HAL open science

Torsion homologique dans les revêtements finis

Jean Raimbault

To cite this version:

Jean Raimbault. Torsion homologique dans les revêtements finis. Topologie géométrique [math.GT]. Ecole doctorale Paris centre, 2012. Français. NNT : . tel-01787222

HAL Id: tel-01787222

https://theses.hal.science/tel-01787222v1

Submitted on 16 May 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris VI – Pierre et Marie Curie

École Doctorale Paris Centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Jean Raimbault

Torsion homologique dans les revêtements finis

---

dirigée par Nicolas Bergeron

Soutenue le 7 décembre 2012 devant le jury composé de :

M. Nicolas Bergeron	Université Paris 6	directeur
M. Laurent Clozel	Université Paris 11	examinateur
M. Xiaonan Ma	Université Paris 7	examinateur
M. Julien Marché	Université Paris 6	examinateur
M. Werner Müller	Université de Bonn	rapporteur
M. Joan Porti	Université autonome de Catalogne	rapporteur

Institut de Mathématiques de Jussieu
175, rue du chevaleret
75 013 Paris

École doctorale Paris centre Case 188
4 place Jussieu
75 252 Paris cedex 05

"Le diable n'est pas le principe de la matière, le diable est l'arrogance de l'esprit, la foi sans sourire, la vérité qui n'est jamais effleurée par le doute. Le diable est sombre parce qu'il sait où il va, et allant, il va toujours d'où il est venu."[a]

---

a. Umberto Eco, *Le nom de la rose*

Remerciements

Même si je suis bien content d'être finalement arrivé au bout de ma thèse, ces trois années de travail avec mon directeur Nicolas Bergeron furent particulièrement agréables. En plus d'avoir dirigé mes efforts d'une manière discrète mais vitale il a su m'initier aux nombreux aspects de la pratique de la recherche mathématique. C'est un plaisir d'exprimer ici ma reconnaissance pour tout le temps qu'il a pu me consacrer et toutes les mathématiques qu'il a pu me faire découvrir.

Je remercie Werner Müller et Joan Porti d'avoir lu en détail le manuscrit de cette thèse et d'avoir pu le faire dans les courts délais imposés. La tâche de rapporteur n'est pas la plus agréable à effectuer mais ils l'ont remplie de bonne grâce, et de plus ont tous deux accepté de se déplacer pour figurer dans le jury de soutenance. Mes remerciements vont aussi aux autres membres du jury, Laurent Clozel, Xiaonan Ma et Julien Marché.

En-dehors des conseils, éclaircissements et suggestions de Nicolas, l'apport le plus fructueux à cette thèse est sans doute venu des exposés que j'ai pu donner sur son contenu à diverses occasions et des commentaires qu'ont pu faire les lecteurs attentifs de manuscrits et articles préliminaires. En particulier j'ai bénéficié des commentaires de Thang Le sur le contenu des chapitres 1 et 2, ainsi que de ceux de Takahiro Kitayama. Je voudrais aussi remercier les organisateurs de la conférence *Low dimensional topology and number theory III* à Fukuoka pour m'avoir invité à donner un exposé sur ce sujet. Le contenu des chapitres 3 à 6 a été fort influencé par un séjour à Bonn à l'invitation de Werner Müller et aux conversations que j'ai eu à cette occasion avec lui et Jonathan Pfaff, qui ont aussi relu une première version des chapitres 3 et 4. Le contenu du chapitre 6 et une partie de celui du chapitre 4 sont quand à eux tributaires de la lecture d'une prépublication de Frank Calegari et Akshay Venkatesh et je leur suis reconnaissant de m'avoir permis d'en lire une version préliminaire ainsi que pour l'organisation de l'atelier *Torsion in the homology of arithmetic groups* à Banff. Merci aussi à Frédéric Haglund et aux participants au groupe de travail de théorie géométrique des groupes d'Orsay.

La deuxième partie de ma thèse contient aussi quelques résultats provenant d'un travail en commun avec Miklos Abert, Ian Biringer, Tsachik Gelander, Nikolay Nikolov, Iddo Samet et Nicolas ; j'ai beaucoup apprécié cette collaboration, autant mathématiquement qu'humainement, et je considère son apport aux chapitres 4 et 5 comme un ingrédient essentiel de leur contenu.

