Analyse systématique du concept de comportement linéaire équivalent en ingénierie sismique

Thuong Anh Nguyen

▶ **To cite this version:**

Thuong Anh Nguyen. Analyse systématique du concept de comportement linéaire équivalent en ingénierie sismique. Génie civil. Université Paris-Est, 2017. Français. NNT : 2017PESC1032 . tel-01781422

HAL Id: tel-01781422
https://theses.hal.science/tel-01781422

Submitted on 30 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

présentée par

NGUYEN Thuong Anh

pour obtenir le grade de docteur délivré par

Université Paris-Est

Spécialité doctorale

GÉNIE CIVIL

Sujet de la thèse

Analyse systématique du concept de comportement linéaire équivalent en ingénierie sismique

Soutenue le 20 décembre 2017 à ESTP Cachan

Jury

Stéphane GRANGE,	Professeur, INSA de Lyon	Président du jury-Rapporteur
Panagiotis KOTRONIS,	Professeur, EC de Nantes	Rapporteur
Maria Paola SANTISI D'AVILA,	Maître de conférence, LJAD	Examinatrice
Pierre-Alain NAZE,	PDG, Géodynamique et Structure	Examinateur
Jean-François SEMBLAT,	Professeur, ENSTA-Paristech	Directeur de thèse
Pierre LABBE,	Professeur, ESTP Paris	Encadrant
Guillaume HERVE-SECOURGEON,	Ingénieur)Chercheur, EDF R&D	Encadrant

Ecole Spéciale des Travaux Publics, du Bâtiment et de l'Industrie
Institut de Recherche en Constructibilité
28 avenue du Président Wilson - 94234 Cachan Cedex, France

THESE

Remerciement

Le poème ci-dessous est destiné à mes parents sans qui je n'existerai pas, à ma sœur jumelle et à ma compagne (ou encore mon âme-soeur), Trang, qui ont su me soutenir au travers des divers moments traversés, et donc à qui j'exprime toute ma gratitude :

Đi không há lẽ trở về không ?
Cái nợ cầm thư phải trả xong.
Rắp mượn điền viên vui tuế nguyệt
Dở đem thân thế hẹn tang bồng.
Đã mang tiếng ở trong trời đất
Phải có danh gì với núi sông.
Trong cuộc trần ai, ai dễ biết
Rồi ra mới rõ mặt anh hùng.

(Đi thi tự vịnh- Nguyễn Công Trứ)

Ensuite, j'aimerais remercier mon directeur de thèse, M. Jean-François Semblat, pour m'avoir accepté en tant que l'un de ses doctorants et m'avoir sans cesse appris au travers de ses conseils pédagogiques pendant nos réunions d'avancement.

Ces remerciements ne seraient rien sans passer par mon jury de thèse m'ayant permis de soutenir : M. Panagiotis Kotronis et M. Stéphane Grange qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de ma thèse, et ont pris le temps de m'écouter et de discuter avec moi ; Mme Maria Paola Santisi D'Avila et M. Pierre-Alain Nazé qui ont accepté d'en être les examinateurs, et dont leurs remarques m'ont permis d'envisager mon travail sous un autre angle.

Je tiens particulièrement à remercier M. Pierre Labbé pour qui j'exprime un respect total autant pour ses connaissances techniques en ingénierie sismique que pour son sens des relations humaines. Il a encadré ce travail de thèse avec rigueur, passion et surtout patience. Et, il m'a su me transmettre une infime partie de ses connaissances et son expérience au métier de l'ingénieur sismique. De plus, il a représenté un réel appui dans mes relations professionnelles.

The last but not the least... je voudrais vivement remercier Guillaume Hervé-Secourgeon qui m'a accompagné tout au long de mon cursus en France. Il m'a d'abord conseillé, poussé et ouvert la voie des métiers du génie civil nucléaire. Il m'a ensuite accepté en stage de fin d'étude sur le benchmark IRIS 3. A l'issue de ce travail, il m'a soutenu sur ma candidature à cette thèse et est finalement devenu mon encadrant. Je le remercie pour ses sources et idées infinies et inépuisables qui ont permis à ce travail de recherche d'aboutir.

Je suis heureux d'avoir eu Christophe Rouzaud dans un premier temps comme tuteur de stage de recherche sur IRIS 3 et ensuite comme ami. De par ses capacités d'organisation, il m'a beaucoup aidé dans cette thèse, et notamment dans la structuration de mes présentations et rapports. Il a également été un soutien de poids au sein du laboratoire IRC et dans des activités « hors-thèse » comme l'organisation de la conférence CIGOS 2017.

Il est impossible pour moi d'oublier mes chères collègues avec qui j'ai vécu des moments inoubliables à l'ESTP. M. Jean–Lou Lebrun m'a accueilli avec gentillesse dans son laboratoire, tout comme son successeur, M. Eric CROQUESEL. Gustavo Mendoza Chavez m'a beaucoup aidé depuis notre connaissance grâce en partie à ses capacités intellectuelles. Nicolas Vacca, Ziad Kteich, Francesca Contrada, Egar Chuta avec leur bonne humeur m'ont permis de légers interludes de repos après des heures de travail acharné. Je les remercie ainsi tous et tout comme l'ensemble des personnes que j'ai pu croiser lors de ces dernières années.

J'en oublie certainement encore et je m'en excuse par avance.

Encore un grand merci à tous pour m'avoir conduit à ce jour mémorable qui restera pour moi à jamais gravé dans ma mémoire.

Table des matières

Remerciement iii

Table des matières v

Résumé vii

Abstract ix

Liste des figures xi

Liste des tableaux xv

Introduction xvii

1 Réponse sismique non-linéaire des structures 1
- 1.1 Missions de l'ingénierie sismique . . . 3
- 1.2 Chargements de type séisme : Signaux synthétiques . . . 3
- 1.3 Modélisation de la structure . . . 13
- 1.4 Prise en compte de non-linéarités du comportement dans la pratique de l'ingénierie sismique . . . 21
- 1.5 Conclusions et la problématique de la thèse . . . 30
- 1.6 Références . . . 31

2 Linéarisation équivalente en ingénierie sismique 35
- 2.1 Revue des concepts de linéarisation équivalente existants . . . 37
- 2.2 Propositions d'amélioration des concepts de linéarisation équivalente . . . 51
- 2.3 Conclusion . . . 69
- 2.4 Références . . . 70

3 Nouveau concept : La linéarisation équivalente par fonction de transfert 73
- 3.1 Linéarisation équivalente par fonction de transfert . . . 75
- 3.2 Performance du concept de linéarisation équivalente (critères d'Anderson) 89
- 3.3 Spectre transféré . . . 97
- 3.4 Conclusions sur la linéarisation équivalente par fonction de transfert . . . 105
- 3.5 Références . . . 106

4 Confrontation expérimentale 107
- 4.1 Structure voile en béton armé . . . 109
- 4.2 Système de tuyauterie en acier . . . 117
- 4.3 Conclusions . . . 130
- 4.4 Références . . . 131

5 Conclusions et perspectives **133**
5.1 Conclusions 134
5.2 Perspectives 135

A Compléments **I**
A.1 Densité spectrale du signal synthétique II
A.2 Fréquence centrale du signal d'entrée IV
A.3 Caractéristique de la réponse linéaire des oscillateurs soumis au bruit blanc V
A.4 Schéma β-Newmark en accélération moyenne X
A.5 Procédure de validation du programme de calcul de la réponse non-linéaire XIII
A.6 Évaluation des caractéristiques dynamiques dans le domaine temporel . . . XIII
A.7 Analyse modale dans le domaine fréquentiel XVII
A.8 Valeurs des coefficients de la courbe de chute de fréquence et d'amortissement équivalents par fonction de transfert XXIII
A.9 Distribution des notes des critères d'Anderson XXV
A.10 Proposition de concepts de linéarisation équivalente par la restitution des caractéristiques dynamiques XXVII
A.11 Détermination de l'écrouissage du comportement idéalisé bilinéaire pour le matériau d'acier SA 333 Gr. 6 XXXI
A.12 Mécanique des tuyaux coudés soumis à un moment fléchissant dans son plan XXXI
A.13 Références XXXIII

B Liste des acronymes **XXXV**

C Glossaire **XXXVII**

D Liste des symboles **XXXIX**

Résumé

En ingénierie sismique, il est admis que le comportement d'une structure soumise à de forts séismes soit caractérisé par des boucles d'hystérésis qui peuvent être amples ou étroites selon le type de structure impactée. La prise en compte de ce type de comportement non-linéaire dans un calcul temporel présente des difficultés liées à l'identification des paramètres, au coût numérique élevé, au risque de non-convergence. Dans ce contexte, la méthode de linéarisation équivalente, a été introduite en géotechnique dès les années 70. Elle reste peu utilisée dans le domaine des structures malgré les efforts de nombreux auteurs.

Ce travail de thèse a pour objet l'étude du comportement linéaire équivalent dans le contexte des méthodes simplifiées d'évaluation de la réponse non-linéaire d'une structure en ingénierie sismique. Nous passons en revue les critères de linéarisation adoptés par les différentes méthodes qui recherchent l'équivalence (1) du déplacement maximum ou (2) de la quantité d'énergie dissipée ou (3) de la force de rappel. Nos analyses montrent que ces trois critères ne sont pas pertinents et/ou efficaces, conduisant à des méthodes peu robustes qui conduisent dans certains cas à des résultats inexplicables.

Nous montrons le rôle important, négligé par toutes les méthodes disponibles, du contenu fréquentiel respectif des signaux et du système dans la détermination de la ductilité appelée. Sur cette constatation, nous introduisons une nouvelle méthode de linéarisation équivalente basée sur la fonction de transfert. Nous utilisons cette méthode pour explorer un plan d'expérience numérique dans lequel nous calculons les caractéristiques de fréquence et d'amortissement équivalents en fonction de la ductilité appelée pour différente configurations caractérisées par (a) le rapport entre fréquence de l'oscillateur et fréquence centrale du signal excitateur, (b) la pente d'écrouissage et (c) le modèle de comportement qui varie continument de élastoplastique à endommageant.

Nous proposons deux nouvelles approches du comportement linéaire équivalent. La première, visant à améliorer la procédure statique non-linéaire de l'ATC40, utilise la rigidité sécante et le déplacement maximal. Elle fait intervenir une estimation de l'amortissement différente de celle de l'ATC40. Sa pertinence est établie par le fait qu'elle permet d'évaluer avec exactitude le déplacement maximal de systèmes canoniques non-linéaires. La seconde consiste à restituer la dynamique de la réponse d'un oscillateur non-linéaire au travers de la fonction de transfert. Sa pertinence est démontrée au travers des critères d'Anderson, avec notamment un critère relatif au spectre transféré. La détermination du comportement linéaire équivalent par fonction de transfert est validée sur des structures réelles au travers des essais sur voiles en béton armé (SAFE) et sur systèmes des tuyauteries (BARC et EPRI).

Abstract

In earthquake engineering, it is common that the behaviour of a structure undergoing a strong motion is characterized by wise or narrow hysteresis loops depending on the type of behaviour of the structure. Considering this non-linear behaviour in a transient calculation requires a huge need of resources in terms of calculation time and memory. In this context, the method of equivalent linearization, consisting in the evaluation of the non-linear response of the structure has been introduced by geotechnical engineers In the 1970s. Despite efforts of many authors, this method is still not used in structural field.

The goal of this research is to examine the linear equivalent behaviour in the context of the simplified method of evaluating the non-linear response of a structure in earthquake engineering. We review the criteria of equivalence adopted by many methods searching for the equivalence of (1) the maximum of displacement or (2) quantity of dissipated energy or (3) the restore force. Our argumentative analyses carry out that these three criteria are not pertinent and/or efficient. This leads, in some cases, to some unexplained results.

We show the important role, which is mostly neglected in existing method, of frequency content while evaluating the ductile demand. Based on this recognition, we introduce a new method of equivalent linearization based on the transfer function. We use this method in order to explore a numerical experimental plan in which we calculate the equivalent characteristics (frequency and damping) versus the ductile demand for different configuration characterized by (a) the ratio between the frequency of the oscillator and the central frequency of the input signal, (b) the hardening and (c) the behaviour which covers the elastoplastic and damaged ones.

We propose two new approaches of the linear equivalent behaviour. The first one, aiming to improve the non-linear static procedure of ATC40, use the secant stiffness and the maximal displacement. This approach consists in an estimation of damping which is different to ATC40. Its pertinence is established by evaluating with accuracy the maximal displacement of the canonical non-linear systems. The second approach consists in restitution of the dynamic of the response of a non-linear oscillator by using the transfer function. The pertinence of this proposition is shown through the criteria of Anderson, especially in terms of transferred motion. In this effect, the linear equivalent behaviour based on the transfer function allows to cope the transferred motion through the non-linear oscillator without performing the non-linear transient calculation. The validation of the linear equivalent behaviour based on the transfer function has been examined on real structures through some experimental tests such as the reinforced concrete wall (SAFE) or piping systems (BARC and EPRI).

Liste des figures

1.1 Procédure de fabrication des signaux synthétiques 4
1.2 Moyenne des 1000 signaux stationnaires $X_j(t)$ 8
1.3 Moyenne des 1000 signaux quasi-stationnaires $\gamma_j(t)$ 8
1.4 Variance des 1000 réalisations sans courbe d'enveloppe 9
1.5 Spectre moyen en déplacement relatif des 1000 signaux synthétiques 12
1.6 Spectre moyen en pseudo-accélération absolue relatif des 1000 signaux synthétiques 12
1.7 Exemple de modélisation de la structure BARC 14
1.8 Modèle rhéologique du comportement élasto-plastique 16
1.9 Exemple de la réponse du modèle rhéologique du comportement élasto-plastique 17
1.10 Modèle rhéologique du comportement endommageant 18
1.11 Exemple de la réponse du modèle rhéologique du comportement endommageant 19
1.12 Modèle rhéologique du comportement "Mixte" 19
1.13 Exemple de comportement dit "Mixte" 20
1.14 Principe de la méthode du spectre de capacité 24
1.15 Amortissement effectif pour le facteur de réduction de la courbe de demande issue dans ATC 40 25
1.16 Définition de la ductilité et de la ductilité appelée 28
1.17 Procédure de validation du coefficient de comportement 29

2.1 Démonstration de la solution du système linéaire équivalent suivant le déplacement maximal 43
2.2 Énergie dissipée visqueuse moyenne d'un oscillateur linéaire $\{f_0;\xi_0\}$ soumis aux 1000 bruits blancs $g_j(t)$. 46
2.3 Énergie dissipée visqueuse moyenne d'un oscillateur linéaire $\{f_0;\xi_0\}$ soumis aux 1000 signaux synthétiques du type Clough-Penzien $\gamma_j(t)$. 47
2.4 Comparaison de la relation force-déplacement des systèmes endommageant et linéaire équivalent 49
2.5 Comparaison de la relation force-déplacement des systèmes élastoplastique et linéaire équivalent 50
2.6 Marge de dimensionnement pour le signal sismique à bande étroite 52
2.7 Mise en œuvre du plan d'expérience numérique 52
2.8 Relation de la ductilité appelée μ versus le niveau du signal d'entrée λ . . . 55
2.9 Relation du déplacement maximale versus le déplacement déduit du signal d'entrée 58
2.10 Chute de fréquence équivalente liée à la rigidité sécante 59

2.11 Amortissement équivalent de l'oscillateur suivant le point de fonctionnement pour α_p=0 % pour différents comportement $\{\frac{f_0}{f_c};\chi\}$. 60
2.12 Amortissement équivalent de l'oscillateur suivant le point de fonctionnement pour α_p= 10 % pour différents comportement $\{\frac{f_0}{f_c};\chi\}$. 61
2.13 Amortissement équivalent de l'oscillateur suivant le point de fonctionnement pour α_p= 20 % pour différents comportement $\{\frac{f_0}{f_c};\chi\}$. 62
2.14 Procédure simplifiées de déterminer la ductilité appelée associée à un niveau λ donné 64
2.15 Comparaison des résultats en ductilité appelée pour le système avec $\{\frac{f_0}{f_c} = 1.0; \alpha = 10\%; \chi = 0.50\}$ 65
2.16 Comparaison des résultats en ductilité appelée pour le système canonique dont la rigidité initiale est faible ($\frac{f_0}{f_c} = 0.1$) 66
2.17 Comparaison des résultats en ductilité appelée pour le système canonique dont la rigidité initiale égale à la fréquence centrale ($\frac{f_0}{f_c} = 1.0$) 67
2.18 Comparaison des résultats en ductilité appelée pour le système canonique dont la rigidité initiale importante ($\frac{f_0}{f_c} = 2.0$) 68

3.1 Exemple de résolution fréquentielle 79
3.2 Exemple de la convergence des caractéristiques équivalentes en fonction des pas de temps 80
3.3 Nuage des points $\frac{f_{eq}}{f_0}$ et ξ_{eq} en fonction de la ductilité appelée μ pour les comportements avec $\{\frac{f_0}{f_c} = 1.0; \chi = 1.00\}$ et différentes valeurs de $\{\alpha_p\}$ 82
3.4 Nuage des points $\frac{f_{eq}}{f_0}$ et ξ_{eq} en fonction de la ductilité appelée μ pour les comportements avec $\{\frac{f_0}{f_c} = 1.0\}$ et différentes valeurs de $\{\alpha_p;\chi\}$ 83
3.5 Nuage des points $\frac{f_{eq}}{f_0}$ et ξ_{eq} en fonction de la ductilité appelée μ pour les comportements avec $\{\frac{f_0}{f_c} = 1.0\}$ et différentes valeurs de $\{\alpha_p;\chi\}$ 84
3.6 Nuage des points $\frac{f_{eq}}{f_0}$ et ξ_{eq} en fonction de la ductilité appelée μ 85
3.7 Courbe de $\frac{f_{eq}}{f_0}$ en fonction de la ductilité appelée μ 87
3.8 Courbe de ξ_{eq} en fonction de la ductilité appelée μ 88
3.9 Réponse du système non-linéaire et linéaire équivalent 91
3.10 Intensité de l'énergie de deux accélérogrammes 92
3.11 Spectre de Réponse et en transformée de Fourier 93
3.12 Fonction de l'inter-corrélation I(t) sur la durée du début jusqu'à l'instant t . 94
3.13 Notes moyennes des critères d'Anderson pour 1000 paires d'accélérations . 96
3.14 Schéma du chemin du mouvement sismique aux équipements 98
3.15 Spectres en Pseudo-Accélération non-linéaire et linéaire équivalent 99
3.16 Spectres en déplacement non-linéaire et linéaire équivalent 100
3.17 Spectres en Pseudo-Accélération non-linéaire et linéaire équivalent 101
3.18 Spectres en déplacement non-linéaire et linéaire équivalent 102
3.19 Spectres en Pseudo-Accélération non-linéaire et linéaire équivalent 103
3.20 Spectres en déplacement non-linéaire et linéaire équivalent 104

4.1 Structure des voiles SAFE 110
4.2 Chargement sismique utilisé dans l'essai SAFE 111
4.3 Comportement idéalisé de la relation force-déplacement des voiles SAFE soumis au signal nominal 115

4.4 Comparaison du comportement linéaire équivalent des voiles SAFE avec celui du système canonique . . . 116
4.5 Composantes testées pendant la campagne d'essai EPRI . . . 119
4.6 Comparaison du comportement linéaire équivalent des composants EPRI avec celui du système canonique dont χ =1.0 . . . 122
4.7 Structure du système de tuyauteries BARC . . . 123
4.8 Signaux de déformation en différents endroits sur la section F-F de la structure BARC . . . 125
4.9 Signaux de déformation à différents endroits sur la section D-D de la structure BARC . . . 126
4.10 Modèles BARC pour la réponse verticale . . . 128

A.1 Densité spectrale constante et tronquée G_0 . . . II
A.2 Densité spectrale Clough-Penzien avec troisième filtre passe-bas $G(\omega)$ . . . III
A.3 Densité spectrale déterminée pour un signal synthétique $\gamma(t)$ . . . III
A.4 Histogramme des fréquences centrales des signaux synthétiques . . . V
A.5 Variance de la réponse en déplacement de l'oscillateur linéaire de f_e = 3Hz et ξ_e =5% soumis aux 1000 bruits blancs . . . VII
A.6 Variance de la réponse en vitesse de l'oscillateur linéaire de f_e = 3Hz et ξ_e =5% soumis aux 1000 bruits blancs . . . VII
A.7 Densité spectrale de la réponse en vitesse de l'oscillateur linéaire au bruit blanc . . . IX
A.8 Illustration de l'erreur commise en déplacement pour un comportement élastoplastique . . . XII
A.9 Évolution des caractéristiques de l'oscillateur élasto-plastique . . . XV
A.10 Évolution des caractéristiques de l'oscillateur endommageant . . . XVI
A.11 Distribution des 1000 valeurs de $f_{e,j}$ suivant la loi Gaussienne . . . XIX
A.12 Modules $||H_1(f_{e,i,1},\xi_{e,i,1})||$ et $||H_2(f_{e,i,2},\xi_{e,i,2})||$ . . . XX
A.13 Fenêtre Gaussienne avec α=0.7 et taille de la largeur de 128 instants . . . XXII
A.14 Spectrogramme de la réponse non-linéaire du comportement élastoplastique XXII
A.15 Distribution des notes des critères . . . XXVI
A.16 Influence de la taille de fenêtre dans le résultat de la fréquence équivalente XXVIII
A.17 Démonstration du nombre des passage par zéro du comportement élastoplastique . . . XXIX
A.18 Zoom sur 4.5 - 5.5 (s) de l'exemple du comptage des passages par zéro . . . XXIX
A.19 Comportement idéalisé du matériau SA 333 Gr. 6 . . . XXXI
A.20 Coude en flexion dans son plan - mode ouverture . . . XXXII
A.21 Coude en flexion dans son plan - mode fermeture . . . XXXII

Liste des tableaux

1.1 Valeurs numériques pour la fabrication des signaux synthétiques 7
1.2 Statistique descriptive de la phase forte 10
1.3 Facteurs de pics 11
1.4 Fréquence centrale des signaux synthétiques (Hz) 11
1.5 Largeur de bande 11
1.6 Analyse modale du modèle BARC avec les éléments Tuyau3M dans le logiciel Code-Aster 15
1.7 Variables du comportement élasto-plastique 16
1.8 Comparaison des schémas d'intégrations numériques explicites et implicites 23

2.1 Résumé du plan d'expérience numérique 53
2.2 Valeur de λ_{max} pour tous les comportements considérés 54
2.3 Abréviations des cas de calcul de la méthode indirecte 65

3.1 Seuils des notes des critères d'Anderson 89
3.2 Critères d'Anderson 90

4.2 Caractéristiques équivalentes des voiles SAFE 113
4.3 Ductilité appelée et écrouissage des voiles SAFE 114
4.4 Valeurs des caractéristiques équivalentes EPRI 121
4.5 Valeurs des caractéristiques dynamiques pour les tests 3, 35 et 38 121
4.6 Valeurs des caractéristiques modales de la structure BARC 124
4.7 Position des capteurs de déformation BARC 125
4.8 Valeurs des résultats BARC 127
4.9 Comparaison des caractéristiques équivalentes des systèmes des tuyauteries EPRI pour $\mu = 2.90$ 130

A.1 Caractéristiques de la réponse de l'oscillateur linéaire avec f_e = 3Hz et ξ_e = 5% soumis aux 1000 bruits blancs VI
A.2 Valeur de la variance de la réponse en vitesse de l'oscillateur linéaire soumis au bruit blanc VIII
A.3 Influence de la façon de moyenner le module des fonctions de transfert sur la valeur d'amortissement identifiée XIX
A.4 Valeurs des coefficients pour différents comportements XXIV

Introduction

Il est admissible qu'une structure soumise à un fort séisme se comporte de façon non-linéaire. Sa réponse peut développer des courbes hystérétiques complexes qui sont représentés par des modèles tels que le modèle élastoplastique ou le modèle endommageant. En pratique, la méthode de calcul transitoire des réponses de tels modèles est rarement utilisée car d'une part les paramètres des modèles sont souvent difficiles à identifier et d'autre part la méthode consomme des ressources informatiques importantes et peut présenter des problèmes de convergence.

Dans ce contexte, les méthodes de linéarisation équivalente permettent d'obtenir des éléments des réponses non-linéaires sans effectuer de calcul transitoire complexe. Nous procédons à une analyse systématique de ces méthodes selon l'organisation suivante :

01 Au chapitre 01, nous plaçons la problématique de la linéarisation équivalente dans le contexte de l'ingénierie sismique. Pour cela, nous utilisons des mouvements sismiques synthétiques et examinons la réponse de systèmes à un degré de liberté (oscillateurs) munis d'une loi de comportement dont les paramètres permettent de modéliser les comportements élastoplastique et endommageant ainsi que toute pondération de ces deux modèles (modèle mixte). Nous passons en revue la méthode transitoire et de différentes méthodes de linéarisation existantes.

02 Au chapitre 02, nous passons en revue les critères de linéarisation adoptés par les différentes méthodes qui recherchent l'équivalence (1) du déplacement maximal ou (2) de la quantité d'énergie dissipée ou (3) de la force de rappel. Nos analyses montrent que ces trois critères ne sont pas pertinents et/ou efficaces. Nous montrons le rôle important, négligé par toutes les méthodes disponibles, du contenu fréquentiel respectif des signaux et du système dans la détermination de la ductilité appelée.

03 Au chapitre 03, nous introduisons une nouvelle méthode de linéarisation équivalente basée sur la fonction de transfert. Nous utilisons cette méthode pour explorer un plan d'expérience numérique dans lequel nous calculons les caractéristiques de fréquence et d'amortissement équivalents en fonction de la ductilité appelée pour différentes configurations caractérisées par (a) le rapport entre fréquence de l'oscillateur et fréquence centrale du signal excitateur, (b) la pente d'écrouissage et (c) le modèle de comportement qui varie de élastoplastique à endommageant. La pertinence de la méthode est évaluée au travers des critères d'Anderson, avec notamment un critère relatif au spectre transféré.

04 Au chapitre 04, nous examinons le comportement linéaire équivalente par fonction de transfert pour les structures réelles : les voiles en béton armé en cisaillement qui

ont fait l'objet des essais SAFE et les systèmes et composants de tuyauteries des essais BARC et EPRI. L'interprétation de ces résultats expérimentaux valide le résultat obtenu dans le chapitre 03. Nous concluons que le comportement linéaire équivalent d'un voile en béton armé en cisaillement correspond au modèle purement endommageant et celui du système de tuyauterie en acier au modèle purement élastoplastique.

05 Au chapitre 05, nous concluons et proposons des perspectives de développement, s'appuyant sur l'utilisation de la linéarisation équivalente par fonction de transfert.

Chapitre 1

Réponse sismique non-linéaire des structures

« *— De ta tige détachée,*
Pauvre feuille desséchée,
Où vas-tu ? — Je n'en sais rien.
...
Je vais où le vent me mène.
Sans me plaindre ou m'effrayer,
Je vais où va toute chose,
Où va la feuille de rose
Et la feuille de laurier. »

Antoine-Vincent Arnault - Extrait du poème "La feuille"

Le premier chapitre consiste à rappeler le lecteur sur quelques notions essentielles d'ingénierie sismique centrées sur l'évaluation de la réponse de structure en présence de non-linéarité. Tout d'abord, nous étudions comment se positionne cette tâche dans les missions d'ingénierie sismique. Ensuite, nous présenterons le chargement de type séisme en décrivant la procédure de fabrication des signaux synthétiques. Puis, nous rappelons comment est modélisée numériquement la structure à différentes échelles. En particulier, nous étudions dans ce travail de thèse le concept de système canonique modélisé par l'Oscillateur à 1 degré de liberté –ou *Single degree of freedom*– (1 DDL) qui permet notamment de considérer à la fois la plasticité et l'endommagement dans la structure. Dans un quatrième temps, nous aborderons la prise en compte de la non-linéarité dans la pratique d'ingénierie (aspect théorique ainsi qu'aspect normatif). Les difficultés rencontrées dans ces approches nous amèneront à étudier le concept de linéarisation équivalente. Enfin, nous présenterons la problématique principale de la thèse.

Sommaire

1.1 Missions de l'ingénierie sismique 3
1.2 Chargements de type séisme : Signaux synthétiques 3
1.2.1 Procédure de génération des signaux synthétiques 4
1.2.2 Densités spectrales 5
1.2.3 Application numérique 6
1.2.4 Caractéristiques des signaux synthétiques 9

1.3 Modélisation de la structure 13
1.3.1 Modèles aux éléments finis 13
1.3.2 Système à un degré de liberté 15
1.3.2.1 Comportement élastoplastique 15
1.3.2.2 Comportement endommageant 17
1.3.2.3 Comportement Mixte 18
1.4 Prise en compte de non-linéarités du comportement dans la pratique de l'ingénierie sismique 21
1.4.1 Introduction à la prise en compte des non-linéarités en ingénierie sismique 21
1.4.2 Méthode directe par un calcul transitoire non-linéaire 22
1.4.3 Méthodes de linéarisation équivalente 23
1.4.3.1 Méthode du Spectre de Capacité 23
1.4.3.2 Méthode du système linéaire de substitution 26
1.4.3.3 Conclusions sur les méthodes de linéarisation équivalente 27
1.4.4 Ductilité et coefficient de comportement : Aspect réglementaire . . 27
1.4.5 Méthodes initialement issues d'autres domaines 29
1.5 Conclusions et la problématique de la thèse 30
1.6 Références 31

1.1 Missions de l'ingénierie sismique

D'après l'Eurocode 8, et tout en reconnaissant que ces objectifs ne peuvent être atteints que sur une base probabiliste, la mission de l'ingénierie sismique est de s'assurer qu'en cas de séisme, les vies humaines sont protégées, les dommages sont limités et les installations cruciales pour la protection civile restent opérationnelles.

Les excursions structurelles au-delà du domaine de comportement élastique sont donc envisagées dès la conception. Ceci d'autant plus que la nouvelle version de l'Eurocode 8 en préparation précise que le dimensionnement est fait pour un certain niveau de séisme mais que, grâce aux dispositions de la norme, le non effondrement est assuré pour des évènements plus forts.

Dans la pratique la très grande majorité des ingénieurs utilisent une approche dite « en force » qui consiste à calculer le maximum de la réponse de la structure sous l'hypothèse forte du comportement élastique linéaire, et à tenir compte des excursions admises dans le domaine post-élastique en divisant les efforts calculés par le coefficient de comportement avant d'appliquer les critères de dimensionnement.

Il existe aussi des approches en déplacement qui s'appuient sur une représentation du comportement non-linéaire des structures (courbe de push-over (Pushover)) et visent à vérifier que les déformations restent admissibles. Ces approches nécessitent la détermination d'une fréquence équivalente et d'un amortissement équivalent obtenus par des méthodes que nous allons examiner et discuter.

Pour cela nous pouvons nous appuyer sur des résultats expérimentaux de structures soumises à des chargements très au-delà du dimensionnement, comme en particulier les campagnes d'essais de tuyauteries américaine EPRI en 1994, EPRI [1994] et indienne BARC en 2015 A. Ravikiran and Reddy [2015].

Pour appréhender numériquement la réponse sismique non linéaire des structures nous allons nous donner une base de signaux d'entrée obtenus comme des réalisations d'un processus aléatoire puis nous étudierons la réponse à ces signaux d'oscillateurs à comportement non-linéaire mixant les modèles de comportement élastoplastique et endommageant.

1.2 Chargements de type séisme : Signaux synthétiques

L'évaluation des sollicitations dans une structure soumise à un séisme nécessite en amont la caractérisation du chargement. En fonction de la méthode et du type d'analyse, le chargement sismique peut être représenté sous différentes formes. Pour la méthode modale spectrale, le chargement sismique se présente sous la forme de spectres de réponse, soit en déplacement relatif (Spectre en déplacement relatif –ou *Relative Displacement*– (SD)) soit en pseudo-accélération absolue (le Spectre en pseudo- accélération absolue –ou *Absolute Pseudo Acceleration*– (SPa)). Tandis que, le calcul transitoire nécessite la représentation temporelle du mouvement sismique, soit synthétique, soit réel. Dans ce travail, nous n'utilisons que les signaux synthétiques qui serons exposés dans cette section.

Le besoin de créer des signaux temporels pour certaines études d'ingénierie sismique

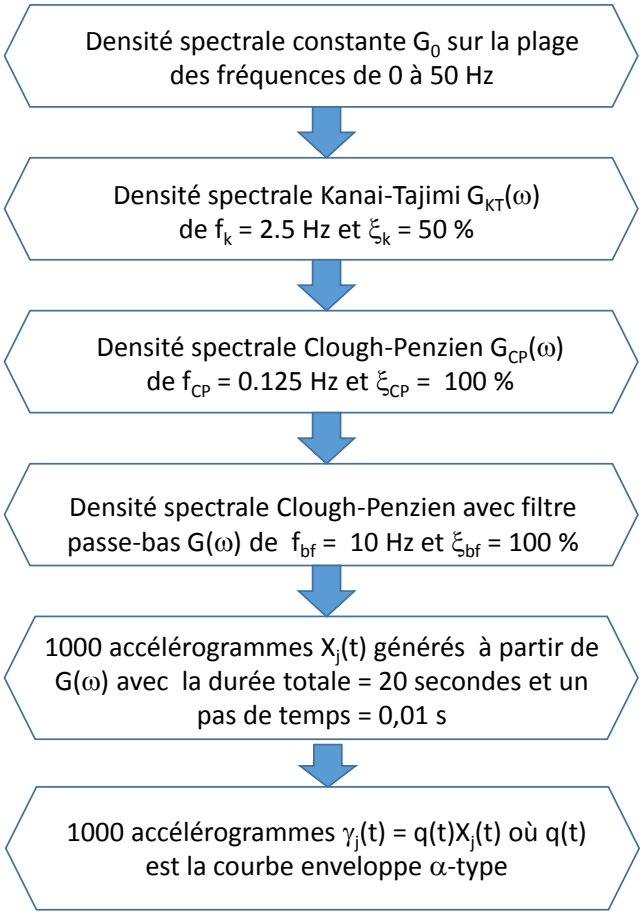


FIGURE 1.1 – Procédure de fabrication des signaux synthétiques

est bien présent. Un processus stochastique caractérisé par sa densité spectrale est souvent utilisé grâce notamment à sa simplicité de mise en place et sa meilleure adaptation à différentes situations, cf. Nazé [2004], Zentner [2015]. Le processus aléatoire le plus simple peut être un bruit blanc. Néanmoins plusieurs auteurs ont proposé des versions modifiées de ce processus en prenant en compte la non-stationnarité en fréquence et en temps des signaux réels et également une compatibilité aux spectres de dimensionnement.

Dans le cadre de ce travail, nous générons 1000 signaux synthétiques $\gamma_j(t)$ ($\gamma(t)$). La procédure de génération est schématisée sur la figure 1.1. Dans cette section, nous allons présenter la procédure de fabrication de ces signaux synthétiques $\gamma_j(t)$ à partir de la densité spectrale choisie, les différentes densités spectrales, l'application numérique et la validation de la procédure. Enfin, nous terminerons par les caractéristiques temporelles et fréquentielles telles que la durée de phase forte, la fréquence centrale, la représentation en spectre des signaux synthétiques.

1.2.1 Procédure de génération des signaux synthétiques

A partir de la densité spectrale de puissance $G(\omega)$, nous pouvons réaliser les processus stationnaires. La réalisation d'un tel processus, noté par $X(t)$, se définit de la façon sui-

vante :

$$X(t) = \sum_{k=1}^{k_{max}} a_k cos(\omega_k t + \phi_k) \tag{1.1}$$

En posant un pas de pulsation $\Delta\omega$ et la pulsation $\omega_k = k\Delta\omega$ où $k = 1..k_{max}$, nous pouvons alors déterminer a_k par cette relation :

$$a_k = \sqrt{2G(\omega_k)\Delta\omega} \tag{1.2}$$

Quant à la phase ϕ_k, elle est déterminée par un tirage aléatoire, autant de fois que la valeur k_{max}, des valeurs comprises entre $[0;2\pi[$ à densité de probabilité constante. Sous condition que la densité spectrale est constante en temps, un tel processus est ainsi défini comme stationnaire.

Cette présentation est considérée "très violente" au début du transitoire avec des valeurs importantes aux instants voisins de t = 0. Cela revient à dire que la phase forte arrive tout de suite. C'est la raison pour laquelle, nous appliquons une courbe enveloppe temporelle ($q(t)$) en amplitude du mouvement sismique. Cette courbe permet de manipuler la phase forte du mouvement en terme d'arrivée et de durée, ainsi que la densité d'Arias du signal. Nous avons utilisé la fonction α-type implémentée dans le logiciel Code-Aster Zentner et al. [2014]. Cette fonction est définie par Jennings et al. [1968] et s'écrit comme suit :

$$q(t) = \alpha_1 t^{(\alpha_2 - 1)} exp(-\alpha_3 t) \tag{1.3}$$

Où, les trois paramètres de la fonction α_1, α_2 et α_3 permettent d'ajuster la phase forte et l'intensité d'Arias.

Nous avons donc les signaux synthétiques $\gamma(t)$:

$$\gamma(t) = q(t)X(t) \tag{1.4}$$

Ce signal quasi-stationnaire $\gamma(t)$ maintient à peu près les caractéristiques d'un tel processus stationnaire.

Nous utilisons la procédure de fabrication des signaux à partir de la densité spectrale dont plusieurs auteurs ont proposé différents modèles avec des évolutions permettant d'approcher au mieux les enregistrements réels. Les différents modèles de la densité spectrale seront présentés dans le paragraphe suivant.

1.2.2 Densités spectrales

Densité spectrale Kanai-Tajimi $G_{KT}(\omega)$

Initialement, la densité spectrale de puissance du bruit blanc "idéal" est caractérisée par une densité spectrale (G_0) constante et tronquée sur une plage de fréquences préalalement définie vis à vis de l'intérêt de l'étude. La première approche du bruit blanc filtré utilisée en représentation temporelle du mouvement est celle de Tanai-Kajimi Tajimi [1960] qui dépend de la fréquence f_{kt} et de l'amortissement ξ_{kt}. La formule analytique de densité spectrale de Kanai-Tajimi ($G_{KT}(\omega)$) s'écrit :

$$
\begin{aligned}
G_{KT}(\omega) &= \frac{1+4\xi_{kt}^2\eta_{KT}^2}{(1-\eta_{KT}^2)^2+4\xi_{kt}^2\eta_{KT}^2}G_0 \\
\eta_{KT} &= \frac{\omega}{\omega_{kt}}
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Où, $\omega_{kt} = 2\pi f_{kt}$ est la pulsation de la fréquence du modèle de Kanai-Tajimi. La fréquence f_{kt} et l'amortissement ξ_{kt} peuvent être interprétés de la façon suivante : le modèle de Kanai-Tajimi correspond à un signal bruit blanc "idéal" d'excitation au niveau du rocher (*bed rock* en anglais) propagé au travers de la couche de sol (*soil deposit layer* en anglais) jusqu'à la station d'enregistrement. Ainsi, ces paramètres sont calibrés en fonction des enregistrements réels de la zone étudiée Rofooei et al. [2001].

Densité spectrale de Clough & Penzien $G_{CP}(\omega)$

Le modèle de Kanai-Tajimi $G_{KT}(\omega)$ pose des problèmes en ce qui concerne le contenu à basse fréquence qui conduit à avoir la vitesse et le déplacement, calculés par double intégration, non nuls à la fin du transitoire Zentner [2015]. Le contenu à basse fréquence se présente en temporel par une déviation qui augmente la valeur maximale des signaux et ainsi le ratio $\frac{a^{max}d^{max}}{(v^{max})^2}$ devient trop important et non-réaliste. C'est la raison pour laquelle, Clough et Penzien ont proposé d'appliquer un filtre de type passe-haut Clough and Penzien [1975]. La densité spectrale de Clough & Penzien ($G_{CP}(\omega)$) s'écrit comme suit :

$$
\begin{aligned}
G_{CP}(\omega) &= H_{CP}(\omega)\overline{H_{CP}(\omega)}G_{KT}(\omega) \\
H_{CP}(\omega) &= \frac{\eta_{CP}^2}{(1-\eta_{CP}^2)+2j\xi_{cp}\eta_{CP}} \\
\eta_{CP} &= \frac{\omega}{\omega_{cp}}
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Où, $\omega_{cp} = 2\pi f_{cp}$ est la pulsation correspondant à la fréquence du filtre f_{cp} (*corner frequency* en anglais). Les deux paramètres du filtre f_{cp} et ξ_{cp} sont également déterminés au travers des études sur les enregistrements réels. $\overline{H_{CP}}(\omega)$ caractérise la valeur conjuguée du nombre complexe $H_{CP}(\omega)$.

Densité spectrale de Clough & Penzien avec filtre passe-bas $G(\omega)$

Pour limiter le contenu à haute fréquence, nous appliquons un troisième filtre passe-bas défini par les 2 paramètres f_{bf} et ξ_{bf} dont la densité spectrale de puissance ($G(\omega)$) s'écrit :

$$
\begin{aligned}
G(\omega) &= H(\omega)\overline{H(\omega)}G_{CP}(\omega) \\
H(\omega) &= \frac{1}{(\omega^2-\omega_{bf}^2+2j\xi_{bf}\omega_{bf}\omega} \\
\omega_{bf} &= 2\pi f_{bf}
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

1.2.3 Application numérique

Pour l'application numérique, nous utilisons les valeurs numériques données dans le tableau 1.1. Ces valeurs sont calibrées pour avoir des signaux cohérents avec ceux utilisés par EDF pour lesquels il y a deux caractéristiques principales :

TABLEAU 1.1 – Valeurs numériques pour la fabrication des signaux synthétiques

Grandeur	Notation	Valeurs	Unité
Pas de fréquence	Δf	0.05	Hz
Nombre de sinus	k_{max}	1000	
Plage de fréquences	$f_{min} - f_{max}$	0.05-50	Hz
Filtre de Kanai-Tajimi	f_{kt}	2.5	Hz
	ξ_{kt}	50	%
Filtre de Clough-Penzien	f_{cp}	0.125	Hz
	ξ_{cp}	100	%
Filtre passe-bas	f_{bf}	10	Hz
	ξ_{bf}	100	%
Courbe enveloppe α-type	α_1	1.33	
	α_2	2.50	
	α_3	0.50	

01 La fréquence de coupure du spectre en pseudo-accélération absolue est d'environ 20 Hz ;

02 La Valeur maximale de l'accélération temporelle, ou *Peak Ground Acceleration* en anglais (PGA) se retrouve à la fréquence de 1 Hz du spectre à 5% d'amortissement.

Nous avons réalisé 1000 processus stationnaires $X_j(t)$ ($X(t)$), avec $j = 1...1000$, à partir de la densité spectrale de Clough-Penzien avec filtre passe-bas sans y appliquer la courbe enveloppe α-type ($q(t)$) décrite par l'équation 1.3. Ensuite, nous y appliquons cette courbe d'enveloppe α-type pour obtenir 1000 signaux quasi-stationnaires $\gamma_j(t)$ ($\gamma(t)$) de la façon suivante :

$$\gamma_j(t) = q(t)X_j(t) \tag{1.8}$$

Nous avons déterminé la valeur de la moyenne et des invariants pour 1000 signaux $X_j(t)$ mais seulement la moyenne pour 1000 signaux $\gamma_j(t)$.

Moyenne nulle

Soit à l'instant t quelconque, notons $\bar{X}(t)$ la moyenne des N réalisations $X_j(t)$. Cette grandeur est déterminée par la relation :

$$\bar{X}(t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} X_j(t) \tag{1.9}$$

Où, $X_j(t)$ est la j-ème réalisation.

Nous traçons la moyenne pour tous les instants du transitoire pour 1000 signaux stationnaires $X_j(t)$ et la présentons sur la figure 1.2 et également pour 1000 signaux quasi-stationnaires $\gamma_j(t)$ comme présenté dans la figure 1.3. Sur les deux figures, la moyenne au cours du transitoire est tracé avec le premier signal parmi 1000 signaux de chaque groupe.

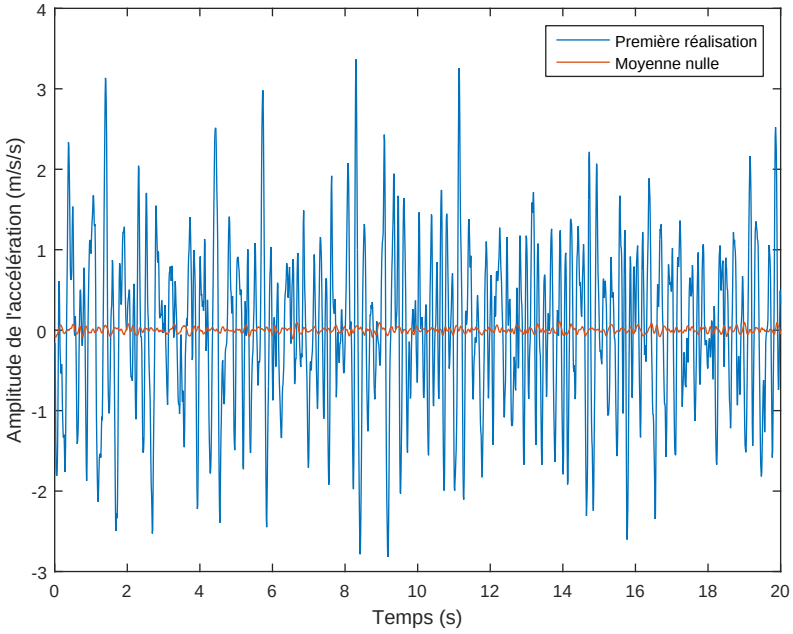


FIGURE 1.2 – Moyenne des 1000 signaux stationnaires $X_j(t)$: La valeur moyenne (courbe rouge) est déterminée à partir des 1000 signaux $X_j(t)$ à partir de la formule 1.9

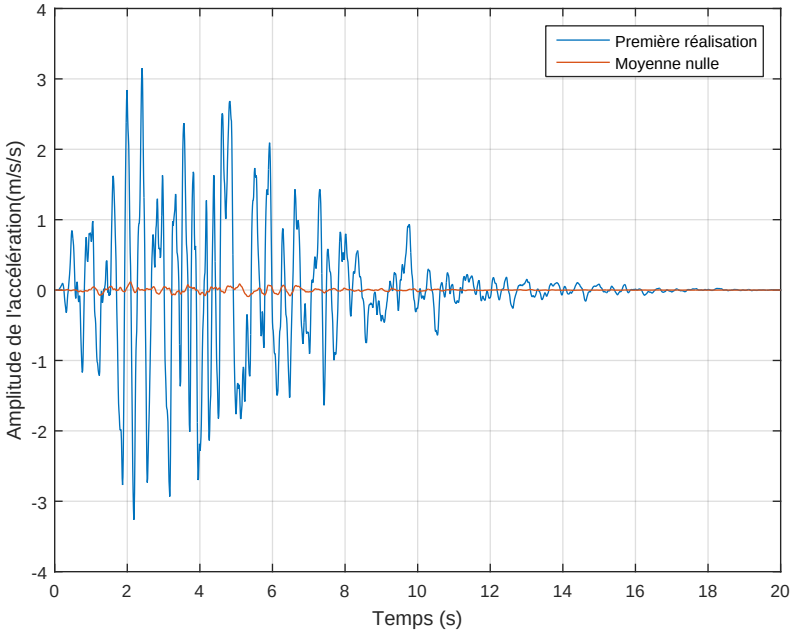


FIGURE 1.3 – Moyenne des 1000 signaux quasi-stationnaires $\gamma_j(t)$: La valeur moyenne (courbe rouge) est déterminée à partir des 1000 signaux $\gamma_j(t)$ à partir de la formule 1.9

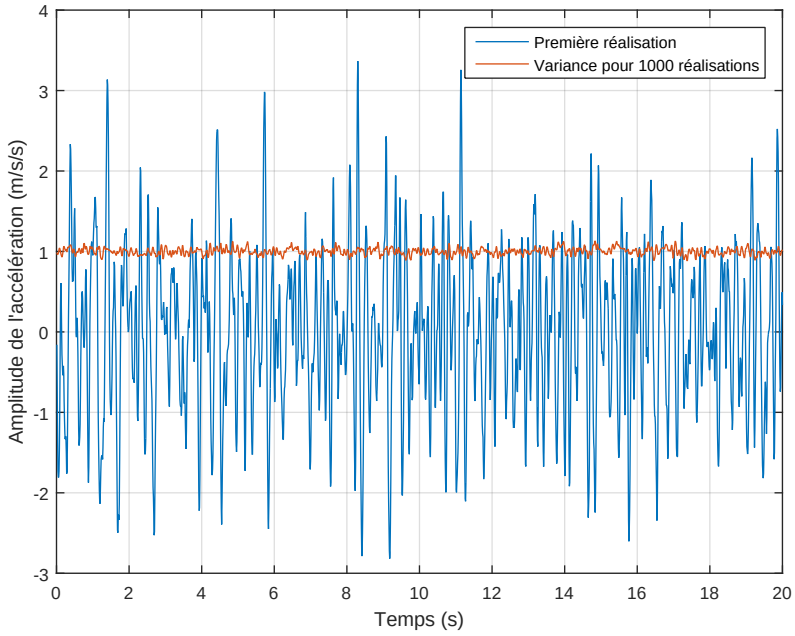


FIGURE 1.4 – Variance des 1000 réalisations sans courbe d'enveloppe : La valeur de l'écart-type (courbe rouge) est déterminée à partir des 1000 signaux $X_j(t)$ à partir de la formule 1.10

.

Écart-type et variance

L'écart-type ($\sigma_X(t)$) à l'instant t quelconque est noté $\sigma_X(t)$. Pour un processus à moyenne nulle, la variance ($\sigma_X^2(t)$) est alors déterminée par la formule 1.10 qui devient 1.11 pour un processus stationnaire.

$$\sigma_X^2(t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} X_j^2(t) \tag{1.10}$$

$$\sigma_X^2(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k_{max}} a_k^2 \tag{1.11}$$

Nous présentons sur la figure 1.4 le résultat obtenu à partir de 1000 signaux $X_j(t)$ tel que $\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k_{max}} a_k^2 = 1$. Nous retrouvons bien la valeur théorique égale à 1.

1.2.4 Caractéristiques des signaux synthétiques

Une fois que la procédure de fabrication des signaux synthétique a pu être validée, nous présentons dans ce paragraphe la description temporelle ainsi que fréquentielle des 1000 signaux synthétiques $\gamma_j(t)$. Les caractéristiques temporelles sont le début et la fin de la phase forte ainsi que les facteurs de pics. Dans le domaine fréquentiel, les caractéristiques sont alors la fréquence centrale, la largeur de bande et les facteurs de pics. Enfin, nous terminerons par leur représentation sous forme de spectre.

TABLEAU 1.2 – Statistique descriptive de la phase forte (unité : secondes)

Statistiques	Début ($t_{0.05}$)	Fin ($t_{0.95}$)	Durée ($t_{0.05} - t_{0.95}$)
Moyen	1,42	7,75	6,34
Médian	1,40	7,76	6,34
Écart-type	0,24	0,48	0,56
Min	0,80	6,28	4,70
Max	2,33	9,37	8,16

Phase forte

Chaque mouvement sismique contient une certaine quantité d'énergie qui s'exprime par l'intensité d'Arias (Intensité d'Arias du signal sismique –ou *Arias intensity*– (IA)). Le début de la durée de phase forte indique l'arrivée de la partie contenant la plupart de l'énergie du signal. La durée de phase forte est ainsi définie par $t_{0.95} - t_{0.05}$ soit la fenêtre décrite entre le début $t_{0.05}$ et la fin $t_{0.95}$, qui sont déterminés de la façon suivante :

$$\begin{aligned} t_{0.05} &: \frac{\int_0^{t_{0.05}} a(t)^2 dt}{\text{IA}} = 0.05 \\ t_{0.95} &: \frac{\int_{0.95}^{Tend} a(t)^2 dt}{\text{IA}} = 0.05 \\ \text{IA} &= \int_0^{Tend} a(t)^2 dt \end{aligned} \tag{1.12}$$

Où, IA représente l'intensité d'Arias du signal sismique $a(t)$.

Pour 1000 signaux synthétiques $\gamma_j(t)$, la durée de phase est décrite statistiquement dans le tableau suivant (cf. tableau 1.2).

Facteur de pics

Nous avons déterminé les facteurs de pics en accélérogrammes, par la formule $\frac{\text{PGA}}{\sigma_a}$, où pour chaque signal $\gamma_j(t)$, PGA est la valeur du maximum et σ_a est l'écart-type calculé par la formule $\sigma_a = \frac{\sum_{n=1}^{N} \gamma_j^2(t_n)}{N}$ où N est le nombre des instants du vecteur d'accélérogramme pendant la phase forte. Nous avons également appliqué la même procédure à la vitesse déduite du signal $\gamma_j(t)$. Nous en avons déduit la grandeur adimensionnelle $\frac{a_{max} d_{max}}{v_{max}^2}$ dont les valeurs s'avèrent comparables à celles de signaux réels.

Les résultats sont tabulés dans le tableau 1.3. Il apparait que la valeur d_{max} n'est pas fiable à cause des filtres appliqués en construisant le signal du déplacement par double intégration. Ainsi, la grandeur $\frac{a_{max}}{v_{max}}$, de l'unité s^{-1}, est plus fiable qui caractérise le contenu fréquentiel prédominant dans le signal temporel. Pour les signaux réels listés dans Betbeder-Matibet [2003], le ratio $\frac{a_{max}}{v_{max}}$ est compris entre 2.5-7.5 (s).

TABLEAU 1.3 – Facteurs de pics

Grandeurs	$\frac{PGA}{\sigma_a}$	$\frac{PGV}{\sigma_v}$	$\frac{a_{max}d_{max}}{v^2_{max}}$	$\frac{a_{max}}{v_{max}}$
Unité				s^{-1}
Moyen	3.17	2.87	8.68	7.16
Médian	3.09	2.81	7.91	6.92
Écart-type	0.43	0.50	4.16	1.87
Min	2.21	1.79	1,73	3.21
Max	4.80	5.33	40.30	15.09

TABLEAU 1.4 – Fréquence centrale des signaux synthétiques (Hz)

	Par nombre de passages par zéros	Par moments spectraux
Moyen	3,12	3,18
Médian	3,11	3,18
Écart-type	0,35	0,17
Max	4,40	3,84
Min	2,18	2,64

Fréquence centrale et largeur de bande

Nous avons disposé de deux méthodes de détermination de la fréquence centrale du signal temporel : (01) par moments spectraux et (02) par nombre de passages par zéro. La description complète de ces deux méthodes est présentée dans l'annexe A.2. Les résultats sont présentés dans le tableau 1.4. Nous trouvons que ces deux méthodes donnent un résultat similaire. Finalement, la valeur de fréquence centrale par la densité spectrale est retenue.

Par analogie, nous avons déterminé la largeur de bande pour les signaux synthétiques (cf. tableau 1.5). De ces résultats, les signaux synthétiques sont de large-bande.

Spectre de signaux synthétiques $\gamma_j(t)$

Nous avons déterminé le spectre de réponse pour 1000 signaux synthétiques quasi-stationnaires $\gamma_j(t)$, avec $j = 1...1000$, et tracé le spectre moyen en déplacement (Ref. figure 1.5) et en pseudo-accélération absolue (Ref. figure 1.6) sur une échelle log-log. L'évaluation des réponses linéaires est effectuée par un calcul élastique transitoire à l'aide d'un schéma d'intégration β-Newmark.

.

.

TABLEAU 1.5 – Largeur de bande

Statistique	Largeur de bande
Moyen	0,63
Médian	0,63
Écart-type	0,03
Min	0,53
Max	0,73

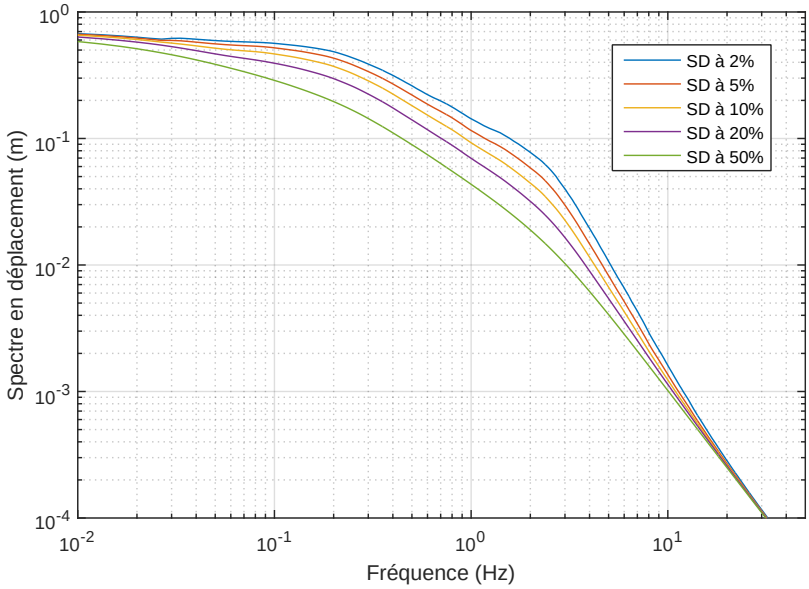


FIGURE 1.5 – Spectre moyen en déplacement relatif des 1000 signaux synthétiques $\gamma_j(t)$

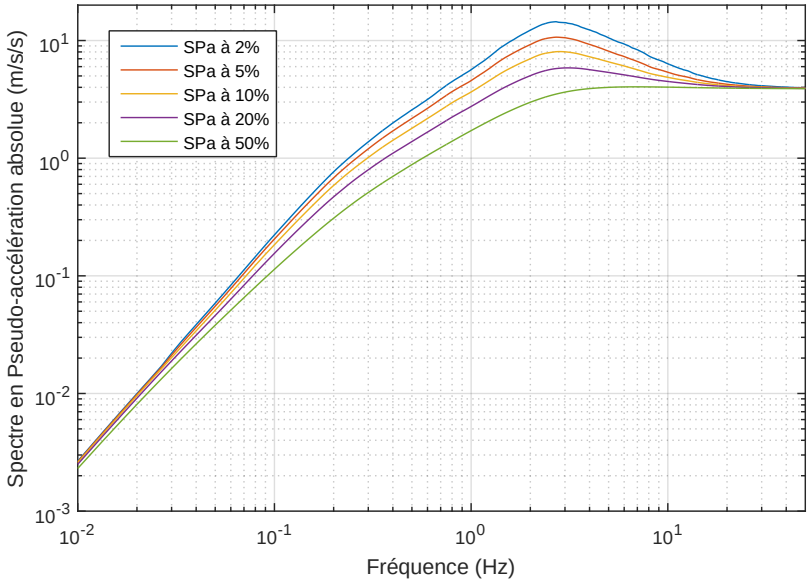


FIGURE 1.6 – Spectre moyen en pseudo-accélération absolue des 1000 signaux synthétiques $\gamma_j(t)$

1.3 Modélisation de la structure

L'arrivée des mouvements sismiques à la base de la structure engendre une vibration dans les différentes parties de la structure par le principe de force inertielle des masses réparties dans la structure. Le principe d'évaluation de la réponse de la structure soumise à un phénomène sismique se base sur l'effet de la force inertielle appliquée à cette structure. Ainsi, le problème initié par ce phénomène est complètement défini par la modélisation du signal d'entrée et de la structure impactée avec les lois de comportement adaptées. Cette remarque exclut le problème de l'interaction sol-structure qui nécessite la connaissance du sol sur lequel repose la structure, ce qui ne sera pas traité dans le cadre de ce travail de thèse.

1.3.1 Modèles aux éléments finis

En milieu industriel, la structure est généralement modélisée aux éléments finis. Cette méthodologie consiste à discrétiser la structure en éléments de faible taille comparée aux dimensions caractéristiques de la structure. Le principe est de résoudre l'équation d'équilibre des forces résultant aux nœuds du maillage sous forme matricielle. De ce fait, l'équation de la dynamique s'écrit sous forme matricielle de la manière suivante :

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{u}(t)} + \underline{\underline{C}}\,\underline{\dot{u}(t)} + \underline{F} = -\underline{\underline{M}}\,\underline{\Delta}\,\gamma(t) \tag{1.13}$$

Où : $\underline{\underline{M}}$ et $\underline{\underline{C}}$ sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de force. Le vecteur $\underline{F}$ contient la force aux nœuds. Le vecteur $\underline{\Delta}$ est appelé vecteur directionnel du séisme dont les composantes valent 1 si le degré de liberté est une translation de même direction que le séisme, dans le cas contraire la valeur prise est zéro. Par définition, toutes les composantes correspondantes aux rotations sont à zéro. $\gamma(t)$ répresente le signal sismique à la base de la structure suivant une direction. La vecteur de force $\underline{F}$ peut s'écrire en fonction du déplacement $\underline{u(t)}$ tel que $\underline{F} = \underline{\underline{K(u)}}\,\underline{u(t)}$. La matrice de rigidité $\underline{\underline{K(u)}}$ est constante dans le cas élastique et varie en fonction des variables interne et observable en cas de non-linéarité.

En fonction de l'objectif de l'étude, la structure est modélisée de façon différente suivant un maillage grossier ou fin, un comportement de la structure plus ou moins compliqué et différentes méthodes de résolution des équations.

Quant au maillage, en général, plus il est fin, plus le résultat de simulation sera précis. Il est important de choisir également le type d'éléments de modélisation ainsi que leur taille. Les structures en génie civil sont souvent modélisées par des éléments "structuraux" tels que des membranes, coques, plaques, poutres ou barres. Or, les éléments volumiques sont utiles dans certains cas exceptionnels, comme par exemple pour le sol. De plus, il est à noter qu'un maillage plus fin permet d'éviter les problèmes de non-convergence numérique de l'algorithme de résolution non-linéaire en cas de calcul transitoire non-linéaire. Un choix intelligent de la taille du maillage est très important dans la pratique d'ingénierie. Il faut donc prévoir des études de sensibilité au maillage sur le résultat obtenu afin d'avoir conscience de l'erreur commise.

Quant au comportement utilisé en modélisation aux éléments finis, plusieurs modèles ont été proposés par plusieurs auteurs, et cela aussi bien pour le cas linéaire ou bien

non-linéaire. Ces comportements prennent en compte différents phénomènes physiques intervenant à l'échelle microscopique du matériau constituant la structure. Le choix du comportement adéquat peut être qualifié en fonction de :

- La fiabilité du modèle vis-à-vis de la réponse expérimentale,
- La robustesse en terme de temps de calcul et d'assurance de la convergence,
- Les paramètres du modèles estimés à partir des résultats expérimentaux,
- La richesse du modèle représentant au mieux les phénomènes physiques.

En pratique, les lois de comportement sont généralement implantées dans les codes de calcul industriels. Il est ainsi d'autant plus important de choisir un comportement adapté à l'étude : un comportement linéaire sera suffisant pour une analyse modale alors qu'un comportement non-linéaire sera requis pour des cas de chargement extrêmes présentant un risque d'endommagement.

Concernant la méthode de résolution, il en va de même que pour la modélisation et le comportement utilisés. La méthode de résolution est en effet un aspect numérique qui peut conduire à des problèmes bien particuliers, tel que, la non-convergence.... Avec l'évolution de la puissance des ordinateurs, les calculs de plus en plus importants (par exemple : augmentation du nombre de degrés de liberté, prise en compte de comportement non-linéaire...) sont devenus réalisables. Néanmoins la limitation de ces calculs en ingénierie est engendrée par une consommation importante en terme de mémoire et de temps de calcul. A titre d'exemple, la simulation de la structure de l'essai BARC comportant près de 8 736 dégrées de liberté et intégrant la loi de comportement de Chaboche Chaboche [1991], effectuée au sein d'EDF R& D (MPI : 2 nodes – 16 CPU), a duré 12 heures pour 60 secondes de simulation avec un pas de temps de 2 microsecondes.

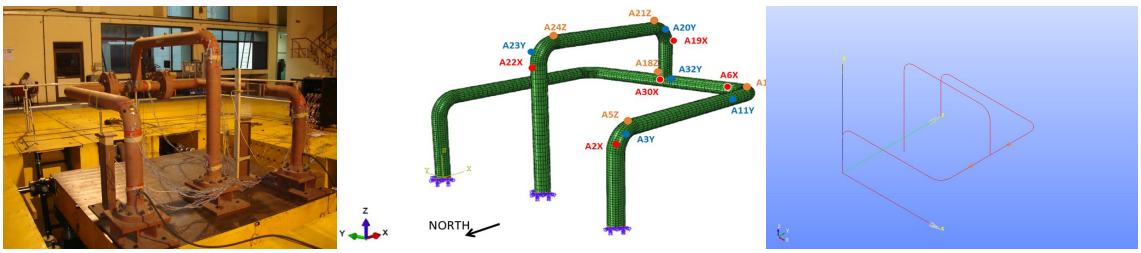


FIGURE 1.7 – Exemple de modélisation de la structure BARC : (a) Structure BARC dans le laboratoire Bhabha, Inde ; (b) Modélisation de BARC par les éléments coques (modèle repris du benchmark MECOS) ; (c) Modélisation de BARC par les éléments Tuyau3M dans le Code-Aster

En bref, la modélisation aux éléments finis permet une précision satisfaisante pour l'ingénierie des problèmes complexes. La précision est néanmoins dépendante du nombre d'éléments finis, qui est lié au nombre des modes de vibration pris en compte dans la réponse, ainsi que du comportement du matériau pris en compte. Dans la pratique, cela conduit à une réflexion dans la pratique consistant en la détermination du nombre minimal de modes de vibration suffisant afin d'assurer les objectifs requis en terme de précision ... Cette remarque a par ailleurs été soulignée par Corvez et al. [2013] dans la pratique

TABLEAU 1.6 – Analyse modale du modèle BARC avec les éléments Tuyau3M dans le logiciel Code-Aster

		Facteur de participation			% Masse modale effective		
Mode	Fréquence (Hz)	OX	OY	OZ	OX	OY	OZ
1	3,86	-4,2	0,0	28,7	2%	0%	73%
2	5,87	0,0	30,0	0,0	2%	79%	73%
3	12,18	0,0	3,1	0,0	2%	80%	73%
4	18,78	31,0	0,0	3,0	86%	80%	74%
5	26,12	0,0	5,9	0,0	86%	83%	74%
6	31,48	-0,6	0,0	5,4	86%	83%	76%
7	38,46	0,0	-1,3	0,0	86%	84%	76%
8	48,83	-3,5	0,0	2,1	88%	84%	76%
9	55,65	0,0	-9,4	0,0	88%	91%	76%
10	59,99	4,2	0,0	3,3	89%	91%	77%

du calcul sismique avec application de l'Eurocode 8 en exploitant : "le bon modèle est un modèle utile". Ce nombre de modes de vibration peut être estimé en fonction de la masse modale effective par rapport à la direction du séisme.

Prenons l'exemple de la structure BARC du système de tuyauteries, la structure est présentée sur la partie à gauche de la figure 1.7. Pour le modèle Tuyau3M dans le logiciel Code-Aster, nous avons fait une analyse modale. Le résultat de cette analyse est détaillé dans le tableau 1.6.

Nous avons constaté dans le tableau 1.6 que la masse modale effective du premier mode est de 73% dans la direction OZ et n'augmente pas dans les dix premiers modes. Cela veut dire qu'il est possible de considérer la réponse en OZ (en vertical) comme étant celle d'un oscillateur à 1 DDL.

En bref, dans la pratique, il est possible de représenter la structure comme un oscillateur à 1 DDL avec un comportement macroscopique adapté. Ceci fait l'objet du paragraphe suivant.

1.3.2 Système à un degré de liberté

Nous considérons successivement le cas du comportement élastoplastique, celui du comportement endommageant puis le comportement "Mixte".

1.3.2.1 Comportement élastoplastique

Le modèle rhéologique du comportement élasto-plastique avec écrouissage se présente sous la forme d'un ressort en série avec un système composé d'un autre ressort en parallèle d'un patin de type Coulomb.

A partir de ce modèle rhéologique, le déplacement global $u(t)$ est la somme du déplacement élastique $u_e(t)$ et du déplacement plastique $u_p(t)$ (soit celui du patin Fy, soit celui du ressort k^*) (cf. figure 1.14).

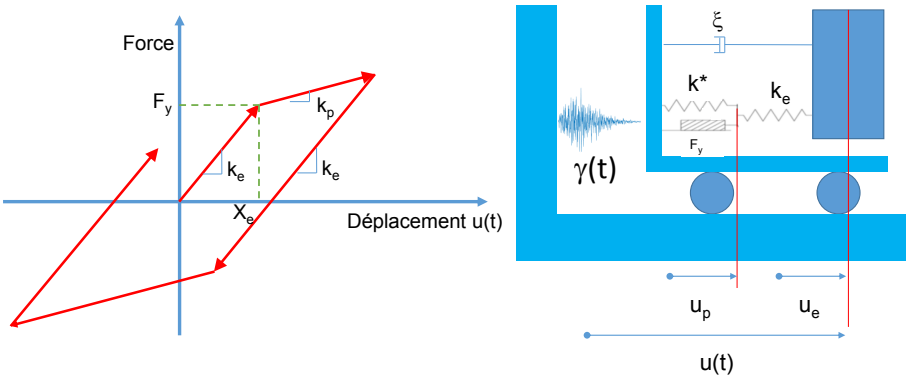


FIGURE 1.8 – Modèle rhéologique du comportement élasto-plastique

TABLEAU 1.7 – Variables du comportement élasto-plastique

Variable d'état		Variable associée
Observable	Interne	
u		$F = k_e(u - u_p)$
	$\alpha = u_p$	$X = k^* u_p$

$$u(t) = u_p(t) + u_e(t) \tag{1.14}$$

Les variables du comportement sont inscrites dans le tableau 1.7.

Le comportement se caractérise par un régime élastique, plastique puis la décharge élastique et se décrit thermodynamiquement par la fonction de charge $f(F,X) = |F - X| - F_y \leq 0$. Nous avons donc :

$f(F,X) < 0$: régime élastique

$\dot{f}(F,X) < 0$: décharge élastique

$f(F,X) = 0$ et et $\dot{f}(F,X) = 0$: écoulement plastique

Où : F et X sont les variables associées définies dans le tableau 1.7. A partir de la loi thermodynamique écrite à l'aide des variables, nous pouvons démontrer que le domaine élastique reste toujours égal à $2F_y$ et l'écoulement plastique est caractérisé par l'incrément du déplacement plastique $\dot{u}_p = \frac{k^*}{k^* + k_e}\dot{u}$.

Dans le cadre de ce travail, nous y rajouterons un amortisseur dont la viscosité C est convertie en amortissement réduit $\xi = \frac{C}{2M\omega}$ qui est fixé à 5 % pour notre étude. A ce stade, nous devons vérifier numériquement l'inégalité de Clausius-Duhem pour ce modèle élasto-plastique. Or, cette inégalité est analytiquement vérifiée pour un amortisseur visqueux car $\Phi_c = Force_{visqueuse} * \dot{u} = C\dot{u}^2 \geq 0$. Il faut donc vérifier numériquement que $\Phi = F\dot{u}_p - X\dot{\alpha} \geq 0$. A titre d'exemple, dans la figure 1.8, nous présentons les réponses de l'oscillateur élasto-plastique dont la fréquence initiale f_0 est égale à 3 Hz et l'amortissement réduit $\xi_0 = 5\%$ soumis à un chargement sismique synthétique (cf. 1.2.1). Le seuil d'élasticité est fixé à 0.027 (m).

