



**HAL**  
open science

# Modélisation de la propagation des ondes électromagnétiques près du sol : application aux réseaux sans fil

Maurício Henrique Bezerra Cardoso

► **To cite this version:**

Maurício Henrique Bezerra Cardoso. Modélisation de la propagation des ondes électromagnétiques près du sol : application aux réseaux sans fil. Electronique. Université Paris-Est, 2017. Français. NNT : 2017PESC1035 . tel-01787107

**HAL Id: tel-01787107**

**<https://theses.hal.science/tel-01787107>**

Submitted on 7 May 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# UNIVERSITE PARIS-EST

Ecole Doctorale Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information  
et de la Communication

## THESE

pour obtenir le grade de

## DOCTEUR de l'Université Paris-Est

Spécialité : Electronique, Optronique et Systèmes (CNU 63)

présentée par :

**Maurício Henrique BEZERRA CARDOSO**

---

## Modélisation de la propagation des ondes électromagnétiques près du sol : application aux réseaux sans fil

---

Dirigée par **M. Jean-Marc LAHEURTE**

Co-dirigée par **M<sup>me</sup> Geneviève BAUDOIN**

Encadrée par **M<sup>me</sup> Shermila MOSTARSHEDI**

Soutenue publiquement le 25 septembre 2017 devant le jury composé de :

M. Philippe DE DONCKER	OPERA – ULB	Rapporteur
M. Marc HELIER	L2E – UPMC	Rapporteur
M. Silvio BARBIN	LCS – USP	Examinateur
M. Julien SARRAZIN	L2E – UPMC	Examinateur
M <sup>me</sup> Shermila MOSTARSHEDI	ESYCOM – UPEM	Encadrante
M <sup>me</sup> Geneviève BAUDOIN	ESYCOM – ESIEE Paris	Co-directrice
M. Jean-Marc LAHEURTE	ESYCOM – UPEM	Directeur



*A ma chère Thayane*



# Remerciements

Tout d'abord, je voudrais remercier tous ceux qui ont contribué pour que ce manuscrit voie la lumière. Ainsi, je dirige mon plus grand remerciement à mon encadrante, M<sup>me</sup> Shermila Mostarshedi, qui s'est largement investie sur la révision de ce manuscrit. Je remercie également mon directeur de thèse, M. Jean-Marc Laheurte, qui a effectué la deuxième relecture et M. Cyril Humbert, qui a effectué la troisième relecture.

Je tiens à remercier particulièrement le travail des deux rapporteurs de ce manuscrit : MM. Philippe De Doncker et Marc Hélier. Je suis très reconnaissant du temps que vous avez consacré à l'évaluation de ce manuscrit et des retours très constructifs dans vos rapports. Nos échanges ont indéniablement amélioré la qualité de ce travail.

Je voudrais aussi remercier ma co-directrice de thèse, M<sup>me</sup> Geneviève Baudoin et les examinateurs de thèse, MM. Julien Sarrazin et Silvio Barbin. Vos retours ont également rendu ce manuscrit plus solide.

Cependant, ce manuscrit n'est que la concrétisation d'un long travail en amont, dont j'ai souvent pensé que je ne verrais jamais la fin. Car au-delà du défi scientifique et technique, cette thèse s'est avérée un grand défi personnel. Les moments de profonde remise en question ont été nombreux, où la motivation n'était pas systématiquement au rendez-vous. Par conséquent, si je suis arrivé jusqu'au bout, c'est parce que j'ai pu compter sur l'aide indispensable de beaucoup de personnes très importantes, à qui je tiens à exprimer ma gratitude.

Premièrement, mes parents, mon frère et mes grand-mères, à qui je dédie toujours mes victoires, car ils m'ont appris l'importance de la connaissance, ils sont la base de toutes mes valeurs et ils me soutiennent dans les projets que j'entreprends. Merci d'accepter la distance et ma conséquente absence dans des moments familiaux importants. C'est toujours pour une bonne cause !

Deuxièmement, les collègues de travail. J'ai une pensée plus spéciale pour les cama-

rades doctorants, avec qui j'ai pu avoir des discussions scientifiques qui me permettaient d'avoir du recul sur mon travail et de le voir avec un regard neuf. C'était aussi avec eux que j'ai pu partager les réussites et les coups durs le long du chemin.

Je tiens à remercier ceux qui étaient très près de moi dans mon bureau, spécialement Hossein, qui a partagé le bureau avec moi pendant les premières années, et Imad et Ayichatou, qui sont arrivés vers la fin. Je voudrais remercier également Pedro et Uğur, même si nos échanges étaient plutôt personnels, votre soutien, surtout vers la fin, m'a été inestimable. Mon merci également à Maíra, qui m'a donné d'importants conseils de doctorante plus expérimentée et a été toujours disponible pour m'aider avec des mesures. Je ne pourrais pas oublier Camila, la première de l'université à m'accueillir les bras ouverts, et Safa. Je me suis toujours senti le bienvenu dans leur bureau. Merci également à tout mon réseau de doctorants et de docteurs, dont les membres ont partagé avec moi au long de cette thèse divers moments importants.

J'exprime aussi ma gratitude au personnel ESYCOM, pour l'accueil au sein du laboratoire. Je tiens à remercier particulièrement Cyrille, qui m'a encadré dans mes missions d'enseignement et m'a progressivement confié de plus en plus de responsabilité. Je voudrais également remercier Benoît qui, même s'il n'est pas mon encadrant, portait un intérêt particulier à mon travail. Je remercie aussi Thierry, la plus grande source inépuisable de bibliographie, pour son regard scientifique sur mon travail et son soutien personnel toujours présent.

Je voudrais également remercier mon directeur et ma co-directrice de thèse, pour l'encadrement et l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux. Nos échanges scientifiques ont été très importants et décisifs pour le bon déroulement de cette thèse. Merci pour la confiance que vous m'avez accordée.

Je tiens à remercier également M<sup>me</sup> Sylvie Cach, de l'école doctorale MSTIC, pour le soutien qu'elle m'a donné pendant une période très difficile de ma thèse.

Troisièmement, les amis. J'ai déjà remercié certains d'entre eux dans les paragraphes précédents, mais je voudrais rappeler tous les autres amis qui m'ont côtoyé, comme ceux de l'école et de l'université. Hélas la vie nous mène vers des chemins différents, mais j'ai toujours une pensée pour vous !

Pour finir, je tiens à remercier profondément trois personnes en particulier :

Thayane, ma chérie. Je suis conscient que mon choix de poursuivre une thèse à

l'étranger n'a pas changé que ma vie, mais aussi la tienne. Je te suis énormément reconnaissant d'avoir décidé de me rejoindre. Tu rends ma vie plus heureuse. Je n'ai eu aucun doute à propos de la dédicace de cette thèse. Elle est vraiment à toi. Je t'aime infiniment.

Shermila, la meilleure encadrante. Simplement, merci beaucoup pour tout. Tes compétences humaines ont été indispensables pour que cette thèse aboutisse. Merci de m'avoir fait confiance même quand ma confiance faisait défaut. Cela a été fondamental pour ma réussite. Merci également de tous les échanges scientifiques et l'encadrement sur les différents moments de la thèse. Je suis ravi que nous ayons pu collaborer et je ne peux qu'espérer que mes prochaines collaborations seront aussi réussies que la nôtre.

Reviewer 2, dont je ne connais pas l'identité. Vos mots durs et perçants, dépourvus de toute relevance scientifique, dont le but était clairement de me faire barrage, ont eu un effet complètement inattendu. Votre tentative ouvertement non dissimulée de me bloquer n'a pas su me démoraliser, mais m'a rendu plus fort et confiant pour vous prouver que je ne suis pas ignorant, que mon travail n'est ni inutile ni impertinent et surtout que non, Madame ou Monsieur, je n'ai jamais rien plagié. Merci de me faire prendre conscience que j'ai une force que je méconnaissais pour surmonter des situations très difficiles et de me faire comprendre que toutes les institutions sont sujettes aux vices des êtres humains, ce à quoi nous devons tous faire face.

A ce point, il ne me reste qu'à rajouter deux petits mots à tout le monde, les deux petits mots que j'ai un immense plaisir à dire :

Muito Obrigado!





*"In short, anyone who told you that you would someday be able to make any significant contribution to Physics played a cruel trick on you, a cruel trick indeed. [...] I weep for the future of Science."*

*"The Cooper–Nowitzki Theorem", *The Big Bang Theory**

*"All games have morals; and the game of Snakes and Ladders captures, as no other activity can hope to do, the eternal truth that for every ladder you climb, a snake is waiting just around the corner; and for every snake, a ladder will compensate. But it's more than that; no mere carrot-and-stick affair; because implicit in the game is the unchanging twoness of things, the duality of up against down, good against evil; the solid rationality of ladders balances the occult sinuosities of the serpent; in the opposition of staircase and cobra we can see, metaphorically, all conceivable oppositions, Alpha against Omega, father against mother; here is the war of Mary and Musa, and the polarities of knees and nose ... but I found, very early in my life, that the game lacked one crucial dimension, that of ambiguity – because, as events are about to show, it is also possible to slither down a ladder and climb to triumph on the venom of a snake..."*

Salman Rushdie, *Midnight's Children* (Picador, London, 1981) p. 141



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Modélisation de la propagation près du sol</b>	<b>9</b>
1.1 Méthode à deux rayons	11
1.2 Comparaison de la méthode à deux rayons avec les approximations de Norton et Bannister	15
1.3 Traitement rigoureux du rayonnement par les fonctions de Green	19
1.3.1 Rayonnement d'un dipôle élémentaire électrique dans un milieu homogène	20
1.3.2 Rayonnement d'un dipôle élémentaire électrique en présence d'une interface plane	24
1.3.2.1 Interface parfaitement conductrice	25
1.3.2.2 Interface diélectrique ou conductrice imparfaite	26
1.3.3 Intégrales de Sommerfeld	29
Conclusion	37
<b>2 Evaluation des intégrales de Sommerfeld</b>	<b>39</b>
2.1 Chemin d'intégration des intégrales de Sommerfeld	41
2.2 Représentation angulaire	44
2.3 Méthode de la plus grande pente	48
2.3.1 Chemin de la plus grande pente	50
2.3.2 Evaluation asymptotique	51
2.3.3 Points de singularité	57
2.4 Evaluation asymptotique du champ $\mathbf{E}_z$ rayonné par un dipôle élémentaire vertical	58

2.4.1	Préparation de l'intégrale à évaluer . . . . .	58
2.4.2	Distorsion du chemin d'intégration . . . . .	60
2.4.3	Points de singularité . . . . .	62
2.4.3.1	Points de ramification . . . . .	62
2.4.3.2	Pôles . . . . .	64
2.4.4	Expression asymptotique du champ . . . . .	70
2.4.5	Validation et analyse . . . . .	72
	Conclusion . . . . .	75
<b>3</b>	<b>Formulation dite « de Schelkunoff »</b>	<b>77</b>
3.1	Méthode de superposition des diffusions . . . . .	79
3.2	Formulation de Sommerfeld . . . . .	80
3.3	Formulation dite « de Schelkunoff » . . . . .	82
3.4	Analyse dans le plan complexe . . . . .	84
3.5	Evaluation asymptotique . . . . .	90
	Conclusion . . . . .	92
<b>4</b>	<b>Conception de liaison près du sol</b>	<b>95</b>
4.1	Condition de la prédominance du pôle . . . . .	96
4.2	Distances Critiques . . . . .	101
4.2.1	Estimation de $\rho_{\min}$ . . . . .	101
4.2.2	Estimation de $\rho_{\text{rupture}}$ . . . . .	103
4.3	Lignes directrices . . . . .	105
4.4	Exemples . . . . .	106
4.5	Vers une démonstration de faisabilité . . . . .	111
4.5.1	Matériaux envisagés . . . . .	112
4.5.2	Caractérisation de la conductivité statique par une mesure à quatre pointes . . . . .	113
4.5.3	Caractérisation radio-fréquence de la conductivité . . . . .	115
4.5.3.1	Caractérisation par une ligne CPW . . . . .	115
4.5.3.2	Caractérisation à l'aide d'un guide d'ondes rectangulaire . . . . .	119
4.5.4	Vers une surface de conductivité réglable . . . . .	124
	Conclusion . . . . .	128

---

<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>129</b>
<b>A Fonctions de Green</b>	<b>135</b>
<b>B Equation d'onde des potentiels</b>	<b>137</b>
<b>C Points et coupures de ramification</b>	<b>141</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>145</b>
<b>Publications</b>	<b>153</b>



# Introduction

L'INTÉRÊT pour la propagation des ondes près du sol s'est initialement développé dans la première décennie du XX<sup>e</sup> siècle. La réussite des expériences de Marconi, qui a été capable d'établir une communication sans fil transatlantique par des ondes électromagnétiques en 1901 [1], a incité la communauté scientifique à comprendre les mécanismes de la propagation d'ondes permettant une telle longue portée.

Une première explication a été délivrée par Zenneck en 1907 [2]. Il a constaté que les équations de Maxwell peuvent décrire une onde dite de surface, qui à présent porte le nom de Zenneck. Cette onde existerait en présence d'une interface entre deux milieux, avec une forte atténuation verticale et une faible atténuation radiale. Ainsi, la plupart de l'énergie se concentrerait près de l'interface. Ce guidage de surface pouvait à l'époque expliquer le succès des expériences de Marconi. Néanmoins, l'excitation de cette onde ou, plus précisément, la présence de cette onde dans le rayonnement dipolaire, n'ont pas fait l'objet d'études par Zenneck [3].

En 1909, Sommerfeld publie son célèbre travail sur le rayonnement d'un dipôle élémentaire au-dessus d'une interface plane [4]. Il a été le premier à communiquer sur une formulation mathématique exacte de ce problème. De plus, son évaluation analytique prévoyait l'excitation d'une onde de surface de Zenneck, appuyant ainsi l'hypothèse du guidage surfacique de l'onde. Par conséquent, cette explication a été retenue pour justifier la longue portée des ondes.

Néanmoins, une décennie après, en 1919, Weyl revisite les calculs de Sommerfeld et constate que l'onde de surface ne peut pas exister [5]. En 1926, Sommerfeld révisé ses calculs et constate que sa première évaluation analytique présentait des erreurs et qu'effectivement l'analyse de Weyl était juste [6]. Dans la même année, Breit et Tuve publient leurs travaux qui démontrent expérimentalement la réflexion des ondes électro-



magnétiques dans l'ionosphère, ce qui devient l'explication acceptée pour la propagation des ondes en longue portée [7].

Cependant, l'intérêt porté aux mécanismes de propagation près du sol ne s'est jamais éteint et a fait l'objet de plusieurs travaux depuis 1930. Par la suite, nous faisons un rappel non-exhaustif des principales communications sur ce sujet.

En 1930, Van der Pol et Niessen évalue le rayonnement d'un dipôle au-dessus d'une interface plane [8]. Leur conclusion valide la solution de Weyl et la deuxième version de la solution de Sommerfeld. Les études de ces auteurs ont servi de base pour les travaux de Norton [9]–[12], dont l'objet était la simplification de la solution de Sommerfeld pour la mettre sous une forme plus pratique à l'usage des ingénieurs radiofréquences. Ces approximations ont connu une forte notoriété, étant jusqu'à présent parmi les plus référencées dans ce domaine. Une autre approximation aussi célèbre apparaît quatre décennies plus tard, publiée par Bannister [13]–[14]. Les résultats de ces deux approximations sont discutés dans le chapitre 1.

Deux autres auteurs clés dans sur ce domaine sont Wait et Baños. Depuis 1951, Wait a étudié le rayonnement au-dessus d'une interface, en le généralisant pour le cas des milieux stratifiés [15]–[18]. Il s'est également intéressé à la propagation au-dessus d'un milieu anisotrope, sujet également étudié par Kong [19]. Baños publie un des principaux ouvrages sur le rayonnement près d'une interface [20] en 1966. Dans sa monographie, Baños évalue le rayonnement d'un dipôle élémentaire arbitraire (électrique ou magnétique, vertical ou horizontal), positionné dans l'air ou intégré dans le deuxième milieu. Dans ce travail, l'auteur s'est limité à des milieux isotropes.

Dans les ouvrages les plus récents, nous citons une révision de la littérature concernant ce problème par Collin en 2004 [21]. Dans ce travail, l'auteur discute quelques controverses et incompréhensions qui persistent dans ce domaine. Un autre auteur très impliqué dans le domaine de la propagation près du sol est Michalski, qui a publié en collaboration avec d'autres auteurs plusieurs articles dans les trois dernières années [22]–[28].

Malgré la diversité des techniques d'évaluation des champs excités par un dipôle au-dessus d'une interface, donnant lieu parfois à des débats et des controverses, tous les travaux sus-mentionnés sont basés sur la solution de Sommerfeld-Weyl. Toutefois, en 2013, W. Dyab *et al.* ont proposé une nouvelle approche au problème, la formulation « dite de Schelkunoff » [29][30]. Le but des auteurs était de délivrer une formulation plus

adaptée à l'analyse numérique, étant donné que le traitement numérique de la solution de Sommerfeld-Weyl est particulièrement ardu. Néanmoins, cette nouvelle formulation a suscité quelques contestations dans la littérature [25][31], contrairement à la solution de Sommerfeld-Weyl, qui depuis 1919 n'a jamais été remise en cause. Une évaluation détaillée de la formulation « dite de Schelkunoff » est présentée dans le chapitre 3.

## Systèmes sans fil fonctionnant près d'une interface

L'engouement pour l'analyse de la propagation près du sol s'est particulièrement accentué dans la dernière décennie au vu du développement de divers systèmes de capteurs dont les antennes doivent être positionnées près du sol ou, de manière plus générale, près d'une interface entre deux milieux. Dans la plupart des cas, les systèmes sont sensés collecter des signaux qui exigent le placement des antennes à proximité du sol ou le déploiement du système impose ce placement dû à des questions d'accessibilité et d'encombrement. Parmi ces systèmes, nous pouvons citer comme exemples :

- **Réseaux BAN (*Body Area Network*)** : ils sont composés de capteurs positionnés sur le corps humain pour des raisons médicales ainsi que pour d'autres applications multimédia [32]. La principale difficulté pour extraire un modèle pour ce système résulte de la complexité des tissus du corps humain [33]. Des modèles analytiques de canal pour le BAN ont été déjà proposés [34]. Les fréquences pour cette application s'échelonnent de quelques centaines de MHz jusqu'à 60 GHz [35].
- **Réseaux UGS (*Unattended Ground Sensors*)** : ils sont composés de différents types de capteurs (acoustique, sismique, électromagnétique), à faible coût et localisés près du sol, pour obtenir des informations pour des applications militaires, dans des zones urbaines ou éloignées dont l'accès peut être contraint ou interdit [36][37]. La principale difficulté pour la modélisation de la propagation de ces réseaux tient à l'irrégularité du sol, soit à petite échelle (rugosité du sol), soit à grande échelle (présence des montées et des descentes) [38]. Il est intéressant de noter que les propriétés du terrain peuvent être complètement inconnues avant le déploiement du système.
- **Surveillance environnementale** : ces réseaux de capteurs sont déployés pour mesurer des caractéristiques importantes du sol, comme l'humidité et l'acidité. Ces

réseaux sont indispensables dans le cadre de l'agriculture de précision (de l'anglais, *precision agriculture*), qui exploite les informations sur les sols agricoles pour une meilleure gestion de ressources [39]. Des modèles de canal ont été déjà proposés pour les forêts [39], les terrains agricoles et les jardins [40].

- **Radar à onde de surface en HF** (de l'anglais, *high frequency surface wave radar - HFSWR*) : ces systèmes sont basés sur la possibilité d'une propagation des ondes de surface à très longue portée au-dessus de l'eau de mer [41] et sont notamment déployés dans la surveillance des zones exclusives économiques [42]. Le principal défi de ces systèmes consiste à supprimer les échos parasites (*clutter*) causés par les vents et les vagues, qui engendrent une rugosité à l'interface de la mer.
- **Plasmon polariton de surface** (de l'anglais, *surface plasmon polariton - SPP*) : ce sont les modes guidés dus à la présence d'une onde de surface à l'interface entre un diélectrique et un métal à des fréquences du spectre visible ou au-delà [43] [44]. Ces ondes intensifient le champ électrique dans des nanostructures métalliques. Les applications des SPP sont nombreuses dans le domaine de l'optique. Pour les métaux à des fréquences de quelques centaines de THz, la permittivité électrique présente une partie réelle négative. Cette propriété engendre une difficulté mathématique supplémentaire dans le traitement des ondes de surface pour cette application.

En fonction des bandes de fréquences de chaque application (du HF au EHF), les antennes sont positionnées tout au plus à quelques mètres du sol et les distances entre les antennes d'émission et de réception varient de quelques centimètres à quelques centaines de kilomètres. Pour toutes ces applications, la proximité des antennes avec l'interface doit être prise en compte pour la modélisation du canal de propagation, autrement les estimations seront erronées et la conception du réseau sera sous-optimale.

Il existe plusieurs études de la modélisation de canal pour les systèmes sans fil près du sol basées sur des mesures. Ces études prennent en compte l'effet des hauteurs et des diagrammes de rayonnement des antennes et l'environnement qui les entoure (comme la végétation [45]). Les canaux ultra large bande *outdoor* [46] et *indoor* [47] ont été également modélisés. Le défaut de ces études et de toute autre étude empirique, est que leurs résultats se limitent uniquement à l'application pour lesquelles elles étaient conçues. Elles s'adaptent rarement à un autre contexte. Par ailleurs, la compréhension des phénomènes physiques de la propagation près du sol est plus difficile à partir d'une

étude empirique. De plus, certains paramètres physiques ne sont pas pris en compte, comme les propriétés électromagnétiques du sol.

Les approches basées sur la physique offrent une meilleure compréhension, mais leur application à un contexte réel impose des hypothèses simplificatrices. Selon plusieurs études récentes [48][49], nous pouvons affirmer catégoriquement que les méthodes basées sur le tracé des rayons ne sont pas suffisantes pour décrire la propagation près du sol. Une discussion plus détaillée est présentée dans le chapitre 1. Toutefois, une analyse rigoureuse qui mène à la manipulation des fonctions de Green sous forme dyadique est trop compliquée pour un ingénieur souhaitant concevoir un système sans fil [50]. Il serait donc souhaitable d'approcher les systèmes sans fil près du sol avec le cas canonique d'un dipôle élémentaire rayonnant au-dessus d'une interface plane et à partir des approximations respectant des contraintes mathématiques et physiques, obtenir des formules simples mais utiles pour les concepteurs de systèmes près du sol.

## Objectifs de l'étude

Cette thèse a été développée au sein du groupe « Antennes et propagation en milieux complexes » du laboratoire ESYCOM. Elle s'inscrit dans le cadre du projet du laboratoire « Systèmes de communication et capteurs pour la ville, l'environnement et la personne », qui combine les compétences sur les systèmes de communication, les capteurs et les microsystèmes.

En dépit d'une vaste littérature sur la propagation près du sol, l'identification des scénarios pour des systèmes sans fil pouvant profiter de la proximité des antennes au sol a fait l'objet de peu de communications. Dans ce contexte, un des objectifs de cette thèse est de délivrer un outil précis et pratique aux ingénieurs des systèmes de communication pour concevoir des liaisons sans fils plus optimales en tirant profit de la propagation près du sol, en choisissant les paramètres physiques convenables, tout en respectant les contraintes imposées par l'application du système.

Pour garantir la précision et assurer la compréhension physique, nous effectuons un calcul rigoureux des fonctions de Green pour le cas canonique d'un dipôle élémentaire rayonnant au-dessus d'une interface plane, selon la formulation de la solution de Sommerfeld-Weyl. Cependant, avec la formulation rigoureuse et une évaluation numé-

rique, l'utilisation de l'outil exigerait la maîtrise des techniques avancées dans ce domaine. Par conséquent, nous optons pour une analyse analytique de ces fonctions par une approche asymptotique (méthode de la plus grande pente). La combinaison de cette technique avec d'autres développements asymptotiques permet de mettre en valeur l'importance de plusieurs paramètres physiques, à savoir, la fréquence de travail, les propriétés électromagnétiques des milieux et les hauteurs des antennes.

Cette thèse présente pour la première fois une condition essentielle pour une propagation près du sol optimale en fonction des paramètres physiques mentionnés. Afin de tirer profit de cette propagation optimale, nous identifions deux distances critiques entre le début et la fin de la zone où l'amélioration de l'affaiblissement de trajet est observable. Les conclusions tirées de l'ensemble de ces trois équations constituent une contribution scientifique importante de cette thèse, car elles aident les ingénieurs de systèmes de communication à ajuster les paramètres imposés par l'application et à régler les autres de manière à optimiser la liaison sans fil.

Un deuxième objectif de cette thèse est de faire une démonstration de faisabilité de l'amélioration d'une liaison sans fil par la proximité des antennes au sol, pour une fréquence de travail de l'ordre de quelques GHz. Pour ce faire, il est nécessaire de couvrir le sol avec un matériau dont les propriétés électromagnétiques conviennent à ce type de propagation d'après les prévisions du modèle théorique. Etant donné que les matériaux classiques pour la couverture du sol ne présentent pas nécessairement de telles propriétés, il faut effectuer des investigations pour la réalisation peu coûteuse d'un matériau convenable.

Dans un axe de recherche parallèle, cette thèse se fixe également comme objectif l'analyse de la nouvelle formulation théorique pour le rayonnement d'un dipôle élémentaire au-dessus d'une interface plane. Cette formulation « dite de Schelkunoff » a suscité des controverses dans la littérature. Le but dans ce manuscrit est d'évaluer les points d'inconsistance soulignés dans la littérature et d'appliquer la méthode de la plus grande pente à cette formulation pour vérifier si les résultats sont compatibles avec ceux de la solution Sommerfeld-Weyl.

## Plan du manuscrit

Ce manuscrit comporte quatre chapitres, structurés de la manière suivante.

Le chapitre 1 présente différentes méthodes d'évaluation du rayonnement d'un dipôle élémentaire au-dessus d'une interface plane : la méthode à deux rayons basée sur l'optique géométrique ainsi que les approximations des fonctions de Green fournies par Norton et par Bannister. Comme les simplifications de ces approximations cachent partiellement la physique de la propagation près du sol, nous calculons les fonctions de Green sous forme d'intégrales de Sommerfeld, en nous inspirant de la théorie des images.

Le chapitre 2 est consacré à l'évaluation analytique des fonctions de Green. Pour atteindre ce but, certains aspects mathématiques des intégrales de Sommerfeld sont discutés et un changement de variable est proposé afin de retrouver une forme facilitant la manipulation mathématique de ces intégrales. Nous présentons en détail ensuite la méthode de la plus grande pente, qui est finalement appliquée aux intégrales de Sommerfeld. Les résultats de la méthode de la plus grande pente sont validés par une comparaison avec les approximations de Norton et de Bannister.

En se basant sur les développements mathématiques du chapitre précédent, le chapitre 3 présente une évaluation détaillée de la formulation « dite de Schelkunoff ». Premièrement elle est comparée avec la formulation classique de Sommerfeld. Ensuite, les points controversés sont identifiés et clarifiés par une analyse dans le plan complexe et par une évaluation asymptotique à la lumière de la méthode de la plus grande pente.

Le chapitre 4 présente la condition essentielle pour que la propagation d'une onde soit améliorée par le placement des antennes près d'une interface. Deux distances importantes pour la propagation près du sol sont également identifiées. Des lignes directrices sur l'amélioration de ce type de propagation ainsi que des exemples concrets sont présentés. Le chapitre se termine par la description des pistes envisagées pour une démonstration de faisabilité de nouvelles hypothèses introduites dans cette thèse.

Trois annexes sur la définition des fonctions de Green, des potentiels vecteur et scalaire et des points et coupures de ramification sont présentés à la fin du manuscrit et sont complémentaires aux deux premiers chapitres.



# Chapitre 1

## Modélisation de la propagation près du sol

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Méthode à deux rayons</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>1.2</b>	<b>Comparaison de la méthode à deux rayons avec les approximations de Norton et Bannister</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>1.3</b>	<b>Traitement rigoureux du rayonnement par les fonctions de Green</b> . . . . .	<b>19</b>
1.3.1	Rayonnement d'un dipôle élémentaire électrique dans un milieu homogène . . . . .	20
1.3.2	Rayonnement d'un dipôle élémentaire électrique en présence d'une interface plane . . . . .	24
1.3.3	Intégrales de Sommerfeld . . . . .	29
	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>37</b>

---



L'OBJECTIF de ce chapitre est de présenter différentes modélisations du rayonnement d'un dipôle élémentaire au-dessus d'une interface plane.

La première modélisation présentée est basée sur la méthode à deux rayons. Cette méthode, inspirée de l'optique géométrique, a l'avantage de la simplicité. Néanmoins, elle ne prend en compte que les composantes directe et réfléchie de l'onde. Cette limitation peut rendre la méthode inadaptée pour la propagation près du sol.

Une manière rigoureuse de traiter le rayonnement d'un dipôle élémentaire au-dessus d'une interface plane est l'analyse par les fonctions de Green. Nous présentons d'abord les fonctions de Green simplifiées, proposées par Norton [9]–[12] et par Bannister [13]–[14]. Ce sont les approximations les plus répandues dans la littérature. La confrontation de ces approximations avec la méthode à deux rayons révèle l'inadéquation de cette dernière pour la modélisation de la propagation près du sol.

Grâce aux approximations appliquées, cette formulation est entièrement analytique et simple à utiliser. Cependant, la simplification rend la compréhension de la physique plus compliquée. De ce fait, nous optons pour le calcul direct des fonctions de Green. Pour ce faire, le rayonnement d'un dipôle dans un milieu homogène est combiné avec la théorie des images. Les fonctions de Green sont finalement présentées sous forme d'intégrales de Sommerfeld.

L'évaluation des fonctions de Green constitue une étape importante. Dans cette thèse, nous avons choisi une évaluation analytique asymptotique. Toutefois, l'outil utilisé, à savoir, la méthode de la plus grande pente, mérite une attention particulière. Ainsi, un deuxième chapitre est dédié au développement de cet outil et à son utilisation pour l'analyse des fonctions de Green présentées dans ce chapitre.

Le présent chapitre est structuré comme suit. Dans la section 1.1, la méthode à deux rayons est présentée et quelques résultats sont discutés. Ensuite, dans la section 1.2, cette méthode est confrontée aux approximations de Norton et Bannister. Finalement, dans la section 1.3, les fonctions de Green sont calculées, en s'inspirant du rayonnement d'un dipôle dans un milieu homogène et de la théorie des images.

## 1.1 Méthode à deux rayons

Cette méthode décrit la propagation de l'onde à l'aide de la technique des rayons, qui consiste à utiliser une approche géométrique simplifiée, supposant que l'onde se comporte comme des rayons de lumière de l'optique classique. Son but est d'estimer l'affaiblissement de trajet entre l'émetteur et le récepteur, en supposant que la liaison se fait par deux composantes principales : l'onde directe en ligne de vue entre l'émetteur et le récepteur et l'onde réfléchie par le sol [51, Sec. 2.3.1]. La figure 1.1 illustre cette méthode. On y voit une interface entre deux milieux semi-infinis, caractérisés par leur perméabilité magnétique ( $\mu$ ) et leur permittivité électrique ( $\hat{\epsilon}$ ). L'accent circonflexe indique que cette valeur peut être complexe pour prendre en compte des pertes diélectriques ou la conductivité électrique ( $\sigma$ ). Généralement, on considère que le premier milieu est l'air. La source et le point d'observation du champ se trouvent dans le premier milieu.

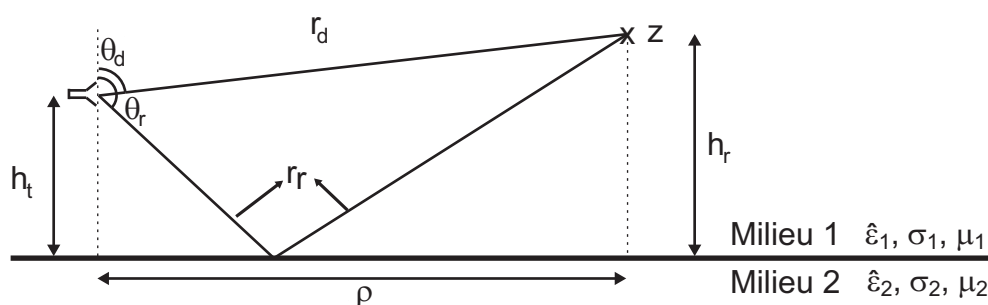


FIGURE 1.1 – Schéma de la méthode à deux rayons.

On sait que la densité de puissance surfacique  $p$  émise par une antenne est donnée par l'expression :

$$p(\theta) = \frac{P_t G_t(\theta)}{4\pi r^2} \quad (1.1)$$

où  $P_t$  est la puissance transmise par l'antenne,  $G_t(\theta)$  est le gain de l'antenne et  $r$  est la distance du point d'observation à l'antenne. En champ lointain, on peut écrire :

$$p(\theta) = \frac{E(\theta)^2}{\eta} \quad (1.2)$$

où  $E(\theta)$  est le module du champ électrique et  $\eta$  est l'impédance du milieu. Ainsi, on peut écrire :

$$E(\theta) = \sqrt{\frac{\eta P_t G_t(\theta)}{4\pi r^2}} = \sqrt{\frac{\eta P_t}{4\pi}} \frac{\sqrt{G_t(\theta)}}{r} \quad (1.3)$$

Sachant que pour une polarisation donnée (TM/parallèle ou TE/perpendiculaire),

les composantes directe et réfléchie de l'onde sont parallèles en champ lointain, il est possible d'écrire le champ total ( $E_{\text{tot}}$ ) par la simple somme scalaire :

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{d}} + E_{\text{r}} \quad (1.4)$$

On suppose que toutes les grandeurs ont une variation temporelle sinusoïdale, représentée par l'exponentielle  $e^{j\omega t}$ , supprimée de toutes les expressions par simplicité. Les composantes directe et réfléchie du champ électrique sont données par :

$$\begin{aligned} E_{\text{d}} &= |E_{\text{d}}|e^{-jkr_{\text{d}}} \\ E_{\text{r}} &= |E_{\text{r}}|e^{-jkr_{\text{r}}} \end{aligned} \quad (1.5)$$

En introduisant les équations 1.5 en 1.4, on obtient :

$$E_{\text{tot}} = (|E_{\text{d}}| + \Gamma|E_{\text{r}}|e^{-jk(r_{\text{r}}-r_{\text{d}})})e^{-jkr_{\text{d}}} \quad (1.6)$$

où on a introduit le coefficient de réflexion  $\Gamma$  complexe qui prend en compte les propriétés électriques et magnétique du milieu 2, ainsi que la polarisation de l'onde excitée (TM/parallèle ou TE/perpendicularaire).

On peut développer l'équation 1.6 en y introduisant l'équation 1.3 :

$$E_{\text{tot}} = \sqrt{\frac{\eta P_{\text{t}}}{4\pi}} \left( \frac{\sqrt{G_{\text{t}}(\theta_{\text{d}})}}{r_{\text{d}}} + \Gamma \frac{\sqrt{G_{\text{t}}(\theta_{\text{r}})}}{r_{\text{r}}} e^{-jk(r_{\text{r}}-r_{\text{d}})} \right) e^{-jkr_{\text{d}}} \quad (1.7)$$

L'équation 1.7 résume la méthode à deux rayons. Cette équation est valable pour tout type d'antenne, sous réserve de connaître son gain. Il est également indispensable de connaître la polarisation (TM/parallèle ou TE/perpendicularaire) de l'onde excitée. Si cette dernière présente des composantes de polarisation différente, il est nécessaire de traiter chaque composante séparément pour ensuite faire un traitement du champ électrique total. Nous rappelons que la méthode à deux rayons ne peut être appliquée dans la zone proche de l'antenne.

Dans ce manuscrit, la méthode décrite dans cette section est appliquée uniquement à un dipôle élémentaire électrique vertical. Cette antenne excite une onde de polarisation TM/parallèle. La puissance  $P_{\text{t}}$  est celle associée à un moment dipolaire unitaire. Nous donnons plus de détails dans la section 1.3.1.

La figure 1.2 présente l'affaiblissement de trajet prévu par cette méthode pour la composante  $E_z$  du champ électrique excité par un dipôle élémentaire électrique vertical rayonnant à 2,4 GHz dans l'air, positionné à 2 m au-dessus d'une surface plane, dont la permittivité électrique relative est égale à 15 et la tangente de pertes est égale à  $10^{-3}$ . La hauteur d'observation est de 1 m.

L'affaiblissement de trajet montré à la figure 1.2 est très représentatif des estimations de la méthode à deux rayons. Il peut être divisé en deux zones. Dans la zone I, le module du champ est oscillatoire, car dans cette zone, les composantes directe et réfléchie de l'onde interagissent de manière constructive et destructive. Dans cette zone, l'enveloppe du champ diminue de 10 dB/déc. Dans la zone II, la composante réfléchie interagit uniquement de manière destructive avec la composante directe, ce qui résulte en un affaiblissement de trajet qui décroît de 20 dB/déc.

La figure 1.3 montre une propagation avec les mêmes paramètres, à l'exception de la nature du deuxième milieu, qui a été remplacé par un conducteur dont la conductivité électrique  $\sigma$  est égale à  $10^7$  S/m. En plus des deux zones décrites dans la figure 1.2, on observe un régime supplémentaire, entre les zones I et II, où les oscillations cessent et

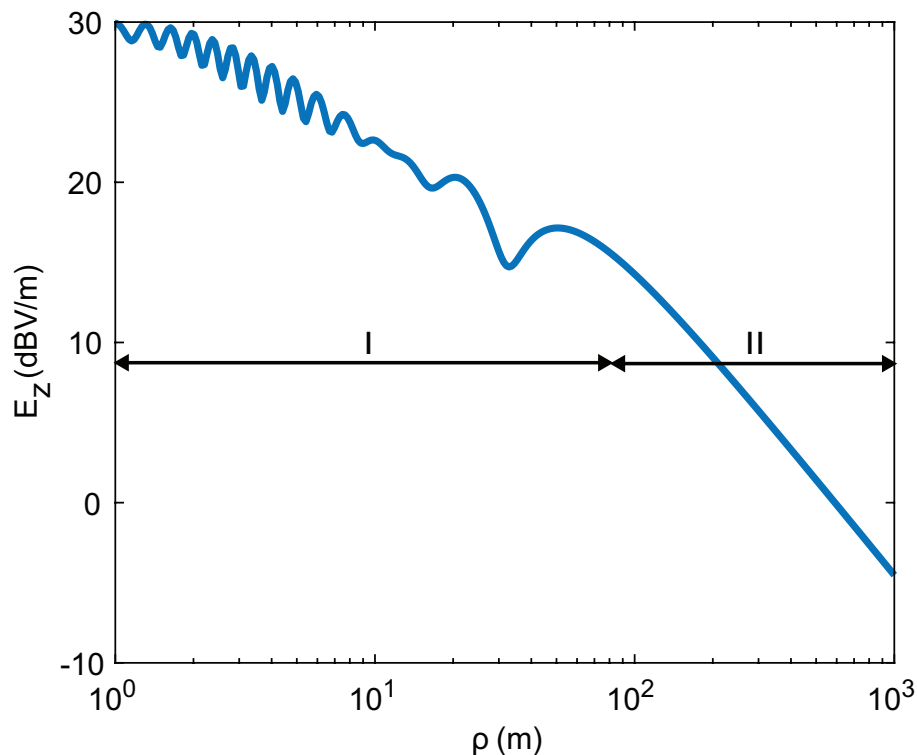


FIGURE 1.2 – Prédiction de la méthode à deux rayons de l'affaiblissement de trajet du champ électrique excité par un dipôle élémentaire électrique vertical rayonnant à 2,4 GHz.  $h_t = 2$  m,  $h_r = 1$  m,  $\varepsilon_{r2} = 15$ ,  $\tan \delta_2 = 10^{-3}$ .

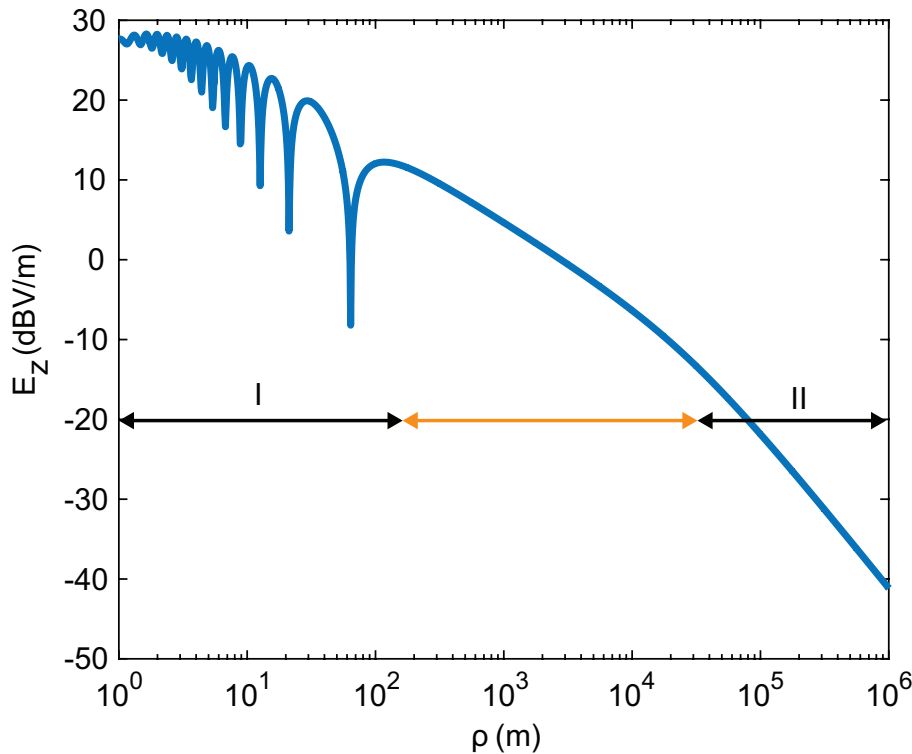


FIGURE 1.3 – Préviation de la méthode à deux rayons de l’affaiblissement de trajet du champ électrique excité par un dipôle élémentaire électrique vertical rayonnant à 2,4 GHz.  $h_t = 2$  m,  $h_r = 1$  m,  $\sigma_2 = 10^7$  S/m.

l’affaiblissement de trajet est de 10 dB/déc. Cette zone est mise en évidence par la flèche orange dans la figure 1.3. Elle n’apparaît que dans le cas où l’interface présente une très grande conductivité. Il est important de souligner que pour les distances trop grandes, comme dans la figure 1.3, la terre ne peut plus être considérée comme plane en raison de sa courbure.

La figure 1.4 illustre un dernier exemple d’estimation de la méthode à deux rayons. Elle montre la composante  $E_z$  du champ électrique excité par un dipôle élémentaire électrique vertical rayonnant à 8,2 GHz, positionné à 10 cm d’une surface plane, dont la conductivité électrique, plutôt modérée, est égale à  $5 \cdot 10^3$  S/m. La hauteur d’observation du champ est de 10 cm. La zone supplémentaire à  $-10$  dB/déc présentée dans la figure 1.3 est absente, car la conductivité du deuxième milieu n’est pas suffisamment élevée.

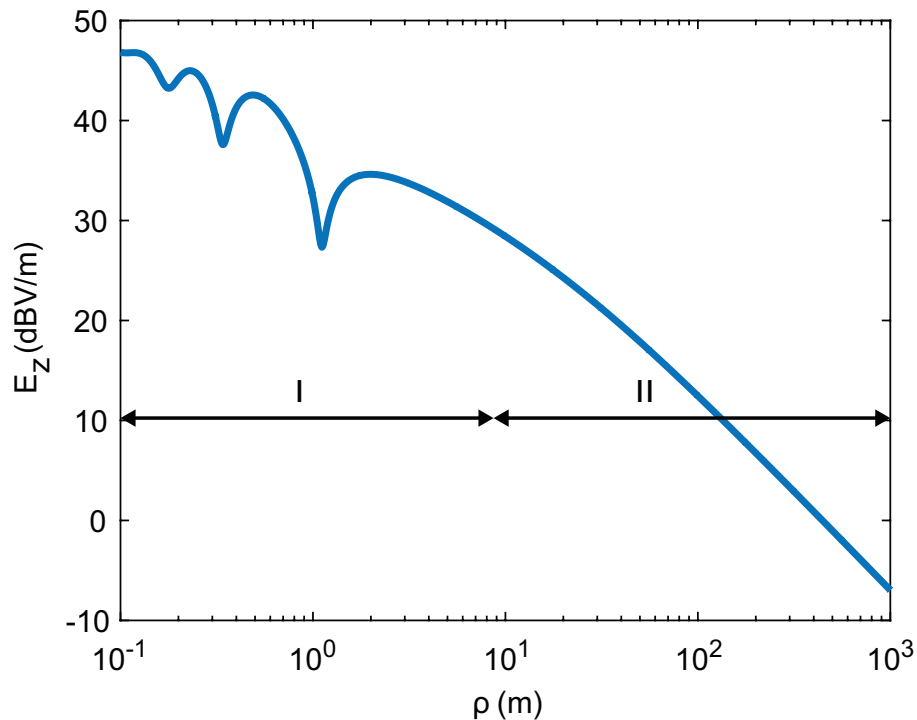


FIGURE 1.4 – Prédiction de la méthode à deux rayons de l’affaiblissement de trajet du champ électrique excité par un dipôle élémentaire électrique vertical rayonnant à 8,2 GHz.  $h_t = 10$  cm,  $h_r = 10$  cm,  $\sigma_2 = 5 \cdot 10^3$  S/m.

## 1.2 Comparaison de la méthode à deux rayons avec les approximations de Norton et Bannister

La description du rayonnement d’un dipôle élémentaire au-dessus d’une interface plane entre deux milieux semi-infinis peut se faire par l’analyse des fonctions de Green. Ces fonctions s’écrivent sous forme d’intégrales de Sommerfeld, dont l’évaluation rigoureuse présente des difficultés mathématiques. Plusieurs études sont dédiées aux expressions analytiques simplifiées pour ces fonctions de Green. Les deux approximations les plus célèbres sont celles fournies par Norton [9]–[12] et Bannister [13]–[14].

Bannister utilise la méthode des images complexes, qui est une déclinaison de la théorie des images traditionnelle (détaillée dans la section 1.3.2.1), en éliminant l’interface et en la remplaçant par une antenne à une distance complexe  $d$ . Cette distance ne possède pas un sens physique, elle n’est qu’un outil mathématique pour éliminer l’interface. Bannister impose une seule condition qui est celle d’avoir le carré de la valeur absolue

de l'indice de réfraction  $n$ , défini par :

$$n^2 = \frac{\hat{\epsilon}_{r2}}{\hat{\epsilon}_{r1}} \quad (1.8)$$

supérieur à 10. Les équations sont assez générales, le choix du type de dipôle élémentaire (vertical ou horizontal, électrique ou magnétique) et les points d'émission et d'observation (au-dessus ou sur le sol) est arbitraire. En revanche, dans la décomposition spatiale des champs, Bannister ne distingue pas les composantes directe, réfléchie et de surface.

Norton a validé ses approximations des intégrales de Sommerfeld par des données obtenues expérimentalement. Ses équations sont également assez générales et permettent tous les choix (dipôle horizontal ou vertical, électrique ou magnétique, émission et réception positionnées au sol ou surélevées). La seule condition imposée est sur la distance entre l'émission et l'observation. En effet, elles doivent être séparées de quelques longueurs d'onde. Nous avons adopté une distance minimale de réception de dix longueurs d'onde. Contrairement à Bannister, Norton sépare chaque composante de champ en partie directe, réfléchie et de surface.

Les figures 1.5 à 1.7 reprennent les mêmes cadres que ceux des figures 1.2 à 1.4. Ainsi, il est possible de comparer les résultats de la méthode à deux rayons avec les approximations de Norton et Bannister. Dans ces figures, les courbes bleues en trait plein représentent les réponses de la méthode à deux rayons, les courbes noires en trait pointillé représentent la réponse de l'approximation de Bannister et les courbes vertes en trait pointillé représentent la réponse de l'approximation de Norton. Nous notons que le niveau initial de champ a été normalisé par rapport aux résultats de la méthode à deux rayons, pour faciliter la comparaison des allures.

Pour le premier exemple (figure 1.5), nous remarquons que les résultats de la méthode à deux rayons et les approximations de Norton et de Bannister coïncident.

Pour le deuxième exemple (figure 1.6), dans la zone I, le champ électrique prévu par les trois méthodes coïncide. Cependant, il y a un très grand écart entre les résultats pour de grandes distances. En effet, la zone sans oscillations décroissant de 10 dB/déc estimée par les approximations de Norton et de Bannister (mise en évidence par la flèche orange) s'étend à des distances supérieures à celles prévues par la méthode à deux rayons.

Pour le troisième exemple (figure 1.7), on observe que les trois méthodes prévoient le même champ électrique pour la zone I. En revanche, les approximations de Norton et

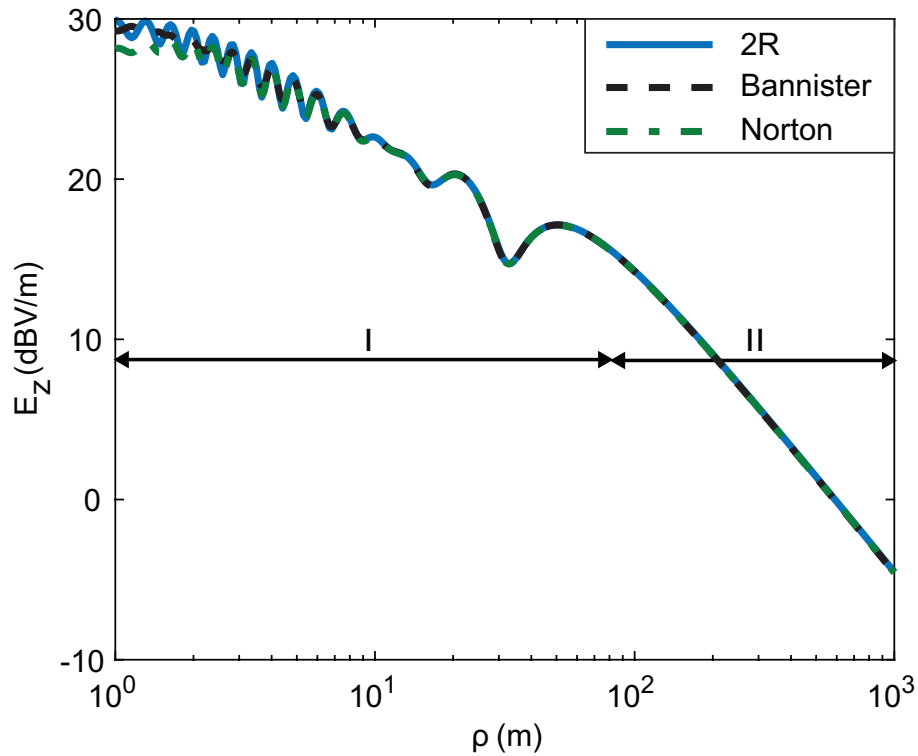


FIGURE 1.5 – Comparaison des approximations de Norton et de Bannister avec la méthode à deux rayons (2R), dans les mêmes conditions qu’à la figure 1.2 ( $f = 2,4$  GHz,  $h_t = 2$  m,  $h_r = 1$  m,  $\epsilon_{r_2} = 15$ ,  $\tan \delta_2 = 10^{-3}$ ).

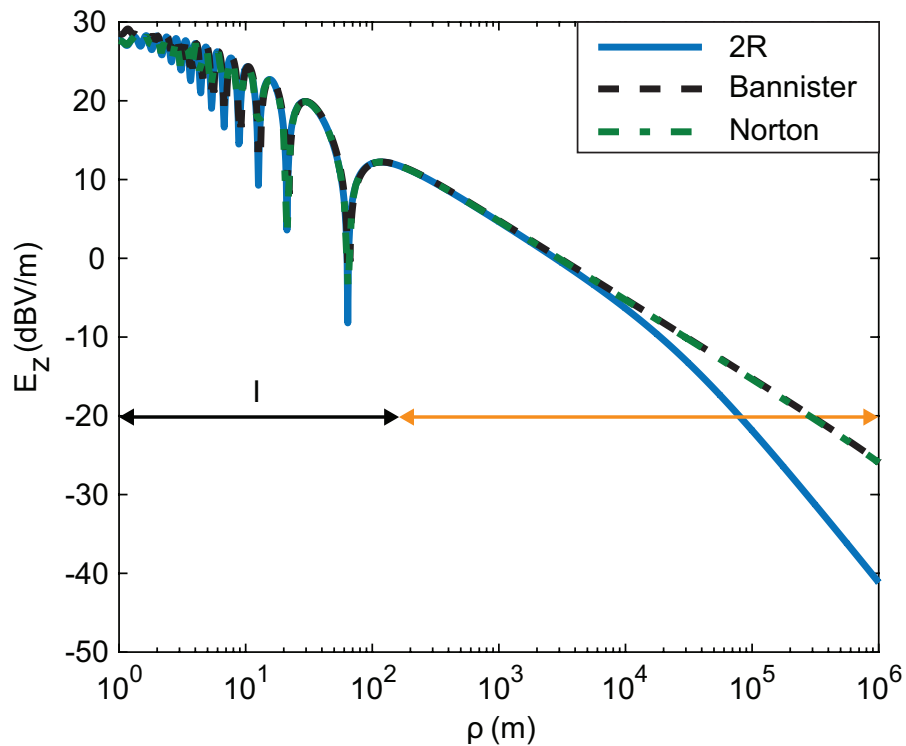


FIGURE 1.6 – Comparaison des approximations de Norton et de Bannister avec la méthode à deux rayons (2R), dans les mêmes conditions qu’à la figure 1.3 ( $f = 2,4$  GHz,  $h_t = 2$  m,  $h_r = 1$  m,  $\sigma_2 = 10^7$  S/m).



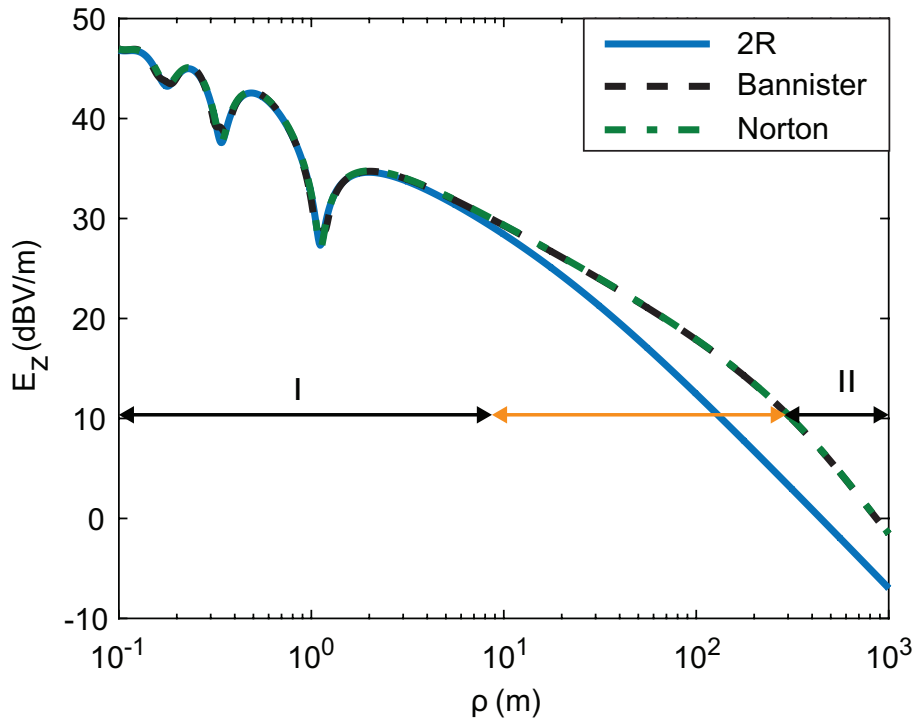


FIGURE 1.7 – Comparaison des approximations de Norton et de Bannister avec la méthode à deux rayons (2R), dans les mêmes conditions qu'à la figure 1.4 ( $f = 8,2$  GHz,  $h_t = 10$  cm,  $h_r = 10$  cm,  $\sigma_2 = 5 \cdot 10^3$  S/m).

de Bannister prévoient une zone sans oscillations dont l'affaiblissement de trajet est de 10 dBV/déc (mise en évidence en orange). Cette zone n'est pas prévue par la méthode à deux rayons. Elle se présente à des distance entre une dizaine et une centaine de mètres.

