



**HAL**  
open science

# Les plus grands facteurs premiers d'entiers consécutifs

Zhiwei Wang

► **To cite this version:**

Zhiwei Wang. Les plus grands facteurs premiers d'entiers consécutifs. Théorie des nombres [math.NT].  
Université de Lorraine, 2018. Français. NNT : 2018LORR0022 . tel-01772251

**HAL Id: tel-01772251**

**<https://theses.hal.science/tel-01772251v1>**

Submitted on 20 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

---

# THÈSE

*présentée pour l'obtention du grade de*

**Docteur de l'Université de Lorraine**

**Spécialité : Mathématiques pures**

*par*

**Zhiwei WANG**

---

## Les plus grands facteurs premiers d'entiers consécutifs

---

Soutenue publiquement le 23 mars 2018 devant le jury composé de

<b>Régis DE LA BRETÈCHE</b>	<i>Examineur</i>	Professeur, Université de Paris VII
<b>Cécile DARTYGE</b>	<i>Co-directrice de thèse</i>	Maître de conférences, Université de Lorraine
<b>Étienne FOUVRY</b>	<i>Rapporteur</i>	Professeur, Université de Paris XI
<b>Guangshi LÜ</b>	<i>Examineur</i>	Professeur, Université de Shandong
<b>Joël RIVAT</b>	<i>Rapporteur</i>	Professeur, Université d'Aix-Marseille
<b>Anne DE ROTON</b>	<i>Examineur</i>	Maître de conférences, Université de Lorraine
<b>Gérald TENENBAUM</b>	<i>Président</i>	Professeur, Université de Lorraine
<b>Jie WU</b>	<i>Co-directeur de thèse</i>	Chargé de recherche CNRS, Université de Paris XII

au vu des rapports de

**Étienne FOUVRY** Professeur, Université de Paris XI  
**Joël RIVAT** Professeur, Université d'Aix-Marseille



# *Remerciements*

Le temps - tant attendu - d'avoir une pensée pour chacun de ceux qui m'ont accompagné au cours de la réalisation de cette thèse arrive au moment de mettre le point final à ce manuscrit.

Arrivé à Nancy, France il y a trois ans et demi, le temps passe tellement vite. Je me souviens encore fort bien la première fois où je suis arrivé en France. Je partis de ma maison, Xisuogou, un beau village, et puis je passai en bus la ville Zhucheng où habitent mes parents et la ville Jinan où se trouve l'Université de Shandong. J'y ai vécu de 2008 à 2014, et y ai obtenu mes licence et master en mathématiques. J'arrivai ensuite à Pékin, la capitale de la Chine, pris l'avion de Pékin à Strasbourg avec une escale à Amsterdam. C'était la première fois que je prenais l'avion. Dans l'aéroport d'Entzheim de Strasbourg, je suis perdu et je ne sais pas comment arriver à Nancy. Heureusement, je rencontrai un couple avec leur bébé et ils m'aidèrent beaucoup. J'arrivai finalement à Nancy le 17 Septembre 2014. Je suis tombé amoureux de cette ville charmante et ce très beau pays. Les français sont très gentils, chaleureux et serviables. Ces trois années et demie écoulées m'auront permis de construire de vraies relations, fondées sur des bases sincères et dépassant le seul cadre de la recherche scientifique. Je tiens à remercier chaleureusement toutes les personnes qui m'ont apporté leurs aides, leurs soutiens, et leurs encouragements.

Ma plus grande gratitude va tout d'abord à mes directeurs de thèse Cécile Dartyge et Jie Wu, pour m'avoir permis de découvrir la théorie analytique des nombres, puis pour m'avoir initié à la recherche mathématique avec un enthousiasme contagieux. C'était un réel privilège d'avoir pu bénéficier de leurs innombrables conseils toujours fort avisés, ainsi que de leur précieux soutien. Leur disponibilité, leurs encouragements et surtout leur verve mathématique, ont permis la réalisation de ce projet dans les meilleures conditions. De plus, ils sont très gentils. Même si je fais des fautes, ils ne me critiquent jamais. Je suis très heureux d'être leur doctorant.

Je remercie très vivement Étienne Fouvry et Joël Rivat d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse ainsi que pour les remarques et suggestions qu'ils ont proposées. Je remercie également Régis de la Bretèche, Guangshi Lü (mon directeur de master), Anne de Roton et Gérard Tenenbaum pour m'avoir fait l'honneur de s'intéresser à mes travaux de recherche et de prendre part au jury de ma thèse.

Il me tient également à coeur de remercier tout le personnel administratif (mention spéciale à Secrétaire Paola Schneider) de l'IECl, ainsi que les théoriciens des nombres de Nancy ou de Chine ou d'autres villes : Thomas Stoll (qui peut parler chinois et m'aide beaucoup), Manfred Madritsch, Armand Lachand, Gautier Hanna, David Feutrie (qui m'aide beaucoup pour le français), Johann Verwee, Florian Lietard, Robin Riblet, Pierre-Adrien Tahay, Jianya Liu, Xiumin Ren, Wenguang Zhai (qui a proposé un conseil important pour mon premier article), Hourong Qin, Guanghua Ji, Zhao Xu, Xuanxuan Xiao (qui m'a beaucoup aidé à

Nancy avec Hengcai Tang 2014-2015), Hengcai Tang, Qinglin Tang , Feng Zhao, Ping Xi, Xiaodong Lü (avec qui je travaille maintenant sur la suite de ma thèse), Xin Tong, Ye Lu, Bin Chen (qui cuisine très bien), Bingrong Huang (qui a indiqué un petit défaut dans ma thèse), Xiaoguang He, Olivier Ramaré (qui a proposé avec Joël Rivat lors de ma visite à Marseille un conseil pour la suite de ma thèse), Sary Drappeau (qui m'a invité à Marseille pour un exposé), Élie Mosaki et Xavier Roblot qui m'ont invité à Lyon pour un exposé et Joni Teräväinen, pour leur aide et leur soutien.

Je suis partiellement soutenu par une bourse de “China Scholarship Council”, et je voudrais remercier aussi “China Scholarship Council” pour m'avoir offert cette chance très importante.

Enfin, un immense remerciement à mes parents et toute ma famille, pour avoir pu compter sur leur précieux soutien, moral et affectif, en toute circonstance. Et je tiens à saluer tous mes amis, qui n'ont eu de cesse de colorier d'amitié toutes ces années d'étude.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Les plus grands facteurs premiers d'entiers consécutifs dans les petits intervalles</b>	<b>13</b>
1.1 Énoncé des problèmes et des résultats . . . . .	13
1.2 Lemmes . . . . .	17
1.2.1 Borne supérieure du crible linéaire . . . . .	17
1.2.2 Théorème de type Bombieri-Vinogradov dans les petits intervalles . .	18
1.2.3 Nombre d'entiers friables dans les petits intervalles . . . . .	19
1.3 Démonstration des Théorèmes 1.1 et 1.2 . . . . .	19
<b>2 Les plus grands facteurs premiers inférieurs à <math>y</math> de deux entiers consécutifs</b>	<b>25</b>
2.1 Énoncé des problèmes et des résultats . . . . .	25
2.2 Lemmes . . . . .	27
2.2.1 Borne inférieure du crible linéaire . . . . .	27
2.2.2 Majoration du crible linéaire avec une fonction bien factorisable . . .	28
2.2.3 Entiers friables . . . . .	28
2.2.4 Entiers sans facteur premier dans un intervalle donné . . . . .	29
2.3 Théorème de type Bombieri-Vinogradov pour $S(x; y, z)$ . . . . .	30
2.4 Théorème de type Bombieri-Vinogradov avec une fonction bien factorisable .	32
2.5 Démonstration du Théorème 2.1 avec $0 < \alpha \leq 1/2$ . . . . .	36
2.5.1 Cas où $\alpha \in ]1/6, 1/2]$ . . . . .	36
2.5.2 Cas où $\alpha \in ]0, 1/6]$ . . . . .	38
2.6 Démonstration du Théorème 2.1 avec $1/2 < \alpha \leq 1$ . . . . .	41
2.6.1 Point de départ . . . . .	41
2.6.2 Estimation de la somme $\mathcal{S}_A$ . . . . .	41
2.6.3 Estimation de la somme $\mathcal{S}_B$ . . . . .	41
2.6.4 Estimation de la somme $\mathcal{S}_C$ . . . . .	46
2.7 Démonstration du Corollaire 2.1 . . . . .	48
<b>3 Les plus grands facteurs premiers d'au moins trois entiers consécutifs</b>	<b>51</b>
3.1 Énoncé des problèmes et des résultats . . . . .	51
3.2 Lemmes . . . . .	55
3.2.1 Entiers friables . . . . .	55
3.2.2 Théorèmes de type Bombieri-Vinogradov . . . . .	56

3.3	Démonstration du Théorème 3.1 . . . . .	56
3.3.1	Cas des $n$ tels que $P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1)$ . . . . .	56
3.3.2	Cas des $n$ tels que $P^+(n-1) < P^+(n) > P^+(n+1)$ . . . . .	59
3.4	Démonstrations des Théorèmes 3.2 et 3.3 . . . . .	62
3.4.1	Théorème 3.2: cas des $n$ tels que $P^+(n+j_0) = \min_{1 \leq j \leq k-1} P^+(n+j)$ . . .	62
3.4.2	Théorème 3.3: cas de $n$ tels que $P^+(n+j_0) = \max_{1 \leq j \leq k-1} P^+(n+j)$ . . .	64
3.5	Applications du Théorème 3.1: Démonstrations des Corollaires 3.1 et 3.2 . .	65
3.5.1	Démonstration du Corollaire 3.1 . . . . .	65
3.5.2	Démonstration du Corollaire 3.2 . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Les plus grands facteurs premiers d'entiers consécutifs voisins d'un entier criblé</b>	<b>69</b>
4.1	Énoncé des problèmes et des résultats . . . . .	69
4.2	Lemmes . . . . .	72
4.2.1	Majoration du crible linéaire sans fonction bien factorisable . . . . .	72
4.2.2	Entiers sans petit ni grand facteur premier . . . . .	73
4.2.3	Valeurs moyennes criblées de certaines fonctions arithmétiques . . . .	74
4.3	Nombre de premiers translatés friables . . . . .	74
4.4	Un théorème de type Bombieri-Vinogradov . . . . .	79
4.5	Démonstration du Théorème 4.1 . . . . .	84
4.6	Démonstration des Théorèmes 4.2 et 4.3 . . . . .	86
	<b>Bibliographie</b>	<b>92</b>

# Introduction

Les entiers naturels ont deux structures fondamentales : additive et multiplicative. Les nombres premiers sont à la base de la structure multiplicative. Leur répartition est une question centrale en théorie des nombres et joue un rôle clé dans divers problèmes arithmétiques. Comme un dual des nombres premiers pour la structure multiplicative, les entiers *friables* sont ceux dont tous les facteurs premiers sont petits. Ils jouent également un rôle important en théorie analytique et probabiliste des nombres. Voici deux exemples d'illustration :

- Le problème de Waring consiste à trouver pour chaque entier  $k \geq 2$ , le plus petit entier  $s$  tel que tout entier naturel s'écrive comme la somme de  $s$  puissances  $k$  ièmes. Vaughan et Wooley [56, 57, 58, 59] ont obtenu dans les années quatre-vingt-dix des avancées majeures sur ce problème. Une partie cruciale de leurs travaux porte sur l'estimation du nombre de solutions de l'équation

$$x_1^k + x_2^k + \dots + x_s^k = y_1^k + y_2^k + \dots + y_s^k$$

avec  $x_i, y_i \in \mathcal{A}(P, R)$ , où  $\mathcal{A}(P, R)$  est défini comme l'ensemble des entiers friables n'excédant pas  $P$  :

$$\mathcal{A}(P, R) = \{n \leq R : p \text{ premier, } p \mid n \Rightarrow p \leq P\}.$$

- La version friable du crible GPY de Motohashi-Pintz [37] et le théorème de type Bombieri-Vinogradov avec des modules friables de Zhang [67] sont deux outils cruciaux du célèbre article de Zhang [67] concernant les écarts bornés entre nombres premiers.

Une présentation excellente sur la théorie des entiers friables peut être trouvée dans les synthèses de Norton [39], de Hildebrand-Tenenbaum [29], de Granville [26] ou de Dartyge [7]. En général, les propriétés multiplicatives d'un entier et celles de sa perturbation additive sont indépendantes. Les nombres premiers de Fermat et les nombres premiers jumeaux sont deux exemples typiques. Désignons par  $P^+(n)$  le plus grand facteur premier d'un entier générique  $n > 1$  avec la convention que  $P^+(1) = 1$ . De Koninck et Doyon [8] ont formulé, dans le cadre de leur article sur la distance entre les entiers friables, la conjecture suivante :

**Hypothèse (A).** Soit  $k \geq 2$  un entier fixé. Alors pour toute permutation  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  de  $\{0, 1, \dots, k-1\}$ , on a

$$\text{Prob}[P^+(n + a_1) < P^+(n + a_2) < \dots < P^+(n + a_k)] = \frac{1}{k!},$$

*c'est-à-dire,*

$$\frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n+a_1) < P^+(n+a_2) < \dots < P^+(n+a_k)}} 1 \rightarrow \frac{1}{k!} \quad (0.0.1)$$

*quand*  $x \rightarrow \infty$ .

Sans doute, une telle conjecture est très difficile à démontrer. Même dans le cas le plus simple, i.e.  $k = 2$ , cette conjecture reste encore ouverte. Selon Erdős [14] (voir aussi [52]), cette dernière conjecture est un “unconventional problems in number theory”. En effet, Erdős a mentionné ce problème à plusieurs occasions, par exemple dans [14] il écrit :

*Finally I state an old problem of mine which is probably very difficult and which seems to be unattackable by the methods of probabilistic number theory : denote by  $P(n)$  the greatest prime factor of  $n$ . Is it true that the density of integers  $n$  satisfying  $P(n+1) > P(n)$  is  $\frac{1}{2}$  ?*

En 2013, Tenenbaum reprend ce problème dans son article [52] :

*I conclude this survey of posterity and descendants of Erdős' paper [24] by quoting a problem that was for him a constant concern even though he thought it might be intractable by any technique at our disposal. Here again, I slightly alter some notations and correct a confusion.*

*« Finally I state an old problem of mine which is probably very difficult and which seems to be unattackable by the methods of probabilistic number theory... »*

*Let  $E := \{n > 1 : P^+(n) > P^+(n+1)\}$ . The conjecture that  $E$  has asymptotic density  $\frac{1}{2}$  stems for the general hypothesis that  $n$  and  $n+1$  should be multiplicatively independent. It lies in the same class of problems than the famous abc-conjecture.*

Dans cette thèse, nous étudions quatre problèmes autour de la conjecture (0.0.1) :

1. Les plus grands facteurs premiers de deux entiers consécutifs dans les petits intervalles
2. Les plus grands facteurs premiers inférieurs à  $y$  de deux entiers consécutifs
3. Les plus grands facteurs premiers de trois entiers consécutifs
4. Les plus grands facteurs premiers d'entiers consécutifs voisins d'un entier criblé

Cette thèse se compose de quatre chapitres dans lesquelles nous traiterons ces quatre questions, respectivement. Pour détecter la condition

$$P^+(n+a_1) < P^+(n+a_2) < \dots < P^+(n+a_k),$$

nous introduisons les poids

$$\omega(n; y, z) := \sum_{\substack{z < p \leq y \\ p|n}} 1 \quad (0.0.2)$$

pour des valeurs convenables de  $z$  et  $y$  et les combinons avec le principe d'inclusion-exclusion et/ou le crible linéaire selon les circonstances. Ainsi nous devons établir quelques nouveaux théorèmes de type Bombieri-Vinogradov pour contrôler les termes d'erreur rencontrés quand nous utilisons des cribles.

Nous présentons maintenant les résultats principaux et les idées-clés de chaque chapitre.

## 1. Les plus grands facteurs premiers de deux entiers consécutifs dans les petits intervalles

En 1978, Erdős et Pomerance [15] conjecturent que les plus grands facteurs premiers des entiers consécutifs  $n$  et  $n + 1$  sont indépendants. Cette conjecture est très difficile à démontrer. Même l'assertion moins difficile que la proportion asymptotique d'entiers  $n$  tels que  $P^+(n) < P^+(n + 1)$  est  $\frac{1}{2}$  (le cas de l'Hypothèse (A) avec  $k = 2$ ), i.e.

$$|\{n \leq x : P^+(n) < P^+(n + 1)\}| \sim \frac{1}{2}x, \quad (0.0.3)$$

reste encore ouverte. Ce problème remonte en fait à la correspondance dans les années trente entre Erdős et Turán (voir [42] ou [50]).

Dans ce même article [15], Erdős et Pomerance démontrent qu'il existe une proportion positive d'entiers  $n$  avec  $P^+(n) < P^+(n + 1)$ . Plus précisément, ils obtiennent

$$|\{n \leq x : P^+(n) < P^+(n + 1)\}| > 0,0099x \quad (x \rightarrow \infty).$$

Dans l'article [10], La Bretèche, Pomerance et Tenenbaum étudient le produit de fraction d'entiers consécutifs et améliorent la constante 0,0099 en 0,05544. De plus, il indiquent que la constante 0,05544 peut être remplacée par 0,05866, grâce à une observation de Fouvry.

Au vu de la conjecture (0.0.3) et des travaux concernant les plus grands facteurs premiers de deux entiers consécutifs mentionnés ci-dessus, il est naturel de conjecturer qu'il existe une proportion positive d'entiers  $n$  dans un petit intervalle tels que  $P^+(n) < P^+(n + 1)$ .

Dans le Chapitre 1, nous allons montrer le résultat suivant.

**Théorème (A).** (i) *Soient*

$$\frac{3}{5} < \theta \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 < c < \min \left\{ \frac{5\theta-3}{2}, \theta - \frac{1}{2} \right\}. \quad (0.0.4)$$

*Alors pour  $x \rightarrow \infty$  et  $y = x^\theta$ , on a*

$$|\{x < n \leq x + y : P^+(n) < P^+(n + 1)\}| \geq \{g(\theta; c) + o_{\theta,c}(1)\}y,$$

*où*

$$g(\theta; c) := \log \frac{1}{1-c} - 2 \int_0^c \frac{\log(1-v)^{-1}}{\theta - \frac{1}{2} - v} dv.$$

(ii) *Pour  $\frac{3}{5} < \theta \leq 1$ , il existe une constante unique  $c(\theta) \in (0, \min \{ \frac{5\theta-3}{2}, \theta - \frac{1}{2} \})$  telle que*

$$g(\theta) := \max_{0 < c < \min \{ \frac{5\theta-3}{2}, \theta - \frac{1}{2} \}} g(\theta; c) = g(\theta; c(\theta)) > 0.$$

**Remarque 0.1.** On remarque que  $g(1) > g(1; 0,1778) > 0,1063$ . En prenant  $y = x$  dans le Théorème (A), on obtient donc la minoration suivante

$$|\{n \leq x : P^+(n) < P^+(n + 1)\}| > 0,1063x \quad (0.0.5)$$

pour  $x \rightarrow \infty$ . C'est une amélioration de la constante 0,05866 ci-dessus.

Un des outils principaux de la démonstration du Théorème (A) est le théorème de [65, Théorème 2] sur la répartition en moyenne dans les progressions arithmétiques de suites obtenues par la convolution de l'indicatrice des nombres premiers dans un petit intervalle avec une fonction arithmétique de nature assez générale.

En vue de démontrer le Théorème (A), on va suivre l'inégalité d'inclusion-exclusion suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x < n \leq x+y \\ P^+(n) < P^+(n+1)}} 1 &\geq \sum_{\substack{x < n \leq x+y \\ P^+(n+1) > n^{1-c}}} 1 - \sum_{\substack{x < n \leq x+y \\ P^+(n) > P^+(n+1) > n^{1-c}}} 1 \\ &=: \mathcal{S}_A - \mathcal{S}_B \end{aligned} \quad (0.0.6)$$

où  $y = x^\theta$  et  $c$  est un paramètre vérifiant  $0 < c \leq \frac{1}{2}$ . La somme  $\mathcal{S}_A$  est estimée par le résultat d'Hildebrand [28] sur le nombre d'entiers friables dans un petit intervalle. Pour majorer  $\mathcal{S}_B$ , on va utiliser le crible de Rosser-Iwaniec.

## 2. Les plus grands facteurs premiers $\leq y$ de deux entiers consécutifs

Dans le Chapitre 1, nous avons vu que notre minoration (0.0.5) améliore considérablement les constantes de La Bretèche-Pomerance-Tenenbaum et de Fouvry. Mais elle est encore très loin de la conjecture (0.0.1) avec  $k = 2$ , c'est-à-dire,

$$|\{n \leq x : P^+(n) < P^+(n+1)\}| \sim \frac{1}{2}x \quad (0.0.7)$$

pour  $x \rightarrow \infty$ . Cette conjecture semble inattaquable, même sous des hypothèses raisonnables.

Rivat [46] a proposé une autre voie pour approcher (0.0.7). Pour  $2 \leq y \leq x$ , notons  $P_y^+(n)$ , le plus grand facteur premier de  $n$  inférieur à  $y$ ,  $P_y^+(n) = \max\{p \mid n : p \leq y\}$ , avec la convention  $P_y^+(n) = 1$  si le plus petit facteur premier de  $n$  est strictement supérieur à  $y$ . Pour quels  $y = y(x)$ , avons-nous la formule asymptotique

$$|\{n \leq x : P_y^+(n) < P_y^+(n+1)\}| \sim \frac{1}{2}x? \quad (0.0.8)$$

Considérons la fonction

$$f_y(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } P_y^+(n+1) > P_y^+(n), \\ -1 & \text{si } P_y^+(n+1) < P_y^+(n). \end{cases}$$

À l'aide du lemme fondamental du crible linéaire, Rivat a montré que pour  $(a, b(b+1)) = 1$  la majoration suivante

$$\left| \sum_{1 \leq an+b \leq x} f_y(an+b) \right| \ll_{a,b} x \exp\left(-\frac{\log x}{10 \log y}\right)$$

a lieu uniformément dans le domaine

$$x \geq 3 \quad \text{et} \quad 3 \leq y \leq \exp\left(\frac{\log x}{100 \log_2 x}\right). \quad (0.0.9)$$

Cela implique que la formule asymptotique (0.0.8) est vraie uniformément dans le domaine (0.0.9). Puisque (0.0.7) est équivalente à (0.0.8) avec  $y = x$ , il serait intéressant d'étendre le domaine de  $y$  dans (0.0.9) ci-dessus à

$$y = x^\alpha, \quad \text{où } 0 < \alpha \leq 1 \text{ est une constante.} \quad (0.0.10)$$

Le Chapitre 2 sera consacré à cette question. Puisque le cas où  $\alpha = 1$  correspond à la conjecture (0.0.7), il semble difficile de montrer (0.0.8) pour des bornes vérifiant (0.0.10). Notre but est de fournir une bonne minoration du membre de gauche de (0.0.8) pour ces  $y = x^\alpha$ .

**Théorème (B).** *Soit  $y = x^\alpha$  avec  $\alpha \in ]0, 1]$ . Il existe une constante strictement positive  $C(\alpha) > 0$  telle que*

$$|\{n \leq x : P_y^+(n) < P_y^+(n+1)\}| \geq \{C(\alpha) + o(1)\}x \quad (0.0.11)$$

pour  $x \rightarrow \infty$ .

Afin d'obtenir une bonne  $C(\alpha)$ , nous proposons plusieurs méthodes pour détecter la condition  $P_y^+(n) < P_y^+(n+1)$  selon les tailles de  $\alpha$ . Notre démonstration fournit des expressions explicites de  $C(\alpha)$  admissibles. Voici trois valeurs de  $C(\alpha)$  admissibles :

$$C\left(\frac{1}{3}\right) > 0,0506, \quad C\left(\frac{1}{2}\right) > 0,0914, \quad C\left(\frac{2}{3}\right) > 0,0948.$$

Les cas où  $\alpha = 0$  et  $\alpha = 1$  sont particulièrement intéressants. Dans le premier cas, nous pouvons démontrer que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} C(\alpha) \geq \frac{1}{4}.$$

Quand  $\alpha = 1$ , le Théorème (B) fournit une amélioration de la proportion 0,1063 obtenue dans le Théorème (A). Nous montrons ainsi que  $P^+(n) < P^+(n+1)$  (ou  $P^+(n) > P^+(n+1)$ ) a lieu pour au moins 2 entiers sur 15 en moyenne. Plus précisément, nous avons le corollaire suivant.

**Corollaire (A).** *Pour  $x \rightarrow \infty$ , on a*

$$|\{n \leq x : P^+(n) < P^+(n+1)\}| > 0,1356x. \quad (0.0.12)$$

Signalons que la constante 0,1356 peut être remplacée par 0,411 sous l'hypothèse d'Elliott-Halberstam et l'hypothèse d'Elliott-Halberstam pour des entiers friables (avec " $q \leq x^{1-\varepsilon}$ " à la place de " $q \leq x^{1/2}/(\log x)^B$ " dans (2.3.4) du Lemme 2.6 dans le Chapitre 2, Page 31).

En vue de démontrer le Théorème (B), on va découper l'intervalle  $\alpha \in ]0, 1]$  en trois sous-intervalles :  $\alpha \in ]0, \frac{1}{6}]$ ,  $\alpha \in ]\frac{1}{6}, \frac{1}{2}]$  et  $\alpha \in ]\frac{1}{2}, 1]$ .

Pour  $y = x^\alpha$  avec  $\alpha \in ]\frac{1}{6}, \frac{1}{2}]$ , on va introduire un système de poids bien adapté (voir (0.0.2) ci-dessus), qui est un outil principal pour la démonstration. Cependant, ce système de poids est très perfectible pour des petites valeurs de  $\alpha$ . En effet, la proportion  $C(\alpha)$  dans le Théorème (B) tend vers 0 lorsque  $\alpha$  tend vers 0 en utilisant ce système de poids. Ainsi, pour  $\alpha \in ]0, \frac{1}{6}]$ , on va corriger cette méthode par un processus d'itération. De plus, pour contrôler le terme d'erreur, nous allons établir la Proposition (A) — un nouveau théorème de type Bombieri-Vinogradov pour les entiers sans facteur premier dans un intervalle donné.

**Proposition (A).** *Pour tout  $A > 0$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $B = B(A) > 0$  telle que l'on ait*

$$\sum_{q \leq x^{1/2}/(\log x)^B} \max_{t \leq x} \max_{(a,q)=1} \left| \sum_{\substack{n \in S(t; y, z) \\ n \equiv a \pmod{q}}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \in S(t; y, z) \\ (n, q)=1}} 1 \right| \ll_{A, \varepsilon} \frac{x}{(\log x)^A}$$

uniformément pour

$$2 \leq z \leq y \leq x \quad \text{et} \quad \exp\{(\log x)^{2/5+\varepsilon}\} \leq y \leq x,$$

où  $\varphi(q)$  est la fonction d'Euler et

$$S(x; y, z) := \{n \leq x : (n, \prod_{z < p \leq y} p) = 1\}.$$

Pour  $y = x^\alpha$  avec  $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ , on découpe la somme en trois sommes à l'aide du principe d'inclusion-exclusion similaire à (0.0.6) :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ P_y^+(n) < P_y^+(n+1)}} 1 &= \sum_{\substack{n \leq x \\ y \geq P^+(n+1) > x^{1-c}}} 1 - \sum_{\substack{n \leq x \\ y \geq P^+(n) > P^+(n+1) > x^{1-c}}} 1 + \sum_{\substack{n \leq x \\ P_y^+(n) < P_y^+(n+1) \leq x^{1-c}}} 1 \\ &=: \mathcal{S}_A - \mathcal{S}_B + \mathcal{S}_C. \end{aligned} \quad (0.0.13)$$

où  $c$  est un paramètre vérifiant  $1 - \alpha \leq c \leq \frac{1}{2}$ . Cependant, une différence entre (0.0.6) et (0.0.13) est que la troisième somme  $\mathcal{S}_C$  dans (0.0.13) est minorée trivialement par 0 dans la somme (0.0.6).

La somme  $\mathcal{S}_A$  est estimée avec le résultat d'Hildebrand sur le nombre des entiers friables. Pour majorer  $\mathcal{S}_B$ , on utilise le crible linéaire de Rosser-Iwaniec. En vue d'estimer le terme d'erreur du crible, on a besoin de la Proposition (B) ci-dessous — un théorème de type Bombieri-Vinogradov avec une fonction bien factorisable.<sup>1</sup>

**Proposition (B).** *Soient  $a \in \mathbb{Z}^*$ ,  $A > 0$  et  $\varepsilon > 0$ . Alors pour toute fonction bien factorisable  $\lambda(q)$  de niveau  $Q$ , la majoration suivante*

$$\sum_{(a,q)=1} \lambda(q) \sum_{\substack{L_1 \leq \ell \leq L_2 \\ (\ell, q)=1}} \left( \pi(x; \ell, a, q) - \frac{\text{li}(x/\ell)}{\varphi(q)} \right) \ll_{a, A, \varepsilon} \frac{x}{(\log x)^A}$$

a lieu pour

$$Q = x^{A/7-\varepsilon}, \quad 1 \leq L_1 \leq L_2 \leq x^{1-\varepsilon}.$$

La constante implicite dépend au plus de  $a$ ,  $A$  et  $\varepsilon$ . La fonction  $\pi(x; \ell, a, q)$  est définie comme la somme de la convolution suivante

$$\pi(x; \ell, a, q) := \sum_{\substack{\ell p \leq x \\ \ell p \equiv a \pmod{q}}} 1$$

pour  $q \in \mathbb{N}^*$  et  $(a, q) = 1$ .

---

1. On renvoie le lecteur au section 2.4 du Chapitre 2 pour une définition précise d'une fonction bien factorisable.

La Proposition (B) est une légère généralisation du résultat de Bombieri, Friedlander et Iwaniec [4] avec  $L_1 = L_2 = 1$ .

Finalement, pour le Corollaire (B), on améliore la constante 0,1063 dans le Théorème (A) par 0,1356. On a pu prendre ici le niveau  $\nu(c) = \frac{4}{7}$  avec  $c \leq \frac{2}{7} - \varepsilon$  dans la somme  $\mathcal{S}_B$  de (0.0.13) et on peut donner une minoration de  $\mathcal{S}_C$ , tandis que dans le Théorème (A) le niveau était  $\frac{1}{2}$  et le terme  $\mathcal{S}_C$  minoré par 0. Ces deux changements sont à l'origine de l'amélioration du résultat du Théorème (A).

Pour minorer la troisième somme  $\mathcal{S}_C$ , on utilise encore le système de poids bien adapté que l'on a utilisé pour  $\alpha \in ]\frac{1}{6}, \frac{1}{2}]$ , en combinant avec la Proposition (A) ci-dessus.

### 3. Les plus grands facteurs premiers de trois entiers consécutifs

Dans les deux chapitres précédents, nous avons approché la conjecture (0.0.1) avec  $k = 2$  de deux manières différentes. Dans ce chapitre, nous allons traiter le cas où  $k = 3$ , c'est-à-dire, les plus grands facteurs premiers de trois entiers consécutifs.

#### A. Les plus grands facteurs premiers de trois entiers consécutifs

En 1978, Erdős et Pomerance observent dans leur article [15] que les deux configurations

$$P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1) \quad (0.0.14)$$

ou

$$P^+(n-1) < P^+(n) > P^+(n+1) \quad (0.0.15)$$

ont lieu pour une infinité d'entiers  $n$ , et conjecturent qu'elles se produisent pour une proportion positive d'entiers. Par ailleurs, ils démontrent l'existence d'une infinité d'entiers  $n$  satisfaisant

$$P^+(n-1) < P^+(n) < P^+(n+1)$$

en considérant des entiers  $n$  de la forme  $n = p^{2\nu_0}$  avec  $\nu_0$  judicieusement choisi. Finalement, ils remarquent que « On the other hand we cannot find infinitely many  $n$  for which

$$P^+(n-1) > P^+(n) > P^+(n+1),$$

but perhaps we overlook a simple proof. » En 2001, Balog [1] démontre leur conjecture en établissant la minoration suivante :

$$|\{n \leq x : P^+(n-1) > P^+(n) > P^+(n+1)\}| \gg x^{1/2}$$

pour  $x \rightarrow \infty$ .

Dans le Chapitre 3, nous montrons tout d'abord qu'il existe une proportion positive d'entiers  $n$  tels que (0.0.14) est vraie. Nous montrons un tel résultat pour ceux vérifiant (0.0.15).

**Théorème (C).** *Pour  $x \rightarrow \infty$ , on a*

$$|\{n \leq x : P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1)\}| > 1,063 \times 10^{-7}x, \quad (0.0.16)$$

et

$$|\{n \leq x : P^+(n-1) < P^+(n) > P^+(n+1)\}| > 8,84 \times 10^{-4}x. \quad (0.0.17)$$

L'idée de la preuve est de considérer des entiers  $n$  friables pour (0.0.16) et des entiers de la forme  $mp$  pour (0.0.17), où  $p$  est un nombre premier de taille assez grande. On utilise ensuite le système de poids bien adapté que l'on a introduit dans le Chapitre 2. De plus, les termes d'erreur sont contrôlés par deux théorèmes de type Bombieri-Vinogradov pour les entiers friables et pour les entiers avec un grand facteur premier.

Balog [1] a remarqué pour  $x \rightarrow \infty$  :

$$\begin{aligned} |\{n \leq x : P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1)\}| &\leq \frac{1}{2}x, \\ |\{n \leq x : P^+(n-1) < P^+(n) > P^+(n+1)\}| &\leq \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

L'auteur tient à exprimer sa gratitude au rapporteur Fouvry pour avoir indiqué les deux majorations ci-dessus de Balog. En utilisant le Théorème (C), et le Corollaire (A) ci-dessus sur les plus grands facteurs premiers de deux entiers consécutifs, on peut obtenir respectivement des majorations non-triviales des deux autres cas de figure pour les triplets d'entiers consécutifs.

