



HAL
open science

Homogénéisation de Structures Discrètes en Élasticité et en Incrémental - Applications aux modélisations continues linéaires et non-linéaires de treillis quasi-périodiques.

Gabriel Pierre André Moreau

► **To cite this version:**

Gabriel Pierre André Moreau. Homogénéisation de Structures Discrètes en Élasticité et en Incrémental - Applications aux modélisations continues linéaires et non-linéaires de treillis quasi-périodiques.. Mécanique des structures [physics.class-ph]. Institut National Polytechnique de Grenoble, 1996. Français. NNT: . tel-01762234

HAL Id: tel-01762234

<https://theses.hal.science/tel-01762234>

Submitted on 9 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC0 - Public Domain Dedication 4.0 International License

THÈSE

présentée par

Gabriel MOREAU

Agrégé de Mécanique

pour obtenir le grade de **DOCTEUR**

de

L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

(Arrêté ministériel du 30 mars 1992)

Spécialité : **Mécanique**

HOMOGENÉISATION DE STRUCTURES DISCRÈTES

EN ÉLASTICITÉ ET EN INCRÉMENTAL

Applications aux modélisations continues linéaires et non-linéaires

de treillis quasi-périodiques

Date de soutenance : 15 janvier 1996

Composition du jury :

Pr.	A.	RAOULT	Présidente
Dr.	E.	SANCHEZ-PALENCIA	Rapporteurs
Pr.	O.	DÉBORDES	
Pr.	D.	CAILLERIE	Examineurs
Pr.	R.	CHAMBON	

Thèse préparée au sein du

Laboratoire SOLS, SOLIDES, STRUCTURES de GRENOBLE

Remerciements

Je voudrais ici remercier tous les membres du jury de l'attention qu'ils ont bien voulu porter à ce travail,

la Professeur A. RAOULT, pour la grande chaleur humaine qu'elle a partagé a chacune de nos rencontres et pour avoir présidé ce jury,

le Professeur E. SANCHEZ-PALENCIA et le Professeur O. DÉBORDES d'avoir accepté la charge de rapporteurs, et d'avoir donc pris du temps pour observer en détail mon travail par l'intermédiaire de ce mémoire,

le R. CHAMBON pour avoir accepté d'examiner mon mémoire et pour les discussions passionnantes que nous avons eu à propos des problèmes d'Intelligences Artificielles et de Chaos.

Je tiens à exprimer ma grande sympathie au Professeur Denis CAILLERIE qui a dirigé mes travaux pendant ces deux années. Profitant de ma nature indépendante, il m'a laissé développer mes travaux tout en sachant, dans les périodes difficiles, être à l'écoute de mes problèmes et m'aider à trouver des solutions.

Je voudrais rendre hommage à la mémoire de P. VERNA qui m'avait admirablement accueilli à grenoble et qui avait su, par son enthousiasme, m'intéresser à l'homogénéisation discrète.

Je ne peux pas oublier mes collègues du laboratoire qui m'ont tous très bien entourés et supportés — Christian, Hervé, Didier, Edith, Pierre, Mayeul, Laurent, Bébel, Damien, Fred, Serge, Philippe, Jean-François, Mahmoud, Dominique, Michel, Marc, Jack, Jean-Louis et les autres —.

Je pense à mes amis moniteurs avec lesquels nous avons tant partagé au Sappey et ailleurs — Patrice, Geneviève, Pascal, Florence, Valerie, Yves, Catherine, Eric, Véronique, Philippe, Abdelkrim, François —.

Mes plus beaux souvenirs vont à mes amis et à ma famille — Mes parents pour tous leurs dons et leur amour, mes sœurs et mon frère pour une enfance merveilleuse, mes neveux et nièces pour la vie qui renaît, Hervé Poirier pour nos découvertes du monde, Pierre Bourget pour les quatre cents coups, Sandrine de Marsilly pour une amitié pour toujours, Fred-Eric Olivé pour ses histoires et ses rires, Franck Socheleau pour les balades et les mots gentils, Nathalie Beauboucher pour un joli conte de fée, Marie-Paule Beauboucher pour toute sa gentillesse, Frederic Mérienne pour les suées au badminton, Christophe Didier pour toute sa disponibilité, Laurent Stolovitch pour les nombreuses discussions, Hervé Raynaud car il est le plus beau, il est amitié —.

Table des matières

Table des figures	3
I Introduction générale, présentation du problème, un cas simple	5
1 Introduction à l'homogénéisation, présentation	7
1.1 Liminaire	7
1.2 L'opérateur aux différences E et les systèmes d'équations aux différences finies .	9
1.3 Les méthodes d'homogénéisation	11
1.4 Présentation des travaux effectués	12
2 Modèle continu du treillis poutre plan en \mathcal{N} en élasticité linéaire	15
2.1 Description de l'étude	15
2.2 Modélisation du treillis poutre plan en \mathcal{N}	16
2.3 Développements asymptotiques	19
2.4 Identification des ordres de ϵ dans les équations d'équilibre	21
2.5 Résistance des matériaux, Équilibre d'une poutre droite	25
2.6 Identification des deux modèles de poutre	25
2.7 Conclusion	26
3 Modèle continu du treillis poutre en \mathcal{N} en grand déplacement	27
3.1 Description de l'étude	27
3.2 Modélisation du treillis poutre	28
3.3 Développements asymptotiques	30
3.4 Identification des ordres de ϵ dans les équations d'équilibre	32
3.5 Modèle et comportement du treillis poutre en \mathcal{N}	35
3.6 Modèle et comportement de treillis câble en \mathcal{N}	47
3.7 Conclusion	49
4 Modèle continu du treillis poutre plan en \mathcal{N} sous chargement incrémental fini	51
4.1 Description de l'étude	52
4.2 Modélisation du treillis poutre plan en \mathcal{N}	52
4.3 Développements asymptotiques	53
4.4 Identification des ordres de ϵ dans les équations d'équilibre	56
4.5 Modèle de poutre	58
4.6 Modèle de câble	58
4.7 Conclusion	59

II Méthodes des développements en doubles séries entières, application aux treillis poutres périodiques	61
5 Modélisation générale d'un treillis poutre et méthode d'homogénéisation	63
5.1 Modélisation et équilibre d'un treillis poutre	64
5.2 Solution analytique et méthode d'homogénéisation	69
6 Statique des treillis poutres par identification des modes	75
6.1 Double série entière et chargement polynomial	76
6.2 Modes compatibles et chargement exponentiel	97
6.3 Transformée en z et chargement concentré	108
7 Extension à d'autres types d'éléments, retour sur l'homogénéisation	115
7.1 Extension à un autre type d'élément, barre plane à nœuds rigides	115
7.2 À propos du chargement extérieur	118
7.3 Retour sur l'homogénéisation	120
III Méthode générale pour l'étude des treillis quasi-périodiques	123
8 Modèle macroscopique d'une structure discrète en élasticité linéaire	131
8.1 Description de l'étude	132
8.2 Modélisation de la structure, cas de la statique en élasticité linéaire	134
8.3 Analyse statique de la structure, modélisation continue du premier gradient . .	143
8.4 Analyse statique de la structure ; cas des structures minces	158
8.5 Analyse modale de la structure	168
8.6 Exemples	171
8.7 Conclusion	181
9 Modèle macroscopique d'une structure discrète en grand déplacement	183
9.1 Description de l'étude	184
9.2 Modélisation du treillis en grand déplacement	187
9.3 Modèle macroscopique du premier ordre	193
9.4 Modèle macroscopique du second ordre, application aux treillis élancés	196
9.5 Exemples	206
9.6 Conclusion	210
10 Modèle macroscopique d'une structure discrète en incrémental	211
10.1 Description de l'étude	212
10.2 Modélisation incrémentale tangente d'un treillis	213
10.3 Modèle macroscopique du premier gradient	218
10.4 Modèle macroscopique pour les treillis minces	224
10.5 Conclusion	232
11 Effets de bords, couches limites d'une structure discrète en élasticité linéaire	235
11.1 Description de l'étude	235
11.2 Couches limites dans un milieu continu	236
11.3 Couches limites dans une structure discrète	238
11.4 Conclusion	241
12 Conclusion générale et perspectives	243
Bibliographie	247

Table des figures

2.1	description du treillis poutre en \mathcal{N}	16
3.1	différentes conditions aux limites sur le treillis poutre plan en \mathcal{N} , premier mode de flambage	29
3.2	déplacement à l'ordre 1 fonction du déplacement macroscopique et de la géométrie	34
3.3	flambage d'Euler d'une poutre	41
3.4	premier mode de flambage d'Euler du treillis poutre plan en \mathcal{N} avec des conditions aux limites articulé/articulé	41
3.5	comparaison entre la RdM et la MEF	43
3.6	charge critique d'Euler pour différentes conditions aux limites	43
3.7	différents treillis poutre en \mathcal{N} ayant une charge critique d'Euler équivalente	45
3.8	influence du rapport des sections A^b/A^{h_1} sur la charge critique d'Euler P_c	46
3.9	influence de l'angle θ sur la charge critique d'Euler P_c	46
5.1	notation et numérotation	64
5.2	efforts extérieurs aux nœuds I et II	65
5.3	modélisation d'une barre	65
5.4	rotation de la matrice de rigidité d'un barre	66
5.5	treillis poutre en \mathcal{X}	68
5.6	passage macro-micro	70
5.7	normalisation de la longueur du treillis à 1	73
6.1	notion de RdM, torseur des inter-efforts	86
6.2	treillis poutre continue discrétisée	89
6.3	treillis poutre plan en \mathcal{N}	92
6.4	treillis poutre 3D en \mathcal{N} soumis à de la torsion	94
6.5	treillis poutre 3D en \mathcal{W} soumis à de la flexion	96
6.6	propriétés des différentes diagonales	96
6.7	conditions aux limites pour le treillis poutre plan à nœuds rigides en \mathcal{N}	97
6.8	structure à deux cellules	101
6.9	influence des déplacements sur l'encastrement	101
6.10	modes de déplacements statiques	107
6.11	chargement concentré en un nœud de la structure	108
6.12	espaces <i>réels</i> et <i>virtuels</i>	109
7.1	modélisation d'une barre à nœuds rigides	115
8.1	un treillis plaque périodique	133

8.2	premier mode propre de vibration d'un treillis plaque périodique calculé par la MEF	133
8.3	description et modélisation d'un treillis quasi-périodique	135
8.4	position des nœuds dans une cellule	138
8.5	tension dans une barre et chargement extérieur sur un nœud	141
8.6	équilibre d'un nœud du treillis	142
8.7	auto-équilibre de la cellule	144
8.8	espace macroscopique pour les déplacements	147
8.9	base covariante en un point du milieu continu	153
8.10	gouffre pour les déplacements	159
8.11	poutre plane en \mathcal{N}	172
8.12	premier mode propre de vibration du treillis membrane carré en \mathcal{X} de $20 * 20$ cellules	173
8.13	treillis membrane rectangle en \mathcal{X} non déformé de $10 * 20$ cellules	174
8.14	premier mode propre de vibration du treillis membrane rectangle en \mathcal{X} de $10 * 20$ cellules	176
8.15	premier mode propre de vibration de la membrane équivalente, maillage $10 * 20$. .	176
8.16	treillis plaque en \mathcal{X} de $10 * 10$ cellules en configuration initiale	178
8.17	premier mode propre de vibration du treillis plaque en \mathcal{X} de $15 * 15$ cellules avec des conditions aux limites encastées sur tout le pourtour	178
8.18	premier mode propre de vibration de la plaque équivalente avec des conditions aux limites encastées sur les bords, maillage $10 * 10$	179
9.1	homogénéisation discrète en grand déplacement	185
9.2	déplacement d'un nœud, position d'une barre	188
9.3	condition du gouffre pour les positions des nœuds	197
9.4	bases covariantes avant et après déformation	200
9.5	poutre plane en \mathcal{N}	206
10.1	homogénéisation discrète incrémentale tangente	214
10.2	vecteurs directeurs d'une barre	216
11.1	homogénéisation d'une plaque mince	237
11.2	variable lente, variable rapide	239

Partie I

Introduction générale, présentation
du problème, un cas simple

Chapitre 1

Introduction à l'homogénéisation, présentation

1.1 Liminaire

Cette étude concerne la recherche de modèles continus équivalents de structures discrètes périodiques ou quasi-périodiques, telles que des treillis élancés plans à nœuds articulés. Les treillis ont l'avantage d'avoir un bon rapport rigidité/masse, le caractère périodique et modulaire du treillis permet la réalisation des pièces en série ce qui diminue les coûts et facilite le transport. Ces structures ont de nombreuses applications dans le génie civil et sont envisagées pour l'ossature des futures stations orbitales.

Avant de rentrer dans le vif du sujet, Gleick dans un livre sur la théorie du chaos résume bien l'objectif de mon travail [27] : "Le choix est toujours le même. Soit vous rendez votre modèle plus complexe et plus fidèle à la réalité, soit vous le rendez plus simple et plus facile à manipuler. Seul un scientifique naïf peut penser que le modèle parfait est celui qui représente parfaitement la réalité. Un tel modèle aurait les mêmes inconvénients qu'un plan aussi grand et détaillé que la ville qu'il représente, un plan indiquant chaque parc, chaque rue, chaque bâtiment, chaque arbre, chaque poteau, chaque habitant, et chaque plan. Si un tel plan était possible, sa précision irait à l'encontre de sa destination première : généraliser et résumer. Les cartographes soulignent ces caractéristiques auprès de leurs clients. Quelles que soient leurs fonctions, les cartes et les modèles doivent tout autant simplifier le monde que le reproduire".

Dans un problème de déformation de treillis plaque périodique, la seule technique à notre disposition pour faire des simulations numériques est la Méthode des Éléments Finis (MEF)[5, 7], d'autres méthodes existent mais ne sont pas très répandues dans le calcul de structure (collocation, approximation diffuse. . .). Bien que très performante en générale, la MEF n'est pas toujours bien adaptée. En effet, elle ne prend pas en compte le caractère plaque du treillis et la périodicité de celui-ci. Les temps calcul peuvent devenir forts longs même sur les ordinateurs actuels. Cette limitation empêche alors toute optimisation de la structure. Par ailleurs, les erreurs numériques étant proportionnelles aux nombres d'opérations, celles-ci peuvent ne plus être négligeables. On se propose donc de bâtir une carte du treillis un peu moins précise que la MEF mais qui aura en son cœur la périodicité et

la notion de plaque pour les treillis plaques. Cette carte sera appelée le modèle continu équivalent. Pour les treillis ayant peu de cellules, donc peu périodique, notre modèle sera peu précis. Pour les treillis ayant un grand nombre de cellules, la précision sera bonne. On peut remarquer que pour les poutres, les plaques et les coques, des modèles continus spéciaux ont été créés depuis de nombreuses années [58] et sont encore recherchés de nos jours [12, 20]. Ils sont petit à petit intégrés dans la MEF sous forme d'éléments finis spéciaux [7]. En effet, pour une plaque mince, il est préférable d'utiliser un élément de plaque à quatre nœuds plutôt qu'un énorme assemblage d'éléments volumiques à huit nœuds. Les temps de calculs sont plus faibles et la précision meilleure. Il en est de même pour les treillis plaques.

L'obtention du milieu continu équivalent pour un treillis périodique est un problème qui a été beaucoup étudié en mécanique, notamment pour les treillis poutres. Des revues bibliographiques ont été faites sur le sujet par Abrate [1, 2, 3], par Noor [39] et dans les thèses de Verna et Tollenaere [60, 65], mes deux prédécesseurs au laboratoire. Mon objectif n'est pas ici de refaire une nouvelle revue bibliographique, celle de Verna est très complète et la thématique n'a pas énormément évolué depuis. Quatre techniques différentes existent pour obtenir le milieu continu équivalent à partir du treillis :

1. un milieu continu est posé *a priori* et le calage entre les caractéristiques de ce modèle et le treillis est fait par des tests numériques sur le treillis comportant une seule cellule [56, 57]. Cette approche est difficilement généralisable et se justifie par des calculs *a posteriori*. Cependant, elle peut se comprendre dans des problèmes non linéaires où les autres approches ne sont pas mises en œuvres,
2. un milieu continu est posé *a priori*. Une équivalence énergétique permet de caler les caractéristiques de ce modèle continu sur le treillis. C'est l'école la plus répandue [22, 37, 38, 63],
3. un opérateur aux différences E est introduit. Les équations d'équilibre du treillis périodique sont écrites sous forme d'équations aux différences finies. L'opérateur aux différences E permet de résoudre dans un premier temps ce système formellement, puis un développement en séries de Taylor de l'opérateur E donne un milieu continu équivalent pour le premier ordre [21, 46, 47, 48]. Cette technique a l'avantage de ne pas poser de milieu continu *a priori*. Cependant, pour des treillis complexes, le système formel devient difficile à résoudre,
4. une méthode d'homogénéisation est utilisée. Les équations d'équilibre du treillis périodique sont de nouveau écrites sous formes d'équations aux différences finies. Un petit paramètre ϵ est défini par l'inverse du nombre de cellule. Les inconnues du problème sont recherchées sous forme de développement asymptotique en puissance de ϵ et des développements en séries de Taylor sont introduits dans les équations d'équilibre. Le modèle continu est donné par le premier ordre en ϵ sans faire d'hypothèse *a priori* [13, 60, 65]. C'est la méthode que nous avons utilisée [14, 36]. Tollenaere a couplé la méthode d'homogénéisation et l'utilisation de l'opérateur aux différences E afin d'automatiser la résolution de la méthode d'homogénéisation [60]. Nous verrons dans cette thèse au chapitre 8 qu'une formulation variationnelle évite l'utilisation simultanée de ces deux méthodes [62].

Deux voies nous sont apparues intéressantes : l'opérateur aux différences E et la méthode d'homogénéisation.

1.2 L'opérateur aux différences E et les systèmes d'équations aux différences finies

Le premier à avoir employé l'opérateur aux différences E en mécanique est Dean en 1959 [21]. Puis Renton a développé la méthode dix années plus tard [46, 47]. Cependant, leurs travaux sont basés sur un livre du mathématicien Jordan de 1950 sur les équations aux différences finies [29]. En remontant la piste bibliographique, on trouve le livre de Milne-Thomson écrit en 1933, qui porte sur le même type d'équations et qui a l'avantage d'être plus général tout en étant très lisible [34]. Des propriétés sur les équations aux différences finies sont énoncées : existence et unicité de solution d'une équation aux différences finies, transformation d'un système d'équations aux différences finies du premier ordre en une seule équation aux différences d'un ordre plus élevé... , des propriétés assez semblables à celles des équations différentielles. Pour la résolution de ces systèmes, deux méthodes attirent notre attention : la méthode de Nörlund avec l'opérateur de sommation S et la méthode de Boole avec l'opérateur aux différences E .

- *La méthode avec l'opérateur de sommation S* a été introduite par Nörlund dans les années 1920 [40, 41]. Il s'agit d'une approche originale calquée sur l'opérateur d'intégration \int . A toute fonction continue f dérivable par rapport à x , on peut associer une dérivée $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ et une primitive ou intégrale première $\int f(x)dx$. De la même manière, une différence finie $\Delta_h f = f(x+h) - f(x)$ peut être définie ainsi que son *inverse* appelé somme de la fonction f et notée $Sf(x)\Delta_h x$. Des propriétés pour l'opérateur de sommation S sont énoncées, par exemple

$$\Delta_h S_c^x f(t)\Delta_h t = f(x), \quad (1.1)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \Delta_h f(x) = \frac{df(x)}{dx}. \quad (1.2)$$

Des tableaux donnant la somme des fonctions usuelles sont explicités dans [34]. A partir de ces résultats, une équation aux différences finies simple se résout à la main comme une équation différentielle. Il serait intéressant de voir comment se comporte cette méthode pour des systèmes d'équations ainsi que pour des équations aux différences à plusieurs variables (treillis plaques).

- *La méthode de l'opérateur aux différences E* est associée au nom de Boole d'après Milne-Thomson [34]. Nous n'avons pas été vérifier les travaux de Boole du XIX siècle. L'idée de base est assez simple. Plutôt que d'écrire les différences finies à l'aide de l'opérateur Δ_h , on définit l'opérateur E_h par

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x), \quad \iff \quad f(x+h) = E_h f(x) = (\Delta_h + 1)f(x). \quad (1.3)$$

Le système d'équations aux différences est alors un système linéaire en E_h qui se résout par les techniques d'analyse matricielle. La solution finale s'écrit en fonction

de E_h que l'on remplace alors par son développement de Taylor pour h petit.

$$\begin{aligned} E_h &= \Delta_h + 1, \\ &= 1 + h \frac{d}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3}{dx^3} + \dots \end{aligned} \tag{1.4}$$

L'inconvénient de cette méthode est d'être obligé de résoudre analytiquement un système car E_h est un opérateur formel. Par ailleurs, certains termes comme $E_h - 1$ ne sont pas inversibles en pratique, il faut donc transformer la solution finale en E_h pour éviter ce problème. La technique peut s'étendre aux systèmes d'équations aux différences à plusieurs dimensions (type plaques). Renton emploie cette méthode avec succès [48] et Tollenaere l'a couplée avec la méthode d'homogénéisation que nous allons voir à la section suivante [60].

De nos jours, les équations aux différences finies sont encore étudiées par les mathématiciens, même si l'effort est moins important que sur les équations aux dérivées partielles. La thèse de Barkatou en 1989 en est un témoin [8]. On y retrouve les références à Milne-Thomson et à Nörlund [34, 40, 41]. Plusieurs méthodes sont présentées dans ce mémoire de thèse, dont :

- *la méthode de Ramis* où la transformation de Pincherle est appliquée aux équations aux différences linéaires à coefficients polynomiaux. La transformée formelle de Pincherle est très proche de la transformée en z [42] et elle est définie par

$$f(s) = \int_{\gamma} x^{-s-1} f(x) dx, \tag{1.5}$$

où γ est un chemin rectifiable. D'après Barkatou, "cette transformation permet d'établir une correspondance entre les équations aux différences algébriques linéaires et homogènes et les équations différentielles algébriques linéaires et homogènes" [8]. Cependant, cette méthode ne s'applique pas aux systèmes d'équations,

- *la méthode du vecteur cyclique*. il s'agit de réduire un système linéaire de n équations linéaires à une seule équation linéaire d'ordre n par la méthode de Birkhoff et du vecteur cyclique. De l'avis même de l'auteur : "Du point de vue théorique l'intérêt de la méthode est évident. Elle permet de transporter sur un système aux différences les notions applicables aux équations aux différences scalaires. Cependant du point de vue pratique, elle semble assez lourde et coûteuse !" [8].
- *la méthode des séries de factorielles*. Les séries de factorielles présente un grand intérêt pour les équations aux différences, en effet, elles sont définies par :

$$\left\{ \begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^{-[k]}, \\ x^{-[0]} &= 1, \\ x^{-[k]} &= \frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+k-1)}, \\ \Delta f(x) = f(x+1) - f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} -k f_k x^{-[k+1]}. \end{aligned} \right. \tag{1.6}$$

Les séries de factorielles forment un corps. Les solutions du système aux différences finies sont recherchées dans ce corps. Par cette technique, Barkatou trouve les solutions homogènes d'un système d'équations aux différences. Reste le problème des solutions particulières. Dans le chapitre 6, nous allons utiliser des développements en doubles séries entières, il serait peut-être judicieux de faire plutôt des développements en séries de factorielles. Cependant, Barkatou étudie des systèmes d'équations aux différences du premier ordre alors que nos équations seront des systèmes d'équations aux différences du second ordre, donc des équations plus complexes.

1.3 Les méthodes d'homogénéisation

Les méthodes d'homogénéisation des milieux périodiques sont basées sur l'utilisation de développements asymptotiques en doubles échelles [9, 52]. Un petit paramètre ϵ est défini généralement par le rapport entre la taille l de la cellule et la longueur L de la structure pour les milieux à deux échelles [51]. Deux variables d'espace sont alors définies : x qui est la variable d'espace classique qui décrit globalement la structure et y qui est une variable rapide adaptée à l'échelle de la cellule. La relation entre ces deux variables est :

$$y = \frac{x}{\epsilon}. \quad (1.7)$$

Les fonctions inconnues du problème sont alors recherchées sous la forme d'un développement asymptotique en puissance du petit paramètre ϵ et fonction de x et de y .

$$f(x, y) = f^0(x, y) + \epsilon f^1(x, y) + \epsilon^2 f^2(x, y) + \epsilon^3 f^3(x, y) + \dots \quad (1.8)$$

Pour tenir compte de la périodicité de la structure, les fonctions f sont L -périodiques pour la variable y [51].

La méthode d'homogénéisation des milieux périodiques a été appliquée pour trouver des modèles de poutres, de plaques ou de coques à partir de l'élasticité 3D en supposant que les épaisseurs e étaient faibles devant les dimensions L de la structure [12, 20, 53, 51]. A partir de là, deux méthodes ont été appliquées pour l'obtention d'un milieu continu pour les treillis :

- *la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques*. Le modèle pour le comportement mécanique des barres est la mécanique des milieux continus en tout point d'une barre. Le treillis est alors décomposé en trois échelles : La longueur L du treillis, la taille l d'une cellule et l'épaisseur e des barres. Deux petits paramètres sont alors définis. Des études de convergence ont été faites lorsque les petits paramètres tendent vers 0 [17, 18, 28]. Seuls des exemples simples ont pour l'instant été étudiés car des difficultés techniques apparaissent dans les passages à la limite des petits paramètres.
- *la méthode d'homogénéisation des milieux discrets*. C'est la méthode utilisée par Verna, Caillerie, Tollenaere et moi-même [13, 36, 60, 61, 65]. Dans cette méthode, on

n'utilise plus la mécanique des milieux continus. La relation de comportement d'une barre est directement donnée, elle relie la tension dans la barre avec le déplacement des deux nœuds extrémités de la barre. Les inconnues du problème sont alors les déplacements des nœuds du treillis et les tensions dans les barres. La méthode d'homogénéisation des milieux périodiques ne peut plus être employée directement car il n'y a plus de cellule au sens des milieux continus mais seulement un nombre fini de nœuds et de barres. La variable locale y n'existe plus, elle est remplacée par un indice de nœud ou de barre. N'ayant plus de variable locale, la condition de périodicité sur y n'est pas écrite. le problème est donc comparativement plus simple. Le déplacement du nœud n d'une cellule est alors recherché sous la forme du développement asymptotique

$$u^n(x) = u^{0,n}(x) + \epsilon u^{1,n}(x) + \epsilon^2 u^{2,n}(x) + \epsilon^3 u^{3,n}(x) + \dots, \quad (1.9)$$

où ϵ est toujours le rapport entre la taille l de la cellule et la longueur L du treillis. On a donc un nombre fini de développements asymptotiques inconnus à déterminer, autant qu'il y a de nœuds et de barres dans une cellule. C'est la méthode qui sera employée dans ce mémoire.

1.4 Présentation des travaux effectués

Le rapport de cette thèse comprend trois parties :

1. la première partie comporte cette présentation ainsi que trois chapitres consacrés à l'étude du treillis poutre en \mathcal{N} . Le premier de ces chapitres (chapitre 2) reprend l'étude faite par Verna en statique linéaire [65]. Seuls les résultats importants pour la suite sont présentés. Ce chapitre permet d'appréhender l'homogénéisation discrète sur un cas simple ainsi que de fixer quelques notations. Les travaux de Tollenaere ont ensuite permis d'étudier cette poutre en vibration libre afin d'obtenir les modes propres de la structure [60], cependant ces résultats n'ont pas été présentés ici.

Le chapitre 3 modélise ce treillis poutre en \mathcal{N} en grand déplacement. L'objectif de cette étude est de mettre au point l'homogénéisation discrète sur un problème non linéaire. Ces résultats ont été présentés et publiés dans un congrès à Cambridge [36].

Le chapitre 4 porte sur une modélisation incrémentale du treillis poutre en \mathcal{N} . On regarde la déformation que subit ce treillis lors d'un petit incrément de chargement.

Un dernier chapitre aurait pu être écrit pour comparer la méthode d'homogénéisation discrète et la méthode d'homogénéisation des milieux continus où en tout point d'une barre, les équations de la résistance des matériaux (RdM) sont écrites. Des développements en doubles échelles, en x et en y , sont alors faits et des conditions de périodicité écrites. Les deux méthodes d'homogénéisation donnent les mêmes résultats aux premiers ordres. Pour les ordres suivants, les calculs n'ont pas été développés,

2. la deuxième partie ne porte pas directement sur la méthode d'homogénéisation. Elle comporte trois chapitres différents. Le chapitre 5 modélise un treillis poutre

périodique quelconque à nœuds articulées. Les équations que donnerait l'homogénéisation discrète sont ensuite écrites. Cependant, aucune méthode pour les résoudre n'est décrite dans ce chapitre. Lors du chapitre 7, un algorithme général de résolution sera proposé.

Le chapitre 6 recherche des modes de déformation continue pour une poutre quelconque par une technique de double séries entières. L'objectif n'est plus ici de trouver un milieu continu équivalent mais la déformée exacte du treillis poutre périodique. Pour ce faire, une solution particulière est recherchée en partie courante pour vérifier le chargement, puis des solutions homogènes seront trouvées afin de pouvoir vérifier toutes les conditions aux limites. Enfin, dans la cadre d'un chargement ponctuel, une méthode de résolution sera présentée en utilisant la transformée en z .

Le chapitre 7 est en quelque sorte une annexe pour cette partie. Il présente le cas des poutres à nœuds rigides et non plus articulés, qui dans la pratique, ne présentent aucune difficulté dans le cadre de cette méthode des doubles séries. Il explicite par ailleurs la notion de chargement sur la poutre. Enfin, on montre que la résolution du problème d'homogénéisation sur une poutre périodique est équivalente à celle faite avec les doubles séries,

3. la dernière partie est entièrement consacrée à l'homogénéisation discrète sur des treillis quasi-périodiques quelconques en utilisant des formulations variationnelles. Un treillis quasi-périodique est un treillis qui se déforme lentement. Le chapitre 8 se consacre à l'étude en élasticité linéaire. Un modèle du premier ordre est d'abord développé puis un modèle du second ordre est adapté pour les treillis minces. On peut se poser la question de l'intérêt d'un modèle du premier ordre si ce n'est de mettre au point la méthode. Ce modèle du premier ordre permet de montrer l'existence d'un milieu continu classique pour une structure microscopique non continue, cette micro-structure étant très simple à caractériser. On espère pouvoir ainsi mettre en évidence des lois de comportement non linéaires de milieux continus parfaitement définis par cette micro-structure discrète. L'objectif à long terme étant de pouvoir définir des lois de comportement non linéaires nouvelles sans faire d'hypothèses *a priori*.

Le chapitre 9 reprend l'étude du chapitre 3 pour un treillis quelconque quasi-périodique. Il s'agit cependant de trouver la déformée d'un treillis sous un chargement donné en faisant les hypothèses des petites déformations mais des grands déplacements. L'équilibre du treillis sera écrit sur la configuration déformée.

Le chapitre 10 recherche la déformation incrémentale d'un treillis déjà précontraint au cours d'un petit pas de chargement. A la différence du chapitre 4, le petit pas de chargement sera considéré comme étant infiniment petit, on parlera alors de formulation incrémentale tangente.

Le chapitre 11 se préoccupe des effets de bords. En effet, les frontières du treillis n'ont pas été prises en compte jusqu'à présent. Dans le cadre de l'élasticité, on cherchera à mettre en évidence ces phénomènes de bords et nous verrons que ce problème est plus simple sur les structures discrètes que sur les milieux continus,

4. une conclusion générale et des perspectives viennent clore ce mémoire.

Chapitre 2

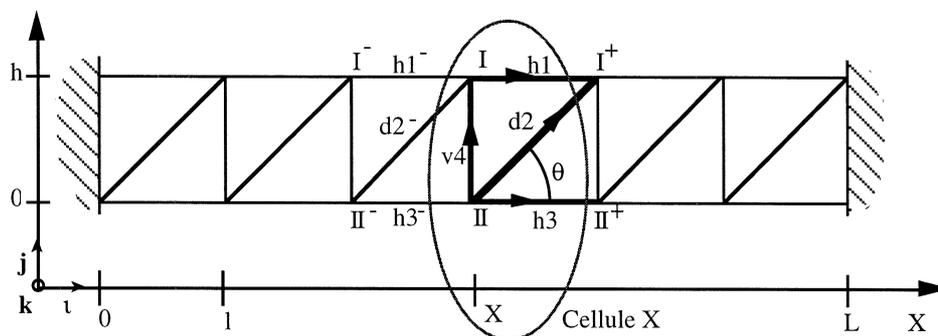
Modèle continu du treillis poutre plan en \mathcal{N} en élasticité linéaire

Plan du chapitre 2

2.1	Description de l'étude	15
2.2	Modélisation du treillis poutre plan en \mathcal{N}	16
2.2.1	Description géométrique	16
2.2.2	Condition aux limites en force, chargement extérieur	17
2.2.3	Condition aux limites en déplacement	17
2.2.4	Déplacements des nœuds et tensions dans les barres	18
2.2.5	Équilibre du treillis	19
2.3	Développements asymptotiques	19
2.3.1	Développements asymptotiques des déplacements	19
2.3.2	Développements asymptotiques des tensions	20
2.3.3	Ordre de grandeur du chargement extérieur	21
2.4	Identification des ordres de ϵ dans les équations d'équilibre	21
2.4.1	Équilibre à l'ordre ϵ^{-1}	21
2.4.2	Équilibre à l'ordre ϵ^0	22
2.4.3	Équilibre à l'ordre ϵ	22
2.4.4	Équilibre à l'ordre ϵ^2	23
2.4.5	Équilibre à l'ordre ϵ^3	24
2.4.6	Récapitulatif concernant l'équilibre du treillis	25
2.5	Résistance des matériaux, Équilibre d'une poutre droite	25
2.6	Identification des deux modèles de poutre	25
2.7	Conclusion	26

2.1 Description de l'étude

Ce premier chapitre est consacré à l'étude du treillis poutre en \mathcal{N} . On recherche un milieu continu équivalent en utilisant la méthode d'homogénéisation discrète. Cette méthode a été développée initialement sur ce treillis par Verna, Caillerie et Trompette en

Figure 2.1 : description du treillis poutre en \mathcal{N}

statique [13, 65] puis en dynamique par Tollenaere et Caillerie [60]. Ce chapitre ne présente donc pas de nouveaux travaux, il est une première introduction à l'homogénéisation discrète et permet de présenter des notations et le déroulement initial de la méthode. En effet, cette résolution utilise seulement les équations d'équilibre du treillis données par le principe fondamental de la dynamique. Par la suite, lors de la partie III de ce rapport, une formulation variationnelle sera écrite. Plus synthétique et plus générale, elle nous permettra d'obtenir des formulations pour une grande classe de problèmes.

L'obtention d'un milieu continu équivalent peut se décomposer en trois étapes. En premier lieu, une modélisation du treillis est faite et un petit paramètre ϵ est défini par l'inverse du nombre de cellules (figure 2.1). Ce petit paramètre ϵ caractérise la séparation d'échelle entre la taille de la cellule et la longueur du treillis. Ce sera la *clef* qui permettra d'obtenir un milieu continu équivalent. Dans un second temps, les données du problème sont évaluées par rapport à ce petit paramètre ϵ et les fonctions inconnues sont recherchées sous forme de développements asymptotiques en puissances de ϵ . Enfin, ces développements sont reportés dans les équations d'équilibre du treillis et un milieu continu est proposé. Une étape supplémentaire peut alors être faite lorsque ce milieu continu est en correspondance avec un milieu continu classique, une poutre d'Euler Bernoulli pour le treillis poutre en \mathcal{N} . Une identification entre ces deux modèles est donc faite.

2.2 Modélisation du treillis poutre plan en \mathcal{N}

2.2.1 Description géométrique

Soit un repère galiléen $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Le treillis poutre en \mathcal{N} est défini par la répétition d'une cellule de base selon la direction \mathbf{i} . Cette cellule de référence est caractérisée par deux nœuds I et II et quatre barres h_1 , d_2 , h_3 et v_4 (figure 2.1). Les deux nœuds sont considérés comme étant parfaitement articulés. Les barres ne sont soumises qu'à de la traction compression. Les méthodes d'homogénéisation sont basées sur la séparation d'échelle. Le treillis possède deux échelles : la longueur de la poutre notée L et la taille de la cellule l . La séparation d'échelle signifie que le treillis poutre a un grand nombre de cellules noté \mathcal{C} ($\mathcal{C} \gg 1$). Un petit paramètre ϵ est alors défini par :

$$\epsilon = \frac{l}{L} = \frac{1}{\mathcal{C}} \ll 1, \quad (2.1)$$

ce petit paramètre doit être petit devant 1. L'existence de cette séparation d'échelle nous permet de rechercher des solutions sous forme de développements asymptotiques en puissances de ϵ . Lorsque le petit paramètre ϵ tend vers 0, l'aspect du treillis poutre en \mathcal{N} se rapproche d'un segment de droite, on espère alors trouver pour le treillis en \mathcal{N} un milieu continu équivalent de poutre.

Les cellules sont distinguées entre elles par leur position X sur l'axe des abscisses (O, \mathbf{i}) . Par convention, X est la plus petite abscisse de la cellule. La première cellule est fixée à l'origine des abscisses $X = 0$.

Les nœuds sont notés par l'exposant n et par la position de la cellule X dans le couple (n, X) . La position initiale $\mathbf{P}^n(X)$ d'un nœud (n, X) s'écrit dans le repère $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$:

$$\begin{cases} \mathbf{P}^I(X) = X\mathbf{i} + \frac{h}{2}\mathbf{j} = X\mathbf{i} + \epsilon\frac{H}{2}\mathbf{j}, \\ \mathbf{P}^{II}(X) = X\mathbf{i} - \frac{h}{2}\mathbf{j} = X\mathbf{i} - \epsilon\frac{H}{2}\mathbf{j}, \end{cases} \quad (2.2)$$

où h est la hauteur de la cellule. C'est une petite dimension comme la longueur de la cellule l . Elle peut donc être écrite $h = \epsilon H$.

Les barres sont numérotées dans la cellule de référence. Pour le treillis poutre en \mathcal{N} , il y a quatre barres h_1, d_2, h_3 et v_4 où h, d et v indiquent seulement la direction de la barre (horizontale, diagonale, verticale). Toute barre est orientée d'un nœud origine noté $(O(b), X)$ vers un nœud extrémité $(E(b), X + \epsilon L\delta^b)$. Le paramètre δ^b est égal à 0 ou à 1 selon que le nœud extrémité de la barre appartienne à la même cellule X que le nœud origine ou qu'il appartienne à la cellule suivante $X + \epsilon L$. Pour la barre v_4 , $\delta^{v_4} = 0$, pour les trois autres barres, $\delta^b = 1$. Une barre quelconque est donc représentée par le couple (b, X) ou par le couple de nœuds $((O(b), X), (E(b), X + \epsilon L\delta^b))$.

2.2.2 Condition aux limites en force, chargement extérieur

Le chargement extérieur n'est appliqué que sur les nœuds (n, X) du treillis. Il est supposé être une fonction de la variable X même lorsque le nombre de cellules \mathcal{C} augmente et tend vers l'infini. Ce chargement sera noté $\mathbf{F}^n(X)$.

2.2.3 Condition aux limites en déplacement

Le treillis poutre en \mathcal{N} possède deux extrémités, l'une en $X = 0$ et l'autre en $X = 1$. Les conditions aux limites en déplacement ne seront posées que sur ces deux extrémités. Trois types de conditions seront envisagés : encastree, où tous les nœuds appartenant à la cellule extrémité voient leurs déplacements annulés ; libre, où aucune condition sur les déplacements n'est écrite ; articulée, où les nœuds de la cellule extrémité sont libres de tourner dans la direction \mathbf{k} autour d'un point fixé. La difficulté de cette condition articulée est justement dans le choix de ce point, en effet, des comparaisons vont être faites entre le modèle continu que nous allons obtenir et un calcul direct sur le treillis par la MEF. Pour le modèle continu de poutre, la condition aux limites articulée ne pose

aucun problème car l'extrémité de la poutre est définie par un seul point ou nœud ; mais pour le treillis, la cellule extrémité est complexe car elle possède plusieurs nœuds, ce point de rotation doit être placé sur la fibre neutre du treillis, fibre qui n'existe pas *a priori*. La condition articulée sur une extrémité du treillis est donc posée après avoir fait le calcul d'homogénéisation et dépend du modèle de poutre obtenu.

Les conditions aux limites sur le treillis poutre en \mathcal{N} qui seront choisies sont donc : encastrée-encastrée (E-E), encastrée-libre (E-L) et articulée-articulée (A-A) (figure 3.1).

2.2.4 Déplacements des nœuds et tensions dans les barres

Les inconnues du problème sont les déplacements des nœuds et les tensions dans les barres.

- Les déplacements des nœuds dépendent à la fois de la position de la cellule X et du nœud n . Deux fonctions déplacements sont donc recherchées $\mathbf{U}^I(X)$ et $\mathbf{U}^{II}(X)$.
- Notons $\mathbf{F}^b(X)$ la force qu'exerce la barre (b, X) sur le nœud origine de la barre $(O(b), X)$. L'effort exercé sur le nœud extrémité $(E(b), X + \epsilon L \delta^b)$ est alors $-\mathbf{F}^b$. Cette force \mathbf{F}^b sera aussi dénommée la tension dans la barre b . Le matériau constituant les barres est supposé rester dans le domaine élastique, ce matériau est le même pour toutes les barres et il est caractérisé par le module d'Young E . Soient A^b la section d'une barre, K^b la rigidité de la barre b , \mathbf{P}^b sa longueur avant déformation et \mathbf{e}^b son vecteur unitaire dans la configuration initiale ; ces grandeurs ne dépendent pas de X car le treillis est périodique. Soit \mathbf{U}^b le vecteur différence des déplacements des nœuds extrémité d'une barre b ,

$$\begin{cases} K^b &= \frac{EA^b}{\|\mathbf{P}^b\|}, \\ \mathbf{U}^b(X) &= \mathbf{U}^{E(b)}(X + \epsilon L \delta^b) - \mathbf{U}^{O(b)}(X), \\ \mathbf{e}^b(X) &= \frac{\mathbf{P}^b}{\|\mathbf{P}^b\|}. \end{cases} \quad (2.3)$$

On se place en petites déformations et en petits déplacements. La relation de comportement entre la tension \mathbf{F}^b dans la barre b et son allongement \mathbf{U}^b est alors :

$$\mathbf{F}^b = K^b \langle \mathbf{e}^b, \mathbf{U}^b \rangle \mathbf{e}^b. \quad (2.4)$$

Pour le treillis poutre en \mathcal{N} , les vecteurs directeurs des barres sont

$$\begin{cases} \text{barres } h_1 \text{ et } h_3 &: \mathbf{e}^{h_\alpha} = \mathbf{i}, \\ \text{barre } v_4 &: \mathbf{e}^{v_4} = \mathbf{j}, \\ \text{barres } d_2 &: \mathbf{e}^{d_2} = \mathbf{d} = \frac{L\mathbf{i} + H\mathbf{j}}{\sqrt{L^2 + H^2}} = c\mathbf{i} + s\mathbf{j}. \end{cases} \quad (2.5)$$

2.2.5 Équilibre du treillis

le cadre de travail est la statique en petites déformations et en petits déplacements. L'équilibre du treillis se réduit donc à l'équilibre des nœuds. Deux types de forces interviennent, les tensions dans les barres et le chargement extérieur. L'équilibre des nœuds I et II s'écrit :

$$\mathbf{F}^{h_1}(X - \epsilon L) - \mathbf{F}^{h_1}(X) + \mathbf{F}^{d_2}(X - \epsilon L) + \mathbf{F}^{v_4}(X) = \mathbf{F}^I(X), \quad (2.6)$$

$$\mathbf{F}^{h_3}(X - \epsilon L) - \mathbf{F}^{h_3}(X) - \mathbf{F}^{d_2}(X) - \mathbf{F}^{v_4}(X) = \mathbf{F}^{II}(X). \quad (2.7)$$

l'équation 2.6 est aussi notée (I) et l'équation 2.7 par (II). la somme de ces deux équations 2.6 et 2.7 est alors notée ($I + II$) et se développe ainsi

$$\begin{aligned} & \mathbf{F}^{h_1}(X - \epsilon L) - \mathbf{F}^{h_1}(X) + \mathbf{F}^{h_3}(X - \epsilon L) - \mathbf{F}^{h_3}(X) \\ & + \mathbf{F}^{d_2}(X - \epsilon L) - \mathbf{F}^{d_2}(X) = \mathbf{F}^I + \mathbf{F}^{II}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.3 Développements asymptotiques

2.3.1 Développements asymptotiques des déplacements

Du fait de l'existence d'une double échelle entre la taille l d'une cellule et la longueur L de la structure, on effectue un développement asymptotique des déplacements en puissance du petit paramètre ϵ . Par convention, on commence le développement asymptotique des déplacements des nœuds à l'ordre 0 en ϵ . Le déplacement du nœud (n, X) s'écrit alors :

$$\mathbf{U}^n(X) = \mathbf{U}^{0,n} + \epsilon \mathbf{U}^{1,n} + \epsilon^2 \mathbf{U}^{2,n} + \epsilon^3 \mathbf{U}^{3,n} + \dots, \quad (2.9)$$

où $\mathbf{U}^{0,n}, \mathbf{U}^{1,n} \dots$ sont des fonctions inconnues indépendantes du paramètre ϵ .

Le déplacement du nœud n de la cellule suivante $X + l$ se détermine en faisant des développements de Taylor autour du point d'abscisse X puis des développements en série asymptotique

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{U}^n(X + \epsilon L) &= \mathbf{U}^n(X) + \epsilon L \frac{d\mathbf{U}^n(X)}{dX} + \dots, \\ &= \mathbf{U}^{0,n}(X) + \epsilon \left(\mathbf{U}^{1,n}(X) + L \frac{d\mathbf{U}^{0,n}(X)}{dX} \right) + \dots \end{aligned} \right. \quad (2.10)$$

Selon la barre, trois cas sont possibles pour les développements asymptotiques du vecteur différence des déplacements d'une barre \mathbf{U}^b (figure 2.1). Soit la barre relie deux nœuds d'une même famille n mais de deux cellules X et $X + l$ voisines (type h comme horizontale) ; soit elle relie deux nœuds de deux familles n et m et de deux cellules distinctes X et $X + l$ (type d comme diagonale) ; soit enfin, elle relie deux nœuds de deux

familles n et m mais d'une même cellule X (type v comme verticale). Dans ces trois cas, nous pouvons écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}^b(X) = \mathbf{U}^{0,b}(X) + \epsilon \mathbf{U}^{1,b}(X) + \epsilon^2 \mathbf{U}^{2,b}(X) + \dots, \\ \mathbf{U}^{0,b}(X) = \mathbf{U}^{0,E(b)} - \mathbf{U}^{0,O(b)}, \\ \mathbf{U}^{1,b}(X) = \mathbf{U}^{1,E(b)} - \mathbf{U}^{1,O(b)} + \delta^b L \frac{d\mathbf{U}^{0,E(b)}}{dX}, \\ \mathbf{U}^{2,b}(X) = \mathbf{U}^{2,E(b)} - \mathbf{U}^{2,O(b)} + \delta^b L \frac{d\mathbf{U}^{1,E(b)}}{dX} + \delta^b \frac{L^2}{2!} \frac{d^2 \mathbf{U}^{0,E(b)}}{dX^2}. \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Cependant des simplifications apparaissent

1. les barres h_1 et h_2 n'ont pas de terme à l'ordre 0, $\mathbf{U}^{0,b} = 0$

$$\mathbf{U}^{h_\alpha} = \epsilon L \frac{d\mathbf{U}^{0,\alpha}}{dX} + \epsilon^2 \left[L \frac{d\mathbf{U}^{1,\alpha}}{dX} + \frac{L^2}{2} \frac{d^2 \mathbf{U}^{0,\alpha}}{dX^2} \right] + \dots, \quad (2.12)$$

2. la barre d_2 est quelconque

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{d_2} &= (\mathbf{U}^{0,I} - \mathbf{U}^{0,II}) \\ &+ \epsilon \left[(\mathbf{U}^{1,I} - \mathbf{U}^{1,II}) + L \frac{d\mathbf{U}^{0,I}}{dX} \right] \\ &+ \epsilon^2 \left[(\mathbf{U}^{2,I} - \mathbf{U}^{2,II}) + L \frac{d\mathbf{U}^{1,I}}{dX} + \frac{L^2}{2} \frac{d^2 \mathbf{U}^{0,I}}{dX^2} \right] \\ &+ \dots, \end{aligned} \quad (2.13)$$

3. la barre v_4 a le paramètre $\delta^{v_4} = 0$, il n'y a donc pas de développement de Taylor à faire.

$$\mathbf{U}^{v_4} = (\mathbf{U}^{0,I} - \mathbf{U}^{0,II}) + \epsilon (\mathbf{U}^{1,I} - \mathbf{U}^{1,II}) + \epsilon^2 (\mathbf{U}^{2,I} - \mathbf{U}^{2,II}) + \dots \quad (2.14)$$

Ces trois types de barre se classent en deux catégories : les barres dont le développement asymptotique du vecteur différence des déplacements commence en ϵ^0 (type d ou v) et celles où il commence en ϵ^1 (type h). Dans les faits, nous verrons que tous les développements asymptotiques du vecteur différence des déplacements commence en ϵ^1 (équation 2.21).

2.3.2 Développements asymptotiques des tensions

Le développement asymptotique des tensions est donné par la relation de comportement d'une barre (équation 2.4). Il est nécessaire de regarder l'ordre de grandeur des termes composant cette équation. La rigidité K^b d'une barre sera choisi d'ordre ϵ^{-1} car ce choix à toujours été fait [60, 65] et un autre choix n'a pas d'influence sur le résultat.

$$K^b = \frac{1}{\epsilon} k^b. \quad (2.15)$$

La tension dans la barre b peut alors se développer

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}^b = \epsilon^{-1}\mathbf{F}^{-1,b} + \epsilon^0\mathbf{F}^{0,b} + \epsilon^1\mathbf{F}^{1,b} + \dots, \\ \mathbf{F}^{-1,b} = k^b \langle \mathbf{e}^b, \mathbf{U}^{0,b} \rangle \mathbf{e}^b, \\ \mathbf{F}^{0,b} = k^b \langle \mathbf{e}^b, \mathbf{U}^{1,b} \rangle \mathbf{e}^b, \\ \mathbf{F}^{1,b} = k^b \langle \mathbf{e}^b, \mathbf{U}^{2,b} \rangle \mathbf{e}^b. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

2.3.3 Ordre de grandeur du chargement extérieur

Le chargement extérieur \mathbf{F}^n s'exerçant sur les nœuds n est une donnée du problème. Cependant, tout comme la rigidité K^b d'une barre, il faut caler cette force par rapport au petit paramètre ϵ . pour ce faire, Auriault a proposé d'écrire les équations d'équilibre avec des variables sans dimension et il introduit des nombres adimensionnels (nombre de Reynolds, nombre de Mach. . .) permettant le calage par rapport à ϵ des différents termes des équations [6, 49]. Je n'ai pas réussi à mettre au point cette procédure de calage sur notre problème car celui-ci s'écrit comme un système aux différences finies et non aux dérivées partielles. Par ailleurs, pour les structures minces, type plaque et poutre, Sanchez a montré que "l'adimensionnalisation ne peut être faite qu'en se basant sur des considérations concernant la structure même des solutions" [51]. On peut travailler en variable adimensionnelle afin d'établir de façon plus correcte ces calages en ϵ , c'est ce qui sera fait dans la partie III. Cependant, le problème du calage reste entier. L'unique possibilité est de le faire *a posteriori*. Pour le treillis poutre en \mathcal{N} , le chargement extérieur doit être d'ordre ϵ^3

$$\mathbf{F}^n = \epsilon^3 \mathbf{F}^{3,n}. \quad (2.17)$$

2.4 Identification des ordres de ϵ dans les équations d'équilibre

Les développements asymptotiques des tensions sont remplacés dans les équations d'équilibre des nœuds I et II . Ces équations sont ensuite identifiées ordre après ordre en commençant par l'ordre ϵ^{-1} car les tensions commencent à l'ordre ϵ^{-1} .

2.4.1 Équilibre à l'ordre ϵ^{-1}

Tensions dans les barres :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}^{-1,h_\alpha} \quad \text{n'existe pas,} \\ \mathbf{F}^{-1,d_2} = k^{d_2} \langle \mathbf{d}, \mathbf{U}^{0,I} - \mathbf{U}^{0,II} \rangle \mathbf{d}, \\ \mathbf{F}^{-1,v_4} = k^{v_4} \langle \mathbf{j}, \mathbf{U}^{0,I} - \mathbf{U}^{0,II} \rangle \mathbf{j}. \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Équilibre des nœuds I et II :

$$\begin{cases} I^{-1} & : & \mathbf{F}^{-1,d_2} + \mathbf{F}^{0,v_4} = \mathbf{o}, \\ II^{-1} & : & -\mathbf{F}^{-1,d_4} - \mathbf{F}^{0,v_4} = \mathbf{o}. \end{cases} \quad (2.19)$$

Comme les barres d_2 et v_4 ne sont pas être parallèles,

$$\mathbf{F}^{-1,d_2} = \mathbf{F}^{-1,v_4} = \mathbf{o}, \quad (2.20)$$

soit pour les déplacements :

$$\mathbf{U}^{0,I} = \mathbf{U}^{0,II} = \mathbf{U}^0. \quad (2.21)$$

Tous les nœuds de la cellule (nœud I et nœud II) ont le même déplacement macroscopique \mathbf{U}^0 . Cela implique que pour toutes les barres b , $\mathbf{U}^{0,b} = 0$.

2.4.2 Équilibre à l'ordre ϵ^0

Tensions dans les barres :

$$\begin{cases} \mathbf{F}^{0,h_\alpha} & = & k^{h_\alpha} \langle \mathbf{v}, L \frac{d\mathbf{U}^0}{dX} \rangle \mathbf{v}, \\ \mathbf{F}^{0,d_2} & = & k^{d_2} \langle \mathbf{d}, \mathbf{U}^{1,I} - \mathbf{U}^{1,II} + L \frac{d\mathbf{U}^0}{dX} \rangle \mathbf{d}, \\ \mathbf{F}^{0,v_4} & = & k^{v_4} \langle \mathbf{j}, \mathbf{U}^{1,I} - \mathbf{U}^{1,II} \rangle \mathbf{j}, \end{cases} \quad (2.22)$$

Équilibre des nœuds I et II :

$$\begin{cases} I^0 & : & \mathbf{F}^{0,d_2} + \mathbf{F}^{0,v_4} = \mathbf{o}, \\ II^0 & : & -\mathbf{F}^{0,d_2} - \mathbf{F}^{0,v_4} = \mathbf{o}. \end{cases} \quad (2.23)$$

Les vecteurs \mathbf{d} et \mathbf{j} n'étant pas colinéaires, $\mathbf{F}^{0,d_2} = \mathbf{F}^{0,v_4} = \mathbf{o}$, ce qui donne pour les déplacements

$$\begin{cases} \langle \mathbf{U}^{1,I} - \mathbf{U}^{1,II}, \mathbf{j} \rangle & = & 0, \\ \langle \mathbf{U}^{1,I} - \mathbf{U}^{1,II}, \mathbf{v} \rangle & = & \frac{L}{c} \langle \frac{d\mathbf{U}^0}{dX}, \mathbf{d} \rangle. \end{cases} \quad (2.24)$$

2.4.3 Équilibre à l'ordre ϵ

Équilibre des nœuds I et II :

$$\begin{cases} I^1 & : & -L \frac{d\mathbf{F}^{0,h_1}}{dX} + \mathbf{F}^{1,d_2} + \mathbf{F}^{1,v_4} = \mathbf{o}, \\ II^1 & : & -L \frac{d\mathbf{F}^{0,h_3}}{dX} - \mathbf{F}^{1,d_2} - \mathbf{F}^{1,v_4} = \mathbf{o}, \\ (I + II)^1 & : & -L \frac{d(\mathbf{F}^{0,h_1} + \mathbf{F}^{0,h_3})}{dX} = \mathbf{o}, \\ (I - II)^1 & : & \mathbf{F}^{1,d_2} + \mathbf{F}^{1,v_4} = \mathbf{o}. \end{cases} \quad (2.25)$$

Les barres d_2 et v_4 n'étant pas parallèles, l'équation $(I - II)^1$ donne $\mathbf{F}^{1,d_2} = \mathbf{F}^{1,v_4} = \mathbf{o}$. La quantité $\mathbf{U}^{2,I} - \mathbf{U}^{2,II}$ projetée sur \mathbf{z} et sur \mathbf{j} peut être déduite, mais comme ce calcul n'intervient pas dans la détermination de \mathbf{U}^0 , on ne l'explicite pas. Par ailleurs, l'équation $(I + II)^1$ s'écrit

$$\left\langle \frac{d^2 \mathbf{U}^0}{dX^2}, \mathbf{z} \right\rangle = 0. \quad (2.26)$$

La composante selon \mathbf{z} du déplacement macroscopique \mathbf{U}^0 est donc au plus linéaire en X . Ceci est juste suffisant pour prendre en compte des conditions de déplacement nul aux extrémités. On peut alors en déduire que cette composante est nulle [65].

$$\langle \mathbf{U}^0, \mathbf{z} \rangle = 0. \quad (2.27)$$

Les tensions dans les barres à l'ordre ϵ peuvent donc s'écrire :

$$\begin{cases} \mathbf{F}^{1,h_\alpha} &= k^{h_\alpha} \langle \mathbf{z}, L \frac{d\mathbf{U}^{1,\alpha}}{dX} \rangle \mathbf{z}, \\ \mathbf{F}^{1,d_2} &= \mathbf{F}^{1,v_4} = \mathbf{o}, \end{cases} \quad (2.28)$$

2.4.4 Équilibre à l'ordre ϵ^2

Équilibre des nœuds I et II :

$$\begin{cases} I^2 : & -L \frac{d\mathbf{F}^{1,h_1}}{dX} + \mathbf{F}^{2,d_2} + \mathbf{F}^{2,v_4} = \mathbf{o}, \\ II^2 : & -L \frac{d\mathbf{F}^{1,h_3}}{dX} - \mathbf{F}^{2,d_2} - \mathbf{F}^{2,v_4} = \mathbf{o}, \\ (I + II)^2 : & -L \frac{d(\mathbf{F}^{1,h_1} + \mathbf{F}^{1,h_3})}{dX} = \mathbf{o}, \\ (I - II)^2 : & -L \frac{d(\mathbf{F}^{1,h_1} - \mathbf{F}^{1,h_3})}{dX} + 2(\mathbf{F}^{2,d_2} + \mathbf{F}^{2,v_4}) = \mathbf{o}. \end{cases} \quad (2.29)$$

Écrivons l'équation $(I + II)^2$ en explicitant les tensions dans les barres h_1 et h_3 .

$$\left\langle k^{h_1} \frac{d^2 \mathbf{U}^{1,I}}{dX^2} + k^{h_3} \frac{d^2 \mathbf{U}^{1,II}}{dX^2}, \mathbf{z} \right\rangle = 0. \quad (2.30)$$

De cette équation peut être déduit $\left\langle \frac{d^2 \mathbf{U}^{1,I}}{dX^2}, \mathbf{z} \right\rangle$ et $\left\langle \frac{d^2 \mathbf{U}^{1,II}}{dX^2}, \mathbf{z} \right\rangle$ car la différence des déplacements à l'ordre ϵ est donnée par l'équation 2.24

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dX^2} \langle \mathbf{U}^{1,I} - \mathbf{U}^{1,II}, \mathbf{z} \rangle &= H \left\langle \frac{d^3 \mathbf{U}^0}{dX^3}, \mathbf{j} \right\rangle, \\ \left\langle \frac{d^2 \mathbf{U}^{1,I}}{dX^2}, \mathbf{z} \right\rangle &= \frac{H k^{h_3}}{k^{h_1} + k^{h_3}} \left\langle \frac{d^3 \mathbf{U}^0}{dX^3}, \mathbf{j} \right\rangle, \\ \left\langle \frac{d^2 \mathbf{U}^{1,II}}{dX^2}, \mathbf{z} \right\rangle &= -\frac{H k^{h_1}}{k^{h_1} + k^{h_3}} \left\langle \frac{d^3 \mathbf{U}^0}{dX^3}, \mathbf{j} \right\rangle. \end{cases} \quad (2.31)$$

L'équation $(I - II)^2$ permet de déterminer la différence $\mathbf{U}^{3,I} - \mathbf{U}^{3,II}$ projetée sur \mathbf{i} et sur \mathbf{j} . Nous aurons besoin par la suite de la projection de la tension $\mathbf{F}^{2,d}$ sur \mathbf{j} . Sachant que $\mathbf{F}^{1,h_1} // \mathbf{i}$, $\mathbf{F}^{1,d_2} // \mathbf{d}$ et $\mathbf{F}^{1,v_4} // \mathbf{j}$, l'équation $(I - II)^2$ projetée sur \mathbf{i} s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}^{2,d}, \mathbf{i} \rangle &= \frac{L}{2} \frac{d \langle \mathbf{F}^{1,h_1} - \mathbf{F}^{1,h_3}, \mathbf{i} \rangle}{dX} = L \frac{H k^{h_1} k^{h_3}}{k^{h_1} + k^{h_3}} \left\langle \frac{d^3 \mathbf{U}^0}{dX^3}, \mathbf{j} \right\rangle, \\ \langle \mathbf{F}^{2,d}, \mathbf{j} \rangle &= \frac{H^2 k^{h_1} k^{h_3}}{k^{h_1} + k^{h_3}} \left\langle \frac{d^3 \mathbf{U}^0}{dX^3}, \mathbf{j} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.32)$$

2.4.5 Équilibre à l'ordre ϵ^3

Équilibre des nœuds I et II :

$$\left\{ \begin{array}{l} I^3 : -L \frac{d\mathbf{F}^{2,h_1}}{dX} + \frac{L^2}{2} \frac{d^2 \mathbf{F}^{1,h_1}}{dX^2} + \mathbf{F}^{3,d_2} - L \frac{d\mathbf{F}^{2,d_2}}{dX} + \mathbf{F}^{3,v_4} = \mathbf{F}^{3,I}, \\ II^3 : -L \frac{d\mathbf{F}^{2,h_3}}{dX} + \frac{L^2}{2} \frac{d^2 \mathbf{F}^{1,h_3}}{dX^2} - \mathbf{F}^{3,d_2} - \mathbf{F}^{3,v_4} = \mathbf{F}^{3,II}, \\ (I + II)^3 : -L \frac{d(\mathbf{F}^{2,h_1} + \mathbf{F}^{2,h_3} + \mathbf{F}^{2,d_2})}{dX} + \frac{L^2}{2} \frac{d^2(\mathbf{F}^{1,h_1} + \mathbf{F}^{1,h_3})}{dX^2} = \mathbf{F}^{3,I} + \mathbf{F}^{3,II}. \end{array} \right. \quad (2.33)$$

Cependant $\frac{d(\mathbf{F}^{1,h_1} + \mathbf{F}^{1,h_3})}{dX} = \mathbf{o}$ (équation 2.29), l'équation $(I + II)^3$ donne :

$$-L \frac{d(\mathbf{F}^{2,h_1} + \mathbf{F}^{2,h_3} + \mathbf{F}^{2,d_2})}{dX} = \mathbf{F}^{3,I} + \mathbf{F}^{3,II}. \quad (2.34)$$

Cette équation est projetée sur \mathbf{j} . L'objectif est de supprimer les tensions $\mathbf{F}^{2,h_1} + \mathbf{F}^{2,h_3}$ que l'on ne connaît pas.

$$-L \frac{d \langle \mathbf{F}^{2,d_2}, \mathbf{j} \rangle}{dX} = -L \frac{H^2 k^{h_1} k^{h_3}}{k^{h_1} + k^{h_3}} \left\langle \frac{d^4 \mathbf{U}^0}{dX^4}, \mathbf{j} \right\rangle. \quad (2.35)$$

finalement, le modèle macroscopique pour le treillis poutre plan en \mathcal{N} est

$$\left\langle \frac{d^4 \mathbf{U}^0}{dX^4}, \mathbf{j} \right\rangle = -\frac{k^{h_1} + k^{h_3}}{t^2 L^3 k^{h_1} k^{h_3}} \langle \mathbf{F}^{3,I} + \mathbf{F}^{3,II}, \mathbf{j} \rangle. \quad (2.36)$$

2.4.6 Récapitulatif concernant l'équilibre du treillis

$$\begin{aligned}
 \text{Ordre } \epsilon^{-1} & : (I - II)^{-1} \hookrightarrow \mathbf{U}^{0,I} - \mathbf{U}^{0,II} = \mathbf{o}, & \mathbf{U}^{0,I} = \mathbf{U}^{0,II} = \mathbf{U}^0, \\
 \text{Ordre } \epsilon^0 & : (I - II)^0 \hookrightarrow \mathbf{U}^{1,I} - \mathbf{U}^{1,II}, \\
 \text{Ordre } \epsilon^1 & : (I - II)^1 \hookrightarrow \mathbf{U}^{2,I} - \mathbf{U}^{2,II}, \\
 & (I + II)^1 \boldsymbol{\iota} \hookrightarrow \langle \mathbf{U}^0, \boldsymbol{\iota} \rangle = 0, \\
 \text{Ordre } \epsilon^2 & : (I - II)^2 \hookrightarrow \mathbf{U}^{3,I} - \mathbf{U}^{3,II}, \\
 & (I + II)^2 \boldsymbol{\iota} \hookrightarrow \langle \mathbf{U}^{1,I} + \mathbf{U}^{1,II}, \boldsymbol{\iota} \rangle, \\
 \text{Ordre } \epsilon^3 & : (I - II)^3 \hookrightarrow \mathbf{U}^{4,I} - \mathbf{U}^{4,II}, \\
 & (I + II)^3 \boldsymbol{\iota} \hookrightarrow \langle \mathbf{U}^{2,I} + \mathbf{U}^{2,II}, \boldsymbol{\iota} \rangle, \\
 & (I + II)^3 \boldsymbol{j} \hookrightarrow \langle \mathbf{U}^0, \boldsymbol{j} \rangle, \\
 \text{Ordre } \epsilon^k & : (I - II)^k \hookrightarrow \mathbf{U}^{k+1,I} - \mathbf{U}^{k+1,II}, \\
 & (I + II)^k \boldsymbol{\iota} \hookrightarrow \langle \mathbf{U}^{k-1,I} + \mathbf{U}^{k-1,II}, \boldsymbol{\iota} \rangle, \\
 & (I + II)^k \boldsymbol{j} \hookrightarrow \langle \mathbf{U}^{k-2,I} + \mathbf{U}^{k-2,II}, \boldsymbol{j} \rangle.
 \end{aligned}$$

2.5 Résistance des matériaux, Équilibre d'une poutre droite

Dans le cadre de la résistance des matériaux, on étudie une poutre initialement droite en statique sous les hypothèses des petites déformations et des petits déplacements. Les efforts extérieurs sont répartis le long de la poutre. Il n'y a pas de moment réparti. L'abscisse est noté X , les équations locales de l'équilibre de la poutre s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{R}}{dX} + \mathbf{F} = \mathbf{o}, \\ \frac{d\mathbf{M}}{dX} + \boldsymbol{\iota} \wedge \mathbf{R} = \mathbf{o}, \end{array} \right. \quad (2.37)$$

où \mathbf{R} est la résultante du torseur des inter-efforts, \mathbf{M} le moment, $\boldsymbol{\iota}$ le vecteur directeur de la poutre et \mathbf{F} la charge linéique. La relation de comportement d'une poutre d'Euler Bernoulli où les effets du cisaillement sont négligés est :

$$EI \left\langle \frac{d^2 \mathbf{U}^0}{dX^2}, \boldsymbol{j} \right\rangle = \langle \mathbf{M}, \boldsymbol{k} \rangle. \quad (2.38)$$

L'équation portant sur la résultante est remplacée dans l'équation de moment, de même avec la relation de comportement. On obtient alors la formulation en déplacement

$$\left\langle \frac{d^4 \mathbf{U}^0}{dX^4}, \boldsymbol{j} \right\rangle = -\frac{1}{EI} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{j} \rangle. \quad (2.39)$$

2.6 Identification des deux modèles de poutre

Il s'agit d'identifier le modèle de poutre continu obtenu par homogénéisation de notre structure périodique (équation 2.36) et le modèle de poutre droite d'Euler Bernoulli (é-

quation 2.39). Les deux modèles sont similaires. L'identification nécessite l'équivalence entre la charge linéique \mathbf{F} sur la poutre et le chargement \mathbf{F}^n aux nœuds. Du fait du décalage effectué en supposant les forces petites, l'effort physique réel exercé en un nœud n de la structure \mathbf{F}^n est :

$$\mathbf{F}^n = \epsilon^3 \mathbf{F}^{3,n}, \quad (2.40)$$

et nous avons l'équivalence suivante

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{F}^I + \mathbf{F}^{II}}{l} = \frac{\epsilon^2}{L} (\mathbf{F}^{3,I} + \mathbf{F}^{3,II}). \quad (2.41)$$

L'inertie équivalente pour le treillis poutre peut alors être déterminée

$$EI_{eq} = \frac{t^2 L^3 k^{h_1} k^{h_3}}{k^{h_1} + k^{h_3}} \epsilon^2,$$

cependant, les rigidités des barres h_1 et h_3 s'expriment par

$$k^{h_1} = \frac{EA^{h_1}}{L}, \quad k^{h_2} = \frac{EA^{h_3}}{L},$$

donc l'inertie équivalente est

$$I_{eq} = h^2 \frac{A^{h_1} A^{h_3}}{A^{h_1} + A^{h_3}} \quad (2.42)$$

A l'ordre 0, seuls les effets de flexion sont apparents. La loi de comportement macroscopique trouvée pour notre treillis en \mathcal{N} est celle d'une poutre continue à effet de flexion prépondérant.

2.7 Conclusion

Le treillis poutre en \mathcal{N} peut se caractériser par un milieu continu équivalent. Un petit paramètre ϵ est d'abord défini par l'inverse du nombre de cellule \mathcal{C} . Si le chargement extérieur \mathbf{F}^n agissant sur les nœuds du treillis est décrit par une fonction d'ordre 3, c'est à dire $\epsilon^3 \mathbf{F}^{3,n}$, le milieu continu équivalent pour le treillis poutre en \mathcal{N} est un milieu continu de poutre d'Euler Bernoulli où les effets de flexion sont prépondérants.

Chapitre 3

Modèle continu du treillis poutre en \mathcal{N} en grand déplacement

Plan du chapitre 3

3.1	Description de l'étude	27
3.2	Modélisation du treillis poutre	28
3.3	Développements asymptotiques	30
3.3.1	Développements asymptotiques des déplacements	30
3.3.2	Développements asymptotiques des tensions	31
3.3.3	Ordre de grandeur du chargement extérieur	32
3.4	Identification des ordres de ϵ dans les équations d'équilibre	32
3.4.1	Équilibre à l'ordre ϵ^{-1}	32
3.4.2	Équilibre à l'ordre ϵ^0	33
3.4.3	Équilibre à l'ordre ϵ	34
3.5	Modèle et comportement du treillis poutre en \mathcal{N}	35
3.5.1	Homogénéisation du treillis, modèle continu de poutre	35
	a) Équilibre à l'ordre ϵ^2	36
	b) Équilibre à l'ordre ϵ^3	37
3.5.2	Résistance des matériaux, équilibre d'une poutre droite en grand déplacement	38
3.5.3	Identification des deux modèles de poutre	39
3.5.4	Application numérique, le flambage du treillis poutre en \mathcal{N}	40
3.6	Modèle et comportement de treillis câble en \mathcal{N}	47
3.6.1	Modèle continu de câble	47
3.6.2	Équilibre d'un câble pesant	47
3.6.3	Identification des deux modèles de câble	48
3.7	Conclusion	49

3.1 Description de l'étude

Suite aux études sur le treillis plan en \mathcal{N} en statique linéaire [65] et en vibration libre [60], le problème des grandes transformations s'est posé. Des travaux ont déjà eu lieu sur

ce type de sujet.

McCallen et Romstad prennent en compte des non linéarités géométriques et matérielles dans la déformation d'un treillis plan périodique [32, 33], cependant, ils font des hypothèses *a priori* sur le modèle macroscopique final. L'équivalence entre le treillis et la poutre continue se faisant sur une base énergétique. Pour le treillis en \mathcal{N} , le milieu continu équivalent présente des couplages entre la flexion et l'extension qui rendent l'estimation *a priori* difficile. Byskov, ainsi qu'Andersen, Elyada et Babcock font eux-aussi des estimations *a priori* sur le milieu continu et sur le treillis pour construire des modèles de flambage de treillis poutre [4, 11, 25], ce que faisait déjà Vierendeel en 1906 sur des exemples simples [66]. Toutes ces études ont le défaut d'être quasiment impossible à généraliser car la méthode fait appel à un savoir faire adapté à chaque cas particulier.

Pour introduire des non linéarités dans la méthode d'homogénéisation discrète, on se propose dans un premier temps d'étudier le cas simple du treillis poutre en \mathcal{N} sous les hypothèses des grands déplacements et des petites déformations. L'avantage est d'avoir pour les barres du treillis une relation de comportement très simple du type ressort. A partir de ce comportement linéaire d'une barre et en faisant l'hypothèse de la séparation d'échelle (chapitre 2), des modèles continus vont être développés sans faire intervenir d'hypothèses *a priori* sur le comportement final. On appelle *modèle en grand déplacement* le modèle donnant l'équilibre du treillis en configuration déformée en fonction de la configuration initiale non chargée. Ce modèle permet de calculer directement, avec un seul pas de chargement, la déformée de la structure.

Le démarche suivie pour l'obtention d'un modèle continu est identique à celle du chapitre 2. Une modélisation est d'abord faite, puis les données du problème sont calées par rapport au petit paramètre ϵ (inverse du nombre de cellule \mathcal{C}) et les inconnues sont développées en série asymptotique en puissance de ϵ . Enfin, ces développements sont reportés dans les équations d'équilibre du treillis.

Deux modèles vont être trouvés, le premier pourra être identifié à un modèle de poutre d'Euler Bernoulli en grand déplacement, l'autre sera identifiable à un modèle de câble. Le modèle de câble est fortement non linéaire et n'est pas linéarisable pour un câble non précontraint, ce qui explique pourquoi il n'a pas été trouvé en petit déplacement. Le modèle de poutre en grand déplacement est simplement une adaptation du modèle de poutre en petit déplacement au cas des grands déplacements. Une étude au flambage est faite sur ce modèle de poutre et des simulations numériques sont présentées comparant la première charge critique d'Euler du treillis et de la poutre continue pour différentes conditions aux limites. Ces résultats ont été exposés en conférence puis publiés [35, 36].

3.2 Modélisation du treillis poutre

La description géométrique du treillis poutre plan en \mathcal{N} est la même que celle faite au chapitre précédent (chapitre 2). De même, les conditions aux limites en déplacement sur le treillis poutre en \mathcal{N} sont : encastree-encastree (E-E), encastree-libre (E-L) et articulée-articulée (A-A) (figure 3.1). Les conditions aux limites en efforts supposent de nouveau que le chargement extérieur n'est appliqué que sur les nœuds (n, X) du treillis.

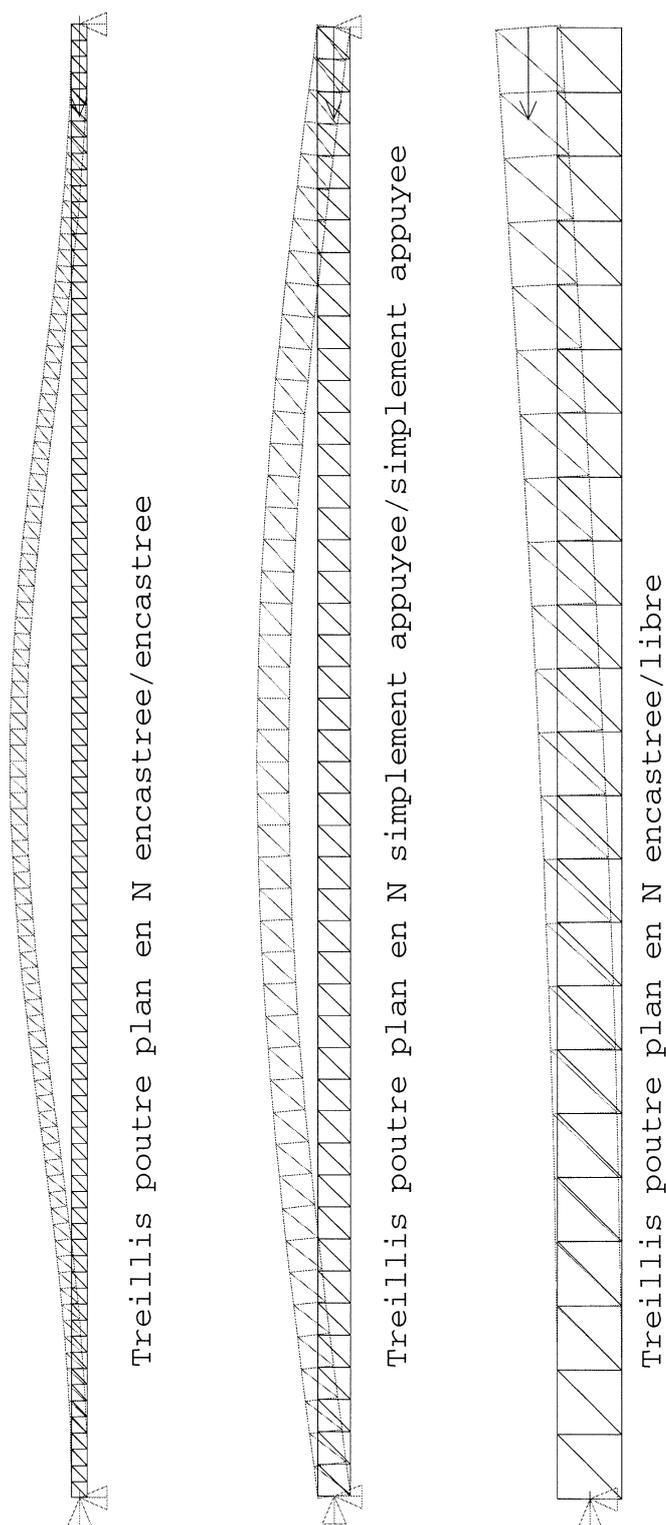


Figure 3.1 : différentes conditions aux limites sur le treillis poutre plan en \mathcal{N} , premier mode de flambage

Ce chargement sera noté $\mathbf{F}^n(X)$.

Les inconnues du problème sont de nouveau les déplacements des nœuds et les tensions dans les barres. Deux fonctions déplacements sont recherchées $\mathbf{U}^I(X)$ et $\mathbf{U}^{II}(X)$.

Soient A^b la section de la barre, K^b sa rigidité et \mathbf{P}^b le vecteur longueur de la barre en configuration initiale, ces grandeurs ne dépendent pas de X car le treillis est périodique. Soient $\mathbf{Q}^b(X)$ le vecteur longueur de la barre en configuration déformée et \mathbf{U}^b le vecteur différence des déplacements des nœuds extrémités d'une barre b , soit \mathbf{g}^b le vecteur unitaire de la barre b en configuration déformée,

$$\left\{ \begin{array}{l} K^b = \frac{EA^b}{\|\mathbf{P}^b\|}, \\ \mathbf{U}^b(X) = \mathbf{U}^{E(b)}(X + \epsilon L \delta^b) - \mathbf{U}^{O(b)}(X), \\ \mathbf{Q}^b(X) = \mathbf{P}^b + \mathbf{U}^b(X), \\ \mathbf{g}^b(X) = \frac{\mathbf{Q}^b}{\|\mathbf{Q}^b\|}. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Soit \mathbf{F}^b la tension dans la barre (b, X) . Le matériau constitutif des barres est supposé rester dans le domaine élastique, il est caractérisé par le module d'Young E . Le cadre de l'étude sont les petites déformations mais les grands déplacements, la relation de comportement entre la tension \mathbf{F}^b dans la barre b et l'allongement de celle-ci est :

$$\mathbf{F}^b = K^b \left[\|\mathbf{Q}^b\| - \|\mathbf{P}^b\| \right] \mathbf{g}^b. \quad (3.2)$$

Cette tension \mathbf{F}^b dans la barre b peut aussi s'écrire :

$$\mathbf{F}^b = K^b \left[1 - \frac{\|\mathbf{P}^b\|}{\|\mathbf{Q}^b\|} \right] \mathbf{Q}^b. \quad (3.3)$$

L'équilibre du treillis se réduit donc à écrire l'équilibre des nœuds en configuration déformée. L'équilibre des nœuds I et II s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} (I) : \mathbf{F}^{h_1}(X - \epsilon L) - \mathbf{F}^{h_1}(X) + \mathbf{F}^{d_2}(X - \epsilon L) + \mathbf{F}^{v_4}(X) = \mathbf{F}^I(X), \\ (II) : \mathbf{F}^{h_3}(X - \epsilon L) - \mathbf{F}^{h_3}(X) - \mathbf{F}^{d_2}(X) - \mathbf{F}^{v_4}(X) = \mathbf{F}^{II}(X). \end{array} \right. \quad (3.4)$$

3.3 Développements asymptotiques

3.3.1 Développements asymptotiques des déplacements

De nouveau, il existe une séparation d'échelle entre la taille l d'une cellule et la longueur L de la structure, on effectue un développement asymptotique des déplacements en puissance du petit paramètre ϵ . On fait l'hypothèse que le développement du déplacement d'un nœud commence à l'ordre 0 en ϵ . Le déplacement du nœud (n, X) s'écrit :

$$\mathbf{U}^n(X) = \mathbf{U}^{0,n} + \epsilon \mathbf{U}^{1,n} + \epsilon^2 \mathbf{U}^{2,n} + \epsilon^3 \mathbf{U}^{3,n} + \dots \quad (3.5)$$

Ce développement du déplacement d'un nœud n étant le même que celui du chapitre 2, on a les mêmes propriétés concernant le vecteur différence des déplacements \mathbf{U}^b .

3.3.2 Développements asymptotiques des tensions

Le développement asymptotique des tensions est donné par la relation de comportement d'une barre (équation 3.3). Il est nécessaire de regarder l'ordre de grandeur des termes composant cette équation. La rigidité K^b d'une barre sera choisi d'ordre ϵ^{-1} (chapitre 2).

$$K^b = \frac{1}{\epsilon} k^b. \quad (3.6)$$

Il faut maintenant comparer la longueur déformée $\|\mathbf{Q}^b\|$ d'une barre avec sa longueur initiale $\|\mathbf{P}^b\|$. Trois cas différents seront possibles.

1. la longueur initiale de la barre est d'ordre ϵ et la longueur finale est calculé d'ordre ϵ^0 , alors $\mathbf{U}^b \gg \mathbf{P}^b$. Ce cas n'est pas réaliste avec l'hypothèse des petites déformations et les équations d'équilibre vont l'éliminer. Cependant, c'est le cas au début pour les barres d_2 et v_4 .

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^b &= \mathbf{U}^{0,b} + \epsilon \mathbf{U}^{1,b} + \dots, \\ \mathbf{P}^b &= \epsilon \mathbf{P}^{1,b}, \\ \mathbf{Q}^b &= \mathbf{U}^{0,b} + \epsilon (\mathbf{P}^{1,b} + \mathbf{U}^{1,b}) + \dots, \\ 1 - \frac{\|\mathbf{P}^b\|}{\|\mathbf{Q}^b\|} &= 1 + O(\epsilon), \\ \mathbf{F}^b &= \frac{1}{\epsilon} k^b \mathbf{U}^{0,b} + O(\epsilon^0). \end{aligned} \quad (3.7)$$

2. la longueur initiale de la barre est d'ordre ϵ ainsi que la longueur finale, alors $\mathbf{U}^b \sim \mathbf{P}^b$.

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^b &= \epsilon \mathbf{U}^{1,b} + \epsilon^2 \mathbf{U}^{2,b} + \dots, \\ \mathbf{P}^b &= \epsilon \mathbf{P}^{1,b}, \\ \mathbf{Q}^b &= \epsilon (\mathbf{P}^{1,b} + \mathbf{U}^{1,b}) + \epsilon^2 \mathbf{U}^{2,b} + \dots, \\ 1 - \frac{\|\mathbf{P}^b\|}{\|\mathbf{Q}^b\|} &= 1 - \underbrace{\frac{\|\mathbf{P}^{1,b}\|}{\|\mathbf{Q}^{1,b}\|}}_{b^{0,b}} + O(\epsilon), \\ \mathbf{F}^b &= k^b b^{0,b} \mathbf{Q}^{1,b} + O(\epsilon). \end{aligned} \quad (3.8)$$

3. la longueur initiale et la longueur finale de la barre sont d'ordre ϵ ($\mathbf{U}^b \sim \mathbf{P}^b$), de plus ces longueurs sont égales en norme au premier ordre. Ce n'est pas toujours le cas, ceci n'est pas vrai pour le modèle de câble, mais le sera pour le modèle de poutre.

$$\mathbf{U}^b = \epsilon \mathbf{U}^{1,b} + \epsilon^2 \mathbf{U}^{2,b} + \dots,$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}^b &= \epsilon \mathbf{P}^{1,b}, \\
 \mathbf{Q}^b &= \epsilon (\mathbf{P}^{1,b} + \mathbf{U}^{1,b}) + \epsilon^2 \mathbf{U}^{2,b} + \dots, \\
 \|\mathbf{Q}^{1,b}\| &= \|\mathbf{P}^{1,b}\|, \\
 \mathbf{g}^b &= \mathbf{g}^{0,b} + \epsilon \mathbf{g}^{1,b} + \dots, \\
 \mathbf{g}^{0,b} &= \frac{\mathbf{Q}^{1,b}}{\|\mathbf{P}^{1,b}\|}, \\
 1 - \frac{\|\mathbf{P}^b\|}{\|\mathbf{Q}^b\|} &= \epsilon \underbrace{\frac{1}{\|\mathbf{P}^{1,b}\|} \langle \mathbf{g}^{0,b}, \mathbf{U}^{2,b} \rangle}_{b^{1,b}} + \epsilon^2 b^{2,b} + O(\epsilon^3), \\
 \mathbf{F}^b &= \epsilon k^b b^{1,b} \mathbf{Q}^{1,b} + \epsilon^2 k^b (b^{2,b} \mathbf{Q}^{1,b} + b^{1,b} \mathbf{Q}^{2,b}) + O(\epsilon^3). \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

3.3.3 Ordre de grandeur du chargement extérieur

Le chargement extérieur \mathbf{F}^n s'exerçant sur les nœuds n est une donnée du problème qui doit être calée par rapport à ϵ . En élasticité linéaire, le chargement extérieur devait être d'ordre ϵ^3 . En grand déplacement, deux ordres de grandeur sont envisageables : en ϵ^3 alors

$$\mathbf{F}^n = \epsilon^3 \mathbf{F}^{3,n}, \quad (3.10)$$

ou d'ordre ϵ , le chargement s'écrit alors

$$\mathbf{F}^n = \epsilon \mathbf{F}^{1,n}. \quad (3.11)$$

Ces deux cas vont maintenant être étudiés.

3.4 Identification des ordres de ϵ dans les équations d'équilibre

Les développements asymptotiques des tensions sont remplacés dans les équations d'équilibre des nœuds I et II . Ces équations sont identifiées ordre après ordre en commençant par l'ordre ϵ^{-1} , car les tensions commencent à l'ordre ϵ^{-1} . A l'ordre ϵ un choix devra être fait car deux modèles sont possibles : un modèle dit *de poutre* et un modèle dit *de câble*. Chacun de ses deux modèles sera ensuite analysé.

3.4.1 Équilibre à l'ordre ϵ^{-1}

Tensions dans les barres :

$$\begin{cases} \mathbf{F}^{-1,h_\alpha} & \text{n'existe pas,} \\ \mathbf{F}^{-1,d_2} & = k^{d_2} (\mathbf{U}^{0,I} - \mathbf{U}^{0,II}), \\ \mathbf{F}^{-1,v_4} & = k^{v_4} (\mathbf{U}^{0,I} - \mathbf{U}^{0,II}). \end{cases} \quad (3.12)$$

Équilibre des nœuds I et II :

$$I^{-1} \text{ ou } II^{-1} : \mathbf{F}^{-1,d_2} + \mathbf{F}^{0,v_4} = \mathbf{o}. \quad (3.13)$$

Comme les barres d_2 et v_4 ne peuvent pas être parallèles, même après déformation, nous avons donc immédiatement :

$$\mathbf{F}^{-1,d_2} = \mathbf{F}^{-1,v_4} = \mathbf{o}, \quad (3.14)$$

soit pour les déplacements :

$$\mathbf{U}^{0,I} = \mathbf{U}^{0,II} = \mathbf{U}^0. \quad (3.15)$$

Tous les nœuds de la cellule (nœuds I et II) ont le même déplacement macroscopique \mathbf{U}^0 . Cela implique que la longueur finale d'une barre b est toujours d'ordre ϵ^1 .

$$\mathbf{U}^b = \epsilon \mathbf{U}^{1,b} + \epsilon^2 \mathbf{U}^{2,b} + \dots \quad (3.16)$$

3.4.2 Équilibre à l'ordre ϵ^0

Force dans les barres :

$$\begin{cases} \mathbf{F}^{0,h_\alpha} &= k^{h_\alpha} b^{0,h_\alpha} L \left(\boldsymbol{\nu} + \frac{d\mathbf{U}^0}{dX} \right), \\ \mathbf{F}^{0,d_2} &= k^{d_2} b^{0,d_2} \mathbf{Q}^{1,d_2}, \\ \mathbf{F}^{0,v_4} &= k^{v_4} b^{0,v_4} \mathbf{Q}^{1,v_2} \end{cases} \quad (3.17)$$

Équilibre des nœuds I et II :

$$\begin{cases} I^0 : & \mathbf{F}^{0,d_2} + \mathbf{F}^{0,v_4} = \mathbf{o}, \\ II^0 : & -\mathbf{F}^{0,d_2} - \mathbf{F}^{0,v_4} = \mathbf{o}. \end{cases} \quad (3.18)$$

Les barres d_2 et v_4 ne pouvant être physiquement parallèles, on a :

$$\mathbf{F}^{0,d_2} = \mathbf{F}^{0,v_4} = \mathbf{o}$$

Les vecteurs directeurs des barres \mathbf{g}^{0,d_2} et \mathbf{g}^{0,v_4} étant non nuls, on obtient :

$$b^{0,d_2} = b^{0,v_4} = 0,$$

soit :

$$\begin{cases} \|L\boldsymbol{\nu} + H\boldsymbol{\nu} + \mathbf{U}^{1,I} - \mathbf{U}^{1,II} + L \frac{d\mathbf{U}^0}{dX}\| &= \sqrt{L^2 + H^2}, \\ \|L\boldsymbol{\nu} + H\boldsymbol{\nu} + \mathbf{U}^{1,I} - \mathbf{U}^{1,II}\| &= H. \end{cases} \quad (3.19)$$

Ces deux équations seront étudiées lors de l'équilibre à l'ordre ϵ . Cependant, ces deux équations définissent parfaitement $\mathbf{U}^{1,I} - \mathbf{U}^{1,II}$ même si deux solutions sont en théorie possibles (figure 3.2).

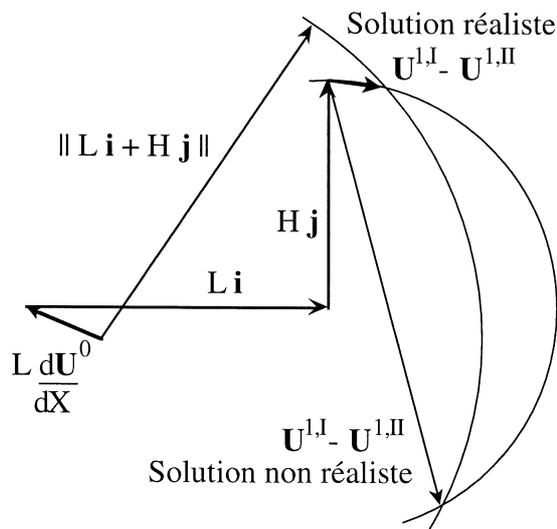


Figure 3.2 : déplacement à l'ordre 1 fonction du déplacement macroscopique et de la géométrie

3.4.3 Équilibre à l'ordre ϵ

Équilibre des nœuds I et II :

$$\begin{cases} (I + II)^1 : & -L \frac{d(\mathbf{F}^{0,h_1} + \mathbf{F}^{0,h_3})}{dX} = \mathbf{o}, \\ (I - II)^1 : & \mathbf{F}^{1,d_2} + \mathbf{F}^{1,v_4} = \mathbf{o}. \end{cases} \quad (3.20)$$

Les barres d_2 et v_4 n'étant pas parallèles, l'équation $(I - II)^1$ donne :

$$\mathbf{F}^{1,d_2} = \mathbf{F}^{1,v_4} = \mathbf{o}.$$

Soit $\boldsymbol{\tau}$, un vecteur tangent à la déformée macroscopique ($\|\boldsymbol{\tau}\| \neq 1$ *a priori*). Il est défini à partir de la déformée macroscopique par

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\nu} + \frac{d\mathbf{U}^0}{dX}. \quad (3.21)$$

Au début de la déformation, $\boldsymbol{\tau} \sim \boldsymbol{\nu}$, ce qui est en adéquation avec la description avant déformation du treillis poutre. Les tensions \mathbf{F}^{0,h_1} et \mathbf{F}^{0,h_3} sont colinéaires à $\boldsymbol{\tau}$ et

$$b^{0,h_1} = b^{0,h_3} = 1 - \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|}.$$

Selon l'ordre de grandeur de ϵ des efforts extérieurs sur les nœuds I et II : $\mathbf{F}^I + \mathbf{F}^{II}$, deux modèles macroscopiques différents de la structure sont donnés par l'équation $(I + II)^1$:

$$-L^2(k^{h_1} + k^{h_3}) \frac{d \left[\left(1 - \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|} \right) \boldsymbol{\tau} \right]}{dX} = \begin{cases} \mathbf{F}^{1,I} + \mathbf{F}^{1,II}, \\ \mathbf{o}. \end{cases} \quad (3.22)$$

$$(3.23)$$

- un *modèle de câble* où les effets de traction ou de tension sont prépondérants (équation 3.22). Le chargement extérieur est supposé être d'ordre ϵ ,
- un *modèle de poutre* où les effets de flexion sont prépondérants (équation 3.23). Le chargement extérieur est supposé être d'ordre ϵ^3 .