Ces trois exemples synthétisent la comparaison entre la méthode à deux rayons et les approximations de Norton et de Bannister. De manière générale, il est possible d'affirmer que ces trois méthodes coïncident si le contraste de l'indice de réfraction entre les deux milieux n'est pas élevé, comme c'est le cas de pour figure 1.5. Toutefois, si ce contraste augmente, soit par une très forte permittivité réelle ( $|\hat{\epsilon}_r| \gg 100$ ), soit par une conductivité (qui peut être modérée et de l'ordre de  $10^3$  S/m à  $10^4$  S/m), la méthode à deux rayons donne des résultats différents. En effet, les approximations de Norton et de Bannister prévoient une zone avec un affaiblissement de trajet moins important. L'apparition de cette zone peut être prévue par la méthode à deux rayons pour le cas de très forte conductivité, mais les approximations de Norton et de Bannister estiment qu'elle s'étend à des distances plus importantes. L'étude paramétrique des approximations permet de déduire que la hauteur des antennes joue un rôle très important pour l'apparition de cette zone. Positionner l'antenne d'émission ainsi que le point d'observation plus près de l'interface

favorise l'apparition de cette zone.

La comparaison de ces méthodes montre qu'un affaiblissement de trajet moins important est réalisable en jouant sur la qualité du sol et sur la hauteur des deux antennes. Il serait désormais souhaitable de trouver les conditions favorisant la propagation de l'onde près du sol afin d'avoir un meilleur bilan de liaison sans fils. Bien que les expressions analytiques de Norton et de Bannister facilitent l'étude paramétrique de la propagation d'ondes près d'une interface, l'analyse de l'origine physique de la nouvelle composante de surface n'est pas explicite. Par conséquent, une analyse plus rigoureuse s'impose.

### 1.3 Traitement rigoureux du rayonnement par les fonctions de Green

Afin de mieux maîtriser le phénomène physique de la propagation d'onde près d'une interface et mieux connaître les paramètres influant le bilan de liaison, nous analysons les fonctions de Green à l'origine des approximations de Norton et de Bannister. L'annexe A propose un bref rappel de la définition mathématique des fonctions de Green.

Dans le cadre du rayonnement des antennes, le sens physique des fonctions de Green est le rayonnement d'un dipôle élémentaire, puisque celui-ci est une représentation physique fictive d'une excitation impulsionnelle telle que la fonction delta de Dirac.

L'importance de bien maîtriser ce rayonnement est qu'en théorie, il est possible de déduire le rayonnement de n'importe quelle autre antenne, à condition de connaître sa répartition de courant. En pratique, la tâche demeure compliquée pour des difficultés mathématiques (liées à une intégrale de convolution, voir annexe A) et surtout physique (le courant imposé par l'antenne n'est pas toujours connu). Néanmoins, le rayonnement du dipôle élémentaire peut ouvrir des pistes pour l'évaluation physique de la propagation.

Le rayonnement d'un dipôle élémentaire est mathématiquement décrit par l'équation de Helmholtz. Soit un dipôle électrique élémentaire, positionné à l'origine, dont le courant est dirigé selon  $\hat{\mathbf{a}}_z$ . L'équation à résoudre est :

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\delta(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{a}}_z \quad (1.9)$$

où  $\mathbf{A}$  est le potentiel vecteur magnétique. Dans ce manuscrit, les grandeurs vectorielles

sont identifiées en gras. Un rappel sur la définition des potentiels scalaire et vecteur est donné dans l'annexe B. Dans ce manuscrit, nous utilisons la définition du potentiel vecteur magnétique proposé par Harrington [52, Ch. 3],  $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ , selon l'équation B.5, qui diffère légèrement de la définition  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  habituellement utilisée dans la littérature.

D'après l'équation 1.9, le système d'équations à résoudre est :

$$\nabla^2 A_x + k^2 A_x = 0 \quad (1.10a)$$

$$\nabla^2 A_y + k^2 A_y = 0 \quad (1.10b)$$

$$\nabla^2 A_z + k^2 A_z = -\delta(r) \quad (1.10c)$$

Nous nous intéressons dans un premier temps au rayonnement d'un dipôle élémentaire dans un milieu homogène. Cette première analyse prépare les bases pour le calcul du rayonnement d'un dipôle élémentaire en présence d'une interface plane.

### 1.3.1 Rayonnement d'un dipôle élémentaire électrique dans un milieu homogène

La seule condition à appliquer aux composantes du champ dans un milieu homogène est la *condition de rayonnement de Sommerfeld* [53, Sec. 28]. Il faut que l'onde soit sortante de l'antenne (« *les sources doivent être des sources, pas des puits d'énergie* », selon Sommerfeld [53, p. 189]) et que l'énergie tende vers zéro à de grandes distances.

Etant donné la symétrie sphérique liée à la taille ponctuelle de la source, l'équation 1.10c n'a pas de dépendance en  $\theta$  et  $\varphi$  et peut donc s'écrire :

$$\frac{d^2 A_z}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dA_z}{dr} + k^2 A_z = \delta(r) \quad (1.11)$$

Pour  $r \neq 0$ , l'équation devient homogène :

$$\frac{d^2 A_z}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dA_z}{dr} + k^2 A_z = 0 \quad (1.12)$$

La solution générale de 1.12 est de la forme :

$$A_z = C_1 \frac{e^{-jkr}}{r} + C_2 \frac{e^{jkr}}{r} \quad (1.13)$$

L'hypothèse d'une onde sortante de l'antenne impose  $C_2 = 0$ . La forme de la solution respecte ainsi la condition aux limites imposée à l'énergie. L'intégrale du terme 1.10c sur le volume d'une sphère centrée à l'origine et de rayon  $\epsilon$  qui tend vers zéro permet de déterminer  $C_1 = \frac{1}{4\pi}$ . La solution complète est :

$$A_z = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \quad (1.14)$$

Le théorème d'unicité nous garantit que cette solution, respectant toutes les conditions aux limites imposées, est unique. Par conséquent, les solutions triviales  $A_x = 0$  et  $A_y = 0$  sont suffisantes pour les équations 1.10a et 1.10b. La solution complète sous forme vectorielle s'écrit donc :

$$\mathbf{A} = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \hat{\mathbf{a}}_z \quad (1.15)$$

Si l'orientation du dipôle change, une simple rotation des coordonnées spatiales permet de retrouver la solution. Le potentiel vecteur magnétique d'un dipôle dont le courant est dirigé selon  $\hat{\mathbf{a}}_\xi$  devient donc :

$$\mathbf{A} = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \hat{\mathbf{a}}_\xi \quad (1.16)$$

Le potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$  excité par une antenne filaire selon  $\hat{\mathbf{a}}_z$  de petite taille  $\Delta\ell$ , dont le courant  $I$  peut être considéré constant tout au long de sa longueur, est donné par l'expression 1.15 multipliée par  $I\Delta\ell$ . Ce terme est connu comme *moment dipolaire*. Dans ce texte, il est toujours fixé à l'unité.

On peut résoudre le même problème par la méthode de la transformée de Fourier, qui permet d'écrire la solution du potentiel sous une forme convenant mieux à une interprétation physique et plus adaptée au cas d'un milieu hétérogène. Nous rappelons d'abord quelques définitions mathématiques. La transformée de Fourier en deux dimensions d'une fonction  $g(x, y)$  est la fonction  $\tilde{g}(k_x, k_y)$ , définie par :

$$\tilde{g}(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) e^{j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (1.17)$$

Il est possible de retrouver la fonction originale à partir de la transformée inverse

par la relation suivante :

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(k_x, k_y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (1.18)$$

Nous avons choisi une définition différente de celle usuellement trouvée dans la littérature vis-à-vis du signe de  $j$  dans la transformée et de la présence du terme  $\frac{1}{2\pi}$ . Le premier choix se justifie par rapport au sens de la propagation d'onde dans la convention temporelle choisie. La préférence pour faire apparaître le terme  $\frac{1}{2\pi}$  met en évidence la symétrie de la transformée avec son inverse.

Une propriété intéressante de la transformée de Fourier est la simplification de la dérivée. En effet, si on analyse 1.18, on remarque que les dérivées partielles de  $g$  par rapport à  $x$  et à  $y$  sont remplacées par une simple multiplication par  $-jk_x$  ou  $-jk_y$  dans le domaine de la transformée. Ainsi, il est possible de réduire la dimension de l'équation 1.10c, avec la transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} \left(-k_x^2 - k_y^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \tilde{A}_z + k^2 \tilde{A}_z &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\delta(y)\delta(z) e^{j(k_x x + k_y y)} dx dy \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_z^2\right) \tilde{A}_z &= -\frac{1}{2\pi} \delta(z) \end{aligned} \quad (1.19)$$

où  $k_z^2 = k^2 - k_x^2 - k_y^2$ . L'équation 1.19 peut s'écrire partout, sauf en  $z = 0$  :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_z^2\right) \tilde{A}_z = 0 \quad (1.20)$$

La solution générale est alors de la forme :

$$\tilde{A}_z = c_1 e^{-jk_z |z|} + c_2 e^{jk_z |z|} \quad (1.21)$$

où nous avons introduit la valeur absolue de  $z$  pour garantir l'apparition d'une fonction de Dirac pour la dérivée du deuxième ordre.

La solution est une onde sortante de l'antenne, on pose alors  $c_2 = 0$ . Il faut aussi choisir une valeur convenable pour  $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$ . Les conditions imposées à  $k_z$  sont :  $\Re\{k_z\} \geq 0$  et  $\Im\{k_z\} \leq 0$  simultanément. Pour trouver  $c_1$ , on calcule l'intégrale de 1.19 sur l'axe  $z$  de  $-\epsilon$  à  $\epsilon$  et on fait tendre  $\epsilon$  vers zéro. On trouve donc  $c_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2jk_z}$ . La solution

s'écrit :

$$\tilde{A}_z = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2jk_z} e^{-jk_z|z|} \quad (1.22)$$

Pour trouver la valeur de  $A_z$ , on se sert de l'équation 1.18 :

$$A_z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j(k_x x + k_y y + k_z |z|)}}{4\pi j k_z} dk_x dk_y \quad (1.23)$$

En changeant le système de coordonnées cartésiennes  $((x, y)$  et  $(k_x, k_y)$ ) en coordonnées cylindriques  $((\rho, \varphi)$  et  $(k_\rho, k_\varphi)$ ) [54], on obtient :

$$\begin{aligned} A_z &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-jk_z|z|}}{jk_z} \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} e^{-j(k_\rho \rho \cos(\varphi - k_\varphi))} dk_\varphi}_{=J_0(k_\rho \rho)} k_\rho dk_\rho \\ A_z &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{k_\rho}{jk_z} J_0(k_\rho \rho) e^{-jk_z|z|} dk_\rho \end{aligned} \quad (1.24)$$

où  $J_0(\cdot)$  est la fonction de Bessel du premier type d'ordre 0 et les conditions imposées à  $k_z$  demeurent les mêmes.

L'équation 1.24 peut être vue comme la transformée inverse de Hankel de la fonction  $\frac{e^{-jk_z|z|}}{jk_z}$ . La transformée de Hankel d'ordre 0 d'une fonction  $g(\rho)$ , écrite comme  $\tilde{g}(k_\rho)$ , et son inverse se définissent par :

$$\tilde{g}(k_\rho) = \int_0^{+\infty} g(\rho) J_0(k_\rho \rho) \rho d\rho \quad (1.25)$$

$$g(\rho) = \int_0^{+\infty} \tilde{g}(k_\rho) J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \quad (1.26)$$

La transformée de Hankel peut être vue comme la transformée de Fourier en deux dimensions d'une fonction  $g(x, y)$  présentant une symétrie axiale. Elle s'écrit comme une fonction de  $\rho$  indépendante de  $\varphi$ . En effet, les équations 1.17 et 1.25 sont identiques avec ces conditions, ainsi que les équations 1.18 et 1.26.

L'équation 1.24 respecte toutes les conditions pour être la solution de 1.10c. En effet, il s'agit d'une onde sortante de l'antenne, car l'équation 1.24 est la somme des ondes cylindriques stationnaires (représentées par la fonction de Bessel) pondérées par des ondes planes (représentées par la fonction exponentielle), qui se propagent vers l'extérieur de l'antenne. De plus, l'intégrale tend bien vers zéro si  $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$  tend vers l'infini (condition de rayonnement). Le théorème d'unicité garantit alors l'égalité des équations

1.14, 1.23 et 1.24 :

$$\frac{e^{-jkr}}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j(k_x x + k_y y + k_z |z|)}}{jk_z} dk_x dk_y \quad (1.27)$$

$$\frac{e^{-jkr}}{r} = \int_0^{+\infty} \frac{k_\rho}{jk_z} J_0(k_\rho \rho) e^{-jk_z |z|} dk_\rho \quad (1.28)$$

où  $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} = \sqrt{k^2 - k_\rho^2}$ ,  $\Re\{k_z\} \geq 0$  et  $\Im\{k_z\} \leq 0$ .

Les équations 1.27 et 1.28 sont connues respectivement comme l'*identité de Weyl* [55] et l'*identité de Sommerfeld* [53]. D'un point de vue mathématique, elles présentent la transformée de Fourier en deux dimensions et la transformée de Hankel d'ordre 0 de la fonction  $\frac{e^{-jkr}}{r}$ . Elles offrent également des interprétations physiques différentes à la fonction  $\frac{e^{-jkr}}{r}$ , qui décrit une onde sphérique. L'identité de Weyl montre qu'une onde sphérique peut être vue comme la somme d'ondes planes dans toutes les directions, y compris des ondes évanescentes. L'identité de Sommerfeld montre que l'onde sphérique est la somme d'ondes cylindriques stationnaires pondérées par des ondes planes se propageant le long de l'axe  $z$ , en s'éloignant de l'origine.

### 1.3.2 Rayonnement d'un dipôle élémentaire électrique en présence d'une interface plane

Dans cette section nous traitons la propagation d'un dipôle électrique au-dessus d'une interface parfaitement plane. Le dipôle est positionné à l'origine et l'interface se situe à  $z = -z_0$ . Les deux milieux sont caractérisés par  $\varepsilon_i, \mu_i$  et  $\sigma_i$ , où l'indice  $i$  désigne le milieu 1 (où se trouve l'antenne) ou 2.

Pour ce problème, des conditions aux limites supplémentaires s'ajoutent. Soient  $E_t$  et  $H_t$  les composantes tangentielles des champs électrique et magnétique à l'interface et  $E_n$  et  $H_n$  leurs composantes normales à l'interface. A l'exception d'une interface parfaitement conductrice, les équations de Maxwell imposent que les composantes  $E_t, \hat{\varepsilon}E_n, H_t$  et  $\mu H_t$  soient continues à l'interface. Pour le cas d'une interface parfaitement conductrice, la présence de charges et de courants surfaciques permettent une discontinuité des composantes  $H_t$  et  $\hat{\varepsilon}E_n$  [56, Sec. 1.5].

### 1.3.2.1 Interface parfaitement conductrice

Nous analysons tout d'abord le cas particulier d'une interface plane parfaitement conductrice. Cela signifie que  $\sigma_2$  tend vers l'infini. Pour ce cas, nous utilisons la théorie des images, illustrée par la figure 1.8.

De manière générale, il s'agit de remplacer l'interface par une image de l'antenne, positionnée symétriquement par rapport à l'interface. Pour le dipôle électrique vertical, son image a la même polarisation que l'antenne d'origine. Pour le dipôle électrique horizontal, l'image présente une inversion de polarisation. Cette substitution n'est valable que pour les champs du premier milieu. Le champ électrique dans le milieu parfaitement conducteur est nul. Le potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$  pour les dipôles électriques vertical et horizontal (selon  $\hat{\mathbf{a}}_x$ ), d'après la théorie des images, est présenté dans le Tableau 1.1.

Nous pouvons démontrer que cette solution est exacte. Pour cela, il faut démontrer que la solution vérifie l'équation d'onde et respecte les conditions aux limites imposées. Le Tableau 1.2 montre la transformée de Fourier en deux dimensions de la solution donnée par la théorie des images. Le Tableau 1.3 résume les composantes des champs électrique et magnétique liées à ces potentiels, données par les équations B.5, B.8 et B.11.

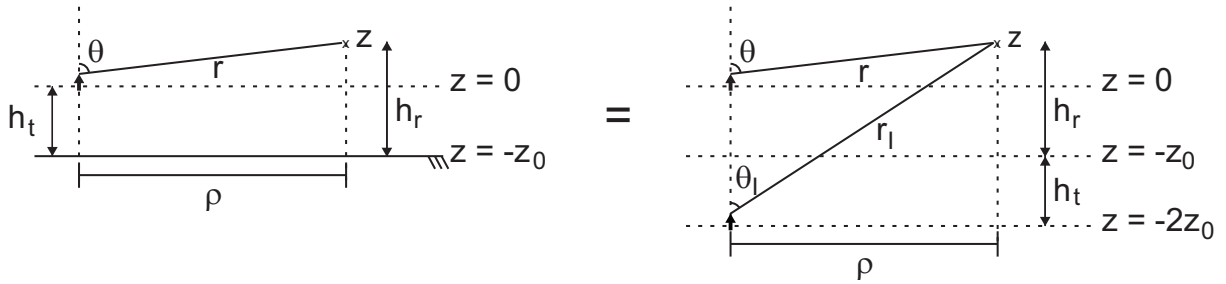


FIGURE 1.8 – Théorie des images : la surface parfaitement conductrice est remplacée par une image de l'antenne, positionnée symétriquement par rapport à l'interface.

TABLEAU 1.1 – potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$  pour un dipôle électrique rayonnant au-dessus d'un plan métallique parfaitement conducteur.

Dipôle Vertical (selon $\hat{\mathbf{a}}_z$ )	Dipôle Horizontal (selon $\hat{\mathbf{a}}_x$ )
$A_{z_1} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{e^{-jk_1 r}}{r} + \frac{e^{-jk_1 r_I}}{r_I} \right)$	$A_{x_1} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{e^{-jk_1 r}}{r} - \frac{e^{-jk_1 r_I}}{r_I} \right)$
$A_{z_2} = 0$	$A_{x_2} = 0$
$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad r_I = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 2z_0)^2}$	



TABLEAU 1.2 – Transformée de Fourier du potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$  pour un dipôle électrique rayonnant au-dessus d'un plan métallique parfaitement conducteur.

Dipôle Vertical	Dipôle Horizontal
$\tilde{A}_{z_1} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{e^{-jk_{z_1} z }}{jk_{z_1}} + \frac{e^{-jk_{z_1} z+2z_0 }}{jk_{z_1}} \right)$	$\tilde{A}_{x_1} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{e^{-jk_{z_1} z }}{jk_{z_1}} - \frac{e^{-jk_{z_1} z+2z_0 }}{jk_{z_1}} \right)$
$\tilde{A}_{z_2} = 0$	$\tilde{A}_{x_2} = 0$

TABLEAU 1.3 – transformée de Fourier des composantes des champs électrique et magnétique d'un dipôle électrique.

Dipôle Vertical		Dipôle Horizontal	
$\tilde{E}_x = jk_x \tilde{V}$	$\tilde{H}_x = -jk_y \tilde{A}_z$	$\tilde{E}_x = -j\omega\mu \tilde{A}_x + jk_x \tilde{V}$	$\tilde{H}_x = 0$
$\tilde{E}_y = jk_y \tilde{V}$	$\tilde{H}_y = jk_x \tilde{A}_z$	$\tilde{E}_y = jk_y \tilde{V}$	$\tilde{H}_y = \frac{\partial \tilde{A}_x}{\partial z}$
$\tilde{E}_z = -j\omega\mu \tilde{A}_z - \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z}$	$\tilde{H}_z = 0$	$\tilde{E}_z = -\frac{\partial \tilde{V}}{\partial z}$	$\tilde{H}_z = jk_y \tilde{A}_x$
$\tilde{V} = -\frac{1}{j\omega\hat{\epsilon}} \frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial z}$		$\tilde{V} = \frac{1}{j\omega\hat{\epsilon}} jk_x \tilde{A}_x$	

### 1.3.2.2 Interface diélectrique ou conductrice imparfaite

La théorie des images ne peut être utilisée que dans le cas où l'interface est parfaitement conductrice. Néanmoins, il est possible de s'en inspirer pour trouver la solution dans le cas d'une interface diélectrique ou présentant une conductivité finie [57]. L'idée consiste à pondérer le poids de l'image. Il est cependant nécessaire de considérer également la partie transmise dans le deuxième milieu. Nous analysons le cas de chaque dipôle électrique.

- **Dipôle électrique vertical**

Pour faciliter les calculs, nous utilisons la transformée de Fourier du potentiel vecteur

magnétique  $\mathbf{A}$ . Nous supposons une solution sous forme :

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{z_1} &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{e^{-jk_{z_1}|z|}}{jk_{z_1}} + R_{\text{ev}} \frac{e^{-jk_{z_1}(z+2z_0)}}{jk_{z_1}} \right) \\ \tilde{A}_{z_2} &= \frac{1}{4\pi} T_{\text{ev}} e^{jk_{z_2}z}\end{aligned}\quad (1.29)$$

avec  $k_{zi} = \sqrt{k_i^2 - k_x^2 - k_y^2}$ ,  $i = 1, 2$ . Les constantes  $R_{\text{ev}}$  et  $T_{\text{ev}}$  peuvent être interprétées comme des coefficients de réflexion et transmission du dipôle électrique vertical. Nous avons supprimé le module du terme  $z + 2z_0$ , car dans le milieu 1,  $z > -z_0$ , donc  $|z + 2z_0| = z + 2z_0$ . La forme de  $\tilde{A}_{z_2}$  ne suit pas celle de  $\tilde{A}_{z_1}$ , car dans le milieu 2 l'équation d'onde devient homogène, puisque la source de courant est dans le milieu 1. Le choix du signe de l'exponentielle est dû au fait que l'onde dans le milieu 2 se propage vers  $-\hat{\mathbf{a}}_z$ . Les potentiels scalaires de chaque milieu s'écrivent (voir Tableau 1.3) :

$$\tilde{V}_1 = \frac{1}{4\pi j\omega\hat{\epsilon}_1} (\text{sgn}(z)e^{-jk_{z_1}|z|} + R_{\text{ev}}e^{-jk_{z_1}(z+2z_0)}) \quad \tilde{V}_2 = -\frac{jk_{z_2}}{4\pi j\omega\hat{\epsilon}_2} T_{\text{ev}} e^{jk_{z_2}z} \quad (1.30)$$

A l'aide du Tableau 1.3, les composantes des champs sont calculées et présentées dans le Tableau 1.4. Nous remarquons que les constantes de propagation  $k_x$  et  $k_y$  sont identiques dans les deux milieux, étant donné l'adaptation de phase (*phase matching*) imposée par les conditions aux limites [56, Sec. 7.1].

Afin de calculer les coefficients  $R_{\text{ev}}$  et  $T_{\text{ev}}$ , les conditions aux limites sont impo-

TABLEAU 1.4 – Composantes des champs électrique et magnétique excités par un dipôle électrique vertical élémentaire au-dessus d'une interface plane.

Premier milieu	Deuxième milieu
$\tilde{E}_{x_1} = \frac{jk_x}{4\pi j\omega\hat{\epsilon}_1} (\text{sgn}(z)e^{-jk_{z_1} z } + R_{\text{ev}}e^{-jk_{z_1}(z+2z_0)})$	$\tilde{E}_{x_2} = \frac{-jk_x jk_{z_2}}{4\pi j\omega\hat{\epsilon}_2} T_{\text{ev}} e^{jk_{z_2}z}$
$\tilde{E}_{y_1} = \frac{jk_y}{4\pi j\omega\hat{\epsilon}_1} (\text{sgn}(z)e^{-jk_{z_1} z } + R_{\text{ev}}e^{-jk_{z_1}(z+2z_0)})$	$\tilde{E}_{y_2} = \frac{-jk_y jk_{z_2}}{4\pi j\omega\hat{\epsilon}_2} T_{\text{ev}} e^{jk_{z_2}z}$
$\tilde{E}_{z_1} = \frac{k_\rho^2}{4\pi j\omega\hat{\epsilon}_1} \left( \frac{e^{-jk_{z_1} z }}{jk_{z_1}} + R_{\text{ev}} \frac{e^{-jk_{z_1}(z+2z_0)}}{jk_{z_1}} \right)$	$\tilde{E}_{z_2} = \frac{k_\rho^2}{4\pi j\omega\hat{\epsilon}_2} T_{\text{ev}} e^{jk_{z_2}z}$
$\tilde{H}_{x_1} = \frac{-jk_y}{4\pi} \left( \frac{e^{-jk_{z_1} z }}{jk_{z_1}} + R_{\text{ev}} \frac{e^{-jk_{z_1}(z+2z_0)}}{jk_{z_1}} \right)$	$\tilde{H}_{x_2} = \frac{-jk_y}{4\pi} T_{\text{ev}} e^{jk_{z_2}z}$
$\tilde{H}_{y_1} = \frac{jk_x}{4\pi} \left( \frac{e^{-jk_{z_1} z }}{jk_{z_1}} + R_{\text{ev}} \frac{e^{-jk_{z_1}(z+2z_0)}}{jk_{z_1}} \right)$	$\tilde{H}_{y_2} = \frac{jk_x}{4\pi} T_{\text{ev}} e^{jk_{z_2}z}$
$\tilde{H}_{z_1} = 0$	$\tilde{H}_{z_2} = 0$

sées à chaque composante du champ. Pour que les composantes tangentielles des champs électrique et magnétique soient continues en  $z = -z_0$ , il faut :

$$\begin{cases} \frac{1}{\hat{\varepsilon}_1} (-1 + R_{\text{ev}}) e^{-jk_{z_1} z_0} &= -\frac{jk_{z_2}}{\hat{\varepsilon}_2} T_{\text{ev}} e^{-jk_{z_2} z_0} \\ (1 + R_{\text{ev}}) \frac{e^{-jk_{z_1} z_0}}{jk_{z_1}} &= T_{\text{ev}} e^{-jk_{z_2} z_0} \end{cases} \quad (1.31)$$

Ce système d'équations nous permet de trouver les expressions suivantes :

$$R_{\text{ev}} = \frac{\hat{\varepsilon}_2 jk_{z_1} - \hat{\varepsilon}_1 jk_{z_2}}{\hat{\varepsilon}_2 jk_{z_1} + \hat{\varepsilon}_1 jk_{z_2}} \quad T_{\text{ev}} = \frac{2\hat{\varepsilon}_2}{\hat{\varepsilon}_2 jk_{z_1} + \hat{\varepsilon}_1 jk_{z_2}} e^{-jk_{z_1} z_0 + jk_{z_2} z_0} \quad (1.32)$$

### • Dipôle électrique horizontal

La démarche pour trouver la solution du dipôle horizontal est similaire. Cependant, il est impossible de satisfaire les conditions aux limites avec une seule composante du potentiel vecteur magnétique. En analysant le Tableau 1.3, nous observons d'une part que pour la continuité de  $\tilde{E}_y$ , il faut que  $\tilde{V}$  soit continu. Cela implique que  $\frac{\tilde{A}_x}{\hat{\varepsilon}}$  soit continu. D'autre part, pour la continuité de  $E_x$ , il faut que  $\tilde{A}_x$  soit continu. Cette contradiction nous oblige à rajouter une nouvelle composante. En suivant la démarche de Sommerfeld [53, Sec. 33], nous choisissons les composantes  $\tilde{A}_x$  et  $\tilde{A}_z$ . Nous supposons alors une solution de la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{x_1} &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{e^{-jk_{z_1}|z|}}{jk_{z_1}} + R_{\text{eh}} \frac{e^{-jk_{z_1}(z+2z_0)}}{jk_{z_1}} \right) & \tilde{A}_{z_1} &= \frac{1}{4\pi} C_a e^{-jk_{z_1} z} \\ \tilde{A}_{x_2} &= \frac{1}{4\pi} T_{\text{eh}} e^{jk_{z_2} z} & \tilde{A}_{z_2} &= \frac{1}{4\pi} C_b e^{jk_{z_2} z} \end{aligned} \quad (1.33)$$

Etant donné qu'il n'y a pas de courant selon  $\hat{\mathbf{a}}_z$ , l'équation d'onde devient homogène pour la composante  $z$ . Par conséquent, la forme de  $\tilde{A}_{z_i}$  devient similaire à celle de  $\tilde{A}_{x_2}$ .  $R_{\text{eh}}$  et  $T_{\text{eh}}$  peuvent être interprétés comme des coefficients de réflexion et de transmission du dipôle électrique horizontal.  $C_a$  et  $C_b$  sont des constantes dont les valeurs se calculent par les conditions aux limites. Le choix du signe des exponentielles dépend de la direction de propagation. Le potentiel scalaire dans chaque milieu est donné par l'équation B.11 :

$$\tilde{V}_i = \frac{1}{j\omega\hat{\varepsilon}_i} \left( jk_x \tilde{A}_{x_i} - \frac{\partial \tilde{A}_{z_i}}{\partial z} \right)$$

$$\tilde{V}_1 = \frac{1}{4\pi j\omega\hat{\epsilon}_1} \left( jk_x \left( \frac{e^{-jk_{z_1}|z|}}{jk_{z_1}} + R_{\text{eh}} \frac{e^{-jk_{z_1}(z+2z_0)}}{jk_{z_1}} \right) + jk_{z_1} C_a e^{-jk_{z_1}z} \right) \quad (1.34)$$

$$\tilde{V}_2 = \frac{1}{4\pi j\omega\hat{\epsilon}_2} (jk_x T_{\text{eh}} - jk_{z_2} C_b) e^{jk_{z_2}z} \quad (1.35)$$

A l'aide des équations B.5 et B.8, il est possible de calculer toutes les composantes des champs électrique et magnétique. Le résultat est présenté dans le Tableau 1.5.

Pour trouver les valeurs de  $R_{\text{eh}}$ ,  $T_{\text{eh}}$ ,  $C_a$  et  $C_b$ , il faut imposer les conditions aux limites. En  $z = -z_0$ , les composantes tangentielles des champs électrique et magnétique sont continues. Il faut alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\hat{\epsilon}_1} \left( (k_1^2 - k_x^2) (1 + R_{\text{eh}}) \frac{e^{-jk_{z_1}z_0}}{jk_{z_1}} + jk_x jk_{z_1} C_a e^{jk_{z_1}z_0} \right) = \frac{1}{\hat{\epsilon}_2} \left( (k_2^2 - k_x^2) T_{\text{eh}} - jk_x jk_{z_2} C_b \right) \cdot e^{-jk_{z_2}z_0} \\ \frac{1}{\hat{\epsilon}_1} \left( jk_x (1 + R_{\text{eh}}) \frac{e^{-jk_{z_1}z_0}}{jk_{z_1}} + jk_{z_1} C_a e^{jk_{z_1}z_0} \right) = \frac{1}{\hat{\epsilon}_2} (jk_x T_{\text{eh}} - jk_{z_2} C_b) e^{-jk_{z_2}z_0} \\ C_a e^{jk_{z_1}z_0} = C_b e^{-jk_{z_2}z_0} \\ (1 - R_{\text{eh}}) e^{-jk_{z_1}z_0} + jk_x C_a e^{jk_{z_1}z_0} = (jk_{z_2} T_{\text{eh}} + jk_x C_b) e^{-jk_{z_2}z_0} \end{array} \right. \quad (1.36)$$

A partir de ce système d'équations, les expressions suivantes sont obtenues :

$$\begin{aligned} R_{\text{eh}} &= \frac{jk_{z_1} - jk_{z_2}}{jk_{z_1} + jk_{z_2}} & T_{\text{eh}} &= \frac{2}{jk_{z_1} + jk_{z_2}} e^{-jk_{z_1}z_0 + jk_{z_2}z_0} \\ C_a &= 2jk_x \frac{\hat{\epsilon}_1 - \hat{\epsilon}_2}{\hat{\epsilon}_2 jk_{z_1} + \hat{\epsilon}_1 jk_{z_2}} \frac{1}{jk_{z_1} + jk_{z_2}} e^{-j2k_{z_1}z_0} \\ C_b &= 2jk_x \frac{\hat{\epsilon}_1 - \hat{\epsilon}_2}{\hat{\epsilon}_2 jk_{z_1} + \hat{\epsilon}_1 jk_{z_2}} \frac{1}{jk_{z_1} + jk_{z_2}} e^{-jk_{z_1}z_0 + jk_{z_2}z_0} \end{aligned} \quad (1.37)$$

### 1.3.3 Intégrales de Sommerfeld

Nous avons présenté les solutions pour le rayonnement d'un dipôle électrique élémentaire au-dessus d'une interface plane sous forme de transformée de Fourier. Pour retrouver la solution spatiale du problème, il suffit d'appliquer la transformée inverse de Fourier (équation 1.18). Comme démontré précédemment, la transformée de Fourier d'une fonction à symétrie axiale devient identique à la transformée de Hankel d'ordre 0 (équation 1.25). L'identité suivante est valable pour la fonction de Bessel :

$$J_0(k_\rho \rho) = \frac{1}{2} \left[ H_0^{(1)}(k_\rho \rho) + H_0^{(2)}(k_\rho \rho) \right] \quad (1.38)$$

TABLEAU 1.5 – Composantes des champs électrique et magnétique rayonnés par un dipôle électrique horizontal élémentaire au-dessus d'une interface plane.

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_x &= -j\omega\mu\tilde{A}_x + jk_x\tilde{V} & \tilde{H}_x &= -jk_y\tilde{A}_z \\
\tilde{E}_y &= jk_y\tilde{V} & \tilde{H}_y &= \frac{\partial\tilde{A}_x}{\partial z} + jk_x\tilde{A}_z \\
\tilde{E}_z &= -j\omega\mu\tilde{A}_z - \frac{\partial\tilde{V}}{\partial z} & \tilde{H}_z &= jk_y\tilde{A}_x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_{x_1} &= \frac{1}{4\pi j\omega\hat{\epsilon}_1} \left( (k_1^2 - k_x^2) \left( \frac{e^{-jk_{z_1}|z|}}{jk_{z_1}} + R_{\text{eh}} \frac{e^{-jk_{z_1}(z+2z_0)}}{jk_{z_1}} \right) + jk_x jk_{z_1} C_a e^{-jk_{z_1}z} \right) \\
\tilde{E}_{y_1} &= \frac{jk_y}{4\pi j\omega\hat{\epsilon}_1} \left( jk_x \left( \frac{e^{-jk_{z_1}|z|}}{jk_{z_1}} + R_{\text{eh}} \frac{e^{-jk_{z_1}(z+2z_0)}}{jk_{z_1}} \right) + jk_{z_1} C_a e^{-jk_{z_1}z} \right) \\
\tilde{E}_{z_1} &= \frac{1}{4\pi j\omega\hat{\epsilon}_1} \left( jk_x (\text{sgn}(z)e^{-jk_{z_1}|z|} + R_{\text{eh}} e^{-jk_{z_1}(z+2z_0)}) + k_\rho^2 C_a e^{-jk_{z_1}z} \right) \\
\tilde{H}_{x_1} &= -\frac{jk_y}{4\pi} C_a e^{-jk_{z_1}z} \\
\tilde{H}_{y_1} &= \frac{1}{4\pi} \left( -\text{sgn}(z)e^{-jk_{z_1}|z|} - R_{\text{eh}} e^{-jk_{z_1}(z+2z_0)} + jk_x C_a e^{-jk_{z_1}z} \right) \\
\tilde{H}_{z_1} &= \frac{jk_y}{4\pi} \left( \frac{e^{-jk_{z_1}|z|}}{jk_{z_1}} + R_{\text{eh}} \frac{e^{-jk_{z_1}(z+2z_0)}}{jk_{z_1}} \right) \\
\tilde{E}_{x_2} &= \frac{1}{4\pi j\omega\hat{\epsilon}_2} \left( (k_2^2 - k_x^2) T_{\text{eh}} - jk_x jk_{z_2} C_b \right) e^{jk_{z_2}z} \\
\tilde{E}_{y_2} &= \frac{jk_y}{4\pi j\omega\hat{\epsilon}_2} \left( jk_x T_{\text{eh}} - jk_{z_2} C_b \right) e^{jk_{z_2}z} \\
\tilde{E}_{z_2} &= \frac{1}{4\pi j\omega\hat{\epsilon}_2} \left( -jk_x jk_{z_2} T_{\text{eh}} + k_\rho^2 C_b \right) e^{jk_{z_2}z} \\
\tilde{H}_{x_2} &= -\frac{jk_y}{4\pi} C_b e^{jk_{z_2}z} \\
\tilde{H}_{y_2} &= \frac{1}{4\pi} \left( jk_{z_2} T_{\text{eh}} + jk_x C_b \right) e^{jk_{z_2}z} \\
\tilde{H}_{z_2} &= \frac{jk_y}{4\pi} T_{\text{eh}} e^{jk_{z_2}z}
\end{aligned}$$

où  $H_0^{(n)}(\cdot)$  est la fonction de Hankel de  $n$ ème espèce ( $n = 1, 2$ ) d'ordre zero. L'interprétation physique de l'équation 1.38 permet de conclure que l'onde cylindrique stationnaire (représentée par la fonction  $J_0(\cdot)$ ) peut être présentée comme la somme de deux ondes cylindriques progressives dans les deux sens ( $H_0^{(1)}(\cdot)$  décrit l'onde entrante et  $H_0^{(2)}(\cdot)$  l'onde sortante). Nous pouvons réécrire l'équation 1.26 :

$$g(\rho) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \tilde{g}(k_\rho) \left[ H_0^{(1)}(k_\rho \rho) + H_0^{(2)}(k_\rho \rho) \right] k_\rho dk_\rho$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{+\infty} \tilde{g}(k_\rho) H_0^{(1)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho + \int_0^{+\infty} \tilde{g}(k_\rho) H_0^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right] \quad (1.39)$$

Sachant que :

$$H_0^{(1)}(-k_\rho \rho) = -H_0^{(2)}(k_\rho \rho) \quad (1.40)$$

l'équation 1.39 peut être réécrite en faisant une substitution de variable :

$$\begin{aligned} g(\rho) &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{-\infty} \tilde{g}(-k_\rho) H_0^{(1)}(-k_\rho \rho) (-k_\rho) (-dk_\rho) + \int_0^{+\infty} \tilde{g}(k_\rho) H_0^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ - \int_0^{-\infty} \tilde{g}(-k_\rho) H_0^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho + \int_0^{+\infty} \tilde{g}(k_\rho) H_0^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right] \end{aligned} \quad (1.41)$$

Pour une fonction paire  $\tilde{g}(-k_\rho) = \tilde{g}(k_\rho)$ , nous pouvons développer l'équation 1.41 :

$$\begin{aligned} g(\rho) &= \frac{1}{2} \left[ - \int_0^{-\infty} \tilde{g}(k_\rho) H_0^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho + \int_0^{+\infty} \tilde{g}(k_\rho) H_0^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_{-\infty}^0 \tilde{g}(k_\rho) H_0^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho + \int_0^{+\infty} \tilde{g}(k_\rho) H_0^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(k_\rho) H_0^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \end{aligned} \quad (1.42)$$

L'équation 1.42 résume le calcul de la transformée de Fourier inverse  $g(\rho)$  d'une fonction à symétrie axiale dont la transformée de Hankel est paire. Il est important de noter que le chemin d'intégration de l'équation 1.42 n'est plus l'axe réel, comme c'est le cas de la transformée de Fourier, en raison de l'introduction de la fonction de Hankel. Les détails sont présentés dans le chapitre 2, section 2.1.

Il est possible de réécrire l'identité de Sommerfeld (équation 1.28) en utilisant l'équation 1.42 :

$$\frac{e^{-jkr}}{r} = -\frac{j}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_\rho}{k_z} H_0^{(2)}(k_\rho \rho) e^{-jk_z|z|} dk_\rho \quad (1.43)$$

L'interprétation physique de l'équation 1.43 nous permet de conclure que l'onde sphérique peut être vue comme la somme des ondes cylindriques progressives (représentées par la fonction  $H_0^{(2)}(\cdot)$ ) pondérées par des ondes planes. L'identité de Sommerfeld telle qu'elle est présentée dans l'équation 1.43 diffère de la forme présentée par son auteur, notamment sur le signe de l'exponentielle et l'espèce de la fonction de Hankel, car Sommerfeld a adopté une convention temporelle différente de celle choisie dans ce texte.

L'équation 1.42 est un exemple d'une intégrale de Sommerfeld, qui peut se présenter

d'une manière plus générale sous forme :

$$S_n[\tilde{g}(k_\rho)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(k_\rho) H_n^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho^{n+1} dk_\rho \quad (1.44)$$

En introduisant la notation de l'intégrale de Sommerfeld, nous pouvons réécrire l'équation 1.42 :

$$g(\rho) = \frac{1}{2} S_0[\tilde{g}(k_\rho)] \quad (1.45)$$

Le but de cette section est de réécrire les champs électrique et magnétique d'un dipôle électrique rayonnant au-dessus d'une interface plane sous forme d'intégrale de Sommerfeld. Cette forme facilite l'analyse des champs à l'aide de la méthode de la plus grande pente, décrite dans le chapitre 2. Pour ce faire, il faut que les composantes du champ aient une symétrie axiale et qu'elles soient paires par rapport à  $k_\rho$ . L'examen des Tableaux 1.4 et 1.5 confirme que cette dernière condition est bien remplie. Cependant, certaines composantes ne présentent pas de symétrie axiale. Néanmoins, ces composantes présentent une partie avec une symétrie axiale qui peut être mise en évidence. Cela permet d'écrire ces composantes sous forme d'intégrales de Sommerfeld.

Soit une fonction  $f = f(x, y)$  sans symétrie axiale et  $g = g(x, y) = g(\rho)$  avec une symétrie axiale. Supposons que la relation entre leurs transformées de Fourier prenne une des quatre formes suivantes :

$$\tilde{f}(k_x, k_y) = \begin{cases} -jk_x \cdot \tilde{g}(k_\rho) \\ -jk_y \cdot \tilde{g}(k_\rho) \\ (-jk_x)(-jk_y) \cdot \tilde{g}(k_\rho) \\ -k_x^2 \cdot \tilde{g}(k_\rho) \end{cases} \quad (1.46)$$

Il est alors possible de retrouver  $f$  :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} g(\rho) \\ \frac{\partial}{\partial y} g(\rho) \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g(\rho) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(\rho) \end{cases} = \begin{cases} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} g(\rho) \\ \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} g(\rho) \\ \cos \varphi \sin \varphi \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) g(\rho) \\ \left( \sin^2 \varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) g(\rho) \end{cases} \quad (1.47)$$

Pour écrire  $f$  sous forme d'intégrale de Sommerfeld, il faut donc connaître la dérivée de  $g$  par rapport à  $\rho$ . On sait que :

$$\frac{\partial}{\partial \rho} H_0^{(2)}(k_\rho \rho) = -H_1^{(2)}(k_\rho \rho) \cdot k_\rho \quad (1.48)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} H_1^{(2)}(k_\rho \rho) = H_0^{(2)}(k_\rho \rho) \cdot k_\rho - \frac{H_1^{(2)}(k_\rho \rho)}{\rho} \quad (1.49)$$

Les dérivées de  $g$  peuvent alors s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} g(\rho) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} S_0[\tilde{g}(k_\rho)] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(k_\rho) H_0^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \right) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(k_\rho) H_1^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho^2 dk_\rho \\ &= -\frac{1}{2} S_1[\tilde{g}(k_\rho)] \end{aligned} \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} g(\rho) &= \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} g(\rho) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} S_1[\tilde{g}(k_\rho)] = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(k_\rho) H_1^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho^2 dk_\rho \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(k_\rho) H_0^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho^3 dk_\rho - \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(k_\rho) H_1^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho^2 dk_\rho \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left( S_0[k_\rho^2 \tilde{g}(k_\rho)] - \frac{1}{\rho} S_1[\tilde{g}(k_\rho)] \right) \end{aligned} \quad (1.51)$$

Nous pouvons réécrire l'équation 1.47 :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} g(\rho) \\ \frac{\partial}{\partial y} g(\rho) \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g(\rho) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(\rho) \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \cos \varphi S_1[\tilde{g}(k_\rho)] \\ -\frac{1}{2} \sin \varphi S_1[\tilde{g}(k_\rho)] \\ -\frac{1}{2} \cos \varphi \sin \varphi \left( S_0[k_\rho^2 \tilde{g}(k_\rho)] - \frac{2}{\rho} S_1[\tilde{g}(k_\rho)] \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \cos^2 \varphi S_0[k_\rho^2 \tilde{g}(k_\rho)] - \cos(2\varphi) \frac{1}{\rho} S_1[\tilde{g}(k_\rho)] \right) \end{cases} \quad (1.52)$$

Nous disposons de toutes les informations nécessaires pour écrire les composantes des champs présentées dans les Tableaux 1.4 et 1.5 sous forme d'intégrales de Sommerfeld. Le résultat est présenté dans les Tableaux 1.6 à 1.8 [58, Ch. 14].



TABLEAU 1.6 – Composantes des champs électrique et magnétique rayonnés par un dipôle électrique vertical élémentaire au-dessus d'une interface plane sous forme d'intégrales de Sommerfeld.

---


$$\begin{aligned}
E_{x_1} &= \frac{\cos \varphi}{8\pi j\omega \hat{\epsilon}_1} S_1 \left[ \operatorname{sgn}(z) e^{-jk_{z_1}|z|} + \frac{\hat{\epsilon}_2 j k_{z_1} - \hat{\epsilon}_1 j k_{z_2}}{\hat{\epsilon}_2 j k_{z_1} + \hat{\epsilon}_1 j k_{z_2}} e^{-jk_{z_1}(z+2z_0)} \right] \\
E_{y_1} &= \frac{\sin \varphi}{8\pi j\omega \hat{\epsilon}_1} S_1 \left[ \operatorname{sgn}(z) e^{-jk_{z_1}|z|} + \frac{\hat{\epsilon}_2 j k_{z_1} - \hat{\epsilon}_1 j k_{z_2}}{\hat{\epsilon}_2 j k_{z_1} + \hat{\epsilon}_1 j k_{z_2}} e^{-jk_{z_1}(z+2z_0)} \right] \\
E_{z_1} &= \frac{1}{8\pi j\omega \hat{\epsilon}_1} S_0 \left[ k_\rho^2 \left( \frac{e^{-jk_{z_1}|z|}}{jk_{z_1}} + \frac{\hat{\epsilon}_2 j k_{z_1} - \hat{\epsilon}_1 j k_{z_2}}{\hat{\epsilon}_2 j k_{z_1} + \hat{\epsilon}_1 j k_{z_2}} \frac{e^{-jk_{z_1}(z+2z_0)}}{jk_{z_1}} \right) \right] \\
H_{x_1} &= -\frac{\sin \varphi}{8\pi} S_1 \left[ \frac{e^{-jk_{z_1}|z|}}{jk_{z_1}} + \frac{\hat{\epsilon}_2 j k_{z_1} - \hat{\epsilon}_1 j k_{z_2}}{\hat{\epsilon}_2 j k_{z_1} + \hat{\epsilon}_1 j k_{z_2}} \frac{e^{-jk_{z_1}(z+2z_0)}}{jk_{z_1}} \right] \\
H_{y_1} &= \frac{\cos \varphi}{8\pi} S_1 \left[ \frac{e^{-jk_{z_1}|z|}}{jk_{z_1}} + \frac{\hat{\epsilon}_2 j k_{z_1} - \hat{\epsilon}_1 j k_{z_2}}{\hat{\epsilon}_2 j k_{z_1} + \hat{\epsilon}_1 j k_{z_2}} \frac{e^{-jk_{z_1}(z+2z_0)}}{jk_{z_1}} \right] \\
H_{z_1} &= 0 \\
\\
E_{x_2} &= -\frac{\cos \varphi}{4\pi j\omega} S_1 \left[ \frac{jk_{z_2}}{\hat{\epsilon}_2 j k_{z_1} + \hat{\epsilon}_1 j k_{z_2}} e^{jk_{z_2}(z+z_0)} e^{-jk_{z_1}z_0} \right] \\
E_{y_2} &= -\frac{\sin \varphi}{4\pi j\omega} S_1 \left[ \frac{jk_{z_2}}{\hat{\epsilon}_2 j k_{z_1} + \hat{\epsilon}_1 j k_{z_2}} e^{jk_{z_2}(z+z_0)} e^{-jk_{z_1}z_0} \right] \\
E_{z_2} &= -\frac{1}{4\pi j\omega} S_0 \left[ \frac{k_\rho^2}{\hat{\epsilon}_2 j k_{z_1} + \hat{\epsilon}_1 j k_{z_2}} e^{jk_{z_2}(z+z_0)} e^{-jk_{z_1}z_0} \right] \\
H_{x_2} &= -\sin \varphi \frac{\hat{\epsilon}_2}{4\pi} S_1 \left[ \frac{e^{jk_{z_2}(z+z_0)} e^{-jk_{z_1}z_0}}{\hat{\epsilon}_2 j k_{z_1} + \hat{\epsilon}_1 j k_{z_2}} \right] \\
H_{y_2} &= \cos \varphi \frac{\hat{\epsilon}_2}{4\pi} S_1 \left[ \frac{e^{jk_{z_2}(z+z_0)} e^{-jk_{z_1}z_0}}{\hat{\epsilon}_2 j k_{z_1} + \hat{\epsilon}_1 j k_{z_2}} \right] \\
H_{z_2} &= 0
\end{aligned}$$


---

TABLEAU 1.7 – Composantes des champs électrique et magnétique rayonnés par un dipôle électrique horizontal élémentaire au-dessus d'une interface plane sous forme d'intégrales de Sommerfeld (milieu 1).

$$\begin{aligned}
E_{x_1} &= \frac{1}{8\pi j\omega\hat{\epsilon}_1} \left( S_0 \left[ k_1^2 \left( \frac{e^{-jk_{z_1}|z|}}{jk_{z_1}} + \frac{jk_{z_1} - jk_{z_2}}{jk_{z_1} + jk_{z_2}} \frac{e^{-jk_{z_1}(z+2z_0)}}{jk_{z_1}} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \cos^2 \varphi S_0 \left[ k_\rho^2 \left( \left[ \frac{jk_{z_1} - jk_{z_2}}{jk_{z_1}} + 2jk_{z_1} \frac{\hat{\epsilon}_1 - \hat{\epsilon}_2}{\hat{\epsilon}_2 jk_{z_1} + \hat{\epsilon}_1 jk_{z_2}} \right] \frac{e^{-jk_{z_1}(z+2z_0)}}{jk_{z_1} + jk_{z_2}} + \frac{e^{-jk_{z_1}|z|}}{jk_{z_1}} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \cos(2\varphi) \frac{1}{\rho} S_1 \left[ \left( \frac{jk_{z_1} - jk_{z_2}}{jk_{z_1}} + 2jk_{z_1} \frac{\hat{\epsilon}_1 - \hat{\epsilon}_2}{\hat{\epsilon}_2 jk_{z_1} + \hat{\epsilon}_1 jk_{z_2}} \right) \frac{e^{-jk_{z_1}(z+2z_0)}}{jk_{z_1} + jk_{z_2}} + \frac{e^{-jk_{z_1}|z|}}{jk_{z_1}} \right] \right) \\
E_{y_1} &= -\frac{\cos \varphi \sin \varphi}{8\pi j\omega\hat{\epsilon}_1} \left( S_0 \left[ k_\rho^2 \left( \left[ \frac{jk_{z_1} - jk_{z_2}}{jk_{z_1}} + 2jk_{z_1} \frac{\hat{\epsilon}_1 - \hat{\epsilon}_2}{\hat{\epsilon}_2 jk_{z_1} + \hat{\epsilon}_1 jk_{z_2}} \right] \frac{e^{-jk_{z_1}(z+2z_0)}}{jk_{z_1} + jk_{z_2}} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{e^{-jk_{z_1}|z|}}{jk_{z_1}} \right) \right] - \frac{2}{\rho} S_1 \left[ \left( \frac{jk_{z_1} - jk_{z_2}}{jk_{z_1}} + 2jk_{z_1} \frac{\hat{\epsilon}_1 - \hat{\epsilon}_2}{\hat{\epsilon}_2 jk_{z_1} + \hat{\epsilon}_1 jk_{z_2}} \right) \frac{e^{-jk_{z_1}(z+2z_0)}}{jk_{z_1} + jk_{z_2}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{e^{-jk_{z_1}|z|}}{jk_{z_1}} \right) \right] \right) \\
E_{z_1} &= \frac{\cos \varphi}{8\pi j\omega\hat{\epsilon}_1} \left( S_1 \left[ \left( jk_{z_1} - jk_{z_2} + 2k_\rho^2 \frac{\hat{\epsilon}_1 - \hat{\epsilon}_2}{\hat{\epsilon}_2 jk_{z_1} + \hat{\epsilon}_1 jk_{z_2}} \right) \frac{e^{-jk_{z_1}(z+2z_0)}}{jk_{z_1} + jk_{z_2}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \operatorname{sgn}(z) e^{-jk_{z_1}|z|} \right) \right] \right) \\
H_{x_1} &= \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{4\pi} \left( S_0 \left[ k_\rho^2 \frac{\hat{\epsilon}_1 - \hat{\epsilon}_2}{\hat{\epsilon}_2 jk_{z_1} + \hat{\epsilon}_1 jk_{z_2}} \frac{1}{jk_{z_1} + jk_{z_2}} e^{-jk_{z_1}(z+2z_0)} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{\rho} S_1 \left[ \frac{\hat{\epsilon}_1 - \hat{\epsilon}_2}{\hat{\epsilon}_2 jk_{z_1} + \hat{\epsilon}_1 jk_{z_2}} \frac{1}{jk_{z_1} + jk_{z_2}} e^{-jk_{z_1}(z+2z_0)} \right] \right) \\
H_{y_1} &= \frac{1}{8\pi} \left( S_0 \left[ -\operatorname{sgn}(z) e^{-jk_{z_1}|z|} - \frac{jk_{z_1} - jk_{z_2}}{jk_{z_1} + jk_{z_2}} e^{-jk_{z_1}(z+2z_0)} \right] \right. \\
&\quad \left. - \cos^2 \varphi S_0 \left[ 2k_\rho^2 \frac{\hat{\epsilon}_1 - \hat{\epsilon}_2}{\hat{\epsilon}_2 jk_{z_1} + \hat{\epsilon}_1 jk_{z_2}} \frac{1}{jk_{z_1} + jk_{z_2}} e^{-jk_{z_1}(2z+z_0)} \right] \right. \\
&\quad \left. + \cos(2\varphi) \frac{1}{\rho} S_1 \left[ 2 \frac{\hat{\epsilon}_1 - \hat{\epsilon}_2}{\hat{\epsilon}_2 jk_{z_1} + \hat{\epsilon}_1 jk_{z_2}} \frac{1}{jk_{z_1} + jk_{z_2}} e^{-jk_{z_1}(2z+z_0)} \right] \right) \\
H_{z_1} &= \frac{\sin \varphi}{8\pi} S_1 \left[ \frac{e^{-jk_{z_1}|z|}}{jk_{z_1}} + \frac{jk_{z_1} - jk_{z_2}}{jk_{z_1} + jk_{z_2}} \frac{e^{-jk_{z_1}(z+2z_0)}}{jk_{z_1}} \right]
\end{aligned}$$

TABLEAU 1.8 – Composantes des champs électrique et magnétique rayonnés par un dipôle électrique horizontal élémentaire au-dessus d'une interface plane sous forme d'intégrales de Sommerfeld (milieu 2).

$$\begin{aligned}
E_{x_2} &= \frac{1}{4\pi j\omega\hat{\epsilon}_2} \left( S_0 \left[ \frac{k_2^2}{jk_{z_1} + jk_{z_2}} e^{jk_{z_2}(z+z_0)} e^{-jk_{z_1}z_0} \right] \right. \\
&\quad - \cos^2 \varphi S_0 \left[ k_\rho^2 \frac{\hat{\epsilon}_2}{\hat{\epsilon}_2 jk_{z_1} + \hat{\epsilon}_1 jk_{z_2}} e^{jk_{z_2}(z+z_0)} e^{-jk_{z_1}z_0} \right] \\
&\quad \left. + \cos(2\varphi) \frac{1}{\rho} S_1 \left[ \frac{\hat{\epsilon}_2}{\hat{\epsilon}_2 jk_{z_1} + \hat{\epsilon}_1 jk_{z_2}} e^{jk_{z_2}(z+z_0)} e^{-jk_{z_1}z_0} \right] \right) \\
E_{y_2} &= -\frac{\cos \varphi \sin \varphi}{4\pi j\omega} \left( S_0 \left[ k_\rho^2 \frac{e^{jk_{z_2}(z+z_0)} e^{-jk_{z_1}z_0}}{\hat{\epsilon}_2 jk_{z_1} + \hat{\epsilon}_1 jk_{z_2}} \right] - \frac{2}{\rho} S_1 \left[ \frac{e^{jk_{z_2}(z+z_0)} e^{-jk_{z_1}z_0}}{\hat{\epsilon}_2 jk_{z_1} + \hat{\epsilon}_1 jk_{z_2}} \right] \right) \\
E_{z_2} &= -\frac{\cos \varphi}{4\pi j\omega\hat{\epsilon}_2} \left( S_1 \left[ \left( jk_{z_2} - k_\rho^2 \frac{\hat{\epsilon}_1 - \hat{\epsilon}_2}{\hat{\epsilon}_2 jk_{z_1} + \hat{\epsilon}_1 jk_{z_2}} \right) \frac{e^{jk_{z_2}(z+z_0)} e^{-jk_{z_1}z_0}}{jk_{z_1} + jk_{z_2}} \right] \right) \\
H_{x_2} &= \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{4\pi} \left( S_0 \left[ k_\rho^2 \frac{\hat{\epsilon}_1 - \hat{\epsilon}_2}{\hat{\epsilon}_2 jk_{z_1} + \hat{\epsilon}_1 jk_{z_2}} \frac{1}{jk_{z_1} + jk_{z_2}} e^{jk_{z_2}(z+z_0)} e^{-jk_{z_1}z_0} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{\rho} S_1 \left[ \frac{\hat{\epsilon}_1 - \hat{\epsilon}_2}{\hat{\epsilon}_2 jk_{z_1} + \hat{\epsilon}_1 jk_{z_2}} \frac{1}{jk_{z_1} + jk_{z_2}} e^{jk_{z_2}(z+z_0)} e^{-jk_{z_1}z_0} \right] \right) \\
H_{y_2} &= \frac{1}{4\pi} \left( S_0 \left[ \frac{jk_{z_2}}{jk_{z_1} + jk_{z_2}} e^{jk_{z_2}(z+z_0)} e^{-jk_{z_1}z_0} \right] \right. \\
&\quad - \cos^2 \varphi S_0 \left[ k_\rho^2 \frac{\hat{\epsilon}_1 - \hat{\epsilon}_2}{\hat{\epsilon}_2 jk_{z_1} + \hat{\epsilon}_1 jk_{z_2}} \frac{1}{jk_{z_1} + jk_{z_2}} e^{jk_{z_2}(z+z_0)} e^{-jk_{z_1}z_0} \right] \\
&\quad \left. + \cos(2\varphi) \frac{1}{\rho} S_1 \left[ \frac{\hat{\epsilon}_1 - \hat{\epsilon}_2}{\hat{\epsilon}_2 jk_{z_1} + \hat{\epsilon}_1 jk_{z_2}} \frac{1}{jk_{z_1} + jk_{z_2}} e^{jk_{z_2}(z+z_0)} e^{-jk_{z_1}z_0} \right] \right) \\
H_{z_2} &= \frac{\sin \varphi}{4\pi} S_1 \left[ \frac{e^{jk_{z_2}(z+z_0)} e^{-jk_{z_1}z_0}}{jk_{z_1} + jk_{z_2}} \right]
\end{aligned}$$

## Conclusion

La confrontation de la méthode à deux rayons avec les approximations des fonctions de Green présentées par Norton et Bannister pour le rayonnement d'un dipôle élémentaire au-dessus d'une interface montre que cette première peut être insuffisante pour modéliser la propagation des ondes électromagnétiques près du sol. Il est nécessaire alors de trouver une méthode d'évaluation plus rigoureuse.