**Corollaire (B).** *Pour  $x \rightarrow \infty$ , on a*

$$\begin{aligned} |\{n \leq x : P^+(n-1) < P^+(n) < P^+(n+1)\}| &< 0,8636x, \\ |\{n \leq x : P^+(n-1) > P^+(n) > P^+(n+1)\}| &< 0,8636x. \end{aligned}$$

*B. Les plus grands facteurs premiers de plusieurs entiers consécutifs*

Pour les plus grands facteurs premiers de plusieurs entiers consécutifs, il existe très peu de résultats. De Koninck et Doyon [8] ont remarqué que sous l'Hypothèse (A) on a

$$|\{n \leq x : P^+(n+j_0) = \min_{0 \leq j \leq k-1} P^+(n+j)\}| \sim k^{-1}x \quad (0.0.18)$$

pour  $x \rightarrow \infty$ . À notre connaissance, c'est le seul résultat paru sur ce problème. La méthode que nous avons développée pour les plus grands facteurs premiers de trois entiers consécutifs ci-dessus nous permet d'obtenir une proportion positive sans l'Hypothèse (A).

**Théorème (D).** *Soient  $k \geq 3$  un entier et  $j_0 \in \{0, \dots, k-1\}$ . Alors on a*

$$|\{n \leq x : P^+(n+j_0) = \min_{0 \leq j \leq k-1} P^+(n+j)\}| \geq \{C_3(k) + o(1)\}x$$

pour  $x \rightarrow \infty$ , où

$$C_3(k) := \max_{0 < \alpha < \frac{1}{2(k-1)}} \rho\left(\frac{1}{\alpha}\right) \left(\alpha \log \frac{1}{2\alpha(k-1)}\right)^{k-1} > 0$$

et  $\rho(u)$  est la fonction de Dickman, définie comme l'unique solution continue de l'équation différentielle aux différences :

$$\begin{cases} \rho(u) = 1 & \text{si } 0 \leq u \leq 1, \\ u\rho'(u) = -\rho(u-1) & \text{si } u > 1. \end{cases} \quad (0.0.19)$$

Nous avons aussi un résultat similaire pour le max à la place de min.

**Théorème (E).** *Soient  $k \geq 3$  un entier et  $j_0 \in \{0, \dots, k-1\}$ . Alors on a*

$$|\{n \leq x : P^+(n + j_0) = \max_{0 \leq j \leq k-1} P^+(n + j)\}| \geq \{C_4(k) + o(1)\}x$$

pour  $x \rightarrow \infty$ , où

$$C_4(k) := \max_{\substack{\frac{2k-2}{2k-1} < \alpha < 1 \\ 1-\alpha \leq \beta < \gamma < \frac{\alpha}{2(k-1)}}} \left( \beta \log \frac{\gamma}{\beta} \right)^{k-1} \log \frac{1}{\alpha} > 0.$$

#### 4. Les plus grands facteurs premiers d'entiers consécutifs voisins d'un entier criblé

Dans le Chapitre 4, nous étudions l'analogie de la conjecture (0.0.3) pour les nombres premiers et les entiers criblés. En désignant par  $\pi(x)$  le nombre des nombres premiers n'excédant pas  $x$ , il semble raisonnable de faire la conjecture suivante : *Pour  $x \rightarrow \infty$ , nous avons*

$$|\{p \leq x : P^+(p-1) < P^+(p+1)\}| \sim \frac{1}{2}\pi(x). \quad (0.0.20)$$

Sans doute, une telle conjecture est très difficile à démontrer, puisque la conjecture des nombres premiers jumeaux est équivalente à

$$|\{p \leq x : P^+(p) < P^+(p+2)\}| \rightarrow \infty$$

pour  $x \rightarrow \infty$ . Cette dernière reste encore ouverte, malgré les progrès spectaculaires de ces dernières années [25, 35, 37, 67]. Une approche pour attaquer ce problème est de travailler sous des hypothèses raisonnables et d'établir ainsi des résultats conditionnels. L'hypothèse suivante est la conjecture d'Elliott-Halberstam sur la distribution des nombres premiers dans les progressions arithmétiques, une conjecture souvent utilisée en théorie analytique des nombres.

**Hypothèse (B).** (Conjecture d'Elliott-Halberstam) *Pour tous  $A > 0$  et  $\varepsilon > 0$ , on a*

$$\sum_{q \leq x^{1-\varepsilon}} \max_{y \leq x} \max_{(a,q)=1} \left| \sum_{\substack{p \leq y \\ p \equiv a \pmod{q}}} 1 - \frac{\pi(y)}{\varphi(q)} \right| \ll_{A,\varepsilon} \frac{x}{(\log x)^A}, \quad (0.0.21)$$

où  $\varphi(q)$  est la fonction d'Euler.

À l'aide de l'Hypothèse (B), nous démontrons le résultat suivant.

**Théorème (F).** *Sous l'Hypothèse (B), on a*

$$|\{p \leq x : P^+(p-1) < P^+(p+1)\}| > 0,1779 \pi(x) \quad (0.0.22)$$

pour  $x \rightarrow \infty$ .

Le point de départ pour démontrer le Théorème (F) est l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{p \leq x \\ P^+(p-1) < P^+(p+1)}} 1 &\geq \sum_{\substack{p \leq x \\ P^+(p-1) \leq x^{1/2-\varepsilon}}} 1 - \sum_{\substack{p \leq x \\ P^+(p+1) \leq P^+(p-1) \leq x^{1/2-\varepsilon}}} 1 \\
&\geq \sum_{\substack{p \leq x \\ P^+(p-1) \leq x^{1/2-\varepsilon}}} 1 - \left( \sum_{\substack{p \leq x \\ x^\theta < P^+(p+1) \leq P^+(p-1) \leq x^{1/2-\varepsilon}}} 1 + \sum_{\substack{p \leq x \\ P^+(p+1) \leq x^\theta}} 1 \right) \quad (0.0.23) \\
&=: S_A - (S_B + S_C).
\end{aligned}$$

La quantité  $S_B$  sera majorée à l'aide du théorème des nombres premiers et de l'Hypothèse (B). Pour les deux sommes  $S_A$  et  $S_C$ , nous appliquerons la Proposition (C) suivante.

**Proposition (C).** *Soit  $a$  un entier. Pour  $x \geq y > 1$ , on définit*

$$\pi(x, y) := \sum_{p \leq x, P^+(p-a) \leq y} 1 \quad \text{et} \quad u := \frac{\log x}{\log y}.$$

Alors pour tout  $u \geq 1$  fixé et  $x \rightarrow \infty$ , on a sous la conjecture d'Elliott-Halberstam

$$\pi(x, y) \sim \rho(u)\pi(x),$$

où  $\rho(u)$  est la fonction de Dickman, définie par (0.0.19).

Dans l'article [26, Section 5.3], Granville a annoncé la Proposition (C) sans donner de démonstration. Nous proposons une preuve de cette proposition dans le Chapitre 4.

Une autre manière d'approcher la conjecture (0.0.20) est d'étudier les *entiers criblés*, c'est-à-dire sans petit facteur premier. Désignons par  $P^-(n)$  le plus petit facteur premier de  $n \geq 1$  avec la convention  $P^-(1) = \infty$ . Dans cette direction, nous pouvons établir le résultat suivant.

**Théorème (G).** *Soit  $0 < \beta < \frac{1}{3}$ . Alors pour  $x \rightarrow \infty$ , on a*

$$\sum_{\substack{n \leq x, P^-(n) > x^\beta \\ P^+(n) < P^+(n+2)}} 1 \geq \{C(\beta) + o(1)\}\pi(x), \quad (0.0.24)$$

où  $C(\beta)$  est une constante strictement positive définie par la formule (4.6.8) du Chapitre 4.

Désignons par  $P_r$  un entier ayant au plus  $r$  facteurs premiers. En prenant  $\beta = \frac{1}{3} - \delta$  où  $0 < \delta \leq \frac{1}{12}$  dans le Théorème (G), on obtient immédiatement le résultat suivant.

**Corollaire (C).** *Soit  $0 < \delta \leq \frac{1}{12}$ . Alors pour  $x \rightarrow \infty$ , on a*

$$\sum_{\substack{P_3 \leq x, P^-(P_3) > x^{1/3-\delta} \\ P^+(P_3) < P^+(P_3+2)}} 1 \geq \{C(\delta) + o(1)\}\pi(x). \quad (0.0.25)$$

En particulier, en prenant  $\delta = \frac{1}{12}$ , i.e.  $P^-(n) > x^{1/4}$ , on a  $C(\frac{1}{12}) > 0,0267$ .

Il est intéressant de comparer (0.0.25) avec le théorème bien connu de Chen concernant la conjecture des nombres premiers jumeaux [6] :

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p+2=P_2}} 1 \geq 0,67 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-2)^2}\right) \frac{x}{(\log x)^2} \quad (0.0.26)$$

pour  $x \rightarrow \infty$ . On peut également faire un lien avec un résultat de Goldston, Graham, Pintz et Yıldırım [24]. Soit  $q_n$  le  $n$ -ème entier ayant exactement deux facteurs premiers, alors

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (q_{n+1} - q_n) \leq 6. \quad (0.0.27)$$

Bien que notre condition «  $P^+(P_3) < P^+(P_3 + 2)$  » soit plus faible que «  $p + 2 = P_2$  » et « ayant exactement deux facteurs premiers » pour (0.0.26) et (0.0.27) respectivement, (0.0.25) fournit une minoration du bon ordre de grandeur contrairement à [6, 24].

Notre méthode permet de traiter les plus grands facteurs premiers des  $k$  entiers consécutifs dont l'un est criblé, en étendant la condition «  $P^+(n) < P^+(n + 2)$  » dans le Théorème (G) à «  $P^+(n + j_0) = \min_{0 \leq j \leq k-1} P^+(n + j)$  » pour  $k \geq 2$ .

**Théorème (H).** *Soient  $k \geq 2$  et  $0 < \beta < \frac{1}{2k-1}$ . Alors il existe une constante  $C(k, \beta) > 0$  telle que l'on ait pour tout  $j_0 \in \{0, 1, \dots, k-1\}$*

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n+j_0) = \min_{0 \leq j \leq k-1} P^+(n+j) \\ P^-(n+j_0) > x^\beta}} 1 \geq \{C(k, \beta) + o(1)\} \pi(x)$$

pour  $x \rightarrow \infty$ .

En particulier pour  $j_0 = 0$ , on montre qu'il existe une proportion positive de nombres presque premiers (dans le sens « sans petit facteur premier ») tels que les  $k-1$  entiers suivants aient également une structure *proche* de celle d'un nombre premier puisqu'ils ont tous un *grand* facteur premier.

Comme dans le cas  $k = 2$ , nous pouvons comparer ce problème avec la conjecture des nombres premiers consécutifs. Désignons par  $p_n$  le  $n$ -ème nombre premier. Dans [35], Maynard développe une approche différente encore plus efficace que [25, 37, 67] et il démontre que pour chaque entier  $m \geq 1$  fixé, on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (p_{n+m} - p_n) \ll m^3 e^{4m},$$

où la constante implicite dans  $\ll$  est absolue. En particulier, pour  $m = 1$ , il peut obtenir

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (p_{n+1} - p_n) \leq 600,$$

améliorant la borne  $7 \times 10^7$  de Zhang [67].

Nous démontrons les Théorèmes (G) et (H) à l'aide d'un système de poids bien adapté. Pour cela, nous avons besoin d'un théorème de type Bombieri-Vinogradov pour l'ensemble

$$\tilde{S}(x; y, z) := \{n \leq x : z < P^-(n) \leq P^+(n) \leq y\},$$

i.e. la Proposition (D) suivante.

**Proposition (D).** *Pour tout  $A > 0$ , il existe une constante  $B = B(A) > 0$  telle que l'on ait*

$$\sum_{q \leq x^{1/2}/(\log x)^B} \max_{t \leq x} \max_{(a,q)=1} \left| \sum_{\substack{n \in \tilde{S}(t; y, z) \\ n \equiv a \pmod{q}}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \in \tilde{S}(t; y, z) \\ (n, q)=1}} 1 \right| \ll_A \frac{x}{(\log x)^A}$$

*uniformément pour  $2 \leq z \leq y \leq x$ , où  $\varphi(q)$  est la fonction d'Euler.*

Nous suivrons la méthode de Fouvry et Tenenbaum [20] pour démontrer cette proposition.

**Remarque 0.2.** On peut obtenir un résultat similaire aux Théorèmes (G) et (H) avec  $\beta$  petit en appliquant un théorème de Fouvry [18, Théorème 2] qui fournit un théorème de type Bombieri-Vinogradov pour des entiers criblés (sans petit facteur premier) avec un exposant de répartition  $> 1/2$ , ou encore le crible pondéré en combinant un théorème de type Bombieri-Vinogradov –voir Fouvry [17, Théorème 2 et Corollaire 3]. Nous remercions le professeur Fouvry pour toutes ces suggestions.

Les travaux de cette thèse ont fait l'objet de quatre publications. Le Chapitre 1 a donné lieu à un article publié en 2017 aux *Proceedings of the American Mathematical Society* [61]. Une partie du Chapitre 2 et le Chapitre 3 ont donné lieu à un article publié en 2018 à *Mathematika* [62]. Un article accepté à *Quart. J. Math. (Oxford)* [63] porte sur le Chapitre 4. Enfin, nous avons soumis un article supplémentaire sur le reste de la thèse.

# Chapitre 1

## Les plus grands facteurs premiers d'entiers consécutifs dans les petits intervalles

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Énoncé des problèmes et des résultats</b>	<b>13</b>
<b>1.2</b>	<b>Lemmes</b>	<b>17</b>
1.2.1	Borne supérieure du crible linéaire	17
1.2.2	Théorème de type Bombieri-Vinogradov dans les petits intervalles	18
1.2.3	Nombre d'entiers friables dans les petits intervalles	19
<b>1.3</b>	<b>Démonstration des Théorèmes 1.1 et 1.2</b>	<b>19</b>

---

### 1.1 Énoncé des problèmes et des résultats

En 1978, Erdős et Pomerance [15] conjecturent que les plus grands facteurs premiers d'entiers consécutifs  $n$  et  $n + 1$  sont des événements indépendants. Plus précisément, une de leurs conjectures énonce que pour  $0 \leq s, t \leq 1$ , la proportion d'entiers  $n$  inférieurs à  $x$  avec  $P^+(n) > x^s$  et  $P^+(n+1) > x^t$  tend vers  $a(s)a(t)$ , où  $a(t) := 1 - \rho(1/t)$ ,  $\rho(u)$  étant la fonction de Dickman. Cette conjecture est toujours complètement hors d'atteinte. Même l'assertion plus simple stipulant que la proportion d'entiers  $n$  tels que  $P^+(n) < P^+(n + 1)$  est  $\frac{1}{2}$

$$|\{n \leq x : P^+(n) < P^+(n + 1)\}| \sim \frac{1}{2}x, \quad (1.1.1)$$

reste encore un problème ouvert. La conjecture (1.1.1) remonte à des correspondances entre Erdős et Turán dans les années 30 (voir [42] ou [50]).

Dans ce même article [15], Erdős et Pomerance démontrent d'abord qu'il existe une proportion positive d'entiers  $n$  avec  $P^+(n) < P^+(n + 1)$ . Plus précisément, ils obtiennent

$$|\{n \leq x : P^+(n) < P^+(n + 1)\}| > 0,0099x \quad (1.1.2)$$

pour  $x \rightarrow \infty$ . La même minoration est aussi valide pour  $P^+(n) > P^+(n+1)$ . En 2005, La Bretèche, Pomerance et Tenenbaum [10] améliorent la constante 0,0099 en 0,05544. De plus, dans leur article ils indiquent que 0,05544 peut être remplacée par 0,05866, grâce à une observation de Fouvry. Très récemment Teräväinen [54] a montré que la densité logarithmique de cet ensemble vaut  $\frac{1}{2}$ , i.e. on a

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : P^+(n) < P^+(n+1)\}) = \frac{1}{2}$$

où la densité logarithmique  $\delta$  d'un ensemble  $A \subset \mathbb{N}$  est définie par

$$\delta(A) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\log x} \sum_{n \leq x, n \in A} \frac{1}{n}$$

si elle existe. On peut donc faire la conjecture suivante sur les plus grands facteurs premiers de deux entiers consécutifs dans les petits intervalles pour  $0 < y \leq x$  :

$$|\{x < n \leq x + y : P^+(n) < P^+(n+1)\}| \sim \frac{1}{2}y \quad (y \rightarrow \infty). \quad (1.1.3)$$

Dans ce chapitre, nous démontrons qu'il existe une proposition positive d'entiers  $n$  dans les petits intervalles  $]x, x + y]$  avec

$$y = x^\theta, \quad \frac{3}{5} < \theta \leq 1$$

tels que  $P^+(n) < P^+(n+1)$ . Notre résultat est le suivant.

**Théorème 1.1.** (i) *Soient*

$$\frac{3}{5} < \theta \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 < c < \min \left\{ \frac{5\theta-3}{2}, \theta - \frac{1}{2} \right\}. \quad (1.1.4)$$

*Alors pour  $x \rightarrow \infty$  et  $y = x^\theta$ , on a*

$$|\{x < n \leq x + y : P^+(n) < P^+(n+1)\}| \geq \{g(\theta; c) + o_{\theta,c}(1)\}y, \quad (1.1.5)$$

où

$$g(\theta; c) := \log \frac{1}{1-c} - 2 \int_0^c \frac{\log(1-v)^{-1}}{\theta - \frac{1}{2} - v} dv.$$

(ii) *Pour  $\frac{3}{5} < \theta \leq 1$ , il existe un unique  $c(\theta) \in (0, \min \{ \frac{5\theta-3}{2}, \theta - \frac{1}{2} \})$  tel que*

$$g(\theta) := \max_{0 < c < \min \{ \frac{5\theta-3}{2}, \theta - \frac{1}{2} \}} g(\theta; c) = g(\theta; c(\theta)) > 0.$$

**Remarque 1.1.** Pour  $\theta = 1$ , i.e.  $y = x$ , on a  $g(1) > g(1; 0, 1778) > 0, 1063$ . Le Théorème 1.1 entraîne ainsi la minoration suivante pour  $x \rightarrow \infty$

$$|\{n \leq x : P(n) < P(n+1)\}| > 0, 1063x. \quad (1.1.6)$$

Ce qui améliore la constante 0,05866 ci-dessus.

Un des outils principaux de la démonstration du Théorème 1.1 est un théorème de Wu [65, Theorem 2] (voir Lemme 1.2 ci-dessous) sur la répartition dans les progressions arithmétiques de certaines suites d'entiers obtenues par la convolution de l'indicatrice des nombres premiers dans un petit intervalle avec une fonction arithmétique de nature assez générale. À l'aide de [55, Theorem 1] (voir Lemme 1.3 ci-dessous), on obtient un résultat valable pour des intervalles de longueur  $y^\theta$  avec  $7/12 < \theta \leq 1$ .

**Théorème 1.2.** (i) *Soit*

$$\frac{7}{12} < \theta \leq 1.$$

Alors pour  $x \rightarrow \infty$  et  $y = x^\theta$ , on a

$$|\{x < n \leq x + y : P^+(n) < P^+(n+1)\}| \geq \{h(\theta; c) + o_{\theta, c}(1)\}y,$$

où  $h(\theta; c)$  est définie par

$$h(\theta; c) := \log \frac{1}{1-c} - 2 \int_0^c \log \frac{(\theta - 1/2)(1-v)}{(\theta - 1/2)(1-v) - c} \cdot \frac{dv}{\theta - v}$$

si

$$0 < c < \min \left\{ \frac{2\theta-1}{2\theta+3}, \frac{12\theta-7}{5} \right\}, \quad \frac{3}{5} < \theta \leq 1, \quad (1.1.7)$$

et

$$h(\theta; c) := \log \frac{1}{1-c} - 2 \int_0^c \log \frac{(\theta - 11/20)(1-v)}{(\theta - 11/20)(1-v) - c} \cdot \frac{dv}{\theta - v}$$

si

$$0 < c < \min \left\{ \frac{20\theta-11}{20\theta+29}, \frac{12\theta-7}{5} \right\}, \quad \frac{7}{12} < \theta \leq \frac{3}{5}. \quad (1.1.8)$$

(ii) *Pour  $\frac{7}{12} < \theta \leq 1$ , il existe une constante unique  $c(\theta)$  vérifiant (1.1.7) et (1.1.8) telle que*

$$h(\theta) := \max_c h(\theta; c) = h(\theta; c(\theta)) > 0. \quad (1.1.9)$$

Le Théorème 1.2 fournit un domaine plus vaste de  $\theta$ , mais on note que

$$\begin{cases} g(\theta) > h(\theta) & \text{if } \theta \in ]\frac{3}{5} + \delta_0, 1], \\ g(\theta) \leq h(\theta) & \text{if } \theta \in ]\frac{3}{5}, \frac{3}{5} + \delta_0], \end{cases}$$

où  $\delta_0$  est une constante assez petite. Ainsi le Théorème 1.1 donne une meilleure minoration que celle du Théorème 1.2 pour  $\theta \in ]\frac{3}{5} + \delta_0, 1]$ , et le Théorème 1.2 donne une meilleure minoration que celle du Théorème 1.1 pour  $\theta \in ]\frac{3}{5}, \frac{3}{5} + \delta_0]$ .

En vue de démontrer le Théorème 1.1, on part de l'inégalité pour  $y = x^\theta$  avec  $\frac{3}{5} < \theta \leq 1$

$$\sum_{\substack{x < n \leq x+y \\ P^+(n) < P^+(n+1)}} 1 \geq \sum_{\substack{x < n \leq x+y \\ P^+(n+1) > n^{1-c}}} 1 - \sum_{\substack{x < n \leq x+y \\ P^+(n) > P^+(n+1) > n^{1-c}}} 1 =: \mathfrak{S}_A - \mathfrak{S}_B \quad (1.1.10)$$

où  $c$  est un paramètre vérifiant  $0 < c \leq 1/2$ . Ainsi, il reste à évaluer  $\mathcal{S}_A$  et  $\mathcal{S}_B$ .

Pour  $\mathcal{S}_A$ , on va utiliser la formule asymptotique pour la distribution des entiers friables dans les petits intervalles.

Pour la somme  $\mathcal{S}_B$ , on compte le nombre d'entiers  $n$  vérifiant  $n = ap - 1 = bp'$  avec  $p > p' > n^{1-c}$ , i.e.  $a < b \leq n^c$ . On a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_B &\leq \left| \{x < n \leq x + y : n = ap - 1 = bp', a < b \leq (x + y)^c\} \right| \\ &= \sum_{b \leq (x+y)^c} \left| \{x < n \leq x + y : n = ap - 1 = bp', a < b\} \right| \\ &= \sum_{b \leq (x+y)^c} \left| \{p' \in \mathcal{A}(b) : p' \text{ premier}\} \right|, \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{A}(b) := \left\{ \frac{ap - 1}{b} : x < ap \leq x + y, a < b, ap - 1 \equiv 0 \pmod{b} \right\}. \quad (1.1.11)$$

Pour le Théorème 1.1, on estime la somme  $\mathcal{S}_B$  avec la condition " $a < b \leq (x + y)^c$ " à la place de " $a \leq x^c, b \leq x^c$ " dans l'argument de Fouvry [10, Further remarks], cela réduit de moitié par rapport à [10] la zone de crible. Cette astuce est à l'origine de notre amélioration de la proportion 0,05866 de [10] en 0,1063 dans le Théorème 1.1.

Un autre problème important sur les entiers consécutifs est le suivant. Soit  $\{\varepsilon_n\}_{1 \leq n < N}$  une suite finie avec  $\varepsilon_n \in \{-1, 0, 1\}$  pour tout  $1 \leq n < N$ . On écrit

$$\frac{a}{b} = \prod_{1 \leq n < N} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{\varepsilon_n}, \quad (1.1.12)$$

où la fraction  $a/b$  est irréductible. Alors on définit  $A(N)$  comme le maximum des valeurs de  $a$  obtenues lorsque  $\{\varepsilon_n\}_{1 \leq n < N}$  parcourt les  $3^{N-1}$  suites de  $\{-1, 0, 1\}$ . En 1988, Nicolas [38] démontre que

$$\log A(N) \leq \left\{ \frac{2}{3} + o(1) \right\} N \log N.$$

Un argument concis de Langevin montre que

$$\log A(N) \geq \{ \log 4 + o(1) \} N.$$

En 2005, La Bretèche, Pomerance et Tenenbaum [10] améliorent la minoration de  $\log A(N)$  à le même poids de la majoration comme le suivant

$$\log A(N) \geq \{ 0, 107005 + o(1) \} N \log N. \quad (1.1.13)$$

De plus, dans leur article ils indiquent que la constante 0, 107005 dans (1.1.13) peut être remplacée par 0, 112945 grâce à une observation de Fouvry.

De manière similaire à la démonstration de [10, Theorem 1.1], on peut étendre facilement (1.1.13) aux petits intervalles. On définit  $A(N, N^\theta)$  comme le maximum des  $a$  lorsque  $\{\varepsilon_n\}_{N < n \leq N+N^\theta}$  parcourt les  $3^{[N^\theta]}$  suites de  $\{-1, 0, 1\}$  avec

$$\frac{a}{b} = \prod_{N < n \leq N+N^\theta} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{\varepsilon_n} \quad (0 < \theta \leq 1).$$

Alors pour  $N \rightarrow \infty$  et  $\theta, c$  vérifiant (1.1.4), on a

$$\log A(N, N^\theta) \geq 2\{h(\theta; c) + o_{\theta, c}(1)\}N^\theta \log N,$$

où

$$h(\theta; c) := c - 2(1-c) \log(1-c) \log\left(1 - \frac{2c}{2\theta-1}\right) - 2 \int_0^c \log(1-u) \log\left(1 - \frac{2u}{2\theta-1}\right) du.$$

La démonstration est identique à [10], mis à part que l'on adapte le théorème 1.2 de [10] à des entiers  $n$  dans les petits intervalles.

## 1.2 Lemmes

### 1.2.1 Borne supérieure du crible linéaire

Dans ce paragraphe nous énonçons un résultat d'Iwaniec [31] sur la borne supérieure du crible linéaire.

Soient  $\mathcal{A}$  une suite finie d'entiers,  $\mathcal{P}$  un ensemble de nombres premiers,  $z \geq 2$  un nombre réel,  $d$  un entier sans facteur carré dont les facteurs premiers appartiennent à  $\mathcal{P}$ . Notons

$$\mathcal{A}_d := \{a \in \mathcal{A} : d \mid a\}, \quad P_{\mathcal{P}}(z) := \prod_{p < z, p \in \mathcal{P}} p.$$

On souhaite évaluer

$$S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z) := |\{a \in \mathcal{A} : (a, P_{\mathcal{P}}(z)) = 1\}|.$$

On suppose que  $|\mathcal{A}_d|$  vérifie une formule de la forme

$$|\mathcal{A}_d| = \frac{w(d)}{d} X + r(\mathcal{A}, d) \quad \text{pour } d \mid P_{\mathcal{P}}(z),$$

où  $X$  est une approximation de  $|\mathcal{A}|$  indépendante de  $d$ ,  $w$  une fonction multiplicative vérifiant  $0 < w(p) < p$  pour  $p \in \mathcal{P}$ ,  $w(d)d^{-1}X$  un terme principal et  $r(\mathcal{A}, d)$  un terme d'erreur que l'on espère petit en moyenne sur  $d$ . De plus, on définit

$$V(z) := \prod_{p < z, p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{w(p)}{p}\right).$$

On a ainsi [31]

**Lemme 1.1.** *On suppose qu'il existe une constante  $K \geq 2$  telle que pour tous  $v > u \geq 2$*

$$\prod_{u \leq p < v} \left(1 - \frac{w(p)}{p}\right)^{-1} < \frac{\log v}{\log u} \left(1 + \frac{K}{\log u}\right)$$

Alors pour tous  $D \geq z \geq 2$ , on a

$$S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z) \leq XV(z) \left\{ F(s) + O\left(\frac{1}{(\log y)^{1/3}}\right) \right\} + \sum_{d < D, d|P(z)} |r(\mathcal{A}, d)|,$$

où  $s := \log D / \log z$ ,  $\gamma$  est la constante d'Euler, et  $F(s)$  est la fonction monotone décroissante définie comme la solution continue du système de l'équation différentielle aux différences

$$\begin{aligned} F(s) &= 2e^\gamma/s, & f(s) &= 0, & 0 < s \leq 2, \\ (sF(s))' &= f(s-1), & (sf(s))' &= F(s-1), & s \geq 2. \end{aligned}$$

### 1.2.2 Théorème de type Bombieri-Vinogradov dans les petits intervalles

Pour  $(a, q) = 1$  et  $\ell \geq 1$ , on définit

$$\pi(z; \ell, a, q) = \sum_{\substack{\ell p \leq z \\ \ell p \equiv a \pmod{q}}} 1.$$

Le second lemme est dû à Wu [65, Théorème 2].

**Lemme 1.2.** *Soit  $g(\ell)$  une fonction arithmétique vérifiant la condition suivante*

$$\sum_{\ell \leq x} |g(\ell)|^2 \ell^{-1} \ll (\log x)^\lambda$$

pour une constante positive  $\lambda > 0$ . En posant

$$H(z, h; \ell, a, q) := \pi(z+h; \ell, a, q) - \pi(z; \ell, a, q) - \frac{1}{\varphi(q)} \int_{z/\ell}^{(z+h)/\ell} \frac{dt}{\log t}. \quad (1.2.1)$$

Alors pour tout  $A > 0$ , il existe une constante  $B = B(A, \lambda) > 0$  telle que la majoration suivante

$$\sum_{q \leq Q} \max_{(a, q)=1} \max_{h \leq y} \max_{x/2 < z \leq x} \left| \sum_{\substack{\ell \leq L \\ (\ell, q)=1}} g(\ell) H(z, h; \ell, a, q) \right| \ll_{A, \lambda, \varepsilon} \frac{y}{(\log x)^A}$$

ait lieu uniformément pour  $\frac{3}{5} + \varepsilon \leq \theta \leq 1$ ,  $Q = x^{\theta-1/2} (\log x)^{-B}$  et  $L = x^{(5\theta-3)/2-\varepsilon}$ .

En particulier, on peut facilement voir que le Lemme 1.2 contient bien le résultat de Perelli, Pintz et Salerno [41, Theorem], qui montre que l'on a pour  $\pi(z; a, q) := \pi(z; 1, a, q)$

$$\sum_{q \leq Q} \max_{(a, q)=1} \max_{h \leq y} \max_{x/2 < z \leq x} \left| \pi(z+h; a, q) - \pi(z; a, q) - \frac{1}{\varphi(q)} \int_z^{z+h} \frac{dt}{\log t} \right| \ll \frac{y}{(\log x)^A} \quad (1.2.2)$$

uniformément pour tout  $A > 0$ ,  $Q = x^{\theta-1/2}(\log x)^{-B}$  et  $\frac{3}{5} < \theta \leq 1$ , où  $B = B(A)$  est une constante positive.

Le troisième lemme dû à Timofeev [55, Theorem 1] permet d'obtenir un domaine plus vaste pour  $y$  que celui de [41, Theorem]. On écrit ici une version équivalente.

**Lemme 1.3.** *Pour toutes constantes fixées  $A, \varepsilon$  et  $\delta$ , la formule (1.2.2) est valide pour  $x^{7/12+\varepsilon} \leq y \leq x$  avec  $Q = yx^{-11/20-\delta}$ , et pour  $x^{3/5}(\log x)^{2(A+64)+1} \leq y \leq x$  avec  $Q = yx^{-1/2}(\log x)^{(A+64)}$ , où les constantes impliquées ne dépendent que  $A, \varepsilon$  et  $\delta$ .*

### 1.2.3 Nombre d'entiers friables dans les petits intervalles

Le quatrième lemme est dû à Hildebrand [28, Theorem 3].

**Lemme 1.4.** *Si  $\Psi(x, y)$  est le nombre des entiers  $y$ -friables n'excédant pas  $x$ ,  $u = \log x / \log y$ , alors la formule asymptotique suivante*

$$\Psi(x+z, y) - \Psi(x, y) \sim \frac{z}{x} \Psi(x, y) \sim z\rho(u) \quad (1.2.3)$$

*a lieu uniformément pour  $1 \leq x/z \leq y^{5/12}$  et  $\exp\{(\log(\log x))^{5/3+\varepsilon}\} \leq y \leq x$ .*

## 1.3 Démonstration des Théorèmes 1.1 et 1.2

Pour le Théorème 1.1, on rappelle l'inégalité :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x < n \leq x+y \\ P^+(n) < P^+(n+1)}} 1 &\geq \sum_{\substack{x < n \leq x+y \\ P^+(n+1) > n^{1-c}}} 1 - \sum_{\substack{x < n \leq x+y \\ P^+(n) > P^+(n+1) > n^{1-c}}} 1 \\ &=: \mathfrak{S}_A - \mathfrak{S}_B \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

où  $y = x^\theta$  avec  $\frac{3}{5} < \theta \leq 1$  et  $c$  est un paramètre vérifiant  $0 < c \leq \frac{1}{2}$ .

