



**HAL**  
open science

# Physique des instabilités de type Weibel

Mathieu Sarrat

► **To cite this version:**

Mathieu Sarrat. Physique des instabilités de type Weibel. Physique des plasmas [physics.plasm-ph]. Université de Lorraine, 2017. Français. NNT : 2017LORR0162 . tel-01774390

**HAL Id: tel-01774390**

**<https://theses.hal.science/tel-01774390>**

Submitted on 23 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



École doctorale n° 409 : Énergie Mécanique et Matériaux

## THÈSE de DOCTORAT

pour obtenir le grade de docteur délivré par

**l'Université de Lorraine**

Spécialité doctorale “Physique des Plasmas”

*présentée et soutenue publiquement par*

**Mathieu Sarrat**

le 15 Novembre 2017

## Physique des instabilités de type Weibel

Directeur de thèse : **Alain Ghizzo**  
Co-encadrant de thèse : **Daniele Del Sarto**

### Jury

<b>Mme. Caterina Riconda,</b>	Professeur, Université Paris VI	Présidente
<b>M. Jean-Marcel Rax,</b>	Professeur, École Polytechnique	Rapporteur
<b>M. Jérôme Pétri,</b>	Maître de Conférences, Université de Strasbourg	Rapporteur
<b>M. Antoine Bret,</b>	Professeur, Université de Castille-La-Manche	Examineur
<b>M. Hinrich Lütjens,</b>	Directeur de Recherche CNRS, Palaiseau	Examineur
<b>M. Alain Ghizzo,</b>	Professeur, Université de Lorraine	Directeur
<b>M. Daniele Del Sarto,</b>	Maître de Conférences, Université de Lorraine	Co-directeur
<b>M. Pierre Bertrand,</b>	Professeur, Université de Lorraine	Invité

**Université de Lorraine**  
**Institut Jean Lamour (IJL)**  
UMR CNRS 7198, F-54506 Vandoeuvre-lès-Nancy, France

---

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>iii</b>
<b>1 Les instabilités de type Weibel</b>	<b>5</b>
1.1 Caractérisation et classification des plasmas . . . . .	6
1.2 Les instabilités de type Weibel . . . . .	9
<b>2 Modèles de plasmas non-collisionnels</b>	<b>29</b>
2.1 Description particulière : le problème à $N$ corps . . . . .	31
2.2 Description statistique . . . . .	37
2.3 Descriptions cinétiques réduites . . . . .	45
2.4 Description macroscopique . . . . .	51
<b>3 Apports du tenseur de pression dans l'analyse linéaire des instabilités de type Weibel</b>	<b>61</b>
3.1 Pourquoi introduire le tenseur de pression ? . . . . .	63
3.2 Modélisation fluide des instabilités Weibel . . . . .	72
3.3 Propagation perpendiculaire : WI, CFI et couplage . . . . .	75
3.4 Propagation parallèle : modes Weibel propagatifs . . . . .	90
<b>4 Le code semi-lagrangien VLEM</b>	<b>105</b>
4.1 Introduction . . . . .	107
4.2 Présentation générale du code VLEM . . . . .	109
4.3 Méthodes mathématiques et numériques mises en oeuvre . . . . .	113
4.4 Le problème de la conservation de la charge . . . . .	122
4.5 Validation du code VLEM . . . . .	132
<b>5 Conclusion et perspectives</b>	<b>163</b>
5.1 Conclusions . . . . .	164
5.2 Perspectives . . . . .	164
<b>A Relation de dispersion cinétique pour les modes WI-CFI</b>	<b>I</b>
<b>B La méthode d'Esirkepov dans les codes PIC</b>	<b>III</b>
B.1 Principe de la méthode PIC . . . . .	III
B.2 Principe de la méthode d'Esirkepov . . . . .	IV
<b>C Relation de dispersion cinétique 2D non-relativiste pour un système de faisceaux</b>	<b>VII</b>
<b>D Relation de dispersion cinétique 2D relativiste pour un système de faisceaux froids</b>	<b>IX</b>



# Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier mes directeurs de thèse, Alain Ghizzo et Daniele Del Sarto, qui m'ont fait confiance, encadré et accompagné durant ces trois années de travail. Ils ont tous deux dirigé cette thèse avec beaucoup de patience et de pédagogie, ainsi qu'avec une très grande compétence scientifique, tout en me laissant énormément de liberté quant aux sujets à aborder et à la méthodologie à appliquer. Ils m'ont permis d'explorer de nombreux aspects de la physique des plasmas (fondamentaux, numériques, analytiques) et de me faire une assez bonne idée de comment fonctionne la recherche à l'université. J'ai beaucoup appris à leur côté, professionnellement et humainement. Je les remercie enfin tous les deux pour m'avoir proposé de nombreuses opportunités durant ces trois années. Pour tout cela, je leur suis reconnaissant.

Je remercie particulièrement Alain pour toujours avoir trouvé du temps à me consacrer et pour m'avoir fait partager ses larges connaissances en matière de simulations numériques, de parallélisation et plus généralement pour tout ce qui a un rapport avec la conception et l'utilisation des codes semi-lagrangiens.

J'adresse enfin à Daniele toute ma reconnaissance, en particulier pour sa grande disponibilité, sa sympathie, son sang froid et sa capacité à trouver les mots justes m'incitant à rebondir lors des quelques périodes de gros doutes qui ont ponctué ces trois années. Je souhaite également ajouter que nos conversations plus "généralistes", qu'elles concernent l'histoire, la littérature, la cuisine ou la physique ont été très enrichissantes.

Je remercie vivement Jean-Marcel Rax et Jérôme Pétri d'avoir accepté la responsabilité d'être rapporteurs de ce mémoire. Je remercie aussi Pierre Bertrand, Caterina Riconda, Antoine Bret et Hinrich Lütjens pour l'intérêt qu'ils ont manifesté vis à vis de mon travail et pour avoir accepté de faire partie du jury de soutenance.

Je souhaite adresser un très grand merci à Fabrice Valsaque, avec qui j'ai vraiment apprécié de travailler durant ma mission d'enseignement et qui m'a encouragé à prendre de nombreuses initiatives pour l'enseignement des matières dont il était responsable. Je le remercie aussi pour ses conseils concernant la rédaction et la fin de thèse. Je remercie également Mathieu Stoffel, Didier Rouxel, Patrice Miska et Malika Colin avec qui j'ai encadré des séances de travaux pratiques. Un merci, enfin, à Nicolas Claiser, qui a pris le temps de m'expliquer comment fonctionnait le système du monitorat.

Je veux exprimer ma gratitude aux membres de l'équipe Plasmas chauds de l'Institut Jean Lamour. Tout d'abord à Étienne Gravier, Thierry Réveillé et Thomas Drouot qui m'ont encadré durant le stage de M2, mais aussi pour leurs encouragements à poursuivre en thèse et pendant la thèse. Merci à Jean-Hugues Chatenet pour sa conversation, sa sympathie et pour m'avoir fourni de précieux éléments de bibliographie et de compréhension lors de la rédaction du chapitre 2, Erwan Deriaz pour son aide vis à vis d'une certaine intégrale et Stéphane Heuraux pour ses bons mots et ses conseils lors du dépôt de la thèse. Je remercie aussi Mickaël Grech et Anna Grassi pour les discussions sur nos travaux respectifs et les bons moments passés lors de leur séjour à Nancy. Je remercie enfin Anne-Sophie Latreille pour son aide et son efficacité lorsqu'il a fallu prévoir des déplacements et organiser la soutenance, ainsi que Christine Sartori pour tous les renseignements que j'ai pu lui demander.

Je n'oublie pas les collègues thésards et post-docs, notamment Éric Madaule, Julien Médina (milliardaire dans deux ans) et Malik Idouakass, ainsi que Florent Hild, Sarah Xing, Sébastien Geiskopf et Geoffroy Kremer avec qui j'ai pu enseigner lors du monitorat. Je souhaite aussi bon courage et bonne chance à Homam Betar qui prend la relève et va garder mes chers directeurs occupés.

Je veux remercier enfin mes amis et ma famille, dont le soutien moral s'est avéré crucial, et même davantage encore lors des six derniers mois. Je remercie notamment mes parents et ma sœur pour le gros "coup de main" de l'automne 2017.



# Plan de la thèse

Ce travail de thèse en physique des plasmas traite, d'une part, de la physique des instabilités de type Weibel, et d'autre part, du développement du code numérique semi-lagrangien VLEM (VLasov ElectroMagnétique).

Les instabilités de type Weibel sont déclenchées quand la distribution des vitesses du plasma présente une anisotropie marquée : la réorganisation du plasma qui en découle s'accompagne notamment de la création d'un fort champ magnétique, de longue durée de vie. Elles font l'objet d'un travail de recherche intense depuis plusieurs décennies car elles sont supposées jouer un rôle important dans de nombreux problèmes d'astrophysique ou de laboratoire (interaction laser-plasma) : les plasmas dans lesquels ces instabilités naissent peuvent être relativistes ou non, magnétisés ou non, collisionnels ou non. Ceci pose la question du choix du modèle à utiliser pour les décrire.

Ce document comprend quatre chapitres :

- Le chapitre 1 est un chapitre d'introduction. On évoque d'abord les notions de plasma cinétique et de plasma non-collisionnel : les modèles que nous utilisons sont construits sur ces hypothèses, ce qui a du sens pour des plasmas suffisamment chauds ou peu denses. On présente ensuite les instabilités de type Weibel en détaillant leur origine et leur mécanisme. On mentionne enfin plusieurs situations physiques concrètes dans lesquelles ces instabilités peuvent apparaître et jouer un rôle important.
- Le chapitre 2 est une présentation des niveaux de description que l'on peut mettre en oeuvre pour décrire un plasma non-collisionnel, du plus complet à celui qui présente le plus d'approximations : les descriptions de type particulaire, les descriptions de type statistique et les descriptions de type fluide. On discute leurs limites et leurs avantages. On introduit enfin la notion de modèle réduit, en présentant le modèle multi-faisceaux, adapté à la description des instabilités de type Weibel.
- Le chapitre 3 traite de la description fluide linéaire des instabilités de type Weibel, via un modèle s'appuyant sur la dynamique de toutes les composantes du tenseur de pression. On présente le modèle puis on l'applique à plusieurs instabilités en comparant les résultats avec ceux de la théorie cinétique : l'étude des instabilités Weibel pure (WI), déclenchée par une anisotropie de température, et celle de l'instabilité de filamentation de courant (CFI), déclenchée dans un système de faisceaux contra-propageants, sont menées de façon séparée dans un premier temps. On combine ensuite les sources de ces instabilités pour étudier la relation de dispersion résultant de cette superposition : on s'intéresse au couplage des instabilités WI-CFI, puis aux modes Weibel propagatifs, selon que la propagation est perpendiculaire ou parallèle au système de faisceaux.
- Quelque soit le modèle retenu pour étudier un phénomène, le caractère non-linéaire des équations modélisant l'évolution d'un plasma rend quasiment indispensable le recours aux simulations numériques. Le chapitre 4 traite du code semi-lagrangien VLEM, conçu au sein de l'équipe durant la thèse. On commence par présenter les méthodes mathématiques mises en oeuvre dans le code : celui-ci est notamment construit autour d'une méthode de décomposition de domaine parallélisée par MPI. On introduit ensuite une nouvelle méthode de conservation de la charge, inspirée de la méthode d'Esirkepov utilisée dans les codes PIC. On présente enfin plusieurs simulations d'instabilités de type Weibel pour valider le code.



# Chapitre 1

## Les instabilités de type Weibel

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Caractérisation et classification des plasmas</b>	<b>6</b>
<b>1.2</b>	<b>Les instabilités de type Weibel</b>	<b>9</b>
1.2.1	Comportement auto-consistant et instabilité	9
1.2.2	Anisotropie de température et instabilité Weibel	9
1.2.3	Modélisation réduite et instabilité de filamentation de courant	11
1.2.4	Quelques différences cependant	15
1.2.5	Comportement non linéaire des instabilités de type Weibel	17
1.2.6	Les instabilités de type Weibel dans la nature et au laboratoire	19

---

## 1.1 Caractérisation et classification des plasmas

Un plasma est un gaz constitué (au moins partiellement) de particules chargées (en général des ions et des électrons), souvent présenté comme le quatrième état de la matière. Cette dernière affirmation repose sur une image quelque peu naïve mais parlante : considérons un matériau solide dont on élève progressivement la température. Celui-ci devient liquide alors que les liaisons reliant ses constituants entre eux se délitent petit à petit. Ces liaisons finissent par disparaître complètement au-delà d’une certaine température : le matériau est à l’état gazeux. En chauffant encore davantage, les électrons sont arrachés les uns après les autres aux atomes qui les contenaient jusqu’alors et on obtient un milieu constitué de particules chargées (ions et électrons), en mouvement les unes par rapport aux autres mais interagissant ensemble par interaction électromagnétique.

Une première façon de caractériser les plasmas consiste à les classer en fonction de leur teneur en particules chargées : en effet, le plasma n’est pas toujours totalement ionisé. Le degré d’ionisation  $\alpha$ , défini comme le rapport de la densité électronique  $n_e$  sur la densité totale d’électrons et d’espèces non ionisées

$$\alpha = \frac{n_e}{n_n + n_e} \quad (1.1)$$

permet de distinguer les plasmas fortement ionisés ( $\alpha \simeq 1$ , souvent dits “chauds”) de ceux qui le sont peu ( $\alpha \ll 1$ , souvent dit “froids”).

Que le plasma soit fortement ionisé ou non, chaque particule chargée interagit avec toutes les autres particules chargées du fait de la portée illimitée de l’interaction électromagnétique. Ainsi, le mouvement d’une particule chargée affecte celui de toutes les autres. Il faut toutefois tempérer cette affirmation : l’interaction électromagnétique perd en intensité lorsque la distance séparant les deux particules en interaction augmente. De plus, une particule chargée (disons un ion) va attirer autour d’elle ses voisines dont la charge est de signe opposée (les électrons) : les électrons les plus proches sont davantage attirés que ceux qui sont plus loin et leur potentiel vient partiellement compenser celui généré par l’ion, réduisant de fait sa portée effective. Au-delà d’une certaine distance appelée longueur de Debye et d’expression

$$\lambda_D \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_e e^2}}, \quad (1.2)$$

où  $T_e$  est la température des électrons, la tendance que l’ion aura à affecter les charges de son entourage s’évanouit. Ainsi, il peut exister un déséquilibre de charge sur les échelles de taille inférieure à la longueur de Debye, mais le plasma est neutre sur les échelles supérieures. On dit que le potentiel électrostatique généré par l’ion est écranté par les électrons qu’il attire autour de lui, ce qui signifie que l’ion n’interagit pas avec les particules trop lointaines mais seulement avec les  $N_D$  particules qui se trouvent dans un volume de taille caractéristique  $\lambda_D^3$  (une sphère ou un cube) centré autour de lui.

On peut donc quantifier l’écrantage en calculant le nombre de particules  $N_D$ , par exemple pour un cube,

$$N_D = \left( \frac{\lambda_D}{n_e^{-1/3}} \right)^3 = n_e \lambda_D^3. \quad (1.3)$$

$N_D$  est un nombre sans dimension permettant de comparer la longueur de Debye à la distance moyenne séparant deux électrons  $n_e^{-1/3}$ . Si ce nombre tend vers l’infini, l’ion (et toute particule chargée du plasma en général) interagira avec un grand nombre de particules et son mouvement sera déterminé par la résultante d’un grand nombre d’interactions, présageant une trajectoire variant de manière progressive. Ce sont donc des effets collectifs qui dominent le comportement du plasma, qui est alors qualifié de plasma “cinétique”. Si  $N_D$  a une valeur faible, les particules chargées interagiront avec un faible nombre de voisins et on peut donc s’attendre à ce que leur mouvement soit plus erratique, que leurs trajectoires subissent des changements plus violents. On parle de plasma corrélé ou fortement corrélé, c’est à dire dominé par des effets individuels.

On obtient là une deuxième façon de classer les plasmas : l’inverse de  $N_D$  constitue un paramètre fondamental permettant de caractériser un plasma. Il s’agit du paramètre plasma  $g$  (aussi appelé facteur de grain), défini tel que

$$g \equiv \frac{1}{N_D} = \frac{1}{n_e \lambda_D^3} \simeq n_e^{1/2} \left( \frac{e}{\sqrt{\epsilon_0 k_B T_e}} \right)^3 \propto \frac{n_e^{1/2}}{T_e^{3/2}}. \quad (1.4)$$

Il est possible d'interpréter le paramètre plasma d'un point de vue énergétique. Tout d'abord, l'énergie cinétique des électrons  $E_k$  est proportionnelle à leur température :

$$E_k \propto k_B T_e. \quad (1.5)$$

En supposant que la distance moyenne entre deux électrons est donnée par  $n_e^{-1/3}$ , leur énergie potentielle d'interaction sera donc

$$E_p \propto \frac{e^2}{\epsilon_0 n_e^{-1/3}}. \quad (1.6)$$

Le rapport de ces deux quantités est tel que

$$\left(\frac{E_p}{E_k}\right)^{\frac{3}{2}} \propto \left(\frac{e^2 n_e^{1/3}}{\epsilon_0 k_B T_e}\right)^{\frac{3}{2}} \propto \frac{n_e^{\frac{1}{2}}}{T_e^{\frac{3}{2}}} \propto g. \quad (1.7)$$

Cette interprétation énergétique permet de souligner que le plasma est un système physique dans lequel deux types de comportement sont à l'oeuvre : le désordre thermique d'une part et, d'autre part, l'ordre généré par l'interaction électromagnétique entre particules chargées. Ainsi un plasma tel que  $g \rightarrow 0$  est caractérisé par une énergie cinétique très importante devant l'énergie d'interaction électrostatique entre deux particules, impliquant que les particules soient très peu liées les unes aux autres. Néanmoins, et cela peut paraître paradoxal si on n'y prend pas garde, la distance interparticulaire est faible devant la longueur de Debye : il y a beaucoup de particules à portée d'interaction. Le nombre total de ces interactions fait que le mouvement d'une particule ne dépend pas spécifiquement d'une autre particule chargée en particulier, mais bien de l'ensemble. Lorsque  $g$  est suffisamment faible (mais non nul), il peut se produire des collisions, mais leur effet est peu perceptible.

Pour déterminer l'importance des collisions dans un plasma, il nous faudrait comparer la distance interparticulaire au libre parcours moyen<sup>1</sup> de chaque particule. Ce dernier dépend de la section efficace du processus collisionnel considéré. Alternativement, on peut s'intéresser aux fréquences de collision qui correspondent à l'inverse de la durée séparant deux collisions de même nature. Un plasma totalement ionisé contenant une seule espèce d'ions peut être caractérisé par trois fréquences de collision,  $\nu_{ee}$  pour les collisions entre deux électrons,  $\nu_{ii}$  pour les collisions entre deux ions et  $\nu_{ei}$  pour les collisions entre un électron et un ion :

$$\nu_{ee} \propto \frac{n_e}{T_e^{\frac{3}{2}}}, \quad \nu_{ii} \propto \frac{n_i}{T_i^{\frac{3}{2}}}, \quad \nu_{ei} \propto \frac{n_i}{T_e^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.8)$$

Pour un plasma chaud, ces fréquences sont généralement faibles devant les autres fréquences caractéristiques d'un plasma que sont les fréquences plasma et cyclotron.

La pulsation (ou fréquence) cyclotron d'un plasma caractérise le mouvement de rotation des particules chargées autour des lignes du champ magnétique  $\mathbf{B}$ . Elle a pour expression, respectivement pour les électrons et les ions<sup>2</sup>,

$$|\omega_{ce,i}| = \frac{eB}{m_{e,i}}, \quad (1.9)$$

où  $B = |\mathbf{B}|$ . La pulsation plasma, électronique ou ionique, définie comme

$$\omega_{pe,i} = \sqrt{\frac{n_{e,i} e^2}{m_{e,i} \epsilon_0}}, \quad (1.10)$$

caractérise la durée que met le plasma pour restaurer la neutralité localement lorsqu'une densité de charge d'espace apparaît.

Étant donné qu'il est possible d'écrire le paramètre  $g$  et les fréquences de collision en fonction de la température et de la densité des espèces constituant le plasma, il semble pertinent de classer les plasmas en fonction de ces deux grandeurs physiques. La figure 1.1 est un exemple d'une telle classification. Remarquons que les plasmas représentés sur cette figure (à l'exception des métaux qui peuvent être considérés comme des plasmas fortement corrélés) sont des plasmas cinétiques, d'autant moins collisionnels qu'ils se trouvent du côté gauche du diagramme. Leur densité et leur température peuvent varier sur plusieurs ordres de grandeur, de même que leur champ magnétique lorsqu'ils sont magnétisés.

1. La distance moyenne parcourue par une particule entre deux collisions d'un type donné.

2. La charge électrique d'un atome totalement ionisé est  $+Ze$ , où  $Z$  est le numéro atomique. On considérera des ions  $H^+$ , caractérisés par  $Z = 1$  dans toute la suite.

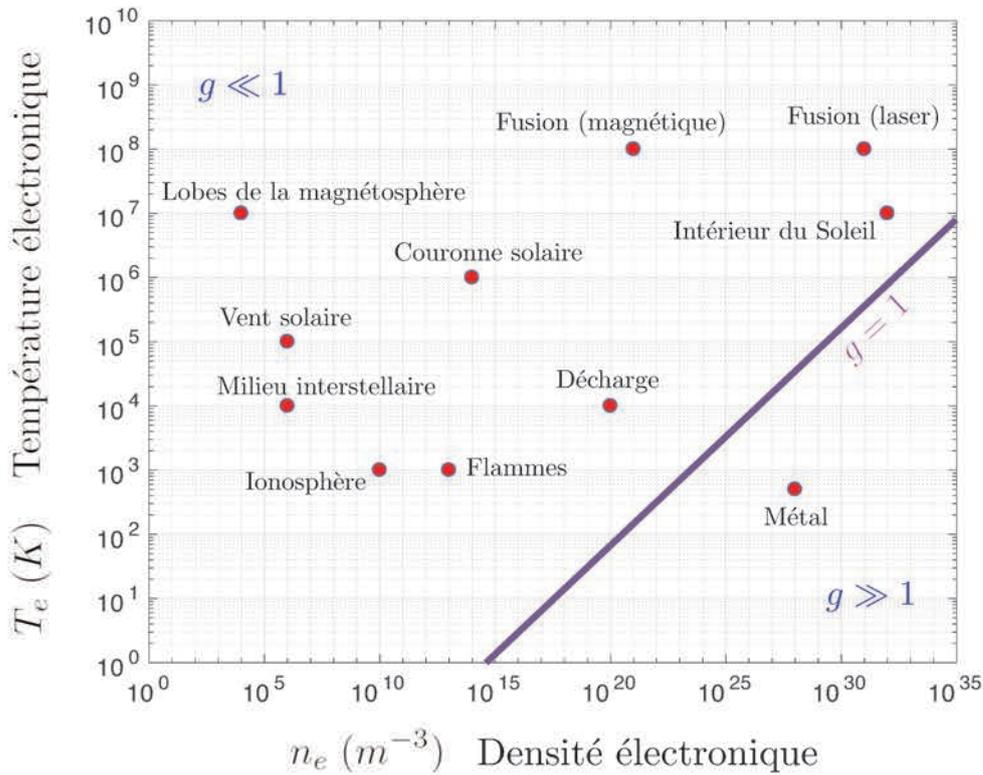


FIGURE 1.1 – Classification de plusieurs grandes familles de plasmas naturels et artificiels en fonction de la densité  $n_e$  et de la température  $T_e$  électroniques. Cette classification permet de mettre en évidence l'étendue des valeurs que peuvent prendre ces grandeurs physiques : les températures peuvent aller de quelques milliers à quelques centaines de millions de Kelvin, alors que certains plasmas sont très denses (avec des densités électroniques proches de celles des métaux, comme les plasmas de fusion par confinement inertiel ou gravitationnel) et d'autres extrêmement dilués, comme le vent solaire où la densité peut être inférieure à quelques dizaines d'électrons par  $cm^3$ . Notons que les plasmas présentés sur ce diagramme sont pour la plupart cinétiques : la droite mauve correspond à  $g = 1$ . Les plasmas spatiaux sont pour la plupart caractérisés par de faibles densités et des températures élevées, ils sont donc souvent considérés comme non-collisionnels. Les plasmas de fusion, quelque soit le type de confinement du plasma, peuvent présenter un comportement collisionnel important selon le phénomène physique étudié. Les plasmas de décharge sont quant à eux souvent utilisés pour leur capacité à améliorer la réactivité chimique des gaz : leur caractère collisionnel ne peut donc pas être mis de côté. On pourrait ajouter un troisième axe sur ce diagramme pour indiquer la valeur du champ magnétique ambiant présent dans un grand nombre de plasmas naturels et artificiels : celui-ci peut varier de quelques nT dans le vent solaire, à quelques T comme dans les plasmas de fusion par confinement magnétique.

## 1.2 Les instabilités de type Weibel

Cette section a pour but d'introduire la notion d'instabilité de type Weibel. On y dressera un panorama des mécanismes impliqués dans le comportement de ces instabilités et de ceux dans lesquels ces instabilités sont impliquées. Après avoir présenté la notion générale d'instabilité dans un plasma, on distinguera deux grandes catégories d'instabilités de type Weibel puis identifiera leur cause, leur mécanisme d'amplification, leur mécanisme de saturation et plus généralement leurs similitudes et leurs différences. On discutera dans un dernier temps de leur rôle, confirmé ou supposé, dans plusieurs situations concrètes, qu'elles soient naturelles ou expérimentales.

### 1.2.1 Comportement auto-consistant et instabilité

Nous avons vu que la plupart des plasmas spatiaux et de fusion étaient des plasmas cinétiques, dans lesquels les particules chargées interagissaient de façon collective. En pratique, les particules chargées forment des densités de charge et de courant qui vont donner naissance à des champs électromagnétiques. Ces champs électromagnétiques vont en retour modifier la distribution de charge et de courant qui leur a donné naissance. Le plasma a donc un comportement auto-consistant.

Si le plasma se trouve initialement dans un état d'équilibre, il persistera dans cet état du moment qu'on ne vient pas le perturber, au même titre que la balle représentée en rouge dans les deux configurations de la Figure 1.2 demeurera à sa position si rien ne vient la faire bouger.

Lorsqu'on perturbe un équilibre, deux choses peuvent se produire. Dans un premier cas, le système retourne dans ce même état d'équilibre en dissipant l'énergie qu'on lui a fourni via la perturbation. Dans ce cas, l'équilibre est stable : la balle de la situation 1 de la Figure 1.2 va revenir à sa position initiale avec sa vitesse initiale après avoir oscillé autour de cette position pendant un certain temps. La dissipation d'énergie est liée au frottement de la balle contre la paroi qui lui sert de guide. Dans le cas de la situation 2, la balle ne retournera pas à son état d'équilibre initial, ce qui signifie que l'équilibre était instable : elle se dirigera vers un autre état d'équilibre, stable ou non, mais généralement d'énergie plus basse. De la même manière, exciter un mode propre de vibration d'un plasma en équilibre instable pourra provoquer une réaction d'ensemble : la conséquence de ce mécanisme étant une amplification de la perturbation l'ayant déclenché. On parle d'instabilité.

Lorsqu'un mode instable est excité par une perturbation de faible ampleur par rapport à la valeur des paramètres d'équilibre, son amplitude augmente de façon exponentielle, en  $\exp(\Gamma t)$  où  $\Gamma$  est un taux caractérisant cette croissance. Un mécanisme de saturation entre ensuite en action (les particules peuvent être piégées par les champs que l'instabilité génère, des processus de résonance permettant des transferts d'énergie entre ondes et particules peuvent se mettre en place ...) et met fin à l'instabilité. Des instabilités secondaires peuvent se développer par la suite.

L'auto-amplification de la perturbation initiale est entretenue en puisant dans le stock d'énergie libre que possédait le plasma initialement. L'instabilité est un moyen pour le plasma d'atteindre un état d'équilibre d'énergie plus basse, plus stable, en dissipant cette énergie libre.

Mais d'où peut-elle venir ? Les plasmas n'étant pas des systèmes isolés, ils peuvent recevoir de la matière et de l'énergie depuis le milieu extérieur, ce qui peut créer des sources d'instabilité. Ces dernières sont donc multiples : elles peuvent par exemple prendre la forme de gradients de densité ou de température au niveau macroscopique. Au niveau microscopique, la source de l'instabilité peut être matérialisée par une déformation de la distribution des vitesses par rapport à une distribution correspondant à un équilibre stable.

### 1.2.2 Anisotropie de température et instabilité Weibel

Une anisotropie de température non-gyrotropique<sup>3</sup> peut être source d'instabilité. De telles anisotropies sont souvent observées dans le plasma magnétosphérique [1] ainsi que dans les simulations de turbulence du vent solaire [2]. Le mécanisme de leur génération demeure cependant encore un problème ouvert, objet de débat dans la communauté. Une des pistes explorées pour tenter d'expliquer ce mécanisme dans la turbulence réside dans la capacité d'un déchirement de vitesse à induire une anisotropie de pression à partir d'un plasma initialement isotrope [3], [4] supposé non-collisionnel, qu'il soit magnétisé ou non. Un autre mécanisme de génération, impliquant des instabilités paramétriques de type Alfvén-cyclotron agissant sur les ions, a également fait l'objet d'études [5].

---

3. c'est à dire non provoquée par l'existence d'un champ magnétique d'ambiance  $\mathbf{B}_0$ , la température dans le plan perpendiculaire au champ étant isotrope dans ce plan et différente de la température le long du champ

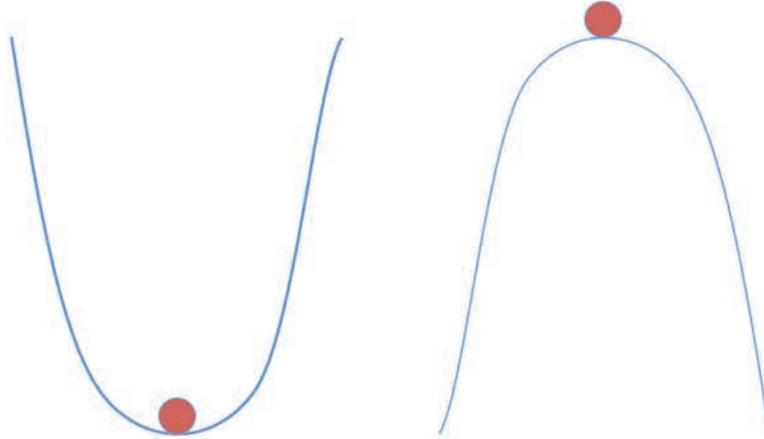


FIGURE 1.2 – Représentation imagée de deux configurations d'équilibre pour un ballon reposant sur un relief. La figure de gauche (situation 1) représente un équilibre stable, celle de droite (situation 2) un équilibre instable.

E.S. Weibel a démontré en 1958 [6] que l'existence d'une anisotropie de température électronique pouvait autoriser l'excitation et l'instabilité de certains modes électromagnétiques, dans un plasma magnétisé ou non, pourvu que l'anisotropie initiale soit suffisante.<sup>4</sup>

Un fort champ magnétique, quasi-stationnaire et perpendiculaire au plan de l'anisotropie contenant la perturbation, est généré durant la phase linéaire de l'instabilité. Lorsque le plasma n'est pas initialement magnétisé, l'instabilité ne se propage pas et se développe si la température transverse à la direction perturbée est supérieure à la température parallèle<sup>5</sup>,

$$T_{e,\perp} > T_{e,\parallel}. \quad (1.11)$$

Quand le plasma est soumis à un champ magnétique ambiant  $\mathbf{B}_0$  (comme dans le vent solaire, par exemple), les modes siffleurs (de polarisation circulaire et de fréquence  $\omega_r$  telle que  $\omega_{ci} < \omega_r < \omega_{ce}$ ) se propageant le long du champ magnétique ( $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$ ) peuvent devenir instables si la température électronique dans la direction perpendiculaire à  $\mathbf{B}_0$  est suffisamment supérieure à celle dans la direction parallèle. La condition de seuil pour cette instabilité (dite instabilité Whistler<sup>6</sup>) s'écrit<sup>7</sup> [7][8]

$$\frac{T_{e,\perp}}{T_{e,\parallel}} > 1 + \frac{1}{|\omega_{ce}/\omega_r| - 1}. \quad (1.12)$$

L'instabilité Weibel et l'instabilité Whistler contribuent donc à réguler l'anisotropie de température électronique d'un plasma : toute anisotropie supérieure à ces valeurs seuil déclenche la génération d'un champ magnétique qui aura pour effet de la réduire, en autorisant un transfert d'énergie thermique de la direction perpendiculaire vers le champ magnétique et la direction parallèle.

Depuis la fin des années 50, ces instabilités font l'objet d'études intenses, avec une nette augmentation de l'intérêt qui leur est porté depuis deux décennies, probablement dû au développement de

4. Il faut noter que ceci est également vrai pour les ions. Compte tenu de la différence de masse considérable entre un électron et un ion, les instabilités électroniques surviennent en premier et les ions peuvent être considérés comme fixes, formant un fond neutralisant. On se placera dans le cadre de cette hypothèse pour le restant des travaux exposés dans ce document.

5. Cette condition de seuil implique que le taux de croissance  $\Gamma$  soit nul lorsque  $T_{e,\perp} = T_{e,\parallel}$ .

6. On rencontre parfois la terminologie "whistler anisotropy instability" ou "electromagnetic electron cyclotron instability".

7. Le dénominateur du membre de droite de cette expression fait intervenir une résonance de type cyclotron électronique lorsque  $\omega_r = \omega_{ce}$ . Les modes siffleurs générés par l'instabilité sont cependant caractérisés par  $\omega_r < \omega_{ce}$ .

machines de calculs suffisamment puissantes pour autoriser des simulations précises. La plupart des travaux analytiques menés depuis proposent une description cinétique de ces instabilités, en utilisant des fonctions de distribution Maxwelliennes. On mentionnera cependant l'article de Basu [9], une des premières tentatives pour analyser l'instabilité Weibel de façon fluide en utilisant des moments d'ordre élevé (tenseur de pression, flux de chaleur). D'autres études utilisent des descriptions réduites construites autour de fonctions de distributions plus simples afin de tirer parti de propriétés comme le théorème de Liouville (une description de type water-bag de l'instabilité Weibel étant proposée dans [10]) ou l'existence d'invariants canoniques [11][12][13][14][15]. Ceci permet de simplifier les calculs et l'interprétation des simulations cinétiques plus générales. L'approche de réduction fondée sur l'utilisation des invariants canoniques est très intéressante, car elle permet de plonger au coeur du mécanisme de l'instabilité Weibel : on peut diviser la population totale du plasma en plusieurs sous-distributions dont on peut étudier l'évolution séparément.

### 1.2.3 Modélisation réduite et instabilité de filamentation de courant

La première tentative d'expliquer le mécanisme de l'instabilité Weibel non-magnétisée à travers un modèle simplifié fut conduite par B.D. Fried, en 1959 [16]. Il s'agissait de remplacer la distribution utilisée par Weibel, une bi-maxwellienne du type

$$f_0 = n_0 \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T_{e,\perp}}} \left( \frac{m}{2\pi k_B T_{e,\parallel}} \right) \exp \left[ -\frac{v_x^2 + v_z^2}{2k_B T_{e,\parallel}} - \frac{v_y^2}{2k_B T_{e,\perp}} \right], \quad (1.13)$$

par un système de deux faisceaux d'électrons froids, symétriques, parallèles et contra-propageants le long de la direction  $y$  :

$$f_0 = [n_1 \delta(v_y - u_1) + n_2 \delta(v_y - u_2)] \delta(v_x) \delta(v_z). \quad (1.14)$$

La température  $T_{e,\perp}$  est ici représentée par l'écart entre deux pics de Dirac (Figure 1.3) situés en  $u_1$  et  $u_2$  selon un axe  $v_y$ , ces deux valeurs correspondant à la vitesse des deux faisceaux. Les faisceaux étant supposés froids longitudinalement, cela équivaut à  $T_{e,\parallel} = 0$ . Les deux faisceaux électroniques ont pour densité  $n_1$  et  $n_2$  telles que  $n_1 + n_2 = n_0$ , la densité figurant dans la distribution (1.13). Soulignons que toutes les particules d'un faisceau donné partagent exactement la même vitesse d'un point de vue microscopique, égale à  $u_1$  ou  $u_2$ .

Perturbant cet équilibre selon  $x$ , soit perpendiculairement à la direction des faisceaux (le problème est donc invariant par translation selon  $y$ ), Fried trouvait alors une relation de dispersion de forme similaire à celle obtenue par Weibel lorsqu'il appliquait la limite  $\omega/ka_{\parallel} \gg 1$  à son calcul,  $a_{\parallel} = \sqrt{k_B T_{\parallel}/m}$  désignant la vitesse thermique correspondant à la température  $T_{\parallel}$ . Il faut toutefois souligner que la notion de seuil évoquée au paragraphe précédent disparaît dans cette modélisation. Le système physique traité par Fried est instable pour toute perturbation perpendiculaire à la direction des faisceaux, peu importe la vitesse des faisceaux.<sup>8</sup>

Cette modélisation réduite de l'instabilité permet surtout de comprendre qualitativement le mécanisme d'auto-amplification du champ magnétique, et donc la phase linéaire de l'instabilité. Il donne également les éléments de base pour comprendre le début de la phase de saturation. Nous nous focaliserons pour l'instant sur l'amplification du champ magnétique.

Le principe clé sur lequel repose ce mécanisme est le suivant : deux courants électriques s'attirent s'ils circulent dans le même sens, mais se repoussent s'ils sont de sens opposés. En effet, chaque courant génère un champ magnétique agissant sur l'autre courant à travers une force de Laplace. Une illustration de ce principe est proposée sur la figure 1.4 : le courant électrique  $I_1$  génère le champ magnétique  $\mathbf{B}_1$ . Un fil parcouru par un courant électrique  $I_2$  est plongé dans ce champ, à une distance  $R$  du premier fil. Ainsi, le fil  $I_1$  exerce une force de Laplace  $d\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$  sur un élément de longueur  $d\mathbf{l}_2$  du second fil, et cette force a pour expression

$$d\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = I_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_1 = -\frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \frac{d\mathbf{l}_2}{R} \mathbf{e}_x. \quad (1.15)$$

Cette expression met bien en évidence que si les deux courants circulent dans le même sens alors  $I_1 I_2 > 0$  : la force de Laplace est donc attractive et tend à rapprocher les deux courants. Si les deux courants circulent selon des sens opposés,  $I_1 I_2 < 0$  et l'interaction est de nature répulsive.

8. On doit aussi souligner que cette configuration est en réalité instable quelle que soit la direction du vecteur d'onde de la perturbation. Ce point sera abordé plus loin.

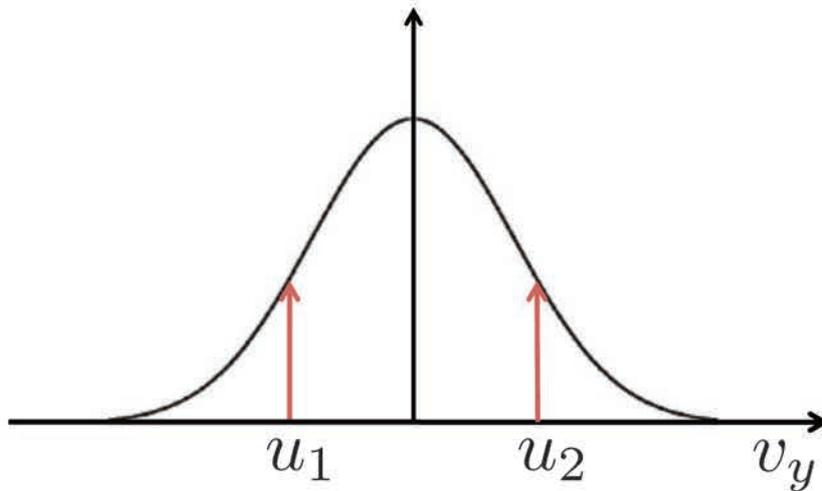


FIGURE 1.3 – L’interprétation de Fried de l’instabilité Weibel : deux faisceaux froids modélisent une température effective dans la direction  $v_y$ . Le plasma est froid dans la direction  $v_x$ . La distribution gaussienne correspond à une projection de (1.13) selon l’axe  $v_y$ .

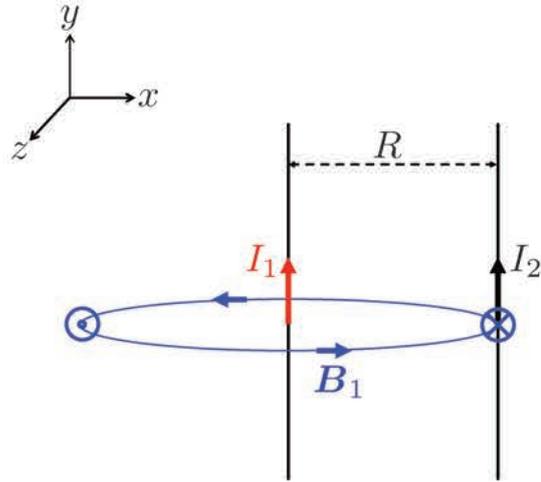
Le mécanisme d’amplification du champ magnétique est représenté en figure 1.5. Deux faisceaux d’électrons contra-propageants sont dirigés le long de l’axe  $y$ . On applique une perturbation magnétique sinusoïdale  $\delta\mathbf{B}$  perpendiculaire aux faisceaux (modulée selon  $x$ , le champ étant dirigé selon  $z$ ). La force de Lorentz va dévier ces électrons et les concentrer (ou les piéger) dans les régions où  $|\mathbf{B}|$  est faible, impliquant une modulation de la densité avec une longueur d’onde deux fois plus faible que celle du champ magnétique (première image).

Originellement, en  $x$  fixé arrivait autant d’électrons depuis la gauche que depuis la droite, les faisceaux étant supposés homogènes. La perturbation de champ magnétique détruit cet équilibre : du fait de la déflexion des particules, certaines régions contiendront plus d’électrons venant du premier faisceau que venant du second. Ce sera le contraire pour les régions de piégeage immédiatement voisines. Ce déséquilibre entraîne par conséquent l’apparition d’une densité de courant locale  $\delta J_y$ , modulée spatialement par le champ magnétique (seconde image). Cette nouvelle densité de courant va elle-même générer un champ magnétique de même sens et de même longueur d’onde que la perturbation initiale lui ayant donné naissance : la perturbation est donc amplifiée par ses propres conséquences. En communiquant aux particules un mouvement dans la direction des  $x$ , le mécanisme de l’instabilité contribue à réduire l’anisotropie initiale en répartissant l’énergie originellement excédentaire dans la direction des  $y$  sur un degré de liberté supplémentaire et dans le champ magnétique.

L’instabilité traitée par Fried est aujourd’hui connue sous le nom d’instabilité de filamentation de courant (ou CFI, pour Current Filamentation Instability). Cette filamentation correspond à la transformation de deux faisceaux contra-propageants homogènes en une densité de courant  $J_y$  modulée spatialement (des filaments de courant électrique) par la structure de la fluctuation électromagnétique ayant déclenché l’instabilité. Elle est parfois appelée “instabilité Weibel” dans certains articles ou ouvrages, en raison des fortes similitudes qu’elle partage avec l’instabilité Weibel provoquée par une anisotropie de température.

Pour éviter toute ambiguïté, on utilisera dans toute la suite la terminologie suivante : “instabilité Weibel pure” (l’acronyme sera WI pour Weibel Instability) pour désigner l’instabilité générée par une anisotropie de température, et l’acronyme “CFI” pour évoquer l’instabilité introduite par Fried.

Les similitudes entre les deux instabilités sont vraies tant dans la phase de croissance linéaire (que nous venons d’expliquer) que dans la phase non-linéaire, pendant et après saturation, comme nous allons le voir plus loin. Pour comprendre ces ressemblances, il faut remarquer que ces instabilités sont des phénomènes uni-dimensionnels (1D) dans l’espace des coordonnées. Dans notre exemple, la coordonnée  $x$  est la variable importante. Durant l’évolution de l’instabilité Weibel pure (comme pour la CFI), le plasma est invariant par translation selon  $y$  et  $z$ . Du point de vue du formalisme Hamiltonien,



$$d\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \frac{dl_2}{R} \mathbf{e}_x$$

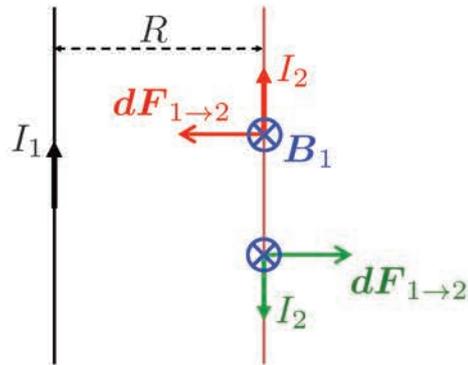


FIGURE 1.4 – Interaction magnétique entre deux courants électriques. Figure du haut : représentation du champ magnétique  $\mathbf{B}_1$  généré par le courant  $I_1$ . Le problème est invariant par translation le long de l'axe  $y$ . Les lignes de champ magnétique sont contenues dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation du courant  $I_1$ . En tout point du fil parcouru par  $I_2$ , le champ magnétique  $\mathbf{B}_1$  est dirigé vers l'arrière du plan de la feuille. Figure du bas : force de Laplace exercée par le courant  $I_1$  sur le courant  $I_2$  en fonction du sens (et donc du signe) de ce dernier. La situation rouge décrit le cas où les deux courants circulent dans le même sens. La situation verte décrit celui où ils sont de sens opposés. Entre les deux figures : expression de la force exercée par  $I_1$  sur un élément de longueur  $dl_2$  du fil parcouru par  $I_2$ .

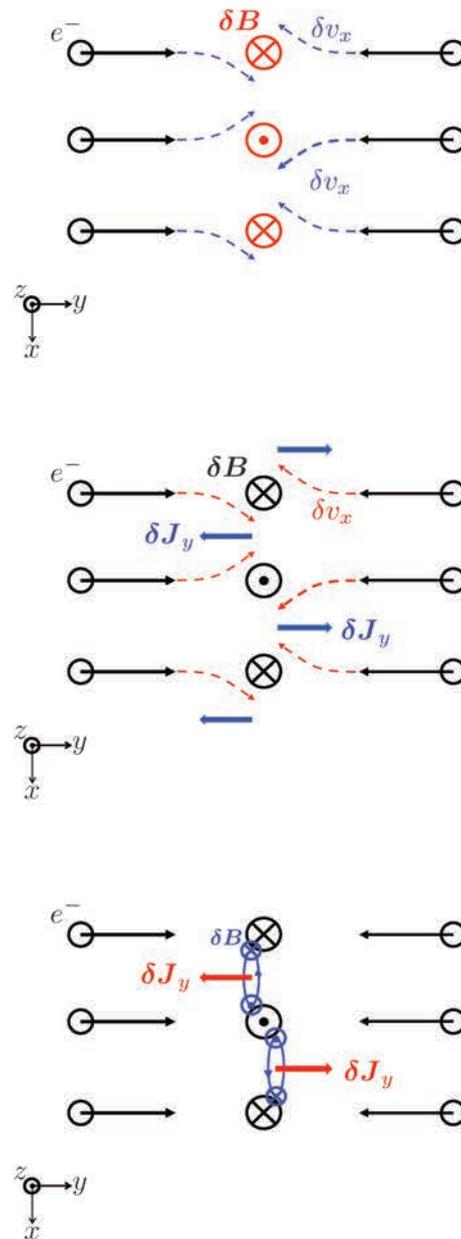


FIGURE 1.5 – Mécanisme d’amplification du champ magnétique lors d’une instabilité de type Weibel. Figure du haut : deux faisceaux électroniques contra-propageants, orientés selon la direction  $y$ , sont soumis à une perturbation transverse de champ magnétique  $\delta B$ , représentée en rouge. Les électrons sont déviés par la force de Lorentz. Figure du milieu : la force de Lorentz concentre les électrons dans les régions où le champ magnétique est plus faible, elle dépeuple les régions où le champ magnétique est le plus fort. Ceci se traduit par la création d’une densité de charge (de longueur d’onde divisée par 2 par rapport à celle de  $\delta B$ ) et d’une densité de courant locale  $\delta J_y$  modulées spatialement par la perturbation magnétique. Figure du bas : cette densité de courant génère un champ magnétique renforçant la perturbation initiale. Une partie de la quantité de mouvement initialement dirigée selon  $y$  est donc transférée dans la direction  $x$  par le champ magnétique, qui se renforce progressivement jusqu’à ce que le mécanisme sature.

ceci assure l'invariance des composantes  $P_y$  et  $P_z$  du moment canonique de chaque électron du plasma, puisque

$$\dot{P}_y = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{P}_z = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = 0, \quad (1.16)$$

où  $\mathcal{H}$  est le Hamiltonien d'un électron. La symétrie du problème se retrouve dans le Hamiltonien qui ne dépend spatialement que de  $x$ .

Le champ magnétique généré par les instabilités étant dirigé selon  $z$ , seule la composante  $A_y$  du potentiel vecteur sera non-nulle, ce qui implique

$$P_y = mv_y + qA_y(x) = mv_{y,0} \quad (1.17)$$

si  $v_{y,0}$  désigne la vitesse initiale de l'électron<sup>9</sup>.

Cette dernière relation peut être interprétée directement : la quantité  $P_y$  initialement égale à la quantité de mouvement de l'électron selon la direction  $y$  est conservée mais partiellement transférée dans le champ magnétique généré par l'instabilité. Le champ magnétique orienté selon  $z$  impliquant une rotation de l'électron dans le plan  $xOy$ , on en déduit immédiatement la répartition de l'énergie cinétique entre les deux degrés de liberté de ce plan. Il en découle une isotropisation partielle de la distribution des vitesses du plasma.

Du fait de la symétrie en  $v_y$  de la distribution initiale (Maxwellienne) et du fait de l'invariance de  $P_y$ , le plasma au démarrage de l'instabilité Weibel pure peut être vu en première approximation comme une superposition de plusieurs systèmes de 2 faisceaux électroniques symétriques et contre-propageants, chaque faisceau contenant l'ensemble des électrons ayant la même vitesse initiale selon  $y$ . Cette description est à l'origine du modèle multi-faisceaux [17], qui sera présenté de façon plus détaillée ultérieurement (Chapitre 2) et qui permet d'unifier conceptuellement les instabilités Weibel pure et CFI.

Les principales similitudes observées entre les deux instabilités (Weibel pure et CFI) sont les suivantes :

- une anisotropie de la distribution des vitesses est la cause de leur déclenchement ;
- l'instabilité Weibel pure telle qu'introduite par Weibel ne se propage pas et il en va de même pour l'instabilité CFI si les faisceaux sont rigoureusement symétriques. Des considérations portant sur la symétrie de l'équilibre sont donc importantes ;
- les deux instabilités impliquent la réduction de l'anisotropie initiale de la distribution des vitesses par la génération d'un champ magnétique de longue durée de vie ;
- le mécanisme de saturation de l'instabilité repose en grande partie sur le phénomène de piégeage magnétique des électrons dans la structure quasi-stationnaire du champ généré par l'instabilité. Ce piégeage est responsable de l'apparition d'une importante activité électrostatique résultant de l'inhomogénéisation du plasma.<sup>10</sup>

#### 1.2.4 Quelques différences cependant

On doit tout d'abord commenter le premier point de cette liste. Dans le cas de l'instabilité Weibel pure, l'anisotropie est dite de température car elle implique une fonction de distribution faite d'un seul bloc (cf. Figure 1.6, au-dessus). Cette distribution peut être décrite de façon satisfaisante par ses premiers moments fluides, notamment ceux d'ordre 1 (vitesse moyenne, nulle dans le référentiel du plasma) et d'ordre 2 (écart type, lié au tenseur de pression). Ce dernier donne une mesure de la température parallèle et perpendiculaire qui a un sens physique réel. L'instabilité CFI est quant à elle déclenchée par une anisotropie de quantité de mouvement : les deux faisceaux sont a priori deux entités indépendantes, dont les fonctions de distribution sont séparées de façon plus ou moins évidente dans l'espace des vitesses (cf Figure 1.6, au-dessous) : la "température" transverse (définie par l'écart-type en  $v_y$ ) de la distribution globale correspondant au système de faisceaux n'en est pas vraiment une, dans le sens où elle ne suffit pas pour décrire la distribution. Il s'agit plutôt d'une mesure de l'énergie libre contenue dans l'anisotropie, l'instabilité étant d'autant plus forte que la vitesse des faisceaux est grande. Nous verrons d'ailleurs plus loin (en début de Chapitre 3) que le traitement cinétique froid proposé par Fried est rigoureusement équivalent à un traitement fluide, froid lui aussi. Chaque faisceau d'électrons peut, par ailleurs, présenter une anisotropie de température intrinsèque, distincte de l'anisotropie globale du système de faisceaux : chaque faisceau peut donc être instable par rapport à l'instabilité Weibel pure, le système total étant lui-même instable par rapport à l'instabilité CFI.

9. Le champ magnétique n'est pas généré puisque l'instabilité n'a pas démarré.

10. Probablement mentionnée pour la première fois dans [18].

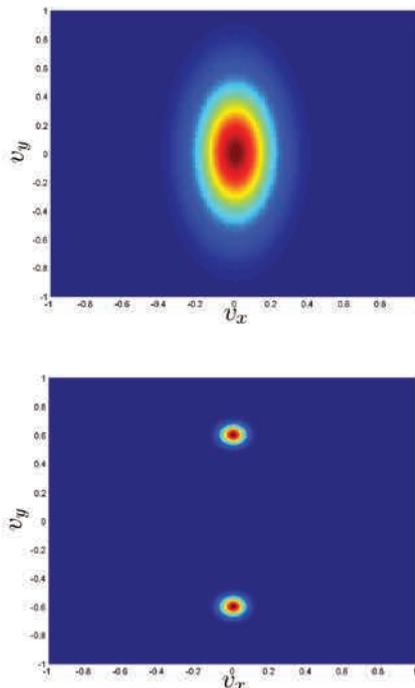


FIGURE 1.6 – La figure du dessus représente la distribution des vitesses Maxwellienne de l'équation, projetée dans le plan  $(v_x, v_y)$ , dont l'écart type selon  $v_y$  est supérieur à celui selon  $v_x$ , soit  $(T_y > T_x)$ . Cette configuration, perturbée selon  $x$ , est susceptible de déclencher l'instabilité Weibel pure. La figure au-dessous représente deux faisceaux isotropes en température et dirigés selon l'axe  $y$ , de vitesse  $|u_0| = 0.6c$ . Cette configuration, perturbée selon  $x$ , est susceptible de déclencher une instabilité CFI.

Une autre source de différences entre ces deux configurations réside dans la capacité d'un vecteur d'onde à les déstabiliser en fonction de sa direction. La première configuration anisotrope représentée sur la figure 1.6 n'est pas instable pour tout vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  : l'orientation de  $\mathbf{k}$  par rapport à la direction des axes principaux d'anisotropie de la distribution a une importance sur le comportement de l'instabilité. On peut ainsi identifier trois types de comportements du plasma pour une orientation de  $\mathbf{k}$  fixée<sup>11</sup> : stable, "instable et non-propagative" ou "instable et propagative".<sup>12</sup>

Le système de faisceaux est au contraire instable pour toute orientation de  $\mathbf{k}$ . Si nous nous restreignons au cas non-magnétisé et à des faisceaux isotropes en température, trois grandes catégories d'instabilités sont alors en concurrence selon la direction du vecteur d'onde appliqué au plasma :

- l'instabilité CFI, qui correspond au critère strict  $\mathbf{k} \perp \mathbf{e}_u$ ,  $\mathbf{e}_u$  désignant la direction des faisceaux,
- l'instabilité double-faisceaux (ou Two Stream Instability, abrégée par TSI), correspondant strictement à  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_u$ ,
- les instabilités obliques, correspondant aux autres orientations de  $\mathbf{k}$ .

Une étude paramétrique de ce système au moyen d'un modèle cinétique relativiste a été réalisée dans [20] et [21], il y a quelques années. Les auteurs ont notamment cherché à montrer quelle instabilité dominait les autres en faisant varier trois paramètres : la température  $T_1$  et la vitesse  $u_1$  d'un des faisceaux, ainsi que le rapport entre les densités des deux faisceaux  $n_1/n_2$ <sup>13</sup> (le dernier degré de liberté qu'est la température du second faisceau étant fixé au préalable).

On retiendra que les modes obliques sont bien souvent ceux qui présentent le taux de croissance le plus important. Cependant, la limite non-relativiste<sup>14</sup> est en général dominée par l'instabilité TSI, peu importe la température ou la densité des faisceaux. La CFI peut quant à elle l'emporter sur les modes obliques pour un système de faisceaux dont la température est modérée (quelques dizaines voire

11. Cette étude a été réalisée par [19]

12. Dans ce manuscrit, l'instabilité Weibel pure ne désignera que le cas d'une distribution des vitesses de forme ovale (cas d'un espace des vitesses à 2 dimensions) ou ellipsoïde de révolution (cas d'un espace des vitesses à 3 dimensions), perturbée dans la direction parallèle à celui des axes principaux qui correspond à la température la plus basse.

13. Les contraintes  $n_1 + n_2 = n_0$ ,  $n_0$  étant la densité électronique totale et  $n_1 u_1 + n_2 u_2 = 0$  assurent que  $u_2$  soit déterminée.

14. Correspondant à un facteur de Lorentz tendant vers 1.

centaines de  $keV$ ), dont le rapport  $n_1/n_2$  est proche de 1 et dont la vitesse est suffisamment relativiste (facteur de Lorentz supérieur à 2). La limite ultrarelativiste (température et vitesses moyennes élevées) n'est dominée par la CFI que pour des faisceaux symétriques en densité.

Cette notion de concurrence entre instabilités est très générale. Citons par exemple le cas d'un plasma magnétisé présentant une anisotropie de température  $T_{e,\perp} > T_{e,\parallel}$ <sup>15</sup>. Celui-ci n'est pas seulement instable par rapport à l'instabilité Whistler, analogue de l'instabilité Weibel pure pour un plasma magnétisé. Si cette première instabilité présente son taux de croissance maximal (et une fréquence réelle  $\omega_r$  telle que  $\omega_{ci} \ll \omega_r \ll \omega_{ce}$ ) pour une propagation parallèle au champ magnétique, une autre instabilité peut la concurrencer : l'instabilité Miroir caractérisée par  $\omega_r = 0$  et de taux de croissance maximal pour une "propagation" oblique par rapport aux faisceaux [22]. Les instabilités Whistler et Miroir requièrent toutes deux une anisotropie suffisamment forte pour être déclenchées : un seuil existe donc. La comparaison des seuils de déclenchement des deux instabilités est nécessaire pour déterminer laquelle régule principalement l'anisotropie  $T_{e,\perp} > T_{e,\parallel}$ . L'étude de ces instabilités en milieu magnétisé est particulièrement importante pour comprendre la physique de la magnétosphère terrestre et celle du vent solaire. Compte tenu de la structure du vent solaire, qui peut être modélisé de façon simplifiée par un système de faisceaux contra-propageants alignés selon le champ magnétique ambiant, d'autres instabilités peuvent jouer un rôle important et concurrencer les instabilités Whistler et Miroir, comme l'instabilité électronique de flux de chaleur [23][24][25], déclenchée par la dérive de deux faisceaux électroniques par rapport aux ions du vent solaire.

### 1.2.5 Comportement non linéaire des instabilités de type Weibel

Le mécanisme de saturation des deux types d'instabilité Weibel, étudié à travers des simulations numériques PIC [26][27][28][29], ou eulériennes et semi-lagrangiennes [15][30][31]<sup>16</sup> fait intervenir le piégeage des électrons dans les structures du champ magnétique [32]. Nous avons vu que le mécanisme d'amplification du champ magnétique impliquait l'accumulation de charges dans les régions où ce champ est faible. Les particules dont l'énergie cinétique n'est pas suffisante se retrouvent donc piégées dans un potentiel magnétique, en première approximation.

Le comportement selon  $x$  d'un électron piégé dans ce potentiel magnétique est similaire à celui d'un oscillateur harmonique. Sa fréquence d'oscillation dans le piège est la fréquence de piégeage  $\omega_b$ , définie comme

$$\omega_b = \sqrt{k_x u_0 \omega_c}, \quad (1.18)$$

pour l'instabilité CFI, où  $|u_0|$  est la vitesse des faisceaux symétriques et  $\omega_c = eB/m$  la fréquence cyclotron correspondant à  $B$ , l'amplitude du champ magnétique en fin de phase linéaire. La saturation de l'instabilité CFI survient lorsque la fréquence de piégeage atteint une valeur similaire à celle du taux de croissance  $\Gamma$ .

Le mécanisme de saturation de l'instabilité Weibel pure repose sur le même principe [33][15]. On peut en effet déterminer une fréquence de piégeage pour les électrons en fonction de leur vitesse initiale  $v_{y,0}$ ,

$$\omega_b = \sqrt{k_x v_{y,0} \omega_c}, \quad (1.19)$$

égale à une constante multiplicatrice près (la masse de la particule) au moment canonique  $P_y$ , préservé pour chaque particule au cours de toute l'évolution du système. Comme la fréquence de piégeage dépend du nombre d'onde, pour simplifier la discussion nous évoquerons d'abord un cas dans lequel un seul mode domine toute la dynamique du plasma.

L'instabilité de type Weibel provoque l'accumulation d'électrons dans plusieurs régions du plasma, et par conséquent une déplétion dans les régions voisines qui correspondent aux pics de  $|\mathbf{B}|$ . Ce gradient en  $x$  de densité électronique est à l'origine de la croissance d'un champ électrostatique dont le nombre d'onde et le taux de croissance, mesurés dans les simulations PIC comme semi-lagrangiennes, sont le double de ceux du champ magnétique. Il est en effet possible de relier [34][35] ce champ électrostatique au gradient de "pression" magnétique (en  $|\mathbf{B}|^2$ ) exercée par le champ magnétique  $\mathbf{B}$  généré lors de l'instabilité. Ce champ résulte du couplage non-linéaire entre l'instabilité de type Weibel et les ondes de Langmuir pouvant se propager dans la même direction [36][30], ce qui donne lieu à un phénomène de déferlement : la densité électronique se concentre dans des régions de plus en plus étroites et un fort gradient de  $E_x$  apparaît. Ce couplage, comme montré dans [33], semble impliquer le déclenchement d'une instabilité électrostatique secondaire (possiblement par un mécanisme similaire à celui de la TSI).

15. Les indices  $\perp$  et  $\parallel$  se référant à la direction du champ magnétique ambiant.

16. Le principe de base des simulations PIC est expliqué en Annexe B. Celui des simulations semi-lagrangiennes est plus longuement détaillé au chapitre 4, consacré au code VLEM développé durant la thèse.

Donnons quelques éléments de compréhension. Durant la phase non-linéaire des instabilités de type Weibel, les électrons sont soumis à deux forces : la force magnétique exercée du fait de la présence du champ magnétique et la force électrostatique générée par le champ  $E_x$  lié à l'inhomogénéité de densité résultant du piégeage. Si la première tend à confiner les électrons dans un puits de potentiel, la seconde tend à les libérer en les accélérant lorsqu'ils se rapprochent du bord du piège.

Pour l'instabilité Weibel pure, il est nécessaire de distinguer deux grandes catégories de particules : les particules "rapides", correspondant à la queue de la fonction de distribution et le "coeur" correspondant aux vitesses  $v_{y,0} \rightarrow 0$ . La description de type multi-faisceaux, qui permet de traiter séparément l'évolution de groupes de particules partageant la même valeur de moment canonique transverse, est particulièrement adaptée à ce genre d'investigation.

La force magnétique

$$F_x = -ev_y B_z \quad (1.20)$$

confinant les particules dépend explicitement de  $v_y$ . Cette force est d'autant plus importante que la vitesse  $v_y$  est forte. Par conséquent, les particules les plus susceptibles d'échapper au piégeage sont celles du coeur, pour lesquelles la force magnétique ne compense pas la force électrostatique. Une fois libérés du puits de potentiel, ces électrons seront accélérés par le champ électrostatique, mais aussi par la force de Lorentz, provoquant la formation de faisceaux de particules rapides orientés selon les  $x$  (vitesse  $v_x$  élevée), qui prennent la forme de bras dans l'espace  $(x, p_x)$ . Ces bras peuvent être vus comme des faisceaux contra-propageants et sont instables vis à vis d'une perturbation électrostatique en  $x$ , comme celle générée par la modulation de densité résultat du piégeage magnétique.

Que devient la densité de courant  $J_y$  générée durant la phase linéaire de l'instabilité<sup>17</sup>? Entre deux filaments de densité  $J_y$  circulant dans le même sens, attirés l'un par l'autre du fait de la force de Laplace, se trouve un filament se propageant dans le sens contraire qui interagira de façon répulsive avec ses voisins immédiats, écrantant ainsi l'interaction attractive. Cet écrantage est total lorsqu'un seul mode domine l'instabilité : les filaments sont donc stables, attraction et répulsion se compensant. En présence d'un seul mode, le champ électrique induit  $E_y(x)$  a la structure spatiale du mode en question, qui est la même que celle du champ magnétique. Il agira de la même façon sur les particules d'un filament tel que  $J_y > 0$  que sur celles du filament voisin de densité de courant  $J_y < 0$ . Ainsi, deux courants  $A$  et  $C$  circulant dans le même sens seront séparés par un courant  $B$  circulant dans le sens opposé et il n'y aura pas de fusion entre eux.

Lorsque plusieurs modes dominent la phase non-linéaire, les densités de courant circulant dans le même sens vont progressivement fusionner, jusqu'à atteindre une taille critique : c'est le phénomène de coalescence [37][38][39] sous l'effet de la composante  $E_y(x)$ . En effet, dans ce cas la structure spatiale de  $E_y$  diffère de celle de  $B_z$ . Pour le comprendre, supposons un champ magnétique composé de plusieurs modes, dont l'amplitude augmente exponentiellement selon un taux de croissance  $\Gamma$  (dépendant du mode sélectionné) durant la phase linéaire :

$$B_z = \sum_n \tilde{B}_{z0,n} \sin(k_n x) \exp(\Gamma(k_n)t), \quad (1.21)$$

où  $\tilde{B}_{z0,n}$  est l'amplitude initiale du mode  $n$ , de longueur d'onde  $2\pi/k_n$ . Le champ électrique inductif associé à ce champ s'écrit, après utilisation de l'équation de Maxwell-Faraday,

$$E_y = \sum_n \tilde{B}_{z0,n} \frac{\Gamma(k_n)}{k_n} \cos(k_n x) \exp(\Gamma(k_n)t). \quad (1.22)$$

L'amplitude de  $E_y$  possède donc une dépendance en  $k_n$  (via le facteur  $\Gamma(k_n)/k_n$ ) que n'a pas celle du champ magnétique. Le rapport  $\Gamma(k_n)/k_n$  tendant vers 0 pour les grandes valeurs de  $k_n$ , on en déduit que l'amplitude du champ inductif des modes de grande longueur d'onde (les petites valeurs de  $k_n$ ) sera plus importante.

La structure de la densité  $J_y$  va alors être modifiée : le champ inductif  $E_y$  va freiner les particules circulant dans un sens opposé au sien, et accélérer celles circulant dans le même sens. La taille typique d'une région de fort champ inductif étant supérieure à celle de la longueur d'onde de  $J_y$  (qui est la même que celle de  $B_z$ ), la force d'attraction entre deux courants  $A$  et  $C$  circulant dans le même sens (proportionnelle à la densité de courant comme le montre) va surpasser la force de répulsion exercée sur eux par le courant  $B$  circulant entre  $A$  et  $C$  dans le sens opposé, permettant la fusion de  $A$  et  $C$  [39]. La fusion implique un transfert de l'énergie des petites échelles vers les grandes échelles. Ce mécanisme de cascade inverse a également des implications sur l'instabilité secondaire électrostatique

17. ces filaments de courant donnent d'ailleurs son nom à l'instabilité CFI

(liée à  $E_x$ ) agissant sur les particules échappant au piègeage magnétique : les auteurs de [33] ont montré que, grâce à ce changement d'échelle, les particules de moment canonique transverse fort pouvaient à leur tour quitter les pièges magnétiques pour renforcer l'instabilité secondaire.

On remarquera enfin que l'ajout d'un champ magnétique d'ambiance a tendance à affaiblir le taux de croissance des instabilités [22], le niveau de saturation du champ magnétique et les mécanismes non-linéaires conduisant à la fusion des filaments [39] constatée aux temps longs.

### 1.2.6 Les instabilités de type Weibel dans la nature et au laboratoire

On rencontre assez fréquemment, dans la littérature scientifique et dans la vulgarisation, l'affirmation suivante : plus de 99% de la matière visible<sup>18</sup> dans l'Univers est à l'état de plasma. Les instabilités de type Weibel étant des phénomènes "de base" de la physique des plasmas du fait de leur cause, on les rencontre dans une grande variété de situations physiques concrètes. Nous allons en discuter quelques unes.

#### 1.2.6.1 Dans l'environnement terrestre

À l'échelle de la Terre, les premiers plasmas naturels se trouvent dans l'atmosphère. À basse altitude, la présence de charge électrique dans l'air est essentiellement provoquée par effet triboélectrique. Son accumulation implique la génération d'une différence de potentiel par rapport au sol. Lorsque le champ électrique associé est trop élevé, une décharge se produit : c'est la foudre. Au-delà de 60 km d'altitude, l'atmosphère est partiellement ionisée par le rayonnement ultraviolet émis par le Soleil. Cette région de l'atmosphère est appelée l'ionosphère et est le siège de phénomènes lumineux assez spectaculaires accompagnant les orages comme les jets bleus, les sylphes rouges et les halos (on parle aussi de "phénomènes lumineux transitoires"), mais aussi des aurores polaires provoquées par l'entrée de particules chargées provenant du Soleil dans les couches supérieures de l'atmosphère. Plus on s'éloigne de la surface de la Terre, plus l'atmosphère devient fortement ionisée. L'environnement immédiat de la Terre est donc un laboratoire d'observation de premier choix pour la physique des plasmas depuis la découverte des ceintures de Van Allen en 1958<sup>19</sup>.

Le système physique formé par le champ magnétique terrestre, le plasma magnétosphérique et le vent solaire (Figure 1.7) est le théâtre de nombreux phénomènes fondamentaux en physique des plasmas, comme la reconnexion magnétique [43][44] ou les instabilités de type Weibel en milieu magnétisé [22][45][46].

Le vent solaire est un plasma contenant des électrons, des protons ainsi que quelques ions plus lourds (surtout des particules alpha). Très chaud ( $T_e \simeq 10^5 - 10^6 K$ ) et peu dense ( $n_e \simeq 1 - 10 \text{cm}^{-3}$ ), il peut être décomposé en trois composantes : un coeur de basse énergie, bien modélisé par une distribution (bi-)Maxwellienne et représentant 90% des particules ; un halo suprathermique dont le mécanisme de formation est un problème ouvert, plutôt bien modélisé par une distribution (bi-)Kappa ([47], [48]) ; enfin, une troisième composante appelée "strahl" (rayon ou faisceau, en allemand) et constituée d'électrons rapides voyage parallèlement aux lignes de champ magnétique du Soleil en fuyant celui-ci. Le strahl est responsable du transport de flux de chaleur électronique dans le vent solaire. On distingue principalement deux états pour le vent solaire : le vent solaire rapide (de vitesse moyenne aux environs de 600 – 800 km/s, constitué du coeur, du halo et du strahl), et le vent solaire lent (de vitesse moyenne comprise entre 300 et 500 km/s et constitué du coeur et halo seulement).

Un modèle simplifié de vent solaire consiste à le représenter comme une superposition de faisceaux alignés avec le champ magnétique [23][49]. Une telle modélisation permet notamment de décrire l'instabilité électronique de flux de chaleur (Electron Heat Flux Instability), soupçonnée d'être responsable (au moins en partie) de la régulation du flux de chaleur dans le vent solaire [50].

L'existence d'anisotropies de température dans le vent solaire est connue de longue date [51][52][53]. Ces anisotropies sont plutôt faibles car elles sont limitées par des processus instables (le plasma étant trop chaud et trop peu dense pour que les collisions puissent s'en charger), dans le coeur du vent solaire [54][55] comme dans le halo. Par exemple, l'instabilité Firehose (pour des anisotropies telles que  $T_{e,\parallel} > T_{e,\perp}$ ) et l'instabilité Whistler ( $T_{e,\perp} > T_{e,\parallel}$ ) semblent être deux des principales instabilités régulant l'anisotropie de température électronique dans le coeur et le halo du vent solaire lent [56].

---

18. On exclut donc du calcul matière et énergie noires.

19. Un historique des travaux sur la magnétosphère menés avant les débuts de l'exploration spatiale a été établi par David P. Stern [40] en 1989.

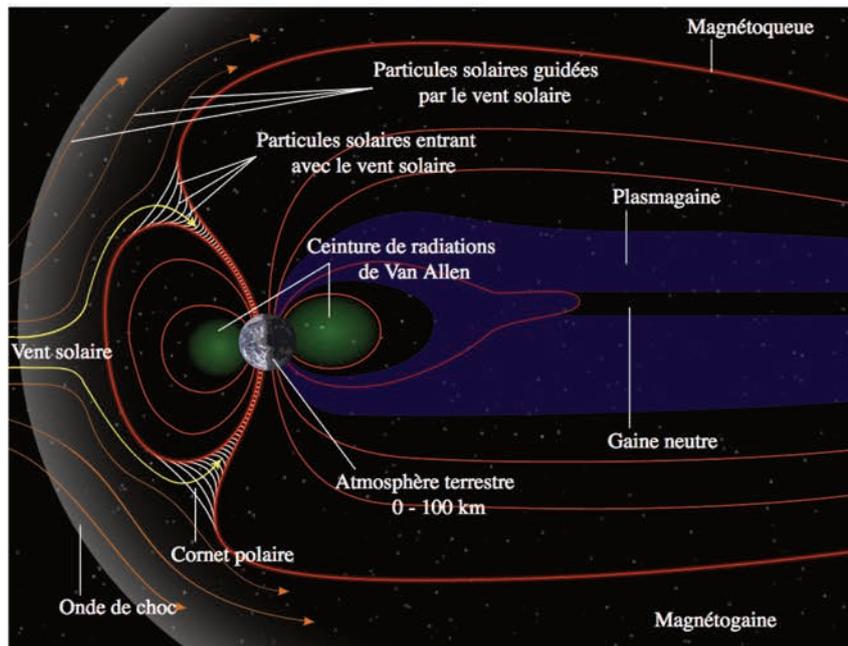


FIGURE 1.7 – Représentation schématique de la magnétosphère terrestre. Les particules chargées émises par le soleil constituent le vent solaire. Ce vent solaire vient heurter la magnétosphère, qui agit comme un obstacle à son écoulement. En effet, le plasma est essentiellement guidé par les lignes de champ magnétique et est donc en grande partie dévié par ce bouclier magnétique. La ligne de séparation entre le plasma d'origine solaire (magnétogaine) et la région protégée par le bouclier est la magnétopause. Cette magnétopause n'est pas impénétrable, pour deux principales raisons. La première raison est l'existence des cornets polaires [41], deux zones où le champ magnétique est nul. Les particules chargées pénétrant dans ces cornets sont responsables des phénomènes auroraux. La deuxième raison est le phénomène de reconnexion magnétique pouvant survenir à la magnétopause [42][43] : deux lignes de champ originellement distinctes (une à l'extérieur de la magnétopause, l'autre à l'intérieur) se reconfigurent en formant deux nouvelles lignes, autorisant l'entrée du plasma du vent solaire dans la magnétosphère.

### 1.2.6.2 Les jets relativistes et les chocs non-collisionnels dans le milieu interstellaire

Entre les étoiles se trouve par définition le milieu interstellaire, essentiellement constitué d'un gaz très dilué (la densité pouvant tomber à  $10^{-4}$  particules par  $\text{cm}^3$ , correspondant à la bordure gauche de la figure 1.1). Sur des échelles de longueur bien supérieures à la taille du système solaire, ce milieu comprend des régions plutôt denses et froides, constituées d'hydrogène moléculaire et appelées GMC (Giant Molecular Clouds) ainsi que des régions de plus faible densité et bien plus chaudes, à l'état de plasma, comme les régions H II riches en protons (un exemple est la nébuleuse d'Orion, visible à l'œil nu depuis la Terre) dans lesquelles les étoiles naissent. Un GMC peut devenir une région H II à la suite d'un processus d'effondrement du nuage, initié par l'énergie reçue d'une onde de choc le traversant. Cette onde de choc est généralement produite par une supernova. Ces dernières, cadavres d'étoiles massives, constituent en effet l'une des principales sources d'énergie responsables de la dynamique du milieu interstellaire. Outre leur rôle de moteur, elles l'enrichissent d'éléments chimiques lourds<sup>20</sup>, produits lors de l'explosion, éléments que les étoiles de taille standard sont incapables de synthétiser.

Outre ces nuages de matière, le milieu interstellaire est sillonné par des rayonnements cosmiques (des particules matérielles de très haute énergie, essentiellement des protons, mais aussi des électrons)<sup>21</sup> dont l'origine est variée : supernovae, sursauts gamma (GRB, pour Gamma-Ray Bursts) et noyaux de galaxie actives (AGN, pour Active Galactic Nucleus).

Les galaxies dites actives sont caractérisées par une émission de rayonnement plus importante que la moyenne des autres galaxies, sur de larges portions du spectre électromagnétique (voire sa totalité) et d'intensité variable, dont la source est probablement liée au trou noir supermassif situé en leur centre. Parmi les galaxies actives, on peut citer par ordre de puissance émise croissante les radiogalaxies (dont la majeure partie de l'énergie est émise, comme leur nom l'indique, dans le spectre des ondes radio), les galaxies de Seyfert (émettant plutôt des rayons X) et les quasars, dont l'intensité d'émission dans le domaine optique fait d'eux les objets les plus visibles de l'Univers. Le trou noir au centre d'une galaxie active attire la matière proche, qui gravite autour de lui et forme un disque d'accrétion. Certains de ces disques produisent des jets relativistes, c'est à dire une éjection de plasma électron-positron [57] de vitesse moyenne proche de celle de la lumière, perpendiculaire au disque d'accrétion et toujours accompagnée d'une émission électromagnétique recouvrant en particulier le spectre des ondes radio. Ce dernier point implique une classification des galaxies actives selon qu'elles sont "radio-quiet" (les jets sont négligeables) ou "radio-loud" (avec jets relativistes). Le rayonnement émis par les jets semble compatible avec le spectre du rayonnement synchrotron émis par des particules chargées déviées par un champ magnétique, ce qui implique la génération d'un champ magnétique dans le processus, ou l'existence préalable de ce champ.

Découverts vers la fin des années 60, les sursauts gamma sont quant à eux des événements rares et particulièrement violents se traduisant par l'émission brève d'une forte quantité de photons gamma en peu de temps (quelques millisecondes, plusieurs heures au maximum). Le flash initial est suivi d'une émission rémanente recouvrant la totalité du spectre électromagnétique qui persiste plusieurs mois, en perdant progressivement de l'intensité. Les sursauts gamma sont supposés résulter d'une supernova particulièrement spectaculaire. Un plasma d'électrons est éjecté sous forme de jets relativistes, par spasmes (l'énergie des particules pouvant dépasser les  $10^{19}$  eV) : plusieurs couches successives voyagent ainsi à des vitesses différentes. Parfois, une couche rapide rattrape une couche plus lente et leur rencontre donne lieu à un choc (dit interne) responsable de l'émission gamma observée durant le sursaut. Cette "boule de feu" interagit également avec le milieu interstellaire (choc externe) et cette interaction produit l'émission rémanente. Ces chocs non-collisionnels<sup>22</sup> sont accompagnés de la génération d'un champ magnétique, responsable de l'accélération des particules par mécanisme de Fermi [58][59][60], ainsi que d'une production de rayonnement synchrotron.

L'interaction d'un jet relativiste avec le milieu interstellaire et celle entre deux couches de matière éjectées par une supernovae peuvent, par exemple, être modélisées par l'interaction de deux faisceaux de particules chargées envoyés l'un vers l'autre [61][62]. Moyennant une perturbation électromagnétique perpendiculaire à la direction de déplacement des faisceaux, l'instabilité CFI se développe là où ces couches se recouvrent. Le champ magnétique de la perturbation est amplifié jusqu'à saturation sous l'effet du piégeage magnétique. On obtient alors, à l'intersection des deux faisceaux, une zone de

20. De numéro atomique supérieur à celui du fer.

21. Les rayons cosmiques peuvent être divisés en deux catégories, ceux d'origine solaire (SEP, pour Solar Energetic Particles) et ceux venant de l'extérieur du système solaire, les GCR (Galactic Cosmic Rays), et qui en dépit de leur nom peuvent provenir de l'extérieur de la Voie Lactée. Les SEP contribuent à la constitution du vent solaire et sont généralement émis lors d'éruptions solaires (solar flare), ou à la suite d'une éjection de masse coronale succédant elle-même à une éruption.

22. L'énergie est dissipée par la diffusion de particules sous l'effet de champs électromagnétiques turbulents, et non pas par des collisions entre particules.

confinement magnétique des particules chargées et une forte augmentation de la densité par rapport au reste du plasma : un important gradient de densité est ainsi produit, en amont et en aval de la région de recouvrement. Des particules n'étant pas piégées à la saturation de l'instabilité car n'étant pas encore arrivées dans la zone de recouvrement sont à leur tour piégées, augmentant encore le gradient. Lorsqu'il est suffisamment fort, une onde de choc est émise.

### 1.2.6.3 Astrophysique de laboratoire et interaction laser-plasma

La plupart des objets astrophysiques que nous avons mentionnés sont loin et la seule façon de les étudier est de collecter la lumière qu'ils émettent dans notre direction, d'interpréter les spectres mesurés et d'établir des modèles tentant de les reproduire. Entre leur point d'émission et l'instrument d'observation, les photons doivent traverser un milieu avec lequel ils vont interagir et donc être modifiés, rendant l'analyse du spectre recueilli difficile. Toute mesure étant associée d'une erreur, il est nécessaire de répéter à plusieurs reprises une expérience dans les mêmes conditions pour tenter de réduire l'importance de cette erreur. Ceci est extrêmement difficile en astrophysique, car les conditions expérimentales ne sont pas contrôlables et car bien que certains événements soient fréquents dans l'Univers (on estime par exemple que trente supernovae sont produites à chaque seconde dans tout l'Univers observable), chaque objet astrophysique est unique et susceptible de présenter un comportement inattendu. Finalement, certains processus se déroulent sur des échelles de temps et de longueur considérables par rapport à celles de la vie humaine : l'observation de l'émission rémanente accompagnant un sursaut gamma prend plusieurs mois.