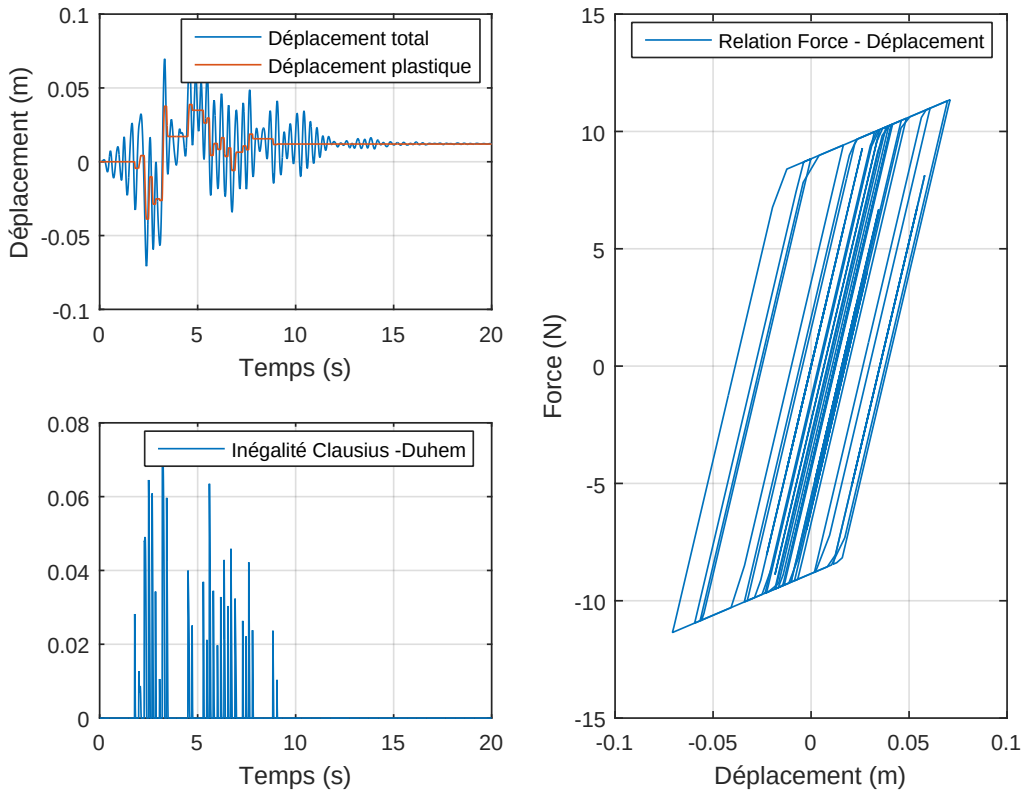


FIGURE 1.9 – Exemple de la réponse du modèle rhéologique du comportement élasto-plastique

1.3.2.2 Comportement endommageant

Ce comportement prend en compte l'état d'endommagement dans la structure. Il consiste en régime élastique, post-élastique et décharge élastique. Pour les 2 premiers régimes, le comportement est identique au comportement élasto-plastique si nous considérons le régime post-élastique similaire au régime plastique. Mais, le régime de décharge élastique est associé à la rigidité sécante qui relie l'origine et le déplacement du moment de décharge. Cela veut dire qu'il n'y a pas de déplacement résiduel à la fin du chargement. Or, la rigidité est diminuée chaque fois que l'oscillateur atteint son déplacement maximal précédemment historique. La structure reste élastique après le déplacement maximal historique. Cela impose que l'énergie dissipée sera limitée dans ce modèle.

Nous avons trouvé que ce comportement est similaire de manière mascroscopique au comportement d'un voile en cisaillement.

Ce comportement endommageant correspond à celui développé par Mazars [1984] avec les paramètres particuliers suivante $A = \frac{k_p}{k_e}$ and $B = 0$. Dans son modèle, l'état d'endommagement est représenté par le scalaire D qui permet l'évaluation de la force temporelle $F(t) = (1 - D(t))k_e u(t)$. Cette variable $D(t)$ peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} D(t) &= \left(1 - \frac{k_p}{k_e}\right)\left(1 - \frac{Y_0}{Y(t)}\right) \\ Y(t) &= max(X_e; max(|u(t_i)|)/0 \leq \forall t_i \leq t) \\ Y_0 &= X_e \end{aligned} \tag{1.15}$$

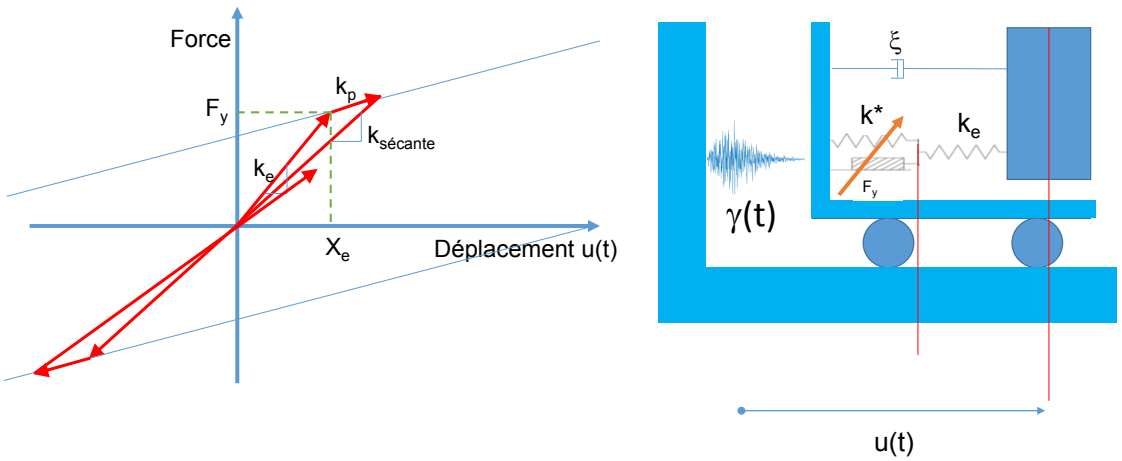


FIGURE 1.10 – Modèle rhéologique du comportement endommageant

Où, la variable interne Y(t) contrôle l'état d'endommagement dans la structure. k_e et k_p sont les rigidités initiale et post-élastique. X_e est le seuil d'élasticité.

Nous avons utilisé la formule 1.15 pour notre travail. Mazars a démontré que son comportement est thermodynamiquement décrit en justifiant l'inégalité Clausius–Duhem Mazars et al. [2015]. A titre d'exemple, nous présentons la réponse d'un oscillateur à comportement endommageant (de fréquence initiale f_0 = 3 Hz et d'amortissement réduit ξ_0 = 5%) soumis à un chargement sismique synthétique. Le seuil d'endommagement est fixé à 0.027 (m).

1.3.2.3 Comportement Mixte

Afin de considérer les deux phénomènes de la plasticité et l'endommagement dans la structure avec le découplage entre 2 phénomènes, nous avons introduit le comportement "Mixte" qui consiste en un assemblage en parallèle d'un certain nombre de deux comportements élasto-plastique et endommageant.

Tous les modèles élasto-plastiques et endommageants possèdent la même rigidité initiale. Ainsi, la rigidité totale élastique initiale est la somme de celle de tous les modèles. Nous pouvons alors introduire un paramètre du modèle, χ, qui représente le pourcentage du nombre des modèles élasto-plastiques par rapport au nombre total du modèle "Mixte".

- Si $\chi = 1$, le modèle mixte devient le comportement élasto-plastique dont la rigidité de décharge est maximale et égale à la rigidité initiale.
- Si $\chi = 0$, le modèle mixte devient le comportement endommageant dont la rigidité de décharge est minimale et égale à la rigidité sécante.
- Si $0 \leq \chi \leq 1$, la rigidité du modèle mixte à la décharge est comprise entre la rigidité initiale et la rigidité sécante.

Le comportement du modèle mixte contient toutes les variables du comportement élasto-plastique et endommageant. La caractéristique thermodynamique n'est pas dé-

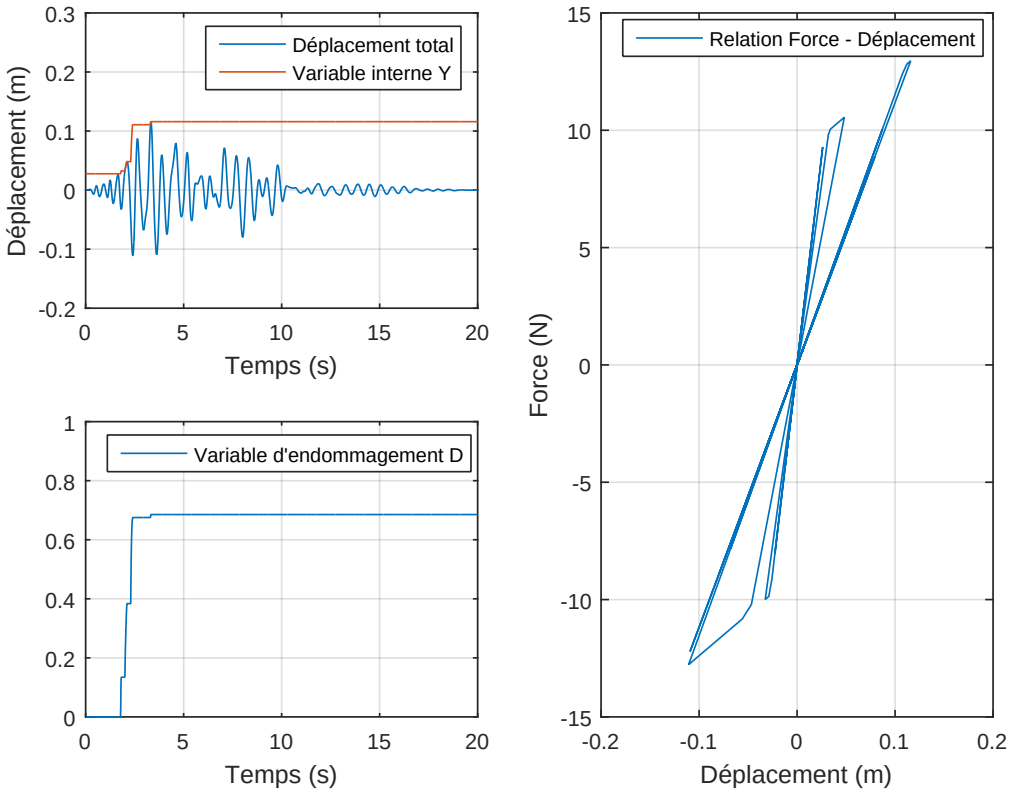


FIGURE 1.11 – Exemple de la réponse du modèle rhéologique du comportement endommageant

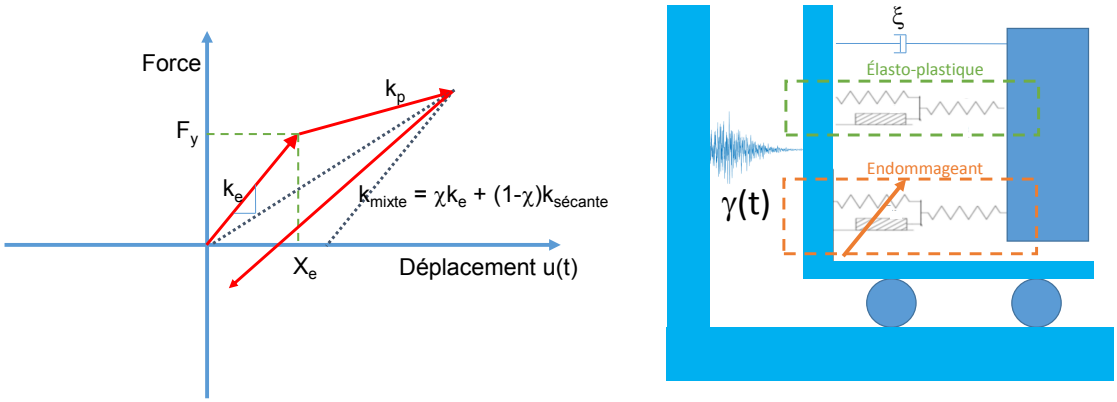


FIGURE 1.12 – Modèle rhéologique du comportement "Mixte"

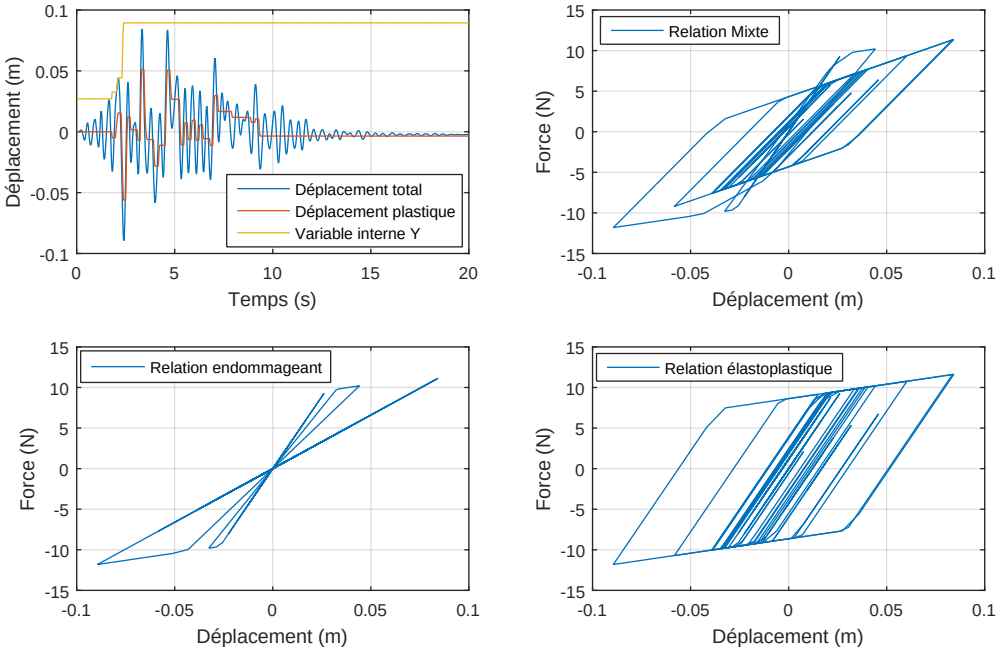


FIGURE 1.13 – Exemple de comportement dit "Mixte"

montrée car ce modèle est simplement un assemblage des modèles thermodynamiquement connus.

Le seuil d'élasticité des modèles élasto-plastiques et le seuil du modèle endommageant sont égaux et appelés seuil du régime élastique initial pour le modèle "mixte", noté X_e. De cela, tous les oscillateurs élasto-plastiques et endommageants atteignent leur seuil au même moment pour la première excursion dans les régimes plastique et post-élastique. Cette information est indispensable pour la définition de la ductilité qui est ainsi définie par le ratio entre le déplacement maximal historique par rapport au déplacement au moment du premier franchissement des seuils. Le comportement post-élastique pour chaque modèle dépend de la rigidité k_p qui est la même pour deux modèles élastoplastique et endommageant. Cette rigidité est définie par le biais de la valeur α_p, soit $k_p = \alpha_p k_e$. La force totale dans le modèle mixte peut être écrite comme suivante :

$$F = \chi F_{elastoplastique} + (1-\chi) F_{endommageant} \tag{1.16}$$

Les paramètres du modèle sont χ, X_e et α_p ainsi que f_0 et ξ_0. Les variables d'état sont u, u_p et Y. A titre d'exemple, nous présentons la réponse d'un oscillateur de comportement mixte, dont la fréquence initiale f_0 est égale à 3 Hz et l'amortissement réduit ξ_0 à 5%, soumis à un chargement sismique synthétique. Le seuil du comportement Mixte est fixé à 0.027 (m). Le pourcentage du comportement élasto-plastique est quant à lui fixé à $\chi = 0.5$.

1.4 Prise en compte de non-linéarités du comportement dans la pratique de l'ingénierie sismique

1.4.1 Introduction à la prise en compte des non-linéarités en ingénierie sismique

L'ingénierie sismique consiste en l'évaluation de la réponse des structures soumises à un chargement sismique dans un cas élastique aussi bien qu'un cas inélastique. Le cas élastique est souvent et aisément traité par les procédures normatives et ainsi des méthodes performantes avec une précision suffisante. A contrario, le cas où la structure présente des non-linéarités est plus difficile à traiter. Grâce aux évolutions informatiques (puissance des ordinateurs, parallélisation des processeurs), les simulations plus complexes sont devenues faisables dans certaines configurations mais sont moins courantes dans la pratique d'ingénierie.

Dans son livre de dynamique des structures Chopra et al. [1995], Chopra a défini le dimensionnement en cas de non-linéarité comme le compromis entre la rigidité et la capacité de ductilité en prenant en compte la non-linéarité de la structure. Autrement dit, l'ingénieur a le choix entre le renforcement de la structure et le bénéfice de la capacité de ductilité. Le premier consiste en un renforcement de la structure la rendant plus raide afin que son comportement reste toujours élastique et que la sollicitation engendrée dans la structure soit inférieure à un certain seuil. Cette méthodologie conduit à une quantité importante de matériaux constituant la structure (par exemple, le ferraillage pour la structure en béton armé ou bien l'épaisseur des systèmes de tuyauteries en acier) pour les cas de forts séismes. Le deuxième choix correspond au fait de bénéficier de la capacité en ductilité avant la rupture afin d'avoir une structure plus souple et ainsi plus ductile.

Quand à la ré-évaluation des bâtiments existants, le choix du renforcement des structures devient plus difficile en terme de mise en place des moyens. Par ailleurs, l'Eurocode 8 autorise les ingénieurs à "bénéficier" des non-linéarités dans les cas où la capacité élastique n'est pas suffisante dans un cas de ré-évaluation et de nouvelles constructions. D'un point de vue structurel, la non-linéarité permet de redistribuer les efforts dans la structure, ce qui conduit à une sollicitation plus faible, et ainsi par exemple une quantité plus faible de ferraillage.

Un autre exercice existe en ingénierie sismique. Celui-ci faisant appel à la prise en compte de la non-linéarité dans la structure consiste en l'établissement du signal sismique transféré aux équipements ancrés à la structure. Le signal transféré traversant la structure linéaire peut être estimé à partir du signal d'excitation au niveau de la base de la structure à l'aide des notions de fonction de transfert linéaire ou un calcul en dynamique transitoire linéaire par projection sur base modale. Or, pour les structures incluant la non-linéarité, il est obligatoire, à l'état actuel, d'effectuer un calcul transitoire non-linéaire.

En bref, la prise en compte des non-linéarités du comportement est un besoin réel mais pose des difficultés bien particulières. Ces difficultés sont présentées en fonction de chaque méthode utilisée dans cette section, quelle que soit leur nature, directe ou indirecte. Les démarches normatives prenant en compte la non-linéarité dans la structure sont également présentées.

1.4.2 Méthode directe par un calcul transitoire non-linéaire

La réponse de la structure non-linéaire ne peut être évaluée par les solutions analytiques mais nécessite le recours aux réponses discrètes temporelles à chaque pas de temps. La non-linéarité ne permet pas la diagonalisation des matrices, et donc la décomposition de la réponse sur base modale.

Ainsi, la solution est évaluée à chaque instant du temps, par l'inversion des matrices avec l'aide du schéma d'intégration choisi. Soit à l'instant n, nous pouvons écrire l'équation de la dynamique 1.13 comme suit (sous forme matricielle) :

$$\underline{\underline{\mathrm{M}}}\,\underline{\ddot{u}_n} + \underline{\underline{\mathrm{C}}}\,\underline{\dot{u}_n} + \underline{\mathrm{F}}(u_n) = -\underline{\underline{\mathrm{M}}}\,\underline{\Delta}\gamma_n \tag{1.17}$$

De manière générale, grâce au schéma d'intégration, soit implicite soit explicite, qui fournit la relation entre la déplacement, la vitesse et l'accélération à l'instant n et/ou les instants précédents connus, nous pouvons résoudre cette équation 1.17. Mathématiquement parlant, nous avons 3 inconnues et une seule équation dans 1.17. Le schéma d'intégration nous fournit deux autres équations. Ainsi, l'état à l'instant n est déterminé. Pour cela, les conditions initiales sont requises.

A l'issue de cette démarche, nous avons repéré deux sources de problèmes. La première est le choix du schéma d'intégration et la deuxième est liée à la non-linéarité du comportement, soit la relation force-déplacement à l'instant n.

Concernant le choix du schéma d'intégration, il existe plusieurs types de schémas d'intégration classés en deux catégories : explicite et implicite. Ces derniers sont listés dans le tableau 1.8. Néanmoins, il n'existe pas jusqu'à présent de schéma "parfait". Le choix du schéma d'intégration joue un rôle important et demande une connaissance de la structure, du phénomène, des moyens informatiques disponibles et de l'objectif de l'étude. Par exemple, le pas de temps maximal à respecter pour le schéma des différences centrées $\Delta t = \frac{\mathrm{T}_{min}}{\pi}$, où T_{min} est la période minimale du problème Delaplace and Ibrahimbegovic [2006], augmente considérablement le nombre de pas de temps pour les études à hautes fréquences, ce qui conduit à une durée de calcul très importante. De plus, l'opération d'inversion des matrices est également très coûteuse numériquement.

Concernant la non-linéarité, il est préférable d'utiliser un schéma implicite qui permet un contrôle de l'équilibre à chaque instant. Mis à part les inconvénients en générale liés au schéma implicite, il y a un autre problème lié à la convergence de calcul en résolvant l'équation non-linéaire par itérations, comme par exemple par l'algorithme de Newton-Raphson. Ce problème numérique peut être dépassé en utilisant un maillage plus fin ainsi que plus régulier, un pas de temps plus petit, une erreur de convergence plus importante ou encore un nombre d'itération plus important. Tous ces paramètres interviennent dans le résultat final du calcul. L'utilisateur doit ainsi avoir conscience de l'ordre de grandeur des erreurs éventuellement produites.

En bref, le calcul transitoire non-linéaire par inversion des matrices est l'approche la plus précise de la résolution d'un problème en dynamique non-linéaire. Cependant, cette méthode reste très chère numériquement (temps de calcul, mémoire) et augmente les problèmes de convergence.

TABLEAU 1.8 – Comparaison des schémas d'intégrations numériques explicites et implicites

	Schémas implicites	Schémas explicites
Avantages	+ L'équilibre vérifié	+ Dépendance seulement de l'état aux instants précédents + Énergie conservée car il n'y a pas d'amortissement numérique
Inconvénients	+ Introduction de l'énergie dissipée numérique (sauf la famille β-Newmark) + Inversion de la matrice de rigidité numériquement couteuse	+ Conditions de stabilité (Pas de temps maximal à respecter)
Exemples	+ β-Newmark + α-HHT + Wilson-θ	+ Schéma différent centré ; + Newmark avec $\beta = 0$ et $\gamma = 1/2$

1.4.3 Méthodes de linéarisation équivalente

Les méthodes de linéarisation équivalente peuvent se classer en deux catégories :

01 Méthode du spectre de capacité (en anglais *Capacity Spectrum Method*), dite encore procédure statique non-linéaire (en anglais *Nonlinear Static Procedure*) : Cette méthode consiste à identifier le point de fonctionnement de la structure à l'aide de la courbe de capacité et de la courbe de demande.

02 Méthode du système linéaire de substitution : Cette méthode vise à remplacer le modèle non-linéaire par un système linéaire de substitution. Cela signifie que la réponse non-linéaire est égale à celle du système linéaire de substitution pour quelques grandeurs choisies.

Nous présentons brièvement ces méthodes de linéarisation équivalente, à travers leur définition, leur utilisation ainsi que leurs avantages et inconvénients. Une étude plus approfondie est présentée dans le chapitre 02.

1.4.3.1 Méthode du Spectre de Capacité

Les ingénieurs ont introduit la méthode du Spectre de Capacité (*Capacity Spectrum Method* en anglais) que l'on retrouve en plusieurs versions dans la littérature : ATC 40 ATC [1996] résumé par Comartin et al. [1996], Chopra and Goel [1999]. La philosophie de cette méthode est de trouver le point de fonctionnement de la structure, qui est l'intersection entre la courbe de demande et celle de capacité. Les étapes de cette méthode sont schématisées sur la figure 1.14. La courbe de demande correspond au spectre sous forme ADRS (le Spectre en format spécial où l'abscisse est le spectre en déplacement et l'ordonnée est celui en accélération –ou *Acceleration Displacement Response Spectrum*– (ADRS)). La courbe de capacité est construite à partir du calcul Pushover. Cette méthode est basée sur le fait que la réponse de la structure réelle est convertie en celle d'un système à 1 DDL.

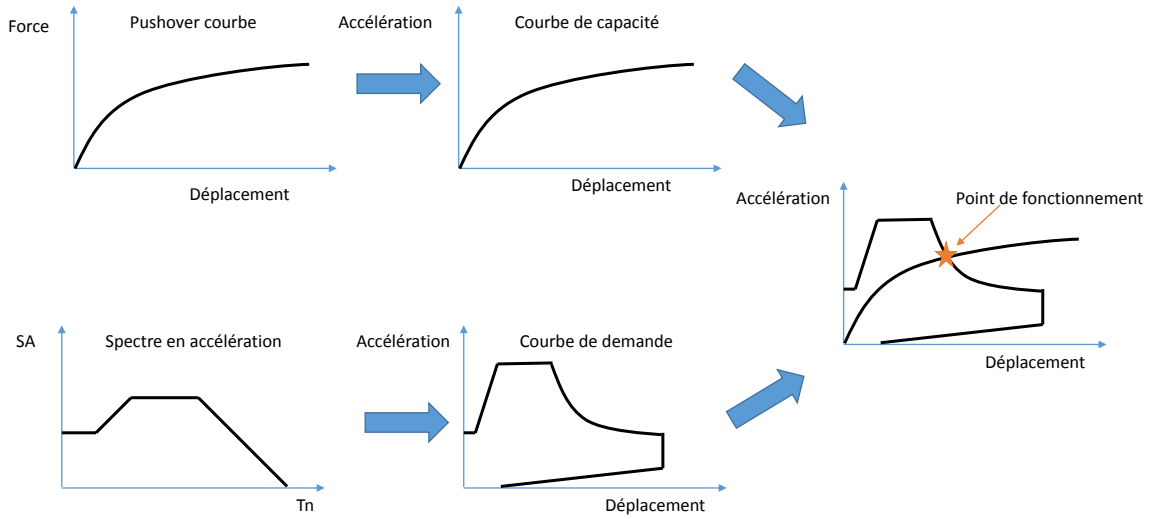


FIGURE 1.14 – Principe de la méthode du spectre de capacité

L'inconvénient de cette démarche est lié à plusieurs de ses hypothèses. Premièrement, la conversion de la réponse de la structure en celle d'un système à 1 DDL n'est juste que lorsqu'un mode prépondérant est vraiment prédominant dans la réponse de structure. Dans le cas contraire, cette conversion en 1 DDL devient difficile car la décomposition sur base modale en cas de non-linéarité n'est pas possible. Deuxièmement, la courbe de demande est une autre forme du spectre de réponse du signal d'excitation qui est converti à partir du spectre élastique en accélération. Le déplacement est évalué par la relation $D = \frac{T_e^2}{4\pi^2} A$ dans la version issue de l'ATC 40 ATC [1996]. Il est admis que le point de fonctionnement se trouve en régime non-linéaire, alors que le spectre élastique n'est pas compatible en ne considérant pas la non-linéarité.

Afin de rendre la courbe de demande compatible au point de fonctionnement recherché, trois méthodologies de modification de la courbe de demande sont développées dans l'ATC 40. Ces méthodologies basées sur une procédure itérative repose sur le même principe qui est de trouver la courbe de demande correspondant à la valeur d'amortissement effectif associée à la valeur de déplacement et de force du point de fonctionnement. Cette modification de la courbe de demande est faite par le biais du facteur de réduction dépendant de la valeur d'amortissement effectif. Cette valeur d'amortissement est, quant à elle, évaluée à partir de l'aire hystérétique correspondant au déplacement maximal dont la rigidité de décharge est égale à la rigidité initiale, présentée dans la figure 1.15.

La valeur d'amortissement effectif β_{eff} est définie :

$$\beta_{eff} = \frac{1}{4\pi} \frac{E_D}{E_{so}} \tag{1.18}$$

Où : E_D et E_{so} sont l'énergie dissipée hystérétique et l'énergie élastique correspondant au déplacement maximal comme présenté sur la figure 1.15.

La linéarisation équivalente dans cette méthode est définie avec la fréquence équivalente liée à la rigidité séante et l'amortissement effectif basé sur l'équilibre d'énergie dissipée. Ces deux hypothèses sont néanmoins contradictoires et seront étudiés dans le chapitre 02 portant sur le concept de linéarisation équivalente.

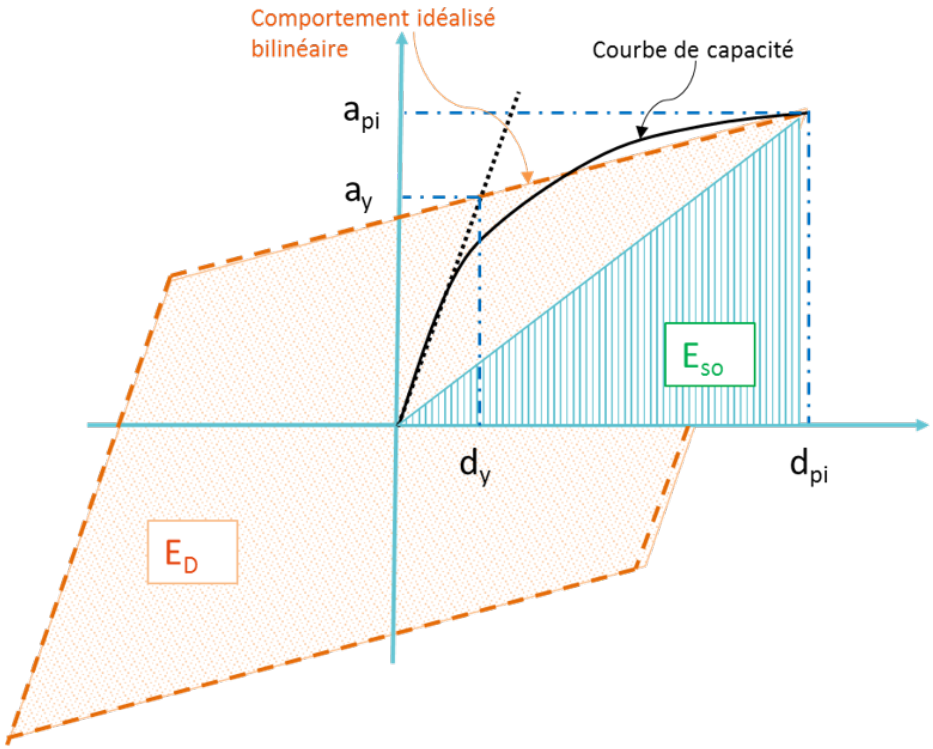


FIGURE 1.15 – Amortissement effectif pour le facteur de réduction de la courbe de demande issue dans ATC 40. a_y et d_y sont l'accélération et le déplacement au seuil d'élasticité. a_{pi} et d_{pi} sont l'accélération et le déplacement correspondant au point de fonctionnement.

Dans la version améliorée Chopra and Goel [1999] de la méthode du spectre de capacité, le spectre élastique a été remplacé par le spectre inélastique pour une valeur de ductilité appelée constante à l'aide de la relation R-μ-T_n (où R est le facteur de réduction de résistance, μ est la ductilité appelée et T_n est la période naturelle de la structure). Pour la relation R-μ-T_n, différents travaux sont à considérer (Newmark and Hall [1982], Krawinkler and Nassar [1992], Vidic et al. [1994]). Le spectre inélastique permet de construire la courbe de demande, en terme d'accélération et de déplacement, associée à la valeur de ductilité appelée donnée. La philosophie de cette nouvelle démarche est de déterminer le point de fonctionnement donnant la valeur de ductilité appelée, à partir de la courbe de capacité, égale à celle du spectre inélastique. Cela veut dire que la ductilité appelée du spectre inélastique est égale à celle définie à partir de la courbe de capacité au point de fonctionnement.

Dans ce travail, la valeur d'accélération correspondant au seuil d'élasticité Sa_y est égale à celle correspondant au déplacement maximal Sa_m. Pour l'extension de ces travaux, nous pouvons imaginer un cas plus général en considérant l'écrouissage dans le comportement. Dans ce cas là, l'accélération correspondante au déplacement maximal peut s'exprimer en fonction de celle au seuil d'élasticité par la relation suivante :

$$Sa_m = Sa_y(1 - \alpha + \alpha\mu) \tag{1.19}$$

Où, Sa_m et Sa_y sont les spectres en accélération correspondant respectivement au maximum du déplacement et au seuil d'élasticité.

Spectre inélastique à partir de la relation R-T$_n$-μ

Pour un signal d'entrée, le spectre inélastique est construit pour une valeur de ductilité appelée donnée de μ, qui décrit la valeur du déplacement non-linéaire maximal D_{NL} d'un oscillateur non-linéaire soumis à ce signal temporel en fonction de la période naturelle de cet oscillateur non-linéaire. Ce déplacement correspond à la ductilité appelée donnée du spectre inélastique. La valeur du seuil d'élasticité D_y peut remplacer le déplacement maximal D_{NL} par la relation $D_y = \frac{D_{NL}}{\mu}$. Nous pouvons obtenir la valeur du déplacement maximale à partir d'un spectre élastique, grâce à la relation R-T$_n$-μ, suivant cette équation :

$$D_{NL} = \mu D_y = \mu \frac{SPa(Tn,\xi)}{R_y} \left(\frac{Tn}{2\pi}\right)^2 \tag{1.20}$$

où : $SPa(Tn,\xi)$ est le spectre du pseudo- accélération absolue élastique du signal d'entrée pour la période Tn et l'amortissement ξ.

De cela, le spectre inélastique est établi pour une valeur de ductilité appelée donnée.

Remarques sur la performance de la méthode du spectre de capacité

Quant à la performance de cette méthode, elle dépend de la procédure itérative. Comme la précédure consiste en la détermination de la ductilité appelée à la n-ième itération avec le déplacement estimé à l'itération (n-1). La procédure itérative devient celle du point-fixe qui nécessite que la condition de convergence soit satisfaite. Cette convergence n'est pas garantie. De plus, Miranda and Akkar [2002] ont étudié la méthode ATC [1996] et montré que même si la convergence de la procédure itérative est atteinte, la solution reste multiple. Et, Chopra and Goel [2001] ont remarqué que la convergence est déceptive car le résultat peut se converger vers une fausse ductilité appelée.

1.4.3.2 Méthode du système linéaire de substitution

La méthode du système linéaire de substitution utilise la réponse d'un système linéaire muni des caractéristiques équivalentes afin d'évaluer la réponse d'une structure non-linéaire. En fait, la réponse non-linéaire est égale à celle du système linéaire équivalent. Le système équivalent est souvent développé à partir du critère de la réponse en déplacement maximale.

Les caractéristiques équivalentes sont fonction de la ductilité appelée qui n'est pas connue à priori. C'est la raison pour laquelle, une procédure itérative est requise. En fait, la procédure itérative s'appuie sur le même principe que celle de la méthode du spectre de capacité. C'est à dire, la valeur de ductilité appelée de l'étape n+1 est définie à partir du déplacement maximal de l'oscillateur linéaire dont les caractéristiques estimées à partir du déplacement maximal à l'étape n. De cela, cette méthode est également appelée méthode itérative. La différence entre la méthode du spectre de capacité et celle du système linéaire de substitution est liée au fait que la méthode du spectre de capacité s'appuie sur le facteur de réduction du spectre en fonction de ductilité appelée tandis que la méthode du système linéaire de substitution utilise directement la réponse du système linéaire dont la fréquence et l'amortissement sont fonction de ductilité appelée ($f_{eq}(\mu)$)

et ($\xi_{eq}(\mu)$).

La linéarisation équivalente issue de cette méthode est liée aux caractéristiques du système linéaire équivalent de substitution. Plusieurs concepts sont développés dans la littérature et seront étudiés dans le chapitre 02 portant sur la linéarisation équivalente. Nous pouvons citer les travaux de Iwan [1980], Kowalsky [1994], Chopra and Goel [2001], ...

Remarques sur la performance de la méthode du système linéaire

Quant à la performance de la méthode du système linéaire, plusieurs auteurs ont montré, au travers de leurs études comparatives telles que Miranda and Ruiz-García [2002], Miranda and Akkar [2003], Akkar and Miranda [2005] et Warden et al. [2006], deux remarques importantes :

01 L'évaluation de la réponse non-linéaire nécessite les caractéristiques équivalentes en fonction de la ductilité appelée. Cependant, la valeur de ductilité appelée μ n'est pas connue *a priori*. Ainsi, Cette méthode implique la même problématique que la méthode du spectre de capacité, soit la procédure d'itération du point fixe.

02 Les méthodes peuvent aussi sur-estimer ou sous-estimer le déplacement maximal d'une méthode à l'autre. Tandis que le déplacement maximal est bien estimé pour des oscillateurs à basse fréquence, ce résultat est au contraire plus dispersé pour des oscillateurs à haute fréquence. Cela veut dire que la performance de chaque méthode dépend de la rigidité de l'oscillateur non-linéaire. Cette remarque importante n'a pas par ailleurs été mentionnée dans ces études comparatives.

1.4.3.3 Conclusions sur les méthodes de linéarisation équivalente

En bref, les méthodes simplifiées sont relativement simples à mettre en place. Ces méthodes sont basées sur la linéarisation équivalente. Elles permettent de déterminer la réponse non-linéaire, souvent en terme de déplacement maximal.

Quant à la performance de ces méthodes simplifiées, nous avons constaté que le résultat reste encore dispersé au travers de plusieurs études comparatives dans la littérature. Les auteurs ont relevé la raison liée à la procédure itérative. Cependant, la question fondamentale liée au comportement linéaire équivalent n'est pas traitée. Ceci sera l'objet d'une section dans le chapitre 02 sur la linéarisation équivalente utilisée dans ces méthodes simplifiées.

1.4.4 Ductilité et coefficient de comportement : Aspect réglementaire

L'aspect réglementaire issu de l'Eurocode tient à favoriser le comportement ductile dans la conception en facilitant la démarche de calcul par le biais du coefficient de comportement. Cela signifie que la force ou sollicitation tenant compte de la ductilité est déterminée à partir du spectre de dimensionnement, avec un comportement élastique initial, divisé par un coefficient de comportement $q > 1$ ($q = 1$ n'est applicable qu'en cas justifié de faible sismicité).

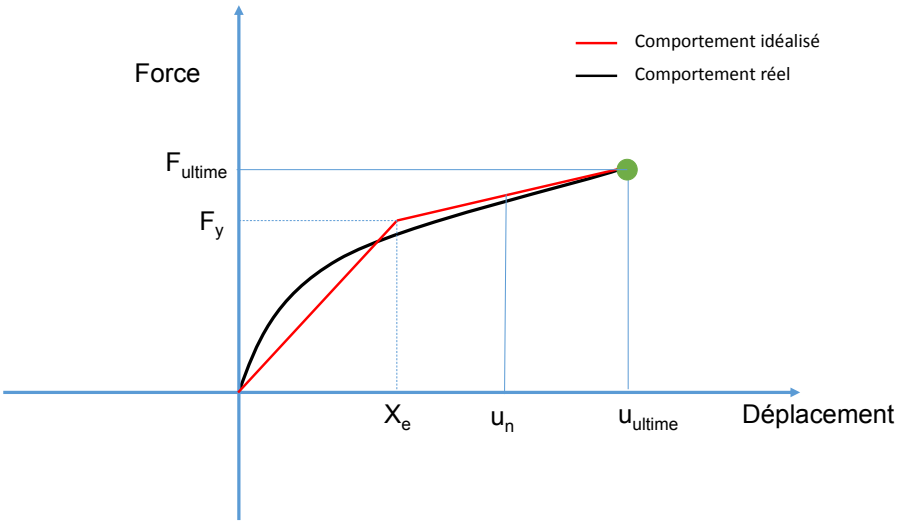


FIGURE 1.16 – Définition de la ductilité et de la ductilité appelée

L'Eurocode favorise donc l'utilisation des réserves de ductilité globale qui résultent de la formation de rotules plastiques en différents endroits de la structure. Cette capacité représente un bénéfice important en marge du dimensionnement sous séisme car cela permet physiquement une déformation importante avant la ruine, ce qui se traduit par une quantité importante d'énergie dissipée dans la structure. Ainsi, le coefficient de comportement est couplé avec l'énergie dissipée en régime post-élastique (plastique ou endommageant). Ainsi plus la ductilité appelée est importante, plus l'énergie peut être dissipée. Il s'agit donc d'un coefficient de comportement élevé qui conduit à une diminution importante de l'effort sismique.

La capacité ductile (ou la ductilité) est définie par le ratio du déplacement utile et du déplacement du seuil d'élasticité. Elle est classée en trois catégories qui sont la ductilité limitée, la ductilité moyenne et la haute ductilité. Ces trois catégories représentent la capacité de dissipation d'énergie de la structure. La ductilité globale se base sur les ductilités locales et leur répartition dans la structure. La détermination de la valeur de la ductilité locale, qui est souvent assimilée à une rotule plastique, dépend du comportement du matériau constitutif (par exemple, la déformation ultime selon l'Eurocode 2 est de 3.5‰ pour le béton, etc) et de la structure elle-même (section, etc). Ces valeurs de ductilités locales et leur répartitions contribuent à la valeur de ductilité globale. Dans la pratique, cette valeur peut être calculée analytiquement, par exemple pour une poutre en béton armé par le biais de la relation moment-courbure, ou par une analyse Pushover de la structure avec les lois de comportement non-linéaires appropriées. Selon la figure 1.16 en notant X_e le seuil d'élasticité, la ductilité est définie par $\mu_u = \frac{u_{ultime}}{X_e}$ et la ductilité appelée est définie par $\mu = \frac{u_{max}}{X_e}$ où u_{ultime} et u_{max} sont respectivement le déplacement ultime et le déplacement maximal au cours du temps.

Quant au coefficient du comportement qui tient compte de la capacité de dissipation d'énergie de la structure, il dépend de la ductilité et des caractéristiques effectives (rigidité effective et amortissement effectif) liées à cette ductilité. Il est admis que, une valeur de ductilité importante, l'amortissement effectif est plus grand et la fréquence effective est réduite. Les coefficients sont forfaitairement déterminés en fonction de la classe de ductilité (ductilité moyenne et haute ductilité), du matériau constitutif (béton armé, acier,

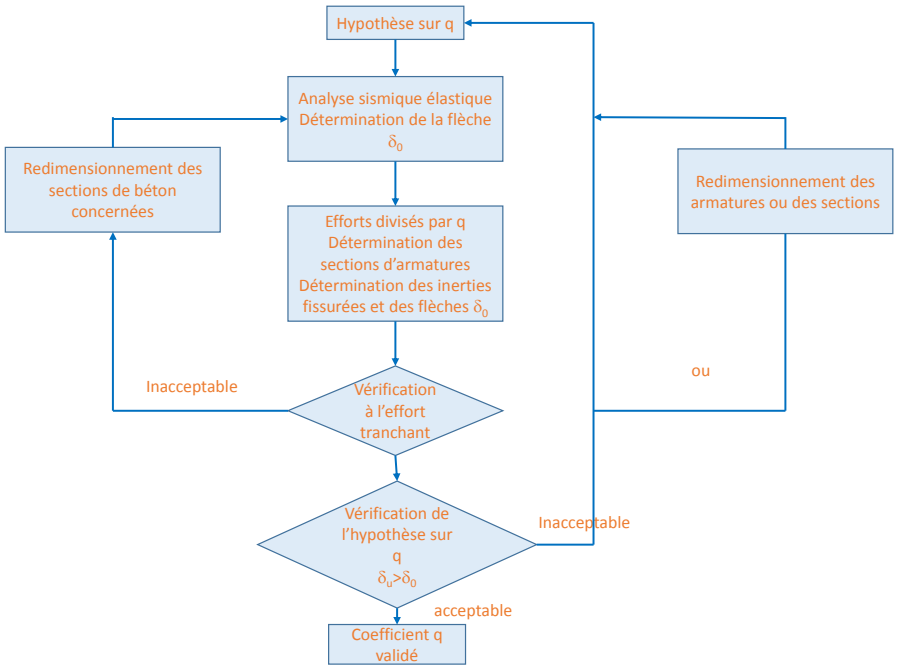


FIGURE 1.17 – Procédure de validation du coefficient de comportement (Figure reprise dans le travail de Corvez et al. [2013]).

maçonnerie, mixte acier-béton, etc), de la régularité ou irrégularité de structure, des dispositifs constructifs de mis en œuvre, etc. Il est pourtant supérieur à la valeur minimale :

$$q = a_0 k_w \geq 1.5 \tag{1.21}$$

Où, q_0 est le coefficient du comportement de base et k_w le coefficient lié au mode de rupture prédominant. Il est à noter que la valeur de q doit être validée sous certaines hypothèses de ce coefficient. La procédure est résumée dans la figure 1.17 issue dans la pratique du calcul sismique par application de l'Eurocode, Corvez et al. [2013].

1.4.5 Méthodes initialement issues d'autres domaines

Initialement développé pour d'autres domaines scientifiques, il existe d'autres méthodes de représentation du système non-linéaire comme les séries de Volterra Carassale and Kareem [2009] ou la fonction de transfert d'ordre supérieur Storer [1991]. Ces méthodologies ont l'avantage de modéliser des systèmes dynamiques non-linéaires très complexes (fonction non-linéaire de l'entrée, dépendance du retour de la réponse, etc). Certains auteurs ont mis en oeuvre ces méthodes pour des problèmes de dynamique non-linéaire en génie civil, comme par exemple, la série de Volterra Thomas et al. [1995] pour les pylônes électriques sous chargement impulsif. Or, ces modèles ne permettent pas une interprétation physique liée au concept de linéarisation équivalente au centre de ce travail de thèse consistant en la définition de caractéristiques équivalentes (fréquence équivalente et amortissement équivalent).

Soit un système non-linéaire $\mathscr{H}$ où $u(t)$ est le signal d'entrée et $x(t)$ la sortie, nous avons donc $x(t) = \mathscr{H}(u(t))$. Le principe de la série de Volterra se base sur l'existence d'une série de sortie $x_j(t)$ pour laquelle nous pouvons déterminer $x_j(t) = \mathscr{H}_j(u(t))$. Admettons que la sortie peut se décomposer en série de $x_j(t)$, nous avons donc :

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathscr{H}_j(u(t)) \tag{1.22}$$

Où, chaque système $\mathscr{H}_j$ est défini comme suit :

$$\mathscr{H}_j(u(t)) = \int_{\tau_j \in \mathrm{R}} h_j(\tau_j) \prod_{r=0}^{j} u(t-\tau_j) d\tau_j \tag{1.23}$$

Où : $h_j(\tau_j)$ est le noyau de Volterra.

Dans Thomas et al. [1995], les auteurs ont remplacé l'entrée $u(t)$ par une impulsion $u(t) = a\delta(t-\mathrm{T})$ où $\delta(t-\mathrm{T})$ est la fonction de Dirac à l'instant T. La méthodologie consiste à déterminer expérimentalement les valeurs des noyaux de Volterra à chaque instant $h_j(t-\mathrm{T})$ à partir de données d'entrée et du résultat enregistré de l'essai. Une fois les noyaux de Volterra identifiés pour tous les instants, il est alors possible de représenter la réponse du système non-linéaire par la série de Volterra.

De plus, Carassale and Kareem [2009] a utilisé la fonction de réponse fréquentielle de Volterra pour les systèmes dynamiques non-linéaires en décomposant ces systèmes en plusieurs sous-systèmes pour lesquels nous savons déterminer la fonction de réponse fréquentielle de Volterra. De cela, la fonction de réponse fréquentielle de Volterra dépend de plus d'une fréquence. Autrement dit, la fonction de transfert est d'ordre supérieur. En outre, dans la publication Marmarelis [1989], Marmarelis considère que la force de rappel est une somme des polynômes. Ainsi, l'équation dynamique peut s'écrire :

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) + \sum_{j=2}^{\infty} a_j y^j(t) = -\gamma(t) \tag{1.24}$$

En limitant les polynômes à l'ordre N, nous pouvons alors décrire le système 1.24 de la façon suivante :

$$\mathscr{L}(y(t)) + \sum_{j=2}^{\mathrm{N}} a_j y^j(t) = -\gamma(t) \tag{1.25}$$

Où : $\mathscr{L}(y(t))$ est l'opérateur différentiel linéaire des invariants au cours du temps (système linéaire). Il est possible d'identifier les valeurs constantes de a_j pour certains cas de chargement, ce qui permet de représenter le système non-linéaire. Mais, la somme $\sum_{j=2}^{\mathrm{N}} a_j y^j(t)$ n' apporte pas une interprétation physique en termes de systèmes équivalents.

En conclusion, la série de Volterra apporte une véritable représentation du système non-linéaire mais ne permet pas une interprétation liée au système linéaire équivalent.

1.5 Conclusions et la problématique de la thèse

En ingénierie sismique, la capacité ductile peut être un véritable atout mais demeure aujourd'hui un challenge pour les ingénieurs. Le dimensionnement en capacité est recommandé dans l'Eurocode, mais également dans les autres règlements de construction, en favorisant la dissipation d'énergie en régime post-élastique dans le comportement de

la structure. Or, les méthodes en vigueur permettant la prise en compte de cette non-linéarité dans l'évaluation de la réponse de la structure, quelle que soit leur nature (directe, indirecte ou réglementaire), présentent des limites d'application ou manque d'analyses plus profondes sur les ingrédients de chacune des méthodes.

La méthode directe par le calcul transitoire non-linéaire permet l'évaluation la plus correcte du phénomène sismique. Cependant, cette méthode est très coûteuse en temps de calcul et en mémoire (condition forte de convergence, modèle du comportement très complexe,...), ce qui ne permet pas son application "massive" dans la pratique d'ingénierie et reste très limitée à certains cas très particuliers (exigence exceptionnelle du résultat, etc). Les autres démarches simplifiées, soit nécessitent le calcul de la réponse non-linéaire transitoire afin de déterminer différents ingrédients de chaque méthode, par exemple, les coefficients de comportement issus de l'Eurocode, soit s'appuient sur des hypothèses "fortes" telles que la conversion de la réponse réelle en celle d'un système à 1 DDL pour la procédure statique non-linéaire.

Par ailleurs, les méthodes simplifiées consistent donc à remplacer le comportement non-linéaire par un comportement linéaire équivalent vis-à-vis de certains critères. Cela permet de saisir les informations intéressantes de la réponse non-linéaire sans effectuer un calcul transitoire. L'utilisation de ce concept de linéarisation équivalente manque néanmoins d'analyses suffisamment fouillées.

Le travail présenté dans ce mémoire consiste à analyser systématiquement le concept de comportement linéaire équivalent pour une application en ingénierie sismique, par le déploiement d'un plan d'expérience numérique portant sur la réponse dans le domaine non-linéaire de systèmes représentatif à un degré de liberté.

1.6 Références

A. Ravikiran, P. N. Dubey, M. K. A. and Reddy, G. R. (2015). Experimental and numerical study in ratchting in pressurized stainless steel piping systems under seismic load. Technical report, Reactor Safety Division-BARC. 3

Akkar, S. D. and Miranda, E. (2005). Statistical evaluation of approximate methods for estimating maximum deformation demands on existing structures. *Journal of Structural Engineering*, 131(1) :160–172. 27

ATC, A. (1996). 40, seismic evaluation and retrofit of concrete buildings. *Applied Technology Council, report ATC-40. Redwood City.* 23, 24, 26

Betbeder-Matibet, J. (2003). Génie parasismique. vol. 1. 10

Carassale, L. and Kareem, A. (2009). Modeling nonlinear systems by volterra series. *Journal of engineering mechanics*, 136(6) :801–818. 29, 30

Chaboche, J.-L. (1991). On some modifications of kinematic hardening to improve the description of ratchetting effects. *International journal of plasticity*, 7(7) :661–678. 14

Chopra, A. K. et al. (1995). *Dynamics of structures*, volume 3. Prentice Hall New Jersey. 21

Chopra, A. K. and Goel, R. K. (1999). Capacity-demand-diagram methods based on inelastic design spectrum. *Earthquake spectra*, 15(4) :637–656. 23, 25

Chopra, A. K. and Goel, R. K. (2001). Direct displacement-based design : use of inelastic vs. elastic design spectra. *Earthquake Spectra*, 17(1) :47–64. 26, 27

Clough, R. and Penzien, J. (1975). Dynamics of structures, mcgraw-hill, 1975. 6

Comartin, C. D., Niewiarowski, R. W., and Rojahn, C. (1996). *Seismic evaluation and retrofit of concrete buildings*, volume 1. Seismic Safety Commission, State of California. 23

Corvez, D., Davidovici, V., Capra, A., and Ghavamian, S. (2013). *Pratique du calcul sismique : guide d'application de l'Eurocode 8*. Editions Eyrolles. 14, 29

Delaplace, A. and Ibrahimbegovic, A. (2006). Performance of time-stepping schemes for discrete models in fracture dynamic analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65(9) :1527–1544. 22

EPRI, P. (1994). Fitting dynamic reliability program vol. 1-5. Technical report, EPRI TR-102792-V4. 3

Iwan, W. (1980). Estimating inelastic response spectra from elastic spectra. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 8(4) :375–388. 27

Jennings, P. C., Housner, G. W., and Tsai, N. C. (1968). Simulated earthquake motions. 5

Kowalsky, M. J. (1994). *Displacement based design : a methodology for seismic design applied to RC bridge columns*. University of California, San Diego, Department of Applied Mechanics/Engineering Sciences. 27

Krawinkler, H. and Nassar, A. A. (1992). Seismic design based on ductility and cumulative damage demands and capacities. *Nonlinear seismic analysis and design of reinforced concrete buildings*, pages 23–39. 25

Marmarelis, V. (1989). Identification and modelling of a class of nonlinear systems. *Mathematical and Computer Modelling*, 12(8) :991–995. 30

Mazars, J. (1984). *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. PhD thesis. 17

Mazars, J., Hamon, F., and Grange, S. (2015). A new 3d damage model for concrete under monotonic, cyclic and dynamic loadings. *Materials and Structures*, 48(11) :3779–3793. 18

Miranda, E. and Akkar, S. (2002). Evaluation of approximate methods to estimate target displacements in nonlinear static procedures. In *Rep. PEER-2002/21 ; Proc., 4th US-Japan Workshop on Performance-Based Earthquake Engineering Methodology for Reinforced Concrete Building Structures*, pages 75–86. 26

Miranda, E. and Akkar, S. (2003). Evaluation of iterative schemes in equivalent linear methods. *Earthquake Engineering Research Institute*. 27

Miranda, E. and Ruiz-García, J. (2002). Evaluation of approximate methods to estimate maximum inelastic displacement demands. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 31(3) :539–560. 27

Nazé, P.-A. (2004). Contribution à la prédiction du dommage des structures en béton armé sous sollicitations sismiques : proposition d'amélioration pour l'évaluation de la nocivité d'un signal et du dommage pour les structures à ossatures. introduction à l'analyse fiabiliste de l'endommagement en fonction de la nocivité d'un signal sismique. 4

Newmark, N. M. and Hall, W. J. (1982). Earthquake spectra and design. *Earth System Dynamics*, 1. 25

Rofooei, F., Mobarake, A., and Ahmadi, G. (2001). Generation of artificial earthquake records with a nonstationary kanai–tajimi model. *Engineering Structures*, 23(7) :827–837. 6

Storer, D. M. (1991). *Dynamic analysis of non-linear structures using higher order frequency response functions*. PhD thesis, University of Manchester. 29

Tajimi, H. (1960). A statistical method of determining the maximum response of a building structure during an earthquake. In *Proceedings of the 2nd World Conference on Earthquake Engineering, Tokyo, Japan, 1960*, pages 781–797. 5

Thomas, J.-J., Luong, M. P., and Semblat, J.-F. (1995). Vibratory signature of electric pylons under impulse testing. In *Smart Structures & Materials' 95*, pages 258–267. International Society for Optics and Photonics. 29, 30

Vidic, T., Fajfar, P., and Fischinger, M. (1994). Consistent inelastic design spectra : strength and displacement. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 23(5) :507–521. 25

Warden, B., Browning, J. P., and Matamoros, A. B. (2006). A simplified method to estimate nonlinear response with an approximate linear analysis for reinforced concrete structures. Technical report, University of Kansas Center for Research, Inc. 27

Zentner, I. (2015). Stochastic models for the simulation of ground motion time histories. 4, 6

Zentner, I., Allain, F., Humbert, N., and Caudron, M. (2014). Generation of spectrum compatible ground motion and its use in regulatory and performance-based seismic analysis. *Target*, 10 :1. 5

Chapitre 2

Linéarisation équivalente en ingénierie sismique

En ingénierie sismique, les méthodes simplifiées sont utilisées afin de déterminer la réponse non-linéaire d'une structure. Ces méthodes font appel aux concepts de linéarisation équivalente. La linéarisation équivalente consiste en une évolution de ses caractéristiques dynamiques d'une structure, souvent en terme de fréquence et d'amortissement, en fonction de l'état d'endommagement et de plasticité de la structure. Il est ainsi possible de classer ces méthodologies de linéarisation équivalente selon les critères d'équivalence : linéarisation équivalente suivant les variables à seuil et suivant la restitution des caractéristiques dynamiques. Dans la première section, nous passerons en revue les concepts existants utilisés dans les méthodes simplifiées en ingénierie sismique. Dans la deuxième section, nous apporterons une amélioration de la méthode CSM (Méthode du spectre de capacité –ou *Capacity Spectrum Method*– (CSM)) en proposant un nouveau concept de linéarisation équivalente : linéarisation équivalente par la rigidité sécante et le déplacement maximal. Ce dernier a montré sa pertinence en déterminant exactement le déplacement maximal des oscillateurs non-linéaires.

« *Un jour un coq détourna*
Une perle, qu'il donna
Au beau premier lapidaire.
" Je la crois fine, dit-il ;
Mais le moindre grain de mil
Serait bien mieux mon affaire. "
... »

Jean de La Fontaine - Extrait du poème "Le coq et la perle"

Sommaire

2.1 Revue des concepts de linéarisation équivalente existants 37
2.1.1 Généralités sur la linéarisation équivalente 37
2.1.2 Linéarisation équivalente suivant la force de rappel maximale . . . 37
2.1.3 Linéarisation équivalente suivant le déplacement maximal 38
2.1.4 Linéarisation équivalente suivant le point de fonctionnement . . . 40
2.1.5 Linéarisation équivalente suivant la force de rappel temporelle . . . 41

2.1.6 Analyses critiques des critères existants de linéarisation équivalentes 42
2.1.6.1 Critère d'équivalence du déplacement maximal 42
2.1.6.2 Critère d'équivalence suivant la quantité d'énergie dissipée 45
2.1.6.3 Critère d'équivalence suivant l'ajustement de la force de rappel 47
2.2 Propositions d'amélioration des concepts de linéarisation équivalente . 51
2.2.1 Importance du domaine fréquentiel 51
2.2.2 Plan d'expérience numérique 51
2.2.3 Relation de la ductilité appelée et du niveau du signal 53
2.2.4 Nouvelle linéarisation équivalente suivant la rigidité sécante et le déplacement maximal 56
2.2.5 Amélioration de la méthode du spectre de capacité en utilisant la linéarisation équivalente suivant la rigidité sécante et le déplacement maximal 63
2.2.6 Conclusions sur la proposition d'amélioration des concepts de linéarisation équivalente vis-à-vis des méthodes simplifiées en ingénierie sismique 69
2.3 Conclusion 69
2.4 Références 70

2.1 Revue des concepts de linéarisation équivalente existants

2.1.1 Généralités sur la linéarisation équivalente

Le système linéaire équivalent est tel qu'il présente la "même" réponse qu'un système non-linéaire. En analysant les concepts existants, il est ainsi possible de classer ces linéarisations équivalentes selon leurs critères d'équivalence : les concepts de linéarisation équivalente suivant les variables à seuil, i.e. maximum du déplacement, de la force de rappel ou point de fonctionnement de la structure non-linéaire, et suivant la restitution des caractéristiques dynamiques, i.e. la force de rappel temporelle.

La linéarisation équivalente suivant le maximum du déplacement permet d'estimer le déplacement maximal de la réponse de la structure non-linéaire. Grâce à son objectif général, quelques concepts sont initialement développés pour le dimensionnement par déplacement (Dimensionnement par déplacement direct –ou *Direct Displacement-Based Design*– (DDBD)). Et, les autres sont directement employés afin de déterminer le déplacement maximal par la procédure itérative (ou la méthode du système linéaire de substitution dans le chapitre 01, section 1.4.3). Or, la manière de construire ces concepts ne sont pas les mêmes. Les concepts de linéarisation équivalente dans cette catérogie sont développés par Kowalsky [1994], Priestley and Calvi [1997], Chopra and Goel [2001]), Iwan [1980] pour le critère du déplacement maximal et Shibata and Sozen [1976] pour le critère de force de rapel maximale. La linéarisation équivalente suivant le point de fonctionnement de la structure, soit le déplacement et la force de rappel maximaux, est implicitement utilisée dans la méthode CSM (ATC [1996], Chopra and Goel [1999]).

La linéarisation équivalente suivant la restitution de force de rappel est établie par Levy et al. [2006]. Ce concept est basé sur la minimisation de l'écart de la force de rappel d'un oscillateur non-linéaire et celle du système linéaire équivalent.

En bref, ces concepts permettent d'évaluer une réponse dynamique de la structure. Nous examinons les concepts existants de linéarisation équivalente suivant leur critère d'équivalence.

2.1.2 Linéarisation équivalente suivant la force de rappel maximale

Shibata and Sozen [1976]

Afin de déterminer l'effort du dimensionnement, Shibata and Sozen [1976] ont proposé de remplacer la structure non-linéaire en béton armé par celle dont la rigidité et l'amortissement du i-ième élément s'écrivent selon la formule 2.1.

$$\begin{aligned} (\mathrm{EI})_{si} &= \frac{(\mathrm{EI})_{ai}}{\mu_i} \\ \beta_{si} &= 0.2(1-\frac{1}{\sqrt{\mu_i}})+0.02 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Où, $(\mathrm{EI})_{si}$ et $(\mathrm{EI})_{ai}$ sont successivement la rigidité du i-ième élément équivalent et élément réel dans la structure. Et, β_{si} est l'amortissement équivalent de i-ième élément dans

la structure.

La valeur de μ_i est définie par le ratio de la rigidité de la structure à l'état correspondant à l'apparition de la fissuration, très souvent liée au seuil d'élasticité, avec la rigidité à la rotation maximale définie dans la relation moment-courbure du i-ième élément fléchissant. On peut noter que pour le modèle du comportement bilinéaire sans écrouissage, cette valeur μ_i est égale à la ductilité ultime (ou la capacité ductile), définie par le déplacement μ, égale à $\frac{X_u}{X_e}$ où X_u et X_e sont respectivement le déplacement maximal ultime et le déplacement du seuil d'élasticité (les notions sont illustrées sur la figure 1.16). L'amortissement se base sur l'équilibre d'énergie dissipée à partir des résultats expérimentaux sur les structures en béton armé soumises au signal sismique réel et signal sinusoïdal. Le calage numérique de cette formule de l'amortissement est trouvé dans Gulkan and Sozen [1974].

La procédure de détermination de l'effort du dimensionnement est résumée de la façon suivante :

01 Détermination de la rigidité équivalente et de l'amortissement équivalent à partir de la capacité de ductilité,

02 Analyse modale de la structure équivalente,

03 Détermination de l'effort du dimensionnement avec les caractéristiques modales à l'aide de la méthode modale spectrale.

2.1.3 Linéarisation équivalente suivant le déplacement maximal

Ces concepts s'appuient sur le critère d'équivalence en déplacement maximal. Cela signifie que le déplacement du système linéaire équivalent doit, si le concept est pertinent, être égal au déplacement du système non-linéaire. A ce stade, il est naturel de poser la réduction de la rigidité et l'augmentation de l'amortissement en fonction du déplacement maximal ou du déplacement maximal adimensionnel en terme de ductilité appelée μ.

Iwan [1980]

[Iwan, 1980] a étudié une séries de comportements non-linéaires combinant l'élément élastique, l'élément élastoplastique et l'élément C-type (dévéloppé dans Iwan [1974]) soumis à une dizaine de signaux sismiques réels. Il a estimé par expérience numérique la chute de fréquence et l'augmentation de l'amortissement en cherchant à minimiser l'erreur quadratique moyenne du déplacement maximal entre le système élastique et le système non-linéaire. Il a obtenu le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \frac{f_{eq}}{f_0} &= \frac{1}{1+0.121(\mu-1)^{0.939}} \\ \xi_{eq} &= \xi_0 + 0.0587(\mu-1)^{0.371} \end{aligned} \tag{2.2}$$

où, f_{eq}, f_0 sont successivement la fréquence équivalente et la fréquence initiale de la structure et ξ_{eq}, ξ_0 sont l'amortissement équivalent et initial. μ est la ductilité appelée.

Kennedy et al. [1984]

Dans la perspective de caractériser le signal sismique en ingénierie, Kennedy et al. [1984] a empiriquement postulé la formule de la fréquence effective et l'amortissement effectif en fonction de la valeur de fréquence sécante f_s. En fait, la fréquence sécante est liée à la rigidité sécante reliant le point du déplacement maximal et l'origine de la courbe hystérétique. Les caractéristiques équivalentes sont écrites :

$$\begin{aligned} \frac{f_{eq}}{f_0} &= (1-\mathrm{A}) + \mathrm{A}\frac{f_s}{f_0} \\ \xi_{eq} &= (\xi_0 + \xi_\mathrm{H})(\frac{f_s}{f_{eq}})^2 \\ \mathrm{A} &= \mathrm{C_F}(1-\frac{f_s}{f_0}) \\ \xi_\mathrm{H} &= \mathrm{C_N}(1-\frac{f_s}{f_0}) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Les coefficients $\mathrm{C_N}$ et $\mathrm{C_F}$ dans ces formules 2.3 sont déterminés expérimentalement afin que le pic du déplacement de l'oscillateur effectif linéaire soit égal à celui du déplacement non-linéaire pour chacun des cas considérés. Le calcul numérique est effectué pour quatre valeurs de fréquences initiales, deux valeurs de ductilité appelée et douze signaux sismiques réels. De cela, ils ont trouvé que $0.11 \leq \mathrm{C_N} \leq 0.30$ et $2.7 \geq \mathrm{C_F} \geq 1.5$. Le nombre de cycles non-linéaires dans ces calculs transitoires non-linéaires sont compris entre 1 et 4. La valeur de A est comprise entre 35 % et 85 %. La valeur de A est censée augmenter avec la croissance de la ductilité appelée et le nombre de cycles non-linéaires. Plus la structure est endommagée, plus la rigidité se rapproche de la valeur sécante f_s. Ces formules ont également été utilisées dans Reed and Kennedy [1994] afin de déterminer l'énergie dissipée pendant le transitoire avec les valeurs numériques de $\mathrm{C_N}$ égale à 0.11 et $\mathrm{C_F}$ égale à 2.3 pour le signal d'excitation dont la durée est de plus d'une seconde.

Kowalsky [1994]

Dans l'optique de développer la procédure DDBD, Kowalsky [1994] remplace le système non-linéaire par un système linéaire équivalent dont la rigidité équivalente est la rigidité sécante et l'amortissement est estimé pour égaler l'énergie dissipée de deux systèmes : non-linéaire et linéaire. Le comportement non-linéaire utilisé est celui de Takeda avec une rigidité de décharge de $\frac{k_0}{\sqrt{\mu}}$, où k_0 est la rigidité initiale. L'énergie dissipée est estimée pour un cycle complet du déplacement maximal égal pour deux domaines (compression et traction) du comportement de Takeda. Cette énergie doit être égale à celle développée par la viscosité de l'oscillateur linéaire du même déplacement. Le système est alors le suivant :

$$\begin{aligned} \frac{f_{eq}}{f_0} &= \sqrt{\frac{1+\alpha_p(\mu-1)}{\mu}} \\ \xi_{eq} &= \xi_0 + \frac{1}{\pi}\Big(1-\frac{1}{\sqrt{\mu}}\big(1+\alpha_p(\mu-1)\big)\Big) \end{aligned} \tag{2.4}$$

où, α_p est le ratio entre la pente d'écrouissage et la pente initiale.

Chopra and Goel [2001]

Chopra and Goel [2001] évaluent la procédure du DDBD en utilisant le système linéaire équivalent associé aux caractéristiques sécantes du comportement élasto-plastique. Les caractéristiques équivalentes s'écrivent ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{f_{eq}}{f_0} &= \sqrt{\frac{1+\alpha_p(\mu-1)}{\mu}} \\ \xi_{eq} &= \xi_0 + \frac{2}{\pi}\frac{(\mu-1)(1-\alpha_p)}{\mu\big(1+\alpha_p(\mu-1)\big)} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Cette linéarisation équivalente est la version simplifiée de celle développée dans l'ATC [1996].

Iwan and Guyader [2002]

Iwan and Guyader [2002] ont amélioré les formules de Iwan [1980]. Ces nouvelles formules s'écrivent comme suit :
Pour $\mu < 4.0$

$$\begin{aligned} \frac{f_{eq}}{f_0} &= \frac{1}{1+0.111(\mu-1)^2-0.0167(\mu-1)^3} \\ \xi_{eq} &= \xi_0 + 0.0319(\mu-1)^2 - 0.0066(\mu-1)^3 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Pour $\mu \geq 4.0$

$$\begin{aligned} \frac{f_{eq}}{f_0} &= \frac{1}{1.279+0.0892(\mu-1)} \\ \xi_{eq} &= \xi_0 + 0.106 + 0.00116(\mu-1) \end{aligned} \tag{2.7}$$

2.1.4 Linéarisation équivalente suivant le point de fonctionnement

ATC [1996]

Implicitement utilisée dans la méthode CSM décrite dans l'ATC 40 ATC [1996] et résumée par Comartin et al. [1996], la procédure de la méthode du spectre de capacité permet de déterminer le point de fonctionnement de la structure en régime post-élastique en utilisant le système linéaire équivalent suivant (Goel [2008]) :

$$\begin{aligned} \frac{f_{eq}}{f_0} &= \sqrt{\frac{1+\alpha_p(\mu-1)}{\mu}} \\ \xi_{eq} &= \xi_0 + \kappa\frac{2}{\pi}\frac{(\mu-1)(1-\alpha_p)}{\mu\big(1+\alpha_p(\mu-1)\big)} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Où : Le coefficient κ tient compte de l'effet de l'imperfection de la boucle d'hystéréris selon le type de comportement.

Ce système linéaire équivalent vient du fait que le point de fonctionnement est l'intersection du spectre élastique (sous forme ADRS, autrement appelée courbe de demande)

avec la courbe de capacité (ref. Figure 1.13). Le spectre élastique n'est pas déterminé avec la valeur d'amortissement initiale mais avec la valeur équivalente définie par l'équation 2.8 par un facteur de réduction dépendant de la valeur de ξ_{eq}. La valeur d'amortissement dépend de la ductilité appelée associée au point de fonctionnement, qui est dans la pratique *a priori* inconnue. De cela, des démarches itératives sont nécessaires. Plusieurs procédures afin de déterminer le point de fonctionnement sont proposées dans l'ATC 40 ATC [1996] (voir l'annexe).