Nous considérons tout d'abord la somme  $\mathfrak{S}_A$ . Compte tenu des conditions  $\frac{3}{5} < \theta \leq 1$ ,  $0 < c < \theta - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$  et  $\rho(u) = 1 - \log u$  pour  $1 \leq u \leq 2$ , On en déduit que, en utilisant le Lemme 1.4

$$\mathfrak{S}_A = y \left\{ \log \frac{1}{1-c} + o_{c, \theta}(1) \right\}. \quad (1.3.2)$$

Désignons par  $\mathcal{P}$  l'ensemble de tous les nombres premiers. Pour  $\mathcal{S}_B$ , on va cribler la suite  $\mathcal{A}(b)$  suivante

$$\mathcal{A}(b) := \left\{ \frac{ap+1}{b} : x < ap \leq x+y, a < b, ap-1 \equiv 0 \pmod{b} \right\}$$

par  $\mathcal{P}$ , puis sommer sur  $b$ . Soient  $\theta$  et  $c$  deux réels positifs vérifiant les conditions (1.1.4), et  $z = x^{\theta-1/2}/(b(\log x)^{B_0})$ , où  $B_0$  est une constante positive convenable. Alors on a pour  $b \leq (x+y)^c$  et  $d \mid P(z)$

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_d(b)| &= \left| \left\{ \frac{ap+1}{b} : x < ap \leq x+y, a < b, ap-1 \equiv 0 \pmod{bd} \right\} \right| \\ &= \sum_{a < b} \sum_{\substack{x < ap \leq x+y \\ ap-1 \equiv 0 \pmod{bd}}} 1. \end{aligned}$$

Avec la notation (1.2.1), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_d(b)| &= \sum_{a < b} \sum_{\substack{x < ap \leq x+y \\ ap-1 \equiv 0 \pmod{bd}}} 1 \\ &= \sum_{\substack{a < b \\ (a, bd)=1}} \frac{1}{\varphi(bd)} \int_{x/a}^{(x+y)/a} \frac{dt}{\log t} + \sum_{\substack{a < b \\ (a, bd)=1}} H(x, y; bd, 1, a). \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Pour la première somme du membre de droite de (1.3.3), on a

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a < b \\ (a, bd)=1}} \frac{1}{\varphi(bd)} \int_{x/a}^{(x+y)/a} \frac{dt}{\log t} &= \sum_{\substack{a < b \\ (a, bd)=1}} \frac{y}{a\varphi(bd)} \left\{ \frac{1}{\log \frac{x}{a}} + O\left( \frac{1}{\log \frac{x}{a}} - \frac{1}{\log \frac{x+y}{a}} \right) \right\} \\ &= \left\{ 1 + O\left( \frac{1}{(\log x)} \right) \right\} \frac{y}{\varphi(bd)} \sum_{\substack{a < b \\ (a, bd)=1}} \frac{1}{a \log(x/a)}. \end{aligned}$$

La formule d'inversion de Möbius permet d'écrire

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a < b \\ (a, bd)=1}} \frac{1}{\varphi(bd)} \int_{x/a}^{(x+y)/a} \frac{dt}{\log t} &= \{1 + o(1)\} \frac{y}{\varphi(bd)} \sum_{a < b} \frac{1}{a \log(x/a)} \sum_{q|(a, bd)} \mu(q) \\ &= \{1 + o(1)\} \frac{y}{\varphi(bd)} \sum_{q|bd} \frac{\mu(q)}{q} \sum_{aq < b} \frac{1}{a \log(x/aq)} \\ &= \{1 + o(1)\} \frac{y}{\varphi(bd)} (S_1 + S_2), \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

où

$$S_1 := \sum_{q|bd, q < (\log x)^9} \frac{\mu(q)}{q} \sum_{a < b/q} \frac{1}{a \log(x/aq)}, \quad S_2 := \sum_{q|bd, q \geq (\log x)^9} \frac{\mu(q)}{q} \sum_{a < b/q} \frac{1}{a \log(x/aq)}.$$

Désignons par  $\tau$  la fonction diviseur standard, alors nous avons pour  $S_2$

$$S_2 \ll \sum_{q|bd, q \geq (\log x)^9} q^{-1} \ll \tau(bd)(\log x)^{-9}. \quad (1.3.5)$$

Pour la somme  $S_1$ , on déduit par une intégration par parties

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{q|bd, q < (\log x)^9} \frac{\mu(q)}{q} \left\{ \int_1^{b/q} \frac{dt}{t \log(x/tq)} + O\left(\frac{1}{(\log x)}\right) \right\} \\ &= \sum_{q|bd, q < (\log x)^9} \frac{\mu(q)}{q} \left\{ \log \left( \frac{\log x - \log q}{\log x - \log b} \right) + O\left(\frac{1}{(\log x)}\right) \right\} \\ &= \sum_{q|bd, q < (\log x)^9} \frac{\mu(q)}{q} \left\{ \log \left( \frac{\log x}{\log(x/b)} \right) + O\left(\frac{\log(\log x)}{(\log x)}\right) \right\} \\ &= \sum_{q|bd, q < (\log x)^9} \frac{\mu(q)}{q} \log \left( \frac{\log x}{\log(x/b)} \right) + O\left(\frac{(\log \log x)^2}{(\log x)}\right), \end{aligned}$$

grâce à la condition  $q < (\log x)^9$ , on a pu séparer  $\log q$  ci-dessus du terme principal. On a donc

$$\begin{aligned} S_1 &= \left( \sum_{q|bd} \frac{\mu(q)}{q} - \sum_{\substack{q|bd \\ q \geq (\log x)^9}} \frac{\mu(q)}{q} \right) \log \left( \frac{\log x}{\log(x/b)} \right) + O\left(\frac{(\log \log x)^2}{(\log x)}\right) \\ &= \sum_{q|bd} \frac{\mu(q)}{q} \log \left( \frac{\log x}{\log(x/b)} \right) + O\left(\frac{(\log \log x)^2}{(\log x)} + \frac{\tau(bd)}{(\log x)^9}\right) \\ &= \frac{\varphi(bd)}{bd} \left\{ \log \left( \frac{\log x}{\log(x/b)} \right) + o(1) \right\} + O\left(\frac{\tau(bd)}{(\log x)^9}\right), \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

où on a utilisé l'estimation

$$\varphi(n) \gg \frac{n}{\log \log n}.$$

En reportant (1.3.4), (1.3.5) et (1.3.6) dans (1.3.3), on a

$$|\mathcal{A}_d(b)| = \frac{\omega(d)}{d} X + r(\mathcal{A}(b), d)$$

avec  $\omega(d) = 1$  et

$$\begin{aligned} X &= \frac{y}{b} \log \left( \frac{\log x}{\log(x/b)} \right) \{1 + o(1)\}, \\ r(\mathcal{A}(b), d) &= \sum_{\substack{a < b \\ (a, bd)=1}} H(x, y; bd, 1, a) + O\left(\frac{y\tau(bd)}{\varphi(bd)(\log x)^9}\right). \end{aligned}$$

Ainsi on peut appliquer le crible de Rosser-Iwaniec (Lemme 1.1) avec

$$D = z = x^{\theta-1/2}/(b(\log x)^{B_0})$$

et on a

$$S(\mathcal{A}(b); \mathcal{P}, z) \leq \{1 + o(1)\} \frac{2X}{\log(x^{\theta-1/2}/b)} + \sum_{d < z, d|P(z)} |r(\mathcal{A}(b), d)|,$$

où on a utilisé la formule de Mertens pour estimer

$$V(z) = \prod_{p < x^{\theta-1/2} b^{-1} (\log x)^{-B_0}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma}}{\log(x^{\theta-1/2}/b)} \{1 + o(1)\}.$$

Par l'estimation ci-dessus et l'inégalité triviale ci-dessous

$$|\{n \in \mathcal{A}(b) : n \text{ est premier}\}| \leq S(\mathcal{A}(b); \mathcal{P}, z) + z,$$

on en déduit que

$$\mathcal{S}_B \leq \sum_{b \leq (x+y)^c} (S(\mathcal{A}(b); \mathcal{P}, z) + z) \leq \{1 + o(1)\} S_3 + S_4 + O(y(\log x)^{-1}), \quad (1.3.7)$$

où

$$S_3 := \sum_{b \leq (x+y)^c} \frac{2y}{b \log(x^{\theta-1/2}/b)} \log\left(\frac{\log x}{\log(x/b)}\right),$$

$$S_4 := \sum_{b \leq (x+y)^c} \sum_{d < z} \left| \sum_{\substack{a < b \\ (a, bd)=1}} H(x, y; bd, 1, a) \right|,$$

et on a utilisé l'estimation standard  $\sum_{m \leq x} \tau(m)^2 / \varphi(m) \ll (\log x)^4$  pour borner la somme suivante

$$\frac{y}{(\log x)^9} \sum_{b \leq (x+y)^c} \sum_{d < x^{\theta-1/2}/(b(\log x)^{B_0})} \frac{\tau(bd)}{\varphi(bd)} \ll \frac{y}{(\log x)^9} \sum_{m < x^{1/2} (\log x)^{-B_0}} \frac{\tau(m)^2}{\varphi(m)} \ll \frac{y}{(\log x)^5}.$$

On va d'abord estimer le terme d'erreur  $S_4$ . En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il suit que

$$S_4 \leq \sum_{m < x^{\theta-1/2} (\log x)^{-B_0}} \tau(m) \left| \sum_{\substack{a < b \\ (a, m)=1}} H(x, y; m, 1, a) \right| \leq (S_{41} S_{42})^{1/2},$$

où

$$S_{41} := \sum_{m < x^{\theta-1/2} (\log x)^{-B_0}} \left| \sum_{\substack{a < b \\ (a, m)=1}} H(x, y; m, 1, a) \right|,$$

$$S_{42} := \sum_{m < x^{\theta-1/2} (\log x)^{-B_0}} \tau(m)^2 \left| \sum_{\substack{a < b \\ (a, m)=1}} H(x, y; m, 1, a) \right|.$$

Pour  $S_{42}$ , on utilise l'estimation triviale et pour  $S_{41}$ , on applique le Lemme 1.2 avec

$$g(\ell) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 < \ell \leq b \\ 0 & \text{if } b < \ell \leq x^{(5\theta-3)/2-\varepsilon} \end{cases}$$

en tenant compte de la condition  $b \leq (x+y)^c \leq x^{(5\theta-3)/2-\varepsilon}$  dans (1.1.4). On obtient donc

$$\begin{aligned} S_4 &\ll \left( \frac{y}{(\log x)^A} \right)^{1/2} \left( \sum_{m < x^{\theta-1/2} (\log x)^{-B_0}} \tau(m)^2 \sum_{a < b} \left\{ \frac{y}{am} + O(1) \right\} \right)^{1/2} \\ &\ll \left( \frac{y}{(\log x)^A} \right)^{1/2} \left( y(\log x)^5 + bx^{\theta-1/2} (\log x)^{-B_0+3} \right)^{1/2} \\ &\ll \frac{y}{(\log x)^{A/2-3}} \end{aligned} \tag{1.3.8}$$

compte tenu de l'estimation  $y^{1/2} x^{(c+\theta-1/2)/2} \ll yx^{-(1/2-c)/2} \ll y$  avec  $c < \theta - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ .

On évalue ensuite la somme  $S_3$ . On a par une intégration par parties

$$\begin{aligned} S_3 &= 2y\{1 + o(1)\} \int_1^{(x+y)^c} \log \left( \frac{\log x}{\log(x/t)} \right) \frac{dt}{t \log(x^{\theta-1/2}/t)} \\ &= y \left\{ 2 \int_0^c \frac{\log(1-v)^{-1}}{\theta - \frac{1}{2} - v} dv + o_{\theta,c}(1) \right\}. \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

La combinaison des formules (1.3.7), (1.3.8) and (1.3.9) entraîne alors la relation

$$\mathfrak{S}_B \leq y \left\{ 2 \int_0^c \frac{\log(1-v)^{-1}}{\theta - \frac{1}{2} - v} dv + o_{c,\theta}(1) \right\}. \tag{1.3.10}$$

En reportant les deux estimations (1.3.10) et (1.3.2) dans (1.3.1), on obtient finalement l'inégalité (1.1.5).

Pour le Théorème 1.1. (ii), on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial c}(\theta; c) &= \frac{1}{1-c} - 2 \frac{\log(1-c)^{-1}}{\theta - \frac{1}{2} - c}, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial c^2}(\theta; c) &= -\frac{1}{1-c} \left( \frac{2}{\theta - \frac{1}{2} - c} - \frac{1}{1-c} \right) - 2 \frac{\log(1-c)^{-1}}{(\theta - \frac{1}{2} - c)^2}. \end{aligned}$$

Il est clair que  $\frac{\partial^2 g}{\partial c^2}(\theta; c) < 0$  pour  $\frac{3}{5} < \theta \leq 1$  et  $0 \leq c < \theta - \frac{1}{2}$ . Ainsi  $c \mapsto \frac{\partial g}{\partial c}(\theta; c)$  est décroissante. En considérant  $\frac{\partial g}{\partial c}(\theta; 0) = 1$  et  $\lim_{c \rightarrow (\theta - \frac{1}{2})^-} \frac{\partial g}{\partial c}(\theta; c) = -\infty$ , il existe donc une constante unique  $c(\theta) \in (0, \min\{\frac{5\theta-3}{2}, \theta - \frac{1}{2}\})$  telle que  $\frac{\partial g}{\partial c}(\theta; c(\theta)) = 0$  et

$$g(\theta) := \max_{0 \leq c < \min\{\frac{5\theta-3}{2}, \theta - \frac{1}{2}\}} g(\theta; c) = g(\theta; c(\theta)) > g(\theta; 0) = 0$$

pour  $\frac{3}{5} < \theta \leq 1$ .

Ce qui achève ainsi la preuve du Théorème 1.1.

Pour le Théorème 1.2. (i), la démonstration est analogue à celle de [10, Theorem 1.2] en utilisant le Lemme 1.3, et pour le Théorème 1.2. (ii), la démonstration est analogue à celle du Théorème 1.2 (ii). On ne donne pas plus de détail.



# Chapitre 2

## Les plus grands facteurs premiers inférieurs à $y$ de deux entiers consécutifs

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Énoncé des problèmes et des résultats</b>	<b>25</b>
<b>2.2</b>	<b>Lemmes</b>	<b>27</b>
2.2.1	Borne inférieure du crible linéaire	27
2.2.2	Majoration du crible linéaire avec une fonction bien factorisable	28
2.2.3	Entiers friables	28
2.2.4	Entiers sans facteur premier dans un intervalle donné	29
<b>2.3</b>	<b>Théorème de type Bombieri-Vinogradov pour <math>S(x; y, z)</math></b>	<b>30</b>
<b>2.4</b>	<b>Théorème de type Bombieri-Vinogradov avec une fonction bien factorisable</b>	<b>32</b>
<b>2.5</b>	<b>Démonstration du Théorème 2.1 avec <math>0 &lt; \alpha \leq 1/2</math></b>	<b>36</b>
2.5.1	Cas où $\alpha \in ]1/6, 1/2]$	36
2.5.2	Cas où $\alpha \in ]0, 1/6]$	38
<b>2.6</b>	<b>Démonstration du Théorème 2.1 avec <math>1/2 &lt; \alpha \leq 1</math></b>	<b>41</b>
2.6.1	Point de départ	41
2.6.2	Estimation de la somme $\mathcal{S}_A$	41
2.6.3	Estimation de la somme $\mathcal{S}_B$	41
2.6.4	Estimation de la somme $\mathcal{S}_C$	46
<b>2.7</b>	<b>Démonstration du Corollaire 2.1</b>	<b>48</b>

---

### 2.1 Énoncé des problèmes et des résultats

Dans le chapitre précédent, nous avons exposé des progrès vers la conjecture suivante

$$|\{n \leq x : P^+(n) < P^+(n+1)\}| \sim \frac{1}{2}x. \quad (2.1.1)$$

Le but de ces travaux est d'améliorer la minoration de proportion des entiers  $n$  tels que  $P^+(n) < P^+(n+1)$ .

D'autre part, Rivat [46] a proposé une autre voie pour approcher (2.1.1). Pour  $2 \leq y \leq x$ , notons  $P_y^+(n)$  le plus grand facteur premier de  $n$  inférieur à  $y$ ,  $P_y^+(n) := \max\{p \mid n : p \leq y\}$ , avec la convention que  $P_y^+(n) = 1$  si le plus petit facteur premier de  $n$  est strictement supérieur à  $y$ .

Pour quels  $y$ , avons-nous la formule asymptotique

$$|\{n \leq x : P_y^+(n) < P_y^+(n+1)\}| \sim \frac{1}{2}x ? \quad (2.1.2)$$

Soient

$$f_y(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } P_y^+(n+1) > P_y^+(n), \\ -1 & \text{si } P_y^+(n+1) < P_y^+(n), \end{cases}$$

et  $(a, b(b+1)) = 1$ . Rivat a montré que

$$\left| \sum_{1 \leq an+b \leq x} f_y(an+b) \right| \ll_{a,b} x \exp\left(-\frac{\log x}{10 \log y}\right)$$

est valable uniformément pour

$$x \geq 3 \quad \text{et} \quad 3 \leq y \leq \exp\left(\frac{\log x}{100 \log_2 x}\right). \quad (2.1.3)$$

Cela implique que la formule asymptotique (2.1.2) a lieu uniformément dans le domaine (2.1.3). Puisque (2.1.1) est équivalente à (2.1.2) avec  $y = x$ , il serait intéressant d'étendre le domaine de  $y$  dans (2.1.3) ci-dessus à  $y = x^\alpha$  où  $0 < \alpha \leq 1$  est une constante.

Par suite, nous allons étendre le domaine de  $y$  dans le Chapitre 2. Nous n'avons pas réussi à obtenir une telle extension de (2.1.3). Notre théorème fournit cependant une minoration du membre de gauche de (2.1.2) quand  $y = x^\alpha$ .

**Théorème 2.1.** *Soit  $y = x^\alpha$  avec  $\alpha \in ]0, 1]$ . Il existe une constante  $C(\alpha) > 0$  telle que*

$$|\{n \leq x : P_y^+(n) < P_y^+(n+1)\}| \geq \{C(\alpha) + o(1)\}x \quad (2.1.4)$$

pour  $x \rightarrow \infty$ . Les expressions explicites de  $C(\alpha)$  seront données par (2.5.18), (2.5.9) et (2.6.24) ci-dessous sur les intervalles  $]0, \frac{1}{6}]$ ,  $]\frac{1}{6}, \frac{1}{2}]$  et  $]\frac{1}{2}, 1]$ , respectivement.

Notre démonstration fournit des expressions explicites de  $C(\alpha)$  admissibles. En particulier, pour  $\alpha = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$  on a :

$$C\left(\frac{1}{3}\right) > 0,0506, \quad C\left(\frac{1}{2}\right) > 0,0914, \quad C\left(\frac{2}{3}\right) > 0,0948.$$

Lorsque  $\alpha$  tend vers  $0+$ , on a

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+} C(\alpha) \geq \frac{1}{4}.$$

Pour  $\alpha = 1$ , le Théorème 2.1 fournit une amélioration de la proportion 0,1063 obtenue dans le Théorème 1.1. Nous montrons ainsi que  $P^+(n) < P^+(n+1)$  (ou  $P^+(n) > P^+(n+1)$ ) a lieu pour au moins 2 entiers sur 15, plus précisément on a le corollaire suivant.

**Corollaire 2.1.** *Pour  $x \rightarrow \infty$ , on a*

$$|\{n \leq x : P^+(n) < P^+(n+1)\}| > 0,1356x. \quad (2.1.5)$$

*La minoration ci-dessus est aussi vraie pour la configuration  $P^+(n) > P^+(n+1)$ .*

**Remarque 2.1.** La constante 0,1356 peut être remplacée par 0,411 sous l'hypothèse d'Elliott-Halberstam et l'hypothèse d'Elliott-Halberstam pour des entiers friables (avec " $q \leq x^{1-\varepsilon}$ " à la place de " $q \leq x^{1/2}/(\log x)^B$ " dans (2.3.4) du Lemme 2.6 ci-dessous).

## 2.2 Lemmes

### 2.2.1 Borne inférieure du crible linéaire

Dans cette section nous rappelons d'abord deux résultats d'Iwaniec sur le crible linéaire. Le premier est une borne inférieure du crible linéaire de Rosser-Iwaniec. Dans le paragraphe 2.2.2, on donne une version pour la majoration avec une fonction bien factorisable.

Soient  $\mathcal{A}$  une suite finie d'entiers,  $\mathcal{P}$  un ensemble de nombres premiers,  $z \geq 2$  un nombre réel,  $d$  un entier sans facteur carré dont les facteurs premiers appartiennent à  $\mathcal{P}$ . Notons

$$\mathcal{A}_d := \{a \in \mathcal{A} : d \mid a\}, \quad P_{\mathcal{P}}(z) := \prod_{p < z, p \in \mathcal{P}} p.$$

On souhaite évaluer

$$S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z) := |\{a \in \mathcal{A} : (a, P_{\mathcal{P}}(z)) = 1\}|.$$

On suppose que  $|\mathcal{A}_d|$  vérifie une formule de la forme

$$|\mathcal{A}_d| = \frac{w(d)}{d} X + r(\mathcal{A}, d) \quad \text{pour } d \mid P_{\mathcal{P}}(z),$$

où  $X$  est une approximation de  $|\mathcal{A}|$  indépendante de  $d$ ,  $w$  une fonction multiplicative vérifiant  $0 < w(p) < p$  pour  $p \in \mathcal{P}$ ,  $w(d)d^{-1}X$  un terme principal et  $r(\mathcal{A}, d)$  un terme d'erreur que l'on espère petit en moyenne sur  $d$ . De plus, on définit

$$V(z) := \prod_{p < z, p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{w(p)}{p}\right).$$

On a ainsi [30]

**Lemme 2.1.** *On suppose qu'il existe une constante  $L \geq 2$  telle que*

$$\prod_{u \leq p < v} \left(1 - \frac{w(p)}{p}\right)^{-1} \leq \frac{\log v}{\log u} \left(1 + \frac{L}{\log u}\right)$$

*pour tout  $v > u \geq 2$ . Alors pour  $D \geq z \geq 2$ ,  $s = \log D / \log z$ , on a*

$$S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z) > XV(z) \left\{ f(s) + O\left(\frac{1}{(\log D)^{1/3}}\right) \right\} - \sum_{d < D, d \mid P(z)} |r(\mathcal{A}, d)|,$$

où  $f(s)$  est la fonction monotone croissante définie comme la solution continue du système de l'équation différentielle aux différences

$$\begin{aligned} F(s) &= 2e^\gamma/s, & f(s) &= 0, & 0 < s \leq 2, \\ (sF(s))' &= f(s-1), & (sf(s))' &= F(s-1), & s \geq 2. \end{aligned}$$

**Remarque 2.2.**  $f(s)$  vérifie  $f(s) = 0$  pour  $0 < s \leq 2$  et  $f(s) > 0$  pour  $s > 2$ . En particulier, on a

$$f(s) = 1 + O(e^{-s}) \quad s \rightarrow \infty.$$

### 2.2.2 Majoration du crible linéaire avec une fonction bien factorisable

La borne inférieure du crible linéaire avec une fonction bien factorisable est aussi due à Iwaniec [30]. Ici nous énonçons seulement la formule de majoration. Avec les définitions  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{A}_d$ ,  $P_{\mathcal{P}}(z)$ ,  $w(p)$ ,  $r(\mathcal{A}, d)$  et  $V(z)$  comme dans le paragraphe dernier, on a ainsi

**Lemme 2.2.** *On suppose qu'il existe une constante  $K \geq 2$  telle que*

$$\prod_{u \leq p < v} \left(1 - \frac{w(p)}{p}\right)^{-1} \leq \frac{\log v}{\log u} \left(1 + \frac{K}{\log u}\right)$$

pour tout  $v > u \geq 2$ . Alors pour tout  $\varepsilon > 0$  et  $D^{1/2} \geq z \geq 2$ , on a

$$S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z) \leq XV(z) \left\{ F\left(\frac{\log D}{\log z}\right) + E \right\} + \sum_{\ell < \exp(8/\varepsilon^3)} \sum_{d|P_{\mathcal{P}}(z)} \lambda_{\ell}^+(d) r(\mathcal{A}, d),$$

où  $F(s) = 2e^\gamma s^{-1}$  ( $0 < s \leq 3$ ),  $\gamma$  est une constante d'Euler,  $\lambda_{\ell}^+(d)$  désigne un coefficient bien factorisable de niveau  $D$  et d'ordre 1. Le terme d'erreur  $E$  satisfait

$$E = O(\varepsilon + \varepsilon^{-8} e^K (\log D)^{-1/3}).$$

Les  $\lambda_{\ell}^+(d)$  sont les poids de Rosser-Iwaniec. On pourra trouver une définition précise dans [30]. Ici nous indiquons simplement que  $|\lambda_{\ell}^+(d)| \leq 1$ . La notion de fonction bien factorisable est définie au début du paragraphe 2.4.

### 2.2.3 Entiers friables

Posons

$$S(x, y) := \{n \leq x : P^+(n) \leq y\}, \quad \Psi(x, y) := |S(x, y)|. \quad (2.2.1)$$

Alors  $\Psi(x, y)$ , le nombre des entiers  $y$ -friables est estimé par le lemme suivant dû à Hildebrand [28, Theorem 1].

**Lemme 2.3.** *Soit  $\varepsilon > 0$ . Alors on a*

$$\Psi(x, y) = x\rho(u) \left\{ 1 + O_\varepsilon \left( \frac{\log(u+1)}{\log y} \right) \right\}$$

*uniformément pour*

$$(H_\varepsilon) \quad x \geq x_0(\varepsilon), \quad \exp\{(\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}\} \leq y \leq x,$$

*où  $u = \log x / \log y$  et  $\rho(u)$  est la fonction de Dickman définie par l'unique solution continue de l'équation différentielle aux différences suivante*

$$\begin{cases} \rho(u) = 1 & \text{si } 0 \leq u \leq 1, \\ u\rho'(u) = -\rho(u-1) & \text{si } u > 1. \end{cases}$$

### 2.2.4 Entiers sans facteur premier dans un intervalle donné

On définit d'abord le produit des nombres premiers dans l'intervalle  $]z, y]$  par

$$P(y, z) := \prod_{z < p \leq y} p.$$

On désigne pour  $z < y \leq x$

$$S(x; y, z) := \{n \leq x : (n, P(y, z)) = 1\} \quad (2.2.2)$$

l'ensemble des entiers sans facteur premier dans l'intervalle  $]z, y]$  et n'excédant pas  $x$ . On note le cardinal

$$\Psi_0(x; y, z) := |S(x; y, z)|.$$

Alors  $\Psi_0(x; y, z)$  est évaluée par le lemme suivant (voir [51, Exercice 299] ou [53] pour la correction).

**Lemme 2.4.** *On a*

$$\Psi_0(x; y, z) = \vartheta_0(\lambda, u)x \{1 + O(1/\log z)\}$$

*uniformément pour  $y \geq z \geq 2$  et  $x \geq yz$ , où*

$$u := \frac{\log x}{\log y}, \quad \lambda := \frac{\log z}{\log y}$$

*et*

$$\vartheta_0(\lambda, u) := \rho(u/\lambda) + \int_0^u \rho(t/\lambda)\omega(u-t)dt \quad (2.2.3)$$

*avec la convention  $\vartheta_0(0, u) = 0$ .  $\rho(u)$  est la fonction de Dickman.  $\omega(u)$  est la fonction de Buchstab définie comme la solution continue du système*

$$\begin{cases} u\omega(u) = 1 & \text{si } 1 \leq u \leq 2, \\ (u\omega(u))' = \omega(u-1) & \text{si } u > 2. \end{cases}$$

*De plus, nous prolongeons  $\omega(u)$  par 0 pour  $u < 1$ .*

## 2.3 Théorème de type Bombieri-Vinogradov pour $S(x; y, z)$

Dans cette section, nous démontrons un théorème de type Bombieri-Vinogradov que l'on utilisera dans la démonstration du Théorème 2.1 avec  $0 < \alpha \leq 1/2$ .

Soit  $S(x; y, z)$  l'ensemble défini comme dans (2.2.2). Notre théorème de type Bombieri-Vinogradov pour  $S(x; y, z)$  est le suivant.

**Proposition 2.1.** *Pour tout  $A > 0$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $B = B(A) > 0$  telle que l'on ait*

$$\sum_{q \leq x^{1/2}/(\log x)^B} \max_{t \leq x} \max_{\substack{(a, q)=1 \\ n \equiv a \pmod{q}}} \left| \sum_{\substack{n \in S(t; y, z) \\ n \equiv a \pmod{q}}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \in S(t; y, z) \\ (n, q)=1}} 1 \right| \ll_{A, \varepsilon} \frac{x}{(\log x)^A}$$

uniformément pour

$$2 \leq z \leq y \leq x \quad \text{et} \quad \exp\{(\log x)^{2/5+\varepsilon}\} \leq y \leq x, \quad (2.3.1)$$

où  $\varphi(q)$  est la fonction d'Euler.

Pour démontrer cette proposition, rappelons d'abord un résultat général de Motohashi [36]. Soit  $f$  une fonction arithmétique vérifiant les propriétés suivantes :

( $\mathcal{A}$ )  $f(n) \ll \tau(n)^C$ , où  $\tau(n)$  désigne la fonction diviseur et  $C$  est une constante.

( $\mathcal{B}$ ) Si le conducteur d'un caractère de Dirichlet non principal  $\chi$  est  $O((\log x)^D)$ , alors

$$\sum_{n \leq x} f(n)\chi(n) \ll x(\log x)^{-3D} \quad (x \geq 2),$$

où  $D$  est une constante positive.

( $\mathcal{C}$ ) Soit

$$E_f(y; q, a) := \sum_{\substack{n \leq y \\ n \equiv a \pmod{q}}} f(n) - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \leq y \\ (n, q)=1}} f(n),$$

alors pour tout  $A > 0$ , il existe une constante  $B = B(A) > 0$  telle que

$$\sum_{q \leq x^{1/2}/(\log x)^B} \max_{y \leq x} \max_{(a, q)=1} |E_f(y; q, a)| \ll \frac{x}{(\log x)^A} \quad (x \geq 2).$$

Les constantes  $A, B, C, D$  ne dépendent que la fonction  $f$ .

Le résultat suivant est dû à Motohashi [36, Theorem 1].

**Lemme 2.5.** *Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions arithmétiques vérifiant les propriétés ( $\mathcal{A}$ ), ( $\mathcal{B}$ ) et ( $\mathcal{C}$ ). Alors la convolution multiplicative  $f * g$  vérifie aussi ( $\mathcal{A}$ ), ( $\mathcal{B}$ ) et ( $\mathcal{C}$ ).*

De manière analogue à  $P^+(n)$ , désignons par  $P^-(n)$  le plus petit facteur premier d'un entier  $n \geq 1$  avec la convention  $P^-(1) = \infty$ . Posons

$$\tilde{S}(x, y) := \{n \leq x : P^-(n) > y\}, \quad \Phi(x, y) := |\tilde{S}(x, y)| \quad (2.3.2)$$

et

$$\Phi(x, y; a, q) := \sum_{\substack{n \in \tilde{S}(x, y) \\ n \equiv a \pmod{q}}} 1, \quad \Phi_q(x, y) := \sum_{\substack{n \in \tilde{S}(x, y) \\ (n, q) = 1}} 1. \quad (2.3.3)$$

Nous utilisons des théorèmes de type Bombieri-Vinogradov pour les entiers criblés et pour les entiers friables.

**Lemme 2.6.** *Pour tout  $A > 0$ , il existe une constante  $B = B(A) > 0$  telle que l'on ait*

$$\sum_{q \leq x^{1/2}/(\log x)^B} \max_{z \leq x} \max_{(a, q) = 1} \left| \Psi(z, y; a, q) - \frac{\Psi_q(z, y)}{\varphi(q)} \right| \ll_A \frac{x}{(\log x)^A} \quad (2.3.4)$$

$$\sum_{q \leq x^{1/2}/(\log x)^B} \max_{z \leq x} \max_{(a, q) = 1} \left| \Phi(z, y; a, q) - \frac{\Phi_q(z, y)}{\varphi(q)} \right| \ll_A \frac{x}{(\log x)^A} \quad (2.3.5)$$

uniformément pour  $x \geq y \geq 2$ .

La formule (2.3.5) a été démontrée par Wolke [64], qui dans le même article annonce une formule équivalente (2.3.4) pour les friables. Fouvry et Tenenbaum [20] démontrent un résultat très légèrement moins fort que (2.3.4). On trouvera dans l'article [21] de Fouvry et Tenenbaum (voir également les travaux récents de Drappeau [12]) une formule avec une majoration en  $\Psi(x, y)(\log x)^{-A}$  à la place de  $x(\log x)^{-A}$  lorsque  $y > \exp\{(\log x)^{2/3+\varepsilon}\}$  et dans l'article [27] d'Harper une formule avec une majoration de niveau  $\Psi(x, y)^{1/2}(\log x)^{-B}$ , en  $\Psi(x, y)(\log x)^{-A}$  à la place de  $x(\log x)^{-A}$  lorsque  $y > (\log x)^K$ ,  $K$  est une constante fixée. Cependant, dans nos preuves, l'inégalité (2.3.4) sera suffisante. En particulier, nous exploitons l'uniformité en "max" dans (2.3.4) et qui n'apparaît pas dans [21].

Nous sommes maintenant prêts pour la preuve de la Proposition 2.1.

*Démonstration.* Soit  $\lambda$  la fonction caractéristique de l'ensemble  $S(x; y, z)$ , c'est-à-dire,

$$\lambda(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } n \in S(x; y, z), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définissons deux fonctions arithmétiques  $v_z$  et  $u_y$  par

$$v_z(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } P^+(n) \leq z, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad u_y(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } P^-(n) > y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors  $v_z$  et  $u_y$  sont multiplicatives et on a

$$\lambda = v_z * u_y. \quad (2.3.6)$$

En effet, si  $n \notin S(x; y, z)$ , il existe un premier  $p$  tel que  $p \mid n$  et  $z \leq p < y$ . D'où

$$v_z * u_y(n) = \sum_{\substack{d_1 d_2 = n \\ p \mid d_1 \text{ ou } p \mid d_2}} v_z(d_1) u_y(d_2) = 0 = \lambda(n).$$

Si  $n \in S(x; y, z)$ , alors cet entier peut être écrit de manière unique sous la forme

$$n = n_1 n_2, \quad P^+(n_1) \leq z, \quad P^-(n_2) > y.$$

Ainsi

$$v_z * u_y(n) = \sum_{d_1 d_2 = n} v_z(d_1) u_y(d_2) = v_z(n_1) u_y(n_2) = 1 = \lambda(n).$$

Donc pour démontrer le résultat souhaité, grâce au Lemme 2.5, il suffit de vérifier que les deux fonctions  $v_z$  et  $u_y$  possèdent les propriétés  $(\mathcal{A})$ ,  $(\mathcal{B})$  et  $(\mathcal{C})$ .

La première est triviale.