Les approximations étudiées sont simples à utiliser, cependant les simplifications cachent la physique que nous souhaitons saisir. Par conséquent, nous avons décidé d'effectuer le calcul des fonctions de Green.

Dans le prochain chapitre, nous évaluerons ces fonction de Green par une analyse asymptotique et nous les comparerons aux approximations de Norton et de Bannister. Cette analyse s'effectuera à l'aide de la méthode de la plus grande pente.



# Chapitre 2

## Évaluation des intégrales de Sommerfeld

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Chemin d'intégration des intégrales de Sommerfeld . . . . .</b>	<b>41</b>
<b>2.2</b>	<b>Représentation angulaire . . . . .</b>	<b>44</b>
<b>2.3</b>	<b>Méthode de la plus grande pente . . . . .</b>	<b>48</b>
2.3.1	Chemin de la plus grande pente . . . . .	50
2.3.2	Évaluation asymptotique . . . . .	51
2.3.3	Points de singularité . . . . .	57
<b>2.4</b>	<b>Évaluation asymptotique du champ <math>E_z</math> rayonné par un dipôle élémentaire vertical . . . . .</b>	<b>58</b>
2.4.1	Préparation de l'intégrale à évaluer . . . . .	58
2.4.2	Distorsion du chemin d'intégration . . . . .	60
2.4.3	Points de singularité . . . . .	62
2.4.4	Expression asymptotique du champ . . . . .	70
2.4.5	Validation et analyse . . . . .	72
	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>75</b>

---

DANS le chapitre précédent, les intégrales de Sommerfeld ont été présentées en introduisant la fonction de Hankel à la place de la fonction Bessel. Le présent chapitre est consacré à l'évaluation analytique de ces intégrales. Il est nécessaire d'étudier d'abord le chemin d'intégration de ces intégrales suite à ce changement. Il est également important d'assurer que, sur le chemin d'intégration, la condition de rayonnement de Sommerfeld soit respectée, c'est-à-dire, que les champs rayonnés à l'infini tendent vers zéro et que l'onde excitée soit sortante de l'antenne.

Mathématiquement, cela se traduit par des conditions imposées aux parties réelle et imaginaire des constantes de propagation  $k_{z_i}$  :  $\Re\{k_{z_i}\} > 0$  et  $\Im\{k_{z_i}\} < 0$ . Par conséquent, une évaluation de signe de chaque partie des constantes de propagation s'impose. Pour ce faire, il faut étudier la fonction racine carrée liée à la définition de ces constantes. Cette fonction étant multivaluée, il est indispensable de connaître ses points de ramification, ses coupures de ramification et les feuilles de Riemann. Ces concepts sont supposés connus par le lecteur, cependant un bref rappel en est présenté dans l'Annexe C.

Afin de mettre les intégrales de Sommerfeld sous une forme permettant de s'affranchir d'une des deux coupures de ramification, une représentation angulaire des constantes de propagation est proposée. Cela implique un changement de variable et une transposition de plan complexe. Ces deux sujets sont investigués en détail.

Pour l'approximation asymptotique des intégrales de Sommerfeld, nous faisons appel à la méthode de la plus grande pente. Cette méthode distord le chemin d'intégration vers un autre dont les propriétés sont adaptées à l'évaluation asymptotique. La présence des points de singularité (points de ramification et pôles) impose une attention particulière pour cette distorsion. Une discussion sur chacun de ces points est ainsi présentée.

Finalement, l'approximation asymptotique est effectuée, à la lumière de tous les points discutés. Cette approximation est confrontée à celles de Norton et de Bannister. Une bonne concordance entre ces approximations est vérifiée.

Ce chapitre est structuré comme suit. La section 2.1 étudie le chemin d'intégration des intégrales de Sommerfeld, avec notamment l'évaluation des parties réelle et imaginaire des constantes de propagations  $k_{z_i}$ . La section 2.2 propose une représentation angulaire de ces constantes qui facilite l'évaluation asymptotique des intégrales de Sommerfeld. La section 2.3 présente en détail la méthode de la plus grande pente, utilisée pour l'évaluation analytique des intégrales de Sommerfeld. Dans la section 2.4, les champs rayonnés par un

dipôle élémentaire électrique vertical sont évalués par la méthode de la plus grande pente et validés par la confrontation avec les approximations de Norton et de Bannister.

## 2.1 Chemin d'intégration des intégrales de Sommerfeld

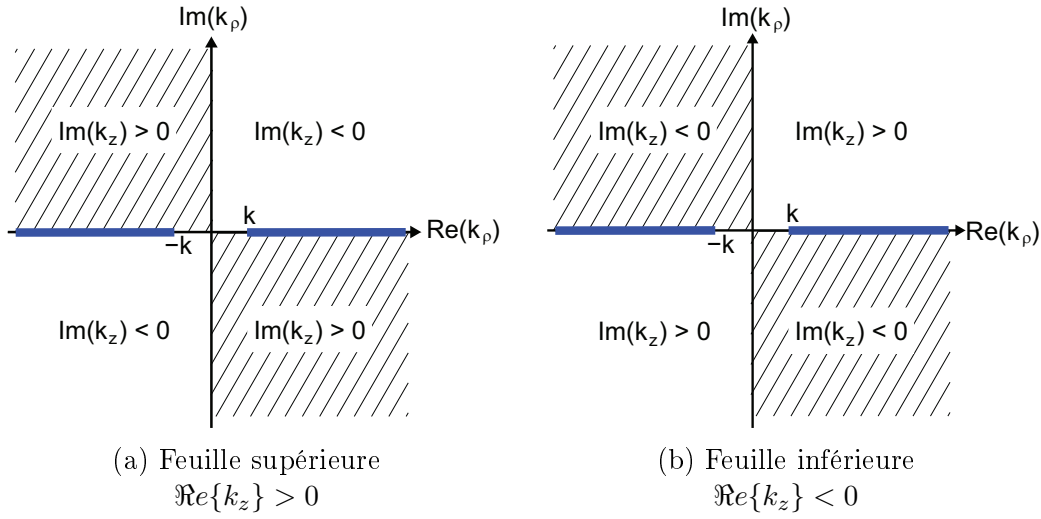
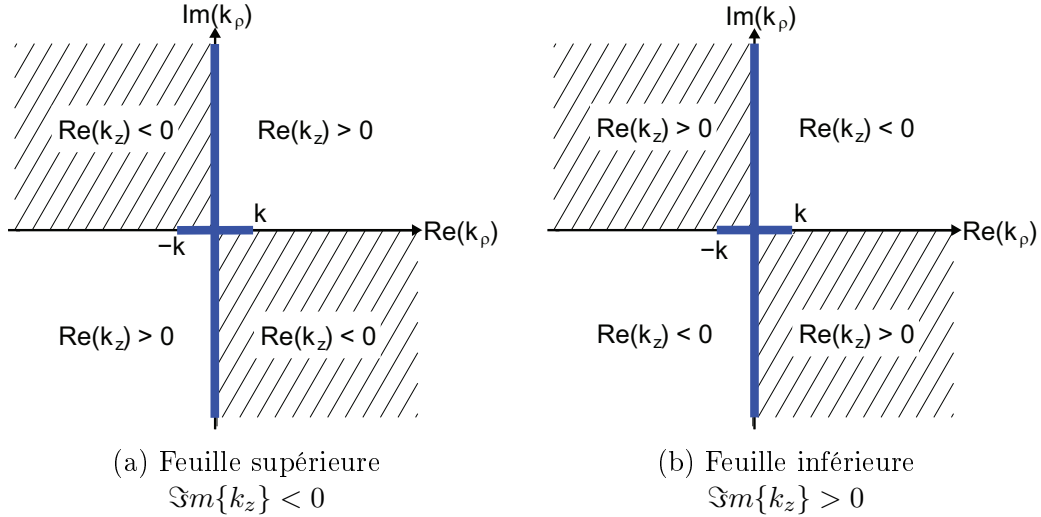
L'analyse pour développer l'intégrale de Sommerfeld (équation 1.44) a comme point de départ une transformée de Fourier, dont le chemin d'intégration est l'axe réel. Néanmoins, l'introduction de la fonction de Hankel ne nous permet pas de continuer avec le même chemin d'intégration, car cette fonction a un point de ramification à l'origine. De plus, la coupure de ramification la plus usuelle pour cette fonction est l'axe réel négatif. Le chemin d'intégration de 1.44 ne peut donc pas être l'axe réel, mais un chemin légèrement distordu qui tend vers cet axe et évite l'origine. De plus, il faut que sur tout le chemin, les conditions imposées sur  $k_z = \sqrt{k^2 - k_\rho^2}$  soient respectées. Nous devons donc vérifier l'évolution des parties réelle et imaginaire de  $k_z$  pour chaque choix de coupure de ramification [55, Sec. 2.2.3] [59, Sec. 5.3b].

D'abord, nous considérons une constante de propagation  $k$  purement réelle et nous analysons la coupure de ramification  $\Re\{k_z\} = 0$ . En supposant que la feuille supérieure présente  $\Re\{k_z\} > 0$ , afin de déterminer les régions où  $\Im\{k_z\} > 0$ , il faut trouver les régions où  $\arg(k_z^2)$  est compris entre 0 et  $\pi$ . Il faut donc que  $\arg(k_\rho^2)$  soit compris entre  $-\pi$  et 0. Par conséquent,  $-\pi/2 < \arg(k_\rho) < 0$  ou  $\pi/2 < \arg(k_\rho) < \pi$ , comme montre la figure 2.1a. Dans les autres régions,  $\Im\{k_z\} < 0$ . Par conséquent, dans la feuille inférieure montrée sur la figure 2.1b, les signes des parties réelle et imaginaire sont opposés.

Une analyse similaire nous permet d'établir les signes des parties réelle et imaginaire de  $k_z$  pour la coupure de ramification  $\Im\{k_z\} = 0$  (figure 2.2). Sur ces figures, le trait bleu matérialise la coupure de ramification de la fonction racine carrée.

D'après les figures 2.1 et 2.2, il est impossible de tracer un chemin continu dans les régions où les conditions imposées à  $k_z$  sont respectées (feuille supérieure dans les régions non-hachurées), tout en évitant l'origine (en raison de la fonction Hankel). Les cas sans pertes (où la constante de propagation  $k$  est purement réelle) se montrent ainsi particulièrement problématiques. Toutefois, l'introduction de petites pertes, traduite par une constante de propagation complexe, permet de contourner cette difficulté. Avec  $k =$



FIGURE 2.1 – Coupure de ramification  $\Re\{k_z\} = 0$ .FIGURE 2.2 – Coupure de ramification  $\Im\{k_z\} = 0$ .

$k_{\text{re}} + jk_{\text{im}}$  et  $k_{\rho} = k_{\rho_{\text{re}}} + jk_{\rho_{\text{im}}}$ , les équations des coupures de ramification deviennent :

$$\begin{cases} \Re\{k_z\} = 0 & k_{\rho_{\text{re}}} \cdot k_{\rho_{\text{im}}} = k_{\text{re}} \cdot k_{\text{im}} & k_{\rho_{\text{re}}}^2 - k_{\rho_{\text{im}}}^2 > k_{\text{re}}^2 - k_{\text{im}}^2 \\ \Im\{k_z\} = 0 & k_{\rho_{\text{re}}} \cdot k_{\rho_{\text{im}}} = k_{\text{re}} \cdot k_{\text{im}} & k_{\rho_{\text{re}}}^2 - k_{\rho_{\text{im}}}^2 < k_{\text{re}}^2 - k_{\text{im}}^2 \end{cases} \quad (2.1)$$

Ces équations sont des hyperboles qui s'écartent des axes réel et imaginaire. Cela laisse la place pour introduire un chemin d'intégration qui tend vers l'axe réel, tout en évitant l'origine et l'axe réel négatif et en respectant les conditions imposées, pour les deux coupures de ramification présentées. Les figures 2.3 et 2.4 montrent en vert le chemin d'intégration, en orange la coupure de ramification de la fonction de Hankel et en bleu la coupure de ramification de la constante de propagation.

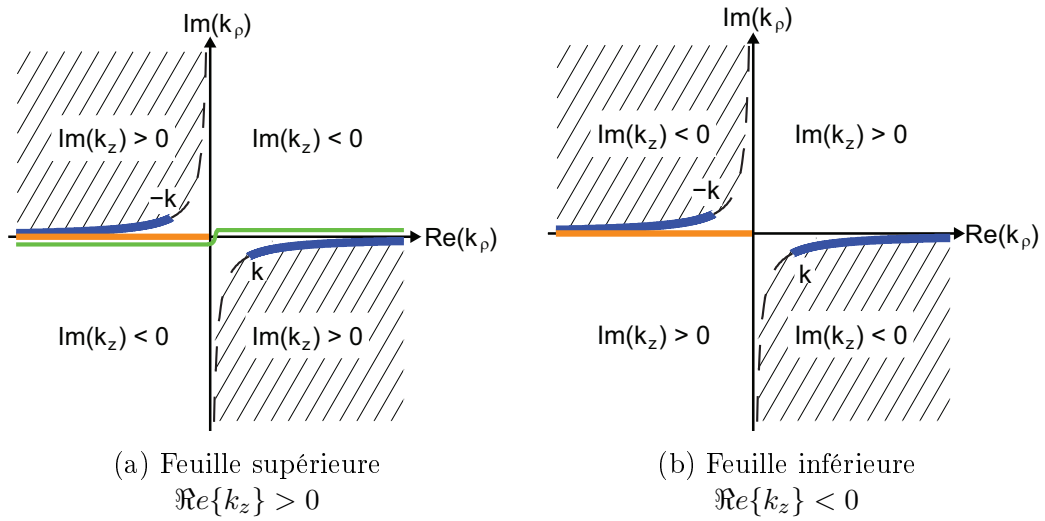


FIGURE 2.3 – Coupure de ramification  $\Re\{k_z\} = 0$ . La courbe en orange présente la coupure de ramification de la fonction Hankel et celle en vert, le chemin d'intégration des intégrales de Sommerfeld.

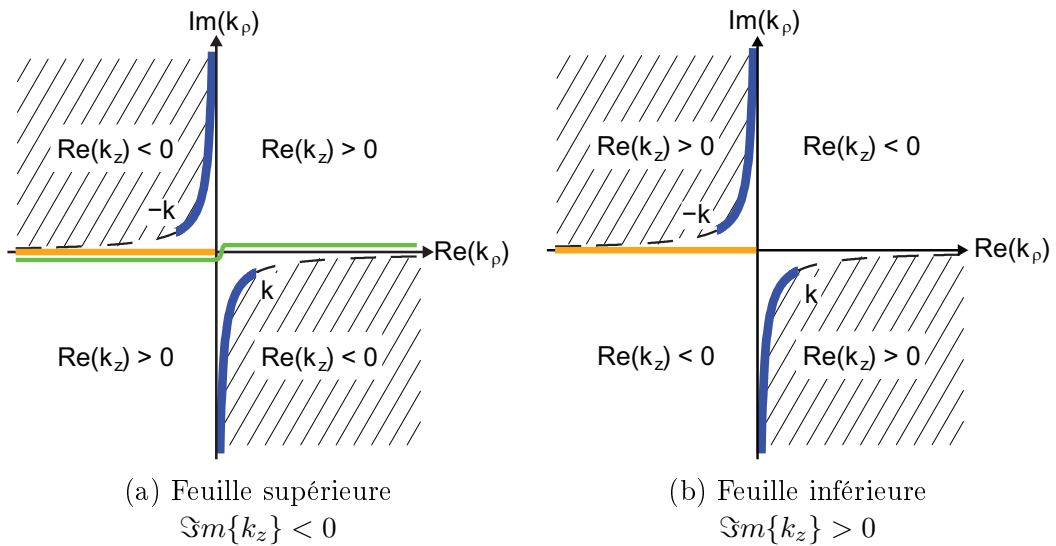


FIGURE 2.4 – Coupure de ramification  $\Im\{k_z\} = 0$ . La courbe en orange présente la coupure de ramification de la fonction Hankel et celle en vert, le chemin d'intégration des intégrales de Sommerfeld.

Ce chemin d'intégration n'est pas le mieux adapté, car la fonction n'a pas de propriété facilitant l'évaluation de l'intégrale. La méthode que nous utilisons pour évaluer cette intégrale (la méthode de la plus grande pente) fait appel à un changement de chemin d'intégration, qui facilite une approximation asymptotique. Néanmoins, ce changement nécessite un certain nombre de conditions à respecter. Certains points critiques, comme les points de ramification et les pôles doivent être bien pris en compte.

Avant d'étudier la méthode de la plus grande pente, nous présentons un artifice

mathématique qui nous permet d'éviter une des deux coupures de ramification dues aux constantes de propagation.

## 2.2 Représentation angulaire

Un changement de variable dans les intégrales de Sommerfeld permet d'éliminer les coupures de ramification dues à une des constantes de propagation. Cette technique se montre aussi très utile lors de l'application de la méthode de la plus grande pente pour l'analyse de cette intégrale [59, Sec. 5.3c].

Le changement de variable introduit est le suivant :

$$k_\rho = k \sin w \quad (2.2)$$

où  $w$  est une variable complexe (ou un *angle complexe*). Il existe plusieurs valeurs de  $w$  pour chaque  $k_\rho$ . Il est donc possible de transposer les deux feuilles de Riemann du plan  $k_\rho$  au plan  $w$  d'une manière convenable.

Nous analysons cette représentation angulaire pour le cas d'une constante de propagation purement réelle. En décomposant  $k_\rho$  et  $w$  en partie réelle et imaginaire ( $k_\rho = k_{\rho_{\text{re}}} + jk_{\rho_{\text{im}}}$  et  $w = w_{\text{re}} + jw_{\text{im}}$ ) :

$$k_{\rho_{\text{re}}} = k \sin w_{\text{re}} \cosh w_{\text{im}} \quad k_{\rho_{\text{im}}} = k \cos w_{\text{re}} \sinh w_{\text{im}} \quad (2.3)$$

L'analyse de signe des équations 2.3 permet d'identifier la transposition de chaque quadrant et des axes réel et imaginaire du plan  $k_\rho$  dans le plan  $w$ , comme présenté dans la figure 2.5. Cette figure nous montre que les deux feuilles de Riemann de  $k_\rho$  peuvent être transposées en un « ruban de largeur  $2\pi$  » dans le plan  $w$ , éliminant ainsi la coupure de ramification due à la définition de  $k_z$ .

Une fois la transformation 2.2 imposée,  $k_z$  s'écrit :

$$k_z = \sqrt{k^2 - k^2 \sin^2 w} = \sqrt{k^2 \cos^2 w} = +k \cos w \quad (2.4)$$

Le choix du signe positif pour la racine carrée se justifiera ultérieurement. Ainsi :

$$\Re\{k_z\} = k \cos w_{\text{re}} \cosh w_{\text{im}} \quad \Im\{k_z\} = -k \sin w_{\text{re}} \sinh w_{\text{im}} \quad (2.5)$$

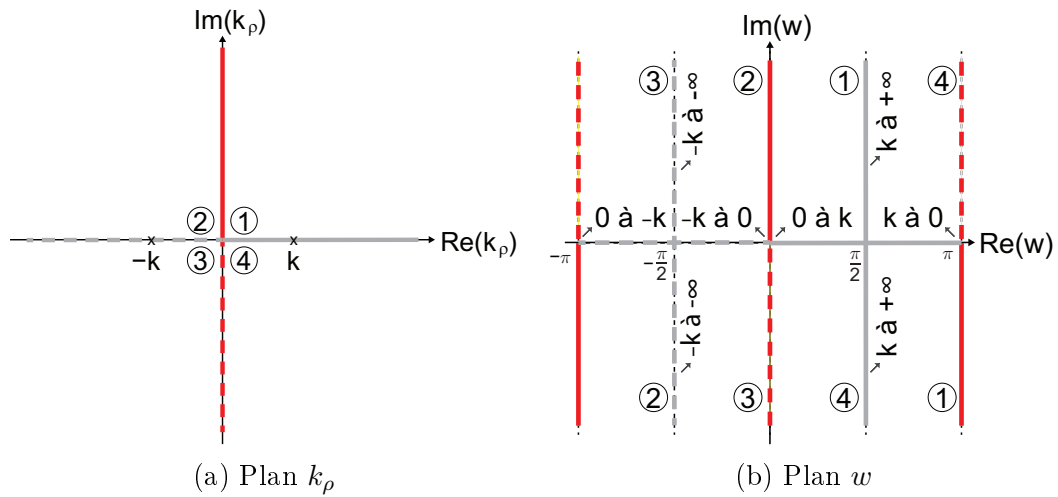


FIGURE 2.5 – Transposition des quadrants et des axes (a) du plan  $k_\rho$ ; (b) au plan  $w$ , pour  $k$  réel.

Les équations 2.5 nous permettent d’identifier les feuilles supérieure et inférieure. Cela dépend, néanmoins, du choix de ramification. Les figures 2.6a et 2.6b font référence aux coupures de ramification des figures 2.1 et 2.2 respectivement.

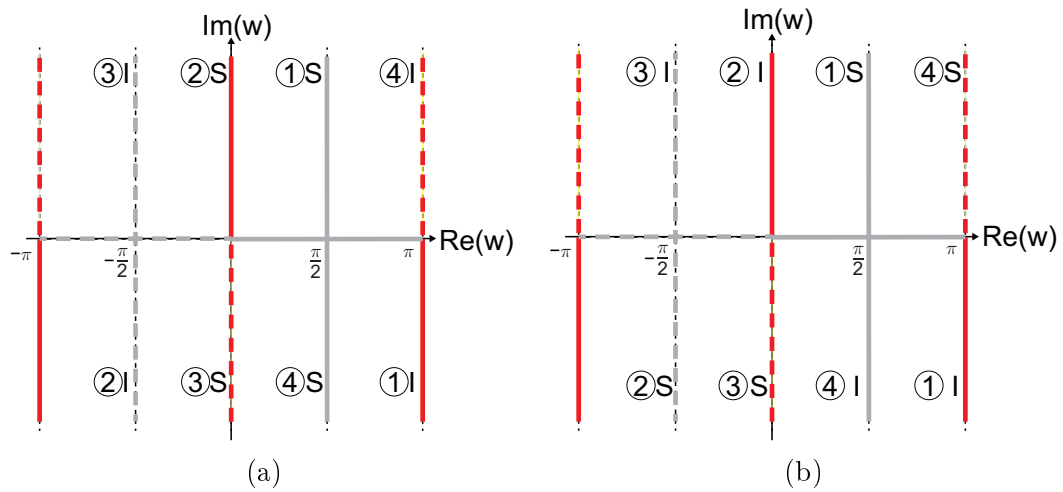


FIGURE 2.6 – Transposition des feuilles de Riemann supérieure (S) et inférieure (I) vers le plan  $w$ , pour  $k$  réel et pour les coupures de (a) la figure 2.1 et (b) la figure 2.2.

Comme vérifié à la section 2.1, il est impossible d’insérer un chemin d’intégration si la constante de propagation est purement réelle. Il faut alors analyser la représentation angulaire avec une constante de propagation complexe. En décomposant la constante de propagation en parties réelle et imaginaire ( $k = k_{\text{re}} + jk_{\text{im}}$ ), les équations 2.3 deviennent :

$$\begin{aligned} k_{\rho_{\text{re}}} &= k_{\text{re}} \sin w_{\text{re}} \cosh w_{\text{im}} - k_{\text{im}} \cos w_{\text{re}} \sinh w_{\text{im}} \\ k_{\rho_{\text{im}}} &= k_{\text{re}} \cos w_{\text{re}} \sinh w_{\text{im}} + k_{\text{im}} \sin w_{\text{re}} \cosh w_{\text{im}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

La figure 2.7 montre que la transposition des quadrants et des axes du plan  $k_\rho$  diffère légèrement de celle de la figure 2.5. Les distorsions des axes réel et imaginaire ne nous permettent pas de faire la distinction entre les feuilles supérieure et inférieure pour le deuxième et le quatrième quadrant. Il est donc nécessaire de tracer les transpositions des coupures de ramification pour désigner les régions associées aux feuilles supérieure et inférieure. Pour  $k$  complexe, les équations 2.5 deviennent :

$$\begin{aligned}\Re\{k_z\} &= k_{\text{re}} \cos w_{\text{re}} \cosh w_{\text{im}} + k_{\text{im}} \sin w_{\text{re}} \sinh w_{\text{im}} \\ \Im\{k_z\} &= -k_{\text{re}} \sin w_{\text{re}} \sinh w_{\text{im}} + k_{\text{im}} \cos w_{\text{re}} \cosh w_{\text{re}}\end{aligned}\quad (2.7)$$

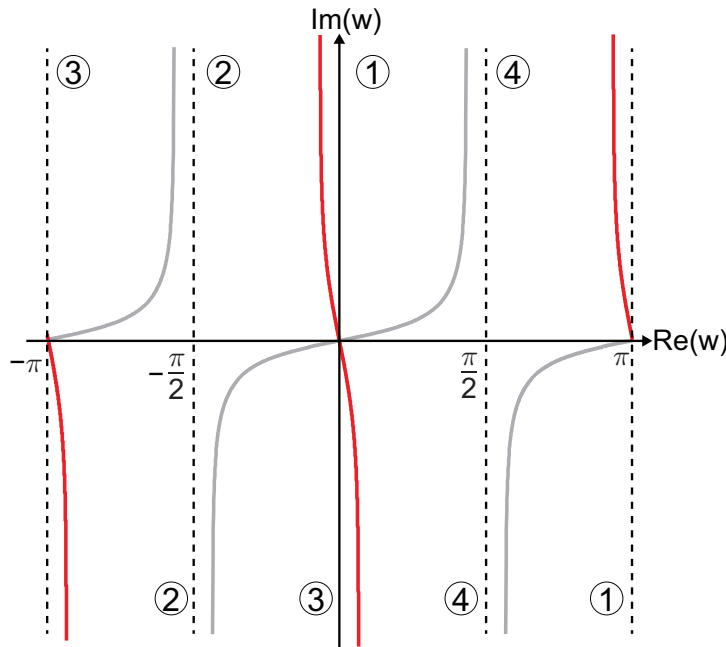


FIGURE 2.7 – Transposition des quadrants et des axes (réel en gris et imaginaire en rouge) du plan  $k_\rho$  au plan  $w$ , avec  $k$  complexe.

Les coupures  $\Re\{k_z\} = 0$  et  $\Im\{k_z\} = 0$  sont présentées dans la figure 2.8, où les feuilles supérieure et inférieure sont identifiées.

La figure 2.9 montre les régions associées à la feuille supérieure pour les deux coupures différentes. Elle justifie le choix du signe positif dans l'équation 2.4. Cela nous permet d'associer l'origine de la feuille supérieure du plan  $k_\rho$  à l'origine du plan  $w$ . La feuille supérieure présente une région "continue", contrairement à la feuille inférieure.

La transposition du chemin d'intégration et de la coupure de ramification de Hankel se fait facilement car cette dernière coïncide avec l'axe réel négatif et le premier n'est que l'axe réel légèrement distordu. La figure 2.10 inclut ces transpositions pour le cas de  $k$

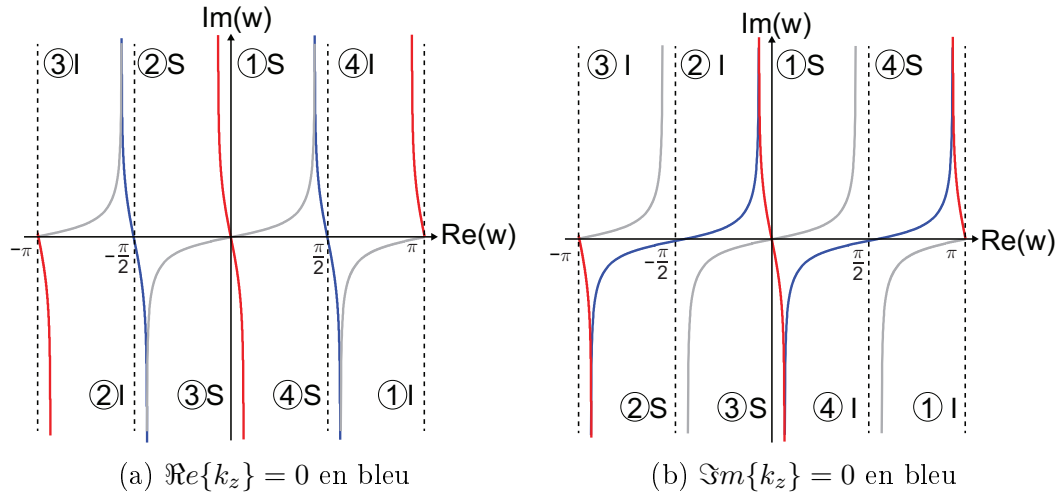


FIGURE 2.8 – Transposition des feuilles de Riemann supérieure (S) et inférieure (I) au plan  $w$ , avec  $k$  complexe, pour les coupures de ramification de (a) la figure 2.3 et (b) la figure 2.4.

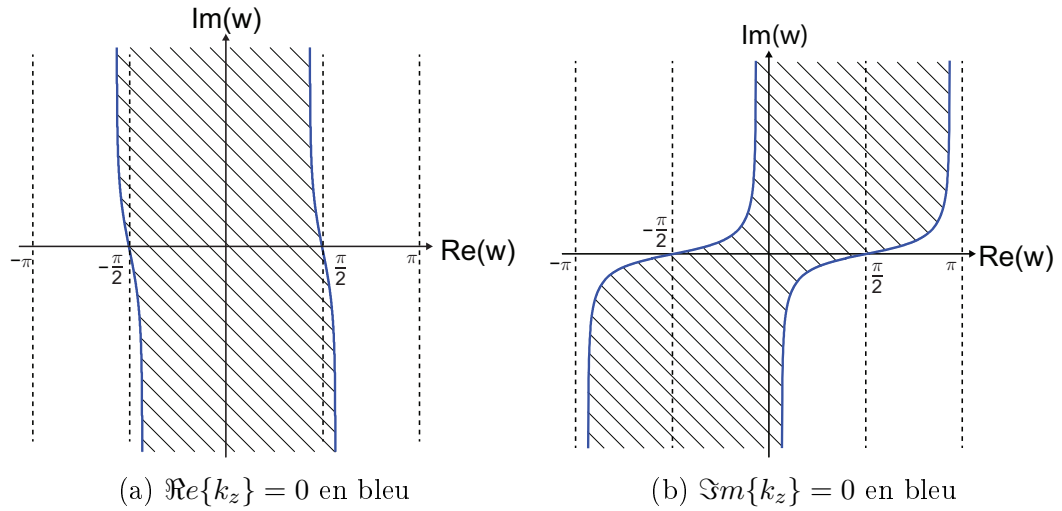


FIGURE 2.9 – Transposition de la feuille de Riemann supérieure pour les coupures de ramification : (a)  $\Re\{k_z\} = 0$ ; (b)  $\Im\{k_z\} = 0$ .

complexe avec de petites pertes.

Deux observations importantes par rapport à la figure 2.10 sont à noter : premièrement, il existe deux coupures de ramification de la fonction Hankel dans le plan  $w$ , chacune dans une région associée à une feuille différente. Deuxièmement, le chemin d'intégration se trouve dans la région associée à la feuille supérieure. En effet, la figure 2.9 confirme cette conclusion.

Etant donné qu'il y a deux constantes de propagation selon  $\hat{\mathbf{a}}_z$  ( $k_{z1}$  et  $k_{z2}$ ), cette représentation ne permet pas de s'affranchir des deux coupures de ramification dues à  $k_z$ . En effet, il est possible d'éliminer uniquement les coupures de ramification d'une constante

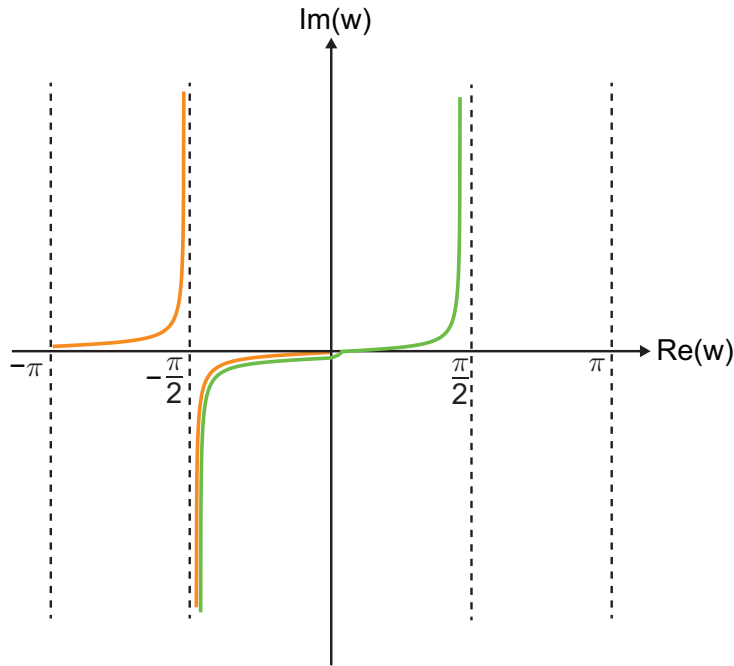


FIGURE 2.10 – Transposition de la coupure de ramification de la fonction de Hankel (en orange) et du chemin d'intégration (en vert).

$k_z$  avec cette technique (cf. figure 2.9).

## 2.3 Méthode de la plus grande pente

La méthode de la plus grande pente est une technique d'évaluation des intégrales de la forme [57]-[62] :

$$I(\Omega) = \int_C f(\zeta) e^{\Omega h(\zeta)} d\zeta \quad (2.8)$$

où  $f$  est une fonction analytique de la variable complexe  $\zeta$  sur le chemin d'intégration  $C$ , qui s'étend de  $-\infty$  à  $+\infty$ ,  $h$  est une fonction analytique dans tout le plan complexe et  $\Omega$  est un terme réel positif très grand.

Soit un chemin  $C'$  dans le plan complexe  $\zeta$ , qui passe par le point  $\zeta = \zeta_s$ , le point où  $\Re\{h(\zeta)\}$  trouve sa valeur maximale. La valeur absolue de la fonction  $e^{\Omega h(\zeta)}$  est maximale au même point. De plus, vu que  $|\Omega|$  est très grand, cette fonction exponentielle décroît fortement au voisinage du point  $\zeta_s$ . Si l'intégrale 2.8 est calculée sur ce nouveau chemin,  $I(\Omega)$  dépend fortement de la contribution de la zone autour du point  $\zeta_s$ . Si  $f$  ne varie pas brusquement autour de  $\zeta_s$ , elle peut être approximée par  $f(\zeta_s)$ . Ainsi, l'intégration se simplifie davantage.

Le but de la méthode de la plus grande pente est de distordre le chemin d'intégration

$C$ , ne possédant pas nécessairement les propriétés intéressantes pour l'analyse de l'intégrale 2.8, vers le chemin  $C'$  décrit dans le paragraphe précédent. Le nom de la méthode est dérivé de la propriété de ce chemin.

La figure 2.11 montre la distorsion du chemin  $C$  vers  $C'$ . L'intégrale  $I(\Omega)$  se calcule en fermant le chemin total à l'aide de  $C_{-\infty}$  et  $C_{+\infty}$ . En absence de singularités (pôles ou points de ramification), l'intégrale sur un chemin fermé est nulle ( $I_C - I_{C'} + I_{C_{-\infty}} + I_{C_{+\infty}} = 0$ ). Par le lemme de Jordan, la contribution de  $I_{C_{-\infty}}$  et  $I_{C_{+\infty}}$  tend vers zéro. Donc, en absence de singularités,  $I_C = I_{C'}$ . En revanche, il est possible que l'intégrand ait des pôles ( $\zeta_p$ ) ou des points de ramification ( $\zeta_{ram}$ ). La contribution de ces points doit être prise en compte. L'intégrale  $I_C$  peut être décomposée en trois parties :

$$I_C = I_{C'} + I_p + I_{ram} \quad (2.9)$$

où  $I_p$  et  $I_{ram}$  sont les contributions des pôles et des points de ramification, respectivement.

Par la suite, il faut trouver le chemin  $C'$  dont les propriétés permettent une approximation asymptotique de l'intégrale  $I_{C'}$ .

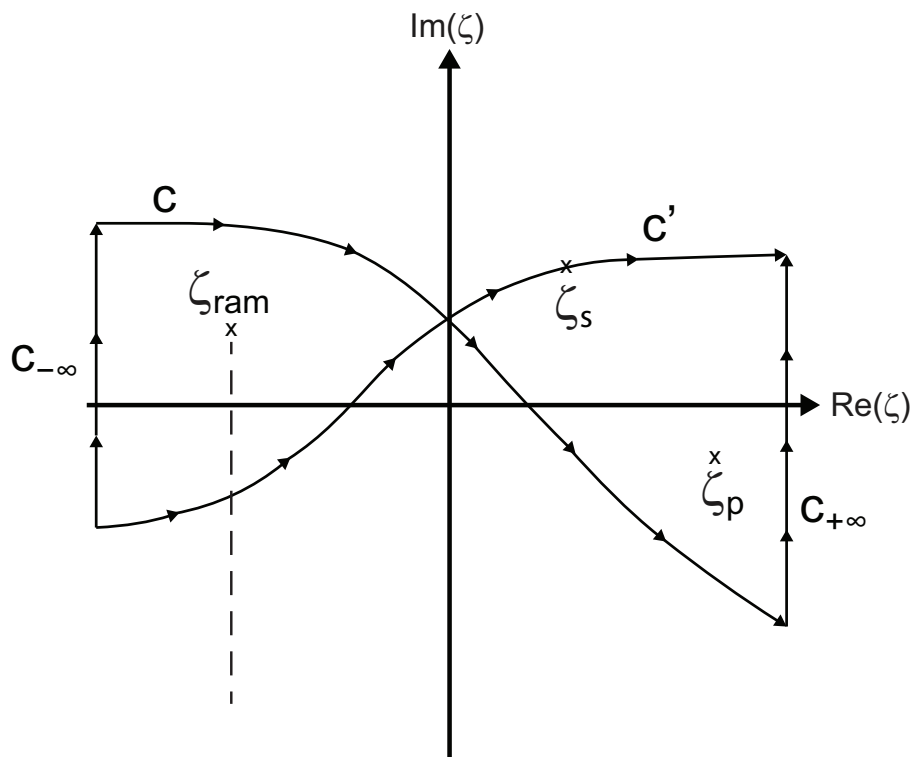


FIGURE 2.11 – Distorsion du chemin  $C$  vers  $C'$ .



### 2.3.1 Chemin de la plus grande pente

Pour trouver le point  $\zeta_s$ , nous écrivons  $\zeta = \zeta_{\text{re}} + j\zeta_{\text{im}}$ ,  $\zeta_{\text{re}}$  et  $\zeta_{\text{im}}$  étant réels. De manière similaire,  $h(\zeta_{\text{re}} + j\zeta_{\text{im}}) = u(\zeta_{\text{re}}, \zeta_{\text{im}}) + jv(\zeta_{\text{re}}, \zeta_{\text{im}})$ , où  $u$  et  $v$  sont des fonctions réelles. D'après la définition,  $u$  trouve son maximum à  $\zeta_s$  sur le chemin  $C'$ . Ce point n'est pourtant pas un maximum local. D'après le principe du maximum d'une fonction complexe, la valeur absolue d'une fonction analytique n'a pas de maximum local. Donc,  $|e^h|$  n'a pas de maximum local. Du fait que  $|e^h| = |e^u|$ ,  $u$  n'en a pas non plus. Le point  $\zeta_s$  est donc un point selle (ou point col) de la fonction  $u$ . Un tel point a pour caractéristique d'être à la fois maximum d'une fonction dans certains chemins et minimum dans d'autres. Vu l'importance de ce point pour la méthode de la plus grande pente, elle est aussi connue comme la *méthode du point col*.

Les dérivées partielles du premier ordre d'une fonction au point selle sont nulles. Ainsi,  $\frac{\partial u}{\partial \zeta_{\text{re}}} = \frac{\partial u}{\partial \zeta_{\text{im}}} = 0$  à  $\zeta = \zeta_s$ . Par les équations de Cauchy-Riemann,  $\frac{\partial v}{\partial \zeta_{\text{re}}} = \frac{\partial v}{\partial \zeta_{\text{im}}} = 0$  au même point. En conséquence,  $\frac{dh}{d\zeta} = 0$  à  $\zeta = \zeta_s$ . Alors,  $\zeta_s$  est un point stationnaire de la fonction  $h$ .

Après avoir trouvé  $\zeta_s$  (point stationnaire de  $h$  ou point selle de  $u$ ), nous cherchons le chemin  $C'$  où  $u$  trouve son maximum à  $\zeta_s$ . Nous imposons également que  $C'$  soit le chemin de la plus grande variation, autrement dit, que ce chemin soit parallèle au gradient de la fonction  $u$ . En faisant le produit interne des gradients de  $u$  et de  $v$  et en évoquant les équations de Cauchy-Riemann, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \nabla u \cdot \nabla v &= \left( \frac{\partial u}{\partial \zeta_{\text{re}}} \mathbf{a}_x + \frac{\partial u}{\partial \zeta_{\text{im}}} \mathbf{a}_y \right) \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial \zeta_{\text{re}}} \mathbf{a}_x + \frac{\partial v}{\partial \zeta_{\text{im}}} \mathbf{a}_y \right) \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial \zeta_{\text{re}}} \mathbf{a}_x + \frac{\partial u}{\partial \zeta_{\text{im}}} \mathbf{a}_y \right) \cdot \left( -\frac{\partial u}{\partial \zeta_{\text{im}}} \mathbf{a}_x + \frac{\partial u}{\partial \zeta_{\text{re}}} \mathbf{a}_y \right) = 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons conclure que les gradients de  $u$  et de  $v$  sont perpendiculaires. De ce fait,  $C'$  est perpendiculaire au gradient de  $v$ . Ainsi, la fonction  $v$  reste constante tout au long de  $C'$ . De même, la phase de  $e^h$  est constante sur ce chemin. Pour cette raison, on appelle  $C'$  le *chemin de la phase constante*.

Toutefois, l'équation  $v(\zeta_{\text{re}}, \zeta_{\text{im}}) = v(\zeta_{\text{re}_s}, \zeta_{\text{im}_s})$  ne décrit pas uniquement le chemin  $C'$ . En effet, elle décrit les chemins qui passent par  $\zeta_s$  et ont la plus grande variation possible. Elle peut, à la fois, décrire le chemin de la plus grande descente ( $C'$  recherché) et le chemin de la plus grande montée. La figure 2.12 met en évidence les chemins de la plus grande

variation pour  $h(\zeta) = \zeta^2$ . Dans ce cas,  $u(\zeta_{\text{re}}, \zeta_{\text{im}}) = \zeta_{\text{re}}^2 - \zeta_{\text{im}}^2$  et  $v(\zeta_{\text{re}}, \zeta_{\text{im}}) = 2\zeta_{\text{re}}\zeta_{\text{im}}$ .  $\frac{dh}{d\zeta} = 2\zeta$ , donc  $\zeta_s = 0$ . Les chemins de la plus grande variation de  $u$  sont décrits par  $\Im\{h(\zeta)\} = \Im\{h(\zeta_s)\} = 0$ , ou bien  $2\zeta_{\text{re}}\zeta_{\text{im}} = 0$ , c'est-à-dire, les axes réel et imaginaire. Sur l'axe réel, d'après la figure 2.12, le gradient diverge à partir du point  $\zeta_s$ , qui est donc un minimum. C'est donc le chemin de la plus grande montée. Inversement, le gradient sur l'axe imaginaire converge vers l'origine, qui est donc un maximum. Par conséquent, l'axe imaginaire est le chemin  $C'$  recherché. Nous remarquons que les deux chemins sont perpendiculaires. Cela est toujours le cas localement au point  $\zeta_s$  pour un point stationnaire du premier ordre.

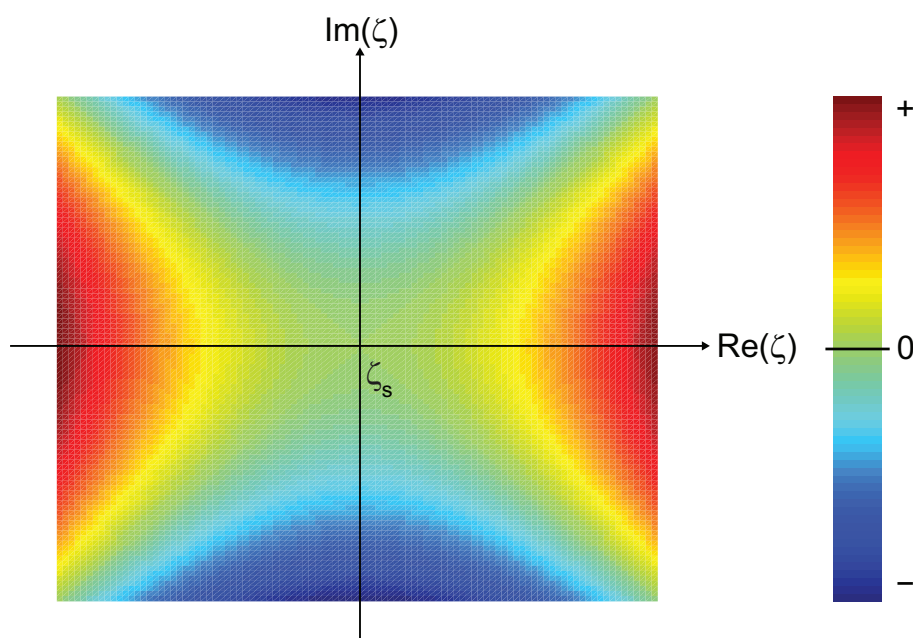


FIGURE 2.12 – Cartographie de  $u$  pour trouver les chemins de la plus grande variation pour la fonction  $h(\zeta) = \zeta^2$ . Les chemins de la plus grande montée et de la plus grande descente coïncident, respectivement, avec l'axe réel et l'axe imaginaire.

Le chemin de la plus grande pente n'est pas unique lorsque le point stationnaire n'est pas du premier ordre. Pour les fonctions à traiter dans ce manuscrit, ce cas ne se présente pas.

### 2.3.2 Évaluation asymptotique

Après l'étude du chemin  $C'$ , il est possible d'obtenir une approximation asymptotique de  $I_{C'}$  de l'équation 2.9, qui représente la contribution du point selle à la totalité de

l'intégrale  $I_C$ . Nous pouvons écrire :

$$I_{C'}(\Omega) = \int_{C'} f(\zeta) e^{\Omega h(\zeta)} d\zeta \quad (2.10)$$

Comme en  $C'$  la partie imaginaire de  $h$  ne varie pas et la partie réelle trouve son maximum, nous pouvons introduire un changement de variable :

$$h(\zeta) - h(\zeta_s) = -s^2 \quad (2.11)$$

L'équation 2.11 transpose les points  $\zeta$  sur le chemin  $C'$  à l'axe réel du plan complexe  $s$ . L'équation 2.10 peut se réécrire :

$$I_{C'}(\Omega) = e^{\Omega h(\zeta_s)} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{-\Omega s^2} ds \quad (2.12)$$

où la fonction  $F(s)$  est définie par :

$$F(s) = f(\zeta) \frac{d\zeta}{ds} \quad (2.13)$$

L'équation 2.11 est utilisée pour calculer  $\frac{d\zeta}{ds}$  :

$$\frac{d\zeta}{ds} = -\frac{2s}{\frac{dh}{d\zeta}} \quad (2.14)$$

La transposition 2.11 associe le point stationnaire  $\zeta_s$  à l'origine du plan  $s$ . La fonction  $e^{-\Omega s^2}$  atteint son maximum à l'origine et décroît très rapidement en dehors de ce point. L'équation 2.12 peut être approchée par la contribution des points au voisinage de l'origine, la contribution ailleurs étant négligeable du fait de la décroissance rapide de l'exponentielle. Si la fonction  $F$  est régulière autour de l'origine, le développement suivant :

$$F(s) = F(0) + F'(0)s + F''(0)\frac{s^2}{2!} + \dots + F^{(n)}(0)\frac{s^n}{n!} + \dots \quad (2.15)$$

est valable dans un disque centré à l'origine et de rayon  $r$  (la distance entre l'origine et la singularité la plus proche). S'il n'y a pas de singularité près de  $s = 0$  ( $\zeta = \zeta_s$ ), la fonction  $F(s)$  peut être approchée au voisinage de l'origine par  $F(0)$ . La dérivée de l'équation 2.13

à  $s = 0$  ( $\zeta = \zeta_s$ ) est indéterminée. En appliquant la règle de L'Hôpital à 2.14 :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\zeta}{ds} \right|_{s=0} &= - \frac{2}{\left. \frac{d^2 h}{d\zeta^2} \right|_{\zeta=\zeta_s} \left. \frac{d\zeta}{ds} \right|_{s=0}} & \left( \left. \frac{d\zeta}{ds} \right|_{s=0} \right)^2 &= - \frac{2}{\left. \frac{d^2 h}{d\zeta^2} \right|_{\zeta=\zeta_s}} \\ \left. \frac{d\zeta}{ds} \right|_{s=0} &= \sqrt{-\frac{2}{h''(\zeta_s)}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Le choix du signe de la racine carrée de l'équation 2.16 doit prendre en compte que l'argument de  $\frac{d\zeta}{ds}$  en  $s = 0$  est égal à l'argument de  $d\zeta$  à  $\zeta = \zeta_s$  sur le chemin  $C'$ . On trouve  $F(0)$  :

$$F(0) = f(\zeta_s) \sqrt{-\frac{2}{h''(\zeta_s)}} \quad (2.17)$$

En introduisant l'approximation de  $F$ , l'équation 2.12 devient :

$$I_{C'}(\Omega) \approx e^{\Omega h(\zeta_s)} F(0) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\Omega s^2} ds \quad (2.18)$$

Connaissant la valeur de  $F(0)$  et l'intégrale de Gauss,  $I_{C'}$  devient :

$$I_{C'}(\Omega) \approx e^{\Omega h(\zeta_s)} f(\zeta_s) \sqrt{-\frac{2\pi}{\Omega h''(\zeta_s)}} \quad \text{si } \Omega \gg 1 \quad (2.19)$$

L'équation 2.19 n'est pourtant pas valable lorsqu'il y a un pôle  $\zeta_p$  très près de  $\zeta_s$ . Cela veut dire qu'il existe un pôle  $s_p$  près de l'origine dans le plan  $s$  et donc l'approximation  $F(s) \approx F(0)$  n'est pas suffisamment précise. Cette configuration peut se présenter lors du traitement des équations du rayonnement d'un dipôle élémentaire près d'une interface, nous devons donc présenter une nouvelle approximation pour ce cas de figure.