L'ensemble des problèmes évoqués au paragraphe précédent pose la question de la reproductibilité des résultats observationnels. L'astrophysique de laboratoire est une approche originale visant à reproduire sur Terre certains phénomènes astrophysiques sur des échelles de temps et de longueur raisonnables pour l'observateur. La durée des expériences étant de l'ordre de la seconde, il est possible de s'assurer de la reproductibilité des résultats. Cette approche est intéressante car elle assure à l'expérimentateur un contrôle sur les paramètres physiques caractérisant le phénomène. L'étude observationnelle du phénomène n'est plus passive : l'expérimentateur n'est plus condamné à se contenter de recueillir et d'analyser la lumière émise par un objet lointain car il peut désormais sonder le système au moyen de faisceaux de particules lumineuses ou matérielles. Cette approche repose bien entendu sur la nécessité de réaliser une expérience équivalente au système astrophysique, les deux systèmes devant évoluer de la même façon mais sur des échelles différentes. On doit pour cela trouver des lois d'échelle, c'est à dire des transformations mathématiques qui, appliquées aux principales variables d'état caractérisant un système, ne modifient pas les équations régissant leur évolution. Les équations sont donc invariantes sous cet ensemble de transformations. On ne décrit plus le système par ses propriétés thermodynamiques mais par des nombres sans dimension caractérisant de façon bijective un comportement donné, pourvu que les conditions initiales du phénomène réel et celles du phénomène reproduit soient reliées par la même loi d'échelle.

Il est donc théoriquement possible de recréer en laboratoire des chocs non-collisionnels au moyen de lasers intenses pour observer et étudier leur formation, comme représenté sur la figure 1.8. Si l'expérience présentée sur cette figure n'a pas réussi à réaliser les conditions de densité nécessaires au développement du choc, elle a permis d'observer la génération d'un champ magnétique par instabilité de filamentation de courant. De nouvelles installations de haute puissance comme le NIF (National Ignition Facility) ou le LMJ (Laser Mégajoule) devraient permettre de produire les chocs.

Les lasers intenses sont aussi employés dans un contexte différent, celui de la fusion thermonucléaire. La réaction de fusion nucléaire d'un noyau de deutérium avec un noyau de tritium, produisant un noyau d'hélium et un neutron rapide, libère une énergie importante que l'on souhaite récupérer pour alimenter un nouveau genre de centrale électrique. Pour réussir à fusionner ces noyaux, il est nécessaire de leur fournir une énergie thermique considérable, de l'ordre de  $10^8$  K : sous de telles températures, le mélange deutérium-tritium est à l'état de plasma, et ce plasma a tendance à l'expansion sous l'effet de sa propre pression cinétique.

Les conditions de température extrêmes doivent être maintenues suffisamment longtemps pour que le procédé soit économique viable : il est nécessaire de fournir de l'énergie pour créer et chauffer le plasma, il faut donc que les réactions de fusion puissent produire plus que ce que l'on a consommé pour les déclencher. Cela requiert de confiner le plasma pendant une durée minimale, appelée temps de confinement.

Plusieurs possibilités existent pour confiner un plasma de fusion. Citons d'abord le confinement gravitationnel, réalisé au coeur des étoiles : le poids considérable des couches supérieures d'une étoile s'exerce sur le coeur de l'astre, siège des réactions de fusion. L'équilibre entre ce poids et la volonté d'expansion du coeur sous l'effet de sa pression persiste tant qu'il y a suffisamment de matière pou-

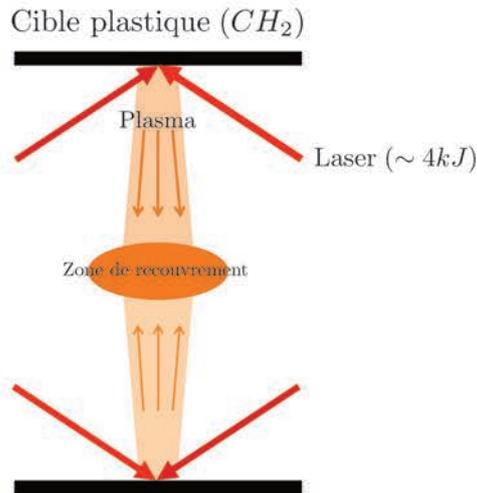


FIGURE 1.8 – Schéma du dispositif expérimental utilisé pour étudier l'instabilité de filamentation de courant précédant la formation d'un choc non-collisionnel électromagnétique au moyen de lasers intenses, publié dans [63]. Le rayonnement laser chauffe deux cibles en polyéthylène séparées d'une faible distance (quelques millimètres). Deux faisceaux contra-propageants de particules chargées sont alors créés. Lorsqu'ils se rencontrent, les faisceaux s'interpénètrent sur une distance finie et l'instabilité de filamentation de courant génère un champ magnétique piégeant la densité de charge (ions et électrons) dans sa structure.

vant fusionner au coeur de l'étoile. Lorsque ce n'est plus le cas, l'étoile gonfle (géante rouge) et finit par mourir en expulsant ses couches externes, riches d'éléments chimiques lourds. Il est évidemment impensable de réaliser ce procédé sur Terre, nous obligeant à imaginer des alternatives. Le confinement magnétique est une option actuellement envisagée et sérieusement étudiée pour démontrer la faisabilité d'un réacteur à fusion nucléaire économique viable. Elle consiste à piéger le plasma dans un champ magnétique intense (plusieurs Tesla) de structure hélico-toroïdale, pendant une durée de l'ordre de la seconde. La densité du plasma est de l'ordre de  $10^{20}$  particules par  $\text{m}^3$ , pour un volume de plusieurs  $\text{m}^3$ .

La dernière méthode de confinement est le confinement inertiel : une cible de taille millimétrique est bombardée de toutes parts par un rayonnement intense venant la comprimer. Ce rayonnement peut être un rayonnement laser intense (attaque directe), ou un rayonnement produit par interaction d'un rayonnement laser intense avec une paroi (hohlraum) absorbant ce rayonnement et émettant un rayonnement X dans la foulée. C'est ce rayonnement X qui vient comprimer la cible (attaque indirecte). L'objectif est d'atteindre une densité de l'ordre de  $10^{31}$  particules par  $\text{m}^3$ , pour un temps de confinement beaucoup plus court ( $10^{-11}$  secondes). Une technique envisagée pour réaliser la fusion inertielle est le scénario d'allumage rapide [64], dans lequel la phase de compression de la cible est découplée de la phase de chauffage.

Dans ce scénario, on commence par comprimer la cible (dans laquelle un cône métallique est planté) en envoyant des impulsions nanosecondes d'une intensité avoisinant les  $10^{15}\text{W}/\text{cm}^2$ . Lorsqu'une densité critique est atteinte, on envoie une impulsion plus courte et plus intense dans le cône (qui agit comme un guide d'onde). Cette impulsion va générer un faisceau d'électrons chauds à la surface du combustible contenu dans la cible. Ces électrons vont se propager vers le coeur et démarrer les processus de fusion. Il se forme cependant un courant "de retour", plus dense et plus froid (pour annuler le courant total) et se propageant dans le sens opposé, qui peut donner naissance à l'instabilité CFI et à ses instabilités concurrentes (TSI, modes obliques). Il est donc important de comprendre ces instabilités pour déterminer si oui ou non elles peuvent nuire au chauffage de la cible et au confinement de l'énergie dans le plasma : il en va de la capacité du système à réaliser la fusion et à atteindre un rendement énergétique satisfaisant [65][66][67].

## Bibliographie

- [1] J. D. Scudder, H. Karimabadi, W. Daughton, and V. Roytershteyn. Frozen flux violation, electron demagnetization and magnetic reconnection. *Physics of Plasmas*, 22(10) :101204, 2015. [9](#)
- [2] S. Servidio, F. Valentini, D. Perrone, A. Greco, F. Califano, W. H. Matthaeus, and P. Veltri. A kinetic model of plasma turbulence. *Journal of Plasma Physics*, 81(1), 2015. [9](#)
- [3] D. Del Sarto, F. Pegoraro, and F. Califano. Pressure anisotropy and small spatial scales induced by velocity shear. *Phys. Rev. E*, 93 :053203, 2016. [9](#)
- [4] Yan Yang, W. H. Matthaeus, T. N. Parashar, P. Wu, M. Wan, Y. Shi, S. Chen, V. Roytershteyn, and W. Daughton. Energy transfer channels and turbulence cascade in vlasov-maxwell turbulence. *Phys. Rev. E*, 95 :061201, 2017. [9](#)
- [5] Jaime A. Araneda, Eckart Marsch, and Adolfo F.-Viñas. Proton core heating and beam formation via parametrically unstable alfvén-cyclotron waves. *Phys. Rev. Lett.*, 100 :125003, 2008. [9](#)
- [6] E. S. Weibel. Spontaneously growing transverse waves in a plasma due to an anisotropic velocity distribution. *Phys. Rev. Lett.*, 2 :83–84, 1959. [10](#)
- [7] C. F. Kennel and H. E. Petschek. Limit on stably trapped particle fluxes. *Journal of Geophysical Research*, 71(1) :1–28, 1966. :JGR5503
- [8] S. P. Gary and J. Wang. Whistler instability : Electron anisotropy upper bound. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 101(A5) :10749–10754, 1996. :JGRA12945
- [9] B. Basu. Moment equation description of weibel instability. *Physics of Plasmas*, 9(12) :5131–5134, 2002. :10.1063/1.1521716
- [10] P. H. Yoon and R. C. Davidson. Exact analytical model of the classical weibel instability in a relativistic anisotropic plasma. *Phys. Rev. A*, 35 :2718–2721, 1987. [11](#)
- [11] A. Inglebert, A. Ghizzo, T. Réveillé, D. Del Sarto, P. Bertrand, and F. Califano. Multi-stream vlasov model for the study of relativistic weibel-type instabilities. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 54(8) :085004, 2012. [11](#)
- [12] A. Inglebert, A. Ghizzo, T. Réveillé, P. Bertrand, and F. Califano. Electron temperature anisotropy instabilities represented by superposition of streams. *Physics of Plasmas*, 19(12) :122109, 2012. :10.1063/1.4772770
- [13] A. Ghizzo and P. Bertrand. On the multistream approach of relativistic weibel instability. i. linear analysis and specific illustrations. *Physics of Plasmas*, 20(8) :082109, 2013. :10.1063/1.4817750
- [14] A. Ghizzo. On the multistream approach of relativistic weibel instability. ii. bernstein-greenekruskal-type waves in magnetic trapping. *Physics of Plasmas*, 20(8) :082110, 2013. :10.1063/1.4817751
- [15] A. Ghizzo. On the multistream approach of relativistic weibel instability. iii. comparison with full-kinetic vlasov simulations. *Physics of Plasmas*, 20(8) :082111, 2013. :10.1063/1.4817752
- [16] B. D. Fried. Mechanism for instability of transverse plasma waves. *The Physics of Fluids*, 2(3) :337–337, 1959. :10.1063/1.1705933
- [17] A. Inglebert, A. Ghizzo, T. Réveillé, D. Del Sarto, P. Bertrand, and F. Califano. A multi-stream vlasov modeling unifying relativistic weibel-type instabilities. *EPL (Europhysics Letters)*, 95(4) :45002, 2011. [15](#)
- [18] K. A. Taggart, B. B. Godfrey, C. E. Rhoades, and H. C. Ives. Second-order effects in the weibel instability. *Phys. Rev. Lett.*, 29 :1729–1731, 1972. [15](#)
- [19] G. Kalman, C. Montes, and D. Quemada. Anisotropic temperature plasma instabilities. *The Physics of Fluids*, 11(8) :1797–1808, 1968. :10.1063/1.1692198
- [20] A. Bret, L. Gremillet, D. Bénisti, and E. Lefebvre. Exact relativistic kinetic theory of an electron-beam–plasma system : Hierarchy of the competing modes in the system-parameter space. *Phys. Rev. Lett.*, 100 :205008, 2008. [16](#)

- [21] A. Bret, L. Gremillet, and D. Bénisti. Exact relativistic kinetic theory of the full unstable spectrum of an electron-beam–plasma system with maxwell-jüttner distribution functions. *Phys. Rev. E*, 81 :036402, 2010. [16](#)
- [22] S. P. Gary and H. Karimabadi. Linear theory of electron temperature anisotropy instabilities : Whistler, mirror, and weibel. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 111(A11), 2006. A11224. :JGRA18436
- [23] S. P. Gary, W. C. Feldman, D. W. Forslund, and M. D. Montgomery. Electron heat flux instabilities in the solar wind. *Geophysical Research Letters*, 2(3) :79–82, 1975. :GRL123
- [24] S. P. Gary, E. E. Scime, J. L. Phillips, and W. C. Feldman. The whistler heat flux instability : Threshold conditions in the solar wind. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 99(A12) :23391–23399, 1994. :JGRA12146
- [25] S. Saeed, M. Sarfraz, P. H. Yoon, M. Lazar, and M. N. S. Qureshi. Electron heat flux instability. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 465(2) :1672–1681, 2017. :10.1093/mnras/stw2900
- [26] R. L. Morse and C. W. Nielson. Numerical simulation of the weibel instability in one and two dimensions. *The Physics of Fluids*, 14(4) :830–840, 1971. :10.1063/1.1693518
- [27] R. A. Fonseca, L. O. Silva, J. W. Tonge, W. B. Mori, and J. M. Dawson. Three-dimensional weibel instability in astrophysical scenarios. *Physics of Plasmas*, 10(5) :1979–1984, 2003. :10.1063/1.1556605
- [28] T. N. Kato. Saturation mechanism of the weibel instability in weakly magnetized plasmas. *Physics of Plasmas*, 12(8) :080705, 2005. :10.1063/1.2017942
- [29] A. Bret, L. Gremillet, and M. E. Dieckmann. Multidimensional electron beam-plasma instabilities in the relativistic regime. *Physics of Plasmas*, 17(12) :120501, 2010. :10.1063/1.3514586
- [30] L. Palodhi, F. Califano, and F. Pegoraro. Nonlinear kinetic development of the weibel instability and the generation of electrostatic coherent structures. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 51(12) :125006, 2009. [17](#)
- [31] F. Califano, F. Pegoraro, S. V. Bulanov, and A. Mangeney. Kinetic saturation of the weibel instability in a collisionless plasma. *Phys. Rev. E*, 57 :7048–7059, Jun 1998. [17](#)
- [32] R. C. Davidson, D. A. Hammer, I. Haber, and C. E. Wagner. Nonlinear development of electromagnetic instabilities in anisotropic plasmas. *The Physics of Fluids*, 15(2) :317–333, 1972. :10.1063/1.1693910
- [33] M. E. Innocenti, M. Lazar, S. Markidis, G. Lapenta, and S. Poedts. Electron streams formation and secondary two stream instability onset in the post-saturation regime of the classical weibel instability. *Physics of Plasmas*, 18(5) :052104, 2011. :10.1063/1.3587089
- [34] A. Stockem, M. E. Dieckmann, and R. Schlickeiser. Pic simulations of the thermal anisotropy-driven weibel instability : field growth and phase space evolution upon saturation. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 51(7) :075014, 2009. [17](#)
- [35] M. E. Dieckmann. The filamentation instability driven by warm electron beams : statistics and electric field generation. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 51(12) :124042, 2009. [17](#)
- [36] F. Califano, R. Prandi, F. Pegoraro, and S. V. Bulanov. Magnetic-field generation and wave-breaking in collisionless plasmas. *Journal of Plasma Physics*, 60(2) :331–339, 1998. [17](#)
- [37] M. V. Medvedev, M. Fiore, R. A. Fonseca, L. O. Silva, and W. B. Mori. Long-time evolution of magnetic fields in relativistic gamma-ray burst shocks. *The Astrophysical Journal Letters*, 618(2) :L75, 2005. [18](#)
- [38] O. Polomarov, I. Kaganovich, and G. Shvets. Merging of super-alfvénic current filaments during collisionless weibel instability of relativistic electron beams. *Phys. Rev. Lett.*, 101 :175001, Oct 2008. [18](#)

- [39] A. Grassi, M. Grech, F. Amiranoff, F. Pegoraro, A. Macchi, and C. Riconda. Electron weibel instability in relativistic counterstreaming plasmas with flow-aligned external magnetic fields. *Phys. Rev. E*, 95 :023203, 2017. [18](#), [19](#)
- [40] D. P. Stern. A brief history of magnetospheric physics before the spaceflight era. *Reviews of Geophysics*, 27(1) :103–114, 1989. :ROG1312
- [41] L. A. Frank. Plasma in the earth’s polar magnetosphere. *Journal of Geophysical Research*, 76(22) :5202–5219, 1971. :JGR8437
- [42] J. W. Dungey. Interplanetary magnetic field and the auroral zones. *Phys. Rev. Lett.*, 6 :47–48, 1961. [20](#)
- [43] G. Paschmann, B. U. O. Sonnerup, I. Papamastorakis, N. Sckopke, G. Haerendel, S. J. Bame, J. R. Asbridge, J. T. Gosling, C. T. Russell, and R. C. Elphic. Plasma acceleration at the earth’s magnetopause : evidence for reconnection. *Nature*, 282(5736) :243–246, 1979. [19](#), [20](#)
- [44] T. D. Phan, L. M. Kistler, B. Klecker, G. Haerendel, G. Paschmann, B. U. O. Sonnerup, W. Baumjohann, M. B. Bavassano-Cattaneo, C. W. Carlson, A. M. DiLellis, K.-H. Fornacon, L. A. Frank, M. Fujimoto, E. Georgescu, S. Kokubun, E. Moebius, T. Mukai, M. Oieroset, W. R. Paterson, and H. Reme. Extended magnetic reconnection at the earth’s magnetopause from detection of bi-directional jets. *Nature*, 404(6780) :848–850, 2000. [19](#)
- [45] C. Lacombe, O. Alexandrova, L. Matteini, O. Santolík, N. Cornilleau-Wehrlin, A. Mangeney, Y. de Conchy, and M. Maksimovic. Whistler mode waves and the electron heat flux in the solar wind : Cluster observations. *The Astrophysical Journal*, 796(1) :5, 2014. [19](#)
- [46] D. Stansby, T. S. Horbury, C. H. K. Chen, and L. Matteini. Experimental determination of whistler wave dispersion relation in the solar wind. *The Astrophysical Journal Letters*, 829(1) :L16, 2016. [19](#)
- [47] V. Pierrard and M. Lazar. Kappa distributions : Theory and applications in space plasmas. *Solar Physics*, 267(1) :153–174, 2010. [19](#)
- [48] Lazar, M., Pierrard, V., Shaaban, S. M., Fichtner, H., and Poedts, S. Dual maxwellian-kappa modeling of the solar wind electrons : new clues on the temperature of kappa populations. *AA*, 602 :A44, 2017. [19](#)
- [49] S. P. Gary. Electromagnetic electron beam instabilities : Hot, isotropic beams. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 90(A11) :10815–10822, 1985. :JGRA7705
- [50] E. E. Scime, S. J. Bame, W. C. Feldman, S. P. Gary, J. L. Phillips, and A. Balogh. Regulation of the solar wind electron heat flux from 1 to 5 au : Ulysses observations. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 99(A12) :23401–23410, 1994. :JGRA12147
- [51] G. P. Serbu. Explorer 35 observations of solar-wind electron density, temperature, and anisotropy. *Journal of Geophysical Research*, 77(10) :1703–1712, 1972. :JGR8708
- [52] J. D. Scudder, D. L. Lind, and K. W. Ogilvie. Electron observations in the solar wind and magnetosheath. *Journal of Geophysical Research*, 78(28) :6535–6548, 1973. :JGR9377
- [53] J. C. Kasper, A. J. Lazarus, S. P. Gary, and A. Szabo. Solar wind temperature anisotropies. *AIP Conference Proceedings*, 679(1) :538–541, 2003. :10.1063/1.1618653
- [54] P. Hellinger, P. Trávníček, J. C. Kasper, and A. J. Lazarus. Solar wind proton temperature anisotropy : Linear theory and wind/swe observations. *Geophysical Research Letters*, 33(9), 2006. L09101. :GRL21389
- [55] S. Štverák, P. Trávníček, M. Maksimovic, E. Marsch, A. N. Fazakerley, and E. E. Scime. Electron temperature anisotropy constraints in the solar wind. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 113(A3), 2008. A03103. :JGRA19103
- [56] M. Lazar, S. M. Shaaban, V. Pierrard, H. Fichtner, and S. Poedts. Instability constraints for the electron temperature anisotropy in the slow solar wind. thermal core vs. suprathermal halo. *pre-print*, 1972. arXiv :1704.05311v2 [astro-ph.SR]. [19](#)

- [57] J. F. C. Wardle, D. C. Homan, R. Ojha, and D. H. Roberts. Electron-positron jets associated with the quasar 3c279. *Nature*, 395(6701) :457–461, 1998. [21](#)
- [58] R. Z. Sagdeev. Cooperative phenomena and shock waves in collisionless plasmas. *Rev. Plasma Phys.*, 4 :23, 1966. [21](#)
- [59] D. Biskamp. Collisionless shock waves in plasmas. *Nuclear Fusion*, 13(5) :719, 1973. [21](#)
- [60] M. Lemoine, G. Pelletier, and B Revenu. On the efficiency of fermi acceleration at relativistic shocks. *The Astrophysical Journal Letters*, 645(2) :L129, 2006. [21](#)
- [61] L. O. Silva, R. A. Fonseca, J. W. Tonge, J. M. Dawson, W. B. Mori, and M. V. Medvedev. Interpenetrating plasma shells : Near-equipartition magnetic field generation and nonthermal particle acceleration. *The Astrophysical Journal Letters*, 596(1) :L121, 2003. [21](#)
- [62] A. Bret, A. Stockem, R. Narayan, and L. O. Silva. Collisionless weibel shocks : Full formation mechanism and timing. *Physics of Plasmas*, 21(7) :072301, 2014. :10.1063/1.4886121
- [63] H.-S. Park, C. M. Huntington, F. Fiuza, R. P. Drake, D. H. Froula, G. Gregori, M. Koenig, N. L. Kugland, C. C. Kuranz, D. Q. Lamb, M. C. Levy, C. K. Li, J. Meinecke, T. Morita, R. D. Petrasso, B. B. Pollock, B. A. Remington, H. G. Rinderknecht, M. Rosenberg, J. S. Ross, D. D. Ryutov, Y. Sakawa, A. Spitkovsky, H. Takabe, D. P. Turnbull, P. Tzeferacos, S. V. Weber, and A. B. Zylstra. Collisionless shock experiments with lasers and observation of weibel instabilities. *Physics of Plasmas*, 22(5) :056311, 2015. :10.1063/1.4920959
- [64] M. Tabak, J. Hammer, M. E. Glinsky, W. L. Kruer, S. C. Wilks, J. Woodworth, E. M. Campbell, M. D. Perry, and R. J. Mason. Ignition and high gain with ultrapowerful lasers\*. *Physics of Plasmas*, 1(5) :1626–1634, 1994. :10.1063/1.870664
- [65] J. M. Hill, M. H. Key, S. P. Hatchett, and R. R. Freeman. Beam-weibel filamentation instability in near-term and fast-ignition experiments. *Physics of Plasmas*, 12(8) :082304, 2005. :10.1063/1.1986988
- [66] A. Karmakar, N. Kumar, A. Pukhov, O. Polomarov, and G. Shvets. Three-dimensional filamentary structures of a relativistic electron beam in fast ignition plasmas. *Physics of Plasmas*, 15(12) :120702, 2008. :10.1063/1.3042208
- [67] A. Karmakar, N. Kumar, A. Pukhov, O. Polomarov, and G. Shvets. Detailed particle-in-cell simulations on the transport of a relativistic electron beam in plasmas. *Phys. Rev. E*, 80 :016401, Jul 2009. [23](#)



# Chapitre 2

## Modèles de plasmas non-collisionnels

### Sommaire

---

<b>2.1 Description particulière : le problème à <math>N</math> corps</b> . . . . .	<b>31</b>
2.1.1 Particule chargée dans un champ électromagnétique . . . . .	31
2.1.2 Problème à $N$ corps par la mécanique Hamiltonienne . . . . .	32
2.1.3 Approche de Klimontovich . . . . .	34
<b>2.2 Description statistique</b> . . . . .	<b>37</b>
2.2.1 Équation de Liouville . . . . .	38
2.2.2 De l'équation de Liouville vers la théorie cinétique . . . . .	39
2.2.3 Le modèle cinétique Vlasov-Maxwell . . . . .	41
2.2.4 L'équation de Vlasov à partir de l'équation de Klimontovich . . . . .	42
<b>2.3 Descriptions cinétiques réduites</b> . . . . .	<b>45</b>
2.3.1 Le modèle multi-faisceaux . . . . .	45
2.3.2 Une autre technique de réduction, le modèle water-bag . . . . .	49
<b>2.4 Description macroscopique</b> . . . . .	<b>51</b>
2.4.1 Motivation . . . . .	51
2.4.2 Moments de la fonction de distribution . . . . .	51
2.4.3 Construction des équations fluides . . . . .	52
2.4.4 Le modèle relativiste froid . . . . .	55
2.4.5 Le modèle fluide étendu avec tenseur de pression . . . . .	55
2.4.6 Modèle non-relativiste avec tenseur de pression diagonal . . . . .	56

---

Nous avons défini au chapitre précédent le plasma comme un système de particules électriquement chargées, mises en mouvement par l'agitation thermique et par des champs électromagnétiques. Ces champs sont générés par les particules elles-mêmes et donnent lieu au comportement dit auto-consistant du plasma. Peuvent également s'ajouter, selon le problème étudié, des champs (notamment magnétiques) imposés par le milieu extérieur. Un modèle physique destiné à décrire le comportement d'un plasma doit en premier lieu restituer ce comportement auto-consistant. Il implique donc nécessairement un système d'équations fortement couplées les unes aux autres, décrivant d'une part le mouvement des particules, et d'autre part l'évolution des champs électromagnétiques. Nous avons de plus identifié bon nombre des plasmas dans lesquels se produisaient les instabilités de type Weibel comme des plasmas cinétiques et non-collisionnels, ce qui nous permettra de faire plusieurs hypothèses simplificatrices pour obtenir les modèles que nous allons utiliser.

Il est possible de décrire un plasma avec différents degrés de précision. La première partie de ce chapitre consiste à mener un rapide tour d'horizon de ces niveaux. Nous nous concentrerons ensuite sur les modèles utilisés au cours de ce travail de thèse. Le premier d'entre eux est le modèle Vlasov-Maxwell, une description de type cinétique correspondant au cas limite  $g = 0$ . Le second modèle que nous utiliserons est le modèle multifaisceaux : il s'agit d'une description de type Vlasov-Maxwell utilisant l'invariance canonique pour réduire la dimension effective d'un problème dans l'espace des phases. La dernière description est de nature macroscopique : il s'agit d'un modèle fluide étendu, prenant en compte la dynamique du tenseur de pression complet et négligeant la contribution du flux de chaleur. Les conditions d'application de ces modèles seront discutées, ainsi que leurs faiblesses et leurs avantages pratiques.

Par souci de pédagogie, on profitera de ce survol pour tenter de lever certaines ambiguïtés quant à l'utilisation, parfois floue dans la littérature, du moment canonique ou de la quantité de mouvement dans les équations cinétiques, ainsi que sur la nature du champ magnétique intervenant dans ces équations. Compte tenu de la complexité de la forme des interactions magnétiques entre particules chargées, en particulier lorsque le régime est relativiste, il nous semblait nécessaire de ne pas laisser cette problématique de côté et de fournir quelques éléments de réponse à ce sujet.

## 2.1 Description particulière : le problème à $N$ corps

Une façon parmi les plus générales d'étudier les propriétés d'un ensemble de particules consiste à déterminer leur état microscopique à chaque instant. Ceci peut passer par la connaissance des forces agissant sur chacune des particules (mécanique des systèmes de points matériels) ou par la connaissance d'une fonction mathématique dépendant des degrés de liberté du système (mécanique analytique). On choisit de retenir cette dernière approche pour traiter, d'abord le problème d'une particule relativiste plongée dans un champ électromagnétique, puis le problème relativiste à  $N$  corps qu'est la description particulière d'un plasma.

### 2.1.1 Particule chargée dans un champ électromagnétique

#### 2.1.1.1 Formalisme Hamiltonien

La mécanique Hamiltonienne permet de décrire le mouvement d'un système mécanique de dimension quelconque, à travers la donnée d'une fonction appelée Hamiltonien, notée  $\mathcal{H}$ . La résolution des équations d'Hamilton,

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{P}}, \quad \dot{\mathbf{P}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}}, \quad (2.1)$$

conduit aux équations du mouvement de la particule, exprimées dans l'espace des phases  $\{\mathbf{r}, \mathbf{P}\}$ . Le vecteur  $\mathbf{r}$  désigne les coordonnées généralisées de la particule, que l'on assimilera ici à ses coordonnées de position  $\{x, y, z\}$  dans un repère cartésien. Par conséquent,  $\mathbf{r}$  sera le vecteur position et  $\dot{\mathbf{r}}$  le vecteur vitesse. Le vecteur  $\mathbf{P}$  est le moment canonique de la particule (aussi appelé impulsion ou moment conjugué), grandeur à ne pas confondre avec la quantité de mouvement de la particule, notée  $\mathbf{p}$ . Pour une particule animée d'un mouvement tridimensionnel, la dimension de l'espace des phases est 6, chacun des vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{P}$  ayant trois composantes.

Considérons une particule de charge électrique  $q$  et de masse  $m$  baignant dans un champ électromagnétique  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ . Le champ  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  dérive des potentiels vecteur  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  et scalaire  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  à travers les relations suivantes,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (2.2)$$

Le Hamiltonien de la particule, en régime relativiste, s'écrit :

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{P}, t) = (\gamma - 1) mc^2 + q\Phi(\mathbf{r}, t), \quad (2.3)$$

où la notation  $\gamma$  désigne le facteur de Lorentz de la particule, d'expression

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{(\mathbf{P} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2}{m^2 c^2}}. \quad (2.4)$$

La limite non-relativiste du Hamiltonien peut être obtenue en effectuant un développement limité à l'ordre 1 de ce facteur :

$$\mathcal{H} = \frac{(\mathbf{P} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2}{2m} + q\Phi(\mathbf{r}, t). \quad (2.5)$$

La quantité  $\mathcal{H}$  n'est définie qu'à une constante près. En effet, en observant les équations (2.1), on voit que ce sont les dérivées de  $\mathcal{H}$  par rapport aux coordonnées de l'espace des phases qui interviennent dans les équations du mouvement. Ici, nous avons fait le choix de retirer l'énergie de masse  $\mathcal{E}_0 = mc^2$ , constante, de l'expression de  $\mathcal{H}$ .

De même, le champ électromagnétique n'apparaît dans  $\mathcal{H}$  que par l'intermédiaire des potentiels vecteur  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  et scalaire  $\Phi(\mathbf{r}, t)$ , eux-mêmes définis à une constante près. On doit donner une valeur à cette constante : on introduit pour cela une condition de jauge. À titre d'illustration, nous présentons la jauge de Lorenz,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad (2.6)$$

fréquemment employée en régime relativiste. On citera aussi une autre jauge, celle de Coulomb, pour laquelle  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . Ce choix ne modifie pas les équations du mouvement mais a des conséquences sur l'écriture des champs électrique et magnétique.

### 2.1.1.2 Résolution du problème

La première équation d'Hamilton nous permet d'établir un lien direct entre  $\mathbf{P}$ , quantité peu parlante d'un point de vue cinématique, et la vitesse  $\dot{\mathbf{r}}$  :

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{P} - q\mathbf{A}}{m\gamma}, \quad (2.7)$$

équation que l'on peut réécrire

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad (2.8)$$

où

$$\mathbf{p} \equiv \gamma m \dot{\mathbf{r}}, \quad (2.9)$$

est la quantité de mouvement de la particule.

Utiliser la seconde équation d'Hamilton nous permet d'obtenir l'équation du mouvement. En effet, dérivons par rapport au temps l'équation (2.8) et utilisons  $\dot{\mathbf{P}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}}$  :

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} + q\frac{d\mathbf{A}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}}. \quad (2.10)$$

D'une part,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \left( \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{A}, \quad (2.11)$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}} &= mc^2 \frac{\partial \gamma}{\partial \mathbf{r}} + q \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} \\ &= -q \left[ \underbrace{\frac{P_x - qA_x}{m\gamma}}_{\equiv \dot{x}} \frac{\partial A_x}{\partial \mathbf{r}} + \underbrace{\frac{P_y - qA_y}{m\gamma}}_{\equiv \dot{y}} \frac{\partial A_y}{\partial \mathbf{r}} + \underbrace{\frac{P_z - qA_z}{m\gamma}}_{\equiv \dot{z}} \frac{\partial A_z}{\partial \mathbf{r}} \right] + q \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Combinons les équations (2.11) et (2.12) avec l'équation (2.10), et projetons le résultat selon l'axe  $Ox$  d'un repère cartésien :

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= q \left( \underbrace{-\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}}_{= E_x} \right) + q\dot{y} \left( \underbrace{\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}}_{\equiv [\nabla \times \mathbf{A}]_z = B_z} \right) + q\dot{z} \left( \underbrace{\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}}_{= -B_y} \right) \\ &= q(E_x + \dot{y}B_z - \dot{z}B_y) = q(E_x + [\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}]_x). \end{aligned} \quad (2.13)$$

On retrouve alors l'expression de l'une des trois composantes de la force de Lorentz. Projeter selon les axes  $Oy$  et  $Oz$  conduit à des résultats similaires. On retrouve donc bien l'équation du mouvement

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{m\gamma} \times \mathbf{B} \right), \quad (2.14)$$

que l'on aurait pu obtenir en utilisant le Principe Fondamental de la Dynamique.

## 2.1.2 Problème à N corps par la mécanique Hamiltonienne

Pour décrire le plasma, on choisit de calculer la trajectoire exacte de chacune de ces  $N$  particules en procédant comme au paragraphe précédent : c'est une approche de type problème à  $N$  corps.

### 2.1.2.1 Prise en compte des interactions entre particules

En formalisme Hamiltonien, l'état du système de  $N$  particules est donné par la connaissance exacte de la position  $\mathbf{r}_\alpha$  et du moment canonique  $\mathbf{P}_\alpha$  de chaque particule  $\alpha$  à chaque instant  $t$ . Cet état évolue conformément aux équations de Hamilton :

$$\dot{\mathbf{P}}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}_\alpha}, \quad \dot{\mathbf{r}}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{P}_\alpha}, \quad (2.15)$$

où  $\mathcal{H}$  est ici le Hamiltonien du système de  $N$  particules en interaction. Il faut donc trouver une écriture pour  $\mathcal{H}$ .

Nous avons vu (Section 2.1.1) qu'en régime relativiste, le Hamiltonien d'une particule test  $\alpha$  chargée  $q_\alpha$ , de masse  $m_\alpha$  plongée dans un champ électromagnétique  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  est défini comme :

$$\mathcal{H}_\alpha(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{P}_\alpha, t) = (\gamma_\alpha - 1) m_\alpha c^2 + q_\alpha \Phi(\mathbf{r}_\alpha, t), \quad (2.16)$$

avec

$$\gamma_\alpha = \sqrt{1 + \frac{(\mathbf{P}_\alpha - q_\alpha \mathbf{A}(\mathbf{r}_\alpha, t))^2}{m_\alpha^2 c^2}}. \quad (2.17)$$

Pour un système de plusieurs particules, les potentiels  $\mathbf{A}(\mathbf{r}_\alpha, t)$  et  $\Phi(\mathbf{r}_\alpha, t)$  agissant sur la particule  $\alpha$  située en  $\mathbf{r}_\alpha$  tiennent compte de deux types de contributions.

D'une part, une contribution "extérieure", liée aux champs non-générés par le plasma lui-même. On peut citer comme exemples le champ magnétique solaire appliqué au plasma du vent solaire ou encore le champ de confinement généré par les bobines d'un tokamak.

D'autre part, une contribution "auto-consistante", liée aux forces électromagnétiques internes au plasma. Les particules chargées génèrent des champs électromagnétiques de par leur présence et de par leur mouvement. Ces champs affectent l'ensemble des autres particules et modifient leur mouvement. Une façon équivalente de décrire ces champs revient à considérer que chaque particule du plasma est en interaction électrique et magnétique avec chacune des autres particules. Ce potentiel auto-consistant est donc la somme de tous les potentiels d'interaction "à deux particules" du plasma.

Pour décrire ces interactions, il nous faut utiliser les potentiels électromagnétiques générés par une particule chargée en mouvement, donnés par les formules de Liénard-Wiechert. Leur expression, peu pratique à l'usage, peut être développée comme suit [1],

$$\Phi \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \quad (2.18)$$

$$c\mathbf{A} \simeq \frac{q}{8\pi\epsilon_0 cr^3} (r^2 \dot{\mathbf{r}} + (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}) + \mathcal{O}\left(\frac{v^3}{c^3}\right) \quad (2.19)$$

sous réserve de considérer des effets modérément relativistes. On remarquera au passage que le potentiel vecteur est une grandeur intrinsèquement relativiste puisque le terme d'ordre le plus bas fait intervenir le rapport  $v/c$  (à travers  $\dot{\mathbf{r}}$ ), ce qui n'est pas le cas du potentiel scalaire dont la partie coulombienne est purement électrostatique (le mouvement des particules n'apparaît pas explicitement).

Le calcul du Hamiltonien électromagnétique à  $N$  corps, tenant compte des corrections relativistes de premier ordre en  $v/c$ , est détaillé dans [1]. Ce calcul conduit à la forme suivante du Hamiltonien à  $N$  particules,

$$\mathcal{H} = \sum_{\alpha=1}^N [(\gamma_\alpha - 1) m_\alpha c^2 + q_\alpha \Phi_{ext}] + \sum_{\alpha, \beta} \varphi_{\alpha, \beta}, \quad (2.20)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  désignent deux particules distinctes. Nous allons détailler ci-dessous la signification de chacun des termes de cette expression.

On fait tout d'abord le choix de retirer l'énergie de masse pour conserver la forme en  $\gamma - 1$  du Hamiltonien, mais ce n'est pas une nécessité.

La limite faiblement relativiste permet d'approximer le facteur de Lorentz en évacuant la contribution des interactions magnétiques du terme d'énergie cinétique  $\gamma_\alpha m_\alpha c^2$ . Le  $\gamma_\alpha$  figurant dans (2.20) n'est donc qu'une forme approchée du facteur de Lorentz, et s'écrit

$$\gamma_\alpha^2 = 1 + \frac{(\mathbf{P}_\alpha - q_\alpha \mathbf{A}_{ext})^2}{m_\alpha^2 c^2}. \quad (2.21)$$

Seul le potentiel vecteur lié aux champs magnétiques appliqués au plasma est présent dans l'expression de  $\gamma_\alpha$ .

Le second terme décrit l'interaction de chaque particule avec un champ électrique extérieur, dérivé du potentiel  $\Phi_{ext}$ , calculé en  $\mathbf{r}_\alpha$ .

Les interactions entre particules (interactions magnétiques de premier ordre et interaction électrostatique) sont prises en compte dans le dernier terme, noté  $\varphi_{\alpha, \beta}$ , d'expression

$$\varphi_{\alpha, \beta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_\alpha q_\beta}{r_{\alpha\beta}} - \frac{1}{8\pi\epsilon_0 c^2} \frac{q_\alpha q_\beta}{m_\alpha m_\beta} \frac{(\boldsymbol{\pi}_\alpha \cdot r_{\alpha\beta}^2 \boldsymbol{\pi}_\beta)}{r_{\alpha\beta}^3} + \frac{(\boldsymbol{\pi}_\alpha \cdot \mathbf{r}_{\alpha\beta})(\mathbf{r}_{\alpha\beta} \cdot \boldsymbol{\pi}_\beta)}{r_{\alpha\beta}^3}, \quad (2.22)$$

où

$$\boldsymbol{\pi}_\alpha = \mathbf{P}_\alpha - q_\alpha \mathbf{A}_{ext}(\mathbf{r}_\alpha) \quad (2.23)$$

est différente de la quantité de mouvement  $\mathbf{p}_\alpha$  en raison des interactions magnétiques. Cette grandeur intervient dans l'expression approchée (2.21) du facteur de Lorentz. Le premier terme de l'équation (2.22) correspond au potentiel électrostatique d'interaction entre deux particules  $\alpha$  et  $\beta$  séparées de la distance  $r_{\alpha\beta}$ . Le second terme décrit les interactions de nature magnétique dans une limite faiblement relativiste.

### 2.1.2.2 Limite non-relativiste

On obtient la limite non-relativiste du Hamiltonien par le biais d'un développement limité portant sur le facteur de Lorentz :

$$\mathcal{H} = \sum_{\alpha=1}^N \left[ \frac{(\mathbf{P}_\alpha - q_\alpha \mathbf{A}_{ext}(\mathbf{r}_\alpha, t))^2}{2m_\alpha} + q_\alpha \Phi_{ext} \right] + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha>\beta} \frac{q_\alpha q_\beta}{r_{\alpha\beta}} \quad (2.24)$$

pour le système complet. Toute contribution liée aux interactions magnétiques disparaît complètement du terme d'interaction  $\varphi_{\alpha\beta}$ . Dans cette limite, le potentiel vecteur provient du champ magnétique externe appliqué au plasma. Le potentiel électrique retient quant à lui les deux contributions : interactions électrostatiques de forme coulombienne et champ d'origine extérieure.

### 2.1.2.3 Faisabilité

Ce Hamiltonien total est celui qui doit être inséré dans les équations de Hamilton (2.15). Comme il y a 6 équations canoniques par particule, il nous faudra résoudre un système de  $6N$  équations. Si le traitement des problèmes à 2 corps (voire à 3 sous certaines limites) est analytiquement réalisable, il est nécessaire de recourir à des méthodes numériques pour des systèmes plus grands. Si on souhaite décrire des systèmes réalistes mettant en jeu un nombre de particules voisin du nombre d'Avogadro  $N \sim \mathcal{N}_A \sim 6 \times 10^{23}$  ou d'une fraction macroscopique de ce nombre, la mémoire requise pour stocker les trois composantes de vitesse et de position de chaque particule est considérable, et ce malgré les progrès effectués au cours des dernières décennies en matière de super calculateurs. En effet, un volume de  $1 \text{ mm}^3$  d'air dans les conditions normales de pression et de température contient environ  $10^{16}$  particules. Il faut donc environ  $10^{17}$  nombres (3 coordonnées de position, 3 de vitesse par particule) pour décrire complètement l'état mécanique microscopique de ce système à un instant donné. Soit, comme souligné dans [2], de quoi remplir près de 50 milliards de kilomètres de papier. À cette lourdeur intrinsèquement liée à la taille du système s'ajoute le problème des potentiels d'interaction, chaque particule interagissant formellement avec toutes les autres : le calcul des potentiels est difficile et les  $6N$  équations sont couplées. Il est donc nécessaire de trouver une alternative qui soit réalisable sur le plan pratique. Ceci est un problème récurrent en physique des plasmas.

## 2.1.3 Approche de Klimontovich

Il est possible de formuler d'une autre manière le problème traité dans la section précédente. Plutôt que de considérer chaque particule individuellement, on peut s'intéresser à l'évolution d'une fonction décrivant l'ensemble des particules (*i.e.* l'état exact du système de  $N$  particules). Cette fonction est la densité particulaire, que l'on exprime dans l'espace  $\{\mathbf{r}, \mathbf{p}\}$  de dimension 6, les vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{p}$  ayant trois composantes.

Pour  $N = 1$ , cette densité particulaire s'écrit simplement :

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1(t)) \quad (2.25)$$

où  $\mathbf{r}_1(t)$  et  $\mathbf{p}_1(t)$  sont la position et la quantité de mouvement de la particule à l'instant  $t$ . La particule, supposée ponctuelle, est donc représentée par un pic de Dirac.

On généralise facilement cette expression à un nombre quelconque de particules  $N$ , où la densité particulaire devient un peigne de Dirac dont chaque "pic" représente une particule :

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_{\alpha=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_\alpha(t)). \quad (2.26)$$

Un plasma est constitué d'au moins deux types de particules, des ions et des électrons. Il arrive aussi que l'on décide de séparer les électrons en plusieurs sous-espèces, lorsque leur comportement n'est pas

statistiquement homogène. Par exemple lorsque des électrons venant de deux systèmes originellement différents (nuages de matière interstellaire, faisceaux de particules chargées) viennent à se rencontrer, ou encore lorsqu'une fraction non-négligeable de la population électronique se déplace en moyenne à une vitesse différente de celle de l'ensemble. L'équation de Klimontovich est généralisable à un système de plusieurs espèces, ce qui permet de traiter ce type de problèmes. Si on suppose que  $N_{esp}$  espèces de  $N_0$  particules coexistent, chaque espèce étant affectée d'un indice  $s$  qui lui est propre pour la distinguer, la densité totale s'écrit

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_{s=1}^{N_{esp}} \mathcal{N}_s, \quad (2.27)$$

où  $\mathcal{N}_s$  est la densité de l'espèce  $s$ , donnée par

$$\mathcal{N}_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_{\alpha=1}^{N_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{s,\alpha}(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{s,\alpha}(t)). \quad (2.28)$$

Déterminer l'évolution du plasma revient à savoir comment cette densité particulière va évoluer, à la fois dans le temps mais aussi dans l'espace des phases (de quelle manière les particules sont elles-réparties?). L'évolution temporelle de la densité  $\mathcal{N}_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  s'obtient en prenant sa dérivée partielle par rapport au temps,

$$\frac{\partial \mathcal{N}_s}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{N_0} \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{s,\alpha}(t))}{\partial t} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{s,\alpha}(t)) + \sum_{\alpha=1}^{N_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{s,\alpha}(t)) \frac{\partial \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{s,\alpha}(t))}{\partial t}. \quad (2.29)$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{s,\alpha}(t))}{\partial t} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{s,\alpha}(t)) &= \left[ \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{s,\alpha}(t))}{\partial \mathbf{r}} \cdot \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}}_{\equiv 0} + \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{s,\alpha}(t))}{\partial \mathbf{r}_{s,\alpha}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{s,\alpha}(t)}{\partial t} \right] \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{s,\alpha}(t)) \\ &= - \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{s,\alpha}(t))}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}_{s,\alpha}(t)}{dt} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{s,\alpha}(t)) \\ &= - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{s,\alpha}(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{s,\alpha}(t)) \right] \cdot \frac{d\mathbf{r}_{s,\alpha}(t)}{dt}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

où on a utilisé la relation  $\frac{\partial f(a-b)}{\partial a} = -\frac{\partial f(a-b)}{\partial b}$  et le fait que  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{p}$  et  $t$  sont par définition des variables indépendantes.

En procédant de la même manière avec le second terme de (2.29), on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{N}_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[ \sum_{\alpha=1}^{N_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{s,\alpha}(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{s,\alpha}(t)) \right] \cdot \frac{d\mathbf{r}_{s,\alpha}(t)}{dt} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left[ \sum_{\alpha=1}^{N_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{s,\alpha}(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{s,\alpha}(t)) \right] \cdot \frac{d\mathbf{p}_{s,\alpha}(t)}{dt} \end{aligned}$$

Or, nous savons que le mouvement d'une particule chargée plongée dans un champ électromagnétique ( $\mathbf{E}^m, \mathbf{B}^m$ ), où l'exposant "m" souligne le fait que les champs  $\mathbf{E}^m$  et  $\mathbf{B}^m$  sont les champs microscopiques exacts<sup>1</sup>, obéit aux équations

$$\frac{d\mathbf{r}_{s,\alpha}(t)}{dt} = \frac{\mathbf{p}_{s,\alpha}}{\gamma_{s,\alpha} m_s} = \mathbf{v}_{s,\alpha} \quad (2.31)$$

et

$$\frac{d\mathbf{p}_{s,\alpha}(t)}{dt} = q_s \left( \mathbf{E}^m(\mathbf{r}_{s,\alpha}(t), t) + \frac{\mathbf{p}_{s,\alpha}}{m_s \gamma_{s,\alpha}} \times \mathbf{B}^m(\mathbf{r}_{s,\alpha}(t), t) \right). \quad (2.32)$$

Comme  $a\delta(a-b) = b\delta(a-b)$  au sens des distributions, on peut remplacer tous les  $\mathbf{r}_{s,\alpha}$  et les  $\mathbf{p}_{s,\alpha}$  par  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{p}$  respectivement, coordonnées d'un point quelconque de l'espace des phases (c'est à dire non attaché à une particule).

1. Ils tiennent compte des champs externes et de ceux générés par les particules.

On arrive ainsi à l'équation de Klimontovich,

$$\frac{\partial \mathcal{N}_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathcal{N}_s}{\partial \mathbf{r}} + q_s (\mathbf{E}^m(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}^m(\mathbf{r}, t)) \cdot \frac{\partial \mathcal{N}_s}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (2.33)$$

décrivant l'évolution exacte d'une population de  $N_0$  particules dans un espace à six dimensions. Cette équation peut être écrite sous forme Lagrangienne, le membre de gauche prenant alors la forme d'une dérivée totale

$$\frac{d\mathcal{N}_s}{dt} = 0, \quad (2.34)$$

qui traduit la conservation et le transport de la densité particulaire à travers le mouvement d'une particule dans l'espace des phases, les champs d'advection étant la vitesse  $\mathbf{v}$  et la force de Lorentz  $q_s (\mathbf{E}^m(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}^m(\mathbf{r}, t))$ .

Les champs  $\mathbf{E}^m$  et  $\mathbf{B}^m$  sont obtenus par la résolution des équations de Maxwell :

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^m = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{s=1}^{N_{esp}} q_s \int d^3 \mathbf{p} \mathcal{N}_s, \quad (2.35)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^m = 0, \quad (2.36)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^m + \frac{\partial \mathbf{B}^m}{\partial t} = 0, \quad (2.37)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}^m = \mu_0 \sum_{s=1}^{N_{esp}} q_s \int d^3 \mathbf{p} \frac{\mathbf{p}}{m\gamma} \mathcal{N}_s + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}^m}{\partial t}. \quad (2.38)$$

Il est enfin important de préciser que l'équation de Klimontovich est exacte<sup>2</sup>. Il s'agit d'une réécriture du problème Hamiltonien considéré en section 2.1.2, en proie aux mêmes problèmes de résolution (quantité de mémoire requise énorme, modéliser l'interaction de chaque particule avec toutes les autres ...).

---

<sup>2</sup>. Contrairement aux descriptions que nous allons introduire dans la section 2.2, la description de Klimontovich n'est pas de nature statistique.

## 2.2 Description statistique

Connaître l'état exact du plasma à chaque instant est donc un rêve inaccessible pour un système de taille macroscopique. Mais il ne s'agit pas non plus d'un impératif. En effet, les mesures macroscopiques ne sont que très peu sensibles au comportement individuel de chaque particule, à plus forte raison dans un système comme un plasma cinétique, contraint par des interactions électromagnétiques collectives. Ce constat est l'un des principaux fondements de l'approche statistique de la physique, développée à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle. Le fait de travailler avec des grands nombres suggère en effet l'utilisation de méthodes probabilistes. Une description fondée sur une approche statistique tendra vers une description exacte : les fluctuations statistiques des grandeurs mesurables seront de l'ordre de  $\sqrt{N}/N$  ( $N$  étant le nombre de particules), autrement dit indétectables par la mesure pour des systèmes de grande taille.

Nous avons vu que l'on pouvait caractériser l'état mécanique d'une particule supposée ponctuelle  $\alpha$  à un instant  $t_0$  par la donnée de sa position  $\mathbf{r}$  et de son moment conjugué  $\mathbf{P}$  à cet instant. On désignera cet état par la notation  $\{\mathbf{r}_\alpha(t_0), \mathbf{P}_\alpha(t_0)\}$ ,  $\alpha = 1$ . Chaque point de l'espace des phases  $\{\mathbf{r}, \mathbf{P}\}$  représente ainsi un état possible pour cette particule. L'évolution de l'état d'une particule se traduit par le tracé d'une trajectoire continue dans cet espace, et cette trajectoire est paramétrée par le temps.

L'état microscopique (ou micro-état) d'un système de  $N$  particules à l'instant  $t_0$  s'écrit, de manière analogue :

$$\{\mathbf{r}_1(t_0), \mathbf{r}_2(t_0), \dots, \mathbf{r}_N(t_0), \mathbf{P}_1(t_0), \mathbf{P}_2(t_0), \dots, \mathbf{P}_N(t_0)\}, \quad (2.39)$$

Le mouvement complet du système de  $N$  particules est donné par l'évolution temporelle de ce micro-état : elle correspond à un ensemble de trajectoires dans l'espace des phases  $\{\mathbf{r}, \mathbf{P}\}$  de dimension 6, ou à une seule trajectoire dans l'espace  $\{\mathbf{r}_{3N}, \mathbf{P}_{3N}\}$  de dimension  $6N$ . Dans ce dernier cas, chaque point représente un micro-état possible pour le système de  $N$  particules. On ne cherche pas à déterminer avec certitude quel micro-état sera celui du système à l'instant considéré (ceci est possible via l'équation de Klimontovich) mais plutôt quelle est la probabilité pour qu'un micro-état donné soit réalisé.

En effet, toute grandeur physique  $G(\mathbf{r}, \mathbf{P}, t)$ , une fois mesurée, correspondra à la valeur moyenne

$$\bar{G} = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{P}, t) d\mathcal{P} \quad (2.40)$$

où  $d\mathcal{P}$  est la probabilité d'observer un micro-état en particulier, c'est à dire de trouver un état pour lequel la particule  $\alpha$  a une position  $\mathbf{r}_\alpha$  et un moment conjugué  $\mathbf{P}_\alpha$  connus respectivement à  $d^3\mathbf{r}_\alpha$  et  $d^3\mathbf{P}_\alpha$  près, et ce pour tout  $1 \leq \alpha \leq N$ . Il ne s'agit là que d'une moyenne sur tous les micro-états possibles, pondérée par leur probabilité de réalisation.

Cette probabilité est donc celle de trouver le système dans le volume infinitésimal  $d\tau$  de l'espace des phases de dimension  $6N$ . Elle s'écrit donc

$$d\mathcal{P} = \mathcal{D}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_N, t) d\tau, \quad (2.41)$$

où  $\mathcal{D}$  est la densité de probabilité à l'instant  $t$ , tenant lieu de coefficient de proportionnalité, et où  $d\tau = d^{3N}\mathbf{r}d^{3N}\mathbf{P}$ , avec :

$$d^{3N}\mathbf{r} = d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \dots d^3\mathbf{r}_N \quad \text{et} \quad d^{3N}\mathbf{P} = d^3\mathbf{P}_1 d^3\mathbf{P}_2 \dots d^3\mathbf{P}_N. \quad (2.42)$$

La probabilité de trouver toutes les particules n'importe où dans l'espace des phases lorsqu'on considère la totalité de cet espace est égale à 1, d'où la condition de normalisation

$$\int \mathcal{D}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N, t) d\tau = 1. \quad (2.43)$$

On peut aussi tenir compte de l'indiscernabilité des particules constitutives du plasma. En termes plus simples, si on considère deux boîtes A et B ainsi que deux balles identiques virtuellement numérotées 1 et 2, il est impossible de distinguer la situation {1 dans A et 2 dans B} de la situation {1 dans B et 2 dans A} puisque nul n'est réellement capable de distinguer 1 et 2. Comme il y a  $N!$  façons de ranger  $N$  objets dans  $N$  boîtes en mettant un seul objet par boîte (les électrons sont des fermions), la probabilité d'observer un micro-état donné, quelque soit l'ordre de rangement des particules, est en réalité  $N!$  fois plus élevée.

## 2.2.1 Équation de Liouville

### 2.2.1.1 Théorème de Liouville

Considérons un grand nombre de plasmas de  $N$  particules dont les états, voisins dans l'espace des phases  $\{\mathbf{r}_{3N}, \mathbf{P}_{3N}\}$ , constituent un élément de volume  $d\tau$ . Chacun de ces systèmes va évoluer au cours du temps, impliquant un déplacement de leur point représentatif, et donc un déplacement avec déformation du volume  $d\tau$ . À  $t + dt$  l'ensemble de ces points formera un nouvel élément de volume noté  $d\tau'$ , suite à cette déformation.

On peut définir la "vitesse" avec laquelle le point représentatif de l'état du plasma parcourt sa trajectoire d'évolution dans l'espace des phases par le vecteur  $(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{P}})$ . Il s'agit du flux Hamiltonien, dont la divergence est nulle en vertu des équations d'Hamilton. Ceci implique la conservation de tout volume de l'espace des phases  $\{\mathbf{r}_{3N}, \mathbf{P}_{3N}\}$  au cours du temps, soit

$$d\tau = d\tau', \quad (2.44)$$

ce qui constitue le théorème de Liouville.

### 2.2.1.2 Équation de Liouville

On sait avec certitude que tous les systèmes ont leur point représentatif dans  $d\tau$  à l'instant  $t$ , et dans  $d\tau'$  en  $t + dt$ . Le nombre de systèmes reste le même. Par conséquent, on a :

$$\mathcal{D}(\mathbf{r}_{3N}, \mathbf{P}_{3N}, t) d\tau = \mathcal{D}(\mathbf{r}'_{3N}, \mathbf{P}'_{3N}, t + dt) d\tau' \quad (2.45)$$

avec

$$\mathcal{D}(\mathbf{r}'_{3N}, \mathbf{P}'_{3N}, t + dt) = \mathcal{D}(\mathbf{r}_{3N} + \dot{\mathbf{r}}_{3N} dt, \mathbf{P}_{3N} + \dot{\mathbf{P}}_{3N} dt, t + dt). \quad (2.46)$$

En vertu du théorème de Liouville, il vient que :

$$\mathcal{D}(\mathbf{r}_{3N}, \mathbf{P}_{3N}, t) = \mathcal{D}(\mathbf{r}_{3N} + \dot{\mathbf{r}}_{3N} dt, \mathbf{P}_{3N} + \dot{\mathbf{P}}_{3N} dt, t + dt). \quad (2.47)$$

On voit que la densité de probabilité est conservée au cours du temps. La valeur de  $\mathcal{D}$  est advectée au cours du temps le long de la trajectoire suivie par le point représentatif du système lorsqu'il évolue. On peut donc dire que le point représentatif du système "embarque" avec lui sa probabilité de réalisation au cours de son mouvement dans l'espace des phases  $\{\mathbf{r}_{3N}, \mathbf{P}_{3N}\}$ .

Cela ne signifie pas que la densité de probabilité sera, en un point donné de  $\{\mathbf{r}_{3N}, \mathbf{P}_{3N}\}$ , constante dans le temps. Au cours du temps, la densité varie localement, ses valeurs se déplaçant le long de trajectoires correspondant à ces évolutions possibles pour le système. Supposons deux systèmes dont les points représentatifs A et B évoluent le long de la même trajectoire dans l'espace  $\{\mathbf{r}_{3N}, \mathbf{P}_{3N}\}$ , mais pas aux mêmes instants. A est en avance sur B. À l'instant  $t_1$ , le point A est en  $\{\mathbf{r}_A, \mathbf{P}_A\}$ , micro-état de probabilité  $P_A$  alors que B est en  $\{\mathbf{r}_B, \mathbf{P}_B\}$ , micro-état de probabilité  $P_B$ . Choisissons un instant  $t_2$  pour lequel le point B atteint l'état qu'occupait A en  $t_1$ . La probabilité de réalisation de cet état sera toujours  $P_B$  et non pas  $P_A$ , car le point B a "emporté" avec lui la probabilité de réalisation de l'état  $\{\mathbf{r}_B, \mathbf{P}_B\}$ .

En développant l'équation 2.47, on obtient l'équation de Liouville, décrivant l'évolution de la densité de probabilité au cours du temps :

$$\frac{d\mathcal{D}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N \left[ \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \mathbf{r}_{\alpha}} + \dot{\mathbf{P}}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \mathbf{P}_{\alpha}} \right] \quad (2.48)$$

$$= \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N \left[ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{P}_{\alpha}} \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \mathbf{r}_{\alpha}} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}_{\alpha}} \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \mathbf{P}_{\alpha}} \right] \quad (2.49)$$

$$= \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \{\mathcal{D}, \mathcal{H}\} \quad (2.50)$$

$$= 0, \quad (2.51)$$

où on a utilisé les équations canoniques (2.15) pour faire apparaître le Hamiltonien.

Résoudre l'équation de Liouville conduit à la description statistique la plus complète que l'on puisse établir pour un plasma (collisionnel ou non). Compte tenu de la dimension de l'espace des phases à considérer ( $6N$ ), elle est numériquement coûteuse à mettre en oeuvre pour un système de taille macroscopique.

### 2.2.1.3 Impulsion ou quantité de mouvement ?

L'impulsion  $\mathbf{P}$  n'est pas toujours une grandeur pratique à utiliser d'un point de vue anthropomorphe, notamment en présence d'effets magnétiques, puisqu'elle ne coïncide plus avec la quantité de mouvement et que les interactions magnétiques entre plusieurs particules ont une forme analytique complexe. Son sens physique n'est donc pas forcément immédiat. Dès lors qu'une approche Eulérienne est adoptée, reposant sur la description de champs (par exemple  $\mathcal{D}$ ) évoluant dans un espace, de nombreux auteurs choisissent d'exprimer les équations décrivant le plasma dans l'espace constitué des variables  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{p}$ , la quantité de mouvement. Nous avons nous-mêmes exprimé l'équation de Klimontovich dans l'espace  $\{\mathbf{r}, \mathbf{p}\}$  et non dans le "véritable" espace des phases  $\{\mathbf{r}, \mathbf{P}\}$ . Les variables  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{p}$  ne sont pas canoniquement conjuguées, contrairement à  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{P}$  : elles ne sont donc pas, a priori, indépendantes l'une de l'autre du point de vue du formalisme Hamiltonien. Le théorème de Liouville existe-t-il toujours, et si oui, conserve-t-il sa forme, si on choisit de travailler dans un espace des phases construit avec  $\mathbf{p}$  plutôt qu'avec  $\mathbf{P}$  ?

Rappelons le lien entre impulsion et quantité de mouvement pour une particule chargée notée  $\alpha$  :

$$\mathbf{P}_\alpha = \mathbf{p}_\alpha + q\mathbf{A}(\mathbf{r}_\alpha, t), \quad (2.52)$$

où le potentiel vecteur  $\mathbf{A}(\mathbf{r}_\alpha, t)$ , agissant sur la particule située en  $\mathbf{r}_\alpha$ , est théoriquement fonction de la position de toutes les particules du fait de leurs interactions. On a donc le droit d'écrire que toute fonction  $\mathcal{D}$  évoluant dans l'espace  $\{\mathbf{r}, \mathbf{P}\}$  est fonction de  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ .

En utilisant (2.52), on montre immédiatement que

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial P_k} \cdot \frac{\partial P_k}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \mathbf{P}}, \quad (2.53)$$

ce qui signifie que ces dérivées sont interchangeables dans l'équation de Liouville, et de manière équivalente pour toute équation d'évolution portant sur une grandeur dépendant du même type de variables que  $\mathcal{D}$ .

Considérons un élément de volume de l'espace des phases à une particule  $d\mathbf{r}d\mathbf{P}$  et cherchons à l'exprimer en fonction de  $d\mathbf{r}d\mathbf{p}$ , élément de volume de l'espace  $\{\mathbf{r}, \mathbf{p}\}$  en utilisant l'équation (2.52). Matriciellement, ce changement de variable s'écrit

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ dP_x \\ dP_y \\ dP_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q \frac{\partial A_x}{\partial x} & q \frac{\partial A_x}{\partial y} & q \frac{\partial A_x}{\partial z} & 1 & 0 & 0 \\ q \frac{\partial A_y}{\partial x} & q \frac{\partial A_y}{\partial y} & q \frac{\partial A_y}{\partial z} & 0 & 1 & 0 \\ q \frac{\partial A_z}{\partial x} & q \frac{\partial A_z}{\partial y} & q \frac{\partial A_z}{\partial z} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ dp_x \\ dp_y \\ dp_z \end{pmatrix}, \quad (2.54)$$

matrice de structure en blocs : les deux blocs diagonaux correspondant à une matrice identité de dimension  $3 \times 3$ . Le Jacobien de la transformation correspond au déterminant de la matrice  $6 \times 6$  et vaut 1, de sorte que

$$d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{p} = d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{P}. \quad (2.55)$$

Ce résultat se généralise facilement dans l'espace des phases de dimension  $6N$  puisque la matrice conservera la même structure, et ce en dépit du fait que le potentiel vecteur dépendra de tous les  $\mathbf{r}_i$ .

Les propriétés de la densité de probabilité  $\mathcal{D}$ , et en particulier le théorème de Liouville, sont donc vérifiées dans l'espace  $\{\mathbf{r}, \mathbf{p}\}$ . Il est par conséquent possible de travailler directement avec  $\mathbf{p}$ , grandeur certes moins fondamentale que le moment canonique, mais plus proche de notre vision "classique" du mouvement, reposant sur les notions de position et de vitesse. Quelque soit l'espace considéré cependant, les équations canoniques feront toujours intervenir la dérivée de  $\mathcal{H}$  par rapport à  $\mathbf{P}$ .

## 2.2.2 De l'équation de Liouville vers la théorie cinétique

Au lieu de résoudre l'équation de Liouville, il est possible de construire un système d'équations strictement équivalent à celle-ci. Pour cela, on doit définir des fonctions de distribution à 1, 2 ...  $N$  particules, en intégrant sur les degrés de liberté que l'on souhaite éliminer.

### 2.2.2.1 Fonction de distribution simple

Sélectionnons une particule du plasma et donnons lui le label “1”. La probabilité d’observer cette particule dans le volume  $d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{p}_1$ , peu importe l’état des autres, est égale à :

$$d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{p}_1 \int \mathcal{D} d^3\mathbf{r}_2 \dots d^3\mathbf{r}_N d^3\mathbf{p}_2 \dots d^3\mathbf{p}_N. \quad (2.56)$$

En réalité, les particules sont indiscernables. Par conséquent, donner un label à l’une d’entre elles n’a pas de sens. La probabilité d’observer une particule en  $d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{p}_1$ , quelque soit l’état des autres, est donc  $N$  fois plus grande. On définit une nouvelle densité de probabilité, notée  $f_1$  et appelée fonction de distribution (“simple”, ou “à 1 particule”) :

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = N \int \mathcal{D} d^3\mathbf{r}_2 \dots d^3\mathbf{r}_N d^3\mathbf{p}_2 \dots d^3\mathbf{p}_N, \quad (2.57)$$

Cette fonction de distribution évolue dans un espace non plus de dimension  $6N$  mais de dimension 6, que l’on notera  $\{\mathbf{r}, \mathbf{p}\}$ . En utilisant l’équation 2.43, on en déduit une normalisation cohérente pour  $f_1$  :

$$\int f_1 d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{p} = N. \quad (2.58)$$

Le nombre probable de particules contenues dans l’élément de volume  $d^3\mathbf{r}$  est quant à lui :

$$d^3\mathbf{r} \int f_1 d^3\mathbf{p} = n_1(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r}, \quad (2.59)$$

où  $n_1$  est définie comme étant la densité volumique (ou densité simple).

### 2.2.2.2 Fonctions de distributions à plusieurs particules

La probabilité de trouver une particule quelconque dans un élément  $d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{p}_1$  et une autre particule dans  $d^3\mathbf{r}_2 d^3\mathbf{p}_2$  est égale à

$$d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{r}_2 d^3\mathbf{p}_2 N(N-1) \int \mathcal{D} d^3\mathbf{r}_3 \dots d^3\mathbf{r}_N d^3\mathbf{p}_3 \dots d^3\mathbf{p}_N. \quad (2.60)$$

On définit donc la fonction de distribution double  $f_{12}$  comme

$$f_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, t) = N(N-1) \int \mathcal{D} d^3\mathbf{r}_3 \dots d^3\mathbf{r}_N d^3\mathbf{p}_3 \dots d^3\mathbf{p}_N, \quad (2.61)$$

En généralisant ce processus, on peut définir une fonction de distribution à  $n$  particules ( $n < N$ ) telle que :

$$f_{12\dots n} = N(N-n+1) \int \mathcal{D} d^3\mathbf{r}_{n+1} \dots d^3\mathbf{r}_N d^3\mathbf{p}_{n+1} \dots d^3\mathbf{p}_N, \quad (2.62)$$

### 2.2.2.3 Système d’équations BBGKY

Multiplier l’équation de Liouville par  $N$ , puis l’intégrer sur  $6(N-1)$  variables conduit à l’équation d’évolution de  $f_1$  :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}_i} + \mathbf{X}_i \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}_i} + \underbrace{\int \mathbf{X}_{12} \cdot \frac{\partial f_{12}}{\partial \mathbf{p}_i} d^3\mathbf{r}_2 d^3\mathbf{p}_2}_{\mathcal{B}(f_{12})} = 0 \quad (2.63)$$

Le second terme de cette équation décrit la réaction du plasma face à une inhomogénéité spatiale de  $f_1$ , et donc notamment les phénomènes de diffusion, alors que le troisième terme, proportionnel au gradient  $\partial f_1 / \partial \mathbf{p}$ , décrit l’effet des forces extérieures  $\mathbf{X}_1$  appliquées à la particule. Le dernier terme de cette équation, noté  $\mathcal{B}(f_{12})$ , décrit l’influence des interactions entre particules et fait intervenir la fonction de distribution double, dont il faut alors calculer l’équation d’évolution. Cette équation, calculée de la même manière mais avec une intégration de moins, dépend de  $f_{123}$ .

On obtient donc un système indéterminé d’équations couplées de proche en proche, dit de BBGKY (pour Bogoliougov, Born, Green, Kirkwood et Yvon) et qu’il faut couper à un ordre plus ou moins élevé si on veut pouvoir le résoudre. Cette troncature implique le recours à une hypothèse physique simplificatrice de nature phénoménologique.

Nous sommes donc confrontés à un problème de fermeture, pour lequel il existe plusieurs méthodes de résolution, conduisant chacune à une équation d'évolution de la fonction de distribution considérée. Généralement, ces équations d'évolution ne concernent que la distribution simple  $f_1$ , que l'on notera  $f$  dans toute la suite de ce travail. Dans ce cas, l'hypothèse simplificatrice concerne la manière dont sont traitées les interactions entre particules : elle est phénoménologique. La façon la plus brutale de fermer ce système est de poser  $\mathcal{B}(f_{12}) = 0$ , négligeant ainsi toute forme d'interaction entre particules. Cette approche conduit à l'équation de Boltzmann sans collisions<sup>3</sup>, également appelée équation de Liouville à une particule. D'autres équations d'évolution plus complexes, traitant chacune à sa manière les interactions entre particules, existent. On citera notamment les équations de Boltzmann, de Fokker-Planck, de Balescu-Lénard et de Vlasov (voir [3] ainsi que les références contenues à l'intérieur pour plus de détails), considérée plus en détail au paragraphe suivant.

### 2.2.3 Le modèle cinétique Vlasov-Maxwell

Une équation d'évolution fréquemment utilisée en physique des plasmas cinétiques est l'équation de Vlasov. Dans un plasma cinétique, les interactions dominantes sont des interactions collectives de longue portée. Lorsque les particules interagissant entre elles sont suffisamment éloignées, il devient possible de négliger les corrélations entre ces particules. La densité  $\mathcal{D}$  s'écrit alors comme un produit de densités identiques (particules indiscernables) à une particule :

$$\mathcal{D} = D_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) D_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, t) \dots D_0(\mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N, t). \quad (2.64)$$

Dans ce cas, on peut montrer que la fonction de distribution double vérifie

$$f_{12} = f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) f(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, t) + g_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) \simeq f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) f(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, t), \quad (2.65)$$

la dernière égalité étant vraie pour un très grand nombre de particules, les corrélations se neutralisant en moyenne.

L'hypothèse de fermeture de Vlasov consiste à imposer

$$f_{12} = f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) f(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, t) \quad (2.66)$$

dans 2.63, ce qui revient à négliger toute forme d'interactions binaires pour ne considérer que les interactions collectives de longue portée (à l'échelle d'une sphère de Debye). On obtient alors l'équation de Vlasov,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + q \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (2.67)$$

Les champs électrique  $\mathbf{E}$  et magnétique  $\mathbf{B}$  intervenant dans cette équation ne sont pas que des champs d'origine extérieure mais contiennent aussi les champs moyens (macroscopiques) générés non pas par les particules elles-mêmes, mais par les deux premiers moments de la fonction de distribution, que sont les densités de charge  $\rho$  et de courant  $\mathbf{J}$ , définies comme

$$\rho = q \int f d^3 \mathbf{p} \quad (2.68)$$

et

$$\mathbf{J} = q \int f \frac{\mathbf{p}}{m\gamma(\mathbf{p})} d^3 \mathbf{p}. \quad (2.69)$$

Les champs dépendent donc formellement de la fonction de distribution : ainsi, malgré les apparences, l'équation de Vlasov n'est pas une équation linéaire mais une équation intégral-différentielle. L'équation de Vlasov est par conséquent fortement couplée aux équations de Maxwell :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.70)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \quad (2.71)$$

3. à ne pas confondre avec l'équation de Vlasov

### 2.2.3.1 Le système Vlasov-Maxwell non-relativiste

Dans sa formulation non-relativiste, l'équation de Vlasov s'écrit de manière similaire :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (2.72)$$

avec la quantité de mouvement  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ . Le facteur de Lorentz est pris égal à 1. Notons qu'il est possible de remplacer la dérivée par rapport à  $\mathbf{p}$  par une dérivation relative à  $\mathbf{v}$ .

Cette équation fait intervenir un champ magnétique auto-consistant : or, la limite non-relativiste à  $N$  particules fait disparaître du Hamiltonien tout potentiel vecteur autre que celui lié à un éventuel champ magnétique appliqué depuis l'extérieur. La clé de cet apparent paradoxe réside dans le fait que le champ magnétique auto-consistant est un champ moyen généré par la densité de courant. Sa génération est donc vue comme le produit de mouvements "globaux" du plasma.

### 2.2.3.2 L'équation de Vlasov en variables canoniques

Compte tenu de ce que nous avons dit en section 2.2.1.3, l'équation de Vlasov peut s'exprimer dans l'espace  $\{\mathbf{r}, \mathbf{P}\}$  en fonction du Hamiltonien et des variables canoniques,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{P}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}} = 0, \quad (2.73)$$

où  $\mathcal{H}$  est le Hamiltonien à une particule, relativiste ou non, donné en section 2.1.1. Les champs correspondent aux champs moyens auto-consistants.

## 2.2.4 L'équation de Vlasov à partir de l'équation de Klimontovich

Pour conclure cette partie sur la description cinétique d'un plasma, nous allons montrer que l'équation de Klimontovich (démontrée en Section 2.1.3),

$$\frac{\partial \mathcal{N}_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathcal{N}_s}{\partial \mathbf{r}} + q_s(\mathbf{E}^m(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}^m(\mathbf{r}, t)) \cdot \frac{\partial \mathcal{N}_s}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (2.74)$$

où  $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$  et décrivant l'évolution de la densité particulaire d'un système de  $N$  particules du type  $s$ ,

$$\mathcal{N}_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_{\alpha=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_\alpha(t)), \quad (2.75)$$

permet elle aussi de retrouver l'équation de Vlasov.

### 2.2.4.1 La fonction de distribution comme une moyenne d'ensemble

De par sa nature exacte, la solution de l'équation (2.74) correspond à la réalisation effective d'un micro-état par le plasma. Ce micro-état va évoluer au cours du temps : on suivra point par point une trajectoire décrivant cette évolution dans l'espace des phases à  $6N$  dimensions. Cette trajectoire correspondra à la succession de micro-états par laquelle le plasma va passer durant son évolution. La notion de probabilité n'entre pas en jeu dans ce raisonnement puisqu'on sait avec certitude que le système aura suivi cette trajectoire.

Considérons un nombre très grand de plasmas "préparés" de manière identique et qu'on laisse évoluer au cours du temps. À un instant  $t$  quelconque, chaque plasma réalisera un micro-état

$$\lambda = \{\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \dots, \mathbf{r}_N(t), \mathbf{p}_1(t), \mathbf{p}_2(t), \dots, \mathbf{p}_N(t)\}. \quad (2.76)$$

Cet état lui sera propre : il sera différent de l'état des autres plasmas.

Une moyenne de la densité particulaire  $\mathcal{N}_s$  sur l'ensemble de ces réalisations (et donc de ces états) devrait restituer la valeur qu'aurait la fonction de distribution  $f_s$  à cet instant (aux fluctuations statistiques  $\delta \mathcal{N}_s$  près, les dites fluctuations étant négligeables en considérant une infinité de réalisations, c'est à dire l'ensemble des états possibles).

Symboliquement cette moyenne se traduit mathématiquement par une somme pondérée sur tous les micro-états,

$$\langle \mathcal{N}_s \rangle = \sum_{\lambda} \mathcal{N}_s(\lambda) \mathcal{P}_{\lambda} = \int \mathcal{N}_s d\mathcal{P}, \quad (2.77)$$

où  $d\mathcal{P}$  est la probabilité de réalisation du micro-état  $\Omega$ , telle que définie dans l'équation (2.41). On a donc

$$\langle \mathcal{N}_s \rangle = \sum_{\alpha=1}^N \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_\alpha(t)) \mathcal{D}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N, t) d^{3N} \mathbf{r} d^{3N} \mathbf{p}, \quad (2.78)$$

où l'intégration porte sur les variables  $\mathbf{r}_\alpha$  et  $\mathbf{p}_\alpha$  de l'espace de dimension  $6N$ , et non sur  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{p}$ .

Du fait de l'indiscernabilité des particules, leur numérotation n'a guère de sens et n'est là que pour des raisons pratiques. La densité  $\mathcal{D}$  doit rester invariante par permutation de deux particules. Ainsi, ces  $N$  intégrales (car on somme sur  $\alpha$ ) sont identiques. En détaillant, l'étape d'intégration sur  $\mathbf{r}_\alpha$  et  $\mathbf{p}_\alpha$ ,  $\alpha$  étant fixé pour chaque terme de la somme, conduit à :

$$\langle \mathcal{N}_s \rangle = \sum_{\alpha=1}^N \int \mathcal{D}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \underbrace{\mathbf{r}_j}_{N-1}, \underbrace{\mathbf{p}_j}_{N-1}, t) d^{3N-1} \mathbf{r} d^{3N-1} \mathbf{p}, \quad (2.79)$$

On utilise ensuite l'indiscernabilité, qui implique que l'on additionne  $N$  fois la même chose :

$$\langle \mathcal{N}_s \rangle(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = N \int \mathcal{D} d^{3N-1} \mathbf{r} d^{3N-1} \mathbf{p}, \quad (2.80)$$

faisant disparaître le symbole de somme. On retrouve bien la définition de  $f_s$  introduite par l'équation (2.57). Ceci nous autorise à écrire l'égalité suivante :

$$\mathcal{N}_s = \langle \mathcal{N}_s \rangle + \delta \mathcal{N}_s = f_s + \delta \mathcal{N}_s, \quad (2.81)$$

où  $\langle \delta \mathcal{N}_s \rangle \equiv 0^4$ .

#### 2.2.4.2 Application de la moyenne d'ensemble au système Klimontovich-Maxwell

Calculons donc une moyenne d'ensemble de l'équation de Klimontovich (2.74)

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{N}_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathcal{N}_s}{\partial \mathbf{r}} + q_s (\mathbf{E}^m(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}^m(\mathbf{r}, t)) \cdot \frac{\partial \mathcal{N}_s}{\partial \mathbf{p}} = 0 \right\rangle, \quad (2.82)$$

la moyenne pouvant être appliquée à chacun des trois termes de l'équation.

La définition de la moyenne n'impliquant pas d'intégration sur le temps, le calcul du premier terme est immédiat

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{N}_s}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial f_s}{\partial t}. \quad (2.83)$$

Pour le deuxième terme, on utilise (2.81) et on trouve immédiatement

$$\left\langle \frac{\mathbf{p}}{m\gamma} \cdot \frac{\partial \mathcal{N}_s}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle = \frac{\mathbf{p}}{m\gamma} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}} + \underbrace{\frac{\mathbf{p}}{m\gamma} \cdot \frac{\partial \langle \delta \mathcal{N}_s \rangle}{\partial \mathbf{r}}}_{= 0}, \quad (2.84)$$

puisque l'intégrale de moyenne (2.80) ne porte pas sur  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{r}$ .

Traiter le troisième terme est plus délicat, du fait de la présence des champs exacts, calculés à partir de la position exacte des particules, donc pour un micro-état donné. De la même façon que pour  $\mathcal{N}_s$ , il est possible de décomposer ces champs en une valeur moyenne d'ensemble à laquelle s'ajoutent des fluctuations statistiques, de valeur moyenne nulle :

$$\mathbf{B}^m \equiv \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \delta \mathbf{B}, \quad (2.85)$$

$$\mathbf{E}^m \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \delta \mathbf{E}. \quad (2.86)$$

Les champs moyens  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{E}$  obéissent aux équations de Maxwell, dans lesquelles figurent les densités de charge et de courant calculées à partir de  $f_s$ . On peut illustrer ce point en prenant la moyenne d'ensemble de l'équation de Maxwell-Ampère (2.38) :

$$\left\langle \nabla \times \mathbf{B}^m = \mu_0 \sum_s \int d^3 \mathbf{p} \frac{\mathbf{p}}{m\gamma} \mathcal{N}_s + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}^m}{\partial t} \right\rangle, \quad (2.87)$$

4. La moyenne des fluctuations est nulle, mais pas les fluctuations proprement dites. En effet,  $\delta \mathcal{N}_s$  n'est exactement nulle que si on dispose d'une infinité de réalisations, *i.e.* d'une infinité de plasmas évoluant indépendamment et dont on mesure la densité particulaire. Dans ce cas, la quantité de systèmes suivis est telle que tout micro-état possible est réalisé par un système à chaque instant : tout point de l'espace de dimension  $6N$  décrit un système dont on suit l'évolution.

dans laquelle les fluctuations statistiques des champs disparaissent immédiatement, en accord avec (2.86). Il est possible de permuter l'intégrale sur  $\mathbf{p}$  avec l'intégrale de moyenne dans le terme  $\mu_0 \mathbf{J}$  afin de faire apparaître la fonction de distribution et le courant moyen

$$\mathbf{J} = \sum_s \int d^3\mathbf{p} \frac{\mathbf{p}}{m\gamma} f_s. \quad (2.88)$$

On obtient

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.89)$$

La procédure est exactement la même avec les trois autres équations de Maxwell.