2.1.5 Linéarisation équivalente suivant la force de rappel temporelle

Contrairement au critère à seuil, la restitution des caractéristiques dynamiques est basée sur l'ensemble des valeurs du transitoire de la réponse. Dans le travail de Levy et al. [2006], la force de rappel temporelle est le critère d'équivalence afin de caractériser les systèmes linéaires équivalents.

Concept de linéarisation équivalente suivant la force de rappel temporelle

Le système non-linéaire se caractérise par la force de rappel (ou force hystérétique). Cette force est une fonction non-linéaire de la variable d'état de la réponse de la structure. Pour le système élasto-plastique, cette force s'écrit $f_{\mathrm{NL}}(t) = f(x(t), x_p(t)) = k_0(x(t) - x_p(t))$ et pour le système endommageant, elle devient $f_{\mathrm{NL}}(t) = f(x(t), \mathrm{D}(t)) = (1 - \mathrm{D}(t))k_0 x(t)$. Admettons qu'il existe un système linéaire avec k_{eq} et c_{eq} et que nous pouvons écrire à tout instant t, où $0 \leq t \leq t_{end}$:

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{NL}}(t) &\simeq k_{eq}x(t) + c_{eq}\dot{x}(t) \\ \widetilde{f}_{\mathrm{NL}}(t) &\simeq \omega_{eq}^2 x(t) + 2\omega_{eq}\xi_{eq}\dot{x}(t) \\ \widetilde{f}_{\mathrm{NL}}(t) &= \frac{f_{\mathrm{NL}}(t)}{m} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Nous écrivons l'équation 2.9 sous sa forme discrète, pour tout instant t_n ($0 \leq t_n = n\delta t \leq t_{end}$) :

$$\widetilde{f}_{\mathrm{NL},n} \simeq \omega_{eq}^2 x_n + 2\xi_{eq}\omega_{eq}\dot{x}_n \tag{2.10}$$

Mathématiquement parlant, la résolution de l'équation 2.10 en termes de f_{eq} et ξ_{eq} minimise la fonctionnelle $\mathrm{J}(f_{eq}, \xi_{eq})$ telle que :

$$\mathrm{J}(f_{eq}, \xi_{eq}) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \left(\widetilde{f}_{\mathrm{NL},n} - (\omega_{eq}^2 x_n + 2\xi_{eq}\omega_{eq}\dot{x}_n) \right)^2 \tag{2.11}$$

De l'équation 2.11, nous pouvons déduire le nombre d'instants N_{min} permettant la résolution de l'équation.

$$\mathrm{N}_{min} \geq 2\mathrm{N}_{ddl} + 1 \tag{2.12}$$

Où : N_{ddl} est le nombre de degré de liberté avec lequel la structure est modélisée.

Le nombre des instants considéré dans l'équation 2.10 est un paramètre primordial de cette méthode. Il doit être suffisamment grand afin de contenir les informations nécessaires, et à l'inverse, ne pas l'être trop afin de déterminer le changement de caractéristique du phénomène que l'on souhaite représenter. A ce stade, nous pouvons déterminer

la taille de la fenêtre en fonction des résultats attendus : (1) le changement des caractéristiques dynamiques instantanées et (2) le système linéaire équivalent. Le premier objectif peut être obtenu par des méthodes d'identification modale spatiale Molina and Pegon [1998] comme décrite dans l'annexe A.6. Le deuxième est la linéarisation équivalente par la force de rappel.

Levy et al. [2006]

Nous avons ainsi étudié le concept de Levy et al. [2006] en minimisant l'écart des forces de rappel sur la totalité de son transitoire entre les deux systèmes. Le force est analytiquement exprimée grâce aux hypothèses suivantes : (a) la réponse en déplacement est un sinus de période inconnue (b) le comportement est bilinéaire. De là, la fréquence équivalente et l'amortissement sont exprimés analytiquement en fonction de la ductilité appelée. Mise à part des remarques liées à la détermination des caractéristiques équivalentes, l'hypothèse de la réponse harmonique sous forme d'un sinus unique n'est valable que pour le signal harmonique d'un sinus, et évidemment pas en cas de chargement sismique. La relation déduite de son étude s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{f_{eq}}{f_0} &= \frac{1}{\left[\frac{1-\alpha_p}{\pi}\left(\theta+\frac{sin(2\theta)}{2}\right)+\frac{1+\alpha_p}{2}\right]^{0.5}} \\ \sin(\theta) &= \frac{2-\mu}{\mu} \\ \xi_e &= \left[\xi_0+\frac{2}{\pi}(1-\alpha_p)\frac{\mu-1}{\mu^2}\left(\frac{T}{T_0}\right)\right]\left(\frac{f_{eq}}{f_0}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{2.13}$$

Où : T est la période du sinus de la réponse $u(t) = \Delta_{NL}\sin(\frac{2\pi}{T}t)$.

2.1.6 Analyses critiques des critères existants de linéarisation équivalentes

Quant au critère d'équivalence, la linéarisation équivalente dans les concepts existants est établies à l'aide des critères d'équivalence suivant :

01 Le déplacement maximal

02 L'équilibre d'énergie dissipée

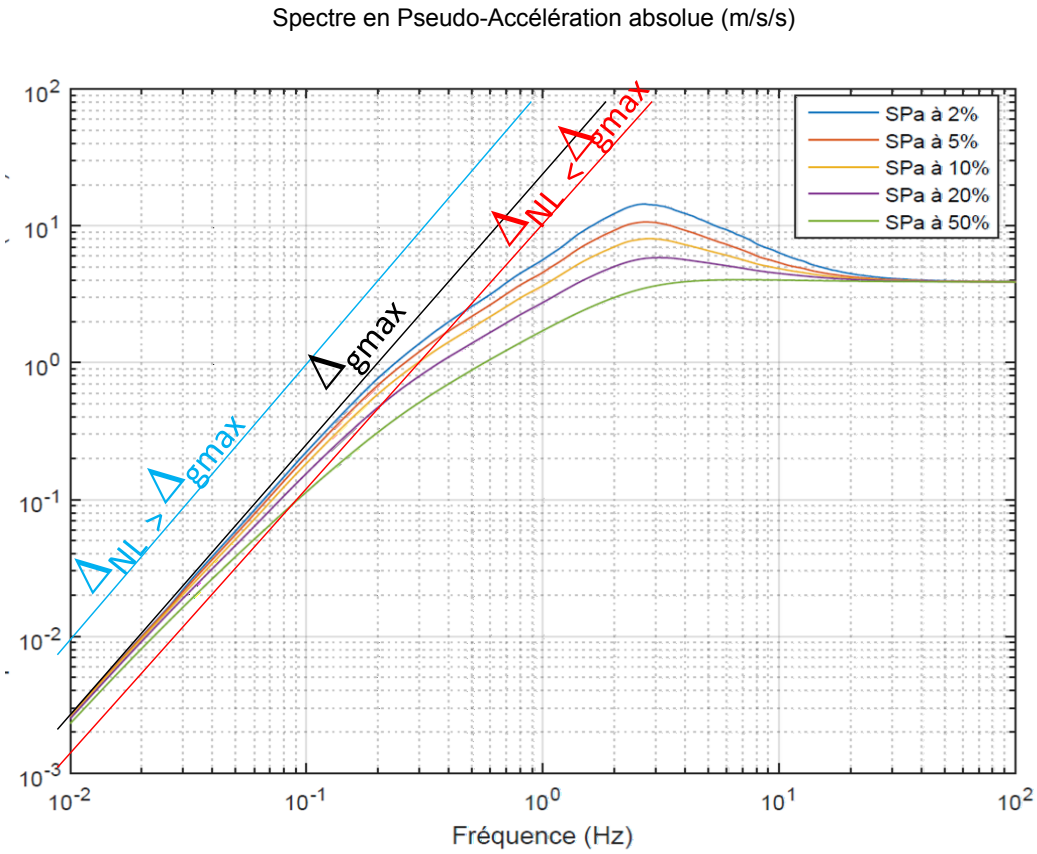
03 L'ajustement de la force de rappel temporelle

Nous étudierons ces trois critères dans les sous-sections suivantes.

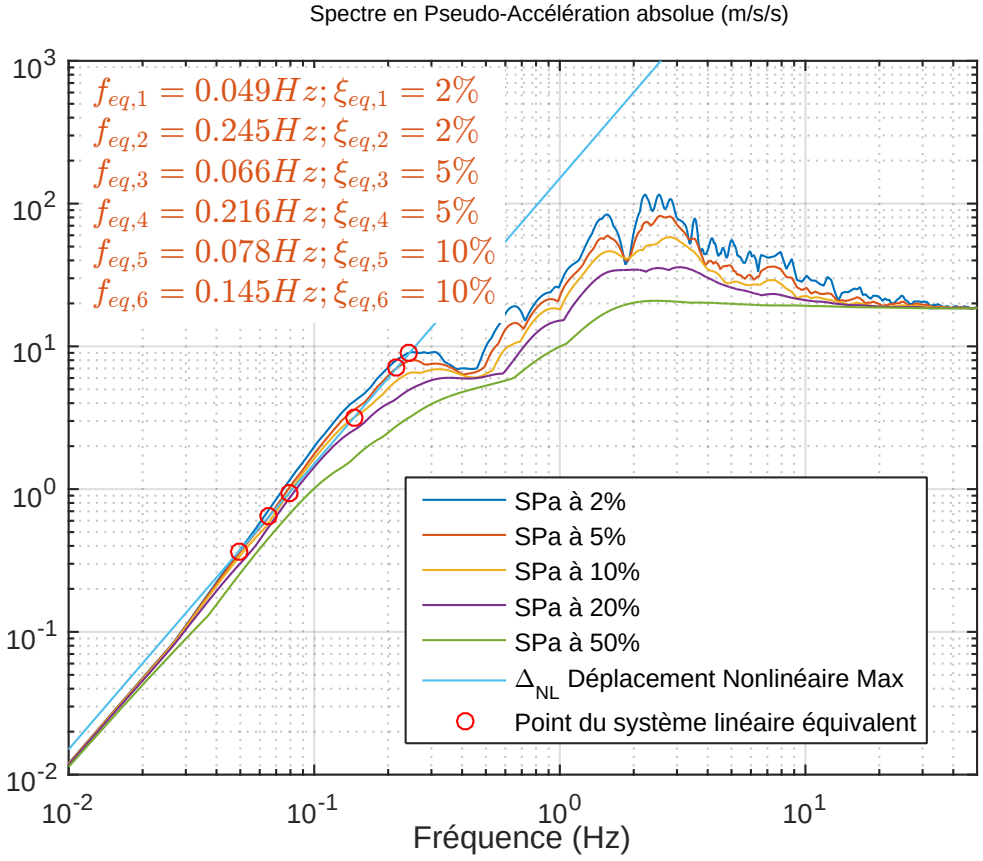
2.1.6.1 Critère d'équivalence du déplacement maximal

Il n'existe pas un système linéaire **unique** qui donne exactement le même déplacement maximal que celui du système non-linéaire.

Plaçons-nous sur le spectre de pseudo-accélération absolue d'un signal sismique en échelle log-log, il faut noter que tous les points appartenant à une même ligne droite de pente égale à 2 représentent la réponse de même déplacement. Soit un système non-linéaire soumis au chargement sismique dont le maximum du déplacement est noté Δ_{NL}.



(a) Cas du spectre moyen



(b) Cas du spectre d'un signal sismique

FIGURE 2.1 – Démonstration de la solution du système linéaire équivalent suivant le déplacement maximal

Nous notons également $\Delta_{g,max}$ le pic du déplacement déduit du signal d'entrée. Ainsi, toutes les intersections de la ligne correspondant à Δ_{NL} avec ce spectre de la pseudo-accélération absolue à plusieurs valeurs d'amortissement sont du même déplacement Δ_{NL}. Le nombre de points d'intersection dépend de la valeur Δ_{NL} par rapport à $\Delta_{g,max}$.

En cas du spectre moyen, présenté dans la figure 2.1a, des 1000 signaux $\lambda(t)$ générés dans le chapitre 01, section 1.2, la pente pour la zone sensible en vitesse et en accélération est de valeur inférieure à 2 et la pente en déplacement est bien égale à 2. Nous avons donc :

* si $\Delta_{g,max} \geq \Delta_{\mathrm{NL}}$, la ligne correspondant à Δ_{NL} coupe les spectres à différents endroits. Cela signifie qu'il existe plusieurs oscillateurs qui donnent le même déplacement maximal.

* si $\Delta_{g,max} < \Delta_{\mathrm{NL}}$: la ligne correspondant à Δ_{NL} ne coupe en aucun cas les spectres. Ainsi, il n'existe pas d'oscillateur équivalent à ce critère. En plus, l'écart minimal possible qu'un oscillateur élastique peut donner sera égal à $\Delta_{\mathrm{NL}} - \Delta_{g,max}$.

En cas du spectre d'un signal réel, ceci conduit à avoir de nombreuses intersections de la ligne correspondant à Δ_{NL} avec le spectre à différentes valeurs d'amortissement même si $\Delta_{g,max} < \Delta_{\mathrm{NL}}$. Cette affirmation est démontrée par l'exemple présenté sur la figure 2.1b. Nous avons donc une infinité de systèmes linéaires équivalents donnant exactement le même déplacement non-linéaire.

En bref, l'oscillateur linéaire conduisant à un déplacement maximal donné n'est pas unique. Il peut ou ne pas en exister. Quand la solution existe, elle est généralement multiple.

Minimisation de l'écart dans le concept de Iwan [1980]

Quant au concept de linéarisation de Iwan [1980], l'approche consiste en une recherche d'un système linéaire qui minimise l'écart entre son déplacement maximal et celui du système non-linéaire pour une valeur de ductilité appelée donnée, en valeur quadratique moyenne sur ceux des 12 signaux sismiques et 9 valeurs de la fréquence initiale du système non-linéaire. Cependant, deux points peuvent être discutés :

01 En premier lieu, une analyse peut être faite sur la façon de moyenner l'écart du déplacement entre le système linéaire et le système non-linéaire soumis aux 12 signaux sismiques. Cet écart est le même que celui entre le déplacement linéaire moyen et le déplacement non-linéaire moyen. La minimisation de cet écart peut être atteinte pour plusieurs solutions. Cette minimisation retrouve l'inconvénient précédemment évoqué en cas de spectre moyen. Si, le déplacement maximal moyen est inférieur à celui du signal d'entrée moyen, l'écart devient nul en plusieurs points et la solution est alors multiple. Et dans le cas où le déplacement maximal moyen est supérieur à celui du signal d'entrée moyen, l'écart minimal correspond à la différence entre le déplacement maximal moyen non-linéaire et le déplacement maximale moyen linéaire. La minimisation est atteinte quand la période élastique devient très importante (zone sensible en déplacement). La solution dans les deux cas est multiple.

02 Dans un deuxième temps, Iwan a moyenné l'écart pour 9 valeurs de fréquences initiales du système non-linéaire. Cette façon de moyenner l'écart n'est pas appropriée parce que la réponse dépend beaucoup de la fréquence initiale. La solution du problème de la linéarisation équivalente dépend de la fréquence initiale par rapport à

la fréquence centrale du signal. La solution de la minimisation dépend aussi de la fréquence initiale. Il est donc indispensable d'examiner la réponse pour différentes valeurs de fréquences initiales. Ainsi, cette façon de moyenner l'écart fausse la dynamique de la structure.

2.1.6.2 Critère d'équivalence suivant la quantité d'énergie dissipée

Le principe empirique basé sur les observations de Gulkan and Sozen [1974] énonce que deux phénomènes influencent la réponse d'une structure non-linéaire : la réduction de la rigidité et l'augmentation de l'énergie dissipée. Le deuxième est souvent traduit par l'augmentation d'amortissement en écrivant l'égalité entre l'énergie absorbée par le système non-linéaire avec celle emmagasinée par le système linéaire. Cela permet notamment d'expliquer l'usage de l'équilibre d'énergie dissipée afin de déterminer l'amortissement équivalent. Cependant, l'énergie dissipée ne varie pas ou peu en fonction de l'amortissement. Cette remarque représente un aspect extrêmement important.

Prenons un système linéaire soumis à un bruit blanc, il est alors possible de montrer mathématiquement que l'énergie dissipée ne dépend pas de l'amortissement ni de la fréquence propre mais de la seule valeur constante de la densité spectrale de puissance.

Soit un oscillateur simple de fréquence f_0 et amortissement ξ_0 soumis à un bruit blanc dont la densité spectrale de puissance G_0 est constante. La réponse en déplacement de l'oscillateur linéaire de f_0 et ξ_0 est noté $u(t)$. La Densité Spectrale de Puissance –ou *Power Spectral Density* – (DSP) de la réponse en déplacement G_u et en vitesse $G_{\dot{u}}$ sont déterminées par :

$$\begin{aligned} G_{\dot{u}}(\omega) &= \omega^2 G_u(\omega) \\ G_u(\omega) &= \frac{G_0}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4\xi_0^2\omega_0^2\omega^2} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Pour un oscillateur simple soumis à un bruit blanc, nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma_u^2 &= \int_0^\infty G_u(\omega)\,d\omega = \frac{\pi G_0}{4\xi_0\omega_0^3} \\ \sigma_{\dot{u}}^2 &= \int_0^\infty \omega^2 G_u(\omega)\,d\omega = \frac{\pi G_0}{4\xi_0\omega_0} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Grâce à l'ergodicité de la réponse au bruit blanc, nous pouvons calculer la variance de la réponse en vitesse de la façon suivante :

$$\sigma_{\dot{u}}^2 = \lim_{T_{end}\to\infty} \frac{1}{T_{end}} \int_0^{T_{end}} \dot{u}^2\,dt = \frac{\pi G_0}{4\xi_0\omega_0} \tag{2.16}$$

Lorsque T_{end} est suffisamment grande par rapport à la plus grande période de la réponse, la limite 2.16 peut être estimée précisément par calcul numérique. Ainsi, l'énergie

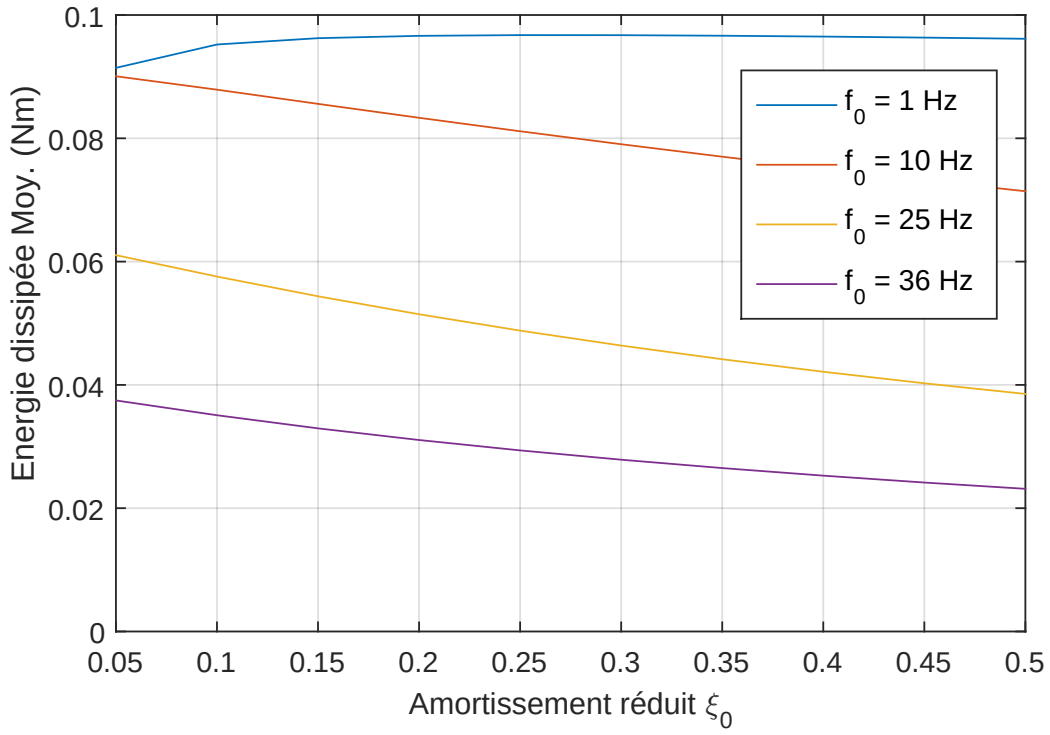


FIGURE 2.2 – Énergie dissipée visqueuse moyenne d'un oscillateur linéaire $\{f_0;\xi_0\}$ soumis aux 1000 bruits blancs $g_j(t)$.

dissipée par unité de temps sous la viscosité est déterminée de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\lim_{T_{end}\to\infty}\frac{E_{diss}}{T_{end}} &= \lim_{T_{end}\to\infty}\frac{1}{T_{end}}\int_0^{T_{end}} 2\xi_0\omega_0\dot{u}du = \lim_{T_{end}\to\infty}\frac{1}{T_{end}}\int_0^{T_{end}} 2\xi_0\omega_0\dot{u}^2dt \\ &= 2\xi_0\omega_0\lim_{T_{end}\to\infty}\left(\frac{1}{T_{end}}\int_0^{T_{end}}\dot{u}^2dt\right) \\ &= 2\xi_0\omega_0\frac{\pi G_0}{4\xi_0\omega_0} = \frac{\pi G_0}{2}\end{aligned} \tag{2.17}$$

Dans la figure 2.2, nous avons présenté l'énergie dissipée E_{diss} moyenne d'un oscillateur de f_0 et ξ_0 soumis aux 1000 signaux bruits blancs en fonction de l'amortissement réduit ξ_0 pour différentes valeurs de f_0. Les fréquences f_0 sont fixées à 1 Hz, 10 Hz, 25 Hz et 36 Hz par rapport à la plage de fréquence de sa DSP de 0 à 50Hz. Nous avons constaté une décroissance de l'énergie dissipée en fonction de la croissance de l'amortissement réduit qui est contrainte par le critère d'équivalence utilisé. En utilisant 1000 bruits blancs de densité spectrale $G_0 = 0.0032$, la limite de l'énergie dissipée pendant le transitoire de 20 secondes calculée grâce à la formule 2.17 est donc $\frac{\pi G_0}{2}T_{end}$ égale à 0.1 avec T_{end} égale à 20 secondes. Cependant, la valeur limite d'énergie dissipée numériquement obtenue est plus petite que cette valeur théorique. Cette différence provient du fait que l'intégrale 2.15 est théoriquement calculée sur toutes les fréquences (ou pulsations) de 0 à l'infini tandis que la valeur numérique est déterminée sur la plage de 0 - 50 Hz (voir l'annexe A.3).

De façon analogue, nous pouvons tracer l'évolution de l'énergie dissipée moyenne d'un oscillateur simple soumis aux 1000 signaux bruits blancs filtrés de Clough-Penzien

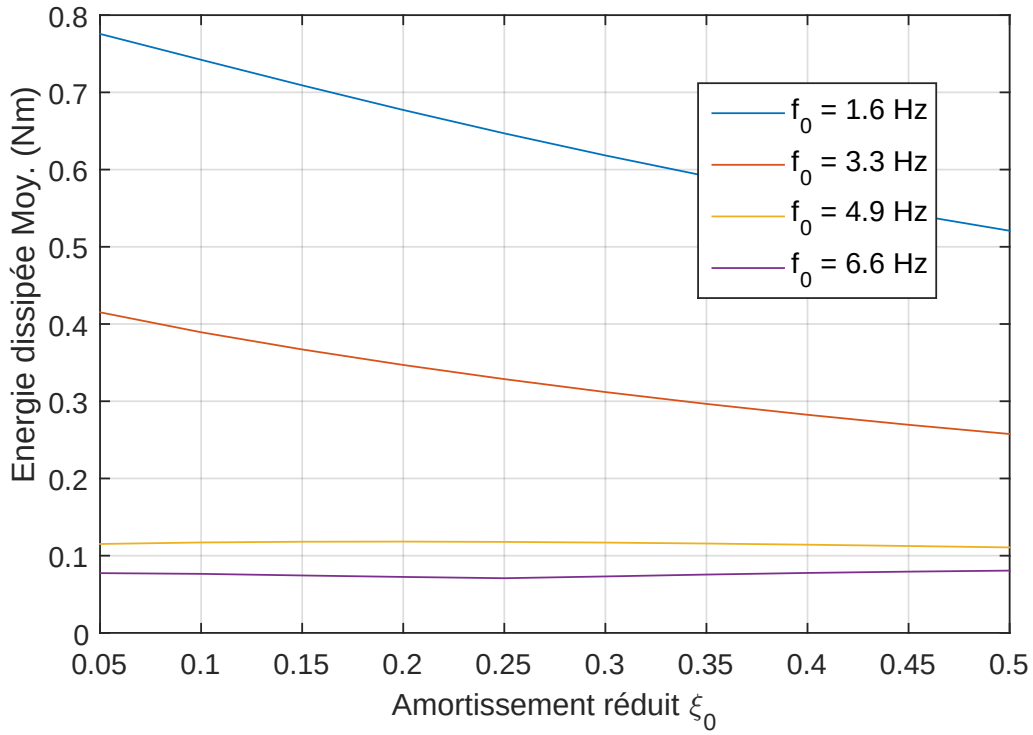


FIGURE 2.3 – Énergie dissipée visqueuse moyenne d'un oscillateur linéaire $\{f_0;\xi_0\}$ soumis aux 1000 signaux synthétiques du type Clough-Penzien $\gamma_j(t)$.

$\gamma_j(t)$ générés dans le chapitre 01 en fonction de l'amortissement. Les fréquences sont de 1.65 ; 3.3 ; 4.95 et 6.6 Hz correspondant aux valeurs de 0.5 ; 1.0 ; 1.5 et 2 du ratio f_c/f_0 où la fréquence centrale est notée f_c (Ref. figure 2.3). Nous avons constaté la même décroissance de l'énergie dissipée avec l'augmentation d'amortissement réduit.

En bref, l'équilibre d'énergie dissipée n'est pas un bon critère d'équivalence.

2.1.6.3 Critère d'équivalence suivant l'ajustement de la force de rappel

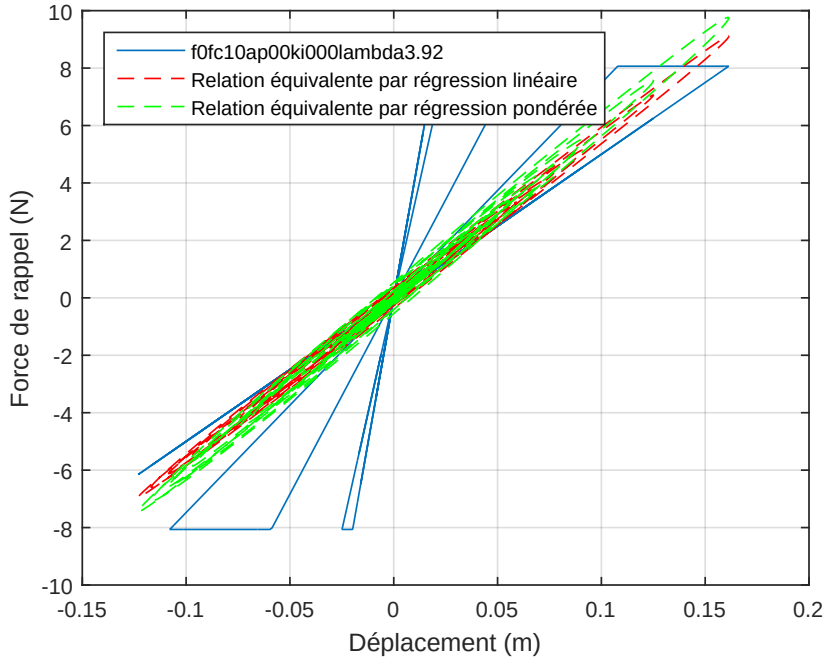
Dans le concept de Levy et al. [2006], la minimisation de l'écart de force de rappel entre le système non-linéaire et le système linéaire équivalent sur la totalité du transitoire donne la fréquence et l'amortissement de l'oscillateur linéaire équivalent. Cependant, remplacer la totalité de la force de rappel temporelle du système non-linéaire par celle du système linéaire n'est pas possible pour tous les comportements, surtout pour le comportement endommageant.

En fait, la réponse du modèle de comportement non-linéaire développe une quantité d'énergie dissipée hystérétique par l'aire sous la courbe de force de rappel en fonction du déplacement. La forme de cette aire dépend du comportement considéré. Elle est étroite quand le comportement est endommageant et ample quand le comportement est élasto-plastique à écrouissage faible (soit inférieur à 30 %). Elle devient néanmoins plus compliquée si le comportement est mixte. La force de rappel de l'oscillateur linéaire est la somme de la partie du ressort (kx) et la partie de la viscosité ($c\dot{x}$). Il est connu que le premier terme est une droite et le second est une ellipse dont l'aire est plus importante avec des déplacements proches de 0 et tend vers zéro pour le déplacement maximal. La somme de ces deux termes prend une forme d'ellipse dont l'axe est la rigidité. Cette forme peut être

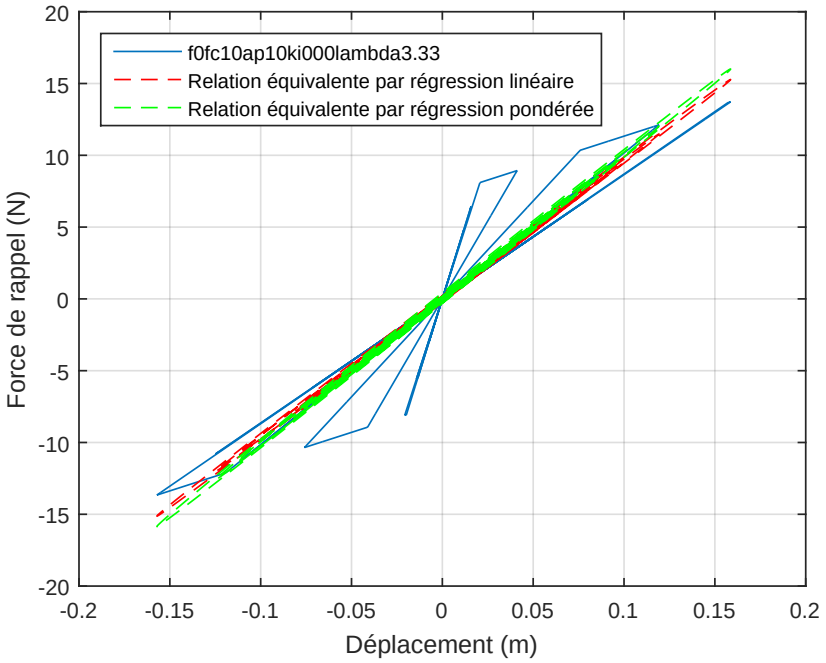
représentative d'un comportement élasto-plastique dont la ductilité appelée est faible et la pente post-élastique est forte, soit un écrouissage important. Elle n'est à l'inverse pas représentative du comportement endommageant dont l'aire est faible au voisinage de zéro en déplacement. Le comportement endommageant ne dissipe plus d'énergie après le déplacement temporel maximal mais le comportement équivalent linéaire continue à absorber l'énergie par viscosité.

Pour démontrer numériquement cette remarque, nous avons comparé la courbe force-déplacement pour un comportement endommageant (Ref. figure 2.4) et un comportement élasto-plastique (Ref. figure 2.5) avec celle de leur comportement linéaire équivalent respectif. Le comportement est déterminé en utilisant la régression linéaire multiple pour résoudre l'équation 2.9. Afin de considérer la réponse de l'oscillateur dans la phase forte, nous utilisons également la régression linéaire multiple en pondérant la réponse par le poids correspondant à la courbe enveloppe temporelle utilisée dans la partie de fabrication des signaux synthétiques. Dans la figure **??**, la légende "f0fc10ap10ki000lambda3.92" indique le cas où $\frac{f_0}{f_c} = 1.0$, $\alpha_p = 10\%$, $\chi = 0.00$ et $\lambda = 3.92$.

La figure **??** démontre que la force de rappel de l'oscillateur linéaire équivalent n'est pas représentative de celle obtenue pour le comportement endommageant et élastoplastique.

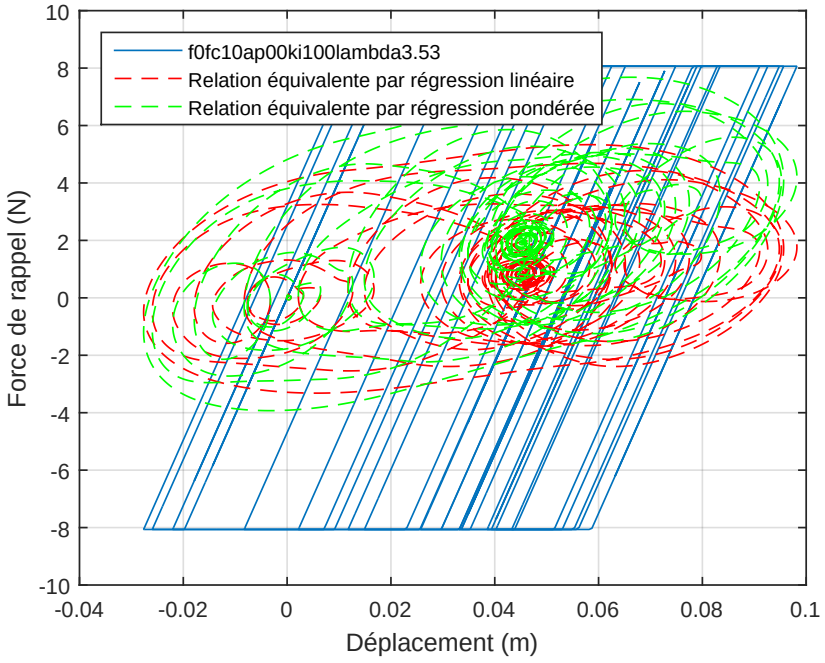


(a) $\lambda = 3.92$ ($\mu = 8.15$)

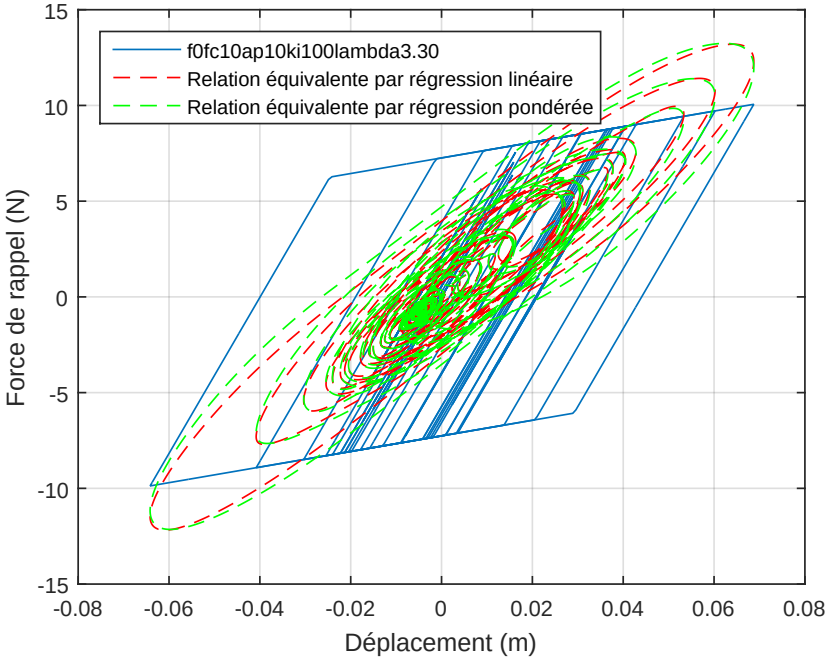


(b) $\lambda = 3.33$ ($\mu = 8.01$)

FIGURE 2.4 – Comparaison de la relation force-déplacement des systèmes endommageant et linéaire équivalent à 0% d'écrouissage (en haut) et 10 % d'écrouissage (en bas).



(a) $\lambda = 3.53$ ($\mu = 4.96$)



(b) $\lambda = 3.30$ ($\mu = 3.47$)

FIGURE 2.5 – Comparaison de la relation force-déplacement des systèmes élastoplastique à 0% d'écrouissage (en haut) et 10 % d'écrouissage (en bas).

2.2 Propositions d'amélioration des concepts de linéarisation équivalente

2.2.1 Importance du domaine fréquentiel

La réponse en déplacement de l'oscillateur non-linéaire dépend de la position relative de sa fréquence initiale et de la fréquence centrale du signal d'entrée. Cette remarque extrêmement importante est liée à la dynamique de l'oscillateur. Elle a été abordée dans les travaux de Newmark and Hall [1982], Gantenbien and Hoffmann [1986] ou encore Labbé [1994]. Dans le travail de Newmark and Hall [1982], le facteur de modification du déplacement tient compte du paramètre du sol et varie par zone du spectre (zone sensible en accélération, en vitesse et en déplacement). Il est à noter que ce facteur devient égal à 1 quand l'oscillateur est considéré comme étant en zone sensible en déplacement ($T_0 > T_c = 33s$). Cette analyse reconnue comme étant le *théorème de Newmark* affirme que le déplacement de l'oscillateur non-linéaire est égal à celui de l'oscillateur linéaire de même fréquence. Dans le rapport Gantenbien and Hoffmann [1986], la marge de dimensionnement au seuil d'élasticité est exprimée en fonction de la "fréquence adimensionnelle", prise comme égale au ratio de la fréquence initiale de l'oscillateur élasto-plastique avec la fréquence centrale du signal d'entrée. Ce point est défini par le ratio du niveau de signal sismique amenant l'oscillateur à la ruine par excès de déplacement avec le niveau de signal sismique amenant au seuil d'élasticité. Cette marge décroit de façon monotone en fonction de la fréquence adimentionnelle. Elle équivaut à la ductilité quand la "fréquence adimentionnelle" est faible et vaut 1 quand la "fréquence adimentionnelle" devient importante. De plus, dans le travail de Labbé [1994], la marge du dimensionnement de l'oscillateur élasto-plastique soumis au signal sismique à bande étroite est tracée. Cette marge varie de la valeur de la ductilité, passe par un pic correspondant à la fréquence adimensionnelle égale à 1 et atteint son asymptote de 1 (Ref. figure 2.6).

2.2.2 Plan d'expérience numérique

Afin de construire expérimentalement les systèmes linéaires équivalents, un plan d'expérience numérique est proposé. Ce plan est conçu et piloté en fonction de la valeur λ, qui représente le niveau du signal d'entrée par rapport à celui amènant l'oscillateur non-linéaire jusqu'au seuil d'élasticité. La procédure est illustrée sur la figure 2.7 avec le signal d'entrée est le bruit blanc filtré généré dans le chapitre 01, section 1.2.1 et les résultats en sortie sont le déplacement, l'accélération et la force de rappel temporels. A partir de ces résultats de sortie, nous avons déterminé la ductilité appelée et la linéarisation équivalente associées aux critères étudiés.

Dans la figure 2.7, nous dénotons $\gamma_1(t)$: le signal d'excitation à la base de l'oscillateur, avec l'indice 1 signifiant le signal de départ. Nous déterminons ensuite la réponse en déplacement $u_{0,j}(t)$ par un calcul linéaire transitoire de l'oscillateur élastique f_0 et ξ_0 suivant l'équation suivante :

$$\ddot{u}_{0,j}(t) + 2\xi_0\omega_0\dot{u}_{0,j}(t) + \omega_0^2 u_{0,j}(t) = -\gamma_{1,j}(t) \tag{2.18}$$

Nous utilisons le déplacement maximal absolu $max|u_{0,j}(t)|$ comme étant le seuil d'élasticité de l'oscillateur non-linéaire, dénoté $\{f_0, \xi_0 \text{ et } X_{e,j}\}$. A ce stade, $\gamma_{1,j}(t)$ conduit l'oscillateur non-linéaire $\{f_0, \xi_0 \text{ et } X_{e,j}\}$ jusqu'à son seuil d'élasticité.

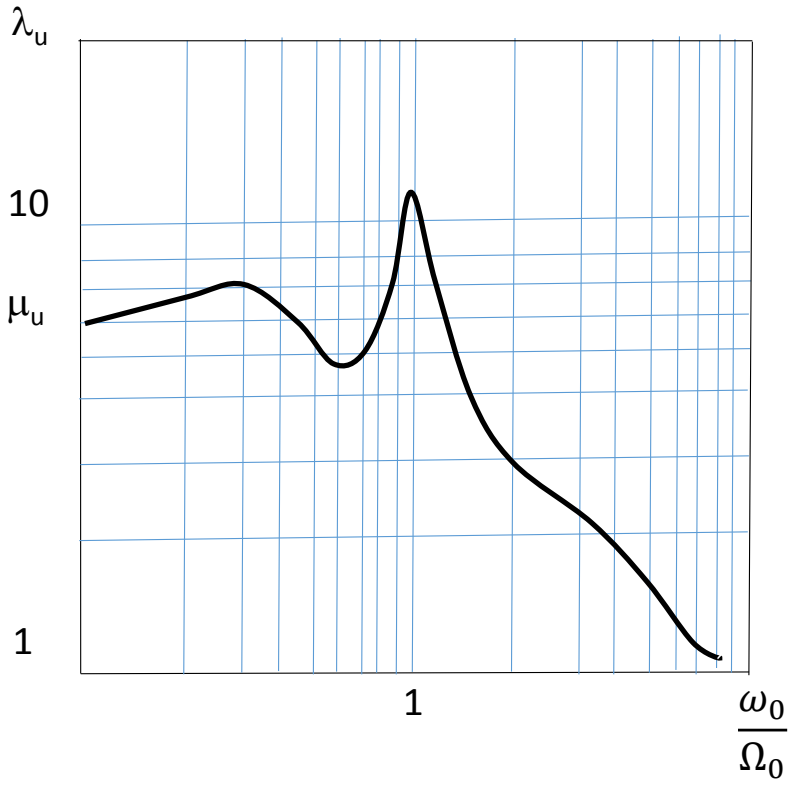


FIGURE 2.6 – Marge de design pour le signal sismique à bande étroite [cf. Labbé [1994]] où ω_0 et Ω_0 sont la pulsation initiale de l'oscillateur élasto-plastique et la pulsation associée à la fréquence centrale du signal d'entrée. La marge de 1 signifie que le niveau du design est égal à celui du rupture. Cette marge vaut la capacité de ductilité μ_u quand la fréquence initiale de l'oscillateur est faible.

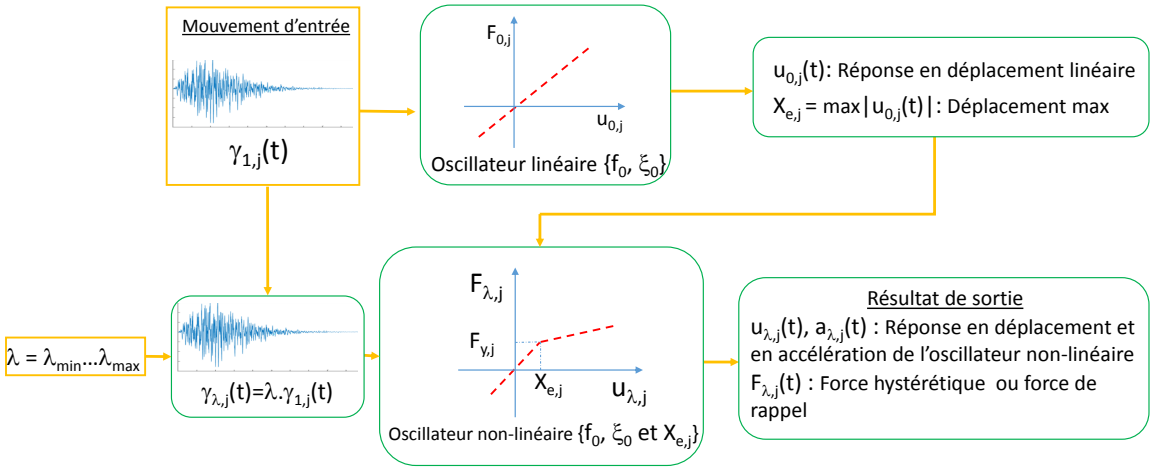


FIGURE 2.7 – Mise en œuvre du plan d'expérience numérique

TABLEAU 2.1 – Résumé du plan d'expérience numérique

75 cas de configuration par combinaison de :		
$\frac{f_0}{f_c}$	0.1 ; 0.5 ; 1.0 ; 1.5 ; 2.0	5 valeurs
α_p	0.0 ; 0.1 ; 0.2	3 valeurs
χ	0.00 ; 0.25 ; 0.50 ; 0.75 ; 1.00	5 valeurs
Pour chaque cas : 10 niveaux d'excitation		
λ	$\lambda = 1...\lambda_{max}$ (tableau 2.2)	10 valeurs
Pour chaque cas et chaque niveau d'excitation : 1000 signaux		
$\gamma_{\lambda,j}(t) = \lambda\gamma_{1,j}(t)$	j=1...1000	1000 signaux
Pour chaque cas et chaque niveau d'excitation, résultats :		
$f_{eq,\lambda,j}$	j=1...1000	1000 valeurs
$\xi_{eq,\lambda,j}$	j=1...1000	1000 valeurs
$\mu_{\lambda,j}$	j=1...1000	1000 valeurs

Nous augmentons le niveau du signal d'entrée par le facteur $\lambda > 1$ comme étant :

$$\gamma_\lambda(t) = \lambda\gamma_1(t) \tag{2.19}$$

Ce signal $\gamma_{\lambda,j}(t)$ conduit cet oscillateur $\{f_0, \xi_0$ et $X_{e,j}\}$ à un comportement non-linéaire. Nous utilisons dix niveaux du signal d'entrée correspondant à dix valeurs de λ comprises entre 1 et λ_{max}. La valeur de λ_{max} est déterminée pour que la valeur de ductilité médiane à ce λ soit égale à 20.

En utilisant le schéma β-Newmark décrit dans le chapitre 01, nous déterminons la réponse transitoire non-linéaire de l'oscillateur non-linéaire par l'équation suivante :

$$\ddot{u}_{\lambda,j}(t) + 2\xi_0\omega_0\dot{u}_{\lambda,j}(t) + \frac{f\left(u_{\lambda,j}(t)\right)}{m} = -\gamma_{\lambda,j}(t) \tag{2.20}$$

Nous définissons la ductilité appelée par la formule suivante :

$$\mu_{\lambda,j} = \frac{max|u_{\lambda,j}(t)|}{X_{e,j}(t)} \tag{2.21}$$

La procédure décrite sur la figure 2.7 est appliquée pour différents comportements d'oscillateurs non-linéaires résumés dans la tableau 2.1.

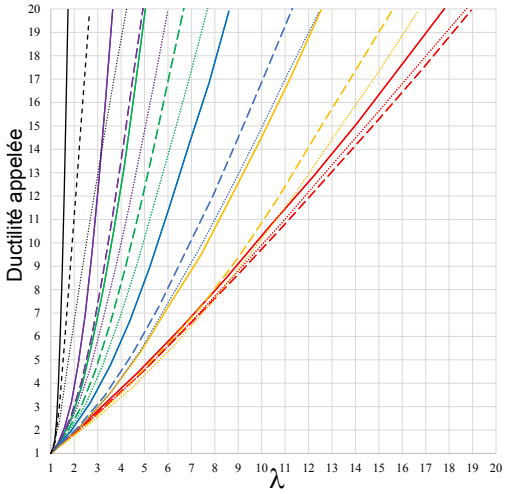
Les valeurs de λ_{max} sont présentées dans le tableau 2.2.

2.2.3 Relation de la ductilité appelée et du niveau du signal

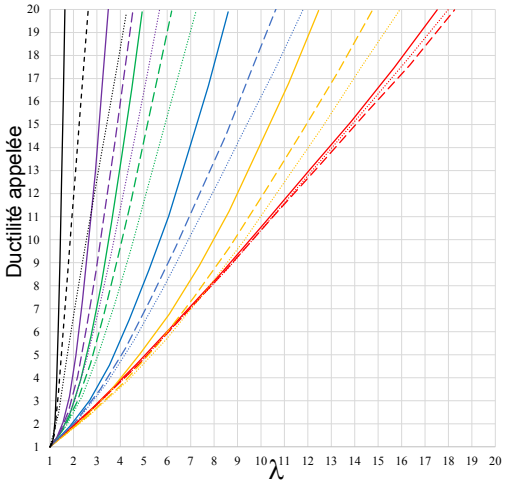
Nous avons déterminé la relation de la réponse non-linéaire, représentée par la ductilité appelée μ, et du niveau d'excitation λ. Pour cela, nous avons appliquée la procédure décrite dans la figure 2.7 avec tous les cas de configuration présentés dans le tableau 2.1. Il faut noter que le résultat pour le comportement avec $\frac{f_0}{f_c} = 5.0$ est ajouté uniquement pour cette étude liée à la relation de la ductilité appelée et du niveau du signal d'excitation afin de bien montrer la dynamique des systèmes non-linéaires.

TABLEAU 2.2 – Valeur de λ_{max} pour tous les comportements considérés

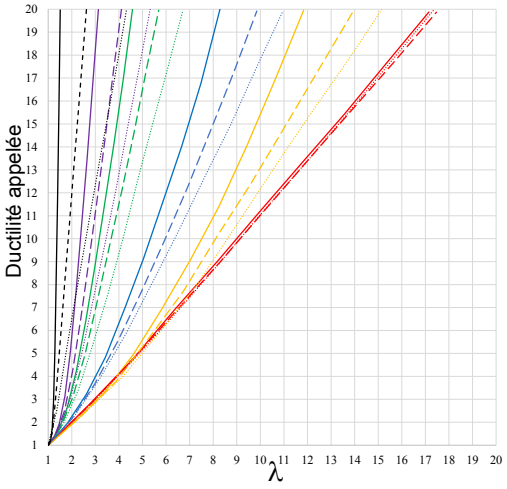
	Écrouissage $\alpha_p = 0\%$				
	$\chi = 1.00$	$\chi = 0.75$	$\chi = 0.50$	$\chi = 0.25$	$\chi = 0.00$
f_0/f_c=0.1	17.80	17.52	17.15	16.15	14.80
f_0/f_c=0.5	12.54	12.46	11.84	10.80	9.35
f_0/f_c=1.0	8.60	8.60	8.29	7.55	6.256
f_0/f_c=1.5	5.037	4.93	4.58	4.08	3.428
f_0/f_c=2.0	3.64	3.488	3.13	2.73	2.28
f_0/f_c=5.0	1.734	1.634	1.511	1.427	1.351
	Écrouissage $\alpha_p = 10\%$				
	$\chi = 1.00$	$\chi = 0.75$	$\chi = 0.50$	$\chi = 0.25$	$\chi = 0.00$
f_0/f_c=0.1	18.94	18.26	17.47	16.6127	15.60
f_0/f_c=0.5	15.54	14.82	13.92	12.85	11.716
f_0/f_c=1.0	11.35	10.66	9.85	9.01	8.00
f_0/f_c=1.5	6.70	6.19	5.69	5.15	4.50
f_0/f_c=2.0	4.95	4.54	4.11	3.70	3.24
f_0/f_c=5.0	2.65	2.64	2.63	2.60	2.51
	Écrouissage $\alpha_p = 20\%$				
	$\chi = 1.00$	$\chi = 0.75$	$\chi = 0.50$	$\chi = 0.25$	$\chi = 0.00$
f_0/f_c=0.1	18.75	18.03	17.40	16.81	16.20
f_0/f_c=0.5	16.69	15.93	15.22	14.27	13.10
f_0/f_c=1.0	12.46	11.80	10.93	10.16	9.25
f_0/f_c=1.5	7.70	7.23	6.72	6.15	5.50
f_0/f_c=2.0	6.00	5.67	5.34	4.97	4.56
f_0/f_c=5.0	4.25	4.25	4.33	4.30	4.20



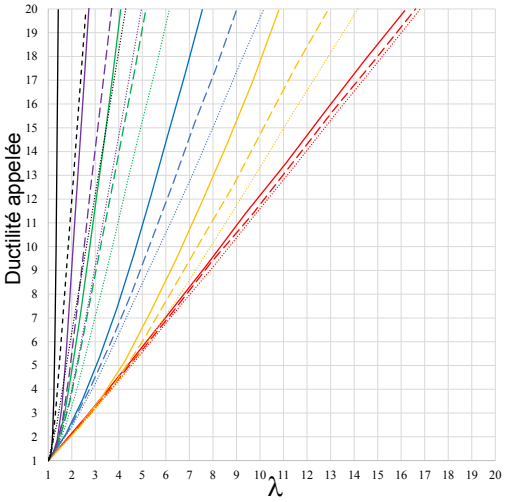
(a) χ = 1.00



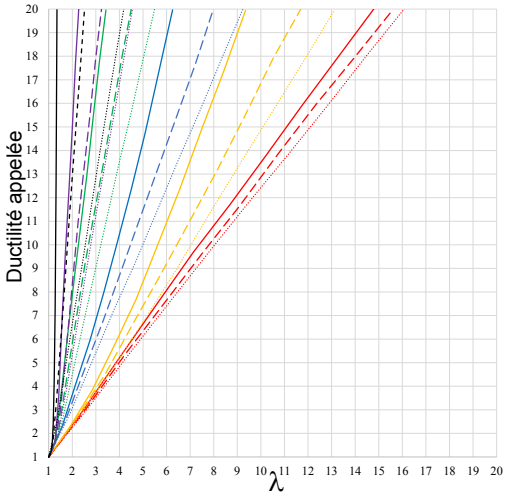
(b) χ = 0.75



(c) χ = 0.50



(d) χ = 0.25



(e) χ = 0.00

FIGURE 2.8 – Relation de la ductilité appelée μ versus le niveau du signal d'entrée λ pour différents comportement $\{\frac{f_0}{f_c}; \alpha_p; \chi\}$.

La relation de la ductilité appelée et le niveau du signal d'excitateur, soit μ versus λ, représente la dynamique des systèmes (Ref. figure 2.8). La légende des couleurs est la suivante : (La couleur rouge) le ratio $\frac{f_0}{f_c} = 0.1$, (La couleur jaune) le ratio $\frac{f_0}{f_c} = 0.5$, (La couleur bleu) le ratio $\frac{f_0}{f_c} = 1.0$, (La couleur verte) le ratio $\frac{f_0}{f_c} = 1.5$, (La couleur violette) le ratio $\frac{f_0}{f_c} = 2.0$ et (La couleur noire) le ratio $\frac{f_0}{f_c} = 5.0$, et coupées avec le style des lignes : la ligne continue(———), la ligne en pointillée (- - - -) et les points (.....) représentent successivement le cas sans écrouissage, avec 10% et 20% écrouissage cinématique. La valeur deχ représente le comportement étudié. Nous pouvons y constater que :

* Quand la structure est souple (le ratio $\frac{f_0}{f_c}$ est faible), la ductilité appelée est une fonction croissante linéaire en fonction de λ.

* Quand la structure est rigide (le ratio $\frac{f_0}{f_c}$ est important), la ductilité appelée croit rapidement en fonction de λ de l'ordre supérieur à 1. Quand λ croit très peu, la ductilité appelée μ se croit énormément.

A titre d'exemple, pour une ductilité appelée de 10, la valeur de λ est égale à 10 pour la structure souple et à 1.2 pour la structure rigide pour le cas sans écrouissage.

En bref, la ductilité appelée dépend beaucoup du ratio $\frac{f_0}{f_c}$ et la valeur de α_p, ce qui relève l'importance du domaine fréquentiel. Cependant, cette relation μ vs λ dépend très peu de la valeur de χ.

2.2.4 Nouvelle linéarisation équivalente suivant la rigidité sécante et le déplacement maximal

Critère d'équivalence suivant la rigidité sécante et le déplacement maximal

Le système linéaire donnant le même déplacement maximal que l'oscillateur non-linéaire n'est pas unique. Si elle existe, la solution peut être multiple. Si la solution n'existe pas, l'écart minimal est la différence entre le déplacement maximal non-linéaire et le déplacement maximal du signal d'entrée. Ainsi, le problème d'identification de l'oscillateur linéaire équivalent donnant le même déplacement maximal est mal posé. Il faut donc y ajouter un autre critère.

De plus, pour la méthode CSM, le point de fonctionnement représente le même déplacement et la force associée. Cela revient à utiliser la rigidité sécante afin de définir la fréquence équivalente. L'amortissement est ainsi déterminé afin que l'écart de déplacement entre les deux systèmes soit minimal.

Nous nous sommes appuyés sur ce couplage afin de construire la nouvelle linéarisation équivalente. Grâce à la fréquence équivalente préalablement déterminée, la solution de ce problème devient unique si elle existe.

Cependant, le spectre d'un signal étant bruité (Ref. figure 2.1), cela conduit à avoir des solutions irrégulières. Ainsi, il est donc indispensable d'utiliser le spectre moyen (Ref. figure 1.5). A ce stade, il est donc nécessaire d'étudier l'existence des systèmes linéaires équivalents.

L'existence du système linéaire équivalent suivant la rigidité sécante et le déplacement maximal

Nous notons $\overline{\Delta}_{\mathrm{NL},\lambda}$ la réponse médiane du système non-linéaire soumis aux 1000 signaux d'entrée à la même valeur de λ et $\overline{\Delta}_{g,1,max}$, $\overline{\Delta}_{g,\lambda,max}$ successivement la valeur moyenne du déplacement déduit du signal d'entrée du niveau 1 et niveau λ. Ainsi, la valeur de $\overline{\Delta}_{g,\lambda,max}$ est égale à $\lambda\overline{\Delta}_{g,1,max}$. La valeur de $\overline{\Delta}_{\mathrm{NL},\lambda}$ est estimée par la valeur de ductilité appelée μ et du seuil d'élasticité moyen $\overline{X}_e$. L'existence du système linéaire équivalent dépend du rapport $\frac{\overline{\Delta}_{g,\lambda,max}}{\overline{\Delta}_{\mathrm{NL},\lambda}}$. Si $\frac{\overline{\Delta}_{g,\lambda,max}}{\overline{\Delta}_{\mathrm{NL},\lambda}} \geq 1$, il existe des oscillateurs donnant le même déplacement $\overline{\Delta}_{\mathrm{NL},\lambda}$.

Nous avons tracé sur la figure 2.9 la relation de $\overline{\Delta}_{\mathrm{NL},\lambda}$ en fonction de $\overline{\Delta}_{g,\lambda}max$ pour différents comportements. Nous avons la même légende que celle dans la figure 2.8. A partir de ces courbes dans la figure 2.9, nous pouvons constater que $\overline{\Delta}_{g,\lambda}max \geq \overline{\Delta}_{\mathrm{NL},\lambda}$. Cette observation permet de prouver l'existence du système linéaire équivalent donnant exactement le même déplacement maximal médian.

Détermination de la fréquence équivalente et de l'amortissement équivalent

Pour chaque valeur de λ, la valeur de ductilité appelée μ associée est déterminée à partir des courbes de la figure 2.8. La fréquence équivalente associée à la rigidité sécante est calculée de la façon suivante :

$$\frac{f_{eq}}{f_0} = \sqrt{\frac{1+\alpha_p(\mu-1)}{\mu}} \tag{2.22}$$

Ensuite, la valeur du déplacement maximal non-linéaire est déterminée par $\mu\overline{X}_e$. A l'aide du spectre moyen élastique (Ref. Figure 1.4), l'amortissement est déterminé tel que :

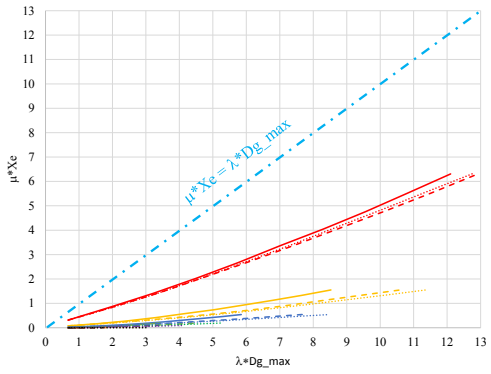
$$\mathrm{SD}(f_{eq},\xi_{eq}) = \mu\overline{X}_e \tag{2.23}$$

Les valeurs du spectre en déplacement à un amortissement autre que 2 %, 5 %, 10 %, 20 % et 50 % sont interpolées et extrapolées de façon linéaire en fonction de la valeur d'amortissement.

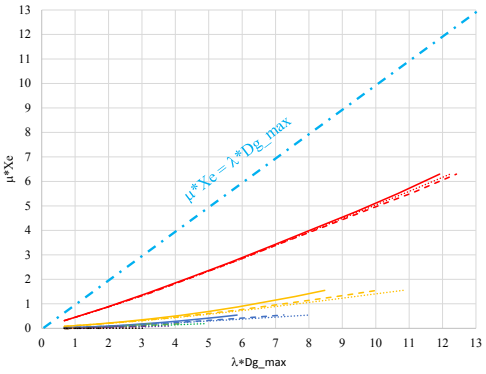
Les résultats en terme d'amortissement équivalent pour le comportement correspondant au cas de $\frac{f_0}{f_c} = 5.0$ ne sont pas exploitables quand la fréquence initiale devient importante. De ce fait, le résultat est présenté pour les ratios de $\frac{f_0}{f_c} = 0.1\,;\,0.5\,;\,1.0\,;\,1.5\,;\,2.0$.

Résultat de linéarisation équivalente par la rigidité sécante et déplacement maximal

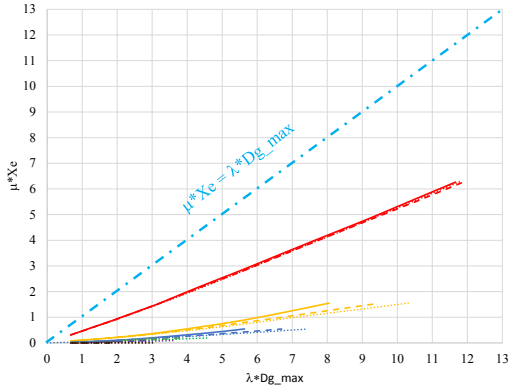
Nous avons tracé les courbes $\{\frac{f_{eq}}{f_0}$ vs $\mu\}$ et $\{\xi_{eq}$ vs $\mu\}$. Étant donné que la chute de fréquence équivalente est liée à la valeur de rigidité sécante, elle reste la même pour toutes les familles d'oscillateur étudiées (Ref. figure 2.10). Par contre, la valeur d'amortissement équivalent ξ_{eq} est différente pour différents comportements étudiés : différentes valeurs de χ, différents ratios $\frac{f_0}{f_c}$, différents écrouissages α_p. Les valeurs d'amortissement sont présentées sur les figures 2.11, 2.12 et 2.13.



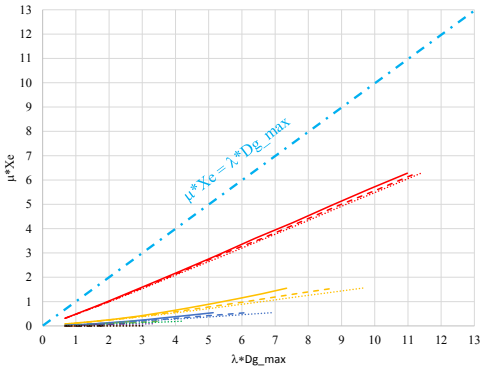
(a) χ = 1.00



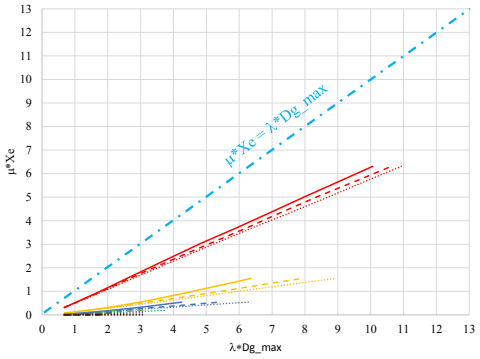
(b) χ = 0.75



(c) χ = 0.50



(d) χ = 0.25



(e) χ = 0.00

FIGURE 2.9 – Relation du déplacement maximale (déterminé par $\mu * XE$) versus le déplacement déduit du signal d'entrée (déterminé par $\lambda * D_{g,1}max$) pour différents comportement $\{\frac{f_0}{f_c}; \alpha_p; \chi\}$.

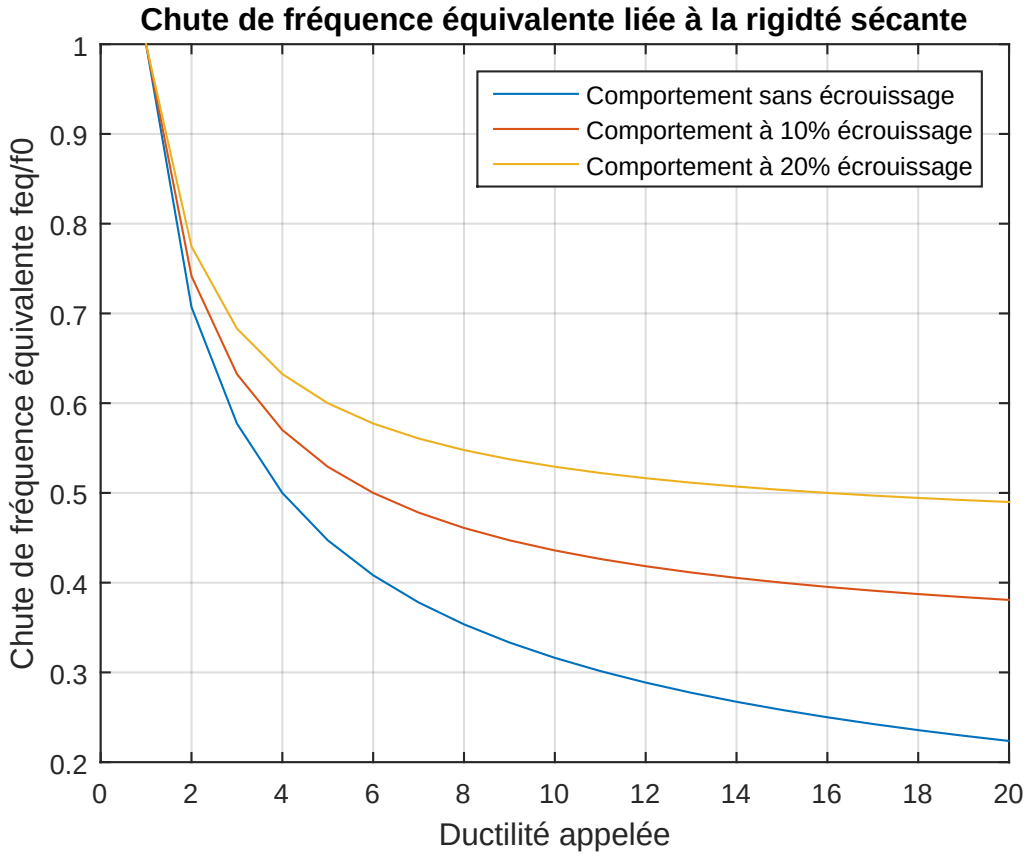
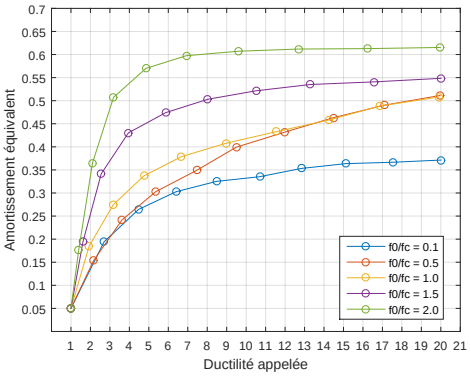
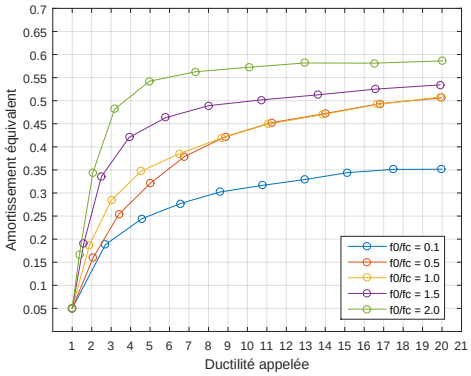


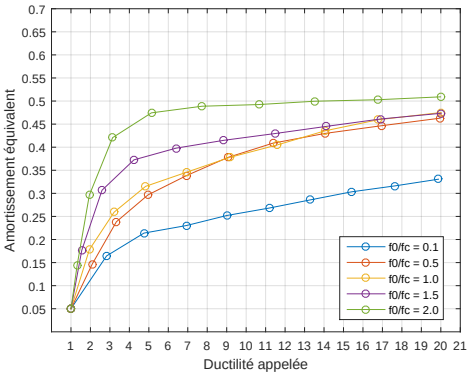
FIGURE 2.10 – Chute de fréquence équivalente liée à la rigidité sécante calculée par la formule 2.22. Nous pouvons observer la valeur asymptotique du ratio $\frac{f_{eq}}{f_0}$ de $\sqrt{\alpha_p}$ quand la ductilité appelée devient importante.



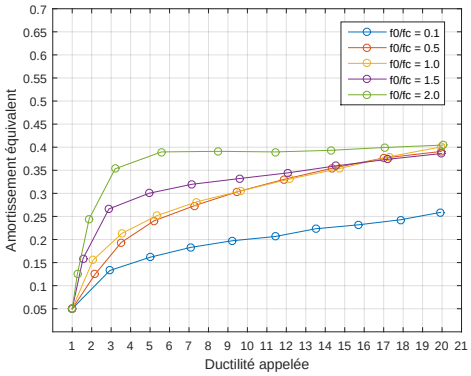
(a) $\chi = 1.00$



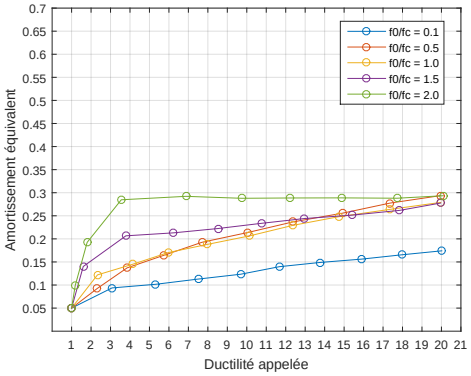
(b) $\chi = 0.75$



(c) $\chi = 0.50$

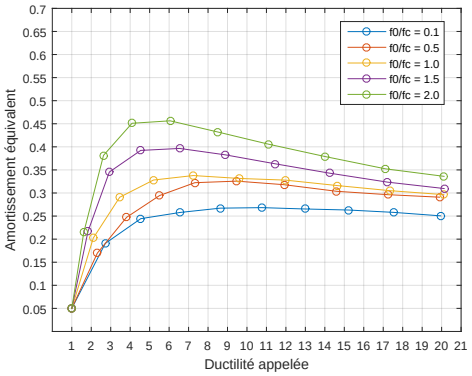


(d) $\chi = 0.25$

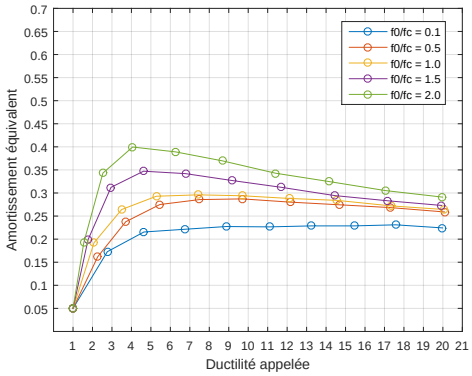


(e) $\chi = 0.00$

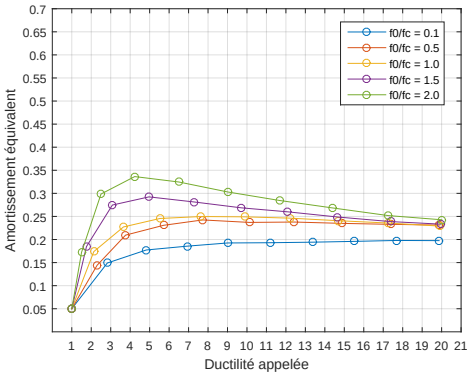
FIGURE 2.11 – Amortissement équivalent de l'oscillateur suivant le point de fonctionnement pour α_p=0 % pour différents comportement $\{\frac{f_0}{f_c};\chi\}$.