Admettons que  $f(\zeta)$  ait une seule singularité du type pôle du premier ordre à  $\zeta = \zeta_p$  et que ce point soit associé au point  $s_p$ . Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= t(\zeta) + \frac{\text{Res}}{\zeta - \zeta_p} \\ F(s) &= T(s) + \frac{\text{Res}}{s - s_p} \end{aligned} \quad (2.20)$$

où Res est le résidu associé au pôle, défini par :

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_p} [(\zeta - \zeta_p)f(\zeta)] = \lim_{s \rightarrow s_p} [(s - s_p)F(s)] \quad (2.21)$$

et  $t(\zeta)$  et  $T(s)$  sont des fonctions holomorphes sans aucune singularité. Cela veut dire que  $t(\zeta)$  et  $T(s)$  peuvent être développées autour de  $\zeta_s$  et 0 respectivement, sans que le rayon de convergence soit influencé par le pôle malgré sa proximité.

Nous pouvons réécrire l'équation 2.12 :

$$I_{C'}(\Omega) = e^{\Omega h(\zeta_s)} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} T(s)e^{-\Omega s^2} ds + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Res}}{s - s_p} e^{-\Omega s^2} ds \right) \quad (2.22)$$

Vu que  $T(S)$  n'a pas de pôle, l'approximation  $T(s) = T(0)$  est suffisamment précise au voisinage de l'origine. La première intégrale de 2.22 peut être approchée par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T(s)e^{-\Omega s^2} ds \approx T(0) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\Omega s^2} ds = \left( F(0) + \frac{\text{Res}}{s_p} \right) \sqrt{\frac{\pi}{\Omega}} \quad (2.23)$$

Pour trouver la valeur de la deuxième intégrale, nous posons  $G(\Omega)$  et  $H(\Omega)$  de la façon suivante :

$$G(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Res}}{s - s_p} e^{-\Omega s^2} ds \quad (2.24)$$

$$H(\Omega) = e^{\Omega s_p^2} G(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Res}}{s - s_p} e^{-\Omega(s^2 - s_p^2)} ds \quad (2.25)$$

La dérivée de  $H$  par rapport à  $\Omega$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{dH}{d\Omega} &= \int_{-\infty}^{+\infty} -\text{Res} \cdot \frac{(s^2 - s_p^2)}{s - s_p} e^{-\Omega(s^2 - s_p^2)} ds \\ &= -\text{Res} \cdot e^{\Omega s_p^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(s + s_p)(s - s_p)}{s - s_p} e^{-\Omega s^2} ds \\ &= -\text{Res} \cdot e^{\Omega s_p^2} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\Omega s^2} ds + s_p \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\Omega s^2} ds \right) \\ &= -\text{Res} \cdot e^{\Omega s_p^2} s_p \sqrt{\frac{\pi}{\Omega}} \end{aligned}$$

$$dH = -\text{Res} \cdot e^{\Omega s_p^2} s_p \sqrt{\frac{\pi}{\Omega}} d\Omega \quad (2.26)$$

En imposant  $H(+\infty) = 0$ , l'intégrale de l'équation 2.26 de  $\Omega$  à  $+\infty$  est la suivante :

$$\begin{aligned} \int_{H(\Omega)}^{H(+\infty)} dH &= -\text{Res} \cdot s_p \sqrt{\pi} \int_{\Omega}^{+\infty} \frac{e^{\bar{\Omega}s_p^2}}{\sqrt{\bar{\Omega}}} d\bar{\Omega} \\ H(\Omega) &= \text{Res} \cdot s_p \sqrt{\pi} \int_{\Omega}^{+\infty} \frac{e^{\bar{\Omega}s_p^2}}{\sqrt{\bar{\Omega}}} d\bar{\Omega} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Pour évaluer l'intégrale de l'équation 2.27, le changement de variable suivant est à effectuer :

$$\begin{aligned} \bar{x}^2 &= -\bar{\Omega}s_p^2 & \bar{x} &= \mp j s_p \sqrt{\bar{\Omega}} \\ d\bar{x} &= \mp j \frac{s_p}{2} \frac{d\bar{\Omega}}{\sqrt{\bar{\Omega}}} & \frac{d\bar{\Omega}}{\sqrt{\bar{\Omega}}} &= \frac{\pm 2j}{s_p} d\bar{x} \end{aligned} \quad (2.28)$$

L'intégrale de l'équation 2.27 devient :

$$\int_{\Omega}^{+\infty} \frac{e^{\bar{\Omega}s_p^2}}{\sqrt{\bar{\Omega}}} d\bar{\Omega} = \frac{\pm 2j}{s_p} \int_x^{+\infty} e^{-\bar{x}^2} d\bar{x} = \frac{\pm j \sqrt{\pi}}{s_p} \text{erfc}(x) \quad (2.29)$$

où nous avons introduit la fonction d'erreur complémentaire, définie par :

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\bar{x}^2} d\bar{x} \quad (2.30)$$

Les valeurs de cette fonction sont tabulées pour les arguments réels ainsi que complexes. La fonction  $H(\Omega)$  de l'équation 2.27 peut s'écrire :

$$H(\Omega) = \pm j \pi \text{Res} \cdot \text{erfc}(x) = \pm j \pi \text{Res} \cdot \text{erfc}(\mp j s_p \sqrt{\bar{\Omega}}) \quad (2.31)$$

Pour choisir le bon signe de l'argument de la fonction  $\text{erfc}(\mp j s_p \sqrt{\bar{\Omega}})$ , il faut savoir que  $H(\Omega)$  tend vers 0 si  $\Omega$  tend vers  $+\infty$ . La fonction  $\text{erfc}$  tend vers zéro si la valeur absolue de son argument tend vers l'infini sur un chemin de partie réelle positive. Il faut donc respecter  $\Re\{\mp j s_p\} > 0$ . Le signe négatif est alors choisi si  $\Im\{s_p\} > 0$  et le signe positif si  $\Im\{s_p\} < 0$ . Une analyse du point  $s_p$  s'impose. A l'aide de l'équation 2.11, nous pouvons écrire :

$$s_p = \sqrt{h(\zeta_s) - h(\zeta_p)} \quad (2.32)$$

La valeur de la racine carrée à choisir dans l'équation 2.32 dépend de l'analyse de

la dérivée de  $\zeta$  par rapport à  $s$  :

$$\frac{\zeta_p - \zeta_s}{s_p} \approx \left. \frac{d\zeta}{ds} \right|_{s=0} \quad (2.33)$$

Etant donné l'équation 2.16, la valeur de  $s_p$  doit vérifier :

$$s_p \rightarrow \frac{\zeta_p - \zeta_s}{\sqrt{-\frac{2}{h''(\zeta_s)}}} \quad (2.34)$$

Pour la valeur de la racine carrée au dénominateur, il faut se référer aux conditions imposées par l'équation 2.16.

A présent, nous pouvons calculer l'intégrale  $G(\Omega)$  de l'équation 2.24, en utilisant les équations 2.25 et 2.31 :

$$G(\Omega) = \pm j\pi e^{-\Omega s_p^2} \text{Res} \cdot \text{erfc}(\mp j s_p \sqrt{\Omega}) \quad \Im m\{s_p\} \geq 0 \quad (2.35)$$

A l'aide des équations 2.17, 2.23 et 2.35, une expression asymptotique de l'intégrale 2.22 peut être obtenue :

$$\begin{aligned} I_{C'}(\Omega) &= e^{\Omega h(\zeta_s)} \left[ \left( f(\zeta_s) \sqrt{-\frac{2}{h''(\zeta_s)}} + \frac{\text{Res}}{s_p} \right) \sqrt{\frac{\pi}{\Omega}} \pm j\pi e^{-\Omega s_p^2} \text{Res} \cdot \text{erfc}(\mp j s_p \sqrt{\Omega}) \right] \\ &= e^{\Omega h(\zeta_s)} \left[ f(\zeta_s) \sqrt{-\frac{2\pi}{\Omega h''(\zeta_s)}} + \frac{\text{Res}}{s_p} \sqrt{\frac{\pi}{\Omega}} \left( 1 \pm j\sqrt{\pi\Omega} s_p e^{-\Omega s_p^2} \text{erfc}(\mp j s_p \sqrt{\Omega}) \right) \right] \\ &\quad \Im m\{s_p\} \geq 0 \quad \text{si } \Omega \gg 1 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Nous définissons la variable suivante :

$$\tau = \Omega s_p^2 \quad (2.37)$$

et l'introduisons dans l'équation 2.36 :

$$I_{C'} = e^{\Omega h(\zeta_s)} \left[ \underbrace{f(\zeta_s) \sqrt{-\frac{2\pi}{\Omega h''(\zeta_s)}}}_{\text{Contribution du point stationnaire}} + \underbrace{\text{Res} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} (1 \pm j\sqrt{\pi\tau} e^{-\tau} \text{erfc}(\mp j\sqrt{\tau}))}_{\text{Contribution du pôle}} \right] \quad \Im m\{s_p\} \geq 0 \quad \text{si } \Omega \gg 1 \quad (2.38)$$

Les premier et deuxième termes de l'équation 2.38 sont dus respectivement au point stationnaire et au pôle.

Si la valeur absolue de  $s_p$  est très grande (par extension,  $|\tau|$  très grand), autrement dit, si le pôle ne se trouve pas près du point stationnaire, il est possible d'effectuer l'approximation suivante :

$$\text{erfc}(\mp j\sqrt{\tau}) \approx \pm j \frac{e^\tau}{\sqrt{\pi\tau}} \left[ 1 + \frac{1}{2\tau} + O\left(\frac{1}{\tau^2}\right) \right] \quad (2.39)$$

$$\text{erfc}(\mp j\sqrt{\tau}) \approx \pm j \frac{e^\tau}{\sqrt{\pi\tau}} \quad \text{si } |\tau| \gg 1 \quad (2.40)$$

Ainsi, si le pôle est suffisamment distant de l'origine, nous pouvons remplacer l'équation 2.40 dans l'équation 2.38 et nous obtenons la même formule que celle présentée dans l'équation 2.19. L'utilisation de la formule 2.38 est donc recommandée uniquement lors de la présence d'un pôle.

### 2.3.3 Points de singularité

Le chemin  $C'$ , issu de la déformation du chemin  $C$ , peut croiser des points de singularité (voir figure 2.11), dont les contributions doivent être prises en compte. Pour le cas des pôles, il faut tout simplement utiliser le théorème des résidus. Les points de ramification nécessitent un traitement un peu plus sophistiqué, mais nous ne les prenons pas en compte dans ce manuscrit. Néanmoins, une discussion à ce sujet est présentée dans la section 2.4.3.1.



## 2.4 Evaluation asymptotique du champ $\mathbf{E}_z$ rayonné par un dipôle élémentaire vertical

Dans la présente section, la méthode de la plus grande pente, décrite dans la section 2.3, est appliquée aux intégrales de Sommerfeld présentées dans le chapitre 1 (tableaux 1.6 à 1.8). A titre d'exemple, nous développerons l'expression asymptotique de la composante  $z$  du champ électrique rayonné par un dipôle élémentaire électrique vertical au-dessus d'une interface plane dans le milieu 1. Ce choix est dû au fait que le dipôle électrique vertical est le mieux adapté pour une propagation près du sol [34]. L'onde excitée par ce type de dipôle est caractérisée par la composante  $z$  [55, Sec. 2.6.2].

### 2.4.1 Préparation de l'intégrale à évaluer

Comme indiqué au Tableau 1.6, nous pouvons écrire la composante  $E_z$  dans le milieu 1 sous la forme intégrale suivante :

$$E_z = \frac{1}{8\pi j\omega\hat{\epsilon}_1} \int_{C_{SOM}} \frac{k_\rho^3}{jk_{z1}} [e^{-jk_{z1}|z|} + R_{ev}e^{-jk_{z1}(z+2z_0)}] H_0^{(2)}(k_\rho\rho) dk_\rho \quad (2.41)$$

où  $C_{SOM}$  est le chemin d'intégration des intégrales de Sommerfeld dans le plan complexe  $k_\rho$ , comme montré dans les figures 2.3 et 2.4. Le terme  $R_{ev}$  a été défini dans les équations 1.32. Pour rappel :

$$R_{ev} = \frac{\hat{\epsilon}_2 j k_{z1} - \hat{\epsilon}_1 j k_{z2}}{\hat{\epsilon}_2 j k_{z1} + \hat{\epsilon}_1 j k_{z2}} \quad (2.42)$$

Pour le développement de ces intégrales, nous utilisons l'approximation suivante :

$$H_n^{(2)}(k_\rho\rho) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k_\rho\rho}} e^{-j(k_\rho\rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \quad |k_\rho\rho| \gg 1 \quad (2.43)$$

En introduisant l'équation 2.43 en 2.41, nous obtenons [63, Eq. 9.2.4] :

$$E_z = \frac{1}{8\pi j\omega\hat{\epsilon}_1} \int_{C_{SOM}} \frac{k_\rho^3}{jk_{z1}} \sqrt{\frac{2}{\pi k_\rho\rho}} e^{j\frac{\pi}{4}} [e^{-j(k_{z1}|z|+k_\rho\rho)} + R_{ev}e^{-j(k_{z1}(z+2z_0)+k_\rho\rho)}] dk_\rho \quad (2.44)$$

Selon la figure 1.8, l'équation 2.44 peut être divisée en deux parties :

$$\begin{aligned}
 E_z = \frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{8\pi j\omega\hat{\epsilon}_1} & \left( \underbrace{\int_{C_{SOM}} \frac{k_\rho^3}{jk_{z_1}} \sqrt{\frac{2}{\pi k_\rho \rho}} [e^{-j(k_{z_1}|z|+k_\rho\rho)}] dk_\rho}_{\text{Onde directe}} \right. \\
 & \left. + \underbrace{\int_{C_{SOM}} \frac{k_\rho^3}{jk_{z_1}} \sqrt{\frac{2}{\pi k_\rho \rho}} [R_{\text{ev}} e^{-j(k_{z_1}(z+2z_0)+k_\rho\rho)}] dk_\rho}_{\text{Onde due à l'image}} \right) \quad (2.45)
 \end{aligned}$$

Nous pouvons combiner la représentation angulaire de la section 2.2 et la représentation géométrique de la figure 1.8 :

$$\begin{aligned}
 k_\rho &= k_1 \sin w & k_{z_1} &= k_1 \cos w & dk_\rho &= k_1 \cos w dw \\
 |z| &= r \cos \theta & \rho &= r \sin \theta & (z \geq 0) & \\
 |z| &= r \cos(\pi - \theta) & \rho &= r \sin(\pi - \theta) & (z < 0) & \\
 |z| &= r \cos \theta' & \rho &= r \sin \theta' & \theta' &= \begin{cases} \theta, & z \geq 0 \\ \pi - \theta, & z < 0 \end{cases} \\
 z + 2z_0 &= r_1 \cos \theta_1 & \rho &= r_1 \sin \theta_1 & & 
 \end{aligned} \quad (2.46)$$

Les exposants de l'équation 2.45 deviennent :

$$\begin{aligned}
 k_{z_1}|z| + k_\rho\rho &= k_1 \cos w \cdot r \cos \theta' + k_1 \sin w \cdot r \sin \theta' \\
 &= k_1 r \cos(w - \theta') \\
 k_{z_1}(z + 2z_0) + k_\rho\rho &= k_1 \cos w \cdot r_1 \cos \theta_1 + k_1 \sin w \cdot r_1 \sin \theta_1 \\
 &= k_1 r_1 \cos(w - \theta_1)
 \end{aligned} \quad (2.47)$$

Nous pouvons également écrire le coefficient  $R_{\text{ev}}$  en fonction de  $w$  :

$$R_{\text{ev}}(w) = \frac{\hat{\epsilon}_2 j k_1 \cos w - \hat{\epsilon}_1 j \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 w}}{\hat{\epsilon}_2 j k_1 \cos w + \hat{\epsilon}_1 j \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 w}} \quad (2.48)$$

En introduisant les équations 2.47 et 2.48 dans l'équation 2.45 :

$$E_z = \frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{8\pi j\omega\hat{\varepsilon}_1} \left( \underbrace{\int_{C_{SOM}} -jk_1^3 \sin^3 w \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 \sin w \cdot r \sin \theta'}} e^{-jk_1 r \cos(w-\theta')} dw}_{\text{Onde directe}} + \underbrace{\int_{C_{SOM}} -jk_1^3 \sin^3 w \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 \sin w \cdot r \sin \theta_1}} R_{ev}(w) e^{-jk_1 r_1 \cos(w-\theta_1)} dw}_{\text{Onde due à l'image}} \right) \quad (2.49)$$

Les deux intégrales de l'équation 2.49 sont de la forme 2.8, où :

$$\begin{aligned} \Omega &= r \text{ ou } r_1 \\ h(w) &= -jk_1 \cos(w - \alpha) \end{aligned} \quad (2.50)$$

où  $\alpha$  peut être  $\theta'$  ou  $\theta_1$ , ces deux angles sont compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ . Dans le cas où les pertes au milieu 1 sont très faibles, de sorte que  $k_1$  est quasi réel, nous pouvons l'extraire de la fonction  $h$  et l'introduire dans  $\Omega$ . Généralement le milieu 1 est l'air dont les pertes sont effectivement très faibles. Ainsi, la condition de validité des approximations par la méthode de la plus grande pente ( $\Omega \gg 1$ ) devient  $k_1 r \gg 1$ . Par conséquent, ces approximations sont valables pour la zone du champ lointain.

## 2.4.2 Distorsion du chemin d'intégration

Avant l'application de l'approximation de la méthode de la plus grande pente, il faut analyser la distorsion du chemin d'intégration vers le chemin de la plus grande pente. Comme présenté dans la section 2.3.1, ce chemin passe par le point stationnaire  $w_s$  de  $h(w)$ . La fonction  $h(w)$  conserve la même partie imaginaire le long de ce chemin, tout en ayant un minimum de la partie réelle en  $w = w_s$ . Pour  $h(w) = -jk_1 \cos(w - \alpha)$ , nous pouvons déduire :

$$h'(w) = jk_1 \sin(w - \alpha) \quad w_s = \alpha \quad (2.51)$$

Comme le long de  $C'$  la fonction conserve la même partie imaginaire et  $\Im\{h(w_s)\} = \Im\{-jk_1\} = -k_{1re}$ , donc  $\Im\{h(w)\} = -k_{1re}$ . Cela implique :

$$\Im\{h(w)\} = -k_{1re} \cdot \cos(w_{re} - \alpha) \cosh w_{im} - k_{1im} \cdot \sin(w_{re} - \alpha) \sinh w_{im} = -k_{1re} \quad (2.52)$$

sur le chemin  $C'$ .

La figure 2.13 montre la valeur de la partie réelle de  $h(w)$  pour un  $k_1$  quasi réel et  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ . Les deux courbes décrites par 2.52 y sont présentées en bleu.  $C'$  est le chemin en trait plein, car le long de cette courbe,  $\Re\{h(w)\}$  trouve son maximum en  $w = w_s$ .

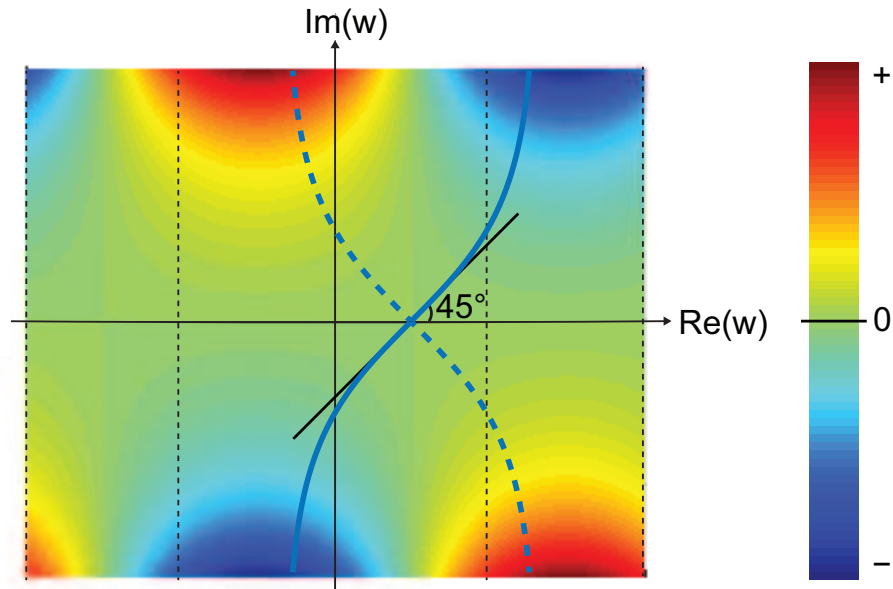


FIGURE 2.13 – Partie réelle de  $h(w)$ . Les deux courbes en bleu sont les chemins de la plus grande variation passant par le point  $w = w_s = \alpha$ . Le chemin de la plus grande pente ( $C'$ ) est en trait plein.

L'application de l'approximation de la méthode de la plus grande pente implique le choix de la valeur de la racine carrée de l'équation 2.16 selon l'argument de  $dw$  en  $w_s$ . Pour le cas d'une constante quasi réelle, cet argument tend vers  $45^\circ$  (ou  $\frac{\pi}{4}$  radians). Pour le cas général :

$$\begin{aligned}
 -s^2 &= h(w) - h(w_s) \\
 -s^2 &= -jk_1 \cos(w - \alpha) + jk_1 \\
 s^2 &= -jk_1(1 - \cos(w - \alpha)) \\
 s^2 &= -jk_1 2 \sin^2\left(\frac{w - \alpha}{2}\right) \\
 s &= \pm \sqrt{2|k_1|} \sin\left(\frac{w - \alpha}{2}\right) e^{-j\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\arg(k_1)}{2}\right)} \quad (2.53)
 \end{aligned}$$

En dérivant l'équation 2.53 en  $s = 0$  ( $w = w_s = \alpha$ ) :

$$\left. \frac{dw}{ds} \right|_{s=0} = \pm \sqrt{\frac{2}{|k_1|}} e^{j\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\arg(k_1)}{2}\right)} \quad (2.54)$$

Comme présenté sur la figure 2.13, pour  $k_1$  quasi réel, l'argument de  $dw$  en  $w_s$  tend vers  $45^\circ$ . Nous choisissons le signe positif dans l'équation 2.54. Par conséquent, pour  $k_1$  quelconque, l'argument de  $dw$  en  $w_s$  peut s'écrire :

$$\arg(dw)|_{w=w_s} = \frac{\pi}{4} - \frac{\arg(k_1)}{2} \quad (2.55)$$

### 2.4.3 Points de singularité

La transposition des singularités du plan  $k_\rho$  vers le plan  $w$  doit être étudiée. L'équation 2.49 montre que l'intégrale de l'onde directe n'a aucun point de singularité. Cela facilite son évaluation asymptotique, étant donné que la formule 2.19 peut être directement appliquée. En revanche, l'intégrale de l'onde due à l'image a des singularités associées au terme  $R_{ev}$ . Ce terme contient  $k_{z_2}$  qui introduit des coupures de ramification et son dénominateur peut s'annuler, introduisant un pôle à l'intégrant. Nous étudions dans cette section le traitement de ces deux types de singularité.

#### 2.4.3.1 Points de ramification

Nous avons vu dans la section 2.2 que nous pouvons nous affranchir des coupures de ramification dues à  $k_1$ , car les deux feuilles de  $k_\rho$  associées à cette constante de propagation peuvent être transposées à un "ruban de largeur  $2\pi$ " dans le plan  $w$ . Il nous reste donc les coupures de ramification dues à  $k_2$  à traiter. Les points de ramification dans le plan  $w$  peuvent être obtenus par la transposition des points  $\pm k_2$  :

$$w_{\text{ram}} = \sin^{-1} \left( \pm \frac{k_2}{k_1} \right) = \sin^{-1} \left( \pm \sqrt{\frac{\hat{\epsilon}_2}{\hat{\epsilon}_1}} \right) \quad (2.56)$$

L'équation 2.56 nous montre qu'il y a quatre points de ramification dans le "ruban"  $-\pi < w_{re} < \pi$  du plan  $w$ . Si les pertes du milieu 1 sont plus faibles que celles du deuxième, le terme  $\sqrt{\frac{\hat{\epsilon}_2}{\hat{\epsilon}_1}}$  a une partie réelle positive et une partie imaginaire négative ou vice-versa. Par conséquent, les points de ramification transposés se trouvent dans les

régions associées aux deuxième et quatrième quadrants, comme le prévoient les figures 2.3 et 2.4. La transposition des coupures de ramification montrées dans ces figures vers le plan  $w$  se fait par l'analyse de  $k_{z_2}$ . Les coupures choisies sont  $\Re\{k_{z_2}\} = 0$  et  $\Im\{k_{z_2}\} = 0$ . Sachant que  $k_{z_2} = \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 w}$ , il faut trouver les chemins où le terme  $k_2^2 - k_1^2 \sin^2 w$  est purement réel. La figure 2.14 montre la transposition de ces coupures de ramification du plan  $k_\rho$  vers le plan  $w$  pour un milieu 1 à très faibles pertes (permittivité électrique quasi réelle) et un deuxième milieu diélectrique avec de petites pertes (mais plus importantes que celles du milieu 1).

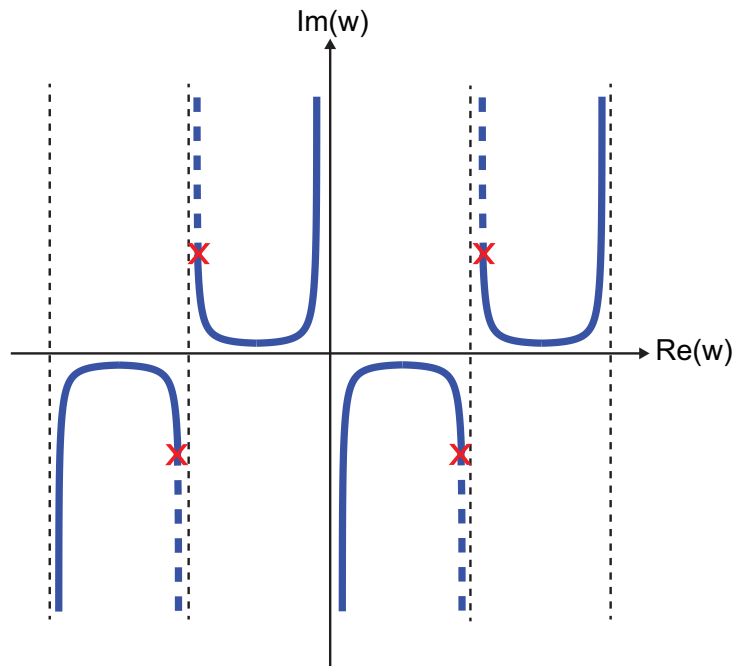


FIGURE 2.14 – Transposition des coupures de ramification des figures 2.3 et 2.4 vers le plan complexe  $w$ . La courbe en trait plein représente  $\Im\{k_{z_2}\} = 0$  et la courbe en trait discontinu représente  $\Re\{k_{z_2}\} = 0$ . Les points de ramification sont représentés par les croix rouges.

La contribution du point de ramification doit être prise en compte s'il figure à l'intérieur du chemin fermé à l'infini entre  $C$  et  $C'$ . Si ce point est à l'extérieur du chemin fermé, le chemin  $C'$  peut croiser une coupure de ramification. Comme expliqué dans l'annexe C, les coupures de ramification sont arbitraires. Ainsi, si le chemin  $C'$  croise une coupure, nous pouvons distordre la coupure de ramification et redéfinir la fonction par continuité analytique, de sorte qu'elle soit holomorphe à l'intérieur du chemin fermé. Cette condition est essentielle pour garantir que l'intégrale sur le chemin fermé soit nulle. Néanmoins, cette condition n'est pas remplie si un point de ramification se trouve à l'intérieur de ce chemin, car, par définition, il est impossible d'avoir une fonction continue

dans un disque centré en un point de ramification.

Si un point de ramification se trouve à l'intérieur du chemin fermé, il faut le contourner, comme montré sur la figure 2.15. Par conséquent, il est nécessaire de prendre en compte l'intégrale sur ce contour supplémentaire. La position du point de ramification  $w_{\text{ram}}$  vis-à-vis du chemin fermé dépend de sa position dans le plan  $w$  et de celle du point stationnaire  $w_s$ . La figure 2.16 présente une évaluation de la position de  $w_{\text{ram}}$  en fonction du module et de la phase de  $\hat{\epsilon}_2$ , en considérant le milieu 1 l'air ( $\hat{\epsilon}_1$  quasiment réel, approximativement égal à la permittivité du vide). Dans cette figure,  $w_s \rightarrow \frac{\pi}{2}$ . Pour une phase nulle de  $\hat{\epsilon}_2$ ,  $w_{\text{ram}}$  se trouve sur la droite  $w_{\text{re}} = \frac{\pi}{2}$  et se déplace le long des courbes horizontales en couleur en augmentant la valeur absolue de la phase. Ainsi, dans la plupart des cas, le point de ramification se trouve à l'intérieur du chemin fermé. Deux cas sont notamment importants. Le premier est le cas où les pertes du milieu 2 sont faibles. Cela veut dire que le point de ramification se trouve très près de  $w_{\text{re}} = \frac{\pi}{2}$  et à l'intérieur du chemin fermé pour presque tous les angles  $w_s$ . Le deuxième cas traite d'un milieu à très forte conductivité. Dans ce cas, la valeur absolue de  $\hat{\epsilon}_2$  est très élevée et a une phase qui tend vers  $-\frac{\pi}{2}$ . Cela implique que  $w_{\text{ram}}$  se trouve sur la droite  $w_{\text{re}} = \frac{3\pi}{4}$ . La contribution du point de ramification ne se fait que si l'angle  $w_s$  est supérieur à  $\frac{\pi}{4}$ .

La contribution des points de ramification correspond à une atténuation très forte, proportionnelle au carré de la distance entre les points d'émission et la réception. De plus, en présence des pertes, une atténuation exponentielle s'y ajoute, de sorte que normalement cette contribution est négligeable. Toutefois, il existe quelques exceptions : les cas d'un milieu 1 dispersif et un milieu 2 sans pertes ou deux milieux sans pertes, le premier étant diélectriquement plus dense que le deuxième [59, pp. 508-509]. Comme ces deux cas de figure ne feront pas l'objet des nos études par la suite, la contribution des points de ramification ne sera pas prise en compte dans ce manuscrit.

### 2.4.3.2 Pôles

Les singularités de type pôle apparaissent quand le dénominateur du terme  $R_{\text{ev}}(w)$  s'annule. Il faut alors chercher les zéros du dénominateur :

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}_2 j k_1 \cos w_p + \hat{\epsilon}_1 j \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 w_p} &= 0 \\ \hat{\epsilon}_{r_2} k_1 \cos w_p &= -\hat{\epsilon}_{r_1} \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 w_p} \end{aligned} \quad (2.57)$$

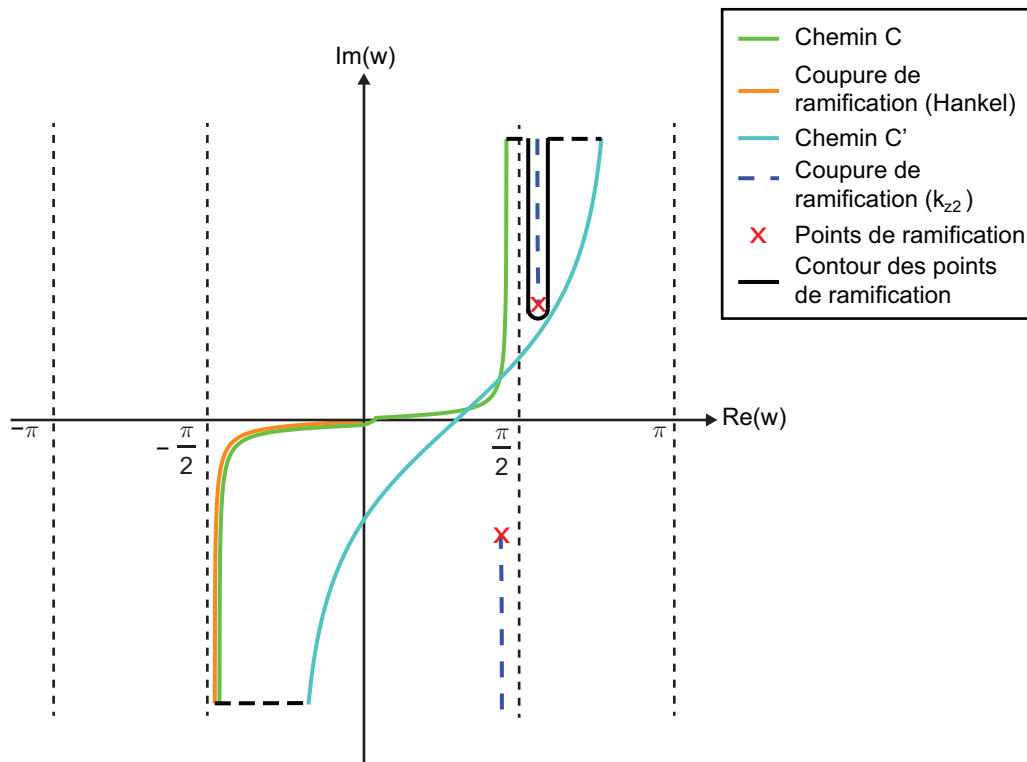


FIGURE 2.15 – Transpositions des éléments importants du plan  $k_\rho$  vers le plan  $w$  pour l'intégration.

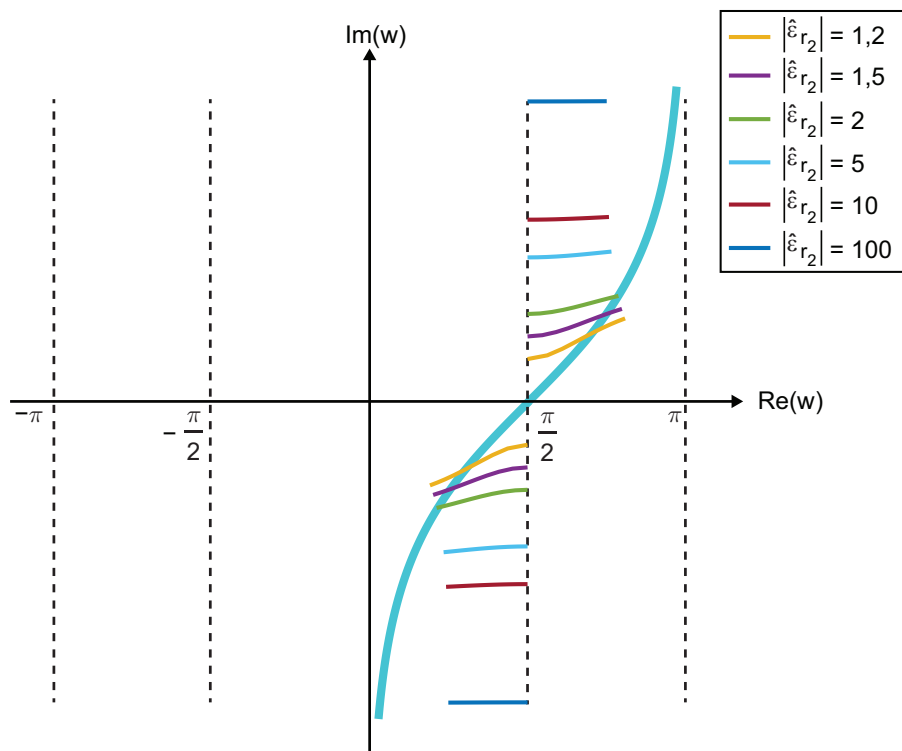


FIGURE 2.16 – Evaluation de la position des points de ramification en fonction de la valeur absolue et de la phase de  $\hat{\epsilon}_2$ , pour  $\hat{\epsilon}_1$  quasi réel, approximativement égal à la permittivité du vide et  $w_s \rightarrow \frac{\pi}{2}$ .



En élevant l'équation 2.57 au carré et sachant que  $\frac{k_2^2}{k_1^2} = \frac{\hat{\varepsilon}_{r2}}{\hat{\varepsilon}_{r1}}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_{r2}^2 k_1^2 \cos^2 w_p &= \hat{\varepsilon}_{r1}^2 k_1^2 \left( \frac{k_2^2}{k_1^2} - \sin^2 w_p \right) \\ \hat{\varepsilon}_{r2}^2 (1 - \sin^2 w_p) &= \hat{\varepsilon}_{r1} \hat{\varepsilon}_{r2} - \hat{\varepsilon}_{r1}^2 \sin^2 w_p \\ (\hat{\varepsilon}_{r1}^2 - \hat{\varepsilon}_{r2}^2) \sin^2 w_p &= \hat{\varepsilon}_{r2} (\hat{\varepsilon}_{r1} - \hat{\varepsilon}_{r2})\end{aligned}$$

$$\sin^2 w_p = \frac{\hat{\varepsilon}_{r2}}{\hat{\varepsilon}_{r1} + \hat{\varepsilon}_{r2}} \qquad \cos^2 w_p = \frac{\hat{\varepsilon}_{r1}}{\hat{\varepsilon}_{r1} + \hat{\varepsilon}_{r2}} \qquad (2.58)$$

$$w_p = \sin^{-1} \left( \pm \sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}_{r2}}{\hat{\varepsilon}_{r1} + \hat{\varepsilon}_{r2}}} \right) \qquad w_p = \cos^{-1} \left( \pm \sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}_{r1}}{\hat{\varepsilon}_{r1} + \hat{\varepsilon}_{r2}}} \right) \qquad (2.59)$$

Les équations 2.58 et 2.59 montrent qu'il y a quatre pôles. En revanche, ils ne se trouvent pas dans la même feuille de Riemann. En effet, il y a une paire de pôles associés à chaque feuille de Riemann de  $k_{z2}$ . Si les pertes du milieu 1 sont plus petites que celles du milieu 2, le terme  $\sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}_{r1}}{\hat{\varepsilon}_{r1} + \hat{\varepsilon}_{r2}}}$  a une partie réelle positive et une partie imaginaire négative ou vice-versa. Les pôles se trouvent alors dans les régions du plan  $w$  associées aux deuxième et quatrième quadrants du plan  $k_\rho$ . A l'instar de la figure 2.16, la figure 2.17 montre l'évaluation de la position des pôles en fonction de la valeur absolue et de la phase de  $\hat{\varepsilon}_{r2}$  pour un  $\hat{\varepsilon}_{r1}$  quasi réel, approximativement égal à l'unité.

Pour chaque courbe de la figure 2.17, le point sur l'axe réel est associé à la phase nulle. Si la valeur absolue de la phase augmente, le pôle se déplace le long de la courbe en couleur. Les pôles qui peuvent contribuer au calcul de l'intégrale sont ceux localisés dans le "ruban"  $0 < w_{re} < \frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2} < w_{re} < \pi$ . Dans la feuille supérieure de Riemann, où l'intégrale est calculée, ils sont soit à l'intérieur du chemin fermé (il faudrait alors appliquer le théorème des résidus) soit très près du chemin  $C'$  (il faudrait alors appliquer l'approximation de l'équation 2.38). Pour préciser la feuille correspondante à chaque pôle, nous analysons le signe des parties réelle et imaginaire du pôle ( $k_{z2p}$ ). Le dénominateur du coefficient  $R_{ev}$  s'annule pour :

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_{r2} k_{z1p} + \hat{\varepsilon}_{r1} k_{z2p} &= 0 \\ k_{z2p} &= -\frac{\hat{\varepsilon}_{r2}}{\hat{\varepsilon}_{r1}} k_{z1p}\end{aligned} \qquad (2.60)$$

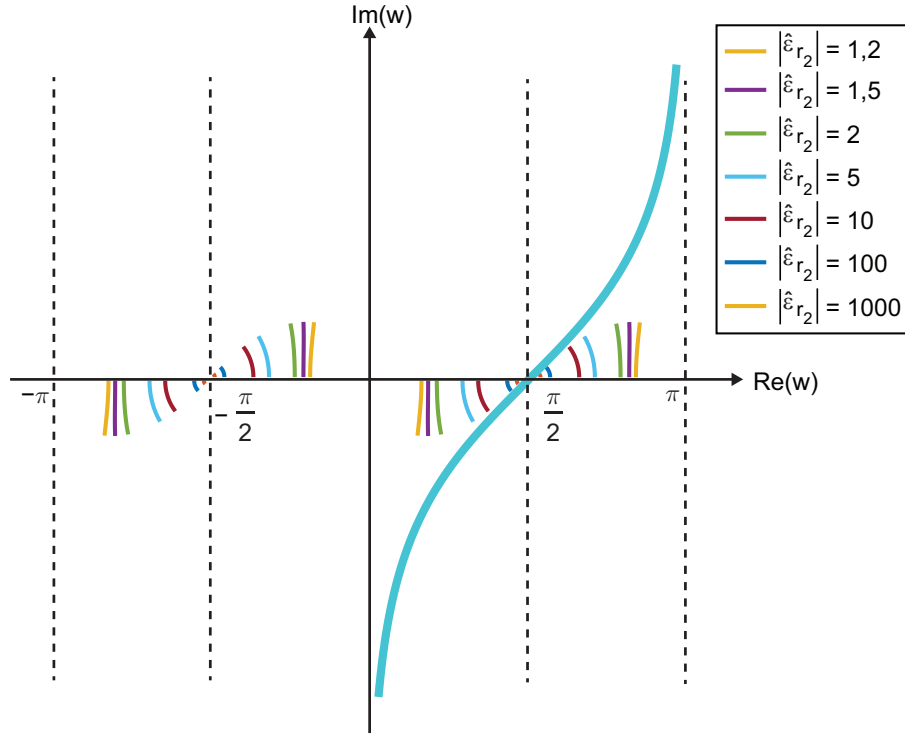


FIGURE 2.17 – Evaluation de la position des pôles en fonction de la valeur absolue et de la phase de  $\hat{\epsilon}_2$ .

Il est donc important de connaître la phase de  $k_{z_1p}$  en analysant l'expression :

$$k_{z_1p} = k_1 \cos w_p = k_1 \sqrt{\frac{\hat{\epsilon}_{r_1}}{\hat{\epsilon}_{r_1} + \hat{\epsilon}_{r_2}}} \quad (2.61)$$

En supposant que  $\arg(\hat{\epsilon}_{r_1}) \approx 0$  (par conséquent,  $\arg(k_1) \approx 0$ ), nous trouvons que  $0 < \arg\left(\frac{\hat{\epsilon}_{r_1}}{\hat{\epsilon}_{r_1} + \hat{\epsilon}_{r_2}}\right) < -\arg(\hat{\epsilon}_{r_2})$ . Ainsi, nous en déduisons que  $0 < \arg(k_{z_1p}) < -\frac{\arg(\hat{\epsilon}_{r_2})}{2}$  ou  $\pi < \arg(k_{z_1p}) < -\frac{\arg(\hat{\epsilon}_{r_2})}{2} + \pi$ .

Pour le pôle qui se trouve dans la région  $0 < w_{\text{re}} < \frac{\pi}{2}$  et  $w_{\text{im}} < 0$ , nous avons obligatoirement  $0 < \arg(k_{z_1p}) < -\frac{\arg(\hat{\epsilon}_{r_2})}{2}$ , car dans cette région, les parties réelle et imaginaire de  $\cos w$  sont positives, donc la phase est comprise entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ . Par conséquent, en analysant l'équation 2.60,  $\arg(k_{z_2p}) = \pi + \arg(\hat{\epsilon}_{r_2}) + \arg(k_{z_1p})$ . Nous pouvons ainsi conclure que pour ce pôle,  $k_{z_2p}$  a une partie réelle négative et une partie imaginaire positive. Une telle valeur est associée à la feuille inférieure de Riemann. Par conséquent, le pôle dans cette région ne contribue pas au calcul de l'intégrale.

Toutefois, le pôle dans la région  $\frac{\pi}{2} < w_{\text{re}} < \pi$  et  $w_{\text{im}} > 0$  se trouve dans la feuille supérieure, car dans cette région, le signe de la fonction cosinus change. Donc  $\pi < \arg(k_{z_1p}) < -\frac{\arg(\hat{\epsilon}_{r_2})}{2} + \pi$  et  $\arg(k_{z_2p}) = 2\pi + \arg(\hat{\epsilon}_{r_2}) + \arg(k_{z_1p}) = \arg(\hat{\epsilon}_{r_2}) + \arg(k_{z_1p})$ ,

ce qui nous permet de conclure que  $k_{z_2p}$  a une partie réelle positive et une partie imaginaire négative. Comme montré par la figure 2.17, ce pôle ne peut pas être à l'intérieur du chemin fermé, cependant il contribue au calcul de l'intégrale dans la mesure où il se trouve près du chemin  $C'$ , surtout si  $w_s$  s'approche de  $\frac{\pi}{2}$ .

La proximité du pôle au chemin  $C'$  impose l'utilisation l'équation 2.38 pour l'évaluation de l'intégrale. Afin d'appliquer cette équation, il est nécessaire d'analyser le point  $s_p$  et le résidu associé à ce pôle. D'après les équation 2.32 et 2.50 :

$$s_p = \sqrt{jk_{z_1}(\cos(w_p - \theta_1) - 1)} \quad (2.62)$$

où le signe de la racine carrée est choisi selon l'équation 2.34. A partir de l'équation 2.54, nous pouvons écrire :

$$s_p \rightarrow \frac{w_p - w_s}{\sqrt{\frac{2}{k_1}e^{j\frac{\pi}{4}}}} \quad (2.63)$$

Dans cette équation,  $\arg(s_p) = -\frac{\pi}{4} + \arg(w_p - w_s)$ . La figure 2.17 nous permet de déduire que  $\arg(w_p - w_s) < \frac{\pi}{4}$ . Donc,  $s_p$  a une partie réelle positive et une partie imaginaire négative. Il faut alors choisir le signe correspondant à  $\Im\{s_p\} < 0$  dans l'équation 2.38. La variable  $\tau$  définie par l'équation 2.37 devient :

$$\tau = jk_1r_1(\cos(w_p - \theta_1) - 1) \quad (2.64)$$

Si  $\theta_1$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\tau$  devient :

$$\tau|_{\theta_1=\frac{\pi}{2}} = jk_1r_1(\sin w_p - 1) = jr_1(k_{\rho p} - k_1) = \varrho \quad (2.65)$$

où  $k_{\rho p}$  est le pôle dans le plan  $k_\rho$ .  $\varrho$  est appelée *distance numérique* par Sommerfeld [53]. Il est important de remarquer que dans son manuscrit, Sommerfeld présente cette distance avec un signe négatif. Cela est dû au fait que l'auteur utilise la convention temporelle  $e^{-j\omega t}$ . Dans ce manuscrit et en accord avec d'autres auteurs, comme Collin [21], nous appelons  $\tau$  la *distance numérique*.

Afin de compléter l'analyse de l'intégrale, il faut calculer le résidu associé au pôle,

défini dans l'équation 2.21. Pour rappel :

$$\text{Res} = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_p} (\zeta - \zeta_p) f(\zeta) \quad (2.66)$$

En écrivant  $f(\zeta) = f^*(\zeta)R_{ev}$ , où  $f^*(\zeta)$  est holomorphe et le pôle  $\zeta_p$  est dû à  $R_{ev}$ , nous pouvons calculer le résidu associé à  $R_{ev}$  et ensuite le multiplier par  $f^*(w_p)$  pour trouver le résidu dû à la fonction dans sa totalité. Le résidu de  $R_{ev}$  se calcule :

$$\text{Res}_{R_{ev}} = \lim_{w \rightarrow w_p} \frac{\hat{\varepsilon}_2 j k_1 \cos w - \hat{\varepsilon}_1 j \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 w}}{\hat{\varepsilon}_2 j k_1 \cos w + \hat{\varepsilon}_1 j \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 w}} (w - w_p) \quad (2.67)$$

En appliquant la règle de l'Hôpital à l'équation 2.67, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \text{Res}_{R_{ev}} &= \lim_{w \rightarrow w_p} \frac{\hat{\varepsilon}_2 j k_1 \cos w - \hat{\varepsilon}_1 j \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 w}}{-\hat{\varepsilon}_2 j k_1 \sin w - \hat{\varepsilon}_1 j \frac{k_1^2 \sin w \cos w}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 w}}} \\ \text{Res}_{R_{ev}} &= \frac{\hat{\varepsilon}_2 k_1 \cos w_p - \hat{\varepsilon}_1 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 w_p}}{-\hat{\varepsilon}_2 k_1 \sin w_p - \hat{\varepsilon}_1 \frac{k_1^2 \sin w_p \cos w_p}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 w_p}}} \end{aligned} \quad (2.68)$$

En appliquant l'équation 2.57 à l'équation 2.68, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \text{Res}_{R_{ev}} &= \frac{\hat{\varepsilon}_{r_2} k_1 \cos w_p + \hat{\varepsilon}_{r_2} k_1 \cos w_p}{-\hat{\varepsilon}_{r_2} k_1 \sin w_p + \hat{\varepsilon}_{r_1} \frac{k_1^2 \sin w_p \cos w_p}{\frac{\hat{\varepsilon}_{r_2}}{\hat{\varepsilon}_{r_1}} k_1 \cos w_p}} \\ \text{Res}_{R_{ev}} &= \frac{2\hat{\varepsilon}_{r_2} \cos w_p}{\sin w_p \left( \frac{\hat{\varepsilon}_{r_1}^2}{\hat{\varepsilon}_{r_2}} - \hat{\varepsilon}_{r_2} \right)} \\ \text{Res}_{R_{ev}} &= 2 \frac{\hat{\varepsilon}_{r_2}^2 \cos w_p}{\hat{\varepsilon}_{r_1}^2 - \hat{\varepsilon}_{r_2}^2 \sin w_p} \\ \text{Res}_{R_{ev}} &= 2 \frac{\hat{\varepsilon}_{r_2}}{\hat{\varepsilon}_{r_1} - \hat{\varepsilon}_{r_2}} \frac{\hat{\varepsilon}_{r_2} \cos w_p}{\hat{\varepsilon}_{r_1} + \hat{\varepsilon}_{r_2} \sin w_p} \\ \text{Res}_{R_{ev}} &= 2 \frac{\hat{\varepsilon}_{r_2}}{\hat{\varepsilon}_{r_1} - \hat{\varepsilon}_{r_2}} \sin^2 w_p \frac{\cos w_p}{\sin w_p} \\ \text{Res}_{R_{ev}} &= 2 \frac{\hat{\varepsilon}_{r_2}}{\hat{\varepsilon}_{r_1} - \hat{\varepsilon}_{r_2}} \sin w_p \cos w_p \end{aligned} \quad (2.69)$$

### 2.4.4 Expression asymptotique du champ

Suite à l'analyse de la distorsion du chemin et des points de singularité dans le plan  $w$ , nous pouvons effectuer l'approximation de la méthode de la plus grande pente à l'intégrale 2.49. Nous commençons par l'intégrale de l'onde directe. Vu que cette intégrale ne présente pas de pôle, l'approximation de l'équation 2.19 est suffisante, sachant que  $w_s = \theta'$  et que l'équation 2.16 a été calculée pour notre cas dans l'équation 2.54 :

$$\begin{aligned} E_{z_{\text{dir}}} &\approx e^{-jk_1 r} \left( \frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{8\pi j \omega \hat{\epsilon}_1} (-jk_1^3 \sin^3(\theta')) \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r \sin^2(\theta')}} \sqrt{\frac{2\pi}{k_1 r}} e^{j\frac{\pi}{4}} \right) \\ &\approx \frac{1}{4\pi j \omega \hat{\epsilon}_1} \frac{k_1^2 \sin^2 \theta'}{r} e^{-jk_1 r} \end{aligned} \quad (2.70)$$

En introduisant l'impédance du milieu  $\eta = \sqrt{\frac{\hat{\mu}}{\hat{\epsilon}}} = \frac{k}{\hat{\epsilon}\omega}$  et sachant que  $\sin^2 \theta' = \sin^2 \theta$ , l'onde directe devient :

$$E_{z_{\text{dir}}} \approx -j\eta_1 k_1 \sin^2 \theta \frac{e^{-jk_1 r}}{4\pi r} \quad (2.71)$$

L'approximation de la méthode de la plus grande pente pour l'onde directe est conforme aux résultats trouvés dans la littérature par d'autres méthodes [64].