La moyenne d'ensemble du troisième terme conduit donc à

$$\left\langle q_s (\mathbf{E}^m(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}^m(\mathbf{r}, t)) \cdot \frac{\partial \mathcal{N}_s}{\partial \mathbf{p}} = 0 \right\rangle = q_s \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{m\gamma} \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{p}} + q_s \left\langle \left( \delta \mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{m\gamma} \times \delta \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial \delta \mathcal{N}_s}{\partial \mathbf{p}} \right\rangle. \quad (2.90)$$

D'où, finalement :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m\gamma} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}} + q_s \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{m\gamma} \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{p}} = -q_s \underbrace{\left\langle \left( \delta \mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{m\gamma} \times \delta \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial \delta \mathcal{N}_s}{\partial \mathbf{p}} \right\rangle}_{= \left( \frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_c}. \quad (2.91)$$

Négliger le terme de droite, directement lié à l'importance des fluctuations, nous conduit à l'équation de Vlasov.

### 2.2.4.3 Validité de l'équation de Vlasov

Pour discuter de la validité de l'équation de Vlasov, on se basera sur l'équation (2.91). Dans cette équation, le terme de gauche ne fait intervenir que des grandeurs lissées par la moyenne d'ensemble, variant de manière relativement douce dans l'espace des phases. Il décrit donc le comportement "moyen" ou encore "collectif" du plasma, c'est à dire l'évolution des trajectoires possibles pour une particule sous l'effet de champs électromagnétiques moyens, dont l'expression est calculée à partir des moments de  $f$ . Malgré les apparences, l'équation de Vlasov n'est donc pas linéaire.

Le terme de droite, que l'on néglige, contient quant à lui toute l'information fluctuante, un bruit statistique relatif à la multiplicité des possibilités d'évolution de la particule, ces évolutions étant de nature brutale. On comprend bien que ces changements soudains ne peuvent être que le fruit d'interactions entre un faible nombre de particules. A contrario, des variations progressives et continues de la trajectoire ne peuvent être statistiquement que la résultante d'un grand nombre d'interactions, dont le caractère aléatoire est neutralisé par la force du nombre. Utiliser l'équation de Vlasov revient finalement à supposer que les particules ont des trajectoires dont l'évolution est douce, guidée par les seules interactions de la particule avec l'ensemble des autres particules pouvant exercer une influence sur elle.

Il reste à déterminer quelles sont ces particules, et c'est ici que la notion de "paramètre plasma" intervient. Nous avons vu au Chapitre 1 que le champ électrique généré par une particule, qualifiée de particule test, est écranté par les autres au-delà d'une région dont la taille caractéristique est la longueur de Debye

$$\lambda_D \simeq \frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_e e^2}, \quad (2.92)$$

où  $T_e$  est la température électronique,  $n_e$  la densité électronique et  $k_B$  la constante de Boltzmann. La particule test n'est donc affectée que par les champs générés par les particules se trouvant dans une sphère de rayon  $\lambda_D$  autour d'elle. L'importance des fluctuations statistiques de ces champs d'interaction sera donc d'autant plus faible que le nombre de particules interagissant avec la particule test sera grand. Ce nombre, souvent identifié au paramètre plasma (où à l'inverse du facteur de grain  $g$ ), s'écrit

$$N_D = \frac{4}{3} \pi n_e \lambda_D^3 \equiv g^{-1} \propto \frac{T_e^{\frac{3}{2}}}{n_e^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.93)$$

et si  $N_D \gg 1$  ( $g \ll 1$ ), alors le caractère collectif du plasma est dominant. L'équation de Vlasov, dans laquelle on supprime le terme de collisions, peut donc être vue comme une limite de l'équation (2.91) lorsque  $N_D$  tend vers l'infini. On peut alors considérer qu'un plasma peu dense ou très chaud est non-collisionnel tout en conservant une description de qualité de ce plasma. On peut naturellement établir un lien avec le formalisme adopté en section 2.2.3, et notamment avec l'équation (2.65) :

$$\lim_{N_D \rightarrow +\infty} g_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) = 0 \quad (2.94)$$

Cela ne signifie pas pour autant que les collisions ne jouent aucun rôle, car l'équation de Vlasov décrit un plasma idéal, cas limite jamais rencontré en pratique. Il peut alors être nécessaire d'inclure un opérateur de collisions à l'équation, sous une forme plus ou moins simple, pour traiter certains problèmes. Ceci revient à résoudre le problème de la fermeture du système d'équations BBGKY évoqué en section 2.2.2.3.

## 2.3 Descriptions cinétiques réduites

Comme nous venons de le voir, la théorie cinétique consiste à étudier la dynamique d'une ou plusieurs fonctions de distribution  $f_s$ , chacune relative à une espèce de particules et prenant la forme d'un champ scalaire évoluant dans un espace à six dimensions : trois directions en position, trois autres en vitesse. Cette description est donc incontestablement plus abordable que celles de Klimontovich ou de Liouville, mais elle n'en demeure pas moins redoutable pour plusieurs raisons.

Une approche analytique peut être mise en oeuvre en se restreignant – pour la plupart des cas – à la phase d'évolution linéaire des ondes. Il faut alors supposer que l'amplitude de celles-ci demeure faible au cours du temps et que les couplages entre modes soient négligeables. On doit aussi définir une configuration d'équilibre. Toute tentative d'approche analytique se heurtera très vite à la présence d'intégrales résonantes, dont le traitement devient très vite cauchemardesque lorsqu'on multiplie les sources d'instabilité (faisceaux, anisotropies), que l'on complexifie la géométrie d'un problème (champ magnétique d'équilibre, géométrie non-cartésienne) ou que l'on souhaite étudier des effets relativistes. L'extraction de l'information utile, comme le mécanisme d'une instabilité, une cartographie des principaux modes pouvant se développer ou une expression analytique pour son taux de croissance, nécessite au final de faire des approximations supplémentaires. Finalement, l'approche analytique linéaire atteint très vite ses limites, en particulier lorsqu'on parle d'instabilités, puisque ces modes croissent de façon importante au fil du temps. La prise en compte des effets non-linéaires devient indispensable alors que débute la phase de saturation des instabilités. On doit au final recourir aux simulations numériques pour obtenir des résultats.

Ces simulations sont d'autant plus coûteuses que la dimension du problème est élevée. Il est donc légitime et souhaitable d'essayer de réduire cette dimension en utilisant certaines propriétés du plasma que l'on souhaite étudier, comme l'existence d'invariants (exacts ou approchés) ou encore le théorème de Liouville : on peut alors construire des modèles dits "réduits". En outre, du fait de leur plus grande simplicité, ces modèles réduits sont de bons outils permettant une compréhension un peu plus immédiate d'un problème : ils permettent d'évacuer les éléments jugés non-essentiels pour décrire un phénomène ou de sélectionner des classes de particules présentant un comportement spécifique pour tenter de comprendre quelle est leur contribution dans la dynamique globale.

Cette section sera majoritairement dédiée au modèle multi-faisceaux, dont la mise en oeuvre requiert l'existence d'invariants canoniques. On présentera brièvement en fin de partie un autre type de modèle réduit, le modèle water-bag, parfois utilisé pour étudier les instabilités de type Weibel.

### 2.3.1 Le modèle multi-faisceaux

Le modèle que nous allons présenter dans cette section [4] est un modèle cinétique basé sur l'utilisation d'invariants canoniques.

#### 2.3.1.1 Principe

En effet, lorsqu'au moins une coordonnée généralisée n'intervient pas explicitement dans l'expression du Hamiltonien (on parle de variables cycliques), le moment canonique conjugué à cette coordonnée est conservé, en vertu des équations d'Hamilton :

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r_i} = 0 \quad (2.95)$$

si  $\mathcal{H}$  ne dépend pas de la variable  $r_i$ .

Supposons un plasma homogène à l'équilibre, que l'on perturbe selon une direction donnée. Il est possible de choisir un repère cartésien dont l'un des trois axes coïncide avec la direction du vecteur d'onde de la perturbation. On choisira l'axe  $x$  par commodité. Le problème a une dimension spatiale et est donc invariant par translation en  $y$  et en  $z$ . On souhaite tenir compte des trois degrés de liberté en vitesse, de sorte que la dimension totale du problème est 4 : on parlera de problème 1D3V.

En choisissant comme coordonnées généralisées les coordonnées cartésiennes et en utilisant les équations d'Hamilton, on montre immédiatement que

$$P_y = \text{Cte} \quad ; \quad P_z = \text{Cte}'. \quad (2.96)$$

Conformément à ce qui est pratiqué en mécanique analytique, on peut travailler dans l'espace  $\{\mathbf{r}, \mathbf{P}\}$ , où les équations (2.96) deviennent des contraintes sur le mouvement. Le système est immobile selon deux des quatre directions de l'espace des phases : on réduit donc le problème 1D3V de dimension 4 à un problème de dimension 2. À ces deux dimensions s'ajoutent les deux paramètres que sont les valeurs constantes de  $P_y$  et  $P_z$ , invariants exacts durant toute l'évolution du système.

Ceci présente un avantage notable en terme de coût des simulations, puisque la nécessité de discrétiser convenablement quatre directions de l'espace des phases disparaît : seules deux suffisent. Il est également possible de paralléliser les calculs pour chaque couple de paramètres  $(P_y, P_z)$ . Enfin, il y a un avantage analytique indéniable puisque l'équation de Vlasov pour chaque espèce est grandement simplifiée :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{P}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p_x}{m\gamma} \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{P}_x \frac{\partial f}{\partial P_x} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p_x}{m\gamma} \frac{\partial f}{\partial x} - \left[ q \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2m\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left( (P_y - qA_y)^2 + (P_z - qA_z)^2 \right) \right] \frac{\partial f}{\partial p_x}, \end{aligned} \quad (2.97)$$

avec  $\dot{P}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}$ , et en utilisant le Hamiltonien relativiste à une particule (2.16)

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{P}, t) = (\gamma - 1) mc^2 + q\Phi(\mathbf{r}, t), \quad (2.98)$$

en jauge de Coulomb,

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = 0 \quad \text{conduisant à } P_x = p_x \quad \text{et à } E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (2.99)$$

La jauge de Coulomb permet dans notre cas de séparer les contributions électrostatique ( $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}$ ) et électromagnétique ( $\mathbf{k} \times \mathbf{E}$ ), c'est à dire :

$$E_x = -\nabla \Phi \cdot \mathbf{e}_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (2.100)$$

et

$$\mathbf{A} = A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z = \mathbf{A}_\perp \quad (2.101)$$

Ainsi, le potentiel scalaire sera lié au champ électrostatique et le potentiel vecteur à la partie inductive de  $\mathbf{E}$ .

### 2.3.1.2 Choix d'une classe particulière de fonctions de distribution

L'invariance de certaines composantes du moment canonique nous incite à construire une fonction de distribution en forme de "peigne" de Dirac, chaque pic correspondant à une valeur vectorielle du moment canonique transverse  $\mathbf{P}_\perp = (0, P_y, P_z)$  :

$$f(x, p_x, P_y, P_z, t) = \sum_{j=1}^N f_j(x, p_x, t) \delta(P_y - C_{jy}) \delta(P_z - C_{jz}), \quad (2.102)$$

$C_{jy}$  et  $C_{jz}$  étant la valeur des composantes du moment canonique transverse d'une ensemble de particules que l'on appellera "multi-faisceau", pour éviter toute confusion avec d'éventuels faisceaux physiques de particules chargées, comme ceux impliqués dans l'instabilité CFI. Ces valeurs seront

constantes, aussi bien durant la phase linéaire d'une instabilité que lors de la phase non-linéaire, aussi longtemps que l'invariance du Hamiltonien vis à vis de  $y$  et  $z$  sera conservée.

En injectant la distribution (2.102) dans (2.97) et en intégrant sur les variables  $P_y$  et  $P_z$ , ce qui revient à projeter l'équation de Vlasov sur la base formée par les multi-faisceaux, on obtient un ensemble d'équations d'évolution (une par multi-faisceau) portant chacune sur la partie longitudinale  $f_j$  de la fonction de distribution :

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \frac{p_x}{m\gamma_j} \frac{\partial f_j}{\partial x} + qE_x \frac{\partial f_j}{\partial p_x} - \frac{1}{2m\gamma_j} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (C_{jy} - qA_y)^2 + (C_{jz} - qA_z)^2 \right] \frac{\partial f_j}{\partial p_x}, \quad (2.103)$$

avec

$$\gamma_j = \sqrt{1 + \frac{p_x^2 + (C_{jy} - qA_y)^2 + (C_{jz} - qA_z)^2}{m^2 c^2}}, \quad (2.104)$$

facteur de Lorentz d'une particule appartenant au multi-faisceau  $j$ .

On peut considérer ce modèle sous deux points de vue. On peut tout d'abord l'introduire comme un modèle cinétique exact, sans approximation, adapté au traitement de certaines classes de fonctions de distribution, dont la forme correspond à celle indiquée dans (2.102). Ainsi, une instabilité CFI froide déclenchée par deux faisceaux contra-propageants (représentés par des pics de Dirac) peut-être décrite exactement par le modèle multi-faisceaux.

On peut aussi considérer le modèle multi-faisceau comme un modèle approché par lequel on discrétise une fonction de distribution de forme quelconque par un ensemble de multi-faisceaux avec lesquels on espère reproduire un maximum de caractéristiques du phénomène étudié. Si on y parvient, on dispose dans ce cas d'un outil puissant permettant de diagnostiquer le comportement dans l'espace des phases d'une population de particules partageant une même valeur de moment canonique transverse. On soulignera que l'utilisation de ce modèle permet d'introduire une anisotropie de température entre la direction parallèle et le plan transverse dans un contexte relativiste, sans pour autant avoir à donner une expression générale de la fonction de distribution.

### 2.3.1.3 Positionnement des multi-faisceaux et équivalence au sens des moments

Les valeurs  $C_{jy}$  et  $C_{jz}$  sont des invariants, correspondant à la position des multi-faisceaux dans l'espace des  $\mathbf{P}$ . Il est possible de positionner ces multi-faisceaux, *i.e.* de définir leur valeur de  $C_j$  et leur poids statistique, de sorte qu'ils puissent vérifier initialement les propriétés moyennes (vitesse moyenne, température, flux de chaleur ...) d'une distribution quelconque. On doit pour cela comparer les moments des deux fonctions de distribution, et cette comparaison fournit un ensemble de relations de contraintes sur la valeur du poids et de la position des multi-faisceaux.

Pour illustrer ceci, restreignons-nous à un modèle 1D2V (on travaille dans l'espace des phases  $\{x, P_x = p_x, P_y\}$ ) et supposons que la partie longitudinale  $f_j$  de la fonction de distribution a la même forme pour chaque multi-faisceau, mais correspond à un poids statistique (noté  $\alpha_j$ ) différent. On écrit alors  $f_j = \alpha_j f_0$ , où  $f_0$  est la même quelque soit  $j$ .

On travaille donc à partir de la fonction de distribution suivante :

$$f = \sum_{j=1}^N f_0(p_x, t) \alpha_j \delta(P_y - C_j), \quad (2.105)$$

dont on souhaite définir les  $\alpha_j$  et les  $C_j$  de sorte qu'ils miment initialement un certain nombre de moments fluides d'une double maxwellienne du type

$$f_{test} = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi m k_B T_x} \sqrt{2\pi m k_B T_y}} \exp\left(-\frac{p_x^2}{2m k_B T_x} - \frac{p_y^2}{2m k_B T_y}\right). \quad (2.106)$$

où  $T_x$  et  $T_y$  correspondent aux températures du plasma, relatives à la dispersion en vitesse selon  $x$  et  $y$  respectivement. On peut déjà choisir

$$f_0(p_x, t) = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi m k_B T_x}} \exp\left(-\frac{p_x^2}{2m k_B T_x}\right), \quad (2.107)$$

assurant l'égalité des moments par rapport à  $p_x$ . Rappelons ensuite qu'en l'absence de champ magnétique initial,  $P_y = p_y$  à  $t = 0$  : on peut donc interchanger les deux variables pour la normalisation.

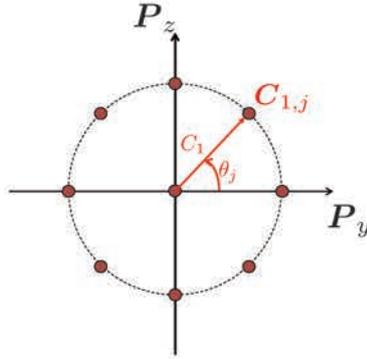


FIGURE 2.1 – Distribution de type multi-anneaux. Huit faisceaux sont placés sur l’anneau  $n = 1$  de rayon  $C_1$  dans le plan  $(P_y, P_z)$ . Le faisceau  $j$  est repéré par un angle  $\theta_j$  formé par l’axe  $P_y$  et la direction du faisceau  $C_j$ .

Disposant de  $N$  faisceaux et de deux inconnues par faisceaux ( $\alpha_j$  et  $C_j$ ), on a besoin de  $2N$  équations pour déterminer totalement la distribution multi-faisceaux. Par exemple, pour un système de 3 faisceaux on peut comparer jusqu’aux moments d’ordre 5.

La comparaison des moments d’ordre 0 fournit une relation entre les  $\alpha_j$  :

$$\int dp_y \sum_{j=1}^N \alpha_j \delta(p_y - C_j) = \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1 \quad (2.108)$$

La symétrie de la distribution  $f_{test}$  par rapport aux variables  $p_x$  et  $p_y$  implique que les moments d’ordre impair soient nuls. On obtient donc, pour les moments d’ordre 1, 3 et 5 :

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j C_j = 0, \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j C_j^3 = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j C_j^5 = 0. \quad (2.109)$$

Remarquons que d’un point de vue physique les deux distributions sont équivalentes pour tous les moments d’ordre impair, même si on n’utilise que trois d’entre eux pour normaliser les multi-faisceaux.

La comparaison des moments d’ordre 2 et 4 conduit à

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j C_j^2 = mk_B T_y \quad (2.110)$$

et

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j C_j^4 = 3m^2 k_B^2 T_y^2. \quad (2.111)$$

Pour une géométrie 2D3V, il est possible d’arranger les faisceaux en “anneaux” ([5], [6], [7]). Un anneau est un ensemble de faisceaux partageant un moment canonique transverse  $C_\perp$  de même norme. Il est possible d’envisager plusieurs anneaux concentriques, que l’on repèrera par un indice  $n$ .

Soit le moment canonique du faisceau  $j$  appartenant à l’anneau  $n$ ,

$$\mathbf{C}_{n,j} = C_n \cos(\theta_j) \mathbf{e}_y + C_n \sin(\theta_j) \mathbf{e}_z. \quad (2.112)$$

Deux faisceaux partageant la même valeur de  $C_n$  mais correspondant à des valeurs différentes de  $\theta$  appartiennent au même anneau 2.1. Une telle distribution est adaptée à des problèmes de géométrie cylindrique dans l’espace des vitesses, pour lesquels une composante du moment cinétique est invariante. Il est possible de généraliser la description multi-anneaux en positionnant par exemple les faisceaux sur des ellipses.

### 2.3.1.4 Couplage avec les équations de Maxwell

Les équations de Vlasov réduites (2.103) sont couplées de manière auto-consistante aux équations de Maxwell. En jauge de Coulomb et en faisant apparaître le potentiel vecteur via  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , elles s'écrivent :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_s q_s n_s(x, t) \quad (2.113)$$

et

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}_\perp}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \mathbf{A}_\perp}{\partial x^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_s \mathbf{J}_{s,\perp}. \quad (2.114)$$

L'indice  $s$  désigne l'espèce de particules considérée. Les densités de particules et de courant intervenant dans ces équations s'écrivent :

$$\begin{aligned} n_s &= \int \sum_{j=1}^N f_j(x, p_x, t) \delta(P_y - C_{jy}) \delta(P_z - C_{jz}) dp_x dP_y dP_z \\ &= \sum_{j=1}^N \underbrace{\int f_j(x, p_x, t) dp_x}_{\equiv n_{sj}} = \sum_{j=1}^N n_{sj} \end{aligned} \quad (2.115)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{s,\perp} &= \frac{q_s}{m_s} \int \sum_{j=1}^N f_j(x, p_x, t) \delta(P_y - C_{jy}) \delta(P_z - C_{jz}) \frac{\mathbf{p}_\perp}{\gamma} dp_x dP_y dP_z \\ &= \sum_{j=1}^N \underbrace{\frac{q_s}{m_s} \int f_j(x, p_x, t) \frac{\mathbf{p}_\perp - q_s \mathbf{A}_\perp}{\gamma_j} dp_x}_{\equiv \mathbf{J}_{sj,\perp}} = \sum_{j=1}^N \mathbf{J}_{sj,\perp} \end{aligned} \quad (2.116)$$

où  $n_{sj}$  est la densité d'un faisceau et  $\mathbf{J}_{sj,\perp}$  est sa densité de courant transverse.

### 2.3.2 Une autre technique de réduction, le modèle water-bag

Introduit dans les années soixante [8],[9], le modèle water-bag repose sur le théorème de Liouville : au cours du temps, tout volume  $d\tau$  de l'espace des phases sera conservé, bien que probablement déformé au même titre qu'un ballon gonflable rempli d'eau. La connaissance du mouvement de l'enveloppe permet de caractériser l'évolution des particules occupant initialement les états contenus dans ce volume.

Pour illustrer le principe de ce modèle, on imaginera un problème unidimensionnel purement électrostatique. Les ions sont supposés fixes et forment un fond de densité  $n_0$ , seuls les électrons ont une dynamique. Les particules évoluent dans un espace des phases  $(x, v_x)$ . Supposons que la fonction de distribution soit constante dans le "bag", c'est à dire que  $f(x, v_x, t) = A$ , où  $A$  est une constante dans une zone de l'espace des phases comprise entre deux courbes  $v_+(x, t)$  et  $v_-(x, t)$ . Hors de cette zone,  $f(x, v_x, t) = 0$ .

Chaque M point du contour correspondant à un état possible pour une particule, le mouvement de cette particule sous l'effet de la force électrique est aussi celui du point M. Ceci est vrai en tout point du contour et en chaque instant, d'où

$$\frac{dv_\pm}{dt} = -\frac{e}{m_e} E_x(x, t) = \frac{\partial v_\pm}{\partial t} + v_\pm \frac{\partial v_\pm}{\partial x}. \quad (2.117)$$

Cette équation est couplée à celle de Gauss :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{e}{\epsilon_0} [A(v_+ - v_-) - n_0]. \quad (2.118)$$

Le changement de variable

$$n(x, t) = A(v_+ - v_-); \quad u(x, t) = \frac{v_+ + v_-}{2} \quad (2.119)$$

conduit à [10]

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nu) = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{e}{m} E_x - \frac{1}{mn} \frac{\partial \Pi}{\partial x} \quad (2.120)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{e}{\epsilon_0} [n - n_0] \quad (2.121)$$

avec

$$\Pi = \frac{mn^3}{12A^2} \quad \rightarrow \quad \Pi n^{-3} = \frac{m}{12A^2}. \quad (2.122)$$

Ce modèle restitue la relation de dispersion de Böhmer-Gross et a par conséquent été utilisé pour étudier les oscillations plasma [10]. Les équations qui le constituent ont pour particularité d'être formellement identiques aux équations d'évolution d'un fluide de densité  $n$ , animé d'une vitesse  $u$  et de pression  $\Pi$ . Cette similitude n'est que formelle : le modèle est cinétique et les variables  $n$  et  $u$  ne désignent pas les grandeurs macroscopiques fluides définies à partir des moments de la fonction de distribution. Remarquons en outre que l'équation  $\Pi n^{-3} = m/(12A^2)$  est vraie au sens Eulérien dans le modèle water-bag<sup>5</sup> alors que la relation de fermeture adiabatique  $d/dt(\Pi n^{-3}) = 0$  utilisée parfois dans les modèles fluides (cf. Section 2.4.6) est à prendre au sens Lagrangien<sup>6</sup>, sa forme Eulérienne étant

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + u \frac{\partial \Pi}{\partial x} + 3\Pi \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.123)$$

Le modèle water-bag permet de traiter un problème dans le cadre cinétique avec un formalisme mathématique similaire à celui d'un modèle fluide. Comme le modèle multi-faisceaux, il peut-être vu comme un modèle cinétique exact appliqué à une catégorie particulière de fonction de distribution. Remarquons aussi que ce modèle implique la disparition de la vitesse comme variable et donc une réduction de la dimension du problème.

Il est possible de complexifier la description en imaginant une fonction de distribution constituée de plusieurs "bags". L'introduction de deux bags permet par exemple d'étudier l'instabilité double-faisceaux [11]. Utiliser davantage de bags (on parle de multi water-bag) permet de reproduire l'amortissement Landau [12], perdu avec le modèle simplifié à un bag.

Depuis leur apparition, les modèles ou les distributions de type water-bag ont été utilisés pour traiter des problèmes variés, et notamment les instabilités de type Weibel. Ainsi, une distribution de type water-bag est utilisée dans un modèle cinétique complet pour étudier l'instabilité Weibel pure en régime non-relativiste [13]. Yoon et Davidson [14] utilisent quant à eux une distribution water-bag en faisant l'hypothèse supplémentaire que la quantité de mouvement transverse à la direction de propagation des ondes reste constante. Cette hypothèse préfigure en quelque sorte le modèle multifaisceaux, bien que la quantité invariante soit en réalité le moment canonique transverse. La construction d'un modèle réduit mixte reposant sur l'évolution des contours de multiples water-bag et de la position de multi-faisceaux dans l'espace des phases est faite dans [15] : la partie transverse de la fonction de distribution est décrite par des faisceaux de moment canonique transverse invariant, la partie longitudinale est représentée par un ou plusieurs water-bags. Ainsi, pour chaque faisceau  $j$ , un ou plusieurs bags peuvent-être utilisés.

Dans un contexte assez différent, celui des plasmas de fusion par confinement magnétique, on peut mentionner le modèle gyro-water-bag [16], combinant l'approche water-bag au modèle gyrocinétique et appliqué à la turbulence générée par les instabilités de gradient de température ionique (ITG).

---

5. en tout point de l'espace et à chaque instant

6. *i.e.* vraie pour une particule fluide au cours de son mouvement

## 2.4 Description macroscopique

### 2.4.1 Motivation

Jusqu'ici nous avons évoqué des modèles cinétiques, complets comme le modèle Vlasov-Maxwell, ou réduits, comme le modèle multi-faisceaux. Tous font intervenir une fonction de distribution  $f$ , de forme quelconque ou spécifique (pour les modèles réduits présentés dans la section précédente).

S'il est vrai que des modèles réduits de type multi-faisceaux ou waterbag fournissent des solutions exactes pour les fonctions de distribution qu'ils utilisent, ils peuvent aussi être employés pour approximer des situations plus réalistes afin d'en extraire les propriétés essentielles à moindre coût (analytique ou numérique). La pertinence de l'utilisation de modèles cinétiques réduits repose donc souvent sur l'hypothèse que toute l'information contenue dans la fonction de distribution n'est pas nécessaire pour comprendre et interpréter un grand nombre de phénomènes majeurs intervenant dans un plasma : moyenniser le mouvement cyclotronique dans un tokamak lorsqu'on s'intéresse à la turbulence des particules piégées en est une illustration. Dans l'esprit, il s'agit de la même démarche que celle appliquée pour réduire l'équation de Liouville.

Il est donc possible d'imaginer une description physique n'impliquant que les comportements moyens du plasma, à l'image de ce que fait la mécanique des fluides pour les milieux non-chargés électriquement. Une telle description fluide fait intervenir des grandeurs physiques plus facilement interprétables (voire mesurables) que  $f$ , comme la densité, le champ des vitesses, la pression, le flux de chaleur... Cette description fluide implique évidemment une perte substantielle d'information (notamment les phénomènes de résonances onde-particule) mais elle permet aussi d'éliminer l'information jugée *a priori* superflue pour l'étude d'un phénomène donné et de favoriser la mise en oeuvre d'une résolution analytique du problème.

Il n'y a plus besoin de considérer un espace à quatre, cinq, voire six dimensions pour traiter les problèmes les plus généraux. La description fluide se restreint à l'espace des configurations et donc à un maximum de trois dimensions par espèce de particules, quel que soit le problème à modéliser. Bien que la quantité de champs à calculer soit plus importante (densité, vitesse et éventuellement moments d'ordre supérieur, en lieu et place de la seule fonction de distribution), il en découle une réduction majeure du coût des simulations numériques, du point de vue de leur durée comme de celui de la mémoire requise pour stocker et traiter les grandeurs physiques, puisque ces champs ont une dimension moins grande. On remarquera aussi que l'approche fluide peut aussi s'avérer utile lorsqu'il s'agit d'interpréter des résultats expérimentaux, puisqu'elle fait intervenir des grandeurs macroscopiques que l'on peut mesurer.

Nous détaillerons la procédure d'obtention d'un modèle fluide pour un plasma non-relativiste. Ceci passe par plusieurs étapes :

- définir les grandeurs fluides dont on veut suivre l'évolution,
- calculer un certain nombre de moments en  $\mathbf{v}$  de l'équation de Vlasov,
- fermer le système d'équations ainsi obtenu.

Nous abordons tour à tour ces trois points dans la discussion qui suit.

### 2.4.2 Moments de la fonction de distribution

Commençons tout d'abord par définir les moments de la fonction de distribution. On définit  $\mathbf{M}_{n,s}$ , le moment d'ordre  $n$  relatif à l'espèce  $s$ , comme étant le champ suivant :

$$M_{n,s}(\mathbf{r}, t) = \int d^3\mathbf{v} \mathbf{v}^n f_s. \quad (2.124)$$

Ce moment est un tenseur de rang  $n$ , la notation  $\mathbf{v}^n$  désignant le produit tensoriel

$$\mathbf{v}^n = \underbrace{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}}_{N \text{ fois}} \quad (2.125)$$

Ainsi, le moment d'ordre zéro correspond à la densité de particules

$$M_{0,s}(\mathbf{r}, t) \equiv n_s(\mathbf{r}, t) = \int d^3\mathbf{v} f_s \quad (2.126)$$

alors que le moment d'ordre un correspond à la densité de flux de matière

$$\mathbf{M}_{1,s}(\mathbf{r}, t) \equiv n_s \mathbf{u}_s = \int d^3\mathbf{v} \mathbf{v} f_s. \quad (2.127)$$

liée au champ des vitesses  $\mathbf{u}_s(\mathbf{r}, t)$  de l'espèce  $s$ .

Introduisons enfin le moment d'ordre deux, connu sous le nom de tenseur des contraintes (ou "stress tensor" en anglais),

$$\mathbf{M}_{2,s}(\mathbf{r}, t) = \int d^3\mathbf{v} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} f_s. \quad (2.128)$$

On peut construire un système d'équations fluides à partir des équations d'évolution des moments  $\mathbf{M}_{n,s}$ . L'utilisation de grandeurs dérivées des moments, comme le champ des vitesses  $\mathbf{u}_s$  ou le tenseur de pression, noté  $\mathbf{\Pi}_s(\mathbf{r}, t)$  et défini comme

$$\mathbf{\Pi}_s(\mathbf{r}, t) = m_s \int d^3\mathbf{v} (\mathbf{v} - \mathbf{u}_s(\mathbf{r}, t)) \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{u}_s(\mathbf{r}, t)) f_s, \quad (2.129)$$

est cependant souvent privilégiée.

On peut étendre cette procédure à un nombre arbitraire de moments, atteignant une finesse de description de plus en plus importante au fur et à mesure que  $n$  augmente. Construisons maintenant le système d'équations décrivant la dynamique de ces grandeurs macroscopiques.

### 2.4.3 Construction des équations fluides

Partons de l'équation de Vlasov non-relativiste pour l'espèce  $s$ ,

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_s + \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (2.130)$$

On multiplie cette équation par la fonction  $\Psi(\mathbf{v})$  qui ne dépend que de la vitesse vectorielle de la particule, puis, pour réduire la dimension du problème au seul espace des coordonnées, on intègre sur la totalité de l'espace des vitesses :

$$\int d^3\mathbf{v} \left[ \frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_s + \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}} \right] \Psi(\mathbf{v}) = 0. \quad (2.131)$$

Les deux premiers termes de la somme s'intègrent aisément, l'intégration ne portant ni sur  $t$ , ni sur  $\mathbf{r}$ . Une intégration par parties est nécessaire pour simplifier le troisième terme :

$$\int d^3\mathbf{v} \frac{q_s}{m_s} E_i(\mathbf{r}, t) \frac{\partial f}{\partial v_i} \Psi(\mathbf{v}) = -\frac{q_s}{m_s} E_i \int d^3\mathbf{v} f \frac{\partial \Psi}{\partial v_i} \equiv -\frac{q_s}{m_s} E_i \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial v_i} \right\rangle_{\mathbf{v}} \quad (2.132)$$

$$\int d^3\mathbf{v} \frac{q_s}{m_s} \epsilon_{ijk} v_j B_k \frac{\partial f}{\partial v_i} \Psi(\mathbf{v}) \equiv -\frac{q_s}{m_s} \epsilon_{ijk} B_k \left\langle \frac{\partial v_j \Psi}{\partial v_i} \right\rangle_{\mathbf{v}}, \quad (2.133)$$

où on utilise le fait que  $f$  tend plus vite vers 0 que  $v_i^n$  ne croît, lorsque  $v_i$  tend vers l'infini.

On obtient alors une équation d'évolution générale, d'esprit similaire à celle que l'on pouvait construire pour la fonction de distribution à  $n$  particules ( $n = \{1, \dots, N\}$ ) à partir de l'équation de Liouville :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \Psi \rangle_{\mathbf{v}} + \nabla \cdot \langle \mathbf{v} \Psi \rangle_{\mathbf{v}} - \frac{q_s}{m_s} \left[ E_i \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial v_i} \right\rangle_{\mathbf{v}} + \epsilon_{ijk} B_k \left\langle \frac{\partial v_j \Psi}{\partial v_i} \right\rangle_{\mathbf{v}} \right] = 0, \quad (2.134)$$

où l'on a défini

$$\langle \Psi \rangle_{\mathbf{v}} = \int d^3\mathbf{v} f \Psi. \quad (2.135)$$

#### 2.4.3.1 Continuité

Ainsi, le cas  $\Psi = 1$  conduit immédiatement à l'équation de conservation de la matière,

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{u}_s) = \frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{M}_{2,s}) = 0. \quad (2.136)$$

Multipliée par la masse  $m_s$  des particules, cette équation devient l'équation de conservation de la masse. Multipliée par la charge  $q_s$ , on obtient l'équation de conservation de la charge.

### 2.4.3.2 Équation du mouvement fluide

Prendre  $\Psi = \mathbf{v}$  conduit d'abord au bilan de flux de matière,

$$\frac{\partial \mathbf{M}_{1,s}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{M}_{2,s} = \frac{q_s}{m_s} (n_s \mathbf{E} + \mathbf{M}_{1,s} \times \mathbf{B}). \quad (2.137)$$

On préférera souvent utiliser les grandeurs fluides  $\mathbf{u}_s$  et  $\mathbf{\Pi}_s$  plus abordables en termes de représentation que les moments  $\mathbf{M}_n$ . On peut donc réécrire cette dernière équation en remplaçant  $\mathbf{M}_{2,s}$  par le tenseur de pression en utilisant

$$\mathbf{M}_{2,s} = n_s \mathbf{u}_s \otimes \mathbf{u}_s + \frac{\mathbf{\Pi}_s}{m}, \quad (2.138)$$

conduisant à

$$\frac{\partial n_s \mathbf{u}_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{u}_s \otimes \mathbf{u}_s) = \frac{q_s n_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) - \frac{1}{m_s} \nabla \cdot \mathbf{\Pi}_s \quad (2.139)$$

laquelle, après injection de l'équation (2.136) devient l'équation d'évolution du champ des vitesses :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} + (\mathbf{u}_s \cdot \nabla) \mathbf{u}_s = \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) - \frac{\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_s}{m_s n_s}. \quad (2.140)$$

### 2.4.3.3 Évolution du tenseur de pression

Dans l'équation (2.134), on injecte  $\Psi = \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$  pour trouver une équation tensorielle de rang 2, s'écrivant pour la composante  $ij$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( n u_i u_j + \frac{\Pi_{ij}}{m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( n u_i u_j u_k + \frac{Q_{ijk}}{m} + u_i \frac{\Pi_{jk}}{m} + \frac{\Pi_{ij}}{m} u_k + u_j \frac{\Pi_{ik}}{m} \right) \\ - \frac{nq}{m} \left[ E_i u_j + E_j u_i + \epsilon_{ilm} \left( \frac{\Pi_{lj}}{mn} + u_l u_j \right) B_m + \epsilon_{jlm} \left( \frac{\Pi_{li}}{mn} + u_l u_i \right) B_n \right], = 0. \end{aligned} \quad (2.141)$$

où on a volontairement omis l'indice  $s$  relatif à l'espèce pour alléger la notation. Le tenseur de flux de chaleur (rang 3), défini comme

$$\mathbf{Q}_s = m_s n_s \langle (\mathbf{v} - \mathbf{u}_s(\mathbf{r}, t)) \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{u}_s(\mathbf{r}, t)) \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{u}_s(\mathbf{r}, t)) \rangle_{\mathbf{v}}, \quad (2.142)$$

et de composante  $Q_{ijk} = mn \langle (v_i - u_i)(v_j - u_j)(v_k - u_k) \rangle_{\mathbf{v}}$  apparaît dans cette équation.

On combine (2.141) avec l'équation d'évolution de  $\mathbf{u}$  (2.140) pour obtenir l'équation d'évolution de  $\mathbf{\Pi}_s$ , exprimée ici pour un élément  $\Pi_{ij}$  quelconque du tenseur :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_{ij,s}}{\partial t} + \underbrace{u_{k,s} \frac{\partial \Pi_{ij,s}}{\partial x_k}}_{\text{convection}} + \underbrace{\Pi_{ij,s} \frac{\partial u_{k,s}}{\partial x_k}}_{\text{compression}} + \underbrace{\frac{\partial u_{i,s}}{\partial x_k} \Pi_{jk,s} + \frac{\partial u_{j,s}}{\partial x_k} \Pi_{ik,s}}_{\text{cisaillement}} + \frac{\partial Q_{ijk,s}}{\partial x_k} \\ = \frac{q_s}{m_s} \underbrace{(\epsilon_{ilm} \Pi_{lj,s} B_m + \epsilon_{jlm} \Pi_{li,s} B_m)}_{\text{couplage pression-champ magnétique}}. \end{aligned} \quad (2.143)$$

Notons enfin l'invariance de (2.143) par permutation des indices  $i$  et  $j$ , vraie quelque soit l'instant considéré. Ainsi, toute symétrie initiale du tenseur de pression sera préservée au cours de son évolution.

### 2.4.3.4 Évolution du flux de chaleur

Enfin, considérant  $\Psi = \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$ , on obtient l'équation d'évolution du tenseur de flux de chaleur  $\mathbf{Q}_s$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{ijk,s}}{\partial t} + u_{l,s} \frac{\partial Q_{ijk,s}}{\partial x_l} + Q_{ijk,s} \frac{\partial u_{l,s}}{\partial x_l} + Q_{jkl,s} \frac{\partial u_{i,s}}{\partial x_l} + Q_{ikl,s} \frac{\partial u_{j,s}}{\partial x_l} + Q_{ijl,s} \frac{\partial u_{k,s}}{\partial x_l} \\ + \frac{N_{ijkl,s}}{\partial x_l} - \frac{1}{m_s n_s} \left( \Pi_{jk,s} \frac{\partial \Pi_{il,s}}{\partial x_k} + \Pi_{ik,s} \frac{\partial \Pi_{jl,s}}{\partial x_l} + \Pi_{ij,s} \frac{\partial \Pi_{kl,s}}{\partial x_l} \right) \\ = \frac{q_s}{m_s} (\epsilon_{imn} Q_{jkm,s} + \epsilon_{jmn} Q_{ikm,s} + \epsilon_{kmn} Q_{ijm,s}) B_n \end{aligned} \quad (2.144)$$

Cette équation fait intervenir le moment d'ordre 4, que nous noterons  $\mathbf{N}_s$ .

On définira enfin le vecteur flux de chaleur  $\mathbf{q}_s$ , plus fréquemment employé :

$$\mathbf{q}_{i,s} = \sum_{j,k} Q_{ijk,s}, \quad (2.145)$$

comme la trace sur deux indices du tenseur  $Q_s$ .

### 2.4.3.5 Le problème de la fermeture

On pourrait continuer ainsi jusqu'à l'infini, pour obtenir une description sans doute équivalente au modèle cinétique, mais complètement inutilisable en pratique.

L'intérêt d'une description fluide réside dans sa grande facilité de mise en oeuvre (analytique et numérique) et d'interprétation. Il est donc souhaitable de traiter un nombre restreint d'équations, et donc de tronquer cette hiérarchie d'équations fluides. Ceci pose un problème de fermeture similaire à celui évoqué dans le contexte de l'équation de Liouville, puisque l'équation d'évolution du moment d'ordre  $n$  fait intervenir le moment d'ordre  $n + 1$ .

Du choix de la relation de fermeture découlera la capacité du modèle fluide à traiter correctement ou non un problème. Ce choix est donc une étape délicate dans la construction du modèle. A titre d'exemple, on citera Braginskii [17], qui en 1957 a établi un ensemble de relations de fermeture pour les plasmas collisionnels et/ou magnétisés, en donnant des expressions pour les coefficients de transport (conductivités électrique et thermique, viscosités dans la direction parallèle et perpendiculaire au champ magnétique d'équilibre).

Sans vouloir utiliser un modèle aussi complexe, on pourrait être tenté d'introduire une équation d'état pour fermer le système. Ceci suppose l'existence d'un équilibre thermodynamique local clairement défini, et donc une distribution des vitesses Maxwellienne, isotrope, au moins localement. Les collisions, en introduisant une part d'aléatoire dans l'évolution du plasma, ont tendance à favoriser la réalisation d'une telle isotropie, affaiblissant l'importance des moments d'ordre impair, directement liés aux asymétries de la distribution.

Dans un plasma chaud (ou très dilué), le libre parcours moyen des particules devient important devant la taille caractéristique du plasma, à tel point que les collisions se font rares. Le paramètre d'impact des principaux phénomènes collisionnels est grand devant la longueur de Debye et le comportement collectif du plasma domine. Les collisions ne peuvent donc pas servir de mécanisme de relaxation dans un tel contexte et il est difficile d'envisager une équation d'état au sens de la thermodynamique.

La présence d'un fort champ magnétique  $\mathbf{B}_0$  pourrait remplacer partiellement les collisions. Partiellement, car le champ magnétique a tendance à isotropiser la distribution des vitesses dans le plan orthogonal à sa direction seulement, la force magnétique étant nulle dans la direction parallèle au champ. Dans ce cas, le plasma devient anisotrope et il faut distinguer la direction parallèle au champ du plan perpendiculaire à celui-ci. Il faut donc considérer, a minima, une pression différente pour chaque direction. On peut utiliser cette propriété pour fermer le système d'équations. Par exemple, on citera le modèle CGL (pour Chew, Goldberger et Low, [18]) construit en 1956 dans le cadre de la magnétohydrodynamique idéale et introduisant une fermeture "double-adiabatique" supposant l'absence de flux de chaleur, en particulier le long de  $\mathbf{B}_0$ . Dans ce modèle, la pression est anisotrope mais demeure une quantité scalaire, dont l'évolution est régie par ces deux équations

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{P_{\parallel} B^2}{n^3} \right) = 0, \quad (2.146)$$

pour la pression parallèle au champ, et

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{P_{\perp}}{nB} \right) = 0 \quad (2.147)$$

pour la pression dans le plan perpendiculaire. Ces équations sont valables pour la magnétohydrodynamique idéale, où le plasma est assimilé à un fluide barycentrique non-résistif, décrivant simultanément les ions et les électrons. Les relations de fermeture CGL sont modifiées [19] pour des modèles multi-fluides dans lesquels les ions et les électrons sont décrits par des fluides distincts. On citera enfin un modèle plus récent, celui de Ramos [20], extension du modèle CGL incluant le flux de chaleur parallèle au champ magnétique et faisant appel à une hypothèse heuristique sur le moment d'ordre 4. Enfin, une discussion très détaillée du problème de la fermeture dans le contexte des plasmas magnétisés non-collisionnels est donnée dans [21].

Dans un plasma non collisionnel et non magnétisé, le problème de fermeture n'a pas de solution évidente. Le plasma se trouve en effet la plupart du temps hors équilibre. La relation de fermeture choisie est alors révélatrice d'un ensemble d'hypothèses formulées en fonction du phénomène que l'on souhaite étudier. On ne doit pas chercher un modèle absolu capable de décrire n'importe quel phénomène mais plutôt déterminer ce que l'on peut négliger et ce que l'on doit conserver pour obtenir une description satisfaisante d'un problème donné. Le cas des instabilités Weibel est particulièrement intéressant de ce point de vue dans le sens où, partant d'un plasma non-magnétisé, l'instabilité génère un fort champ magnétique perpendiculaire au plan contenant l'anisotropie. On se trouve, d'une certaine manière, dans un cas intermédiaire situé entre le plasma magnétisé et le plasma non-magnétisé.

Décrire de façon fluide un problème revient donc à prendre le parti de négliger certains effets pour ne conserver, dans la mesure où la fermeture est judicieusement choisie, que les paramètres jouant réellement un rôle dans ce problème. Cette fermeture n'est pas une équation d'état au sens thermodynamique. Le choix d'une fermeture peut aussi découler d'une volonté de savoir ce qu'entraînera du point de vue du modèle la suppression de l'un des moments.

En thermodynamique classique, seuls interviennent les trois, voire quatre premiers moments de la fonction de distribution : densité, vitesse moyenne, pression (souvent scalaire) et parfois flux de chaleur, introduit sous forme vectorielle via une relation phénoménologique comme la loi de Fourier. Du côté de l'électromagnétisme, l'observation des relations champ-sources des équations de Maxwell montre que seules les densités de charge et de courant interviennent dans le calcul des champs. Or, ces densités sont directement reliées aux moments d'ordre 0 et 1. Ils semblent donc être le minimum requis pour établir une description fluide fonctionnelle d'un plasma. Se limiter à ces deux moments constitue l'approche fluide froide et permet d'obtenir, au prix d'un coût calculatoire faible, des résultats intéressants dans le contexte des instabilités faisceau-plasma. C'est par un modèle fluide froid que Fried [22] fournit en 1959 son interprétation de l'instabilité Weibel en terme de faisceaux contra-propageants.

#### 2.4.4 Le modèle relativiste froid

On construit le modèle relativiste froid à partir des équations suivantes,

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{u}_s) = 0, \quad (2.148)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_s}{\partial t} + (\mathbf{u}_s \cdot \nabla) \mathbf{p}_s = \frac{q_s}{m_s} \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}_s}{m_s \gamma_s} \times \mathbf{B} \right), \quad (2.149)$$

couplées à celles de Maxwell. La quantité de mouvement fluide  $\mathbf{p}_s$  est définie comme

$$\mathbf{p}_s = \gamma_s m_s \mathbf{u}_s, \quad (2.150)$$

$$\text{où } \gamma_s = \sqrt{1 + \frac{\mathbf{p}_s^2}{m_s^2 c^2}}.$$

Ici, les équations fluides ont été écrites pour être valables en régime relativiste. Les moments d'ordre 0 et 1 sont obtenus respectivement à partir des relations ci-dessous,

$$n_s = \int d^3 \mathbf{p} f_s, \quad (2.151)$$

et

$$n_s \mathbf{u}_s = \int d^3 \mathbf{p} \frac{\mathbf{p}}{m \gamma} f_s. \quad (2.152)$$

L'utilisation du moment d'ordre 1 permet d'introduire une anisotropie dans le champ des vitesses. Ce modèle a donc déjà été utilisé avec succès pour étudier les instabilités CFI, en milieu homogène [23],[24] comme inhomogène [24], [25],[25],[26], TSI ainsi que leur couplage.

#### 2.4.5 Le modèle fluide étendu avec tenseur de pression

L'étape qui suit consiste à ajouter des effets de pression au système d'équations. On espère ainsi modéliser une anisotropie de température et les instabilités qu'elle peut entraîner. En régime relativiste, la définition du tenseur de pression est délicate. Les modèles relativistes incluent donc, en général, un terme de pression scalaire, a priori inapte à décrire l'instabilité Weibel pure (causée par une anisotropie de température). La modélisation fluide incluant la dynamique du tenseur de pression sera donc exclusivement traitée en régime non-relativiste.

Ce modèle à 13 variables fluides scalaires est constitué des équations suivantes,

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{u}_s) = 0, \quad (2.153)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} + (\mathbf{u}_s \cdot \nabla) \mathbf{u}_s = \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) - \frac{\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_s}{m_s n_s}, \quad (2.154)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_{ij,s}}{\partial t} + u_k \frac{\partial \Pi_{ij,s}}{\partial x_k} + \Pi_{ij,s} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Pi_{jk,s} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \Pi_{ik,s} \\ = \frac{q_s}{m_s} (\epsilon_{ilm} \Pi_{lj,s} B_m + \epsilon_{jlm} \Pi_{li,s} B_m), \end{aligned} \quad (2.155)$$

couplées aux équations de Maxwell décrivant le comportement de champs moyennés à l'échelle d'une particule fluide, un volume suffisamment important pour être statistiquement significatif (fluctuations faibles) mais suffisamment petit pour pouvoir être approximé par un point à l'échelle du plasma.

Ce modèle est fermé en imposant la condition suivante,

$$\nabla \cdot \mathbf{Q}_s = 0, \quad (2.156)$$

d'où la disparition du flux de chaleur dans l'équation. Plusieurs raisons motivent ce choix : commodité calculatoire, volonté d'étudier l'apport du tenseur de pression complet (et notamment des termes non-diagonaux) au modèle et de trouver un régime pour lequel les moments d'ordre supérieur deviennent importants. Nous examinerons donc en détail les conséquences de ce choix au chapitre suivant, en l'appliquant directement au cas des instabilités de type Weibel.

#### 2.4.6 Modèle non-relativiste avec tenseur de pression diagonal

Afin de souligner l'apport des termes hors-diagonaux du tenseur de pression au modèle complet, il peut être intéressant de construire un modèle plus simple, correspondant à une pression scalaire anisotrope. On force le tenseur de pression à conserver la forme suivante quelque soit l'instant  $t$ ,

$$\mathbf{\Pi}_s^{(0)} = \begin{bmatrix} \Pi_{xx,s}^D & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_{yy,s}^D & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_{zz,s}^D \end{bmatrix}, \quad (2.157)$$

où la lettre  $D$  sert à souligner qu'on force le tenseur à demeurer diagonal durant son évolution. Dans ce modèle, chaque composante de  $\mathbf{\Pi}_s$  évolue indépendamment des autres via une relation de type polytropique. Par exemple, pour la composante  $\Pi_{xx,s}^D$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \Pi_{xx,s}^D n_s^{-\Gamma} \right) = \frac{d\Pi_{xx,s}^D}{dt} + \Gamma \Pi_{xx,s}^D \nabla \cdot \mathbf{u}_s = 0 \quad (2.158)$$

où  $\Gamma$  est un indice à déterminer. Il s'agit d'une approche qui est parfois retenue pour introduire des effets liés à l'anisotropie de pression, notamment dans un contexte relativiste fluide où l'écriture du tenseur de pression peut poser problème. L'équation (2.158) ferme le système constitué des équations de Maxwell, de l'équation de continuité

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{u}_s) = 0 \quad (2.159)$$

et de l'équation du mouvement fluide,

$$\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} + (\mathbf{u}_s \cdot \nabla) \mathbf{u}_s = \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) - \frac{\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_s}{m_s n_s}, \quad (2.160)$$

Pour chacune des trois composantes de l'équation (2.160), le terme de pression s'écrira respectivement

$$[\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_s]_x = \frac{\partial \Pi_{xx,s}}{\partial x}, \quad (2.161)$$

$$[\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_s]_y = \frac{\partial \Pi_{yy,s}}{\partial y}, \quad (2.162)$$

ou

$$[\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_s]_z = \frac{\partial \Pi_{zz,s}}{\partial z}. \quad (2.163)$$

Lorsqu'on souhaite simplement introduire des effets de température, il est possible de choisir initialement  $\mathbf{\Pi}_s$  isotrope, et une loi d'évolution polytropicque identique pour chacune des trois composantes. Ceci revient à considérer une pression scalaire.

## Conclusion

Nous avons présenté tour à tour les différents de niveaux de description d'un plasma : particulière, statistique et macroscopique. Puisque nous choisissons de négliger les collisions et de ne considérer que des plasmas cinétiques, la description la plus complète dont nous avons besoin est le modèle cinétique Vlasov-Maxwell. De par sa complexité analytique (rendant inévitable le recours aux simulations numériques), il peut-être intéressant de recourir à une approche complémentaire : l'utilisation de modèles réduits ou macroscopiques. En effet, du fait de leur plus grande simplicité analytique, ces modèles peuvent faciliter la compréhension des phénomènes mis en jeu dans le plasma, en particulier dans le contexte des instabilités de type Weibel.

Nous avons présenté le modèle multifaisceaux, reposant sur l'utilisation d'invariants canoniques pour réduire la dimension dans l'espace des phases d'un problème. Outre l'avantage que cette approche confère d'un point de vue strictement numérique (discrétisation d'un espace de dimension plus faible, donc gains de mémoire et de temps de calcul), elle permet d'étudier le comportement des particules en fonction de leur moment canonique. Ceci est particulièrement important dans le contexte de l'instabilité Weibel pure, où il est possible de déterminer la contribution d'une classe de particules donnée dans le mécanisme de saturation de l'instabilité, mais aussi durant la phase non-linéaire. Une analyse de l'instabilité Weibel pure, à la lumière du modèle multi-faisceaux, est notamment proposée dans [27].

Le modèle fluide étendu, incluant la dynamique du tenseur de pression complet, est essentiellement un outil analytique permettant d'interpréter en termes macroscopiques des résultats déjà connus au sujet des instabilités de type Weibel, mais pas toujours très bien compris. Ce sujet est l'objet du Chapitre 3.

## Bibliographie

- [1] T. Helgaker, P. Jorgensen, and J. Olsen. The electronic hamiltonian in an electromagnetic field. <http://folk.uio.no/helgaker/talks/Hamiltonian.pdf>, 2014. 33
- [2] B. Diu, D. Lederer, and B. Roulet. *Physique statistique*. Hermann, 1996. 34
- [3] J-L. Delcroix and A. Bers. *Physique des plasmas Tomes 1 et 2*. EDP Sciences, 1994. 41
- [4] A. Inglebert, A. Ghizzo, T. Réveillé, D. Del Sarto, P. Bertrand, and F. Califano. A multi-stream vlasov modeling unifying relativistic weibel-type instabilities. *EPL (Europhysics Letters)*, 95(4) :45002, 2011. 45
- [5] A. Ghizzo and P. Bertrand. On the multistream approach of relativistic weibel instability. i. linear analysis and specific illustrations. *Physics of Plasmas*, 20(8) :082109, 2013. :10.1063/1.4817750
- [6] A. Ghizzo. On the multistream approach of relativistic weibel instability. ii. bernstein-greenekruskal-type waves in magnetic trapping. *Physics of Plasmas*, 20(8) :082110, 2013. :10.1063/1.4817751
- [7] A. Ghizzo. On the multistream approach of relativistic weibel instability. iii. comparison with full-kinetic vlasov simulations. *Physics of Plasmas*, 20(8) :082111, 2013. :10.1063/1.4817752
- [8] D. C. DePackh. The behaviour of a large number of electrons oscillating between the plates of a condenser†. *Journal of Electronics and Control*, 15(6) :521–530, 1963. :10.1080/00207216308937605
- [9] P. Bertrand and M. R. Feix. Non linear electron plasma oscillation : the “water bag model”. *Physics Letters A*, 28(1) :68 – 69, 1968. 49
- [10] P. Bertrand and M. R. Feix. Un modèle dans l’espace des phases pour l’étude des plasmas non collisionnels : le “water bag”. *J. Phys. France*, 31(5-6) :451–457, 1970. 50
- [11] K. V. Roberts and H. L. Berk. Nonlinear evolution of a two-stream instability. *Phys. Rev. Lett.*, 19 :297–300, 1967. 50
- [12] M. Navet and P. Bertrand. Multiple “water-bag” model and landau damping. *Physics Letters A*, 34(2) :117 – 118, 1971. 50
- [13] A. Bret. A simple analytical model for the weibel instability in the non-relativistic regime. *Physics Letters A*, 359(1) :52 – 55, 2006. 50
- [14] P. H. Yoon and R. C. Davidson. Exact analytical model of the classical weibel instability in a relativistic anisotropic plasma. *Phys. Rev. A*, 35 :2718–2721, 1987. 50
- [15] A. Inglebert, A. Ghizzo, T. Réveillé, P. Bertrand, and F. Califano. Electron temperature anisotropy instabilities represented by superposition of streams. *Physics of Plasmas*, 19(12) :122109, 2012. :10.1063/1.4772770
- [16] N. Besse, P. Bertrand, P. Morel, and E. Gravier. Weak turbulence theory and simulation of the gyro-water-bag model. *Phys. Rev. E*, 77 :056410, 2008. 50
- [17] S. I. Braginskii. Transport processes in a plasma. *Reviews of Plasma Physics*, 1 :205, 1965. 54
- [18] G. F. Chew, M. L. Goldberger, and F. E. Low. The boltzmann equation and the one-fluid hydromagnetic equations in the absence of particle collisions. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 236(1204) :112–118, 1956. 54
- [19] D. Del Sarto, F. Pegoraro, and A. Tenerani. ‘magneto-elastic’ waves in an anisotropic magnetised plasma. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 59(4) :045002, 2017. 54
- [20] J. J. Ramos. Dynamic evolution of the heat fluxes in a collisionless magnetized plasma. *Physics of Plasmas*, 10(9) :3601–3607, 2003. :10.1063/1.1595648
- [21] T. Chust and G. Belmont. Closure of fluid equations in collisionless magnetoplasmas. *Physics of Plasmas*, 13(1) :012506, 2006. :10.1063/1.2138568

- [22] B. D. Fried. Mechanism for instability of transverse plasma waves. *The Physics of Fluids*, 2(3) :337–337, 1959. :10.1063/1.1705933
- [23] F. Pegoraro, S. V. Bulanov, F. Califano, and M. Lontano. Nonlinear development of the weibel instability and magnetic field generation in collisionless plasmas. *Physica Scripta*, 1996(T63) :262, 1996. 55
- [24] F. Califano, F. Pegoraro, and S. V. Bulanov. Spatial structure and time evolution of the weibel instability in collisionless inhomogeneous plasmas. *Phys. Rev. E*, 56 :963–969, Jul 1997. 55
- [25] F. Califano, R. Prandi, F. Pegoraro, and S. V. Bulanov. Nonlinear filamentation instability driven by an inhomogeneous current in a collisionless plasma. *Phys. Rev. E*, 58 :7837–7845, 1998. 55
- [26] F. Califano, D. Del Sarto, and F. Pegoraro. Three-dimensional magnetic structures generated by the development of the filamentation (weibel) instability in the relativistic regime. *Phys. Rev. Lett.*, 96 :105008, 2006. 55
- [27] A. Ghizzo, M. Sarrat, and D. Del Sarto. Vlasov models for kinetic weibel-type instabilities. *Journal of Plasma Physics*, 83(1), 2017. 57



# Chapitre 3

## Apports du tenseur de pression dans l'analyse linéaire des instabilités de type Weibel

### Sommaire

---

<b>3.1 Pourquoi introduire le tenseur de pression ?</b> . . . . .	<b>63</b>
3.1.1 Premier exemple à travers l'instabilité Weibel pure . . . . .	63
3.1.2 Instabilité CFI . . . . .	66
<b>3.2 Modélisation fluide des instabilités Weibel</b> . . . . .	<b>72</b>
3.2.1 Équations du modèle . . . . .	72
3.2.2 Description de l'équilibre . . . . .	72
<b>3.3 Propagation perpendiculaire : WI, CFI et couplage</b> . . . . .	<b>75</b>
3.3.1 Équation de dispersion . . . . .	75
3.3.2 Couplage des modes WI-CFI . . . . .	76
3.3.3 Discussion sur la fermeture du modèle . . . . .	79
3.3.4 Instabilité Weibel (WI) . . . . .	83
3.3.5 Instabilité CFI . . . . .	88
<b>3.4 Propagation parallèle : modes Weibel propagatifs</b> . . . . .	<b>90</b>
3.4.1 Équation de dispersion . . . . .	90
3.4.2 L'instabilité Weibel résonante . . . . .	93

---

Nous ferons tout d'abord le point sur quelques résultats bien connus : d'abord l'analyse linéaire cinétique de l'instabilité Weibel pure (WI), ensuite celle de l'instabilité de filamentation de courant (CFI) en régime froid, puis avec température. Nous soulignerons l'incapacité d'une description fluide avec pression scalaire à reproduire certaines caractéristiques importantes de ces instabilités.

Nous présenterons ensuite le modèle avec tenseur de pression et discuterons de l'équilibre autour duquel nous linéariserons les équations fluides. Cet équilibre, formé de deux faisceaux contra-propageants présentant potentiellement chacun une anisotropie de température, sera instable par rapport à la WI et aux instabilités de type faisceau-plasma, en particulier les instabilités TSI et CFI. Nous aborderons alors le cas de la propagation perpendiculaire aux faisceaux, étendant une analyse préliminaire effectuée par Basu [1] sur la WI. On étudiera notamment le couplage entre les instabilités WI et CFI. Enfin, nous étudierons la propagation parallèle aux faisceaux, et plus particulièrement les modes Weibel propagatifs (appelés "Resonant Weibel modes" ou "Time-Resonant Weibel Instability" dans la littérature [2][3]).

Une comparaison avec la théorie cinétique sera systématiquement effectuée. Nous verrons que le modèle fluide étendu parvient à reproduire un nombre important de caractéristiques des instabilités de type Weibel étudiées ici tout en facilitant quelque peu leur analyse.

### 3.1 Pourquoi introduire le tenseur de pression ?

Nous introduisons dans cette section la théorie cinétique linéaire des instabilités WI et CFI, et montrons pourquoi la prise en compte du tenseur de pression semble nécessaire pour les décrire proprement dans un contexte fluide.

#### 3.1.1 Premier exemple à travers l'instabilité Weibel pure

Le premier modèle cinétique de l'instabilité Weibel pure fut introduit en 1959 [4], dans un article fondateur de E.S. Weibel démontrant qu'une anisotropie de la fonction de distribution dans l'espace des vitesses pouvait conduire à l'excitation d'ondes électromagnétiques instables, de basse fréquence ( $|\omega| \ll \omega_{pe}$ ) et dont l'existence est par conséquent impossible dans un modèle de plasma froid. On rappellera ici brièvement les principaux points de l'analyse cinétique de cette instabilité.

Supposant les ions au repos, on ne s'intéressera qu'à la dynamique électronique. La neutralité du plasma étant respectée à l'équilibre, le champ électrique d'équilibre est nul. On suppose qu'il n'y a pas non plus de champ appliqué depuis l'extérieur. Les électrons sont caractérisés par une distribution de type Maxwellienne, à trois températures,

$$f_0 = n_0 \left( \frac{m_e}{2\pi k_B T_x} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{m_e}{2\pi k_B T_y} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{m_e}{2\pi k_B T_z} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{m_e v_x^2}{2k_B T_x} - \frac{m_e v_y^2}{2k_B T_y} - \frac{m_e v_z^2}{2k_B T_z} \right). \quad (3.1)$$

Le plasma étant supposé non-collisionnel et non-magnétisé il n'y a aucune raison pour supposer une température isotrope, d'où ce choix très général pour une Maxwellienne. On définit les vitesses suivantes,

$$a_x \equiv \sqrt{\frac{k_B T_x}{m}}, \quad a_y \equiv \sqrt{\frac{k_B T_y}{m}}, \quad a_z \equiv \sqrt{\frac{k_B T_z}{m}}. \quad (3.2)$$

liées à la température dans chacune des trois directions.

On perturbe les équations de Vlasov-Maxwell par une superposition d'ondes planes de polarisation linéaire et de forme

$$G = G^{(0)} + G^{(1)} \exp[-i(\omega t - k_x x)], \quad (3.3)$$

$G$  désignant la fonction de distribution ou l'une des composantes du champ électromagnétique,  $k_x$  étant le vecteur d'onde et  $\omega = \omega_r + i\gamma$  étant la pulsation complexe de l'onde plane considérée. On désigne par  $\gamma$  le taux de croissance (ou d'amortissement) de l'onde et par  $\omega_r$  sa fréquence réelle. Les exposants (0) et (1) désignent respectivement l'équilibre et la perturbation.

Les équations de Maxwell linéarisées après transformation de Fourier en  $t$  et en  $x$  prennent la forme suivante,

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{E}^{(1)} - i\omega \mathbf{B}^{(1)} = 0, \quad i\mathbf{k} \times \mathbf{B}^{(1)} = \mu_0 \mathbf{J}^{(1)} - \frac{i\omega}{c^2} \mathbf{E}^{(1)}, \quad (3.4)$$

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}^{(1)} = 0, \quad i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}^{(1)} = \frac{\rho^{(1)}}{\epsilon_0}, \quad (3.5)$$

et, une fois combinées, conduisent à une équation de dispersion qu'il est possible de présenter sous forme matricielle,

$$D_{ij} \equiv \left( \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij} - k_x^2 \delta_{ij} + k_i k_j \right) E_j^{(1)} = 0, \quad (3.6)$$

où  $\epsilon_{ij}$  désigne la permittivité diélectrique linéaire du plasma. Cette permittivité diélectrique décrit le lien entre le mouvement des particules et le champ électrique et s'obtient à partir de la loi d'Ohm :

$$\mathbf{J}_i^{(1)} = -e \int f^{(1)} v_i d^3 \mathbf{v} = -i\epsilon_0 \omega (\epsilon_{ij} - \delta_{ij}) E_j^{(1)}. \quad (3.7)$$

où la perturbation de la fonction de distribution,  $f^{(1)}$  est donnée par l'équation de Vlasov linéarisée,

$$f^{(1)} = \frac{ie}{m_e} \frac{-\frac{v_x}{a_x^2} E_x^{(1)} - \frac{v_y}{a_y^2} E_y^{(1)} - \frac{v_z}{a_z^2} E_z^{(1)}}{\omega - k_x v_x} f_0 + \frac{ie}{m_e} \frac{k_x}{\omega} \left( \frac{1}{a_y^2} - \frac{1}{a_x^2} \right) \frac{v_x v_y}{\omega - k_x v_x} f_0 E_y^{(1)} + \frac{ie}{m_e} \frac{k_x}{\omega} \left( \frac{1}{a_z^2} - \frac{1}{a_x^2} \right) \frac{v_x v_z}{\omega - k_x v_x} f_0 E_z^{(1)}. \quad (3.8)$$

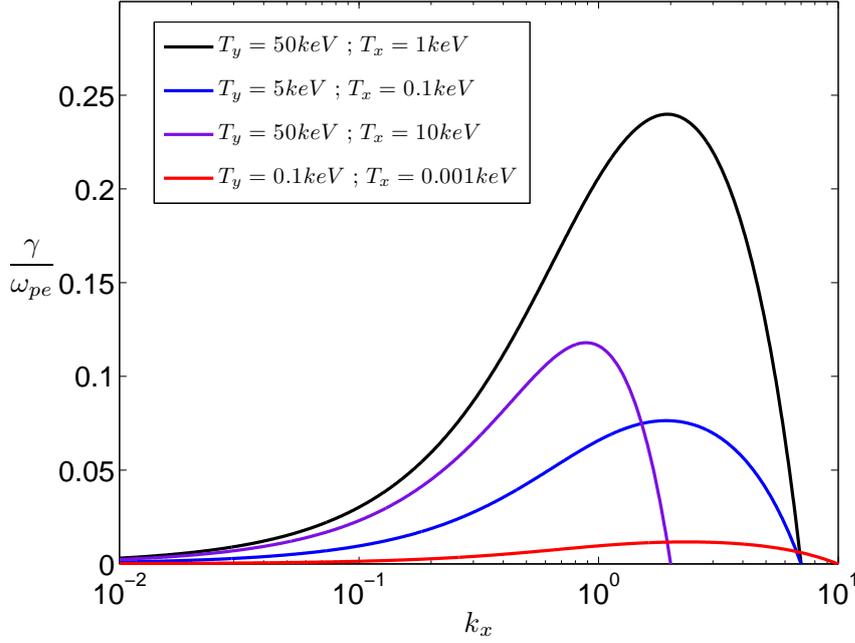


FIGURE 3.1 – Instabilité Weibel pure – Taux de croissance du mode instable non-propagatif, obtenu à partir de la résolution de  $D_{yy} = 0$  ( $D_{yy}$  donné par (3.11)) pour plusieurs valeurs de  $T_x$  et  $T_y$ . On notera que les courbes bleue et noire ont la même coupure, comme attendu, puisque le rapport de températures  $T_y/T_x$  est le même dans ces deux cas.

L'anisotropie de température entre les directions transverses à  $\mathbf{k}$  et la direction parallèle apparaît clairement dans les deux derniers termes de (3.8). Ces deux termes n'interviennent que dans le calcul des courants  $J_y^{(1)}$  et  $J_z^{(1)}$  respectivement, impliquant un rôle clé de leur part dans le mécanisme de l'instabilité.

La matrice de dispersion (3.6) s'écrit

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

avec,

$$D_{xx} = \frac{\omega^2}{c^2} \left[ 1 + \omega_{pe}^2 \frac{1 + \xi Z}{k_x^2 a_x^2} \right], \quad (3.10)$$

$$D_{yy} = \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \left[ (1 + \xi Z) \left( \frac{a_y^2}{a_x^2} - 1 \right) + \xi Z \right], \quad (3.11)$$

et

$$D_{zz} = \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \left[ (1 + \xi Z) \left( \frac{a_z^2}{a_x^2} - 1 \right) + \xi Z \right]. \quad (3.12)$$

La fonction  $Z = Z(\xi)$  désigne la fonction de dispersion plasma, définie dans [5] telle que

$$Z(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{e^{-u^2}}{u - \xi}, \quad (3.13)$$

pour  $\Im(\xi) > 0$  avec  $\xi = \frac{\omega}{\sqrt{2}k_x a_x}$ .

L'équation de dispersion se décompose en trois relations de dispersion parfaitement découplées dans la phase linéaire. La première ( $D_{xx} = 0$ ) décrit les ondes électrostatiques de Langmuir. Les relations  $D_{yy} = 0$  et  $D_{zz} = 0$  décrivent l'instabilité Weibel générant respectivement un champ magnétique le long de  $z$  et le long de  $y$ . La dynamique du champ  $E_z$  est donc en tout point similaire à celle du champ  $E_y$ .

La figure 3.1 représente les solutions instables de la relation de dispersion  $D_{yy} = 0$  pour plusieurs valeurs de l'anisotropie  $A \equiv a_y^2/a_x^2$ . Chacune de ces courbes présente une coupure  $k_c$  dont l'expression

$$k_c = \frac{\omega_{pe}}{c} \sqrt{\frac{a_y^2}{a_x^2} - 1} \quad (3.14)$$

peut être obtenue analytiquement en posant  $\omega = 0$  dans la relation de dispersion. Les modes instables sont non-propagatifs ( $\omega_r = 0$ ). Deux points doivent être commentés à la lumière de ces courbes. Tout d'abord, le taux de croissance maximal est d'autant plus important que l'agitation thermique dans la direction transverse à la longueur d'onde est forte. La température transverse est donc la source d'énergie de l'instabilité, puisqu'à anisotropie de température égale, c'est à la valeur la plus élevée de  $T_y$  que correspond le taux de croissance le plus grand. Cette comparaison est pertinente car pour une anisotropie  $T_y/T_x$  identique (mais des températures différentes) le spectre de modes déstabilisés est rigoureusement le même. La coupure  $k_c$  (et donc la plage de modes autorisés) ne dépend en effet que de la valeur de l'anisotropie de température et non de  $T_y$  ou  $T_x$  prises seules.

En conclusion, si l'anisotropie rend possible l'existence d'ondes électromagnétiques au-delà d'une certaine longueur d'onde (ces ondes n'existant pas dans un plasma isotrope), c'est la température transverse et non l'anisotropie qui détermine la force de l'instabilité. La température longitudinale, impliquée dans les phénomènes de résonance onde-particules puisque liée à la vitesse de déplacement des particules parallèlement à la vitesse de propagation de l'onde, semble jouer un rôle assez mineur dans le comportement linéaire de l'instabilité Weibel, ce qui est encourageant pour envisager une modélisation fluide de ce problème.

Un traitement fluide de cette instabilité par un modèle froid ou un modèle à pression scalaire isotrope est bien entendu impossible, puisque nous avons besoin d'une anisotropie de température. L'étape suivante, dans une logique visant à complexifier progressivement le modèle, ingrédient par ingrédient, pourrait consister à supposer un tenseur de pression dont les trois composantes diagonales évoluent séparément selon une loi d'évolution de type polytropicque, le tenseur restant lui-même diagonal au cours du temps : c'est le cas du modèle présenté en section 2.4.6.

Focalisons notre attention sur les trois composantes de l'équation du mouvement fluide (2.160), qui s'écrivent

$$mn \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = -en (E_x + [\mathbf{u} \times \mathbf{B}]_x) - \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x}, \quad (3.15)$$

$$mn \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = -en (E_y + [\mathbf{u} \times \mathbf{B}]_y) \quad (3.16)$$

et

$$mn \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = -en (E_z + [\mathbf{u} \times \mathbf{B}]_z) \quad (3.17)$$

du fait de l'invariance par translation en  $y$  et en  $z$ .

Il n'y a aucune contribution de la pression dans les équations d'évolution de  $u_y$  et de  $u_z$ , vitesses directement reliées aux courants  $J_y$  et  $J_z$  intervenant dans le mécanisme de l'instabilité Weibel. Seule la composante de pression  $\Pi_{xx}$ , relative à des effets compressifs dans la direction  $x$ , apparaît dans ces équations, ce qui rend impossible la description de la WI par ce modèle.

Rappelons l'équation d'évolution de  $\mathbf{\Pi}$ , établie au chapitre 2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_{ij,s}}{\partial t} + u_k \frac{\partial \Pi_{ij,s}}{\partial x_k} + \Pi_{ij,s} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Pi_{jk,s} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \Pi_{ik,s} \\ = \frac{q_s}{m_s} (\epsilon_{ilm} \Pi_{lj,s} B_m + \epsilon_{jlm} \Pi_{li,s} B_m). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Le second membre de cette équation est celui qui nous intéresse dans la présente discussion : il introduit un couplage entre une composante  $B_m$  du champ magnétique et les composantes du tenseur de pression orthogonales à  $B_m$ . Il est légitime de penser que ce terme va jouer un rôle important dans la dynamique de l'instabilité Weibel pure. Or, cette interaction entre pression et champ magnétique disparaît si  $i = j$ , c'est à dire pour les composantes diagonales du tenseur. Le rôle des composantes hors diagonale de  $\mathbf{\Pi}$  semble donc primordial.

### 3.1.2 Instabilité CFI

#### 3.1.2.1 Étude en régime froid

Rappelons que l'instabilité de filamentation de courant (CFI) a d'abord été introduite dans le contexte non-relativiste par Fried (cf. Chapitre 1) afin d'illustrer le mécanisme de l'instabilité découverte par Weibel. On rappellera les principaux résultats du traitement froid de l'instabilité CFI, avec un modèle cinétique et avec un modèle fluide. Dans les deux cas, on supposera que les ions demeurent au repos avec une densité  $n_0$ , supposant des phénomènes trop rapides pour qu'ils puissent réagir.

##### 3.1.2.1.a Traitement cinétique de l'instabilité

La fonction de distribution

$$f_0 = [n_1 \delta(v_y - u_1) + n_2 \delta(v_y - u_2)] \delta(v_x) \delta(v_z). \quad (3.19)$$

vérifie la condition de courant total nul à l'équilibre

$$n_1^{(0)} u_1^{(0)} + n_2^{(0)} u_2^{(0)} = 0, \quad (3.20)$$

à laquelle nous ajoutons la contrainte de neutralité du système à l'équilibre,

$$n_1^{(0)} + n_2^{(0)} = n_0, \quad (3.21)$$

$n_0$  désignant la densité électronique totale.

Le comportement de la perturbation  $f^{(1)}$  est donné par l'équation de Vlasov linéarisée,

$$f^{(1)} = \frac{ie}{m_e} \frac{\mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}^{(1)}}{\omega - k_x v_x} \cdot \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{v}}. \quad (3.22)$$

Conformément à la méthode présentée dans la section précédente, on calcule la perturbation de la densité de courant électrique que l'on injecte ensuite dans la relation de dispersion générale (3.6)<sup>1</sup>.

On obtient la matrice de dispersion suivante

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \left( 1 + \frac{k_x^2}{\omega^2} \frac{n_1 u_1^2 + n_2 u_2^2}{n_0} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Les termes hors diagonale  $D_{xy}$  et  $D_{yx}$  étant proportionnels à  $\mathbf{J}^{(0)}$ , ils disparaissent y compris pour des faisceaux non-symétriques.

##### 3.1.2.1.b Traitement fluide de l'instabilité

On se restreint aux deux premiers moments fluides pour décrire le plasma (densité, vitesse moyenne), dont les équations d'évolution

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{u}_s) = 0, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} + (\mathbf{u}_s \cdot \nabla) \mathbf{u}_s = \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) - \frac{\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_s}{m_s n_s}, \quad (3.25)$$

sont fermées par la relation  $\mathbf{\Pi}_s = 0$ . Ces équations sont couplées aux équations de Maxwell. L'équilibre est constitué de deux faisceaux, de densité  $n_1^{(0)}$  (resp.  $n_2^{(0)}$ ) et vitesse moyenne  $u_1^{(0)}$  (resp.  $u_2^{(0)}$ ), satisfaisant les conditions de neutralité électrique et de courant d'équilibre nul. La linéarisation de ce système d'équations conduit elle aussi à l'équation de dispersion (3.23). Il y a donc une équivalence stricte entre les descriptions fluide et cinétique en régime froid puisque la vitesse  $\mathbf{u}$  du modèle fluide, en l'absence de température, représente aussi la vitesse exacte des particules.

---

1. Le calcul de  $\mathbf{J}^{(1)}$  fait intervenir la relation  $x^n \delta^{(n)}(x) = (-1)^n n! \delta(x)$ , vraie au sens des distributions, où  $\delta^{(n)}(x)$  désigne la dérivée  $n$ -ième de la distribution de Dirac.

### 3.1.2.1.c Analyse de la relation de dispersion

Le déterminant de  $\mathbf{D}$  constitue la relation de dispersion du plasma pour des ondes de polarisation linéaire :

$$D_{xx}D_{yy}D_{zz} = 0. \quad (3.26)$$

Elle se compose de trois branches découplées : une électrostatique ( $D_{xx}$ ), deux électromagnétiques. La relation  $D_{xx} = 0$  correspond aux oscillations plasma de pulsation  $\omega_{pe}$ , stables et non-propagatives. La relation  $D_{zz} = 0$  est celle d'une onde électromagnétique, stable et propagative, de pulsation au moins égale à  $\omega_{pe}$ . La relation de dispersion  $D_{yy}$  correspond à celle d'une onde électromagnétique à laquelle on a ajouté un terme dépendant de la vitesse des faisceaux et décrit l'instabilité CFI. Cette dernière relation peut s'écrire sous forme polynomiale<sup>2</sup>,

$$\omega^4 - \omega^2(\omega_{pe}^2 + k_x^2 c^2) + \omega_{pe}^2 k_x^2 u_2 u_1 = 0, \quad (3.28)$$

polynôme dont le discriminant est toujours positif ( $u_2 u_1 < 0$ ), impliquant que  $\omega^2$  soit un nombre réel. Par conséquent,  $\omega$  ne peut être que réel (mode stable propagatif) ou imaginaire pur (mode instable non-propagatif). Les solutions ont donc pour expression

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{\omega_{pe}^2 + k_x^2 c^2}{2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{\omega_{pe}^2 k_x^2 u_1 u_2}{[\omega_{pe}^2 + k_x^2 c^2]^2}} \right], \quad (3.29)$$

où le mode instable correspond à  $\omega_- = i\gamma$ ,  $\gamma > 0$  étant le taux de croissance de l'instabilité. La résolution mathématique du problème implique aussi l'existence d'une seconde solution purement instable, de taux d'amortissement  $-|\gamma|$ . Ce mode amorti est vraisemblablement une solution sans signification physique. Les deux autres modes sont des ondes électromagnétiques stables se propageant dans des sens opposés et de fréquence supérieure à la fréquence plasma. Le caractère non-relativiste du modèle nous autorise à faire un développement de Taylor du terme sous la racine, de sorte que l'on trouve

$$\gamma^2 \simeq \frac{k_x^2 |u_2 u_1|}{1 + k_x^2 d_e^2}, \quad (3.30)$$

$d_e$  étant l'épaisseur de peau.

Considérons  $k_x d_e \gg 1$ , dans ce cas le taux de croissance  $\gamma \sim \sqrt{|u_2 u_1|}/d_e$  est constant : l'instabilité CFI en régime froid n'a donc pas de coupure aux petites longueurs d'onde. Pour  $k_x d_e \ll 1$ , on trouve  $\gamma \sim k_x \sqrt{|u_2 u_1|}$ , une relation de proportionnalité entre le taux de croissance et la vitesse des faisceaux. La Figure 3.2 représente l'ensemble des solutions de l'équation (3.28) pour  $n_1 = 0.35n_0$  et  $u_1 = 0.1c$ .

Pour clore cette partie sur l'instabilité CFI en régime froid, on remarquera que pour des faisceaux symétriques la relation de dispersion devient

$$\omega^4 - (\omega_{pe}^2 + k_x^2 c^2) - \omega_{pe}^2 k_x^2 u_0^2 = 0 \quad (3.31)$$

et conduit à une instabilité de taux de croissance

$$\gamma = \sqrt{\frac{k_x^2 u_0^2}{1 + k_x^2 d_e^2}}. \quad (3.32)$$

### 3.1.2.2 Étude avec température non-nulle

Un système rigoureusement froid n'existe pas. De plus, initialiser une fonction de distribution sous forme d'un pic de Dirac est impossible dans un code semi-lagrangien où une température, pouvant être faible, mais rigoureusement non nulle est nécessaire. La prise en compte des effets de température est donc une nécessité.