3.5 Modèle et comportement du treillis poutre en \mathcal{N}

3.5.1 Homogénéisation du treillis, modèle continu de poutre

Dans cette partie, nous nous intéressons au *modèle de poutre*. En effet, en petit déplacement, on ne trouve que le modèle de poutre à flexion prépondérante. Ce cas est donc dans la continuité des travaux précédents. Le chargement extérieur sur la poutre est supposé d'ordre ϵ^3 . Comme nous sommes en grand déplacement, nous pouvons supposer *a priori* que le vecteur $\boldsymbol{\tau}$ n'a pas une direction constante le long de la poutre. L'équation 3.23 permet alors d'énoncer

$$\|\boldsymbol{\tau}\| = \|\boldsymbol{\imath} + \frac{d\mathbf{U}^0}{dX}\| = 1. \quad (3.24)$$

La poutre ne s'allonge pas macroscopiquement, elle ne fait que tourner de façon locale car $\boldsymbol{\tau}$ est un vecteur constant en norme mais variable en direction. Les tensions dans les barres h_1 et h_3 sont nulles à l'ordre 0 ; $\mathbf{F}^{0,h_1} = \mathbf{F}^{0,h_3} = \mathbf{o}$. Posons $H\boldsymbol{j} + \mathbf{U}^{1,I} - \mathbf{U}^{1,II} = H\mathbf{n}$; avec $\|\mathbf{n}\| = 1$, alors :

$$\begin{aligned} L\boldsymbol{\imath} + H\boldsymbol{j} + \mathbf{U}^{1,I} - \mathbf{U}^{1,II} + L\frac{d\mathbf{U}^0}{dX} &= L\boldsymbol{\tau} + H\mathbf{n}, \\ \left\| L\boldsymbol{\imath} + H\boldsymbol{j} + \mathbf{U}^{1,I} - \mathbf{U}^{1,II} + L\frac{d\mathbf{U}^0}{dX} \right\|^2 &= L^2 + H^2, \\ &= L^2 + H^2 + 2HL\langle\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}\rangle. \end{aligned}$$

Donc les deux vecteurs $\boldsymbol{\tau}$ et \mathbf{n} sont orthogonaux :

$$\langle\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}\rangle = 0$$

Nous avons deux solutions : soit $\mathbf{n} = \mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\tau}$ ou soit $\mathbf{n} = -\mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\tau}$. Seule la première proposition est à retenir car pour des petits déplacements, nous devons trouver que $\mathbf{n} \sim \boldsymbol{j}$ (figure 3.2). Finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\imath} + \frac{d\mathbf{U}^0}{dX}, \\ \|\boldsymbol{\tau}\| = 1, \\ \left\langle \boldsymbol{\tau}, \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dX} \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{\tau}, \frac{d^2\mathbf{U}^0}{dX^2} \right\rangle = 0, \\ \mathbf{n} = \mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{j} + \frac{\mathbf{U}^{1,I} - \mathbf{U}^{1,II}}{H}, \\ \|\mathbf{n}\| = 1. \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Les vecteurs directeurs à l'ordre 0 des barres sont

$$\begin{cases} \mathbf{g}^{0,h_\alpha} &= \boldsymbol{\tau}, \\ \mathbf{g}^{0,d_2} &= \frac{L\boldsymbol{\tau} + H\mathbf{n}}{\sqrt{L^2 + H^2}}, \\ \mathbf{g}^{0,v_4} &= \mathbf{n}. \end{cases} \quad (3.26)$$

Les barres ont donc subi une rotation passant de la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ à la base $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{k})$. Il n'y a pas de distorsion de la cellule. Les efforts dans les barres à l'ordre ϵ peuvent donc s'écrire :

$$\begin{cases} \mathbf{F}^{1,h_\alpha} &= k^{h_\alpha} b^{1,h_\alpha} L\boldsymbol{\tau}, \\ \mathbf{F}^{1,d_2} &= \mathbf{F}^{1,v_4} = \mathbf{o}. \end{cases} \quad (3.27)$$

Nous pouvons déduire de l'équation $(I - II)^1$ la quantité $\mathbf{U}^{2,I} - \mathbf{U}^{2,II}$ projetée sur $\boldsymbol{\tau}$ et \mathbf{n} , mais comme ce calcul n'intervient pas dans la détermination de \mathbf{U}^0 , on ne l'explicité pas.

a) Équilibre à l'ordre ϵ^2

Équilibre des nœuds I et II :

$$\begin{cases} (I + II)^2 &: -L \frac{d(\mathbf{F}^{1,h_1} + \mathbf{F}^{1,h_3})}{dX} = \mathbf{o}, \\ (I - II)^2 &: -L \frac{d(\mathbf{F}^{1,h_1} - \mathbf{F}^{1,h_3})}{dX} + 2(\mathbf{F}^{2,d_2} + \mathbf{F}^{2,v_4}) = \mathbf{o}. \end{cases} \quad (3.28)$$

Écrivons l'équation $(I + II)^2$ en explicitant les tensions dans les barres.

$$\frac{d \left[(k^{h_1} b^{1,h_1} + k^{h_3} b^{1,h_3}) \boldsymbol{\tau} \right]}{dX} = \mathbf{o}.$$

Comme le vecteur tangent $\boldsymbol{\tau}$ est un vecteur de direction variable :

$$k^{h_1} b^{1,h_1} + k^{h_3} b^{1,h_3} = 0. \quad (3.29)$$

Nous pouvons déduire de cette équation $\left\langle \frac{d\mathbf{U}^{1,I}}{dX}, \boldsymbol{\tau} \right\rangle$ et $\left\langle \frac{d\mathbf{U}^{1,II}}{dX}, \boldsymbol{\tau} \right\rangle$ car :

$$b^{1,h_1} = \left\langle \boldsymbol{\tau}, \frac{d\mathbf{U}^{1,I}}{dX} \right\rangle, \quad b^{1,h_3} = \left\langle \boldsymbol{\tau}, \frac{d\mathbf{U}^{1,II}}{dX} \right\rangle.$$

Or la différence des déplacements à l'ordre ϵ est donnée par

$$\mathbf{U}^{1,I} - \mathbf{U}^{1,II} = H(\mathbf{n} - \mathbf{j}),$$

donc

$$\begin{cases} b^{1,h_1} = \left\langle \frac{d\mathbf{U}^{1,I}}{dX}, \boldsymbol{\tau} \right\rangle = \frac{Hk^{h_3}}{k^{h_1} + k^{h_3}} \left\langle \frac{d\mathbf{n}}{dX}, \boldsymbol{\tau} \right\rangle, \\ b^{1,h_3} = \left\langle \frac{d\mathbf{U}^{1,II}}{dX}, \boldsymbol{\tau} \right\rangle = -\frac{Hk^{h_1}}{k^{h_1} + k^{h_3}} \left\langle \frac{d\mathbf{n}}{dX}, \boldsymbol{\tau} \right\rangle. \end{cases} \quad (3.30)$$

Écrivons les tensions à l'ordre ϵ^2 :

$$\begin{cases} \mathbf{F}^{2,h_\alpha} = k^{h_\alpha} b^{2,h_\alpha} L\boldsymbol{\tau} + k^{h_\alpha} b^{1,h_\alpha} \left(L \frac{d\mathbf{U}^{1,\alpha}}{dX} + \frac{L^2}{2} \frac{d^2\mathbf{U}^0}{dX^2} \right) \\ \mathbf{F}^{2,d_2} = k^{d_2} b^{2,d_2} (L\boldsymbol{\tau} + H\mathbf{n}), \\ \mathbf{F}^{2,v_4} = k^{v_4} b^{2,v_4} H\mathbf{n}. \end{cases} \quad (3.31)$$

Nous pouvons déduire de l'équation $(I - II)^2$ la différence $\mathbf{U}^{3,I} - \mathbf{U}^{3,II}$ projetée sur $\boldsymbol{\tau}$ et \mathbf{n} . Nous aurons besoin par la suite de la projection de $\mathbf{F}^{2,d}$ sur $\boldsymbol{\tau}$. Écrivons l'équation $(I - II)^2$ sur $\boldsymbol{\tau}$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}^{2,d}, \boldsymbol{\tau} \rangle &= \frac{L}{2} \left\langle \frac{d(\mathbf{F}^{1,h_1} - \mathbf{F}^{1,h_3})}{dX}, \boldsymbol{\tau} \right\rangle, \\ &= \frac{L^2}{2} \left\langle \frac{d \left[(k^{h_1} b^{1,h_1} - k^{h_3} b^{1,h_3}) \boldsymbol{\tau} \right]}{dX}, \boldsymbol{\tau} \right\rangle, \\ &= \frac{L^2}{2} \frac{d(k^{h_1} b^{1,h_1} - k^{h_3} b^{1,h_3})}{dX}, \\ &= L^2 k^{h_1} \frac{db^{1,h_1}}{dX}, \\ \langle \mathbf{F}^{2,d}, \boldsymbol{\tau} \rangle &= \frac{L^2 H k^{h_1} k^{h_3}}{k^{h_1} + k^{h_3}} \frac{d \left\langle \frac{d\mathbf{n}}{dX}, \boldsymbol{\tau} \right\rangle}{dX}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

b) Équilibre à l'ordre ϵ^3

Équilibre des nœuds I et II :

$$(I + II)^3 : -L \frac{d(\mathbf{F}^{2,h_1} + \mathbf{F}^{2,h_3} + \mathbf{F}^{2,d_2})}{dX} = \mathbf{F}^{3,I} + \mathbf{F}^{3,II}. \quad (3.33)$$

Nous pouvons trouver une intégrale première de cette équation

$$\mathbf{F}^{2,h_1} + \mathbf{F}^{2,h_3} + \mathbf{F}^{2,d_2} = -\frac{1}{L} \int_0^X \mathbf{F}^{3,I} + \mathbf{F}^{3,II} dX + \mathbf{c}.$$

En écrivant les conditions aux limites en $X = 0$, on identifie le vecteur constant \mathbf{c} aux forces extérieures agissant sur la cellule origine $-\mathbf{F}_0^{2,I} - \mathbf{F}_0^{2,II}$. Ce chargement est supposé être d'ordre ϵ^2 contrairement au chargement en partie courante qui est choisi d'ordre ϵ^3 . Ce décalage s'explique lorsque l'identification entre les différents chargements se fera (équation 3.43). On a alors

$$\mathbf{F}^{2,h_1} + \mathbf{F}^{2,h_3} + \mathbf{F}^{2,d_2} = -\frac{1}{L} \int_0^X \mathbf{F}^{3,I} + \mathbf{F}^{3,II} dX - \mathbf{F}_0^{2,I} - \mathbf{F}_0^{2,II}. \quad (3.34)$$

Cette équation est projetée sur \mathbf{n} . L'objectif est de supprimer les termes $\mathbf{F}^{2,h_1} + \mathbf{F}^{2,h_3}$ que l'on ne connaît pas ainsi que la composante sur $\boldsymbol{\tau}$ de la tension \mathbf{F}^{2,d_2} .

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}^{2,h_1} + \mathbf{F}^{2,h_3}, \mathbf{n} \rangle &= \langle k^{h_1} b^{1,h_1} \left(L \frac{d\mathbf{U}^{1,I}}{dX} + \frac{L^2}{2} \frac{d^2\mathbf{U}^0}{dX^2} \right) + k^{h_3} b^{1,h_3} \left(L \frac{d\mathbf{U}^{1,II}}{dX} + \frac{L^2}{2} \frac{d^2\mathbf{U}^0}{dX^2} \right), \mathbf{n} \rangle, \\ &= k^{h_1} b^{1,h_1} L \left\langle \frac{d\mathbf{U}^{1,I}}{dX} - \frac{d\mathbf{U}^{1,II}}{dX}, \mathbf{n} \right\rangle, \\ &= k^{h_1} b^{1,h_1} LH \left\langle \frac{d(\mathbf{n} - \mathbf{j})}{dX}, \mathbf{n} \right\rangle, \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}^{2,d_2}, \mathbf{n} \rangle &= t \langle \mathbf{F}^{2,d_2}, \boldsymbol{\tau} \rangle, \\ &= \frac{t^2 L^3 k^{h_1} k^{h_3}}{k^{h_1} + k^{h_3}} \frac{d \left\langle \frac{d\mathbf{n}}{dX}, \boldsymbol{\tau} \right\rangle}{dX}. \end{aligned}$$

finalement le modèle continu en grand déplacement pour le treillis poutre plan en \mathcal{N} est :

$$\frac{d \left\langle \frac{d\mathbf{n}}{dX}, \boldsymbol{\tau} \right\rangle}{dX} = - \frac{k^{h_1} + k^{h_3}}{t^2 L^3 k^{h_1} k^{h_3}} \left\langle \frac{1}{L} \int_0^X \mathbf{F}^{3,I} + \mathbf{F}^{3,II} dX + \mathbf{F}_0^{3,I} + \mathbf{F}_0^{3,II}, \mathbf{n} \right\rangle. \quad (3.35)$$

En exprimant \mathbf{n} par $\mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\tau}$.

$$\left\langle \frac{d \left(\boldsymbol{\tau} \wedge \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dX} \right)}{dX}, \mathbf{k} \right\rangle = \frac{k^{h_1} + k^{h_3}}{t^2 L^3 k^{h_1} k^{h_3}} \left\langle \boldsymbol{\tau} \wedge \frac{1}{L} \int_0^X \mathbf{F}^{3,I} + \mathbf{F}^{3,II} dX + \boldsymbol{\tau} \wedge (\mathbf{F}_0^I + \mathbf{F}_0^{II}), \mathbf{k} \right\rangle \quad (3.36)$$

Les vecteurs $\boldsymbol{\tau}$ et $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dX}$ peuvent aussi s'écrire $\boldsymbol{\nu} + \frac{d\mathbf{U}^0}{dX}$ et $\frac{d^2\mathbf{U}^0}{dX^2}$.

3.5.2 Résistance des matériaux, équilibre d'une poutre droite en grand déplacement

Dans le cadre de la résistance des matériaux, on étudie une poutre initialement droite en statique sous les hypothèses des petites déformations et des grands déplacements. Le chargement extérieur \mathbf{F} est réparti le long de la poutre, il n'y a pas de moment réparti. L'abscisse curviligne est notée s , soient \mathbf{R} la résultante et \mathbf{M} le moment du torseur des inter-efforts, les équations locales de l'équilibre de la poutre s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{R}}{dX} + \mathbf{F} \frac{ds}{dX} = \mathbf{o}, \\ \frac{d\mathbf{M}}{dX} + \left(\boldsymbol{\nu} + \frac{d\mathbf{U}}{dX} \right) \wedge \mathbf{R} = \mathbf{o}. \end{cases} \quad (3.37)$$

Soit $\boldsymbol{\tau}$ le vecteur tangent à la poutre déformée ($\|\boldsymbol{\tau}\| = 1$). La relation de comportement d'une poutre d'Euler Bernoulli où les effets du cisaillement sont négligés est :

$$EI \left\langle \boldsymbol{\tau} \wedge \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}, \mathbf{k} \right\rangle = \langle \mathbf{M}, \mathbf{k} \rangle, \quad (3.38)$$

où $\langle \boldsymbol{\tau} \wedge \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}, \mathbf{k} \rangle$ représente la variation de courbure de la section droite au cours de la déformation. L'équation portant sur la résultante est intégrée

$$\mathbf{R} = - \int_0^X \mathbf{F} \frac{ds}{dX} dX - \mathbf{F}_0,$$

et en remplaçant dans l'équation de moment, on obtient

$$EI \frac{dX}{ds} \left\langle \frac{d(\boldsymbol{\tau} \wedge \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dX})}{dX}, \mathbf{k} \right\rangle = \left\langle \left(\boldsymbol{\nu} + \frac{d\mathbf{U}}{dX} \right) \wedge \left(\int_0^X \mathbf{F} \frac{ds}{dX} dX + \mathbf{F}_0 \right), \mathbf{k} \right\rangle. \quad (3.39)$$

Nous avons fait l'hypothèse des petites déformations. L'allongement de la poutre est donc petit, nous pouvons alors faire les hypothèses suivantes :

$$\frac{ds}{dX} \simeq 1, \quad \boldsymbol{\nu} + \frac{d\mathbf{U}}{dX} \simeq \boldsymbol{\tau},$$

alors :

$$\left\langle \frac{d(\boldsymbol{\tau} \wedge \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dX})}{dX}, \mathbf{k} \right\rangle = \frac{1}{EI} \left\langle \boldsymbol{\tau} \wedge \int_0^X \mathbf{F} dX + \boldsymbol{\tau} \wedge \mathbf{F}_0, \mathbf{k} \right\rangle \quad (3.40)$$

3.5.3 Identification des deux modèles de poutre

Il s'agit d'identifier le modèle de poutre continu obtenu par homogénéisation de notre structure périodique (équation 3.36) et le modèle de poutre droite d'Euler Bernoulli (équation 3.40). Les deux modèles sont similaires. L'identification nécessite l'équivalence entre la charge linéique \mathbf{F} et de le chargement aux nœuds \mathbf{F}^n pour la structure discrète. Du fait du décalage effectué en supposant les forces petites, l'effort physique réel exercé en un nœud n de la structure \mathbf{F}^n est :

$$\mathbf{F}^n = \epsilon^3 \mathbf{F}^{3,n}, \quad (3.41)$$

et nous avons l'équivalence suivante :

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{F}^I + \mathbf{F}^{II}}{l} = \frac{\epsilon^2}{L} (\mathbf{F}^{3,I} + \mathbf{F}^{3,II}). \quad (3.42)$$

Pour le chargement à l'origine $\mathbf{F}_0^{2,I} + \mathbf{F}_0^{2,II}$ et \mathbf{F}_0 , comme

$$\frac{1}{L} \int_0^X \mathbf{F}^{3,I} + \mathbf{F}^{3,II} dX = \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^X \mathbf{F} dX,$$

alors le chargement à l'origine est d'ordre ϵ^2 , soit un ordre inférieur au chargement en partie courante. Ce résultat avait déjà été démontré par Verna sur le même treillis poutre en petit déplacement [65].

$$\mathbf{F}_0 = \epsilon^2 (\mathbf{F}_0^{2,I} + \mathbf{F}_0^{2,II}). \quad (3.43)$$

L'inertie équivalente pour le treillis poutre peut alors être déterminée

$$EI_{eq} = \frac{t^2 L^3 k^{h_1} k^{h_3}}{k^{h_1} + k^{h_3}} \epsilon^2,$$

mais les rigidités des barres h_1 et h_3 s'expriment

$$k^{h_1} = \frac{EA^{h_1}}{L}, \quad k^{h_2} = \frac{EA^{h_3}}{L},$$

donc

$$I_{eq} = h^2 \frac{A^{h_1} A^{h_3}}{A^{h_1} + A^{h_3}} \quad (3.44)$$

A l'ordre 0, seuls les effets de flexion sont apparents. Comme en petit déplacement, les effets de flexion sont prépondérants. Ce phénomène s'explique par les rotations de sections que le moment de flexion engendre ; Celles-ci entraînent des déplacements proportionnels à la distance les séparant de la déformation. Les déplacements engendrés par une déformation de traction sont, eux, indépendants de la distance. La loi de comportement macroscopique trouvée pour notre poutre treillis en \mathcal{N} est celle d'une poutre continue à effet de flexion prépondérant. Cette loi, non linéaire, est identique à celle trouvée en petit déplacement, sauf qu'elle est écrite dans le repère local. Rappelons la loi en petit déplacement d'une poutre continue et d'une poutre treillis en \mathcal{N} .

$$\begin{cases} \left\langle \frac{d^4 \mathbf{U}}{dX^4}, \mathbf{j} \right\rangle = \frac{1}{EI} \langle \mathbf{F}, \mathbf{j} \rangle, \\ \left\langle \frac{d^4 \mathbf{U}^0}{dX^4}, \mathbf{j} \right\rangle = \frac{k^{h_1} + k^{h_3}}{t^2 L^4 k^{h_1} k^{h_3}} \langle \mathbf{F}^{3,I} + \mathbf{F}^{3,II}, \mathbf{j} \rangle. \end{cases} \quad (3.45)$$

Ces deux lois donnent la même inertie équivalente I_{eq} que celle trouvée en grand déplacement. L'équivalence entre le treillis poutre et le modèle continu de poutre est donc valable sur un large domaine d'application.

3.5.4 Application numérique, le flambage du treillis poutre en \mathcal{N}

Le modèle macroscopique que nous avons trouvé correspond à un modèle de poutre courbe sans allongement macroscopique. Une des applications de ces équations est le flambage d'Euler des poutres (figure 3.4). On suppose la déformée faible mais non nulle. Il faut faire un calcul en grand déplacement si l'on désire trouver la charge de flambage d'Euler et non en petit déplacement car l'équilibre doit s'écrire en configuration déformée. La déformée étant tout de même faible, on négligera les termes carrés. Le cas d'étude classique du flambage d'Euler est la poutre articulée-articulée à ses deux extrémités et non chargée en partie courante (figure 3.3) [66]. Nous avons les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \int \mathbf{F} dx &= -\mathbf{P}, \\ &= -P \mathbf{i}, \\ \boldsymbol{\tau} \wedge P \mathbf{i} &= -\frac{d\mathbf{U}}{dX} \wedge P \mathbf{i}, \\ &= -\left\langle \frac{d\mathbf{U}}{dX}, \mathbf{j} \right\rangle P \mathbf{k}, \end{aligned}$$

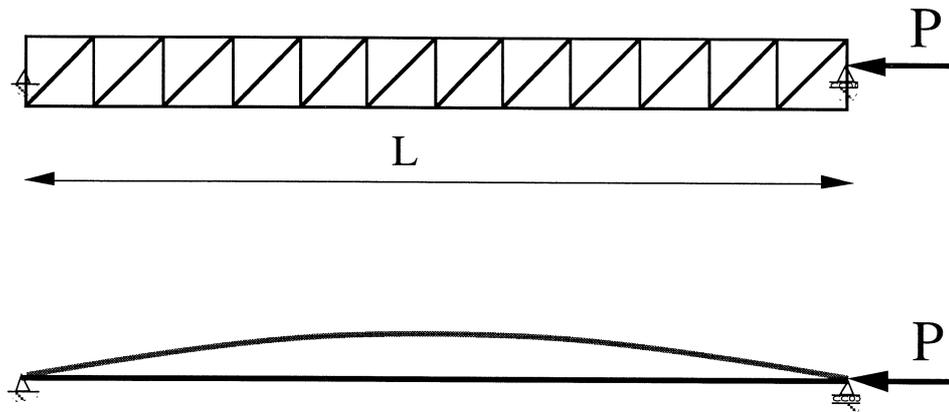
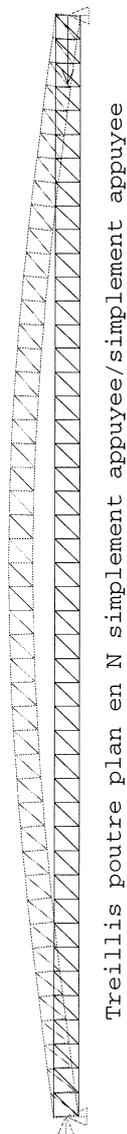


Figure 3.3 : *flambage d'Euler d'une poutre*



Treillis poutre plan en \mathcal{N} simplement appuyée/simplement appuyée

Figure 3.4 : *premier mode de flambage d'Euler du treillis poutre plan en \mathcal{N} avec des conditions aux limites articulé/articulé*

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\tau} \wedge \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dX} &= \left(\boldsymbol{i} + \frac{d\mathbf{U}}{dX} \right) \wedge \frac{d^2\mathbf{U}}{dX^2}, \\
 &= \left\langle \frac{d^2\mathbf{U}}{dX^2}, \boldsymbol{j} \right\rangle \mathbf{k} + \frac{d\mathbf{U}}{dX} \wedge \frac{d^2\mathbf{U}}{dX^2}, \\
 \frac{d\mathbf{U}}{dX} \wedge \frac{d^2\mathbf{U}}{dX^2} &\ll \left\langle \frac{d^2\mathbf{U}}{dX^2}, \boldsymbol{j} \right\rangle \mathbf{k}, \\
 \frac{d(\boldsymbol{\tau} \wedge \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dX})}{dX} &\simeq \frac{d^3\langle \mathbf{U}, \boldsymbol{j} \rangle}{dX^3} \mathbf{k}.
 \end{aligned}$$

L'équation d'équilibre pour le flambage d'Euler est donc

$$\frac{d^3\langle \mathbf{U}, \boldsymbol{j} \rangle}{dX^3} = -\frac{1}{EI} \frac{d\langle \mathbf{U}, \boldsymbol{j} \rangle}{dX} P. \quad (3.46)$$

Une solution de cette équation est :

$$\langle \mathbf{U}, \boldsymbol{j} \rangle = \alpha \sin \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) + \beta \cos \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) + \gamma.$$

Pour notre poutre articulée-articulée, les conditions aux limites sont des déplacements nuls aux deux extrémités, l'effort horizontal en 0 ($-P\boldsymbol{i}$) et un couple nul en 0 ce qui correspond à une dérivée seconde des déplacements nulle en 0.

$$\langle \mathbf{U}(0), \boldsymbol{j} \rangle = \langle \mathbf{U}(L), \boldsymbol{j} \rangle = \frac{d^2\langle \mathbf{U}(0), \boldsymbol{j} \rangle}{dX^2} = \frac{d^2\langle \mathbf{U}(L), \boldsymbol{j} \rangle}{dX^2} = 0. \quad (3.47)$$

Alors $\beta = \gamma = 0$ et la déformée est identiquement nulle sauf si la charge P vérifie la condition suivante :

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} L = k\pi, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.48)$$

La plus petite charge d'Euler vérifiant cette condition est noté P_c .

$$P_c = \pi^2 \frac{EI}{L^2} \quad (3.49)$$

Le premier mode de flambage est identique au premier mode de vibration de flexion. Il s'écrit :

$$\langle \mathbf{U}, \boldsymbol{j} \rangle = \alpha \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right) \quad (3.50)$$

Nous pouvons voir sur la figure 3.5 la bonne corrélation entre la charge critique d'Euler déterminée par le modèle continu équivalent (équation 3.50) et un calcul effectué par la MEF sur le treillis. Ce dernier calcul a été réalisé à l'aide du module 'flambage' du logiciel ANSYS [5]. Les caractéristiques du treillis poutres en \mathcal{N} sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} E = 0.7510^{11} \text{Pa}, \\ A^{h_1} = A^{h_3} = A^{d_2} = A^{v_4} = 1.1310^{-4} \text{m}^2, \\ L = 10 \text{m}, \\ \theta = 45^\circ, \quad (h = l). \end{array} \right. \quad (3.51)$$

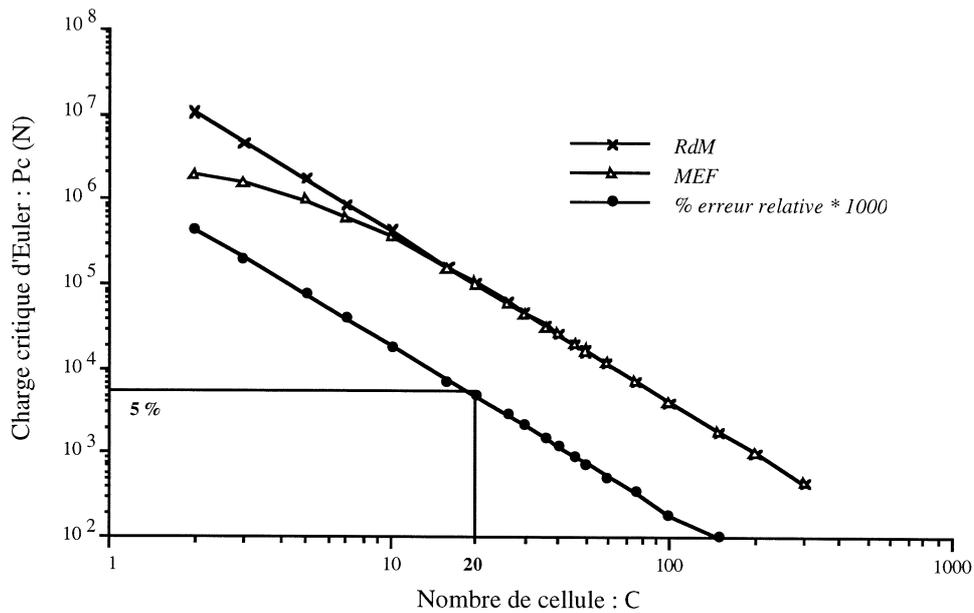


Figure 3.5 : comparaison entre la RdM et la MEF

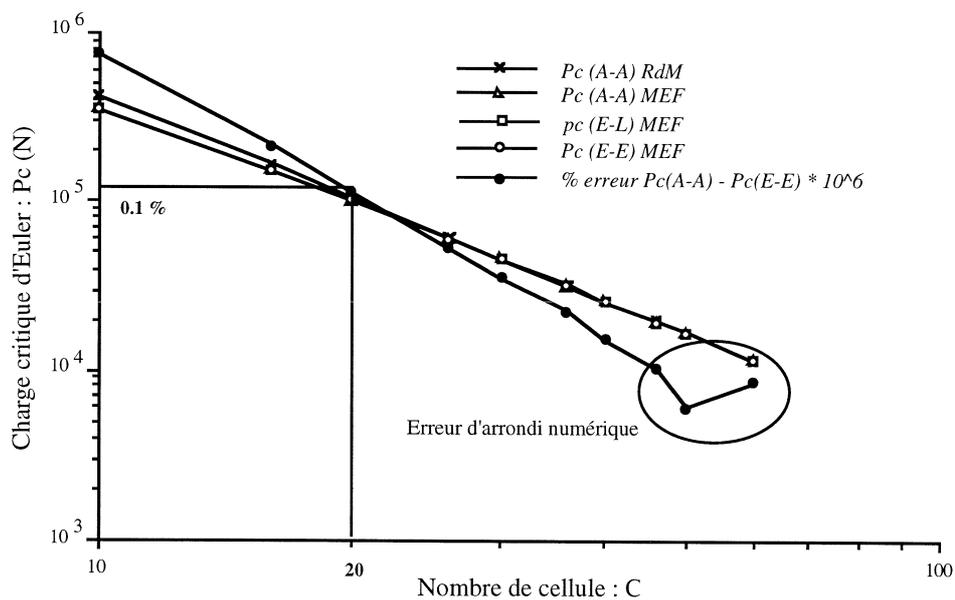


Figure 3.6 : charge critique d'Euler pour différentes conditions aux limites

L'erreur relative entre les deux courbes devient inférieure à 5 % pour un nombre de cellules supérieure à 20, c'est à dire dès que la théorie de la RdM est valable (rapport $\frac{L}{l} \geq 10$) (figure 3.4). Ce nombre de cellules minimum pour obtenir un résultat valide correspond à celui trouvé par Tollenaere sur le premier mode de flexion [60].

D'autres tests ont été faits pour confirmer la bonne corrélation entre les deux modèles. La figure 3.6 donne pour un nombre de cellule $\mathcal{C} = 10, \dots, 60$ la valeur de la charge critique d'Euler P_c pour trois cas d'étude équivalents dans la théorie d'Euler, c'est à dire ayant la même charge critique (figure 3.7),

- A-A \leftrightarrow La poutre articulée-articulée de longueur L avec \mathcal{C} cellules,
- E-L \leftrightarrow La poutre encastree-libre de longueur $\frac{L}{2}$ avec $\frac{\mathcal{C}}{2}$ cellules,
- E-E \leftrightarrow La poutre encastree-encastree de longueur $2L$ avec $2\mathcal{C}$ cellules.

Nous pouvons voir sur cette figure la très bonne corrélation des trois charges limites de flambage, donc la très bonne identité entre notre treillis et son modèle de poutre continue. Il ne faut cependant pas oublier que la théorie d'Euler fournit une charge critique P_c par excès, Il ne faut donc pas utiliser ce calcul pour un dimensionnement de structure mais comme une vérification *a posteriori*.

L'inertie équivalente I_{eq} prise lors de ce calcul en poutre continue ne fait pas intervenir les rigidités des barres d_2 et v_4 . La figure 3.8 montre pour un nombre de cellule de 30 l'évolution de la charge critique de flambage en fonction du rapport des sections A^{d_2}/A^{h_1} , A^{v_4}/A^{h_1} et A^{h_3}/A^{h_1} . L'influence des rigidités k^{d_2} et k^{v_4} restent faible vis à vis des rigidités k^{h_1} et k^{h_3} . La barre d_2 a plus d'influence que la barre v_4 car pour une même section, la barre d_2 est moins rigide que la barre v_4 puisque plus longue lorsque l'angle $\theta = 45^\circ$. Lorsque les sections des barres d_2 et v_4 augmentent par rapport aux sections des barres h_1 ou h_3 , on se rapproche du modèle de poutre qui est un modèle sans déformation de ces barres. Lorsque la section de la barre h_3 diminue par rapport à celle de la barre h_1 , cela revient de nouveau à augmenter proportionnellement les rigidité des barres d_2 et v_4 donc à se rapprocher du modèle poutre. Lorsque la section de la barre h_3 augmente, on diminue proportionnellement les rigidités des barres d_2 et v_4 , on s'éloigne donc du modèle poutre.

Un autre figure montre l'influence de l'angle θ sur la charge critique (figure 3.9). Lorsque θ diminue pour un nombre de cellules fixé, les longueurs des barres d_2 et v_4 diminuent donc leur rigidité augmente et l'erreur avec le modèle poutre diminue. Inversement quand l'angle θ augmente.

$$\tan(\theta) = \frac{h}{l} = \frac{H}{L}.$$

La structure treillis en \mathcal{N} se comporte au flambage d'Euler comme une poutre dès que le nombre de cellule \mathcal{C} est suffisamment important. C'est-à-dire que la structure ressemble en gros à une poutre lorsqu'on la regarde. Cela signifie que les hypothèses pour que notre

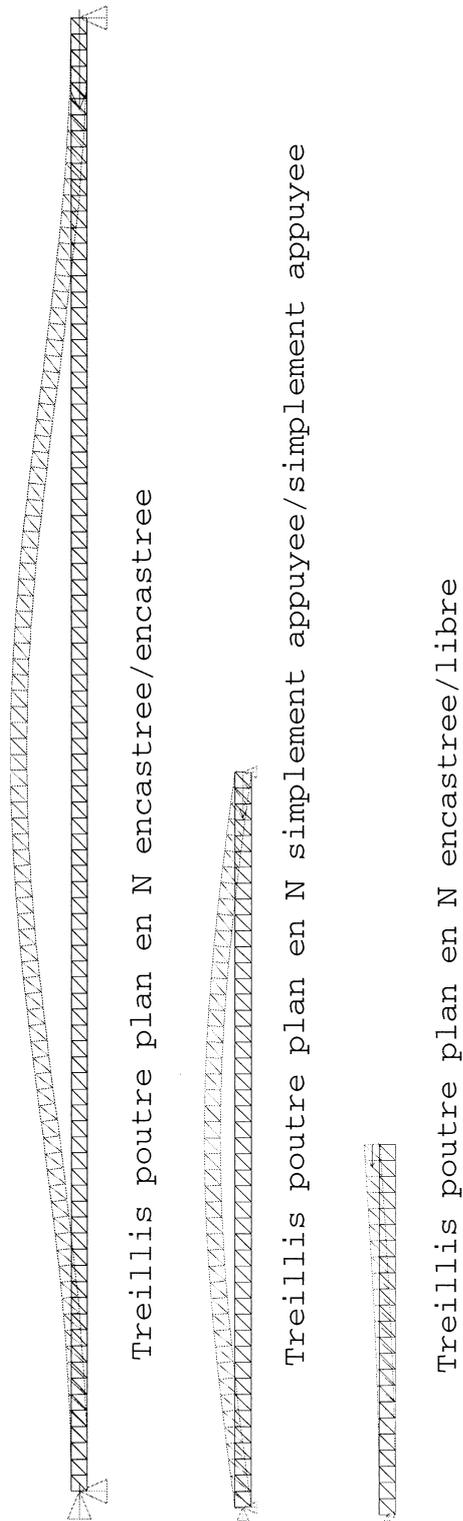


Figure 3.7 : *différents treillis poutre en \mathcal{N} ayant une charge critique d'Euler équivalente*

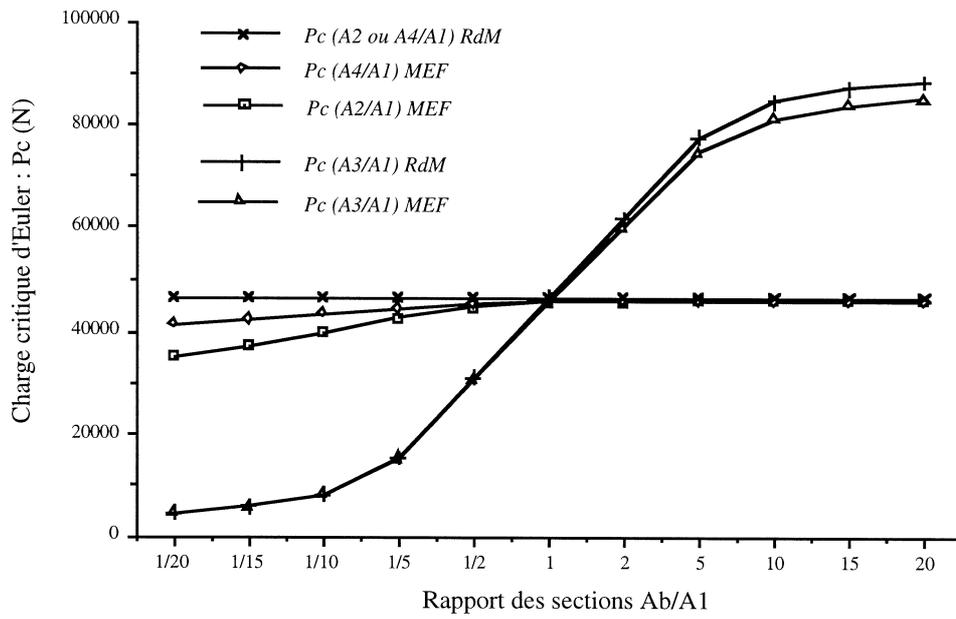


Figure 3.8 : influence du rapport des sections A^b/A^{h1} sur la charge critique d'Euler P_c

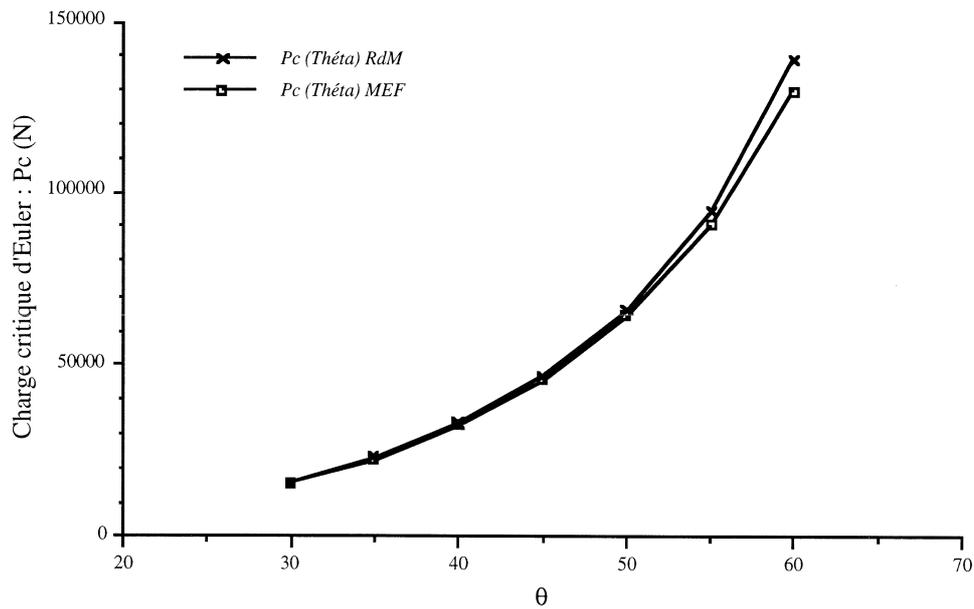


Figure 3.9 : influence de l'angle θ sur la charge critique d'Euler P_c

milieu macroscopique soit valable sont du même ordre que celles qui permettent de dire qu'un milieu continu est une poutre monodimensionnelle. On retrouve là un résultat équivalent à celui trouvé en statique et en dynamique.

3.6 Modèle et comportement de treillis câble en \mathcal{N}

3.6.1 Modèle continu de câble

Lorsque les efforts deviennent grands, c'est à dire d'ordre ϵ et que la structure devient longue, les effets de flexion de poutre perdent leur prépondérance devant les effets de tension qui pour les plaques sont appelés effet de membrane. On nommera ce comportement le modèle câble de la structure treillis. Nous étudions donc dans cette partie ce modèle (équation 3.22).

$$-L^2(k^{h_1} + k^{h_3}) \frac{d \left[\left(1 - \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|} \right) \boldsymbol{\tau} \right]}{dX} = \mathbf{F}^{1,I} + \mathbf{F}^{1,II}. \quad (3.52)$$

3.6.2 Équilibre d'un câble pesant

La formulation classique de l'équilibre d'un câble pesant est une formulation mixte avec comme variable :

- y déplacement vertical d'un point courant du câble,
- H tension dans le câble projetée sur l'horizontale.

Soit p le poids linéaire du câble, l'équilibre du câble s'écrit alors :

$$\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = -\frac{p}{H}. \quad (3.53)$$

La comparaison avec notre modèle de câble (équation 3.52) n'est pas réalisable car notre modèle est une formulation en déplacement. Écrivons donc la formulation en déplacement d'un câble.

Soit \mathbf{S} le vecteur abscisse curviligne. Ce vecteur permet de définir un vecteur tangent au câble $\boldsymbol{\tau}$ et l'élongation du câble $\|\boldsymbol{\tau}\|$.

$$d\mathbf{S} = \left(\mathbf{e} + \frac{d\mathbf{U}}{dX} \right) dX = \boldsymbol{\tau} dX. \quad (3.54)$$

Soit \mathbf{T} la tension dans le câble. Cette tension \mathbf{T} est supposée grande devant les autres forces s'exerçant sur le câble car nous nous intéressons aux câbles fortement tendus donc de faible courbure en un point fixé. La relation de comportement du câble est donc

$$\mathbf{T} = EA \frac{dS - dX}{dX} \frac{\boldsymbol{\tau}}{\|\boldsymbol{\tau}\|} = EA \left(1 - \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|}\right) \boldsymbol{\tau}. \quad (3.55)$$

L'équilibre du câble soumis à la charge linéaire \mathbf{p} s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{T} + d\mathbf{T} - \mathbf{T} + \mathbf{p}dS &= 0, \\ \frac{d\mathbf{T}}{dX} + \mathbf{p} \frac{dS}{dX} &= \mathbf{o}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Finalement

$$\frac{d \left[EA \left(1 - \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|}\right) \boldsymbol{\tau} \right]}{dX} + \mathbf{p} \|\boldsymbol{\tau}\| = \mathbf{o}.$$

Nous sommes en petite déformation, donc $\|\boldsymbol{\tau}\| \simeq 1$, la formulation en déplacement du câble s'écrit alors :

$$-EA \frac{d \left[\left(1 - \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|}\right) \boldsymbol{\tau} \right]}{dX} = \mathbf{p} \quad (3.57)$$

3.6.3 Identification des deux modèles de câble

Les deux modèles de câble vont être identifiés (équation 3.52) et (équation 3.57). L'identification ne peut se faire directement car le terme de droite dans l'équilibre du treillis (équation 3.52) ne représente pas la charge linéaire sur le câble continu équivalent \mathbf{p} ni l'effort physique réel $\mathbf{F}^I + \mathbf{F}^{II}$ exercer en un point du câble.

$$\mathbf{F}^I + \mathbf{F}^{II} = \epsilon(\mathbf{F}^{1,I} + \mathbf{F}^{1,II}), \quad (3.58)$$

donc la charge linéaire équivalente est :

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{F}^I + \mathbf{F}^{II}}{l} = \frac{1}{L} (\mathbf{F}^{1,I} + \mathbf{F}^{1,II}),$$

L'identification pour trouver la section équivalente peut être faite

$$EA_{eq} = L^2(k^{h_1} + k^{h_3}) \frac{1}{L},$$

cependant, les rigidités des barres h_1 et h_3 sont égales à

$$k^{h_1} = \frac{EA^{h_1}}{L}, \quad k^{h_2} = \frac{EA^{h_3}}{L}.$$

La section équivalente du treillis est donc

$$A_{eq} = A^{h_1} + A^{h_2}. \quad (3.59)$$

La section équivalente du treillis est la même que celle déterminée en statique linéaire [65] ainsi qu'en vibration propre [60]. Cependant, le modèle de câble est tout a fait original et n'avait pas été trouvé. En effet, ce modèle ne peut être trouvé en faisant une hypothèse de petit déplacement car le vecteur tangent à la poutre $\boldsymbol{\tau}$ à une direction constante pour un treillis périodique et donc le chargement extérieur ne peut être introduit avant l'ordre ϵ^3 .

3.7 Conclusion

Le treillis poutre en \mathcal{N} peut se caractériser par deux milieux continus équivalents différents selon l'ordre de grandeur du chargement extérieur. Un petit paramètre ϵ est d'abord défini, il dépend du nombre de cellule \mathcal{C} . Si le chargement aux nœuds \mathbf{F}^n s'écrit $\epsilon \mathbf{F}^{1,n}$, alors le modèle macroscopique est un milieu continu de câble où les effets d'élongation sont prépondérants. Si le chargement est décrit par $\epsilon^3 \mathbf{F}^{3,n}$, les treillis en \mathcal{N} de plus de 20 cellules sont très bien approchés en grand déplacement par un milieu continu de poutre où les effets de flexion sont prépondérants. Ce modèle de poutre est cohérent avec les modèles de poutre du treillis en \mathcal{N} qui ont été trouvés en élasticité linéaire ainsi qu'en vibration libre [60, 65]. Le treillis poutre plan en \mathcal{N} et le milieu continu de poutre ont été comparés en grand déplacement, cette comparaison s'est avérée très satisfaisante. Une extension de la technique d'homogénéisation en grand déplacement pour des treillis quelconques peut maintenant être envisagée, ce sera l'objet du chapitre 8.

Chapitre 4

Modèle continu du treillis poutre plan en \mathcal{N} sous chargement incrémental fini

Plan du chapitre 4

4.1	Description de l'étude	52
4.2	Modélisation du treillis poutre plan en \mathcal{N}	52
4.2.1	Description géométrique	52
4.3	Développements asymptotiques	53
4.3.1	Séparation d'échelle et développements asymptotiques	53
4.3.2	Développements asymptotiques des déplacements	54
4.3.3	Développements asymptotiques des tensions	54
4.3.4	Ordre de grandeur du chargement extérieur	55
4.4	Identification des ordres de ϵ dans les équations d'équilibre	56
4.4.1	Équilibre à l'ordre η^{-2} ou ϵ^{-1}	56
4.4.2	Équilibre à l'ordre η^{-1}	56
4.4.3	Équilibre à l'ordre η^0 ou ϵ^0	57
4.4.4	Équilibre à l'ordre η	57
4.4.5	Équilibre à l'ordre η^2 ou ϵ	57
4.5	Modèle de poutre	58
	a) Équilibre à l'ordre η^6 ou ϵ^3 , modèle de poutre en grand déplacement	58
	b) Équilibre à l'ordre η^7 , modèle de poutre en incrémental	58
4.6	Modèle de câble	58
	c) Équilibre à l'ordre η^2 ou ϵ , modèle de câble en grand déplacement	58
	d) Équilibre à l'ordre η^3 , modèle de câble en incrémental	59
4.7	Conclusion	59

4.1 Description de l'étude

L'objectif de ce chapitre est de trouver un modèle continu du treillis poutre plan en \mathcal{N} sous chargement incrémental fini. Comme nous le verrons au chapitre 10, il existe deux formulations incrémentales ; la formulation incrémentale finie et la formulation incrémentale tangente. Le chapitre 10 est basé sur une écriture incrémentale tangente où les incréments sont supposés être *a priori* des infiniments petits. Dans une écriture incrémentale finie, suite à un chargement \mathbf{F}^n , la structure s'est déformée. On augmente cependant le chargement d'une petite valeur \mathbf{f}^n ce qui augmente un petit peu les déplacements des nœuds et la structure a une nouvelle déformée. Ce problème a donc deux séparations d'échelle possibles : le petit paramètre ϵ qui caractérise la taille de la cellule l sur la longueur du treillis poutre L , ou l'inverse du nombre de cellule \mathcal{C} ; un autre petit paramètre η , indépendant de ϵ *a priori*, qui relie l'incrément de chargement \mathbf{f}^n au chargement total \mathbf{F}^n ,

$$\epsilon = \frac{l}{L} = \frac{1}{\mathcal{C}}, \quad \eta = \frac{\mathbf{f}^n}{\mathbf{F}^n}. \quad (4.1)$$

Dans une formulation incrémentale finie, le petit paramètre η est un infiniment petit devant ϵ (chapitre 10), η est indépendant de ϵ , alors que dans notre écriture incrémentale finie, les deux petits paramètres ϵ et η vont devoir être calés l'un par rapport à l'autre.

4.2 Modélisation du treillis poutre plan en \mathcal{N}

4.2.1 Description géométrique

La description géométrique du treillis poutre plan en \mathcal{N} est la même que celle faite aux deux chapitres précédents (chapitre 2 et 3). De nouveau, les conditions aux limites en déplacement sur le treillis poutre en \mathcal{N} sont : encastrée-encastrée (E-E), encastrée-libre (E-L) et articulée-articulée (A-A) (figure 3.1). Les conditions aux limites en efforts supposent de nouveau que le chargement extérieur n'est appliqué que sur les nœuds (n, X) du treillis. Ce chargement sera noté $\mathbf{F}^n(X)$ pour le chargement global et \mathbf{f}^n pour l'incrément fini de chargement.

Les inconnues du problèmes sont les déplacements et les incréments de déplacement des nœuds et les tensions ainsi que les incréments de tension dans les barres. Cependant, étant en incrémental tangent, ces deux déplacements sont liés, de même pour les deux tensions. Seules deux fonctions déplacements sont recherchées $\mathbf{U}^I(X)$ et $\mathbf{U}^{II}(X)$.

Soient A^b la section de la barre, K^b sa rigidité et \mathbf{P}^b le vecteur longueur de la barre non déformée, ces grandeurs ne dépendent pas de X car le treillis est initialement périodique. Soient $\mathbf{Q}^b(X)$ le vecteur longueur de la barre en configuration déformée et \mathbf{U}^b le vecteur différence des déplacements des nœuds extrémités d'une barre b , soit \mathbf{g}^b le vecteur unitaire

de la barre b en configuration déformée,

$$\begin{cases} K^b = \frac{EA^b}{\|P^b\|}, \\ U^b(X) = U^{E(b)}(X + \epsilon L \delta^b) - U^{O(b)}(X), \\ Q^b(X) = P^b + U^b(X), \\ g^b(X) = \frac{Q^b}{\|Q^b\|}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Soit F^b la tension dans la barre (b, X) . Le matériau constitutif des barres est supposé rester dans le domaine élastique, il est caractérisé par le module d'Young E . Le cadre de l'étude sont les petites déformations mais les grands déplacements, la relation de comportement entre la tension F^b dans la barre b et l'allongement de celle-ci est :

$$F^b = K^b [\|Q^b\| - \|P^b\|] g^b = K^b \left[1 - \frac{\|P^b\|}{\|Q^b\|} \right] Q^b. \quad (4.3)$$

L'équilibre du treillis se réduit donc à écrire l'équilibre des nœuds en configuration déformée. L'équilibre des nœuds I et II s'écrit :

$$\begin{cases} (I) : F^{h_1}(X - \epsilon L) - F^{h_1}(X) + F^{d_2}(X - \epsilon L) + F^{v_4}(X) = F^I(X), \\ (II) : F^{h_3}(X - \epsilon L) - F^{h_3}(X) - F^{d_2}(X) - F^{v_4}(X) = F^{II}(X). \end{cases} \quad (4.4)$$

4.3 Développements asymptotiques

4.3.1 Séparation d'échelle et développements asymptotiques

Il existe une séparation d'échelle entre la taille l d'une cellule et la longueur L de la structure donnée par le petit paramètre ϵ , il y a aussi une séparation d'échelle entre l'incrément de chargement f^n et la charge totale avant incrément F^n caractérisé par η .

Dans les études précédentes, les fonctions inconnues ont été recherchées sous forme de développements asymptotiques en puissance de ϵ . Cette étude est caractérisée par deux petits paramètres ϵ et η , les fonctions inconnues vont donc avoir deux développements asymptotiques. Cependant, lors de l'identification, ces deux paramètres ϵ et η ne sont pas infiniment éloignés l'un par rapport à l'autre comme en incrémentale tangente ($\eta \ll \epsilon$). Le nombre de cellules \mathcal{C} est fini et l'incrément de chargement f^n est aussi fini. Nous allons donc caler η par rapport à ϵ avant de faire les développements asymptotiques.

Si $\eta \leq \epsilon$, le treillis plan en \mathcal{N} n'est pas homogénéisable car on n'arrive pas à écrire de modèle macroscopique équivalent. Pour obtenir un milieu continu, η doit être très petit devant ϵ . Dans la pratique, cela signifie que l'on homogénéise d'abord sur la géométrie afin d'avoir un milieu continu, puis sur le chargement afin d'obtenir le problème en pas de chargement. Le premier rapport entre ϵ et η pour lequel un milieu continu est possible se trouve être

$$\eta^2 = \epsilon, \quad \eta = \sqrt{\epsilon}. \quad (4.5)$$

Si η est plus grand que $\sqrt{\epsilon}$, cela marche aussi, par exemple le choix $\eta^3 = \epsilon$ peut être fait. Nous allons donc faire des développements asymptotiques en puissance de ϵ et de η , c'est à dire en puissance de $\sqrt{\epsilon}$ ou, car plus pratique, en puissance de η .

4.3.2 Développements asymptotiques des déplacements

On fait l'hypothèse que le développement du déplacement d'un nœud commence à l'ordre 0 en η . Le déplacement du nœud (n, X) s'écrit :

$$\mathbf{U}^n(X) = \mathbf{U}^{0,n} + \eta \mathbf{U}^{1,n} + \eta^2 \mathbf{U}^{2,n} + \eta^3 \mathbf{U}^{3,n} + \dots, \quad (4.6)$$

où $\mathbf{U}^{0,n}$ représente le grand déplacement dû au chargement total \mathbf{F}^n exercé sur la structure et $\mathbf{U}^{1,n}$ caractérise la déformation engendrée par l'incrément de chargement \mathbf{f}^n . L'ancien déplacement $\mathbf{U}^{1,n}$ est maintenant représenté par $\mathbf{U}^{2,n}$ car $\eta = \sqrt{\epsilon}$. L'incrément de déplacement des nœuds se trouve entre ces deux déplacements.

Ce développement du déplacement d'un nœud n étant du même type que celui du chapitre 2, on a les mêmes propriétés concernant le vecteur différence des déplacements \mathbf{U}^b . Cependant, la longueur d'une barre est d'ordre ϵL , soit η^2 , le développement de \mathbf{U}^b s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}^b(X) = \mathbf{U}^{0,b}(X) + \eta \mathbf{U}^{1,b}(X) + \eta^2 \mathbf{U}^{2,b}(X) + \dots, \\ \mathbf{U}^{0,b}(X) = \mathbf{U}^{0,E(b)} - \mathbf{U}^{0,O(b)}, \\ \mathbf{U}^{1,b}(X) = \mathbf{U}^{1,E(b)} - \mathbf{U}^{1,O(b)}, \\ \mathbf{U}^{2,b}(X) = \mathbf{U}^{2,E(b)} - \mathbf{U}^{2,O(b)} + \delta^b L \frac{d\mathbf{U}^{0,E(b)}}{dX}. \end{array} \right. \quad (4.7)$$

4.3.3 Développements asymptotiques des tensions

Le développement asymptotique des tensions est donné par la relation de comportement d'une barre (équation 4.3). Il est nécessaire de regarder l'ordre de grandeur des termes composant cette équation. La rigidité K^b d'une barre sera choisie d'ordre ϵ^{-1} , c'est à dire en η^{-2} (chapitre 2).

$$K^b = \frac{1}{\eta^2} k^b. \quad (4.8)$$

Il faut maintenant comparer la longueur déformée $\|\mathbf{Q}^b\|$ d'une barre avec sa longueur initiale $\|\mathbf{P}^b\|$. Trois cas différents seront possibles.

1. la longueur initiale de la barre est d'ordre ϵ ou η^2 et la longueur finale est calculée d'ordre η^0 ou η , alors $\mathbf{U}^b \gg \mathbf{P}^b$. Ce cas n'est pas réaliste avec l'hypothèse des petites déformations et les équations d'équilibre vont l'éliminer. Cependant, c'est le

cas au début pour les barres d_2 et v_4 .

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^b &= \mathbf{U}^{0,b} + \eta \mathbf{U}^{1,b} + \eta^2 \mathbf{U}^{2,b} + \dots, \\
\mathbf{P}^b &= \eta^2 \mathbf{P}^{2,b}, \\
\mathbf{Q}^b &= \mathbf{U}^{0,b} + \eta \mathbf{U}^{1,b} + \eta^2 (\mathbf{P}^{1,b} + \mathbf{U}^{1,b}) + \dots, \\
1 - \frac{\|\mathbf{P}^b\|}{\|\mathbf{Q}^b\|} &= 1 + O(\epsilon), \\
\mathbf{F}^b &= \frac{1}{\eta^2} k^b \mathbf{U}^{0,b} + O(\eta^{-1}).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Si $\mathbf{U}^{0,b} = \mathbf{o}$, alors

$$\mathbf{F}^b = \frac{1}{\eta} k^b \mathbf{U}^{1,b} + O(\eta^0). \tag{4.10}$$

2. la longueur initiale de la barre est d'ordre ϵ ainsi que la longueur finale, alors $\mathbf{U}^b \sim \mathbf{P}^b$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^b &= \eta^2 \mathbf{U}^{2,b} + \eta^3 \mathbf{U}^{3,b} + \dots, \\
\mathbf{P}^b &= \eta^2 \mathbf{P}^{2,b}, \\
\mathbf{Q}^b &= \eta^2 (\mathbf{P}^{2,b} + \mathbf{U}^{2,b}) + \eta^3 \mathbf{U}^{3,b} + \dots, \\
\mathbf{F}^{0,b} &= k^b \left(1 - \frac{\|\mathbf{P}^{2,b}\|}{\|\mathbf{Q}^{2,b}\|} \right) \mathbf{Q}^{2,b},
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\mathbf{F}^{1,b} = k^b \left[\frac{\|\mathbf{P}^{2,b}\|}{\|\mathbf{Q}^{2,b}\|^3} \langle \mathbf{Q}^{2,b}, \mathbf{U}^{3,b} \rangle \mathbf{Q}^{2,b} + \left(1 - \frac{\|\mathbf{P}^{2,b}\|}{\|\mathbf{Q}^{2,b}\|} \right) \mathbf{U}^{3,b} \right]. \tag{4.12}$$

3. la longueur initiale et la longueur finale de la barre sont d'ordre ϵ ($\mathbf{U}^b \sim \mathbf{P}^b$), de plus ces longueurs sont égales au premier ordre en ϵ (η^2). Ceci n'est pas vrai pour les modèles de câble, mais le sera pour les modèles de poutre.

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^b &= \eta^2 \mathbf{U}^{2,b} + \eta^3 \mathbf{U}^{3,b} + \dots, \\
\mathbf{P}^b &= \eta^2 \mathbf{P}^{2,b}, \\
\mathbf{Q}^b &= \eta^2 (\mathbf{P}^{2,b} + \mathbf{U}^{2,b}) + \eta^3 \mathbf{U}^{3,b} + \eta^4 \mathbf{U}^{4,b} + \dots, \\
\|\mathbf{Q}^{2,b}\| &= \|\mathbf{P}^{2,b}\|, \\
\mathbf{F}^{1,b} &= \frac{k^b}{\|\mathbf{P}^{2,b}\|^2} \langle \mathbf{Q}^{2,b}, \mathbf{U}^{3,b} \rangle \mathbf{Q}^{2,b},
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}^{2,b} &= \frac{k^b}{\|\mathbf{P}^{2,b}\|^2} \left[\left(\frac{1}{2} \|\mathbf{U}^{3,b}\|^2 - \frac{3 \langle \mathbf{Q}^{2,b}, \mathbf{U}^{3,b} \rangle^2}{2 \|\mathbf{P}^{2,b}\|^2} + \langle \mathbf{Q}^{2,b}, \mathbf{U}^{4,b} \rangle \right) \mathbf{Q}^{2,b} \right. \\
&\quad \left. + \langle \mathbf{Q}^{2,b}, \mathbf{U}^{3,b} \rangle \mathbf{U}^{3,b} \right].
\end{aligned} \tag{4.14}$$

4.3.4 Ordre de grandeur du chargement extérieur

Le chargement extérieur total \mathbf{F}^n s'exerçant sur les nœuds n est une donnée du problème qui doit être calée par rapport à ϵ . En élasticité linéaire, le chargement extérieur devait

être d'ordre ϵ^3 . En grand déplacement, deux ordres de grandeur étaient envisageables : en ϵ^3 alors

$$\mathbf{F}^n = \eta^6 \mathbf{F}^{6,n}, \quad (4.15)$$

ou d'ordre ϵ , le chargement s'écrit alors

$$\mathbf{F}^n = \eta^2 \mathbf{F}^{2,n}. \quad (4.16)$$

Ces deux cas sont possibles en incrémentale et nous gardons ces deux ordres de grandeur pour le chargement total. pour l'incrément de chargement \mathbf{f}^n , il suffit de rajouter un ordre de grandeur η , alors soit \mathbf{F}^n est d'ordre η^6 et

$$\mathbf{f}^n = \eta^7 \mathbf{F}^{7,n}, \quad (4.17)$$

soit \mathbf{F}^n est d'ordre η^2 et

$$\mathbf{f}^n = \eta^3 \mathbf{F}^{3,n}. \quad (4.18)$$

4.4 Identification des ordres de ϵ dans les équations d'équilibre

Les développements asymptotiques des tensions sont remplacés dans les équations d'équilibre des nœuds I et II . Ces équations sont identifiées ordre après ordre en commençant par l'ordre η^{-2} , car les tensions commencent à l'ordre η^{-2} . Seul les principaux résultats seront énoncés.

4.4.1 Équilibre à l'ordre η^{-2} ou ϵ^{-1}

$$(I - II)^{-2} : \quad \mathbf{F}^{-2,d_2} + \mathbf{F}^{-2,v_4} = \mathbf{o} \implies \mathbf{F}^{-2,d_2} = \mathbf{F}^{-2,v_4} = \mathbf{o}, \quad (4.19)$$

ce qui entraîne pour le déplacement macroscopique

$$\mathbf{U}^{0,I} - \mathbf{U}^{0,II} = \mathbf{o} \implies \mathbf{U}^{0,I} = \mathbf{U}^{0,II} = \mathbf{U}^0. \quad (4.20)$$

Tous les nœuds de la cellule (nœud I et nœud II) ont le même déplacement macroscopique \mathbf{U}^0 . Cela implique que pour toutes les barres b , $\mathbf{U}^{0,b} = 0$.

4.4.2 Équilibre à l'ordre η^{-1}

$$(I - II)^{-1} : \quad \mathbf{F}^{-1,d_2} + \mathbf{F}^{-1,v_4} = \mathbf{o} \implies \mathbf{F}^{-1,d_2} = \mathbf{F}^{-1,v_4} = \mathbf{o}, \quad (4.21)$$

ce qui entraîne pour le déplacement incrémental $\mathbf{U}^{1,n}$

$$\mathbf{U}^{1,I} - \mathbf{U}^{1,II} = \mathbf{o} \implies \mathbf{U}^{1,I} = \mathbf{U}^{1,II} = \mathbf{U}^1. \quad (4.22)$$

Tous les nœuds de la cellule (nœud I et nœud II) ont le même incrément de déplacement macroscopique \mathbf{U}^1 . Cela implique que pour toutes les barres b , $\mathbf{U}^{1,b} = 0$.

4.4.3 Équilibre à l'ordre η^0 ou ϵ^0

L'équation $(I - II)$ donne à l'ordre η^0

$$(I - II)^0 : \quad \mathbf{F}^{0,d_2} + \mathbf{F}^{0,v_4} = \mathbf{o} \implies \mathbf{F}^{0,d_2} = \mathbf{F}^{0,v_4} = \mathbf{o}, \quad (4.23)$$

ce qui donne la différence des déplacements $\mathbf{U}^{2,I} - \mathbf{U}^{2,II}$

$$\begin{cases} \|L\mathbf{i} + H\mathbf{j} + \mathbf{U}^{2,I} - \mathbf{U}^{2,II}\| = \sqrt{L^2 + H^2} = \sqrt{1+t^2}L, \\ \|H\mathbf{j} + \mathbf{U}^{2,I} - \mathbf{U}^{2,II}\| = H, \end{cases} \quad (4.24)$$

où t est la pente de la barre d_2 ($t = \frac{H}{L}$). Soient $\boldsymbol{\tau}$ et \mathbf{n} les deux vecteurs définis par

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{i} + \frac{d\mathbf{U}^0}{dX}, \\ \mathbf{n} = \mathbf{j} + \frac{\mathbf{U}^{2,I} - \mathbf{U}^{2,II}}{H}, \end{cases} \quad (4.25)$$

on a alors

$$\begin{cases} \|\mathbf{n}\| = 1, \\ \|\boldsymbol{\tau} + t\mathbf{n}\| = \sqrt{1+t^2} = \frac{\sqrt{L^2 + H^2}}{L}. \end{cases} \quad (4.26)$$

4.4.4 Équilibre à l'ordre η

L'équation $(I - II)$ donne à l'ordre η

$$(I - II)^1 : \quad \mathbf{F}^{1,d_2} + \mathbf{F}^{1,v_4} = \mathbf{o} \implies \mathbf{F}^{1,d_2} = \mathbf{F}^{1,v_4} = \mathbf{o}, \quad (4.27)$$

ce qui donne pour la différence $\mathbf{U}^{3,I} - \mathbf{U}^{3,II}$

$$\begin{cases} \langle \mathbf{U}^{3,I} - \mathbf{U}^{3,II}, \mathbf{n} \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{U}^{3,I} - \mathbf{U}^{3,II}, \boldsymbol{\tau} \rangle = -\langle \boldsymbol{\tau} + t\mathbf{n}, \frac{d\mathbf{U}^1}{dX} \rangle. \end{cases} \quad (4.28)$$

4.4.5 Équilibre à l'ordre η^2 ou ϵ

L'équation $(I + II)$ donne à l'ordre η^2 ou ϵ

$$(I + II)^2 : \quad -L^2(k^{h_1} + k^{h_3}) \frac{d \left[\left(1 - \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|} \right) \boldsymbol{\tau} \right]}{dX} = \begin{cases} \mathbf{F}^{1,I} + \mathbf{F}^{1,II}, \\ \mathbf{o}. \end{cases} \quad (4.29)$$

$$(4.30)$$

Deux modèles sont de nouveau possibles : un modèle de câble 4.29 et un modèle de poutre 4.30. Nous allons d'abord étudier le modèle de poutre.

4.5 Modèle de poutre

Les résultats des ordres η^3, η^4 et η^5 ne sont pas explicités.

a) Équilibre à l'ordre η^6 ou ϵ^3 , modèle de poutre en grand déplacement

Le chargement extérieur est supposé être d'ordre η^6 . L'équation d'équilibre des nœuds I et II : $(I + II)^6$, est intégrée puis projetée sur le vecteur normal \mathbf{n} . On obtient alors le modèle continu en grand déplacement pour le treillis poutre plan en \mathcal{N}

$$\frac{d\langle \frac{d\mathbf{n}}{dX}, \boldsymbol{\tau} \rangle}{dX} = -\frac{k^{h_1} + k^{h_3}}{t^2 L^3 k^{h_1} k^{h_3}} \left\langle \frac{1}{L} \int_0^X \mathbf{F}^{6,I} + \mathbf{F}^{6,II} dX + \mathbf{F}_0^{6,I} + \mathbf{F}_0^{6,II}, \mathbf{n} \right\rangle. \quad (4.31)$$

b) Équilibre à l'ordre η^7 , modèle de poutre en incrémental

L'incrément de chargement extérieur est supposé être d'ordre η^7 . L'équation d'équilibre $(I + II)^7$ est projetée sur le vecteur normal \mathbf{n} . On obtient alors le modèle continu en incrémentale pour le treillis poutre plan en \mathcal{N}

$$\begin{aligned} \frac{t^2 L^3 k^{h_1} k^{h_3}}{k^{h_1} + k^{h_3}} \frac{d^2}{dX^2} \left\langle \mathbf{n}, \frac{d\mathbf{u}^1}{dX} \right\rangle + \left\langle \boldsymbol{\tau}, \frac{1}{L} \int_0^X \mathbf{F}^{6,I} + \mathbf{F}^{6,II} dX + \mathbf{F}_0^{6,I} + \mathbf{F}_0^{6,II} \right\rangle \left\langle \mathbf{n}, \frac{d\mathbf{u}^1}{dX} \right\rangle \\ = \left\langle \mathbf{n}, \mathbf{F}^{7,I} + \mathbf{F}^{7,II} \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Il est assez facile de vérifier que ce modèle incrémental de poutre est le modèle tangent du modèle de poutre en grand déplacement.

4.6 Modèle de câble

c) Équilibre à l'ordre η^2 ou ϵ , modèle de câble en grand déplacement

Le chargement extérieur est supposé être de grande intensité, d'ordre ϵ . L'équilibre du treillis à l'ordre η^2 donne de nouveau le modèle de câble

$$-L^2(k^{h_1} + k^{h_3}) \frac{d \left[\left(1 - \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|} \right) \boldsymbol{\tau} \right]}{dX} = \mathbf{F}^{1,I} + \mathbf{F}^{1,II}. \quad (4.33)$$

d) Équilibre à l'ordre η^3 , modèle de câble en incrémental

L'incrément de chargement extérieur est supposé être d'ordre η^3 . Les équations d'équilibre du treillis $(I + II)^3$ donnent le modèle incrémentale de câble

$$-L^2(k^{h_1} + k^{h_3}) \frac{d}{dX} \left[\frac{\langle \boldsymbol{\tau}, \frac{d\mathbf{u}^1}{dX} \rangle}{\|\boldsymbol{\tau}\|^3} \boldsymbol{\tau} + \left(1 - \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|} \right) \frac{d\mathbf{u}^1}{dX} \right] = \mathbf{F}^{3,I} + \mathbf{F}^{3,II}. \quad (4.34)$$

Comme pour le modèle incrémentale de poutre, il est assez facile de vérifier que ce modèle incrémental de câble est le modèle tangent du modèle de câble en grand déplacement.

4.7 Conclusion

Le treillis poutre en \mathcal{N} se caractérise en incrémentale finie par quatre milieux continus équivalents différents. On retrouve les deux milieux continus trouvés en grand déplacement ainsi que deux autres modèles qui ont été appelés modèle incrémental de câble et modèle incrémental de poutre. Un petit paramètre ϵ est d'abord défini par l'inverse du nombre de cellule \mathcal{C} . Puis un paramètre η caractérise le rapport entre l'incrément fini de chargement et la charge totale appliquée en un nœud du treillis. Pour arriver à trouver un milieu continu incrémental, nous avons calé η par rapport à ϵ par $\epsilon = \eta^2$.

Lorsque le chargement extérieur \mathbf{F}^n appliqué aux nœuds n du treillis est d'ordre ϵ ; $\epsilon \mathbf{F}^{2,n}$, le chargement incrémental est en $\eta^3 \mathbf{F}^{3,n}$. Le modèle macroscopique est un milieu continu de câble où les effets d'élongation sont prépondérants (chapitre 3). Le modèle macroscopique incrémental est aussi un modèle de câble, c'est le modèle tangent au modèle en grand déplacement.

Lorsque le chargement extérieur est décrit par $\epsilon^3 \mathbf{F}^{6,n}$, le chargement incrémental est en $\eta^7 \mathbf{F}^{7,n}$. En grand déplacement, le modèle macroscopique est un modèle de poutre, le modèle macroscopique incrémental est le modèle de poutre tangent.

Partie II

Méthodes des développements en
doubles séries entières, application
aux treillis poutres périodiques

Chapitre 5

Modélisation générale d'un treillis poutre et méthode d'homogénéisation

Plan du chapitre 5

5.1	Modélisation et équilibre d'un treillis poutre	64
5.1.1	Notation et Numérotation	64
5.1.2	Équilibre et chargement	65
5.1.3	Étude d'une barre	65
	a) Repère local associé à la barre	65
	b) Repère global associé à la poutre	66
5.1.4	Équations d'équilibre d'une cellule	67
	a) Équilibre en partie courante	67
	b) Équilibre des extrémités	67
	c) Assemblage	67
5.1.5	Exemple du treillis poutre plan en \mathcal{X}	69
5.1.6	Point à retenir de la modélisation	69
5.2	Solution analytique et méthode d'homogénéisation	69
5.2.1	Démarche générale	70
5.2.2	Cas des structures discrètes	71
	a) Hypothèse complémentaire et conséquence	71
	b) Échelles et séparation d'échelle	71
	c) Adimensionnalisation et changement de variable	72
	d) Résolution par les séries de Taylor et les séries asymptotiques	72
5.2.3	Point sur la méthode d'homogénéisation	74

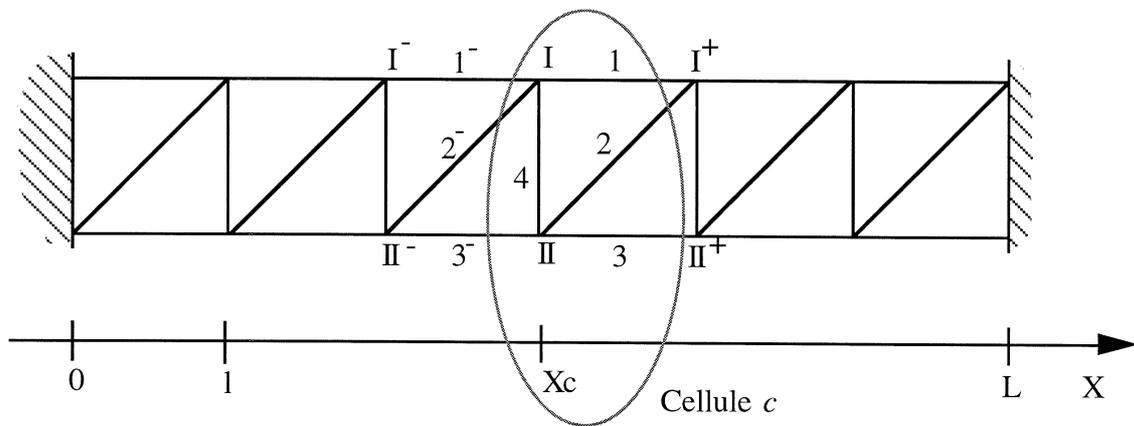


Figure 5.1 : notation et numérotation

5.1 Modélisation et équilibre d'un treillis poutre

La première partie de ce chapitre modélise un treillis poutre afin d'obtenir les équations locales de l'équilibre. Cette étude porte sur les treillis à nœuds parfaitement articulés. La nature discrète de notre poutre engendre des équations locales sous forme de différences finies. Afin d'obtenir une méthodologie identique pour les poutres isostatiques ou hyperstatiques intérieurement, une formulation en déplacement sera écrite. L'écriture de l'équilibre global nous amènera sur la formulation de la MEF ($\underline{K} \cdot \underline{U} = \underline{F}$). La seconde partie de ce chapitre est consacrée à la recherche de la solution de ce problème par la méthode d'homogénéisation discrète.

5.1.1 Notation et Numérotation

Afin d'être le plus homogène possible, nous essayons le plus souvent de reprendre les mêmes notations. Nous appellerons barres les petites poutres qui constituent l'ossature de la structure et poutre la structure complète. Nous noterons L la longueur de la structure, l la taille de la cellule de référence, C le nombre de cellule ($C = \frac{L}{l}$, sur la figure 5.1 ; $C = 6$), X l'axe des abscisses, etc.

La structure de notre poutre étant périodique, nous classons les nœuds et les barres dans des familles. Nous définissons alors deux notations ; une pour distinguer deux nœuds ou deux barres de deux familles différentes mais d'une même cellule, une autre pour distinguer deux nœuds ou deux barres d'une même famille mais de deux cellules différentes (figure 5.1).

Dans une cellule, nous distinguerons les familles par un exposant ; $I, II, III, IV \dots$ en chiffres romains pour les familles de nœuds, $1, 2, 3, 4 \dots$ en chiffres arabes pour les familles de barres.

Dans une famille, nous distinguerons les positions des nœuds ou des barres par un indice. *En représentation absolue*, les positions seront données par l'indice X_c ou cl ; abscisse du nœud ou plus petite abscisse de la barre selon l'axe X . L'indice c dans X_c insiste sur la nature discrète de notre problème. Aux extrémités, les indices choisis seront

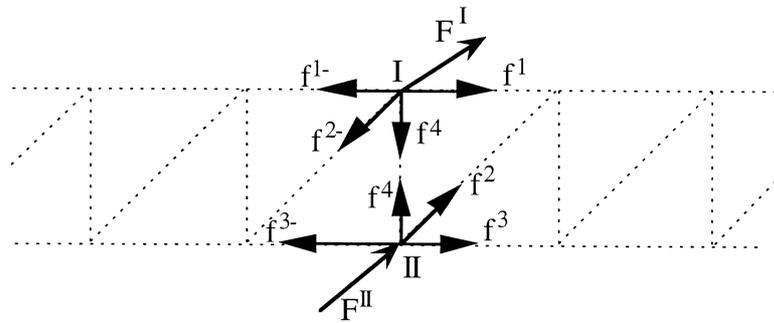


Figure 5.2 : efforts extérieurs aux nœuds I et II

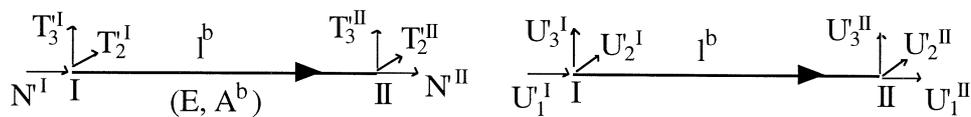


Figure 5.3 : modélisation d'une barre

0 en 0 et L en L . En représentation relative, les positions seront caractérisées par l'indice $-$, rien ou $+$ selon leurs positions respectives sur l'axe des abscisses X .

Les exposants des nœuds $I, II \dots$ seront supprimés pour les relations valables à l'abscisse X_c sur tous les nœuds de la cellule. Tout ceci va nous permettre d'obtenir des relations synthétiques et générales, tout en restant lisibles.

5.1.2 Équilibre et chargement

Écrivons les équations locales de l'équilibre. Pour cela, on suppose que le chargement extérieur n'agit que sur les nœuds de la structure (figure 5.2). Nous n'avons donc qu'à écrire l'équilibre des nœuds de la cellule.

Les inconnues du problème sont les déplacements des nœuds ce qui conduit dans un premier temps à étudier l'équilibre et la déformation d'une barre seule (formulation en déplacement).

5.1.3 Étude d'une barre

a) Repère local associé à la barre

La barre b est orientée du nœud I vers le nœud II (figure 5.3). Les différentes expressions écrites dans le repère local sont caractérisées par un apostrophe $'$. En faisant les hypothèses des petites déformations, des petits déplacements, d'un matériau à comportement élastique linéaire, d'une section de barre petite devant la longueur de cette barre et en négligeant les effets de bords aux nœuds de la barre, la résistance des matériaux

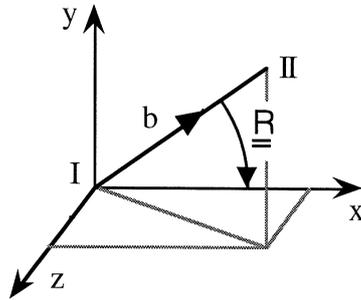


Figure 5.4 : rotation de la matrice de rigidité d'une barre

permet d'écrire :

$$\begin{bmatrix} N^I \\ T_2^I \\ T_3^I \\ N^{II} \\ T_2^{II} \\ T_3^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA^b}{l^b} & 0 & 0 & -\frac{EA^b}{l^b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA^i}{l^i} & 0 & 0 & \frac{EA^b}{l^b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^I \\ U_2^I \\ U_3^I \\ U_1^{II} \\ U_2^{II} \\ U_3^{II} \end{bmatrix}. \tag{5.1}$$

b) Repère global associé à la poutre

La matrice de rigidité d'une barre b est exprimée dans le repère global de la poutre à l'aide de la matrice de rotation $\underline{\underline{R}}$ (figure 5.4)

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}. \tag{5.2}$$

Par définition de la rotation de solide $\underline{\underline{R}}$, les efforts et les déplacements aux deux extrémités I et II de la barre b sont

$$\begin{bmatrix} F^I \\ F^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^I \\ F^{II} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} U^I \\ U^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^I \\ U^{II} \end{bmatrix}.$$

La matrice de rigidité de la barre b s'écrit alors dans le repère global :

$$\begin{bmatrix} F^I \\ F^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K'_{11} & K'_{12} \\ K'_{21} & K'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^I \\ U^{II} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} F^I \\ F^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^I \\ U^{II} \end{bmatrix}. \tag{5.3}$$

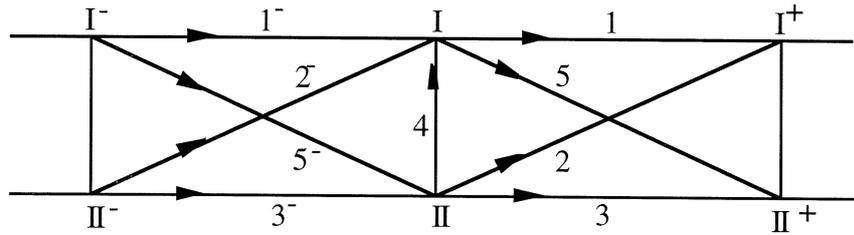


Figure 5.5 : treillis poutre en \mathcal{X}

		déplacement des nœuds					
		en X_{c-1}		en X_c		en X_{c+1}	
		$U_{X_{c-1}}$		U_{X_c}		$U_{X_{c+1}}$	
		nœud	barres	$U_{X_{c-1}}^I$	$U_{X_{c-1}}^{II}$	$U_{X_c}^I$	$U_{X_c}^{II}$
I	1 ⁻	$-K_{21}^1$	$-K_{21}^2$	$-K_{22}^1$	$-K_{21}^4$	$-K_{12}^1$	$-K_{12}^5$
	2 ⁻			$-K_{22}^2$			
	4			$-K_{22}^4$			
	5			$-K_{11}^5$			
	1			$-K_{11}^1$			
II	3 ⁻	$-K_{21}^5$	$-K_{21}^3$	$-K_{22}^3$	$-K_{11}^4$	$-K_{12}^2$	$-K_{12}^3$
	5 ⁻			$-K_{22}^5$			
	4			$-K_{12}^4$			
	2			$-K_{11}^2$			
	3			$-K_{11}^3$			
		$-\underline{\underline{B}}$		$-\underline{\underline{A}}$		$-\underline{\underline{B}}$	
Matrice de rigidité							

Tableau 5.1 : équilibre du treillis poutre plan en \mathcal{X}

5.1.5 Exemple du treillis poutre plan en \mathcal{X}

Le treillis poutre plan en \mathcal{X} est composé de deux nœuds I et II ainsi que de cinq barres (figure 5.5). L'équilibre d'une cellule quelconque est donné par le tableau 5.1.

Le vecteur des efforts extérieurs sur une cellule \underline{F} et le vecteur des déplacements \underline{U} sont définis par :

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} F^I \\ F^{II} \end{bmatrix}, \quad \underline{U} = \begin{bmatrix} U^I \\ U^{II} \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Les deux matrices \underline{A} et \underline{B} sont alors définis par :

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} K_{12}^1 & K_{12}^5 \\ K_{12}^2 & K_{12}^3 \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} K_{22}^1 + K_{22}^2 + K_{22}^4 + K_{11}^5 + K_{11}^1 & K_{21}^4 \\ K_{12}^4 & K_{22}^3 + K_{22}^5 + K_{11}^4 + K_{11}^2 + K_{11}^3 \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

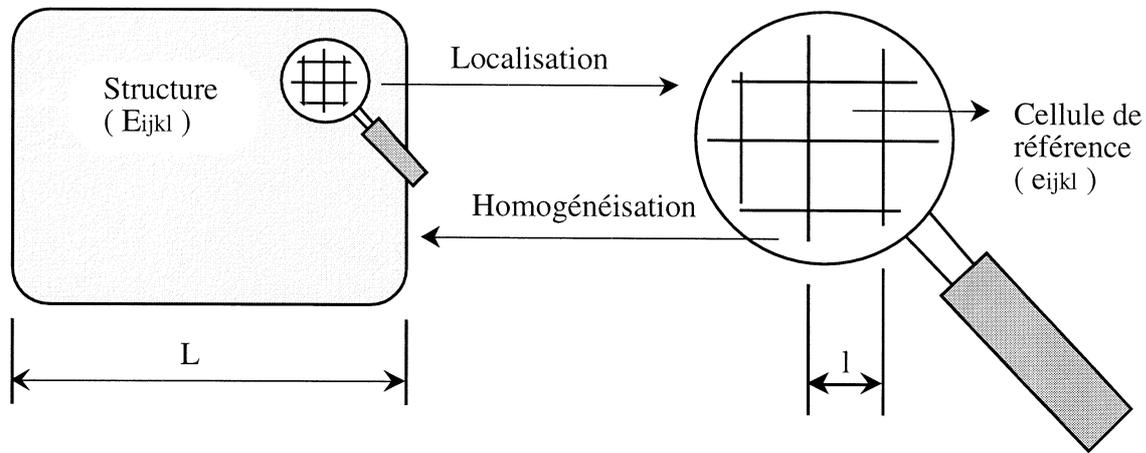
5.1.6 Point à retenir de la modélisation

La matrice de rigidité d'un treillis poutre est tridiagonale par bloc. La résolution par la MEF consiste à effectuer un pivot de Gauss sur cette matrice. Pour les poutres à très grand nombre de barres, cela revient donc à faire un très grand nombre de fois les mêmes opérations. C'est donc beaucoup de temps perdu. Nous allons maintenant voir la technique d'homogénéisation qui moyennant une petite hypothèse supplémentaire sur le chargement, donne la solution analytique exacte.

5.2 Solution analytique et méthode d'homogénéisation

Afin de faire du dimensionnement de structure, donc du calcul de structure, il faut connaître le comportement mécanique des matériaux utilisés. Un vaste domaine de la mécanique est donc la caractérisation du comportement d'un matériau. Ce comportement se détermine le plus souvent par des essais qui peuvent coûter cher. Par ailleurs, une légère modification de la structure du matériau entraîne généralement une nouvelle série d'essais. Une autre approche possible est la technique d'homogénéisation. Elle permet, dans certains cas, de trouver un comportement macroscopique pour un matériau donné à partir de ses caractéristiques microscopiques connues.

Dans cette partie, nous allons voir dans un premier temps les principes de l'homogénéisation [9, 52]. Notre propos nous ramène ensuite aux structures discrètes avec l'introduction d'un autre formalisme [65], formalisme quelque peu différent de celui de l'homogénéisation classique du fait de la nature des équations d'équilibre écrites sous forme de différences finies et non d'équations aux dérivées partielles.

Figure 5.6 : *passage macro-micro*

5.2.1 Démarche générale

La méthode d'homogénéisation permet de déduire un modèle de comportement mécanique macroscopique d'une structure à partir du comportement mécanique d'une cellule de référence à l'échelle microscopique. Elle repose sur deux principes : l'existence d'au moins deux échelles, l'échelle macroscopique caractérisée généralement par la taille L de la structure et l'échelle microscopique définie par la dimension l de la cellule de référence ; la séparation des échelles, c'est à dire que toute dimension caractéristique du matériau appartient à une et une seule échelle. Cela signifie dans la pratique qu'il y a au moins un facteur dix entre chaque échelle.

$$l : \text{taille de la cellule de référence} \ll L : \text{taille de la structure.} \quad (5.10)$$

La technique d'homogénéisation s'applique parfaitement au cas des milieux périodiques, l'échelle macroscopique L se définit par la taille de la structure, l'échelle micro l par la dimension du motif périodique. Si celui-ci se répète un grand nombre de fois, nous avons la séparation des échelles.

Afin de comparer les ordres de grandeurs des différents termes des équations, on introduit un petit paramètre $\epsilon = \frac{l}{L}$ qui permet de chiffrer ces ordres de grandeurs. Par convention, on fixe l'échelle macroscopique à l'ordre 0, c'est à dire en ϵ^0 . L'échelle microscopique est alors en ϵ^1 et ainsi de suite. Toute fonction inconnue f se détermine à chaque ordre de grandeur. Notons ces fonctions : $\underline{f}^0, \underline{f}^1, \underline{f}^2 \dots$ pour l'ordre 0, 1, 2 ... La fonction f s'écrit donc :

$$f = \underline{f}^0 + \epsilon \underline{f}^1 + \epsilon^2 \underline{f}^2 + \epsilon^3 \underline{f}^3 + \dots + \epsilon^m \underline{f}^m + \dots = \sum_{m \geq 0} \epsilon^m \underline{f}^m. \quad (5.11)$$

Cette décomposition est nommée le développement asymptotique de f . Toutes les fonctions inconnues vont être développées en séries asymptotiques de ϵ , la résolution du système d'équation s'effectuant alors en identifiant les ordres de ϵ ou puissances de ϵ . Par ailleurs, on adimensionne ces équations car cette adimensionnalisation permet de caler les différentes séries asymptotiques entre elles. En effet, il n'y a aucune raison physique pour que les séries commencent toutes au même ordre et que celui-ci soit l'ordre 0.

5.2.2 Cas des structures discrètes

Les structures discrètes sont caractérisées par des équations d'équilibre aux différences finies. Les effets de bords ne seront pas pris en compte du fait de la rupture de périodicité. Seule l'équation d'équilibre en partie courante est étudiée dans cette partie consacré à l'homogénéisation.

a) Hypothèse complémentaire et conséquence

L'équation d'équilibre n'est valable que pour les abscisses où il y a des nœuds (nature discrète des équations). C'est à dire :

$$\forall c \in \{1, \dots, C\}, \quad \underline{\underline{B}} \cdot \underline{U}_{X_{c-1}} + \underline{\underline{A}} \cdot \underline{U}_{X_c} + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{U}_{X_{c+1}} = \underline{F}_{X_c}.$$

L'étude va être restreinte au cas où la suite des efforts extérieurs appliqués aux nœuds de la structure $\{F_0, F_l, F_{2l}, \dots, F_{X_c}, \dots, F_{L-l}, F_L\}$ peut être décrite par une fonction force $F(X)$ de classe C^∞ , même lorsque le nombre de cellules C tend vers l'infini.