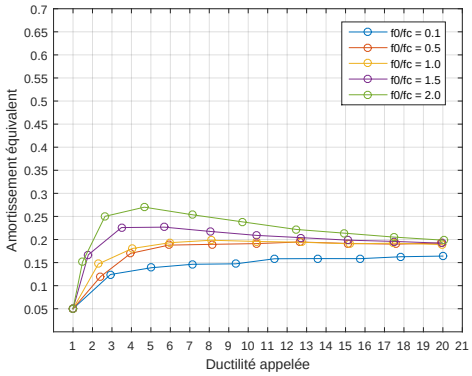
(a) $\chi = 1.00$



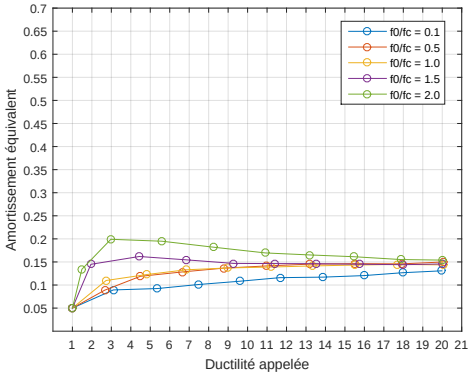
(b) $\chi = 0.75$



(c) $\chi = 0.50$

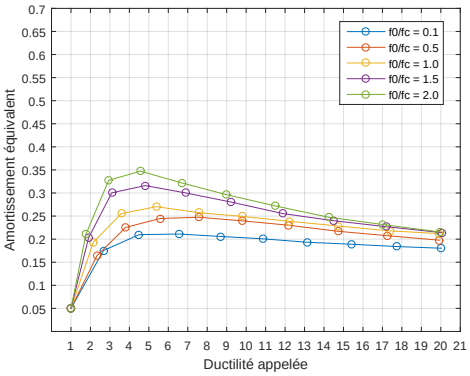


(d) $\chi = 0.25$

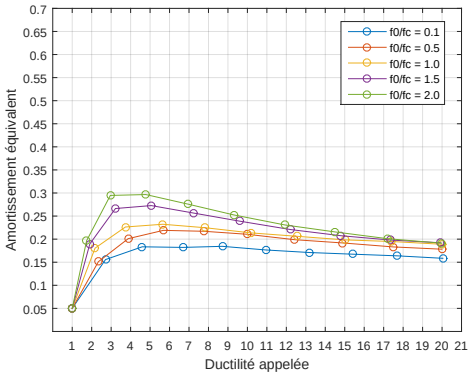


(e) $\chi = 0.00$

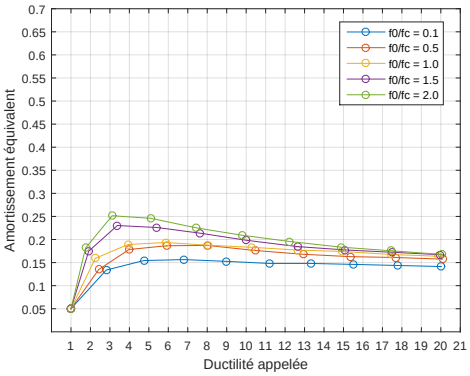
FIGURE 2.12 – Amortissement équivalent de l'oscillateur suivant le point de fonctionnement pour α_p= 10 % pour différents comportement $\{\frac{f_0}{f_c};\chi\}$.



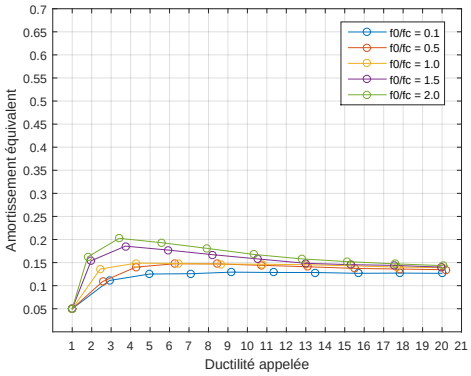
(a) $\chi = 1.00$



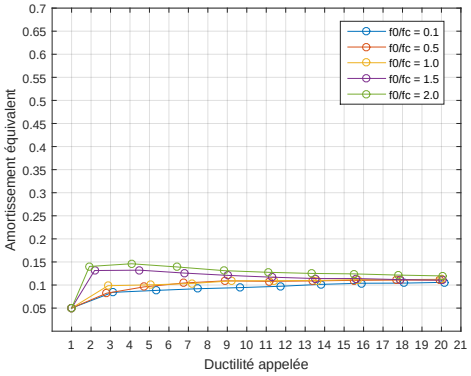
(b) $\chi = 0.75$



(c) $\chi = 0.50$



(d) $\chi = 0.25$



(e) $\chi = 0.00$

FIGURE 2.13 – Amortissement équivalent de l'oscillateur suivant le point de fonctionnement pour α_p= 20 % pour différents comportement $\{\frac{f_0}{f_c}; \chi\}$.

Commentaires sur le résultat d'amortissement équivalent de la linéarisation équivalente suivant la rigidité sécante et le déplacement maximal

01 Pour la même valeur de ductilité appelée, plus la structure est rigide (ratio $\frac{f_0}{f_c}$ important), plus l'amortissement équivalent est important. Parce que, plus la structure est rigide, plus le ratio $\frac{\lambda \Delta_{g,1max}}{\mu X_e}$ est important. Cet écart pilote le résultat de l'amortissement. En fait, plus cet écart est important, plus l'amortissement est important. Pour une valeur de ductilité appelée importante, l'amortissement tend vers sa valeur asymptotique.

02 La valeur asymptotique dépend de la valeur de l'écrouissage de l'oscillateur non-linéaire. Plus l'écrouissage est important, moins l'asymptote est importante.

03 Le comportement élasto-plastique correspond à des valeurs d'amortissement plus importantes que le comportement endommageant pour une même valeur de ductilité appelée.

2.2.5 Amélioration de la méthode du spectre de capacité en utilisant la linéarisation équivalente suivant la rigidité sécante et le déplacement maximal

La méthode du spectre de capacité décrite dans ATC [1996] entraine les problèmes précédemment abordés liés à la linéarisation équivalente. Afin d'améliorer cette méthode, nous utilisons le comportement linéaire équivalent suivant la rigidité sécante et le déplacement maximal. Le point clé de cette méthode est la détermination du point de fonctionnement. Dans ATC [1996], il a proposé trois démarches afin de déterminer ce point. Il faut noter que ces trois démarches s'appuient sur le facteur de réduction du spectre en fonction de l'amortissement équivalent afin de modifier le spectre élastique. En plus, la procédure A peut entrainer la divergence et la procédure B et C sont des démarches quant à elles plutôt graphiques.

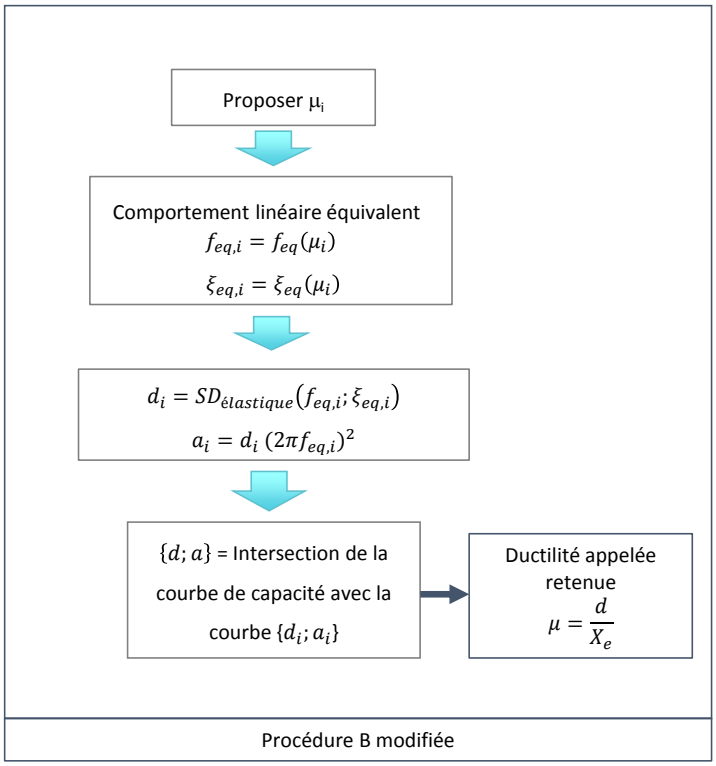
Contrairement à ces trois démarches, nous avons modifiée la courbe de demande par la ductilité appelée associée grâce à ces relations :

$$\mathrm{SD}_{modifié} = \mathrm{SD}_{élastique}(f_{eq,i}(\mu_i); \xi_{eq,i}(\mu_i)) \tag{2.24}$$

Où : $\mathrm{SD}_{modifié}$ et $\mathrm{SD}_{élastique}$ sont successivement le spectre modifié et élastique.

La performance du nouveau comportement linéaire équivalent est testée en le comparant avec différents concepts du comportement linéaire équivalent qui sont celui issue dans ATC [1996] et celui de Iwan [1980]. Il est intéressant de noter que la formule de Chopra and Goel [1999] est plus appropriée et adaptée aux démarches décrites dans ATC [1996]. Elle nécessite néanmoins le coefficient κ qui n'est pas disponible pour un comportement dit "Mixte" qui est utilisé dans cette comparaisons. A ce stade, nous avons les trois concepts du comportement linéaire équivalent présenté dans le tableau 2.3.

Afin de test ces trois concepts du comportement linéaire équivalent, nous procédons au calcul du problème de déterminer la valeur de ductilité appelée associée à un niveau de λ donné pour différents comportement non-linéaires. Nous avons utilisé deux démarches simplifiées présentées dans la figure 2.14.



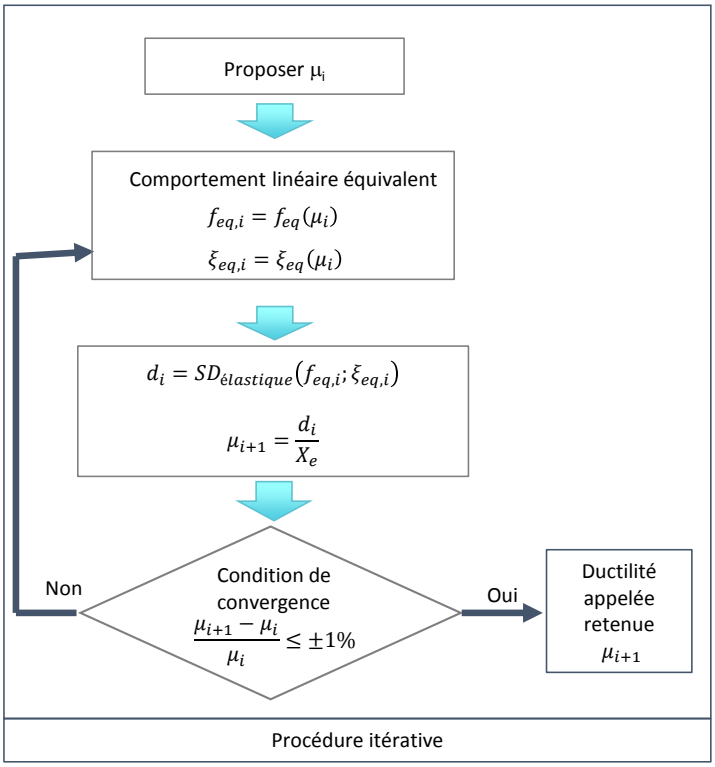


FIGURE 2.14 – Les procédure simplifiées de déterminer la ductilité appelée associée à un niveau λ donné

TABLEAU 2.3 – Abréviations des cas de calcul de la méthode indirecte

	Méthode itérative	Méthode CSM avec procédure B
Chopra 2001	Ite_Chopra	CSM_Chopra
Iwan 1980	Ite_Iwan	CSM_Iwan
Rigidité Sécante plus Déplacement Maximal	Ite_RSDM	CSM_RSDM

Nous avons donc 6 résultats de méthodes simplifiées qui sont comparés avec le résultat du calcul transitoire non-linéaire (Ref. table 2.3).

Le résultat est présenté sous la forme de la relation ductilité appelée versus λ pour différents comportements. Les valeurs de références sont lues sur la figure 2.8.

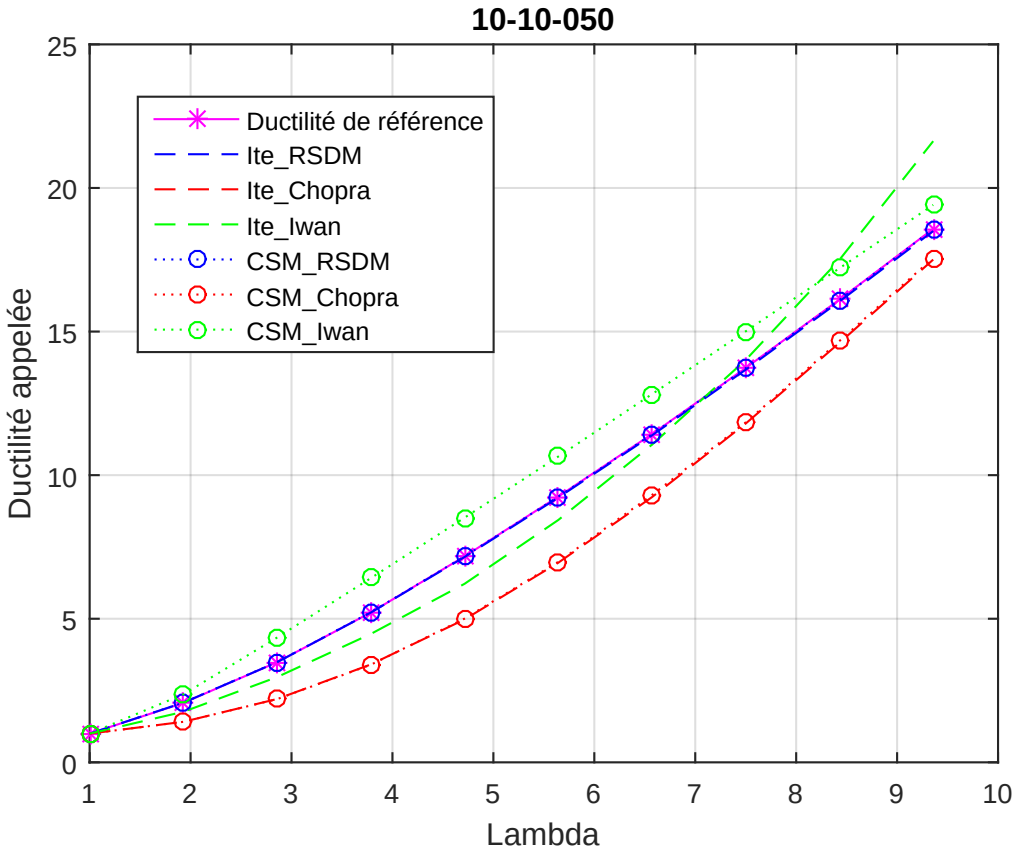


FIGURE 2.15 – Comparaison des résultats en ductilité appelée pour le système avec $\{\frac{f_0}{f_c} = 1.0; \alpha = 10\%; \chi = 0.50\}$.

Nous avons tracé un exemple pour le comportement avec $\{\frac{f_0}{f_c} = 1.0; \alpha = 10\%; \chi = 0.50\}$ sur la figure2.15. La ductilité appelée de référence est complètement saisie par le résultat par les démarches utilisant le nouveau comportement linéaire équivalent par la rigidité sécante plus déplacement maximal (CSM_RSDM et Ite_RSDM). A contrario, les résultats des deux démarches utilisant le comportement linéaire équivalent de Chopra and Goel [1999] (CSM_Chopra et Ite_Chopra) sont très écartés de la ductilité appelée de référence. Et, les résultats obtenus par les démarches utilisant le comportement linéaire équivalent de Iwan [1980] (CSM_Iwan et Ite_Iwan) sont différents l'un de l'autre et tous éloignés de

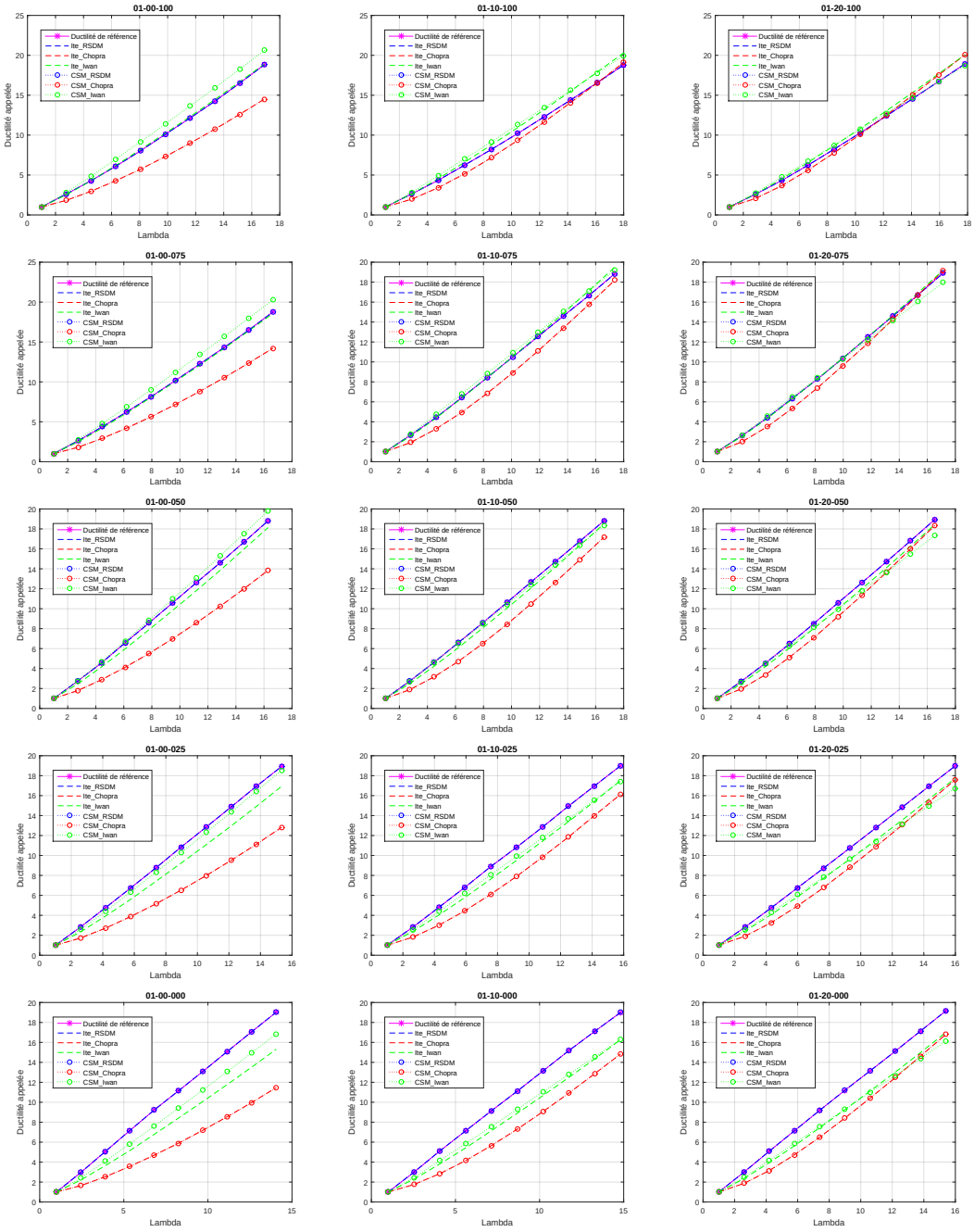


FIGURE 2.16 – Comparaison des résultats en ductilité appelée pour le système canonique dont la rigidité initiale est faible ($\frac{f_0}{f_c} = 0.1$). La combinaison 01-10-050 signifie le comportement dont $\frac{f_0}{f_c} = 0.1$; $\alpha_p = 10\%$ et $\chi = 0.50$.

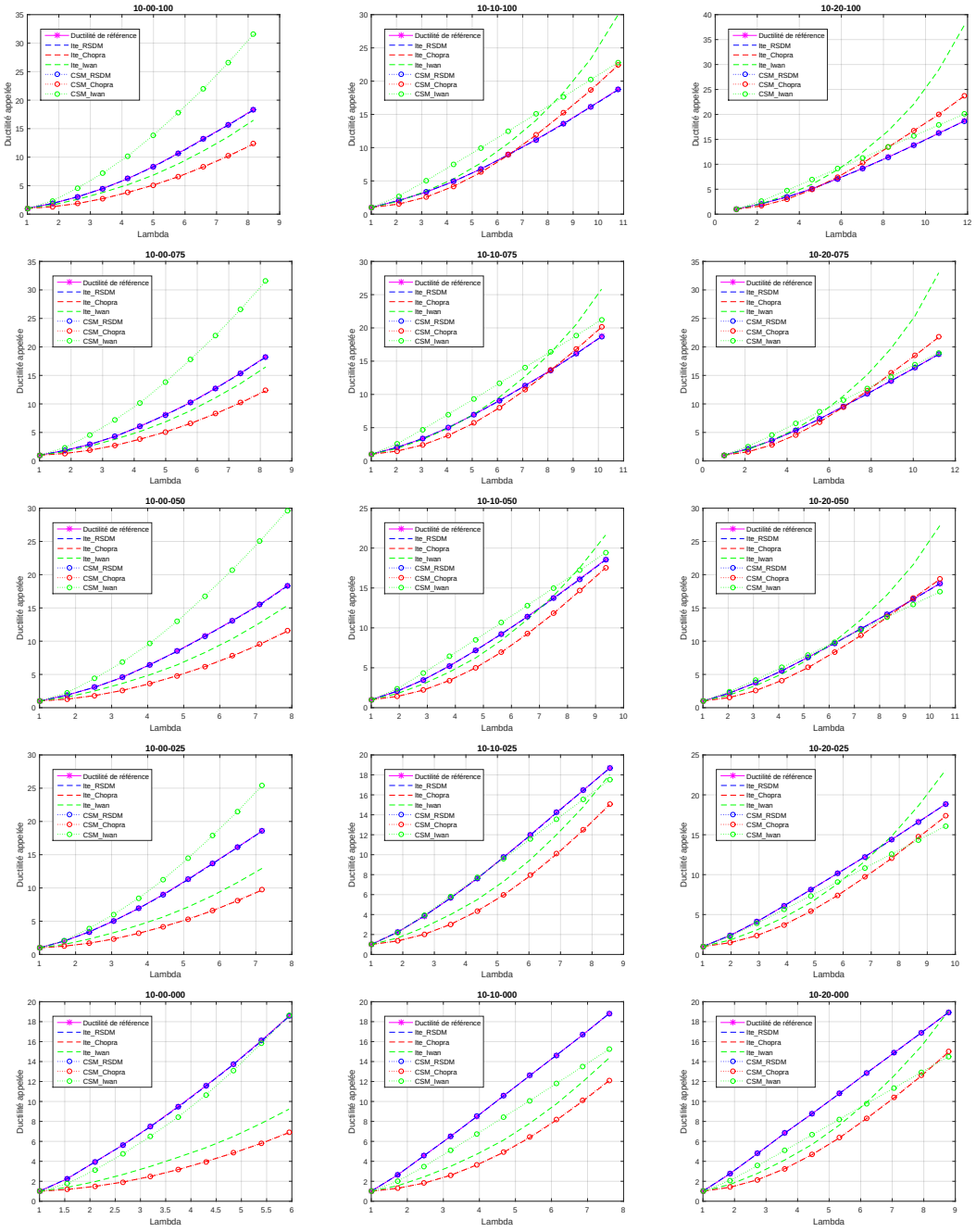


FIGURE 2.17 – Comparaison des résultats en ductilité appelée pour le système canonique dont la rigidité initiale égale à la fréquence centrale ($\frac{f_0}{f_c}$ = 1.0). La combinaison 10-10-050 signifie le comportement dont $\frac{f_0}{f_c} = 1.0$; $\alpha_p = 10\%$ et $\chi = 0.50$.

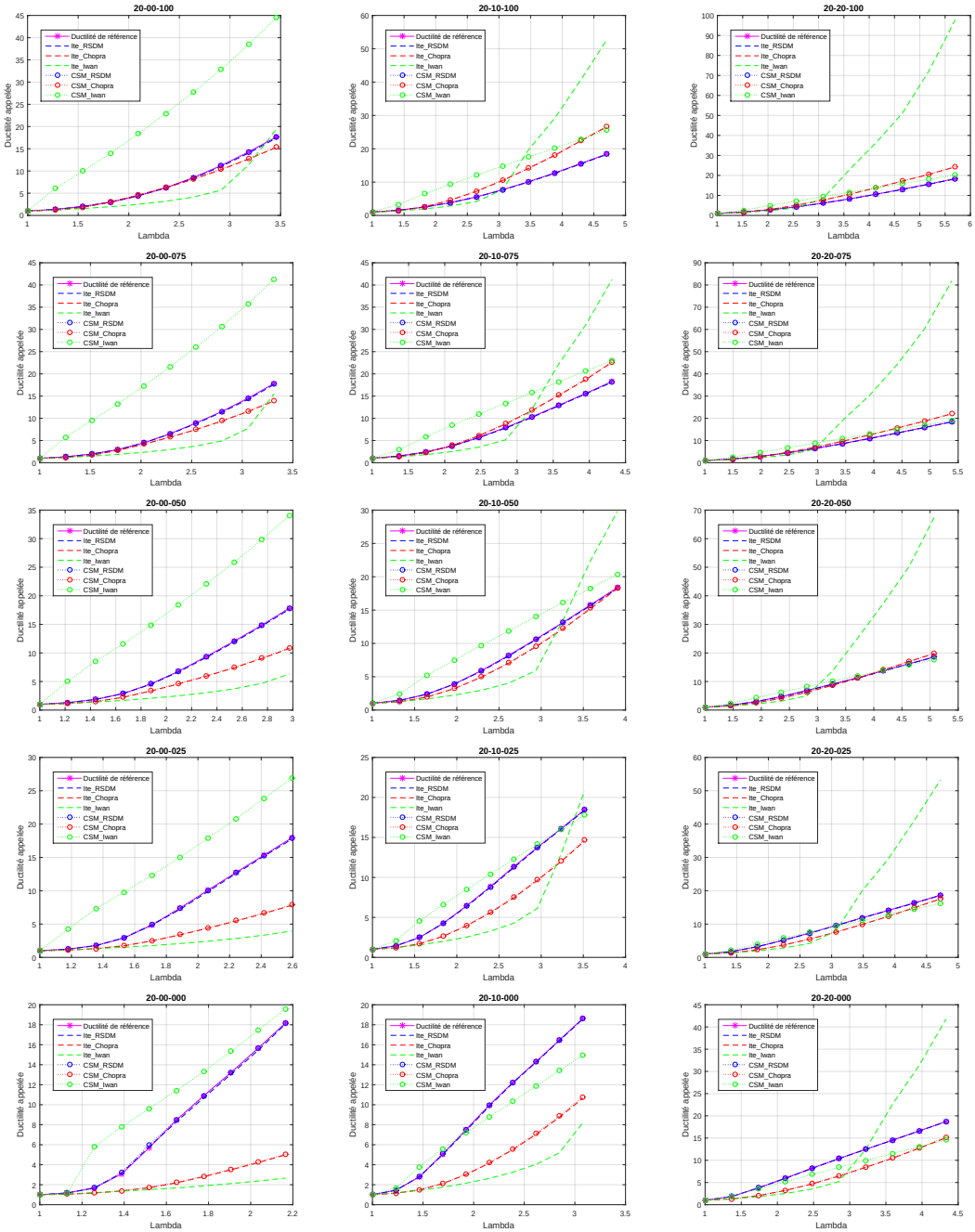


FIGURE 2.18 – Comparaison des résultats en ductilité appelée pour le système canonique dont la rigidité initiale importante ($\frac{f_0}{f_c} = 2.0$). La combinais 20-10-050 signifie le comportement dont $\frac{f_0}{f_c} = 2.0$; $\alpha_p = 10\%$ et $\chi = 0.50$.

la courbe de la ductilité appelée de référence.

Nous avons observé le même phénomène pour plusieurs comportements. Le comportement est désigné par le code AA-BB-CCC où AA = 01 signifie le ratio $\frac{f_0}{f_c} = 0.1$; BB = 20 signifie la valeur de $\alpha_p = 20\%$; et CCC = 050 signifie la valeur de $\chi = 0.50$. Dans les figures 2.16, 2.17 et 2.18, nous pouvons constater que les résultats d'amortissement suivant le point de fonctionnement permettent de déterminer exactement les valeurs du déplacement maximal tandis que l'écart du résultat provenant des caractéristiques équivalentes établies par Chopra and Goel [1999] et Iwan [1980] reste important et peut amener soit à une sur-estimation, soit à une sous-estimation du déplacement maximal non-linéaire.

2.2.6 Conclusions sur la proposition d'amélioration des concepts de linéarisation équivalente vis-à-vis des méthodes simplifiées en ingénierie sismique

Cette section a relevé l'importance du domaine fréquentiel en montrant la dépendance forte de la réponse en déplacement non-linéaire en fonction du ratio $\frac{f_0}{f_c}$. Cette remarque importante n'a pourtant pas été étudiée dans les différents concepts de linéarisation équivalente existants.

En vue d'améliorer la méthode du spectre de capacité, nous avons identifié la clé de cette méthode : l'oscillateur linéaire équivalent donne la même valeur du déplacement et force de rappel que celles de l'oscillateur non-linéaire. A partir de cela, nous avons proposé la linéarisation équivalente suivant la rigidité sécante et soit le déplacement maximal. Cette linéarisation équivalente a permis, en utilisant plusieurs démarches soit la procédure de l'ATC 40 soit la méthode itérative, d'estimer exactement la réponse maximale de l'oscillateur non-linéaire, ce qui est contraire au résultat obtenu par utilisation de la linéarisation de Chopra and Goel [2001] ou Iwan [1980].

2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, la linéarisation équivalente a été étudiée à partir des analyses critiques et systématiques. En fait, la linéarisation équivalente peut être classée en deux catégories suivant la nature du critère d'équivalence : par les variables à seuil et par la restitution des caractéristiques dynamiques.

Tous les concepts ne donnent pas un seul système linéaire équivalent. De cela, en fonction du critère d'équivalence, nous obtenons différentes linéarisations équivalentes. Cette remarque est importante mais souvent ignorée en pratique de la linéarisation équivalente en améliorant les techniques sans regarder les fondements de la linéarisation équivalente utilisée.

Quant à la méthode de linéarisation par variables à seuil, ces concepts se basent sur le critère du déplacement maximal et l'équilibre de l'énergie dissipée. Or, nous avons conclus que il existe plusieurs oscillateurs donnant le même déplacement maximal et que l'énergie dissipée par la force visqueuse est indépendante (en cas de l'oscillateur soumis au bruit blanc) et quasi-indépendante de la valeur de l'amortissement réduit.

Quant à la méthode de linéarisation par la restitution des caractéristiques dynamiques, les critères plus physiques et représentatifs sont directement le transitoire (la force de rappel). La force de rappel est difficilement approchée par la somme $ku + cv$ à cause de la forme de la relation force-déplacement.

Une amélioration a été proposée pour la méthode du spectre de capacité. Cette proposition d'amélioration s'appuie sur le nouveau concept de linéarisation par la rigidité sécante et le déplacement maximal. Au travers des études comparatives, nous avons démontré que cette proposition d'amélioration permet de déterminer le point de fonctionnement de l'oscillateur non-linéaire.

L'inconvénient principal de ces concepts s'appuyant sur le critère à seuil est qu'ils estiment une seule valeur. Ainsi, il n'est pas possible de garantir une bonne restitution de la réponse temporelle. Ceci conduit à une erreur importante dans l'énergie dissipée ou à l'impossibilité d'établir la vibration transférée. De cela, nous avons proposé une nouvelle linéarisation équivalente qui permet de restituer la dynamique de la réponse de l'oscillateur non-linéaire. Cette nouvelle linéarisation équivalente s'appuie sur la fonction de transfert. Ceci fait l'objet du chapitre 03.

2.4 Références

ATC, A. (1996). 40, seismic evaluation and retrofit of concrete buildings. *Applied Technology Council, report ATC-40. Redwood City*. 37, 40, 41, 63

Chopra, A. K. and Goel, R. K. (1999). Capacity-demand-diagram methods based on inelastic design spectrum. *Earthquake spectra*, 15(4) :637–656. 37, 63, 65, 69

Chopra, A. K. and Goel, R. K. (2001). Direct displacement-based design : use of inelastic vs. elastic design spectra. *Earthquake Spectra*, 17(1) :47–64. 37, 40, 69

Comartin, C. D., Niewiarowski, R. W., and Rojahn, C. (1996). *Seismic evaluation and retrofit of concrete buildings*, volume 1. Seismic Safety Commission, State of California. 40

Gantenbien, F. and Hoffmann, A. (1986). Effect des seismes sur la structre - contribution a la prise en compte de la ductilite. Technical report, COMMISARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE, France. 51

Goel, R. (2008). Evaluation of current nonlinear static procedures for reinforced concrete buildings. In *14th World Conference on Earthquake Engineering*, pages 12–17. 40

Gulkan, P. and Sozen, M. A. (1974). Inelastic responses of reinforced concrete structure to earthquake motions. In *Journal Proceedings*, volume 71, pages 604–610. 38, 45

Iwan, W. (1974). A model for the dynamic analysis of deteriorating systems. In *Proc. 5th Wld Conf. Earthq. Engng.* 38

Iwan, W. (1980). Estimating inelastic response spectra from elastic spectra. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 8(4) :375–388. 37, 38, 40, 44, 63, 65, 69

Iwan, W. and Guyader, A. (2002). An improved equivalent linearization procedure for the capacity spectrum method. In *Proc., International Conference on Advanced and New Challenges in Earthquake Engineering Research, August*, pages 15–17. 40

Kennedy, R., Short, S., Merz, K., Tokarz, F., Idriss, I., Power, M., and Sadigh, K. (1984). Engineering characterization of ground motion. task i. effects of characteristics of free-field motion on structural response. Technical report, Structural Mechanics Associates, Inc., Newport Beach, CA (USA) ; Woodward-Clyde Consultants, Walnut Creek, CA (USA). 39

Kowalsky, M. J. (1994). *Displacement based design : a methodology for seismic design applied to RC bridge columns*. University of California, San Diego, Department of Applied Mechanics/Engineering Sciences. 37, 39

Labbé, P. (1994). Ductility demand and design of piping systems. In *Proccedings of the 10th European Conference of Earthquake Engineering (Vienna), Balkema, Rotterdam*, pages 2689–2693. 51, 52

Levy, R., Rutenberg, A., and Qadi, K. (2006). Equivalent linearization applied to earthquake excitations and the r–μ–t0 relationships. *Engineering structures*, 28(2) :216–228. 37, 41, 42, 47

Molina, F. and Pegon, P. (1998). Identification of the damping properties of the walls of the safe program. *European Commission, Joint Research Centre, Ispra, Technical Note No. I*, 98 :176. 42

Newmark, N. M. and Hall, W. J. (1982). Earthquake spectra and design. *Earth System Dynamics*, 1. 51

Priestley, M. and Calvi, G. (1997). Concepts and procedures for direct displacement-based design and assessment. In *Proc. International Conference on Seismic Design Methodologies for the Next Generation of Codes*, pages 171–182. AA Balkema, Rotterdam. 37

Reed, J. W. and Kennedy, R. P. (1994). Methodology for developing seismic fragilities. *Final Report TR-103959, EPRI*. 39

Shibata, A. and Sozen, M. A. (1976). Substitute-structure method for seismic design in r/c. *Journal of the structural division*, 102(ASCE# 11824). 37

Chapitre 3

Nouveau concept : La linéarisation équivalente par fonction de transfert

Classé dans la catégorie de la linéarisation équivalente par restitution des caractéristiques dynamiques de la réponse non-linéaire, ce concept permet de prendre en considération la réponse d'une structure à comportement non-linéaire, en se plaçant dans le domaine fréquentiel par le biais de la fonction de transfert. Le concept est étudié dans la première section. Les résultats obtenus dans le cas d'un système canonique (Système canonique) avec différentes configurations caractérisées par (a) le rapport entre fréquence de l'oscillateur et fréquence centrale du signal excitateur, (b) la pente d'écrouissage et (c) le modèle de comportement qui varie de élastoplastique à endommageant seront alors examinés. Dans la deuxième section, la pertinence de la linéarisation équivalente par fonction de transfert est évaluée grâce aux critères d'Anderson en quantifiant la similarité entre l'accélération du modèle non-linéaire et l'accélération du modèle linéaire équivalent. Comme ce concept est basé sur le contenu fréquentiel, il permet d'établir le spectre transféré au travers de la structure non-linéaire, ce qui fera l'objet de la troisième section. Enfin, nous conclurons sur le concept de linéarisation équivalente par la fonction de transfert.

« *Océan, que vaux-tu dans l'infini du monde ?*
Toi, si large à nos yeux enchaînés sur tes bords,
Mais étroit pour notre âme aux rebelles essors,
Qui, du haut des soleils te mesure et te sonde ; »

René-François Sully Prudhomme
- Extrait du poème "A l'océan"

Sommaire

3.1 Linéarisation équivalente par fonction de transfert 75
3.1.1 Concept de linéarisation équivalente par fonction de transfert . . . 75
3.1.2 Identification des caractéristiques équivalentes $f_{eq,\lambda,j}$ et $\xi_{eq,\lambda,j}$ par la fonction de transfert 75
3.1.3 Mise en œuvre numérique 77

3.1.4 Caractéristiques équivalentes à partir de la fonction de transfert . . 81

3.2 Performance du concept de linéarisation équivalente (critères d'Anderson) 89

3.2.1 Critères d'Anderson 89

3.2.2 Similarité entre réponses en accélération du système non-linéaire et du système linéaire équivalent 95

3.3 Spectre transféré 97

3.4 Conclusions sur la linéarisation équivalente par fonction de transfert . 105

3.5 Références 106

3.1 Linéarisation équivalente par fonction de transfert

3.1.1 Concept de linéarisation équivalente par fonction de transfert

Afin de déterminer l'oscillateur linéaire équivalent, nous utilisons la fonction de transfert comme critère d'équivalence. La fonction de transfert a pour avantage une interprétation physique qui est la manière dont répond une structure à un chargement harmonique. Elle est le rapport sortie/entrée. La fonction de transfert dépend seulement des caractéristiques de la structure.

Le principe de cette nouvelle linéarisation équivalente est d'identifier un oscillateur linéaire de sorte que se fonction de transfert soit « proche » de celle de l'oscillateur non-linéaire. c'est à dire, les caractéristiques équivalentes, dont la fréquence équivalente f_{eq} et l'amortissement ξ_{eq}, permettent de minimiser la « différence » entre la fonction de transfert expérimentale résultant du calcul transitoire non-linéaire et celle de l'oscillateur linéaire équivalent. Ainsi, l'oscillateur linéaire équivalent est celui dont la fonction de transfert est la plus « proche » de celle du système non-linéaire.

Afin d'estimer la chute de fréquence équivalente et l'augmentation d'amortissement équivalent en fonction de la ductilité appelée, nous avons utilisé le résultat du plan d'expérience numérique présenté sur la figure 2.7 dans le chapitre 02 en terme de : (01) réponse temporelle en déplacement et (02) en accélération.

01 Pour chaque calcul du transitoire non-linéaire d'un oscillateur non-linéaire soumis au signal $\gamma_{\lambda,j}(t)$ où $j = 1...1000$ et $\lambda = 1...\lambda_{max}$, nous déterminons la ductilité appelée $\mu_{\lambda,j}$ à partir du déplacement $u_{\lambda,j}(t)$.

02 Nous déterminons la fonction de transfert expérimentale $H_{ex,\lambda,j}$ à partir de l'accélération relative de sortie $a_{\lambda,j}(t)$ où $j = 1...1000$ et $\lambda = 1...\lambda_{max}$. La fonction de transfert $H_{ex,\lambda,j}$ sert à identifier l'oscillateur linéaire équivalent de $f_{eq,\lambda,j}$ et $\xi_{eq,\lambda,j}$.

Nous obtenons deux nuages de points : l'un contient 10 000 points $\{f_{eq,j,\lambda};\mu_{j,\lambda}\}$ et l'autre contient 10 000 points $\{\xi_{eq,j,\lambda};\mu_{j,\lambda}\}$. Il est alors nécessaire de procéder au traitement de ce nuage de points afin d'établir la dépendance de la chute de fréquence et d'amortissement équivalent en fonction de la ductilité appelée.

Nous examinons la linéarisation équivalente par la fonction de transfert pour plusieurs systèmes non-linéaires avec différents paramètres : (1) du plus souple ($\frac{f_0}{f_c} = 0.1$) au plus rigide ($\frac{f_0}{f_c} = 2.0$), (2) du comportement élasto-plastique ($\chi = 1.0$) au comportement endommageant ($\chi = 0.0$), (3) avec la pente d'écrouissage (α_p= 0%, 10%, 20%).

3.1.2 Identification des caractéristiques équivalentes $f_{eq,\lambda,j}$ et $\xi_{eq,\lambda,j}$ par la fonction de transfert

Notons $\Gamma(\omega)$ la transformée de Fourier de l'accélérogramme $\gamma(t)$ à la base d'un oscillateur élastique, $A(\omega)$ la transformée de Fourier de la réponse en accélération relative $a(t)$, nous écrivons :

$$\begin{aligned} \Gamma(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(t) \exp(-j\omega t) dt \\ \mathrm{A}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) \exp(-j\omega t) dt \end{aligned} \tag{3.1}$$

La réponse en accélération relative de l'oscillateur élastique de $\{f_e, \xi_e\}$ s'écrit donc dans le domaine fréquentiel :

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(\omega) &= \mathrm{H}_{a,f_e,\xi_e}(\omega)\Gamma(\omega) \\ \mathrm{H}_{a,f_e,\xi_e}(\omega) &= -\frac{\omega^2}{\omega^2 - 2j\xi_e\omega_e\omega - \omega_e^2} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Où : $\omega_e = 2\pi f_e$ avec f_e et ξ_e la fréquence et l'amortissement de l'oscillateur élastique. $\mathrm{H}_{a,f_e,\xi_e}(\omega)$ est la fonction de transfert de l'accélération relative de l'oscillateur.

En cas de linéarité, les caractéristiques modales de la structure sont déterminées par régression de la formule 3.2 des données expérimentales mesurées de la structure. Comme précédemment évoqué, plusieurs techniques sont proposées afin d'éliminer le bruit de mesure ainsi que la singularité due à la non-linéarité dans la structure (voir l'annexe A.7). Ces techniques ne sont néanmoins pas utilisables dans l'objectif de déterminer l'oscillateur linéaire équivalent.

En cas de non-linéarité, nous admettons que les caractéristiques de la structure dépendent seulement de l'état d'endommagement représenté par la ductilité appelée. Cela veut notamment dire que quelque soit le signal excitateur donnant une même valeur de ductilité appelée, la fonction de transfert reste la même. Dans ce travail, nous avons utilisé la fonction de transfert issue de l'accélération relative. Celle du déplacement n'est ici pas envisagée afin d'éviter la richesse en contenu à très basse fréquence. Ainsi, la fonction de transfert expérimentale de l'oscillateur non-linéaire sera déterminée par :

$$\mathrm{H}_{a,exp}(\omega) = \frac{\mathrm{A}(\omega)}{\Gamma(\omega)} \tag{3.3}$$

L'idée principale de détermination de linéarisation équivalente par fonction de transfert vise à déterminer un oscillateur linéaire équivalent, soit caractérisé par f_{eq} et ξ_{eq}, dont la fonction de transfert est "la plus proche" de celle de l'oscillateur non-linéaire.

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_{a,f_{eq},\xi_{eq}}(\omega) &\equiv \mathrm{H}_{a,exp}(\omega) \\ -\frac{\omega^2}{\omega^2 - 2j\xi_{eq}\omega_{eq}\omega - \omega_{eq}^2} &\equiv \frac{\mathrm{A}(\omega)}{\Gamma(\omega)} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Où, le symbole $\equiv$ signifie l'approximation ou l'équivalence entre deux fonctions. Plusieurs approches envisageables sont listées afin de déterminer f_{eq} et ξ_{eq} vis à vis de cette régression : (1) la régression du module de la fonction de transfert, (2) la régression du module moyenné sur l'ensemble de ceux des 1000 calculs transitoires non-linéaires et (3) la régression de la fonction de transfert complexe. La première approche considère le seul module des nombres complexes, qui n'est alors pas suffisant sans en connaître la phase. De plus, l'amplitude est affectée par les valeurs parasites extrêmes non-physiquement

justifiées dues à la non-linéarité (valeurs extrêmement importantes). La deuxième doit être écartée car la façon de calculer la moyenne des modules des différentes fonctions de transfert peut augmenter considérablement l'amortissement réduit (Voir l'annexe A.7.2). La troisième approche a pour avantage d'établir le nombre complexe en combinant sa partie réelle et sa partie imaginaire. Ce problème consiste mathématiquement à déterminer f_{eq} et ξ_{eq} afin de minimiser le terme suivant :

$$\begin{aligned} J(f_{eq,j,\lambda};\xi_{eq,j,\lambda}) &= \sum_{f_{min}}^{f_{max}} ||H_{ex,\lambda,j} - H_{th,\lambda,j}||^2 \\ &= \sum_{f_{min}}^{f_{max}} ((Re(H_{ex,\lambda,j}) - Re(H_{th,\lambda,j}))^2 + ((Im(H_{ex,\lambda,j}) - Im(H_{th,\lambda,j}))^2) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Où, le symbole $||*||$ signifie le module d'un nombre complexe (Module d'un nombre complexe). $H_{ex,\lambda,j}$ et$H_{th,\lambda,j}$ sont les fonctions de transfert expérimentale et théorique. L'indice j et λ sont rajoutés à la fonction de transfert $H_{ex,\lambda,j}$ afin d'indiquer que l'opérateur de minimisation est répété pour toutes les valeur de j et λ. En résolvant l'équation 3.5, nous avons déterminé la valeur de $f_{eq,j,\lambda}$ et $\xi_{eq,j,\lambda}$. L'objectif est de minimiser la différence entre deux fonctions de transfert complexe. Comme la fonction de transfert est complexe, la minimisation est effectuée à partir du module de la différence (Voir l'équation 3.5).

3.1.3 Mise en œuvre numérique

La détermination de $\{f_{eq,j,\lambda};\xi_{eq,j,\lambda}\}$ de l'équation 3.5 est basée sur la régression non-linéaire suivant l'algorithme itératif de Levenberg-Marquardt (opérateur *lsqcurvefit* du logiciel Matlab). La condition de convergence est la tolérance des variables à identifier. Ces valeurs sont prises par défaut dans Matlab, soit 10E-6. Cet algorithme prend le vecteur des fréquences sur lesquelles la minimisation se fait comme variable indépendante et les deux parties (réelle et imaginaire) comme variables dépendantes. A ce stade, nous identifions deux paramètres de la régression : la résolution fréquentielle et la largeur (de f_{min} à f_{max}) de la plage de fréquence sur laquelle se fait la minimisation.

La résolution fréquentielle

Le signal temporel contient N = 20 000 pas de temps de 1 ms. Par la définition de la transformée de Fourier, le pas de fréquence est de $\Delta f = \frac{Nyquist}{N_{fft}} = \frac{1000}{20000} = 0.05$ Hz, où N_{fft} est égal au nombre de pas du vecteur temporel N. Or, la transformée de Fourier est effectuée grâce à l'algorithme de la transformée discrète rapide (opérateur *fft* dans Matlab). Cet opérateur est efficace dans les cas où le nombre d'instants (le nombre de pas) est une puissance de 2, soit $N = 2^n$. De plus, il faut choisir le pas de fréquence de sorte qu'il assure une bonne représentation du spectre du signal dans le domaine fréquentiel. Ce choix se base sur la connaissance de la fréquence à laquelle se trouve le lobe principal et la distance entre les deux lobes voisins afin d'éviter le problème connu de la fuite (Phénomène de fuite) (*leackage problem* en anglais) en vue de la pratique du traitement de signal. Dans cette étude, un seul lobe situé à la fréquence équivalente est attendu. Cependant, cette fréquence n'est pas connue a priori. Ainsi, il sera préférable de diminuer au maximum le pas des fréquences afin de mieux représenter le contenu fréquentiel. Pour cela, la technique de *zero-padding* a été retenue en prolongeant le signal par une série de zéros, cette

technique permet une discrétisation fréquentielle très fine.

Pour déterminer la durée optimale des signaux, nous avons ajouté des zéros à la fin du transitoire de façon à ce que le nombre d'instants total soit égal à Ntotal = 2^{15}, 2^{16},... Le module de la fonction de transfert pour le cas où χ=1.0, α_p=0.1, $\frac{f_0}{f_c}$ = 1.0 et λ = 3.3 est tracé avec différents Ntotal sur la figure 3.1. Nous constatons que le module de la fonction de transfert avec Ntotal = 2^{18} représente bien l'amplitude et la localisation du pic.

Notons le ratio entre la fréquence équivalente déterminée pour différents nombres de pas de temps et celle déterminée pour Nfft = 20000 pas de temps $\frac{f_{eq,\mathrm{N}total}}{f_{eq,\mathrm{N}fft}}$, de même pour l'amortissement par $\frac{\xi_{eq,\mathrm{N}total}}{\xi_{eq,\mathrm{N}fft}}$, leurs valeurs sont présentées sur la figure 3.2 pour une dizaine des signaux. Nous pouvons y observer la convergence de la valeur de fréquence équivalente en fonction de pas du transitoire total complété par zéros-padding (Ref. figure 3.2a) et d'amortissement (Ref. figure 3.2b). La convergence peut être obtenue avec un nombre de pas égal à 2^{18} pour les deux caractéristiques équivalentes. Ce seuil est également observé pour plusieurs types de configuration. A partir de ce résultat, le nombre d'instants retenu du transitoire total complété par *zeros-padding* est de 2^{18} , donnant ainsi un pas de fréquence égal à $\frac{1000}{2^{18}}$ = 3.8E-3 Hz.

Plage des fréquences sur laquelle se fait la minimisation

Afin de limiter l'influence des contenus non-physiques dans le domaine fréquentiel pertinent, un paramètre important pour la détermination des caractéristiques équivalentes est la plage des fréquences sur laquelle s'effectue la minimisation de l'équation 3.5. Il y a trois plages possibles à envisager : (01) la plage de 0-50 Hz sur laquelle se développe le signal d'entrée, (02) la plage correspondant à -3dB (3dB) autour de la valeur de fréquence initiale f_0 et (03) la plage correspondant à -3dB autour de la fréquence équivalente f_{eq}.

01 La plage de fréquence de 0 à 50 Hz correspondant à celle à partir de laquelle se développe le signal d'entrée est retenue pour la minimisation.

02 La plage correspondant à -3dB autour d'une fréquence donnée est déterminée par la fréquence à laquelle l'amplitude de la densité spectrale (ou l'énergie du signal) est la moitié de celle à la fréquence donnée, soit l'amplitude du module à cette fréquence est égale à $\sqrt{2}$ de celle de la fréquence donnée. La plage correspondant à 3dB autour de la fréquence initiale f_0 a pour inconvénient d'avoir une limite inférieure de fréquence plus petite que la fréquence équivalente. Nous ne retenons pas cette plage.

03 La plage correspondant à 3dB autour de la fréquence équivalente, comme la fréquence équivalente n'est pas encore connue à ce stade, des itérations sont nécessaires. Nous pouvons itérer avec la plage correspondant à 3dB autour de f_0 pour déterminer la première valeur de f_{eq}, puis la plage correspondante à 3dB autour de f_{eq} est ensuite utilisée afin de déterminer une nouvelle f_{eq}. La condition de convergence peut être le résidu de la fréquence équivalente à chaque itération. Or, tant que cette itération du point fixe nécessite la condition de convergence, cette convergence ne peut pas toujours être assurée. Nous ne donnerons ainsi pas suite à cette démarche.

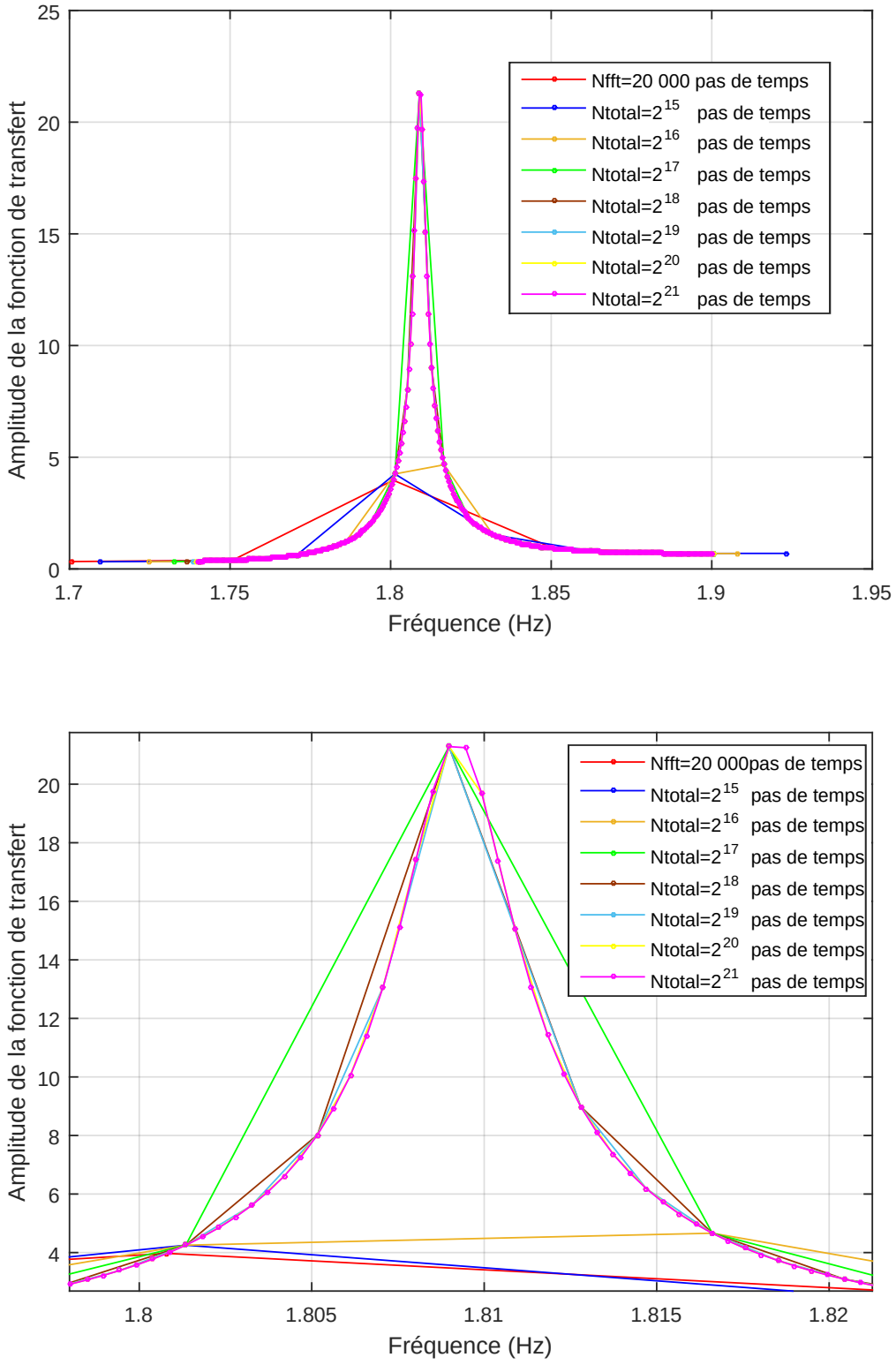
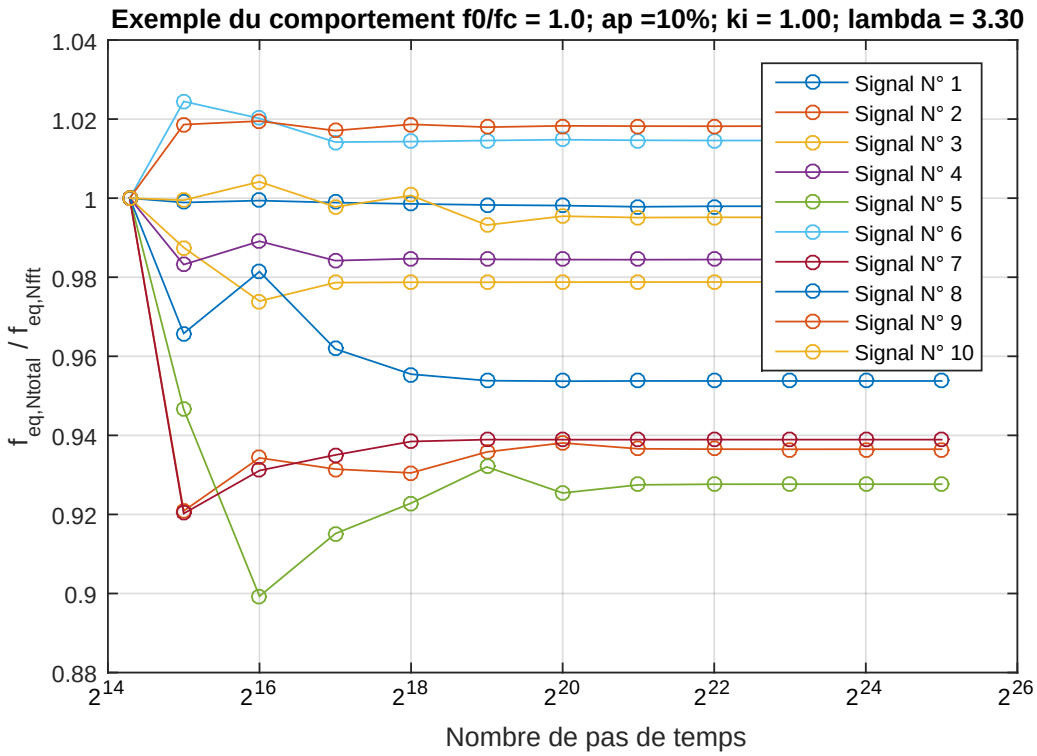
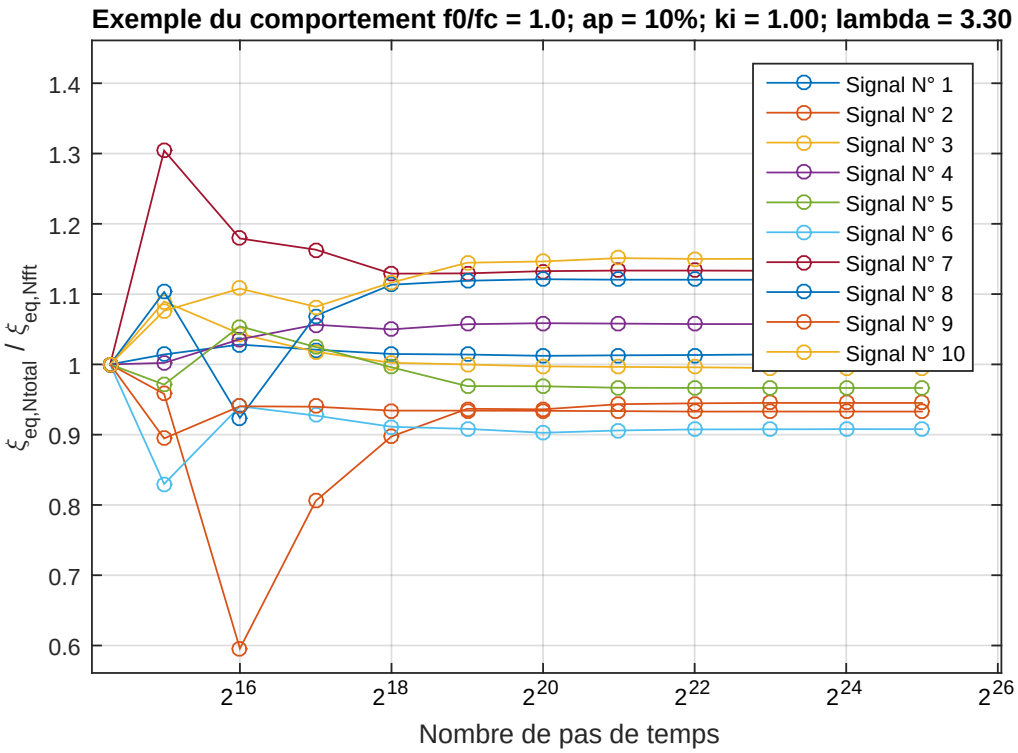


FIGURE 3.1 – Exemple de résolution fréquentielle de l'amplitude de la fonction de transfert pour χ=1.0, α_p=0.1, $\frac{f_0}{f_c}$ = 1.0 et λ = 3.3. Zoom sur la plage de fréquence de 1.7 Hz - 1.95 Hz (figure haute) et celui sur la plage de 1.798 Hz - 1.822 Hz (figure base).



(a) Convergence sur la valeur de fréquence équivalente



(b) Convergence sur la valeur d'amortissement équivalent

FIGURE 3.2 – Exemple de la convergence des caractéristiques équivalentes en fonction des pas de temps

3.1.4 Caractéristiques équivalentes à partir de la fonction de transfert

Résultat de la détermination des caractéristiques équivalentes

Pour un comportement non-linéaire caractérisé par $\{\chi, \alpha_p, \frac{f_0}{f_c}\}$, à un niveau de λ, nous avons obtenu 1000 valeurs de ductilité appelée $\mu_{\lambda,j}$, 1000 valeurs de $\frac{f_{eq,\lambda,j}}{f_{0,j}}$ et 1000 valeurs de $\xi_{eq,\lambda,j}$. Ce processus est répété pour 10 valeurs de λ. Ainsi, nous avons donc deux nuages de points : l'un contient 10 000 points $\{\frac{f_{eq,\lambda,j}}{f_{0,j}}; \mu_{\lambda,j}\}$ et l'autre contient 10 000 points $\{\xi_{eq}; \mu_\lambda\}$.

Nous avons tracé ledit nuage de points pour quelques configurations de comportement caractérisé par $\{\frac{f_0}{f_c}; \alpha_p; \chi\}$ sur les figures 3.3, 3.4, 3.5, 3.6. La combinaison 10-10-100 représente le cas où le ratio $\frac{f_0}{f_c}$ = 1.0, l'écrouissage α_p = 0.1 et la valeur χ = 1.00. Dans chaque nuage de points $\{\frac{f_{eq,\lambda,j}}{f_{0,j}}; \mu_{\lambda,j}\}$, pour chaque sous-ensemble de points dont la valeur de ductilité appelée est bornée par deux valeurs choisies, nous déterminons la valeur médiane de la ductilité appelé μ et le ratio $\frac{f_{eq}}{f_0}$. La courbe reliant les points médians est tracé sur la même figure (courbe rouge). Nous procédons de la même manière pour les nuages de poins $\{\xi_{eq,\lambda,j}; \mu_{\lambda,j}\}$. Sur ces figures, les deux cadres rectangulaires représentent la valeur médiane de ductilité et de fréquence équivalente (ou amortissement équivalent) pour un sous-ensemble de points. A partir de ces nuages de points et de leur courbe médiane, nous remarquons que :

01 Le ratio $\frac{f_{eq}}{f_0}$ tend vers la valeur $\sqrt{\alpha_p}$ correspondant à l'écrouissage quand la ductilité appelée devient très grande. A titre d'exemple, pour le comportement avec χ = 1.0 et 10 % d'écrouissage, le ratio $\frac{f_{eq}}{f_0}$ tend vers $\sqrt{0.1}$ = 0.33. Cette valeur est indépendante de χ. Cette observation s'explique par le fait que la ductilité appelée est importante, l'oscillateur est toujours en régime post-élastique. La fréquence équivalente est donc contrôlée par la rigidité post-élastique, c'est à dire par l'écrouissage.

02 En revanche, l'amortissement équivalent est une fonction croissante de μ, qu'on peut aussi exprimer en fonction de $\frac{f_{eq}}{f_0}$ comme indiquée par l'équation 3.6.

03 La dispersion du nuage de points est plus importante pour le comportement sans écrouissage que pour celui avec écrouissage, aussi bien pour la chute de fréquence équivalente que l'amortissement équivalent. De plus, le nuage de points est plus dispersé lorsque la ductilité appelée augmente.

04 Il y a des résultats parasites qui sont les valeurs proches de zéro en fréquence et très importantes en amortissement. Le deuxième groupe consiste en des fréquences plus proches de zéro. Ces résultats ne sont pas physiques car la résolution fréquentielle ne peut les capturer. Il ne faut alors pas les prendre en compte dans le traitement du nuage (Voir les nuages de points sur les figures 3.3, 3.4, 3.5 et 3.6).

Courbes de la chute de fréquence et d'augmentation de l'amortissement

A partir de ces courbes médianes, nous avons postulé les deux formules de chute de fréquence et d'augmentation de l'amortissement suivantes :

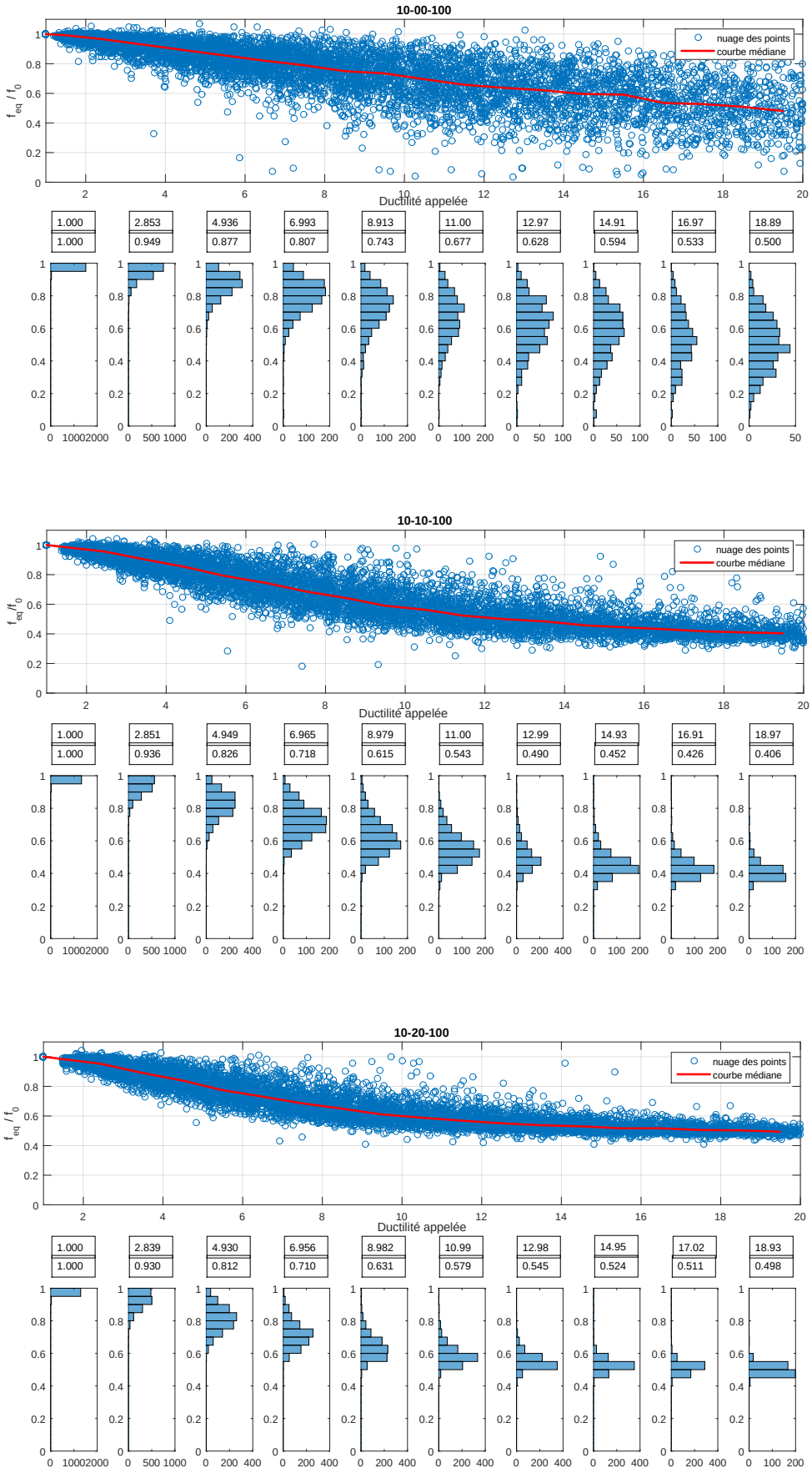


FIGURE 3.3 – Nuage des points $\frac{f_{eq}}{f_0}$ en fonction de la ductilité appelée μ pour trois comportement différents : 10-00-100 (figure haute), 10-10-100 (figure milieu) et 10-20-100 (figure base).

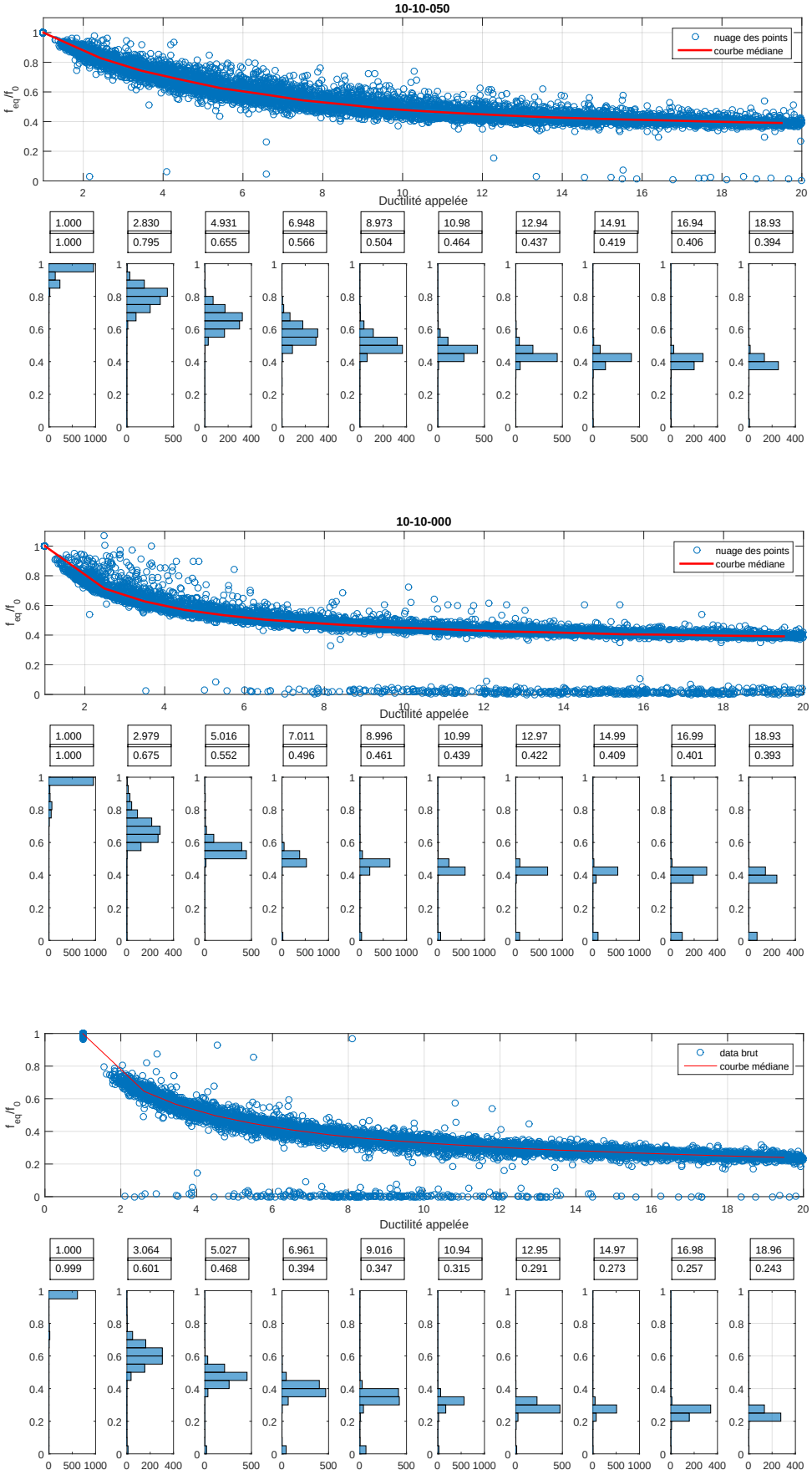


FIGURE 3.4 – Nuage des points $\frac{f_{eq}}{f_0}$ en fonction de la ductilité appelée μ pour trois comportement différents : 10-10-050 (figure haute), 10-10-000 (figure milieu) et 10-00-000 (figure base).