Pour l'intégrale de l'onde due à l'image, il faut appliquer l'approximation 2.38, en raison de la singularité du terme  $R_{\text{ev}}$ . La contribution du premier terme de cette équation, dû au point stationnaire  $w_s = \theta_I$ , appelé  $E_{z_{\text{image } C'}}$ , peut s'écrire :

$$E_{z_{\text{image } C'}} \approx -j\eta_1 k_1 \sin^2 \theta_I R_{\text{ev}}(\theta_I) \frac{e^{-jk_1 r_I}}{4\pi r_I} \quad (2.72)$$

Le deuxième terme de l'équation 2.38 est la contribution due à la proximité du pôle au chemin  $C'$ . A partir du résidu du terme  $R_{\text{ev}}$ , donné par l'équation 2.69, il est possible de calculer le résidu de la fonction en sa totalité :

$$\text{Res} = -\frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{8\pi \omega \hat{\epsilon}_1} k_1^3 \sin^4 w_p \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 \sin w_p r_I \sin \theta_I}} 2 \frac{\hat{\epsilon}_{r_2}}{\hat{\epsilon}_{r_1} - \hat{\epsilon}_{r_2}} \cos w_p \quad (2.73)$$

Ce deuxième terme de l'équation 2.38, appelé  $E_{z_{\text{image pôle}}}$ , s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 E_{z_{\text{image pôle}}} &\approx e^{-jk_1 r_1} \left( -\frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{8\pi\omega\hat{\epsilon}_1} k_1^3 \sin^4 w_p \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 \sin w_p r_1 \sin \theta_1}} 2 \frac{\hat{\epsilon}_{r_2}}{\hat{\epsilon}_{r_1} - \hat{\epsilon}_{r_2}} \cos w_p \right. \\
 &\quad \left. \cdot \frac{\sqrt{\pi}(1 - j\sqrt{\pi\tau}e^{-\tau} \operatorname{erfc}(j\sqrt{\tau}))}{\sqrt{jk_1 r_1 (\cos(w_p - \theta_1) - 1)}} \right) \\
 E_{z_{\text{image pôle}}} &\approx e^{-jk_1 r_1} \left( -\frac{1}{4\pi\omega\hat{\epsilon}_1} \frac{k_1^2}{r_1} \sqrt{2 \sin^7 w_p} \frac{\hat{\epsilon}_{r_2}}{\hat{\epsilon}_{r_1} - \hat{\epsilon}_{r_2}} \cos w_p \frac{1 - j\sqrt{\pi\tau}e^{-\tau} \operatorname{erfc}(j\sqrt{\tau})}{\sqrt{\sin \theta_1 (\cos(w_p - \theta_1) - 1)}} \right) \\
 E_{z_{\text{image pôle}}} &\approx -\frac{e^{-jk_1 r_1}}{4\pi r_1} \eta_1 k_1 \left( \sqrt{2 \sin^7 w_p} \frac{\hat{\epsilon}_{r_2}}{\hat{\epsilon}_{r_1} - \hat{\epsilon}_{r_2}} \cos w_p \frac{1 - j\sqrt{\pi\tau}e^{-\tau} \operatorname{erfc}(j\sqrt{\tau})}{\sqrt{\sin \theta_1 (\cos(w_p - \theta_1) - 1)}} \right)
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

Le champ total dû à l'image est la somme des équations 2.72 et 2.74 :

$$\begin{aligned}
 E_{z_{\text{image}}} &\approx -j\eta_1 k_1 \left( \sin^2 \theta_1 R_{\text{ev}}(\theta_1) + \right. \\
 &\quad \left. -j\sqrt{2 \sin^7 w_p} \frac{\hat{\epsilon}_{r_2}}{\hat{\epsilon}_{r_1} - \hat{\epsilon}_{r_2}} \cos w_p \frac{1 - j\sqrt{\pi\tau}e^{-\tau} \operatorname{erfc}(j\sqrt{\tau})}{\sqrt{\sin \theta_1 (\cos(w_p - \theta_1) - 1)}} \right) \frac{e^{-jk_1 r_1}}{4\pi r_1}
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

Le champ total  $E_z$  est donné par la somme des équations 2.71 et 2.75 :

$$\begin{aligned}
 E_z &\approx -j\eta_1 k_1 \left( \sin^2 \theta \frac{e^{-jk_1 r}}{4\pi r} + \right. \\
 &\quad \sin^2 \theta_1 R_{\text{ev}}(\theta_1) \frac{e^{-jk_1 r_1}}{4\pi r_1} + \\
 &\quad \left. -j\sqrt{2 \sin^7 w_p} \frac{\hat{\epsilon}_{r_2}}{\hat{\epsilon}_{r_1} - \hat{\epsilon}_{r_2}} \cos w_p \frac{1 - j\sqrt{\pi\tau}e^{-\tau} \operatorname{erfc}(j\sqrt{\tau})}{\sqrt{\sin \theta_1 (\cos(w_p - \theta_1) - 1)}} \frac{e^{-jk_1 r_1}}{4\pi r_1} \right)
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

L'équation 2.76 peut être divisée en deux parties,  $E_{z_{2R}}$  et  $E_{z_{\text{pôle}}}$ , de la manière suivante :

$$E_{z_{2R}} = -j\eta_1 k_1 \left( \sin^2 \theta \frac{e^{-jk_1 r}}{4\pi r} + \sin^2 \theta_1 R_{\text{ev}}(\theta_1) \frac{e^{-jk_1 r_1}}{4\pi r_1} \right) \tag{2.77}$$

$$\begin{aligned}
 E_{z_{\text{pôle}}} &= -j\eta_1 k_1 \left( -j\sqrt{2 \sin^7 w_p} \frac{\hat{\epsilon}_{r_2}}{\hat{\epsilon}_{r_1} - \hat{\epsilon}_{r_2}} \cos w_p \right. \\
 &\quad \left. \cdot \frac{1 - j\sqrt{\pi\tau}e^{-\tau} \operatorname{erfc}(j\sqrt{\tau})}{\sqrt{\sin \theta_1 (\cos(w_p - \theta_1) - 1)}} \frac{e^{-jk_1 r_1}}{4\pi r_1} \right)
 \end{aligned} \tag{2.78}$$

Le premier terme,  $E_{z_{2R}}$ , est identique au champ estimé par la méthode à deux rayons. Nous pouvons clairement distinguer les composantes directe et réfléchie du champ. Le deuxième terme,  $E_{z_{\text{pole}}}$ , correspond à la partie négligée par la méthode à deux rayons. Mathématiquement, il est dû à la proximité du pôle avec le chemin d'intégration distordu. Physiquement, il s'explique par la diffraction de l'onde sur l'interface entre deux milieux [59, Sec. 1.7d].

### 2.4.5 Validation et analyse

Pour valider les champs estimés par les approximations de la méthode de la plus grande pente, nous avons comparé le champ électrique de l'équation 2.76 avec la méthode à deux rayons et les approximations de Norton et de Bannister pour les trois scénarios étudiés dans les sections 1.1 et 1.2. Les figures 2.18 à 2.20 présentent cette comparaison. Nous vérifions que le champ de l'équation 2.76 est identique à ceux estimés par les approximations de Norton et de Bannister. Nous pouvons ainsi valider les expressions asymptotiques obtenues dans ce chapitre.

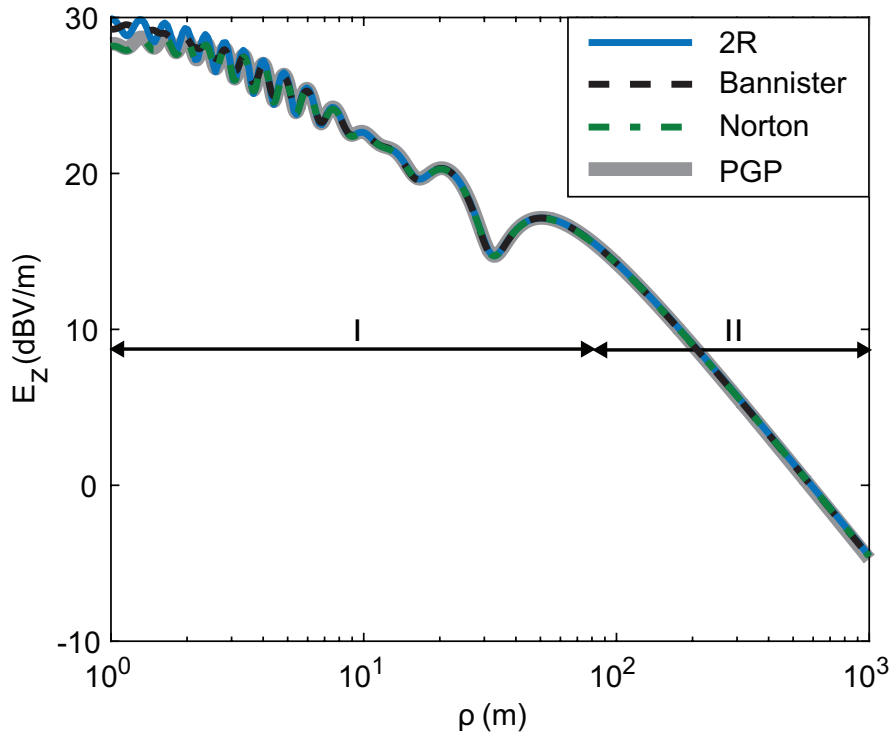


FIGURE 2.18 – Comparaison du résultat de la méthode de la plus grande pente (PGP), des approximations de Norton et de Bannister et de la méthode à deux rayons (2R) dans les mêmes conditions qu'à la figure 1.2 ( $f = 2,4$  GHz,  $h_t = 2$  m,  $h_r = 1$  m,  $\varepsilon_{r_2} = 15$ ,  $\tan \delta_2 = 10^{-3}$ ).

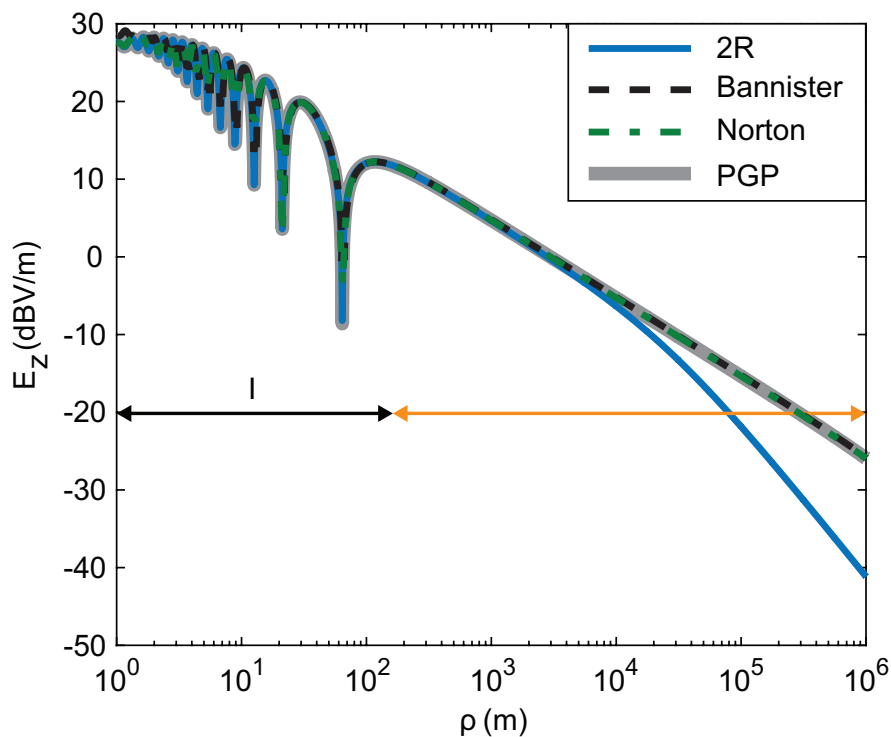


FIGURE 2.19 – Comparaison du résultat de la méthode de la plus grande pente (PGP), des approximations de Norton et de Bannister et de la méthode à deux rayons (2R) dans les mêmes conditions qu'à la figure 1.3 ( $f = 2,4$  GHz,  $h_t = 2$  m,  $h_r = 1$  m,  $\sigma_2 = 10^7$  S/m).

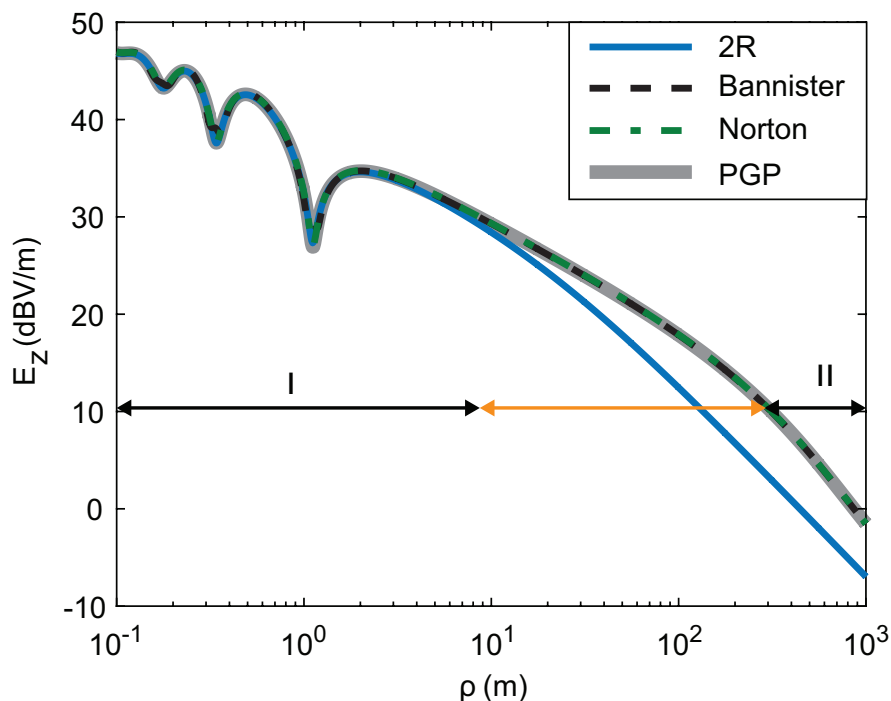


FIGURE 2.20 – Comparaison du résultat de la méthode de la plus grande pente (PGP), des approximations de Norton et de Bannister et de la méthode à deux rayons (2R) dans les mêmes conditions qu'à la figure 1.4 ( $f = 8,2$  GHz,  $h_t = 10$  cm,  $h_r = 10$  cm,  $\sigma_2 = 5 \cdot 10^3$  S/m).



Nous concluons que la différence entre le champ électrique estimé par la méthode à deux rayons et les autres approximations est expliquée par la prise en compte de la composante diffractée de l'onde à l'interface,  $E_{z_{\text{pole}}}$ . En effet, sous certaines conditions, cette composante peut être plus importante que les autres. Par exemple, analysons  $E_{z_{\text{pole}}}$  pour la propagation au-dessus d'une surface conductrice ( $|\hat{\varepsilon}_2| \rightarrow \infty$ ) dans la zone du champ lointain ( $r_1 \rightarrow \infty$  et  $\theta_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ). D'après l'équation 2.65,  $\tau \rightarrow \varrho$ , qui dans cette zone est proportionnelle à  $\rho$ . Par ailleurs, d'après les équations 2.59,  $w_p \rightarrow \frac{\pi}{2}$ . Ainsi, il est possible de montrer que  $\frac{\cos w_p}{\sqrt{\cos(w_p - \theta_1) - 1}} \rightarrow -j\sqrt{2}$  et l'équation 2.78 peut se réécrire :

$$E_{z_{\text{pole}}} \approx -j\eta_1 k_1 (1 - j\sqrt{\pi\tau}e^{-\tau} \operatorname{erfc}(j\sqrt{\tau})) \frac{e^{-jk_1 r_1}}{2\pi r_1} \quad (2.79)$$

En utilisant la définition de la fonction d'erreur complémentaire (équation 2.30), on peut écrire :

$$E_{z_{\text{pole}}} \approx -j\eta_1 k_1 \left( \underbrace{1}_1 - \underbrace{j\sqrt{\pi\tau}e^{-\tau}}_2 + \underbrace{j2\sqrt{\tau}e^{-\tau} \int_0^{j\sqrt{\tau}} e^{-x^2} dx}_3 \right) \frac{e^{-jk_1 r_1}}{2\pi r_1} \quad (2.80)$$

Le premier terme de l'équation 2.80 a la forme d'une onde réfléchiée et intervient dans la réflexion. Le deuxième terme quant à lui est plus complexe à interpréter. Puisque  $\tau$  est directement proportionnel à  $\rho$ , il est possible de montrer que ce terme présente une atténuation proportionnelle à  $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$  et une très forte atténuation dans la direction  $z$  (plus forte que l'atténuation dans la direction  $\rho$ ). Par conséquent, cette composante a les caractéristiques d'une *onde de surface de Zenneck*. Nous ne pouvons pas tirer profit des propriétés intéressantes de cette composante de manière isolée, car le troisième terme interfère avec l'onde de surface et peut même annuler ses effets à grande distance. Bien que l'onde de Zenneck ne soit pas excitée indépendamment des deux autres composantes, sous certaines conditions,  $E_{z_{\text{pole}}}$  peut améliorer la propagation de l'onde rayonnée par un dipôle élémentaire, permettant un affaiblissement de trajet plus favorable à de grandes distances.

## Conclusion

Dans le présent chapitre, les intégrales de Sommerfeld des champs rayonnés par un dipôle élémentaire, présentées dans le chapitre 1, ont été évaluées analytiquement. Cette évaluation a été effectuée à la lumière de la méthode de la plus grande pente, qui propose une distorsion du chemin d'intégration original vers un autre chemin dont les propriétés sont adaptées à une évaluation asymptotique. A cette fin, il a été nécessaire d'étudier le chemin d'intégration des intégrales de Sommerfeld. Une représentation angulaire a aussi été introduite pour faciliter l'application de cette méthode.

Les résultats délivrés par la méthode de la plus grande pente ont été confrontés à ceux issus des approximations de Norton et de Bannister. Une bonne concordance a été observée. Nous avons identifié que le terme responsable de la différence entre la méthode à deux rayons et les approximations de Norton et de Bannister est  $E_{z_{\text{pole}}}$ . Mathématiquement, ce terme apparaît en raison de la proximité du pôle de  $R_{\text{ev}}$  du chemin d'intégration distordu. Physiquement, il s'agit d'une composante de l'onde diffractée à l'interface entre les deux milieux. Nous avons déjà montré que ce terme peut devenir prépondérant devant les composantes d'onde directe et réfléchie. Par conséquent, il serait souhaitable d'identifier les conditions pour lesquelles cette composante diffractée prend le relais de la propagation. Ceci constitue l'objectif principal d'étude du chapitre 4.



# Chapitre 3

## Formulation dite « de Schelkunoff »

### Sommaire

---

3.1	Méthode de superposition des diffusions . . . . .	79
3.2	Formulation de Sommerfeld . . . . .	80
3.3	Formulation dite « de Schelkunoff » . . . . .	82
3.4	Analyse dans le plan complexe . . . . .	84
3.5	Evaluation asymptotique . . . . .	90
	Conclusion . . . . .	92

---

AVANT de débiter l'analyse du comportement du champ électrique excité par un dipôle électrique élémentaire au-dessus d'une interface plane, tirons profit des analyses mathématiques développées dans les chapitres précédents pour évaluer une nouvelle formulation pour la propagation près du sol.

La formulation mathématique rigoureuse présentée dans le chapitre 1 a été introduite par Sommerfeld. Ainsi on fera référence à cette solution comme *formulation de Sommerfeld*. La démarche présentée dans ce manuscrit pour trouver cette solution n'est pas identique à celle de Sommerfeld, bien que les deux traitements fassent appel à la méthode de superposition des diffusions (de l'anglais, *scattering superposition method*) qui sera détaillée ultérieurement.

En dépit d'une première analyse par Sommerfeld qui a été parfois contestée jusqu'à nos jours, sa formulation a été reprise et validée par plusieurs auteurs, comme Weyl [5], Norton [9]–[12], Wait [16], Bannister [13]–[14], Collin [21], Michalski et Mosig [22]–[25]. Ainsi, la formulation de Sommerfeld jouit d'une large acceptation dans la communauté scientifique et son exactitude n'a jamais été remise en question. Néanmoins, cette formulation n'est pas adaptée pour une analyse numérique puisqu'elle présente une forte oscillation et une lente décroissance pour les distances d'intérêt de la propagation près du sol [59, pp. 480-482]. Ainsi, juste après la publication de cette formulation au début du XX<sup>e</sup>, elle a été davantage l'objet d'évaluations asymptotiques. Au fur et à mesure de l'augmentation de la puissance des ordinateurs et du perfectionnement de différentes techniques de calcul, l'analyse numérique des intégrales de Sommerfeld a pu se développer et devenir tout-à-fait maîtrisée.

Dans le but de délivrer une formulation dédiée à l'analyse numérique, W. Dyab *et al.* ont proposé une nouvelle formulation [29][30]. Les auteurs ont repris la même démarche que Sommerfeld, mais ils ont utilisé l'identité de Schelkunoff. Ainsi, on appelle la solution proposée la *formulation dite « de Schelkunoff »*. Toutefois, cette nouvelle formulation n'a pas été unanimement acceptée dans la littérature, étant notamment contestée dans [31] et remise en cause par [25, p. 31, note 18].

L'objectif de ce chapitre est d'éclairer les points controversés sur la formulation dite « de Schelkunoff ». Ce chapitre est structuré comme suit. Premièrement, la section 3.1 décrit la méthode de superposition des diffusions, souvent utilisée pour résoudre des équations différentielles. Ensuite, la section 3.2 détaille la démarche de Sommerfeld

pour résoudre le problème du rayonnement d'un dipôle au-dessus d'une interface plane et rapporte certaines curiosités historiques de cette formulation. La section 3.3 présente l'intégrale de Schelkunoff et détaille la nouvelle formulation proposée par W. Dyab *et al.* pour le problème du rayonnement d'un dipôle au-dessus d'une interface plane, en se basant sur cette intégrale. La section 3.4 présente des analyses dans le plan complexe pour démontrer l'égalité entre les identités de Sommerfeld et de Schelkunoff et évalue les deux formulations. Finalement, la section 3.5 confronte les deux formulations par une évaluation asymptotique en utilisant la méthode de la plus grande pente, telle qu'elle est décrite dans le chapitre 2.

### 3.1 Méthode de superposition des diffusions

Afin de résoudre les équations différentielles inhomogènes (le second membre de l'équation non nul ou, par une interprétation physique, en présence d'une source), la méthode de superposition des diffusions part du principe que la solution peut être décomposée en la somme d'une solution particulière, forcée par la source (le second membre non-nul), et d'une solution générale de l'équation homogène (sans source), permettant d'établir les conditions aux limites.

En réécrivant l'équation 1.10c pour les deux milieux semi-infinis de la figure 1.8 :

$$\nabla^2 A_{z_m} + k_m^2 A_{z_m} = -\delta(r) \quad (3.1)$$

où l'indice  $m$  a été introduit pour faire référence aux milieux 1 ( $z > -z_0$ , où se trouve la source) et 2 ( $z < -z_0$ ), la méthode de la superposition des diffusions prévoit que la solution  $A_{z_m}$  peut s'écrire sous forme :

$$A_{z_m} = A_{z_m}^p + A_{z_m}^h \quad (3.2)$$

où  $A_{z_m}^p$  est une solution particulière et  $A_{z_m}^h$  est une solution à l'équation homogène [65, p. 300].

L'absence de source dans le milieu 2 rend l'équation de Helmholtz homogène dans ce milieu, on peut vérifier que  $A_{z_2}^p = 0$ . L'étape suivante serait de calculer  $A_{z_1}^p$  supposant que le milieu 1 est infini et ensuite de trouver  $A_{z_1}^h$  et  $A_{z_2}^h$  de sorte que les conditions aux limites

soient respectées. Physiquement,  $A_{z_1}^p$  est la composante excitée par le dipôle élémentaire dans le milieu 1 en l'absence du milieu 2.  $A_{z_1}^h$  et  $A_{z_2}^h$  tiennent compte de l'interface.

Comme présenté dans la section 1.3.1,  $A_{z_1}^p$  a une forme analytique explicite simple, sous forme de l'exponentielle de l'équation 1.14. Toutefois, la solution de  $A_z^h$  en présence d'une interface n'a pas de solution analytique explicite, comme montré dans le chapitre 1. Ainsi, des développements sous forme d'intégrale, comme les identités de Weyl (équation 1.27) et de Sommerfeld (équations 1.28 et 1.43) sont indispensables pour résoudre le problème.

On remarque que la théorie des images présentée dans la section 1.3.2.1 est une application directe de la méthode de superposition des diffusions. En généralisant la théorie des images pour une interface diélectrique à pertes ou conductrice imparfaite, nous avons utilisé indirectement les principes de la méthode de superposition des diffusions.

## 3.2 Formulation de Sommerfeld

En 1909, Arnold Sommerfeld a été le premier scientifique à essayer de modéliser la propagation d'un dipôle électrique au-dessus d'une interface [4] (sa communication la plus accessible date néanmoins de 1949 [53]). Il a aussi fait appel à la théorie des images (et conséquemment à la méthode de superposition des diffusions), mais contrairement à ce qui est présenté dans ce manuscrit, il n'a pas utilisé la transformée de Fourier ou de Hankel. A la place, il a développé l'identité qui actuellement porte son nom en se basant sur la propriété de « complétude des fonctions propres » de l'opérateur laplacien. Cette propriété garantit que toute fonction continue dans son domaine (y compris l'exponentielle de l'équation 1.14) peut être développée comme une somme des fonctions propres de cet opérateur. Etant donné que le domaine du problème est infini, cette somme devient une intégrale car le spectre de valeurs propres et fonctions propres est continu. Un développement plus détaillé de cette procédure dépasse le cadre de ce manuscrit.

Après avoir établi une forme intégrale à  $A_{z_1}^p$ , Sommerfeld suppose une forme similaire à  $A_{z_1}^h$  et  $A_{z_2}^h$ , en faisant intervenir des fonctions  $R_{ev}^{Som}$  et  $T_{ev}^{Som}$ , qu'il a dénommées *distributions spectrales des fonctions propres*. Il les a déterminées en invoquant les conditions aux limites. Mathématiquement, la formulation de Sommerfeld pour le dipôle élémentaire

électrique vertical peut être présentée sous forme [22] :

$$A_{z_1}^{\text{Som}} = \frac{1}{4\pi} \left( \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{k_\rho}{jk_{z_1}} J_0(k_\rho \rho) e^{-jk_{z_1}|z|} dk_\rho}_{A_{z_1}^p} + \underbrace{\int_0^{+\infty} R_{\text{ev}}^{\text{Som}} \frac{k_\rho}{jk_{z_1}} J_0(k_\rho \rho) e^{-jk_{z_1}(z+2z_0)} dk_\rho}_{A_{z_1}^h} \right) \quad (3.3)$$

$$A_{z_2}^{\text{Som}} = \frac{1}{4\pi} \underbrace{\int_0^{+\infty} T_{\text{ev}}^{\text{Som}} k_\rho J_0(k_\rho \rho) e^{-jk_{z_2}(z+z_0)} e^{-jk_{z_1}z_0} dk_\rho}_{A_{z_2}^h} \quad (3.4)$$

où

$$k_{z_m} = \sqrt{k_m^2 - k_\rho^2} \quad (3.5)$$

$$R_{\text{ev}}^{\text{Som}} = \frac{\hat{\varepsilon}_2 jk_{z_1} - \hat{\varepsilon}_1 jk_{z_2}}{\hat{\varepsilon}_2 jk_{z_1} + \hat{\varepsilon}_1 jk_{z_2}} \quad T_{\text{ev}}^{\text{Som}} = \frac{2\hat{\varepsilon}_2}{\hat{\varepsilon}_2 jk_{z_1} + \hat{\varepsilon}_1 jk_{z_2}} \quad (3.6)$$

La seule différence entre les coefficients des équations 1.32 et 3.6 est l'absence de l'exponentielle en  $T_{\text{ev}}^{\text{Som}}$ , qui a été introduite directement dans l'équation 3.4. On note aussi que le terme  $I\Delta\ell$  a été fixé à l'unité. Ainsi ces intégrales donnent origine aux champs présentés dans le tableau 1.6.

La démarche de Sommerfeld possède des qualités de simplicité mathématique et physique. Elle peut aussi être validée par des concepts mathématiques plus élaborés et sophistiqués, comme les opérateurs différentiels et les propriétés des fonctions de Green caractéristiques [59, Sec. 3.3]. Une procédure détaillée est disponible dans [22].

Il est intéressant de savoir que lors de la première analyse asymptotique de sa formulation, Sommerfeld a commis une erreur qui est devenue très célèbre. Ainsi, lors de l'évaluation asymptotique, Sommerfeld a conclu que le pôle des coefficients  $R_{\text{ev}}^{\text{Som}}$  et  $T_{\text{ev}}^{\text{Som}}$  de l'équation 3.6 était intercepté par le chemin d'intégration distordu. Par conséquent, ses calculs prévoient une *onde de surface* de Zenneck, de caractéristique cylindrique, présentant une forte atténuation verticale, mais une lente décroissance radiale (proportionnelle à l'inverse de la racine carrée de  $\rho$ ) [3] [26]. Or, dans la section 2.4.3.2 nous avons démontré que, pour des milieux dont la permittivité diélectrique complexe a une partie réelle positive, il est impossible que ce pôle soit intercepté, même s'il peut se trouver très près du chemin d'intégration (original et/ou distordu).

Il semblerait qu'une erreur mineure est à l'origine de cette fausse conclusion : une



erreur de signe, selon Norton [66]. L'identification de cette erreur a donné lieu à des doutes sur la localisation du pôle de ce problème et son existence dans la feuille de Riemann supérieure. Ces doutes ont été levés à plusieurs reprises et la localisation de ce pôle dans la feuille supérieure de Riemann peut être prouvée [22], comme démontré dans la section 2.4.3.2.

Quasiment un siècle après la première communication de Sommerfeld sur le rayonnement d'un dipôle au-dessus d'une interface plane, Collin a révisé ses calculs et n'a trouvé aucun indice de cette erreur de signe, qu'il a qualifiée de *mythe* [21]. Cette remise en question de l'explication qui, jusqu'alors, faisait consensus est utilisée par des auteurs contemporains qui réfutent toutes les démonstrations de l'existence de ce pôle [29].

### 3.3 Formulation dite « de Schelkunoff »

Les identités de Weyl (équation 1.27) et de Sommerfeld (équations 1.28 et 1.43) ne sont pas les seuls développements possibles de l'exponentielle de l'équation 1.14 sous forme d'intégrales. En 1936, Schelkunoff a proposé une *intégrale modifiée de Sommerfeld* [67], connue comme *identité de Schelkunoff* et qui s'écrit comme suit :

$$\frac{e^{-jk_1 r}}{4\pi r} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} K_0 \left( \rho \sqrt{k_z^2 - k_1^2} \right) \cos(k_z z) dk_z \quad (3.7)$$

où  $K_0(\cdot)$  est une fonction de Bessel modifiée connue comme *fonction de Macdonald* d'ordre zéro. On pourrait également écrire  $\sqrt{k_z^2 - k_1^2} = jk_\rho$ , sachant que dans cette intégrale, contrairement à l'identité de Sommerfeld,  $k_\rho$  est donné en fonction de la variable indépendante  $k_z$ .

Schelkunoff a souligné que cette version modifiée de l'identité de Sommerfeld est plus adaptée à l'application des conditions aux limites pour les frontières cylindriques, contrairement à l'identité originale de Sommerfeld, qui se révèle très efficace pour les frontières planes.

Cela n'est pas le seul avantage de cette identité. Felsen et Marcuvitz ont remarqué que cette identité a une décroissance très rapide pour de larges valeurs de  $\rho$  [59, pp. 480-482]. Cette propriété est intéressante pour les analyses numériques.

Soucieux de présenter une formulation plus adaptée au traitement numérique que celle de Sommerfeld, W. Dyab *et al.* ont proposé une nouvelle formulation pour le rayon-

nement d'un dipôle élémentaire électrique vertical au-dessus d'une interface plane [29][30]. Les auteurs ont repris la démarche de Sommerfeld, qui consiste à appliquer la méthode de superposition des diffusions en utilisant une forme intégrale pour  $A_{z_1}^p$  et postuler des formes similaires à  $A_{z_1}^h$  et  $A_{z_2}^h$  en utilisant des coefficients à déterminer suite à l'application des conditions aux limites. Cependant, dans leur écriture, la forme intégrale pour  $A_{z_1}^p$  est issue de l'identité de Schelkunoff. Ainsi, on appelle cette nouvelle proposition la *formulation dite « de Schelkunoff »*. Le développement mathématique de cette nouvelle formulation est similaire à celui de Sommerfeld :

$$A_{z_1}^{\text{Sch}} = \frac{1}{2\pi^2} \underbrace{\left( \int_0^{+\infty} K_0 \left( \rho \sqrt{k_{z_1}^2 - k_1^2} \right) \cos(k_{z_1} z) dk_{z_1} \right)}_{A_{z_1}^p} + \underbrace{\int_0^{+\infty} R_{\text{ev}}^{\text{Sch}} K_0 \left( \rho \sqrt{k_{z_1}^2 - k_1^2} \right) \cos(k_{z_1} (z + 2z_0)) dk_{z_1}}_{A_{z_1}^h} \quad (3.8)$$

$$A_{z_2}^{\text{Sch}} = \frac{1}{2\pi^2} \underbrace{\int_0^{+\infty} T_{\text{ev}}^{\text{Sch}} K_0 \left( \rho \sqrt{k_{z_2}^2 - k_2^2} \right) \cos(k_{z_2} (z + z_0) - k_{z_1} z_0) dk_{z_1}}_{A_{z_2}^h} \quad (3.9)$$

où

$$R_{\text{ev}}^{\text{Sch}} = \frac{\hat{\varepsilon}_2 j k_{z_1} - \hat{\varepsilon}_1 j k_{z_2}}{\hat{\varepsilon}_2 j k_{z_1} + \hat{\varepsilon}_1 j k_{z_2}} \quad T_{\text{ev}}^{\text{Sch}} = \frac{2\hat{\varepsilon}_2 j k_{z_1}}{\hat{\varepsilon}_2 j k_{z_1} + \hat{\varepsilon}_1 j k_{z_2}} \quad (3.10)$$

et  $\sqrt{k_{z_1}^2 - k_1^2} = \sqrt{k_{z_2}^2 - k_2^2} = j k_\rho$ , donc :

$$k_{z_2} = \sqrt{k_{z_1}^2 - k_1^2 + k_2^2} \quad (3.11)$$

Au premier regard, la formulation dite « de Schelkunoff » paraît scientifiquement solide, sachant que la même démarche que Sommerfeld a été reprise pour y accéder. Toutefois, une analyse plus approfondie révèle certaines incohérences.

Le premier point qui soulève des questions porte sur le choix de la variable d'intégration. La formulation dite « de Schelkunoff » suppose une solution basée sur un développement spectral sur la constante de propagation verticale ( $k_z$ ). Néanmoins, cette composante n'est pas identique dans les deux milieux. En effet, d'après la condition d'adaptation de phase (*phase matching*), la constante de propagation radiale ( $k_\rho$ ) doit être identique dans les deux milieux. Ainsi, utiliser cette nouvelle formulation au détriment de celle de Som-

merfeld ne semble pas très intuitif. De plus, Schelkunoff a préconisé l'utilisation de cette identité pour le rayonnement d'une source située à l'intérieur d'un milieu constitué de couches multiples coaxiales cylindriques. En effet, l'utilisation de cette nouvelle proposition semble mieux appropriée pour une configuration multicouche concentrique autour de l'axe  $z$ , car, dans ce cas, l'adaptation de phase impose  $k_z$  identique pour toutes les couches.

Cette apparente inadaptation de la formulation dite « de Schelkunoff » aux milieux stratifiés planaires n'est pas suffisante pour la remettre en cause. Néanmoins, une analyse approfondie des deux formulations dans le plan complexe, développée dans la section 3.4, montre qu'elles ne sont pas identiques, même si les identités à l'origine le sont. Par ailleurs, l'application de l'approximation asymptotique de la plus grande pente (cf. chapitre 2) à la formulation dite « de Schelkunoff » dans la section 3.5 n'entraîne pas les mêmes résultats que ceux de la formulation de Sommerfeld.

### 3.4 Analyse dans le plan complexe

Préalablement à l'analyse des deux formulations dans le plan complexe, nous allons démontrer l'égalité des identités qui sont à l'origine de chaque formulation. Soit l'identité de Sommerfeld écrite sous forme de l'équation 1.43. Par convenance, elle peut être réécrite, en présentant la constante de propagation verticale en fonction de la constante de propagation radiale :

$$\frac{e^{-jk_1 r}}{4\pi r} = \frac{1}{8\pi} \int_{C_{\text{Som}}} \frac{k_\rho}{j\sqrt{k_1^2 - k_\rho^2}} H_0^{(2)}(k_\rho \rho) e^{-j\sqrt{k_1^2 - k_\rho^2} |z|} dk_\rho = I_{C_{\text{Som}}} \quad (3.12)$$

où  $C_{\text{Som}}$  est le chemin d'intégration présenté initialement dans la figure 2.4a. La figure 3.1 présente le plan complexe  $k_\rho$  et reprend ce chemin d'intégration (courbe verte).

Les seuls points de singularité de l'intégrale de l'équation 3.12 sont  $k_\rho = 0$  et  $k_\rho = k_1$ , dus respectivement à la fonction de Hankel et la fonction racine carrée. Les coupures de ramification choisies pour chaque point de ramification sont données, respectivement, par les courbes orange et bleue de la figure 3.1. Par convenance, nous avons choisi pour  $k_\rho = k_1$  la coupure de ramification correspondant à  $\Im m \left\{ \sqrt{k_1^2 - k_\rho^2} \right\} = 0$ . Ainsi, sur le chemin  $C_{\text{ram1}}$ , la fonction  $\sqrt{k_1^2 - k_\rho^2}$  est purement réelle. Comme démontré dans la section

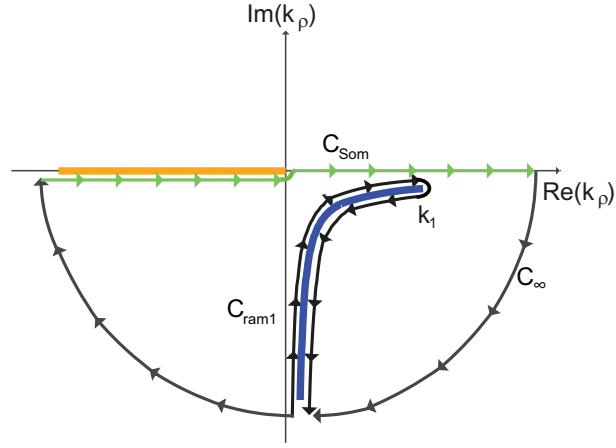


FIGURE 3.1 – Plan complexe  $k_\rho$  pour l'analyse des identités de Sommerfeld et de Schelkunoff.

2.1, ce choix de coupure de ramification garantit que la partie imaginaire de la fonction racine carrée est négative dans tout le plan  $k_\rho$ , alors que la partie réelle de la racine carrée est positive sur le chemin  $C_{\text{Som}}$ . Ainsi les conditions de rayonnement sur la constante de propagation de l'exponentielle de l'intégrale sont respectées.

Etant donné l'absence de point de singularité dans le chemin fermé constitué par  $C_{\text{Som}}$ ,  $C_\infty$  et  $C_{\text{ram1}}$ , l'intégrale sur ce contour est nulle. Ainsi :

$$I_{C_{\text{Som}}} + I_{C_\infty} - I_{C_{\text{ram1}}} = 0 \quad (3.13)$$

Par le lemme de Jordan,  $I_{C_\infty} = 0$ . Par conséquent :

$$I_{C_{\text{Som}}} = I_{C_{\text{ram1}}} \quad (3.14)$$

Introduisons le changement de variable suivant :

$$k_{z_1} = \sqrt{k_1^2 - k_\rho^2} \quad k_{z_1} dk_{z_1} = -k_\rho dk_\rho \quad (3.15)$$

Sachant que  $k_{z_1}$  est purement réel et varie de  $+\infty$  à  $-\infty$  sur  $C_{\text{ram1}}$ , on peut alors écrire :

$$I_{C_{\text{ram1}}} = \frac{1}{8\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(2)} \left( \rho \sqrt{k_1^2 - k_{z_1}^2} \right) e^{-jk_{z_1}|z|} dk_{z_1} \quad (3.16)$$

Nous introduisons le changement de variable  $k'_{z_1} = -k_{z_1}$  à l'intégrale de l'équation

3.16 :

$$I_{C_{\text{ram1}}} = \frac{1}{8\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(2)} \left( \rho \sqrt{k_1^2 - k_{z_1}'^2} \right) e^{jk_{z_1}'|z|} dk_{z_1}' \quad (3.17)$$

La comparaison des équations 3.16 et 3.17 permet de conclure que l'on peut s'affranchir du signe de l'exponentielle. Ainsi,  $|z|$  peut être remplacé tout simplement par  $z$  dans l'équation 3.16.

Pour retrouver la forme de l'identité de Schelkunoff, on peut utiliser la relation suivante :

$$H_0^{(2)}(k_\rho \rho) = \frac{2j}{\pi} K_0(jk_\rho \rho) \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg(jk_\rho \rho) \leq \pi \quad (3.18)$$

Par conséquent, l'équation 3.16 peut s'écrire comme suit :

$$I_{C_{\text{ram1}}} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} K_0 \left( \rho \sqrt{k_{z_1}^2 - k_1^2} \right) e^{-jk_{z_1}z} dk_{z_1} \quad (3.19)$$

La dernière étape de cette démonstration consiste à décomposer l'exponentielle en parties réelle et imaginaire et à invoquer les propriétés d'intégration des fonctions paire et impaire :

$$I_{C_{\text{ram1}}} = \frac{1}{4\pi^2} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} K_0 \left( \rho \sqrt{k_{z_1}^2 - k_1^2} \right) \cos(k_{z_1}z) dk_{z_1} \right. \\ \left. - j \int_{-\infty}^{+\infty} K_0 \left( \rho \sqrt{k_{z_1}^2 - k_1^2} \right) \sin(k_{z_1}z) dk_{z_1} \right) \quad (3.20)$$

$$I_{C_{\text{ram1}}} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} K_0 \left( \rho \sqrt{k_{z_1}^2 - k_1^2} \right) \cos(k_{z_1}z) dk_{z_1} \quad (3.21)$$

Etant donné que l'équation 3.12 peut être réécrite en utilisant la fonction de Bessel  $J_0(\cdot)$  (équation 1.28) et compte tenu des équations 3.14 et 3.21, il est possible d'écrire :

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{k_\rho}{j\sqrt{k_1^2 - k_\rho^2}} J_0(k_\rho \rho) e^{-j\sqrt{k_1^2 - k_\rho^2}|z|} dk_\rho = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} K_0 \left( \rho \sqrt{k_1^2 - k_{z_1}^2} \right) \cos(k_{z_1}z) dk_{z_1} \quad (3.22)$$

L'équation 3.22 démontre l'équivalence entre les identités de Sommerfeld et de Schelkunoff.

A présent, nous allons appliquer le même raisonnement pour évaluer l'équivalence de la formulation de Sommerfeld et celle dite « de Schelkunoff ». L'équation 3.22 démontre que les termes  $A_{z_1}^p$  de chaque formulation sont équivalents, vu qu'il s'agit des identités

de Sommerfeld et de Schelkunoff. Il reste à évaluer les termes  $A_{z_1}^h$  et  $A_{z_2}^h$ . D'abord, nous analysons le terme  $A_{z_1}^h$  de la formulation de Sommerfeld. Par convenance, ce terme est réécrit en utilisant la fonction de Hankel et en faisant apparaître la dépendance de chaque terme à la constante de propagation radiale :

$$A_{z_1}^{\text{hSom}} = \frac{1}{8\pi} \int_{C_{\text{Som}}} \underbrace{\frac{\hat{\varepsilon}_2 j \sqrt{k_1^2 - k_\rho^2} - \hat{\varepsilon}_1 j \sqrt{k_2^2 - k_\rho^2}}{\hat{\varepsilon}_2 j \sqrt{k_1^2 - k_\rho^2} + \hat{\varepsilon}_1 j \sqrt{k_2^2 - k_\rho^2}}}_{R_{\text{ev}}^{\text{Som}}(k_\rho)} \frac{k_\rho}{j \sqrt{k_1^2 - k_\rho^2}} H_0^{(2)}(k_\rho \rho) e^{-j \sqrt{k_1^2 - k_\rho^2} (z + 2z_0)} dk_\rho \quad (3.23)$$

Outre  $k_\rho = 0$  et  $k_\rho = k_1$ ,  $A_{z_1}^{\text{hSom}}$  présente d'autres points de singularité :  $k_\rho = k_2$ , dû à la fonction  $\sqrt{k_2^2 - k_\rho^2}$  et  $k_\rho = k_{\rho p}$ , le pôle du dénominateur de  $R_{\text{ev}}^{\text{Som}}$ . La figure 3.2 reprend le plan complexe  $k_\rho$  de la figure 3.1 et intègre ces nouveaux points de singularité. A l'instar de  $k_\rho = k_1$ , nous avons choisi pour  $k_\rho = k_2$  la coupure de ramification correspondant à  $\Im m \left\{ \sqrt{k_2^2 - k_\rho^2} \right\} = 0$ . Ainsi, sur le chemin  $C_{\text{ram}2}$ , la fonction  $\sqrt{k_2^2 - k_\rho^2}$  est purement réelle.

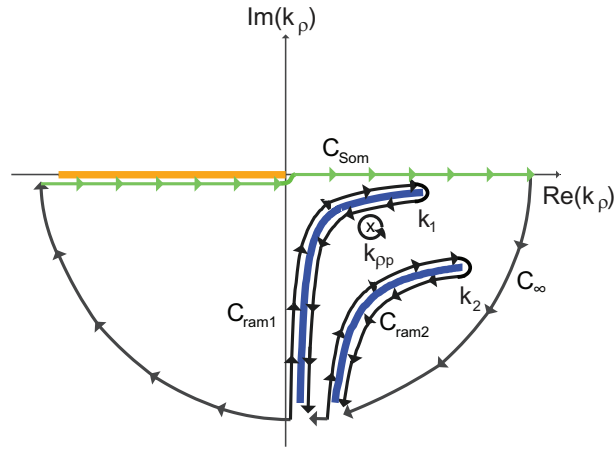


FIGURE 3.2 – Plan complexe  $k_\rho$  pour l'analyse de la formulation de Sommerfeld et celle dite « de Schelkunoff ».

En appliquant le théorème de résidus à l'intégrale  $A_{z_1}^{\text{hSom}}$ , appelée  $I_{C_{\text{Som}}}$ , nous pouvons écrire :

$$I_{C_{\text{Som}}} + I_{C_\infty} - I_{C_{\text{ram}2}} + 2\pi j \text{Res}(k_{\rho p}) - I_{C_{\text{ram}1}} = 0 \quad (3.24)$$

où  $\text{Res}(k_{\rho p})$  est le résidu du noyau de l'intégrale de l'équation 3.23. Par le lemme de Jordan,  $I_{C_\infty} = 0$ . Par conséquent :

$$I_{C_{\text{Som}}} = I_{C_{\text{ram}1}} + I_{C_{\text{ram}2}} - 2\pi j \text{Res}(k_{\rho p}) \quad (3.25)$$

En introduisant le changement de variable de l'équation 3.15 et la relation 3.18,  $I_{C_{\text{ram1}}}$  s'écrit :

$$I_{C_{\text{ram1}}} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{\hat{\varepsilon}_2 j k_{z_1} - \hat{\varepsilon}_1 j \sqrt{k_{z_1}^2 - k_1^2 + k_2^2}}{\hat{\varepsilon}_2 j k_{z_1} + \hat{\varepsilon}_1 j \sqrt{k_{z_1}^2 - k_1^2 + k_2^2}}}_{R_{\text{ev}}^{\text{Som}}(k_{z_1})} K_0 \left( \rho \sqrt{k_{z_1}^2 - k_1^2} \right) e^{-j k_{z_1} (z+2z_0)} dk_{z_1} \quad (3.26)$$

On remarque que la forme de  $I_{C_{\text{ram1}}}$  présente des similitudes avec le terme  $A_{z_1}^h$  de la formulation dite « de Schelkunoff » (équation 3.8). En effet, en supposant que  $R_{\text{ev}}^{\text{Som}}$  est une fonction paire par rapport à  $k_{z_1}$ , l'exponentielle pourrait être décomposée en parties réelle et imaginaire et à terme être remplacée par un cosinus. Or,  $R_{\text{ev}}^{\text{Som}}$  n'est pas une fonction paire par rapport à  $k_{z_1}$  et  $I_{C_{\text{ram1}}}$  n'est donc pas identique au terme  $A_{z_1}^h$  de la formulation dite « de Schelkunoff ».

En introduisant le changement de variable suivant :

$$k_{z_2} = \sqrt{k_2^2 - k_\rho^2} \quad k_{z_2} dk_{z_2} = -k_\rho dk_\rho \quad (3.27)$$

et la relation 3.18, l'intégrale  $I_{C_{\text{ram2}}}$  peut s'écrire :

$$I_{C_{\text{ram2}}} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{\hat{\varepsilon}_2 j \sqrt{k_{z_2}^2 - k_2^2 + k_1^2} - \hat{\varepsilon}_1 j k_{z_2}}{\hat{\varepsilon}_2 j \sqrt{k_{z_2}^2 - k_2^2 + k_1^2} + \hat{\varepsilon}_1 j k_{z_2}}}_{R_{\text{ev}}^{\text{Som}}(k_{z_2})} \frac{k_{z_2}}{\sqrt{k_{z_2}^2 - k_2^2 + k_1^2}} K_0 \left( \rho \sqrt{k_{z_2}^2 - k_2^2} \right) \cdot e^{-j \sqrt{k_{z_2}^2 - k_2^2 + k_1^2} (z+2z_0)} dk_{z_2} \quad (3.28)$$

Pour calculer le résidu associé au point  $k_\rho = k_{\rho p}$ , on peut utiliser le résultat du résidu du coefficient  $R_{\text{ev}}$ ,  $\text{Res}_{R_{\text{ev}}}$ , de l'équation 2.69. Toutefois, ce résidu a été calculé après le changement de variable de la représentation angulaire de l'équation 2.2 ( $k_\rho = k \sin w$ ). L'intégrale de l'équation 3.23 peut être présentée de façon suivante après le changement

vers la variable  $w$  :

$$A_{z_1}^{\text{hSom}} = \frac{1}{8\pi j} \int_{C_{\text{Som}w}} \underbrace{\frac{\hat{\varepsilon}_2 j k_1 \cos w - \hat{\varepsilon}_1 j \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 w}}{\hat{\varepsilon}_2 j k_1 \cos w + \hat{\varepsilon}_1 j \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 w}}}_{R_{\text{ev}}^{\text{Som}}(w)} (k_1 \sin w) H_0((k_1 \sin w) \rho) \cdot e^{-j(k_1 \cos w)(z+2z_0)} dw \quad (3.29)$$

En utilisant l'équation 2.69, il est possible de trouver :

$$-2\pi j \text{Res}(w_p) = -2\pi j \frac{1}{8\pi j} 2 \frac{\hat{\varepsilon}_{r_2}}{\hat{\varepsilon}_{r_1} - \hat{\varepsilon}_{r_2}} \sin w_p \cos w_p (k_1 \sin w_p) H_0((k_1 \sin w_p) \rho) \cdot e^{-j(k_1 \cos w_p)(z+2z_0)} \quad (3.30)$$

En utilisant l'équation 2.58, on peut déduire :

$$-2\pi j \text{Res}(w_p) = \frac{1}{2} \frac{\hat{\varepsilon}_{r_2}^2}{\hat{\varepsilon}_{r_2}^2 - \hat{\varepsilon}_{r_1}^2} (k_1 \cos w_p) H_0((k_1 \sin w_p) \rho) e^{-j(k_1 \cos w_p)(z+2z_0)} \quad (3.31)$$

En réécrivant l'équation 3.31 en fonction de  $k_{pp}$ , on obtient :

$$-2\pi j \text{Res}(k_{pp}) = \frac{1}{2} \frac{\hat{\varepsilon}_{r_2}^2}{\hat{\varepsilon}_{r_2}^2 - \hat{\varepsilon}_{r_1}^2} \sqrt{k_1^2 - k_{pp}^2} H_0((k_{pp}) \rho) e^{-j\sqrt{k_1^2 - k_{pp}^2}(z+2z_0)} \quad (3.32)$$

Bien que les termes  $I_{C_{\text{ram}2}}$  et  $-2\pi j \text{Res}(k_{pp})$  fassent partie de  $A_{z_1}^{\text{hSom}}$ , ces termes ne sont pas inclus dans la formulation dite « de Schelkunoff ». Autrement dit, cette formulation ne prend que  $I_{C_{\text{ram}1}}$  en compte et ce de manière incorrecte [31].

Il est intéressant de noter qu'en raison de l'absence du coefficient  $R_{\text{ev}}$  (et en conséquence en raison de l'absence de ses points de singularité) dans les identités de Sommerfeld et de Schelkunoff, un simple changement de variable suffit pour démontrer l'égalité de ces identités. En revanche, les points de singularité du terme  $R_{\text{ev}}$  rendent le passage de la formulation de Sommerfeld à celle dite « de Schelkunoff » impossible. Si l'on répète l'analyse développée dans cette section pour les termes  $A_{z_2}^{\text{h}}$  de chaque formulation, la même conclusion est valide, sachant que le coefficient  $T_{\text{ev}}$  introduit les mêmes points de singularité que  $R_{\text{ev}}$ . De nouveau, les termes  $I_{C_{\text{ram}2}}$  et  $-2\pi j \text{Res}(k_{pp})$  seront négligés et le terme  $I_{C_{\text{ram}1}}$  sera pris en compte de manière erronée. En conséquence, ces deux formulations ne sont pas équivalentes. Etant donné qu'il est possible de valider la formulation de Sommerfeld en utilisant d'autres méthodes que celle de la superposition des diffusions, comme les



opérateurs différentiels et les propriétés des fonctions de Green caractéristiques [59, Sec. 3.3] [22], on conclut que la formulation dite « de Schelkunoff » est incomplète et ne peut pas décrire de manière rigoureuse le rayonnement d'un dipôle électrique au-dessus d'une interface plane.

### 3.5 Evaluation asymptotique

L'évaluation asymptotique constitue une deuxième façon de confronter les deux formulations décrites dans ce chapitre. Pour effectuer cette évaluation, nous utilisons la méthode de la plus grande pente, décrite dans la section 2.3.

Dans la présente section, nous nous intéresserons uniquement aux termes  $A_{z_1}^h$ , car dans la section 3.4 nous avons démontré l'égalité des termes  $A_{z_1}^p$  de chaque formulation. D'après la section 2.3, la méthode de la plus grande pente est applicable aux intégrales présentant un chemin d'intégration qui s'étend de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Ainsi, pour la formulation de Sommerfeld, nous utilisons l'équation 3.23. Pour la formulation dite « de Schelkunoff », nous utilisons l'équation 3.26. Bien que cette équation ne soit pas identique à celle proposée par W. Dyab *et al.*, elle présente la version « corrigée » qui prend au moins en compte la contribution de la ramification du point  $k_\rho = k_1$  et possède des caractéristiques souhaitables pour une évaluation par la méthode de la plus grande pente.

Il est possible de donner aux deux équations la forme canonique de l'équation 2.8 en introduisant la relation de l'équation 3.18, l'approximation de l'équation 2.43, la représentation angulaire de la section 2.2 (équations 2.2 et 2.4) et la représentation géométrique de la section 2.4.1. En prenant tout en compte, on peut écrire :

$$A_{z_1}^{\text{hSom}} = \frac{1}{8\pi j} \int_{C_{\text{Som}w}} R_{\text{ev}}(w) \sqrt{\frac{2jk_1 \sin w}{\pi r_I \sin \theta_I}} e^{-jk_1 r_I \cos(w-\theta_I)} dw \quad (3.33)$$

$$A_{z_1}^{\text{hSch}} = -\frac{1}{8\pi j} \int_{C_{\text{Sch}w}} R_{\text{ev}}(w) \sqrt{\frac{2jk_1 \sin w}{\pi r_I \sin \theta_I}} e^{-jk_1 r_I \cos(w-\theta_I)} dw \quad (3.34)$$

où  $R_{\text{ev}}(w)$  est donné par l'équation 2.48.

Etant donné que la différence de signe entre les équations 3.33 et 3.34 peut être insérée dans le chemin d'intégration, on remarque que ces intégrales diffèrent uniquement par leur chemin d'intégration. Ainsi, les deux formulations ont la même fonction  $h(w)$ , donnée par  $h(w) = -jk_1 \cos(w - \theta_I)$  et étudiée dans la section 2.4.1. Par conséquent, les

deux formulations partagent le même point col et le chemin d'intégration distordu dans le plan  $w$  (cf. section 2.4.2). Cela permet de conclure que la contribution du point col est identique pour les deux formulations.