Soient  $D > 0$ ,  $1 < q \leq (\log x)^D$  et  $c_0, c_1, c_2$  des constantes strictement positives, alors pour tout caractère de Dirichlet  $\chi$  non principal modulo  $q$ , on a, d'après le Théorème 4 de [20]

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n) \leq z}} \chi(n) \ll \Psi(x, z) e^{-c_1 \sqrt{\log z}} \ll x (\log x)^{-3D}$$

sous la condition

$$x \geq 3, \quad \exp\{c_0 (\log_2 x)^2\} \leq z \leq x.$$

De plus, si  $2 \leq z < \exp\{c_0 (\log_2 x)^2\}$ , le Théorème III.5.1 de [51] implique trivialement que

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n) \leq z}} \chi(n) \ll \Psi(x, z) \ll x e^{-(\log x)/(2 \log z)} \ll x (\log x)^{-3D}.$$

Cela montre que  $v_z$  possède la propriété  $(\mathcal{B})$  pour  $2 \leq z \leq x$ . De manière similaire, par le résultat de [66, Theorem 1],  $u_y$  satisfait  $(\mathcal{B})$  pour  $\exp\{(\log x)^{2/5+\varepsilon}\} \leq y \leq x^{1/2}$ . Si  $y > x^{1/2}$ ,  $m$  est premier et on sait que  $u_y(m)$  satisfait  $(\mathcal{B})$  (voir [51]). Donc  $u_y$  satisfait  $(\mathcal{B})$  pour

$$\exp\{(\log x)^{2/5+\varepsilon}\} \leq y \leq x.$$

On en déduit ensuite que  $v_z$  et  $u_y$  satisfont  $(\mathcal{C})$  en utilisant (2.3.4) et (2.3.5) du Lemme 2.6 respectivement. Finalement, à l'aide du Lemme 2.5 on déduit que  $\lambda = v_z * u_y$  satisfait des propriétés  $(\mathcal{A})$ ,  $(\mathcal{B})$  et  $(\mathcal{C})$  sous la condition

$$2 \leq z \leq y \leq x, \quad \exp\{(\log x)^{2/5+\varepsilon}\} \leq y \leq x.$$

La Proposition 2.1 est ainsi démontrée. □

## 2.4 Théorème de type Bombieri-Vinogradov avec une fonction bien factorisable

Dans cette section, nous démontrons un théorème de type Bombieri-Vinogradov que l'on utilisera dans la démonstration du Théorème 2.1 avec  $1/2 < \alpha \leq 1$ .

Pour un entier positif  $k$ , on définit  $\tau_k(n)$  par

$$\tau_k(n) = \sum_{n=n_1 n_2 \cdots n_k} 1.$$

Une fonction arithmétique  $\lambda(q)$  est dite de niveau  $Q$  et d'ordre  $k$  si

$$\lambda(q) = 0 \quad (q > Q) \quad \text{et} \quad |\lambda(q)| \leq \tau_k(q) \quad (q \leq Q).$$

On dit que  $\lambda$  est bien factorisable de niveau  $Q$  si pour toute décomposition  $Q = Q_1 Q_2$  avec  $Q_1, Q_2 \geq 1$ , il existe deux fonctions arithmétiques  $\lambda_1, \lambda_2$  de niveaux  $Q_1, Q_2$  et d'ordre  $k$  telles que

$$\lambda = \lambda_1 * \lambda_2.$$

Pour  $q \in \mathbb{N}^*$  et  $(a, q) = 1$ , on rappelle la définition de  $\pi(x; \ell, a, q)$

$$\pi(x; \ell, a, q) := \sum_{\substack{\ell p \leq x \\ \ell p \equiv a \pmod{q}}} 1, \tag{2.4.1}$$

pour  $\ell = 1$ , on retrouve  $\pi(x; a, q)$  la fonction de compte des nombres premiers dans les progressions arithmétiques.

Le théorème de Bombieri-Vinogradov assure que  $\pi(x; a, q)$  est proche de  $\text{li}(x)/\varphi(q)$  en moyenne pour  $q \leq x^{1/2}/(\log x)^A$ . Fouvry et Iwaniec [19] puis Fouvry [18] montrent que la borne  $q \leq x^{1/2}/(\log x)^A$  peut être remplacée par  $x^{\theta-\varepsilon}$  (avec  $\theta = 9/17$  dans [19] puis  $\theta = 17/32$  dans [18]), si on insère un poids bien factorisable. C'est la première fois que la barrière  $q \leq x^{1/2}/(\log x)^A$  est franchie. Bombieri, Friedlander et Iwaniec [4] obtiennent ensuite un tel résultat avec une borne  $q \leq x^{4/7-\varepsilon}$ . Nous présentons ici une légère généralisation du résultat de [4].

**Proposition 2.2.** *Soient  $a \in \mathbb{Z}^*$ ,  $A > 0$  et  $\varepsilon > 0$ . Alors pour toute fonction bien factorisable  $\lambda(q)$  de niveau  $Q$ , la majoration suivante*

$$\sum_{(a, q)=1} \lambda(q) \sum_{\substack{L_1 \leq \ell \leq L_2 \\ (\ell, q)=1}} \left( \pi(x; \ell, a, q) - \frac{\text{li}(x/\ell)}{\varphi(q)} \right) \ll_{a, A, \varepsilon} \frac{x}{(\log x)^A}$$

a lieu pour

$$Q = x^{4/7-\varepsilon}, \quad 1 \leq L_1 \leq L_2 \leq x^{1-\varepsilon}.$$

La constante implicite dépend au plus de  $a, A$  et  $\varepsilon$ .

*Démonstration.* On remplace d'abord  $\pi(t)$  par  $\sum_{m \leq t} \Lambda(m)$  en utilisant une intégration par parties. Puis en observant que la contribution des  $n$  tels que  $(n, qP(z)) \neq 1$  est négligeable, on vérifie qu'il suffit de montrer

$$\sum_{(a, q)=1} \lambda(q) \sum_{\substack{L_1 \leq \ell \leq L_2 \\ (\ell, q)=1}} \left( \sum_{\substack{\ell n \leq x \\ \ell n \equiv a \pmod{q} \\ (n, P(z))=1}} \Lambda(n) - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{\ell n \leq x \\ (n, qP(z))=1}} \Lambda(n) \right) \ll_{a, A, \varepsilon} \frac{x}{(\log x)^A} \tag{2.4.2}$$

avec  $z = \exp(\log x / \log_2 x)$ .

Puisque la démonstration est très proche de celle de [4, Theorem 10], nous indiquons seulement les points essentiels et les différences entre les deux démonstrations. Pour cela, on introduit

$$\begin{aligned} \Delta(L | M_1, \dots, M_j | N_1, \dots, N_j; q, a) \\ := \sum_{\substack{\ell m_1 \dots m_j n_1 \dots n_j \equiv a \pmod{q} \\ \ell \in \mathcal{L}, m_i \in \mathcal{M}_i, n_i \in \mathcal{N}_i}}^* \mu(m_1) \dots \mu(m_j) - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{(\ell m_1 \dots m_j n_1 \dots n_j, q) = 1 \\ \ell \in \mathcal{L}, m_i \in \mathcal{M}_i, n_i \in \mathcal{N}_i}}^* \mu(m_1) \dots \mu(m_j), \end{aligned}$$

où  $\sum^*$  désigne que la somme est restreinte à des entiers  $m_1, \dots, m_j, n_1, \dots, n_j$  sans facteur premier  $< z$ , et  $\mathcal{L}, \mathcal{M}_i, \mathcal{N}_i$  sont les intervalles suivants

$$\mathcal{L} := [(1 - \Delta)L, L[, \quad \mathcal{M}_i := [(1 - \Delta)M_i, M_i[, \quad \mathcal{N}_i := [(1 - \Delta)N_i, N_i[$$

avec

$$LM_1 \dots M_j N_1 \dots N_j = x, \quad \max(M_1, \dots, M_j) < x^{1/7}$$

et  $\Delta = (\log x)^{-A_1}$  ( $A_1$  est une constante assez grande dépendant de  $A$ ).

Dans la démonstration de [4, Theorem 10], on remplace, pour  $j \leq J = 7$ ,

$$\mathcal{E}(M_1, \dots, M_j | N_1, \dots, N_j) := \sum_{\substack{q_1 \sim Q \\ (a, q_1 q_2) = 1}} \sum_{q_2 \sim R} \gamma_{q_1} \delta_{q_2} \Delta(M_1, \dots, M_j | N_1, \dots, N_j; q_1 q_2, a)$$

par

$$\mathcal{E}(L | M_1, \dots, M_j | N_1, \dots, N_j) := \sum_{q_1 \sim Q} \sum_{\substack{q_2 \sim R \\ (a, q_1 q_2) = 1}} \gamma_{q_1} \delta_{q_2} \Delta(L | M_1, \dots, M_j | N_1, \dots, N_j; q_1 q_2, a).$$

On va montrer que

$$\mathcal{E}(L | M_1, \dots, M_j | N_1, \dots, N_j) \ll x(\log x)^{-A_2} \quad (2.4.3)$$

pour tout  $A_2$ . Notons

$$L = x^{\nu_0}, \quad M_i = x^{\mu_i}, \quad N_i = x^{\nu_i}$$

avec

$$\begin{aligned} 0 \leq \mu_j \leq \dots \leq \mu_1 \leq \frac{1}{7}, \quad 0 \leq \nu_j \leq \dots \leq \nu_1, \quad 0 \leq \nu_0 < 1 - \varepsilon, \\ \mu_1 + \dots + \mu_j + \nu_1 + \dots + \nu_j + \nu_0 = 1. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

On utilise ensuite un argument combinatoire similaire à [4, Theorem 10]. La différence est qu'on ne peut pas appliquer [4, Theorem 1] et [4, Theorem 2] à  $L = x^{\nu_0}$ , car on n'a pas toujours  $(\ell, P(z)) = 1$  lorsque  $\ell \in \mathcal{L}$ . Pour surmonter cette difficulté, nous observons tout d'abord que, si  $\nu_0 \geq \frac{3}{7}$ , on peut appliquer le théorème 5 de [4] avec

$$M = L = x^{\nu_0} \geq x^{3/7}, \quad \max(Q, R) \leq x^{2/7-2\varepsilon}$$

pour obtenir (2.4.3). Sinon, c'est-à-dire, dans le cas où  $\nu_0 < \frac{3}{7}$ , on utilise le théorème 1 ou 2 de [4] avec

$$R = x^{-\varepsilon} N, \quad Q \leq x^{4/7-4\varepsilon} N^{-1}$$

selon

$$x^{2/7-\varepsilon} < N < x^{3/7+\varepsilon} \tag{2.4.5}$$

ou

$$x^{1/7-\varepsilon} < N < x^{2/7+\varepsilon}. \tag{2.4.6}$$

Si (2.4.4) a une somme partielle  $\lambda$  de  $\mu_1, \dots, \mu_j, \nu_1, \dots, \nu_j$  avec

$$\frac{1}{7} \leq \lambda \leq \frac{3}{7}, \tag{2.4.7}$$

on complète la preuve d'après (2.4.5) ou (2.4.6). Sinon, on peut supposer qu'il n'y a pas de somme partielle de  $\mu_1, \dots, \mu_j, \nu_1, \dots, \nu_j$  de (2.4.4) dans (2.4.5) ou (2.4.6). Ainsi, toutes les  $\mu_i$  et  $\nu_i$  avec  $\nu_i \leq \frac{1}{7}$  donnent un produit  $\eta$  avec

$$\eta < \frac{1}{7},$$

d'où l'on peut déduire que

$$\eta + \nu_0 < \frac{4}{7}.$$

On a ainsi  $\nu_1 \geq \frac{3}{7}$ . En utilisant [4, Theorem 5\*] avec

$$M = N_1 = x^{\nu_1} \geq x^{3/7}, \quad \max(Q, R) \leq x^{2/7-2\varepsilon},$$

cela termine la démonstration de la Proposition 2.2. □

Le lemme suivant, dû à Pan-Ding-Wang [40], sera aussi utile dans la démonstration du Théorème 2.1 avec  $1/2 < \alpha \leq 1$ .

**Lemme 2.7.** *Soient  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $f(\ell)$  une fonction arithmétique vérifiant  $|f(\ell)| \leq 1$ . Alors pour tout  $A > 0$ , il existe une constante  $B = B(A) > 0$  telle que l'on ait*

$$\sum_{q \leq Q} \max_{(a, q)=1} \max_{y \leq x} \left| \sum_{\substack{L_1 < \ell \leq L_2 \\ (\ell, q)=1}} f(\ell) \left( \pi(y; \ell, a, q) - \frac{\text{li}(y/\ell)}{\varphi(q)} \right) \right| \ll_{\alpha, A} \frac{x}{(\log x)^A}$$

uniformément pour

$$Q = x^{1/2}/(\log x)^B, \quad (\log x)^{2B} \leq L_1 \leq L_2 \leq x^\alpha,$$

où la constante implicite ne dépend que de  $\alpha$  et  $A$ .

## 2.5 Démonstration du Théorème 2.1 avec $0 < \alpha \leq 1/2$

### 2.5.1 Cas où $\alpha \in ]1/6, 1/2]$

Soient  $y = x^\alpha$  et  $z = x^\beta$  avec  $0 < \beta < \alpha \leq \frac{1}{2}$ . On rappelle tout d'abord les définitions de  $P(y, z)$  et  $S(x; y, z)$

$$P(y, z) := \prod_{z < p \leq y} p, \quad S(x; y, z) := \{n \leq x : (n, P(y, z)) = 1\}.$$

On a ainsi

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ P_y^+(n) < P_y^+(n+1)}} 1 \geq \sum_{\substack{n \in S(x; y, z) \\ (n+1, P(y, z)) > 1}} 1. \quad (2.5.1)$$

Pour détecter la condition  $(n+1, P(y, z)) > 1$  ci-dessus, on introduit un système de poids bien adapté  $\omega(n; y, z)$  pour  $n \leq x$  et  $z < y$  défini par

$$\omega(n; y, z) := \sum_{\substack{z < p \leq y \\ p|n}} 1 \leq \frac{\log x}{\log z}, \quad (2.5.2)$$

d'où

$$\left(\frac{\log x}{\log z}\right)^{-1} \omega(n; y, z) \begin{cases} \leq 1 & \text{si } (n, P(y, z)) > 1, \\ = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.5.3)$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ P_y^+(n) < P_y^+(n+1)}} 1 &\geq \sum_{n \in S(x; y, z)} \frac{\omega(n+1; y, z)}{\left(\frac{\log x}{\log z}\right)} \\ &= \beta \sum_{z < p \leq y} \sum_{\substack{n \in S(x; y, z) \\ n \equiv -1 \pmod{p}}} 1 \\ &= \beta(S_1 + S_2), \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

où

$$\begin{aligned} S_1 &:= \sum_{z < p \leq y} \frac{1}{\varphi(p)} \sum_{\substack{n \in S(x; y, z) \\ (n, p) = 1}} 1 \\ S_2 &:= \sum_{z < p \leq y} \left( \sum_{\substack{n \in S(x; y, z) \\ n \equiv -1 \pmod{p}}} 1 - \frac{1}{\varphi(p)} \sum_{\substack{n \in S(x; y, z) \\ (n, p) = 1}} 1 \right). \end{aligned}$$

Pour  $S_1$ , en appliquant le Lemme 2.4 avec  $u = 1/\alpha$  et  $\lambda = \beta/\alpha$ , on obtient pour  $\alpha + \beta \leq 1$

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{z < p \leq y} \frac{1}{\varphi(p)} \sum_{n \in S(x; y, z)} 1 \\ &= \sum_{z < p \leq y} \frac{1}{p-1} \cdot x \vartheta_0 \left( \frac{\beta}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} \right) \left\{ 1 + O \left( \frac{1}{\log z} \right) \right\} \\ &= x \vartheta_0 \left( \frac{\beta}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} \right) \log \left( \frac{\alpha}{\beta} \right) + o(x). \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

Pour  $S_2$ , si  $y \leq x^{1/2}/(\log x)^B$ , où  $B = B(A)$  est une grande constante, on a en appliquant la Proposition 2.1

$$S_2 \ll \frac{x}{(\log x)^A}. \quad (2.5.6)$$

De plus, si  $x^{1/2}/(\log x)^B < y \leq x^{1/2}$ , une estimation triviale permet d'obtenir

$$\begin{aligned} S_2 &\ll \sum_{x^{1/2}/(\log x)^B < p \leq x^{1/2}} \left| \sum_{\substack{n \in S(x; y, z) \\ n \equiv -1 \pmod{p}}} 1 - \frac{1}{\varphi(p)} \sum_{\substack{n \in S(x; y, z) \\ (n, p) = 1}} 1 \right| + \frac{x}{(\log x)^A} \\ &\ll x \sum_{x^{1/2}/(\log x)^B < p \leq x^{1/2}} \frac{1}{p} + \frac{x}{(\log x)^A} \\ &\ll \frac{x \log_2 x}{\log x}. \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

En reportant (2.5.5), (2.5.6) et (2.5.7) dans (2.5.4), on obtient pour  $\frac{1}{6} < \alpha \leq \frac{1}{2}$

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ P_y^+(n) < P_y^+(n+1)}} 1 \geq C(\alpha)x + o(x), \quad (2.5.8)$$

où  $C(\alpha)$  est définie par

$$C(\alpha) := \max_{0 < \beta < \alpha} \vartheta_0 \left( \frac{\beta}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} \right) \beta \log \left( \frac{\alpha}{\beta} \right) > 0 \quad (1/6 < \alpha \leq 1/2) \quad (2.5.9)$$

et  $\vartheta_0$  est définie par (2.2.3). Cela achève la démonstration du Théorème 2.1 avec  $1/6 < \alpha \leq 1/2$ .

**Remarque 2.3.** Notre méthode ci-dessus entraîne une proportion positive pour tout  $0 < \alpha \leq 1/2$ . Cependant, lorsque  $\alpha$  tend vers 0, la minoration (2.5.8) devient moins intéressante car

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} C(\alpha) \rightarrow 0,$$

ce qui est contraire à l'intuition. Cela est dû au système de poids que nous utilisons qui est certainement très perfectible pour des petites valeurs de  $\alpha$ . Dans le paragraphe suivant nous allons améliorer les valeurs de  $C(\alpha)$  pour  $0 < \alpha \leq 1/6$ .

### 2.5.2 Cas où $\alpha \in ]0, 1/6]$

Pour  $\alpha \in ]0, \frac{1}{6}]$ , soient  $K \in \mathbb{N}^*$  et  $\beta, \delta \in \mathbb{R}^{+*}$  trois paramètres vérifiant les conditions :

$$K \leq (2\alpha)^{-1} - 2, \quad 0 < \beta < \alpha, \quad (2\alpha)^{-1} - K \leq \delta \leq (2\alpha)^{-1} - \alpha^{-1}\beta K. \quad (2.5.10)$$

Posons

$$y = x^\alpha, \quad z = x^\beta, \quad \omega(n; y, z) := \sum_{p|n, z < p \leq y} 1.$$

Différente des formules (2.5.1) et (2.5.4), notre point de départ est l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ P_y^+(n) < P_y^+(n+1)}} 1 &\geq \sum_{k \leq K} \sum_{n \in S(x; y, z), \omega(n+1; y, z) = k} 1 \\ &\geq \sum_{k \leq K} \sum_{z < p_1 < \dots < p_k \leq y} \sum_{\substack{n \in S(x; y, z) \\ p_1 \cdots p_k | (n+1) \text{ tel que } (n+1)/(p_1 \cdots p_k) \in S(x; y, z)}} 1 \\ &\geq \sum_{k \leq K} \sum_{z < p_1 < \dots < p_k \leq y} S(\mathcal{A}(b_k); \mathcal{P}, y), \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &:= \{p : p > z\}, \quad b_k := p_1 \cdots p_k, \\ \mathcal{A}(b_k) &:= \{(n+1)/b_k : n \in S(x; y, z) \text{ et } n+1 \equiv 0 \pmod{b_k}\}. \end{aligned}$$

**Remarque 2.4.** Dans (2.5.11), on aurait pu utiliser la minoration

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ P_y^+(n) < P_y^+(n+1)}} 1 &\geq \sum_{k \leq K} \sum_{\substack{n \in S(x; y, z) \\ \omega(n+1; y, z) = k}} 1 + \sum_{\substack{n \in S(x; y, z) \\ \omega(n+1; y, z) \geq K+1}} 1 \\ &:= S_1(K) + S_2(K) \end{aligned}$$

et minorer la deuxième somme du membre de droite  $S_2(K)$  de la même façon que (2.5.4) à l'aide du Lemme 2.4 et la Proposition 2.1 :

$$S_2(K) \geq x\beta \log\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \vartheta_0\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) \int_\beta^\alpha \cdots \int_\beta^{t_2} \frac{dt_1 \cdots dt_K}{t_1 \cdots t_K (1 - t_1 - \cdots - t_K)}.$$

Nous avons choisi de ne pas tenir compte de ce deuxième terme car sa contribution est très petite par rapport au premier terme lorsque  $\alpha$  est petit.

Pour  $d \mid P(y, z)$ , on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_d(b_k)| &= \left| \{(n+1)/b_k : n \in S(x; y, z), n+1 \equiv 0 \pmod{b_k d}\} \right| \\ &= \frac{1}{\varphi(b_k d)} \sum_{\substack{n \in S(x; y, z) \\ (n, b_k d) = 1}} 1 + E(S(x; y, z); -1, b_k d), \end{aligned}$$

où

$$E(S(x; y, z); -1, b_k d) := \sum_{\substack{n \in S(x; y, z) \\ n \equiv -1 \pmod{b_k d}}} 1 - \frac{1}{\varphi(b_k d)} \sum_{\substack{n \in S(x; y, z) \\ (n, b_k d) = 1}} 1. \quad (2.5.12)$$

En remarquant que pour  $n \in S(x; y, z)$  on a automatiquement  $(n, b_k d) = 1$ , on a donc

$$|\mathcal{A}_d(b_k)| = \frac{w(d)}{d} X + r(\mathcal{A}(b_k), d) \quad (2.5.13)$$

avec

$$X = \frac{\Psi_0(x; y, z)}{\varphi(b_k)}, \quad w(d) = \frac{\varphi(b_k d)}{\varphi(b_k)}, \quad r(\mathcal{A}(b_k), d) = E(S(x; y, z); -1, b_k d).$$

En appliquant le Lemme 2.1 avec  $D = (x^{1/2}(\log x)^{-B})/b_k$ , on obtient

$$S(\mathcal{A}(b_k); \mathcal{P}, y) \geq X \prod_{p|P(y, z)} \left(1 - \frac{w(p)}{p}\right) \left\{ f(\delta) + O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\log x}}\right) \right\} - \sum_{\substack{d < D \\ d|P(y, z)}} |r(\mathcal{A}(b_k), d)|.$$

En reportant dans (2.5.11), il suit

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ P_y^+(n) < P_y^+(n+1)}} 1 \geq S_1 - S_2, \quad (2.5.14)$$

où

$$S_1 := \{f(\delta) + o(1)\} \sum_{k \leq K} \sum_{z < p_1 < \dots < p_k \leq y} \frac{\Psi_0(x; y, z)}{\varphi(b_k)} \prod_{p|P(y, z)} \left(1 - \frac{w(p)}{p}\right),$$

$$S_2 := \sum_{k \leq K} \sum_{z < p_1 < \dots < p_k \leq y} \sum_{d < D, d|P(y, z)} |E(S(x; y, z); -1, b_k d)|.$$

En appliquant la Proposition 2.1 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on montre

$$S_2 \ll_K \sum_{q \leq x^{1/2}(\log x)^{-B}} \tau_{K+1}(q) |E(S(x; y, z); -1, q)| \ll_K \frac{x}{(\log x)^2}, \quad (2.5.15)$$

où  $\tau_k(n) := \sum_{n_1 \dots n_k = n} 1$ .

Il reste à évaluer le terme principal  $S_1$ . D'après la formule de Mertens, on a

$$\begin{aligned} \prod_{p|P(y, z)} \left(1 - \frac{w(p)}{p}\right) &= \prod_{\substack{p|p_1 \dots p_k \\ z < p \leq y}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{\substack{p|p_1 \dots p_k \\ z < p \leq y}} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \\ &= \prod_{1 \leq j \leq k} \frac{(p_j - 1)^2}{p_j(p_j - 2)} \prod_{z < p \leq y} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \\ &= \frac{\varphi(p_1 \dots p_k)}{p_1 \dots p_k} \cdot \frac{\log z}{\log y} \left\{ 1 + O_K\left(\frac{1}{\log z}\right) \right\}. \end{aligned}$$

En reportant dans la définition de  $S_1$ , le Lemme 2.4 et le théorème des nombres premiers nous permettent de déduire que

$$\begin{aligned} S_1 &= \{f(\delta) + o_K(1)\} \sum_{k \leq K} \sum_{z < p_1 < \dots < p_k \leq y} \frac{\Psi_0(x; y, z)}{p_1 \cdots p_k} \cdot \frac{\log z}{\log y} \\ &= \{1 + o(1)\} x f(\delta) \vartheta_0\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) \frac{\beta}{\alpha} \sum_{k \leq K} \frac{1}{k!} \left(\log \frac{\alpha}{\beta}\right)^k. \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

En combinant les estimations (2.5.14), (2.5.15) et (2.5.16), on obtient pour  $0 < \alpha \leq \frac{1}{6}$

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ P_y^+(n) < P_y^+(n+1)}} 1 \geq C(\alpha)x + o(x), \quad (2.5.17)$$

où  $C(\alpha)$  est définie par

$$C(\alpha) := \max_{\substack{K, \beta, \delta \\ \text{vérifiant (2.5.10)}}} \left\{ f(\delta) \vartheta_0\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) \frac{\beta}{\alpha} \sum_{k \leq K} \frac{1}{k!} \left(\log \frac{\alpha}{\beta}\right)^k \right\} > 0 \quad (0 < \alpha \leq 1/6). \quad (2.5.18)$$

Enfin, nous considérons le cas lorsque  $\alpha$  tend vers 0. Nous observons d'abord que

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\beta}{\alpha} \sum_{k \leq K} \frac{1}{k!} \left(\log \frac{\alpha}{\beta}\right)^k = 1 - \frac{\beta}{\alpha}. \quad (2.5.19)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \vartheta_0\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) &= \rho\left(\frac{1}{\beta}\right) + \frac{\beta}{\alpha} \int_0^{1/\beta} \rho(v) \omega\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\beta v}{\alpha}\right) dv \\ &> \frac{\beta}{\alpha} \min_{(1-\beta/\alpha)/\alpha \leq t \leq 1/\alpha} \omega(t) \cdot \int_0^{1/\alpha} \rho(v) dv. \end{aligned} \quad (2.5.20)$$

En remarquant que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = e^{-\gamma}, \quad \int_0^{\infty} \rho(v) dv = e^{\gamma},$$

et en prenant

$$\beta = \alpha/2, \quad K = [1/(2\alpha)] - 2, \quad \delta = (2\alpha)^{-1} - \frac{3}{4}K,$$

les formules (2.5.18), (2.5.19) et (2.5.20) nous permettent de déduire que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} C(\alpha) = \frac{1}{4}.$$

## 2.6 Démonstration du Théorème 2.1 avec $1/2 < \alpha \leq 1$

### 2.6.1 Point de départ

Pour  $y = x^\alpha$  avec  $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$  et  $1 - \alpha \leq c \leq \frac{1}{2}$ , il suit par le principe d'inclusion-exclusion

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ P_y^+(n) < P_y^+(n+1)}} 1 &= \sum_{\substack{n \leq x \\ y \geq P^+(n+1) > x^{1-c}}} 1 - \sum_{\substack{n \leq x \\ y \geq P^+(n) > P^+(n+1) > x^{1-c}}} 1 + \sum_{\substack{n \leq x \\ P_y^+(n) < P_y^+(n+1) \leq x^{1-c}}} 1 \\ &=: \mathcal{S}_A - \mathcal{S}_B + \mathcal{S}_C. \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

Il reste à maintenant minorer  $\mathcal{S}_A$ ,  $\mathcal{S}_C$  et majorer  $\mathcal{S}_B$ .

### 2.6.2 Estimation de la somme $\mathcal{S}_A$

Pour  $\mathcal{S}_A$ , on a d'après le Lemme 2.3 sur le nombre des entiers friables

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_A &= x \left\{ \rho \left( \frac{\log x}{\log y} \right) - \rho \left( \frac{\log x}{\log x^{1-c}} \right) \right\} + o(x) \\ &= x \left\{ \rho \left( \frac{1}{\alpha} \right) - \rho \left( \frac{1}{1-c} \right) \right\} + o(x) \\ &= x \log \left( \frac{\alpha}{1-c} \right) + o(x) \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

pour  $\frac{1}{2} \leq 1 - c \leq \alpha \leq 1$ , où on a utilisé le fait que  $\rho(u) = 1 - \log u$  ( $1 \leq u \leq 2$ ).

### 2.6.3 Estimation de la somme $\mathcal{S}_B$

Pour  $\mathcal{S}_B$ , on utilise le crible de Rosser-Iwaniec. On observe tout d'abord que,  $\mathcal{S}_B$  compte le nombre des entiers  $n$  tels que  $n = ap = bp' - 1$ , avec  $x^{1-c} < p' < p \leq y$ . On a ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_B &\leq \left| \{n \leq x : n = ap = bp' - 1, x^{1-\alpha} < a < b \leq x^c\} \right| + o(x) \\ &\leq \sum_{x^{1-\alpha} < b \leq x^c} \left| \{p' \in \mathcal{A}(b) : p' \text{ est premier}\} \right| + o(x), \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{A}(b) := \left\{ \frac{ap+1}{b} : ap \leq x, x^{1-\alpha} < a < b, ap+1 \equiv 0 \pmod{b} \right\}.$$

On prend  $\mathcal{P} = \{p : p \text{ est premier}\}$ , et on déduit que, pour  $b \leq x^c$  et  $d \mid P(z) := \prod_{p < z} p$ , où  $z$  sera explicité plus tard,

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_d(b)| &= \left| \left\{ \frac{ap+1}{b} : ap \leq x, x^{1-\alpha} < a < b, ap+1 \equiv 0 \pmod{bd} \right\} \right| \\ &= \sum_{\substack{x^{1-\alpha} < a < b \\ (a, bd)=1}} \frac{\text{li}(x/a)}{\varphi(bd)} + \sum_{\substack{x^{1-\alpha} < a < b \\ (a, bd)=1}} E(x/a; -\bar{a}, bd), \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

où

$$E(x; a, q) := \pi(x; a, q) - \frac{\text{li } x}{\varphi(q)}, \quad a\bar{a} \equiv 1 \pmod{bd}.$$

Pour la première somme du membre de droite de (2.6.3), en utilisant le théorème des nombres premiers et la formule d'inversion de Möbius, on a

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x^{1-\alpha} < a < b \\ (a, bd)=1}} \frac{\text{li}(x/a)}{\varphi(bd)} &= \frac{1}{\varphi(bd)} \sum_{\substack{x^{1-\alpha} < a < b \\ (a, bd)=1}} \frac{x}{a \log(x/a)} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right) \right\} \\ &= \{1 + o(1)\} \frac{x}{\varphi(bd)} \sum_{x^{1-\alpha} < a < b} \frac{1}{a \log(x/a)} \sum_{q|(a, bd)} \mu(q) \\ &= \{1 + o(1)\} \frac{x}{\varphi(bd)} \sum_{q|bd} \frac{\mu(q)}{q} \sum_{x^{1-\alpha} < aq < b} \frac{1}{a \log(x/aq)} \\ &= \{1 + o(1)\} \frac{x}{\varphi(bd)} \sum_{q|bd} \frac{\mu(q)}{q} \sum_{\max\{1, x^{1-\alpha}/q\} < a < b/q} \frac{1}{a \log(x/aq)} \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

Désignons par  $\mathcal{S}(bd)$  la double somme de droite. Pour le cas  $\alpha > 1 - \frac{9 \log \log x}{\log x}$ , i.e.  $\alpha$  proche de 1, on a  $x^{1-\alpha} < (\log x)^9$  et on découpe la somme sur  $q$  dans (2.6.4) en trois parties :

$$\mathcal{S}(bd) = \mathcal{S}_1(bd) + \mathcal{S}_2(bd) + O\left(\frac{\tau(bd)}{(\log x)^9}\right), \quad (2.6.5)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1(bd) &:= \sum_{q|bd, q \leq x^{1-\alpha}} \frac{\mu(q)}{q} \sum_{x^{1-\alpha}/q < a < b/q} \frac{1}{a \log(x/aq)}, \\ \mathcal{S}_2(bd) &:= \sum_{q|bd, x^{1-\alpha} < q \leq (\log x)^9} \frac{\mu(q)}{q} \sum_{1 < a < b/q} \frac{1}{a \log(x/aq)}, \end{aligned}$$

et nous avons déjà utilisé l'estimation triviale :

$$\sum_{q|bd, q > (\log x)^9} \frac{\mu(q)}{q} \sum_{1 < a < b/q} \frac{1}{a \log(x/aq)} \ll \frac{\tau(bd)}{(\log x)^9}.$$

Pour  $\mathcal{S}_1(bd)$  et  $\mathcal{S}_2(bd)$ , on utilise une intégration par parties,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1(bd) &= \sum_{\substack{q|bd \\ q \leq x^{1-\alpha}}} \frac{\mu(q)}{q} \left\{ \int_{x^{1-\alpha}/q}^{b/q} \frac{dt}{t \log(x/tq)} + O\left(\frac{1}{\log x}\right) \right\} \\ &= \sum_{\substack{q|bd \\ q \leq x^{1-\alpha}}} \frac{\mu(q)}{q} \log\left(\frac{\alpha \log x}{\log(x/b)}\right) + O\left(\frac{\log \log x}{\log x}\right) \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

compte tenu de la condition  $x^{1-\alpha} < (\log x)^9$ . On a ensuite pour  $\mathcal{S}_2(bd)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_2(bd) &= \sum_{\substack{q|bd \\ x^{1-\alpha} < q \leq (\log x)^9}} \frac{\mu(q)}{q} \left\{ \int_1^{b/q} \frac{dt}{t \log(x/tq)} + O\left(\frac{1}{\log x}\right) \right\} \\
&= \sum_{\substack{q|bd \\ x^{1-\alpha} < q \leq (\log x)^9}} \frac{\mu(q)}{q} \left\{ \log\left(\frac{\alpha \log(x/q)}{\log(x/b)}\right) + \log\left(\frac{1}{\alpha}\right) + O\left(\frac{1}{\log x}\right) \right\} \\
&= \sum_{\substack{q|bd \\ x^{1-\alpha} < q \leq (\log x)^9}} \frac{\mu(q)}{q} \left\{ \log\left(\frac{\alpha \log x}{\log(x/b)}\right) + O\left(\frac{\log \log x}{\log x}\right) \right\} \\
&= \sum_{\substack{q|bd \\ x^{1-\alpha} < q \leq (\log x)^9}} \frac{\mu(q)}{q} \log\left(\frac{\alpha \log x}{\log(x/b)}\right) + O\left(\frac{(\log \log x)^2}{\log x}\right).
\end{aligned} \tag{2.6.7}$$

En reportant (2.6.6) et (2.6.7) dans (2.6.5), on obtient pour  $\alpha > 1 - \frac{9 \log \log x}{\log x}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(bd) &= \sum_{\substack{q|bd \\ q \leq (\log x)^9}} \frac{\mu(q)}{q} \log\left(\frac{\alpha \log x}{\log(x/b)}\right) + O\left(\frac{(\log \log x)^2}{\log x} + \frac{\tau(bd)}{(\log x)^9}\right) \\
&= \sum_{q|bd} \frac{\mu(q)}{q} \log\left(\frac{\alpha \log x}{\log(x/b)}\right) + O\left(\frac{(\log \log x)^2}{\log x} + \frac{\tau(bd)}{(\log x)^9}\right) \\
&= \frac{\varphi(bd)}{bd} \log\left(\frac{\alpha \log x}{\log(x/b)}\right) + O\left(\frac{(\log \log x)^2}{\log x} + \frac{\tau(bd)}{(\log x)^9}\right).
\end{aligned} \tag{2.6.8}$$

De façon similaire, on a la même estimation pour  $\alpha \leq 1 - \frac{9 \log \log x}{\log x}$ .

