x)\mathbf{d}_e(t) + \mathbf{M}(x)\bar{\bar{\mathbf{d}}}_e(t) \quad (4.3)$$

où $\mathbf{d}_e(t)$ est le vecteur des déplacements nodaux, $\bar{\bar{\mathbf{d}}}_e(t)$ les degrés de liberté supplémentaires associés aux éléments enrichis, $\mathbf{N}(x)$ la matrice des fonctions de forme habituelles et $\mathbf{M}(x)$ la matrice des fonctions d'enrichissement.

[[Oliver et al., 2006](#)] ont réalisé une étude comparative entre les deux méthodes d'implémentation des discontinuités X-FEM et E-FEM. Les deux méthodes ont été implémentées dans le même code éléments finis pour assurer la fiabilité de la comparaison. L'étude montre que les deux méthodes fournissent des résultats similaires en termes de qualité et de quantité pour un maillage assez fin. Or pour les mailles grossières, E-FEM a présenté, en général, une précision plus grande, tandis que le taux de convergence avec la raffinement du maillage est légèrement supérieur pour X-FEM. Du point de vue de calcul, la modélisation d'une simple fissure avec X-FEM nécessite un coût de calcul supérieur que la E-FEM. Par ailleurs et pour de multiples fissures, le coût de calcul de E-FEM reste constant, alors que le coût associé à X-FEM augmente linéairement avec le nombre de fissures.

La figure (4.11) illustre la principale différence entre les deux méthodes en ce qui concerne le support des variables d'enrichissement : les éléments pour E-FEM et les noeuds pour X-FEM.

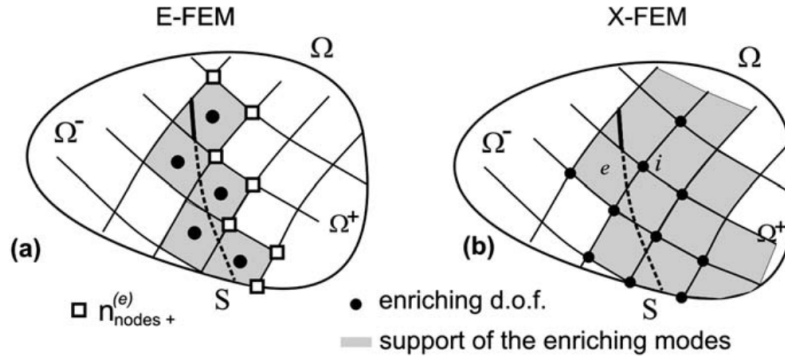


FIGURE 4.11 – Enrichissement élémentaire (a) et nodal (b) [[Oliver et al., 2006](#)]

Dans le cadre ce mémoire, on se focalise sur la méthode des éléments finis intégrés E-FEM.

4.3.4 E-FEM : quelques travaux antérieurs

Elements finis Parmi les premiers travaux basés sur les principes de la méthode E-FEM on trouve les articles de [[Ibrahimbegović et al., 1990](#)], [[Ibrahimbegović and Wilson, 1991b](#)], [[Ibrahimbegović and Wilson, 1991a](#)], dont le but est de palier le problème de blocage par cisaillement. En effet, le champ de déplacement des éléments finis est enrichi de façon à pouvoir reproduire la déformation sous flexion pure.

La méthode E-FEM a été également utilisée pour modéliser des zones à forte localisation, par exemple des zones de fissuration pour le béton ou des bandes de cisaillement pour les métaux et les sols. [[Jirásek and Zimmermann, 2001](#)] ont développé un élément fini triangulaire avec une discontinuité de déplacement intégrée pour décrire la fissuration dans le béton. L'introduction d'une discontinuité forte nécessite d'ajouter une loi traction-séparation pour modéliser le comportement du matériau à la discontinuité. Cette loi est formulée dans le cadre de la théorie d'endommagement en prenant en compte les effets de fermeture des fissures mais aussi le frottement sur leurs faces.

[Linder and Armero, 2007] ont proposé un élément fini quadratique comprenant des interpolations linéaires pour les sauts de déplacement, ce qui a apporté une amélioration par rapport aux interpolations constantes. En outre, l'élément proposé est capable de reproduire toutes les modes de déformations et par conséquent il ne présente pas de problème de verrouillage.

[Ibrahimbegović et al., 2010] ont présenté un modèle pour la modélisation des structures en béton armé capable à reproduire le comportement de béton et de l'acier. Le modèle prend en compte la création des fissures dans le béton en utilisant la méthode E-FEM ainsi que le phénomène de glissement entre l'acier et le béton avec la méthode X-FEM.

[Cuvilliez et al., 2012] et [Cuvilliez, 2012] utilisent la méthode d'enrichissement cinématique pour assurer le passage d'un modèle d'endommagement continu (régularisé par une approche non locale) à un modèle de fissuration cohésif dans le cadre d'une rupture quasi-fragile. Les auteurs ont eu recours à la méthode E-FEM pour introduire une description cinématique du processus de fissuration.

Enfin, [Richard et al., 2016] et [Kishta, 2016] ont développé un modèle numérique capable de représenter explicitement la fissuration des éléments de structures en béton armé. Un modèle d'endommagement anisotrope fondé sur des fissures orientées est utilisé pour caractériser le réseau de fissures anisotrope. La cinématique du modèle est enrichie par un saut de déplacement de manière à représenter explicitement le développement de fissures. Le modèle est validé sur des structures en béton présentant des mécanismes de ruine en mode I et mode mixte.

Elements poutres Plus spécifiquement pour des éléments finis poutres, plusieurs auteurs ont proposé d'en enrichir la cinématique en rajoutant des discontinuités, voir par exemple [Armero and Ehrlich, 2004], [Ehrlich and Armero, 2005], [Armero and Ehrlich, 2006], [Dujc et al., 2010], [Pham et al., 2010], [Pham et al., 2012], [Jukić et al., 2012], [Bui et al., 2014], [Jukić et al., 2014].

Dans le cadre d'une approche généralisée, [Armero and Ehrlich, 2004] ont effectué une analyse de la rupture des modèles poutres Timoshenko ayant un comportement élasto-plastique. Afin de reproduire la rupture des structures métalliques, les auteurs ont introduit une discontinuité forte dans le champ de rotation et ils ont adopté une loi dissipative cohésive (moment-saut de rotation).

Toujours dans le cadre d'une approche généralisée, [Ehrlich and Armero, 2005] ont enrichi les trois composantes du champ de déplacement (axiale, transversale et de rotation). Trois mécanismes dissipatifs ont été par conséquent introduits par le biais de trois modèles cohésifs. Une analyse des valeurs propres a été réalisée afin d'étudier l'influence du choix des fonctions interpolant les discontinuités sur le blocage par cisaillement. Les auteurs ont montré que des fonctions d'enrichissement d'ordre élevé sont nécessaires pour éviter ce verrouillage numérique.

[Armero and Ehrlich, 2006] ont étudié les poutres de cinématique Bernoulli. Deux enrichissements ont été proposés : le premier pour le champ de déplacement axial et le deuxième pour le champ de rotation. Les auteurs ont montré que le choix des fonctions interpolant les discontinuités est crucial pour obtenir des résultats précis.

[Dujc et al., 2010] ont appliqué la méthode pour modéliser la rupture des portiques. Pour cela, ils ont combiné un modèle poutre Bernoulli enrichi et un modèle coque. Le modèle poutre Bernoulli proposé diffère de celui de [Armero and Ehrlich, 2006], seulement la composante de rotation étant enrichie.

[Pham et al., 2010] et [Pham et al., 2012] ont proposé un modèle similaire dans le cadre de la théorie de Timoshenko pour des structures en béton armé. Une étude multi-échelle a été menée afin d'identifier les paramètres du modèle généralisé. Pour cela, une poutre Timoshenko multifibres a été enrichie au niveau des fibres. Ce modèle plus complexe, leur a permis de décrire la rupture en flexion et d'en tirer les paramètres nécessaires pour le développement d'un modèle généralisé. A la suite de ce travail, [Jukić et al., 2012] ont développé un élément fini poutre Bernoulli avec un comportement élasto-plastique bi-linéaire associé au comportement de flexion. Ici, seul le champ de rotation a été enrichi.

Un an plus tard, [Bui et al., 2014] ont présenté un nouvel élément fini poutre Timoshenko, en suivant la même idée que [Pham et al., 2010], afin de modéliser le comportement jusqu'à la rupture d'une structure portique en béton armé. La nouveauté de leur travail réside dans la considération de deux modes de rupture : le premier est un mode de cisaillement et le deuxième un mode de flexion. Dans ces travaux, les deux champs (axial et de rotation) ont dû être enrichis.

Enfin, dans [Jukić et al., 2014], un élément poutre multifibres Timoshenko a été enrichi (déplacement axial), avec cette fois-ci l'utilisation d'une loi de comportement élasto-plastique pour l'acier et

d'endommagement pour le béton. Les fibres d'acier et les fibres en béton ont été enrichies par deux discontinuités différentes. L'acier est associé à une loi cohésive dans le cadre de la plasticité et le béton à une loi cohésive dans le cadre de ma théorie d'endommagement. Ce modèle est capable de décrire le comportement d'une structure en béton armé jusqu'à la rupture.

Le tableau (4.1) résume les différents modèles poutres présentés brièvement ci-dessus.

Le chapitre 4 de manuscrit est dédié à l'enrichissement dans le cadre d'une approche généralisée, alors que les chapitres 5 et 6 à l'enrichissement des fibres. L'objectif final de cette thèse est de proposer des modèles poutres capables de reproduire le comportement des structures en béton armé jusqu'à la rupture.

Modèles des poutres enrichies	Description
[Armero and Ehrlich, 2004]	<ul style="list-style-type: none"> * Poutre métallique * Cinématique de Timoshenko (FLI) * Enrichissement du champ de rotation généralisé
[Ehrlich and Armero, 2005]	<ul style="list-style-type: none"> * Poutre métallique * Cinématique de Timoshenko (FLI) * Enrichissement de trois composantes du champ de déplacement généralisé * Analyse de blocage en cisaillement
[Armero and Ehrlich, 2006]	<ul style="list-style-type: none"> * Poutre métallique * Cinématique de Bernoulli * Enrichissement du champ de déplacement axial généralisé * Enrichissement du champ de rotation généralisé * Analyse de blocage en contrainte
[Dujc et al., 2010]	<ul style="list-style-type: none"> * Poutre métallique * Cinématique de Bernoulli * Enrichissement du champ de rotation généralisé
[Pham et al., 2010]	<ul style="list-style-type: none"> * Poutre en béton armé * Cinématique de Timoshenko (FLI) * Enrichissement du champ de rotation généralisé
[Pham et al., 2012]	<ul style="list-style-type: none"> * Poutre en béton armé (analyse multi-échelle) * Cinématique de Timoshenko (FLI) * Enrichissement du champ de rotation généralisé * Enrichissement du champ axial au niveau de la fibre
[Jukić et al., 2012]	<ul style="list-style-type: none"> * Poutre en béton armé * Cinématique de Bernoulli * Enrichissement du champ de rotation généralisé
[Bui et al., 2014]	<ul style="list-style-type: none"> * Poutre en béton armé (analyse multi-échelle) * Cinématique de Timoshenko (FLI) * Enrichissement du champ de déplacement transversal généralisé * Enrichissement du champ de rotation généralisé
[Jukić et al., 2014]	<ul style="list-style-type: none"> * Poutre en béton armé * Cinématique de Timoshenko (FLI) * Enrichissement du champ axial au niveau de la fibre
Nouveau modèle (chapitre 4)	<ul style="list-style-type: none"> * Poutre en béton armé * Cinématique de Timoshenko (FCQ) * Enrichissement du champ de rotation généralisé
Nouveaux modèles (chapitres 5 et 6)	<ul style="list-style-type: none"> * Poutre en béton armé * Cinématique de Timoshenko (FCQ) * Enrichissement du champ axial au niveau de la fibre

TABLE 4.1 – Différents modèles de poutres enrichies

4.4 Barre enrichie

Afin d'introduire la formulation mathématique des modèles enrichis, un problème plus simple d'une structure de type barre est d'abord considéré ci-dessous. La barre est discrétisée en n éléments finis dont un seul comporte une discontinuité, figure (4.12). Le champ de déplacement dans cet élément (dont les noeuds aux extrémités sont i et j) est enrichi avec un terme supplémentaire associé à la discontinuité tel que :

$$U(x, t) = \bar{U}(x, t) + H_{x_d}(x) \bar{\bar{U}}(t) \quad (4.4)$$

avec $H_{x_d}(x)$ la fonction Heaviside définie par :

$$H_{x_d}(x) = \begin{cases} 1, & x > x_d \\ 0, & x < x_d \end{cases} \quad (4.5)$$

$\bar{U}(x, t)$ le champ de déplacement régulier qui ne prend pas en compte la présence de la discontinuité et $\bar{\bar{U}}(t)$ la discontinuité de déplacement positionnée à l'abscisse x_d .

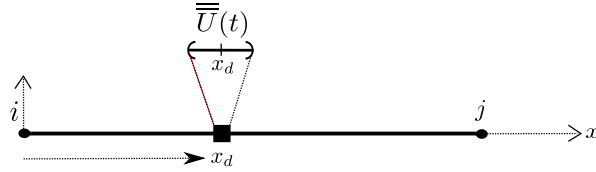


FIGURE 4.12 – Élément fini barre contenant une discontinuité $\bar{\bar{U}}$

La présence d'une discontinuité au sein d'un élément peut violer la continuité du champ de déplacements entre les éléments finis. Afin de conserver la continuité de ce champ, il faut assurer la continuité des déplacements nodaux. Pour cela, le champ de déplacement (4.4) est réécrit sous la forme suivante :

$$U(x, t) = d(x, t) + [H_{x_d}(x) - \varphi(x)] \bar{\bar{U}}(t) \quad (4.6)$$

avec

$$d(x, t) = \bar{U}(x, t) + \varphi(x) \bar{\bar{U}}(t) = \mathbf{N}(x) \mathbf{d}_e(t) = \begin{bmatrix} N_i(x) & N_j(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_i(t) \\ d_j(t) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

où $\mathbf{N}(x)$ la matrice des fonctions de forme et $\mathbf{d}_e(t)$ le vecteur des déplacements nodaux prenant en compte la présence de la discontinuité. Par ailleurs, avant l'insertion de la discontinuité, on a $\bar{\bar{U}}(t) = 0$, donc $d(x, t) = \bar{U}(x, t)$. La relation entre les deux variables $d(x, t)$ et $\bar{U}(x, t)$ est discutée dans le paragraphe suivant. De plus, $\varphi(x)$ est une fonction supplémentaire ayant pour rôle d'assurer la continuité du déplacement aux noeuds entre les éléments :

$$\begin{aligned} \text{au noeud } i &\Rightarrow U(x_i, t) = d(x_i, t) + [H_{x_d}(x_i) - \varphi(x_i)] \bar{\bar{U}}(t) = d(x_i, t) + [0 - \varphi(x_i)] \bar{\bar{U}}(t) \\ \text{au noeud } j &\Rightarrow U(x_j, t) = d(x_j, t) + [H_{x_d}(x_j) - \varphi(x_j)] \bar{\bar{U}}(t) = d(x_j, t) + [1 - \varphi(x_j)] \bar{\bar{U}}(t) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ain d'assurer la compatibilité du déplacement aux noeuds entre les éléments, deux conditions doivent être satisfaites :

$$\begin{array}{ll} \text{Pour que} & \begin{aligned} U(x_i, t) &= d(x_i, t) \\ U(x_j, t) &= d(x_j, t) \end{aligned} & \text{il faut que} & \begin{aligned} \varphi(x_i) &= 0 \\ \varphi(x_j) &= 1 \end{aligned} \end{array} \quad (4.9)$$

Remarque : les variables surmontées par un tiret correspondent aux champs continus alors que celles surmontées par deux tirets correspondent à la discontinuité.

Le champ de déformation est obtenu par une simple dérivation du champ de déplacement par rapport à l'abscisse x . Cela donne :

$$\begin{aligned}\varepsilon(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \{d(x, t)\} + \frac{\partial}{\partial x} \{-\varphi(x)\} \bar{\bar{U}}(t) + \frac{\partial}{\partial x} \{H_{x_d}(x)\} \bar{\bar{U}}(t) \\ &= \underbrace{\underbrace{\mathbf{B}(x) \mathbf{d}_e(t)}_{\bar{\varepsilon}} + \bar{G}(x) \bar{\bar{U}}(t)}_{\tilde{\varepsilon}} + \underbrace{\delta_{x_d}(x)}_{\bar{\bar{\varepsilon}}} \bar{\bar{U}}(t)\end{aligned}\quad (4.10)$$

avec $\delta_{x_d}(x)$ la fonction Dirac au point x_d , $\mathbf{B}(x) = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x(x)}$, $\bar{G}(x) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)$, $\tilde{\varepsilon}$ la partie régulière de la déformation et $\bar{\bar{\varepsilon}}$ la partie singulière.

Il reste à définir la fonction $\varphi(x)$. Cela nécessite une bonne compréhension de la cinématique de la discontinuité [Armero and Ehrlich, 2006]. En effet, la rupture totale de l'élément fini barre est atteinte lorsqu'il n'y a plus de transfert d'effort à travers la discontinuité. Autrement dit, dès lors que la valeur de la contrainte à la discontinuité est zéro. Dans ce cas, le déchargement est total et la déformation régulière s'annule partout dans l'élément. Cette idée permet de bien choisir les fonctions d'interpolation de la discontinuité. Il suffit en effet d'identifier les relations entre les degrés de liberté d'un élément fini dans son état de rupture final pour en déduire la cinématique de la discontinuité [Armero and Ehrlich, 2006]. Ceci est l'objectif de la section suivante.

4.4.1 Cinématique de la discontinuité

Afin de définir la cinématique de la discontinuité, une barre homogène constituée d'un matériau ayant une relation de comportement de la forme $\sigma = f(\tilde{\varepsilon})$ est considérée. La barre est encastree à l'extrémité gauche et soumise à une sollicitation de traction sous la forme d'un déplacement imposé à l'extrémité droite. La longueur initiale de la barre est L_0 . L'évolution du comportement de la barre au fur et à mesure du chargement est détaillée ci-dessous. La barre est modélisée avec un seul élément fini avec i et j les noeuds aux extrémités. Ainsi, d_i et d_j sont les déplacements nodaux totaux (4.7). \bar{U}_i et \bar{U}_j sont les déplacements nodaux réguliers dus aux déformations dans les zones continues.

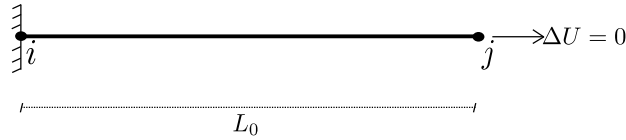


FIGURE 4.13 – État initial de la barre

L'état initial de la barre est illustré par la figure (4.13). Une fois le chargement appliqué, la barre résiste en emmagasinant de l'énergie de déformation élastique. La barre commence d'abord à s'allonger sans violer la continuité du matériau. t_d est l'instant où la discontinuité $\bar{\bar{U}}(t)$ sera intégrée au sein de la barre à la position x_d . Dans cette première phase $t < t_d$, la discontinuité n'est toujours pas introduite et $\bar{\bar{U}}(t) = 0$. La longueur de la barre allongée s'écrit donc :

$$L(t) = L_0 + \Delta U(t) = L_0 + \tilde{\varepsilon}(x_j, t)L_0 = L_0 + \bar{\varepsilon}(x_j, t)L_0 \quad (4.11)$$

Par ailleurs, la déformation est le rapport entre l'allongement de la barre et sa longueur initiale, d'où l'égalité $\Delta U(t) = \bar{\varepsilon}(x_j, t)L_0$ utilisée dans l'équation (4.11).

Jusqu'à cet instant, le matériau conserve sa continuité en tout point, par conséquent $\bar{U}(x, t) = d(x, t)$ (4.12). Les déplacements nodaux s'écrivent :

$$\begin{cases} d_i(t) = \bar{U}_i(t) = \bar{U}_i(t_0) \\ d_j(t) = \bar{U}_j(t) = \bar{U}_j(t_0) + \bar{\varepsilon}L_0 \end{cases} \quad (4.12)$$

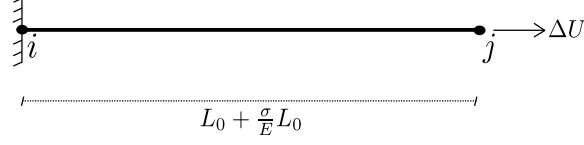


FIGURE 4.14 – État déformé de la barre avant ouverture de la discontinuité

Dès lors que la contrainte dans la barre atteint sa valeur limite σ_d à l'instant t_d , la discontinuité est introduite. Le matériau au niveau de la discontinuité se comporte selon un modèle de comportement différent à celui de la partie continue. Il s'agit d'un modèle cohésif rigide-linéaire de la forme :

$$C(t) = \sigma_d + S\bar{\bar{U}}(t), \quad (4.13)$$

avec $C(t)$ la contrainte cohésive à la discontinuité, σ_d la contrainte limite du matériau avant l'ouverture de la discontinuité, S le module d'adoucissement (négatif par définition) et $\bar{\bar{U}}$ le saut de déplacement.

Ainsi, l'allongement de la barre est désormais une résultante du saut de déplacement à la discontinuité et de la déformation dans le matériau continu. La longueur de la barre s'écrit donc :

$$L(t > t_d) = L_0 + \bar{\varepsilon}(x_j, t)L_0 = L_0 + \bar{\varepsilon}(x_j, t)L_0 + \bar{G}(x_j)\bar{\bar{U}}(t)L_0 \quad (4.14)$$

Les déplacements nodaux totaux (d_i et d_j) et les déplacements nodaux réguliers (\bar{U}_i et \bar{U}_j) ne sont plus les mêmes. Ils valent :

$$\begin{cases} \bar{U}_i(t) = \bar{U}_i(t_0) \\ \bar{U}_j(t) = \bar{U}_j(t_0) + \bar{\varepsilon}(x_j, t)L_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} d_i(t) = \bar{U}_i(t) + \varphi(x_i)\bar{\bar{U}}(t) = \bar{U}_i(t_0) \\ d_j(t) = \bar{U}_j(t) + \bar{\bar{U}}(t) = \bar{U}_j(t_0) + \varphi(x_j)\bar{\varepsilon}(x_j, t)L_0 + \bar{\bar{U}}(t) \end{cases} \quad (4.15)$$

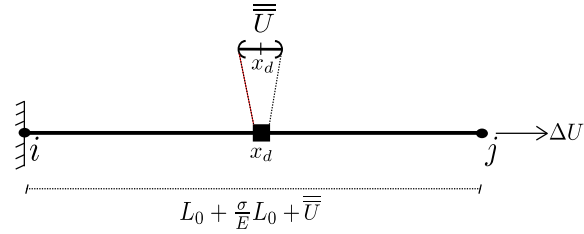


FIGURE 4.15 – État déformé de la barre après ouverture de la discontinuité

Or, selon les équations d'équilibre de la barre, la contrainte axiale doit rester la même partout dans l'élément que ce soit à la discontinuité ou en dehors de la discontinuité. En conséquence, le matériau en dehors de la discontinuité entre en déchargement pour conserver l'équilibre avec la valeur de la contrainte cohésive. Une fois le matériau totalement déchargé à $t = t_f$, la contrainte dans la barre disparaît et la déformation $\bar{\varepsilon}(x, t)$ tend également vers zéro. La discontinuité s'ouvre complètement et la barre est cassée. Cet état est nommé état de déformation nulle (*zero hinge mode*). La longueur de la barre à t_f vaut donc :

$$L(t = t_f) = L_0 + \bar{G}(x_j)\bar{\bar{U}}(t_f) \quad (4.16)$$

avec $\bar{\bar{U}}(t_f) = -\frac{\sigma_d}{S}$ d'après l'expression (4.13) de la contrainte cohésive C réduite à zéro à $t = t_f$. Enfin, les déplacements nodaux réguliers et totaux sont :

$$\begin{cases} \bar{U}_i(t_f) = \bar{U}_i(t_0) \\ \bar{U}_j(t_f) = \bar{U}_j(t_0) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} d_i(t_f) = \bar{U}_i(t_f) = \bar{U}_i(t_0) \\ d_j(t_f) = \bar{U}_j(t_f) + \bar{\bar{U}}(t_f) = \bar{U}_j(t_0) + \bar{\bar{U}}(t_f) \end{cases} \quad (4.17)$$

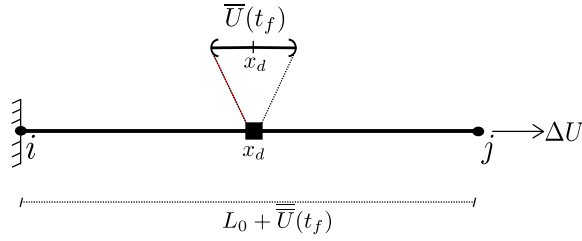


FIGURE 4.16 – État final de la barre après ouverture complète de la discontinuité

D'après cet état final, on peut tirer la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} d_i(t_f) \\ d_j(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_i(t_0) \\ d_j(t_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{\bar{U}}(t_f) \quad (4.18)$$

$$\mathbf{d}_e(t_f) = \mathbf{d}_e(t_0) + \mathbf{D}_d \bar{\bar{U}}(t_f)$$

avec \mathbf{D}_d une matrice définissant la cinématique de la discontinuité. En introduisant les équations de la cinématique (4.18) dans l'expression de la déformation régulière $\tilde{\varepsilon}$ (4.10) et en imposant que l'élément fini reproduise un état de déformation nulle ($\tilde{\varepsilon}(x, t_f) = 0$), on déduit l'expression de la fonction d'interpolation $\bar{G}(x)$ [Ehrlich and Armero, 2005] de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}(x, t_f) &= \mathbf{B}(x) \mathbf{d}_e(t_f) + \bar{G}(x) \bar{\bar{U}}(t_f) \\ 0 &= \mathbf{B}(x) [\mathbf{d}_e(t_0) + \mathbf{D}_d \bar{\bar{U}}(t_f)] + \bar{G}(x) \bar{\bar{U}}(t_f) \\ 0 &= \mathbf{B}(x) \mathbf{d}_e(t_0) + \mathbf{B}(x) \mathbf{D}_d \bar{\bar{U}}(t_f) + \bar{G}(x) \bar{\bar{U}}(t_f) \\ 0 &= 0 + \mathbf{B}(x) \mathbf{D}_d \bar{\bar{U}}(t_f) + \bar{G}(x) \bar{\bar{U}}(t_f) \end{aligned} \quad (4.19)$$

avec $\mathbf{B}(x) \mathbf{d}_e(t_0) = 0$ (déformation d'un corps rigide). La fonction d'interpolation $\bar{G}(x)$ est déterminée finalement par l'expression suivante :

$$\bar{G}(x) = -\mathbf{B}(x) \mathbf{D}_d \quad (4.20)$$

et par conséquent, $\varphi(x)$ peut être obtenue par une simple intégration.

La cinématique de la discontinuité développée ci-dessus est présentée dans un contexte général, quel que soit le comportement du matériau ($\sigma = f(\tilde{\varepsilon})$). Par conséquent, cette analyse est valable quelque soit le modèle utilisé pour le matériau hors de la discontinuité.

La même approche est suivie ci-dessous pour une poutre enrichie de cinématique Timoshenko.

4.5 Poutre Timoshenko enrichie

Dans ce qui suit, une structure de type poutre est discrétisée en n éléments finis poutres. Le champ de déplacement généralisé \mathbf{U}_S de la section S est composé de trois composantes : axiale U_x , transversale V_y et de rotation Θ_z . Ce champ est enrichi, d'une manière générale, selon les trois composantes, par trois variables de discontinuités $\bar{\bar{U}}_x, \bar{\bar{V}}_y, \bar{\bar{\Theta}}_z$. Ainsi, il s'écrit :

$$\mathbf{U}_S(x, t) = \bar{\mathbf{U}}_S(x, t) + \bar{\bar{\mathbf{U}}}_S(x, t) = \begin{cases} U_x(x, t) = \bar{U}_x(x, t) + \bar{\bar{U}}_x(x, t) = \mathbf{N}^u(x) \mathbf{d}_e(t) + \mathbf{M}^u(x) \bar{\bar{\mathbf{d}}}_e(t) \\ V_y(x, t) = \bar{V}_y(x, t) + \bar{\bar{V}}_y(x, t) = \mathbf{N}^v(x) \mathbf{d}_e(t) + \mathbf{M}^v(x) \bar{\bar{\mathbf{d}}}_e(t) \\ \Theta_z(x, t) = \bar{\Theta}_z(x, t) + \bar{\bar{\Theta}}_z(x, t) = \mathbf{N}^\theta(x) \mathbf{d}_e(t) + \mathbf{M}^\theta(x) \bar{\bar{\mathbf{d}}}_e(t) \end{cases} \quad (4.21)$$

avec \mathbf{N}^u , \mathbf{N}^v et \mathbf{N}^θ les fonctions de forme des trois composantes et \mathbf{d}_e le vecteur des déplacements nodaux défini par :

$$\mathbf{d}_e = \begin{cases} [U_{xi} & V_{yi} & \Theta_{zi} & U_{xj} & V_{yj} & \Theta_{zj}]^T & \text{pour la formulation FLI} \\ [U_{xi} & V_{yi} & \Theta_{zi} & \Delta V_{yk}^1 & \Delta \Theta_{zk} & \Delta V_{yk}^1 & U_{xj} & V_{yj} & \Theta_{zj}]^T & \text{pour la formulation FCQ} \end{cases} \quad (4.22)$$

\mathbf{M}^u , \mathbf{M}^v et \mathbf{M}^θ sont les matrices des fonctions de forme d'enrichissement et $\bar{\mathbf{d}}_e$ le vecteur qui porte les trois variables d'enrichissement défini tel que :

$$\bar{\mathbf{d}}_e = [\bar{U}_x \quad \bar{V}_y \quad \bar{\Theta}_z]^T \quad (4.23)$$

En général, les variables d'enrichissement ne sont pas nécessairement découplées. Par conséquent, la matrice des fonctions d'enrichissement s'écrit :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1^u & M_2^u & M_3^u \\ M_1^v & M_2^v & M_3^v \\ M_1^\theta & M_2^\theta & M_3^\theta \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{M}_1^u & \bar{M}_2^u & \bar{M}_3^u \\ \bar{M}_1^v & \bar{M}_2^v & \bar{M}_3^v \\ \bar{M}_1^\theta & \bar{M}_2^\theta & \bar{M}_3^\theta \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{M}}(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} H_{x_d}^u & 0 & 0 \\ 0 & H_{x_d}^v & 0 \\ 0 & 0 & H_{x_d}^\theta \end{bmatrix}}_{\bar{\bar{\mathbf{M}}}(x)} \quad (4.24)$$

avec $H_{x_d}^i$ les fonctions Heaviside (voir équation (4.5)). Le champ de déformation est obtenu par dérivation :

$$\varepsilon_S(x, t) = \begin{cases} \varepsilon(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} U_x(x, t) \\ \gamma(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} V_y(x, t) - \Theta_z(x, t) , \\ \kappa(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \Theta_z(x, t) \end{cases} \quad (4.25)$$

avec $\varepsilon_S(x, t)$ le vecteur du champ de déformation généralisé de la section $S(x)$.

$\varepsilon(x, t)$, $\gamma(x, t)$ et $\kappa(x, t)$ sont les trois composantes de déformation axiale, de cisaillement et de flexion. Par ailleurs, $\varepsilon_S(x, t)$ est décomposé en une partie standard $\bar{\varepsilon}_S(x)$ et une autre partie enrichie $\bar{\bar{\varepsilon}}_S(x)$ selon l'équation (4.26).

$$\varepsilon_S(x, t) = \begin{cases} \varepsilon(x, t) = \mathbf{B}^\varepsilon(x) \mathbf{d}_e(t) + \mathbf{G}_r^\varepsilon(x) \bar{\mathbf{d}}_e(t) \\ \gamma(x, t) = \mathbf{B}^\gamma(x) \mathbf{d}_e(t) + \mathbf{G}_r^\gamma(x) \bar{\mathbf{d}}_e(t) , \\ \kappa(x, t) = \mathbf{B}^\kappa(x) \mathbf{d}_e(t) + \mathbf{G}_r^\kappa(x) \bar{\mathbf{d}}_e(t) \end{cases} \quad (4.26)$$

avec $\mathbf{B}^\varepsilon(x)$, $\mathbf{B}^\gamma(x)$ et $\mathbf{B}^\kappa(x)$ les dérivées des fonctions de forme standards pour les trois composantes de déformation. $\mathbf{G}_r^\varepsilon(x)$, $\mathbf{G}_r^\gamma(x)$ et $\mathbf{G}_r^\kappa(x)$ sont les dérivées des fonctions de forme d'enrichissement pour les trois composantes de déformation enrichies.

$$\mathbf{G}_r(x) = \begin{bmatrix} G_{r,1}^\varepsilon & G_{r,2}^\varepsilon & G_{r,3}^\varepsilon \\ G_{r,1}^\gamma & G_{r,2}^\gamma & G_{r,3}^\gamma \\ G_{r,1}^\kappa & G_{r,2}^\kappa & G_{r,3}^\kappa \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{G}_{r,1}^\varepsilon & \bar{G}_{r,2}^\varepsilon & \bar{G}_{r,3}^\varepsilon \\ \bar{G}_{r,1}^\gamma & \bar{G}_{r,2}^\gamma & \bar{G}_{r,3}^\gamma \\ \bar{G}_{r,1}^\kappa & \bar{G}_{r,2}^\kappa & \bar{G}_{r,3}^\kappa \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{G}}_r(x) = \frac{\partial}{\partial x} \bar{\mathbf{M}}(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_{x_d}^u & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{x_d}^v & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{x_d}^\theta \end{bmatrix}}_{\bar{\bar{\mathbf{G}}}_r(x) = \frac{\partial}{\partial x} \bar{\bar{\mathbf{M}}}(x)} \quad (4.27)$$

avec $\delta_{x_d}^i$ les fonctions Dirac et $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_r$ la matrice contenant les fonctions Dirac. La matrice $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_r$ sera déterminée dans la section suivante.

L'expression (4.26) peut être réécrite sous la forme matricielle suivante :

$$\varepsilon_S(x, t) = \underbrace{\mathbf{B}(x) \mathbf{d}_e(t)}_{\bar{\varepsilon}_S(x, t)} + \underbrace{\bar{\mathbf{G}}_r(x) \bar{\mathbf{d}}_e(t)}_{\bar{\bar{\varepsilon}}_S(x, t)} \quad (4.28)$$

avec \mathbf{B} et $\bar{\mathbf{G}}_r$ les matrices contenant respectivement les fonctions d'interpolation des champs de déformations standard et enrichie.

4.5.1 Détermination de la matrice $\overline{\mathbf{G}}_r$

La cinématique des discontinuités pour la poutre Timoshenko est déterminée selon la même méthodologie que la section (4.4.1) pour l'élément barre. La figure (4.17) illustre les trois types de discontinuités.

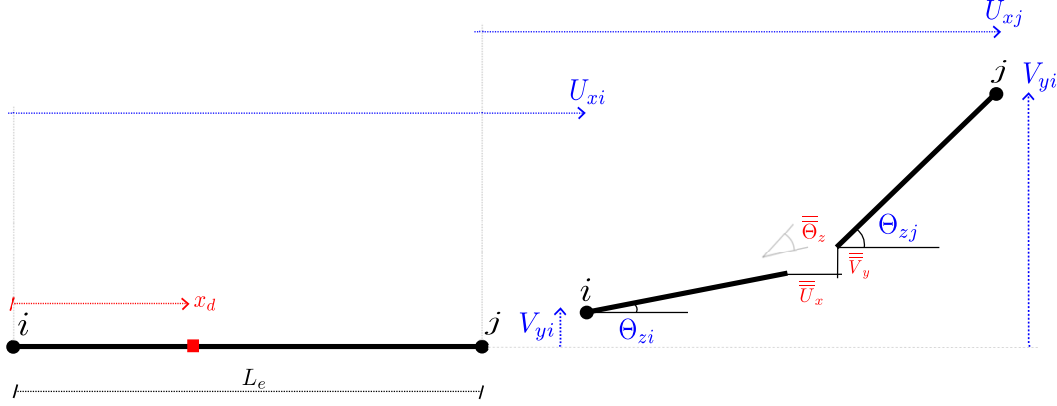


FIGURE 4.17 – Cinématique des discontinuités d'une poutre

Comme pour l'élément barre, ces relations cinématiques sont cherchées à l'état final de la poutre, lorsque les déformations s'annulent dans les zones continues. Les déplacements nodaux à l'état final s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} U_{xi} &= \overline{U}_{xi} & V_{yi} &= \overline{V}_{yi} & \Theta_{zi} &= \overline{\Theta}_{zi} \\ U_{xj} &= \overline{U}_{xj} + \overline{\overline{U}}_x & V_{yj} &= \overline{V}_{yj} + \overline{\overline{V}}_y & \Theta_{zj} &= \overline{\Theta}_{zj} + \overline{\overline{\Theta}}_z \end{aligned} \quad (4.29)$$

D'après la figure (4.17), on tire les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \overline{U}_{xj} &= \overline{U}_{xi} = U_{xi} \\ \overline{V}_{yj} &= V_{yi} + x_d \Theta_{zi} + (L_e - x_d) \Theta_{zj} \\ \overline{\Theta}_{zj} &= \overline{\Theta}_{zi} = \Theta_{zi} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Les relations (4.29) et (4.30) donnent :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{U}}_x &= U_{xi} + \overline{\overline{U}}_x \\ V_{yj} &= V_{yi} + \Theta_{zi} L_e + \overline{\overline{V}}_y + (L_e - x_d) \overline{\overline{\Theta}}_z \\ \Theta_{zj} &= \Theta_{zi} + \overline{\overline{\Theta}}_z \end{aligned} \quad (4.31)$$

Ainsi, à partir de (4.31), les expressions des sauts de déplacements sont déduites par la relation (4.32) :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{U}}_x &= U_{xj} - U_{xi} \\ \overline{\overline{V}}_y &= V_{yj} - V_{yi} - x_d \Theta_{zi} - (L_e - x_d) \Theta_{zj} \\ \overline{\overline{\Theta}}_z &= \Theta_{zj} - \Theta_{zi} \end{aligned} \quad (4.32)$$

À l'état final, les discontinuités vont générer un mouvement de corps rigide, donc les déformations régulières doivent être nulles. Par conséquent, les trois composantes de $\tilde{\varepsilon}_S$ valent zéro :

$$\tilde{\varepsilon}_S(x, t) = \mathbf{B}(x) \mathbf{d}_e(t) + \overline{\mathbf{G}}(x) \overline{\mathbf{d}}_e(t) = \begin{cases} \tilde{\varepsilon}(x, t) = \mathbf{B}^\varepsilon(x) \mathbf{d}_e(t) + \overline{\mathbf{G}}_r^\varepsilon(x) \overline{\mathbf{d}}_e(t) \\ \tilde{\gamma}(x, t) = \mathbf{B}^\gamma(x) \mathbf{d}_e(t) + \overline{\mathbf{G}}_r^\gamma(x) \overline{\mathbf{d}}_e(t) = 0 \\ \tilde{\kappa}(x, t) = \mathbf{B}^\kappa(x) \mathbf{d}_e(t) + \overline{\mathbf{G}}_r^\kappa(x) \overline{\mathbf{d}}_e(t) \end{cases} \quad (4.33)$$

En introduisant l'équation (4.32) dans (4.33), les expressions de $\overline{\mathbf{G}}_r^\varepsilon$, $\overline{\mathbf{G}}_r^\gamma$ et $\overline{\mathbf{G}}_r^\kappa$ peuvent être déterminées grâce aux conditions $\tilde{\varepsilon}_S(x, t) = 0$ en fonction des expressions des fonctions \mathbf{B}^ε , \mathbf{B}^γ et \mathbf{B}^κ . Par conséquent, les fonctions d'enrichissement \mathbf{G}_r changent selon le choix de la formulation élément fini.

4.5.1.1 Élément FLI enrichi

Pour le cas d'une formulation Timoshenko de type **FLI** (voir équation (3.37)) dont les champs sont interpolés avec des fonctions linéaires et découplées, le champ de déformation régulier à l'état final (après les ouvertures totales des discontinuités) s'écrit :

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon} &= \frac{1}{L_e}(U_{xj} - U_{xi}) + \overline{\mathbf{G}}_r^\varepsilon(x)\overline{\mathbf{d}}_e(t) = 0 \\ \tilde{\gamma} &= \frac{1}{L_e}(V_{yj} - V_{yi}) - (1 - \frac{x}{L_e})\Theta_{zi} - \frac{x}{L_e}\Theta_{zj} + \overline{\mathbf{G}}_r^\gamma(x)\overline{\mathbf{d}}_e(t) = 0 \\ \tilde{\kappa} &= \frac{1}{L_e}(\Theta_{zj} - \Theta_{zi}) + \overline{\mathbf{G}}_r^\kappa(x)\overline{\mathbf{d}}_e(t) = 0\end{aligned}\tag{4.34}$$

A partir de ces équations et des relations (4.29) on peut déduire :

$$\overline{\mathbf{G}}_r(x) = \begin{bmatrix} \overline{G}_{r,1}^\varepsilon & \overline{G}_{r,2}^\varepsilon & \overline{G}_{r,3}^\varepsilon \\ \overline{G}_{r,1}^\gamma & \overline{G}_{r,2}^\gamma & \overline{G}_{r,3}^\gamma \\ \overline{G}_{r,1}^\kappa & \overline{G}_{r,2}^\kappa & \overline{G}_{r,3}^\kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_e} & -(1 + \frac{x+x_d}{L_e}) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_e} \end{bmatrix}\tag{4.35}$$

Cette dernière expression montre un couplage entre la composante transversale et de rotation des variables de discontinuité dans le calcul de la déformation de cisaillement. [Ehrlich and Armero, 2005] ont montré que ce couplage permet de surmonter le problème de blocage par contrainte (*stress locking*). Ce problème se manifeste numériquement par une dépendance pathologique de la réponse au maillage. Les auteurs ont réalisé une étude aux valeurs propres avec laquelle ils ont prouvé que ce couplage permet d'éviter tous les modes d'énergie nulle. Le fait d'enrichir chaque champ par une variable indépendante non couplée ne suffit pas pour détecter tous les modes d'énergie, d'où l'origine du blocage par contrainte.

4.5.1.2 Élément FCQ enrichi pour la rotation

La formulation **FCQ** utilise des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur et ne présente pas le problème de blocage par cisaillement (voir chapitre 3). De ce fait, les champs de déplacements peuvent être enrichis par des variables de discontinuités non couplées entre elles.

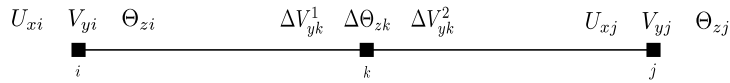


FIGURE 4.18 – Élément **FCQ**

Remarque : Il convient ici de mentionner que le problème analysé dans ce chapitre concerne uniquement l'enrichissement du champ de rotation. L'enrichissement du champ de déplacement transversal ne sera pas traité (voir par exemple [Ehrlich and Armero, 2005], [Bui et al., 2014]).

Selon (4.21), le champ de rotation enrichi s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\Theta_z(x, t) &= \mathbf{N}^\theta(x)\mathbf{d}_e(t) + \mathbf{M}^\theta(x)\overline{\mathbf{d}}_e(t) \\ \Leftrightarrow \Theta_z(x, t) &= \mathbf{N}^\theta(x)\mathbf{d}_e(t) + M_3^\theta(x)\overline{\Theta}_z(t) \\ \Leftrightarrow \Theta_z(x, t) &= \mathbf{N}^\theta(x)\mathbf{d}_e(t) + \left[H_{x_d}^\theta + \overline{M}_3^\theta(x) \right] \overline{\Theta}_z(t)\end{aligned}\tag{4.36}$$

où $\mathbf{N}^\theta(x)$ est définie dans (3.50). Il reste à déterminer la fonction $\overline{M}_3^\theta(x)$. La méthode utilisée précédemment pour déterminer les fonctions d'enrichissement associées à la formulation **FLI** ne permet pas de déterminer les fonctions d'enrichissement pour la formulation **FCQ** à cause de la présence d'un degré de liberté interne dans cette dernière. Ainsi une autre méthode inspirée du travail de [Jukić, 2013] est proposée ci-dessous.

L'idée principale de la méthode est que l'enrichissement ne doit pas affecter les valeurs de rotation aux trois noeuds de l'élément **FCQ**. Or la valeur $\Delta\Theta_{zk}(t)$ ne représente pas la rotation en $x = \frac{L}{2}$. En effet, en utilisant (3.50), on trouve :

$$\Theta_z\left(\frac{L}{2}, t\right) = \Delta\Theta_{zk}(t) - \frac{1}{4} [\Theta_{zi}(t) + \Theta_{zj}(t)] \quad (4.37)$$

Par conséquent, une petite modification doit être réalisée sur l'écriture de l'interpolation du champ de rotation en introduisant au lieu de $\Delta\Theta_{zk}(t)$ un autre degré de liberté. Ce nouveau degré de liberté est défini selon (4.37). Le champ de rotation s'interpole désormais de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Theta_z(x, t) &= N_3^\theta(x)\Theta_{zi} + N_6^\theta(x)\Theta_{zj} + N_8^\theta(x)\Delta\Theta_{zk} \\ &= N_3^\theta(x)\Theta_{zi} + N_6^\theta(x)\Theta_{zj} + N_8^\theta(x) \left(\Theta_{zk} + \frac{1}{4}[\Theta_{zi}(t) + \Theta_{zj}(t)] \right) \\ &= \left(N_3^\theta(x) + \frac{1}{4}N_8^\theta(x) \right) \Theta_{zi} + \left(N_6^\theta(x) + \frac{1}{4}N_8^\theta(x) \right) \Theta_{zj} + N_8^\theta(x)\Theta_{zk} \\ &= N_{3^*}^\theta(x)\Theta_{zi} + N_{6^*}^\theta(x)\Theta_{zj} + N_{8^*}^\theta(x)\Theta_{zk} \\ &= \sum_{\alpha=i,j,k} N_{\alpha^*}^\theta \Theta_{z\alpha} \end{aligned} \quad (4.38)$$

avec les trois nouvelles fonctions d'interpolation :

$$\begin{aligned} N_{3^*}^\theta(x) &= N_3^\theta(x) + \frac{1}{4}N_8^\theta(x) = 1 - \frac{3x}{L} + \frac{2x^2}{L^2} \\ N_{6^*}^\theta(x) &= N_6^\theta(x) + \frac{1}{4}N_8^\theta(x) = -\frac{x}{L} + 2\frac{x^2}{L^2} \\ N_{8^*}^\theta(x) &= N_8^\theta(x) = \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Ces nouvelles fonctions de forme (4.39) sont associées aux trois valeurs de rotations nodales situées à $x = 0$, $x = L$ et $x = \frac{L}{2}$. Par ailleurs, ces fonctions vérifient les conditions classiques qui doivent être respectées par les fonctions de forme [Zienkiewicz and Taylor, 2000] tels que :

$$\begin{aligned} N_{3^*}^\theta(0) &= 1, & N_{3^*}^\theta\left(\frac{L}{2}\right) &= 0, & N_{3^*}^\theta(L) &= 0 \\ N_{6^*}^\theta(0) &= 0, & N_{6^*}^\theta\left(\frac{L}{2}\right) &= 0, & N_{6^*}^\theta(L) &= 1 \\ N_{8^*}^\theta(0) &= 0, & N_{8^*}^\theta\left(\frac{L}{2}\right) &= 1, & N_{8^*}^\theta(L) &= 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

ainsi que

$$\sum_{\alpha=i,j,k} N_{\alpha^*}^\theta = 1 \quad (4.41)$$

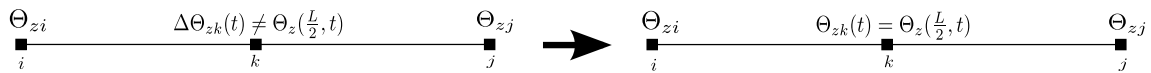


FIGURE 4.19 – Élément **FCQ** modifié

Une illustration des anciennes et de nouvelles fonctions d'interpolation est donnée en figures (4.20a) et (4.20b).

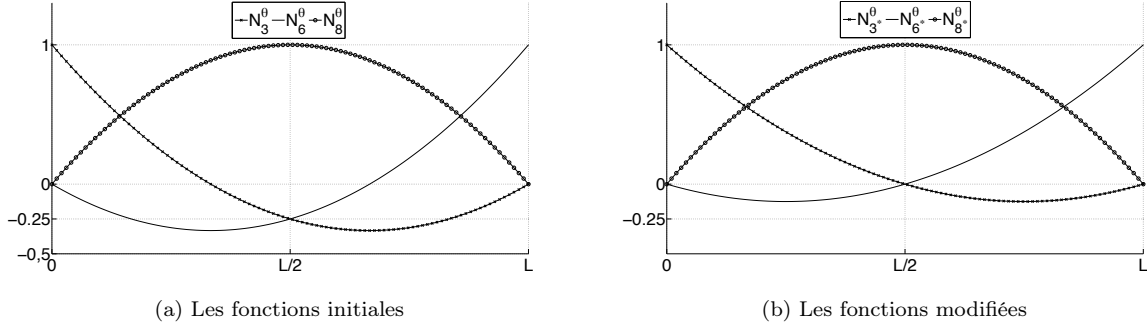


FIGURE 4.20 – Les fonctions de formes de la rotation pour la formulation **FCQ**

La nouvelle expression du champ de rotation enrichie s'écrit :

$$\Theta_z(x, t) = N_{3*}^\theta(x)\Theta_{zi} + N_{6*}^\theta(x)\Theta_{zj} + N_{8*}^\theta(x)\Theta_{zk} + \left[H_{x_d}^\theta + \overline{M}_3^\theta(x) \right] \overline{\Theta}_z(t) \quad (4.42)$$

Comme pour le cas de la barre enrichie (4.8) et (4.9), la présence de la discontinuité au sein de l'élément poutre ne doit pas affecter la compatibilité entre les éléments. Les valeurs de déplacements nodaux aux points i et j ne doivent donc se trouver affectées. D'après (4.42), les conditions suivantes doivent être respectées :

$$\begin{aligned} \text{Pour } x = 0 \quad : \quad \Theta_z(0, t) = \Theta_{zi} &\implies \overline{M}_3^\theta(0) = 0 \\ \text{Pour } x = L \quad : \quad \Theta_z(L, t) = \Theta_{zj} &\implies \overline{M}_3^\theta(L) = -1 \end{aligned} \quad (4.43)$$

Or, dès lors que l'élément **FCQ** possède un troisième degré de liberté interne porté par un noeud situé au milieu de l'élément ($x = \frac{L}{2}$), deux cas doivent être étudiés selon la position de la discontinuité x_d ($x_d \leq \frac{L}{2}$ ou $x_d > \frac{L}{2}$) :

$$\Theta_z\left(\frac{L}{2}, t\right) = \Theta_{zk} \implies \begin{cases} \text{si } x_d \leq \frac{L}{2} \implies \overline{M}_3^\theta\left(\frac{L}{2}\right) = -1 \\ \text{si } x_d > \frac{L}{2} \implies \overline{M}_3^\theta\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad (4.44)$$

Parmi les fonctions qui vérifient les conditions (4.43) et (4.44), le plus simple est de proposer :

$$\overline{M}_3^\theta(x) = \begin{cases} -(N_{6*}^\theta(x) + N_{8*}^\theta(x)) & \text{pour } x_d \leq \frac{L}{2} \\ -N_{6*}^\theta(x) & \text{pour } x_d > \frac{L}{2} \end{cases} \quad (4.45)$$

Ensuite, la courbure $\kappa(x, t)$ est déduite par une simple dérivation du champ de rotation enrichie (4.36) tel que :

$$\begin{aligned} \kappa(x, t) &= \mathbf{B}^\kappa(x)\mathbf{d}_e(t) + \mathbf{G}_r^\kappa(x)\overline{\mathbf{d}}_e(t) \\ \kappa(x, t) &= \mathbf{B}^\kappa(x)\mathbf{d}_e(t) + G_{r,3}^\kappa(x)\overline{\Theta}_z(t) \\ \kappa(x, t) &= \mathbf{B}^\kappa(x)\mathbf{d}_e(t) + \left[\overline{G}_{r,3}^\kappa(x) + \delta_{x_d}^\theta \right] \overline{\Theta}_z(t) \end{aligned} \quad (4.46)$$

avec $\overline{G}_{r,3}^\kappa(x) = \frac{\partial \overline{M}_3^\theta(x)}{\partial x}$.

Par conséquent, on obtient :

$$\overline{G}_{r,3}^\kappa(x) = \begin{cases} -(B_{6*}^\kappa(x) + B_{8*}^\kappa(x)) = \frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L} & \text{pour } x_d \leq \frac{L}{2} \\ -B_{6*}^\kappa(x) = -\frac{4x}{L^2} + \frac{1}{L} & \text{pour } x_d > \frac{L}{2} \end{cases} \quad (4.47)$$

Il faut vérifier si ce choix de $\overline{G}_{r,3}^\kappa(x)$ est compatible avec l'état de déformation nulle ($\tilde{\kappa}(x, t) = 0$) après l'ouverture complète de la discontinuité (figure (4.21)).

Pour $x_d \leq \frac{L}{2}$:

$$\tilde{\kappa}(x, t) = \mathbf{B}^\kappa(x) \mathbf{d}_e(t) + G_{r,3}^\kappa(x) \overline{\Theta}(t) = B_{3^*}^\kappa(x) \Theta_{zi}(t) + B_{6^*}^\kappa(x) \Theta_{zj}(t) + B_{8^*}^\kappa(x) \Theta_{zk}(t) - [B_{6^*}^\kappa(x) - B_{8^*}^\kappa(x)] \overline{\Theta}_z(t) \quad (4.48)$$

L'introduction de l'expression de $\overline{\Theta}_z$ (4.32) donne :

$$\tilde{\kappa}(x, t) = B_{3^*}^\kappa(x) \Theta_{zi}(t) + B_{6^*}^\kappa(x) \Theta_{zj}(t) + B_{8^*}^\kappa(x) \Theta_{zk}(t) - [B_{6^*}^\kappa(x) - B_{8^*}^\kappa(x)] (\Theta_{zk}(t) - \Theta_{zi}(t)) \quad (4.49)$$

Or, à l'état final, la discontinuité va générer un mouvement de corps rigide qui apparaît sur une partie de l'élément à gauche ou à droite de la discontinuité (selon que $x_d > L/2$ ou $< L/2$). Pour $x_d < L/2$, cela implique $\Theta_{zk} = \Theta_{zj}$ (figure (4.21a)). En conséquence :

$$\tilde{\kappa}(x, t) = \underbrace{(B_{3^*}^\kappa(x) + B_{6^*}^\kappa(x) + B_{8^*}^\kappa(x))}_{=0 \text{ voir (4.41)}} \Theta_{zi}(t) = 0, \quad (4.50)$$

avec $(B_{3^*}^\kappa(x) + B_{6^*}^\kappa(x) + B_{8^*}^\kappa(x) = 0)$ une hypothèse de base associée à la construction des fonctions de forme de la formulation **FCQ** (voir équation (4.41)).

Si on répète la même procédure pour le cas où $x_d > \frac{L}{2}$, en utilisant cette fois $\Theta_{zk} = \Theta_{zi}$ (figure (4.21b)), on trouve d'une manière similaire que $\tilde{\kappa}(x, t) = 0$. Donc les expressions (4.47) vérifient l'état de déformation nulle.

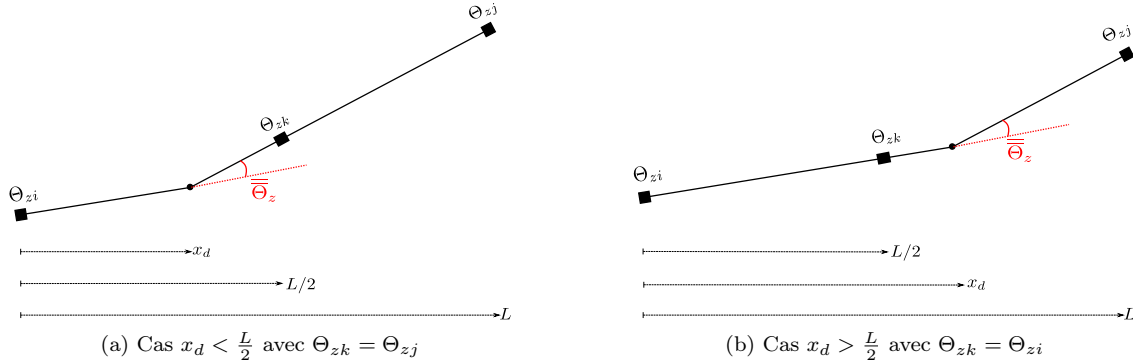


FIGURE 4.21 – État de déformation final de la poutre enrichie

La position de la discontinuité peut être déterminée à partir de la distribution de la force le long de l'élément. La discontinuité naît à l'endroit x_d où la force (le moment de flexion) atteint sa valeur ultime. Or comme les fonctions d'interpolation du champ de rotation sont quadratiques, la courbure est linéaire. Par conséquent, les courbures maximales apparaissent aux extrémités de l'élément à $x = 0$ et à $x = L$. De plus, pour toute loi (de flexion) monotone non adoucissante décrivant le comportement du matériau, les valeurs maximales de la contrainte (moment de flexion) coïncident avec celles de la déformation (la courbure). Par conséquent, la discontinuité apparaît à une des deux extrémités de l'élément. Pour le cas où la déformation (la courbure) est constante le long de l'élément (flexion pure par exemple), l'expression de la déformation doit être constante, et par conséquent les formes linéaires de la fonction d'enrichissement $\overline{G}_{r,3}^\kappa(x)$ (4.47) ne sont plus appropriées [Jukić, 2013]. C'est pourquoi une fonction constante est supposée, telle que $\overline{G}_{r,3}^\kappa(x) = -\frac{1}{L}$. La discontinuité peut apparaître à n'importe quelle position dans l'élément, donc on choisit $x_d = \frac{L}{2}$.

Finalement la fonction d'enrichissement $\overline{G}_{r,3}^\kappa(x)$ pour la formulation **FCQ** enrichie pour la rotation

prend la forme suivante selon la position x_d de la discontinuité :

$$\overline{G}_{r,3}^\kappa(x) = \begin{cases} \frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L} & \text{pour } x_d = 0 \\ -\frac{4x}{L^2} + \frac{1}{L} & \text{pour } x_d = L \\ -\frac{1}{L} & \text{pour } x_d = \frac{L}{2} \end{cases} \quad (4.51)$$

4.6 Formulation variationnelle

Pour un problème d'une poutre discrétisée en n éléments e , le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\sum_e \{W_{int}^e - W_{ext}^e\} = 0 \quad (4.52)$$

Le travail des efforts internes d'un élément poutre e de longueur L^e vaut :

$$W_{int}^e = \int_{L^e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_S(x, t)^T \mathbf{F}_S(x, t) dx \quad (4.53)$$

avec δ le symbol des variables virtuelles, $\boldsymbol{\varepsilon}_S(x, t)$ le vecteur des déformations généralisées de la section, $\mathbf{F}_S(x, t)$ le vecteur des forces généralisées de la section

$$\mathbf{F}_S(x, t) = \begin{bmatrix} F_x(x, t) \\ F_y(x, t) \\ M_z(x, t) \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

et $F_x(x, t)$, $F_y(x, t)$ et $M_z(x, t)$, l'effort axial, l'effort de cisaillement et le moment fléchissant dans la section $S(x)$ respectivement. Les variables (régulières) virtuelles des déplacements et des déformations sont interpolées avec les mêmes fonctions de forme que les variables réelles. Par contre, une différente matrice des fonctions de forme notée $\mathbf{G}_v(x)$ peut être utilisée pour les variables de discontinuités virtuelles. Cette fonction $\mathbf{G}_v(x)$ joue le même rôle que la fonction $\mathbf{G}_r(x)$ associée aux variables de discontinuités réelles. Ce point est abordé ci-dessous et dans la section 4.6.1.