Comme dans le chapitre 2, on néglige ici les contributions des points de ramification. Il reste alors à évaluer la contribution des pôles. Pour cela, il faut bien connaître la transposition des chemins d'intégration de chaque formulation vers le plan  $w$  et les éventuelles positions du pôle dans ce même plan.

Pour la formulation de Sommerfeld, la transposition du chemin d'intégration du plan  $k_\rho$  vers le plan  $w$  est étudiée dans la section 2.2 et présentée par une courbe verte dans la figure 2.10. La position du pôle dans le plan  $w$  est étudiée dans la section 2.4.3.2, pour le cas où  $|k_2| > |k_1|$ . Puisque le pôle est identique pour la formulation dite « de Schelkunoff », cette étude est également valide pour cette formulation.

Quant à la transposition du chemin d'intégration de la formulation dite « de Schelkunoff » vers le plan  $w$ , on peut s'inspirer de l'étude sur la constante de propagation  $k_z$  dans la section 2.2. En effet, cette transposition est montrée par une courbe bleue sur la figure 2.8b.

La transposition des chemins d'intégration pour chaque formulation ainsi que la région dans laquelle le pôle peut se situer sont présentées sur la figure 3.3, où  $\theta_I \rightarrow \frac{\pi}{2}$ .

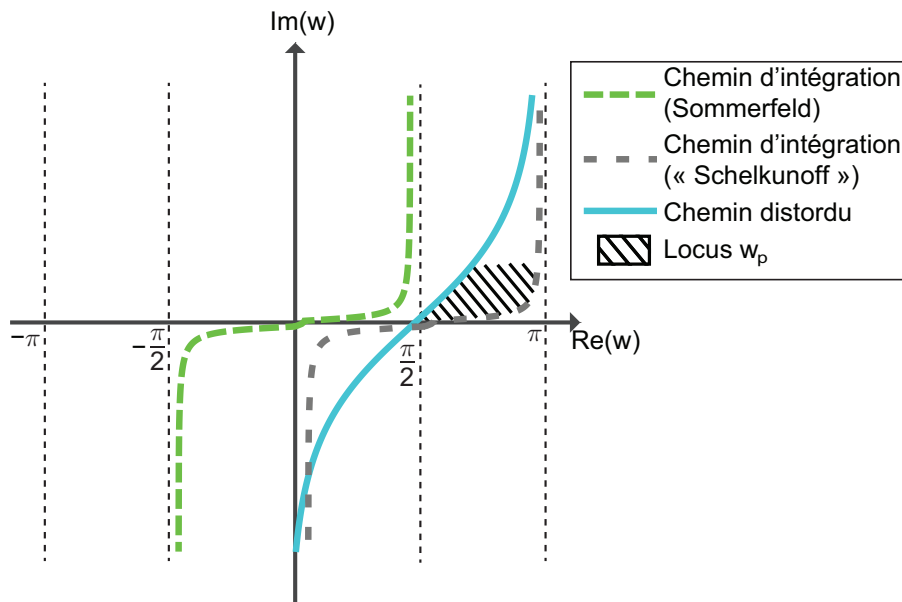


FIGURE 3.3 – Transposition des chemins d'intégration du plan  $k_\rho$  pour la formulation de Sommerfeld et du plan  $k_{z_1}$  pour la formulation dite « de Schelkunoff » vers le plan complexe  $w$  et la région où se situerait le pôle (identique pour les deux formulations).

Comme conclu dans la section 2.4.3.2, pour la formulation de Sommerfeld, aucun pôle ne peut se trouver à l'intérieur du parcours fermé constitué par les chemins d'intégration original et distordu reliés à l'infini. Ainsi, cette formulation ne prévoit pas d'onde de surface, conformément à la physique des milieux dont la partie réelle de la permittivité complexe est positive [22]. En revanche, contrairement à la formulation de Sommerfeld, celle dite « de Schelkunoff » présente toujours une onde de surface, car le pôle se trouve toujours à l'intérieur du chemin fermé reliant les chemins d'intégration original et distordu. De nouveau, nous avons démontré que les deux formulations, sensées décrire le même phénomène, donnent des résultats différents. Il est intéressant de noter que, si la formulation dite « de Schelkunoff » est corrigée en prenant en compte le terme  $-2\pi j \text{Res}(k_{pp})$  lors de l'analyse dans le plan complexe, la contribution du pôle de l'évaluation asymptotique sera compensée et ainsi les deux formulations présenteront la même analyse asymptotique.

## Conclusion

Malgré l'existence d'une solution centenaire bien maîtrisée délivrée premièrement par Sommerfeld, W. Dyab *et al.* ont revisité le problème du rayonnement d'un dipôle élémentaire au-dessus d'une interface plane dans le but d'améliorer l'évaluation numérique [29][30]. Les auteurs ont suivi la même démarche que Sommerfeld en appliquant la méthode de superposition des diffusions pour résoudre le problème. Cette méthode de résolution des équations différentielles consiste à étendre la réponse particulière à une source avec une solution de l'équation homogène, afin d'établir les conditions aux limites.

Pour le problème présent, la solution particulière pour le dipôle électrique vertical s'écrit sous forme d'une simple exponentielle. Sommerfeld a développé cette exponentielle sous forme d'une intégrale, qui aujourd'hui porte son nom, et a supposé des réponses homogènes de forme similaire à cette intégrale. W. Dyab *et al.* ont repris la même démarche, mais les auteurs ont utilisé un autre développement pour la fonction exponentielle, qui porte le nom de Schelkunoff.

Bien que cette démarche semble a priori rationnelle, la solution proposée n'est pas exacte. Nous avons montré dans ce chapitre, par une analyse dans le plan complexe, que cette nouvelle formulation diffère de celle de Sommerfeld car les contributions d'une coupure de ramification et d'un pôle ne sont pas prises en compte. Par ailleurs, le prise en

compte de la contribution de l'unique terme de ce développement présente des inexactitudes. Etant donné que la formulation de Sommerfeld peut être validée par d'autres techniques mathématiques plus sophistiquées, cela veut dire que la nouvelle formulation est erronée. En plus, une évaluation asymptotique de cette nouvelle solution par la méthode de la plus grande pente met en évidence la non-compensation du pôle du problème. Ce pôle pourrait donc générer une onde de surface qui est physiquement non-existante.

Les travaux de ce chapitre donnent lieu à une perspective de travail. Il serait intéressant de trouver la faille (mathématique ou physique) dans l'application de la démarche, pourtant juste, de Sommerfeld à l'intégrale de Schelkunoff.



# Chapitre 4

## Conception de liaison près du sol

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Condition de la prédominance du pôle</b>	<b>96</b>
<b>4.2</b>	<b>Distances Critiques</b>	<b>101</b>
4.2.1	Estimation de $\rho_{\min}$	101
4.2.2	Estimation de $\rho_{\text{rupture}}$	103
<b>4.3</b>	<b>Lignes directrices</b>	<b>105</b>
<b>4.4</b>	<b>Exemples</b>	<b>106</b>
<b>4.5</b>	<b>Vers une démonstration de faisabilité</b>	<b>111</b>
4.5.1	Matériaux envisagés	112
4.5.2	Caractérisation de la conductivité statique par une mesure à quatre pointes	113
4.5.3	Caractérisation radio-fréquence de la conductivité	115
4.5.4	Vers une surface de conductivité réglable	124
	<b>Conclusion</b>	<b>128</b>

---

Nous avons mis en évidence que dans certaines configurations de liaison près du sol, la composante  $E_{z_{\text{pole}}}$  est non négligeable et joue un rôle important dans l'amélioration de l'affaiblissement de trajet. Par conséquent, ce chapitre est consacré à l'évaluation détaillée de cette composante et de son importance pour la propagation près du sol.

Le premier objectif de ce chapitre est de maîtriser les conditions physiques favorisant la prépondérance de la composante  $E_{z_{\text{pole}}}$  en comparaison aux autres composantes du champ. Le deuxième but est d'identifier des distances critiques pouvant être utiles pour la conception d'un système sans fil à proximité du sol. Les conclusions de ce chapitre font partie des contributions scientifiques importantes de cette thèse. Plusieurs études ont été effectuées pour appuyer ces conclusions. Quelques unes sont présentées dans ce chapitre.

Comme une des perspectives de ce travail est de valider expérimentalement les hypothèses théoriques présentées dans cette thèse, nous détaillons également les pistes envisagées pour une démonstration de faisabilité.

Ce chapitre est structuré de la manière suivante. La section 4.1 investigate les conditions physiques favorables à l'excitation de la composante  $E_{z_{\text{pole}}}$ . La section 4.2 étudie des distances critiques de la propagation près du sol. La section 4.3 présente un résumé de toutes les conclusions extraites des analyses effectuées aux sections précédentes. La section 4.4 présente des exemples illustrant la validité des analyses présentées dans les sections 4.1 et 4.2 ainsi que les conclusions de la section 4.3. Enfin, la section 4.5 décrit les pistes envisagées pour la réalisation d'une démonstration de faisabilité validant les nouvelles hypothèses proposées dans cette thèse.

## 4.1 Condition de la prédominance du pôle

Dans cette section, on s'intéresse aux conditions physiques qui favorisent la prépondérance de  $E_{z_{\text{pole}}}$  (équation 2.78) en comparaison de  $E_{z_{2R}}$  (équation 2.77). Pour les trouver, il faut étudier le comportement de ces deux composantes pour de grandes distances d'observation. Dans cette section ainsi que dans le reste du chapitre, le premier milieu est considéré quasi sans pertes. Par conséquent, on considère  $k_1$  réel.

Nous étudions d'abord le comportement de  $E_{z_{2R}}$  pour  $r \gg 1$ . Dans cette condition, la figure 1.8 nous montre que  $\theta \approx \theta_I \approx \frac{\pi}{2}$ . En plus, les atténuations  $\frac{1}{r}$  et  $\frac{1}{r_I}$  tendent vers

la même valeur. Ainsi, l'équation 2.77 se simplifie :

$$E_{z_{2R}}|_{r \gg 1} \approx -j\eta_1 k_1 \frac{e^{-jk_1 r}}{4\pi r} (1 + R_{\text{ev}}(\theta_I) e^{-jk_1(r_I - r)}) \quad (4.1)$$

Concernant la différence de phase entre les composantes directe et réfléchie de l'onde, le terme  $(r_I - r)$  devient de plus en plus petit pour de grandes valeurs de  $r$ . On sait que pour la fonction exponentielle, l'approximation suivante est valable au premier ordre :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \approx 1 + x \quad x \rightarrow 0 \quad (4.2)$$

On peut donc réécrire :

$$E_{z_{2R}}|_{r \gg 1} \approx -j\eta_1 k_1 \frac{e^{-jk_1 r}}{4\pi r} [1 + R_{\text{ev}}(\theta_I) - jR_{\text{ev}}(\theta_I)k_1(r_I - r)] \quad (4.3)$$

Il est nécessaire de trouver le comportement des termes  $jR_{\text{ev}}(\theta_I)k_1(r_I - r)$  et  $1 + R_{\text{ev}}$  pour  $r \gg 1$ . Nous pouvons réécrire  $R_{\text{ev}}$  (équation 2.48), en introduisant l'indice de réfraction  $n$ , défini par l'équation 1.8 :

$$R_{\text{ev}}(w) = \frac{\hat{\varepsilon}_2 j k_1 \cos \theta_I - \hat{\varepsilon}_1 j \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_I}}{\hat{\varepsilon}_2 j k_1 \cos \theta_I + \hat{\varepsilon}_1 j \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_I}}$$

$$R_{\text{ev}}(\theta_I) = \frac{\frac{\hat{\varepsilon}_{r_2}}{\hat{\varepsilon}_{r_1}} \cos \theta_I - \sqrt{\frac{k_2^2}{k_1^2} - \sin^2 \theta_I}}{\frac{\hat{\varepsilon}_{r_2}}{\hat{\varepsilon}_{r_1}} \cos \theta_I + \sqrt{\frac{k_2^2}{k_1^2} - \sin^2 \theta_I}}$$

$$R_{\text{ev}}(\theta_I) = \frac{n^2 \cos \theta_I - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_I}}{n^2 \cos \theta_I + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_I}} \quad (4.4)$$

$$1 + R_{\text{ev}}(\theta_I) = \frac{2n^2 \cos \theta_I}{n^2 \cos \theta_I + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_I}} \quad (4.5)$$

Vu que  $\theta_I$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$ ,  $n^2 \cos \theta_I$  devient très petit devant  $\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_I}$ . On peut donc approximer l'équation 4.5 par :

$$1 + R_{\text{ev}}(\theta_I) \approx \frac{2n^2 \cos \theta_I}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_I}} \quad (4.6)$$

En introduisant  $\cos \theta_I = \frac{z+2z_0}{r_I} = \frac{h_t+h_r}{r_I} \approx \frac{h_t+h_r}{r}$  ( $h_t$  et  $h_r$  étant les hauteurs des



antennes de transmission et réception, respectivement, cf. figure 1.8) et  $\sin \theta_I \approx 1$  :

$$1 + R_{\text{ev}}(\theta_I) \approx \frac{2n^2}{\sqrt{n^2 - 1}} \frac{h_t + h_r}{r} \quad (4.7)$$

D'après la géométrie de la figure 1.8, la différence  $(r_I - r)$  s'exprime par :

$$\begin{aligned} r_I - r &= \sqrt{(z + 2z_0)^2 + \rho^2} - \sqrt{z^2 + \rho^2} = \sqrt{(h_t + h_r)^2 + \rho^2} - \sqrt{(h_t - h_r)^2 + \rho^2} \\ r_I - r &= \rho \left( \sqrt{\left(\frac{h_t + h_r}{\rho}\right)^2 + 1} - \sqrt{\left(\frac{h_t - h_r}{\rho}\right)^2 + 1} \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Pour de petites valeurs de  $x$ , l'approximation suivante est valable au premier ordre :

$$\sqrt{x + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1 - 2n)(n!)^2 (4^n)} x^n = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots \approx 1 + \frac{1}{2}x \quad (4.9)$$

Etant donné que les hauteurs des antennes  $h_t$  et  $h_r$  sont plus petites que la distance radiale  $\rho$ , l'approximation 4.9 peut être appliquée à l'équation 4.8 :

$$\begin{aligned} r_I - r &\approx \rho \left( 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{h_t + h_r}{\rho}\right)^2 - 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h_t - h_r}{\rho}\right)^2 \right) \\ r_I - r &\approx \frac{1}{2\rho} ((h_t + h_r)^2 - (h_t - h_r)^2) \\ r_I - r &\approx \frac{2h_t h_r}{\rho} \end{aligned} \quad (4.10)$$

On sait que pour de grandes valeurs de  $r$ ,  $\frac{1}{\rho} \rightarrow \frac{1}{r}$ , on peut réécrire l'équation 4.10 :

$$r_I - r \approx \frac{2h_t h_r}{r} \quad (4.11)$$

Sachant que  $R_{\text{ev}} \rightarrow -1$  si  $\theta_I \rightarrow \frac{\pi}{2}$  et en introduisant les approximations 4.7 et 4.11 dans l'équation 4.3 :

$$E_{z2R}|_{r \gg 1} \approx -j\eta_1 k_1 \frac{e^{-jk_1 r}}{2\pi r^2} \left( \frac{n^2}{\sqrt{n^2 - 1}} (h_t + h_r) + jk_1 h_t h_r \right) \quad (4.12)$$

L'équation 4.12 montre que pour de grandes valeurs de  $r$ , le champ électrique décroît proportionnellement à  $\frac{1}{r^2}$ , soit une atténuation de 20 dB/déc obtenue précédemment. Cette équation reste valable quelle que soit la valeur de  $n$ .

Après avoir estimé le comportement asymptotique de  $E_{z_{2R}}$  à de grandes distances, nous estimons le comportement asymptotique de  $E_{z_{\text{pôle}}}$  (équation 2.78). Pour ce faire, nous nous intéressons d'abord au terme  $1 - j\sqrt{\pi\tau}e^{-\tau}\text{erfc}(j\sqrt{\tau})$ . On sait que  $|\tau|$  (équation 2.64) augmente pour de grandes distances  $r$ . On peut donc utiliser l'approximation de l'équation 2.39 et écrire :

$$\begin{aligned} 1 - j\sqrt{\pi\tau}e^{-\tau}\text{erfc}(j\sqrt{\tau}) &\approx 1 - j\sqrt{\pi\tau}e^{-\tau} \cdot (-j)\frac{e^{\tau}}{\sqrt{\pi\tau}} \left(1 + \frac{1}{2\tau}\right) \\ 1 - j\sqrt{\pi\tau}e^{-\tau}\text{erfc}(j\sqrt{\tau}) &\approx -\frac{1}{2\tau} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Vu que  $\theta_I \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ,  $\tau \rightarrow \varrho$  (équation 2.65). On peut récrire l'équation 4.13 :

$$1 - j\sqrt{\pi\tau}e^{-\tau}\text{erfc}(j\sqrt{\tau}) \approx -\frac{1}{2\varrho} = -\frac{1}{2jk_1r_I(\sin w_p - 1)} \quad (4.14)$$

En introduisant l'équation 4.14,  $\theta_I \rightarrow \frac{\pi}{2}$  et l'indice de réfraction  $n$  dans l'équation 2.78 :

$$E_{z_{\text{pôle}}}|_{r \gg 1} \approx -j\eta_1 \sqrt{\frac{2 \sin^7 w_p}{\sin w_p - 1}} \frac{n^2}{1 - n^2} \frac{\cos w_p}{2(\sin w_p - 1)} \frac{e^{-jk_1r_I}}{4\pi r_I^2} \quad (4.15)$$

On peut récrire les équations 2.58 en fonction de  $n$  :

$$\sin^2 w_p = \frac{n^2}{1 + n^2} \quad \cos^2 w_p = \frac{1}{1 + n^2} \quad (4.16)$$

On peut développer l'équation 4.15 en introduisant les équations 4.16 :

$$\begin{aligned} E_{z_{\text{pôle}}}|_{r \gg 1} &\approx -j\eta_1 \sqrt{\frac{2 \sin w_p}{\sin w_p - 1}} \sin^2 w_p \sin w_p \frac{n^2}{1 - n^2} \frac{\cos w_p}{2(\sin w_p - 1)} \frac{e^{-jk_1r_I}}{4\pi r_I^2} \\ E_{z_{\text{pôle}}}|_{r \gg 1} &\approx -j\eta_1 \sqrt{\frac{2 \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}}{\frac{n}{\sqrt{1+n^2}} - 1}} \frac{n^2}{1+n^2} \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} \frac{n^2}{1-n^2} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}}{2 \left( \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} - 1 \right)} \frac{e^{-jk_1r_I}}{4\pi r_I^2} \\ E_{z_{\text{pôle}}}|_{r \gg 1} &\approx -j\eta_1 \sqrt{2 \frac{n}{n - \sqrt{1+n^2}}} \frac{n^5}{1 - n^4} \frac{1}{2(n\sqrt{1+n^2} - 1 - n^2)} \frac{e^{-jk_1r_I}}{4\pi r_I^2} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Afin d'estimer le poids de  $E_{z_{\text{pôle}}}$  devant  $E_{z_{2R}}$ , nous devons comparer les équations 4.12 et 4.17. Néanmoins, cette comparaison n'est pas aisée avec les formes actuelles de ces équations. Par conséquent, nous rajoutons une condition simplificatrice supplémentaire :

$|n^2| > 10$ . Pour ce cas, nous pouvons utiliser l'approximation de l'équation 4.9 :

$$\sqrt{1+n^2} = n\sqrt{\frac{1}{n^2} + 1} \approx n\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right) = n + \frac{1}{2n} \quad (4.18)$$

Alors, nous pouvons réécrire l'équation 4.17 pour le cas  $|n^2| > 10$  :

$$\begin{aligned} E_{z_{\text{pole}}}\big|_{r \gg 1 \text{ et } |n^2| > 10} &\approx -j\eta_1 \sqrt{2\frac{n}{n-n-\frac{1}{2n}}(-n)} \frac{1}{2\left(n\left(n+\frac{1}{2n}\right)-1-n^2\right)} \frac{e^{-jk_1 r_I}}{4\pi r_I^2} \\ E_{z_{\text{pole}}}\big|_{r \gg 1 \text{ et } |n^2| > 10} &\approx -j\eta_1 \sqrt{-4n^2}(-n) \frac{1}{2\left(n^2+\frac{1}{2}-1-n^2\right)} \frac{e^{-jk_1 r_I}}{4\pi r_I^2} \\ E_{z_{\text{pole}}}\big|_{r \gg 1 \text{ et } |n^2| > 10} &\approx -\eta_1 n^2 \frac{e^{-jk_1 r_I}}{2\pi r_I^2} \end{aligned} \quad (4.19)$$

A de grandes distances, les atténuations  $\frac{1}{r_I}$  et  $\frac{1}{r}$  s'approchent, nous avons donc :

$$E_{z_{\text{pole}}}\big|_{r \gg 1 \text{ et } |n^2| > 10} \approx -\eta_1 n^2 \frac{e^{-jk_1 r_I}}{2\pi r^2} \quad (4.20)$$

Par ailleurs, pour le cas où  $|n^2| > 10$ , nous pouvons également simplifier l'équation 4.12 :

$$E_{z_{2R}}\big|_{r \gg 1 \text{ et } |n^2| > 10} \approx -j\eta_1 k_1 \frac{e^{-jk_1 r}}{2\pi r^2} (n(h_t + h_r) + jk_1 h_t h_r) \quad (4.21)$$

A présent, il est possible d'établir une condition pour que le terme  $E_{z_{\text{pole}}}$  participe de façon prépondérante à la propagation à de grandes distances. Ainsi, il faut que la valeur absolue de  $E_{z_{\text{pole}}}$ , à de très grandes distances, soit plus grande que celle de  $E_{z_{2R}}$  pour les conditions imposées dans les équations 4.20 et 4.21. Par conséquent, la condition suivante s'établit :

$$\boxed{|n^2| > k_1 |n(h_t + h_r) + jk_1 h_t h_r|} \quad |n^2| > 10 \quad (4.22)$$

L'équation 4.22 est la *condition de la prédominance du pôle*. Elle constitue l'une des contributions importantes de cette thèse. Elle nous permet d'extraire quelques conclusions générales sur l'influence du terme dû au pôle. Premièrement, la condition de prédominance dépend essentiellement de trois paramètres clés : les hauteurs des antennes, les caractéristiques électriques des milieux et la fréquence de travail. De plus, nous pouvons affirmer que le terme dû au pôle profite d'une augmentation de la valeur absolue de  $n$  et de la diminution de  $k_1$ ,  $h_t$  et  $h_r$ . Ainsi, placer les antennes plus près du sol et diminuer la fréquence

de travail facilite l'excitation de ce terme.

Une condition similaire mais limitée a été déjà rapportée auparavant [35, Eq. 9], mais pour un cas particulier où l'observation est effectuée sur l'interface ( $h_r = 0$ ). La condition de l'équation 4.22 est universelle puisqu'elle demeure valable pour des valeurs arbitraires des hauteurs des antennes ( $h_t$  et  $h_r$ ).

## 4.2 Distances Critiques

Après avoir établi la condition de la prédominance du pôle, il faut identifier deux distances critiques. La première est la distance à partir de laquelle  $E_{z_{\text{pole}}}$  devient plus important que  $E_{z_{2R}}$ . De manière alternative, nous pouvons la définir comme la distance à partir de laquelle la méthode à deux rayons échoue dans l'estimation de l'atténuation. Nous appelons cette distance  $\rho_{\text{min}}$ . La deuxième distance est celle où les pertes de propagation sont de 20 dB/déc. Nous appelons cette distance  $\rho_{\text{rupture}}$ .

### 4.2.1 Estimation de $\rho_{\text{min}}$

Afin d'estimer  $\rho_{\text{min}}$ , nous cherchons le minimum de la valeur absolue du coefficient  $R_{\text{ev}}$ . Pour un  $n$  réel, ce minimum est égal à zéro. A des distances plus grandes, le coefficient  $R_{\text{ev}}$  est négatif et la contribution des composantes directe et réfléchie de l'onde est destructive.

L'angle pour lequel la valeur absolue de  $R_{\text{ev}}$  est minimale est connu comme l'angle de Brewster [68]. En imposant la condition  $|n^2| > 10$ , le coefficient  $R_{\text{ev}}$  de l'équation 4.4 se simplifie :

$$R_{\text{ev}}(\cos \theta_I)|_{|n^2|>10} \approx \frac{n \cos \theta_I - 1}{n \cos \theta_I + 1} \quad (4.23)$$

En supposant  $n = n_{\text{re}} + jn_{\text{im}}$ , où  $n_{\text{re}}$  et  $n_{\text{im}}$  sont les parties réelle et imaginaire de  $n$ , on peut calculer la valeur absolue de  $R_{\text{ev}}$  :

$$\begin{aligned} R_{\text{ev}}(\cos \theta_I)|_{|n^2|>10} &\approx \frac{(n_{\text{re}} + jn_{\text{im}}) \cos \theta_I - 1}{(n_{\text{re}} + jn_{\text{im}}) \cos \theta_I + 1} \\ R_{\text{ev}}(\cos \theta_I)|_{|n^2|>10} &\approx \frac{(n_{\text{re}} \cos \theta_I - 1) + jn_{\text{im}} \cos \theta_I}{(n_{\text{re}} \cos \theta_I + 1) + jn_{\text{im}} \cos \theta_I} \\ |R_{\text{ev}}(\cos \theta_I)|^2|_{|n^2|>10} &\approx \frac{n_{\text{re}}^2 \cos^2 \theta_I - 2n_{\text{re}} \cos \theta_I + 1 + n_{\text{im}}^2 \cos^2 \theta_I}{n_{\text{re}}^2 \cos^2 \theta_I + 2n_{\text{re}} \cos \theta_I + 1 + n_{\text{im}}^2 \cos^2 \theta_I} \end{aligned}$$

$$|R_{\text{ev}}(\cos \theta_I)|^2 \Big|_{|n^2| > 10} \approx \frac{|n^2| \cos^2 \theta_I + 1 - 2n_{\text{re}} \cos \theta_I}{|n^2| \cos^2 \theta_I + 1 + 2n_{\text{re}} \cos \theta_I} \quad (4.24)$$

Sachant que la dérivée d'une fonction de la forme  $f = \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}$  est nulle pour  $f'_1 f_2 = f_1 f'_2$ , l'expression 4.24 est minimum pour  $\theta_{I_{\min}}$  tel que :

$$\begin{aligned} (-2|n^2| \cos \theta_{I_{\min}} \sin \theta_{I_{\min}})(2n_{\text{re}} \cos \theta_{I_{\min}}) &= (|n^2| \cos^2 \theta_{I_{\min}} + 1)(-2n_{\text{re}} \sin \theta_{I_{\min}}) \\ \cos^2 \theta_{I_{\min}} &= \frac{1}{|n^2|} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Étant donné l'hypothèse de départ sur  $|n^2|$ , l'approximation suivante est valable :

$$\tan \theta_{I_{\min}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_{I_{\min}}}}{\cos \theta_{I_{\min}}} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta_{I_{\min}}} - 1} = \sqrt{|n|^2 - 1} \approx |n| \quad (4.26)$$

Comme  $\rho_{\min}$  est la distance où la valeur absolue de  $R_{\text{ev}}$  est minimale et d'après la géométrie de la figure 1.8 indiquant  $\tan \theta_{I_{\min}} = \frac{\rho_{\min}}{h_t + h_r}$ , nous pouvons conclure que :

$$\boxed{\rho_{\min} \approx |n|(h_t + h_r)} \quad |n^2| > 10 \quad (4.27)$$

Il est important de noter que pour  $n$  réel, l'équation 4.27 n'est plus une approximation car l'équation 4.26 représente précisément la définition de l'angle de Brewster.

Cette distance a aussi une particularité : elle minimise la distance numérique  $\tau$ . Cette variable est donnée par :

$$\begin{aligned} \tau &= jk_1 r_I (\cos(w_p - \theta_I) - 1) \\ \tau &= jk_1 r_I (\cos w_p \cos \theta_I + \sin w_p \sin \theta_I - 1) \\ \tau &= jk_1 \left( \cos w_p \cdot (h_t + h_r) + \sin w_p \cdot \rho - \sqrt{\rho^2 + (h_t + h_r)^2} \right) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Si l'on considère  $n$  réel,  $\tau$  est purement imaginaire et négatif. En dérivant ce terme par rapport à  $\rho$  pour trouver sa valeur absolue minimale :

$$\tau' = jk_1 \left( \sin w_p - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + (h_t + h_r)^2}} \right) \quad (4.29)$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\frac{\rho_{\min}^2}{\rho_{\min}^2 + (h_t + h_r)^2} &= \sin^2 w_p \\ \frac{\rho_{\min}^2}{\rho_{\min}^2 + (h_t + h_r)^2} &= \frac{n^2}{1 + n^2} \\ \rho_{\min} &= n(h_t + h_r)\end{aligned}\tag{4.30}$$

On constate empiriquement que l'équation 4.30 peut être généralisée pour le cas complexe si  $n$  est remplacé par sa valeur absolue. Ce résultat est important car la composante due au pôle est proportionnelle à  $\frac{\operatorname{erfc}(j\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}}$ . Si  $\tau$  est quasi imaginaire,  $\operatorname{erfc}(j\sqrt{\tau})$  atteint sa valeur absolue maximale quand son argument passe par sa valeur absolue minimale. Ainsi,  $E_{z_{\text{pole}}}$  bénéficie du minimum de  $\tau$  à  $\rho_{\min}$ . Par conséquent, cette estimation met en évidence la distance à partir de laquelle la méthode à deux rayons n'est plus valable et la propagation se fait principalement via  $E_{z_{\text{pole}}}$ .

L'estimation de la distance  $\rho_{\min}$  est une autre avancée de cette thèse, car l'analyse de cette distance permet d'extraire d'importantes conclusions. Premièrement, le seul paramètre dépendant de la fréquence dans ce terme est l'indice de réfraction  $n$ . Si l'on considère que la permittivité électrique du deuxième milieu est constante dans la bande de fréquences d'intérêt, alors  $\rho_{\min}$  est indépendante de la fréquence. Deuxièmement, pour mieux profiter de la propagation par  $E_{z_{\text{pole}}}$ , il est souhaitable que cette distance ne soit pas grande. Pour minimiser cette distance, il faut donc positionner les antennes le plus près du sol et choisir  $|n|$  le plus petit possible.

Il est important de noter que le choix de  $n$  impose ainsi un compromis. D'une part, il faut qu'il soit le plus grand possible, vu la condition de la prédominance du pôle 4.22 et d'autre part il faut qu'il soit petit pour que la contribution de  $E_{z_{\text{pole}}}$  apparaisse à des distances proches de la source.

## 4.2.2 Estimation de $\rho_{\text{rupture}}$

Après la condition de la prédominance du pôle et la distance  $\rho_{\min}$ , il est envisageable d'étudier la distance  $\rho_{\text{rupture}}$ , où le régime de  $-20$  dB/déc est atteint.

Pour ce faire, il est nécessaire de vérifier à partir de quelle distance l'approximation asymptotique de l'équation 4.20 est valable. L'approximation de l'équation 4.13, utilisée

pour obtenir l'équation 4.20, est suffisamment précise pour des valeurs absolues de la distance numérique  $\tau$  à partir de l'unité. Ainsi, la distance où  $|\tau| = 1$  constitue une bonne estimation de  $\rho_{\text{rupture}}$ . Cette hypothèse est également présente dans [22, Sec. 2F].

Pour trouver cette distance, nous étudions la distance numérique dans sa forme développée dans l'équation 4.28. En imposant la condition  $|n^2| > 10$  aux équations 4.16 et en prenant en considération le signe de ces équations, analysé dans la section 2.4.3.2, on obtient les approximations suivantes :

$$\cos w_p \approx -\frac{1}{n} \quad (4.31)$$

$$\sin w_p = \sqrt{\frac{n^2}{1+n^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{1+n^2}} \approx 1 - \frac{1}{2(1+n^2)} \approx 1 - \frac{1}{2n^2} \quad (4.32)$$

La distance numérique devient alors :

$$\tau_{|n^2|>10} \approx jk_1 \left( -\frac{1}{n}(h_t + h_r) + \rho \left( 1 - \frac{1}{2n^2} \right) - \rho \sqrt{1 + \left( \frac{h_t + h_r}{\rho} \right)^2} \right) \quad (4.33)$$

Le terme  $\frac{h_t+h_r}{\rho}$  est petit pour  $\rho = \rho_{\text{rupture}}$ . Par conséquent, on peut utiliser l'approximation de racine carrée de l'équation 4.7 :

$$\begin{aligned} \tau_{|n^2|>10} &\approx -jk_1 \left( \frac{1}{n}(h_t + h_r) + \frac{\rho}{2n^2} + \frac{(h_t + h_r)^2}{2\rho} \right) \\ \tau_{|n^2|>10} &\approx -\frac{jk_1\rho}{2n^2} \left( \frac{2n}{\rho}(h_t + h_r) + 1 + \left( \frac{n(h_t + h_r)}{\rho} \right)^2 \right) \\ \tau_{|n^2|>10} &\approx -j\frac{k_1\rho}{2n^2} \left( 1 + \frac{n(h_t + h_r)}{\rho} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Pour de grandes valeurs de  $\rho$ , l'équation 4.34 peut se réduire à :

$$\tau_{|n^2|>10 \text{ et } \rho \gg 1} \approx -j\frac{k_1\rho}{2n^2} \quad (4.35)$$

L'équation 4.35 permet d'estimer la distance où la valeur absolue de  $\tau$  est approximativement égale à l'unité. Cette distance est désignée  $\rho_{\text{rupture}}$ , où la zone sans oscillations décroissant de 10 dB/déc prend fin :

$$\boxed{\rho_{\text{rupture}} = \frac{2|n^2|}{k_1}} \quad |n^2| > 10 \quad (4.36)$$

A notre connaissance, cette distance a été présentée pour la première fois dans la littérature internationale dans [25, Eq. 90] en 2016. Toutefois, nous avons déjà communiqué sur cette distance dans une conférence nationale qui précède cet article [69, Eq. 7] en 2015.

L'équation 4.36 nous permet de conclure que  $\rho_{\text{rupture}}$  ne dépend pas des hauteurs des antennes. Afin de prolonger la zone sans oscillations de décroissance à 10 dB/déc, il est souhaitable que  $\rho_{\text{rupture}}$  soit la plus grande possible. Il est donc préférable que  $|n^2|$  soit suffisamment grand et que la fréquence soit suffisamment petite. Cependant, l'augmentation de la valeur absolue de  $n$  implique celle de  $\rho_{\text{min}}$ , ce qui n'est pas souhaitable. Un compromis sur  $|n|$  s'impose.

### 4.3 Lignes directrices

Une contribution scientifique importante de cette thèse réside dans les informations sur la propagation près du sol qui s'extraient de l'ensemble des trois équations : la condition de la prédominance du pôle (équation 4.22),  $\rho_{\text{min}}$  (équation 4.27) et  $\rho_{\text{rupture}}$  (équation 4.36). Il est possible de conclure que :

- La propagation près du sol garantit un meilleur affaiblissement de trajet si la condition de la prédominance du pôle est vérifiée ;
- La diminution des hauteurs des antennes facilite le respect de la condition de la prédominance du pôle. Cela diminue aussi la valeur de  $\rho_{\text{min}}$ , ce qui signifie que la zone sans oscillations de décroissance à 10 dB/déc est observée à des distances d'observation faibles. Néanmoins,  $\rho_{\text{rupture}}$  est indépendant des hauteurs des antennes ;
- La diminution de la fréquence favorise elle aussi le respect de la condition de la prédominance du pôle. Cela augmente aussi la valeur de  $\rho_{\text{rupture}}$ , ce qui signifie que la stabilisation de la de décroissance à 20 dB/déc est atteinte à des distances plus éloignées. Néanmoins, la fréquence n'interfère pas sur la valeur de  $\rho_{\text{min}}$  si  $|n|$  peut être considéré indépendant de la fréquence ;
- L'augmentation de  $|n|$  convient également à la condition de la prédominance du pôle.



Cela augmente aussi la valeur de  $\rho_{\text{rupture}}$ , ce qui signifie que le régime permanent de décroissance à 20 dB/déc est atteint à des distances plus éloignées. Néanmoins, la valeur de  $\rho_{\text{min}}$  devient elle aussi plus grande. Ainsi, un compromis pour le choix de  $|n|$  s'impose.

## 4.4 Exemples

Les figures 4.1 à 4.4 illustrent des exemples de propagation qui ne sont pas bien décrits par la méthode à deux rayons car la condition de la prédominance du pôle est vérifiée et, par conséquent, la composante  $E_{z_{\text{pole}}}$  est non négligeable et joue un rôle important. Dans tous ces exemples, les antennes sont des dipôles élémentaires électriques verticaux. Les courbes noires en trait plein et les courbes grises en trait pointillé représentent l'affaiblissement de trajet du champ électrique prévu respectivement par la méthode de la plus grande pente (PGP) et la méthode à deux rayons (2R).

La figure 4.1 présente l'affaiblissement de trajet pour le cas où les antennes rayonnent à 100 MHz et se trouvent à 1 m au-dessus de la mer, dont l'eau est caractérisée par  $\varepsilon_r = 70$  et  $\sigma = 5$  S/m à cette fréquence [70]. Pour cet exemple, la condition de la prédominance du pôle est satisfaite. En conséquence, l'affaiblissement de trajet du champ électrique est en réalité meilleur que celui prévu par la méthode à deux rayons. Le terme  $\rho_{\text{min}}$  est égal à 60 m et à cette distance, la différence entre les champs électriques estimés par les deux méthodes est égale à 2,24 dB. Le terme  $\rho_{\text{rupture}}$  est égal à 860 m et à cette distance la méthode de la plus grande pente prévoit un écart de 10,6 dB par rapport à la méthode à deux rayons. On note que pour cet exemple, les distances importantes considérées sont exploitables car la liaison se fait à l'extérieur.

La figure 4.2 présente une propagation à 868 MHz. L'antenne de transmission est positionnée à 10 cm au-dessus d'une interface composée d'un matériau diélectrique sans perte, dont la permittivité relative est égale à 100. L'antenne de réception est positionnée sur l'interface. Etant donné les caractéristiques de cette propagation, la condition de la prédominance du pôle est vérifiée. Pour cette propagation,  $\rho_{\text{min}}$  est égal à 1 m et à cette distance, la différence entre les champs électriques estimés par les deux méthodes est de 1,52 dB. Le terme  $\rho_{\text{rupture}}$  est égal à 11 m et à cette distance, la différence entre les champs électriques estimés par les deux méthodes est de 5,63 dB. On remarque que ces

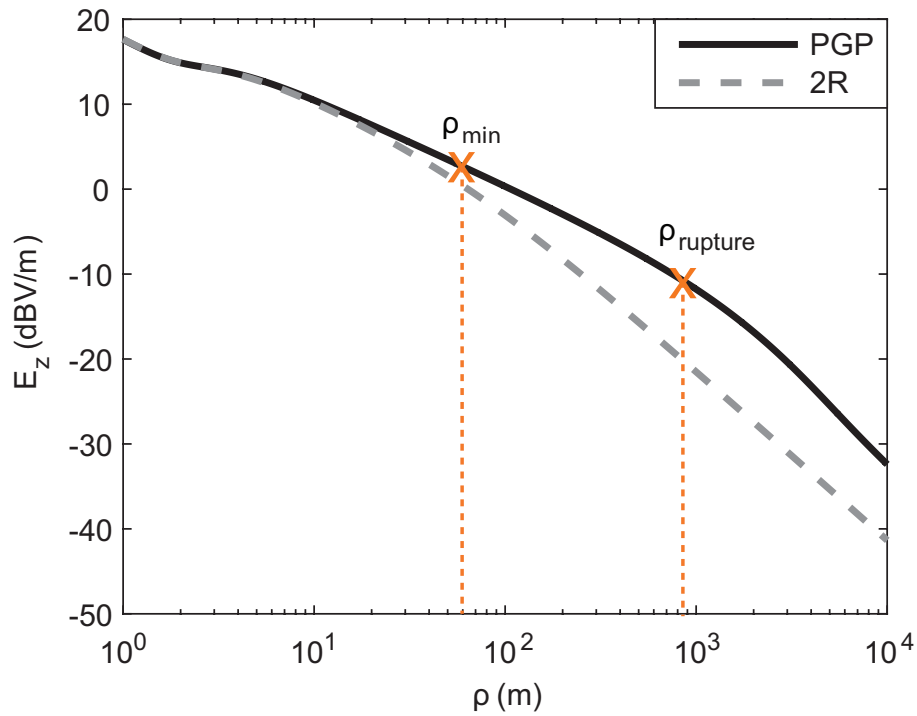


FIGURE 4.1 – Affaiblissement de trajet du champ électrique entre deux dipôles élémentaires électriques verticaux rayonnant à 100 MHz, positionnés à 1 m au-dessus de la mer.  $\varepsilon_r = 70$ ,  $\sigma = 5$  S/m,  $\rho_{\min} = 60$  m et  $\rho_{\text{rupture}} = 860$  m.

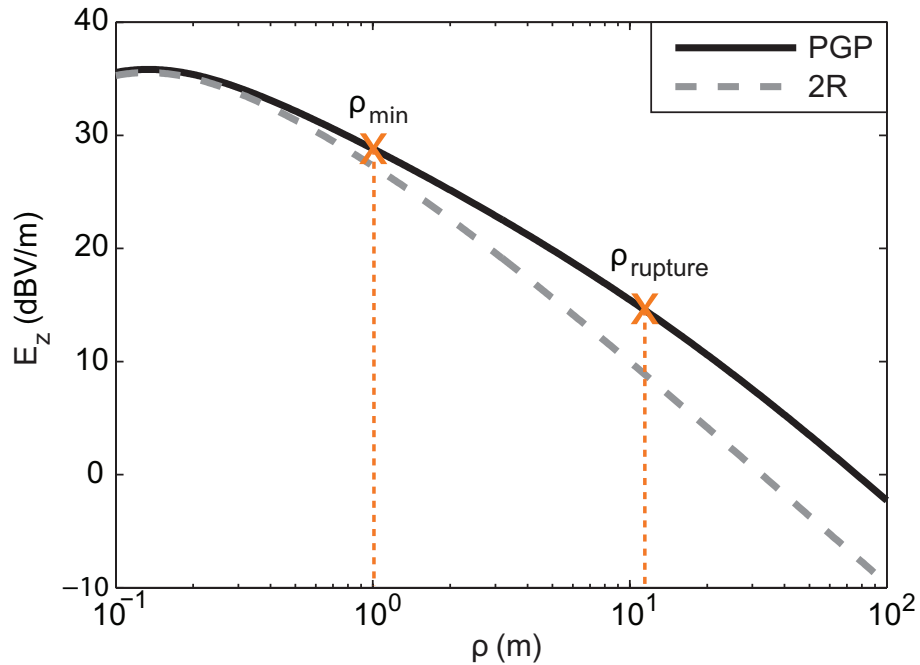


FIGURE 4.2 – Affaiblissement de trajet du champ électrique entre deux dipôles élémentaires électriques verticaux rayonnant à 868 MHz. L'antenne de transmission est positionnée à 10 cm au-dessus d'une interface composée d'un matériau diélectrique sans perte. L'antenne de réception est positionnée sur l'interface.  $\varepsilon_r = 100$ ,  $\rho_{\min} = 1$  m et  $\rho_{\text{rupture}} = 11$  m.

deux distances sont convenables pour une communication *indoor*, comme, par exemple, les applications RFID.

La figure 4.3 reprend l'exemple de la figure 1.4, où on décrit la propagation de l'onde au-dessus d'une interface relativement conductrice ( $\sigma = 5 \cdot 10^3$  S/m). Les antennes rayonnent à 8,2 GHz et se trouvent à 10 cm au-dessus de l'interface. Pour cette configuration, la condition de la prédominance du pôle est satisfaite. Le terme  $\rho_{\min}$  est égal à 21 m et à cette distance, la différence entre les champs estimés par les deux méthodes est égale à 1,85 dB. Le terme  $\rho_{\text{rupture}}$  est égal à 128 m et à cette distance, la différence entre les champs estimés par les deux méthodes est égale à 5,86 dB. Cet exemple montre que la propagation près du sol peut améliorer la communication entre deux points même à des fréquences plus élevées (bande SHF) à des distances raisonnables grâce à un matériau adapté. Dans ces conditions, les distances correspondent à une liaison à l'intérieur, à l'échelle d'un hangar ou d'une gare.

La figure 4.4 montre un exemple dans la bande EHF. La fréquence de travail est de 60 GHz et la propagation de l'onde a lieu au-dessus d'une interface constituée de nichrome, un alliage non magnétique de nickel et de chrome, dont la conductivité est égale à  $6,6 \cdot 10^5$  S/m. Les antennes de transmission et de réception sont placées respectivement à 5 cm et 1 cm au-dessus de l'interface. Etant donné les caractéristiques de cette propagation, la condition de la prédominance du pôle est vérifiée. Le terme  $\rho_{\min}$  est égal à 27 m et à cette distance, la différence entre les champs estimés par les deux méthodes est égale à 2,21 dB. Le terme  $\rho_{\text{rupture}}$  est égal à 315 m et à cette distance, la méthode de la plus grande pente estime le champ avec un écart de 8,74 dB par rapport à la méthode à deux rayons. Cette liaison reste convenable pour des applications *indoor*.

Dans les figures 4.1 à 4.4, compte tenu du fait que la condition de la prédominance du pôle est respectée, la méthode de la plus grande pente prévoit un affaiblissement de trajet entre  $\rho_{\min}$  et  $\rho_{\text{rupture}}$  moins important que celui prévu par la méthode à deux rayons (10 dB/déc contre 20 dB/déc). En revanche, au-delà de  $\rho_{\text{rupture}}$ , les pentes prévues par les deux méthodes sont identiques. Toutefois, le champ calculé par la méthode de la plus grande pente demeure supérieur. Par ailleurs, ces exemples montrent que la contribution du terme lié au pôle peut être décisivement important dans des scénarios qui diffèrent largement en fréquence, caractéristiques du milieu et hauteurs des antennes. Ces exemples confirment que les estimations de  $\rho_{\min}$  et  $\rho_{\text{rupture}}$  sont précises.

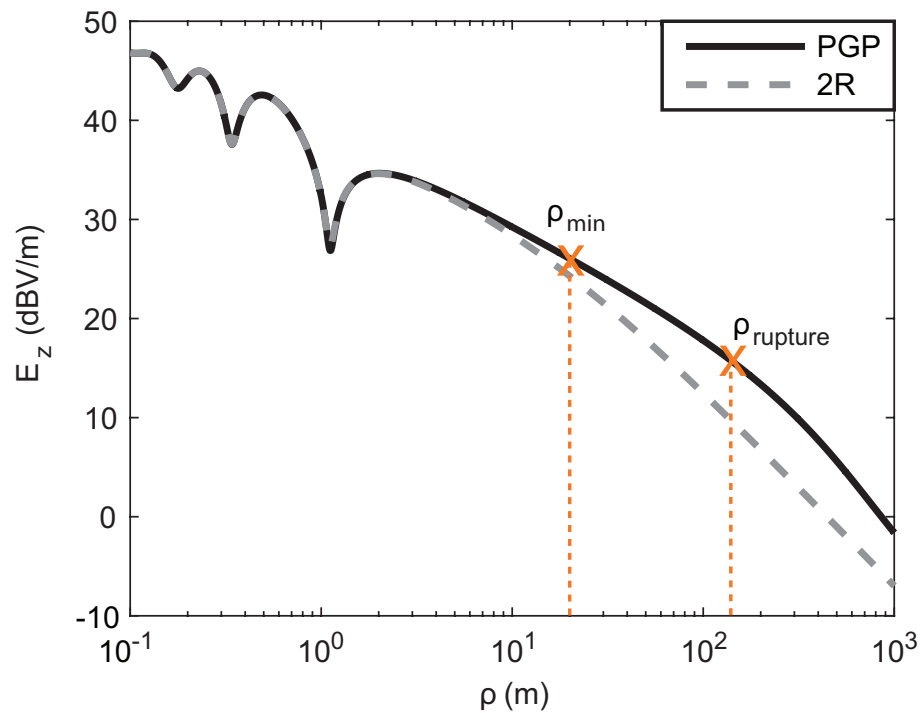


FIGURE 4.3 – Affaiblissement de trajet du champ électrique entre deux dipôles élémentaires électriques verticaux rayonnant à 8,2 GHz, positionnés à 10 cm au-dessus d'une interface relativement conductrice.  $\sigma = 5 \cdot 10^3$  S/m,  $\rho_{\min} = 21$  m et  $\rho_{\text{rupture}} = 128$  m.

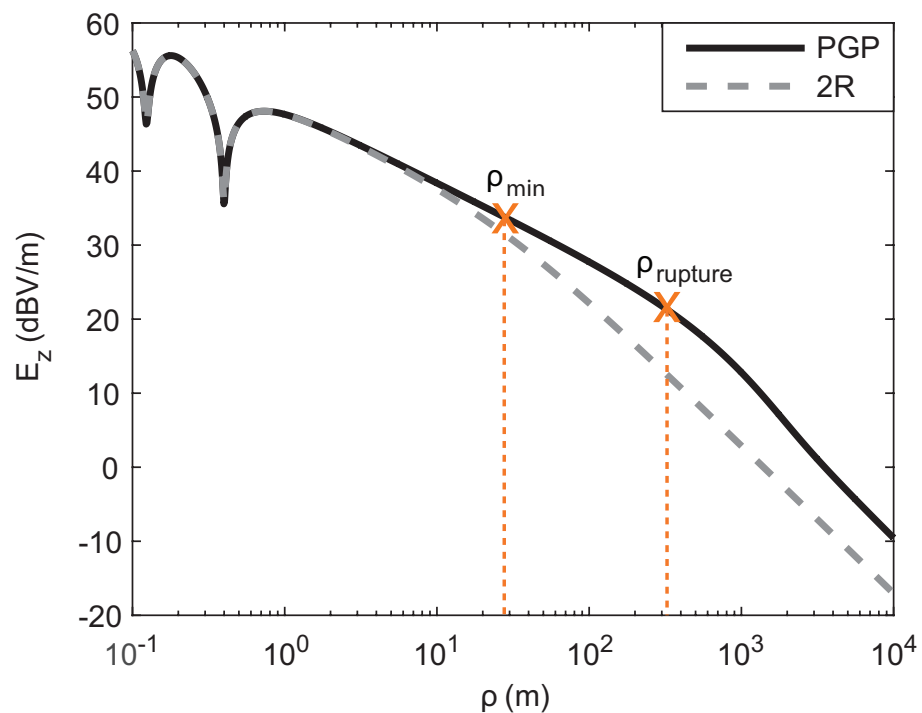


FIGURE 4.4 – Affaiblissement de trajet du champ électrique entre deux dipôles élémentaires électriques verticaux rayonnant à 60 GHz. L'antenne de transmission est positionnée à 5 cm au-dessus d'une interface composée de nichrome. L'antenne de réception est positionnée à 1 cm au-dessus de l'interface.  $\sigma = 6.6 \cdot 10^5$  S/m,  $\rho_{\min} = 27$  m et  $\rho_{\text{rupture}} = 315$  m.

Outre que la composante  $E_{z_{\text{pôle}}}$  garantit un affaiblissement de trajet moins important à de grandes distance, elle peut être utile pour supprimer des oscillations.

Nous savons que diminuer la hauteur des antennes réduit les oscillations du champ dues aux interférences constructives et destructives des composantes directe et réfléchie de l'onde. Néanmoins, cette suppression a un prix : une baisse de la puissance reçue. Comme exemple, la figure 4.5 compare les affaiblissements de trajet prévus par la méthode de la plus grande pente dans deux configurations différentes au-dessus d'une interface composée d'un matériau diélectrique dont la permittivité relative est égale à 10. La courbe noire décrit l'affaiblissement de trajet du champ pour le cas où les antennes de transmission et de réception sont placées à 2 m au-dessus de l'interface. Pour la courbe bleue, celles-ci sont positionnées à 20 cm au-dessus de l'interface. Nous pouvons constater qu'effectivement la diminution des hauteurs des antennes supprime les oscillations, mais entraîne une baisse de la puissance reçue.

Cette baisse de puissance n'a pas lieu si la composante due au pôle prend le relais. En effet, la figure 4.6 met en évidence qu'il est possible d'éliminer les oscillations tout en conservant les mêmes niveaux de puissance. Cette figure reprend l'exemple de la figure

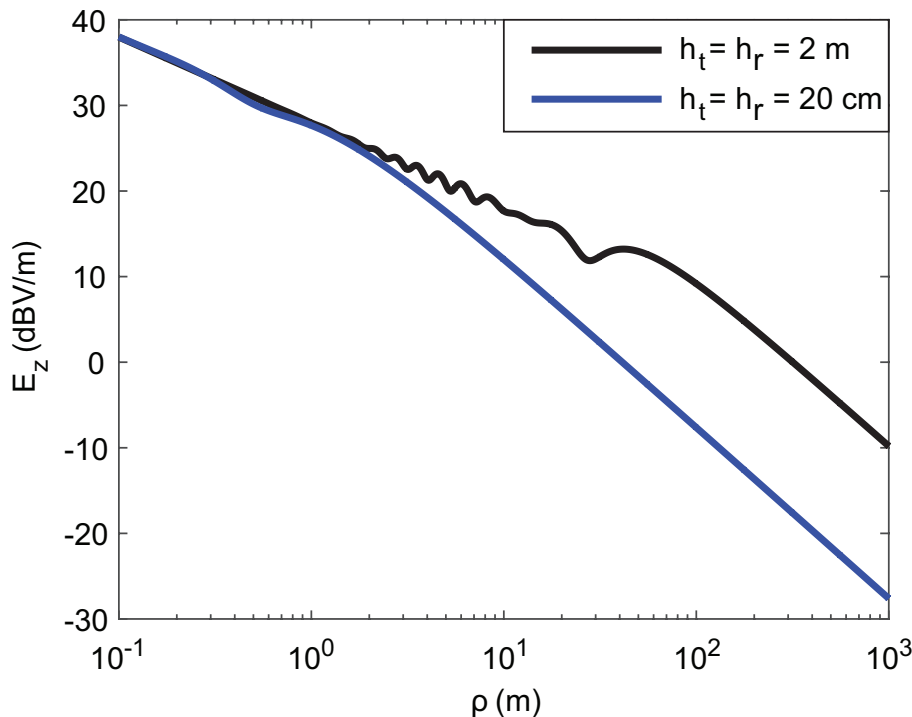


FIGURE 4.5 – Affaiblissement de trajet du champ électrique entre deux dipôles élémentaires électriques verticaux rayonnant à 1 GHz, au-dessus d'une interface diélectrique sans perte ( $\epsilon_r = 10$ ).