L'important, c'est l'écriture d'une fonction force $F(X)$ valable pour tout X mais n'ayant de sens physique que pour $X = X_c = cl$. Nous pouvons alors écrire :

$$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{U}_{X_{c-1}} + \underline{\underline{A}} \cdot \underline{U}_{X_c} + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{U}_{X_{c+1}} = \underline{F}(X_c).$$

De même, la suite des déplacements $\{U_0, U_l, U_{2l}, \dots, U_{X_c}, \dots, U_{L-l}, U_L\}$ va être lissée par une fonction déplacement $U(X)$ n'ayant de sens que pour $X = X_c$. On espère *a priori* que cette fonction inconnue existe même lorsque C tend vers l'infini. Soit :

$$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{U}(X_c - l) + \underline{\underline{A}} \cdot \underline{U}(X_c) + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{U}(X_c + l) = \underline{F}(X_c).$$

Les fonctions étant partout définies, seul le sens physique justifie l'indice c dans cette équation. Nous allons le supprimer afin de rendre continue cette équation. Nous recherchons donc une fonction déplacement $U(X)$ vérifiant pour tout X l'équation d'équilibre, même si cette équation n'a de sens physique que pour $X = X_c$.

$$\forall X \in [0, L], \quad \underline{\underline{B}} \cdot \underline{U}(X - l) + \underline{\underline{A}} \cdot \underline{U}(X) + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{U}(X + l) = \underline{F}(X). \quad (5.12)$$

b) Échelles et séparation d'échelle

La séparation des échelles est la clef de voûte de l'homogénéisation. Regardons si notre problème vérifie cette condition fondamentale. Nos treillis poutres possèdent trois voire quatre tailles successives :

- L : longueur de la structure,
- l : taille de la cellule (longueur des barres),
- d : diamètre des barres (section rectangulaire b, h),
- (e : épaisseur du profilé si celui-ci est creux).

La séparation des échelles implique :

- $L \gg l$: on doit avoir un grand nombre de cellule $\mathcal{C} \gg 1$ ou $\epsilon \ll 1$,
 $l \gg d$: hypothèse de la RdM qui permet de parler de barres dans la cellule,
 $(d \gg e$: permet d'utiliser les formules des enveloppes minces).

La dernière échelle sera oubliée dans la suite car elle n'a rien de fondamental.

c) Adimensionnalisation et changement de variable

Nous devons déterminer les ordres des différents termes de l'équation d'équilibre. Malgré sa forme très synthétique, cette équation matricielle comprend un grand nombre de termes (\underline{A} et \underline{B} sont des matrices). D'un point de vue physique, il ne nous reste que deux termes, donc un nombre adimensionnel à étudier. En effet, les longueurs l_i , sont du même ordre de grandeur pour toutes les barres dans une réalisation, de même pour les sections A_i . L'intensité du chargement est aussi supposée du même ordre de grandeur dans toutes les directions et à tous les nœuds. Nous devons donc comparer la rigidité axiale et le chargement.

L'ordre de grandeur du chargement doit maintenant être défini. Afin de donner un sens physique au résultat, intéressons-nous à une poutre encastree-libre. Si l'on charge cette poutre à son extrémité, le moment de flexion étant linéaire, la déformée sera cubique. Si l'on met une charge répartie constante, le moment de flexion sera parabolique et la déformée quadratique, etc. La nature de la poutre (structure unidimensionnelle) fait que la déformée d'un chargement polynomial de degré p est un polynôme de degré $p+4$. L'ordre de grandeur entre le chargement et les déplacements va donc être posé à quatre

$$\frac{f(x)}{u(x)} = O(\epsilon^4). \quad (5.13)$$

Si nous supposons que le déplacement est d'ordre ϵ^0 , que les rigidités sont d'ordre ϵ^{-1} et que les efforts sont d'ordre ϵ (chapitre 7), le nombre adimensionnel Q_f entre les efforts et les déplacements sera alors de ϵ^2 , l'équation d'équilibre s'écrivant :

$${}^t\underline{B} \cdot \underline{U}(X-l) + \underline{A} \cdot \underline{U}(X) + \underline{B} \cdot \underline{U}(X+l) = Q_f \underline{F}(X). \quad (5.14)$$

Pour tout ce qui suit, on normalise la longueur de la structure à 1 par le changement de variable $x = X/L$ (figure 5.7). Les variables L et l disparaissent ce qui diminue le nombre de paramètres. La taille d'une cellule devient ϵ . L'abscisse X , le déplacement $\underline{U}(X)$ et le chargement $\underline{F}(X)$ se notent alors respectivement x , $\underline{u}(x)$ et $\underline{f}(x)$. L'équation d'équilibre devient :

$${}^t\underline{B} \cdot \underline{u}(x-\epsilon) + \underline{A} \cdot \underline{u}(x) + \underline{B} \cdot \underline{u}(x+\epsilon) = Q_f \underline{f}(x). \quad (5.15)$$

d) Résolution par les séries de Taylor et les séries asymptotiques

Il s'agit maintenant de trouver une solution à notre problème. Tout a été fait pour rendre continue une équation discrète. Certains termes ($u(x-\epsilon)$ et $u(x+\epsilon)$) de cette équation vont donc être développés en série de Taylor autour du point x puisque ϵ est

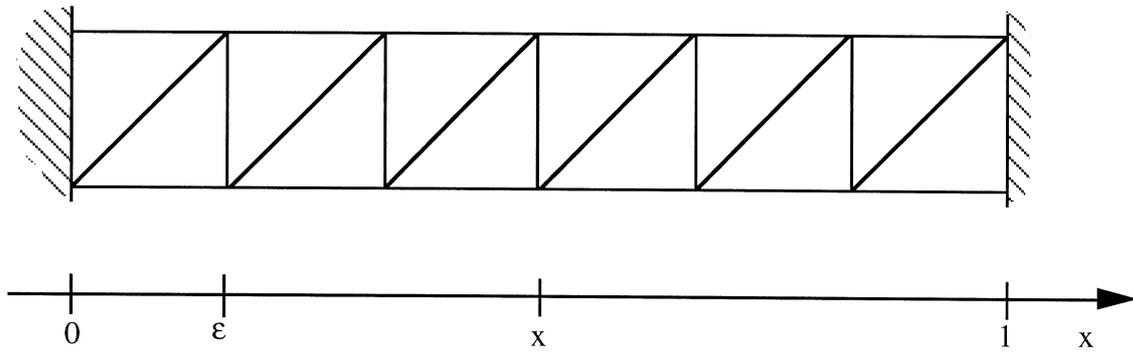


Figure 5.7 : normalisation de la longueur du treillis à 1

très petit. $\underline{u}(x)$ sera ensuite développé en série asymptotique. Les ordres de ϵ seront alors identifiés.

$$\begin{cases} \underline{u}(x + \epsilon) = \underline{u}(x) + \epsilon \frac{d\underline{u}}{dx} + \epsilon^2 \frac{1}{2} \frac{d^2 \underline{u}}{dx^2} + \epsilon^3 \frac{1}{3!} \frac{d^3 \underline{u}}{dx^3} + \dots, \\ \underline{u}(x - \epsilon) = \underline{u}(x) - \epsilon \frac{d\underline{u}}{dx} + \epsilon^2 \frac{1}{2} \frac{d^2 \underline{u}}{dx^2} - \epsilon^3 \frac{1}{3!} \frac{d^3 \underline{u}}{dx^3} + \dots \end{cases} \quad (5.16)$$

Nous pouvons remarquer que $\underline{u}(x - \epsilon)$, $\underline{u}(x)$ et $\underline{u}(x + \epsilon)$ sont du même ordre de grandeur. Le développement en série asymptotique du déplacement $\underline{u}(x)$ est :

$$\underline{u}(x) = \underline{u}^0(x) + \epsilon \underline{u}^1(x) + \epsilon^2 \underline{u}^2(x) + \dots + \epsilon^m \underline{u}^m(x) + \dots \quad (5.17)$$

L'identification des ordres de ϵ dans l'équation d'équilibre est :

$$\text{Ordre 0} : (\underline{tB} + \underline{A} + \underline{B}) \cdot \underline{u}^0(x) = 0,$$

$$\text{Ordre 1} : (\underline{tB} + \underline{A} + \underline{B}) \cdot \underline{u}^1(x) + (-\underline{tB} + \underline{B}) \cdot \frac{d\underline{u}^0(x)}{dx} = 0,$$

$$\text{Ordre 2} : (\underline{tB} + \underline{A} + \underline{B}) \cdot \underline{u}^2(x) + (-\underline{tB} + \underline{B}) \cdot \frac{d\underline{u}^1(x)}{dx} + \frac{1}{2!} (\underline{tB} + \underline{B}) \cdot \frac{d^2 \underline{u}^0(x)}{dx^2} = 0.$$

Ce sont toujours les mêmes combinaisons des deux matrices \underline{A} et \underline{B} qui apparaissent à chaque ordre. Afin de simplifier l'écriture de ces différents ordres, posons :

$$\begin{cases} \underline{IN} = (\underline{tB} + \underline{A} + \underline{B}), \\ \underline{AS} = (-\underline{tB} + \underline{B}), \\ \underline{SY} = (\underline{tB} + \underline{B}). \end{cases} \quad (5.18)$$

L'équilibre à tout ordre s'écrit alors :

$$\text{Ordre 0} : \underline{IN} \cdot \underline{u}^0 = \underline{0},$$

$$\text{Ordre 1} : \underline{IN} \cdot \underline{u}^1 + \underline{AS} \cdot \frac{d\underline{u}^0}{dx} = \underline{0},$$

$$\text{Ordre 2} : \underline{IN} \cdot \underline{u}^2 + \underline{AS} \cdot \frac{d\underline{u}^1}{dx} + \frac{1}{2!} \underline{SY} \cdot \frac{d^2 \underline{u}^0}{dx^2} = \underline{0},$$

$$\begin{aligned}
\text{Ordre 3} & : \underline{IN} \cdot u^3 + \underline{AS} \cdot \frac{d u^2}{dx} + \frac{1}{2!} \underline{SY} \cdot \frac{d^2 u^1}{dx^2} + \frac{1}{3!} \underline{AS} \cdot \frac{d^3 u^0}{dx^3} = \underline{0}, \\
\text{Ordre 4} & : \underline{IN} \cdot u^4 + \underline{AS} \cdot \frac{d u^3}{dx} + \frac{1}{2!} \underline{SY} \cdot \frac{d^2 u^2}{dx^2} + \frac{1}{3!} \underline{AS} \cdot \frac{d^3 u^1}{dx^3} \\
& + \frac{1}{4!} \underline{SY} \cdot \frac{d^4 u^0}{dx^4} = \underline{f}, \\
\text{Ordre 5} & : \underline{IN} \cdot u^5 + \underline{AS} \cdot \frac{d u^4}{dx} + \frac{1}{2!} \underline{SY} \cdot \frac{d^2 u^3}{dx^2} + \frac{1}{3!} \underline{AS} \cdot \frac{d^3 u^2}{dx^3} \\
& + \frac{1}{4!} \underline{SY} \cdot \frac{d^4 u^1}{dx^4} + \frac{1}{5!} \underline{AS} \cdot \frac{d^5 u^0}{dx^5} = \underline{0}.
\end{aligned}$$

De même pour les ordres suivants. Leur construction est facile puisque fortement inspirée par les séries de Taylor. Tous les termes en déplacements sont homogènes les uns par rapport aux autres à un ordre donné, c'est à dire que l'ordre de grandeur en ϵ d'un terme en déplacement plus le degré de dérivation de celui-ci vaut une même valeur pour tous les termes d'une équation.

La résolution consiste à résoudre le système ci-dessus. Cela peut être assez compliqué. Verna l'a fait pour les poutres treillis en \mathcal{N} , \mathcal{X} et \mathcal{W} , et a ainsi obtenu des relations de récurrences fournissant la solution exacte lors d'un chargement polynomial de la poutre [65]. Cette solution analytique est donc valable quelles que soient les valeurs des paramètres. Le nombre de cellules peut alors être quelconque ($\mathcal{C} = 2, \mathcal{C} = 1000 \dots$), ainsi que tous les autres paramètres tant qu'ils restent dans le cadre initial (petit déplacement, petite déformation...).

5.2.3 Point sur la méthode d'homogénéisation

La texture de ce chapitre permet à Verna de déterminer à la main la solution exacte de la poutre treillis en \mathcal{N} [65]. L'inconvénient de cette démarche est d'utiliser des fonctions que nous commençons par dériver puis que nous intégrons, ce qui complique les calculs analytiques si nous voulons intégrer cette méthode dans un logiciel de calcul formel. Par ailleurs, l'analogie avec la RdM faite par Verna pour simplifier la résolution est un exercice de style délicat à reproduire pour une poutre quelconque. Une nouvelle approche va nous permettre de relativiser ces difficultés et de mieux comprendre nos systèmes d'équations aux différences finies et donc la nature de nos treillis poutre. C'est la trame de ce qui suit.

Chapitre 6

Statique des treillis poutres par identification des modes

Plan du chapitre 6

6.1	Double série entière et chargement polynomial	76
6.1.1	Développement en double série, identification en x et en ϵ	76
	a) Approche indicielle	76
	b) Approche matricielle	78
6.1.2	Résolution des différentes diagonales	82
	a) Démarche	82
	b) Propriétés	86
6.1.3	Exemples	88
	a) Treillis poutre continue discrétisée	88
	b) Treillis poutre plan en \mathcal{N}	92
	c) Treillis poutre 3D en \mathcal{N} à section carrée	93
	d) Treillis poutre 3D en \mathcal{W} à section triangulaire	95
6.1.4	Récapitulatif sur les doubles séries	95
6.2	Modes compatibles et chargement exponentiel	97
6.2.1	Formulation du problème	98
	a) Propriétés d'une équation différentielle	98
	b) Équation homogène discrète	98
6.2.2	Recherche des modes compatibles	99
	a) Équation caractéristique	99
	b) Vecteur propre d'un mode compatible	99
6.2.3	Propriétés des modes compatibles	100
	a) Dimension de l'ensemble des solutions homogènes	100
	b) Poutre isostatique / poutre hyperstatique	101
	c) Propriétés des pôles	102
	d) propriétés des vecteurs propres	102
6.2.4	Étude d'un mode compatible	103
6.2.5	Généralisation aux chargements exponentiels	105
6.2.6	Exemples	106

- a) Poutre continue 106
- b) Treillis poutre en \mathcal{N} 106
- c) Treillis poutre 3D en \mathcal{W} 106
- d) Treillis poutre 3D en \mathcal{N} 107
- 6.2.7 Récapitulatif sur les modes compatibles 107
- 6.3 Transformée en z et chargement concentré 108
- 6.3.1 Pourquoi la transformée en z ? 109
- 6.3.2 Monde réel, monde en z 110
 - a) Utilisation de la transformée 110
 - b) Type de chargement 111
 - c) Autre interprétation de la transformée 111
- 6.3.3 Récapitulatif sur la transformée en z 113

6.1 Double série entière et chargement polynomial

Pour les poutres treillis en \mathcal{N} , la méthode d’homogénéisation employée par Verna, consistant à développer les expressions en série asymptotique de ϵ , permet de calculer la réponse exacte de la structure soumise à un chargement polynomial en x . Celle-ci est elle aussi polynomiale en x et la série asymptotique en ϵ est tronquée [65].

Nous pouvons alors nous interroger sur la démarche utilisée : “*Pourquoi identifier les ordres de ϵ et non les puissances de x ?*”. Une mise en équation montre que l’on ne gagne rien à faire cela.

Par contre, une double identification sur les puissances de x et de ϵ s’avère très intéressante. C’est la matière de ce chapitre. Toutes les fonctions, inconnues et connues, vont être développées en double série entière. Nous utiliserons dans un premier temps une notation indicielle pour une démonstration du résultat. Puis une écriture matricielle sera adaptée. Moins rigoureuse mais plus claire et plus pédagogique, elle ouvre la voie à l’informatisation du processus. De cette formulation découlera naturellement la résolution, valable pour toute poutre et dont différentes propriétés seront mises en évidence. Notamment, pour nos structures, la notion intuitive de poutre sera mise en lumière.

6.1.1 Développement en double série, identification en x et en ϵ

a) Approche indicielle

L’équation d’équilibre du treillis s’écrit :

$$\underline{\underline{tB}} \cdot \underline{u}(x - \epsilon) + \underline{\underline{A}} \cdot \underline{u}(x) + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{u}(x + \epsilon) = Q_f \underline{f}(x) \tag{6.1}$$

a.i) Termes en déplacement dans l'équation d'équilibre

$$\underline{u} := u^k = \begin{bmatrix} u_1^I \\ u_2^I \\ u_3^I \\ u_1^{II} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad k = 1, \dots \quad (6.2)$$

Les déplacements des nœuds d'une cellule sont placés dans un vecteur colonne \underline{u} (équation 6.2), chaque composante va se développer en double série entière de x et de ϵ . Nous fixons les indices et exposants suivants :

- k (ou h) pour les composantes du vecteur déplacement, $k = 1, \dots, 6$
- i (ou p) pour la puissance en x , $i \geq 0$
- j (ou q) pour la puissance ou l'ordre en ϵ , $j \geq 0$

$$\underline{u}(x) := u^k(x) = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} x^i \cdot u_{i,j}^k \cdot \epsilon^j \quad (6.3)$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{u}(x) := \sum_h a_{k,h} \cdot \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} x^i \cdot u_{i,j}^h \cdot \epsilon^j = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} x^i \cdot \sum_h a_{k,h} \cdot u_{i,j}^h \cdot \epsilon^j, \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{B}} \cdot \underline{u}(x + \epsilon) &:= \sum_h b_{k,h} \cdot \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} (x + \epsilon)^i \cdot u_{i,j}^h \cdot \epsilon^j, \\ &= \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} \sum_{p=0}^i x^p \cdot C_i^p \sum_h b_{k,h} \cdot u_{i,j}^h \cdot \epsilon^{j+i-p}, \\ &= \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} \sum_{p=i}^{i+j} x^i \cdot C_p^i \sum_h b_{k,h} \cdot u_{p,i+j-p}^h \cdot \epsilon^j, \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\underline{\underline{tB}} \underline{u}(x - \epsilon) := \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} \sum_{p=i}^{i+j} x^i \cdot (-1)^{p-i} \cdot C_p^i \sum_h b_{h,k} \cdot u_{p,i+j-p}^h \cdot \epsilon^j. \quad (6.6)$$

Les facteurs C_n^m sont les coefficients du binôme de Newton, $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Le changement d'indice $i \rightleftharpoons p \rightleftharpoons j$ n'est pas simple *a priori*. Il sous entend une modification dans le calcul d'une double série en i et en j . Soit pour un i donné, nous effectuons la somme sur l'indice j puis nous faisons ensuite la somme globale sur les i ; soit nous inversons le rôle de i et de j ; soit nous sommons les termes en diagonales croissantes, c'est à dire en sommant petit à petit tous les termes tel que $i + j$ soit égal à une constante q . C'est l'objectif du changement d'indice ci-dessous.

$$\sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} \{x^i \cdot u_{i,j}^k \cdot \epsilon^j\} \longrightarrow \sum_{p \geq 0} \left\{ \sum_{q=0}^p \{x^q \cdot u_{q,p-q}^k \cdot \epsilon^{p-q}\} \right\}. \quad (6.7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \underline{A} \cdot \underline{u}(x) &= \underline{A} \cdot ({}^t x \cdot \underline{u} \cdot \epsilon) = {}^t x \cdot (\underline{A} \cdot \underline{u}) \cdot \epsilon \\ &= [x^0 \cdot x^p \cdot x^i \cdot] \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \underline{A} \cdot \underline{u}_{i,j} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \epsilon^j \\ \cdot \\ \epsilon^{j+p} \\ \cdot \\ \epsilon^{j+i} \\ \cdot \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \quad (6.11)$$

b.ii) Forme matricielle du déplacement $\underline{u}(x + \epsilon)$

$$\begin{aligned} \underline{u}(x + \epsilon) &= ({}^t(x + \epsilon) \cdot \underline{u} \cdot \epsilon, \\ &= [(x + \epsilon)^0 \cdot (x + \epsilon)^p \cdot (x + \epsilon)^i \cdot] \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \underline{u}_{i,j} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \epsilon^j \\ \cdot \\ \epsilon^{j+p} \\ \cdot \\ \epsilon^{j+i} \\ \cdot \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Faisons apparaître le vecteur ${}^t x$ dans l'expression de $\underline{u}(x + \epsilon)$. Par la suite, la matrice centrale (positionnée entre ${}^t x$ et ϵ) pourra ainsi être identifiée avec les autres matrices du même type.

$$\begin{aligned} \underline{u}(x + \epsilon) &= ({}^t(x + \epsilon) \cdot \underline{u} \cdot \epsilon = {}^t x \cdot \underline{u}_\epsilon \cdot \epsilon, \\ &= [x^0 \cdot x^p \cdot x^i \cdot] \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & C_i^p \underline{u}_{i,j} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & C_i^0 \underline{u}_{i,j} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \epsilon^j \\ \cdot \\ \epsilon^{j+p} \\ \cdot \\ \epsilon^{j+i} \\ \cdot \end{bmatrix} , \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \underline{B} \cdot \underline{u}(x + \epsilon) &= \underline{B} \cdot ({}^t(x + \epsilon) \cdot \underline{u} \cdot \epsilon) = {}^t x \cdot (\underline{B} \cdot \underline{u}_\epsilon) \cdot \epsilon \\ &= {}^t x \cdot \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & C_i^p \underline{B} \cdot \underline{u}_{i,j} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \underline{B} \cdot \underline{u}_{i,j} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \cdot \epsilon . \end{aligned} \right. \quad (6.12)$$

Il est fondamental de remarquer que les emplacements des termes en $\underline{u}_{i,j}$ se trouvent uniquement sur la diagonale telle que la puissance en x additionnée à la puissance en ϵ soit constante et égale à $i + j$.

Le vecteur $\underline{\mathcal{K}}_u$ s'écrit alors

$$\underline{\mathcal{K}}_u = \begin{bmatrix} \underline{IN} \cdot u_{0,0} & \underline{IN} \cdot u_{0,1} + \underline{AS} \cdot u_{1,0} & \underline{IN} \cdot u_{0,2} + \underline{AS} \cdot u_{1,1} + \underline{SY} \cdot u_{2,0} & \dots \\ \underline{IN} \cdot u_{1,0} & \underline{IN} \cdot u_{1,1} + 2 \underline{AS} \cdot u_{2,0} & \cdot & \dots \\ \underline{IN} \cdot u_{2,0} & \cdot & \cdot & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Les termes de la matrice $\underline{\mathcal{K}}_u$ comportant le déplacement $u_{i,j}$ n'apparaissent que sur une et une seule diagonale. Il s'agit de la diagonale $i + j$. Vis à vis des déplacements, les diagonales sont donc *indépendantes* les unes des autres.

b.v) Termes en effort dans l'équation d'équilibre

L'adimensionnalisation réalisée au chapitre 5 est toujours effective. En effet, la nature de notre formulation vis à vis de ϵ est la même que celle donnée par l'homogénéisation. Les termes représentant le chargement commencent en ϵ^4 (et non en ϵ^3 comme dans la première partie car nous avons fait commencer les termes en déplacement à l'ordre ϵ^0 et non à l'ordre ϵ^{-1} , ce qui engendre un décalage) . Par ailleurs, nous retrouverons bientôt ce résultat lors de la résolution.

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_f \underline{f}(x) = {}^t x \cdot \underline{\mathcal{F}} \cdot \epsilon \\ Q_f \underline{f}(x) = [x^0 \ x^1 \ x^2 \ x^3 \cdot] \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{f}_{0,4} & \underline{f}_{0,5} & \underline{f}_{0,6} & \underline{f}_{0,7} & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{f}_{1,4} & \underline{f}_{1,5} & \underline{f}_{1,6} & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{f}_{2,4} & \underline{f}_{2,5} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{f}_{3,4} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}_{\underline{\mathcal{F}}} \begin{bmatrix} \epsilon^0 \\ \epsilon^1 \\ \epsilon^2 \\ \epsilon^3 \\ \epsilon^4 \\ \epsilon^5 \\ \epsilon^6 \\ \epsilon^7 \\ \cdot \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (6.18)$$

b.vi) Équilibre de la poutre

$$\begin{aligned} \underline{B} \cdot u(x - \epsilon) + \underline{A} \cdot u(x) + \underline{B} \cdot u(x + \epsilon) &= Q_f \underline{f}(x) \\ {}^t x \cdot \underline{\mathcal{K}}_u \cdot \epsilon &= {}^t x \cdot \underline{\mathcal{F}} \cdot \epsilon \\ \underline{\mathcal{K}}_u &= \underline{\mathcal{F}} \end{aligned} \quad (6.19)$$

L'équation d'équilibre $\underline{B} \cdot u(x - \epsilon) + \underline{A} \cdot u(x) + \underline{B} \cdot u(x + \epsilon) = Q_f \underline{f}(x)$ s'écrit alors sous forme matricielle $\underline{\mathcal{K}}_u = \underline{\mathcal{F}}$. La double identification en x et en ϵ correspond à l'égalité des vecteurs $\underline{\mathcal{K}}_u$ et $\underline{\mathcal{F}}$ (qui sont par ailleurs des matrices en x et en ϵ).

6.1.2 Résolution des différentes diagonales

a) Démarche

Appelons *diagonale* tous les termes $\underline{K}_{u_{i,j}}$ de la matrice \underline{K}_u tels que leur puissance i en x additionnée à celle j en ϵ soit une même constante $i + j$. Soit le déplacement $\underline{u}_{i,j}$, il ne se trouve que sur la diagonale $i + j$ de \underline{K}_u . *Les diagonales sont donc indépendantes les unes des autres.* Résolvons alors les diagonales séparément en commençant par la plus simple. L'étude qui suit est théorique. La méthode et la forme des résultats sont cependant identiques pour toute poutre.

Lors de la résolution, nous allons trouver des matrices singulières, c'est à dire ayant un déterminant nul. Une ou plusieurs lignes sont alors combinaisons linéaires des autres. De même pour les colonnes. Sur les systèmes matriciels des différentes diagonales, les emplacements des lignes et des colonnes que nous considérerons comme combinaisons linéaires des autres seront marqués par une simple ou une double flèche horizontale ou verticale. Par exemple, une double flèche horizontale signifie qu'il y a quatre lignes à éliminer dans le bloc correspondant.

a.i) Notion intuitive de poutre, changement de variable

Les lignes et les colonnes combinaisons linéaires des autres seront toujours les mêmes. Pourtant, entre deux poutres de géométrie différente, les variables des problèmes n'ont *a priori* pas de rapport entre elles. En réalité, toute poutre est dite *poutre* car de loin, elle paraît être continue. Nous allons écrire le vecteur déplacement des nœuds dans une base plus naturelle. Dans cette nouvelle base, *les premières composantes représentent les déplacements macroscopiques* de la poutre, "ceux qu'on voit de loin". C'est à dire les *translations de la cellule* par la moyenne des déplacements des nœuds de la cellule et *les rotations de la cellule* par des sommes et des différences de déplacement de nœuds de la cellule. On appelle P_p ce changement de variable. Les premières composantes de P_p représentent le torseur des petits déplacements. On complète les autres composantes de P_p par des vecteurs pour l'instant choisis arbitrairement mais orthogonaux aux précédents afin d'obtenir une matrice P_p orthogonale et garder ainsi les propriétés de symétrie des matrices \underline{A} , \underline{IN} , \underline{AS} et \underline{SY} .

Soit au niveau des déplacements des nœuds, nous avons le changement :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x^I \\ u_y^I \\ u_z^I \\ u_x^{II} \\ u_y^{II} \\ u_z^{II} \\ u_x^{III} \\ \vdots \end{array} \right\} \xrightarrow{F_p} \left\{ \begin{array}{l} u^1 \Rightarrow u_x^m \\ u^2 \Rightarrow u_y^m \\ u^3 \Rightarrow u_z^m \\ u^4 \Rightarrow \omega_x^m \\ u^5 \Rightarrow \omega_y^m \\ u^6 \Rightarrow \omega_z^m \\ u^7 \\ \vdots \end{array} \right\} \text{Torseur des petits déplacements}$$

a.ii) Diagonale 0

$$\Downarrow \\ \Rightarrow \underline{IN} \cdot \underline{u}_{0,0} = \underline{0}.$$

Le déterminant de \underline{IN} est nul. La matrice \underline{IN} étant singulière, les termes en efforts ne peuvent effectivement pas apparaître à cette diagonale. Si le changement de variable consistant à mettre le torseur des petits déplacements en premier dans les composantes de \underline{u} a été fait, alors le déplacement $\underline{u}_{0,0}$ est de la forme

$${}^t \underline{u}_{0,0} = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \mid c_4 \quad 0 \quad 0 \mid 0 \quad \dots].$$

Le déplacement $\underline{u}_{0,0}$ trouvé est bien sur indépendant de x et de ϵ . Tous les nœuds de la structure peuvent donc se déplacer selon trois translations de solide (c_1, c_2, c_3) ainsi qu'une rotation de solide autour de l'axe de la poutre (c_4). Bien que cela n'ait pas été prouvé analytiquement, mais cela a toujours été vérifié numériquement, on a toujours

$$\text{rang}(\underline{IN}) = \dim(\underline{IN}) - 4,$$

ce qui permet d'introduire quatre constantes à la diagonale 0 sur les quatre premières composantes du torseur des petits déplacements. Une double flèche sur le système de la diagonale 0 signifie que les quatre premières colonnes ou les quatre premières lignes s'écrivent comme une combinaison linéaire des autres lignes et des autres colonnes. Le déplacement $\underline{u}_{0,0}$ est donc une solution qui pour toute valeur des quatre constantes c_1, c_2, c_3 et c_4 donne :

$${}^t \underline{B} \cdot \underline{u}(x - \epsilon) + \underline{A} \cdot \underline{u}(x) + \underline{B} \cdot \underline{u}(x + \epsilon) = \underline{0}.$$

a.iii) Diagonale 1

$$\begin{aligned} & \Downarrow & & \Downarrow \\ \Rightarrow & \underline{IN} \cdot \underline{u}_{0,1} & + & \underline{AS} \cdot \underline{u}_{1,0} = \underline{0}, \\ \Rightarrow & & & \underline{IN} \cdot \underline{u}_{1,0} = \underline{0}. \end{aligned}$$

Ce système matriciel est 8 fois singulier. Quatre singularités représentent les trois translations de solide et la rotation de solide selon l'axe de la poutre que nous avons déjà trouvée à la diagonale 0, mais décalées de ϵ . Ces quatre singularités sont annulées dans le déplacement $\underline{u}_{0,1}$ pour ne pas alourdir l'étude. Les quatre autres singularités portent de nouveau sur les quatre premières composantes du déplacement, c'est à dire sur le torseur des petits déplacements, il s'agit cette fois du déplacement $\underline{u}_{1,0}$. On le trouve de la forme

$${}^t\underline{u}_{1,0} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & . & . \\ \hline . & . & . & . & . & . \end{array} \right],$$

où c_5 représente une traction sur une des extrémités de la poutre, c_8 une torsion dans la poutre, c_6 et c_7 les deux autres rotations de solide. Ces deux rotations radiales engendrent effectivement des déplacements radiaux linéaires dans la poutre. Par ailleurs, on retrouve ces constantes dans le déplacement $\underline{u}_{0,1}$. En effet, les nœuds qui ne sont pas positionnés sur la fibre neutre sont déplacés d'une petite valeur selon l'axe de la poutre par ces rotations. De même, la traction ainsi que la torsion (c_5 et c_8) peuvent avoir des effets secondaires sur le déplacement $\underline{u}_{0,1}$ ainsi que sur d'autres composantes de $\underline{u}_{1,0}$. Par exemple, lorsque que l'on tire sur un treillis poutre plan en \mathcal{N} , la poutre s'allonge mais elle monte aussi et de la même valeur si le \mathcal{N} est à 45° . Dans ces cas là, où il y a couplage, c_6 représente aussi un peu une traction. Quatre constantes apparaissent toujours à la diagonale 1, on peut en donner une interprétation simple. Cependant, en cas de couplage, ce qu'elle représente chacune exactement n'est pas toujours simple à écrire. Mais globalement, toutes les quatre représentent une traction, une torsion sur l'une des extrémités ainsi que deux rotations de solide radiales.

a.iv) Diagonale 2

$$\begin{array}{l} \Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow \\ \rightarrow \underline{IN} \cdot \underline{u}_{0,2} + \underline{AS} \cdot \underline{u}_{1,1} + \underline{SY} \cdot \underline{u}_{2,0} = \underline{0}, \\ \Rightarrow \qquad \qquad \qquad \underline{IN} \cdot \underline{u}_{1,1} + 2 \underline{AS} \cdot \underline{u}_{2,0} = \underline{0}, \\ \Rightarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{IN} \cdot \underline{u}_{2,0} = \underline{0}. \end{array}$$

Le système linéaire de la diagonale 2 est 10 fois singulier. Les 8 singularités précédentes décalées de ϵ et marquées sur le système par des doubles flèches, ainsi que deux nouvelles (spécifiées par une simple flèche) qui porte toujours sur le torseur des petits déplacements et plus particulièrement sur les deux déplacements radiaux. En effet,

$${}^t\underline{u}_{1,0} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} . & c_9 & c_{10} & . & . & . \\ \hline . & . & . & . & . & . \end{array} \right],$$

où les deux constantes c_9 et c_{10} caractérisent chacune un moment de flexion à l'une des extrémités de la poutre. De nouveau, si la poutre est couplée, l'interprétation de ces deux constantes n'est pas si simple.

a.v) Diagonale 3

$$\begin{array}{l} \Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow \\ \rightarrow \underline{IN} \cdot \underline{u}_{0,3} + \underline{AS} \cdot \underline{u}_{1,2} + \underline{SY} \cdot \underline{u}_{2,1} + \underline{AS} \cdot \underline{u}_{3,0} = \underline{0} \\ \rightarrow \qquad \qquad \qquad \underline{IN} \cdot \underline{u}_{1,2} + 2 \underline{AS} \cdot \underline{u}_{2,1} + 3 \underline{SY} \cdot \underline{u}_{3,0} = \underline{0} \\ \Rightarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{IN} \cdot \underline{u}_{2,1} + 3 \underline{AS} \cdot \underline{u}_{3,0} = \underline{0} \\ \Rightarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{IN} \cdot \underline{u}_{3,0} = \underline{0} \end{array}$$

Le système linéaire de la diagonale 3 est 12 fois singulier. Les 10 singularités précédentes de la diagonale 2 décalées de ϵ et marquées sur le système par des doubles flèches et une simple flèche, ainsi que deux nouvelles spécifiées par une simple flèche qui porte les deux déplacements radiaux du torseur des petits déplacements. En effet, on peut écrire

$${}^t \underline{u}_{1,0} = \left[\cdot \quad c_{11} \quad c_{12} \mid \cdot \quad \cdot \quad \cdot \mid \cdot \quad \dots \right],$$

où les deux constantes c_{11} et c_{12} caractérisent chacune un effort tranchant à l'une des extrémités de la poutre. L'interprétation de ces deux constantes, là encore, n'est pas aussi facile à faire si la poutre est couplée.

a.vi) Diagonale 4

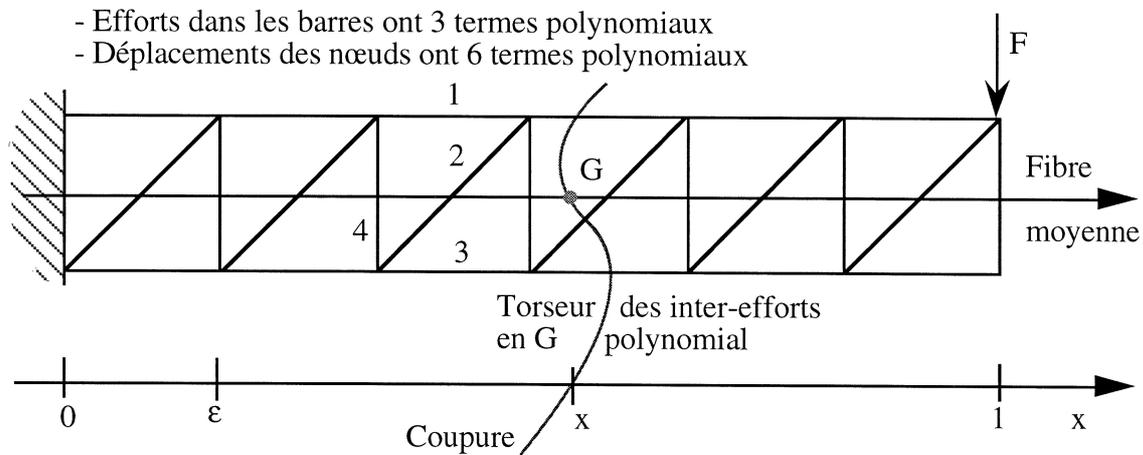
$$\begin{array}{r} \Downarrow \qquad \qquad \Downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ \underline{IN} \cdot \underline{u}_{0,4} + \underline{AS} \cdot \underline{u}_{1,3} + \underline{SY} \cdot \underline{u}_{2,2} + \underline{AS} \cdot \underline{u}_{3,1} + \underline{SY} \cdot \underline{u}_{4,0} = \underline{f}_{0,4} \\ \rightarrow \qquad \qquad \underline{IN} \cdot \underline{u}_{1,3} + 2 \underline{AS} \cdot \underline{u}_{2,2} + 3 \underline{SY} \cdot \underline{u}_{3,1} + 4 \underline{AS} \cdot \underline{u}_{4,0} = \underline{0} \\ \rightarrow \qquad \qquad \qquad \underline{IN} \cdot \underline{u}_{2,2} + 3 \underline{AS} \cdot \underline{u}_{3,1} + 6 \underline{SY} \cdot \underline{u}_{4,0} = \underline{0} \\ \Rightarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{IN} \cdot \underline{u}_{3,1} + 4 \underline{AS} \cdot \underline{u}_{4,0} = \underline{0} \\ \Rightarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{IN} \cdot \underline{u}_{4,0} = \underline{0} \end{array}$$

Le système linéaire de la diagonale 4 est 12 fois singulier, les 12 singularités de la diagonale 3 décalées de ϵ qui sont marquées sur le système par des doubles flèches et des simples flèches. Par contre, la première ligne du système matriciel par bloc (celle qui n'est pas marqué par une flèche) n'apporte aucune singularité supplémentaire. On peut donc introduire sur cette ligne les efforts extérieurs. Ce résultat n'est pas prouvé mais il a été vérifié sur un grand nombre de treillis poutres tests. Le fait d'être obligé d'attendre la quatrième diagonale avant de pouvoir introduire le chargement extérieur est en accord avec les calculs d'homogénéisation sur des poutres 2D simple où il fallait développer les équations d'équilibre sur 4 ordres de grandeur successifs [65, 60]. La déformée d'un chargement constant est donc au plus un polynôme en x de degré 4 et il existe toujours un chargement constant qui engendre une déformée de degré 4.

a.vii) Diagonale 5

$$\begin{array}{r} \Downarrow \qquad \qquad \Downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ \underline{IN} \cdot \underline{u}_{0,5} + \underline{AS} \cdot \underline{u}_{1,4} + \underline{SY} \cdot \underline{u}_{2,3} + \underline{AS} \cdot \underline{u}_{3,2} + \underline{SY} \cdot \underline{u}_{4,1} + \underline{AS} \cdot \underline{u}_{5,0} = \underline{f}_{0,5} \\ \qquad \qquad \underline{IN} \cdot \underline{u}_{1,4} + 2 \underline{AS} \cdot \underline{u}_{2,3} + 3 \underline{SY} \cdot \underline{u}_{3,2} + 4 \underline{AS} \cdot \underline{u}_{4,1} + 5 \underline{SY} \cdot \underline{u}_{5,0} = \underline{f}_{1,4} \\ \rightarrow \qquad \qquad \underline{IN} \cdot \underline{u}_{2,3} + 3 \underline{AS} \cdot \underline{u}_{3,2} + 6 \underline{SY} \cdot \underline{u}_{4,1} + 10 \underline{AS} \cdot \underline{u}_{5,0} = \underline{0} \\ \rightarrow \qquad \qquad \qquad \underline{IN} \cdot \underline{u}_{3,2} + 4 \underline{AS} \cdot \underline{u}_{4,1} + 10 \underline{SY} \cdot \underline{u}_{5,0} = \underline{0} \\ \Rightarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{IN} \cdot \underline{u}_{4,1} + 5 \underline{AS} \cdot \underline{u}_{5,0} = \underline{0} \\ \Rightarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{IN} \cdot \underline{u}_{5,0} = \underline{0} \end{array}$$

Le système linéaire de la diagonale 5 est 12 fois singulier, les 12 singularités de la diagonale 3 décalées de ϵ^2 . On peut introduire cependant un chargement extérieur linéaire en x , la déformée sera caractérisée par, au plus, un polynôme en x de degré 5.

Figure 6.1 : *notion de RdM, torseur des inter-efforts*

b) Propriétés

b.i) Triangle de Pascal

- Les colonnes combinaisons linéaires des autres colonnes le sont à toutes diagonales car ces colonnes demeurent inchangées d'une diagonale à l'autre de part la construction des systèmes linéaires.
- Les lignes (en partant de la fin) combinaisons linéaires des autres lignes à la diagonale n le sont encore à la diagonale $n + 1$ car nos systèmes matriciels sont construits sur le triangle de Pascal.
- Les lignes (en partant de la fin) et les colonnes combinaisons linéaires des autres sont les mêmes dans une diagonale donc dans toutes diagonales. Ces propriétés se déduisent de la construction des systèmes matriciels sur le triangle de Pascal.

b.ii) Notion de RdM

La solution en déplacement de tout treillis poutre plan (par exemple du treillis poutre plan en \mathcal{N}) comprend à chaque fois douze constantes que l'on peut identifier ; pour moitié au déplacement de solide qui permet de vérifier, à une extrémité de la poutre, six conditions aux limites (6 degrés de liberté) ; pour l'autre moitié aux six conditions aux limites de l'extrémité opposée. Ces conditions aux limites vérifiées sont "identiques" pour tous les treillis poutres. J'entends par là le fait qu'elles sont identiques au sens des torseurs. Or sur une structure élancée ayant une dimension privilégiée, le point de vue des torseurs est celui de la RdM et des poutres. L'analogie entre nos poutres et la poutre continue se comprend alors par ce qui les rapproche : *leur nature de poutre*.

1. Torseur des inter-efforts

Sur toute poutre, nous pouvons définir une *fibre* parallèle à l'axe des abscisses ; par exemple la ligne moyenne (figure 6.1). Comme en RdM, une *coupure* peut être faite

en un point de cette ligne et un *torseur des inter-efforts* est alors défini en ce point comme étant les actions de la partie droite sur la partie gauche de la poutre. Ce torseur est défini pour les treillis poutres 3D par 6 grandeurs ; l'effort normal, les deux efforts tranchants, le moment de torsion et les deux moments de flexion.

Lorsque seules les extrémités de la poutre sont chargées, le torseur des inter-efforts est polynomial. En se plaçant à l'abscisse d'une cellule, une combinaison linéaire des efforts dans les barres est égal au torseur des inter-efforts. Dans le cas des poutres 3D, le *vecteur efforts dans les barres* possède alors *six termes polynomiaux* dans ses composantes.

Les efforts étant une combinaison linéaire, sous forme de différences finies, des déplacements des nœuds, ces derniers ont donc six termes polynomiaux. Sachant que le déplacement de solide rajoute encore six termes polynomiaux indépendants des précédents, le *vecteur déplacements des nœuds* a donc *douze termes polynomiaux* dans ses composantes. Ceci est toujours vérifié, que la poutre soit chargée ou non en partie courante.

Les *douze singularités* que nous retrouvons à chaque diagonale correspondent à ces douze déplacements polynomiaux qui ne dépendent pas du chargement en partie courante.

2. Aspect physique

Quelle que soit la poutre étudiée, les lignes et les colonnes combinaisons linéaires des autres sont toujours les mêmes. C'est la nature *poutre* qui est en cause dans cette propriété. C'est pourquoi nous avons fait le changement de variable P_p sur les déplacements des nœuds afin de mettre en évidence le torseur des petits déplacements dans les premières composantes du vecteur déplacement. Les systèmes étant donc singuliers de part leur nature *poutre*, certaines inconnues du vecteur déplacement vont donc être transformées en variable du problème. Quel choix faire ? Afin d'automatiser la résolution des différentes poutres possibles, notre choix sera toujours le même pour la diagonale n et il est guidé par la RdM :

translation de solide selon x	$u_{0,n}^1$
translation de solide selon y	$u_{0,n}^2$
translation de solide selon z	$u_{0,n}^3$
rotation de solide selon x	$u_{1,n-1}^4$
effort de traction en $x = 1$ selon x	$u_{1,n-1}^1$
rotation de solide selon z	$u_{1,n-1}^2$
rotation de solide selon y	$u_{1,n-1}^3$
couple de torsion en $x = 1$ selon x	$u_{1,n-1}^4$
couple de flexion en $x = 1$ selon z	$u_{2,n-2}^2$
couple de flexion en $x = 1$ selon y	$u_{2,n-2}^3$
effort de cisaillement en $x = 1$ selon y	$u_{3,n-3}^2$
effort de cisaillement en $x = 1$ selon z	$u_{3,n-3}^3$

b.iii) Cas des treillis poutres plans

Ce qui a été écrit pour les treillis poutre 3D est encore valable pour les treillis poutres plans. Cependant, le nombre de singularité dans les systèmes matriciels ne sera plus de 12 mais de 6. En effet, pour les problèmes plans, les torseurs ne sont définis que par 3 composantes, deux déplacements et une rotation pour le torseur des petits déplacements et l'effort normal, l'effort tranchant et le moment de flexion pour le torseur des inter-efforts. Une poutre continue n'a donc que 6 conditions aux limites à vérifier, les inconnues qui seront transformées en variable du problème seront pour la diagonale n :

translation de solide selon x	$u_{0,n}^1$
translation de solide selon y	$u_{0,n}^2$
effort de traction en $x = 1$ selon x	$u_{1,n-1}^1$
rotation de solide selon z	$u_{1,n-1}^2$
couple de flexion en $x = 1$ selon z	$u_{2,n-2}^2$
effort de cisaillement en $x = 1$ selon y	$u_{3,n-3}^2$

6.1.3 Exemples**a) Treillis poutre continue discrétisée**

On choisit comme premier exemple le treillis poutre discrétisée plan car c'est un exemple très simple où tous les calculs peuvent être faits à la main. La poutre continue de longueur L est discrétisée en petits éléments finis de même dimension l . Le chargement extérieur est supposé n'agir qu'aux nœuds de cette poutre. Même si cet exemple est très simple, le treillis périodique est à nœuds rigides. Chaque nœud a donc trois degrés de liberté notés u, v pour les deux déplacements et ω pour la rotation. Afin de rendre tous les termes de la matrice de rigidité homogènes, on remplace cette dernière inconnue par un déplacement équivalent $w = l\omega$ (chapitre 7). La cellule de base n'a qu'un seul nœud, son vecteur déplacement s'écrit

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ l\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix}.$$

Ces trois premières et seules composantes du vecteur déplacement représentent le torseur des petits déplacements, il n'y a donc pas de changement de variable à effectuer. Nous utilisons les résultats du chapitre 7 pour déduire les matrices \underline{A} et \underline{B} .

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2k & 0 & 0 \\ 0 & 24h & 0 \\ 0 & 0 & 8h \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} -k & 0 & 0 \\ 0 & -12h & 6h \\ 0 & -6h & 2h \end{bmatrix},$$

où $k = EA/l$ et $h = EI/l^3$ avec E le module d'Young du matériau, A la section de la poutre et I son inertie. Posons $p = -2k$ et $q = 4h$ pour réduire les futures relations, les

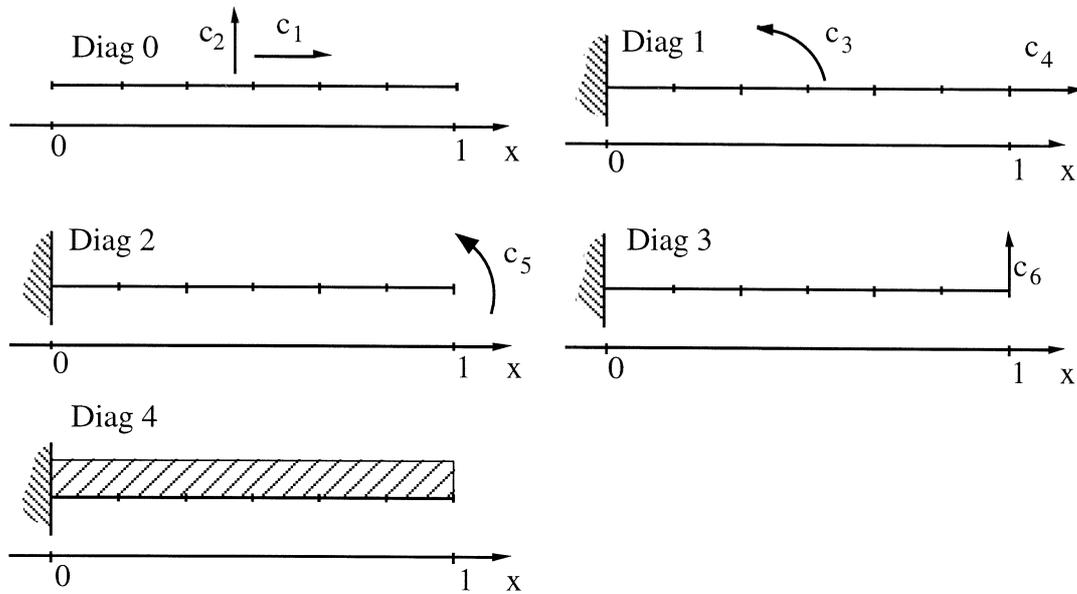


Figure 6.2 : treillis poutre continue discrétisée

trois matrices \underline{IN} , \underline{AS} , \underline{SY} sont alors définies par :

$$\underline{IN} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3q \end{bmatrix}, \quad \underline{AS} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3q \\ 0 & 3q & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{SY} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & -6q & 0 \\ 0 & 0 & q \end{bmatrix}.$$

Pour cette poutre, tous les calculs sont développés afin de bien montrer l’algorithme de résolution par cette méthode des développements en doubles séries entières. La figure 6.2 récapitule les différents modes (déplacement) trouvés.

a.i) Diagonale 0

La diagonale 0 s’écrit pour la poutre continue $\underline{IN} \cdot \underline{u}_{0,0} = \underline{0}$, soit

$$\begin{aligned} &\rightarrow \begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3q \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} u_{0,0}^1 \\ u_{0,0}^2 \\ u_{0,0}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Une solution de ce système est le déplacement

$$\underline{u}_{0,0} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

qui pour n’importe quelles constantes c_1 et c_2 donne ${}^t\underline{B} \cdot \underline{u}(x-\epsilon) + \underline{A} \cdot \underline{u}(x) + \underline{B} \cdot \underline{u}(x+\epsilon) = \underline{0}$. Cette solution correspond aux deux translations de solide dans le plan.

a.ii) Diagonale 1

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|cc} \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3q \\ 0 & 0 & 3q & 0 & -3q & 0 \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 3q \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_{0,1}^1 \\ u_{0,1}^2 \\ u_{0,1}^3 \\ u_{1,0}^1 \\ u_{1,0}^2 \\ u_{1,0}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Les colonnes 1 et 2, ainsi que les lignes -2 et -3 sont à supprimer car elles représentent les translations de solide trouvées à la diagonale 0 mais décalées de ϵ . Nous fixons donc $u_{0,1}^1$ et $u_{0,1}^2$ à 0 pour simplifier. Le système est de nouveau singulier, $u_{1,0}^1$ et $u_{1,0}^2$ peuvent être quelconques. $u_{1,0}^2$ (c_3) représente la rotation de solide ; toutes les sections tournent de la même quantité, $u_{0,1}^3$, mais le déplacement transverse $u_{1,0}^2$ est proportionnel à l'abscisse x . $u_{1,0}^1$ (c_4) est la condition aux limites en 1 selon l'axe xN ; l'allongement de la poutre est proportionnel à x sans rotation des sections.

$$u_{0,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_3 \end{bmatrix}, \quad u_{1,0} = \begin{bmatrix} c_4 \\ c_3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a.iii) Diagonale 2

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|cc} \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3q & 0 & -6p & 0 \\ 0 & 0 & 3q & 0 & -3q & 0 & 0 & 0 & q \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6q \\ & & & 0 & 0 & 3q & 0 & -6q & 0 \\ \hline & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 3q \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_{0,2}^1 \\ u_{0,2}^2 \\ u_{0,2}^3 \\ u_{1,1}^1 \\ u_{1,1}^2 \\ u_{1,1}^3 \\ u_{2,0}^1 \\ u_{2,0}^2 \\ u_{2,0}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Les colonnes 1, 2, 4 et 5, ainsi que les lignes -2, -3, -5 et -6 sont à supprimer car elles représentent le déplacement de solide et l'éirement de la poutre trouvés précédemment, mais décalés. Le système est de nouveau singulier, $u_{2,0}^2$ peut être quelconque, il représente la condition aux limites de moment en 1. Le moment de flexion dans la poutre est alors constant et la déflexion parabolique, tout comme lors d'un calcul par la RdM.

$$u_{0,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_{1,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2c_5 \end{bmatrix}, \quad u_{2,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a.iv) Diagonale 3

$$\begin{array}{l}
 \rightarrow \\
 \rightarrow \\
 \rightarrow \\
 \rightarrow \\
 \rightarrow \\
 \rightarrow
 \end{array}
 \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
 \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3q & 0 & -6p & 0 & 0 & 0 & 3q & \\
 0 & 0 & 3q & 0 & -3q & 0 & 0 & 0 & q & 0 & -3q & 0 & \\
 \hline
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3p & 0 & 0 & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6q & 0 & -18p & 0 & \\
 & & & 0 & 0 & 3q & 0 & -6q & 0 & 0 & 0 & 3q & \\
 \hline
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9q & \\
 & & & & & & 0 & 0 & 3q & 0 & -9q & 0 & \\
 \hline
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 3q &
 \end{array} \right]
 \begin{bmatrix}
 u_{0,3}^1 \\
 u_{0,3}^2 \\
 u_{0,3}^3 \\
 \hline
 u_{1,2}^1 \\
 u_{1,2}^2 \\
 u_{1,2}^3 \\
 \hline
 u_{2,1}^1 \\
 u_{2,1}^2 \\
 u_{2,1}^3 \\
 \hline
 u_{3,0}^1 \\
 u_{3,0}^2 \\
 u_{3,0}^3
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \hline
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \hline
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \hline
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 .$$

Les colonnes 1, 2, 4, 5 et 8, ainsi que les lignes -2, -3, -5, -6 et -8 sont à supprimer car elles représentent les conditions aux limites trouvées précédemment, mais décalées. Le déplacement $u_{3,0}^2$ peut être quelconque, il représente la condition aux limites de cisaillement en 1. Le moment de flexion dans la poutre est alors linéaire, la déflexion cubique (RdM).

$$u_{0,3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad
 u_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad
 u_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3c_6 \end{bmatrix}, \quad
 u_{3,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a.v) Diagonale 4

$$\begin{array}{l}
 \rightarrow \\
 \rightarrow \\
 \rightarrow \\
 \rightarrow \\
 \rightarrow \\
 \rightarrow \\
 \rightarrow
 \end{array}
 \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc|ccc}
 \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3q & 0 & -6p & 0 & 0 & 0 & 3q & 0 & -6p & 0 \\
 0 & 0 & 3q & 0 & -3q & 0 & 0 & 0 & q & 0 & -3q & 0 & 0 & 0 & q \\
 \hline
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6q & 0 & -18p & 0 & 0 & 0 & 12q \\
 & & & 0 & 0 & 3q & 0 & -6q & 0 & 0 & 0 & 3q & 0 & -12q & 0 \\
 \hline
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6p & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9q & 0 & -36p & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 3q & 0 & -9q & 0 & 0 & 0 & 6q \\
 \hline
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12q \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 3q & 0 & -12q & 0 \\
 \hline
 & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 3q
 \end{array} \right]
 \begin{bmatrix}
 u_{0,4}^1 \\
 u_{0,4}^2 \\
 u_{0,4}^3 \\
 \hline
 u_{1,3}^1 \\
 u_{1,3}^2 \\
 u_{1,3}^3 \\
 \hline
 u_{2,2}^1 \\
 u_{2,2}^2 \\
 u_{2,2}^3 \\
 \hline
 u_{3,1}^1 \\
 u_{3,1}^2 \\
 u_{3,1}^3 \\
 \hline
 u_{4,0}^1 \\
 u_{4,0}^2 \\
 u_{4,0}^3
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 f_{0,4}^1 \\
 f_{0,4}^2 \\
 f_{0,4}^3 \\
 \hline
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \hline
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \hline
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \hline
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 .$$

Les colonnes 1, 2, 4, 5, 8 et 11 ainsi que les lignes -2, -3, -5, -6, -8 et -11 sont à supprimer car elles représentent six conditions aux limites. Nous fixons donc $u_{0,4}^1, u_{0,4}^2, u_{1,3}^1, u_{1,3}^2, u_{2,2}^2$

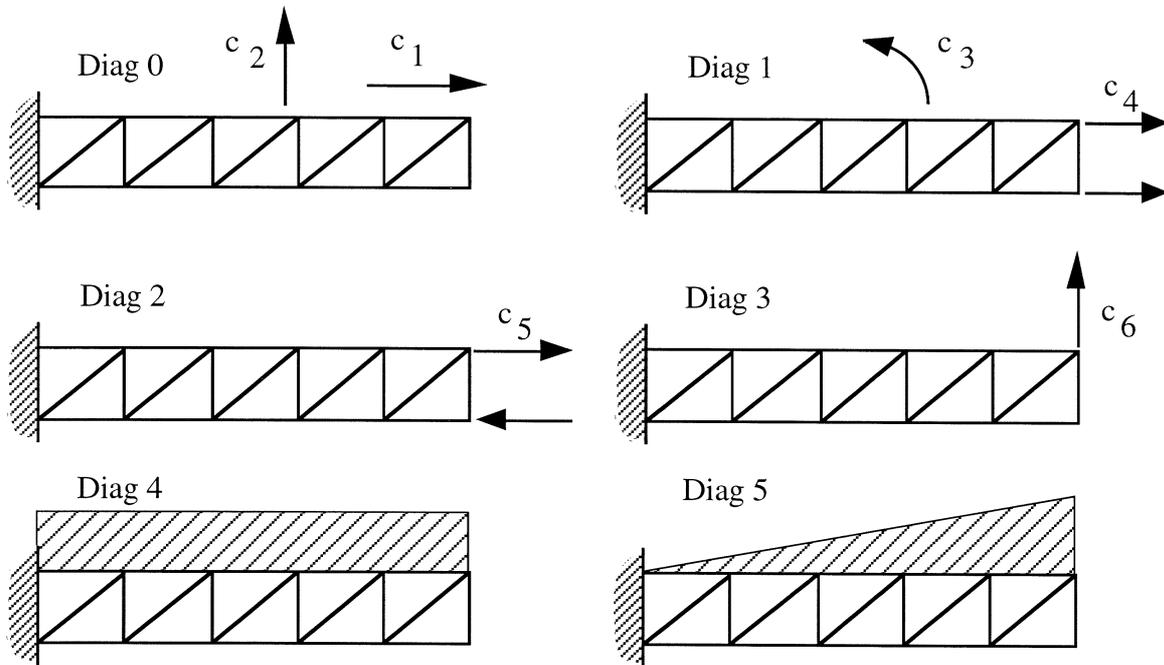


Figure 6.3 : treillis poutre plan en \mathcal{N}

et $u_{3,1}^2$ à 0 afin qu'ils ne dérangent pas. Le système n'est plus singulier, les efforts peuvent donc apparaître. Le chargement, constant sur la poutre, induit une déflexion quadratique.

$$u_{0,4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{f_{0,4}^3}{3q} \end{bmatrix}, \quad u_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_{2,2} = \begin{bmatrix} \frac{f_{0,4}^1}{4p} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_{3,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2f_{0,4}^2}{3q} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_{4,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f_{0,4}^2}{6q} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a.vi) Diagonale 5

La résolution est encore identique aux précédentes, on supprime toujours les six lignes et les six colonnes. Le chargement est maintenant linéaire en x , la déformée est donc un polynôme de degré 5. Pour les diagonales suivantes, la résolution se calcule...

b) Treillis poutre plan en \mathcal{N}

Ces quelques schémas (figure 6.3) représentent la réponse du treillis poutre en \mathcal{N} à nœuds articulés. Les efforts ne peuvent apparaître qu'à la diagonale 4 car nous obtenons lors des quatre premières diagonales six solutions homogènes polynomiales, c'est à dire telles que :

$${}^t\underline{B} \cdot \underline{u}(x - \epsilon) + \underline{A} \cdot \underline{u}(x) + \underline{B} \cdot \underline{u}(x + \epsilon) = \underline{0}.$$

Le changement de variable pour passer des déplacements des nœuds au torseur des petits déplacements est :

$$P_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

alors le vecteur déplacement \underline{u} est donné par :

$$\begin{cases} u_x^I \\ u_y^I \\ u_x^{II} \\ u_y^{II} \end{cases} \xrightarrow{P_p} \begin{cases} u^1 \Leftrightarrow u_x^m \\ u^2 \Leftrightarrow u_y^m \\ u^3 \Leftrightarrow \omega_z^m \\ u^4 \end{cases} \text{Torseur des petits déplacements}$$

c) Treillis poutre 3D en \mathcal{N} à section carrée

Le treillis poutre 3D en \mathcal{N} à section carrée a une cellule de référence comportant 4 nœuds et 12 barres (figure 6.4). Le nombre de cellule est choisi égal à 10, la longueur est de 10 m, la cellule est par ailleurs cubique. Le matériau des barres est un acier de module d'Young $E = 210000\text{MPa}$. Les conditions limites posées sont des conditions encastrees-encastrees au sens du torseur des petits déplacements. C'est à dire que les torseurs des petits déplacements associés aux cellules $x = 0$ et $x = 1$ sont égaux à zéro. Les conditions aux limites en efforts correspondent à un effort tranchant et à un couple constants répartis le long de la poutre et de valeur aux nœuds

$$\begin{cases} \mathbf{F}^I = 10\text{N } \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{F}^{II} = 10\text{N } \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{F}^{III} = -5\text{N } \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{F}^{IV} = -5\text{N } \mathbf{e}_2. \end{cases} \quad (6.20)$$

Le calcul a été fait sur deux logiciels différents, le logiciel d'éléments finis ANSYS et un programme que j'ai écrit avec le langage de calcul formel MATHEMATICA qui résout en automatique l'équilibre de tout type de poutre par la méthode des doubles séries entières [5, 31]. La figure 6.4 présente la déformée du treillis calculée sur MATHEMATICA. Au niveau des résultats, ces deux méthodes de résolution donnent les mêmes déplacements avec six chiffres significatifs. Au niveau des performances, les ordinateurs où étaient installés ces deux programmes n'étaient pas comparables (une station de travail Silicon Graphics et un petit Macintosh), Par ailleurs ANSYS est un programme compilé alors que MATHEMATICA est un langage interprété, on peut donc simplement dire que la méthode des doubles séries a moins d'opérations à faire car ce nombre d'opérations est indépendant du nombre de cellules pour le calcul de la fonction déplacement et proportionnel au nombre de cellules pour la visualisation de la déformée. Même avec une méthode numérique performante du type méthode itérative de Jacobi ou de Gauss-Seidel où il existe des théorèmes de convergence et de comparaison de vitesses de convergence pour

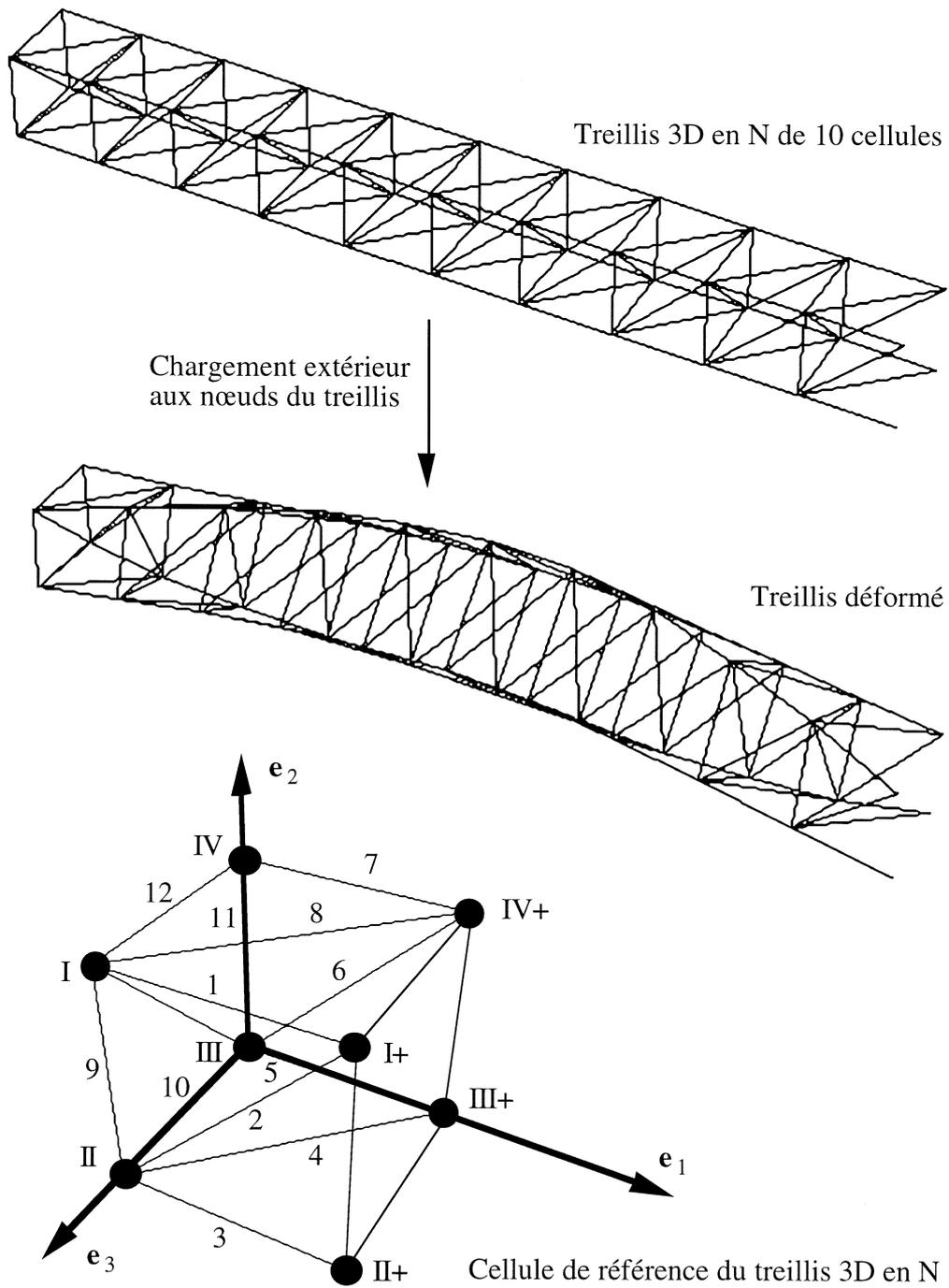


Figure 6.4 : treillis poutre 3D en N soumis à de la torsion

les matrices tridiagonales par bloc [16], une MEF ne peut pas aller plus vite. Il faudrait programmer la méthode des doubles séries en Fortran ou en C pour pouvoir comparer des temps de calcul machine, ce qui est faisable.

d) Treillis poutre 3D en \mathcal{W} à section triangulaire

Le treillis poutre 3D en \mathcal{W} à section triangulaire a une cellule de référence comportant 6 nœuds et 18 barres (figure 6.5). Le nombre de cellules est choisi égal à 10, la longueur est de 10 m. Le chargement est de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}^I = -5N \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{F}^{II} = -10N \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{F}^{III} = -10N \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{F}^{IV} = -5N \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{F}^V = -10N \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{F}^{VI} = -10N \mathbf{e}_2. \end{array} \right. \quad (6.21)$$

Les conditions aux limites sont du type encastées-encastées au sens du torseur des petits déplacements. De nouveau, la MEF et la méthode des développements en doubles séries entières donnent des déformées identiques.

6.1.4 Récapitulatif sur les doubles séries

La décomposition du vecteur force et du vecteur déplacement en double série entière de x et de ϵ permet de trouver une solution de l'équation d'équilibre en partie courante. Les différents calculs s'effectuant sur des scalaires, l'informatisation du processus est simple. Cette décomposition en double série entière nous éclaire cependant sur la nature de notre poutre. Deux points apparaissent :

- La notion de poutre, c'est à dire de milieu continu de dimension 1, implique l'existence d'un champ de déplacement polynomial de dimension 12 et solution homogène des équations d'équilibre. Ce champ permet de vérifier 12 conditions aux limites, 6 pour chaque extrémité du milieu continu. Ces 12 conditions ne permettent pas en général de vérifier toutes les conditions aux limites du treillis, seulement des conditions aux limites en *moyennes*, c'est à dire parfaitement définies par la notion de torseur équivalent ; le torseur des petits déplacements d'une cellule pour les déplacements des nœuds, le torseur des inter-efforts pour les conditions aux limites en efforts. Ces conditions aux limites apparaissent lors de la résolution diagonale par diagonale dans l'ordre suivant : (figure 6.6)

diag 0 : 3 translations de solide $/\vec{x}, / \vec{y}$ et $/ \vec{z}$
 : 1 rotation de solide $/\vec{x}$

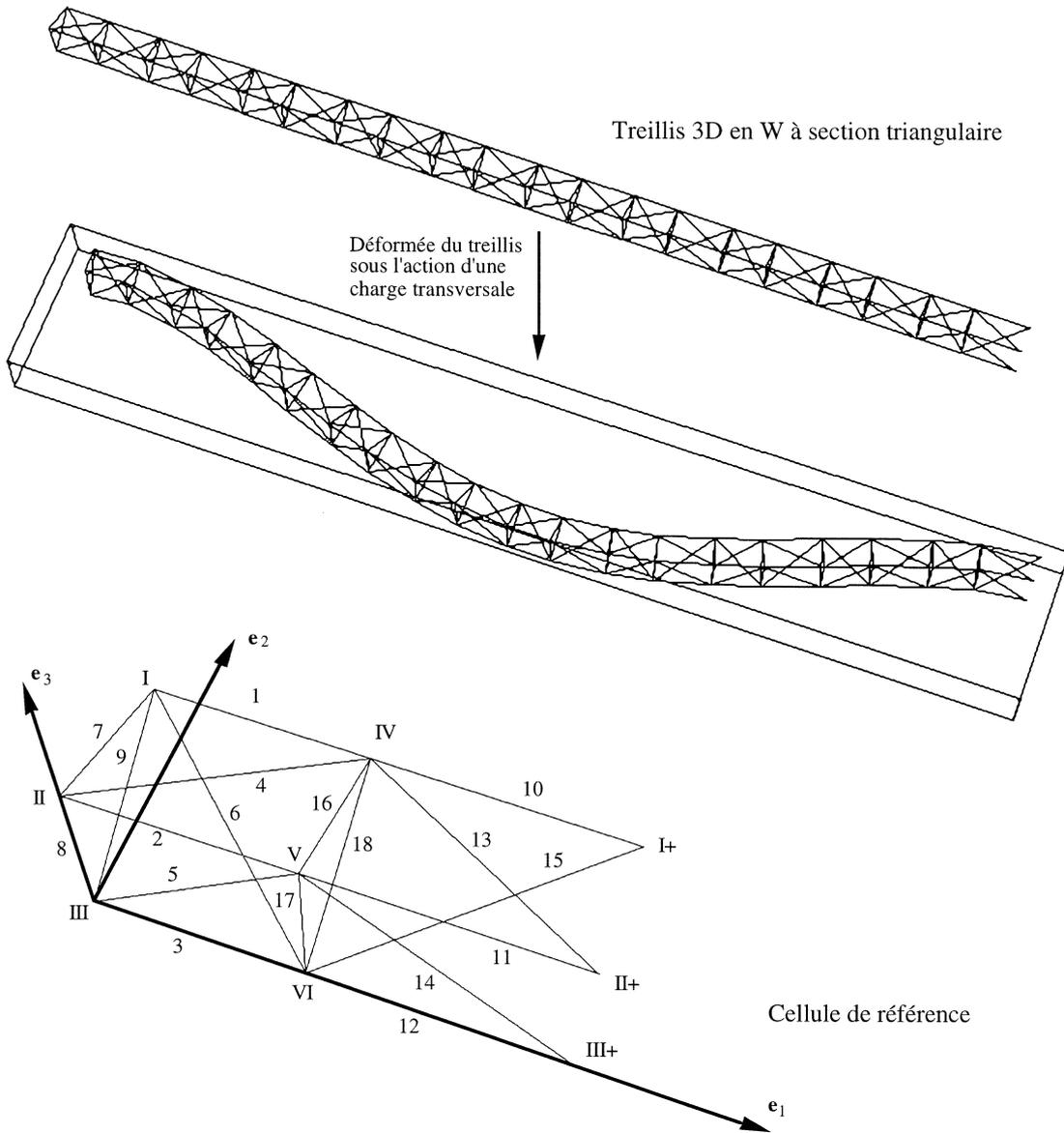


Figure 6.5 : treillis poutre 3D en W soumis à de la flexion

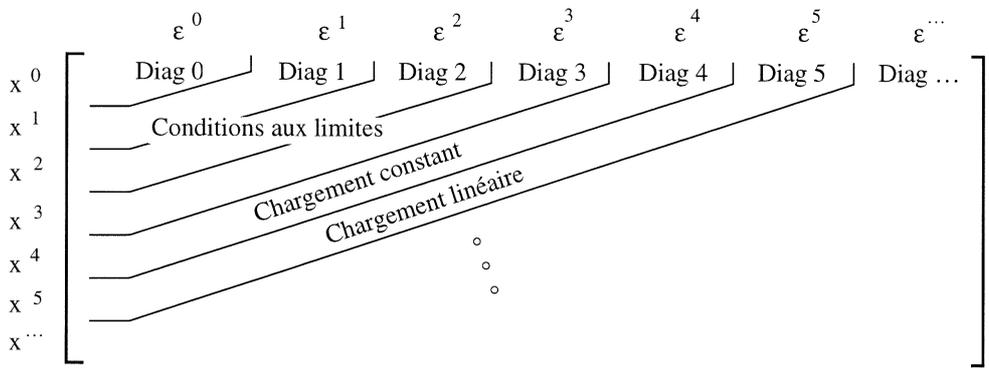


Figure 6.6 : propriétés des différentes diagonales

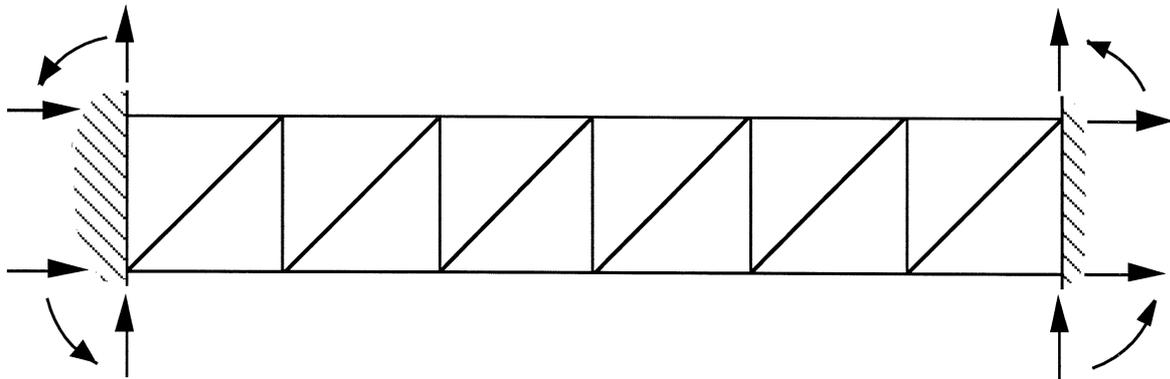


Figure 6.7 : conditions aux limites pour le treillis poutre plan à nœuds rigides en \mathcal{N}

- diag 1 : 2 rotations de solide $/\vec{y}$ et $/\vec{z}$
 - 1 traction $/\vec{x}$ de la poutre au point $x = 1$
 - 1 torsion $/\vec{x}$ de la poutre au point $x = 1$
 - diag 2 : 2 couples de flexion $/\vec{y}$ et $/\vec{z}$ au point $x = 1$
 - diag 3 : 2 efforts de cisaillement $/\vec{y}$ et $/\vec{z}$ au point $x = 1$
- total : 12 conditions aux limites.

- Toute notre étude porte sur des poutres 3D, mais il est facile d'avoir les propriétés sur les treillis poutres plans. En effet, les systèmes matriciels des poutres planes sont 6 fois singuliers (les 2 torseurs des extrémités = 6 conditions aux limites). Ces singularités sont réparties si nous prenons l'exemple d'une poutre plane encastree-libre :

- diag 0 : 2 translations de solide $/\vec{x}$ et $/\vec{y}$
 - diag 1 : 1 rotation de solide $/\vec{z}$
 - 1 traction $/\vec{x}$ de la poutre au point $x = 1$
 - diag 2 : 1 couple de flexion $/\vec{z}$ au point $x = 1$
 - diag 3 : 1 effort de cisaillement $/\vec{y}$ au point $x = 1$
- total : 6 conditions aux limites.

6.2 Modes compatibles et chargement exponentiel

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons étudié l'équation d'équilibre en partie courante de la structure. La recherche en série entière de x et de ϵ d'une solution particulière en déplacement nous a fourni un ensemble de solutions de dimension 12 pour les treillis poutres. Les conditions aux limites de la structure (libre, encastree...) doivent nous permettre de déterminer la solution. Certains treillis n'ont que 12 conditions aux limites, on peut donc résoudre complètement l'équilibre de ces treillis avec la méthode des doubles séries. D'autres treillis ont plus de 12 conditions aux limites, c'est le cas pour la très grande majorité des treillis poutres. On ne peut pas résoudre complètement l'équilibre de ces treillis par la méthode des doubles séries. Il nous faut donc trouver d'autres solutions qui seront appelées les modes compatibles. Les deux approches ; recherche des

modes compatibles et développement en double série entière, seront intégrées au sein d'une même méthode qui sera dénommée SPIM (Statique des treillis Poutres par Identification des Modes).

6.2.1 Formulation du problème

L'équation d'équilibre en partie courante est :

$$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{u}(x - \epsilon) + \underline{\underline{A}} \cdot \underline{u}(x) + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{u}(x + \epsilon) = \underline{f}(x).$$

Les équations différentielles linéaires à coefficients constants ont souvent été transformées en équations aux différences finies afin d'être étudiées numériquement ; même si aujourd'hui les méthodes des éléments finis, des volumes finis, des éléments diffus et des équations intégrales prennent le pas dans la grande majorité des problèmes. On s'inspire donc des propriétés des équations différentielles linéaires à coefficient constant pour étudier notre problème. Des théorèmes d'existence et d'unicité ont été énoncés pour les équations aux différences [8, 29, 34, 41]. Ces théorèmes ont la même forme que ceux concernant les équations différentielles.

a) Propriétés d'une équation différentielle

$$a_n f^{(n)}(t) + a_{n-1} f^{(n-1)}(t) + \dots + a_3 f^3(t) + a_2 f''(t) + a_1 f'(t) + a_0 f(t) = P(t)e^{rt}.$$

- Recherchons la solution f d'une équation linéaire à coefficient constant d'ordre n . La contrainte est une fonction exponentielle $P(t)e^{rt}$ avec $P(t)$ polynôme de degré p . Nous savons que si r est s fois racine de l'équation caractéristique, il faut alors rechercher une solution f exponentielle de la forme $Q(t)e^{rt}$ avec $Q(t)$ polynôme de degré $q = p + s$.
- La solution f est en réalité un ensemble de solutions de dimension n qui permet de vérifier n conditions initiales $\{f(0), f'(0), f''(0), \dots, f^{(n)}(0)\}$ ou n conditions indépendantes.

b) Équation homogène discrète

La section précédente permis de trouver des solutions vérifiant le chargement, il nous suffit maintenant de trouver des solutions de l'équation homogène associée :

$$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{u}(x - \epsilon) + \underline{\underline{A}} \cdot \underline{u}(x) + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{u}(x + \epsilon) = \underline{0}. \quad (6.22)$$

Nous appellerons ces solutions *les modes compatibles* car elles sont compatibles avec l'équation d'équilibre en partie courante de la poutre.

6.2.2 Recherche des modes compatibles

Recherchons des solutions en exponentielles

$$\begin{aligned} \underline{u}(x) &= \underline{v} e^{rx}, \\ \underline{u}(x - \epsilon) &= \underline{v} e^{r(x-\epsilon)} = e^{-r\epsilon} \underline{v} e^{rx}, \\ \underline{u}(x + \epsilon) &= \underline{v} e^{r(x+\epsilon)} = e^{r\epsilon} \underline{v} e^{rx}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Posons $z = e^{r\epsilon}$, nous avons alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} \underline{tB} \cdot \underline{v} e^{rx} + \underline{A} \cdot \underline{v} e^{rx} + z \underline{B} \cdot \underline{v} e^{rx} &= \underline{0}, \\ \left(\frac{1}{z} \underline{tB} + \underline{A} + z \underline{B} \right) \cdot \underline{v} e^{rx} &= \underline{0}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

a) Équation caractéristique

Pour obtenir une solution non triviale, le déterminant de la matrice doit être nul

$$\det\left(\frac{1}{z} \underline{tB} + \underline{A} + z \underline{B}\right) = 0,$$

ou, ce qui est identique :

$$\det(\underline{tB} + z \underline{A} + z^2 \underline{B}) = 0. \quad (6.25)$$

On appelle cette dernière relation, *l'équation caractéristique* de la poutre.

b) Vecteur propre d'un mode compatible

Soit z_i un pôle de l'équation caractéristique. Il faut maintenant connaître le vecteur propre \underline{v}_i associé à ce pôle et défini par : $\underline{u}(x) = \underline{v}_i e^{r_i x} = \underline{v}_i z_i^{\frac{x}{\epsilon}}$. La détermination de \underline{v}_i se fait par *la méthode de la variation de la constante* : $\underline{v}_i = \underline{v}_i(x)$

$$\underline{u}(x) = \underline{v}_i(x) e^{r_i x} = \underline{v}_i(x) z_i^{\frac{x}{\epsilon}}, \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} \underline{tB} \cdot \underline{v}_i(x - \epsilon) e^{-r_i \epsilon} e^{r_i x} + \underline{A} \cdot \underline{v}_i(x) e^{r_i x} + \underline{B} \cdot \underline{v}_i(x + \epsilon) e^{r_i \epsilon} e^{r_i x} &= \underline{0}, \\ \left[\frac{1}{z_i} \underline{tB} \cdot \underline{v}_i(x - \epsilon) + \underline{A} \cdot \underline{v}_i(x) + z_i \underline{B} \cdot \underline{v}_i(x + \epsilon) \right] e^{r_i x} &= \underline{0}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Définissons trois nouvelles matrices \underline{IN}_z , \underline{AS}_z et \underline{SY}_z de la même manière qu'on été définies les trois matrices \underline{IN} , \underline{AS} et \underline{SY} .

$$\begin{cases} \underline{IN}_z &= \frac{1}{z_i} \underline{tB} + \underline{A} + z_i \underline{B}, \\ \underline{AS}_z &= -\frac{1}{z_i} \underline{tB} + z_i \underline{B}, \\ \underline{SY}_z &= \frac{1}{z_i} \underline{tB} + z_i \underline{B}. \end{cases} \quad (6.28)$$

Le vecteur propre \underline{v}_i vérifiant l'équation 6.27 est trouvé par *la méthode de la double série entière*. Rappel, pour les chargements polynomiaux douze vecteurs propres avaient été trouvés avant de pouvoir intégrer le chargement dans les équations. Maintenant, en développant \underline{v}_i en une double série entière de x et de ϵ , la ou les premières diagonales vont nous donner le ou les vecteurs propres. Ce parallèle permet d'élargir le champ des chargements possibles à l'ensemble *des chargements exponentiels*. Ceux-ci se traitent comme les chargements polynomiaux qui ne sont plus alors que des cas particuliers (équation 6.37).

Pour un mode compatible ou un chargement donné, nous avons donc le paramètre associé z_i et les trois matrices \underline{IN}_z , \underline{AS}_z , et \underline{SY}_z correspondantes. Nous pouvons alors déterminer la solution ou un ensemble de solutions de dimension plus ou moins grands suivant la valeur du paramètre z_i . Nous pouvons nous interroger sur le sens physique des coefficients $\frac{1}{z_i}$ et z_i dans les trois matrices ? L'adimensionnalisation va nous permettre de proposer une réponse. $\underline{u}(x - \epsilon)$, $\underline{u}(x)$ et $\underline{u}(x + \epsilon)$ sont du même ordre de grandeur donc $\underline{v}_i(x - \epsilon)$, $\underline{v}_i(x)$ et $\underline{v}_i(x + \epsilon)$ peuvent être d'un ordre de grandeur différent. En effet, les relations suivantes donnent :

$$\begin{aligned} \underline{u}(x - \epsilon) &= O(\epsilon^0) \underline{u}(x) & \underline{u}(x + \epsilon) &= O(\epsilon^0) \underline{u}(x) \\ &= O(\epsilon^0) \underline{v}_i(x) e^{r_i x} & &= O(\epsilon^0) \underline{v}_i(x) e^{r_i x} \\ &= \underline{v}_i(x - \epsilon) e^{-r_i \epsilon} e^{r_i x} & &= \underline{v}_i(x + \epsilon) e^{r_i \epsilon} e^{r_i x} \\ &= \frac{1}{z_i} \underline{v}_i(x - \epsilon) e^{r_i x} & &= z_i \underline{v}_i(x + \epsilon) e^{r_i x} \\ \frac{\underline{v}_i(x - \epsilon)}{\underline{v}_i(x)} &= O(e^{r_i \epsilon}) = O(z_i) & \frac{\underline{v}_i(x + \epsilon)}{\underline{v}_i(x)} &= O(e^{-r_i \epsilon}) = O\left(\frac{1}{z_i}\right) \end{aligned}$$

6.2.3 Propriétés des modes compatibles

a) Dimension de l'ensemble des solutions homogènes

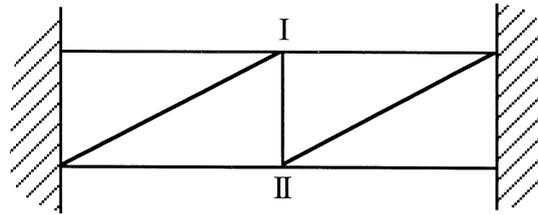
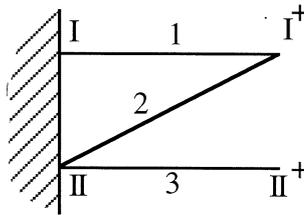
Soit d le degré de l'équation caractéristique en z . En étudiant la définition de l'équation caractéristique, nous pouvons déterminer le degré d .

$$d = 2.\text{rang}(\underline{B}) + 1.\{\dim(\underline{A}) - \text{rang}(\underline{B})\}. \tag{6.29}$$

- La matrice \underline{A} est la matrice de rigidité de la structure à deux cellules (figure 6.8). Par hypothèse, cette structure ne comporte pas de mécanisme. La matrice \underline{A} est donc inversible.

$$\text{rang}(\underline{A}) = \dim(\underline{A}) \geq \text{rang}(\underline{B}).$$

- Soit la partie droite de la structure constituée d'une cellule (figure 6.9), l'influence des déplacements des nœuds à droite (I^+ , II^+) sur la résistance de l'encastrement (effort aux nœuds I et II) est caractérisée par la matrice \underline{B} . Si cette structure est un mécanisme, alors la matrice \underline{B} est singulière autant de fois qu'il y a de *degrés de liberté*. De même pour la partie gauche de la structure avec la matrice \underline{B} . *Le rang de \underline{B} correspond donc au nombre de conditions aux limites à l'extrémité droite de la structure* (ou gauche par symétrie). Le degré de l'équation caractéristique est


 Figure 6.8 : *structure à deux cellules*

 Figure 6.9 : *influence des déplacements sur l'encastrement*

au moins égal à deux fois le rang de \underline{B} . La dimension de l'ensemble des solutions étant le degré du polynôme de l'équation caractéristique, et celui-ci correspondant au moins aux nombres de conditions aux limites, nous pouvons donc déterminer *la solution générale* du problème.

⇒ Nous trouvons toujours un ensemble de solutions qui permet de vérifier toutes les conditions aux limites.

b) Poutre isostatique / poutre hyperstatique

Prenons une poutre encastree-libre afin de fixer les idées. En utilisant les notions de RdM, un *torseur des inter-efforts* peut être défini (figure 6.1). Si le chargement est polynomial ou si nous n'avons que des efforts sur l'extrémité droite de la poutre, le *torseur des inter-efforts* est alors polynomial. A l'abscisse d'une cellule, une combinaison linéaire des efforts dans les barres est égale au torseur des inter-efforts.

- Pour les poutres isostatiques intérieurement, il y a équivalence entre les efforts dans les barres (6 inconnues) et le torseur des inter-efforts (6 données ; l'effort normal, les deux efforts tranchants, le moment de torsion et les deux couple de flexion), les efforts dans les barres sont alors décrits par des polynômes.

Les efforts étant une combinaison linéaire des déplacements des nœuds, ceux-ci ont six termes polynomiaux. Sachant que le déplacement de solide rajoute encore six autres termes polynomiaux, car indépendants des précédents, les déplacements des nœuds ont donc douze termes polynomiaux. Nous trouvons alors $z = 1$ douze fois pour toutes nos poutres (six fois pour les poutres planes car le torseur des inter-efforts a trois composantes et le déplacement de solide représente trois degrés de liberté).

- Les poutres isostatiques n'ont que $z = 1$ comme solution de l'équation caractéristique car elles n'ont que douze conditions aux limites. Les déplacements sont donc polynomiaux lorsqu'il y a des efforts sur l'extrémité de la poutre ou lorsque le chargement est polynomial. En réalité, cas du treillis poutre plan en \mathcal{N} , ces treillis peuvent aussi avoir le pôle $z_i = 0$ signifiant qu'une condition aux limites peut être quelconque.
- Les poutres hyperstatiques intérieurement ont d'autres solutions que $z = 1$ puisque la notion de torseur des inter-efforts ne représente que partiellement l'état de contrainte dans la poutre, leur champ de déplacement est finalement polynomial et exponentiel.

c) Propriétés des pôles

- Le pôle $z_i = 1$ est un pôle multiple d'ordre 12 au moins.
- Si $\text{rang}(\underline{\underline{B}}) < \text{rang}(\underline{\underline{A}})$, $z_i = 0$ est un pôle d'ordre $\text{dim}(\underline{\underline{A}}) - \text{rang}(\underline{\underline{B}})$. En effet, nous avons avec $z_i = 0$:

$$\begin{aligned} \det(\underline{\underline{tB}} + z_i \underline{\underline{A}} + z_i^2 \underline{\underline{B}}) &= \det(\underline{\underline{tB}}), \\ &= \det(\underline{\underline{B}}). \end{aligned}$$

- Soit z_i un pôle complexe alors \bar{z}_i est un pôle car l'équation caractéristique est à coefficients réels.
- Si z_i est solution alors $\frac{1}{z_i}$ est solution, en effet :

$$\begin{aligned} \det(\frac{1}{z_i} \underline{\underline{tB}} + \underline{\underline{A}} + z_i \underline{\underline{B}}) &= 0, \\ \det(z_i \underline{\underline{tB}} + \underline{\underline{A}} + \frac{1}{z_i} \underline{\underline{B}}) &= \det(\underline{\underline{t}}(z_i \underline{\underline{tB}} + \underline{\underline{A}} + \frac{1}{z_i} \underline{\underline{B}})), \\ &= \det(z_i \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{tA}} + \frac{1}{z_i} \underline{\underline{tB}}), \\ &= \det(\frac{1}{z_i} \underline{\underline{tB}} + \underline{\underline{A}} + z_i \underline{\underline{B}}), \\ &= 0. \end{aligned}$$

⇒ Finalement, nous pouvons écrire en ne tenant pas compte des propriétés sur les pôles complexes :

$$\det(\underline{\underline{tB}} + z \underline{\underline{A}} + z^2 \underline{\underline{B}}) = (z - 1)^{12} z^{\text{dim}(\underline{\underline{A}}) - \text{rang}(\underline{\underline{B}})} \prod_i (z - z_i)(z - \frac{1}{z_i}) = 0 \quad (6.30)$$

d) propriétés des vecteurs propres

Soit (z_i, \underline{v}_i) un mode compatible de la poutre, alors :

- $\frac{1}{z_i}$ est un pôle dont nous notons le vecteur propre associé : $\underline{v}_{\frac{1}{z_i}}$
- si z_i est un pôle complexe, \underline{v}_i est un vecteur complexe et nous avons les quatre modes compatibles suivants : (z_i, \underline{v}_i) , $(\bar{z}_i, \bar{\underline{v}}_i)$, $(\frac{1}{z_i}, \underline{v}_{\frac{1}{z_i}})$ et $(\frac{1}{\bar{z}_i}, \bar{\underline{v}}_{\frac{1}{\bar{z}_i}})$.