L'introduction de l'expression enrichie du vecteur des déformations généralisées (4.28) dans (4.53) donne :

$$\begin{aligned} W_{int}^e &= \int_{L^e} \delta \left(\mathbf{B}(x) \mathbf{d}_e(t) + \mathbf{G}_v(x) \bar{\bar{\mathbf{d}}}_e(t) \right)^T \mathbf{F}_S(x, t) dx \\ &= \delta \mathbf{d}_e(t)^T \int_{L^e} \mathbf{B}(x)^T \mathbf{F}_S(x, t) dx + \delta \bar{\bar{\mathbf{d}}}_e(t)^T \int_{L^e} \mathbf{G}_v(x)^T \mathbf{F}_S(x, t) dx \\ &= \delta \mathbf{d}_e(t)^T \mathbf{F}_{int,B}^e(t) + \delta \bar{\bar{\mathbf{d}}}_e(t)^T \mathbf{F}_{int,G}^e(t) \end{aligned} \quad (4.55)$$

avec $\mathbf{F}_{int,B}^e(t)$ et $\mathbf{F}_{int,G}^e(t)$ les forces internes nodales élémentaires.

Ainsi, l'introduction des expressions élémentaires dans l'équation du principe des travaux virtuels (4.52) permet d'obtenir l'équilibre de la structure sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \sum_e \left\{ \delta \mathbf{d}_e(t)^T \mathbf{F}_{int,B}^e(t) + \delta \bar{\bar{\mathbf{d}}}_e(t)^T \mathbf{F}_{int,G}^e(t) - \delta d(t)^T \mathbf{F}_{ext}^e(t) \right\} &= 0 \\ \sum_e \left\{ \delta \mathbf{d}_e(t)^T (\mathbf{F}_{int,B}^e(t) - \mathbf{F}_{ext}^e(t)) + \delta \bar{\bar{\mathbf{d}}}_e(t)^T \mathbf{F}_{int,G}^e(t) \right\} &= 0 \\ \delta \mathbf{d}_{str}(t)^T (\mathbf{F}_{int,B}^{str}(t) - \mathbf{F}_{ext}^{str}(t)) + \sum_e^{\bar{\bar{n}}} \bar{\bar{\mathbf{d}}}_e(t)^T \mathbf{F}_{int,G}^e(t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.56)$$

avec \bar{n} le nombre d'éléments dont au moins une discontinuité du vecteur $\bar{\mathbf{d}}$ est active. Par ailleurs, l'équilibre doit être respecté pour tous les déplacements virtuels $\delta \mathbf{d}_{str}(t)$ ainsi que pour tout saut virtuel élémentaire $\bar{\mathbf{d}}_e(t)$. Par conséquent, on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{int,B}^{str}(t) - \mathbf{F}_{ext}^{str}(t) &= 0 \\ \forall e \in 1, 2, \dots, \bar{n} : \quad \mathbf{F}_{int,G}^e(t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.57)$$

La première équation de ce système représente l'équilibre global de la structure, avec $\mathbf{F}_{int,B}^{str}(t)$ et $\mathbf{F}_{ext}^{str}(t)$ respectivement les efforts internes et externes au niveau de la structure. La dimension de ces vecteurs est égale au nombre de degrés de liberté par noeud (c'est à dire 3 dans le plan) multiplié par le nombre total des noeuds. Les autres équations représentent l'équilibre local élémentaire au niveau de chaque saut de déplacement généralisé (axial, transversal et de rotation). Ainsi, pour un élément donné, si les trois composantes de discontinuités sont activées, trois équations d'équilibre locales concernant cet élément doivent être respectées. Par ailleurs, l'expression de $\mathbf{F}_{int,G}^e(t)$ peut être développée en tenant compte de la décomposition de la matrice $\mathbf{G}_v(x)$ en deux parties ($\bar{\mathbf{G}}_v(x)$ et $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_v(x)$) dans la même logique de l'équation (4.27). Cela donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{int,G}^e(t) &= \int_{L^e} \mathbf{G}_v(x)^T \mathbf{F}_S(x, t) dx = \int_{L^e} (\bar{\mathbf{G}}_v(x)^T + \bar{\bar{\mathbf{G}}}_v(x)^T) \mathbf{F}_S(x, t) dx \\ &= \int_{L^e} \bar{\mathbf{G}}_v(x)^T \mathbf{F}_S(x, t) dx + \int_{L^e} \bar{\bar{\mathbf{G}}}_v(x)^T \mathbf{F}_S(x, t) dx \\ &= \int_{L^e} \bar{\mathbf{G}}_v(x)^T \mathbf{F}_S(x, t) dx + \mathbf{F}_S(x_d, t) = 0 \end{aligned}$$

avec

$$\int_{L^e} \bar{\bar{\mathbf{G}}}_v(x)^T \mathbf{F}_S(x, t) dx = \int_{L^e} \begin{bmatrix} \delta_{x_d}^u & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{x_d}^v & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{x_d}^\theta \end{bmatrix} \mathbf{F}_S(x, t) dx = \mathbf{F}_S(x_d, t).$$

Par conséquent

$$\int_{L^e} \bar{\mathbf{G}}_v(x)^T \mathbf{F}_S(x, t) dx = -\mathbf{F}_S(x_d, t) = -\mathbf{C}_S(t) \quad (4.58)$$

avec $\mathbf{C}_S(t)$ le vecteur des forces cohésives élémentaires défini par

$$\mathbf{C}_S(t) = \begin{bmatrix} C_x(t) \\ C_y(t) \\ C_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x(x_d, t) \\ F_y(x_d, t) \\ M_z(x_d, t) \end{bmatrix} = \mathbf{F}_S(x_d, t) \quad (4.59)$$

et

$$\bar{\mathbf{G}}_v(x) = \begin{bmatrix} \bar{G}_{v,1}^\varepsilon & \bar{G}_{v,2}^\varepsilon & \bar{G}_{v,3}^\varepsilon \\ \bar{G}_{v,1}^\gamma & \bar{G}_{v,2}^\gamma & \bar{G}_{v,3}^\gamma \\ \bar{G}_{v,1}^\kappa & \bar{G}_{v,2}^\kappa & \bar{G}_{v,3}^\kappa \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

En général, pour un même élément, les trois composantes de discontinuités sont introduites au même endroit ($x_d^u = x_d^v = x_d^\theta$). Donc il reste à déterminer les fonctions $\bar{\mathbf{G}}_v(x)$, ce qui fait l'objectif de la section suivante.

4.6.1 Détermination des fonctions $\bar{\mathbf{G}}_v$

Dans la plupart des cas, $\bar{\mathbf{G}}_v(x)$ est considérée égale à $\bar{\mathbf{G}}_r(x)$ utilisée pour l'interpolation des variables de discontinuités réelles. Afin de vérifier si c'est aussi le cas pour ce modèle, il faut vérifier l'égalité (4.59)

entre la force de cohésion à la discontinuité $C_S(t)$ et les forces généralisées $F_S(x_d, t)$ à la position de la discontinuité. On rappelle que le modèle étudié ici concerne l'enrichissement du champ de rotation pour la formulation **FCQ**.

Dès lors que le moment prend une forme linéaire comme expliqué dans la section précédente, il suit l'expression analytique suivante :

$$M_z(x, t) = \alpha x + \beta \quad (4.61)$$

avec α et β des constantes.

Pour le cas où $x_d = 0$, on a $\overline{G}_{r,3}^\kappa(x) = \frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L}$ (voir (4.51)). L'introduction de cette dernière dans l'expression de $C_z(t)$ donne :

$$C_z(t) = - \int_0^L \underbrace{\overline{G}_{v,3}^\kappa(x)}_{=\overline{G}_{r,3}^\kappa(x)} M_z(x, t) dx = - \int_0^L \left(\frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L} \right) (\alpha x + \beta) dx = \frac{5L}{3} \alpha - 2\beta \neq \beta = M_z(0, t) \quad (4.62)$$

Par conséquent, pour $x_d = 0$, l'expression de $\overline{G}_{v,3}^\kappa(x)$ doit prendre une autre forme que celle de $\overline{G}_{r,3}^\kappa(x)$ afin de respecter la condition d'équilibre précédente. De manière générale, pour déterminer $\overline{G}_{v,3}^\kappa(x)$ associée à une discontinuité située à $x = x_d$, on va supposer qu'elle prenne une forme linéaire telle que :

$$\overline{G}_{v,3}^\kappa(x) = ax + b \quad (4.63)$$

avec a et b constantes à déterminer par identification avec l'égalité $C_z(t) = M_z(x_d, t)$.

On a :

$$C_z(t) = - \int_0^L \overline{G}_{v,3}^\kappa(x) M_z(x, t) dx = - \int_0^L (ax + b) (\alpha x + \beta) dx = \alpha \left(-a \frac{L^3}{3} - b \frac{L^2}{2} \right) + \beta \left(-a \frac{L^2}{2} - bL \right) \quad (4.64)$$

et

$$M_z(x_d, t) = \alpha x_d + \beta \quad (4.65)$$

Par ailleurs, l'égalité entre les deux équations (4.64) et (4.65) donne

$$\alpha x_d + \beta = \alpha \left(-a \frac{L^3}{3} - b \frac{L^2}{2} \right) + \beta \left(-a \frac{L^2}{2} - bL \right) \quad (4.66)$$

La procédure d'identification entre les deux côtés de l'équation (4.66) donne :

$$\begin{aligned} a &= \frac{6}{L^2} - \frac{12}{L^3} x_d \\ b &= -\frac{4}{L} + \frac{6}{L^2} x_d \end{aligned} \quad (4.67)$$

Par conséquent, la fonction d'enrichissement $\overline{G}_{v,3}^\kappa(x)$ associée à x_d est :

$$\overline{G}_{v,3}^\kappa(x) = \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12}{L^3} x_d \right) x - \frac{4}{L} + \frac{6}{L^2} x_d \quad (4.68)$$

Finalement, la fonction d'enrichissement $\overline{G}_{v,3}^\kappa(x)$ de la discontinuité de rotation virtuelle prend différentes formes selon la position de la discontinuité x_d dans l'élément :

$$\overline{G}_{v,3}^\kappa(x) = \begin{cases} \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} & \text{pour } x_d = 0 \\ -\frac{6x}{L^2} + \frac{2}{L} & \text{pour } x_d = L \\ -\frac{1}{L} & \text{pour } x_d = \frac{L}{2} \end{cases} \quad (4.69)$$

4.6.2 Patch test

Une vérification supplémentaire est nécessaire pour valider le choix de la fonction $\overline{G}_{v,3}^\kappa(x)$. En effet, la méthode d'enrichissement avec des discontinuités intégrées ressemble à la méthode des modes incompatibles. D'une manière similaire à cette méthode, la fonction d'enrichissement doit vérifier le Patch test [Taylor et al., 1986]. Ce test a, initialement proposé par [Irons and Razzaque, 1972], traduit une condition de convergence lors du raffinement de maillage. En effet, un grand nombre d'éléments conduit à avoir des petits éléments et donc des déformations et des contraintes élémentaires qui avoisinent des valeurs constantes. Ce test garantit donc la capacité à représenter un état de contrainte constante par élément [Ibrahimbegović, 2006]. L'application du Patch test exige que le travail virtuel supplémentaire associé à l'enrichissement doit être nul pour le cas où le moment de flexion est constant le long de l'élément :

$$\begin{aligned} \delta \overline{\overline{\Theta}}_z(t)^T F_{int,G}^e(t) &= 0 \\ \delta \overline{\overline{\Theta}}_z(t)^T \int_{L^e} G_{v,3}^\kappa(x) M_z(x, t) dx &= 0 \\ \text{rappelons que } M_z \text{ est constant par élément} &\Rightarrow \underbrace{\delta \overline{\overline{\Theta}}_z(t)^T M_z(x, t)}_{\neq 0} \int_{L^e} G_{v,3}^\kappa(x) dx = 0 \\ &\Rightarrow \int_{L^e} G_{v,3}^\kappa(x) dx = 0 \end{aligned} \quad (4.70)$$

L'introduction des deux composantes régulière et singulière de $G_{v,3}^\kappa(x)$ donne :

$$\int_{L^e} \left(\overline{G}_{v,3}^\kappa(x) + \overline{\overline{G}}_{v,3}^\kappa(x) \right) dx = \int_{L^e} \left(\overline{G}_{v,3}^\kappa(x) + \delta_{x_d} \right) dx = 0 \quad (4.71)$$

Par conséquent, la condition pour passer le Patch test pour cet exemple d'enrichissement s'écrit :

$$\int_{L^e} \overline{\overline{G}}_{v,3}^\kappa(x) dx = -1 \quad (4.72)$$

Les expressions de $\overline{G}_{v,3}^\kappa(x)$ trouvées dans (4.69) vérifient bien la condition de compatibilité et donc le patch test (4.72).

4.7 Modèles de comportement continu et cohésif

Une approche généralisée est ci dessous considérée (pour une approche multifibres voir les chapitres 5 et 6) où les forces généralisées (effort normal, tranchant et moment de flexion) sont exprimées respectivement en fonction des déformations généralisées (déformation axiale, de cisaillement et courbure). Le comportement de la section est géré par un modèle généralisé qui est formulé dans le cadre des matériaux standards généralisés [Halphen and Son, 1975].

Dans la suite, les trois composantes de la section sont considérées découplées. Chaque composante a donc sa propre loi de comportement qui peut être linéaire ou non linéaire selon l'application souhaitée. Les lois non linéaires (continues) généralisées adoptées sont des lois élasto-plastiques. La formulation thermodynamique des modèles continu et cohésif associé à la discontinuité est présentée dans la section ci dessous.

Remarque : Les variables associées au modèle continu sont surmontées par une barre alors que les variables du modèle cohésif par une double barre. Aucune barre n'est utilisée pour les variables associées au couplage des deux modèles.

4.7.1 Modèle continu

Le développement d'une loi généralisée dans le cadre de la plasticité est similaire à celle d'une loi de comportement en contrainte-déformation. Commençons tout d'abord par la définition des variables d'état généralisées. Ces dernières se divisent en des variables observables et des variables internes. Pour le cas simple d'un modèle plastique avec écrouissage isotrope, deux variables internes existent : la déformation plastique généralisée $\bar{\varepsilon}^p$ et la variable d'écrouissage généralisée $\bar{\xi}$. La première hypothèse est la partition des déformations en une composante élastique et une autre plastique [Borja, 2013] :

$$\bar{\varepsilon}(x, t) = \bar{\varepsilon}^e(x, t) + \bar{\varepsilon}^p(x, t) \quad (4.73)$$

où $\bar{\varepsilon}(x, t)$ représente la déformation axiale généralisée (axiale, de cisaillement ou la courbure) continue pour la section (et pas une déformation locale, ponctuelle, au niveau du matériau).

4.7.1.1 Énergie libre

Le comportement élastique et le comportement d'écrouissage sont supposés découplés [Borja, 2013], ce qui permet de séparer l'expression de l'énergie libre généralisée $\bar{\Psi}$ en un terme élastique et un terme d'écrouissage de la façon suivante :

$$\bar{\Psi}(\bar{\varepsilon}^e, \bar{\xi}) = \frac{1}{2}E(\bar{\varepsilon}^e)^2 + \frac{1}{2}H(\bar{\xi})^2 \quad (4.74)$$

avec E le module de Young et H le module d'écrouissage.

4.7.1.2 Surface de charge

Pour un modèle à écrouissage positif, la surface de charge $\bar{\phi}$ s'exprime en fonction des composantes du tenseur de contraintes (forces généralisées) et dépend de l'état d'écrouissage (variables internes). Pour le cas simplifié étudié ici d'une composante F (qui peut être l'effort normal, l'effort tranchant ou le moment de flexion) non couplée avec les autres composantes généralisées, la surface de charge est un scalaire et s'écrit comme :

$$\bar{\phi}(F, \bar{q}) = |F| - (\sigma_y - \bar{q}), \quad (4.75)$$

avec σ_y la limite élastique et \bar{q} la force thermodynamique (voir plus bas). La valeur de $\bar{\phi}$ est toujours négative en élasticité. Une fois la limite élastique σ_y dépassée, le matériau entre dans le domaine plastique. Par conséquent, les valeurs internes associées à la plasticité s'activent et commencent à évoluer.

4.7.1.3 Dissipation plastique

La dissipation mécanique s'écrit :

$$\bar{D} = \int_{\Omega} \left[F^T \dot{\bar{\varepsilon}} - \dot{\bar{\Psi}}(\bar{\varepsilon}^e, \bar{\xi}) \right] d\Omega \quad (4.76)$$

où $(\dot{})$ est la dérivée par rapport au temps.

L'hypothèse de partition des déformations (4.73), l'expression de l'énergie libre (4.74) et l'équation de la dissipation (4.76) donnent :

$$\bar{D} = \int_{\Omega} \left[\left(F - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\varepsilon}^e} \right)^T \dot{\bar{\varepsilon}}^e + F^T \dot{\bar{\varepsilon}}^p - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\xi}} \dot{\bar{\xi}} \right] d\Omega \quad (4.77)$$

Pour un processus élastique où les variables internes de plasticité n'évoluent pas, la dissipation est supposée nulle. En conséquence, la première équation constitutive est obtenue telle que :

$$F - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\varepsilon}^e} = 0 \Rightarrow F = E \bar{\varepsilon}^e \quad (4.78)$$

avec E le module élastique.

La variable \bar{q} est définie par similitude. Cette variable joue le rôle d'une force thermodynamique et s'écrit :

$$\bar{q} = -\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \xi} = -\frac{\partial \Sigma}{\partial \xi} = -H\bar{\xi}, \quad (4.79)$$

La dernière équation représente donc l'équation constitutive additionnelle. Les équations constitutives restent valables durant le processus plastique. Par conséquent, la dissipation mécanique n'est autre que la dissipation plastique \bar{D}^p définie par :

$$\bar{D}^p = \int_{\Omega} \left[F^T \dot{\bar{\varepsilon}}^p + \bar{q} \dot{\bar{\xi}} \right] d\Omega \quad (4.80)$$

4.7.1.4 Évolution des variables internes

La connaissance du potentiel de dissipation permet de déduire les lois d'évolution des variables internes. Dans ce mémoire, l'hypothèse de plasticité associée est considérée et la fonction du potentiel déterminant la direction de l'écoulement plastique dans l'espace des forces généralisées est la même que la fonction de la surface de charge.

Pour déterminer les équations d'évolution des variables internes, le principe de la dissipation plastique maximale est nécessaire. Ce principe annonce que parmi toutes les variables admissibles (F, \bar{q}) qui satisfont le critère limite $\bar{\phi}(F, \bar{q}) \leq 0$, les valeurs acceptables sont celles qui maximisent la dissipation plastique :

$$(F, \bar{q}) = \arg \left\{ \max_{\bar{\phi}(F^*, \bar{q}^*)=0} [\bar{D}^p(F^*, \bar{q}^*)] \right\} = \arg \left\{ \min_{\bar{\phi}(F^*, \bar{q}^*)=0} [-\bar{D}^p(F^*, \bar{q}^*)] \right\} \quad (4.81)$$

Le problème de maximisation peut être vu comme un problème de minimisation en multipliant par (-1) . Une méthode de minimisation sous contrainte au moyen des multiplicateurs de Lagrange est utilisée. La fonction de Lagrange \bar{L} est définie par :

$$\bar{L}(F, \bar{q}, \dot{\bar{\gamma}}) = -\bar{D}^p(F, \bar{q}) + \dot{\bar{\gamma}} \bar{\phi}(F, \bar{q}) \quad (4.82)$$

avec $\dot{\bar{\gamma}}$ le multiplicateur de Lagrange. D'où, selon la méthode de Lagrange, les équations d'évolution s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{L}}{\partial F} = 0 &\Rightarrow -\dot{\bar{\varepsilon}}^p + \dot{\bar{\gamma}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial F} = 0 \Rightarrow \dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\bar{\gamma}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial F} = \text{sign}(F) \dot{\bar{\gamma}} \\ \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{q}} = 0 &\Rightarrow -\dot{\bar{\xi}} + \dot{\bar{\gamma}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{q}} = 0 \Rightarrow \dot{\bar{\xi}} = \dot{\bar{\gamma}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{q}} = \dot{\bar{\gamma}} \end{aligned} \quad (4.83)$$

4.7.1.5 Conditions de cohérence et de Kuhn-Tucker

La condition de Kuhn-Tucker et la condition de cohérence sont utilisées [Borja, 2013]. Elles se traduisent par :

$$\dot{\bar{\gamma}} \geq 0 \quad , \quad \bar{\phi} \leq 0 \quad , \quad \dot{\bar{\gamma}} \bar{\phi} = 0 \quad , \quad \dot{\bar{\gamma}} \dot{\bar{\phi}} = 0 \quad (4.84)$$

Pour un pas plastique, l'incrément du multiplicateur de Lagrange $\dot{\bar{\gamma}}$ doit être positif non nul, donc

le taux de la surface de charge ϕ doit être nul.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} \\
&= \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{q}} \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} \\
&= \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial F} E(\dot{\bar{\varepsilon}} - \dot{\bar{\varepsilon}}^p) - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{q}} H \dot{\bar{\xi}} \\
&= \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial F} E \dot{\bar{\varepsilon}} - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial F} E \dot{\gamma} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial F} - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{q}} H \dot{\gamma} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{q}} \\
&= \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial F} E \dot{\bar{\varepsilon}} - \dot{\gamma} \left[\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial F} E \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial F} + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{q}} H \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{q}} \right]
\end{aligned} \tag{4.85}$$

Par conséquent,

$$\dot{\gamma} = \frac{\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial F} E \dot{\bar{\varepsilon}}}{\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial F} E \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial F} + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{q}} H \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{q}}} \tag{4.86}$$

La substitution de cette dernière expression (4.86) dans \dot{F} (4.78) donne :

$$\dot{F} = \begin{cases} E \dot{\bar{\varepsilon}} & \dot{\gamma} = 0 \\ E \left(1 - \frac{\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial F} E \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial F}}{\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial F} E \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial F} + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{q}} H \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{q}}} \right) \dot{\bar{\varepsilon}} & \dot{\gamma} > 0 \end{cases} \tag{4.87}$$

Pour l'expression spécifique de la surface de charge $\bar{\phi}$ de l'équation (4.75), l'expression de \dot{F} pour $\dot{\gamma} > 0$ s'écrit donc de la manière suivante :

$$\dot{F} = \frac{EH}{E + H} \dot{\bar{\varepsilon}} \tag{4.88}$$

4.7.2 Modèle cohésif

Le travail de [Dugdale, 1960] suivi par celui de [Barenblatt, 1962] sont les premiers travaux concernant le développement des modèles cohésifs, modèles qui lient une contrainte à un saut de déplacement. Ces modèles constituent une approche intermédiaire entre l'approche discontinue de la mécanique linéaire de la rupture et la mécanique des milieux continus et ils sont considérés comme une amélioration de la théorie de Griffith [Griffith, 1921] dès lors qu'ils permettent de modéliser l'initiation de fissures dans un matériau sain (voir par exemple [Cazes, 2010], [Cuvilliez, 2013]). Une première amélioration de ces modèles a été réalisée par [Hillerborg et al., 1976] en introduisant le concept d'énergie de rupture ainsi que la contrainte critique au delà de laquelle la fissure est supposée se propager.

La transition entre le modèle continu et le modèle cohésif se fait lorsqu'un critère, souvent basé sur l'état de contraintes, est vérifié. Dès lors que la valeur de contrainte (de force dans notre cas) à un endroit donné dépasse une valeur critique σ_u , la discontinuité et sa loi de comportement cohésive y sont activées. Plusieurs lois cohésives existent dans la littérature selon la nature du matériau utilisé et le type de chargement envisagé, [Cazes, 2010], [Cuvilliez, 2013].

Dans la suite de ce manuscrit, le modèle cohésif adopté est censé décrire le comportement du matériau au niveau de la discontinuité de rotation, il doit donc lier le moment de cohésion à un saut de rotation $\bar{\Theta}$. Dans le cadre générale, on utilise C et \bar{U} pour noter respectivement la force (moment) de cohésion et le saut correspondant. Le modèle cohésif est supposé avoir une forme rigide-linéaire telle que :

$$C = S\bar{U} + \sigma_u \tag{4.89}$$

avec S (négatif) le module d'adoucissement. Afin de compléter la construction du modèle cohésif, les paramètres σ_u et S sont choisis en se basant sur des études expérimentales [Vecchio and Collins, 1986], [Vecchio and Collins, 1988] ou à travers des méthodes d'identification multi-échelles [Pham et al., 2010], [Pham et al., 2012].

4.7.2.1 Énergie libre

La définition de l'énergie libre de Helmholtz après l'activation du modèle cohésif ne change pas. Il n'y a pas d'énergie élastique ou réversible liée à l'adoucissement.

4.7.2.2 Surface de rupture

La discontinuité représente une zone cohésive d'épaisseur nulle. Le critère d'activation de la discontinuité au sein d'un élément fini est déterminé par la surface de rupture. Cette surface est basée dans le cas du modèle développé dans ce chapitre sur l'état de contrainte. Par conséquent, la zone cohésive d'épaisseur nulle est introduite à l'endroit x_d de l'élément fini où la contrainte dépasse une valeur critique σ_u . La surface de rupture s'écrit en fonction de la force de cohésion C :

$$\bar{\phi}(C, \bar{U}) = |C| - (\sigma_u + S\bar{U}) \leq 0 \quad (4.90)$$

4.7.2.3 Dissipation à la discontinuité

D'après le second principe de la thermodynamique, la dissipation totale est :

$$\begin{aligned} D^{tot} &= \int_{\Omega} \left[F^T \dot{\varepsilon} - \frac{d}{dt} \Psi(\varepsilon, \bar{\xi}, \bar{\xi}) \right] dx \quad \text{avec} \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon} + \dot{\bar{\varepsilon}} = \dot{\varepsilon} + \delta_{x_d} \dot{\bar{U}} \\ &= \int_{\Omega} \left[F^T (\dot{\varepsilon} + \delta_{x_d} \dot{\bar{U}}) - \dot{\Psi}(\bar{\varepsilon}^e, \bar{\xi}) \right] dx \quad \text{avec} \quad \int_{\Omega} \delta_{x_d} dx = 1 \Rightarrow \\ &= \int_{\Omega} \left[F^T \dot{\varepsilon} - \dot{\Psi}(\bar{\varepsilon}^e, \bar{\xi}) \right] dx + \int_{\Omega} F^T \delta_{x_d} dx \dot{\bar{U}} \\ &= \underbrace{\int_{\Omega} \left[F^T \dot{\varepsilon} - \dot{\Psi}(\bar{\varepsilon}^e, \bar{\xi}) \right] dx}_{\bar{D}} + \underbrace{\int_{\Omega} F^T \delta_{x_d} dx}_{\bar{D}} \dot{\bar{U}} \end{aligned} \quad (4.91)$$

\bar{D} est la dissipation associée à la partie continue et $\bar{\bar{D}}$ est la dissipation associée à la discontinuité. Par ailleurs, la dissipation totale s'écrit :

$$D^{tot} = \bar{D} + \bar{\bar{D}} = \int_{\Omega} \left[F^T \dot{\varepsilon}^p + \bar{q} \dot{\bar{\xi}} \right] dx + C^T \dot{\bar{U}} \quad (4.92)$$

Après activation de la discontinuité au sein de l'élément, on fait l'hypothèse que le matériau cesse de plastifier hors de la discontinuité. En effet, les modèles développés dans le cadre des méthodes à discontinuité fortes ne s'appliquent qu'à une certaine classe de structures pour lesquelles les phénomènes de dissipation hors bande de localisation restent négligeables devant ceux ayant lieu dans les bandes de localisation [Brancherie, 2003]. Par conséquent, la dissipation est supposée se développer uniquement dans la zone cohésive telle que :

$$D^{tot} = \bar{\bar{D}} \quad (4.93)$$

4.7.2.4 Évolution des variables internes

Parmi les variables internes admissibles qui vérifient le critère de rupture, ce sont celles qui maximisent la dissipation cohésive qui sont choisies. Par conséquent, comme pour la formulation élasto-plastique continue, un problème d'optimisation sous contrainte est résolu grâce au multiplicateur de Lagrange. La fonction de Lagrange $\bar{\bar{L}}$ est définie avec le multiplicateur de Lagrange $\bar{\gamma}$ comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{L}}(\bar{\gamma}) &= -\bar{D} + \bar{\gamma} \bar{\phi} \\ &= - \left[C^T \dot{\bar{U}} \right] + \bar{\gamma} \bar{\phi} \end{aligned} \quad (4.94)$$

Les équations d'évolution des variables internes sont telles que :

$$\frac{\partial \bar{\bar{L}}}{\partial C} = -\dot{\bar{U}} + \bar{\gamma} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial C} = -\dot{\bar{U}} + \bar{\gamma} \text{sign}(C) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\bar{U}} = \bar{\gamma} \text{sign}(C) \quad (4.95)$$

4.7.2.5 Conditions de cohérence et de Kuhn-Tucker

Afin de trouver l'équation d'évolution du multiplicateur de Lagrange $\dot{\bar{\gamma}}$, la condition de Kuhn-Tucker et la condition de cohérence sont utilisées. Elles sont telles que :

$$\dot{\bar{\gamma}} \geq 0 \quad , \quad \bar{\phi} \leq 0 \quad , \quad \dot{\bar{\gamma}} \bar{\phi} = 0 \quad , \quad \dot{\bar{\gamma}} \dot{\bar{\phi}} = 0 \quad (4.96)$$

Quand le mécanisme d'adoucissement est actif, le multiplicateur $\dot{\bar{\gamma}}$ est strictement positif. Ainsi, afin de vérifier la condition de cohérence $\dot{\bar{\gamma}} \dot{\bar{\phi}} = 0$, il faut que $\dot{\bar{\phi}}$ soit nul. Cela donne d'après les équations (4.90), (4.95) et (??) :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{\phi}} &= |\dot{C}| - S\dot{\bar{U}} \\ \Rightarrow 0 &= |\dot{C}| - S\dot{\bar{U}} \\ \Rightarrow 0 &= |\dot{C}| - S\dot{\bar{\gamma}} \text{sign}(C) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{\bar{\gamma}} = \frac{1}{S} |\dot{C}| = \frac{1}{S} \dot{C} \text{sign}(C) \quad (4.97)$$

4.8 Implémentation numérique

Après avoir présenté les éléments clés de la formulation variationnelle et les lois continue et discrète, il est important de détailler l'implémentation numérique de l'élément poutre Timoshenko avec des lois généralisées et la prise en compte des discontinuités.

4.8.1 Linéarisation des équations d'équilibre

Les deux équations d'équilibre (4.98) doivent être vérifiées pour chaque pas de calcul.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{int,B}^{str}(t) - \mathbf{F}_{ext}^{str}(t) &= 0 \\ \forall e \in 1, 2, \dots, \bar{n} : \quad \mathbf{F}_{int,G}^e(t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.98)$$

Les équations (4.98) sont en général non linéaires. Afin de résoudre ces équations par la méthode de Newton-Raphson, ces équations doivent être linéarisées. Cette linéarisation conduit à résoudre un système matriciel linéaire.

Supposons que toutes les variables du problème sont connues au pas de temps t . Le but est donc de trouver ces variables au pas de temps suivant $t + 1$. Le résidu \mathbf{R} est défini par :

$$\mathbf{R}(\mathbf{d}_{str}, \bar{\bar{\mathbf{d}}}_1, \bar{\bar{\mathbf{d}}}_2, \dots, \bar{\bar{\mathbf{d}}}_{\bar{n}}) = \mathbf{F}_{int,B}^{str}(t) - \mathbf{F}_{ext}^{str}(t) = \bigwedge_{e=1}^{n_{elm}} \{ \mathbf{F}_{int,B}^e - \mathbf{F}_{ext}^e \} \quad (4.99)$$

avec

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{d}_{str}} &= \bigwedge_{e=1}^{n_{elm}} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_{int,B}^e}{\partial \mathbf{d}_e} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \bar{\bar{\mathbf{d}}}_e} &= \frac{\partial \mathbf{F}_{int,B}^e}{\partial \bar{\bar{\mathbf{d}}}_e} \quad \forall e \in \bar{n} \end{aligned} \right. \quad (4.100)$$

avec \mathbf{d}_e et $\bar{\bar{\mathbf{d}}}_e$ respectivement les vecteurs de déplacements nodaux élémentaires continus et discontinus. Dans ce paragraphe, on présente le cas général tel que chaque élément poutre peut avoir trois discontinuités, chacune selon une composante différente.

La linéarisation de l'équation (4.99) est réalisée au moyen d'un calcul itératif dont l'indice est k pour

aboutir à l'équilibre globale de la structure. Cela donne :

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}|_{t+1}^{(k+1)} &= \mathbf{R}|_{t+1}^{(k)} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{d}_{str}}|_{t+1}^{(k)} \Delta \mathbf{d}_{str}|_{t+1}^{(k+1)} + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \left\{ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \bar{\mathbf{d}}_e}|_{t+1}^{(k)} \Delta \bar{\mathbf{d}}_e|_{t+1}^{(k+1)} \right\} = 0 \\
&= \mathbf{R}|_{t+1}^{(k)} + \underbrace{\sum_{e=1}^{n_{elm}} \left\{ \frac{\partial \mathbf{F}_{int,B}^e}{\partial \mathbf{d}_e}|_{t+1}^{(k)} \cdot \Delta \mathbf{d}_e|_{t+1}^{(k+1)} \right\}}_{\mathbf{K}_{BB}} + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \underbrace{\left\{ \frac{\partial \mathbf{F}_{int,B}^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}_e}|_{t+1}^{(k)} \cdot \Delta \bar{\mathbf{d}}_e|_{t+1}^{(k+1)} \right\}}_{\mathbf{K}_{BG}} = 0
\end{aligned} \tag{4.101}$$

Or d'après la définition de $\mathbf{F}_{int,B}^e$ (voir équation (4.55)), on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{BB} &= \frac{\partial \mathbf{F}_{int,B}^e}{\partial \mathbf{d}_e} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}_e} \left(\int_{L^e} \mathbf{B}(x)^T \mathbf{F}_S(x, t) dx \right) = \int_{L^e} \mathbf{B}(x)^T \frac{\partial \mathbf{F}_S}{\partial \mathbf{d}_e}(x, t) dx \\
&= \int_{L^e} \mathbf{B}(x)^T \frac{\partial \mathbf{F}_S}{\partial \tilde{\varepsilon}_S}(x, t) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_S}{\partial \mathbf{d}_e}(x) dx \\
&= \int_{L^e} \mathbf{B}(x)^T \frac{\partial \mathbf{F}_S}{\partial \tilde{\varepsilon}_S}(x, t) \mathbf{B}(x) dx
\end{aligned} \tag{4.102}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{BG} &= \frac{\partial \mathbf{F}_{int,B}^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}_e} = \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{d}}_e} \left(\int_{L^e} \mathbf{B}(x)^T \mathbf{F}_S(x, t) dx \right) = \int_{L^e} \mathbf{B}(x)^T \frac{\partial \mathbf{F}_S}{\partial \bar{\mathbf{d}}_e}(x, t) dx \\
&= \int_{L^e} \mathbf{B}(x)^T \frac{\partial \mathbf{F}_S}{\partial \tilde{\varepsilon}_S}(x, t) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_S}{\partial \bar{\mathbf{d}}_e}(x) dx \\
&= \int_{L^e} \mathbf{B}(x)^T \frac{\partial \mathbf{F}_S}{\partial \tilde{\varepsilon}_S}(x, t) \bar{\mathbf{G}}_r(x) dx
\end{aligned} \tag{4.103}$$

Note : En ce qui concerne la relation de comportement du modèle continu, le vecteur des contraintes $\mathbf{F}_S(x, t)$ est écrit en fonction de la partie continue $\tilde{\varepsilon}_S(x, t)$ du vecteur de déformation $\varepsilon_S(x, t)$ (voir équation (4.28)). En effet, le terme singulier $\bar{\varepsilon}_S(x, t)$ de la déformation est consacré au modèle cohésif.

Par conséquent, l'équation (4.101) peut être reformulée dans une forme matricielle telle que :

$$\sum_{e=1}^{n_{elm}} \left\{ [\mathbf{K}_{BB} \quad \mathbf{K}_{BG}]_{t+1}^{(k)} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_e \\ \Delta \bar{\mathbf{d}}_e \end{bmatrix}_{t+1}^{(k+1)} \right\} = -\mathbf{R}|_{t+1}^{(k)} = -\sum_{e=1}^{n_{elm}} \left\{ (\mathbf{F}_{int,B}^e - \mathbf{F}_{ext}^e)|_{t+1}^{(k)} \right\} \tag{4.104}$$

De même, la deuxième équation de (4.98) (qualifiée comme locale) est linéarisée en utilisant l'indice l pour les itérations correspondantes.

Cette étape est faite à un incrément de déplacement fixe Δd_e au pas de temps $t + 1$ et à l'itération k :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{int,G}^e|^{(l+1)} &= \mathbf{F}_{int,G}^e|^{(l)} + \frac{\partial \mathbf{F}_{int,G}^e}{\partial \mathbf{d}_e}|^{(l)} \Delta \mathbf{d}_e|_{t+1}^{(k)} + \frac{\partial \mathbf{F}_{int,G}^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}_e}|^{(l)} \Delta \bar{\mathbf{d}}_e|_{t+1}^{(l+1)} = 0 \\
&= \mathbf{F}_{int,G}^e|^{(l)} + \mathbf{K}_{GB}|^{(l)} \Delta \mathbf{d}_e|_{t+1}^{(k)} + \mathbf{K}_{GG}|^{(l)} \Delta \bar{\mathbf{d}}_e|_{t+1}^{(l+1)} = 0
\end{aligned} \tag{4.105}$$

Par ailleurs, d'après l'expression de $\mathbf{F}_{int,G}^e$ dans (4.58), on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{GB} &= \frac{\partial \mathbf{F}_{int,G}^e}{\partial \mathbf{d}_e} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}_e} \left(\int_{L^e} \bar{\mathbf{G}}_v(x)^T \mathbf{F}_S(x, t) dx \right) = \int_{L^e} \bar{\mathbf{G}}_v(x)^T \frac{\partial \mathbf{F}_S}{\partial \mathbf{d}_e}(x, t) dx \\
&= \int_{L^e} \bar{\mathbf{G}}_v(x)^T \frac{\partial \mathbf{F}_S}{\partial \tilde{\varepsilon}_S}(x, t) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_S}{\partial \mathbf{d}_e}(x) dx \\
&= \int_{L^e} \bar{\mathbf{G}}_v(x)^T \frac{\partial \mathbf{F}_S}{\partial \tilde{\varepsilon}_S}(x, t) \mathbf{B}(x) dx
\end{aligned} \tag{4.106}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{GG} &= \frac{\partial \mathbf{F}_{int,G}^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}_e} = \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{d}}_e} \left(\int_{L^e} \bar{\mathbf{G}}_v(x)^T \mathbf{F}_S(x,t) dx \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{d}}_e} \mathbf{C}_S(t) \\
&= \int_{L^e} \bar{\mathbf{G}}_v(x)^T \frac{\partial \mathbf{F}_S}{\partial \bar{\mathbf{d}}_e}(x,t) dx + \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{d}}_e} \mathbf{C}_S(t) \\
&= \int_{L^e} \bar{\mathbf{G}}_v(x)^T \frac{\partial \mathbf{F}_S}{\partial \bar{\varepsilon}_S}(x,t) \frac{\partial \bar{\varepsilon}_S}{\partial \bar{\mathbf{d}}_e}(x) dx + \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{d}}_e} \mathbf{C}_S(t) \\
&= \int_{L^e} \bar{\mathbf{G}}_v(x)^T \frac{\partial \mathbf{F}_S}{\partial \bar{\varepsilon}_S}(x,t) \bar{\mathbf{G}}_r(x) dx + \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{d}}_e} \mathbf{C}_S(t)
\end{aligned} \tag{4.107}$$

Dès lors qu'on suppose en générale le cas des discontinuités indépendantes $\bar{\bar{U}}_x$, $\bar{\bar{V}}_y$ et $\bar{\bar{\Theta}}_z$ pour chaque composante du champ de déplacement, la dérivée du vecteur des forces cohésives par rapport aux discontinuités $\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{d}}_e} \mathbf{C}_S(t)$ peut être développée en utilisant l'équation (4.59) :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{d}}_e} \mathbf{C}_S(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_x}{\partial \bar{\bar{U}}_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial C_y}{\partial \bar{\bar{V}}_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial C_z}{\partial \bar{\bar{\Theta}}_z} \end{bmatrix} \tag{4.108}$$

Les valeurs des dérivées de la matrice précédente sont déterminées en fonction des modèles cohésifs utilisés. Par exemple, pour le cas d'un modèle cohésif linéaire comme développé dans la section 4.7.2, cette dérivée vaut le module d'adoucissement S du modèle :

$$\frac{\partial C_x}{\partial \bar{\bar{U}}_x} = \frac{\partial (S \bar{\bar{U}}_x)}{\partial \bar{\bar{U}}_x} = S \tag{4.109}$$

Enfin, l'assemblage des équations locales (4.105) de tous les éléments donne :

$$\bigwedge_{e=1}^{n_{elm}} \left\{ [\mathbf{K}_{GB} \quad \mathbf{K}_{GG}]_{t+1}^{(k)} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_e^{(k)} \\ \Delta \bar{\bar{\mathbf{d}}}_e^{(l+1)} \end{bmatrix}_{t+1} = -\mathbf{F}_{int,G}^e|_{t+1}^{(l)} \right\} \tag{4.110}$$

Les deux équations (4.104) et (4.110) peuvent être écrites dans un seul système comme :

$$\bigwedge_{e=1}^{n_{elm}} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BB} & \mathbf{K}_{BG} \\ \mathbf{K}_{GB} & \mathbf{K}_{GG} \end{bmatrix}_{t+1}^{(l)} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_e \\ \Delta \bar{\bar{\mathbf{d}}}_e \end{bmatrix}_{t+1}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{F}_{int,B}^e - \mathbf{F}_{ext}^e) \\ -\mathbf{F}_{int,G}^e \end{bmatrix}_{t+1}^{(k)} \right\} \tag{4.111}$$

Le dernier système peut être résolu en réalisant une condensation statique au niveau de l'élément. Cette technique permet de résoudre les variables d'enrichissement au niveau local [Wilson, 1974]. En fait, après la convergence des variables internes des discontinuités, la valeur de $\mathbf{F}_{int,G}^e|_{t+1}$ vaut zéro. Le système s'écrit alors :

$$\bigwedge_{e=1}^{n_{elm}} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BB} & \mathbf{K}_{BG} \\ \mathbf{K}_{GB} & \mathbf{K}_{GG} \end{bmatrix}_{t+1}^{(l)} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_e \\ \Delta \bar{\bar{\mathbf{d}}}_e \end{bmatrix}_{t+1}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{F}_{int,B}^e - \mathbf{F}_{ext}^e) \\ 0 \end{bmatrix}_{t+1}^{(k)} \right\} \tag{4.112}$$

La deuxième équation de système donne :

$$[\mathbf{K}_{GB}|^{(l)} \Delta \mathbf{d}_e + \mathbf{K}_{GG}|^{(l)} \Delta \bar{\bar{\mathbf{d}}}_e]_{t+1}^{(k+1)} = 0$$

et donc

$$\Delta \bar{\bar{\mathbf{d}}}_e|_{t+1}^{(k+1)} = -\mathbf{K}_{GG}^{-1}|^{(l)} \mathbf{K}_{GB}|^{(l)} \Delta \mathbf{d}_e|_{t+1}^{(k+1)} \tag{4.113}$$

L'utilisation de cette dernière expression dans la première équation du système (4.112) donne

$$\mathbf{K}_{BB}|^{(l)} \Delta \mathbf{d}_e|_{t+1}^{(k+1)} + \mathbf{K}_{BG}|^{(l)} (-\mathbf{K}_{GG}^{-1}|^{(l)} \mathbf{K}_{GB}|^{(l)} \Delta \mathbf{d}_e)|_{t+1}^{(k+1)} = -(\mathbf{F}_{int,B}^e - \mathbf{F}_{ext}^e)|_{t+1}^{(k+1)}$$

par suite

$$\underbrace{\left(\mathbf{K}_{BB}|^{(l)} - \mathbf{K}_{BG}|^{(l)} \mathbf{K}_{GG}^{-1}|^{(l)} \mathbf{K}_{GB}|^{(l)} \right)}_{\mathbf{K}_{cond}^e|^{(l)}} \Delta \mathbf{d}_e|_{t+1} = -(\mathbf{F}_{int,B}^e - \mathbf{F}_{ext}^e)|_{t+1}^{(k+1)} \quad (4.114)$$

avec \mathbf{K}_{cond}^e la matrice de rigidité condensée. L'architecture du code et le nombre de degrés de liberté sont conservés au moyen de cette approche locale/globale.

Ensuite, les valeurs élémentaires des forces internes nodales et des matrices de rigidité sont renvoyées au code afin d'assembler toutes les contributions élémentaires. Puis, le vecteur de forces internes de la structure $\mathbf{F}_{int,B}^{str}$ est introduit dans l'équation du résidu $\mathbf{R}_{t+1}^{(k+1)}$ (4.99). Si $\mathbf{R}_{t+1}^{(k+1)}$ tend vers zéro, l'incrément de temps suivant est déclenché. Sinon, la simulation reste au même pas de temps, et une autre itération $k + 2$ est faite. Un petit incrément de déplacement $\delta \Delta \mathbf{d}_{e,t+1}^{(k+2)}$ (4.115) est à ajouté à l'incrément de déplacement précédent $\Delta \mathbf{d}_{e,t+1}^{(k+2)}$ pour le même pas de temps $t + 1$:

$$\delta \Delta \mathbf{d}_{e,t+1}^{(k+2)} = \left(\mathbf{R}_{t+1}^{(k+1)} \right)^{-1} \mathbf{K}_{t+1}^{(k+1)} \quad (4.115)$$

avec $\mathbf{K}_{t+1}^{(k+1)}$ la matrice de rigidité globale après l'assemblage de différentes contributions élémentaires. Le nouveau incrément de déplacement est :

$$\Delta \mathbf{d}_{e,t+1}^{(k+2)} = \sum_{i=1}^{k+2} \delta \Delta \mathbf{d}_{e,t+1}^{(i)} \quad (4.116)$$

Les mêmes étapes de calcul sont réitérées en passant sur chaque élément jusqu'au moment où les deux équations d'équilibre (locale à l'échelle de l'élément et globale à l'échelle de la structure) sont vérifiées. Une fois l'équilibre atteinte, une mise à jour de toutes les variables internes ainsi que du vecteur de déplacement de la structure est réalisée comme suit :

$$\mathbf{d}_{e,t+1}^{(k^{conv})} = \mathbf{d}_{e,t+1}^{(1)} + \Delta \mathbf{d}_{e,t+1}^{(k^{conv})} \quad (4.117)$$

avec k^{conv} le numéro de l'itération de convergence. L'ensemble des étapes de résolution à l'échelle de l'élément est illustré en figure (4.22).

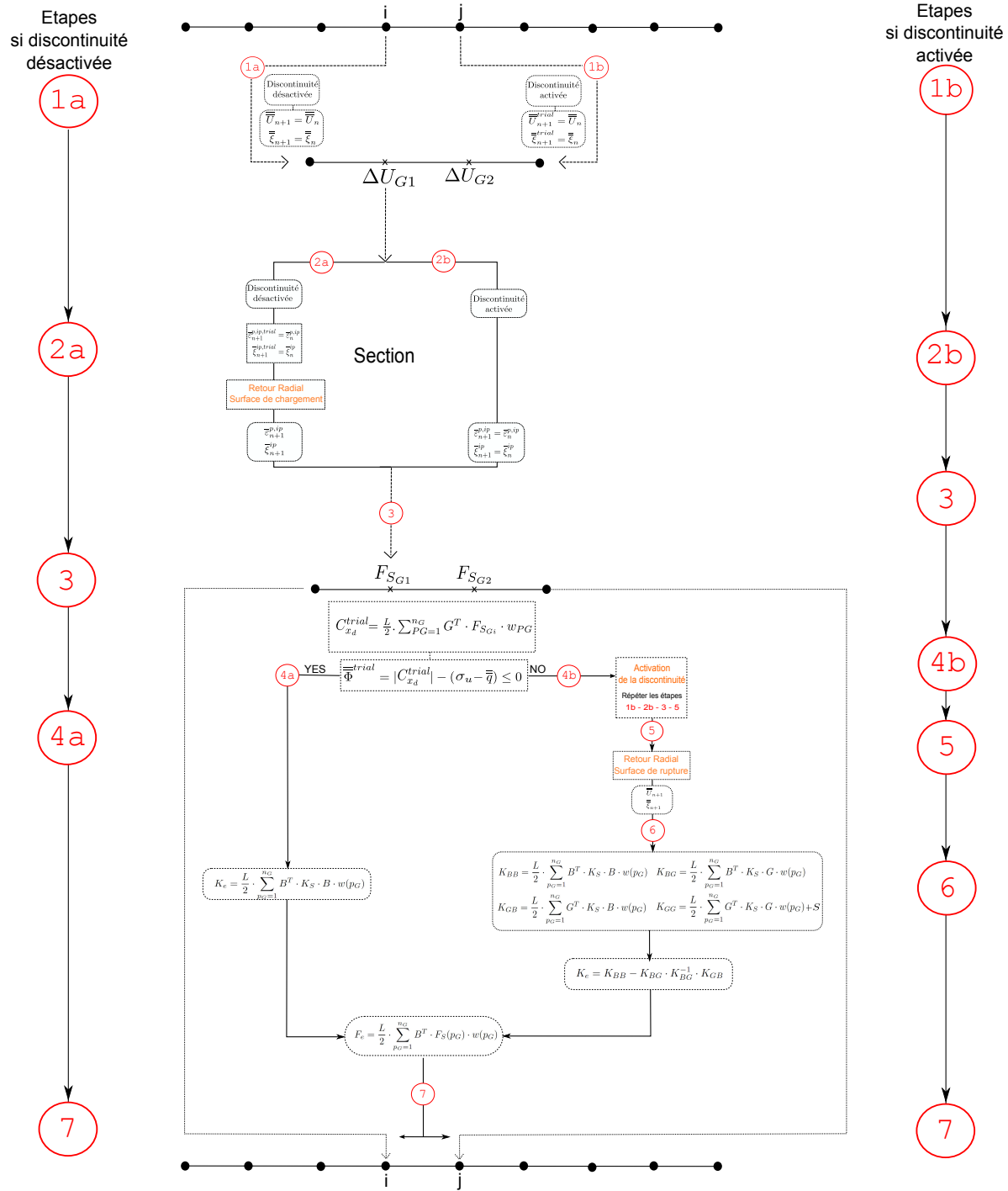


FIGURE 4.22 – Algorithme de l'élément

4.8.2 Calcul à l'échelle de l'élément

Les variables élémentaires (force et rigidité) sont évaluées à partir d'un calcul au niveau de l'élément. Ce calcul consiste à déterminer l'évolution des variables internes associées au modèle continu ($\bar{\epsilon}^p, \bar{\xi}$) au niveau de chaque point d'intégration, ainsi que l'évolution des variables associées au modèle cohésif (\bar{d}) au niveau de l'élément. En fait, les deux groupes de variables internes (pour les modèles continus et cohésifs) ne peuvent pas évoluer simultanément. Soit le modèle continu fonctionne et seulement ses

variables internes évoluent, soit le modèle cohésif s'active et le matériau hors discontinuité situé sur les points d'intégration subit un déchargement élastique. Pour chaque problème on peut définir :

Trouver	$\left\{ d_{t+1} \quad \varepsilon_{t+1} \quad \bar{\varepsilon}_{t+1}^p \quad \bar{\xi}_{t+1} \quad \bar{\bar{d}}_{t+1} \right\},$
sachant que	$\left\{ d_t \quad \varepsilon_t \quad \bar{\varepsilon}_t^p \quad \bar{\xi}_t \quad \bar{\bar{d}}_t \right\}$
sont connues.	

La procédure de résolution peut prendre deux chemins différents selon l'état de la discontinuité. Tant que la discontinuité n'est pas activée, seulement les variables correspondantes à la loi élasto-plastique évoluent (chemin I (4.23)). Dès lors que la limite ultime (la limite à partir de laquelle la discontinuité s'active) est atteinte, les rôles entre les variables standards et les variables additionnelles s'inversent, de sorte que les variables d'enrichissement commencent à évoluer et les variables plastiques et d'écrouissage sont gelées, gardant ainsi les dernières valeurs atteintes avant ce nouvel état (chemin II (4.24)). Quelque soit le chemin considéré, la résolution est fondée sur l'algorithme classique de Retour-Radial [Simo and Hughes, 1999]. Dans les sections qui suivent, les détails d'implémentation sont développés. Les algorithmes développés sont basés sur les travaux de [Dujc et al., 2010] et [Jukić, 2013].

4.8.2.1 Évolution des variables plastiques

Le schéma d'intégration temporel s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \overbrace{\Delta t \dot{x}_{n+v}}^{\Delta x} \\ x_{n+v} &= v x_{n+1} + (1-v)x_n; \quad v \in [0, 1] \end{aligned} \quad (4.118)$$

Pour $v = 1$, un schéma d'intégration type Euler arrière implicite (*backward Euler method*) est adopté et retenu pour la suite.

$\left[\varepsilon_t \quad \bar{\varepsilon}_t^p \quad \bar{\xi}_t \right] \xrightarrow[\bar{\bar{d}}_{t+1} = \bar{\bar{d}}_t]{\Delta \varepsilon_t} \left[\varepsilon_{t+1} \quad \bar{\varepsilon}_{t+1}^p \quad \bar{\xi}_{t+1} \right]$

FIGURE 4.23 – États initial et final pour le premier chemin I

Afin d'initier le calcul, une solution élastique nommée *prédicteur élastique* est supposée :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{t+1}^{p,trial} &= \bar{\varepsilon}_t^p \\ \bar{\xi}_{t+1}^{trial} &= \bar{\xi}_t \end{aligned} \quad (4.119)$$

A partir de ces valeurs, la force et la variable d'écrouissage (*stress-like*) sont calculées telles que :

$$\begin{aligned} F_{t+1}^{trial} &= E_s \left[\bar{\varepsilon} \left(d_{e,t+1}^{(k-1)}, \bar{\bar{d}}_{e,t+1}^{i,(k-1)} \right) - \bar{\varepsilon}_{t+1}^{p,trial} \right] \\ \bar{q}_{t+1}^{trial} &= -H \bar{\xi}_{t+1}^{trial} \end{aligned} \quad (4.120)$$

Ceci permet de calculer $\bar{\phi}$ comme :

$$\bar{\phi}_{t+1}^{trial} = |F_{t+1}^{trial}| - (\sigma_y - \bar{q}_{t+1}^{trial}) \leq 0 \quad (4.121)$$

Si la dernière équation est vérifiée alors le pas est élastique et les variables plastique et d'écrouissage gardent les mêmes valeurs qu'au pas de temps précédent :

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{t+1}^p &= \bar{\varepsilon}_{t+1}^{p,trial} \\ \bar{\xi}_{t+1} &= \bar{\xi}_{t+1}^{trial} \\ F_{t+1} &= F_{t+1}^{trial} \\ \bar{q}_{t+1} &= \bar{q}_{t+1}^{trial}\end{aligned}\tag{4.122}$$

Si l'état de contrainte dépasse la limite élastique ($\bar{\phi}^{trial} > 0$), alors le pas est plastique et les variables sont actualisées :

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{t+1}^p &= \bar{\varepsilon}_n^p + \bar{\gamma}_{t+1} \text{sign}(F_{t+1}^{trial}), \\ \bar{\xi}_{t+1} &= \bar{\xi}_n + \bar{\gamma}_{t+1}, \\ F_{t+1} &= F_{t+1}^{trial} - \bar{\gamma}_{t+1} E_s \text{sign}(F_{t+1}),\end{aligned}\tag{4.123}$$

avec $\bar{\gamma}_{t+1}$ le multiplicateur plastique calculé pour $\bar{\phi}_{t+1} = 0$. À noter que pour résoudre $\bar{\phi}_{t+1} = 0$, la propriété suivante est utilisée

$$\text{sign}(F_{t+1}) = \text{sign}(F_{t+1}^{trial})\tag{4.124}$$

Cette dernière propriété est tirée de l'équation (4.123) en faisant simplement une petite modification de la forme. Cela donne :

$$\begin{aligned}|F_{t+1}| \text{sign}(F_{t+1}) &= |F_{t+1}^{trial}| \text{sign}(F_{t+1}^{trial}) - \bar{\gamma}_{t+1} E_s \text{sign}(F_{t+1}) \\ (|F_{t+1}| + \bar{\gamma}_{t+1} E_s) \text{sign}(F_{t+1}) &= |F_{t+1}^{trial}| \text{sign}(F_{t+1}^{trial})\end{aligned}\tag{4.125}$$

Comme par définition $\bar{\gamma}_{t+1} \geq 0$, la dernière équation (4.125) donne :

$$\text{sign}(F_{t+1}) = \text{sign}(F_{t+1}^{trial})\tag{4.126}$$

ainsi que

$$|F_{t+1}| = |F_{t+1}^{trial}| - \bar{\gamma}_{t+1} E_s\tag{4.127}$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_{t+1} &= |F_{t+1}| - (\sigma_y - \bar{q}_{t+1}) = 0 \\ &= |F_{t+1}^{trial}| - \bar{\gamma}_{t+1} E_s - (\sigma_y - \bar{q}_{t+1}^{trial} + H \bar{\gamma}_{t+1}) = 0 \\ &= \underbrace{|F_{t+1}^{trial}| - (\sigma_y - \bar{q}_{t+1}^{trial})}_{\bar{\phi}_{t+1}^{trial}} - \bar{\gamma}_{t+1} (E_s + H) = 0 \\ &= \bar{\phi}_{t+1}^{trial} - \bar{\gamma}_{t+1} (E_s + H) = 0\end{aligned}\tag{4.128}$$

Finalement, la valeur de multiplicateur plastique $\bar{\gamma}_{t+1}$ est trouvée comme suit :

$$\bar{\gamma}_{t+1} = \frac{\bar{\phi}_{t+1}^{trial}}{E_s + H}\tag{4.129}$$

Après le calcul de ces variables internes et de la force généralisée des sections situées aux points d'intégration, le critère d'activation de la discontinuité au sein de l'élément doit être vérifié. Pour ce faire, la valeur de la surface de rupture $\bar{\phi}(C_{t+1}, \bar{U}_{t+1})$ doit être calculée. La valeur de la force de cohésion est calculée d'après l'équation (4.58) de la manière suivante :

$$C_{t+1} = - \int_0^L \bar{G}_v^T(x) F_{t+1}(x) dx = - \frac{L}{2} \sum_{pg}^{npg} \bar{G}_v^T(x_{pg}) F_{t+1}(x_{pg}) w(x_{pg})\tag{4.130}$$

avec npg le nombre de points d'intégration le long de l'élément poutre et $w(x_{pg})$ le poids de pondération associé au point d'intégration x_{pg} . Si $\bar{\bar{\phi}}(C_{t+1}, \bar{\bar{U}}_{t+1}) \leq 0$, le calcul continue sans activation de la discontinuité. Au contraire, si $\bar{\bar{\phi}}(C_{t+1}, \bar{\bar{U}}_{t+1}) > 0$, la discontinuité est activée. Par conséquent, toutes les valeurs mises à jour des variables internes associées au modèle continu dans cette itération ne doivent pas être considérées et le calcul est refait en suivant le chemin II expliqué dans le paragraphe suivant. Les étapes d'intégration numérique de ce modèle sont récapitulées dans A.3.