Ainsi, la formule (2.6.4) est estimée par

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{x^{1-\alpha} < a < b \\ (a, bd)=1}} \frac{\text{li}(x/a)}{\varphi(bd)} &= \{1 + o(1)\} \frac{x}{\varphi(bd)} \mathcal{S}(bd) \\
&= \frac{x}{bd} \left\{ \log\left(\frac{\alpha \log x}{\log(x/b)}\right) + o(1) \right\} + O\left(\frac{x\tau(bd)}{\varphi(bd)(\log x)^9}\right).
\end{aligned} \tag{2.6.9}$$

Compte tenu de (2.6.3) et (2.6.9), on en déduit que

$$|\mathcal{A}_d(b)| = \frac{w(d)}{d} X + r(\mathcal{A}(b), d)$$

avec

$$w(d) = 1, \quad X = \frac{x}{b} \left\{ \log\left(\frac{\alpha \log x}{\log(x/b)}\right) + o(1) \right\},$$

$$r(\mathcal{A}(b), d) = \sum_{\substack{x^{1-\alpha} < a < b \\ (a, bd)=1}} E(x/a; -\bar{a}, bd) + O\left(\frac{x\tau(bd)}{\varphi(bd)(\log x)^9}\right).$$

On peut donc appliquer le Lemme 2.2 avec  $D = z^2 = x^{4/7-\varepsilon}/b$  et obtenir

$$S(\mathcal{A}(b); \mathcal{P}, z) \leq \{1 + o(1)\} \frac{2X}{\log(x^{4/7-\varepsilon}/b)} + \sum_{\ell < L} \sum_{d < D, d|P(z)} \lambda_{\ell}^{+}(d) r(\mathcal{A}(b), d),$$

où  $L := \exp(8/\varepsilon^3)$  et on a utilisé la formule de Mertens

$$V(z) = \prod_{p < z} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{2e^{-\gamma}}{\log(x^{4/7-\varepsilon}/b)} \{1 + o(1)\}.$$

Compte tenu de l'évaluation

$$|\{n \in \mathcal{A}(b) : n \text{ est premier}\}| \leq S(\mathcal{A}(b); \mathcal{P}, z) + z,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_B &\leq \sum_{x^{1-\alpha} < b \leq x^c} (S(\mathcal{A}(b); \mathcal{P}, z) + z) \\ &\leq \{1 + o(1)\} \mathcal{S}_{B1} + \mathcal{S}_{B2} + \mathcal{S}_{B3} + O(x(\log x)^{-1}), \end{aligned} \tag{2.6.10}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{B1} &:= \sum_{x^{1-\alpha} < b \leq x^c} \frac{2x}{b \log(x^{4/7-\varepsilon}/b)} \log \left( \frac{\alpha \log x}{\log(x/b)} \right), \\ \mathcal{S}_{B2} &:= \sum_{\ell < L} \sum_{x^{1-\alpha} < b \leq x^c} \sum_{\substack{d < D \\ d|P(z)}} \lambda_{\ell}^{+}(d) \sum_{\substack{x^{1-\alpha} < a < b \\ (a, bd)=1}} E(x/a; -\bar{a}, bd), \\ \mathcal{S}_{B3} &:= \sum_{\ell < L} \sum_{x^{1-\alpha} < b \leq x^c} \sum_{\substack{d < D \\ d|P(z)}} \lambda_{\ell}^{+}(d) \cdot O \left( \frac{x\tau(bd)}{\varphi(bd)(\log x)^9} \right). \end{aligned}$$

Pour évaluer  $\mathcal{S}_{B3}$ , on utilise l'estimation standard  $\sum_{m \leq x} \tau(m)^2 / \varphi(m) \ll (\log x)^4$  et on obtient

$$\mathcal{S}_{B3} \ll \frac{x}{(\log x)^9} \sum_{m \leq x^{4/7}} \frac{\tau(m)^2}{\varphi(m)} \ll \frac{x}{(\log x)^5} \tag{2.6.11}$$

qui est admissible.

Nous allons majorer  $\mathcal{S}_{B2}$  à l'aide de la Proposition 2.2. Pour cela, écrivons d'abord,

$$\mathcal{S}_{B2} = \sum_{\ell < L} \sum_{\mathcal{B}} \sum_{\mathcal{B}/2 < b \leq \mathcal{B}} \sum_{\substack{d < D \\ d|P(z)}} \lambda_{\ell}^{+}(d) \left\{ \sum_{\substack{x^{1-\alpha} < a < b \\ (a, bd)=1}} \left( \pi(x; a, -1, bd) - \frac{\text{li}(x/a)}{\varphi(bd)} \right) \right\}.$$

De plus, on impose une condition sur  $c$

$$c \leq 2/7 - \varepsilon$$

telle que

$$x^c < D = x^{4/7-\varepsilon}/b.$$

Désignons la fonction  $\lambda_\ell$  par

$$\lambda_\ell(q) := \sum_{\mathcal{B}/2 < b \leq \mathcal{B}} \sum_{\substack{d < D, d|P(z) \\ bd=q}} \mathbf{1}_{\mathcal{B}/2, \mathcal{B}}(b) \lambda_\ell^+(d), \quad (2.6.12)$$

où

$$\mathbf{1}_{\mathcal{B}/2, \mathcal{B}}(b) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{B}/2 < b \leq \mathcal{B}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour utiliser la Proposition 2.2, il faut démontrer que  $\lambda_\ell(q)$  est bien factorisable de niveau  $Q = \mathcal{B}D$ . Pour toute décomposition  $x^{4/7-\varepsilon} = \mathcal{B}D = Q_1Q_2$ ,  $Q_1, Q_2 \geq 1$ , compte tenu de  $\mathcal{B} \leq D$ , il existe un  $i \in \{1, 2\}$  tel que  $Q_i \leq x^{2/7-\varepsilon} \leq D$ . Sans perte de la généralité, on peut supposer que  $Q_1 \leq D$ . Puisque  $\lambda_\ell^+$  est une fonction bien factorisable de niveau  $D$ , il existe deux fonctions arithmétiques  $\lambda_1^+$  de niveau  $Q_1$  et  $\lambda_2^+$  de niveau  $D/Q_1$  telles que

$$\lambda_\ell^+ = \lambda_1^+ * \lambda_2^+.$$

Ainsi, on peut trouver deux fonctions arithmétiques  $\lambda_1^+$  de niveau  $Q_1$  et  $\lambda_2^+ * \mathbf{1}_{\mathcal{B}/2, \mathcal{B}}$  de niveau  $Q_2 = (D/Q_1) \cdot \mathcal{B}$  telles que

$$\lambda = \lambda_1^+ * (\lambda_2^+ * \mathbf{1}_{\mathcal{B}/2, \mathcal{B}}).$$

Cela montre que  $\lambda$  est une fonction bien factorisable de niveau  $\mathcal{B}D = x^{4/7-\varepsilon}$ . En appliquant la Proposition 2.2 avec  $\lambda(q)$  définie par (2.6.12) et  $(L_1, L_2, a, \ell) = (x^{1-\alpha}, b, -1, a)$ , on obtient

$$\sum_{\mathcal{B}/2 < b \leq \mathcal{B}} \sum_{\substack{d < D \\ d|P(z)}} \lambda_\ell^+(d) \left\{ \sum_{\substack{x^{1-\alpha} < a < b \\ (a, bd)=1}} \left( \pi(x; a, -1, bd) - \frac{\text{li}(x/a)}{\varphi(q)} \right) \right\} \ll \frac{x}{(\log x)^2}.$$

D'où

$$\mathcal{S}_{B2} \ll \frac{x}{\log x}. \quad (2.6.13)$$

Pour  $\mathcal{S}_{B1}$ , en utilisant une intégration par parties on a

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{B1} &= 2x\{1 + o(1)\} \int_{x^{1-\alpha}}^{x^c} \log \left( \frac{\alpha \log x}{\log(x/t)} \right) \frac{dt}{t \log(x^{4/7-\varepsilon}/t)} \\ &= x \left\{ 2 \int_{1-\alpha}^c \log \left( \frac{\alpha}{1-t} \right) \frac{dt}{\frac{4}{7}-t} + o_{c, \varepsilon, \alpha}(1) \right\}. \end{aligned} \quad (2.6.14)$$

En reportant (2.6.11), (2.6.13) et (2.6.14) dans (2.6.10), on arrive à l'inégalité

$$\mathcal{S}_B \leq x \left\{ 2 \int_{1-\alpha}^c \log \left( \frac{\alpha}{1-t} \right) \frac{dt}{\frac{4}{7}-t} + o_{c, \varepsilon, \alpha}(1) \right\} \quad (2.6.15)$$

avec

$$0 < c \leq \frac{2}{7} - \varepsilon, \quad 1 - c \leq \alpha \leq 1.$$

De manière similaire, en utilisant le Lemme 2.7 à la place de la Proposition 2.2, on peut montrer

$$\mathcal{S}_B \leq x \left\{ 2 \int_{1-\alpha}^c \log \left( \frac{\alpha}{1-t} \right) \frac{dt}{\frac{1}{2}-t} + o_{c,\varepsilon,\alpha}(1) \right\} \quad (2.6.16)$$

avec

$$\frac{2}{7} - \varepsilon < c < \frac{1}{2}, \quad 1 - c \leq \alpha \leq 1.$$

### 2.6.4 Estimation de la somme $\mathcal{S}_C$

En vue de traiter  $\mathcal{S}_C$ , on a tout d'abord pour  $B$  assez grand

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_C &:= \sum_{\substack{n \leq x \\ P_y^+(n) < P_y^+(n+1) \leq x^{1-c}}} 1 \geq \sum_{\substack{n \in S(x; y, x^\delta) \\ (n+1, P(x^{1-c}, x^\delta)) > 1}} 1 \\ &\geq \sum_{\substack{n \in S(x; x^\alpha, x^\delta) \\ (n+1, P(x^{1/2}/(\log x)^B, x^\delta)) > 1}} 1 \end{aligned}$$

où  $\frac{1}{2} \leq 1 - c < \alpha \leq 1$ ,  $\delta$  est un paramètre satisfaisant  $c \leq \delta \leq \frac{1}{2}$ . On utilise encore le système de poids bien adapté  $\omega(n+1; y, z)$  défini par (2.5.2) dans la section 2.5. On a donc

$$\omega(n+1; x^{1/2}/(\log x)^B, x^\delta) \leq \frac{\log x}{\log x^\delta} = \frac{1}{\delta},$$

d'où

$$\delta \omega \left( n+1; x^{1/2}/(\log x)^B, x^\delta \right) \begin{cases} \leq 1 & \text{si } (n+1, \prod_{x^\delta < p \leq x^{1/2}/(\log x)^B} p) > 1, \\ = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.6.17)$$

D'après (2.6.17), la somme  $\mathcal{S}_C$  est estimée par

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_C &\geq \delta \sum_{n \in S(x; x^\alpha, x^\delta)} \omega(n+1; x^{1/2}/(\log x)^B, x^\delta) \\ &= \delta \sum_{n \in S(x; x^\alpha, x^\delta)} \sum_{\substack{p|n+1 \\ x^\delta < p \leq x^{1/2}/(\log x)^B}} 1 \\ &= \delta \sum_{x^\delta < p \leq x^{1/2}/(\log x)^B} \sum_{\substack{n \in S(x; x^\alpha, x^\delta) \\ n \equiv -1 \pmod{p}}} 1 \\ &= \delta(\mathcal{S}_{C1} + \mathcal{S}_{C2}), \end{aligned} \quad (2.6.18)$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{C1} &:= \sum_{x^\delta < p \leq x^{1/2}/(\log x)^B} \frac{1}{\varphi(p)} \sum_{\substack{n \in S(x; x^\alpha, x^\delta) \\ (n, p)=1}} 1, \\ \mathcal{S}_{C2} &:= \sum_{x^\delta < p \leq x^{1/2}/(\log x)^B} \left( \sum_{\substack{n \in S(x; x^\alpha, x^\delta) \\ n \equiv -1 \pmod{p}}} 1 - \frac{1}{\varphi(p)} \sum_{\substack{n \in S(x; x^\alpha, x^\delta) \\ (n, p)=1}} 1 \right).\end{aligned}$$

Pour évaluer  $\mathcal{S}_{C2}$ , on déduit de la Proposition 2.1 que

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{C2} &\ll \sum_{q \leq x^{1/2}/(\log x)^B} \left| \sum_{\substack{n \in S(x; x^\alpha, x^\delta) \\ n \equiv -1 \pmod{q}}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \in S(x; x^\alpha, x^\delta) \\ (n, q)=1}} 1 \right| \\ &\ll x(\log x)^{-A}\end{aligned}\tag{2.6.19}$$

pour tout  $A > 0$ .

Il reste à évaluer  $\mathcal{S}_{C1}$ . On utilise le Lemme 2.4 sur les entiers sans facteur premier dans un intervalle donné :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{C1} &= \sum_{x^\delta < p \leq x^{1/2}/(\log x)^B} \frac{1}{p-1} \cdot \Psi_0(x; x^\alpha, x^\delta) \\ &= x\vartheta_0\left(\frac{\delta}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) \log \frac{1}{2\delta} + o(x).\end{aligned}\tag{2.6.20}$$

D'après (2.6.18), (2.6.19) et (2.6.20), on a ainsi pour  $c \leq \delta \leq 1/2$

$$\mathcal{S}_C \geq x\vartheta_0\left(\frac{\delta}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) \delta \log \frac{1}{2\delta} + o(x).\tag{2.6.21}$$

En reportant (2.6.2), (2.6.15), (2.6.16) et (2.6.21) dans (2.6.1), on obtient finalement pour  $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ P_y^+(n) < P_y^+(n+1)}} 1 \geq g(\alpha; c, \delta)x + o(x)$$

où  $g(\alpha; c, \delta)$  est définie par

$$g(\alpha; c, \delta) := \log\left(\frac{\alpha}{1-c}\right) - 2 \int_{1-\alpha}^c \log\left(\frac{\alpha}{1-t}\right) \frac{dt}{\nu(c)-t} + \vartheta_0\left(\frac{\delta}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) \delta \log \frac{1}{2\delta}\tag{2.6.22}$$

et

$$\nu(c) := \begin{cases} \frac{4}{7} & \text{si } 0 < c \leq \frac{2}{7} - \varepsilon, \\ \frac{1}{2} & \text{si } \frac{2}{7} - \varepsilon < c < \frac{1}{2}. \end{cases}\tag{2.6.23}$$

Il est clair que  $g(\alpha; c, \delta) > 0$  pour  $1/2 < \alpha \leq 1$ . On peut vérifier de la même manière que lors de la preuve du Théorème 1.1, qu'il existe des  $c_0, \delta_0$  satisfaisant les conditions ci-dessus telles que pour  $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$

$$C(\alpha) := \max_{\frac{1}{2} \leq 1-c < \alpha} \max_{c \leq \delta \leq \frac{1}{2}} g(\alpha; c, \delta) = g(\alpha; c_0, \delta_0) > 0 \quad (1/2 < \alpha \leq 1), \quad (2.6.24)$$

ce qui achève la démonstration du Théorème 2.1 avec  $1/2 < \alpha \leq 1$ .

On a pu prendre ici le niveau  $\nu(c) = 4/7$  avec  $c \leq 2/7 - \varepsilon$  dans la somme  $\mathcal{S}_B$  de (2.6.1) et on peut donner une minoration de  $\mathcal{S}_C$ , tandis que dans le Theoreme 1.1 du Chapitre 1 le niveau était  $\frac{1}{2}$  et le terme  $\mathcal{S}_C$  minoré par 0. Ces deux changements sont à l'origine de l'amélioration du résultat de (1.1.6) dans le Chapitre 1, donnée dans le Corollaire 2.1 suivant.

## 2.7 Démonstration du Corollaire 2.1

En prenant  $\alpha = 1$  (c'est-à-dire,  $y = x$ ) dans le Théorème 2.1 et en remarquant que  $\omega(u) = 0$  pour  $0 \leq u \leq 1$ , on obtient

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n) < P^+(n+1)}} 1 \geq \{h(c) + f(\delta) + o(1)\}x, \quad (2.7.1)$$

où

$$h(c) := \log \left( \frac{1}{1-c} \right) - 2 \int_0^c \log \left( \frac{1}{1-t} \right) \frac{dt}{\frac{4}{7} - t} \quad (0 < c \leq \frac{2}{7} - \varepsilon),$$

$$f(\delta) := \rho(\delta^{-1}) \delta \log(2\delta)^{-1} \quad (c \leq \delta \leq \frac{1}{2}).$$

Pour  $h(c)$ , on fait un calcul par *Mathematica 9.0*

$$\max_{0 < c \leq \frac{2}{7} - \varepsilon} h(c) > 0, 1238 \quad (2.7.2)$$

avec  $c \approx 0, 2056$ .

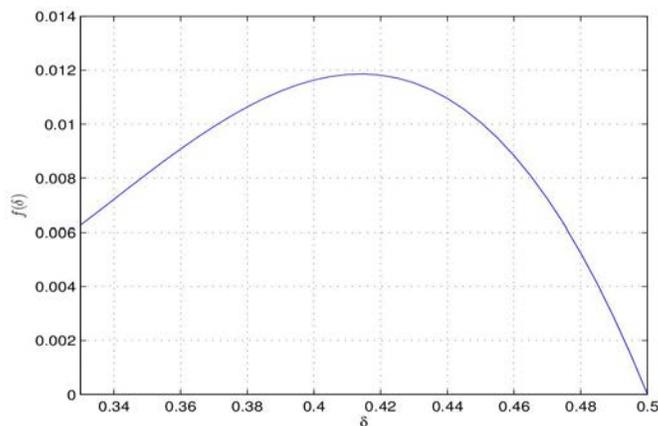
Ainsi, il reste à trouver  $\delta_0 \in [0, 2056, 0, 5[$  tel que  $f(\delta_0)$  soit proche de la valeur maximale de  $f(\delta)$ . Au premier abord, on peut calculer facilement que

$$f'(\frac{1}{2}) < 0 \quad \text{et} \quad f'(\delta) > 0 \quad (\delta \leq \frac{1}{3}).$$

$\delta_0$  est ainsi dans l'intervalle  $(1/3, 1/2)$  et on a

$$f(\delta) = \left( 1 - \log \frac{1}{\delta} + \int_1^{1/\delta-1} \frac{\log t}{t+1} dt \right) \delta \log \frac{1}{2\delta} \quad (\frac{1}{3} \leq \delta \leq \frac{1}{2}).$$

Le graphe de  $f(\delta)$  sur  $[1/3, 1/2]$  est le suivant

FIGURE 2.1 – graphe de  $\delta \rightarrow f(\delta)$  sur  $[1/3, 1/2]$ 

À l'aide de *Mathematica 9.0* on peut calculer que

$$\max_{0,2056 \leq \delta \leq 0,5} f(\delta) = f(\delta_0) > 0,0118 \quad (2.7.3)$$

avec  $\delta_0 \approx 0,414$ .

Compte tenu de (2.7.1), (2.7.2) et (2.7.3) on obtient finalement pour  $x \rightarrow \infty$

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n) < P^+(n+1)}} 1 > 0,1238x + 0,0118x = 0,1356x.$$

Cela achève la démonstration du Corollaire 2.1.



# Chapitre 3

## Les plus grands facteurs premiers d'au moins trois entiers consécutifs

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Énoncé des problèmes et des résultats</b>	<b>51</b>
<b>3.2</b>	<b>Lemmes</b>	<b>55</b>
3.2.1	Entiers friables	55
3.2.2	Théorèmes de type Bombieri-Vinogradov	56
<b>3.3</b>	<b>Démonstration du Théorème 3.1</b>	<b>56</b>
3.3.1	Cas des $n$ tels que $P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1)$	56
3.3.2	Cas des $n$ tels que $P^+(n-1) < P^+(n) > P^+(n+1)$	59
<b>3.4</b>	<b>Démonstrations des Théorèmes 3.2 et 3.3</b>	<b>62</b>
3.4.1	Théorème 3.2 : cas des $n$ tels que $P^+(n+j_0) = \min_{1 \leq j \leq k-1} P^+(n+j)$	62
3.4.2	Théorème 3.3 : cas de $n$ tels que $P^+(n+j_0) = \max_{1 \leq j \leq k-1} P^+(n+j)$	64
<b>3.5</b>	<b>Applications du Théorème 3.1 : Démonstrations des Corollaires</b>	
	<b>3.1 et 3.2</b>	<b>65</b>
3.5.1	Démonstration du Corollaire 3.1	65
3.5.2	Démonstration du Corollaire 3.2	66

---

### 3.1 Énoncé des problèmes et des résultats

Dans les Chapitres 1 et 2 ci-dessus, on a étudié les plus grands facteurs premiers de deux entiers consécutifs. Il est naturel de considérer la distribution des plus grands facteurs premiers de trois entiers consécutifs ou plus généralement  $k$  entiers consécutifs avec  $k \geq 3$ . Cependant, ces questions deviennent alors encore plus difficiles et il existe très peu de travaux dessus.

En 1978, Erdős et Pomerance dans un premier temps observent dans leur article [15] que les deux configurations

$$P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1) \tag{3.1.1}$$

et

$$P^+(n-1) < P^+(n) > P^+(n+1) \quad (3.1.2)$$

ont lieu pour une infinité d'entiers  $n$ . En effet, on peut prendre  $n = 2^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  pour (3.1.1) et prendre  $n = p$  pour (3.1.2). Par ailleurs, ils conjecturent qu'elles se produisent pour une proportion positive d'entiers. À part les deux configurations (3.1.1) et (3.1.2), ils démontrent l'existence d'une infinité d'entiers  $n$  satisfaisant

$$P^+(n-1) < P^+(n) < P^+(n+1) \quad (3.1.3)$$

en considérant des entiers  $n$  de la forme  $n = p^{2^{\nu_0}}$  où  $\nu_0$  est un entier positif défini par

$$\nu_0 := \inf \{ \nu : P^+(p^{2^\nu} + 1) > p \}.$$

Finalement, ils remarquent que « On the other hand we cannot find infinitely many  $n$  for which

$$P^+(n-1) > P^+(n) > P^+(n+1), \quad (3.1.4)$$

but perhaps we overlook a simple proof. » En 2001, Balog [1] démontre leur conjecture et obtient pour  $x \rightarrow \infty$

$$|\{n \leq x : P^+(n-1) > P^+(n) > P^+(n+1)\}| \gg x^{1/2}.$$

Son idée consiste à considérer les triplets d'entiers consécutifs de la forme  $(m^2-2, m^2-1, m^2)$  avec  $m \geq 2, m \in \mathbb{N}$ .

Pour trois entiers consécutifs, notre résultat est le suivant.

**Théorème 3.1.** *Pour  $x \rightarrow \infty$ , on a*

$$|\{n \leq x : P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1)\}| > 1,063 \times 10^{-7}x \quad (3.1.5)$$

et

$$|\{n \leq x : P^+(n-1) < P^+(n) > P^+(n+1)\}| > 8,84 \times 10^{-4}x. \quad (3.1.6)$$

Pour la configuration dans (3.1.5), on considère les entiers  $n$   $y$ -friables tels que  $n-1, n+1$  aient tous deux au moins un facteur premier plus grand que  $y$ . Pour (3.1.6), on prend  $n = mp$  avec  $p$  assez grand, le  $m$  permet d'avoir une proportion positive d'entiers  $n$  et  $n-1 = p_1n_1, n+1 = p_2n_2$  où  $p_1, p_2 < p$  et  $p_1, p_2 > x/p$ , de sorte que  $P^+(n-1) < p, P^+(n+1) < p$ . L'idée cruciale dans les deux démonstrations est le système de poids bien adapté que l'on a introduit dans le Chapitre 2 :

$$\omega(n; y, z) := \sum_{\substack{z < p \leq y \\ p|n}} 1.$$

Pour contrôler le terme d'erreur, on utilise des théorèmes de type Bombieri-Vinogradov pour les entiers friables et pour les entiers avec un grand facteur premier.

Pour les plus grands facteurs premiers de plusieurs entiers consécutifs, De Koninck et Doyon ont donné un résultat conditionnel : pour  $x \rightarrow \infty$ , la formule

$$|\{n \leq x : P^+(n+j_0) = \min_{0 \leq j \leq k-1} P^+(n+j)\}| \sim k^{-1}x$$

a lieu sous l'Hypothèse (A) suivante

**Hypothèse (A).** Soit  $k \geq 2$  un entier fixé. Alors pour toute permutation  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  de  $\{0, 1, \dots, k-1\}$ , on a

$$\text{Prob}[P^+(n+a_1) < P^+(n+a_2) < \dots < P^+(n+a_k)] = \frac{1}{k!},$$

c'est-à-dire,

$$\frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n+a_1) < P^+(n+a_2) < \dots < P^+(n+a_k)}} 1 \rightarrow \frac{1}{k!} \quad (3.1.7)$$

pour  $x \rightarrow \infty$ .

Notre méthode analogue à celle du Théorème 3.1 permet d'obtenir une proportion positive inconditionnelle.

**Théorème 3.2.** Soient  $k \geq 3$  un entier et  $j_0 \in \{0, \dots, k-1\}$ . Alors on a

$$|\{n \leq x : P^+(n+j_0) = \min_{0 \leq j \leq k-1} P^+(n+j)\}| \geq \{C_3(k) + o(1)\}x \quad (3.1.8)$$

pour  $x \rightarrow \infty$ , où

$$C_3(k) := \max_{0 < \alpha < \frac{1}{2(k-1)}} \rho\left(\frac{1}{\alpha}\right) \left(\alpha \log \frac{1}{2\alpha(k-1)}\right)^{k-1} > 0. \quad (3.1.9)$$

Nous avons un résultat similaire pour le *max* à la place de *min*.

**Théorème 3.3.** Soient  $k \geq 3$  un entier et  $j_0 \in \{0, \dots, k-1\}$ . Alors on a

$$|\{n \leq x : P^+(n+j_0) = \max_{0 \leq j \leq k-1} P^+(n+j)\}| \geq \{C_4(k) + o(1)\}x \quad (3.1.10)$$

pour  $x \rightarrow \infty$ , où

$$C_4(k) := \max_{\substack{\frac{2k-2}{2k-1} < \alpha < 1 \\ 1-\alpha \leq \beta < \gamma < \frac{\alpha}{2(k-1)}}} \left(\beta \log \frac{\gamma}{\beta}\right)^{k-1} \log \frac{1}{\alpha} > 0. \quad (3.1.11)$$

Comme application du Théorème 3.1, on peut estimer la distance entre les entiers friables  $\delta(n)$ , introduite par De Koninck et Doyon dans [8] :

$$\delta(n) := \min_{\substack{m \in \mathbb{N}^* \setminus \{n\} \\ P^+(m) \leq P^+(n)}} |m - n|. \quad (3.1.12)$$

Ils ont montré sous l'Hypothèse (A) la formule asymptotique

$$\sum_{n \leq x} \delta(n)^{-1} \sim (4 \log 2 - 2)x$$

pour  $x \rightarrow \infty$ . De plus, le Théorème 10 de [8] entraîne la minoration inconditionnelle

$$\sum_{n \leq x} \delta(n)^{-1} > \frac{2}{3}x + o(x) \quad (3.1.13)$$

pour  $x \rightarrow \infty$ .

Nous pouvons obtenir grâce au Théorème 3.1, une majoration inconditionnelle.

**Corollaire 3.1.** *Pour  $x \rightarrow \infty$ , on a*

$$\sum_{n \leq x} \delta(n)^{-1} < (1 - 5,315 \times 10^{-8})x. \quad (3.1.14)$$

**Remarque 3.1.** On peut très légèrement améliorer ce résultat (voir (3.5.1)) en appliquant le Théorème 3.3 à la place du Théorème 3.1. Mais le gain est minime, on ne calcule pas ici la valeur numérique.

Par analogie à  $\delta(n)$ , nous proposons étudier la zone de  $P^+(n)$ –friabilité autour de  $n$

$$\delta_*(n) := \min_{\substack{m \in \mathbb{N}^* \setminus \{n\} \\ P^+(m) \geq P^+(n)}} |n - m|.$$

En adaptant la démonstration du Théorème 10 de [8], on peut facilement montrer que pour  $x \rightarrow \infty$

$$\sum_{n \leq x} \delta_*(n)^{-1} > \left\{ \frac{2}{3} + o(1) \right\} x. \quad (3.1.15)$$

De façon similaire à la démonstration du Corollaire 3.1, on peut obtenir une majoration pour  $\delta_*(n)$  en utilisant l'inégalité (3.1.6) du Théorème 3.1.

**Corollaire 3.1\*.** *Pour  $x \rightarrow \infty$ , on a*

$$\sum_{n \leq x} \delta_*(n)^{-1} < (1 - 4,42 \times 10^{-4})x.$$

Balog [1] a remarqué pour  $x \rightarrow \infty$  :

$$\begin{aligned} |\{n \leq x : P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1)\}| &\leq \frac{1}{2}x, \\ |\{n \leq x : P^+(n-1) < P^+(n) > P^+(n+1)\}| &\leq \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

On peut obtenir respectivement une majoration des deux autres cas de figure pour les triplets d'entiers consécutifs en utilisant les minoration (3.1.13) et (3.1.15), ou en combinant le Théorème 3.1 avec le Corollaire 2.1 du Chapitre 2 sur les plus grands facteurs premiers de deux entiers consécutifs.

**Corollaire 3.2.** *Pour  $x \rightarrow \infty$ , on a*

$$\begin{aligned} |\{n \leq x : P^+(n-1) < P^+(n) < P^+(n+1)\}| &< 0,8636x, \\ |\{n \leq x : P^+(n-1) > P^+(n) > P^+(n+1)\}| &< 0,8636x. \end{aligned}$$

## 3.2 Lemmes

### 3.2.1 Entiers friables

Dans ce paragraphe, nous énonçons deux lemmes sur les entiers friables qui serviront dans la démonstration du Théorème 3.1. Le premier est en fait le Lemme 2.3 du Chapitre 2. Nous le réécrivons ici pour des commodité de lecture. Rappelons les définitions de  $S(x, y)$  et  $\Psi(x, y)$

$$S(x, y) := \{n \leq x : P^+(n) \leq y\}, \quad \Psi(x, y) := |S(x, y)|, \quad (3.2.1)$$

alors nous avons

**Lemme 3.1.** [28, Hildebrand] *Soit  $\varepsilon > 0$ . Alors*

$$\Psi(x, y) = x\rho(u) \left\{ 1 + O_\varepsilon \left( \frac{\log(u+1)}{\log y} \right) \right\}$$

*uniformément pour*

$$(H_\varepsilon) \quad x \geq x_0(\varepsilon), \quad \exp\{(\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}\} \leq y \leq x,$$

*où  $u = \log x / \log y$  et  $\rho(u)$  est la fonction de Dickman.*

Posons

$$\Psi(x, y; a, q) := \sum_{\substack{n \in S(x, y) \\ n \equiv a \pmod{q}}} 1, \quad \Psi_q(x, y) := \sum_{\substack{n \in S(x, y) \\ (n, q) = 1}} 1. \quad (3.2.2)$$

Le deuxième lemme est dû à Fouvry et Tenenbaum [20, Théorème 1].

**Lemme 3.2.** *Soit  $\varepsilon > 0$ . Alors on a*

$$\Psi_q(x, y) = \frac{\varphi(q)}{q} \Psi(x, y) \left\{ 1 + O \left( \frac{\log_2(qy) \log_2 x}{\log y} \right) \right\}$$

*uniformément pour*

$$(H_\varepsilon) \quad x \geq x_0(\varepsilon), \quad \exp\{(\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}\} \leq y \leq x$$

*et*

$$(Q_\varepsilon) \quad \log_2(q+2) \leq \left( \frac{\log y}{\log(u+1)} \right)^{1-\varepsilon}.$$

Pour l'évaluation de la fonction  $\Psi_q(x, y)$ , on peut aussi voir les travaux de La Bretèche et Tenenbaum [11, Corollary 2.2] avec un domaine plus vaste en  $y$ .

### 3.2.2 Théorèmes de type Bombieri-Vinogradov

Dans les applications du crible, on a souvent besoin, pour contrôler le terme d'erreur, d'informations sur la répartition en moyenne des nombres premiers ou d'autres ensembles de nombres donnés dans les progressions arithmétiques. Les théorèmes de type Bombieri-Vinogradov, jouent un rôle très important dans ces problèmes. Le premier lemme est le théorème de Bombieri-Vinogradov dû à Bombieri [3] et Vinogradov [60].

Pour  $q \in \mathbb{N}^*$  et  $(a, q) = 1$ , on définit  $\pi(x; a, q)$  la fonction de compte des nombres premiers dans les progressions arithmétiques

$$\pi(x; a, q) := \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \pmod{q}}} 1, \quad (3.2.3)$$

et  $\pi(x)$  la fonction de compte des nombres premiers inférieurs à  $x$ . Alors on a

**Lemme 3.3** (Bombieri-Vinogradov). *Pour tout  $A > 0$ , il existe une constante positive  $B = B(A) > 0$  telle que*

$$\sum_{q \leq Q} \max_{(a, q) = 1} \max_{y \leq x} \left| \pi(y; a, q) - \frac{\pi(y)}{\varphi(q)} \right| \ll \frac{x}{(\log x)^A}$$

où  $Q = x^{1/2}/(\log x)^B$  et la constante implicite ne dépend que de  $A$ .