2. On doit faire disparaître les densités  $n_1$  et  $n_2$  de l'équation pour obtenir la forme donnée en (3.28). On donne ici le détail de ce calcul. Combiner (3.20) avec (3.21) conduit à  $u_2 = \frac{n_2 - n_0}{n_2} u_1$ . On remplace  $n_1 u_1$  par  $-n_2 u_2$  dans le terme  $D_{yy}$  et on utilise l'expression de  $u_2$  obtenue ci-dessus :

$$\frac{n_1 u_1^2 + n_2 u_2^2}{n_0} = -\frac{n_2 u_2}{n_0} u_1 + u_2 u_1 \left( \frac{n_2}{n_0} - 1 \right) = -u_2 u_1. \quad (3.27)$$

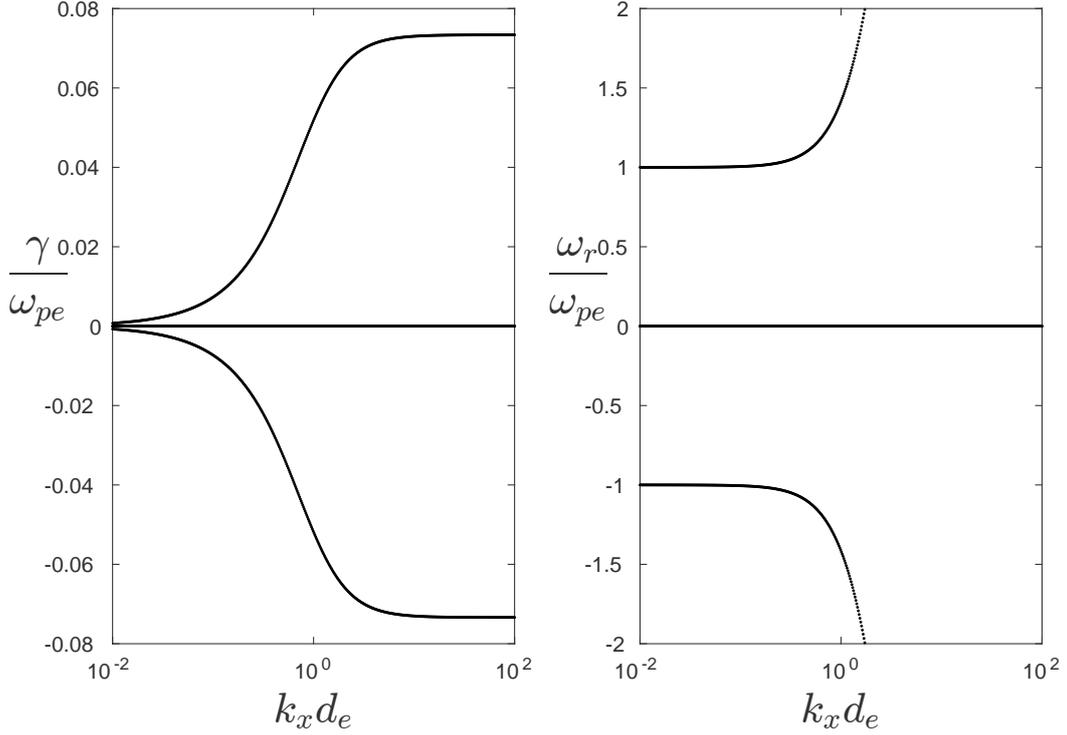


FIGURE 3.2 – Instabilité CFI en régime froid – Taux de croissance (gauche) et fréquence (droite) des quatre modes solutions de la relation de dispersion (3.28) pour  $n_1 = 0.35$  et  $u_1 = 0.1$ .

### 3.1.2.2.a Modèle cinétique

On choisit de perturber un équilibre constitué de deux faisceaux indiqués par  $s = \{1, 2\}$  et alignés le long de l'axe  $y$ . Chaque faisceau a une densité  $n_s^{(0)}$ , une vitesse  $u_s^{(0)}$ , une température  $T_s$  et est décrit par une fonction de distribution du type

$$f_s^{(0)} = n_s^{(0)} \left( \frac{m}{2\pi k_B T_s} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left( -\frac{v_x^2 + (v_y - u_s^{(0)})^2 + v_z^2}{2a_s^2} \right), \quad (3.33)$$

où  $a_s \equiv \sqrt{k_B T_s / m}$ . Les deux faisceaux peuvent avoir une température différente ( $T_1 \neq T_2$ ).

La perturbation se propage le long de  $x$ , perpendiculaire aux faisceaux. Par conséquent, l'expression générale de l'équation de dispersion est la même que pour l'instabilité Weibel pure,

$$D_{ij} E_j^{(1)} \equiv \left( \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij} - k_x^2 \delta_{ij} + k_i k_j \right) E_j^{(1)} = 0. \quad (3.34)$$

L'équation de Vlasov linéarisée a la forme suivante,

$$f^{(1)} = -\frac{ie}{m_e} \frac{m_e}{k_B T_s} \frac{v_x E_x^{(1)} + (v_y - u_s^{(0)}) E_y^{(1)} + v_z E_z^{(1)}}{\omega - k_x v_x} f_s^{(0)} - \frac{ie}{m_e} \frac{m_e}{k_B T_s} \frac{k_x}{\omega} \frac{v_x u_s^{(0)}}{\omega - k_x v_x} f_s^{(0)} E_y^{(1)}, \quad (3.35)$$

et nous conduit à la matrice de dispersion

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & 0 \\ D_{yx} & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

avec

$$D_{xx} = \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \sum_s \omega_{ps}^2 \frac{1 + \xi_s Z_s}{k_x^2 a_s^2}, \quad (3.37)$$

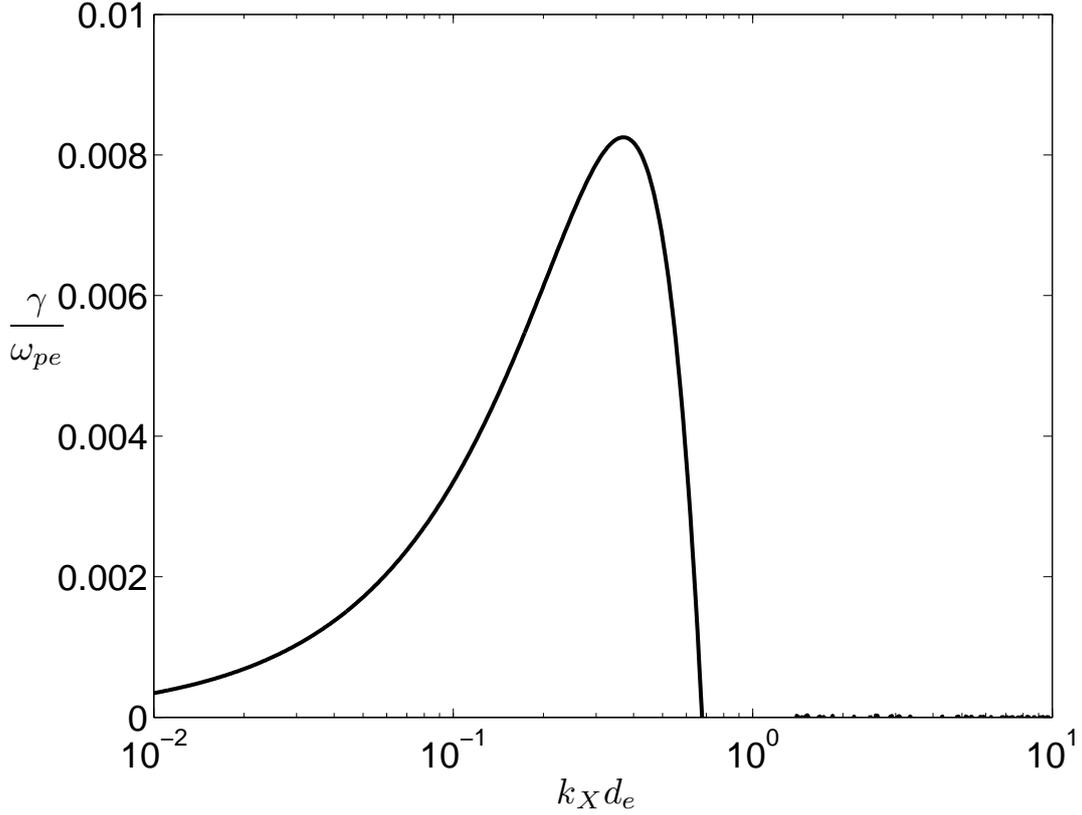


FIGURE 3.3 – Instabilité CFI en régime cinétique – Branche instable non-propagative de  $D_{yy} = 0$  (3.38) pour  $n_1 = 0.35$ ,  $u_1 = 0.1$  et  $T_1 = T_2 = 6 \text{ keV}$ . La coupure est conforme à l'expression (3.42) avec une valeur  $k_c \sim 0.677$ .

$$D_{yy} = \frac{\omega^2}{c^2} + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{c^2} \xi_s Z_s - k_x^2 + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{c^2} \left( \frac{u_s^{(0)}}{a_s} \right)^2 (1 + \xi_s Z_s), \quad (3.38)$$

$$D_{zz} = \frac{\omega^2}{c^2} + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{c^2} \xi_s Z_s - k_x^2, \quad (3.39)$$

$$D_{xy} = \sum_s \omega_{ps}^2 u_s^{(0)} \frac{\omega}{c^2} \frac{1 + \xi_s Z_s}{k_x a_s^2} = D_{yx}, \quad (3.40)$$

où  $Z_s \equiv Z(\xi_s)$  et  $\xi_s \equiv \omega/(\sqrt{2}k_x a_s)$ . Cette fois-ci, la relation de dispersion

$$D_{zz} [D_{xx} D_{yy} - D_{xy}^2] = 0 \quad (3.41)$$

se découple en deux branches. La première branche,  $D_{zz} = 0$ , décrit la propagation d'une onde électromagnétique stable de polarisation linéaire. La seconde branche est plus complexe. En effet, les éléments non diagonaux  $D_{xy}$  ne sont pas nuls, sauf si  $T_s$  est la même pour les deux faisceaux. Il y a donc, en général, un couplage entre les ondes de Langmuir décrites par  $D_{xx}$  et l'instabilité CFI décrite par  $D_{yy}$ <sup>3</sup>.

Par conséquent, la CFI n'est plus à strictement parler une instabilité électromagnétique : elle peut être partiellement électrostatique [6][7] lorsque les températures sont différentes, mais aussi en régime relativiste [8] lorsque les faisceaux ne sont plus symétriques en densité. Du fait de la condition de courant nul à l'équilibre, la symétrie sur la vitesse des faisceaux est brisée. Or, le facteur de Lorentz dépendant de  $u_s^{(0)}$  intervient dans l'expression de  $D_{xy}$ , ce qui implique le couplage entre  $D_{xx}$  et  $D_{yy}$ .

Plaçons nous dans le cas où ce couplage disparaît (on choisit  $T_s = 6 \text{ keV}$ ) et résolvons la relation de dispersion de la CFI "pure"  $D_{yy} = 0$  pour les paramètres utilisés dans le cas froid ( $n_1 = 0.35$  et  $u_1 = 0.1$ ) (Figure 3.3).

3. On peut remarquer que, comme en régime froid, le terme  $D_{yy}$  correspond à  $D_{zz}$  auquel on ajoute un terme dépendant de la vitesse des faisceaux.

La principale différence avec le cas froid, outre un taux de croissance plus faible (lié à la dispersion en vitesse des électrons parallèlement à la direction de propagation de l'onde, réduisant le nombre de particules pleinement en phase avec l'onde et donc réduisant la "force" de l'instabilité), consiste en l'apparition d'une coupure aux petites longueurs d'onde, notée  $k_x = k_c$ . L'instabilité restant non-propagative, on impose  $\omega = 0$  dans l'expression de  $D_{xx}$  pour trouver l'expression de  $k_c$  :

$$k_c = \sqrt{\sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{c^2} \left( \frac{u_s^{(0)}}{a_s} \right)^2}, \quad (3.42)$$

devenant  $k_c = \frac{\omega_{pe}}{c} \frac{u_0}{a_s}$  avec  $u_0 > 0$  si les faisceaux sont symétriques. On notera que, contrairement à l'instabilité Weibel, la CFI pure ne présente pas de seuil de déclenchement, l'existence même des deux faisceaux étant déjà une anisotropie. Rappelons enfin que cette configuration est instable pour des perturbations dont le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  forme un angle quelconque avec la direction des faisceaux : ce dernier point constitue une différence majeure par rapport à l'instabilité Weibel pure.

### 3.1.2.2.b Modélisation fluide avec une pression diagonale

Une modélisation fluide satisfaisante doit a minima reproduire les comportements évoqués ci-dessus, comme le couplage avec les ondes de Langmuir en présence de deux faisceaux de température différente, la présence de la coupure  $k_c$  ou l'absence de seuil de déclenchement. L'anisotropie source de l'instabilité étant liée à la vitesse moyenne des deux faisceaux, on pourrait se contenter d'introduire une pression scalaire dans les équations froides plutôt que le tenseur de pression complet. Les équations sont

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{u}_s) = 0, \quad (3.43)$$

$$m n_\alpha \left( \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} + (\mathbf{u}_s \cdot \nabla) \mathbf{u}_s \right) = -e n_s (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) - \nabla p_s, \quad (3.44)$$

et

$$\frac{dp_s}{dt} + \Gamma p_s \nabla \cdot \mathbf{u}_s = 0, \quad (3.45)$$

où  $\Gamma$  est un indice à déterminer (correspondant à une transformation polytropique du type  $d(p_s n_s^{-\Gamma})/dt = 0$ ). Le problème étant 1D, le gradient de pression n'aura qu'une seule composante, orientée le long de l'axe  $x$ .

Les équations fluides linéarisées dans l'espace de Fourier ont la forme suivante,

$$n_s^{(1)} = n_s^{(0)} \frac{k_x}{\omega} u_{s,x}^{(1)} \quad (3.46)$$

$$u_{s,x}^{(1)} \left[ 1 - \frac{\Gamma p_s^{(0)}}{m_e n_s^{(0)}} \frac{k_x^2}{\omega^2} \right] = -\frac{ie}{m_e \omega} E_x^{(1)} - \frac{ie}{m_e \omega} \frac{k_x u_{s,y}^{(0)}}{\omega} E_y^{(1)} \quad (3.47)$$

$$u_{s,y}^{(1)} = -\frac{ie}{m_e \omega} E_y^{(1)} \quad (3.48)$$

$$u_{s,z}^{(1)} = -\frac{ie}{m_e \omega} E_z^{(1)} \quad (3.49)$$

$$p_s^{(1)} = p_s^{(0)} \Gamma \frac{k_x}{\omega} u_{s,x}^{(1)}. \quad (3.50)$$

En combinant ceci aux équations de Maxwell, la matrice de dispersion (3.6) s'écrit

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{c^2} \left[ 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2 - k_x^2 \Gamma a_s^2} \right] & -\frac{\omega^2}{c^2} \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2 - k_x^2 \Gamma a_s^2} \frac{k_x u_{s,y}^{(0)}}{\omega} & 0 \\ -\frac{\omega^2}{c^2} \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2 - k_x^2 \Gamma a_s^2} \frac{k_x u_{s,y}^{(0)}}{\omega} & \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} - k_x^2 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{c^2} \frac{k_x^2 u_{s,y}^{(0)2}}{\omega^2 - k_x^2 \Gamma a_s^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} - k_x^2 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

où on a défini

$$a_s = \sqrt{\frac{p_s^{(0)}}{m_e n_s^{(0)}}}. \quad (3.52)$$

Un lien avec la vitesse  $a_s$  introduite dans le cadre cinétique peut être établi en considérant  $p_s^{(0)} \equiv n_s^{(0)} k_B T_s$ , ce qui est garanti pour l'équilibre Maxwellien isotrope en température défini par (3.33).

Comme dans le cas cinétique, les éléments hors diagonale  $D_{xy}$  sont nuls dès que les faisceaux ont la même température. La relation de dispersion de la CFI électromagnétique, pour des faisceaux dont la densité, la vitesse et la température ( $a_s = a, \forall s$ ) sont symétriques, s'écrit :

$$0 = \omega^4 - \omega^2 [\omega_{pe}^2 + k_x^2 c^2 + k_x^2 \Gamma a^2] + k_x^4 c^2 \Gamma a^2 - \omega_{pe}^2 k_x^2 (u_0^2 - \Gamma a^2). \quad (3.53)$$

Poser  $\omega = 0$  nous permet de trouver une expression pour la coupure de l'instabilité,

$$k_c = \sqrt{\frac{u_0^2}{\Gamma a^2} - 1}. \quad (3.54)$$

On se heurte alors à deux problèmes avec ce type de description. Le premier, à notre connaissance non référencé dans la littérature jusqu'à présent, est que le modèle prédit un seuil ( $|u_0| > \sqrt{\Gamma a}$ ) pour l'instabilité CFI, caractéristique absente de l'analyse cinétique. Ce seuil a par ailleurs une expression analytique similaire à celle de l'instabilité Weibel pure. Nous sommes donc en présence d'un artefact indésirable créé par l'introduction d'une pression scalaire dans le modèle.

Le deuxième problème réside dans le choix d'une valeur pour l'indice polytropique  $\Gamma$ . Pour illustrer ce problème, considérons par exemple le rapport  $k_x a_s / \omega$  petit, impliquant que  $\xi$  (l'argument de la fonction de dispersion plasma (3.13)) soit grand, nous autorisant à développer la fonction  $Z$  comme suit :

$$Z(\xi_s) \sim -\frac{1}{\xi_s} \left[ 1 + \frac{1}{2\xi_s^2} + \frac{3}{4\xi_s^4} \right] \quad (3.55)$$

Le coefficient  $D_{xx}$  de la relation de dispersion cinétique devient donc

$$D_{xx} \simeq \frac{\omega^2}{c^2} \left[ 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{3k_x^2 a_x^2}{\omega^2} \right) \right]. \quad (3.56)$$

Appliquant la même condition à l'élément  $D_{xx}$  de la modélisation fluide, nous trouvons,

$$D_{xx} \simeq \frac{\omega^2}{c^2} \left[ 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{\Gamma k_x^2 a_x^2}{\omega^2} \right) \right], \quad (3.57)$$

ce qui plaide pour choisir  $\Gamma = 3$  de sorte que les deux expressions soient égales. Profitons-en pour souligner que dans cette description fluide la vitesse thermique  $a_s$  est toujours accompagnée du facteur  $\Gamma$ .

Réitérons maintenant le même raisonnement avec la composante  $D_{yy}$ . Un développement sur le coefficient cinétique donne :

$$\begin{aligned} D_{yy} &= \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} - k_x^2 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{c^2} \left( \frac{k_x^2 a_s^2}{\omega^2} + \frac{3k_x^4 a_s^4}{\omega^4} \right) \left( 1 + \frac{u_{s,y}^{(0)2}}{a_s^2} \right) \\ &= \underbrace{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} - k_x^2 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{c^2} \frac{k_x^2 u_{s,y}^{(0)2}}{\omega^2}}_{\text{Partie froide}} - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{c^2} \frac{k_x^2 a_s^2}{\omega^2} - \underbrace{\sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{c^2} \frac{3k_x^4 a_s^4}{\omega^4}}_{\text{ordre 4 en } \xi^{-1}} - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{c^2} \frac{3k_x^4 a_s^2 u_{s,y}^{(0)2}}{\omega^4}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Le premier terme de ce développement est qualifié de "partie froide" car il correspond à la relation de dispersion (3.23). Le terme suivant est le premier terme "chaud" généré par le développement de  $Z$ . On voit que le facteur 3 n'apparaît pas devant la vitesse thermique  $a_s$ , laissant envisager un  $\Gamma$  polytropique de 1. En revanche, il apparaît pour le dernier terme retenu dans le développement.

Le développement du coefficient fluide nous conduit à

$$\begin{aligned} D_{yy} &= \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} - k_x^2 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{c^2} \frac{k_x^2 u_{s,y}^{(0)2}}{\omega^2} \left( 1 + \frac{k_x^2 \Gamma a_s^2}{\omega^2} + \frac{k_x^4 \Gamma^2 a_s^4}{\omega^4} \right) \\ &= \underbrace{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} - k_x^2 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{c^2} \frac{k_x^2 u_{s,y}^{(0)2}}{\omega^2}}_{\text{Partie froide}} - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{c^2} \frac{\Gamma k_x^4 a_s^2 u_{s,y}^{(0)2}}{\omega^4} - \underbrace{\sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{c^2} \frac{k_x^4 \Gamma^2 a_s^4}{\omega^4}}_{\text{ordre 4 en } \xi^{-1}}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

expression dans laquelle le premier terme cinétique "chaud", correspondant à  $\Gamma = 1$  est absent. On retrouve par contre le dernier terme avec  $\Gamma = 3$ . La relation de dispersion cinétique suggère l'existence de deux indices  $\Gamma$  différents, et donc une anisotropisation progressive du tenseur de pression, laquelle pourrait nécessiter l'introduction des éléments hors diagonale dans les calculs.

En conclusion, l'introduction d'un terme de pression scalaire introduit des anomalies dans la description de l'instabilité CFI. Nous allons donc ajouter un degré de complexité supplémentaire au modèle, en introduisant la dynamique complète du tenseur de pression, et en particulier celle des termes non diagonaux.

## 3.2 Modélisation fluide des instabilités Weibel

On introduira dans cette section la dynamique du tenseur de pression complet dans le modèle fluide. On se limitera au régime non-relativiste afin de pouvoir traiter le cas de l'anisotropie de température, responsable du déclenchement de la WI.

### 3.2.1 Équations du modèle

Les équations fluides utilisées sont celles présentées au Chapitre 2, section 2.4.5,

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{u}_s) = 0, \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} + (\mathbf{u}_s \cdot \nabla) \mathbf{u}_s = \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) - \frac{\nabla \cdot \Pi_s}{m_s n_s}, \quad (3.61)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_{ij,s}}{\partial t} + u_{k,s} \frac{\partial \Pi_{ij,s}}{\partial x_k} + \Pi_{ij,s} \frac{\partial u_{k,s}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_{i,s}}{\partial x_k} \Pi_{jk,s} + \frac{\partial u_{j,s}}{\partial x_k} \Pi_{ik,s} \\ = \frac{q_s}{m_s} (\epsilon_{ilm} \Pi_{lj,s} B_m + \epsilon_{jlm} \Pi_{li,s} B_m). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Le système d'équations fluides relatives est fermé par la relation  $\nabla \cdot \mathbf{Q}_s = 0$ . Ce choix et ses conséquences seront discutés un peu plus loin dans ce chapitre.

Les équations de Maxwell constituent le deuxième ensemble d'équations que nous utiliserons pour cette description fluide :

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \sum_s \mathbf{J}_s + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3.63)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_s q_s n_s, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.64)$$

où la densité volumique de courant relative à l'espèce  $s$  est reliée aux moments fluides par l'expression :

$$\mathbf{J}_s = q_s n_s \mathbf{u}_s. \quad (3.65)$$

### 3.2.2 Description de l'équilibre

On considère un système composé de deux faisceaux d'électrons indicés  $s$  et évoluant dans un fond ionique (de charge électrique  $+e$ ) homogène et stationnaire. Toutes les grandeurs d'équilibre relatives aux électrons sont elles aussi supposées homogènes et stationnaires. La densité d'un faisceau à l'équilibre, notée  $n_s^{(0)}$ , satisfait l'équation de neutralité :

$$n_0 = \sum_s n_s^{(0)} = n_1^{(0)} + n_2^{(0)}, \quad (3.66)$$

où  $n_0$  désigne la densité totale d'électrons (et aussi la densité du fond ionique). Ceci nous permet d'exclure l'existence d'un champ électrique d'ambiance, par conséquent  $\mathbf{E}^{(0)} = 0$ . Profitons-en pour définir la pulsation plasma électronique totale  $\omega_{pe}$  vérifiant :

$$\omega_{pe}^2 = \frac{e^2 n_0}{m_e \epsilon_0} = \omega_{pe1}^2 + \omega_{pe2}^2. \quad (3.67)$$

Les pulsations  $\omega_{p1}$  et  $\omega_{p2}$  sont propres à chacun des deux faisceaux.

La vitesse d'ensemble d'un faisceau, notée  $\mathbf{u}_s^{(0)}$ , satisfait la condition de courant nul à l'équilibre,

$$\sum_s n_s^{(0)} \mathbf{u}_s^{(0)} = 0 = n_1^{(0)} \mathbf{u}_1^{(0)} + n_2^{(0)} \mathbf{u}_2^{(0)}, \quad (3.68)$$

de sorte que nous puissions exclure l'existence d'un champ magnétique d'équilibre lié à un courant global. Il n'y a pas non plus de champ magnétique "extérieur", d'où  $\mathbf{B}^{(0)} = 0$ . On choisit d'orienter les faisceaux le long de l'axe  $y$ , ainsi,  $\mathbf{u}_s^{(0)} = u_{s,y}^{(0)} \mathbf{e}_y$ .

Enfin, chaque faisceau dispose de son propre tenseur de pression, supposé diagonal à l'équilibre, mais dont toutes les composantes peuvent évoluer au fil du temps selon l'équation (3.62) :

$$\mathbf{\Pi}_s^{(0)} = \begin{bmatrix} \Pi_{xx,s}^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_{yy,s}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_{zz,s}^{(0)} \end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

Dans la continuité des notations utilisées dans les sections précédentes de ce chapitre, on définit les vitesses caractéristiques

$$a_{x,s}^2 \equiv \frac{\Pi_{xx,s}^{(0)}}{m_e n_s^{(0)}}, \quad a_{y,s}^2 \equiv \frac{\Pi_{yy,s}^{(0)}}{m_e n_s^{(0)}}, \quad a_{z,s}^2 \equiv \frac{\Pi_{zz,s}^{(0)}}{m_e n_s^{(0)}}. \quad (3.70)$$

Le choix de cette forme pour l'équilibre de pression doit être justifié. D'une part, le plasma n'étant ni collisionnel ni magnétisé, il n'y a pas lieu de supposer que les composantes du tenseur puissent être égales, même initialement. D'autre part, les faisceaux sont alignés le long de l'un des axes principaux d'anisotropie du tenseur de pression, d'où la forme diagonale de celui-ci. Ce choix est motivé par plusieurs raisons, physiques comme pratiques.

Tout d'abord, bien que particulière, cette configuration est représentative de l'anisotropisation observée dans certains problèmes de diffusion Raman stimulée en régime non-relativiste [9][10][11][12] ou de transparence auto-induite [13][14] en régime relativiste. Dans ce contexte, la symétrie de la fonction de distribution dans l'espace des phases est alors essentiellement déterminée par la direction de propagation de l'onde laser incidente, ce qui a tendance à déterminer l'orientation des axes principaux du tenseur de pression. En effet, les processus de chauffage sont différents selon que l'on regarde la direction parallèle ou la direction transverse à l'onde, d'où l'anisotropisation. Une fraction significative de l'énergie incidente chauffe les électrons longitudinalement durant la phase de pénétration et génère un faisceau d'électrons chauds. Un courant de retour plus froid apparaît pour le compenser. Cette configuration peut alors être modélisée comme deux faisceaux contra-propageants, dont la direction est parallèle à l'un des axes principaux du tenseur de pression.

Ce modèle peut être vu comme une première étape de compréhension avant inclusion d'un champ magnétique d'ambiance parallèle aux faisceaux, pour étudier notamment les instabilités de type Weibel présentes dans le vent solaire (où le tenseur de pression a tendance à adopter une symétrie gyrotrique) et avant inclusion d'effets relativistes.

Dans ce chapitre, on souhaite s'intéresser essentiellement à deux types de problèmes : la propagation perpendiculaire ou parallèle à la direction des faisceaux. Or, l'instabilité Weibel pure, induite par une anisotropie de température, nécessite généralement une température transverse à  $\mathbf{k}$  supérieure à la température longitudinale. Un tenseur de pression dont l'un des axes principaux est aligné le long des faisceaux nous permet de relier directement ses composantes aux températures cinétiques d'une distribution Maxwellienne triple du type (3.1) par la relation

$$\frac{\Pi_{xx,s}^{(0)}}{m_e n_s^{(0)}} = \frac{k_B T_x}{m_e}, \quad (3.71)$$

ce qui permet une comparaison directe avec les nombreuses études [15][16][17][18] [19][3][2] cinétiques traitant cette configuration.

Enfin, ce choix simplifie de façon significative le problème en allégeant l'expression des relations de dispersion obtenues. L'un des arguments plaidant en faveur de l'utilisation d'un modèle fluide consiste en sa plus grande facilité de mise en oeuvre par rapport à la théorie cinétique. On souhaite établir analytiquement un maximum de résultats pertinents.

L'équilibre étant défini, nous pouvons le perturber et analyser le comportement du plasma en identifiant les modes propres, en particulier ceux de type Weibel.

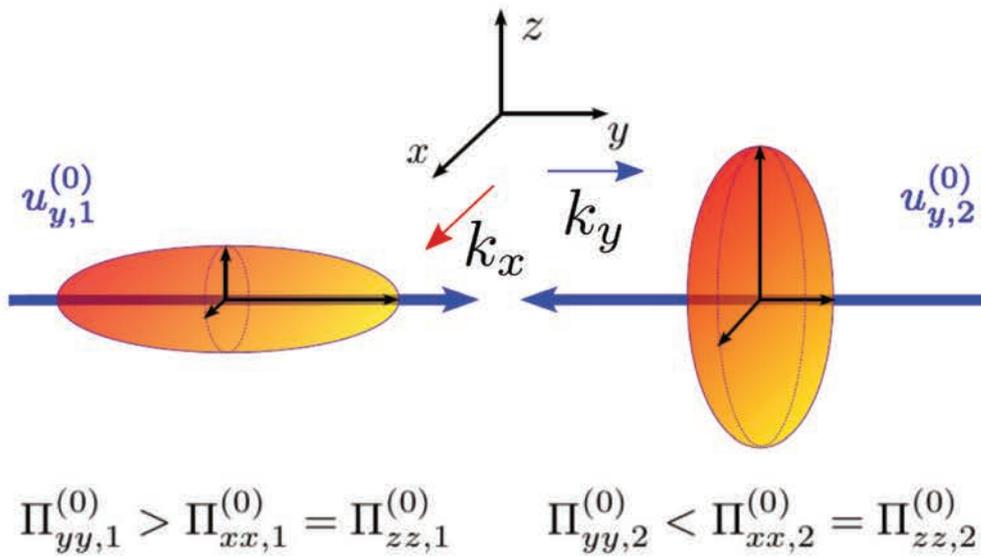


FIGURE 3.4 – Représentation du système de faisceaux introduit dans la Section 3.2.2 comme équilibre. L'ellipse orange correspond au tenseur de pression, dont l'un des axes principaux est aligné selon la direction des faisceaux (contra-propageants, représentés par deux flèches bleues de sens opposés). La configuration est instable du point de vue des instabilités CFI et TSI selon que la perturbation est dirigée selon l'axe  $Ox$  ou l'axe  $Oy$ . Cette configuration est également instable pour une propagation oblique par rapport aux faisceaux (modes obliques), mais nous nous limitons à des problèmes 1D.

### 3.3 Propagation perpendiculaire : WI, CFI et couplage

On commence par analyser la propagation perpendiculaire à la direction des faisceaux<sup>4</sup>. Le vecteur d'onde est donc dirigé selon l'axe  $Ox$  ( $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x$ ).

#### 3.3.1 Équation de dispersion

La linéarisation des équations fluides (3.60)-(3.64) conduit à deux systèmes d'équations indépendants. Le premier décrit la dynamique du plasma dans le plan  $(xOy)$ , quant au second il décrit celle le long de l'axe  $Oz$ . Cette symétrie se retrouve naturellement dans la structure de la matrice de dispersion,

$$[\mathbf{D}] = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & 0 \\ D_{xy} & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{pmatrix}, \quad (3.72)$$

pour laquelle  $\det[\mathbf{D}] = 0$  conduit à la relation de dispersion  $D_{xx}D_{yy} - D_{xy}^2 = 0$ . Les coefficients de  $[\mathbf{D}]$  s'écrivent :

$$D_{xx} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \sum_s \frac{\omega_{pe,s}^2}{\omega^2 - 3k_x^2 a_{x,s}^2}, \quad (3.73)$$

$$D_{xy} = -\frac{\omega^2}{c^2} \sum_s \frac{k_x u_{y,s}^{(0)}}{\omega} \left( \frac{\omega_{pe,s}^2}{\omega^2 - 3k_x^2 a_{x,s}^2} \right), \quad (3.74)$$

$$D_{yy} = \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - \sum_s \frac{\omega_{pe,s}^2}{c^2} \left( \frac{\omega^2 + k_x^2 (a_{z,s}^2 - a_{x,s}^2)}{\omega^2 - k_x^2 a_{x,s}^2} + \frac{(k_x u_{y,s}^{(0)})^2}{\omega^2 - 3k_x^2 a_{x,s}^2} \right), \quad (3.75)$$

$$D_{zz} = \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - \sum_s \frac{\omega_{pe,s}^2}{c^2} \left( \frac{\omega^2 + k_x^2 (a_{z,s}^2 - a_{x,s}^2)}{\omega^2 - k_x^2 a_{x,s}^2} \right). \quad (3.76)$$

La branche  $D_{zz} = 0$  décrit l'instabilité Weibel pure, c'est à dire une onde électromagnétique relative au champ  $(E_z, B_y)$  dénaturée par l'existence d'une anisotropie de température. Nous détaillerons son analyse en section 3.3.4. Cette instabilité s'évanouit si on choisit  $\Pi_{yy,s}^{(0)} = \Pi_{zz,s}^{(0)}$  à l'équilibre, conformément au comportement prédit par la théorie cinétique. Les modes issus de cette branche sont découplés de ceux de la seconde car la WI va générer un champ magnétique en  $B_y$  colinéaire aux faisceaux, annulant la force de Lorentz  $\mathbf{u}^{(0)} \times \mathbf{B}$ .

La branche  $D_{xx}D_{yy} - D_{xy}^2 = 0$  décrit entre autres modes l'instabilité résultant du couplage entre les ondes électrostatiques ( $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = 0$ ) de Langmuir/Böhm-Gross (décrits par  $D_{xx} = 0$ ), et les modes WI-CFI purement électromagnétiques ( $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ ) décrits par  $D_{yy} = 0$ . L'angle  $\theta$  entre le vecteur d'onde et le champ électrique, défini par  $\nabla \cdot \mathbf{E} = kE \cos(\theta)$  [8] satisfait la relation

$$\tan(\theta) \equiv \frac{E_y^{(1)}}{E_x^{(1)}} = \frac{|D_{xx}|}{|D_{xy}|}. \quad (3.77)$$

À  $D_{xy} = 0$  correspond  $\theta = \pi/2$  et  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}^{(0)} = 0$ . Sans couplage, les modes WI-CFI sont donc purement électromagnétiques. En cela, nous retrouvons encore le comportement cinétique espéré puisqu'il suffit d'avoir des faisceaux de "températures" égales pour que  $D_{xy} = 0$  et que ce couplage disparaisse. Cette condition sur la symétrie des températures peut être réécrite en fonction des grandeurs fluides :

$$\frac{\Pi_{xx,1}^{(0)}}{n_1^{(0)}} = \frac{\Pi_{xx,2}^{(0)}}{n_2^{(0)}}. \quad (3.78)$$

Combinée à la condition de courant nul à l'équilibre (3.68), on obtient

$$\Pi_{xx,1}^{(0)} u_{1,y}^{(0)} + \Pi_{xx,2}^{(0)} u_{2,y}^{(0)} = 0. \quad (3.79)$$

Pour assurer un découplage des branches électrostatique et électromagnétique, le transport global de la composante  $\Pi_{xx}$  le long des faisceaux doit être nul.

<sup>4</sup>. Les travaux présentés dans cette section ont fait l'objet d'une publication dans la revue EuroPhysics Letters (EPL) [7]

### 3.3.2 Couplage des modes WI-CFI

On s'intéresse maintenant à une configuration parfaitement symétrique, pour laquelle  $n_2^{(0)} = n_1^{(0)} = n_0/2$ ,  $u_{2,y}^{(0)} = -u_{1,y}^{(0)} \equiv -u_0$  et  $\mathbf{\Pi}_2^{(0)} = \mathbf{\Pi}_1^{(0)}$  impliquant  $a_{s,x} = a_x$ ,  $\forall s$  et  $a_{s,y} = a_y$ ,  $\forall s$ .

La branche  $D_{yy} = 0$  est maintenant découplée de la partie électrostatique et cette relation de dispersion peut-être réécrite sous une forme polynômiale de degré 6<sup>5</sup>,

$$0 = \omega^6 - \omega^4 [\omega_{pe}^2 + k_x^2 (c^2 + a_x^2) + 3k_x^2 a_x^2] + \omega^2 [3k_x^4 a_x^4 + 4k_x^4 c^2 a_x^2 + \omega_{pe}^2 k_x^2 (4a_x^2 - u_0^2 - a_y^2)] + \omega_{pe}^2 k_x^4 [u_0^2 a_x^2 + 3a_x^2 (a_y^2 - a_x^2)] - 3k_x^6 c^2 a_x^4. \quad (3.80)$$

Cette relation de dispersion possède une coupure telle que  $\omega \equiv \omega_r + i\gamma = 0$  pour  $k_x = k_c$  avec

$$k_c d_e = \sqrt{\underbrace{\frac{u_0^2}{3a_x^2}}_{CFI} + \underbrace{\frac{a_y^2 - a_x^2}{a_x^2}}_{WI}}. \quad (3.81)$$

On peut mettre en évidence la contribution des instabilités CFI et Weibel dans l'expression (3.81) : la coupure de l'instabilité couplée est une somme pythagoricienne de la coupure de chaque instabilité considérée séparément. Cette coupure implique l'existence d'un seuil de déclenchement pour l'instabilité, tel que

$$\frac{u_0^2}{3a_x^2} + \frac{a_y^2}{a_x^2} > 1 \Leftrightarrow a_x^2 < a_y^2 + \frac{u_0^2}{3} \quad (3.82)$$

condition pouvant aussi être réécrite comme

$$\frac{1}{3} m_e u_0^2 + k_B T_y > k_B T_x. \quad (3.83)$$

Lorsque l'anisotropie de température disparaît, le seuil en fait de même.

La figure 3.5 représente les solutions de l'équation (3.80) pour  $u_0 = 0.2$ ,  $a_x \simeq 0.0442$  et  $a_y \simeq 0.1399$ . Le panneau de gauche représente le taux de croissance  $\gamma$  des six modes existants en fonction de  $k_x$ , le panneau de droite représente leur fréquence réelle  $\omega_r$ . Quatre modes sont stables et propagatifs (donc confondus sur l'axe  $\gamma = 0$  sur la figure de gauche) quelle que soit la valeur de  $k_x$ . Les deux modes instables, un croissant et un amorti (a priori sans signification physique), présentent un taux de croissance maximal  $|\gamma| \simeq 0.177$  pour  $k_x \simeq 1.67$  ainsi qu'une coupure à  $k_c \simeq 3.98$  au-delà de laquelle ils deviennent stables et propagatifs. Cette coupure apparaît comme une bifurcation sur le spectre de droite. Au-delà, les deux modes se propagent dans des directions opposées mais avec la même fréquence.

On pourrait calculer le discriminant du polynôme de degré 3 pour mettre en évidence les différents régimes de cette relation de dispersion : l'expression analytique serait inutilisable compte tenu de sa lourdeur. Remarquons cependant que deux modes stables ont une fréquence telle que  $|\omega| = |\omega_r| > 1$ ,  $\forall k_x$ . Les modes WI-CFI instables, non-propagatifs, ont un taux de croissance beaucoup plus faible. Pour analyser ces modes plus en détail, on peut choisir de simplifier la relation de dispersion (3.80) en appliquant l'approximation  $\omega \ll \omega_{pe}$  (cf. termes barrés ci-dessous),

$$0 = \cancel{\omega^6} - \omega^4 [\omega_{pe}^2 + k_x^2 (c^2 + \cancel{a_x^2}) + 3\cancel{k_x^2 a_x^2}] + \omega^2 [3\cancel{k_x^4 a_x^4} + 4k_x^4 c^2 a_x^2 + \omega_{pe}^2 k_x^2 (4a_x^2 - u_0^2 - a_y^2)] + \omega_{pe}^2 k_x^4 [u_0^2 a_x^2 + 3a_x^2 (a_y^2 - a_x^2)] - 3k_x^6 c^2 a_x^4, \quad (3.84)$$

conduisant à

$$0 \simeq \omega^4 - \omega^2 \left( 4k_x^2 a_x^2 - \frac{\omega_{pe}^2 k_x^2 (u_0^2 + a_y^2)}{\omega_{pe}^2 + k_x^2 c^2} \right) + 3k_x^4 a_x^4 - \frac{\omega_{pe}^2 k_x^4 a_x^2}{\omega_{pe}^2 + k_x^2 c^2} [u_0^2 + 3a_y^2]. \quad (3.85)$$

Cette approximation n'altère pas la coupure de l'instabilité, élimine les branches électromagnétiques stables à  $|\omega_r| > 1$  et nous permet d'obtenir analytiquement des solutions, ce polynôme étant de degré 2 en  $\omega^2$ . Le discriminant de (3.85) s'écrit :

$$\Delta = \left( 4k_x^2 a_x^2 - \frac{\omega_{pe}^2 k_x^2 (u_0^2 + a_y^2)}{\omega_{pe}^2 + k_x^2 c^2} \right)^2 + 4k_x^4 a_x^2 \frac{\omega_{pe}^2 (u_0^2 + 3(a_y^2 - a_x^2)) - 3k_x^2 c^2 a_x^2}{\omega_{pe}^2 + k_x^2 c^2}. \quad (3.86)$$

5. Poser  $a_y = a_x = 0$  conduit bien à la relation de dispersion froide (3.31).

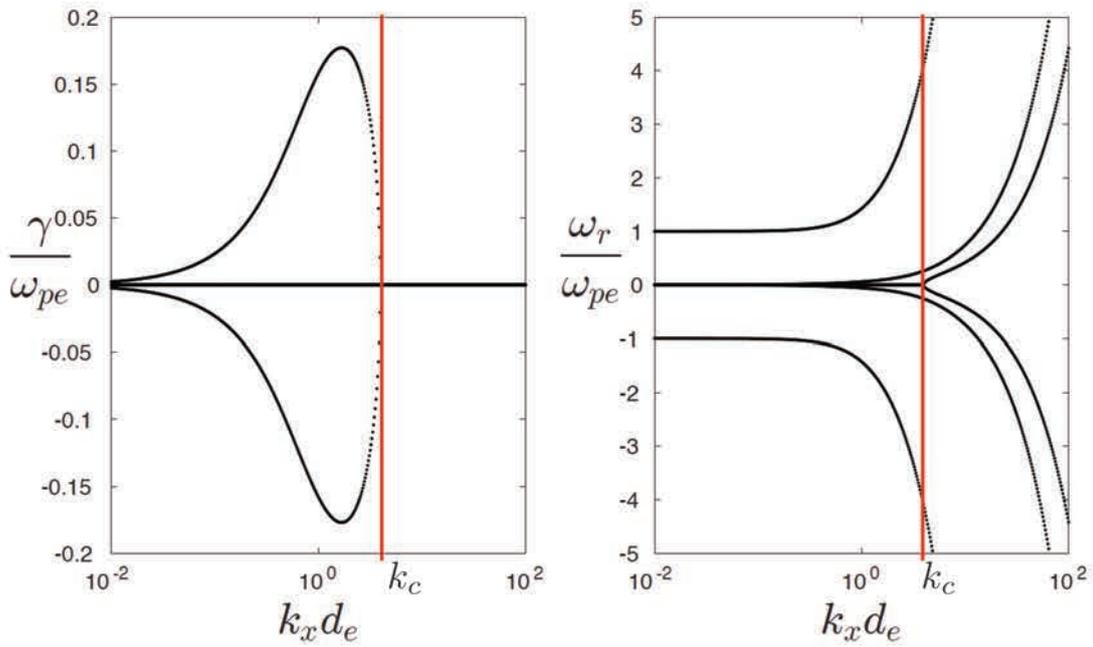


FIGURE 3.5 – Solutions de l'équation (3.80) pour  $u_0 = 0.2$ ,  $a_x \simeq 0.0442c$  et  $a_y \simeq 0.1399c$ , correspondant à une anisotropie de pression  $a_y^2/a_x^2 = 10$ . Des six branches, seulement deux sont instables (cf. figure de gauche), non propagatives pour  $k_x d_e < k_c d_e \simeq 3.98$ . La coupure apparaît comme une bifurcation sur la figure de droite. Les quatre autres modes ont un taux de croissance nul mais se propagent.

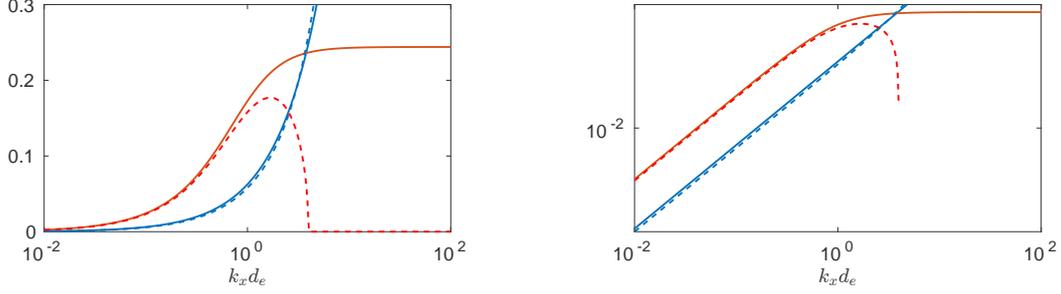


FIGURE 3.6 – Comparaison entre les solutions analytiques (3.89), (3.90) (trait plein) et celles obtenues par résolution numérique du polynôme (3.80) (pointillés), avec les paramètres de la figure 3.5 :  $u_0 = 0.2c$ ,  $c_x \simeq 0.0442c$  et  $c_y \simeq 0.1399c$ . La figure de droite est en échelle semi-logarithmique. La branche  $\omega_-$  correspond aux courbes bleues, la branche  $\omega_+$  aux courbes rouges.

On montre que, pour un nombre d'onde  $k < k_c$ , condition de seuil de l'instabilité,  $\Delta > 0$  impliquant  $\omega^2$  réel. Par conséquent, les solutions

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[ \left( 4k_x^2 a_x^2 - \frac{\omega_{pe}^2 k_x^2 (u_0^2 + a_y^2)}{\omega_{pe}^2 + k_x^2 c^2} \right) \pm \sqrt{\Delta} \right] \quad (3.87)$$

correspondant à  $k < k_c$  sont soit stables et propagatives ( $\omega = \omega_r$  réel), soit instables et non-propagatives ( $\omega = i\gamma$  imaginaire pur) comme observé sur la Figure 3.5.

On peut donner une expression analytique beaucoup plus simplifiée pour le taux de croissance des modes WI-CFI couplés. Plaçons nous dans une situation de forte anisotropie du tenseur de pression, pour laquelle  $a_y^2 \gg a_x^2$  et pour  $k_x \simeq \omega_{pe}/c$  ou inférieur. Compte tenu du fait que  $k_c$  est d'autant plus grand que l'anisotropie de pression est forte, cette approximation n'est valable que pour des longueurs d'onde relativement grandes ( $k_x \ll k_c$ ), ce qui pourrait paraître problématique. Il faut cependant garder à l'esprit que les effets cinétiques prendront de toute manière de l'importance à proximité de la coupure, pour de faibles longueurs d'onde, rendant l'approximation fluide peu fiable. Dans cette situation,

$$\Delta \simeq \omega_{pe}^4 \frac{k_x^4 (u_0^2 + a_y^2)^2}{(\omega_{pe}^2 + k_x^2 c^2)^2}, \quad (3.88)$$

toujours positif. On injecte ceci dans l'équation (3.87) et on trouve

$$\omega_{\pm}^2 = 2k_x^2 a_x^2 \Rightarrow \omega_{\pm} = \pm \sqrt{2} k_x a_x \quad (3.89)$$

$$\omega_{-}^2 = 2k_x^2 a_x^2 - \omega_{pe}^2 \frac{k_x^2 (a_y^2 + u_0^2)}{\omega_{pe}^2 + k_x^2 c^2} \simeq -\omega_{pe}^2 \frac{k_x^2 (a_y^2 + u_0^2)}{\omega_{pe}^2 + k_x^2 c^2} \Rightarrow \gamma = \omega_{pe} \sqrt{\frac{k_x^2 (a_y^2 + u_0^2)}{\omega_{pe}^2 + k_x^2 c^2}}. \quad (3.90)$$

Une comparaison entre les expressions analytiques (3.90) et (3.89) et les solutions correspondantes calculées numériquement à partir de la relation (3.80) est montrée en figure 3.6. L'accord est très satisfaisant pour la branche stable, ainsi que pour la branche instable tant que  $k_x$  est suffisamment éloigné de  $k_c$ .

Il est possible d'interpréter l'expression (3.90) du taux de croissance d'une manière assez simple, notamment en considérant les cas extrêmes  $a_y \gg u_0$  et  $a_y \ll u_0$ . En effet, on peut écrire le taux de croissance (3.90) comme

$$\gamma = \sqrt{\gamma_{CFI}^2 + \gamma_{WI}^2}, \quad (3.91)$$

avec

$$\gamma_{WI} = \omega_{pe} \sqrt{\frac{k_x^2 a_y^2}{\omega_{pe}^2 + k_x^2 c^2}} \quad ; \quad \gamma_{CFI} = \omega_{pe} \sqrt{\frac{k_x^2 u_0^2}{\omega_{pe}^2 + k_x^2 c^2}}, \quad (3.92)$$

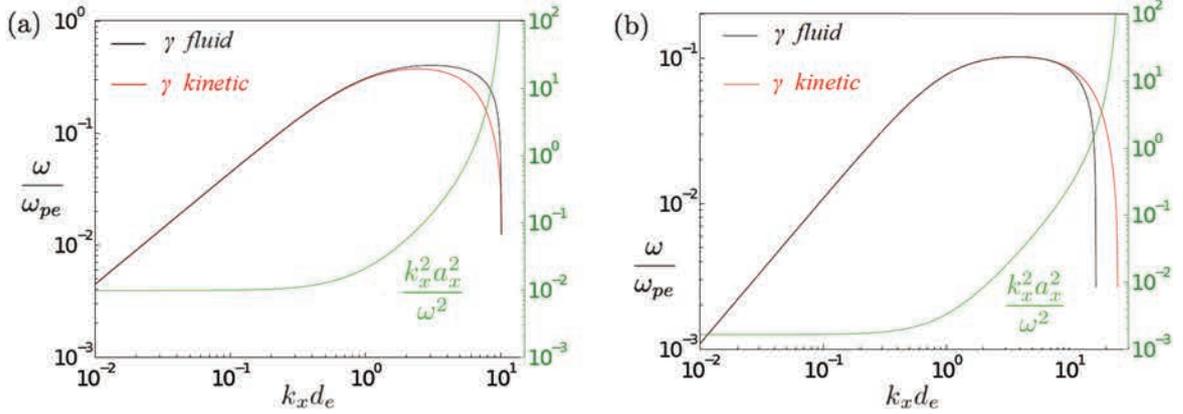


FIGURE 3.7 – Taux de croissance fluide (courbe noire) des modes couplés WI-CFI dans les limites  $a_y \gg u_0$  (WI dominante, panneau (a)), pour  $|u_0| = 0.1c$  and  $a_y = 10a_x = 0.442c$ , et  $a_y \ll u_0$  (CFI dominante, panneau (b)), pour  $|u_0| = 0.1c$  and  $a_y = 10a_x = 0.044c$ . La courbe verte correspond au ratio  $k_x a_x / |\omega|$ , les valeurs étant indiquées sur l'axe de droite. Les taux de croissance cinétiques correspondant sont en rouge et sont obtenus par intégration de la relation de dispersion pour un équilibre Maxwellien.

$\gamma_{WI}$  correspondant au taux de croissance fluide de l'instabilité Weibel pure pour une forte anisotropie (cf. Section 3.3.4) et  $\gamma_{CFI}$  étant celui de l'instabilité CFI froide traitée plus haut (cf. Section 3.1.2.1.c). On constate que  $\gamma$  tend vers  $\gamma_{WI}$  lorsque  $a_y \gg u_0$  et que  $\gamma \simeq \gamma_{CFI}$  si  $a_y \ll u_0$ .

Deux résultats numériques correspondant à chacun de ces cas limites sont présentés en figure 3.7, où les solutions instables fluides (en noir) sont en outre comparées aux solutions cinétiques (en rouge).

Cinétiquement, chaque faisceau est représenté par une double-Maxwellienne dans le plan  $v_x, v_y$  dont l'écart-type est  $\sigma_i^2 = k_B T_i / m_e$ ,  $i = x, y$ . Compte tenu des définitions de  $a_x$  et  $a_y$  que nous avons introduites (Équation (3.70)), on a  $\sigma_x = a_x$  et  $\sigma_y = a_y$ . Dans le cas limite où  $a_y \gg u_0$ , les deux Maxwelliennes se recouvrent mutuellement dans l'espace des phases. Or, le point de vue fluide consiste à prendre la moyenne des fonctions de distributions dans l'espace des vitesses : on ne peut plus distinguer les deux faisceaux si leurs distributions des vitesses se recouvrent trop. Ainsi, tout se passe comme s'il n'y a plus qu'une seule fonction de distribution de vitesse moyenne nulle. Même si chacun des faisceaux est isotrope en température, la superposition des deux distributions peut conduire à une anisotropie globale liée à la faible vitesse des deux faisceaux 3.8 (panneau de gauche). Ainsi, la distribution globale, du point de vue fluide, est susceptible de déclencher l'instabilité Weibel pure et  $\gamma \simeq \gamma_{WI}$ . Dans le cas contraire, si les faisceaux ont une vitesse suffisamment grande par rapport à leur vitesse thermique caractéristique, tout se passe comme si la fonction de distribution globale était celle de deux faisceaux à peu près froids 3.8 (panneau de droite), qui perturbés transversalement engendrent une instabilité CFI et  $\gamma \simeq \gamma_{CFI}$ .

### 3.3.3 Discussion sur la fermeture du modèle

Discutons enfin de la courbe verte apparaissant sur la figure 3.7 : elle décrit l'évolution du rapport  $k_x^2 a_x^2 / |\omega|^2$  en fonction du nombre d'onde  $k_x$ , où  $\omega$  est obtenu en résolvant la relation de dispersion cinétique (cf. Annexe A). On constate que l'accord entre les résultats cinétique et fluide est satisfaisant tant que la valeur de ce paramètre est petite devant 1. L'erreur commise par le modèle fluide semble augmenter avec le paramètre  $k_x^2 a_x^2 / |\omega|^2$ , ce dernier explosant à proximité de la coupure en raison de la petitesse de  $\omega$ , qui tend vers 0. Ce constat est valable y compris dans un régime quasi-WI (cf. figure 3.7, panneau de gauche, pour lequel  $\gamma \sim \gamma_{WI}$ ), où pour des vecteurs d'onde tels que  $d_e^{-1} < k_x < k_c$ , l'erreur croît avec  $k_x^2 a_x^2 / |\omega|^2$  indépendamment du fait que les coupures fluide et cinétique soient identiques ou quasiment identiques.

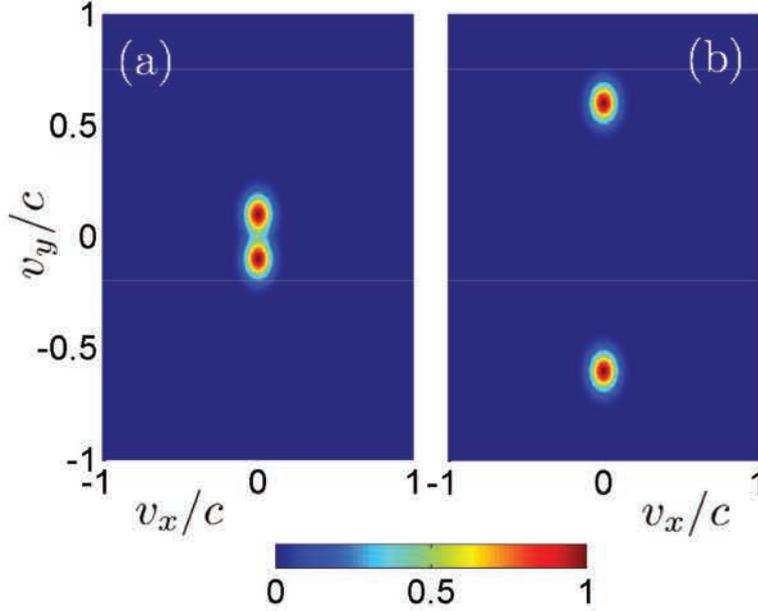


FIGURE 3.8 – Représentation dans le plan  $(v_x, v_y)$  de la fonction de distribution électronique totale pour  $|u_0| = \sqrt{3}a_y$  (panneau (a)) et pour  $|u_0| \gg a_y$  (panneau (b)).

### 3.3.3.1 Comparaison du modèle avec la théorie cinétique

L'équation de dispersion cinétique pour un équilibre Maxwellien susceptible de déclencher à la fois les instabilités WI et CFI, où chaque faisceau  $s$  est décrit par une distribution d'équilibre

$$f_s^{(0)} = n_0 \sqrt{\frac{m_e}{2\pi k_B T_{x,s}}} \sqrt{\frac{m_e}{2\pi k_B T_{y,s}}} \sqrt{\frac{m_e}{2\pi k_B T_{z,s}}} \exp \left[ -\frac{m_e v_x^2}{2k_B T_{x,s}} - \frac{m_e (v_y - u_{s,y}^{(0)})^2}{2k_B T_{y,s}} - \frac{m_e v_z^2}{2k_B T_{z,s}} \right], \quad (3.93)$$

s'écrit (cf. Annexe A)  $[D] \cdot \mathbf{E} = 0$  avec

$$[D] = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & 0 \\ D_{xy} & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3.94)$$

Les composantes de cette matrice s'écrivent

$$D_{xx} = \frac{\omega^2}{c^2} \left[ 1 + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{k_x^2 a_{x,s}^2} (1 + \xi_s Z_s) \right], \quad (3.95)$$

$$D_{yy} = \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{c^2} \left[ \xi_s Z_s + \left( \frac{u_{y,s}^{(0)2}}{a_{x,s}^2} + \frac{a_{y,s}^2}{a_{x,s}^2} - 1 \right) (1 + \xi_s Z_s) \right], \quad (3.96)$$

$$D_{xy} = \frac{\omega^2}{c^2} \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{k_x^2 a_{x,s}^2} \frac{k_x u_{x,s}^{(0)}}{\omega} (1 + \xi_s Z_s), \quad (3.97)$$

et

$$D_{zz} = \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{c^2} \left[ 1 - \frac{a_{z,s}^2}{a_{x,s}^2} (1 + \xi_s Z_s) \right]. \quad (3.98)$$

Rappelons que  $Z_s = Z(\xi_s)$ , où  $\xi_s = \omega/(\sqrt{2}k_x a_{x,s}) = \sqrt{2}\epsilon^{-1}$ , si on définit  $\epsilon = k_x a_{x,s}/\omega$ . Supposons  $\epsilon \ll 1$  et donc  $\xi \gg 1$  : on peut développer en puissances de  $\epsilon$  les relations de dispersion fluide et cinétique. Commençons par la partie électrostatique, et remplaçons  $Z_s$  par  $Z_s = -\xi_s^{-1} (1 + \xi_s^{-2}/2 + 3\xi_s^{-4}/4)$ . On obtient

$$D_{xx}^{KIN} \simeq \frac{\omega^2}{c^2} \left[ 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \left( 1 + 3 \frac{k_x^2 a_{x,s}^2}{\omega^2} \right) \right]. \quad (3.99)$$

On développe aussi le dénominateur de (3.74) comme  $(1 - 3k_x^2 a_{x,s}^2/\omega^2)^{-1} \simeq 1 + 3k_x^2 a_{x,s}^2/\omega^2$ , ce qui conduit à

$$D_{xx}^F = D_{xx}^{KIN}. \quad (3.100)$$

Effectuons le même type de développement pour  $D_{xy}$ , composante pour laquelle les deux modèles convergent sans simplification supplémentaire vers

$$D_{xy} \simeq -\frac{\omega_{ps}^2}{c^2} \frac{k_x u_{s,y}^{(0)}}{\omega} \left( 1 + 3 \frac{k_x^2 a_{x,s}^2}{\omega^2} \right). \quad (3.101)$$

Réitérant le processus pour  $D_{zz}$ , qui décrit l'instabilité Weibel pure :

$$D_{zz}^{KIN} \simeq \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{c^2} \left[ 1 + \frac{k_x^2 a_{x,s}^2}{\omega^2} \frac{a_{z,s}^2}{a_{x,s}^2} \left( 1 + 3 \frac{k_x^2 a_{x,s}^2}{\omega^2} \right) \right] \quad (3.102)$$

sans simplification supplémentaire pour le modèle cinétique et

$$D_{zz}^F \simeq \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{c^2} \left[ 1 + \frac{k_x^2 a_{x,s}^2}{\omega^2} \left( \frac{a_{z,s}^2}{a_{x,s}^2} - 1 \right) \right] \left[ 1 + \frac{k_x^2 a_{x,s}^2}{\omega^2} \right] \quad (3.103)$$

$$\simeq \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{c^2} \left[ 1 + \frac{k_x^2 a_{x,s}^2}{\omega^2} \frac{a_{z,s}^2}{a_{x,s}^2} \left( 1 + \frac{k_x^2 a_{x,s}^2}{\omega^2} \right) - \frac{k_x^4 a_{x,s}^4}{\omega^4} \right] \quad (3.104)$$

pour le modèle fluide. Ici, on voit clairement apparaître des divergences entre les modélisations fluide et cinétique. Elles sont de deux types : des coefficients numériques différents devant le paramètre d'expansion (comparaison des termes colorés en bleu dans l'équation (3.104)) et des termes additifs supplémentaires, artefacts introduits par la description fluide mais négligeables si on s'en tient à l'ordre 2 en  $\epsilon$ .

Le même constat peut être fait pour la branche responsable des instabilités WI et CFI. En développant  $Z_s$  jusqu'à l'ordre 2 en  $k_x^2 a_x^2/\omega^2$ , l'élément  $D_{yy}$  cinétique devient, en gardant tous les termes :

$$D_{yy}^{KIN} \simeq \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{c^2} \left[ 1 + \frac{k_x^2 a_{x,s}^2}{\omega^2} \left( \frac{u_{s,y}^{(0)2} + a_{s,y}^2}{a_{s,x}^2} \right) \left( 1 + 3 \frac{k_x^2 a_{x,s}^2}{\omega^2} \right) \right]. \quad (3.105)$$

En développant le dénominateur du coefficient  $D_{yy}$  fluide (3.75) à l'ordre 1 en  $k_x^2 a_x^2/\omega^2$ , on trouve

$$D_{yy}^F \simeq \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{c^2} \left[ 1 + \frac{k_x^2 a_{x,s}^2}{\omega^2} \left( \frac{u_{s,y}^{(0)2} + a_{s,y}^2}{a_{s,x}^2} \right) + \frac{k_x^4 a_{x,s}^4}{\omega^4} \left( \frac{3u_{s,y}^{(0)2} + a_{s,y}^2}{a_{s,x}^2} \right) - \frac{k_x^4 a_{x,s}^4}{\omega^4} \right]. \quad (3.106)$$

Lorsque  $k_x^2 a_x^2/\omega^2 \ll 1$  (en gardant les termes d'ordre  $\epsilon^2$ ), les termes colorés en bleu sont négligeables, et le terme en  $k_x^4 a_x^4/\omega^4$  présent dans  $D_{zz}^D$  l'est aussi. Dans ce cas, les différences deviennent négligeables et on peut dire que  $D_{zz}^F = D_{zz}^{KIN}$ , ce qui explique entre autres l'excellent accord constaté sur la figure 3.7. Le choix de la fermeture  $\nabla \cdot \mathbf{Q}_s = 0$  est donc justifié dans ce régime particulier, que l'on appellera limite hydrodynamique dans la suite de ce manuscrit.

Lorsque le critère  $k_x^2 a_x^2/\omega^2 \ll 1$  n'est plus satisfait, c'est à dire lorsque  $\xi_s \ll 1$ , le développement de  $Z_s$  prend une autre forme :

$$Z_s \simeq i\sqrt{\pi} - 2\xi_s, \quad (3.107)$$

dont il est impossible de faire apparaître le terme imaginaire (dominant) en développant l'expression fluide.

Le paramètre  $|\epsilon|$  peut être interprété comme étant le rapport de deux durées caractéristiques,

$$\frac{k_x a_x}{|\omega|} \equiv \frac{\tau_\omega}{\tau_{th}}, \quad (3.108)$$

où  $\tau_\omega = 2\pi\omega^{-1} = 2\pi\sqrt{\omega_r^2 + \gamma^2}^{-1}$  correspond à la durée typique de la perturbation, et où  $\tau_{th}$  correspond à la durée mise par une particule animée d'une vitesse  $a_x$  pour parcourir une longueur d'onde  $2\pi k_x^{-1}$ . Lorsque ce rapport est petit devant un, la particule ne bouge que très peu lors du passage de l'onde si elle est propagative, ou lors de sa croissance si elle est instable. Dans le cas où  $|\epsilon| \gg 1$ , ce n'est plus le cas.

Ce rapport peut également être vu comme un rapport de vitesses dans le cas d'une onde propagative (stable ou faiblement instable),

$$\frac{k_x a_x}{|\omega|} \equiv \frac{a_x}{v_\varphi}, \quad (3.109)$$

où  $v_\varphi$  est la vitesse de phase si l'onde est strictement stable propagative. Dans ce dernier cas, lorsque  $\epsilon$  tend vers 1, la vitesse de phase de l'onde est voisine de la vitesse caractéristique d'un très grand nombre de particules qui vont alors pouvoir résonner avec elle, mettant en jeu d'importants effets cinétiques impossibles à décrire avec le modèle fluide. Ce même raisonnement tient toujours lorsque  $\epsilon \gg 1$ , où la vitesse de phase devient mécaniquement proche de la vitesse du coeur de la fonction de distribution, impliquant de nombreuses résonances.

L'approche fluide telle que nous l'introduisons dans ce chapitre revient en quelque sorte à supposer que toutes les particules d'un élément de fluide ont une vitesse microscopique de l'ordre de  $a_x$  selon la direction  $x$  perturbée. Cette description peut avoir du sens si la fonction de distribution a une forme suffisamment simple pour être identifiable grâce à ses premiers moments : moyenne (vitesse moyenne  $\mathbf{u}$ ), écart-type (pression). Dès lors que ce n'est plus le cas, par exemple lorsque une proportion importante de particules ont une vitesse nettement supérieure à la vitesse moyenne de l'ensemble, ces caractéristiques statistiques ne suffisent plus pour décrire correctement le plasma et il faut tenir compte des moments d'ordre supérieur. Ceci introduit de la complexité : nouvelles inconnues à déterminer (7 des 27 composantes du tenseur de flux de chaleur, les autres pouvant être obtenues grâce aux symétries de  $Q$ ) et équations supplémentaires (composantes de l'équation (2.144)).

### 3.3.3.2 Contribution du flux de chaleur

Considérons les équations fluides linéarisées pour  $\Pi_s$  et  $Q_s$  après transformation de Fourier en  $x$  et en  $t$ ,

$$\Pi_{xx,s}^{(1)} = 3 \frac{k_x}{\omega} \Pi_{xx,s}^{(0)} u_{s,x}^{(1)} + \frac{k_x}{\omega} Q_{xxx,s}^{(1)}, \quad (3.110)$$

$$\Pi_{xy,s}^{(1)} = \frac{k_x}{\omega} \Pi_{xx,s}^{(0)} u_{s,y}^{(1)} + \frac{k_x}{\omega} Q_{xxy,s}^{(1)} - \frac{ie}{m\omega} \frac{k_x}{\omega} E_y^{(1)} \left( \Pi_{yy,s}^{(0)} - \Pi_{xx,s}^{(0)} \right), \quad (3.111)$$

$$\frac{k_x}{\omega} Q_{xxx,s}^{(1)} = \frac{k_x^2}{\omega^2} N_{xxxx,s}^{(1)} - 3 \underbrace{\frac{k_x^2 a_{x,s}^2}{\omega^2}}_{\equiv \epsilon^2} \Pi_{xx,s}^{(1)} \quad (3.112)$$

et

$$\frac{k_x}{\omega} Q_{xxy,s}^{(1)} = \frac{k_x^2}{\omega^2} N_{xxy,s}^{(1)} - \frac{k_x^2 a_{x,s}^2}{\omega^2} \Pi_{xy,s}^{(1)}. \quad (3.113)$$

On laisse de côté la dynamique selon l'axe  $z$  qui, linéairement, est totalement découplée de celle du plan  $xOy$ . En combinant les équations, on obtient :

$$\Pi_{xx,s}^{(1)} \left( 1 + 3 \frac{k_x^2 a_{x,s}^2}{\omega^2} \right) = 3 \frac{k_x}{\omega} \Pi_{xx,s}^{(0)} u_{x,s}^{(1)} + \frac{k_x^2}{\omega^2} N_{xxxx,s}^{(1)} \quad (3.114)$$

et

$$\Pi_{xy,s}^{(1)} \left( 1 + \frac{k_x^2 a_{x,s}^2}{\omega^2} \right) = \frac{k_x}{\omega} \Pi_{xx,s}^{(0)} u_{y,s}^{(1)} - \frac{ie}{m\omega} \frac{k_x}{\omega} \left( \Pi_{yy,s}^{(0)} - \Pi_{xx,s}^{(0)} \right) E_y^{(1)} + \frac{k_x^2}{\omega^2} N_{xxy,s}^{(1)} \quad (3.115)$$

qui dépendent du moment d'ordre 4, noté  $\mathbf{N}$ . Outre l'introduction de  $\mathbf{N}$  dans les équations, la dynamique du flux de chaleur ajoute un terme (coloré en bleu) de l'ordre de  $\epsilon^2$ , correction faible voire négligeable dans la limite hydrodynamique, mais prédominante par rapport à  $\partial \Pi / \partial t$  en dehors de cette limite.

Ceci dit, l'introduction de la dynamique de  $Q_s$  dans le modèle ne règle pas tous les problèmes. Dans le cas de l'instabilité Weibel pure (traîtée dans la section suivante), l'ajout de  $Q_s$  entraîne la disparition de la coupure et une variation négligeable du taux de croissance obtenu avec le tenseur de pression pour le régime correspondant à la limite hydrodynamique : dans le cas de l'instabilité CFI,

l'introduction des corrections liées au flux de chaleur détruit exactement la contribution de l'élément hors diagonal de  $\mathbf{\Pi}$  et entraîne la disparition de la coupure de l'instabilité fluide. Il est donc plus que probable qu'il faille étendre le modèle au moment d'ordre 4 si on souhaite faire mieux qu'une description reposant sur le seul tenseur de pression.

Ce dernier point est à rapprocher de l'analyse multi-faisceaux de la WI développée notamment dans [20]. Les simulations numériques utilisant cette description cinétique réduite ont montré que trois multifaisceaux semblaient suffire à la description correcte de la WI, du moins dans sa phase linéaire. L'initialisation du modèle multi-faisceaux repose, comme expliqué en section ?? de ce document, sur la comparaison entre les moments en vitesse de la distribution multifaisceaux (un peigne de Dirac) et ceux de la fonction de distribution que l'on souhaite représenter par les multifaisceaux (une double Maxwellienne, en géométrie 1D2V  $(x, v_x, v_y)$ ). Le nombre de relations nécessaires pour initialiser un système de trois faisceaux est de 6, impliquant de calculer les moments d'ordre 0 à 5. Du fait de la symétrie de la distribution Maxwellienne, le dernier moment initial non nul est celui d'ordre 4, ce qui implique potentiellement qu'il faille étendre la description fluide jusqu'au moment d'ordre 4.

### 3.3.4 Instabilité Weibel (WI)

Dans le cas précédent, nous avons simultanément deux sources d'instabilité : l'anisotropie de pression (anisotropie du moment d'ordre 2) et la présence de faisceaux (anisotropie du moment d'ordre 1). Éliminons les faisceaux : si on ne considère plus qu'une seule espèce électronique et que l'on se place dans un référentiel où le plasma (homogène) n'a pas de vitesse moyenne à l'équilibre, seule la WI peut croître.

#### 3.3.4.1 Linéarisation et équation de dispersion

Linéarisons en détail les équations fluides, en commençant par l'équation de continuité,

$$\frac{\partial n^{(1)}}{\partial t} + n^{(0)} \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x} = 0. \quad (3.116)$$

Sans surprise, la densité n'évolue que par compression en l'absence de convection liée à la présence des faisceaux. En effet, l'évolution de la composante  $u_x^{(1)}$  de la vitesse ne dépend que du champ électrostatique  $E_x^{(1)}$  et du terme de pression  $\Pi_{xx}^{(1)}$  décrivant la force de pression exercée sur les surfaces perpendiculaires à l'axe ( $Ox$ ) et dirigée selon ce même axe :

$$\frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial t} = -\frac{e}{m} E_x^{(1)} - \frac{1}{m_e n^{(0)}} \frac{\partial \Pi_{xx}^{(1)}}{\partial x}. \quad (3.117)$$

Le terme  $\Pi_{xx}^{(1)}$  évolue linéairement selon la relation

$$\frac{\partial \Pi_{xx}^{(1)}}{\partial t} + 3\Pi_{xx}^{(0)} \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x} = 0, \quad (3.118)$$

équivalente à l'expression linéarisée de l'équation polytropicque

$$\frac{d}{dt} (\Pi_{xx} n^{-3}) = 0, \quad (3.119)$$

traduisant une évolution adiabatique parallèlement à la direction de propagation de la perturbation.

Les deux autres composantes de la vitesse évoluent selon

$$\frac{\partial u_y^{(1)}}{\partial t} = -\frac{e}{m} E_y^{(1)} - \frac{1}{m_e n^{(0)}} \frac{\partial \Pi_{xy}^{(1)}}{\partial x} \quad (3.120)$$

et

$$\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial t} = -\frac{e}{m} E_z^{(1)} - \frac{1}{m_e n^{(0)}} \frac{\partial \Pi_{xz}^{(1)}}{\partial x}. \quad (3.121)$$

Le rôle des termes non-diagonaux  $\Pi_{xy}$  et  $\Pi_{xz}$ , dont la présence permet le transfert de l'énergie thermique d'une composante diagonale vers une autre, est essentiel dans cette évolution. Ces deux termes évoluent selon

$$\frac{\partial \Pi_{xy}^{(1)}}{\partial t} + \Pi_{xx}^{(0)} \frac{\partial u_y^{(1)}}{\partial x} = -\frac{e}{m_e} \left[ \Pi_{yy}^{(0)} - \Pi_{xx}^{(0)} \right] B_z^{(1)} \quad (3.122)$$

et

$$\frac{\partial \Pi_{xz}^{(1)}}{\partial t} + \Pi_{xx}^{(0)} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial x} = -\frac{e}{m_e} \left[ \Pi_{xx}^{(0)} - \Pi_{zz}^{(0)} \right] B_y^{(1)} \quad (3.123)$$

et traduisent une interaction directe entre l'anisotropie d'équilibre et la perturbation de champ magnétique. Le terme  $\Pi_{yz}$ , quant à lui, reste nul au cours du temps tant que l'hypothèse de linéarité reste valable.

Remarquons enfin que les éléments de pression  $\Pi_{yy}$  et  $\Pi_{zz}$  n'évoluent que par le biais de  $u_x^{(1)}$  et n'interviennent pas véritablement dans la dynamique du plasma, y compris non-linéairement, le problème étant rigoureusement uni-dimensionnel :

$$\Pi_{yy}^{(1)} = \Pi_{yy}^{(0)} \frac{k_x}{\omega} u_x^{(1)}, \quad (3.124)$$

$$\Pi_{zz}^{(1)} = \Pi_{zz}^{(0)} \frac{k_x}{\omega} u_x^{(1)}. \quad (3.125)$$

Ces équations coïncident avec les expressions linéarisées des fermetures suivantes, de type polytropicque,

$$\frac{d}{dt} (\Pi_{yy} n^{-1}) = 0, \quad (3.126)$$

$$\frac{d}{dt} (\Pi_{zz} n^{-1}) = 0 \quad (3.127)$$

correspondant à une évolution isotherme.

Au final, on peut décomposer le problème en trois ensembles de variables macroscopiques évoluant séparément les uns des autres :

- les grandeurs  $n^{(1)}$ ,  $u_x^{(1)}$  et  $\Pi_{xx}^{(1)}$  décrivent le comportement électrostatique du plasma et donc pilotent la dynamique du champ  $E_x^{(1)}$ ,
- le champ électromagnétique  $(E_y^{(1)}, B_z^{(1)})$  est quant à lui couplé à  $u_y^{(1)}$  et  $\Pi_{xy}^{(1)}$ ,
- alors que le champ  $(E_z^{(1)}, B_y^{(1)})$  est couplé à  $u_z^{(1)}$  et  $\Pi_{xz}^{(1)}$ .

Ces propriétés de symétrie se retrouvent naturellement dans l'équation de dispersion, comme l'atteste la matrice

$$[\mathbf{D}] = \begin{pmatrix} D_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{pmatrix}, \quad (3.128)$$

obtenue en combinant les équations fluides linéarisées avec celles de Maxwell : trois branches linéairement découplées sont à caractériser. Ici,

$$D_{xx} = \omega^2 - (\omega_{pe}^2 + 3k_x^2 a_x^2) = 0, \quad (3.129)$$

$$D_{yy} = \omega^2 - k_x^2 c^2 - \omega_{pe}^2 \frac{1 + \frac{k_x^2}{\omega^2} (a_y^2 - a_x^2)}{1 - \frac{k_x^2}{\omega^2} a_x^2} = 0, \quad (3.130)$$

et

$$D_{zz} = \omega^2 - k_x^2 c^2 - \omega_{pe}^2 \frac{1 + \frac{k_x^2}{\omega^2} (a_z^2 - a_x^2)}{1 - \frac{k_x^2}{\omega^2} a_x^2} = 0. \quad (3.131)$$

La relation  $D_{xx} = 0$  décrit les ondes de Langmuir, déjà évoquées dans la section précédente. Les relations  $D_{yy} = 0$  et  $D_{zz} = 0$  sont de même forme et décrivent respectivement les phénomènes électromagnétiques liés aux champs  $B_z$  et  $B_y$ , et en particulier les instabilités Weibel déclenchées par des anisotropies dans les plans  $(v_x, v_y)$  et  $(v_x, v_z)$  respectivement. On retrouve bien le comportement cinétique attendu que nous avons exposé en section 3.1.1. L'indice de réfraction du plasma relatif à la branche électromagnétique  $D_{yy} = 0$  s'écrit

$$N_{xx} \equiv \frac{k_x c}{\omega} = \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left( \frac{\omega^2 + k_x^2 (c_y^2 - c_x^2)}{\omega^2 - k_x^2 c_x^2} \right)}. \quad (3.132)$$

On voit que l'anisotropie  $a_y^2 - a_x^2$  rend possible l'existence de solutions correspondant à  $\omega < \omega_{pe}$ , ce qui est exclu dans la théorie fluide froide. Le modèle avec tenseur de pression permet de mettre en évidence assez simplement ce que Weibel avait montré dans le contexte cinétique il y a plusieurs décennies : **II** autorise l'existence d'ondes électromagnétiques transverses de basse fréquence dans un plasma anisotrope en vitesse.

### 3.3.4.2 Analyse de la relation de dispersion de la WI

Nous portons notre attention sur la relation  $D_{yy} = 0$ , que l'on écrit sous forme polynomiale<sup>6</sup> :

$$\omega^4 - \omega^2 [\omega_{pe}^2 + k_x^2 (c^2 + a_x^2)] + k_x^2 [k_x^2 c^2 a_x^2 - \omega_{pe}^2 (a_y^2 - a_x^2)] = 0. \quad (3.134)$$

On peut résoudre de manière exacte cette équation, dont le discriminant est

$$\Delta = [\omega_{pe}^2 + k_x^2 (c^2 + a_x^2)]^2 - 4k_x^2 c^2 \left( k_x^2 a_x^2 - \omega_{pe}^2 \frac{a_y^2 - a_x^2}{c^2} \right) = [\omega_{pe}^2 + k_x^2 (c^2 - a_x^2)]^2 + 4\omega_{pe}^2 k_x^2 a_y^2, \quad (3.135)$$

toujours strictement positif et conduisant aux solutions

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[ \omega_{pe}^2 + k_x^2 (c^2 + a_x^2) \pm \sqrt{\Delta} \right], \quad (3.136)$$

réelles. Les solutions  $\omega$  seront donc propagatives et stables ou instables et non-propagatives, comme on peut le voir en Figure 3.9, où la relation (3.134) a été résolue numériquement pour  $a_y = 0.1713c$  et  $a_x = 0.0313c$ .

Les solutions stables ( $\gamma = 0$  sur le panneau de gauche) données par  $\pm\omega_+$  correspondent à des ondes électromagnétiques de pulsation  $\omega_r > \omega_{pe}$ . Les modes obtenus à partir de  $\omega_-^2$  présentent un taux de croissance

$$\gamma = \sqrt{\frac{\sqrt{\Delta}}{2} - \frac{\omega_{pe}^2 + k_x^2 (c^2 + a_x^2)}{2}} \quad (3.137)$$

pour des nombres d'onde inférieurs à une valeur  $k_c$  (instabilité Weibel pure) et deviennent stables pour  $k_x > k_c$ , ce qui implique un changement de signe de  $\omega_-^2$  lorsque  $k_x = k_c$ . On trouve donc l'expression de  $k_c$  en résolvant  $\omega_-^2 = 0$  :

$$k_c = \sqrt{\frac{a_y^2}{a_x^2} - 1} = \sqrt{\frac{T_y}{T_x} - 1}. \quad (3.138)$$

Cette expression coïncide exactement avec (3.14), calculée à partir la relation de dispersion cinétique  $D_{yy} = 0$  (avec  $D_{yy}$  donné par (3.11)) construite pour l'équilibre maxwellien (3.1) compatible avec l'équilibre choisi pour le modèle fluide. On retrouve bien la condition cinétique portant sur le seuil de déclenchement de l'instabilité :  $T_y > T_x$ .

Les figures 3.10 et 3.11 représentent le spectre de l'instabilité obtenu par le modèle fluide et par le modèle cinétique pour diverses valeurs de température, dans un cas où l'anisotropie est forte ( $A = 100$ ) et dans un cas où elle est faible ( $A = 2$ ). On retrouve qualitativement le comportement cinétique : à anisotropie constante, plus la température est élevée plus l'instabilité est forte. On remarque que l'accord entre les deux modèles est meilleur lorsque l'anisotropie est forte. Peut-on pour autant considérer que le modèle fluide avec tenseur de pression ne fonctionne que dans le cas d'une forte anisotropie ?