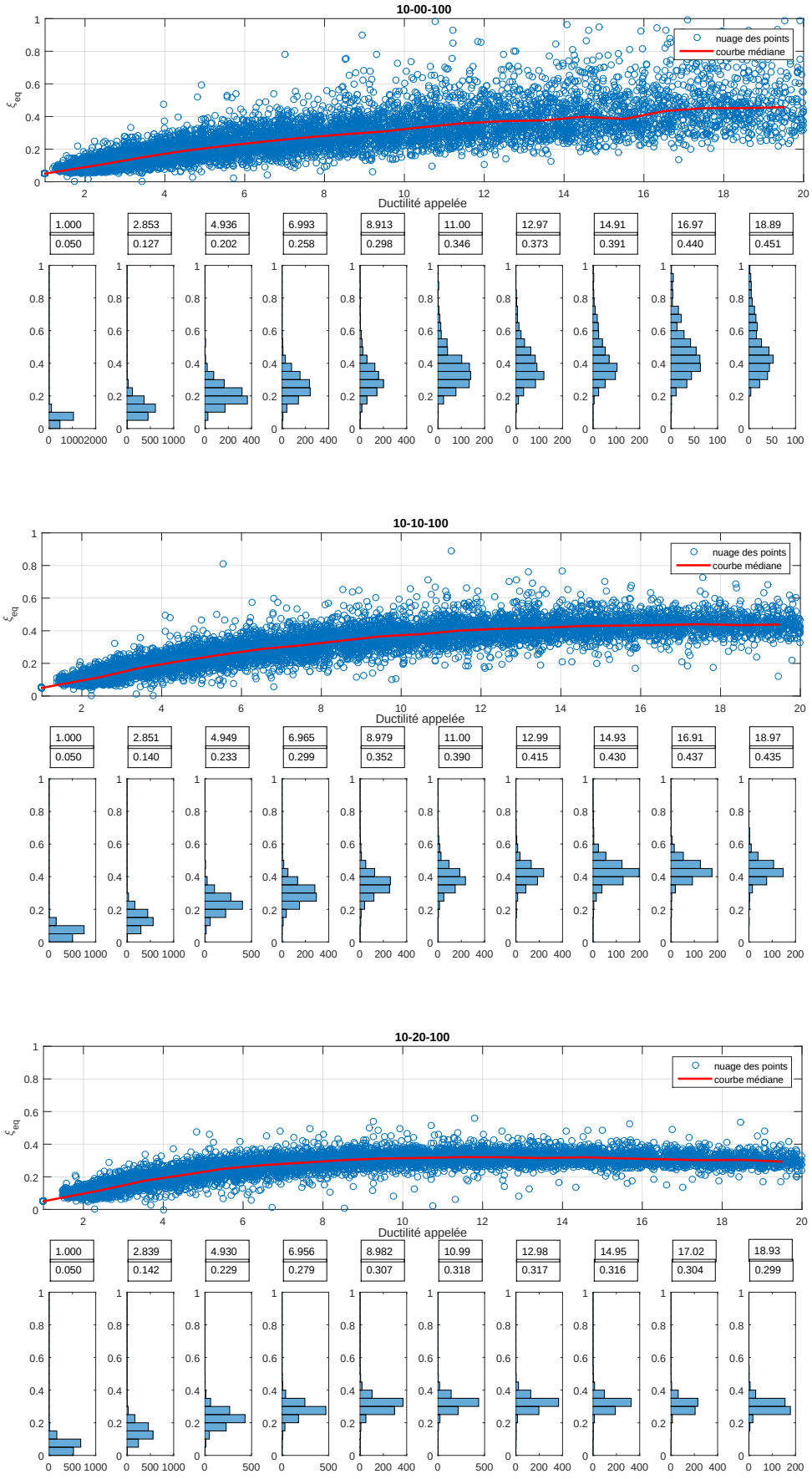


FIGURE 3.5 – Nuage des points ξ_{eq} en fonction de la ductilité appelée μ pour trois comportement différents : 10-00-100 (figure haute), 10-10-000 (figure milieu) et 10-20-100 (figure base)

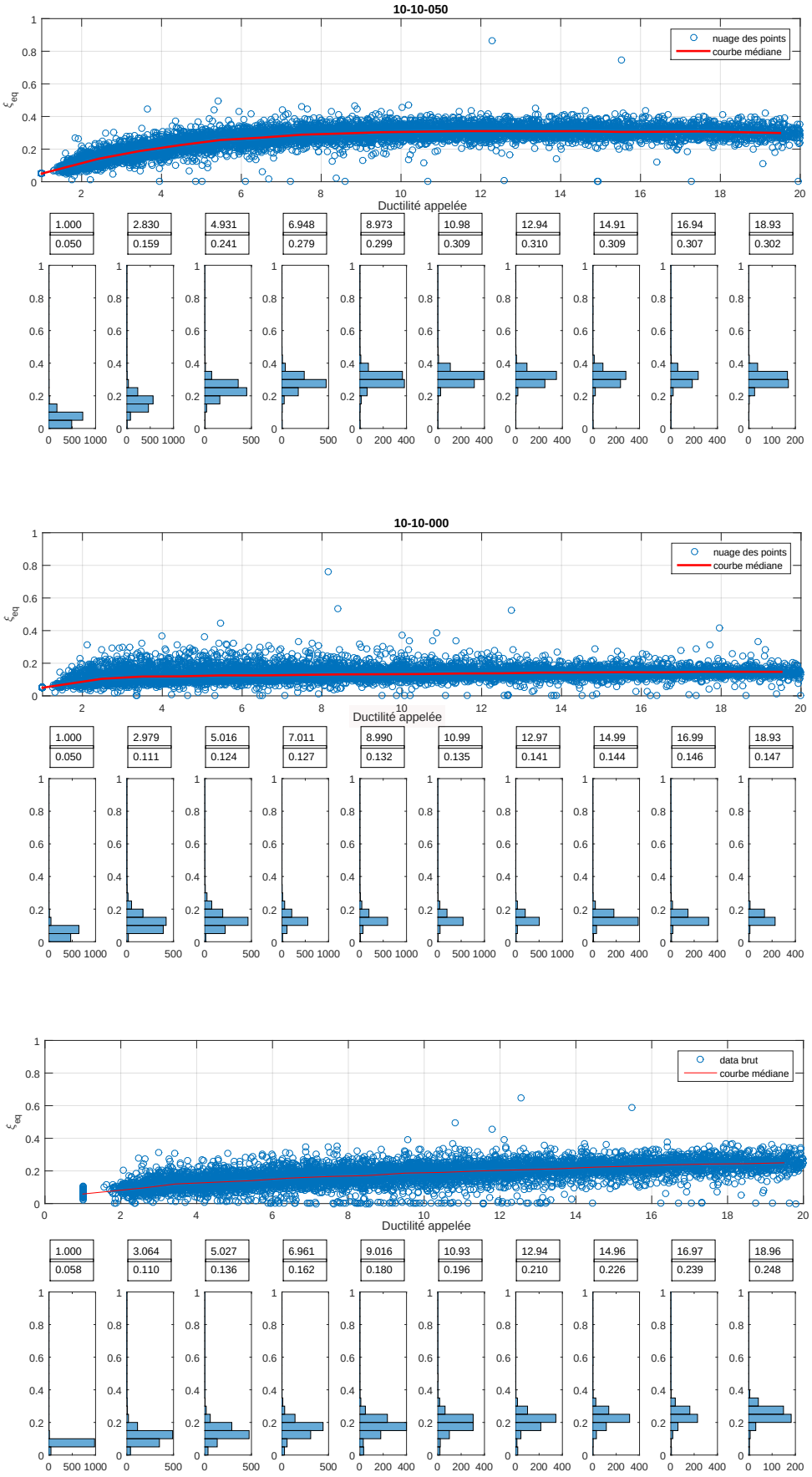


FIGURE 3.6 – Nuage des points ξ_{eq} en fonction de la ductilité appelée μ pour trois comportement différents : 10-10-050 (figure haute), 10-10-000 (figure milieu) et 10-00-000 (figure base).

$$\frac{f_{eq}}{f_0} = \sqrt{\alpha_p} + \frac{1-\sqrt{\alpha_p}}{1+\left(\frac{\mu-1}{\mu_0-1}\right)^d}$$
$$\xi_{eq} = \xi_0 + \xi_a\left(1-\left(\frac{f_{eq}}{f_0}\right)^c\right) \tag{3.6}$$

Afin de construire la courbe de chute de fréquence et d'augmentation d'amortissement en fonction de la ductilité appelée, nous avons procédé au traitement des nuages de points obtenus à partir du plan d'expérience. Pour cela, la régression de ces nuages de points par les formules 3.6 est mise en œuvre. En pratique, nous déterminons d'abord les coefficients μ_0 et d, puis ξ_a et c.

Les valeurs des coefficients, disponibles dans les annexes A.8 (Ref. tableaux A.8), permettent de tracer les courbes $\frac{f_{eq}}{f_0}$ et ξ_{eq} en fonction de la ductilité appelée, présentées sur les figures 3.7 et 3.8.

Les courbes de caractéristiques équivalentes ont montré les points importants suivants :

01 Le ratio $\frac{f_{eq}}{f_0}$ dépend non seulement de la ductilité appelée mais également de la rigidité de l'oscillateur par rapport au signal d'excitation, soit le ratio $\frac{f_0}{f_c}$. Plus la structure est rigide, plus ce ratio $\frac{f_{eq}}{f_0}$ est important. Cette dépendance est forte pour le comportement élasto-plastique et s'atténue en fonction de la valeur de χ et disparait pour le comportement endommageant. Cette observation est expliquée par le fait que l'oscillateur linéaire équivalent domine fortement la réponse. Pour le comportement endommageant, l'oscillateur dominant le plus dans la phase transitoire est celui intervenant après l'atteinte du maximum de déplacement. Il dépend ainsi seulement de la valeur de ce maximum ou encore de la seule valeur de ductilité appelée. Cependant dans le cas d'un comportement élasto-plastique, l'oscillateur dominant dépend également du niveau de chargement d'entrée. Pour arriver à un niveau de ductilité appelée, le niveau de chargement d'entrée varie pour différents oscillateurs ayant différentes valeurs de $\frac{f_0}{f_c}$.

02 Pour le comportement endommageant, le ratio $\frac{f_{eq}}{f_0}$ est similaire à celui lié à la rigidité sécante. Cependant, l'amortissement ξ_{eq} est plus faible que celui développé par la formule de Chopra and Goel [2001]. Ce résultat démontre qu'un oscillateur équivalent ne peut pas être à la fois lié à la rigidité sécante et à l'amortissement déduit de l'énergie dissipée développée avec la rigidité en décharge égale à la rigidité initiale. Cette observation a d'ailleurs été mentionnée dans le travail de Kennedy et al. [1984] ou Labbé [2013]en considérant que la rigidité équivalente est comprise entre la rigidité sécante et la rigidité initiale.

03 Pour le comportement élasto-plastique, plus la structure est rigide (soit un ratio $\frac{f_0}{f_c}$ important), moins la fréquence baisse. D'autres part, la rigidité de l'oscillateur à très hautes fréquences semble ne pas être réduite et cela même pour une ductilité importante. Cette remarque importante permet d'évaluer les efforts d'un cas de structure rigide à hautes fréquences avec une forte ductilité appelée comme le cas élastique avec la rigidité initiale.

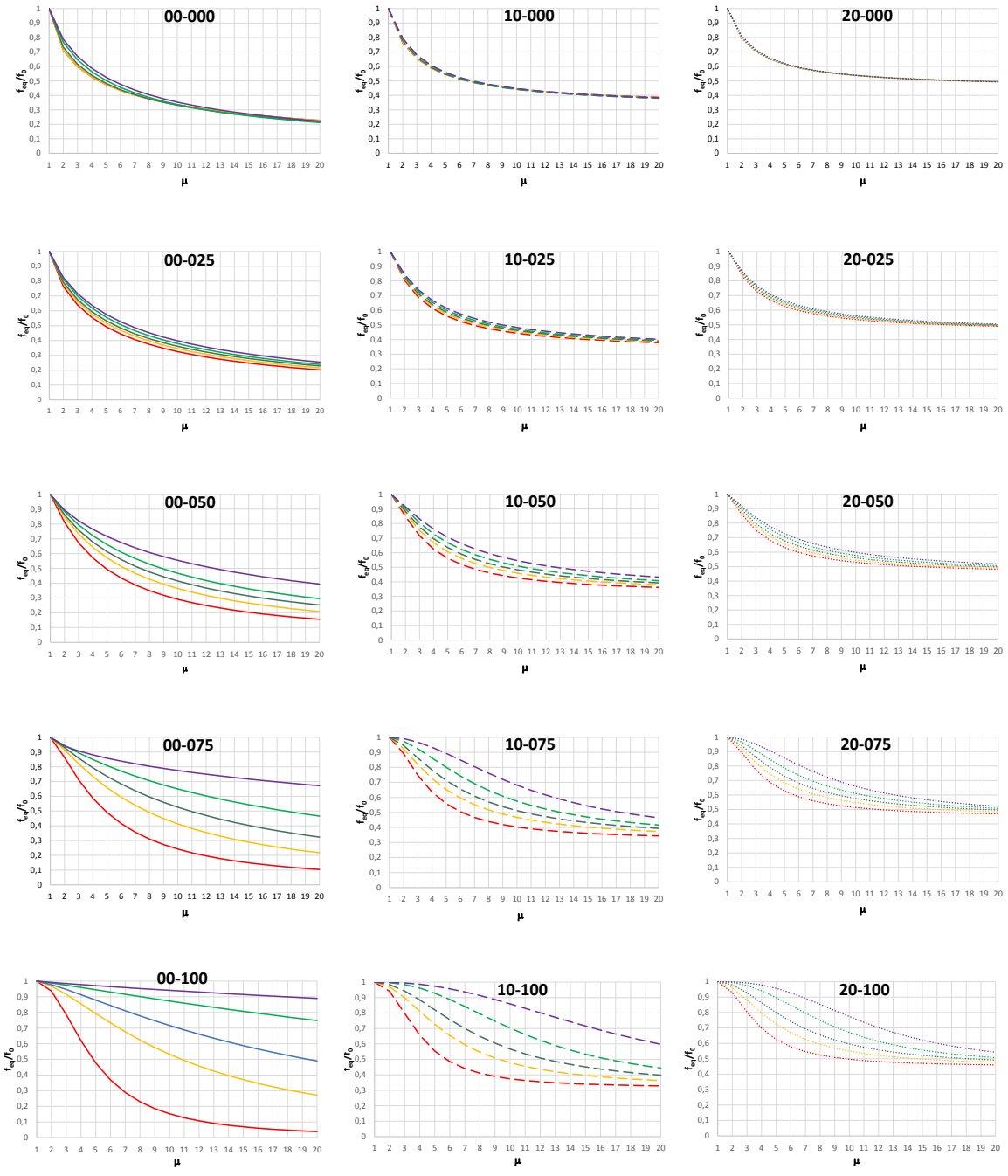


FIGURE 3.7 – Courbe de $\frac{f_{eq}}{f_0}$ en fonction de la ductilité appelée μ pour différents comportements suivant la combinaison 10-100 représentant le comportement de α_p = 10% et χ = 1.00. La légende des couleurs sont les suivantes : (La couleur rouge) le ratio $\frac{f_0}{f_c}$ = 0.1, (La couleur jaune) le ratio $\frac{f_0}{f_c}$ = 0.5, (La couleur bleu) le ratio $\frac{f_0}{f_c}$ = 1.0, (La couleur verte) le ratio $\frac{f_0}{f_c}$ = 1.5, (La couleur violète) le ratio $\frac{f_0}{f_c}$ = 2.0.

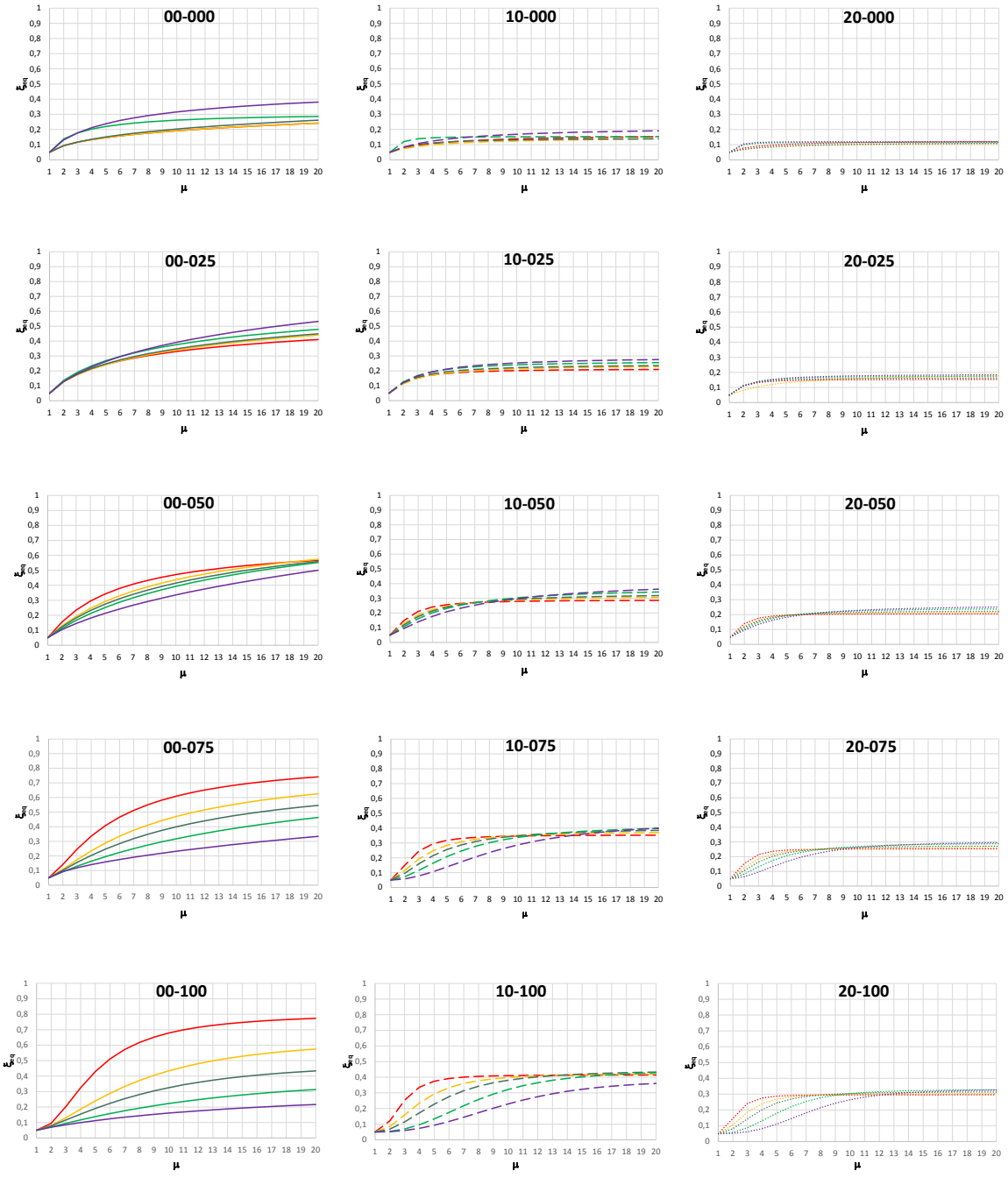


FIGURE 3.8 – Courbe de ξ_{eq} en fonction de la ductilité appelée μ pour différents comportements suivant la combinaison 10-100 représentant le comportement de α_p = 10% et χ = 1.00. La légende des couleurs sont les suivantes : (La couleur rouge) le ratio $\frac{f_0}{f_c}$ = 0.1, (La couleur jaune) le ratio $\frac{f_0}{f_c}$ = 0.5, (La couleur bleu) le ratio $\frac{f_0}{f_c}$ = 1.0, (La couleur verte) le ratio $\frac{f_0}{f_c}$ = 1.5, (La couleur violète) le ratio $\frac{f_0}{f_c}$ = 2.0.

3.2 Performance du concept de linéarisation équivalente (critères d'Anderson)

L'oscillateur équivalent déterminé suivant le critère de la fonction de transfert permet de restituer le contenu fréquentiel du signal d'accélération du modèle non-linéaire. Autrement dit, la réponse en accélération de l'oscillateur non-linéaire peut être approchée par celle de l'oscillateur linéaire équivalent. Afin de mesurer la similarité entre les deux réponses en accélération, nous avons utilisé les critères d'Anderson Anderson [2004].

3.2.1 Critères d'Anderson

Afin de quatifier la similarité entre signaux synthétiques et signaux réels, Anderson [2004] a développé une série de dix critères de similarité, noté chacun de 0 à 10. La similarité est basée sur la note moyenne et qualifiée dans différentes catégories étant présenté dans le tableau 3.1.

Les dix critères sont présentés dans le tableau 3.2. Ces critères considèrent non seulement le contenu temporel mais également fréquentiel de la réponse en accélération.

Afin d'illustrer ces critères, nous avons étudié le cas où α_p = 10%, $\frac{f_0}{f_c}$ = 1.0, χ = 1.0 et λ = 3.3 correspondant à une valeur de ductilité appelée de 3.42. Le résultat de linéarisation équivalente par fonction de transfert $\frac{f_{eq}}{f_0}$ = 0.91 est ξ_{eq}=16%. Nous avons interprété les critères d'Anderson sur la similarité entre la réponse en accélération du système non-linéaire et le système linéaire équivalent (Ref. figure 3.9).

L'interprétation de chaque critère est faite sur les points suivants :

Groupe 01 : Les critères liés à la durée de l'intensité d'Arias et celle d'énergie qualifient la similarité de l'arrivée de la phase forte du signal d'accélération qui porte la majorité d'énergie du signal. Même si la quantité d'énergie totale est la même pour les deux signaux, l'arrivée de la phase forte de chacun peut être différente. Selon la figure 3.10, la différence absolue maximale entre deux intensités d'Arias normalisée se produit à 4.735 (s) et est égale à 0.17. Pour l'intensité d'énergie, l'instant correspondant à l'écart maximal est à 5.014 (s) et la différence absolue maximale est égale à 0.105. L'écart faible d'environ 17 % signifie une similarité entre la durée de l'intensité d'Arias et d'énergie des deux réponses en accélération.

Groupe 02 : Les critères liés à l'intensité totale d'Arias et d'énergie permettent de comparer si la réponse en accélération du système linéaire équivalent permet la restitution de la réponse du système non-linéaire associé. L'intensité d'Arias à la fin du transitoire de la réponse en accélération du système élasto-plastique est égale à

TABLEAU 3.1 – Seuils des notes des critères d'Anderson

Note moyenne	La similarité
0-4	Médiocre
4-6	Juste
6-8	Bonne
8-10	Excellente

TABLEAU 3.2 – Critères d'Anderson

Numéro	Notation	Interprétation	Formules
Groupe 01 : Les critères liés à la durée			
C1	SDa	Durée d'Arias	$\mathrm{SD}a = 10\Big(1 - max\big(\mathrm{F}^{\mathrm{IA}}(t)\big)\Big)$ $\mathrm{F}^{\mathrm{IA}} = \lvert \mathrm{N}_1^{\mathrm{IA}}(t) - \mathrm{N}_2^{\mathrm{IA}}(t) \rvert$ $\mathrm{N}^{\mathrm{IA}}(t) = \frac{\mathrm{I}_{\mathrm{A}}(t)}{\mathrm{IA}}$ $\mathrm{I}_{\mathrm{IA}}(t) = \frac{\pi}{2g}\int_0^t a_i^2(\tau)d\tau$
C2	SDe	Durée d'énergie	$\mathrm{SD}e = 10\Big(1 - max\big(\mathrm{F}^{\mathrm{E}}(t)\big)\Big)$ $\mathrm{F}^{\mathrm{E}} = \lvert \mathrm{N}_1^{\mathrm{E}}(t) - \mathrm{N}_2^{\mathrm{E}}(t) \rvert$ $\mathrm{N}^{\mathrm{E}}(t) = \frac{\mathrm{I}_{\mathrm{E}}(t)}{\mathrm{IE}}$ $\mathrm{I}_{\mathrm{E}}(t) = \int_0^t v_i^2(\tau)d\tau$
Groupe 02 : Les critères liés à l'énergie totale			
C3	SIa	Intensité d'Arias	$\mathrm{S}(\mathrm{IA}_1, \mathrm{IA}_2)$ avec $\mathrm{IA}_i = \mathrm{I}_{\mathrm{A}i}(\mathrm{T}d)$
C4	SIv	Intégral d'énergie	$\mathrm{S}(\mathrm{IE}_1, \mathrm{IE}_2)$ avec $\mathrm{IE}_i = \mathrm{I}_{\mathrm{E}i}(\mathrm{T}d)$
Groupe 03 : Les critères liés au pic			
C5	Spga	Pic d'accélération	$\mathrm{S}(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2)$ avec $\mathrm{A}_i = max\lvert a_i(t) \rvert$
C6	Spgv	Pic de vitesse	$\mathrm{S}(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)$ avec $\mathrm{V}_i = max\lvert v_i(t) \rvert$
C7	Spgd	Pic de déplacement	$\mathrm{S}(\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2)$ avec $\mathrm{D}_i = max\lvert d_i(t) \rvert$
Groupe 04 : Les critères liés au contenu fréquentiel			
C8	Ssa	Spectre de réponse	$moy(\mathrm{S}(\mathrm{SA}_1(f_i), \mathrm{SA}_2(f_i)))$ avec $\mathrm{SA}(f_i)$ est le spectre en accélération à 5 % d'amortissement
C9	Sfs	Spectre de Fourier	$moy(\mathrm{S}(\mathrm{SF}_1(f_i), \mathrm{SF}_2(f_i)))$ avec $\mathrm{SF}(f_i)$ est l'amplitude de la transformée de Fourier
Groupe 05 : Le critère lié à l'inter-corrélation			
C10	C*	Inter-corrélation	$\mathrm{C}^* = 10max\Big[\mathrm{C}\big(a_1(t), a_2(t)\big), 0\Big]$ $\mathrm{C}(a_1, a_2) = \frac{\int_0^{\mathrm{T}d} a_1(t)a_2(t)dt}{\Big(\int_0^{\mathrm{T}d} a_1^2(t)dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^{\mathrm{T}d} a_2^2(t)dt\Big)^{\frac{1}{2}}}$
$a_i(t)$, $v_i(t)$ et $d_i(t)$ sont l'accélération, la vitesse et le déplacement T_d est la durée totale du transitoire.			
$\mathrm{S}(p_1, p_2) = 10exp\Big(-\big[\frac{(p_1 - p_2)}{min(p_1, p_2)}\big]\Big)$			

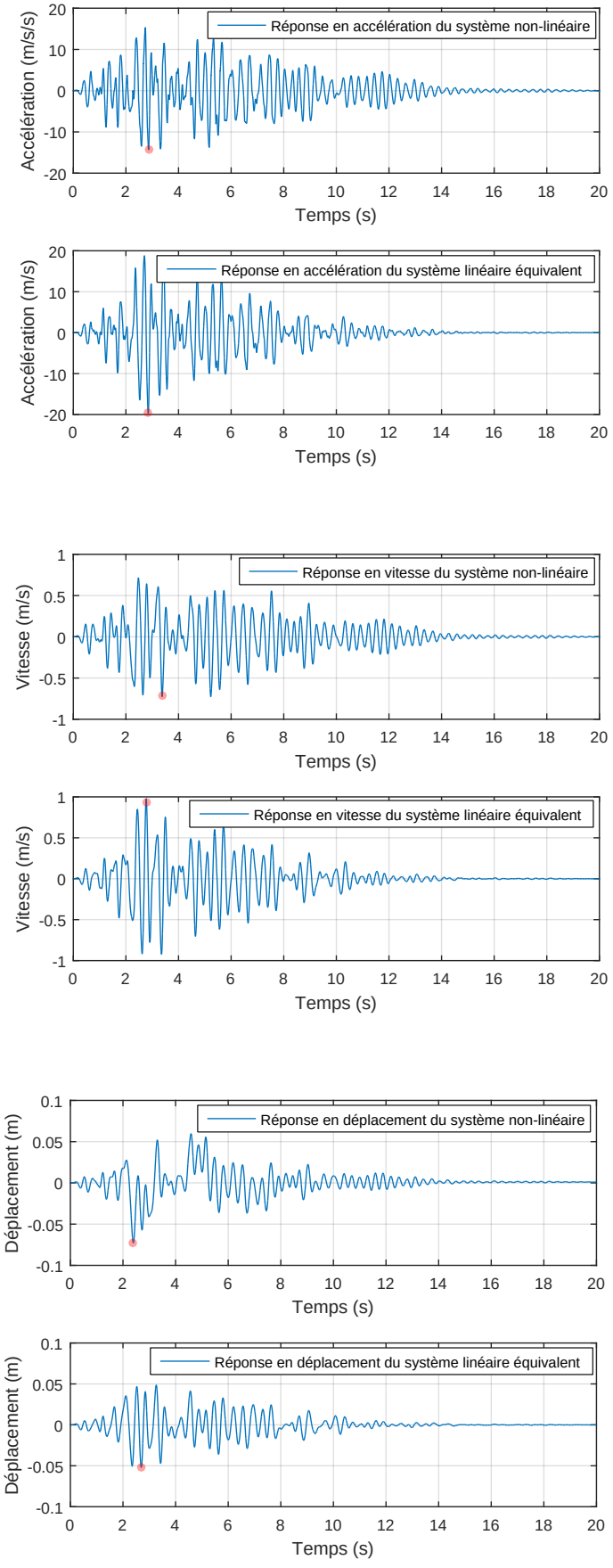


FIGURE 3.9 – Les réponses du système non-linéaire et linéaire équivalent en accélération (en haut), en vitesse (en milieu) et en déplacement (en bas) pour le cas de $\alpha_p = 10\%$, $\frac{f_0}{f_c} = 1.0$, $\chi = 1.0$ et $\lambda = 3.3$ correspondant à une valeur de ductilité appelée de 3.42

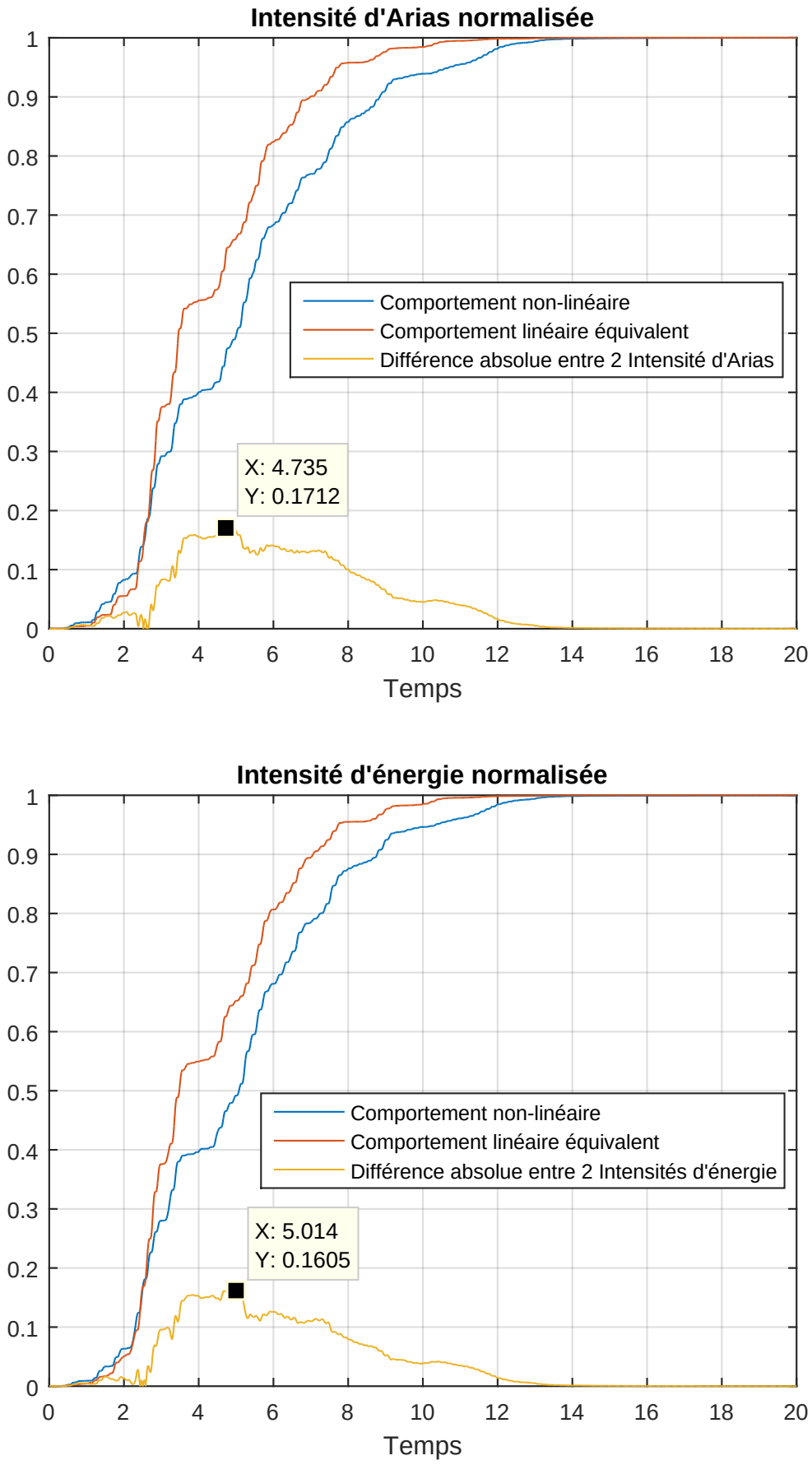


FIGURE 3.10 – Les intensités d'Arias et d'énergie normalisées ($N^{IA}(t)$ en haut et $N^{E}(t)$ en bas) définies dans le tableau 3.2) de deux signaux d'accélérations issus de la réponse des systèmes non-linéaire et linéaire équivalent.

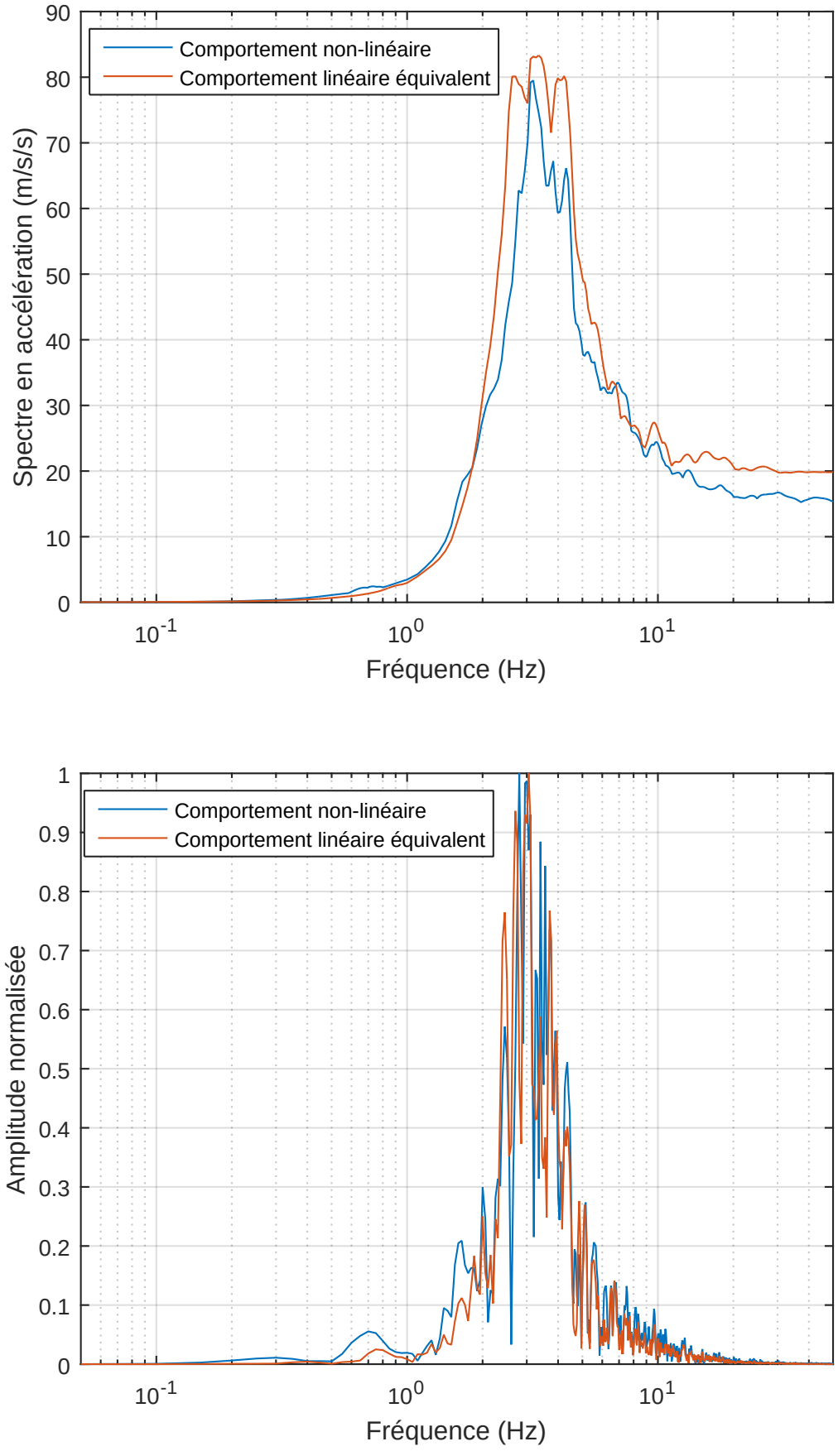


FIGURE 3.11 – Spectre de Réponse (en haut) et transformée de Fourier (en bas) à partir des réponses en accélérations des systèmes non-linéaire et linéaire équivalent.

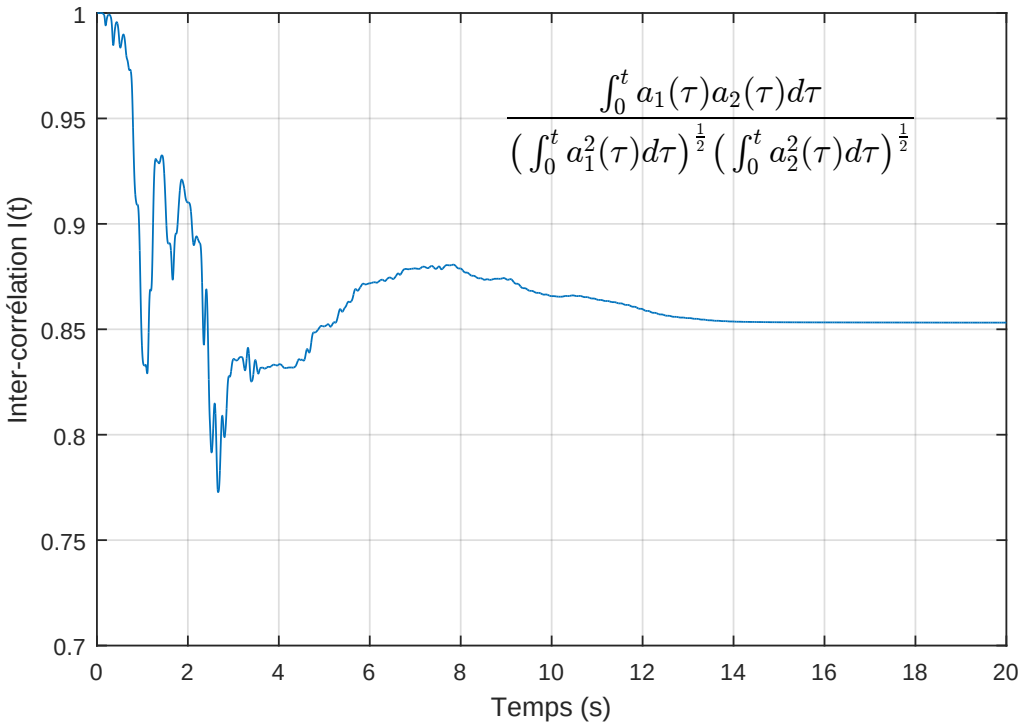


FIGURE 3.12 – Fonction de l'inter-corrélation I(t) sur la durée du début jusqu'à l'instant t

48.44 $m.s^{-1}$ et celle du système linéaire équivalent à 51.46 $m.s^{-1}$. Nous avons pour l'intensité d'énergie la valeur de 0.126 $m^2.s^{-1}$ pour le système élasto-plastique et 0.140 $m^2.s^{-1}$ pour le système linéaire équivalent. Les valeurs d'intensité totale sont proches.

Groupe 03 : Les critères liés à la valeur du pic permettent la comparaison de la valeur maximale de la réponse en accélération, en vitesse et en déplacement du système linéaire équivalent et du système non-linéaire. Comme abordé dans le début de ce rapport, la notion de pic n'est ni significative, ni représentative de la réponse temporelle.

Groupe 04 : Les critères liés au contenu fréquentiel de la réponse en accélération sous forme du spectre (Ssa) et de l'amplitude de la transformée de Fourier (Sfs). La valeur moyenne est considérée sur la plage de fréquence d'intérêt. Ici, nous considérons une plage de fréquence de 0 - 50 Hz sur laquelle se construit le signal d'entrée pour l'amplitude de la transformée de Fourier. Pour le spectre en pseudo-accélération, cette plage est de 0 à 100Hz afin de bien considérer les valeurs asymptotiques.

Groupe 05 : Le critère lié à l'inter-corrélation évalue le niveau de corrélation entre les deux signaux d'accélération. L'inter-corrélation tient compte du fait que les deux signaux sont corrélés en termes de phasage. Ce critère est la valeur à la durée totale ($t = T_d$) de la fonction $I(t) = \frac{\int_0^t a_1(\tau)a_2(\tau)d\tau}{\left(\int_0^t a_1^2(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t a_2^2(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{2}}}$. Cette fonction montre la dépendance à l'intervalle de temps sur laquelle se calcule l'inter-corrélation. Cette fonction est tracée sur la figure 3.12.

3.2.2 Similarité entre réponses en accélération du système non-linéaire et du système linéaire équivalent

Pour chaque valeur de λ, nous avons appliqué les critères d'Anderson pour 1000 paires de réponses en accélération des modèles non-linéaire et linéaire équivalent soumis aux 1000 signaux $\gamma_j(t)$. Le temps de calcul important de ces critères ne permet pas leur application massive à toutes les configurations du comportement $(\frac{f_0}{f_c}, \chi, \alpha_p)$ et ni toutes les valeurs de λ. Nous avons présenté le résultat pour quelques configurations pour quelques valeurs de λ en limitant la ductilité appelée à 5. La distribution des notes de chaque critère est présentée dans l'annexe A.9 pour le cas où $\chi = 1.0$, $\alpha_p = 10\%$, $\frac{f_0}{f_c} = 1.0$ et $\lambda = 3.3$. La valeur moyenne des critères sur l'ensemble des 1000 comparaisons pour chaque valeur de λ est présentée sur la figure 3.13.

Sur la figure 3.13, les notes moyennes des critères d'Anderson sont comprises dans la catégorie "Excellente". Les deux premiers critères sont notés proches de dix pour l'oscillateur à basse fréquence et baissent sensiblement pour l'oscillateur à moyenne et haute fréquences. Les deux critères C3 et C4 montrent une dispersion assez grande par rapport à la valeur moyenne. La note est assez bonne pour $\frac{f_0}{f_c} = 0.1$. Quant aux critères de pics, les pics en accélération (C5) et en vitesse (C6) sont similaires entre deux réponses de deux oscillateurs, non-linéaire et linéaire équivalent. Le pic en déplacement (C7) n'est cependant pas proche entre les deux oscillateurs. La note pour C7 est assez basse, surtout pour le comportement endommageant où C7 est égale à 7.5 pour le cas 20-10-000. La note du spectre est bonne sur une plage de 0 à 100 Hz. Contrairement à cela, le contenu en terme d'amplitude de transformée de Fourier est moins bon, à cause du résultat irrégulier (calcul de la transformée de Fourier discrète). Le dernier critère signifie que les deux accélérations sont bien corrélées.

Ces observations sur les critères d'Anderson indiquent que la linéarisation équivalente par la fonction de transfert permet de restituer l'énergie du signal d'accélération, et ainsi que le contenu fréquentiel. Les valeurs de pics sont satisfaites en accélération et en vitesse mais le sont moins en déplacement. De plus, le spectre transféré de l'accélération linéaire équivalente (critère C8) est proche de celui du système non-linéaire. Cette observation nous permet d'engager l'établissement du spectre transféré au travers de la structure non-linéaire, ce qui fait l'objet de la section suivante.

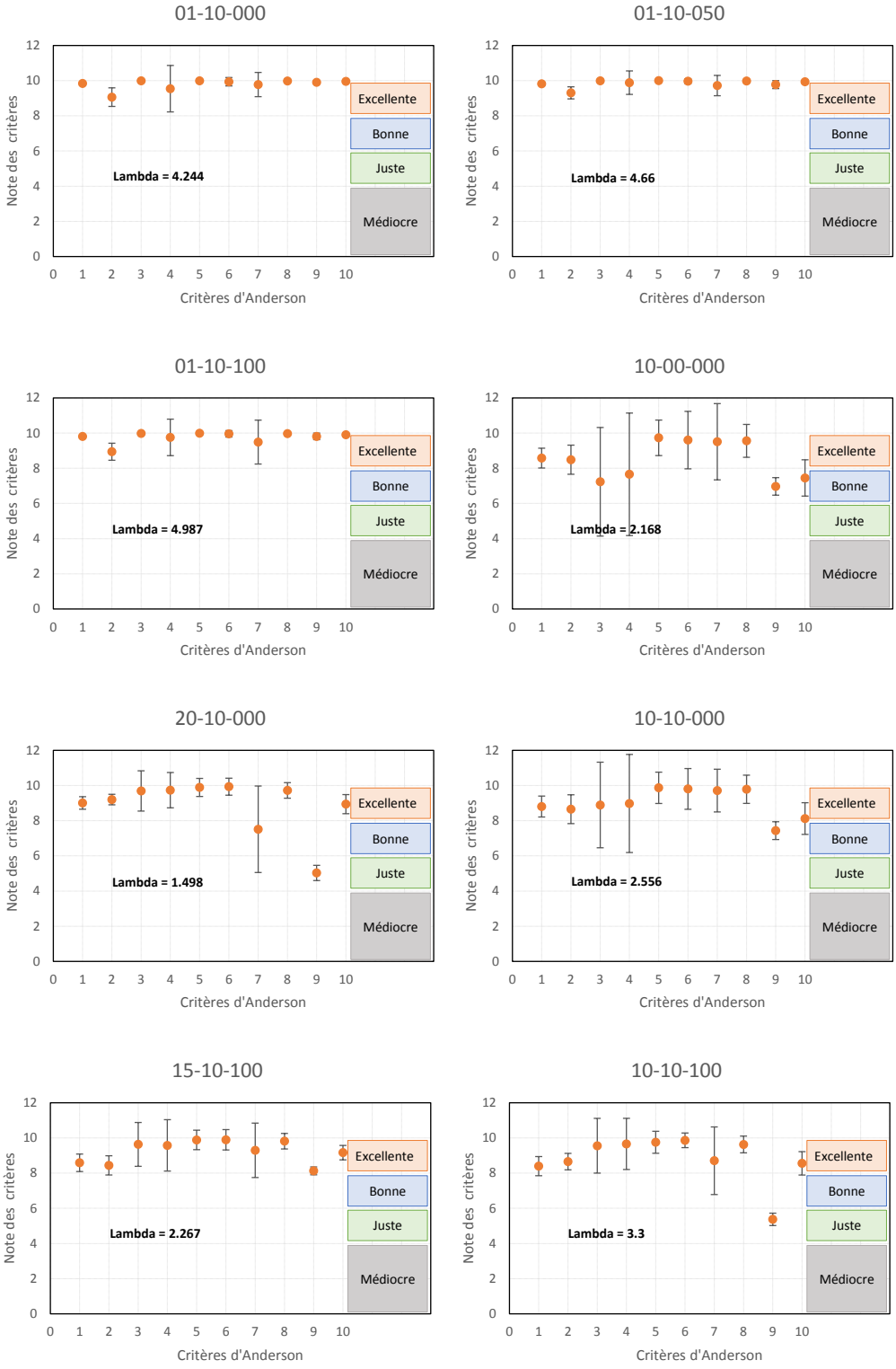


FIGURE 3.13 – Les notes moyennes des critères d'Anderson pour 1000 paires d'accélérations pour différentes valeurs de λ et différentes configurations de $(\frac{f_0}{f_c}, \alpha_p, \chi)$. Les valeurs de λ indiquées dans chaque configuration sont choisies pour une ductilité appelée μ d'environ 5. La combinaison 10-00-050 signifie le cas où le ratio $\frac{f_0}{f_c} = 1.0$, l'écrouissage $\alpha_p = 00\%$ et le type de comportement où ici $\chi = 0.50$.

3.3 Spectre transféré

Pratique du spectre transféré en ingénierie sismique

En ingénierie sismique, le mouvement induit par le secousse peut endommager les équipements pour lesquels la conception doit tenir compte de la sollicitation due à ce mouvement transféré. La transmission de ce mouvement peut simplement être schématisée comme sur la figure 3.14. De là, l'amplification peut être d'origines diverses, au travers de la structure principale (par exemple, le mouvement du sol au travers du bâtiment au plancher où est fixé l'équipement) et de l'élément de support ou de fixation (soudure ou boulonnage). La notion de spectre transféré est importante surtout vis-à-vis du dimensionnement des équipements. En général, les méthodes de détermination du spectre peuvent être classées en deux catégories :

01 Méthode de transfert direct à partir du spectre du mouvement à la base de la structure. Cette méthode nécessite la connaissance de la base modale de la structure et fournit directement le spectre de plancher. Cependant, elle n'est valable qu'en cas de linéarité.

02 Méthode directe à partir des accélérogrammes à la base de structure. Cette méthode consiste à déterminer la réponse en point d'ancrage de l'équipement considéré par la méthode d'intégration directe ou de projection sur la base modale de la structure.

Le spectre transféré inclut les incertitudes liées au mouvement du sol, à la modélisation de la structure, y compris le comportement non-linéaire de la structure. Actuellement, quand la structure présente une non-linéarité, la seule démarche de la méthode directe par un calcul transitoire non-linéaire est envisagée.

Spectre transféré en cas de non-linéarité en utilisant le système linéaire équivalent par fonction de transfert

Nous avons pu constater au travers des résultats issus des critères d'Anderson (quantification de la similarité entre les deux signaux d'accélération) que le spectre non-linéaire est proche du spectre linéaire équivalent. Le terminologie "spectre transféré non-linéaire" a pour objectif de qualifier le spectre du mouvement sismique au travers de la structure non-linéaire. De cette observation, nous avons comparé le spectre non-linéaire avec le spectre linéaire équivalent pour différentes configurations du comportement étudié.

Admettons que les valeurs importantes de la ductilité appelée peuvent conduire l'oscillateur linéaire équivalent à leurs valeurs asymptotiques, voir les figures 3.7 et 3.8, nous avons alors choisi une ductilité appelée dite raisonnable de 4. A partir de cette valeur de ductilité appelée, la valeur de λ sera déterminée pour chaque configuration du comportement de l'oscillateur du système canonique. Ces valeurs λ sont lues directement sur figures 2.8. Une fois λ déterminé, le spectre transféré est calculéà partir de la réponse en accélération du modèle non-linéaire et linéaire équivalente. Afin de bien montrer la physique et également la pertinence de cette démarche, nous avons également déterminé le spectre transféré de l'oscillateur élastique de caractéristiques initiales. Pour chaque valeur de λ déterminée, le spectre de réponse est évalué pour 1000 trios d'accélérations (non-linéaire, linéaire équivalent et linéaire initial) ainsi que pour chaque configuration

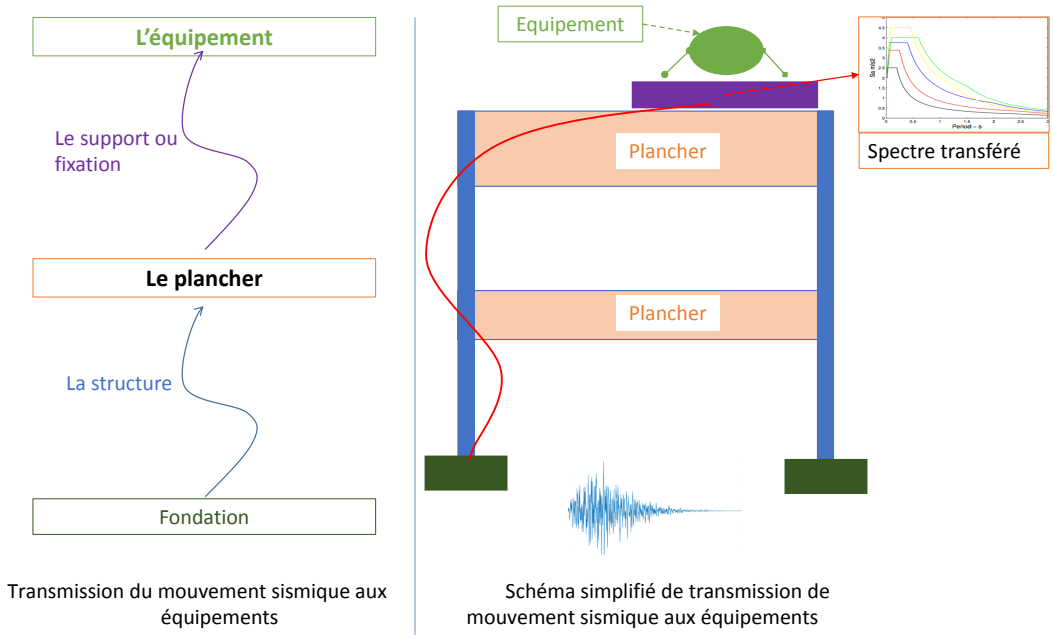


FIGURE 3.14 – Schéma du chemin du mouvement sismique aux équipements

de comportement. La courbe de valeurs moyennes est tracée pour le spectre en pseudo-accélération (Ref. figure 3.19) et pour le spectre en déplacement (Ref. figure 3.20). La combinaison 10-10-050 représente le cas où le ratio $\frac{f_0}{f_c} = 1.0$, l'écrouissage $\alpha_p = 10\%$ et le type du comportement où ici $\chi = 0.50$.

De ces résultats, les quelques commentaires suivants peuvent en être tirés :

01 Le spectre transféré non-linéaire est considérablement diminué par rapport au spectre linéaire, surtout l'amplitude autour de la fréquence propre de la structure. Cela provient de l'augmentation d'amortissement due à la non-linéarité et également du changement de fréquence. Cette remarque générale a été abordée dans le travail de Politopoulos and Feau [2007] qui ont relevé quelques aspects d'un spectre transféré d'un oscillateur non-linéaire à 1 DDL.

02 Pour l'oscillateur à basse fréquence (le ratio $\frac{f_0}{f_c}$ est petit), le pic principal du spectre se situe à la fréquence centrale de 3.12 Hz qui n'est pas affectée par la non-linéarité de la structure. Le contenu du spectre reste le même pour les trois types de comportement. Or, le spectre non-linéaire autour de la fréquence propre initiale de l'oscillateur présente une diminution par rapport au spectre linéaire initial. Nous pouvons également constater une bonne corrélation entre le spectre non-linéaire et le spectre linéaire équivalent. Pour l'oscillateur à moyennes et hautes fréquences, le spectre linéaire équivalent approche le spectre non-linéaire en terme de localisation du pic (soit la fréquence à laquelle se trouve le pic du spectre). En amplitude, une bonne restitution est observée pour le comportement "mixte" et élasto-plastique, ce qui n'est cependant pas le cas pour le comportement endommageant.

03 Pour les spectres en pseudo-accélération absolue, la valeur de ZPA du spectre linéaire équivalent est proche de celle du spectre non-linéaire dans tous les cas. Ceci revient à dire que l'oscillateur linéaire équivalent par fonction de transfert peut restituer le pic de la réponse en accélération non-linéaire. Cette remarque importante

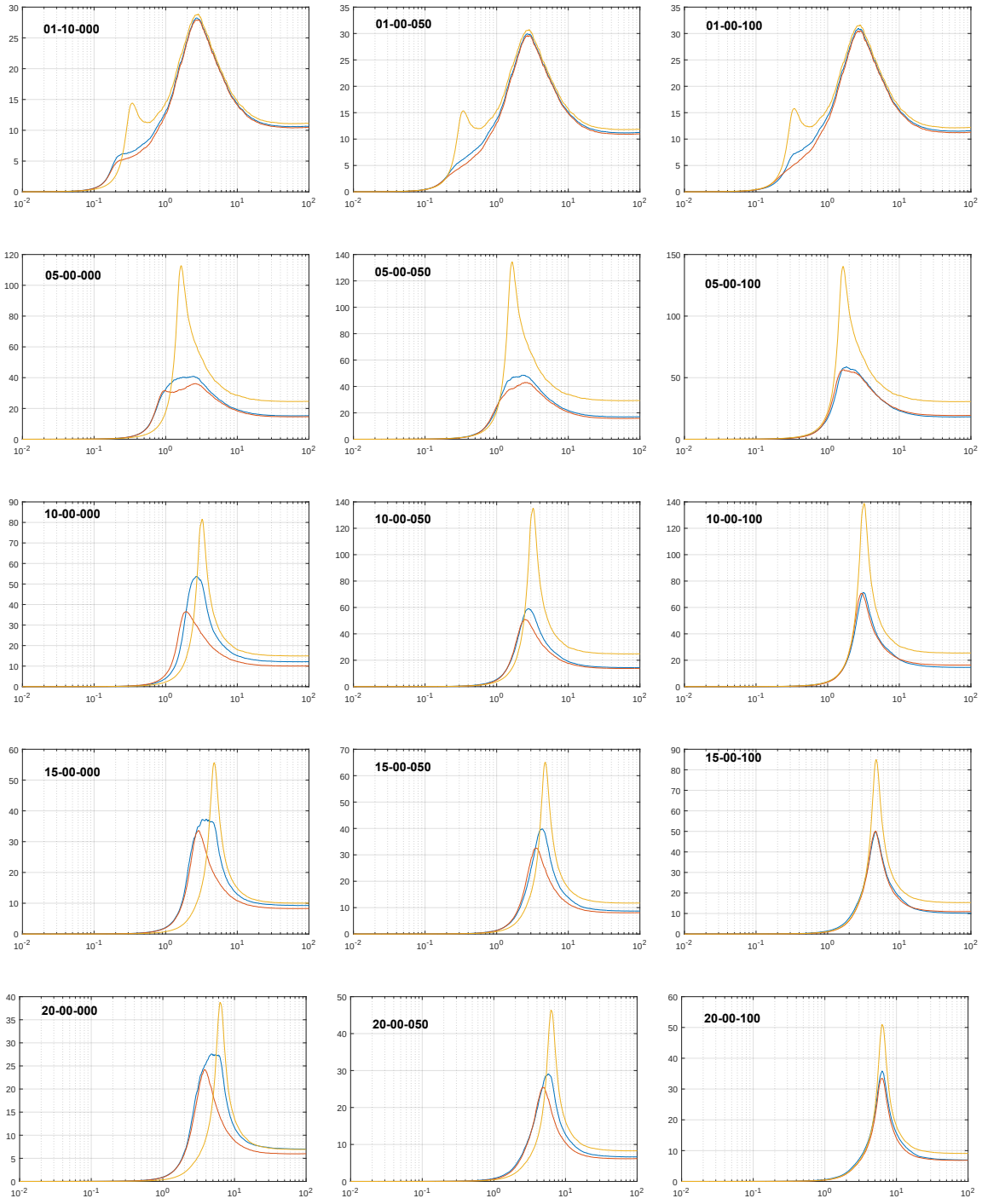


FIGURE 3.15 – Spectres en Pseudo-Accélération non-linéaire et linéaire équivalent pour différents jeux de paramètres $\{\frac{f_0}{f_c};\alpha_p;\chi\}$ pour une ductilité μ=4. Sur l'axe des abscisses, les fréquences sont comprises entre 0.01 et 100 Hz. La courbe bleue correspond au comportement non-linéaire, la courbe rouge correspond au comportement linéaire équivalent et la courbe orange correspond au comportement linéaire avec des caractéristiques initiales.

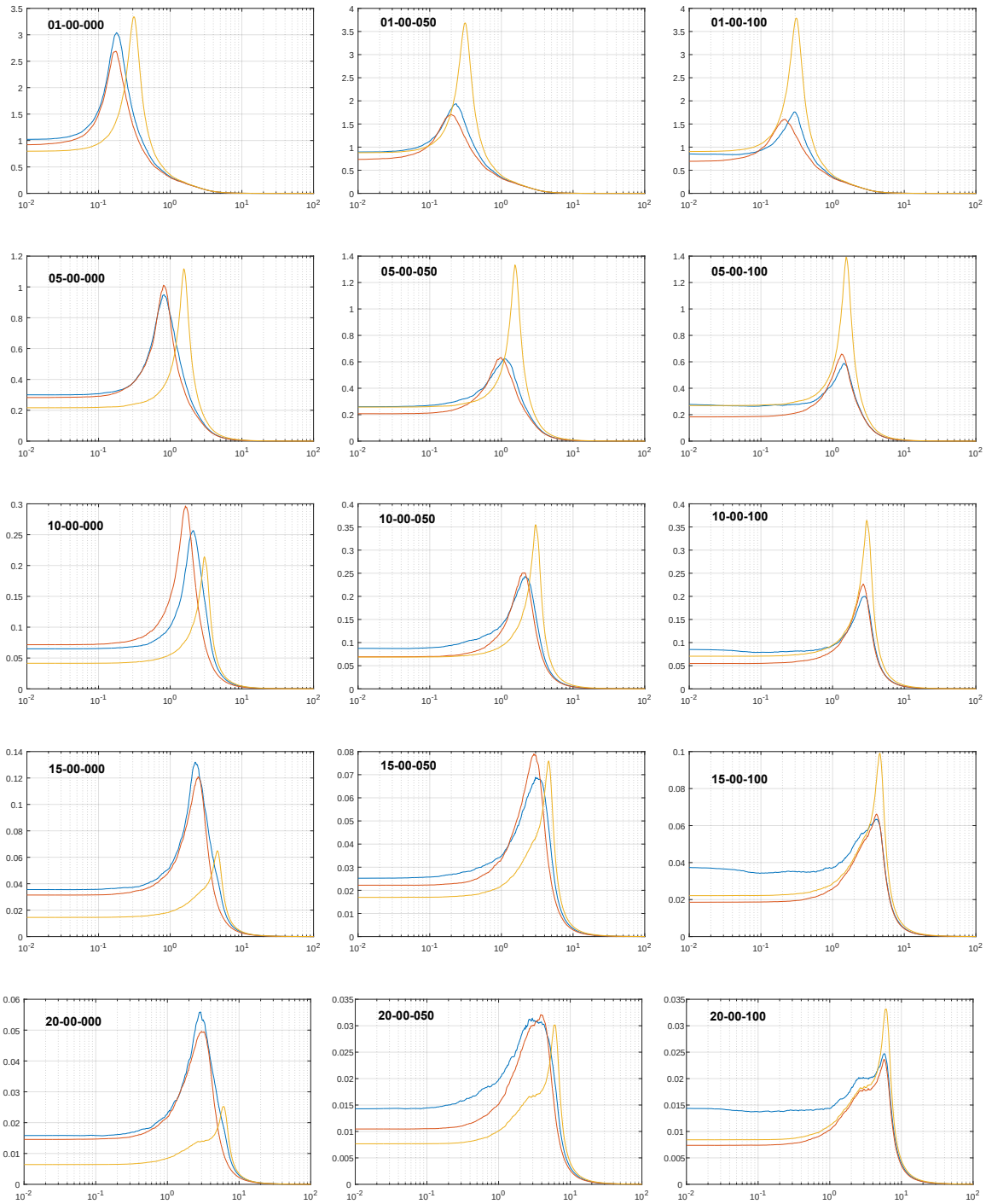


FIGURE 3.16 – Spectres en déplacement non-linéaire et linéaire équivalent pour différents jeux de paramètres $\{\frac{f_0}{f_c}; \alpha_p; \chi\}$ pour une ductilité μ=4. Sur l'axe des abscisses, les fréquences sont comprises entre 0.01 et 100 Hz. La courbe bleue correspond au comportement non-linéaire, la courbe rouge correspond au comportement linéaire équivalent et la courbe orange correspond au comportement linéaire avec des caractéristiques initiales.

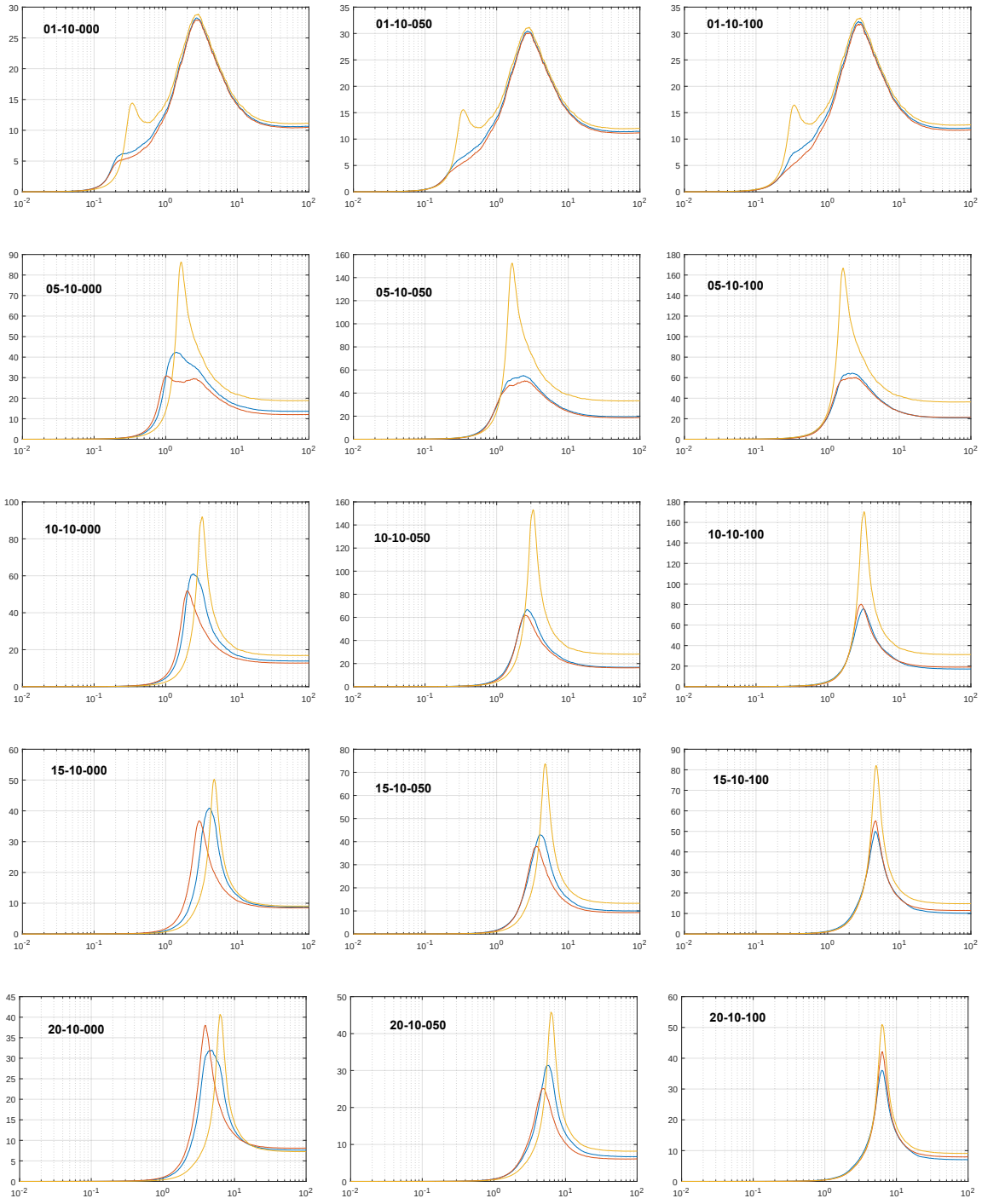


FIGURE 3.17 – Spectres en Pseudo-Accélération non-linéaire et linéaire équivalent pour différents jeux de paramètres $\{\frac{f_0}{f_c};\alpha_p;\chi\}$ pour une ductilité μ=4. Sur l'axe des abscisses, les fréquences sont comprises entre 0.01 et 100 Hz. La courbe bleue correspond au comportement non-linéaire, la courbe rouge correspond au comportement linéaire équivalent et la courbe orange correspond au comportement linéaire avec des caractéristiques initiales.