6.2.4 Étude d'un mode compatible

Lorsque z_i est un pôle complexe, \underline{v}_i est un vecteur complexe et le vecteur propre du mode compatible \bar{z}_i est $\overline{\underline{v}_i}$. Nous pouvons alors regrouper les modes et leur donner ainsi un sens physique car un déplacement complexe ne signifie rien. Selon la valeur de z_i dans le champ complexe, plusieurs cas sont possibles. Les expressions que nous écrivons ci-après correspondent au cas où z_i est un pôle simple de l'équation caractéristique, sauf pour $z_i = 1$ puisque ce pôle est toujours une solution du problème d'ordre 12.

- $|z_i| > 1$

- z_i réel > 1

$$\begin{cases} z_i > 1 \\ 0 < \frac{1}{z_i} < 1 \end{cases}, \text{ avec } z_i = e^{r_i \epsilon}, \quad r_i = \frac{\ln(z_i)}{\epsilon},$$

$$\underline{u}(x) = \alpha \underline{v}_i z_i^{\frac{x}{\epsilon}} + \beta \underline{v}_{\frac{1}{z_i}} z_i^{-\frac{x}{\epsilon}} = \alpha \underline{v}_i z_i^{\frac{x-1}{\epsilon}} + \beta \underline{v}_{\frac{1}{z_i}} z_i^{-\frac{x}{\epsilon}}. \quad (6.31)$$

Les modes compatibles sont des exponentielles réelles, l'une croissante, l'autre décroissante. Nous assimilons la décroissante à la condition aux limites en 0 et la croissante à celle en 1. Elles se nomment alors des couches limites ou des effets de bords. La deuxième notation est identique formellement même si la définition de α et de β a changé. Elle insiste sur la position des couches limites et élimine les erreurs de calcul numérique sur la condition aux limites associée à l'exponentielle croissante.

- z_i réel < -1

$$\begin{cases} z_i = (-z_i) e^{i\pi}, & -z_i > 0, \\ z_i \text{ réel donc } \underline{v}_i \text{ est un vecteur réel.} \end{cases}$$

De même avec le mode $(\frac{1}{z_i}, \underline{v}_{\frac{1}{z_i}})$.

$$\begin{aligned} \underline{u}(x) &= \alpha \underline{v}_i (-z_i)^{\frac{x}{\epsilon}} e^{i\pi \frac{x}{\epsilon}} + \beta \underline{v}_{\frac{1}{z_i}} (-z_i)^{-\frac{x}{\epsilon}} e^{i\pi \frac{x}{\epsilon}}, \\ &= \alpha \underline{v}_i \left[\cos\left(\pi \frac{x}{\epsilon}\right) + i \sin\left(\pi \frac{x}{\epsilon}\right) \right] (-z_i)^{\frac{x-1}{\epsilon}} \\ &\quad + \beta \underline{v}_{\frac{1}{z_i}} \left[\cos\left(\pi \frac{x}{\epsilon}\right) + i \sin\left(\pi \frac{x}{\epsilon}\right) \right] (-z_i)^{\frac{x}{\epsilon}}. \end{aligned}$$

En réalité, x ne prend comme valeur que des multiples de ϵ . Le sinus de $\pi \frac{x}{\epsilon}$ est donc toujours nul. Nous pouvons donc éliminer les parties imaginaires en sinus.

$$\underline{u}(x) = \alpha \underline{v}_i \cos\left(\pi \frac{x}{\epsilon}\right) (-z_i)^{\frac{x-1}{\epsilon}} + \beta \underline{v}_{\frac{1}{z_i}} \cos\left(\pi \frac{x}{\epsilon}\right) (-z_i)^{\frac{x}{\epsilon}}. \quad (6.32)$$

Les modes compatibles sont des sinusoides amorties. Nous pouvons alors les appeler des couches limites (effets de bords). La période de celles-ci est le double de la longueur d'une cellule.

- z_i complexe = $Z e^{i\omega}$, avec $Z = |z_i|$ réel > 1 ,

$$\begin{aligned} \underline{u}(x) &= \alpha \underline{v}_i Z^{\frac{x}{\epsilon}} e^{i\omega \frac{x}{\epsilon}} + \beta \overline{\underline{v}_i} Z^{\frac{x}{\epsilon}} e^{-i\omega \frac{x}{\epsilon}} \\ &\quad + \gamma \underline{v}_{\frac{1}{i}} Z^{-\frac{x}{\epsilon}} e^{i\omega \frac{x}{\epsilon}} + \delta \overline{\underline{v}_{\frac{1}{i}}} Z^{-\frac{x}{\epsilon}} e^{-i\omega \frac{x}{\epsilon}}, \\ \underline{u}(x) &= \left[\alpha \frac{\underline{v}_i e^{i\omega \frac{x}{\epsilon}} + \overline{\underline{v}_i} e^{-i\omega \frac{x}{\epsilon}}}{2} + \beta \frac{\underline{v}_i e^{i\omega \frac{x}{\epsilon}} - \overline{\underline{v}_i} e^{-i\omega \frac{x}{\epsilon}}}{2i} \right] Z^{\frac{x-1}{\epsilon}} \\ &\quad + \left[\gamma \frac{\underline{v}_{\frac{1}{i}} e^{i\omega \frac{x}{\epsilon}} + \overline{\underline{v}_{\frac{1}{i}}} e^{-i\omega \frac{x}{\epsilon}}}{2} + \delta \frac{\underline{v}_{\frac{1}{i}} e^{i\omega \frac{x}{\epsilon}} - \overline{\underline{v}_{\frac{1}{i}}} e^{-i\omega \frac{x}{\epsilon}}}{2i} \right] Z^{-\frac{x}{\epsilon}}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Les termes entre parenthèses sont soit des sinus, soit des cosinus, le vecteur propre intervient pour décaler les différentes composantes du vecteur déplacement entres-elles. Les modes compatibles sont des sinusoides amorties, l'une croissante, l'autre décroissante. On assimile le mode croissant à la condition aux limites en 1 (le premier crochet) et le mode décroissant à la condition aux limites en 0 (le second crochet). Les modes compatibles sont alors des couches limites ou des effets de bords.

- $|z_i| = 1$

- $z_i = 1$

Comme le paramètre z_i est égal à $e^{r_i \epsilon}$, alors $r_i = 0$. Les modes compatibles sont donc polynomiaux. Le pôle $z_i = 1$ est trouvé douze fois dans tous les cas de treillis poutres 3D car la méthode des développements en double série entière fournit un ensemble de solutions de dimension douze. Notre problème a des propriétés similaires à celles des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Si nous avons un chargement polynomial sur la poutre, nous devons rechercher un polynôme solution de degré plus élevé (car $z = 1$ est solution). La nature de la structure, une poutre, augmente de quatre le degré de la solution (chargement constant, déplacement quadratique).

- $z_i = -1$

Le pôle z_i est réel donc \underline{v}_i est un vecteur réel. Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} z_i &= e^{i\pi}, \\ \underline{u}(x) &= \alpha \underline{v}_i e^{i\pi \frac{x}{\epsilon}}, \\ &= \alpha \underline{v}_i \left[\cos\left(\pi \frac{x}{\epsilon}\right) + i \sin\left(\pi \frac{x}{\epsilon}\right) \right]. \end{aligned}$$

Comme pour le cas z_i réel < 1 , le sinus de $\pi \frac{x}{\epsilon}$ est toujours nul en pratique. $u(x)$ s'écrit alors :

$$\underline{u}(x) = \alpha \underline{v}_i \cos\left(\pi \frac{x}{\epsilon}\right). \quad (6.34)$$

Le mode compatible est une sinusoïde pure dont la période est le double de la longueur de la cellule.

- $z_i = e^{i\omega}$

$$\frac{1}{z_i} = \overline{z_i} = e^{-i\omega},$$

$$\begin{aligned} \underline{u}(x) &= \alpha \underline{v}_i e^{i\omega \frac{x}{\epsilon}} + \beta \overline{\underline{v}}_i e^{-i\omega \frac{x}{\epsilon}}, \\ &= \alpha \frac{\underline{v}_i e^{i\omega \frac{x}{\epsilon}} + \overline{\underline{v}}_i e^{-i\omega \frac{x}{\epsilon}}}{2} + \beta \frac{\underline{v}_i e^{i\omega \frac{x}{\epsilon}} - \overline{\underline{v}}_i e^{-i\omega \frac{x}{\epsilon}}}{2i}. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Les modes compatibles sont des sinusoides pures (pas d'amortissement).

- $0 < |z_i| < 1$

Ce cas est identique au premier, il suffit d'inverser z_i et $\frac{1}{z_i}$.

- $z_i = 0$

$$\begin{aligned} z_i &= e^{r_i \epsilon}, & r_i &= -\infty, \\ \underline{u}(x) &= \alpha \underline{v}_i e^{r_i x} = \alpha \underline{v}_i e^{r_i(x-a)}. \end{aligned} \tag{6.36}$$

Les expressions ci-dessus sont purement formelles et mathématiquement inexactes. $r_i = -\infty$ signifie que $\underline{u}(x) = 0$ partout sauf sur un ensemble de mesure nulle, par exemple au point d'abscisse $x = a$ où le déplacement $\underline{u}(x)$ de ce point est alors indéterminé. Le déplacement $\underline{u}(x)$ correspond donc à une fonction Dirac. Ce cas apparaît uniquement lorsque $\text{rang}(\underline{\underline{B}}) < \dim(\underline{\underline{A}})$, c'est à dire quand il existe des degrés de liberté libres aux extrémités de la structure. Cependant, un Dirac n'est pas une fonction mais une distribution, un calcul direct ne peut pas être formellement juste. L'utilisation de la transformée en z va permettre de raisonner correctement.

⇒ Nous remarquons finalement :

1. Soit un pôle simple, si $|z_i| > 1$ le vecteur déplacement $u(x)$ est croissant, si $|z_i| = 1$ celui-ci est constant et si $|z_i| < 1$ il est décroissant. Cela est vrai pour un pôle simple donc pour les vecteurs propres trouvés à la diagonale 0 lors de l'utilisation des développements en double série entière. Dans le cas contraire, par exemple le pôle $z_i = 1$, nous trouvons des termes constants, mais aussi linéaires, paraboliques, cubiques... termes qui proviennent des diagonales supérieures.
2. Soient les termes sinusoidaux, la période ou la pseudo-période du vecteur déplacement est toujours supérieure ou égale à 2ϵ , soit deux longueurs de cellule. La fréquence est donc inférieure à la valeur $f_{\max} = \frac{1}{2\epsilon}$, les fréquences plus élevées n'étant pas compatibles avec la structure. Notre structure ayant été discrétisée tous les ϵ , ce phénomène est normal et est exprimé en automatique par le théorème de Shannon.

6.2.5 Généralisation aux chargements exponentiels

Soit un chargement exponentiel $\underline{f}(x) = \underline{p}(x)e^{rx}$ avec $\underline{p}(x)$ polynôme, soient $z = e^{r\epsilon}$, $\underline{\underline{IN}}_z$, $\underline{\underline{AS}}_z$, et $\underline{\underline{SY}}_z$ les objets caractéristiques, une solution de l'équilibre :

$$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{u}(x - \epsilon) + \underline{\underline{A}} \cdot \underline{u}(x) + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{u}(x + \epsilon) = \underline{f}(x).$$

sera $\underline{u}(x) = \underline{v}(x)e^{rx}$ tel que $\underline{v}(x)$ vérifie :

$$z^{-1} \underline{\underline{B}} \cdot \underline{v}(x - \epsilon) + \underline{\underline{A}} \cdot \underline{v}(x) + z \underline{\underline{B}} \cdot \underline{v}(x + \epsilon) = Q_p \cdot \underline{p}(x). \tag{6.37}$$

La détermination de $\underline{v}(x)$ se fait par développement en double série entière. Q_p représente le nombre adimensionnel entre $\underline{A} \cdot \underline{v}(x)$ et $\underline{p}(x)$, il est en général égal à ϵ^{-1} sauf si z est particulier, par exemple le cas du chargement polynomial où $r = 0$, $z = 1$ et $Q_p = \epsilon^2$.

Remarque : La longueur d'onde d'un chargement périodique doit être supérieure à 2ϵ car notre modélisation est aveugle aux longueurs plus petites et donnerait alors des résultats incohérents (théorème de Shannon ; $f_{\max} = \frac{1}{2\epsilon}$).

6.2.6 Exemples

a) Poutre continue

La poutre continue est une poutre discrétisée à nœuds rigides, la partie droite de la structure n'a pas de mécanisme, la matrice \underline{B} est inversible.

$$\begin{aligned} \dim(\underline{A}) &= 3, & \underline{u} &= [u^I \ v^I \ \omega^I], \\ \text{rang}(\underline{B}) &= 3, & d &= 2 \cdot 3 + 1 \cdot (3 - 3) = 6, \end{aligned}$$

$$\det({}^t\underline{B} + z\underline{A} + z^2\underline{B}) = (z - 1)^6.$$

b) Treillis poutre en \mathcal{N}

Le treillis poutre plan en \mathcal{N} à nœuds articulés à 4 barres et 2 nœuds, le triangle formé par les barres 1 et 2 est isostatique, la barre 3 peut tourner, la matrice \underline{B} est une fois singulière (figure 6.9).

$$\begin{aligned} \dim(\underline{A}) &= 4, & \underline{u} &= [u^I \ v^I \ u^{II} \ v^{II}], \\ \text{rang}(\underline{B}) &= 3, & d &= 2 \cdot 3 + 1 \cdot (4 - 3) = 7, \end{aligned}$$

$$\det({}^t\underline{B} + z\underline{A} + z^2\underline{B}) = z(z - 1)^6.$$

c) Treillis poutre 3D en \mathcal{W}

Le treillis poutre 3D en \mathcal{W} à nœuds articulés est isostatique, cependant la matrice \underline{B} est trois fois singulière (figure 6.5).

$$\dim(\underline{A}) = 18, \quad \text{rang}(\underline{B}) = 15,$$

$$\det({}^t\underline{B} + z\underline{A} + z^2\underline{B}) = z^3(z - 1)^{12}.$$

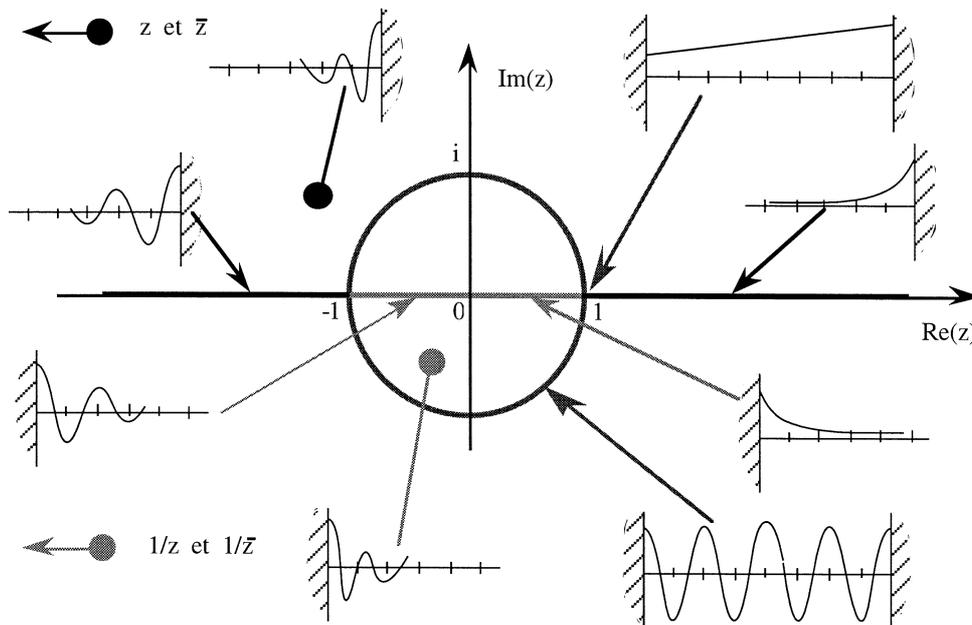


Figure 6.10 : modes de déplacements statiques

d) Treillis poutre 3D en \mathcal{N}

Le treillis poutre 3D en \mathcal{N} à nœuds articulés est hyperstatique d'ordre 2 et la matrice $\underline{\underline{B}}$ est quatre fois singulière (figure 6.4).

$$\dim(\underline{\underline{A}}) = 12, \quad \text{rang}(\underline{\underline{B}}) = 8,$$

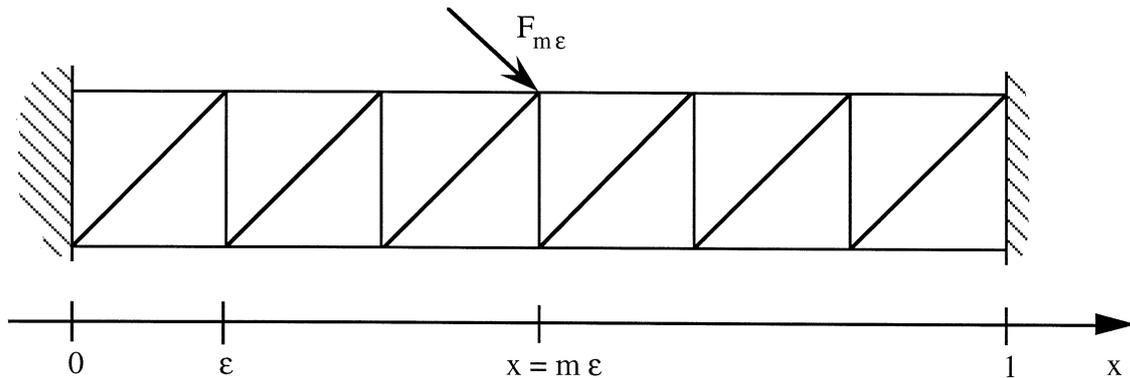
$$\det({}^t\underline{\underline{B}} + z\underline{\underline{A}} + z^2\underline{\underline{B}}) = z^4(z-1)^2(z^2 - 2az + 1)(z^2 - 2bz + 1).$$

Le treillis poutre 3D en \mathcal{N} a donc deux couches limites à chaque extrémité.

6.2.7 Récapitulatif sur les modes compatibles

Cette section part sur la recherche d'autres solutions possibles de l'équation d'équilibre. Pour ce faire, elle s'inspire des propriétés des équations différentielles linéaires ; solutions exponentielles, équation caractéristique, étude d'un pôle et du vecteur propre associé. Le couple *pôle, vecteur propre* s'appelle un mode compatible. La recherche de ce dernier se fait par la méthode des développements en double série entière. Il se détermine généralement à la diagonale 0, sauf pour un pôle multiple où les diagonales suivantes peuvent servir. Nous remarquons que sur toutes les poutres, il y a autant de vecteurs propres indépendants associés aux pôles que de conditions aux limites (valeur des déplacements aux extrémités de la structure). Nous pouvons alors déterminer la solution générale de notre poutre.

Les modes compatibles pouvant être complexes, nous les regroupons deux par deux pour les transformer en sinusoides. L'analogie avec la RdM permet de comprendre pourquoi toutes les poutres étudiées ont douze modes compatibles polynomiaux et donc le cas particulier des poutres isostatiques qui, n'ayant que douze conditions aux limites,

Figure 6.11 : *chargement concentré en un nœud de la structure*

n'ont que des modes compatibles polynomiaux. Enfin la recherche des vecteurs propres nous permet de généraliser les efforts à tous les chargements du type $\underline{p}(x)e^{rx}$ avec $\underline{p}(x)$ polynôme et r imaginaire *presque* quelconque. Par *presque*, la modélisation discrète de notre poutre interdit les chargements périodiques ou pseudo-périodiques de haute fréquence (théorème de Shannon). En réalité, Nous pouvons déjà calculer le déplacement d'une structure soumise à un chargement exponentiel en développant celui-ci en série de Taylor. Mais la solution était alors approchée car dans la pratique il y a troncature de la série infinie. Ce qui n'est le cas de la nouvelle approche.

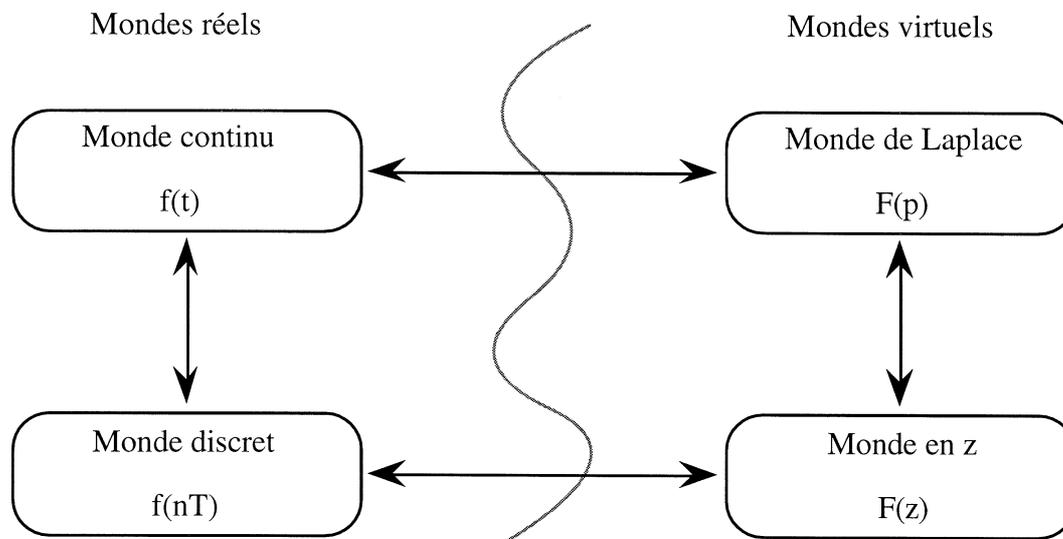
La figure 6.10 synthétise les champs de déplacements possibles, qu'ils soient propres à la structure (modes compatibles) ou dûs au type de chargement (qui engendre un type de déplacement identique). A l'extérieur du cercle unité, le champ de déplacement donné à la diagonale 0 est croissant, à l'intérieur il est décroissant et sur le cercle unité, en 1 nous avons les fonctions constantes et aux diagonales suivantes tous les polynômes, ailleurs des sinusoides pures non amorties.

Les solutions polynomiales ne sont alors qu'un cas très particulier de solutions. Nous appellerons désormais SPIM (Statique des treillis Poutres par Identification des Modes), l'approche analytique des poutres par les modes compatibles et les développements en doubles séries entières.

6.3 Transformée en z et chargement concentré

Lorsqu'un treillis poutre est soumis à un chargement réparti ou pseudo-réparti, la SPIM permet de calculer le champ de déplacement et le champ des contraintes. Cependant, cette méthode ne permet pas d'envisager la cas d'une charge concentrée au niveau d'un seul nœud ou d'une seule cellule du treillis (figure 6.11). Deux démarches sont possibles :

première investigation ; couper la poutre en deux, étudier chaque coté et recoller les morceaux. En apparence simple, cette technique demande toute une organisation lorsque la poutre a quatre ou cinq charges concentrées (ainsi que des charges réparties),

Figure 6.12 : *espaces réels et virtuels*

deuxième approche ; la transformée en z . Celle-ci fournit une solution particulière pour une force concentrée sur une seule cellule valable sur la poutre entière. Cette solution doit ensuite être superposée aux autres solutions trouvées précédemment par la SPIM pour obtenir la solution globale du problème.

Cette seconde démarche semble plus homogène vis-à-vis de l'étude que la première. Elle peut être intégrée à l'intérieur de la SPIM généralisant par là-même celle-ci au cas des chargements concentrés.

6.3.1 Pourquoi la transformée en z ?

Les transformées (Fourier, Laplace, z ...) permettent de modifier un problème compliqué dans le *monde réel* en un problème simple dans un *monde virtuel*. Bien entendu, le passage d'un monde à l'autre n'est pas toujours aisé (figure 6.12).

Notre poutre ayant une longueur finie L , la transformée de Laplace utilisée pour des signaux transitoires paraît plus adaptée que la transformée de Fourier. Par ailleurs, la transformée de Laplace est mieux adaptée aux polynômes que la transformée de Fourier (signaux sinusoidaux), donc correspond mieux à la nature de notre problème. Les équations d'équilibre n'étant écrites qu'aux nœuds de la structure, il faut prendre l'équivalent discret de la transformée de Laplace ; soit *la transformée en z* .

Définitions et propriétés

1. Soit $F(p)$ la transformée de Laplace d'un signal continu $f(t)$.

$$f(t) \longrightarrow F(p) = \int_0^{\infty} f(t)dt. \quad (6.38)$$

2. Soit $F(z)$ la transformée en z d'un signal échantillonné $f(nT)$, avec T la période d'échantillonnage.

$$f(nT) = \text{résidus}(F(z)z^{(n-1)}) \iff F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}. \quad (6.39)$$

Soit $f((n-1)T)$ un signal déphasé de $-T$, $f((n-1)T) \longrightarrow \frac{1}{z}F(z)$.
 Soit $f((n+1)T)$ un signal déphasé de $+T$, $f((n+1)T) \longrightarrow zF(z) - zf(0)$.

3. Relation entre la transformée de Laplace et la transformée en z :

$$e^{Tp} \iff z. \quad (6.40)$$

6.3.2 Monde réel, monde en z

a) Utilisation de la transformée

L'équation d'équilibre du treillis s'écrit :

$$\underline{tB} \cdot \underline{u}(x - \epsilon) + \underline{A} \cdot \underline{u}(x) + \underline{B} \cdot \underline{u}(x + \epsilon) = \underline{f}(x).$$

- transformée en z

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u}(x) \rightarrow \underline{u}(z), \\ \underline{u}(x - \epsilon) \rightarrow \frac{1}{z}\underline{u}(z), \\ \underline{u}(x + \epsilon) \rightarrow z\underline{u}(z), \\ \underline{f}(x) \rightarrow \underline{f}(z) = \sum_{c=0}^{\mathcal{C}} \underline{f}(c\epsilon)z^{-c}, \end{array} \right. \quad (6.41)$$

où ϵ peut être considéré comme la période d'échantillonnage. Le terme $z\underline{u}(0)$ n'a pas été soustrait dans l'expression de la transformé de $u(x + \epsilon)$ car les phénomènes de bords sont déjà étudiés par les modes compatibles. Les étapes intermédiaires dans la détermination de $\underline{u}(z)$ sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\frac{1}{z}\underline{tB} + \underline{A} + z\underline{B}) \cdot \underline{u}(x) = \underline{f}(z), \\ (\underline{tB} + z\underline{A} + z^2\underline{B}) \cdot \underline{u}(x) = z\underline{f}(z), \\ \underline{IN}_z \cdot \underline{u}(z) = z\underline{f}(z), \\ \underline{u}(z) = z\underline{IN}_z^{-1} \cdot \underline{f}(z). \end{array} \right. \quad (6.42)$$

- transformée en z inverse

$$\forall c \in \{1, \dots, \mathcal{C}\}, \quad u(z) \rightarrow \underline{u}(x = c\epsilon) = \text{résidus}(\underline{u}(z)z^{(c-1)}). \quad (6.43)$$

Déterminer le Résidus d'une fonction revient dans un premier temps à connaître la décomposition en éléments simples de cette fonction. Selon le type de poutre et/ou de chargement, celle-ci peut être simple ou fort complexe à réaliser.

b) Type de chargement

De part sa construction, la transformée $\underline{f}(z)$ d'un chargement $\underline{f}(x)$ est particulièrement simple dans le cas d'un effort concentré sur la cellule m . En effet :

$$\underline{f}(z) = \underline{F}_{m\epsilon} z^{-m}. \quad (6.44)$$

La transformée inverse n'est alors pas difficile à déterminer sachant que multiplier par z signifie décaler de ϵ la fonction solution. Il n'y a donc pas de nouvelle décomposition en éléments simples à effectuer. Cette adéquation parfaite entre effort concentré et transformée en z comble les lacunes laissées par l'utilisation des modes compatibles et des développements en double série entière qui ne s'appliquent qu'aux poutres soumises à un chargement exprimable par des fonctions usuelles de x .

Tous les chargements de type polynomiaux se construisent autour du pôle $\frac{1}{z-1}$, pôle qui existe déjà dans les termes de la matrice \underline{IN}_z . En effet, le pôle $z = 1$ est toujours 12 fois zéro du déterminant de \underline{IN}_z . Pour ce type de chargement, la décomposition en éléments simples doit être entièrement refaite. Les calculs sont alors d'une complexité au moins égale à ceux faits lors de la détermination des déplacements par les développements en double série. Cette voie ne sera donc pas explorée.

c) Autre interprétation de la transformée

Bien que peu connue en mécanique des milieux continus, la transformée en z est assez simple. L'équilibre de toutes les cellules est écrite dans un tableau en ne chargeant la poutre que d'un effort concentré sur la cellule m . En effet, nous venons de voir que seuls les chargements concentrés étaient intéressants pour la transformée en z . Les équations étant linéaires, en cas d'efforts concentrés multiples, il suffira de superposer les différentes solutions.

cellule	équilibre local des cellules	
0	$\underline{A}^0 \cdot \underline{u}_0 + \underline{B} \cdot \underline{u}_\epsilon = \underline{F}_0$	z^0
ϵ	$\underline{B} \cdot \underline{u}_0 + \underline{A} \cdot \underline{u}_\epsilon + \underline{B} \cdot \underline{u}_{2\epsilon} = \underline{0}$	z^{-1}
2ϵ	$\underline{B} \cdot \underline{u}_\epsilon + \underline{A} \cdot \underline{u}_{2\epsilon} + \underline{B} \cdot \underline{u}_{3\epsilon} = \underline{0}$	z^{-2}
⋮		⋮
$c\epsilon$	$\underline{B} \cdot \underline{u}_{(c-1)\epsilon} + \underline{A} \cdot \underline{u}_{c\epsilon} + \underline{B} \cdot \underline{u}_{(c+1)\epsilon} = \underline{0}$	z^{-c}
⋮		⋮
$m\epsilon$	$\underline{B} \cdot \underline{u}_{(m-1)\epsilon} + \underline{A} \cdot \underline{u}_{m\epsilon} + \underline{B} \cdot \underline{u}_{(m+1)\epsilon} = \underline{F}_{m\epsilon}$	z^{-m}
⋮		⋮
$1 - \epsilon$	$\underline{B} \cdot \underline{u}_{1-2\epsilon} + \underline{A} \cdot \underline{u}_{1-\epsilon} + \underline{B} \cdot \underline{u}_1 = \underline{0}$	$z^{-(C-1)}$
1	$\underline{B} \cdot \underline{u}_{1-\epsilon} + \underline{A}^1 \cdot \underline{u}_1 = \underline{F}_1$	z^{-C}

Toutes les équations d'équilibre écrites aux cellules de la poutre sont multipliées par un paramètre formel z élevé à des puissances différentes pour chacune des équations. L'addition donne :

$$(z^{-1} \underline{B} + \underline{A}^0) \cdot \underline{u}_0 + (z^{-2} \underline{B} + z^{-1} \underline{A} + \underline{B}) \cdot \underline{u}_\epsilon$$

$$\begin{aligned}
 &+(z^{-3} \underline{tB} + z^{-2} \underline{A} + z^{-1} \underline{B}). \underline{u}_{2\epsilon} + \dots \\
 &+(z^{-(n+1)} \underline{tB} + z^{-c} \underline{A} + z^{-(n-1)} \underline{B}). \underline{u}_{c\epsilon} + \dots \\
 &+(z^{-(m+1)} \underline{tB} + z^{-m} \underline{A} + z^{-(m-1)} \underline{B}). \underline{u}_{m\epsilon} + \dots \\
 &+(z^{-C} \underline{tB} + z^{-(C-1)} \underline{A} + z^{-(C-2)} \underline{B}). \underline{u}_{1-\epsilon} \\
 &+(z^{-(C-1)} \underline{A}^1 + z^{-C} \underline{B}). \underline{u}_1 = \underline{F}_0 + z^{-m} \underline{F}_{m\epsilon} + z^{-C} \underline{F}_1.
 \end{aligned}$$

Soit en regroupant les termes centraux :

$$\begin{aligned}
 (z^{-1} \underline{tB} + \underline{A}^0). \underline{u}_0 + \underline{IN}_z. [z^{-2} \underline{u}_\epsilon + z^{-3} \underline{u}_{2\epsilon} + \dots + z^{-(n+1)} \underline{u}_{c\epsilon} + \dots + z^{-C} \underline{u}_{1-\epsilon}] \\
 + (z^{-(C-1)} \underline{A}^1 + z^{-C} \underline{B}). \underline{u}_1 = \underline{F}_0 + z^{-m} \underline{F}_{m\epsilon} + z^{-C} \underline{F}_1.
 \end{aligned}$$

Les modes compatibles permettent de résoudre le problème des chargements concentrés aux extrémités de la poutre, c'est à dire en 0 et en 1. Ils ne seront donc pas étudiés ici. Les efforts aux extrémités vont être supprimés, les matrices coefficients des déplacements en 0 et en 1 modifiées afin d'obtenir une expression simple. La solution trouvée ne vérifiant pas les équations d'équilibre aux extrémités ne peut être *la solution* mais simplement *une solution particulière*. La solution finale s'obtiendra en combinant la solution particulière et les modes compatibles, ainsi qu'il a été fait avec la SPIM lors d'un chargement réparti.

$$\frac{1}{z} \underline{IN}_z. [z^0 \underline{u}_0 + z^{-1} \underline{u}_\epsilon + z^{-2} \underline{u}_{2\epsilon} + \dots + z^{-c} \underline{u}_{c\epsilon} + \dots + z^{-(C-1)} \underline{u}_{1-\epsilon} + z^{-C} \underline{u}_1] = z^{-m} \underline{F}_{m\epsilon},$$

$$\frac{1}{z} \underline{IN}_z. \underline{u}(z) = \underline{f}(z), \quad \underline{u}(z) = z \underline{IN}_z^{-1}. \underline{f}(z). \quad (6.45)$$

La matrice \underline{IN}_z est inversible car z étant ici quelconque, on peut le prendre différent d'un des modes compatibles qui annule le déterminant de \underline{IN}_z . Le déplacement $\underline{u}(z)$ est donc connu. Question : Comment retrouver les déplacements des nœuds $\underline{u}_0, \dots, \underline{u}_{c\epsilon}, \dots, \underline{u}_1$? Ces déplacements ne dépendant pas de z (définis après arbitrairement), il suffit d'identifier les puissances de z^{-1} dans $\underline{u}(z)$ pour les connaître ; soit par la méthode des résidus, soit par une série de Taylor sur $\underline{u}(\frac{1}{z})$.

$$\underline{u}(z) = z^0 \underline{u}_0 + z^{-1} \underline{u}_\epsilon + z^{-2} \underline{u}_{2\epsilon} + \dots + z^{-c} \underline{u}_{c\epsilon} + \dots + z^{-(C-1)} \underline{u}_{1-\epsilon} + z^{-C} \underline{u}_1 + \dots,$$

$$\text{déplacement } \underline{u}(z), \text{ terme en } \left\{ \begin{array}{ll} z^0 & \rightarrow \underline{u}_0 \\ z^{-1} & \rightarrow \underline{u}_\epsilon \\ z^{-2} & \rightarrow \underline{u}_{2\epsilon} \\ z^{-3} & \rightarrow \underline{u}_{3\epsilon} \\ & \vdots \\ z^{-c} & \rightarrow \underline{u}_{c\epsilon} \\ & \vdots \\ z^{-(C-1)} & \rightarrow \underline{u}_{1-\epsilon} \\ z^{-C} & \rightarrow \underline{u}_1 \end{array} \right.$$

La poutre n'existant plus, les termes au-delà de z^{-C} n'ont aucune signification physique.

6.3.3 Récapitulatif sur la transformée en z

Transplanter notre problème d'un *treillis poutre soumis à un chargement concentré* en un nœud de la structure dans le monde en z , par la transformée du même nom, permet de résoudre très simplement les équations d'équilibre. La solution trouvée n'est, du fait de certains termes éliminés, qu'une solution particulière vérifiant les équations d'équilibre sur toute la poutre. C'est *le mode de déformée statique* d'un effort concentré. L'intégration de ce mode à la SPIM est immédiat, généralisant celle-ci.

L'identification de ce mode passe par l'inversion analytique d'une matrice \underline{IN}_z puis l'obtention de sa décomposition en éléments simples. Pour les poutres à structure interne trop complexe, cette décomposition analytique est impossible car elle demande de connaître les zéros du dénominateur. Ceux-ci pouvant tout de même être approchés numériquement. La transformée inverse, à partir de cette expression, est alors aisée.

Cette méthode est aussi valable pour les chargements polynomiaux ou exponentiels mais trouver la décomposition en éléments simples n'est guère plus facile que de résoudre les systèmes linéaires donnés par les développements en double série entière.

La méthode utilisant la transformée en z a été programmée sur le logiciel de calcul formel MATHEMATICA. Puis elle a été appliquée au cas simple du treillis poutre plan en \mathcal{N} à nœuds articulées soumis à une charge ponctuelle en un seul nœud et à un chargement réparti ailleurs. Les résidus de chargement calculés aux nœuds après déformation sont négligeables et la déformée identique entre notre méthode et la MEF.

Chapitre 7

Extension à d'autres types d'éléments, retour sur l'homogénéisation

Plan du chapitre 7

7.1	Extension à un autre type d'élément, barre plane à nœuds rigides	115
7.1.1	Modélisation	115
7.1.2	Exemple du treillis poutre plan en \mathcal{N} à nœuds rigides	118
7.2	À propos du chargement extérieur	118
7.2.1	Chargements concentrés aux nœuds	119
7.2.2	Chargements répartis	120
	a) Formulation énergétique	120
	b) Formulation simplifiée	120
7.3	Retour sur l'homogénéisation	120

7.1 Extension à un autre type d'élément, barre plane à nœuds rigides

7.1.1 Modélisation

Cette étude porte sur les treillis poutres plans dont les nœuds sont parfaitement rigides. Les barres sont alors soumises à de la traction, à de la compression, mais aussi à de la

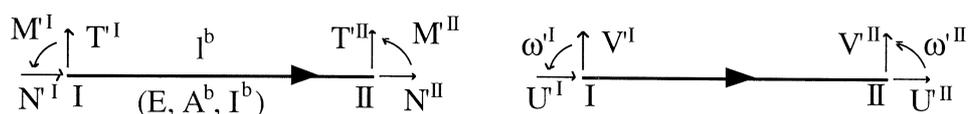


Figure 7.1 : modélisation d'une barre à nœuds rigides

flexion. Le chargement extérieur n'est appliqué qu'aux nœuds du treillis. Les inconnues sont alors les déplacements et les rotations des nœuds. Dans le plan, il y a trois inconnues par nœud ; deux déplacements et une rotation (figure 7.1). En supposant un comportement élastique linéaire pour la barre, la matrice de rigidité d'une barre dans son repère local est :

$$\begin{bmatrix} N^I \\ T^I \\ M^I \\ N^{II} \\ T^{II} \\ M^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA^b}{l^b} & 0 & 0 & -\frac{EA^b}{l^b} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI^b}{(l^b)^3} & 6\frac{EI^b}{(l^b)^2} & 0 & -12\frac{EI^b}{(l^b)^3} & 6\frac{EI^b}{(l^b)^2} \\ 0 & 6\frac{EI^b}{(l^b)^2} & 4\frac{EI^b}{l^b} & 0 & -6\frac{EI^b}{(l^b)^2} & 2\frac{EI^b}{l^b} \\ -\frac{EA^b}{l^b} & 0 & 0 & \frac{EA^b}{l^b} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EI^b}{(l^b)^3} & -6\frac{EI^b}{(l^b)^2} & 0 & 12\frac{EI^b}{(l^b)^3} & -6\frac{EI^b}{(l^b)^2} \\ 0 & 6\frac{EI^b}{(l^b)^2} & 2\frac{EI^b}{l^b} & 0 & -6\frac{EI^b}{(l^b)^2} & 4\frac{EI^b}{l^b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^I \\ V^I \\ \omega^I \\ U^{II} \\ V^{II} \\ \omega^{II} \end{bmatrix}. \quad (7.1)$$

En mécanique, le principe fondamental s'écrit en résultante et en moment dans un repère galiléen. Cela peut se traduire par un système matriciel où les matrices et les vecteurs ont des composantes non homogènes où interviennent des forces et des moments, des déplacements et des rotations. Les trois inconnues du problème ne sont pas homogènes entre elles. En effet, la rotation d'un nœud n'est pas homogène à une longueur comme les déplacements de ce nœud. Comme ces déplacements n'ont pas été transformés en variables sans dimensions, les moments et les rotations des sections de la poutre vont être dimensionnés par un changement de variable en forces et déplacements *virtuels*. Pour cela, il nous faut une longueur fictive que nous prendrons égale à la taille de la cellule l . Posons :

- forces généralisées :

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} F^1 \\ F^2 \\ F^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ T \\ \frac{M}{l} \end{bmatrix}, \quad (7.2)$$

- déplacements généralisés :

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} U^1 \\ U^2 \\ U^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ l\omega \end{bmatrix}, \quad (7.3)$$

- coefficient de dimension :

$$d^b = \frac{l}{l^b}. \quad (7.4)$$

$$\begin{bmatrix} F'^{1,I} \\ F'^{2,I} \\ F'^{3,I} \\ F'^{1,II} \\ F'^{2,II} \\ F'^{3,II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA^b}{l}d^b & 0 & 0 & -\frac{EA^b}{l}d^b & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI^b}{l^3}(d^b)^3 & 6\frac{EI^b}{l^3}(d^b)^2 & 0 & -12\frac{EI^b}{l^3}(d^b)^3 & 6\frac{EI^b}{l^3}(d^b)^2 \\ 0 & 6\frac{EI^b}{l^3}(d^b)^2 & 4\frac{EI^b}{l^3}d^b & 0 & -6\frac{EI^b}{l^3}(d^b)^2 & 2\frac{EI^b}{l^3}d^b \\ -\frac{EA^b}{l}d^b & 0 & 0 & \frac{EA^b}{l}d^b & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EI^b}{l^3}(d^b)^3 & -6\frac{EI^b}{l^3}d^b & 0 & 12\frac{EI^b}{l^3}(d^b)^3 & -6\frac{EI^b}{l^3}(d^b)^2 \\ 0 & 6\frac{EI^b}{l^3}(d^b)^2 & 2\frac{EI^b}{l^3}d^b & 0 & -6\frac{EI^b}{l^3}(d^b)^2 & 4\frac{EI^b}{l^3}d^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U'^{1,I} \\ U'^{2,I} \\ U'^{3,I} \\ U'^{1,II} \\ U'^{2,II} \\ U'^{3,II} \end{bmatrix}.$$

L'expression peut aussi s'écrire sous la forme réduite suivante :

$$\begin{bmatrix} F'^I \\ F'^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{11} & K'_{12} \\ K'_{21} & K'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U'^I \\ U'^{II} \end{bmatrix}.$$

Cette écriture s'intègre très bien dans une MEF, les deux matrices \underline{A} et \underline{B} sont définies de la même manière que pour des barres à nœuds articulés. Pour résoudre ce système par la technique d'homogénéisation ou par la SPIM, il est préférable de regarder l'ordre de grandeur des termes qui interviennent dans les matrices \underline{A} et \underline{B} . Trois termes différents donc deux nombres adimensionnels sont à étudier. Nous devons comparer la rigidité axiale, la rigidité en flexion et les efforts extérieurs. Commençons par étudier les rigidités.

Les termes des matrices \underline{A} et \underline{B} doivent être du même ordre de grandeur si l'on veut obtenir un ensemble homogène. Trois termes apparaissent : d^b , $\frac{EA^b}{l}$ et $\frac{EI^b}{l^3}$.

- $d^b = \frac{l}{l^b}$. La longueur d'une barre l^b est sensiblement égale à la taille l de la cellule.
 $l^b = O(\epsilon^0)l$.
- $\frac{EA^b}{l} = \frac{EA^b L}{L l} = \epsilon^{-1} \frac{EA^b}{L}$. Or $\frac{EA^b}{L} = O(\epsilon^0)$ car cette rigidité est indépendante du nombre de cellules \mathcal{C} donc de ϵ . Posons $k^b = \frac{EA_i}{L}$. Alors $\frac{EA^b}{l} = O(\epsilon^{-1})k^b$.
- $\frac{EI^b}{l^3} = \frac{EI^b L}{l^2 L l} = \epsilon^{-1} \frac{EI^b}{l^2 L}$. Soit $\frac{EI^b}{l^2 L} = O(\epsilon^0)$ ce qui signifie, en utilisant les résultats précédents, que l'élanement d'une barre λ^b est d'ordre ϵ^0 , donc indépendant du nombre de cellules

$$\lambda^b = \frac{l^b}{\sqrt{\frac{I^b}{A^b}}}. \tag{7.5}$$

Posons $h^b = \frac{EI^b}{l^2 L}$. Alors $\frac{EI^b}{l^3} = O(\epsilon^{-1})h^b$.

$$d^b = \frac{l}{l^b} = O(\epsilon^0), \quad k^b = \frac{EA^b}{L} = O(\epsilon^0), \quad h^b = \frac{EI^b}{l^2 L} = O(\epsilon^0). \quad (7.6)$$

Nous voyons l'intérêt du changement de variable qui permet d'avoir des termes homogènes dans la matrice de rigidité d'une barre, l'adimensionnalisation est facilitée et elle induit un ordre ϵ entre les déplacements et les rotations ($U = O(\epsilon)L\omega$), entre les couples et les efforts ($M = O(\epsilon)LF$). La matrice de rigidité d'une barre est finalement en ϵ^{-1} et elle peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} F'^{1,I} \\ F'^{2,I} \\ F'^{3,I} \\ F'^{1,II} \\ F'^{2,II} \\ F'^{3,II} \end{bmatrix} = \frac{1}{\epsilon} \begin{bmatrix} k^b d^b & 0 & 0 & -k^b d^b & 0 & 0 \\ 0 & 12h^b(d^b)^3 & 6h^b(d^b)^2 & 0 & -12h^b(d^b)^3 & 6h^b(d^b)^2 \\ 0 & 6h^b(d^b)^2 & 4h^b d^b & 0 & -6h^b(d^b)^2 & 2h^b d^b \\ -k^b d^b & 0 & 0 & k^b d^b & 0 & 0 \\ 0 & -12h^b(d^b)^3 & -6h^b(d^b)^2 & 0 & 12h^b(d^b)^3 & -6h^b(d^b)^2 \\ 0 & 6h^b(d^b)^2 & 2h^b d^b & 0 & -6h^b(d^b)^2 & 4h^b d^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U'^{1,I} \\ U'^{2,I} \\ U'^{3,I} \\ U'^{1,II} \\ U'^{2,II} \\ U'^{3,II} \end{bmatrix}. \quad (7.7)$$

Pour le nombre adimensionnel entre les déplacements et les efforts, les phénomènes physiques en jeu n'ont pas changé de nature *a priori*, on garde donc le nombre $Q_f = \epsilon^2$.

Tout ce qui a été établi sur la méthode des développements en doubles séries entières est valable. On peut donc trouver la solution exacte en déplacement vérifiant toutes les conditions aux limites.

7.1.2 Exemple du treillis poutre plan en \mathcal{N} à nœuds rigides

Le treillis poutre plan en \mathcal{N} à nœuds rigides est identique à la poutre plane ne \mathcal{N} sauf que les nœuds sont parfaitement rigides, le triangle 1 2 est hyperstatique, la barre 3 est fixe, la matrice $\underline{\underline{B}}$ est inversible (figure 6.9).

$$\dim(\underline{\underline{A}}) = 6, \quad \underline{u} = [u^I \ v^I \ \omega^I \ u^{II} \ v^{II} \ \omega^{II}],$$

$$\text{rang}(\underline{\underline{B}}) = 6, \quad d = 2.6 + 1.(6 - 6) = 12,$$

$$\det(\underline{\underline{B}} + z\underline{\underline{A}} + z^2\underline{\underline{B}}) = (z - 1)^6(z^2 - 2az + 1)(z^2 - 2bz + 1)(z^2 - 2cz + 1).$$

Il y a donc trois couches limites à chaque extrémité de la poutre.

7.2 À propos du chargement extérieur

L'hypothèse d'un chargement extérieur n'agissant qu'aux nœuds de la structure a été faite. L'équilibre en partie courante d'une barre étant intégré dans sa matrice de rigidité, il n'y a plus qu'à écrire l'équilibre aux nœuds de la structure. Nous avons postulé

que la suite du chargement $\{F_0, F_l, F_{2l}, \dots, F_{X_c}, \dots, F_{L-l}, F_L\}$ peut être décrite par une fonction force $F(X)$, ou en normalisant la longueur de la structure à 1 par le changement de variable $X = L.x$, la fonction force $f(x)$. Nous allons voir si, dans la pratique, cela est possible.

7.2.1 Chargements concentrés aux nœuds

Lorsque le nombre de cellule \mathcal{C} change, le chargement global sur la poutre ne doit pas varier. Nous devons donc déterminer la valeur de la charge sur un nœud en fonction du nombre de cellules \mathcal{C} ou de son inverse ϵ .

1. Chargement constant

Efforts aux nœuds X_c : $F_{X_n} = f_0 = F(X)$

Charge totale : $F_0 = \sum_{c=0}^{\mathcal{C}} f_0 = (\mathcal{C} + 1)f_0$

Efforts aux nœuds X_c : $F_{X_n} = F(X) = \frac{F_0}{\mathcal{C} + 1} = f(x) = \frac{F_0}{1 + \epsilon}$

2. Chargement linéaire

Efforts aux nœuds X_c : $F_{X_n} = f_1 X = F(X)$

Charge totale : $F_1 = \sum_{c=0}^{\mathcal{C}} f_1 X = \sum_{c=0}^{\mathcal{C}} f_1 cl = \frac{\mathcal{C}(\mathcal{C} + 1)}{2} f_1 l$

Efforts aux nœuds X_c : $F_{X_c} = F(X) = \frac{2F_1}{l\mathcal{C}(\mathcal{C} + 1)} X = f(x) = \frac{2F_1}{1 + \epsilon} \epsilon x$

3. Chargement parabolique

Efforts aux nœuds X_c : $F_{X_n} = f_2 X^2 = F(X)$

Charge totale : $F_2 = \sum_{c=0}^{\mathcal{C}} f_2 X^2 = \sum_{c=0}^{\mathcal{C}} f_2 c^2 l^2 = \frac{\mathcal{C}(2\mathcal{C}^2 + 3\mathcal{C} + 1)}{6} f_2 l^2$

Efforts aux nœuds X_c : $F_{X_c} = F(X) = \frac{6F_2}{l^2\mathcal{C}(2\mathcal{C}^2 + 3\mathcal{C} + 1)} X^2$
 $= f(x) = \frac{6F_2}{2 + 3\epsilon + \epsilon^2} \epsilon x^2$

Nous faisons de même pour les chargements de degré plus élevé. Nous remarquons que l'effort sur un nœud est toujours en $O(\epsilon^1)$.

7.2.2 Chargements répartis

a) Formulation énergétique

Étant données les hypothèses faites, le cas des chargements répartis, tels le poids, paraît être hors de portée de notre méthode. Il n'en est rien. La formulation que nous avons écrite est celle de la MEF lorsque les barres sont modélisées par des éléments de poutre simple, c'est à dire, lorsque nous fixons le déplacement des points d'une barre linéaire en traction et cubique en flexion.

Dans le cadre de la MEF, nous écrivons une formulation variationnelle qui minimise l'énergie potentielle formée de l'énergie de déformation et du travail des forces extérieures. Cela revient finalement à résoudre un système du type $\underline{K} \cdot \underline{U} = \underline{F}$, avec \underline{K} matrice de rigidité globale de la structure et \underline{F} matrice des forces généralisées. Nous pouvons donc *concentrer* le chargement aux nœuds comme pour la MEF ce qui permet de comparer les résultats puisque nous partons des mêmes équations.

b) Formulation simplifiée

Elle consiste à *concentrer* de manière simple le chargement aux nœuds. C'est la méthode employée sur le programme de calcul formel écrit sur Mathematica car elle met bien en évidence l'influence du nombre de cellules sur le chargement sans pour autant rentrer dans l'identification des forces généralisées de la méthode énergétique.

Soit la charge répartie suivante :

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + b_0e^{rX}, \quad (7.8)$$

avec l'équivalence entre X et x ($X = Lx$ ou $x = \frac{X}{L}$), nous trouvons comme efforts aux nœuds X_c :

$$F(X) = f(x) = \int_{X-\frac{l}{2}}^{X+\frac{l}{2}} \frac{l}{l} \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + b_0e^{rX}\} dX,$$

$$f(x) = \int_{x-\frac{\epsilon}{2}}^{x+\frac{\epsilon}{2}} \frac{\epsilon}{\epsilon} \{a_0 + a_1Lx + a_2L^2x^2 + a_3L^3x^3 + b_0e^{rLx}\} Ldx.$$

Finalement :

$$f(x) = a_0L\epsilon + a_1L^2\epsilon x + a_2L^3\left(\epsilon x^2 + \frac{\epsilon^3}{12}\right) + a_3L^4\left(\epsilon x^3 + \frac{\epsilon^3x}{4}\right) + \frac{2b_0}{r} \operatorname{sh}\left(\frac{rL\epsilon}{2}\right) e^{rLx}. \quad (7.9)$$

7.3 Retour sur l'homogénéisation

Suite à une homogénéisation, les équations d'équilibre pour un treillis poutre ont été écrites à tout ordre de ϵ (chapitre 5). Si on regroupe les cinq premiers ordres des équations

d'équilibre dans un système matriciel, il a la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \underline{IN} & \underline{AS} \frac{d}{dx} & \frac{1}{2} \underline{SY} \frac{d^2}{dx^2} & \frac{1}{3!} \underline{AS} \frac{d^3}{dx^3} & \frac{1}{4!} \underline{SY} \frac{d^4}{dx^4} \\ & \underline{IN} & \underline{AS} \frac{d}{dx} & \frac{1}{2} \underline{SY} \frac{d^2}{dx^2} & \frac{1}{3!} \underline{AS} \frac{d^3}{dx^3} \\ & & \underline{IN} & \underline{AS} \frac{d}{dx} & \frac{1}{2} \underline{SY} \frac{d^2}{dx^2} \\ & & & \underline{IN} & \underline{AS} \frac{d}{dx} \\ & & & & \underline{IN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}^4 \\ \underline{u}^3 \\ \underline{u}^2 \\ \underline{u}^1 \\ \underline{u}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix}. \quad (7.10)$$

Ce système est quasiment identique à celui donné par la matrice \underline{K}_u à la diagonale 4. Des opérateurs de dérivation interviennent ainsi que des factoriels, mais ces deux systèmes ont la même allure. Nous avons des propriétés sur les combinaisons de lignes et de colonnes à chaque diagonale car les diagonales étaient construites sur le triangle de Pascal. On retrouve les mêmes propriétés ici. Les lignes et les colonnes combinaisons linéaires des autres à la diagonale n sont encore des lignes et des colonnes combinaisons linéaires des autres sur le système matriciel construit sur les $n + 1$ premiers ordres des équations d'équilibre.

Nous avons appris au chapitre 6 à résoudre les différentes diagonales de manière automatique. Cette procédure est transposable directement au cas des équations d'équilibre données par l'homogénéisation. On est donc capable pour tout type de poutre périodique de trouver, en automatique, le milieu continu équivalent.

Partie III

Méthode générale pour l'étude des treillis quasi-périodiques

Notation

L'objectif de ces quelques pages est de faire un récapitulatif des notations qui vont être utilisées dans cette partie. Cette liste n'est malheureusement pas exhaustive. Les symboles apparaissant en début de ligne ont la signification suivante : 'e' rapporte au chapitre sur l'élasticité linéaire, 'g' au chapitre concernant les grands déplacements et 'i' à celui traitant des problèmes incrémentaux. Δ signifie que la définition du symbole change au cours des chapitres bien que sa signification reste la même.

a) Ensemble et espace permettant la description du treillis

- \mathbb{R}^3 : espace physique de travail
 \mathbf{e}_i : vecteur de base de l'espace physique
 i, j : indice des composantes d'un vecteur dans l'espace physique \mathbb{R}^3 ; $i \in \{1, 2, 3\}$
 x : coordonnées décrivant l'espace physique ; $x = (x_i) = (x_1, x_2, x_3)$
- \mathcal{C} : ensemble des cellules du treillis ou nombre de cellules du treillis dans une direction de périodicité du treillis
 Λ : espace paramétrique permettant la description du treillis, $\Lambda = [0, 1]^{\mathcal{D}}$
 \mathcal{D} : dimension de l'espace paramétrique Λ ; 3 pour les treillis 3D, 2 pour les plaques et coques, 1 pour les poutres
 c : numéro de la cellule ; $c = (c_\alpha) \in \{1, \dots, \mathcal{C}\}^{\mathcal{D}}$
 α, β : indice les vecteurs et les tenseurs dans l'espace paramétrique Λ ; $\alpha \in \{1, \dots, \mathcal{D}\}$
 λ : coordonnées dans l'espace paramétrique Λ ou coordonnées curvilignes sur la structure physique ; $\lambda = (\lambda_\alpha) \in [0, 1]^{\mathcal{D}}$
- $\tilde{\mathcal{N}}$: ensemble ou nombre des nœuds du treillis
 $\tilde{\mathcal{B}}$: ensemble ou nombre des barres du treillis
 \tilde{n} : numéro du nœud dans le treillis ; $\tilde{n} = (n, c) = (n, \lambda)$
 $O(\tilde{b})$: nœud \tilde{n} origine de la barre \tilde{b} dans le treillis
 $E(\tilde{b})$: nœud \tilde{n} extrémité de la barre \tilde{b} dans le treillis
 \tilde{b} : numéro de la barre dans le treillis ; $\tilde{b} = (b, c) = (b, \lambda)$
- \mathcal{N} : ensemble ou nombre des nœuds de la cellule
 \mathcal{B} : ensemble ou nombre des barres de la cellule
 n, m : numéro du nœud dans la cellule ; $n \in \{1, \dots, \mathcal{N}\}$
 $O(b)$: nœud n origine de la barre b dans la cellule de référence
 $E(b)$: nœud n extrémité de la barre b dans la cellule de référence
 b, d : numéro de la barre dans la cellule ; $b \in \{1, \dots, \mathcal{B}\}$

b) Espace concernant la position ou le déplacement des nœuds

- Δ \mathcal{M} : espace des déplacements macroscopiques du treillis
- \mathcal{P} : dimension de l'espace des déplacements macroscopiques \mathcal{M} du treillis ;
3 pour les treillis 3D, les plaques et les coques, 4 pour les poutres, 3 ou plus pour les treillis à mécanismes
- Δ \mathbf{e}_p^n : vecteur de base de l'espace macroscopique \mathcal{M}
- p : indice les composantes dans l'espace des déplacements macroscopiques \mathcal{M} ; $p \in \{1, \dots, \mathcal{P}\}$

- Δ \mathcal{G} : gouffre pour les déplacements
- gi \mathcal{M}^0 : espace des positions macroscopiques à l'ordre 0
- g \mathcal{GM} : gouffre et espace macroscopique pour les déplacements
- g \mathcal{GM}^v : gouffre et espace macroscopique pour le champ test
- g \mathcal{G}^0 : gouffre des positions macroscopiques à l'ordre 0
- g \mathcal{M}^1 : espace des positions macroscopiques à l'ordre 1

c) Position initiale des nœuds, longueur initiale des barres

- $\mathbf{p}^{\tilde{n}}$: position du nœud \tilde{n} dans le repère physique
- $\mathbf{p}^n(\lambda)$: position du nœud n de la cellule λ
- \mathbf{p}^0 : position macroscopique de la cellule λ ou c
- $\mathbf{p}^{1,n}$: position locale des nœuds dans la cellule λ

- \mathbf{p}^b : variation de longueur de la barre
- $\mathbf{e}^b(\lambda)$: vecteur directeur de la barre b
- $\mathbf{e}^{0,b}$: vecteur directeur de la barre b à l'ordre 0

d) Déplacement des nœuds, élongation des barres

- $\mathbf{u}^{\tilde{n}}$: déplacement du nœud \tilde{n}
- $\mathbf{u}^{n,c}$: déplacement du nœud n de la cellule c
- $\mathbf{u}^n(\lambda)$: déplacement du nœud n de la cellule λ

- $\mathbf{u}^{0,n}$: déplacement macroscopique du nœud n ; $\mathbf{u}^{0,n} \in \mathcal{M}$
- u_p^0 : composante du déplacement macroscopique dans la base (\mathbf{e}_p^n) de \mathcal{M}

- $\mathbf{u}^{1,n}$: déplacement à l'ordre 1 du nœud n
- $\hat{\mathbf{u}}^{1,n}$: déplacement à l'ordre 1 du nœud n dans \mathcal{M}
- $\check{\mathbf{u}}^{1,n}$: déplacement à l'ordre 1 du nœud n dans \mathcal{M}^\perp
- $\hat{\mathbf{u}}^{1,n}$: déplacement à l'ordre 1 du nœud n dans $\mathcal{M} \cap \mathcal{G}$
- $\acute{\mathbf{u}}^{1,n}$: déplacement à l'ordre 1 du nœud n dans $\mathcal{M} \cap \mathcal{G}^\perp$
- $\hat{\mathbf{u}}_p^1$: composante du déplacement $\hat{\mathbf{u}}^{1,n}$ dans la base (\mathbf{e}_p^n) de \mathcal{M}

e) Position finale des nœuds, longueur finale des barres

- gi $\mathbf{q}^{\tilde{n}}$: position du nœud \tilde{n} dans le repère physique
- gi $\mathbf{q}^n(\lambda)$: position du nœud n de la cellule λ

- gi \mathbf{q}^0 : position macroscopique de la cellule λ ou c
- gi $\mathbf{q}^{1,n}$: position locale des nœuds dans la cellule λ
- gi $\hat{\mathbf{q}}^{1,n}$: position à l'ordre 1 du nœud n dans \mathcal{M}
- gi $\check{\mathbf{q}}^{1,n}$: position à l'ordre 1 du nœud n dans \mathcal{M}^\perp
- gi $\hat{\mathbf{q}}^{1,n}$: position à l'ordre 1 du nœud n dans $\mathcal{M} \cap \mathcal{G}$
- gi $\acute{\mathbf{q}}^{1,n}$: position à l'ordre 1 du nœud n dans $\mathcal{M} \cap \mathcal{G}^\perp$

- gii \mathbf{q}^b : longueur finale de la barre
- gi $\mathbf{g}^b(\lambda)$: vecteur directeur de la barre b
- gi $\mathbf{g}^{0,b}$: vecteur directeur de la barre b à l'ordre 0

f) Déplacement incrémental des nœuds, élongation incrémentale des barres

- i $\dot{\mathbf{u}}^{\tilde{n}}$: déplacement incrémental du nœud \tilde{n}
- i $\dot{\mathbf{u}}^{n,c}$: déplacement incrémental du nœud n de la cellule c
- i $\dot{\mathbf{u}}^n(\lambda)$: déplacement incrémental du nœud n de la cellule λ

- i $\dot{\mathbf{u}}^0$: déplacement incrémental macroscopique de la cellule
- i $\dot{\mathbf{u}}^{1,n}$: déplacement à l'ordre 1 du nœud n
- i $\hat{\dot{\mathbf{u}}}^{1,n}$: déplacement à l'ordre 1 du nœud n dans \mathcal{M}
- i $\check{\dot{\mathbf{u}}}^{1,n}$: déplacement à l'ordre 1 du nœud n dans \mathcal{M}^\perp
- i $\hat{\dot{\mathbf{u}}}^{1,n}$: déplacement à l'ordre 1 du nœud n dans $\mathcal{M} \cap \mathcal{G}$
- i $\acute{\dot{\mathbf{u}}}^{1,n}$: déplacement à l'ordre 1 du nœud n dans $\mathcal{M} \cap \mathcal{G}^\perp$

- i $\dot{\mathbf{q}}^b$: élongation incrémentale de la barre b
- i $\dot{\mathbf{g}}^b(\lambda)$: variation incrémentale du vecteur directeur de la barre b
- i $\dot{\mathbf{g}}^{0,b}$: variation du vecteur directeur de la barre b à l'ordre 0

g) Espace concernant la tension dans les barres

- \mathcal{K} : ensemble des tensions auto-équilibrées ou nombre de tension auto-équilibrées ; $\mathcal{K} \leq \mathcal{B}$
 k, h : indice les K-vecteurs tensions de l'ensemble des tensions auto-équilibrées \mathcal{K} ; $k \in \{1, \dots, \mathcal{K}\}$
- gi \mathcal{K}' : ensemble des vecteurs tensions auto-équilibrées
 gi k', h' : indice les K'-vecteurs tensions de l'ensemble des tensions auto-équilibrées \mathcal{K}'

h) Tension dans les barres, tension auto-équilibrée

- k^b : rigidité d'une barre
 $k^{-1,b}$: rigidité de la barre b à l'ordre -1
- $\triangle f^{\tilde{b}}$: scalaire tension dans la barre \tilde{b} porté par le vecteur directeur de la barre
 $\triangle f^b$: tension dans la barre b
- $\triangle f^{-1,b}$: tension dans la barre b à l'ordre -1
 $\triangle f^{0,b}$: tension dans la barre b à l'ordre 0
 $\triangle f^{1,b}$: tension dans la barre b à l'ordre 1
- i f^b : vecteur tension dans la barre b
 i \dot{f}^b : incrément de vecteur tension dans la barre b
- φ_k^b : scalaire tension auto-équilibrée
 ϕ_h^b : scalaire tension $\phi_h^b \perp \varphi_k^b$
 \triangle gi φ_k^b : vecteur tension auto-équilibrée
 i Φ : opérateur tension auto-équilibrée

i) Chargement extérieur

- $\triangle f^{\tilde{n}}$: chargement extérieur aux nœuds \tilde{n}
 $\triangle f^n$: chargement extérieur aux nœuds n de la cellule λ
- $\triangle f^{1,n}$: chargement extérieur pour les problèmes du premier ordre
 $\triangle f^{3,n}$: chargement extérieur pour les problèmes du second ordre

- i $\dot{\mathbf{f}}^n$: incrément de chargement extérieur aux nœuds n de la cellule λ
i $\dot{\mathbf{f}}^{1,n}$: incrément de chargement extérieur pour les problèmes du premier ordre
i $\dot{\mathbf{f}}^{3,n}$: incrément de chargement extérieur pour les problèmes du second ordre

j) Tenseur

- Δ ei \mathfrak{C}^0 : tenseur des contraintes macroscopiques ; $\mathfrak{C}^0 = \frac{1}{g} \sum_b f^{0,b} p^{0,b} \mathbf{e}^{0,b} \otimes \mathbf{e}^{0,b}$
 Δ ei \mathfrak{E}^0 : tenseur des déformations macroscopiques ; $\mathfrak{E}^0 = \left(\nabla_x(\mathbf{u}_p^0) \right)_S$
 Δ ei \mathfrak{K}^0 : tenseur symétrique de rigidité macroscopique ; $\mathfrak{K}^0 = \frac{1}{g} \sum_k \mathfrak{C}_k^0 \otimes \mathfrak{C}_k^0$
 Δ ei \mathfrak{C}_k^0 : sous tenseur de rigidité ; $\mathfrak{C}_k^0 = \sum_b \varphi_k^b p^{0,b} \mathbf{e}^{0,b} \otimes \mathbf{e}^{0,b}$

k) Accents, symbole divers

- Δ $\hat{\quad}$: indique une appartenance à un espace macroscopique \mathcal{M}
 Δ $\check{\quad}$: indique une appartenance à un espace \mathcal{M}^\perp
 Δ $\grave{\quad}$: indique une appartenance à un gouffre $\mathcal{M} \cap \mathcal{G}$
 Δ $\acute{\quad}$: indique une appartenance à un espace $\mathcal{M} \cap \mathcal{G}^\perp$
 — : indique le début d'une longueur
 ~ : indique le reste d'une longueur
 ' : indique un élargissement d'un ensemble
e $\overline{\quad}^{\text{per}}$: égal à si la structure est périodique
g $\overrightarrow{\quad}^{\text{min}}$: tend pour le minimum

Chapitre 8

Modèle macroscopique d'une structure discrète en élasticité linéaire

Plan du chapitre 8

8.1	Description de l'étude	132
8.2	Modélisation de la structure, cas de la statique en élasticité linéaire	134
8.2.1	Position des nœuds, longueur des barres	137
8.2.2	Déplacement des nœuds, élongation des barres	139
8.2.3	Tension dans une barre, relation de comportement élastique linéaire	140
8.2.4	Chargement extérieur sur la structure	141
8.2.5	Équilibre de la structure, formulation variationnelle	142
	a) Équilibre statique de la structure	142
	b) Formulation variationnelle	142
8.3	Analyse statique de la structure, modélisation continue du premier gradient	143
8.3.1	Transformation d'une somme discrète en intégrale	143
8.3.2	Tension auto-équilibrée	144
8.3.3	Tension à l'ordre -1	145
8.3.4	Déplacement macroscopique	146
8.3.5	Tension à l'ordre 0	149
8.3.6	Modèle macroscopique du premier ordre en statique	151
8.3.7	Cas des treillis 3D, modèle continu du premier gradient, écriture dans l'espace physique	152
	a) Liminaire	152
	b) Vecteur contrainte de Piola-Kirchoff, équilibre dans l'espace paramétrique	152
	c) Base covariante et contravariante, domaine physique du modèle continu	153
	d) Chargement extérieur équivalent	154
	e) Tenseur des contraintes, symétrie	154
	f) Relation de comportement ; tenseur des contraintes, tenseur des déformations	156

	g) Équilibre du modèle continu	157
	h) Condition de coercivité du modèle continu	157
8.4	Analyse statique de la structure ; cas des structures minces	158
8.4.1	Faible chargement et non coercivité de la formulation au premier ordre	158
	a) Singularité du modèle	158
	b) Gouffre pour les déplacements	159
	c) Interprétation du gouffre pour les coques et les plaques, déformations membranaires nulles	160
8.4.2	Tension auto-équilibrée modifiée	161
8.4.3	Déplacement à l'ordre 1	161
8.4.4	Tension à l'ordre 1	165
8.4.5	Modèle couplé en statique	166
8.4.6	Modèle macroscopique découplé en statique, condition de découplage	167
	a) Condition de découplage des équations, champ de déplacement à l'ordre 1	167
	b) Modèle macroscopique découplé en statique	168
8.5	Analyse modale de la structure	168
8.5.1	Comportement modal d'une barre appartenant à un grand treillis	169
8.5.2	Modèle macroscopique de vibration ; cas des treillis 3D	169
8.5.3	Modèle macroscopique de vibration ; cas des plaques et coques sans mé- canismes	170
8.6	Exemples	171
8.6.1	Poutre plane en \mathcal{N}	171
8.6.2	Membrane plane en \mathcal{X}	173
8.6.3	Plaque 3D en \mathcal{X}	177
8.7	Conclusion	181

8.1 Description de l'étude

Les structures discrètes sont d'un usage courant en construction mécanique. En effet, les treillis ont des bons rapports rigidité/masse et résistance/coût. L'augmentation des performances des ordinateurs incite les architectes à proposer des structures de plus en plus grandes et de plus en plus complexes (figure 8.1). Cependant, lorsque l'on voit la déformée d'un treillis plaque supportant un hall, on a la même impression que lorsque que l'on voit une plaque modélisée en éléments finis 3D, une impression de faire un grand nombre de calculs sur un problème énorme comportant beaucoup de degrés de liberté, alors que la solution paraît simple (figure 8.2). Afin d'éviter ce problème, des éléments finis de plaque ont été spécialement adaptés. Pour une fiabilité plus grande, le problème est plus simple à résoudre. Par ailleurs, l'analyse des résultats par le concepteur ou l'architecte s'en trouve simplifiée et mieux adaptée, plusieurs solutions peuvent alors être recherchées afin de diminuer les coûts, mais aussi la probabilité d'erreur de conception. Ce raisonnement est aussi valable pour les poutres et les coques qui ont leurs propres éléments finis dans la MEF. Pour les treillis plaques, les treillis coques et les treillis poutres, il n'y a pas de raison qu'il en aille autrement. La seconde partie de ce chapitre leur est donc consacrée dans le cadre de la statique linéaire, c'est à dire en petit déplacement et petite déformation.

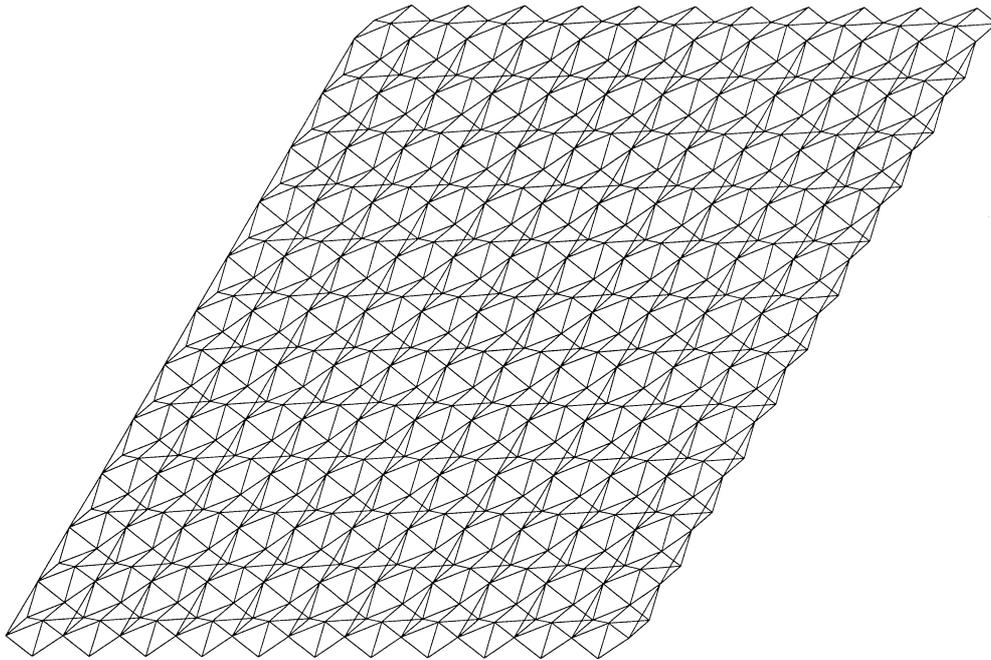


Figure 8.1 : *un treillis plaque périodique*

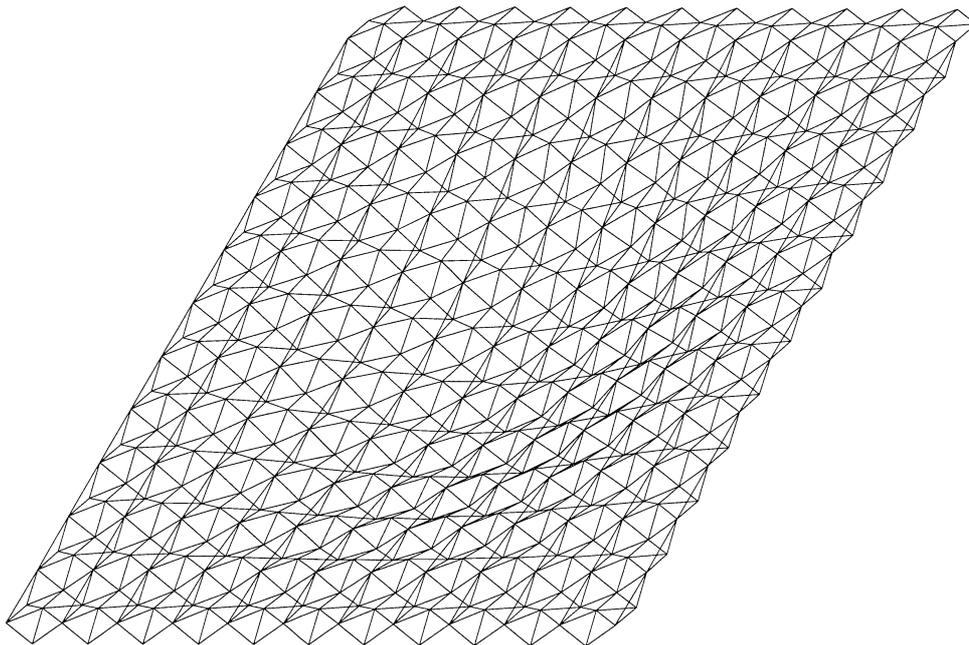


Figure 8.2 : *premier mode propre de vibration d'un treillis plaque périodique calculé par la MEF*

Cependant, dans la première partie, on étudiera les structures discrètes 3D. Ces développements seront utilisés comme préliminaire à la seconde partie sur les poutres, plaques et coques. On peut se demander quelle est l'utilité d'étudier des treillis 3D. En premier lieu, certains bâtiments du type building peuvent peut-être se modéliser dans ce cadre d'étude. En second lieu, le milieu continu équivalent pour un treillis 3D est un milieu 3D. On a donc un moyen de faire un passage micro-macro entre une structure microscopique donnée et son comportement macroscopique. En élasticité, nous n'allons pas trouver de milieux nouveaux. Un treillis 3D bien posé donnera un milieu continu classique [24, 50]. C'est un résultat non négligeable, car on sait, par cette méthode, construire un milieu continu classique même si au niveau microscopique, celui-ci est discret. En faisant d'autres hypothèses sur la structure, dans le même genre d'idées que celles que nous faisons dans ce chapitre, mais qui restent encore à trouver, on obtiendra peut-être un milieu de Cosserat 3D. De plus, en mettant un peu de non linéarité dans nos équations, on va pouvoir obtenir des lois de comportement non linéaires 3D complètement déterminées par la seule connaissance microscopique du treillis. C'est donc une autre approche pour essayer de justifier des modèles non linéaires [30] que celle de l'homogénéisation des milieux aléatoires [26]. En troisième lieu, dans des problèmes de propagation et/ou de création de fissure, afin d'avoir un critère simple et pour ne pas privilégier certaines directions de propagation, le milieu continu peut être remplacé par un réseau de barres. Actuellement, le choix du réseau est fait de façon heuristique. L'homogénéisation discrète permet de justifier un tel choix. Il faut préciser que cette première partie résulte d'un travail commun dans l'équipe de recherche du laboratoire 3S et a partiellement été publiée [61, 62].

La troisième partie de ce chapitre est une ouverture sur les vibrations propres d'une structure discrète. Elle permettra de trouver les premières fréquences propres du treillis avec une très bonne approximation. Pour cela, nous utiliserons un résultat démontré dans la thèse de Tollenaere concernant le comportement d'une barre appartenant à un grand treillis dans le cadre des vibrations libres [60].

8.2 Modélisation de la structure, cas de la statique en élasticité linéaire

Cette étude porte sur la modélisation continue d'une structure treillis quasi-périodique. Pour un treillis, avoir la condition de quasi-périodicité n'est pas une condition suffisante pour qu'il existe un milieu continu équivalent. D'autres conditions sont à vérifier. Avant de les définir, nous devons préciser ce qu'est un treillis quasi-périodique. Un treillis quasi-périodique est caractérisé par une topologie parfaitement périodique et par une géométrie lentement variable. C'est à dire qu'il existe une cellule de référence ayant un nombre fini de barres et de nœuds, le treillis se définit alors par la répétition de cette cellule, mais par une lente déformation géométrique de celle-ci (figure 8.3). Il existe cinq types de treillis quasi-périodiques : les deux premiers sont plans, il s'agit du treillis poutre plan dans lequel la cellule de base se répète le long d'une courbe plane (souvent un segment de droite) et du treillis 2D dans lequel la cellule de référence se répète dans les deux directions du plan, les trois autres sont définis dans l'espace 3D. Nous avons de nouveau le treillis poutre qui se caractérise par une courbe, le treillis coque qui s'appuie sur une

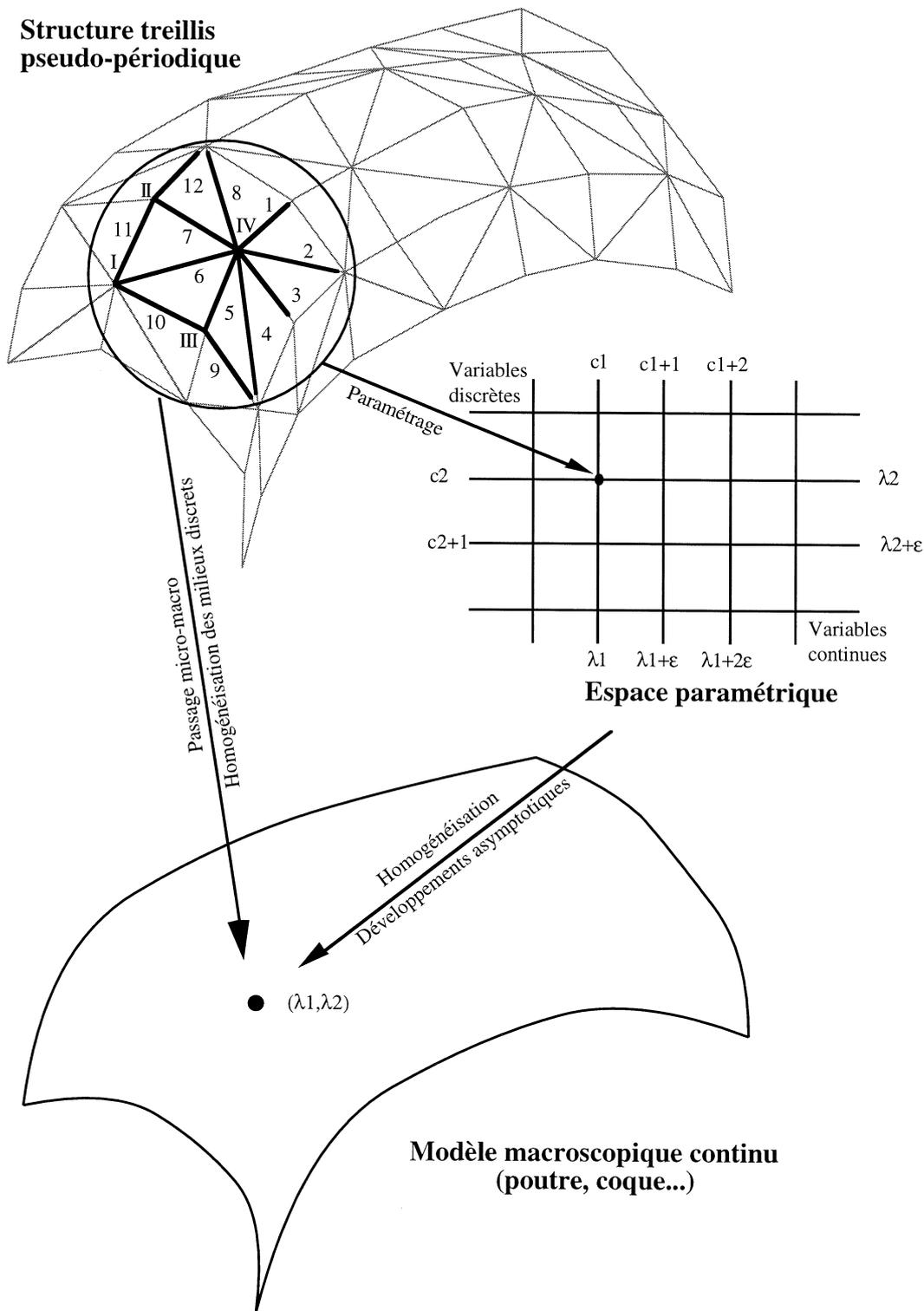


Figure 8.3 : description et modélisation d'un treillis quasi-périodique

surface et le treillis 3D qui remplit tout l'espace. Un treillis plaque est un cas particulier de treillis coque où la surface d'appuis est un plan, c'est une précision importante car même dans les milieux continus classiques, les plaques et les coques n'ont pas toujours le même comportement (plaque de Love-Kirchoff, plaque de Resser-Midlin, coque de Koiter... [12, 20, 53, 54, 51]). Nous allons oublier dans toute la suite les treillis plans car ils sont des cas simples qui se déduisent facilement des deux cas suivants : les treillis 3D et les treillis poutre 3D. La différence entre ces cinq modèles (ou de ces trois modèles car on se place en 3D) est le nombre de directions selon lesquelles la cellule de base est dupliquée. Ce nombre de directions est noté \mathcal{D} et il va nous donner la dimension de l'espace paramétrique. En effet, la topologie du treillis étant périodique, on peut définir une bijection entre notre treillis et une grille parfaitement périodique de dimension \mathcal{D} . Cette grille parfaite est l'espace paramétrique (figure 8.3).

On ajoute à cette description deux hypothèses complémentaires : une séparation d'échelle et une homogénéité d'ensemble. L'homogénéité d'ensemble pour un treillis quasi-périodique signifie que même si les cellules se déforment lentement, elles ont toutes des dimensions du même ordre de grandeur. Cet ordre de grandeur est justement fixé par la séparation d'échelle. On dit qu'il y a séparation d'échelle si la taille de la cellule est petite devant la taille du treillis. Dans la pratique, cela revient à dire qu'il y a un grand nombre de cellules dans chacune des directions de quasi-périodicité. Pour faire nos calculs, on va supposer qu'il y a autant de cellules dans chacune de ces directions, on introduit alors un petit paramètre ϵ qui est l'inverse de ce nombre de cellules. Ce petit paramètre ϵ va nous permettre d'établir des ordres de grandeur. Si pour toutes les cellules, la taille d'une cellule sur la taille du treillis est d'ordre ϵ , alors notre modèle pourra être appliqué. Par ailleurs, si les nombres de cellules dans deux directions différentes ne sont pas parfaitement identiques, mais très proche, les modèles pourront être appliqués. Par contre, si une direction a 10 cellules et si une autre direction en a 100, il y a un ordre de grandeur entre ces deux valeurs et les modèles continus développés ici ne sont plus valides.

Les grandeurs physiques dans cette étude seront mises sous une forme sans dimension. Ce passage à des variables sans dimension permet d'évaluer les ordres de grandeur des variables physiques par rapport au petit paramètre ϵ de façon plus cohérente car ϵ est sans dimension [6]. La grande lettre correspondra à la variable avec dimension, la petite à sa variable sans dimension. Pour réaliser ce changement, il faut choisir 3 grandeurs caractéristiques : une longueur, une masse et un temps, ou un système équivalent. Notre choix est : L la taille de la structure, E le module d'Young et ρ la masse volumique du matériau constitutif des barres. En effet, on suppose que toutes les barres ont le même matériau, cette hypothèse simplifie les notations et ne réduit en rien le domaine de validité de l'étude.

Hypothèse 8.1 *Pour résumer, notre structure treillis pseudo-périodique comporte $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$ cellules. On distingue les cellules par le multi-exposant c ($c \in \{1, \dots, \mathcal{C}\}^{\mathcal{D}}$). \mathcal{D} est la dimension de l'espace paramétrique permettant de représenter la structure dans l'espace (figure 8.3). Par exemple, pour une poutre 3D, $\mathcal{D} = 1$, pour une coque ou une plaque, $\mathcal{D} = 2$, pour une treillis 3D, $\mathcal{D} = 3$. On suppose qu'il existe un petit paramètre ϵ tel que*

$$\epsilon = \frac{1}{\mathcal{C}} \ll 1. \quad (8.1)$$

8.2.1 Position des nœuds, longueur des barres

Hypothèse 8.2 *Il existe \mathcal{N} nœuds dans une cellule, on les note par l'exposant n , $n \in \{1, \dots, \mathcal{N}\}$. Un nœud quelconque de la structure \tilde{n} se note aussi comme le couple (n, c) . On note $\tilde{\mathcal{N}}$ l'ensemble des nœuds de la structure. Soit $(0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ un repère cartésien galiléen. La position du nœud \tilde{n} ou (n, c) s'écrit dans ce repère sous forme du développement asymptotique (figure 8.4)*

$$\mathbf{p}^{\tilde{n}} = \mathbf{p}^{n,c} = \frac{\mathbf{P}^{n,c}}{L} = \mathbf{p}^{0,c} + \epsilon \mathbf{p}^{1,n,c} + \epsilon^2 \mathbf{p}^{2,n,c} + \dots, \quad (8.2)$$

où $\mathbf{p}^{0,c}$ représente la position de la cellule c dans le treillis et $\mathbf{p}^{1,n,c}$ la position locale du nœud n dans cette cellule. Les ordres suivants sont des correcteurs de position de moins en moins significatifs et qui n'interviennent que dans les treillis quasi-périodique.

Exemple : cas de la poutre plane périodique en \mathcal{N} (figure 8.11), alors $\mathcal{D} = 1$ et

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{0,c} &= \epsilon c \mathbf{e}_1, \\ \epsilon \mathbf{p}^{1,n,c} &= \pm \epsilon \frac{h}{l} \mathbf{e}_2, \\ \forall k \geq 2, \quad \mathbf{p}^{k,n,c} &= 0. \end{aligned}$$

Hypothèse 8.3 *Il existe \mathcal{B} barres dans une cellule c , on les note par l'exposant b , $b \in \{1, \dots, \mathcal{B}\}$. Les barres b sont orientées et vont d'un nœud n dans la cellule c à un nœud m qui peut-être soit de la cellule c , soit de la cellule voisine $c + \delta^b$ (δ^b est un multi-symbole valant $-1, 0$ ou 1 dans chacune de ses \mathcal{D} dimensions). On s'arrange pour que m ne soit pas, si c'est possible, dans une cellule précédant la cellule du nœud n . Une barre quelconque de la structure \tilde{b} s'écrit comme le couple (b, c) . On note $\tilde{\mathcal{B}}$ l'ensemble des barres de la structure. On note $O(\tilde{b})$ le nœud origine de la barre \tilde{b} et $E(\tilde{b})$ le nœud extrémité de cette barre \tilde{b} . La barre \tilde{b} peut aussi s'écrire comme le couple des deux nœuds $(O(\tilde{b}), E(\tilde{b}))$, avec :*

$$\begin{cases} O(\tilde{b}) & : (O(b), c), \\ E(\tilde{b}) & : (E(b), c + \delta^b), \end{cases} \quad \delta^b \in \{0, 1\}^{\mathcal{D}}. \quad (8.3)$$

Propriétés 8.1 *Le vecteur longueur d'une barre \tilde{b} est*

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{\tilde{b}} = \mathbf{p}^{b,c} &= \frac{\mathbf{P}^{\tilde{b}}}{L} = \mathbf{p}^{m,c+\delta^b} - \mathbf{p}^{n,c}, \\ &= \mathbf{p}^{0,c+\delta^b} - \mathbf{p}^{0,c} + \epsilon [\mathbf{p}^{1,(m,c+\delta^b)} - \mathbf{p}^{1,(n,c)}] + \epsilon^2 [\mathbf{p}^{2,(m,c+\delta^b)} - \mathbf{p}^{2,(n,c)}] + \dots \end{aligned}$$

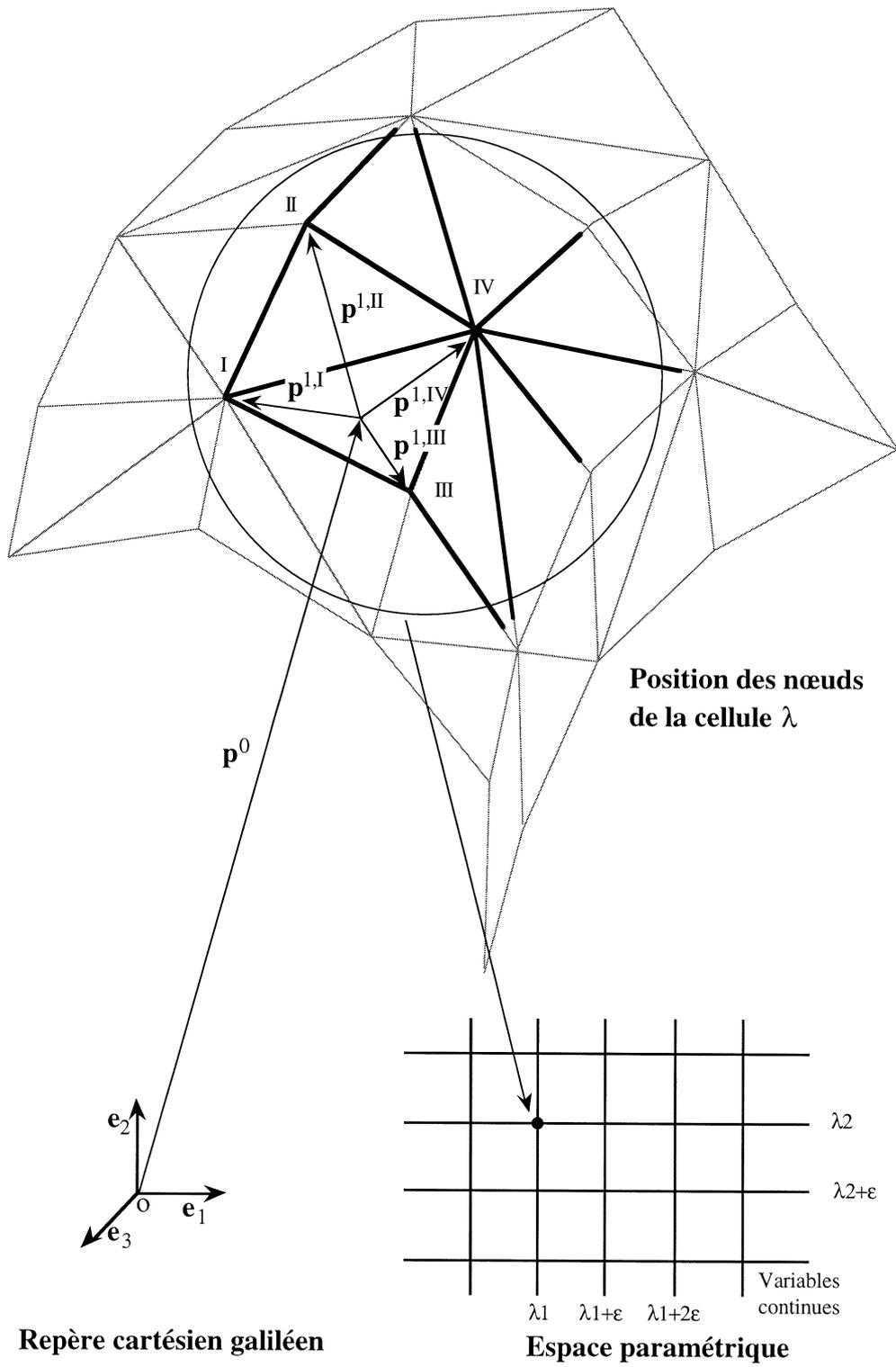


Figure 8.4 : position des nœuds dans une cellule

Définition 8.1 On a un équivalent du multi-exposant $c \in \{1, \dots, C\}^{\mathcal{D}}$, c'est la multi-variable $\lambda \in [0, 1]^{\mathcal{D}}$, alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}^{\bar{b}} = \mathbf{p}^b(\lambda) = \mathbf{p}^0(\lambda + \epsilon \delta^b) - \mathbf{p}^0(\lambda) + \epsilon [\mathbf{p}^{1,m}(\lambda + \epsilon \delta^b) - \mathbf{p}^{1,n}(\lambda)] + \dots, \\ \mathbf{p}^b(\lambda) = \epsilon \mathbf{p}^{1,b} + \epsilon^2 \mathbf{p}^{2,b} + \epsilon^3 \mathbf{p}^{3,b} + \dots, \\ \mathbf{p}^{1,b} = \mathbf{p}^{1,E(b)}(\lambda) - \mathbf{p}^{1,O(b)}(\lambda) + \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{p}^0(\lambda)}{\partial \lambda^{\alpha}} \delta^{\alpha,b}, \\ \mathbf{p}^{2,b} = \mathbf{p}^{2,E(b)}(\lambda) - \mathbf{p}^{2,O(b)}(\lambda) + \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{p}^{1,E(b)}(\lambda)}{\partial \lambda^{\alpha}} \delta^{\alpha,b} + \frac{1}{2!} \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \mathbf{p}^0(\lambda)}{\partial \lambda^{\alpha} \partial \lambda^{\beta}} \delta^{\alpha,b} \delta^{\beta,b}. \end{array} \right. \quad (8.4)$$

Remarque : le changement de variable entre c et λ est plus important qu'il n'y paraît. En premier lieu, la variable λ est prise continue alors que la variable c était discrète. Il n'y a donc pas une équivalence parfaite entre ces deux variables. Cela signifie aussi que les équations que nous écrivons avec la variable λ n'ont de sens que pour $\lambda = c\epsilon$ avec c un multi-entier. Comme le petit paramètre ϵ va tendre vers 0 dans l'obtention d'un milieu continu équivalent, cet inconvénient n'a pas lieu d'être. En second lieu, les bornes de la variable c changent lorsque le petit paramètre ϵ va tendre vers 0. Dans la pratique, c'est une gêne importante qui nous obligera à faire un changement de variable pour avoir un intervalle fixe. La variable λ est donc mieux adaptée.