4.8.2.2 Évolution des variables cohésives

Ce chemin de résolution est suivi quand la discontinuité est active. Dans ce cas, il n'y a que les variables internes associées au modèle cohésif qui évoluent. Les autres variables plastiques conservent les mêmes valeurs qu'au pas du temps précédent. Le matériau hors discontinuité subit ainsi un déchargement élastique.

$$\boxed{\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} \varepsilon_t & \bar{\bar{d}}_t \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{\bar{\bar{\varepsilon}}_{t+1}^p = \bar{\bar{\varepsilon}}_t^p \\ \bar{\bar{\xi}}_{t+1} = \bar{\bar{\xi}}_t}]{\Delta \varepsilon_t} \left[\begin{array}{cc} \varepsilon_{t+1} & \bar{\bar{d}}_{t+1} \end{array} \right] \end{array}}$$

FIGURE 4.24 – États initial et final pour le deuxième chemin II

Le calcul commence en faisant l'hypothèse d'un prédicteur élastique tel que :

$$\bar{\bar{d}}_{t+1}^{trial} = \bar{\bar{d}}_t \quad (4.131)$$

La valeur du prédicteur de la force de cohésion $C_{t+1}^{trial} = F_{t+1}(x_d)$ au niveau de la discontinuité située en x_d est déterminée numériquement au moyen des points d'intégrations x_{pg} selon l'équation (4.58) :

$$\begin{aligned} C_{t+1}^{trial} &= - \int_{L^e} \bar{G}_v(x) F_{t+1}^{trial}(x) dx \\ &= - \frac{L}{2} \sum_{pg}^{npg} \bar{G}_v(x_{pg}) F_{t+1}^{trial}(x_{pg}) w(x_{pg}), \end{aligned} \quad (4.132)$$

avec

$$F_{t+1}^{trial}(x_{pg}) = E_s(x_{pg}) \left(B(x_{pg}) d_{e,t+1}^{(k-1)} + \bar{G}(x_{pg}) \bar{\bar{d}}_{t+1}^{trial} - \bar{\bar{\varepsilon}}_t^p \right). \quad (4.133)$$

Ensuite la fonction de charge $\bar{\bar{\phi}}_{t+1}^{trial}$ doit être évaluée afin de vérifier si la discontinuité est activée ou non :

$$\bar{\bar{\phi}}_{t+1}^{trial} = |C_{t+1}^{trial}| - (\sigma_u + S \bar{\bar{d}}_{t+1}^{trial}) \leq 0, \quad (4.134)$$

Si cette équation est vérifiée alors la discontinuité n'est pas active et les variables correspondantes conservent les valeurs prédites :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{d}}_{t+1} &= \bar{\bar{d}}_{t+1}^{trial} \\ C_{t+1} &= C_{t+1}^{trial} \end{aligned} \quad (4.135)$$

Si $\bar{\bar{\phi}}_{t+1}^{trial} > 0$ alors la discontinuité est active. Les nouvelles valeurs admissibles des variables associées au modèle cohésif sont calculées en utilisant le chemin d'Euler arrière.

$$\bar{\bar{d}}_{t+1} = \bar{\bar{d}}(t) + \Delta \bar{\bar{\gamma}} sign(C_{t+1}^{trial}) \quad (4.136)$$

La nouvelle valeur de la force de cohésion au pas $t + 1$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
C_{t+1} &= - \int_{L^e} \bar{G}_v(x) F_{t+1}(x) dx \\
&= - \int_{L^e} \bar{G}_v(x) E \left(B(x) d_{t+1} + \bar{G}(x) \bar{\bar{d}}_{t+1} - \bar{\varepsilon}_t^p \right) dx \\
&= - \underbrace{\int_{L^e} \bar{G}_v(x) E \left(B(x) d_{t+1} + \bar{G}(x) \bar{\bar{d}}(t) - \bar{\varepsilon}_t^p \right) dx}_{C_{t+1}^{trial}} - \underbrace{\int_{L^e} \bar{G}_v(x) E \bar{G}(x) dx}_{E_m} \Delta \bar{\bar{d}}
\end{aligned}$$

par conséquent,

$$C_{t+1} = C_{t+1}^{trial} - E_m \Delta \bar{\bar{\gamma}} \text{sign}(C_{t+1}^{trial}) \quad (4.137)$$

Il reste à trouver le multiplicateur $\Delta \bar{\bar{\gamma}}$. Son expression peut être résumé par l'équation (4.138) :

$$\Delta \bar{\bar{\gamma}} = \begin{cases} \frac{\bar{\bar{\phi}}_{t+1}^{trial}}{-\bar{G} E_s + S} & \text{si } |S \bar{\bar{d}}_t| < \sigma_u \\ \frac{|C_{t+1}^{trial}|}{-\bar{G} E_s} & \text{si } |S \bar{\bar{d}}_t| = \sigma_u \end{cases} \quad (4.138)$$

Finalement, le module tangent est :

$$\left. \frac{dC}{d\bar{\bar{d}}} \right|_{t+1} = \begin{cases} \text{pas défini si } \Delta \bar{\bar{\gamma}} = 0 \\ S & \text{si } \Delta \bar{\bar{\gamma}} > 0 \text{ et } |S \bar{\bar{d}}_{t+1}| < \sigma_u \\ 0 & \text{si } \Delta \bar{\bar{\gamma}} > 0 \text{ et } |S \bar{\bar{d}}_{t+1}| = \sigma_u \end{cases} \quad (4.139)$$

Une fois la discontinuité activée pour un pas de temps donné, elle reste active pour tous les pas de temps suivants. L'ensemble de cette résolution est illustré en figure (4.25).

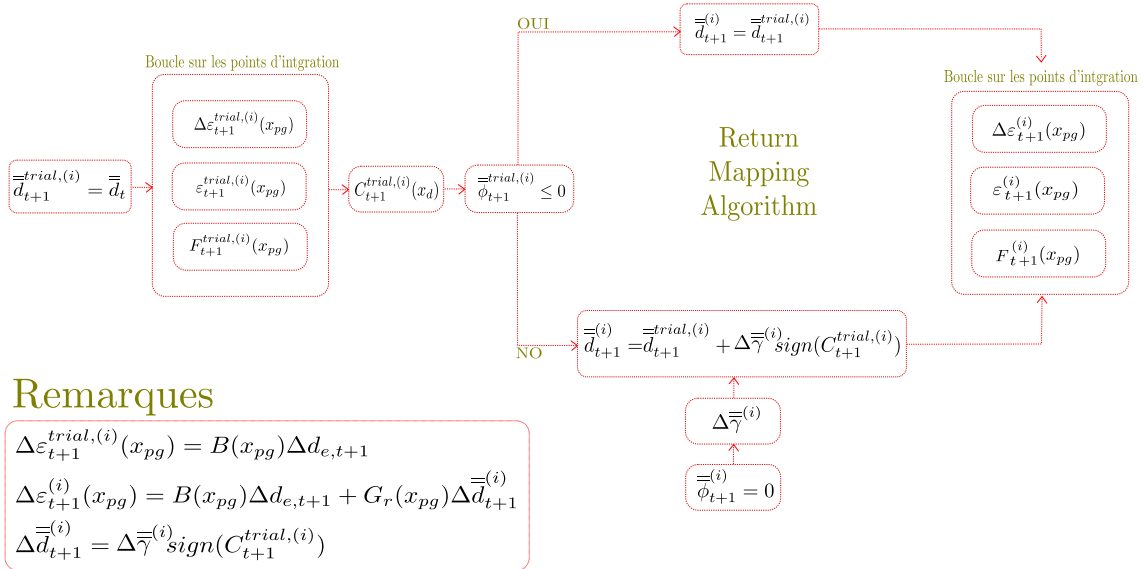


FIGURE 4.25 – Algorithme de discontinuité au niveau de l'élément

Les étapes d'intégration numérique de ce modèle sont récapitulées dans A.4.

4.9 Applications numériques

4.9.1 Poutre en traction simple

Afin de valider l'implémentation numérique, une poutre encastrée à l'extrémité gauche soumise à un déplacement axial à l'extrémité droite est modélisée ci dessous. Un comportement élastique linéaire couplé à un modèle cohésif rigide-linéaire est adopté. Seule la composante axiale est enrichie dans ce cas.

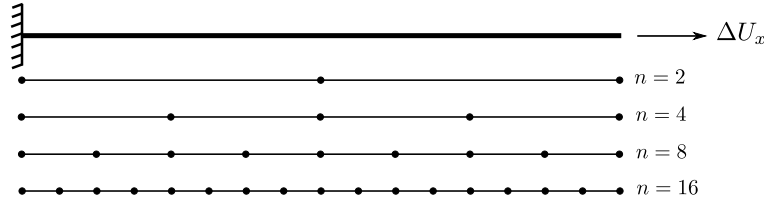


FIGURE 4.26 – Poutre encastrée soumise à un effort de traction

La formulation **FCQ** est utilisée pour la discrétisation spatiale. Les caractéristiques mécaniques et géométriques du problème sont les suivantes :

Caractéristiques de la poutre	Variable	Valeur	Unité
Longueur de la poutre	L	1	m
Module élastique	ES	4000	kN
Force limite	$\sigma_u = \sigma_y$	100	kN
Module cohésif	S	-2000	kN.m ⁻¹

TABLE 4.2 – Caractéristiques mécaniques et géométriques

Quatre calculs sont réalisés avec un nombre n d'éléments différent ($n = 2, 4, 8$ et 16), l'objectif étant d'étudier le problème de dépendance au maillage. La figure (4.27) représente les réponses globales en fonction du nombre d'éléments. Toutes les courbes ont une partie croissante jusqu'à ce que la force axiale atteigne la limite $f = \sigma_u$, suivie par une partie décroissante où l'activation des discontinuités au sein des éléments finis poutres Timoshenko prend place. Pour un nombre d'éléments finis poutres plus important, un plus grand nombre de discontinuités s'active et par conséquent l'énergie dissipée est plus importante. La force axiale prend sa valeur maximale en même temps pour toutes les discrétisations.

Un défaut est ensuite introduit au premier élément **FCQ** à gauche afin d'assurer l'activation d'une seule discontinuité au sein de la structure ($\sigma_u^{e=1} = 95\text{kN.m}$ au lieu de 100kN). Cela se traduit par une même réponse globale quelque soit le nombre d'éléments finis poutre **FCQ** utilisés, voir figure (4.28). En effet, une fois que la discontinuité est active, les autres éléments se déchargent élastiquement sans dissipation d'énergie, ce qui limite la dissipation à une seule discontinuité. La réponse est alors indépendante du maillage.

4.9.2 Poutre en flexion pure

Afin de valider l'activation de la discontinuité en rotation, une poutre encastrée de longueur $L = 2.5\text{m}$ avec une rotation imposée à l'extrémité libre est considérée dans la figure (4.29).

La formulation **FCQ** est utilisée pour la discrétisation spatiale en utilisant différents nombres d'éléments ($n = 1, 4, 6$ et 12). Le comportement du matériau est illustré en figure (4.30). La discontinuité est considérée au milieu de chaque l'élément (en $x_d = L/2$) puisque le moment de flexion pour cet exemple est constant le long de l'élément.

Comme pour l'exemple précédent, dans un premier temps tous les éléments **FCQ** ont les mêmes caractéristiques. La réponse en fonction du nombre d'éléments est représentée en figure (4.31).

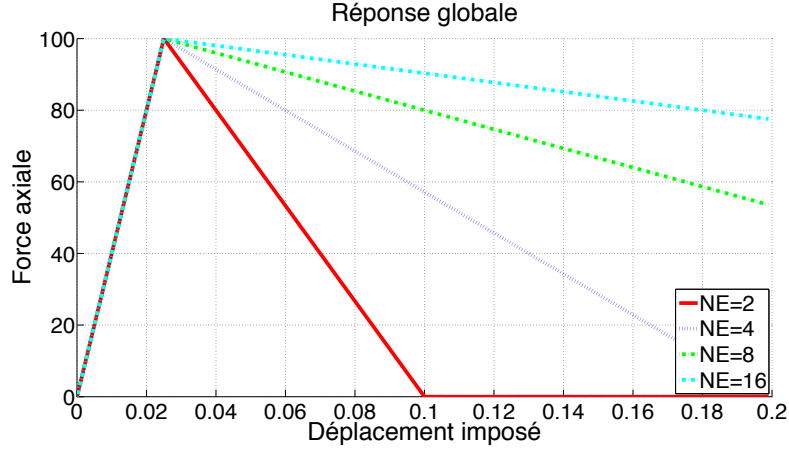


FIGURE 4.27 – Poutre élastique cohésive encastrée soumise à un déplacement axial - Réponse globale en fonction du nombre d'éléments (force axiale en fonction du déplacement imposé) en utilisant des éléments **FCQ** ayant la même contrainte σ_u .

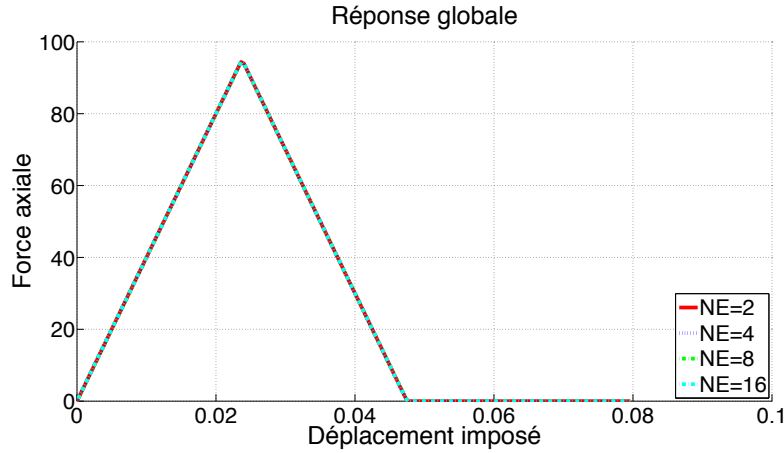


FIGURE 4.28 – Poutre élastique cohésive encastrée soumise à un déplacement axial - Réponse globale en fonction du nombre d'éléments (force axiale en fonction du déplacement imposé) en imposant un défaut au premier élément **FCQ** ($\sigma_u^{e=1} = 95\text{kN}$ au lieu de 100kN)

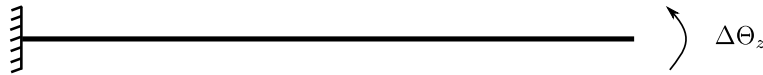


FIGURE 4.29 – Poutre encastrée soumise à une rotation

Dans un deuxième calcul, un défaut est introduit au premier élément **FCQ** à gauche en diminuant son moment à rupture $M_u^{e=1}$ à 272kN.m au lieu de 274kN.m . Cela donne les résultats illustrés en figure (4.32).

En ce qui concerne la dépendance au maillage, on obtient des résultats similaires à ceux de l'exemple précédent. En effet, sans défaut, l'énergie dissipée est directement proportionnelle au nombre d'éléments utilisés. En revanche, le fait d'imposer un défaut au premier élément limite le nombre de discontinuités activées à une seule discontinuité au sein de l'élément le plus faible.

Les figures (4.33) et (4.34) illustrent respectivement le comportement continu du matériau au niveau d'un des points d'intégration ainsi que le comportement du matériau au niveau de la discontinuité. Ces deux figures permettent de voir ce qui se passe au niveau local. Le comportement du matériau

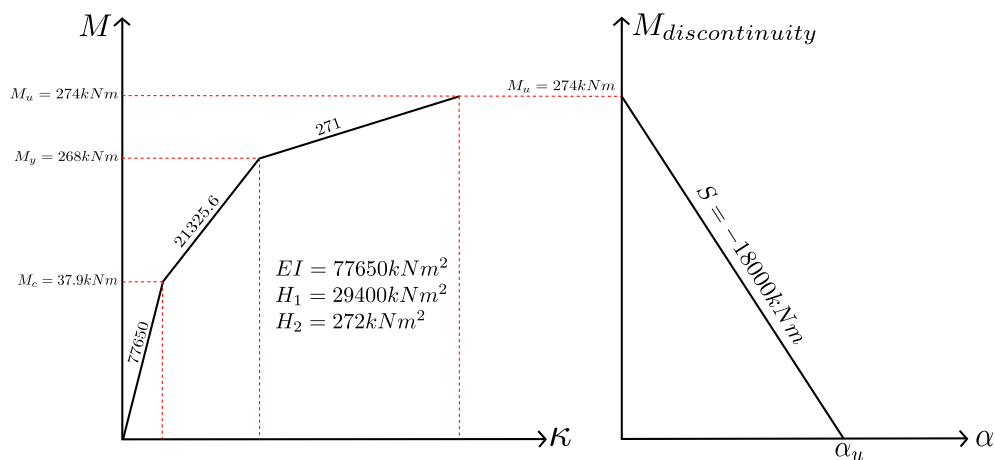


FIGURE 4.30 – Modèle de comportement élasto-plastique avec discontinuité pour le moment de flexion

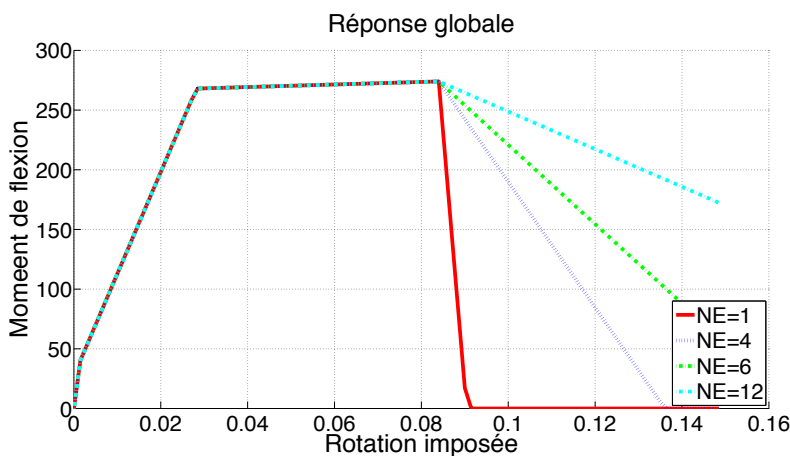


FIGURE 4.31 – Poutre élasto-plastique cohésive encastée soumise à une rotation imposée - Réponse globale en fonction du nombre d'éléments (moment fléchissant en fonction de la rotation imposée) en utilisant des éléments **FCQ** ayant le même moment de rupture M_u

hors discontinuité évolue suivant le chemin I de la figure (4.23) jusqu'au moment de l'activation de la discontinuité. À ce moment, le matériau hors discontinuité se décharge de manière élastique (voir figure (4.33)) afin de respecter l'équilibre local avec le modèle cohésif au niveau de la discontinuité (voir figure (4.34)).

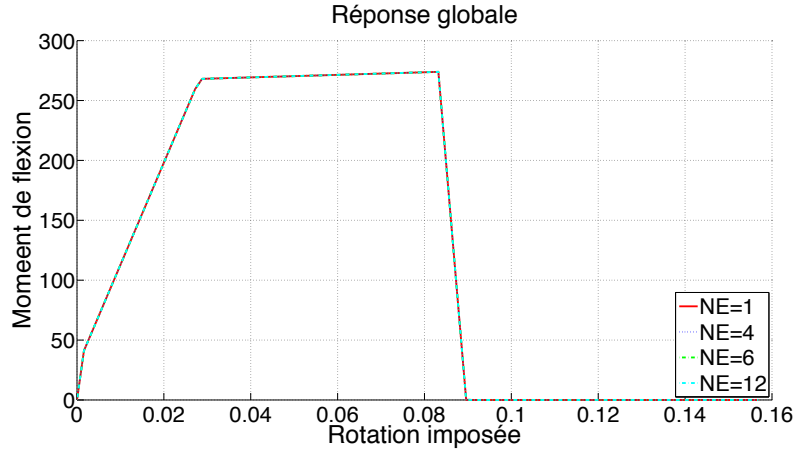


FIGURE 4.32 – Poutre élasto-plastique cohésive encastree soumise à une rotation imposée - Réponse globale en fonction du nombre d'éléments (moment fléchissant en fonction de la rotation imposée) en imposant un défaut au premier élément **FCQ** ($M_u = 272\text{kN.m}$ au lieu de 274kN.m).

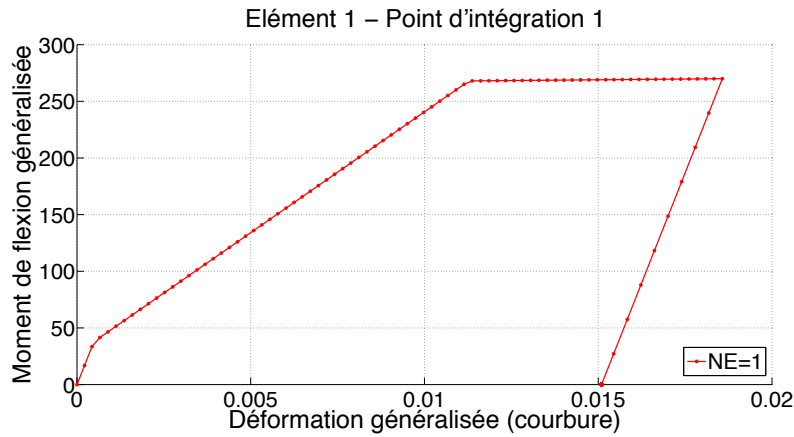


FIGURE 4.33 – Poutre élasto-plastique cohésive encastree soumise à une rotation imposée discrétisée avec un seul élément **FCQ** - Comportement du matériau au niveau d'un point d'intégration hors de la discontinuité

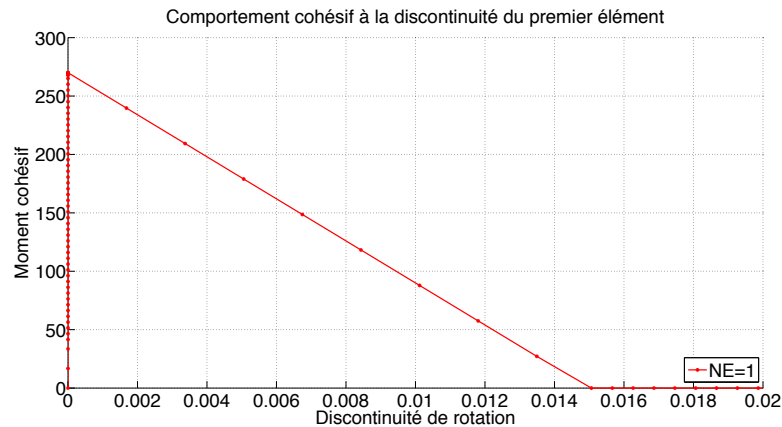


FIGURE 4.34 – Poutre élasto-plastique cohésive encastree soumise à une rotation imposée discrétisée avec un seul élément **FCQ** - Comportement cohésif du matériau au niveau de la discontinuité

4.9.3 Portique à double niveau en béton armé

Le but de cette application est de montrer la performance des éléments **FCQ** et **FLI** enrichis pour la modélisation d'un portique à double niveau en béton armé. La structure considérée est celle testée expérimentalement à échelle 1 par [Vecchio and Emara, 1992]. Le comportement adoucissant expérimental de la réponse globale de la structure n'étant pas connu, la validation des modèles ne va se faire que sur la partie croissante de la courbe effort-déplacement.

Les détails géométriques de portique sont donnés en figure (4.35). Deux sections différentes sont utilisées en fonction que l'on considère les poutres ou les poteaux (voir figure (4.35) sections A et B).

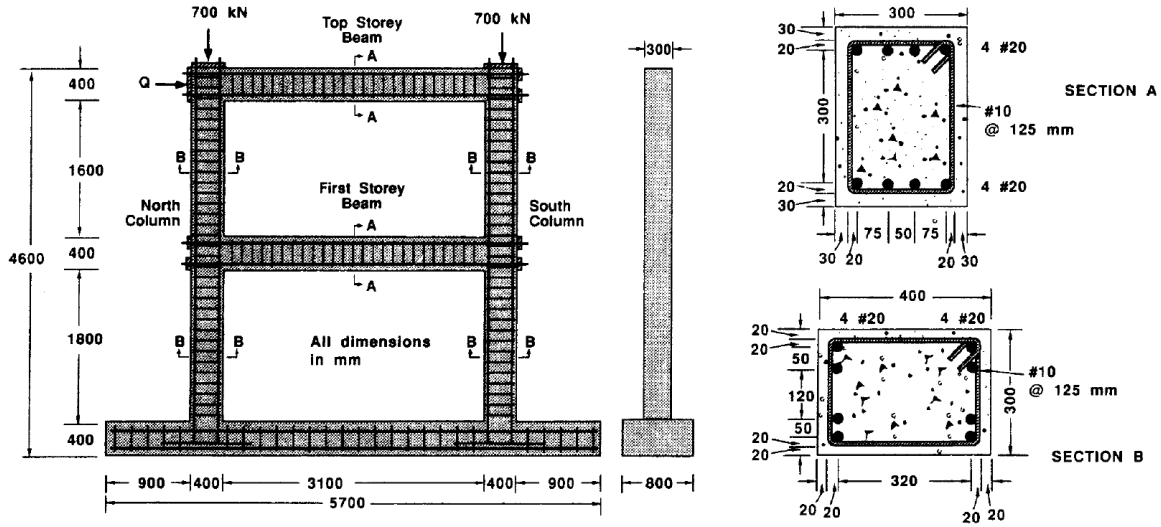


FIGURE 4.35 – Géométrie du portique à double niveau en béton [Vecchio and Emara, 1992]

Deux modèles généralisés décrivant le comportement des deux sections doivent être proposés. Afin d'identifier les paramètres de ces modèles, l'analyse multi-échelle (multifibres, voir également chapitres 5 et 6) de [Pham et al., 2010], [Pham et al., 2012] et [Jukić, 2013] peut être utilisée. Le principe de cette analyse proposée par les auteurs mentionnés est de considérer pour chaque section une poutre encastree discrétisée avec un seul élément. La poutre est par ailleurs modélisée avec un modèle multifibres dont les champs des déplacements axiaux au niveau des fibres sont enrichis (voir chapitres 5, 6 pour la description de ce modèle). Cela permet de déterminer le modèle généralisé de la section à partir des modèles de comportements utilisés pour le béton et l'acier au niveau des fibres.

Dans un premier temps, un calcul est réalisé en imposant un déplacement axial à l'extrémité libre. Ce calcul permet de déterminer le module élastique de la composante axiale ES . Ensuite, un autre calcul est réalisé en imposant cette fois une rotation, ce qui permet d'identifier les paramètres du modèle généralisé pour la flexion EI . Enfin, la valeur élastique du module de cisaillement peut être estimée en accord avec les valeurs des modules ES et EI . La description des variables et leurs valeurs sont regroupées respectivement dans les tableaux (4.3) et (4.4) :

La modélisation de ce portique a déjà été réalisée par des éléments poutres généralisées dans [Pham et al., 2012] dans le cadre de la théorie de Timoshenko (élément **FLI**) et dans [Jukić, 2013] dans le cadre de la théorie de Bernoulli.

Dans notre étude, la discrétisation spatiale consiste à diviser chaque poteau en 2 éléments finis et chaque poutre en 4 éléments finis (voir figure (4.36)). Afin de comparer leurs performances, deux types d'éléments poutres enrichis sont utilisés, l'élément **FCQ** et l'élément **FLI**. Les composantes normales et de cisaillement sont considérées linéaires élastiques telles que :

$$F_x = ES\varepsilon_x \quad F_x = kGS\beta_y \quad (4.140)$$

Variable	Description
M_c	Moment de flexion lors d'apparition de la première fissure dans les fibres en béton
M_y	Moment de flexion au-delà de laquelle les fibres en acier entrent en plasticité
M_u	Moment ultime
EI	Module de flexion
H_1	Premier module d'écroûissage
H_2	Deuxième module d'écroûissage
S	Module d'adoucissement du modèle généralisé cohésif

TABLE 4.3 – Description des variables du modèle généralisé de la section

Paramètre	Poteaux	Poutres	Unité
M_c	100	30	kN.m
M_y	245	150	kN.m
M_u	295	185	kN.m
EI	45760	45760	kN.m ²
H_1	12450	11190	kN.m ²
H_2	195	137	kN.m ²
S	-2410	-1310	kN.m

TABLE 4.4 – Paramètres de la section des poteaux et des poutres [Jukić, 2013]

avec $ES = 3432000\text{kN}$ et $kGS = 1000000\text{kN}$. Le modèle de comportement généralisé utilisé est le même avec celui de l'application précédente (voir figure (4.30)).

La comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques pour les deux formulations est présentée dans les figures (4.37) et (4.38). Pour le même nombre d'éléments, la performance de la formulation **FCQ** enrichie s'avère supérieure.

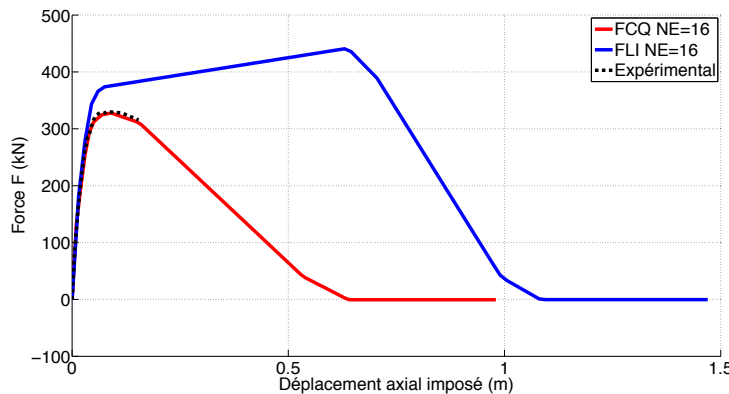


FIGURE 4.37 – Résultats globaux numériques et expérimentaux : comparaison des formulations **FCQ** et **FLI**

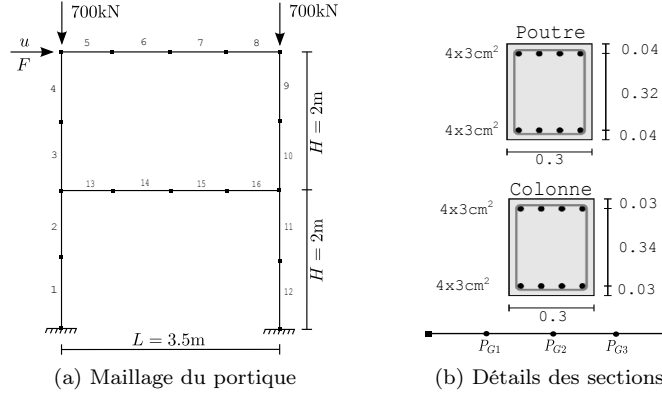


FIGURE 4.36 – Discretisation du portique avec des éléments finis **FCQ** ou **FLI**

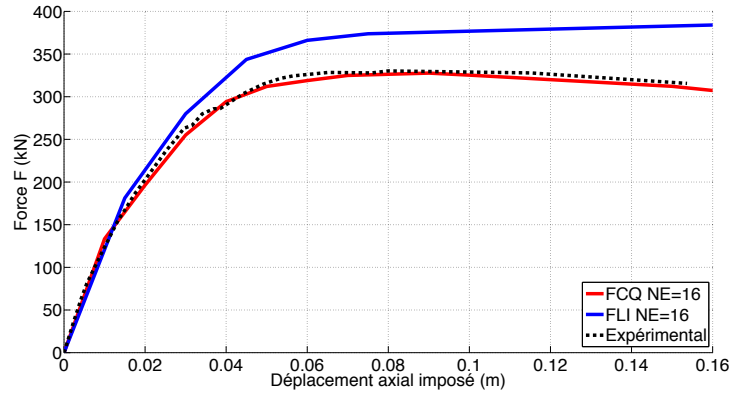


FIGURE 4.38 – Résultats globaux numériques et expérimentaux : comparaison des formulations **FCQ** et **FLI** (zoom entre 0 et 0.16m de déplacement imposé)

La figure (4.39) illustre le développement des discontinuités (qu'on peut assimiler à la notion de rotules plastiques de l'Eurocode 8) dans le portique. Les premières discontinuités apparaissent aux supports du portique dans les extrémités inférieures des poteaux (éléments 1 et 12, figure (4.39a)) après un déplacement horizontal imposé de 0.095m correspondant à une force $F = 163\text{kN}$. Ensuite, deux autres discontinuités apparaissent aux deux extrémités des poutres (13 et 16) du premier étage pour un déplacement horizontal imposé de 0.155m correspondant à une force de $F = 155\text{kN}$ (4.39b). Enfin, deux dernières discontinuités se développent aux extrémités des poutres supérieures (5 et 8) lorsque le déplacement horizontal imposé vaut 0.165m avec une force correspondante $F = 152\text{kN}$ (4.39c). La figure (4.40) illustre l'apparition des discontinuités sur la réponse globale de la structure. Les positions 1, 2 et 3 en figure (4.40) représentent respectivement l'apparition des discontinuités aux extrémités inférieures des poteaux (1 et 12) (figure (4.39a)), aux extrémités des poutres intermédiaires (13 et 16) (figure (4.39b)) et aux extrémités des poutres supérieures (5 et 8) (figure (4.39c)). Les trois autres positions 4, 5 et 6 représentent l'état de la structure quand les discontinuités s'ouvrent totalement, autrement dit lorsque les efforts cohésifs tendent vers zéro dans le même ordre que précédemment : aux supports, puis dans les poutres intermédiaires et enfin dans les poutres supérieures.

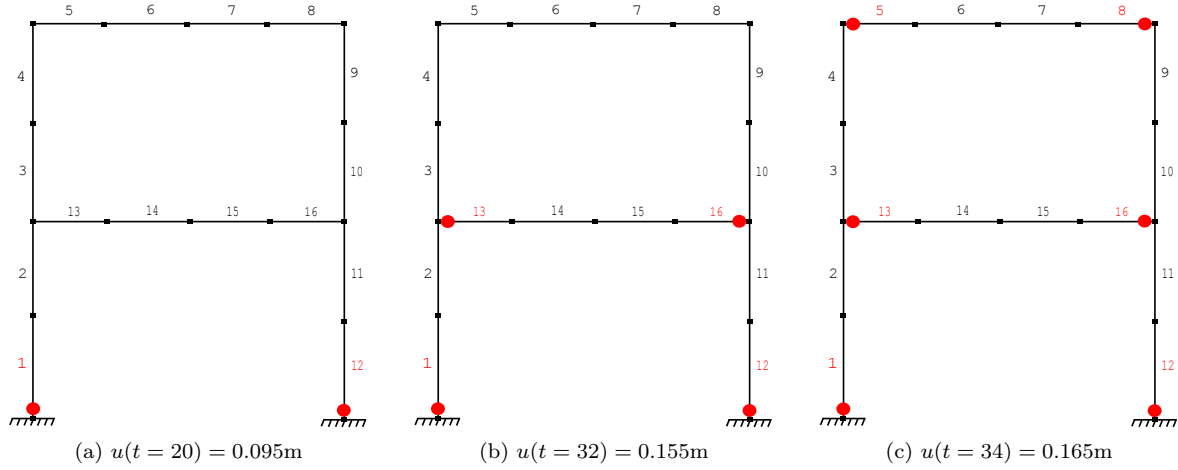


FIGURE 4.39 – Développement des discontinuités (rotules plastiques) dans le portique, formulation **FCQ**

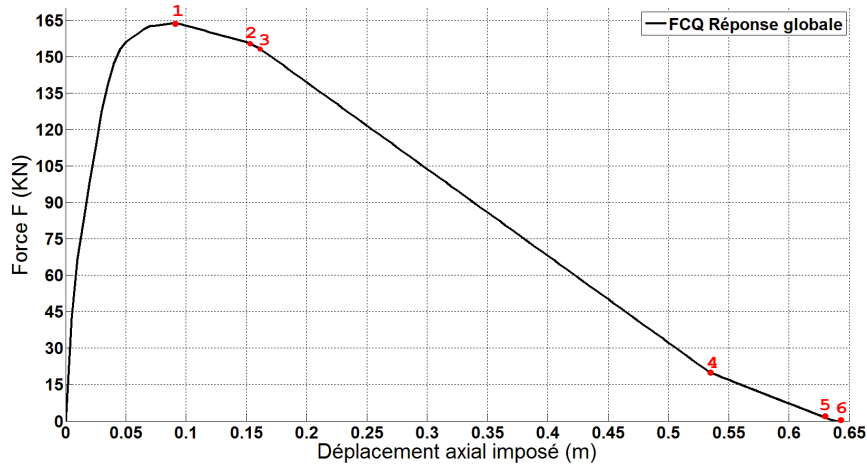


FIGURE 4.40 – Développement des discontinuités (rotules plastiques) dans le portique en fonction de la réponse globale, formulation **FCQ**

La modélisation du portique par des éléments poutres **FCQ** ou **FLI** enrichies montre leur efficacité à reproduire les résultats expérimentaux tant au niveau global que local. La dégradation de la structure peut être décrite et suivie par le développement progressif des discontinuités au sein des éléments. Pour le même nombre d'éléments, la performance de la formulation **FCQ** enrichie s'avère supérieure.

Ce type de modélisation s'appuyant sur des éléments généralisés enrichis est un outil numérique efficace et rapide pour la modélisation des grandes structures du génie civil. Il permet d'avoir accès au comportement global mais également aux endroits de dégradations localisées conduisant finalement à la rupture de la structure.

4.10 Conclusion

Dans ce chapitre, un modèle de poutre est proposé pour modéliser rapidement le comportement des structures jusqu'à la rupture. Le modèle développé s'inscrit dans le cadre des approches généralisées. Le comportement de la section est décrit par une loi généralisée qui peut être construit par le biais d'une analyse multi-échelle.

Le phénomène de localisation est d’abord décrit en évoquant les difficultés numériques rencontrées. Une brève revue sur les méthodes permettant une modélisation objective de la localisation est présentée. Ensuite, l’état d’art de la méthode d’enrichissement cinématique choisie comme limiteur de localisation est développé. Les méthodes d’implémentation des discontinuités sont présentées en se focalisant sur la méthode des éléments finis intégrés. Les discontinuités sont incorporées au sein des éléments et les modes supplémentaires sont résolus numériquement au niveau de chaque élément enrichi par la méthode de condensation statique.

La cinématique de la discontinuité est ensuite décrite d’une manière détaillée pour le cas d’une barre en traction et puis pour un problème poutre de type **FCQ**. Le champ de rotation est enrichi avec une discontinuité de rotation et les fonctions de d’enrichissement sont construites selon des étapes bien définies afin de respecter les conditions nécessaires.

Le matériau généralisé constituant la poutre enrichie a deux comportements différents : un comportement élasto-plastique pour décrire la partie continue et un comportement cohésif pour décrire le matériau au niveau de la discontinuité. Le développement thermodynamique est évoqué ainsi que les procédures d’implémentation numérique.

Le chapitre se termine avec des applications numériques et des comparaisons avec des résultats expérimentaux qui valident le fonctionnement et l’efficacité du modèle développé. Le modèle, tout en restant rapide, réussit à prédire le comportement global des structures en donnant une idée sur les endroits dans lesquelles les déformations se localisent pour former des discontinuités.

Le modèle développé dans ce chapitre présente néanmoins plusieurs limites. En effet, avec ce type de modèle il n’est pas possible de suivre l’évolution de la non linéarité dans la section puisque cette dernière est décrite par un modèle généralisé. De plus, l’utilisateur ne peut pas suivre l’évolution de l’endommagement dans le béton et la plastification dans l’acier. Pour répondre à ces besoins, un modèle plus sophistiqué est proposé dans le chapitre suivant. L’approche généralisée de la section est remplacée par une approche multifibres où l’enrichissement cinématique est désormais appliqué au niveau des fibres.

Chapitre 5

Formulation EF enrichie pour l'approche multifibres

Sommaire

5.1	Introduction	101
5.2	Travaux antérieurs	101
5.2.1	Éléments poutres multifibres	101
5.2.2	Localisation des déformations et poutres multifibres	102
5.3	Formulation poutre multifibres	103
5.3.1	Enrichissement cinématique des fibres	105
5.3.2	Formulation variationnelle	105
5.3.3	Détermination des fonctions d'enrichissement \overline{G}_r et \overline{G}_v	107
5.3.3.1	Opérateur de compatibilité \overline{G}_r	107
5.3.3.2	Opérateur d'équilibre \overline{G}_v	109
5.4	Modèles de comportement continu et cohésif	109
5.4.1	Modèle d'endommagement pour le comportement axial des fibres en béton	109
5.4.1.1	Modèle continu	109
5.4.1.2	Modèle cohésif	112
5.4.2	Modèle élasto-plastique pour le comportement axial des fibres en acier	114
5.5	Implémentation numérique	115
5.5.1	Linéarisation des équations d'équilibre	115
5.5.2	Intégration des modèles de comportement continu et cohésif au niveau de la fibre	117
5.5.2.1	Évolution des variables d'endommagement	117
5.5.2.2	Évolution des variables cohésives	118
5.6	Applications numériques	121
5.6.1	Poutre multifibres en flexion avec une loi de comportement élastique-cohésive à seuils symétriques en traction et compression	121
5.6.2	Poutre multifibres en flexion avec une loi de comportement élastique-cohésive à seuils non-symétriques en traction et compression	125
5.6.3	Poutre en béton armé en flexion	129
5.7	Conclusions	132

5.1 Introduction

Le chapitre précédent a exposé l'enrichissement dans le cadre d'une approche généralisée des efforts des sections. Le champ de rotation généralisé a été enrichi par une variable de discontinuité pour décrire la rupture d'une poutre en flexion. Dans ce chapitre, l'approche multifibres est adoptée. Cette approche permet de discrétiser la section et de gérer les non linéarités au niveau de chaque fibre de la section. Le passage de l'échelle de la section à l'échelle de la fibre impose de passer de trois degrés de liberté généralisés sur la section à deux degrés de liberté sur chaque fibre. En effet, le déplacement de chaque fibre d'une poutre Timoshenko est piloté par une composante axiale et une ou deux composantes transversales (dans le cadre d'une formulation 2D ou 3D respectivement).

Seulement la composante axiale du déplacement au niveau de la fibre est ci-dessous enrichie par une variable de discontinuité. Cette variable est directement liée à l'ouverture d'une fissure. Le principe est par conséquent d'associer à chaque fibre une loi uni-axiale linéaire ou non linéaire pour décrire le matériau dans son état continu et une loi cohésive afin de modéliser le comportement au niveau de la discontinuité. Dès lors que les forces de traction au niveau de la discontinuité s'annulent, la fibre se rompt. La rupture locale d'une fibre ne conduit pas à la rupture totale de la section. La rupture de la structure peut par conséquent être suivie par le développement progressif des discontinuités des fibres.

5.2 Travaux antérieurs

5.2.1 Éléments poutres multifibres

Les dernières vingt ans, plusieurs éléments finis poutres multifibres ont été développés et implémentés dans les codes éléments finis. Un des premiers manuscrits qui fait référence à l'idée de discrétiser la section d'une poutre en "fibres" est le livre de [Owen and Hinton, 1980a], suivi par les travaux de [Chan, 1983], [Scordelis, 1984], [Izzuddin, 1990] et [Spacone et al., 1996b]. Les poutres multifibres ont déjà montré leur efficacité pour différentes applications de génie civil : analyse non linéaire des poutres ou des voiles avec des sections non homogènes (par exemple en béton armé) [Kotronis and Mazars, 2005], [Kotronis et al., 2005], [Ile et al., 2008], [Grange et al., 2008], des sections arbitraires ou creuses [Grange et al., 2011], [Desprez et al., 2015] soumises à la flexion, cisaillement ou torsion [Mazars et al., 2006], interactions axial et de flexion [Chan, 1983], [Scordelis, 1984], [Izzuddin, 1990], [Spacone and Limkatanyu, 2000], [Pinho and Elnashai, 2000], interactions Sol Structure [Grange et al., 2011], études de vulnérabilité [Desprez et al., 2015] et modélisation des structures renforcées par des tissus de fibres de carbone [Desprez et al., 2013].

Les poutres multifibres de cinématique Euler-Bernoulli multi-fiber beams sont utilisées pour les cas où les effets de cisaillement sont négligeables [Spacone and Limkatanyu, 2000]. Par contre, elles n'arrivent pas à reproduire les interactions entre les forces axiales, les forces de cisaillement et les moments. C'est pour cette raison que des poutres multifibres de cinématique Timoshenko ont été développées par [Ranzo and Petrangeli, 1988], [Petrangeli et al., 1999], [Kotronis and Mazars, 2005], [Mazars et al., 2006], [Marini and Spacone, 2006], [Bairan Garcia and Mari Bernat, 2006], [Navarro Gregori et al., 2007], [Šćulac et al., 2014], [Jukić et al., 2014], [Caillerie et al., 2015].

Concernant la loi de comportement (continue) utilisée, plusieurs choix existent dans la littérature : modèles basés sur la mécanique de l'endommagement [Kotronis and Mazars, 2005], de plasticité [Dujc et al., 2010]), modèles qui couplent endommagement et plasticité [Ibrahimbegović et al., 2007]), modèles simplifiés pour la prise en compte de confinement dans des poteaux [Desprez et al., 2013]) ou des approches basées sur la "modified compression field theory" introduite par [Vecchio and Collins, 1986] et [Vecchio and Collins, 1988].

Pour des fortes sollicitations, la distribution non linéaire du cisaillement peut conduire au non respect de l'hypothèse de planéité des sections, hypothèse adoptée par la théorie des poutres de Timoshenko, ce qui provoque le gauchissement des sections (figure (5.1)). Pour cela, [Dubé, 1997] propose d'enrichir le champ de déplacement par un profil de gauchissement. Ce profil est calculé par la résolution d'un problème local au niveau de la section, profil qui est ensuite supposé constant au cours du calcul.

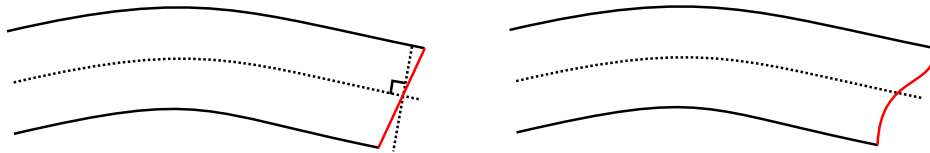


FIGURE 5.1 – Gauchissement de la section plane

[Mazars et al., 2006] ont montré l'importance de ce type d'enrichissement cinématique pour modéliser également le phénomène de torsion. Dans leur travaux, la cinématique de la section multifibres d'une poutre Timoshenko est enrichie par une fonction de gauchissement en torsion calculée à partir de la résolution d'un problème local. [Capdevielle et al., 2016] proposent d'actualiser la fonction de gauchissement de torsion pendant le calcul et obtient des résultats très satisfaisants en comparaison avec des résultats expérimentaux. Enfin, dans le cadre du projet SINAPS@, des travaux sont également en cours pour la prise en compte de l'effet des armatures transversales dans les sections en béton armé (thèse en cours de N. Khoder, Sols, Solides, Structures, Risques 3SR (UGA)/SMS-ID (INSA de Lyon)).

5.2.2 Localisation des déformations et poutres multifibres

Un modèle classique de poutre multifibres ne permet pas de bien reproduire la localisation de déformations. Pour cela, des auteurs ont proposé de remplacer la partie de la poutre dans laquelle la concentration de déformations est attendue par un maillage volumique. Cela nécessite d'imposer correctement les conditions aux limites afin de conserver la compatibilité avec les éléments poutres voisins [Monaghan et al., 1998]. Les auteurs proposent une équivalence énergétique entre le travail effectué au niveau des noeuds de l'interface du volume et le travail effectué au niveau du seul noeud de l'élément poutre.

Une autre méthode, moins coûteuse en terme de temps de calcul, est de conserver l'approche multifibres dans tous les éléments en modifiant la partie post-pic du comportement des matériaux définis au niveau des fibres [Giry, 2011]. L'idée principale est de calculer d'abord l'énergie dissipée par le développement d'une zone de localisation avec une modélisation éléments finis tridimensionnelle et de supposer qu'elle est égale à l'énergie dissipée par la modélisation multifibres. Ceci permet d'en déduire une estimation de l'ouverture de fissure dans une fibre. Cette estimation est obtenue en définissant un outil de passage d'une information continue dans l'élément multifibres à une information discrète.

Plus proche de l'enrichissement cinématique adopté dans cette thèse, [Pham et al., 2012] ont développé un modèle de poutre Timoshenko multifibres en enrichissant le champ de déplacement axial au niveau des fibres. Ce modèle a été conçu dans le but d'identifier les paramètres d'un modèle de comportement généralisé de la section d'une poutre (voir également section 4.9.3). Un autre modèle de poutre multifibres enrichie appliqué aux structures en béton armé est celui de [Jukić et al., 2014]. Les champs de déplacements dans les fibres sont enrichis par des variables de discontinuités pour décrire la rupture locale de chaque matériau. Le béton est modélisé avec un modèle d'endommagement unidimensionnel couplé à un modèle cohésif (partie adoucissante) pour décrire le comportement au niveau de la discontinuité. L'acier est modélisé avec un modèle élasto-plastique unidimensionnel couplé à un modèle cohésif (partie adoucissante) pour décrire la formation d'une rotule plastique au niveau de la discontinuité. Les fibres sont considérées comme des éléments finis barres. Dans leur modèle, les champs de déplacements sont interpolés par des fonctions linéaires.

La formulation enrichie pour l'approche multifibres proposée dans les chapitres 5 et 6 suit une logique similaire (approche multifibres, introduction des discontinuités) mais cette fois-ci étendue à la nouvelle formulation élément fini poutre Timoshenko **FCQ** ayant des fonctions de forme d'ordre supérieur. L'avantage de ce type de modélisation poutre multifibres enrichie porte sur son efficacité, sa simplicité, le faible coût de calcul par rapport aux modèles tridimensionnels tout en assurant l'obtention des informations globales et locales sur le comportement des structures en génie civil jusqu'à la ruine.

Les sections suivantes présentent la formulation d'une poutre multifibres et la façon d'introduire les variables de discontinuité pour l'enrichissement des fibres. Ensuite, la formulation variationnelle de la poutre multifibres enrichie est présentée dans le cadre du principe des travaux virtuels, ce qui permet d'obtenir les équations d'équilibre. Un paragraphe spécifique est consacré à la détermination des fonc-

tions d'enrichissement correspondantes. La formulation thermodynamique du modèle d'endommagement utilisé pour décrire le comportement du béton est présentée ainsi que le modèle cohésif. Le chapitre 5 se termine avec les procédures de linéarisation et d'implémentation numérique et la validation avec des simulations numériques.

5.3 Formulation poutre multifibres

La figure (5.2) illustre le concept d'une poutre multifibres e . On note L_e sa longueur et i et j les noeuds aux extrémités.

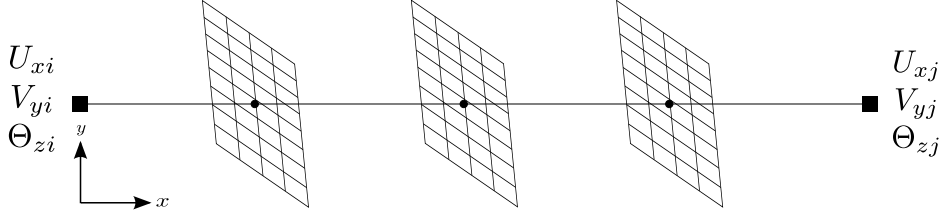


FIGURE 5.2 – Illustration du concept de l'approche poutre multifibres

À l'instant t , les déplacements généralisés d'une section située à l'abscisse x de l'élément poutre e sont (formulation 2D) :

$$\begin{bmatrix} U_x(x, t) & V_y(x, t) & \Theta_z(x, t) \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

À partir de l'hypothèse de la planéité des sections, les déplacements au niveau de chaque fibre peuvent être déduits de (5.1) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} u_x(x, y, t) &= U_x(x, t) - y\Theta_z(x, t) \\ v_y(x, y, t) &= V_y(x, t) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Il convient ici de mentionner que deux formulations ((a) et (b)) éléments finis de la poutre multifibres sont possibles. Ces deux formulations sont illustrées par l'équation (5.7) et la figure (5.3).

La première formulation (chemin (a) de l'équation (5.7)) consiste à chercher le vecteur des déplacements axiaux $\mathbf{d}_f(y, t)$ aux extrémités de chaque fibre f d'ordonnée y en gardant l'hypothèse de sections planes (5.2). Cela donne :

$$\mathbf{d}_f(y, t) = \begin{bmatrix} u_{xi}(y, t) \\ u_{xj}(y, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{xi}(t) - y\Theta_{zi}(t) \\ U_{xj}(t) - y\Theta_{zj}(t) \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

La fibre est considérée comme un problème barre 1D. Par conséquent, le champ de déplacement axial $u_x(x, y, t)$ le long de la fibre est interpolé par des fonctions de forme $\mathbf{N}_f(x)$ telles que :

$$u_x(x, y, t) = \mathbf{N}^u(x)\mathbf{d}_e(t) - y\mathbf{N}^\theta(x)\mathbf{d}_e(t) = \mathbf{N}_f(x)\mathbf{d}_f(y, t) \quad (5.4)$$

avec, comme mentionné dans le chapitre 4, \mathbf{d}_e le vecteur des déplacements nodaux défini par :

$$\mathbf{d}_e = \begin{cases} \begin{bmatrix} U_{xi} & V_{yi} & \Theta_{zi} & U_{xj} & V_{yj} & \Theta_{zj} \end{bmatrix} & \text{pour la formulation FLI} \\ \begin{bmatrix} U_{xi} & V_{yi} & \Theta_{zi} & \Delta V_{yk}^1 & \Delta \Theta_{zk} & \Delta V_{yk}^1 & U_{xj} & V_{yj} & \Theta_{zj} \end{bmatrix} & \text{pour la formulation FCQ} \end{cases} \quad (5.5)$$

De ce fait, le problème élément poutre multifibres est transformé en une combinaison de problèmes des éléments barres 1D. Ce chemin constitue une formulation standard de la poutre multifibres utilisée dans la littérature.

La deuxième formulation éléments finis de la poutre multifibres (chemin (b) de l'équation (5.7)), consiste à interpoler les champs de déplacements généralisés par le biais des fonctions de forme respectives à la formulation poutre adoptée. Ensuite, le déplacement axial le long de chaque fibre est déterminé en

respectant l'hypothèse de sections planes, équation (5.2). Dans ce cas, le champ de déplacement n'est plus interpolé le long de chaque fibre, mais le long de l'axe de l'élément poutre.

$$u_x(x, y, t) = \mathbf{N}^u(x) \mathbf{d}_e(t) - y \mathbf{N}^\theta(x) \mathbf{d}_e(t) = \left(\mathbf{N}^u(x) - y \mathbf{N}^\theta(x) \right) \mathbf{d}_e(t) = \mathbf{N}_f(x, y) \mathbf{d}_e(t) \quad (5.6)$$

Il convient de remarquer que l'utilisation de la formulation **FLI** avec le chemin (b) (équation (5.6)) conduit à la même formulation obtenue avec le chemin (a) (équation (5.4)). Ceci n'est pas toujours aisé pour des formulations éléments finis d'ordre élevé, comme c'est le cas de l'élément **FCQ**. L'ordre élevé des fonctions de forme (3.2.4.3) de la formulation **FCQ** fait que la deuxième méthode (chemin (b), équation (5.6)) ne peut pas être utilisée, à moins que les nouvelles fonctions de forme (4.5.1.2) proposées dans le chapitre précédent soient adoptées. En effet, le remplacement du degré de liberté interne par la valeur de la rotation au milieu de l'élément (voir équation (4.38)) **FCQ** permet de discrétiser le champ de déplacement axial au niveau de la fibre selon l'équation (5.4). Dans ce cas, les deux équations (5.4) et (5.6) sont équivalentes.