Il reste à remercier tous les membres de l'IMJ grâce à qui j'ai pu bénéficier d'un cadre de travail particulièrement agréable : les organisateurs du groupe de travail du mardi Antonin, Nicolas et Maxime W., les nombreux exposants et l'audience d'icelui, les autres organisateurs à Jussieu du séminaire des thésards pour l'année 2011-2012 Florent et Hélène et tous mes collègues ou ex-collègues doctorants, dont la liste est trop longue pour qu'ils soient tous cités ici–je ne mentionnerai qu'Anne-Sandrine, Arthur, Charles, Clément, François, Séverine, Thibaud et enfin Clémence qui de plus a corrigé moult fautes de français dans les chapitres 0 et 1. La pause café d'après-déjeuner est un moment important de la journée d'un mathématicien et l'équipe d'analyse algébrique a su enrichir cette tradition ; merci donc à Emmanuel, Erwan, Frédéric, Grégory, Hélène, Laurent, Maxime Z., Sophie et Vincent pour le chocolat et la convivialité. Le propre des remerciements d'une thèse est d'être incomplets quelle que soit leur longueur, je vais

donc m'arrêter ici et prier les oubliés de m'accorder leur clémence.

En-dehors du cadre mathématique ou presque, j'ai eu la chance de pouvoir compter sur la présence de mes amis. Merci aux anciens de Lyon : Alix, Pierre, Timo et Xavier, aux vieux amis : Benjamin, Cédric, Félix, Julien, Nicolas, Thomas D., Thomas B.L. et Sylvain et à tous les autres. Le dernier remerciement, qui n'est jamais le moins important, va à mes parents, frères et soeurs et au reste de ma famille.

Résumé

Résumé

Le thème central de cette thèse est l'étude des groupes d'homologie et de cohomologie entières, et plus particulièrement de leur sous-groupes de torsion, des variétés de dimension 3. On s'intéresse principalement au comportement de ces derniers dans des suites de revêtements finis, et ce problème est relié à l'approximation des invariants ℓ^2 de revêtements infinis.

Dans une première partie (correspondant aux chapitres 1 et 2) on s'intéresse au cas des revêtements abéliens d'un complexe cellulaire quelconque et on établit en toute généralité des résultats sur la croissance de la partie de torsion des groupes d'homologie dans les revêtements cycliques et des résultats partiels pour les revêtements abéliens plus généraux.

La deuxième partie (chapitres 3 à 6 et Appendice A) traite uniquement de variétés hyperboliques de volume fini en dimension 3 ; on s'intéresse d'abord au problème de l'approximation pour les invariants L^2 analytiques dans un cadre général puis on s'intéresse plus particulièrement aux variétés de congruence. Pour ces dernières on étudie aussi la cohomologie entière.

Mots-clefs

3–variétés, revêtements, homologie, torsion de Reidemeister, torsion analytique, groupes de Bianchi.

Homological torsion in finite covering spaces

Abstract

The main subject of this thesis is the study of the homology and cohomology of three–manifolds with integer coefficients, with an emphasis on their torsion subgroups. We are mainly intersted in studying the latter in sequence of finite covers and this last problem is related to that of approximating ℓ^2 invariants by finite ones.

In a first part (corresponding to Chapters 1 and 2) we study abelian covering spaces of CW complexes. We prove in all generality results on the growth of the torsion part of the homology groups in sequences of cyclic covers and partial results for more general abelian covering spaces.

The second part (which comprises Chapters 3 through 6 and the Appendix A) deals with finite-volume hyperbolic 3–manifolds. We study the problem of approximation for L^2-analytic invariants in general setting before turning to the exclusive study of congruence manifolds. For these we also deal with Reidemeister torsions and integral homologies.

Keywords

3–manifolds, covering spaces, homology, Reidemeister torsion, analytical torsion, Bianchi groups.