Hypothèse 8.4 La section d'une barre b est prise sous forme d'un développement asymptotique

$$a^{\bar{b}} = a^b(\lambda) = \frac{A^{\bar{b}}}{L^2} = a^{0,b}(\lambda) + \epsilon a^{1,b}(\lambda) + \epsilon^2 a^{2,b}(\lambda) + \dots \quad (8.5)$$

Définition 8.2 Le vecteur unitaire de la barre b est

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^b(\lambda) &= \frac{\mathbf{p}^b(\lambda)}{\|\mathbf{p}^b(\lambda)\|}, \\ \mathbf{e}^b(\lambda) &= \mathbf{e}^{0,b}(\lambda) + \epsilon \mathbf{e}^{1,b}(\lambda) + \epsilon^2 \mathbf{e}^{2,b}(\lambda) + \dots \end{aligned} \quad (8.6)$$

8.2.2 Déplacement des nœuds, élongation des barres

Hypothèse 8.5 Le déplacement d'un nœud \tilde{n} de la structure est cherché sous la forme du développement asymptotique

$$\mathbf{u}^{\tilde{n}} = \mathbf{u}^n(\lambda) = \frac{\mathbf{U}^{\tilde{n}}}{L} = \mathbf{u}^{0,n}(\lambda) + \epsilon \mathbf{u}^{1,n}(\lambda) + \epsilon^2 \mathbf{u}^{2,n}(\lambda) + \dots \quad (8.7)$$

Remarque : contrairement au vecteur position \mathbf{p}^n des nœuds, on ne suppose pas que tous les nœuds de la cellule vont avoir le même déplacement macroscopique. En effet, dans le cas des treillis poutres, on peut obtenir une torsion de la poutre. Cette torsion engendre des déplacements macroscopiques différents aux nœuds d'une cellule.

Définition 8.3 Le vecteur différence de déplacement $\mathbf{u}^{\bar{b}}$ des deux nœuds extrêmes d'une barre \bar{b} est aussi appelé vecteur élongation de la barre

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}^{\bar{b}} = \mathbf{u}^{E(\bar{b})} - \mathbf{u}^{O(\bar{b})} = \mathbf{u}^{E(b)}(\lambda + \delta^b) - \mathbf{u}^{O(b)}(\lambda), \\ \quad = \mathbf{u}^{0,b} + \epsilon \mathbf{u}^{1,b} + \epsilon^2 \mathbf{u}^{2,b} + \epsilon^3 \mathbf{u}^{3,b} + \dots, \\ \mathbf{u}^{0,b}(\lambda) = \mathbf{u}^{0,E(b)}(\lambda) - \mathbf{u}^{O(b)}(\lambda), \\ \mathbf{u}^{0,b}(\lambda) = \mathbf{u}^{1,E(b)}(\lambda) - \mathbf{u}^{1,O(b)}(\lambda) + \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{u}^{0,E(b)}}{\partial \lambda^{\alpha}} \delta^{\alpha,b}, \\ \mathbf{u}^{0,b}(\lambda) = \mathbf{u}^{2,E(b)}(\lambda) - \mathbf{u}^{2,O(b)}(\lambda) + \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{u}^{1,E(b)}}{\partial \lambda^{\alpha}} \delta^{\alpha,b} + \frac{1}{2!} \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{0,E(b)}}{\partial \lambda^{\alpha} \partial \lambda^{\beta}} \delta^{\alpha,b} \delta^{\beta,b}. \end{array} \right. \quad (8.8)$$

8.2.3 Tension dans une barre, relation de comportement élastique linéaire

Hypothèse 8.6 On suppose que la barre b à un comportement élastique linéaire. On peut donc définir la rigidité de cette barre b par

$$\begin{aligned} k^b &= \frac{K^b}{EL} = \frac{1}{EL} \frac{EA^b}{\|\mathbf{P}^b\|} = \frac{A^b}{L^2} \frac{L}{\|\mathbf{P}^b\|} = \frac{a^b}{\|\mathbf{p}^b\|}, \\ k^b &= \frac{1}{\epsilon} k^{-1,b}(\lambda) + \epsilon^0 k^{0,b}(\lambda) + \epsilon k^{1,b}(\lambda) + \dots \end{aligned} \quad (8.9)$$

Hypothèse 8.7 La résultante des forces d'une barre b sur le nœud origine $O(b)$ de cette barre est

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{b,O(b)} &= \frac{\mathbf{F}^{b,O(b)}}{EL^2} = \frac{K^b}{El^2} \langle \mathbf{e}^b, \mathbf{U}^{E(b)} - \mathbf{U}^{O(b)} \rangle \mathbf{e}^b, \\ \mathbf{f}^{b,O(b)} &= k^b \langle \mathbf{e}^b, \mathbf{u}^{E(b)} - \mathbf{u}^{O(b)} \rangle \mathbf{e}^b. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Définition 8.4 On appelle tension \mathbf{f}^b dans la barre b la force $\mathbf{f}^{b,O(b)}$ exercée par la barre b sur le nœud origine. La force $\mathbf{f}^{b,E(b)}$ exercée sur le nœud extrémité $E(b)$ de la barre est alors $-\mathbf{f}^b$.

$$\mathbf{f}^b = \mathbf{f}^{b,O(b)} = -\mathbf{f}^{b,E(b)}. \quad (8.11)$$

Le développement asymptotique des déplacements peut-être remplacé dans la définition de la tension \mathbf{f}^b d'une barre b .

Proposition 8.1 La résultante peut alors s'écrire de deux manières équivalentes

$$\mathbf{f}^b = \left(\frac{1}{\epsilon} f^{-1,b} + f^{0,b} + \epsilon f^{1,b} + O(\epsilon^2) \right) \left(\mathbf{e}^{0,b} + \epsilon \mathbf{e}^{1,b} + \epsilon^2 \mathbf{e}^{2,b} + O(\epsilon^3) \right), \quad (8.12)$$

$$\mathbf{f}^b = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{f}^{-1,b} + \mathbf{f}^{0,b} + \epsilon \mathbf{f}^{1,b} + \dots \quad (8.13)$$

La première composante peut alors s'écrire

$$\mathbf{f}^{-1,b} = f^{-1,b}(\lambda) \mathbf{e}^{0,b}(\lambda).$$

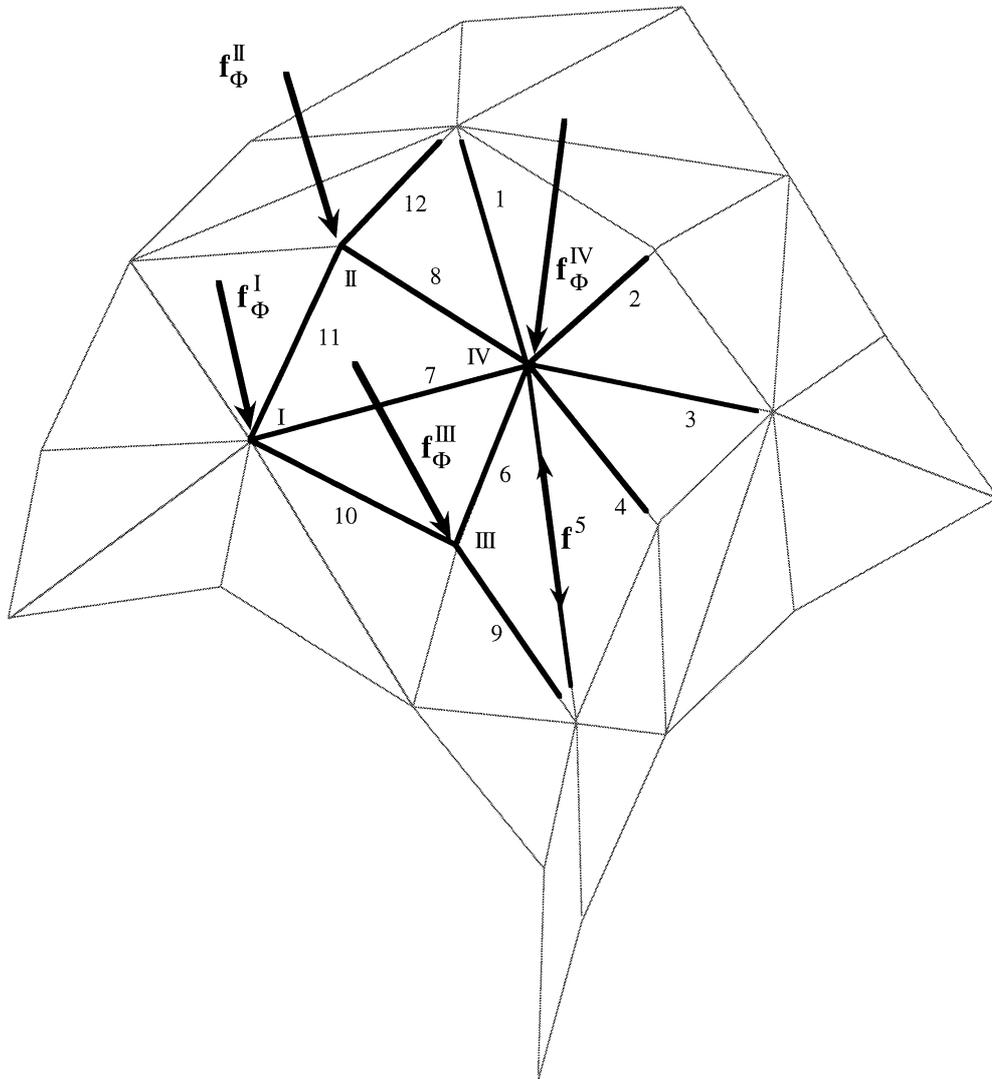


Figure 8.5 : tension dans une barre et chargement extérieur sur un nœud

8.2.4 Chargement extérieur sur la structure

Hypothèse 8.8 Soient $F_{\phi}^{\tilde{n}}$ les efforts extérieurs qui s'exercent aux nœuds \tilde{n} de la structure (figure 8.5), on les suppose de la forme

$$f_{\phi}^{\tilde{n}} = \frac{F_{\phi}^{\tilde{n}}}{EL^2} = \epsilon^f f^{\tilde{n}}, \tag{8.14}$$

avec ϵ^f définissant l'ordre de grandeur du chargement extérieur. Deux classes de problèmes se présentent à nous :

1. les treillis 3D qui sont définis dans un espace paramétrique de dimension $\mathcal{D} = 3$. Le chargement appliqué peut-être de grande intensité par rapport à une structure mince car il n'y a pas dans ces structures d'effet de flexion. Alors $\epsilon^f = \epsilon$,
2. les structures minces ; poutres, plaques et coques, dont les efforts tranchants engendrent des moments de flexion qui créent des déplacements importants. Alors le chargement extérieur doit-être de faible intensité et $\epsilon^f = \epsilon^3$.

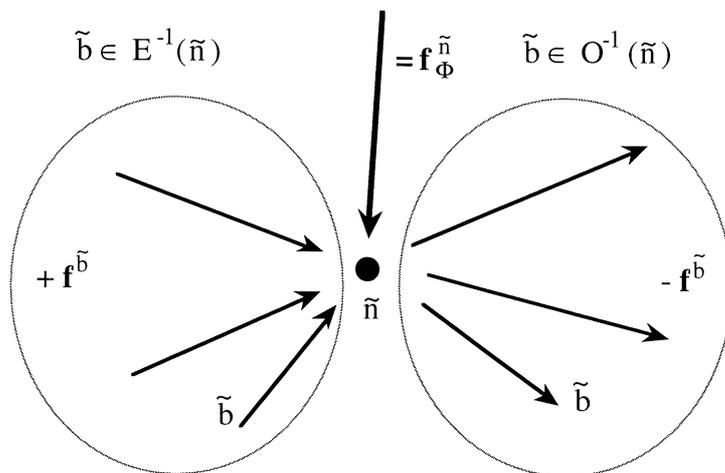


Figure 8.6 : équilibre d'un nœud du treillis

8.2.5 Équilibre de la structure, formulation variationnelle

a) Équilibre statique de la structure

Définition 8.5 On dit que la structure est équilibrée si et seulement si le principe fondamental de la dynamique, appliqué à la statique, est vérifié. C'est à dire si l'ensemble des efforts s'exerçant sur un nœud est équilibré (figure 8.6)

$$\forall \tilde{n}, \quad - \sum_{\tilde{b} \in O^{-1}(\tilde{n})} \mathbf{f}^{\tilde{b}} + \sum_{\tilde{b} \in E^{-1}(\tilde{n})} \mathbf{f}^{\tilde{b}} = \mathbf{f}_{\phi}^{\tilde{n}}. \tag{8.15}$$

b) Formulation variationnelle

Pour les problèmes linéaires, les formulations variationnelles sont très pratiques car elles intègrent en une seule relation toutes les équations. En faisant preuve d'astuce, on arrive alors plus facilement à résoudre le problème. De plus, elles permettent d'écrire des formulations en déplacement sous forme intégrale où le champ test est un peu le symétrique du champ de déplacement, ce qui facilite la résolution. Du point de vue des mathématiques, les espaces de Sobolev donnent un sens à ces intégrales. Des théorèmes du type Lax-Milgram fournissent des conditions d'existence et d'unicité de solution sur ces espaces [10, 45]. On a donc un cadre de travail vaste, puissant et bien structuré. Toutes les formulations futures seront donc des formulations variationnelles.

Cependant, nous allons toujours choisir des champs tests qui s'annulent sur le bord de l'espace paramétrique. Les problèmes de bord et donc de conditions aux limites ne sont pas abordés dans ce chapitre. On n'aura donc pas de théorème d'existence et d'unicité de solution, mais on pourra quand même en préparer le travail. En conclusion, même si on pose le champ test dans le même espace que le champ de déplacement, il ne faut pas oublier que ce champ test s'annule sur les bords, ce qui n'est pas vrai pour le champ de déplacement.

Problème 8.1 La formulation variationnelle de l'équilibre de la structure s'écrit : trou-

ver les tensions $\mathbf{f}^{\bar{b}}$ telles que :

$$\forall \mathbf{v}^{\bar{n}}, \quad - \sum_{\bar{n}} \sum_{\bar{b} \in O^{-1}(\bar{n})} \langle \mathbf{f}^{\bar{b}}, \mathbf{v}^{\bar{n}} \rangle + \sum_{\bar{n}} \sum_{\bar{b} \in E^{-1}(\bar{n})} \langle \mathbf{f}^{\bar{b}}, \mathbf{v}^{\bar{n}} \rangle = \sum_{\bar{n}} \epsilon^f \langle \mathbf{f}_{\phi}^{\bar{n}}, \mathbf{v}^{\bar{n}} \rangle, \quad (8.16)$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$\forall \mathbf{v}^{\bar{n}}, \quad \sum_{\bar{b}} \langle \mathbf{f}^{\bar{b}}, \mathbf{v}^{E(\bar{b})} - \mathbf{v}^{O(\bar{b})} \rangle = \sum_{\bar{n}} \epsilon^f \langle \mathbf{f}_{\phi}^{\bar{n}}, \mathbf{v}^{\bar{n}} \rangle. \quad (8.17)$$

8.3 Analyse statique de la structure, modélisation continue du premier gradient

8.3.1 Transformation d'une somme discrète en intégrale

Nous voulons rendre continue une structure discrète. Il faut alors transformer les différences finies par des dérivées partielles. Cela n'est pas suffisant car les deux sont équivalents. Si l'on veut vraiment un modèle continu, il ne faut garder qu'un nombre fini de dérivées partielles. Dans la démarche classique des développements asymptotiques, cela consiste à identifier les puissances de ϵ . Cette identification n'est possible que si l'on fait tendre ϵ vers 0 (même si pour une structure réelle ϵ a une valeur finie). On propose alors le théorème suivant qui permet lors de ce passage $\epsilon \rightarrow 0$ de transformer une somme sur toutes les cellules en une intégrale sur l'espace paramétrique. Sans ce théorème, il n'y a pas de formulation variationnelle possible. Ce théorème est tout simplement basé sur la définition des intégrales par les sommes de Riemann.

Théorème 8.1 Soit un champ vectoriel $\mathbf{A}(\lambda)$ telle que cette fonction de λ vérifie la propriété suivante

$$\mathbf{A}(\lambda) = \epsilon^{\mathcal{D}} \mathbf{A}^{\mathcal{D}}(\lambda) + \mathcal{O}(\epsilon^{\mathcal{D}+1}), \quad (8.18)$$

alors nous avons lorsque ϵ tend vers zéro ou ce qui est identique \mathcal{C} tend vers l'infini

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{\mathcal{c}} \mathbf{A}(\lambda) = \int_{\Lambda} \mathbf{A}^{\mathcal{D}}(\lambda) d\lambda \quad \Lambda = [0, 1]^{\mathcal{D}}. \quad (8.19)$$

Preuve : on utilise les propriétés des sommes de Riemann

$$\sum_{\mathcal{c}} \mathbf{A}(\lambda) = \sum_{\mathcal{c}} \epsilon^{\mathcal{D}} \left[\mathbf{A}^{\mathcal{D}}(\lambda) + \mathcal{O}(\epsilon^1) \right] = \frac{1}{\mathcal{C}^{\mathcal{D}}} \sum_{\mathcal{c}} \left[\mathbf{A}^{\mathcal{D}}(\lambda) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mathcal{C}}\right) \right],$$

il n'y a plus qu'à faire tendre $\mathcal{C} \rightarrow \infty$. □

Corollaire 8.1 Soit un champ vectoriel $\mathbf{A}^{\bar{b}}$ telle que ces $\tilde{\mathcal{B}}$ fonctions de λ vérifient les deux propriétés

$$\begin{cases} \sum_{\bar{b} \in \tilde{\mathcal{B}}} \mathbf{A}^{\bar{b}} = \sum_{\mathcal{c}} \sum_{\mathcal{b}} \mathbf{A}^{\mathcal{b}}, \\ \mathbf{A}^{\bar{b}} = \epsilon^{\mathcal{D}} \mathbf{A}^{\mathcal{D}, \mathcal{b}}(\lambda) + \mathcal{O}(\epsilon^{\mathcal{D}+1}), \end{cases} \quad (8.20)$$

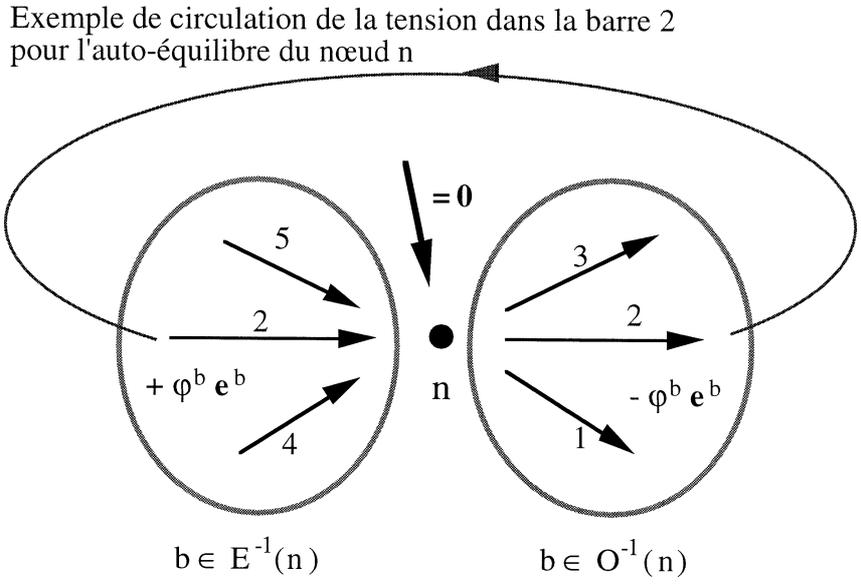


Figure 8.7 : auto-équilibre de la cellule

alors lorsque ϵ tend vers zéro

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_c \sum_b \mathbf{A}^b = \int_{\Lambda} \sum_{b \in \mathcal{B}} \mathbf{A}^{\mathcal{D},b}(\lambda) d\lambda \quad \Lambda = [0, 1]^{\mathcal{D}}. \quad (8.21)$$

Corollaire 8.2 Soit un champ vectoriel $\mathbf{A}^{\tilde{n}}$ telle que ces $\tilde{\mathcal{N}}$ fonctions de λ vérifient les deux propriétés

$$\begin{cases} \sum_{\tilde{n} \in \tilde{\mathcal{N}}} \mathbf{A}^{\tilde{n}} = \sum_c \sum_n \mathbf{A}^n, \\ \mathbf{A}^{\tilde{n}} = \epsilon^{\mathcal{D}} \mathbf{A}^{\mathcal{D},n}(\lambda) + \mathbf{O}(\epsilon^{\mathcal{D}+1}), \end{cases} \quad (8.22)$$

alors lorsque ϵ tend vers zéro

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_c \sum_n \mathbf{A}^n = \int_{\Lambda} \sum_{n \in \mathcal{N}} \mathbf{A}^{\mathcal{D},n}(\lambda) d\lambda \quad \Lambda = [0, 1]^{\mathcal{D}}. \quad (8.23)$$

8.3.2 Tension auto-équilibrée

Définition 8.6 Soit φ_k^b une base de \mathcal{K} B-vecteurs dits auto-équilibrés. Ils sont définis par

$$\forall \mathbf{v}^n, \quad \sum_n \langle \sum_{b \in E^{-1}(n)} \varphi_k^b \mathbf{e}^{0,b} - \sum_{b \in O^{-1}(n)} \varphi_k^b \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{v}^n \rangle = 0, \quad (8.24)$$

Ce qui est identique à

$$\forall \mathbf{v}^n, \quad \sum_b \varphi_k^b \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle = 0. \quad (8.25)$$

On normalise les φ_k^b de la sorte

$$\sum_b \frac{\varphi_k^b \varphi_h^b}{k^{-1,b}} = \delta_{kh}. \quad (8.26)$$

Remarque : les φ_k^b sont orthogonaux aux B-vecteurs $\langle \mathbf{e}^b, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle$ par le B-produit scalaire, les B-vecteurs φ_k^b sont donc en nombre fini $\mathcal{K} < \mathcal{B}$. Les φ_k^b ne sont pas orthonormés entre eux par le produit scalaire naturel mais ils le sont pas un produit scalaire pondéré.

8.3.3 Tension à l'ordre -1

Proposition 8.2 *La tension dans la barre b à l'ordre -1 s'écrit comme une combinaison linéaire des tensions auto-équilibrées φ_k^b*

$$f^{-1,b} = k^{-1,b} \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{u}^{0,E(b)} - \mathbf{u}^{0,O(b)} \rangle, \quad (8.27)$$

$$= \sum_k f_k^{-1} \varphi_k^b \quad (8.28)$$

Remarque : il est courant en homogénéisation des milieux périodiques d'avoir à résoudre un problème sur la cellule [51]. Ce problème se résout généralement par des méthodes numériques en même temps que le problème sur le milieu continu équivalent. La particularité de l'homogénéisation discrète est de pouvoir extraire de ce système sur la cellule une base finie de solution analytique simple, les tensions auto-équilibrées φ_k^b .

Preuve : dans le problème variationnel, nous prenons comme champ test

$$\mathbf{v}^{\tilde{n}} = \epsilon^{\mathcal{D}+1} \theta(\lambda) \mathbf{v}^n. \quad (8.29)$$

Alors nous obtenons

$$\forall (\theta(\lambda), \mathbf{v}^n), \quad \int_{\Lambda} \sum_b \langle \mathbf{f}^{-1,b}, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle \theta(\lambda) d\Lambda = 0,$$

cette équation est satisfaite pour toute fonction θ , alors nécessairement

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}^n, \quad \sum_b \langle \mathbf{f}^{-1,b}, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle &= 0, \\ \sum_b f^{-1,b} \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Cette équation signifie l'auto-équilibre de tous les nœuds n de la cellule élémentaire. On dit que les tensions $f^{-1,b}$ sont auto-équilibrées. Elles se projettent donc sur les φ_k^b qui forment une base de tension auto-équilibrée. Alors nous pouvons définir des f_k^{-1} par

$$f^{-1,b} = \sum_k f_k^{-1} \varphi_k^b.$$

□

Les tensions dans les barres à l'ordre -1 sont nulles comme le montre le théorème suivant.

Théorème 8.2 *Nous avons les résultats suivants :*

$$\begin{cases} \forall k \in \mathcal{K} & f_k^{-1} = 0, \\ \forall b \in \mathcal{B} & f^{-1,b} = 0, \\ \forall b \in \mathcal{B} & \mathbf{f}^{-1,b} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (8.30)$$

Preuve : nous avons par définition de $f^{-1,b}$

$$f^{-1,b} = k^{-1,b} \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{u}^{0,E(b)} - \mathbf{u}^{0,O(b)} \rangle = \sum_k f_k^{-1} \varphi_k^b,$$

multiplions cette équation par φ_h^b , divisons par $k^{-1,b}$, effectuons la somme sur b et utilisons le fait que les B-vecteurs φ_k^b sont auto-équilibrés

$$\begin{aligned} \sum_b \varphi_h^b \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{u}^{0,E(b)} - \mathbf{u}^{0,O(b)} \rangle &= \sum_k f_k^{-1} \sum_b \frac{\varphi_k^b \varphi_h^b}{k^{-1,b}}, \\ 0 &= f_h^{-1}. \end{aligned}$$

Nous avons immédiatement

$$f^{-1,b} = 0, \quad \mathbf{f}^{-1,b} = \mathbf{o},$$

□

8.3.4 Déplacement macroscopique

Définition 8.7 Soit \mathcal{M} (comme Macroscopique) l'espace défini par l'ensemble des vecteurs \mathbf{v}^n tels que

$$\mathcal{M} = \left\{ \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^{3\mathcal{N}} / \forall b \in \mathcal{B}, \quad f^{-1,b}(\mathbf{v}^n) = k^{-1,b} \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle = 0 \right\}. \quad (8.31)$$

Soit \mathbf{e}_p^n , \mathcal{P} vecteurs formant une base de \mathcal{M} , alors

$$\forall (b,p) \in \mathcal{B} \times \mathcal{P}, \quad \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{e}_p^{E(b)} - \mathbf{e}_p^{O(b)} \rangle = 0, \quad (8.32)$$

avec $\mathcal{P} \leq 3\mathcal{N}$ et les N -vecteurs \mathbf{e}_p^n sont orthogonalisés et normalisés par le N -produit scalaire pondéré

$$\frac{1}{\mathcal{N}} \sum_n \langle \mathbf{e}_p^n, \mathbf{e}_q^n \rangle = \delta_{pq}. \quad (8.33)$$

Théorème 8.3 Le champ de déplacement macroscopique $\mathbf{u}^{0,n}$ n'est pas quelconque, en effet (figure 8.8),

$$\mathbf{u}^{0,n} \in \mathcal{M}. \quad (8.34)$$

Soit u_p^0 la projection du N -vecteur $\mathbf{u}^{0,n}$ sur les \mathbf{e}_p^n , base de \mathcal{M} , alors

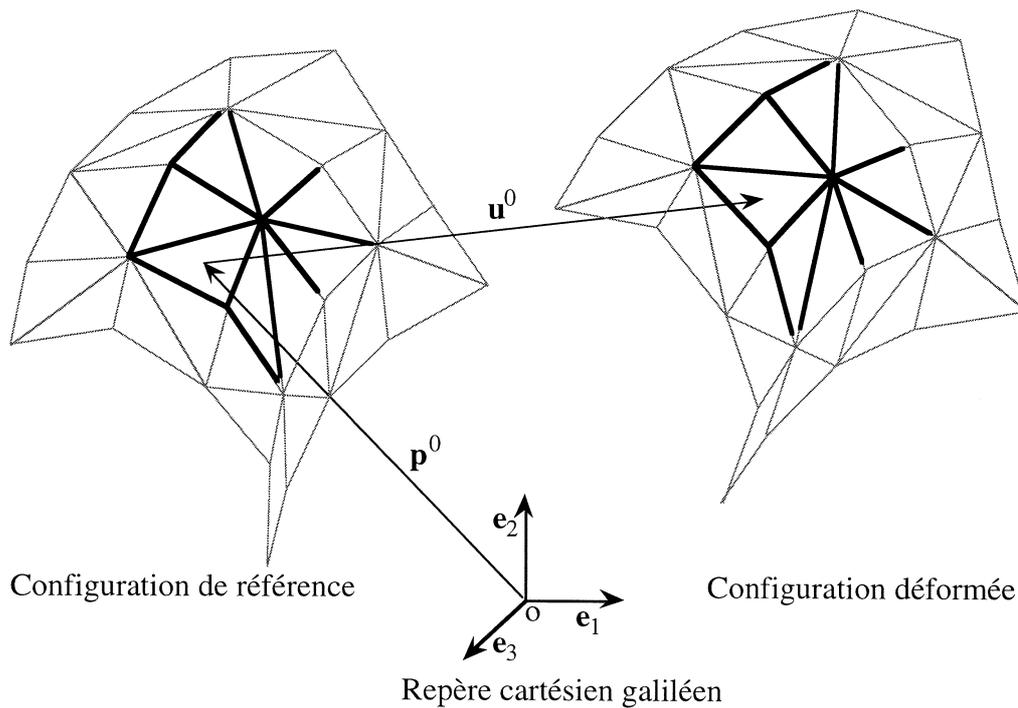
$$\mathbf{u}^{0,n} = \sum_p u_p^0 \mathbf{e}_p^n \quad (8.35)$$

Preuve : nous savons que $f^{-1,b} = 0$, alors

$$\forall b, \quad \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{u}^{0,E(b)} - \mathbf{u}^{0,O(b)} \rangle = 0,$$

ce qui signifie tout simplement que les $\mathbf{u}^{0,n} \in \mathcal{M}$. □

Espace macroscopique pour les treillis 3D, plaques et coques sans mécanisme



Espace macroscopique pour les poutres

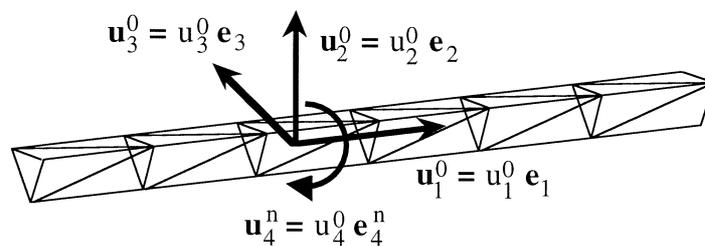


Figure 8.8 : *espace macroscopique pour les déplacements*

Proposition 8.3 *Pour les structures réticulées, les \mathbf{e}_p^n ne sont pas quelconques. Toute structure en a au moins 3 et l'on prend la base cartésienne de l'espace 3D (figure 8.8). Soit*

$$\mathbf{e}_1^n = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2^n = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_3^n = \mathbf{e}_3. \quad (8.36)$$

Les structures poutres ont un vecteur supplémentaire qui représente la torsion de la poutre, soit

$$\mathbf{e}_4^n = c_1 \boldsymbol{\tau} \wedge \mathbf{p}^{1,n-g}, \quad (8.37)$$

avec

1. g le barycentre des nœuds de la cellule,

$$\mathbf{p}^{1,g} = \frac{1}{N} \sum_n \mathbf{p}^{1,n}, \quad (8.38)$$

2. $\boldsymbol{\tau}$ le vecteur tangent à la poutre

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\frac{d\mathbf{p}^0}{d\lambda}}{\left\| \frac{d\mathbf{p}^0}{d\lambda} \right\|}. \quad (8.39)$$

3. c_1 une constante permettant de normaliser \mathbf{e}_4^n à 1.

Preuve : pour les trois premiers vecteurs, le résultat est évident car

$$\forall (n, m), \quad \mathbf{e}_{i \in \{1,2,3\}}^{n-m} = \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_i = 0,$$

donc $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \mathcal{M}$. De plus, ils sont orthogonaux entre eux car

$$\frac{1}{N} \sum_n \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Soit $\mathbf{e}_4^n = c_1 \boldsymbol{\tau} \wedge \mathbf{p}^{1,n-g}$, alors montrons que $\mathbf{e}_4^n \in \mathcal{M}$ pour les poutres

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_4^n &= c_1 \frac{d\mathbf{p}^0}{d\lambda} \wedge \mathbf{p}^{1,n-g}, \\ \mathbf{e}^{0,b} &= \frac{\mathbf{p}^{1,b}}{\|\mathbf{p}^{1,b}\|} = c_2 \left[\mathbf{p}^{1,E(b)} - \mathbf{p}^{1,O(b)} + \frac{d\mathbf{p}^0}{d\lambda} \delta^b \right], \end{aligned}$$

effectuons le produit scalaire de ces deux vecteurs

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{e}_4^{E(b)} - \mathbf{e}_4^{O(b)} \rangle &= c_3 \langle \mathbf{p}^{1,E(b)} - \mathbf{p}^{1,O(b)} + \frac{d\mathbf{p}^0}{d\lambda} \delta^b, \frac{d\mathbf{p}^0}{d\lambda} \wedge \mathbf{p}^{1,(b)-O(b)} \rangle, \\ &= c_3 \left[\underbrace{\left(\mathbf{p}^{1,E(b)} - \mathbf{p}^{1,O(b)}, \frac{d\mathbf{p}^0}{d\lambda}, \mathbf{p}^{1,E(b)} - \mathbf{p}^{1,O(b)} \right)}_0 \right. \\ &\quad \left. + \delta^b \underbrace{\left(\frac{d\mathbf{p}^0}{d\lambda}, \frac{d\mathbf{p}^0}{d\lambda}, \mathbf{p}^{1,E(b)} - \mathbf{p}^{1,O(b)} \right)}_0 \right], \\ &= 0, \quad \forall b. \end{aligned}$$

\mathbf{e}_4^n doit-être orthogonal aux \mathbf{e}_i

$$\frac{1}{N} \sum_n \langle \mathbf{e}_i, c_1 \boldsymbol{\tau} \wedge \mathbf{p}^{1,n-g} \rangle = c_1 \langle \mathbf{e}_i, \boldsymbol{\tau} \wedge \left(\frac{1}{N} \sum_n \mathbf{p}^{1,n} - \mathbf{p}^{1,g} \right) \rangle = 0.$$

Il ne reste plus qu'à définir la constante c_1 par

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_n \|\boldsymbol{\tau} \wedge \mathbf{p}^{1,n-g}\|^2}} > 0. \quad (8.40)$$

□

Remarque :

1. pour les poutres, la dimension de l'espace paramétrique $\mathcal{D} = 1$, les dérivées partielles sont donc des dérivées droites,
2. pour les coques et les treillis 3D, le vecteur $\mathbf{e}_4^n \notin \mathcal{M}$ car le second produit mixte est non nul. En effet, dans ces cas là, la dérivée droite doit être remplacée par des dérivées partielles,
3. nous n'avons pas prouvé qu'ils n'y avait pas d'autres \mathbf{e}_p^n . La pratique nous a appris que si la structure ne comportait pas de mécanisme global se retrouvant dans la cellule, alors il n'y en avait pas d'autres.

8.3.5 Tension à l'ordre 0

Proposition 8.4 *La tension dans la barre b à l'ordre 0 s'écrit comme une combinaison linéaire des φ_k^b*

$$\mathbf{f}^{0,b} = f^{0,b} \mathbf{e}^{0,b}, \quad (8.41)$$

avec

$$\begin{aligned} f^{0,b} &= k^{-1,b} \left[\langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{u}^{1,E(b)} - \mathbf{u}^{1,O(b)} \rangle + \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{u}^{0,E(b)}}{\partial \lambda^{\alpha}} \delta^{\alpha,b} \right] + \langle \mathbf{e}^{1,b}, \mathbf{u}^{0,E(b)} - \mathbf{u}^{0,O(b)} \rangle, \\ &= \sum_k f_k^0 \varphi_k^b. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Preuve : dans le problème variationnel, nous prenons comme champ test

$$\mathbf{v}^{\tilde{n}} = \epsilon^{\mathcal{D}} \theta(\lambda) \mathbf{v}^n. \quad (8.43)$$

Alors après les mêmes calculs que ceux effectués à l'ordre -1, on trouve que les tensions $f^{0,b}$ sont auto-équilibrées. Elles se projettent donc sur les φ_k^b et nous pouvons définir des f_k^0 . □

Définition 8.8 *On définit le symbole $\stackrel{\text{per}}{=}$ qui signifie que l'égalité est à prendre en compte dans les deux cas suivants :*

1. soit la structure non déformée est parfaitement périodique. La position macroscopique \mathbf{p}^0 est linéaire en fonction de la variable λ , la position locale $\mathbf{p}^{1,n}$ ne dépend pas de λ et les autres positions $\mathbf{p}^{\nu,n}$ sont nulles pour tout ordre $\nu \geq 2$. Les expressions sont alors beaucoup plus simples,
2. soit l'espace macroscopique \mathcal{M} est de dimension trois. C'est le cas pour les treillis 3D, les treillis coques et les treillis plaques n'ayant pas de mécanisme. Dans ces trois cas là, la base naturelle de \mathcal{M} est $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Elle est constante dans l'espace (indépendante de λ) et n'est pas fonction d'un nœud n de la cellule. Les expressions se simplifient là encore.

Définition 8.9 Afin de simplifier les écritures futures, définissons

$$\begin{cases} \beta_p^{0,\alpha,b} &= \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{e}_p^{E(b)} \delta^{\alpha,b} \rangle, \\ \beta_p^{1,b} &= \langle \mathbf{e}^{0,b}, \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{e}_p^{E(b)}}{\partial \lambda^{\alpha}} \delta^{\alpha,b} \rangle + \langle \mathbf{e}^{1,b}, \mathbf{e}_p^{E(b)} - \mathbf{e}_p^{O(b)} \rangle \stackrel{\text{per}}{=} 0, \end{cases} \quad (8.44)$$

$$\begin{cases} \psi_{kp}^{0,0,\alpha} &= \sum_b \varphi_k^b \beta_p^{0,\alpha,b}, \\ \psi_{kp}^{0,1} &= \sum_b \varphi_k^b \beta_p^{1,b} \stackrel{\text{per}}{=} 0. \end{cases} \quad (8.45)$$

Les $f^{0,b}$ et les f_k^0 définissant la tension à l'ordre 0 s'écrivent :

$$f^{0,b}(u_p^0, u^{1,n}) = k^{-1,b} \left\{ \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{u}^{1,E(b)} - \mathbf{u}^{1,O(b)} \rangle + \sum_p \left[\beta_p^{1,b} u_p^0 + \sum_{\alpha} \beta_p^{0,\alpha,b} \frac{\partial u_p^0}{\partial \lambda^{\alpha}} \right] \right\}, \quad (8.46)$$

$$f_k^0(u_p^0) = \sum_p \left[\psi_{kp}^{0,1} u_p^0 + \sum_{\alpha} \psi_{kp}^{0,0,\alpha} \frac{\partial u_p^0}{\partial \lambda^{\alpha}} \right]. \quad (8.47)$$

Preuve : Il n'y a plus qu'à remplacer $\mathbf{u}^{0,n}$ par sa projection sur \mathcal{M} et à collationner les différents termes pour trouver la nouvelle expression de $f^{0,b}$, en effet :

$$\mathbf{u}^{0,n} = \sum_p u_p^0 \mathbf{e}_p^n.$$

On multiplie cette définition de $f^{0,b}$ par $\varphi_h^b/k^{-1,b}$ et on somme sur b en sachant que les $\mathcal{K} \varphi_k^b$ sont des B-vecteurs auto-équilibrés

$$\sum_b \varphi_h^b \left\{ \sum_p \left[\beta_p^{1,b} u_p^0 + \sum_{\alpha} \beta_p^{0,\alpha,b} \frac{\partial u_p^0}{\partial \lambda^{\alpha}} \right] \right\} = f_h^0.$$

□

Remarque : pour les plaques, coques et treillis 3D, les vecteurs \mathbf{e}_p^n sont au nombre de trois et indépendants du nœud n ainsi que de la position de la cellule λ . Les expressions se simplifient alors et $\psi_{kp}^{0,1} = 0$. Nous voyons alors que les poutres sont paradoxalement plus compliquées à étudier.

8.3.6 Modèle macroscopique du premier ordre en statique

Problème 8.2 *Le champ de déplacement macroscopique $\mathbf{u}^{0,n} \in \mathcal{M}$ est solution du problème variationnel :*

$$\forall \mathbf{v}^{0,n} \in \mathcal{M}, \quad \mathfrak{a}^0(\mathbf{u}_p^0, \mathbf{v}_p^0) = \mathbb{l}^0(\mathbf{v}_p^0), \quad (8.48)$$

avec pour la forme bilinéaire symétrique \mathfrak{a}^0 et la forme linéaire \mathbb{l}^0 :

$$\mathfrak{a}^0(\mathbf{u}_p^0, \mathbf{v}_p^0) = \int_{\Lambda} \sum_k f_k^0(\mathbf{u}_p^0) f_k^0(\mathbf{v}_p^0) d\lambda, \quad (8.49)$$

$$\mathbb{l}^0(\mathbf{v}_p^0) = \int_{\Lambda} \sum_p \sum_n \langle \mathbf{f}^{1,n}, \mathbf{e}_p^n \rangle v_p^0 d\lambda. \quad (8.50)$$

Preuve : nous choisissons dans la formulation variationnelle la fonction test $\mathbf{v}^{\tilde{n}}$ dans l'ensemble \mathcal{M} , c'est à dire que l'on peut écrire

$$\mathbf{v}^{\tilde{n}} = \epsilon^{\mathcal{D}-1} \mathbf{v}^{0,n} = \epsilon^{\mathcal{D}-1} \sum_p v_p^0 \mathbf{e}_p^n. \quad (8.51)$$

La tension virtuelle dans la barre b est définie comme la tension réelle. La tension d'ordre ϵ^{-1} est nulle car le champ test $\mathbf{v}^{0,n}$ appartient à \mathcal{M} , comme l'est le champ réel $\mathbf{u}^{0,n}$.

$$\begin{aligned} k^b \langle \mathbf{e}^b, \frac{\mathbf{v}^{E(\tilde{b})} - \mathbf{v}^{O(\tilde{b})}}{\epsilon^{\mathcal{D}-1}} \rangle &= \frac{1}{\epsilon} \underbrace{f^{-1,b}(\mathbf{v}^{0,n})}_0 + f^{0,b}(\mathbf{v}^{0,n}, \mathbf{v}^{1,n} \equiv \mathbf{o}) + O(\epsilon), \\ \langle \mathbf{e}^b, \mathbf{v}^{E(\tilde{b})} - \mathbf{v}^{O(\tilde{b})} \rangle &= \epsilon^{\mathcal{D}-1} \frac{\epsilon}{k^{-1,b}} f^{0,b}(\mathbf{v}^{0,n}) + O(\epsilon^{\mathcal{D}+1}). \end{aligned}$$

Alors le travail virtuel de la barre b est :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}^b, \mathbf{v}^{E(\tilde{b})} - \mathbf{v}^{O(\tilde{b})} \rangle &= [f^{0,b}(\mathbf{u}^{0,n}, \mathbf{u}^{1,n}) + O(\epsilon)] \langle \mathbf{e}^b, \mathbf{v}^{E(\tilde{b})} - \mathbf{v}^{O(\tilde{b})} \rangle, \\ &= \epsilon^{\mathcal{D}} f^{0,b}(\mathbf{u}^{0,n}, \mathbf{u}^{1,n}) \frac{f^{0,b}(\mathbf{v}^{0,n})}{k^{-1,b}} + O(\epsilon^{\mathcal{D}+1}), \end{aligned}$$

or on la propriété suivante :

$$\begin{aligned} \sum_b f^{0,b}(\mathbf{u}^{0,n}, \mathbf{u}^{1,n}) \frac{f^{0,b}(\mathbf{v}^{0,n})}{k^{-1,b}} &= \sum_k f_k^0(\mathbf{u}^{0,n}) \sum_b \varphi_k^b \frac{f^{0,b}(\mathbf{v}^{0,n})}{k^{-1,b}}, \\ &= \sum_k f_k^0(\mathbf{u}^{0,n}) f_k^0(\mathbf{v}^{0,n}), \end{aligned}$$

le travail virtuel total devient :

$$\sum_c \epsilon^{\mathcal{D}} \left[\sum_k f_k^0(\mathbf{u}^{0,n}) f_k^0(\mathbf{v}^{0,n}) + O(\epsilon) \right].$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre $\epsilon \rightarrow 0$ pour obtenir la forme bilinéaire \mathfrak{a}^0 . La forme linéaire \mathbb{l}^0 concerne les forces extérieures supposées être dans ce cas d'ordre ϵ , elles apparaissent alors dans le problème variationnel.

$$\sum_{\tilde{n}} \epsilon \langle \mathbf{f}^{1,\tilde{n}}, \mathbf{v}^{\tilde{n}} \rangle = \sum_c \sum_n \epsilon \langle \mathbf{f}^{1,n}, \epsilon^{\mathcal{D}-1} \mathbf{v}^{0,n} \rangle = \sum_c \epsilon^{\mathcal{D}} \sum_n \sum_p \langle \mathbf{f}^{1,n}, \mathbf{e}_p^n \rangle v_p^0.$$

On obtient alors $\mathbb{l}^0(\mathbf{v}_p^0)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. □

8.3.7 Cas des treillis 3D, modèle continu du premier gradient, écriture dans l'espace physique

a) Liminaire

Lorsque l'espace des déplacements macroscopiques \mathcal{M} est défini par la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ indépendante de λ , les expressions se simplifient énormément. C'est le cas des treillis 3D, des coques et des plaques n'ayant pas de mécanismes. Ce n'est pas le cas des poutres 3D. Dans ce cadre plus simple, il est inutile d'introduire les indices p variant de $\{1, \dots, \mathcal{P} = 3\}$. Disons plutôt que nous pouvons confondre les indices p et les indices i de l'espace physique. Alors les P-vecteurs peuvent être considérés comme des vecteurs de l'espace physique. On peut ainsi faire les définitions suivantes qui ne sont qu'une écriture des résultats précédents dans l'espace physique.

Définition 8.10 *On peut définir*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}^{0,n} \in \mathcal{M} \iff \mathbf{u}^{0,n} = \mathbf{u}^0, \iff \sum_p \mathbf{u}_p^0 \mathbf{e}_p^n, \\ \mathbf{B}^{0,\alpha,b} = \mathbf{e}^{0,b} \delta^{\alpha,b}, \iff \beta_p^{0,\alpha,b}, \\ \psi_k^{0,\alpha} = \sum_b \varphi_k^b \mathbf{B}^{0,\alpha,b} = \sum_b \varphi_k^b \mathbf{e}^{0,b} \delta^{\alpha,b}, \iff \psi_{kp}^{0,0,\alpha}, \\ f_k^0(\mathbf{u}^0) = \sum_\alpha \langle \psi_k^{0,\alpha}, \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial \lambda^\alpha} \rangle, \\ \mathfrak{a}^0(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0) = \int_\Lambda \sum_k f_k^0(\mathbf{u}^0) f_k^0(\mathbf{v}^0) d\lambda, \\ \mathfrak{l}^0(\mathbf{v}^0) = \int_\Lambda \sum_n \langle \mathbf{f}^{1,n}, \mathbf{v}^0 \rangle d\lambda. \end{array} \right. \quad (8.52)$$

Remarque : pour les treillis 3D, l'espace paramétrique est lui-aussi de dimension 3. On peut alors remplacer l'indice α par un indice i représentant l'espace physique comme nous venons de le faire pour l'indice p . Cependant, pour les plaques et les coques, l'espace paramétrique est de dimension 2. On garde donc pour l'instant l'indice α dans les relations.

b) Vecteur contrainte de Piola-Kirchoff, équilibre dans l'espace paramétrique

Définition 8.11 *On définit les vecteurs contraintes de Piola-Kirchoff $\mathbf{s}^{0,\alpha}$ dans l'espace paramétrique par l'équilibre de la structure qui s'écrit en formulation variationnelle*

$$\forall \mathbf{v}^0, \quad \int_\Lambda \sum_\alpha \langle \mathbf{s}^{0,\alpha}, \frac{\partial \mathbf{v}^0}{\partial \lambda^\alpha} \rangle d\lambda = \int_\Lambda \sum_n \langle \mathbf{f}^{1,n}, \mathbf{v}^0 \rangle d\lambda, \quad (8.53)$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$\sum_\alpha \frac{\partial \mathbf{s}^{0,\alpha}}{\partial \lambda^\alpha} + \sum_n \mathbf{f}^{1,n} = \mathbf{o}. \quad (8.54)$$

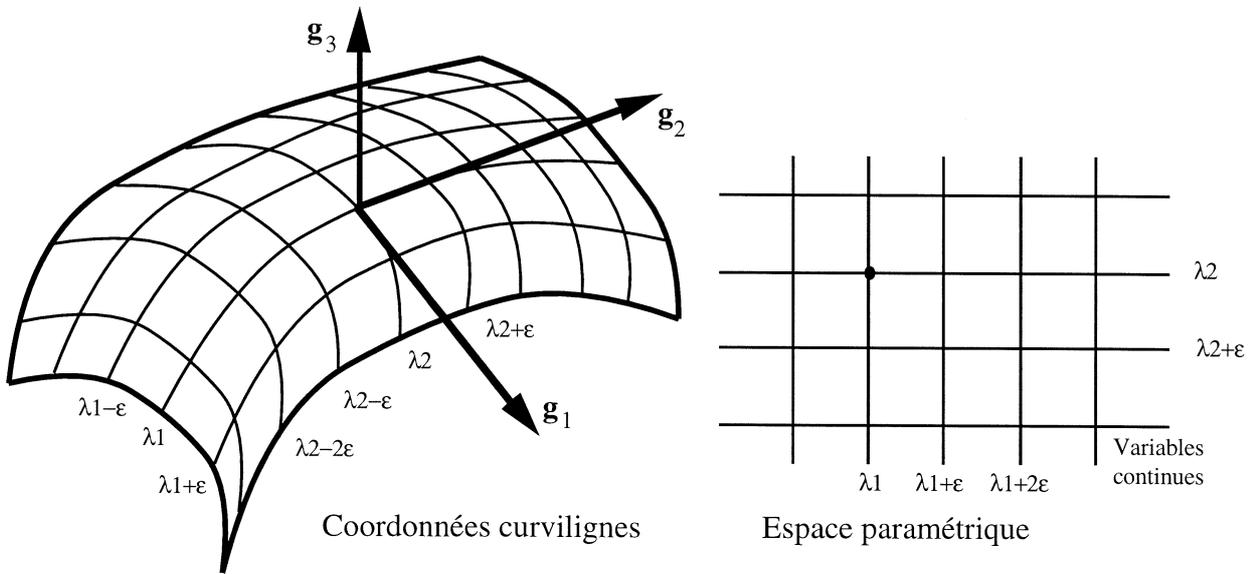


Figure 8.9 : base covariante en un point du milieu continu

La relation entre le vecteur contrainte $\mathbf{s}^{0,\alpha}$ et la tension dans une barre $f^{0,b}$ ou la déformation $\frac{\partial \mathbf{v}^0}{\partial \lambda^\beta}$ est

$$\mathbf{s}^{0,\alpha} = \sum_b f^{0,b} \mathbf{e}^{0,b} \delta^{\alpha,b} = \sum_k \psi_k^{0,\alpha} \sum_\beta \langle \psi_k^{0,\beta}, \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial \lambda^\beta} \rangle. \quad (8.55)$$

Preuve : la dernière égalité de la définition nécessite une démonstration. La relation entre $\mathbf{s}^{0,\alpha}$ et $\frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial \lambda^\beta}$ est immédiate sachant les définitions précédentes. La relation entre $\mathbf{s}^{0,\alpha}$ et $f^{0,b}$ peut se déduire elle aussi des définitions précédentes, cependant elle se retrouve sans faire intervenir toutes les formulations que nous avons déjà développées. En effet, il suffit d'écrire l'équilibre variationnel du treillis sous l'action des forces $\epsilon \mathbf{f}^{1,n}$ aux nœuds. On choisit pour cela un champ test $\mathbf{v}^{\tilde{n}} = \epsilon \mathcal{D}^{-1} \mathbf{v}^0$, on a alors

$$\int_\Lambda \sum_b \langle f^{0,b} \mathbf{e}^{0,b}, \sum_\alpha \frac{\partial \mathbf{v}^0}{\partial \lambda^\alpha} \delta^{\alpha,b} \rangle d\lambda = \int_\Lambda \sum_n \langle \mathbf{f}^{1,n}, \mathbf{v}^0 \rangle d\lambda.$$

A partir de cette égalité, on écrit facilement l'égalité présentée.

□

c) Base covariante et contravariante, domaine physique du modèle continu

Définition 8.12 Une base covariante (\mathbf{g}_α), ainsi qu'une base contravariante (\mathbf{g}^α), peuvent être définies en tout point de l'espace physique par le changement de variable donnant la position d'un point dans l'espace physique (x_i) à l'aide de sa position dans l'espace paramétrique (λ^α) (figure 8.9). Ce changement de variable $\lambda \rightarrow x$ est tout simplement la position macroscopique d'un nœud $\mathbf{p}^0(\lambda)$.

$$\lambda \xrightarrow{\mathbf{p}^0} x. \quad (8.56)$$

La base covariante (\mathbf{g}_α) et la base contravariante (\mathbf{g}^α) sont définies par

$$\begin{cases} \forall \alpha, & \mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \lambda^\alpha}, \\ \forall \alpha, \beta, & \langle \mathbf{g}^\alpha, \mathbf{g}_\beta \rangle = \delta_\beta^\alpha, \end{cases} \quad (8.57)$$

où δ_β^α est un symbole de Kronecker. Le Jacobien g de la transformation $x \rightarrow \lambda$ est le produit mixte $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ pour les treillis 3D, et la norme $\|\mathbf{g}_1 \wedge \mathbf{g}_2\|$ pour les plaques et les coques. Le jacobien de la transformation inverse $\lambda \rightarrow x$ est $\frac{1}{g}$.

Définition 8.13 On appelle domaine physique du modèle continu l'espace X définissant les bornes du domaine pour les variables x_i ($x_i = \langle \mathbf{p}^0, \mathbf{e}_i \rangle$).

$$(x_i) \in X \iff (\lambda^\alpha) \in \Lambda, \quad \Lambda = [0, 1]^{\mathcal{D}}. \quad (8.58)$$

Propriétés 8.2 la relation entre la dérivée partielle $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda^\alpha}$ et le gradient $\nabla \mathbf{v}$ est

$$\forall \mathbf{v}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda^\alpha} = \nabla \mathbf{v} @ \mathbf{g}_\alpha, \quad \nabla \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda^\alpha} \otimes \mathbf{g}^\alpha. \quad (8.59)$$

Remarque : le symbole \otimes représente le produit tensoriel de deux vecteurs, $\nabla \mathbf{v} @ \mathbf{g}_\alpha$ signifie appliquer la forme linéaire $\nabla \mathbf{v}$ au vecteur \mathbf{g}_α . Dans la littérature, on ne met rien plutôt que @, cependant ce symbole clarifie les relations entre les vecteurs et les tenseurs.

d) Chargement extérieur équivalent

Propriétés 8.3 Le chargement extérieur équivalent \mathbf{f}_ϕ^1 est

$$\mathbf{f}_\phi^1 = \frac{1}{g} \sum_n \mathbf{f}^{1,n} \quad (8.60)$$

Preuve : on fait le changement de variable $\lambda \rightarrow x$ dans la fonctionnelle \mathbb{I}^0

$$\mathbb{I}^0 = \int_\Lambda \sum_n \langle \mathbf{f}^{1,n}, \mathbf{v}^0 \rangle d\lambda = \int_X \sum_n \langle \mathbf{f}^{1,n}, \mathbf{v}^0 \rangle \frac{1}{g} dx = \int_X \langle \mathbf{f}_\phi^1, \mathbf{v}^0 \rangle dx.$$

□

e) Tenseur des contraintes, symétrie

Propriétés 8.4 On définit le tenseur des contraintes $\mathbb{\sigma}^0$ à partir du vecteur contrainte $\mathbf{s}^{0,\alpha}$ par la relation

$$\mathbb{\sigma}^0 = \frac{1}{g} \sum_\alpha \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{s}^{0,\alpha}. \quad (8.61)$$

Preuve : on fait le changement de variable $\lambda \rightarrow x$ dans la fonctionnelle \mathfrak{a}^0

$$\mathfrak{a}^0 = \int_{\Lambda} \sum_{\alpha} \langle \mathbf{s}^{0,\alpha}, \frac{\partial \mathbf{v}^0}{\partial \lambda^{\alpha}} \rangle d\lambda = \int_X \sum_{\alpha} \langle \mathbf{s}^{0,\alpha}, \nabla \mathbf{v}^0 \circ \mathbf{g}_{\alpha} \rangle \frac{1}{g} dx = \int_X \text{tr}(\mathfrak{c}^0 \circ \nabla \mathbf{v}^0) dx.$$

Il est cependant facile de montrer

$$\langle \mathbf{s}^{0,\alpha}, \nabla \mathbf{v}^0 \circ \mathbf{g}_{\alpha} \rangle = \text{tr}(\nabla \mathbf{v}^0 \circ \mathbf{g}_{\alpha} \otimes \mathbf{s}^{0,\alpha}) = \text{tr}(\mathbf{g}_{\alpha} \otimes \mathbf{s}^{0,\alpha} \circ \nabla \mathbf{v}^0).$$

□

Le milieu continu équivalent du premier gradient ne fait pas intervenir de couple. Cela entraîne dans un milieu continu la symétrie du tenseur des contraintes, ce qui implique que seule la partie symétrique du gradient de déformation engendrée par un champ test \mathbf{v}^0 intervient dans un calcul d'énergie de déformation [24, 50]. C'est ce que nous allons vérifier maintenant.

Propriétés 8.5 *Le tenseur des contraintes \mathfrak{c}^0 est symétrique, il peut se définir par*

$$\mathfrak{c}^0 = \frac{1}{g} \sum_b f^{0,b} p^{1,b} \mathbf{e}^{0,b} \otimes \mathbf{e}^{0,b}, \quad (8.62)$$

alors nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_X \text{tr}(\mathfrak{c}^0 \circ \nabla \mathbf{v}^0) dx = \int_X \text{tr}(\mathfrak{c}^0 \circ \varepsilon^0(\mathbf{v}^0)) dx, \\ \mathbf{s}^{0,\alpha} = g \mathfrak{c}^0 \circ \mathbf{g}^{\alpha}. \end{array} \right. \quad (8.63)$$

Preuve : on essaye d'introduire \mathbf{g}_{α} dans la définition de $\mathbf{s}^{0,\alpha}$. la contrainte $\mathbf{s}^{0,\alpha}$ étant définie sur les tensions φ_k^b . on commence par faire un petit calcul sur ces tensions auto-équilibrées φ_k^b .

$$\forall \mathbf{v}^n, \quad \langle \varphi_k^b \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle = 0.$$

Dans cette relation, on choisit

$$\mathbf{v}^n = \mathbb{G} \circ \mathbf{p}^{1,n},$$

où \mathbb{G} est un opérateur quelconque. Sachant que

$$\mathbf{p}^{1,b} = p^{1,b} \mathbf{e}^{0,b} = \mathbf{p}^{1,E(b)} - \mathbf{p}^{1,O(b)} + \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \lambda^{\alpha}} \delta^{\alpha,b},$$

alors il vient que

$$\mathbf{p}^{1,E(b)} - \mathbf{p}^{1,O(b)} = p^{1,b} \mathbf{e}^{0,b} - \sum_{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha} \delta^{\alpha,b}.$$

L'auto-équilibre des tensions φ_k^b s'écrit alors

$$\forall \mathbb{G}, \quad \langle \varphi_k^b \mathbf{e}^{0,b}, \mathbb{G} \circ \mathbf{p}^{1,b} \mathbf{e}^{0,b} - \mathbb{G} \circ \sum_{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha} \delta^{\alpha,b} \rangle = 0,$$

ce qui est équivalent à

$$\forall \mathbb{G}, \quad \text{tr}(\mathbb{G} \circ \left[p^{1,b} \mathbf{e}^{0,b} \otimes \varphi_k^b \mathbf{e}^{0,b} - \sum_{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha} \delta^{\alpha,b} \otimes \varphi_k^b \mathbf{e}^{0,b} \right]) = 0.$$

Cette relation étant vraie pour tout opérateur linéaire \mathbb{G} , on obtient finalement

$$\sum_{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha} \otimes \varphi_k^b e^{0,b} \delta^{\alpha,b} = \varphi_k^b p^{1,b} \mathbf{e}^{0,b} \otimes \mathbf{e}^{0,b}. \quad (8.64)$$

Ce qui est vrai pour une tension auto-équilibrée φ_k^b l'est aussi pour la tension $f^{0,b}$ (qui est aussi auto-équilibrée). Il suffit alors d'écrire

$$g_{\mathbb{G}^0} = \sum_{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha} \otimes \mathbf{s}^{0,\alpha} = \sum_{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha} \otimes \sum_b f^{0,b} e^{0,b} \delta^{\alpha,b} = \sum_b f^{0,b} p^{1,b} \mathbf{e}^{0,b} \otimes \mathbf{e}^{0,b}.$$

Le tenseur \mathbb{G}^0 étant symétrique, la partie anti-symétrique du gradient de déformation $\nabla \mathbf{v}^0$ n'intervient pas. De plus, le vecteur contrainte $\mathbf{s}^{0,\alpha}$ s'exprime en fonction de \mathbb{G}^0 par

$$\sum_{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha} \otimes \mathbf{s}^{0,\alpha} = g_{\mathbb{G}^0} = \sum_{\alpha} \mathbf{s}^{0,\alpha} \otimes \mathbf{g}_{\alpha}.$$

On applique alors le tenseur des contraintes \mathbb{G}^0 à la direction contravariante \mathbf{g}^{β}

$$g_{\mathbb{G}^0} @ \mathbf{g}^{\beta} = \sum_{\alpha} (\mathbf{s}^{0,\alpha} \otimes \mathbf{g}_{\alpha}) @ \mathbf{g}^{\beta} = \sum_{\alpha} \mathbf{s}^{0,\alpha} \delta_{\alpha}^{\beta} = \mathbf{s}^{0,\beta}.$$

□

f) Relation de comportement ; tenseur des contraintes, tenseur des déformations

Propriétés 8.6 La relation de comportement reliant les contraintes \mathbb{G}^0 aux déformations \mathbb{E}^0 est donnée par le tenseur de rigidité macroscopique \mathbb{K}^0

$$\mathbb{G}^0 = \mathbb{K}^0 @ \mathbb{E}^0(\mathbf{u}^0). \quad (8.65)$$

Le tenseur de rigidité \mathbb{K}^0 du quatrième ordre est doublement symétrique. Il est défini à l'aide des sous tenseurs de rigidité, du second ordre et symétriques, \mathbb{S}_k^0

$$\begin{cases} \mathbb{K}^0 &= \frac{1}{g} \sum_k \mathbb{S}_k^0 \otimes \mathbb{S}_k^0, \\ \mathbb{S}_k^0 &= \sum_{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha} \otimes \psi_k^{0,\alpha} = \sum_b \varphi_k^b p^{1,b} \mathbf{e}^{0,b} \otimes \mathbf{e}^{0,b}. \end{cases} \quad (8.66)$$

Preuve : on recherche la loi de comportement reliant les contraintes aux déformations. On connaît déjà la relation donnant le vecteur contrainte $\mathbf{s}^{0,\alpha}$ en fonction de $\frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial \lambda^{\beta}}$. On introduit le tenseur des contraintes dans cette relation.

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{G}^0} &= \sum_{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha} \otimes \mathbf{s}^{0,\alpha}, \\ &= \sum_k \sum_{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha} \otimes \psi_k^{0,\alpha} \sum_{\beta} \langle \psi_k^{0,\beta}, \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial \lambda^{\beta}} \rangle, \\ &= \sum_k \mathbb{S}_k^0 \sum_{\beta} \langle \psi_k^{0,\beta}, \nabla \mathbf{u}^0 @ \mathbf{g}_{\beta} \rangle, \\ &= \sum_k \mathbb{S}_k^0 \text{tr} \left(\sum_{\beta} \mathbf{g}_{\beta} \otimes \psi_k^{0,\beta} \circ \nabla \mathbf{u}^0 \right), \\ &= \sum_k \mathbb{S}_k^0 \text{tr} (\mathbb{S}_k^0 \circ \nabla \mathbf{u}^0), \\ &= \sum_k \mathbb{S}_k^0 \otimes \mathbb{S}_k^0 @ \nabla \mathbf{u}^0. \end{aligned}$$

Il reste à démontrer la symétrie du tenseur \mathfrak{S}_k^0 , on utilise pour cela l'équation 8.64

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_k^0 &= \sum_{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha} \otimes \boldsymbol{\psi}_k^{0,\alpha}, \\ &= \sum_b \sum_{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha} \otimes \varphi_k^b \mathbf{e}^{0,b} \delta^{\alpha,b}, \\ &= \sum_b \varphi_k^b p^{1,b} \mathbf{e}^{0,b} \otimes \mathbf{e}^{0,b}.\end{aligned}$$

Le tenseur \mathfrak{S}_k^0 étant symétrique, le tenseur de rigidité du quatrième ordre \mathfrak{K}^0 est doublement symétrique. Seule la partie symétrique du gradient de \mathbf{u}^0 intervient donc dans la relation de comportement entre les contraintes et les déformations. \square

g) Équilibre du modèle continu

Problème 8.3 *L'équilibre du modèle continu s'écrit en formulation variationnelle : trouver le déplacement \mathbf{u}^0 tel que [24]*

$$\forall \mathbf{v}, \quad \int_X \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^0 \circ \boldsymbol{\varepsilon}^0(\mathbf{v})) dx = \int_X \langle \mathbf{f}_{\phi}^1, \mathbf{v} \rangle dx, \quad (8.67)$$

avec comme relation de comportement reliant les contraintes et les déformations

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = \mathfrak{K}^0 \mathbb{Q} \boldsymbol{\varepsilon}^0(\mathbf{u}^0). \quad (8.68)$$

h) Condition de coercivité du modèle continu

Théorème 8.4 *Pour que la forme bilinéaire \mathfrak{a}^0 soit coercive, il est nécessaire et suffisant que la matrice de rigidité \mathfrak{K}^0 soit définie positive. Cette condition s'écrit*

$$\forall i, j, \exists k, \quad \sum_b \varphi_k^b p^{1,b} \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{e}_i \rangle \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{e}_j \rangle \neq 0. \quad (8.69)$$

Preuve : On montre dans un premier temps que la coercivité de la forme bilinéaire \mathfrak{a}^0 est équivalente à avoir une matrice de rigidité définie positive.

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}^0 &= \int_X \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^0 \circ \boldsymbol{\varepsilon}^0) dx, \\ \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^0 \circ \boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{1}{g} \sum_k \text{tr}([\mathfrak{S}_k^0 \otimes \mathfrak{S}_k^0 \mathbb{Q} \boldsymbol{\varepsilon}^0] \circ \boldsymbol{\varepsilon}^0), \\ &= \frac{1}{g} \sum_k \text{tr}(\mathfrak{S}_k^0 \circ \boldsymbol{\varepsilon}^0)^2.\end{aligned}$$

La condition suffisante pour qu'il n'y ait pas coercivité de la forme bilinéaire \mathfrak{a}^0 est

$$\begin{aligned}\exists \boldsymbol{\varepsilon}^0 \neq 0, \quad \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^0 \circ \boldsymbol{\varepsilon}^0) &= 0 \\ \iff \exists \boldsymbol{\varepsilon}^0 \neq 0, \forall k, \quad \text{tr}(\mathfrak{S}_k^0 \circ \boldsymbol{\varepsilon}^0) &= 0, \\ \iff \exists \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^0 \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \neq 0, \forall k, \quad \sum_{i,j} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^0 \sum_b \varphi_k^b p^{1,b} \text{tr}(\mathbf{e}^{0,b} \otimes \mathbf{e}^{0,b} \circ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) &= 0.\end{aligned}$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait coercivité de la forme bilinéaire \mathfrak{a}^0 se trouve être l'inverse de la précédente, c'est à dire

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon^0 \neq 0, \quad \text{tr}(\sigma^0 \circ \varepsilon^0) &\neq 0 \\ \iff \forall \varepsilon^0 = \varepsilon_{ij}^0 \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \neq 0, \exists k, \quad \sum_{i,j} \varepsilon_{ij}^0 \sum_b \varphi_k^b p^{1,b} \text{tr}(\mathbf{e}^{0,b} \otimes \mathbf{e}^{0,b} \circ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) &\neq 0, \\ \iff \forall i, j, \exists k, \quad \sum_b \varphi_k^b p^{1,b} \text{tr}(\mathbf{e}^{0,b} \otimes \mathbf{e}^{0,b} \circ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) &\neq 0, \end{aligned}$$

qui est équivalente à la condition du théorème. □

Remarque : Si la base covariante (\mathbf{g}_α) est une base de l'espace physique, c'est le cas des treillis 3D, on peut remplacer dans la condition de coercivité les vecteurs \mathbf{e}_i et \mathbf{e}_j par les deux vecteurs covariants \mathbf{g}_α et \mathbf{g}_β . On peut faire de même pour les coques et les plaques en complétant la base (\mathbf{g}_α) pour avoir une base complète de l'espace physique en posant $\mathbf{g}_3 = \frac{\mathbf{g}_1 \wedge \mathbf{g}_2}{\|\mathbf{g}_1 \wedge \mathbf{g}_2\|}$. L'avantage de cette base est d'être plus proche de la nature de la structure, donc plus naturelle.

8.4 Analyse statique de la structure ; cas des structures minces

8.4.1 Faible chargement et non coercivité de la formulation au premier ordre

a) Singularité du modèle

Le problème 8.2 n'est pas toujours coercif. Pour les treillis poutres et les treillis plaques périodiques, nous savons qu'il ne l'est pas. Il faut donc trouver les équations manquantes pour la détermination du déplacement macroscopique aux ordres de ϵ supérieurs. Les forces extérieures ne peuvent donc être d'ordre ϵ , elles n'apparaissent donc pas dans le problème 8.2. Tous les résultats qui suivent supposent d'être dans ce cas de non coercivité.

Théorème 8.5 *Nous avons alors les résultats suivants sur l'ordre 0 de la tension d'une barre*

$$\begin{cases} \forall k \in \mathcal{K} & f_k^0 = 0, \\ \forall b \in \mathcal{B} & f^{0,b} = 0, \\ \forall b \in \mathcal{B} & \mathbf{f}^{0,b} = \mathbf{o}, \end{cases} \quad (8.70)$$

Preuve : dans le problème 8.2 nous prenons le champ test v_p^0 égal au champ de déplacement réel u_p^0 , alors ce problème devient :

$$\int_{\Lambda} \sum_k [f_k^0(u_p^0)]^2 d\lambda = 0.$$

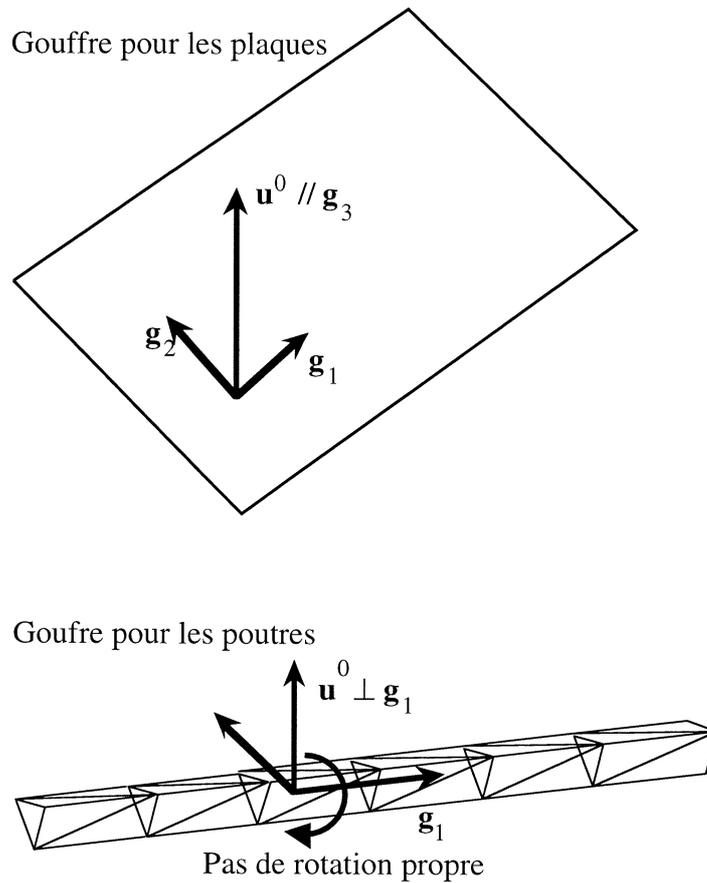


Figure 8.10 : gouffre pour les déplacements

Cette intégrale, de valeur nulle, est composée d'une somme de termes positifs, tous ses termes sont donc eux-aussi nuls, ce qui entraîne que $f_k^0(v_p^0) = 0, \forall k$.

□

b) Gouffre pour les déplacements

Définition 8.14 Soit \mathcal{G} (comme le Gouffre) l'espace défini par l'ensemble de P -vecteurs v_p tels que

$$\mathcal{G} = \left\{ \mathbf{v}^n \in \mathcal{M}, \mathbf{v}^n = \sum_p v_p \mathbf{e}_p^n / \forall k \in \mathcal{K}, \quad f_k^0(v_p) = \sum_p \left[\psi_{kp}^{0,1} v_p + \sum_\alpha \psi_{kp}^{0,0,\alpha} \frac{\partial v_p}{\partial \lambda^\alpha} \right] = 0 \right\}. \tag{8.71}$$

Remarque : la notion de gouffre a été introduite par Sanchez-Palencia dans le cadre des plaques et des coques [53, 54, 55].

Théorème 8.6 Le champ de déplacement macroscopique \mathbf{u}_p^0 n'est pas quelconque (figure 8.10). Nous avons

$$\mathbf{u}_p^0 \in \mathcal{G}. \tag{8.72}$$

Nous écrivons alors de manière abusive

$$\mathbf{u}^{0,n} \in \mathcal{M} \cap \mathcal{G}. \quad (8.73)$$

Preuve : par définition du gouffre, si $f_k^0(v_p^0) = 0$ alors $v_p^0 \in \mathcal{G}$. Comme $f_k^0(u_p^0) = 0$, alors $u_p^0 \in \mathcal{G}$. \square

c) Interprétation du gouffre pour les coques et les plaques, déformations membranaires nulles

La définition du gouffre donnée ci-dessus est plutôt abstraite. Pour les plaques et les coques n'ayant pas de mécanismes, le gouffre signifie qu'il n'y a pas de déformations membranaires.

Proposition 8.5 *Si la condition (de coercivité membranaire) est vérifiée*

$$\forall \alpha, \beta, \exists k, \quad \sum_b \varphi_k^b p^{1,b} \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{g}_\alpha \rangle \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{g}_\beta \rangle \neq 0, \quad (8.74)$$

alors le gouffre \mathcal{G} s'interprète par des déformations membranaires $\varepsilon_m^0(\mathbf{u}^0)$ nulles

$$\mathbf{v} \in \mathcal{G} \iff \varepsilon_m^0(\mathbf{v}) = 0. \quad (8.75)$$

De plus, en posant $\mathbf{g}_3 = \frac{\mathbf{g}_1 \wedge \mathbf{g}_2}{\|\mathbf{g}_1 \wedge \mathbf{g}_2\|}$, on obtient des composantes ε^{33} et $\varepsilon^{3\alpha}$ quelconques

$$\forall \alpha' \in \{1, 2, 3\}, \quad \text{tr}(\varepsilon^0 \circ \varepsilon^{3\alpha'} \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_{\alpha'}) = 0, \quad (8.76)$$

ce qui signifie que le gouffre \mathcal{G} n'est pas réduit pour les plaques à l'ensemble vide. Il contient le déplacement porté par la normale à la surface (soit le déplacement selon \mathbf{e}_3 , $\langle \mathbf{u}^0, \mathbf{e}_3 \rangle$, pour les plaques dans le plan $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$).

Preuve : La première affirmation est évidente, on note α' et β' les indices étendant les deux indices α et β aux trois valeurs 1, 2 et 3, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^0 \in \mathcal{G} &\iff \text{tr}(\varepsilon^0 \circ \varepsilon^0) = \frac{1}{g} \sum_k \left(\sum_{\alpha', \beta'} \varepsilon^{\alpha' \beta'} \sum_b \varphi_k^b p^{1,b} \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{g}_{\alpha'} \rangle \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{g}_{\beta'} \rangle \right)^2 = 0, \\ &\implies \forall \alpha, \beta, \quad \varepsilon^{\alpha \beta} = 0, \\ &\implies \forall \alpha, \beta, \quad \varepsilon_m^0(\mathbf{u}^0) = 0. \end{aligned}$$

On choisit une autre définition du tenseur symétrique $\varepsilon_k^0, \varepsilon_k^0 = \sum_\alpha \psi_k^{0,\alpha} \otimes \mathbf{g}_\alpha$, alors

$$\text{tr}(\varepsilon^0 \circ \varepsilon^0) = \frac{1}{g} \sum_k \left(\sum_{\alpha', \beta'} \varepsilon^{\alpha' \beta'} \sum_\alpha \langle \mathbf{g}_\alpha, \mathbf{g}_{\alpha'} \rangle \langle \psi_k^{0,\alpha}, \mathbf{g}_{\beta'} \rangle \right)^2.$$

Prenons les termes $\varepsilon^{3\beta'}$, c'est à dire tel que $\mathbf{g}_{\alpha'} = \mathbf{g}_3$. Par définition de \mathbf{g}_3 , pour tout α' , $\langle \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_{\alpha'} \rangle = 0$. Donc pour tout $\beta' \in \{1, 2, 3\}$, les déformations $\varepsilon^{3\beta'}$ n'interviennent pas dans l'énergie de déformation. Pour les plaques, il n'y a donc pas restriction sur le déplacement dans la direction 3 ; $\langle \mathbf{u}^0, \mathbf{e}_3 \rangle$. \square

8.4.2 Tension auto-équilibrée modifiée

Afin de simplifier les futurs calculs, ainsi que d'utiliser un maximum d'information dès leur source, on ajoute des conditions sur la détermination des φ_k^b . On va les séparer en deux groupes ; le premier contiendra les φ_k^b notés $\check{\varphi}_k^b$ tels que le f_k^0 associé soit toujours nul, les autres seront notés $\hat{\varphi}_k^b$.

Proposition 8.6 *soient $\check{\mathcal{K}}$ B-vecteurs $\check{\varphi}_k^b$ et $\hat{\mathcal{K}}$ B-vecteurs $\hat{\varphi}_k^b$ définis par :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathbf{v}^n, \quad \sum_b \check{\varphi}_k^b \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle = 0, \\ \forall k, p, \alpha, \quad \sum_b \check{\varphi}_k^b \beta_p^{0,\alpha,b} = 0, \\ \forall k, p, \quad \sum_b \check{\varphi}_k^b \beta_p^{1,b} = 0, \\ \forall k, h, \quad \sum_b \frac{\check{\varphi}_k^b \check{\varphi}_h^b}{k^{-1,b}} = \delta_{kh}, \end{array} \right. \quad (8.77)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathbf{v}^n, \quad \sum_b \hat{\varphi}_k^b \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle = 0, \\ \forall k, h, \quad \sum_b \frac{\hat{\varphi}_k^b \hat{\varphi}_h^b}{k^{-1,b}} = 0, \\ \forall k, h, \quad \sum_b \frac{\hat{\varphi}_k^b \hat{\varphi}_h^b}{k^{-1,b}} = \delta_{kh}, \end{array} \right. \quad (8.78)$$

alors l'ensemble des $\check{\varphi}_k^b$ et $\hat{\varphi}_k^b$ forme une base de tension auto-équilibrée φ_k^b . On leur associe respectivement les tensions \check{f}_k^0 et \hat{f}_k^0 . On a les propriétés suivantes :

$$\mathcal{K} = \check{\mathcal{K}} \oplus \hat{\mathcal{K}}, \quad (8.79)$$

$$\forall \mathbf{v}^n \in \mathcal{M}, \quad \check{f}_k^0(v_p) = 0 \quad (8.80)$$

$$\exists \mathbf{v}^n \in \mathcal{M}, \quad \hat{f}_k^0(v_p) \neq 0 \quad (8.81)$$

Preuve : les $\check{\varphi}_k^b$ forment un sous espace des φ_k^b et les $\hat{\varphi}_k^b$ sont les complémentaires des $\check{\varphi}_k^b$ dans φ_k^b , d'où le premier résultat. Par définition, les $\check{\varphi}_k^b$ sont B-orthogonaux aux β_p et donc les tensions \check{f}_k^0 sont toujours nulles. Pour la tension $\hat{f}_k^0(v_p)$, il existe au moins un β_p qui ne soit pas B-orthogonal aux $\hat{\varphi}_k^b$, alors on peut trouver un v_p non nul tel que cette composante engendre un $\hat{f}_k^0(v_p)$ différent de zéro. \square

8.4.3 Déplacement à l'ordre 1

Théorème 8.7 *Le déplacement à l'ordre 1 s'écrit comme la somme de deux termes, le premier est une solution particulière des $\mathbf{u}^{0,n}$, l'autre d'une fonction $\hat{\mathbf{u}}^{1,n}$ solution homogène*

$$\mathbf{u}^{1,n} = \sum_b \left\{ \boldsymbol{\xi}^{nb} \sum_p \left[\beta_p^{1,b} u_p^0 + \sum_\alpha \beta_p^{0,\alpha,b} \frac{\partial u_p^0}{\partial \lambda^\alpha} \right] \right\} + \hat{\mathbf{u}}^{1,n}, \quad (8.82)$$

avec $\hat{\mathbf{u}}^{1,n} \in \mathcal{M}$, c'est à dire

$$\hat{\mathbf{u}}^{1,n} = \sum_p \hat{\mathbf{u}}_p^1 \mathbf{e}_p^n, \quad \hat{\mathbf{u}}_p^1 \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}}, \quad (8.83)$$

et

$$\boldsymbol{\xi}^{nb} = \sum_h \boldsymbol{\zeta}_h^n \phi_h^b, \quad h \in \{1, \dots, \mathcal{B} - \mathcal{K}\}, \quad (8.84)$$

avec ϕ_h^b une base de $\mathcal{H} = \mathcal{B} - \mathcal{K}$ solution orthogonale aux \mathcal{K} B-vecteurs φ_k^b par le B-produit scalaire. On peut donc les définir

$$\begin{cases} \sum_b \phi_h^b \varphi_k^b = 0 & (\text{orthogonalisation}), \\ \sum_b \phi_h^b \phi_k^b = \delta_{hk} & (\text{normalisation}), \end{cases} \quad (8.85)$$

avec $\boldsymbol{\zeta}_h^n$ une solution du système linéaire

$$\langle \mathbf{e}^{0,b}, \boldsymbol{\zeta}_h^{E(b)} - \boldsymbol{\zeta}_h^{O(b)} \rangle + \phi_h^b = 0. \quad (8.86)$$

Remarque : la normalisation des B-vecteurs ϕ_h^b est faite avec le B-produit scalaire alors que les φ_k^b avait été normalisés par un produit scalaire pondéré.

Avant de faire la démonstration du théorème, un calcul sur un exemple simple montre qu'il existe plusieurs voies possibles dans le choix des ϕ_h^b et des $\boldsymbol{\zeta}_h^n$. Nous énonçons la proposition suivante dont l'unique objectif est d'éliminer des termes inutiles.

Proposition 8.7 Nous allons restreindre l'ensemble des $\mathcal{B} - \mathcal{K}$ B-vecteurs ϕ_h^b , alors $\mathcal{H} \leq \mathcal{B} - \mathcal{K}$. Définissons d'abord les l B-vecteurs $\dot{\phi}_l^b$ comme des B-vecteurs ϕ_h^b tels que :

$$\begin{cases} \sum_b \dot{\phi}_l^b \varphi_k^b = 0, \\ \sum_b \dot{\phi}_l^b \dot{\phi}_k^b = \delta_{lk}, \\ \sum_b \dot{\phi}_l^b \mathbb{B}_p^{0,\alpha,b} = 0, \\ \sum_b \dot{\phi}_l^b \mathbb{B}_p^{1,b} = 0, \end{cases} \quad (8.87)$$

alors on définit les \mathcal{H} B-vecteurs ϕ_h^b par :

$$\begin{cases} \sum_b \phi_h^b \varphi_k^b = 0, & (\text{orthogonalisation}), \\ \sum_b \phi_h^b \phi_k^b = \delta_{hk}, & (\text{normalisation}), \\ \sum_b \phi_h^b \dot{\phi}_l^b = 0, & (\text{restriction}). \end{cases} \quad (8.88)$$

On impose les $\boldsymbol{\zeta}_h^n \notin \mathcal{M}$,

$$\forall(p, h), \quad \sum_n \langle \mathbf{e}_p^n, \boldsymbol{\zeta}_h^n \rangle = 0. \quad (8.89)$$

Preuve : nous avons démontré que les $f^{0,b} = 0$, alors par définition des $f^{0,b}$

$$\forall b, \quad \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{u}^{1,E(b)} - \mathbf{u}^{1,O(b)} \rangle + \underbrace{\sum_p \left[\beta_p^{1,b} u_p^0 + \sum_\alpha \beta_p^{0,\alpha,b} \frac{\partial u_p^0}{\partial \lambda^\alpha} \right]}_{A^b} = 0.$$

Le problème est donc le suivant, trouver $\mathbf{u}^{1,n}$ solution de

$$\forall b, \quad \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{u}^{1,E(b)} - \mathbf{u}^{1,O(b)} \rangle + A^b = 0, \quad (8.90)$$

sachant que A^b est B-orthogonal aux φ_k^b . Le problème étant linéaire, on recherche donc la solution de ce problème sous la forme d'une solution du système homogène et d'une solution particulière :

1. le système homogène est

$$\forall b, \quad \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{u}^{1,E(b)} - \mathbf{u}^{1,O(b)} \rangle = 0,$$

alors $\mathbf{u}^{1,n} \in \mathcal{M}$ et on peut noter cela

$$\mathbf{u}^{1,n} = \hat{\mathbf{u}}^{1,n} = \sum_p \hat{u}_p^1 e_p^n, \quad (8.91)$$

2. recherchons une solution particulière du système. Soit Γ l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{3\mathcal{N}} & \longmapsto & \mathbb{R}^{\mathcal{B}}, \\ \text{N-vecteur} & & \text{B-vecteur}, \\ \mathbf{v}^n & \longrightarrow & \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle. \end{array} \quad (8.92)$$

Γ est une application linéaire continue, nous pouvons donc écrire

$$\mathbb{R}^{\mathcal{B}} = \text{Im}(\Gamma) \oplus \text{Im}(\Gamma)^\perp. \quad (8.93)$$

Le B-vecteur $\langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle \in \text{Im}(\Gamma)$, alors l'ensemble $\text{Im}(\Gamma)^\perp$ est défini par les φ_k^b car

$$\forall k, \quad \sum_b \varphi_k^b \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle = 0,$$

et nous avons donc

$$\dim(\text{Im}(\Gamma)) = \mathcal{B} - \mathcal{K}. \quad (8.94)$$

On définit une base de l'image de Γ en construisant $\mathcal{H} = \mathcal{B} - \mathcal{K}$ B-vecteurs ϕ_h^b B-orthogonaux entre-eux ainsi qu'aux φ_k^b et que l'on normalise à 1. Comme les A^b sont B-orthogonaux aux φ_k^b car

$$\forall k, \quad \sum_b \varphi_k^b A^b = 0,$$

puisque les $f_k^0 = 0$, on peut projeter A^b sur les ϕ_h^b

$$A^b = \sum_h \left(\sum_{d=1}^{\mathcal{B}} A^d \phi_h^d \right) \phi_h^b = \sum_h \theta_h \phi_h^b. \quad (8.95)$$

Soit ζ_h^n une solution du problème

$$\forall b, \quad \langle e^{0,b}, \zeta_h^{E(b)} - \zeta_h^{O(b)} \rangle + \phi_h^b = 0,$$

ζ_h^n existe car $\phi_h^b \in \text{Im}(\Gamma)$. Alors

$$\mathbf{u}^{1,n} = \sum_h \theta_h \zeta_h^n = \sum_h \left(\sum_{d=1}^{\mathcal{B}} A^d \phi_h^d \right) \zeta_h^n = \sum_b \underbrace{\left(\sum_h \zeta_h^n \phi_h^b \right)}_{\xi^{nb}} A^b,$$

3. restriction des champs ϕ_h^b et ζ_h^n . La solution générale $\hat{\mathbf{u}}^{1,n} \in \mathcal{M}$ est quelconque, il ne sert donc à rien que la solution particulière ait des composantes non nulles sur \mathcal{M} . L'expression de cette orthogonalité s'écrit

$$\frac{1}{\mathcal{N}} \sum_n \langle e_p^n, \zeta_h^n \rangle = 0.$$

Le B-vecteur A^b n'est pas quelconque, il ne décrit pas forcément toute l'image de l'application Γ . On peut donc oublier les ϕ_h^b associés aux composantes θ_h nulles de A^b . Or par définition des ϕ_l^b

$$\forall v \in \mathcal{M}, \quad \sum_b \phi_l^b A^b(v) = 0.$$

Il suffit donc de prendre les ϕ_h^b B-orthogonaux aux ϕ_l^b .