Il est important de faire la différence entre ces deux méthodes équivalentes (chemin (a) et (b)) de la formulation d'une poutre **FCQ** multifibres pour deux raisons. Premièrement, le chemin (a) permet d'écrire le champ de déplacement axial au niveau de la fibre selon l'équation (5.4). Les fibres sont considérées comme des barres à trois noeuds. Cela permet de définir la cinématique de la discontinuité et donc les fonctions d'enrichissement correspondantes. La détermination de ces fonctions est détaillée dans la section (5.3.3). Deuxièmement, l'utilisation de l'équation (5.6) issue du chemin (b) facilite l'écriture de la formulation variationnelle ainsi que la procédure d'implémentation numérique (voir section (5.5)) et la construction de la matrice de rigidité élémentaire.

$$\begin{aligned}
 \text{a} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} U_{xi}(t) \\ V_{yi}(t) \\ \Theta_{zi}(t) \\ U_{xj}(t) \\ V_{yj}(t) \\ \Theta_{zj}(t) \end{array} \right\} &\xRightarrow{1a} \left\{ \begin{array}{l} u_{xi}(y, t) \\ v_{yi}(y, t) \\ u_{xj}(y, t) \\ v_{yj}(y, t) \end{array} \right\} \xrightarrow{2a} \left\{ \begin{array}{l} u_x(x, y, t) \\ v_y(x, y, t) \end{array} \right\} \\
 \text{b} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} U_{xi}(t) \\ V_{yi}(t) \\ \Theta_{zi}(t) \\ U_{xj}(t) \\ V_{yj}(t) \\ \Theta_{zj}(t) \end{array} \right\} &\xRightarrow{1b} \left\{ \begin{array}{l} U_x(x, t) \\ V_y(x, t) \\ \Theta_z(x, t) \end{array} \right\} \xrightarrow{2b} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x(x, y, t) \\ \gamma_{xy}(x, y, t) \end{array} \right\} \\
 &\xRightarrow{3} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x(x, y, t) \\ \gamma_{xy}(x, y, t) \end{array} \right\} \xRightarrow{4} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x(x, y, t) \\ \tau_{xy}(x, y, t) \end{array} \right\} \xRightarrow{5} \left\{ \begin{array}{l} F_{fiber}(y) \\ K_{fiber}(y) \end{array} \right\} \xRightarrow{6} \left\{ \begin{array}{l} F_e \\ K_e \end{array} \right\}
 \end{aligned} \quad (5.7)$$

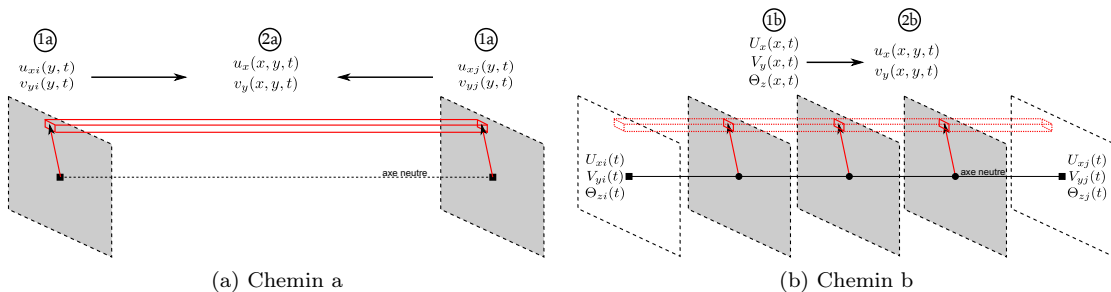


FIGURE 5.3 – Deux formulations éléments finis poutres multi-fibres

5.3.1 Enrichissement cinématique des fibres

L'enrichissement cinématique intervient directement à la première équation (5.2). La composante axiale du déplacement de la fibre est enrichie par un terme supplémentaire de la manière suivante :

$$u_x(x, y, t) = \bar{u}_x(x, y, t) + H_{x_d}(x) \bar{\bar{u}}_x(y, t) \quad (5.8)$$

avec $H_{x_d}(x)$ la fonction Heaviside définie dans l'équation (4.5), $\bar{u}_x(x, y, t)$ le champ de déplacement standard de la fibre sans discontinuité et $\bar{\bar{u}}_x(y, t)$ la discontinuité de déplacement positionnée à l'abscisse x_d de la fibre d'ordonnée y . Par ailleurs, le champ de déplacement enrichi peut être écrit, d'une manière similaire à l'équation (4.6), de la façon suivante :

$$u_x(x, y, t) = d_x(x, y, t) + [H_{x_d}(x) - \phi(x)] \bar{\bar{u}}_x(y, t), \quad (5.9)$$

avec $d_x(x, y, t)$ le déplacement axial au niveau de la fibre (voir équation (5.10)). L'objectif derrière l'ajout de $d_x(x, y, t)$ est d'assurer une continuité du déplacement au niveau des fibres aux noeuds entre les éléments. Ce déplacement est défini comme suit :

$$d_x(x, y, t) = \bar{u}_x(x, y, t) + \phi(x) \bar{\bar{u}}_x(y, t), \quad (5.10)$$

tel que $\phi(x)$ respecte les conditions définies dans le chapitre 4, équations (4.8) et (4.9). Par ailleurs, chaque fibre enrichie peut être considérée comme un problème d'une barre 1D enrichie. Donc, l'analyse faite dans le chapitre 4, équation (4.4) concernant la discontinuité dans une barre peut être utilisée. Ainsi, la dérivation par rapport à l'abscisse x donne la déformation dans la fibre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x, y, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \{d_x(x, y, t)\} + \frac{\partial}{\partial x} \{-\phi(x)\} \bar{\bar{u}}_x(y, t) + \frac{\partial}{\partial x} \{H_{x_d}(x)\} \bar{\bar{u}}_x(y, t) \\ &= \underbrace{\bar{\varepsilon}_x(x, y, t) + \bar{G}_r(x) \bar{\bar{u}}_x(y, t)}_{\tilde{\varepsilon}_x(x, y, t)} + \underbrace{\delta_{x_d}(x) \bar{\bar{u}}_x(y, t)}_{\bar{\bar{\varepsilon}}_x(x, y, t)} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Par ailleurs, la partie continue du champ de déformation le long d'une fibre s'écrit, en utilisant (3.19), de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_x(x, y, t) &= \frac{\partial U_x}{\partial x}(x, t) - y \frac{\partial \Theta_z}{\partial x}(x, t) \\ &= \mathbf{B}^\varepsilon(x) \mathbf{d}_e(t) - y \mathbf{B}^\kappa(x) \mathbf{d}_e(t) \\ &= \underbrace{[\mathbf{B}^\varepsilon(x) - y \mathbf{B}^\kappa(x)] \mathbf{d}_e(t)}_{\mathbf{B}^f(x, y) \mathbf{d}_e(t)} \end{aligned} \quad (5.12)$$

avec $\mathbf{d}_e(t)$ le vecteur des déplacements nodaux de l'élément poutre et $\mathbf{B}^f(x, y)$ les fonctions d'interpolation de la déformation axiale le long de la fibre d'ordonnée y tels que :

$$\mathbf{d}_e(t)^T = [U_{xi}(t) \quad V_{yi}(t) \quad \Theta_{zi}(t) \quad \Delta V_{yk}^1(t) \quad \Delta \Theta_{zk}(t) \quad \Delta V_{yk}^1(t) \quad U_{xj}(t) \quad V_{yj}(t) \quad \Theta_{zj}(t)] \quad (5.13)$$

et

$$\mathbf{B}^f(x, y) = [B_1^\varepsilon(x) \quad 0 \quad -yB_3^\kappa(x) \quad 0 \quad -yB_8^\kappa(x) \quad 0 \quad B_4^\varepsilon(x) \quad 0 \quad -yB_6^\kappa(x)]. \quad (5.14)$$

Finalement, la déformation axiale au niveau de la fibre y est écrite en fonction des déplacements nodaux de l'élément $\mathbf{d}_e(t)$ et des fonctions de formes $\mathbf{B}_f(x, y)$. La déformation totale discrétisée s'écrit sous la forme suivante :

$$\varepsilon_x(x, y, t) = \mathbf{B}^f(x, y) \mathbf{d}_e(t) + \underbrace{\bar{G}_r(x) \bar{\bar{u}}_x(y, t) + \delta_{x_d}(x) \bar{\bar{u}}_x(y, t)}_{G_r(x) \bar{\bar{u}}_x(y, t)} \quad (5.15)$$

5.3.2 Formulation variationnelle

Après l'enrichissement cinématique des fibres, les expressions des champs de déformation virtuelle sont introduites dans le principe des travaux virtuels. Les champs de déplacements virtuels sont interpolés avec les mêmes fonctions de formes que celles de déplacements réels. Par contre, les fonctions

d'enrichissement \bar{G}_v associées à la discontinuité virtuelle ne sont pas nécessairement les mêmes que \bar{G}_r associées à la discontinuité réelle. Ceci afin de respecter l'équilibre entre la partie discontinue et la partie continue dans la fibre, ainsi que pour vérifier le Patch test comme illustré ci-après dans la section 5.3.3.

Selon la même procédure que celle de chapitre 4 concernant l'enrichissement généralisé, le travail interne de chaque fibre s'écrit :

$$\begin{aligned}
W_{int}^f(y, t) &= \int_{\Omega^f} \delta \varepsilon_x(x, y, t)^T \sigma_x(x, y, t) + \delta \gamma_{xy}(x, y, t)^T \tau_{xy}(x, y, t) d\Omega^f \\
&= \int_{\Omega^f} \delta \left(\mathbf{B}^f(x, y) \mathbf{d}(t) + G_v(x) \bar{u}_x(y, t) \right)^T \sigma_x(x, y, t) + \delta \left(\mathbf{B}^\gamma(x) \mathbf{d}_e(t) \right)^T \tau_{xy}(x, y, t) d\Omega^f \\
&= \int_{\Omega^f} \left(\delta \mathbf{d}_e(t)^T \left[\mathbf{B}^f(x, y) \quad \mathbf{B}^\gamma(x) \right]^T \begin{bmatrix} \sigma_x(x, y, t) \\ \tau_{xy}(x, y, t) \end{bmatrix} + \delta \bar{u}_x^T(y, t) G_v(x)^T \sigma_x(x, y, t) \right) d\Omega^f \\
&= \delta \mathbf{d}_e(t)^T \underbrace{\int_{\Omega^f} \left[\mathbf{B}^f(x, y) \quad \mathbf{B}^\gamma(x) \right]^T \begin{bmatrix} \sigma_x(x, y, t) \\ \tau_{xy}(x, y, t) \end{bmatrix} d\Omega^f}_{\mathbf{F}_{int,B}^f(y, t)} + \delta \bar{u}_x(y, t)^T \underbrace{\int_{\Omega^f} G_v(x)^T \sigma_x(x, y, t) d\Omega^f}_{F_{int,G}^f(y, t)} \\
&= \delta \mathbf{d}_e(t)^T \mathbf{F}_{int,B}^f(y, t) + \delta \bar{u}_x(y, t)^T F_{int,G}^f(y, t)
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Le travail interne élémentaire peut être simplement trouvé en faisant la somme des travaux internes au niveau de chaque fibre :

$$\begin{aligned}
W_{int}^e(t) &= \sum_f^{n_{fib}} W_{int}^f(y, t) \\
&= \sum_f^{n_{fib}} \left(\delta \mathbf{d}_e(t)^T \mathbf{F}_{int,B}^f(y, t) + \delta \bar{u}_x(y, t)^T F_{int,G}^f(y, t) \right) \\
&= \delta \mathbf{d}_e(t)^T \sum_f^{n_{fib}} \mathbf{F}_{int,B}^f(y, t) + \sum_f^{\bar{n}_f} \delta \bar{u}_x(y, t)^T F_{int,G}^f(y, t) \\
&= \delta \mathbf{d}_e(t)^T \mathbf{F}_{int,B}^e(t) + \sum_f^{\bar{n}_f} \delta \bar{u}_x(y, t)^T F_{int,G}^f(y, t)
\end{aligned} \tag{5.17}$$

avec \bar{n}_f le nombre des fibres fissurées par élément. Finalement, le travail interne total de la structure est donc :

$$\begin{aligned}
W_{int}^{str}(t) &= \sum_e \left\{ \delta \mathbf{d}_e(t)^T \mathbf{F}_{int,B}^e(t) + \sum_f^{\bar{n}_f} \delta \bar{u}_x(y, t)^T F_{int,G}^f(y, t) \right\} \\
&= \delta \mathbf{d}_{str}(t)^T \mathbf{F}_{int,B}^{str}(t) + \sum_e^{\bar{n}} \sum_f^{\bar{n}_f} \delta \bar{u}_x(y, t)^T F_{int,G}^f(y, t)
\end{aligned} \tag{5.18}$$

avec \bar{n} le nombre d'éléments ayant au moins une fibre fissurée.

L'introduction de la dernière expression dans le principe du travail virtuel donne :

$$\begin{aligned}
W_{int}^{str}(t) - W_{ext}^{str}(t) &= 0 \\
\delta \mathbf{d}_{str}(t)^T \left(\mathbf{F}_{int,B}^{str}(t) - \mathbf{F}_{ext}^{str}(t) \right) + \sum_e^{\bar{n}} \sum_f^{\bar{n}_f} \delta \bar{u}_x(y, t)^T F_{int,G}^f(y, t) &= 0
\end{aligned} \tag{5.19}$$

L'équilibre de la structure doit être respecté pour tous les déplacements virtuels $\delta \mathbf{d}_{str}(t)$ ainsi que pour tout saut de déplacement virtuel au niveau d'une fibre $\delta \bar{u}_x(y, t)$. Cela permet de déduire le système

d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{int,B}^{str}(t) - \mathbf{F}_{ext}^{str}(t) &= 0 \\ \forall e \in \{1, 2, \dots, \bar{n}\} \text{ et } \forall f \in \{1, 2, \dots, \bar{n}_f(e)\} : F_{int,G}^f(y, t) &= 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

La première équation de ce système représente l'équilibre globale de la structure. Les autres équations représentent l'équilibre local au niveau de chaque fibre ayant une discontinuité active. Le nombre de ces équations vaut :

$$n_{equi_{local}} = \sum_e^{\bar{n}} \bar{n}_f(e), \quad (5.21)$$

avec $\bar{n}_f(e)$ le nombre de fibres fissurées pour l'élément e . Ces dernières équations peuvent être résolues localement au niveau de la fibre. L'expression de $F_{int,G}^f(y, t)$ peut être développée pour donner :

$$\begin{aligned} F_{int,G}^f(t)(y, t) &= \int_{\Omega^f} G_v(x)^T \sigma(x, y, t) d\Omega^f = \int_{\Omega^f} (\bar{G}_v(x)^T + \bar{\bar{G}}_v(x)^T) \sigma(x, y, t) d\Omega^f \\ &= \int_{\Omega^f} \bar{G}_v(x)^T \sigma(x, y, t) d\Omega^f + \int_{\Omega^f} \bar{\bar{G}}_v(x)^T \sigma(x, y, t) d\Omega^f \\ &= \int_{\Omega^f} \bar{G}_v(x)^T \sigma(x, y, t) d\Omega^f + \sigma(x_d, y, t) = 0 \end{aligned}$$

avec

$$\int_{\Omega^f} \bar{\bar{G}}_v(x)^T \sigma(x, y, t) d\Omega^f = \int_{\Omega^f} \delta_{x_d}(x) \sigma(x, y, t) d\Omega^f = \sigma(x_d, y, t)$$

donc

$$\int_{\Omega^f} \bar{G}_v(x)^T \sigma(x, y, t) d\Omega^f = -\sigma(x_d, y, t) = -C^f(t) \quad (5.22)$$

avec $C^f(t)$ la contrainte de cohésion au sein de la fibre fissurée.

5.3.3 Détermination des fonctions d'enrichissement \bar{G}_r et \bar{G}_v

Afin de déterminer les deux fonctions d'enrichissement de la discontinuité réelle et virtuelle, une méthodologie semblable à celle utilisée dans le chapitre 4 est suivie. En accord avec [Armero and Ehrlich, 2006], \bar{G}_r sont les fonctions d'enrichissement de la variable de discontinuité réelle, opérateur de compatibilité et \bar{G}_v les fonctions d'enrichissement de la variable de discontinuité virtuelle, opérateur d'équilibre.

5.3.3.1 Opérateur de compatibilité \bar{G}_r

Deux conditions sont à respecter pour déterminer l'opérateur de compatibilité. Premièrement, la présence d'une discontinuité au sein d'une fibre ne doit pas affecter les déplacements nodaux de l'élément. Cela est assuré par l'introduction de la fonction $\phi(x)$ dans (5.9). Deuxièmement, la fibre fissurée doit permettre un état de déformation nulle après l'ouverture totale de la discontinuité au sein de la fibre. Cela se traduit analytiquement par une valeur nulle de la partie continue $\tilde{\varepsilon}_x$ de la déformation axial de la fibre, équation (5.11).

D'après l'équation (5.2) et la nouvelle interpolation du champ de rotation proposée dans le chapitre précédent (4.38), le champ de déplacement axial dans les fibres s'écrit :

$$d_x(x, y, t) = U_x(x, t) - y \Theta_z(x, t) = \sum_{\alpha=i,j} N_\alpha^u(x) U_{x\alpha}(t) - y \sum_{\alpha=i,j,k} N_{\alpha^*}^\theta(x) \Theta_{z\alpha}(t) \quad (5.23)$$

L'introduction des fonctions d'interpolation du champ de déplacement généralisé axial (3.50) et celles modifiées du champ de rotation généralisé (4.39) dans l'équation (5.23), ainsi que l'ajout et le retrait du terme $\frac{1}{2}N_{k*}^\theta(x)$ deux fois, donnent :

$$d_x(x, y, t) = \left(N_i^u(x) - \frac{1}{2}N_{k*}^\theta(x) \right) U_{xi}(t) + \left(N_j^u(x) - \frac{1}{2}N_{k*}^\theta(x) \right) U_{xj}(t) + \frac{1}{2}N_{k*}^\theta(x) (U_{xi}(t) + U_{xj}(t)) - y (N_{i*}^\theta(x)\Theta_{zi}(t) + N_{j*}^\theta(x)\Theta_{zj}(t) + N_{k*}^\theta(x)\Theta_{zk}(t)) \quad (5.24)$$

Or, on peut remarquer que :

$$\left. \begin{aligned} N_i^u(x) &= 1 - \frac{x}{L} \\ N_j^u(x) &= \frac{x}{L} \\ N_{i*}^\theta(x) &= 1 - \frac{3x}{L} + \frac{2x^2}{L^2} \\ N_{j*}^\theta(x) &= -\frac{x}{L} + 2\frac{x^2}{L^2} \\ N_{k*}^\theta(x) &= \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} N_i^u(x) - \frac{1}{2}N_{k*}^\theta(x) = N_{i*}^\theta(x) \\ N_j^u(x) - \frac{1}{2}N_{k*}^\theta(x) = N_{j*}^\theta(x) \end{cases} \quad (5.25)$$

Par conséquent,

$$d_x(x, y, t) = N_{i*}^\theta(x) (U_{xi}(t) - y\Theta_{zi}(t)) + N_{j*}^\theta(x) (U_{xj}(t) - y\Theta_{zj}(t)) + N_{k*}^\theta(x) \left(\frac{U_{xi} + U_{xj}}{2} - y\Theta_{zk} \right) \quad (5.26)$$

Cette équation peut être réduite à l'expression suivante :

$$d_x(x, y, t) = \sum_{\alpha=i,j,k} N_{f\alpha}(x) u_{x\alpha}(y, t) = \mathbf{N}_f(x) \mathbf{d}_f(y, t) \quad (5.27)$$

avec $\mathbf{d}_f(y, t)$ le vecteur des déplacements nodaux au niveau de la fibre défini par :

$$\mathbf{d}_f(y, t) = \begin{cases} u_{xi}(y, t) = U_{xi} - y\Theta_{zi} & \text{pour } x = 0, \\ u_{xj}(y, t) = U_{xj} - y\Theta_{zj} & \text{pour } x = L, \\ u_{xk}(y, t) = \frac{U_{xi} + U_{xj}}{2} - y\Theta_{zk} & \text{pour } x = \frac{L}{2}, \end{cases} \quad (5.28)$$

et $\mathbf{N}_f(x)$ la matrice des fonctions d'interpolation du champ de déplacement axial au niveau de la fibre définie par :

$$\mathbf{N}_f(x) = [N_{fi}(x) \quad N_{fj}(x) \quad N_{fk}(x)] \quad (5.29)$$

Ces fonctions prennent les mêmes expressions que $N_{\alpha*}^\theta(x)$ telles que :

$$N_{fi}(x) = N_{i*}^\theta(x) \quad , \quad N_{fj}(x) = N_{j*}^\theta(x) \quad , \quad N_{fk}(x) = N_{k*}^\theta(x) \quad (5.30)$$

Par conséquent, la fibre est considérée comme une barre à trois noeuds (voir figure (5.4)).

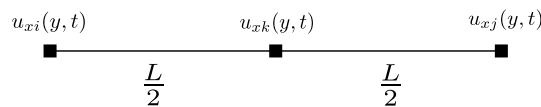


FIGURE 5.4 – Une fibre à trois noeuds

L'enrichissement du champ de déplacement axial se fait toujours de la même façon que celle écrite dans l'équation (5.9). Comme l'équation (5.27) ressemble à l'expression du champ de rotation (4.38)

interpolé dans le chapitre précédent, la même méthodologie d'enrichissement est utilisée. Il faut donc considérer deux situations selon la position x_d de la discontinuité : $x_d \leq \frac{L}{2}$ et $x_d > \frac{L}{2}$. La similitude entre le champ de déplacement axial enrichi ici et le champ de rotation enrichi dans 4.5.1.2 du chapitre 4 permet d'utiliser les mêmes fonctions d'enrichissement (4.45) pour la discontinuité telles que :

$$\phi(x) = \begin{cases} -(N_{fi}(x) + N_{fk}(x)) & \text{pour } x_d \leq \frac{L}{2} \\ -(N_{fi}(x)) & \text{pour } x_d > \frac{L}{2} \end{cases} \quad (5.31)$$

Par ailleurs, le champ de déformation axial peut être facilement déduit selon (5.11) :

$$\tilde{\varepsilon}_x(x, y, t) = \mathbf{B}_f(x) \mathbf{d}_f(y, t) + \overline{G}_r(x) \bar{u}_x(y, t) \quad (5.32)$$

avec

$$\overline{G}_r(x) = -\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = \begin{cases} \frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L} & \text{pour } x_d = 0 \\ -\frac{4x}{L^2} + \frac{1}{L} & \text{pour } x_d = L \\ -\frac{1}{L} & \text{pour } x_d = \frac{L}{2} \end{cases} \quad (5.33)$$

Ces expressions vérifient les conditions pour la détermination de l'opérateur de compatibilité comme montré dans la section (4.5.1.2). La position de la discontinuité est déterminée selon la distribution de la contrainte le long de la fibre. La discontinuité doit être automatiquement introduite à la position x_d de la fibre où la contrainte axiale atteint sa valeur maximale. Comme les fonctions d'interpolation (5.30) sont quadratiques, la déformation axiale le long de la fibre est linéaire. Par conséquent, elle devient maximale aux extrémités de la fibre à $x = 0$ ou $x_d = L$. Puisque les modèles de comportement continus associés aux fibres sont monotones non adoucissants, les positions où la contrainte prend sa valeur maximale coïncident avec celles de la déformation. Par conséquent, la discontinuité prend place à une des extrémités de la fibre. Enfin, pour le cas où la contrainte est constante le long de la fibre, l'enrichissement se fait par une fonction constante et la discontinuité est arbitrairement introduite au milieu de la fibre (voir également la section (4.5.1.2)).

5.3.3.2 Opérateur d'équilibre \overline{G}_v

En ce qui concerne la fonction \overline{G}_v , deux conditions sont aussi à respecter. Elle doit d'une part respecter l'équation d'équilibre (5.22) et d'autre part respecter le Patch test (4.6.2). Puisque l'enrichissement du champ de déplacement axial de la fibre est similaire à l'enrichissement du champ de rotation pour l'approche généralisée, les équations trouvées (4.69) dans le chapitre 4 sont ci-dessous réutilisées :

$$\overline{G}_v(x) = \begin{cases} \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} & \text{pour } x_d = 0 \\ -\frac{6x}{L^2} + \frac{2}{L} & \text{pour } x_d = L \\ -\frac{1}{L} & \text{pour } x_d = \frac{L}{2} \end{cases} \quad (5.34)$$

5.4 Modèles de comportement continu et cohésif

5.4.1 Modèle d'endommagement pour le comportement axial des fibres en béton

5.4.1.1 Modèle continu

Le béton a un comportement fragile en traction et ductile en compression. Les essais expérimentaux montrent qu'en traction un réseau de micro-fissures se développe perpendiculairement à la direction

d'extension pour conduire finalement à la rupture complète [Mazars, 1986]. En compression par contre, la rupture se fait par micro-fissuration diffuse, précurseur de la localisation des déformations dans des bandes alignées avec la direction de compression (voir figure (4.1)). Dans le cadre d'une modélisation poutre multifibres, les fibres sont considérées comme des barres, et le modèle d'endommagement utilisé ci dessous est unidimensionnel.

La réponse du béton est initialement élastique jusqu'à une certaine limite à partir de laquelle le matériau commence à s'endommager. L'endommagement engendre une réduction du module élastique (5.5). Une variable d'endommagement, notée d , est définie pour représenter le taux d'endommagement. Cette variable représente le rapport entre la section endommagée et la section totale d'un VER (Volume Élémentaire Représentatif) [Lemaitre and Chaboche, 1990]. Par conséquent, une contrainte effective, notée σ^e , peut être définie en fonction de la contrainte de Cauchy usuel σ et de la variable d'endommagement de la façon suivante :

$$\sigma^e = \frac{\sigma}{1-d} \quad (5.35)$$

La relation de comportement du béton dans le cadre d'un modèle élasto-endommageable s'écrit :

$$\sigma^e = E\bar{\varepsilon} \implies \sigma = E(1-d)\bar{\varepsilon} \quad (5.36)$$

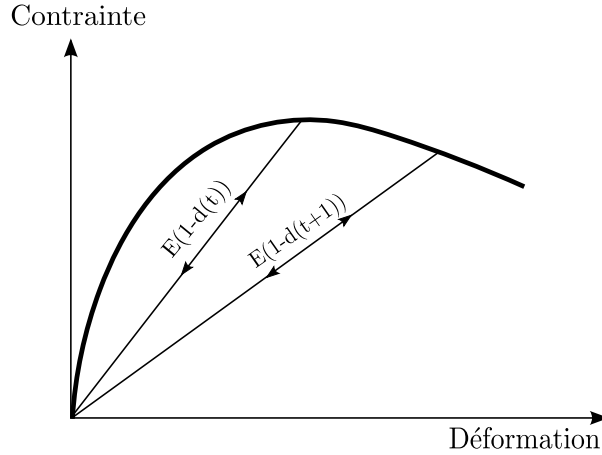


FIGURE 5.5 – Modèle d'endommagement uniaxial

Les modèles d'endommagement utilisent le plus souvent une mesure de la déformation pour piloter l'endommagement [Mazars, 1986], [Simo and Ju, 1987a], [Simo and Ju, 1987b], [Borderie, 1991], [Jirásek, 2004], [Desprez et al., 2013], [Mazars et al., 2014]. Dans notre cas, puisque le code et l'algorithme d'implémentation de la discontinuité sont basés sur un critère en contraintes, le choix a été fait d'utiliser le modèle d'endommagement, développé dans [Ibrahimbegović, 2006] et [Jukić et al., 2014], dont le seuil de l'endommagement est géré par la contrainte. L'origine de ce modèle remonte au travail de [Ortiz, 1985].

Dans ces travaux, [Ortiz, 1985] introduit une variable interne d'endommagement appelée complaisance et notée \bar{D} , telle que la relation de comportement soit de la forme suivante :

$$\varepsilon = \bar{D}\sigma \text{ avec } \bar{D} \in \left[\frac{1}{E}, \infty\right] \quad (5.37)$$

L'avantage de cette approche par rapport aux approches classiques des modèles d'endommagement est qu'elle permet de définir une surface de charge (surface seuil) en fonction de la contrainte :

$$\bar{\phi} = |\sigma| - (\sigma_{by} - \bar{q}) \leq 0 \quad (5.38)$$

avec σ_{by} la valeur limite d'élasticité du béton définie par

$$\sigma_{by} = \begin{cases} \sigma_{by}^c & \text{en compression} \\ \sigma_{by}^t & \text{en traction} \end{cases} \quad (5.39)$$

et \bar{q} une force thermodynamique associée au mécanisme d'écroissage du béton endommagé qui gère l'évolution de la surface de charge. Elle est définie par :

$$\bar{q} = -H_b \bar{\xi} \quad \text{avec} \quad H_b = \begin{cases} H_b^c & \text{en compression} \\ H_b^t & \text{en traction} \end{cases} \quad (5.40)$$

H_b est le module d'écroissage d'endommagement défini positif. $\bar{\xi}$ est la variable interne qui contrôle l'écroissage du béton endommagé. L'endommagement commence dès lors que la valeur de la surface seuil (5.38) s'annule. Pour plus de détails sur la formulation thermodynamique de ce modèle, le lecteur est renvoyé à l'ouvrage de [Ibrahimbegović, 2006]. Dans la suite, seulement les éléments nécessaires pour la compréhension sont présentés sans entrer dans les détails de la formulation.

Énergie libre et dissipation

L'énergie libre pour ce modèle s'écrit de la façon suivante :

$$\bar{\Psi}(\bar{D}, \bar{\xi}) = \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} \bar{D}^{-1} \bar{\varepsilon} + \frac{1}{2} \bar{\xi} H_b \bar{\xi} \quad (5.41)$$

La dissipation énergétique \bar{D}_b par endommagement s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{D}_b &= \int_{\Omega} \sigma \dot{\bar{\varepsilon}} - \dot{\bar{\Psi}} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \sigma \dot{\bar{\varepsilon}} - (\bar{D}^{-1} \bar{\varepsilon} \dot{\bar{\varepsilon}} - \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} \frac{\dot{\bar{D}}}{\bar{D}^2} \bar{\varepsilon} + H_b \bar{\xi} \dot{\bar{\xi}}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\bar{D}^{-1} \bar{\varepsilon}) \dot{\bar{D}} (\bar{D}^{-1} \bar{\varepsilon}) - H_b \bar{\xi} \dot{\bar{\xi}} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma \dot{\bar{D}} + \bar{q} \dot{\bar{\xi}} d\Omega > 0 \end{aligned} \quad (5.42)$$

Évolution des variables internes

Après avoir défini l'énergie interne et la dissipation énergétique correspondante, les équations d'évolution des variables internes sont déterminées à partir du principe de la dissipation maximale. Parmi toutes les contraintes admissibles, celles qui maximisent la dissipation sont choisies. Cela se traduit mathématiquement par :

$$(\sigma, \bar{q}) = \arg \left\{ \max_{\phi(\sigma^*, \bar{q}^*)=0} [\bar{D}_b(\sigma^*, \bar{q}^*)] \right\} = \arg \left\{ \min_{\bar{\phi}(\sigma^*, \bar{q}^*)=0} [-\bar{D}_b(\sigma^*, \bar{q}^*)] \right\} \quad (5.43)$$

À partir de cette dernière expression et d'une méthode de minimisation sous contraintes, les équations d'évolution sont obtenues de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{D}} &= \dot{\gamma} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \sigma} = \dot{\gamma} \frac{\text{sign}(\sigma)}{\sigma} \\ \dot{\bar{\xi}} &= \dot{\gamma} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{q}} = \dot{\gamma} \end{aligned} \quad (5.44)$$

avec $\dot{\gamma}$ le multiplicateur de Lagrange.

Conditions de cohérence et de Kuhn-Tucker

Afin de compléter le développement, les conditions de Kuhn-Tucker ainsi que la condition de cohérence sont utilisées :

$$\dot{\gamma} \geq 0 \quad \bar{\phi} \leq 0 \quad \dot{\gamma} \bar{\phi} = 0 \quad \dot{\gamma} \dot{\bar{\phi}} = 0$$

Par ailleurs, à l'instar de la plasticité, le processus d'endommagement est actif dès lors que $\dot{\bar{\gamma}}$ est positif, par conséquent, la valeur de $\dot{\bar{\phi}}$ doit nécessairement être nulle pour respecter la condition de cohérence, ce qui permet d'en déduire l'expression de $\dot{\bar{\gamma}}$ telle que :

$$\dot{\bar{\gamma}} = \frac{\text{sign}(\sigma) \bar{D}^{-1} \dot{\bar{\varepsilon}}}{\bar{D}^{-1} + H_b} \quad (5.45)$$

Finalement, le taux de contrainte en fonction du taux de déformation s'écrit :

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} \bar{D}^{-1} \dot{\bar{\varepsilon}} & \text{pour } \dot{\bar{\gamma}} = 0 \\ \frac{\bar{D}^{-1} H_b}{\bar{D}^{-1} + H_b} \dot{\bar{\varepsilon}} & \text{pour } \dot{\bar{\gamma}} > 0 \end{cases} \quad (5.46)$$

5.4.1.2 Modèle cohésif

Un modèle cohésif est adopté pour décrire le comportement du béton au niveau de la discontinuité. Le critère d'activation de la discontinuité est formulé en contrainte. Par conséquent, une surface de rupture $\bar{\phi}$ permettant de connaître le moment à partir duquel le comportement du béton passe du modèle d'endommagement au modèle cohésif est adoptée, qui prend la forme suivante :

$$\bar{\phi}(t) = |C^f(t)| - (\sigma_{bu} - \bar{q}(t)) \quad (5.47)$$

avec $C^f(t)$ la contrainte cohésive calculée par l'équation (5.22), σ_{bu} la contrainte ultime de béton définie par :

$$\sigma_{bu} = \begin{cases} \sigma_{bu}^c & \text{en compression} \\ \sigma_{bu}^t & \text{en traction} \end{cases} \quad (5.48)$$

et \bar{q} la force thermodynamique associée au mécanisme d'adoucissement du modèle cohésif. Elle est définie par :

$$\bar{q} = -S_b \bar{\xi} \quad \text{avec} \quad S_b = \begin{cases} S_b^c = -\frac{\sigma_{bu}^c{}^2}{2G_b^c} & \text{en compression} \\ S_b^t = -\frac{\sigma_{bu}^t{}^2}{2G_b^t} & \text{en traction} \end{cases} \quad (5.49)$$

avec S_b le module d'adoucissement défini négatif. G_b^c et G_b^t sont respectivement les énergies de fissuration du béton en compression et en traction, $\bar{\xi}$ est la variable interne du modèle cohésif ayant comme rôle de contrôler l'adoucissement.

Le comportement cohésif est défini par la relation suivante :

$$\bar{u}(t) = \bar{\bar{D}}(t) C^f(t) \quad (5.50)$$

avec $\bar{\bar{D}}$ la variable de complaisance du modèle cohésif. Cette variable augmente progressivement avec l'ouverture $\bar{u}(t)$ dans le béton fissuré. Une illustration du modèle est présentée dans la figure (5.6)

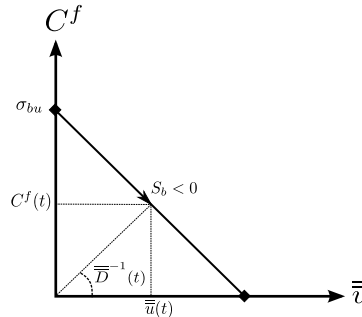


FIGURE 5.6 – Modèle cohésif

D'après cette figure, on a :

$$C^f(t) = S_b \bar{\bar{u}}(t) + \sigma_{bu} \quad (5.51)$$

Énergie libre et dissipation au niveau de la discontinuité

L'énergie libre associée au modèle est écrite comme :

$$\bar{\bar{\Psi}}(\bar{\bar{\xi}}) = \frac{1}{2} \bar{\bar{D}}^{-1} \bar{\bar{u}}^2 + \frac{1}{2} S_b \bar{\bar{\xi}}^2 \quad (5.52)$$

Finalement, l'énergie libre de Helmholtz après activation du modèle cohésif est la somme de l'énergie libre associée au modèle continu (5.41) et celle associée au modèle cohésif (5.52) telle que :

$$\Psi(\bar{D}, \bar{\xi}, \bar{\bar{\xi}}) = \bar{\Psi}(\bar{D}, \bar{\xi}) + \bar{\bar{\Psi}}(\bar{\bar{\xi}}) \delta_{x_d}(x), \quad (5.53)$$

La dissipation d'énergie totale s'écrit donc comme :

$$\begin{aligned} D_b^{tot} &= \int_{\Omega} \sigma \dot{\varepsilon} - \dot{\Psi} d\Omega \\ &= \underbrace{\int_{\Omega} \sigma \dot{\varepsilon} - \dot{\Psi} d\Omega}_{\bar{D}_b} + \underbrace{C^f \dot{\bar{\bar{u}}} - \dot{\bar{\bar{\Psi}}}}_{\bar{\bar{D}}_b} |_{x_d} \end{aligned} \quad (5.54)$$

Par conséquent, la dissipation au niveau de la discontinuité est :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{D}}_b &= C^f \dot{\bar{\bar{u}}} - \dot{\bar{\bar{\Psi}}}|_{x_d} \\ &= C^f \dot{\bar{\bar{u}}} - \left(\bar{\bar{D}}^{-1} \bar{\bar{u}} \dot{\bar{\bar{u}}} - \frac{1}{2} \bar{\bar{u}} \frac{\dot{\bar{\bar{D}}}}{\bar{\bar{D}}^2} \bar{\bar{u}} + S_b \bar{\bar{\xi}} \dot{\bar{\bar{\xi}}} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\bar{\bar{D}}^{-1} \bar{\bar{u}}) \dot{\bar{\bar{D}}} (\bar{\bar{D}}^{-1} \bar{\bar{u}}) + \bar{\bar{q}} \dot{\bar{\bar{\xi}}} \\ &= \frac{1}{2} C^f \dot{\bar{\bar{D}}} C^f + \bar{\bar{q}} \dot{\bar{\bar{\xi}}} \end{aligned} \quad (5.55)$$

De façon similaire au chapitre précédent, après activation de la discontinuité au sein de la fibre, le béton hors discontinuité dans la même fibre est considéré avoir cessé de s'endommager. Par conséquent, la dissipation se fait uniquement dans la zone cohésive telle que :

$$D_b^{tot} = \bar{\bar{D}}_b \quad (5.56)$$

Évolution des variables internes

Parmi les variables internes admissibles qui vérifient le critère de rupture, celles qui maximisent la dissipation sont choisies. Un nouveau problème d'optimisation doit être résolu. La même procédure suivie pour la formulation de la loi cohésive du chapitre précédent est utilisée. La fonction de Lagrange $\bar{\bar{L}}$ est définie avec le multiplicateur de Lagrange $\bar{\bar{\gamma}}$ telle que :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{L}}(\bar{\bar{q}}, \bar{\bar{\gamma}}) &= -\bar{\bar{D}}_b + \bar{\bar{\gamma}} \bar{\bar{\phi}} \\ &= - \left[\frac{1}{2} C^f \dot{\bar{\bar{D}}} C^f + \bar{\bar{q}} \dot{\bar{\bar{\xi}}} \right] + \bar{\bar{\gamma}} \bar{\bar{\phi}} \end{aligned} \quad (5.57)$$

Ensuite les équations d'évolution des variables internes associées au modèle cohésif sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\bar{L}}}{\partial C^f} = 0 &\implies \dot{\bar{\bar{D}}} = \bar{\bar{\gamma}} \frac{\dot{\text{sign}}(C^f)}{C^f} \\ \frac{\partial \bar{\bar{L}}}{\partial \bar{\bar{q}}} = 0 &\implies \dot{\bar{\bar{\xi}}} = \bar{\bar{\gamma}} \end{aligned} \quad (5.58)$$

L'équation d'évolution de la variable de discontinuité peut être déduite en dérivant l'équation (5.51) par rapport au temps de la manière suivante :

$$\dot{C}^f = S_b \dot{\bar{u}} \implies \dot{\bar{u}} = \frac{1}{S_b} \dot{C}^f \quad (5.59)$$

De plus, la surface de de rupture (5.47) donne :

$$\begin{aligned} \bar{\phi} &= |C^f| - (\sigma_{bu} - \bar{q}) = 0 \\ &\implies C^f \text{sign}(C^f) = \sigma_{bu} - \bar{q} \\ \text{dérivons \% à } t &\implies \dot{C}^f = -\dot{\bar{q}} \text{sign}(C^f), \\ \text{utilisons (5.49)} &\implies \dot{C}^f = S_b \dot{\bar{\xi}} \text{sign}(C^f), \\ \text{utilisons (5.58)} &\implies \dot{C}^f = S_b \dot{\bar{\gamma}} \text{sign}(C^f) \end{aligned} \quad (5.60)$$

Ainsi, l'introduction de l'équation (5.60) dans (5.59) donne :

$$\dot{\bar{u}} = \dot{\bar{\gamma}} \text{sign}(C^f) \quad (5.61)$$

Conditions de cohérence et de Kuhn-Tucker

Afin de déterminer le multiplicateur de Lagrange $\dot{\bar{\gamma}}$, les conditions de cohérence et de Kuhn-Tucker sont à nouveau utilisées.

$$\dot{\bar{\gamma}} \geq 0 \quad , \quad \bar{\phi} \leq 0 \quad , \quad \dot{\bar{\gamma}} \bar{\phi} = 0 \quad , \quad \dot{\bar{\gamma}} \dot{\bar{\phi}} = 0 \quad (5.62)$$

Si le mécanisme d'adoucissement est actif, le multiplicateur $\dot{\bar{\gamma}}$ est positif et non nul, ce qui nécessite que $\dot{\bar{\phi}}$ soit nulle afin de vérifier la condition de cohérence $\dot{\bar{\gamma}} \dot{\bar{\phi}} = 0$. Par conséquent, la valeur de $\dot{\bar{\gamma}}$ est cherchée en dérivant l'équation (5.47) de la façon suivante :

$$\dot{\bar{\phi}} = \dot{C}^f \text{sign}(C^f) + \underbrace{\frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{\xi}}}_{=-S_b} \dot{\bar{\xi}} = 0 \implies \dot{\bar{\gamma}} = \frac{1}{S_b} \dot{C}^f \text{sign}(C^f) \quad (5.63)$$

Finalement, la force de cohésion est-telle que :

$$C^f = \begin{cases} \bar{D}^{-1} \bar{u} & \text{pour } \dot{\bar{\gamma}} = 0 \\ (\sigma_{bu} + S_b \bar{\xi}) \text{sign}(C^f) & \text{pour } \dot{\bar{\gamma}} > 0 \text{ et } \bar{q} < \sigma_{bu} \\ 0 & \text{pour } \dot{\bar{\gamma}} > 0 \quad \bar{q} = \sigma_{bu} \end{cases} \quad (5.64)$$

5.4.2 Modèle élasto-plastique pour le comportement axial des fibres en acier

Un modèle élasto-plastique est utilisé pour décrire le comportement axial des fibres en acier. Le développement de ce modèle est celui présenté au chapitre précédent (voir section 4.7).

Remarque : Les deux matériaux, béton et acier, sont considérés comme ayant un modèle élastique linéaire pour décrire leurs comportements en cisaillement (5.65). Ainsi,

$$\tau(x, y, t) = G_c(y) \gamma(x, y, t) \quad \text{avec} \quad G_c(y) = \begin{cases} G_{cb} & \text{module de cisaillement pour la fibre } y \text{ en béton} \\ G_{ca} & \text{module de cisaillement pour la fibre } y \text{ en acier} \end{cases} \quad (5.65)$$

5.5 Implémentation numérique

5.5.1 Linéarisation des équations d'équilibre

Les équations d'équilibre, généralement non linéaires, doivent être linéarisées par rapport aux variables \mathbf{d}^{str} et \bar{u}_x . Pour cela, la même procédure suivie dans la section (4.8) du chapitre 4 est utilisée. L'algorithme de Newton Raphson est utilisé. Une discrétisation incrémentale du chargement est appliquée. La structure est discrétisée spatialement en n éléments poutres avec une section divisée en n_f fibres. Si au pseudo-pas de temps t toutes les variables du problème sont déterminées, l'objectif est d'évaluer ces variables au pseudo-pas de temps suivant $t + 1$. Pour cela, le résidu est défini comme la différence entre les forces internes et les forces externes sur toute la structure. A l'équilibre, celui-ci doit être "nul" (vérifier un critère) à la fin de chaque pas de temps.

$$\mathbf{R}(\mathbf{d}^{str}, \bar{u}_x(y_1^1, t), \dots, \bar{u}_x(y_f^e, t), \dots, \bar{u}_x(y_{\bar{n}_f}^{\bar{n}}, t)) = \mathbf{F}_{int,B}^{str}(t) - \mathbf{F}_{ext}^{str}(t) = \bigwedge_{e=1}^{n_{elm}} \{ \mathbf{F}_{int,B}^e - \mathbf{F}_{ext}^e \}, \quad (5.66)$$

avec

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{d}^{str}} = \bigwedge_{e=1}^{n_{elm}} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_{int,B}^e}{\partial \mathbf{d}_e} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \bar{u}_x(y_f^e, t)} = \frac{\partial \mathbf{F}_{int,B}^e}{\partial \bar{u}_x(y_f^e, t)} \quad \forall e \in \{1, 2, \dots, \bar{n}\} \text{ et } \forall f \in \{1, 2, \dots, \bar{n}_f(e)\} \end{cases} \quad (5.67)$$

La linéarisation de l'équation du résidu (5.66) donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}|_{t+1}^{(k+1)} &= \mathbf{R}|_{t+1}^{(k)} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{d}^{str}}|_{t+1}^{(k)} \Delta \mathbf{d}^{str}|_{t+1}^{(k+1)} + \sum_{e=1}^{\bar{n}} \sum_{f=1}^{\bar{n}_f(e)} \left\{ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \bar{u}_x(y_f^e, t)}|_{t+1}^{(k)} \Delta \bar{u}_x(y_f^e, t)|_{t+1}^{(k+1)} \right\} = 0 \\ &= \mathbf{R}|_{t+1}^{(k)} + \bigwedge_{e=1}^{n_{elm}} \left\{ \underbrace{\frac{\partial \mathbf{F}_{int,B}^e}{\partial \mathbf{d}_e}}_{\mathbf{K}_{BB}}|_{t+1}^{(k)} \cdot \Delta \mathbf{d}_e|_{t+1}^{(k+1)} \right\} + \sum_{e=1}^{\bar{n}} \sum_{f=1}^{\bar{n}_f(e)} \left\{ \underbrace{\frac{\partial \mathbf{F}_{int,B}^f}{\partial \bar{u}_x(y_f^e, t)}}_{\mathbf{K}_{BG_f}}|_{t+1}^{(k)} \cdot \Delta \bar{u}_x(y_f^e, t)|_{t+1}^{(k+1)} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (5.68)$$

avec $\mathbf{K}_{BB}(t)$ la matrice de rigidité classique élémentaire définie par la somme des matrices de rigidité $\mathbf{K}_{BB_f}(y, t)$ de chaque fibre f d'ordonnée y à l'instant t telle que :

$$\mathbf{K}_{BB}(t) = \sum_{f=1}^{n_f} \mathbf{K}_{BB_f}(y, t). \quad (5.69)$$

Comme la matrice de rigidité $\mathbf{K}_{BB_f}(y, t)$ d'une fibre f est issue de la dérivée du vecteur force interne de la fibre f par rapport au vecteur déplacement élémentaire \mathbf{d}_e , on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{BB}^f(y, t) &= \frac{\partial \mathbf{F}_{int,B}^f}{\partial \mathbf{d}_e} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}_e} \left(\int_{\Omega^f} \mathbf{B}^f(x, y)^T \sigma_x(x, y) d\Omega^f \right) \\ &= \int_{\Omega^f} \mathbf{B}^f(x, y)^T \frac{\partial \sigma_x}{\partial \mathbf{d}_e}(x, y, t) d\Omega^f = \int_{\Omega^f} \mathbf{B}^f(x, y)^T \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x}(x, y, t) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{d}_e}(x, y, t) d\Omega^f \\ &= \int_{\Omega^f} \mathbf{B}^f(x, y)^T \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x}(x, y, t) \mathbf{B}^f(x, y) d\Omega^f. \end{aligned} \quad (5.70)$$

et :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{BG_f}(y, t) &= \frac{\partial \mathbf{F}_{int, B}^f}{\partial \bar{u}_x(y_f^e, t)} = \frac{\partial}{\partial \bar{u}_x} \left(\int_{\Omega^f} \mathbf{B}^f(x, y)^T \sigma_x(x, y) d\Omega^f \right) \\
&= \int_{\Omega^f} \mathbf{B}^f(x, y)^T \frac{\partial \sigma_x}{\partial \bar{u}_x}(x, y, t) d\Omega^f = \int_{\Omega^f} \mathbf{B}^f(x, y)^T \frac{\partial \sigma_x}{\partial \bar{\varepsilon}_x}(x, y, t) \frac{\partial \bar{\varepsilon}_x}{\partial \bar{u}_x}(x, y, t) d\Omega^f \\
&= \int_{\Omega^f} \mathbf{B}^f(x, y)^T \frac{\partial \sigma_x}{\partial \bar{\varepsilon}_x}(x, y, t) \bar{G}_r(x) d\Omega^f
\end{aligned} \tag{5.71}$$

Sous forme matricielle, cela donne :

$$\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} \left\{ \left[\mathbf{K}_{BB} \quad \mathbf{K}_{BG_1} \quad \mathbf{K}_{BG_2} \quad \dots \quad \mathbf{K}_{BG_{\bar{n}_f(e)}} \right]_{t+1}^{(k)} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_e \\ \Delta \bar{u}_x(y_1^e, t) \\ \vdots \\ \Delta \bar{u}_x(y_{\bar{n}_f(e)}^e, t) \end{bmatrix}_{t+1}^{(k+1)} \right\} = -\mathbf{R}_{t+1}^{(k)} = -\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} \left\{ (\mathbf{F}_{int, B}^e - \mathbf{F}_{ext}^e) \right|_{t+1}^{(k)} \} \tag{5.72}$$

Pour le moment, la première équation d'équilibre à caractère global du système (5.20) a été linéarisée. En ce qui concerne la linéarisation des autres équations (locales), on obtient $\forall f \in \{1, 2, \dots, \bar{n}_f(e)\}$ et $\forall e \in \{1, 2, \dots, \bar{n}\}$:

$$\begin{aligned}
F_{int, G}^f \Big|_{t+1}^{(l+1)} &= F_{int, G}^f \Big|_{t+1}^{(l)} + \frac{\partial F_{int, G}^f}{\partial \mathbf{d}_e} \Big|_{t+1}^{(l)} \Delta \mathbf{d}_e \Big|_{t+1}^{(k)} + \frac{\partial F_{int, G}^f}{\partial \bar{u}_x(y_f^e, t)} \Big|_{t+1}^{(l)} \Delta \bar{u}_x(y_f^e, t) \Big|_{t+1}^{(l+1)} = 0 \\
&= F_{int, G}^f \Big|_{t+1}^{(l)} + \mathbf{K}_{G_f B} \Big|_{t+1}^{(l)} \Delta \mathbf{d}_e \Big|_{t+1}^{(k)} + K_{G_f G_f} \Big|_{t+1}^{(l)} \Delta \bar{u}_x(y_f^e, t) \Big|_{t+1}^{(l+1)} = 0
\end{aligned} \tag{5.73}$$

Par conséquent, sous forme matricielle, on a :

$$\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} \left\{ \left[\mathbf{K}_{G_f B} \quad K_{G_f G_f} \right]_{t+1}^{(k)} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_e \\ \Delta \bar{u}_x(y_f^e, t) \end{bmatrix}_{t+1}^{(k+1)} = -F_{int, G}^f \Big|_{t+1}^{(l)} \right\} \tag{5.74}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{G_f B} &= \int_{\Omega^f} \bar{G}_v(x) \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x}(x, y, t) \mathbf{B}^f(x, y) d\Omega^f \\
K_{G_f G_f} &= \int_{\Omega^f} \bar{G}_v(x) \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x}(x, y, t) \bar{G}_r(x) d\Omega^f + \frac{\partial C^f}{\partial \bar{u}_x} A^f
\end{aligned} \tag{5.75}$$

où A^f est l'aire de la section de la fibre.

Cette procédure de linéarisation de l'équation d'équilibre locale est répétée pour toutes les fibres f fissurées de l'élément e . L'assemblage de toutes les équations obtenues sous forme matricielle donne :

$$\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} \left\{ \left[\begin{array}{ccccc} \mathbf{K}_{BB} & \mathbf{K}_{BG_1} & \mathbf{K}_{BG_2} & \dots & \mathbf{K}_{BG_{\bar{n}_f(e)}} \\ \mathbf{K}_{G_1 B} & K_{G_1 G_1} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{K}_{G_2 B} & 0 & K_{G_2 G_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{K}_{G_{\bar{n}_f(e)} B} & 0 & 0 & \dots & K_{G_{\bar{n}_f(e)} G_{\bar{n}_f(e)}} \end{array} \right]_{t+1}^{(k)} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_e \\ \Delta \bar{u}_x(y_1^e, t) \\ \Delta \bar{u}_x(y_2^e, t) \\ \vdots \\ \Delta \bar{u}_x(y_{\bar{n}_f(e)}^e, t) \end{bmatrix}_{t+1}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{F}_{int, B}^e - \mathbf{F}_{ext}^e) \\ -F_{int, G}^1 \\ -F_{int, G}^2 \\ \vdots \\ -F_{int, G}^{\bar{n}_f(e)} \end{bmatrix}_{t+1}^{(k)} \right\} \tag{5.76}$$

Finalement, un système d'équations matriciel au niveau de l'élément de dimension $(\bar{n}_f(e) + 1) \times (\bar{n}_f(e) + 1)$ est obtenu. Les variables de discontinuités axiales dans les fibres peuvent être résolues localement au niveau de chaque élément sans la nécessité de les renvoyer à la résolution globale (ceci

est un avantage par rapport à la méthode X-FEM). Cela permet de limiter le coût de calcul matriciel, puisque le nombre degrés de liberté à résoudre globalement à l'échelle de la structure est le même que sans enrichissement. Les degrés de liberté supplémentaires de discontinuités sont condensés statiquement [Wilson, 1974] au niveau de chaque fibre fissurée et non pas au niveau de l'élément comme c'était le cas au chapitre précédent. Afin de simplifier le problème, les discontinuités des fibres d'un même élément sont supposées découplées. Une fois les équilibres locaux vérifiés, on a :

$$\underset{e=1}{\overset{n_{elm}}{\mathbf{A}}} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BB} & \mathbf{K}_{BG_1} & \mathbf{K}_{BG_2} & \dots & \mathbf{K}_{BG_{\bar{n}_f(e)}} \\ \mathbf{K}_{G_1B} & K_{G_1G_1} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{K}_{G_2B} & 0 & K_{G_2G_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{K}_{G_{\bar{n}_f(e)}B} & 0 & 0 & \dots & K_{G_{\bar{n}_f(e)}G_{\bar{n}_f(e)}} \end{bmatrix}_{t+1} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_e \\ \Delta \bar{u}_x(y_1^e, t) \\ \Delta \bar{u}_x(y_2^e, t) \\ \vdots \\ \Delta \bar{u}_x(y_{\bar{n}_f(e)}^e, t) \end{bmatrix}_{t+1} \right\}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{F}_{int,B}^e - \mathbf{F}_{ext}^e) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{t+1}^{(k)} \quad (5.77)$$

Hormis la première ligne, les relations suivantes sont déduites d'après chaque ligne de ce système :

$$\forall f \in 1, 2, \dots, \bar{n}_f(e) \quad \mathbf{K}_{G_fB}|_{t+1}^{(k)} \Delta \mathbf{d}_e|_{t+1}^{(k+1)} + K_{G_fG_f}|_{t+1} \Delta \bar{u}_x(y_f^e, t)|_{t+1}^{(k+1)} = 0 \quad (5.78)$$

On peut alors en déduire que :

$$\forall f \in 1, 2, \dots, \bar{n}_f(e) \quad \Delta \bar{u}_x(y_f^e, t)|_{t+1}^{(k+1)} = -K_{G_fG_f}^{-1} \mathbf{K}_{G_fB}|_{t+1}^{(k)} \Delta \mathbf{d}_e|_{t+1}^{(k+1)} \quad (5.79)$$

Remplaçons la dernière expression de $\Delta \bar{u}_x(y_f^e, t)|_{t+1}$ dans la première équation du système matriciel convergé (5.77). On obtient alors :

$$\mathbf{K}_{BB}|_{t+1}^{(k)} \Delta \mathbf{d}_e|_{t+1}^{(k+1)} + \sum_f^{\bar{n}_f(e)} \mathbf{K}_{BG_f} (-K_{G_fG_f}^{-1} \mathbf{K}_{G_fB})|_{t+1}^{(k)} \Delta \mathbf{d}_e|_{t+1}^{(k+1)} = -(\mathbf{F}_{int,B}^e - \mathbf{F}_{ext}^e)|_{t+1}^{(k)} \quad (5.80)$$

Par conséquent, le système d'équations (5.77) se transforme en une seule équation avec la matrice de rigidité élémentaire condensée \mathbf{K}_{cond}^e telle que :

$$\underbrace{\left(\mathbf{K}_{BB} - \sum_f^{\bar{n}_f(e)} \mathbf{K}_{BG_f} K_{G_fG_f}^{-1} \mathbf{K}_{G_fB} \right)}_{\mathbf{K}_{cond}^e} |_{t+1}^{(k)} \Delta \mathbf{d}_e|_{t+1}^{(k+1)} = -(\mathbf{F}_{int,B}^e - \mathbf{F}_{ext}^e)|_{t+1}^{(k)} \quad (5.81)$$

5.5.2 Intégration des modèles de comportement continu et cohésif au niveau de la fibre

5.5.2.1 Évolution des variables d'endommagement

La méthode d'Euler arrière implicite est considérée pour le schéma d'intégration de modèle de comportement. On part d'un état de contrainte connu à un instant t , et on cherche le nouvel état de contrainte à l'instant $t + 1$ tel que

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_t & \bar{D}_t & \bar{\xi}_t & \sigma_t \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{array}{c} \bar{u}_{t+1} = \bar{u}_t \\ \bar{\xi}_{t+1} = \bar{\xi}_t \\ \bar{D}_{t+1} = \bar{D}_t \end{array}]{\Delta \varepsilon_t} \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} & \bar{D}_{t+1} & \bar{\xi}_{t+1} & \sigma_{t+1} \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

La résolution se fait selon l'algorithme de retour radial [Simo and Hughes, 1999]. Une prédiction élastique est tout d'abord faite en considérant que l'évolution est purement élastique. Par conséquent, les variables internes de la partie d'endommagement sont gelées.

$$\begin{aligned}\bar{D}_{t+1}^{trial} &= \bar{D}_t \\ \bar{\xi}_{t+1}^{trial} &= \bar{\xi}_t\end{aligned}\tag{5.83}$$

Cet état permet d'évaluer les valeurs prédites de la contrainte et de la force thermodynamique \bar{q} telles que :

$$\begin{aligned}\sigma_{t+1}^{trial} &= \bar{D}_{t+1}^{-1, trial} \varepsilon_{t+1} \\ \bar{q}_{t+1}^{trial} &= -H_b \bar{\xi}_{t+1}^{trial}\end{aligned}\tag{5.84}$$

Ensuite, ces dernières valeurs sont introduites dans l'équation de la surface de charge pour donner :

$$\bar{\phi}_t^{trial} = |\sigma_{t+1}^{trial}| - (\sigma_{yb} - \bar{q}_{t+1}^{trial})\tag{5.85}$$

Si la valeur obtenue de $\bar{\phi}_t^{trial}$ est positive, la prédiction élastique est correcte et les valeurs des variables à l'état $t + 1$ prennent les valeurs prédites. Sinon, une correction doit être mise en place de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_{t+1} &= \bar{\xi}_t + \bar{\gamma}_{t+1} \\ \bar{D}_{t+1} &= \bar{D}_t + \frac{\bar{\gamma}_{t+1}}{\text{sign}(\sigma_{t+1}^{trial})} \\ \sigma_{t+1} &= \sigma_{t+1}^{trial} - \bar{\gamma}_{t+1} \bar{D}_t^{-1} \text{sign}(\sigma_{t+1}^{trial})\end{aligned}\tag{5.86}$$

Il reste à déterminer la valeur du multiplicateur $\bar{\gamma}_{t+1}$. Ceci peut être réalisé en introduisant les expressions (5.86) dans l'équation de la surface de charge $\bar{\phi}_{t+1}$ qui doit être nulle. Par conséquent, on trouve :

$$\bar{\gamma}_{t+1} = \frac{\bar{\phi}_t^{trial}}{\bar{D}_t^{-1} + H_b}\tag{5.87}$$

Cette procédure doit être réalisée sur chaque point d'intégration de chaque fibre. Dès lors que l'état de contrainte d'une fibre donnée est déterminé, la surface de rupture $\bar{\phi}$ (5.47) doit être vérifiée. Cela permet de savoir si la discontinuité sera introduite ou pas. Il faut donc déterminer la valeur de la contrainte de cohésion C_{t+1}^f définie par l'équation d'équilibre locale au niveau de la fibre (5.22) de la manière suivante :

$$C_{t+1}^f = - \int_{\Omega^f} \bar{G}_v(x) \sigma_{t+1}^f(x) d\Omega^f = - \frac{L}{2} \sum_{pg}^{npg} \bar{G}_v(x_{pg}) \sigma_{t+1}^f(x_{pg}) w(x_{pg})\tag{5.88}$$

avec npg le nombre de points d'intégration le long de la fibre f et $w(x_{pg})$ les poids de pondération associés aux points d'intégration. Si $\bar{\phi}(C_{t+1}^f, \bar{q}_{t+1}^f) \leq 0$, le calcul se poursuit sans activation de la discontinuité. Si $\bar{\phi}(C_{t+1}^f, \bar{q}_{t+1}^f) > 0$ la discontinuité est introduite, toutes les valeurs mises à jour des variables internes associées au modèle continu dans la dernière itération sont rejetées et le calcul est refait en gelant les variables internes associées au modèle d'endommagement continu et faisant cette fois les variables internes associées au modèle cohésif. Cette procédure fait l'objectif de la section ci-dessous. Les étapes d'intégration numérique de ce modèle sont récapitulées dans A.5.