Table des matières

Introduction **11**

Préliminaires **25**
0.1 Homologie cellulaire 25
0.2 Fibrés plats sur les espaces localement symétriques 27
0.3 Variétés hyperboliques de volume fini 31
0.4 Noyau de la chaleur 37
0.5 Théorie algébrique des nombres 39

1 Invariants ℓ^2 et approximation dans le cadre combinatoire **43**
1.1 Invariants ℓ^2 et invariants classiques 43
1.2 Invariants ℓ^2 des revêtements abéliens 49
1.3 Approximation pour la torsion de Reidemeister 53

2 Croissance de l'homologie de torsion **65**
2.1 Le cas ℓ^2-acyclique, d'après [BV] 65
2.2 Croissance de l'homologie de torsion dans les revêtements cycliques 66
2.3 Quelques résultats sur les $\mathbb{Q}[\Lambda]$-modules 72
2.4 Le cas $m > 1$ 75

3 Torsion analytique **79**
3.1 Analyse spectrale sur les variétés de volume fini 79
3.2 Trace régularisée des noyaux automorphes 83
3.3 Expression géométrique 88
3.4 Torsion régularisée 92
3.5 Les cas déviants 96

4 Approximation des invariants L^2 analytiques **99**
4.1 Le cas compact (d'après [ABB$^+$]) 99
4.2 Suites d'orbifolds hyperboliques de volume fini 101
4.3 Approximation pour la torsion analytique 108
4.4 Egalité asymptotique entre les torsions analytiques 111
4.5 Intégrales tronquées 115

5 Sous-groupes de congruence des groupes de Bianchi **123**
5.1 Les groupes de Bianchi et leurs sous-groupes de congruence 123
5.2 Asymptotiques 127
5.3 Passage aux adèles 135
5.4 Séries d'Eisenstein 139

5.5 Estimées sur la dérivée des opérateurs d'entrelacement 143

6 Croissance de l'homologie de torsion 151
6.1 Le cas compact, d'après [BV] et [ABB$^+$] 151
6.2 Homologie des variétés à cusps et torsion de Reidemeister 152
6.3 Théorème de Cheeger-Müller asymptotique 155
6.4 Croissance de la torsion 160
6.5 Une autre méthode 164

A Sous-groupes aléatoires invariants des groupes de Lie simples 167
A.1 Convergence de Benjamini-Schramm et sous-groupes aléatoires invariants 167
A.2 Théorème de Nevo-Stück-Zimmer et BS-convergence en rang supérieur 168
A.3 Sous-groupes aléatoires invariants en rang 1 168
A.4 Construction de variétés hyperboliques réelles non commensurables 170
A.5 Une idée de la preuve des théorèmes A.7 et A.8 171

Bibliographie 173

Introduction

Homologie entière des variétés de dimension 3

La topologie des variétés de dimension 3 est suffisamment complexe pour qu'il soit intéressant de les étudier à revêtement fini près. Par exemple on sait depuis Poincaré qu'il existe des variétés M compactes de dimension 3, différentes de la sphère $\mathbb{S}^3$, telles que l'on ait néanmoins $H_1(M) = 0$ (où H_1 désigne le premier groupe d'homologie à coefficients entiers) ; on a même de nombreux exemples qui soient de plus hyperboliques. Il a en revanche été conjecturé par Thurston (et très récemment prouvé par I. Agol, à la suite de travaux de D. Wise) que toute variété hyperbolique de dimension 3 possède un revêtement fini telle que le premier nombre de Betti $b_1(M) = \dim(H_1(M) \otimes \mathbb{Q})$ soit non nul (et même arbitrairement grand). L'homologie entière se décompose comme $H_1(M) \cong \mathbb{Z}^{b_1(M)} \oplus H_1(M)_{\text{tors}}$ et la partie de torsion a été moins étudiée. On n'a par exemple pas de réponse à la question suivante.

Question 0.1. Soit M une variété hyperbolique de volume fini et $A > 0$; existe-t-il un revêtement fini M' de M tel que l'on ait $|H_1(M')_{\text{tors}}| \geq A$?

Les conjectures de Thurston sont assez subtiles (par exemple, il existe des suites M_n de revêtements d'une variété fixée tels que le rayon d'injectivité des M_n tende vers l'infini mais $H_1(M_n) \otimes \mathbb{Q} = 0$ pour tout n, cf. [CD06],[BE06]) et leur solution a nécéssité l'usage de propriétés géométriques fines des variétés hyperboliques. Par contraste on peut espérer obtenir une réponse affirmative à la question 0.1 en exhibant des suites de revêtements finis M_n tels que $|H_1(M_n)_{\text{tors}}|$ croisse exponentiellement avec le degré. Par exemple on a la question plus précise suivante.