La figure 3.13 représente la valeur du rapport  $k_x^2 a_x^2 / |\omega^2|$ , calculé avec les valeurs cinétiques de  $\omega$  et mesurant la validité du modèle avec tenseur de pression, en fonction de  $k_x$  mais surtout de la valeur prise par l'anisotropie  $A$ . La température longitudinale a été choisie volontairement faible ( $T_x = 0.01keV$ ). Quelle que soit la valeur prise par  $A$ , il existe toujours une partie du spectre pour laquelle l'approche fluide ne donnera pas une bonne idée du taux de croissance de l'instabilité :  $k_x^2 a_x^2 / |\omega^2| \gg 1$  pour  $k_x \lesssim k_c$ . Cependant, dès lors que l'anisotropie est faible (par exemple pour  $A = 2$ ), le paramètre  $k_x^2 a_x^2 / |\omega^2|$  est grand et le modèle fluide n'est pas applicable. On peut donc dire que bien que la "forte" anisotropie n'assure pas la validité du modèle pour des longueurs d'ondes voisines de  $2\pi k_c^{-1}$ , elle est une nécessité pour le reste des échelles spatiales.

6. En l'absence de faisceaux ( $u_0 = 0$ ), l'équation (3.80) se met sous la forme factorisée suivante :

$$[\omega^2 - 3k_x^2 a_x^2] [\omega^4 - \omega^2 [\omega_{pe}^2 + k_x^2 (c^2 + a_x^2)] + k_x^2 [k_x^2 c^2 a_x^2 - \omega_{pe}^2 (a_y^2 - a_x^2)]] = 0 \quad (3.133)$$

où le second facteur correspond à la relation de dispersion de la WI (3.134).

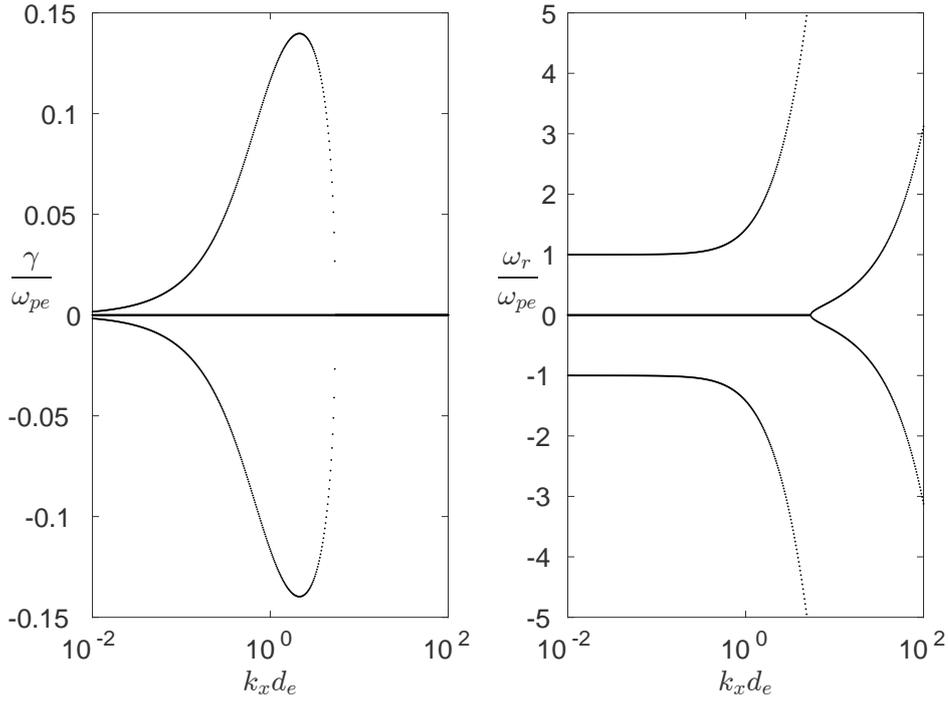


FIGURE 3.9 – Solutions de l'équation (3.134) pour  $a_y = 0.1713c$  et  $a_x = 0.0313c$ , correspondant à une anisotropie  $A = a_y^2/a_x^2 = 30$ . On dénombre deux solutions instables non-propagatives (une croissante, une amortie) et deux solutions stables propagatives correspondant à une pulsation  $\omega > \omega_{pe}$ . La coupure de l'instabilité survient pour  $k_c d_e \sim 5.39$ .

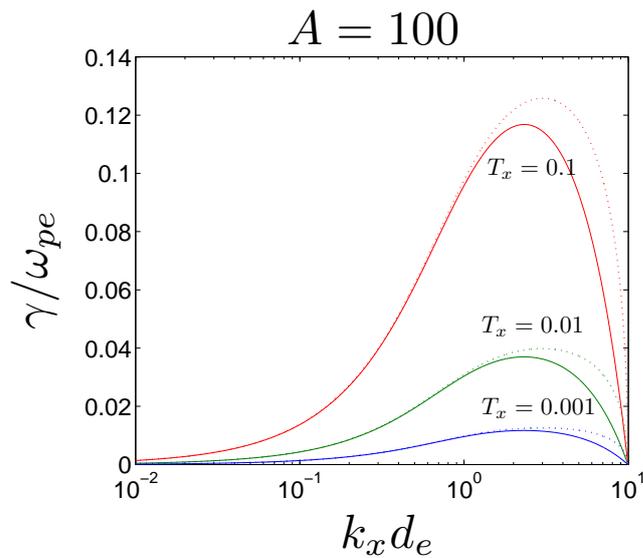


FIGURE 3.10 – Taux de croissance de la WI en fonction de  $k_x$  pour une forte anisotropie  $A = T_y/T_x = 100$ . Les courbes en pointillés correspondent aux valeurs fluides, les lignes pleines aux valeurs cinétiques.

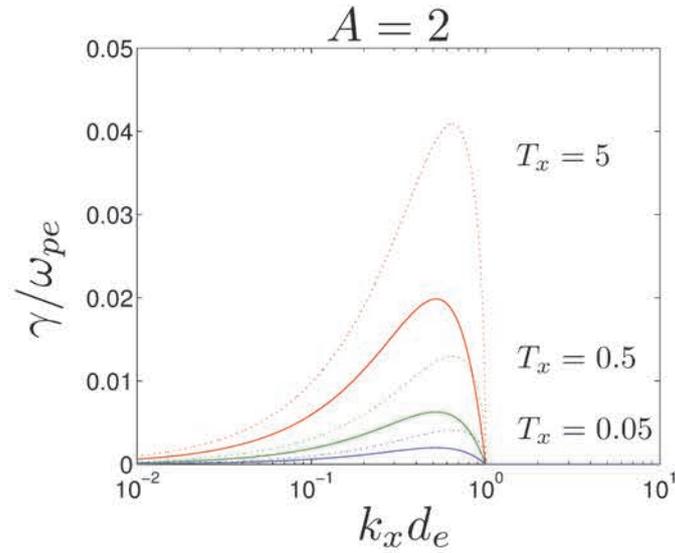


FIGURE 3.11 – Taux de croissance de la WI en fonction de  $k_x$  pour une faible valeur d'anisotropie  $A = T_y/T_x = 2$ . Les courbes en pointillés correspondent aux valeurs fluides, les lignes pleines aux valeurs cinétiques.

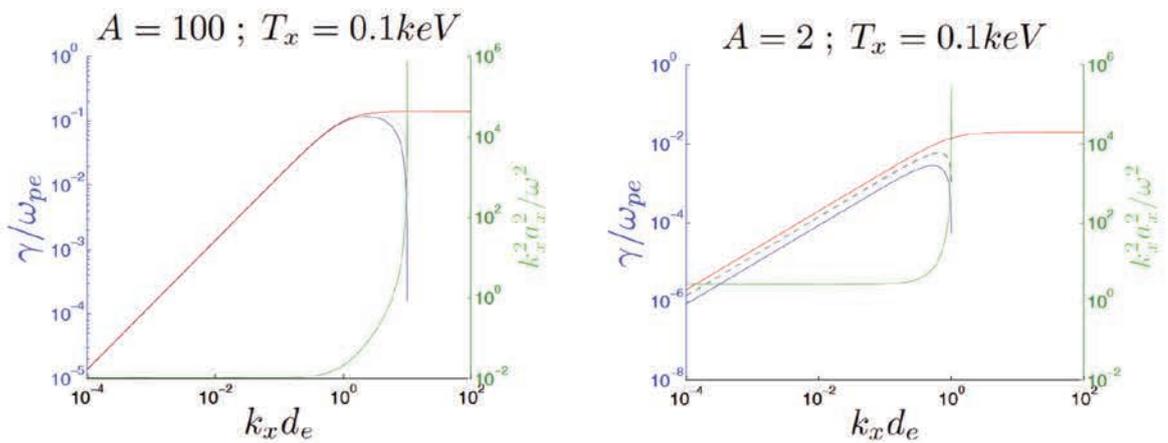


FIGURE 3.12 – Comparaison entre résultats fluide (bleu, en pointillés) et cinétique (trait plein bleu) pour  $A = 100$  (à gauche) et  $A = 2$  (à droite). La courbe verte représente la valeur du paramètre  $k_x^2 a_x^2 / |\omega|^2$ , pour  $\omega$  obtenu à partir du modèle cinétique. La courbe rouge représente le taux de croissance obtenu avec l'expression approchée (3.140).

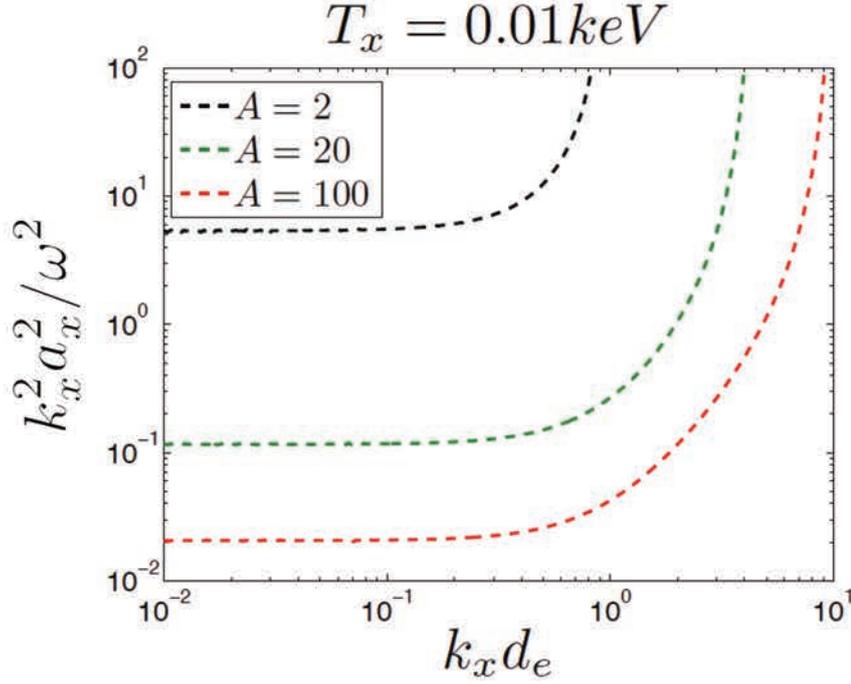


FIGURE 3.13 – Paramètre  $\epsilon^2 = k_x^2 a_x^2 / |\omega|^2$  en fonction de  $k_x$  et de l'anisotropie  $A$  pour la WI. Les valeurs de  $\omega$  sont obtenues en résolvant la relation de dispersion cinétique (cf. Annexe A).

Si on néglige tous les termes de l'ordre de  $k_x^2 a_x^2 / \omega^2$  dans (3.130), on obtient

$$\omega^2 - c^2 k_x^2 - \omega_{pe}^2 \left( 1 + \frac{k_x^2 a_y^2}{\omega^2} \right) = 0. \quad (3.139)$$

Cette relation de dispersion est aussi celle que nous obtiendrions en tenant compte de la dynamique de  $Q$  et en négligeant le moment d'ordre 4. Elle conduit à une expression approchée du taux de croissance de l'instabilité,

$$\frac{\gamma}{\omega_{pe}} = \sqrt{\frac{k_x^2 a_y^2}{\omega_{pe}^2 + k_x^2 c^2}}, \quad (3.140)$$

si on suppose  $\omega \ll \omega_{pe}$  afin d'éliminer les modes toujours stables correspondant à  $\omega_+^2$  (3.136). La forme analytique de cette approximation du taux de croissance est similaire à celle de l'instabilité CFI froide symétrique, où l'on remplace  $u_0$  par  $a_y$  : avec cette expression, la coupure disparaît (courbe rouge sur les deux panneaux de la figure 3.12).

Le taux de croissance  $\gamma$  devant vérifier le critère hydrodynamique  $k_x^2 a_x^2 / \omega^2 \ll 1$ , on peut injecter (3.140) dans cette inégalité pour obtenir

$$\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{pe}^2 + k_x^2 c^2} \frac{a_y^2}{a_x^2} \gg 1, \quad (3.141)$$

où la limite de forte anisotropie apparaît naturellement tant que  $k_x d_e \ll 1$ .

### 3.3.5 Instabilité CFI

Nous faisons maintenant l'hypothèse d'un tenseur de pression initialement isotrope, tel que  $\Pi_{ij,s}^{(0)} = P_s^{(0)} \delta_{ij}$ , afin d'éliminer la source de la WI. Il s'agit alors d'une généralisation du modèle froid de la CFI. Pour alléger la notation, on définit  $a_s^2 = a_{x,s}^2 = a_{y,s}^2 = a_{z,s}^2$ .

#### 3.3.5.1 Équation de dispersion

L'équation de dispersion correspondant à ce cas limite s'écrit

$$D_{zz} (D_{xx} D_{yy} - D_{xy}^2) = 0, \quad (3.142)$$

où

$$D_{xx} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2 - 3k_x^2 a_s^2}, \quad (3.143)$$

$$D_{zz} = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{1}{1 - \frac{k_x^2 a_s^2}{\omega^2}} \right) - k_x^2 = 0, \quad (3.144)$$

$$D_{yy} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \sum_s \omega_{ps}^2 \left[ \frac{1}{\omega^2 - k_x^2 a_s^2} + \frac{\frac{k_x^2 u_{s,y}^{(0)2}}{\omega^2}}{\omega^2 - 3k_x^2 a_s^2} \right] - k_x^2 \quad (3.145)$$

$$= D_{zz} - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{c^2} \frac{k_x^2 u_{s,y}^{(0)2}}{\omega^2 - 3k_x^2 a_s^2} \quad (3.146)$$

et

$$D_{xy} = -\frac{\omega^2}{c^2} \sum_s \frac{u_{s,y}^{(0)} k_x}{\omega} \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2 - 3k_x^2 a_s^2}, \quad (3.147)$$

La relation de dispersion  $D_{zz} = 0$  peut se mettre sous forme polynômiale,

$$\omega^4 - \omega^2 [\omega_{pe}^2 + k_x^2 (a_s^2 + c^2)] + k_x^4 a_s^2 c^2 = 0, \quad (3.148)$$

dont le discriminant  $\Delta = [\omega_{pe}^2 + k_x^2 (a_s^2 + c^2)]^2 - 4k_x^4 a_s^2 c^2$  est strictement positif. Les ondes solutions de cette équation ont donc une amplitude stable.

$D_{xy}$ , le terme de couplage avec les ondes électrostatiques (branche  $D_{xx} = 0$ ), disparaît si les faisceaux ont le même tenseur de pression, la CFI devenant purement électromagnétique.

### 3.3.5.2 Relation de dispersion de la CFI symétrique

La présence des faisceaux ne s'insère pas dans l'expression des ondes électromagnétiques stables (le  $D_{zz}$  dans l'équation (3.146)) mais apparaît à travers l'ajout d'un terme supplémentaire. Ce "comportement" est différent de celui constaté pour la WI pure, l'anisotropie de température venant modifier directement le terme relatif aux ondes stables.

Pour des faisceaux symétriques en terme de moments fluides, la relation de dispersion  $D_{yy} = 0$  se réécrit

$$\begin{aligned} \omega^6 - \omega^4 (\omega_{pe}^2 + k_x^2 c^2 + 4k_x^2 a^2) \\ + \omega^2 (3k_x^4 a^4 + 4k_x^4 c^2 a^2 + \omega_{pe}^2 k_x^2 (3a^2 - u_0^2)) \\ + \omega_{pe}^2 k_x^4 u_0^2 a^2 - 3k_x^6 c^2 a^4 = 0, \end{aligned} \quad (3.149)$$

où on a défini  $a_s = a \forall s$ . Ce polynôme de degré 6 prend une forme factorisée plus suggestive,

$$[\omega^4 - \omega^2 (\omega_{pe}^2 + k_x^2 c^2 + k_x^2 a^2) + k_x^4 c^2 a^2] [\omega^2 - 3k_x^2 a^2] = \omega_{pe}^2 u_0^2 k_x^2 (\omega^2 - k_x^2 a^2). \quad (3.150)$$

Le premier terme de l'équation (3.150) correspond aux ondes électromagnétiques (3.148) stables, le second terme quant à lui correspond à des ondes sonores électroniques. Les deux sont couplées par la vitesse des faisceaux à travers le dernier terme.

Cette relation de dispersion admet une coupure dont l'expression,

$$k_c d_e = \frac{\omega_{pe}}{c} \frac{u_0}{\sqrt{3}a} \quad (3.151)$$

diffère de la théorie cinétique de par la présence d'un facteur  $\sqrt{3}$ . Ce comportement est nettement visible sur la figure 3.14. Le taux de croissance de l'instabilité, conformément à la description cinétique, décroît lorsque la température augmente

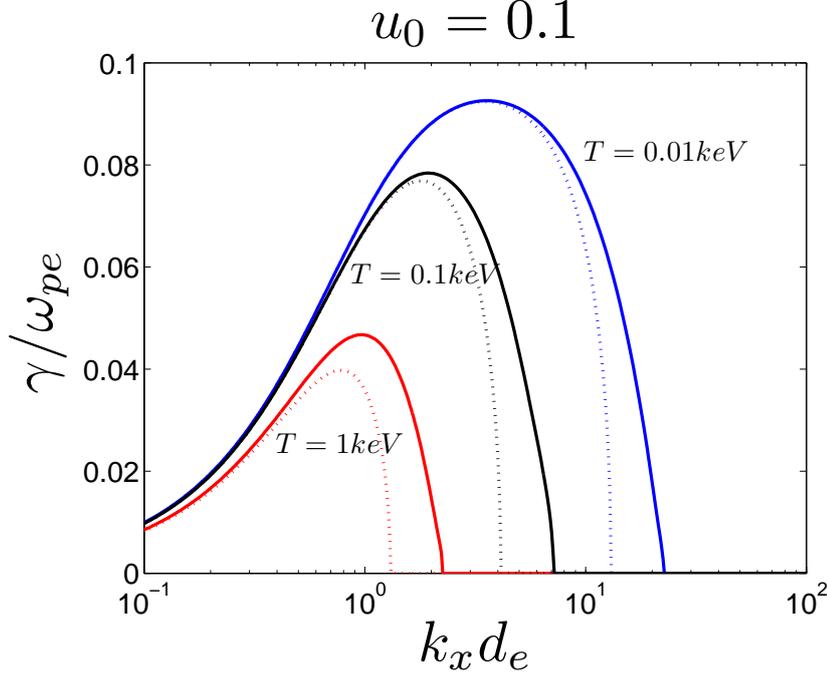


FIGURE 3.14 – Instabilité de filamentation de courant - Taux de croissance fluide (pointillés) et cinétique (trait plein) en fonction de  $k_x$  et de la température. On rappelle que  $a^2 = k_B T_s / m_e = P_s^{(0)} / (m_e n_s^{(0)})$ .

### 3.4 Propagation parallèle : modes Weibel propagatifs

On s'intéresse maintenant à la propagation d'ondes le long de la direction des faisceaux. L'équilibre est toujours celui défini en section 3.2.2. Le vecteur d'onde est dirigé selon l'axe Oy ( $\mathbf{k} = k_y \mathbf{e}_y$ ). Les travaux présentés dans cette section ont fait l'objet d'une publication dans la revue Journal of Plasma Physics (JPP) [21].

#### 3.4.1 Équation de dispersion

Commençons par linéariser les équations fluides pour obtenir et discuter l'équation de dispersion du système, sans approximation puis dans la limite hydrodynamique.

##### 3.4.1.1 Linéarisation et équation de dispersion

Les équations fluides linéarisées dans l'espace de Fourier sont :

— équation de continuité :

$$n_s^{(1)} = n_s^{(0)} \frac{k_y u_{y,s}^{(1)}}{w_s}, \quad (3.152)$$

où on définit

$$w_s \equiv \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_s^{(0)} = \omega - k_y u_{y,s}^{(0)}. \quad (3.153)$$

— équation du mouvement :

$$u_{x,s}^{(1)} = -\frac{ie}{mw_s} \left( E_x^{(1)} + u_{y,s}^{(0)} B_z^{(1)} \right) + \frac{k_y}{w_s} \frac{\Pi_{xy,s}^{(1)}}{mn_s^{(0)}}, \quad (3.154)$$

$$u_{y,s}^{(1)} = -\frac{ie}{mw_s} E_y^{(1)} + \frac{k_y}{w_s} \frac{\Pi_{yy,s}^{(1)}}{mn_s^{(0)}}, \quad (3.155)$$

$$u_{z,s}^{(1)} = -\frac{ie}{mw_s} \left( E_z^{(1)} - u_{y,s}^{(0)} B_x^{(1)} \right) + \frac{k_y}{w_s} \frac{\Pi_{yz,s}^{(1)}}{mn_s^{(0)}} \quad (3.156)$$

— évolution des composantes diagonales de  $\mathbf{\Pi}$  :

$$\Pi_{xx,s}^{(1)} = \frac{k_y}{w_s} \Pi_{xx,s}^{(0)} u_{y,s}^{(1)}, \quad \Pi_{zz,s}^{(1)} = \frac{k_y}{w_s} \Pi_{zz,s}^{(0)} u_{y,s}^{(1)}, \quad (3.157)$$

$$\Pi_{yy,s}^{(1)} = 3 \frac{k_y}{w_s} \Pi_{yy,s}^{(0)} u_{y,s}^{(1)} \quad (3.158)$$

— évolution des composantes non-diagonales de  $\mathbf{\Pi}$  :

$$\Pi_{xz,s}^{(1)} = 0, \quad (3.159)$$

$$\Pi_{xy,s}^{(1)} = \frac{k_y}{w_s} \Pi_{yy,s}^{(0)} u_{x,s}^{(1)} - \frac{ie}{m} \frac{\Pi_{yy,s}^{(0)} - \Pi_{xx,s}^{(0)}}{w_s} B_z^{(1)}, \quad (3.160)$$

$$\Pi_{yz,s}^{(1)} = \frac{k_y}{w_s} \Pi_{yy,s}^{(0)} u_{z,s}^{(1)} - \frac{ie}{m} \frac{\Pi_{zz,s}^{(0)} - \Pi_{yy,s}^{(0)}}{w_s} B_x^{(1)}. \quad (3.161)$$

L'équation de Maxwell-Faraday nous permet d'éliminer le champ magnétique via  $B_x^{(1)} = k_y E_z^{(1)} / \omega$  et  $B_z^{(1)} = -k_y E_x^{(1)} / \omega$ .

Remarquons d'abord que la pulsation  $\omega$  est, dans toutes les équations fluides, modifiée par un effet Doppler lié à la vitesse des faisceaux et généré par le terme convectif  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ .

L'évolution de  $u_{y,s}^{(1)}$  détermine complètement celle des éléments diagonaux du tenseur de pression à travers des effets de compressibilité. Cependant, deux de ces composantes,  $\Pi_{xx,s}^{(1)}$  and  $\Pi_{zz,s}^{(1)}$ , n'interviennent pas linéairement dans l'évolution du champ des vitesses et n'entrent donc pas dans la dynamique linéaire du plasma et des ondes. La composante  $\Pi_{xz,s}$  demeure quant à elle nulle.

On soulignera que les équations (3.157)-(3.158) correspondent à des évolutions de type polytropique d'indices 1 (3.157) et 3 (3.158). Remplacer la dynamique de  $\mathbf{\Pi}$  par trois fermetures polytropiques correspondant à celles évoquées ci-dessus donnerait une description rigoureusement identique de l'instabilité double faisceaux (TSI), car même cinétiquement, son comportement n'est pas affecté - au moins linéairement - par l'anisotropie de température. Cependant, la présence des composantes hors diagonale du tenseur de pression est indispensable à la description de l'instabilité Weibel : comme déjà remarqué auparavant, le couplage entre l'anisotropie d'équilibre et la perturbation de champ magnétique apparaît dans le second terme des équations (3.160) et (3.161). Remarquons enfin que, même en l'absence d'anisotropie, ces composantes pourront évoluer sous l'effet du champ des vitesses, via le premier terme des équations (3.160) et (3.161).

Combiner ces équations à celles de Maxwell conduit à l'équation de dispersion  $\det[\mathbf{D}] = 0$ , où

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{bmatrix}, \quad (3.162)$$

et dont les éléments  $D_{ij}$  sont donnés par

$$D_{xx} = \frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{c^2} \frac{w_s^2 + k_y^2 (a_{x,s}^2 - a_{y,s}^2)}{w_s^2 - k_y^2 a_{y,s}^2}, \quad (3.163)$$

$$D_{yy} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{w_s^2 - 3k_y^2 a_{y,s}^2}, \quad (3.164)$$

et

$$D_{zz} = \frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{c^2} \frac{w_s^2 + k_y^2 (a_{z,s}^2 - a_{y,s}^2)}{w_s^2 - k_y^2 a_{y,s}^2}. \quad (3.165)$$

Comme avec un modèle cinétique [3], on obtient trois relations de dispersion linéairement découplées. Ce découplage est notamment lié au choix de la configuration d'équilibre, avec des faisceaux alignés le long de l'un des axes principaux d'anisotropie du tenseur de pression. L'existence de composantes hors-diagonale de  $\mathbf{\Pi}$  à l'équilibre introduit en effet un couplage entre la branche électrostatique ( $D_{yy}$ ) et les branches électromagnétiques ( $D_{xx}$  et  $D_{zz}$ ).

La relation  $D_{yy} = 0$  correspond aux oscillations plasma déstabilisées par l'existence des faisceaux et amorties par des effets de température : il s'agit de l'instabilité double-faisceaux (TSI) fluide, de

nature électrostatique. Ces modes ne dépendent pas de l'anisotropie de pression mais uniquement de la température dans la direction parallèle à celle des faisceaux, comme dans le modèle cinétique.

Les relations de dispersion  $D_{xx} = 0$  et  $D_{zz} = 0$  sont de même nature et dépendent de l'anisotropie de pression. Elles décrivent des modes électromagnétiques, notamment les modes Weibel résonants (time-resonant Weibel instability ou TRWI en abrégé) dont l'étude fait l'objet de cette section. Il est bon de noter qu'en l'absence de faisceaux, l'équation  $D_{xx} = 0$  devient équivalente à l'équation (3.130) décrivant l'instabilité Weibel pure (en intervertissant le rôle des températures puisque dans ce dernier cas le vecteur d'onde était dirigé selon  $Ox$ ).

On supposera des faisceaux symétriques du point de vue des moments fluides retenus dans le modèle, de sorte que  $n_1^{(0)} = n_2^{(0)} = n^{(0)}/2$ ,  $u_{y,2}^{(0)} = -u_{y,1}^{(0)} = -u_0$ ,  $a_{z,s} = a_z$ ,  $a_{y,s} = a_y$ ,  $a_{x,s} = a_x \forall s$  et  $a_y \neq a_x \neq a_z$ . Les équations (3.163) et (3.164) deviennent respectivement

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2 - \frac{\omega_{pe}^2}{2c^2} \sum_s \frac{1 + \frac{k_y^2(a_x^2 - a_y^2)}{w_s^2}}{1 - \frac{k_y^2 a_y^2}{w_s^2}} = 0 \quad (3.166)$$

et

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{2} \sum_s \frac{1}{w_s^2} \frac{1}{1 - \frac{3k_y^2 a_y^2}{w_s^2}} = 0. \quad (3.167)$$

Contrairement au cas de la propagation perpendiculaire aux faisceaux, ici, les relations de dispersion dépendent du label  $s$  du faisceau  $y$  compris pour un système symétrique, en raison de l'effet Doppler.

### 3.4.1.2 Limite hydrodynamique

Introduisons le paramètre

$$\epsilon_s \equiv \frac{k_y a_{y,s}}{w_s}, \quad (3.168)$$

et définissons la limite hydrodynamique comme

$$|\epsilon_s| \ll 1. \quad (3.169)$$

Il s'agit d'une généralisation du critère précédemment introduit pour la propagation perpendiculaire. Dans le cas de faisceaux symétriques du point de vue des moments fluides, ce critère devient

$$\epsilon_{\pm} \equiv \frac{k_y a_y}{\sqrt{(\omega_r \mp k_y u_0)^2 + \gamma^2}} \ll 1. \quad (3.170)$$

Compte tenu de l'asymétrie introduite par l'effet Doppler, la valeur du paramètre dépend du faisceau considéré. Une description fluide quantitativement satisfaisante requiert que le critère  $|\epsilon_s| \ll 1$  soit satisfait pour tous les faisceaux simultanément.

#### 3.4.1.2.a Branche électrostatique

Pour des faisceaux symétriques, la relation de dispersion  $D_{yy} = 0$  s'écrit [3]

$$0 = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{2} \left( \frac{1 + \xi_+ Z_+}{k_y^2 a_y^2} + \frac{1 + \xi_- Z_-}{k_y^2 a_y^2} \right), \quad (3.171)$$

où  $Z_{\pm} = Z(\xi_{\pm})$  est la fonction de dispersion plasma d'argument  $\xi_+ \equiv w_+ / (\sqrt{2} k_y a_y) = (\omega - k_y u_0) / (\sqrt{2} k_y a_y)$  ou  $\xi_- \equiv w_- / (\sqrt{2} k_y a_y) = (\omega + k_y u_0) / (\sqrt{2} k_y a_y)$  respectivement.

L'instabilité TSI symétrique étant non-propagative ( $\omega_r = 0$  dans l'équation (3.170)),  $\epsilon_+ = \epsilon_-$  : les deux faisceaux peuvent satisfaire le critère hydrodynamique simultanément. En faisant l'hypothèse que  $\xi_{\pm} \gg 1$ , on peut développer la fonction  $Z$ ,

$$Z(\xi) \sim -\frac{1}{\xi} \left( 1 + \frac{1}{2\xi^2} + \frac{3}{4\xi^4} \right), \quad (3.172)$$

et, par injection dans (3.171), trouver

$$0 \sim 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{2} \left[ \frac{1}{w_+^2} \left( 1 + \frac{3k_y^2 a_y^2}{w_+^2} \right) + \frac{1}{w_-^2} \left( 1 + \frac{3k_y^2 a_y^2}{w_-^2} \right) \right]. \quad (3.173)$$

Il est nécessaire de conserver le terme d'ordre 4 en  $\xi$  dans le développement de  $Z$  pour préserver des effets thermiques dans la relation de dispersion. La contribution finale de ce terme est seulement d'ordre  $\xi^{-2}$ .

Un développement de Taylor en  $\epsilon_\alpha \ll 1$  de la relation de dispersion fluide (3.167) conduit lui aussi à l'équation (3.173), impliquant l'équivalence des deux descriptions lorsque  $\epsilon_\alpha \ll 1$  simultanément pour les deux faisceaux.

### 3.4.1.2.b Branche électromagnétique

La relation de dispersion cinétique  $D_{xx} = 0$  (ou  $D_{zz} = 0$ ) pour des faisceaux symétriques s'écrit [3]

$$\frac{k_y^2 c^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left( A + \frac{A}{2} (\xi_+ Z_+ + \xi_- Z_-) - 1 \right), \quad (3.174)$$

où on introduit le paramètre d'anisotropie  $A \equiv a_x^2/a_y^2$ .

Supposant à nouveau  $\xi_\pm \gg 1$ , on obtient la relation de dispersion dans la limite hydrodynamique :

$$\frac{k_y^2 c^2}{\omega^2} \simeq 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left[ 1 + \frac{A}{2} \left( \frac{k_y^2 a_y^2}{w_+^2} + \frac{k_y^2 a_y^2}{w_-^2} \right) \right]. \quad (3.175)$$

Tous les termes d'ordre supérieur à  $\epsilon_\pm^2$  ont été négligés. Cette relation de dispersion coïncide avec celle que l'on obtient en prenant la même limite à partir de la relation fluide (3.166).

## 3.4.2 L'instabilité Weibel résonante

Focalisons nous sur la relation de dispersion des modes électromagnétiques,  $D_{xx} = 0$ , parmi lesquels figurent les modes Weibel. L'analyse numérique de la relation de dispersion cinétique [2] a permis de montrer l'existence d'un nombre d'onde critique  $k_{SB}$  (où SB signifie "slope breaking") pour lequel survient une brisure de la pente du taux de croissance et au-delà duquel l'instabilité Weibel devient propagative (Figure 3.15).

L'approche fluide étendue présentée dans ce chapitre permet une description relativement précise de cette transition. De plus, elle permet de mettre en évidence les autres racines de l'équation de dispersion  $D_{xx} = 0$  (3.16) et plus particulièrement l'existence d'une seconde branche instable pour  $k_y < k_{SB}$ . La cassure du taux de croissance correspond à une fusion des deux branches instables et apparaît donc comme une bifurcation dans l'espace  $(\omega, k_y)$ .

### 3.4.2.1 Mise en évidence de la transition WI-TRWI

Commençons par essayer de reproduire le résultat cinétique connu, et utilisons pour cela les paramètres suivants :  $u_0 = 1/30$ ,  $a_x = u_0 + 0.1$  and  $a_y = u_0/10$ , que l'on peut raisonnablement considérer comme non-relativistes. Le panneau de gauche de la Figure 3.15 représente une comparaison entre les taux de croissance maximaux, en fonction de  $k_y$ , obtenus en résolvant le modèle fluide, le modèle cinétique et la limite hydrodynamique (identique pour les deux modèles). La fréquence réelle correspondant à ces modes est représentée sur le panneau de droite. Les solutions cinétique (rouge) et fluide (noir) sont obtenues à partir des relations de dispersion (3.174) et (3.166), sans approximation.

La première chose à souligner est que l'accord entre les descriptions fluide et cinétique est très bon pour la fréquence réelle  $\omega_r$ . La différence entre les deux modèles est négligeable, y compris lorsque le paramètre  $\epsilon_\pm$  est comparable ou supérieur à 1. Il est impossible d'en dire autant concernant le taux de croissance  $\gamma$ , où un écart apparaît, de plus en plus fort à mesure que l'on se rapproche de la coupure  $k_c$  de l'instabilité. Le modèle fluide restitue cependant la valeur cinétique de  $k_c$ , tout comme il le fait dans le cas de l'instabilité Weibel pure traitée dans la section précédente. Prendre la limite hydrodynamique du modèle (courbe en pointillés) entraîne, comme attendu, la destruction de cette coupure.

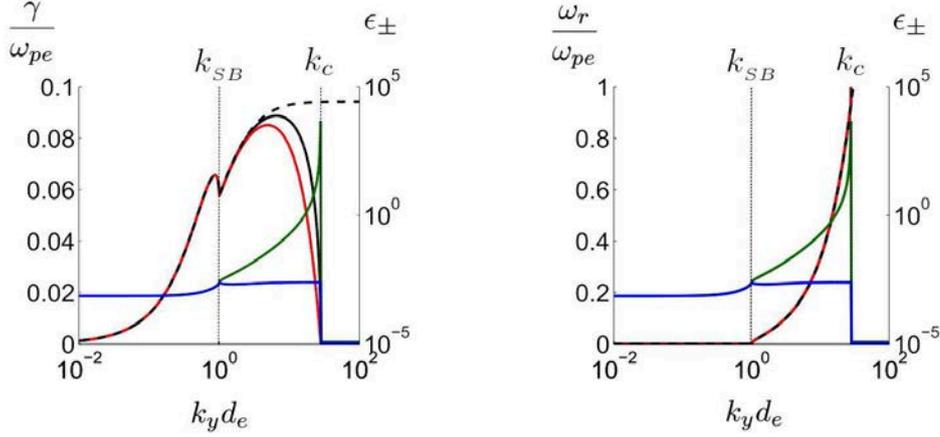


FIGURE 3.15 – Comparaison entre les taux de croissance cinétique (trait plein rouge) et fluide (trait plein noir) des modes les plus instables (panneau de gauche) et des fréquences correspondantes (panneau de droite). En pointillés, la solution de l'équation obtenue à partir de l'équation (3.175), correspondant à la limite hydrodynamique, encore une fois responsable de la disparition de la coupure. La valeur du paramètre  $\epsilon_{\pm}$ , calculée avec la valeur cinétique de  $\omega$  pour les deux faisceaux, est représentée par les lignes bleues ( $\epsilon_+$ ) et vertes ( $\epsilon_-$ ). Les paramètres physiques utilisés sont  $u_0 = 1/30$ ,  $a_x = u_0 + 0.1$  et  $a_y = u_0/10$

La brisure de pente du taux de croissance en  $k_y = k_{SB}$  est bien reproduite par le modèle fluide : on observe une augmentation progressive de la fréquence réelle des modes instables pour des nombres d'onde compris entre  $k_{SB}d_e \sim 1$  and  $k_C d_e \sim 30$  avec les deux descriptions. Pour des nombres d'onde inférieurs à  $k_{SB}$ , l'instabilité ne se propage pas. Le nombre d'onde  $k_{SB}$  correspond donc à une transition entre deux régimes de l'instabilité : un régime non-propagatif, similaire à celui de l'instabilité Weibel pure, et un régime propagatif. Ce comportement est caractéristique de l'instabilité Weibel résonante (TRWI), et la transition à  $k_{SB}$  survient dans le régime hydrodynamique (les deux faisceaux vérifient  $|\epsilon_{\pm}| \ll 1$  autour de la brisure) pour les paramètres considérés. Le modèle fluide étendu reposant sur la dynamique complète du tenseur de pression est donc capable de donner une description précise de cette transition.

Si quantitativement l'accord est plus que satisfaisant dès lors que la limite hydrodynamique est vérifiée par les deux faisceaux, l'analyse linéaire du modèle fluide s'avère en outre qualitativement digne de confiance en dehors de ce régime. Il est donc possible d'analyser la relation de dispersion (3.166) pour étudier le comportement des solutions de (3.174), ce qui sera analytiquement plus aisé.

### 3.4.2.2 Analyse de la relation de dispersion fluide

On peut réécrire l'équation (3.166) sous une forme polynomiale, dont le degré est 3 en  $\omega^2$  :

$$\begin{aligned}
 0 = & \omega^6 - \omega^4 [\omega_{pe}^2 + k_y^2 c^2 + 2k_y^2 (u_0^2 + a_y^2)] \\
 & + \omega^2 [k_y^4 (u_0^2 - a_y^2)^2 + 2k_y^2 (u_0^2 + a_y^2) (\omega_{pe}^2 + k_y^2 c^2) - \omega_{pe}^2 k_y^2 a_x^2] \\
 & - k_y^4 (a_y^2 - u_0^2) [k_y^2 c^2 (a_y^2 - u_0^2) - \omega_{pe}^2 (u_0^2 + a_x^2 - a_y^2)].
 \end{aligned} \tag{3.176}$$

Ceci implique l'existence de trois couples de solutions complexes, comme montré sur la figure 3.16 où les paramètres de la figure 3.15 ( $u_0 = 1/30$ ,  $a_x = u_0 + 0.1$  et  $a_y = u_0/10$ ) ont été utilisés pour résoudre (3.176).

Bien qu'il soit en principe possible d'écrire la forme explicite des solutions d'un polynôme de degré 3, il suffit de discuter l'existence de la partie imaginaire de  $\omega^2$  pour identifier le caractère propagatif et/ou instable des modes dans les intervalles  $k_y \leq k_{SB}$ ,  $k_{SB} \leq k_y \leq k_C$  et  $k_y > k_C$ . Réécrivons (3.176) sous une forme plus compacte,

$$W^3 + d_2 W^2 + d_1 W + d_0 = 0, \tag{3.177}$$

où  $W \equiv \omega^2$ . Le discriminant de ce polynôme s'écrit [22]

$$\Delta \equiv q^3 + r^2, \tag{3.178}$$

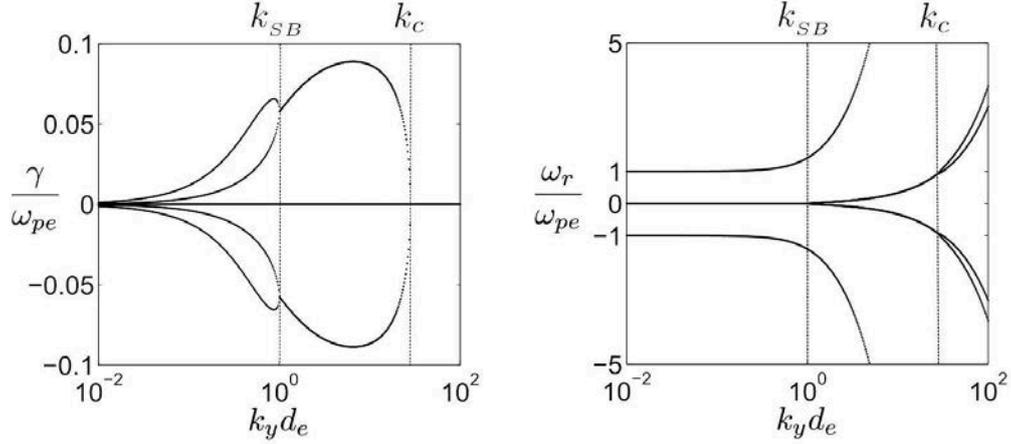


FIGURE 3.16 – Racines de l'équation (3.176) : taux de croissance  $\gamma$  (panneau de gauche), fréquence (panneau de droite). Les deux panneaux décrivent le comportement d'un total de six modes en fonction de  $k_y$ . La brisure de pente observée sur le taux de croissance en Figure 3.15 correspond à une fusion de deux modes instables. Deux autres modes, caractérisés par  $\omega_r \geq \omega_{pe}$ , sont stables quelque soit  $k_y$ . Résultats obtenus pour les paramètres suivants :  $u_0 = 1/30$ ,  $a_x = u_0 + 0.1$  et  $a_y = u_0/10$ .

avec

$$q = \frac{1}{3}d_1 - \frac{1}{9}d_2^2, \quad r = \frac{1}{6}(d_1d_2 - 3d_0) - \frac{1}{27}d_2^3. \quad (3.179)$$

Lorsque  $\Delta > 0$ , une racine sur trois est réelle, les deux autres étant complexes conjuguées. Dans le cas où  $\Delta < 0$ , on dénombre trois solutions réelles distinctes, alors que si  $\Delta = 0$  toutes les solutions sont réelles mais au moins d'eux d'entre elles coïncident.

Les expressions les plus générales pour les trois solutions  $\omega^2$  sont

$$\omega_0^2 = \underbrace{[r + \Delta^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{3}}}_{s_+} + \underbrace{[r - \Delta^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{3}}}_{s_-} - \frac{d_2}{3} \quad (3.180)$$

et

$$\omega_{\pm}^2 = -\frac{1}{2}(s_+ + s_-) - \frac{d_2}{3} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}(s_+ - s_-), \quad (3.181)$$

$s_+$  et  $s_-$  étant a priori des nombres complexes.

Comme  $W = \omega^2 = \omega_r^2 - \gamma^2 + i2\omega_r\gamma$ , il n'y a que deux possibilités pour que  $\omega^2$  soit strictement réel : soit  $\omega_r = 0$ , soit  $\gamma = 0$ , signifiant que les modes sont soit purement instables, soit purement propagatifs. Un mode à la fois instable et propagatif correspond à une valeur complexe de  $\omega^2$ .

On peut alors caractériser trois régions dans le plan  $(\omega, k_y)$  en fonction du signe de  $\Delta$ . Ces trois régions sont celles mises en évidence dans l'exemple de la figure 3.16. De plus, le discriminant  $\Delta$  étant une fonction continue de  $k_y$ , la brisure de pente en  $k_{SB}$  et la coupure en  $k_c$  correspondent à la condition

$$\Delta = 0. \quad (3.182)$$

Nous avons donc un critère pour déterminer si l'instabilité Weibel est résonante, non-résonante ou stabilisée. Discutons les trois régions de la figure 3.16 à la lumière de ce nouveau développement.

- Pour  $k_y < k_{SB}$ , le discriminant  $\Delta$  est négatif, assurant trois valeurs réelles strictement différentes pour  $\omega^2$ , et donc des modes soit purement propagatifs, soit purement instables. Les deux modes stables, se propageant dans des directions opposées et caractérisés par  $|\omega_r| \geq \omega_{pe}$ , correspondent à des ondes électromagnétiques polarisées linéairement. Les quatre modes restants sont deux modes instables non propagatifs, de type Weibel et évoluant sur des échelles de temps longues devant l'inverse de la pulsation plasma électronique  $\gamma \ll \omega_{pe}$ , ainsi que leurs équivalents amortis. Pour les paramètres retenus sur la figure 3.16, un maximum local du taux de croissance peut être identifié aux alentours de  $k_y d_e \sim 0.8$ .
- Le point  $k_y = k_{SB} \sim d_e^{-1}$  représente une double bifurcation dans l'espace  $(k_y, \omega)$ , solution de  $\Delta(k_y) = 0$ . Les deux modes purement instables observés dans la région  $k_y < k_{SB}$  ont le même taux de croissance et deviennent propagatifs, dans des directions opposées.

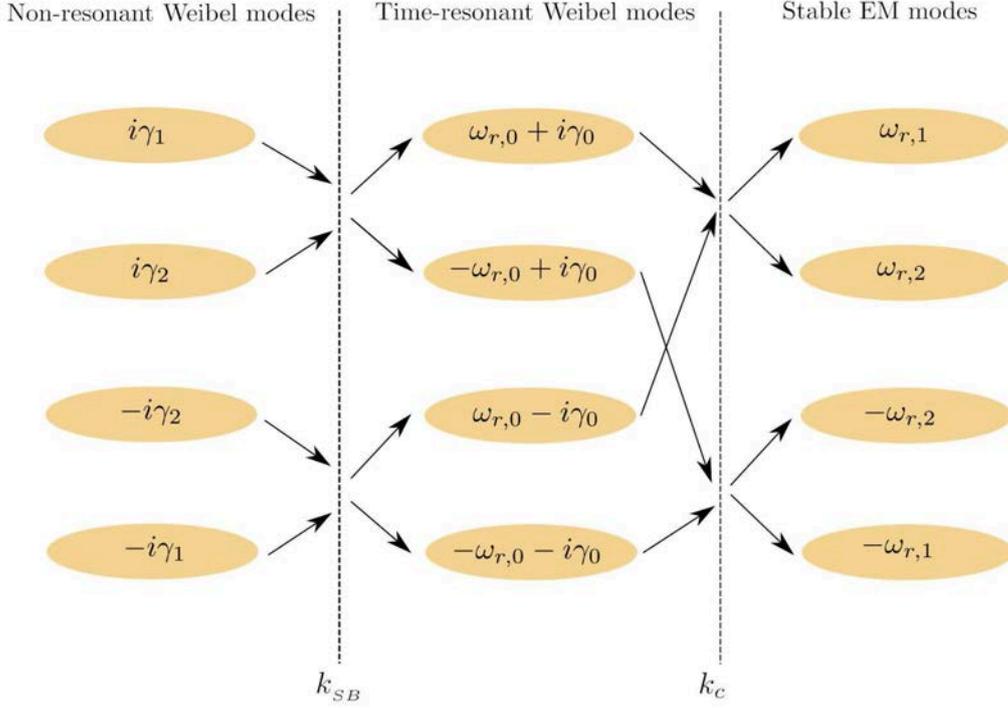


FIGURE 3.17 – Forme générale et comportement des quatre modes instables en fonction du nombre d'onde  $k_y$ . Les flèches noires indiquent une fusion ou une levée de dégénérescence de deux modes en un point de bifurcation. Ces dernières, en  $k_y = k_{SB}$  et  $k_y = k_c$ , sont indiquées par les lignes verticales en pointillés. Les indices  $\alpha = 1, 2$  sont des labels arbitraires pour distinguer deux valeurs différentes de  $\gamma$  et/ou  $\omega_r$ .

- Pour  $k_{SB} < k_y < k_c$ , l'instabilité Weibel devient résonante (time-resonant Weibel instability). Ceci correspond à  $\Delta > 0$ . Les modes TRWI se propagent selon des sens opposés (même taux de croissance  $\gamma$  mais  $\omega_r$  opposées) et sont décrits par les racines  $\omega_+^2$  and  $\omega_-^2$  (3.181). Les modes amortis et croissants sont complexe conjugués deux à deux. Enfin, les deux modes électromagnétiques stables rencontrés pour  $k_y < k_{SB}$  correspondent à l'unique racine réelle  $W = \omega_0^2$  (3.180).
- Lorsque  $k_y = k_c$ , la partie instable des solutions disparaît. Ce point correspond lui aussi à une double bifurcation dans l'espace  $(k_y, \omega)$ , solution de  $\Delta(k_c) = 0$ .
- Enfin, quand  $k_y > k_c$  (où  $\Delta < 0$  à nouveau) tous les modes maintiennent leur caractère propagatif et deux valeurs de  $|\omega_r|$  apparaissent. Les six modes observés sont stables et polarisés linéairement.

La nature des six modes fluides dans les trois régions de l'espace  $(\omega, k_y)$  est résumée sur le schéma présenté en Figure 3.17.

### 3.4.2.2.a Limite basse-fréquence

Pour aller plus loin dans l'étude des modes instables, on peut se restreindre aux basses fréquences telles que  $|\omega| \ll \omega_{pe}$  et ainsi simplifier l'équation (3.176) :

$$0 = \omega^4 [\omega_{pe}^2 + k_y^2 c^2] - \omega^2 [2k_y^2 (u_0^2 + a_y^2) (\omega_{pe}^2 + k_y^2 c^2) - \omega_{pe}^2 k_y^2 a_x^2] + k_y^4 (a_y^2 - u_0^2) [k_y^2 c^2 (a_y^2 - u_0^2) - \omega_{pe}^2 (u_0^2 + a_x^2 - a_y^2)]. \quad (3.183)$$

Cette approximation permet d'éliminer les deux branches électromagnétiques de haute-fréquence pour lesquelles  $|\omega| > \omega_{pe}, \forall k_y$ .

Sous cette approximation, le taux de croissance et la fréquence réelle des quatre modes restants changent peu : pour les paramètres testés en figure 3.15 la variation relative du taux de croissance maximal dans les régimes résonant et non-résonant est de l'ordre de 0.1% et celles de  $k_c$  et  $k_{SB}$  sont encore inférieures.

Ayant réduit le degré de la relation de dispersion, il est possible de trouver une expression analytique pour les nombres d'onde  $k_{SB}$  et  $k_c$ . On cherche pour cela les racines de l'équation  $\Delta_*(k_y) = 0$ , où

$$\Delta_* = k_y^4 \{ [16u_0^2 a_y^2 c^4] k_y^4 + 8\omega_{pe}^2 u_0^2 c^2 [4a_y^2 - a_x^2] k_y^2 + \omega_{pe}^4 [a_x^4 + 8u_0^2 (2a_y^2 - a_x^2)] \}. \quad (3.184)$$

est le discriminant de l'équation (3.183).

Les racines  $k_y^2$  de ce polynôme ne sont réelles que si  $a_y < u_0$ . Dans ce cas, on obtient

$$k_{SB}^2 d_e^2 = \frac{1}{4} \left[ \frac{a_x^2}{a_y^2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{a_y^2}{u_0^2}} \right) - 4 \right], \quad k_c^2 d_e^2 = \frac{1}{4} \left[ \frac{a_x^2}{a_y^2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{a_y^2}{u_0^2}} \right) - 4 \right]. \quad (3.185)$$

Les paramètres utilisés pour obtenir la figure 3.16 satisfont la condition  $a_y < u_0$ . Pour cet exemple en particulier, les expressions (3.185) conduisent à  $k_{SB} = 1.0025$  et  $k_c = 28.2311$ , en bon accord avec la solution numérique de l'équation (3.176). L'estimation analytique de  $k_{SB}$  obtenue par [2] en régime hydrodynamique est retrouvée en supposant  $a_y \ll u_0$ , pour laquelle les expressions (3.185) deviennent :

$$k_{SB} d_e \simeq \sqrt{\frac{a_x^2}{8u_0^2} - 1} \quad ; \quad k_c d_e \simeq \frac{a_x}{\sqrt{2}a_y}. \quad (3.186)$$

Le cas limite  $u_0 = a_y$  est relativement intéressant car il implique la superposition des deux nombres d'onde

$$k_{SB} d_e = k_c d_e = \sqrt{\frac{a_x^2}{4a_y^2} - 1} \quad (3.187)$$

et la disparition du régime résonant de l'instabilité Weibel.

Remarquons la forte ressemblance entre (3.187) et l'expression de la coupure de l'instabilité Weibel pure  $k_c^{WI} = \sqrt{a_x^2/a_y^2 - 1}$  (3.138) étudiée dans la section précédente. En effet, pour  $a_y = u_0$  la relation de dispersion fluide sans approximation (3.176) (un polynôme de degré 6) devient

$$0 = \omega^4 - \omega^2 [\omega_{pe}^2 + k_y^2(c^2 + 4a_y^2)] + k_y^2 [k_y^2 c^2 4a_y^2 - \omega_{pe}^2(a_x^2 - 4a_y^2)]. \quad (3.188)$$

Cette équation a exactement la même forme que la relation de dispersion de la WI (3.134) avec une vitesse thermique  $\tilde{a}_y$  effective telle que  $\tilde{a}_y^2 = 4a_y^2$ . Ceci peut être compris si on suppose que chaque faisceau est représenté par une fonction de distribution de type Maxwellienne dont l'écart type dans l'espace des vitesses est  $\sigma_i = a_i$ , avec  $i = x, y$  : quand  $a_y = u_0$ , les deux distributions sont si proches qu'elles semblent n'en former qu'une seule, dont l'écart type est  $\tilde{\sigma}_i = 2\sigma_i$ .

### 3.4.2.2.b Limite basse-fréquence et grandes longueurs d'onde

On peut trouver une expression asymptotique pour le taux de croissance des modes Weibel non-résonants existants pour  $k_y < k_{SB}$  si on prend la limite  $k_y d_e \ll 1$  de l'équation (3.183) :

$$\omega^4 - \omega^2 [2k_y^2(u_0^2 + a_y^2) - k_y^2 a_x^2] + k_y^4(a_y^2 - u_0^2)(a_y^2 - u_0^2 - a_x^2) = 0. \quad (3.189)$$

Le discriminant de ce nouveau polynôme s'écrit

$$\Delta_{**} = k_y^4 a_x^4 \left[ 1 + \frac{8u_0^2}{a_x^2} \left( \frac{2a_y^2}{a_x^2} - 1 \right) \right] = k_y^4 [a_x^4 + 8u_0^2(2a_y^2 - a_x^2)]. \quad (3.190)$$

Comme le signe de (3.190) ne dépend pas de la valeur de  $k_y$ , les bifurcations en  $k_{SB}$  et  $k_c$  disparaissent du modèle sous cette limite.

Prenons ensuite la limite de forte anisotropie exprimée telle que  $a_y \ll u_0 \ll a_x$ , satisfaite sur les figures 3.15 et 3.16 (correspondant à  $\Delta_{**} \sim 10^{-4} k_y^4$ ). Dans ce cas,  $\Delta_{**} > 0$  et on trouve deux expressions approchées pour  $\omega^2$  décrivant les deux branches instables et à partir desquelles il est possible d'avoir une estimation du taux de croissance

$$\omega^2 \simeq -k_y^2(u_0^2 - a_y^2), \quad \gamma \simeq \pm k_y u_0 \sqrt{1 - \frac{a_y^2}{u_0^2}} \quad (\text{mode le moins instable}), \quad (3.191)$$

$$\omega^2 \simeq -k_y^2(a_x^2 - 3u_0^2), \quad \gamma \simeq \pm k_y a_x \sqrt{1 - \frac{3u_0^2}{a_x^2}} \quad (\text{mode le plus instable}). \quad (3.192)$$

Comme attendu, ces deux modes sont non-propagatifs. À titre d'exemple, une comparaison entre les expressions (3.191), (3.192) et les solutions de (3.176) est montrée en Figure 3.18.

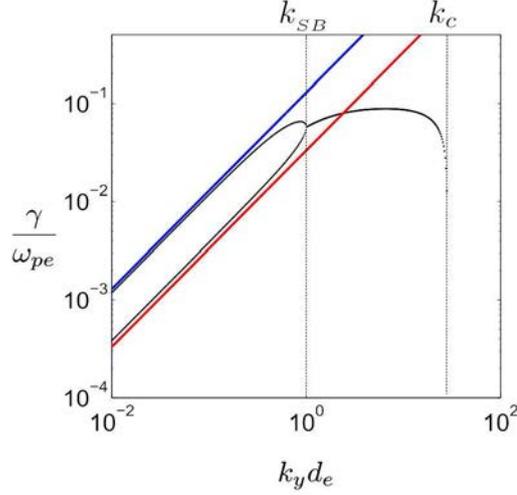


FIGURE 3.18 – Les deux expressions asymptotiques (en bleu et en rouge) du taux de croissance pour les deux modes purement instables dans la limite  $k_y d_e \ll 1$ . Les paramètres utilisés sont ceux des figures 3.15 et 3.16.

### 3.4.2.2.c D'une instabilité à deux régimes vers une TRWI exclusive

Le discriminant  $\Delta_{**}$  n'est pas nécessairement positif, mais son signe ne dépend pas de  $k_y$ . Il est donc possible d'avoir une instabilité Weibel résonante quelque soit  $k_y d_e \ll 1$  pourvu que  $\Delta_{**} < 0$ . Il faut pour cela un équilibre vérifiant  $a_{x,-}^2 < a_x^2 < a_{x,+}^2$ , avec

$$a_{x,\pm}^2 = 4u_0^2 \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{a_y^2}{u_0^2}} \right). \quad (3.193)$$

Sans restreindre la généralité de notre discussion, on peut supposer  $a_y \ll u_0$  de sorte que

$$a_{x,-} \simeq \sqrt{2}a_y \quad ; \quad a_{x,+} \simeq \sqrt{2(4u_0^2 - a_y^2)} \simeq 2\sqrt{2}u_0. \quad (3.194)$$

Si on regarde de plus près l'expression de  $k_{SB}$  donnée en 3.186, établie pour  $a_y \ll u_0$ , on remarque que  $k_{SB}$  ne peut pas exister si  $a_x < a_{x,+}$ <sup>8</sup>. On constate la disparition du régime non-résonant de l'instabilité Weibel dans le cas où  $a_x < a_{x,+}$  si  $a_y \ll u_0$ .

Pour illustrer ce régime exclusivement caractérisé par la TRWI, prenons un exemple pour lequel  $a_x$  est proche de la borne supérieure  $a_{x,+}$  de l'intervalle  $\Delta_{**} < 0$  : on choisit  $u_0 = 1/30$  et  $a_y = u_0/10$  pour satisfaire la condition  $a_y \ll u_0$  et  $a_x = \sqrt{2}u_0 \lesssim a_{x,+}$ , de sorte que  $\Delta_{**} \simeq -1,5 \cdot 10^{-5} k_y^4$ . Les solutions de la relation de dispersion fluide complète (3.176) sont représentées sur la figure 3.19. Un contrôle du signe de  $\Delta$ , le discriminant de la relation de dispersion sans approximation (3.176) permet de confirmer que le spectre représenté correspond bien à une instabilité résonante quelque soit  $k_y < k_c$ , où  $k_c$  correspond à l'estimation (3.186) :  $\Delta$  est positif pour  $k_y < k_c \sim 10d_e^{-1}$ , nul si  $k_y = k_c$  et négatif pour  $k_y > k_c$ .

On peut conduire le même raisonnement au niveau de la borne inférieure de l'intervalle  $\Delta_{**} < 0$ , en choisissant  $u_0 = 1/30$ ,  $a_y = u_0/10$  et  $a_x = 2a_y$  de telle sorte que  $\Delta_{**} \simeq -2 \cdot 10^{-7} k_y^4$  (Figure 3.20). Comme attendu à cause de la faible anisotropie de température, le taux de croissance est plus faible que celui représenté en Figure 3.19, mais le comportement des modes est qualitativement le même.

### 3.4.2.3 Mise en évidence des propriétés fluides de la TRWI dans le régime cinétique

Bien que quantitativement l'estimation des taux de croissance et des nombres d'onde critiques puisse différer, l'existence et le comportement des racines de l'équation (3.176) sur les trois intervalles  $k_y < k_{SB}$ ,  $k_{SB} < k_y < k_c$  et  $k_c < k_y$  sont vérifiés dans une description cinétique, même si la limite

7. On traite l'équation (3.190) comme un polynôme de degré 4 en  $a_x^2$ , dont le discriminant est  $64u_0^2(u_0^2 - a_y^2)$ . Notons que lorsque  $a_x \lesssim a_{x,-}$ , le discriminant  $\Delta_{**}$  est positif mais il n'y a plus d'instabilité, l'énergie thermique transverse n'étant plus suffisamment élevée pour exciter les modes Weibel.

8. Les nombres d'onde sont supposés réels dans la linéarisation des équations fluides et cinétiques utilisée dans ce travail.

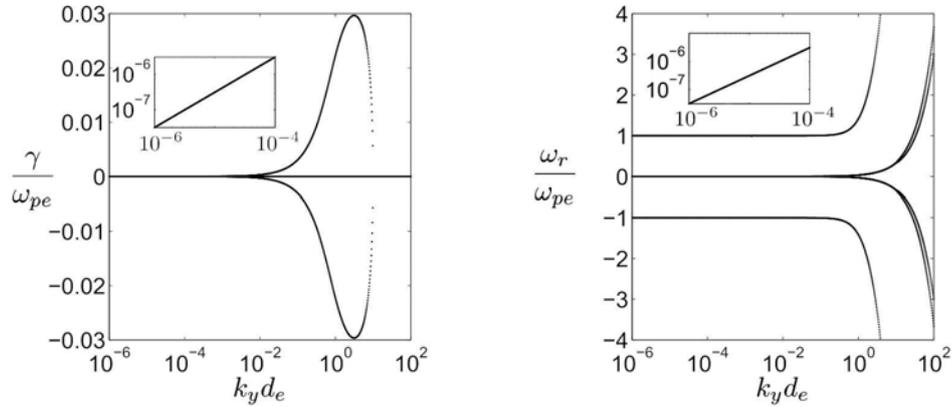


FIGURE 3.19 – Solution numérique de la relation de dispersion fluide (3.176) pour  $u_0 = 1/30$ ,  $a_y = u_0/10$  et  $a_x = \sqrt{2}u_0$  (dans ce cas,  $\Delta_{**} \simeq -1,5 \cdot 10^{-5} k_y^4$ ). Un zoom est réalisé pour les faibles nombres d'onde, là où le taux de croissance et la fréquence réelle sont petits, mais non nuls.

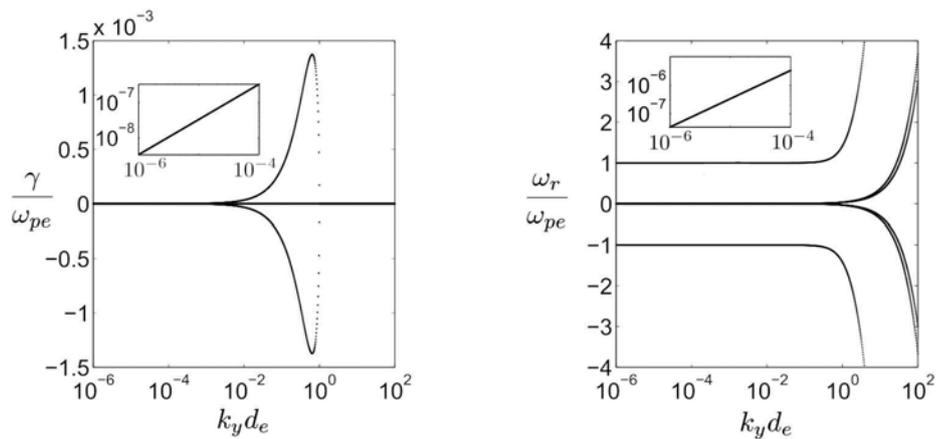


FIGURE 3.20 – Solution numérique de la relation de dispersion fluide (3.176) pour  $u_0 = 1/30$ ,  $a_y = u_0/10$  et  $a_x = 2a_y$  (dans ce cas,  $\Delta_{**} \simeq -2 \cdot 10^{-7} k_y^4$ ). Un zoom est réalisé pour les faibles nombres d'onde, là où le taux de croissance et la fréquence réelle sont petits, mais non nuls.

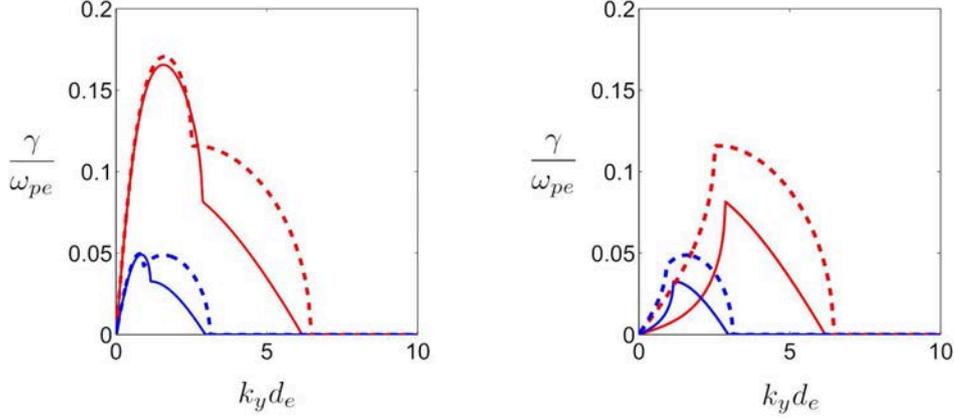


FIGURE 3.21 – Mise en évidence des deux modes instables non-propagatifs. Comparaison entre les taux de croissance fluide (pointillés) et cinétique (trait plein) correspondant aux deux modes purement instables de l’instabilité Weibel : le plus instable est représenté sur le panneau de gauche et le moins instable sur celui de droite. Les courbes bleues sont obtenues à partir de  $u_0 = 1/30$ ,  $a_y = u_0/\sqrt{2}$  et  $a_x = 10a_y$ . Les courbes rouges correspondent aux paramètres  $u_0 = 1/30$ ,  $a_y = u_0/\sqrt{2}$  et  $a_x = 5a_y$ . Une comparaison directe avec la figure 1 de [2] peut être faite.

hydrodynamique n’est pas atteinte. On citera en particulier la branche inférieure des modes instables non-propagatifs mise en évidence sur la figure 3.16 pour  $k_y < k_{SB}$  : sur la figure 3.21, panneau de droite, cette branche apparaît pour des paramètres ne satisfaisant pas le critère hydrodynamique. Le modèle fluide surestime la valeur cinétique du taux de croissance mais la transition entre les régimes non-résonant et résonant a lieu pour des valeurs de  $k_{SB}$  à peu près identiques. On notera que la valeur de  $|\omega|$  plus faible pour la branche inférieure, celle-ci a plus de mal à satisfaire le critère hydrodynamique que la branche supérieure.

Le rôle de la température transverse  $T_x$  sur la transition d’une instabilité à deux régimes (non-résonant pour  $k_y < k_{SB}$  puis résonant pour  $k_{SB} < k_y < k_c$ ) vers une instabilité propagative quelque soit le nombre d’onde (cf. Section 3.4.2.2.c), est lui aussi retrouvé dans l’analyse cinétique. Les figures 3.22 et 3.23 montrent une comparaison fluide/cinétique entre les taux de croissance et la fréquence des modes analysés précédemment sur les figures 3.19 et 3.20 respectivement.

La disparition du caractère non-résonant de l’instabilité en faveur d’une TRWI exclusive, lorsque la condition  $a_{x-}^2 < a_x^2 < a_{x+}^2$  est satisfaite, est observée pour le cas représenté en figure 3.22, avec en prime un accord excellent entre les résultats fluide et cinétique, cohérent avec la valeur du paramètre hydrodynamique  $\epsilon_{\pm}$ , petite devant 1 pour chacun des deux faisceaux sur la quasi-totalité du spectre. Le comportement observé pour  $k_y d_e \sim 10^{-6}$  est le même que celui que l’on observerait pour des nombres d’onde plus faibles : les termes  $\sim k_y^8$  et  $\sim k_y^6$  dans l’équation (3.184) sont dominés par ceux proportionnels à  $k_y^4$ .

La figure 3.23 représente un cas largement en dehors de la limite hydrodynamique et néanmoins, l’accord fluide/cinétique reste excellent d’un point de vue qualitatif. Bien que l’erreur commise par le modèle fluide sur la valeur du taux de croissance soit énorme, le comportement de l’instabilité est bien là : la TRWI est exclusive comme attendu (les valeurs fluide et cinétique de  $\omega_r$  sont quasiment identiques), l’estimation de la coupure  $k_c$  est bonne et le taux de croissance maximal fluide augmente avec l’anisotropie ( $a_x/a_y = 10\sqrt{2}$  sur la figure 3.22 et  $a_x/a_y = 2$  sur la figure 3.23).

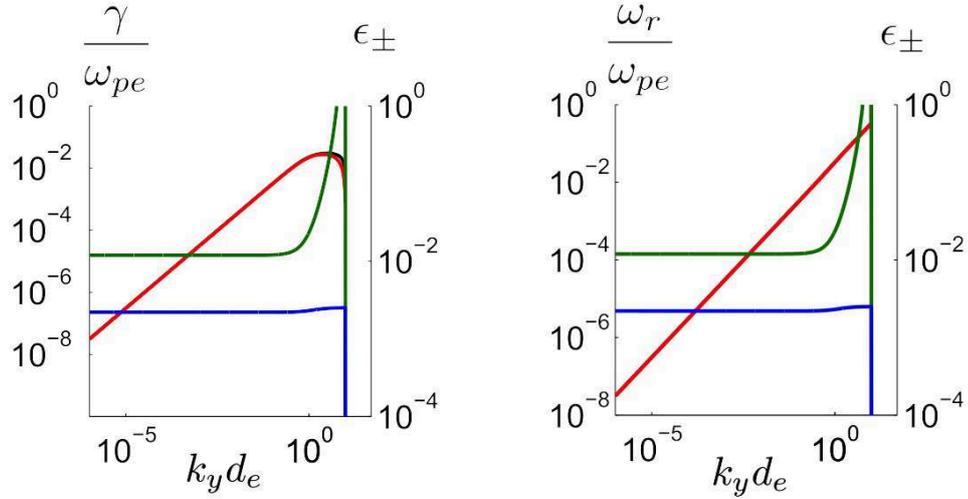


FIGURE 3.22 – TRWI exclusive. Panneau de gauche : comparaison entre les taux de croissance cinétique (rouge) et fluide (noir) des modes les plus instables. Panneau de droite : même chose avec la fréquence des modes représentés sur le panneau de gauche. Les courbes bleue et verte correspondent à la valeur du paramètre hydrodynamique  $\epsilon_s = k_y a_y / w_s$  pour chacun des deux faisceaux, calculée avec la valeur cinétique de  $\omega$ . L'équilibre perturbé étudié est le même que celui utilisé en figure 3.19 :  $u_0 = 1/30$ ,  $a_x = \sqrt{2}u_0$  et  $a_y = u_0/10$ . Les différences entre les modèles fluide et cinétique n'apparaissent qu'à proximité de la coupure.

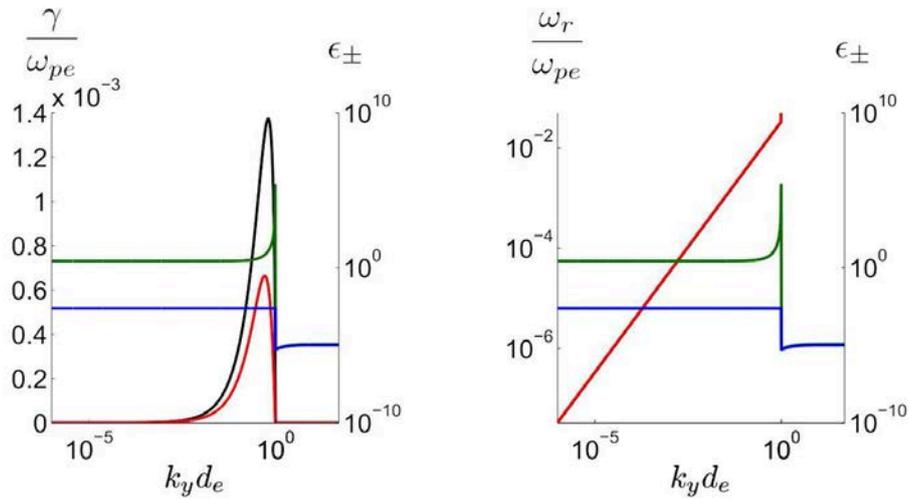


FIGURE 3.23 – TRWI exclusive. Panneau de gauche : comparaison entre les taux de croissance cinétique (rouge) et fluide (noir) des modes les plus instables. Panneau de droite : même chose avec la fréquence des modes représentés sur le panneau de gauche. Les courbes bleue et verte correspondent à la valeur du paramètre hydrodynamique  $\epsilon_s = k_y a_y / w_s$  pour chacun des deux faisceaux, calculée avec la valeur cinétique de  $\omega$ . Les paramètres sont les mêmes que sur la figure 3.20 :  $u_0 = 1/30$ ,  $a_y = u_0/10$  and  $a_x = 2a_y$ . La limite hydrodynamique n'est jamais atteinte, mais les deux modèles prédisent un régime TRWI pour tout  $k_y < k_c$ . Si les différences quantitatives au niveau du taux de croissance sont très importantes, l'accord entre les deux modèles est excellent pour la fréquence  $\omega_r$ .

## Conclusion

Nous avons discuté des instabilités de type Weibel à travers une description fluide étendue à la dynamique du tenseur de pression. Ce modèle s'est montré capable de restituer des propriétés importantes de ces phénomènes, à la condition de réaliser la limite hydrodynamique. Lorsque cette limite n'est pas satisfaite, nous avons mis en évidence la capacité du modèle à prédire correctement, quantitativement (coupure de l'instabilité Weibel pure) ou qualitativement (branche secondaire instable et transition entre régimes non-résonant et résonant dans le cas de l'instabilité Weibel appliquée à un système de faisceaux contra-propageants) le comportement des instabilités.

L'analyse fluide reposant sur l'évolution d'un nombre limité de grandeurs macroscopiques est cependant fondamentalement incomplète (problème de la fermeture) et n'est pas capable de prédire quantitativement le taux de croissance dans toutes les situations. En outre, elle peut introduire des erreurs comme pour la coupure de l'instabilité CFI en présence d'une température. Hors limite hydrodynamique, une description cinétique impliquant la résolution du système Vlasov-Maxwell est indispensable. On abordera cette problématique dans le chapitre suivant.

## Bibliographie

- [1] B. Basu. Moment equation description of weibel instability. *Physics of Plasmas*, 9(12) :5131–5134, 2002. :10.1063/1.1521716
- [2] M. Lazar, M. E. Dieckmann, and S. Poedts. Resonant weibel instability in counterstreaming plasmas with temperature anisotropies. *Journal of Plasma Physics*, 76(1) :49–56, 2010. [62](#), [73](#), [93](#), [97](#), [100](#)
- [3] M. Lazar, R. Schlickeiser, R. Wielebinski, and S. Poedts. Cosmological effects of weibel-type instabilities. *The Astrophysical Journal*, 693(2) :1133, 2009. [62](#), [73](#), [91](#), [92](#), [93](#)
- [4] E. S. Weibel. Spontaneously growing transverse waves in a plasma due to an anisotropic velocity distribution. *Phys. Rev. Lett.*, 2 :83–84, 1959. [63](#)
- [5] B. D. Fried and S. D. Conte, editors. *The Plasma Dispersion Function*. Academic Press, 1961. [64](#)
- [6] M. Tzoufras, C. Ren, F. S. Tsung, J. W. Tonge, W. B. Mori, M. Fiore, R. A. Fonseca, and L. O. Silva. Space-charge effects in the current-filamentation or weibel instability. *Phys. Rev. Lett.*, 96 :105002, 2006. [69](#)
- [7] M. Sarrat, D. Del Sarto, and A. Ghizzo. Fluid description of weibel-type instabilities via full pressure tensor dynamics. *EPL (Europhysics Letters)*, 115(4) :45001, 2016. [69](#), [75](#)
- [8] A. Bret, L. Gremillet, and J. C. Bellido. How really transverse is the filamentation instability? *Physics of Plasmas*, 14(3) :032103, 2007. :10.1063/1.2710810
- [9] A. Ghizzo, T. W. Johnston, T. Réveillé, P. Bertrand, and M. Albrecht-Marc. Stimulated-raman-scatter behavior in a relativistically hot plasma slab and an electromagnetic low-order pseudocavity. *Phys. Rev. E*, 74 :046407, 2006. [73](#)
- [10] M. Albrecht-Marc, A. Ghizzo, T. W. Johnston, T. Réveillé, D. Del Sarto, and P. Bertrand. Saturation process induced by vortex-merging in numerical vlasov-maxwell experiments of stimulated raman backscattering. *Physics of Plasmas*, 14(7) :072704, 2007. :10.1063/1.2749715
- [11] A. Ghizzo, D. Del Sarto, and T. Reveille. Hamiltonian stochastic processes induced by successive wave-particle interactions in stimulated raman scattering. *Phys. Rev. E*, 79 :046404, 2009. [73](#)
- [12] P. E. Masson-Laborde, W. Rozmus, Z. Peng, D. Pesme, S. Hüller, M. Casanova, V. Yu. Bychenkov, T. Chapman, and P. Loiseau. Evolution of the stimulated raman scattering instability in two-dimensional particle-in-cell simulations. *Physics of Plasmas*, 17(9) :092704, 2010. :10.1063/1.3474619
- [13] A. Ghizzo, F. Huot, and P. Bertrand. A non-periodic 2d semi-lagrangian vlasov code for laser-plasma interaction on parallel computer. *Journal of Computational Physics*, 186(1) :47 – 69, 2003. [73](#)
- [14] A. Ghizzo, D. DelSarto, T. Réveillé, N. Besse, and R. Klein. Self-induced transparency scenario revisited via beat-wave heating induced by doppler shift in overdense plasma layer. *Physics of Plasmas*, 14(6) :062702, 2007. :10.1063/1.2735123
- [15] M. Lazar, R. Schlickeiser, and P. K. Shukla. Cumulative effect of the weibel-type instabilities in symmetric counterstreaming plasmas with kappa anisotropies. *Physics of Plasmas*, 15(4) :042103, 2008. :10.1063/1.2896232
- [16] M. Lazar. Fast magnetization in counterstreaming plasmas with temperature anisotropies. *Physics Letters A*, 372(14) :2446 – 2449, 2008. [73](#)
- [17] A. Stockem and M. Lazar. Revision of “cumulative effect of the filamentation and weibel instabilities in counterstreaming thermal plasmas” [phys. plasmas 13, 102107 (2006)]. *Physics of Plasmas*, 15(1) :014501, 2008. :10.1063/1.2830646
- [18] M. Lazar, A. Smolyakov, R. Schlickeiser, and P. K. Shukla. A comparative study of the filamentation and weibel instabilities and their cumulative effect. i. non-relativistic theory. *Journal of Plasma Physics*, 75(1) :19–33, 2009. [73](#)

- [19] A. Stockem, M. Lazar, P. K. Shukla, and A. Smolyakov. A comparative study of the filamentation and weibel instabilities and their cumulative effect. ii. weakly relativistic beams. *Journal of Plasma Physics*, 75(4) :529–543, 2009. [73](#)
- [20] A. Ghizzo, M. Sarrat, and D. Del Sarto. Vlasov models for kinetic weibel-type instabilities. *Journal of Plasma Physics*, 83(1), 2017. [83](#)
- [21] M. Sarrat, D. Del Sarto, and A. Ghizzo. A pressure tensor description for the time-resonant weibel instability. *Journal of Plasma Physics*, 83(1), 2017. [90](#)
- [22] M. Abramovitz and I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, 1964. [94](#)

# Chapitre 4

## Le code semi-lagrangien VLEM

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>107</b>
<b>4.2</b>	<b>Présentation générale du code VLEM</b>	<b>109</b>
4.2.1	La méthode semi-lagrangienne	109
4.2.2	Structure du code VLEM	111
<b>4.3</b>	<b>Méthodes mathématiques et numériques mises en oeuvre</b>	<b>113</b>
4.3.1	Solveur de Vlasov	114
4.3.2	Solveur de Maxwell	121
<b>4.4</b>	<b>Le problème de la conservation de la charge</b>	<b>122</b>
4.4.1	Conservation de la charge pour le solveur de Maxwell	122
4.4.2	Conservation de la charge en appliquant la méthode de Yee	123
4.4.3	Correction dans VLEM1D3V	124
4.4.4	Généralisation à VLEM2D3V	129
<b>4.5</b>	<b>Validation du code VLEM</b>	<b>132</b>
4.5.1	VLEM1D	132
4.5.2	VLEM2D2V	143

---

La résolution du système d'équations de Vlasov-Maxwell est un exercice complexe, en raison notamment de sa non-linéarité. La volonté d'obtenir analytiquement des lois claires et facilement interprétables se heurte à la complexité mathématique des équations. Cette difficulté est grandement accrue lorsqu'on souhaite introduire des effets relativistes dans le modèle ou encore lorsqu'on s'intéresse aux effets non-linéaires. Le recours aux méthodes numériques est donc indispensable et il existe de nos jours de nombreux codes numériques dont la principale fonction est de simuler l'évolution d'un plasma régi par les équations de Vlasov-Maxwell.

Le chapitre qui vient est l'occasion de présenter le code semi-lagrangien VLEM (VLasov Electro-Magnétique), récemment mis au point pour résoudre le système Vlasov-Maxwell dans un espace des phases à 4 puis 5 dimensions. On présentera dans un premier temps le principe de la méthode semi-lagrangienne, la structure globale du code et sa parallélisation. On détaillera ensuite les principales méthodes mathématiques utilisées pour résoudre d'une part l'équation de Vlasov et d'autre part les équations de Maxwell. On abordera enfin le problème de la conservation de la charge, problème causé en partie par la nécessité de coupler le solveur de Vlasov au solveur de Maxwell pour modéliser le comportement auto-consistant du plasma et des champs.