5.5.2.2 Évolution des variables cohésives

Pour une fibre f fissurée, il faut trouver le nouvel état du matériau au niveau de la discontinuité au pas de temps $t + 1$. Les variables internes du modèle continu sont supposées gelées, donc :

$$\bar{D}_{t+1} = \bar{D}_t \quad \text{et} \quad \bar{\xi}_{t+1} = \bar{\xi}_t\tag{5.89}$$

Le problème à résoudre est résumé avec le schéma suivant :

$$\begin{bmatrix} \overline{\overline{D}}_t & \overline{\overline{\xi}}_t & \overline{\overline{u}}_t \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\overline{\overline{D}}_{t+1} = \overline{\overline{D}}_t \\ \overline{\overline{\xi}}_{t+1} = \overline{\overline{\xi}}_t}]{\Delta \varepsilon_t} \begin{bmatrix} \overline{\overline{D}}_{t+1} & \overline{\overline{\xi}}_{t+1} & \overline{\overline{u}}_{t+1} \end{bmatrix} \quad (5.90)$$

Le calcul commence par une prédiction élastique. Ainsi, les valeurs des variables internes du modèle cohésif sont supposées constantes :

$$\overline{\overline{D}}_{t+1}^{test} = \overline{\overline{D}}_t \quad \text{et} \quad \overline{\overline{\xi}}_{t+1}^{test} = \overline{\overline{\xi}}_t \quad \text{et} \quad \overline{\overline{u}}_{t+1}^{test} = \overline{\overline{D}}_t C_{t+1}^{f,test} \quad (5.91)$$

Il reste alors à déterminer la valeur de $C_{t+1}^{f,test}$. Ce calcul s'opère en utilisant l'équation (5.22), comme suit :

$$\begin{aligned} C_{t+1}^{f,test} &= - \int_{\Omega_f} \overline{G}_v^T \sigma_{t+1}^{test} d\Omega_f \\ &= - \int_{\Omega_f} \overline{G}_v^T \overline{D}_t^{(-1)} \varepsilon_{t+1}^{test} d\Omega_f \\ &= - \int_{\Omega_f} \overline{G}_v^T \overline{D}_t^{(-1)} \left[B^f d_{t+1} + \overline{G}_r \overline{\overline{u}}_{t+1}^{test} \right] d\Omega_f \\ &= - \int_{\Omega_f} \overline{G}_v^T \overline{D}_t^{(-1)} \left[B^f d_{t+1} + \overline{G}_r \overline{\overline{D}}_t C_{t+1}^{f,test} \right] d\Omega_f \\ &= \underbrace{- \int_{\Omega_f} \overline{G}_v^T \overline{D}_t^{(-1)} B^f d_{t+1} d\Omega_f}_{C_0^f} - \underbrace{\int_{\Omega_f} \overline{G}_v^T \overline{D}_t^{(-1)} \overline{G}_r d\Omega_f \overline{\overline{D}}_t}_{D_m} C_{t+1}^{f,test} \end{aligned} \quad (5.92)$$

De ce fait :

$$C_{t+1}^{f,test} = \frac{C_0^f}{1 + D_m \overline{\overline{D}}_t} \quad (5.93)$$

Ensuite la valeur prédite de la force de cohésion est introduite dans l'expression de la surface de rupture telle que :

$$\overline{\overline{\phi}}_{t+1}^{trial} = |C_{t+1}^{f,test}| - (\sigma_u - \overline{\overline{q}}_{t+1}^{test}) \quad (5.94)$$

avec $\overline{\overline{q}}_{t+1}^{test}$ la valeur prédite de force de cohésion définie par :

$$\overline{\overline{q}}_{t+1}^{test} = -S \overline{\overline{\xi}}_{t+1}^{test} \quad (5.95)$$

Si la valeur de $\overline{\overline{\phi}}_{t+1}^{trial}$ est plus petite ou égale à zéro, alors la prédiction élastique est correcte, et les valeurs des variables à $t + 1$ prennent les valeurs prédites. Si $\overline{\overline{\phi}}_{t+1}^{trial}$ est positive, une correction sur les prédictions doit être effectuée. Pour cela, le multiplicateur de Lagrange $\Delta \overline{\overline{\gamma}}$ doit être calculé. Il est évalué à partir de l'équation de la surface de rupture $\overline{\overline{\phi}}_{t+1} = 0$. La nouvelle expression de la force de cohésion s'écrit :

$$C_{t+1}^f = C_0^f - D_m \overline{\overline{u}}_{t+1} \quad (5.96)$$

Par ailleurs, d'après l'équation (5.61) on peut déduire :

$$\overline{\overline{u}}_{t+1} = [\overline{\overline{u}}_t + \Delta \overline{\overline{\gamma}}] \text{sign}(C_{t+1}^f) \quad (5.97)$$

Ensuite, l'expression de la force de cohésion C_{t+1}^f (5.96) en fonction de $\Delta\bar{\gamma}$ est introduite dans $\bar{\phi}_{t+1} = 0$ pour donner :

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}_{t+1} &= |C_{t+1}^f| - (\sigma_u + S\bar{\xi}_{t+1}) \\
0 &= C_{t+1}^f \text{sign}(C_{t+1}^f) - (\sigma_u + S\bar{\xi}_{t+1}) \\
0 &= C_0^f \text{sign}(C_{t+1}^f) - D_m [\bar{u}_t + \Delta\bar{\gamma}] - (\sigma_u + S\bar{\xi}_t) - S\Delta\bar{\gamma} \\
0 &= C_0^f \text{sign}(C_{t+1}^f) - D_m \bar{D}_t (\sigma_u + S\bar{\xi}_t) - D_m \Delta\bar{\gamma} - (\sigma_u + S\bar{\xi}_t) - S\Delta\bar{\gamma} \\
0 &= C_0^f \text{sign}(C_{t+1}^f) - (D_m \bar{D}_t + 1)(\sigma_u + S\bar{\xi}_t) - \Delta\bar{\gamma}(D_m + S)
\end{aligned} \tag{5.98}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\Delta\bar{\gamma} \frac{D_m + S}{D_m \bar{D}_t + 1} &= \frac{C_0^f}{D_m \bar{D}_t + 1} \text{sign}(C_{t+1}^f) - (\sigma_u + S\bar{\xi}_t) \\
\Delta\bar{\gamma} \frac{D_m + S}{D_m \bar{D}_t + 1} &= C_{t+1}^{f, \text{test}} - (\sigma_u + S\bar{\xi}_t) \\
\Delta\bar{\gamma} \frac{D_m + S}{D_m \bar{D}_t + 1} &= \bar{\phi}_{t+1}^{\text{trial}}
\end{aligned} \tag{5.99}$$

Le multiplicateur de Lagrange est déterminé par :

$$\Delta\bar{\gamma} = \bar{\phi}_{t+1}^{\text{trial}} \frac{D_m \bar{D}_t + 1}{D_m + S} \tag{5.100}$$

avec $\text{sign}(C_{t+1}^f) = \text{sign}(C_{t+1}^{f, \text{test}})$ et $\bar{u}_t = \bar{D}_t C_t^f = \bar{D}_t (\sigma_u + S\bar{\xi}_t)$.

A partir de ce point, les autres variables sont déterminées de la manière suivante :

$$\bar{\xi}_{t+1} = \bar{\xi}_t + \Delta\bar{\gamma} \tag{5.101}$$

$$C_{t+1}^f = (\sigma_u + S\bar{\xi}_{t+1}) \text{sign}(C_{t+1}^f) \text{ à partir de } \bar{\phi}_{t+1} = 0 \tag{5.102}$$

$$\bar{u}_{t+1} = \frac{C_0^f - C_{t+1}^f}{D_m} \text{ à partir de (5.96)} \tag{5.103}$$

$$\bar{D}_{t+1} = \frac{\bar{u}_{t+1}}{C_{t+1}^f} \tag{5.104}$$

Dans le cas où la surface de rupture devient nulle, c'est à dire que l'expression $\sigma_u - \bar{q}_{t+1}$ est égale à zéro dans l'équation (5.47) ($\bar{\phi}_{t+1} = 0$), la force de cohésion prend une valeur nulle ($C_{t+1}^f = 0$). Par conséquent, le saut de déplacement final est calculé à partir de l'équation (5.96) comme :

$$\bar{u}_{t+1} = \frac{C_0^f}{D_m} + \bar{u}_t \tag{5.105}$$

Les étapes d'intégration numérique de ce modèle sont récapitulées dans A.6.

5.6 Applications numériques

5.6.1 Poutre multifibres en flexion avec une loi de comportement élastique-cohésive à seuils symétriques en traction et compression

La structure considérée est une poutre encastree d'un côté et libre de l'autre, figure (5.7). Elle a une longueur $L = 2.5\text{m}$. Un déplacement transversal U_y est imposé du côté libre. La structure est discrétisée par des poutres multifibres **FLI** et **FCQ**. Dans un premier temps, les fibres ne sont pas enrichies et le matériau est supposé élastique adoucissant (voir figure (5.8a)) avec des seuils symétriques en traction et compression. Dans un second temps, les fibres sont enrichies. Le matériau est alors modélisé au moyen d'un modèle élastique linéaire couplé à un modèle cohésif linéaire (voir figure (5.8b)). Les propriétés matériaux sont récapitulées dans le tableau (5.1).

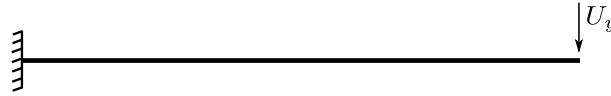


FIGURE 5.7 – Poutre encastree soumise à un déplacement transversal imposé

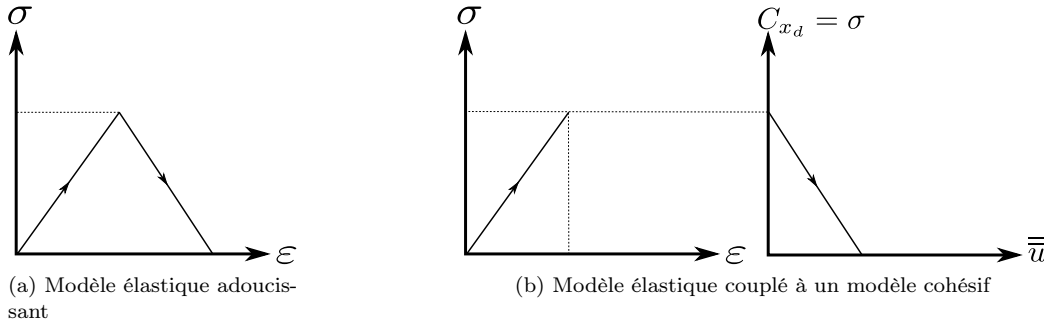


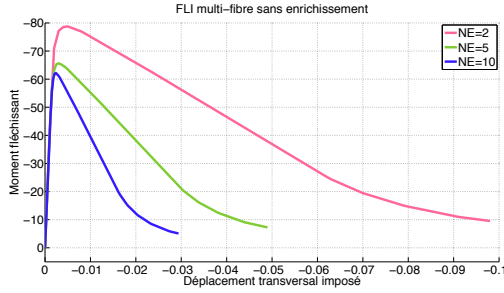
FIGURE 5.8 – Modèles de comportement (mêmes seuils en traction et en compression)

Propriété	Symbole	Valeur
Module de Young	E	$4 \times 10^7 \text{ kNm}^{-2}$
Coefficient de Poisson	ν	0.2
Module d'adoucissement	S	$-8 \times 10^5 \text{ kNm}^{-3}$
Contrainte limite	σ_u	5000 kNm^{-2}

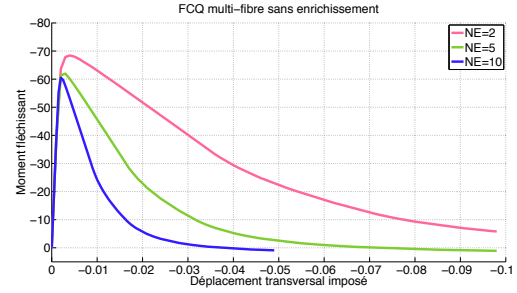
TABLE 5.1 – Propriétés matériau

La performance des éléments **FLI** et **FCQ** en fonction du nombre d'éléments NE est comparée dans les figures (5.9)(a), (b), (c) et (d) (résultats globaux, moment fléchissant - déplacement transversal imposé).

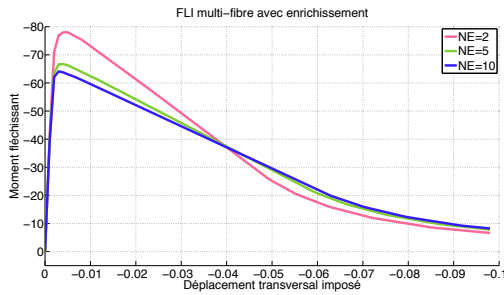
Les figures (5.9)(a), (b), (c) et (d) illustrent l'effet de la finesse du maillage sur la réponse globale de la structure avant et après l'enrichissement des fibres. Sans enrichissement, les résultats des éléments **FLI** et **FCQ** dépendent de la discrétisation, figures (5.9a) et (5.9b). Les figures (5.9a) et (5.9c) montrent que l'enrichissement des fibres des éléments **FLI** a limité la dépendance au maillage sans néanmoins la faire disparaître, même en utilisant 5 ou 10 éléments. En effet, la partie adoucissante de la réponse globale garde la même allure et ne dépend plus du nombre d'éléments finis poutres utilisés. Néanmoins,



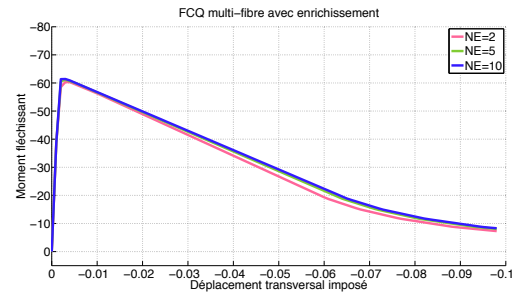
(a) Réponses globales de la poutre multifibres **FLI** sans enrichissement en fonction du nombre d'éléments



(b) Réponses globales de la poutre multifibres **FCQ** sans enrichissement en fonction du nombre d'éléments



(c) Réponses globales de la poutre multifibres **FLI** avec enrichissement en fonction du nombre d'éléments

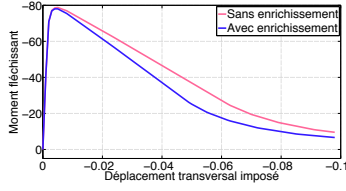


(d) Réponses globales de la poutre multifibres **FCQ** avec enrichissement en fonction du nombre d'éléments

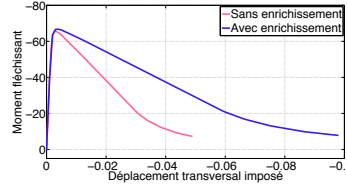
FIGURE 5.9 – Résultats globaux en fonction du nombre d'éléments (moment fléchissant en fonction du déplacement imposé) pour les deux poutres multifibres **FLI** et **FCQ** sans et avec enrichissement

la valeur du moment ultime reste dépendante du maillage. Les figures (5.9b) et (5.9d) montrent bien que l'enrichissement des fibres de la poutre **FCQ** rend la réponse identique pour une discrétisation avec 5 et 10 éléments.

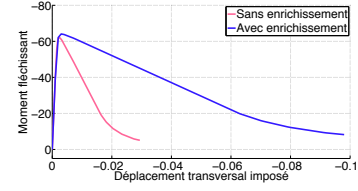
Les figures (5.10) et (5.11) montrent respectivement l'évolution de la réponse globale de la structure discrétisée avec des éléments **FLI** et **FCQ** en fonction du nombre d'éléments sans et avec enrichissement. Les réponses des poutres multifibres enrichies **FLI** et **FCQ** sont superposées en figure (5.12). La comparaison illustre clairement la meilleure performance de la poutre multifibres **FCQ** enrichie. Avec deux éléments finis (figure (5.12a)), la poutre **FCQ** multifibres enrichie est capable de prédire la bonne réponse alors que pour le modèle poutre **FLI** enrichie au moins 10 éléments sont nécessaires.



(a) Réponses globales de la poutre multifibres **FLI** en utilisant 2 éléments finis sans et avec l'enrichissement

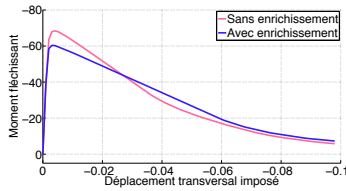


(b) Réponses globales de la poutre multifibres **FLI** en utilisant 5 éléments finis sans et avec l'enrichissement

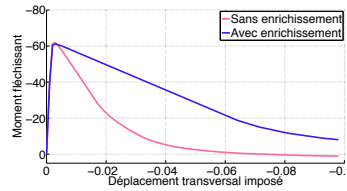


(c) Réponses globales de la poutre multifibres **FLI** en utilisant 10 éléments finis sans et avec l'enrichissement

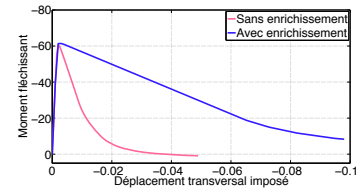
FIGURE 5.10 – Comparaison des résultats globaux en fonction du nombre d'éléments d'une poutre multifibres en flexion avec une loi de comportement élastique-cohésive à seuils symétriques en traction et compression discrétisée avec la formulation **FLI** sans et avec enrichissement.



(a) Réponses globales de la poutre multifibres **FCQ** en utilisant 2 éléments finis sans et avec l'enrichissement

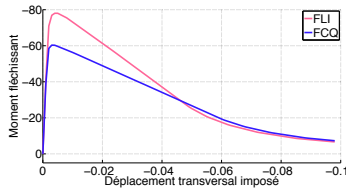


(b) Réponses globales de la poutre multifibres **FCQ** en utilisant 5 éléments finis sans et avec l'enrichissement

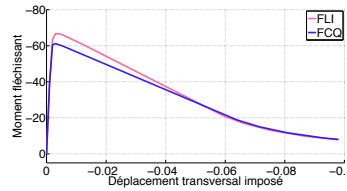


(c) Réponses globales de la poutre multifibres **FCQ** en utilisant 10 éléments finis sans et avec l'enrichissement

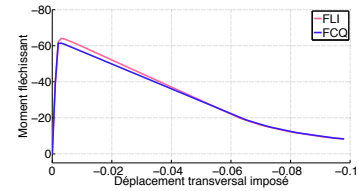
FIGURE 5.11 – Comparaison des résultats globaux en fonction du nombre d'éléments d'une poutre multifibres en flexion avec une loi de comportement élastique-cohésive à seuils symétriques en traction et compression discrétisée avec la formulation **FCQ** sans et avec enrichissement.



(a) Réponses globales des poutres multifibres **FLI** et **FCQ** enrichies en utilisant 2 éléments finis



(b) Réponses globales des poutres multifibres **FLI** et **FCQ** enrichies en utilisant 5 éléments finis



(c) Réponses globales des poutres multifibres **FLI** et **FCQ** enrichies en utilisant 10 éléments finis

FIGURE 5.12 – Comparaison des résultats globaux en fonction du nombre d'éléments d'une poutre multifibres en flexion avec une loi de comportement élastique-cohésive à seuils symétriques en traction et compression discrétisée avec la formulation **FLI** ou **FCQ** enrichie.

Analyse locale au niveau d'une fibre

L'effet de la finesse du maillage sur la position et la valeur du saut de déplacement des discontinuités est étudiée ci dessous. Les figures (5.13),(5.14) montrent la distribution des discontinuités au niveau de la fibre supérieure en fonction du nombre d'éléments NE poutres utilisé pour les deux formumations **FLI** et **FCQ**.

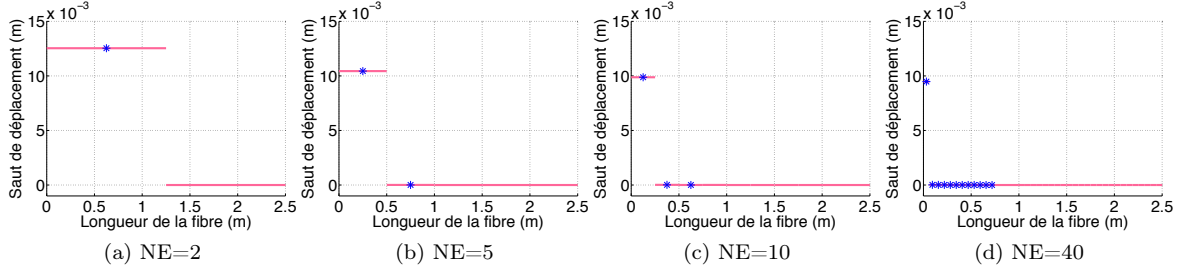


FIGURE 5.13 – Distribution du saut de déplacement le long de la fibre supérieur, formulation **FLI**

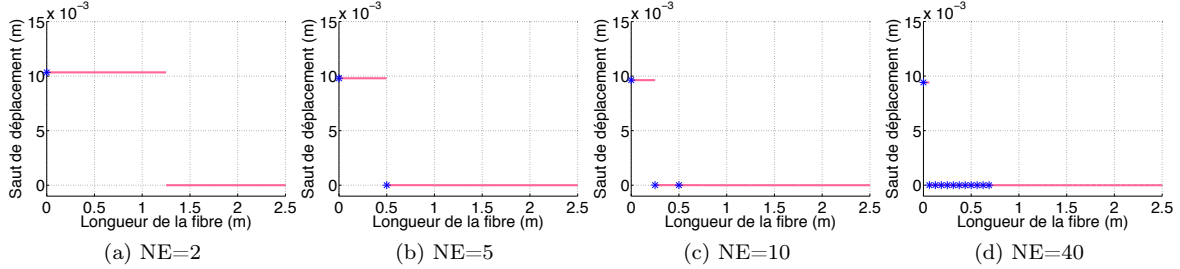


FIGURE 5.14 – Distribution du saut de déplacement le long de la fibre supérieur, formulation **FCQ**

Les étoiles bleues sur les figures représentent les positions des discontinuités. Les lignes roses représentent les éléments et les valeurs associées des sauts de déplacement aux discontinuités. Dans le cas des éléments **FLI** (figure (5.13)), les discontinuités sont introduites au milieu des éléments car les efforts sont constants par élément dans cette formulation. Pour les éléments **FCQ** (figure (5.14)) les efforts sont linéaires, les discontinuités apparaissent donc aux extrémités de l'élément (voir section 4.5.1.2 du chapitre 4). Pour le cas étudié ici avec la formulation **FCQ**, les discontinuités sont introduites à $x_d = 0$ au sein des fibres fissurées. Pour les deux formulations, plus de discontinuités sont activées dès que le nombre d'éléments augmente, mais leurs valeurs sont négligeables par rapport à la valeur de la discontinuité localisée dans le premier élément. Un autre avantage de l'enrichissement **FCQ** est que quel que soit le nombre d'éléments utilisés, la discontinuité principale (celle dont la valeur est la plus importante) se situe juste à droite de l'encastrement dans le premier élément. Cela est dû à l'utilisation des fonctions d'enrichissement linéaires permettant d'activer la discontinuité à l'endroit de l'élément où la contrainte est la plus élevée.

5.6.2 Poutre multifibres en flexion avec une loi de comportement élastique-cohésive à seuils non-symétriques en traction et compression

L'exemple de la section précédente 5.6.1 est re-visité, cette fois en considérant des éléments **FCQ** et un matériau qui n'a pas pas le même comportement en traction et en compression. Plus spécifiquement, les limites de contrainte à la rupture en compression σ_{cu} et en traction σ_{tu} ne sont pas identiques. La figure (5.15) illustre ce type de comportement.

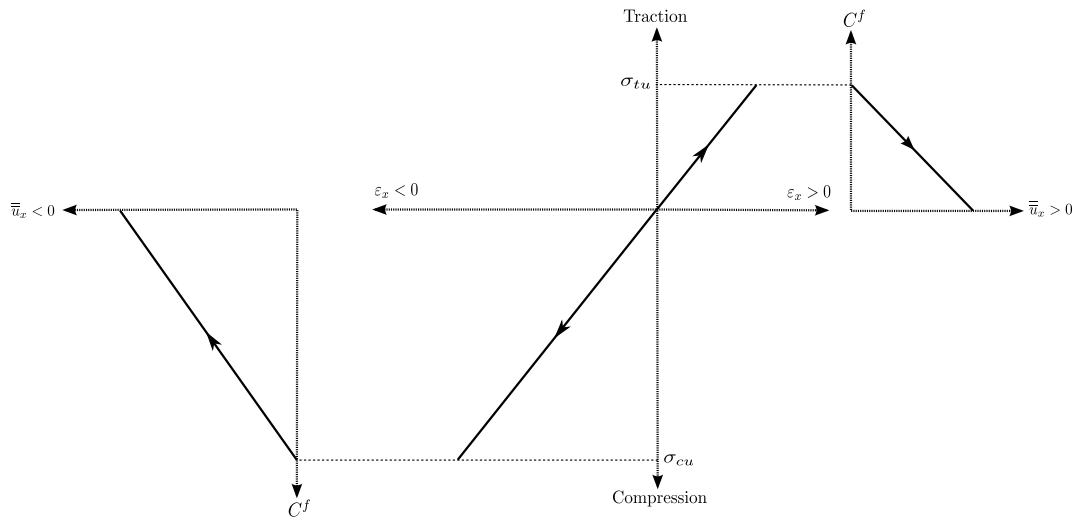


FIGURE 5.15 – Modèles de comportement (différents seuils en traction et en compression)

Propriété	Symbole	Valeur
Module de Young	E	$4 \times 10^7 \text{ kNm}^{-2}$
Coefficient de Poisson	ν	0.2
Contrainte limite en traction	σ_{tu}	4000 kNm^{-2}
Contrainte limite en compression	σ_{cu}	40000 kNm^{-2}
Module d'adoucissement en traction	S_t	$-5 \times 10^5 \text{ kNm}^{-3}$
Module d'adoucissement en compression	S_c	$-5 \times 10^5 \text{ kNm}^{-3}$

TABLE 5.2 – Propriétés matériau

Un premier calcul est réalisé sans enrichissement, voir figure (5.16). Ensuite, figure (5.17), la poutre est enrichie en utilisant les fonctions d'enrichissement linéaires $\bar{G}_v(x)$ et $\bar{G}_r(x)$ déterminées dans la section (5.3.3). On appelle **FCQ** (GL), (L de linéaire) les simulations réalisées avec ce type d'enrichissement.

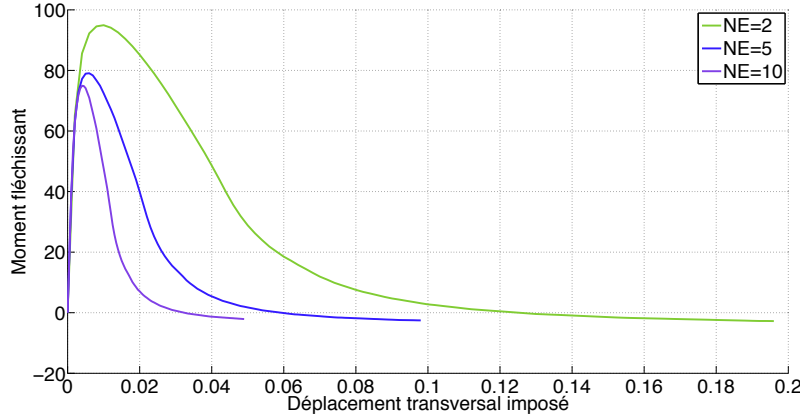


FIGURE 5.16 – Réponse globale d’une poutre multifibres de Timoshenko au moyen d’un modèle de comportement élastique adoucissant non cohésif (sans enrichissement), différents seuils en traction et en compression, formulation **FCQ**

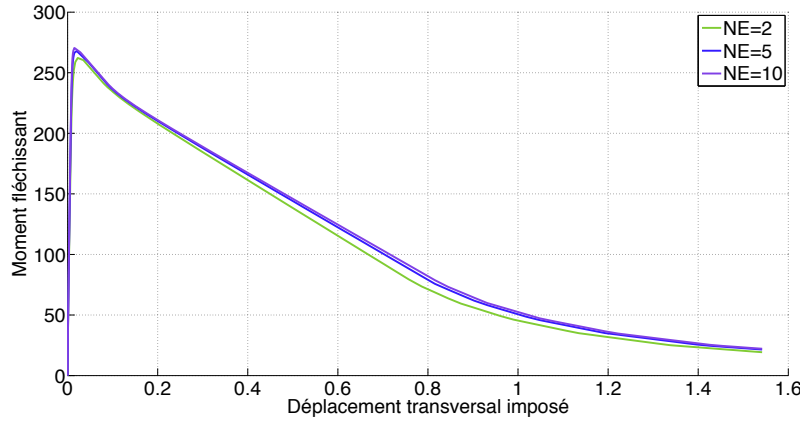


FIGURE 5.17 – Réponse globale d’une poutre multifibres de Timoshenko enrichie avec des fonctions d’enrichissement linéaires, différents seuils en traction et en compression, formulation **FCQ** (GL)

Comme précédemment (voir figure (5.9b)), la figure (5.16) montre que la réponse de la poutre sans enrichissement dépend du nombre d’éléments. Avec enrichissement, la dépendance au maillage est fortement limitée (voir figure (5.17)). Néanmoins, les valeurs ultimes du moment sont surestimées par rapport à l’ordre de grandeur que nous devons avoir.

Afin de comprendre l’origine de cette surestimation, l’état du matériau au niveau de la fibre numéro 1 (voir figure (5.18)) du premier élément est étudié ci-dessous. Cette fibre se situe dans la partie supérieure de la section comme illustré en figure (5.18). Du fait que la poutre est encastree et soumise à un déplacement transversal vers le bas à l’extrémité libre, la fibre étudiée se trouve en traction. La force cohésive au niveau de la discontinuité, ainsi que les contraintes au niveau des points d’intégration le long de cette fibre sont illustrées sur la figure (5.19).

D’après la figure (5.19), les contraintes dans la fibre 1 du premier élément augmentent en raffinant le maillage. Ceci est dû au fait que le premier élément change de taille et les contraintes s’y concentrent pour des maillages plus raffinés. Par ailleurs, les trois sections du premier élément ne se situent pas aux mêmes endroits, cela dépend de la taille du maillage (voir figure (5.20)).

Un autre problème apparaît aussi. Les valeurs de contraintes en traction aux points d’intégration dépassent significativement la valeur de contrainte à la rupture en traction $\sigma_{tc} = 4000$, ce qui n’est

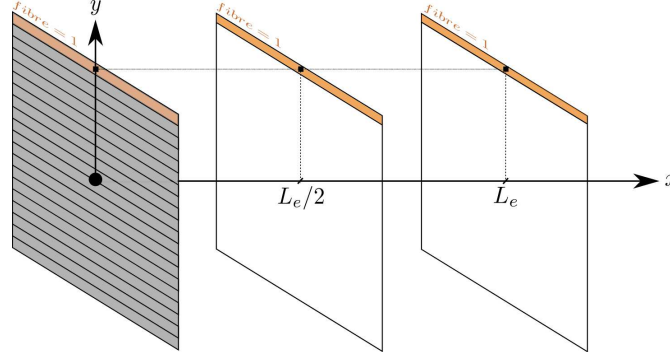


FIGURE 5.18 – Analyse de l'état de la fibre 1 de la section multifibres

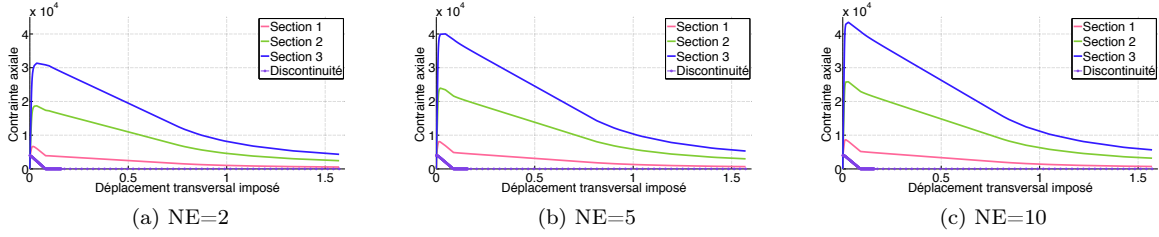


FIGURE 5.19 – Les contraintes dans la fibre 1 de l'élément 1 en utilisant des fonctions d'enrichissement linéaires, différents seuils en traction et en compression, formulation **FCQ** (GL)

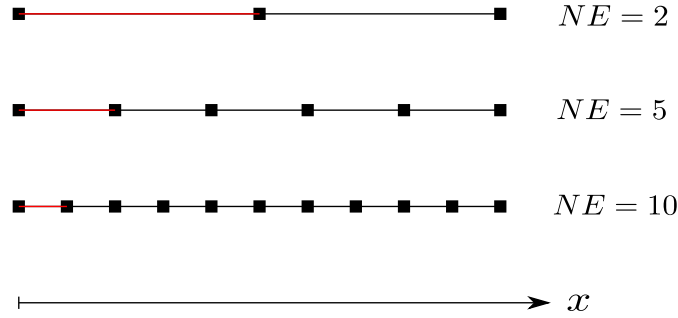


FIGURE 5.20 – La position de l'élément 1 en fonction du maillage

évidemment pas acceptable. L'origine de ce problème est que la surface de rupture, équation (5.47), est vérifiée une seule fois au niveau de l'élément et non pas à chaque point d'intégration. La contrainte cohésive est calculée à partir d'une moyenne pondérée des contraintes le long de la fibre par le biais de la fonction d'enrichissement G_v , comme montre l'équation (5.88).

Afin de voir explicitement ce qui se passe à l'intérieur de la fibre, l'intégration numérique de l'équation (5.88) est exprimée en fonction des trois points d'intégration de Gauss de la formulation **FCQ** et de leurs poids correspondants. La discontinuité dans la fibre 1 est introduite à $x_d = 0$ donc l'expression de $\bar{G}_v(x)$ prend la forme $\frac{6}{L^2}x - \frac{4}{L}$ d'après l'équation (5.34). Par conséquent, l'expression numérique de la contrainte cohésive s'écrit :

$$\begin{aligned} C_{t+1}^f &= \sum_{pg}^{npg} \bar{G}_v(x_{pg}) \sigma_{t+1}^f(x_{pg}) w(x_{pg}) \\ &= (0.9233 \sigma_{x_{PG1}} + 0.4444 \sigma_{x_{PG2}} - 0.3677 \sigma_{x_{PG3}}) \end{aligned} \quad (5.106)$$

où x_{PG} et $w_{x_{pg}}$ sont les positions et les poids des trois points d'intégration de Gauss tels que :

$$x_{pg}|_{ref} = [-\sqrt{3/5} \quad 0 \quad \sqrt{3/5}] \quad \text{donc} \quad x_{pg}|_{ele} = [\frac{L}{2}(1 - \sqrt{3/5}) \quad \frac{L}{2} \quad \frac{L}{2}(1 + \sqrt{3/5})] \quad (5.107)$$

et

$$w(x_{pg}) = [5/9 \quad 8/9 \quad 5/9] \quad (5.108)$$

D'après l'équation de la surface de rupture, la force de cohésion doit vérifier

$$\begin{aligned} |C_{t+1}^f| &\leq \sigma_{ut} + S_{bt} \bar{\xi}_{t+1}^f \\ |0.9233\sigma_{x_{PG1}} + 0.4444\sigma_{x_{PG2}} - 0.3677\sigma_{x_{PG3}}| &\leq \sigma_{ut} + S_{bt} \bar{\xi}_{t+1}^f \end{aligned} \quad (5.109)$$

Cela montre que les contraintes hors discontinuité ne respectent pas forcément la surface de rupture. C'est seulement leur moyenne pondérée, équation (5.109) qui doit être vérifiée. La contrainte hors discontinuité n'a pas une valeur limite et peut évoluer au delà de $\sigma_{ut} = 4000$ comme illustré dans la figure (5.19).

Ce type de problème n'apparaît pas pour la formulation **FLI** dont la contrainte est constante tout au long de la fibre (1 point de Gauss) et vaut la force de cohésion au niveau discontinuité ($C^f = \sigma_{x_{pg}}$). De plus, ce problème n'apparaît pas lors d'utilisation d'un modèle de comportement symétrique ($\sigma_{ut} = \sigma_{uc}$) comme dans le cas de la première application présentée dans la section (5.6.1), car au moment où la discontinuité au niveau de la fibre supérieure s'active par traction, une autre discontinuité s'active simultanément au niveau de la fibre inférieure par compression. L'équilibre de la section est donc respectée sans que les contraintes aux points d'intégration (hors discontinuité) poursuivent leur augmentation. Pour le cas d'un matériau non symétrique ($\sigma_{ut} \neq \sigma_{uc}$), les contraintes aux points d'intégration (hors discontinuité) dans la fibre tendue ayant une discontinuité active poursuivent leur augmentation afin de respecter l'équilibre de la section. En effet, les fibres en traction continuent à augmenter pour suivre l'évolution des contraintes en compression qui ont une valeur limite σ_{uc} supérieure à σ_{ut} .

Solutions proposées

Deux solutions sont proposées pour s'affranchir de problème. La première consiste à remplacer les fonctions d'enrichissement linéaires de la formulation **FCQ** par des fonctions constantes ($\bar{G}_v(x) = -\frac{1}{L}$ et $\bar{G}_r(x) = -\frac{1}{L}$), comme celles de la formulation **FLI**. La deuxième solution, plus robuste, consiste d'introduire plusieurs discontinuités dans une fibre, positionnées aux points d'intégration. Cette solution sera étudiée en détail dans le dernier chapitre (chapitre 6) de ce manuscrit.

On appelle ci-dessous **FCQ** (GC) (C de constante) les simulations réalisées avec l'élément **FCQ** dont les fonctions d'enrichissement sont constantes. Dans ce cas, la contrainte cohésive devient égale à la valeur moyenne des contraintes le long de la fibre telle que :

$$C^f(t) = - \int_{\Omega_f} \bar{G}_v^T(x) \sigma(x, t) d\Omega_f = \frac{1}{L} \int_{\Omega_f} \sigma(x, t) d\Omega_f \quad (5.110)$$

Les résultats globaux et locaux de cette simulation sont illustrés en figures (5.21) et (5.22). La contrainte cohésive dans ce cas est égale à la contrainte au point d'intégration du milieu ($x = \frac{L}{2}$). Or pour un nombre élevé d'éléments ($NE = 10$), les contraintes aux points d'intégration d'une même fibre convergent vers une même valeur. Par ailleurs, la contrainte cohésive $C^f(t)$ n'est autre que la contrainte constante hors discontinuité. En effet, l'utilisation de $\bar{G}_v(x) = -\frac{1}{L}$ lorsque la contrainte est constante le long de la fibre donne :

$$C^f(t) = - \int_{\Omega_f} \bar{G}_v^T(x) \sigma(x, t) d\Omega_f = \int_{\Omega_f} \frac{1}{L} \sigma(x, t) d\Omega_f = \sigma(x, t) \int_{\Omega_f} \frac{1}{L} d\Omega_f = \sigma(x, t) \quad x \in [0, L] \quad (5.111)$$

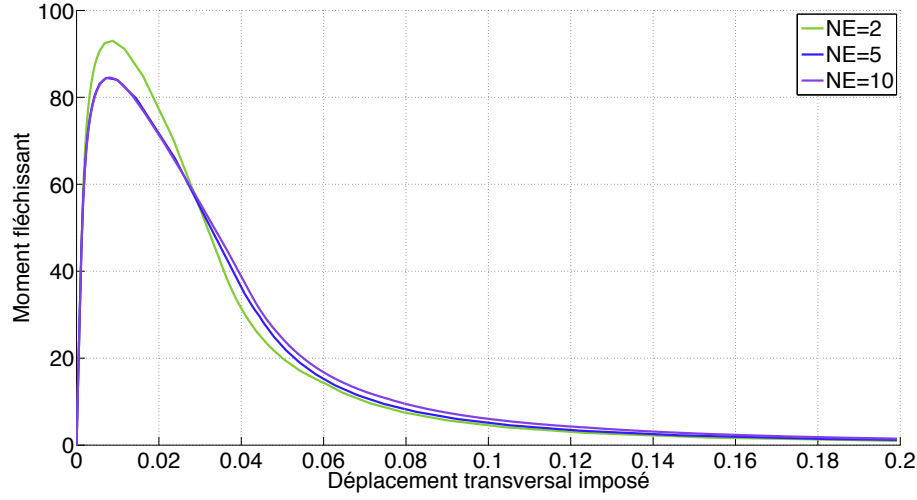


FIGURE 5.21 – Réponse globale d’une poutre multifibres de Timoshenko enrichie au moyen des fonctions d’enrichissement constantes, différents seuils en traction et en compression, formulation **FCQ** (GC)

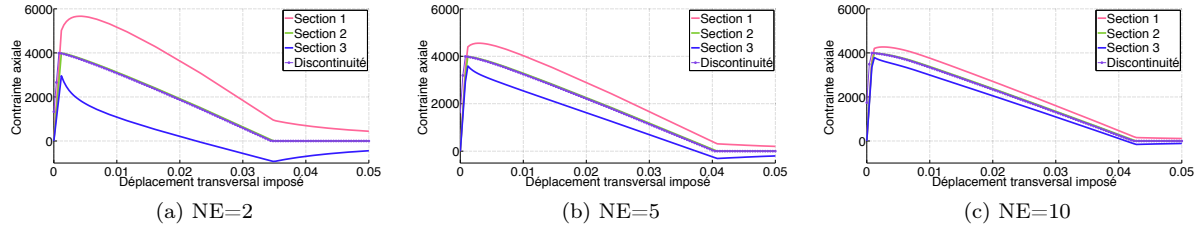


FIGURE 5.22 – Les contraintes dans la fibre 1 de l’élément 1 en utilisant des fonctions d’enrichissement constantes, différents seuils en traction et en compression, formulation **FCQ** (GC)

La performance donc de l’élément **FCQ** enrichi, se trouve significativement améliorée.

5.6.3 Poutre en béton armé en flexion

Cette dernière application consiste à modéliser une structure poutre en béton armé encastree et soumise à un déplacement vertical vers le bas V_y . Cette structure a été modélisée par [Jukić, 2013] avec la formulation **FLI** multifibres enrichie. L’objectif est de comparer la performance de la poutre multifibres enrichie **FCQ** (GC) (avec des fonctions d’enrichissement constantes) et la formulation **FLI**.

Les détails de la structure sont illustrées sur les figures (5.23a) et (5.23b). Les propriétés des matériaux sont récapitulées dans les tableaux (5.3) pour le béton et (5.4) pour les armatures d’acier. La section de la poutre est discrétisée en 20 fibres (18 en béton et 2 en acier). Trois calculs ont été réalisés avec un nombre différent d’éléments (NE= 2, 5 et 10).

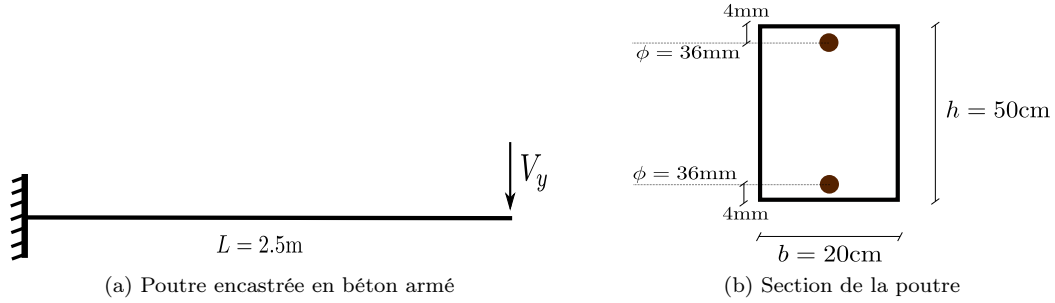


FIGURE 5.23 – Structure poutre en béton armé encastrée soumise à un déplacement transversal imposé [Jukić, 2013]

Propriétés du béton	Symbole	Valeur
Module de Young	E_b	$40 \times 10^6 \text{ kNm}^{-2}$
Coefficient de Poisson	ν_b	0.2
Contrainte ultime en traction	σ_{btu}	4000 kNm^{-2}
Contrainte élastique en compression	σ_{bcy}	40820 kNm^{-2}
Contrainte ultime en compression	σ_{bcu}	44902 kNm^{-2}
Module d'écrouissage en compression	H_{bc}	$2 \times 10^6 \text{ kNm}^{-2}$
Module d'adoucissement en traction	S_{bt}	$-0.8 \times 10^6 \text{ kNm}^{-3}$
Module d'adoucissement en compression	S_{bc}	$-5.2 \times 10^6 \text{ kNm}^{-3}$

TABLE 5.3 – Propriétés du béton

Propriétés d'acier	Symbole	Valeur
Module de Young	E_a	$200 \times 10^6 \text{ kNm}^{-2}$
Coefficient de Poisson	ν_a	0.3
Contrainte limite élastique	σ_{ay}	400000 kNm^{-2}
Contrainte ultime	σ_{au}	500000 kNm^{-2}
Module d'écrouissage	H_a	$10 \times 10^6 \text{ kNm}^{-2}$
Module d'adoucissement	S_a	$-30 \times 10^6 \text{ kNm}^{-3}$

TABLE 5.4 – Propriétés des armatures

Les fibres du béton sont modélisées selon le modèle d'endommagement présenté dans la section 5.4.1. Les aciers sont modélisés avec un modèle élasto-plastique (voir paragraphe 4.7.1). Les deux lois de comportement sont couplés à des modèles cohésifs pour décrire le comportement des matériaux au niveau des discontinuités.

La réponse de la poutre **FCQ** (GC) multifibres enrichie par le biais des fonctions d'enrichissement constantes est comparée à celle du modèle multifibres enrichi **FLI**. Les résultats globaux sont illustrés dans la figure (5.24).

Les réponses globales des deux formulations sont clairement dépendantes du maillage. Or, dans les deux applications précédentes, présentées dans les sections 5.6.1 et 5.6.2, la dépendance au maillage

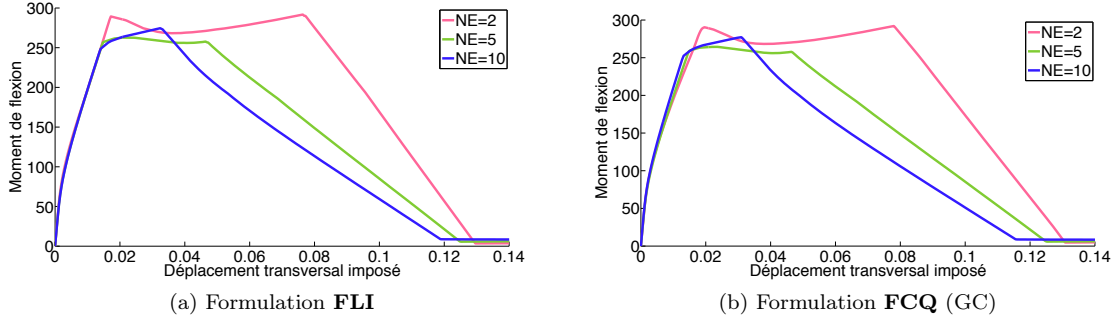


FIGURE 5.24 – Réponses globales de la poutre en béton armé avec les deux formulations enrichies **FLI** et **FCQ** (GC) en fonction du nombre d'éléments NE

était beaucoup moins prononcée. Ceci parce que les modèles continus ne présentaient pas une partie non linéaire. Afin de confirmer ce point de vue, la quantité d'énergie dissipée est ci-dessous calculée pour la formulation **FCQ** (GC).

Le calcul de l'énergie dissipée est réalisé à l'aide des expressions (4.92) et (5.54) développées respectivement pour les modèles élasto-plastique et d'endommagement. Si on considère un modèle élasto-plastique couplé à un modèle cohésif, la dissipation énergétique totale s'écrit de la façon suivante :

$$D = \overline{D} + \overline{\overline{D}} \quad (5.112)$$

avec \overline{D} la quantité d'énergie dissipée par le modèle continu telle que :

$$\begin{aligned} \overline{D} &= \int_0^t \int_{\Omega} \left(\sigma \dot{\varepsilon}^p + \overline{q} \dot{\xi} \right) d\Omega dt \\ &= \int_0^t \sum_{e=1}^{n_{elm}} \sum_{f=1}^{n_f} \int_{\Omega_f} \left(\sigma \dot{\varepsilon}^p + \overline{q} \dot{\xi} \right) d\Omega_f dt \\ &= \sum_{t=1}^{n_{elm}} \sum_{e=1}^{n_f} \sum_{f=1}^L \sum_{pg=1}^{n_{PG}} \left(\sigma(x_{PG}) \left[\overline{\varepsilon}_t^p(x_{PG}) - \overline{\varepsilon}_{t-1}^p(x_{PG}) \right] + \overline{q}(x_{PG}) \left[\overline{\xi}_t(x_{PG}) - \overline{\xi}_{t-1}(x_{PG}) \right] \right) w(x_{PG}) \end{aligned} \quad (5.113)$$

et $\overline{\overline{D}}$ la quantité d'énergie dissipée par le modèle cohésif telle que :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{D}} &= \int_0^t \int_{\Omega} \left(\sigma \left(\dot{\overline{u}}_x \delta_{x_d}(x) \right) + \overline{\overline{q}} \dot{\overline{\xi}} \delta_{x_d}(x) \right) d\Omega dt \\ &= \sum_{t=1}^{n_{elm}} \sum_{e=1}^{n_f} \sum_{f=1}^L \left(C \left[\overline{u}_t - \overline{u}_{t-1} \right] + \overline{\overline{q}} \left[\overline{\xi}_t - \overline{\xi}_{t-1} \right] \right) \end{aligned} \quad (5.114)$$

Pour calculer approximativement les deux expressions de l'énergie dissipée, on utilise la formule des rectangles pour l'intégration temporelle et l'intégration de Gauss pour l'intégration spatiale le long des éléments (le but ici n'étant pas de calculer les valeurs exactes de l'énergie dissipée mais plutôt d'avoir une idée sur la dépendance vis à vis du nombre d'éléments finis utilisés). Le calcul est réalisé pour le modèle de poutre multifibres enrichi **FCQ** (GC) dont les fonctions d'enrichissement sont constantes. Les valeurs des énergies calculées sont récapitulées dans le tableau (5.5).

	\bar{D}	$\bar{\bar{D}}$	D
NE=2	4.993×10^3	8.604×10^3	1.360×10^4
NE=5	1.993×10^3	8.674×10^3	1.067×10^4
NE=10	1.003×10^3	8.753×10^3	0.976×10^4

TABLE 5.5 – Les quantités des énergies dissipées dans les modèles continu et cohésif pour la formulation **FCQ** (GC) enrichie avec des fonctions d’enrichissement constantes

Le tableau (5.5) permet de démontrer que la quantité d’énergie dissipée dans la phase cohésive pour les trois maillages est quasi la même (autour de 8.65×10^3) alors que la quantité d’énergie dissipée dans le modèle continu varie en fonction du nombre d’éléments NE. Il est clair que l’enrichissement rend la quantité d’énergie dissipée dans la phase adoucissante indépendante du nombre et de la taille des éléments finis.

Pour comprendre davantage ce qui se passe, la distribution des discontinuités le long de la fibre en béton située dans la partie supérieure de la section pour différents nombres d’éléments NE est montrée dans la figure (5.25). Les points rouges représentent les positions des discontinuités et leurs valeurs. La discontinuité située dans le premier élément domine clairement le comportement, voir (5.25a), (5.25b) et (5.25c). La figure (5.26) montre la distribution de la déformation axiale qui se localise également dans le premier élément de la fibre dès lors qu’il contient la discontinuité principale.

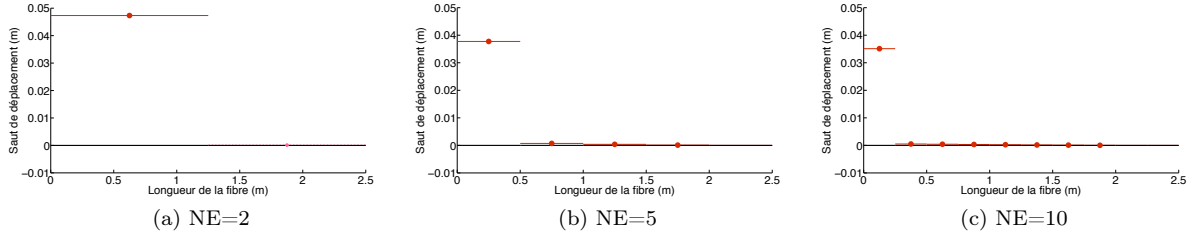


FIGURE 5.25 – Distribution des discontinuités le long de la fibre supérieure (béton) pour la formulation **FCQ** (GC) enrichie avec des fonctions d’enrichissement constantes à l’état final

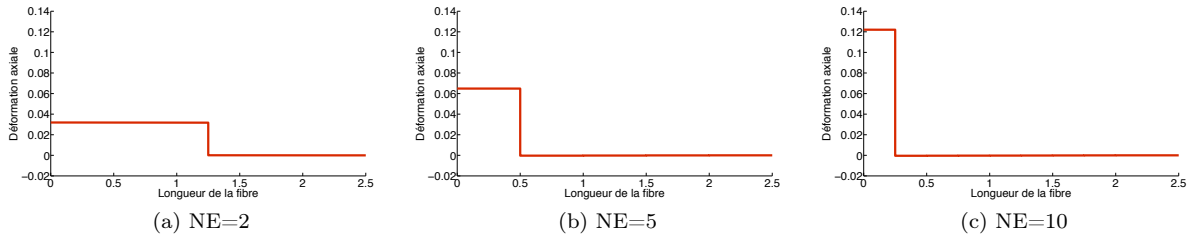


FIGURE 5.26 – Distribution de la déformation axiale le long de la fibre supérieure (béton) pour la formulation **FCQ** (GC) enrichie avec des fonctions d’enrichissement constantes à l’état final

Enfin, même si l’introduction des discontinuités améliore la performance (surtout pour la partie discontinue), la régularisation définitive du problème nécessite l’utilisation d’un modèle continu à longueur caractéristique.

5.7 Conclusions

Un modèle de poutre multifibres enrichi a été proposé dans ce chapitre. Ce modèle s’inscrit dans le cadre de la formulation **FCQ**. La composante axiale du déplacement au niveau de la fibre est enrichie

par une variable de discontinuité. Cette dernière est introduite automatiquement au sein de la fibre selon l'état des contraintes aux points d'intégration. Le comportement du matériau au niveau de la discontinuité est géré par des modèles cohésifs linéaires et la contrainte cohésive est déterminée à partir d'une moyenne pondérée des contraintes le long de la fibre au moyen de l'opérateur d'équilibre \bar{G}_v . La cinématique de la discontinuité est étudiée afin de déterminer l'opérateur de compatibilité \bar{G}_r associé aux discontinuités. La formulation variationnelle, les modèles de comportement utilisés pour représenter le béton et l'acier ainsi que les étapes de l'implémentation numériques sont abordées. Le chapitre se termine avec des illustrations numériques permettant d'évaluer la performance du modèle.

Le modèle **FCQ** enrichi avec des fonctions constantes a un comportement similaire à celui du modèle **FLI** pour le cas des matériaux avec des seuils différents en traction et en compression. Dans le chapitre suivant, une nouvelle formulation est proposée en introduisant des surfaces de rupture indépendantes à chaque point d'intégration. Ce modèle permettra de mieux exploiter les avantages de la formulation **FCQ**.

Chapitre 6

Enrichissement des fibres aux points d'intégration

Sommaire

6.1	Introduction	137
6.2	Cinématique des discontinuités	137
6.3	Formulation variationnelle	139
6.4	Modèles de comportement	141
6.5	Implémentation numérique	142
6.5.1	Linéarisation des équations d'équilibre	142
6.5.2	Intégration du modèle cohésif associé à un modèle continu élasto-plastique	143
6.5.2.1	Deux discontinuités actives par fibre	144
6.5.2.2	Rupture complète au niveau des deux discontinuités	146
6.5.2.3	Rupture complète au niveau d'une seule discontinuité	146
6.5.3	Intégration du modèle cohésif associé à un modèle continu d'endommagement	146
6.5.3.1	Deux discontinuités actives par fibre	148
6.5.3.2	Rupture complète au niveau des deux discontinuités	149
6.5.3.3	Rupture complète au niveau d'une seule discontinuité	150
6.6	Applications numériques	151
6.6.1	Poutre en béton armé en flexion	151
6.6.2	Portique en béton armé	152
6.7	Conclusions	155

6.1 Introduction

Dans le chapitre 5, le modèle multifibres enrichi est basé sur la formulation **FCQ** et contient une seule discontinuité par fibre. Cependant, l'utilisation de fonctions d'enrichissement linéaires s'est avérée conduire à une surestimation de la réponse globale. Afin de palier ce problème, une des solutions proposée est de remplacer les fonctions d'enrichissement linéaires par des fonctions constantes. Cela a permis d'obtenir des performances similaires à celles de la formulation **FLL**.

La précision de calcul des contraintes au niveau de la fibre peut encore s'améliorer. En effet, avec l'utilisation des fonctions d'enrichissement constantes et une discontinuité par fibre, les contraintes aux points d'intégration peuvent dépasser les valeurs limites puisque la surface de rupture est associée à l'état de la fibre toute entière et non pas à l'état au niveau de chaque point d'intégration. D'où l'idée d'associer à chaque point d'intégration sa propre surface de rupture, d'introduire donc plusieurs discontinuités dans une fibre, chacune portée par un point de Gauss.

Dans ce chapitre, les nouveaux champs de déplacement et de déformation enrichis ainsi que les fonctions d'enrichissement correspondantes à chaque discontinuité sont détaillés. Ceci permet de formuler les équations d'équilibres après l'écriture de la formulation variationnelle et des lois de comportement. L'implémentation numérique de ce modèle après la linéarisation des équations d'équilibre ainsi que l'intégration des lois de comportement sont détaillées. Le chapitre se termine avec illustrations numériques afin de démontrer la performance de la nouvelle approche.

6.2 Cinématique des discontinuités

Afin de prendre en compte plusieurs discontinuités au sein d'une fibre, le champ de déplacement axial enrichi au niveau de la fibre doit s'écrire sous la forme suivante :

$$u_x(x, y, t) = d_x(x, y, t) + \sum_{d=1}^{npg} \left([H_{x_d}(x) - \phi^{(d)}(x)] \bar{u}_x^{(d)}(y, t) \right) \quad (6.1)$$

avec npg le nombre des points d'intégration, $H_{x_d}(x)$ la fonction Heaviside définie avec l'équation (4.5), $\phi^{(d)}(x)$ des fonctions associées à chaque discontinuité d permettant de respecter les conditions de compatibilité entre les éléments et $\bar{u}_x^{(d)}(y, t)$ les variables gérant les discontinuités de déplacement. Deux points d'intégration de Gauss suffisent pour obtenir une intégration exacte des forces axiales au niveau de la fibre si les fonctions d'interpolation du champ de déformation sont linéaires, équation (5.12). Chaque fibre est donc considérée comme une barre à 3 noeuds avec 2 points d'intégration et une discontinuité par point d'intégration, voir figure 6.1.