Question 0.2. Soit M une variété hyperbolique de volume fini ; existe-t-il une suite (M_n) de revêtements finis de M tels que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log |H_1(M_n)_{\text{tors}}|}{\operatorname{vol} M_n} > 0 \,?$$

Dans certains cas (pour les variétés arithmétiques) on conjecture que la réponse est affirmative (cf. Conjecture 0.13 ci-dessous). Le seul élément de réponse pour le cas général est donné par des résultats sur des modèles aléatoires de variétés pour lesquels on obtient avec une très forte probabilité (qui tend vers 1 quand la "complexité géométrique" du modèle augmente) que le H_1 est fini et non trivial ; pour plus de détails on réfère à [DT06],[Kow08, Proposition 7.19]). Le problème d'étudier les groupes d'homologie dans des suites de revêtements finis a par ailleurs un intérêt propre, et est lié à l'autre problème qui motive cette thèse.

Approximation des invariants ℓ^2 et homologie des revêtements finis

Si H est un groupe et H_n une suite de sous-groupes on dit que H_n est exhaustive si pour tout $g \in H$ il n'existe qu'un nombre fini de n tels que $g \in H_n$. Soit X un CW-complexe fini,

Λ un groupe résiduellement fini, $\Gamma = \pi_1(X)$, $\phi : \Gamma \to \Lambda$ un morphisme surjectif et Λ_n un suite exhaustive de sous-groupes distingués, d'indice fini, de Λ. On note $\Gamma_n = \phi^{-1}(\Lambda_n)$, $\widetilde{X}$ le revêtement universel de X et $X_n = \Gamma_n \backslash \widetilde{X}$.

Question 0.3. Pour $k = 0, \ldots, \dim X$, quel est le comportement asymptotique des suites

$$\frac{b_k(X_n)}{[\Lambda : \Lambda_n]}, \frac{\log |H_k(X_n)_{\text{tors}}|}{[\Lambda : \Lambda_n]}?$$

La réponse devrait être donnée en terme des "invariants ℓ^2" du revêtement infini $\widehat{X} = \ker(\phi)\backslash\widetilde{X}$. On refère à [Lüc02, Chapter 13] pour un apercu plus complet sur la question dans le cas des nombres de Betti.

Nombres de Betti

Soit X un CW-complexe fini. Si $\widehat{X} \to X$ est un revêtement infini alors les groupes d'homologie de $\widehat{X}$ sont en général de rang infini. Si c'est un revêtement galoisien de groupe Λ le complexe cellulaire de $\widehat{X}$ (à coefficients complexes) est isomorphe à un $\mathbb{C}[\Lambda]$-module libre et on peut se limiter à considérer des chaînes de carré intégrable. On peut alors donner un sens aux nombres de Betti ℓ^2 du revêtement $\widehat{X} \to X$, ce sont des nombres réels que l'on note $b_p^{(2)}(\widehat{X})$. La première partie de la question ci-dessus a alors été complètement traitée par W. Lück dans [Lüc94a] :

Théorème 0.4 (Lück)**.** *On reprend la notation de la question 0.3. Pour $p = 0, \ldots, \dim X$ on a la limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_p(X_n)}{[\Lambda : \Lambda_n]} = b_p^{(2)}(\widehat{X}).$$

On a même des estimées sur la vitesse de convergence, cf. [CW03] et 1.3.1 ci-dessous. Dans le cas où X est une variété hyperbolique de volume fini et $\Lambda = \pi_1(X)$ le premier nombre de Betti $b_1^{(2)}(\widetilde{X})$ est nul (cf. [Lüc02, Chapitre 4]).