□

Proposition 8.8 *Soit les définitions suivantes*

$$\begin{cases} \chi_p^{0,\alpha,n} &= \sum_b \xi^{nb} \beta_p^{0,\alpha,b}, \\ \chi_p^{1,n} &= \sum_b \xi^{nb} \beta_p^{1,b} \equiv \mathbf{o}, \end{cases} \quad (8.96)$$

alors nous pouvons écrire

$$\mathbf{u}^{1,n} = \sum_p \left[u_p^0 \chi_p^{1,n} + \sum_\alpha \frac{\partial u_p^0}{\partial \lambda^\alpha} \chi_p^{0,\alpha,n} + \hat{\mathbf{u}}_p^1 e_p^n \right]. \quad (8.97)$$

Preuve : Il suffit dans la définition de $\mathbf{u}^{1,n}$ de remplacer $\mathbf{u}^{0,n}$ et $\hat{\mathbf{u}}^{1,n}$ par leur expression en u_p^0 et $\hat{\mathbf{u}}_p^1$, de développer les dérivées partielles puis de collationner les différents termes.

□

8.4.4 Tension à l'ordre 1

Proposition 8.9 *La tension dans la barre b à l'ordre 1 s'écrit comme une combinaison linéaire des φ_k^b*

$$\mathbf{f}^{1,b} = f^{1,b} \mathbf{e}^{0,b}, \quad (8.98)$$

avec

$$\begin{aligned} f^{1,b} &= k^{-1,b} \left[\langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{u}^{2,E(b)} - \mathbf{u}^{2,O(b)} + \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{u}^{1,E(b)}}{\partial \lambda^{\alpha}} \delta^{\alpha,b} + \frac{1}{2!} \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{0,E(b)}}{\partial \lambda^{\alpha} \partial \lambda^{\beta}} \delta^{\alpha,b} \delta^{\beta,b} \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \mathbf{e}^{1,b}, \mathbf{u}^{1,E(b)} - \mathbf{u}^{1,O(b)} + \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{u}^{0,E(b)}}{\partial \lambda^{\alpha}} \delta^{\alpha,b} \rangle + \langle \mathbf{e}^{2,b}, \mathbf{u}^{0,E(b)} - \mathbf{u}^{0,O(b)} \rangle \right], \\ &= \sum_k f_k^1 \varphi_k^b. \end{aligned} \quad (8.99)$$

Preuve : la démonstration est identique à celle faite pour la tension aux ordres -1 et 0, il suffit de poser

$$\mathbf{v}^{\tilde{n}} = \epsilon^{\mathcal{D}-1} \theta(\lambda) \mathbf{v}^n, \quad (8.100)$$

on obtient alors une tension $f^{1,b}$ auto-équilibrée. □

Définition 8.15 *Soit les définitions suivantes*

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{kp}^{1,0,\alpha,\beta} = \sum_b \varphi_k^b \left[\langle \mathbf{e}^{0,b}, \boldsymbol{\chi}_p^{0,\beta,E(b)} \delta^{\alpha,b} + \frac{1}{2} \mathbf{e}_p^{E(b)} \delta^{\alpha,b} \delta^{\beta,b} \rangle \right], \\ \psi_{kp}^{1,1,\beta} = \sum_b \varphi_k^b \left[\langle \mathbf{e}^{0,b}, \sum_{\alpha} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_p^{0,\beta,E(b)}}{\partial \lambda^{\alpha}} \delta^{\alpha,b} + \boldsymbol{\chi}_p^{1,E(b)} \delta^{\beta,b} + \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{e}_p^{E(b)}}{\partial \lambda^{\alpha}} \delta^{\alpha,b} \delta^{\beta,b} \rangle \right. \\ \quad \left. + \langle \mathbf{e}^{1,b}, \boldsymbol{\chi}_p^{0,\beta,E(b)} - \boldsymbol{\chi}_p^{0,\beta,O(b)} + \mathbf{e}_p^{E(b)} \delta^{\beta,b} \rangle \right] \stackrel{\text{per}}{=} 0, \\ \psi_{kp}^{1,2} = \sum_b \varphi_k^b \left[\langle \mathbf{e}^{0,b}, \sum_{\alpha} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_p^{1,E(b)}}{\partial \lambda^{\alpha}} \delta^{\alpha,b} + \frac{1}{2!} \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \mathbf{e}_p^{E(b)}}{\partial \lambda^{\alpha} \partial \lambda^{\beta}} \delta^{\alpha,b} \delta^{\beta,b} \rangle \right. \\ \quad \left. + \langle \mathbf{e}^{1,b}, \boldsymbol{\chi}_p^{1,E(b)} + \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{e}_p^{E(b)}}{\partial \lambda^{\alpha}} \delta^{\alpha,b} \rangle + \langle \mathbf{e}^{2,b}, \mathbf{e}_p^{E(b)} - \mathbf{e}_p^{O(b)} \rangle \right] \stackrel{\text{per}}{=} 0, \end{array} \right. \quad (8.101)$$

$$\hat{f}_k^1(u_p^0) = \sum_p \left[\psi_{kp}^{1,2} u_p^0 + \sum_{\alpha} \psi_{kp}^{1,1,\alpha} \frac{\partial u_p^0}{\partial \lambda^{\alpha}} + \sum_{\alpha,\beta} \psi_{kp}^{1,0,\alpha,\beta} \frac{\partial^2 u_p^0}{\partial \lambda^{\alpha} \partial \lambda^{\beta}} \right], \quad (8.102)$$

alors nous pouvons écrire

$$f_k^1(u_p^0, \hat{u}_p^1) = \hat{f}_k^1(u_p^0) + f_k^0(\hat{u}_p^1). \quad (8.103)$$

Remarque : comme les φ_k^b se déclinent en deux parties ; les φ_k^b et les $\check{\varphi}_k^b$, on décline alors les $\psi_{kp}^{1,\dots}$ et les f_k^1 en deux catégories selon le φ_k^b associé.

Preuve : elle se calque sur celle faite pour f_k^0 . On part de la définition de $f^{1,b}$, on multiplie par $\varphi_k^b/k^{-1,b}$ puis on somme sur b . Il ne reste plus qu'à collationner les différents termes. □

8.4.5 Modèle couplé en statique

Problème 8.4 Les champs de déplacement u_p^0 et \hat{u}_p^1 sont des solutions du problème variationnel

$$\forall (v^{0,n}, \hat{v}^{1,n}) \in \mathcal{M} \cap \mathcal{G} \times \mathcal{M}, \quad \mathfrak{a}^1(u_p^0, \hat{u}_p^1, v_p^0, \hat{v}_p^1) = \mathfrak{l}^1(v_p^0), \quad (8.104)$$

avec pour la forme quadrilinéaire symétrique \mathfrak{a}^1

$$\mathfrak{a}^1(u_p^0, \hat{u}_p^1, v_p^0, \hat{v}_p^1) = \int_{\Lambda} \sum_k f_k^1(u_p^0, \hat{u}_p^1) f_k^1(v_p^0, \hat{v}_p^1) d\lambda, \quad (8.105)$$

et pour la forme linéaire \mathfrak{l}^1

$$\mathfrak{l}^1(v_p^0) = \int_{\Lambda} \sum_p \sum_n \langle \mathbf{f}^{3,n}, \mathbf{e}_p^n \rangle v_p^0 d\lambda. \quad (8.106)$$

Preuve : la démonstration se calque sur celle faite pour trouver le problème 8.2, elle utilise des résultats déjà démontrés pour \mathbf{u}^n . Prenons dans la formulation variationnelle le champ test :

$$\mathbf{v}^{\tilde{n}} = \epsilon^{\mathcal{D}-3} (\mathbf{v}^{0,n} + \epsilon \mathbf{v}^{1,n}), \quad (8.107)$$

avec $\mathbf{v}^{0,n} \in \mathcal{M} \cap \mathcal{G}$ et $\hat{\mathbf{v}}^{1,n} \in \mathcal{M}$ où la relation entre $\mathbf{v}^{1,n}$ et $\hat{\mathbf{v}}^{1,n}$ est donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{v}^{0,n} &= \sum_p v_p^0 \mathbf{e}_p^n, \\ \mathbf{v}^{1,n} &= \sum_p \left[v_p^0 \boldsymbol{\chi}_p^{1,n} + \sum_{\alpha} \frac{\partial v_p^0}{\partial \lambda^{\alpha}} \boldsymbol{\chi}_p^{0,\alpha,n} + \hat{v}_p^1 \mathbf{e}_p^n \right]. \end{cases}$$

La tension virtuelle dans la barre b est définie comme la tension réelle. Les tensions d'ordre ϵ^{-1} et ϵ^0 sont nulles car les champs test $\mathbf{v}^{0,n}$ et $\hat{\mathbf{v}}^{1,n}$ ne sont pas quelconques mais appartiennent respectivement à $\mathcal{M} \cap \mathcal{G}$ et \mathcal{M} , comme le sont les champs réels.

$$\begin{aligned} k^b \langle \mathbf{e}^b, \frac{\mathbf{v}^{E(\tilde{b})} - \mathbf{v}^{O(\tilde{b})}}{\epsilon^{\mathcal{D}-3}} \rangle &= \frac{1}{\epsilon} \underbrace{f^{-1,b}(\mathbf{v}^{0,n})}_0 + \underbrace{f^{0,b}(\mathbf{v}^{0,n}, \mathbf{v}^{1,n})}_0 + \epsilon f^{1,b}(\mathbf{v}^{0,n}, \mathbf{v}^{1,n}, \mathbf{v}^{2,n} \equiv \mathbf{0}) + O(\epsilon^2), \\ \langle \mathbf{e}^b, \mathbf{v}^{E(\tilde{b})} - \mathbf{v}^{O(\tilde{b})} \rangle &= \epsilon^{\mathcal{D}-2} \frac{\epsilon}{k^{-1,b}} f^{1,b}(\mathbf{v}^{0,n}, \mathbf{v}^{1,n}) + O(\epsilon^{\mathcal{D}}). \end{aligned}$$

Alors le travail virtuel de la barre b est :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}^b, \mathbf{v}^{E(\tilde{b})} - \mathbf{v}^{O(\tilde{b})} \rangle &= \left[\epsilon f^{1,b}(\mathbf{u}^{0,n}, \mathbf{u}^{1,n}, \mathbf{u}^{2,n}) + O(\epsilon^2) \right] \langle \mathbf{e}^b, \mathbf{v}^{E(\tilde{b})} - \mathbf{v}^{O(\tilde{b})} \rangle, \\ &= \epsilon^{\mathcal{D}} f^{1,b}(\mathbf{u}^{0,n}, \mathbf{u}^{1,n}, \mathbf{u}^{2,n}) \frac{f^{1,b}(\mathbf{v}^{0,n}, \mathbf{v}^{1,n})}{k^{-1,b}} + O(\epsilon^{\mathcal{D}+1}), \end{aligned}$$

or on a la propriété suivante :

$$\begin{aligned} \sum_b f^{1,b}(\mathbf{u}^{0,n}, \mathbf{u}^{1,n}, \mathbf{u}^{2,n}) \frac{f^{1,b}(\mathbf{v}^{0,n}, \mathbf{v}^{1,n})}{k^{-1,b}} &= \sum_k f_k^1(\mathbf{u}^{0,n}, \hat{\mathbf{u}}^{1,n}) \sum_b \varphi_k^b \frac{f^{1,b}(\mathbf{v}^{0,n}, \mathbf{v}^{1,n})}{k^{-1,b}}, \\ &= \sum_k f_k^1(\mathbf{u}^{0,n}, \hat{\mathbf{u}}^{1,n}) f_k^1(\mathbf{v}^{0,n}, \hat{\mathbf{v}}^{1,n}), \end{aligned}$$

le travail virtuel total devient :

$$\sum_c \epsilon^{\mathcal{D}} \left[\sum_k f_k^1(\mathbf{u}^{0,n}, \hat{\mathbf{u}}^{1,n}) f_k^1(\mathbf{v}^{0,n}, \hat{\mathbf{v}}^{1,n}) + O(\epsilon) \right].$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre $\epsilon \rightarrow 0$ pour obtenir la forme bilinéaire \mathbb{a}^1 . La forme linéaire \mathbb{l}^1 concerne les forces extérieures supposées être dans ce cas d'ordre ϵ^3 , elles apparaissent alors dans le problème variationnel.

$$\sum_{\tilde{n}} \epsilon^3 \langle \mathbf{f}^{3,\tilde{n}}, \mathbf{v}^{\tilde{n}} \rangle = \sum_c \sum_n \epsilon^3 \langle \mathbf{f}^{3,n}, \epsilon^{\mathcal{D}-3} \mathbf{v}^{0,n} \rangle = \sum_c \epsilon^{\mathcal{D}} \sum_n \sum_p \langle \mathbf{f}^{3,n}, \mathbf{e}_p^n \rangle \mathbf{v}_p^0.$$

On obtient alors $\mathbb{l}^1(\mathbf{v}_p^0)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. □

8.4.6 Modèle macroscopique découplé en statique, condition de découplage

On recherche une équation donnant uniquement le comportement macroscopique de la structure, c'est à dire, une équation dont la seule variable soit le déplacement $\mathbf{u}^{0,n}$. Ce découplage des équations n'est pas toujours possible, une condition doit être vérifiée pour qu'il puisse avoir lieu.

a) Condition de découplage des équations, champ de déplacement à l'ordre 1

Définition 8.16 *Le problème se découple si l'équivalence 8.108, appelée condition de découplage, est vérifiée.*

$$\begin{aligned} \forall v^n \in \mathcal{M}, \quad & \int_{\Lambda} \sum_k \left[\hat{f}_k^0(\hat{u}_p^1) + \hat{f}_k^1(u_p^0) \right] f_k^0(v_p) d\lambda = 0, \\ \iff \forall k, \quad & \hat{f}_k^0(\hat{u}_p^1) = -\hat{f}_k^1(u_p^0). \end{aligned} \tag{8.108}$$

\hat{f}_k^0 et \hat{f}_k^1 représentent les parties de f_k^0 et f_k^1 construites sur les seules tensions auto-équilibrées φ_k^b et non plus sur l'ensemble complet des tensions auto-équilibrées φ_k^b .

La suite de cette partie sur le modèle macroscopique découplé se place dans le cadre où cette condition de découplage est valide.

Propriétés 8.7 *Le déplacement $\hat{\mathbf{u}}^{1,n} \in \mathcal{M}$ se décompose en deux champs de déplacement $\hat{\mathbf{u}}^{1,n} \in \mathcal{M} \cap \mathcal{G}^\perp$ et $\hat{\mathbf{u}}^{1,n} \in \mathcal{M} \cap \mathcal{G}$. L'hypothèse de découplage est supposée vraie, alors le déplacement $\hat{\mathbf{u}}^{1,n}$ vérifie :*

$$\forall k, \quad \hat{f}_k^0(\hat{u}_p^1) = -\hat{f}_k^1(u_p^0), \tag{8.109}$$

le déplacement $\hat{\mathbf{u}}^{1,n}$ est quelconque dans $\mathcal{M} \cap \mathcal{G}$, alors nous pouvons écrire :

$$\hat{\mathbf{u}}^{1,n} = \hat{\mathbf{u}}^{1,n} + \hat{\mathbf{u}}^{1,n} \tag{8.110}$$

b) Modèle macroscopique découplé en statique

Problème 8.5 Si la condition de découplage est vérifiée ; le champ de déplacement macroscopique $\mathbf{u}^{0,n} \in \mathcal{M} \cap \mathcal{G}$ est solution du problème variationnel :

$$\forall \mathbf{v}^{0,n} \in \mathcal{M} \cap \mathcal{G}, \quad \mathfrak{a}^1(\mathbf{u}_p^0, \mathbf{v}_p^0) = \mathfrak{l}^1(\mathbf{v}_p^0), \quad (8.111)$$

avec pour la forme bilinéaire symétrique \mathfrak{a}^1 et la forme linéaire \mathfrak{l}^1 :

$$\mathfrak{a}^1(\mathbf{u}_p^0, \mathbf{v}_p^0) = \int_{\Lambda} \sum_k \hat{f}_k^1(\mathbf{u}_p^0) \hat{f}_k^1(\mathbf{v}_p^0) d\lambda, \quad (8.112)$$

$$\mathfrak{l}^1(\mathbf{v}_p^0) = \int_{\Lambda} \sum_p \sum_n \langle \mathbf{f}^{3,n}, \mathbf{e}_p^n \rangle v_p^0 d\lambda. \quad (8.113)$$

Remarque : ce problème sur le champ de déplacement macroscopique $\mathbf{u}^{0,n}$ est en général bien posé pour les structures minces ; c'est à dire qu'il existe une unique solution $\mathbf{u}^{0,n}$ vérifiant ce problème.

Preuve : dans le modèle macroscopique, on pose $v_p^0 = 0$ ce qui donne :

$$\forall \hat{\mathbf{v}}_p^1, \quad \int_{\Lambda} \sum_k \left[\hat{f}_k^1(\mathbf{u}_p^0) + f_k^0(\hat{\mathbf{u}}_p^1) \right] f_k^0(\hat{\mathbf{v}}_p^1) d\lambda = 0.$$

Or $\forall v_p \in \mathcal{G}$, $f_k^0(v_p) = 0$, cette équation n'apporte aucune information sur la partie de $\hat{\mathbf{u}}_p^1$ dans le gouffre \mathcal{G} , pour la partie dans l'orthogonal de \mathcal{G} , seules les composantes \hat{f}_k^0 donnent un résultat non nul. D'où le premier résultat.

Dans le problème variationnel, on pose $\hat{\mathbf{v}}_p^1 = 0$, la partie $\hat{f}_k^1(\mathbf{u}_p^0)$ est équilibrée par $\hat{f}_k^0(\hat{\mathbf{u}}_p^1)$, il reste donc le résultat final. \square

8.5 Analyse modale de la structure

On recherche les modes propres de la structure, c'est à dire les fréquences propres ou les pulsations propres ω qui font vibrer tous les nœuds de la structure en phase à la même fréquence.

Définition 8.17 la pulsation adimensionnelle ϖ est

$$\frac{\omega^2}{E} = \epsilon^\delta \varpi^2 + O(\epsilon^{\delta+1}) \quad (8.114)$$

avec ϵ^δ définissant l'ordre de grandeur de la pulsation. Comme en statique, deux cas se présentent

1. les treillis 3D définis par un espace paramétrique de dimension $\mathcal{D} = 3$. Ces structures n'étant pas des structures minces lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, leurs premières fréquences propres tendent vers une constante. Alors $\epsilon^\delta = \epsilon^0 = 1$,

2. les poutres droites et les plaques qui présentent une singularité (ce sont des structures minces), alors leurs premières fréquences propres tendent vers 0 comme ϵ quand $\epsilon \rightarrow 0$ ($\epsilon^\delta = \epsilon$).

Remarque : les poutres courbes et les coques peuvent avoir, selon leur géométrie, l'un ou l'autre des deux comportements.

8.5.1 Comportement modal d'une barre appartenant à un grand treillis

Définition 8.18 La barre b est supposée avoir un comportement élastique linéaire. Soit $\mathbf{f}^{b,O(b)}$ la résultante des forces d'une barre b sur le nœud origine $O(b)$, alors

$$\mathbf{f}^{b,O(b)} = \mathbf{f}_s^b + \mathbf{f}_d^{b,O(b)} + \mathbf{O}(\epsilon^{3(1+\delta)}), \quad (8.115)$$

avec

1. \mathbf{f}_s^b la résultante statique précédemment définie,
2. $\mathbf{f}_d^{b,O(b)}$ les effets d'inertie dus à la masse des barres [60, 62]

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_d^{b,O(b)} &= \frac{\mathbf{F}_d^{b,O(b)}}{EL^2} = \frac{1}{EL^2} \frac{\rho^b A^b \|\mathbf{p}^b\|}{6} \omega^2 (\mathbf{U}^{E(b)} + 2\mathbf{U}^{O(b)}) \\ &= \epsilon^{1+\delta} \varpi^2 d^b (\mathbf{u}^{0,E(b)} + 2\mathbf{u}^{0,O(b)}) + \mathbf{O}(\epsilon^{2+\delta}), \end{aligned} \quad (8.116)$$

3. d^b étant la constante

$$d^b = \frac{1}{6} \frac{\rho^b}{\rho} a^{0,b} \|\mathbf{p}^{1,b}\|. \quad (8.117)$$

La résultante des forces d'une barre b sur le nœud extrémité $E(b)$ de cette barre est de même

$$\mathbf{f}^{b,E(b)} = -\mathbf{f}_s^b + \mathbf{f}_d^{b,E(b)} + \mathbf{O}(\epsilon^{3(1+\delta)}), \quad (8.118)$$

avec

$$\mathbf{f}_d^{b,E(b)} = \epsilon^{1+\delta} \varpi^2 d^b (2\mathbf{u}^{0,E(b)} + \mathbf{u}^{O(b)}) + \mathbf{O}(\epsilon^{2+\delta}), \quad (8.119)$$

8.5.2 Modèle macroscopique de vibration ; cas des treillis 3D

Comme en statique pour les treillis 3D où le problème est coercif dès l'ordre 0 pour les tensions, l'analyse est plus rapide pour les treillis 3D en vibration

Proposition 8.10 Tous les résultats trouvés jusqu'au problème 8.2 non inclus sont valables

Preuve : on n'a utilisé pour démontrer ces résultats que des champs tests d'ordre $O(\epsilon^{\mathcal{D}})$ ou supérieur. Or les effets d'inertie commencent à l'ordre $O(\epsilon)$ donc ne paraissent pas dans les formulations variationnelles, tout comme les efforts extérieurs dans le cas de la statique. \square

Remarque : on suppose vrai le fait que $\dim(\mathcal{M}) = \mathcal{P} = 3$, alors nous pouvons confondre les indices p et i .

Problème 8.6 *Le champ de déplacement \mathbf{u}^0 et la pulsation propre ϖ sont solution du problème variationnel*

$$\forall \mathbf{v}^0, \quad \mathfrak{a}_s^0(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0) - \varpi^2 \mathfrak{a}_d^0(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0) = 0, \quad (8.120)$$

avec \mathfrak{a}_s^0 la forme bilinéaire trouvée en statique et \mathfrak{a}_d^0 la forme bilinéaire due aux inerties

$$\mathfrak{a}_s^0(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0) = \int_{\Lambda} \sum_k f_k^0(\mathbf{u}^0) f_k^0(\mathbf{v}^0) d\lambda, \quad (8.121)$$

$$\mathfrak{a}_d^0(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0) = \int_{\Lambda} m \langle \mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0 \rangle d\lambda, \quad (8.122)$$

avec m la masse macroscopique totale adimensionnelle d'une cellule

$$m(\lambda) = \sum_b 6d^b = \sum_b \frac{\rho^b}{\rho} a^{0,b} \|\mathbf{p}^{1,b}\|. \quad (8.123)$$

Preuve : comme en statique et puisque $\mathbf{u}^{0,n} \in \mathcal{M}$, nous prenons comme champ test $\mathbf{v}^{\tilde{n}}$ dans \mathcal{M}

$$\mathbf{v}^{\tilde{n}} = \epsilon^{\mathcal{D}-1} \mathbf{v}^{0,n} = \epsilon^{\mathcal{D}-1} \mathbf{v}^0,$$

alors pour la partie *statique*, il suffit de reprendre les calculs déjà développés, pour la partie *dynamique*, le terme variationnel est

$$\begin{aligned} & \sum_c \sum_n \langle - \sum_{b \in O^{-1}(\tilde{n})} \mathbf{f}_d^{b,O(b)} - \sum_{b \in E^{-1}(\tilde{n})} \mathbf{f}_d^{b,E(b)}, \epsilon^{\mathcal{D}-1} \mathbf{v}^0 \rangle, \\ & = -\varpi^2 \sum_c \epsilon^{\mathcal{D}} \sum_b d^b \left[\langle \mathbf{u}^{0,E(b)} + 2\mathbf{u}^{0,O(b)}, \mathbf{v}^{0,O(b)} \rangle + \langle 2\mathbf{u}^{0,E(b)} + \mathbf{u}^{0,O(b)}, \mathbf{v}^{0,E(b)} \rangle \right] + O(\epsilon^{\mathcal{D}+1}), \\ & = -\varpi^2 \sum_c \epsilon^{\mathcal{D}} \sum_b 6d^b \langle \mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0 \rangle + O(\epsilon^{\mathcal{D}+1}), \end{aligned}$$

il ne reste plus qu'à faire tendre $\epsilon \rightarrow 0$. \square

8.5.3 Modèle macroscopique de vibration ; cas des plaques et coques sans mécanismes

Ce paragraphe se limite aux treillis plaques et coques afin de pouvoir confondre les indices p et i car dans ce cadre de travail, $\dim(\mathcal{M}) = \mathcal{P} = 3$. Les expressions sont alors plus simples à écrire car il n'y a pas d'inertie de rotation.

Proposition 8.11 *Tous les résultats trouvés jusqu'au problème 8.4 non inclus sont valables*

Problème 8.7 *Les champs de déplacement $\mathbf{u}^{0,n} \in \mathcal{M} \cap \mathcal{G}$ et $\hat{\mathbf{u}}^{1,n} \in \mathcal{M} \cap \mathcal{G}^\perp$, ainsi que la pulsation propre ϖ sont solution du problème variationnel*

$$\forall \mathbf{v}^{0,n} \in \mathcal{M} \cap \mathcal{G}, \hat{\mathbf{v}}^{1,n} \in \mathcal{M} \cap \mathcal{G}^\perp, \quad \mathfrak{a}_s^1(\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1, \mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1) - \varpi^2 \mathfrak{a}_d^0(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0) = 0, \quad (8.124)$$

avec \mathfrak{a}_s^1 la forme bilinéaire trouvée en statique et \mathfrak{a}_d^1 la forme bilinéaire due aux inerties

$$\mathfrak{a}_s^1(\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1, \mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1) = \int_{\Lambda} \sum_k f_k^1(\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1) f_k^1(\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1) d\lambda, \quad (8.125)$$

$$\mathfrak{a}_d^1(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0) = \int_{\Lambda} m \langle \mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0 \rangle d\lambda, \quad (8.126)$$

avec m la masse macroscopique totale adimensionnelle d'une cellule

$$m(\lambda) = \sum_b 6d^b = \sum_b \frac{\rho^b}{\rho} a^{0,b} \|\mathbf{p}^{1,b}\|. \quad (8.127)$$

Preuve : pour la partie *statique*, il suffit de reprendre les calculs déjà développés (problème 8.4), pour la partie *dynamique*, le calcul est identique à celui du problème 8.6 pour les treillis 3D. \square

Remarque : comme en statique, si la condition de découplage est vérifiée, alors le problème se découple et une formulation variationnelle ne faisant intervenir que \mathbf{u}^0 et \mathbf{v}^0 peut être écrite.

8.6 Exemples

8.6.1 Poutre plane en \mathcal{N}

On étudie la poutre plane en \mathcal{N} (figure 8.11). Le chargement extérieur appliqué aux nœuds de la poutre est supposé être faible, c'est à dire d'ordre $\mathcal{O}(\epsilon^3)$. On est alors dans le cas d'un modèle du second ordre. La poutre est définie par quatre barres et deux nœuds dont la description géométrique est donnée par :

$$\mathbf{p}^0 = \lambda \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{p}^{1,I} = \frac{t}{2} \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{p}^{1,II} = -\frac{t}{2} \mathbf{e}_2,$$

où t est la pente de la barre 2 (c sera le cosinus et s le sinus). La rigidité $k^{-1,b}$ des barres sera simplement notée k^b , les poutres planes périodiques sont un cas de figure où les indices p et i peuvent être confondus. Le vecteur géométrique \mathfrak{B}^b se définit par

$$\mathfrak{B}^b = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{e}_1 & c\mathbf{e}_1 + s\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{o} \end{array} \right]_B$$

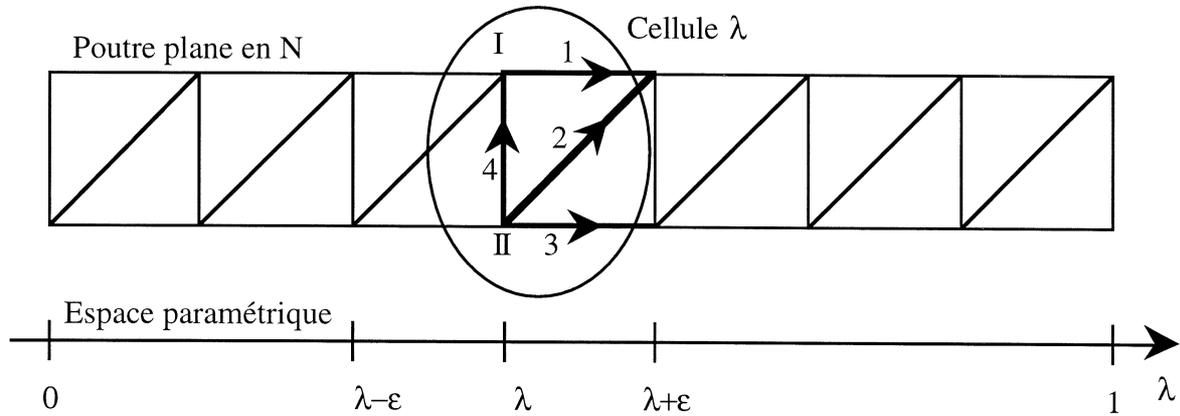


Figure 8.11 : poutre plane en \mathcal{N}

Les deux tensions auto-équilibrées φ_k^b sont alors :

$$\dot{\varphi}_1^b = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{k^1 k^2}{k^1 + k^2}} \\ \cdot \\ -\sqrt{\frac{k^1 k^2}{k^1 + k^2}} \\ \cdot \end{bmatrix}_B, \quad \dot{\varphi}_2^b = \begin{bmatrix} \frac{k^1}{\sqrt{k^1 + k^2}} \\ \cdot \\ \frac{k^2}{\sqrt{k^1 + k^2}} \\ \cdot \end{bmatrix}_B.$$

Comme $\dot{\psi}_1^0 = 0$ par définition de $\dot{\varphi}_k^b$, l'unique $\dot{\psi}_2^0$ est alors

$$\dot{\psi}_2^0 = \sqrt{k^1 + k^2} \mathbf{e}_1$$

Le gouffre est donc défini par

$$\mathcal{G} = \{ \mathbf{v} / \sqrt{k^1 + k^2} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{v} \rangle = 0 \}.$$

Le déplacement macroscopique \mathbf{u}^0 étant dans le gouffre, $\langle \mathbf{u}^0, \mathbf{e}_1 \rangle = 0$, il ne reste que le déplacement transverse sur \mathbf{e}_2 . Dans les relations suivantes, il n'y aura que la composante $p = 2$ pour \mathbf{u}^0 qui sera développée.

Les tensions ϕ_h^b orthogonales aux tensions auto-équilibrées φ_k^b sont :

$$\dot{\phi}_1^b = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}_B, \quad \dot{\phi}_2^b = \begin{bmatrix} \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}_B.$$

Seule la deuxième tension $\dot{\phi}_2^b$ sert dans le calcul du déplacement $\mathbf{u}^{1,n} \in \mathcal{M}^\perp$, c'est à dire de l'opérateur ξ^{nb}

$$\zeta_2^n = \begin{bmatrix} \frac{1}{2c} \mathbf{e}_1 \\ \cdot \\ -\frac{1}{2c} \mathbf{e}_1 \end{bmatrix}_N, \quad \xi^{nb} = \begin{bmatrix} \cdot & \frac{1}{2c} \mathbf{e}_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\frac{1}{2c} \mathbf{e}_1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}_{NB},$$

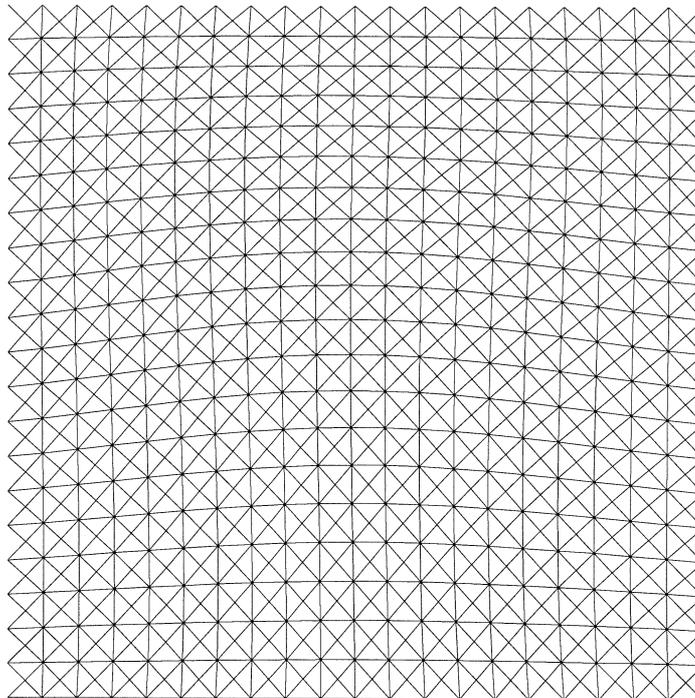


Figure 8.12 : *premier mode propre de vibration du treillis membrane carré en \mathcal{X} de 20×20 cellules*

$$\chi_2^{0,\alpha=1,n} = \begin{bmatrix} \frac{t}{2} \mathbf{e}_1 \\ \frac{t}{2} \mathbf{e}_1 \\ -\frac{t}{2} \mathbf{e}_1 \end{bmatrix}_N, \quad \psi_{k=1,p=2}^{1,0,\alpha=1,\beta=1} = 2 \frac{t}{2} \sqrt{\frac{k^1 k^2}{k^1 + k^2}}.$$

Le modèle continu s'écrit alors après une double intégration par partie

$$-\frac{t^2 k^1 k^2}{k^1 + k^2} \frac{d^4 u_2^0}{d\lambda^4} = f_2^{3,I} + f_2^{3,II}.$$

Ce modèle est identique à celui développé lors du chapitre 2. Dans cet exemple, tous les calculs ont été développés à la main. Cependant, afin de pouvoir étudier des exemples plus compliqués, un programme développé sur le logiciel MATHEMATICA permet de calculer en automatique tous les coefficients utiles pour le milieu continu équivalent dans le cas des treillis 3D, treillis 2D, treillis plaques 3D et treillis poutres 2D périodiques [31]. Ce sont les résultats de ce programme qui ont été utilisés dans les exemples suivants.

8.6.2 Membrane plane en \mathcal{X}

On étudie un treillis membrane à section en \mathcal{X} dans le cas d'une membrane carrée (figure 8.12) et dans le cas d'une membrane rectangulaire (figure 8.13) où les nœuds sont encastés sur les bords. Une cellule de base comprend un nœud et quatre barres. Toutes les barres ont le même matériau de module d'Young E et de masse volumique ρ . Les barres de la diagonale du \mathcal{X} ont une section plus importante (A^2) que les barres horizontales et verticales (A^1) afin que toutes les barres aient la même rigidité. Les caractéristiques

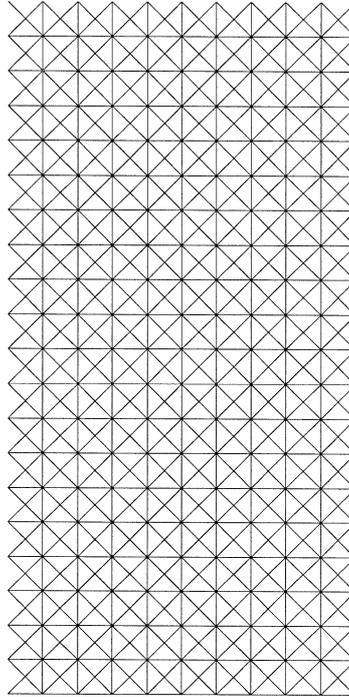


Figure 8.13 : *treillis membrane rectangle en \mathcal{X} non déformé de 10 * 20 cellules*

géométriques du treillis sont :

$$\begin{aligned}
 Lx &= 1\text{m}, \\
 Ly &= 1\text{m ou } 2\text{m}, \\
 E &= 10^9\text{Pa/m}^2, \\
 \rho &= 1000\text{kg/m}^3, \\
 A^1 &= 10^{-4}\text{m}^2, \\
 A^2 &= \sqrt{2}10^{-4}\text{m}^3.
 \end{aligned}$$

Les caractéristiques de la membrane équivalente sont alors : (figure 8.15)

$$\begin{aligned}
 Lx &= 1\text{m}, \\
 Ly &= 1\text{m ou } 2\text{m}, \\
 E_{eq} &= (8/3).10^5\text{Pa/m}^2, \\
 \nu_{eq} &= 1/3, \\
 \rho_{eq} &= 0.4\text{kg/m}^3.
 \end{aligned}$$

Pour la membrane carrée (figure 8.12), même avec un petit nombre de cellules, l'erreur sur les premières fréquences propres de vibration est très faible comme le montre le tableau 8.1. L'erreur relative est calculée en comparant la fréquence propre du treillis avec celle de la membrane continue, la fréquence de référence étant celle du treillis.

Pour la membrane rectangulaire (figure 8.14), l'erreur sur les premières fréquences propres de vibration entre le treillis (figure 8.14) et la membrane (figure 8.15) est acceptable comme le montre le tableau 8.2. Cependant, le fait d'avoir un facteur 2 sur le nombre de cellules dans les deux directions augmente tout de même sensiblement l'erreur. Ceci étant vrai même pour un nombre important de cellules.

modèle	mode	fréquence	erreur relative %
modèle continu 20 * 20	1	344	
	2	344	
	3	404	
	4	501	
treillis 5 * 5	1	349	1.43 %
	2	349	1.43 %
	3	423	4.49 %
	4	508	1.38 %
treillis 10 * 10	1	345	0.39 %
	2	345	0.39 %
	3	409	0.04 %
	4	503	0.53 %
treillis 20 * 20	1	344	< 0.5 %
	2	344	< 0.5 %
	3	405	< 0.5 %
	4	501	< 0.5 %
treillis 40 * 40	1	344	< 0.5 %
	2	344	< 0.5 %
	3	404	< 0.5 %
	4	500	< 0.5 %
treillis 100 * 100	1	344	< 0.5 %
	2	344	< 0.5 %
	3	403	< 0.5 %
	4	499	< 0.5 %

Tableau 8.1 : fréquence propre pour le treillis membrane carré en \mathcal{X}

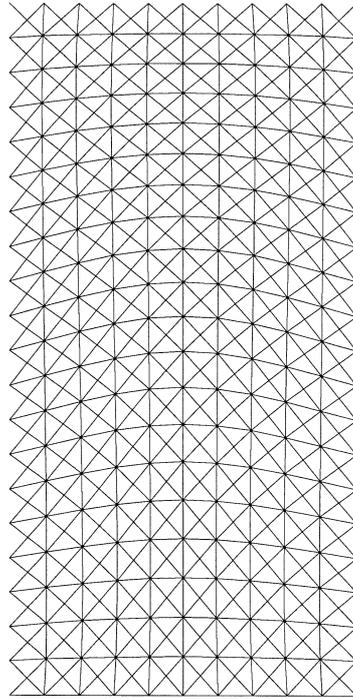


Figure 8.14 : *premier mode propre de vibration du treillis membrane rectangle en \mathcal{X} de 10 * 20 cellules*

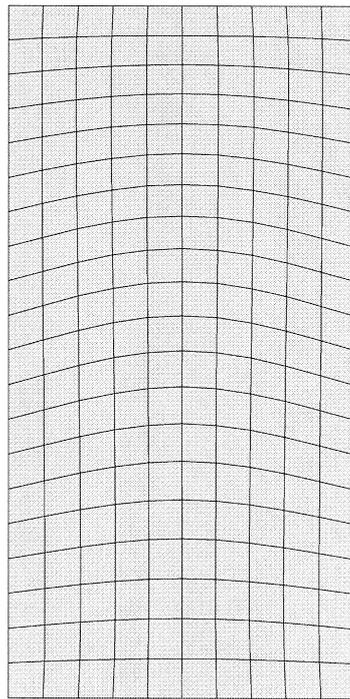


Figure 8.15 : *premier mode propre de vibration de la membrane équivalente, maillage 10 * 20*

modèle	mode	fréquence	erreur relative %
modèle continu 20 * 40	1	229	
	2	309	
	3	322	
	4	341	
modèle continu 5 * 10	1	232	1.09 %
	2	315	1.92 %
	3	332	2.99 %
	4	347	1.86 %
treillis 10 * 20	1	239	3.87 %
	2	298	3.41 %
	3	319	1.13 %
	4	334	1.99 %
treillis 30 * 60	1	239	3.61 %
	2	298	3.88 %
	3	316	1.94 %
	4	332	2.58 %
treillis 60 * 120	1	239	3.58 %
	2	299	3.92 %
	3	319	2.03 %
	4	334	2.64 %

Tableau 8.2 : *fréquence propre pour le treillis membrane rectangle en \mathcal{X}*

Par cet exemple, on montre que le passage microscopique-macroscopique est possible pour les milieux 2D et 3D. Une étude intéressante qui peut être faite est de trouver le comportement macroscopique d'un cristal parfait. À partir de l'énergie reliant deux atomes, on peut essayer d'estimer la rigidité d'une barre équivalente les liant. La difficulté est d'obtenir cette énergie. Dans son livre, Quéré propose une telle énergie écrite à partir des équations de la mécanique quantique [44]. Cependant, parmi les métaux dont on connaît les caractéristiques mécaniques macroscopiques, la technique ne peut être appliquée qu'au seul *Aluminium* car il est un *bon métal* [44]. Cependant, la fonction d'énergie qu'il propose n'est pas assez précise, mais le choix de l'Aluminium est judicieux. Il pourrait donc être intéressant de faire sur l'Aluminium un passage micro-macro.

8.6.3 Plaque 3D en \mathcal{X}

On étudie un treillis plaque à section en \mathcal{X} dans le cas d'une plaque carrée avec des conditions aux limites encastées sur les bords (figure 8.16). Une cellule de base comprend deux nœuds et treize barres. Toutes les barres ont le même matériau de module d'Young E , de masse volumique ρ et la section des barres est A . Le gouffre annule les déformations membranaires à l'ordre ϵ^0 et le problème du second ordre se découple. Seule la flexion

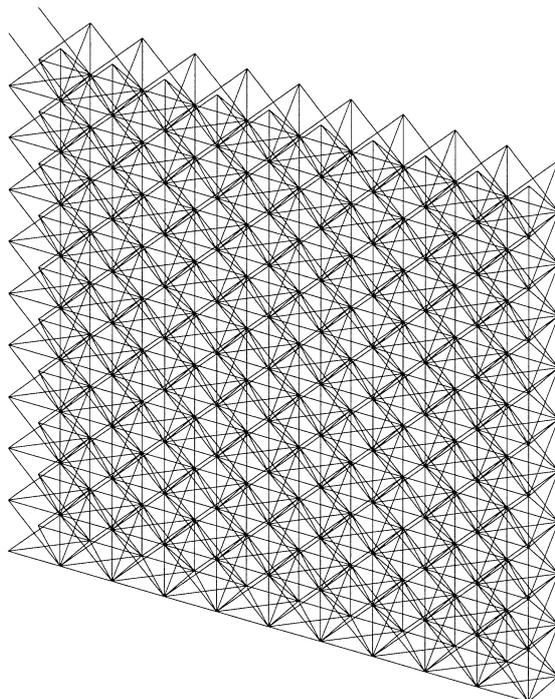


Figure 8.16 : *treillis plaque en \mathcal{X} de $10 * 10$ cellules en configuration initiale*

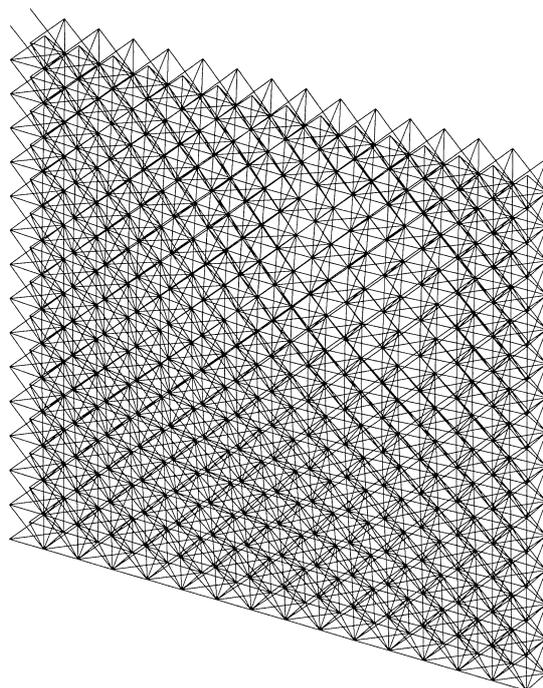


Figure 8.17 : *premier mode propre de vibration du treillis plaque en \mathcal{X} de $15 * 15$ cellules avec des conditions aux limites encastrées sur tout le pourtour*

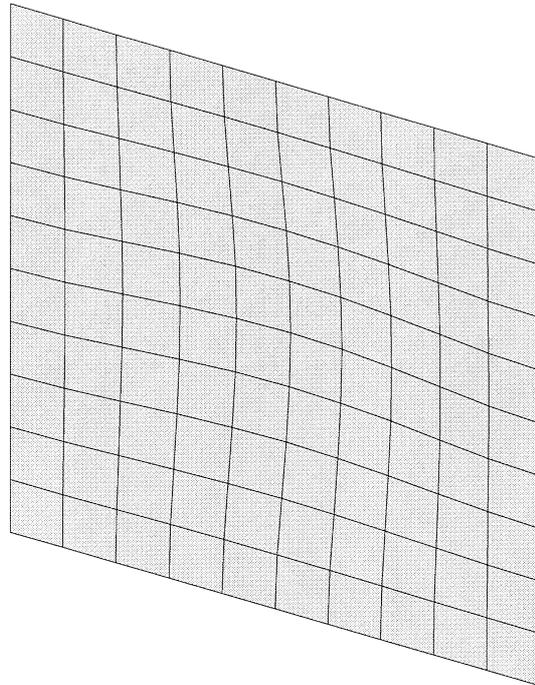


Figure 8.18 : *premier mode propre de vibration de la plaque équivalente avec des conditions aux limites encastées sur les bords, maillage 10 * 10*

intervient (figure 8.17). Les caractéristiques géométriques du treillis sont :

$$\begin{aligned} L &= 10\text{m}, \\ E &= 10^{11}\text{Pa/m}^2, \\ \rho &= 10000\text{kg/m}^3, \\ A &= 1.13 \cdot 10^{-4}\text{m}^2. \end{aligned}$$

Les caractéristiques de la plaque équivalente sont alors : (figure 8.18)

$$\begin{aligned} L &= 10\text{m}, \\ e_{eq} &= 1\text{m}, \\ E_{eq} &= 8.8612 \cdot 10^6\text{Pa/m}^2, \\ G_{eq} &= 8.4853 \cdot 10^6\text{Pa/m}^2, \\ \nu_{eq} &= 0.4136, \\ \rho_{eq} &= 5 + 8\sqrt{2}\text{kg/m}^3. \end{aligned}$$

Pour une plaque carrée encastée, l'erreur relative est calculée en comparant la fréquence propre du treillis (figure 8.17) avec celle de la plaque continue (figure 8.18), la fréquence de référence étant celle du treillis. Cependant, la fréquence propre du treillis convergeant vers zéro comme l'inverse du nombre de cellules \mathcal{C} , la comparaison se fait entre le produit du nombre de cellules \mathcal{C} par la fréquence propre du treillis (\mathcal{C} *fréq.) et la fréquence propre de la plaque. L'erreur sur les premières fréquences propres de vibration devient faible pour un nombre de cellule assez important comme le montre le tableau 8.3. Cela laisse à penser que la convergence est moins bonne pour les structures minces que pour les milieux du premier gradient.

modèle	mode	fréquence	$C * \text{fréq.}$	erreur relative %
modèle plaque 10 * 10	1	135.91		
	2	275.74		
	3	275.74		
	4	408.53		
treillis 10 * 10	1	9.87	98.7	37.7 %
	2	17.44	177.4	58.1 %
	3	17.44	174.4	58.1 %
	4	23.64	236.4	72.8 %
treillis 15 * 15	1	7.58	113.7	19.5 %
	2	14.11	211.7	30.2 %
	3	14.11	211.7	30.2 %
	4	19.66	294.6	38.5 %
treillis 20 * 20	1	6.06	121.1	12.2 %
	2	11.59	231.7	19.0 %
	3	11.59	231.7	19.0 %
	4	16.41	328.2	24.5 %
treillis 30 * 30	1	4.26	127.8	6.3 %
	2	8.39	251.7	9.5 %
	3	8.39	251.7	9.5 %
	4	12.17	365.1	11.9 %
treillis 40 * 40	1	3.26	130.6	4.1 %
	2	6.52	260.7	5.8 %
	3	6.52	260.7	5.8 %
	4	9.58	383.4	6.6 %

Tableau 8.3 : fréquence propre pour le treillis plaque en \mathcal{X}

8.7 Conclusion

Une modélisation générale pour un treillis quasi-périodique a été proposée. Puis une méthode d'homogénéisation discrète utilisant de façon systématique les formulations variationnelles a été développée dans le cadre de l'élasticité linéaire. Elle permet de trouver le milieu continu équivalent pour un treillis. Il n'est cependant pas possible d'écrire un milieu continu qui soit représentatif de tous les treillis. Deux classes de problèmes se distinguent :

- les treillis 3D et les treillis 2D ont un milieu continu équivalent du premier gradient. Tous les nœuds d'une cellule ont le même déplacement macroscopique \mathbf{u}^0 et n'interviennent dans la déformation du milieu continu que les dérivées premières du déplacement macroscopique \mathbf{u}^0 . Le tenseur symétrique des contraintes macroscopiques $\mathfrak{\sigma}^0$ est alors caractérisé ainsi que la loi de comportement liant les contraintes aux déformations. Une condition sur la géométrie du treillis est définie pour que la loi de comportement soit symétrique définie positive. Certains treillis coques ou poutres courbes ont aussi un milieu continu du premier ordre.
- les treillis poutres, plaques et coques sont des structures minces qui ont un comportement plus complexe. En effet, dans le modèle continu, les dérivées secondes du déplacement macroscopique $\mathbf{u}^{0,n}$ interviennent, cela signifie que *la courbure* de la déformée est à prendre en compte. Trois autres difficultés sont à ajouter : le milieu continu donné par l'homogénéisation discrète au premier ordre n'est pas coercif, il existe donc des déplacements qui n'engendrent pas de déformation au premier ordre, ils appartiennent alors à un espace nommé gouffre \mathcal{G} [53, 54]. Pour les plaques, nous avons montré que moyennant une condition, l'appartenance au gouffre impliquait la nullité des déformations membranaires ; pour les poutres 3D, tous les nœuds de la cellule n'ont pas le même déplacement macroscopique car la torsion peut influencer, l'espace macroscopique \mathcal{M} est alors de dimension quatre ; pour toutes les structures minces, le déplacement à l'ordre suivant \hat{u}_p^1 , c'est à dire en ϵ , et appartenant à l'espace \mathcal{M} se retrouve lui-aussi dans le milieu continu équivalent. Nous avons donc un problème couplé à l'ordre ϵ^0 et ϵ entre le déplacement macroscopique u_p^0 dans le gouffre \mathcal{G} et le déplacement \hat{u}_p^1 dans l'espace macroscopique \mathcal{M} et dans l'orthogonal du gouffre \mathcal{G}^\perp . Une condition de découplage a été écrite afin de pouvoir dans certains cas découpler le problème et avoir une formulation sur le seul déplacement macroscopique u_p^0 .

Selon leur géométrie, les coques et les poutres courbes peuvent avoir un modèle du premier gradient ou du second ordre. Par ailleurs, les formulations développées sont compatibles avec l'existence de mécanismes. Le milieu continu pour un treillis à mécanismes peut donc être déterminé. Si le chargement appliqué sur ce treillis ne fait pas intervenir ces mécanismes, le modèle continu pourra y être appliqué.

La méthode a été programmée sur le logiciel MATHEMATICA pour les seuls treillis périodiques [31]. Les coefficients équivalents sont donc déterminés très facilement en quelques opérations numériques ou formelles selon le choix. Des exemples ont été donnés pour montrer l'utilisation possible de tels modèles. Des comparaisons ont été proposées

à partir de calcul fait sur le logiciel éléments finis ANSYS [5]. Ces exemples sont restés simples afin que le milieu continu équivalent soit compatible avec un élément fini standard d'ANSYS. Ces premiers résultats sont cependant tout à fait encourageants.

Chapitre 9

Modèle macroscopique d'une structure discrète en grand déplacement

Plan du chapitre 9

9.1	Description de l'étude	184
9.2	Modélisation du treillis en grand déplacement	187
9.2.1	Positions et déplacements des nœuds, ordre de grandeur	187
a)	Position avant déformation d'un nœud, longueur initiale d'une barre	187
b)	Déplacement des nœuds du treillis	188
c)	Position après déformation d'un nœud, longueur finale d'une barre	188
9.2.2	Tension dans une barre, ordre de grandeur	189
a)	Relation entre la tension dans une barre et le déplacement de ses nœuds extrémités	189
b)	Énergie potentielle de tension	190
c)	Ordre de grandeur de la rigidité d'une barre	190
d)	Ordre de grandeur de la tension dans une barre	191
9.2.3	Équilibre de la structure, formulation variationnelle et formulation énergétique	191
a)	Équilibre statique de la structure	191
b)	Formulation variationnelle	191
c)	Formulation énergétique	192
9.3	Modèle macroscopique du premier ordre	193
9.3.1	Déplacement macroscopique, espace \mathcal{M}^0	193
9.3.2	Tension à l'ordre ϵ^{-1} , longueur des barres	194
9.3.3	Tension à l'ordre ϵ^0 , vecteur tensions auto-équilibrées	194
9.3.4	Modèle macroscopique	195
a)	Formulation variationnelle	195
b)	Formulation énergétique	196
9.4	Modèle macroscopique du second ordre, application aux treillis élancés	196

- 9.4.1 Cas des chargements extérieurs de faibles intensités, gouffre \mathcal{GM} pour les déplacements 196
 - a) Gouffre \mathcal{GM} pour les déplacements 197
 - b) Gouffre tangent \mathcal{GM}^v pour champ test 197
 - c) Tension à l'ordre 0 198
- 9.4.2 Déplacement local de corps rigide pour les treillis sans mécanismes . . . 199
 - a) Base covariante de l'espace physique au cours de la déformation 199
 - b) Gouffre pour le déplacement macroscopique 199
 - c) longueur des barres à l'ordre 1 200
 - d) Position et déplacement des nœuds à l'ordre 1, espace \mathcal{M}^1 200
- 9.4.3 Tension dans les barres à l'ordre 1, Déplacement à l'ordre 2 201
 - a) Tensions scalaires auto-équilibrées 201
 - b) Tension auto-équilibrée dans les barres 201
 - c) Positions des nœuds à l'ordre 2 202
 - d) Longueur d'une barre à l'ordre 2 203
 - e) tension à l'ordre 1, déplacement à l'ordre 2 dans \mathcal{M}^\perp 203
- 9.4.4 Relation de compatibilité 203
- 9.4.5 Modèle macroscopique mixte 204
 - a) Formulation variationnelle 204
 - b) Formulation énergétique 204
 - c) Formulation variationnelle réduite 205
- 9.5 Exemples 206
 - 9.5.1 Modèle continu de câble pour la poutre plane en \mathcal{N} 206
 - 9.5.2 Modèle continu de poutre pour la poutre plane en \mathcal{N} 207
- 9.6 Conclusion 210

9.1 Description de l'étude

Ce chapitre porte sur la modélisation de la déformation d'un treillis quasi-périodique en statique sous les hypothèses des petites déformations mais des grands déplacements. Les équations que nous allons obtenir vont donc être non linéaires. La principale caractéristique de cette formulation en grand déplacement est d'écrire les équations d'équilibre du treillis sur la configuration déformée que l'on ne connaît pas *a priori*. Il ne s'agit pas ici de faire de l'incrémentale, c'est à dire de faire des petits pas de chargement afin de déterminer l'équilibre à chaque itération. Il s'agit de passer directement, par un seul pas de chargement, de la configuration initiale non déformée à la configuration finale déformée (figure 9.1). Cette configuration finale n'étant pas connue, on ne connaît ni sa forme, ni sa position, les grandeurs caractéristiques et les relations les liant ne peuvent alors être décrites que dans la cadre des grands déplacements. Plutôt que de prendre le déplacement des nœuds \mathbf{u}^n comme inconnues du problème, nous allons travailler sur la position des nœuds en configuration déformée \mathbf{q}^n ; les relations seront écrites entre la position initiale \mathbf{p}^n et la position finale des nœuds \mathbf{q}^n .

1. La première partie concerne la modélisation du treillis en grand déplacement. Il s'agit de décrire le treillis dans les deux configurations ; initiale et finale, d'écrire

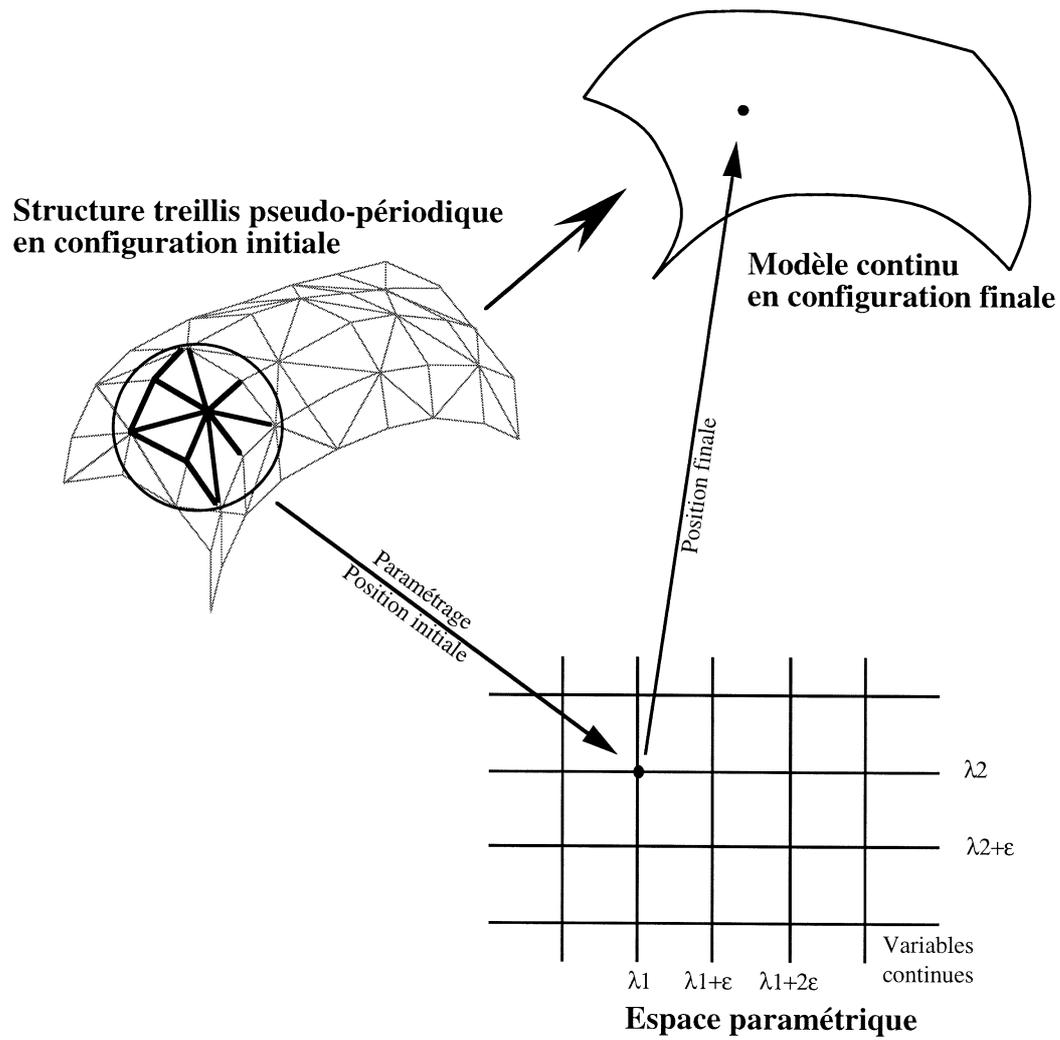


Figure 9.1 : *homogénéisation discrète en grand déplacement*

la relation de comportement en grand déplacement entre la tension dans une barre et le déplacement de ses deux nœuds extrémités, d'écrire l'équilibre du treillis en configuration déformée. Trois formulations de cet équilibre sont possibles : la formulation classique donnée par le principe fondamental de la dynamique, la formulation variationnelle ou principe des puissances virtuelles et la formulation énergétique où l'équilibre du treillis est donné par le minimum d'une énergie. Du fait de l'hypothèse des petites déformations, le comportement d'une barre reste dans le domaine élastique. La formulation énergétique se trouve alors être souvent plus intéressante que la formulation variationnelle qui est fortement non linéaire en grand déplacement.

2. Dans la seconde partie, on s'attache à trouver un modèle continu du premier ordre. Pour ce faire, nous allons faire tendre ϵ vers 0 dans les formulations. On montre que les tensions à l'ordre $O(\epsilon^{-1})$ sont nulles ce qui restreint les nœuds d'une cellule à tous avoir la même position macroscopique finale (tous les nœuds ont le même déplacement macroscopique). Ce résultat est valable pour tous les treillis, qu'ils aient des mécanismes ou non, que ce soient des poutres 3D ou des plaques... L'étude en grand déplacement diffère donc fondamentalement, par cette propriété, de l'étude en élasticité linéaire. Il reste alors à écrire le modèle du premier ordre basé sur les tensions à l'ordre $O(\epsilon^0)$.

3. Dans la troisième partie, on suppose que le chargement appliqué aux nœuds du treillis est faible, c'est à dire d'ordre $O(\epsilon^3)$. Le modèle du premier ordre impose alors une condition non linéaire, appelée gouffre, sur les positions finales des nœuds. Pour les structures élancées, ce gouffre ne caractérise pas complètement la position déformée, il reste donc des degrés de liberté permettant la déformation du modèle continu. Un gouffre tangent est ensuite défini pour le champ test des formulations variationnelles. Le reste est une copie de l'étude en élasticité linéaire, écriture de l'auto-équilibre des tensions à l'ordre $O(\epsilon)$ et du modèle continu du deuxième ordre. De même qu'en élasticité linéaire et contrairement à la position macroscopique, on retrouve pour la position à l'ordre $O(\epsilon)$ les indéterminations concernant les mécanismes pour les treillis à mécanismes et la torsion pour les poutres 3D. Ces mécanismes et cette torsion sont donnés par la cinématique du treillis, les équations qui les caractérisent sont donc non linéaires. Pour les positions aux ordres supérieurs, on retrouve de nouveau ces mécanismes et cette torsion, mais ils sont alors caractérisés par une cinématique tangente, c'est à dire que les équations sont alors linéaires vis à vis de ces positions.

4. Dans une dernière partie, un exemple simple sera examiné. Il s'agit de la poutre en \mathcal{N} qui sera étudiée sous chargement important, on aura alors un modèle de câble, et sous chargement faible ce qui fournira un modèle de poutre en grand déplacement. Ces deux modèles sont bien sûr identiques à ceux trouvés par les développements à tout ordre de ϵ des équations d'équilibre. En effet, les deux méthodes sont strictement équivalentes d'un point de vue formel (chapitre 3).

9.2 Modélisation du treillis en grand déplacement

9.2.1 Positions et déplacements des nœuds, ordre de grandeur

a) Position avant déformation d'un nœud, longueur initiale d'une barre

Ce paragraphe ne diffère en rien de ce qui a été déjà écrit dans le cadre des petits déplacements (figure 9.2). Les relations ci-dessous ne sont que des rappels afin de bien intégrer les notations.

Hypothèse 9.1 *Les positions des nœuds de la structure sont choisies sous la forme d'un développement asymptotique en puissance de ϵ :*

$$\mathbf{p}^n(\lambda) = \mathbf{p}^0(\lambda) + \epsilon \mathbf{p}^{1,n}(\lambda) + \epsilon^2 \mathbf{p}^{2,n}(\lambda) + \dots \quad (9.1)$$

Remarque : la position globale de la cellule λ dans la structure est donnée par la position macroscopique $\mathbf{p}^0(\lambda)$, la position locale d'un nœud n dans une cellule est repérée par le terme prépondérant suivant $\mathbf{p}^{1,n}$. Les termes suivants sont des correcteurs qui n'interviennent que pour les structures quasi-périodiques et dont il n'est pas aisé de trouver une signification très précise. En effet, il ne faut pas oublier que la séparation d'échelle existe *a priori*, c'est à dire que ϵ est petit devant 1 et qu'il va tendre vers 0 dans nos développements.

Proposition 9.1 *La longueur initiale vectorielle \mathbf{p}^b de la barre b est :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}^{\tilde{b}} = \mathbf{p}^b(\lambda) = \mathbf{p}^b = \mathbf{p}^{E(b)}(\lambda + \epsilon \delta^b) - \mathbf{p}^{O(b)}(\lambda), \\ \mathbf{p}^b = \epsilon \mathbf{p}^{1,b} + \epsilon^2 \mathbf{p}^{2,b} + \epsilon^3 \mathbf{p}^{3,b} + \dots, \\ \mathbf{p}^{1,b} = \mathbf{p}^{1,E(b)} - \mathbf{p}^{1,O(b)} + \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \lambda^{\alpha}} \delta^{\alpha,b}, \\ \mathbf{p}^{2,b} = \mathbf{p}^{2,E(b)} - \mathbf{p}^{2,O(b)} + \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{p}^{1,E(b)}}{\partial \lambda^{\alpha}} \delta^{\alpha,b} + \frac{1}{2!} \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \mathbf{p}^0}{\partial \lambda^{\alpha} \partial \lambda^{\beta}} \delta^{\alpha,b} \delta^{\beta,b}. \end{array} \right. \quad (9.2)$$

À partir de cette longueur \mathbf{p}^b d'une barre b , on peut définir la vraie longueur de cette barre p^b ainsi que son vecteur unitaire \mathbf{e}^b .

Propriétés 9.1

- La norme du vecteur longueur \mathbf{p}^b est la longueur physique p^b de la barre b , elle peut s'écrire :

$$\begin{aligned} p^b &= \|\mathbf{p}^b\| = \sqrt{\langle \mathbf{p}^b, \mathbf{p}^b \rangle}, \\ &= \sqrt{\epsilon^2 \|\mathbf{p}^{1,b}\|^2 + 2\epsilon^3 \langle \mathbf{p}^{1,b}, \mathbf{p}^{2,b} \rangle + O(\epsilon^4)}, \\ &= \epsilon \|\mathbf{p}^{1,b}\| \left[1 + \epsilon \frac{\langle \mathbf{p}^{1,b}, \mathbf{p}^{2,b} \rangle}{\|\mathbf{p}^{1,b}\|^2} + O(\epsilon^2) \right], \\ p^b &= \epsilon \|\mathbf{p}^{1,b}\| + \epsilon^2 \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{p}^{2,b} \rangle + O(\epsilon^3), \end{aligned} \quad (9.3)$$

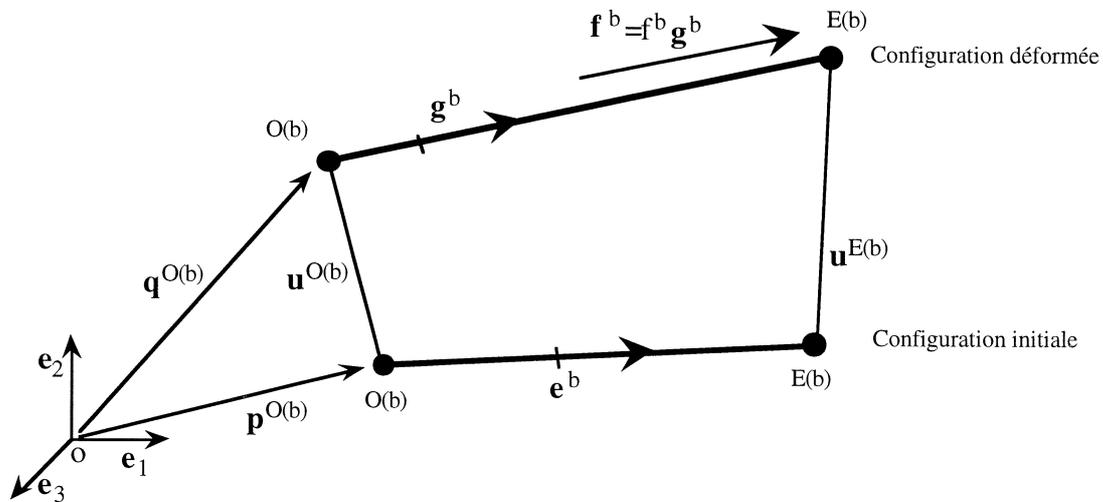


Figure 9.2 : déplacement d'un nœud, position d'une barre

- le vecteur unitaire de la barre b avant déformation est noté e^b , il peut être développé en série asymptotique en puissance de ϵ . On peut introduire un opérateur de projection orthogonale $\pi e^{0,b}$ qui a tout vecteur v associe son projeté sur le plan de normale $e^{0,b}$.

$$\begin{cases} e^b = \frac{p^b}{\|p^b\|} = e^{0,b} + \epsilon e^{1,b} + O(\epsilon^2), & \|e^b\| = 1, \\ e^{0,b} = \frac{p^{1,b}}{\|p^{1,b}\|}, & \|e^{0,b}\| = 1, \\ e^{1,b} = \frac{p^{2,b}}{\|p^{1,b}\|} - e^{0,b} \langle e^{0,b}, \frac{p^{2,b}}{\|p^{1,b}\|} \rangle = \pi e^{0,b} \frac{p^{2,b}}{p^{1,b}}, & e^{1,b} \perp e^{0,b}. \end{cases} \quad (9.4)$$

b) Déplacement des nœuds du treillis

Hypothèse 9.2 Le déplacement du nœud n est cherché sous forme d'un développement asymptotique en puissance de ϵ , similaire à celui posé pour la position des nœuds. Cependant, le premier terme du déplacement n'est pas supposé être le même pour chaque nœud a priori.

$$u^n(\lambda) = u^{0,n}(\lambda) + \epsilon u^{1,n}(\lambda) + \epsilon^2 u^{2,n}(\lambda) + \dots \quad (9.5)$$

c) Position après déformation d'un nœud, longueur finale d'une barre

Définition 9.1 La position après déformation des nœuds n sera notée q^n et correspond à la position initiale p^n du nœud n à laquelle on ajoute son déplacement u^n , soit : $(p + u)^n$ (figure 9.2).

Proposition 9.2 *La longueur finale \mathbf{q}^b de la barre b se détermine exactement de la même manière que sa longueur initiale, soit :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{q}^{\tilde{b}} = \mathbf{q}^b(\lambda) = (\mathbf{p} + \mathbf{u})^{E(b)}(\lambda + \epsilon\delta^b) - (\mathbf{p} + \mathbf{u})^{O(b)}(\lambda), \\ \quad = \mathbf{q}^{0,b} + \epsilon\mathbf{q}^{1,b} + \epsilon^2\mathbf{q}^{2,b} + \epsilon^3\mathbf{q}^{3,b} + \dots, \\ \mathbf{q}^{0,b} = \mathbf{u}^{0,E(b)} - \mathbf{u}^{0,O(b)} = \mathbf{u}^{0,b}, \\ \mathbf{q}^{1,b} = \mathbf{q}^{1,E(b)} - \mathbf{q}^{1,O(b)} + \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{q}^{0,E(b)}}{\partial \lambda^{\alpha}} \delta^{\alpha,b}, \\ \mathbf{q}^{2,b} = \mathbf{q}^{2,E(b)} - \mathbf{q}^{2,O(b)} + \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{q}^{1,E(b)}}{\partial \lambda^{\alpha}} \delta^{\alpha,b} + \frac{1}{2!} \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \mathbf{q}^{0,E(b)}}{\partial \lambda^{\alpha} \partial \lambda^{\beta}} \delta^{\alpha,b} \delta^{\beta,b}. \end{array} \right. \quad (9.6)$$

Remarque : dans la suite, il sera montré que $\mathbf{u}^{0,n} = \mathbf{u}^0$ pour tout nœud n , alors la longueur finale \mathbf{q}^b sera elle aussi d'ordre ϵ et donc pour toute barre b , $\mathbf{q}^{0,b} = 0$. Tout ce qui a été défini pour la barre b avant déformation en utilisant la longueur \mathbf{p}^b peut alors être de nouveau défini après déformation ; la vraie longueur après déformation \mathbf{q}^b ainsi que son vecteur unitaire \mathbf{g}^b . De même, on peut introduire un opérateur de projection orthogonale $\pi_{\mathbf{g}^{0,b}}$ qui à tout vecteur \mathbf{v} associe son projeté sur le plan de normale $\mathbf{g}^{0,b}$.

Propriétés 9.2 *Ces définitions et propriétés se placent dans le cas où la longueur finale d'ordre ϵ^0 de la barre b est nulle, $\mathbf{q}^{0,b} = 0$. Alors, l'ordre de grandeur de la longueur d'une barre au cours de la déformation n'a pas changé.*

- la longueur physique de la barre b s'écrit

$$q^b = \|\mathbf{q}^b\| = \epsilon \|\mathbf{q}^{1,b}\| + \epsilon^2 \langle \mathbf{g}^{0,b}, \mathbf{q}^{2,b} \rangle + O(\epsilon^3) \quad (9.7)$$

- le vecteur unitaire de la barre b après déformation est défini par (figure 9.2) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{g}^b = \frac{\mathbf{q}^b}{\|\mathbf{q}^b\|} = \mathbf{g}^{0,b} + \epsilon \mathbf{g}^{1,b} + O(\epsilon^2), \quad \|\mathbf{g}^b\| = 1, \\ \mathbf{g}^{0,b} = \frac{\mathbf{q}^{1,b}}{\|\mathbf{q}^{1,b}\|}, \quad \|\mathbf{g}^{0,b}\| = 1, \\ \mathbf{g}^{1,b} = \frac{\mathbf{q}^{2,b}}{\|\mathbf{q}^{1,b}\|} - \mathbf{g}^{0,b} \langle \mathbf{g}^{0,b}, \frac{\mathbf{q}^{2,b}}{\|\mathbf{q}^{1,b}\|} \rangle = \pi_{\mathbf{g}^{0,b}} \frac{\mathbf{q}^{2,b}}{\|\mathbf{q}^{1,b}\|}, \quad \mathbf{g}^{1,b} \perp \mathbf{g}^{0,b}. \end{array} \right. \quad (9.8)$$

9.2.2 Tension dans une barre, ordre de grandeur

a) Relation entre la tension dans une barre et le déplacement de ses nœuds extrémités

Hypothèse 9.3 *On suppose que la tension dans la barre b est nulle avant déformation. De plus, nous nous plaçons en petite déformation ce qui entraîne pour la barre un comportement élastique, c'est à dire que la tension est proportionnelle à la variation de*

longueur que la barre subit (figure 9.2). L'équilibre d'une barre s'écrit donc en grands déplacements dans sa configuration déformée par :

$$\mathbf{F}^b(\lambda) = K^b(\lambda) \left\{ \|\mathbf{Q}^{E(b)}(\lambda + \epsilon\delta^b) - \mathbf{Q}^{O(b)}(\lambda)\| - \|\mathbf{P}^{E(b)}(\lambda + \epsilon\delta^b) - \mathbf{P}^{O(b)}(\lambda)\| \right\} \mathbf{g}^b(\lambda), \quad (9.9)$$

soit avec les variables adimensionnelles :

$$\mathbf{f}^b = k^b (q^b - p^b) \mathbf{g}^b = k^b \left(1 - \frac{\|\mathbf{p}^b\|}{\|\mathbf{q}^b\|} \right) \mathbf{q}^b. \quad (9.10)$$

b) Énergie potentielle de tension

Propriétés 9.3 On appelle potentiel de tension la fonctionnelle \mathbb{j}_g^b définie par :

$$\mathbb{j}_g^b = \mathbb{j}_g^b(\lambda) = \frac{1}{2} k^b (q^b - p^b)^2, \quad (9.11)$$

alors la relation liant la tension \mathbf{f}^b dans la barre b à son potentiel \mathbb{j}_g^b est :

$$d\mathbb{j}_g^b = \langle \mathbf{f}^b, d\mathbf{q}^b \rangle \quad (9.12)$$

Preuve : il suffit d'écrire la différentielle du potentiel \mathbb{j}_g^b

$$d\mathbb{j}_g^b = k^b (q^b - p^b) dq^b,$$

puis d'expliciter le terme dq^b

$$dq^b = \frac{1}{2} \frac{2 \langle \mathbf{q}^b, d\mathbf{q}^b \rangle}{q^b}.$$

Il ne reste plus qu'à identifier la tension \mathbf{f}^b dans le développement.

□

c) Ordre de grandeur de la rigidité d'une barre

On reprend les mêmes hypothèses que lors de l'étude en petit déplacement. Toutes les barres ont le même ordre de grandeur pour leur rigidité en traction et celle-ci est prise égale à ϵ^{-1} .

Définition 9.2 Pour toute barre b , la rigidité en traction compression de cette barre peut se développer

$$\forall b, \quad k^b = \frac{1}{\epsilon} k^{-1,b} + k^{0,b} + \epsilon k^{1,b} + \dots \quad (9.13)$$

Remarque : on aurait là encore pu choisir des rigidités commençant à l'ordre 0, cela n'aurait fait que décaler les résultats d'un ordre de grandeur en ϵ . L'important est que toutes les barres ont une rigidité ayant le même ordre de grandeur.

d) Ordre de grandeur de la tension dans une barre

Propriétés 9.4 *Trois cas vont donc se présenter :*

1. *une longueur initiale de barre en ϵ et une longueur finale en ϵ^0 . Alors, la tension dans une barre b s'écrit :*

$$\mathbf{f}^b = \frac{1}{\epsilon} k^{-1,b} \mathbf{u}^{0,E(b)} - \mathbf{u}^{0,O(b)} + \mathbf{O}(\epsilon^0). \quad (9.14)$$

On remarque que la tension est d'ordre ϵ^{-1} ,

2. *une longueur initiale et finale de la barre d'ordre ϵ , alors $\forall b, \mathbf{q}^{0,b} = 0$ et la tension dans la barre b peut s'écrire :*

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^b &= k^{-1,b} \left[\|\mathbf{q}^{1,b}\| - \|\mathbf{p}^{1,b}\| \right] \mathbf{g}^{0,b} + \mathbf{O}(\epsilon), \\ &= k^{-1,b} \left[1 - \frac{\|\mathbf{p}^{1,b}\|}{\|\mathbf{q}^{1,b}\|} \right] \mathbf{q}^{1,b} + \mathbf{O}(\epsilon), \end{aligned} \quad (9.15)$$

3. *une longueur initiale et finale de la barre d'ordre ϵ , mais une tension à l'ordre ϵ^0 nulle, alors $\forall b, \|\mathbf{q}^{1,b}\| = \|\mathbf{p}^{1,b}\|$ et la tension dans la barre b peut s'écrire :*

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^b &= \epsilon k^{-1,b} \left[\langle \mathbf{g}^{0,b}, \mathbf{q}^{2,b} \rangle - \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{p}^{2,b} \rangle \right] \mathbf{g}^{0,b} + \mathbf{O}(\epsilon^2), \\ &= \epsilon k^{-1,b} \frac{\langle \mathbf{q}^{1,b}, \mathbf{q}^{2,b} \rangle - \langle \mathbf{p}^{1,b}, \mathbf{p}^{2,b} \rangle}{\|\mathbf{p}^{1,b}\|^2} \mathbf{q}^{1,b} + \mathbf{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (9.16)$$

9.2.3 Équilibre de la structure, formulation variationnelle et formulation énergétique

a) Équilibre statique de la structure

Définition 9.3 *On dit que la structure est équilibrée si et seulement si*

$$\forall \tilde{n}, \quad - \sum_{\tilde{b} \in O^{-1}(\tilde{n})} \mathbf{f}^{\tilde{b}} + \sum_{\tilde{b} \in E^{-1}(\tilde{n})} \mathbf{f}^{\tilde{b}} = \mathbf{f}_{\phi}^{\tilde{n}}. \quad (9.17)$$

b) Formulation variationnelle

La formulation variationnelle de l'équilibre est la même que celle écrite en petit déplacement.

Problème 9.1 *La formulation variationnelle de l'équilibre de la structure s'écrit : trouver les tensions $\mathbf{f}^{\tilde{b}}$ telles que :*

$$\forall \mathbf{v}^{\tilde{n}}, \quad - \sum_{\tilde{n}} \sum_{\tilde{b} \in O^{-1}(\tilde{n})} \langle \mathbf{f}^{\tilde{b}}, \mathbf{v}^{\tilde{n}} \rangle + \sum_{\tilde{n}} \sum_{\tilde{b} \in E^{-1}(\tilde{n})} \langle \mathbf{f}^{\tilde{b}}, \mathbf{v}^{\tilde{n}} \rangle = \sum_{\tilde{n}} \epsilon^f \langle \mathbf{f}_{\phi}^{\tilde{n}}, \mathbf{v}^{\tilde{n}} \rangle, \quad (9.18)$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$\begin{cases} \forall \mathbf{v}^{\tilde{n}}, & \sum_{\tilde{b}} \langle \mathbf{f}^{\tilde{b}}, \mathbf{v}^{E(\tilde{b})-O(\tilde{b})} \rangle = \sum_{\tilde{n}} \epsilon^f \langle \mathbf{f}_{\phi}^{\tilde{n}}, \mathbf{v}^{\tilde{n}} \rangle, \\ \forall \tilde{b}, (b, \lambda) & \mathbf{v}^{\tilde{b}} = \mathbf{v}^{E(\tilde{b})-O(\tilde{b})} = \mathbf{v}^b(\lambda) = \mathbf{v}^{E(b)}(\lambda + \epsilon \delta^b) - \mathbf{v}^{O(b)}(\lambda). \end{cases} \quad (9.19)$$

On peut aussi effectuer en premier une somme sur toutes les cellules c ou λ .

$$\forall \mathbf{v}^n(\lambda), \quad \sum_c \sum_b \langle \mathbf{f}^b(\lambda), \mathbf{v}^b(\lambda) \rangle = \sum_c \sum_n \epsilon^f \langle \mathbf{f}_{\phi}^n(\lambda), \mathbf{v}^n(\lambda) \rangle. \quad (9.20)$$

c) Formulation énergétique

Problème 9.2 La formulation énergétique de l'équilibre de la structure s'écrit : l'ensemble des déplacements $\mathbf{u}^{\tilde{n}}$ est celui qui minimise la fonctionnelle $\mathbb{e}_g(\mathbf{v}^{\tilde{n}})$,

$$\mathbf{u}^{\tilde{n}} \leftrightarrow \min_{\mathbf{v}^{\tilde{n}}} \mathbb{e}_g(\mathbf{v}^{\tilde{n}}), \quad \mathbb{e}_g(\mathbf{v}^{\tilde{n}}) = \mathbb{j}_g(\mathbf{v}^{\tilde{n}}) - \mathbb{l}_g(\mathbf{v}^{\tilde{n}}), \quad (9.21)$$

avec

$$\begin{cases} \mathbb{j}_g(\mathbf{v}^{\tilde{n}}) = \sum_{\tilde{b}} \mathbb{j}_g^{\tilde{b}}(\mathbf{v}^{\tilde{n}}) = \frac{1}{2} \sum_{\tilde{b}} k^{\tilde{b}} \left(\|\mathbf{v}^{\tilde{b}}\| - \|\mathbf{p}^{\tilde{b}}\| \right)^2, \\ \mathbb{l}_g(\mathbf{v}^{\tilde{n}}) = \sum_{\tilde{n}} \langle \mathbf{f}^{\tilde{n}}, \mathbf{v}^{\tilde{n}} \rangle. \end{cases} \quad (9.22)$$

On peut aussi effectuer en premier une somme sur toutes les cellules c ou λ .

$$\begin{cases} \mathbb{j}_g(\mathbf{v}^{\tilde{n}}) = \mathbb{j}_g(\mathbf{v}^n(\lambda)) = \frac{1}{2} \sum_c \sum_b k^b(\lambda) \left(\|\mathbf{v}^b(\lambda)\| - \|\mathbf{p}^b(\lambda)\| \right)^2, \\ \mathbb{l}_g(\mathbf{v}^{\tilde{n}}) = \mathbb{l}_g(\mathbf{v}^n(\lambda)) = \sum_c \sum_n \langle \mathbf{f}^n(\lambda), \mathbf{v}^n(\lambda) \rangle. \end{cases} \quad (9.23)$$

Preuve : On commence par déterminer la différentielle de la fonctionnelle $\mathbb{e}_g = \mathbb{j}_g - \mathbb{l}_g$, puis on annule cette différentielle pour le minimum $\mathbf{u}^{\tilde{n}}$

$$\begin{aligned} d\mathbb{e}_g &= d(\mathbb{j}_g - \mathbb{l}_g) = \sum_{\tilde{b}} d\mathbb{j}_g^{\tilde{b}} - d\mathbb{l}_g, \\ &= \sum_{\tilde{b}} k^{\tilde{b}} \left(v^{\tilde{b}} - p^{\tilde{b}} \right) \left\langle \frac{\mathbf{v}^{\tilde{b}}}{v^{\tilde{b}}}, d\mathbf{v}^{\tilde{b}} \right\rangle - \sum_{\tilde{n}} \langle \mathbf{f}^{\tilde{n}}, d\mathbf{v}^{\tilde{n}} \rangle, \end{aligned}$$

alors

$$\forall d\mathbf{v}^{\tilde{n}}, \quad d\mathbb{e}_g = 0 \quad \iff \quad \forall \mathbf{v}^{\tilde{n}}, \quad \sum_{\tilde{b}} \langle \mathbf{f}^{\tilde{b}}, \mathbf{v}^{\tilde{b}} \rangle = \sum_{\tilde{n}} \langle \mathbf{f}^{\tilde{n}}, \mathbf{v}^{\tilde{n}} \rangle.$$

Cette dernière équation est exactement la formulation variationnelle de l'équilibre. \square

Remarque : on pourra par la suite multiplier la formulation énergétique par un scalaire quelconque, puisque seul le minimum de cette fonctionnelle nous intéresse. Notamment on multipliera par $\epsilon^?$, le ? étant à définir, afin de transformer les sommes sur les cellules en intégrale sur l'espace paramétrique.

9.3 Modèle macroscopique du premier ordre

9.3.1 Déplacement macroscopique, espace \mathcal{M}^0

Définition 9.4 Soit \mathcal{M}^0 , comme Macroscopique à l'ordre ϵ^0 , l'espace défini par l'ensemble des champs de déplacement \mathbf{v}^n tels que :

$$\mathcal{M}^0 = \left\{ \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^{3\mathcal{N}} / \mathbf{v}^n = \mathbf{v} \right\}. \quad (9.24)$$

Théorème 9.1 Le champ de déplacement macroscopique $\mathbf{u}^{0,n}$ n'est pas quelconque, il appartient à l'ensemble \mathcal{M}^0 . Alors, le déplacement macroscopique s'écrit tout simplement \mathbf{u}^0 .

$$\forall n, \quad \mathbf{u}^{0,n} = \mathbf{u}^0. \quad (9.25)$$

Remarque : le déplacement macroscopique dans le cadre de la statique des grands déplacements est plus simple que le déplacement macroscopique trouvé lors des petits déplacements.

Preuve : dans la formulation variationnelle, le champ test est choisi tel que :

$$\mathbf{v}^{\tilde{n}} = \epsilon^{\mathcal{D}+1} \theta(\lambda) \mathbf{v}^n,$$

alors lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, l'équilibre de la structure devient :

$$\forall \mathbf{v}^n, \theta, \quad \int_{\Lambda} \sum_b \langle \mathbf{f}^{-1,b}, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle \theta(\lambda) d\Lambda = 0.$$

Soit, en remplaçant $\mathbf{f}^{-1,b}$ par son expression donnée par l'équation 9.14,

$$\forall \mathbf{v}^n, \quad \sum_b k^{-1,b} \langle \mathbf{u}^{0,E(b)} - \mathbf{u}^{0,O(b)}, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle = 0.$$

Il suffit alors de prendre $\mathbf{v}^n = \mathbf{u}^{0,n}$ alors

$$\forall b, \quad \|\mathbf{u}^{0,E(b)} - \mathbf{u}^{0,O(b)}\| = 0 \iff \mathbf{u}^{0,E(b)} = \mathbf{u}^{0,O(b)},$$

ce qui signifie que le déplacement macroscopique $\mathbf{u}^{0,n}$ est le même pour tous les nœuds de la cellule. En effet, quelle que soit la complexité ou la simplicité de la cellule de base, les nœuds sont tous reliés les uns aux autres par des barres. On rappelle que les rigidités de toutes les barres sont supposées être du même ordre de grandeur $O(\epsilon^{-1})$.

Une autre démonstration utilise la formulation énergétique. Dans celle-ci, nous prenons un champ test d'ordre ϵ^0 , c'est à dire $\mathbf{v}^{\tilde{n}} = \mathbf{v}^{0,n} + O(\epsilon)$, on multiplie la fonctionnelle par $\epsilon^{\mathcal{D}+1}$ et on fait tendre ϵ vers 0. Le potentiel à minimiser est alors :

$$\min_{\mathbf{v}^n} \frac{1}{2} \int_{\Lambda} \sum_b k^{-1,b} \|\mathbf{v}^{0,E(b)} - \mathbf{v}^{0,O(b)}\|^2 d\lambda,$$

ce minimum a lieu pour $\mathbf{v}^{0,E(b)} = \mathbf{v}^{0,O(b)}$, ce qui signifie que $\mathbf{u}^{0,n} \in \mathcal{M}^0$.

□

Remarque : la différence entre ces deux démonstrations réside dans le choix du champ test. Pour la méthode énergétique, il correspond lors du minimum du potentiel au champ réel. C'est pourquoi dans cette méthode on ne peut pas caler le champ test par rapport à ϵ de telle sorte qu'il transforme les sommes sur les cellules en intégrale sur l'espace paramétrique lorsque $\epsilon \rightarrow 0$.

9.3.2 Tension à l'ordre ϵ^{-1} , longueur des barres

Théorème 9.2 *Le déplacement macroscopique appartenant à \mathcal{M}^0 , la longueur finale \mathbf{q}^b d'une barre est d'ordre ϵ comme l'est la longueur initiale, la tension dans la barre b à l'ordre ϵ^{-1} est nulle.*

$$\forall b, \quad f^{-1,b} = 0, \quad \mathbf{f}^{-1,b} = \mathbf{o} \quad (9.26)$$

Preuve : elle est évidente à partir de la définition de la tension dans une barre (équation 9.14). \square

9.3.3 Tension à l'ordre ϵ^0 , vecteur tensions auto-équilibrées

En élasticité linéaire, la tension à l'ordre 0 pouvait se projeter sur la base de tension scalaire auto-équilibrée φ_k^b . Pour la tension à l'ordre 0 en grand déplacement, cela n'est pas possible, nous verrons que cela l'est pour les ordres supérieurs du vecteur tension. Cependant, dès l'ordre 0, nous pouvons introduire des vecteurs tensions auto-équilibrés $\varphi_{k'}^b$ qui sont en nombre plus élevés que les scalaires φ_k^b , ce qu'essaye de traduire le changement d'indice $k \rightsquigarrow k'$.

Les vecteurs tensions auto-équilibrés ainsi que la suite de ce paragraphe ne sont pas important pour la suite de ce chapitre. Cependant, on retrouvera la notion de vecteur tension auto-équilibrée lors de l'étude incrémentale de la déformation.

Définition 9.5 *On appelle K' -vecteur tension auto-équilibrée la base de vecteur $\varphi_{k'}^b$ qui vérifie l'auto-équilibre de la cellule, soit :*

$$\forall \mathbf{v}^n, \quad \sum_b \langle \varphi_{k'}^b, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle = 0. \quad (9.27)$$

Les vecteurs tensions sont orthonormés par le B -produit scalaire :

$$\sum_b \langle \varphi_{k'}^b, \varphi_{h'}^b \rangle = \delta_{k'h'}. \quad (9.28)$$

Proposition 9.3 *La tension dans la barre b à l'ordre ϵ^0 , $\mathbf{f}^{0,b}$, se projette sur la base de vecteur tension auto-équilibré.*

$$\begin{cases} \forall b, & \mathbf{f}^{0,b} = \sum_{k'} f_{k'}^0 \varphi_{k'}^b, \\ \forall k', & f_{k'}^0 = \sum_b k^{-1,b} (q^{1,b} - p^{1,b}) \langle \mathbf{g}^{0,b}, \varphi_{k'}^b \rangle. \end{cases} \quad (9.29)$$

Preuve : dans la formulation variationnelle, on choisit le champ test tel que :

$$\mathbf{v}^{\tilde{n}} = \epsilon^{\mathcal{D}} \theta(\lambda) \mathbf{v}^n,$$

alors lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, on obtient :

$$\forall \theta, \mathbf{v}^n, \quad \int_{\Lambda} \sum_b \langle \mathbf{f}^{0,b}, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle \theta d\lambda = 0.$$

Cela entraîne la projection de $\mathbf{f}^{0,b}$ sur les $\varphi_{k'}^b$. Pour trouver cette projection $f_{k'}^0$, on utilise la même démarche qu'en petit déplacement, c'est à dire qu'on réalise le produit scalaire de $\mathbf{f}^{1,b}$ avec $\varphi_{h'}^b$, puis on somme sur b . \square

9.3.4 Modèle macroscopique

a) Formulation variationnelle

Le modèle continu du premier ordre a comme inconnues la position finale macroscopique $\mathbf{q}^{0,n} = \mathbf{q}^0 \in \mathcal{M}^0$ ainsi que la position locale $\mathbf{q}^{1,n}$ à l'ordre ϵ . Cette dernière position ne sera pas entièrement définie par cette formulation, seulement sa projection sur $\mathcal{M}^{0\perp}$ que l'on notera $\check{\mathbf{q}}^{1,n}$. Ce résultat est normal car on ne peut pas déterminer à la fois la position à l'ordre ϵ^0 et la position à l'ordre ϵ appartenant au même ensemble \mathcal{M}^0 .