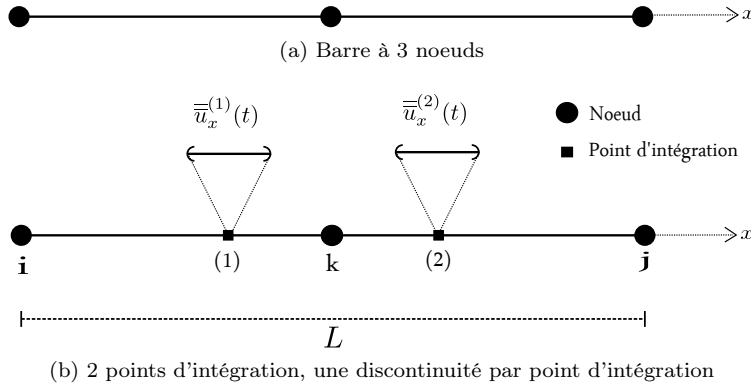


FIGURE 6.1

Par conséquent, les coordonnées des points d'intégrations utilisées sont :

$$x_{pg|ref} = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \Rightarrow x_{pg|ele} = \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \frac{L}{2} \quad \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \frac{L}{2} \right] \quad (6.2)$$

et les poids d'intégration associés sont :

$$w_{pg} = [1 \quad 1] \quad (6.3)$$

Le champ de déformation est directement dérivé du champ de déplacement axial dans la fibre de la manière suivante :

$$\varepsilon_x(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial x} \{d_x(x, y, t)\} + \sum_{d=1}^{npg} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\phi^{(d)}(x) \right\} \bar{u}_x^{(d)}(y, t) + \frac{\partial}{\partial x} \{H_{x_d}(x)\} \bar{u}_x^{(d)}(y, t) \right) \quad (6.4)$$

Pour simplifier l'écriture, la somme sur les points d'intégration de la partie discontinue du champ est remplacée par une écriture vectorielle telle que $\bar{\mathbf{u}}_x(y, t)$ est le vecteur portant les discontinuités par fibre de la façon suivante (voir figure (6.1)) :

$$\bar{\mathbf{u}}_x(y, t) = \begin{bmatrix} \bar{u}_x^{(1)}(y, t) \\ \bar{u}_x^{(2)}(y, t) \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

$\bar{\mathbf{G}}_r(x)$ est le vecteur des fonctions d'enrichissement associées respectivement à chaque discontinuité tel que :

$$\bar{\mathbf{G}}_r(x) = \begin{bmatrix} \bar{G}_r^{(1)}(x) & \bar{G}_r^{(2)}(x) \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

avec

$$\bar{G}_r^{(d)}(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \phi^{(d)}(x) \right\} \quad (6.7)$$

Par conséquent, le champ de déformation enrichi s'écrit :

$$\varepsilon_x(x, y, t) = \underbrace{\mathbf{B}(x)\mathbf{u}_x(t)}_{\tilde{\varepsilon}_x(x, y, t)} + \underbrace{\bar{\mathbf{G}}_r(x)\bar{\mathbf{u}}_x(y, t)}_{\bar{\tilde{\varepsilon}}_x(x, y, t)} + \underbrace{\boldsymbol{\delta}_x \bar{\mathbf{u}}_x(y, t)}_{\bar{\tilde{\varepsilon}}_x(x, y, t)} \quad (6.8)$$

avec $\boldsymbol{\delta}_x$ la matrice diagonale des fonctions Dirac associées aux positions des discontinuités telle que :

$$\boldsymbol{\delta}_x = \begin{bmatrix} \delta_x^{(1)}(x) & 0 \\ 0 & \delta_x^{(2)}(x) \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

La détermination des fonctions d'enrichissement $\bar{G}_r^{(d)}$ se fait de la même façon que celle proposée dans les chapitres 4 et 5. L'introduction des discontinuités dans le champ de déplacement ne doit pas influencer les déplacements nodaux afin de conserver la compatibilité entre les éléments. Il convient de rappeler qu'un élément barre à trois nœuds est utilisé. Par conséquent, les conditions suivantes doivent être respectées :

Condition 1 :

$$u_x(0, y, t) = u_i \implies \sum_{d=1}^{npg} \left(\left[H_{x_d}(0) - \phi^{(d)}(0) \right] \bar{u}_x^{(d)}(y, t) \right) = 0 \implies \sum_{d=1}^{npg} \left(\left[0 - \phi^{(d)}(0) \right] \bar{u}_x^{(d)}(y, t) \right) = 0$$

donc $\forall d \in [1, 2] \quad \phi^{(d)}(0) = 0$

(6.10)

Condition 2 :

$$u_x(L, y, t) = u_j \implies \sum_{d=1}^{npg} \left(\left[H_{x_d}(L) - \phi^{(d)}(L) \right] \bar{u}_x^{(d)}(y, t) \right) = 0 \implies \sum_{d=1}^{npg} \left(\left[1 - \phi^{(d)}(L) \right] \bar{u}_x^{(d)}(y, t) \right) = 0$$

donc $\forall d \in [1, 2] \quad \phi^{(d)}(L) = 1$

(6.11)

Condition 3 :

$$\begin{aligned}
u_x\left(\frac{L}{2}, y, t\right) = u_k &\implies \sum_{d=1}^{npg} \left(\left[H_{x_d}\left(\frac{L}{2}\right) - \phi^{(d)}\left(\frac{L}{2}\right) \right] \bar{\bar{u}}_x^{(d)}(y, t) \right) = 0 \implies \sum_{d=1}^{npg} \left(\left[1 - \phi^{(d)}\left(\frac{L}{2}\right) \right] \bar{\bar{u}}_x^{(d)}(y, t) \right) = 0 \text{ si } x_d = x_1 \\
&\sum_{d=1}^{npg} \left(\left[0 - \phi^{(d)}\left(\frac{L}{2}\right) \right] \bar{\bar{u}}_x^{(d)}(y, t) \right) = 0 \text{ si } x_d = x_2 \\
\text{donc pour } x_1, \quad \phi^{(d)}\left(\frac{L}{2}\right) &= 1 \quad \text{et pour } x_2, \quad \phi^{(d)}\left(\frac{L}{2}\right) = 0
\end{aligned} \tag{6.12}$$

D'après les conditions (6.10), (6.11) et (6.12) et de manière similaire qu'aux paragraphes 4.5.1.2 et 5.3.3, les fonctions d'enrichissement $\phi^{(d)}(x)$ correspondantes à chaque discontinuité peuvent être définies de la même façon que les équations (5.31) telles que :

$$\begin{aligned}
\phi^{(1)}(x) &= N_{fj}(x) + N_{fk}(x) \quad \text{puisque } x_1 < \frac{L}{2} \\
\phi^{(2)}(x) &= N_{fj}(x) \quad \text{puisque } x_2 > \frac{L}{2}
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Par conséquent, les dérivées de ces fonctions donnent :

$$\begin{aligned}
\bar{G}_r^{(1)}(x) &= -(B_2(x) + B_3(x)) = \frac{4}{L^2}x - \frac{3}{L} \\
\bar{G}_r^{(2)}(x) &= -B_2(x) = -\frac{4}{L^2}x + \frac{1}{L}
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Les valeurs de l'équation (6.14) aux deux points d'intégration, équation (6.2), sont récapitulées dans le tableau ci-dessous :

	x_1	x_2
$\bar{G}_r^{(1)}(x)$	$-\frac{L}{2}\left(-1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$	$\frac{L}{2}\left(-1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$
$\bar{G}_r^{(2)}(x)$	$\frac{L}{2}\left(-1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$	$\frac{L}{2}\left(-1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

TABLE 6.1 – Valeurs des fonctions d'enrichissement $\bar{G}_r(x)$ aux deux points d'intégration

D'après le tableau (6.1), les valeurs de $\bar{G}_r^{(1)}(x_2)$ et $\bar{G}_r^{(2)}(x_1)$ ne sont pas nulles ce qui indique que les états de déformations aux points d'intégration sont couplés. En effet, la présence d'une discontinuité au niveau du premier point d'intégration influence l'état de l'autre discontinuité au second point d'intégration. Cela rend l'implémentation numérique un peu plus complexe comme illustré ci-après.

6.3 Formulation variationnelle

Afin d'écrire la formulation variationnelle, l'expression de la déformation est introduite dans le principe des travaux virtuels. Le travail au niveau d'une fibre est tout d'abord déterminé. La seule différence par rapport aux chapitres précédents est que les variables scalaires associées à l'unique discontinuité sont maintenant remplacées par des variables vectorielles prenant en compte les différentes discontinuités. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
W_{int}^f(y, t) &= \int_{\Omega^f} \delta \varepsilon_x(x, y, t)^T \sigma_x(x, y, t) + \delta \gamma_{xy}(x, y, t)^T \tau_{xy}(x, y, t) d\Omega^f \\
&= \delta \mathbf{d}(t)^T \mathbf{F}_{int, B}^f(y, t) + \delta \bar{\mathbf{u}}_x(y, t)^T \mathbf{F}_{int, G}^f(y, t)
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Le travail interne effectué dans un élément poutre multifibres est écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
W_{int}^e(t) &= \sum_f^{n_{fib}} W_{int}^f(y, t) \\
&= \delta \mathbf{d}(t)^T \mathbf{F}_{int, B}^e(t) + \sum_f^{\bar{n}_f} \delta \bar{\mathbf{u}}_x(y, t)^T \mathbf{F}_{int, G}^f(y, t)
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Enfin, le travail interne effectué dans toute la structure est évalué tel que :

$$\begin{aligned}
W_{int}^{str}(t) &= \sum_e^{n_{ele}} W_{int}^e(t) \\
&= \delta \mathbf{d}(t)^{strT} \mathbf{F}_{int, B}^{str}(t) + \sum_e^{\bar{n}} \sum_f^{\bar{n}_f} \delta \bar{\mathbf{u}}_x(y, t)^T \mathbf{F}_{int, G}^f(y, t)
\end{aligned} \tag{6.17}$$

L'introduction de la dernière expression dans le principe des travaux virtuels donne :

$$\begin{aligned}
W_{int}^{str}(t) - W_{ext}^{str}(t) &= 0 \\
\delta \mathbf{d}(t)^{strT} (\mathbf{F}_{int, B}^{str}(t) - \mathbf{F}_{ext}^{str}(t)) + \sum_e^{\bar{n}} \sum_f^{\bar{n}_f} \delta \bar{\mathbf{u}}_x(y, t)^T \mathbf{F}_{int, G}^f(y, t) &= 0
\end{aligned} \tag{6.18}$$

L'équilibre de la structure doit être respecté pour tous les déplacements virtuels $\delta \mathbf{d}(t)^{str}$ ainsi que pour tout saut de déplacement virtuel $\delta \bar{\mathbf{u}}_x(y, t)$ au niveau des fibres. Cela permet de déduire le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{int, B}^{str}(t) - \mathbf{F}_{ext}^{str}(t) &= 0 \\
\forall e \in \{1, 2, \dots, \bar{n}\} \text{ et } \forall f \in \{1, 2, \dots, \bar{n}_f(e)\} : \mathbf{F}_{int, G}^f(y, t) &= 0
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Le développement de l'expression $\mathbf{F}_{int, G}^f(y, t)$ avec la décomposition habituelle de $\mathbf{G}_x(x) = \bar{\mathbf{G}}_v(x) + \bar{\bar{\mathbf{G}}}_v(x)$ donne :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{int, G}^f(t)(y, t) &= \int_{\Omega^f} \mathbf{G}_v(x)^T \sigma(x, y, t) d\Omega^f = \int_{\Omega^f} (\bar{\mathbf{G}}_v(x)^T + \bar{\bar{\mathbf{G}}}_v(x)^T) \sigma(x, y, t) d\Omega^f \\
&= \int_{\Omega^f} \bar{\mathbf{G}}_v(x)^T \sigma(x, y, t) d\Omega^f + \boldsymbol{\sigma}(x_d, y, t) = 0
\end{aligned}$$

avec

$$\int_{\Omega^f} \bar{\bar{\mathbf{G}}}_v(x)^T \sigma(x, y, t) d\Omega^f = \int_{\Omega^f} \boldsymbol{\delta}(x) \sigma(x, y, t) d\Omega^f = \boldsymbol{\sigma}(x_d, y, t)$$

Ce qui donne

$$\int_{\Omega^f} \bar{\mathbf{G}}_v(x)^T \sigma(x, y, t) d\Omega^f = -\boldsymbol{\sigma}(x_d, y, t) = -\mathbf{C}^f(y, t) \tag{6.20}$$

avec $\mathbf{C}^f(y, t)$ le vecteur des contraintes cohésives au niveau des discontinuités d'une même fibre tel que :

$$\mathbf{C}^f(y, t) = \begin{bmatrix} C^{f, (1)}(y, t) \\ C^{f, (2)}(y, t) \end{bmatrix} \tag{6.21}$$

Il reste maintenant à déterminer les fonctions $\overline{G}_v(x)$. De la même manière que pour le modèle du chapitre 5, les fonctions $\overline{G}_v^{(d)}(x)$ obtenues sont fonctions de la position x_d de la discontinuité telles que :

$$\overline{G}_v^{(d)}(x, x_d) = \left[\frac{6}{L^2} - \frac{12}{L^3} x_d \right] x + \frac{6}{L^2} x_d - \frac{4}{L} \quad (6.22)$$

Cette expression est déterminée par une formule générale en fonction de la position x_d . En effet, on suppose une fonction linéaire pour $\overline{G}_v^{(d)}(x)$ de la forme $ax + b$ et une autre forme aussi linéaire pour la contrainte $\sigma(x) = \alpha x + \beta$. Ensuite, on cherche les coefficients a et b par une procédure d'identification de façon à assurer l'égalité $\int_{\Omega_f} \overline{G}_v^{(d)}(x)^T \sigma(x, y, t) d\Omega^f = -\sigma(x_d, y, t)$ au niveau des discontinuités en $x = x_d$. Pour le modèle développé ici, les discontinuités sont introduites au niveau des points d'intégration. Cela a déjà été traité dans la section 4.6.1.

6.4 Modèles de comportement

Les modèles continus - élastique, élasto-plastique ou d'endommagement - développés dans les chapitres 4 et 5 sont ici adoptés sans aucune modification. En revanche, quelques modifications doivent être faites concernant les modèles cohésifs, puisqu'ils sont désormais associés aux points d'intégration et non plus à la fibre toute entière.

La contrainte cohésive s'écrit de la façon suivante :

$$C^{f,(d)}(y, t) = - \int_{\Omega_f} \overline{G}_v^{(pg)}(x)^T \sigma(x, y, t) d\Omega^f = \sigma(x_d, y, t) \quad (6.23)$$

Or puisque les discontinuités (d) se produisent aux points d'intégration (pg) , la contrainte cohésive $C^{f,(pg)}(y, t)$ est égale à la contrainte continue $\sigma(x_{pg}, y, t)$.

$$C^{f,(pg)}(y, t) = \sigma(x_{pg}, y, t) \quad (6.24)$$

Par ailleurs, le critère d'activation de la discontinuité est défini par la surface de rupture $\overline{\overline{\phi}}^{(pg)}(t)$ tel que :

$$\overline{\overline{\phi}}^{(pg)}(t) = |\sigma(x_{pg}, y, t)| - (\sigma_u - \overline{\overline{q}}(x_{pg}, t)) \quad (6.25)$$

avec σ_u la contrainte ultime qui peut être différente en compression et en traction (voir équation (5.48)), et $\overline{\overline{q}}(x_{pg}, t)$ la force thermodynamique associée au mécanisme d'adoucissement du modèle cohésif au niveau de la discontinuité introduite en x_{pg} . Cette force est définie par :

$$\overline{\overline{q}}(x_{pg}, t) = -S\overline{\overline{\xi}}(x_{pg}, t) \quad (6.26)$$

où S est le module d'adoucissement défini négatif, et $\overline{\overline{q}}(x_{pg}, t)$ la variable interne du modèle cohésif associé au point x_{pg} .

Le comportement de la discontinuité en x_{pg} est donc géré par un modèle cohésif semblable à celui de la figure (5.6) qui prend la forme suivante :

$$C^{f,(pg)}(y, t) = \sigma(x_{pg}, y, t) = S\overline{\overline{u}}^{(pg)}(t) + \sigma_u \quad (6.27)$$

L'énergie libre associée au modèle cohésif prend la même forme que dans l'équation (5.52). L'énergie libre totale d'une fibre ayant plusieurs discontinuités s'écrit désormais de la manière suivante :

$$\Psi(t) = \overline{\overline{\Psi}}(t) + \boldsymbol{\delta}_x \overline{\overline{\Psi}}(t) \quad (6.28)$$

avec $\boldsymbol{\delta}_x$ la matrice des fonctions Dirac définie par l'équation (6.9) et $\overline{\overline{\Psi}}(t)$ le vecteur des énergies libres associées aux discontinuités défini par :

$$\overline{\overline{\Psi}}(t) = \begin{bmatrix} \overline{\overline{\Psi}}^{(1)}(t) \\ \overline{\overline{\Psi}}^{(2)}(t) \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

où $\bar{\bar{\Psi}}^{(1)}$ et $\bar{\bar{\Psi}}^{(2)}$ sont les énergies libres associées aux deux discontinuités. Les expressions des énergies sont fonction du temps ainsi que des autres variables internes comme dans le modèle de comportement utilisé (voir équation (5.52)).

En ce qui concerne la dissipation au niveau de la discontinuité, les variables scalaires correspondantes à la discontinuité des équations (4.91) et (5.54) sont remplacées par des variables vectorielles pour prendre en compte les différentes discontinuités introduites dans la fibre. En utilisant l'équation de la déformation (6.8) ainsi que l'expression de l'énergie libre totale (6.28), la dissipation totale pour le modèle d'une fibre à plusieurs discontinuités prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} D^{tot}(y, t) &= \int_{\Omega} \left[\sigma(x, y, t) \dot{\varepsilon}_x - \dot{\bar{\Psi}} \right] d\Omega \\ &= \underbrace{\int_{\Omega} \left[\sigma(x, y, t) \dot{\varepsilon}_x - \dot{\bar{\Psi}} \right] d\Omega}_{\bar{D}} + \underbrace{\int_{\Omega} \left[\sigma(x, y, t) \bar{\varepsilon}_x - \sum_{d=1}^{npg} \dot{\bar{\bar{\Psi}}}^{(d)} \right] d\Omega}_{\bar{\bar{D}}} \end{aligned} \quad (6.30)$$

Par ailleurs, la dissipation aux discontinuités s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{D}} &= \int_{\Omega} \left[\sigma(x, y, t) \bar{\varepsilon}_x - \sum_{d=1}^{npg} \dot{\bar{\bar{\Psi}}}^{(d)} \right] d\Omega \\ &= \mathbf{C}^f(y, t)^T \bar{\mathbf{u}}_x(y, t) - \delta_x \dot{\bar{\bar{\Psi}}} \\ &= C^{f,(1)}(y, t) \bar{u}_x^{(1)}(y, t) + C^{f,(2)}(y, t) \bar{u}_x^{(2)}(y, t) - \bar{\bar{\Psi}}^{(1)}(t) \delta_x^{(1)}(x) - \bar{\bar{\Psi}}^{(2)}(t) \delta_x^{(2)}(x) \end{aligned} \quad (6.31)$$

Enfin, concernant les équations d'évolution des variables internes, le lecteur peut se reporter à la section 4.7.2 pour le modèle cohésif associé au modèle élasto-plastique ou bien à la section 5.4.1.2 pour le modèle cohésif associé au modèle d'endommagement.

6.5 Implémentation numérique

6.5.1 Linéarisation des équations d'équilibre

De façon similaire que dans la section 5.5, la linéarisation des équations d'équilibres (6.19) permet de définir le système suivant :

$$\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BB} & \mathbf{K}_{BG_1} & \mathbf{K}_{BG_2} & \dots & \mathbf{K}_{BG_{\bar{n}_f(e)}} \\ \mathbf{K}_{G_1B} & \mathbf{K}_{G_1G_1} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{K}_{G_2B} & 0 & \mathbf{K}_{G_2G_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{K}_{G_{\bar{n}_f(e)}B} & 0 & 0 & \dots & \mathbf{K}_{G_{\bar{n}_f(e)}G_{\bar{n}_f(e)}} \end{bmatrix}_{t+1} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_e \\ \Delta \bar{\mathbf{u}}_x(y_1^e, t) \\ \Delta \bar{\mathbf{u}}_x(y_2^e, t) \\ \vdots \\ \Delta \bar{\mathbf{u}}_x(y_{\bar{n}_f(e)}^e, t) \end{bmatrix}_{t+1} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{F}_{int,B}^e - \mathbf{F}_{ext}^e) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{t+1} \right\} \quad (6.32)$$

avec

$$\mathbf{K}_{BB}(t) = \sum_{f=1}^{n_f} \mathbf{K}_{BB_f}(y, t) \quad (6.33)$$

$$\mathbf{K}_{BB_f}(y, t) = \int_{\Omega^f} \mathbf{B}^f(x, y)^T \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x}(x, y, t) \mathbf{B}^f(x, y) d\Omega^f \quad (6.34)$$

$$\mathbf{K}_{BG_f}(y, t) = \int_{\Omega^f} \mathbf{B}^f(x, y)^T \frac{\partial \sigma_x}{\partial \tilde{\varepsilon}_x}(x, y, t) \overline{\mathbf{G}}_r(x) d\Omega^f \quad (6.35)$$

$$\mathbf{K}_{G_fB}(y, t) = \int_{\Omega^f} \overline{\mathbf{G}}_v(x)^T \frac{\partial \sigma_x}{\partial \tilde{\varepsilon}_x}(x, y, t) \mathbf{B}^f(x, y) d\Omega^f \quad (6.36)$$

$$\mathbf{K}_{G_fG_f}(y, t) = \int_{\Omega^f} \overline{\mathbf{G}}_v(x)^T \frac{\partial \sigma_x}{\partial \tilde{\varepsilon}_x}(x, y, t) \overline{\mathbf{G}}_r(x) d\Omega^f + \frac{\partial \mathbf{C}^f}{\partial \overline{\mathbf{u}}_x} A^f \quad (6.37)$$

où A^f est la surface de la fibre. $\overline{\mathbf{G}}_v(x)$ est le vecteur des fonctions d'enrichissement associées aux variables virtuelles défini par :

$$\overline{\mathbf{G}}_v(x)^T = \begin{bmatrix} \overline{G}_v^{(1)}(x) \\ \overline{G}_v^{(2)}(x) \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

$\overline{\mathbf{G}}_r(x)$ est le vecteur des fonctions d'enrichissement associées aux variables réelles défini par :

$$\overline{\mathbf{G}}_r(x) = \begin{bmatrix} \overline{G}_r^{(1)}(x) & \overline{G}_r^{(2)}(x) \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

Enfin, \mathbf{C}^f est la matrice des contrainte cohésives telle que :

$$\frac{\partial \mathbf{C}^f}{\partial \overline{\mathbf{u}}_x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C^{(1),f}}{\partial \overline{u}_x^{(1)}} & \frac{\partial C^{(1),f}}{\partial \overline{u}_x^{(2)}} \\ \frac{\partial C^{(2),f}}{\partial \overline{u}_x^{(1)}} & \frac{\partial C^{(2),f}}{\partial \overline{u}_x^{(2)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^{(1)} & 0 \\ 0 & S^{(2)} \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

où $S^{(d)}$ est le module d'adoucissement pour les modèles cohésifs définis aux points d'intégration. La différence entre le système (6.32) obtenu pour le nouveau modèle par rapport au système (5.77) proposé dans le chapitre 5 est que les variables $\mathbf{K}_{G_fG_f}(y, t)$ et $\Delta \overline{\mathbf{u}}_x(y_f^e, t)$ prennent respectivement une forme matricielle et vectorielle lorsque les deux discontinuités d'une même fibre sont activées en même temps.

La présence de deux discontinuités par fibre implique également des changements dans l'intégration numérique des modèles cohésifs. Dans la suite, les différents chemins d'intégration correspondants respectivement aux modèles continus élastique, élasto-plastique et d'endommagement sont abordés.

6.5.2 Intégration du modèle cohésif associé à un modèle continu élasto-plastique

Tout d'abord une prédiction élastique est effectué. Les contraintes cohésives $C_{t+1}^{f,(1),trial}$ et $C_{t+1}^{f,(2),trial}$ s'écrivent de la manière suivante :

$$C_{t+1}^{f,(1),trial} = - \int_{\Omega^f} \overline{G}_v^{(1)}(x) \sigma_{t+1}^{f,trial}(x) d\Omega^f = \sigma_{t+1}^{f,trial}(x_1) \quad (6.41)$$

$$C_{t+1}^{f,(2),trial} = - \int_{\Omega^f} \overline{G}_v^{(2)}(x) \sigma_{t+1}^{f,trial}(x) d\Omega^f = \sigma_{t+1}^{f,trial}(x_2) \quad (6.42)$$

Rappel : Les fonctions d'enrichissement $G_v^{(d)}(x)$ sont déterminées de manière à ce que la contrainte cohésive $C^{f,(d)}$ soit égale à la contrainte $\sigma(x_d)$ issue du modèle continu au niveau de la discontinuité, voir équation (6.22).

Comme dans l'équation (4.133), le prédicteur élastique de la contrainte continue $\sigma_{t+1}^{f,trial}(x_{pg})$ pour un comportement élasto-plastique s'écrit de la manière suivante :

$$\sigma_{t+1}^{f,trial}(x_{pg}) = E \varepsilon_{t+1}^{f,trial}(x_{pg}) = E \left[\mathbf{B}^f(x_{pg}, y) \mathbf{d}_{e,t+1} + \overline{\mathbf{G}}_r(x_{pg}) \overline{\mathbf{u}}_t - \overline{\varepsilon}_t^p \right] \quad (6.43)$$

Le développement de la dernière expression pour les deux points d'intégration donne (sachant que la fibre est constituée d'un seul matériau donc le module de Young est le même partout ($E(x) = E$)) :

$$\begin{aligned}
C_{t+1}^{f,(1),trial} &= \sigma_{t+1}^{trial}(x_1) \\
&= E(\varepsilon_{t+1}^{trial}(x_1) - \varepsilon_t^p(x_1)) \\
&= E(\mathbf{B}^f(x_1, y) \mathbf{d}_{e,t+1} + \overline{G}_r^{(1)}(x_1) \overline{u}_{t+1}^{trial}(x_1) + \overline{G}_r^{(2)}(x_1) \overline{u}_{t+1}^{trial}(x_2) - \varepsilon_t^p(x_1)) \\
&= E(\mathbf{B}^f(x_1, y) \mathbf{d}_{e,t+1} + \overline{G}_r^{(1)}(x_1) \overline{u}_t(x_1) + \overline{G}_r^{(2)}(x_1) \overline{u}_t(x_2) - \varepsilon_t^p(x_1))
\end{aligned} \tag{6.44}$$

$$\begin{aligned}
C_{t+1}^{f,(2),trial} &= \sigma_{t+1}^{trial}(x_2) \\
&= E(\varepsilon_{t+1}^{trial}(x_2) - \varepsilon_t^p(x_2)) \\
&= E(\mathbf{B}^f(x_2, y) \mathbf{d}_{e,t+1} + \overline{G}_r^{(1)}(x_2) \overline{u}_{t+1}^{trial}(x_1) + \overline{G}_r^{(2)}(x_2) \overline{u}_{t+1}^{trial}(x_2) - \varepsilon_t^p(x_2)) \\
&= E(\mathbf{B}^f(x_2, y) \mathbf{d}_{e,t+1} + \overline{G}_r^{(1)}(x_2) \overline{u}_t(x_1) + \overline{G}_r^{(2)}(x_2) \overline{u}_t(x_2) - \varepsilon_t^p(x_2))
\end{aligned} \tag{6.45}$$

Ces deux expressions des contraintes doivent ensuite être introduites dans les deux surfaces de rupture $\overline{\phi}_{t+1}^{f,(1),trial}$ et $\overline{\phi}_{t+1}^{f,(2),trial}$ du vecteur $\overline{\phi}_{t+1}^{f,trial}$ afin de vérifier si l'une ou les deux discontinuités sont activées. Cela donne :

$$\begin{aligned}
\overline{\phi}_{t+1}^{f,trial} &= |\mathbf{C}_{t+1}^{f,trial}| - \left(\sigma_u - \overline{\mathbf{q}}_{t+1}^{f,trial} \right) \\
\begin{bmatrix} \overline{\phi}_{t+1}^{f,(1),trial} \\ \overline{\phi}_{t+1}^{f,(2),trial} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} |\mathbf{C}_{t+1}^{f,(1),trial}| - \left(\sigma_u - \overline{\mathbf{q}}_{t+1}^{f,(2),trial} \right) \\ |\mathbf{C}_{t+1}^{f,(2),trial}| - \left(\sigma_u - \overline{\mathbf{q}}_{t+1}^{f,(1),trial} \right) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.46}$$

Selon les valeurs obtenues pour les surfaces de rupture, plusieurs situations peuvent avoir lieu, (voir tableau (6.2)).

Cas 1	$\overline{\phi}_{t+1}^{f,(1),trial} < 0$ et $\overline{\phi}_{t+1}^{f,(2),trial} < 0$
Cas 2	$\overline{\phi}_{t+1}^{f,(1),trial} > 0$ et $\overline{\phi}_{t+1}^{f,(2),trial} < 0$
Cas 3	$\overline{\phi}_{t+1}^{f,(1),trial} < 0$ et $\overline{\phi}_{t+1}^{f,(2),trial} > 0$
Cas 4	$\overline{\phi}_{t+1}^{f,(1),trial} > 0$ et $\overline{\phi}_{t+1}^{f,(2),trial} > 0$

TABLE 6.2 – Différents cas pour les deux surfaces de rupture

Pour le cas 1, les prédictions élastiques sont correctes et donc aucune discontinuité n'est introduite dans la fibre. Pour les cas 2 et 3, une seule discontinuité doit être introduite dans la fibre. Par conséquent, les variables internes associées à cette discontinuité doivent être évaluées afin de recalculer les nouveaux états de déformations et de contraintes aux points d'intégration en prenant en compte cette fois la valeur de la discontinuité active. Enfin, pour le cas 4, les deux discontinuités sont introduites dans la fibre et donc toutes leurs variables internes doivent être calculées. Par la suite, l'implémentation numérique des modèles cohésifs et de leurs évolutions lorsque les discontinuités sont actives sont détaillées.

6.5.2.1 Deux discontinuités actives par fibre

Les deux discontinuités sont actives aux points d'intégration de la fibre. Chaque surface de rupture a un multiplicateur de Lagrange indépendant, $\overline{\gamma}(x_1)$ pour x_1 et $\overline{\gamma}(x_2)$ pour x_2 . Les évolutions des deux modèles cohésifs sont indépendantes. Par conséquent, et de manière similaire aux équations (4.136),

l'utilisation du chemin d'Euler arrière permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\bar{\bar{u}}_{t+1}(x_1) &= \bar{\bar{u}}_t(x_1) + \Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_1)\text{sign}(C_{t+1}^{f,(1),trial}) \\ \bar{\bar{\xi}}_{t+1}(x_1) &= \bar{\bar{\xi}}_t(x_1) + \Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_1)\end{aligned}\quad (6.47)$$

et

$$\begin{aligned}\bar{\bar{u}}_{t+1}(x_2) &= \bar{\bar{u}}_t(x_2) + \Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_2)\text{sign}(C_{t+1}^{f,(2),trial}) \\ \bar{\bar{\xi}}_{t+1}(x_2) &= \bar{\bar{\xi}}_t(x_2) + \Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_2)\end{aligned}\quad (6.48)$$

Afin de simplifier l'écriture, on utilise dans la suite $s(x_1) = \text{sign}(C_{t+1}^{f,(1),trial})$ et $s(x_2) = \text{sign}(C_{t+1}^{f,(2),trial})$. Par conséquent, les nouvelles valeurs des contraintes aux points d'intégration sont données par :

$$\begin{aligned}C_{t+1}^{f,(1)} &= \sigma_{t+1}(x_1) \\ &= E(\varepsilon_{t+1}(x_1) - \varepsilon_t^p(x_1)) \\ &= E(\mathbf{B}^f(x_1, y)\mathbf{d}_{e,t+1} + \bar{G}_r^{(1)}(x_1)\bar{\bar{u}}_{t+1}(x_1) + \bar{G}_r^{(2)}(x_1)\bar{\bar{u}}_{t+1}(x_2) - \varepsilon_t^p(x_1)) \\ &= \sigma_{t+1}^{trial}(x_1) + E\bar{G}_r^{(1)}(x_1)\Delta\bar{\bar{u}}(x_1) + E\bar{G}_r^{(2)}(x_1)\Delta\bar{\bar{u}}(x_2) \\ &= \sigma_{t+1}^{trial}(x_1) + E\bar{G}_r^{(1)}(x_1)\Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_1)s(x_1) + E\bar{G}_r^{(2)}(x_1)\Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_2)s(x_2)\end{aligned}\quad (6.49)$$

$$\begin{aligned}C_{t+1}^{f,(2)} &= \sigma_{t+1}(x_2) \\ &= E(\varepsilon_{t+1}(x_2) - \varepsilon_t^p(x_2)) \\ &= E(\mathbf{B}^f(x_2, y)\mathbf{d}_{e,t+1} + \bar{G}_r^{(1)}(x_2)\bar{\bar{u}}_{t+1}(x_1) + \bar{G}_r^{(2)}(x_2)\bar{\bar{u}}_{t+1}(x_2) - \varepsilon_t^p(x_2)) \\ &= \sigma_{t+1}^{trial}(x_2) + E\bar{G}_r^{(1)}(x_2)\Delta\bar{\bar{u}}(x_1) + E\bar{G}_r^{(2)}(x_2)\Delta\bar{\bar{u}}(x_2) \\ &= \sigma_{t+1}^{trial}(x_2) + E\bar{G}_r^{(1)}(x_2)\Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_1)s(x_1) + E\bar{G}_r^{(2)}(x_2)\Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_2)s(x_2)\end{aligned}\quad (6.50)$$

Ces deux dernières expressions peuvent être reformulées sous forme matricielle telle que :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{t+1}(x_1) \\ \sigma_{t+1}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{t+1}^{trial}(x_1) \\ \sigma_{t+1}^{trial}(x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E\bar{G}_r^{(1)}(x_1)s(x_1) & E\bar{G}_r^{(2)}(x_1)s(x_2) \\ E\bar{G}_r^{(1)}(x_2)s(x_1) & E\bar{G}_r^{(2)}(x_2)s(x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_1) \\ \Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_2) \end{bmatrix}\quad (6.51)$$

Le problème revient donc à déterminer les valeurs des multiplicateurs de Lagrange $\Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_1)$ et $\Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_2)$. Pour cela, la dernière équation matricielle des contraintes (6.51) doit être introduite dans les surfaces de ruptures qui doivent être nulles. On obtient ainsi :

$$\begin{bmatrix} \bar{\bar{\phi}}_{t+1}(x_1) \\ \bar{\bar{\phi}}_{t+1}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\sigma_{t+1}(x_1)| \\ |\sigma_{t+1}(x_2)| \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_u - \bar{\bar{q}}_{t+1}(x_1) \\ \sigma_u - \bar{\bar{q}}_{t+1}(x_2) \end{bmatrix}\quad (6.52)$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma_{t+1}^{trial}(x_1)s(x_1) \\ \sigma_{t+1}^{trial}(x_2)s(x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E\bar{G}_r^{(1)}(x_1) & E\bar{G}_r^{(2)}(x_1)s(x_2)s(x_1) \\ E\bar{G}_r^{(1)}(x_2)s(x_1)s(x_2) & E\bar{G}_r^{(2)}(x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_1) \\ \Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_u - \bar{\bar{q}}_t(x_1) \\ \sigma_u - \bar{\bar{q}}_t(x_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S\Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_1) \\ S\Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_2) \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma_{t+1}^{trial}(x_1)s(x_1) \\ \sigma_{t+1}^{trial}(x_2)s(x_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_u - \bar{\bar{q}}_t(x_1) \\ \sigma_u - \bar{\bar{q}}_t(x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E\bar{G}_r^{(1)}(x_1) - S & E\bar{G}_r^{(2)}(x_1)s(x_2)s(x_1) \\ E\bar{G}_r^{(1)}(x_2)s(x_1)s(x_2) & E\bar{G}_r^{(2)}(x_2) - S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_1) \\ \Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_2) \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{\bar{\phi}}_{t+1}^{trial}(x_1) \\ \bar{\bar{\phi}}_{t+1}^{trial}(x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E\bar{G}_r^{(1)}(x_1) - S & E\bar{G}_r^{(2)}(x_1)s(x_2)s(x_1) \\ E\bar{G}_r^{(1)}(x_2)s(x_1)s(x_2) & E\bar{G}_r^{(2)}(x_2) - S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_1) \\ \Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_2) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Par conséquent, les multiplicateurs de Lagrange sont déterminés de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} \Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_1) \\ \Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_2) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} E\bar{G}_r^{(1)}(x_1) - S & E\bar{G}_r^{(2)}(x_1)s(x_2)s(x_1) \\ E\bar{G}_r^{(1)}(x_2)s(x_1)s(x_2) & E\bar{G}_r^{(2)}(x_2) - S \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\bar{\phi}}_{t+1}^{trial}(x_1) \\ \bar{\bar{\phi}}_{t+1}^{trial}(x_2) \end{bmatrix}\quad (6.53)$$

D'après l'équation (6.53), le calcul des multiplicateurs de Lagrange est interdépendant. Ceci est important à noter pour la programmation. La dernière étape consiste à faire évoluer les variables internes selon les équations (6.47) et (6.48).

6.5.2.2 Rupture complète au niveau des deux discontinuités

Pour le cas où les deux discontinuités s'ouvrent complètement, les deux surfaces de rupture deviennent nulles ($\sigma_u - \bar{q}_{t+1}(x_{pg}) = 0$) et les discontinuités n'assurent plus le transfert des efforts. Par conséquent, les contraintes cohésives prennent des valeurs nulles telles que :

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{t+1}^{trial}(x_1) \\ \sigma_{t+1}^{trial}(x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E\bar{G}_r^{(1)}(x_1)s(x_1) & E\bar{G}_r^{(2)}(x_1)s(x_2) \\ E\bar{G}_r^{(1)}(x_2)s(x_1) & E\bar{G}_r^{(2)}(x_2)s(x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\bar{\gamma}(x_1) \\ \Delta\bar{\gamma}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.54)$$

Par conséquent :

$$\begin{bmatrix} \Delta\bar{\gamma}(x_1) \\ \Delta\bar{\gamma}(x_2) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} E\bar{G}_r^{(1)}(x_1)s(x_1) & E\bar{G}_r^{(2)}(x_1)s(x_2) \\ E\bar{G}_r^{(1)}(x_2)s(x_1) & E\bar{G}_r^{(2)}(x_2)s(x_2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_{t+1}^{trial}(x_1) \\ \sigma_{t+1}^{trial}(x_2) \end{bmatrix} \quad (6.55)$$

6.5.2.3 Rupture complète au niveau d'une seule discontinuité

Il peut arriver qu'une des deux discontinuités cesse de transférer les efforts tandis que l'autre discontinuité reste active. Dans ce cas, une seule contrainte cohésive s'annule alors que l'autre discontinuité poursuit son propre processus d'ouverture. Les systèmes d'équations trouvées dans la section précédente sont alors modifiés. Deux équations sont à tailler dans ce cas, la première issue de l'état de la discontinuité complètement ouverte ($\sigma_{t+1}(x_1) = 0$) et la deuxième de la surface de rupture $\bar{\phi}_{t+1}(x_2) = 0$ associée à l'autre discontinuité qui est toujours en fonctionnement. Cela donne le système suivant :

$$\begin{cases} \sigma_{t+1}(x_1) = 0 \\ \bar{\phi}_{t+1}(x_2) = 0 \end{cases} \quad (6.56)$$

La première équation de ce système est la première équation du système (6.54), alors que la deuxième équation est celle obtenue par le système (6.52). La combinaison de ces deux équations produit le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\phi}_{t+1}^{trial}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{t+1}^{trial}(x_1) \\ \bar{\phi}_{t+1}^{trial}(x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E\bar{G}_r^{(1)}(x_1)s(x_1) & E\bar{G}_r^{(2)}(x_1)s(x_2) \\ E\bar{G}_r^{(1)}(x_2)s(x_1)s(x_2) & E\bar{G}_r^{(2)}(x_2) - S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\bar{\gamma}(x_1) \\ \Delta\bar{\gamma}(x_2) \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

Par conséquent :

$$\begin{bmatrix} \Delta\bar{\gamma}(x_1) \\ \Delta\bar{\gamma}(x_2) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} E\bar{G}_r^{(1)}(x_1)s(x_1) & E\bar{G}_r^{(2)}(x_1)s(x_2) \\ E\bar{G}_r^{(1)}(x_2)s(x_1)s(x_2) & E\bar{G}_r^{(2)}(x_2) - S \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_{t+1}^{trial}(x_1) \\ \bar{\phi}_{t+1}^{trial}(x_2) \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

Les étapes d'intégration numérique de ce modèle sont récapitulées dans A.7.

6.5.3 Intégration du modèle cohésif associé à un modèle continu d'endommagement

Dans cette section, la procédure de l'intégration des modèles cohésifs associés aux modèles d'endommagement pour la fibre à plusieurs discontinuités est détaillée. L'évolution des variables internes correspondantes à chaque discontinuité est indépendante. Néanmoins, le calcul des déformations et de contraintes ainsi que le calcul des multiplicateurs de Lagrange correspondants sont couplés. Par conséquent, les équations illustrant l'évolution des variables cohésives (voir section 5.5.2.2 du chapitre 5) sont

ici utilisées pour chaque discontinuité. Les mêmes variables et notations avec celles du chapitre 5 sont donc utilisées.

La particularité de modèle d'endommagement réside dans le fait que les valeurs tests des sauts de déplacement ($\bar{u}_{t+1}^{trial}(x_1)$ et $\bar{u}_{t+1}^{trial}(x_2)$) aux discontinuités à $t + 1$ ne valent pas celles ($\bar{u}_t(x_1)$ et $\bar{u}_t(x_2)$) du pas de temps précédent. En effet,

$$\begin{aligned}\bar{u}_{t+1}^{trial}(x_1) &= \bar{D}_{t+1}^{trial}(x_1)C_{t+1}^{f,(1),trial} = \bar{D}_t(x_1)\sigma_{t+1}^{trial}(x_1) \neq \bar{D}_t(x_1)\sigma_t(x_1) = \bar{u}_t(x_1) \\ \bar{u}_{t+1}^{trial}(x_2) &= \bar{D}_{t+1}^{trial}(x_2)C_{t+1}^{f,(2),trial} = \bar{D}_t(x_2)\sigma_{t+1}^{trial}(x_2) \neq \bar{D}_t(x_2)\sigma_t(x_2) = \bar{u}_t(x_2)\end{aligned}\quad (6.59)$$

Cette remarque est importante pour une bonne implémentation numérique du modèle. La première étape de calcul est de faire une prédiction élastique des contraintes de la façon suivante :

$$\begin{aligned}C_{t+1}^{f,(1),trial} &= \sigma_{t+1}^{trial}(x_1) \\ &= \bar{D}_t^{-1}(x_1)\varepsilon_{t+1}^{trial}(x_1) \\ &= \bar{D}_t^{-1}(x_1) \left(\mathbf{B}^f(x_1, y)\mathbf{d}_{e,t+1} + \bar{G}_r^{(1)}(x_1)\bar{u}_{t+1}^{trial}(x_1) + \bar{G}_r^{(2)}(x_1)\bar{u}_{t+1}^{trial}(x_2) \right) \\ &= \bar{D}_t^{-1}(x_1) \left(\mathbf{B}^f(x_1, y)\mathbf{d}_{e,t+1} + \bar{G}_r^{(1)}(x_1)\bar{D}_t(x_1)\sigma_{t+1}^{trial}(x_1) + \bar{G}_r^{(2)}(x_1)\bar{D}_t(x_2)\sigma_{t+1}^{trial}(x_2) \right)\end{aligned}$$

Cette équation peut être reformulée de la façon suivante :

$$\left(\bar{D}_t^{-1}(x_1)\bar{G}_r^{(1)}(x_1)\bar{D}_t(x_1) - 1 \right) \sigma_{t+1}^{trial}(x_1) + \left(\bar{D}_t^{-1}(x_1)\bar{G}_r^{(2)}(x_1)\bar{D}_t(x_2) \right) \sigma_{t+1}^{trial}(x_2) = -\bar{D}_t^{-1}(x_1)\mathbf{B}^f(x_1, y)\mathbf{d}_{e,t+1} \quad (6.60)$$

La même procédure est alors appliquée pour l'autre point d'intégration pour obtenir :

$$\left(\bar{D}_t^{-1}(x_2)\bar{G}_r^{(1)}(x_2)\bar{D}_t(x_1) \right) \sigma_{t+1}^{trial}(x_1) + \left(\bar{D}_t^{-1}(x_2)\bar{G}_r^{(2)}(x_2)\bar{D}_t(x_2) - 1 \right) \sigma_{t+1}^{trial}(x_2) = -\bar{D}_t^{-1}(x_2)\mathbf{B}^f(x_2, y)\mathbf{d}_{e,t+1} \quad (6.61)$$

Les deux dernières équations peuvent être combinées dans un seul système :

$$\begin{bmatrix} \bar{D}_t^{-1}(x_1)\bar{G}_r^{(1)}(x_1)\bar{D}_t(x_1) - 1 & \bar{D}_t^{-1}(x_1)\bar{G}_r^{(2)}(x_1)\bar{D}_t(x_2) \\ \bar{D}_t^{-1}(x_2)\bar{G}_r^{(1)}(x_2)\bar{D}_t(x_1) & \bar{D}_t^{-1}(x_2)\bar{G}_r^{(2)}(x_2)\bar{D}_t(x_2) - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{t+1}^{trial}(x_1) \\ \sigma_{t+1}^{trial}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{D}_t^{-1}(x_1)\mathbf{B}^f(x_1, y)\mathbf{d}_{e,t+1} \\ -\bar{D}_t^{-1}(x_2)\mathbf{B}^f(x_2, y)\mathbf{d}_{e,t+1} \end{bmatrix} \quad (6.62)$$

Ainsi, les valeurs de prédictions élastiques sont déterminées par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{t+1}^{trial}(x_1) \\ \sigma_{t+1}^{trial}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}_t^{-1}(x_1)\bar{G}_r^{(1)}(x_1)\bar{D}_t(x_1) - 1 & \bar{D}_t^{-1}(x_1)\bar{G}_r^{(2)}(x_1)\bar{D}_t(x_2) \\ \bar{D}_t^{-1}(x_2)\bar{G}_r^{(1)}(x_2)\bar{D}_t(x_1) & \bar{D}_t^{-1}(x_2)\bar{G}_r^{(2)}(x_2)\bar{D}_t(x_2) - 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\bar{D}_t^{-1}(x_1)\mathbf{B}^f(x_1, y)\mathbf{d}_{e,t+1} \\ -\bar{D}_t^{-1}(x_2)\mathbf{B}^f(x_2, y)\mathbf{d}_{e,t+1} \end{bmatrix} \quad (6.63)$$

Ce système d'équations montre que les prédictions élastiques des états de contraintes aux deux points d'intégration sont couplés (dépendent des états des deux discontinuités).

L'étape suivante consiste à introduire les valeurs calculées des contraintes dans les expressions des surfaces de rupture $\bar{\phi}_{t+1}^{trial}(x_1)$ et $\bar{\phi}_{t+1}^{trial}(x_2)$:

$$\begin{bmatrix} \bar{\phi}_{t+1}^{trial}(x_1) \\ \bar{\phi}_{t+1}^{trial}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\sigma_{t+1}^{trial}(x_1)| \\ |\sigma_{t+1}^{trial}(x_2)| \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_u - \bar{q}_t(x_1) \\ \sigma_u - \bar{q}_t(x_2) \end{bmatrix}. \quad (6.64)$$

Le vecteur des contraintes trouvées ci-dessus (6.63) est ensuite introduit dans la dernière expression

(6.64) :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_{t+1}^{trial}(x_1) \\ \bar{\phi}_{t+1}^{trial}(x_2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{D}_t^{-1}(x_1)\bar{G}_r^{(1)}(x_1)\bar{\bar{D}}_t(x_1) - 1 & \bar{D}_t^{-1}(x_1)\bar{G}_r^{(2)}(x_1)\bar{\bar{D}}_t(x_2)s(x_1)s(x_2) \\ \bar{D}_t^{-1}(x_2)\bar{G}_r^{(1)}(x_2)\bar{\bar{D}}_t(x_1)s(x_1)s(x_2) & \bar{D}_t^{-1}(x_2)\bar{G}_r^{(2)}(x_2)\bar{\bar{D}}_t(x_2) - 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} -\bar{D}_t^{-1}(x_1)\mathbf{B}^f(x_1, y)\mathbf{d}_{e,t+1}s(x_1) \\ -\bar{D}_t^{-1}(x_2)\mathbf{B}^f(x_2, y)\mathbf{d}_{e,t+1}s(x_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_t(x_1) \\ \sigma_t(x_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.65)$$

La même situation que celle de la section 6.5.2 est retrouvée avec les cas du tableau (6.2) explicités ci dessous.

6.5.3.1 Deux discontinuités actives par fibre

Pour ce traité, les deux surfaces de rupture ($\bar{\phi}_{t+1}^{trial}(x_1)$ et $\bar{\phi}_{t+1}^{trial}(x_2)$) sont positives. Les variables internes associées aux modèles continus d'endommagement sont ainsi gelées. Les variables internes associées aux modèles cohésifs doivent être calculées. Les expressions des contraintes aux points d'intégration à $t + 1$ s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_{t+1}(x_1) &= \bar{D}_t^{-1}(x_1)\varepsilon_{t+1}(x_1) \\ &= \bar{D}_t^{-1}(x_1) \left(\mathbf{B}^f(x_1, y)\mathbf{d}_{e,t+1} + \bar{G}_r^{(1)}(x_1)\bar{\bar{u}}_{t+1}(x_1) + \bar{G}_r^{(2)}(x_1)\bar{\bar{u}}_{t+1}(x_2) \right) \\ &= \bar{D}_t^{-1}(x_1) \left(\mathbf{B}^f(x_1, y)\mathbf{d}_{e,t+1} + \bar{G}_r^{(1)}(x_1) \left[\bar{\bar{D}}_t(x_1)\sigma_t(x_1) + \Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_1) \right] s(x_1) \right. \\ &\quad \left. + \bar{G}_r^{(2)}(x_1) \left[\bar{\bar{D}}_t(x_2)\sigma_t(x_2) + \Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_2) \right] s(x_2) \right) \end{aligned} \quad (6.66)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{t+1}(x_2) &= \bar{D}_t^{-1}(x_2)\varepsilon_{t+1}(x_2) \\ &= \bar{D}_t^{-1}(x_2) \left(\mathbf{B}^f(x_2, y)\mathbf{d}_{e,t+1} + \bar{G}_r^{(1)}(x_2)\bar{\bar{u}}_{t+1}(x_1) + \bar{G}_r^{(2)}(x_2)\bar{\bar{u}}_{t+1}(x_2) \right) \\ &= \bar{D}_t^{-1}(x_2) \left(\mathbf{B}^f(x_2, y)\mathbf{d}_{e,t+1} + \bar{G}_r^{(1)}(x_2) \left[\bar{\bar{D}}_t(x_1)\sigma_t(x_1) + \Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_1) \right] s(x_1) \right. \\ &\quad \left. + \bar{G}_r^{(2)}(x_2) \left[\bar{\bar{D}}_t(x_2)\sigma_t(x_2) + \Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_2) \right] s(x_2) \right) \end{aligned} \quad (6.67)$$

Ces deux équations sont reformulées en un système tel que :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{t+1}(x_1) \\ \sigma_{t+1}(x_2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{D}_t^{-1}(x_1)\mathbf{B}^f(x_1, y)\mathbf{d}_{e,t+1} \\ \bar{D}_t^{-1}(x_2)\mathbf{B}^f(x_2, y)\mathbf{d}_{e,t+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{D}_t^{-1}(x_1)\bar{G}_r^{(1)}(x_1)\bar{\bar{D}}_t(x_1)s(x_1) & \bar{D}_t^{-1}(x_1)\bar{G}_r^{(2)}(x_1)\bar{\bar{D}}_t(x_2)s(x_2) \\ \bar{D}_t^{-1}(x_2)\bar{G}_r^{(1)}(x_2)\bar{\bar{D}}_t(x_1)s(x_1) & \bar{D}_t^{-1}(x_2)\bar{G}_r^{(2)}(x_2)\bar{\bar{D}}_t(x_2)s(x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_t(x_1) \\ \sigma_t(x_2) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} \bar{D}_t^{-1}(x_1)\bar{G}_r^{(1)}(x_1)s(x_1) & \bar{D}_t^{-1}(x_1)\bar{G}_r^{(2)}(x_1)s(x_2) \\ \bar{D}_t^{-1}(x_2)\bar{G}_r^{(1)}(x_2)s(x_1) & \bar{D}_t^{-1}(x_2)\bar{G}_r^{(2)}(x_2)s(x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_1) \\ \Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.68)$$

Afin de déterminer les multiplicateurs de Lagrange ($\Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_1)$ et $\Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_2)$), il faut introduire les expressions (6.68) dans les surfaces de rupture :

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{t+1}(x_1) &= 0 \\ \bar{\phi}_{t+1}(x_2) &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} |\sigma_{t+1}(x_1)| \\ |\sigma_{t+1}(x_2)| \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_u - \bar{q}_{t+1}(x_1) \\ \sigma_u - \bar{q}_{t+1}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.69)$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \bar{D}_t^{-1}(x_1)\mathbf{B}^f(x_1, y)\mathbf{d}_{e,t+1}s(x_1) \\ \bar{D}_t^{-1}(x_2)\mathbf{B}^f(x_2, y)\mathbf{d}_{e,t+1}s(x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{D}_t^{-1}(x_1)\bar{G}_r^{(1)}(x_1)\bar{\bar{D}}_t(x_1) & \bar{D}_t^{-1}(x_1)\bar{G}_r^{(2)}(x_1)\bar{\bar{D}}_t(x_2)s(x_2)s(x_1) \\ \bar{D}_t^{-1}(x_2)\bar{G}_r^{(1)}(x_2)\bar{\bar{D}}_t(x_1)s(x_1)s(x_2) & \bar{D}_t^{-1}(x_2)\bar{G}_r^{(2)}(x_2)\bar{\bar{D}}_t(x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_t(x_1) \\ \sigma_t(x_2) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \bar{D}_t^{-1}(x_1)\bar{G}_r^{(1)}(x_1) & \bar{D}_t^{-1}(x_1)\bar{G}_r^{(2)}(x_1)s(x_2)s(x_1) \\ \bar{D}_t^{-1}(x_2)\bar{G}_r^{(1)}(x_2)s(x_1)s(x_2) & \bar{D}_t^{-1}(x_2)\bar{G}_r^{(2)}(x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_1) \\ \Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_u - \bar{q}_t(x_1) \\ \sigma_u - \bar{q}_t(x_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S\Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_1) \\ S\Delta\bar{\bar{\gamma}}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}\sigma_u - \bar{\bar{q}}_t(x_1) &= \sigma_t(x_1) \\ \sigma_u - \bar{\bar{q}}_t(x_2) &= \sigma_t(x_2)\end{aligned}\tag{6.70}$$

l'utilisation de cette notation dans les équations développées des surfaces de rupture permet d'écrire :

$$\begin{aligned}& \begin{bmatrix} \bar{D}_t^{-1}(x_1) \mathbf{B}^f(x_1, y) \mathbf{d}_{e,t+1} s(x_1) \\ \bar{D}_t^{-1}(x_2) \mathbf{B}^f(x_2, y) \mathbf{d}_{e,t+1} s(x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{D}_t^{-1}(x_1) \bar{G}_r^{(1)}(x_1) \bar{\bar{D}}_t(x_1) - 1 & \bar{D}_t^{-1}(x_1) \bar{G}_r^{(2)}(x_1) \bar{\bar{D}}_t(x_2) s(x_2) s(x_1) \\ \bar{D}_t^{-1}(x_2) \bar{G}_r^{(1)}(x_2) \bar{\bar{D}}_t(x_1) s(x_1) s(x_2) & \bar{D}_t^{-1}(x_2) \bar{G}_r^{(2)}(x_2) \bar{\bar{D}}_t(x_2) - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_t(x_1) \\ \sigma_t(x_2) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \bar{D}_t^{-1}(x_1) \bar{G}_r^{(1)}(x_1) - S & \bar{D}_t^{-1}(x_1) \bar{G}_r^{(2)}(x_1) s(x_2) s(x_1) \\ \bar{D}_t^{-1}(x_2) \bar{G}_r^{(1)}(x_2) s(x_1) s(x_2) & \bar{D}_t^{-1}(x_2) \bar{G}_r^{(2)}(x_2) - S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{\bar{\gamma}}(x_1) \\ \Delta \bar{\bar{\gamma}}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Cette dernière équation est reformulée de la façon suivante :

$$\begin{aligned}& \begin{bmatrix} \bar{D}_t^{-1}(x_1) \bar{G}_r^{(1)}(x_1) \bar{\bar{D}}_t(x_1) - 1 & \bar{D}_t^{-1}(x_1) \bar{G}_r^{(2)}(x_1) \bar{\bar{D}}_t(x_2) s(x_2) s(x_1) \\ \bar{D}_t^{-1}(x_2) \bar{G}_r^{(1)}(x_2) \bar{\bar{D}}_t(x_1) s(x_1) s(x_2) & \bar{D}_t^{-1}(x_2) \bar{G}_r^{(2)}(x_2) \bar{\bar{D}}_t(x_2) - 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{D}_t^{-1}(x_1) \mathbf{B}^f(x_1, y) \mathbf{d}_{e,t+1} s(x_1) \\ \bar{D}_t^{-1}(x_2) \mathbf{B}^f(x_2, y) \mathbf{d}_{e,t+1} s(x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_t(x_1) \\ \sigma_t(x_2) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \bar{D}_t^{-1}(x_1) \bar{G}_r^{(1)}(x_1) \bar{\bar{D}}_t(x_1) - 1 & \bar{D}_t^{-1}(x_1) \bar{G}_r^{(2)}(x_1) \bar{\bar{D}}_t(x_2) s(x_2) s(x_1) \\ \bar{D}_t^{-1}(x_2) \bar{G}_r^{(1)}(x_2) \bar{\bar{D}}_t(x_1) s(x_1) s(x_2) & \bar{D}_t^{-1}(x_2) \bar{G}_r^{(2)}(x_2) \bar{\bar{D}}_t(x_2) - 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ & \begin{bmatrix} \bar{D}_t^{-1}(x_1) \bar{G}_r^{(1)}(x_1) - S & \bar{D}_t^{-1}(x_1) \bar{G}_r^{(2)}(x_1) s(x_2) s(x_1) \\ \bar{D}_t^{-1}(x_2) \bar{G}_r^{(1)}(x_2) s(x_1) s(x_2) & \bar{D}_t^{-1}(x_2) \bar{G}_r^{(2)}(x_2) - S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{\bar{\gamma}}(x_1) \\ \Delta \bar{\bar{\gamma}}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{6.71}$$

De l'équation (6.71) on peut remarquer que les deux premiers termes sont les expressions des surface de rupture ($\bar{\phi}_{t+1}^{\text{trial}}(x_1)$ et $\bar{\phi}_{t+1}^{\text{trial}}(x_2)$) issues de la prédiction élastique multipliées par un facteur de (-1) . Cela permet d'avoir une expression plus simple telle que

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \bar{\phi}_{t+1}^{\text{trial}}(x_1) \\ \bar{\phi}_{t+1}^{\text{trial}}(x_2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{D}_t^{-1}(x_1) \bar{G}_r^{(1)}(x_1) \bar{\bar{D}}_t(x_1) - 1 & \bar{D}_t^{-1}(x_1) \bar{G}_r^{(2)}(x_1) \bar{\bar{D}}_t(x_2) s(x_2) s(x_1) \\ \bar{D}_t^{-1}(x_2) \bar{G}_r^{(1)}(x_2) \bar{\bar{D}}_t(x_1) s(x_1) s(x_2) & \bar{D}_t^{-1}(x_2) \bar{G}_r^{(2)}(x_2) \bar{\bar{D}}_t(x_2) - 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ & \times \begin{bmatrix} \bar{D}_t^{-1}(x_1) \bar{G}_r^{(1)}(x_1) - S & \bar{D}_t^{-1}(x_1) \bar{G}_r^{(2)}(x_1) s(x_2) s(x_1) \\ \bar{D}_t^{-1}(x_2) \bar{G}_r^{(1)}(x_2) s(x_1) s(x_2) & \bar{D}_t^{-1}(x_2) \bar{G}_r^{(2)}(x_2) - S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{\bar{\gamma}}(x_1) \\ \Delta \bar{\bar{\gamma}}(x_2) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Les multiplicateurs de Lagrange sont ensuite calculés :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \Delta \bar{\bar{\gamma}}(x_1) \\ \Delta \bar{\bar{\gamma}}(x_2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{D}_t^{-1}(x_1) \bar{G}_r^{(1)}(x_1) - S & \bar{D}_t^{-1}(x_1) \bar{G}_r^{(2)}(x_1) s(x_2) s(x_1) \\ \bar{D}_t^{-1}(x_2) \bar{G}_r^{(1)}(x_2) s(x_1) s(x_2) & \bar{D}_t^{-1}(x_2) \bar{G}_r^{(2)}(x_2) - S \end{bmatrix}^{-1} \\ & \times \begin{bmatrix} \bar{D}_t^{-1}(x_1) \bar{G}_r^{(1)}(x_1) \bar{\bar{D}}_t(x_1) - 1 & \bar{D}_t^{-1}(x_1) \bar{G}_r^{(2)}(x_1) \bar{\bar{D}}_t(x_2) s(x_2) s(x_1) \\ \bar{D}_t^{-1}(x_2) \bar{G}_r^{(1)}(x_2) \bar{\bar{D}}_t(x_1) s(x_1) s(x_2) & \bar{D}_t^{-1}(x_2) \bar{G}_r^{(2)}(x_2) \bar{\bar{D}}_t(x_2) - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_{t+1}^{\text{trial}}(x_1) \\ \bar{\phi}_{t+1}^{\text{trial}}(x_2) \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{6.72}$$

Une fois les multiplicateurs de Lagrange déterminés, les variables internes associées aux modèles cohésifs sont mises à jour d'une manière similaire aux équations (5.101).