Le schéma de la preuve de Lück est le suivant : on munit les X_n de leurs structures cellulaires $\pi_1(X)$-invariantes relevées de celle de X, et on note d_p^n les différentielles du complexe cellulaire $C_*(X_n)$. Les mesures spectrales μ_p^n des différentielles d_p^n sont par définition les mesures de comptage des valeurs propres des $(d_p^n)^* d_p^n$, et on veut alors calculer la limite de $\mu_p^n(0)$: plus précisément on veut montrer que l'on a

$$\mu_p^n(0)/[\Lambda : \Lambda_n] \to \mu_p^{(2)}(0) \tag{1}$$

où les $\mu_p^{(2)}$ sont les "mesures spectrales ℓ^2" des différentielles du complexe $C_*(\widehat{X})$. Pour cela on commence par démontrer que l'on a les limites $\frac{\mu_p^n}{[\Lambda:\Lambda_n]} \to \mu_p^{(2)}$ (au sens de la convergence faible des mesures) où $\mu_p^{(2)}$ sont les mesures spectrales ℓ^2 des différentielles du complexe $C_*(\widehat{X})$. La convergence faible n'est pas suffisante pour impliquer la limite (1) : par exemple les masses de Dirac δ_n en $1/n$ convergent faiblement vers la masse de Dirac δ_∞ en 0 mais on a $\delta_n(0) = 0$ pour tout n alors que $\delta_\infty(0) = 1$. Il faut donc contrôler les petites valeurs propres des $(d_p^n)^* d_p^n$ pour démontrer qu'il "n'y a pas de masse positive se déplaçant vers 0", i.e. que l'on a une majoration uniforme sur les $\mu_p^n((0,\varepsilon))/[\Lambda : \Lambda_n]$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit : c'est le contenu du lemme 2.8 de [Lüc94a], qui donne l'estimée $\mu_p^n((0,\varepsilon))/[\Lambda : \Lambda_n] \ll (-\log \varepsilon)^{-1}$.

Torsion homologique

Il n'y a pas d'analogue ℓ^2 aux torsions homologiques $|H_p(X)_{\text{tors}}|$ connu en toute généralité. On a besoin de passer par la torsion de Reidemeister pour énoncer une conjecture précise en rapport avec la question 0.3. La torsion de Reidemeister $\tau(X)$ de X est un invariant incorporant le produit alterné des ordres des sous-groupes de torsion $H_p(M)_{\text{tors}}$, qui dépend en général de la structure cellulaire (cf. le lemme 1.3 ci-dessous et [Tur01]). On peut lui définir un analogue ℓ^2 pour les revêtements infinis, $\tau^{(2)}(\widehat{X})$. Si X est une variété hyperbolique de volume fini, $\Lambda = \pi_1(X)$ alors $\tau^{(2)}(\widehat{X})$ ne dépend pas de la structure cellulaire et est toujours négatif. La question naturelle (cf. [BV, 7.8]) est alors :

Question 0.5. Quand est-ce-que l'on a

$$\tau(X_n)^{\frac{1}{[\Lambda:\Lambda_n]}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau^{(2)}(\widehat{X}) \text{ ?} \tag{2}$$

La torsion de Reidemeister et la torsion ℓ^2 sont toutes deux définies à partir des fonctions spectrales, plus précisément on a

$$\tau(X_n)^{\frac{1}{[\Lambda:\Lambda_n]}} = \exp\left(\sum_{p=0}^{\dim X}\int_{0^+}^{+\infty}\log\lambda\,\frac{d\mu_p^n(\lambda)}{[\Lambda:\Lambda_n]}\right), \quad \tau^{(2)}(\widehat{X}) = \exp\left(\sum_{p=0}^{\dim X}\int_{0^+}^{+\infty}\log\lambda\,d\mu_p^{(2)}(\lambda)\right). \tag{3}$$

Comme la fonction log diverge en 0 la convergence faible n'implique pas la convergence des intégrales ci-dessus, et la majoration $\frac{\mu_p^n([0,\varepsilon])}{[\Lambda:\Lambda_n]} \ll (-\log\varepsilon)^{-1}$ n'est pas non plus suffisante. Une condition suffisante, donnée dans [Lüc94a, Theorem 3.4], est que $\frac{\mu_p^n([0,\varepsilon])}{[\Lambda:\Lambda_n]}) \ll \varepsilon^a$ pour un $a > 0$. En pratique cette dernière n'a été vérifiée systématiquement que pour les revêtements cycliques (cf. par exemple [Lüc02, Lemma 13.63]) et pour certaines suites de revêtements abéliens (cf. la proposition 1.12 plus bas).