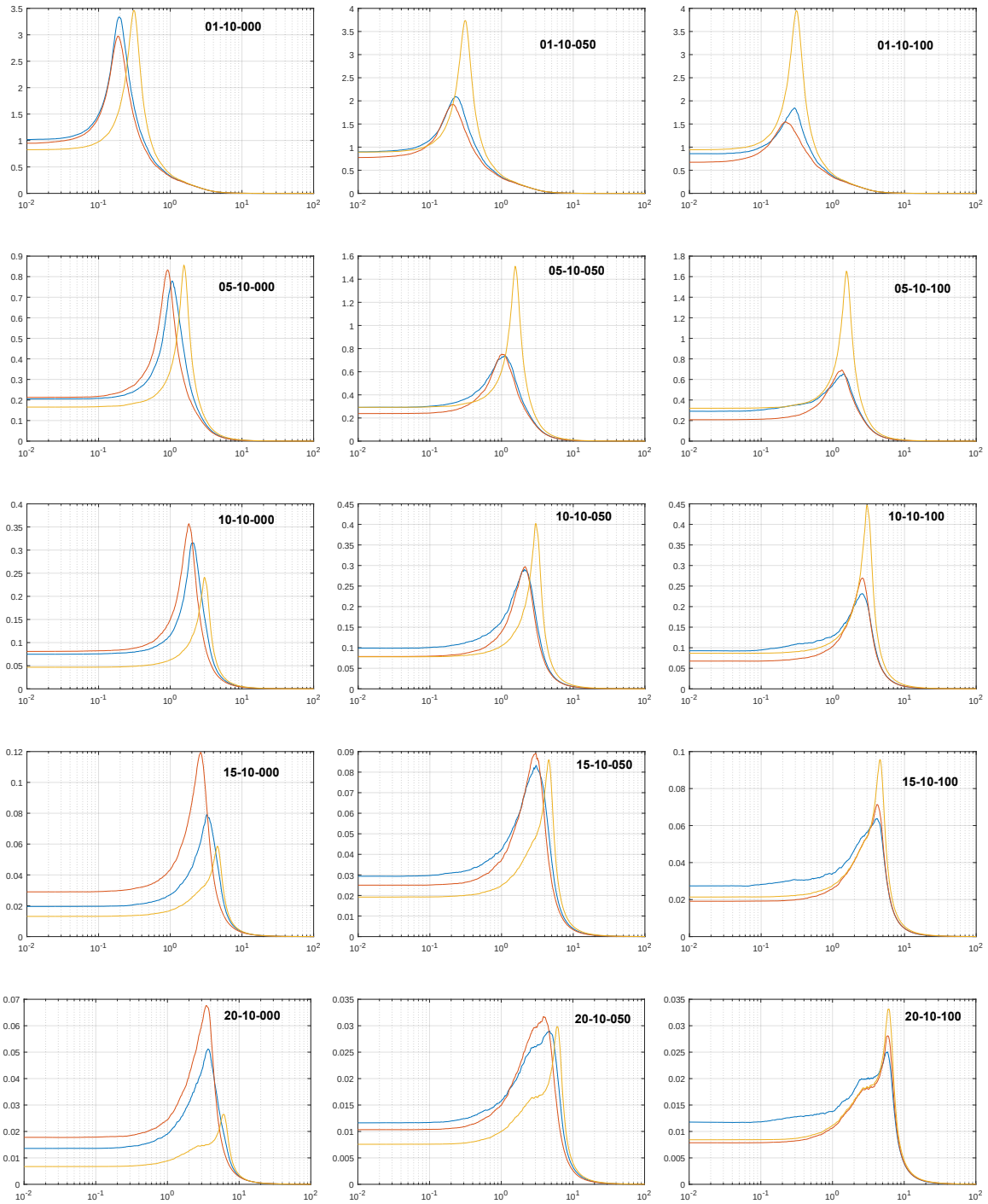


FIGURE 3.18 – Spectres en déplacement non-linéaire et linéaire équivalent pour différents jeux de paramètres $\{\frac{f_0}{f_c}; \alpha_p; \chi\}$ pour une ductilité μ=4. Sur l'axe des abscisses, les fréquences sont comprises entre 0.01 et 100 Hz. La courbe bleue correspond au comportement non-linéaire, la courbe rouge correspond au comportement linéaire équivalent et la courbe orange correspond au comportement linéaire avec des caractéristiques initiales.

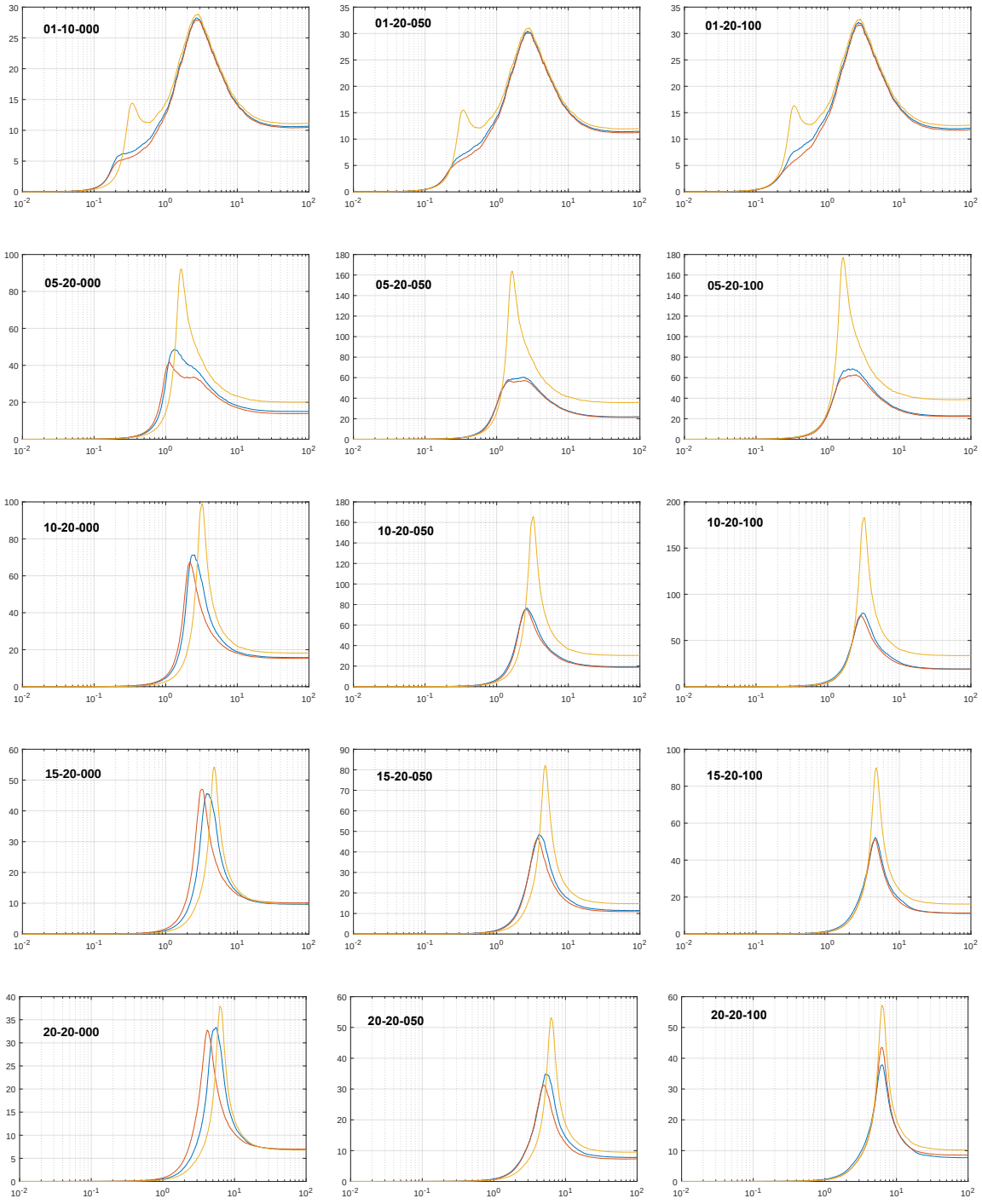


FIGURE 3.19 – Spectres en Pseudo-Accélération non-linéaire et linéaire équivalentpour différents jeux de paramètres $\{\frac{f_0}{f_c};\alpha_p;\chi\}$ pour une ductilité μ=4. Sur l'axe des abscisses, les fréquences sont comprises entre 0.01 et 100 Hz. La courbe bleue correspond au comportement non-linéaire, la courbe rouge correspond au comportement linéaire équivalent et la courbe orange correspond au comportement linéaire avec des caractéristiques initiales.

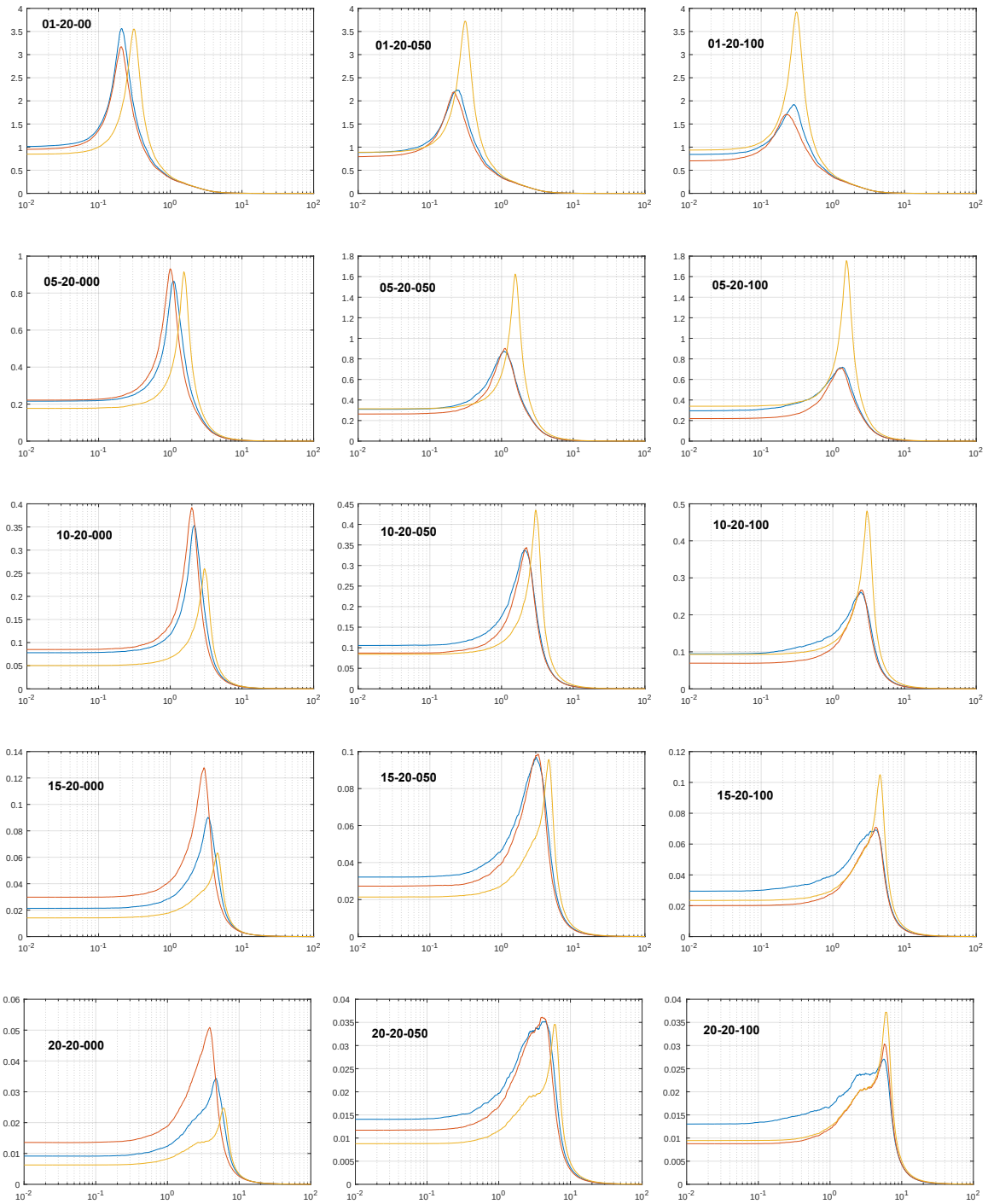


FIGURE 3.20 – Spectres en déplacement non-linéaire et linéaire équivalent pour différents jeux de paramètres $\{\frac{f_0}{f_c}; \alpha_p; \chi\}$ pour une ductilité μ=4. Sur l'axe des abscisses, les fréquences sont comprises entre 0.01 et 100 Hz. La courbe bleue correspond au comportement non-linéaire, la courbe rouge correspond au comportement linéaire équivalent et la courbe orange correspond au comportement linéaire avec des caractéristiques initiales.

montre que cette valeur est directement liée à l'effort qui est un paramètre d'entrée du dimensionnement.

04 Contrairement au spectre en pseudo-accélération, le spectre en déplacement linéaire équivalent s'approche du spectre non-linéaire en amplitude et en localisation du pic pour le comportement mixte et élasto-plastique. Ce rapprochement reste satisfaisant pour le comportement endommageant de l'oscillateur à basse et moyenne fréquence. Pour l'oscillateur endommageant à hautes fréquences, le spectre linéaire équivalent est plus éloigné du spectre non-linéaire mais reste meilleur que le spectre linéaire initial.

05 Pour les spectres en déplacement, la valeur à la fréquence nulle correspond au pic du mouvement déduit de l'accélération considérée. Pour l'accélération non-linéaire, cette valeur est le pic du déplacement non-linéaire. Dans notre approche, cette valeur n'est pas similaire entre les différents spectres.

3.4 Conclusions sur la linéarisation équivalente par fonction de transfert

Dans ce chapitre, nous avons présenté le concept de linéarisation équivalente par fonction de transfert, les paramètres principaux de ce concept ainsi que la procédure de validation des paramètres. Le concept s'appuie sur la fonction de transfert afin de déterminer un oscillateur linéaire équivalent dont la fonction de transfert représente la meilleur approximation de la fonction de transfert expérimentale non-linéaire. Les deux paramètres principaux sont la plage de fréquence sur laquelle est minimisée la différence des fonctions de transfert complexes du système non-linéaire et linéaire équivalent et la résolution fréquentielle. Leurs valeurs numériques choisies sont validées par les exemples concrets.

La chute de fréquence, exprimée par le ratio $\frac{f_{eq}}{f_0}$, et l'augmentation d'amortissement ξ_{eq} ont été établies pour différents comportement caractérisé par $\{\frac{f_0}{f_c};\alpha_p;\chi\}$ dont $\frac{f_0}{f_c} = \{0.1;0.5;1.0;1.5;2.0\}$, $\alpha_p = \{0.0;0.1;0.2\}$ et $\chi = \{0.0;0.25;0.5;0.75;1.0\}$. Le résultat obtenu permet de quantifier la dépendance forte des caractéristiques équivalentes à la rigidité de l'oscillateur $\{\frac{f_0}{f_c}\}$ ainsi qu'au type de comportement (χ). En effet, plus la structure est rigide (soit un ratio $\frac{f_0}{f_c}$ important), moins la fréquence baisse. Le ratio $\frac{f_{eq}}{f_0}$ est ainsi similaire à celui lié aux caractéristiques sécantes pour le comportement endommageant. De plus, l'amortissement reste quasi inchangé et la chute de fréquence tend vers $\sqrt{\alpha_p}$ quand la ductilité appelée tend vers à l'infini.

Concernant la performance du nouveau concept, la linéarisation équivalente par fonction de transfert permet de restituer la réponse en accélération du modèle non-linéaire. En fait, l'accélération linéaire équivalente est "similaire" à celle du système non-linéaire. Cette similarité a été quantifiée grâce aux critères d'Anderson. Les notes moyennes de la similarité entre deux accélérogrammes sont classées dans la catégorie "excellente". Cette observation nous amène a reproduire le spectre transféré au travers de la structure non-linéaire. Le spectre transféré linéaire équivalents est en général proches du spectre non-linéaire. La valeur de ZPA (Valeur du spectre en pseudo- accélération absolue à la période nulle, correspondant à la valeur maximale de l'accélérogramme –ou *Zero Period Acceleration*– (ZPA)) du spectre en pseudo-accélération est restituée par la linéarisation équiva-

lente. La valeur à fréquence nulle du spectre de pseudo-accélération absolue non-linéaire est assez proche de celle du spectre linéaire équivalent. Ces résultats ouvrent à plusieurs applications possibles en ingénierie sismique telles que :

* Comme la valeur de ZPA est restituée, l'effort peut être estimé avec le système linéaire équivalent. Cela permet la mise en place d'une démarche de détermination des efforts de dimensionnement.

* Le spectre transféré est estimé avec les oscillateurs linéaires équivalents. Cela supprime une difficulté majeure en établissant le spectre transféré au travers de la structure non-linéaire. Il est possible d'appliquer la méthode de transfert direct en utilisant les oscillateurs linéaires équivalents dans le cas de non-linéarité.

* La variance de chute de fréquence peut être retenue pour développer l'oscillateur linéaire équivalent suivant le déplacement maximal (Voir le chapitre 02, section 2.2.4). Dans ce cas, une fois la fréquence équivalente déterminée à l'issue de la linéarisation équivalente par fonction de transfert, l'amortissement peut être ajusté pour avoir le même déplacement.

3.5 Références

Anderson, J. G. (2004). Quantitative measure of the goodness-of-fit of synthetic seismograms. In *13th World Conference on Earthquake Engineering Conference Proceedings, Vancouver, Canada, Paper*, volume 243. 89

Chopra, A. K. and Goel, R. K. (2001). Direct displacement-based design : use of inelastic vs. elastic design spectra. *Earthquake Spectra*, 17(1) :47–64. 86

Kennedy, R., Short, S., Merz, K., Tokarz, F., Idriss, I., Power, M., and Sadigh, K. (1984). Engineering characterization of ground motion. task i. effects of characteristics of free-field motion on structural response. Technical report, Structural Mechanics Associates, Inc., Newport Beach, CA (USA) ; Woodward-Clyde Consultants, Walnut Creek, CA (USA). 86

Labbé, P. (2013). Categorization of seismically-induced stresses for civil and mechanical engineering. *Nuclear Engineering and Design*, 255 :240–247. 86

Politopoulos, I. and Feau, C. (2007). Some aspects of floor spectra of 1dof nonlinear primary structures. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 36(8) :975–993. 98

Chapitre 4

Confrontation expérimentale

Le chapitre 04 consiste en la comparaison des résultats de la linéarisation équivalente par fonction de transfert pour le système canonique avec ceux des structures réelles au travers des campagnes d'essais de structures sous chargement sismique. Dans la première section, nous étudions le comportement linéaire équivalent d'une structure du type voile en béton armé en cisaillement, et dans la seconde section, du type tuyauterie en acier. L'objectif de ces comparaisons est de différencier le comportement linéaire équivalent de chaque type de structure en les associant au résultat de la linéarisation équivalente par fonction de transfert de systèmes canoniques avec différents comportements. Cela signifie que les différents comportements linéaires équivalents pour différents types de structure sont, pour un niveau donné de chargement, approchés par le résultat obtenu dans le chapitre 03 pour un système canonique. Pour finir, nous concluons sur l'utilisation de l'approche proposée pour ces cas d'étude.

« *J'aime deux choses :*
Toi et la rose,
La rose pour un jour,
Toi pour toujours. »

Antigone

Sommaire

4.1 Structure voile en béton armé 109

4.1.1 Présentation de l'essai SAFE 109

4.1.2 Comportement linéaire équivalent par fonction de transfert des voiles SAFE 112

4.2 Système de tuyauterie en acier 117

4.2.1 Marge importante du dimensionnement des tuyauteries 117

4.2.2 Présentation de l'essai des composants lors de la campagne d'essai EPRI 119

4.2.3 Résultat du comportement linéaire équivalent de l'essai EPRI . . . 120

4.2.4 Présentation de l'essai BARC 123

4.2.5 Résultat du comportement linéaire équivalent de l'essai BARC . . . 124

4.2.6 Conclusions sur le comportement linéaire équivalent des tuyauteries en acier 129

4.3 Conclusions **130**
4.4 Références **131**

4.1 Structure voile en béton armé

En génie parasismique, le voile en béton armé joue un rôle de contreventement de la structure soumise à un chargement horizontal de type vent ou séisme. Les autres applications de ce type de structure telles que voile porteur,... ne sont pas prises en compte dans cette étude. Dans ces cas de contreventement, le voile se comporte principalement en cisaillement. En fait, le comportement dynamique d'une telle structure en béton armé est complexe du fait notamment de la présence de fissuration, endommagement dans les matériaux (béton, acier) et de leur interaction (pincement, cohésion acier-béton...). Plusieurs auteurs, comme Mazars [1984], Brun et al. [2003], ont étudié ce type d'élément structurel et réussi à en représenter les phénomènes majeurs. Dans cette section, la campagne d'essai SAFE est décrite et examinée avec la linéarisation équivalente par fonction de transfert.

4.1.1 Présentation de l'essai SAFE

Objectif de l'essai SAFE

La campagne d'essai SAFE décrite dans Labbé et al. [2016], acronyme de **S**tructures **A**rmées **F**aiblement **E**lancées, a pour objectif de déterminer la dépendance de la marge de dimensionnement du voile en cisaillement à sa fréquence naturelle. Cette campagne a consisté initialement à tester 13 voiles, notés T_i où $i = 1...13$, conçus de façon à obtenir une fréquence propre du voile telle qu'elle soit 1, 2 ou 3 fois supérieure à la fréquence centrale du signal d'excitation. La méthode pseudo-dynamique a alors été utilisée. Les résultats de cette campagne ont fourni au comité scientifique une base de données fiables dans ce domaine et ont été examinés dans Mazars et al. [2002], Kotronis et al. [2003], Brun et al. [2003], Gallitre [2008], Brun et al. [2011], Labbé et al. [2016].

La méthode pseudo-dynamique

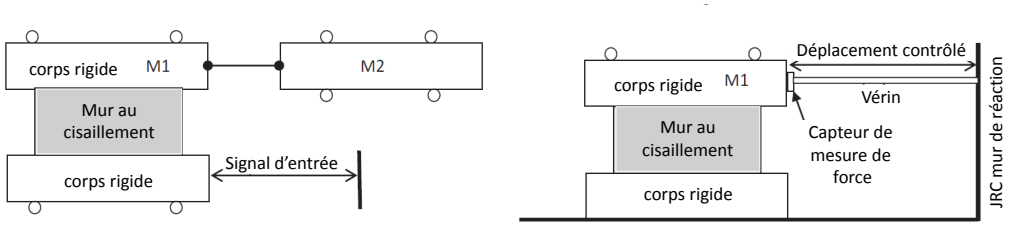
Il s'agit d'une méthode hybride de couplage entre la simulation numérique et la mise en déplacement de la tête du voile par vérin hydraulique. A chaque pas, cette méthode consiste en deux phases. La première est la simulation du comportement de structure par schéma d'intégration explicite permettant le calcul de la réponse (déplacement, vitesse et accélération) de la structure à l'instant n+1 avec la connaissance de l'état de la structure à l'instant n (la réponse et la force de rappel). La deuxième phase, à l'issue de ce calcul, consiste à mettre en place le déplacement calculé à l'instant n+1 par le vérin et la force nécessaire mesurée devient donc la force de rappel à l'instant n+1. L'état n+2 sera calculé à partir de la réponse calculée et la force de rappel mesurée à l'instant n+1. Il est important de rappeler que l'essai est pseudo-dynamique, il n'y a donc pas efforts visqueux issus de la force de rappel.

Structure des voiles en cisaillement

Parmi les 13 voiles testés, il est noté que les deux premiers voiles (T1 et T2) ont eu pour objectif de calibrer la mise en place des outils de mesure des essais pseudo-dynamiques. De plus, les signaux temporels mesurés ont pu être archivés pour les voiles T3 à T12. Cependant, les rapports contenant les notices d'archivages des enregistrements ne sont documentés que pour les voiles T5, à T12. Ainsi, il n'est donc pas possible d'interpréter les enregistrements pour les voiles T3 et T4. Le voile T13 a, quant à lui, comme particularité

que le matériau constituant est un béton fibré. Ce voile ne sera de ce fait pas étudié ici. Ainsi, nous nous intéressons aux voiles T_i où $i = 5...12$ dans cette étude.

Tous les voiles auxquels nous nous intéressons ont la même forme, soit 1.20 m de hauteur pour 3.00 m de longueur et 0.20 m d'épaisseur. Cependant, le ferraillage de chaque voile est différent. La base des voiles est encastrée sur une structure rigide. La tête des voiles supporte une masse dont le déplacement horizontal est contrôlé et piloté par un vérin hydraulique. Le ferraillage vertical est conçu avec la contrainte admissible de cisaillement selon les codes de dimensionnement utilisés dans le génie civil nucléaire.



(a) Dimensionnement du voile SAFE

(b) Implantation de la structure dans le laboratoire

FIGURE 4.1 – La structure des voiles SAFE (Figures reprises dans le travail de Labbé et al. [2016]).

En admettant que les voiles se comportent comme un système à 1 DDL, la rigidité naturelle est estimée à partir de la section d'acier et de béton et de leurs caractéristiques élastiques. Cette rigidité de dimensionnement du voile en béton armé dépend de la section de béton et du module de cisaillement du béton sans tenir compte du ferraillage. La rigidité de dimensionnement est ici $k_d = 7120$ (MN/m) selon Labbé et al. [2016]. Comme l'objectif de ces essais est l'observation de la dépendance à la fréquence naturelle de la structure, une valeur de masse "fictive" est ajoutée à la masse totale dans le concept comme présentée sur la figure 4.1a. Cette dernière a ainsi été ajustée pour que les fréquences soient égales à 4 Hz, 8Hz et 12 Hz (soit 1, 2 et 3 fois la fréquence centrale du signal d'excitation). Cette fréquence centrale correspond au pic du spectre en pseudo-accélération, qui est égale à 4 Hz. Il est indispensable d'identifier les caractéristiques modales réelles de la structure par les essais. Finalement, les valeurs caractéristiques des voiles sont présentées dans le tableau 4.1.

Etant acquis que nous nous intéressons au comportement à l'échelle macroscopique des voiles sous séisme, les caractéristiques du matériaux, disponibles dans Labbé et al. [2016], ne sont ainsi pas présentées.

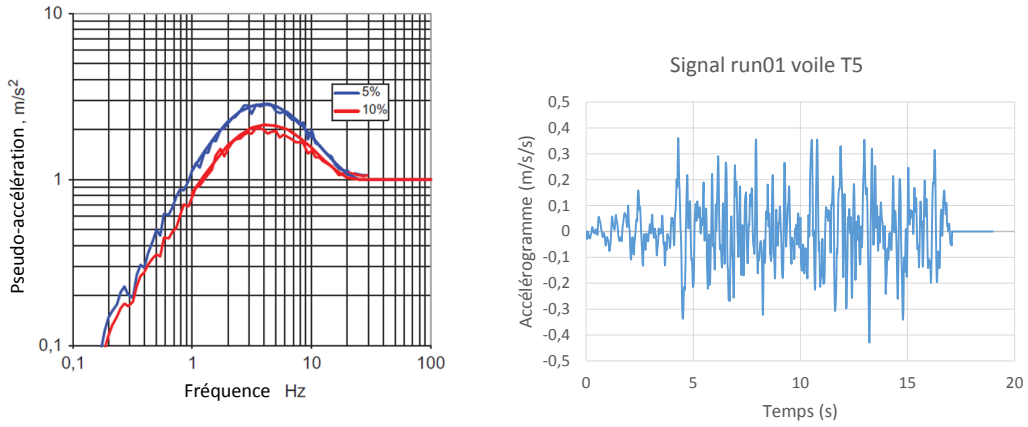
Chargement sismique

Le spectre de référence a été fourni par EDF. Le signal synthétique est ensuite généré à partir de ce spectre de référence présenté sur la figure 4.2. Ce signal temporel est ajusté en amplitude par le facteur ka. Le dernier est appelé « signal nominal », considéré comme correspondant au signal du niveau de dimensionnement. Le facteur dépend de la contrainte de cisaillement de dimensionnement trouvée dans le tableau 4.1.

$$ka = \frac{\tau_d \mathrm{LE}}{\mathrm{SA}(f_d, 7\%)\mathrm{M}} \tag{4.1}$$

TABLEAU 4.1 – Caractéristiques dynamiques des voiles SAFE. ρ_h et ρ_v sont le pourcentage du ferraillage horizontal et vertical. f_0 et f_d sont les fréquences naturelle et du dimensionnement. ξ_0 est l'amortissement initiale mesuré. M est la masse. k_0 est la rigidité initiale du voile. σ_v est la contrainte verticale. τ_d est la contrainte admissible du cisaillement.

	ρ_h	ρ_v	f_0	f_d	ξ_0	M	k_0	σ_v	τ_d
Voile	%	%	Hz	Hz	%	Tonne	MN/m	MPa	Mpa
T5	0,80	0,80	6,69	8,0	2,6	2818	4979	0.32	4
T6	0,60	0,40	10,4	12,0	3,7	1252	5346	1.01	3
T7	0,60	0,40	3,58	4,0	4,2	11272	5703	1.01	3
T8	0,40	0,40	9,60	12,0	4,1	1252	4555	0.32	2
T9	0,40	0,40	2,91	4,0	4,6	11272	3768	0.32	2
T10	0,60	0,60	3,30	4,0	2,2	11272	4846	0.32	3
T11	0,40	0,40	3,30	4,0	2,1	11272	4846	0.32	2
T12	0,11	0,11	3,39	4,0	3,0	11272	5114	1.01	1.44



(a) Spectre en pseudo-accélération de référence SAFE

(b) Signal temporel d'excitateur nominal du Run01 du voile T5

FIGURE 4.2 – Le chargement sismique utilisé dans l'essai SAFE

Où : L et E sont la largeur et la profondeur du voile. M est la masse en tête du voile (tableau 4.1).

Le niveau du signal d'excitation est ensuite multiplié par le facteur α dépendant de chaque voile. Il est alors important de noter que tous les accélérogrammes sont enchainés l'un après l'autre de façon à ce qu'il n'y ait pas de temps de repos entre deux accélérogrammes. Cependant, après le premier accélérogramme, un endommagement est présent et la fréquence effective à la fin du signal de niveau 1 ne correspond pas à la fréquence initiale. C'est donc pour cette raison que dans la suite de notre étude nous ne considérons que le premier accélérogramme, noté Run01. Le signal temporel du Run01 du voile T5 est tracé sur la figure 4.2b.

4.1.2 Comportement linéaire équivalent par fonction de transfert des voiles SAFE

Comme présenté dans le paragraphe précédent, nous étudions ici le comportement linéaire équivalent par fonction de transfert pour les voiles de T5 à T12 soumis seulement à l'accélération de niveau 1, soit le Run01. Dans le cadre de la procédure de linéarisation équivalente par fonction de transfert, nous utiliserons les données suivantes :

* L'accélération à la base des voiles ;
* L'accélération en tête des voiles ;
* La relation force de rappel - déplacement permettant de déterminer la ductilité appelée.

Linéarisation équivalente par fonction de transfert pour les voiles SAFE

En appliquant la procédure de détermination des caractéristiques équivalentes par fonction de transfert, nous avons pu déterminer la fréquence et l'amortissement équivalents pour chaque voile soumis au signal nominal. La technique du zéro-padding a également été appliquée afin d'obtenir une bonne résolution fréquentielle. Concernant la plage de fréquence sur laquelle est faite la minimisation, elle est choisie en conformité avec la plage fréquentielle du signal d'entrée. Cette plage n'étant pas connue, nous avons déterminé la plage des fréquences dont le début et la fin correspondent respectivement à la densité spectrale de puissance du signal d'entré, DSP, normalisée à 1% et 99%. Cette plage est ainsi de 0.45 à 12 Hz. Toutes les autres valeurs numériques des paramètres de cette minimisation restent les mêmes que celles appliquées au système canonique dans le chapitre 03.

Tous les résultats des caractéristiques par fonction de transfert pour les voiles SAFE sont présentés dans le tableau 4.2 où les caractéristiques initiales mesurées sont f_0 et ξ_0 et les caractéristiques équivalentes sont f_{eq} et ξ_{eq}. Il est intéressant de noter parmi les résultats obtenus en termes de caractéristiques équivalentes qu'aucun changement n'est observé pour le voile T12. Cela confirme donc son comportement élastique.

TABLEAU 4.2 – Caractéristiques équivalentes des voiles SAFE

	f_0	ξ_0	f_{eq}	ξ_{eq}	$\frac{f_{eq}}{f_0}$	$\xi_{eq} - \xi_0$
Voiles	Hz	%	Hz	%	N/A	%
T5	6,7	2,60	2,9	15,14	0,44	12,54
T6	10,4	3,70	4,4	8,93	0,43	5,23
T7	3,6	4,20	2,5	9,96	0,69	5,76
T8	9,6	4,10	4,1	4,89	0,43	0,79
T9	2,9	4,60	2,4	6,52	0,82	1,92
T10	3,3	2,20	2,2	15,67	0,67	13,47
T11	3,3	2,10	2,4	5,63	0,72	3,53
T12	3,4	3,00	3,3	3.29	0,98	0,29

Détermination de la valeur de ductilité appelée pour les voiles SAFE soumis au signal nominal

Pour rappel, les voiles étudiés ici ont le même dimensionnement et sont constitués du "même" matériau. La valeur du seuil d'élasticité peut être conventionnellement définie par le déplacement au moment de l'apparition de la "première" fissure. Comme le béton est fissuré par la contrainte en traction, l'état de contrainte en cisaillement pur permet de déterminer la contrainte principale en traction ($\sigma_{III} = \tau$). La contrainte de rupture en traction, τ_{conv}, est de 3.32 MPa à 28 jours selon les résultats des essais présentés dans le rapport Pegon et al. [1998]. Le déplacement en tête du voile correspondant à cette contrainte de rupture en traction, le seuil d'élasticité conventionnel, noté Xe_{conv}, est calculé par la formule suivante :

$$Xe_{conv} = \frac{\tau_{conv} LE}{k_d} = \frac{3.32 * 3 * 2}{7120} = 0.27(mm) \tag{4.2}$$

Or, la valeur de contrainte de rupture en traction varie du fait que l'échantillon en béton armé peut être différente d'un voile à l'autre. Cette valeur Xe_{conv} peut ainsi servir uniquement comme contrôle de l'ordre de grandeur. De plus, dans le travail de Brun et al. [2003], il a identifié ce seuil égal à 0.3 mm.

La relation force - déplacement du voile en cisaillement reste proche du comportement endommageant en ignorant le phénomène lié au pincement, à la plasticité des aciers et à la cohésion acier-béton. Afin de déterminer la ductilité appelée et l'écrouissage pour les voiles associés à ce type de comportement, il est indispensable de déterminer l'enveloppe de la courbe force - déplacement. La force de rappel mesurée correspond à la force hystérétique du comportement étudié. Une fois, l'enveloppe force-déplacement déterminée comme présenté sur la figure 4.3, nous déterminons la surface sous la courbe enveloppe force - déplacement. La courbe du comportement endommageant idéalisé sera ensuite déterminée telle que sa surface soit égale à celle développée par l'enveloppe force-déplacement en conservant le déplacement maximal ainsi que la rigidité initiale mesurée liée à f_0. Nous avons tracé pour tous les voiles soumis à leur signal d'excitation nominal à l'exception des voiles T9 et T12. En effet pendant le transitoire du voile T9 soumis au signal nominal, le capteur de déplacement est affecté par un frottement important de l'ordre 150 micromètres à t = 3s Pegon et al. [1998]. Malgré une correction en déplacement, la relation force-déplacement ne permet pas d'estimer le comportement idéalisé

TABLEAU 4.3 – Ductilité appelée et écrouissage des voiles SAFE

	Dmax	F_{max}	$k_{sécante}$	k_a	Xe	μ	α_p
Voiles	mm	MN	MN/m	MN/m	mm		%
T5	3,85	3,52	916	4994	0,30	12,7	11
T6	3,10	2,89	932	5348	0,34	9,2	7
T7	0,71	1,82	2571	5767	0,25	2,9	16
T8	2,56	2,24	878	4557	0,25	10,2	10
T9	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
T10	0,78	1,53	1964	4846	0,25	3,1	12
T11	0,46	1,18	2586	4846	0,21	2,2	15
T12	0,25	1,07	4346	5144	0,25	1,0	N/A
Moy					0,26		12,1

pour le voile T9. Quant au voile T12, le seuil d'élasticité est égal à la valeur du déplacement maximal, nous pouvons donc en conclure qu'il n'est pas endommagé.

Le résultat de la ductilité appelée est représenté dans le tableau suivant 4.3.

Concernant l'écrouissage du comportement idéalisé α_p présenté dans le tableau 4.3, la valeur obtenue est dépendante du taux de ferraillage. Nous nous attendons intuitivement à ce que α_p croisse en fonction du ferraillage ρ_V et ρ_H. Or, le résultat que nous avons obtenu par la procédure en idéalisant le comportement endommageant ne l'est pas. Ceci est expliqué par la variabilité de qualité du béton d'un voile à l'autre. La valeur de l'écrouissage moyenne est de 12,1% avec une valeur d'écart-type de 2.3 %, soit un écrouissage variant entre 10% et 14%.

A partir du tableau 4.3, la valeur de ductilité appelée moyenne obtenue sur les voiles est de 0.26 mm, ce qui reste proche de la valeur de ductilité appelée conventionnellement déterminée Xe_{conv}=0.27 par la formule 4.2.

Comparaison des résultats SAFE avec ceux du système canonique

Nous avons comparé les résultats du comportement linéaire équivalent des voiles SAFE avec ceux obtenus dans le cas du système canonique issu du chapitre 03 pour le comportement endommageant, soit $\chi = 0$. Pour cela, nous prenons la valeur $\alpha_p = 12\%$ pour le taux d'écrouissage de tous les voiles. Quant au ratio $\frac{f_0}{f_c}$, le ratio $\frac{f_0}{f_c}$ ne permet pas d'établir l'importance de la chute de fréquence et de l'amortissement équivalent avec un écrouissage de 12%. Les résultats expérimentaux du système canonique ne sont pas disponibles pour $\alpha_p = 12\%$ mais sont interprétées de façon linéaire entre $\alpha_p = 10$ % et $\alpha_p = 20\%$. La comparaison est ainsi tracée sur la figure 4.4.

A partir de cette comparaison 4.4, nous pouvons en tirer les remarques suivantes :

01 La chute de fréquence des voiles béton armé en cisaillement correspond à celle du comportement endommageant. La valeur de ductilité appelée varie en fonction du signal nominal représentatif du niveau de dimensionnement. La ductilité appelée va jusqu'à une valeur de 12, représentant une valeur numérique très importante en génie civil. Cette valeur est expliquée par le fait que le seuil d'élasticité est lié à

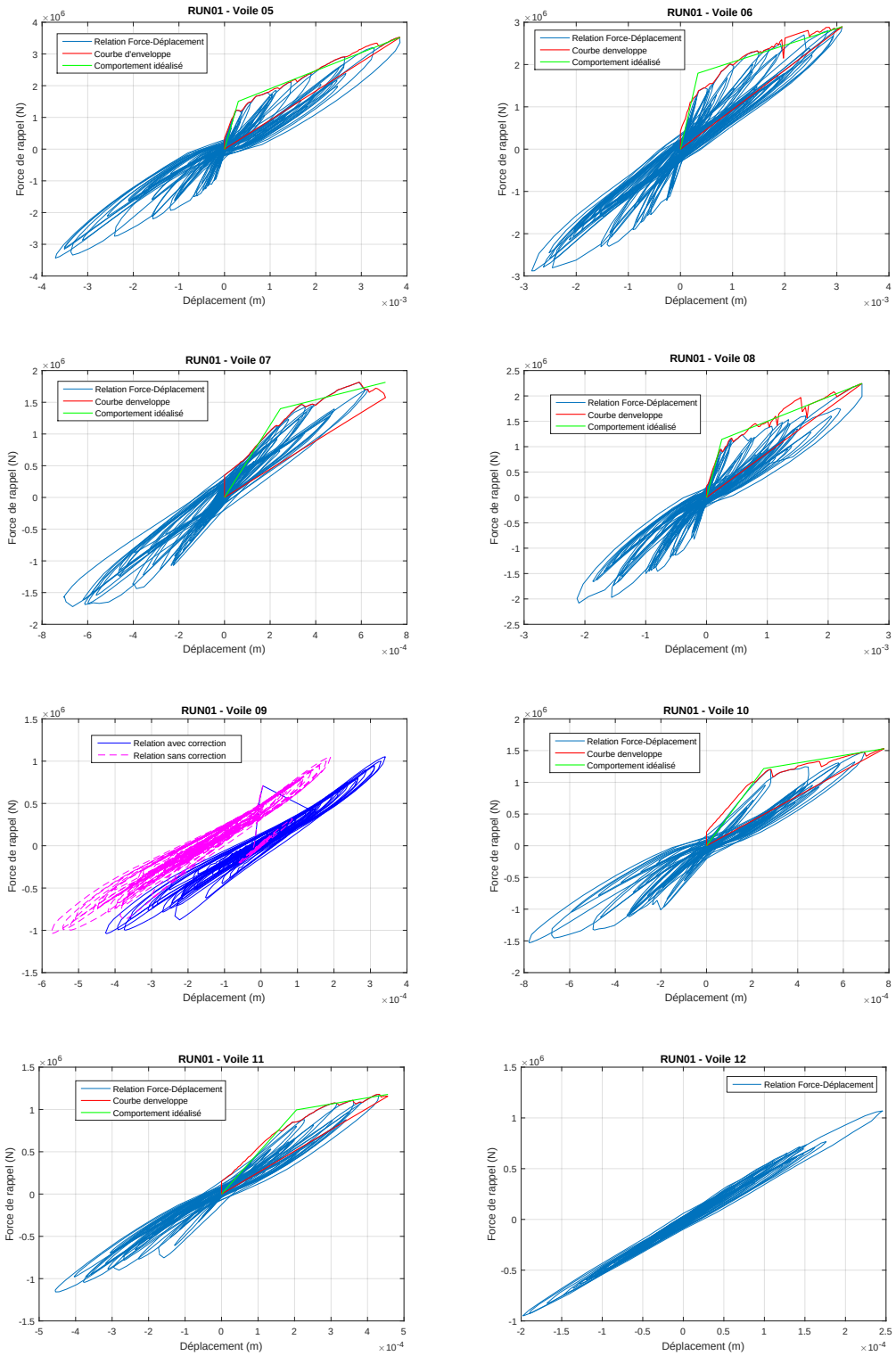


FIGURE 4.3 – Comportement idéalisé de la relation force-déplacement des voiles SAFE soumis au signal nominal

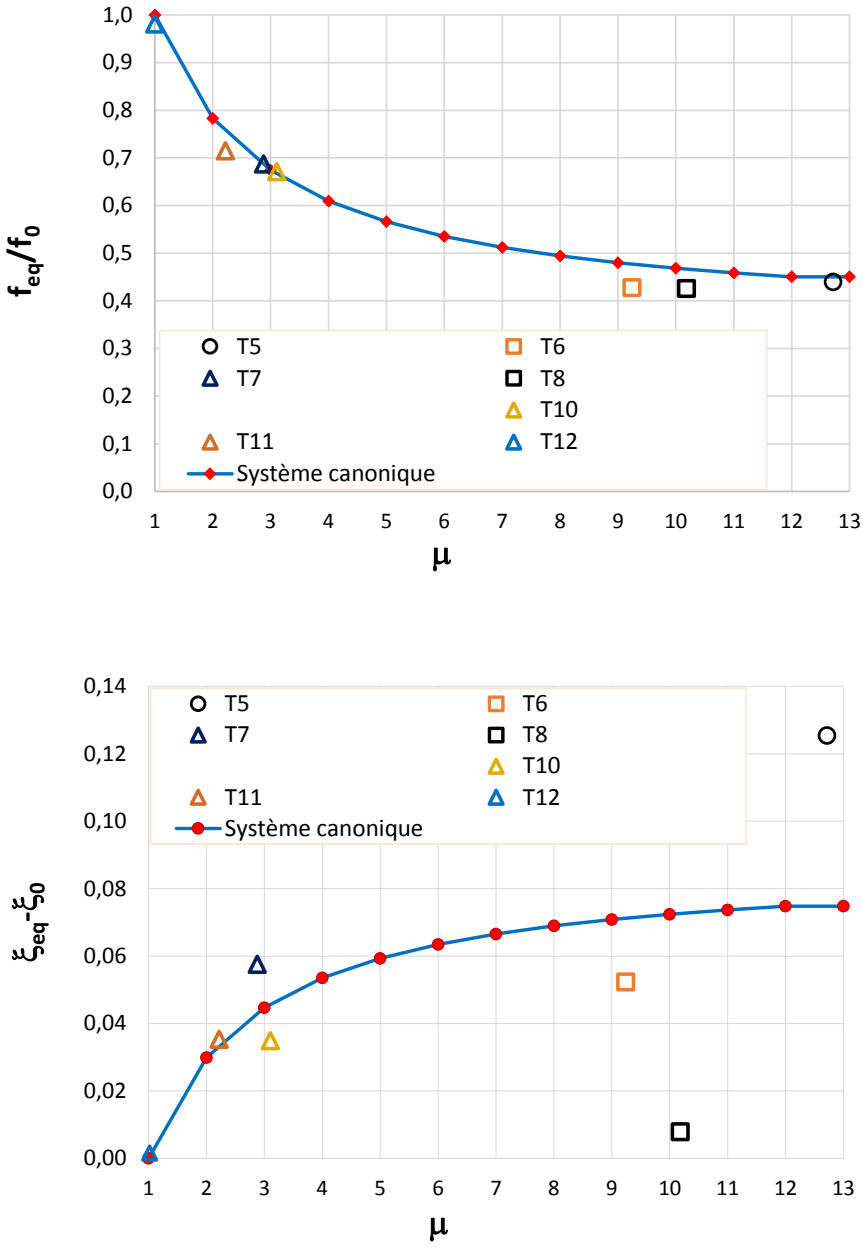


FIGURE 4.4 – Comparaison du comportement linéaire équivalent des voiles SAFE avec celui du système canonique. En haut, la chute de fréquence $\frac{f_{eq}}{f_0}$ obtenue par système canonique est représentée par une courbe et les résultats pour les voiles sont les points. La figure en bas correspond à l'augmentation ξ_{eq}.

l'apparition de la première fissure dans le béton. La valeur du déplacement en tête du voile associé au seuil d'élasticité est de l'ordre de 0.3 mm et reste faible si on se réfère à celle associée à la plastification des aciers. A titre d'exemple, la valeur du déplacement en tête associée à la plastification des aciers est estimée à 5 mm pour les voiles T6 et T8.

02 L'augmentation de l'amortissement équivalent correspond également à celle observée pour le système canonique avec $\chi = 0$, soit un comportement endommageant. La valeur de l'amortissement équivalent pour le voile T8 sort de l'ensemble des valeurs observées. Ce résultat, plus petit que celui du système canonique avec comportement endommageant, s'explique du fait que le résultat de l'expérience numérique est un nuage de points plutôt qu'une courbe. Néanmoins, en moyenne, le résultat des essais SAFE correspond à celui observé pour le système canonique avec comportement endommageant.

Conclusion sur le comportement linéaire équivalent des voiles SAFE

Le comportement linéaire équivalent des voiles SAFE correspond à celui du système canonique avec comportement endommageant. La chute de fréquence correspond à la rigidité sécante. L'amortissement augmente très peu en fonction de la ductilité appelée, ce qui est totalement différent de celui obtenu par la formule de Chopra and Goel [2001]. A titre exemple, pour une ductilité appelée de 9.25 correspondant au voile T6, l'augmentation d'amortissement $(\xi_{eq} - \xi_0)$ est égale à 6%, qui est similaire à la valeur de 7% pour le système canonique avec $\chi = 0$. Cependant, cette valeur de 7% est nettement inférieure à 24% obtenue par la formule de Chopra and Goel [2001]. Les caractéristiques équivalentes ne sont pas dépendantes de la fréquence initiale. Cette remarque importante signifie que l'endommagement dans la structure en béton armé peut être représenté par la valeur du déplacement maximal, soit la ductilité appelée, et que les caractéristiques équivalentes ne dépendent que de l'endommagement. Cette observation n'est à l'inverse pas valable pour le comportement élasto-plastique. La valeur de ductilité appelée obtenue est importante (pouvant aller jusqu'à 12), et cela même s'ils sont soumis à un signal nominal représentant le signal de dimensionnement. Cependant le déplacement en tête associé à cette ductilité appelée reste plus faible que celui associé à la plastification des aciers (5 mm pour les voiles T6 et T8), ainsi que celui issu de la rupture du voile. Cette analyse valide donc le domaine d'admission de ce concept vis à vis de structures en béton. En conclusion, malgré une approximation du comportement endommageant par rapport au comportement réel des voiles (hypothèses fortes sur les phénomènes de pincement, de cohésions acier-béton), notre approche nous permet de saisir le comportement linéaire équivalent des voiles en béton armée en cisaillement au travers du système canonique obtenu dans le chapitre 03 par fonction de transfert.

4.2 Système de tuyauterie en acier

4.2.1 Marge importante du dimensionnement des tuyauteries

L'analyse de la résistance d'un système de tuyauteries se fait suivant deux théories de ruine liées à la contrainte principale maximale et la contrainte au cisaillement maximale. De cela, les règlements en vigueur pour le dimensionnement des tuyauteries se fonde sur l'analyse de l'état de contrainte dans la structure. Plusieurs modes de ruine peuvent être

considérés par ces analyses. Par exemple, le code ASME Boiler and Code [2010] couvre les modes de ruines suivantes : la déformation excessive, la rupture incrémentale ou la fatigue. Pour prévenir chaque mode de ruine, le code définit la limite des charges en les classant en trois catégories :

01 La contrainte primaire : La contrainte développée par la force ou moment imposés ;

02 La contrainte secondaire : La contrainte développée par la condition de déformation ;

03 La contrainte maximale locale : La concentration de contrainte dans une région locale.

En pratique, le chargement sismique est considéré comme contrainte primaire dans le dimensionnement des systèmes de tuyauterie. Au travers des résultats des essais sur systèmes de tuyauteries en acier, l'effort maximal dans l'hypothèse d'un comportement élastique dépasse plusieurs fois la valeur de dimensionnement sans causer pour autant la rupture. En fait, la rupture provient principalement de l'effet fatigue-rochet. A titre d'exemple, nous avons pu constater lors des campagnes des essais EPRI EPRI [1994] ou BARC A. Ravikiran and Reddy [2015] les éléments suivants :

01 Pour les essais de la campagne EPRI sur des composants de tuyauteries représentés comme un système 1 DDL, le moment dynamique "mesuré" dépasse clairement le moment statique limite théorique. A titre d'exemple, ce ratio est d'environ 2.5 pour la plupart des composants et va jusqu'à 7.3 pour le composant N°25 (extrait du résultat de l'annexe A, dans le rapport des essais EPRI, volume II). Le moment statique limite théorique est calculé à partir de la contrainte admissible du matériau de la composante testée. Et, le moment dynamique "mesuré" est calculé à partir des valeurs de déformation et accélérations enregistrées dans les endroits correspondants situés dans la partie élastique de l'ensemble de structure de test. (Voir la figure 4.5, les parties non-colorées). De plus, le ratio entre le niveau du signal sismique d'entrée à la ruine par rapport à celui correspondant au critère D de l'ASME est assimilé à la marge du dimensionnement. Ce ratio est très important pour ces essais et d'environ de 15 à 25, comme présenté dans le tableau de l'annexe A dans le rapport des essais EPRI, volume II EPRI [1994].

02 Pour les essais de la campagne BARC sur le système de tuyauteries, la contrainte élastique, réputée primaire, associée au signal d'excitation dont le ZPA est de 2.5 (g) est de 4.31Sm, soit plus importante que la valeur admissible selon le critère D de l'ASME de 3Sm qui correspond à un niveau du signal d'entrée du ZPA de 1.75 (g) . La valeur Sm est définie pour chaque matériau constituant le système de tuyauterie. Cette contrainte est calculée à partir du résultat d'une analyse spectrale élastique du modèle éléments finis du système BARC soumis aux signaux d'excitation dans les 3 directions. Dans ce cas-là, le ratio assimilé à la marge du dimensionnement est de $\frac{2.5}{1.75} = 1.5$.

La compréhension de cette marge importante relève d'une analyse en comportement non-linéaire des systèmes de tuyauterie avant sa rupture. Dans la litérature, plusieurs comportements non-linéaires sont utilisés en fonction des résultats attendus. Le comportement élasto-plastique est utilisé afin de représenter le comportement cyclique de l'acier. Et, afin de modéliser la rupture par l'effet rochet, la loi de comportement Chaboche Chaboche [1991] est considérée.

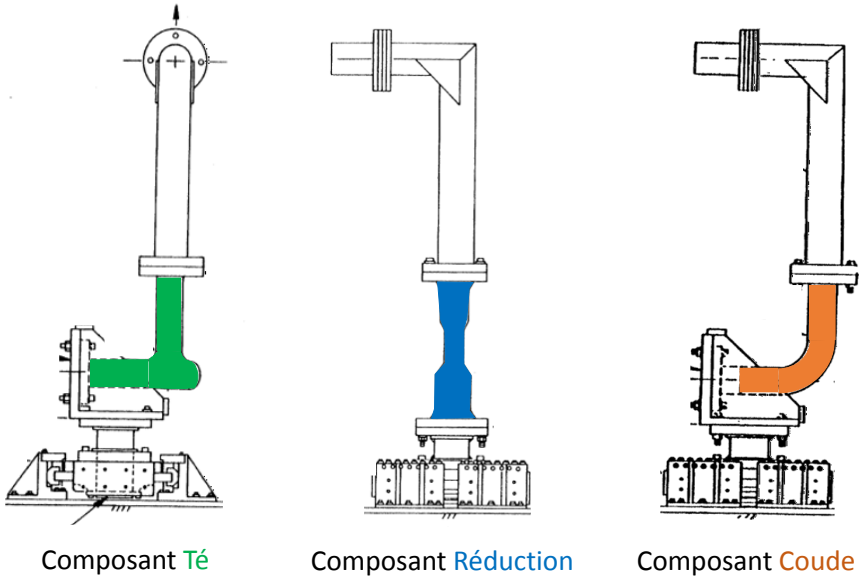


FIGURE 4.5 – Composantes testées pendant la campagne d'essai EPRI

4.2.2 Présentation de l'essai des composants lors de la campagne d'essai EPRI

Les composantes testées sont les coudes, les réductions et les tés présentés sur la figure 4.5 des trois exemples de structure de test. Les composants sont testés pour différentes configurations. Les caractéristiques du matériau obtenues par des tests effectués par le fabricant sont conforme avec celles du standard ASTM. Les deux types de matériau utilisés, l'acier ferritique et l'acier austénitique, sont respectiivement équivalents à SA-234 WPB et SA-403 WP316L issu du standard ASTM.

Chaque composant est fixé à une extrémité à la table vibrante et à l'autre à un bras de levier vertical supportant une masse. L'ensemble peut être considéré comme un système de 1 DDL.

Il est admis que la fréquence "effective" du système décroît quand le niveau d'excitation croît et que le système sera le plus sollicité quand la fréquence "effective" se trouve à la position du pic du SPA du signal d'excitation. Afin de solliciter le mieux le système, la fréquence centrale du signal d'excitation est ajustée de façon à ce qu'elle soit égale à $0.875 f_n$, où f_n est la fréquence naturelle du composante testée.

En terme de résultats d'essais, le rapport de l'EPRI permet de disposer des éléments importants permettant d'établir le comportement linéaire équivalent des composantes de tuyauterie :

01 Augmentation de l'amortissement équivalent $(\xi_{eq} - \xi_0)$, intégré à la 5ème colonne du tableau 4.5, et la déformation cyclique définie par la moitié de l'écart entre la déformation au pic maximal et minimal (exprimée par $\frac{1}{2}(\epsilon_{max} - \epsilon_{min})$) (cf. 3ème colonne du tableau 4.5). Ces résultats disponibles dans le rapport de l'EPRI sous forme

de figures permettent d'établir la relation entre l'augmentation d'amortissement et la ductilité appelée.

02 Pour les tests N°14 et N°38 du composant Té, N°15 du composant Réduction, N° 35 du composant Coude, la fréquence équivalente et l'amortissement équivalent sont déterminés à partir de la fonction de transmissibilité déduite de la fonction de transfert pour différents Runs. Les valeurs sont indiquées dans le tableau 4.4. Il a également été mesuré la fréquence naturelle de la structure, notée $f_{0,m}$. Cela permet d'établir la relation de la chute de fréquence équivalente ($\frac{f_{eq}}{f_0}$)

03 Pour le Run08 du test N°35 et Run06 du test N°38, la valeur de déformation cyclique est disponible.

Il est intéressant de noter qu'il existe également une autre façon de déterminer l'amortissement équivalent dans ce rapport d'EPRI. En effet, cet amortissement équivalent est ajusté pour que le moment calculé soit égal au moment "mesuré". Les deux groupes d'amortissements sont différents. A titre d'exemple, pour le composant Coude du test N° 7 Run08, l'amortissement équivalent déterminé par la fonction de transmissibilité est de 15% et l'amortissement équivalent déterminé par le même moment est de plus de 50%. Pour ce test, l'utilisation de l'amortissement équivalent pour le même moment sous-estime le déplacement de 50% mais estime relativement bien la force et le moment (Extrait du résultat du tableau 8.3 dans le rapport EPRI Vol. II).

4.2.3 Résultat du comportement linéaire équivalent de l'essai EPRI

A partir de la réponse des composantes et de leurs caractéristiques équivalentes (fréquence équivalente et amortissement équivalent), nous comparons avec le résultat obtenu par linéarisation équivalente par fonction de transfert appliquée au système élasto-plastique, soit le comportement avec χ = 1.0.

Pour cette comparaison, il est nécessaire de déterminer les deux valeurs numériques de α_p et $\frac{f_0}{f_c}$ pour les composants considérés. Comme abordé ci-dessus, le signal d'excitation est ajusté de façon à ce que la fréquence centrale soit égale à $0.875 f_n$, soit un ratio $\frac{f_0}{f_c}$ égal à $1/0.875 = 1.14$. D'autre part, la fréquence naturelle (valeur de $f_{0,m}$ dans le tableau 4.4) est mesurée par l'essai de base pour les tests N° 14, 15, 35 et 38. La valeur moyenne de ces ratios est de 1.11. Ainsi, le ratio $\frac{f_0}{f_c}$ est pris égal à 1.11 pour tous les composants considérés. Quant à la valeur α_p, la valeur estimée à partir des valeurs conventionnelles du matériau est environ 0.5% tandis que la courbe moment-déplacement au cours du transitoire montre une valeur de l'ordre de 10%. Nous avons comparé pour les deux valeurs de α_p, 0.5% et 10%, le système canonique, défini par χ=1.0 et $\frac{f_0}{f_c}$=1.11, avec le résultat de l'essai EPRI. Cette comparaison est présentée sur la figure 4.6 et relève les commentaires suivants :

01 La relation $(\xi_{eq} - \xi_0)$ en fonction de μ est très proche de celle pour le comportement élasto-plastique (χ=1.0) pour une valeur de 0.5% d'écrouissage et moindre pour une valeur de 10 % d'écrouissage.

02 Au contraire, la courbe $(\xi_{eq} - \xi_0)$ en fonction de $\frac{f_{eq}}{f_0}$ pour 10 % d'écrouissage se rapproche du résultat expérimental e obtenue pour 0.5 % d'écrouissage.

TABLEAU 4.4 – Valeurs des caractéristiques équivalentes pour les tests N° 14, 15, 35 et 38. f_c, $f_{0,d}$ et $f_{0,m}$ sont respectiivement la fréquence centrale du signal, fréquence initiale du dimensionnement et fréquence initiale mesurée. Les caractéristiques équivalentes (f_{eq} et ξ_{eq}) sont déterminées par fonction de transmissibilité

Composant	Runs	f_c	$f_{0,d}$	$f_{0,m}$	$\frac{f_{0,m}}{f_c}$	$\frac{f_{eq}}{f_0}$	$(\xi_{eq}-\xi_0)$
		Hz	Hz	Hz			
Té 14	R5	6,51	7,20	7,21	1,11	1,00	0,00
	R6	6,51	7,20	7,18	1,10	0,71	0,18
	R6	6,51	7,20	7,20	1,11	0,83	0,13
	R6	6,51	7,20	7,23	1,11	0,90	0,16
Réduction 15	R5	6,69	7,20	7,39	1,10		
	R5	6,69	7,20	7,36	1,10	0,98	0,00
	R6	6,33	7,20	7,36	1,16	0,86	0,07
	R7	6,51	7,20	7,36	1,13	0,86	0,10
	R8	6,51	7,20	7,42	1,14	0,83	0,13
	R9	6,51	7,20	7,38	1,13	0,81	0,15
	R10	6,33	7,20	7,38	1,17	0,81	0,15
Coude 35	R5	4,18	4,40	4,50	1,08	1,00	0,00
	R6	4,54	4,40	4,51	0,99	0,79	0,15
	R6	4,54	4,40	4,48	0,99	0,93	0,12
	R7	3,97	4,40	4,52	1,14	0,83	0,11
	R7	3,97	4,40	4,51	1,14	0,69	0,15
	R8	3,63	4,40	4,54	1,25	0,80	0,12
	R8	3,63	4,40	4,49	1,24	0,94	0,06
Té 38	R5	6,68	7,00	6,68	1,00	1,00	0,00
	R6	6,33	7,00	6,68	1,06	0,87	0,13
				Moy	1,11		

TABLEAU 4.5 – Valeurs des caractéristiques dynamiques pour les tests 3, 35 et 38.

Composant	Runs	$\frac{1}{2}(\epsilon_{max}-\epsilon_{min})$	μ	$(\xi_{eq}-\xi_0)$
Coude 3	5	0,10	0,50	0,00
	6	0,46	2,30	0,04
	7	0,58	2,90	0,05
	8	0,70	3,50	0,07
	9	0,84	4,18	0,07
	10	1,15	5,75	0,13
Coude 35	8	1,14	5,70	0,12
Té 38	6	1,35	6,75	0,13

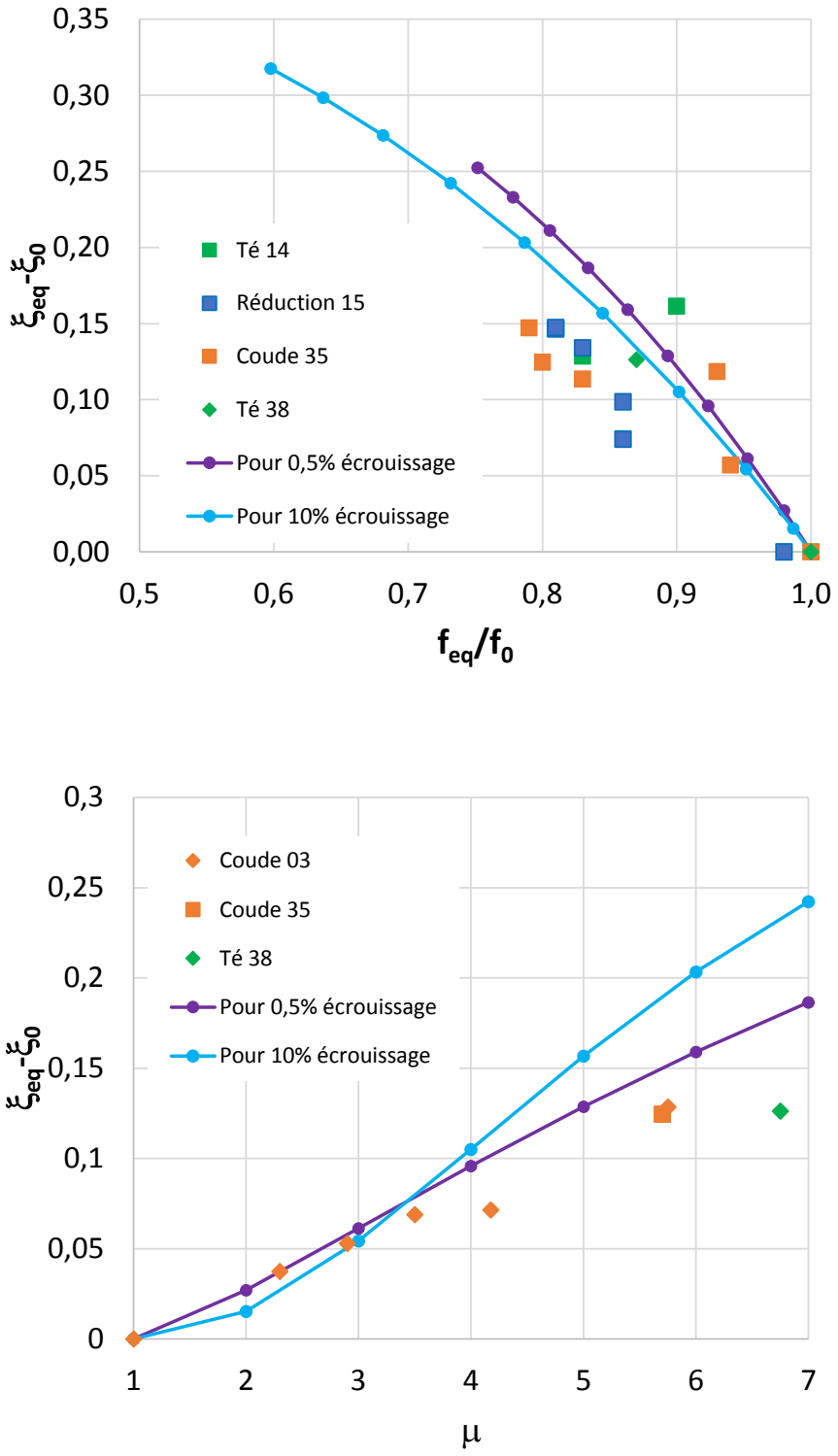


FIGURE 4.6 – Comparaison du comportement linéaire équivalent des composants EPRI avec celui du système canonique dont χ =1.0

03 En général, le résultat des essais EPRI est proche de celui du système canonique avec $\chi = 1.0$. La différence provient du fait que le signal d'entrée pour les essais EPRI est à bande étroite tandis que celui pour le système canonique est à large bande.

4.2.4 Présentation de l'essai BARC

L'essai BARC consiste à examiner le comportement dynamique d'un système entier de tuyauteries en acier de type carbone *SA 333 Grade 6* dont le comportement au chargement cyclique est étudié expérimentalement dans Goyal et al. [2013]. La structure est fixée sur la table vibrante qui permet sous sollicitation dans les trois directions comme présenté sur l'image de gauche de la figure 4.7. Sur l'image du milieu de cette même figure, nous pouvons constater la rupture (présence de jet d'eau) à l'endroit du coude de la branche droite. Cette rupture correspond bien à la direction circonférentielle de la section coudée. Cet endroit est noté A2Y sur l'image de droite qui présente le modèle aux éléments finis de la structure BARC. Les deux masses de 250 kg chacune sont ajoutées et fixées sur la branche horizontale près du Té. Ces deux masses font la moitié de la masse totale de la structure, y compris l'eau, qui vaut environ 1 tonne.

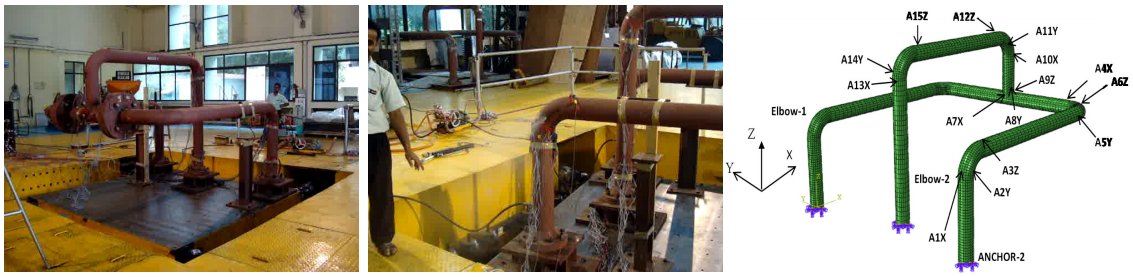


FIGURE 4.7 – Structure du système de tuyauteries BARC : à gauche : la structure BARC sur la table vibrante, au milieu : position de la rupture, à droite : modèle aux éléments finis de la structure BARC

L'essai avec un signal de type sine-sweep à bas niveau permet d'identifier les caractéristiques modales de la structure. Les trois fréquences initiales sont enregistrées dans la deuxième colonne du tableau 4.6.

Le signal d'entrée est défini par trois composantes correspondant à trois directions dont l'amplitude croît de 1 (g) à 2.75 (g). Il faut noter que le niveau de 1.75 (g) correspond approximativement à la valeur de contrainte primaire élastique de 3Sm. A chaque niveau du signal d'entrée, le transitoire est répété 5 fois avant de passer au niveau supérieur. La fréquence centrale déterminée à partir de sa densité spectrale est de 9.1 Hz.

En terme de résultats d'expérience, nous disposons de plusieurs signaux temporels enregistrés par les capteurs de déformation et d'accélération localisés sur l'image de droite de la figure 4.7. Il est néanmoins important de prendre en compte que les signaux de déformation présentent un glissement important autour de 2.0 (g) dû à l'affectation des capteurs. Ainsi, nous avons considéré seulement les 4 premiers niveaux du signal d'entrée qui sont 1.0 ; 1.25 ; 1.5 et 1.75 (g).

TABLEAU 4.6 – Valeurs des caractéristiques modales de la structure BARC. $f_{0,m}$ et $f_{0,c}$ sont respectivement la fréquence initiale mesurée et calculée. L'observation sur le mode 01 est *Trans. OZ* signifiant le mouvement par translation des masses dans la direction verticale OZ

				Masse modale			% masse modale		
Mode	$f_{0,m}$	Observation	$f_{0,c}$	OX	OY	OZ	OX	OY	OZ
	Hz		Hz	kg	kg	kg	kg	kg	kg
1	4,1	Trans. OZ	3,86	17	0	822	2%	0%	73%
2	6,0	Trans. OY	5,87	0	898	0	2%	79%	73%
3	N/A	N/A	12,18	0	10	0	2%	80%	73%
4	18,1	Trans. OX	18,78	959	0	9	86%	80%	74%

La masse modale effective de chaque mode est le résultat d'une analyse modale sur un modèle aux éléments finis de la structure BARC. La comparaison des fréquences des modes permet la validation de ce modèle aux éléments finis.

4.2.5 Résultat du comportement linéaire équivalent de l'essai BARC

A partir des résultats de l'expérience de l'essai BARC, nous pouvons faire les remarques suivantes :

01 La rupture trouvée à la section F-F du coude est causée par la déformation dans la direction circonférentielle due au moment local aux endroits "Crown" de la section du milieu du coude (Voir l'annexe A.12). La mécanique des tuyaux confirme que cette déformation du coude est principalement due au moment fléchissant dans le plan de son axe. En effet, la réponse en verticale de la structure endommage principalement la section F-F en terme de déformation circonférentielle.

02 Les deux masses trouvées près du Té font que le mode prépondérant dans chaque direction représente plus de 73% de la masse totale (Voir le tableau 4.6). En effet, la réponse de chaque direction se représente comme 1 DDL.

03 L'examen du spectre de réponse en différents points de la structure montre que le changement de fréquence est faible pour le premier mode et nul pour les autres modes.