Le deuxième lemme est le théorème de Bombieri-Vinogradov pour des entiers friables.

**Lemme 3.4.** *Pour tout  $A > 0$ , il existe une constante  $B = B(A) > 0$  telle que l'on ait*

$$\sum_{q \leq Q} \max_{z \leq x} \max_{(a, q) = 1} \left| \Psi(z, y; a, q) - \frac{\Psi_q(z, y)}{\varphi(q)} \right| \ll \frac{x}{(\log x)^A} \quad (3.2.4)$$

uniformément pour  $Q = x^{1/2}/(\log x)^B$  et  $x \geq y \geq 2$ . Les fonctions  $\Psi(x, y; a, q)$  et  $\Psi_q(x, y)$  sont définies par (3.2.2).

La formule (3.2.4) a été exposée dans le Lemme 2.6, Chapitre 2, démontrée par Fouvry et Tenenbaum [20]. Wolke [64] annonce aussi ce résultat dans l'article sur le théorème de type Bombieri-Vinogradov pour les entiers criblés. Pour des commodités de lecture, on la réécrit ici.

## 3.3 Démonstration du Théorème 3.1

### 3.3.1 Cas des $n$ tels que $P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1)$

Soit  $y = x^\alpha$  où  $0 < \alpha < \frac{1}{4}$  est un paramètre à choisir plus tard. Il est clair que

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1)}} 1 \geq \sum_{\substack{n \in S(x, y) \\ (n \pm 1, P(x, y)) > 1}} 1, \quad (3.3.1)$$

où  $S(x, y)$  est défini par (3.2.1) et  $P(x, y)$  est défini par

$$P(x, y) := \prod_{y < p \leq x} p. \quad (3.3.2)$$

Pour  $n \leq x$  et  $z < y$ , on rappelle la définition du système de poids bien adapté

$$\omega(n; y, z) := \sum_{\substack{z < p \leq y \\ p|n}} 1 \leq \frac{\log x}{\log z}, \quad (3.3.3)$$

ainsi que la relation

$$\left(\frac{\log x}{\log z}\right)^{-1} \omega(n; y, z) \begin{cases} \leq 1 & \text{si } (n, P(z, y)) > 1, \\ = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.3.4)$$

On peut donc détecter les conditions  $(n \pm 1, P(x, y)) > 1$  dans la formule (3.3.1) par (3.3.4) :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1)}} 1 &\geq \sum_{n \in S(x, y)} \frac{\omega(n-1; x, y)}{\left(\frac{\log x}{\log y}\right)} \cdot \frac{\omega(n+1; x, y)}{\left(\frac{\log x}{\log y}\right)} \\ &\geq \alpha^2 \sum_{\substack{y < p_1 \leq x \\ p_1 p_2 \leq x^{1/2}/(\log x)^B \\ p_1 \neq p_2}} \sum_{\substack{y < p_2 \leq x \\ n \equiv 1 \pmod{p_1} \\ n \equiv -1 \pmod{p_2}}} \sum_{n \in S(x, y)} 1 \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

où  $B$  est une constante convenable. Pour la somme intérieure du membre de droite, on utilise le théorème des restes chinois. Il existe un entier  $a(p_1, p_2)$  dépendant de  $p_1, p_2$  tel que les congruences  $n \equiv 1 \pmod{p_1}$ ,  $n \equiv -1 \pmod{p_2}$  soient équivalentes à  $n \equiv a(p_1, p_2) \pmod{p_1 p_2}$ . Pour des commodités d'écriture, on écrit  $a = a(p_1, p_2)$  dans la suite. On en déduit donc

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1)}} 1 &\geq \alpha^2 \sum_{\substack{y < p_1 \leq x \\ p_1 p_2 \leq x^{1/2}/(\log x)^B \\ p_1 \neq p_2}} \sum_{\substack{y < p_2 \leq x \\ n \equiv a \pmod{p_1 p_2}}} \sum_{n \in S(x, y)} 1 \\ &= \alpha^2 (\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2), \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

où (avec la notation (3.2.2))

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &:= \sum_{\substack{y < p_1 \leq x \\ p_1 p_2 \leq x^{1/2}/(\log x)^B \\ p_1 \neq p_2}} \sum_{y < p_2 \leq x} \frac{\Psi_{p_1 p_2}(x, y)}{\varphi(p_1 p_2)}, \\ \mathcal{S}_2 &:= \sum_{\substack{y < p_1 \leq x \\ p_1 p_2 \leq x^{1/2}/(\log x)^B \\ p_1 \neq p_2}} \sum_{y < p_2 \leq x} \left( \Psi(x, y; a, p_1 p_2) - \frac{\Psi_{p_1 p_2}(x, y)}{\varphi(p_1 p_2)} \right). \end{aligned}$$

Pour  $\mathcal{S}_2$ , en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\mathcal{S}_2 \leq \sum_{q \leq x^{1/2}/(\log x)^B} \tau(q) \left| \Psi(x, y; a, q) - \frac{\Psi_q(x, y)}{\varphi(q)} \right| \leq (\mathcal{S}_{21} \mathcal{S}_{22})^{1/2},$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{21} &:= \sum_{q \leq x^{1/2}/(\log x)^B} \left| \Psi(x, y; a, q) - \frac{\Psi_q(x, y)}{\varphi(q)} \right|, \\ \mathcal{S}_{22} &:= \sum_{\substack{q \leq x^{1/2}/(\log x)^B \\ \Omega(q) \leq 2}} \tau(q)^2 \left| \Psi(x, y; a, q) - \frac{\Psi_q(x, y)}{\varphi(q)} \right|, \end{aligned}$$

et  $\Omega(n)$  est la fonction dénombrant le nombre total des facteurs premiers de  $n$  comptés avec leur ordre de multiplicité.

Pour  $\mathcal{S}_{22}$  on utilise une majoration triviale :

$$\Psi(x, y; a, q) + \frac{\Psi_q(x, y)}{\varphi(q)} \ll \frac{x}{q} + 1,$$

et pour  $\mathcal{S}_{21}$  on applique le Lemme 3.4. Cela donne

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 &\ll \left( \frac{x}{(\log x)^A} \right)^{1/2} \left\{ \sum_{q \leq x^{1/2}} \tau(q)^2 \left( \frac{x}{q} + 1 \right) \right\}^{1/2} \\ &\ll \frac{x}{(\log x)^{A/2-3}}. \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Dans  $\mathcal{S}_1$  on peut retirer la condition  $p_1 \neq p_2$  au prix d'une erreur inférieure à :

$$\sum_{y < p \leq x^{1/4}} \frac{\Psi_{p^2}(x, y)}{\varphi(p^2)} \ll \sum_{y < p \leq x^{1/4}} \frac{x}{p^2} \ll \frac{x^{1-\alpha}}{\log x}.$$

On évalue ensuite  $\mathcal{S}_1$  à l'aide du Lemme 3.2 sur les entiers friables.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= \sum_{\substack{y < p_1 \leq x \\ p_1 p_2 \leq x^{1/2}/(\log x)^B}} \sum_{y < p_2 \leq x} \frac{\Psi_{p_1 p_2}(x, y)}{\varphi(p_1 p_2)} + o(x) \\ &= x \rho \left( \frac{\log x}{\log y} \right) \sum_{y < p_1 \leq x^{1/2}/y(\log x)^B} \frac{1}{p_1} \sum_{y < p_2 \leq x^{1/2}/p_1(\log x)^B} \frac{1}{p_2} + o(x) \\ &= x \rho \left( \frac{1}{\alpha} \right) \sum_{y < p_1 \leq x^{1/2}/y(\log x)^B} \frac{1}{p_1} \log \left( \frac{\frac{1}{2} \log x - \log p_1}{\log y} \right) + o(x), \end{aligned}$$

où on a appliqué la formule suivante

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log_2 x + c_1 + O \left( \frac{1}{\log x} \right)$$

avec  $c_1 \approx 0,261497$  la constante de Meissel-Mertens. Par une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_1 &= x\rho\left(\frac{1}{\alpha}\right) \int_y^{x^{1/2}/(y(\log x)^B)} \log\left(\frac{\frac{1}{2}\log x - \log t}{\log y}\right) d\sum_{p \leq t} \frac{1}{p} + o(x) \\
&= x\rho\left(\frac{1}{\alpha}\right) \int_y^{x^{1/2}/(y(\log x)^B)} \log\left(\frac{\frac{1}{2} - \frac{\log t}{\log x}}{\alpha}\right) \frac{dt}{t \log t} + o(x) \\
&= x\rho\left(\frac{1}{\alpha}\right) \alpha \int_1^{1/(2\alpha)-1} \frac{\log t}{\frac{1}{2} - \alpha t} dt + o(x).
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

En reportant (3.3.8) et (3.3.7) dans (3.3.6), on déduit que

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1)}} 1 \geq \left\{ \rho\left(\frac{1}{\alpha}\right) \alpha^3 \int_1^{1/(2\alpha)-1} \frac{\log t}{\frac{1}{2} - \alpha t} dt + o(1) \right\} x.$$

À l'aide de *Mathematica 9.0*, on peut trouver la constante  $1,063 \times 10^{-7}$  avec  $\alpha \approx \frac{1}{4,6}$ . La preuve de la minoration (3.1.5) dans le Théorème 3.1 est complète.

### 3.3.2 Cas des $n$ tels que $P^+(n-1) < P^+(n) > P^+(n+1)$

Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  tels que

$$\frac{1}{2} < \alpha \leq 1, \quad 1 - \alpha \leq \beta < \gamma < \frac{1}{3} \tag{3.3.9}$$

trois paramètres à choisir plus tard. Étant donné un entier  $m$  et deux nombres premiers distincts  $p_1$  et  $p_2$  vérifiant

$$1 \leq m \leq x^{1-\alpha}, \quad x^\beta < p_1, p_2 \leq x^\gamma, \tag{3.3.10}$$

on considère le système d'équations de congruences :

$$mp - 1 \equiv 0 \pmod{p_1}, \quad mp + 1 \equiv 0 \pmod{p_2}. \tag{3.3.11}$$

On remarque que les conditions (3.3.9) et (3.3.10) garantissent que  $(p_1 p_2, m) = 1$  et  $(m, p) \rightarrow mp$  est injectif. D'après le théorème des restes chinois, il existe  $b < p_1 p_2$  (dépendant de  $m$ ) tel que

$$p \equiv b \pmod{p_1 p_2}. \tag{3.3.12}$$

Pour ces  $m$  et  $p > x^\alpha$ , on peut donc déduire que

$$P^+(mp - 1) \leq \max\{p_1, x/p_1\} \leq \max\{x^{1/3}, x^{1-\beta}\} \leq x^\alpha < p.$$

De même,

$$P^+(mp + 1) \leq \max\{p_2, x/p_2\} < p.$$

Ce qui implique

$$P^+(mp-1) < P^+(mp) > P^+(mp+1).$$

Ainsi, en reprenant les poids  $\omega(n; y, z)$  définis par (3.3.3), on a d'après (3.3.4),

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n-1) < P^+(n) > P^+(n+1) \\ x^\alpha < P^+(n) \leq x}} 1 &\geq \sum_{m \leq x^{1-\alpha}} \sum_{x^\alpha < p \leq x/m} \frac{\omega(mp-1; x^\gamma, x^\beta)}{\left(\frac{\log x}{\log x^\beta}\right)} \cdot \frac{\omega(mp+1; x^\gamma, x^\beta)}{\left(\frac{\log x}{\log x^\beta}\right)} \\ &= \beta^2 \sum_{m \leq x^{1-\alpha}} \sum_{x^\alpha < p \leq x/m} \sum_{\substack{x^\beta < p_1 \leq x^\gamma \\ mp-1 \equiv 0 \pmod{p_1}}} \sum_{\substack{x^\beta < p_2 \leq x^\gamma \\ mp+1 \equiv 0 \pmod{p_2}}} 1 \\ &= \beta^2 \sum_{m \leq x^{1-\alpha}} \sum_{\substack{x^\beta < p_1, p_2 \leq x^\gamma \\ p_1 \neq p_2}} \sum_{\substack{x^\alpha < p \leq x/m \\ mp-1 \equiv 0 \pmod{p_1} \\ mp+1 \equiv 0 \pmod{p_2}}} 1. \end{aligned}$$

D'après (3.3.11) et (3.3.12), on a donc

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n-1) < P^+(n) > P^+(n+1) \\ x^\alpha < P^+(n) \leq x}} 1 &\geq \beta^2 \sum_{m \leq x^{1-\alpha}} \sum_{\substack{x^\beta < p_1, p_2 \leq x^\gamma \\ p_1 \neq p_2}} \sum_{\substack{x^\alpha < p \leq x/m \\ p \equiv b \pmod{p_1 p_2}}} 1 \\ &= \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2, \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

où

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_1 &:= \beta^2 \sum_{m \leq x^{1-\alpha}} \sum_{\substack{x^\beta < p_1, p_2 \leq x^\gamma \\ p_1 \neq p_2}} \frac{\pi(x/m) - \pi(x^\alpha)}{\varphi(p_1 p_2)}, \\ \mathbb{S}_2 &:= \beta^2 \sum_{m \leq x^{1-\alpha}} \sum_{\substack{x^\beta < p_1, p_2 \leq x^\gamma \\ p_1 \neq p_2}} \left\{ \left( \pi(x/m; b, p_1 p_2) - \frac{\pi(x/m)}{\varphi(p_1 p_2)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \pi(x^\alpha; b, p_1 p_2) - \frac{\pi(x^\alpha)}{\varphi(p_1 p_2)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

On majore  $\mathbb{S}_2$  en utilisant le Lemme 3.3, i.e. le théorème de Bombieri-Vinogradov. On impose une condition sur  $\gamma$  et  $\alpha$  :

$$2\gamma < \frac{\alpha}{2}. \tag{3.3.14}$$

En effet, on peut étendre la condition (3.3.14) à  $2\gamma < \frac{1}{2}$  en utilisant le théorème de Bombieri-Vinogradov pour la convolution  $\Lambda * \mathbf{1}_{[1, x^{1-\alpha}]}$ , où

$$\mathbf{1}_{[1, x^{1-\alpha}]}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq n \leq x^{1-\alpha}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

grâce à une remarque du rapporteur anonyme de l'article [62]. Un même argument est aussi valable pour la condition (3.4.4) ci-dessous. On ne détermine pas ici un gain quantitatif, car il est petit. On en déduit, en combinant les conditions (3.3.9) et (3.3.14)

$$\frac{4}{5} < \alpha < 1, \quad 1 - \alpha < \beta < \gamma < \frac{\alpha}{4}. \quad (3.3.15)$$

En procédant de manière similaire à l'estimation de  $\mathbb{S}_2$  dans (3.3.7), c'est-à-dire, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le théorème de Bombieri-Vinogradov, on obtient pour tout  $A > 0$

$$\mathbb{S}_2 \ll \frac{x}{(\log x)^A}. \quad (3.3.16)$$

Puis pour  $\mathbb{S}_1$ , on utilise le théorème des nombres premiers :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_1 &= \beta^2 \sum_{m \leq x^{1-\alpha}} \left( \pi\left(\frac{x}{m}\right) - \pi(x^\alpha) \right) \sum_{\substack{x^\beta < p_1, p_2 \leq x^\gamma \\ p_1 \neq p_2}} \frac{1}{(p_1 - 1)(p_2 - 1)} \\ &= \beta^2 \sum_{m \leq x^{1-\alpha}} \frac{x + o(x)}{m \log\left(\frac{x}{m}\right)} \sum_{x^\beta < p_1, p_2 \leq x^\gamma} \frac{1}{p_1 p_2} + O\left(\frac{x^{1-\beta}}{\log x} + \sum_{m \leq x^{1-\alpha}} \frac{x^\alpha}{\log x}\right) \\ &= x \left( \beta \log \frac{\gamma}{\beta} \right)^2 \int_1^{x^{1-\alpha}} \frac{dt}{t(\log x - \log t)} + o(x) \\ &= x \left( \beta \log \frac{\gamma}{\beta} \right)^2 \log \frac{1}{\alpha} + o(x). \end{aligned}$$

À l'aide de *Mathematica 9.0*, on obtient

$$\tilde{s}_1 := \max_{\substack{\frac{4}{5} < \alpha < 1 \\ 1-\alpha < \beta < \gamma < \alpha/4}} \left( \beta \log \frac{\gamma}{\beta} \right)^2 \log \frac{1}{\alpha} = \left( \beta' \log \frac{\gamma'}{\beta'} \right)^2 \log \frac{1}{\alpha'} > 7 \times 10^{-4}$$

avec

$$\alpha' \approx 0,895, \quad \beta' \approx 0,105, \quad \gamma' \approx 0,22375.$$

Ainsi, on obtient

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n-1) < P^+(n) > P^+(n+1) \\ x^{0,895} < P^+(n) \leq x}} 1 > 7 \times 10^{-4} x. \quad (3.3.17)$$

De manière similaire, on peut montrer que

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n-1) < P^+(n) > P^+(n+1) \\ x^{0,858} < P^+(n) \leq x^{0,895}}} 1 > 1,44 \times 10^{-4} x \quad (3.3.18)$$

et

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n-1) < P^+(n) > P^+(n+1) \\ x^{0,835} < P^+(n) \leq x^{0,858}}} 1 > 4 \times 10^{-5}x. \quad (3.3.19)$$

En combinant les minorations (3.3.17), (3.3.18) et (3.3.19), on obtient finalement l'estimation

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n-1) < P^+(n) > P^+(n+1) \\ x^{0,835} < P^+(n) \leq x}} 1 > 8,84 \times 10^{-4}x,$$

ce qui implique le résultat.

## 3.4 Démonstrations des Théorèmes 3.2 et 3.3

### 3.4.1 Théorème 3.2 : cas des $n$ tels que $P^+(n + j_0) = \min_{1 \leq j \leq k-1} P^+(n + j)$

Sans perte de la généralité, on peut supposer que  $j_0 = 0$ , c'est-à-dire,

$$P^+(n) = \min_{0 \leq j \leq k-1} P^+(n + j).$$

Soient  $y := x^\alpha$  avec

$$0 < \alpha < \frac{1}{2(k-1)}.$$

La méthode est analogue à la preuve de (3.1.5). On considère les entiers  $y$ -friables  $n$  tels que  $P^+(n + j) > y$  pour  $1 \leq j \leq k-1$  :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n) = \min_{0 \leq j \leq k-1} P^+(n+j)}} 1 &\geq \sum_{\substack{n \in S(x, y) \\ (n+j, P(x, y)) > 1 \\ \forall 1 \leq j \leq k-1}} 1 \\ &\geq \sum_{n \in S(x, y)} \frac{\omega(n+1; x, y)}{\left(\frac{\log x}{\log y}\right)} \cdots \frac{\omega(n+k-1; x, y)}{\left(\frac{\log x}{\log y}\right)} \\ &\geq \alpha^{k-1} \sum_{\substack{y < p_1 \leq Y \\ p_i \neq p_j \ (i \neq j)}} \cdots \sum_{\substack{y < p_{j-1} \leq Y \\ p_i \neq p_j \ (i \neq j)}} \sum_{\substack{n \in S(x, y) \\ n \equiv -j \pmod{p_j} \\ j=1, 2, \dots, k-1}} 1, \end{aligned}$$

où  $Y := (x^{1/2}/(\log x)^B)^{1/(k-1)}$ .

D'après le théorème des restes chinois, il existe un entier  $a$  tel que les congruences de la somme intérieure du membre de droite s'écrivent sous la forme  $n \equiv a \pmod{p_1 \cdots p_{k-1}}$  car

$p_1, \dots, p_{k-1}$  sont premiers entre eux. On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n) = \min_{0 \leq j \leq k-1} P^+(n+j)}} 1 &\geq \alpha^{J-1} \sum_{\substack{y < p_1 \leq Y \\ p_i \neq p_j \ (i \neq j)}} \cdots \sum_{\substack{y < p_{J-1} \leq Y \\ p_i \neq p_j \ (i \neq j)}} \sum_{\substack{n \in \mathcal{S}(x, y) \\ n \equiv a \pmod{p_1 \cdots p_{k-1}}}} 1 \\ &= \alpha^{J-1} (\mathcal{S}_3 + \mathcal{S}_4), \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_3 &:= \sum_{\substack{y < p_1 \leq Y \\ p_i \neq p_j \ (i \neq j)}} \cdots \sum_{\substack{y < p_{k-1} \leq Y \\ p_i \neq p_j \ (i \neq j)}} \frac{\Psi_{p_1 \cdots p_{k-1}}(x, y)}{\varphi(p_1 \cdots p_{k-1})}, \\ \mathcal{S}_4 &:= \sum_{\substack{y < p_1 \leq Y \\ p_i \neq p_j \ (i \neq j)}} \cdots \sum_{\substack{y < p_{k-1} \leq Y \\ p_i \neq p_j \ (i \neq j)}} \left( \Psi(x, y; a, p_1 \cdots p_{k-1}) - \frac{\Psi_{p_1 \cdots p_{k-1}}(x, y)}{\varphi(p_1 \cdots p_{k-1})} \right). \end{aligned}$$

La somme  $\mathcal{S}_4$  se majore de la même façon que  $\mathcal{S}_2$ , en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le Lemme 3.4 :

$$\mathcal{S}_4 \ll x(\log x)^{-A}. \quad (3.4.2)$$

Pour  $\mathcal{S}_3$ , la condition  $p_i \neq p_j$  ( $i \neq j$ ) peut être supprimée, car la contribution des puissances de nombres premiers est négligeable (puisque tous les  $p_j > y$ ). On a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_3 &= x\rho\left(\frac{1}{\alpha}\right) \sum_{y_1 < p_1 \leq Y_1} \frac{1}{p_1} \cdots \sum_{y_{k-1} < p_{k-1} \leq Y_{k-1}} \frac{1}{p_{k-1}} + o(x) \\ &= x\rho\left(\frac{1}{\alpha}\right) \left(\log \frac{1}{2\alpha(k-1)}\right)^{k-1} + o(x). \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

On peut donc déduire que, par (3.4.1) (3.4.2) et (3.4.3)

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n) = \min_{0 \leq j \leq k-1} P^+(n+j)}} 1 \geq \{f(k, \alpha)x + o(1)\}x$$

où

$$f(k, \alpha) := \rho\left(\frac{1}{\alpha}\right) \left(\alpha \log \frac{1}{2\alpha(k-1)}\right)^{k-1}.$$

La fonction  $\alpha \mapsto f(k, \alpha)$  est continue et strictement positive sur  $]0, \frac{1}{2(k-1)}[$  et

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} f(k, \alpha) = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow (2(k-1))^{-1-}} f(k, \alpha) = 0.$$

Il existe donc un  $\alpha_0 = \alpha_0(k) \in ]0, \frac{1}{2(k-1)}[$  tel que

$$C_3(k) := \max_{0 < \alpha < \frac{1}{2(k-1)}} f(k, \alpha) = f(k, \alpha_0) > 0,$$

ce qui achève la démonstration du Théorème 3.2.

### 3.4.2 Théorème 3.3 : cas de $n$ tels que $P^+(n + j_0) = \max_{1 \leq j \leq k-1} P^+(n + j)$

Comme (3.1.5) du Théorème 3.1 et le Théorème 3.2, la démonstration du Théorème 3.3 suit le même fil que celle de (3.1.6) du Théorème 3.1.

Pour  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \geq 3$ , on peut supposer, sans perte de généralité, que  $j_0 = 0$ , i.e.

$$P^+(n) = \max_{0 \leq j \leq k-1} P^+(n + j).$$

Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  tels que

$$\frac{2k-2}{2k-1} < \alpha < 1 \quad \text{et} \quad 1 - \alpha \leq \beta < \gamma < \frac{\alpha}{2(k-1)} \quad (3.4.4)$$

trois paramètres à choisir plus tard. Étant donnés un entier  $m$  et  $k-1$  nombres premiers distincts  $p_1, \dots, p_{k-1}$  vérifiant

$$1 \leq m \leq x^{1-\alpha} \quad \text{et} \quad x^\beta < p_1, p_2, \dots, p_{k-1} \leq x^\gamma, \quad (3.4.5)$$

on considère le système de congruences :

$$\begin{aligned} mp + 1 &\equiv 0 \pmod{p_1}, \\ mp + 2 &\equiv 0 \pmod{p_2}, \\ &\vdots \\ mp + k - 1 &\equiv 0 \pmod{p_{k-1}}. \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

En remarquant que la condition (3.4.4) garantit que  $p_j \nmid m$  pour  $1 \leq j \leq k-1$ , par le théorème chinois et (3.4.6), il existe  $b < p_1 p_2 \cdots p_{k-1}$  tel que le système (3.4.6) soit équivalent à

$$p \equiv b \pmod{p_1 p_2 \cdots p_{k-1}}.$$

Pour ces  $m$  et  $p > x^\alpha$ , il est facile de voir que

$$P^+(mp) = \max_{0 \leq j \leq k-1} P^+(mp + j).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n) = \max_{0 \leq j \leq k-1} P^+(n+j)}} 1 &\geq \sum_{m \leq x^{1-\alpha}} \sum_{x^\alpha < p \leq x/m} \prod_{1 \leq j \leq k-1} \frac{\omega(mp + j; x^\gamma, x^\beta)}{\left(\frac{\log x}{\log x^\beta}\right)} \\ &= \beta^{k-1} \sum_{m \leq x^{1-\alpha}} \sum_{\substack{x^\beta < p_1, \dots, p_{k-1} \leq x^\gamma \\ p_1, \dots, p_{k-1} \text{ sont distincts}}} \sum_{\substack{x^\alpha < p \leq x/m \\ p \equiv b \pmod{p_1 p_2 \cdots p_{k-1}}}} 1. \end{aligned}$$

Comme pour (3.4.3), la condition que  $p_1, \dots, p_{k-1}$  soient distincts peut être supprimée puisque tous les  $p_j > x^\beta$ . En remarquant que  $p_1 \cdots p_{k-1} \leq x^{\alpha/2}$ , on peut appliquer le théorème de Bombieri-Vinogradov

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n) = \max_{0 \leq j \leq k-1} P^+(n+j)}} 1 &\geq \beta^{k-1} \sum_{m \leq x^{1-\alpha}} \sum_{x^\beta < p_1, \dots, p_{k-1} \leq x^\gamma} \frac{\pi(x/m) - \pi(x^\alpha)}{\varphi(p_1 p_2 \cdots p_{k-1})} + O\left(\frac{x}{(\log x)^A}\right) \\ &= x \left(\beta \log \frac{\gamma}{\beta}\right)^{k-1} \log \frac{1}{\alpha} + o(x). \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

Il est clair que la fonction continue  $(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto (\beta \log \frac{\gamma}{\beta})^{k-1} \log \frac{1}{\alpha}$  est strictement positive et on peut prendre

$$C_4(k) := \max_{(\alpha, \beta, \gamma) \text{ vérifient (3.4.4)}} \left(\beta \log \frac{\gamma}{\beta}\right)^{k-1} \log \frac{1}{\alpha} > 0,$$

ce qui achève la démonstration du Théorème 3.3.

## 3.5 Applications du Théorème 3.1 : Démonstrations des Corollaires 3.1 et 3.2

### 3.5.1 Démonstration du Corollaire 3.1

En remarquant que

$$P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1) \Rightarrow \delta(n) \geq 2,$$

le Théorème 3.1 nous permet de déduire que

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \delta(n)^{-1} &= \sum_{\substack{n \leq x \\ \text{“}P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1)\text{” n’a pas lieu}}} \delta(n)^{-1} + \sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1)}} \delta(n)^{-1} \\ &\leq \sum_{\substack{n \leq x \\ \text{“}P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1)\text{” n’a pas lieu}}} 1 + \sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1)}} \frac{1}{2} \\ &= x - \sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1)}} \frac{1}{2} \\ &\leq (1 - 5,315 \times 10^{-8})x. \end{aligned}$$

On peut obtenir une meilleure majoration en utilisant le Théorème 3.3. Pour  $j \geq 1$ , on note  $C_j$  l’ensemble des *creux* d’ordre  $j$  :

$$C_j := C(x; j) = \{n \leq x : P^+(n) < P^+(n+i) \text{ pour tous } 1 \leq |i| \leq j\},$$

et pour  $C_0$ , on prend  $C_0 = (C_1)^c$ , le complémentaire de  $C_1$ . Alors on a pour tout entier  $J \geq 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} \delta(n)^{-1} &= \sum_{n \in C_0} \delta(n)^{-1} + \sum_{n \in C_1} \delta(n)^{-1} \\
&= \sum_{n \in C_0} \delta(n)^{-1} + \sum_{n \in C_1 \setminus C_2} \delta(n)^{-1} + \sum_{n \in C_2} \delta(n)^{-1} \\
&= \sum_{n \in C_0} \delta(n)^{-1} + \sum_{j=2}^J \sum_{n \in C_{j-1} \setminus C_j} \delta(n)^{-1} + \sum_{n \in C_J} \delta(n)^{-1} \\
&\leq \sum_{n \notin C_1} 1 + \sum_{j=2}^J \frac{1}{j} (|C_{j-1}| - |C_j|) + \frac{C_J}{J+1} \\
&\leq x - \sum_{j=1}^J |C_j| \left( \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right).
\end{aligned}$$

Puis, on applique la minoration de  $|C_j|$ ,  $j \geq 2$  du Théorème 3.2 et la minoration de  $|C_1|$  du Théorème 3.1, on obtient

$$\sum_{n \leq x} \delta(n)^{-1} \leq x \left\{ 1 - 5,315 \times 10^{-8} - \sum_{j=2}^J C_3(j) \left( \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right) \right\}, \quad (3.5.1)$$

où les  $C_3(j)$  sont les constantes strictement positives définies par (3.1.9). On peut donc obtenir une meilleure majoration pour  $\delta(n)$ . Mais le gain est minime, on ne calcule pas ici la valeur numérique.

La démonstration du Corollaire 1.1\* est analogue. De plus, en utilisant le Théorème 3.3, on peut aussi obtenir un meilleur résultat pour  $\delta_*(n)$  comme (3.5.1) ci-dessus. On ne donne pas ici de détail.

### 3.5.2 Démonstration du Corollaire 3.2

On note pour  $x \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
a_1(x) &:= |\{n \leq x : P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1)\}|, \\
a_2(x) &:= |\{n \leq x : P^+(n-1) < P^+(n) > P^+(n+1)\}|, \\
a_3(x) &:= |\{n \leq x : P^+(n-1) < P^+(n) < P^+(n+1)\}|, \\
a_4(x) &:= |\{n \leq x : P^+(n-1) > P^+(n) > P^+(n+1)\}|,
\end{aligned}$$

où  $0 \leq a_1(x), a_2(x), a_3(x), a_4(x) \leq [x]$ ,  $a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) + a_4(x) = [x]$ .

On a tout d'abord, d'après (2.1.5) du Corollaire 2.1 sur les plus grands facteurs premiers de deux entiers consécutifs dans le Chapitre 2

$$\begin{aligned}
[x] - (a_2(x) + a_3(x)) &= a_1(x) + a_4(x) > 0, 1356x, \\
[x] - (a_2(x) + a_4(x)) &= a_1(x) + a_3(x) > 0, 1356x.
\end{aligned}$$

La minoration de  $a_2(x)$  dans (3.1.6) du Théorème 3.1 permet d'obtenir

$$a_3(x) < (0,8644 - 8,84 \times 10^{-4})x, \quad a_4(x) < (0,8644 - 8,84 \times 10^{-4})x.$$

Ce qui termine la démonstration du Corollaire 3.2.



# Chapitre 4

## Les plus grands facteurs premiers d'entiers consécutifs voisins d'un entier criblé

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Énoncé des problèmes et des résultats</b>	<b>69</b>
<b>4.2</b>	<b>Lemmes</b>	<b>72</b>
4.2.1	Majoration du crible linéaire sans fonction bien factorisable	72
4.2.2	Entiers sans petit ni grand facteur premier	73
4.2.3	Valeurs moyennes criblées de certaines fonctions arithmétiques	74
<b>4.3</b>	<b>Nombre de premiers translatés friables</b>	<b>74</b>
<b>4.4</b>	<b>Un théorème de type Bombieri-Vinogradov</b>	<b>79</b>
<b>4.5</b>	<b>Démonstration du Théorème 4.1</b>	<b>84</b>
<b>4.6</b>	<b>Démonstration des Théorèmes 4.2 et 4.3</b>	<b>86</b>

---

### 4.1 Énoncé des problèmes et des résultats

Dans le Chapitre 4, nous nous intéressons aux plus grands facteurs premiers de deux entiers voisins d'un entier  $n$  criblé, i.e.  $P^-(n) > x^c, c > 0$ , où  $P^-(n)$  désigne le plus petit facteur premier de  $n \geq 1$  avec la convention  $P^-(1) = \infty$ . Évidemment, «  $P^-(n) > x^{1/2}$  », i.e.  $n = p$  est un nombre premier, est le cas le plus intéressant pour  $n \leq x$ .

En tenant compte de la conjecture (1.1.1) dans le Chapitre 1 :

$$|\{n \leq x : P^+(n) < P^+(n+1)\}| \sim \frac{1}{2}x,$$

il semble raisonnable de faire la conjecture : *Pour  $x \rightarrow \infty$ , nous avons*

$$|\{p \leq x : P^+(p-1) < P^+(p+1)\}| \sim \frac{1}{2}\pi(x), \quad (4.1.1)$$

où  $\pi(x)$  est le nombre des nombres premiers n'excédant pas  $x$ . Sans doute, une telle conjecture est très difficile à démontrer, puisque la conjecture des nombres premiers jumeaux est

équivalente à

$$|\{p \leq x : P^+(p) < P^+(p+2)\}| \rightarrow \infty$$

pour  $x \rightarrow \infty$ . Cette dernière reste encore ouverte, malgré les avancées spectaculaires de ces dernières années [25, 37, 67]. Une approche pour attaquer ce problème est de travailler sous des hypothèses raisonnables et établir ainsi des résultats conditionnels. L'hypothèse suivante est la conjecture d'Elliott-Halberstam sur la distribution des nombres premiers dans les progressions arithmétiques, une conjecture souvent utilisée en théorie analytique des nombres.