Une réponse positive à la question 0.5 ne donne pas immédiatement de résultat sur la croissance de l'ordre de la torsion de chacun des groupes $H_p(X_n)$. En général il n'est même pas clair que l'on puisse quantifier le comportement de la suite $\log|H_p(X_n)_{\text{tors}}|$. De plus les termes additionnels dans $\tau(X_n)$ peuvent a priori être eux aussi à croissance exponentielle. Dans le cas abélien ces problèmes sont en partie résolus dans les chapitres 1 et 2 de cette thèse (qui ont été publiés dans l'article [Rai12b]) et il le sont complètement (modulo une conjecture de théorie des nombres) dans l'article [Le] (qui donne aussi des résultats partiels plus précis que les nôtres).

Enfin, il est possible de poser la question 0.5 dans un cadre analytique (cf. la question 0.10 ci-dessous) et de relier la croissance des invariants analytiques à celle des invariants topologiques. Ces problèmes sont étudiés dans [BV],[ABB$^+$] pour les variétés localement symétriques compactes, et le but des chapitres 3 à 6 ci-dessous est d'étudier le cas des 3–variétés hyperboliques non-compactes.

Croissance de la torsion homologique dans les revêtements abéliens

On présente ici les résultats des chapitres 1 et 2.

Un bref historique

Le premier contexte où la croissance de l'ordre de l'homologie de torsion a été étudiée est celui des revêtements cycliques des extérieurs de noeuds. Soit k un noeud dans la sphère $\mathbb{S}^3$, K un voisinage régulier de k et $M = \mathbb{S}^3 - K$. C'est une variété de dimension 3 compacte dont le bord est un tore. On sait que $\pi_1(M)^{\mathrm{ab}} = H_1(M) \cong \mathbb{Z}$ et on a donc un revêtement cyclique infini $\widehat{M} \to M$ associé à la surjection $\pi_1(M) \to H_1(M)$ et des revêtements finis M_n associés aux applications $\pi_1(M) \to H_1(M) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, de sorte que l'on est dans le cadre de la question 0.3. Le polynôme d'Alexander $\Delta(k) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ de K est un invariant classique que l'on sait calculer à partir d'un diagramme pour k (cf. 1.2.4 pour une définition). Par exemple, pour le noeud de huit k_8 illustré ci-dessous on a $\Delta(k_8) = -t + 3 - t^{-1}$.

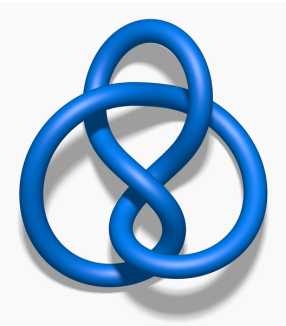


FIGURE 1 – Le noeud de huit (source : Wikipédia)

Pour certains n on a alors une expression explicite pour l'ordre de $H_1(M_n)_{\mathrm{tors}}$, la formule de Fox : on sait que pour tout n on a $b_1(M_n) \geq b_1(M) = 1$, et si on a l'égalité ($b_1(M_n) = 1$) alors on a :

$$|H_1(M_N)_{tors}| = \prod_{\zeta^N = 1} |\Delta(k)(\zeta)|$$

(cette formule a été énoncée par J. Fox, cf. [Web79] pour une preuve complète). On sait que $\Delta(k) \neq 0$, et en utilisant un résultat d'approximation diophantienne de A. Gelfond (ou une version plus forte dûe à M. Baker) on peut alors montrer que l'on a la limite

$$\frac{1}{n} \sum_{\zeta^n = 1} \log |\Delta(k)(\zeta)| \xrightarrow[n \to \infty]{} m(\Delta(k)) := \int_{\mathbb{T}^1} \log |\Delta(k)(z)| dz$$

(où $\mathbb{T}^1$ est le cercle unité de $\mathbb{C}$ muni de la mesure de Lebesgue de masse 1), voir par exemple le lemme 1.18 ou la proposition 2.8 de [SW02b].