04 La réponse en déformation contient un contenu basses fréquences représentatif de l'effet rochet.

Nous avons étudié la réponse verticale de la structure en admettant les hypothèses suivantes :

01 La décomposition modale reste valable et la contribution de chaque direction est indépendante de celle des autres. Ceci permet de convertir la réponse totale verticale en celle d'oscillateurs simples associés à chaque mode ;

02 Le comportement du matériau est assimilé au comportement élastoplastique. Afin de ne pas prendre en compte la partie basses fréquences dans la déformation due à l'effet rochet-fatigue, nous avons déterminé la ductilité appelée à partir des signaux de déformation des 32 premières secondes, ce qui correspond à une fois la durée du

TABLEAU 4.7 – Position des capteurs de déformation sur les sections coudées F-F et D-D. Crown E-E et Crown F-F signifie successivement l'endroit EST et OUEST dans la section. La direction Nord est indiquée sur l'image droite dans la figure 4.7

Couche	Section	Position	Direction	Gauge
Externe	D-D	Crown E-E	Axiale	60
Externe	D-D	Crown E-E	Circonférentielle	59
Externe	D-D	Crown W-W	Axiale	40
Externe	D-D	Crown W-W	Circonférentielle	39
Externe	F-F	Crown E-E	Axiale	58
Externe	F-F	Crown E-E	Circonférentielle	57
Externe	F-F	Crown W-W	Axiale	54
Externe	F-F	Crown W-W	Circonférentielle	53

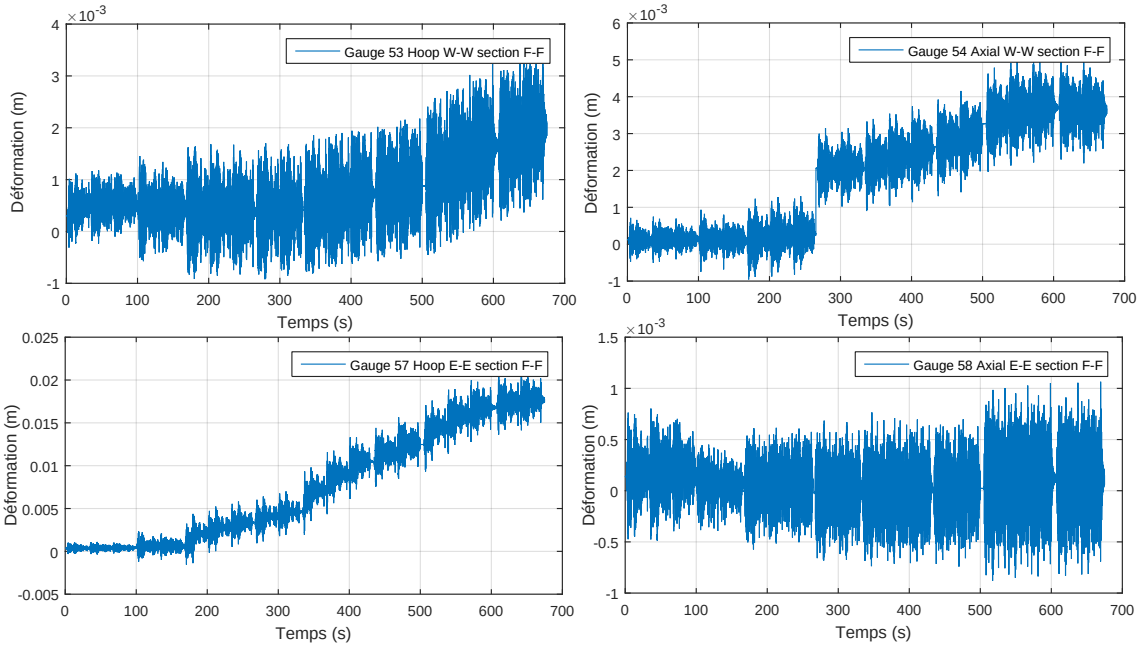


FIGURE 4.8 – Signaux de déformation en différents endroits sur la section F-F de la structure BARC

.

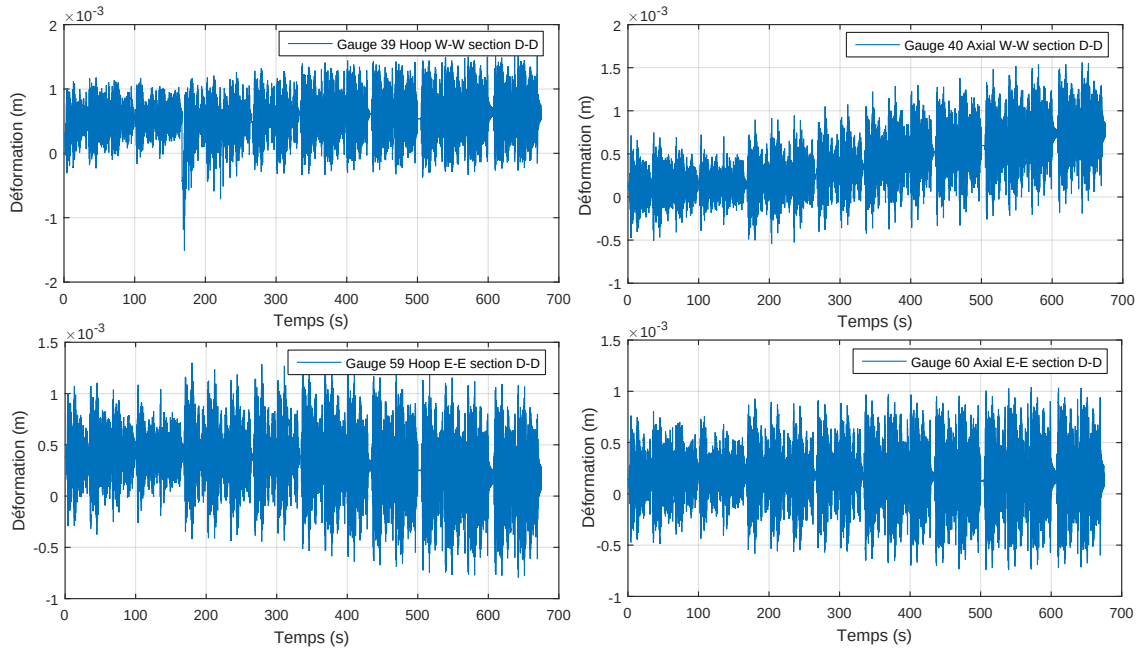


FIGURE 4.9 – Signaux de déformation à différents endroits sur la section D-D de la structure BARC

signal d'entrée, à chaque niveau de ce signal. Par analogie, nous avons déterminé les caractéristiques équivalentes pour le mode 01 pour les signaux d'accélération sur les 32 premières secondes.

Fréquence et amortissement équivalents du premier mode

La réponse totale de l'accélération à l'endroit A6Z est décomposée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{12Z}(t) &= \sum_{k=1}^{3}\Big(\sum_{i=1}^{N}\Gamma_{i,k}\phi_{i,A12Z}\ddot{d}_{i,k}(t)\Big) \\ \ddot{d}_{i,k}(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{d}_{i,k}(t) + \omega_k^2 d_{i,k}(t) &= -\gamma_i(t) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Où :

* $\ddot{u}_{12Z}(t)$ est la réponse totale verticale du point A12Z en accélération ;
* L'indice k indique la direction du chargement, ainsi k=1,2,3 correspond à la direction OX, OY et OZ ;
* L'indice j = 1..N, avec N le nombre de modes retenu, représente le mode considéré ;
* $\Gamma_{i,k}$ est le facteur de participation du i-ème mode dans la direction k et $\phi_{i,A12Z}$ est le déplacement modal du i-ème mode du point A12Z en déplacement vertical.

Parmi les combinaisons des modes et des directions, nous ne retenons que les éléments suivants : $\Gamma_{1,OX}\phi_{1,A12Z}$ = - 0,1435 ; $\Gamma_{4,OX}\phi_{4,A12Z}$ = + 0,1066 ; $\Gamma_{3,OY}\phi_{3,A12Z}$ = + 0,1841 et $\Gamma_{1,OZ}\phi_{1,A12Z}$ = + 0,9866. Les autres éléments sont négligés car leur contribution à la réponse totale est faible ou nulle. Pour donner une idée, nous avons calculé la réponse élastique spectrale de la réponse verticale au point A12Z, le produit $\Gamma_{1,OZ}\phi_{1,A12Z}Sd(f_1,\xi_1)$ = 24 ; $\Gamma_{3,OY}\phi_{3,A12Z}Sd(f_3,\xi_3)$ =7 ; $\Gamma_{1,OX}\phi_{1,A12Z}Sd(f_1,\xi_1)$ = +6 et $\Gamma_{4,OX}\phi_{4,A12Z}Sd(f_4,\xi_4)$ = 3,

TABLEAU 4.8 – Valeurs des résultats BARC

Signal	σ_p selon ASME	Déf. ini.	Déf. max	Déf. cycl.	Ducti-lité appe-lée	Fréq. équi.	Amort. équi.	Chute de fréq.
	$\frac{\sigma_p}{3Sm}$	ϵ_0	max$\lvert\epsilon\rvert$	$\frac{1}{2}(\epsilon_{max}-\epsilon_{min})$	μ	f_{eq}	ξ_{eq}	$\frac{f_{eq}}{f_0}$
		m	m	m		Hz	%	
1,0 (g)	0.58	0,0004	0,0019	0,0015	1,000	4,018	0,6	0,980
1,25(g)	0.72	0,0005	0,0030	0,0021	1,414	4,045	0,8	0,987
1,5 (g)	0.86	0,0025	0,0058	0,0026	1,760	4,015	0,9	0,979
1,75(g)	1.0	0,0067	0,0101	0,0028	1,886	4,014	1,1	0,979

tous les autres produits sont nuls. Ainsi, la fonction de transfert expérimentale du premier mode est calculée par la formule suivante :

$$H_{ex,1}(f_{eq},\xi_{eq})(\omega) = \frac{\ddot{U}_{12Z}(\omega) - \Gamma_{3,OY}\phi_{3,A12Z}\ddot{D}_{3,OY}(\omega) - \Gamma_{4,OZ}\phi_{4,A12Z}\ddot{D}_{4,OZ}(\omega)}{\Gamma_{1,OZ}\phi_{1,A12Z}\Gamma_{OZ}(\omega) + \Gamma_{1,OX}\phi_{1,A12Z}\Gamma_{OX}(\omega)} \tag{4.4}$$

Où : $\ddot{U}_{12Z}(\omega)$, $\ddot{D}_{3,OY}(\omega)$, $\ddot{D}_{4,OZ}(\omega)$, $\Gamma_{OZ}(\omega)$ et $\Gamma_{OX}(\omega)$ sont respectivement les transformée de Fourier de $\ddot{u}_{12Z}(t)$, $\ddot{d}_{3,OY}(t)$, $\ddot{d}_{4,OZ}(t)$, $\gamma_{OZ}(t)$ et $\gamma_{OX}(t)$. En fait, $\ddot{d}_{3,OY}(t)$ ($\ddot{d}_{4,OZ}(t)$) est la réponse en accélération de l'oscillateur du mode 3 (oscillateur 4) soumis au signal d'excitation de la direction OY (direction OZ) soit $\gamma_{OY}(t)$ (soit $\gamma_{OZ}(t)$).

A partir de la même procédure que celle décrite dans le chapitre 03, les fréquence et amortissement équivalents sont déterminés pour les 4 niveaux du chargement sismique et figurant dans le tableau 4.8.

Détermination de la ductilité appelée

La ductilité appelée est déterminée en divisant la déformation circonférentielle cyclique, exprimée par la formule $\frac{1}{2}(\epsilon_{max}-\epsilon_{min})$, par rapport au seuil d'élasticité. La déformation cyclique est la valeur moyenne sur 2 endroits dans la section coudée F-F (déformation présentée sur la figure 4.8 pour les capteurs 53 et 57). Le seuil d'élasticité est déterminé à partir des résultats expérimentaux des essais cycliques du déplacement contrôlé issus du travail de Goyal et al. [2013]. Ce seuil d'élasticité est ainsi de 0.15 % et l'écrouissage de 4% (Voir l'annexe pour le calcul de l'écrouissage A.11). Pour la section D-D, la déformation cyclique reste inférieure à ce seuil, ce qui donne ainsi une ductilité égale à 1.

A partir des résultats dans le tableau 4.8, nous en déduisons que :

01 La ductilité appelée déduite de la déformation cyclique pour l'essai BARC reste faible. La valeur maximale de 1.886 est atteinte pour le signal d'excitation de 1.75 (g) qui correspond à la contrainte élastique de 3Sm.

02 La déformation maximale max $\lvert\epsilon\rvert$ est plus importante que la déformation cyclique du fait du rochet. A titre d'exemple, au niveau du signal 1.75 (g) ; la déformation maximale est égale à 0.0101 (m) tandis que la déformation cyclique est de 0.0028 (m).

03 La chute de fréquence est aussi faible. Pour une valeur de ductilité appelée de 1.886, la ratio $\frac{f_{eq}}{f_0}$ est de 0.979. Cette valeur est un peu plus importante que celle obtenue pour le système canonique du comportement élastoplastique avec α_p=4 % et $\frac{f_0}{f_c} = \frac{4.1}{9.1}$=0.45 qui est de 0.969. Cette différence sera expliquée plus tard dans ce rapport en utilisant le modèle équivalent à la réponse verticale de la structure BARC. De plus, cette valeur de 0.979 est beaucoup plus importante que la valeur sécante qui est de 0.74 pour une ductilité égale à 1.889 et un écrouissage égal à 4%. En tout état de cause, ce ratio est beaucoup plus important que celui correspondant à une rigidité sécante qui est de 0.74.

04 L'amortissement varie entre 0.6% et 1.1%. Ces valeurs peuvent être considérées comme faibles.

En résumé, la chute de fréquence et l'augmentation d'amortissement sont faibles. Ces valeurs correspondent à la plage des valeurs de ductilité appelée faible qui est déterminée à partir de la déformation cyclique. Or, la déformation maximale est importante par rapport à la déformation cyclique à cause de l'effet de rochet.

Modèle équivalent de la réponse verticale du BARC

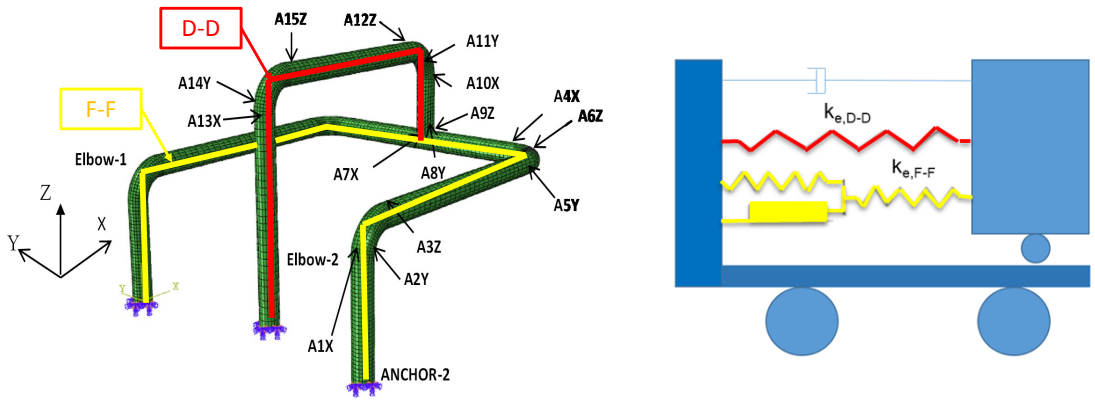


FIGURE 4.10 – Modèles BARC pour la réponse verticale. La figure gauche est le modèle des éléments finis et la figure droite est le modèle équivalent à 1 DDL pour la réponse verticale du BARC.

La rigidité de l'oscillateur représentatif de la réponse verticale est la somme des sections F-F (partie jaune) et D-D (partie rouge). Par le modèle aux éléments finis, nous avons déterminé la rigidité généralisée du premier mode pour la structure BARC, notée $k_{0,\mathrm{F+D}}$ et égale à 4.84E+05 (N/m). Pour déterminer la contribution de la section F-F à cette rigidité généralisée $k_{0,\mathrm{F+D}}$, nous avons libéré l'encastrement de la partie D-D lié à la table vibrante et fait une analyse modale pour ce nouveau modèle. La fréquence alors obtenue pour le premier mode est de 2.78 Hz. Ainsi la rigidité généralisée notée $k_{0,\mathrm{F}}$ est égale à 2.46E+05 (N/m). Dans les deux cas, la masse généralisée est approximativement la même et est égale à 820 kg. A partir du résultat de la déformation enregistrée, nous avons observé que la partie D-D reste élastique tandis que la branche F-F est plastifiée au niveau des sections coudées. De là, nous avons proposé un modèle équivalent (image de droite sur la figure 4.10) composé d'un modèle linéaire (noté par k_{D}) et un modèle élasto-plastique (noté par

k_F). Vis à vis des caractéristiques équivalentes déterminées par fonction de transfert, le modèle élasto-plastique k_F est remplacé par le modèle linéaire équivalent dont la rigidité est notée $k_{eq,F}$. Nous obtenons finalement la chute de fréquence équivalente totale du premier mode de la structure complète BARC :

$$\begin{aligned} \frac{f_{eq}}{f_0} &= \sqrt{\frac{k_{eq,F} + k_{0,D}}{k_{0,F+D}}} \\ k_{0,D} &= k_{0,F+D} - k_{0,F} \\ \sqrt{\frac{k_{eq,F}}{k_{0,F}}} &= \frac{f_{eq,F}}{f_{0,F}} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Finalement, le modèle équivalent pour la réponse verticale de la structure BARC est un assemblage parallèle d'un modèle élastique D-D, représenté par un ressort élastique $k_{0,D}$, avec un modèle linéaire équivalent F-F, représenté par un ressort élastique équivalent $k_{eq,F}(\mu)$ en fonction de μ déterminée dans la section coudée F-F.

Par cette approche, nous pouvons utiliser le résultat du comportement linéaire équivalent du système canonique avec comportement élasto-plastique (chapitre 03) afin de déterminer la chute de fréquence équivalente totale du premier mode de la structure BARC. En effet, pour chaque valeur de ductilité appelée, nous pouvons déterminer la chute de fréquence $\frac{f_{eq,F}}{f_{0,F}}$ de la branche F-F à partir des résultats obtenus pour le système canonique élasto-plastique avec le ratio $\frac{f_0}{f_c}$ et α_p associé.

Afin d'illustrer cette approche, nous avons calculé la chute de fréquence totale pour une ductilité de 1.886 pour le modèle équivalent de l'essai BARC, puis comparé avec la valeur trouvée dans le tableau 4.8. Pour une ductilité de 1.886, le ratio $\frac{f_0}{f_c} = \frac{2.78}{9.1}$=0.305 et α_p=4%, nous obtenons $\frac{f_{eq,F}}{f_0}$=0.9592 (valeur lue sur la courbe 3.7). Nous avons donc $\frac{f_{eq}}{f_0} = 0.979$. Cette valeur correspond bien à la valeur dans le tableau 4.8 obtenue par linéarisation équivalente par fonction de transfert et associée au signal résultant de l'essai.

4.2.6 Conclusions sur le comportement linéaire équivalent des tuyauteries en acier

Les composants (Coude, Té, Réduction) en acier sont examinés sous chargement sismique pendant la campagne d'essai de l'EPRI. Les résultats expérimentaux disponibles dans le rapport en termes de fréquence, d'amortissement effectifs ainsi que de ductilité appelée sont comparés avec le résultat du comportement linéaire équivalent par fonction de transfert au système canonique du comportement élasto-plastique. Cette comparaison montre une cohérence entre deux résultats. Quant à l'augmentation d'amortissement en fonction de la ductilité appelée, elle est moins important pour le système EPRI que la valeur proposée par Chopra and Goel [1999].

A titre d'exemple, pour une ductilité de 2.90, nous avons comparé l'augmentation d'amortissement ($\xi_{eq} - \xi_0$) du résultat d'EPRI avec celles du système canonique avec χ = 1.0 et celles obtenues par la formule de Chopra and Goel [2001] comme présenté dans le tableau 4.9.

TABLEAU 4.9 – Comparaison des caractéristiques équivalentes des systèmes des tuyauteries EPRI pour $\mu = 2.90$

Expérimentation	Numérique		
EPRI	Système canonique avec χ=1.0		Chopra and Goel [2001]
$(\xi_{eq} - \xi_0)$	α_p	$(\xi_{eq} - \xi_0)$	$(\xi_{eq} - \xi_0)$
7.0 %	0.5 %	7.1 %	41.1 %
7.0 %	10 %	7.0 %	31.5 %

La comparaison de ces résultats sur la figure 4.6 montre la sensibilité du choix de la valeur de l'écrouissage du modèle canonique du comportement élasto-plastique pour les valeurs de ductilité appelée supérieures à 4 . L'effet structurel augmente la valeur d'écrouissage par rapport à la valeur définie à partir du matériau de la structure.

Le système de tuyauterie examiné dans l'essai BARC montre également la cohérence avec le résultat obtenu pour le système canonique du comportement élasto-plastique. L'effet rochet augmente la déformation absolue maximale mais ne modifie pas la déformation cyclique qui pilote par ailleurs la ductilité appelée dans le modèle du comportement linéaire équivalent. Malgré, une déformation absolue maximale très importante (environ 10 fois le seuil d'élasticité au niveau de la section coudée F-F), le comportement linéaire équivalent du système (via le premier mode) correspond à la valeur de ductilité de 1.886 associée à la déformation cyclique. Nous avons alors pu observer à nouveau la différence importante de ce résultat du système de tuyauterie avec celui obtenu par la formule de Chopra and Goel [1999]. De plus, l'écrouissage dû à l'hyperstatisme est en général important et en particulier vis à vis de la fréquence équivalente. Il augmente considérablement la valeur de rigidité équivalente lorsqu'une partie de la structure est plastifiée.

En conclusion, le comportement linéaire équivalent du système de tuyauterie en acier est similaire à celui du comportement avec $\chi = 1$.

4.3 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons étudié le comportement linéaire équivalent de structures réelles de type voile en béton armé et systèmes de tuyauterie en acier au travers de différentes campagnes d'essai : SAFE, EPRI et BARC. Ces résultats sont comparés avec ceux pour le système canonique de comportement "Mixte" de différentes valeurs de χ. De manière générale, le comportement linéaire équivalent des voiles en béton armé correspond à celui pour χ=0 et au contraire, celui des systèmes de tuyauterie en acier correspond à celui pour χ=1.

Pour les voiles en béton armé, le comportement endommageant assimilé à celui du béton amène à un seuil de ductilité très faible dû à l'apparition de la première fissure dans le béton. La première fissure dans le béton est définie à partir de la contrainte de rupture en traction. Pendant l'essai, une ductilité appelée de 13 est observée, soit un déplacement en tête de 3 mm. Or, le déplacement en tête du voile associé à cette ductilité appelée est faible par rapport à celui de plastification des aciers (de l'ordre de 5 mm). Ceci signifie que le comportement non-linéaire à faible déformation est principalement piloté

par le comportement du béton. Ce dernier dépend de l'état d'endommagement dans le béton qui est le maximum de la réponse de la structure.

Pour les structures de tuyauteries, même pour une ductilité maximale absolue très importante (de l'ordre de 10 fois le seuil d'élasticité pour le signal 1.75(g)), le comportement linéaire équivalent varie peu. En effet, ce comportement dépend de la déformation cyclique (de l'ordre de 2 pour le signal 1.75 (g)). Ceci signifie que la valeur maximale n'a que peu d'impact sur le comportement linéaire équivalent de la structure de tuyauterie en acier. Cette remarque conduit à dire que l'état d'endommagement dépend de la réponse cyclique plutôt que du maximum de la réponse. L'essai BARC montre un intérêt particulier afin d'avoir un niveau hyperstatique dans la structure. Cet hyperstatisme augmente la rigidité de la structure totale lorsqu'une partie est endommagée.

4.4 Références

A. Ravikiran, P. N. Dubey, M. K. A. and Reddy, G. R. (2015). Experimental and numerical study in ratchting in pressurized stainless steel piping systems under seismic load. Technical report, Reactor Safety Division-BARC. 118

Boiler, A. and Code, P. V. (2010). Section iii, 2013. *Rules for Construction of Nuclear Power Plant Components, Div*, 1. 118

Brun, M., Labbe, P., Bertrand, D., and Courtois, A. (2011). Pseudo-dynamic tests on low-rise shear walls and simplified model based on the structural frequency drift. *Engineering Structures*, 33(3) :796–812. 109

Brun, M., Reynouard, J., and Jezequel, L. (2003). A simple shear wall model taking into account stiffness degradation. *Engineering structures*, 25(1) :1–9. 109, 113

Chaboche, J.-L. (1991). On some modifications of kinematic hardening to improve the description of ratchetting effects. *International journal of plasticity*, 7(7) :661–678. 118

Chopra, A. K. and Goel, R. K. (1999). Capacity-demand-diagram methods based on inelastic design spectrum. *Earthquake spectra*, 15(4) :637–656. 129, 130

Chopra, A. K. and Goel, R. K. (2001). Direct displacement-based design : use of inelastic vs. elastic design spectra. *Earthquake Spectra*, 17(1) :47–64. 117, 129, 130

EPRI, P. (1994). Fitting dynamic reliability program vol. 1-5. Technical report, EPRI TR-102792-V4. 118

Gallitre, E. (2008). *Fissuration des voiles courts en béton armé soumis à des sollicitations sismiques-évaluation des ouvertures de fissures*. PhD thesis, Villeurbanne, INSA. 109

Goyal, S., Gupta, S. K., Sivaprasad, S., Tarafder, S., Bhasin, V., Vaze, K., and Ghosh, A. (2013). Low cycle fatigue and cyclic plasticity behavior of indian phwr/ahwr primary piping material. *Procedia Engineering*, 55 :136–143. 123, 127

Kotronis, P., Mazars, J., and Davenne, L. (2003). The equivalent reinforced concrete model for simulating the behavior of walls under dynamic shear loading. *Engineering fracture mechanics*, 70(7) :1085–1097. 109

Labbé, P., Pegon, P., Molina, J., Gallois, C., and Chauvel, D. (2016). The safe experimental research on the frequency dependence of shear wall seismic design margins. *Journal of Earthquake Engineering*, 20(1) :101–128. 109, 110

Mazars, J. (1984). *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. PhD thesis. 109

Mazars, J., Kotronis, P., and Davenne, L. (2002). A new modelling strategy for the behaviour of shear walls under dynamic loading. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 31(4) :937–954. 109

Pegon, P., Magonette, G., Molina, F., Verzeletti, G., Dyngeland, T., Negro, P., Tirelli, D., and Tognoli, P. (1998). Programme safe : Rapport du test t5. *Technical Note, Joint Research Center*. 113

Chapitre 5

Conclusions et perspectives

« *C'est l'heure exquise et matinale*
Que rougit un soleil soudain.
À travers la brume automnale
Tombent les feuilles du jardin.
...
Une blonde lumière arrose
La nature, et, dans l'air tout rose,
On croirait qu'il neige de l'or. »

François Coppée - Extrait du poème "Matin d'octobre"

Sommaire

5.1 Conclusions **134**

5.2 Perspectives **135**

5.1 Conclusions

Le travail de thèse présenté dans ce manuscrit a permis de mettre en évidence les conclusions suivantes :

01 Les méthodes simplifiées disponibles dans la littérature de calcul de la réponse non-linéaire d'une structure, telle que la procédure statique non-linéaire, s'appuient sur la linéarisation équivalente selon le critère du déplacement maximal et/ou de l'équilibre d'énergie dissipée. Or, le critère du déplacement maximal n'est pas pertinent car pour un système non-linéaire, il peut exister ou ne pas exister des systèmes linéaires équivalents ayant le même déplacement maximal ; et dans le cas où ce système existe, il y a une infinité de solutions. On peut donc dire qu'il s'agit d'un problème "mal posé". Par ailleurs, rechercher un système linéaire équivalent dont l'énergie dissipée soit la même que celle dissipée dans le système non-linéaire n'est pas non plus une idée pertinente car, en situation d'excitation par les appuis, l'énergie dissipée dans un système linéaire est indépendante de sa viscosité. Notons qu'on retrouve une unicité de la solution en associant au critère du déplacement maximal le choix de la rigidité sécante comme rigidité équivalente.

02 La proposition de linéarisation équivalente par fonction de transfert a permis de restituer la partie dynamique de la réponse du système canonique pour un ensemble de situations explorées selon un plan d'expérience portant sur les paramètres suivants : le ratio $\frac{f_0}{f_c}$, l'écrouissage α_p et le modèle de comportement caractérisé par χ. Cette expérimentation numérique a montré la dépendance forte des caractéristiques équivalentes à la position relative de la fréquence initiale de l'oscillateur élasto-plastique par rapport à la fréquence centrale du signal d'entrée. Le paramètre lié à l'écrouissage α_p joue un rôle important quand l'oscillateur non-linéaire est exposé à un signal excitateur suffisamment fort. On observe que, lorsque la ductilité appelée devient grande, le ratio $\frac{f_{eq}}{f_0}$ tend vers la valeur $\sqrt{\alpha_p}$. Quant au paramètre de comportement χ, les caractéristiques équivalentes du comportement avec χ=1.0 (élasto-plastique) sont totalement différentes de celles du comportement avec χ =0.0 (endommageant). La dépendance forte de ces caractéristiques équivalentes $\frac{f_{eq}}{f_0}$ et ξ_{eq} est nette pour le comportement avec χ=1.0 et n'est pas le cas pour le comportement avec χ=0.0. La performance de la linéarisation équivalente proposée est établie par les notes des critères d'Anderson qui ont montré une excellente similarité entre les accélérations des réponses non-linéaire et linéaire équivalente, en particulier concernant le spectre transféré.

03 L'application de l'approche de linéarisation équivalente par fonction de transfert sur des structures réelles (essai SAFE, BARC et EPRI) a montré que les caractéristiques équivalentes des voiles en béton armé sont proches de celles du comportement endommageant et celles des systèmes des tuyauteries restent proche du comportement élasto-plastique. En interprétant ces résultats expérimentaux, nous avons noté que l'endommagement correspond aux valeurs maximales dans la réponse pour le comportement des structures en béton et ce n'est pas le cas pour le comportement des structures en acier. Pour ces dernières, la réponse dynamique dans son ensemble est représentative de la non-linéarité de la structure.

04 Ce travail de thèse a mis en évidence et confirmé qu'il n'existe pas une méthodologie unique de linéarisation équivalente permettant de restituer l'ensemble de la

réponse non-linéaire. Si les ingénieurs s'intéressent à la réponse maximale, il est nécessaire de prendre la linéarisation équivalente par rigidité sécante et déplacement maximal. Lorsque l'intérêt est porté sur la réponse dynamique dans son ensemble et/ou sur le mouvement transféré, la linéarisation équivalente par fonction de transfert doit être retenue.

5.2 Perspectives

Plusieurs perspectives peuvent être envisagées afin de poursuivre ces travaux de recherche. Parmi celles-ci, nous pouvons en détailler quelques-unes :

01 Des milliers de résultats en terme soit de déplacement maximal, soit de ductilité appelée, ont pu être stockés en sortie du plan d'expérience, et cela pour plusieurs paramètres du comportement (rigidité initiale $\frac{f_0}{f_c}$, écrouissage α_p et paramètre "Mixte" χ). Cette base des données numérique fournit aux futurs utilisateurs la possibilité de traiter statistiquement la dépendance de la réponse maximale à chaque paramètre, notamment le ratio $\frac{f_0}{f_c}$ du comportement non-linéaire, et de permettre ainsi de valider plusieurs modèles statistiques théoriques liés à la réponse non-linéaire.

02 La procédure statique non-linéaire développée dans l'ATC 40 requiert deux éléments-clés : (1) conversion de la réponse non-linéaire d'une structure réelle en celle du système à 1 degré de liberté et (2) modification de la courbe de demande (ADRS) pour tenir compte de l'amortissement au point de fonctionnement. Nous ne proposons pas de développer pour l'élément-clé (1). En revanche, nous pouvons envisager de modifier la courbe de demande en fonction de la ductilité appelée. Ceci a été fait dans le cadre de cette thèse pour une structure à un degré de liberté, il faudrait généraliser la démarche pour une structure multimodale.

03 La proposition de linéarisation par fonction de transfert permet d'établir le spectre transféré au travers de la structure non-linéaire sans effectuer le calcul transitoire non-linéaire. Nous pouvons utiliser les caractéristiques de cette linéarisation équivalente afin d'utiliser la méthode de transfert direct qui est valable, à l'état actuel, uniquement pour les structures linéaires.

04 Dans ce travail, nous avons proposé un modèle Mixte qui intègre les deux modèles : élasto-plastique et endommageant. L'interprétation des essais des structures réelles montre que les caractéristiques des systèmes des tuyauteries en acier correspondent à celles du comportement avec χ = 1.0 et au contraire, celle des voiles en béton armé correspondent à celles du comportement avec χ = 0.0. Il conviendrait maintenant d'examiner d'autres structures, comme les portiques en béton armé ou des stuctures mixtes acier-béton, pour vérifier si leur comportement peut s'interpréter à l'aide d'une valeur intermédiaire de χ.

05 Dans ce travail, nous avons considéré des signaux d'entrée à large bande, représentatif du mouvement du sol. Cependant, lors qu'on s'intéresse aux tuyauteries, il faut conserver à l'esprit que dans la plupart des cas, elles sont soumises à des mouvements filtrés par les structures et donc à bande étroite. Il faudrait donc considérer aussi ce type des signaux.

Annexe A

Compléments

Sommaire

A.1 Densité spectrale du signal synthétique II

A.2 Fréquence centrale du signal d'entrée IV

A.3 Caractéristique de la réponse linéaire des oscillateurs soumis au bruit blanc V

A.4 Schéma β-Newmark en accélération moyenne X

A.5 Procédure de validation du programme de calcul de la réponse non-linéaire XIII

A.6 Évaluation des caractéristiques dynamiques dans le domaine temporel XIII

A.6.1 Identification modale par la méthode spatiale XIII

A.7 Analyse modale dans le domaine fréquentiel XVII

A.7.1 Construction de la fonction de transfert à partir des auto-spectres et inter-spectres XVII

A.7.2 Influence de la façon de moyenner les fonctions de transfert ou leurs modules sur l'identification de l'amortissement XVIII

A.7.3 Méthodes temps-fréquence XX

A.8 Valeurs des coefficients de la courbe de chute de fréquence et d'amortissement équivalents par fonction de transfert XXIII

A.9 Distribution des notes des critères d'Anderson XXV

A.10 Proposition de concepts de linéarisation équivalente par la restitution des caractéristiques dynamiques XXVII

A.10.1 Fréquence équivalente par nombre de passage par zéro XXVII

A.10.2 Linéarisation par l'écart-type XXX

A.10.3 Conclusions sur la linéarisation équivalente par la restitution des caractéristiques dynamiques XXX

A.11 Détermination de l'écrouissage du comportement idéalisé bilinéaire pour le matériau d'acier SA 333 Gr. 6 XXXI

A.12 Mécanique des tuyaux coudés soumis à un moment fléchissant dans son plan XXXI

A.13 Références XXXIII

A.1 Densité spectrale du signal synthétique

Nous présentons ici les densités spectrales déterminées à partir des signaux synthétiques utilisés dans le cadre de ce travail de thèse.

Nous utilisons par la densité spectrale constante et tronquée G_0 sur la plage de fréquence de 0 à 100 Hz. Cette valeur G_0 est normalisée de telle sorte que $(\omega_{max} - \omega_{min})G_0$ soit égale à 1, soit $G_0 = 1.5910^{-3}$. A partir de cette densité spectrale, nous générons les 1000 bruits blancs $g_j(t)$ avec $j = 1...1000$. Nous avons tracé la DSP d'un bruit blanc $g(t)$ sur la figure A.7.

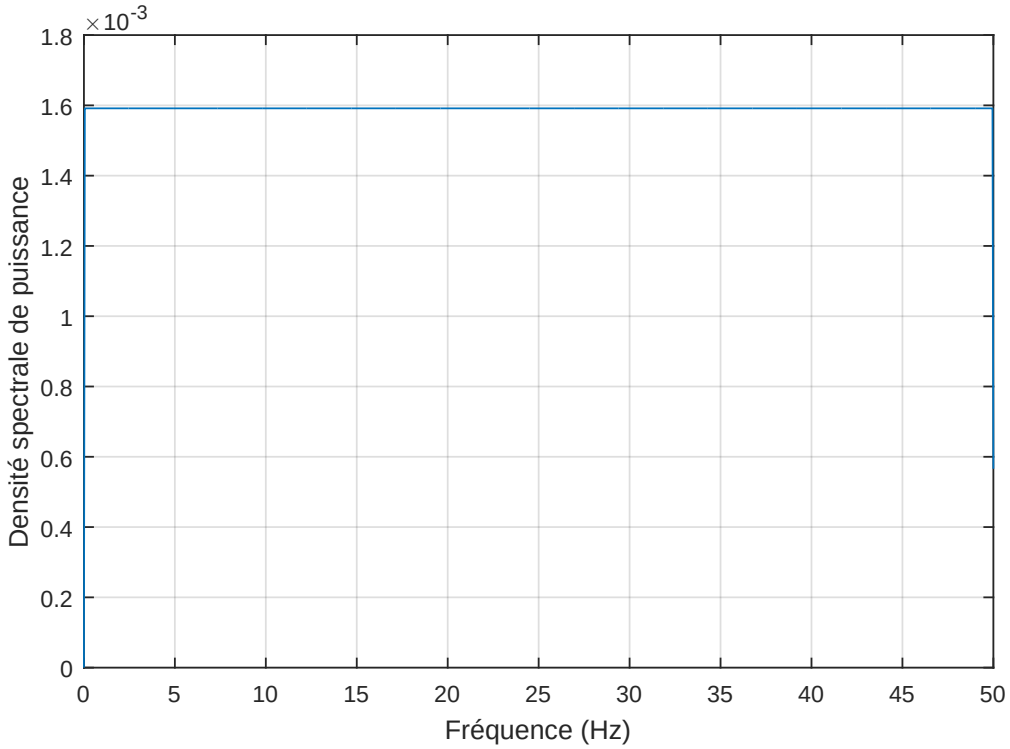


FIGURE A.1 – Densité spectrale constante et tronquée G_0 calculée à partir d'un bruit blanc $g(t)$

Les 1000 signaux temporels $X_j(t)$, avec $j = 1...1000$, sont générés à partir de la densité spectrale $G(\omega)$, qui est la densité spectrale Clough-Penzien avec filtre passe-bas, décrite dans le chapitre 01, section 1.2.2. Cette densité spectrale est normalisée de telle sorte que $\int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} G(\omega)d\omega$ soit égale à 1. Elle est présentée sur la figure A.2.

Les signaux synthétiques $\gamma_j(t)$ sont quasi-stationnaires. Nous avons tracé la DSP d'un signal $\gamma(t)$ sur la figure A.3.

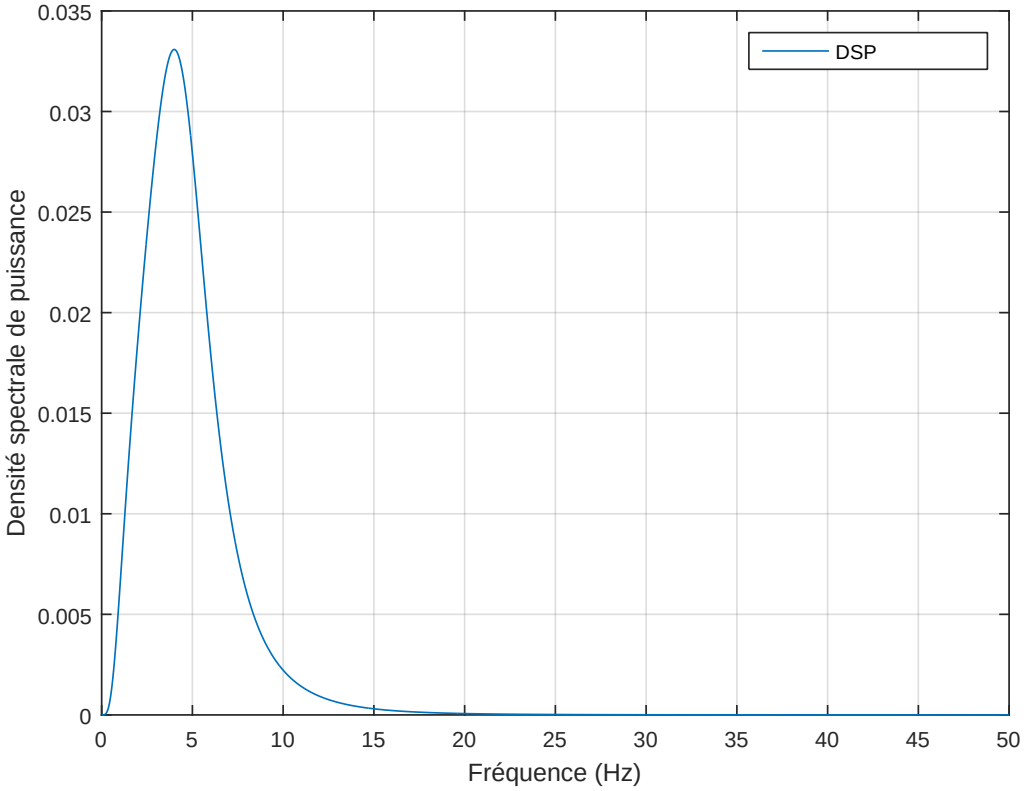


FIGURE A.2 – Densité spectrale calculée à partir d'un signal X(t)

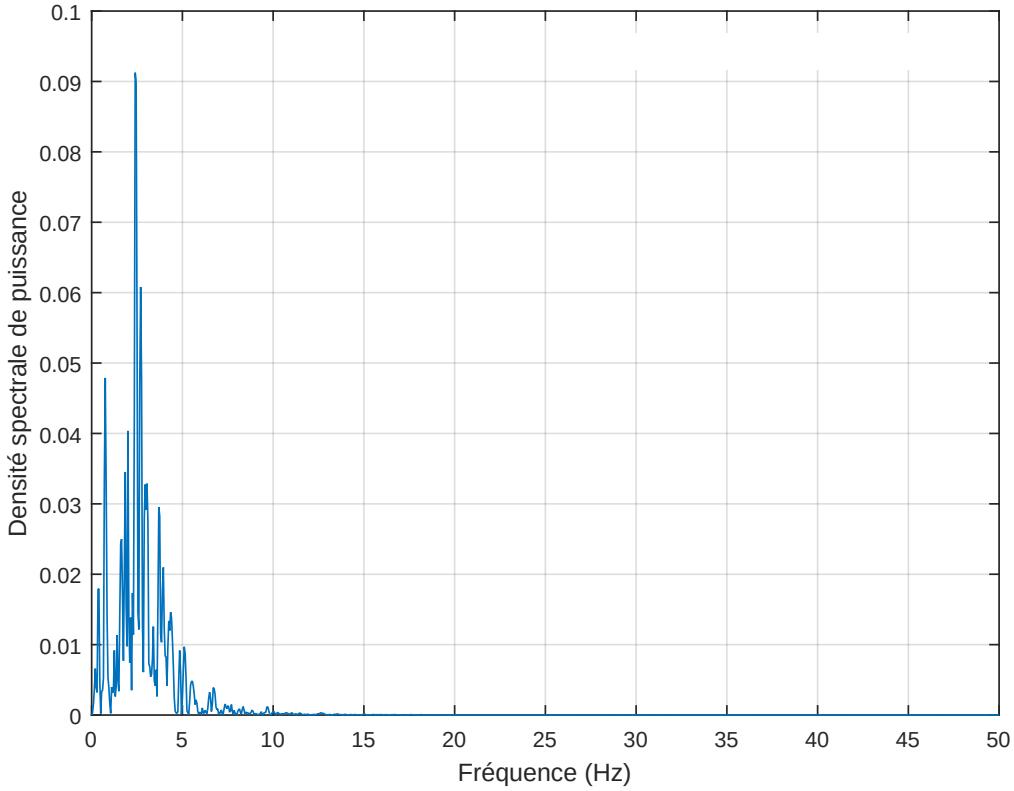


FIGURE A.3 – Densité spectrale déterminée pour un signal synthétique $\gamma(t)$

A.2 Fréquence centrale du signal d'entrée

La fréquence centrale est déterminée à partir des moments spectraux par la formule suivante Zentner et al. [2014] :

$$
\begin{aligned}
f_c &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}} \\
\lambda_2 &= \int_0^\infty \omega^2 G_y(\omega) d\omega \\
\lambda_0 &= \int_0^\infty G_y(\omega) d\omega
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

Où, $G_y(\omega)$ est la DSP du signal temporel.

Les 1000 signaux temporels $X_j(t)$, avec $j = 1...1000$, ont la même densité spectrale DSP présentée sur la figure A.2. De là, la fréquence centrale f_c pour les 1000 signaux $X_j(t)$ reste la même et est égale à 5.35 Hz.

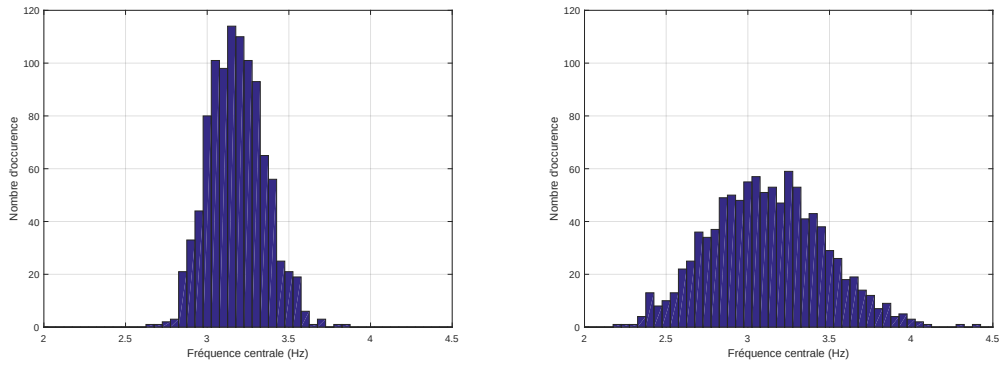
Le signal d'entrée $\gamma(t)$ est le produit d'un processus stationnaire $X(t)$ multiplié par une courbe enveloppe temporelle $q(t)$. Nous multiplions ces 1000 signaux $X_j(t)$ par une seule courbe enveloppe $q(t)$ pour obtenir les 1000 signaux $\gamma(t)$. Les signaux $\gamma_j(t)$ ne sont plus stationnaires mais peuvent être considérés quasi-stationnaires.

Nous disposons de deux méthodes pour déterminer la fréquence centrale pour les signaux $\gamma_j(t)$:

01 Par moments spectraux à partir de la DSP : En admettant que la notion de la DSP est valable pour ces signaux, dont un exemple est présenté sur la figure A.3, nous déterminons les fréquences centrales $f_{c,j}$ pour les 1000 signaux $\gamma_j(t)$. La distribution des 1000 valeurs $f_{c,j}$, avec $j = 1...1000$, est présentée sous un format d'histogramme sur la figure A.4a.

02 Par nombre de passages par zéro : Une autre manière de déterminer la fréquence centrale est de déterminer le nombre de passages par zéro du signal. Pour ces 1000 signaux $\gamma_j(t)$, les 1000 fréquences dites "centrales" sont déterminées et présentées sur la figure A.4b.

A partir de ces deux histogrammes présentés sur la figure A.4, nous constatons que la valeur moyenne est similaire et que la manière de compter les passages par zéro génère plus de variabilité que la valeur définie à partir de la DSP. La valeur de la fréquence centrale f_c déterminée par la DSP est alors retenue.



(a) Par moment spectral (b) Par nombre des passages par zéros

FIGURE A.4 – Histogramme des fréquences centrales des signaux synthétiques $\gamma_j(t)$

A.3 Caractéristique de la réponse linéaire des oscillateurs soumis au bruit blanc

Nous avons présenté les caractéristiques de la réponse linéaire des oscillateurs soumis au bruit blanc $g(t)$ à partir d'une densité spectrale constante et tronquée G_0. Dans ce cas, les variances des réponses en déplacement σ_u^2 et en vitesse $\sigma_{\dot{u}}^2$ sont théoriquement déterminées par les formules A.2.

$$\begin{aligned}\sigma_u^2 &= \int_0^\infty G_u(\omega)d\omega \\ &= \frac{\pi G_0}{4\xi_e\omega_e^3} \\ \sigma_{\dot{u}}^2 &= \int_0^\infty \omega^2 G_u(\omega)d\omega \\ &= \frac{\pi G_0}{4\xi_e\omega_e}\end{aligned} \tag{A.2}$$

Par ailleurs, la variance de la réponse peut être estimée expérimentalement pour chaque instant t à partir des 1000 réponses en déplacement $u_j(t)$ et en vitesse $\dot{u}_j(t)$ de l'oscillateur soumis aux 1000 bruits blancs $g_j(t)$ par la formule A.3.

$$\begin{aligned}\sigma_{u_e}^2(t) &= \frac{\sum_{j=1}^{1000} u_j^2(t)}{1000} \\ \sigma_{\dot{u}_e}^2(t) &= \frac{\sum_{j=1}^{1000} \dot{u}_j^2(t)}{1000}\end{aligned} \tag{A.3}$$

Soit un oscillateur linéaire caractérisé par f_e et ξ_e soumis à un bruit blanc $g(t)$, nous avons alors :

$$\ddot{u}(t) + 2\xi_e\omega_e\dot{u}(t) + \omega_e^2 u(t) = -g(t) \tag{A.4}$$

Notons $u(\omega)$ et $g(\omega)$ la transformée discrète de Fourier de la réponse en déplacement $u(t)$ et du signal de type bruit blanc d'entrée $g(t)$. Nous pouvons écrire la réponse en déplacement par la fonction de transfert en déplacement comme suit :

TABLEAU A.1 – Caractéristiques de la réponse de l'oscillateur linéaire de f_e = 3Hz et ξ_e =5% soumis aux 1000 bruits blancs par la formule A.2

Fréquence	Amortissement	$\sigma^2_{u_e}$	$\sigma^2_{\dot{u}_e}$
Hz	%	NA	NA
3	5	3.79e-6	1.325e-3

$$\begin{aligned} u(\omega) &= \mathrm{H}_{\mathrm{D}th}(\omega)\, g(\omega) \\ \mathrm{H}_{\mathrm{D}th}(\omega) &= \frac{1}{\omega^2 - 2i\xi_e\omega_e\omega - \omega_e^2} \end{aligned} \tag{A.5}$$

Où : $\mathrm{H}_{\mathrm{D}th}(\omega)$ est la fonction de transfert du déplacement.

En mettant sous forme complexe, la densité spectrale de la réponse en déplacement s'écrit de la manière suivante :

$$\mathrm{G}_u(\omega) = \mathrm{G}_0 \mathrm{H}_{\mathrm{D}th}(\omega)\overline{\mathrm{H}_{\mathrm{D}th}}(\omega) \tag{A.6}$$

Les valeurs de variances des réponses en déplacement σ^2_u et en vitesse $\sigma^2_{\dot{u}}$ sont comparées avec les valeurs moyennes au fil du temps des $\sigma^2_u(t)$ et $\sigma^2_{\dot{u}}(t)$. Cette comparaison permet de valider le programme de calcul de la réponse linéaire temporelle.

Afin de déterminer la réponse temporelle de l'oscillateur linéaire de caractéristique f_e et ξ_e, nous avons deux façons de procéder :

01 En utilisant le schéma β-Newmark, la réponse temporelle est déterminée par l'intégration directe de l'équation A.4.

02 En utilisant la fonction de transfert, le contenu fréquentiel de la réponse en déplacement est déterminée par l'équation A.5 et transformée dans le domaine temporel par la transformée inverse discrète de Fourier.

Application numérique pour l'oscillateur de $\{f_e = 3\mathrm{H}z; \xi_e = 5\%\}$

Les valeurs "théoriques" de la variance des réponses linéaires en déplacement et en vitesse sont déterminées par la formule A.2 et présentées dans le tableau A.1. Ensuite, nous déterminons expérimentalement les variances pour chaque instant t par la formule A.3 et les présentons dans les figures A.5 et A.6.

D'après les figures A.5 et A.6, nous observons une valeur numérique à 3.7910^{-6} pour la variance en déplacement et 1.3310^{-3} pour la variance en vitesse (valeur en moyenne au fil du temps). Ces valeurs correspondent à celles obtenues par les formules A.2.

De plus, nous avons observé que les variances des réponses en déplacement et en vitesse déterminées par le schéma β-Newmark démarrent par zéro, ce qui correspond à la condition initiale de l'oscillateur. Ici, le départ au repos impose que les réponses en déplacement et en vitesse de l'oscillateur sont initialement nulles. Afin de prendre en compte

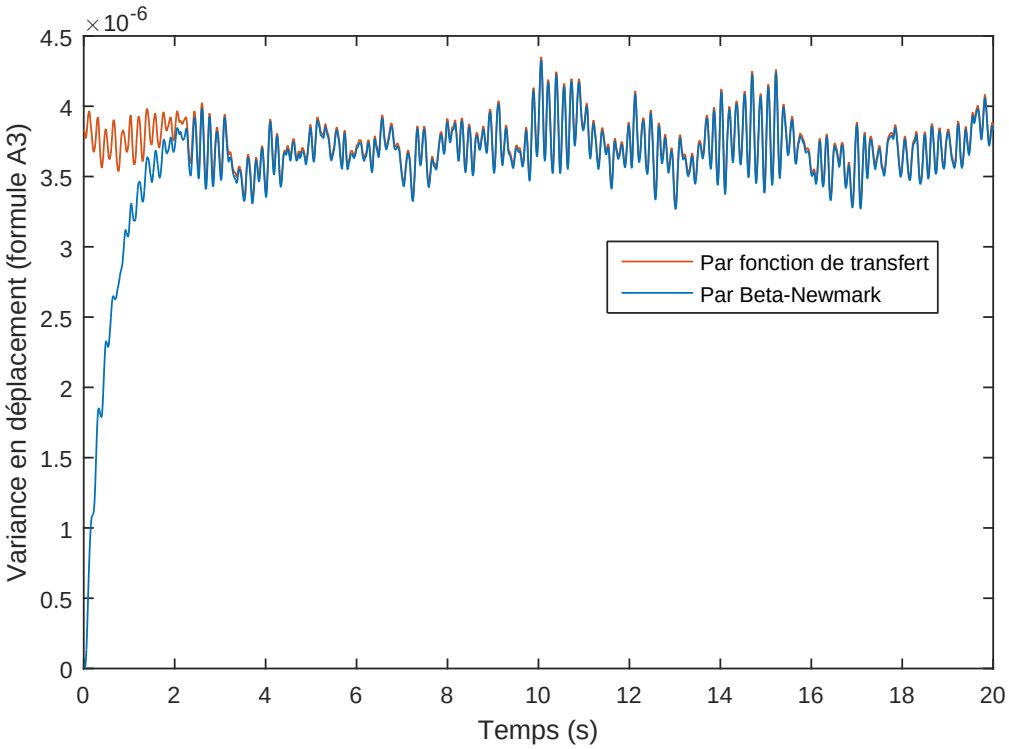


FIGURE A.5 – Variance de la réponse élastique en déplacement de l'oscillateur linéaire de f_e = 3Hz et ξ_e =5% soumis aux 1000 bruits blancs, déterminée par la formule A.3 : réponse en déplacement obtenue par la fonction de transfert en orange et celle obtenue par le schéma β-Newmark en bleu.

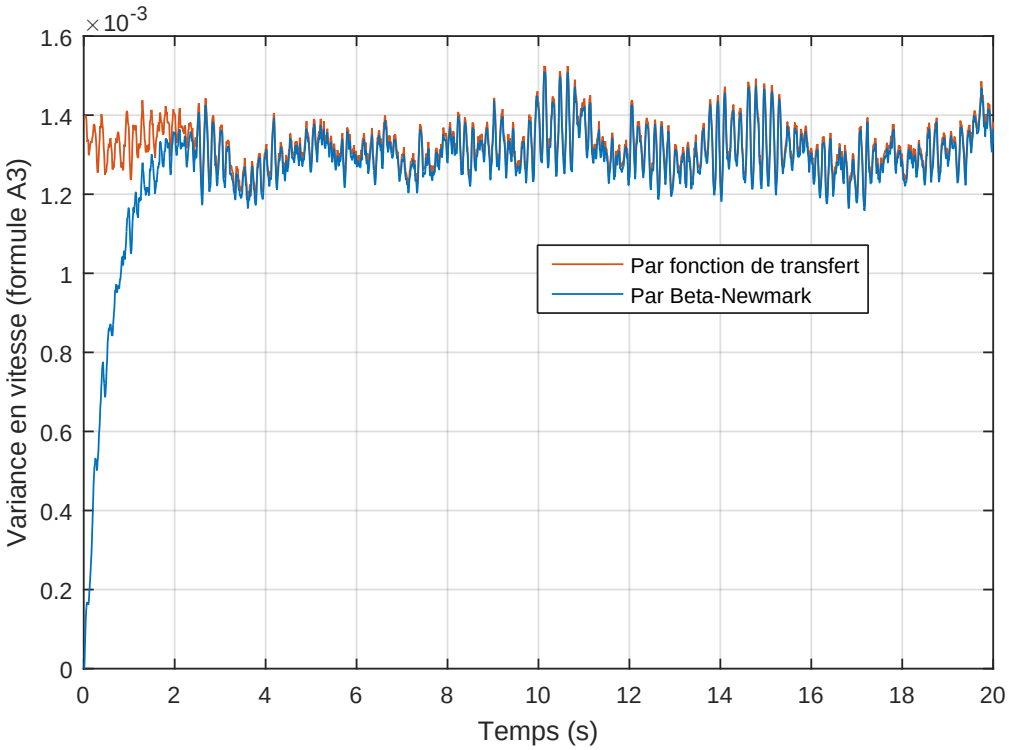


FIGURE A.6 – Variance de la réponse en vitesse de l'oscillateur linéaire de f_e = 3Hz et ξ_e =5% soumis aux 1000 bruits blancs, déterminée par la formule A.3 : réponse en vitesse obtenue par la fonction de transfert en orange et celle obtenue par le schéma β-Newmark en bleu.

TABLEAU A.2 – Valeur de la variance de la réponse en vitesse de l'oscillateur linéaire soumis au bruit blanc

Fréquence	Amortissement	$\frac{\pi G_0}{4\xi_e\omega_e}$	$\int_0^{2\pi 50}\omega^2 G_u(\omega)d\omega$
Hz	%	NA	NA
1	5	3.975e-3	3.958e-3
1	50	3.975e-4	3.928e-4
10	5	3.975e-4	3.927e-4
10	50	3.975e-5	3.465e-5
25	5	1.590e-4	1.529e-4
25	50	1.590e-5	1.044e-5
36	5	1.104e-4	1.021e-4
36	50	1.104e-5	0.524e-5

ces conditions initiales dans la formule A.2, la valeur ξ_e est prise comme étant sa valeur équivalente temporelle :

$$\xi_t = \xi_e(1 - e^{-2\xi_e\omega_e t}) \tag{A.7}$$

En conclusion, cette démonstration permet la validation du programme de calcul de la réponse temporelle. Afin de prendre en compte les conditions initiales, le programme avec le schéma β-Newmark est retenu. En général, les variances des réponses de l'oscillateur linéaire soumis au bruit blanc déterminées par expérience à partir des 1000 signaux $g_j(t)$ correspondent à leurs valeurs dites "théoriques".

Effet de troncature dans le domaine fréquentiel au travers de la densité spectrale de la réponse en vitesse

La valeur de la variance des réponses en vitesse déterminée par la formule A.2 requiert une intégration sur la plage de fréquence de 0 à ∞. Numériquement, lorsque la variance est estimée à partir des signaux temporels, la plage de fréquence sur laquelle se calcule la densité spectrale est limitée par la fréquence de Nyquist. La valeur des variances calculées à partir des réponses temporelles tend à être inférieure à celles déterminées par la formule "théorique" (formule A.2). Dans ce rapport, pour un pas de temps de 0.01 secondes, la valeur de la fréquence maximale est de 0.5*1/0.01 = 50 Hz. Il est alors nécessaire de comparer la valeur de $\int_0^{2\pi 50}\omega^2 G_u(\omega)d\omega$ avec la valeur $\frac{\pi G_0}{4\xi_e\omega_e}$ pour plusieurs oscillateurs linéaires (exemples de la démonstration de l'indépendance de l'énergie dissipée visqueuse dans le chapitre 02). Les valeurs sont présentées dans le tableau A.2. La densité spectrale de la réponse en vitesse n'est pas déterminée par fonction de transfert mais estimée à partir de la réponse temporelle obtenue par le schéma β-Newmark.

Nous constatons dans le tableau A.2 que la valeur déterminée par la formule $\frac{\pi G_0}{4\xi_e\omega_e}$ est proche de celle définie par $\int_0^{2\pi 50}\omega^2 G_u(\omega)d\omega$ pour les oscillateurs faiblement amortis et à basse fréquence. L'écart entre quantités $\frac{\pi G_0}{4\xi_e\omega_e}$ et $\int_0^{2\pi 50}\omega^2 G_u(\omega)d\omega$ est dû à la différence des plages de fréquence sur laquelle se calcule l'intégral de la densité spectrale de la réponse en vitesse. La valeur théorique, trouvée dans la colonne 03, est déterminée sur la plage de 0 à ∞ et la valeur numérique, trouvée dans la colonne 04, est déterminée sur la plage de 0 à 50 Hz. Cette différence est présentée sur la figure A.7. Cette différence est donc la raison pour laquelle l'énergie dissipée par la viscosité dans le chapitre 01 est différente

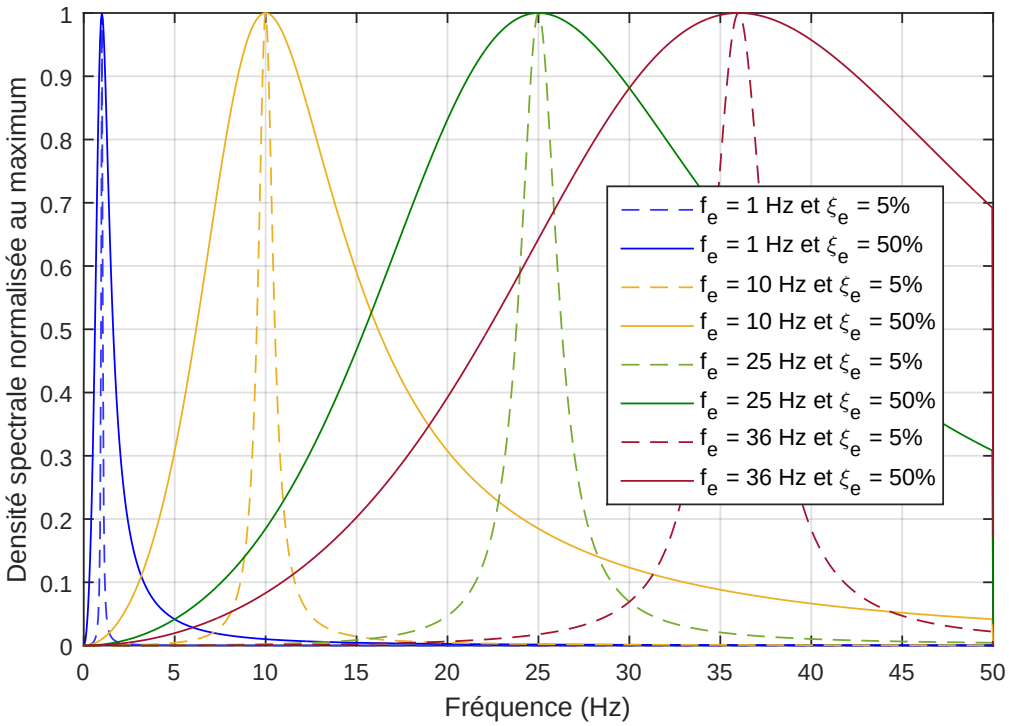


FIGURE A.7 – Densité spectrale de la réponse en vitesse de l'oscillateur linéaire au bruit blanc

de la valeur 0.1 pour une durée de 20 secondes.

A.4 Schéma β-Newmark en accélération moyenne

Afin de déterminer la réponse des systèmes canoniques non-linéaires, nous utilisons dans le cadre de ce travail le schéma de β-Newmark en accélération moyenne avec β= 1/4 et γ=1/2. Soit un oscillateur à l'instant n, nous pouvons alors écrire l'équation de la dynamique pour ce système canonique de la façon suivante (Ref. équation A.8) :

$$\ddot{u}_n + 2\xi_0\omega_0\dot{u}_n + \frac{F_n}{m} = -\gamma_n \tag{A.8}$$

Où : la force de rappel F_n dépend des variables d'état du comportement considéré et qui sont, par exemple, soit le déplacement total u_n et déplacement plastique u_p pour le comportement élasto-plastique ; soit la variable interne Y et la variable d'endommagement D pour le comportement endommageant. Nous présentons ici l'algorithme de la réponse non-linéaire en utilisant le schéma β-Newmark et ses problèmes associés pour le cas d'élasto-plascitité qui sont également valable pour un comportement endommageant. Nous avons donc la force de rappel $F_n = F(u_n, u_{p,n})$.

Le schéma β-Newmark s'écrit alors Newmark [1959] :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \Delta t\,\dot{u}_n + \Delta t^2\Big((\frac{1}{2}-\beta)\,\ddot{u}_n + \beta\,\ddot{u}_{n+1}\Big) \\ \dot{u}_{n+1} &= \dot{u}_n + \Delta t\Big((1-\gamma)\,\ddot{u}_n + \gamma\,\ddot{u}_{n+1}\Big) \end{aligned} \tag{A.9}$$

A l'aide du schéma de β-Newmark, nous écrivons l'équation A.8 pour le comportement élasto-plastique comme suit (en application numérique de β = 1/4 et γ =1/2) :

$$\begin{aligned} \Big(\frac{4}{(\Delta t)^2} + 2\xi_0\omega_0\frac{2}{\Delta t}\Big)u_{n+1} + F(u_{n+1}, u_{p,n+1}) &= -\gamma_{n+1} + 2\xi_0\omega_0\Big(\frac{2}{\Delta t}u_n + \dot{u}_n\Big) \\ &\quad + \Big(\frac{4}{(\Delta t)^2}u_n + \frac{4}{\Delta}\dot{u}_n + \ddot{u}_n\Big) \\ \dot{u}_{p,n+1} &= \dot{u}_{n+1}\frac{k^*}{k^* + k_e} \quad \text{ou} \quad 0 \end{aligned} \tag{A.10}$$

Cette équation A.10 est résolue à l'aide des algorithmes de résolution non-linéaire, très souvent en suivant la procédure de Newton-Raphson. Posons la résolution de cette équation $f(x) = 0$, l'algorithme de Newton-Raphson consiste à construire une suite (x_i) telle que la valeur x_{i+1} est l'intersection de la tangente de la courbe f au point $\{x_i, f(x_i)\}$ avec l'horizontale jusqu'à la convergence dont la condition est souvent définie par l'erreur relative $(\frac{x_{i+1}-x_i}{x_i})$ ou absolue $(x_{i+1} - x_i)$ des valeurs de solution entre deux itérations. De cela, la méthode directe augmente le temps de calcul du fait des itérations et également le problème lié à la convergence (taille de maillage, nombre d'itérations, précision, etc).

Par contre, nous pouvons utiliser le résultat de la procédure itérative de Newton en notant $F(u_{n+1}, u_{p,n+1}) = F(u_n, u_{p,n}) + k(u_n, u_{p,n})\Delta u_n$ afin d'établir l'expression explicite du déplacement à l'instant n+1. Nous avons également :

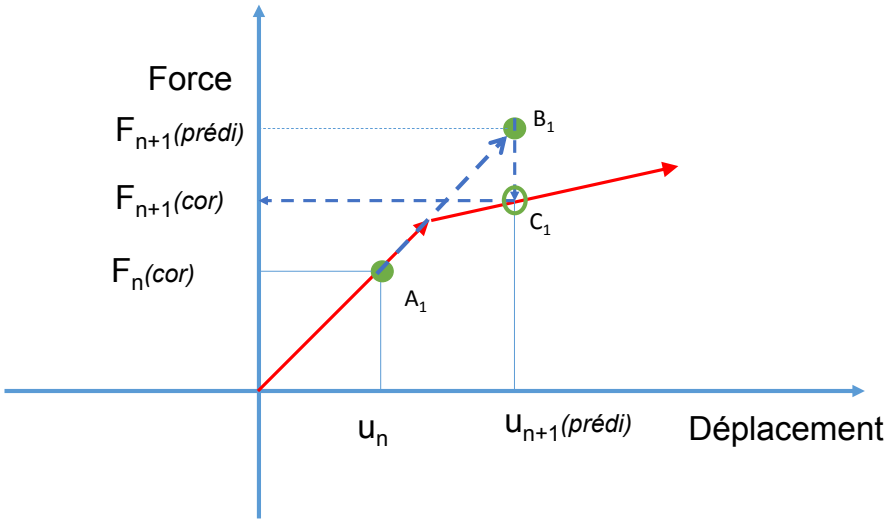
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \Delta u_n \\ u_{p,n+1} &= u_{p,n} + \Delta u_{p,n} \\ \Delta u_{p,n} &= \Delta u_n \frac{k^*}{k^* + k_e} \quad \text{ou} \quad 0 \end{aligned} \tag{A.11}$$

Nous avons maintenant un système linéarisé permettant de déterminer $\Delta u_{p,n}$ et Δu_n :

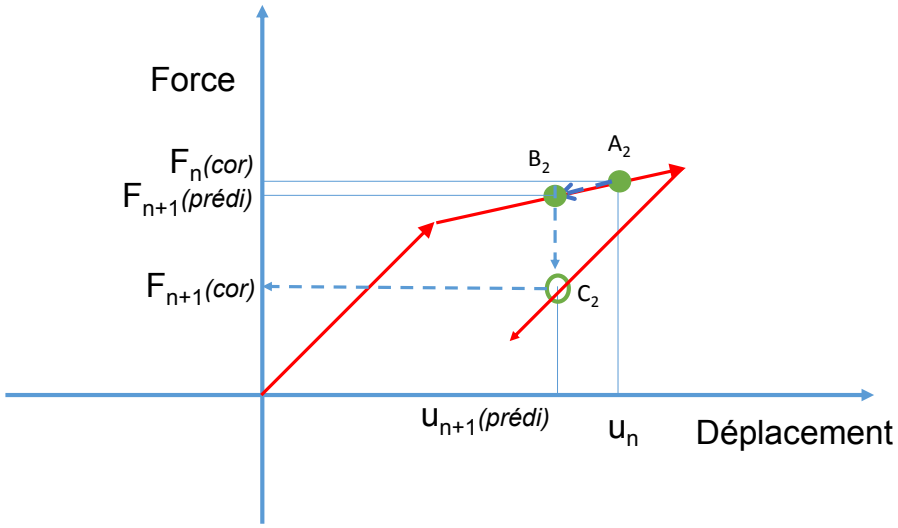
$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{(\Delta t)^2} + 2\xi_0\omega_0\frac{2}{\Delta t} + k(u_n, u_{p,n})\right)\Delta u_n &= -\gamma_{n+1} - \mathrm{F}(u_n, u_{p,n}) + 2\xi_0\omega_0(\dot{u}_n) \\ &\quad + \left(\frac{4}{\Delta t}\dot{u}_n + \ddot{u}_n\right) \\ \Delta u_{p,n} &= \Delta u_n \frac{k^*}{k^* + k_e} \quad \text{ou} \quad 0 \end{aligned} \tag{A.12}$$

De manière générale, la linéarisation du système A.10 se confronte à une erreur en gardant la valeur des déplacements $(u_{n+1}, u_{p,n+1})$ déduite de l'équation A.12, car la valeur de la force $\mathrm{F}(u_{n+1}, u_{p,n+1})$ n'est pas égale à $\mathrm{F}(u_n, u_{p,n}) + k(u_n, u_{p,n})\Delta u_n$ en certains instants. Il faut à ce stade une correcteur qui permet de corriger la valeur de force $\mathrm{F}(u_{n+1}, u_{p,n+1})$ en fonction des variables d'état $(u_{n+1}, u_{p,n+1})$ compatibles avec la loi de comportement. Nous avons illustré cette observation pour deux exemples au moment où l'erreur peut se commettre.