**Hypothèse (B).** (Conjecture d'Elliott-Halberstam) *Pour tous  $A > 0$  et  $\varepsilon > 0$ , on a*

$$\sum_{q \leq x^{1-\varepsilon}} \max_{y \leq x} \max_{(a,q)=1} \left| \sum_{\substack{p \leq y \\ p \equiv a \pmod{q}}} 1 - \frac{\pi(y)}{\varphi(q)} \right| \ll_{A,\varepsilon} \frac{x}{(\log x)^A}, \quad (4.1.2)$$

où  $\varphi(q)$  est la fonction d'Euler.

Dans l'article [26, Section 5.3], Granville a annoncé sans donner de démonstration que l'équivalent asymptotique

$$|\{p \leq x : P^+(p-a) \leq y\}| \sim \rho(u)\pi(x), \quad (a \in \mathbb{Z}), \quad (4.1.3)$$

découle d'une forme faible de la conjecture d'Elliott-Halberstam, où  $\rho(u)$  est la fonction de Dickman,  $u = \log x / \log y$  est fixé. On propose une preuve de ce résultat dans le Lemme 4.5 ci-dessous, qui est crucial dans la preuve du Théorème 4.1.

La conjecture (4.1.3) est énoncée explicitement pour la première fois dans l'article de Pomerance [44], mais l'idée de cette conjecture peut remonter au moins à Erdős [13]. Plusieurs travaux récents portent sur cette conjecture. On pourra trouver des minoration de quantités analogues au membre de gauche de (4.1.3) avec  $y = x^\theta$ ,  $0 < \theta \leq \frac{1}{2}$  dans [34], [5] et [16]. On trouvera d'autres résultats sur les nombres premiers translatés dans [2], [23] et [45].

Notre premier résultat est le suivant.

**Théorème 4.1.** *Sous l'Hypothèse (B), on a*

$$|\{p \leq x : P^+(p-1) < P^+(p+1)\}| > 0,1779 \pi(x) \quad (4.1.4)$$

pour  $x \rightarrow \infty$ .

Une autre manière d'aborder la conjecture (4.1.1) est d'étudier l'analogie de l'Hypothèse (A) pour les entiers criblés (c'est-à-dire, entiers sans petit facteur premier). Désignons par  $P^-(n)$  le plus petit facteur premier de  $n \geq 1$  avec la convention  $P^-(1) = \infty$ . Dans cette direction, nous avons le résultat suivant.

**Théorème 4.2.** *Soit  $0 < \beta < \frac{1}{3}$ . Alors pour  $x \rightarrow \infty$ , on a*

$$\sum_{\substack{n \leq x, P^-(n) > x^\beta \\ P^+(n) < P^+(n+2)}} 1 \geq \{C(\beta) + o(1)\} \pi(x), \quad (4.1.5)$$

où  $C(\beta)$  est la constante strictement positive définie par la formule (4.6.8) ci-dessous.

Désignons par  $P_r$  un entier ayant au plus  $r$  facteurs premiers. En prenant  $\beta = \frac{1}{3} - \delta$  où  $0 < \delta \leq \frac{1}{12}$  dans le Théorème 4.2, on obtient le résultat suivant.

**Corollaire 4.1.** *Soit  $0 < \delta \leq \frac{1}{12}$ . Alors pour  $x \rightarrow \infty$ , on a*

$$\sum_{\substack{P_3 \leq x, P^-(P_3) > x^{1/3-\delta} \\ P^+(P_3) < P^+(P_3+2)}} 1 \geq \{C(\delta) + o(1)\}\pi(x). \quad (4.1.6)$$

En particulier, en prenant  $\delta = \frac{1}{12}$ , i.e.  $P^-(n) > n^{1/4}$ , on a  $C(\frac{1}{12}) > 0,0267$ .

On remarque que l'on ne peut pas remplacer  $P_3$  par  $P_2$  dans le Corollaire 4.1 car  $C(\beta) = 0$  pour  $\beta \geq \frac{1}{3}$ . En effet, dans la démonstration du Théorème 4.2, on compte les entiers  $n$  avec

$$x^\beta < P^-(n) \leq P^+(n) < x^\alpha$$

où  $\alpha < \frac{1}{2}$  est un paramètre. Cela implique que  $n$  est de la forme  $n = p$  avec  $p < x^\alpha$  ou  $n = p_1 p_2$  avec  $x^{1/3} < p_1 \leq p_2 < x^\alpha$  si on prend  $\frac{1}{3} \leq \beta < \alpha < \frac{1}{2}$ . Ainsi la condition «  $\alpha < \frac{1}{2}$  » entraîne que ces entiers sont inférieurs à  $x^{2\alpha}$  et que leur nombre est  $o(\pi(x))$ . Cette barrière en  $\alpha$  découle du niveau «  $\frac{1}{2}$  » du théorème de type Bombieri-Vinogradov (le Théorème 4.4 ci-dessous).

Il est intéressant de comparer (4.1.6) avec le théorème bien connu de Chen concernant la conjecture des nombres premiers jumeaux [6] :

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p+2=P_2}} 1 \geq 0,67 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-2)^2}\right) \frac{x}{(\log x)^2} \quad (4.1.7)$$

pour  $x \rightarrow \infty$ . On peut également faire un lien avec un résultat de Goldston, Graham and Pintz et Yildirim [24]. Soit  $q_n$  le  $n$ -ème entier ayant exactement deux facteurs premiers, alors

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (q_{n+1} - q_n) \leq 6. \quad (4.1.8)$$

Bien que notre condition «  $P^+(P_3) < P^+(P_3 + 2)$  » soit plus faible que «  $p + 2 = P_2$  » et « ayant exactement deux facteurs premiers » pour (4.1.7) et (4.1.8) respectivement, (4.1.6) fournit une minoration du bon ordre de grandeur contrairement à [6, 24].

Notre méthode permet de traiter les plus grands facteurs premiers des  $k$  entiers consécutifs dont l'un est criblé, en étendant la condition «  $P^+(n) < P^+(n + 2)$  » dans le Théorème 4.2 à «  $P^+(n + j_0) = \min_{0 \leq j \leq k-1} P^+(n + j)$  » pour  $k \geq 2$ .

**Théorème 4.3.** *Soient  $k \geq 2$  et  $0 < \beta < \frac{1}{2k-1}$ . Alors il existe une constante  $C(k, \beta) > 0$  telle que l'on ait pour tout  $j_0 \in \{0, 1, \dots, k-1\}$*

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n+j_0) = \min_{0 \leq j \leq k-1} P^+(n+j) \\ P^-(n+j_0) > x^\beta}} 1 \geq \{C(k, \beta) + o(1)\}\pi(x)$$

pour  $x \rightarrow \infty$ .

En particulier pour  $j_0 = 0$ , on montre qu'il existe une infinité de nombres presque premiers (dans le sens « sans petit facteur premiers ») tels que les  $J-1$  entiers suivants aient également une structure *proche* de celle d'un nombre premier puisqu'ils ont tous un *grand* facteur premier.

Comme dans le cas  $k = 2$ , nous pouvons comparer ce problème avec la conjecture des nombres premiers consécutifs. Désignons par  $p_n$  le  $n$ -ème nombre premier. Dans [35], Maynard développe une approche différente encore plus efficace que [25, 37, 67] et il démontre que pour chaque entier  $m \geq 1$  fixé, on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (p_{n+m} - p_n) \ll m^3 e^{4m},$$

où la constante implicite dans  $\ll$  est absolue. En particulier, pour  $m = 1$ , il peut obtenir

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (p_{n+1} - p_n) \leq 600, \quad (4.1.9)$$

améliorant la borne  $7 \times 10^7$  de Zhang [67]. Actuellement, la meilleure majoration dans (4.1.9) est 246 et est due à Polymath [43].

## 4.2 Lemmes

### 4.2.1 Majoration du crible linéaire sans fonction bien factorisable

Dans ce paragraphe nous rappelons le Lemme 1.1 énoncé dans le Chapitre 1 sur la borne supérieure du crible linéaire de Rosser-Iwaniec [31] sans fonction bien factorisable. Pour des commodités de lecture, nous le réénonçons ici.

Soient  $\mathcal{A}$  une suite finie d'entiers,  $\mathcal{P}$  un ensemble de nombres premiers,  $z \geq 2$  un nombre réel,  $d$  un entier sans facteur carré dont les facteurs premiers appartiennent à  $\mathcal{P}$ . Notons

$$\mathcal{A}_d := \{a \in \mathcal{A} : d \mid a\}, \quad P_{\mathcal{P}}(z) := \prod_{p < z, p \in \mathcal{P}} p.$$

On souhaite évaluer

$$S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z) := |\{a \in \mathcal{A} : (a, P_{\mathcal{P}}(z)) = 1\}|.$$

On suppose que  $|\mathcal{A}_d|$  vérifie une formule de la forme

$$|\mathcal{A}_d| = \frac{w(d)}{d} X + r(\mathcal{A}, d) \quad \text{pour } d \mid P_{\mathcal{P}}(z),$$

où  $X$  est une approximation de  $|\mathcal{A}|$  indépendante de  $d$ ,  $w$  une fonction multiplicative vérifiant  $0 < w(p) < p$  pour  $p \in \mathcal{P}$ ,  $w(d)d^{-1}X$  un terme principal et  $r(\mathcal{A}, d)$  un terme d'erreur que l'on espère petit en moyenne sur  $d$ . De plus, on définit

$$V(z) := \prod_{p < z, p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{w(p)}{p}\right).$$

Nous pouvons maintenant énoncer la majoration donnée par le crible de Rosser-Iwaniec [31].

**Lemme 4.1.** *On suppose qu'il existe une constante  $K \geq 2$  telle que*

$$\prod_{u \leq p < v} \left(1 - \frac{w(p)}{p}\right)^{-1} \leq \frac{\log v}{\log u} \left(1 + \frac{K}{\log u}\right)$$

pour tout  $v > u \geq 2$ . Alors pour tout  $D \geq z \geq 2$ , on a

$$S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z) \leq XV(z) \left\{ F(s) + O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\log x}}\right) \right\} + \sum_{d < D, d|P(z)} |R(\mathcal{A}, d)|,$$

où  $F(s) = 2e^\gamma s^{-1}$  ( $0 < s \leq 3$ ) et  $\gamma$  est la constante d'Euler.

### 4.2.2 Entiers sans petit ni grand facteur premier

Le deuxième lemme est sur le nombre d'entiers sans petit ni grand facteur premier.

Pour  $x \geq y \geq z \geq 1$ , on définit

$$\tilde{S}(x; y, z) := \{n \leq x : z < P^-(n) \leq P^+(n) \leq y\}, \quad (4.2.1)$$

l'ensemble des entiers inférieurs à  $x$  dont tous les facteurs premiers sont dans l'intervalle  $]z, y]$ .

Désignons par  $\Theta(x; y, z)$  le cardinal de  $\tilde{S}(x; y, z)$  :

$$\Theta(x; y, z) := |\tilde{S}(x; y, z)|.$$

Soit  $\sigma(u, v)$  l'unique solution continue pour  $u > 1$  de l'équation

$$u \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) + \sigma(u-1, v - v/u) = 0 \quad (u > v/(v-1), v > 1) \quad (4.2.2)$$

avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} \sigma(u, v) &= \omega(v) & (0 \leq u < 1), \\ \sigma(u, v) &= \omega(v) - 1/v & (1 < u \leq v/(v-1)). \end{aligned}$$

$\omega(v)$  est la fonction de Buchstab.

En 1976, Friedlander [22] a montré le résultat suivant.

**Lemme 4.2.** *Pour  $x \geq y \geq z > 1$ , on définit*

$$u = \frac{\log x}{\log y} \quad \text{et} \quad v = \frac{\log x}{\log z}.$$

Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\Theta(x; y, z) = \sigma(u, v) \frac{x}{\log z} + O_\varepsilon\left(\frac{x}{(\log z)^2}\right)$$

pour

$$(F_\varepsilon) \quad 1 + \varepsilon \leq u \leq v \leq \varepsilon^{-1}.$$

La fonction  $\sigma(u, v)$  est continue sur  $(F_\varepsilon)$  et positive strictement excepté  $\sigma(u, v) = 0$  pour  $k < u \leq v \leq k + 1$  où  $k \geq 1$  est entier. On trouvera dans [47, 48, 49] d'autres résultats sur  $\Theta(x; y, z)$ .

En particulier, on remarque que le Lemme 4.2 avec  $z = 1$  est le cas du Lemme 3.1 sur le nombre d'entiers friables, et le Lemme 4.2 avec  $y = x$  est le cas du Lemme 4.3 suivant.

Pour  $x \geq y \geq 2$ , on définit

$$\Phi(x, y) := |\{n \leq x : P^-(n) > y\}|. \quad (4.2.3)$$

Alors le nombre d'entiers criblés  $\Phi(x, y)$  est estimé par le lemme suivant [51, Chapitre III.6].

**Lemme 4.3.** *Pour  $x \geq y \geq 2$ , on a uniformément*

$$\Phi(x, y) = \frac{\omega(u)x - y}{\log y} + O\left(\frac{x}{(\log y)^2}\right),$$

où  $u := (\log x)/\log y$  et  $\omega(u)$  est la fonction de Buchstab.

### 4.2.3 Valeurs moyennes criblées de certaines fonctions arithmétiques

Dans [33], Lachand et Tenenbaum étudient les valeurs moyennes de certaines fonctions arithmétiques sur les entiers criblés. Le lemme suivant est un cas particulier de leur résultat.

**Lemme 4.4.** *Soient  $\mu(n)$  la fonction de Möbius et  $u = \log x/\log y$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , nous avons*

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ P^-(n) > y}} \frac{\mu(n)}{n} = \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\} \rho(u)$$

uniformément pour

$$x \geq 2, \quad \exp\{(\log x)^{2/5+\varepsilon}\} \leq y \leq x.$$

Dans la version originale de Lachand et Tenenbaum [33], il y a un terme d'erreur supplémentaire  $O(\exp\{-(\log y)^{3/5-\varepsilon}\})$ . Cette version simplifiée est due à R. de la Bretèche et D. Fiorilli [9].

## 4.3 Nombre de premiers translatés friables

Pour démontrer le Théorème 4.1, on va tout d'abord établir le Lemme 4.5 ci-dessous pour le nombre de premiers translatés friables. La preuve du Lemme 4.5 suit la méthode de Lachand [32] sur  $n(n^2 + 1)$  friable.

**Lemme 4.5.** *Soit  $a$  un entier. Pour  $x \geq y > 1$ , on définit*

$$\pi(x, y) := \sum_{p \leq x, P^+(p-a) \leq y} 1 \quad \text{et} \quad u := \frac{\log x}{\log y}. \quad (4.3.1)$$

Alors pour tout  $u \geq 1$  fixé et  $x \rightarrow \infty$ , on a sous la conjecture d'Elliott-Halberstam

$$\pi(x, y) \sim \rho(u)\pi(x), \quad (4.3.2)$$

où  $\rho(u)$  est la fonction de Dickman.

*Démonstration.* On a d'abord par la formule d'inversion de Möbius

$$\sum_{p \leq x, P^+(p-a) \leq y} 1 = \sum_{p \leq x, (p-a, \prod_{y < p \leq x} p) = 1} 1 = \sum_{\substack{q \leq x-a \\ P^-(q) > y}} \mu(q) \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \pmod{q}}} 1 = S_1 + S_2, \quad (4.3.3)$$

où

$$S_1 := \sum_{\substack{q \leq x^{1-\varepsilon} \\ P^-(q) > y}} \mu(q) \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \pmod{q}}} 1,$$

$$S_2 := \sum_{\substack{x^{1-\varepsilon} \leq q \leq x-a \\ P^-(q) > y}} \mu(q) \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \pmod{q}}} 1,$$

avec  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit.

#### 1. Évaluation de $S_1$

Pour  $S_1$ , on écrit

$$S_1 = S'_1 + S''_1 \quad (4.3.4)$$

où

$$S'_1 := \sum_{\substack{q \leq x^{1-\varepsilon} \\ P^-(q) > y}} \mu(q) \frac{\pi(x)}{\varphi(q)} \quad \text{et} \quad S''_1 := \sum_{\substack{q \leq x^{1-\varepsilon} \\ P^-(q) > y}} \mu(q) \left( \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \pmod{q}}} 1 - \frac{\pi(x)}{\varphi(q)} \right).$$

D'après l'Hypothèse (B), i.e. la conjecture d'Elliott-Halberstam, il suit

$$S''_1 \ll \sum_{q \leq x^{1-\varepsilon}} \max_{(a, q) = 1} \left| \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \pmod{q}}} 1 - \frac{\pi(x)}{\varphi(q)} \right| \ll \frac{x}{(\log x)^A} \quad (4.3.5)$$

pour tout  $A$ , qui est admissible.

Pour le terme principal  $S'_1$ , on obtient en utilisant le Lemme 4.4

$$\begin{aligned} S'_1 &= \pi(x) \sum_{q \leq x^{1-\varepsilon}, P^-(q) > y} \frac{\mu(q)}{q} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{y}\right) \right\} \\ &= \pi(x) \rho\left(\frac{\log x^{1-\varepsilon}}{\log y}\right) \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\} \\ &= \pi(x) \rho(u) \{1 + o(1) + O(\varepsilon)\} \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

pour  $x \rightarrow \infty$  et  $1 \leq u \ll 1$ .

En reportant (4.3.6) et (4.3.5) dans (4.3.4), on obtient

$$S_1 = \pi(x)\rho(u)\{1 + o(1) + O(\varepsilon)\} \quad (4.3.7)$$

sous la condition que  $x \rightarrow \infty$  et  $1 \leq u \ll 1$ .

## 2. Évaluation de $S_2$

Pour évaluer  $S_2$ , on écrit d'abord

$$|S_2| \leq \sum_{\substack{x^{1-\varepsilon} \leq q \leq x-a \\ P^-(q) > y}} \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \pmod{q}}} 1.$$

On note que la dernière double somme compte les nombres premiers  $p$  tels que  $p - a = mq$  avec  $x^{1-\varepsilon} \leq q \leq x - a$ ,  $P^-(q) > y$  et  $(m, a) = 1$ ,  $m \leq x^\varepsilon$ . Pour chaque entier  $m \leq x^\varepsilon$  et  $a$ , on pose

$$\mathcal{A}(m; a) := \{(p - a)/m : p \leq x \text{ et } p \equiv a \pmod{m}\},$$

$$\mathcal{P}_{am} := \{p : p \text{ premier tel que } p \nmid am\},$$

$$P_{am}(z) := \prod_{p < z, p \in \mathcal{P}_{am}} p = \prod_{p < z, p \nmid am} p.$$

Alors

$$|S_2| \leq \sum_{\substack{m \leq x^\varepsilon \\ (m, a) = 1}} |\{q \in \mathcal{A}(m; a) : P^-(q) > y\}| \leq \sum_{\substack{m \leq x^\varepsilon \\ (m, a) = 1}} S(\mathcal{A}(m; a); \mathcal{P}_{am}, z).$$

pour tout  $z \leq y$ . On va appliquer le Lemme 4.1 (le crible de Rosser-Iwaniec) pour majorer les cardinaux des ensembles criblés  $S(\mathcal{A}(m; a); \mathcal{P}_{am}, z)$ . Pour tout  $d \mid P_{am}(z)$ , on a  $(d, m) = 1$  et

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_d(m; a)| &= |\{(p - a)/m : p \leq x \text{ et } p \equiv a \pmod{dm}\}| \\ &= \frac{1}{\varphi(d)} \cdot \frac{\pi(x)}{\varphi(m)} + \left( \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \pmod{dm}}} 1 - \frac{\pi(x)}{\varphi(dm)} \right). \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Ainsi on peut utiliser le Lemme 4.1 avec  $D = z = y^{1-2\varepsilon}$  et

$$X = \frac{\pi(x)}{\varphi(m)}, \quad r(\mathcal{A}(m; a), d) = \left( \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \pmod{dm}}} 1 - \frac{\pi(x)}{\varphi(dm)} \right)$$

et

$$w(p) = \begin{cases} 0 & p \mid am, \\ \frac{p}{p-1} & p \nmid am. \end{cases}$$

On obtient

$$|S_2| \leq S'_2 + S''_2, \quad (4.3.9)$$

où

$$S'_2 := \sum_{\substack{m \leq x^\varepsilon \\ (m, a) = 1}} \frac{\pi(x)}{\varphi(m)} \prod_{\substack{p < z \\ p \nmid am}} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \{F(1) + o(1)\},$$

$$S''_2 := \sum_{\substack{m \leq x^\varepsilon \\ (m, a) = 1}} \sum_{\substack{d < D \\ d | P_{am}(z)}} |r(\mathcal{A}(m; a), d)|.$$

Pour  $S''_2$ , compte tenu de la condition  $d < D = y^{1-2\varepsilon} \leq x^{1-2\varepsilon}$ , on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$S''_2 \leq \sum_{q \leq x^{1-\varepsilon}} \tau(q) \left| \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \pmod{q}}} 1 - \frac{\pi(x)}{\varphi(q)} \right| \leq (S''_{2,*} S''_{2,\dagger})^{1/2},$$

où  $\tau(q)$  est la fonction diviseur et

$$S''_{2,*} := \sum_{q \leq x^{1-\varepsilon}} \tau^2(q) \left| \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \pmod{q}}} 1 - \frac{\pi(x)}{\varphi(q)} \right|,$$

$$S''_{2,\dagger} := \sum_{q \leq x^{1-\varepsilon}} \left| \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \pmod{q}}} 1 - \frac{\pi(x)}{\varphi(q)} \right|.$$

Pour  $S''_{2,*}$ , on utilise l'inégalité de Brun-Titchmarsh :

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \pmod{q}}} 1 - \frac{\pi(x)}{\varphi(q)} \ll \frac{x}{\varphi(q) \log(x/q)},$$

et pour  $S''_{2,\dagger}$  on applique l'Hypothèse (B). Cela donne pour tout  $A$

$$S''_2 \ll \left( \frac{x}{(\log x)^A} \right)^{1/2} \left\{ \sum_{q \leq x^{1-\varepsilon}} \frac{\tau(q)^2}{\varphi(q)} \frac{x}{\varepsilon \log x} \right\}^{1/2} \ll \frac{x}{(\log x)^{A/2-4}}. \quad (4.3.10)$$

Pour  $S'_2$ , en tenant compte de la condition  $m \leq x^\varepsilon \leq y^{1-2\varepsilon} = z$  pour tout  $\varepsilon > 0$  arbitrairement petit, on a

$$\prod_{\substack{p < z \\ p \nmid am}} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) = C_a \prod_{2 < p | m} \frac{p-1}{p-2} \frac{2e^{-\gamma}}{\log z} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\log z}\right)\right\},$$

d'où

$$S'_2 \leq \{C_a + o(1)\} \frac{\pi(x)}{\log z} \sum_{m \leq x^\varepsilon} \frac{h(m)}{m}$$

avec

$$C_a := 4 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{\substack{p>2 \\ p|a}} \left(\frac{p-1}{p-2}\right)$$

et

$$h(m) := \frac{m}{\varphi(m)} \prod_{\substack{p>2 \\ p|m}} \left(\frac{p-1}{p-2}\right).$$

Puisque  $m \mapsto h(m)$  est multiplicative et

$$h(p) = \begin{cases} 2 & \text{si } p = 2, \\ \frac{p}{p-2} & \text{si } p > 2, \end{cases}$$

un argument standard, similaire à ceux des travaux de La Bretèche, Pomerance et Tenenbaum [10, la formule (2.5)], nous donne, avec une constante  $B > 0$ ,

$$\sum_{m \leq t} h(m) = Bt \left\{1 + O\left(\frac{1}{\log t}\right)\right\}.$$

On obtient donc à l'aide d'une intégration par parties

$$S'_2 \leq \{1 + o(1)\} \frac{\pi(x)C_a}{\log z} \int_{1-\varepsilon}^{x^\varepsilon} \frac{1}{t} d \sum_{m \leq t} h(m) = \{O_a(\varepsilon) + o_a(1)\} \pi(x). \quad (4.3.11)$$

La combinaison des formules (4.3.10), (4.3.11) et (4.3.9) entraîne la majoration

$$|S_2| \leq \{O_a(\varepsilon) + o_a(1)\} \pi(x). \quad (4.3.12)$$

En reportant (4.3.7) et (4.3.12) dans (4.3.3), on trouve finalement

$$\sum_{p \leq x, P^+(p-a) \leq y} 1 = \pi(x) \rho(u) \{1 + o_a(1) + O_a(\varepsilon)\}$$

pour

$$x \rightarrow \infty, \quad 1 \leq u \ll 1.$$

Ce qui implique le Lemme 4.5.

□

## 4.4 Un théorème de type Bombieri-Vinogradov

Rappelons la définition de  $\tilde{S}(x; y, z)$

$$\tilde{S}(x; y, z) := \{n \leq x : z < P^-(n) \leq P^+(n) \leq y\}.$$

Le but de ce paragraphe est d'établir un théorème de type Bombieri-Vinogradov sur  $\tilde{S}(x; y, z)$ , qui jouera un rôle clé dans la démonstration des Théorèmes 4.2 et 4.3. Sans doute, un tel résultat a des intérêts propres et trouvera d'autres applications.

**Théorème 4.4.** *Pour tout  $A > 0$ , il existe une constante  $B = B(A) > 0$  telle que l'on ait*

$$\sum_{q \leq x^{1/2}/(\log x)^B} \max_{t \leq x} \max_{(a, q)=1} \left| \sum_{\substack{n \in \tilde{S}(t; y, z) \\ n \equiv a \pmod{q}}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \in \tilde{S}(t; y, z) \\ (n, q)=1}} 1 \right| \ll_A \frac{x}{(\log x)^A} \quad (4.4.1)$$

uniformément pour  $2 \leq z \leq y \leq x$ .

*Démonstration.* La première étape consiste à démontrer la majoration suivante très légèrement moins forte que (4.4.1) :

$$\sum_{q \leq x^{1/2}/(\log x)^B} \max_{(a, q)=1} \left| \sum_{\substack{n \in \tilde{S}(t; y, z) \\ n \equiv a \pmod{q}}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \in \tilde{S}(t; y, z) \\ (n, q)=1}} 1 \right| \ll_A \frac{x}{(\log x)^A} \quad (4.4.2)$$

valable uniformément pour  $2 \leq z \leq y \leq x$  et  $t \leq x$ .

La démonstration de (4.4.2) est très similaire à celle du Théorème 6' de [20]. Nos outils principaux sont les deux lemmes suivants. Le premier est dû à Fouvry et Tenenbaum [20, Lemme 7.1].

**Lemme 4.6.** *Soit  $\mathcal{B}$  un ensemble de nombres entiers inclus dans  $[1, x]$ . On a*

$$\sum_{q \leq x^{1/2}} \max_{(a, q)=1} \left| \sum_{\substack{b \in \mathcal{B} \\ b \equiv a \pmod{q}}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{b \in \mathcal{B} \\ (b, q)=1}} 1 \right| \ll (x|\mathcal{B}|)^{1/2} (\log x)^2$$

pour  $x \geq 3$ .

Le deuxième lemme est le Théorème 0.(b) de Bombieri, Friedlander et Iwaniec [4, page 212].

**Lemme 4.7.** *Soient  $0 < \varepsilon \leq \vartheta \leq 1 - \varepsilon$ ,  $M = x^\vartheta$ ,  $N = x^{1-\vartheta}$  et  $\alpha = (\alpha_m)_{M < m \leq 2M}$ ,  $\beta = (\beta_n)_{N < n \leq 2N}$  deux suites de nombres complexes. Supposons que  $\beta$  est bien répartie dans les progressions arithmétiques de petit module, c'est-à-dire, pour tout  $A > 0$ ,  $d \geq 1$ ,  $k \geq 1$ ,  $\ell \neq 0$ ,  $(k, \ell) = 1$ , on a*

$$\sum_{\substack{n \equiv \ell \pmod{k} \\ (n, d)=1}} \beta_n - \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{(n, dk)=1} \beta_n \ll \|\beta\| \tau(d)^B \frac{N^{1/2}}{(\log 2N)^A}, \quad (4.4.3)$$

où  $B > 0$  est une constante,  $\tau(d)$  est la fonction nombre de diviseurs, la constante implicite ne dépend que de  $A$  et  $\|\beta\|$  désigne la norme  $L^2$  de  $\beta = (\beta_n)_{N < n \leq 2N}$  :

$$\|\beta\| = \left( \sum_{N < n \leq 2N} |\beta_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Alors pour tout  $A > 0$ , il existe  $B = B(A) > 0$  telle que l'on ait

$$\sum_{q \leq x^{1/2}/(\log x)^B} \max_{(a,q)=1} \left| \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{q}}} \alpha * \beta(n) - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \leq x \\ (n,q)=1}} \alpha * \beta(n) \right| \ll_A \|\alpha\| \|\beta\| \frac{x^{1/2}}{(\log x)^A}$$

pour tout  $x \geq 3$ .

Nous reprenons pas à pas la méthode de Fouvry et Tenenbaum [20]. Observons tout d'abord que la majoration (4.4.1) ou (4.4.2) découle du Lemme 4.6 avec  $\mathcal{B} = S(x; y, z)$  et de la majoration classique  $|\mathcal{B}| \leq \Psi(x, y) \ll e^{-\frac{\log x}{2 \log y}}$  (voir [51, le théorème III.5.1]), dès que l'on a

$$y \leq X := \exp\{(\log x)^{3/4}\}. \quad (4.4.4)$$

En effet, nous obtenons sous cette hypothèse que le membre de gauche de (4.4.1) est

$$\ll (x\Psi(x, X))^{1/2} (\log x)^2 \ll x \exp\left\{-\left(\frac{1}{3} + o(1)\right)(\log x)^{1/4}\right\} \ll_A \frac{x}{(\log x)^A} \quad (4.4.5)$$

pour tout  $A > 0$ .

Nous pouvons donc supposer désormais que  $y > X$ . Dans ce cas, nous voulons écrire la fonction caractéristique des entiers appartenant à  $\tilde{S}(x; y, z)$  comme un produit de convolution de deux fonctions arithmétiques convenables, puis appliquer le Lemme 4.7. Nous procédons de la même manière que Fouvry et Tenenbaum en factorisant chaque entier  $n \in \tilde{S}(x; y, z)$  sous la forme

$$n = mp, \quad z < P^-(m) \leq P^+(m) \leq p \leq y. \quad (4.4.6)$$

Cette décomposition est unique, mais introduit une dépendance entre les variables  $m$  et  $p$ . Pour surmonter cet obstacle technique, nous effectuons un découpage de pas multiplicatif  $\Delta := 1 + (\log x)^{-C}$ , où  $C = C(A)$  est une constante positive assez grande. Plus précisément, notons

$$P_i := X\Delta^i, \quad M_j := \Delta^j \quad (i, j \geq 0),$$

et considérons l'ensemble  $\mathcal{R}$  des couples  $(i, j)$  tels que

$$P_{i+1} \leq y, \quad x(\log x)^{-2A-10} < P_{i+1}M_{j+1} \leq x. \quad (4.4.7)$$

Grâce à (4.4.6), on peut décomposer le membre de gauche de (4.4.1) sous la forme d'une somme

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{R}} S_{ij} + S \quad (4.4.8)$$

où l'on a posé

$$S_{ij} := \sum_{q \leq Q} \max_{(a,q)=1} \left| \sum_{pm \equiv a \pmod{q}}^{(*)} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{(pm,q)=1}^{(*)} 1 \right|.$$

Ici  $\sum^*$  indique que la sommation porte sur  $p, m$  satisfaisant  $(p, m) \in R_{ij}$  où  $R_{ij}$  est défini par

$$R_{ij} = \left\{ (m, p) : P_i < p \leq P_{i+1}, M_j < m \leq M_{j+1}, z < P^-(m) \leq P^+(m) \leq P_i \right\}.$$

On note d'abord que  $S$  se compose ces deux ensembles de  $(m, p)$  suivants :

$$S_1 := \bigcup_{(i,j) \in \mathcal{R}} \left\{ (m, p) : P_i < p \leq P_{i+1}, M_j < m \leq M_{j+1}, P_i < P^+(m) \leq p \leq P_{i+1} \right\}$$

et

$$S_2 := \left\{ (m, p) : mp \leq x, p \leq y, (m, p) \notin \bigcup_{(i,j) \in \mathcal{R}} R_{ij}, (m, p) \notin S_1 \right\}.$$

Le nombre de  $(m, p)$  appartenant à  $S_1$  est estimé par

$$|S_1| \leq \sum_i \sum_{P_i < p_1 \leq P_{i+1}} \sum_{P_i < p_2 \leq p_1} \sum_{\substack{m \leq x/(p_1 p_2) \\ P^+(m) \leq p_2}}^{(**)} 1$$

où  $(**)$  indique qu'il existe  $j$  tel que  $(i, j) \in \mathcal{R}$  et  $M_j < mp_2 \leq M_{j+1}$ . Pour  $i$  donné, la somme sur  $m$  est majorée par

$$\sum_{\substack{m \leq x/(p_1 p_2) \\ P^+(m) \leq p_2}}^{(**)} 1 \leq \sum_{m \leq x/(p_1 p_2)} 1 \leq \frac{x}{p_1 p_2}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} |S_1| &\leq \sum_i \sum_{P_i < p_1 \leq P_{i+1}} \sum_{P_i < p_2 \leq P_{i+1}} \frac{x}{p_1 p_2} \\ &\ll x \sum_{i \ll (\log x)^{C+1}} \left\{ \sum_{X \Delta^i < p \leq X \Delta^{i+1}} \frac{1}{p} \right\}^2 \\ &\ll x \sum_{i \ll (\log x)^{C+1}} \left\{ \log \left( 1 + \frac{\log \Delta}{\log X + i \log \Delta} \right) \right\}^2 \\ &\ll \frac{x}{(\log x)^C} \\ &\ll \frac{x}{(\log x)^{2A+4}} \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

si l'on prend  $C = C(A) \geq 2A + 4$ .