Les premiers résultats de croissance exponentielle de la torsion homologique ont été établis en utilisant ces considérations, comme on va maintenant le décrire. Soit d le produit des entiers l tels que le l-ième polynôme cyclotomique divise $\Delta(k)$. On sait alors que pour tout n on a

$$H_1(M_n) \otimes \mathbb{Q} \cong H_1(M_{n+d}) \otimes \mathbb{Q}$$

(cf. [SW02b, Proposition 2.2] ou [Gor72, Theorem 4.1(ii)]). On obtient alors que

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ d | n-1}} \left(\frac{1}{n} \log |H_1(M_n)_{\mathrm{tors}}| \right) = m(\Delta) ;$$

en particulier, si $m(\Delta(k)) > 0$ on obtient ainsi une suite de revêtements finis M_n de M tels que $\liminf |H_1(M_n)_{\text{tors}}|^{\frac{1}{n}} > 0$. Ce résultat a été originellement démontré par F. González-Acuña et H. Short (cf. [GAS91]) et, indépendamment, par R. Riley (cf. [Ril90]). Il répond affirmativement à une question de C. Gordon, qui avait démontré dans [Gor72] que si $m(\Delta(k)) = 0$ on a en fait $H_1(M_n) \cong H_1(M_{n+d})$. Vu que le noeud de huit est hyperbolique et que $m(\Delta(k_8)) = \log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) > 0$ ce résultat donne des exemples de 3–variétés hyperboliques de volume fini ayant une torsion dans leur H_1 aussi grande que l'on veut.

Soit maintenant ℓ un entrelacs à $m > 1$ brins (i.e. une union disjointe de m noeuds) dans $\mathbb{S}^3$, L un voisinage régulier et $M = \mathbb{S}^3 - L$. On a alors $\Lambda := H_1(M) \cong \mathbb{Z}^m$ et pour un sous-groupe Λ' d'indice fini dans Λ on note $M_{\Lambda'}$ le revêtement fini associé à $\pi_1(M) \to \Lambda \to \Lambda/\Lambda'$. On veut étudier le comportement de $\log |H_1(M_{\Lambda_n})_{\text{tors}}|/[\Lambda : \Lambda_n]$ dans des suites (Λ_n) exhaustives (i.e. telles que pour tout $v \in \Lambda$ on ait $v \notin \Lambda_n$ dès que n est assez grand). La formule de Fox admet une généralisation, dûe à J. Mayberry et K. Murasugi (cf. [MM82], ou [Por04] pour une preuve plus courte), qui s'applique aux M_Λ tels que $b_1(M_{\Lambda'}) = m$. Cependant les nombres de Betti de M_{Λ_n} peuvent tendre vers l'infini, ce qui rend la démonstration ci-dessus inapplicable dans ce cas. Deux autres obstructions apparaissent : la généralisation au cas de plusieurs variables de l'estimée de Gelfond utilisée plus haut n'est pas connue, et le premier polynôme d'Alexander peut être nul.

En utilisant des méthodes issues des systèmes dynamiques algébriques, D. Silver et S. Williams on démontré dans [SW02a] que si le polynôme d'Alexander $\Delta(\ell)$ est non nul alors il existe une suite Λ_n telle que

$$\frac{\log |H_1(M_{\Lambda_n})_{\text{tors}}|}{[\Lambda : \Lambda_n]} \xrightarrow[n\to\infty]{} m(\Delta(\ell)) \ (:= \int_{\mathbb{T}^m} \log |\Delta(\ell)|).$$

De plus la limite supérieure du terme de gauche est toujours inférieure ou égale à $m(\Delta(\ell))$. Si $\ell = k$ est un noeud alors on a en fait

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log |H_1(M_n)_{\text{tors}}|}{n} = m(\Delta(k))$$

(ce dernier résultat est aussi démontré dans [SW02b]). Ils conjecturent que dans le cas général, si $\Delta_i(\ell)$ est le premier polynôme non nul dans la suite des polynômes d'Alexander de ℓ alors on a la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log |H_1(M_{\Lambda_n})_{\text{tors}}|}{[\Lambda : \Lambda_n]} = m(\Delta_i(\ell)) \tag{4}$$

pour toute suite exhaustive Λ_n.