## 4.1 Introduction

Le plasma, traité de façon cinétique, peut-être vu comme un milieu continu évoluant dans un espace des phases formé par les degrés de liberté spatiaux et de vitesse, soit six dimensions au maximum. Comme tout milieu continu, il est possible de l'étudier selon deux points de vue : l'approche Lagrangienne et l'approche Eulérienne.

L'approche Lagrangienne consiste à étudier le milieu continu comme une juxtaposition de particules, pouvant représenter des particules réelles ou un ensemble suffisant de particules proches (de sorte que les grandeurs thermodynamiques soient définies de façon locale) et dont on suit le mouvement en calculant leur trajectoire, déterminée par les forces agissant sur elles à chaque instant.

L'approche Eulérienne met de côté la notion de particule pour regarder l'évolution spatiale et temporelle des grandeurs physiques, représentées sous forme de champs scalaires (densité, pression) ou vectoriels (champ des vitesses, champs électromagnétiques) en un ensemble de points fixes de l'espace des phases.

Dans le même esprit, on pourrait classer les méthodes de résolution du système Vlasov-Maxwell utilisées dans les codes en deux grandes catégories :

- Les méthodes Lagrangiennes représentent la fonction de distribution comme une somme de macro-particules affectées d'un certain poids statistique (conforme à la fonction de distribution réelle initiale). Ces macro-particules se déplacent et forment des trajectoires, solutions des équations du mouvement

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m\gamma} \quad (4.1)$$

et

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (4.2)$$

La résolution des équations de Maxwell se fait par différences finies sur un maillage spatial dont la taille caractéristique  $\Delta x$  est voisine de la longueur de Debye. Les densités de charge et de courant nécessaires au calcul des champs sont interpolées sur cette grille. On calcule ensuite par interpolation la valeur des champs aux points occupés par les macro-particules.

Parmi les méthodes Lagrangiennes, on peut citer les méthodes de type Particle-in-Cell<sup>1</sup>, très populaires en physique des plasmas en raison de leur coût numérique relativement faible : il n'y a pas besoin de discrétiser l'espace des vitesses. Ce point implique par ailleurs l'absence d'une borne supérieure pour  $\mathbf{p}$  puisqu'il n'y a pas à proprement parler d'espace des vitesses dans le code. On peut alors décrire de fortes variations de vitesse sans crainte de voir certaines particules quitter le volume simulé par le code.

L'introduction d'un nombre fini de macro-particules implique cependant l'apparition d'un bruit statistique sur toute grandeur physique  $G$  calculée à partir de la fonction de distribution. L'importance de ces fluctuations indésirables  $\delta G$  par rapport à la valeur de  $G$  est telle que

$$\frac{\delta G}{G} \simeq \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad (4.3)$$

où  $N$  est le nombre de macro-particules. Les méthodes PIC sont donc réputées peu adaptées à la description de régions de l'espace des phases où la densité de particules est faible.

- Les méthodes Eulériennes traitent la fonction de distribution comme un champ scalaire évoluant dans l'espace des phases (soit potentiellement six dimensions). Les équations de Vlasov et de Maxwell sont résolues par les méthodes "classiques" employées pour résoudre des équations aux dérivées partielles : différences finies, volumes finis ... Les méthodes Eulériennes sont donc sujettes aux conditions CFL [2], tant pour la résolution de l'équation de Vlasov que pour celle des équations de Maxwell et contraignent fortement la valeur maximale du pas de temps pouvant être utilisée dans les codes.

Puisque ces méthodes impliquent des calculs sur la fonction de distribution elle-même, elles peuvent s'affranchir du bruit statistique introduit par les méthodes Lagrangiennes. Il reste cela dit le bruit numérique lié à l'erreur machine. Les méthodes Eulériennes permettent de décrire correctement le plasma dans les régions de l'espace des phases où la fonction de distribution a une faible amplitude, mais sont plus coûteuses en ressources informatiques. Il est nécessaire de discrétiser l'espace des phases avec un maillage suffisamment étroit en raison du phénomène de filamentation subi par la fonction de distribution. Ce phénomène conduit en effet à la formation

1. Une revue détaillée de ces méthodes est disponible ici [1].

de structures de petite taille, qu'il est par conséquent difficile de résoudre si on se contente d'un maillage peu dense. Les méthodes eulériennes impliquent donc la manipulation et le stockage de grandes quantités d'information, ce qui peut expliquer la préférence donnée à l'utilisation de codes PIC, moins lourds, dans de nombreux travaux. Les récents progrès en terme de matériel informatique de haute performance et en mathématiques appliquées aux méthodes Eulériennes provoquent cependant un regain d'intérêt pour celles-ci, y compris pour traiter des problèmes de dimension élevée.

En réalité, cette classification est un peu superficielle puisqu'il existe des méthodes utilisant à la fois des concepts Eulériens et des concepts Lagrangiens. On s'intéressera dans ce travail de thèse à une méthode hybride, dite méthode "semi-Lagrangienne", développée d'abord dans le contexte de la météorologie [3] puis importée dans celui de la physique des plasmas. Cette approche combine les deux points de vues exposés plus haut d'une manière que nous détaillerons dans la section suivante et a pour avantage d'affranchir la résolution de l'équation de Vlasov des conditions de type CFL tout en gardant la précision - et les coûts calculatoires - des schémas Eulériens.

## 4.2 Présentation générale du code VLEM

Le code VLEM est un code semi-lagrangien de résolution du système Vlasov-Maxwell relativiste pour décrire l'évolution de la fonction de distribution électronique  $f$  dans le temps et dans l'espace des phases. On détaillera ici le principe de la méthode semi-lagrangienne puis on présentera la structure générale du code.

### 4.2.1 La méthode semi-lagrangienne

Écrivons l'équation de Vlasov dans le cadre de la relativité restreinte,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + q \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \times \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = 0. \quad (4.4)$$

Cette équation est présentée sous une forme dite "advective" en raison de la présence des termes du type  $\mathbf{V} \cdot \nabla$ , où  $\mathbf{V}$  désigne le champ d'advection (la vitesse pour le terme en  $\nabla_{\mathbf{r}} = \partial/\partial \mathbf{r}$  décrivant l'advection spatiale de la fonction de distribution, et la force de Lorentz pour le terme en  $\partial/\partial \mathbf{p}$  décrivant l'advection dans l'espace des  $\mathbf{p}$ ) :

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{\mathbf{r}} \\ \mathbf{V}_{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \\ q \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \times \mathbf{B} \right) \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Le vecteur  $\mathbf{V}_{\mathbf{r}}$  désigne le champ d'advection dans l'espace des  $\mathbf{r}$  et le vecteur  $\mathbf{V}_{\mathbf{p}}$  celui dans l'espace des  $\mathbf{p}$ . L'équation de Vlasov peut donc se résumer à une forme symbolique très générale

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla_{\mathbf{r}, \mathbf{p}} f = 0, \quad (4.6)$$

où l'opérateur  $\nabla$  désigne un gradient spatial ou un gradient en  $\mathbf{p}$  en fonction de la composante de  $\mathbf{V}$  considérée. Ceci est une formulation Eulérienne de l'équation de Vlasov.

Il est possible de trouver une formulation Lagrangienne de cette équation. Le système, lors de son évolution dans l'espace des phases, conserve la probabilité de réalisation de l'état dans lequel il se trouvait initialement, en vertu de l'équation de Liouville (cf. Chapitre 2). La valeur de la fonction de distribution est donc conservée le long de la trajectoire suivie par le système, succession des états  $\mathbf{X}(t)$  occupés par celui-ci lors de son évolution dans l'espace des phases. On adopte ici un point de vue Lagrangien qui nous conduit à écrire,

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{X}(t), t) = 0 \quad (4.7)$$

c'est à dire que la valeur de  $f$  le long de la trajectoire d'évolution du système décrit par l'état  $\mathbf{X}$  est transportée. Concrètement, supposons qu'à l'instant  $s$  une particule se trouve dans l'état  $\mathbf{x}$ , état dont la probabilité de réalisation est  $f d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{p}$ . La particule va subir des forces qui, à l'instant  $t$  vont la conduire dans un état  $\mathbf{X}$ , dont la probabilité de réalisation sera  $f' d^3 \mathbf{r}' d^3 \mathbf{p}'$ . Le volume élémentaire étant conservé conformément au théorème de Liouville, il s'ensuit  $d^3 \mathbf{r}' d^3 \mathbf{p}' = d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{p}$  et donc  $f' = f$ . La fonction  $f$  a la même valeur en  $\mathbf{X}$  à l'instant  $t$  qu'en  $\mathbf{x}$  à l'instant  $s$ , ce qui mathématiquement s'écrit

$$f(\mathbf{X}, t) = f(\mathbf{x}, s) \quad (4.8)$$

et que l'on peut résumer par

$$f(\mathbf{X}(t; \mathbf{x}, s)) = \text{cte} \quad (4.9)$$

puisque cette égalité est vraie pour tout point appartenant à la trajectoire d'évolution du système. La notation  $\mathbf{X}(t; \mathbf{x}, s)$  désigne cette trajectoire, également appelée caractéristique de l'équation de Vlasov. Plus précisément, cette caractéristique est la trajectoire effectivement suivie par une particule qui à l'instant  $s$  se trouvait en (à l'état)  $\mathbf{x}$  et qui à l'instant  $t$  se trouve en (à l'état)  $\mathbf{X}$ . Remarquons enfin que si on développe la dérivée dans l'équation (4.7), on retombe naturellement sur (4.4) puisque les deux descriptions sont équivalentes.

La méthode semi-Lagrangienne est une méthode hybride combinant les aspects Eulériens et les aspects Lagrangiens évoqués ci-dessus. On ne considère pas de particules au sens strict du terme, mais la fonction de distribution qui est un champ scalaire (point de vue Eulérien) dont l'évolution est

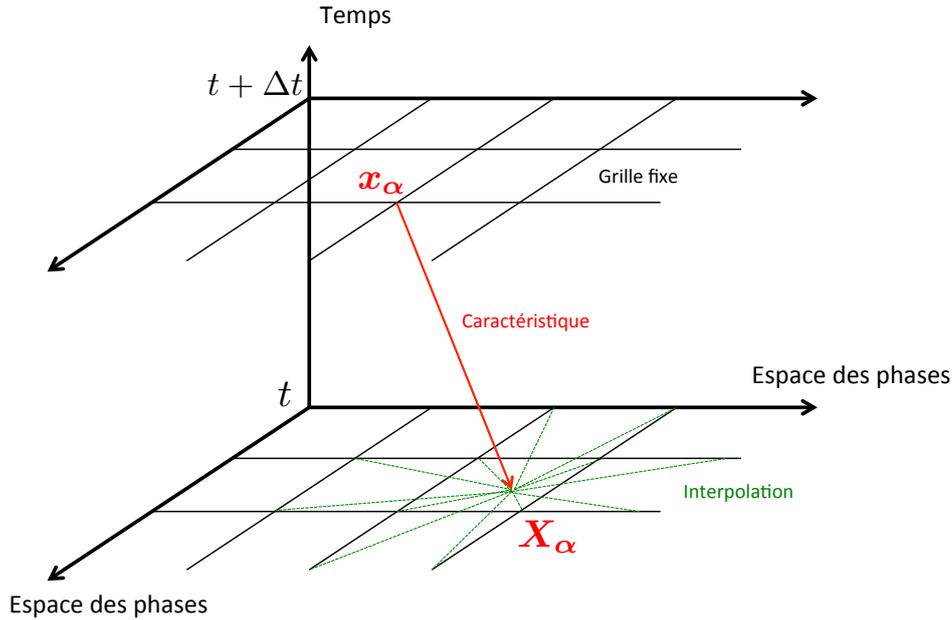


FIGURE 4.1 – Schéma de principe de la méthode semi-lagrangienne vers l’arrière. On recherche le pied en  $\mathbf{X}_\alpha$  à l’instant  $t$  de la caractéristique aboutissant au point de grille  $\mathbf{x}_\alpha$  à l’instant  $t + \Delta t$ . La valeur de  $f$  est obtenue par interpolation des valeurs connues aux points  $\{\mathbf{x}_\alpha\}$  à l’instant  $t$ .

déterminée en calculant les caractéristiques de l’équation de Vlasov à chaque pas de temps (point de vue Lagrangien).

À l’instant  $t$ , la fonction de distribution  $f$  est connue aux points  $\{\mathbf{x}_\alpha\}$  constituant le maillage de l’espace des phases, fixe<sup>2</sup>. À l’instant  $t + \Delta t$ , où  $\Delta t$  est le pas de temps, on veut connaître  $f$  sur le même ensemble de points. À partir de là, il existe deux façons de procéder :

- on détermine les caractéristiques dont les points de départ sont les  $\{\mathbf{x}_\alpha\}$  à l’instant  $t$ . Elles aboutissent à  $t + \Delta t$  en des points  $\{\mathbf{X}_\alpha\}$  ne coïncidant pas nécessairement avec les  $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ . La valeur de  $f(\mathbf{x}_\alpha)$  se retrouve advectée en  $\mathbf{X}_\alpha$  en suivant la caractéristique  $\mathbf{X}_\alpha(t + \Delta t; \mathbf{x}_i, s)$ . Une interpolation est nécessaire pour calculer les valeurs de  $f$  sur le maillage en  $t + \Delta t$ . Cette méthode est dite “vers l’avant”.
- on peut au contraire chercher les points de départ  $\{\mathbf{X}_\alpha\}$  en  $t$  des caractéristiques aboutissant aux points  $\{\mathbf{x}_\alpha\}$  à l’instant  $t + \Delta t$ . Cette fois-ci, il faut considérer le champ  $f(\mathbf{x}, t)$ , connu aux points  $\{\mathbf{x}_\alpha\}$  et l’interpoler sur les points  $\{\mathbf{X}_\alpha\}$ . Cette méthode dite “vers l’arrière” (cf. Figure 4.1) est celle retenue pour construire le code VLEM.

Remarquons enfin que l’équation de Vlasov implique formellement l’absence de collisions : le terme de corrélation  $g$  dans l’expression de la fonction de distribution à deux particules est imposé comme nul (cf. Chapitre 2). Deux particules ne peuvent donc pas avoir le même état et les caractéristiques ne peuvent pas se couper. Ceci combiné au théorème de Liouville implique qu’il est possible de voir l’évolution du plasma dans l’espace  $(\mathbf{X}, t)$  comme un ensemble de “tubes” dirigés vers les temps futurs, chaque tube étant formé d’un ensemble de trajectoires ne pouvant le quitter.<sup>3</sup>

Cette méthode présente plusieurs avantages : premièrement, elle s’affranchit du bruit statistique introduit dans les codes Lagrangiens et est donc capable de résoudre correctement la fonction de distribution dans des régions où elle est plutôt faible. Deuxièmement, elle permet de s’affranchir des conditions CFL sur le pas de temps.

2. Il existe des codes semi-Lagrangiens développés pour des maillages adaptatifs, dont la densité s’ajuste localement en suivant les détails de la fonction de distribution [4][5][6]

3. On peut alors établir une analogie de principe entre ce comportement et celui des lignes de champ magnétique dans la limite idéale de la MHD : en l’absence de résistivité, elles ne peuvent pas se connecter. Dans cette analogie, les collisions seraient à la reconnexion ce que sont les caractéristiques aux lignes de champ magnétique.

Elle est cependant coûteuse d'un point de vue informatique (taille des tableaux, multiples interpolations de la fonction de distribution), inconvenient que le développement technique de ces dernières années permet de nuancer, moyennant une optimisation de l'algorithme et une parallélisation massive des calculs. Un autre inconvenient est la filamentation de la fonction de distribution dans l'espace des vitesses : lorsque la taille caractéristique des filaments devient comparable puis inférieure à celle du maillage, il n'est plus possible de suivre exactement l'évolution de  $f$ . De l'information est alors perdue, au même titre qu'un tamis ne retient pas les grains de sable les plus fins. Ceci se traduit par des problèmes de conservation du nombre de particules, de l'énergie et par une augmentation d'origine numérique de l'entropie. Ce problème peut-être retardé et amoindri en augmentant la densité du maillage (et donc la mémoire requise pour les calculs).

## 4.2.2 Structure du code VLEM

Le code VLEM est écrit en géométrie cartésienne et est décliné à l'heure actuelle sous deux versions : deux versions à quatre dimensions VLEM1D3V ( $x, p_x, p_y, p_z$ ) et VLEM2D2V ( $x, y, p_x, p_y$ ) ainsi qu'une version à cinq dimensions VLEM2D3V ( $x, y, p_x, p_y, p_z$ ). Il fera prochainement l'objet d'une extension à six dimensions.

Dans la version 2D3V, la fonction de distribution est représentée dans l'hypervolume

$$[x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}] \times [p_{x,min}, p_{x,max}] \times [p_{y,min}, p_{y,max}] \times [p_{z,min}, p_{z,max}], \quad (4.10)$$

où  $x_{min}$ ,  $x_{max}$ ,  $y_{min}$  et  $y_{max}$  désignent respectivement les bornes des domaines en  $x$  et en  $y$  et où  $p_{x,min}$ ,  $p_{x,max}$ ,  $p_{y,min}$ ,  $p_{y,max}$ ,  $p_{z,min}$  et  $p_{z,max}$  sont celles du domaine en  $\mathbf{p}$ . On applique des conditions de bord périodiques en  $x$  et  $y$ , alors que le code est ouvert en  $p_x$ ,  $p_y$  et  $p_z$ .

Le code VLEM utilise un solveur semi-lagrangien de Vlasov "vers l'arrière" et un solveur de Maxwell de type FTDT (pour "Finite Difference Time Domain"). Ce dernier est construit en utilisant la méthode de Yee. Nous présenterons ces solveurs de façon détaillée un peu plus loin (cf sections 4.3.1 et 4.3.2). Pour l'instant, nous allons considérer le code dans son ensemble en évoquant la manière dont les solveurs interagissent entre eux et les techniques de parallélisation mises en oeuvre pour améliorer les performances du code.

### 4.2.2.1 Parallélisation

Deux techniques de parallélisation sont mises en oeuvre dans le code VLEM, faisant de lui un code hybride MPI-OpenMP : une décomposition de domaine dans l'espace des positions (gérée par MPI) et une distribution des calculs par Open-MP sur plusieurs tâches dans les boucles du code.

L'espace des positions ( $x, y$ ), de surface  $[x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]$ , est découpé en plusieurs sous-domaines. Chacun de ces sous-domaines est attribué à un processus MPI différent : on parle de décomposition de domaine. Ceci permet une parallélisation directe du solveur de Maxwell et un traitement "local" de l'information contenue dans le plan ( $x, y$ ). L'espace des  $\mathbf{p}$  est quant à lui traité de façon "globale" par chaque processus (voir Figure 4.2).

Ainsi, chaque processeur traite le morceau de la fonction de distribution contenu dans l'hypervolume (ou "patch")

$$[x_0, x_N] \times [y_0, y_N] \times [p_{x,min}, p_{x,max}] \times [p_{y,min}, p_{y,max}] \times [p_{z,min}, p_{z,max}], \quad (4.11)$$

où les valeurs de  $x_0$ ,  $x_N$ ,  $y_0$  et  $y_N$  dépendent du processeur considéré. Chaque patch a la même taille (même nombre de points de grille).

Ce type de décomposition a des conséquences sur la manière de résoudre l'équation de Vlasov : on doit s'efforcer de préserver la continuité des dérivées premières de  $f$  entre deux sous-domaines consécutifs. Celle de la dérivée seconde n'est a priori pas garantie, du fait de l'interpolation "locale" mise en oeuvre pour reconstruire la fonction de distribution dans le plan ( $x, y$ ). La décomposition en sous-domaines a également des conséquences sur la technique d'interpolation utilisée lors de la procédure d'advection semi-lagrangienne.

Une couche supplémentaire de parallélisation est introduite en utilisant OpenMP. OpenMP est appliqué ponctuellement à un ensemble d'instructions contenues dans des "régions parallèles" et permet d'accélérer la vitesse de traitement de ces instructions en répartissant la charge de travail sur un ensemble de tâches (ou "threads", en anglais) travaillant simultanément.

Remarquons enfin qu'à l'heure actuelle, le code VLEM simule l'évolution de la fonction de distribution d'une seule espèce de particules. Il faudrait ajouter une couche de parallélisation MPI supplémentaire pour pouvoir traiter plusieurs espèces.

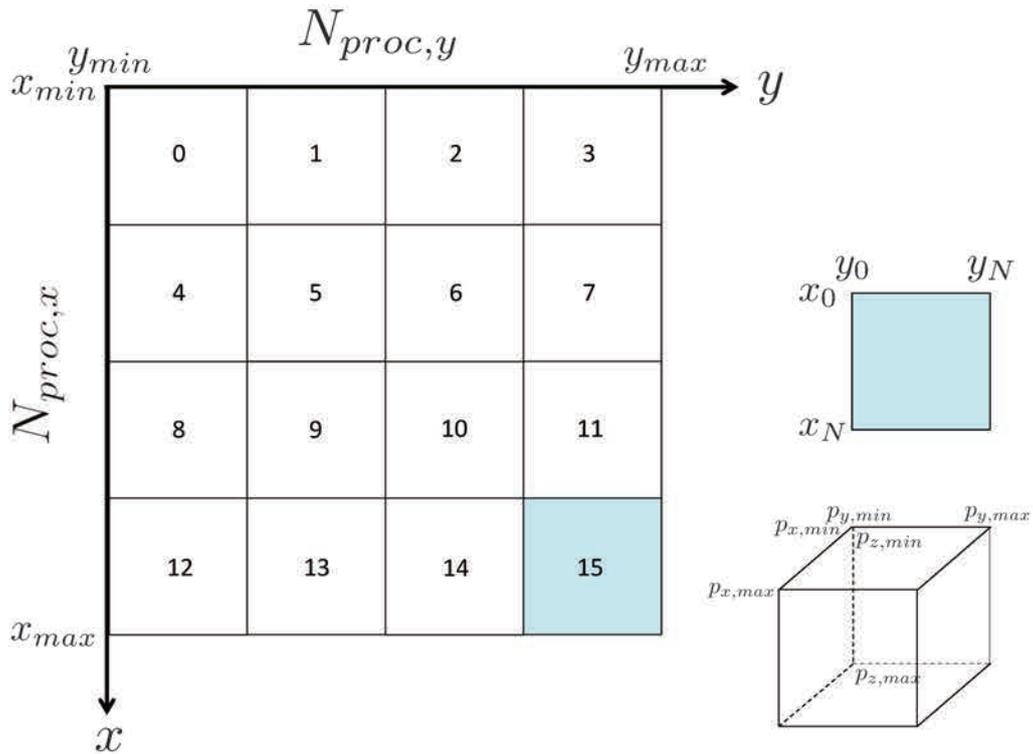


FIGURE 4.2 – Représentation schématique de la décomposition de domaine appliquée à l’espace des phases pour la version 2D3V du code VLEM. Le plan  $(x, y)$  est ici découpé en seize sous-domaines, ou “patches”, chacun attribué à un processeur numéroté de 0 à 15. La grandeur  $N_{proc,x}N_{proc,y}$  désigne le nombre total de processeurs mobilisés par le code. Ces processeurs peuvent communiquer par MPI entre voisins immédiats selon la direction  $x$  ou  $y$ . Chaque patch est constitué par la totalité de l’espace des  $\mathbf{p}$  et par un sous-domaine du plan  $(x, y)$ .

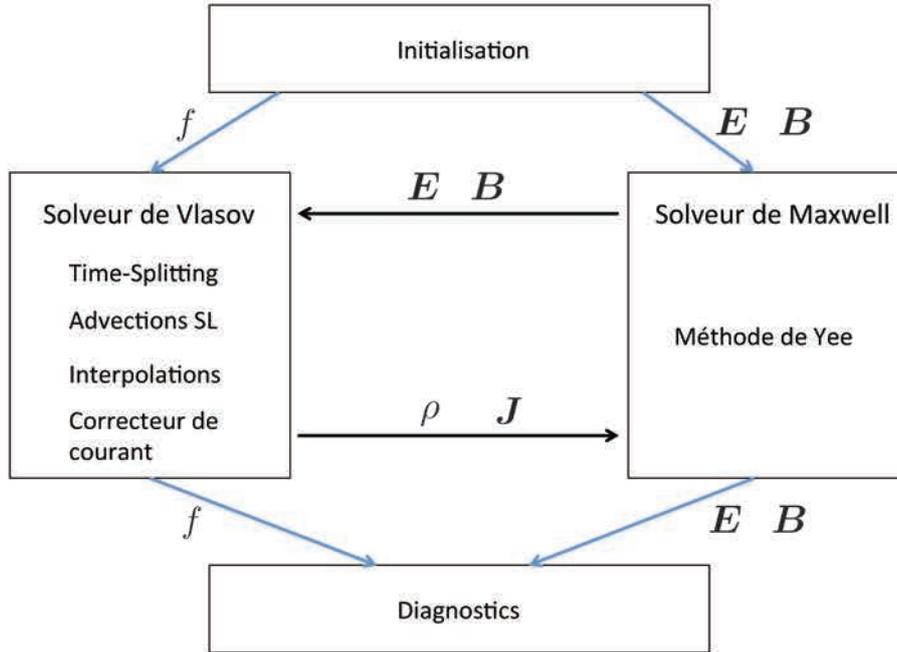


FIGURE 4.3 – Représentation schématique du code VLEM. Le solveur de Maxwell détermine les champs électromagnétiques utilisés dans les advections semi-lagrangiennes. On calcule les densités de charge  $\rho$  et de courant  $J$  à partir de la fonction de distribution pour recalculer les champs. On modélise ainsi de façon approchée le comportement auto-consistant d'un plasma non-collisionnel.

#### 4.2.2.2 Schéma de principe du code

La figure 4.3 représente un schéma de principe du code VLEM, que l'on peut présenter comme constitué de quatre blocs :

- un bloc d'initialisation, dans lequel on génère une discrétisation de l'espace des phases, met en place la décomposition de domaine, initialise les principales grandeurs physiques (fonction de distribution, champs électromagnétiques).
- le solveur de Vlasov, construit sur le principe du time-splitting et utilisant la méthode semi-lagrangienne. L'interpolation de la fonction de distribution dans le plan  $xOy$  utilise des splines locaux (Section 4.3.1.3.b) afin de profiter au maximum des avantages de la décomposition de domaine. On utilise une interpolation par splines globales dans l'espace des  $\mathbf{p}$  (Section 4.3.1.3.a), chaque processus MPI contenant la totalité de l'espace des  $\mathbf{p}$ .
- le solveur de Maxwell, utilisant la méthode de Yee (Section 4.3.2).
- un bloc de diagnostics, dans lequel on récupère notamment la valeur des champs électromagnétiques, on vérifie la conservation de la charge, de l'énergie totale, de la norme L2, où on traite la fonction de distribution pour tracer sa représentation dans plusieurs sections de l'espace des phases et où on calcule ses moments fluides.

Un correcteur de courant, adaptant la méthode d'Esirkepov à la méthode semi-lagrangienne vers l'arrière, est utilisé pour assurer la conservation de la charge (Section 4.4.3.1). Ceci est indispensable pour coupler correctement le solveur de Vlasov au solveur de Maxwell et assurer la cohérence entre les densités de charge et de courant d'une part et le champ électrostatique d'autre part. Cette problématique est détaillée en Section 4.4

### 4.3 Méthodes mathématiques et numériques mises en oeuvre

Détaillons à partir de maintenant les principales techniques numériques utilisées dans le code VLEM. On traitera d'abord le cas du solveur de Vlasov, puis celui du solveur de Maxwell.

### 4.3.1 Solveur de Vlasov

L'équation de Vlasov est résolue en appliquant trois grandes techniques numériques et mathématiques : le time-splitting, la méthode semi-lagrangienne, ainsi que des techniques d'interpolation sur splines cubiques pour reconstituer la fonction de distribution.

#### 4.3.1.1 Time-splitting

Utiliser la méthode semi-Lagrangienne revient à déterminer la trajectoire de particules réelles dans l'espace des phases, espace dont la dimension est quatre (VLEM1D3V) ou cinq (dans la version VLEM2D3V). Manipuler des tableaux de dimension élevée est numériquement coûteux en ressources. La technique du time-splitting [7][8] permet de séparer l'équation de Vlasov en équations "réduites", résolues de façon alternée dans des espaces de plus faible dimension. On décompose une advection à 5 dimensions en plusieurs advections de dimension plus faible, moins lourdes à traiter numériquement. On obtient ainsi une approximation de la caractéristique correspondant à l'advection à cinq dimensions.

Rappelons l'équation de Vlasov

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + q \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \times \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = 0. \quad (4.12)$$

Les variables  $\mathbf{r} = (x, y)$  et  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$  étant supposées indépendantes par construction de l'espace des phases et les champs électromagnétiques ne dépendant que de  $\mathbf{r}$  (ce sont des champs moyens, cf. Chapitre 2), il en découle que

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left( \frac{\mathbf{p}}{m\gamma} \right) = 0 \quad (4.13)$$

et que

$$\nabla_{\mathbf{p}} \cdot \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \times \mathbf{B} \right) = 0. \quad (4.14)$$

Il est alors possible de réécrire (4.4) sous une forme conservative en utilisant la relation  $\nabla \cdot (f\mathbf{V}) = f\nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla f$  :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left( f \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \right) + \nabla_{\mathbf{p}} \cdot \left( f q \left[ \mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \times \mathbf{B} \right] \right) = 0. \quad (4.15)$$

La méthode du time-splitting nous permet de remplacer l'équation de Vlasov par les deux équations suivantes,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left( f \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \right) = 0 \quad (4.16)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{p}} \cdot \left( f q \left[ \mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \times \mathbf{B} \right] \right) = 0, \quad (4.17)$$

que l'on peut remettre sous forme advective et que l'on doit résoudre en alternance pour conserver une erreur d'ordre 2 en  $\Delta t$  :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f = 0, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + q \left[ \mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \times \mathbf{B} \right] \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = 0. \quad (4.19)$$

Il est possible de reproduire cette procédure dans l'espace des positions  $\mathbf{r}$  pour chacune des composantes du champ d'advection  $\mathbf{p}/(m\gamma)$ . On passe d'une advection 2D (4.18) à deux advections 1D :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p_x}{\gamma m} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p_y}{\gamma m} \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (4.20)$$

L'advection 3D en  $\mathbf{p}$  n'est pas séparable, du fait de la présence du facteur de Lorentz : les trois composantes de  $\mathbf{p}$  apparaissent dans les trois composantes du champ d'advection. La partie électrique en  $q\mathbf{E}$  est cependant séparable de la partie magnétique en  $q\mathbf{p}/(m\gamma) \times \mathbf{B}$ . On peut donc séparer l'équation (4.19) en deux :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + q\mathbf{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + q \left( \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (4.22)$$

### 4.3.1.2 Résolution de l'équation de Vlasov dans VLEM

Ce splitting de l'équation de Vlasov a des conséquences : on sépare en effet les phases de "déplacement" (advection dans  $\mathbf{r}$  sous l'effet de la vitesse  $\mathbf{p}/(\gamma m)$ ) de la phase d'"accélération" (advection dans l'espace des  $\mathbf{p}$  sous l'effet de la force de Lorentz induite par les champs moyens). Si on admet que la trajectoire d'un électron est décrite par une caractéristique de l'équation de Vlasov, le schéma proposé ci-dessus revient à approximer la trajectoire réelle par une somme vectorielle de trajectoires rectilignes ou circulaires (rotation liée au champ magnétique) parcourues à vitesse ou à accélération constantes selon l'équation réduite considérée. Le mouvement dans l'espace des  $\mathbf{r}$  se fera à vitesse constante (la quantité de mouvement  $\mathbf{p}$  est figée). Le mouvement dans l'espace des  $\mathbf{p}$  se fera quant à lui à force constante (la position  $\mathbf{r}$ , et donc la valeur des champs, est constante).

Voici comment l'équation de Vlasov est résolue, de façon générale, dans VLEM :

— **Étape 1 : Advection 3D en  $\mathbf{p}$**

On part de  $f^n(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)$ , connue aux noeuds du maillage  $\{\mathbf{x}_\alpha = (\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)\}$  (où  $\mathbf{r}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$  et où  $\mathbf{p}_\alpha = (p_{x,\alpha}, p_{y,\alpha}, p_{z,\alpha})$ ), à l'instant  $t_n = n\Delta t$ . On effectue en premier l'advection en  $\mathbf{p}$ . Il nous faut donc résoudre l'équation (4.19), séparée en

$$\frac{\partial f}{\partial t} + q\mathbf{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial t} + q \left( \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (4.23)$$

On obtient de nouvelles valeurs de  $f$  sur le maillage, notées  $f^P$ , telles que :

$$f^P(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha) = f^n(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{P}(t_n; \mathbf{p}_\alpha, t_{n+1})), \quad (4.24)$$

où  $\mathbf{P}$  désigne l'extrémité en  $t_n$  de la caractéristique passant en  $t_{n+1}$  par le point  $\mathbf{p}_i$  notée  $\mathbf{P}(t_n; \mathbf{p}_\alpha, t_{n+1})$ . Composante par composante,  $\mathbf{P}$  a pour expression

$$P_x = -\frac{q\Delta t E_x}{2} + P_x^* \mathcal{R}_{xx} + P_y^* \mathcal{R}_{xy} + P_z^* \mathcal{R}_{xz}, \quad (4.25)$$

$$P_y = -\frac{q\Delta t E_y}{2} + P_x^* \mathcal{R}_{yx} + P_y^* \mathcal{R}_{yy} + P_z^* \mathcal{R}_{yz} \quad (4.26)$$

$$P_z = -\frac{q\Delta t E_z}{2} + P_x^* \mathcal{R}_{zx} + P_y^* \mathcal{R}_{zy} + P_z^* \mathcal{R}_{zz}, \quad (4.27)$$

où  $\mathcal{R}$  est la matrice de rotation d'une particule autour de l'axe  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$  du champ magnétique, donnée par

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} b_x^2 + (1 - b_x^2) \cos \varphi & b_x b_y (1 - \cos \varphi) - b_z \sin \varphi & b_x b_z (1 - \cos \varphi) + b_y \sin \varphi \\ b_x b_y (1 - \cos \varphi) + b_z \sin \varphi & b_y^2 + (1 - b_y^2) \cos \varphi & b_y b_z (1 - \cos \varphi) - b_x \sin \varphi \\ b_x b_z (1 - \cos \varphi) - b_y \sin \varphi & b_y b_z (1 - \cos \varphi) + b_x \sin \varphi & b_z^2 + (1 - b_z^2) \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

pour une rotation d'angle  $\varphi = qB/(m\gamma)\Delta t$ . Un champ magnétique seul ne pouvant pas accroître l'énergie cinétique d'une particule, on en déduit que  $\gamma = \gamma(|\mathbf{p}|^2)$  est constant durant la rotation. La quantité de mouvement après la rotation est notée  $\mathbf{P}^*$  et s'écrit

$$\mathbf{P}^* = \mathbf{p}_\alpha - \frac{q\Delta t}{2} \mathbf{E}, \quad (4.29)$$

nous permettant de calculer  $\mathbf{P}$  à partir de la seule connaissance de  $\Delta t$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{p}_i$ . Dans ce schéma, l'advection sous l'effet de la force électrique a été symétrisée (en deux demi-advectons durant  $\Delta t/2$ ) par rapport à la rotation liée au champ magnétique.

Les valeurs de  $f^n(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{P})$  sont obtenues par interpolation des valeurs connues en  $t_n$  aux  $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ . Cette advection (calcul de  $\mathbf{P}$  et interpolation) est faite sur la totalité de l'espace des  $\mathbf{p}$  par chaque processus MPI (chaque processus gérant un ensemble de  $\mathbf{r}_\alpha$  distinct des autres du fait de la décomposition de domaine).

Il est nécessaire de connaître les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  à l'instant  $t_n$  pour réaliser cette advection. Un premier couplage avec le solveur de Maxwell a donc lieu durant cette étape.

— **Étape 2 : Demi-advection 1D en  $x$**

On symétrise ensuite les advectons spatiales autour de l'advection en  $y$  (les deux directions étant équivalentes, ce choix est purement arbitraire). On commence donc par résoudre l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p_x}{\gamma m} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (4.30)$$

pour un demi pas de temps  $\Delta t/2$ . Les nouvelles valeurs de la fonction de distribution sont notées  $f^*$  et sont telles que

$$f^*(x_\alpha, y_\alpha, \mathbf{p}_\alpha) = f^P \left( x_\alpha - \frac{p_{x,\alpha} \Delta t}{m\gamma}, y_\alpha, \mathbf{p}_\alpha \right). \quad (4.31)$$

L'interpolation est réalisée de façon locale, chaque processus MPI ne gérant qu'un sous-domaine de l'espace des positions : elle implique tous les points  $\{\mathbf{r}_\alpha\}$  contenus dans le patch géré par le processus.

— **Étape 3 : Advection 1D en  $y$**

On résout l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p_y}{\gamma m} \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (4.32)$$

sur un pas de temps complet, conduisant aux nouvelles valeurs  $f^{**}$  de la fonction distribution :

$$f^{**}(x_\alpha, y_\alpha, \mathbf{p}_\alpha) = f^* \left( x_\alpha, y_\alpha - \frac{p_{y,\alpha} \Delta t}{m\gamma}, \mathbf{p}_\alpha \right). \quad (4.33)$$

L'interpolation de  $f$  est gérée de la même manière qu'à l'étape précédente.

— **Étape 4 : Demi-advection 1D en  $x$**

On reproduit l'étape 2, conduisant à la valeur de  $f$  à l'instant  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$

$$f^{n+1}(x_\alpha, y_\alpha, \mathbf{p}_\alpha) = f^{**} \left( x_\alpha - \frac{p_{x,\alpha} \Delta t}{m\gamma}, y_\alpha, \mathbf{p}_\alpha \right). \quad (4.34)$$

L'interpolation de  $f$  est gérée de la même manière qu'à l'étape précédente. Cette ultime valeur est considérée comme la solution du système Vlasov-Maxwell.

### 4.3.1.3 Méthodes d'interpolation

Nous avons vu que la méthode semi-Lagrangienne impliquait la nécessité d'interpoler les valeurs de la fonction de distribution sur le maillage de l'espace des phases à un moment donné. Deux techniques différentes ont été implémentées dans le code VLEM : une méthode locale pour les advections semi-lagrangiennes spatiales, une méthode globale pour l'advection en  $\mathbf{p}$ . Les adjectifs "locale" et "globale" se réfèrent à la décomposition de domaine présentée en Section 4.2.2.1.

#### 4.3.1.3.a Méthode globale : interpolation par B-splines

Commençons par décrire la méthode d'interpolation dans l'espace des  $\mathbf{p}$ , auparavant utilisée dans plusieurs codes semi-lagrangiens à 2V ([9] par exemple), ou à 3V (dans une version OpenMP d'un code 3D3V, sans utilisation de MPI [10]).

Cette méthode fait appel au produit tensoriel de B-splines cubiques, la fonction reconstituée  $S$  étant définie comme

$$S(p_x, p_y, p_z) = \sum_{\nu=-2}^{N_{p_x}-1} \sum_{\kappa=-2}^{N_{p_y}-1} \sum_{\mu=-2}^{N_{p_z}-1} \eta_{\nu\kappa\mu} B_{3\nu}(p_x) B_{3\kappa}(p_y) B_{3\mu}(p_z), \quad (4.35)$$

où les B-splines sont données par<sup>4</sup>

$$B_\nu(p_x) = \frac{1}{6\Delta p_x^3} \begin{cases} (p_x - p_\nu)^3 & \text{si } p_\nu \leq p_x < p_{\nu+1}, \\ \Delta p_x^3 + 3\Delta p_x^2(p_x - p_{\nu+1}) + 3\Delta p_x(p_x - p_{\nu+1})^2 - 3(p_x - p_{\nu+1})^3 & \text{si } p_{\nu+1} \leq p_x < p_{\nu+2}, \\ \Delta p_x^3 + 3\Delta p_x^2(p_{\nu+3} - p_x) + 3\Delta p_x(p_{\nu+3} - p_x)^2 - 3(p_{\nu+3} - p_x)^3 & \text{si } p_{\nu+2} \leq p_x < p_{\nu+3}, \\ (p_{\nu+4} - p_x)^3 & \text{si } p_{\nu+3} \leq p_x < p_{\nu+4}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.36)$$

La fonction  $S$  doit vérifier les conditions d'interpolation

$$S(p_{x,i}, p_{y,j}, P_{z,k}) = f^n(p_{x,i}, p_{y,j}, P_{z,k}), \quad (4.37)$$

pour tout  $i = \{1, \dots, N_{p_x}\}$ ,  $j = \{1, \dots, N_{p_y}\}$  et  $k = \{1, \dots, N_{p_z}\}$ , ainsi que les conditions naturelles aux bords ( $f = 0$ ). Cette méthode assure que la fonction de distribution reconstituée soit de classe  $\mathcal{C}^2$  dans le volume  $(p_x, p_y, p_z)$ . L'erreur commise par la reconstruction est de l'ordre de  $(\Delta p_x)^4$ .

La procédure d'interpolation consiste en deux grandes étapes :

4. Les B-splines sont écrites pour l'indice  $\nu$  et la variable  $p_x$  mais la même base est utilisée pour les indices  $\kappa$  (variable  $p_y$ ) et  $\mu$  (variable  $p_z$ ).

- déterminer les coefficients  $\eta_{\nu\kappa\mu}$
- déterminer la valeur de  $f^n$ , approximée par  $S$  à l'extrémité  $\mathbf{P}$  en  $t_n$  des caractéristiques aboutissant aux points  $\{p_{x,i}, p_{y,j}, p_{z,k}\}$  après l'advection 3D. On soulignera que les caractéristiques n'évoluent pas dans le plan  $(x, y)$  pendant cette étape :  $x$  et  $y$  sont donc des paramètres fixes.

Détaillons d'abord le calcul des coefficients  $\eta_{\nu,\kappa,\mu}$ . Dans ce but, réécrivons l'équation (4.35), de sorte à exprimer ce problème 3D de façon plus simple :

$$S(p_x, p_{y,j}, p_{z,k}) = \sum_{\nu=-2}^{N_{p_x}-1} \gamma_{\nu}^{jk} B_{3\nu}(p_x), \quad (4.38)$$

où

$$\gamma_{\nu}^{jk} = \sum_{\kappa=-2}^{N_{p_y}-1} \Theta_{\nu\kappa}^k B_{3\kappa}(p_{y,j}) \quad (4.39)$$

avec

$$\Theta_{\nu\kappa}^k = \sum_{\mu=-2}^{N_{p_z}-1} \eta_{\nu\kappa\mu} B_{3\mu}(p_{z,k}). \quad (4.40)$$

Injecter (4.40) dans (4.39), puis (4.39) dans (4.38) conduit bien à l'expression (4.35). On doit d'abord utiliser l'équation (4.38) pour déterminer les coefficients  $\gamma_{\nu}^{jk}$ , soit un total de  $N_{p_y} N_{p_z}$  systèmes linéaires (un par couple  $(p_{y,j}, p_{z,k})$ ) à  $N_{p_x} + 2$  équations chacun. Ces  $N_{p_x} + 2$  équations sont les  $N_{p_x}$  conditions d'interpolation  $S(p_{x,i}, p_y, p_z) = f^n(p_{x,i}, p_y, p_z)$  (pour tout  $i$ ;  $p_y$  et  $p_z$  devenant des paramètres fixes pour un système donné) auxquelles s'ajoutent les deux conditions de bord. Chaque système est bien déterminé puisqu'il y a  $N_{p_x} + 2$  coefficients  $\gamma_{\nu}^{jk}$  à déterminer par système. On dénombre au total  $N_{p_y} N_{p_z} (N_{p_x} + 2)$  coefficients  $\gamma_{\nu}^{jk}$ .

Déterminons ensuite les coefficients  $\Theta_{\nu\kappa}^k$ . Ils sont au nombre de  $(N_{p_x} + 2)(N_{p_y} + 2)$  pour chaque valeur de  $k$ , soit un total de  $(N_{p_x} + 2)(N_{p_y} + 2)N_{p_z}$  coefficients au total. On doit résoudre  $N_{p_y} + 2$  équations (soit  $N_{p_y}$  conditions d'interpolation 1D en  $p_y$  et deux conditions de bord) du type (4.39), et ce pour les  $N_{p_x} + 2$  valeurs de  $\nu$ . On a donc, à  $k$  fixé,  $(N_{p_x} + 2)(N_{p_y} + 2)$  équations (4.39) pour  $(N_{p_x} + 2)(N_{p_y} + 2)$  inconnues. Le système est, là encore, bien déterminé.

De façon similaire, on trouve les  $(N_{p_x} + 2)(N_{p_y} + 2)(N_{p_z} + 2)$  coefficients  $\eta_{\nu,\kappa,\mu}$  en utilisant l'équation (4.40), ce qui s'apparente à résoudre  $N_{p_z} + 2$  équations ( $N_{p_z}$  conditions d'interpolation 1D en  $p_z$  plus deux conditions de bord) pour chaque couple d'indices  $\nu, \kappa$ .

Ceci fait, on peut calculer la valeur de  $f^n$  aux points  $\mathbf{P}$  en utilisant directement les expressions (4.35).

Chaque processeur contrôle la totalité de l'espace des  $\mathbf{p}$  pour l'ensemble des couples  $(x, y)$  du sous-domaine qu'il traite. Il n'y a pas de décomposition de domaine en  $\mathbf{p}$  et donc absence de nécessité de communiquer avec d'autres processeurs. Ceci permet de gérer plus facilement de fortes accélérations, dans la mesure où il n'y a pas besoin de prévoir des échanges entre régions éloignées de l'espace des  $\mathbf{p}$ , pouvant être contrôlées par des processeurs potentiellement "éloignés" (*i.e.* n'étant pas des voisins immédiats comme pour le cas de la méthode locale) les uns des autres. La procédure d'interpolation est tout de même parallélisée en utilisant OpenMP : chaque tâche traite un ensemble d'indices  $(i, j, k)$ , c'est à dire un ensemble de caractéristiques. Il est important de remarquer que si une caractéristique vient à "sortir" de l'espace des  $\mathbf{p}$  suite à une trop importante accélération, l'information associée à celle-ci est définitivement perdue, entraînant naturellement des problèmes de conservation.

#### 4.3.1.3.b Méthode locale pour les advections 1D

Cette méthode, proposée par [11] est utilisée dans les étapes 2, 3 et 4 (les advections 1D) du schéma proposé au paragraphe précédent. L'interpolation de la fonction de distribution se fait par projection sur une base de B-splines cubiques.

Les advections "locales" étant 1D, considérons le domaine  $[x_{min}, x_{max}]$  découpé en plusieurs sous-domaines  $[x_0, x_N]$ . Chaque sous-domaine est associé à un processus MPI et est discrétisé en  $N + 1$  points. Le pas de la grille est  $\Delta x = (x_N - x_0)/(N + 1)$  (voir Figure 4.4). Un point de grille  $x_i$  est défini par  $x_i = x_0 + i\Delta x$ .

Notons  $S$  la projection de la fonction de distribution sur la base de splines cubiques, c'est à dire la fonction de distribution après interpolation.  $S$  a pour expression :

$$f(x) \simeq S(x) = \sum_{\nu=-1}^{N+1} \eta_{\nu} B_{\nu}(x), \quad (4.41)$$

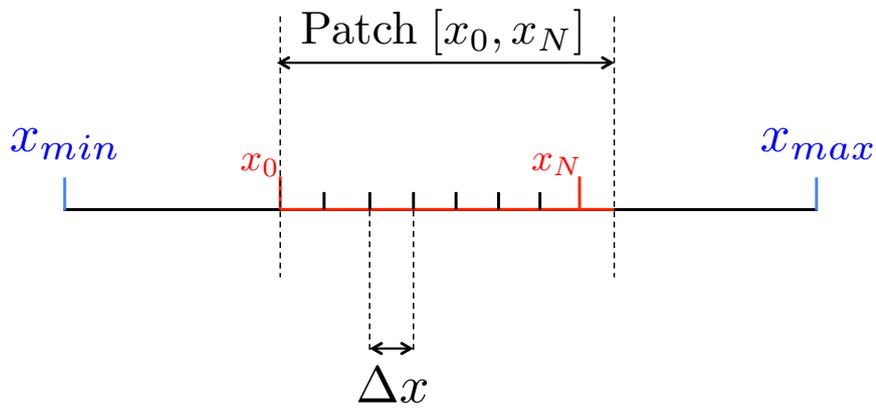


FIGURE 4.4 – Décomposition de domaine pour la variable d’espace  $x$  dans le cas d’un maillage à 8 points (choix arbitraire pour les besoins de la figure) par processus MPI. Les graduations marquées en bleu représentent les bornes du domaine global, celles en rouge représentent les bornes du domaine local, ou patch. Le point  $x_{N+1}$ , non représenté sur ce schéma, n’appartient pas au sous-domaine. On rappelle que les conditions de bord sont périodiques en bord de domaine,  $f(x_{min}) = f(x_{max})$ .

où la base de B-splines cubiques est définie par

$$B_\nu(x) = \frac{1}{6\Delta x^3} \begin{cases} (x - x_{\nu-2})^3 & \text{si } x_{\nu-2} \leq x \leq x_{\nu-1}, \\ \Delta x^3 + 3\Delta x^2(x - x_{\nu-1}) + 3\Delta x(x - x_{\nu-1})^2 - 3(x - x_{\nu-1})^3 & \text{si } x_{\nu-1} \leq x \leq x_\nu, \\ \Delta x^3 + 3\Delta x^2(x_{\nu+1} - x) + 3\Delta x(x_{\nu+1} - x)^2 - 3(x_{\nu+1} - x)^3 & \text{si } x_\nu \leq x \leq x_{\nu+1}, \\ (x_{\nu+2} - x)^3 & \text{si } x_{\nu+1} \leq x \leq x_{\nu+2}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.42)$$

Les  $\eta_\nu$  sont des coefficients à déterminer afin que la fonction reconstituée  $S$  colle au plus près de la fonction de distribution  $f$  aux points du maillage. En effet, une interpolation réussie doit impérativement vérifier les conditions

$$f(x_i) = S(x_i), \quad \forall i = \{0, \dots, N\}, \quad (4.43)$$

au nombre de  $N + 1$ , ainsi que les conditions d'Hermite au bord du sous-domaine  $[x_0, x_N]$ ,

$$f'(x_0) = S'(x_0) \quad \text{et} \quad f'(x_N) = S'(x_N), \quad (4.44)$$

assurant la continuité de la dérivée première entre deux patches consécutifs, soit un total de  $N + 3$  équations. La fonction reconstituée est donc de classe  $\mathcal{C}^1$ , la continuité de la dérivée seconde entre chaque sous-domaine n'étant pas assurée.

En projetant ces équations sur la base de splines cubiques, on trouve

$$f(x_i) = \frac{1}{6}(\eta_{i-1} + 4\eta_i + \eta_{i+1}), \quad \forall i = \{0, N\} \quad (4.45)$$

$$f'(x_0) \simeq \frac{1}{2\Delta x}(-\eta_{-1} + \eta_1) \quad (4.46)$$

et

$$f'(x_N) \simeq \frac{1}{2\Delta x}(-\eta_{N-1} + \eta_{N+1}), \quad (4.47)$$

système linéaire de  $N + 3$  équations dont les  $N + 3$  inconnues sont les coefficients  $\eta$  (en supposant que la valeur de  $f'$  est connue en bord de sous-domaine).

Présentons ce système d'équations sous forme matricielle,  $[A]\boldsymbol{\eta} = \mathbf{F}$ , où la matrice  $[A]$  a pour expression

$$[A] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3/\Delta x & 0 & 3/\Delta x & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -3/\Delta x & 0 & 3/\Delta x \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

et où

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_{-1} \\ \eta_0 \\ \dots \\ \eta_N \\ \eta_{N+1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f'(x_0) \\ f(x_0) \\ \dots \\ f(x_N) \\ f'(x_N) \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

Les coefficients de la matrice  $[A]$  sont constants tout au long d'une simulation. On peut alors calculer une bonne fois pour toute une décomposition LU de cette matrice, c'est à dire trouver les matrices  $[L]$  et  $[U]$  telles que  $[A] = [L][U]$ ,  $[L]$  étant une matrice triangulaire inférieure et  $[U]$  une matrice triangulaire supérieure. À chaque pas de temps, l'interpolation locale de  $f$  nécessite donc deux étapes. On résout d'abord le système  $[L]\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{F}$ , puis le système  $[U]\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\varphi}$ .

Résoudre ce problème d'interpolation ne requiert donc que deux conditions, d'un point de vue mathématique :

- la connaissance de  $f$  en tout point du sous-domaine, trivialement satisfaite
- la connaissance de  $f'$  aux bords du sous-domaine.

Développons notre discussion autour de ce second point. La méthode est très sensible à la précision avec laquelle la dérivée première de  $f$  est approximée en bord de sous-domaine. Si une mauvaise<sup>5</sup> approximation de  $f'$  est réalisée, d'importantes erreurs peuvent apparaître dans les premières et dernières

$j$	$\tilde{\omega}_j^-$
-10	$0.22143 \times 10^{-5}$
-9	$-1.77144 \times 10^{-5}$
-8	$7.9715 \times 10^{-5}$
-7	$-3.01146 \times 10^{-4}$
-6	$1.11379 \times 10^{-3}$
-5	$-4.1452 \times 10^{-3}$
-4	0.01546474
-3	-0.05771377
-2	0.21539034
-1	-0.80384758

TABLEAU 4.1 – Valeur des coefficients  $\tilde{\omega}_j$

lignes de  $[A]$  et se propager petit à petit dans tout le reste du système, conduisant à des résultats erronés.

Les auteurs de [11] ont montré qu'approximer la dérivée via les splines cubiques utilisées pour projeter  $f$  conduit à une méthode fiable dans le sens où les résultats obtenus par la méthode locale parallélisée sont équivalents à ceux obtenus via la méthode globale (sans décomposition de domaine), où l'interpolation est réalisée à partir de la totalité des points du domaine  $[x_{min}, x_{max}]$ . L'expression retenue pour approcher la dérivée de  $f$  au point  $x_i$  est

$$S'(x_i) \simeq \sum_{j=-10}^{+10} \tilde{\omega}_j f_{i+j} = \sum_{j=-10}^{-1} \tilde{\omega}_j^- f_{i+j} + \sum_{j=1}^{+10} \tilde{\omega}_j^+ f_{i+j}, \quad (4.50)$$

où  $\tilde{\omega}_0 = 0$  et  $\tilde{\omega}_j^+ = -\tilde{\omega}_j^-$ . La valeur des coefficients  $\tilde{\omega}_j$  est donnée dans le tableau ?? et est calculée une bonne fois pour toutes. Utiliser vingt points pour calculer la dérivée permet d'assurer une reconstruction au moins aussi fiable que ce que la méthode globale permettrait, soit une erreur de l'ordre de  $\Delta x^4$ .

Déterminer la dérivée au point  $x_i$  nécessite donc de connaître la valeur de  $f$  en vingt points, dix de chaque côté du point  $x_i$ . Dans la mesure où nous avons besoin de la dérivée au bord d'un sous-domaine, ceci implique donc deux contraintes du point de vue numérique :

- transférer dix valeurs de  $f$  depuis le processus MPI contrôlant le sous-domaine voisin
- chaque sous-domaine  $[x_0, x_N]$  doit comporter au minimum 11 points pour limiter les communications aux processus MPI voisins.

Les communications entre sous-domaines s'avèrent nécessaires pour résoudre un autre problème : rien ne garantit que l'extrémité en  $t^n$  d'une caractéristique aboutissant dans le sous-domaine  $[x_0, x_N]$  en  $t^{N+1}$  se trouve dans ce même sous-domaine. Il est donc nécessaire de transférer des valeurs de  $f$  d'un sous-domaine à l'autre. Immédiatement se pose une question : avec combien de processus MPI distincts un processus donné aura-t-il besoin de communiquer ?

Pour des raisons pratiques, on souhaite limiter les échanges entre domaines immédiatement voisins. Le déplacement  $\delta x$  de la projection d'une caractéristique sur l'axe  $x$  pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$  doit donc être inférieur ou égal à  $\Delta x$ , largeur de maille, ou encore

$$\frac{\delta x}{\Delta x} \leq 1 \quad (4.51)$$

Or, le déplacement s'écrit

$$\delta x = \frac{p_x}{\gamma m} \Delta t, \quad (4.52)$$

où  $p_x/(\gamma m)$  est une constante durant le déplacement du fait du splitting. Ce déplacement a pour valeur maximale  $c\Delta t$ , la vitesse d'une particule ne pouvant pas dépasser la célérité de la lumière dans le vide. On a par conséquent l'inégalité suivante

$$\left( \frac{\delta x}{\Delta x} \right)_{max} = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1, \quad (4.53)$$

---

5. Par mauvaise approximation, on entend une approximation de précision inférieure à celle du reste de l'algorithme.

qui se ramène à  $c\Delta t \leq \Delta x$ , condition CFL imposée par le solveur de Maxwell dans le cas 1D.

Dans le cas 2D, cette condition CFL se réécrit :

$$c^2 \Delta t^2 \leq \frac{1}{\Delta x^{-2} + \Delta y^{-2}} = \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \Delta x^2. \quad (4.54)$$

Si la condition CFL imposée par le solveur de Maxwell est satisfaite, et ce quelle que soit la dimension de l'espace des coordonnées, seules des communications entre processus MPI voisins seront requises par la méthode locale d'interpolation.

### 4.3.2 Solveur de Maxwell

Le solveur de Maxwell implémenté dans le code VLEM repose sur les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère, résolues à chaque pas de temps :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad ; \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c^2 \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0}, \quad (4.55)$$

la densité de courant  $\mathbf{J}$  étant calculée directement à partir de la fonction de distribution.

La géométrie à deux dimensions spatiales permet de découpler les six composantes des champs en deux sous-ensembles indépendants de trois composantes :  $E_x$ ,  $E_y$  et  $B_z$  d'une part et  $B_x$ ,  $B_y$  et  $E_z$  d'autre part.

On utilise la méthode de Yee [12] pour calculer les champs électromagnétiques. Les dérivées spatiales sont calculées par différences finies entre deux points. Le champ magnétique et le champ électrique sont calculés sur des grilles décalées d'une demi largeur de maille. Pour le calcul des dérivées temporelles, la méthode de Yee utilise un schéma de type "leapfrog" : le champ magnétique est calculé à l'instant  $t_n + \Delta t/2 = t_{n+1/2}$  à partir de la valeur connue en  $t_n - \Delta t/2 = t_{n-1/2}$  alors que le champ électrique est calculé à  $t + \Delta t = t_{n+1}$  à partir de la valeur connue en  $t_n$ . Le schéma est d'ordre 2 à la fois en espace et en temps et les conditions de bord sont périodiques.

Discretisées selon la méthode de Yee, les équations ont la forme qui suit :

$$E_{x \ i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = E_{x \ i+\frac{1}{2},j}^n + \frac{c^2 \Delta t}{\Delta y} \left( B_{z \ i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{z \ i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \frac{\Delta t}{\epsilon_0} J_{x \ i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.56)$$

$$E_{y \ i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = E_{y \ i,j+\frac{1}{2}}^n - \frac{c^2 \Delta t}{\Delta x} \left( B_{z \ i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{z \ i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \frac{\Delta t}{\epsilon_0} J_{y \ i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.57)$$

$$E_{z \ i,j}^{n+1} = E_{z \ i,j}^n + c^2 \Delta t \left[ \frac{B_{y \ i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - B_{y \ i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} - \frac{B_{x \ i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{x \ i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right] - \frac{\Delta t}{\epsilon_0} J_{z \ i,j}^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.58)$$

$$B_{x \ i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = B_{x \ i,j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\Delta y} (E_{z \ i,j+1}^n - E_{z \ i,j}^n) \quad (4.59)$$

$$B_{y \ i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} = B_{y \ i+\frac{1}{2},j}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_{z \ i+1,j}^n - E_{z \ i,j}^n) \quad (4.60)$$

$$B_{z \ i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = B_{z \ i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( E_{x \ i+\frac{1}{2},j+1}^n - E_{x \ i+\frac{1}{2},j}^n \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( E_{y \ i+1,j+\frac{1}{2}}^n - E_{y \ i,j+\frac{1}{2}}^n \right) \quad (4.61)$$

Dans le cas à une dimension spatiale (on choisira  $x$ ), ces équations conservent leur forme à ceci près que les dérivées par rapport à  $y$  sont nulles. On remarquera enfin qu'en raison de l'utilisation des différences finies, ce schéma réintroduit une condition CFL dans le code, qui à deux dimensions s'écrit :

$$c^2 \Delta t^2 \leq \frac{1}{\Delta x^{-2} + \Delta y^{-2}}. \quad (4.62)$$

Soulignons la présence du courant électrique  $\mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}}$ , évalué à l'instant  $t + \Delta t/2$  dans trois des six équations. Il faut connaître la fonction de distribution exacte à cet instant pour pouvoir calculer correctement ce courant.

## 4.4 Le problème de la conservation de la charge

Dans un code Vlasov-Maxwell, les solveurs de Vlasov et de Maxwell sont couplés : d'une part, les densités de charge et de courant utilisées dans les équations de Maxwell sont calculées à partir de l'intégration de la fonction de distribution ; d'autre part, l'advection semi-lagrangienne de  $f$  nécessite la connaissance des champs électromagnétiques en tout point de l'espace des positions.

Ce couplage n'est pas trivial : on doit connaître la valeur des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  aux noeuds du maillage, mais ces champs sont calculés par le solveur de Maxwell en des points intermédiaires (cf équations (4.56)-(4.58)). De même, la fonction de distribution est calculée aux noeuds du maillage, alors que le solveur de Maxwell requiert la valeur de la densité de courant  $\mathbf{J}$  en des points intermédiaires. De plus, comment calculer correctement le courant à l'instant  $t_n + \Delta t/2$  alors que l'équation de Vlasov est résolue en appliquant une procédure de time-splitting, approximant un mouvement 5D par une séquence de mouvements de dimension réduite, effectués les uns à la suite des autres ?

La densité de courant  $\mathbf{J}$  est requise pour déterminer le champ électrique : qu'il s'agisse de sa composante électromagnétique ou de sa composante électrostatique dans le cas de problèmes 2D ou 3D. Cette dernière est physiquement corrélée au comportement de la densité de charge par l'équation de Maxwell-Gauss, absente de la méthode de Yee. Un calcul trop approximatif de  $\mathbf{J}$  peut donc entraîner une violation de la conservation de la charge (violation indépendante du phénomène de filamentation, lui aussi responsable d'une erreur sur la conservation de la charge) et un échec de la simulation.

Nous allons détailler ce problème dans le paragraphe suivant, puis nous proposerons une méthode pour le résoudre.

### 4.4.1 Conservation de la charge pour le solveur de Maxwell

On utilisera des abréviations pour nommer les équations de Maxwell : les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère (4.55) seront désignées par MF et MA, les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson (4.64) par MG et MT.

Les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont calculés à partir de

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c^2 \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0}. \quad (4.63)$$

dans le code VLEM. Les relations champ-source

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4.64)$$

ne sont pas résolues explicitement dans le solveur de Maxwell.

Rappelons que les densités de charge  $\rho$  et de courant  $\mathbf{J}$  intervenant dans les équations de Maxwell sont calculées à partir de la fonction de distribution :

$$\rho = q \int d^3 \mathbf{p} f \quad \text{et} \quad \mathbf{J} = q \int d^3 \mathbf{p} f \frac{\mathbf{p}}{m\gamma}. \quad (4.65)$$

Ces densités sont donc connues au moment du calcul des champs.

Les champs électromagnétiques étant solutions des équations de Maxwell, ils doivent vérifier les quatre simultanément. Or, le solveur n'utilise que MF et MA, ce qui ne suffit pas pour définir correctement les champs.

Pour le montrer, prenons d'une part la divergence de MA :

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}}{\epsilon_0}, \quad (4.66)$$

où l'on a utilisé  $\nabla \cdot (\nabla \times) = 0$ .

Supposons maintenant que

$$\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} = \tilde{\rho}(x, y), \quad (4.67)$$

où  $\tilde{\rho}(x, y)$  désigne une fonction quelconque ne dépendant pas du temps et qui n'est pas reliée à la fonction de distribution. La densité  $\rho$  est quant à elle connue et définie à partir de (4.65), de sorte que  $\tilde{\rho}(x, y)$  peut être vue comme une erreur ou une ambiguïté sur le calcul du champ électrostatique, ou sur celui de la densité de charge.

Si nous combinons (4.66) et (4.67), nous obtenons bien

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(x) = 0, \quad (4.68)$$

l'équation de conservation de la charge, mais en utilisant l'équation (4.67) qui n'est MG qu'à la fonction  $\tilde{\rho}(x)$  près. On peut inverser le raisonnement et partir de l'équation de MA dans laquelle on force l'équation de conservation de la charge, ce qui conduit à (4.67).

Le même type de raisonnement peut-être établi avec les équations de Maxwell-Faraday (MF) et Maxwell-Thomson (MT). En prenant la divergence de MF, on trouve :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \tilde{\mu}(x, y), \quad (4.69)$$

où  $\tilde{\mu}(x, y)$  est une fonction quelconque ne dépendant pas du temps. Les champs électrostatique et  $\mathbf{B}$  ne sont donc définis qu'à une fonction des coordonnées spatiales près, pourvu que la conservation de la charge soit assurée, si on ne résout que deux des quatre équations de Maxwell.

Si on veut remédier à ce problème, il faut

- 1/ que les équations (4.64) soient satisfaites initialement, *i.e.*  $\tilde{\rho}(x, y) = 0$  et  $\tilde{\mu}(x, y) = 0$ ,
- 2/ que l'équation de conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (4.70)$$

soit vérifiée à chaque instant.

Dans ce cas, les équations de MG et MT sont satisfaites à chaque instant, et ce même si elles ne sont pas résolues explicitement dans le solveur.

Le problème est simple dans le cas de MT, puisqu'il suffit de vérifier MT initialement. Il est beaucoup plus délicat pour MG : on peut certes utiliser un solveur de Poisson pour vérifier MG initialement, mais l'équation de conservation de la charge requiert les valeurs de  $\rho$  et  $\mathbf{J}$ , calculées directement à partir du solveur de Vlasov et ce à chaque pas de temps. Les méthodes numériques utilisées dans ce solveur (time-splitting, méthode semi-Lagrangienne, interpolations) ont donc un impact sur la conservation de la charge dans le code. Le fait que la densité de courant doit être calculée en des points intermédiaires du maillage sur lequel  $f$  est connue ajoute aussi une source d'erreur.

Soulignons enfin que ce raisonnement a été formulé à partir des équations de Maxwell non-discrétisées. Rien ne garantit a priori que la discrétisation par la méthode de Yee conserve les propriétés que nous venons d'évoquer. Fort heureusement, c'est bien le cas, comme nous allons le voir dans la section suivante.

#### 4.4.2 Conservation de la charge en appliquant la méthode de Yee

Vérifions que le schéma numérique de Yee se comporte de la même façon que les équations de Maxwell théoriques concernant la conservation de la charge.

Prenons les équations (4.56) et (4.57) en  $i-1/2$  et  $j-1/2$  respectivement. Soustrayons-les chacune à (4.56) et (4.57) calculées en  $i+1/2$  et  $j+1/2$ . On divise le résultat par  $\Delta x$  et  $\Delta y$  respectivement, avant d'additionner les deux équations. Ceci revient à prendre la divergence selon Yee de  $\mathbf{E}$  dans le plan  $(x, y)$ . Les termes faisant intervenir le champ magnétique se compensent mutuellement lors de l'addition, assurant que la propriété  $\nabla \cdot (\nabla \times) = 0$  soit satisfaite par le solveur de Yee. On trouve alors

$$\begin{aligned} \frac{E_{x \ i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - E_{x \ i-\frac{1}{2},j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{E_{y \ i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - E_{y \ i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta y} = \\ \frac{E_{x \ i+\frac{1}{2},j}^n - E_{x \ i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x} + \frac{E_{y \ i,j+\frac{1}{2}}^n - E_{y \ i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta y} \\ - \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \Delta x} \left[ J_{x \ i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - J_{x \ i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} \right] - \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \Delta y} \left[ J_{y \ i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - J_{y \ i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right], \end{aligned} \quad (4.71)$$

qui n'est autre que la version discrétisée de (4.66). On définit alors

$$\frac{\rho_{i,j}^n}{\epsilon_0} + \tilde{\rho}(x) \equiv \frac{E_{x \ i+\frac{1}{2},j}^n - E_{x \ i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x} + \frac{E_{y \ i,j+\frac{1}{2}}^n - E_{y \ i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta y} \quad (4.72)$$

que l'on injecte dans (4.71) pour trouver l'équation

$$\frac{\rho_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{J_{x \ i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - J_{x \ i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{J_{y \ i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - J_{y \ i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} = 0, \quad (4.73)$$

qui n'est autre que la version discrétisée de l'équation de conservation de la charge. Le solveur de Yee se comporte donc de la même manière que le modèle non discrétisé à deux équations<sup>6</sup> (MA et MF).

Définissons alors l'équation de Maxwell-Gauss selon Yee :

$$\frac{\rho_{i,j}^n}{\epsilon_0} = \frac{E_{x\ i+\frac{1}{2},j}^n - E_{x\ i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x} + \frac{E_{y\ i,j+\frac{1}{2}}^n - E_{y\ i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta y}. \quad (4.74)$$

Si l'équation (4.74) est vérifiée initialement et que l'équation (4.73) est satisfaite à chaque pas de temps, alors (4.74) est satisfaite à chaque pas de temps.

On doit donc résoudre initialement l'équation MG pour déterminer correctement tout champ électrostatique lié à l'inhomogénéité de la fonction de distribution initiale et ainsi forcer  $\tilde{\rho}(x) = 0$ . Dit autrement, le champ électrostatique et la fonction de distribution doivent être autocohérents.

Il faut ensuite déterminer correctement la densité de courant  $\mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}}$  à injecter dans l'équation d'Ampère, ce qui n'est a priori pas évident compte tenu du splitting de l'équation de Vlasov. À ce stade, nous devons donc examiner la façon dont sont couplés les solveurs de Vlasov et de Maxwell dans le code VLEM.

#### 4.4.3 Correction dans VLEM1D3V

On présentera pour cela l'algorithme du code VLEM1D3V, travaillant dans l'espace des phases  $(x, p_x, p_y, p_z)$ . Le système est invariant par translation selon les directions  $y$  et  $z$ . L'équation de conservation de la charge selon Yee s'écrit alors

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} + \frac{J_{x\ i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - J_{x\ i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0, \quad (4.75)$$

et seule la composante  $J_x(t_n + \Delta t/2)$  de la densité de courant joue un rôle dans la conservation de la charge. Le champ électrostatique, lié aux variations spatiales de la densité de charge  $\rho$ , est dirigé selon  $x$ .

On a alors deux façons de déterminer le champ électrostatique  $E_x$ . La première consiste à résoudre MA, réduite à

$$E_{x\ i+\frac{1}{2}}^{n+1} = E_{x\ i+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{\epsilon_0} J_{x\ i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}. \quad (4.76)$$

Il faut dans ce cas que l'équation de Poisson soit initialement satisfaite et que l'équation (4.75) soit vérifiée à chaque pas de temps. C'est la méthode retenue dans VLEM1D3V, et elle nécessite de calculer la densité de courant de la bonne façon. En effet, rien ne garantit que la densité de courant  $\mathbf{J}$  calculée à partir d'une fonction de distribution reconstruite par interpolation, elle même obtenue en résolvant l'équation de Vlasov par time-splitting (les advections spatiales étant traitées à vitesse constante alors que les champs électromagnétiques peuvent varier le long de la caractéristique), soit capable de satisfaire l'équation (4.75). On utilise pour cela une méthode inspirée de celle introduite par Esirkepov dans le contexte des codes PIC (cf. Annexe B pour une présentation succincte de cette technique, et [13] ou [14] pour plus de détails).

La seconde méthode consiste à calculer le champ électrostatique directement à partir de la fonction de distribution lorsqu'on en a besoin en utilisant l'équation de Poisson,

$$\frac{\rho_i^n}{\epsilon_0} = \frac{E_{x\ i+\frac{1}{2}}^n - E_{x\ i-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x}. \quad (4.77)$$

Cette méthode est exacte mais ne peut être réalisée que pour des problèmes 1D en espace. C'est l'approche retenue dans une version du code dite "Full Poisson", où seules les composantes  $E_y$ ,  $E_z$ ,  $B_y$  et  $B_z$  (électromagnétiques au sens  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ ) sont calculées à partir de MF et MA. Les équations (4.76) et (4.77) sont physiquement équivalentes, mais la volonté d'utiliser l'une ou l'autre influe sur la structure du code, c'est à dire sur la séquence d'étapes à réaliser pour résoudre le système Vlasov-Maxwell.

La comparaison des deux techniques nous permettra de valider le correcteur semi-lagrangien d'Esirkepov introduit dans VLEM.

6. On peut faire un calcul similaire pour montrer que si MT est satisfaite initialement, elle le sera quelque soit  $t_n$ .

#### 4.4.3.1 Correcteur semi-lagrangien d'Esirkepov

On adapte ici au code VLEM la méthode présentée en Annexe B. Le raisonnement consiste à supposer que les extrémités d'une caractéristique représentent une particule, avant et après son mouvement, la caractéristique étant une trajectoire physique possible. L'interpolation de la fonction de distribution sur le maillage peut alors être interprétée comme l'attribution d'un facteur de forme à cette particule.

On relie ainsi, comme Esirkepov, la quantité  $W_x$  à la variation de  $f$  ( $f$  désignant la fonction de distribution discrétisée sur le maillage, reconstituée par interpolation) au point  $i$  entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$  en utilisant la relation

$$W_x = f^{n+1}(x_i, \mathbf{p}) - f^n(x_i, \mathbf{p}). \quad (4.78)$$

Cette variation de densité ne peut être liée qu'à l'advection par rapport à la variable d'espace  $x$ , car l'équation d'advection en  $\mathbf{p}$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + q \left[ \mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \times \mathbf{B} \right] \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = 0, \quad (4.79)$$

préservé la densité de particules au point  $i$ , et empêche par conséquent la génération d'un courant si l'équation de conservation de la charge est respectée.

On écrira donc

$$W_x = f^{n+1}(x_i) - f^n(x_i) = f^n(x_i - \delta x) - f^n(x_i) \quad (4.80)$$

en utilisant le schéma d'advection semi-lagrangien vers l'arrière. La valeur de  $f$  en  $t_{n+1}$  au point  $x_i$  correspond à la valeur de  $f$  qui se trouvait en  $x_i - \delta x$  à l'instant  $t_n$ , avec  $\delta x = v_x \Delta t$ .

Multiplions (4.80) par  $v_x$  et par la charge électrique  $-e$  ( $e > 0$ ) puis intégrons sur l'espace des  $\mathbf{p}$  pour obtenir la densité de courant induite par l'advection  $\delta x$  :

$$-e \langle W_x v_x \rangle \equiv -e \int d^3 \mathbf{p} W_x v_x = -e \int d^3 \mathbf{p} f^n(x_i - \delta x) v_x - (-e) \int d^3 \mathbf{p} f^n(x_i) v_x. \quad (4.81)$$

En utilisant la définition de la densité de courant, l'équation (4.81) peut s'écrire

$$-e \langle W_x v_x \rangle = J_{x\ i}^{n+1} - J_{x\ i}^n, \quad (4.82)$$

où les courants  $J_{x\ i}^n$  et  $J_{x\ i}^{n+1}$  sont calculés respectivement avant et après l'advection en  $x$ .

Cette densité de courant est une approximation du courant ayant transité par le point  $i$  durant l'intervalle de temps  $\Delta t$ . Elle doit donc correspondre au terme  $-\nabla \cdot \mathbf{J}$  de l'équation de conservation. On a donc, par identification avec (4.75),

$$J_{x\ i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - J_{x\ i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = e \langle W_x v_x \rangle \Rightarrow J_{x\ i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = J_{x\ i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + e \langle W_x v_x \rangle. \quad (4.83)$$

Ainsi,

$$J_{x\ i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = J_{x\ i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (J_{x\ i}^{n+1} - J_{x\ i}^n). \quad (4.84)$$

On approxime alors  $J_{x\ i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$  par

$$J_{x\ i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (J_{x\ i}^n + J_{x\ i-1,j}^n + J_{x\ i}^{n+1} + J_{x\ i-1}^{n+1}), \quad (4.85)$$

d'où l'écriture du courant à injecter directement dans l'équation MA, conservant la charge :

$$J_{x\ i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (J_{x\ i}^n + J_{x\ i-1}^n + J_{x\ i}^{n+1} + J_{x\ i-1}^{n+1}) - (J_{x\ i}^{n+1} - J_{x\ i}^n). \quad (4.86)$$

#### 4.4.3.2 Résolution de Vlasov-Maxwell dans VLEM1D3V

Le système Vlasov-Maxwell est résolu dans VLEM1D3V en suivant le schéma de principe représenté sur la figure (4.5).

On détaillera les différentes étapes ci-dessous<sup>7</sup>.

7. Les grandeurs marquées d'une étoile \* correspondent à des champs calculés aux noeuds du maillage  $\{\mathbf{x}_i\}$

- **Initialisation** : le champ  $E_x^*$  est initialisé à partir de l'équation de Poisson, par transformation de Fourier, en utilisant la fonction de distribution initiale. Le solveur de Yee requérant les valeurs de  $E_x$  en  $(x + \Delta_x/2)$ , on calcule la quantité

$$E_{x\ i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (E_{x\ i}^* + E_{x\ i+1}^*). \quad (4.87)$$

Les champs  $E_y$  et  $E_z$  sont initialisés directement aux positions requises par la méthode de Yee, en  $t_0$ . De la même manière, les champs  $B_y$  et  $B_z$  sont initialisés en  $t_0 - \Delta t/2$ . En vertu de MT, le champ  $B_x$  est initialisé à 0, assurant de fait que MT soit satisfaite aux pas de temps ultérieurs.

- **Boucle principale - Étape 1** : calcul du champ magnétique. En vue de préparer l'advection en  $\mathbf{p}$ , on doit connaître les champs aux noeuds du maillage à l'instant  $t_n$ . Il nous faut donc résoudre MF ((4.59), (4.60),(4.61)) pour trouver le champ en  $t_n + \Delta t/2$  : on détermine  $B_{z\ i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ ,  $B_{x\ i}^{n+\frac{1}{2}}$  et  $B_{y\ i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ .

Les champs  $\mathbf{B}^*$  et  $\mathbf{E}^*$  sont calculés par moyenne spatiale des valeurs encadrant le noeud de grille  $\{\mathbf{x}_i\}$ . La valeur de  $\mathbf{B}^*$  en  $t_n$  est obtenue par moyenne des valeurs connues en  $t_{n-1/2}$  et en  $t_{n+1/2}$ . Par exemple, pour la composante  $B_z$ , nous avons

$$B_{z\ i}^* = (B_{z\ i}^{n-\frac{1}{2}} + B_{z\ i}^{n+\frac{1}{2}}) / 2 \quad (4.88)$$

avec

$$B_{z\ i}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (B_{z\ i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + B_{z\ i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}). \quad (4.89)$$

Les composantes  $E_x$  et  $E_y$  sont calculées comme

$$E_{x\ i}^* = \frac{1}{2} (E_{x\ i+\frac{1}{2}}^n + E_{x\ i-\frac{1}{2}}^n) \quad (4.90)$$

et

$$E_{y\ i}^* = \frac{1}{2} (E_{y\ i}^n + E_{y\ i}^n). \quad (4.91)$$

On calcule enfin la densité de courant  $\mathbf{J}_i^n$  à partir de  $f^n$ , par intégration sur l'espace des  $\mathbf{p}$ . Par exemple, pour la composante  $J_x$  :

$$J_x = \sum_l^{N_{p_x}} \sum_m^{N_{p_y}} \sum_n^{N_{p_z}} f_{ijlmn}^n \frac{p_{x,l}}{\gamma_{lmn}} \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z, \quad \text{avec} \quad \gamma_{lmn} = \sqrt{1 + \frac{p_{x,l}^2 + p_{y,m}^2 + p_{z,n}^2}{m^2 c^2}}. \quad (4.92)$$

- **Boucle principale - Étape 2** : advection en  $\mathbf{p}$  sur un pas de temps complet  $\Delta t$ , en suivant la méthode présentée en Section 4.3.1.3.
- **Boucle principale - Étape 3** : advection en  $x$  sur un pas de temps complet  $\Delta t$ , en suivant la méthode présentée en Section 4.3.1.3. On calcule alors les trois composantes de la nouvelle densité de courant aux noeuds du maillage par intégration de la fonction de distribution.

On calcule ensuite la densité de courant  $J_{x\ i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ , à partir de l'équation (4.86). La densité  $J_{y\ i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$  est quant à elle donnée par

$$J_{y\ i}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{J_{y\ i}^n + J_{y\ i}^{n+1}}{2} \quad (4.93)$$

- **Boucle principale - Étape 4** : calcul du champ électrique en  $t_{n+1}$ . On utilise la densité de courant  $J_{x\ i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$  dans (4.76) pour déterminer le champ électrostatique  $E_x$ . On utilise les équations

$$E_{y\ i}^{n+1} = E_{y\ i}^n - \frac{c^2 \Delta t}{\Delta x} (B_{z\ i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{z\ i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) - \frac{\Delta t}{\epsilon_0} J_{y\ i}^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.94)$$

$$E_{z\ i,j}^{n+1} = E_{z\ i}^n + c^2 \frac{\Delta t}{\Delta x} (B_{y\ i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - B_{y\ i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) - \frac{\Delta t}{\epsilon_0} J_{z\ i}^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.95)$$

pour les composantes  $E_y$  et  $E_z$ .

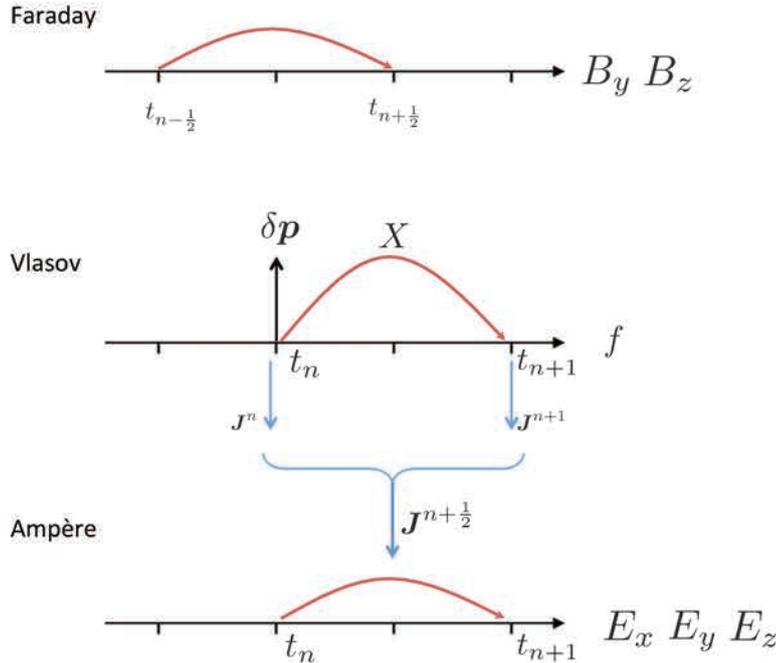


FIGURE 4.5 – Représentation de la méthode de résolution du système Vlasov-Maxwell dans le code VLEM1D3V. Chaque ligne correspond à l’une des trois équations du code (MF, Vlasov, MA). Les flèches rouges représentent l’avancement des quantités physiques dans le temps. L’advection en  $\mathbf{p}$  est représentée par une flèche verticale noire.