6.5.3.2 Rupture complète au niveau des deux discontinuités

Lorsque les deux discontinuités s'ouvrent complètement et empêchent le transfert des efforts, les contraintes cohésives prennent des valeurs nulles :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{t+1}(x_1) \\ \sigma_{t+1}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\tag{6.73}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \overline{D}_t^{-1}(x_1)\mathbf{B}^f(x_1, y)\mathbf{d}_{e,t+1} \\ \overline{D}_t^{-1}(x_2)\mathbf{B}^f(x_2, y)\mathbf{d}_{e,t+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{D}_t^{-1}(x_1)\overline{G}_r^{(1)}(x_1)\overline{\overline{D}}_t(x_1)s(x_1) & \overline{D}_t^{-1}(x_1)\overline{G}_r^{(2)}(x_1)\overline{\overline{D}}_t(x_2)s(x_2) \\ \overline{D}_t^{-1}(x_2)\overline{G}_r^{(1)}(x_2)\overline{\overline{D}}_t(x_1)s(x_1) & \overline{D}_t^{-1}(x_2)\overline{G}_r^{(2)}(x_2)\overline{\overline{D}}_t(x_2)s(x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_t(x_1) \\ \sigma_t(x_2) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \overline{D}_t^{-1}(x_1)\overline{G}_r^{(1)}(x_1)s(x_1) & \overline{D}_t^{-1}(x_1)\overline{G}_r^{(2)}(x_1)s(x_2) \\ \overline{D}_t^{-1}(x_2)\overline{G}_r^{(1)}(x_2)s(x_1) & \overline{D}_t^{-1}(x_2)\overline{G}_r^{(2)}(x_2)s(x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\overline{\overline{\gamma}}(x_1) \\ \Delta\overline{\overline{\gamma}}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta\overline{\overline{\gamma}}(x_1) \\ \Delta\overline{\overline{\gamma}}(x_2) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \overline{D}_t^{-1}(x_1)\overline{G}_r^{(1)}(x_1)s(x_1) & \overline{D}_t^{-1}(x_1)\overline{G}_r^{(2)}(x_1)s(x_2) \\ \overline{D}_t^{-1}(x_2)\overline{G}_r^{(1)}(x_2)s(x_1) & \overline{D}_t^{-1}(x_2)\overline{G}_r^{(2)}(x_2)s(x_2) \end{bmatrix}^{-1} \times \left(\begin{bmatrix} \overline{D}_t^{-1}(x_1)\mathbf{B}^f(x_1, y)\mathbf{d}_{e,t+1} \\ \overline{D}_t^{-1}(x_2)\mathbf{B}^f(x_2, y)\mathbf{d}_{e,t+1} \end{bmatrix} \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} \overline{D}_t^{-1}(x_1)\overline{G}_r^{(1)}(x_1)\overline{\overline{D}}_t(x_1)s(x_1) & \overline{D}_t^{-1}(x_1)\overline{G}_r^{(2)}(x_1)\overline{\overline{D}}_t(x_2)s(x_2) \\ \overline{D}_t^{-1}(x_2)\overline{G}_r^{(1)}(x_2)\overline{\overline{D}}_t(x_1)s(x_1) & \overline{D}_t^{-1}(x_2)\overline{G}_r^{(2)}(x_2)\overline{\overline{D}}_t(x_2)s(x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_t(x_1) \\ \sigma_t(x_2) \end{bmatrix} \right) \quad (6.74) \end{aligned}$$

6.5.3.3 Rupture complète au niveau d'une seule discontinuité

De manière similaire que dans la section 6.5.2.3, il peut arriver qu'une des deux discontinuités cesse de transférer les efforts tandis que l'autre discontinuité continue à le faire. Le système suivant résulte de cette situation :

$$\begin{cases} \sigma_{t+1}(x_1) = 0 \\ \overline{\overline{\phi}}_{t+1}(x_2) = 0 \end{cases} \quad (6.75)$$

Le développement de la première équation donne :

$$\begin{aligned} \overline{D}_t^{-1}(x_1)\mathbf{B}^f(x_1, y)\mathbf{d}_{e,t+1} + \begin{bmatrix} \overline{D}_t^{-1}(x_1)\overline{G}_r^{(1)}(x_1)\overline{\overline{D}}_t(x_1)s(x_1) & \overline{D}_t^{-1}(x_1)\overline{G}_r^{(2)}(x_1)\overline{\overline{D}}_t(x_2)s(x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_t(x_1) \\ \sigma_t(x_2) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \overline{D}_t^{-1}(x_1)\overline{G}_r^{(1)}(x_1)s(x_1) & \overline{D}_t^{-1}(x_1)\overline{G}_r^{(2)}(x_1)s(x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\overline{\overline{\gamma}}(x_1) \\ \Delta\overline{\overline{\gamma}}(x_2) \end{bmatrix} = 0 \quad (6.76) \end{aligned}$$

La deuxième équation du système (6.75) devient :

$$\begin{aligned} \overline{D}_t^{-1}(x_2)\mathbf{B}^f(x_1, y)\mathbf{d}_{e,t+1}s(x_2) + \begin{bmatrix} \overline{D}_t^{-1}(x_2)\overline{G}_r^{(1)}(x_2)\overline{\overline{D}}_t(x_1)s(x_1)s(x_2) & \overline{D}_t^{-1}(x_2)\overline{G}_r^{(2)}(x_2)\overline{\overline{D}}_t(x_2)s(x_2) - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_t(x_1) \\ \sigma_t(x_2) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \overline{D}_t^{-1}(x_2)\overline{G}_r^{(1)}(x_2)s(x_1)s(x_2) & \overline{D}_t^{-1}(x_2)\overline{G}_r^{(2)}(x_2)s(x_2) - S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\overline{\overline{\gamma}}(x_1) \\ \Delta\overline{\overline{\gamma}}(x_2) \end{bmatrix} = 0 \quad (6.77) \end{aligned}$$

Les deux équations développées ci-dessous s'écrivent comme :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \overline{D}_t^{-1}(x_1)\mathbf{B}^f(x_1, y)\mathbf{d}_{e,t+1} \\ \overline{D}_t^{-1}(x_2)\mathbf{B}^f(x_2, y)\mathbf{d}_{e,t+1}s(x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{D}_t^{-1}(x_1)\overline{G}_r^{(1)}(x_1)\overline{\overline{D}}_t(x_1)s(x_1) & \overline{D}_t^{-1}(x_1)\overline{G}_r^{(2)}(x_1)\overline{\overline{D}}_t(x_2)s(x_2) \\ \overline{D}_t^{-1}(x_2)\overline{G}_r^{(1)}(x_2)\overline{\overline{D}}_t(x_1)s(x_1)s(x_2) & \overline{D}_t^{-1}(x_2)\overline{G}_r^{(2)}(x_2)\overline{\overline{D}}_t(x_2)s(x_2) - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_t(x_1) \\ \sigma_t(x_2) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \overline{D}_t^{-1}(x_1)\overline{G}_r^{(1)}(x_1)s(x_1) & \overline{D}_t^{-1}(x_1)\overline{G}_r^{(2)}(x_1)s(x_2) \\ \overline{D}_t^{-1}(x_2)\overline{G}_r^{(1)}(x_2)s(x_1)s(x_2) & \overline{D}_t^{-1}(x_2)\overline{G}_r^{(2)}(x_2)s(x_2) - S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\overline{\overline{\gamma}}(x_1) \\ \Delta\overline{\overline{\gamma}}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.78) \end{aligned}$$

Les multiplicateurs de Lagrange sont donc calculés :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta\overline{\overline{\gamma}}(x_1) \\ \Delta\overline{\overline{\gamma}}(x_2) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \overline{D}_t^{-1}(x_1)\overline{G}_r^{(1)}(x_1)s(x_1) & \overline{D}_t^{-1}(x_1)\overline{G}_r^{(2)}(x_1)s(x_2) \\ \overline{D}_t^{-1}(x_2)\overline{G}_r^{(1)}(x_2)s(x_1)s(x_2) & \overline{D}_t^{-1}(x_2)\overline{G}_r^{(2)}(x_2)s(x_2) - S \end{bmatrix}^{-1} \times \left(\begin{bmatrix} \overline{D}_t^{-1}(x_1)\mathbf{B}^f(x_1, y)\mathbf{d}_{e,t+1} \\ \overline{D}_t^{-1}(x_2)\mathbf{B}^f(x_2, y)\mathbf{d}_{e,t+1}s(x_2) \end{bmatrix} \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} \overline{D}_t^{-1}(x_1)\overline{G}_r^{(1)}(x_1)\overline{\overline{D}}_t(x_1)s(x_1) & \overline{D}_t^{-1}(x_1)\overline{G}_r^{(2)}(x_1)\overline{\overline{D}}_t(x_2)s(x_2) \\ \overline{D}_t^{-1}(x_2)\overline{G}_r^{(1)}(x_2)\overline{\overline{D}}_t(x_1)s(x_1)s(x_2) & \overline{D}_t^{-1}(x_2)\overline{G}_r^{(2)}(x_2)\overline{\overline{D}}_t(x_2)s(x_2) - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_t(x_1) \\ \sigma_t(x_2) \end{bmatrix} \right) \quad (6.79) \end{aligned}$$

Les étapes d'intégration numérique de ce modèle sont récapitulées dans A.8.

6.6 Applications numériques

Afin de valider le fonctionnement du nouveau modèle proposé dans ce chapitre et d'analyser sa performance par rapport aux modèles multifibres enrichis du chapitre 5, deux applications numériques sont ci-dessous réalisées. La première consiste à étudier la structure poutre en béton armé en flexion du chapitre précédent (section 5.6.3). La deuxième concerne la modélisation d'un portique testé expérimentalement par [Cranston, 1965] et numériquement par [Saje et al., 2005] et [Jukić, 2013].

6.6.1 Poutre en béton armé en flexion

Il s'agit de la poutre déjà étudiée dans la section 5.6.3. Cette fois-ci, la poutre est modélisée avec le nouveau modèle poutre multifibres présenté dans ce chapitre (nommé **FCQ** (PI), PI de points d'intégration) et la réponse est comparée avec celle du modèle poutre multifibres avec une seule discontinuité par fibre interpolée par des fonctions d'enrichissement constantes (**FCQ** (GC)). Dans un premier temps, les propriétés matériaux des tableaux (5.3) et (5.4) sont adoptés. Trois calculs sont réalisés en fonction du nombre d'éléments finis (NE=2, 5 et 10). Les résultats sont illustrés sur la figure (6.2). La figure (6.2)(a) est identique à la figure (5.24)(b), elle est reportée ici pour faciliter la lecture.

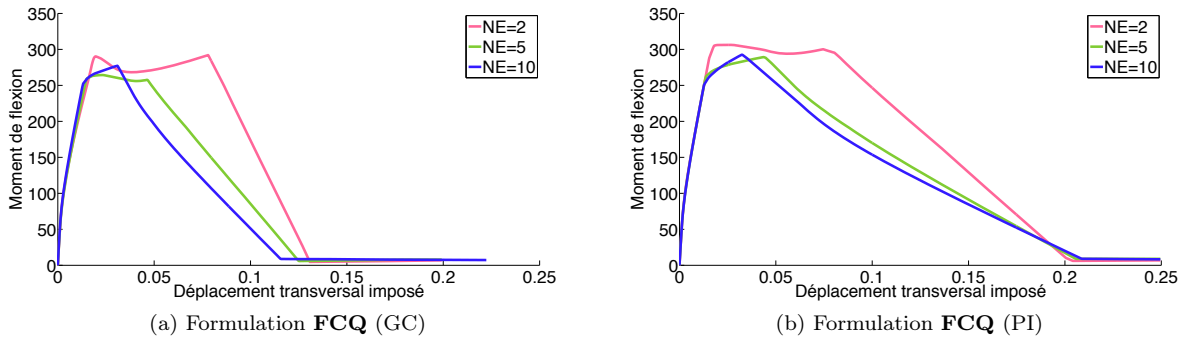


FIGURE 6.2 – Réponses globales de la poutre en béton armé avec les deux formulations enrichies **FCQ** (GC) et **FCQ** (PI) en fonction du nombre d'éléments NE

Les figures (6.3) montrent plus clairement les différences entre les résultats issus des formulations **FCQ** (GC) et **FCQ** (PI).

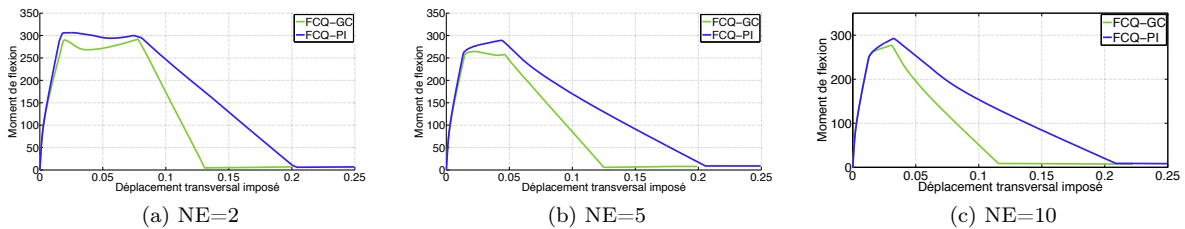


FIGURE 6.3 – Réponses globales de la poutre en béton armé avec les deux formulations enrichies (**FCQ** (GC) et **FCQ** (PI)) pour NE=2, 5 et 10 éléments

Les deux modèles donnent des résultats différents dû à un écart entre les quantités d'énergies dissipées au niveau des discontinuités. Ceci est expliqué ci-dessous :

Si les valeurs des modules d'adoucissement (S_{bt} , S_{bc} et S_a dans les tableaux (5.3), (5.4)) de la formulation **FCQ** (PI) sont multipliées par un facteur 2, les résultats des deux formulations sont similaires, voir figure (6.4). Cela peut s'expliquer en analysant les quantités d'énergies dissipées au niveau des discontinuités. L'énergie dissipée dans la structure durant la phase d'adoucissement se fait spécifiquement

au travers des modèles cohésifs, elle dépend par conséquent de la forme du modèle cohésif utilisé. Dans ce manuscrit, les modèles cohésifs ont une forme linéaire (voir figure (5.6)). Par conséquent, la quantité d'énergie dissipée peut être calculée de la manière suivante :

$$E_d^{(d)} = -\frac{\sigma_u^2}{2S_0} \quad (6.80)$$

avec σ_u la contrainte limite à la rupture et $S_0 < 0$ le module d'adoucissement. L'introduction de deux discontinuités par fibre permet de dissiper deux fois la quantité $E_d^{(d)}$ telle que :

$$E_d^{fibre} = E_d^{(1)} + E_d^{(2)} = -\frac{\sigma_u^2}{2S_0} - \frac{\sigma_u^2}{2S_0} = -\frac{\sigma_u^2}{S_0} \quad (6.81)$$

De ce fait, la multiplication de la valeur du module d'adoucissement S_0 par un facteur de 2 ($S = 2S_0$) permet d'obtenir la même quantité d'énergie dissipée que lorsqu'une seule discontinuité est considérée (modèle **FCQ** (GC)) et les deux modèles donnent des résultats similaires :

$$E_d^{fibre} = -\frac{\sigma_u^2}{S} = -\frac{\sigma_u^2}{2S_0} \quad (6.82)$$

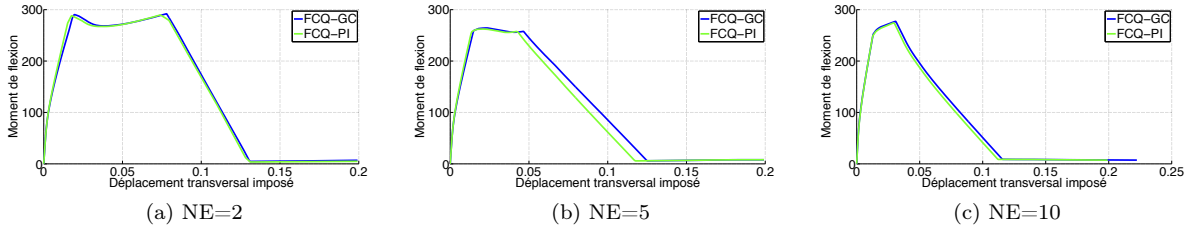


FIGURE 6.4 – Réponses globales de la poutre en béton armé avec les deux formulations enrichies (**FCQ** (GC) et **FCQ** (PI)) pour NE=2, 5 et 10 éléments. Les modules d'adoucissement des tableaux (5.3) et (5.4) sont doublés pour la formulation **FCQ** (PI)

6.6.2 Portique en béton armé

Cette dernière application concerne la modélisation d'un portique en béton armé testé expérimentalement par [Cranston, 1965] et modélisé par plusieurs auteurs dont [Bažant et al., 1987], [Saje et al., 2005] et [Jukić et al., 2014]. La géométrie du portique est illustrée en figure (6.5). La symétrie de la structure et de chargement permettent de considérer la moitié de portique pour la modélisation. Les sections d'éléments ont une forme rectangulaire de hauteur $h = 0.1524$ m et de largeur $b = 0.1016$ m. La valeur de l'enrobage de béton en fibre supérieure et inférieure vaut 0.014 m. Les éléments poutres du portique présentent différents pourcentages d'acier par section comme le montre la figure (6.5). Les propriétés mécaniques des matériaux sont récapitulées dans les tableaux (6.3) et (6.4).

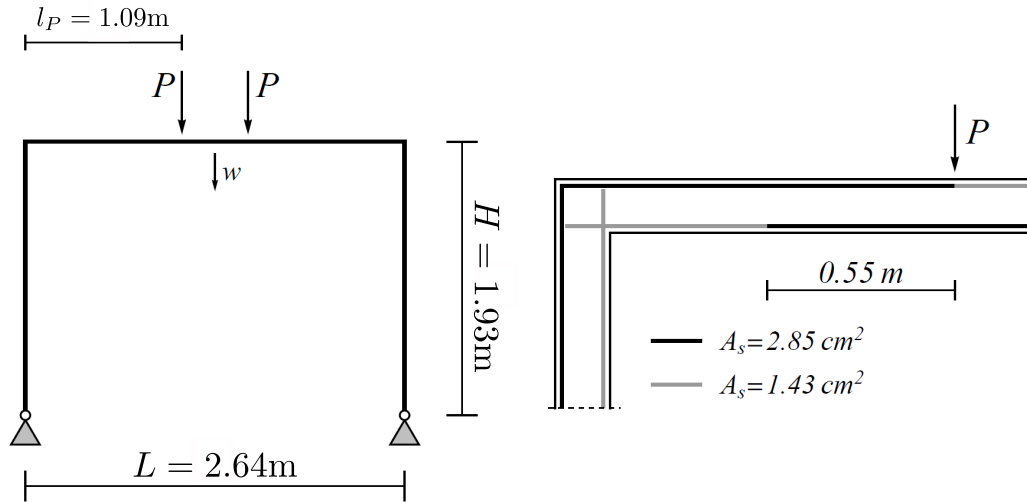


FIGURE 6.5 – Portique en béton armé testé par Cranston [Jukić, 2013]

Propriétés du béton	Symbole	Valeur
Module de Young	E_b	$31.5 \times 10^6 \text{ kNm}^{-2}$
Coefficient de Poisson	ν_b	0.2
Contrainte ultime en traction	σ_{btu}	950 kNm^{-2}
Limite élastique en compression	σ_{bcy}	14600 kNm^{-2}
Contrainte ultime en compression	σ_{bcu}	36500 kNm^{-2}
Module d'écrouissage en compression	H_{bc}	$29 \times 10^6 \text{ kNm}^{-2}$
Module d'adoucissement en compression	S_{bt}	$-40 \times 10^6 \text{ kNm}^{-3}$
Module d'adoucissement en traction	S_{bc}	$-11 \times 10^6 \text{ kNm}^{-3}$

TABLE 6.3 – Propriétés du béton

Propriétés d'acier	Symbole	Valeur
Module de Young	E_a	$200 \times 10^6 \text{ kNm}^{-2}$
Coefficient de Poisson	ν_a	0.3
Limite élastique	σ_{ay}	293000 kNm^{-2}
Contrainte ultime	σ_{au}	310000 kNm^{-2}
Module d'écrouissage	H_a	$5.02 \times 10^5 \text{ kNm}^{-2}$
Module d'adoucissement	S_a	$-42 \times 10^6 \text{ kNm}^{-3}$

TABLE 6.4 – Propriétés des armatures

Le portique est modélisé ci-dessous avec des éléments **FCQ** (PI). Il est discrétisé en seulement 5 éléments finis : deux éléments pour le poteau et trois éléments pour la poutre (voir figure (6.6)). La loi d'endommagement pour le béton et la loi de plasticité pour les armatures présentées précédemment sont adoptées. La réponse globale du modèle est illustrée en figure (6.7). Elle est comparée à différents

résultats de la littérature [Cranston, 1965], [Bažant et al., 1987] et [Jukić et al., 2014].

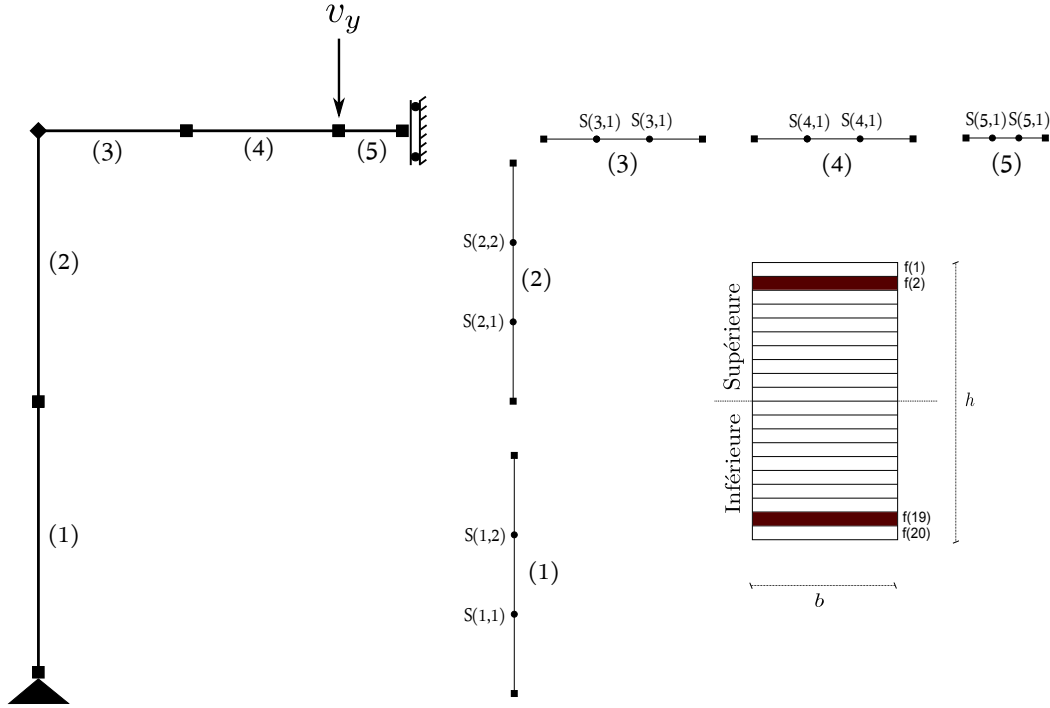


FIGURE 6.6 – Maillage du portique en béton armé

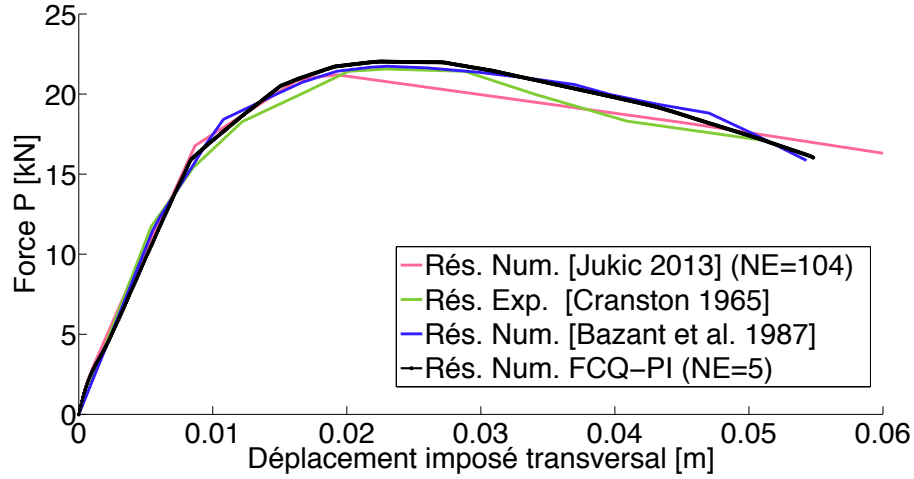


FIGURE 6.7 – Réponse globale du portique en béton armé, résultats expérimentaux et numériques

D'après la figure (6.7), la réponse obtenue est comparable aux résultats expérimentaux de [Cranston, 1965] ainsi qu'aux résultats numériques de [Bažant et al., 1987]. Les résultats de [Jukić et al., 2014] sont issus d'un modèle multifibres enrichi dans le cadre de la formulation **FLI**. Ces résultats (en rose sur la figure (6.7)) ne sont pas satisfaisants pour les déplacements qui varient entre 0.02 m et 0.05 m même en utilisant 104 éléments. Le modèle **FCQ** (PI) par contre est capable avec seulement 5 éléments de donner des résultats très satisfaisants.

Afin d'analyser ce qui se passe localement au niveau des fibres et de voir comment cela influence la réponse globale, les résultats du modèle **FCQ** (PI) sont isolés sur la figure (6.8). Les coordonnées

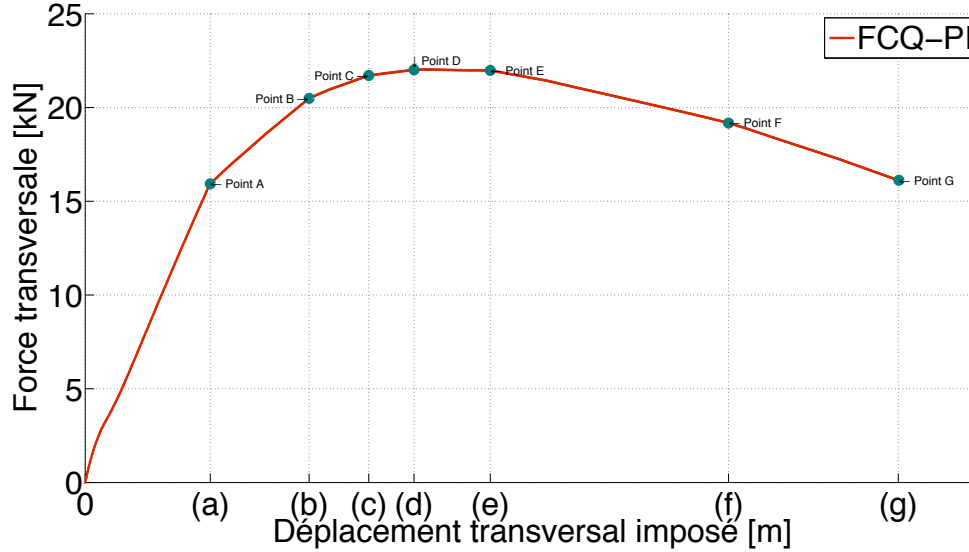


FIGURE 6.8 – Analyse de la réponse globale du modèle **FCQ** (PI)

Point	0	A	B	C	D	E	F	G
v_y (m)	0	0.0084	0.01504	0.01904	0.02208	0.0272	0.0432	0.0546
F_y (kN)	0	15.93	20.49	21.71	22.51	21.98	19.17	16.12

TABLE 6.5 – Les coordonnées des points verts sur la figure (6.8)

en force/déplacement des points mentionnés sur la figure (6.8) sont récapitulées dans le tableau (6.5). Chacun de ces points marque un phénomène local qui peut être observé sur la réponse globale de la structure. Plus spécifiquement : Le point A marque un changement de pente sur la figure (6.8). Ce changement est lié au début de la phase d'écroutissage de la fibre d'acier inférieure dans l'élément 5 (voir figure (6.9c)). Le point B (déplacement transversal de 0.01504 m) correspond à la même fibre quand celle-ci atteint sa contrainte ultime (310MPa), voir figure (6.9c). Le point C désigne le début de l'écroutissage de la fibre d'acier supérieure en section 2 de la fibre en acier supérieure (S(2,2)/f(2), figure (6.6)) de l'élément 2 (figure (6.9a)). Le point D correspond à l'écrouissage de la section 1 (S(3,1), figure (6.6)) de la fibre d'acier supérieure (f(2), figure (6.6)) de l'élément 3. Les points E et F représentent le début d'écrouissage des fibres supérieures en acier f(2) des sections S(2,1) et S(3,2) des éléments 2 et 3 respectivement. Enfin, le point G indique le pas temps où les fibres en acier supérieures des sections S(2,2) et S(3,1) des éléments 2 et 3 atteignent leurs valeurs ultimes ($\sigma_{su} = 310\text{MPa}$).

D'après cette analyse, le comportement des fibres en acier domine la réponse globale du portique. D'un autre côté, les discontinuités dans les fibres de béton se sont activées dès le début du chargement. Pourtant, leurs présences ne semblent pas influencer explicitement l'allure de la réponse globale. Ceci est dû au fait que la quantité d'énergie dissipée dans ces discontinuités est négligeable devant celle dissipée dans les discontinuités des fibres en acier.

Cette étude montre la capacité de la formulation **FCQ** (PI) à reproduire des résultats expérimentaux mais aussi à suivre l'évolution des non-linéarités tant au niveau global que local (approche multi-échelle).

6.7 Conclusions

Dans ce chapitre, un nouveau modèle multifibres enrichi basé sur la formulation **FCQ** a été proposé. La nouveauté de modèle réside dans sa capacité à introduire plusieurs discontinuités au niveau des points

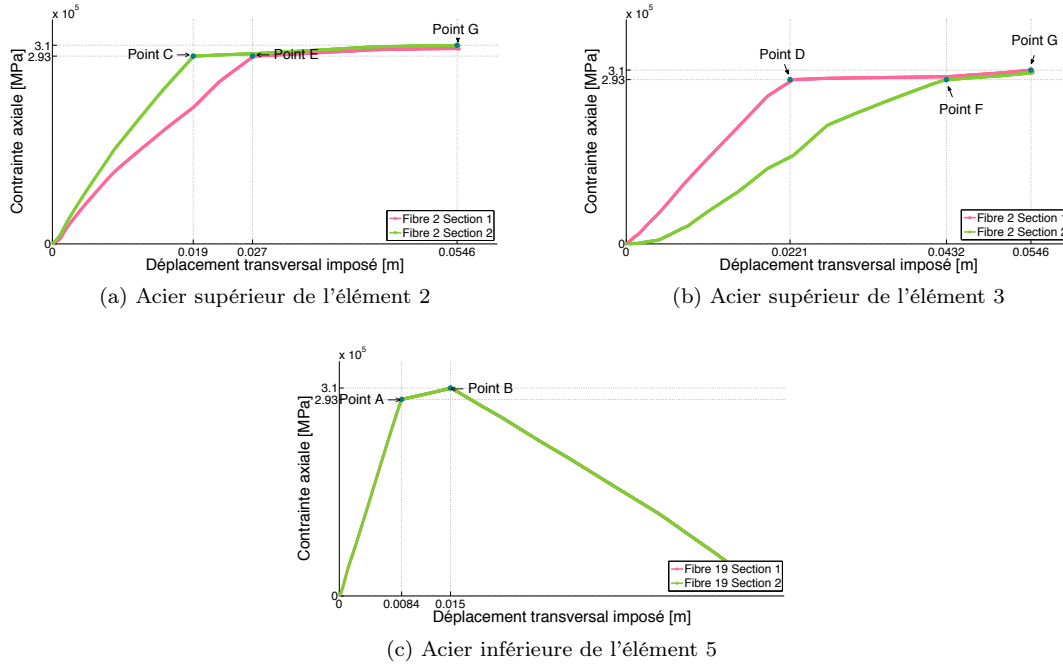


FIGURE 6.9 – Evolution des contraintes dans les fibres des éléments **FCQ** (PI)

d'intégration. Cette nouvelle formulation assure le respect des valeurs limites des contraintes le long des fibres, respect qui n'est pas garanti par le modèle proposé dans le chapitre 5.

La procédure d'implémentation numérique a été détaillée pour deux modèles de comportement non linéaires (élasto-plastique et endommagement), utiles pour modéliser des structures en béton armé. Deux études numériques ont été menées. La première montre la capacité du modèle à simuler le comportement non-linéaire d'une poutre en béton armé tant au niveau global que local. La deuxième étude concerne la modélisation d'un portique en béton armé et démontre la capacité du modèle à reproduire des résultats expérimentaux avec une bonne précision mais aussi à suivre le développement des non-linéarités au sein la structure.

Chapitre 7

Conclusions et perspectives

Bilan général

Ce travail de thèse avait pour objectif de proposer un nouvel élément fini poutre capable de simuler le comportement d'une structure jusqu'à la rupture. Cet objectif a été réalisé et présenté en plusieurs étapes afin de clairement justifier les différents choix retenus.

Après une introduction du cadre général de travail au chapitre 1, l'attention dans le chapitre 2 est portée sur les hypothèses cinématiques ainsi que sur les différents types de discrétisation des éléments poutres. La formulation élément fini poutre Timoshenko en déplacements proposée par [Caillerie et al., 2015] (appelée dans le manuscrit **FCQ**) est retenue. Des fonctions cubiques sont utilisées pour interpoler le champ de déplacement transversal et quadratiques pour le champ de rotation. Cette formulation est libre de blocage par cisaillement et utilise trois degrés de liberté supplémentaires portés par un nœud interne positionné au milieu de l'élément. La performance de cette formulation élément fini par rapport à d'autres formulations de la littérature est étudiée dans le chapitre 3 avec des exemples de calculs linéaires et non linéaires. Une amélioration de la modélisation de l'interaction entre l'effort axial et le moment de flexion de l'élément **FCQ** multifibres est enfin proposée, amélioration qui consiste à un enrichissement cinématique du champ de déplacement axial par des fonctions cubiques.

Dans le chapitre 4 le phénomène de localisation des déformations est décrit en évoquant les difficultés numériques rencontrées. Une brève revue des méthodes permettant une modélisation objective de la localisation est présentée suivie par l'état de l'art de la méthode d'enrichissement cinématique choisie comme limiteur de localisation. Le choix dans ce manuscrit porte sur l'introduction des discontinuités dans le champs de déplacement. Un premier modèle poutre est proposé dans le cadre d'une approche généralisée dont le principe est de définir des relations entre les efforts et les déformations généralisés de la section. L'enrichissement cinématique du champ de déplacement dans le cadre d'une approche généralisée permet de construire un modèle poutre à l'échelle macro capable de modéliser le comportement global des structures jusqu'à la rupture.

Un nouveau modèle poutre multifibre est ensuite proposé dans le chapitre 5 appliqué aux structures en béton armé. L'enrichissement cinématique est introduit désormais au niveau des fibres et les champs de déplacements sont enrichis par des variables de discontinuités décrivant la rupture locale de chaque matériau. Le béton est modélisé avec un modèle unidimensionnel d'endommagement couplé à un modèle cohésif (endommagement adoucissant) pour décrire le comportement du béton au niveau de la discontinuité. L'acier est modélisé avec un modèle élasto-plastique unidimensionnel couplé à un modèle cohésif (plasticité adoucissante) pour décrire la formation d'une rotule plastique au niveau de la discontinuité. L'avantage de ce type de modélisation multifibres enrichies porte sur sa simplicité et son faible coût de calcul par rapport aux modèles éléments finis tridimensionnels tout en assurant l'obtention d'informations globales et locales sur le comportement des structures en génie civil. Afin de ne pas surestimer les contraintes aux points de Gauss, une première solution proposée consiste à utiliser des fonctions d'enrichissement constantes.

Enfin et afin de mieux profiter de la formulation **FCQ**, une autre solution consiste à enrichir les fibres par plusieurs discontinuités de façon automatique au niveau des points d'intégration. Ce nouveau

modèle est décrit en détail dans le chapitre 6. Plusieurs résultats numériques et des comparaisons avec des résultats de la littérature démontrent la capacité de cette approche novatrice à reproduire le comportement global et local d'une structure jusqu'à la rupture.

Perspectives

Plusieurs perspectives s'ouvrent suite à ce travail de thèse. Tout d'abord et en ce qui concerne le modèle généralisé, un enrichissement à plusieurs composantes (axiale, transversale et en rotation) est possible. Un couplage peut également être envisagé entre les différentes discontinuités. Une analyse similaire a été déjà réalisée par [Ehrlich and Armero, 2005] dans le cadre de la formulation **FLI**. Les auteurs ont montré l'importance de coupler les fonctions d'enrichissement pour remédier au problème de blocage par cisaillement. Or, dans le cadre de la formulation **FCQ** le problème de blocage est déjà réglé par le choix des fonctions d'interpolation d'ordre élevé. L'étude de couplage des différentes composantes et des discontinuités dans le cadre de la formulation **FCQ** peut être intéressante pour la construction des diagrammes d'interaction pour des éléments de structures en béton armé. L'étude des interactions dans des assemblages (par exemple poutreau-poutre) semble aussi être une autre perspective à développer.

Dans le cadre du modèle enrichi multifibres, on peut imaginer un enrichissement de la composante transversale du champ de déplacement au niveau de la fibre afin d'étudier des problèmes de torsion ou de cisaillement. Par ailleurs, le couplage entre les discontinuités axiale et transversale peut être utile pour construire des modèles de comportement bidimensionnels au niveau des fibres. Les performances des modèles enrichis devraient également être étudiées pour le cas des chargements cycliques et dynamiques. Pour cela, il faudrait utiliser des lois de comportement qui prennent en considération l'ouverture et la fermeture des fissures.

Une autre piste serait d'utiliser un modèle de comportement continu régularisé couplé à un modèle de comportement cohésif, de manière similaire aux travaux de [Cuvilliez et al., 2012], afin d'avoir un modèle qui peut simuler correctement la localisation des déformations.

Enfin, le développement d'un modèle général de poutre multifibres enrichi qui peut prendre en compte plusieurs phénomènes de rupture des poutres en béton armé pourrait être un objectif ambitieux mais envisageable. Ce modèle devrait regrouper les aspects présentés dans le présent manuscrit, les travaux concernant le gauchissement des sections sous l'effet du cisaillement [Capdevielle et al., 2016] et la modélisation des armatures transversales (thèse en cours de N. Khoder (2015-2018), Laboratoire Sols, Solides, Structures, Risques 3SR (UGA)/SMS-ID (INSA de Lyon), ANR SINAPS@).

Bibliographie

- [Armero, 1999] Armero, F. (1999). Large-scale modeling of localized dissipative mechanisms in a local continuum : Applications to the numerical simulation of strain localization in rate-dependent inelastic solids. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 4(March 1998) :101–131.
- [Armero and Ehrlich, 2004] Armero, F. and Ehrlich, D. (2004). An analysis of strain localization and wave propagation in plastic models of beams at failure. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(30-32) :3129–3171.
- [Armero and Ehrlich, 2006] Armero, F. and Ehrlich, D. (2006). Numerical modeling of softening hinges in thin Euler-Bernoulli beams. *Computers and Structures*, 84(10-11) :641–656.
- [Armero and Garikipati, 1996] Armero, F. and Garikipati, K. (1996). An analysis of strong discontinuities in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain localization in solids. *International Journal of Solids and Structures*, 33(20-22) :2863–2885.
- [Askes, 2000] Askes, H. (2000). *Advanced spatial discretisation strategies for localised failure*. TU Delft, Delft University of Technology.
- [Askes and Sluys, 2002] Askes, H. and Sluys, L. J. (2002). Explicit and implicit gradient series in damage mechanics. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 21(3) :379–390.
- [Bairan Garcia and Mari Bernat, 2006] Bairan Garcia, J. M. and Mari Bernat, A. R. (2006). Coupled model for the non-linear analysis of anisotropic sections subjected to general 3D loading. Part 1 : Theoretical formulation. *Computers and Structures*, 84(31-32) :2254–2263.
- [Banon et al., 1981] Banon, H., Irvine, H. M., and Biggs, J. M. (1981). Seismic damage in reinforced concrete frames. *Journal of the Structural Division*, 107(9) :1713–1729.
- [Barenblatt, 1962] Barenblatt, G. I. (1962). The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture. *Advances in Applied Mechanics*, 7(C) :55–129.
- [Bažant, 1976] Bažant, Z. P. (1976). Instability, Ductility and Size-effect in Strain-Softening Concrete. *Journal Of The Engineering Mechanics Division*, 1976(April) :331–343.
- [Bažant and Belytschko, 1985] Bažant, Z. P. and Belytschko, T. B. (1985). Wave propagation in a strain-softening bar : exact solution. *Journal of Engineering Mechanics*, 111(3) :381–389.
- [Bažant and Lin, 1988] Bažant, Z. P. and Lin, F.-B. (1988). Non-local yield limit degradation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26(8) :1805–1823.
- [Bažant et al., 1987] Bažant, Z. P., Pan, J., and Pijaudier-Cabot, G. (1987). Softening in Reinforced Concrete Beams and Frames. *Journal of Structural Engineering*, 113(12) :2333–2347.
- [Bažant and Pijaudier-Cabot, 1988] Bažant, Z. P. and Pijaudier-Cabot, G. (1988). Nonlocal Continuum Damage, Localization Instability and Convergence. *Journal of Applied Mechanics*, 55(2) :287.
- [Beirão da Veiga et al., 2012] Beirão da Veiga, L., Lovadina, C., and Reali, A. (2012). Avoiding shear locking for the Timoshenko beam problem via isogeometric collocation methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 241-244 :38–51.
- [Belytschko and Black, 1999] Belytschko, T. B. and Black, T. (1999). Elastic crack growth in Finite Elements with minimal remeshing. *International journal for numerical methods in engineering*, 620(July 1998) :601–620.

- [Belytschko et al., 1988] Belytschko, T. B., Fish, J., and Engelmann, B. E. (1988). A finite element with embedded localization zones*. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 70 :59–89.
- [Belytschko et al., 2009] Belytschko, T. B., Gracie, R., and Ventura, G. (2009). A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 17(4) :043001.
- [Belytschko et al., 2001] Belytschko, T. B., Moës, N., Usui, S., and Parimi, C. (2001). Arbitrary discontinuities in finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(August 2000) :993–1013.
- [Benkemoun, 2010] Benkemoun, N. (2010). *Contribution aux approches multi-échelles séquencées pour la modélisation numérique des matériaux à matrice cimentaire*. PhD thesis, Ecole normale supérieure de Cachan.
- [Benkemoun et al., 2012] Benkemoun, N., Ibrahimbegović, A., and Colliat, J. B. (2012). Anisotropic constitutive model of plasticity capable of accounting for details of meso-structure of two-phase composite material. *Computers and Structures*, 90-91(1) :153–162.
- [Bertero et al., 1984] Bertero, V., Aktan, A., Charney, F., and Sause, R. (1984). Earthquake simulator tests and associated experimental, analytical, and correlation studies of one-fifth scale model. *Special Publication*, 84 :375–424.
- [Bitar, 2013] Bitar, I. (2013). Un nouvel élément fini poutre pour la modélisation des structures sous sollicitations complexes. Technical report, Ecole Centrale de Nantes.
- [Bitar et al., 2016] Bitar, I., Grange, S., Kotronis, P., and Benkemoun, N. (2016). A comparison of displacement-based Timoshenko multi-fiber beams finite element formulations and elasto-plastic applications. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 8189(July) :1–27.
- [Bonnet and Frangi, 2007] Bonnet, M. and Frangi, A. (2007). *Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis*. Taylor & Francis, Paris.
- [Borderie, 1991] Borderie, C. L. (1991). *Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable : Modélisation et application à l’analyse de structures en béton*. PhD thesis, Université de Paris 06.
- [Borja, 2013] Borja, R. I. (2013). *Plasticity, Modeling & Computation*. Springer.
- [Brancherie, 2003] Brancherie, D. (2003). *Modèles continus et discrets pour les problèmes de localisation et de rupture fragile et/ou ductile*. PhD thesis, École normale supérieure de Cachan.
- [Budyn et al., 2004] Budyn, É., Zi, G., Moës, N., and Belytschko, T. (2004). A method for multiple crack growth in brittle materials without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61(10) :1741–1770.
- [Bui et al., 2014] Bui, N. N., NGO, V. M., Nikolic, M., Brancherie, D., and Ibrahimbegović, A. (2014). Enriched Timoshenko beam finite element for modeling bending and shear failure of reinforced concrete frames. *Computers & Structures*, 143 :9–18.
- [Caillerie et al., 2015] Caillerie, D., Kotronis, P., and Cyburski, R. (2015). A Timoshenko finite element straight beam with internal degrees of freedom. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 39(16) :1753–1773.
- [Capdevielle et al., 2016] Capdevielle, S., Grange, S., Dufour, F., and Desprez, C. (2016). A multifiber beam model coupling torsional warping and damage for reinforced concrete structures. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 20(8) :914–935.
- [Casaux, 2003] Casaux, G. (2003). *Modélisation tridimensionnelle du comportement sismique d’ouvrages en béton armé - développement de méthodes simplifiées*. PhD thesis, École normale supérieure de Cachan.
- [Casaux and Ibrahimbegović, 2011] Casaux, G. and Ibrahimbegović, A. (2011). On multi-fiber beam model with coupled axial and bending response. *European Journal of Computational Mechanics*, 20(7-8) :411–426.
- [Cazes, 2010] Cazes, F. (2010). *Construction et implémentation de lois cohésives extrinsèques*. PhD thesis, L’Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.

- [Ceresa et al., 2009] Ceresa, P., Petrini, L., Pinho, R., and Sousa, R. (2009). A fibre flexure–shear model for seismic analysis of RC-framed structures. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 38(5) :565–586.
- [Cervenka and Saouma, 1995] Cervenka, J. and Saouma, V. E. (1995). Discrete crack modeling in concrete structures. In *Fracture Mechanics of Concrete Structures*, pages 1285–1300.
- [Chambon et al., 1998] Chambon, R., Caillerie, D., and El Hassan, N. (1998). One-dimensional localisation studied with a second grade model. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 17(4) :637–656.
- [Chan, 1983] Chan, E. C.-Y. (1983). *Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of reinforced concrete shells with edge beams*. PhD thesis, University of California, Berkeley.
- [Charney and Bertero, 1982] Charney, F. A. and Bertero, V. V. (1982). An evaluation of the design and analytical seismic response of a seven-story reinforced concrete frame-wall structure. *NASA STI/Recon Technical Report N*, 83 :29470.
- [Ciampi and Carlesimo, 1986] Ciampi, V. and Carlesimo, L. (1986). A nonlinear beam element for seismic analysis of structures. In *8th European Conference on Earthquake Engineering*, pages 3–6.
- [Clough and Benuska, 1967] Clough, R. W. and Benuska, K. L. (1967). Nonlinear earthquake behavior of tall buildings. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 93(3) :129–146.
- [Clough and Johnston, 1966] Clough, R. W. and Johnston, S. (1966). Effect of stiffness degradation on earthquake ductility requirements. In *Transactions of Japan Earthquake Engineering Symposium*, pages 195–198. Tokyo.
- [Coleman and Hodgdon, 1985] Coleman, B. D. and Hodgdon, M. L. (1985). On shear bands in ductile materials. *Analysis and Thermomechanics*, 90 :219–247.
- [Coleman and Spacone, 2001] Coleman, J. and Spacone, E. (2001). Localization Issues in Force-Based Frame Elements.
- [Corn, 1998] Corn, S. (1998). *Simplification de modèles éléments finis de structures à comportement dynamique de poutre*. PhD thesis, L’U.F.R. des sciences et techniques de l’université de Franche-Comté.
- [Cosserat and Cosserat, 1909] Cosserat, E. and Cosserat, F. (1909). *Théorie des corps déformables*. A. Hermann Paris.
- [Cowper, 1966] Cowper, G. (1966). The shear coefficient in Timoshenko’s beam theory. *Journal of applied mechanics*, 33(2) :335–340.
- [Cranston, 1965] Cranston, W. B. (1965). Tests on reinforced concrete frames : Pinned portal frames. Technical report, Cement and Concrete Association, London.
- [Crisfield, 1991] Crisfield, M. A. (1991). *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. Wiley Online Library, New York, volume 1 edition.
- [Cuvilliez, 2012] Cuvilliez, S. (2012). *Passage d’un modèle d’endommagement continu régularisé à un modèle de fissuration cohésive dans le cadre de la rupture quasi-fragile*. PhD thesis, École nationale supérieure des mines de Paris.
- [Cuvilliez, 2013] Cuvilliez, S. (2013). Passage d’un modèle d’endommagement continu régularisé à un modèle de fissuration cohésive dans le cadre de la rupture quasi-fragile. Technical report, EDF.
- [Cuvilliez et al., 2012] Cuvilliez, S., Feyel, F., Lorentz, E., and Michel-Ponnelle, S. (2012). A finite element approach coupling a continuous gradient damage model and a cohesive zone model within the framework of quasi-brittle failure. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 237-240 :244–259.
- [Daux et al., 2000] Daux, C., Moës, N., Dolbow, J., Sukumar, N., and Belytschko, T. (2000). Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(12) :1741–1760.
- [Davenne, 1998] Davenne, L. (1998). Analysis of seismic response of reinforced concrete frames with macro-elements. In *11th European Conference on Earthquake Engineering*.

- [Davenne et al., 2003] Davenne, L., Ragueneau, F., Mazars, J., and Ibrahimbegović, A. (2003). Efficient approaches to finite element analysis in earthquake engineering. *Computers and Structures*, 81 :1223–1239.
- [De Borst et al., 1993] De Borst, R., Sluys, L., Mühlhaus, H.-B., and Pamin, J. (1993). Fundamental issues in Finite Element Analyses of localization of deformation.
- [de Goyet, 1989] de Goyet, D. V. (1989). *L'analyse statique non linéaire par la méthode des éléments finis des structures spatiales formées de poutres à section non symétrique*. PhD thesis, Université de Liège.
- [Desprez et al., 2015] Desprez, C., Kotronis, P., and Mazars, J. (2015). Seismic vulnerability assessment of a RC structure before and after FRP retrofitting. *Bulletin of Earthquake Engineering*, 13 :539–564.
- [Desprez et al., 2013] Desprez, C., Mazars, J., Kotronis, P., and Paultre, P. (2013). Damage model for FRP-confined concrete columns under cyclic loading. *Engineering Structures*, 48 :519–531.
- [Dolbow et al., 2001] Dolbow, J., Moës, N., and Belytschko, T. B. (2001). An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :6825–6846.
- [Dolsek, 2010] Dolsek, M. (2010). Development of computing environment for the seismic performance assessment of reinforced concrete frames by using simplified nonlinear models. *Bulletin of earthquake engineering*, 8(6) :1309–1329.
- [Donea and Lamain, 1987] Donea, J. and Lamain, L. G. (1987). A modified representation of transverse shear in C0 Quadrilateral plate elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 63 :183 – 207.
- [Dong et al., 2010] Dong, S. B., provides Alpdogan, C., and Taciroglu, E. (2010). Much ado about shear correction factors in Timoshenko beam theory. *International Journal of Solids and Structures*, 47(13) :1651–1665.
- [Dubé, 1997] Dubé, J.-F. (1997). Modélisation multicouche des voiles en béton armé. *Revue Française de Génie Civil*, 1(2) :285–307.
- [Dugdale, 1960] Dugdale, D. (1960). Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8(2) :100–104.
- [Dujc et al., 2010] Dujc, J., Brank, B., and Ibrahimbegović, A. (2010). Multi-scale computational model for failure analysis of metal frames that includes softening and local buckling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(21-22) :1371–1385.
- [Dvorkin et al., 1990] Dvorkin, E. N., Cuitiño, a. M., and Gioia, G. (1990). Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 30(September 1989) :541–564.
- [Ehrlich and Armero, 2005] Ehrlich, D. and Armero, F. (2005). Finite element methods for the analysis of softening plastic hinges in beams and frames. *Computational Mechanics*, 35(4) :237–264.
- [Fajfar et al., 2006] Fajfar, P., Dolšek, M., Marušić, D., and Stratani, A. (2006). Pre-and post-test mathematical modelling of a plan-asymmetric reinforced concrete frame building. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 35(11) :1359–1379.
- [Fléjou, 1993] Fléjou, J. (1993). *Comportement dynamique des structures de génie civil avec liaison semirigides*. PhD thesis, Université Paris VI.
- [Friedman and Kosmatka, 1993] Friedman, Z. and Kosmatka, J. B. (1993). An improved two-node Timoshenko beam Finite Element. *Computer & Structures*, 47(3) :473–481.
- [Germain, 1973] Germain, P. (1973). The method of virtual power in continuum mechanics. Part 2 : Microstructure. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 25(3) :556–575.
- [Geuzaine and Remacle, 2009] Geuzaine, C. and Remacle, J.-F. (2009). GMSH : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11) :1309–1331.
- [Giberson, 1967] Giberson, M. F. (1967). *The response of nonlinear multi-story structures subjected to earthquake excitation*. PhD thesis, California Institute of Technology.

- [Giry, 2011] Giry, C. (2011). *Modélisation objective de la localisation des déformations et de la fissuration dans les structures en béton armé*. PhD thesis, Université de Grenoble.
- [Grange, 2008] Grange, S. (2008). *Modélisation simplifiée 3D de l'interaction sol-structure : application au génie parasismique* Directeur de thèse : Jacky Mazars. PhD thesis, Institut polytechnique de grenoble.
- [Grange et al., 2011] Grange, S., Botrugno, L., Kotronis, P., and Tamagnini, C. (2011). The effects of Soil-Structure Interaction on a reinforced concrete viaduct. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 41(11) :1549–1568.
- [Grange et al., 2008] Grange, S., Kotronis, P., and Mazars, J. (2008). Numerical modelling of the seismic behaviour of a 7-story building : NEES benchmark. *Materials and Structures*, 42(10) :1433–1442.
- [Griffith, 1921] Griffith, A. A. (1921). The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 221(582-593) :163–198.
- [Guedes et al., 1994] Guedes, J., Pegon, P., and Pinto, A. V. (1994). A Fibre/Timoshenko beam element in Castem 2000. *Special publication Nr. I.94.31, Applied Mechanics Unit, Institute for Safety Technology, Joint Research Centre, Commission of the European Communities, I-21020 ISPRA (VA)*.
- [Halphen and Son, 1975] Halphen, B. and Son, N. Q. (1975). Sur les matériaux standards généralisés. *Journal de mécanique*, 14(1).
- [Hillerborg et al., 1976] Hillerborg, A., Modéer, M., and Petersson, P. E. (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6(6) :773–781.
- [Hjelmstad and Taciroglu, 2005] Hjelmstad, K. and Taciroglu, E. (2005). Variational basis of nonlinear flexibility methods for structural analysis of frames. *Journal of engineering mechanics*, 131(11) :1157–1169.
- [Huang, 2012] Huang, X. (2012). Applicability Criteria Of Fiber-Section Elements For The Modelling Of RC Columns Subjected To Cyclic Loading. Technical report, University of Toronto.
- [Ibrahimbegović, 2006] Ibrahimbegović, A. (2006). *Mécanique non linéaire des solides déformables : Formulation théorique et résolution par éléments finis*. Hermes science publ.
- [Ibrahimbegović et al., 2010] Ibrahimbegović, A., Boulkertous, A., Davenne, L., and Brancherie, D. (2010). Modelling of reinforced-concrete structures providing crack-spacing based on X-FEM , ED-FEM and novel operator split solution procedure. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 83(March) :452–481.
- [Ibrahimbegović and Brancherie, 2003] Ibrahimbegović, A. and Brancherie, D. (2003). Combined hardening and softening constitutive model of plasticity : Precursor to shear slip line failure. *Computational Mechanics*, 31(1-2 SPEC.) :88–100.
- [Ibrahimbegović and Frey, 1993] Ibrahimbegović, A. and Frey, F. (1993). Finite element analysis of linear and non-linear planar deformations of elastic initially curved beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36(19) :3239–3258.
- [Ibrahimbegović et al., 2007] Ibrahimbegović, A., Jehel, P., and Davenne, L. (2007). Coupled damage-plasticity constitutive model and direct stress interpolation. *Computational Mechanics*, 42(1) :1–11.
- [Ibrahimbegović et al., 1990] Ibrahimbegović, A., Taylor, R. L., and Wilson, E. L. (1990). A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom. *International Journal for ...*, 30(August 1989) :445–457.
- [Ibrahimbegović and Wilson, 1991a] Ibrahimbegović, A. and Wilson, E. L. (1991a). A modified method of incompatible modes. *Communications in Applied numerical methods*, 7 :187–194.
- [Ibrahimbegović and Wilson, 1991b] Ibrahimbegović, A. and Wilson, E. L. (1991b). Thick Shell and Solid Finite Elements with independent rotation fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31(January 1990) :1393–1414.
- [ICAB, 1991] ICAB, S. (1991). ICAB le Calcul de Structure.

- [Ile et al., 2008] Ile, N., Nguyen, X.-H., Kotronis, P., Mazars, J., and Reynouard, J. M. (2008). Shaking Table Tests of Lightly {RC} Walls : Numerical Simulations. *Journal of Earthquake Engineering*, 12(6) :849–978.
- [Irons and Razzaque, 1972] Irons, B. M. and Razzaque, A. (1972). Experience with the patch test for convergence of finite elements. *The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations*, 557.
- [Izzuddin, 1990] Izzuddin, B. A. (1990). *Nonlinear dynamic analysis of framed structures*. PhD thesis, Imperial College London (University of London).
- [Jehel, 2009] Jehel, P. (2009). *Modélisation numérique des phénomènes d’amortissement par dissipation d’énergie matérielle dans les structures de type portique en béton armé sous séisme*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- [Jirásek, 1998] Jirásek, M. (1998). Nonlocal models for damage and fracture : Comparison of approaches. *International Journal of Solids and Structures*, 35(31-32) :4133–4145.
- [Jirásek, 2000] Jirásek, M. (2000). Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188 :307–330.
- [Jirásek, 2002a] Jirásek, M. (2002a). Numerical modeling of strong discontinuities. *Revue Française de Génie Civil*, 6(6) :1133–1146.
- [Jirásek, 2002b] Jirásek, M. (2002b). Objective modeling of strain localization. *Revue Française de Génie Civil*, 6(6) :1119–1132.
- [Jirásek, 2004] Jirásek, M. (2004). Nonlocal damage mechanics with application to concrete. *Revue Française de Génie Civil*, 8(5-6) :683–707.
- [Jirásek and Belytschko, 2002] Jirásek, M. and Belytschko, T. B. (2002). Computational resolution of strong discontinuities. *Fifth world congress on computational mechanics*, pages 7–12.
- [Jirásek and Zimmermann, 2001] Jirásek, M. and Zimmermann, T. (2001). Embedded crack model : I. basic formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(6) :1269–1290.
- [Jouan, 2014] Jouan, G. (2014). *Modélisation numérique de la localisation des déformations dans le béton avec un modèle de second gradient*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes ; Université de Liège.
- [Jukić, 2013] Jukić, M. (2013). *Finite elements for modeling of localized failure in reinforced concrete*. PhD thesis, École normale supérieure de Cachan.
- [Jukić et al., 2012] Jukić, M., Brank, B., and Ibrahimbegović, A. (2012). Embedded discontinuity finite element formulation for failure analysis of planar reinforced concrete beams and frames. *Engineering Structures*, 50 :115–125.
- [Jukić et al., 2014] Jukić, M., Brank, B., and Ibrahimbegović, A. (2014). Failure analysis of reinforced concrete frames by beam finite element that combines damage, plasticity and embedded discontinuity. *Engineering Structures*, 75 :507–527.
- [Kishta, 2016] Kishta, E. (2016). *Modélisation par cinématique enrichie de la fissuration anisotrope des structures en béton armé (Application aux éléments bidimensionnels sous chargement cyclique)*. PhD thesis, Université Paris-Saclay.
- [Klaus-Jurgen Bathe, 1996] Klaus-Jurgen Bathe (1996). *Finite Element Procedures*.
- [Kotronis and Mazars, 2005] Kotronis, P. and Mazars, J. (2005). Simplified modelling strategies to simulate the dynamic behaviour of {R}/{C} walls. *Journal of Earthquake Engineering*, 9(2) :285–306.
- [Kotronis et al., 2005] Kotronis, P., Ragueneau, F., and Mazars, J. (2005). A simplified modelling strategy for R/C walls satisfying PS92 and EC8 design. *Engineering Structures*, 27(8) :1197–1208.
- [Kwak and Kim, 2010] Kwak, H. G. and Kim, S. P. (2010). Simplified monotonic moment-curvature relation considering fixed-end rotation and axial force effect. *Engineering Structures*, 32(1) :69–79.
- [Lasry and Belytschko, 1988] Lasry, D. and Belytschko, T. B. (1988). Localization limiters in transient problems. *International Journal of Solids and Structures*, 24(6) :581–597.