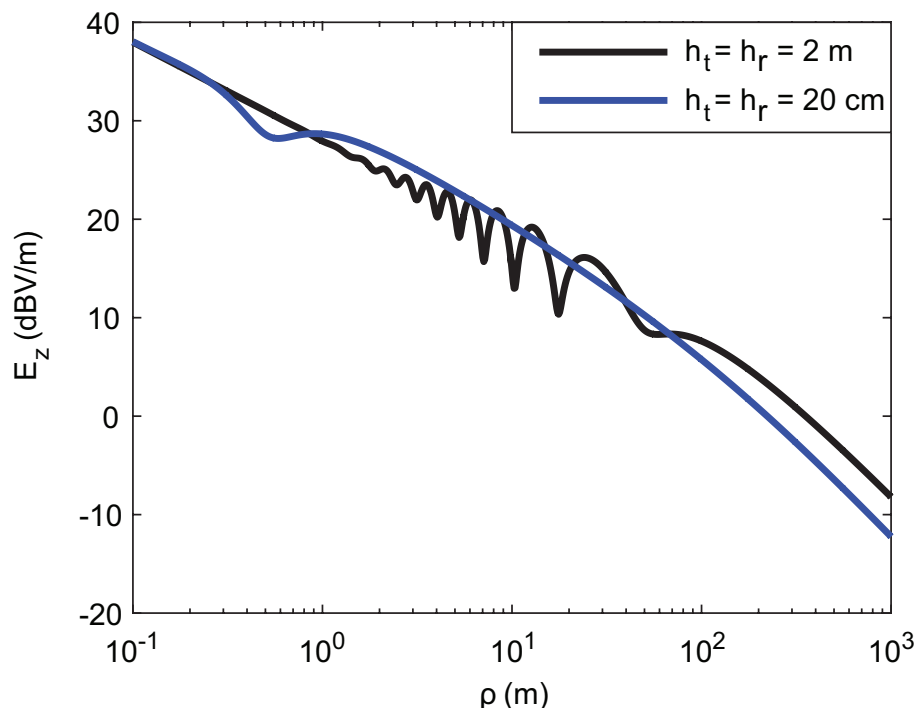


FIGURE 4.6 – Affaiblissement de trajet du champ électrique entre deux dipôles élémentaires électriques verticaux rayonnant à 1 GHz, au-dessus d’une interface diélectrique sans perte ( $\epsilon_r = 1000$ ).

4.5, à l’exception de la permittivité relative de l’interface, qui est ici égale à 1000. Dans ce cadre, la condition de la prédominance du pôle est respectée. Par conséquent, la diminution des hauteurs des antennes supprime les oscillations, mais la baisse de puissance n’est pas vérifiée, grâce à la présence de la composante  $E_{z_{\text{pole}}}$ . Cet exemple met en évidence l’importance des propriétés électromagnétiques du sol pour la propagation près de l’interface.

## 4.5 Vers une démonstration de faisabilité

Les exemples de la section 4.4 présentent une difficulté concernant le choix du matériau. A l’exception de la figure 4.1, qui décrit un cas de figure pour la propagation d’onde relativement connu au-dessus de l’eau de mer dans la bande VHF [71][72], les matériaux des autres exemples ont des caractéristiques qui ne sont pas faciles à trouver ou ne sont pas adaptés pour couvrir une grande surface.

Pour démontrer la faisabilité d’une propagation qui peut tirer profit de  $E_{z_{\text{pole}}}$ , il est souhaitable de se mettre dans des conditions où la distance  $\rho_{\text{min}}$  n’est pas très grande. Si cette distance dépasse quelques dizaines de mètres, la validation des prévisions théoriques

serait difficile. A partir des lignes directrices de la section 4.3 et des exemples de la section 4.4, on constate que l'interface entre le premier milieu (l'air) et le deuxième doit présenter un contraste d'indice de réfraction modéré : assez grand pour remplir la condition de la prédominance du pôle et ainsi garantir l'excitation de la composante  $E_{z_{\text{pole}}}$ , cependant pas trop grand pour garder la distance  $\rho_{\text{min}}$  suffisamment proche de l'émission.

Deux solutions sont possibles pour des applications dans la bande de fréquence de l'ordre de quelques dizaines de GHz : le deuxième milieu doit présenter soit une permittivité électrique élevée ( $> 100$ ), soit une conductivité modérée ( $10^3 \text{ S/m} < \sigma < 10^5 \text{ S/m}$ ). Comme ces caractéristiques ne correspondent pas à des propriétés d'un sol classique (terre, bitume, parquet, bois, béton...), il est nécessaire d'intervenir pour changer les propriétés électromagnétiques du sol.

Une possibilité est de tapisser le sol avec un matériau présentant les caractéristiques souhaitées. Néanmoins, l'ajout d'une couche diélectrique supplémentaire entraîne la prise en compte d'un milieu multicouche qui n'est pas l'objectif principal du modèle développé dans ce manuscrit. En revanche, si la couche est relativement conductrice avec une épaisseur plus grande que l'épaisseur de peau, nous pouvons supposer que l'onde pénétrant dans le deuxième milieu est atténuée en raison des pertes et l'ensemble peut être considéré comme un milieu semi-infini. Par conséquent, la piste d'un matériau modérément conducteur a été privilégiée pour envisager une démonstration de faisabilité.

### 4.5.1 Matériaux envisagés

Deux matériaux différents ont été envisagés pour la démonstration de faisabilité : du papier avec un dépôt métallique et des feuilles de graphite, présentés dans la figure 4.7.



(a) Papier métallisé



(b) Feuille de graphite

FIGURE 4.7 – Matériaux envisagés pour la démonstration de faisabilité.

Le papier métallisé testé (figure 4.7a) est conçu par le Centre Technique du Papier (CTP). Ce laboratoire, situé à Grenoble, a pour domaine d'expertise l'électronique imprimée sur papier et sur certains polymères. Le savoir-faire du CTP domine deux types différents de procédures : la flexographie et la sérigraphie. Ces procédures permettent d'imprimer l'encre métallique sur plusieurs types de substrat (papier, carton, plastique...) et avec différents types de motifs. L'échantillon de la figure 4.7a, de dimension  $18,9 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$ , présente de l'encre argentée comme dépôt métallique. Selon le fabricant, l'épaisseur du dépôt métallique varie de  $8 \mu\text{m}$  à  $12 \mu\text{m}$ . Nous avons essayé d'effectuer une mesure de l'épaisseur dans un profilomètre mécanique. Cet instrument mesure le relief d'une surface. La rugosité du dépôt métallique et du papier ne nous a pas permis de mesurer précisément l'épaisseur. Cependant, nous avons pu valider l'ordre de grandeur de l'épaisseur annoncée par le fabricant. Par la suite, nous considérons l'épaisseur du dépôt  $e = 10 \mu\text{m}$ .

La feuille de graphite (figure 4.7b) est conçue par la société Mersen, basée à la Défense et anciennement appelée Carbone Lorraine. Cette société est un expert mondial des spécialités électriques et des matériaux avancés, comme le graphite. Papyex<sup>®</sup>, le produit envisagé pour notre application, est du graphite souple sous forme de rouleau aux propriétés intéressantes pour l'étanchéité industrielle. Les diverses déclinaisons de ce produit sont utilisées dans les secteurs suivants : la chimie, la pétrochimie, les raffineries, l'énergie, la mécanique et l'automobile [73]. Les dimensions de l'échantillon de la figure 4.7b sont  $30 \text{ cm} \times 20,9 \text{ cm}$  (quasiment le format A4). L'épaisseur donnée par le fabricant est de  $0,5 \text{ mm}$ . Nous avons effectué une mesure de l'épaisseur avec l'équipement Tesatronic Swiss TTD60, normalement utilisé au sein de notre laboratoire pour mesurer l'épaisseur des wafers de semi-conducteurs. Le résultat de plusieurs mesures sur un échantillon de la feuille de graphite a donné des résultats qui varient entre  $493 \mu\text{m}$  et  $500 \mu\text{m}$ , avec une valeur moyenne de  $497 \mu\text{m}$ . Ainsi, nous avons validé l'épaisseur fournie par le fabricant.

#### 4.5.2 Caractérisation de la conductivité statique par une mesure à quatre pointes

La procédure la plus connue pour mesurer la conductivité d'une couche conductrice fine est la mesure à quatre pointes [74, Case 7]. Le schéma pour ce type de mesure est montré dans la figure 4.8. Dans cette figure, les quatre pointes sont espacées d'une même distance  $d$ . Les deux pointes les plus externes forcent un courant qui impose une différence



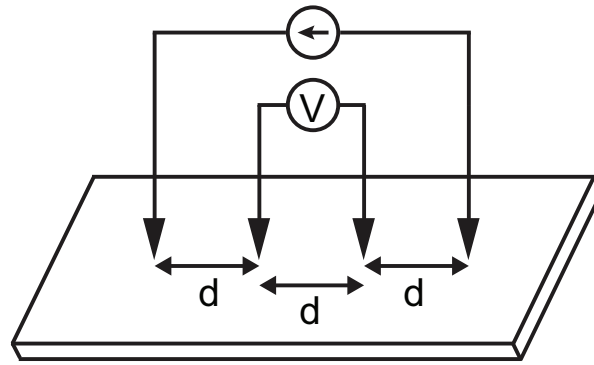


FIGURE 4.8 – Schéma d'une mesure à quatre pointes.

de potentiel entre les pointes les plus internes. Si les pointes sont éloignées des bords de l'échantillon, le rapport entre l'épaisseur et la plus petite dimension de la surface est très petit et le rapport entre l'épaisseur et la distance entre les pointes est également petit, alors il est possible de modéliser l'échantillon comme une surface infinie parfaitement bidimensionnelle. La formule suivante devient alors valable :

$$R_{\square} = \frac{\rho}{e} = \frac{V}{I} \frac{\pi}{\ln 2} \quad (4.37)$$

où  $R_{\square}$  est la résistance par carré (en  $\Omega/\text{sq}$ ),  $\rho$  est la résistivité du matériau (en  $\Omega\text{m}$ , considérée uniforme),  $e$  est l'épaisseur du matériau,  $V$  est la différence de potentiel entre les pointes intérieures due au courant  $I$  forcé par les pointes extérieures. La conductivité électrique (en  $\text{S/m}$ ) du matériau se calcule directement par :

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad (4.38)$$

Pour ces mesures, nous avons utilisé le SMU (SourceMeter<sup>®</sup> Source Measure Unit) Series 2400 de Keithley [75]. La figure 4.9 montre le banc de mesure pour la feuille de graphite. Les quatre pointes sont encadrées par le carré orange.

Pour le papier métallisé, nous avons mesuré  $\frac{V}{I} = 0,1880 \Omega$  et ainsi  $R_{\square} = 0,8521 \Omega/\text{sq}$ . En considérant  $e = 10 \mu\text{m}$ , la conductivité est égale à  $\sigma_{\text{papier}} = 1,17 \cdot 10^5 \text{ S/m}$ . Lors d'une collaboration avec le laboratoire STICC (Sciences et Techniques de l'Information, de la Communication et de la Connaissance), de l'Université de Bretagne Occidentale, une deuxième mesure à quatre pointes a été effectuée sur un autre échantillon de ce papier métallisé. Le résultat de cette mesure donne  $R_{\square} = 0,8248 \Omega/\text{sq}$ . L'erreur entre cette mesure et celle effectuée au sein de notre laboratoire est très faible (3,4 %).

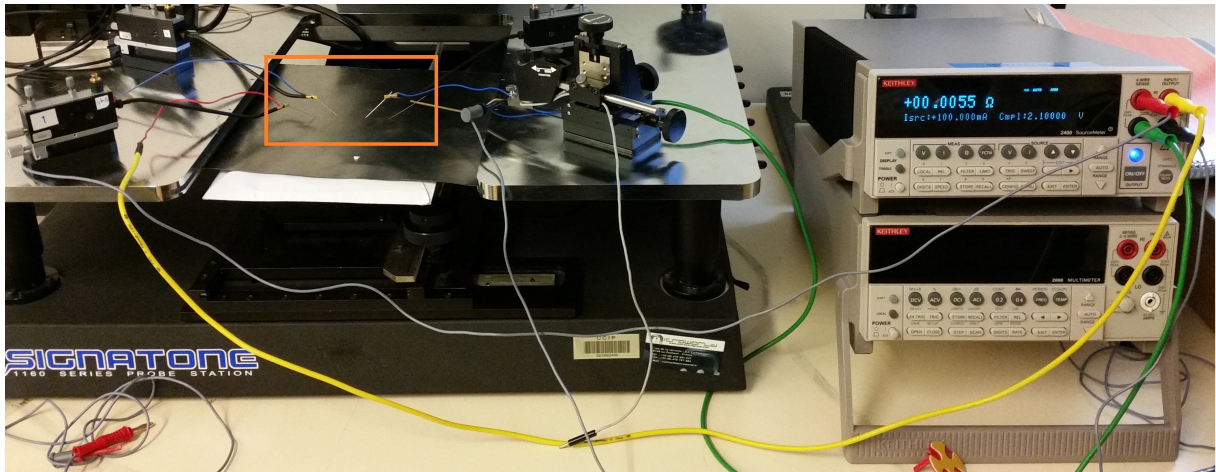


FIGURE 4.9 – Mesure à quatre pointes sur l'échantillon de la feuille de graphite.

Pour la feuille de graphite, nous avons mesuré  $\frac{V}{I} = 0,0055 \Omega$  et ainsi  $R_{\square} = 0,0249 \Omega/\text{sq}$ . En considérant  $e = 0,5 \text{ mm}$ , la conductivité est égale à  $\sigma_{\text{feuille}} = 8,02 \cdot 10^4 \text{ S/m}$ .

### 4.5.3 Caractérisation radio-fréquence de la conductivité

La mesure à quatre pointes donne la conductivité statique (DC) du matériau. Afin de vérifier si le comportement de la conductivité électrique varie en fonction de la fréquence, nous avons procédé à une caractérisation radio-fréquence. Pour ce faire, nous avons envisagé deux méthodes différentes. La première, plus adaptée pour le papier avec un dépôt métallique, consiste à fabriquer une ligne CPW et à déduire la valeur de la conductivité du dépôt métallique à partir de la caractérisation de la ligne. La deuxième consiste à insérer les deux échantillons à l'intérieur des guides d'ondes rectangulaires en bande S et en bande X pour ensuite déduire la conductivité de ces matériaux à partir de la caractérisation du guide. Cette deuxième méthode a été effectuée au sein du laboratoire STICC.

#### 4.5.3.1 Caractérisation par une ligne CPW

Dans le but de caractériser la conductivité du papier métallisé en hautes fréquences (bande S), nous avons réalisé une ligne CPW présentée dans la figure 4.10.

La ligne CPW a été réalisée sur un substrat en verre fourni par Corning (Pyrex<sup>®</sup> 7740) [76], sur lequel le papier métallisé a été collé. L'épaisseur de ce substrat est de 1 mm. Les connecteurs utilisés sont du type SMA 1,2 mm. Une difficulté dans la réalisation de

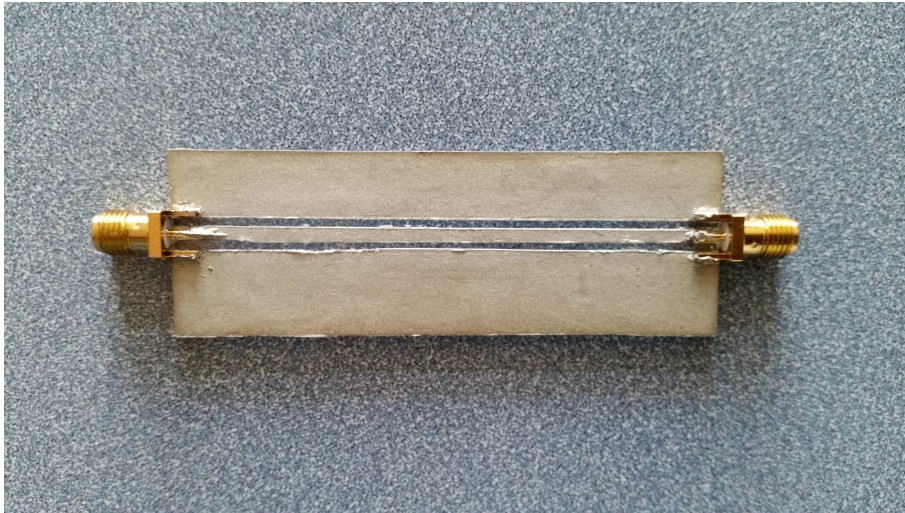


FIGURE 4.10 – Ligne CPW réalisée avec le papier métallisé collé sur un substrat en verre. Les connecteurs sont du type SMA 1,2 mm.

cette ligne est liée au fait que le papier ne permet pas de soudure solide. Ainsi, pour fixer les connecteurs, nous avons utilisé une pâte argentée qui se durcit après une exposition à la chaleur. Le résultat final de la fixation des connecteurs avec la pâte argentée est un peu fragile. En effet, il nous a fallu réaliser deux pistes CPW pour pouvoir effectuer des mesures.

Afin de déduire la conductivité, nous avons simulé la structure avec le logiciel HFSS entre 2 GHz et 6 GHz. La structure simulée est présentée dans la figure 4.11. Les dimensions sont celles de la ligne CPW réalisée (figure 4.10).

Dans la structure simulée, les couches de colle et de papier n'ont pas été représentées. Néanmoins, elles ont été prises en compte dans la permittivité électrique du substrat. En

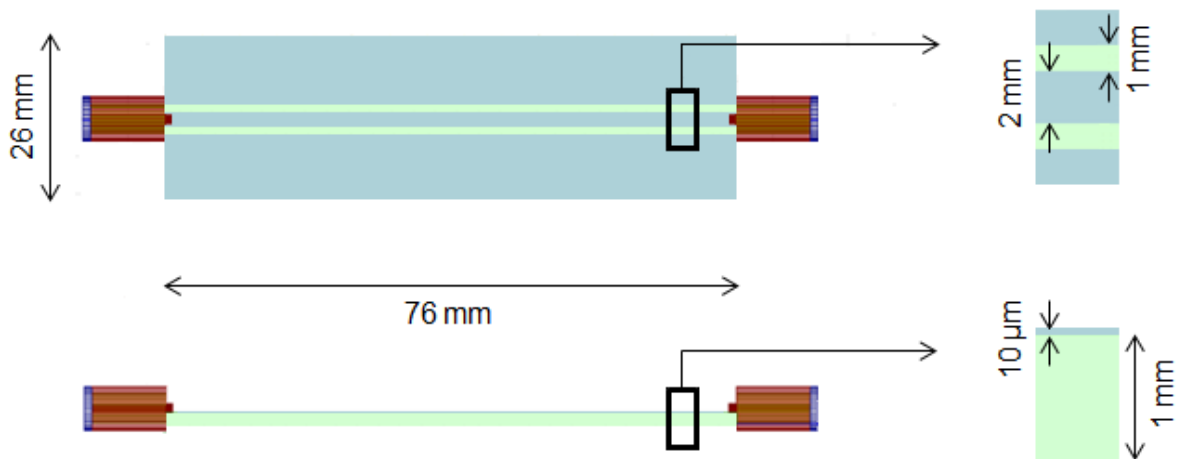


FIGURE 4.11 – Simulation de la ligne CPW de la figure 4.10.

effet, cette dernière a été adaptée dans la simulation pour mieux représenter les mesures. Pour choisir la bonne valeur de la permittivité électrique, nous avons étudié le résultat de la mesure du paramètre  $S_{11}$ , présenté dans la figure 4.12. Les mesures ont été effectuées par avec un analyseur de réseau vectoriel N9923A d'Agilent Technologies.

Les oscillations du paramètre  $S_{11}$  s'expliquent par le fait que l'impédance caractéristique ( $Z_0$ ) de la ligne CPW n'est pas adaptée à l'impédance des ports ( $50 \Omega$ ). Ainsi, ce paramètre trouve ses minima quand l'impédance vue par le port 1 ( $Z_{in}$ ) est égale à  $50 \Omega$ . En appelant l'impédance du port 2  $Z_L$ , il est possible de calculer [77, équation 2.44] :

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta \ell}{Z_0 + jZ_L \tan \beta \ell} \quad (4.39)$$

où  $\beta$  est la constante de propagation de la ligne et  $\ell$  est la longueur de la ligne (76 cm). Le terme  $\beta \ell$  est connu comme *longueur électrique*. Si cette longueur est multiple de  $\pi$ , alors  $Z_{in} = 50 \Omega$ . Deux minima consécutifs aux fréquences  $f_1$  et  $f_2$  (associées aux longueur d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ ) correspondent à une différence de longueur électrique de  $\pi$ . Nous pouvons alors déduire :

$$\begin{aligned} \left( \frac{2\pi}{\lambda_1} - \frac{2\pi}{\lambda_2} \right) \ell &= \pi \\ \frac{2\pi \ell \sqrt{\varepsilon_{\text{reff}}}}{c} (f_2 - f_1) &= \pi \\ \varepsilon_{\text{reff}} &= \left( \frac{c}{2\ell \Delta f} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.40)$$

où  $\varepsilon_{\text{reff}}$  est la permittivité électrique relative effective de la ligne et  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide.

La mesure sur la ligne CPW indique que  $\Delta f = 1,3$  GHz. Par conséquent, à partir de l'équation 4.40, on obtient  $\varepsilon_{\text{reff}} = 2,305$ . Selon Gupta *et al.* [78, Sec. 7.2.1, pp. 381-383] :

$$\varepsilon_{\text{reff}} = 1 + q(\varepsilon_r - 1) \quad (4.41)$$

où  $\varepsilon_r$  est la permittivité relative du substrat et  $q$  est un coefficient à calculer en prenant en compte les dimensions de la ligne. En suivant la démarche de Gupta *et al.*, nous obtenons que  $q = 0,3361$  et ainsi  $\varepsilon_r = 4,8826$ . Cette valeur a été choisie pour la permittivité électrique du substrat lors de la simulation et prend en compte simultanément les couches

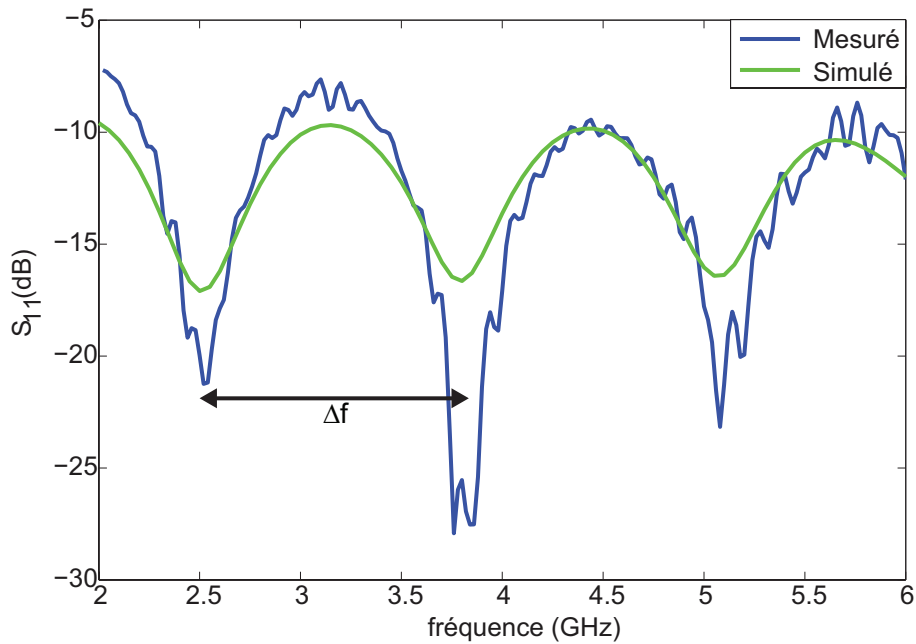


FIGURE 4.12 –  $S_{11}$  simulé et mesuré de la ligne CPW de la figure 4.10.

de verre, de colle et de papier et l'influence du support où a été positionnée la ligne pendant les mesures. La figure 4.12 montre que cette valeur de permittivité relative permet de bien superposer les résultats de mesure et de simulation en supposant la conductivité électrique du dépôt métallique égale à celle mesurée par la méthode des quatre points.

Toutefois, pour connaître la valeur de la conductivité, il faut comparer les résultats de simulation et de mesure du paramètre  $S_{21}$ , car ce paramètre quantifie l'influence des pertes dans la ligne. Il est important de noter que le substrat en verre utilisé a une tangente de pertes très faible ( $\tan \delta = 5 \cdot 10^{-4}$ ). Comme la valeur de la conductivité électrique estimée est de l'ordre de  $10^5$  S/m, nous avons considéré que les pertes sont principalement dues au dépôt métallique.

La figure 4.13 présente les résultats de la mesure et de la simulation du paramètre  $S_{21}$  de la ligne CPW en utilisant deux valeurs de conductivité électrique. La simulation de la ligne CPW considérant la conductivité électrique  $\sigma = 1,17 \cdot 10^5$  S/m (valeur trouvée par la mesure à quatre points) présente des pertes légèrement plus élevées que celles constatées en mesure (cf. figure 4.13). Ainsi, on peut supposer que la conductivité est légèrement plus grande. La simulation avec  $\sigma = 1,5 \cdot 10^5$  S/m conduit à des pertes légèrement plus faibles. On peut conclure que la valeur vraie de la conductivité électrique est comprise dans cet intervalle ( $1,17 \cdot 10^5 - 1,5 \cdot 10^5$  S/m). Nous concluons également que la valeur de la conductivité électrique ne change pas par rapport à sa valeur statique en bande S

(2 GHz à 4 GHz) et C (4 GHz à 8 GHz).

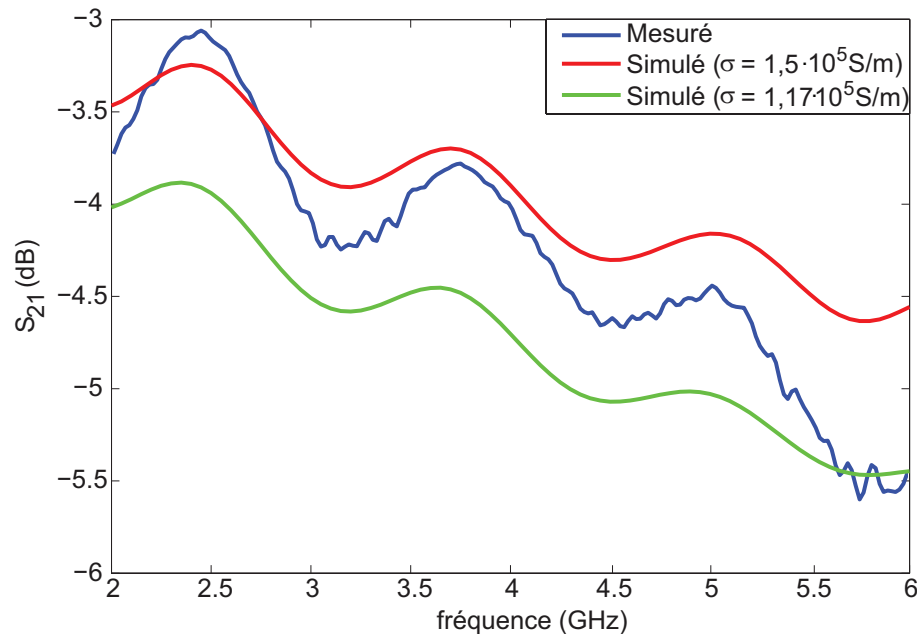


FIGURE 4.13 –  $S_{21}$  simulé et mesuré de la ligne CPW de la figure 4.10.

#### 4.5.3.2 Caractérisation à l'aide d'un guide d'ondes rectangulaire

Il est possible d'effectuer la caractérisation radio-fréquence des propriétés électromagnétiques des matériaux à l'aide d'un guide d'ondes rectangulaire comme montré dans la figure 4.14. La caractérisation présentée dans cette section a été effectuée au laboratoire STICC.

Préalablement aux mesures, il faut effectuer un réglage qui consiste à unir les deux transitions de guide d'ondes de la figure 4.14 pour vérifier une transmission quasi-parfaite ( $S_{11} < -70$  dB et  $S_{21} > -0.01$  dB). Ensuite, l'échantillon du matériau à caractériser est positionné entre les transitions, comme montré dans la figure 4.15. A partir de l'impact sur les paramètres  $S$ , il est possible d'extraire les propriétés électromagnétiques de l'échantillon.

Pour estimer la valeur de la conductivité électrique, nous avons suivi la même démarche que pour la ligne CPW : rétro-simuler la structure en faisant varier la conductivité électrique pour retrouver en simulation les valeurs des mesures. La structure simulée avec HFSS est présentée dans la figure 4.16. Les deux plans en évidence sont les ports de la simulation (*wave port*). Les dimensions des ports pour la bande S et la bande X sont respectivement  $72,126 \text{ mm} \times 34,036 \text{ mm}$  et  $22,86 \text{ mm} \times 10,16 \text{ mm}$ .

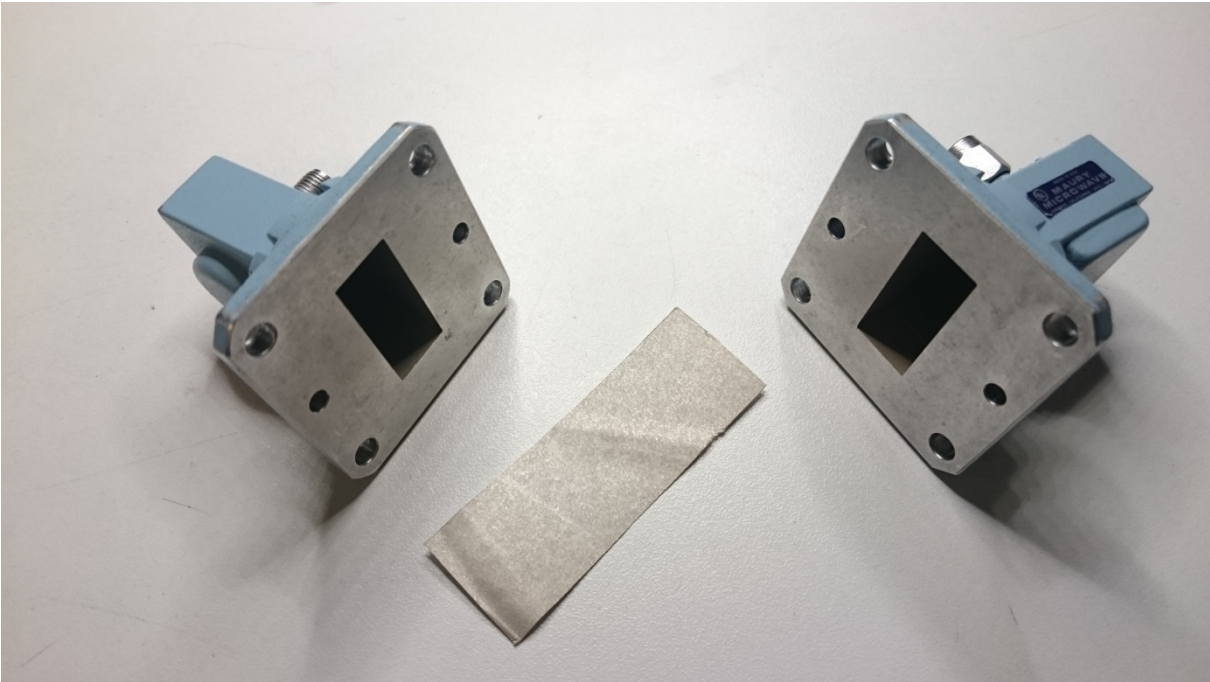


FIGURE 4.14 – Transitions d’un guide d’ondes rectangulaire pour la caractérisation radio-fréquence de différents matériaux.



FIGURE 4.15 – Echantillon à caractériser positionné entre les transitions du guide d’ondes rectangulaire.

Nous avons mesuré l’épaisseur du papier seul  $e = 102 \mu\text{m}$ . Cette valeur a été utilisée pour la simulation. Les caractéristiques électriques du papier ( $\epsilon_r = 2,78$  et  $\tan \delta = 0,06$ ) sont repris de Nguyen *et al.* qui ont également utilisé des échantillons fournis par le CTP [79]. Bien que les pertes du substrat en papier soient élevées, elles restent négligeables

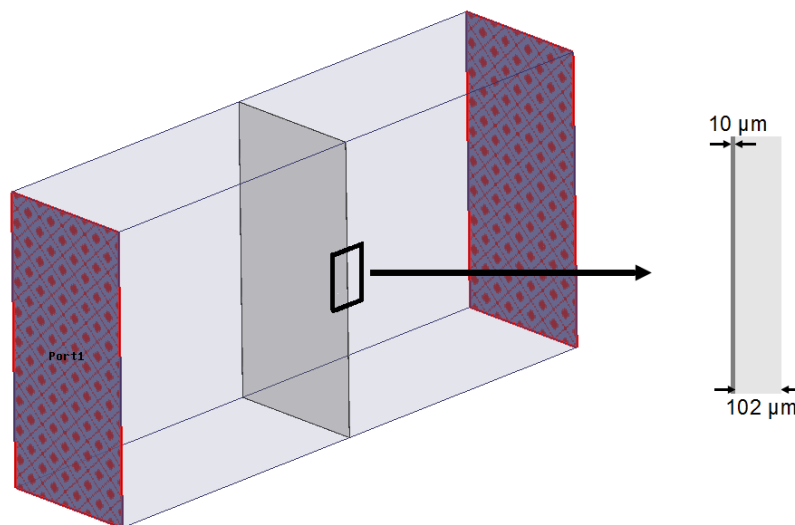


FIGURE 4.16 – Simulation du guide d’ondes rectangulaire avec l’échantillon d’un matériau à l’intérieur.

devant les pertes métalliques. Les figures 4.17 et 4.18 montrent les résultats de simulation superposés aux mesures pour les bandes S et X respectivement. Pour la bande S, la conductivité électrique qui décrit le mieux les mesures est égale à  $\sigma_{\text{bandeS}} = 6,4 \cdot 10^4 \text{ S/m}$ . Cette valeur est 1,83 fois plus petite que celle obtenue par la mesure à quatre pointes, validée par les mesures avec la ligne CPW. Pour la bande X, la conductivité électrique qui représente le mieux les mesures est égale à  $\sigma_{\text{bandeX}} = 3,9 \cdot 10^4 \text{ S/m}$ . Cette valeur est 3 fois plus petite que celle obtenue par la mesure à quatre pointes.

Bien que les mesures à l’aide des guides d’ondes ne donnent pas précisément le même résultat que la mesure à quatre pointes, nous constatons que la variation de la valeur de la conductivité reste limitée et aucun changement d’ordre n’est observé. Cette conclusion confirme la tendance de la littérature. En effet, les travaux sur l’électronique sur papier ne présentent pas de caractérisation radio-fréquence de la conductivité électrique [80]-[82]. Dans ces travaux, l’impact de différentes techniques de métallisation sur la conductivité statique et sur la rugosité du dépôt métallique est étudié. En revanche, la caractérisation radio-fréquence de la conductivité électrique n’a pas fait l’objet de ces études et sa valeur statique est considérée comme étant suffisante.

Pour la feuille de graphite, la caractérisation à l’aide de guides d’ondes a été effectuée uniquement dans la bande X. Cependant, étant donné l’épaisseur importante de la feuille, l’atténuation de l’onde est trop importante. Ainsi, comme le montre la figure 4.19, les niveaux du paramètre  $S_{21}$  sont très faibles. Par conséquent, les données dans cette bande



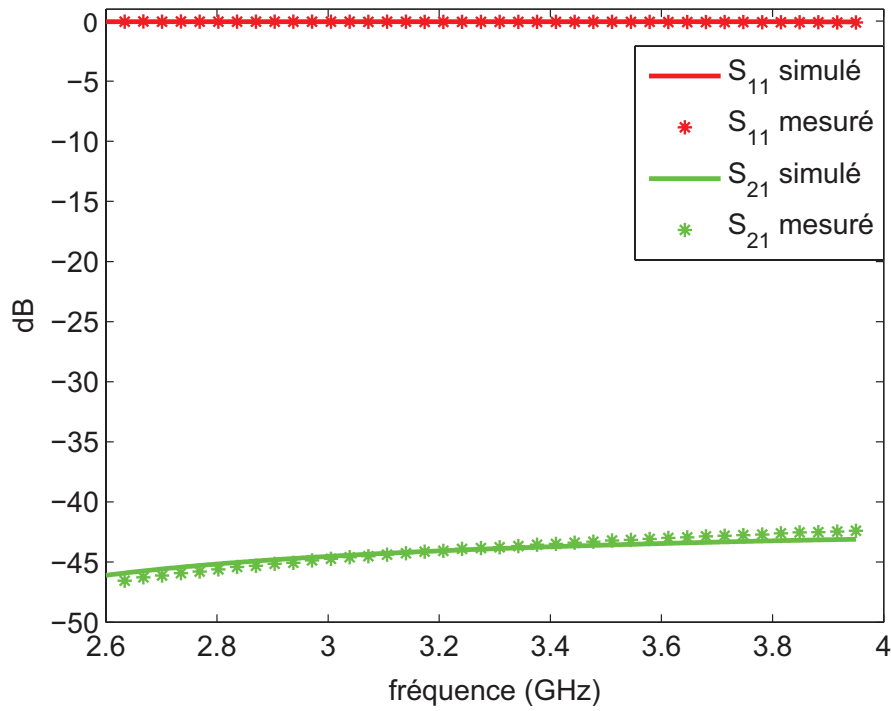


FIGURE 4.17 –  $S_{11}$  et  $S_{21}$  simulés et mesurés d'un guide d'ondes rectangulaire en bande S avec un échantillon de papier métallisé.

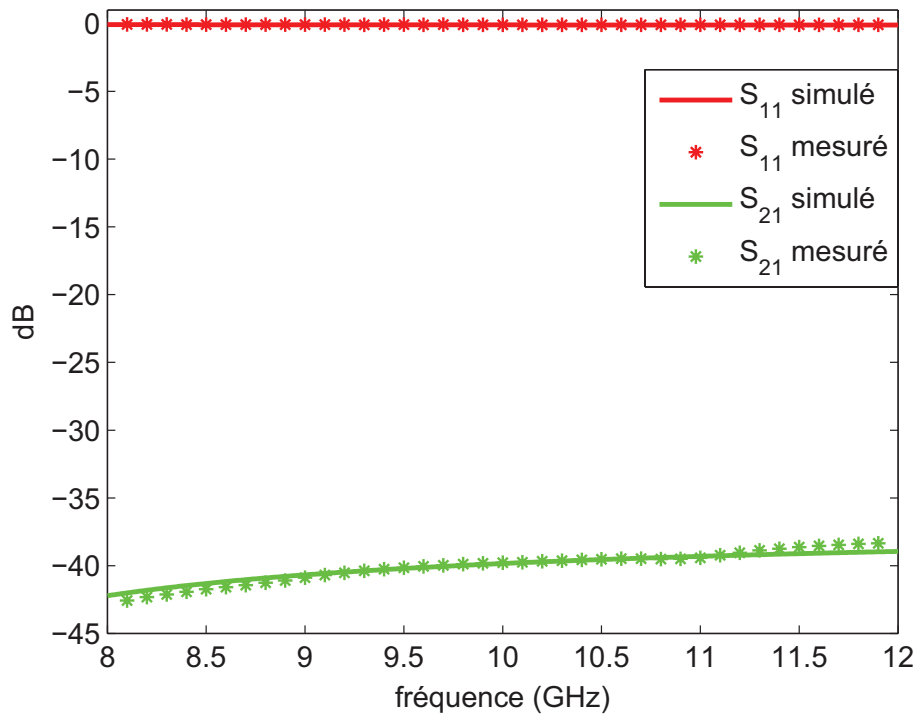


FIGURE 4.18 –  $S_{11}$  et  $S_{21}$  simulés et mesurés d'un guide d'ondes rectangulaire en bande X avec un échantillon de papier métallisé.

ne sont pas exploitables.

Dans le cadre de la démonstration de faisabilité dans cette thèse, parmi les deux

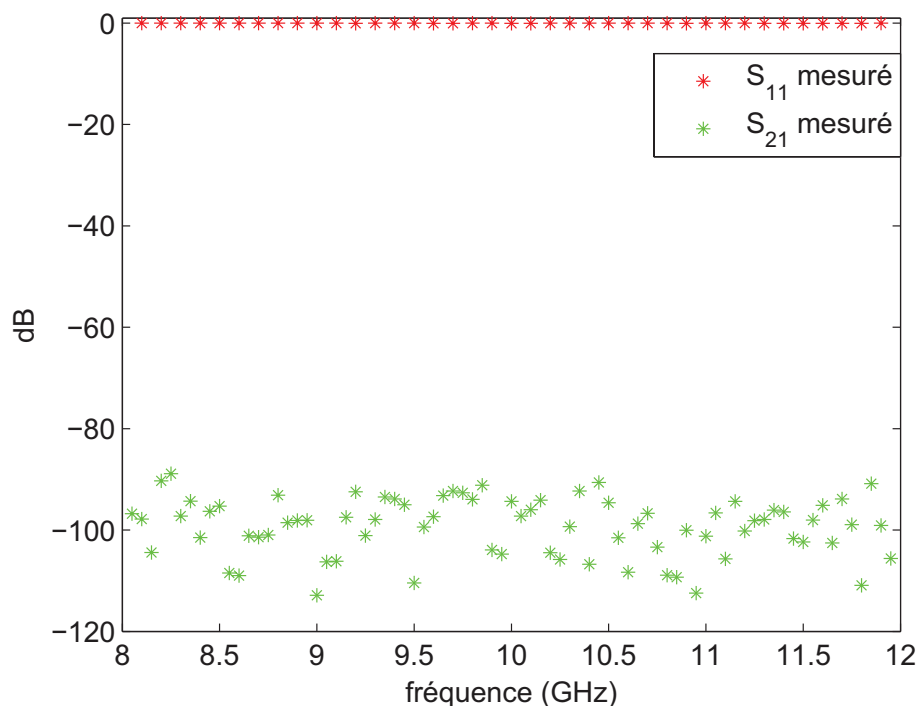


FIGURE 4.19 –  $S_{11}$  et  $S_{21}$  mesurés d'un guide d'ondes rectangulaire en bande X avec un échantillon de feuille de graphite.

matériaux sélectionnés, la feuille de graphite est la plus adaptée. En effet, le dépôt métallique sur le papier présente une épaisseur très faible. Si l'on considère la conductivité statique mesurée, il faut que la fréquence de travail soit supérieure à 21,65 GHz pour que cette épaisseur soit plus grande que l'épaisseur de peau. Par ailleurs, l'étude avec le profilomètre a révélé que la rugosité de ce dépôt est du même ordre que l'épaisseur du dépôt. La montée en fréquence pour une couche aussi rugueuse n'est pas favorable pour notre objectif. La feuille de graphite présente une épaisseur nettement supérieure. Si l'on considère la conductivité statique mesurée, à 12,62 MHz, l'épaisseur de la feuille de graphite est égale à son épaisseur de peau, ce qui simplifie l'utilisation de ce matériau à des fréquences autour de quelques dizaines de GHz. En plus, lors de la mesure de l'épaisseur, nous avons identifié des variations toujours inférieures à 2%.

L'aspect économique favorise aussi le choix de la feuille de graphite. D'après les premiers devis, une rame de papier métallisé en format A4 (31,2 m<sup>2</sup>) coûterait 2000 € tandis que deux rouleaux de graphite 50 m × 1 m (100 m<sup>2</sup>) coûteraient 500 €.

#### 4.5.4 Vers une surface de conductivité réglable

Etant donné que la conductivité optimale pour une application donnée satisfaisant les conditions de la section 4.3 dépend de la fréquence de travail, il serait souhaitable de disposer d'un matériau dont la conductivité électrique est réglable. Dans ce but, nous avons fait des investigations préliminaires pour introduire des motifs sur une surface conductrice pour détériorer la conductivité électrique totale.

Pour ce faire, nous avons étudié la caractérisation d'une surface conductrice à partir d'un guide d'ondes composé de deux plaques parallèles infinies. Ce type de guide d'ondes en particulier est convenable pour cette étude car elle supporte le mode TEM. Ainsi, le guide d'ondes peut être modélisé comme une ligne de transmission dont le coefficient d'atténuation peut être relié à la conductivité électrique des plaques. De plus, la constante de propagation de l'onde guidée est parallèle à la surface conductrice, ce qui s'approche de la propagation rasante en champ lointain de l'onde excitée par un dipôle près du sol.

Nous avons modélisé un guide d'ondes composé de deux plaques métalliques avec HFSS. Dans la figure 4.20, on voit un parallélogramme dont les faces opposées ont les mêmes caractéristiques. Les faces grises sont des plaques conductrices. Il s'agit des surfaces avec la condition aux limites *Finite Conductivity*. Cette condition permet de simuler une plaque conductrice en tenant compte de son épaisseur, qui a été ajustée à 0,5 mm. Les faces rouges sont des ports d'excitation (*wave port*), dont l'impédance est adaptée à l'impédance caractéristique du guide d'ondes. La condition aux limites *Perfect H* a été imposée aux faces bleues latérales. On crée alors des parois électriques qui s'étendent à l'infini. La distance entre les deux plaques métalliques a été ajustée à 1 cm. La longueur du guide d'onde a été ajustée à 10 cm.

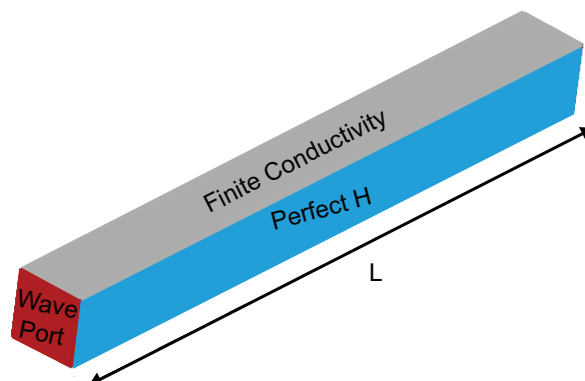


FIGURE 4.20 – Guide d'ondes composé de deux plaques conductrices parallèles.

Etant donné que les deux ports sont adaptés au guide d'ondes, si le port 1 est excité avec une tension entrante, le port 2 présente la même tension sortante atténuée de  $e^{-\alpha L}$ , où  $\alpha$  est le coefficient d'atténuation. Sachant que le rapport entre la tension sortante du port 2 et celle entrante du port 1 est le paramètre  $S_{21}$ , il est possible de déduire :

$$\alpha = -\frac{1}{L} \ln |S_{21}| \quad (4.42)$$

où  $L$  est la longueur du guide d'ondes.

En appliquant la méthode de la perturbation au guide d'ondes composé de deux plaques conductrices [77, Ch. 3, p. 117], le coefficient d'atténuation, selon Pozar [77, Ch. 2, pp. 94-96], est donné par :

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \frac{1}{Z \cdot L} \quad (4.43)$$

où  $Z$  est l'impédance caractéristique du guide d'ondes en négligeant les pertes.

Ainsi, en disposant du paramètre  $S_{21}$ , il est possible de déduire la conductivité électrique. Pour valider cette démarche, nous avons fixé la conductivité électrique des plaques de la figure 4.20 à  $\sigma = 1 \cdot 10^7$  S/m. A partir du paramètre  $S_{21}$  de la simulation de la structure entre 10 GHz et 20 GHz (figure 4.21a), nous avons calculé le coefficient d'atténuation associé à partir de l'équation 4.42 (figure 4.21b) pour ensuite calculer la valeur de la conductivité électrique à partir de l'équation 4.43 (figure 4.21c).

La figure 4.21c montre que cette démarche estime la valeur de la conductivité électrique des plaques avec une erreur légèrement plus grande que 4%.

Après avoir validé la démarche de l'estimation de la conductivité électrique des plaques à partir du paramètre  $S_{21}$  du guide d'onde, nous avons créé des motifs carrés tout au long des plaques pour étudier l'impact sur la conductivité. La vue du dessus de cette nouvelle structure est montrée dans la figure 4.22. Les carrés sont de dimensions 1,5 mm  $\times$  1,5 mm et les centres sont espacés de 15 mm. On note la petite taille des carrés par rapport à la longueur d'onde de la bande de fréquences pour confiner l'énergie à l'intérieur du guide et éviter le rayonnement. Autrement dit, nous souhaitons obtenir une surface de conductivité effective plus petite et non un réseau d'antennes à fentes.

A partir du paramètre  $S_{21}$  de la simulation de la structure de la figure 4.22, présenté dans la figure 4.23a, on déduit la valeur du coefficient d'atténuation (figure 4.23b) et ensuite la valeur de la conductivité électrique (figure 4.23c).

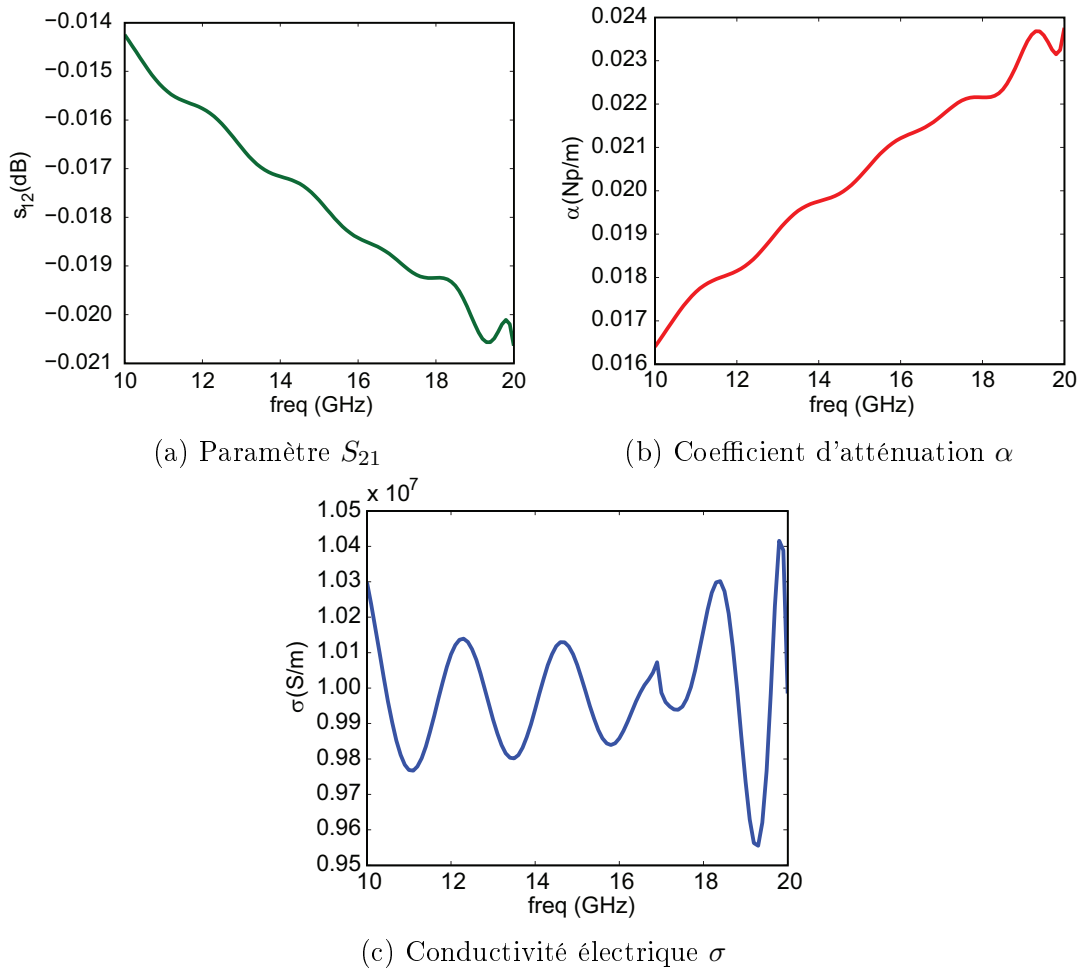


FIGURE 4.21 – Valeurs déduites du coefficient d'atténuation et de la conductivité électrique à partir du paramètre  $S_{21}$ .



FIGURE 4.22 – Insertion des carrés sur les plaques métalliques de la structure de la figure 4.20 (vue du dessus).

On vérifie que dans la bande de fréquences de 10,7 GHz à 12,5 GHz, la conductivité électrique est presque constante, oscillant peu autour de  $\sigma = 4 \cdot 10^6$  S/m. On conclut que l'introduction de ces motifs carrés dans les plaques joue le rôle d'une plaque uniforme dont la conductivité électrique est 60% plus petite. Par ailleurs, la conductivité varie entre  $2 \cdot 10^6$  S/m et  $6,0 \cdot 10^6$  S/m sur l'ensemble de la bande de fréquences, ce qui garantit le même ordre de grandeur sur une large bande.

La figure 4.24 montre que la fuite du champ électrique par les carrés est négligeable ( $10^{-5}$  fois la valeur maximale du champ à l'intérieur du guide d'ondes).

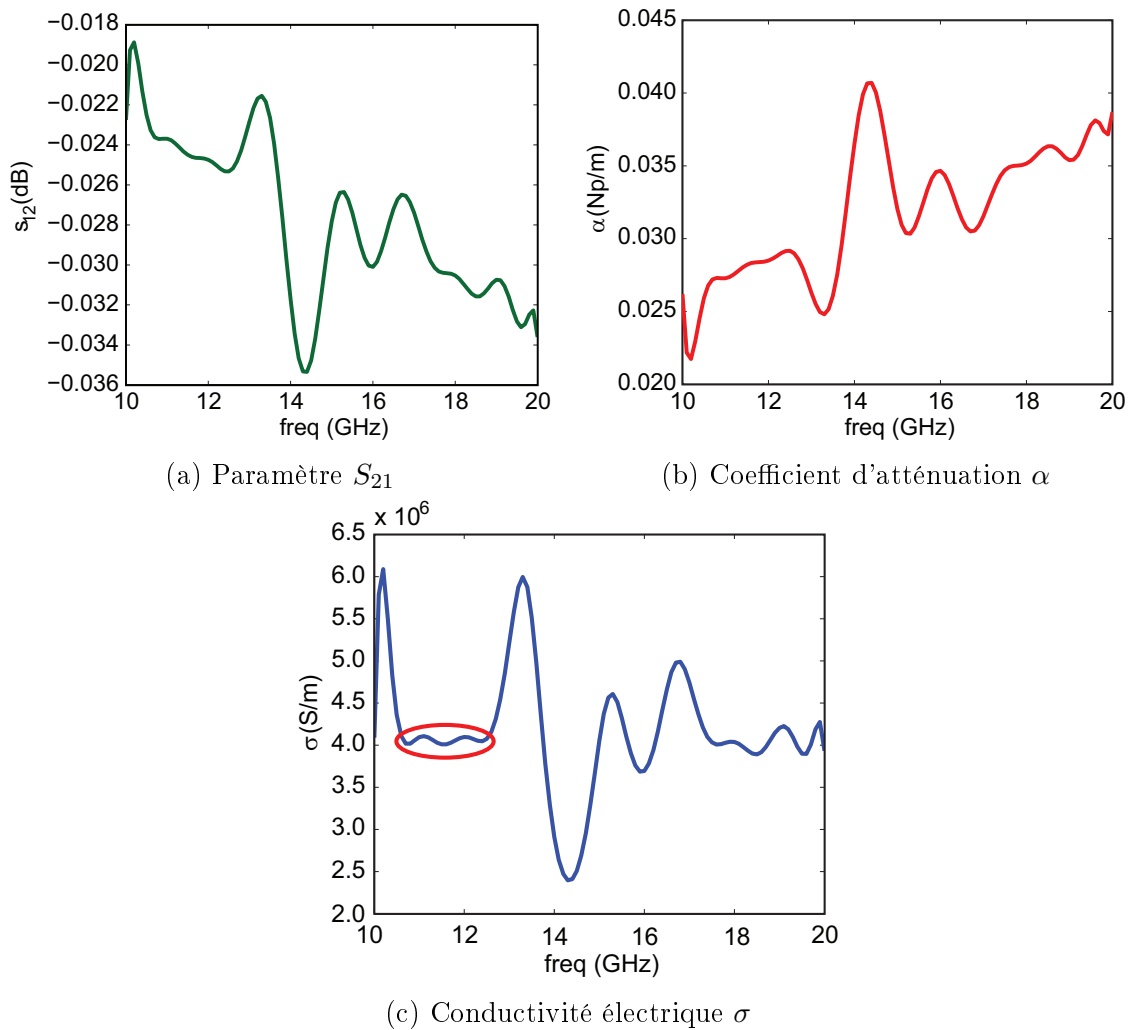


FIGURE 4.23 – Valeurs déduites du coefficient d'atténuation et de la conductivité diélectrique à partir du paramètre  $S_{21}$  après l'introduction des motifs.