#### 4.4.3.3 Résolution de Vlasov-Maxwell dans la version “Full-Poisson”

On présente brièvement la méthode de résolution du système Vlasov-Maxwell dans la version “Full-Poisson” de VLEM. La composante électrostatique  $E_x$  peut être déterminée, à n’importe quelle étape du splitting, de façon exacte en utilisant un solveur de Poisson. Ceci est plus facile dans une géométrie 1D où les effets électrostatiques et électromagnétiques oeuvrent selon des directions indépendantes, contrairement au cas 2D où les composantes  $E_x$  et  $E_y$  comportent à la fois une contribution électrostatique et une contribution électromagnétique.

On utilise dans cette version du code un schéma de time-splitting légèrement différent de celui présenté à la section précédente. Les advections sont calculées exactement de la même façon dans les deux versions du code, seuls le découpage de l’équation de Vlasov et le solveur de Maxwell sont modifiés (cf. Figure 4.6) :

- le splitting est symétrisé autour de l’advection en  $\mathbf{p}$  : on effectue une advection en  $x$  durant  $\Delta t/2$ , puis l’advection en  $\mathbf{p}$  durant  $\Delta t$  et enfin une seconde advection selon  $x$ , sur le deuxième demi pas de temps.
- le champ électrique est déterminé par MA en  $t_{n+1/2}$  (et non plus en  $t_n$ ) et le champ magnétique est calculé via MF en  $t_n$  au lieu de  $t_{n+1/2}$ . La forme des équations de Maxwell selon Yee reste la même.

Nous disposons donc de deux versions d’un même code, utilisant les mêmes méthodes d’interpolation de  $f$  et le même solveur de Maxwell, mais un schéma de splitting et un traitement du problème de conservation de la charge différents, dont l’un vérifie exactement l’équation de Maxwell-Gauss à chaque itération. L’utilisation de ces deux codes sur un même problème nous permettra de valider le code du point de vue de la méthode de correction du courant, mais aussi du point de vue de la séquence d’advections non-symétrisée implémentée dans VLEM1D3V.

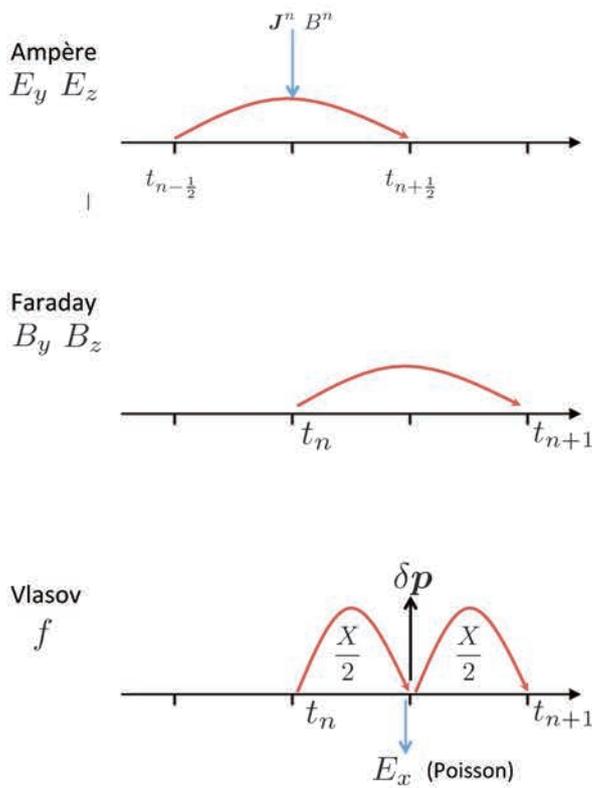


FIGURE 4.6 – Représentation de la méthode de résolution du système Vlasov-Maxwell dans la version “Full-Poisson” de VLEM1D3V. Le splitting de l’équation de Vlasov est organisé différemment afin de pouvoir calculer “exactement” le champ électrostatique en  $t + \Delta t/2$ , entre entre les deux demi-advections en  $x$ . On résout pour cela l’équation de Poisson par transformation de Fourier. Les composantes  $E_y$  et  $E_z$  sont quant à elles calculées à partir de l’équation de Maxwell-Ampère, comme dans VLEM1D3V.

#### 4.4.4 Généralisation à VLEM2D3V

##### 4.4.4.1 Correcteur de courant 2D

Soit l'équation de conservation de la charge pour la géométrie 2D  $(x, y)$  :

$$\frac{\rho_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{J_{x\ i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - J_{x\ i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{J_{y\ i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - J_{y\ i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} = 0, \quad (4.96)$$

Dans le même esprit que pour la géométrie 1D, on introduit les quantités  $W_x$  et  $W_y$  telles que

$$W_x + W_y = f^{n+1}(x_i, y_j) - f^n(x_i, y_j) \quad (4.97)$$

$$= f^n(X, Y) - f^n(x_i, y_j) \quad (4.98)$$

$$= f^n(x_i - \delta x, y_j - \delta y) - f^n(x_i, y_j), \quad (4.99)$$

où  $(X, Y)$  désigne l'extrémité à  $t_n$  de la caractéristique aboutissant en  $(x_i, y_j)$  à  $t_{n+1}$ . Les quantités  $\delta x = p_x/(m\gamma)\Delta t$  et  $\delta y = p_y/(m\gamma)\Delta t$  représentent la longueur de la projection de la caractéristique sur les axes  $x$  et  $y$ .

La procédure de time-splitting de l'équation de Vlasov pour un problème 2D (présentée en Section 4.3.1.3) consiste en deux "demi" advections (i.e. sur une durée  $\Delta t/2$ ) selon  $x$  avant et après une advection selon  $y$  (celle-ci sur  $\Delta t$ ). On peut faire apparaître ces étapes dans l'équation (4.99) :

$$\begin{aligned} W_x + W_y = & \underbrace{f^n(x_i - \delta x, y_j - \delta y) - f^n(x_i - \delta x/2, y_j - \delta y)}_{\text{demi adv. en x}} \\ & + \underbrace{f^n(x_i - \delta x/2, y_j - \delta y) - f^n(x_i - \delta x/2, y_j)}_{\text{adv. en y}} \\ & + \underbrace{f^n(x_i - \delta x/2, y_j) - f^n(x_i, y_j)}_{\text{demi adv. en x}}. \end{aligned} \quad (4.100)$$

On écrira donc

$$W_x = f^n(x_i - \delta x, y_j - \delta y) - f^n(x_i - \delta x/2, y_j - \delta y) + f^n(x_i - \delta x/2, y_j) - f^n(x_i, y_j) \quad (4.101)$$

et

$$W_y = f^n(x_i - \delta x/2, y_j - \delta y) - f^n(x_i - \delta x/2, y_j), \quad (4.102)$$

ou, en utilisant les notations de la fonction de distribution introduites en Section 4.3.1.3,

$$W_x = f^{n+1}(x_i, y_j) - f^{**}(x_i, y_j) + f^*(x_i, y_j) - f^n(x_i, y_j) \quad (4.103)$$

et

$$W_y = f^{**}(x_i, y_j) - f^*(x_i, y_j). \quad (4.104)$$

On peut alors évaluer les densités de courant satisfaisant l'équation de conservation de la charge :

$$J_{x\ i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - J_{x\ i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} = e \langle W_x v_x \rangle \Rightarrow J_{x\ i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} = J_{x\ i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} + e \langle W_x v_x \rangle. \quad (4.105)$$

$$J_{y\ i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - J_{y\ i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = e \langle W_y v_y \rangle \Rightarrow J_{y\ i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = J_{y\ i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + e \langle W_y v_y \rangle. \quad (4.106)$$

On obtient l'expression des densités de courant à utiliser dans MA, en injectant respectivement (4.103) et (4.104) dans (4.105) et (4.106),

$$J_{x\ i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (J_{x\ i,j}^n + J_{x\ i-1,j}^n + J_{x\ i,j}^{n+1} + J_{x\ i-1,j}^{n+1}) - \frac{1}{2} (J_{x\ i,j}^* - J_{x\ i,j}^n + J_{x\ i,j}^{n+1} - J_{x\ i,j}^{**}) \quad (4.107)$$

et

$$J_{y\ i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (J_{y\ i,j}^n + J_{y\ i,j-1}^n + J_{y\ i,j}^{n+1} + J_{y\ i,j-1}^{n+1}) - (J_{y\ i,j}^{**} - J_{y\ i,j}^*), \quad (4.108)$$

où  $J^*$  et  $J^{**}$  sont les densités de courant calculées respectivement avant et après l'advection en  $y$ , comme indiqué sur la figure 4.7.

Cette technique peut être généralisée à la géométrie 3D de manière directe, en introduisant la quantité  $W_z$  et en calculant les densités de courant après chaque advection selon  $z$ .

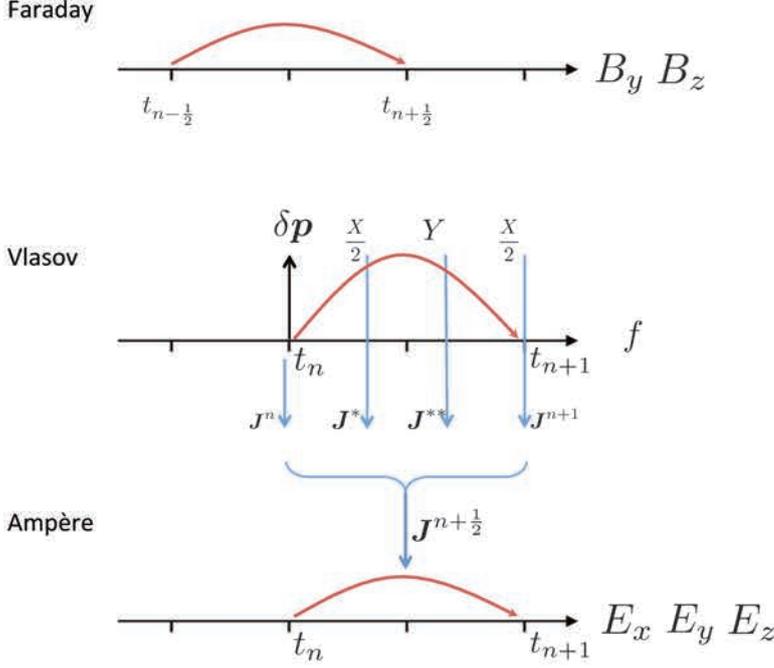


FIGURE 4.7 – Représentation de la méthode de résolution du système Vlasov-Maxwell dans le code VLEM2D3V. La correction de courant fait intervenir une densité de courant intermédiaire déterminée à la fin de chaque advection en  $x$  ou en  $y$ .

#### 4.4.4.2 Résolution de Vlasov-Maxwell dans VLEM2D3V

Le système Vlasov-Maxwell est résolu dans VLEM2D3V en suivant les étapes présentées ci-dessous et résumées par la figure 4.7.

— **Initialisation** : le champ électrique  $\mathbf{E}$  peut s'écrire :

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}_{es} + \mathbf{E}_{em}, \quad (4.109)$$

où  $\mathbf{E}_{es} = -\nabla\Phi$  correspond à la partie électrostatique de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{E}_{em} = -(\partial/\partial t)\mathbf{A}$  correspond à sa partie électromagnétique, dont le rotationnel est non-nul. Le champ  $\mathbf{E}_{es}$  doit être cohérent avec la fonction de distribution initiale (équilibre et perturbation), alors que le champ  $\mathbf{E}_{em}$  doit être cohérent avec la perturbation initiale du champ magnétique  $\mathbf{B}$ .

En effet, si on prend le rotationnel d'une part (équation (4.110)) puis la divergence d'autre part (équation (4.111)) de l'équation (4.109), on obtient

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E}_{em} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4.110)$$

qui est l'équation de Maxwell-Faraday reliant  $\mathbf{B}$  à  $\mathbf{E}_{em}$ , et

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\Delta\Phi - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \nabla \cdot \mathbf{E}_{es} - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}). \quad (4.111)$$

qui devient l'équation de Maxwell-Gauss si on fait le choix de travailler en jauge de Coulomb,  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . On peut donc séparer les composantes électrostatique et électromagnétique (*i.e.* retirer le caractère divergent du champ  $\mathbf{E}_{em}$ ) en jauge de Coulomb.

La partie électrostatique est donc initialisée en résolvant l'équation de Maxwell-Gauss à l'instant  $t = 0$ . Les composantes du champ magnétique  $B_y$  et  $B_z$  sont initialisées en  $t_0 - \Delta t/2$ , en veillant à ce qu'elles satisfassent la jauge de Coulomb.

- **Boucle principale - Étape 1** : calcul du champ magnétique en  $t_n + \Delta t/2$ , puis en  $t_n$ . On résout MF ((4.59), (4.60),(4.61)) pour trouver les champs  $B_{z\ i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ ,  $B_{x\ i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$  et  $B_{y\ i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}$ .

Les champs  $\mathbf{B}^*$  et  $\mathbf{E}^*$  sont calculés par moyenne spatiale des valeurs encadrant le noeud de grille  $\{\mathbf{x}_i\}$ . La valeur de  $\mathbf{B}^*$  en  $t_n$  est obtenue par moyenne des valeurs connues en  $t_{n-1/2}$  et en  $t_{n+1/2}$ . Par exemple, pour la composante  $B_z$ , nous avons

$$B_{z\ i,j}^* = \frac{1}{2} \left( B_{z\ i,j}^{n-\frac{1}{2}} + B_{z\ i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (4.112)$$

avec

$$B_{z\ i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \left( B_{z\ i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + B_{z\ i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + B_{z\ i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + B_{z\ i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \quad (4.113)$$

et les composantes  $E_x$  et  $E_y$  sont calculées comme

$$E_{x\ i,j}^* = \frac{1}{2} \left( E_{x\ i+\frac{1}{2},j}^n + E_{x\ i-\frac{1}{2},j}^n \right) \quad (4.114)$$

et

$$E_{y\ i,j}^* = \frac{1}{2} \left( E_{y\ i,j+\frac{1}{2}}^n + E_{y\ i,j-\frac{1}{2}}^n \right). \quad (4.115)$$

La densité de courant  $\mathbf{J}_{i,j}^n$  est calculée à partir de  $f^n$  par intégration sur l'espace des  $\mathbf{p}$ .

- **Boucle principale - Étape 2** : advection en  $\mathbf{p}$  sur un pas de temps complet  $\Delta t$ , selon la méthode présentée en Section 4.3.1.3. On utilise les champs  $\mathbf{E}^*$  et  $\mathbf{B}^*$ .
- **Boucle principale - Étape 3** : première advection en  $x$  sur un demi pas de temps ( $\Delta t/2$ ). On calcule alors la densité de courant intermédiaire  $\mathbf{J}_{i,j}^*$  par intégration de  $f^*$ .
- **Boucle principale - Étape 4** : advection en  $y$  sur un pas de temps complet ( $\Delta t$ ). On calcule ensuite la densité de courant intermédiaire  $\mathbf{J}_{i,j}^{**}$  par intégration de  $f^{**}$ .
- **Boucle principale - Étape 5** : seconde advection en  $x$  sur un demi pas de temps ( $\Delta t/2$ ). On calcule alors la densité de courant  $\mathbf{J}_{i,j}^{n+1}$  par intégration de  $f^{n+1}$ .
- **Boucle principale - Étape 6** : calcul de la densité  $\mathbf{J}^{n+\frac{1}{2}}$  censée vérifier l'équation de conservation de la charge, en utilisant les formules (4.107) et (4.107).
- **Boucle principale - Étape 7** : calcul du champ électrique en  $t_{n+1}$ . Dans ce but, on utilise les composantes de la densité de courant calculées à l'étape 6.

## 4.5 Validation du code VLEM

On présentera dans cette section plusieurs simulations visant à tester la capacité du code à reproduire des résultats physiques connus en s'appuyant notamment sur l'exemple des instabilités de type Weibel : retrouve-t-on des structures connues dans l'espace des phases ? Les bons taux de croissance sont-ils mesurés ? Les quantités invariantes de l'équation de Vlasov sont-elles conservées par le code VLEM et si oui, sous quelles conditions ? La méthode semi-lagrangienne "locale" employée dans l'espace des coordonnées donne-t-elle des résultats équivalents à ceux que l'on obtiendrait en utilisant une méthode globale pour chaque direction de l'espace des phases ? Les résultats seront comparés avec ceux issus d'autres codes (VLEM1D3V-Full Poisson, advection spatiale globale, modèle multi-faisceaux ou multi-anneaux). On insistera aussi sur les avantages que peuvent procurer un code semi-lagrangien.

### 4.5.1 VLEM1D

On présente d'abord des résultats obtenus avec la version 1D (2V  $(x, p_x, p_y)$  ou 3V  $(x, p_x, p_y, p_z)$ ) de VLEM. On discutera d'abord, à travers une première simulation, de la possible influence de la décomposition de domaine sur la structure de  $f$  dans l'espace des phases et on s'attachera à montrer que le code VLEM restitue des résultats cohérents avec l'analyse linéaire d'une part, et avec un autre code semi-lagrangien utilisant une méthode globale d'interpolation d'autre part. Une deuxième simulation nous permettra de discuter de l'efficacité de la correction de courant proposée dans la section précédente et de valider la séquence d'étapes implémentée dans VLEM pour résoudre le système Vlasov-Maxwell : une comparaison sera réalisée entre VLEM1D3V et sa version "Full Poisson".

#### 4.5.1.1 Validation de la décomposition de domaine

Le but de la simulation présentée dans cette section est de montrer que la reconstruction de la fonction de distribution par la méthode des splines locaux fonctionne en fournissant des résultats équivalents à la méthode classique de reconstruction par splines globaux. Rappelons que la méthode "locale" ne garantit que la continuité de la dérivée première de  $f$ , là où la méthode "globale" assure jusqu'à la continuité de la dérivée seconde sur tout le domaine.

On décide de perturber un système de deux faisceaux contra-propageants de sorte à exciter une instabilité CFI. Les faisceaux sont alignés selon la direction  $y$ , direction dans laquelle le système est par conséquent invariant par translation. La fonction de distribution, initialement donnée par

$$f(x, \mathbf{p}) = \frac{n_1}{(2\pi m k_B T_1)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p_x^2 + (p_y - p_1)^2 + p_z^2}{2m k_B T_1}\right) + \frac{n_2}{(2\pi m k_B T_2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p_x^2 + (p_y - p_2)^2 + p_z^2}{2m k_B T_2}\right), \quad (4.116)$$

évolue dans l'espace  $(x, p_x, p_y)$ . On choisit un système symétrique ( $n_1 = n_2 = 0.5n_0$ ) et plutôt froid ( $T_1 = T_2 = 1$  keV), pour des vitesses de faisceaux assez fortement relativistes<sup>8</sup> telles que  $p_1 = -p_2 = 3mc$  (correspondant à une vitesse  $u_0 \simeq 0.95c$ ).

Ce système est perturbé perpendiculairement aux faisceaux en introduisant initialement un champ magnétique

$$B_z(x) = \delta B \cos(k_0 x) \quad (4.117)$$

pour un vecteur d'onde  $k_0 c / \omega_{pe} = 2\pi / L_x = 1$ ,  $L_x = 2\pi$  étant la longueur du domaine de simulation en  $x$ .

On choisit un pas de temps suffisamment faible,  $\Delta t = 0.003$  pour respecter la condition CFL du solveur de Maxwell et pour décrire correctement l'instabilité. Les grandeurs physiques utilisées pour la simulation sont regroupées dans le tableau 4.2.

On souhaite comparer les résultats obtenus par VLEM avec ceux publiés dans [15], où la même simulation (avec une perturbation d'amplitude  $10^{-4}$  et déphasée de  $\pi/2$  par rapport à (4.117)<sup>9</sup>) a été lancée avec deux autres codes, un code semi-lagrangien 1D2V et un code multi-faisceaux, utilisant tous les deux une méthode d'interpolation par splines globaux.

8. Une distribution de Maxwell-Jüttner aurait été plus juste d'un point de vue physique, compte tenu de la forte vitesse des faisceaux.

9. La différence dans l'amplitude de la perturbation implique que les deux simulations n'atteignent pas la saturation en même temps. Le décalage spatial de  $\Pi/2$  peut quant à lui être vu en comparant les figures 4.10 et 4.11, prises à des instants où la physique est similaire dans les deux simulations

$n_1$	$n_2$	$p_1$	$p_2$	$k_B T_1$	$k_B T_2$	$\delta B$	$N_x$	$N_{p_x}$	$N_{p_y}$	$\Delta t$	$k_0$
0.5	0.5	3	-3	2	2	$10^{-5}$	256	256	256	0.003	1.000

TABLEAU 4.2 – Valeur des différents paramètres physiques (normalisés) utilisés pour initialiser la simulation de l’instabilité CFI présentée dans la section 4.5.1.1. Les faisceaux sont choisis symétriques en densité, vitesse et température. On normalise toutes les grandeurs par rapport à la pulsation plasma électronique totale  $\omega_{pe}$ , la masse électronique  $m_e$ , la charge élémentaire  $e$  et la vitesse de la lumière  $c$ .

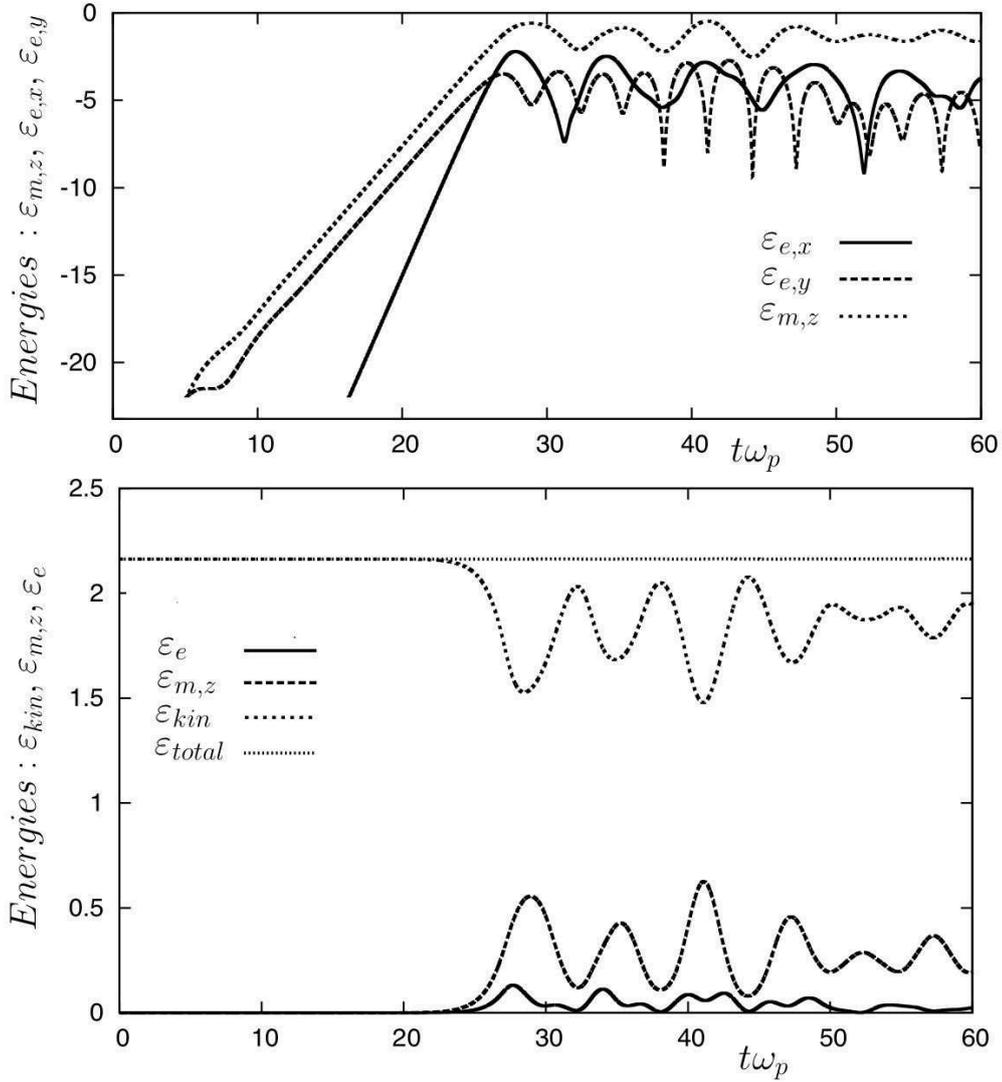


FIGURE 4.8 – Évolution temporelle des énergies électrostatique  $\varepsilon_{e,x}$ , électrique  $\varepsilon_{e,y}$  et magnétique  $\varepsilon_{b,z}$  pour le code VLEM1D2V. Panneau du haut : échelle semi-logarithmique pour mieux mettre en évidence la croissance exponentielle des énergies. Les taux de croissance obtenus avec SLV2D sont identiques. Panneau du bas : évolution temporelle en échelle linéaire des énergies électrique  $\varepsilon_e = \varepsilon_{e,x} + \varepsilon_{e,y}$ , magnétique  $\varepsilon_{m,z}$ , cinétique  $\varepsilon_{kin}$  et totale  $\varepsilon_{total}$ . Les échanges entre la composante cinétique et la composante magnétique, caractéristiques des instabilités de type Weibel, sont bien mis en évidence.

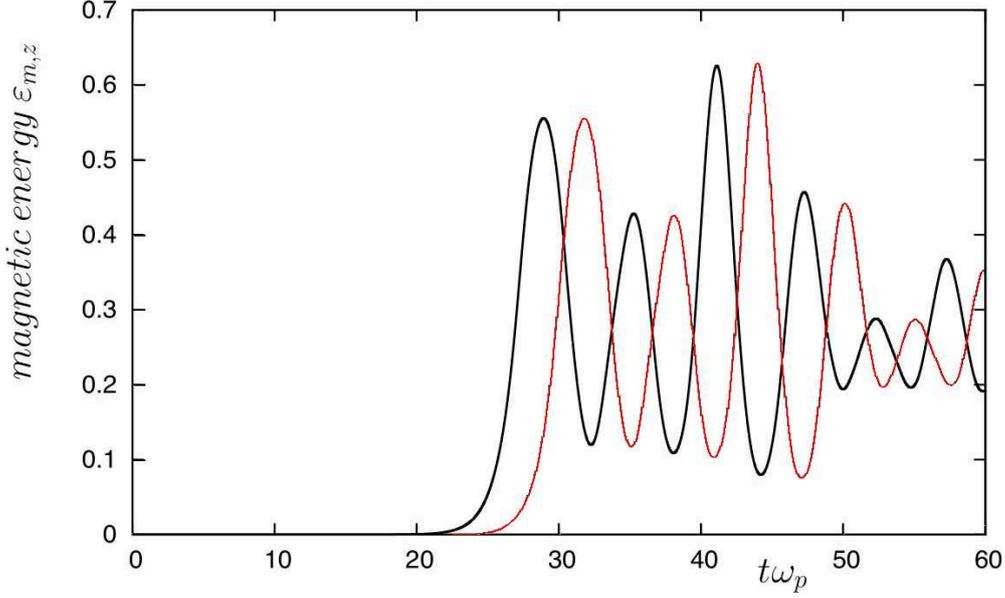


FIGURE 4.9 – Évolution temporelle du champ magnétique  $B_z$  pour la simulation VLEM (trait noir) et pour la simulation de référence (trait rouge) publiée dans [15]. Le déphasage est lié à une initialisation légèrement différente du champ magnétique entre les deux simulations. Le taux de croissance est le même dans les deux simulations et la phase de saturation est pratiquement identique dans les deux cas (il y a une très légère différence au niveau de l'amplitude de certains pics).

Commençons par nous intéresser à la phase linéaire de la simulation VLEM. L'analyse linéaire prédit un taux de croissance  $\Gamma_{CFI}/\omega_{pe} = 0.47$  [15], valeur qui est retrouvée numériquement par VLEM d'après le panneau supérieur de la Figure 4.8, représentant l'évolution en échelle semi-logarithmique des quantités

$$\varepsilon_{e,x} = \frac{1}{L_x} \int \frac{\epsilon_0}{2} E_x^2 dx, \quad (4.118)$$

$$\varepsilon_{e,y} = \frac{1}{L_x} \int \frac{\epsilon_0}{2} E_y^2 dx \quad (4.119)$$

et

$$\varepsilon_{m,z} = \frac{1}{L_x} \int \frac{1}{2\mu_0} B_z^2 dx, \quad (4.120)$$

en fonction du temps. Ces quantités correspondent respectivement aux énergies associées aux champs  $E_x$ ,  $E_y$  et  $B_z$ . Notons que les énergies évoluent avec un taux de croissance double  $2\Gamma_{CFI}$  par rapport aux champs puisqu'elles font intervenir leur carré. Le panneau inférieur de la figure 4.8 montre, en échelle linéaire, l'évolution de ces énergies auxquelles on a ajouté celles de l'énergie cinétique  $\varepsilon_{kin}$

$$\varepsilon_{kin} = \int dx d^3\mathbf{p} (\gamma - 1) f m c^2 \quad (4.121)$$

et de l'énergie totale  $\varepsilon_{tot}$ ,

$$\varepsilon_{total} = \varepsilon_{kin} + \varepsilon_{e,x} + \varepsilon_{e,y} + \varepsilon_{m,z}. \quad (4.122)$$

Les fluctuations de l'énergie cinétique et de l'énergie magnétique sont fortement corrélées : on voit qu'un certain volume d'énergie circule périodiquement des particules au champ magnétique et vice-versa, comme attendu, puisque le mécanisme de l'instabilité tire sa source de l'anisotropie liée à la vitesse moyenne des faisceaux et génère un champ magnétique important. C'est un comportement caractéristique des instabilités de type Weibel.

La composante magnétique  $B_z$  évolue de façon identique dans les deux simulations, comme l'atteste la Figure 4.9.

Remarquons que le champ électrostatique  $E_x$  augmente avec un taux double,  $\Gamma(E_x)/\omega_{pe} = 0.94$ , par rapport à  $B_z$  et au champ induit  $E_y$ . La composante  $E_x$  démarre depuis le zéro machine (elle apparaît donc plus tard sur la figure 4.8), le plasma étant initialement neutre. Ce champ devient donc

significatif lorsque le champ magnétique a augmenté de plusieurs ordres de grandeur. Ce comportement n'est clairement pas prévu par l'analyse linéaire, qu'elle soit cinétique ou fluide, cette analyse supposant que toutes les grandeurs évoluent avec le même taux de croissance.

Il s'agit néanmoins d'un comportement connu [16] : le champ magnétique d'amplitude croissante piège de plus en plus de particules dans sa structure, non-propagative. L'accumulation de charges dans certaines régions de l'espace entraîne la formation d'une charge d'espace et donc d'un champ électrostatique de longueur d'onde deux fois plus petite que celle du champ magnétique. Ce champ électrostatique agit comme une perturbation venant déstabiliser les ondes de Langmuir parallèlement à l'axe  $x$  et celles-ci viennent se coupler à l'instabilité CFI. Le champ électrostatique "apparaît" plus tard sur les courbes car il requiert qu'une fraction significative de particules soit piégée, et donc que le champ magnétique ait eu suffisamment de temps pour se développer. On peut montrer que le taux de croissance du champ électrostatique est double [17], [18] car  $E_x$  est proportionnel au gradient de pression magnétique  $dB_z^2/dx$  durant sa phase de croissance linéaire.

Le comportement temporel de l'instabilité semble être identique dans les deux simulations. Regardons maintenant de plus près son comportement dans l'espace des phases. Les figures 4.10 et 4.11 montrent une coupe de la fonction de distribution dans l'espace  $(x, p_x)$ , la première correspondant à la simulation Vlasov de l'article [15] et la seconde au code VLEM. En raison du déphasage et de la différence d'amplitude de la perturbation initiale entre les deux simulations, les structures d'une figure sont décalées dans le temps (le décalage est d'environ  $3\omega_{pe}t$ ) et l'espace (décalage de  $\pi/2$ ) par rapport à celles de l'autre figure.

À l'exception d'oscillations de Gibbs peut-être un peu plus présentes dans la simulation VLEM, la structure de  $f$  est la même dans les deux simulations. Initialement homogène selon  $x$ , la fonction de distribution se structure autour des maxima du champ magnétique (situés en  $\pi/2$  et en  $3\pi/2$  sur la figure 4.10 et en  $0, \pi$  et  $2\pi$  sur la figure 4.11). Les zones de piégeage (de forte valeur de  $f$ ) sont positionnées entre ces maxima et seuls des filaments constitués de particules rapides les relient. Au fur et à mesure que l'on avance dans la phase de saturation, des vortex se forment dans les zones de piégeage. Les filaments sont résolus de façon similaire par les deux codes, les différences entre les deux codes étant minimales. La méthode d'interpolation utilisant des splines locaux est donc capable de donner une description détaillée et correcte de la structure de la fonction de distribution, y compris en régime non-linéaire.

Abordons enfin la question de la conservation des invariants que sont le nombre de particules  $N$ , l'énergie totale  $\varepsilon_{tot}$ , la norme  $L2$  et l'entropie  $S$ . La simulation VLEM1D2V a été effectuée sans utiliser le correcteur de courant présenté dans la section précédente : la charge n'est donc conservée à qu'à  $10^{-4}$  près, en dépit d'un maillage dense dans l'espace des vitesses ( $256^2$  points). L'énergie totale est quant à elle conservée à 0.13% près. L'entropie et la norme  $L2$  ne sont conservées "qu'à" 20%, mais ceci doit être distingué du problème de conservation de la charge.

La non-conservation de l'entropie (et des normes de degré plus élevé comme la norme  $L2$ ) s'explique essentiellement par le phénomène de filamentation de la fonction de distribution, inévitable, et qui consiste en la formation progressive de structures de taille de plus en plus fine par rapport à celle du maillage. Un maillage de taille donnée est incapable de décrire correctement des structures dont la taille est comparable ou inférieure à cette taille. Cette mauvaise discrétisation des structures fines de  $f$  se traduit alors par une perte massive d'information, matérialisée par un lissage de la  $f$  et par une augmentation importante de l'entropie (et dans une moindre mesure de la norme  $L2$  puis de l'énergie totale). Augmenter le nombre de points dans l'espace des  $\mathbf{p}$ , en gardant à l'esprit la quantité de mémoire supplémentaire requise par cet effort, permet de réduire quelque peu cette augmentation de l'entropie, de la retarder, mais pas de l'empêcher.

#### 4.5.1.2 Validation du correcteur de courant et du splitting

Utilisons maintenant le code VLEM dans sa version 1D3V et montrons l'efficacité de la correction de courant introduite en section 4.4.3.1. Dans ce but, on lancera parallèlement une simulation témoin avec la version "Full Poisson" présentée en section (4.4.3.3) et dans laquelle le champ  $E_x$  est calculé via un solveur de Poisson entre deux demi advections en  $x$  de la fonction de distribution.

On choisit de simuler le cas test de l'instabilité CFI d'un système de faisceaux symétriques (en densité, vitesse et température), orientés selon l'axe  $y$ , contra-propagatifs et faiblement relativistes. La vitesse moyenne des faisceaux est égale à  $u_{1,2} \pm 0.6c$  et l'énergie thermique est de  $k_B T_{1,2} = 6$  keV.

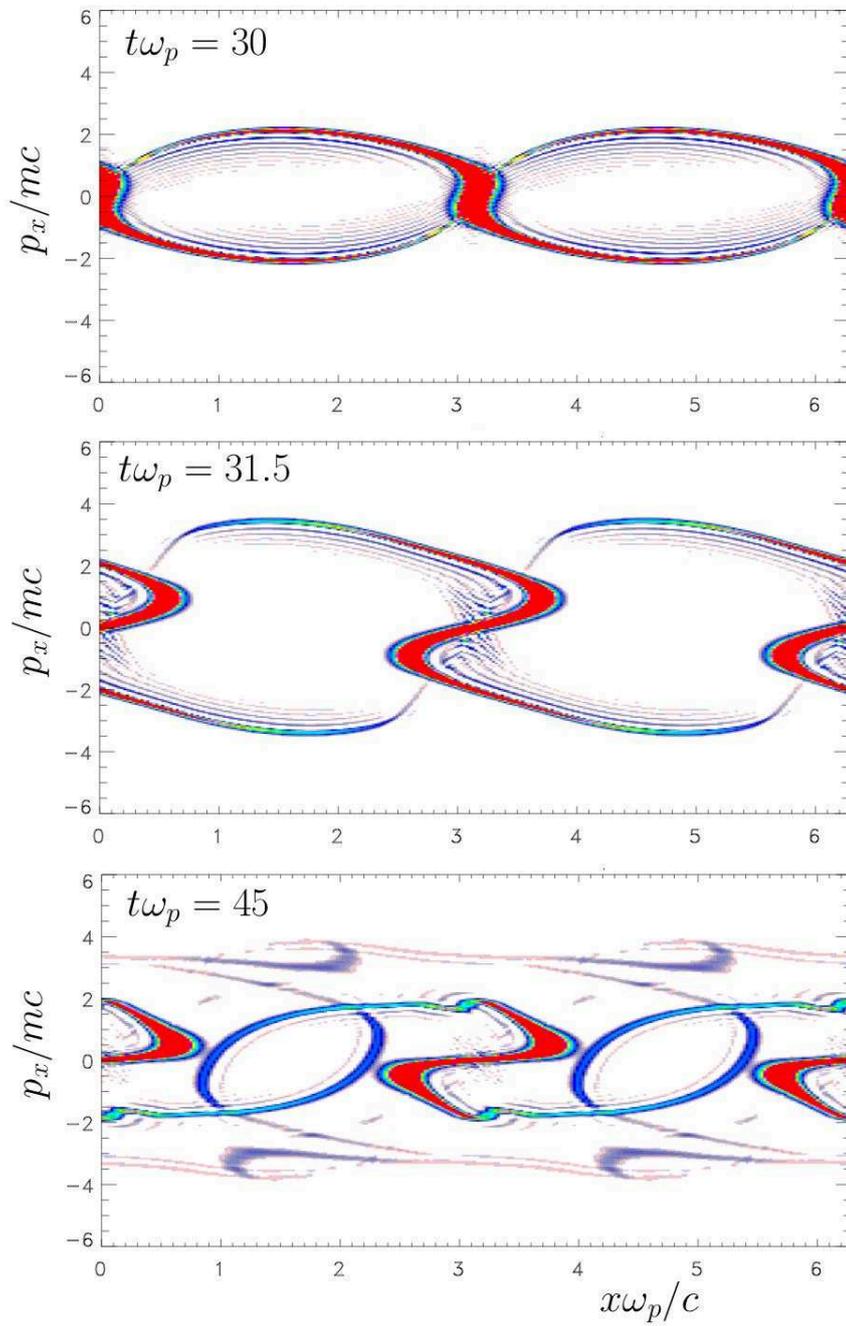


FIGURE 4.10 – Coupes  $(x, p_x)$  de l'espace des phases obtenues avec le code utilisant la méthode de reconstruction globale et tracées aux instants  $\omega_{pe}t = 30, 31.5$  et  $45$  respectivement.

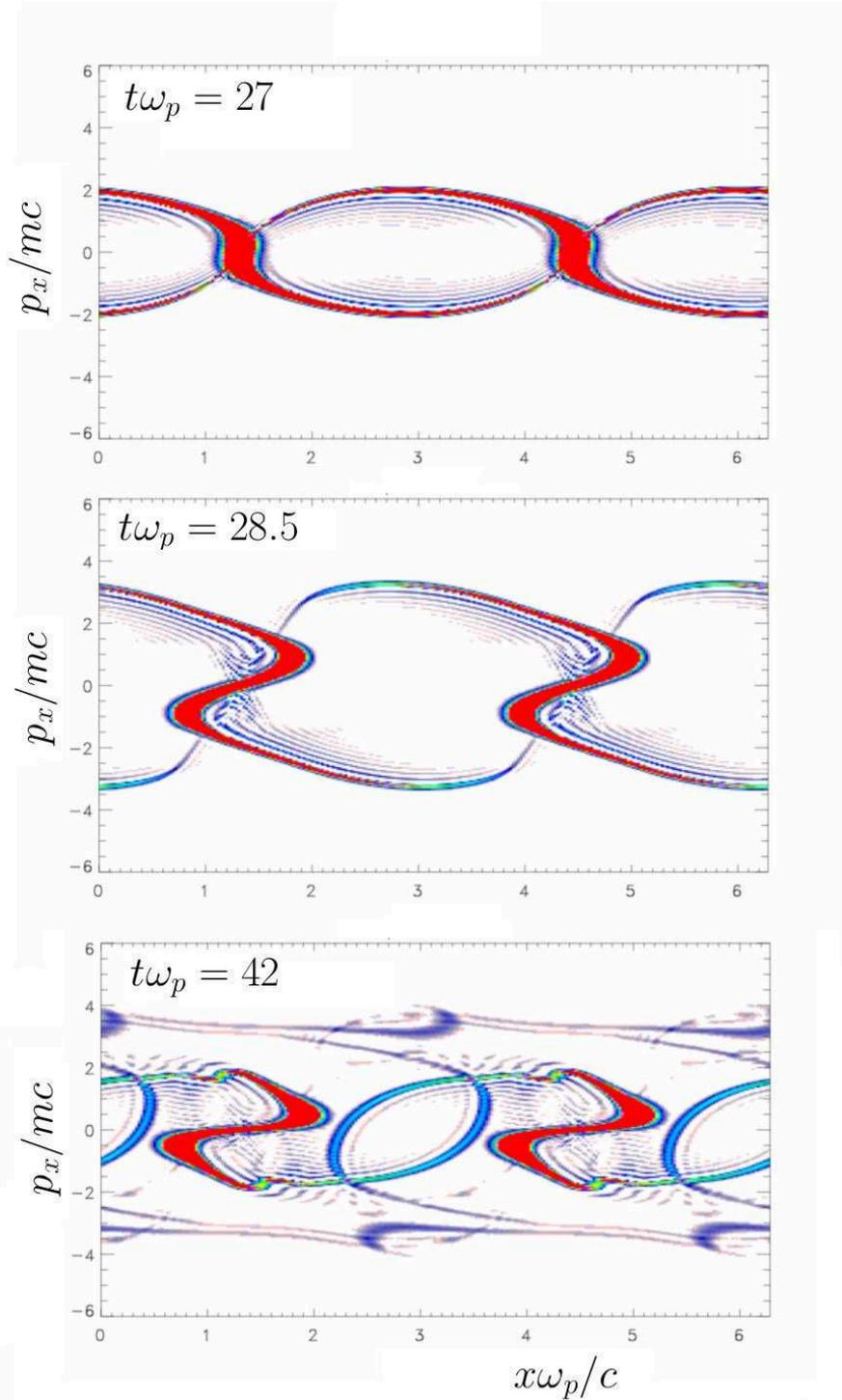


FIGURE 4.11 – Coupes  $(x, p_x)$  de l'espace des phases obtenues avec le code VLEM et tracées aux instants  $\omega_{pe}t = 27, 28.5$  et  $42$  respectivement. Ces images correspondent à celles de la figure 4.10 prises aux instants  $30, 31.5$  et  $45$ , en raison du déphasage initialement introduit entre les deux simulations dans la perturbation de  $B_z$ .

$n_1$	$n_2$	$u_1$	$u_2$	$k_B T_1$	$k_B T_2$	$\delta B$	$N_x$	$N_{p_x}$	$N_{p_y}$	$N_{p_z}$	$\Delta t$	$k_0$
0.5	0.5	0.6	-0.6	6	6	$10^{-5}$	512	80	80	80	0.005	2.017

TABLEAU 4.3 – Valeur des différents paramètres physiques (normalisés) utilisés pour initialiser la simulation de l’instabilité CFI présentée dans la section 4.5.1.2. Les faisceaux sont choisis symétriques en densité, vitesse et température. On normalise toutes les grandeurs par rapport à la pulsation plasma électronique totale  $\omega_{pe}$ , la masse électronique  $m_e$ , la charge élémentaire  $e$  et la vitesse de la lumière  $c$ .

Dans les deux solveurs, la fonction de distribution initiale est donnée par :

$$f(x, \mathbf{p}) = \frac{n_1}{(2\pi m k_B T_1)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p_x^2 + (p_y - p_1)^2 + p_z^2}{2m k_B T_1}\right) + \frac{n_2}{(2\pi m k_B T_2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p_x^2 + (p_y - p_2)^2 + p_z^2}{2m k_B T_2}\right). \quad (4.123)$$

Le système Vlasov-Maxwell est perturbé perpendiculairement à la direction des faisceaux, en introduisant le champ magnétique  $B_z$  tel que

$$B_z(x) = \delta B \sin(k_0 x), \quad (4.124)$$

où  $k_0 = 2\pi/L_x$  est déterminé à partir de la longueur du domaine en  $x$ , notée  $L_x$ . La longueur  $L_x$  est choisie de sorte que le mode excité ( $k_x = 2.017$ ) corresponde à celui dont le taux de croissance linéaire est le plus fort. Le taux de croissance est obtenu en résolvant l’équation (3.36).

On choisit  $\delta B = 10^{-5}$ <sup>10</sup>. Il n’y a pas de perturbation sur la fonction de distribution : le champ électrostatique initial est donc nul (ou de l’ordre de grandeur du zéro machine).

La valeur du pas de temps est  $\Delta t = 0.005\omega_{pe}^{-1}$  et on choisit un échantillonnage de l’espace des phases  $\{N_x = 512, N_{p_x} = N_{p_y} = N_{p_z} = 80\}$  tel que la taille d’une maille selon  $x$  soit  $\Delta x \omega_{pe}/c \simeq 0.0061$ . La condition CFL liée au solveur de Maxwell est donc satisfaite. Le domaine en  $\mathbf{p}$  est donné par  $p_{x,y,z} \leq 2m_e c$ . Les paramètres physiques et numériques utilisés pour la simulation présentée dans cette section sont récapitulés dans le tableau 4.3.

On commence par représenter en échelle semi-logarithmique l’évolution temporelle des énergies électromagnétiques associées aux composantes  $E_x$  (Figure 4.12),  $E_y$  (Figure 4.13) et  $B_z$  (Figure 4.14). Celles-ci sont calculées à partir des expressions suivantes,

$$\varepsilon_{e,x} = \frac{1}{L_x} \int \frac{\epsilon_0}{2} E_x^2 dx, \quad (4.125)$$

$$\varepsilon_{e,y} = \frac{1}{L_x} \int \frac{\epsilon_0}{2} E_y^2 dx \quad (4.126)$$

et

$$\varepsilon_{m,z} = \frac{1}{L_x} \int \frac{1}{2\mu_0} B_z^2 dx. \quad (4.127)$$

On observe dans les deux simulations trois phases distinctes : une phase transitoire de durée inférieure à  $10\omega_{pe}$  (durant laquelle l’instabilité commence à se mettre en place), puis la phase linéaire de croissance de l’instabilité (la perturbation injectée dans le code étant faible devant l’amplitude de saturation des champs) jusqu’à  $t \simeq 40\omega_{pe}$  et au-delà, la phase de saturation de l’instabilité CFI. Remarquons le niveau initial extrêmement bas du champ électrostatique  $E_x$ , qui est néanmoins déstabilisé et augmente, comme dans la simulation précédente, avec un taux de croissance double de celui du champ magnétique  $\Gamma_{CFI}/\omega_{pe} = 0.33$ . Cette valeur est compatible avec l’analyse linéaire. Ce comportement est identique à celui constaté dans la simulation de CFI précédente.

Intéressons-nous à l’évolution des invariants : le nombre de particules  $N$  (Figure 4.15), l’énergie totale (Figure 4.16)  $E_{tot}$ , la norme L2  $\langle f^2 \rangle$  (Figure 4.17) et l’entropie  $S$  (Figure 4.18). Les grandeurs  $N$ ,  $\langle f^2 \rangle$  et  $S$  sont calculées comme

$$N = \int dx d^3 \mathbf{p} f, \quad (4.128)$$

10. L’amplitude de la perturbation introduite dans la version “Full Poisson” est légèrement différente de celle utilisée dans VLEM1D3V pour que les résultats ne se superposent pas exactement sur les différentes figures présentées dans cette section.

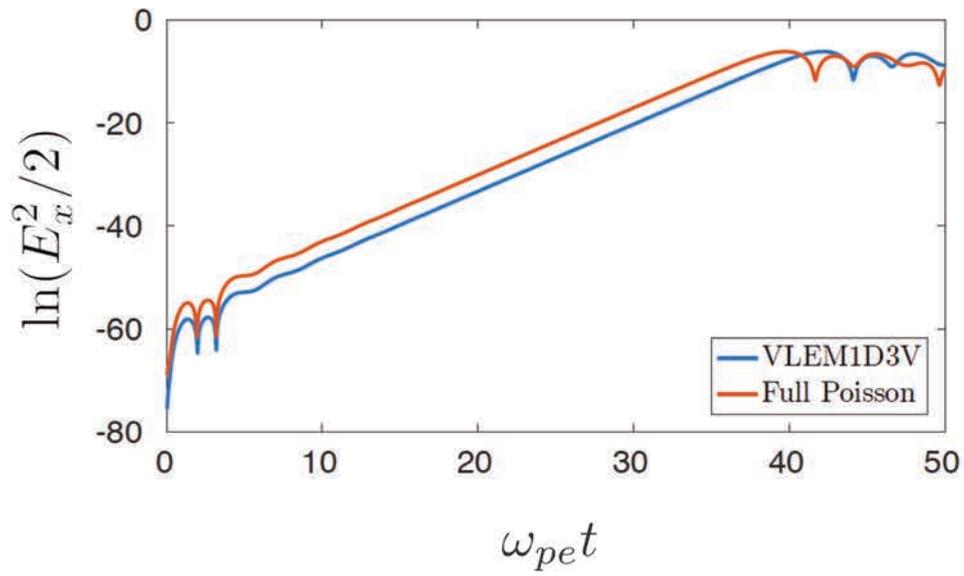


FIGURE 4.12 – Évolution temporelle de l'énergie électrostatique  $\varepsilon_{e,x}$  pour le code VLEM1D3V (en bleu, avec correcteur de courant) et sa version Full Poisson (en rouge)).

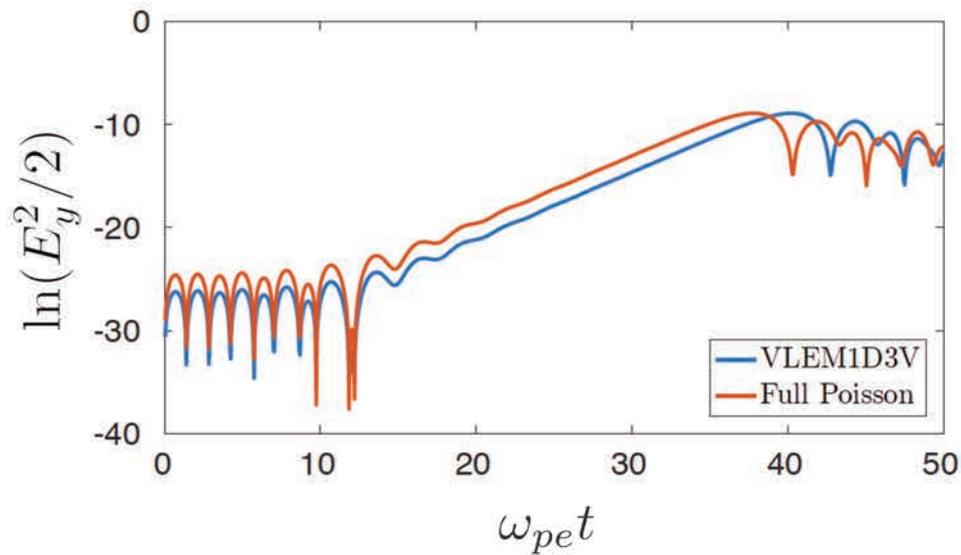


FIGURE 4.13 – Évolution temporelle de l'énergie électrique  $\varepsilon_{e,y}$  pour le code VLEM1D3V (en bleu, avec correcteur de courant) et sa version Full Poisson (en rouge)).

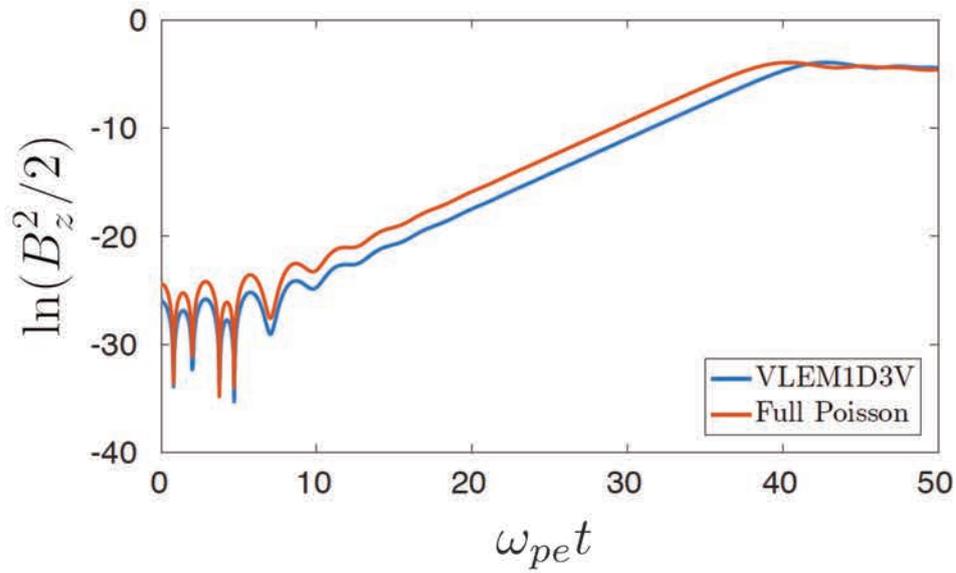


FIGURE 4.14 – Évolution temporelle de l'énergie magnétique  $\varepsilon_{m,z}$  pour le code VLEM1D3V (en bleu, avec correcteur de courant) et sa version Full Poisson (en rouge).

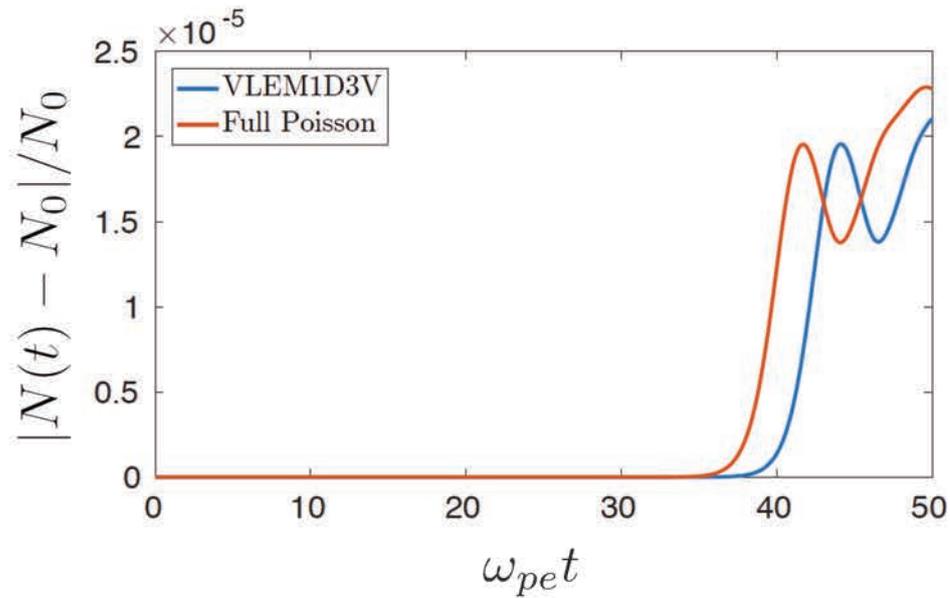


FIGURE 4.15 – Évolution temporelle du nombre total de particules en échelle semi-logarithmique. En bleu, les résultats obtenus avec VLEM1D3V et le correcteur de courant. En rouge, les résultats obtenus avec la version “Full Poisson”.

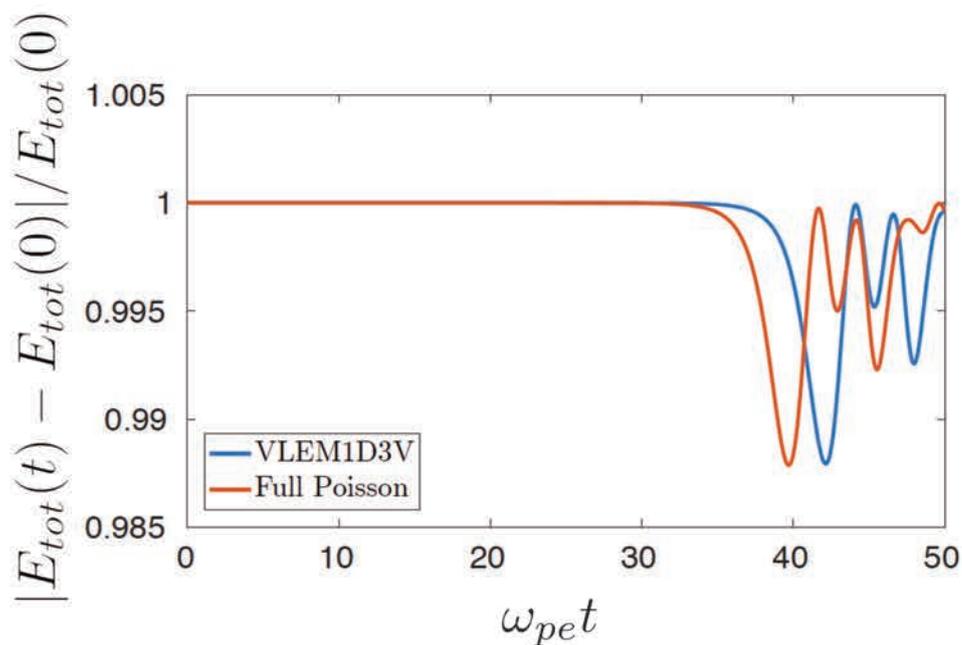


FIGURE 4.16 – Évolution temporelle de l'énergie totale en échelle semi-logarithmique. En bleu, les résultats obtenus avec VLEM1D3V et le correcteur de courant. En rouge, les résultats obtenus avec la version “Full Poisson”.

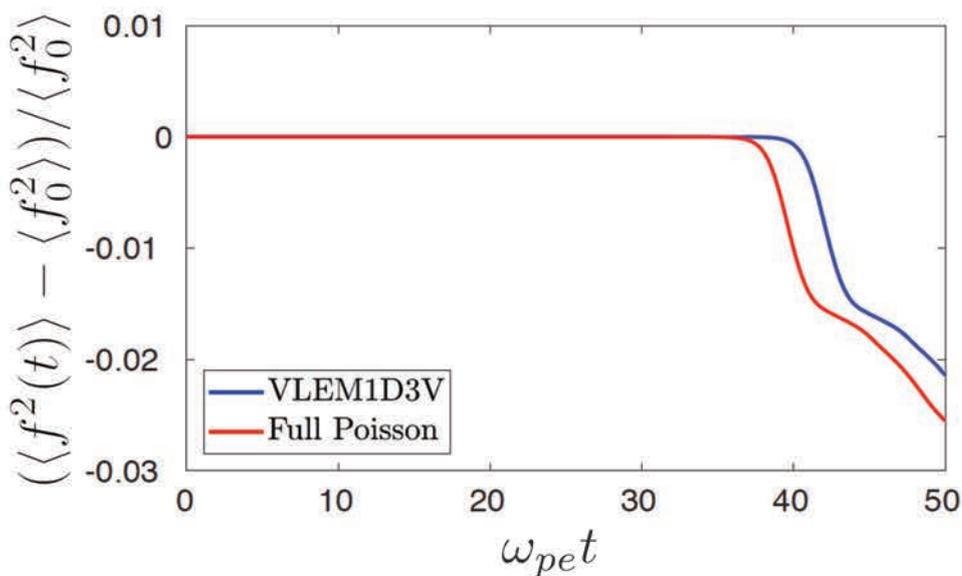


FIGURE 4.17 – Évolution temporelle de la norme L2 en échelle semi-logarithmique. En bleu, les résultats obtenus avec VLEM1D3V et le correcteur de courant. En rouge, les résultats obtenus avec la version “Full Poisson”.

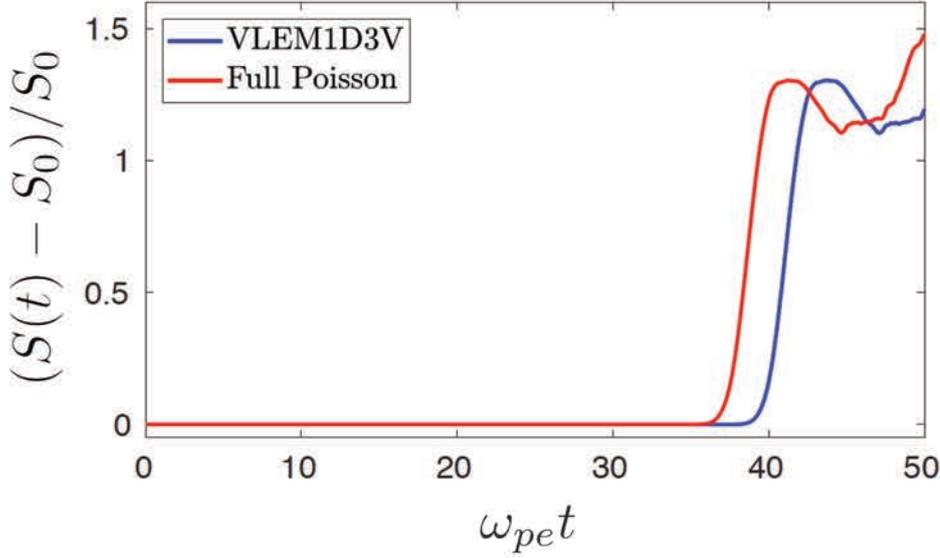


FIGURE 4.18 – Évolution temporelle de l'entropie en échelle semi-logarithmique. En bleu, les résultats obtenus avec VLEM1D3V et le correcteur de courant. En rouge, les résultats obtenus avec la version “Full Poisson”.

$$\langle f^2 \rangle = \int dx d^3 \mathbf{p} f^2, \quad (4.129)$$

et

$$S = - \int dx d^3 \mathbf{p} f \ln |f|. \quad (4.130)$$

L'énergie totale est définie quant à elle comme la somme de l'énergie cinétique (obtenue par intégration de  $f$ ) et de l'énergie électromagnétique (somme des quantités (4.125), (4.126) et (4.127)) :

$$E_{tot} = \int dx d^3 \mathbf{p} (\gamma - 1) f m c^2 + \varepsilon_{e,x} + \varepsilon_{e,y} + \varepsilon_{m,z}. \quad (4.131)$$

Durant la phase linéaire, la conservation des invariants est assurée de façon satisfaisante. La variation relative de  $N$  est de l'ordre de  $10^{-10}$  en fin de phase linéaire. La conservation de  $E_{tot}$  est plus difficile : on passe de  $10^{-11}$  à  $10^{-6}$  durant la phase linéaire. Pour l'entropie et la norme L2, des variations similaires sont constatées. L'instabilité commence alors à saturer et les choses se gâtent quelque peu : la variation de  $N$  est de l'ordre de  $10^{-5}$ , mais avec un maillage en vitesse de bien moindre densité que dans la simulation précédente (80 points par dimension au lieu de 256). En fin de simulation, la norme L2 a varié de 2% par rapport à sa valeur initiale, soit un ordre de grandeur comparable à la variation de  $E_{tot}$ . Entre le début et la fin de la simulation, l'entropie aura fait un bond d'environ 100% : elle n'est clairement pas conservée. Le maillage étant bien moins dense que dans la simulation précédente, les détails fins de la fonction de distribution sont résolus bien moins longtemps du fait de la filamentation.

L'allure des courbes bleues (obtenues avec VLEM1D3V) est identique à celle des courbes rouges (obtenues avec la version “Full Poisson”) à un décalage vertical (durant les deux premières phases), puis horizontal (dans la phase de saturation) près. Ce décalage est lié à une légère différence introduite dans la valeur de  $\delta B$  pour initialiser la simulation “Full Poisson” (légèrement plus forte), sans quoi les courbes se superposeraient quasi-parfaitement : les champs atteignent donc plus rapidement leur niveau de saturation dans la simulation “Full Poisson”. Ceci semble donc valider la méthode de correction de  $\mathbf{J}$  introduite en 4.4.3.1. Il est bon de souligner que sans correction de courant le code VLEM1D3V n'est pas stable pour cette simulation :  $N$  diverge et la simulation s'interrompt brutalement. Les résultats physiques obtenus par VLEM1D3V étant quasiment identiques à ceux obtenus en utilisant la version

Full Poisson (laquelle est construite autour d'un splitting différent de l'équation de Vlasov) on peut attribuer les écarts vis à vis des lois de conservation à la faible densité du maillage en  $\mathbf{p}$ , et ce pour les deux versions du code.

#### 4.5.1.3 Influence du maillage sur la conservation des invariants

On s'intéresse ici à une simulation d'instabilité Weibel pure, déclenchée par anisotropie de température, dans une version non-relativiste de VLEM1D3V (le facteur de Lorentz est forcé à 1). L'équilibre est modélisé par une distribution Maxwellienne de la forme

$$f(\mathbf{p}) = \frac{n_0}{(2\pi)^{3/2} m k_B T_{\parallel} \sqrt{m k_b T_{\perp}}} \exp\left(-\frac{p_x^2 + p_z^2}{2m k_B T_{\parallel}} - \frac{p_y^2}{2m k_B T_{\perp}}\right), \quad (4.132)$$

pour laquelle les indices  $\parallel$  et  $\perp$  se réfèrent à la direction du vecteur d'onde, aligné selon l'axe des  $x$ . L'instabilité Weibel est déclenchée si  $T_{\perp} > T_{\parallel}$ , pour tout  $k_x < \sqrt{T_{\perp}/T_{\parallel}} - 1$ . On choisit comme température  $T_{\perp} = 20$  keV et  $T_{\parallel} = 1$  keV, correspondant à une forte anisotropie  $A = T_{\perp}/T_{\parallel} = 20$ . On excite le mode le plus instable,  $k_x = 1.462$  que l'on définit comme étant le mode fondamental de la boîte de simulation,  $k_x = 2\pi/L_x$ , où  $L_x \simeq 4.298$  est la longueur de boîte en  $x$ . Le pas de temps retenu pour la simulation est  $\Delta t = 0.005$ , satisfaisant la condition CFL pour un échantillonnage en  $x$  de  $N_x = 512$  points.

Ce problème est plus facile à discrétiser proprement dans l'espace des  $\mathbf{p}$  que le précédent, dans la mesure où la fonction de distribution forme un volume unique centré dans la boîte de simulation. De plus, en imposant  $T_x = T_z$ , on force l'instabilité Weibel à se développer dans le plan  $(p_x, p_y)$ .

Deux types de maillages en  $\mathbf{p}$  ont été testés pour mettre en évidence les effets du maillage sur la conservation des invariants. Le premier maillage est  $N_{p_x} = N_{p_y} = N_{p_z} = 96$  (cas 1). Le second maillage est  $N_{p_x} = N_{p_y} = N_{p_z} = 80$  (cas 2).

On constate premièrement une légère amélioration de la conservation du nombre de particules (Figure 4.19) lorsque le nombre de points est plus important dans l'espace des  $\mathbf{p}$ . On notera aussi la disparition des oscillations constatées dans le dernier tiers de la simulation du cas 2. Ces améliorations s'accompagnent d'une amélioration sensible sur la conservation de l'entropie (voir figure 4.22 où l'on passe en dessous de la barre des 100% de variation), qui demeure cependant assez mauvaise. Les changements concernant la conservation de l'énergie totale (Figure 4.20) et la norme L2 (Figure 4.21) sont minimes.

L'analyse linéaire prévoit un taux de croissance de l'ordre de  $\Gamma = 0.129$  : on mesure un taux  $\Gamma = 0.127$  dans la simulation (Figure 4.23). Le champ électrostatique croît avec un taux double, comme attendu, et ce dès l'augmentation du champ magnétique.

### 4.5.2 VLEM2D2V

Les résultats présentés dans cette section ont été obtenus en utilisant la version 2D2V (oeuvrant dans l'espace  $(x, y, p_x, p_y)$ ) du code VLEM.

#### 4.5.2.1 Plasma 2D2V en régime faiblement relativiste

Le test présenté dans cette section a pour objectif de tester la capacité du code VLEM à reproduire des résultats obtenus en configuration 2D2V par le code semi-lagrangien "global" (déjà introduit en section 4.5.1.1) servant de référence. La correction de courant n'est pas implémentée dans VLEM pour cette simulation. On commentera ensuite ces résultats.

Considérons deux faisceaux électroniques dirigés selon l'axe  $y$ , l'ensemble étant représenté par la distribution d'équilibre

$$f(x, \mathbf{p}) = \frac{n_1}{(2\pi m k_B T_1)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p_x^2 + (p_y - p_1)^2}{2m k_B T_1}\right) + \frac{n_2}{(2\pi m k_B T_2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p_x^2 + (p_y - p_2)^2}{2m k_B T_2}\right). \quad (4.133)$$

On choisit des faisceaux parfaitement symétriques, tels que  $n_1 = n_2 = 0.5$ ,  $p_1 = 0.9mc = -p_2$  (correspondant à un facteur de Lorentz  $\gamma \simeq 1.345$  et à une vitesse moyenne  $|u_{1,2}| \simeq 0.668$ ) et  $k_B T_1 = k_B T_2 = 6$  keV.

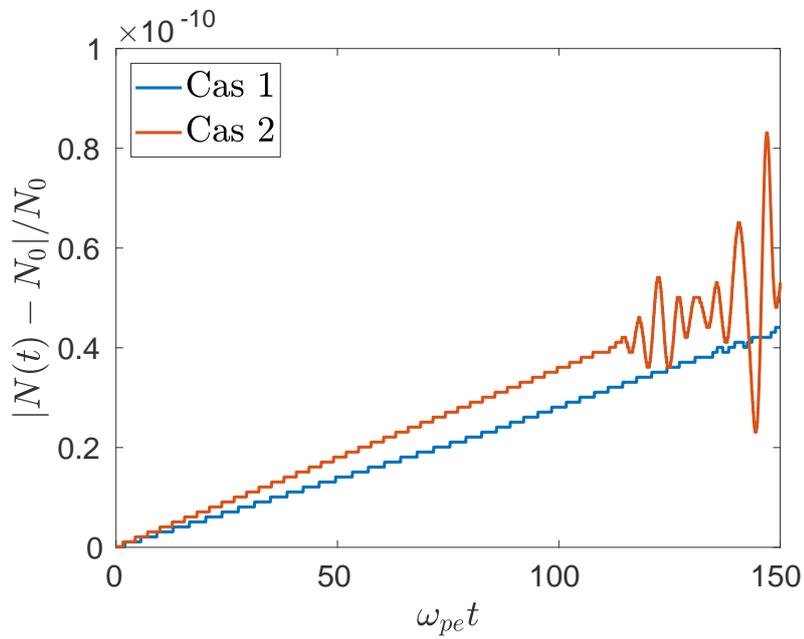


FIGURE 4.19 – Évolution temporelle du nombre total de particules  $N$  en échelle semi-logarithmique. En bleu, les résultats obtenus avec le premier maillage,  $N_{p_x} = N_{p_y} = N_{p_z} = 96$ . En rouge, les résultats obtenus avec le second maillage  $N_{p_x} = N_{p_y} = N_{p_z} = 80$ , moins dense que le premier.

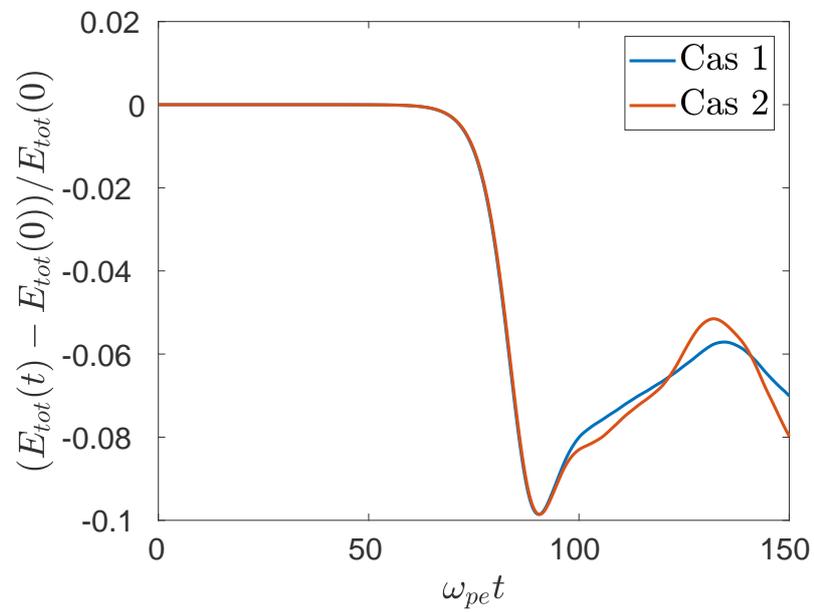


FIGURE 4.20 – Évolution temporelle de l'énergie totale  $E_{tot}$  en échelle semi-logarithmique. En bleu, les résultats obtenus avec le premier maillage,  $N_{p_x} = N_{p_y} = N_{p_z} = 96$ . En rouge, les résultats obtenus avec le second maillage  $N_{p_x} = N_{p_y} = N_{p_z} = 80$ , moins dense que le premier.

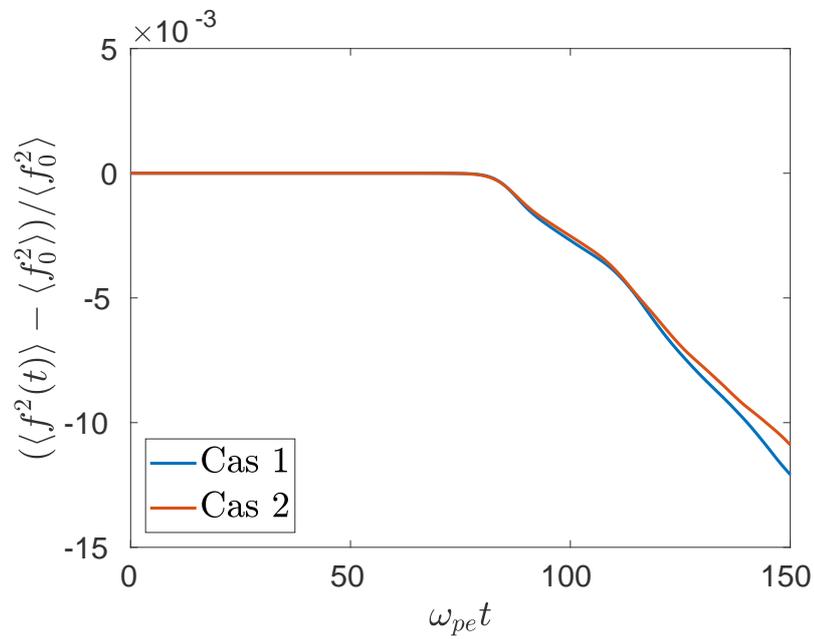


FIGURE 4.21 – Évolution temporelle de la norme L2,  $\langle f^2 \rangle$ , en échelle semi-logarithmique. En bleu, les résultats obtenus avec le premier maillage,  $N_{p_x} = N_{p_y} = N_{p_z} = 96$ . En rouge, les résultats obtenus avec le second maillage  $N_{p_x} = N_{p_y} = N_{p_z} = 80$ , moins dense que le premier.

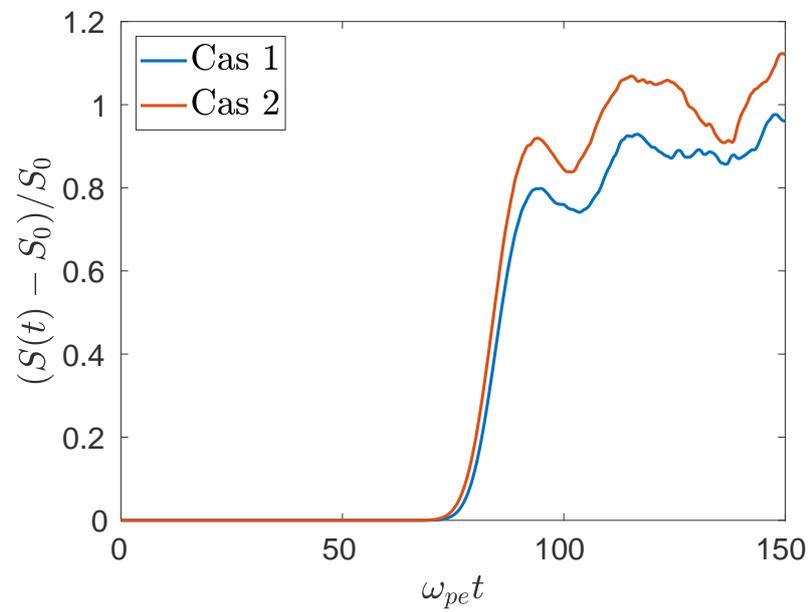


FIGURE 4.22 – Évolution temporelle de l'entropie  $S$  en échelle semi-logarithmique. En bleu, les résultats obtenus avec le premier maillage,  $N_{p_x} = N_{p_y} = N_{p_z} = 96$ . En rouge, les résultats obtenus avec le second maillage  $N_{p_x} = N_{p_y} = N_{p_z} = 80$ , moins dense que le premier.

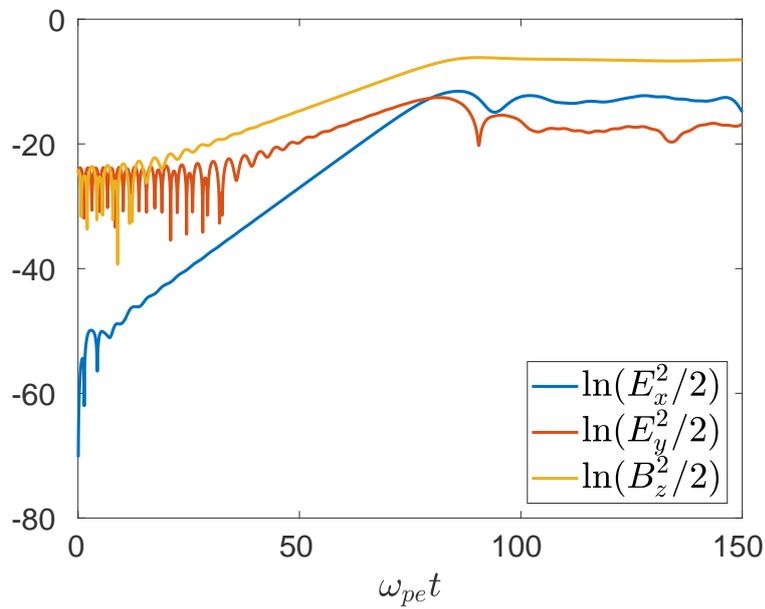


FIGURE 4.23 – Évolution temporelle des énergies électrostatique  $\varepsilon_{e,x} = \langle E_x^2/2 \rangle_x$ , électrique  $\varepsilon_{e,y} = \langle E_y^2 \rangle_x$  et magnétique  $\varepsilon_{b,z} = \langle B_z^2/2 \rangle$  en échelle semi-logarithmique, calculées comme 4.125, 4.126 et 4.127. Les composantes  $E_y$  et  $B_z$ , déstabilisées linéairement par l'instabilité Weibel, se développent avec le même taux de croissance à partir d'un niveau assez haut, déterminé par l'amplitude de la perturbation initiale introduite dans le code. La croissance du champ électrostatique démarre avec un taux de croissance double depuis le zéro machine et à peu près en même temps que le champ magnétique. Les trois composantes saturent approximativement en même temps, aux alentours de  $\omega_{pe} t \simeq 75$ .

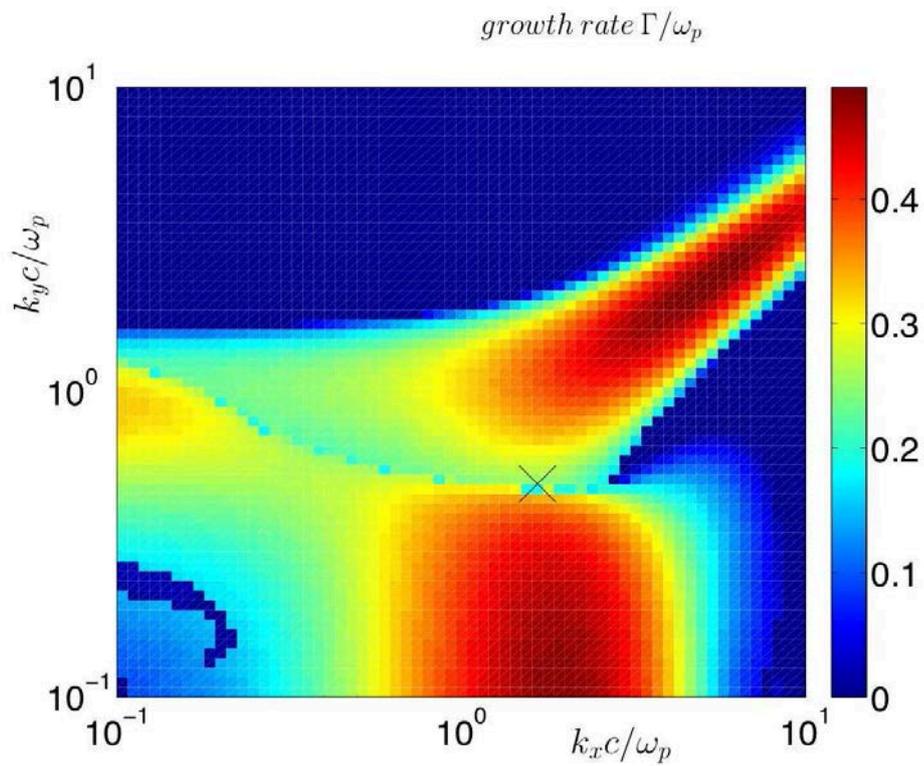


FIGURE 4.24 – Taux de croissance  $\Gamma/\omega_{pe}$  en fonction de  $k_x$  et  $k_y$ , obtenu en résolvant la relation de dispersion cinétique non-relativiste présentée en Annexe C. La croix repère le point de coordonnées  $(k_x = 1.667, k_y = 0.5)$ . Ces valeurs de  $k_x$  et de  $k_y$  dominent la simulation présentée dans cette section.