- [Lemaitre and Chaboche, 1990] Lemaitre, J. and Chaboche, J.-L. (1990). *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [Li, 2011] Li, J. (2011). A micromechanics-based strain gradient damage model for fracture prediction of brittle materials - Part I : Homogenization methodology and constitutive relations. *International Journal of Solids and Structures*, 48(24) :3336–3345.
- [Li et al., 2011] Li, J., Pham, T., Abdelmoula, R., Song, F., and Jiang, C. P. (2011). A micromechanics-based strain gradient damage model for fracture prediction of brittle materials - Part II : Damage modeling and numerical simulations. *International Journal of Solids and Structures*, 48(24) :3346–3358.
- [Linder and Armero, 2007] Linder, C. and Armero, F. (2007). Finite elements with embedded discontinuities for the modeling of failure in solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 72 :1391–1433.
- [Lotfi and Shing, 1995] Lotfi, H. R. and Shing, P. B. (1995). Embedded Representation of Fracture in Concrete With Mixed Finite Elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(July 1994) :1307–1325.
- [Marini and Spacone, 2006] Marini, A. and Spacone, E. (2006). Analysis of reinforced concrete elements including shear effects. *ACI Structural Journal*, 103(5) :645.
- [Mazars, 1986] Mazars, J. (1986). A description of micro- and macroscale damage of concrete structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 25(5-6) :729–737.
- [Mazars et al., 2014] Mazars, J., Hamon, F., and Grange, S. (2014). A new 3D damage model for concrete under monotonic, cyclic and dynamic loadings. *Materials and Structures*, pages 3779–3793.
- [Mazars et al., 2006] Mazars, J., Kotronis, P., Ragueneau, F., and Casaux, G. (2006). Using multifiber beams to account for shear and torsion. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(52) :7264–7281.
- [Melenk and Babuskab, 1996] Melenk, M. and Babuskab, I. (1996). The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139 :289–314.
- [Moës et al., 1999] Moës, N., Dolbow, J., and Belytschko, T. B. (1999). A Finite Element method for crack growth without remeshing. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 150(February) :131–150.
- [Monaghan et al., 1998] Monaghan, D. J., Doherty, I. W., Vourt, D. M., and Armstrong, C. G. (1998). Coupling 1D beams to 3D bodies. In *Proc. 7 th Int. Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories*.
- [Mosler, 2004] Mosler, J. (2004). On the modeling of highly localized deformations induced by material failure : The strong discontinuity approach. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 11(4) :389–446.
- [Mosler, 2005] Mosler, J. (2005). Numerical analyses of discontinuous material bifurcation : Strong and weak discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(9-11) :979–1000.
- [Mühlhaus and Alfantis, 1991] Mühlhaus, H. B. and Alfantis, E. C. (1991). A variational principle for gradient plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 28(7) :845–857.
- [Mukherjee et al., 2001] Mukherjee, S., Reddy, J. N., and Krishnamoorthy, C. S. (2001). Convergence properties and derivative extraction of the superconvergent Timoshenko beam finite element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(26-27) :3475–3500.
- [Navarro Gregori et al., 2007] Navarro Gregori, J., Miguel Sosa, P., Fernandez Prada, M. A., and Filippou, F. C. (2007). A 3D numerical model for reinforced and prestressed concrete elements subjected to combined axial, bending, shear and torsion loading. *Engineering Structures*, 29(12) :3404–3419.
- [Needleman, 1988] Needleman, A. (1988). Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 67(1) :69–85.

- [Nickel and Secor, 1972] Nickel, R. E. and Secor, G. a. (1972). Convergence of consistently derived Timoshenko beam finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 5(2) :243–252.
- [Nova and Montrasio, 1991] Nova, R. and Montrasio, L. (1991). Settlements of shallow foundations on sand. *Géotechnique*, 41(2) :243–256.
- [Oliver, 1995] Oliver, J. (1995). Continuum modelling of strong discontinuities in solid mechanics using damage models. *Computational Mechanics*, 17(1-2) :49–61.
- [Oliver, 1996] Oliver, J. (1996). Modelling Strong Discontinuities In Solid Mechanics Via Strain Softening Constitutive Equations. Part 1 : Fundamentals. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 39(January) :3575–3600.
- [Oliver, 2000] Oliver, J. (2000). On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations. *International Journal of Solids and Structures*, 37(48-50) :7207–7229.
- [Oliver et al., 2006] Oliver, J., a.E. Huespe, and Sánchez, P. (2006). A comparative study on finite elements for capturing strong discontinuities : E-FEM vs X-FEM. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(37-40) :4732–4752.
- [Oliver et al., 2012] Oliver, J., Huespe, A. E., and Dias, I. F. (2012). Strain localization, strong discontinuities and material fracture : Matches and mismatches. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 241-244 :323–336.
- [Oliver et al., 2002] Oliver, J., Huespe, a. E., Pulido, M. D. G., and Chaves, E. (2002). From continuum mechanics to fracture mechanics : The strong discontinuity approach. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(2) :113–136.
- [Ortiz, 1985] Ortiz, M. (1985). A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete.
- [Ortiz et al., 1987] Ortiz, M., Leroy, Y., and Needleman, A. (1987). A finite element method for localized failure analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 61(2) :189–214.
- [Otani, 1974] Otani, S. (1974). Inelastic analysis of R/C frame structures. *Journal of the Structural Division*, 100(7) :1433–1449.
- [Owen and Hinton, 1980a] Owen, D. R. and Hinton, E. (1980a). *Finite elements in plasticity*, volume 271. Pineridge Press Swansea.
- [Owen and Hinton, 1980b] Owen, D. R. J. and Hinton, E. (1980b). *Finite elements plasticity : Theory and Practice*. Pineridge Press Limited.
- [Pamin et al., 1999] Pamin, J., Askes, H., and de Borst, R. (1999). An element-free galerkin method for gradient plasticity. In *European Conference on Computational Mechanics–Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering, TU München*.
- [Peerlings et al., 1996a] Peerlings, R. H. J., Borst, R. D., Brekelmans, W. A. M., and de Vree, J. H. P. (1996a). Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(19) :3391–3403.
- [Peerlings et al., 1996b] Peerlings, R. H. J., de Borst, R., Brekelmans, W. A. M., de Vree, J. H. P., and Spee, I. (1996b). Somme observations on localisation in non-local abd gradient damage models. *European Journal of Mechanics A : Solids*, 15(6) :937–953.
- [Pegon, 1994] Pegon, P. (1994). A Timoshenko simple beam element in Castem 2000. *Special publication Nr. I.94.04, Applied Mechanics Unit, Institute for Safety Technology, Joint Research Centre, Commission of the European Communities, I-21020 ISPRA (VA), Italy*.
- [Petrangeli et al., 1999] Petrangeli, M., Pinto, P. E., and Ciampi, V. (1999). Fiber element for cyclic bending and shear of RC structures. I : Theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 125(9) :994–1001.
- [Pham et al., 2012] Pham, B. H., Brancherie, D., Davenne, L., and Ibrahimbegović, A. (2012). Stress-resultant models for ultimate load design of reinforced concrete frames and multi-scale parameter estimates. *Computational Mechanics*, 51(3) :347–360.

- [Pham et al., 2010] Pham, B. H., Davenne, L., Brancherie, D., and Ibrahimbegović, A. (2010). Stress resultant model for ultimate load design of reinforced-concrete frames : combined axial force and bending moment. *Computers & concrete*, 7(4) :303–315.
- [Pietruszczak and Mroz, 1981] Pietruszczak, S. and Mroz, Z. (1981). Finite Element Analysis of Deformation of Strain-Softening Material. *International Journal for Numerical . . .*, 17(July 1980) :327–334.
- [Pijaudier-Cabot and Bažant, 1987] Pijaudier-Cabot, G. and Bažant, Z. P. (1987). Nonlocal damage theory. *Journal of engineering mechanics*, 113(10) :1512–1533.
- [Pinho and Elnashai, 2000] Pinho, R. and Elnashai, A. (2000). Dynamic collapse testing of a full-scale four storey RC frame. *ISET Journal of Earthquake Technology*, 37(4) :143–163.
- [Pinto, 1996] Pinto, A. (1996). *Pseudo-dynamic testing of large-scale R/C bridges*. European Commission Joint Research Centre Institute for Systems, Informatics and Safety Applied Mechanics Unit ELSA Laboratory.
- [Ranzo and Petrangeli, 1988] Ranzo, G. and Petrangeli, M. (1988). A fibre finite beam element with section shear modelling for seismic analysis of RC structures. *Journal of earthquake engineering*, 2(03) :443–447.
- [Rasheed and Dinno, 1994] Rasheed, H. and Dinno, K. (1994). An efficient nonlinear analysis of RC sections. *Computers Structures*, 53(3) :613–623.
- [Read and Hegemier, 1985] Read, H. E. and Hegemier, G. A. (1985). Strain Softening of rock, soil and concrete - a review article. *Mechanics of Materials*, 3(1984) :271–294.
- [Reddy, 1997] Reddy, J. N. (1997). On locking-free shear deformable beam finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 149(1) :113–132.
- [Remmers et al., 2003] Remmers, J. J. C., de Borst, R., and Needleman, A. (2003). A cohesive segments method for the simulation of crack growth. *Computational Mechanics*, 31(1) :69–77.
- [Restrepo, 2006] Restrepo, J. (2006). Seven-story Building-slice Earthquake Blind Prediction Contest. *NEES@ UCSD*.
- [Rice, 1976] Rice, J. R. (1976). The localization of plastic deformation. *14th International Congress on Theoretical and Applied Mechanics*, pages 207–220.
- [Richard et al., 2016] Richard, B., Kishta, E., Giry, C., and Ragueneau, F. (2016). Strong discontinuity analysis of a class of anisotropic continuum damage constitutive models – Part I : Theoretical considerations. *Mechanics Research Communications*, In Press,(September).
- [Richard et al., 1999] Richard, N., Daudeville, L., and Davenne, L. (1999). Simulation par éléments finis de la réponse sismique de murs de contreventement de structures à ossature en bois. In *Association française du génie parasismique. Colloque national*, pages 574–582.
- [Roubin, 2013] Roubin, E. (2013). *Modélisation EF et morphologique de milieux hétérogènes à l’échelles mésoscopique : applications aux matériaux à mtrice cimentaire*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- [Roubin et al., 2015] Roubin, E., Vallade, A., Benkemoun, N., and Colliat, J. B. (2015). Multi-scale failure of heterogeneous materials : A double kinematics enhancement for Embedded Finite Element Method. *International Journal of Solids and Structures*, 52 :180–196.
- [Royer-Carfagni, 2001] Royer-Carfagni, G. (2001). Can a moment-curvature relationship describe the flexion of softening beams? *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 20(2) :253–276.
- [Saje et al., 2005] Saje, M., Planinc, I., and Bratina, S. (2005). Large displacements and instability of beam-like structural systems. *Engineering structures under extreme conditions : Multi-physics and multi-scale computer models in nonlinear analysis and optimal design*. Amsterdam, IOS Press, pages 329–350.
- [Saritas and Filippou, 2009] Saritas, A. and Filippou, F. C. (2009). Inelastic axial-flexure-shear coupling in a mixed formulation beam finite element. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 44(8) :913–922.

- [Saritas and Soydas, 2012] Saritas, A. and Soydas, O. (2012). Variational base and solution strategies for non-linear force-based beam finite elements. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 47(3) :54–64.
- [Scordelis, 1984] Scordelis, A. C. (1984). Computer models for nonlinear analysis of reinforced and prestressed concrete structures. *PCI Journal*, 29(6) :116–135.
- [Šćulac et al., 2014] Šćulac, P., Jelenić, G., and Škec, L. (2014). Kinematics of layered reinforced-concrete planar beam finite elements with embedded transversal cracking. *International Journal of Solids and Structures*, 51(1) :74–92.
- [Simo and Hughes, 1999] Simo, J. C. and Hughes, T. J. (1999). *Computational inelasticity*, volume 7. pringer Science & Business Media.
- [Simo and Ju, 1987a] Simo, J. C. and Ju, J. W. (1987a). Strain- and stress-based continuum damage models-I. Formulation. *International Journal of Solids and Structures*, 23(7) :821–840.
- [Simo and Ju, 1987b] Simo, J. C. and Ju, J. W. (1987b). Strain- and stress-based continuum damage models-II. Computational aspects. *International Journal of Solids and Structures*, 23(7) :841–869.
- [Simo and Oliver, 1994] Simo, J. C. and Oliver, J. (1994). A new approach to the analysis and simulation of strain softening in solids. *Fracture and damage in quasibrittle structures*, pages 25–39.
- [Simo et al., 1993] Simo, J. C., Oliver, J., and Armero, F. (1993). An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Computational Mechanics*, 12(5) :277–296.
- [Simo and Rifai, 1990] Simo, J. C. and Rifai, M. S. (1990). A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29(8) :1595–1638.
- [SINAPS@, 2013] SINAPS@ (2013). Séisme et Installations Nucléaires, Améliorer et Pérenniser la Sécurité. <http://www.institut-seism.fr/projets/sinaps/>.
- [Soleimani et al., 1979] Soleimani, D., Popov, E. P., and Bertero, V. V. (1979). Nonlinear beam model for R/C frame analysis. In *Electronic Computation*, pages 483–509.
- [Souza and Magalhães, 2000] Souza, D. and Magalhães, R. (2000). *Force-based finite element for large displacement inelastic analysis of frames*. PhD thesis, University of California, Berkeley.
- [Soydas and Saritas, 2013] Soydas, O. and Saritas, A. (2013). An accurate nonlinear 3d Timoshenko beam element based on Hu-Washizu functional. *International Journal of Mechanical Sciences*, 74 :1–14.
- [Spacone and Filippou, 1996] Spacone, E. and Filippou, F. C. (1996). Fiber Beam-Column model for non-linear analysis of R/C frames : PartI. Formulation. *Earthquake engineering and structural dynamics*, 25.
- [Spacone et al., 1996a] Spacone, E., Filippou, F. C., and Taucer, F. F. (1996a). Fiber beam-column model for non-linear analysis of RC frames : PartII. Applications. *Earthquake engineering and structural dynamics*, 25.
- [Spacone et al., 1996b] Spacone, E., Filippou, F. C., and Taucer, F. F. (1996b). Fibre beam-column model for non-linear analysis of R/C frames : Part I. formulation. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 25(7) :711–726.
- [Spacone and Limkatanyu, 2000] Spacone, E. and Limkatanyu, S. (2000). Response of RC members including bond-slip effects. *ACI Structural Journal*, 6 :831–839.
- [Stolarski and Belytschko, 1983] Stolarski, H. and Belytschko, T. B. (1983). Shear and membrane locking in cruved C0 elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 41 :279–296.
- [Strouboulis et al., 2000] Strouboulis, T., Babu, I., and Copps, K. (2000). The design and analysis of the Generalized Finite Element Method. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181 :43–69.
- [Takeda et al., 1970] Takeda, T., Sozen, M. A., and Nielsen, N. N. (1970). Reinforced concrete response to simulated earthquakes. *Journal of the Structural Division*, 96(12) :2557–2573.

- [Taucer et al., 1991] Taucer, F. F., Spacone, E., and Filippou, F. C. (1991). A fiber beam-column element for seismic response analysis of reinforced concrete structures. Technical report, Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, University of California Berkeley, California.
- [Taylor et al., 2003] Taylor, R. L., Filippou, F. C., Saritas, A., and Auricchio, F. (2003). A mixed finite element method for beam and frame problems. *Computational Mechanics*, 31(1-2) :192–203.
- [Taylor et al., 1986] Taylor, R. L., Simo, J. C., Zienkiewicz, O. C., and Chan, a. C. H. (1986). The patch test—a condition for assessing FEM convergence. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22(1) :39–62.
- [Tessler and Dong, 1981] Tessler, A. and Dong, S. B. (1981). On a hierarchy of conforming Timonshenko beam elements. *Computer & Structures*, 14(3) :335–344.
- [Thomas and Abbas, 1975] Thomas, J. and Abbas, B. A. H. (1975). Finite Element model for dynamic analysis of Timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration*, 41 :291–299.
- [Timoshenko, 1921] Timoshenko, S. P. (1921). On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 31 :744–746.
- [Triantafyllidis and Aifantis, 1986] Triantafyllidis, N. and Aifantis, E. C. (1986). A gradient approach to localization of deformation. I. Hyperelastic materials. *Journal of Elasticity*, 16(3) :225–237.
- [Vardoulakis, 1983] Vardoulakis, I. (1983). Rigid granular plasticity model and bifurcation in the triaxial test. *Acta Mechanica*, 49(1-2) :57–79.
- [Vardoulakis et al., 1978] Vardoulakis, I., Goldscheider, M., and Gudehus, G. (1978). Formation of Shear Bands in Sand Bodies As a Bifurcation Problem. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2(July 1977) :99–128.
- [Vecchio and Collins, 1986] Vecchio, F. J. and Collins, M. P. (1986). The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. *ACI Journal Proceedings*, 83(2) :219–231.
- [Vecchio and Collins, 1988] Vecchio, F. J. and Collins, M. P. (1988). Predicting the Response of Reinforced Concrete Beams Subjected to Shear Using Modified Compression Field Theory. *ACI Structural Journal*, 85(3) :258–268.
- [Vecchio and Emara, 1992] Vecchio, F. J. and Emara, M. B. (1992). Shear Deformation in Reinforced Concrete Frames.
- [Wawersik and Brace, 1971] Wawersik, W. R. and Brace, W. F. (1971). Post-failure behavior of a granite and diabase. *Rock Mechanics Felsmechanik Mécanique des Roches*, 3(2) :61–85.
- [Wells and Sluys, 2000] Wells, G. N. and Sluys, L. (2000). Application of embedded discontinuities for softening solids. *Engineering Fracture Mechanics*, 65(2-3) :263–281.
- [Wells and Sluys, 2001] Wells, G. N. and Sluys, L. J. (2001). A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(12) :2667–2682.
- [Wilson, 1974] Wilson, E. L. (1974). The static condensation algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 8(1) :198–203.
- [Yunhua, 1998] Yunhua, L. (1998). Explanation and elimination of shear locking and membrane locking with field consistence approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 162(1-4) :249–269.
- [Zhao, 2015] Zhao, Q. (2015). *Prise en compte des effets du cisaillement transverse dans un modèle de poutre par la méthode des développements asymptotiques*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes.
- [Zienkiewicz and Taylor, 2000] Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. (2000). *Finite Element Method - The Basis*. Butterworth-heinemann, Oxford.

Annexe A

Code Matlab

A.1 Introduction

Il convient de dire quelques mots sur le code éléments finis avec le quel les analyses, les développements et les applications ont été effectués. Ce code, développé initialement par Nathan Benkemoun dans Matlab, utilise dans sa version d'origine des éléments finis classiques 2D. Il permet de faire des calculs non-linéaires et il est inspiré des travaux de [Bonnet and Frangi, 2007]. Dans ce travail, l'objectif était d'y introduire tous les algorithmes nécessaires afin d'intégrer des éléments finis poutres (classiques ou multifibres). L'algorithme de Newmark a été également intégré pour la réalisation des études dynamiques. Le langage de Matlab offre un moyen simple pour développer et valider l'efficacité des modèles ainsi que des lois de comportement avant de les implémenter dans des codes éléments finis compilés. Cet outil permet de suivre facilement l'évolution du calcul à toutes les étapes permettant ainsi un accès aisé à toutes les variables décrivant le comportement de la structure étudiée.

Le principe de calcul est fondé sur deux discrétisations, une spatiale et une temporelle. En effet, la réponse d'une structure est évaluée sur plusieurs pas de temps discrets. Les équations d'équilibre doivent être respectées pour chaque pas de temps (ou pseudo-temps pour un calcul statique sans effet de vitesses). Ainsi, le caractère non-linéaire des équations nécessite l'utilisation d'une méthode numérique particulière, la méthode de Newton-Raphson. La solution est cherchée, pour un pas de temps, en plusieurs itérations k , afin d'assurer l'équilibre tout au long du calcul. Concernant la discrétisation spatiale, la structure est divisée en n éléments finis (poutres dans le cas de ce manuscrit). Les matrices de rigidité élémentaires ainsi que les vecteurs des forces internes nodales sont évalués en passant au niveau de chaque élément par le biais d'une boucle. Ces matrices/vecteurs dépendent directement du type de la formulation élément fini poutre utilisé mais aussi du choix des lois de comportement. Plusieurs méthodes d'intégration numériques peuvent être utilisées, comme par exemple la méthode d'intégration de Gauss. À chaque point d'intégration, le calcul des nouvelles valeurs des variables internes de la loi de comportement sont recherchées. L'algorithme de retour radial est adopté pour intégrer les modèles de comportement non linéaires et de déterminer l'état de contrainte de la section. Puis, une intégration le long de l'élément poutre est réalisée pour trouver la rigidité élémentaire et les forces nodales élémentaires. À la fin de chaque pas de temps, une procédure d'assemblage a lieu afin de vérifier l'équation d'équilibre globale. Si l'équilibre n'est vérifiée, une nouvelle itération k dans le même pas temps est nécessaire. Dans le cas contraire, la simulation poursuit le calcul en passant au pas de temps suivant.

A.2 Structure du code

Comme tous les codes éléments finis, le code est composé de trois grandes parties : la première concerne la définition du problème (géométrie, maillage, type d'éléments, conditions aux limites, type de chargement et propriétés des matériaux ainsi que les lois de comportement) ; la deuxième porte sur le traitement et la résolution du problème en termes d'évolution des variables (déplacements, déformations, contraintes, efforts aux nœuds...) ; et la troisième partie concerne le post-traitement, l'interprétation et

la visualisation des résultats.

A.2.1 Données du problème

Tout d'abord, le problème à résoudre doit être défini. La géométrie et le maillage de la structure peuvent être réalisés selon deux méthodes : (1) en utilisant le logiciel libre **GMSH** [Geuzaine and Remacle, 2009]. Ce dernier est entre autres un mailleur éléments finis 1D/2D/3D. Son objectif est de fournir un moyen rapide, léger et facile pour effectuer le maillage avec des entrées paramétriques permettant une visualisation avancée. Il s'articule autour de quatre modules : la géométrie, le maillage, le solveur et le post-traitement. (2) En utilisant un code développé dans Matlab, avec lequel l'utilisateur définit la géométrie et le maillage d'une structure poutre/portique, en précisant les coordonnées de principaux noeuds ainsi que la connectivité.

Ensuite, le problème est décrit dans un fichier de type *.inp* dans lequel on définit : le nom du fichier correspondant à la géométrie, le fichier du maillage du type (*.msh*), le type de calcul à réaliser (statique, cyclique ou dynamique), le type d'éléments finis à utiliser (1D/2D), la formulation éléments finis choisie, les lois de comportement et leurs paramètres, le type d'intégration numérique (méthode de Gauss/méthode de Gauss Labatto) et le type d'enrichissement cinématique. Enfin, les conditions aux limites telles que les degrés de liberté imposés nuls et non nuls ou encore les forces imposées sont également définies dans le fichier d'entrée.

A.2.2 Algorithme de résolution de Newton-Raphson

Le code éléments finis est dédié à réaliser des analyses non-linéaires. Pour cela, l'algorithme de Newton Raphson est adopté. En effet, le calcul est divisé en plusieurs pas de temps permettant la linéarisation des équations d'équilibre. Le principe est de séparer les degrés de liberté du problème en des valeurs connues (U_D) et des valeurs inconnues (U_L). Les valeurs connues sont celles imposées nulles ou non nulles, alors que les autres sont les valeurs à déterminer par le calcul. Dans un premier temps, le code évalue la matrice de rigidité élastique globale (K^g) en assemblant les matrices de rigidités élastiques élémentaires avant toute réaction de la structure aux chargements appliqués. Cela permet de démarrer le calcul par une prédiction élastique. Après le passage sur tous les éléments constituant la structure, l'équilibre global est vérifié par la valeur du résidu (R) représentant la différence entre les efforts externes (F_{ext}) appliqués et les efforts internes (F_{int}) développés au sein du matériau de la structure. Si la valeur du résidu est inférieure à un certain critère de tolérance ($|R| < \varepsilon$), on passe au pas du temps suivant ($t + 1$); sinon, on reste dans le même pas de temps (t), en faisant une nouvelle itération k ($k + 1$). Par conséquent, la rigidité de la structure (K_g) ainsi que les nouveaux efforts internes sont à nouveau évalués. Parfois, le calcul de la matrice de raideur tangente qui représente la rigidité dégradée de la structure n'est pas aisé, provoque des instabilités numériques et des problèmes de convergences. Dans ce cas, on peut toujours continuer le calcul avec la matrice de raideur élastique ou modifiée, ce qui nécessite de réaliser plus d'itérations pour arriver à la convergence (figure (A.1)). Une fois le calcul convergé, une mise à jour des variables historiques est réalisée et les résultats intéressants sont stockés pour le post-traitement (par exemple les déplacements aux noeuds).

La procédure de linéarisation des équations d'équilibre ainsi que la procédure des calculs numériques à l'échelle de l'élément et de la structure sont abordées en détail dans le manuscrit. Des illustrations simplifiées des différents algorithmes sont présentées dans la section A.3. Les notations suivantes sont utilisées :

- e : élément
- g : global
- t : pas de temps
- k : itération
- l'indice L : degré de liberté libre à déterminer
- l'indice D : degré de liberté imposé
- U : vecteur déplacement
- F_{ext} : efforts externes
- F_{int} : efforts internes

- F_D : forces nodales équivalentes aux déplacements imposés
- F_S : efforts de la section
- K : matrice de rigidité

A.2.3 Post traitement

Le code possède une partie post-traitement permettant de visualiser n'importe quelle variable du problème, par exemple la déformée de la poutre, la réponse des sections situées aux points d'intégration, l'évolution de non-linéarité dans les sections, les contraintes et les déformations dans les fibres, les comportements cohésifs aux discontinuités etc.

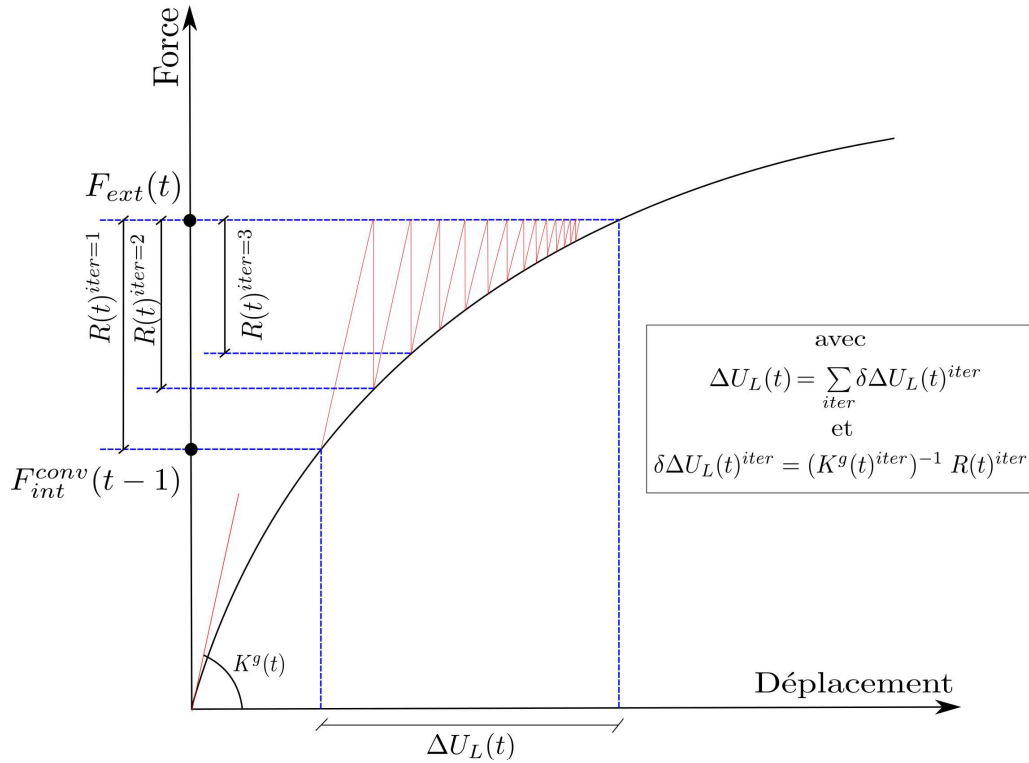


FIGURE A.1 – Méthode de Newton Raphson (illustration avec matrice de rigidité élastique)

A.3 Les différents algorithmes

A.3.1 Algorithme général du code

1. $K_g^{t,k} = K_g^{(0)}$ (Calcul initial de la matrice de rigidité élastique)
2. **Boucle de temps** $t = t + 1$.
 - (a) $R_g^{t,k} = F_{ext,g}^t - F_{int,g}^{t-1,kc} - F_{D,g}^{t-1,kc} \Delta t$ (où kc est le numéro d'itération de convergence du pas précédent)
 - (b) $\Delta U_{D,g}^t = U_{D,g} \Delta t$
 - (c) **Boucle tant que** $|R| < \varepsilon$, **avec** $k = k + 1$
 - i. $\Delta U_{L,g}^{t,k} = \Delta U_{L,g}^{t,k-1} - inv(K_g^{t,k-1}) R_g^{t,k-1}$
 - ii. $\Delta U_g^{t,k} = \begin{bmatrix} \Delta U_{L,g}^{t,k} \\ \Delta U_{D,g}^t \end{bmatrix}$
 - iii. **Boucle sur les éléments** $e = e + 1$
 - A. Intégration des modèles de comportement.
 - B. $K_e^{t,k} = \begin{bmatrix} K_{LL,e}^{t,k} & K_{LD,e}^{t,k} \\ K_{DL,e}^{t,k} & K_{DD,e}^{t,k} \end{bmatrix}$
 - C. $F_{int,e}^{t,k} = \int_0^L B^T F_S^{t,k} dx = \begin{bmatrix} F_{int,L,e}^{t,k} \\ F_{int,D,e}^{t,k} \end{bmatrix}$
 - D. $F_{D,e}^{t,k} = K_{LD,e} U_{D,e}$
 - iv. **Assemblage**
 - A. $K_g^{t,k} = \bigvee_{e=1}^{n_{elm}} K_{LL,e}^{t,k}$
 - B. $F_{D,g}^{t,k} = \bigvee_{e=1}^{n_{elm}} F_{D,e}^{t,k}$
 - C. $F_{int,L,g}^{t,k} = \bigvee_{e=1}^{n_{elm}} F_{int,L,e}^{t,k}$
 - v. $R_g^{t,k} = F_{ext,g}^t - F_{int,g}^{t,k}$
 - (d) $U_g^t = U_g^{t-1} + \Delta U_g^{t,kc}$ (mise à jour de l'incrément)

FIGURE A.2 – Algorithme général du code

A.3.2 Algorithme d'intégration du modèle de comportement continu élasto-plastique

1. Boucle sur les points d'intégration de l'élément

(a) Prédiction élastiques

- i. $\bar{\varepsilon}_{t+1}^{p,trial} = \bar{\varepsilon}_t^p$
- ii. $\bar{\xi}_{t+1}^{trial} = \bar{\xi}_t$
- iii. $F_{t+1}^{trial} = E_s \left[\bar{\varepsilon} \left(d_{e,t+1}^{(k-1)}, \bar{d}_{e,t+1}^{i,(k-1)} \right) - \bar{\varepsilon}_{t+1}^{p,trial} \right]$
- iv. $\bar{q}_{t+1}^{trial} = -H \bar{\xi}_{t+1}^{trial}$
- v. $\bar{\phi}_{t+1}^{trial} = |F_{t+1}^{trial}| - (\sigma_y - \bar{q}_{t+1}^{trial}) \leq 0$

(b) Correction des prédictions (si $\bar{\phi}_{t+1}^{trial} > 0$)

- i. $\bar{\gamma}_{t+1} = \frac{\bar{\phi}_{t+1}^{trial}}{E_s + H}$
 - ii. $\bar{\varepsilon}_{t+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p + \bar{\gamma}_{t+1} \text{sign}(F_{t+1}^{trial})$
 - iii. $\bar{\xi}_{t+1} = \bar{\xi}_n + \bar{\gamma}_{t+1}$
 - iv. $F_{t+1} = F_{t+1}^{trial} - \bar{\gamma}_{t+1} E_s \text{sign}(F_{t+1})$
2. $C_{t+1} = - \int_0^L \bar{G}_v^T(x) F_{t+1}(x) dx = - \frac{L}{2} \sum_{pg}^{npg} \bar{G}_v^T(x_{pg}) F_{t+1}(x_{pg}) w(x_{pg})$
 3. $\bar{\phi}_{t+1} = |C_{t+1}| - \sigma_u$
 4. **Pour le cas où $\bar{\phi}(C_{t+1}, \bar{q}_{t+1}) > 0$**
 - Rejeter les valeurs évoluées des variables internes associées au modèle continu.
 - Intégration du modèle cohésif associé (A.4)

FIGURE A.3 – Intégration du modèle de comportement continu élasto-plastique (voir 4.8.2.1)

A.3.3 Algorithme d'intégration du modèle de comportement cohésif associé au modèle élasto-plastique

1. Prédiction élastiques

$$(a) \bar{d}_{t+1}^{trial} = \bar{d}_t$$

$$(b) \bar{\xi}_{t+1}^{trial} = \bar{\xi}_t$$

$$(c) \bar{q}_{t+1}^{trial} = \bar{q}_t$$

2. Boucle sur les points d'intégration de l'élément

$$\bullet F_{t+1}^{trial}(x_{pg}) = E_s(x_{pg}) \left(B(x_{pg}) d_{e,t+1}^{(k-1)} + \bar{G}(x_{pg}) \bar{d}_{t+1}^{trial} - \bar{\varepsilon}_t^p \right)$$

$$3. C_{t+1}^{trial} = -\frac{L}{2} \sum_{pg} \bar{G}_v^T(x_{pg}) F_{t+1}^{trial}(x_{pg}) w(x_{pg})$$

$$4. \bar{\phi}_{t+1}^{trial} = |C_{t+1}^{trial}| - (\sigma_u - \bar{q}_{t+1}^{trial})$$

5. Correction des prédictions (si $\bar{\phi}_{t+1}^{trial} > 0$)

$$(a) \Delta \bar{\gamma} = \frac{\bar{\phi}_{t+1}^{trial}}{-\bar{G}E_s + S} \text{ si } \bar{q}_t < \sigma_u$$

$$(b) \bar{d}_{t+1} = \bar{d}_t + \Delta \bar{\gamma} \text{sign}(C_{t+1}^{trial})$$

$$(c) \bar{\xi}_{t+1} = \bar{\xi}_t + \Delta \bar{\gamma}$$

$$(d) C_{t+1} = C_{t+1}^{trial} - E_m \Delta \bar{\gamma} \text{sign}(C_{t+1}^{trial})$$

6. Rupture complète au niveau de la discontinuité (si $\bar{q}_{t+1}^{test} > \sigma_u$)

$$(a) \bar{q}_{t+1} = \sigma_u$$

$$(b) \Delta \bar{\gamma} = \frac{|C_{t+1}^{trial}|}{-\bar{G}E_s}$$

$$(c) C_{t+1} = 0$$

$$(d) \bar{\xi}_{t+1} \text{ et } \bar{d}_{t+1} \text{ mêmes ci-dessus.}$$

FIGURE A.4 – Intégration du modèle de comportement cohésif associé au modèle élasto-plastique (voir [4.8.2.2](#))

A.3.4 Algorithme d'intégration du modèle de comportement continu d'endommagement

1. Boucle sur les points d'intégration de l'élément

(a) Prédiction élastiques

- i. $\bar{D}_{t+1}^{trial} = \bar{D}_t$
- ii. $\bar{\xi}_{t+1}^{trial} = \bar{\xi}_t$
- iii. $\sigma_{t+1}^{trial} = \bar{D}_{t+1}^{-1, trial} \varepsilon_{t+1}$
- iv. $\bar{q}_{t+1}^{trial} = -H_b \bar{\xi}_{t+1}^{trial}$
- v. $\bar{\phi}_t^{trial} = |\sigma_{t+1}^{trial}| - (\sigma_{yb} - \bar{q}_{t+1}^{trial})$

(b) Correction des prédictions (si $\bar{\phi}_t^{trial} > 0$)

- i. $\bar{\gamma}_{t+1} = \frac{\bar{\phi}_t^{trial}}{\bar{D}_t^{-1} + H_b}$
 - ii. $\bar{\xi}_{t+1} = \bar{\xi}_t + \bar{\gamma}_{t+1}$
 - iii. $\bar{D}_{t+1} = \bar{D}_t + \frac{\bar{\gamma}_{t+1}}{sign(\sigma_{t+1}^{trial})}$
 - iv. $\sigma_{t+1} = \sigma_{t+1}^{trial} - \bar{\gamma}_{t+1} \bar{D}_t^{-1} sign(\sigma_{t+1}^{trial})$
2. $C_{t+1}^f = -\frac{L}{2} \sum_{pg}^{npg} \bar{G}_v(x_{pg}) \sigma_{t+1}^f(x_{pg}) w(x_{pg})$
 3. $\bar{\bar{\phi}} = C_{t+1}^f$
 4. **Pour le cas où $\bar{\bar{\phi}} > 0$**
 - Rejeter les valeurs évoluées des variables internes associées au modèle continu.
 - Intégration du modèle cohésif associé (A.6).

FIGURE A.5 – Intégration du modèle de comportement continu d'endommagement (voir 5.5.2.1)

A.3.5 Algorithme d'intégration du modèle de comportement cohésif associé au modèle d'endommagement

1. Prédiction élastiques

- (a) $\bar{\bar{D}}_{t+1}^{test} = \bar{\bar{D}}_t$
- (b) $\bar{\bar{\xi}}_{t+1}^{test} = \bar{\bar{\xi}}_t$
- (c) $\bar{\bar{u}}_{t+1}^{test} = \bar{\bar{D}}_t C_{t+1}^{f,test}$
- (d) $C_0^f = - \int_{\Omega_f} \bar{G}_v^T \bar{D}_t^{(-1)} B^f d_{t+1} d\Omega_f$
- (e) $C_{t+1}^{f,test} = \frac{C_0^f}{1 + D_m \bar{\bar{D}}_t}$
- (f) $\bar{\bar{q}}_{t+1}^{test} = -S \bar{\bar{\xi}}_{t+1}^{test}$
- (g) $\bar{\bar{\phi}}_{t+1}^{trial} = |C_{t+1}^{f,test}| - (\sigma_u - \bar{\bar{q}}_{t+1}^{test})$

2. Correction des prédictions (si $\bar{\bar{\phi}}_{t+1}^{trial} > 0$)

- (a) $\Delta \bar{\bar{\gamma}} = \bar{\bar{\phi}}_{t+1}^{trial} \frac{D_m \bar{\bar{D}}_t + 1}{D_m + S}$
- (b) $\bar{\bar{\xi}}_{t+1} = \bar{\bar{\xi}}_t + \Delta \bar{\bar{\gamma}}$
- (c) $C_{t+1}^f = (\sigma_u + S \bar{\bar{\xi}}_{t+1}) \text{sign}(C_{t+1}^f)$
- (d) $\bar{\bar{u}}_{t+1} = \frac{C_0^f - C_{t+1}^f}{D_m}$
- (e) $\bar{\bar{D}}_{t+1} = \frac{\bar{\bar{u}}_{t+1}}{C_{t+1}^f}$

3. Rupture complète au niveau de la discontinuité (si $\bar{\bar{q}}_{t+1}^{test} > \sigma_u$)

- (a) $\bar{\bar{q}}_{t+1}^{test} = \sigma_u$
- (b) $C_{t+1}^f = 0$
- (c) $\bar{\bar{u}}_{t+1} = \frac{C_0^f}{D_m} + \bar{\bar{u}}_t$

FIGURE A.6 – Intégration du modèle de comportement cohésif associé au modèle d'endommagement (voir 5.5.2.2)

A.3.6 Algorithme d'intégration du modèle de comportement cohésif associé au modèle élasto-plastique pour le modèle à plusieurs discontinuités par fibre

1. Prédictions élastiques

$$(a) \quad C_{t+1}^{f,(1),trial} = E(\mathbf{B}^f(x_1, y) \mathbf{d}_{e,t+1} + \bar{G}_r^{(1)}(x_1) \bar{u}_t(x_1) + \bar{G}_r^{(2)}(x_1) \bar{u}_t(x_2) - \varepsilon_t^p(x_1))$$

$$(b) \quad C_{t+1}^{f,(2),trial} = E(\mathbf{B}^f(x_2, y) \mathbf{d}_{e,t+1} + \bar{G}_r^{(1)}(x_2) \bar{u}_t(x_1) + \bar{G}_r^{(2)}(x_2) \bar{u}_t(x_2) - \varepsilon_t^p(x_2))$$

$$(c) \quad \bar{\phi}_{t+1}^{f,(1),trial} = |C_{t+1}^{f,(1),trial}| - \left(\sigma_u - \bar{q}_{t+1}^{f,(2),trial} \right)$$

$$(d) \quad \bar{\phi}_{t+1}^{f,(2),trial} = |C_{t+1}^{f,(2),trial}| - \left(\sigma_u - \bar{q}_{t+1}^{f,(1),trial} \right)$$

2. Deux discontinuités actives par fibre ($\bar{\phi}_{t+1}^{f,(1),trial} > 0$ et $\bar{\phi}_{t+1}^{f,(2),trial} > 0$)

$$(a) \quad \Delta \bar{\gamma}(x_1) \text{ et } \Delta \bar{\gamma}(x_2) \text{ à partir de l'équation (6.53)}$$

$$(b) \quad \bar{u}_{t+1}(x_1) = \bar{u}_t(x_1) + \Delta \bar{\gamma}(x_1) \text{sign}(C_{t+1}^{f,(1),trial})$$

$$(c) \quad \bar{u}_{t+1}(x_2) = \bar{u}_t(x_2) + \Delta \bar{\gamma}(x_2) \text{sign}(C_{t+1}^{f,(2),trial})$$

$$(d) \quad \bar{\xi}_{t+1}(x_1) = \bar{\xi}_t(x_1) + \Delta \bar{\gamma}(x_1)$$

$$(e) \quad \bar{\xi}_{t+1}(x_2) = \bar{\xi}_t(x_2) + \Delta \bar{\gamma}(x_2)$$

$$(f) \quad C_{t+1}^{f,(1)} = \sigma_{t+1}^{trial}(x_1) + E \bar{G}_r^{(1)}(x_1) \Delta \bar{\gamma}(x_1) s(x_1) + E \bar{G}_r^{(2)}(x_1) \Delta \bar{\gamma}(x_2) s(x_2)$$

$$(g) \quad C_{t+1}^{f,(2)} = \sigma_{t+1}^{trial}(x_2) + E \bar{G}_r^{(1)}(x_2) \Delta \bar{\gamma}(x_1) s(x_1) + E \bar{G}_r^{(2)}(x_2) \Delta \bar{\gamma}(x_2) s(x_2)$$

3. Rupture complète au niveau des deux discontinuités ($\bar{q}_{t+1}^{f,(1),trial} > \sigma_u$ et $\bar{q}_{t+1}^{f,(2),trial} > \sigma_u$)

$$(a) \quad \Delta \bar{\gamma}(x_1) \text{ et } \Delta \bar{\gamma}(x_2) \text{ à partir de l'équation (6.55)}$$

$$(b) \quad C_{t+1}^{f,(1)} = 0 \text{ et } C_{t+1}^{f,(2)} = 0$$

$$(c) \quad \bar{\xi}_{t+1}(x_1), \bar{\xi}_{t+1}(x_2), \bar{u}_{t+1}(x_1) \text{ et } \bar{u}_{t+1}(x_2) \text{ comme ci-dessus.}$$

4. Rupture complète au niveau d'une seule discontinuité

$$(a) \quad \Delta \bar{\gamma}(x_1) \text{ et } \Delta \bar{\gamma}(x_2) \text{ (voir équation (6.58))}$$

FIGURE A.7 – Intégration du modèle de comportement cohésif associé au modèle élasto-plastique pour le modèle à plusieurs discontinuités par fibre (voir 6.5.2)

A.3.7 Algorithme d'intégration du modèle de comportement cohésif associé au modèle d'endommagement pour le modèle à plusieurs discontinuités par fibre

1. Prédiction élastiques

(a) $\sigma_{t+1}^{trial}(x_1)$ et $\sigma_{t+1}^{trial}(x_2)$ (voir équation (6.63))

(b) $\bar{\phi}_{t+1}^{trial}(x_1)$ et $\bar{\phi}_{t+1}^{trial}(x_2)$ (voir équation (6.64))

2. Deux discontinuités actives par fibre ($\bar{\phi}_{t+1}^{trial}(x_1) > 0$ et $\bar{\phi}_{t+1}^{trial}(x_2) > 0$)

(a) $\Delta\bar{\gamma}(x_1)$ et $\Delta\bar{\gamma}(x_2)$ (voir équation (6.72))

(b) $\sigma_{t+1}(x_1)$ et $\sigma_{t+1}(x_2)$ (voir équation (6.68))

(c) $\bar{\xi}_{t+1}(x_1) = \bar{\xi}_t(x_1) + \Delta\bar{\gamma}(x_1)$

(d) $\bar{\xi}_{t+1}(x_2) = \bar{\xi}_t(x_2) + \Delta\bar{\gamma}(x_2)$

(e) $\bar{u}_{max}(x_1) = \bar{D}_t(x_1) (\sigma_u + S\bar{\xi}_t(x_1))$

(f) $\bar{u}_{max}(x_2) = \bar{D}_t(x_2) (\sigma_u + S\bar{\xi}_t(x_2))$

(g) $\bar{u}_{t+1}(x_1) = (\bar{u}_{max}(x_1) + \Delta\bar{\gamma}(x_1)) \text{sign}(\sigma_{t+1}(x_1))$

(h) $\bar{u}_{t+1}(x_2) = (\bar{u}_{max}(x_2) + \Delta\bar{\gamma}(x_2)) \text{sign}(\sigma_{t+1}(x_2))$

(i) $\bar{D}_{t+1}(x_1) = \frac{(\bar{u}_{max}(x_1) + \Delta\bar{\gamma}(x_1))}{\sigma_u + S\bar{\xi}_{t+1}(x_1)}$

(j) $\bar{D}_{t+1}(x_2) = \frac{(\bar{u}_{max}(x_2) + \Delta\bar{\gamma}(x_2))}{\sigma_u + S\bar{\xi}_{t+1}(x_2)}$

3. Rupture complète au niveau des deux discontinuités ($\bar{q}_{t+1}^{f,(1),trial} > \sigma_u$ et $\bar{q}_{t+1}^{f,(2),trial} > \sigma_u$)

(a) $\Delta\bar{\gamma}(x_1)$ et $\Delta\bar{\gamma}(x_2)$ (voir équation (6.74))

(b) $\sigma_{t+1}(x_1) = 0$ et $\sigma_{t+1}(x_2) = 0$

(c) $\bar{\xi}_{t+1}(x_1)$, $\bar{\xi}_{t+1}(x_2)$, $\bar{u}_{t+1}(x_1)$ et $\bar{u}_{t+1}(x_2)$ comme ci-dessus.

4. Rupture complète au niveau d'une seule discontinuité

(a) $\Delta\bar{\gamma}(x_1)$ et $\Delta\bar{\gamma}(x_2)$ (voir équation (6.79))

FIGURE A.8 – Intégration du modèle de comportement cohésif associé au modèle d'endommagement pour le modèle à plusieurs discontinuités par fibre (voir 6.5.3)

Annexe B

Classification des discontinuités selon Jirasek

Dans [Jirásek, 2000], l'auteur présente un cadre mathématique unifié et basé sur le principe variationnel de Hu-Washizu pour illustrer les différents types de discontinuités. Le principe est de considérer trois champs de déplacement u , de déformation ε et de contrainte σ complètement arbitraires et mutuellement indépendants. Ces trois champs sont définis dans un domaine V dont le bord est divisé en deux parties S_u et S_t , tel que les caractères prescrits u et t signifient le déplacement et la traction respectivement. L'équation variationnelle gouvernant ce système s'exprime par l'égalité variationnelle suivante :

$$\int_V \delta \varepsilon^T \tilde{\sigma}(\varepsilon) dV + \delta \int_V \sigma^T (\partial u - \varepsilon) dV = \int_V \delta u^T \bar{b} dV + \int_{S_t} \delta u^T \bar{t} dS \quad (\text{B.1})$$

Cette équation est valable pour toutes les variations admissibles, δu , $\delta \varepsilon$ et $\delta \sigma$. Notons que $\tilde{\sigma}(\varepsilon)$ est la contrainte issue de la déformation ε à travers une relation de comportement. ∂ est l'opérateur cinématique qui transforme les déplacements en déformations, \bar{b} est la force volumique et \bar{t} la force surfacique de traction.

Les trois champs sont discrétisés indépendamment, ils sont interpolés en utilisant des fonctions de forme selon les équations suivantes :

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{N}\mathbf{d} + \mathbf{N}_c\mathbf{d}_c \\ \varepsilon &= \mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{e} \\ \sigma &= \mathbf{S}\mathbf{s} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

avec \mathbf{N} la matrice contenant les fonctions d'interpolation des champs de déplacements et \mathbf{B} la matrice regroupant les fonctions d'interpolation des champs de déformations ($\partial \mathbf{N} = \mathbf{B}$). \mathbf{N}_c et \mathbf{G} sont respectivement les matrices contenant les termes d'enrichissement pour les déplacements et les déformations. \mathbf{S} est la matrice des fonctions d'interpolation des champs de contraintes. Enfin, \mathbf{d} , \mathbf{d}_c , \mathbf{e} et \mathbf{s} sont les vecteurs portant respectivement les déplacements nodaux, les déplacements additionnels, les déformations additionnelles et les contraintes additionnelles.

Les équations d'interpolation (B.2) sont introduites dans l'équation (B.1) en sachant que $\partial(\mathbf{N}\mathbf{d}) = \mathbf{B}\mathbf{d}$. Par conséquent, en tenant compte du fait que les variables $(\delta \mathbf{d}, \delta \mathbf{d}_c, \delta \mathbf{e}, \delta \mathbf{s})$ sont indépendantes et en supposant que le chargement est appliqué en dehors de la région où la cinématique est enrichie, on

obtient les équations discrétisées suivantes :

$$\begin{aligned}
\int_V \mathbf{B}^T \tilde{\sigma}(\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{e}) dV &= \mathbf{f}_{ext} \\
\int_V \mathbf{G}^T \tilde{\sigma}(\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{e}) dV - \int_V \mathbf{G}^T \mathbf{S} dV \mathbf{s} &= 0 \\
\int_S \mathbf{S}^T \mathbf{B}_c dV \mathbf{d}_c - \int_V \mathbf{S}^T \mathbf{G} dV \mathbf{e} &= 0 \\
\int \mathbf{B}_c^T \mathbf{S} dV \mathbf{s} &= 0
\end{aligned} \tag{B.3}$$

avec \mathbf{f}_{ext} le vecteur des forces externes :

$$\mathbf{f}_{ext} = \int_V \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} dV + \int_{S_t} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dS \tag{B.4}$$

et \mathbf{B}_c la matrice des dérivées des fonctions d'interpolation de déplacements telle que $\partial(\mathbf{N}_c \mathbf{d}) = \mathbf{B}_c d$. En tenant compte que :

$$\dot{\tilde{\sigma}} = \mathbf{D} \dot{\varepsilon} = D(\mathbf{B} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{G} \dot{\mathbf{e}}) \tag{B.5}$$

avec $\mathbf{D} = \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \varepsilon}$ la matrice tangente anélastique, les équations du système (B.3) sont différenciées par rapport au temps pour fournir le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV & \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{G} dV & 0 & 0 \\ \int_V \mathbf{G}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV & \int_V \mathbf{G}^T \mathbf{D} \mathbf{G} dV & -\mathbf{G}^T \mathbf{S} & 0 \\ 0 & -\mathbf{S}^T \mathbf{G} & 0 & \mathbf{S}^T \mathbf{B}_c \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_c^T \mathbf{S} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \dot{\mathbf{e}} \\ \dot{\mathbf{s}} \\ \dot{\mathbf{d}}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{f}}_{ext} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{B.6}$$

A partir du système matriciel (B.6) et selon le choix d'enrichissement, trois types d'enrichissement peuvent être développés.

B.1 Types d'enrichissement

Statically Optimal Symmetric (SOS)

Le champ de déplacement est supposé continu sans enrichissement. Autrement dit, les termes additionnels ($\mathbf{N}_c \mathbf{d}_c$) sont supprimés et par conséquent seulement le champ de déformation est enrichi. Ainsi, les termes correspondants à \mathbf{d}_c , \mathbf{N}_c et \mathbf{B}_c disparaissent de la formulation. Par ailleurs, afin de vérifier le patch test (vérifier si l'élément est capable de reproduire un champ constant de contrainte) la matrice des fonctions d'interpolation de contrainte \mathbf{S} doit être égale à la matrice identité \mathbf{I} . Par conséquent, la matrice d'interpolation des déformations enrichies \mathbf{G} doit vérifier la condition suivante :

$$\int_V \mathbf{G} dV = 0 \tag{B.7}$$

L'ensemble de système (B.6) se réduit à :

$$\begin{bmatrix} \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV & \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{G} dV \\ \int_V \mathbf{G}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV & \int_V \mathbf{G}^T \mathbf{D} \mathbf{G} dV \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{f}}_{ext} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{B.8}$$

Cette technique permet d'assurer, tout le long de la surface de discontinuité, la continuité des tractions sous forme faible. C'est pourquoi la méthode est dite statique (*Statically*). De plus, puisque la matrice \mathbf{D} est symétrique, le système à résoudre (B.8) est symétrique.

Kinematically Optimal Symmetric (KOS)

Contrairement à la première technique, l'enrichissement n'affecte que le champ de déplacement pour la technique notée KOS. Par conséquent $\mathbf{e} = \mathbf{d}_c$ et $\mathbf{G} = \partial \mathbf{N}_c = \mathbf{B}_c$. Une compatibilité entre les champs de déplacements et les champs de déformations est donc obtenue. C'est pourquoi, la technique est dite cinématique (*Kinematically*). Enfin, un système similaire à celui de la technique (SOS) est obtenu :

$$\begin{bmatrix} \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV & \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{G} dV \\ \int_V \mathbf{G}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV & \int_V \mathbf{G}^T \mathbf{D} \mathbf{G} dV \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{ext} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

La différence entre (SOS) et (KOS) consiste à la méthode de construction de la fonction G : à partir de l'équation (B.7) pour la méthode (SOS) et en supposant que $\mathbf{G} = \mathbf{B}_c$ pour la méthode (KOS).

Statically and Kinematically Optimal Symmetric (SKOS)

Cette troisième technique présente un compromis entre les deux premières techniques [Simo and Oliver, 1994]. En effet, elle suppose que $\mathbf{G} = \mathbf{B}_c$ dans l'interpolation des déformations tandis que \mathbf{G}^T , dans la deuxième équation du système (B.3), est remplacée par \mathbf{G}^* qui est différent de \mathbf{B}_c mais qui vérifie l'équation (B.7). Le système se réduit alors à :

$$\begin{bmatrix} \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV & \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{G} dV \\ \int_V \mathbf{G}^* \mathbf{D} \mathbf{B} dV & \int_V \mathbf{G}^* \mathbf{D} \mathbf{G} dV \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{ext} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

La force de cette technique est de représenter proprement la statique et la cinématique, c'est pourquoi elle est dite statique et cinématique (*Statically and Kinematically*). Par conséquent, le système obtenu (B.10) n'est plus symétrique même si \mathbf{D} est toujours symétrique.

Thèse de Doctorat

Ibrahim BITAR

**Modélisation de la rupture dans les structures en béton armé
par des éléments finis poutres généralisées et multifibres**

**Modeling the failure of reinforced concrete structures using
generalized and multifiber finite elements beams**

Résumé

Cette thèse, réalisée dans le cadre du projet national SINAPS@, a pour objectif de développer des éléments finis poutres généralisées et multifibres capables de modéliser le comportement d'une structure en béton armé jusqu'à la rupture. La formulation poutre élément fini Timoshenko introduite par (Caillerie, et al., 2015) est choisie comme point de départ. Cette formulation est libre de blocage en cisaillement et utilise des fonctions de forme d'ordre élevé pour interpoler les champs de déplacement transversal et de rotation. La formulation de (Caillerie et al., 2015) est tout d'abord comparée avec d'autres formulations éléments finis poutres existantes dans la littérature et validée par des calculs linéaires et non linéaires. Un enrichissement cinématique du champ de déplacement axial est proposé pour améliorer la capacité de l'élément à reproduire l'interaction entre l'effort axial et le moment de flexion.

Afin de modéliser le comportement jusqu'à la rupture, la méthode des éléments finis intégrés est ensuite adoptée. Cette méthode consiste à enrichir la cinématique en introduisant une variable de discontinuité de déplacement pour reproduire la fissure. La technique est d'abord appliquée au niveau de la section puis au niveau des fibres et deux nouvelles formulations, une poutre Timoshenko généralisée et une poutre Timoshenko multifibres sont proposées. L'enrichissement cinématique du champ de déplacement permet à la fois de rendre la réponse globale d'une structure objective mais également de modéliser son comportement jusqu'à la rupture. La performance des nouveaux éléments est validée par des études numériques et par des comparaisons avec des résultats expérimentaux.

Mots-clés

Poutre ; Éléments finis ; Timoshenko ; Multifibres ; Béton armé ; Enrichissement ; Discontinuité ; E-FEM ; Fissuration ; Rupture

Abstract

This thesis, carried out within the framework of the French national project SINAPS@, aims to develop generalized and multifiber finite beam elements to simulate the behavior of reinforced concrete structures till failure. The Timoshenko finite element beam formulation introduced by (Caillerie, et al., 2015) is chosen as the starting point. This formulation is free of shear locking and uses high order shape functions to interpolate the transversal displacement and rotation fields. The formulation of (Caillerie et al., 2015) is first compared with other finite element beam formulations existing in the literature and validated for linear and non-linear calculations. A kinematic enhancement of the axial displacement field is proposed in order to improve the element's ability to reproduce the interaction between the axial force and flexural moment.

In order to model the behavior of a structure till failure, the embedded finite element method is adopted. This method consists in enhancing the kinematics by introducing a displacement discontinuity variable to reproduce the crack. The enhancement is first applied at the section level and then at the fiber level and thus two new formulations, a generalized Timoshenko beam and a multifiber Timoshenko beam, are proposed. The enhancement of the displacement field provides objective global responses and the ability to reproduce the structural behavior till failure. The performance of the new elements is validated by numerical studies and comparisons with experimental results.

Key Words

Beam ; Finite Element ; Timoshenko ; Multifiber ; Reinforced Concrete ; Enhancement ; Discontinuity ; E-FEM ; Crack ; Failure