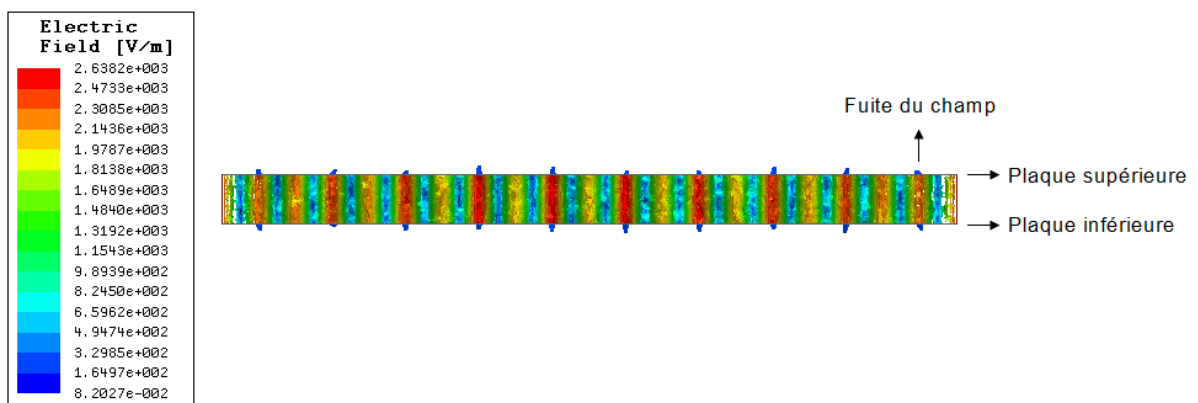


FIGURE 4.24 – Champ électrique entre les plaques conductrices du guide d'ondes de la figure 4.22.

Cette étude constitue une première étape pour concevoir des surfaces dont la conductivité électrique peut être réglable. Une étude plus approfondie fera l'objet de l'une des

perspectives de cette thèse.

## Conclusion

A partir des développements asymptotiques du chapitre 2, il a été possible d'effectuer une étude détaillée permettant une compréhension plus approfondie de la propagation près du sol. De cette étude, une équation mathématique simple, appelée la *condition de la prédominance du pôle*, a pu être mise en évidence. Cette équation résume les conditions physiques qui favorisent la présence du terme lié au pôle et démontre le rôle que jouent certains paramètres physiques, à savoir : la fréquence, les propriétés électromagnétiques du sol et les hauteurs des antennes.

Cette étude a permis également d'identifier deux distances critiques pour la propagation près du sol :  $\rho_{\min}$  et  $\rho_{\text{rupture}}$ . Ces distances bornent une zone qui n'est pas prévue par la méthode à deux rayons, où la composante du champ électrique liée au pôle devient la composante la plus importante et garantit un affaiblissement de trajet moins important et sans oscillations.

L'ensemble de ces trois équations (condition de la prédominance du pôle,  $\rho_{\min}$  et  $\rho_{\text{rupture}}$ ), valables seulement avec l'hypothèse  $|n^2| > 10$ , sont analytiques et simples à utiliser. A partir de ces équations, nous pouvons déduire des lignes directrices qui peuvent être très utiles à des ingénieurs lors de la conception des systèmes sans fil. Nous notons bien que ces équations n'ont pas pour vocation à remplacer des simulations électromagnétiques numériques. Cependant, elles peuvent délivrer des informations utiles sans le besoin d'un traitement plus sophistiqué.

A la lumière de ces lignes directrices, certaines démarches vers une démonstration de faisabilité ont été réalisées, dans le but de constater expérimentalement les nouveautés théoriques présentées dans cette thèse. La principale difficulté réside dans le contraste entre les permittivités électriques des deux milieux de l'interface, pour que la condition de la prédominance du pôle soit respectée, tout en conservant  $\rho_{\min}$  à des distances raisonnables. La piste d'une fine couche conductrice pour tapisser le sol a été retenue. Dans ce cadre, des méthodes de caractérisation de la conductivité électrique (statique et radio-fréquence) ont été présentées, ainsi qu'une étude préliminaire sur le réglage de la conductivité électrique d'une surface.

# Conclusion et perspectives

LES études de cette thèse ont porté sur la modélisation de la propagation des ondes électromagnétiques près du sol, dans le contexte de nouvelles applications où les antennes sont positionnées près d'une interface. L'objectif principal a été de vérifier si la proximité de l'interface peut améliorer le bilan de liaison entre deux antennes.

Initialement, nous avons vérifié si la méthode de tracé de rayons était valide pour la modélisation de la propagation près du sol. Cette méthode offre une interprétation physique simple à la propagation, en considérant les ondes en champ lointain comme des rayons de lumière de l'optique géométrique. Pour un dipôle élémentaire au-dessus d'une interface, le cas canonique traité dans ce manuscrit, le tracé de rayon devient la méthode à deux rayons. La propagation est ainsi modélisée par la composante directe en ligne de vue entre les antennes et par la composante réfléchie au sol, pondérée par un coefficient de réflexion. Pour cette raison, cette méthode est aussi connue comme la méthode du coefficient de réflexion. L'affaiblissement du trajet prévu par cette méthode peut être divisé en deux zones. Dans la première zone, à des distances d'observation plus proches de l'antenne d'émission, la composante principale du champ excité présente des oscillations et son enveloppe décroît de 10 dB/déc. Dans la deuxième zone, à des distances d'observation plus éloignées, la composante principale du champ excité ne présente plus d'oscillations, mais décroît de 20 dB/déc.

Pour vérifier la validité de la méthode à deux rayons pour la propagation près du sol, nous l'avons comparée avec les fonctions de Green approchées, développées par Norton et par Bannister. Nous avons choisi d'utiliser ces approximations car elles sont analytiques et simples à mettre en œuvre. Ainsi, des résultats précis peuvent être obtenus sans recourir à un lourd traitement numérique. La comparaison de ces approximations avec la méthode à deux rayons révèle que, dans certains cas, l'affaiblissement de trajet peut présenter une



zone supplémentaire, entre les deux zones décrites dans le paragraphe précédent, où la composante principale du champ excité a l'avantage de ne présenter aucune oscillation et de décroître de 10 dB/déc. Après l'identification de cette nouvelle zone, nous avons recherché les conditions pour lesquelles cette zone d'intérêt se présente en investiguant ses origines physique et mathématique.

Pour ce faire, nous avons dû abandonner les approximations de Norton et de Banister. En dépit de leur simplicité d'utilisation, elles cachent partiellement la physique du phénomène. De ce fait, nous avons procédé à un calcul rigoureux des fonctions de Green. Dans ce calcul, nous nous sommes inspirés de la théorie des images et nous avons fait appel à la transformée de Fourier à deux dimensions, pour avoir une forme plus simple et adaptée à l'application des conditions aux limites. Les champs rayonnés ont finalement été écrits sous forme d'intégrales de Sommerfeld.

Comme le but était de décrire la zone sans oscillations et de décroissance de 10 dB/déc avec des équations analytiques simples, nous avons opté pour une évaluation des fonctions de Green par une analyse asymptotique. Pour cela, nous avons choisi la méthode de la plus grande pente donnant une évaluation asymptotique des fonctions de Green pour de grandes distances. Les intégrales de Sommerfeld étant adaptées à cette méthode, il est commode d'écrire les fonctions de Green sous cette forme se justifie. Nous avons étudié exhaustivement cette méthode afin de donner une interprétation physique de chacun des termes de l'expression du champ et également de maîtriser la méthode pour plusieurs cas de figure, même ceux qui n'ont pas fait l'objet d'étude dans ce manuscrit et qui pourront être utilisés par des travaux futurs. Deux types de points sont fondamentaux dans cette méthode : les points stationnaires et les points de singularité. Les points stationnaires donnent origine aux ondes d'espace : les composantes directe et réfléchie de l'onde. Les points de singularités peuvent être de deux types : points de ramification (négligés dans ce manuscrit en raison de leur forte atténuation) et pôles. Un pôle, selon sa localisation, peut donner naissance à deux types différents d'ondes : une onde de surface ou une onde diffractée. Les cas étudiés dans ce manuscrit (le milieu 1 avec source étant sans pertes et le milieu 2 plus électriquement dense et à pertes) présentent une onde diffractée. Cette onde diffractée est à l'origine de la différence entre les affaiblissements de trajet prévus par la méthode à deux rayons et par l'analyse des fonctions de Green.

En comparant les expressions approchées du champ d'espace et du champ diffracté,

il a été possible de trouver une équation simple pour la prédominance de l'onde diffractée. Ainsi, cette équation résume mathématiquement les cas où la zone sans oscillations de décroissance de 10 dB/déc existe. La manipulation des expressions approchées des champs nous a permis également d'identifier deux distances clés pour la propagation près du sol, qui démarquent le début et la fin de cette zone. L'ensemble de ces trois équations, présenté pour la première fois dans le cadre de cette thèse, a l'avantage d'être synthétique, analytique et simple à l'usage. De cet ensemble, nous avons pu extraire des lignes directrices pour la conception des liaisons près du sol mettant en valeur les rôles joués par les paramètres physiques, à savoir : la fréquence de travail, les hauteurs des antennes et les propriétés électromagnétiques des milieux. Les trois expressions obtenues sont valables uniquement pour un indice de réfraction de valeur absolue supérieure à 10. Nous notons que ces équations n'ont pas vocation à remplacer la simulation numérique ou des logiciels dédiés. En revanche, elles peuvent offrir rapidement des informations utiles préliminaires pour la conception d'une liaison près du sol, sans utiliser un traitement plus sophistiqué.

Nous avons effectué les premières démarches vers une démonstration de faisabilité des nouveaux concepts présentés dans ce manuscrit. A partir des lignes directrices, nous avons conclu que le début de la zone de la prépondérance de l'onde diffractée a lieu à de distances raisonnables, si le contraste de permittivité électrique entre les deux milieux reste modéré. Autrement dit, le contraste ne doit être ni trop faible, au risque de ne pas bien exciter l'onde diffractée, ni trop grand, au risque de repousser le début de la zone d'intérêt à de grandes distances. La solution retenue est de tapisser le sol avec un matériau de conductivité électrique modérée. Le matériau pré-senti est une feuille de graphite, dont la conductivité électrique statique mesurée est de  $8,2 \cdot 10^4$  S/m. Nos études permettent de vérifier que la conductivité électrique ne présente pas de grandes variations en fréquences radio. Par ailleurs, afin d'obtenir une surface de conductivité réglable, nous avons aussi procédé à des études préliminaires pour ajuster la conductivité effective d'une surface en introduisant des motifs périodiques de petite taille.

Dans cette thèse, nous avons également étudié une nouvelle formulation mathématique proposée pour le rayonnement d'un dipôle au-dessus d'une interface. La formulation classique utilisée dans ce manuscrit, introduite par Sommerfeld, présente une difficulté particulière pour l'évaluation numérique due aux fortes oscillations et à la lente décroissance de la fonction de Hankel pour les distances d'intérêt de la propagation près du

sol. Du fait que l'intégrale de Schelkunoff présente des caractéristiques souhaitables pour l'évaluation numérique pour ces distances, une nouvelle formulation basée sur cette intégrale a été proposée dans la littérature. Cette formulation dite « de Schelkunoff » n'a pourtant pas été unanimement acceptée dans la communauté scientifique. En évaluant les points d'inconsistance soulignés dans la littérature, nous avons pu mettre en évidence que la formulation dite « de Schelkunoff » est effectivement inexacte. Nous avons également appliqué la méthode de la plus grande pente à cette formulation et nous avons constaté qu'elle ne donne pas la même solution que la formulation de Sommerfeld. Malgré cette inexactitude, la formulation dite « de Schelkunoff » doit faire l'objet d'études ultérieures, pour vérifier dans quels cas les erreurs qu'elle entraîne restent faibles, permettant que ces propriétés intéressantes pour l'évaluation numérique puissent être exploitées, tout en garantissant une bonne précision des résultats.

## Perspectives

Les études menées dans cette thèse ouvrent la perspective à divers sujets de recherche théorique et pratique.

Concernant l'évaluation asymptotique du rayonnement d'un dipôle élémentaire près d'une interface plane, ce manuscrit couvre en détail la procédure mathématique pour le cas précis d'un dipôle électrique vertical placé dans le milieu 1 présentant très peu de pertes au-dessus du milieu 2 électriquement plus dense. L'évaluation asymptotique a été effectuée pour le rayonnement dans le milieu 1, les deux milieux étant des milieux physiques à pertes avec une partie réelle de la permittivité positive et une partie imaginaire négative. Ce cadre peut être étendu aux configurations suivantes :

- Dipôle élémentaire arbitraire : électrique horizontal et magnétique vertical et horizontal ;
- Milieux semi-infinis arbitraires :
  - Milieu 1 plus dense et/ou présentant plus de pertes que le milieu 2 ;
  - Milieu(x) à permittivité électrique de partie réelle négative (métamatériau ou plasmon) ;
- Observation arbitraire : évaluation asymptotique des champs électromagnétiques pénétrant dans le milieu 2 (milieu sans source) ;

Quant à la démonstration de faisabilité, quelques travaux sont envisageables :

- Finalisation des études préliminaires sur le réglage de la conductivité électrique effective d'une surface à motifs périodiques de petite taille ;
- Conception des antennes adaptées à la propagation près du sol, étant donné que les études théoriques portent actuellement sur un dipôle infinitésimal ;
- Réalisation d'un banc de mesures automatisé près du sol, éventuellement avec un robot pouvant déplacer l'une des deux antennes et visant à fournir une cartographie de puissance avec un grand nombre de données.

Ces mesures offriront la possibilité d'une étude statistique en vu d'un modèle de canal prenant en compte la fréquence de travail, les hauteurs des antennes et les propriétés électromagnétiques des milieux.

Concernant la formulation dite « de Schelkunoff », nous pouvons envisager les études suivantes :

- Explication des défauts mathématiques et physiques dus à la reprise de la démarche de Sommerfeld (méthode de superposition des diffusions) et de son application à l'identité de Schelkunoff ;
- Evaluation des erreurs entraînées par la formulation dite « de Schelkunoff » afin d'estimer les cas pouvant être décrits par cette formulation avec suffisamment de précision et ainsi de tirer profit de sa forme adaptée au traitement numérique.



# Annexe A

## Fonctions de Green

Les fonctions de Green sont un outil important pour la résolution des équations différentielles. Soit le problème suivant :

$$L_x u = f \tag{A.1}$$

où  $L_x$  est un opérateur différentiel linéaire sur le vecteur  $x$ ,  $f$  est une fonction connue qui représente une excitation et  $u$  est la fonction que l'on souhaite calculer en imposant certaines conditions aux limites. Soit  $G(x, \xi)$  une fonction telle que :

$$L_x G = \delta(x - \xi)$$

avec les mêmes conditions imposées à  $u$ .  $\delta(x - \xi)$  est la fonction delta de Dirac. Il est possible de montrer que :

$$u = \int G(x, \xi) f(\xi) d\xi \tag{A.2}$$

Pour vérifier que [A.2](#) est bien une solution de [A.1](#), on y applique l'opérateur  $L_x$  :

$$L_x u = L_x \left[ \int G(x, \xi) f(\xi) d\xi \right]$$

$$L_x u = \int [L_x G(x, \xi)] f(\xi) d\xi$$

$$L_x u = \int \delta(x - \xi) f(\xi) d\xi$$

$$L_x u = f$$

La fonction  $G(x, \xi)$  est appelée la fonction de Green de l'opérateur  $L_x$ . Son importance est due au fait qu'elle permet de calculer  $u$  pour une excitation  $f$  quelconque. On peut remarquer qu'aucune connaissance de  $f$  n'est nécessaire pour trouver  $G(x, \xi)$ . Il suffit de connaître  $L_x$  et les conditions aux limites.

# Annexe B

## Equation d'onde des potentiels

La définition des potentiels vecteur et scalaire ainsi que les équation de Maxwell nous permettent d'obtenir l'équation d'onde 1.9. Dans ce travail, nous avons choisi la convention temporelle  $e^{j\omega t}$ , les dérivés temporelles peuvent donc être remplacées simplement par le facteur  $j\omega$ . Dans un milieu parfaitement isotrope et linéaire, les relations suivantes sont établies :

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (\text{B.1a})$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (\text{B.1b})$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{B.1c})$$

dans lesquelles  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  sont, respectivement, la permittivité électrique, la perméabilité magnétique et la conductivité électrique du milieu.

En introduisant  $\mathbf{J}_i$  et  $\mathbf{M}_i$  les vecteurs de courant électrique et magnétique imposés par des sources extérieures, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{M}_i \quad (\text{B.2a})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + j\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{J}_i = j\omega\hat{\varepsilon}\mathbf{E} + \mathbf{J}_i \quad (\text{B.2b})$$

$$\nabla \cdot (j\omega\hat{\varepsilon}\mathbf{E} + \mathbf{J}_i) = 0 \quad (\text{B.2c})$$

$$\nabla \cdot (j\omega\mu\mathbf{H} + \mathbf{M}_i) = 0 \quad (\text{B.2d})$$

où nous avons introduit la permittivité électrique complexe,  $\hat{\varepsilon} = (\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega})$ . Ainsi, la partie imaginaire de la permittivité complexe modélise les pertes dues à la conductivité



électrique. Nous pouvons également utiliser une permittivité complexe pour prendre en compte les pertes diélectriques. Nous choisissons dans ce manuscrit une permittivité effective complexe, pour modéliser les pertes électriques, quelle que soit leur nature.

Les champs électrique et magnétique peuvent être divisés en deux composantes :  $\mathbf{E}_J$  et  $\mathbf{H}_J$ , créées exclusivement par des sources électriques ( $\mathbf{M}_i = 0$ ) et  $\mathbf{E}_M$  et  $\mathbf{H}_M$ , créées exclusivement par des sources magnétiques ( $\mathbf{J}_i = 0$ ). Les équations de Maxwell peuvent donc être divisées en deux parties [52, Sec 3.2] :

TABLEAU B.1 – Equations de Maxwell en présence exclusive d'une source électrique ou d'une source magnétique.

Source électrique		Source magnétique	
$\nabla \times \mathbf{E}_J = -j\omega\mu\mathbf{H}_J$	(B.3a)	$\nabla \times \mathbf{E}_M = -j\omega\mu\mathbf{H}_M - \mathbf{M}_i$	(B.4a)
$\nabla \times \mathbf{H}_J = j\omega\hat{\epsilon}\mathbf{E}_J + \mathbf{J}_i$	(B.3b)	$\nabla \times \mathbf{H}_M = j\omega\hat{\epsilon}\mathbf{E}_M$	(B.4b)
$\nabla \cdot (j\omega\hat{\epsilon}\mathbf{E}_J + \mathbf{J}_i) = 0$	(B.3c)	$\nabla \cdot \mathbf{E}_M = 0$	(B.4c)
$\nabla \cdot \mathbf{H}_J = 0$	(B.3d)	$\nabla \cdot (j\omega\mu\mathbf{H}_M + \mathbf{M}_i) = 0$	(B.4d)

Nous étudions d'abord les équations de Maxwell en présence exclusive d'une source électrique (tableau B.1). La divergence de  $\mathbf{H}_J$  étant nulle (équation B.3d), il est possible d'y attribuer un potentiel vecteur magnétique [52, Sec. 3.2] :

$$\mathbf{H}_J = \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{B.5})$$

En substituant l'équation B.5 dans l'équation B.3a, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}_J &= -j\omega\mu\nabla \times \mathbf{A} \\ \nabla \times (\mathbf{E}_J + j\omega\mu\mathbf{A}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Comme le rotationnel de  $\mathbf{E}_J + j\omega\mu\mathbf{A}$  est nul (équation B.6), il est possible d'y attribuer un potentiel scalaire :

$$\mathbf{E}_J + j\omega\mu\mathbf{A} = -\nabla V \quad (\text{B.7})$$

$$\mathbf{E}_J = -\nabla V - j\omega\mu\mathbf{A} \quad (\text{B.8})$$

En substituant les équations B.5 et B.8 dans l'équation B.3b, nous obtenons :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = j\omega\hat{\varepsilon}(-\nabla V - j\omega\mu\mathbf{A}) + \mathbf{J}_i \quad (\text{B.9})$$

L'identité du calcul vectoriel  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$ , nous permet de développer l'équation B.9 :

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} = \nabla(-j\omega\hat{\varepsilon}V) + k^2\mathbf{A} + \mathbf{J}_i \quad (\text{B.10})$$

Dans l'équation B.10, le *nombre d'onde*  $k$  est défini par  $k^2 = \omega^2\hat{\varepsilon}\mu$ . Pour continuer le développement, il faut connaître la relation entre  $\mathbf{A}$  et  $V$ . Cependant, les équations B.5 et B.7 ne définissent pas de manière unique ces grandeurs, vu que la paire  $(\mathbf{A} + \nabla\psi)$  et  $(V - j\omega\mu\psi)$  satisfait également ces équations. La fonction scalaire  $\psi$  représente un degré de liberté pour la définition de  $\mathbf{A}$  et  $V$ . Le choix d'une jauge s'impose. Nous choisissons :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\omega\hat{\varepsilon}V \quad (\text{B.11})$$

L'équation B.11 est connue comme la *jauge de Lorenz*. Sa définition permet de simplifier l'équation B.10 de la manière suivante :

$$\nabla^2\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = -\mathbf{J}_i \quad (\text{B.12})$$

L'équation B.12 est connue comme l'*équation d'onde du potentiel*. En suivant une démarche similaire pour les équations en présence exclusive d'une source magnétique (tableau B.1), il est possible de trouver une équation d'onde similaire. Les potentiels vecteur  $\mathbf{F}$  et scalaire  $U$  ainsi que la jauge de Lorenz sont donnés par :

$$\mathbf{E}_M = -\nabla \times \mathbf{F} \quad (\text{B.13a})$$

$$\mathbf{H}_M = -\nabla U - j\omega\hat{\varepsilon}\mathbf{F} \quad (\text{B.13b})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -j\omega\mu U \quad (\text{B.13c})$$

En substituant les équations B.13 dans l'équation B.4a, nous obtenons :

$$\nabla^2\mathbf{F} + k^2\mathbf{F} = -\mathbf{M}_i \quad (\text{B.14})$$

Pour calculer les fonctions de Green de la propagation dans un environnement spécifique, les sources de courant ( $\mathbf{J}_i$  et  $\mathbf{M}_i$ ) sont remplacées par des fonctions delta de Dirac. Ainsi, à partir de l'équation [B.12](#), nous pouvons retrouver l'équation [1.9](#).

# Annexe C

## Points et coupures de ramification

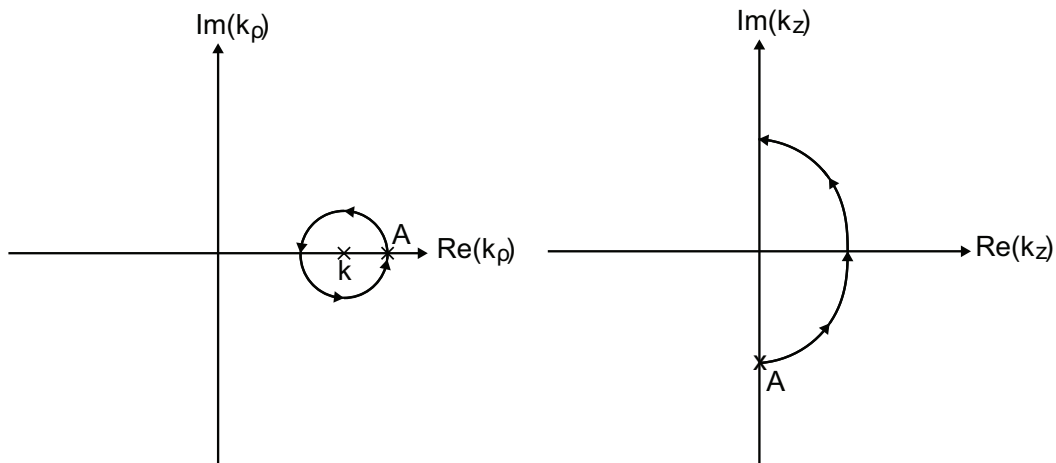
Dans le chapitre 1, la constante de propagation  $k_z$  du milieu a été définie comme :

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_\rho^2} \quad (\text{C.1})$$

La racine carrée de l'équation C.1 étant une fonction multivaluée, il est nécessaire de choisir une des deux valeurs possibles de  $k_z$  pour chaque valeur de  $k_\rho$ . Toutefois, cette fonction ne peut pas être continue dans tout le plan complexe. Quelle que soit la définition de la racine carrée de l'équation C.1, les points  $k_\rho = \pm k$  introduisent une discontinuité.

Pour démontrer cette discontinuité, nous évaluons la fonction  $k_z$  le long d'un chemin fermé, très près autour de  $k$  dans le plan  $k_\rho$ . Pour simplifier, nous considérons  $k$  réel, comme montré dans la figure C.1a. Nous commençons cette évaluation par le point A du plan  $k_\rho$  (cf. figure C.1a). Pour cette valeur de  $k_\rho$ , les deux valeurs possibles de  $k_z$  sont purement imaginaires. Nous choisissons une valeur négative pour la partie imaginaire, montrée dans la figure C.1b. Les autres valeurs de  $k_z$  sont choisies de sorte que l'image du chemin fermé du plan  $k_\rho$  forme une courbe continue dans le plan  $k_z$ . La figure C.1 montre qu'un chemin fermé dans le plan  $k_\rho$  est associé à un chemin ouvert dans le plan  $k_z$ . Ainsi, le point A dans le plan  $k_\rho$  qui est à la fois le point du début et le point de la fin de notre évaluation, a été associé à deux valeurs différentes dans le plan  $k_z$ . Par conséquent, la fonction de l'équation C.1 ne peut pas être continue.

La suppression des points  $k_\rho = \pm k$  n'est pas suffisante pour rendre la fonction continue. Des courbes supplémentaires doivent être supprimées du plan complexe. Ainsi, la fonction racine carrée de l'équation C.1 peut être continue seulement si son domaine est



(a) Chemin fermé très près de la constante de propagation  $k$ , considérée réelle, dans le plans complexe  $k_\rho$ . (b) Image dans le plan complexe  $k_z$  du chemin fermé présenté en (a).

FIGURE C.1 – Evaluation de la fonction racine carrée présente dans la définition des constantes de propagation  $k_z$ .

un plan complexe « coupé ». Par exemple, si nous souhaitons que  $k_z$  ait une partie réelle strictement positive, il est nécessaire de supprimer une partie de l'axe réel correspondant à  $|k_\rho| > k$  (pour un  $k$  réel), comme montré dans la figure C.2. Cette « coupure » correspond à  $\Re\{k_z\} = 0$ . Dans ce plan complexe « coupé », il est possible de rendre la fonction  $k_z$  continue avec le choix de la valeur de la racine carrée de partie réelle positive. Cela signifie que dans ce plan, un chemin fermé, à condition qu'il n'intercepte pas les « coupures », présente une image également fermée dans le plan  $k_z$ .

A partir de cette analyse de la constante de propagation, quelques concepts importants sur les fonctions multivaluées peuvent être présentés. Soit une fonction complexe

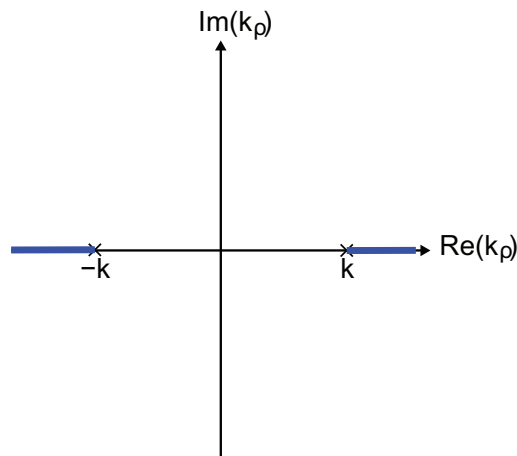


FIGURE C.2 – « Coupures » introduites dans le plan complexe pour rendre la fonction  $k_z$  continue, pour le choix  $\Re\{k_z\} > 0$ .

$f(\zeta)$  multivaluée et  $\zeta_0$  un point dans le plan complexe  $\zeta$ , autour duquel on trace de très près un chemin fermé. Si l'image de ce chemin fermé peut présenter une variation continue, mais le point final ne se superpose pas au point initial, alors  $\zeta_0$  est un point de singularité appelé **point de ramification**. Pour la fonction  $k_z$ ,  $k_\rho = \pm k$  sont des points de ramification. Les **ramifications** se réfèrent à chaque valeur possible issue de la définition de la fonction. La constante de propagation  $k_z$  a deux ramifications, chacune associée à une des valeurs possibles de la racine carrée. Les coupures permettant de définir continuellement une ramification de la fonction dans le plan complexe sont appelées **coupures de ramification**.

Chaque plan complexe auquel on associe une définition (ramification) d'une fonction multivaluée est une **feuille de Riemann**. Les feuilles de Riemann unies par les coupures de ramification peuvent former une nouvelle topologie complexe où une fonction multivaluée peut être définie continuellement, chaque valeur possible étant associée à une feuille de Riemann différente. Dans ce manuscrit, nous appelons *feuille de Riemann supérieure* le plan complexe où les conditions imposées aux constantes de propagation sont susceptibles d'être respectées.

Il est important d'observer que la définition des coupures de ramification est arbitraire et relève des valeurs choisies pour la fonction multivaluée. Pour la fonction racine carrée évaluée dans cet annexe, nous pouvons également choisir la valeur dont la partie imaginaire est négative. Cela entraîne les coupures de ramification montrées dans la figure C.3. Nous soulignons que les coupures de ramification de la figure C.3 correspondent à  $\Im m\{k_z\} = 0$ , région particulièrement problématique si nous souhaitons choisir une valeur de la racine carrée basée sur le signe de la partie imaginaire.

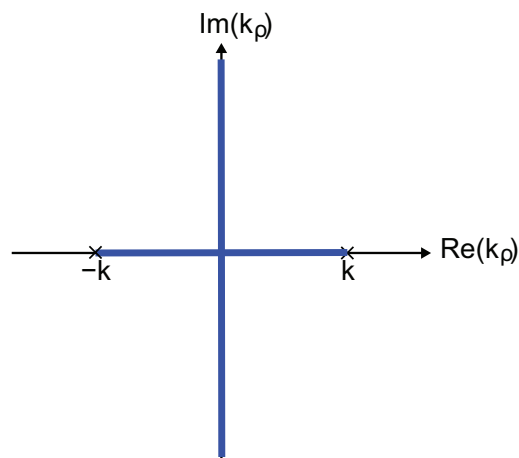


FIGURE C.3 – Coupure de ramification de la fonction  $k_z$  pour le choix de  $\Im m\{k_z\} < 0$ .

Dans ce manuscrit, nous évaluons des intégrales dans le plan complexe, notamment sur des chemins fermés, où normalement les intégrales sont nulles, sauf en présence des points de singularité à l'intérieur du chemin. Ainsi, si nous souhaitons calculer une intégrale sur un chemin fermé en présence d'un point de ramification, une analyse spéciale s'impose.

Nous prenons comme exemple le chemin fermé  $C$  de la figure C.4a, le long duquel nous souhaitons intégrer la fonction  $k_z$  de l'équation C.1. Si nous distordons le chemin  $C$  de sorte qu'il contourne le point de ramification et la coupure de ramification, comme montré dans la figure C.4b, il est possible d'affirmer :

$$I_{C'} - I_{C_{\text{ram}}} = 0 \quad (\text{C.2})$$

où  $I_{C'}$  et  $I_{C_{\text{ram}}}$  sont, respectivement, les intégrales le long du chemin  $C'$  et  $C_{\text{ram}}$  de la figure C.4b. L'équation C.2 se justifie par l'absence de points de singularité dans le parcours fermé constitué de  $C'$  et  $C_{\text{ram}}$ . Vu que le chemin  $C'$  tend vers le parcours fermé  $C$  et d'après l'équation C.2, nous concluons que l'intégrale le long de  $C$  est égale à l'intégrale le long de la coupure de ramification.

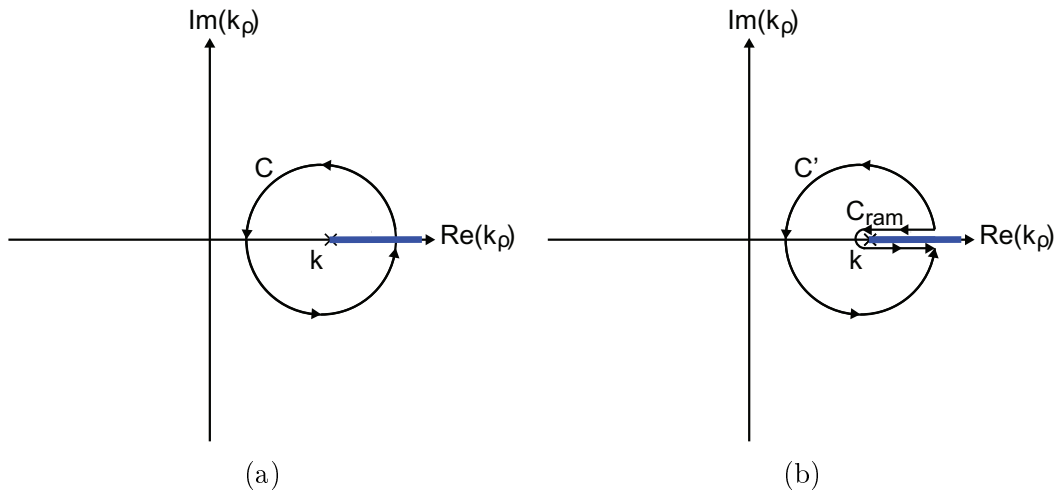


FIGURE C.4 – Intégrale sur un parcours fermé à l'intérieur duquel il y a un point de ramification.

# Bibliographie

- [1] F. Carassa, “On the 80<sup>th</sup> anniversary of the first transatlantic radio signal,” *IEEE Antennas and Propagation Society Newsletter*, vol. 24, no. 6, pp. 10–19, 1982.
- [2] J. Zenneck, “Über die Fortpflanzung ebener elektromagnetischer Wellen längs einer ebenen Leiterfläche und ihre Beziehung zur drahtlosen Telegraphie,” *Annalen der Physik*, vol. 328, no. 10, pp. 846–866, 1907.
- [3] T. Kahan and G. Eckart, “La propagation des ondes électromagnétiques au-dessus du sol. Solution du problème de l’onde de surface,” *J. Phys. Radium*, vol. 10, no. 5, pp. 165–176, 1949.
- [4] A. Sommerfeld, “Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie,” *Annalen der Physik*, vol. 333, no. 4, pp. 665–736, 1909.
- [5] H. Weyl, “Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über einem ebenen Leiter,” *Annalen der Physik*, vol. 365, no. 21, pp. 481–500, 1919.
- [6] A. Sommerfeld, “Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie,” *Annalen der Physik*, vol. 386, no. 25, pp. 1135–1153, 1926.
- [7] G. Breit and M. A. Tuve, “A test of the existence of the conducting layer,” *Physical Review*, vol. 28, no. 3, p. 554, 1926.
- [8] B. van der Pol and K. Niessen, “Über die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über eine ebene Erde,” *Annalen der Physik*, vol. 398, no. 3, pp. 273–294, 1930.
- [9] K. Norton, “The propagation of radio waves over the surface of the earth and in the upper atmosphere, Part I,” *Proceedings of the IRE*, vol. 24, no. 10, pp. 1367–1387, 1936.
- [10] —, “The propagation of radio waves over the surface of the earth and in the upper atmosphere, Part II,” *Proceedings of the IRE*, vol. 25, no. 9, pp. 1203–1236, 1937.



- 
- [11] —, “The physical reality of space and surface waves in the radiation field of radio antennas,” *Proceedings of the IRE*, vol. 25, no. 9, pp. 1192–1202, 1937.
- [12] —, “The calculation of ground-wave field intensity over a finitely conducting spherical earth,” *Proceedings of the IRE*, vol. 29, no. 12, pp. 623–639, 1941.
- [13] P. R. Bannister, “Summary of image theory expressions for the quasi-static fields of antennas at or above the earth’s surface,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 67, no. 7, pp. 1001–1008, 1979.
- [14] —, “Extension of finitely conducting earth-image-theory results to any range,” DTIC Document, Tech. Rep., 1984.
- [15] J. R. Wait, “The magnetic dipole over the horizontally stratified earth,” *Canadian Journal of Physics*, vol. 29, no. 6, pp. 577–592, 1951.
- [16] —, “Radiation from a vertical electric dipole over a stratified ground,” *Transactions of the IRE Professional Group on Antennas and Propagation*, vol. 1, no. 1, pp. 9–11, 1953.
- [17] —, “Fields of a horizontal dipole over a stratified anisotropic half-space,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 14, no. 6, pp. 790–792, 1966.
- [18] —, *Electromagnetic Waves in Stratified Media : Revised Edition Including Supplemented Material*. Elsevier, 2013, vol. 3.
- [19] J. Kong, “Electromagnetic fields due to dipole antennas over stratified anisotropic media,” *Geophysics*, vol. 37, no. 6, pp. 985–996, 1972.
- [20] A. Baños, *Dipole radiation in the presence of a conducting halfspace*. Pergamon, 1966, vol. 9.
- [21] R. E. Collin, “Hertzian dipole radiating over a lossy earth or sea : some early and late 20th-century controversies,” *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 46, no. 2, pp. 64–79, 2004.
- [22] K. A. Michalski and J. R. Mosig, “The Sommerfeld halfspace problem redux : alternative field representations, role of Zenneck and surface plasmon waves,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 63, no. 12, pp. 5777–5790, 2015.
- [23] —, “On the surface fields excited by a hertzian dipole over a layered halfspace : from radio to optical wavelengths,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 63, no. 12, pp. 5741–5752, 2015.

- [24] ———, “Efficient computation of sommerfeld integral tails—methods and algorithms,” *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 30, no. 3, pp. 281–317, 2016.
- [25] ———, “The Sommerfeld half-space problem revisited : from radio frequencies and Zenneck waves to visible light and Fano modes,” *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 30, no. 1, pp. 1–42, 2016.
- [26] K. A. Michalski and D. R. Jackson, “Equivalence of the King and Norton–Bannister theories of dipole radiation over ground with extensions to plasmonics,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 64, no. 12, pp. 5251–5261, 2016.
- [27] K. A. Michalski and H.-I. Lin, “On the far-zone electromagnetic field of a vertical hertzian dipole over an imperfectly conducting half-space with extensions to plasmonics,” *Radio Science*, 2017.
- [28] K. A. Michalski and R. D. Nevels, “On the groundwave excited by a vertical hertzian dipole over a planar conductor : second-order asymptotic expansion with applications to plasmonics,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 65, no. 4, pp. 1133–1140, 2017.
- [29] W. M. Dyab, T. K. Sarkar, and M. Salazar-Palma, “A Physics–based Green’s function for analysis of vertical electric dipole radiation over an imperfect ground plane,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 61, no. 8, pp. 4148–4157, 2013.
- [30] W. M. Dyab, “A study for the propagation of electromagnetic waves over imperfect ground planes based on Schelkunoff integrals,” Ph.D. dissertation, Syracuse University, 2014.
- [31] R. Janaswamy, “Comments on “A Physics–based Green’s function for analysis of vertical electrical dipole radiation over an imperfect ground plane”,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 62, no. 9, pp. 4907–4910, 2014.
- [32] M. Grimm and D. Manteuffel, “Norton surface waves in the scope of body area networks,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 62, no. 5, pp. 2616–2623, 2014.
- [33] K. Y. Yazdandoost and K. Sayrafian-Pour, “Channel model for body area network (BAN),” *IEEE P802*, vol. 15, pp. 08–0780, 2009.

- [34] T. Alves, B. Poussot, and J.-M. Laheurte, "Analytical propagation modeling of ban channels based on the creeping-wave theory," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 59, no. 4, pp. 1269–1274, 2011.
- [35] N. Chahat, G. Valerio, M. Zhadobov, and R. Sauleau, "On-body propagation at 60 GHz," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 61, no. 4, pp. 1876–1888, 2013.
- [36] K. Elgort, S. Komaromy, J. Madden, and A. Taylor, "US army employment of unattended ground sensors," in *Systems and Information Engineering Design Symposium, 2005 IEEE*. IEEE, 2005, pp. 263–269.
- [37] R. Narayanaswami, A. Gandhe, A. Tyurina, and R. K. Mehra, "Sensor fusion and feature-based human/animal classification for unattended ground sensors," in *Technologies for Homeland Security (HST), 2010 IEEE International Conference on*. IEEE, 2010, pp. 344–350.
- [38] R. R. Ohs, J. W. Schuster, and T. Y. Fung, "Full wave simulation of radiowave propagation in unattended ground sensor networks," in *Radio and Wireless Symposium, 2009. RWS'09. IEEE*. IEEE, 2009, pp. 183–186.
- [39] J. Valente, D. Sanz, A. Barrientos, J. d. Cerro, Á. Ribeiro, and C. Rossi, "An air-ground wireless sensor network for crop monitoring," *Sensors*, vol. 11, no. 6, pp. 6088–6108, 2011.
- [40] D. Balachander, T. R. Rao, and G. Mahesh, "RF propagation investigations in agricultural fields and gardens for wireless sensor communications," in *Information & Communication Technologies (ICT), 2013 IEEE Conference on*. IEEE, 2013, pp. 755–759.
- [41] F. Jangal, S. Saillant, and M. Hélier, "Wavelet contribution to remote sensing of the sea and target detection for a high-frequency surface wave radar," *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, vol. 5, no. 3, pp. 552–556, 2008.
- [42] F. Jangal and M. Menelle, "French HFSWR contribution to the european integrated maritime surveillance system I2C," in *IET International Radar Conference 2015*. IET, 2015.
- [43] R. Gordon, "Surface plasmon nanophotonics : a tutorial," *IEEE Nanotechnology magazine*, vol. 2, no. 3, pp. 12–18, 2008.

- [44] F. Marquier, "Interaction des ondes de surface avec des microstructures périodiques. émission thermique cohérente et transmission résonante," Ph.D. dissertation, Ecole Centrale Paris, 2004.
- [45] G. G. Joshi, C. B. Dietrich, C. R. Anderson, W. G. Newhall, W. A. Davis, J. Isaacs, and G. Barnett, "Near-ground channel measurements over line-of-sight and forested paths," *IEE Proceedings-Microwaves, Antennas and Propagation*, vol. 152, no. 6, pp. 589–596, 2005.
- [46] S. Sangodoyin, S. Niranjayan, and A. F. Molisch, "A measurement-based model for outdoor near-ground ultrawideband channels," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 64, no. 2, pp. 740–751, 2016.
- [47] A. Hugine, H. I. Volos, J. Gaeddert, and R. M. Buehrer, "Measurement and characterization of the near-ground indoor ultra wideband channel," in *IEEE Wireless Communications and Networking Conference, 2006*, vol. 2. IEEE, 2006, pp. 1062–1067.
- [48] F. T. Dagefu and K. Sarabandi, "Analysis and modeling of near-ground wave propagation in the presence of building walls," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 59, no. 6, pp. 2368–2378, 2011.
- [49] M. H. Bezerra Cardoso, S. Mostarshedi, G. Baudoin, and J.-M. Laheurte, "Near ground wave propagation modeling for wireless network applications," in *2015 IEEE-APS Topical Conference on Antennas and Propagation in Wireless Communications (APWC)*. IEEE, 2015, pp. 438–439.
- [50] D. Liao and K. Sarabandi, "Near earth wave propagation characteristics of electric dipole in presence of vegetation or snow layer," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 53, no. 11, pp. 3747–3756, 2005.
- [51] S. S. Haykin, *Modern wireless communications*. Pearson Education India, 2011.
- [52] R. F. Harrington, *Time-harmonic electromagnetic fields*. IEE Press, 2001.
- [53] A. Sommerfeld, *Partial differential equations in physics*. Academic press, 1949, pp. 236–279.
- [54] M. S. Wengrovitz, G. V. Frisk, and A. V. Oppenheim, "Reconstruction of complex-valued propagating wave fields using the hilbert–hankel transform," *JOSA A*, vol. 4, no. 1, pp. 247–266, 1987.

- [55] W. C. Chew, *Waves and fields in inhomogeneous media*. IEEE press, 1995.
- [56] S. J. Orfanidis, *Electromagnetic waves and antennas*. Rutgers University New Brunswick, NJ, 2002.
- [57] J. R. Mosig, “Les structures microruban : Analyse au moyen des équations intégrales,” Ph.D. dissertation, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1984.
- [58] R. W. P. King and C. W. Harrison Jr, *Antennas and waves : a modern approach*. Cambridge : The MIT Press, 1969.
- [59] L. B. Felsen and N. Marcuvitz, *Radiation and scattering of waves*. IEEE Press, 1994.
- [60] J. Mosig and F. Gardiol, “Analytical and numerical techniques in the Green’s function treatment of microstrip antennas and scatterers,” in *IEE Proceedings H – Microwaves, Optics and Antennas*, vol. 130, no. 2. IET, 1983, pp. 175–182.
- [61] J. R. Mosig and A. A. Melcón, “Green’s functions in lossy layered media : integration along the imaginary axis and asymptotic behavior,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 51, no. 12, pp. 3200–3208, 2003.
- [62] T. K. Sarkar, W. Dyab, M. N. Abdallah, M. Salazar-Palma, M. Prasad, S. W. Ting, and S. Barbin, “Electromagnetic macro modeling of propagation in mobile wireless communication : theory and experiment,” *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 54, no. 6, pp. 17–43, 2012.
- [63] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables*. Courier Corporation, 1964, vol. 55.
- [64] C. A. Balanis, *Antenna theory : analysis and design*. John Wiley & Sons, 2005.
- [65] G. W. Hanson and A. B. Yakovlev, *Operator theory for electromagnetics : an introduction*. Springer Science & Business Media, 2002.
- [66] K. Norton, “Propagation of radio waves over a plane earth,” *Nature*, vol. 135, pp. 954–955, 1935.
- [67] S. Schelkunoff, “Modified Sommerfeld’s integral and its applications,” *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, vol. 24, no. 10, pp. 1388–1398, 1936.
- [68] E. Shotland, “Three angles significant in radio propagation,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 20, no. 6, pp. 798–801, 1972.

- [69] M. H. Bezerra Cardoso, S. Mostarshedi, G. Baudoin, and J.-M. Laheurte, “Modélisation de la propagation d’ondes près du sol par des méthodes approximatives et fonction de Green,” in *XIX<sup>e</sup> Journées Nationales Microondes*, Bordeaux, 2015.
- [70] I. C. C. R., “CCIR Recommendation 527- 1, electrical characteristics of the surface of the earth,” International Telecommunication Union, Geneva, Tech. Rep., 1982.
- [71] P. Forget and P. Broche, “A study of VHF radio wave propagation over a water surface of variable conductivity,” *Radio Science*, vol. 26, no. 05, pp. 1229–1237, 1991.
- [72] D. E. Barrick, “Theory of HF and VHF propagation across the rough sea, 1, The effective surface impedance for a slightly rough highly conducting medium at grazing incidence,” *Radio Science*, vol. 6, no. 5, pp. 517–526, 1971.
- [73] *Papyex<sup>®</sup> – Graphite Souple : Guide Technique*, Mersen. [Online]. Available : [https://www.mersen.com/uploads/tx\\_mersen/12-PAPYEX-graphite-expanse-Mersen.pdf](https://www.mersen.com/uploads/tx_mersen/12-PAPYEX-graphite-expanse-Mersen.pdf)
- [74] L. B. Valdes, “Resistivity measurements on germanium for transistors,” *Proceedings of the IRE*, vol. 42, no. 2, pp. 420–427, 1954.
- [75] *SourceMeter<sup>®</sup> SMU Instruments Series 2400*, Keithley. [Online]. Available : [http://www.tek.com/sites/tek.com/files/media/media/resources/Series\\_2400\\_DS\\_041216.pdf](http://www.tek.com/sites/tek.com/files/media/media/resources/Series_2400_DS_041216.pdf)
- [76] *Glass Silicon Constraint Substrates*, Corning. [Online]. Available : <http://www.valleydesign.com/Datasheets/Corning%20Pyrex%207740.pdf>
- [77] D. M. Pozar, *Microwave engineering*. John Wiley & Sons, 1998.
- [78] K. Gupta, R. Garg, I. Bahl, and B. Prakash, *Microstrip lines and slotlines*. Artech house, 1996.
- [79] H.-D. Nguyen, J.-P. Coupez, V. Castel, C. Person, A. Delattre, L. Crowther-Alwyn, P. Borel, “Monopole wifi bi-bande sur substrat papier pour l’intégration de systèmes antennes conformables, faible coût,” in *XX<sup>e</sup> Journées Nationales Microondes*, Saint-Malo, 2017.
- [80] B. S. Cook and A. Shamim, “Inkjet printing of novel wideband and high gain antennas on low-cost paper substrate,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 60, no. 9, pp. 4148–4156, 2012.

- [81] G. Shaker, S. Safavi-Naeini, N. Sangary, and M. M. Tentzeris, “Inkjet printing of ultrawideband (UWB) antennas on paper-based substrates,” *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 10, pp. 111–114, 2011.
- [82] H. F. Abutarboush, M. F. Farooqui, and A. Shamim, “Inkjet-printed wideband antenna on resin-coated paper substrate for curved wireless devices,” *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 15, pp. 20–23, 2016.

# Publications

## Revue internationale

- **M. H. Bezerra Cardoso**, S. Mostarshedi, G. Baudoin and J.-M. Laheurte, "Analytical expressions of critical distances for near-ground propagation," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2018. <https://doi.org/10.1109/tap.2018.2811715>

## Congrès international

- **M. H. Bezerra Cardoso**, S. Mostarshedi, G. Baudoin and J.-M. Laheurte, "Near ground wave propagation modeling for wireless network applications," in *Proc. IEEE-APS Top. Conf. Antennas and Propag. in Wireless Commun. (APWC)*, Sep. 2015, pp. 438–439. <https://doi.org/10.1109/apwc.2015.7300165>

## Congrès nationaux

- **M. H. Bezerra Cardoso**, S. Mostarshedi, G. Baudoin and J.-M. Laheurte, "Evaluation d'une nouvelle formulation basée sur l'indentité de Schelkunoff pour le rayonnement d'un dipôle élémentaire électrique vertical au-dessus d'une interface plane," in *XX<sup>e</sup> Journées Nationales de Microondes (JNM)*, Saint-Malo, 2017.
- **M. H. Bezerra Cardoso**, S. Mostarshedi, G. Baudoin and J.-M. Laheurte, "Modélisation de la propagation d'onde près du sol par des méthodes approximatives et fonction de Green," in *XIX<sup>e</sup> Journées Nationales de Microondes (JNM)*, Bordeaux, 2015.







# Modélisation de la propagation des ondes électromagnétiques près du sol: application aux réseaux sans fil

## Résumé

Motivée par le développement de diverses applications déployant des antennes près d'une interface, comme les systèmes militaires UGS, les réseaux corporels sans fil BAN et la surveillance environnementale impliquant des capteurs au sol, cette thèse porte sur la modélisation de la propagation des ondes électromagnétiques près d'une interface. Tout d'abord, la méthode classique de l'optique géométrique est confrontée à des formules approchées fournies par Norton et par Bannister. Cette étude met en évidence les cas où l'optique géométrique ne décrit pas correctement la propagation près de la surface. Pour une compréhension plus exhaustive, les fonctions de Green de ce type de propagation, présentées sous forme d'intégrales de Sommerfeld, sont évaluées à la lumière de la méthode de la plus grande pente. Cette évaluation permet d'extraire trois équations importantes pour la propagation près d'une interface. La première est la condition essentielle pour que la proximité au sol puisse profiter au bilan de liaison grâce à l'excitation d'une composante de l'onde diffractée qui se propage près de l'interface. Les deux autres identifient des distances critiques qui bornent le début et la fin de la zone présentant un affaiblissement de trajet amélioré. L'ensemble de ces trois équations permet d'évaluer le rôle de certains paramètres physiques, notamment les propriétés électromagnétiques du sol, la fréquence de travail et la hauteur des antennes. Cette thèse inclut également les pistes pratiques envisagées pour une démonstration de faisabilité de l'amélioration d'une liaison sans fil par la proximité des antennes à l'interface. La couverture du sol ayant une importance prépondérante, nous présentons des recherches préliminaires sur la réalisation et la caractérisation d'un matériau approprié pour ce type de propagation. Dans un axe de recherche parallèle, cette thèse évalue également l'exactitude et la pertinence d'une nouvelle formulation théorique pour la propagation près du sol. Cette formulation dite « de Schelkunoff » suscite des controverses dans la communauté scientifique.

**Mots clés:** Propagation près du sol, milieux semi-infinis, fonctions de Green, intégrale de Sommerfeld, intégrale de Schelkunoff, évaluation asymptotique, conception de liaison radio.

## Near-ground wave propagation modelling: application to wireless networks

### Abstract

Motivated by the development of various applications deploying antennas near an interface, such as military systems (UGS), wireless body area networks (BAN) and environmental monitoring involving ground sensors, this thesis deals with the near-ground wave propagation modelling. First, the results of the geometrical optics are confronted with the approximations provided by Norton and Bannister. This study reveals the cases where geometrical optics does not correctly describe the wave propagation near the surface. For a more comprehensive understanding, Green's functions of this type of propagation, presented as Sommerfeld integrals, are evaluated using the steepest descent technique. This evaluation offers the possibility to extract three important equations for near-ground wave propagation. The first one presents the essential condition under which the link budget can benefit from the ground proximity through the excitation of a diffracted wave component propagating near the interface. The other two equations identify critical distances indicating the beginning and the end of the zone with an improved path loss. All these three equations highlight the role of certain physical parameters, in particular the electromagnetic properties of the ground, the working frequency and the heights of the antennas. This thesis also includes the practical solutions that can be considered to demonstrate the feasibility of improving a wireless link by the proximity of the antennas to the interface. Since floor coating is of major importance, we present preliminary research on the realisation and characterisation of a suitable material for this type of propagation. In a parallel research axis, this thesis also evaluates the accuracy and relevance of a new theoretical formulation for near-ground propagation. The "so-called Schelkunoff" formulation has become a controversial issue in the scientific community.

**Keywords:** Near-ground wave propagation, half-space problem, Green's functions, Sommerfeld integral, Schelkunoff integral, asymptotic evaluation, guidelines for wireless design.