Problème 9.3 *La position finale macroscopique \mathbf{q}^0 ainsi que la position locale $\check{\mathbf{q}}^{1,n} \in \mathcal{M}^{0\perp}$ sont solutions du problème variationnel :*

$$\forall (\mathbf{v}^{0,n} = \mathbf{v}^0, \mathbf{v}^{1,n}) \in \mathcal{M}^0 \times \mathcal{M}^{0\perp}, \quad \mathbb{a}_g^0(\mathbf{q}^{1,b}, \mathbf{v}^{1,b}) = \mathbb{l}_g^0(\mathbf{v}^0) \quad (9.30)$$

avec pour la forme non linéaire \mathbb{a}_g^0 et pour la forme linéaire \mathbb{l}_g^0 les définitions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{a}_g^0(\mathbf{q}^{1,b}, \mathbf{v}^{1,b}) = \int_{\Lambda} \sum_b \langle \mathbf{f}^{0,b}, \mathbf{v}^{1,b} \rangle d\lambda, \\ \quad \quad \quad = \int_{\Lambda} \sum_b k^{-1,b} (q^{1,b} - p^{1,b}) \langle \mathbf{g}^{0,b}, \mathbf{v}^{1,b} \rangle d\lambda, \\ \mathbb{l}_g^0(\mathbf{v}^0) = \int_{\Lambda} \sum_n \langle \mathbf{f}^{1,n}, \mathbf{v}^0 \rangle d\lambda. \end{array} \right. \quad (9.31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{q}^{1,b} = \mathbf{q}^{1,E(b)} - \mathbf{q}^{1,O(b)} + \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{q}^0}{\partial \lambda^{\alpha}} \delta^{\alpha,b} \\ \mathbf{v}^{1,b} = \mathbf{v}^{1,E(b)} - \mathbf{v}^{1,O(b)} + \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{v}^0}{\partial \lambda^{\alpha}} \delta^{\alpha,b} \end{array} \right. \quad (9.32)$$

Remarque : Le champ test $\mathbf{v}^{1,n}$ dans cette formulation ne permet que de retrouver le fait que la tension \mathbf{f}^b est un vecteur tension auto-équilibrée. Il permet donc d'obtenir une formulation synthétique de l'équilibre.

b) Formulation énergétique

Problème 9.4 *La position finale macroscopique \mathbf{q}^0 ainsi que la position locale $\check{\mathbf{q}}^{1,n} \in \mathcal{M}^{0\perp}$ représente un minimum pour l'énergie de déformation :*

$$\min_{(\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^{1,n})} \left\{ \mathbb{j}_g^0(\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^{1,n}) - \mathbb{l}_g^0(\mathbf{v}^0) \right\} \tag{9.33}$$

avec pour la définition du potentiel \mathbb{j}_g^0

$$\mathbb{j}_g^0(\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^{1,n}) = \frac{1}{2} \int_{\Lambda} \sum_b k^{-1,b} \left(\|\mathbf{v}^{1,b}\| - \|\mathbf{p}^{1,b}\| \right)^2 d\lambda \tag{9.34}$$

Preuve : il suffit de calculer la différentielle de la fonctionnelle $\mathbb{j}_g^0 - \mathbb{l}_g^0$, puis d'écrire sa nullité pour son minimum $\mathbf{q}^0 + \epsilon \check{\mathbf{q}}^{1,n}$. L'identification avec la formulation variationnelle est alors immédiate.

Autre démonstration à partir de la formulation énergétique globale. On choisit un champ test $\mathbf{v}^{\tilde{n}} = \mathbf{v}^0 + \epsilon \mathbf{v}^{1,n} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$, on multiplie le potentiel par $\epsilon^{\mathcal{D}-1}$ et on fait tendre ϵ vers 0. On obtient :

$$\min_{\mathbf{v}^0 + \epsilon \mathbf{v}^{1,n}} \frac{1}{2} \int_{\Lambda} \sum_b k^{-1,b} \left(\|\mathbf{v}^{1,b}\| - \|\mathbf{p}^{1,b}\| \right)^2 d\lambda - \int_{\Lambda} \sum_n \langle \mathbf{f}^{1,n}, \mathbf{v}^0 \rangle d\lambda,$$

ce qui est identique à la formulation variationnelle. □

Remarque : On ne trouve pas directement, par la formulation énergétique, la propriété de projection de la tension $\mathbf{f}^{0,b}$ sur les vecteurs tensions auto-équilibrées $\varphi_{k'}^b$. Ceci est normal car la formulation énergétique est essentiellement une formulation en déplacement alors que la formulation variationnelle permet de mixer les deux.

9.4 Modèle macroscopique du second ordre, application aux treillis élancés

9.4.1 Cas des chargements extérieurs de faibles intensités, gouffre \mathcal{GM} pour les déplacements

Le problème précédent est généralement bien posé en grand déplacement. Cependant dans le cas de chargement très faible, d'ordre ϵ^3 au lieu d'ordre ϵ , le fait de ne pas introduire de terme de chargement dans le problème 9.3 ne réduit pas toujours à zéro l'espace des déplacements possibles, c'est le cas pour les poutres, plaques et coques. Dans la suite, on supposera que les forces extérieures agissant sur le treillis sont d'ordre ϵ^3 .

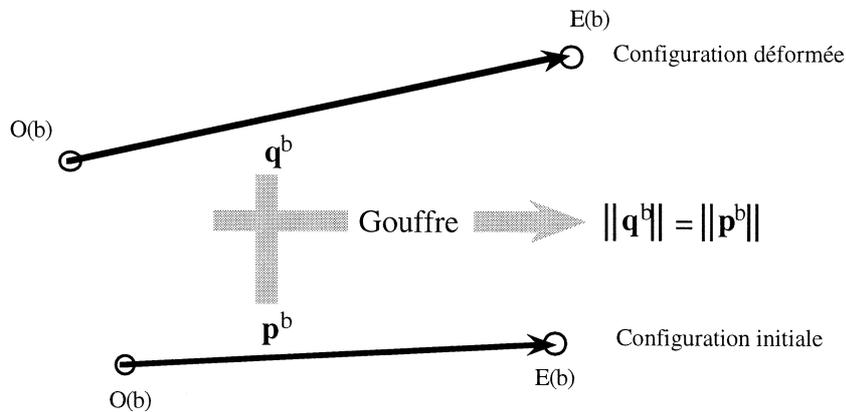


Figure 9.3 : condition du gouffre pour les positions des nœuds

a) Gouffre \mathcal{GM} pour les déplacements

Proposition 9.4 Les champs de déplacement $\mathbf{u}^0 + \epsilon \mathbf{u}^{1,n}$ ou de positions $\mathbf{q}^0 + \epsilon \mathbf{q}^{1,n}$ vérifient l'égalité suivante :

$$\forall b, \quad \|\mathbf{q}^{1,b}\| = \|\mathbf{p}^{1,b}\|. \tag{9.35}$$

Tout champ $\mathbf{q}^0 + \epsilon \mathbf{q}^{1,n}$ vérifiant cette relation sera dit dans le gouffre \mathcal{GM} (figure 9.3). Cet espace \mathcal{GM} définit à la fois le gouffre \mathcal{G}^0 pour la position macroscopique \mathbf{q}^0 ainsi que l'espace macroscopique \mathcal{M}^1 pour la position $\mathbf{q}^{1,n}$

Preuve : le problème 9.4 doit toujours être vérifié, même s'il n'y a pas de terme de chargement, ce qui entraîne que $j_g^0(\mathbf{v}^{1,b})$ est minimum pour le champ test particulier $\mathbf{v}^0 + \epsilon \mathbf{v}^{1,n} = \mathbf{q}^0 + \epsilon \mathbf{q}^{1,n}$, alors :

$$\min_{\mathbf{v}^0 + \epsilon \mathbf{v}^{1,n}} \int_{\Omega} \sum_b k^{-1,b} \left(\|\mathbf{v}^{1,b}\| - \|\mathbf{p}^{1,b}\| \right)^2 d\lambda = \min_{\mathbf{v}^0 + \epsilon \mathbf{v}^{1,n}} \sum_b \left(\|\mathbf{v}^{1,b}\| - \|\mathbf{p}^{1,b}\| \right)^2 = 0.$$

Le minimum est donc atteint pour $\mathbf{q}^0 + \epsilon \mathbf{q}^{1,n}$ avec $\|\mathbf{q}^{1,b}\| = \|\mathbf{p}^{1,b}\|$ et ce minimum est égal à 0. □

Remarque : on n'arrive pas à démontrer ce résultat directement à partir de la formulation variationnelle. D'ou l'intérêt d'une double formulation pour le problème en grand déplacement.

b) Gouffre tangent \mathcal{GM}^v pour champ test

La position du nœud $\mathbf{q}^0 + \epsilon \mathbf{q}^{1,n}$ doit appartenir au gouffre \mathcal{GM} . Cette appartenance peut aussi se représenter comme une contrainte non linéaire à ajouter à la formulation variationnelle ou à la formulation énergétique. Le champ test $\mathbf{v}^{\tilde{n}}$ n'a pas à vérifier cette contrainte non linéaire mais il doit se placer dans le plan tangent à cette contrainte que l'on appellera gouffre tangent ou gouffre test. Nous pouvons maintenant en donner la définition.

Définition 9.6 On appelle *gouffre test* ou *gouffre tangent* \mathcal{GM}^v l'espace des champs test $\mathbf{v}^n = \mathbf{v}^0 + \epsilon \mathbf{v}^{1,n}$ qui vérifie l'égalité

$$\forall b, \quad \langle \mathbf{g}^{0,b}, \mathbf{v}^{1,b} \rangle = 0. \quad (9.36)$$

Remarque : pour obtenir ce résultat, il suffit de différentier la contrainte exprimant le gouffre \mathcal{GM}

$$d(\langle \mathbf{q}^{1,b}, \mathbf{q}^{1,b} \rangle - \langle \mathbf{p}^{1,b}, \mathbf{p}^{1,b} \rangle) = 0 = 2\langle \mathbf{q}^{1,b}, d\mathbf{q}^{1,b} \rangle = \langle \mathbf{g}^{0,b}, d\mathbf{q}^{1,b} \rangle,$$

et d'identifier $d\mathbf{q}^{1,b}$ avec $\mathbf{v}^{1,b}$.

Remarque : Le champ test macroscopique \mathbf{v}^0 appartient bien à \mathcal{M}^0 comme la position macroscopique finale des nœuds \mathbf{q}^0 car l'espace macroscopique \mathcal{M}^0 peut s'interpréter comme une contrainte linéaire $\mathbf{q}^{0,E(b)} = \mathbf{q}^{0,O(b)} = \mathbf{q}^0$ alors que l'espace \mathcal{GM} ne peut s'interpréter que comme une contrainte non linéaire.

Propriétés 9.5 Le champ test $\mathbf{v}^{1,n}$ peut se décomposer en deux champs $\mathbf{v}^{1,n} = \hat{\mathbf{v}}^{1,n} + \check{\mathbf{v}}^{1,n}$ avec $\hat{\mathbf{v}}^{1,n} \in \mathcal{M}$ et $\check{\mathbf{v}}^{1,n} \in \mathcal{M}^\perp$. Le champ $\hat{\mathbf{v}}^{1,n}$ est quelconque, mais le champ $\check{\mathbf{v}}^{1,n}$ est parfaitement défini à l'aide de \mathbf{v}^0 par :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{v}}^{1,n} \in \mathcal{M}, & \hat{\mathbf{v}}^{1,n} = \sum_p \hat{v}_p^1 \mathbf{e}_p^n, \\ \check{\mathbf{v}}^{1,n} \in \mathcal{M}^\perp, & \check{\mathbf{v}}^{1,n} = \sum_b \xi^{nb} \langle \mathbf{g}^{0,b}, \frac{\partial \mathbf{v}^0}{\partial \lambda^\alpha} \rangle. \end{cases} \quad (9.37)$$

où ξ^{nb} a la même définition qu'en petit déplacement avec cependant le vecteur unitaire de la barre dans la configuration déformée $\mathbf{g}^{0,b}$ dans la définition de ζ_h^n au lieu de du vecteur unitaire en configuration initiale $\mathbf{e}^{0,b}$.

$$\begin{cases} \forall n, b, & \xi^{nb} = \sum_h \zeta_h^n \phi_h^b, \\ \forall h, k, & \sum_b \phi_h^b \phi_k^b = 0, \\ \forall h, k, & \sum_b \phi_h^b \phi_k^b = \delta_{hk}, \\ \forall b, & \langle \mathbf{g}^{0,b}, \zeta_h^{E(b)} - \zeta_h^{E(b)O(b)} \rangle + \phi_h^b = 0, \\ \forall h, p, & \sum_n \langle \zeta_h^n, \mathbf{e}_p^n \rangle = 0. \end{cases} \quad (9.38)$$

c) Tension à l'ordre 0

Proposition 9.5 La tension à l'ordre ϵ^0 dans une barre b est nulle

$$\forall b, \quad \mathbf{f}^{0,b} = \mathbf{o}, \quad (9.39)$$

alors la tension dans une barre se comporte comme précédemment définie à l'équation 9.15, ce qui peut aussi s'écrire :

$$\mathbf{f}^{1,b} = k^{-1,b} \langle \mathbf{g}^{0,b}, \mathbf{q}^{2,b} \rangle \mathbf{g}^{0,b}. \quad (9.40)$$

Remarque : la tension dans la barre b s'écrit de la même manière que dans le cadre des petits déplacements, mais dans le repère tourné. On verra cette propriété dans le paragraphe suivant.

Remarque : la longueur macroscopique d'une barre b d'une cellule λ est la même avant déformation $\mathbf{p}^{1,b}$ et après déformation $\mathbf{q}^{1,b}$, mais son orientation dans l'espace est différente. On en déduit que la cellule ne peut que se déplacer (translater et tourner) dans un mouvement de corps rigide, sauf si le treillis comporte au niveau de la cellule des mécanismes. Dans ce dernier cas, l'identification du gouffre \mathcal{GM} est beaucoup plus difficile.

9.4.2 Déplacement local de corps rigide pour les treillis sans mécanismes

a) Base covariante de l'espace physique au cours de la déformation

On cherche à exprimer le fait que les barres ne s'allongent pas à l'ordre ϵ . La cellule tourne donc sans se déformer, la position des nœuds $\mathbf{q}^0 + \epsilon \mathbf{q}^{1,n}$ dans la cellule est identique dans un repère qui tourne avec la déformation.

Définition 9.7 On définit la base covariante avant déformation ($\mathbf{e}_{\alpha'}$) et la base covariante après déformation ($\mathbf{g}_{\alpha'}$) ; avec $\alpha' \in \{1, 2, 3\}$ (figure 9.4). Ces deux bases sont définies par :

$$\begin{cases} \forall \alpha' \in \{1, \dots, \mathcal{D}\}, \alpha' = \alpha, & \mathbf{e}_{\alpha} = \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \lambda^{\alpha}} \\ \forall \alpha' \in \{\mathcal{D} + 1, \dots, 3\}, \forall \beta', & \langle \mathbf{e}_{\alpha'}, \mathbf{e}_{\beta'} \rangle = 0 \end{cases} \quad (9.41)$$

$$\begin{cases} \forall \alpha' \in \{1, \dots, \mathcal{D}\}, \alpha' = \alpha, & \mathbf{g}_{\alpha} = \frac{\partial \mathbf{q}^0}{\partial \lambda^{\alpha}} \\ \forall \alpha' \in \{\mathcal{D} + 1, \dots, 3\}, \forall \beta', & \langle \mathbf{g}_{\alpha'}, \mathbf{g}_{\beta'} \rangle = 0 \end{cases} \quad (9.42)$$

b) Gouffre pour le déplacement macroscopique

Définition 9.8 Soit une base covariante ($\mathbf{g}_{\alpha'}^v$) générée par le déplacement ou la position \mathbf{v}

$$\begin{cases} \forall \alpha' \in \{1, \dots, \mathcal{D}\}, \alpha' = \alpha, & \mathbf{g}_{\alpha}^v = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda^{\alpha}}, \\ \forall \alpha' \in \{\mathcal{D} + 1, \dots, 3\}, \forall \beta', & \langle \mathbf{g}_{\alpha'}^v, \mathbf{g}_{\beta'}^v \rangle = 0, \end{cases} \quad (9.43)$$

alors le gouffre macroscopique \mathcal{G}^0 est défini par :

$$\mathcal{G}^0 = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 / \forall \alpha', \beta', \quad \langle \mathbf{g}_{\alpha'}^v, \mathbf{g}_{\beta'}^v \rangle = \langle \mathbf{e}_{\alpha'}, \mathbf{e}_{\beta'} \rangle \right\}. \quad (9.44)$$

Théorème 9.3 La position macroscopique finale des nœuds \mathbf{q}^0 se trouve dans le gouffre \mathcal{G}^0 , c'est à dire qu'elle vérifie :

$$\langle \mathbf{g}_{\alpha'}, \mathbf{g}_{\beta'} \rangle = \langle \mathbf{e}_{\alpha'}, \mathbf{e}_{\beta'} \rangle. \quad (9.45)$$

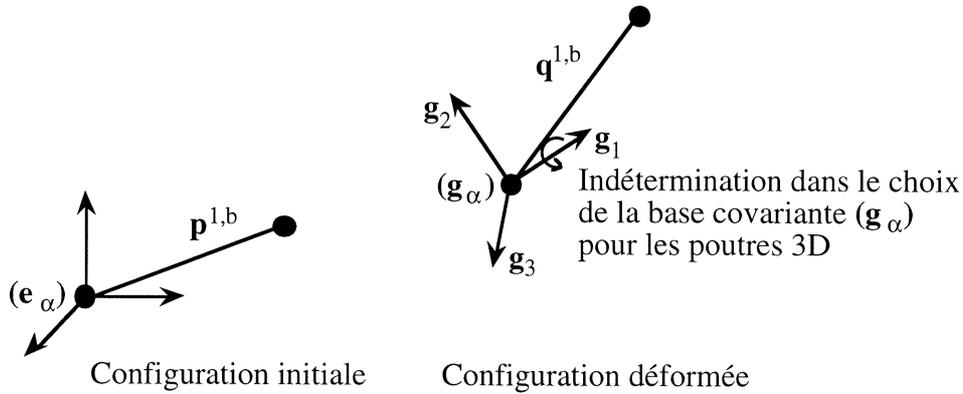


Figure 9.4 : bases covariantes avant et après déformation

Preuve : Cette appartenance n'exprime que la non déformation de la base covariante lors de la déformation. Or la cellule a un mouvement de corps rigide aux deux premiers ordres de grandeurs des positions (des déplacements). □

Remarque : le gouffre \mathcal{G}^0 signifie qu'il n'y a pas de déformation d'extension dans la structure.

c) longueur des barres à l'ordre 1

La longueur des barres après déformation s'écrit très simplement dans la base covariante ($\mathbf{g}_{\alpha'}$) en fonction de la projection sur la base covariante ($\mathbf{e}_{\alpha'}$) de la longueur de la barre avant déformation.

Propriétés 9.6 le vecteur longueur initiale de la barre b étant

$$\mathbf{p}^{1,b} = \mathbf{p}^{1,E(b)} - \mathbf{p}^{1,O(b)} + \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \lambda^{\alpha}} \delta^{\alpha,b} = \sum_{\alpha'} \underbrace{\langle \mathbf{p}^{1,E(b)} - \mathbf{p}^{1,O(b)}, \mathbf{e}_{\alpha'} \rangle}_{p^{1,E(b)} - p_{\alpha'}^{1,O(b)}} \mathbf{e}_{\alpha'} + \sum_{\alpha} \delta^{\alpha b} \mathbf{e}_{\alpha}, \quad (9.46)$$

le vecteur longueur finale de la barre b s'écrit :

$$\mathbf{q}^{1,b} = \mathbf{q}^{1,E(b)} - \mathbf{q}^{1,O(b)} + \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{q}^0}{\partial \lambda^{\alpha}} \delta^{\alpha,b} = \sum_{\alpha'} (p_{\alpha'}^{1,E(b)} - p_{\alpha'}^{1,O(b)}) \mathbf{g}_{\alpha'} + \sum_{\alpha} \delta^{\alpha b} \mathbf{g}_{\alpha}. \quad (9.47)$$

d) Position et déplacement des nœuds à l'ordre 1, espace \mathcal{M}^1

Proposition 9.6 La position finale $\mathbf{q}^{1,n}$ du nœud n peut s'exprimer en fonction de la position initiale $\mathbf{p}^{1,n}$ par :

$$\mathbf{q}^{1,n} = \underbrace{\sum_{\alpha'} p_{\alpha'}^{1,n} \mathbf{g}_{\alpha'}}_{\text{rotation}} + \underbrace{\hat{\mathbf{q}}^1}_{\text{translation}}, \quad (9.48)$$

avec $\hat{\mathbf{q}}^1$ et $\mathbf{p}_{\alpha'}^{1,n}$ définies par :

$$\mathbf{p}^{1,n} = \sum_{\alpha'} p_{\alpha'}^{1,n} \mathbf{e}_{\alpha'} \quad (9.49)$$

$$\hat{\mathbf{q}}^1 \in \mathcal{M}^0 \quad (9.50)$$

Remarque : le premier terme correspond à une rotation de corps rigide de la cellule (donc sans déformation), le second terme est indéterminé et exprime un déplacement global à l'ordre 1 de la cellule dans l'espace physique.

Remarque : pour les poutres 3D, il reste une indétermination dans la définition de la base covariante ($\mathbf{g}_{\alpha'}$) correspondant à la torsion de la poutre. En effet, les deux vecteurs \mathbf{g}_2 et \mathbf{g}_3 peuvent tourner autour du vecteur tangent à la poutre \mathbf{g}_1 (figure 9.4).

Définition 9.9 On appelle ensemble macroscopique d'ordre 1, l'espace \mathcal{M}^1 défini par l'ensemble des positions possibles à l'ordre 1 par $\mathbf{q}^{1,n}$.

Remarque : Cet ensemble contient l'information sur la position globale de la cellule à l'ordre 1 $\hat{\mathbf{q}}^1$, mais aussi sur la rotation possible des bases ($\mathbf{g}_{\alpha'}$) autour du vecteur \mathbf{g}_1 pour les poutres 3D, mais aussi les mécanismes possibles pour les treillis à mécanismes. Cet ensemble est donc plus vaste que \mathcal{M}^0 , il est l'équivalent de l'ensemble \mathcal{M} défini en élasticité linéaire qui servira aussi en grand déplacement dès l'ordre 2. Cela signifie qu'il a la même dimension, cependant on ne peut pas écrire une rotation ou un mécanisme en grand déplacement sous la forme d'un torseur des petits déplacements. C'est pourquoi \mathcal{M}^1 ressemble à \mathcal{M} . ils permettent tous les deux de représenter la même chose, mais ils ne peuvent se définir de la même manière.

9.4.3 Tension dans les barres à l'ordre 1, Déplacement à l'ordre 2

a) Tensions scalaires auto-équilibrées

Proposition 9.7 Les \mathcal{K} tensions scalaires auto-équilibrées définies lors de l'étude en petit déplacement φ_k^b sont encore des tensions auto-équilibrées pour notre problème en grand déplacement. En effet la base des ($\mathbf{g}^{0,b}$) est équivalente à la base des ($\mathbf{e}^{0,b}$) dans la définition des φ_k^b .

$$\forall \mathbf{v}^n, k \quad \sum_b \varphi_k^b \langle \mathbf{g}^{0,b}, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle = 0 \iff \sum_b \varphi_k^b \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle = 0. \quad (9.51)$$

b) Tension auto-équilibrée dans les barres

Le résultat suivant montre que les tensions dans les barres, dans ce cas de faibles chargements, sont une combinaison linéaire des tensions auto-équilibrées. Ce résultat est identique à celui trouvé sous l'hypothèse des petits déplacements.

Proposition 9.8 *La tension dans une barre b à l'ordre ϵ se projette sur l'ensemble des tensions auto-équilibrées.*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f}^b = \epsilon \mathbf{f}^{1,b} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = f^b \mathbf{g}^b, \\ \mathbf{f}^{1,b} = f^{1,b} \mathbf{g}^{0,b}, \\ \mathbf{f}^{1,b} = k^{-1,b} [\langle \mathbf{g}^{0,b}, \mathbf{q}^{2,b} \rangle - \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{p}^{2,b} \rangle], \\ = \sum_k f_k^1 \varphi_k^b. \end{array} \right. \quad (9.52)$$

Preuve : la démonstration est identique à celle faite lors de l'étude en petit déplacement \square

c) Positions des nœuds à l'ordre 2

Ce paragraphe n'influence pas le résultat final. Son intérêt réside dans le changement d'espace dans lequel $\mathbf{q}^{2,n}$ va se décomposer, c'est à dire dans \mathcal{M} et \mathcal{M}^\perp comme en petit déplacement, et non dans \mathcal{M}^0 et $\mathcal{M}^{0\perp}$ comme pour la position macroscopique \mathbf{q}^0 .

Définition 9.10 *On appelle espace macroscopique \mathcal{M} , l'équivalent de l'espace macroscopique défini en élasticité linéaire. \mathcal{M} se définit donc par :*

$$\mathbf{v}^n \in \mathcal{M} \iff \langle \mathbf{g}^{0,b}, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle = 0. \quad (9.53)$$

Cette définition est équivalente à celle en élasticité linéaire, le vecteur directeur de la barre $\mathbf{e}^{0,b}$ a été changé par le nouveau vecteur directeur en configuration déformée $\mathbf{g}^{0,b}$. On peut donc définir une base de cet espace (\mathbf{e}_p^n). Elle se définit par les trois vecteurs ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) pour les plaques et les coques sans mécanismes, on y ajoute le vecteur $\mathbf{e}_4^n =$ pour les poutres.

Proposition 9.9 *La position d'un nœud à l'ordre 2, $\mathbf{q}^{2,n}$, peut se décomposer en deux positions ; l'une dans l'espace macroscopique \mathcal{M} , l'autre dans \mathcal{M}^\perp . Seule la partie dans \mathcal{M}^\perp peut être déterminée à partir de \mathbf{q}^0 et $\mathbf{q}^{1,n}$.*

$$\forall n, \quad \mathbf{q}^{2,n} = \hat{\mathbf{q}}^{2,n} + \check{\mathbf{q}}^{2,n}, \quad (9.54)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{\mathbf{q}}^{2,n} \in \mathcal{M}^\perp, \\ \hat{\mathbf{q}}^{2,n} \in \mathcal{M} \iff \hat{\mathbf{q}}^{2,n} = \sum_p \hat{q}_p^2 \mathbf{e}_p^n. \end{array} \right. \quad (9.55)$$

Preuve : il suffit de revenir à la définition de la tension dans une barre $f^{1,b}$ (équation 9.52). \square

d) Longueur d'une barre à l'ordre 2

Proposition 9.10 *La longueur d'une barre $\mathbf{q}^{2,b}$ à l'ordre $O(\epsilon^2)$ peut se décomposer en trois longueurs ; la première $\hat{\mathbf{q}}^{2,b}$ pour le terme ayant la position $\hat{\mathbf{q}}^{2,n}$ dans \mathcal{M} , la seconde $\check{\mathbf{q}}^{2,b}$ pour le terme ayant la position $\check{\mathbf{q}}^{2,n}$ dans \mathcal{M}^\perp , la troisième $\check{\check{\mathbf{q}}}^{2,b}$ avec les autres termes de position, c'est à dire \mathbf{q}^0 et $\mathbf{q}^{1,n}$. La longueur s'écrit alors : $\mathbf{q}^{2,b} = \hat{\mathbf{q}}^{2,b} + \check{\mathbf{q}}^{2,b} + \check{\check{\mathbf{q}}}^{2,b}$ avec*

$$\forall b, \quad \mathbf{q}^{2,b} = \underbrace{\hat{\mathbf{q}}^{2,E(b)} - \hat{\mathbf{q}}^{2,O(b)}}_{\hat{\mathbf{q}}^{2,b} \leftarrow \hat{\mathbf{q}}^{2,n} \in \mathcal{M}} + \underbrace{\check{\mathbf{q}}^{2,E(b)} - \check{\mathbf{q}}^{2,O(b)}}_{\check{\mathbf{q}}^{2,b} \leftarrow \check{\mathbf{q}}^{2,n} \in \mathcal{M}^\perp} + \underbrace{\sum_\alpha \frac{\partial \mathbf{q}^{1,E(b)}}{\partial \lambda^\alpha} \delta^{\alpha,b} + \frac{1}{2!} \frac{1}{2!} \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \mathbf{q}^0}{\partial \lambda^\alpha \partial \lambda^\beta} \delta^{\alpha,b} \delta^{\beta,b}}_{\check{\check{\mathbf{q}}}^{2,b}}. \quad (9.56)$$

e) tension à l'ordre 1, déplacement à l'ordre 2 dans \mathcal{M}^\perp

Propriétés 9.7 *La tension f_k^1 à l'ordre 1 est :*

$$\forall k, \quad f_k^1 = \sum_b \varphi_k^b \left[\langle \mathbf{g}^{0,b}, \check{\mathbf{q}}^{2,b} \rangle - \langle \mathbf{e}^{0,b}, \check{\mathbf{p}}^{2,b} \rangle \right], \quad (9.57)$$

la longueur $\check{\mathbf{q}}^{2,b}$ à l'ordre 2 se détermine par :

$$\forall b, \quad \langle \mathbf{g}^{0,b}, \check{\mathbf{q}}^{2,b} \rangle = \frac{1}{k^{-1,b}} \sum_k f_k^1 \varphi_k^b - \left[\langle \mathbf{g}^{0,b}, \check{\mathbf{q}}^{2,b} \rangle - \langle \mathbf{e}^{0,b}, \check{\mathbf{p}}^{2,b} \rangle \right], \quad (9.58)$$

la position $\check{\mathbf{q}}^{2,n}$ dans \mathcal{M}^\perp par :

$$\forall n, \quad \check{\mathbf{q}}^{2,n} = \sum_b \xi^{nb} \langle \mathbf{g}^{0,b}, \check{\mathbf{q}}^{2,b} \rangle, \quad (9.59)$$

9.4.4 Relation de compatibilité

Proposition 9.11 *Le champ de déplacement macroscopique \mathbf{u}^0 ou la position finale \mathbf{q}^0 vérifie l'équation de compatibilité :*

$$\forall \mathbf{v}^n \in \mathcal{M}, \mathbf{v}^n = \mathbf{v}, \quad \int_\Lambda \sum_b \langle \mathbf{f}^{1,b}, \sum_\alpha \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda^\alpha} \delta^{\alpha,b} \rangle d\lambda = 0 \quad (9.60)$$

Preuve : dans la formulation variationnelle, le champ test $\mathbf{v}^{\tilde{n}}$ est choisi tel que :

$$\mathbf{v}^{\tilde{n}} = \mathbf{v}^n(\lambda) = \epsilon^{D-2} \mathbf{v}^0.$$

Alors, la longueur test d'une barre est :

$$\mathbf{v}^b = \epsilon^{D-2} \left[\epsilon \sum_\alpha \frac{\partial \mathbf{v}^0}{\partial \lambda^\alpha} \delta^{\alpha,b} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right],$$

le résultat est alors immédiat. □

9.4.5 Modèle macroscopique mixte

a) Formulation variationnelle

On appelle modèle mixte, le problème posé à la fois sur la position finale macroscopique \mathbf{q}^0 et sur la position locale $\mathbf{q}^{1,n}$.

Problème 9.5 Les positions du nœud n ; $\mathbf{q}^0 + \epsilon \mathbf{q}^{1,n} \in \mathcal{GM}$, vérifient le problème suivant :

$$\forall \mathbf{v}^0 + \epsilon \mathbf{v}^{1,n} \in \mathcal{GM}^v, \quad \mathfrak{a}_g^1(\mathbf{q}^0, \mathbf{q}^{1,n}, \mathbf{v}^0, \mathbf{v}^{1,n}) = \mathbb{I}_g^1(\mathbf{v}^0), \quad (9.61)$$

avec pour la forme \mathfrak{a}_g^1 et la forme linéaire \mathbb{I}^1

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_g^1(\mathbf{q}^n, \mathbf{v}^n) &= \int_{\Lambda} \sum_b f^{1,b} [\langle \mathbf{g}^{0,b}, \mathbf{v}^{2,b} \rangle + \langle \mathbf{g}^{1,b}, \mathbf{v}^{1,b} \rangle + \langle \mathbf{g}^{2,b}, \mathbf{v}^{0,b} \rangle] d\lambda, \\ &= \int_{\Lambda} \sum_b k^{-1,b} [\langle \mathbf{g}^{0,b}, \mathbf{q}^{2,b} \rangle - \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{p}^{2,b} \rangle] [\langle \mathbf{g}^{0,b}, \mathbf{v}^{2,b} \rangle + \langle \mathbf{g}^{1,b}, \mathbf{v}^{1,b} \rangle] d\lambda, \end{aligned} \quad (9.62)$$

$$\mathbb{I}_g^1(\mathbf{v}^0) = \int_{\Lambda} \sum_n \langle \mathbf{f}^{3,n}, \mathbf{v}^0 \rangle d\lambda. \quad (9.63)$$

Preuve : dans la formulation variationnelle, le champ test $\mathbf{v}^{\tilde{n}}$ est choisi tel que :

$$\mathbf{v}^{\tilde{n}} = \mathbf{v}^n(\lambda) = \epsilon^{\mathcal{D}-3} [\mathbf{v}^0 + \epsilon \mathbf{v}^{1,n}].$$

La première partie de la démonstration consiste à calculer le terme en effort, la seconde à déterminer celui en déplacement.

Le terme comprenant le chargement extérieur se calcule aisément

$$\sum_c \sum_n \langle \epsilon^3 \mathbf{f}^{3,n}, \epsilon^{\mathcal{D}-3} \mathbf{v}^0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\mathcal{D}-2}) \rangle = \sum_c \epsilon^{\mathcal{D}} \sum_n \langle \mathbf{f}^{3,n}, \mathbf{v}^0 \rangle + \mathcal{O}(\epsilon^{\mathcal{D}+1}),$$

et il tend vers $\mathbb{I}_g^1(\mathbf{v}^0)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. □

Remarque : malgré les apparences, ce problème est indépendant de la position à l'ordre 2 $\mathbf{q}^{2,n}$. On peut donc écrire une formulation simplifiée où les champs $\mathbf{q}^{2,n}$ et $\mathbf{v}^{2,n}$ n'interviennent plus explicitement, c'est l'objet de la formulation variationnelle simplifiée qui suit.

b) Formulation énergétique

Problème 9.6 La tension dans une barre b ainsi que le déplacement d'un nœud n représente un minimum pour l'énergie de déformation \mathfrak{e}_g^1 :

$$\min_{(\mathbf{v}^n)} \mathfrak{e}_g^1(\mathbf{v}^n) = \min_{(\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^{1,n})} \left\{ \mathbb{I}_g^1(\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^{1,n}) - \mathbb{I}_g^1(\mathbf{v}^0) \right\}, \quad (9.64)$$

avec pour la définition du potentiel \mathbb{I}_g^1

$$\mathbb{I}_g^1(\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^{1,n}) = \frac{1}{2} \int_{\Lambda} \sum_b k^{-1,b} [\langle \mathbf{g}_v^{0,b}, \mathbf{v}^{2,b} \rangle - \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{p}^{2,b} \rangle]^2 d\lambda. \quad (9.65)$$

Preuve : on calcule la différentielle de la fonctionnelle $\mathbb{J}_g^1 - \mathbb{I}_g^1$, puis on écrit sa nullité pour le minimum $\mathbf{u}^0 + \epsilon \tilde{\mathbf{u}}^{1,n}$. Le terme compliqué à identifier est $\langle \mathbf{g}^{0,b}, \mathbf{v}^{2,b} \rangle + \langle \mathbf{g}^{1,b}, \mathbf{v}^{1,b} \rangle$. On le calcule à partir de la différentielle de $\langle \mathbf{g}_v^{0,b}, \mathbf{v}^{2,b} \rangle - \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{p}^{2,b} \rangle$.

$$\begin{aligned}
 d\langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{p}^{2,b} \rangle &= 0, \\
 d\langle \mathbf{g}_v^{0,b}, \mathbf{v}^{2,b} \rangle &= \langle d\mathbf{g}_v^{0,b}, \mathbf{v}^{2,b} \rangle + \langle \mathbf{g}_v^{0,b}, d\mathbf{v}^{2,b} \rangle, \\
 \langle \mathbf{g}_v^{0,b}, d\mathbf{v}^{2,b} \rangle &\stackrel{\min}{\rightarrow} \langle \mathbf{g}^{0,b}, \mathbf{v}^{2,b} \rangle, \\
 \langle d\mathbf{g}_v^{0,b}, \mathbf{v}^{2,b} \rangle &= \left\langle \frac{d\mathbf{v}^{1,b}}{\|\mathbf{v}^{1,b}\|} - \mathbf{v}^{1,b} \left(\frac{\langle \mathbf{v}^{1,b}, d\mathbf{v}^{1,b} \rangle}{\|\mathbf{v}^{1,b}\|^3} \equiv 0 \right), \mathbf{v}^{2,b} \right\rangle, \\
 &= \left\langle \frac{\mathbf{v}^{2,b}}{\|\mathbf{v}^{1,b}\|} - \left\langle \frac{\mathbf{v}^{2,b}}{\|\mathbf{v}^{1,b}\|}, \mathbf{g}_v^{0,b} \right\rangle \mathbf{g}_v^{0,b}, d\mathbf{v}^{1,b} \right\rangle, \\
 &\stackrel{\min}{\rightarrow} \langle \mathbf{g}^{1,b}, \mathbf{v}^{1,b} \rangle.
 \end{aligned}$$

Afin de s'assurer du résultat ainsi que pour montrer que l'ordre des opérations n'est pas significatif (minimisation de l'énergie, passage à la limite ; $\epsilon \rightarrow 0$), on cherche le potentiel d'énergie \mathbb{E}_g^1 à partir de la formulation énergétique globale. On choisit un champ test $\mathbf{v}^{\tilde{n}} = \mathbf{v}^0 + \epsilon \mathbf{v}^{1,n} + \epsilon^2 \mathbf{v}^{2,n} + \mathcal{O}(\epsilon^3)$, on multiplie le potentiel \mathbb{E}_g par $\epsilon^{\mathcal{D}-3}$ et on fait tendre ϵ vers 0 pour obtenir \mathbb{E}_g^1 :

$$\mathbb{E}_g^1 = \frac{1}{2} \int_{\Lambda} \sum_b k^{-1,b} \left[\langle \mathbf{g}_v^{0,b}, \mathbf{v}^{2,b} \rangle - \langle \mathbf{e}^{0,b}, \mathbf{p}^{2,b} \rangle \right]^2 d\lambda - \int_{\Lambda} \sum_n \langle \mathbf{f}^{1,n}, \mathbf{v}^0 \rangle d\lambda,$$

ce qui est identique au potentiel calculé à partir de la formulation variationnelle. \square

c) Formulation variationnelle réduite

On appelle modèle mixte réduit, le problème posé à la fois sur la position finale macroscopique \mathbf{q}^0 et sur la position $\mathbf{q}^{1,n}$.

Problème 9.7 Les positions du nœud n ; $\mathbf{q}^0 \in \mathcal{M}^0 \cap \mathcal{G}^0$ et $\mathbf{q}^{1,n} \in \mathcal{M}^1$, vérifient le problème suivant :

$$\forall \mathbf{v}^0 \in \mathcal{M}^0 \cap \mathcal{G}^0, \mathbf{v}^{1,n} \in \mathcal{M}^1, \quad \mathbb{a}_g^1(\mathbf{q}^0, \mathbf{q}^{1,n}, \mathbf{v}^0, \mathbf{v}^{1,n}) = \mathbb{I}_g^1(\mathbf{v}^0), \quad (9.66)$$

avec pour la forme \mathbb{a}_g^1 et la forme linéaire \mathbb{I}_g^1

$$\begin{aligned}
 \mathbb{a}_g^1(\mathbf{q}^0, \mathbf{q}^{1,n}, \mathbf{v}^0, \mathbf{v}^{1,n}) &= \int_{\Lambda} \sum_k f_k^1(\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^{1,n}) \sum_b \varphi_k^b \left[\langle \mathbf{g}^{0,b}, \check{\mathbf{v}}^{2,b} \rangle + \langle \check{\mathbf{q}}^{2,b}, \mathbf{g}_v^{0,b} \rangle \right] d\lambda, \quad (9.67) \\
 f_k^1(\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^{1,n}) &= \sum_b \varphi_k^b \left[\langle \mathbf{g}^{0,b}, \check{\mathbf{q}}^{2,b} \rangle - \langle \mathbf{e}^{0,b}, \check{\mathbf{p}}^{2,b} \rangle \right], \\
 \check{\mathbf{v}}^{2,b} &= \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{v}^{1,E(b)}}{\partial \lambda^{\alpha}} \delta^{\alpha,b} + \frac{1}{2!} \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \mathbf{v}^0}{\partial \lambda^{\alpha} \partial \lambda^{\beta}} \delta^{\alpha,b} \delta^{\beta,b}, \\
 \mathbb{I}_g^1(\mathbf{v}^0) &= \int_{\Lambda} \sum_n \langle \mathbf{f}^{3,n}, \mathbf{v}^0 \rangle d\lambda.
 \end{aligned}$$

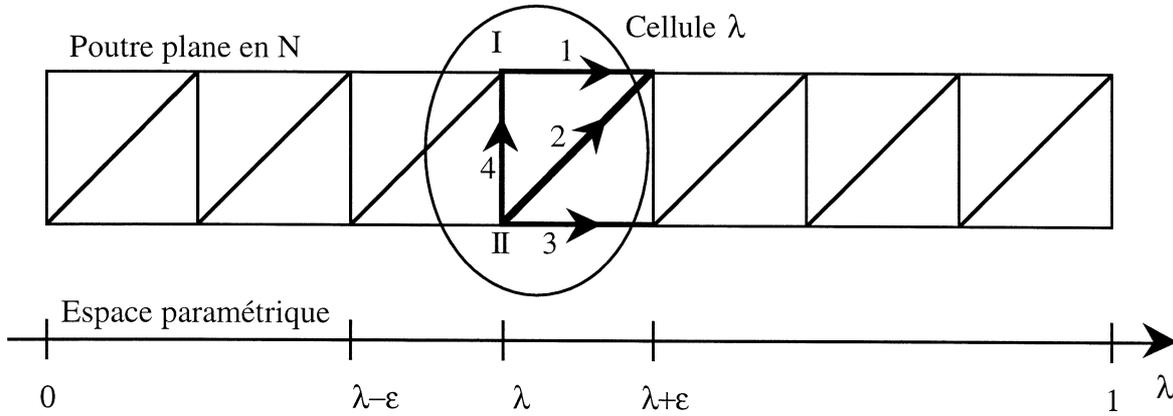


Figure 9.5 : poutre plane en \mathcal{N}

Preuve : il s'agit d'un simple calcul à partir du problème mixte 9.5. On écrit que la tension $f^{1,b}$ est auto-équilibrée ($f^{1,b} = \sum_k f_k^1 \varphi_k^b$), ce qui fait que l'on peut inverser la somme sur b et la somme sur k afin de factoriser les termes $\sum_k f_k^1$. Les termes restants sont alors :

$$\sum_b \varphi_k^b [\langle \mathbf{g}^{0,b}, \mathbf{v}^{2,b} \rangle + \langle \mathbf{g}^{1,b}, \mathbf{v}^{1,b} \rangle].$$

La base de vecteur unitaire des barres ($\mathbf{g}^{0,b}$) étant équivalente à la base initiale ($\mathbf{e}^{0,b}$), on peut immédiatement remplacer l'élongation test de la barre $\mathbf{v}^{2,b}$ par son élongation réduite $\check{\mathbf{v}}^{2,b}$ où les déplacements d'ordre 2 $\mathbf{v}^{2,n}$ sont supprimés.

On montre ensuite que $\langle \mathbf{g}^{1,b}, \mathbf{v}^{1,b} \rangle$ est égal à $\langle \mathbf{q}^{2,b}, \mathbf{g}_v^{0,b} \rangle$, ce calcul à déjà été réalisé lors de la démonstration de la formulation énergétique (problème 9.6). Le champ test macroscopique \mathbf{v}^0 appartenant à $\mathcal{M}^0 \cap \mathcal{G}^0$ et le champ test à l'ordre 1 $\mathbf{v}^{1,n}$ appartenant à \mathcal{M}^1 , la base test de vecteur unitaire des barres ($\mathbf{g}_v^{0,b}$), construite sur le champ test \mathbf{v} , est, elle aussi, équivalente à la base ($\mathbf{e}^{0,b}$), on peut immédiatement remplacer l'élongation réelle de la barre $\mathbf{q}^{2,b}$ par son élongation réduite $\check{\mathbf{q}}^{2,b}$.

Finalement, cette formulation variationnelle ne fait pas intervenir le déplacement à l'ordre 2 d'un nœud $\mathbf{u}^{2,n}$, ni son équivalent dans le champ test d'un nœud $\mathbf{v}^{2,n}$. □

9.5 Exemples

9.5.1 Modèle continu de câble pour la poutre plane en \mathcal{N}

On étudie la poutre plane en \mathcal{N} (figure 9.5). celle-ci est définie par quatre barres et deux nœuds dont la description géométrique est donnée par :

$$\mathbf{p}^0 = \lambda \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{p}^{1,I} = \frac{t}{2} \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{p}^{1,II} = -\frac{t}{2} \mathbf{e}_2.$$

Le chargement extérieur appliqué aux nœuds de la poutre est supposé être important, c'est à dire d'ordre $\mathcal{O}(\epsilon)$. On se place alors dans le cadre d'un modèle du premier ordre.

Afin de simplifier les notations, la rigidité $k^{-1,b}$ sera simplement notée k^b . L'équilibre de la structure s'écrit alors

$$\int_{\Lambda} (k^1 + k^3) \left(\left\| \frac{d\mathbf{q}^0}{d\lambda} \right\| - \left\| \frac{d\mathbf{p}^0}{d\lambda} \right\| \right) \left\langle \frac{\frac{d\mathbf{q}^0}{d\lambda}}{\left\| \frac{d\mathbf{q}^0}{d\lambda} \right\|}, \mathbf{v}^0 \right\rangle d\lambda + \int_{\Lambda} \langle \mathbf{f}^{0,b=2}, \mathbf{v}^{1,b=2} \rangle + \langle \mathbf{f}^{0,b=4}, \mathbf{v}^{1,b=4} \rangle d\lambda \\ = \int_{\Lambda} \langle \mathbf{f}^{1,I} + \mathbf{f}^{1,II}, \mathbf{v}^0 \rangle d\lambda.$$

Prenons comme champ test $\mathbf{v}^0 = \mathbf{o}$ et $\mathbf{v}^{1,n}$ quelconque, ce qui donne

$$\mathbf{v}^{1,b=2} = \mathbf{v}^{1,I} - \mathbf{v}^{1,II}, \quad \mathbf{v}^{1,b=4} = \mathbf{v}^{1,I} - \mathbf{v}^{1,II}.$$

L'équation d'équilibre donne immédiatement

$$\mathbf{f}^{0,b=2} + \mathbf{f}^{0,b=4} = 0 \implies \mathbf{f}^{0,b=2} = \mathbf{f}^{0,b=4} = \mathbf{o},$$

car les barres 2 et 4 ne peuvent être parallèles au cours de la déformation (nous avons fait l'hypothèse de petite déformation).

La norme de $\frac{d\mathbf{p}^0}{d\lambda}$ est égale à 1, le vecteur de la base covariante \mathbf{g}_1 est égal à $\frac{d\mathbf{q}^0}{d\lambda}$. Le modèle macroscopique de la poutre plane en \mathcal{N} sous l'action d'un chargement important est donc le modèle continu de câble

$$(k^1 + k^3) \frac{d}{d\lambda} \left[\left(1 - \frac{1}{\|\mathbf{g}_1\|} \right) \mathbf{g}_1 \right] = \mathbf{f}^{1,I} + \mathbf{f}^{1,II}, \quad (9.68)$$

ce qui est le modèle de câble trouvé par l'étude en grand déplacement à l'aide des développements asymptotiques en puissances de ϵ sans utiliser de formulation variationnelle (chapitre 3).

9.5.2 Modèle continu de poutre pour la poutre plane en \mathcal{N}

On étudie de nouveau la poutre plane en \mathcal{N} (figure 9.5). Cependant, le chargement extérieur appliqué aux nœuds de la poutre est supposé être faible, c'est à dire d'ordre $\mathcal{O}(\epsilon^3)$. On est alors dans le cas d'un modèle du second ordre. La poutre est définie par quatre barres et deux nœuds dont la description géométrique est donnée par :

$$\mathbf{p}^0 = \lambda \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{p}^{1,I} = \frac{t}{2} \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{p}^{1,II} = -\frac{t}{2} \mathbf{e}_2.$$

Les deux tensions auto-équilibrées sont alors :

$$\varphi_1^b = \begin{bmatrix} \sqrt{k^1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}_B, \quad \varphi_2^b = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \sqrt{k^3} \\ \cdot \end{bmatrix}_B.$$

La base covariante initiale ($\mathbf{e}_1 = \frac{d\mathbf{p}^0}{d\lambda}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) qui est tangente à la poutre est aussi la base courante de l'espace physique. La base covariante finale ($\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{e}_3$) est définie par :

$$\mathbf{g}_1 = \frac{d\mathbf{q}^0}{d\lambda} = \mathbf{e}_1 + \frac{d\mathbf{u}^0}{d\lambda}, \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{g}_1, \quad \|\mathbf{g}_1\| = 1.$$

La position finale à l'ordre 1 peut alors se définir dans la base covariante :

$$\mathbf{q}^{1,I} = \frac{t}{2}\mathbf{g}_2 + \hat{\mathbf{q}}^1, \quad \mathbf{q}^{1,II} = -\frac{t}{2}\mathbf{g}_2 + \hat{\mathbf{q}}^1.$$

Le K-vecteur tension à l'ordre 1 est alors :

$$f_k^1 = \begin{bmatrix} \sqrt{k^1} \langle \mathbf{g}_1, \frac{d\mathbf{q}^{1,I}}{d\lambda} + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathbf{q}^0}{d\lambda^2} \rangle \\ \sqrt{k^3} \langle \mathbf{g}_1, \frac{d\mathbf{q}^{1,II}}{d\lambda} + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathbf{q}^0}{d\lambda^2} \rangle \end{bmatrix}_K = \begin{bmatrix} \sqrt{k^1} \langle \mathbf{g}_1, \frac{t}{2} \frac{d\mathbf{g}_2}{d\lambda} + \frac{d\hat{\mathbf{q}}^1}{d\lambda} \rangle \\ \sqrt{k^3} \langle \mathbf{g}_1, -\frac{t}{2} \frac{d\mathbf{g}_2}{d\lambda} + \frac{d\hat{\mathbf{q}}^1}{d\lambda} \rangle \end{bmatrix}_K.$$

On peut en déduire les tensions à l'ordre 1 dans chacune des barres en utilisant la relation d'auto-équilibre des barres $f^{1,b} = \sum_k f_k^1 \varphi_k^b$, ce qui donne :

$$\mathbf{f}^{1,b} = \begin{bmatrix} k^1 \langle \mathbf{g}_1, \frac{t}{2} \frac{d\mathbf{g}_2}{d\lambda} + \frac{d\hat{\mathbf{q}}^1}{d\lambda} \rangle \mathbf{g}_1 \\ \cdot \\ k^3 \langle \mathbf{g}_1, -\frac{t}{2} \frac{d\mathbf{g}_2}{d\lambda} + \frac{d\hat{\mathbf{q}}^1}{d\lambda} \rangle \mathbf{g}_1 \\ \cdot \end{bmatrix}_B$$

La relation de compatibilité $\int_{\Lambda} \sum_b \langle \mathbf{f}^{1,b}, \frac{d\mathbf{v}}{d\lambda} \delta^b \rangle d\lambda, \forall \mathbf{v}$ peut maintenant être écrite

$$\int_{\Lambda} \langle \mathbf{g}_1, \frac{t(k^1 - k^3)}{2} \frac{d\mathbf{g}_2}{d\lambda} + (k^1 + k^3) \frac{d\hat{\mathbf{q}}^1}{d\lambda} \rangle \langle \mathbf{g}_1, \frac{d\mathbf{v}}{d\lambda} \rangle d\lambda = 0,$$

on choisit le champ test $\mathbf{v} = \frac{t(k^1 - k^3)}{2} \mathbf{g}_2 + (k^1 + k^2) \hat{\mathbf{q}}^1$ alors immédiatement on a :

$$\langle \mathbf{g}_1, \frac{d\hat{\mathbf{q}}^1}{d\lambda} \rangle = \frac{t k^3 - k^1}{2 k^1 + k^3} \langle \mathbf{g}_1, \frac{d\mathbf{g}_2}{d\lambda} \rangle$$

nous pouvons donc remplacer $\langle \mathbf{g}_1, \frac{d\hat{\mathbf{q}}^1}{d\lambda} \rangle$ dans les expressions des tensions f_k^1 et $\mathbf{f}^{1,b}$

$$f_k^1 = \begin{bmatrix} t \frac{\sqrt{k^1 k^3}}{k^1 + k^3} \langle \mathbf{g}_1, \frac{d\mathbf{g}_2}{d\lambda} \rangle \\ -t \frac{k^1 \sqrt{k^3}}{k^1 + k^3} \langle \mathbf{g}_1, \frac{d\mathbf{g}_2}{d\lambda} \rangle \end{bmatrix}_K, \quad \mathbf{f}^{1,b} = \begin{bmatrix} t \frac{k^1 k^3}{k^1 + k^3} \langle \mathbf{g}_1, \frac{d\mathbf{g}_2}{d\lambda} \rangle \mathbf{g}_1 \\ \cdot \\ -t \frac{k^1 k^3}{k^1 + k^3} \langle \mathbf{g}_1, \frac{d\mathbf{g}_2}{d\lambda} \rangle \mathbf{g}_1 \\ \cdot \end{bmatrix}_B.$$

Nous pouvons donc maintenant écrire la formulation variationnelle réduite. On choisit un champ test tel que le champ test macroscopique $\mathbf{v}^{0,n}$ soit dans \mathcal{M}^0 et tel que $\mathbf{v}^0 + \epsilon \mathbf{v}^{1,n}$ soit dans le gouffre tangent \mathcal{GM}^v , alors la base test covariante $(\mathbf{g}_1^v, \mathbf{g}_2^v, \mathbf{e}_3)$ et le champ $\mathbf{v}^{1,n}$ vérifient :

$$\mathbf{g}_1^v = \frac{d\mathbf{v}^0}{d\lambda}, \quad \mathbf{g}_2^v = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{g}_1^v,$$

$$\forall b, \langle \mathbf{g}^{0,b}, \mathbf{v}^{1,b} \rangle = 0 \implies \begin{cases} b = 1, 3 & \langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1^v \rangle = 0 \\ b = 2 & \langle \mathbf{g}_1 + t\mathbf{g}_2, \mathbf{v}^{1,I} - \mathbf{v}^{1,II} + \mathbf{g}_1^v \rangle = 0 \\ b = 4 & \langle \mathbf{g}_2, \mathbf{v}^{1,I} - \mathbf{v}^{1,II} \rangle = 0 \end{cases} .$$

Ce qui est équivalent à

$$\langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1^v \rangle = 0, \quad \mathbf{v}^{1,I} - \mathbf{v}^{1,II} = -t \langle \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_1^v \rangle \mathbf{g}_1.$$

On détermine à présent la fonctionnelle \mathbb{I}_g^1 en effectuant une intégration par partie

$$\mathbb{I}_g^1 = \int_{\Lambda} \sum_n \langle \mathbf{f}^{3,n}, \mathbf{v}^0 \rangle d\lambda = - \int_{\Lambda} \left\langle \int \sum_n \mathbf{f}^{3,n}, \mathbf{g}_1^v \right\rangle d\lambda,$$

on fait de même avec la fonctionnelle \mathbb{a}_g^1 , ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{a}_g^1 &= \int_{\Lambda} \frac{tk^1k^3}{k^1+k^3} \langle \mathbf{g}_1, \frac{d\mathbf{g}_2}{d\lambda} \rangle \left\{ \langle \mathbf{g}_1, \frac{d\mathbf{v}^{1,I} - \mathbf{v}^{1,II}}{d\lambda} \rangle + \left\langle \frac{d\mathbf{q}^{1,I} - \mathbf{q}^{1,II}}{d\lambda}, \mathbf{g}_1^v \right\rangle \right\} d\lambda, \\ &= - \int_{\Lambda} \frac{t^2k^1k^3}{k^1+k^3} \langle \mathbf{g}_1, \frac{d\mathbf{g}_2}{d\lambda} \rangle \left\{ \frac{d\langle \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_1^v \rangle}{d\lambda} + \left\langle \frac{d\mathbf{g}_2}{d\lambda}, \mathbf{g}_1^v \right\rangle \right\} d\lambda. \end{aligned}$$

On intègre par partie le premier terme de l'intégrale, le second étant nul ($\langle \frac{d\mathbf{g}_2}{d\lambda}, \mathbf{g}_1^v \rangle = 0$).

La fonctionnelle \mathbb{a}_g^1 devient :

$$\mathbb{a}_g^1 = \int_{\Lambda} \frac{t^2k^1k^3}{k^1+k^3} \frac{d\langle \mathbf{g}_1, \frac{d\mathbf{g}_2}{d\lambda} \rangle}{d\lambda} \langle \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_1^v \rangle d\lambda.$$

On choisit le vecteur test $\mathbf{g}_1^v = \theta \mathbf{g}_2$ avec θ est une fonction quelconque. On a bien $\langle \mathbf{g}_1^v, \mathbf{g}_1 \rangle = 0$. Comme $\langle \mathbf{f}^{3,n}, \mathbf{g}_1^v \rangle = \langle \mathbf{f}^{3,n}, \mathbf{g}_2 \rangle \theta$ et $\langle \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_1^v \rangle = \theta$, les fonctionnelles \mathbb{I}_g^1 et \mathbb{a}_g^1 sont égales à :

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_g^1 &= - \int_{\Lambda} \left\langle \int \sum_n \mathbf{f}^{3,n}, \mathbf{g}_2 \right\rangle \theta d\lambda, \\ \mathbb{a}_g^1 &= \int_{\Lambda} \frac{t^2k^1k^3}{k^1+k^3} \frac{d\langle \mathbf{g}_1, \frac{d\mathbf{g}_2}{d\lambda} \rangle}{d\lambda} \theta d\lambda. \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{a}_g^1 = \mathbb{I}_g^1$ pour toute fonction $\theta(\lambda)$, on obtient

$$\frac{t^2k^1k^3}{k^1+k^3} \frac{d\langle \mathbf{g}_1, \frac{d\mathbf{g}_2}{d\lambda} \rangle}{d\lambda} = - \left\langle \int \sum_n \mathbf{f}^{3,n}, \mathbf{g}_2 \right\rangle, \quad (9.69)$$

ce qui est le modèle de poutre trouvé par l'étude en grand déplacement à l'aide des développements asymptotiques en puissance de ϵ sans utiliser de formulation variationnelle (chapitre 3).

9.6 Conclusion

Des modèles continus pour les treillis quasi-périodiques ont été développés dans le cadre de la statique sous les hypothèses des grands déplacements et des petites déformations. La particularité de ces modèles est d'obtenir directement un modèle continu du treillis en équilibre dans sa configuration déformée à partir de sa configuration initiale, c'est à dire sans faire des petits pas de chargement. Ces modèles sont donc non linéaires et ne correspondent absolument pas aux modèles incrémentaux de milieux continus classiques. Un modèle du premier ordre a d'abord été développé, ce modèle a un comportement axé sur les effets d'allongement du milieu continu. Ce type de comportement est classique pour les milieux continus en 3D, il l'est moins pour des treillis 2D et 1D où cela correspond à des milieux continus du type membrane ou câble. Par ailleurs, un modèle du second ordre a été écrit pour caractériser d'autres types de comportements possibles que peuvent avoir les treillis élancés. On retrouve par exemple pour les treillis poutres des modèles continus de poutres en grand déplacement. On remarque que selon le chargement extérieur, un treillis élancé a généralement deux types de comportements possibles ; dans l'un les déformations membranaires sont privilégiées, dans l'autre ce sont les variations de courbure qui guident la déformation, c'est à dire la flexion. Un exemple simple sur la poutre en \mathcal{N} a mis en évidence les particularités des deux modèles ; le modèle de câble et le modèle de poutre.

La technique employée pour écrire une démarche relativement générale à l'étude des structures discrètes est quasiment la même que celle employée en élasticité linéaire. Deux choses changent :

- en premier, la loi de comportement d'une barre est adaptée aux grands déplacements, c'est à dire qu'elle relie la tension et l'allongement effectif de la barre entre les deux configurations, de plus la tension est portée par le vecteur de la barre dans la configuration déformée,
- en second, l'approche variationnelle n'est pas suffisante pour obtenir les modèles continus, nous devons employer des techniques de minimisation d'énergie. L'avantage d'employer deux formulations différentes permet un meilleur contrôle des résultats annoncés.

Cependant, les modèles continus en grand déplacement ne se résolvent pas aisément car ils sont non linéaires et qu'ils passent directement de la configuration initiale à la configuration déformée. On peut donc s'attendre à avoir des problèmes de convergences des méthodes de résolutions numériques. On présente donc dans le prochain chapitre des modèles continus incrémentaux afin d'essayer de palier certains de ces inconvénients.

Chapitre 10

Modèle macroscopique d'une structure discrète en incrémental

Plan du chapitre 10

10.1	Description de l'étude	212
10.2	Modélisation incrémentale tangente d'un treillis	213
10.2.1	Déplacement incrémental, longueur incrémentale d'une barre, ordre de grandeur	213
a)	Déplacement incrémental d'un nœud	213
b)	Longueur incrémentale d'une barre	215
c)	Incrément de vecteur directeur pour une barre	215
10.2.2	Tension incrémentale dans une barre	216
a)	Relation entre l'incrément de tension dans une barre et le déplacement incrémental de ses deux nœuds extrémités	216
b)	Ordre de grandeur de l'incrément de tension	217
10.2.3	Équilibre de la structure, formulation variationnelle	217
a)	Équilibre de la structure	217
b)	Formulation variationnelle	218
10.3	Modèle macroscopique du premier gradient	218
10.3.1	Tension à l'ordre 0, vecteur tension auto-équilibrée, opérateur tension auto-équilibrée	218
a)	Vecteur tension auto-équilibrée	218
b)	Tension à l'ordre 0, opérateur tension auto-équilibrée	219
c)	Symétrie de l'opérateur tension auto-équilibrée	220
10.3.2	Modèle macroscopique	221
a)	Modèle macroscopique tangent	221
b)	Modèle macroscopique incrémental du premier gradient	221
c)	Cohérence du modèle incrémental du premier gradient	222
d)	Flambage local du modèle incrémental, non inversion de l'opérateur tension auto-équilibrée	222
10.3.3	Cas où les tensions $f^{0,b}$ à l'ordre 0 sont faibles ou nulles	223
10.4	Modèle macroscopique pour les treillis minces	224

10.4.1	Chargement extérieur de faible intensité, gouffre pour le déplacement . . .	224
a)	Hypothèse de travail	224
b)	Gouffre	225
c)	Déplacement macroscopique dans le gouffre, incrément de tension nul à l'ordre 0	225
d)	Espace macroscopique, opérateur d'inversion des déplacements	225
e)	Déplacement à l'ordre 1	226
10.4.2	Tension à l'ordre 1, propriétés topologiques	227
a)	Tension à l'ordre 1	227
b)	Quelques propriétés topologiques	229
c)	Déplacement à l'ordre 2	230
10.4.3	Modèle continu du second ordre	231
10.5	Conclusion	232

10.1 Description de l'étude

Pour les matériaux nouveaux ainsi que pour des applications à la pointe de la technique, les modèles en élasticité linéaire ne suffisent plus. Des phénomènes non-linéaires sont à prendre en considération et souvent une approche incrémentale est adoptée. Ce chapitre porte donc sur la modélisation incrémentale d'un treillis quasi-périodique en quasi-statique. Cela signifie que nous allons étudier la déformation d'un treillis pré-contraint sous l'action d'un pas de chargement faible et sans tenir compte des effets dynamiques. Ceci dans l'objectif de faire plusieurs pas de chargement, de manière itérative, afin de charger finalement le treillis avec des efforts relativement importants. Un objectif à plus long terme serait de retrouver des lois de comportement non linéaires pour des matériaux solides [26, 30]. Cependant, une hypothèse importante que nous faisons est de nous placer en petite déformation, alors le chargement sur le treillis pourra être important tant que la limite élastique dans les barres ne sera pas dépassée. Si cela arrive, notre modélisation n'est plus valable et rien ne peut alors être prédit. Une autre hypothèse importante est la non prise en compte des effets dynamiques. Les phénomènes que notre modélisation va mettre en évidence seront dans ce cadre d'étude. Par exemple, lors d'un chargement très rapide du treillis, les effets d'inertie peuvent engendrer de la plasticité dans certaines barres alors qu'avec le même chargement, mais imposé lentement sur la structure, toutes les barres pourraient rester dans le domaine élastique. C'est dans ce cadre là, petites déformations pour les barres et pas d'effets d'inertie, que nous allons travailler.

Contrairement au chapitre précédent sur l'étude en grand déplacement où l'équilibre avait été écrit directement sur la configuration déformée, le principe des lois incrémentales est de faire du calcul itératif avec des pas de chargement et d'étudier un grand nombre de configurations entre la configuration initiale et la configuration finale. En grand déplacement, l'avantage est d'aller vite, c'est à dire de faire un seul pas de chargement. Cependant le système final à résoudre est fortement non linéaire, il n'est pas facile alors de trouver une méthode numérique qui converge. En incrémentale, on essaye de trouver à chaque pas de chargement des systèmes simples à résoudre. En effet, on va les résoudre un grand nombre de fois. Si chaque système est aussi compliqué que celui en grand dé-

placement, alors autant faire un seul pas de chargement. Les équations que nous allons obtenir en incrémentale vont donc être linéarisées.

Il y a deux manières de rendre un problème linéaire, soit on choisit une formulation incrémentale tangente, soit on fait une formulation incrémentale finie. C'est une formulation incrémentale tangente qui va être écrite dans ce chapitre, cela signifie que les équations que l'on écrit sont des dérivées par rapport à un pseudo-temps de la formulation en grand déplacement. De même, les incréments de chargement, de tension, de déplacement, sont considérés comme les dérivées par rapport au pseudo-temps de leur valeurs effectives. Il s'agit en effet d'un pseudo-temps car les termes d'inertie sont négligés en quasi-statique, il n'y a donc pas de phénomènes dynamiques. Il existe aussi la formulation incrémentale finie où on fixe des incréments de valeur finie, par exemple un incrément fini de chargement aux nœuds (chapitre 4). Dans nos treillis quasi-périodiques, nous avons toujours un petit paramètre ϵ qui caractérise la séparation d'échelle entre la taille de la cellule de référence et la taille du treillis. C'est grâce à ce petit paramètre ϵ que nous arrivons à trouver, pour nos structures discrètes, des milieux continus équivalents. En effet, les inconnues du problème sont cherchées sous forme de développements asymptotiques en puissance de ϵ . C'est à ce niveau que se trouve la différence entre les deux formulations incrémentales possibles. Dans une formulation incrémentale tangente, les incréments n'ont pas à être calés selon ϵ par rapport à leur valeur dans les relations car ils sont déjà considérés comme des infiniments petits. Par contre, dans une formulation incrémentale finie, les incréments doivent être calés selon ϵ par rapport à leur valeur dans les relations. *a priori*, la formulation incrémentale finie est plus proche de la réalité car lors des pas de chargement successifs, on peut considérer que ces pas de chargement sont finis et petits plus qu'ils ne sont des infiniments petits. Cependant, dans la pratique, rien n'est moins sûr. Le modèle incrémental trouvé au chapitre 4 est le modèle en grand déplacement tangent qui a été trouvé aux chapitres 3 et 9. Le modèle incrémental tangent qui est caractérisé dans ce chapitre n'est pas le modèle en grand déplacement tangent car cette formulation incrémentale tangente *oublie* l'histoire de la déformation. Notre objectif dans ce chapitre est uniquement d'écrire une formulation incrémentale tangente.

Le chapitre se divise en trois parties. La première partie concerne la modélisation du treillis, la seconde obtient un modèle incrémental du premier gradient où la variation de distance entre deux points caractérise principalement le comportement du milieu continu, la troisième partie se préoccupe des treillis élancés soumis à un faible incrément de chargement où les effets de flexion sont prépondérants, c'est à dire lorsque la variation de courbure guide le comportement.

10.2 Modélisation incrémentale tangente d'un treillis

10.2.1 Déplacement incrémental, longueur incrémentale d'une barre, ordre de grandeur

a) Déplacement incrémental d'un nœud

Hypothèse 10.1 *On appelle déplacement incrémental ou position incrémentale, l'incrément*

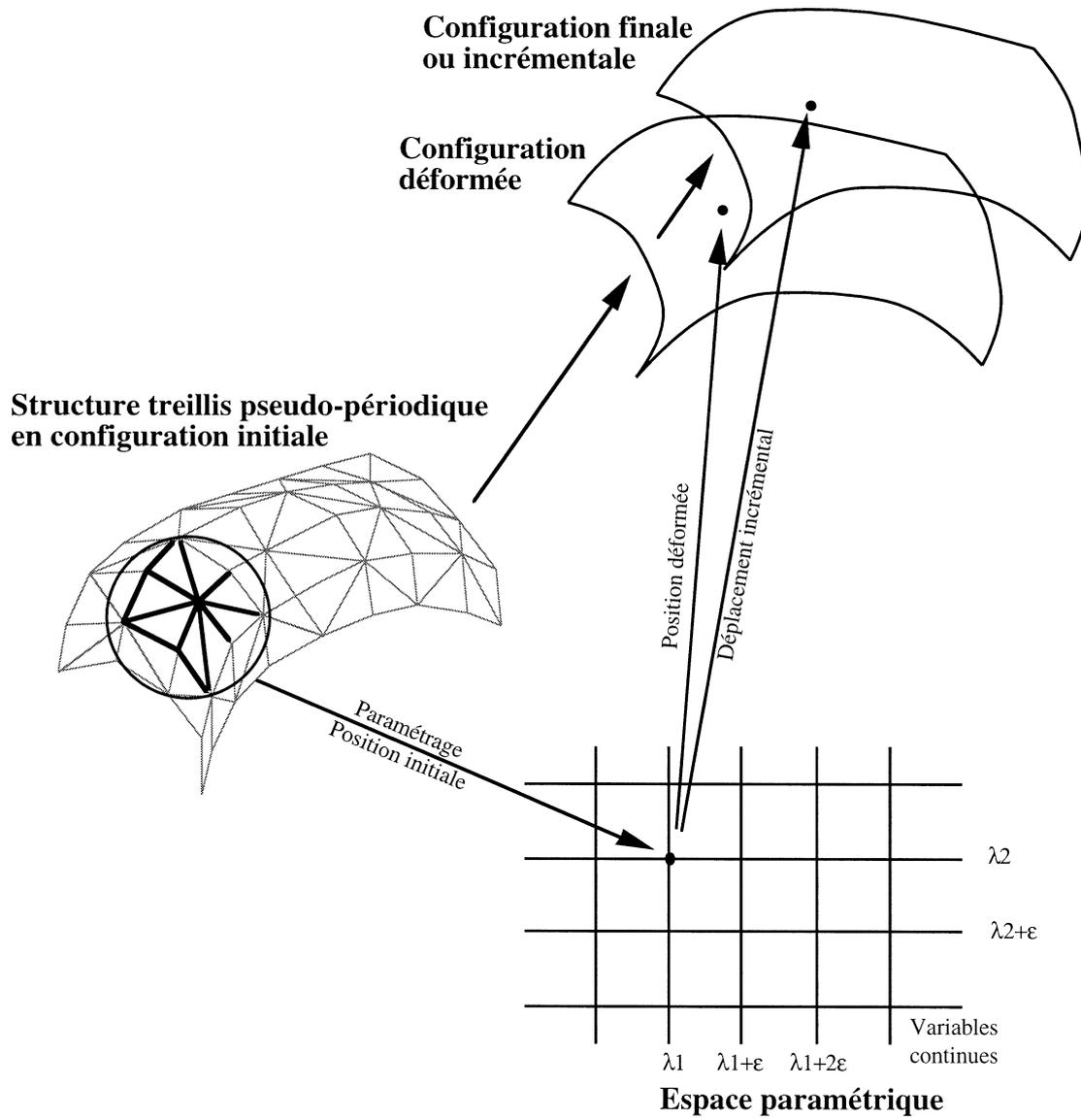


Figure 10.1 : *homogénéisation discrète incrémentale tangente*

ment tangent de déplacement ou de position $\dot{\mathbf{u}}^n$.

$$\forall n, \dot{\mathbf{u}}^n = \dot{\mathbf{q}}^n, \quad \forall n, \dot{\mathbf{p}}^n = \mathbf{o}. \quad (10.1)$$

L'incrément de déplacement est recherché sous forme du développement asymptotique

$$\dot{\mathbf{u}}^n = \dot{\mathbf{u}}^0 + \epsilon \dot{\mathbf{u}}^{1,n} + \epsilon^2 \dot{\mathbf{u}}^{2,n} + \dots, \quad (10.2)$$

où $\dot{\mathbf{u}}^0$ représente l'incrément de déplacement macroscopique de la cellule. On suppose que cet incrément ne dépend pas du nœud n de la cellule.

Remarque : on a posé que l'incrément de déplacement macroscopique $\dot{\mathbf{u}}^0$ ne dépendait pas du nœud n alors qu'en élasticité linéaire le numéro du nœud n pouvait intervenir dans le déplacement macroscopique $\mathbf{u}^{0,n}$. Cependant, pour les treillis 3D, les plaques et les coques sans mécanisme local, tous les nœuds d'une cellule avaient le même déplacement macroscopique \mathbf{u}^0 , c'est à dire que le numéro d'un nœud n'intervenait pas. Par contre dans les treillis poutres 3D, le mode de torsion avait la particularité d'avoir besoin de la position locale du nœud n , donc de son numéro. Cependant le gouffre impose généralement la nullité de ce mode de torsion bien que nous ne l'ayons pas démontré. Restent les treillis à mécanismes dont les modes correspondant à ces mécanismes qui ne sont pas solubles quel que soit l'ordre en ϵ des équations d'équilibre. Le fait d'avoir un unique incrément de déplacement macroscopique pour tous les nœuds de la cellule ne restreint donc pas vraiment l'étude, il faudra cependant être prudent pour les treillis poutres 3D.

b) Longueur incrémentale d'une barre

Proposition 10.1 La longueur incrémentale d'une barre $\dot{\mathbf{u}}^b$ est définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{u}}^{\tilde{b}} = \dot{\mathbf{u}}^b(\lambda) = \dot{\mathbf{u}}^{E(b)}(\lambda + \delta^b) - \dot{\mathbf{u}}^{O(b)}(\lambda) \\ \quad \quad \quad = \epsilon \dot{\mathbf{u}}^{1,b} + \epsilon^2 \dot{\mathbf{u}}^{2,b} + \dots, \\ \dot{\mathbf{u}}^{1,b} = \dot{\mathbf{u}}^{1,E(b)} - \dot{\mathbf{u}}^{1,O(b)} + \sum_{\alpha} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^0}{\partial \lambda^{\alpha}} \delta^{\alpha,b}, \\ \dot{\mathbf{u}}^{2,b} = \dot{\mathbf{u}}^{2,E(b)} - \dot{\mathbf{u}}^{2,O(b)} + \sum_{\alpha} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^{1,E(b)}}{\partial \lambda^{\alpha}} \delta^{\alpha,b} + \frac{1}{2!} \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{u}}^0}{\partial \lambda^{\alpha} \partial \lambda^{\beta}} \delta^{\alpha,b} \delta^{\beta,b}. \end{array} \right. \quad (10.3)$$

c) Incrément de vecteur directeur pour une barre

Propriétés 10.1 Le vecteur directeur d'une barre avant la déformation \mathbf{g}^b a la même définition qu'en grand déplacement. L'incrément de vecteur directeur $\dot{\mathbf{g}}^b$ est définie par la variation du vecteur directeur au cours de la déformation incrémentale. Il n'est pas représentatif de la nouvelle direction de la barre suite à la déformation incrémentale ($\dot{\mathbf{g}}^b \neq$

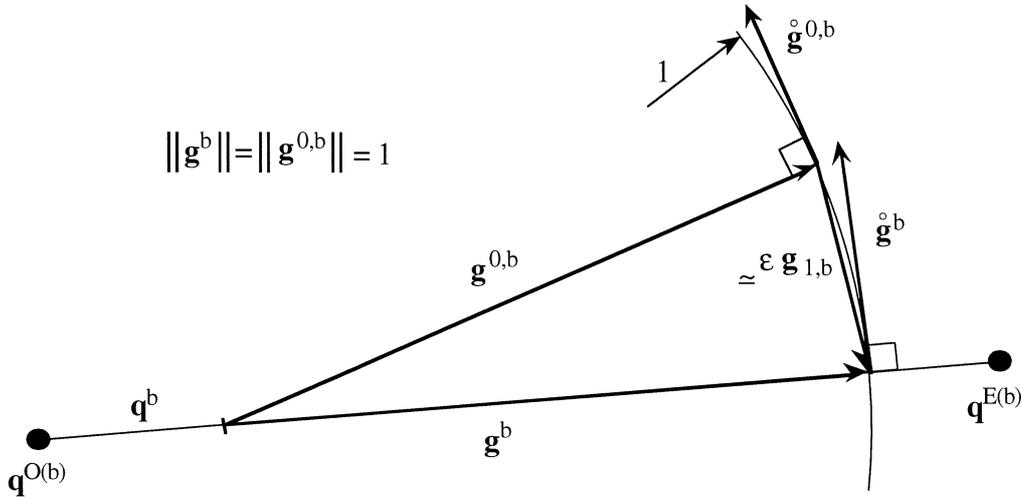


Figure 10.2 : vecteurs directeurs d'une barre

$\frac{\mathbf{q}^b + \dot{\mathbf{u}}^b}{\|\mathbf{q}^b + \dot{\mathbf{u}}^b\|}$) alors que \mathbf{g}^b représentait la direction de la barre (figure 10.2).

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{g}^b = \frac{\mathbf{q}^b}{q^b}, \\ \mathbf{g}^{0,b} = \frac{\mathbf{q}^{1,b}}{q^{1,b}}, \\ \mathbf{g}^{1,b} = \pi \mathbf{g}^{0,b} \otimes \frac{\mathbf{q}^{2,b}}{q^{1,b}}, \\ \mathbf{g}^{1,b} \perp \mathbf{g}^{0,b}, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{g}}^b = \pi \mathbf{g}^{b@} \frac{\dot{\mathbf{u}}^b}{q^b} = \frac{\dot{\mathbf{u}}^b}{q^b} - \langle \mathbf{g}^b, \frac{\dot{\mathbf{u}}^b}{q^b} \rangle \mathbf{g}^b = \dot{\mathbf{g}}^{0,b} + \epsilon \dot{\mathbf{g}}^{1,b} + \dots, \\ \dot{\mathbf{g}}^{0,b} = \pi \mathbf{g}^{0,b@} \frac{\dot{\mathbf{u}}^{1,b}}{q^{1,b}}, \\ \dot{\mathbf{g}}^{1,b} = \pi \mathbf{g}^{0,b@} \frac{\dot{\mathbf{u}}^{2,b}}{q^{1,b}} - \frac{q^{2,b}}{q^{1,b}} \dot{\mathbf{g}}^{0,b} - \langle \mathbf{g}^{0,b}, \frac{\dot{\mathbf{u}}^{1,b}}{q^{1,b}} \rangle \mathbf{g}^{1,b} - \langle \mathbf{g}^{1,b}, \frac{\dot{\mathbf{u}}^{1,b}}{q^{1,b}} \rangle \mathbf{g}^{0,b}, \\ \dot{\mathbf{g}}^b \perp \mathbf{g}^b, \quad \dot{\mathbf{g}}^{0,b} \perp \mathbf{g}^{0,b}, \quad q^{2,b} = \langle \mathbf{g}^{0,b}, \mathbf{q}^{2,b} \rangle. \end{array} \right. \quad (10.4)$$

10.2.2 Tension incrémentale dans une barre

a) Relation entre l'incrément de tension dans une barre et le déplacement incrémental de ses deux nœuds extrémités

Définition 10.1 La relation liant l'incrément de tension $\dot{\mathbf{f}}^b$ dans une barre b et le déplacement incrémental de ses deux nœuds extrémités $\dot{\mathbf{u}}^{O(b)}$ et $\dot{\mathbf{u}}^{E(b)}$ est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f}^b = f^b \mathbf{g}^b, \\ f^b = k^b (q^b - p^b), \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \dot{\mathbf{f}}^b = f^b \dot{\mathbf{g}}^b + \dot{f}^b \mathbf{g}^b, \\ \dot{f}^b = k^b \langle \mathbf{g}^b, \dot{\mathbf{u}}^b \rangle. \end{array} \right. \quad (10.5)$$

Le vecteur tension \mathbf{f}^b s'écrit $\mathbf{f}^b = f^b \mathbf{g}^b$ où f^b représentait la tension réelle dans la barre et où \mathbf{g}^b était le vecteur unitaire de la barre. En incrémentale, le vecteur tension $\dot{\mathbf{f}}^b$ est plus compliqué à exprimer. On peut le décomposer en deux parties : $f^b \dot{\mathbf{g}}^b$ qui représente un incrément de tension dû à la variation de la direction de la barre et qui est engendré

par la tension déjà pré-existante dans la barre ; $f^b \mathbf{g}^b$ qui représente l'incrément de tension dû à l'incrément de chargement sur la structure.

b) Ordre de grandeur de l'incrément de tension

Propriétés 10.2 *On suppose, comme en élasticité ainsi qu'en grand déplacement, que la rigidité d'une barre est d'ordre ϵ^{-1} , c'est à dire*

$$\forall b, \quad k^b = \frac{1}{\epsilon} k^{-1,b} + k^{0,b} + \epsilon k^{1,b} + \dots \quad (10.6)$$

L'incrément macroscopique étant le même pour tous les nœuds d'une cellule, deux cas vont se présenter pour l'ordre de grandeur de la tension dans une barre :

1. un allongement incrémental de la barre d'ordre ϵ , c'est le cas pour le premier modèle calculé. L'incrément de tension s'écrit

$$\dot{f}^b = \dot{f}^{0,b} + O(\epsilon) = k^{-1,b} \langle \mathbf{g}^{0,b}, \dot{\mathbf{u}}^{1,b} \rangle + O(\epsilon), \quad (10.7)$$

2. un incrément de tension nulle à l'ordre 0, $\dot{f}^{0,b} = 0$. Ce qui est équivalent à $\langle \mathbf{g}^{0,b}, \dot{\mathbf{u}}^{1,b} \rangle$. C'est le cas pour les structures minces. Alors l'incrément de tension est d'ordre 1

$$\dot{f}^b = \epsilon \dot{f}^{1,b} + O(\epsilon^2) = \epsilon k^{-1,b} \left[\langle \mathbf{g}^{0,b}, \dot{\mathbf{u}}^{2,b} \rangle + \langle \mathbf{g}^{1,b}, \dot{\mathbf{u}}^{1,b} \rangle \right] + O(\epsilon^2). \quad (10.8)$$

10.2.3 Équilibre de la structure, formulation variationnelle

Contrairement à l'étude en grand déplacement, il n'est pas nécessaire ici de faire appel à une formulation énergétique. En effet, la formulation variationnelle est en parfaite adéquation avec la résolution d'un problème linéaire.

a) Équilibre de la structure

Définition 10.2 *L'écriture tangente ou incrémentale de l'équilibre de la structure s'écrit :*

$$\forall \tilde{n}, \quad - \sum_{\bar{b} \in O^{-1}(\tilde{n})} \dot{\mathbf{f}}^{\bar{b}} + \sum_{\bar{b} \in E^{-1}(\tilde{n})} \dot{\mathbf{f}}^{\bar{b}} = \dot{\mathbf{f}}_{\phi}^{\tilde{n}}. \quad (10.9)$$

Cette relation d'équilibre se déduit instantanément de l'équilibre en grand déplacement du treillis.

b) Formulation variationnelle

Problème 10.1 *La formulation variationnelle de l'équilibre incrémental de la structure s'écrit : trouver les tensions $\dot{\mathbf{f}}^{\bar{b}}$ telles que*

$$\forall \mathbf{v}^{\bar{n}}, \quad \sum_{\bar{b}} \langle \dot{\mathbf{f}}^{\bar{b}}, \mathbf{v}^{\bar{b}} \rangle = \sum_{\bar{n}} \langle \dot{\mathbf{f}}_{\phi}^{\bar{n}}, \mathbf{v}^{\bar{n}} \rangle. \quad (10.10)$$

La somme sur toutes les cellules peut être factorisée dans cette relation, on a alors

$$\forall \mathbf{v}^n(\lambda), \quad \sum_c \left[\sum_b \langle \dot{\mathbf{f}}^b, \mathbf{v}^b \rangle - \sum_n \langle \dot{\mathbf{f}}_{\phi}^n, \mathbf{v}^n \rangle \right] = 0. \quad (10.11)$$

10.3 Modèle macroscopique du premier gradient

Les premiers calculs à faire sont de définir un espace de déplacement macroscopique. Cette première étape a déjà été faite lorsque l'on a supposé que tous les nœuds d'une cellule avaient le même incrément macroscopique de déplacement $\dot{\mathbf{u}}^0$ (équation 10.2). L'espace macroscopique pour les incréments de déplacement est donc l'ensemble \mathcal{M}^0 défini en grand déplacement. Les tensions à l'ordre -1 dans les barres sont alors nulles du fait de cette hypothèse de départ dans notre formulation incrémentale tangente. La suite de cette étude commence donc directement sur les tensions à l'ordre 0.

10.3.1 Tension à l'ordre 0, vecteur tension auto-équilibrée, opérateur tension auto-équilibrée

a) Vecteur tension auto-équilibrée

Les vecteurs tensions auto-équilibrées $\varphi_{k'}^b$, ont été définis en grand déplacement. Cependant, on rappelle leur définition car une condition supplémentaire est ajoutée du fait de la forme de la relation de comportement.

Définition 10.3 *Les vecteurs tensions auto-équilibrées $\varphi_{k'}^b$ vérifient l'auto-équilibre de la cellule. Ils sont orthogonalisés entre eux par le B-produit scalaire. Une condition pour les barres n'ayant pas de tension avant l'incrément de chargement est ajoutée, cette condition oblige alors le vecteur tension à être porté par le vecteur directeur de la barre $\mathbf{g}^{0,b}$.*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathbf{v}^n, \quad \sum_b \langle \varphi_{k'}^b, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle = 0, \\ \forall k', h', \quad \sum_b \langle \varphi_{k'}^b, \varphi_{h'}^b \rangle = \delta_{k'h'}, \\ \text{si } f^{0,b} = 0, \forall k', \quad \pi \mathbf{g}^{0,b} \otimes \varphi_{k'}^b = \mathbf{o}. \end{array} \right. \quad (10.12)$$

b) Tension à l'ordre 0, opérateur tension auto-équilibrée

Proposition 10.2 *La tension incrémentale $\dot{\mathbf{f}}^{0,b}$ à l'ordre 0 dans une barre b se projette sur la base de vecteur tension auto-équilibrée $\boldsymbol{\varphi}_{k'}^b$.*

$$\begin{cases} \forall b, & \dot{\mathbf{f}}^{0,b} = \sum_{k'} \dot{f}_{k'}^0 \boldsymbol{\varphi}_{k'}^b, \\ \forall k', & \dot{f}_{k'}^0 = \sum_{h'} \left[\Phi_{k'h'}^{-1} \sum_b \langle \boldsymbol{\varphi}_{h'}^b, \sum_{\alpha} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^0}{\partial \lambda^{\alpha}} \delta^{\alpha,b} \rangle \right]. \end{cases} \quad (10.13)$$

Cette projection $\dot{f}_{k'}^0$ peut s'écrire à l'aide d'un opérateur Φ lorsque celui-ci est inversible. Cet opérateur est appelé opérateur de tension auto-équilibrée, il est défini dans la définition suivante.

Avant de démontrer ce résultat, nous devons expliciter l'opérateur Φ qui intervient ici par son inverse. Cet opérateur est défini à l'aide des vecteurs tensions auto-équilibrées $\boldsymbol{\varphi}_{k'}^b$ et d'une autre base de vecteurs $\boldsymbol{\phi}_{k'}^b$ qui sont construits à partir des $\boldsymbol{\varphi}_{k'}^b$ en utilisant la loi de comportement incrémentale. Il n'y a aucun rapport entre les vecteurs $\boldsymbol{\phi}_{k'}^b$ utilisés ici et les scalaires ϕ_h^b utilisés en élasticité comme des B-vecteurs orthogonaux aux scalaires tension auto-équilibrée φ_k^b . Au contraire, comme nous allons le voir dans la définition suivante, $\boldsymbol{\phi}_{k'}^b$ et $\boldsymbol{\varphi}_{k'}^b$ ne sont pas B-orthogonaux, sauf parfois dans des configurations exceptionnelles.

Définition 10.4 *On appelle opérateur tension auto-équilibrée Φ , l'opérateur défini par :*

$$\forall k', h', \quad \Phi_{k'h'} = \sum_b \langle \boldsymbol{\varphi}_{k'}^b, \boldsymbol{\phi}_{h'}^b \rangle. \quad (10.14)$$

Les vecteurs $\boldsymbol{\phi}_{k'}^b$ sont construits sur les $\boldsymbol{\varphi}_{k'}^b$, ils ont la même composante sur le vecteur directeur d'une barre $\mathbf{g}^{0,b}$ à la rigidité près,

$$\begin{cases} \forall k', & k^{-1,b} \langle \boldsymbol{\phi}_{k'}^b, \mathbf{g}^{0,b} \rangle = \langle \boldsymbol{\varphi}_{k'}^b, \mathbf{g}^{0,b} \rangle, \\ \text{si } f^{0,b} = 0 & \pi \mathbf{g}^{0,b} \otimes \boldsymbol{\phi}_{k'}^b = \pi \mathbf{g}^{0,b} \otimes \boldsymbol{\varphi}_{k'}^b = \mathbf{o}, \\ \text{si } f^{0,b} \neq 0 & \frac{f^{0,b}}{q_{1,b}} \pi \mathbf{g}^{0,b} \otimes \boldsymbol{\phi}_{k'}^b = \pi \mathbf{g}^{0,b} \otimes \boldsymbol{\varphi}_{k'}^b. \end{cases} \quad (10.15)$$

Remarque : On suppose dans un premier temps que l'opérateur de tension auto-équilibrée Φ est inversible. On va montrer qu'il est toujours symétrique. Cependant, il n'est pas toujours inversible comme nous le verrons au paragraphe suivant.

Preuve : La démonstration est identique à celle faite en élasticité et en grand déplacement. On choisit pour commencer un champ test $\mathbf{v}^{\tilde{n}} = \epsilon^{\mathcal{D}+1} \theta \mathbf{v}^n$, on montre alors que le vecteur incrément de tension $\dot{\mathbf{f}}^{0,b}$ est un vecteur tension auto-équilibrée. Il peut donc se projeter sur la base de vecteur tension auto-équilibrée $\boldsymbol{\varphi}_{k'}^b$.