On découpe  $S_2$  en deux parties. La première porte sur les  $(m, p)$  tels que  $mp \leq \frac{x}{(\log x)^{2A+10}}$ , et on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{(m,p) \in S_2 \\ mp \leq \frac{x}{(\log x)^{2A+10}}} 1 &\leq \sum_{n \leq \frac{x}{(\log x)^{2A+10}}} \tau(n) \\ &\ll \frac{x}{(\log x)^{2A+9}}. \end{aligned} \tag{4.4.10}$$

La deuxième contient les  $(m, p)$  au bord de la courbe  $mp = x$ , i.e.  $(m, p)$  dans la surface

$$[M_j, M_{j+1}] \times [P_i, P_{i+1}], \quad M_j P_i \leq mp \leq x < M_{j+1} P_{i+1}. \tag{***}$$

Le nombre d'entiers dans (\*\*\*) est au plus pour un  $(i, j) \in \mathcal{R}$

$$\begin{aligned} \sum_{n \in (***)} 1 &\leq (M_{j+1} - M_j)(P_{i+1} - P_i) \\ &= X \Delta^{i+j} (\Delta - 1)^2 \\ &\leq \frac{x}{(\log x)^{2C}}. \end{aligned} \tag{4.4.11}$$

Pour chaque  $i$  donné, on a au plus un  $j$  tel que (\*\*\*) débordé. D'autre part, il y a au plus  $\frac{\log x}{\log \Delta}$  entiers  $i$  avec  $P_i \leq y$ . On a donc au plus  $O((\log x)^{C+1})$  rectangles qui débordent. Compte tenu de (4.4.11), cela fait au plus  $O(x(\log x)^{-C+1})$  entiers sur le bord.

Ainsi, pour  $S$ , au plus  $O(x(\log x)^{-2A-4})$  entiers exceptionnels  $n = mp$  contribuent à la sommation complémentaire  $S$ , si l'on prend  $C \geq 2A + 5$ . En utilisant le Lemme 4.6, on vérifie que  $S$  est admissible.

Pour  $(i, j) \in \mathcal{R}$ , il y a  $|\mathcal{R}| \ll (\log x)^{2C+2}$  sommes élémentaires  $S_{ij}$  où les variables  $p$  et  $m$  sont indépendantes.

Il reste à majorer les  $S_{ij}$ . On va appliquer le Lemme 4.7. La suite  $(p)_{P_i < p \leq 2P_i}$  vérifie bien la condition (4.4.3) du Lemme 4.7 de bonne répartition dans les progressions arithmétiques de raison n'excédant pas  $(\log P_{i+1})^A$ , grâce au théorème de Siegel-Walfisz. On remarque de plus que la condition «  $M_i \geq x^\epsilon$  et  $P_i \geq x^\epsilon$  » peut être assouplie en

$$\log P_i > (\log x)^\epsilon, \quad M_j \geq (\log x)^{C_1(A)}. \tag{4.4.12}$$

On obtient ainsi

$$S_{ij} \ll x(\log x)^{-A-2C-2} \tag{4.4.13}$$

sauf peut-être lorsque

$$M_j \leq (\log x)^{C_1(A)},$$

compte tenu de l'estimation  $\log P_i \geq \log X = (\log x)^{3/4}$ . Pour le cas  $M_j \leq (\log x)^{C_1(A)}$ , on a  $P_i \geq x(\log x)^{-2A-10} M_j \Delta^{-2} \geq x(\log x)^{-C_2(A)}$  par (4.4.7). En désignant par  $\bar{m}$  l'inverse de  $m$

modulo  $q$ , le théorème de Bombieri-Vinogradov nous permet de déduire que

$$\begin{aligned}
S_{ij} &\ll \sum_{m \leq \Delta(\log x)^{C_1(A)}} \sum_{q \leq Q} \max_{(a,q)=1} \left| \sum_{\substack{P_i \leq p \leq P_{i+1} \\ p \equiv a\bar{m} \pmod{q}}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{P_i \leq p \leq P_{i+1} \\ (p,q)=1}} 1 \right| \\
&\ll \sum_{m \leq (\log x)^{C_1(A)}} \sum_{q \leq Q} \max_{(a,q)=1} \left| \sum_{\substack{p \leq P_{i+1} \\ p \equiv a\bar{m} \pmod{q}}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{p \leq P_{i+1} \\ (p,q)=1}} 1 \right| \\
&+ \sum_{m \leq (\log x)^{C_1(A)}} \sum_{q \leq Q} \max_{(a,q)=1} \left| \sum_{\substack{p \leq P_i \\ p \equiv a\bar{m} \pmod{q}}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{p \leq P_i \\ (p,q)=1}} 1 \right| \\
&\ll \sum_{m \leq (\log x)^{C_1(A)}} \frac{x}{(\log x)^{A+2C+2+C_1(A)}} \\
&\ll \frac{x}{(\log x)^{A+2C+2}}
\end{aligned} \tag{4.4.14}$$

sous les conditions

$$M_j \leq (\log x)^{C_1(A)}, \quad P_i \geq x(\log x)^{-C_2(A)}.$$

Par suite, en combinant les estimations (4.4.5), (4.4.8), (4.4.13), (4.4.14) avec la majoration  $|\mathcal{R}| \ll (\log x)^{2C+2}$ , on obtient l'estimation (4.4.2).

La deuxième étape consiste à insérer la condition  $\max_{t \leq x}$  dans (4.4.2). La méthode est identique à celle de Fouvry et Tenenbaum [21, Section 3.1] ou Drappeau [12].

Posons

$$\tilde{\Delta} := 1 + (\log x)^{-A/2}, \quad J := 1 + \left\lceil \frac{\log x}{\log \tilde{\Delta}} \right\rceil$$

et  $t_j = x/\tilde{\Delta}^j$  avec  $0 \leq j \leq J$ , où  $[x]$  désigne l'entier maximal n'excédant pas  $x$ . Cela implique  $x\tilde{\Delta}^{-1} < \tilde{\Delta}^{J-1} \leq x$ . Pour chaque  $t \leq x$ , il existe un  $j \in [1, J]$  tel que  $t_j < t \leq t_{j-1}$ . Notons

$$E(t, y, z; a, q) := \sum_{\substack{n \in \tilde{S}(t; y, z) \\ n \equiv a \pmod{q}}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \in \tilde{S}(t; y, z) \\ (n, q) = 1}} 1,$$

nous avons donc

$$\sum_{\substack{n \in \tilde{S}(t_j; y, z) \\ n \equiv a \pmod{q}}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \in \tilde{S}(t_{j-1}; y, z) \\ (n, q) = 1}} 1 \leq E(t, y, z; a, q) \leq \sum_{\substack{n \in \tilde{S}(t_{j-1}; y, z) \\ n \equiv a \pmod{q}}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \in \tilde{S}(t_j; y, z) \\ (n, q) = 1}} 1.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\max_{t \leq x} \max_{(a,q)=1} |E(t, y, z; a, q)| &\leq \max_{j \leq J} \max_{(a,q)=1} |E(t_j, y, z; a, q)| + \max_{j \leq J} \frac{2(t_{j-1} - t_j)}{\varphi(q)} + 2 \\
&\leq \sum_{1 \leq j \leq J} \max_{(a,q)=1} |E(t_j, y, z; a, q)| + \frac{2(\tilde{\Delta} - 1)x}{\varphi(q)} + 2.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$J \ll (\log x)^{A/2+1}.$$

En utilisant l'estimation (4.4.2) avec  $t = t_j$ , on en déduit

$$\begin{aligned} \sum_{q \leq Q} \max_{t \leq x} \max_{(a, q)=1} |E(t, y, z; a, q)| &\ll Jx(\log x)^{-A} + (\tilde{\Delta} - 1)x \log x + Q \\ &\ll x(\log x)^{-A/2+1}, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du Théorème 4.4. □

## 4.5 Démonstration du Théorème 4.1

### 1. Point de départ

Pour un paramètre  $\theta$  vérifiant  $\varepsilon_0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ , où  $\varepsilon_0$  est une petite constante fixée, on a l'inégalité

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p \leq x \\ P^+(p-1) < P^+(p+1)}} 1 &\geq \sum_{\substack{p \leq x \\ P^+(p-1) \leq x^{1/2-\varepsilon}}} 1 - \sum_{\substack{p \leq x \\ P^+(p+1) \leq P^+(p-1) \leq x^{1/2-\varepsilon}}} 1 \\ &\geq \sum_{\substack{p \leq x \\ P^+(p-1) \leq x^{1/2-\varepsilon}}} 1 - \left( \sum_{\substack{p \leq x \\ x^\theta < P^+(p+1) \leq P^+(p-1) \leq x^{1/2-\varepsilon}}} 1 + \sum_{\substack{p \leq x \\ P^+(p+1) \leq x^\theta}} 1 \right) \quad (4.5.1) \\ &= S_A - (S_B + S_C). \end{aligned}$$

### 2. Évaluation de $S_A - S_C$

À l'aide du Lemme 4.5, on a

$$S_A - S_C \sim \{\rho(2) - \rho(1/\theta)\} \pi(x) \quad (x \rightarrow \infty). \quad (4.5.2)$$

### 3. Majoration de $S_B$

Au premier abord, si  $(P^+(p-1), P^+(p+1)) > 1$ , alors il existe deux entiers  $k_2 \geq k_1 \geq 0$  tels que

$$p-1 = 2^{k_1}, \quad p+1 = 2^{k_2},$$

compte tenu du fait que  $(p-1, p+1) = (p-1, 2) = 2$ . Ce qui implique que  $p = 3$ . On peut donc supposer que  $(P^+(p-1), P^+(p+1)) = 1$  dans la suite.

Pour  $S_B$ , en posant  $p_1 = P^+(p-1)$  et  $p_2 = P^+(p+1)$ , on a dans un premier temps

$$p \equiv 1 \pmod{p_1} \quad \text{et} \quad p \equiv -1 \pmod{p_2}.$$

D'après le théorème des restes chinois, il existe un entier  $a(p_1, p_2) < p_1 p_2$  dépendant de  $p_1, p_2$  tel que

$$(a(p_1, p_2), p_1 p_2) = 1 \quad \text{et} \quad p \equiv a(p_1, p_2) \pmod{p_1 p_2}.$$

Pour des commodités d'écriture, on écrit  $a = a(p_1, p_2)$  dans la suite. Alors on peut majorer la somme  $S_B$  par

$$\begin{aligned} S_B &= \sum_{\substack{p \leq x \\ x^\theta < p_2 \leq p_1 \leq x^{1/2-\varepsilon}}} 1 \\ &\leq \sum_{\substack{p_2 \\ x^\theta < p_2 < p_1 \leq x^{1/2-\varepsilon}}} \sum_{p_1} \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \pmod{p_1 p_2}}} 1 + O(1) \\ &= S_{B1} + S_{B2} + O(1), \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

où

$$\begin{aligned} S_{B1} &:= \sum_{p_2} \sum_{\substack{p_1 \\ x^\theta < p_2 < p_1 \leq x^{1/2-\varepsilon}}} \frac{\pi(x)}{\varphi(p_1 p_2)}, \\ S_{B2} &:= \sum_{p_2} \sum_{\substack{p_1 \\ x^\theta < p_2 < p_1 \leq x^{1/2-\varepsilon}}} \left( \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \pmod{p_1 p_2}}} 1 - \frac{\pi(x)}{\varphi(p_1 p_2)} \right). \end{aligned}$$

Pour le terme d'erreur  $S_{B2}$ , de manière analogue à  $S_2''$  dans (4.3.10), on obtient en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la conjecture d'Elliott-Halberstam et l'inégalité de Brun-Titchmarsh

$$S_{B2} \ll \sum_{q \leq x^{1-\varepsilon}} \tau(q) \left| \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \pmod{q}}} 1 - \frac{\pi(x)}{\varphi(q)} \right| \ll \frac{x}{(\log x)^A} \tag{4.5.4}$$

pour tout  $A$ .

Pour le terme principal  $S_{B1}$ , on a

$$\begin{aligned} S_{B1} &= \left\{ \sum_{x^\theta < p_2 \leq x^{1/2-\varepsilon}} \frac{1}{p_2} \sum_{p_2 < p_1 \leq x^{1/2-\varepsilon}} \frac{1}{p_1} + o(1) \right\} \pi(x) \\ &= \left\{ \sum_{x^\theta < p_2 \leq x^{1/2-\varepsilon}} \frac{1}{p_2} \log \frac{\log x^{1/2-\varepsilon}}{\log p_2} + o(1) \right\} \pi(x) \\ &= \left\{ \int_{x^\theta}^{x^{1/2-\varepsilon}} \log \frac{\log x^{1/2-\varepsilon}}{\log t} d \sum_{p_2 \leq t} \frac{1}{p_2} + o(1) \right\} \pi(x) \\ &= \left\{ \int_{\theta}^{1/2} \log \left( \frac{1}{2t} \right) \frac{dt}{t} + o(1) \right\} \pi(x) \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \left( \log \frac{1}{2\theta} \right)^2 + o(1) \right\} \pi(x) \end{aligned} \tag{4.5.5}$$

où l'on a appliqué le théorème des nombres premiers, une intégration par parties et la formule suivante

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log_2 x + c_1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

avec  $c_1 \approx 0,261497$  la constante de Meissel-Mertens.

En combinant les estimations (4.5.5), (4.5.4) et (4.5.3), il suit

$$S_B = \left\{ \frac{1}{2} \left( \log \frac{1}{2\theta} \right)^2 + o(1) \right\} \pi(x). \quad (4.5.6)$$

En reportant (4.5.2) et (4.5.6) dans (4.5.1), on en déduit finalement

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ P^+(p-1) < P^+(p+1)}} 1 \geq \{f(\theta) + o(1)\} \pi(x)$$

où

$$f(\theta) := \rho(2) - \rho\left(\frac{1}{\theta}\right) - \frac{1}{2} \left( \log \frac{1}{2\theta} \right)^2 \quad (\varepsilon_0 \leq \theta < 1/2).$$

Si on impose la condition  $\theta \geq \frac{1}{3}$ , on a

$$f(\theta) = \log \frac{1}{2\theta} - \frac{1}{2} \left( \log \frac{1}{2\theta} \right)^2 - \int_1^{1/\theta-1} \frac{\log t}{t+1} dt.$$

À l'aide de *Mathematica 9.0*, on peut calculer

$$f(\tilde{\theta}) = \max_{\frac{1}{3} \leq \theta < \frac{1}{2}} f(\theta) > 0,1779$$

avec  $\tilde{\theta} \approx \frac{1}{2,9}$ .

Cela achève la démonstration du Théorème 4.1.

## 4.6 Démonstration des Théorèmes 4.2 et 4.3

Nous donnons seulement une démonstration du Théorème 4.2 puisque celle du Théorème 4.3 se fait quasiment de la même manière que celles des Théorèmes 3.2 et 3.3 dans le Chapitre 3. Soient

$$0 < \beta < \frac{1}{3}, \quad \beta < \alpha < \frac{1}{2} \quad (4.6.1)$$

et  $y = x^\alpha$ ,  $z = x^\beta$ . Alors

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n) < P^+(n+2) \\ P^-(n) > z}} 1 \geq \sum_{\substack{n \in \tilde{S}(x;y;z) \\ (n+2, P(x,y)) > 1}} 1, \quad (4.6.2)$$

où  $\tilde{S}(x; y, z)$  est définie par (4.2.1) et  $P(x, y)$  est définie par  $P(x, y) := \prod_{y < p \leq x} p$ .

Pour  $n \leq x$  et  $y < x$ , comme dans les Chapitre 2 et 3, le système de poids bien adapté  $\omega(n; x, y)$  avec la relation

$$\left( \frac{\log x}{\log y} \right)^{-1} \omega(n; x, y) \begin{cases} \leq 1 & \text{si } (n, P(x, y)) > 1, \\ = 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n \leq x, P^-(n) > z \\ P^+(n) < P^+(n+2)}} 1 &\geq \sum_{n \in \tilde{S}(x; y, z)} \frac{\omega(n+2; x, y)}{\left(\frac{\log x}{\log y}\right)} \\
&\geq \alpha \sum_{n \in \tilde{S}(x; y, z)} \omega(n+2; x^{1/2}/(\log x)^B, x^\alpha) \\
&= \alpha \sum_{n \in \tilde{S}(x; y, z)} \sum_{\substack{p|n+2 \\ x^\alpha < p \leq x^{1/2}/(\log x)^B}} 1 \\
&= \alpha \sum_{x^\alpha < p \leq x^{1/2}/(\log x)^B} \sum_{\substack{n \in \tilde{S}(x; y, z) \\ n \equiv -2 \pmod{p}}} 1 \\
&= \alpha(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2)
\end{aligned} \tag{4.6.3}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_1 &:= \sum_{x^\alpha < p \leq x^{1/2}/(\log x)^B} \frac{1}{\varphi(p)} \sum_{\substack{n \in \tilde{S}(x; y, z) \\ (n, p) = 1}} 1, \\
\mathcal{S}_2 &:= \sum_{x^\alpha < p \leq x^{1/2}/(\log x)^B} \left( \sum_{\substack{n \in \tilde{S}(x; y, z) \\ n \equiv -2 \pmod{p}}} 1 - \frac{1}{\varphi(p)} \sum_{\substack{n \in \tilde{S}(x; y, z) \\ (n, p) = 1}} 1 \right).
\end{aligned}$$

où  $B$  est une constante convenable.

Pour  $\mathcal{S}_2$ , en utilisant le Théorème 4.4 on obtient

$$\mathcal{S}_2 \ll \sum_{q \leq x^{1/2}/(\log x)^B} \left| \sum_{\substack{n \in \tilde{S}(x; y, z) \\ n \equiv -2 \pmod{q}}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \in \tilde{S}(x; y, z) \\ (n, q) = 1}} 1 \right| \ll \frac{x}{(\log x)^A}. \tag{4.6.4}$$

Pour  $\mathcal{S}_1$ , on peut retirer la condition  $(n, p) = 1$  compte tenu de  $p > x^\alpha$  et  $P^+(n) \leq x^\alpha$  si  $n \in S(x; x^\alpha, x^\beta)$ . On évalue ensuite  $\mathcal{S}_1$  à l'aide du Lemme 4.2 sur  $\Theta(x; y, z)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_1 &= \sum_{x^\alpha < p \leq x^{1/2}/(\log x)^B} \frac{\Theta(x; x^\alpha, x^\beta)}{\varphi(p)} \\
&= \sigma(1/\alpha, 1/\beta) \frac{x}{\log x^\beta} \sum_{x^\alpha < p \leq x^{1/2}/(\log x)^B} \frac{1}{p} \{1 + o(1)\} \\
&= \left\{ \frac{\sigma(1/\alpha, 1/\beta)}{\beta} \log \left( \frac{1}{2\alpha} \right) + o(1) \right\} \frac{x}{\log x}.
\end{aligned} \tag{4.6.5}$$

En reportant (4.6.5) et (4.6.4) dans (4.6.3), on en déduit que

$$\sum_{\substack{n \leq x, P^-(n) > x^\beta \\ P^+(n) < P^+(n+2)}} 1 \geq \{g(\alpha, \beta) + o_{\alpha, \beta}(1)\} \frac{x}{\log x} \tag{4.6.6}$$

où

$$g(\alpha, \beta) := \sigma\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right) \frac{\alpha}{\beta} \log\left(\frac{1}{2\alpha}\right) \quad (4.6.7)$$

pour  $\alpha$  et  $\beta$  vérifiant (4.6.1). Pour ces  $\alpha$  et  $\beta$ , la fonction  $g(\alpha, \beta)$  est strictement positive et continue. De plus, on a

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{1}{2}} g(\alpha, \beta) = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \beta} g(\alpha, \beta) = 0.$$

Ainsi pour tout  $0 < \beta < \frac{1}{3}$  fixé, il existe un  $\alpha_0 = \alpha_0(\beta) \in ]\beta, \frac{1}{2}[$  tel que

$$C(\beta) := g(\alpha_0, \beta) = \max_{\beta < \alpha < \frac{1}{2}} g(\alpha, \beta) > 0. \quad (4.6.8)$$

En particulier, on a

$$C\left(\frac{1}{4}\right) \geq g\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right) > 0,0267$$

en prenant  $\alpha = \frac{1}{3}$ ,  $\beta = \frac{1}{4}$ .

La preuve du Théorème 4.2 est complète.

---

# Bibliographie

- [1] A. Balog. On triplets with descending largest prime factors. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 38 :45–50, 2001.
- [2] W. Banks, A. Harcharras, and I. E. Shparlinski. Smooth values of shifted primes in arithmetic progressions. *Michigan Math. J.*, 52 :603–618, 2004.
- [3] E. Bombieri. On the large sieve. *Mathematika*, 12 :201–225, 1965.
- [4] E. Bombieri, J. B. Friedlander, and H. Iwaniec. Primes in arithmetic progressions to large moduli. *Acta Math.*, 156 :203–251, 1986.
- [5] F.-R. Chen and Y.-G. Chen. On the largest prime factor of shifted primes. *Acta Math. Sinica, English Series*, 3 :377–382, 2017.
- [6] J.-R. Chen. On the representation of a larger even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes. *Sci. Sinica*, 16 :157–176, 1973.
- [7] C. Dartyge. Entiers friables : un tour d’horizon. *Gazette des Mathématiciens*, à paraître.
- [8] J. M. De Koninck and N. Doyon. On the distance between smooth numbers. *Integers*, 11 :647–669, 2011.
- [9] R. de la Bretèche and D. Fiorilli. Entiers friables dans des progressions arithmétiques de grand module. *arXiv :1506.03268*, 2015.
- [10] R. de la Bretèche, C. Pomerance, and G. Tenenbaum. Products of ratios of consecutive integers. *Ramanujan J.*, 9 :131–138, 2005.
- [11] R. De La Bretèche and G. Tenenbaum. Propriétés statistiques des entiers friables. *Ramanujan J.*, 9(1) :139–202, 2005.
- [12] S. Drappeau. Théorèmes de type Fouvry–Iwaniec pour les entiers friables. *Compos. Math.*, 151(05) :828–862, 2015.
- [13] P. Erdős. On the normal number of prime factors of  $p - 1$  and some related problems concerning Euler’s  $\phi$ -function. *Quart. J. Math.*, 6 :205–213, 1935.
- [14] P. Erdős. Some unconventional problems in number theory. *Astérisque*, 61 :73–82, 1979.
- [15] P. Erdős and C. Pomerance. On the largest prime factors of  $n$  and  $n + 1$ . *Aequationes Math.*, 17(2-3) :311–321, 1978.
- [16] B. Feng and J. Wu. On the density of shifted primes with large prime factors. *Sci. China Math.*, 61(1) :83–94, 2018.
- [17] E. Fouvry. Répartition des suites dans les progressions arithmétiques. *Acta Arith.*, 4(41) :359–382, 1982.

- [18] E. Fouvry. Autour du théorème de Bombieri-Vinogradov. *Acta Math.*, 152(1) :219–244, 1984.
- [19] E. Fouvry and H. Iwaniec. Primes in arithmetic progressions. *Acta Arith.*, 42(2) :197–218, 1983.
- [20] E. Fouvry and G. Tenenbaum. Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques. *Proc. London Math. Soc.*, 3(63) :449–494, 1991.
- [21] E. Fouvry and G. Tenenbaum. Répartition statistique des entiers sans grand facteur premier dans les progressions arithmétiques. *Proc. London Math. Soc.*, 72(3) :481–514, 1996.
- [22] J. B. Friedlander. Integers free from large and small primes. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 3(3) :565–576, 1976.
- [23] M. Goldfeld. On the number of primes  $p$  for which  $p + a$  has a large prime factor. *Mathematika*, 16 :23–27, 1969.
- [24] D. A. Goldston, S. W. Graham, J. Pintz, and C. Y. Yildirim. Small gaps between products of two primes. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 98(3) :741–774, 2009.
- [25] D. A. Goldston, J. Pintz, and C. Y. Yildirim. Primes in tuples I. *Ann. of Math.*, 170 :819–862, 2009.
- [26] A. Granville. Smooth numbers : computational number theory and beyond. *Algorithmic number theory : lattices, number fields, curves and cryptography*, 44 :267–323, 2008.
- [27] A. J. Harper. Bombieri–Vinogradov and Barban–Davenport–Halberstam type theorems for smooth numbers. *arXiv :1208.5992*, prépublication(2012).
- [28] A. Hildebrand. On the number of positive integers  $\leq x$  and free of prime factors  $> y$ . *J. Number Theory*, 22 :289–307, 1986.
- [29] A. Hildebrand and G. Tenenbaum. Integers without large prime factors. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 5(2) :411–484, 1993.
- [30] H. Iwaniec. A new form of the error term in the linear sieve. *Acta Arith.*, 37 :307–320, 1980.
- [31] H. Iwaniec. Rosser’s sieve. *Acta Arith.*, 36 :171–202, 1980.
- [32] A. Lachand. Valeurs friables d’une forme quadratique et d’une forme linéaire. *Quart. J. Math.*, 66(1) :225–244, 2015.
- [33] A. Lachand and G. Tenenbaum. Note sur les valeurs moyennes criblées de certaines fonctions arithmétiques. *Quart. J. Math.*, 66(1) :245–250, 2015.
- [34] F. Luca, R. Menares, and A. Pizarro-Madariaga. On shifted primes with large prime factors and their products. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 22 :39–47, 2015.
- [35] J. Maynard. Small gaps between primes. *Ann. of Math.*, 181(1) :383–413, 2015.
- [36] Y. Motohashi. An induction principle for the generalization of Bombieri’s prime number theorem. *Proc. Japan Acad.*, 52(6) :273–275, 1976.
- [37] Y. Motohashi and J. Pintz. A smoothed GPY sieve. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 40(2) :298–310, 2008.
- [38] J.-L. Nicolas. Nombres hautement composés. *Acta Arith.*, 49 :395–412, 1988.

- [39] K. K. Norton. Numbers with small prime factors, and the least  $k$ th power non-residue. *Mem. Amer. Math. Soc.*, (106), 1971.
- [40] C. D. Pan, X. Q. Ding, and Y. Wang. On the representation of every large even integer as a sum of a prime and an almost prime. *Sci. Sinica*, 18(5) :599–610, 1975.
- [41] A. Perelli, J. Pintz, and S. Salerno. Bombieri’s theorem in short intervals. *Ann. Scuola Normale Sup. Pisa*, 11(4) :529–539, 1985.
- [42] P. Pollack. Arithmetic properties of polynomial specializations over finite fields. *Acta Arith.*, 136(1) :57–79, 2009.
- [43] D. H. J. Polymath. The “bounded gaps between primes” Polymath project—a retrospective. *arXiv :1409.8361*, 2014.
- [44] C. Pomerance. Popular values of Euler’s function. *Mathematika*, 27(01) :84–89, 1980.
- [45] C. Pomerance and I. Shparlinski. Smooth orders and cryptographic applications. In *International Algorithmic Number Theory Symposium*, pages 338–348. Springer, 2002.
- [46] J. Rivat. On pseudo-random properties of  $P(n)$  and  $P(n + 1)$ . *Period. Math. Hungar.*, 43 :121–136, 2001.
- [47] E. Saias. Entiers sans grand ni petit facteur premier I. *Acta Arith.*, 61(3) :347–374, 1992.
- [48] E. Saias. Entiers sans grand ni petit facteur premier II. *Acta Arith.*, 63(4) :287–312, 1993.
- [49] E. Saias. Entiers sans grand ni petit facteur premier III. *Acta Arith.*, 71(4) :351–379, 1995.
- [50] V. T. Sós. Turbulent years : Erdős in his correspondence with Turán from 1934 to 1940. *Paul Erdős and his Mathematics, I (Budapest, 1999)*, 11 :85–146, 2002.
- [51] G. Tenenbaum. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 3ième édition. Collection Échelles, Édition Belin, 2008.
- [52] G. Tenenbaum. *Some of Erdős’ unconventional problems in number theory, thirty-four years later*. Bolyai Society Mathematical Studies, 2013.
- [53] G. Tenenbaum and J. Wu. *Théorie analytique et probabiliste des nombres, 307 exercices corrigés*. 2014.
- [54] J. Teräväinen. A note on binary correlations of multiplicative functions. prépublication.
- [55] N. M. Timofeev. Distribution of arithmetic functions in short intervals in the mean with respect to progressions. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 51(2) :341–362, 1987.
- [56] R. C. Vaughan. A new iterative method in Waring’s problem. *Acta Math.*, 162(1) :1–71, 1989.
- [57] R. C. Vaughan and T. D. Wooley. On Waring’s problem : some refinements. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 3(1) :35–68, 1991.
- [58] R. C. Vaughan and T. D. Wooley. Further improvements in Waring’s problem, II : Sixth powers. *Duke Math. J.*, 76(3) :683–710, 1994.
- [59] R. C. Vaughan and T. D. Wooley. Further improvements in Waring’s problem. *Acta Math.*, 174(2) :147–240, 1995.

- 
- [60] A.I. Vinogradov. The density hypothesis for Dirichet  $L$ -series. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 29 :903–934, 1965.
- [61] Z. W. Wang. On the largest prime factors of consecutive integers in short intervals. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 145(8) :3211–3220, 2017.
- [62] Z. W. Wang. Sur les plus grands facteurs premiers d’entiers consécutifs. *Mathematika*, 64(2) :343–379, 2018.
- [63] Z. W. Wang. Autour des plus grands facteurs premiers d’entiers consécutifs voisins d’un entier criblé. *Quart. J. Math. (Oxford)*, à paraître.
- [64] D. Wolke. Über die mittlere verteilung der werte zahlentheoretischer funktionen auf restklassen. II. *Math. Ann.*, 204(2) :145–153, 1973.
- [65] J. Wu. Théorèmes généralisés de Bombieri-Vinogradov dans les petits intervalles. *Quart. J. Math. (Oxford)*, 44(2) :109–128, 1993.
- [66] T. Z. Xuan. Integers free of small prime factors in arithmetic progressions. *Nagoya Math. J.*, 157 :103–127, 2000.
- [67] Y. T. Zhang. Bounded gaps between primes. *Ann. of Math.*, 179(3) :1121–1174, 2014.



**Abstract.** – In this thesis, we study the largest prime factors of consecutive integers. Denote by  $P^+(n)$  (resp.  $P^-(n)$ ) the largest (resp. the smallest) prime factors of the integer  $n \geq 1$  with the convention  $P^+(1) = 1$  (resp.  $P^-(1) = \infty$ ).

In the first chapter, we consider the largest prime factors of consecutive integers in short intervals. We prove that there exists a positive proportion of integers  $n$  for  $n \in (x, x + y]$  with  $y = x^\theta$ ,  $\frac{7}{12} < \theta \leq 1$  such that  $P^+(n) < P^+(n + 1)$ . A similar result holds for the condition  $P^+(n) > P^+(n + 1)$ .

In the second chapter, we consider the function  $P_y^+(n)$ , where  $P_y^+(n) = \max\{p|n : p \leq y\}$  and  $2 \leq y \leq x$ . We prove that there exists a positive proportion of integers  $n$  such that  $P_y^+(n) < P_y^+(n + 1)$ . In particular, the proportion of the pattern  $P^+(n) < P^+(n + 1)$  is larger than 0.1356 by taking  $y = x$ . The main tools are sieve methods and a well adapted system of weights.

In the third chapter, we prove that the two patterns  $P^+(n - 1) > P^+(n) < P^+(n + 1)$  and  $P^+(n - 1) < P^+(n) > P^+(n + 1)$  occur for a positive proportion of integers  $n$  respectively, by the well adapted system of weights that we have developed in the second chapter. With the same method, we derive a more general result for  $k$  consecutive integers,  $k \in \mathbb{Z}, k \geq 3$ .

In the fourth chapter, we study the largest prime factors of consecutive integers with one of which without small prime factor. Firstly we show that under the Elliott-Halberstam conjecture, the proportion of the pattern  $P^+(p - 1) < P^+(p + 1)$  is larger than 0.1779. Then, we prove that there exists a positive proportion of integers  $n$  such that  $P^+(n) < P^+(n + 2), P^-(n) > x^\beta$  with  $0 < \beta < \frac{1}{3}$ .

---

**Keywords** – Largest prime factors, Well adapted system of weights, Theorems of Bombieri-Vinogradov type, Rosser-Iwaniec linear sieve, Elliott-Halberstam conjecture, Short intervals, Friable integers

---



**Résumé** – Dans cette thèse, on s'intéresse aux plus grands facteurs premiers d'entiers consécutifs. Désignons par  $P^+(n)$  (resp.  $P^-(n)$ ) le plus grand (resp. plus petit) facteur premier d'un entier générique  $n \geq 1$  avec la convention que  $P^+(1) = 1$  (resp.  $P^-(1) = \infty$ ).

Dans le premier chapitre, nous étudions les plus grands facteurs premiers d'entiers consécutifs dans les petits intervalles. Nous démontrons qu'il existe une proportion positive d'entiers  $n$  tels que  $P^+(n) < P^+(n+1)$  pour  $n \in ]x, x+y]$  avec  $y = x^\theta$ ,  $\frac{7}{12} < \theta \leq 1$ . Nous obtenons un résultat similaire pour la condition  $P^+(n) > P^+(n+1)$ .

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à la fonction  $P_y^+(n)$ , où  $P_y^+(n) = \max\{p|n : p \leq y\}$  et  $2 \leq y \leq x$ . Nous montrons qu'il existe une proportion positive d'entiers  $n$  tels que  $P_y^+(n) < P_y^+(n+1)$ . En particulier, la proportion d'entiers  $n$  avec  $P^+(n) < P^+(n+1)$  est plus grande que 0,1356 en prenant  $y = x$ . Les outils principaux sont le crible et un système de poids bien adapté.

Dans le troisième chapitre, nous démontrons que les deux configurations  $P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1)$  et  $P^+(n-1) < P^+(n) > P^+(n+1)$  ont lieu pour une proportion positive d'entiers  $n$ , en utilisant le système de poids bien adapté que l'on a introduit dans le Chapitre 2. De façon similaire, on peut obtenir un résultat plus général pour  $k$  entiers consécutifs,  $k \in \mathbb{Z}, k \geq 3$ .

Dans le quatrième chapitre, on étudie les plus grands facteurs premiers d'entiers consécutifs voisins d'un entier criblé. Sous la conjecture d'Elliott-Halberstam, nous montrons d'abord que la proportion de la configuration  $P^+(p-1) < P^+(p+1)$  est plus grande que 0,1779. Puis, nous démontrons qu'il existe une proportion positive d'entiers  $n$  tels que  $P^+(n) < P^+(n+2), P^-(n) > x^\beta$  avec  $0 < \beta < \frac{1}{3}$ .

---

**Mots clés** – Plus grand facteur premier, Système de poids bien adapté, Théorèmes de type Bombieri-Vinogradov, Crible linéaire de Rosser-Iwaniec, Conjecture d'Elliott-Halberstam, Petits intervalles, Entiers friables

---