$n_1$	$n_2$	$p_1$	$p_2$	$k_B T_1$	$k_B T_2$	$\delta B$	$\delta f$	$N_x$	$N_y$	$N_{p_x}$	$N_{p_y}$	$\Delta t$	$L_x$	$L_y$
0.5	0.5	0.9	-0.9	6	6	$10^{-5}$	$10^{-3}$	256	256	128	128	0.008	$12\pi$	$12\pi$

TABLEAU 4.4 – Valeur des différents paramètres physiques (normalisés) utilisés pour initialiser la simulation 2D2V présentée dans la section 4.5.2.1. Les faisceaux sont choisis symétriques en densité, vitesse et température. On normalise toutes les grandeurs par rapport à la pulsation plasma électronique totale  $\omega_{pe}$ , la masse électronique  $m$ , la charge élémentaire  $e$  et la vitesse de la lumière  $c$ .

Cette configuration est instable quelle que soit l'orientation du vecteur d'onde de la perturbation par rapport aux faisceaux (cf. Chapitre 1) et peut conduire aux instabilités TSI, CFI et oblique, comme le montre la figure 4.24 représentant le taux de croissance maximal  $\Gamma$  dans l'espace  $(k_x, k_y)$  (résultat obtenu à partir de la relation de dispersion non-relativiste donnée en Annexe C). Rappelons que les modes TSI correspondent à une propagation parallèle aux faisceaux ( $k_x = 0$ ) alors que les modes CFI correspondent à une perturbation rigoureusement perpendiculaire ( $k_y = 0$ ). Dans le régime non-relativiste que nous considérons, l'instabilité TSI est électrostatique alors que l'instabilité CFI est purement électromagnétique du fait de la symétrie des faisceaux. La figure 4.24 montre l'existence de trois lobes instables. Deux de ces lobes, correspondant respectivement à des valeurs de  $k_x$  ou  $k_y$  plutôt faibles mais non-nulles, se présentent comme un prolongement à 2D des instabilités TSI ( $\Gamma_{TSI,max} \simeq 0.35$ ) et CFI ( $\Gamma_{CFI,max} \simeq 0.5$ ) et sont reliés par un continuum de modes instables de taux de croissance moindre ( $\Gamma \simeq 0.25$ ). Le troisième lobe correspond à des modes pour lesquels  $k_y \simeq k_x$  et semble appartenir à une branche de solutions différente des deux autres lobes. Ce cas test est par conséquent nettement plus complexe que ceux présentés auparavant, plusieurs instabilités (TSI, CFI, instabilité oblique) au comportement électrostatique et/ou électromagnétique se trouvant en concurrence. Il est de plus impossible d'associer, comme auparavant, le champ  $E_x$  à un champ purement électrostatique et le champ  $E_y$  à un champ purement inductif.

On décide d'exciter simultanément l'instabilité CFI et l'instabilité TSI. Pour cela, on introduit une perturbation en  $k_x$  sur le champ magnétique,

$$\delta B_z^{(1)}(x) = \sum_{n_x=1}^{10} \delta B \sin\left(2\pi \frac{n_x}{L_x} x\right) \quad (4.134)$$

avec  $\frac{e\delta B_0}{m\omega_p} \simeq 10^{-5}$ , ainsi qu'une perturbation en  $k_y$  sur la fonction de distribution

$$\delta f^{(1)}(y) = \sum_{n_y=1}^{10} \delta f \cos\left(2\pi \frac{n_y}{L_y} y\right) \quad (4.135)$$

avec  $\delta f/(n_1 + n_2) = 10^{-3}$ . On perturbe ainsi les dix premiers modes dans chaque direction.

Le plasma simulé va évoluer dans le volume d'espace des phases  $[0; L_x] \times [0; L_y] \times [p_{x,min}; p_{x,max}] \times [p_{y,min}; p_{y,max}]$  avec  $L_x = 12\pi c/\omega_p = L_y$  et  $p_{x,max} = p_{y,max} = -p_{x,min} = -p_{y,min} = 6mc$ . Le mode fondamental est donc  $(k_{x,0}, k_{y,0}) \simeq (0.167, 0.167)$ . Le maillage échantillonnant ce volume est constitué de  $N_x N_y N_{p_x} N_{p_y} = 256^2 \times 128^2$  points et on choisit un pas de temps  $\Delta t \omega_p = 0.008$ . Les paramètres de la simulation sont résumés dans le tableau 4.4.

Commençons par observer quelques représentations de l'espace des phases à différents instants, provenant des deux codes. Les figures 4.25, 4.27 et 4.29 (pour le code global) et 4.26, 4.28 et 4.30 (pour VLEM) représentent la fonction de distribution dans le plan  $(x, p_x)$ ,  $(x, p_y)$  et  $(y, p_y)$  respectivement, moyennée sur les autres dimensions.

Constatons tout d'abord que les deux codes affichent des résultats fortement similaires, les mêmes structures apparaissant dans les deux simulations aux mêmes instants. Il y a tout de même de légères différences, sans doute liées à la méthode locale de reconstruction de la fonction de distribution.

Essayons maintenant d'identifier les structures représentées sur ces figures. La forme initiale de la fonction de distribution commence à varier aux alentours de  $\omega_{pe} t \simeq 20$ , signe que les effets non-linéaires commencent à jouer un rôle important. À partir de  $\omega_{pe} t = 20$ , la fonction de distribution présente des structures de piégeage magnétique dans les plans  $(x, p_x)$  et  $(x, p_y)$ , similaires à celles observées dans la simulation de CFI présentée en section 4.5.1.1. Ces structures ne se propagent pas, comme attendu de la part d'une instabilité CFI de faisceaux symétriques. On remarquera, en  $\omega_{pe} t \simeq 50$ , un chauffage dans le plan  $(y, p_y)$  des particules piégées dans le champ magnétique, conjuguée à un brouillage partiel des structures dans le plan  $(x, p_x)$ . Comme nous le verrons un peu plus loin, ces événements surviennent alors que le champ  $E_y$  atteint sa valeur maximale. Le champ  $E_y$  est la somme de deux contributions : la

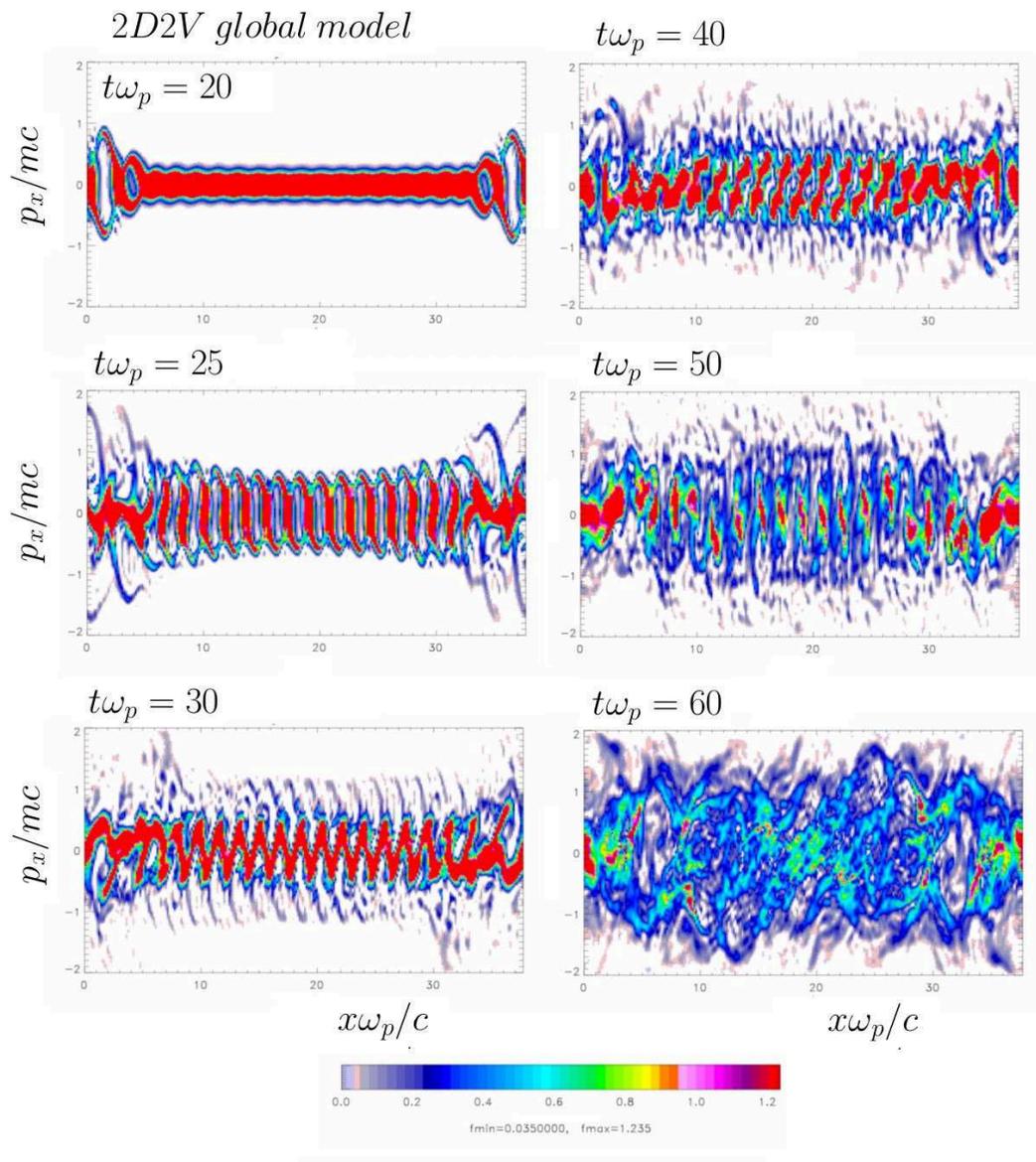


FIGURE 4.25 – Vues en coupe  $(x, p_x)$  de l'espace des phases à divers instants de l'instabilité, obtenue avec le code global (sans décomposition de domaine).

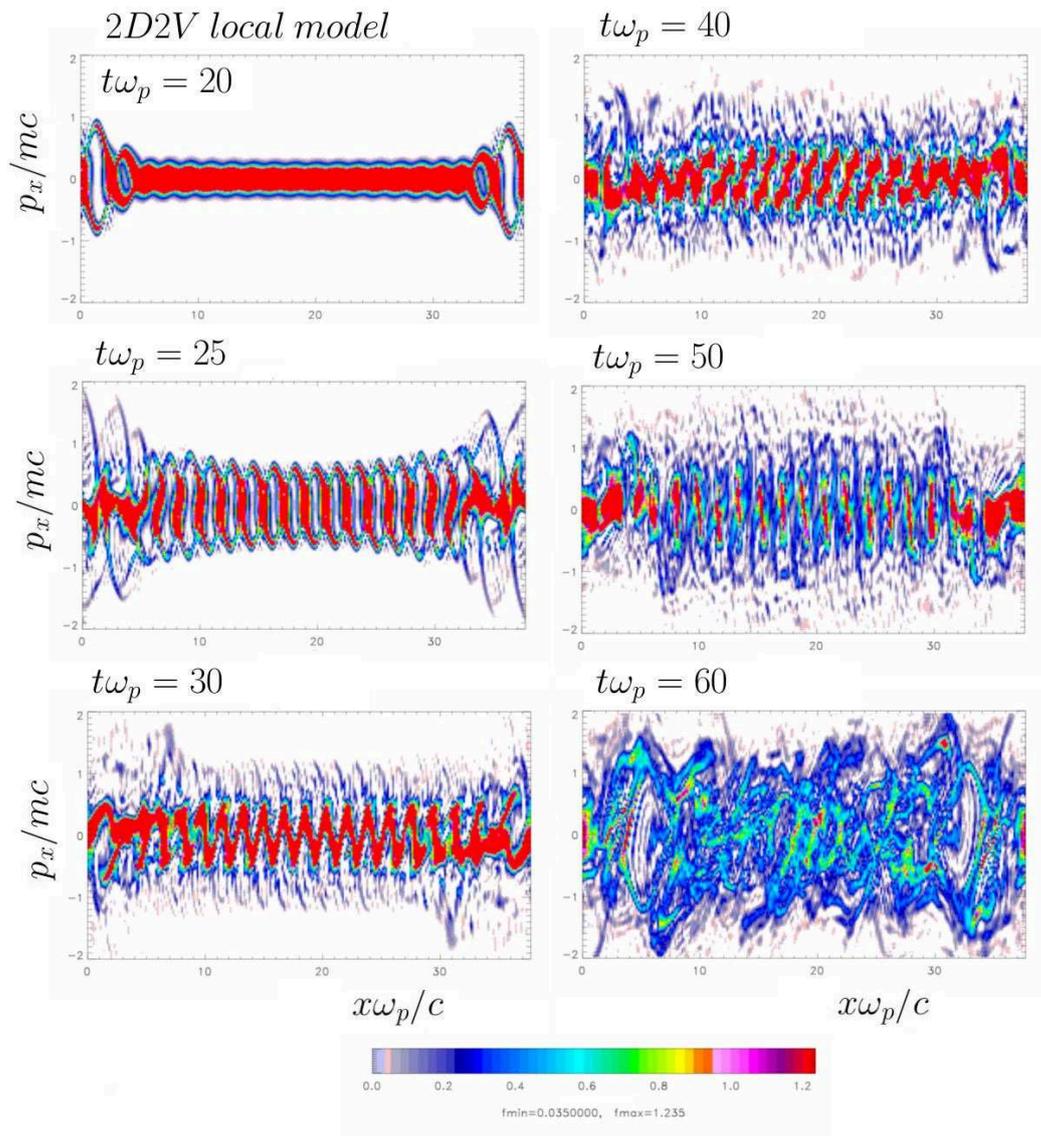


FIGURE 4.26 – Vues en coupe  $(x, p_y)$  de l'espace des phases à divers instants de l'instabilité, obtenue avec le code VLEM. Les structures apparaissant sur ces figures sont similaires à celles observées sur la figure 4.25.

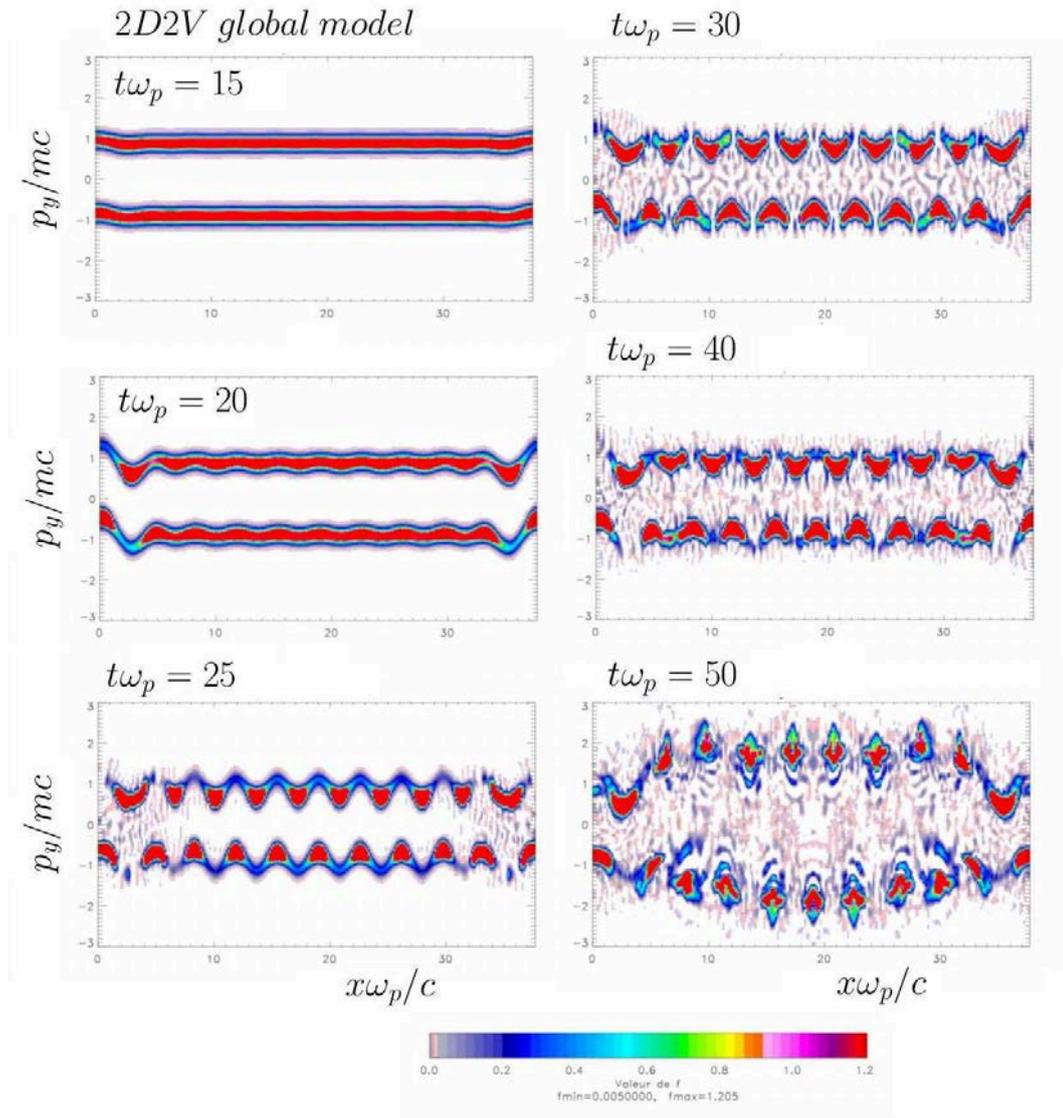


FIGURE 4.27 – Vues en coupe  $(x, p_y)$  de l'espace des phases à divers instants de l'instabilité, obtenue avec le code global (sans décomposition de domaine). Les structures de piégeage magnétique, résultant de l'instabilité CFI et correspondant au mode  $k_x = 10$  apparaissent clairement.

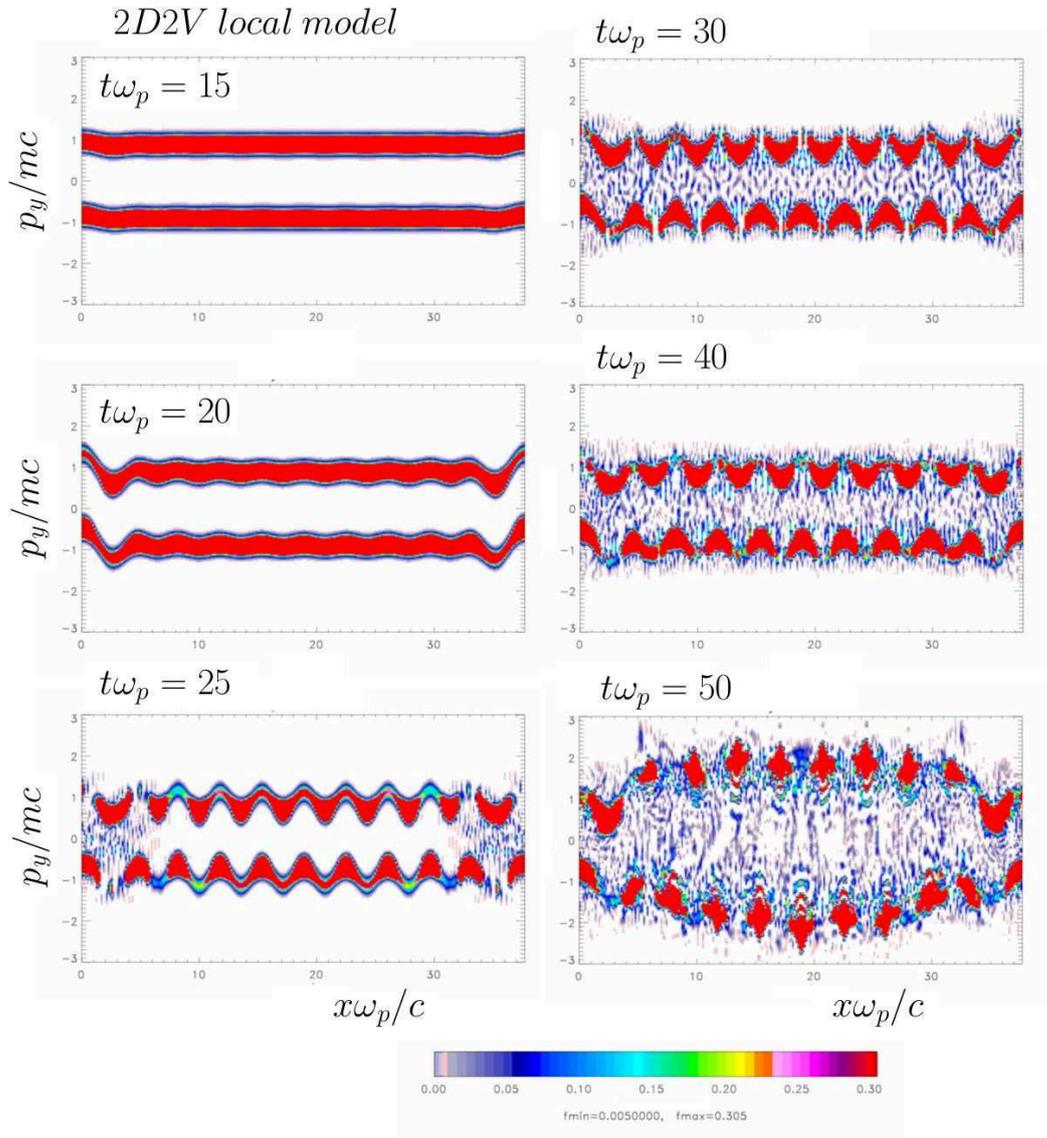


FIGURE 4.28 – Vues en coupe  $(x, p_y)$  de l'espace des phases à divers instants de l'instabilité, obtenue avec le code VLEM. Les structures apparaissant sur ces figures sont similaires à celles observées sur la figure 4.27.

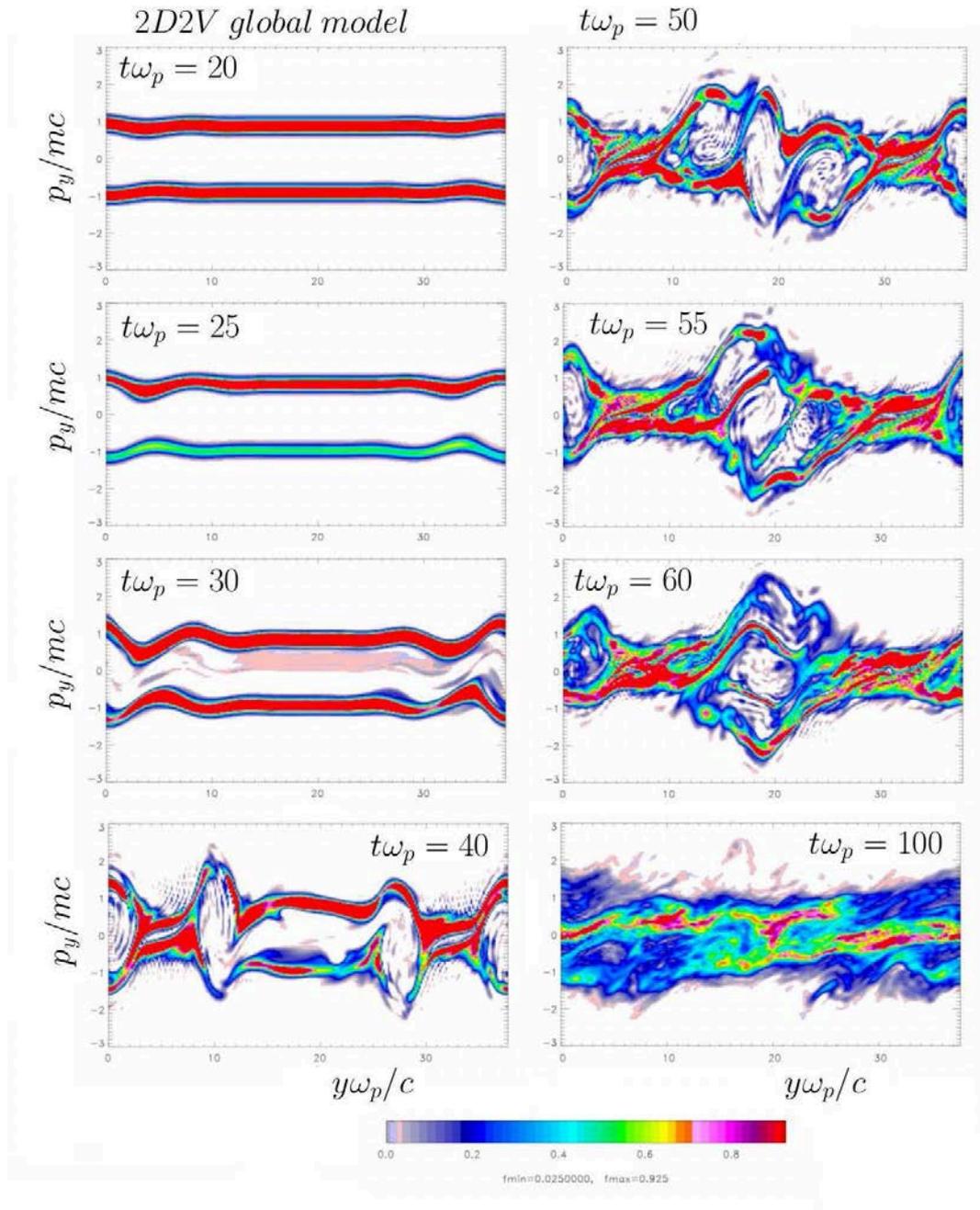


FIGURE 4.29 – Vues en coupe  $(y, p_y)$  de l'espace des phases à divers instants de l'instabilité, obtenue avec le code global (sans décomposition de domaine). Le phénomène de coalescence des structures de piégeage électrostatique résultant de la TSI apparaît à partir de  $\omega_{pet} \simeq 50$ .

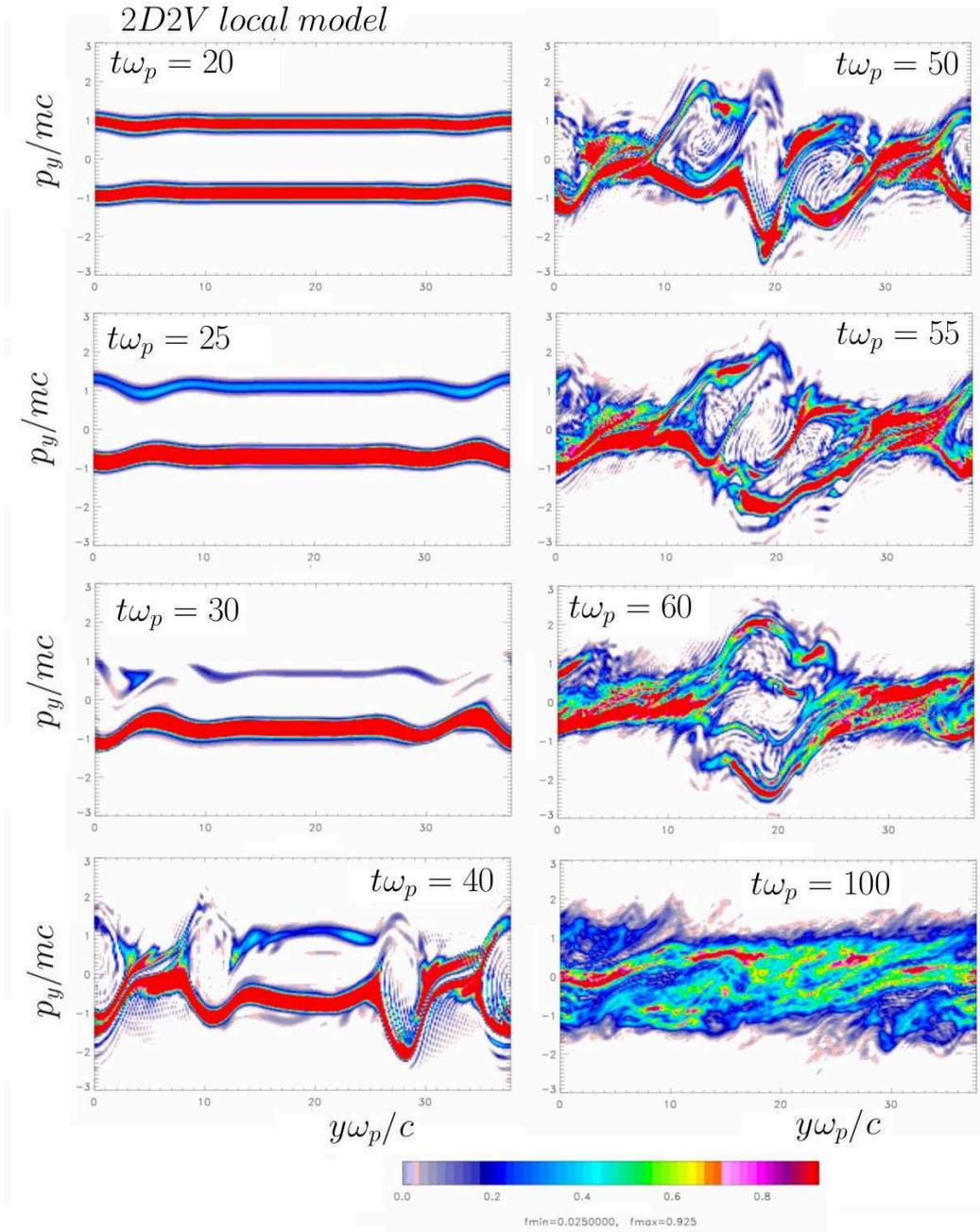


FIGURE 4.30 – Vues en coupe  $(y, p_y)$  de l'espace des phases à divers instants de l'instabilité, obtenue avec le code VLEM. Les structures apparaissant sur ces figures sont similaires à celles observées sur la figure 4.29.

partie inductive accompagnant la croissance du champ magnétique  $B_z$  et associée à une modulation en  $x$  d'une part, et d'autre part la contribution électrostatique liée à l'instabilité en  $y$ . On voit apparaître en  $\omega_{pe}t \simeq 40$ , dans le plan  $(y, p_y)$ , des vortex caractéristiques de l'instabilité TSI. La saturation de la TSI coïncide en effet avec l'apparition de structures de piégeage électrostatique (modes BGK non-linéaires) prenant la forme de "trous" dans l'espace des phases [19][20][18]. Les particules dont l'énergie cinétique n'est pas suffisamment grande devant le potentiel électrique responsable du champ  $E_y$ , généré durant la phase linéaire de l'instabilité, sont piégées dans la structure de ce potentiel et oscillent dans un volume donné de l'espace des phases. Les trous sont capables de fusionner au fil du temps via une instabilité secondaire de coalescence jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'un, comportement observé dans la simulation à partir de  $\omega_{pe}t \simeq 50$ . Un fort chauffage en  $p_x$  est constaté alors que l'instabilité de filamentation se développe, et ce chauffage prend encore plus d'ampleur à partir de  $\omega_{pe}t \simeq 50$ . Le chauffage en  $p_y$  est connecté au développement de l'instabilité TSI.

Les mêmes modes dominants apparaissent dans les deux simulations :  $k_x = 10k_{x,0} \simeq 1.667$  et  $k_y = 3k_{y,0} \simeq 0.5$ . La croix sur la figure 4.24 repère le point de coordonnées  $(k_x = 1.667, k_y = 0.5)$  : le taux de croissance du mode oblique correspondant est proche de  $0.2\omega_{pe}$ , inférieur à celui du mode TSI ( $k_x = 0, k_y = 0.5$ ) voisin de  $0.3\omega_{pe}$  et nettement inférieur à celui du mode CFI ( $k_x = 1.667, k_y = 0$ ) égal à  $0.5\omega_{pe}$ , comme attendu du fait de la symétrie des faisceaux et de leur vitesse, assez élevée. Ceci explique pourquoi les structures caractéristiques de la CFI se forment en premier. Ces valeurs de taux de croissance ont été obtenues pour une relation de dispersion non-relativiste cinétique et doivent donc être considérées avec prudence. La résolution de la relation dispersion relativiste froide (cf Annexe D) conduit à deux instabilités de taux de croissance  $\Gamma_1 \simeq 0.414$  et  $\Gamma_2 \simeq 0.201$ .

Les panneaux supérieurs des figures 4.31 et 4.32 représentent l'évolution temporelle des énergies électriques  $\epsilon_{e,x}$ ,  $\epsilon_{e,y}$  et magnétique  $\epsilon_{m,z}$  en échelle semi-logarithmique jusqu'à  $\omega_{pe}t \simeq 40$  et  $\omega_{pe}t \simeq 100$  respectivement. Les panneaux inférieurs représentent l'évolution temporelle des énergies électrique totale  $\epsilon_e = \epsilon_{e,x} + \epsilon_{e,y}$ , magnétique, cinétique  $\epsilon_{kin}$  et totale  $\epsilon_{total} = \epsilon_e + \epsilon_{m,z} + \epsilon_{kin}$ .

L'énergie magnétique, après un bref régime transitoire, augmente exponentiellement avec le temps pour  $5 \leq \omega_{pe}t \leq 20$  avec un taux de croissance  $\Gamma_{num}/\omega_{pe} \simeq 0.41$ , proche de la valeur donnée par le modèle froid. Le champ  $E_y$  croît initialement avec un taux  $\Gamma_{num}/\omega_{pe} \simeq 0.21$ , proche de la seconde valeur donnée par le modèle froid. Une cassure dans la pente survient entre  $\omega_{pe}t = 10$  et  $\omega_{pe}t = 15$  : le champ  $E_y$  croît plus vite qu'au démarrage. Le champ  $E_x$  augmente quant à lui avec un taux de croissance double de celui du champ magnétique : il s'agit du comportement déjà évoqué en section 4.5.1.1. Le champ  $E_x$  ne pouvant pas naître de l'instabilité TSI et démarrant après la croissance du champ magnétique, il doit être associé à l'instabilité CFI initiale.

On observe une conversion importante d'énergie cinétique en énergie électromagnétique jusqu'à  $\omega_{pe}t \simeq 25$ , en pleine phase de saturation de l'instabilité de filamentation. L'énergie magnétique oscille autour d'une valeur approximativement stable jusqu'à  $\omega_{pe}t \simeq 40$ , où l'énergie électrique atteint sa valeur maximale. Ce pic coïncide avec la formation des "trous électroniques" dans le plan  $(y, p_y)$  et donc correspond à la saturation de l'instabilité CFI. Un transfert d'énergie progressif, depuis les champs vers les particules, démarre alors, entraînant le chauffage des électrons constaté en observant les sections moyennées de  $f$  pour les temps supérieurs à  $\omega_{pe}t \simeq 50$ .

On insistera bien sur le fait que les deux codes semi-lagrangiens conduisent aux mêmes résultats, bien que la technique de reconstruction de  $f$  ne soit pas la même dans les deux cas. La méthode d'interpolation locale utilisant les conditions de Hermite n'assure pas, à priori, la continuité de la dérivée seconde de  $f$  alors que la méthode globale le fait.

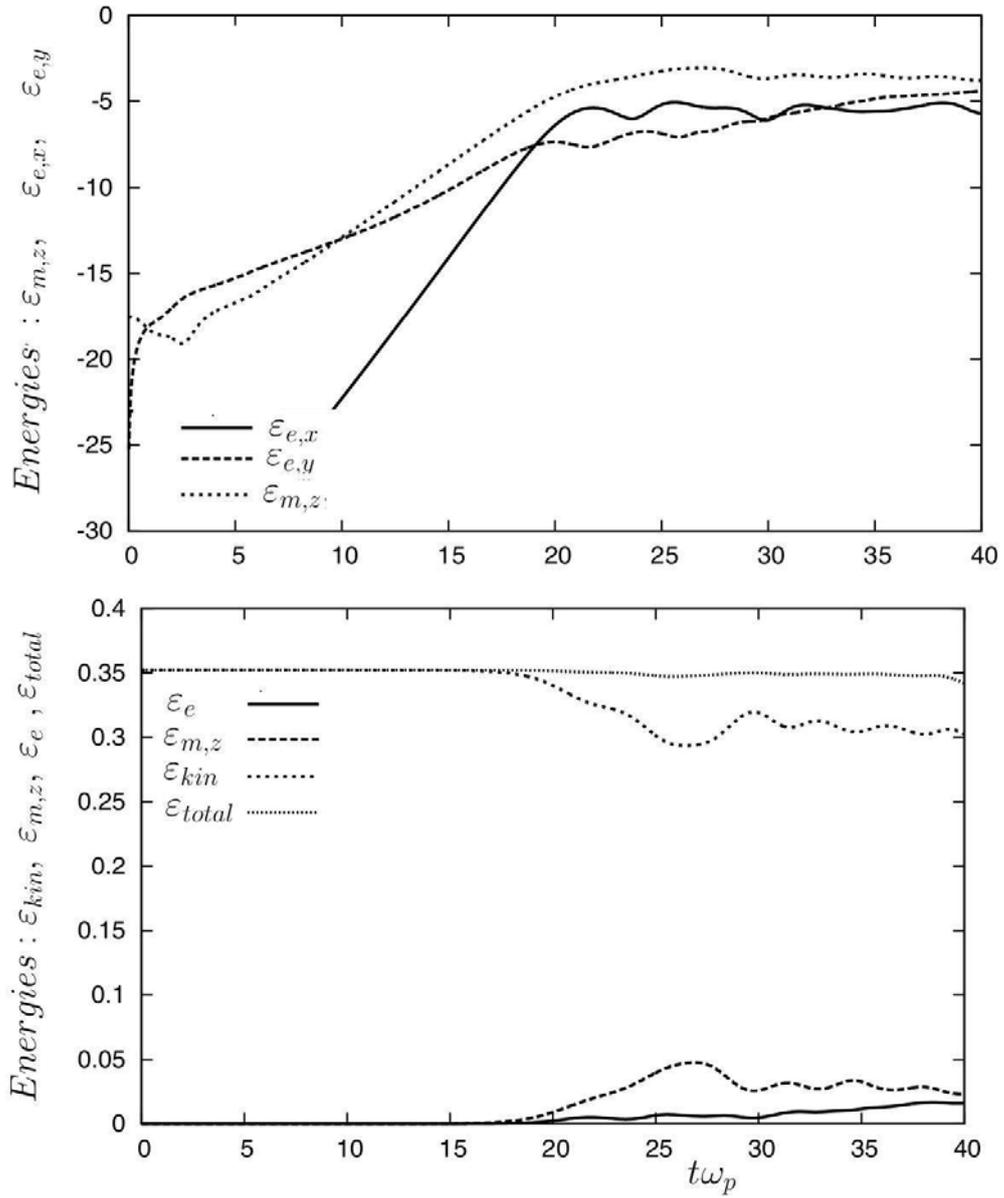


FIGURE 4.31 – Évolution temporelle des énergies électrique, magnétique, cinétique et totale du plasma pour la simulation présentée dans la section 4.5.2.1.

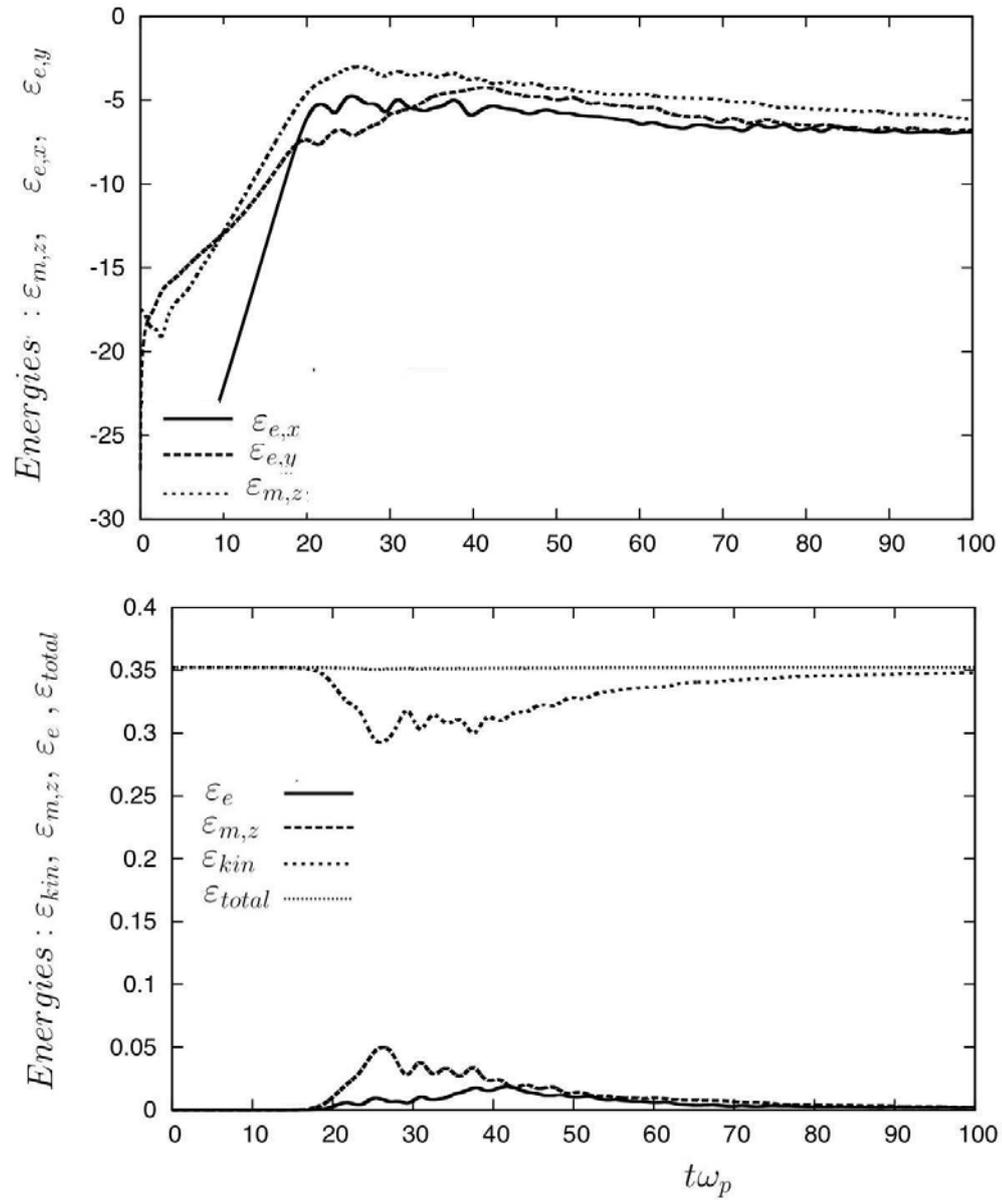


FIGURE 4.32 – Évolution temporelle des énergies électrique, magnétique, cinétique et totale du plasma sur une durée plus longue par rapport à la figure 4.31.

## Bibliographie

- [1] G. Lapenta. Particle simulations of space weather. *Journal of Computational Physics*, 231(3) :795 – 821, 2012. Special Issue : Computational Plasma Physics. [107](#)
- [2] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy. Über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik. *Mathematische Annalen*, 100 :32–74, 1928. [107](#)
- [3] A. Staniforth and J. Côté. Semi-lagrangian integration schemes for atmospheric models—a review. *Monthly Weather Review*, 119(9) :2206–2223, 1991. [108](#)
- [4] M. Gutnic, M. Haefele, I. Paun, and E. Sonnendrücker. Vlasov simulations on an adaptive phase-space grid. *Computer Physics Communications*, 164(1) :214 – 219, 2004. Proceedings of the 18th International Conference on the Numerical Simulation of Plasmas. [110](#)
- [5] E. Sonnendrücker, F. Filbet, A. Friedman, E. Oudet, and J.-L. Vay. Vlasov simulations of beams with a moving grid. *Computer Physics Communications*, 164(1) :390 – 395, 2004. Proceedings of the 18th International Conference on the Numerical Simulation of Plasmas. [110](#)
- [6] N. Besse, E. Deriaz, and É. Madaule. Adaptive multiresolution semi-lagrangian discontinuous galerkin methods for the vlasov equations. *Journal of Computational Physics*, 332 :376 – 417, 2017. [110](#)
- [7] C. Z. Cheng and G. Knorr. The integration of the vlasov equation in configuration space. *Journal of Computational Physics*, 22(3) :330 – 351, 1976. [114](#)
- [8] M. M. Shoucri and R. R. J. Gagné. Splitting schemes for the numerical solution of a two-dimensional vlasov equation. *Journal of Computational Physics*, 27(3) :315 – 322, 1978. [114](#)
- [9] E. Sonnendrücker, J. Roche, P. Bertrand, and A. Ghizzo. The semi-lagrangian method for the numerical resolution of the vlasov equation. *Journal of Computational Physics*, 149(2) :201–220, 1999. [116](#)
- [10] O. Coulaud, E. Sonnendrücker, E. Dillon, P. Bertrand, and A. Ghizzo. Parallelization of semi-lagrangian vlasov codes. *Journal of Plasma Physics*, 61(3) :435–448, 1999. [116](#)
- [11] N. Crouseilles, G. Latu, and E. Sonnendrücker. Hermite spline interpolation on patches for parallelly solving the vlasov-poisson equation. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 17(3) :335–349, 2007. [117](#), [120](#)
- [12] K. S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell’s equations in isotropic media. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, pages 302–307, 1966. [121](#)
- [13] T. Zh. Esirkepov. Exact charge conservation scheme for particle-in-cell simulation with an arbitrary form-factor. *Computer Physics Communications*, 135(2) :144 – 153, 2001. [124](#)
- [14] R. Barthelmé. *Le problème de conservation de la charge dans le couplage des équations de Vlasov et de Maxwell*. PhD thesis, 2005. Thèse de doctorat dirigée par Sonnendrücker, Eric Mathématiques Strasbourg 1 2005. [124](#)
- [15] A. Inglebert, A. Ghizzo, T. Réveillé, D. Del Sarto, P. Bertrand, and F. Califano. Multi-stream vlasov model for the study of relativistic weibel-type instabilities. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 54(8) :085004, 2012. [132](#), [134](#), [135](#)
- [16] L. Palodhi, F. Califano, and F. Pegoraro. Nonlinear kinetic development of the weibel instability and the generation of electrostatic coherent structures. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 51(12) :125006, 2009. [135](#)
- [17] M. E. Dieckmann. The filamentation instability driven by warm electron beams : statistics and electric field generation. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 51(12) :124042, 2009. [135](#)
- [18] A. Bret, L. Gremillet, and M. E. Dieckmann. Multidimensional electron beam-plasma instabilities in the relativistic regime. *Physics of Plasmas*, 17(12) :120501, 2010. :10.1063/1.3514586
- [19] A. Ghizzo, B. Izrar, P. Bertrand, M. R. Feix, E. Fijalkow, and M. Shoucri. Bgk structures as quasi-particles. *Physics Letters A*, 120(4) :191 – 195, 1987. [157](#)

- [20] A. Ghizzo, B. Izrar, P. Bertrand, E. Fijalkow, M. R. Feix, and M. Shoucri. Stability of bernstein–greene–kruskal plasma equilibria. numerical experiments over a long time. *The Physics of Fluids*, 31(1) :72–82, 1988. :10.1063/1.866579



# Chapitre 5

## Conclusion et perspectives

### Sommaire

---

5.1	Conclusions . . . . .	164
5.2	Perspectives . . . . .	164

---

Les instabilités de type Weibel déclenchées par l’existence d’une anisotropie de la distribution des vitesses et connues pour générer un champ magnétique ont fait l’objet de nombreux travaux de recherche, analytiques et numériques, au cours des dernières décennies. Ceci s’explique par la présence de ces instabilités dans de nombreux plasmas, naturels (vent solaire, milieu interstellaire) comme artificiels (plasmas générés par interaction laser-matière).

## 5.1 Conclusions

La première partie de cette thèse est consacrée à la comparaison de plusieurs modèles de description des instabilités de type Weibel. Nous avons notamment introduit un modèle fluide étendu, prenant en compte la dynamique des neuf composantes du tenseur de pression. Ce modèle s’est montré capable de restituer des propriétés importantes des instabilités de type Weibel. Dans le contexte de l’instabilité Weibel pure, ce modèle permet de mettre en évidence le rôle de la composante hors-diagonale du tenseur de pression dans le mécanisme de génération du champ magnétique et d’isotropisation du plasma. Il permet aussi de souligner le rôle de la symétrie des faisceaux dans le comportement électrostatique de l’instabilité de filamentation de courant. Le modèle fluide étendu est rigoureusement équivalent au modèle cinétique dès lors que la limite hydrodynamique est satisfaite. Même lorsque ce n’est pas le cas, le modèle est capable de restituer quantitativement (la coupure et le seuil de déclenchement de l’instabilité Weibel pure) ou qualitativement certaines propriétés des instabilités de type Weibel (l’existence d’un régime résonant pour la WI, dans le cas où la perturbation se propage parallèlement à un système de faisceaux). Hors limite hydrodynamique, une description cinétique impliquant la résolution du système Vlasov-Maxwell reste indispensable, le modèle fluide étendu ne pouvant apporter qu’une aide à l’interprétation des résultats.

Ce travail de thèse comporte également une participation au développement du code semi-lagrangien VLEM, conçu pour résoudre le système Vlasov-Maxwell en géométrie cartésienne pour des problèmes 2D3V ou de dimension inférieure. Dans ce code, le solveur de Vlasov est construit sur le principe d’une décomposition de domaine : l’espace  $(x, y)$  est décomposé en sous-domaines, chacun étant attribué à un processeur. L’interpolation de la fonction de distribution en  $x$  et  $y$  est réalisée de façon locale, c’est à dire à partir des valeurs de  $f$  connues dans ce sous-domaine, par le processeur gérant le sous-domaine. Les conditions d’Hermite imposées au bord des sous-domaines assurent la continuité de la fonction de distribution ainsi que celle de sa dérivée première. Les communications entre sous-domaines, limitées aux voisins immédiats, sont gérées par MPI. Les opérations ne nécessitant pas de communications entre processeurs sont parallélisées par OpenMP, pour répartir la charge de travail. L’espace des  $\mathbf{p}$  est traité de façon globale : ce dernier point implique un avantage (de fortes accélérations étant attendues en régime relativiste, chaque processeur devrait pouvoir communiquer avec tous les autres, et pas seulement avec ses voisins immédiats) mais aussi un inconvénient (la densité du maillage dans l’espace des  $\mathbf{p}$  est fortement contrainte par la mémoire maximale disponible pour chaque processeur). La gestion des advections en  $\mathbf{p}$  bénéficie cependant de la parallélisation OpenMP, distribuant la charge de travail sur plusieurs tâches travaillant simultanément. Le solveur de Maxwell est construit autour de la méthode de Yee. Une technique permettant de vérifier l’équation de conservation de la charge a été implémentée : elle s’inspire de la méthode d’Esirkepov utilisée dans les codes PIC. Enfin, le code VLEM a été validé sur plusieurs simulations test d’instabilités de type Weibel, notamment par comparaison avec l’analyse linéaire et avec d’autres codes semi-lagrangiens construits différemment.

## 5.2 Perspectives

Il reste encore beaucoup à faire au sujet de l’analyse fluide des instabilités de type Weibel :

- à propos de la phase non-linéaire : le développement d’un code fluide construit autour des trois premiers moments de l’équation de Vlasov permettrait d’étudier le régime non-linéaire des instabilités de type Weibel et pourrait faire l’objet de comparaisons avec les simulations cinétiques issues de VLEM, notamment pour fournir une interprétation fluide du mécanisme responsable de l’activité électrostatique constatée durant la phase linéaire et non-linéaire de ces instabilités ;
- l’analyse des modes obliques pour compléter l’étude menée au chapitre 3 : le modèle fluide pourrait aider à déterminer les différentes branches de solutions correspondant à ces modes ;
- inclure un champ magnétique et étudier l’instabilité Whistler, phénomène d’intérêt par exemple dans le contexte de la physique du vent solaire ;

- inclure la relativité dans le modèle tout en conservant les neuf composantes du tenseur de pression (beaucoup de plasmas spatiaux étant relativistes), puis, par exemple, comparer les résultats avec les modèles relativistes utilisant une pression scalaire ou un tenseur diagonal.

Ensuite, plusieurs améliorations peuvent aussi être apportées au code VLEM :

- il est nécessaire de paralléliser le solveur de Maxwell en accord avec la décomposition de domaine opérée dans l'espace  $(x, y)$  pour la résolution de l'équation de Vlasov. Cela permettrait une amélioration significative des performances du code. Chaque processeur devra cependant communiquer avec ses 8 voisins immédiats (voire 26, dans le cas d'une extension du code à la géométrie 3D).
- il faudra, à terme, ajouter la dynamique des ions au code. Ceci permettrait des simulations plus réalistes aux temps longs : une nouvelle couche de parallélisation MPI peut être introduite pour cela. La moitié des processeurs s'occuperait de résoudre l'équation de Vlasov pour les électrons, et l'autre moitié pour les ions. Les deux moitiés devraient communiquer pour calculer la densité de courant, utilisée dans l'équation de Maxwell-Ampère

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \sum_s q_s \int d^3 \mathbf{p} f_s \frac{\mathbf{p}}{m_s \gamma}. \quad (5.1)$$

Enfin, plusieurs problèmes physiques d'intérêt, ouverts et relatifs aux instabilités de type Weibel, peuvent donner lieu à une coopération entre les deux approches :

- la batterie de Biermann est un mécanisme de génération de champ magnétique à partir d'un gradient de densité et d'un gradient de température qui ne sont pas parallèles. Des simulations PIC [1] ont montré que l'instabilité Weibel pure pouvait apparaître après le démarrage du mécanisme de batterie pour des gradients de température ayant une longueur caractéristique importante devant l'épaisseur de peau électronique. Il serait intéressant de voir ce qu'une simulation semi-lagrangienne montrerait et ce que le modèle fluide étendu pourrait apporter en éléments de compréhension (analytiquement et numériquement) ;
- le calcul du taux de croissance non-relativiste et cinétique des modes obliques dans l'espace  $(k_x, k_y)$  (cf Annexe C pour la relation de dispersion) nous a conduit à observer deux types de solutions caractérisées par une propagation oblique vis à vis des faisceaux 5.1, des modes propagatifs et des modes non-propagatifs de taux de croissance voisins. Ceci motive la nécessité d'étudier en détail la relation de dispersion de ces modes, tâche pour laquelle l'analyse fluide peut se montrer efficace. La question du nombre de moments nécessaires (et notamment celle de l'inclusion du flux de chaleur au modèle fluide étendu) est ouverte. Celle de savoir si ces modes existent toujours en régime relativiste l'est aussi. Des simulations de type semi-lagrangiennes pourraient se montrer précieuses pour étudier le couplage de ces deux types de modes ;
- l'introduction d'un profil de densité et/ou de vitesse dans le système de faisceaux contre-propageants a été menée dans le contexte fluide froid il y a plusieurs années [2],[3]. Les simulations fluides ont montré la formation de résonances là où les gradients étaient les plus forts. L'introduction des effets de température et des effets cinétiques au modèle est aussi un problème ouvert pour lequel le modèle fluide étendu et le code VLEM peuvent fournir des réponses : quelles sont les modifications en terme de taux de croissance, et celles, éventuelles, sur le mécanisme de saturation des instabilités, sur la structure du champ magnétique et du champ électrostatique générés.

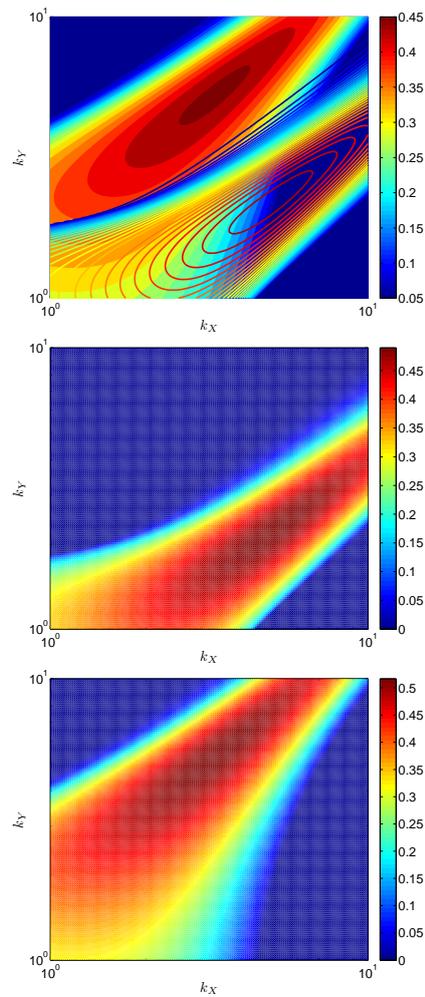


FIGURE 5.1 – Cartographie et taux de croissance des modes instables dans le plan  $(k_x, k_y)$ , à partir de la relation de dispersion présentée dans C, pour les paramètres suivants :  $n_1 = n_2 = 0.5$ ,  $u_1 = -u_2 = 0.668965$  et  $k_B T_1 = k_B T_2 = 6$  keV. Les contours colorés de la figure du haut correspondent au mode instable non-propagatif, représenté séparément sur la figure du milieu. La branche instable propagative est quant à elle représentée sur la figure du bas.

## Bibliographie

- [1] K. M. Schoeffler, N. F. Loureiro, R. A. Fonseca, and L. O. Silva. The generation of magnetic fields by the biermann battery and the interplay with the weibel instability. *Physics of Plasmas*, 23(5) :056304, 2016. :10.1063/1.4946017
- [2] F. Califano, R. Prandi, F. Pegoraro, and S. V. Bulanov. Nonlinear filamentation instability driven by an inhomogeneous current in a collisionless plasma. *Phys. Rev. E*, 58 :7837–7845, 1998. 165
- [3] F. Califano, F. Pegoraro, and D. Del Sarto. Resonant evolution of the current filamentation (weibel) instability in the relativistic regime. *AIP Conference Proceedings*, 827(1) :44–49, 2006. :10.1063/1.2195196



## Annexe A

# Relation de dispersion cinétique pour les modes WI-CFI

Chaque faisceau est décrit à l'équilibre par la distribution

$$f_s^{(0)} = n_s^{(0)} a_{x,s}^{-1} a_{y,s}^{-1} a_{z,s}^{-1} \exp\left(-\frac{v_x^2}{2a_{x,s}^2} - \frac{(v_y - u_{y,s}^{(0)})^2}{2a_{y,s}^2} - \frac{v_z^2}{2a_{z,s}^2}\right), \quad (\text{A.1})$$

vérifiant la quasi-neutralité

$$\sum_s n_s^{(0)} = n_0 \quad (\text{A.2})$$

et la condition de courant nul à l'équilibre

$$\sum_s n_s^{(0)} u_{y,s}^{(0)} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Pour une perturbation perpendiculaire aux faisceaux, de vecteur d'onde  $k_x$ , l'équation de Vlasov linéarisée (non-relativiste) s'écrit :

$$\begin{aligned} -e f_s^{(1)} \mathbf{v} &= \frac{ie^2}{m_e} \frac{v_x/a_{x,s}^2}{\omega - k_x v_x} f_s^{(0)} \mathbf{v} E_x^{(1)} \\ &+ \frac{ie^2}{m_e} \frac{v_y \mathbf{v}}{\omega - k_x v_x} \left[ \frac{1}{a_{y,s}^2} - \frac{k_x v_x}{\omega} \left( \frac{1}{a_{y,s}^2} - \frac{1}{a_{x,s}^2} \right) \right] f_s^{(0)} E_y^{(1)} - \frac{ie^2}{m_e} \frac{u_{y,s}^{(0)} \mathbf{v}}{\omega} \frac{1}{a_{y,s}^2} f_s^{(0)} E_y^{(1)} \\ &+ \frac{ie^2}{m_e} \frac{v_z \mathbf{v}}{\omega - k_x v_x} \left[ \frac{1}{a_{z,s}^2} - \frac{k_x v_x}{\omega} \left( \frac{1}{a_{z,s}^2} - \frac{1}{a_{x,s}^2} \right) \right] f_s^{(0)} E_z^{(1)}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

On peut ainsi calculer la densité de courant  $\mathbf{J}^{(1)} = -e \int f_s^{(1)} \mathbf{v} d^3\mathbf{v}$  et en déduire la matrice de dispersion  $[\mathbf{D}]$  telle que  $[\mathbf{D}] \cdot \mathbf{E} = 0$ ,

$$[\mathbf{D}] = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & 0 \\ D_{xy} & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

dont les composantes s'écrivent

$$D_{xx} = \frac{\omega^2}{c^2} \left[ 1 + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{k_x^2 a_{x,s}^2} (1 + \xi_s Z_s) \right], \quad (\text{A.6})$$

$$D_{yy} = \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{c^2} \left[ \xi_s Z_s + \left( \frac{u_{y,s}^{(0)2}}{a_{x,s}^2} + \frac{a_{y,s}^2}{a_{x,s}^2} - 1 \right) (1 + \xi_s Z_s) \right], \quad (\text{A.7})$$

$$D_{xy} = \frac{\omega^2}{c^2} \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{k_x^2 a_{x,s}^2} \frac{k_x u_{x,s}^{(0)}}{\omega} (1 + \xi_s Z_s), \quad (\text{A.8})$$

et

$$D_{zz} = \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{c^2} \left[ 1 - \frac{a_{z,s}^2}{a_{x,s}^2} (1 + \xi_s Z_s) \right]. \quad (\text{A.9})$$

Dans le cas où les faisceaux sont symétriques en température,  $D_{xy} = 0$  et la relation  $D_{yy} = 0$  décrit les modes couplés WI-CFI.

# Annexe B

## La méthode d'Esirkepov dans les codes PIC

La méthode d'Esirkepov [1] permet de calculer la densité de courant électrique vérifiant l'équation de conservation de la charge dans un code PIC. Avant de présenter cette méthode, il nous faut préciser quelques notions de base concernant les codes PIC.

### B.1 Principe de la méthode PIC

La méthode PIC (pour Particle-In-Cell) consiste à représenter la fonction de distribution  $f$  comme la somme de  $N$  macro-particules (aussi appelées quasi-particules ou super-particules selon les auteurs). L'équation de Vlasov est résolue en calculant la trajectoire de ces macro-particules. Les équations de Maxwell sont résolues sur une grille fixe, en utilisant par exemple un solveur de Yee similaire à celui utilisé dans VLEM. L'espace contenu entre deux points du maillage est appelé "cellule" (ou "cell", en anglais) et a généralement la taille d'une longueur de Debye.

Initialement,  $N$  macro-particules sont déposées dans chaque cellule, chacune d'entre elles étant repérées par sa position  $\mathbf{x}_\alpha$  et sa quantité de mouvement  $\mathbf{p}_\alpha$ . Ainsi,  $f$  s'écrit :

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sum_{\alpha=1}^N w_\alpha S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_\alpha(t)), \quad (\text{B.1})$$

et le mouvement d'une macro-particule obéit aux équations du mouvement :

$$\frac{d\mathbf{x}_\alpha}{dt} = \frac{\mathbf{p}_\alpha}{m\gamma_\alpha} \quad (\text{B.2})$$

et

$$\frac{d\mathbf{p}_\alpha}{dt} = \frac{q}{m} \left( \mathbf{E}_\alpha + \frac{\mathbf{p}_\alpha}{m\gamma_\alpha} \times \mathbf{B}_\alpha \right). \quad (\text{B.3})$$

La quantité  $w_\alpha$  représente le poids statistique de la macro-particule  $\alpha$ , déterminé à partir de la densité fluide à l'équilibre dans la cellule où se trouve initialement  $\alpha$ . La quantité de mouvement initiale de chaque macro-particule est attribuée de façon à ce que la fonction de distribution approximée  $f$  soit conforme (au moins du point de vue des premiers moments fluides que sont la vitesse moyenne, la pression ou la température) à une fonction de distribution analytique choisie, qui peut être une distribution de Maxwell par exemple. La grandeur  $\gamma_\alpha = \sqrt{1 + \mathbf{p}_\alpha^2 / (m^2 c^2)}$  désigne le facteur de Lorentz de la macro-particule.

Les notations  $\mathbf{E}_\alpha$  et  $\mathbf{B}_\alpha$  signifient que ces champs doivent être calculés au point où se trouve le centre de la macro-particule. On a donc besoin d'interpoler les champs électromagnétiques aux points où se trouvent les macro-particules. On utilise ensuite ces champs pour faire bouger les macro-particules et déterminer leur nouvelle position  $\mathbf{x}_\alpha$  et leur nouvelle vitesse  $\mathbf{p}_\alpha$ . On calcule les densités de charge et de courant correspondant au nouvel état microscopique du plasma, que l'on interpole sur la grille pour calculer les nouvelles valeurs des champs électromagnétiques.

La notation  $S$  désigne le facteur de forme (auss appelé fonction de forme) des macro-particules. Ce facteur de forme est introduit pour obtenir des champs électromagnétiques dont la forme est suffisamment régulière dans l'espace des coordonnées : sans  $S$ , les macro-particules sont représentées

par des points et les densités de charge et de courant ne sont pas des champs continus, rendant complexe le calcul des champs. Plusieurs types de facteurs de forme sont utilisés en pratique, mais ce sont généralement des splines.

Appliquer un facteur de forme à une macro-particule, théoriquement ponctuelle, revient donc à lui conférer un volume fini dans l'espace des coordonnées, volume qui va dépendre de la spline utilisée (méthode Nearest-Grid-Point pour des splines d'ordre 0, méthode Cloud-In-Cell pour les ordres supérieurs). Ainsi, une macro-particule est un nuage de charge, qui pourra "déposer" une fraction de sa charge sur un ou plusieurs noeuds du maillage. On assure ainsi la régularité des champs, mais les densités de courant et de charge ne vérifient plus nécessairement l'équation de conservation de la charge

$$\frac{\rho_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{J_{x\ i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - J_{x\ i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{J_{y\ i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - J_{y\ i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} = 0. \quad (\text{B.4})$$

Du fait de la linéarité de (B.4) et de (B.1), on peut écrire une équation de conservation de la charge pour chaque macro-particule :

$$\frac{\rho_{\alpha;i,j}^{n+1} - \rho_{\alpha;i,j}^n}{\Delta t} + \frac{J_{x\ \alpha;i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - J_{x\ \alpha;i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{J_{y\ \alpha;i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - J_{y\ \alpha;i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} = 0. \quad (\text{B.5})$$

Ici,  $\Delta x$  et  $\Delta y$  correspondent à la taille des cellules selon  $x$  et  $y$  et  $\Delta t$  est le pas de temps. Les densités de charge et de courant totales sont la somme des contributions de chaque macro-particule.

Dans un système 2D3V, la densité de charge électrique déposée par une macro-particule en un point de grille  $\mathbf{x}(i, j)$  à l'instant  $t_n$  est calculée comme :

$$\rho_{\alpha;i,j}^n = qw_{\alpha} S(\mathbf{x}_{i,j} - \mathbf{x}_{\alpha}^n), \quad (\text{B.6})$$

où  $\mathbf{x}_{\alpha}^n$  est la position du centre de la macro-particule  $\alpha$ .

Pour calculer correctement la densité de courant générée par  $\alpha$ , plusieurs techniques ont été développées : on citera notamment les méthodes de Villasenor-Buneman [2] et d'Esirkepov [1] qui supposent que les particules bougent en ligne droite durant un pas de temps, ainsi que la méthode développée par Umeda [3], appelée "méthode zigzag", qui permet aux particules d'avoir pour trajectoire une ligne brisée.

## B.2 Principe de la méthode d'Esirkepov

Esirkepov propose dans [1] une méthode pour calculer la densité de courant en  $n+1/2$  de sorte que l'équation de conservation de la charge soit automatiquement satisfaite pour chaque macro-particule. Cette méthode est valable pour tout facteur de forme  $S$  mais est limitée à une géométrie cartésienne.

La densité de courant générée par  $\alpha$  dans le plan  $(x, y)$  est calculée comme suit :<sup>1</sup>

$$J_{x\ \alpha;i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} = J_{x\ \alpha;i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} + qw_{\alpha} \frac{\Delta x}{\Delta t} W_{x\ i,j}^{n+\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.8})$$

$$J_{y\ \alpha;i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = J_{y\ \alpha;i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + qw_{\alpha} \frac{\Delta y}{\Delta t} W_{y\ i,j}^{n+\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.9})$$

où le vecteur  $\mathbf{W}$ , appelé décomposition de densité, est défini comme :

$$-qw_{\alpha} \frac{\Delta x}{\Delta t} W_{x\ i,j}^{n+\frac{1}{2}} \equiv J_{x\ \alpha;i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - J_{x\ \alpha;i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} \quad (\text{B.10})$$

et

$$-qw_{\alpha} \frac{\Delta y}{\Delta t} W_{y\ i,j}^{n+\frac{1}{2}} \equiv J_{y\ \alpha;i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - J_{y\ \alpha;i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \quad (\text{B.11})$$

La conservation de la charge (B.5) est donc satisfaite si et seulement si

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{\alpha;i,j}^{n+1} - \rho_{\alpha;i,j}^n}{qw_{\alpha}} &= W_{x\ i,j}^{n+\frac{1}{2}} + W_{y\ i,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ &= S(\mathbf{x}_{i,j} - \mathbf{x}_{\alpha}^{n+1}) - S(\mathbf{x}_{i,j} - \mathbf{x}_{\alpha}^n) \\ &\equiv S(\mathbf{x}_{\alpha}^{n+1}) - S(\mathbf{x}_{\alpha}^n) \\ &= S(\mathbf{x}_{\alpha} + \delta\mathbf{x}) - S(\mathbf{x}_{\alpha}), \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

---

1. La composante  $J_z$  est déterminée par simple projection puisqu'elle n'intervient pas dans l'équation de conservation :

$$J_{z\ i,j}^{n+\frac{1}{2}} = qw_{\alpha} \frac{p_{\alpha}}{m\gamma_{\alpha}} S(\mathbf{x}_{i,j} - \mathbf{x}_{\alpha}). \quad (\text{B.7})$$

en posant  $S(\mathbf{x}_{i,j} - \mathbf{x}_\alpha) \equiv S(\mathbf{x}_\alpha)$  pour simplifier la notation. Le vecteur  $\delta\mathbf{x} = (\delta x, \delta y)$  désigne le déplacement de la macro-particule dans le plan  $(x, y)$  pendant  $\Delta t$ .

On peut décomposer le déplacement 2D d'une macro-particule en une séquence de déplacements 1D, faisant intervenir les modifications suivantes du facteur de forme :

$$S(x_\alpha + \delta x, y_\alpha + \delta y), \quad S(x_\alpha + \delta x, y_\alpha), \quad S(x_\alpha, y + \delta y_\alpha), \quad S(x_\alpha, y_\alpha). \quad (\text{B.13})$$

Il existe deux séquences de déplacements 1D possibles :

$$S(x_\alpha, y_\alpha) \longrightarrow S(x_\alpha, y_\alpha + \delta y) \longrightarrow S(x_\alpha + \delta x, y_\alpha + \delta y), \quad (\text{B.14})$$

ou

$$S(x_\alpha, y_\alpha) \longrightarrow S(x_\alpha + \delta x, y_\alpha) \longrightarrow S(x_\alpha + \delta x, y_\alpha + \delta y). \quad (\text{B.15})$$

On peut donc écrire, soit

$$S(\mathbf{x}_\alpha + \delta\mathbf{x}) - S(\mathbf{x}_\alpha) = \underbrace{S(x + \delta x, y) - S(x, y)}_{\text{shift selon x en premier}} + \underbrace{S(x + \delta x, y + \delta y) - S(x + \delta x, y)}_{\text{shift selon y en second}} \quad (\text{B.16})$$

soit

$$S(\mathbf{x}_\alpha + \delta\mathbf{x}) - S(\mathbf{x}_\alpha) = \underbrace{S(x, y + \delta y) - S(x, y)}_{\text{shift selon y en premier}} + \underbrace{S(x + \delta x, y + \delta y) - S(x, y + \delta y)}_{\text{shift selon x en second}}. \quad (\text{B.17})$$

Pour tenir compte de ces deux options, on suppose que le vecteur  $\mathbf{W}$  correspond à la combinaison linéaire de tous les déplacements possibles, chaque shift étant pondéré d'un coefficient lié à sa probabilité de réalisation. Ainsi,

$$W_{x\ i,j} = \alpha_1 (S(x + \delta x, y + \delta y) - S(x, y + \delta y)) + \alpha_2 (S(x + \delta x, y) - S(x, y)) \quad (\text{B.18})$$

et

$$W_{y\ i,j} = \alpha_3 (S(x + \delta x, y + \delta y) - S(x + \delta x, y)) + \alpha_4 (S(x, y + \delta y) - S(x, y)). \quad (\text{B.19})$$

On a regroupé dans  $W_{x\ i,j}$  toutes les variations de  $S$  correspondant à un shift selon  $x$ , et dans  $W_{y\ i,j}$  toutes les variations de  $S$  liées à un shift selon  $y$ . Les coefficients  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  et  $\alpha_4$  sont alors égaux à  $1/2$  puisqu'il y a que deux possibilités pour effectuer un shift donné. Par exemple, on peut effectuer le déplacement en  $y$  en premier (B.14) ou en second (B.15).

Ainsi défini, le vecteur  $\mathbf{W}$  est tel que la somme de ses composantes soit égale à la variation totale du facteur de forme. Toute composante  $W_i$  ( $i = x, y, z$ ) de ce vecteur est nulle s'il n'y a pas de déplacement de la macro-particule selon la dimension  $i$ . Les différentes séquences de déplacement sont considérées comme équiprobables car on suppose que la macro-particule bouge en ligne droite durant un pas de temps (à noter que les particules doivent effectivement bouger en ligne droite dans l'algorithme de résolution des équations du mouvement). Ce raisonnement suppose enfin que le facteur de forme représente la densité de charge de la macro-particule, ce qui est bien le cas.

Une démonstration mathématiquement rigoureuse et une généralisation de cette méthode à un cas 3D sont disponibles dans [1] et [4].



## Annexe C

# Relation de dispersion cinétique 2D non-relativiste pour un système de faisceaux

On suppose un équilibre constitué d'ions fixes et de deux faisceaux électroniques, isotropes en température et dirigés le long de l'axe  $y$ . Cet équilibre, supposé non-relativiste, est décrit par la fonction de distribution suivante : La vitesse des faisceaux  $s$  est  $v_{0s}$ .

La relation de dispersion décrivant la dynamique linéaire dans le plan  $(xOy)$  et correspondant à une perturbation de vecteur d'onde  $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y$  s'écrit

$$D_{xx}D_{yy} - D_{xy}^2 = 0 \quad (\text{C.1})$$

où la matrice de dispersion

$$D = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{xy} & D_{yy} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.2})$$

, telle que  $\det D = 0$ , a pour éléments

$$D_{xx} = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{xx} - k^2 \sin^2 \theta, \quad (\text{C.3})$$

$$D_{yy} = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{yy} - k^2 \cos^2 \theta \quad (\text{C.4})$$

et

$$D_{xy} = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{xy} + k^2 \sin \theta \cos \theta. \quad (\text{C.5})$$

Ici,  $\theta$  est l'angle formé par le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et l'axe  $(Ox)$ . La grandeur  $\varepsilon$  est le tenseur diélectrique du plasma, dont les coefficients sont

$$\varepsilon_{xx} = 1 + \sum_{s=1,2} \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \left( \frac{\Omega_s^2}{k^2 v_{th,s}^2} (1 + \xi_s Z(\xi_s)) \cos^2 \theta + \xi_s Z(\xi_s) \sin^2 \theta \right) \quad (\text{C.6})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yy} = & 1 + \sum_{s=1,2} \frac{\omega_{ps}^2}{\omega} \frac{\Omega_s}{k^2 v_{th,s}^2} (1 + \xi_s Z(\xi_s)) \sin^2 \theta + \sum_{s=1,2} \frac{\omega_{ps}^2}{\omega} \frac{v_{0s} \sin \theta}{k v_{th,s}^2} (1 + \xi_s Z(\xi_s)) \\ & + \sum_{s=1,2} \frac{\omega_{ps}^2}{\omega} \frac{k v_{0s}}{\omega} \sin \theta \cos^2 \theta \frac{\Omega_s}{k^2 v_{th,s}^2} (1 + \xi_s Z(\xi_s)) - \sum_{s=1,2} \frac{\omega_{ps}^2}{\omega} \frac{k v_{0s}}{\omega} \sin \theta \cos^2 \theta \frac{Z(\xi_s)}{\sqrt{2} k v_{th,s}} \\ & + \sum_{s=1,2} \frac{\omega_{ps}^2}{\omega} \cos^2 \theta \frac{Z(\xi_s)}{\sqrt{2} k v_{th,s}} + \sum_{s=1,2} \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} v_{0s}^2 \cos^2 \theta \frac{1 + \xi_s Z(\xi_s)}{v_{th,s}^2} \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

$$\varepsilon_{xy} = \sum_{s=1,2} \frac{\omega_{ps}^2}{\omega} \frac{\Omega_s}{k^2 v_{th,s}^2} (1 + \xi_s Z(\xi_s)) \left( \sin \theta \cos \theta + \frac{k v_{0s}}{\omega} \cos^3 \theta \right)$$

$$+ \sum_{s=1,2} \frac{\omega_{ps}^2}{\omega} \frac{Z(\xi_s)}{\sqrt{2}k v_{th,s}} \left( \frac{k v_{0s} \sin \theta}{\omega} - 1 \right) \sin \theta \cos \theta \quad (\text{C.8})$$

La notation  $Z(\xi_s)$  désigne la fonction de dispersion plasma d'argument  $\xi_s = \frac{\Omega_s}{\sqrt{2}k v_{th,s}}$ , où la vitesse thermique du faisceau  $s$  s'écrit  $v_{th,s} = \sqrt{\frac{k_B T_s}{m}}$ . On définit enfin  $\Omega_s \equiv \omega - k_y v_{0s} = \omega - k \sin \theta v_{th,s}$ .

Cette relation de dispersion décrit les instabilités CFI (cas 1D avec  $k_y = 0$ ,  $\theta = 0$ ), TSI (cas 1D avec  $k_x = 0$ ,  $\theta = \pi/2$ ) et oblique (cas 2D général).

## Annexe D

# Relation de dispersion cinétique 2D relativiste pour un système de faisceaux froids

Considérons un système de deux faisceaux  $s$  contre-propageants alignés selon l'axe  $y$ , de densité  $n_1$  et  $n_2$  et de vitesse  $u_1$  et  $u_2$  à l'équilibre, de sorte que  $n_1 u_1 + n_2 u_2 = 0$ . Ces faisceaux sont froids et relativistes. On note  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  les facteurs de Lorentz calculés à partir des vitesses d'équilibre  $u_1$  et  $u_2$ . On désigne par  $\omega_{p1}$  et  $\omega_{p2}$  les pulsations plasmas obtenues à partir des densités à l'équilibre  $n_1$  et  $n_2$ .

Leur comportement est régi par les équations fluides ci-dessous :

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{u}_s) = 0 \quad (\text{D.1})$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{p}_s}{\partial t} + (\mathbf{u}_s \cdot \nabla) \mathbf{p}_s = -e (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}), \quad (\text{D.2})$$

couplées aux équations de Maxwell. La notation  $s$  désigne de façon générique l'un des deux faisceaux.

On perturbe ce système de faisceaux à la fois longitudinalement ( $k_y \neq 0$ ) mais aussi transversalement ( $k_x \neq 0$ ). L'analyse linéaire conduit à la relation de dispersion suivante, présentée sous forme polynomiale :

$$\omega^6 + B\omega^5 + (C - A)\omega^4 + (D - AB)\omega^3 + (E - AC)\omega^2 - AD\omega + (F - AE) = 0, \quad (\text{D.3})$$

où les coefficients A, B, C, D, E et F ont pour expression :

$$A = k_x^2 c^2 + k_y^2 c^2 + \frac{\omega_{p1}^2}{\gamma_1} + \frac{\omega_{p2}^2}{\gamma_2}, \quad (\text{D.4})$$

$$B = -2k_y (u_1 + u_2), \quad (\text{D.5})$$

$$C = k_y^2 [(u_1 + u_2)^2 + 2u_1 u_2] - \frac{k_y^2 c^2}{\omega_{pe}^2} (\omega_{p1}^2 + \omega_{pe}^2), \quad (\text{D.6})$$

$$D = -2k_y^3 (u_1 u_2^2 + u_1^2 u_2) + 2k_y c \left( u_1 \frac{\omega_{p1}^2}{\gamma_2^3} + u_2 \frac{\omega_{p2}^2}{\gamma_1^3} \right), \quad (\text{D.7})$$

$$E = k_y^4 u_1^2 u_2^2 - k_y^2 \left( u_1^2 \frac{\omega_{p2}^2}{\gamma_2^3} + u_2^2 \frac{\omega_{p1}^2}{\gamma_1^3} \right) \quad (\text{D.8})$$

et

$$F = k_x^2 \frac{\omega_{p1}^2 \omega_{p2}^2}{\gamma_1 \gamma_2} (u_1 - u_2)^2. \quad (\text{D.9})$$

## Bibliographie

- [1] T. Zh. Esirkepov. Exact charge conservation scheme for particle-in-cell simulation with an arbitrary form-factor. *Computer Physics Communications*, 135(2) :144 – 153, 2001. [III](#), [IV](#), [V](#)
- [2] John Villasenor and Oscar Buneman. Rigorous charge conservation for local electromagnetic field solvers. *Computer Physics Communications*, 69(2) :306 – 316, 1992. [IV](#)
- [3] T Umeda, Y Omura, T Tominaga, and H Matsumoto. A new charge conservation method in electromagnetic particle-in-cell simulations. *Computer Physics Communications*, 156(1) :73 – 85, 2003. [IV](#)
- [4] R. Barthelmé. *Le problème de conservation de la charge dans le couplage des équations de Vlasov et de Maxwell*. PhD thesis, 2005. Thèse de doctorat dirigée par Sonnendrücker, Eric Mathématiques Strasbourg 1 2005. [V](#)