La seconde partie de la démonstration consiste à multiplier $\dot{\mathbf{f}}^{0,b}$ par $\boldsymbol{\phi}_{h'}^b$, un vecteur pour l'instant quelconque que l'on définira plus tard, et de faire la somme sur toutes les

barres b . Soit :

$$\begin{aligned} \sum_{k'} \sum_b \langle \phi_{h'}^b, \varphi_{k'}^b \rangle \dot{f}_{k'}^0 &= \sum_b \langle \phi_{h'}^b, \dot{\mathbf{f}}^{0,b} \rangle, \\ \sum_{k'} \Phi_{h'k'} \dot{f}_{k'}^0 &= \sum_b \langle \phi_{h'}^b, \dot{f}^{0,b} \mathbf{g}^{0,b} + f^{0,b} \dot{\mathbf{g}}^{0,b} \rangle. \end{aligned}$$

Le vecteur $\phi_{h'}^b$ est décomposé sur le vecteur directeur de la barre b , $\mathbf{g}^{0,b}$, et sur le plan normal à ce vecteur par l'opérateur de projection $\pi \mathbf{g}^{0,b}$,

$$\phi_{h'}^b = \langle \mathbf{g}^{0,b}, \phi_{h'}^b \rangle \mathbf{g}^{0,b} + \pi \mathbf{g}^{0,b} \otimes \phi_{h'}^b.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k'} \Phi_{h'k'} \dot{f}_{k'}^0 &= \sum_b \left[\dot{f}^{0,b} \langle \phi_{h'}^b, \mathbf{g}^{0,b} \rangle + f^{0,b} \langle \pi \mathbf{g}^{0,b} \otimes \phi_{h'}^b, \dot{\mathbf{g}}^{0,b} \rangle \right], \\ &= \sum_b \left[k^{-1,b} \langle \mathbf{g}^{0,b}, \dot{\mathbf{u}}^{1,b} \rangle \langle \phi_{h'}^b, \mathbf{g}^{0,b} \rangle + f^{0,b} \langle \pi \mathbf{g}^{0,b} \otimes \phi_{h'}^b, \frac{\dot{\mathbf{u}}^{1,b}}{q^{1,b}} \rangle \right], \\ &= \sum_b \left[\langle \varphi_{h'}^b, \mathbf{g}^{0,b} \rangle \langle \mathbf{g}^{0,b}, \dot{\mathbf{u}}^{1,b} \rangle + \langle \pi \mathbf{g}^{0,b} \otimes \varphi_{h'}^b, \dot{\mathbf{u}}^{1,b} \rangle \right], \\ &= \sum_b \langle \varphi_{h'}^b, \dot{\mathbf{u}}^{1,b} \rangle. \end{aligned}$$

En effet, l'incrément de vecteur directeur $\dot{\mathbf{g}}^{0,b} = \pi \mathbf{g}^{0,b} \otimes \frac{\dot{\mathbf{u}}^{0,b}}{q^{1,b}}$ est orthogonal au vecteur $\mathbf{g}^{0,b}$, tout comme le vecteur $\pi \mathbf{g}^{0,b} \otimes \phi_{k'}^b$, on peut donc oublier une projection sur le plan tangent. \square

c) Symétrie de l'opérateur tension auto-équilibrée

Proposition 10.3 *L'opérateur tension auto-équilibrée Φ est symétrique.*

$$\forall k', h', \quad \Phi_{k'h'} = \Phi_{h'k'}, \quad \Phi = {}^t \Phi. \quad (10.16)$$

Si l'opérateur symétrique Φ est défini positif, alors il existe un sous opérateur symétrique Ψ tel que

$$\Phi^{-1} = \Psi. {}^t \Psi = {}^t \Psi. \Psi. \quad (10.17)$$

Preuve : il suffit de remplacer dans l'opérateur Φ le vecteur $\phi_{k'}^b$ par sa définition. En développant, on obtient

$$\begin{aligned} \Phi_{k'h'} &= \sum_b \langle \varphi_{k'}^b, \phi_{h'}^b \rangle = \sum_b \left[\langle \phi_{k'}^b, \mathbf{g}^{0,b} \rangle \langle \varphi_{k'}^b, \mathbf{g}^{0,b} \rangle + \langle \pi \mathbf{g}^{0,b} \otimes \phi_{k'}^b, \pi \mathbf{g}^{0,b} \otimes \varphi_{k'}^b \rangle \right], \\ &= \sum_b \left[k^{-1,b} \langle \phi_{k'}^b, \mathbf{g}^{0,b} \rangle \langle \phi_{h'}^b, \mathbf{g}^{0,b} \rangle + \frac{f^{0,b}}{q^{1,b}} \langle \pi \mathbf{g}^{0,b} \otimes \phi_{k'}^b, \pi \mathbf{g}^{0,b} \otimes \phi_{h'}^b \rangle \right], \end{aligned}$$

ce qui représente clairement une matrice symétrique. La décomposition de Φ^{-1} en deux opérateurs est alors immédiate si Φ est défini positif. \square

10.3.2 Modèle macroscopique

a) Modèle macroscopique tangent

Problème 10.2 *L'équilibre incrémental d'un treillis s'écrit : trouver l'incrément de tension $\dot{f}^{0,b}$ et le déplacement $\dot{\mathbf{u}}^0 + \epsilon \dot{\mathbf{u}}^{1,n}$ tels que*

$$\begin{cases} \forall \mathbf{v}^n, & \int_{\Lambda} \sum_b \langle \dot{f}^{0,b} \mathbf{g}^{0,b} + f^{0,b} \dot{\mathbf{g}}^{0,b}, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle d\lambda = 0, \\ \forall \mathbf{v}, & \int_{\Lambda} \sum_b \langle \dot{f}^{0,b} \mathbf{g}^{0,b} + f^{0,b} \dot{\mathbf{g}}^{0,b}, \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda^{\alpha}} \delta^{\alpha,b} \rangle d\lambda = \int_{\Lambda} \sum_n \langle \dot{\mathbf{f}}^{1,n}, \mathbf{v} \rangle d\lambda. \end{cases} \quad (10.18)$$

A ces deux équations générales, c'est à dire ne faisant pas intervenir la forme de la loi de comportement, nous pouvons ajouter pour que notre problème de barre élastique la relation

$$\dot{f}^{0,b} = k^{-1,b} \langle \mathbf{g}^{0,b}, \dot{\mathbf{u}}^{1,b} \rangle. \quad (10.19)$$

Preuve : La première relation a déjà été écrite et traduit l'auto-équilibre du vecteur tension incrémentale $\dot{\mathbf{f}}^{0,b}$. Pour obtenir la seconde relation, il suffit de choisir dans la formulation variationnelle le champ test

$$\mathbf{v}^{\tilde{n}} = \epsilon \mathcal{D}^{-1} \mathbf{v}.$$

Le calcul est identique à celui effectué en élasticité ainsi qu'en grand déplacement. \square

b) Modèle macroscopique incrémental du premier gradient

Dans la formulation ci-dessus (problème 10.2), nous pouvons utiliser le fait que le vecteur tension $\dot{\mathbf{f}}^{0,b}$ est une tension auto-équilibrée, ceci afin d'éliminer le déplacement incrémental $\dot{\mathbf{u}}^{1,n}$ de l'équilibre.

Problème 10.3 *Le treillis, lors d'un chargement incrémental, est caractérisé par un milieu continu du premier gradient. le déplacement macroscopique $\dot{\mathbf{u}}^0$ vérifie le problème :*

$$\forall \mathbf{v}^0, \quad \mathfrak{a}_i^0(\dot{\mathbf{u}}^0, \mathbf{v}^0) = \mathbb{l}_i^0(\mathbf{v}^0), \quad (10.20)$$

où la forme bilinéaire symétrique \mathfrak{a}_i^0 et la forme linéaire \mathbb{l}_i^0 sont définies par :

$$\begin{cases} \mathfrak{a}_i^0(\dot{\mathbf{u}}^0, \mathbf{v}^0) = \int_{\Lambda} \sum_{k',h'} \Phi_{k'h'}^{-1} \sum_d \langle \varphi_{k'}^d, \sum_{\beta} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^0}{\partial \lambda^{\beta}} \delta^{\beta,d} \rangle \sum_b \langle \varphi_{h'}^b, \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{v}^0}{\partial \lambda^{\alpha}} \delta^{\alpha,b} \rangle, \\ \mathbb{l}_i^0(\mathbf{v}^0) = \int_{\Lambda} \sum_n \langle \dot{\mathbf{f}}^{0,n}, \mathbf{v}^0 \rangle d\lambda. \end{cases} \quad (10.21)$$

c) Cohérence du modèle incrémental du premier gradient

Il faut vérifier la cohérence de notre modèle incrémental, cela signifie qu'il ne faut pas pour déterminer le déplacement incrémental $\dot{\mathbf{u}}^0$ utiliser des informations à des ordres de ϵ dont on ne calcule pas les incréments avec le modèle. Par exemple, il ne faut pas utiliser des informations sur les positions des nœuds à l'ordre $O(\epsilon^2)$. En effet, notre modèle incrémental ne nous donne aucune information sur l'évolution incrémentale de ces positions. Si on les utilise, on ne pourra pas charger la structure par plusieurs pas de chargement et faire du calcul itératif.

Le modèle macroscopique nécessite la connaissance de la topologie qui n'évolue pas ainsi que de la longueur de la barre $\mathbf{q}^{1,b}$. Notre modèle doit donc nous donner $\dot{\mathbf{u}}^{1,b}$ pour être cohérent. Le modèle donne directement le déplacement incrémental $\dot{\mathbf{u}}^0$, puis par un calcul indirect $\dot{\mathbf{u}}^{1,E(b)} - \dot{\mathbf{u}}^{1,O(b)}$ (équation 10.22). Notre modèle est donc cohérent.

Remarque : le déplacement incrémental à l'ordre $O(\epsilon)$ n'est pas complètement déterminé, mais la longueur de la barre $\mathbf{q}^{1,b}$ l'est parfaitement, ce qui est suffisant.

Remarque : le déplacement incrémental à l'ordre 1, $\dot{\mathbf{u}}^{1,n}$ peut s'écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{u}}^{1,n} = \dot{\mathbf{u}}^{1,n} + \dot{\mathbf{u}}^{1,n}, \\ \dot{\mathbf{u}}^{1,n} \in \mathcal{M}, \\ \dot{\mathbf{u}}^{1,n} \in \mathcal{M}^\perp, \\ \dot{\mathbf{u}}^{1,n} = \sum_b \boldsymbol{\xi}^{nb} \left[\langle \mathbf{g}^{0,b}, \sum_\alpha \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^0}{\partial \lambda^\alpha} \delta^{\alpha,b} \rangle - \frac{1}{k^{-1,b}} \sum_{k'} f_{k'}^0 \langle \boldsymbol{\varphi}_{k'}^b, \mathbf{g}^{0,b} \rangle \right]. \end{array} \right. \quad (10.22)$$

Preuve : il s'agit d'écrire la définition de la tension $\dot{\mathbf{f}}^{0,b}$.

$$\forall b, \quad \dot{\mathbf{f}}^{0,b} = k^{-1,b} \langle \mathbf{g}^{0,b}, \dot{\mathbf{u}}^{1,E(b)} - \dot{\mathbf{u}}^{1,O(b)} \rangle + \sum_\alpha \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^0}{\partial \lambda^\alpha} \delta^{\alpha,b} \langle \mathbf{g}^{0,b} \rangle + f^{0,b} \dot{\mathbf{g}}^{0,b} = \sum_{k'} f_{k'}^0 \boldsymbol{\varphi}_{k'}^b.$$

Le déplacement $\dot{\mathbf{u}}^{1,n} \in \mathcal{M}$ n'intervient pas dans $\dot{\mathbf{f}}^{0,b}$ par définition de \mathcal{M} (définition 10.7). Le déplacement $\dot{\mathbf{u}}^{1,n} \in \mathcal{M}^\perp$ se calcule aisément à l'aide de l'opérateur inverse $\boldsymbol{\xi}^{nb}$ (définition 10.8). Les définitions de l'espace \mathcal{M} et de l'opérateur $\boldsymbol{\xi}^{nb}$ sont écrites plus loin, là où elles servent réellement. □

d) Flambage local du modèle incrémental, non inversion de l'opérateur tension auto-équilibrée

Il existe plusieurs possibilités qui entraînent une non coercivité de la forme bilinéaire \mathfrak{a}_i^0 :

1. Un très faible incrément de chargement, de l'ordre de ϵ^3 , qui a lieu d'être dans le cadre des treillis minces. Au vu des résultats en élasticité et en grand déplacement, on peut raisonnablement supposer que la tension $f^{0,b}$ pour toute barre b est nulle. c'est l'objet de la modélisation suivante,

2. Un opérateur Φ tension auto-équilibrée non défini positif. Cet opérateur étant défini au niveau de la cellule, cette propriété traduit un flambage local de la cellule. A tout début de la déformation, à la première itération, l'opérateur Φ tension auto-équilibrée est positif car égal à

$$\Phi_{k'h'} = \sum_b k^{-1,b} \langle \varphi_{k'}^b, \varphi_{h'}^b \rangle, \quad (10.23)$$

qui est clairement un opérateur diagonal ; En effet, toutes ses termes diagonaux sont positifs. Maintenant, au cour de la déformation, une valeur propre nulle implique un flambage local de la cellule. Par contre une valeur propre négative implique un incrément trop important lors de l'itération précédente qui a caché le passage par la valeur propre nulle.

3. Une non coercivité globale de la forme bilinéaire \mathfrak{a}_i^0 . Cela traduit un flambage global du treillis. Ce mode de flambage n'est pas forcément le même que le flambage local de la cellule.

Remarque : la non coercivité de la forme bilinéaire \mathfrak{a}_i^0 signifie donc soit que nous avons un treillis mince, soit que nous sommes en présence d'un flambage global ou local. Cependant, le flambage d'une seule barre n'est pas écrit dans la loi de comportement d'une barre, la forme bilinéaire \mathfrak{a}_i^0 ne peut donc donner cette information. Nous voyons que grâce à l'homogénéisation, nous pouvons introduire une notion de flambage local qui n'existe pas dans une méthode éléments finis. Même s'il est rare d'avoir un mode de flambage local pour une structure élancée telle une poutre, la notion de flambage local peut être très intéressante pour un milieu 3D.

10.3.3 Cas où les tensions $f^{0,b}$ à l'ordre 0 sont faibles ou nulles

Définition 10.5 *On suppose que les tensions dans les barres $f^{0,b}$ sont très petites devant $k^{-1,b}q^{1,b}$*

$$\forall b, \quad \frac{f^{0,b}}{q^{1,b}} \ll k^{-1,b}. \quad (10.24)$$

On fait alors l'hypothèse que l'on peut négliger la tension $f^{0,b}\mathbf{g}^{0,b}$ devant l'autre tension $\dot{f}^{0,b}\mathbf{g}^{0,b}$. C'est le cas au début de la déformation ainsi que pour les treillis minces où l'on fait l'hypothèse que les tensions $f^{0,b}$ sont nulles. Il n'est pas alors nécessaire d'introduire les vecteurs $\varphi_{k'}^b$, il suffit des scalaires tension auto-équilibrée φ_k^b définis par :

$$\begin{cases} \forall \mathbf{v}^n, & \sum_b \varphi_k^b \langle \mathbf{g}^{0,b}, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle = 0, \\ \forall k, h, & \sum_b \frac{\varphi_k^b \varphi_h^b}{k^{-1,b}} = \delta_{kh}. \end{cases} \quad (10.25)$$

Remarque : la base $(\mathbf{g}^{0,b})$ n'est pas forcément identique par rotation à la base initiale $(\mathbf{e}^{0,b})$, la définition des φ_k^b changent donc à chaque itération.

Propriétés 10.3 *L'incrément de tension $\dot{\mathbf{f}}^{0,b}$ se projette sur les scalaires tension auto-équilibrée φ_k^b et est porté par le vecteur directeur $\mathbf{g}^{0,b}$*

$$\begin{cases} \forall b, & \dot{\mathbf{f}}^{0,b} = \sum_k \dot{f}_k^0 \varphi_k^b \mathbf{g}^{0,b}, \\ \forall k, & \dot{f}_k^0(\dot{\mathbf{u}}^0) = \sum_b \varphi_k^b \langle \mathbf{g}^{0,b}, \sum_\alpha \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^0}{\partial \lambda^\alpha} \delta^{\alpha,b} \rangle. \end{cases} \quad (10.26)$$

Problème 10.4 *L'équilibre du treillis s'écrit alors : trouver l'incrément de déplacement $\dot{\mathbf{u}}^0$ vérifiant pour tout champ test \mathbf{v}*

$$\mathfrak{a}_i^0(\dot{\mathbf{u}}^0, \mathbf{v}) = \mathfrak{i}_i^0(\mathbf{v}) \quad (10.27)$$

avec pour définition des formes linéaires

$$\begin{cases} \mathfrak{a}_i^0(\dot{\mathbf{u}}^0, \mathbf{v}) = \int_\Lambda \sum_k \dot{f}_k^0(\dot{\mathbf{u}}^0) \dot{f}_k^0(\mathbf{v}) d\lambda, \\ \mathfrak{i}_i^0(\mathbf{v}) = \int_\Lambda \sum_n \langle \dot{\mathbf{f}}^{1,n}, \mathbf{v} \rangle d\lambda, \\ \dot{f}_k^0(\mathbf{v}) = \sum_b \varphi_k^b \langle \mathbf{g}^{0,b}, \sum_\alpha \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda^\alpha} \delta^{\alpha,b} \rangle. \end{cases} \quad (10.28)$$

Remarque : ce problème est identique à celui écrit en petit déplacement, mais en prenant comme référence les positions déformées, mais connues, des nœuds \mathbf{q}^n .

10.4 Modèle macroscopique pour les treillis minces

10.4.1 Chargement extérieur de faible intensité, gouffre pour le déplacement

a) Hypothèse de travail

Dans cette section, on suppose un incrément de chargement de très faible intensité. C'est à dire, pouvant s'écrire $\dot{\mathbf{f}}^n = \epsilon^3 \dot{\mathbf{f}}^{3,n}$. Tous les calculs effectués précédemment sont valables, cependant le terme en incrément de chargement n'intervient plus dans le modèle du premier gradient.

Hypothèse 10.2 *On fait l'hypothèse dans toute cette partie que la tension à l'ordre 0 dans une barre $f^{0,b}$ est nulle avant que l'incrément de chargement opère.*

$$\forall b, \quad f^{0,b} = 0. \quad (10.29)$$

Remarque : Ce résultat se comprend car en élasticité linéaire ainsi qu'en grand déplacement, cette tension était toujours nulle pour les treillis minces.

Par ailleurs, la tension $f^{0,b}$ étant une donnée, on ne peut donc montrer dans ce chapitre le fait qu'il existe des treillis où cette tension soit nulle. Par contre, si l'incrément de tension $\dot{\mathbf{f}}^{0,b}$ est nul, alors nous pouvons dire que notre modèle est cohérent. Ce sera le cas de ce point de vue là.

b) Gouffre

Définition 10.6 On appelle gouffre, l'espace \mathcal{G} défini par :

$$\mathcal{G} = \left\{ \mathbf{v}, \forall k, \dot{f}_k^0(\mathbf{v}) = \sum_b \varphi_k^b \langle \mathbf{g}^{0,b}, \sum_\alpha \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda^\alpha} \delta^{\alpha,b} \rangle = 0 \right\}. \quad (10.30)$$

c) Déplacement macroscopique dans le gouffre, incrément de tension nul à l'ordre 0

Proposition 10.4 Le déplacement macroscopique incrémental $\dot{\mathbf{u}}^0$ appartient au gouffre \mathcal{G} , cela entraîne un incrément de tension à l'ordre 0 nul.

$$\dot{\mathbf{u}}^0 \in \mathcal{G}, \quad \dot{\mathbf{f}}^{0,b} = \mathbf{0}, \quad \dot{f}^{0,b} = \dot{f}_k^b = 0. \quad (10.31)$$

Preuve : Dans la formulation variationnelle (problème 10.3), la fonctionnelle \mathcal{I}_v^0 est nulle car il n'y a pas de terme de chargement à l'ordre 1. On pose le champ test \mathbf{v} égal au déplacement incrémental $\dot{\mathbf{u}}^0$ ce qui donne immédiatement l'appartenance du déplacement incrémental $\dot{\mathbf{u}}^0$ au gouffre \mathcal{G} et la nullité de l'incrément de tension \dot{f}_k^0 . □

d) Espace macroscopique, opérateur d'inversion des déplacements

Les définitions sont identiques à celles en petit déplacement, elles sont juste adaptées à la configuration déformée.

Définition 10.7 On appelle espace macroscopique \mathcal{M} , l'ensemble défini par

$$\mathcal{M} = \left\{ \mathbf{v}^n, \forall b, \langle \mathbf{g}^{0,b}, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{E(b)} \rangle = 0 \right\}. \quad (10.32)$$

Définition 10.8 On appelle opérateur d'inversion $\boldsymbol{\xi}^{nb}$, la forme linéaire qui permet de déterminer la partie du vecteur \mathbf{v}^n dans \mathcal{M}^\perp , notée $\check{\mathbf{v}}^n$, sachant que

$$\langle \mathbf{g}^{0,b}, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle + A^b = 0, \quad (10.33)$$

où le scalaire A^b est auto-équilibré. on a alors

$$\check{\mathbf{v}}^n = \sum_b \boldsymbol{\xi}^{nb} A^b. \quad (10.34)$$

L'opérateur ξ^{nb} est défini à l'aide du jeu de tensions ϕ_h^b B-orthogonales aux tensions auto-équilibrées φ_k^b et des solutions particulières ζ_h^n orthogonales aux vecteurs de base de \mathcal{M} ; (e_p^n).

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n, b, \quad \xi^{nb} = \sum_h \zeta_h^n \phi_h^b, \\ \forall h, k, \quad \sum \phi_h^b \varphi_k^b = 0, \\ \forall h, k, \quad \sum_b \phi_h^b \phi_k^b = \delta_{hk}, \\ \forall b, h, \quad \langle \mathbf{g}^{0,b}, \zeta_h^{E(b)} - \zeta_h^{O(b)} \rangle + \phi_h^b = 0, \\ \forall h, p, \quad \sum_n \langle \zeta_h^n, e_p^n \rangle = 0. \end{array} \right. \quad (10.35)$$

Preuve : la démonstration est identique à celle faite en élasticité linéaire. □

e) Déplacement à l'ordre 1

Propriétés 10.4 Le déplacement incrémental à l'ordre 1, $\dot{\mathbf{u}}^{1,n}$ peut s'écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{u}}^{1,n} = \dot{\mathbf{u}}^{1,n} + \dot{\mathbf{u}}^{1,n}, \\ \dot{\mathbf{u}}^{1,n} \in \mathcal{M}, \\ \dot{\mathbf{u}}^{1,n} \in \mathcal{M}^\perp, \\ \dot{\mathbf{u}}^{1,n} = \sum_b \xi^{nb} \langle \mathbf{g}^{1,b}, \sum_\alpha \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^0}{\partial \lambda^\alpha} \delta^{\alpha,b} \rangle. \end{array} \right. \quad (10.36)$$

Preuve : l'incrément de tension $f^{0,b}$ est nul, c'est à dire $\langle \mathbf{g}^{0,b}, \dot{\mathbf{u}}^{1,b} \rangle = 0$, soit aussi

$$\forall b, \quad f^{0,b} = k^{-1,b} \langle \mathbf{g}^{0,b}, \dot{\mathbf{u}}^{1,E(b)} - \dot{\mathbf{u}}^{1,O(b)} + \sum_\alpha \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^0}{\partial \lambda^\alpha} \delta^{\alpha,b} \rangle = 0.$$

Le déplacement $\dot{\mathbf{u}}^{1,n} \in \mathcal{M}$ n'intervient pas dans $f^{0,b}$ par définition de \mathcal{M} (définition 10.7). Le déplacement $\dot{\mathbf{u}}^{1,n} \in \mathcal{M}^\perp$ se calcule aisément à l'aide de l'opérateur inverse ξ^{nb} (définition 10.8). □

10.4.2 Tension à l'ordre 1, propriétés topologiques

a) Tension à l'ordre 1

Proposition 10.5 *La tension à l'ordre 1 s'écrit*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f}^{1,b} = f^{1,b} \mathbf{g}^{0,b} + f^{1,b} \dot{\mathbf{g}}^{0,b}, \\ f^{1,b} = k^{-1,b} [\langle \mathbf{g}^{0,b}, \dot{\mathbf{u}}^{2,b} \rangle + \langle \dot{\mathbf{g}}^{0,b}, \mathbf{q}^{2,b} \rangle], \\ \phantom{f^{1,b}} = k^{-1,b} [\langle \mathbf{g}^{0,b}, \dot{\mathbf{u}}^{2,b} \rangle + \langle \mathbf{g}^{1,b}, \dot{\mathbf{u}}^{1,b} \rangle], \\ f^{1,b} = \sum_k f_k^1 \varphi_k^b + \sum_d \langle \boldsymbol{\xi}^{bd}, f^{1,d} \dot{\mathbf{g}}^{0,d} \rangle. \end{array} \right. \quad (10.37)$$

Le vecteur tension $\mathbf{f}^{1,b}$ est auto-équilibré. On peut donc projeter ce vecteur sur la base φ_k^b . Cependant, cette projection n'apporte pas de simplification des futurs calculs, c'est à dire que le déplacement $\dot{\mathbf{u}}^{2,n}$ ne s'élimine pas. La tension scalaire $f^{1,b}$ peut se décomposer en deux parties, une partie étant une solution homogène qui s'écrit avec les tensions scalaires auto-équilibrées φ_k^b , l'autre partie est une solution particulière fonction du reste de tension $f^{1,b} \dot{\mathbf{g}}^{0,b}$. Cette fonction est définie par l'opérateur $\boldsymbol{\xi}^{bd}$. La définition de cet opérateur est identique à l'opérateur $\boldsymbol{\xi}^{nb}$ (définition 10.8) pour trouver $\tilde{\mathbf{u}}^{1,n} \in \mathcal{M}^\perp$ en fonction de \mathbf{u}^0 . On commence par définir une base de vecteur $\phi_h^{b\perp}$ orthogonale au vecteur directeur de la barre $\mathbf{g}^{0,b}$ et B-orthogonale aux vecteurs tensions auto-équilibrées φ_k^b car cette composante des vecteurs $\dot{\mathbf{g}}^{0,b}$ n'a pas d'influence.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall b, h, \quad \langle \phi_h^{b\perp}, \mathbf{g}^{0,b} \rangle = 0, \\ \forall h, k', \quad \sum_b \langle \phi_h^{b\perp}, \varphi_{k'}^b \rangle = 0, \\ \forall h, k, \quad \sum_b \langle \phi_h^{b\perp}, \phi_k^{b\perp} \rangle = \delta_{hk}, \\ \forall h, \exists v^n, \quad \langle \phi_h^{b\perp}, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle \neq 0. \end{array} \right. \quad (10.38)$$

Comme nous le verrons plus tard (équation 10.45), il n'existe que \mathcal{H} vecteurs $\phi_h^{b\perp}$ comme il n'existait que \mathcal{H} tensions scalaires ϕ_h^b non auto-équilibrées, c'est à dire B-orthogonales aux tensions φ_k^b . On peut alors définir ζ_h^b par

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathbf{v}^n, \quad \sum_b \langle \zeta_h^b \mathbf{g}^{0,b} + \phi_h^{b\perp}, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle = 0, \\ \forall b, \quad \sum_b \zeta_h^b \varphi_k^b = 0. \end{array} \right. \quad (10.39)$$

Alors l'opérateur $\boldsymbol{\xi}^{bd}$ est égal à

$$\boldsymbol{\xi}^{bd} = \sum_h \zeta_h^b \phi_h^{d\perp}. \quad (10.40)$$

Remarque : même s'il existe plus de \mathcal{H} vecteurs $\phi_h^{b\perp}$, la philosophie de la démarche ne changerait pas. L'objectif de la méthode serait toujours d'éliminer $\dot{\mathbf{u}}^{2,n}$ des équations. Ces $\phi_h^{b\perp}$ supplémentaires que l'on pourrait trouver ne feraient qu'ajouter des conditions

sur les vecteurs normaux $\dot{\mathbf{g}}^{0,b}$ où le déplacement incrémental $\dot{\mathbf{u}}^{2,n}$ n'intervient pas. Ce n'est donc qu'une complication technique supplémentaire.

Preuve : Dans la formulation variationnelle, on prend le champ test $\mathbf{v}^{\tilde{n}} = \epsilon^{\mathcal{D}-1} \theta \mathbf{v}^n$, on obtient alors

$$\forall b, \quad \langle \dot{f}^{1,b} \mathbf{g}^{0,b} + f^{1,b} \dot{\mathbf{g}}^{0,b}, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle = 0,$$

ce qui signifie l'auto-équilibre du vecteur tension $\dot{f}^{1,b}$. Afin d'éliminer plus tard $\dot{\mathbf{u}}^{2,n}$ de l'expression de la tension $\dot{f}^{1,b}$, on cherche à exprimer la tension en fonction des tensions auto-équilibrées φ_k^b . Cela revient à écrire : en premier lieu la solution homogène de l'équation $\langle \dot{f}^{1,b} \mathbf{g}^{0,b}, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle = 0$ qui est

$$\sum_k \dot{f}_k^1 \varphi_k^b,$$

avec \dot{f}_k^1 comme inconnue, en second lieu de trouver une solution particulière, si elle existe, de l'équation $\langle \dot{f}^{1,b} \mathbf{g}^{0,b} + f^{1,b} \dot{\mathbf{g}}^{0,b}, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle = 0$. Le vecteur $\dot{\mathbf{g}}^{0,b}$ est orthogonal au vecteur $\mathbf{g}^{0,b}$, on projette donc $f^{1,b} \dot{\mathbf{g}}^{0,b}$ sur une base de vecteurs orthogonaux aux $\mathbf{g}^{0,b}$, ce sont les vecteurs $\phi_h^{b\perp}$. Il ne sert à rien de prendre pour les $\phi_h^{b\perp}$ des composantes auto-équilibrées, d'où leur définition.

On sait qu'il existe \mathcal{H} tensions ϕ_h^b telles que $\exists \mathbf{v}^n, \langle \phi_h^b \mathbf{g}^{0,b}, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle \neq 0$. On montre en 2D et il est fort probable que cela marche aussi en 3D (équation 10.45) que le nombre de vecteurs $\phi_h^{b\perp}$ soit aussi de \mathcal{H} et qu'il existe toujours une solution particulière ζ_h^b tel que

$$\forall \mathbf{v}^n, \quad \sum_b \langle \zeta_h^b \mathbf{g}^{0,b} + \phi_h^{b\perp}, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle = 0.$$

Il ne sert à rien d'avoir pour ζ_h^b des composantes sur φ_k^b , d'où sa définition. La possibilité qu'il y ait plus de \mathcal{H} vecteurs ϕ_h^b en 3D ne change rien à la démonstration. Simplement une condition sur les $f^{1,b} \dot{\mathbf{g}}^{0,b}$ est à écrire, ce qui n'influe pas sur l'élimination des déplacements d'ordre 2 ; $\dot{\mathbf{u}}^{2,n}$.

La fin de la démonstration n'est qu'une copie de celle faite pour les ξ^{nb} (définition 10.8), il suffit d'écrire

$$f^{1,b} \dot{\mathbf{g}}^{0,b} = \sum_h \left[\sum_d \langle f^{1,d} \dot{\mathbf{g}}^{0,d}, \phi_h^{d\perp} \rangle \right] \phi_h^{b\perp} + \mathbf{A}^b, \quad \forall h, \sum_b \langle \mathbf{A}^b, \phi_h^{b\perp} \rangle = 0,$$

la solution particulière est alors $\sum_h \zeta_h^b \sum_d \langle f^{1,d} \dot{\mathbf{g}}^{0,d}, \phi_h^{d\perp} \rangle$. □

Proposition 10.6 *l'incrément de tension \dot{f}_k^1 projeté sur la base des tensions auto-équilibrées φ_k^b s'écrit*

$$\dot{f}_k^1 = \sum_b \varphi_k^b \left[\langle \mathbf{g}^{0,b}, \dot{\mathbf{u}}^{2,b} \rangle + \langle \mathbf{g}^{1,b}, \dot{\mathbf{u}}^{1,b} \rangle \right]. \quad (10.41)$$

Preuve : La démonstration est très simple. Il suffit de multiplier $\dot{f}^{1,b}$ par φ_h^b , de diviser par $k^{-1,b}$ et de faire la somme sur toutes les barres b . On obtient

$$\dot{f}_k^1 = \sum_b \varphi_k^b \left[\langle \mathbf{g}^{0,b}, \dot{\mathbf{u}}^{2,b} \rangle + \langle \mathbf{g}^{1,b}, \dot{\mathbf{u}}^{1,b} \rangle - \frac{\sum_d \langle \xi^{bd}, f^{1,d} \dot{\mathbf{g}}^{0,d} \rangle}{k^{-1,b}} \right].$$

Cependant, on sait que le vecteur ξ^{bd} est B-orthogonal à la tension auto-équilibrée φ_k^b , même si celle-ci est divisée par $k^{-1,b}$. \square

b) Quelques propriétés topologiques

Théorème 10.1 *Il existe une analogie très forte entre la définition de l'espace macroscopique \mathcal{M} pour les déplacements et la définition des scalaires tensions auto-équilibrées φ_k^b . Il y a même une dualité entre ces deux définitions.*

$$\begin{cases} \mathcal{M} = \{ \mathbf{v}^n \neq \mathbf{o}, \forall f^b, & \sum_b \langle f^b \mathbf{g}^{0,b}, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle = 0 \}, \\ \mathcal{K} = \{ \varphi_k^b \neq 0, \forall \mathbf{v}^n, & \sum_b \langle \varphi_k^b \mathbf{g}^{0,b}, \mathbf{v}^{E(b)} - \mathbf{v}^{O(b)} \rangle = 0 \}. \end{cases} \quad (10.42)$$

Cela signifie que la dimension de \mathcal{M} est corrélée avec la dimension de \mathcal{K} ou avec \mathcal{H} , dimension des scalaires tensions ϕ_h^b orthogonaux aux tensions auto-équilibrées φ_k^b . En effet, nous avons

$$\mathcal{P} = \dim(\mathcal{M}) \leq 3\mathcal{N}, \quad \mathcal{K} \leq \mathcal{B}, \quad 3\mathcal{N} - \mathcal{P} = \mathcal{B} - \mathcal{K} = \mathcal{H}. \quad (10.43)$$

Preuve : on définit une forme bilinéaire G non symétrique $3\mathcal{N} \times \mathcal{B}$ qui à tout couple (\mathbf{v}^n, f^b) associe le scalaire $\sum_{n,b} \langle \mathbf{v}^n, G^{nb} \rangle f^b$. L'espace macroscopique \mathcal{M} et l'ensemble des tensions auto-équilibrées \mathcal{K} se déduisent de cette forme G par

$$\mathcal{M} = \{ \mathbf{v}^n \neq \mathbf{o}, \forall b, \sum_n \langle \mathbf{v}^n, G^{nb} \rangle = 0 \}, \quad \mathcal{K} = \{ f^b \neq 0, \forall n, \sum_b G^{nb} f^b = \mathbf{o} \}.$$

Les dimensions de \mathcal{M} et de \mathcal{K} sont déterminées par le rang de la forme G , c'est à dire

$$\mathcal{P} = 3\mathcal{N} - \text{rang}(G), \quad \mathcal{K} = \mathcal{B} - \text{rang}(G).$$

\square

Remarque : la forme bilinéaire G ($3\mathcal{N} \times \mathcal{B}$) peut se décomposer en deux formes : une forme topologique δ ($\mathcal{N} \times \mathcal{B}$) et une forme géométrique vectorielle \mathbf{g} ($\mathcal{B} \times \mathcal{B}$). Chaque colonne de δ contient un 1 et un -1, le reste étant des 0 car une barre n'a qu'un nœud origine $O(b)$ et qu'un nœud extrémité $E(b)$. Chaque ligne de δ contient des 1, des -1 et des 0, autant de -1 que le nœud correspondant à la ligne est origine de barre, autant de 1 que le nœud est extrémité de barre. Il y a au moins trois nombres 1 ou -1 dans une ligne sinon le nœud n'est pas positionné dans l'espace, c'est à dire qu'il y a un mécanisme interne à la cellule. C'est trois termes non nuls doivent correspondent à trois directions de barre non coplanaires (sinon, il y a encore un mécanisme). Pour les problèmes plans, il doit y avoir au moins deux termes non nuls par ligne. La forme \mathbf{g} s'exprime par une matrice diagonale où chaque terme de la diagonale est le vecteur directeur de la barre $\mathbf{g}^{0,b}$.

$$G^{nb} = \sum_d \delta^{nd} \mathbf{g}^{db}, \quad \sum_{n,b} \langle \mathbf{v}^n, G^{nb} \rangle f^b = \sum_{n,b} \sum_d \langle \mathbf{v}^n \delta^{nd}, \mathbf{g}^{db} f^b \rangle.$$

L'intérêt de la décomposition est de travailler sur cette forme topologique δ dont la caractérisation est très simple et qui ne fait pas intervenir la géométrie de la cellule, seulement sa topologie, c'est à dire le nombre de liaisons entre nœuds à l'aide de barres.

Hypothèse 10.3 *On doit pouvoir montrer que si le treillis n'a pas de mécanisme, alors*

$$\text{rang}(G) = 3\text{rang}(\delta). \tag{10.44}$$

Remarque : en deux dimensions, on a $\text{rang}(G) = 2\text{rang}(\delta)$.

On peut maintenant revenir aux \mathcal{K}' vecteurs tensions auto-équilibrées $\varphi_{k'}^b$ ainsi qu'aux \mathcal{H} vecteurs $\phi_h^{b\perp}$ B-orthogonaux aux vecteurs $\varphi_{k'}^b$.

Proposition 10.7 *L'ensemble \mathcal{K}' des vecteurs $\varphi_{k'}^b$ est défini par*

$$\mathcal{K}' = \{ \mathbf{f}^b \neq 0, \forall n, \quad \sum_b \delta^{nb} \mathbf{f}^b = \mathbf{o} \}.$$

La dimension de l'ensemble \mathcal{K}' est alors de

$$\mathcal{K}' = 3(\mathcal{B} - \text{rang}(\delta)) = 2\mathcal{B} + \mathcal{K}, \tag{10.45}$$

on a alors au plus \mathcal{H} vecteurs $\phi_h^{b\perp}$.

Remarque : pour les problèmes plans, la condition (équation 10.44) est toujours vérifiée si le treillis n'a pas de mécanisme. En effet, on peut définir une base complète de vecteurs orthogonaux aux vecteurs directeurs des barres $\mathbf{g}^{0,b}$ par une simple rotation de cette base de vecteurs directeurs ($\mathbf{g}^{0,b}$) de 90° dans le plan. Cette nouvelle base étant équivalente par rotation à la base des vecteurs directeurs ($\mathbf{g}^{0,b}$), les \mathcal{K} scalaires tensions auto-équilibrées φ_k^b sont aussi auto-équilibrées dans cette nouvelle base. Ils ne reste donc que \mathcal{H} scalaire B-orthogonaux aux tensions φ_k^b , donc que \mathcal{H} vecteurs $\phi_h^{b\perp}$.

c) Déplacement à l'ordre 2

Propriétés 10.5 *Le déplacement incrémental à l'ordre 2, $\dot{\mathbf{u}}^{2,n}$ peut s'écrire*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{u}}^{2,n} = \dot{\mathbf{u}}^{2,n} + \dot{\mathbf{u}}^{2,n}, \\ \dot{\mathbf{u}}^{2,n} \in \mathcal{M}, \\ \dot{\mathbf{u}}^{2,n} \in \mathcal{M}^\perp, \\ \dot{\mathbf{u}}^{2,n} = \sum_b \boldsymbol{\xi}^{nb} \left[\langle \mathbf{g}^{0,b}, \dot{\mathbf{u}}^{2,b} \rangle + \langle \mathbf{g}^{1,b}, \dot{\mathbf{u}}^{1,b} \rangle - \frac{1}{k^{-1,b}} \sum_d \langle \boldsymbol{\xi}^{bd}, f^{1,d} \dot{\mathbf{g}}^{0,d} \rangle \right]. \end{array} \right. \tag{10.46}$$

Preuve : On écrit la définition de $\dot{f}^{1,b}$

$$\begin{aligned} \dot{f}^{1,b} &= \sum_k \dot{f}_k^1 \varphi_k^b + \sum_d \langle \boldsymbol{\xi}^{bd}, f^{1,d} \dot{\mathbf{g}}^{0,d} \rangle, \\ &= k^{-1,b} \left[\langle \mathbf{g}^{0,b}, \dot{\mathbf{u}}^{2,b} \rangle + \langle \mathbf{g}^{1,b}, \dot{\mathbf{u}}^{1,b} \rangle \right], \end{aligned}$$

puis on utilise l'opérateur d'inversion $\boldsymbol{\xi}^{nb}$.

$$\dot{\mathbf{u}}^{2,n} = \sum_b \boldsymbol{\xi}^{nb} \left[\langle \mathbf{g}^{0,b}, \dot{\mathbf{u}}^{2,b} \rangle + \langle \mathbf{g}^{1,b}, \dot{\mathbf{u}}^{1,b} \rangle - \frac{\sum_k \dot{f}_k^1 \varphi_k^b + \sum_d \langle \boldsymbol{\xi}^{bd}, f^{1,d} \dot{\mathbf{g}}^{0,d} \rangle}{k^{-1,b}} \right].$$

Cependant, par définition, le vecteur $\boldsymbol{\xi}^{nb}$ est B-orthogonal à la tension auto-équilibrée φ_k^b .

□

10.4.3 Modèle continu du second ordre

Problème 10.5 *Le champ de déplacement incrémental $\dot{\mathbf{u}}^0 + \epsilon \dot{\mathbf{u}}^{1,n} + \epsilon^2 \dot{\mathbf{u}}^{2,n}$, avec $\dot{\mathbf{u}}^0 \in \mathcal{G}$, $\dot{\mathbf{u}}^{1,n} \in \mathcal{M} \cap \mathcal{G}^\perp$ et $\dot{\mathbf{u}}^{2,n} \in \mathcal{M}^\perp$, vérifie le problème suivant*

$$\forall \mathbf{v}^0 \in \mathcal{G}, \hat{\mathbf{v}}^{1,n} \in \mathcal{M} \cap \mathcal{G}^\perp, \check{\mathbf{v}}^{2,n} \in \mathcal{M}^\perp, \quad \mathfrak{a}_i^1(\dot{\mathbf{u}}^0, \dot{\mathbf{u}}^{1,n}, \mathbf{v}^0, \hat{\mathbf{v}}^{1,n}) = \mathbb{l}_i^1(\mathbf{v}^0), \quad (10.47)$$

avec pour définition de la forme bilinéaire symétrique \mathfrak{a}_i^1 et de la forme linéaire \mathbb{l}_i^1

$$\begin{cases} \mathbb{l}_i^1 &= \int_{\Lambda} \sum_n \langle \dot{\mathbf{f}}^{3,n}, \mathbf{v}^0 \rangle d\lambda, \\ \mathfrak{a}_i^1 &= \int_{\Lambda} \sum_b \left\{ \dot{f}^{1,b} [\langle \mathbf{g}^{0,b}, \mathbf{v}^{2,b} \rangle + \langle \mathbf{g}^{1,b}, \mathbf{v}^{1,b} \rangle] + f^{1,b} [\langle \dot{\mathbf{g}}^{0,b}, \mathbf{v}^{2,b} \rangle + \langle \dot{\mathbf{g}}^{1,b}, \mathbf{v}^{1,b} \rangle] \right\} d\lambda. \end{cases} \quad (10.48)$$

Preuve : dans la formulation variationnelle, on choisit le champ test $\mathbf{v}^{\tilde{n}}$ suivant

$$\mathbf{v}^{\tilde{n}} = \epsilon^{\mathcal{D}-3} [\mathbf{v}^0 + \epsilon \mathbf{v}^{1,n} + \epsilon^2 \mathbf{v}^{2,n}],$$

avec $\mathbf{v}^0 \in \mathcal{G}$, $\mathbf{v}^{1,n}$ tel que $\dot{\mathbf{f}}^{0,b}(\mathbf{v}^0 + \epsilon \mathbf{v}^{1,n}) = 0$, cela signifie que la partie de $\mathbf{v}^{1,n}$ dans \mathcal{M}^\perp est parfaitement définie par \mathbf{v}^0 , la partie $\hat{\mathbf{v}}^{1,n}$ dans \mathcal{M} étant quelconque. $\mathbf{v}^{2,n}$ est pris quelconque. La forme linéaire \mathbb{l}_i^1 s'obtient directement par le terme de chargement extérieure, la forme bilinéaire \mathfrak{a}_i^1 s'obtient par les termes de tension.

$$\begin{aligned} \langle \dot{\mathbf{f}}^{\tilde{b}}, \mathbf{v}^{\tilde{n}} \rangle &= \langle \dot{f}^b \mathbf{g}^b + f^b \dot{\mathbf{g}}^b, \mathbf{v}^{\tilde{n}} \rangle = \dot{f}^b \langle \mathbf{g}^b, \mathbf{v}^{\tilde{n}} \rangle + f^b \langle \dot{\mathbf{g}}^b, \mathbf{v}^{\tilde{n}} \rangle, \\ &= \left[\epsilon \dot{f}^{1,b} + \dots \right] \langle \mathbf{g}^{0,b} + \epsilon \mathbf{g}^{1,b} + \dots, \epsilon^{\mathcal{D}-1} \mathbf{v}^{1,b} + \epsilon^{\mathcal{D}-2} \mathbf{v}^{2,b} + \dots \rangle \\ &\quad + \left[\epsilon f^{1,b} + \dots \right] \langle \dot{\mathbf{g}}^{0,b} + \epsilon \dot{\mathbf{g}}^{1,b} + \dots, \epsilon^{\mathcal{D}-1} \mathbf{v}^{1,b} + \epsilon^{\mathcal{D}-2} \mathbf{v}^{2,b} + \dots \rangle. \end{aligned}$$

On fait l'hypothèse que $\langle \dot{f}^{1,b} \mathbf{g}^{0,b} + f^{1,b} \dot{\mathbf{g}}^{0,b}, \mathbf{v}^{1,b} \rangle = 0$, on a alors

$$\langle \dot{\mathbf{f}}^{\tilde{b}}, \mathbf{v}^{\tilde{n}} \rangle = \epsilon^{\mathcal{D}} \left\{ \dot{f}^{1,b} [\langle \mathbf{g}^{0,b}, \mathbf{v}^{2,b} \rangle + \langle \mathbf{g}^{1,b}, \mathbf{v}^{1,b} \rangle] + f^{1,b} [\langle \dot{\mathbf{g}}^{0,b}, \mathbf{v}^{2,b} \rangle + \langle \dot{\mathbf{g}}^{1,b}, \mathbf{v}^{1,b} \rangle] \right\} + O(\epsilon^{\mathcal{D}+1}).$$

Lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, on retrouve la forme \mathfrak{a}_i^1 . Pour vérifier l'hypothèse faite ci-dessus, soit on choisit un champ test $\mathbf{v}^{\tilde{n}} = \epsilon^{\mathcal{D}-2} [\mathbf{v}^0 + \epsilon \mathbf{v}^{1,n}]$ que l'on remplace dans la formulation variationnelle, soit on retrouve ce résultat à l'aide de $\mathbf{v}^{2,b}$ et en prenant $\mathbf{v}^0 = 0$ dans le modèle continu (les termes comprenant $\mathbf{v}^{1,b}$ sont nuls, en effet $\mathbf{v}^{1,b} = \hat{\mathbf{v}}^{1,E(b)} - \hat{\mathbf{v}}^{1,O(b)} = \mathbf{0}$ car $\hat{\mathbf{v}}^{1,n} \in \mathcal{M}$, de plus $\check{\mathbf{v}}^{1,b} = 0$ car \mathbf{v}^0 est choisi nul).

La forme \mathfrak{a}_i^1 est bilinéaire symétrique (équation 10.48). Pour le premier terme, il suffit d'écrire la définition de $\dot{f}^{1,b}$

$$\dot{f}^{1,b} = k^{-1,b} [\langle \mathbf{g}^{0,b}, \dot{\mathbf{u}}^{2,b} \rangle + \langle \mathbf{g}^{1,b}, \dot{\mathbf{u}}^{1,b} \rangle],$$

pour le second terme, il faut prouver la symétrie en $\dot{\mathbf{u}}$ et en \mathbf{v} de

$$\langle \dot{\mathbf{g}}^{0,b}, \mathbf{v}^{2,b} \rangle + \langle \dot{\mathbf{g}}^{1,b}, \mathbf{v}^{1,b} \rangle.$$

On s'attache au second membre de cette équation. Sachant que $\langle \mathbf{g}^{0,b}, \mathbf{v}^{1,b} \rangle = 0$ (c'est une des définitions du gouffre),

$$\begin{aligned} \langle \dot{\mathbf{g}}^{1,b}, \mathbf{v}^{1,b} \rangle &= \langle \pi \mathbf{g}^{0,b} \frac{\dot{\mathbf{u}}^{2,b}}{q^{1,b}}, \mathbf{v}^{1,b} \rangle - \frac{q^{2,b}}{q^{1,b}} \langle \dot{\mathbf{g}}^{0,b}, \mathbf{v}^{1,b} \rangle, \\ &= \langle \frac{\dot{\mathbf{u}}^{2,b}}{q^{1,b}}, \mathbf{v}^{1,b} \rangle - q^{2,b} \langle \dot{\mathbf{g}}^{0,b}, \mathbf{g}_v^{0,b} \rangle, \\ &= \langle \dot{\mathbf{u}}^{2,b}, \mathbf{g}_v^{0,b} \rangle - q^{2,b} \langle \dot{\mathbf{g}}^{0,b}, \mathbf{g}_v^{0,b} \rangle. \end{aligned}$$

Le second terme de \mathfrak{a}_i^1 est donc lui aussi symétrique. □

10.5 Conclusion

Une formulation incrémentale permet de calculer la déformation d'une structure précontrainte. Cette déformée est aussi une structure précontrainte. À partir de là, un chargement peut de nouveau lui être appliqué. Lorsque ces pas de chargement sont petits, considérés comme infiniment petits, la formulation incrémentale est linéarisée et elle est alors appelée formulation tangente. L'objectif de ce chapitre est d'avoir écrit une telle formulation pour les treillis quasi-périodiques en utilisant la méthode d'homogénéisation discrète. C'est la première fois que cette méthode est utilisée pour trouver un milieu continu équivalent en incrémentale. Des hypothèses simplificatrices ont donc été faites : le cadre de la quasi-statique a été employé, les effets dynamiques sont négligés ; les déformations des barres constituant le treillis sont petites, elles sont donc considérées comme des ressorts ; tous les nœuds d'une cellule ont le même déplacement macroscopique incrémental. Cette hypothèse met de coté le cas des poutres 3D et des treillis à mécanismes.

La technique de l'homogénéisation discrète consistant à écrire des formulations variationnelles, puis à faire un bon choix des champs tests, à été appliquée. Deux milieux continus ont été identifiés :

- un milieu du premier gradient assez proche finalement d'un milieu continu élastique classique. Cependant, le treillis étant précontraint, il existe initialement des tensions non nulles dans les barres. Elles ont été prises en compte dans les équations concernant l'auto-équilibre de la cellule. La rigidité de la structure n'est donc plus la même. Dans certain cas de pré-tension, la rigidité du milieu continu peut s'annuler. Trois cas ont été identifiés : soit la structure est mince et il existe un milieu du second ordre ; soit la structure ne tient plus globalement et il y a alors un flambage global de celle-ci ; soit la rigidité s'annule localement, alors une notion de flambage local, au niveau d'une cellule, est définie. Enfin, on a montré que le modèle du premier gradient est cohérent, c'est à dire que des pas de chargement successifs peuvent être faits,
- un milieu du second ordre pour les treillis minces. Un gouffre est donc défini pour le déplacement macroscopique. Puis quelques propriétés topologiques assez générales sont énoncées, elles permettent d'écrire une formulation du second ordre couplé mais symétrique. Le problème est couplé car il fait intervenir l'incrément de déplacement

aux ordres ϵ^0 et ϵ , cependant l'incrément de déplacement à l'ordre ϵ^2 est éliminé. La difficulté de ce modèle provient du travail des tensions pré-existantes dans une barre qui n'a pas une forme proche de celui des incréments de tensions. La cohérence du modèle final n'a pas été vérifiée.

Aucun exemple numérique n'a été étudié car la mise au point de la résolution numérique d'un treillis quasi-périodique en élasticité linéaire n'est pas encore faite. En effet, dès que cette dernière sera faite, il suffira d'y intégrer les relations données par la formulation incrémentale qui sont plus compliquées à écrire tout en étant du même type. Cependant, nous avons montré qu'il était possible d'écrire une formulation incrémentale tangente qui prenne en compte les déformations successives du treillis. Ne connaissant pas ces différentes déformations au cours du temps, c'est une donnée du problème, la formulation incrémentale tangente n'obtient pas des modèles tangents à ceux obtenus en faisant l'hypothèse des grands déplacements. Par exemple, l'étude en grands déplacements montre au chapitre 9 que pour un treillis mince, la cellule ne se déforme pas au premier ordre, cependant, nous ne pouvons pas le supposer *a priori* dans la formulation incrémentale.

Avant de poursuivre plus avant dans des formulations non linéaires, il est temps de regarder les phénomènes de bords pour quantifier les couches limites possibles et justifier le fait de les avoir négligées jusqu'à présent. C'est l'objectif du chapitre suivant.

Chapitre 11

Effets de bords, couches limites d'une structure discrète en élasticité linéaire

Plan du chapitre 11

11.1	Description de l'étude	235
11.2	Couches limites dans un milieu continu	236
11.3	Couches limites dans une structure discrète	238
11.3.1	Couches limites continues, couches limites discrètes	238
11.3.2	Couches limites à décroissance exponentielle, interprétation	238
	a) Déplacement à décroissance exponentielle	238
	b) Interprétation ; variable rapide, variable lente	239
	c) Déplacement du nœud extrémité d'une barre et allongement de cette barre	240
	d) Tension dans une barre	240
	e) Équilibre du treillis	240
11.4	Conclusion	241

11.1 Description de l'étude

Les trois études précédentes ; modèle macroscopique en élasticité linéaire, en grand déplacement et en incrémentale, n'ont pas tenu compte des bords. Seule la structure à *l'intérieur* de l'espace paramétrique a pour l'instant été étudiée. Pour ne pas regarder ce qui se passait aux bords, nous avons pris jusqu'à présent, dans les formulations variationnelles, des champs tests qui s'annulaient sur les bords. Les conditions aux limites sur les bords ne pouvaient donc être vérifiées. Dans la pratique, nous avons pu vérifier des conditions aux limites en *moyenne*, c'est à dire des conditions aux limites posées globalement sur la cellule. Tous les modèles que nous avons construits supposent que les phénomènes locaux aux bords, internes aux cellules frontières, ne se propagent pas dans l'ensemble de la structure. Dans ce chapitre, on s'intéresse donc tout particulièrement aux bords et on

recherche des champs de déplacement qui permettent de vérifier toutes les conditions aux limites *locales* et qui ne perturbent pas les modèles macroscopiques dans la structure. Ces champs agissant seulement sur une faible épaisseur, si de tels champs existent, ils sont appelés couches limites ou effets de bords. On limite volontairement cette étude au cas de l'élasticité linéaire afin d'obtenir un problème simple et bien posé.

11.2 Couches limites dans un milieu continu

Avant de développer une théorie des couches limites dans une structure discrète, regardons le cas d'un milieu continu bien connu : la plaque mince. Une plaque mince est caractérisée par trois dimensions, deux longueurs donnant les dimensions générales de la plaque et supposées être du même ordre de grandeur, une autre fixant l'épaisseur de la plaque et supposée être très petite devant les deux autres. On peut alors introduire un petit paramètre ϵ définie par la fraction *épaisseur sur longueur*. L'objectif des méthodes d'homogénéisations est de définir dans un premier temps un modèle spécialement adapté à la plaque, c'est à dire un modèle 2D.

Pour ce faire, on écrit les équations du milieu 3D, puis on fait tendre l'épaisseur de la plaque, ou le petit paramètre ϵ , vers zéro. On espère obtenir alors un modèle cohérent où la troisième dimension disparaît ; un modèle 2D. Beaucoup d'études ont été faites sur le sujet [20, 51]. Pour obtenir un tel modèle, il est souvent plus simple d'écrire une formulation variationnelle de l'équilibre de la plaque. Nous avons dans cette formulation des intégrales sur la plaque tout entière. Lorsque ϵ tend vers zéro, les bornes de ces intégrales sont modifiées, ce qui engendre de grosses difficultés. Afin d'éviter cela, on effectue une dilatation de $1/\epsilon$ de la plaque dans la direction de l'épaisseur afin d'obtenir un domaine de taille fixe lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ (figure 11.1). Cette dilatation se traduit concrètement dans les équations par un changement de variable.

On remarque que le modèle continu obtenu (un modèle 2D) ne peut pas vérifier parfaitement les conditions aux limites sur les bords. En effet, le modèle de plaque 2D a un nombre fini de degrés de liberté sur une frontière (en général 6 d.d.l.) alors que le modèle de plaque 3D en a un nombre infini. Les conditions aux limites sont donc vérifiées en moyenne. Cependant, ces modèles plaques vérifient bien les phénomènes physiques dans la plaque [7, 20, 51], la technique d'homogénéisation ainsi que les modèles 2D ne sont donc pas à remettre en cause. Afin de mieux modéliser ces conditions aux limites ainsi que les phénomènes physiques se déroulant sur la frontière de la plaque, on recherche sur le bord des solutions en déplacement à décroissance exponentielle. Elles n'ont un impact sur la solution générale que sur une très faible profondeur, de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la plaque [20, 23, 51]. C'est pourquoi on les appelle des couches limites. Ces exponentielles décroissent en fonction de la distance d'un point à la frontière. Pour étudier cette physique, on dilate donc la plaque selon la normale à la frontière (figure 11.1), le coefficient de dilatation étant égal à $1/\epsilon$ [20, 23]. Cette dilatation permet d'étudier les couches limites ayant une profondeur de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la plaque. Par un tel système, on n'obtient pas toutes les couches limites, cependant on espère trouver un correcteur afin d'améliorer la solution le long d'un bord. Au niveau d'un des coins de la plaque, il faut normalement faire la dilatation selon les deux normales, correspondant aux deux bords.

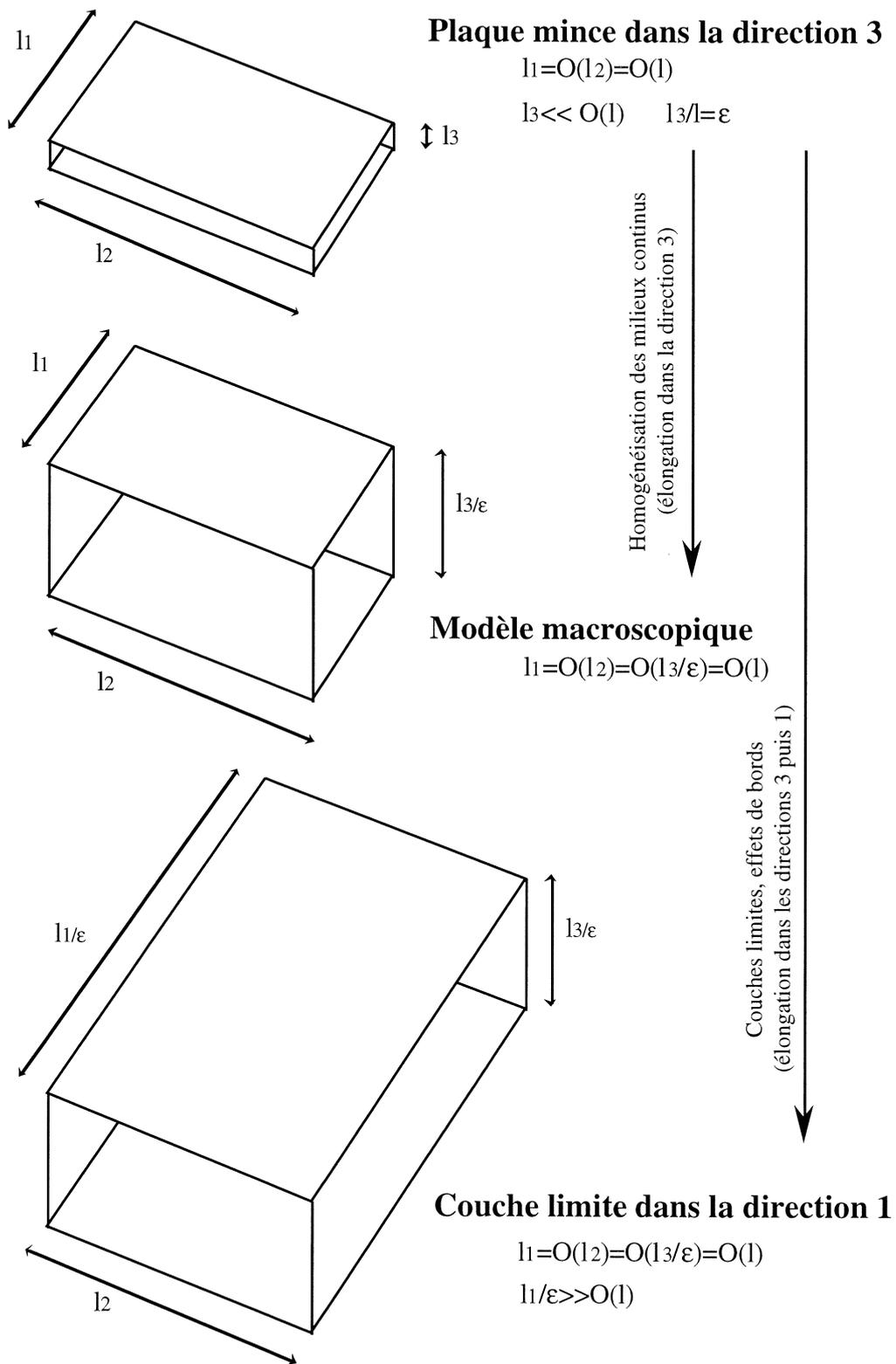


Figure 11.1 : homogenisation d'une plaque mince

11.3 Couches limites dans une structure discrète

11.3.1 Couches limites continues, couches limites discrètes

Nous pouvons retenir à propos des couches limites d'une plaque que la dilation permet d'avoir dans les formulations variationnelles des intégrales sur des domaines fixes lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, que le coefficient de dilation dans le cadre des couches limites est lié à la décroissance de la couche, c'est à dire à la profondeur de la couche. En effet, on pose *a priori* qu'il existe une couche limite à décroissance exponentielle dans l'unique but de ne pas perturber la solution générale et de mieux vérifier, si possible, les conditions aux limites.

Dans le cadre des structures discrètes, nous pouvons dès maintenant oublier la dilation, elle ne marche pas. En effet, même lors du processus d'homogénéisation afin d'obtenir la solution générale, il n'y a pas eu de dilatation. La raison en est la suivante : lorsque l'on dilate un milieu continu, on obtient encore un milieu continu ayant, si le milieu est isotrope, les mêmes caractéristiques locales ; lorsque l'on dilate une cellule discrète, un réseau de barres, on transforme profondément la géométrie de celle-ci en tout point. Sauf s'il s'agit d'une dilatation sphérique. On voit donc bien que l'on ne peut pas dilater notre structure discrète selon la normale à la frontière. Une cellule discrète à un nombre fini de nœuds, localement le problème est discret, non continu. C'est la différence entre l'homogénéisation des milieux périodiques ayant une variable locale continue et l'homogénéisation discrète qui remplace cette variable locale par des indices. Cependant, rien ne nous empêche de rechercher une solution à décroissance exponentielle.

11.3.2 Couches limites à décroissance exponentielle, interprétation

a) Déplacement à décroissance exponentielle

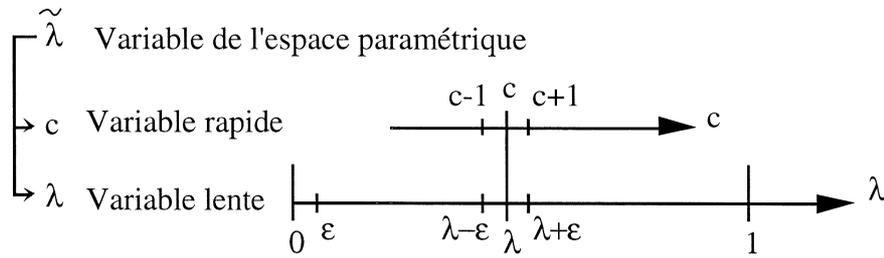
On suppose que la normale à la frontière dans l'espace paramétrique est la direction 1. Ceci n'est juste qu'un choix afin de simplifier les notations. Si la normale à la frontière se trouve être la direction 2 ou la direction 3, il suffira alors de remplacer 1 par 2 ou par 3.

Hypothèse 11.1 *On recherche un déplacement \mathbf{u} à décroissance exponentielle dans la direction 1. De plus cette décroissance est cherchée de l'ordre de grandeur de la cellule, c'est à dire en $e^{r\frac{\lambda^1}{\epsilon}}$ où r est un paramètre inconnu d'ordre ϵ^0 . Sachant que le numéro de la cellule c est relié à la variable λ par $c^1 = \frac{\lambda^1}{\epsilon}$, le déplacement s'écrit :*

$$\mathbf{u}^{\tilde{n}} = \mathbf{u}^n(\lambda^\alpha)e^{rc^1}. \quad (11.1)$$

On pose pour simplifier les notations futures $z = e^r$. Ce changement de variable signifie que le déplacement \mathbf{u} est à décroissance exponentielle dans la base z et non la base des logarithmes népériens e . Le déplacement \mathbf{u} s'écrit alors :

$$\mathbf{u}^{\tilde{n}} = \mathbf{u}^n(\lambda^\alpha)z^{c^1}. \quad (11.2)$$

Figure 11.2 : *variable lente, variable rapide*

Remarque : plus z est petit, plus la décroissance des déplacements sera rapide. En pratique, cela signifie que l'épaisseur de la couche limite sera d'autant plus faible. On se trouve donc en présence d'une couche limite proche du bord de l'espace paramétrique $\lambda^1 = 0$. Si z devient très petit, l'épaisseur de la couche limite est si faible qu'elle en devient négligeable. En effet, elle peut alors disparaître en moins d'une cellule. Notre milieu étant discret, elle n'a alors plus de sens. Si z est supérieur à 1, l'exponentielle est croissante, il s'agit donc de la couche limite sur le bord opposé, c'est à dire proche de $\lambda^1 = 1$. Si $z = 1$, nous obtenons le problème que nous savons déjà résoudre et qui ne fait pas intervenir de couche limite. Si $z = 0$, il s'agit d'une condition aux limites quelconque qui n'a aucune influence sur le reste du treillis (chapitre 6).

Remarque : le terme $\mathbf{u}^n(\lambda)$ n'est plus ici un déplacement réel. On parlera toujours de déplacement en l'écrivant, mais le déplacement réel fait intervenir le terme exponentiel.

b) Interprétation ; variable rapide, variable lente

On propose ici une interprétation géométrique pour tenter de justifier l'introduction du numéro de la cellule c^1 dans le déplacement d'un nœud. En effet, lors des développements asymptotiques, on ne développera pas z^{c^1} en puissance de ϵ alors que notre façon d'écrire donne à penser que le numéro c^1 dépend de ϵ .

Hypothèse 11.2 *La notation permettant de se positionner dans l'espace paramétrique se fait à l'aide de la variable $\tilde{\lambda}$, anciennement écrite λ . Le fait d'avoir une décroissance très rapide nous invite à dissocier cette variable $\tilde{\lambda}$ en deux variables : une variable lente λ et une variable rapide c (figure 11.2). La corrélation entre $\tilde{\lambda}$, λ et c est la suivante :*

$$\lambda \equiv \tilde{\lambda}, \quad c \equiv \frac{\tilde{\lambda}}{\epsilon}. \quad (11.3)$$

On recherche le déplacement $\mathbf{u}^n(\tilde{\lambda})$ par la méthode de séparation des variables, c'est à dire que nous pouvons écrire

$$\mathbf{u}^n(\tilde{\lambda}) = \mathbf{u}^n(\lambda)\mathbf{u}^n(c). \quad (11.4)$$

1. Le déplacement $\mathbf{u}^n(c)$ dépendant de la variable rapide c est cherché sous forme d'une exponentielle z^{c^1} où z est un paramètre inconnu

$$\mathbf{u}^n(c) = z^c. \quad (11.5)$$

2. Le déplacement $\mathbf{u}^n(\lambda)$ dépendant de la variable lente λ est cherché sous forme d'un développement asymptotique en puissance de ϵ

$$\mathbf{u}^n(\lambda) = \mathbf{u}^{0,n}(\lambda) + \epsilon \mathbf{u}^{1,n}(\lambda) + \epsilon^2 \mathbf{u}^{2,n}(\lambda) + \dots \quad (11.6)$$

c) Déplacement du nœud extrémité d'une barre et allongement de cette barre

Proposition 11.1 *Le déplacement du nœud extrémité $E(b)$ de la barre b s'écrit :*

$$\mathbf{u}^{E(b)}(\tilde{\lambda}) = \mathbf{u}^{E(b)}(\lambda^\alpha + \epsilon \delta^{\alpha,b}) z^{\delta^{1,b}} z^{c^1}. \quad (11.7)$$

L'allongement d'une barre b est alors

$$\mathbf{u}^b(\tilde{\lambda}) = \left[z^{\delta^{1,b}} \mathbf{u}^{E(b)}(\lambda + \epsilon \delta^b) - \mathbf{u}^{O(b)}(\lambda) \right] z^{\frac{\lambda^1}{\epsilon}}. \quad (11.8)$$

d) Tension dans une barre

La rigidité d'une barre $k^{\tilde{b}}$ est supposée être toujours d'ordre $O(\epsilon^{-1})$, le vecteur directeur de la barre est $\mathbf{e}^{\tilde{b}}$. Ces deux grandeurs ne dépendent pas de la variable rapide c^1 car elles sont construites sur la géométrie initiale du treillis. Ce n'est pas le cas pour la tension dans une barre.

Proposition 11.2 *La tension dans une barre appartenant à la couche limite se développe*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f}^b(\tilde{\lambda}) = k^b \langle \mathbf{u}^{E(b)}(\tilde{\lambda} + \epsilon \delta^{\tilde{b}}) - \mathbf{u}^{O(b)}(\tilde{\lambda}), \mathbf{e}^{0,b} \rangle \mathbf{e}^{0,b}(\lambda), \\ \quad = k^b \langle z^{\delta^{1,b}} \mathbf{u}^{E(b)}(\lambda + \epsilon \delta^b) - \mathbf{u}^{O(b)}(\lambda), \mathbf{e}^{0,b} \rangle \mathbf{e}^{0,b} z^{c^1}, \\ \mathbf{f}^b(\tilde{\lambda}) = \frac{1}{\epsilon} f^{-1,b}(\lambda) \mathbf{e}^{0,b}(\lambda) z^{c^1} + O(\epsilon^0), \\ f^{-1,b}(\lambda) = k^{-1,b} \langle z^{\delta^{1,b}} \mathbf{u}^{0,E(b)}(\lambda) - \mathbf{u}^{0,O(b)}(\lambda), \mathbf{e}^{0,b}(\lambda) \rangle. \end{array} \right. \quad (11.9)$$

e) Équilibre du treillis

Problème 11.1 *L'équilibre du treillis s'écrit pour une couche limite orientée dans la direction 1 de l'espace paramétrique*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n, \quad - \sum_{b \in E^{-1}(b)} z^{-\delta^{1,b}} k^{-1,b} \langle \mathbf{u}^{0,O(b)}, \mathbf{e}^{0,b} \rangle \mathbf{e}^{0,b} \\ \quad + \sum_{b \in E^{-1}(b)} \langle \mathbf{u}^{0,E(b)}, \mathbf{e}^{0,b} \rangle \mathbf{e}^{0,b} + \sum_{b \in O^{-1}(b)} \langle \mathbf{u}^{0,O(b)}, \mathbf{e}^{0,b} \rangle \mathbf{e}^{0,b} \\ \quad - \sum_{b \in O^{-1}(b)} z^{\delta^{1,b}} k^{-1,b} \langle \mathbf{u}^{0,E(b)}, \mathbf{e}^{0,b} \rangle \mathbf{e}^{0,b} = \mathbf{o}. \end{array} \right. \quad (11.10)$$

Le vecteur colonne $\underline{\mathbf{u}}$ est une matrice colonne contenant les déplacements \mathbf{u}^n de tous les nœuds de la cellule. On peut alors définir trois matrices $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{IN}}}_z$ telles que l'équation (11.10) s'écrive :

$$\underline{\underline{\mathbf{IN}}}_z \cdot \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{0}}, \quad (11.11)$$

avec la matrice $\underline{\underline{\mathbf{IN}}}_z = \frac{1}{z} {}^t \underline{\underline{\mathbf{B}}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}} + z \underline{\underline{\mathbf{B}}}$ et le vecteur $\underline{\mathbf{u}}$

$$\underline{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{0,n=1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{0,\mathcal{N}} \end{bmatrix}_N. \quad (11.12)$$

Remarque : on retrouve par cette dernière notation, la formulation déjà étudiée lors du chapitre 6. De plus, même si cela n'est pas clairement explicite dans l'équation (11.10), la matrice $\underline{\underline{\mathbf{IN}}}_z$ est symétrique.

Remarque : on peut définir l'espace macroscopique \mathcal{M} (chapitre 8) par l'ensemble des déplacements $\underline{\mathbf{u}}$ qui vérifient pour $z = 0$:

$$\underline{\underline{\mathbf{IN}}}_0 \cdot \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{0}}. \quad (11.13)$$

Théorème 11.1 *Il existe autant de modes exponentiels ($z \neq 1$) et polynomiaux ($z = 1$) qu'il y a de nœuds dans une cellule. Une solution analytique existe qui permet de vérifier toutes les conditions aux limites.*

Remarque : Tant que ϵ est différent de zéro, le nombre de nœuds du treillis est fini, on peut donc toujours trouver une fonction d'interpolation de la déformée. Ce théorème énonce qu'une telle fonction est possible à la limite. Cependant, cela ne signifie pas que les modèles continus trouvés sont toujours valables, deux cas peuvent arriver où celui-ci pourra ne plus être valable : une couche limite très étendue, de grande profondeur et qui perturbe trop les conditions aux limites ; un mode sinusoïdal pur non amorti ($|z| = 1, z \neq 1$) qui modifie en tout point la déformée.

11.4 Conclusion

Il est classique de trouver des couches limites dans les milieux continus de plaques, de coques et de poutres. Pour les milieux discrets, une méthodologie pour l'obtention des couches limites a été proposée. Elle consiste à rechercher des modes exponentiels écrit en base z . Elle permet en théorie de trouver une solution analytique qui vérifie toutes les conditions aux limites. Très souvent, le modèle continu trouvé par l'homogénéisation est une bonne approximation dès que ϵ est suffisamment petit, mais il existe des treillis ayant des modes exponentiels non amortis qui ne peuvent pas être identifiés à des couches limites ($|z| = 1, z \neq 1$).

Contrairement à la mécanique des milieux continus, il existe en général des couches limites dans les treillis 3D. En effet, l'existence ou la non existence d'effets de bords est donnée par les caractéristiques d'une cellule. Pour une cellule de base complexe, nous aurons donc en trois dimensions des couches limites. De même pour les treillis plaques, coques et poutres (chapitre 6).

Chapitre 12

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale

Ce rapport de thèse a été divisé en trois parties de difficulté croissante. La première partie présente dans un premier temps une brève revue bibliographique, puis un exemple simple, le treillis poutre en \mathcal{N} est étudié dans trois configurations différentes :

- la statique en petites déformations et en petits déplacements. Le modèle continu trouvé pour notre treillis est une poutre d'Euler Bernoulli. Cette étude avait déjà été faite par Verna [65] et elle présente la méthode d'homogénéisation adaptée aux milieux discrets et désormais appelée méthode d'homogénéisation discrète [61] ;
- la statique en petites déformations et en grands déplacements. Il s'agit d'écrire l'équilibre du treillis sur la configuration déformée ainsi que d'obtenir à partir de ces équations un modèle continu de ce treillis. Cependant, deux milieux continus ont été identifiés : un modèle de câble et un modèle de poutre sur lequel une étude au flambage a été faite. Des applications numériques expriment la charge limite au flambage en fonction du nombre de cellules et de paramètres géométriques. Dès que l'hypothèse de la séparation d'échelle est vérifiée, les erreurs entre le modèle continu et le treillis deviennent minimales [36] ;
- la statique en incrémentale finie. En parallèle de l'étude en grands déplacements, on introduit la notion de petits pas de chargement donc de petits pas de déformation. Ces petits incréments de déplacement sont calés par rapports aux grands déplacements. quatre modèles sont trouvés : les deux modèles obtenus lors de l'étude en grands déplacements ainsi qu'un modèle tangent de câble et un modèle tangent de poutre. Ces deux modèles sont effectivement des modèles tangents, c'est à dire des modèles qui sont des dérivées premières de ceux identifiés en grands déplacements.

La deuxième partie est une première voie pour tenter de généraliser la méthode d'homogénéisation discrète à un treillis poutre périodique quelconque. Elle commence

donc à faire une modélisation matricielle du problème puis propose un algorithme d'obtention de solutions continues. Plutôt que de rechercher un milieu continu équivalent par des développements asymptotiques, on propose de rechercher des solutions continues des équations d'équilibre à l'aide de double séries entières. Cette démarche n'avait, semble-t-il, jamais été utilisée auparavant. Des solutions en partie courante sont d'abord trouvées puis les effets de bords sont caractérisés. Cela permet de déterminer la déformée exacte que subit le treillis poutre lors d'une charge répartie le long de celle-ci. Des comparaisons ont été faites entre les déplacements calculés par une MEF et notre méthode dénommée Statique des treillis Poutres par Identification des Modes (SPIM) ; il n'y a aucune différence. Une application de la transformée en z , qui peut être intégrée au sein de la SPIM, est ensuite donnée pour le cas des chargements ponctuels. Cette approche étant matricielle, elle se généralise facilement à n'importe quels types de poutres : les treillis poutres à nœuds articulés mais aussi à nœuds rigides, mais aussi à la combinaison de barres et d'éléments de plaques... Enfin, un retour à l'homogénéisation discrète est proposé par une équivalence entre les deux méthodes. Cette équivalence permet le calcul effectif du modèle continu équivalent.

Une dernière partie concerne la méthode d'homogénéisation discrète pour un treillis quasi-périodique quelconque à nœuds articulés. Elle traite donc des treillis poutres, mais aussi des treillis plaques, coques et treillis 3D. Cependant, les nœuds sont reliés entre eux par des barres qui ne sont soumises qu'à de la traction-compression et dont le comportement est toujours resté dans le domaine élastique linéaire. Quatre chapitres divisent cette partie. Le premier chapitre se préoccupe de l'élasticité linéaire en statique et en vibration libre. On obtient des modèles du premier gradient ou du second ordre qui permettent d'obtenir avec une bonne précision la déformée statique du treillis ainsi que les premières fréquences propres de vibrations [14, 61, 62]. Le chapitre suivant porte sur les grands déplacements, il s'agit de nouveau d'obtenir l'équilibre et d'avoir un modèle continu de la configuration déformée en fonction de la seule configuration initiale sous l'hypothèse des grands déplacements. Des modèles non-linéaires sont obtenus. Les résultats de la première partie sur le treillis poutre plan en \mathcal{N} sont par ailleurs retrouvés. Le troisième chapitre s'intéresse aux modèles incrémentaux. Une formulation cohérente du premier gradient est développée et un modèle du second ordre est proposé [14]. Étant basée sur des lois incrémentales tangentes, l'histoire du chargement n'est pas pris en compte et nous ne pouvons pas retrouver les modèles de la première partie. Enfin, un dernier chapitre se préoccupe des effets de bords qui avait jusque là été négligés. Ces effets de bords existent en nombre fini et agissent généralement, mais pas toujours, sur une faible profondeur. Ces couches limites n'ont donc pas tout à fait la même nature que celles existant dans les milieux continus, par exemple il existe des couches limites pour les treillis 3D. Une interprétation géométrique de ces couches limites a été proposée, elle repose sur la notion de variable lente et variable rapide.

Perspectives

À la suite de ce travail, bien que de nombreuses questions aient été résolues, des points sombres demeurent, des extensions peuvent être faites.

En premier lieu, les convergences des séries que nous utilisons n'ont pas été étudiées,

que ce soit pour la méthode utilisant des doubles séries entières ou que ce soit pour la méthode d'homogénéisation discrète se servant de développement asymptotique. Pour la méthode des doubles séries, des résultats sont énoncés mais pas toujours démontrés. En particulier, on ne sait pas pourquoi cela marche ! Pour la méthode d'homogénéisation, une condition est proposée pour découpler les modèles du second ordre en élasticité, elle pourrait être affinée, c'est à dire mieux formulée. Par ailleurs, le gouffre pourrait être identifié pour les poutres 3D, il correspond très certainement à des déformations nulles d'extension et de torsion. Des équivalences pourraient être écrites entre nos modèles continus de treillis poutres, treillis plaques et treillis coques et les milieux continus existant de poutres, plaques et coques ; un peu comme ce qui a été réalisé entre les treillis 3D et la mécanique des milieux continus classique. Enfin, une conjecture a été faite pour trouver un modèle du second ordre en incrémentale. Ce passage nécessite des éclaircissements pratiques.

Les premières extensions possibles concernent le calcul numérique. Pour la méthode des doubles séries, un programme général pour les poutres a été développé, cependant seule la transformée en z nécessite réellement pour l'instant des calculs formels. Il serait intéressant de programmer l'ensemble de la démarche à l'aide de calculs numériques pouvant par la suite être intégrés dans une MEF. Pour la méthode d'homogénéisation discrète, des éléments finis spéciaux doivent pouvoir être intégrés dans un logiciel éléments finis à trouver ou à programmer car le logiciel ANSYS que nous utilisons pour l'instant ne le permet pas aisément [5]. Par ailleurs, ce calcul explicite des éléments finis spéciaux doit être précisé pour les treillis quasi-périodiques. Alors, on pourra envisager la résolution numérique de problèmes incrémentaux. Les couches limites peuvent être automatiquement déterminées, lorsqu'elles ne sont pas négligeables, il faudra en tenir compte dans la méthode numérique. Comment ?

L'autre classe d'extensions concerne la modélisation théorique. Nous avons vu qu'il était possible d'établir des modèles incrémentaux simples dans la méthode d'homogénéisation discrète. Il serait intéressant de faire intervenir maintenant des grandes déformations, de la plasticité, de l'élasto-visco-plasticité... Par ailleurs, en vibration libre, seuls les premiers modes propres peuvent être obtenus pour l'instant. Pour les fréquences plus élevées, la méthode d'homogénéisation discrète donne dans les structures minces des résultats qui paraissent erronés [60]. Des travaux ont été faits sur les modes locaux, il serait intéressant de pouvoir les intégrer [19]. Dans un autre esprit, les milieux continus obtenus en élasticité linéaire sont soit du premier gradient, soit du second ordre. Quelles hypothèses faudrait-il faire pour obtenir des milieux de Cosserat ? Cette question intéresse les expérimentateurs qui recherchent des lois de comportement de plus en plus complexes. En effet, dans la pratique les matériaux sont utilisés dans une gamme de plus en plus large. Les milieux de Cosserat sont une voie possible. Enfin, nous nous sommes restreints à l'étude des treillis à barres articulées pour l'homogénéisation discrète. Cependant, grâce aux développements en doubles séries portant sur les treillis poutres quelconques, on sait qu'il existe un milieu continu équivalent pour d'autres types d'éléments, notamment les treillis à nœuds rigides. Qu'en est-il pour les treillis plaques, les nids d'abeilles ? La méthode d'homogénéisation discrète peut-elle être appliquée dans ces cas là ? Ce dernier thème fait l'objet d'un DEA au laboratoire cette année.

Bibliographie

- [1] Abrate S., *Continuum modeling of lattice structures*, Shock and vibration Digest, v17(1), p15-21, 1985,
- [2] Abrate S., *Continuum modeling of lattice structures for dynamic analysis*, Shock and vibration Digest, v20(10), p3-8, 1988
- [3] Abrate S., *Continuum modeling of lattice structures 3*, Shock and vibration Digest, v23(3), p15-20, 1991,
- [4] Andersen M.S., *Buckling of periodic lattice structures*, AIAA Journal, v19(6), p672-675, 1981,
- [5] ANSYS, *Logiciel d'éléments finis*, Swanson Analysis Systems Inc. (SASI),
- [6] Auriault J.L., *Heterogeneous medium. Is an equivalent macroscopic description possible?*, Int. J. Engng Sci., v29(7), p785-795, 1991,
- [7] Batoz J.L. et Dhatt G., *Modélisation des structures par éléments finis*, Tomes 1, 2 et 3, Hermès 1992,
- [8] Barkatou M.A., *Contribution à l'étude des équations différentielles et aux différences dans le champ complexe*, Thèse de 3^{ème} cycle à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 1989,
- [9] Bensoussan A., Lions J.L. et Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, North Holland, Amsterdam, 1978,
- [10] Brezis H., *Analyse fonctionnelle*, Masson, 1992,
- [11] Byskov E., *Applicability of an asymptotic expansion for elastic buckling problems with mode interaction*, AIAA Journal, v17(6), p630-633, 1979,
- [12] Caillerie D., *Thin Elastic and Periodic Plates*, Math. Meth. in Appl. Sci., v6, p159-191 1989,
- [13] Caillerie D., Trompette P. et Verna P., *Homogenization of periodic trusses*, Congrès IASS, Madrid, 1989,
- [14] Caillerie D. et Moreau G., *Homogénéisation discrète : application aux treillis en forme de coques et à l'élasticité*, Conférence J. Cartier, Lyon, décembre 1995,

- [15] Caillerie D. et Sanchez-Palencia E., *Elastic thin shells: asymptotic theory in the anisotropic and heterogeneous cases*, Mathematical Models in Applied Sciences, v5(4), p473-496, 1995,
- [16] Ciarlet P.G., *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, 1994,
- [17] Cioranescu D. et Saint Jean Paulin J., *Problèmes de Neumann et de Dirichlet dans des structures réticulées de faible épaisseur*, C. R. Acad. Sci., Paris, t.303, Série I, No1, p7-10, 1986,
- [18] Cioranescu D. et Saint Jean Paulin J., *Reinforced and honey comb structures*, Journal Math pures et Appliquées v65, p403-422, 1986,
- [19] El Mostafa Daya, *Vibration et stabilité des longues structures flexibles à forme répétitive*, Thèse de 3^{ème} cycle à l'Université de Metz, 1994,
- [20] Destuynder P., *Une théorie asymptotique des plaques minces en élasticité linéaire*, Recherche en mathématiques appliquées, Masson, 1986,
- [21] Dean D.L., ASCE M. et Tauber S., *Solutions for one-dimensional structural lattices*, Journal of the Engineering Mechanics Division, 1959,
- [22] Dow J.O., Su Z.W. et Feng C.C., *Equivalent continuum representation of structures composed of repeated elements*, AIAA Journal, v23(10), p1563-1569, 1981,
- [23] Dumontet H., *Homogénéisation et effets de bords dans les matériaux composites*, Thèse de 3^{ème} cycle à l'Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1990,
- [24] Duvaut G., *Mécanique des milieux continus*, Masson, 1990,
- [25] Elyada D. et Babcock C., *Buckling and non linear response of imperfect three-legged truss columns*, AIAA Journal, v25(2), p324-330, 1987,
- [26] François D., Pineau A. et Zaoui A., *Élasticité et plasticité*, Hermès, 1992,
- [27] Gleick J., *La théorie du chaos, vers une nouvelle science*, Champs, Flammarion, 1987,
- [28] Griso G., *Étude asymptotique de structures réticulées minces*, Thèse de 3^{ème} cycle à l'Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1995,
- [29] Jordan C., *Calculus of finite differences*, Chelsea publishing Company, New York, 1950,
- [30] Lemaitre J. et Chaboche J.L., *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, 1992,
- [31] MATHEMATICA, *Logiciel de calculs formels*, Wolfram S., *A system for doing mathematics by computer*, Wolfram Research Inc.,
- [32] McCallen D.B. et Romstad K.M., *A continuum model for the nonlinear analysis of beam-like lattice structures*, Computer & Structures, v29(2), p177-197, 1988,

- [33] McCallen D.B. et Romstad K.M., *A continuum model for lattice structures with geometric and material nonlinearities*, Computer & Structures, v37(5), p795-822, 1990,
- [34] Milne Thomson L.M., *The calculus of finite differences*, MacLillan and Co., Limited, London, 1933,
- [35] Moreau G. et Caillerie D., *Continuum modeling of lattice structures in large displacement*, Colloque structure réticulée, Aussois, 1994,
- [36] Moreau G. et Caillerie D., *Continuum modeling of lattice structures in large displacement framework*, Developpements in computational techniques for structural engineering, edited by Topping B.H.V., Civil-comp press, 1995,
- [37] Noor A.K. et Anderson C.M., *Analysis of beam-like lattice trusses*, Computer methods in applied mechanics and engineering, v20, p53-70, 1979,
- [38] Noor A.K. et Nemeth M.P., *Analysis of spatial beamlike lattices with rigid joints*, Computer methods in applied mechanics and engineering, v24, p35-39, 1980
- [39] Noor A.K., *Continuum modeling for repetitive lattice structures*, Appl. Mech. Rev., v41(7), p285-296, 1988
- [40] Nörlund N.E., *Sur la somme d'une fonction*, Mémorial des sciences mathématiques, Fascicule XXIV, Gauthiers Villars et Cie, Paris, 1927,
- [41] Nörlund N.E., *Leçon sur les équations aux différences finies*, Gauthiers Villars et Cie, Paris, 1929,
- [42] Nussbaumer H., *Informatique industrielles III, automates programmables, commande et réglage, capteurs*, Presses polytechniques romandes, 1987
- [43] Pshenichnov G.I., *A theory of latticed plates and shells*, World Scientific, 1993,
- [44] Quéré Y., *Physique des matériaux*, Ellipses, 1988,
- [45] Raviart P.A. et Thomas J.-M., *Introduction à l'analyse numérique des équations différentielles*, Masson, 1988,
- [46] Renton J.D., *Behavior of Howe, Pratt and Warren Trusses*, Journal of the Structural Division, ASCE, v95, p183-202, 1969,
- [47] Renton J.D., *General properties of space grids*, Int. J. of mech. Sci., v12, p801-810, 1970
- [48] Renton J.D., *The beam-like behavior of space trusses*, AIAA Journal, v22(2), p273-280, 1984,
- [49] Royer P., *Contribution de l'homogénéisation à l'étude de la filtration d'un gaz en milieu déformable à double porosité. Application à l'étude du système gaz-charbon*, Thèse de 3^{ème} cycle à l'Université Joseph Fourier, Grenoble, 1994,
- [50] Salençon J., *Mécanique des milieux continus*, Ellipses, Paris, 1988,

- [51] Sanchez-Hubert J. et Sanchez-Palencia E., *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation*, Masson, 1992,
- [52] Sanchez-Palencia E., *Non-homogeneous media and vibration theory*, Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, N.Y., 1980,
- [53] Sanchez-Palencia E., *Statique et dynamique des coques minces. I. Cas de flexion pure non inhibée*, C. R. Acad. Sci., Paris, t.309, Série I, p411-417, 1989,
- [54] Sanchez-Palencia E., *Statique et dynamique des coques minces. II. Cas de flexion pure inhibée – Approximation membranaire*, C. R. Acad. Sci., Paris, t.303, Série I, p531-537, 1989,
- [55] Sanchez-Palencia E., *Asymptotic and spectral properties of a class of singular stiff problems*, J. Math. Pures Appl., v72, p379-406, 1992,
- [56] Sun C.T. et Juang J.N., *Modeling global structural damping in trusses using simple continuum models*, AIAA Journal, v24(1), 1986,
- [57] Sun C.T. et Liebbe S.W., *Global-Local approach to solving Vibration of large truss structures*, AIAA Journal, v28(2), 1990,
- [58] Timoshenko S. et Woinowski-Krieger S., *Théorie des plaques et coques*, Béranger, Paris, 1961,
- [59] Timoshenko S., *Résistance des matériaux*, Tomes 1 et 2, Dunod, Paris, 1968,
- [60] Tollenaere H., *Modèles bidimensionnels de tissés. Homogénéisation des treillis en vibrations libres*, Thèse de 3^{ème} cycle à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 1994,
- [61] Tollenaere H. et Caillerie D., *Continuous modelling of lattice structures by homogenization*, Developpements in computational techniques for structural engineering, edited by Topping B.H.V., Civil-comp press, 1995,
- [62] Tollenaere H., Caillerie D. et Verna P., *Discrete homogeneisation, application to continuum modeling of quasi-repetitive lattice structures*, Computer Method in applied Mechanics and Engineering, à paraître,
- [63] Usik L., *Dynamic continuum modeling of beam-like space structures using finite-element matrices*, AIAA Journal, v28(4), p725-731 1990,
- [64] Verna P. et Caillerie D., *Homogénéisation d'un treillis plan hyperstatique intérieurement. Formulation synthétique et prise en compte des couches limites*, Congrès StuCOME, Madrid, 1990,
- [65] Verna P., *Modélisation continue des structures discrètes par homogénéisation : Cas des treillis*, Thèse de 3^{ème} cycle à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 1991,
- [66] Vierendeel A., *Stabilité des constructions. Tome 1. Résistance des matériaux*, Dunod, 1906,