Selon la figure A.8, soit à l'instant n (points A_1 et A_2), le prédicteur prévoit le point de l'instant (n+1) (points B_1 et B_2). Vu que la force prédite n'est pas correcte, le correcteur va corriger ce point de prédiction au point corrigé en gardant toujours le déplacement prédictif (points C_1 et C_2). Nous pouvons observer une erreur en terme de déplacement et force. Ces erreurs peuvent être corrigées en diminuant encore le pas de temps. Nous avons vu qu'avec notre système canonique, il suffit de maintenir un pas de temps maximal $\Delta t = \frac{Te}{20}$ afin d'assurer la bonne précision du résultat.



(a) Illustration de la solution du déplacement au passage élastique - plastique



(b) Illustration de la solution du déplacement au passage plastique - élastique

FIGURE A.8 – Illustration de l'erreur commise en déplacement pour un comportement élastoplastique

A.5 Procédure de validation du programme de calcul de la réponse non-linéaire

En vue de la validation du programme de détermination de la réponse transitoire du modèle "Mixte", nous avons testé le programme Matlab sur plusieurs cas-tests simples en suivant cette démarche :

01. Choix d'une réponse en déplacement x(t) ;
02. Détermination de la vitesse et de l'accélération à partir du déplacement x(t) à l'aide du schéma de type β-Newmark avec les conditions initiales ;
03. Choix d'un comportement non-linéaire et calcul de la force de rappel f(t) ;
04. Détermination de l'accélération à la base de l'oscillateur par la relation définie dans l'équation A.8 ;
05. Détermination de la réponse x*(t) de l'oscillateur soumis à l'accélération de l'étape 04 en utilisant le programme Matlab ;
06. Comparaison des réponses x(t) et x*(t). Validation du programme si les deux quantités sont égales.

A.6 Évaluation des caractéristiques dynamiques dans le domaine temporel

Lorsque la structure est plastifiée et endommagée, les caractéristiques dynamiques évoluent. Afin de qualifier ce changement au cours du temps, il est possibile d'utiliser la méthode d'identification dans le domaine temporel telle que la méthode spatiale décrite dans Molina and Pegon [1998].

A.6.1 Identification modale par la méthode spatiale

Cette méthode présente l'avantage de saisir l'évolution de la fréquence et de l'amortissement au cours du temps. En utilisant comme données d'entrée la force de rappel, le déplacement et la vitesse, qui sont disponibles pour un essai pseudo-dynamique, cette méthode a été appliquée à un bâtiment en béton armé Molina et al. [1999] et aux voiles en cisaillement de l'essai SAFE Molina et al. [2000]. En effet, la rigidité et l'amortissement de la structure sont déterminés par la formule suivante :

$$\begin{bmatrix} u^{\mathrm{T}}(n) & v^{\mathrm{T}}(n) & \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{K}^{\mathrm{T}} \\ \mathrm{C}^{\mathrm{T}} \\ o^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = r^{\mathrm{T}}(n) \tag{A.13}$$

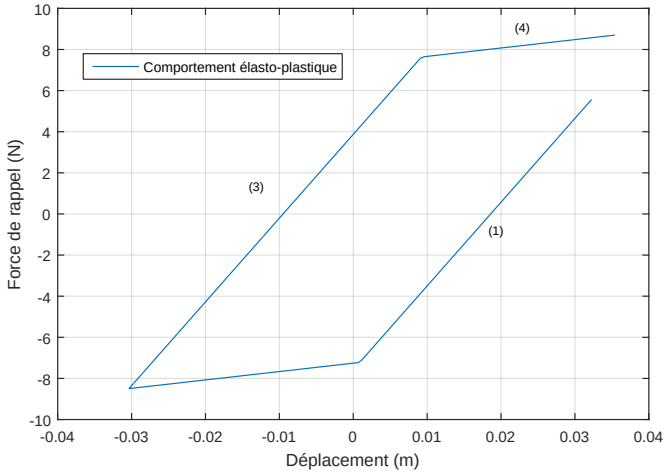
Où, $u^{\mathrm{T}}(n)$, $v^{\mathrm{T}}(n)$ sont les données en déplacement et en vitesse. K et C sont les matrices de rigidité et d'amortissement. Le terme o représente l'erreur de l'estimation de la solution sur K et C. Le vecteur r est la force de rappel.

L'équation A.13 est résolue par la méthode des moindres carrés. Un paramètre important de cette méthode est la taille de la fenêtre dans laquelle se fait la minimisation des écarts entre les forces de rappel des deux systèmes. Une fenêtre petite peut mieux saisir le changement des caractéristiques mais présente des résultats parasités. Par ailleurs, ce choix ne doit pas dépendre seulement des résultats obtenus (glissés ou bruités) mais aussi des phénomènes physiques en jeu dans la structure. Pour une structure réelle, le changement peut être progressif mais à contrario, le modèle rhéologique peut présenter un changement brutal en terme par exemple de rigidité. De plus, l'application de cette méthode dans le cadre d'essais pseudo-dynamiques a montré l'existence de résultats irréguliers surtout pour l'amortissement.

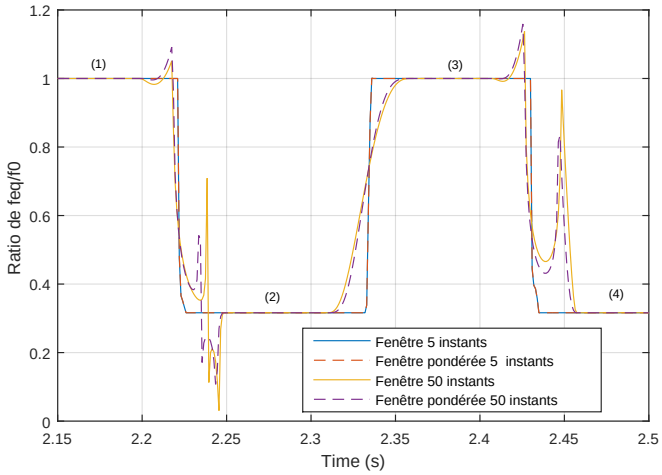
Nous avons testé la méthode spatiale sur le comportement élasto-plastique et le comportement endommageant avec différentes tailles de fenêtre. Par application directe de la méthode, le changement des caractéristiques de ces comportements est brutal. Il est préférable de pondérer le signal de réponse par une fonction de type cloche. Les résultats sont présentés sur les figures A.9 et A.10 pour 2 tailles de fenêtres avec ou sans courbe de pondération du type cloche.

A partir des figures A.9 et A.10 , nous obtenons le changement en fréquence et d'amortissement.

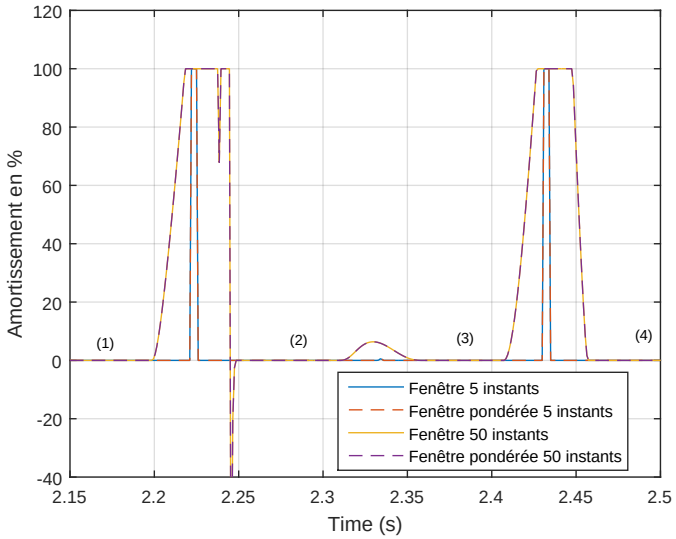
En conclusion, le résultat de la méthode dépend de la taille de la fenêtre dans laquelle s'identifient les caractéristiques de la structure. Le changement brutal pour le comportement idéalisé étudié dans ce travail n'est pas correctement représenté. Ces méthodes d'identification modale expérimentale dans le domaine temporel peuvent être utilisées en ayant conscience que l'erreur commise reste liée au paramètre de la méthode (taille de fenêtre,...).



(a) Relation force - déplacement

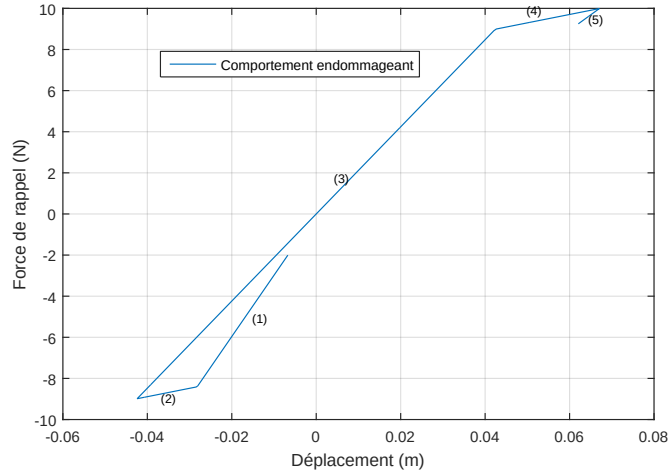


(b) Évolution de la fréquence

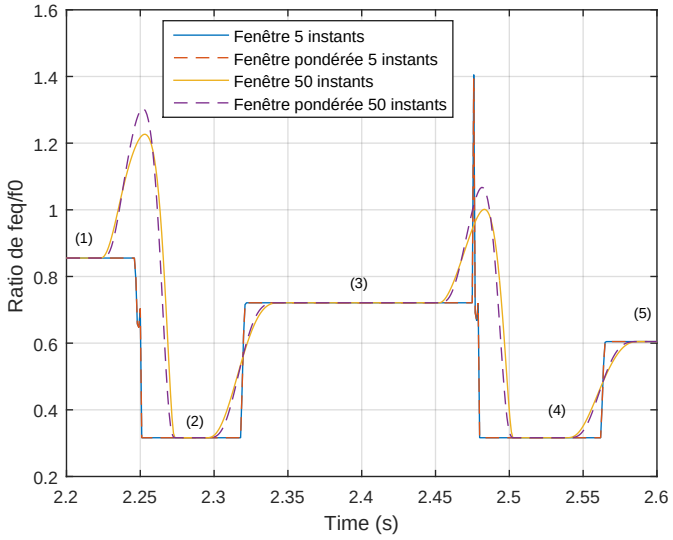


(c) Évolution de l'amortissement

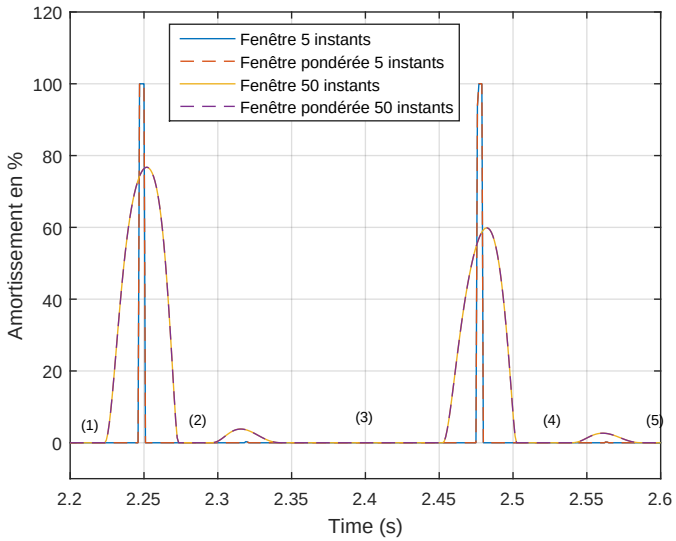
FIGURE A.9 – Évolution des caractéristiques de l'oscillateur élasto-plastique avec $\{\frac{f_0}{f_c};\xi_0\} = \{1.0;5\%\}$ pour $\lambda = 3.30$ (soit $\mu = 3.47$). La méthode spatiale est fonction de deux tailles : 5 instants et 50 instants. La durée totale est de 20 (s), soit 20000 instants. Zoom sur l'intervalle de temps de 2.15 (s) à 2.5 (s).



(a) Relation force - déplacement



(b) Évolution de la fréquence



(c) Évolution de l'amortissement

FIGURE A.10 – Évolution des caractéristiques de l'oscillateur endommageant avec $\{\frac{f_0}{f_c};\xi_0\}$ = {1.0;5%} pour λ = 2.56 (soit μ = 3.01). La méthode spatiale est fonction de deux tailles : 5 instants et 50 instants. La durée totale est de 20 (s), soit 20000 instants. Zoom sur l'intervalle de temps de 2.2 (s) à 2.6 (s).

A.7 Analyse modale dans le domaine fréquentiel

L'identification de la fréquence et de l'amortissement dans le domaine fréquentiel reste bien établie dans le cadre de l'analyse modale expérimentale. Plusieurs techniques ont été développées afin d'éliminer le bruit dans la mesure. La lecture de la synthèse de plusieurs techniques courantes renvoit à la référence Verboven [2002]. Dans cette section, nous présenterons uniquement :

01 Les techniques de construction de la fonction de transfert à partir des auto-spectres et inter-spectres dans le cadre de l'identification modale expérimentale ;

02 L'influence de la façon de moyenner les fonctions de transfert ou de leur modules sur l'identification de l'amortissement ;

03 Les méthodes temps-fréquences.

Les deux premières techniques présentent un intérêt en éliminant le bruit dans la mesure. La troisième approche, quant à elle, permet une représentation du changement des caractéristiques dynamiques au cours du temps. Malgré leurs utilités, ces trois techniques ne sont pas compatibles avec notre objectif d'établir un comportement linéaire équivalent.

A.7.1 Construction de la fonction de transfert à partir des auto-spectres et inter-spectres

Nous présentons uniquement les techniques de construction de la fonction de transfert à partir de l'auto-spectre et de l'inter-spectre. Ces techniques sont établies afin d'éliminer les bruits dans les données d'entrée et de sortie mesurées.

Construction des auto-spectres et inter-spectres

En notant I_k et O_k les termes de la transformée discrète de Fourier des signaux d'entrée et de sortie, l'inter-spectre discret G_{IO_k} est défini par :

$$G_{IO_k} = I_k O_k^H \tag{A.14}$$

où, l'opérateur $(*)^H$ correspond à la transposée conjuguée.

De façon analogue, les auto-spectres sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} G_{II_k} &= I_k I_k^H \\ G_{OO_k} &= O_k O_k^H \end{aligned} \tag{A.15}$$

Les estimateurs H1/H2 et Hv

Lorsque le bruit sur les entrées est estimé nul, et que le bruit sur les sorties est décorrélé, la fonction de transfert est définie par l'estimateur H1 :

$$H1 = \frac{G_{OI}}{G_{II}} \tag{A.16}$$

A contrario, lorsque le bruit sur les sorties est estimé nul, et que le bruit sur les entrées est décorrélé, la fonction de transfert est définie par l'estimateur H2 :

$$H2 = \frac{G_{OO}}{G_{IO}} \tag{A.17}$$

Lorsque les entrées et les sorties sont bruitées, la fonction de transfert est estimée par l'estimateur Hv, solution de l'équation suivante :

$$H_v \begin{bmatrix} G_{II} \\ G_{IO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{IO} \\ G_{OO} \end{bmatrix} \tag{A.18}$$

A.7.2 Influence de la façon de moyenner les fonctions de transfert ou leurs modules sur l'identification de l'amortissement

A partir du module de la fonction de transfert, il est possible d'en déduire la fréquence et l'amortissement. Quand la structure est non-linéaire, nous constatons que le module de la fonction de transfert mesurée n'est pas régulier. Une technique courante consiste à déterminer le module de la fonction de transfert moyenné sur plusieurs essais. Or, quand nous identifions les caractéristiques dynamiques à partir de la moyenne des modules, l'amortissement augmente artificiellement.

Pour illustrer cette constatation, nous présentons un exemple simple. Les 1000 fonctions de transfert $H_j(f_{e,j}, \xi_e)$ sont calculées par la formule A.5 avec une seule valeur d'amortissement réduit ξ_e égal à 5% et 1000 valeurs de fréquences $f_{e,j}$ avec $j = 1...1000$. Les fréquences $f_{e,j}$ sont distribuées suivant la loi Gaussienne contrôlée par la moyenne $f_{e,m}$ et l'écart-type σ_{f_e}. Nous pouvons déterminer le module moyen $||H(f_{e,i}, \xi_{e,i})||$ de deux façons :

$$\begin{aligned} ||H_1(f_{e,i,1}, \xi_{e,i,1})|| &= \left|\left| \frac{\sum_{j=1}^{1000} H_j(f_{e,j}, \xi_e)}{1000} \right|\right| \\ ||H_2(f_{e,i,2}, \xi_{e,i,2})|| &= \frac{\left|\left| \sum_{j=1}^{1000} H_j(f_{e,j}, \xi_e) \right|\right|}{1000} \end{aligned} \tag{A.19}$$

Où, les indices 1 et 2 signifient les deux façons de déterminer le module de la fonction de transfert. A ce stade, la fréquence $f_{e,i,1}$ et l'amortissement $\xi_{e,i,1}$ sont identifiés à partir du module de la fonction de transfert $||H_1(f_{e,i}, \xi_{e,i})||$. La fréquence $f_{e,i,2}$ et l'amortissement $\xi_{e,i,2}$ sont quant à eux définis à partir de $||H_2(f_{e,i}, \xi_{e,i})||$.

Nous avons utilisé trois valeurs d'écart-type pour les trois distributions de $f_{e,j}$. De là, nous avons procédé à l'identification pour les différents cas présentés dans le tableau A.3.

A partir du tableau A.3, nous pouvons constater que la valeur d'amortissement identifiée est considérablement supérieure à la valeur donnée $\xi_e = 5\%$. A titre d'exemple, la valeur d'amortissement $\xi_{e,i,1}$ identifiée pour H_1 et un écart-type de 0.2 est égale à 16%, ce

TABLEAU A.3 – Influence de la façon de moyenner le module des fonctions de transfert sur la valeur d'amortissement identifiée

		$\|\|H_1(f_{e,i,1},\xi_{e,i,1})\|\|$		$\|\|H_2(f_{e,i,2},\xi_{e,i,2})\|\|$	
$f_{e,m}$	σ_{f_e}	$f_{e,i,1}$	$\xi_{e,i,1}$	$f_{e,i,2}$	$\xi_{e,i,2}$
Hz		Hz	%	Hz	%
1.00	0.20	1.02	16.03	1.00	9.56
1.00	0.10	1.00	10.08	0.99	7.16
1.00	0.05	1.00	7.11	0.99	5.90

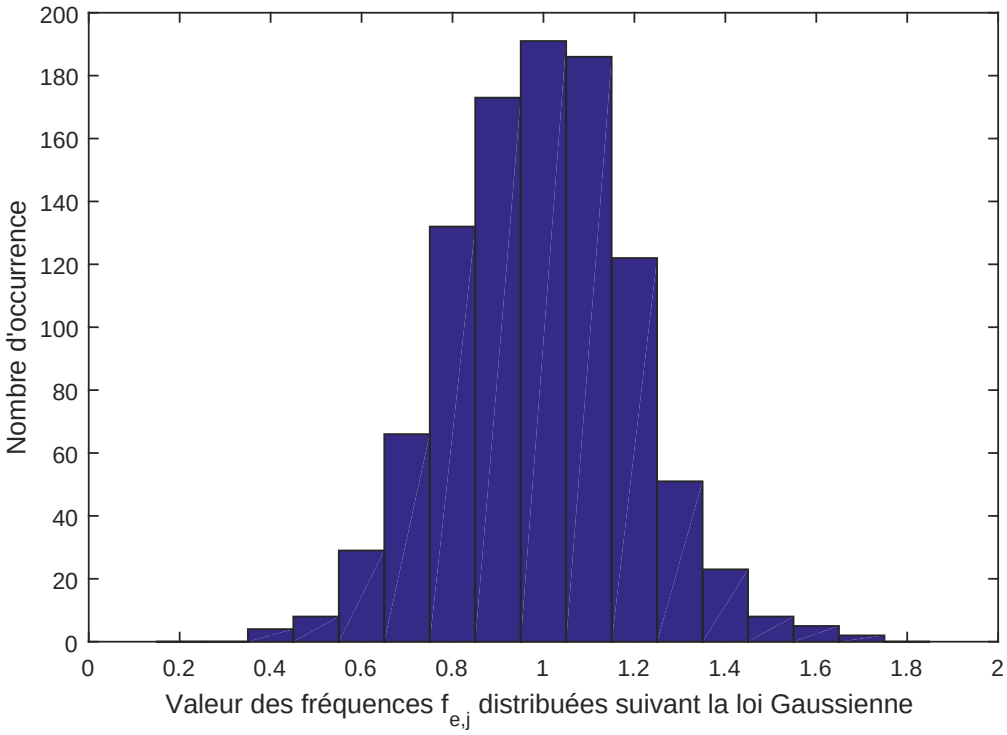


FIGURE A.11 – Distribution des 1000 valeurs de $f_{e,j}$ suivant la loi Gaussienne avec la valeur moyenne de $f_{e,m} = 1$ et un écart-type de $\sigma_{f_e} = 0.2$

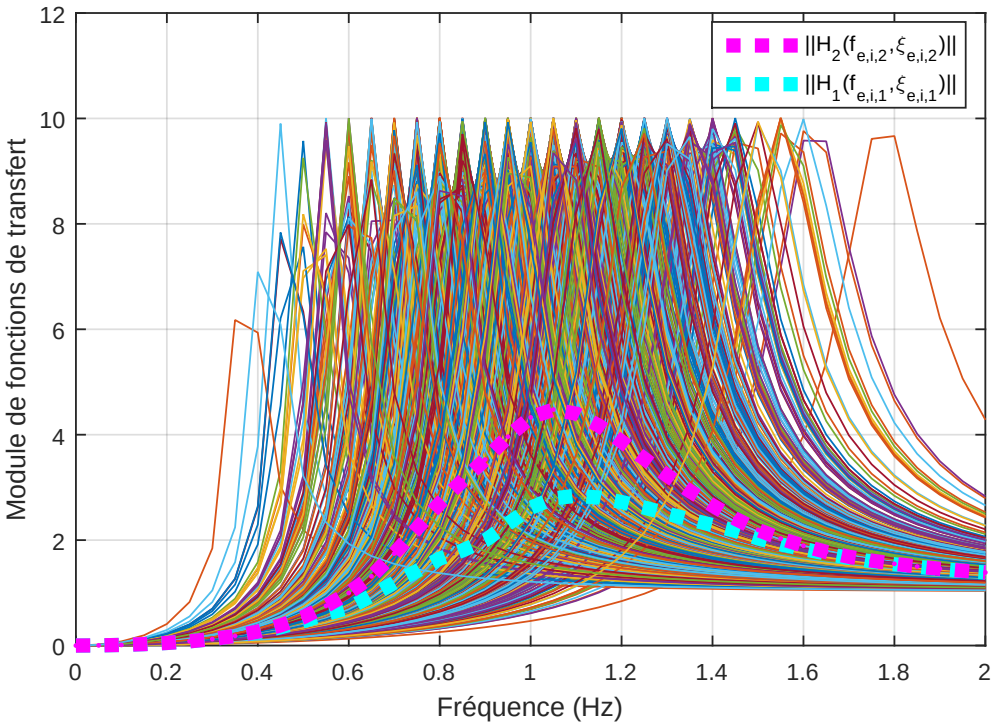


FIGURE A.12 – Modules $||H_1(f_{e,i,1},\xi_{e,i,1})||$ en courbe pointillée bleu et $||H_2(f_{e,i,2},\xi_{e,i,2})||$ en courbe pointillée rouge, comparées avec ceux des 1000 fonctions de transfert $H_j(f_{e,j},\xi_e)$ (lignes continues

qui est très différent de la valeur attendue de 5% pour ξ_e. Pour cet exemple, la distribution des 1000 fréquences $f_{e,j}$ est présentée sur la figure A.11. Les modules des 1000 fonctions de transfert $H_j(f_{e,j},\xi_e)$ ainsi que ceux des 2 fonctions $||H_1(f_{e,i,1},\xi_{e,i,1})||$ et $||H_2(f_{e,i,2},\xi_{e,i,2})||$ sont présentés dans la figure A.12.

En conclusion, la façon de moyenner les modules (ou les fonctions de transfert) augmente artificiellement l'amortissement.

A.7.3 Méthodes temps-fréquence

Quand le comportement d'une structure est non-linéaire, il est nécessaire de qualifier le changement des caractéristiques. Plusieurs techniques sont développées dans le domaine temporel (Voir l'annexe A.6) mais également dans le domaine fréquentiel. Nous présentons dans cette section deux méthodes courantes, qui sont la STFT (Transformée de Fourier à court terme ou en anglais *Short-Time Fourier Transform*) et la méthode des ondelettes (en anglais *Wavelet Transform*), permettant de qualifier le changement des caractéristiques dynamiques dans le domaine fréquentiel.

Transformée de Fourier à court terme - STFT

Cette méthode consiste à segmenter un long signal en plusieurs segments plus courts et à évaluer ensuite séparément la transformée de Fourier de chaque segment temporel. Cette méthode a été publiée par Dennis Gabor dans Gabor [1946]. Cette transformée continue est définie comme suit :

$$\mathrm{STFT}\,x(t)(\tau,\Omega) \equiv \mathrm{X}(\tau,\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\Omega(t-\tau)\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{A.20}$$

Où : τ est le temps autour duquel la fenêtre $\Omega(t-\tau)$ est centrée.

La particularité de cette transformée à court terme est liée au fait que le signal est segmenté par les fenêtres $\Omega(t)$ tronquées. Ces fenêtres sont souvent du type Hann ou Gauss. Les choix du type ainsi que des paramètres de la fenêtre sont primordiaux vis à vis du résultat attendu. Par example, la fenêtre Gauss est conçue pour analyser les signaux transitoires tandis que la fenêtre Hann est applicable au signal à bande étroite et au processus aléatoire Gao and Yan [2011].

Allant de pair avec cette technique, la représentation sous forme de "spectrogramme" est souvent utilisée, soit l'énergie (ou le module de la transformée de Fourier) du signal à une fréquence et à un instant.

Pour illustrer l'utilité de la méthode STFT, nous présentons ci-après un exemple. D'abord, la fenêtre Gaussienne a été choisie du fait qu'elle soit compatible pour les signaux transitoires. La fenêtre est définie comme suit :

$$\Omega(t) = \mathrm{e}^{-\alpha^2\tau_0^2} \tag{A.21}$$

Le choix des paramètres de cette fenêtre Gaussienne est fait tel que $\alpha = 0.7$ et $\tau_0 = 1.5748$ afin d'avoir une largeur égale à 128 instants et une résolution fréquentielle $\Delta f = 0.05$ Hz. La compréhension de ces notions nous renvoie au travail de Gao and Yan [2011]. La méthode STFT avec une fenêtre préalablement définie est appliquée au comportement élastoplastique à un niveau d'excitation λ de 5. L'oscillateur est caractérisé par $\{f_0;\xi_0;\alpha_p\} = \{3\mathrm{H}z;5\%;10\%\}$.

A partir de la figure A.14, nous avons constaté que le changement de la fréquence est capturé suivant le changement de la variable interne (le déplacement maximal). Néanmoins, ce changement n'est pas assez représentatif du changement de la variable du fait que la résolution en temps n'est pas assez fine.

La méthode des ondelettes - *Wavelet Transform*

Une autre méthode permettant d'examiner le changement des caractéristiques dynamiques de la structure est celle des ondelettes. La transformée en ondelettes est définie de la façon suivante :

$$\mathrm{W}x(t)(s,\tau,\Psi) \equiv \mathrm{W}(s,\tau,\Psi) = \frac{1}{\sqrt{s}}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\Psi^*\left(\frac{t-\tau}{s}\right),\mathrm{d}t \tag{A.22}$$

Où, l'opérateur $\Psi^*\left(\frac{t-\tau}{s}\right)$ est le complexe conjugué de la base des ondelettes $\Psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)$.

La base des ondelettes connue est celle de Morlet Grossmann and Morlet [1984]. L'avantage de cette méthode est la possibilité d'ajuster la résolution fréquentielle et temporelle en fonction de l'objectif visé.

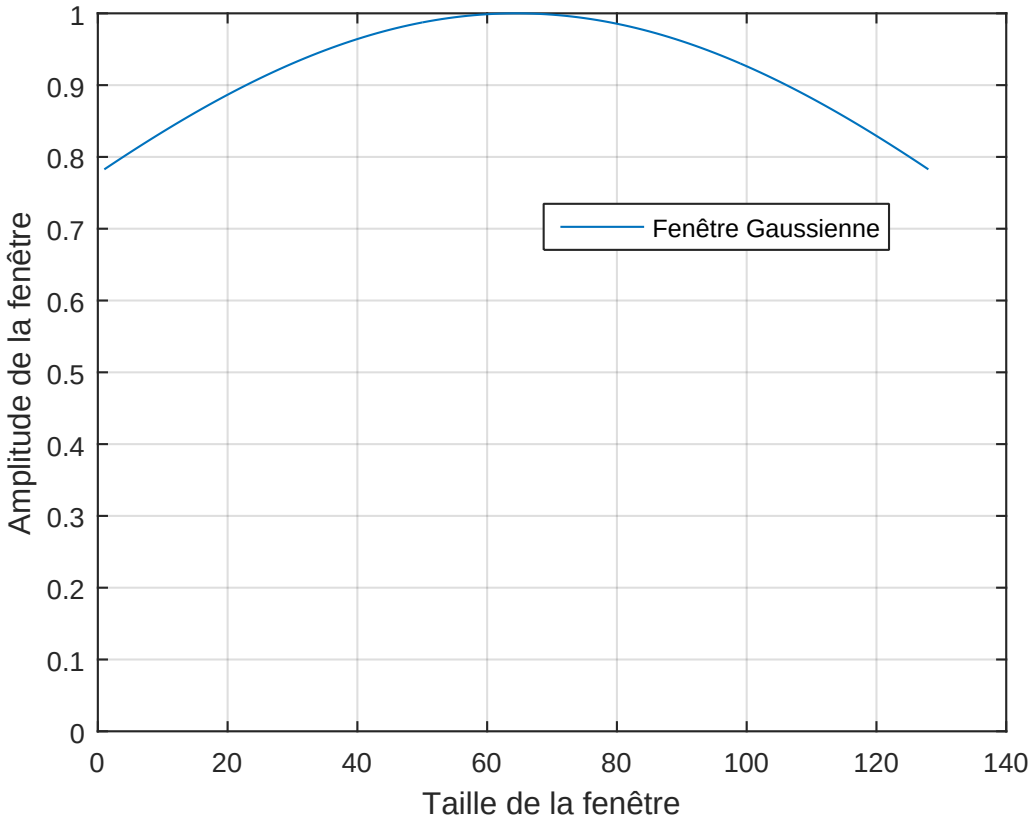


FIGURE A.13 – Fenêtre Gaussienne avec $\alpha = 0.7$ et de largeur 128 pas de temps.

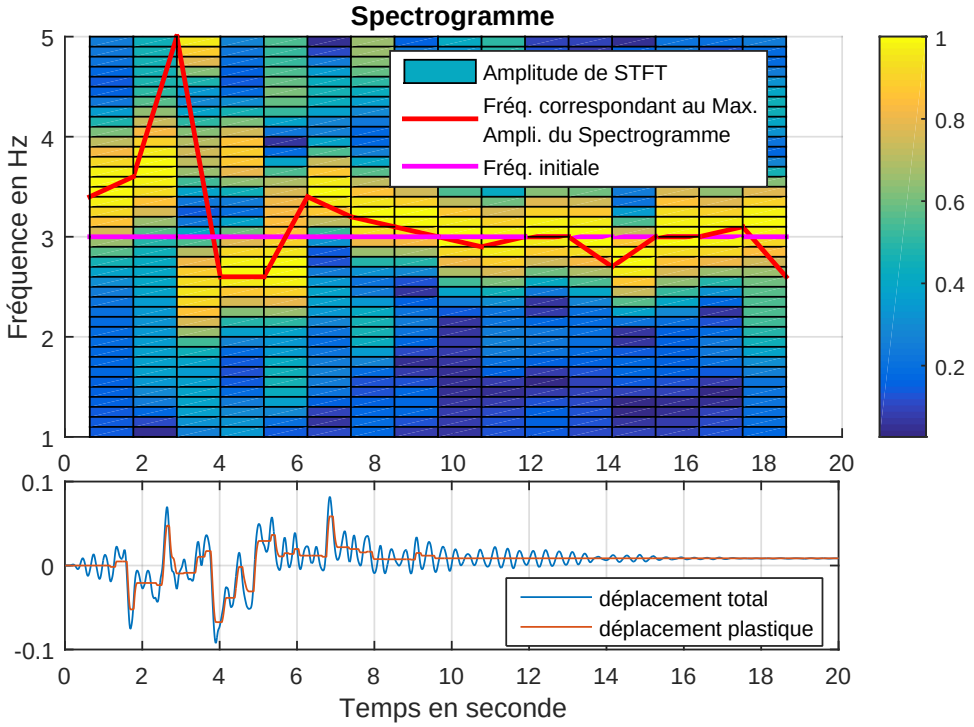


FIGURE A.14 – Spectrogramme de la réponse non-linéaire en accélération du comportement élastoplastique pour $\{f_0; \xi_0; \alpha_p\} = \{3Hz; 5\%; 10\%\}$ et $\lambda = 5$. La couleur de la figure Spectrogramme correspond au module de STFT normalisé par rapport au maximum.

Conclusion sur les méthodes temps-fréquence

Les méthodes temps-fréquence ont pour avantage de représenter le changement des caractéristiques dynamiques de la structure lorsqu'elle est non-linéaire. Cependant, cela n'est pas compatible avec l'objectif de travail de thèse qui est d'identifier le comportement linéaire équivalent.

A.8 Valeurs des coefficients de la courbe de chute de fréquence et d'amortissement équivalents par fonction de transfert

Les coefficients $\{\mu_0, d\}$ et $\{\xi_a, c\}$ sont déterminés pour les cas où le ratio $\frac{f_0}{f_c}$= 0.1, 0.5, 1.0,2.0 ; avec un écrouissage α_p=0.0,0.1,0.2 ; et un type de comportement χ = 0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.00. Les valeurs de ces coefficients sont présentées dans le tableau A.4. Les coefficients permettent de décrire analytiquement de la manière suivante la chute de fréquence et l'augmentation de l'amortissement :

$$\begin{aligned} \frac{f_{eq}}{f_0} &= \sqrt{\alpha_p} + \frac{1-\sqrt{\alpha_p}}{1+\left(\frac{\mu-1}{\mu_0-1}\right)^d} \\ \xi_{eq} &= \xi_0 + \xi_a\left(1-\left(\frac{f_{eq}}{f_0}\right)^c\right) \end{aligned} \tag{A.23}$$

A partir du tableau A.4, les valeurs de coefficients ξ_a et c ne sont pas pertinents. Par exemple, pour le comportement avec $\{\alpha_p;\chi\}$ = $\{20\%;0.0\}$, les valeurs des ξ_a et c changement complètement pour différentes valeurs du ratio $\frac{f_0}{f_c}$ tandis que la courbe médiane reste indépendante du ratio $\frac{f_0}{f_c}$. Ainsi, il faudrait exprimer autrement l'amortissement équivalent, sans doute directement en fonction de la ductilité appelée.

TABLEAU A.4 – Valeurs des coefficients pour différents comportements

	α_p = 00%				α_p = 10%				α_p = 20%			
f0/fc	μ_0	d	ξ_a	c	μ_0	d	ξ_a	c	μ_0	d	ξ_a	c
χ = 0.00												
0,1	4,48	0,72	232	0,00	2,96	0,96	0,96	0,12	2,69	0,97	0,17	0,75
0,5	4,56	0,75	396	0,00	2,96	0,97	73,3	0,00	2,69	0,98	3,23	0,02
1,0	4,66	0,78	25,8	0,01	3,05	1,01	0,12	1,29	2,75	1,00	-85	0,00
1,5	5,05	0,85	0,26	1,55	3,21	1,06	0,10	5,03	2,87	1,02	0,06	7,30
2,0	5,50	0,87	0,48	0,77	3,25	1,04	-476	0,00	2,87	1,04	0,07	7,24
χ = 0.25												
0,1	4,87	0,86	0,66	0,49	3,32	1,09	0,18	2,36	3,03	1,11	0,11	4,50
0,5	5,33	0,87	0,99	0,33	3,51	1,08	0,23	1,62	3,20	1,11	-668	0,00
1,0	5,66	0,86	0,92	0,39	3,67	1,07	0,22	1,97	3,32	1,10	0,12	4,24
1,5	6,17	0,89	0,76	0,58	3,90	1,09	0,24	2,18	3,52	1,11	0,13	4,05
2,0	6,66	0,89	1,64	0,25	4,11	1,07	0,29	1,64	3,66	1,09	0,15	3,34
χ = 0.50												
0,1	4,92	1,07	0,66	0,83	3,59	1,32	0,25	3,18	3,34	1,29	0,16	5,62
0,5	6,27	1,04	0,90	0,55	4,14	1,27	0,29	2,32	3,73	1,29	0,17	4,41
1,0	7,36	0,99	1,01	0,51	4,59	1,24	0,32	2,02	4,07	1,26	0,18	3,91
1,5	8,87	0,99	1,25	0,42	5,20	1,24	0,39	1,54	4,59	1,28	0,21	3,15
2,0	12,6	0,87	46,2	0,01	6,06	1,20	0,60	0,88	5,09	1,24	0,26	2,22
χ = 0.75												
0,1	4,89	1,36	0,83	0,79	3,77	1,63	0,31	3,42	3,51	1,56	0,21	6,29
0,5	7,79	1,24	0,78	0,87	4,92	1,52	0,34	2,67	4,31	1,51	0,22	5,02
1,0	10,9	1,13	0,72	1,04	5,94	1,52	0,38	2,33	5,10	1,52	0,23	4,54
1,5	17,6	1,01	0,83	0,91	7,73	1,70	0,40	2,23	6,29	1,64	0,26	3,92
2,0	54,0	0,70	321	0,00	10,7	1,91	0,45	1,93	7,99	1,86	0,27	3,60
χ = 1.00												
0,1	4,83	2,00	0,76	0,93	3,99	2,15	0,37	3,49	3,72	1,93	0,25	6,78
0,5	10,8	1,49	0,59	1,65	5,94	1,94	0,39	3,09	5,02	1,84	0,26	5,90
1,0	19,4	1,30	0,43	3,03	7,81	1,95	0,41	2,86	6,35	1,93	0,27	5,72
1,5	50,9	1,12	0,33	5,41	11,1	2,32	0,41	3,01	8,58	2,29	0,28	5,51
2,0	184	0,92	0,23	10,6	17,3	2,29	0,34	5,05	11,4	2,59	0,29	5,37

A.9 Distribution des notes des critères d'Anderson

Pour illustrer la distribution des notes des critères d'Anderson en vue de qualifier la similarité entre les réponses en accélération du modèle non-linéaire et du modèle linéaire équivalent, nous avons étudié le comportement caractérisé par $\{\frac{f_0}{f_c} = 1.0; \xi_0 = 5\%; \alpha_p = 10\%\}$ avec $\lambda = 3.3$. Nous obtenons la distribution de la note de chaque critère présentée sur la figure A.15 :

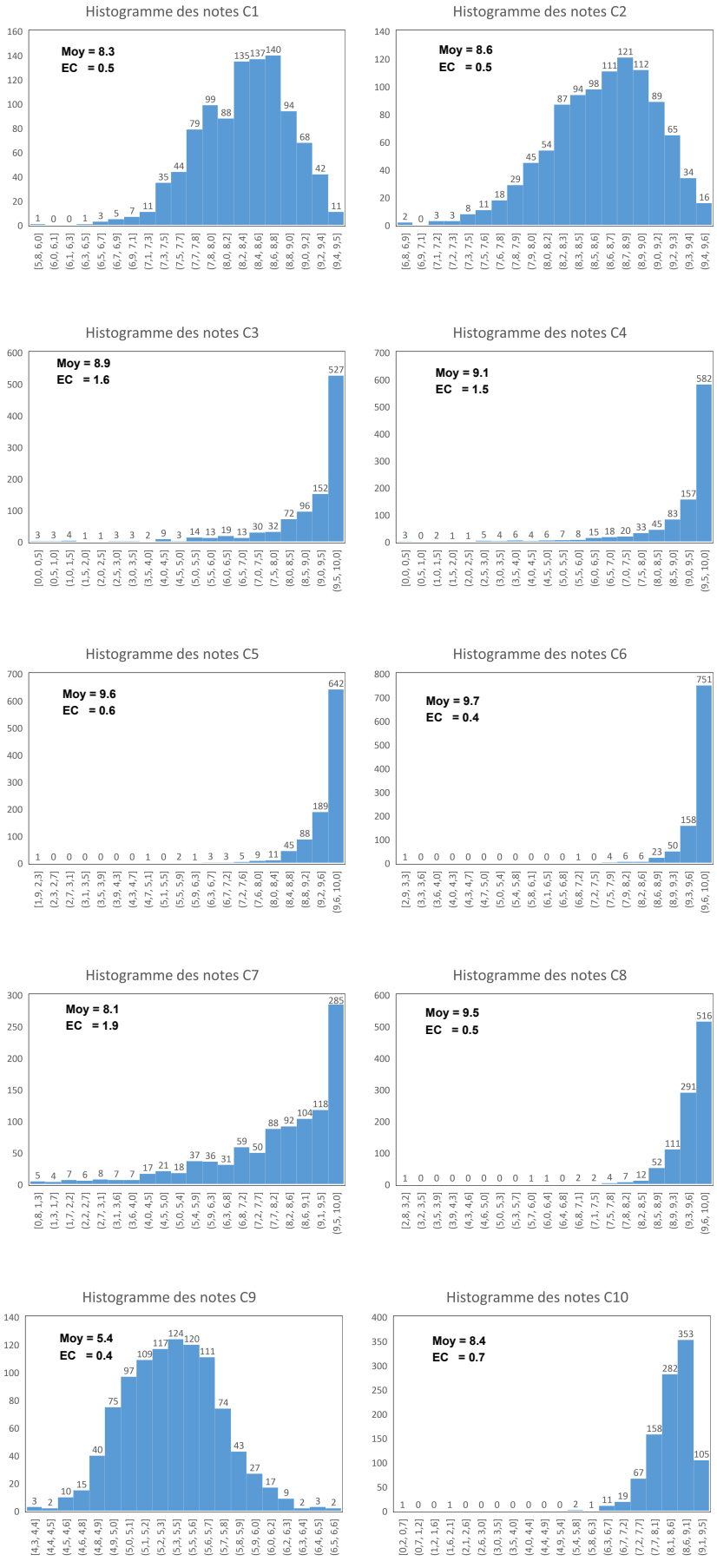


FIGURE A.15 – Distribution des notes des critères pour le cas $\{\frac{f_0}{f_c} = 1.0; \xi_0 = 5\%; \alpha_p = 10\%\}$ avec $\lambda = 3.3$. "Moy" et "EC" signifient respectivement la valeur moyenne et l'écart-type

A.10 Proposition de concepts de linéarisation équivalente par la restitution des caractéristiques dynamiques

Pour compléter les propositions de comportement linéaire équivalent par restitution des caractéristiques dynamiques, nous étudierons dans cette annexe des grandeurs « in- termédiaires » déduite de la réponse temporelle pouvant être considérée comme critère d'équivalence. Outre la méthode par fonction de transfert du chapitre 03, nous proposons deux autres concepts de linéarisation équivalente : (1) par l'écart-type et (2) par le nombre de passage par zéro. L'analyse du critère, de la méthode et de la performance seront présentées ci-après.

A.10.1 Fréquence équivalente par nombre de passage par zéro

La fréquence d'un oscillateur est physiquement définie par le nombre d'allers et retours à son équilibre. Si l'oscillateur est élastique linéaire, cet équilibre est zéro, d'où le nom de ce critère : le passage par zéro. Or, la réponse de l'oscillateur non-linéaire ne prend pas son équilibre à zéro mais oscille autour de la partie dite "courbe de tendance" à basse fréquence de la réponse totale. Le reste de la réponse totale est appelée la partie dynamique qui oscille donc autour de zéro. A ce stade, il est indispensable de déterminer deux courbes : courbes de tendance et courbe dynamique. Ainsi, le nombre des passages par zéro de la partie dynamique est identique à celui passant par l'équilibre de la réponse non-linéaire.

Notons $\mathrm{N}_{passage}$ le nombre de passages par zéro de la partie dynamique et $\Delta_{passage}$ est la durée du temps, entre le premier et le dernier passage. La fréquence équivalente est déterminée par la formule suivante :

$$f_{eq} = \frac{\mathrm{N}_{passage}}{2\Delta_{passage}} \tag{A.24}$$

Détermination de la partie dynamique et la courbe de tendance

La réponse temporelle totale sera décomposée en une partie dynamique et une courbe de tendance. La courbe de tendance est la composante à basse fréquence de la réponse totale. Comme son nom l'indique, elle permet de définir la tendance de la réponse totale. Or, elle ne porte aucun sens physique. Ainsi, la détermination de cette courbe est non physique. Nous envisagerons alors deux démarches de détermination de la courbe de tendance dans la réponse totale.

01 Démarche 01 : Lissage par moyenne dans une fenêtre glissante. En effet, la courbe de tendance dans une fenêtre est la moyenne des valeurs de la réponse totale issues dans cette fenêtre. La taille de la fenêtre devient le paramètre primordial. La performance de la taille retenue sera jugée en fonction du "sens" de l'utilisateur. Cela ne permet pas un traitement automatisé sur l'ensemble des familles d'oscillateurs étudiés. De plus, ce paramètre intervient dans le résultat de la fréquence équivalente. La taille de fenêtre ne permet pas la convergence en terme de fréquence équivalente (Ref. figure A.16).

02 Démarche 02 : Un filtre passe-bas est appliqué à la réponse totale. Cette démarche demande la connaissance de la fréquence de coupure au-dessus de laquelle le con-

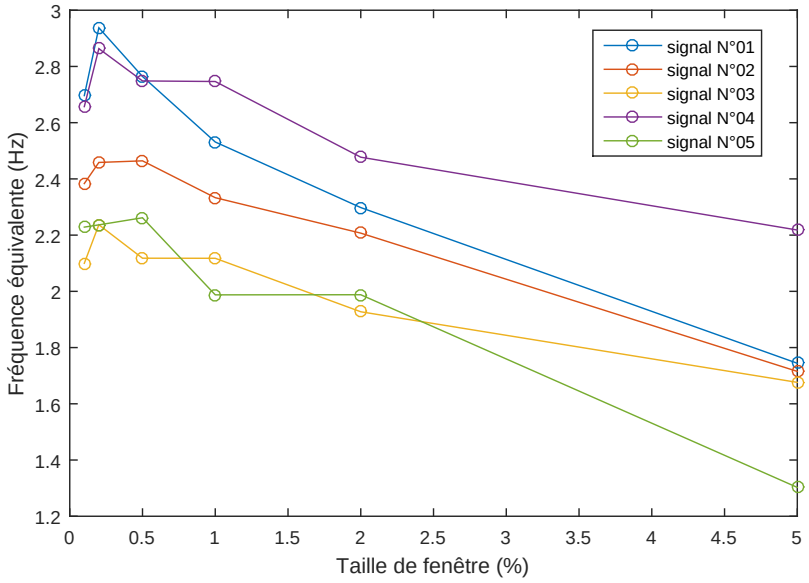


FIGURE A.16 – Influence de la taille de fenêtre dans le résultat de la fréquence équivalente pour le comportement élasto-plastique sans écrouissage dont la fréquence $f_0 = f_c$ pour les 5 premiers signaux dans l'ensemble des 1000 fabriqués. La valeur de $\lambda = 4.37$. La divergence du résultat en terme de fréquence équivalente à différentes tailles de fenêtre du lissage par moyennage afin de déterminer la courbe de tendance. Ce lissage est appliqué deux fois.

tenu fréquentiel sera coupé. Or, cette fréquence reste inconnue. Et, comme la courbe de tendance ne porte aucun sens physique, cette fréquence reste difficile à déterminer.

Faut-il effectuer le comptage sur la phase forte ou la durée totale du transitoire ?

D'une part, il est évident de dire que le comptage sur la durée totale du transitoire augmente la valeur moyenne de fréquence pour le comportement élasto-plastique où la rigidité revient à la valeur initiale en régime élastique. Cela n'est pas le cas pour le comportement endommageant. D'autre part, le comptage sur la phase forte a son intérêt pour représenter la dynamique pendant l'intervalle le plus sévère du signal. Ainsi, la durée de phase forte est retenue afin de procéder au comptage. Cette durée n'est pas toujours la même que $\Delta_{passage}$ issue dans l'équation A.24.

Nous observons dans la figure A.17 que le comptage des passages par zéro n'est pas robuste en terme de fréquence équivalente. Même avec une fenêtre assez large (1%) et un lissage appliqué deux fois, la courbe de tendance contient encore des contenus à hautes fréquences. Si nous regardons de plus près, le zoom sur l'intervalle 4.5 (s) - 5.5 (s) dans la figure A.18, nous pouvons voir qu'il y a un point rouge correspondant à un pic en déplacement non comptabilisé.

Conclusions sur la linéarisation équivalente par le nombre des passages par zéro

Le nombre des passages par zéro donne la fréquence équivalente de la réponse. Or, la courbe de tendance est difficilement obtenue et sa détermination n'est pas physique. En plus, le comptage pendant la totalité du transitoire augmente significativement la valeur

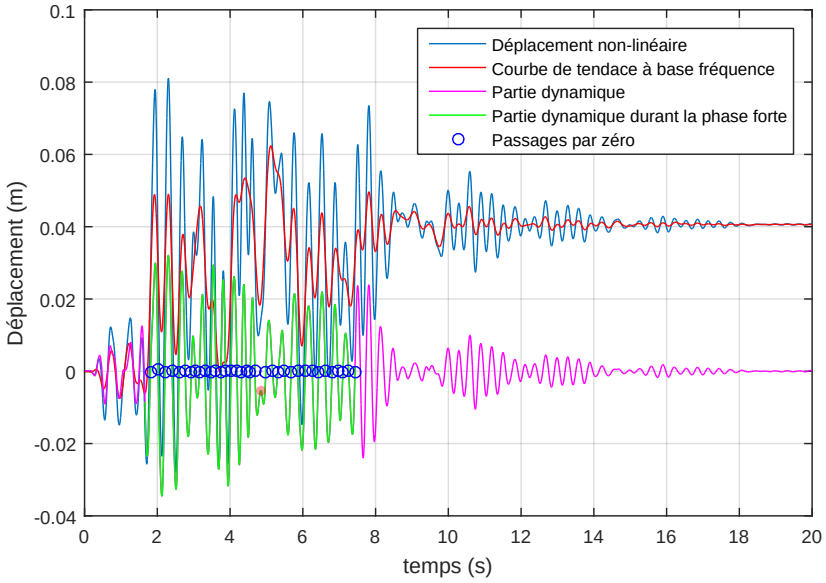


FIGURE A.17 – Démonstration du comptage du nombre des passages par zéro de la partie dynamique de la réponse élasto-plastique, sans écrouissage. Le lissage par moyennage est appliqué deux fois avec la taille de fenêtre de 200 instants, soit 1% de la taille totale. Le comptage effectué dans la phase forte correspond à une fréquence équivalente de 2.53 Hz par rapport à la fréquence initiale de 3.356 Hz. La ductilité appelée est égale à 4.76

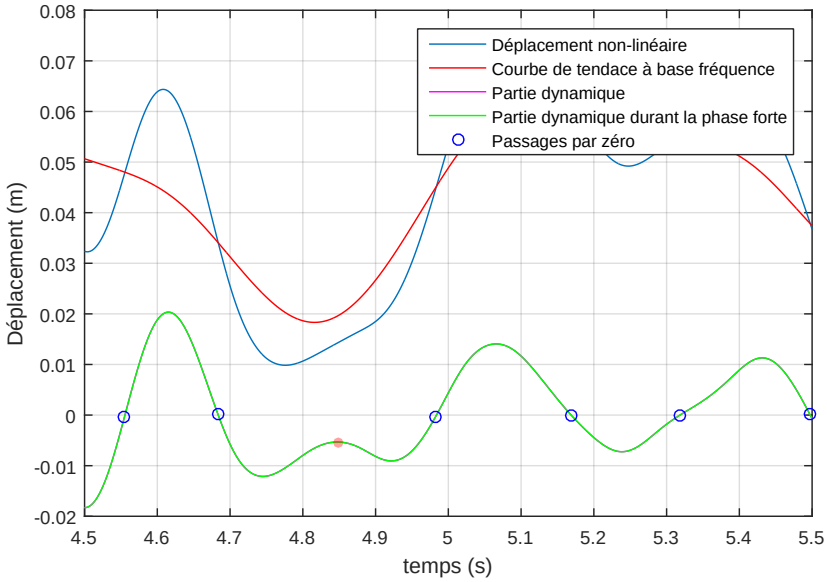


FIGURE A.18 – Zoom sur 4.5 - 5.5 (s) de l'exemple du comptage des passages par zéro

de fréquence équivalente en raison de présence de la fréquence initiale en régime élastique avant et après la phase forte. Tous ces inconvénients ne permettent pas une démarche automatisée appliquée à toute la famille des systèmes canoniques.

A.10.2 Linéarisation par l'écart-type

Classé dans la catégorie des concepts de linéarisation par restitution dynamique, le critère d'équivalence dans ce concept est une grandeur intermédiaire, appelée l'écart-type. En effet, pour un système linéaire soumis à un bruit blanc dont la densité spectrale constante et tronquée, nous avons l'expression analytique de la variance de la réponse en déplacement et en vitesse suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \frac{\pi G_0}{4\xi_0\omega_0^3} \\ \sigma_{\dot{x}}^2 &= \frac{\pi G_0}{4\xi_0\omega_0} \end{aligned} \tag{A.25}$$

Cette démarche peut être appliquée aux systèmes soumis au bruit blanc dont la densité spectrale est constante et tronquée.

L'écart-type et la variance sont déterminés à partir d'une réponse temporelle grâce à l'ergodicité et la moyenne nulle de la réponse linéaire de l'oscillateur soumis au bruit blanc. En cas de non-linéarité, nous ne pouvons rigoureusement ni parler d'écart-type ni de variance. En acceptant que ces deux valeurs sont déterminées à partir de la réponse temporelle non-linéaire, il est indispensable de déterminer la moyenne de la réponse temporelle. Or, cette moyenne n'est pas nulle dans le cas non-linéaire. Cette moyenne est égale à la courbe de tendance. A ce stade, la partie dynamique est utilisée pour déterminer l'écart-type et la variance. Cependant, cette partie dynamique ou la courbe de tendance ne porte aucun sens physique et est difficile à déterminer (vu dans le concept du nombre des passages par zéro).

Conclusions sur la linéarisation équivalente par l'écart-type

Ce concept est applicable qu'aux systèmes soumis à un signal de type bruit blanc. De plus, cette linéarisation équivalente retrouve exactement les inconvénients du concept par le nombre des passages par zéro en terme de courbe de tendance. Ainsi, nous ne donnerons pas suite à ce concept.

A.10.3 Conclusions sur la linéarisation équivalente par la restitution des caractéristiques dynamiques

La linéarisation équivalente par la restitution des caractéristiques dynamiques a pour avantages de représenter de façon plus rapprochée la réponse non-linéaire en considérant son transitoire dans le critère d'équivalence. Malgré cet avantage, la non-linéarité présente dans la réponse rend cette tâche plus difficile. Quant à la méthode utilisant les grandeurs intermédiaires, la non-linéarité fausse le sens physique de certaines grandeurs. La courbe de tendance ne porte aucun sens physique et est difficile à déterminer. Cette problématique se retrouve dans le concept de linéarisation équivalente par l'écart-type et par nombre de passages par zéro. Les deux concepts ne permettent pas une application automatisée au système canonique.

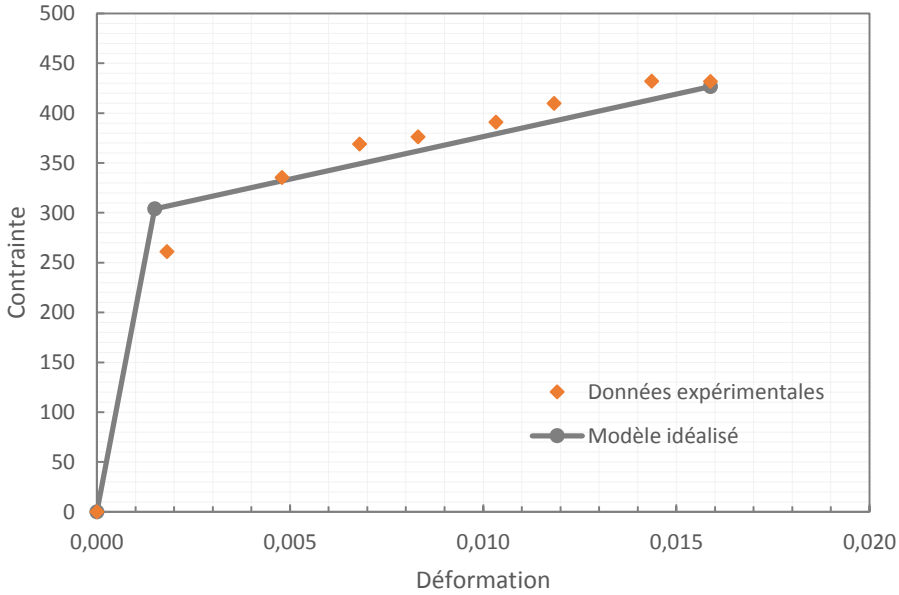


FIGURE A.19 – Comportement idéalisé du matériau SA 333 Gr. 6 à partir des données expérimentales de l'essai cyclique présentées dans Goyal et al. [2013]

A.11 Détermination de l'écrouissage du comportement idéalisé bilinéaire pour le matériau d'acier SA 333 Gr. 6

L'essai BARC consiste à tester le comportement du système de tuyauteries constitués du matériau acier SA 333 Gr. 6. Dans Goyal et al. [2013], sa contrainte au seuil d'élasticité σ_y est de 304 MPa et son module d'Young E est de 203 GPa. Ainsi, la déformation au seuil d'élasticité ϵ_y est de $\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} = 0.15$ %. De plus, il dispose de données expérimentales en terme de la contrainte - déformation de l'essai cyclique. Ainsi, nous pouvons déterminer le module post-élastique E_p en établissant un comportement idéalisé du type bilinéaire associé à des données expérimentales de l'essai cyclique. Nous ajustons alors le module post-élastique E_p pour que la partie droite post-élastique du comportement bilinéaire passe au milieu des points expérimentaux. De cela, nous obtenons E_p =8 120 MPa. Cela correspond à un ratio $\frac{E_p}{E} = 4\%$. Nous avons présenté le comportement idéalisé sur la figure A.19.

A partir de la figure A.19, nous constatons une valeurs assez faible de 4% pour la pente d'écrouissage. Cependant, cette valeur n'est pas représentative pour la relation courbure-rotation dans le cas où le coude est symétriquement soumis aux moments réfléchissants aux deux extrémités. Après la constatation pour les essais EPRI, cette valeur de pente d'écrouissage peut être d'environ de 10 à 20 % Labbé [2017].

A.12 Mécanique des tuyaux coudés soumis à un moment fléchissant dans son plan

Quand le coude est soumis au moment fléchissant, la théorie des poutres ne fonctionne plus car la rigidité du coude est réduite à cause de l'ovalisation de la section coudée. En effet, le moment local créé dans le plan de la section coudée engendre la déformation

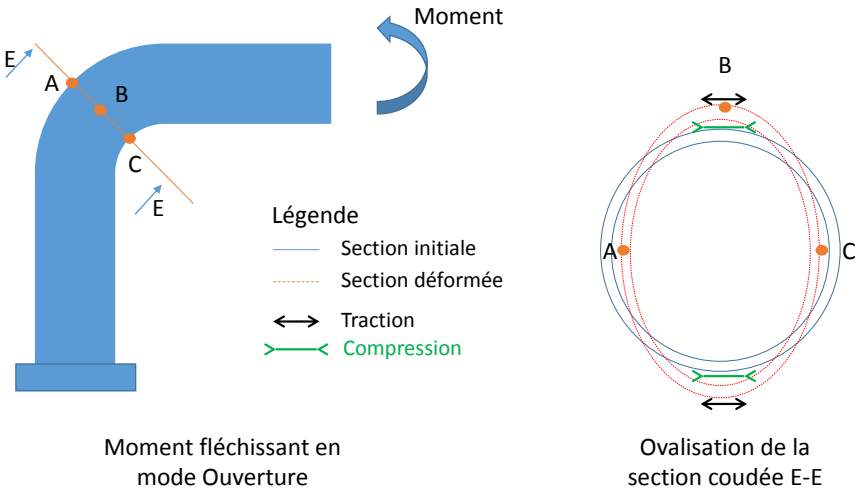


FIGURE A.20 – Coude en flexion dans son plan - mode ouverture

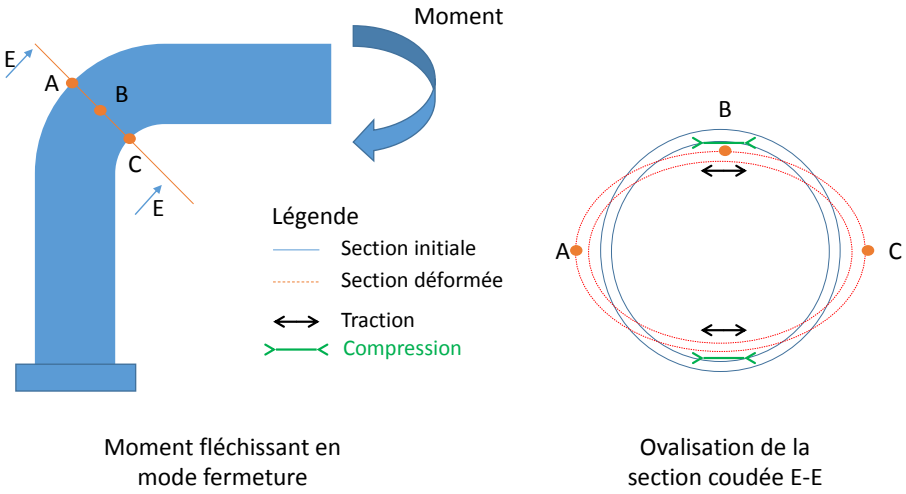


FIGURE A.21 – Coude en flexion dans son plan - mode fermeture

dans la direction circonférentielle. La solution de cet élément sous flexion dans son plan est étudiée par Von Karman dans sa publication en 1911 Von Kármán [1911] et ensuite développée par Rodabaugh et al. [1957], puis intégrée dans un élément fini de type coude par Bathe and Almeida [1980] pour une analyse linéaire. L'effet d'ovalisation est transformée en facteur de flexibilité en ingénierie dans le travail de Dodge and Moore [1972].

Ici, nous présentons le phénomène d'ovalisation produit dans la section coudée dans le cas de flexion dans le plan du coude.

Nous avons constaté dans les figures A.20 et A.21 que la déformation dans la direction circonférentielle est créée par l'ovalisation. Cette déformation majore la déformation créée par les pressions internes. La rupture se trouve souvent au niveau du point B (et son point symétrique). Cette rupture n'est pas due à la déformation axiale de la flexion. Ainsi, la théorie des poutre n'est plus applicable dans ce cas.

A.13 Références

Bathe, K. and Almeida, C. (1980). A simple and effective pipe elbow element—linear analysis. *Journal of Applied Mechanics*, 47(1) :93–100. XXXII

Dodge, W. and Moore, S. (1972). Stress indices and flexibility factors for moment loadings on elbows and curved pipe. Technical report, Oak Ridge National Lab., Tenn. XXXII

Gabor, D. (1946). Theory of communication. part 1 : The analysis of information. *Journal of the Institution of Electrical Engineers-Part III : Radio and Communication Engineering*, 93(26) :429–441. XX

Gao, R. X. and Yan, R. (2011). From fourier transform to wavelet transform : A historical perspective. In *Wavelets*, pages 17–32. Springer. XXI

Goyal, S., Gupta, S. K., Sivaprasad, S., Tarafder, S., Bhasin, V., Vaze, K., and Ghosh, A. (2013). Low cycle fatigue and cyclic plasticity behavior of indian phwr/ahwr primary piping material. *Procedia Engineering*, 55 :136–143. XXXI

Grossmann, A. and Morlet, J. (1984). Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM journal on mathematical analysis*, 15(4) :723–736. XXI

Labbé, P. (2017). On categorization of seismic load as primary orsecondary in piping systems. In *Proceedings of SMiRT, 24th Structural Mechanics in Reactor Technology (SMIRT-24)*, volume I. SMiRT. XXXI

Molina, F., Gonzalez, M., Pegon, P., Varum, H., and Pinto, A. (2000). Frequency and damping evolution during experimental seismic response of civil engineering structures. XIII

Molina, F. and Pegon, P. (1998). Identification of the damping properties of the walls of the safe program. *European Commission, Joint Research Centre, Ispra, Technical Note No. I*, 98 :176. XIII

Molina, F., Pegon, P., and Verzeletti, G. (1999). Time-domain identification from seismic pseudodynamic test results on civil engineering specimens. In *2nd International Conference on Identification in Engineering Systems*. Cromwell Press, Wiltshire UK. XIII

Newmark, N. M. (1959). A method of computation for structural dynamics. *Journal of the engineering mechanics division*, 85(3) :67–94. X

Rodabaugh, E., George, H., et al. (1957). Effect of internal pressure on flexibility and stress-intensification factors of curved pipe or welding elbows. *Trans. ASMe*, 79(4) :939–948. XXXII

Verboven, P. (2002). Frequency-domain system identification for modal analysis. *Vrije Universiteit Brussel, Brussels*. XVII

Von Kármán, T. (1911). Über den mechanismus des widerstandes, den ein bewegter körper in einer flüssigkeit erfährt. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1911 :509–517. XXXII

Zentner, I., Allain, F., Humbert, N., and Caudron, M. (2014). Generation of spectrum compatible ground motion and its use in regulatory and performance-based seismic analysis. *Target*, 10 :1. IV

Annexe B

Liste des acronymes

1 DDL Oscillateur à 1 degré de liberté –ou *Single degree of freedom*–. 1, 15, 23, 31, 96, 107, 115, 116, 121, 125

ADRS Spectre en format spécial où l'abscisse est le spectre en déplacement et l'ordonnée est celui en accélération –ou *Acceleration Displacement Response Spectrum*–. 23, 40

CSM Méthode du spectre de capacité –ou *Capacity Spectrum Method*–. 35, 37, 40, 55

DDBD Dimensionnement par déplacement direct –ou *Direct Displacement-Based Design*–. 37, 39, 40

DSP Densité Spectrale de Puissance –ou *Power Spectral Density* –. 45, 46, 109, II, IV

IA Intensité d'Arias du signal sismique –ou *Arias intensity*–. 10

PGA Valeur maximale de l'accélération temporelle, ou *Peak Ground Acceleration* en anglais. 7

SD Spectre en déplacement relatif –ou *Relative Displacement*–. 3

SPa Spectre en pseudo- accélération absolue –ou *Absolute Pseudo Acceleration*–. 3

ZPA Valeur du spectre en pseudo- accélération absolue à la période nulle, correspondant à la valeur maximale de l'accélérogramme –ou *Zero Period Acceleration*–. 103, 104

Annexe C

Glossaire

3dB La bande des fréquences -3 décibels (-3dB) autour du pic d'une fonction de transfert est la gamme de fréquences de f_{min} à f_{max} auxquelles la l'amplitude est égale à la moitié du pic. La valeur du gain en décibels est par définition dix fois le logarithme décimal du rapport des puissances. Une division par deux correspond donc à $10\log\frac{1}{2} \approx -3\text{dB}$ .. 76

Module d'un nombre complexe Module d'un nombre complexe $(a+jb)$ est défini par la formule suivante : $\sqrt{a^2+b^2}$. 75

Phénomène de fuite Dans la pratique du traitement du signal, lorsque les fréquences des sinus présents dans le signal initial ne sont pas multiples de la fréquence d'échantillonnage de la transformée de Fourier ($\frac{1}{T}$), alors on assiste au phénomène de fuite - *leackage problem* en anglais. 75

Pushover Méthode de poussée progressive issue dans la procédure statique non-linéaire. Cette méthode consiste à charger la structure en certaines configurations de chargement jusqu'au point de sa rupture.. 3, 23, 28

Système canonique Système à 1 degré de liberté (oscillateur) dont les caractéristiques sont la fréquence et l'amortissement.. 71

Annexe D

Liste des symboles

$g(t)$ Signal d'entrée du type bruit blanc fabriqué à partir de la densité spectrale constante et tronquée G0. II, V

χ Paramètre du modèle "Mixte" représentative du pourcentage des modèles élastoplastique dans l'ensemble des modèles assemblés dans le modèle "Mixte". 18

$D(t)$ Variable d'endommagement temporelle introduite par Mazars [1984]. 17

f_0 Fréquence initiale de l'oscillateur. 45–47, 52

f_{bf} Fréquence du filtre passe-bas. 6

f_c Fréquence centrale du signal sismique. 47, IV

f_{cp} Fréquence du modèle de Clough-Penzien. 6

f_e Fréquence de l'oscillateur élastique linéaire. V, VI

f_{kt} Fréquence du modèle de Kanai-Tajimi. 6

G_0 Densité spectrale constante et tronquée. 5

$G_{CP}(\omega)$ Densité spectrale de Clough-Penzien. 6

$G_{KT}(\omega)$ Densité spectrale de Kanai-Tajimi. 6

$G(\omega)$ Densité spectrale de Clough-Penzien avec filtre passe-bas. 6

μ Ductilité appelée définie par la ratio du maximum en déplacement par rapport au seuil d'élasticité. 24, 25, 27, 38

$q(t)$ Courbe enveloppe α-type. 5, 7, 9

R Facteur de résistance définie par le ratio de la force nécessaire afin de maintenir le comportement élastique par rapport à la celle du seuil d'élasticité. 24, 25

Sa_m Spectre en accélération correspondant au maximum du déplacement. 25

Sa_y Spectre en accélération correspondant au seuil d'élasticité. 25

$\gamma(t)$ Signal d'entrée du type séisme fabriqué dans le chapitre 01 par multiplier le signal temporel $X(t)$ par la courbe d'enveloppe temporelle $q(t)$. 4, 5, 7, II

$X(t)$ Signal d'entrée du type séisme fabriqué dans le chapitre 01 à partir de la densité spectrale Clough-Penzien plus filtre passe-bas. 7

T_n Période naturelle de la structure, autrement dit, période propre. 24, 25

$u_e(t)$ Déplacement élastique temporel dans le modèle élastoplastique. 15

$u_p(t)$ Déplacement du patin ou déplacement plastique temporel dans le modèle élastoplastique. 15

$u(t)$ Déplacement temporel. 15

ξ_0 Amortissement réduit initial de l'oscillateur. 45, 46

ξ_{bf} Amortissement du filtre passe bas. 6

ξ_{cp} Amortissement du modèle de Clough-Penzien. 6

ξ_e Amortissement réduit de l'oscillateur élastique linéaire. V, VI

ξ_{kt} Amortissement du modèle de Kanai-Tajimi. 6