La mesure de Mahler $m(\Delta(\ell))$ peut être interprétée comme la torsion ℓ^2 du revêtement acyclique $\widehat{M}$ (cf. 1.2.4 ci-dessous, [LZ06] ou [Lüc94b]). Dans [BV] N. Bergeron et A. Venkatesh ont utilisé ceci pour donner une nouvelle preuve du théorème de Silver and Williams sur les noeuds : la non-nullité du polynôme d'Alexander signifie que le premier nombre de Betti ℓ^2, $b_1^{(2)}(\widehat{M})$, du revêtement cyclique infini $\widehat{M} \to M$, est nul, et dans ce cas (comme on l'a mentionné plus haut) il est connu que la suite $\tau(M_n)^{\frac{1}{n}}$ converge vers $\tau^{(2)}(\widehat{M})$: l'estimée diophantienne de Baker est exactement ce dont on a besoin pour contrôler les petites valeurs propres (qui correspondent aux valeurs d'un polynôme à coefficients entiers). Bergeron et Venkatesh montrent ensuite que la croissance exponentielle de la torsion de Reidemeister ne peut venir que de $H_1(M_n)_{\text{tors}}$ (voir [BV, Theorem 7.3] ou le corollaire 2.4 ci-dessous).

Résultats

Le principal résultat de la première partie de cette thèse (Théorème 2.19) est une généralisation des résultats de [BV] au cas de revêtements abéliens libres de n'importe quel rang, et

qui ne sont pas forcément ℓ^2-acycliques (i.e. les $b_p^{(2)}$ ne sont pas tous nuls). Un corollaire en est l'approximation suivante à la conjecture de Silver et Williams.

Théorème 0.6. *On reprend la notation de* (4). *Il existe une suite exhaustive* (Λ_n) *telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log |H_1(M_{\Lambda_n})_{\mathrm{tors}}|}{[\Lambda : \Lambda_n]} = m(\Delta_i(\ell)).$$

Une solution complète à la conjecture de Silver et Williams (modulo la généralisation des résultats d'approximation diophantienne nécéssaires) est donnée dans [Le], qui démontre aussi incositionnellement que la limite supérieure de $\log |H_1(X_{\Lambda_n})/[\Lambda : \Lambda_n]$ est inférieure à $m(\Delta_i(H_1(\widehat{X})))$.

Dans le cas de revêtements cycliques on obtient un résultat plus propre, le théorème 2.5, qui généralise le théorème 2.10 de [SW02b] et résoud complètement la question 0.3 dans le cas cyclique.

Théorème 0.7. *Soit X un CW-complexe fini. On suppose que l'on a un morphisme non-trivial $\pi_1(X) \to \mathbb{Z}$, soit $X_n, \widehat{X}$ les revêtements cycliques finis et infini associés. On a alors pour $p = 0, \ldots, \dim X$:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log |H_p(X_n)_{\mathrm{tors}}|}{n} = m(\Delta_j(H_p(\widehat{X})))$$

où $\Delta_j(H_p(\widehat{X}))$ est le premier polynôme d'Alexander non nul de $H_p(\widehat{X})$.

On donne quelques exemples de variétés de dimension 3 auxquelles ce théorème s'applique, dans l'optique d'une réponse positive à la question 0.1, dans la section 2.2.4.

Plan de preuve

Dans le chapitre 1 on relie les invariants ℓ^2 (nombres de Betti et torsion) à des invariants classiques (rang et polynômes d'Alexander). On réalise ensuite la première étape vers le théorème 0.6, la preuve d'une version faible de l'approximation de la torsion ℓ^2 énoncée dans la question 0.5. La preuve est basée sur le résultat (connu) dans le cas cyclique, à partir duquel on construit des suites pour lesquelles la limite (2) reste vraie.

Dans le chapitre 2 on commence par adapter les arguments de [BV, Section 7] à notre cadre pour obtenir un résultat d'approximation pour le produit alterné $\prod_{p=0}^{\dim X} |H_p(X_n)_{\mathrm{tors}}|$ dans le cas où $\widehat{X}$ est ℓ^2-acyclique. A partir de ce moment on passe dans un cadre algébrique : on peut définir des invariants ℓ^2 pour les modules en utilisant des résolutions finies, et le résultat d'approximation établi pour les complexes acycliques a pour conséquence un résultat sur les $\mathbb{Z}[\Lambda]$-modules de torsion (le lemme 2.5). On veut alors établir le même résultat pour des modules de type fini généraux, ce qui se fait en considérant d'abord le cas sans torsion. On commence par considérer le cas où $\Lambda \cong \mathbb{Z}$ (donc $\mathbb{Z}(\Lambda) \cong \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$) : on montre alors que si M est un $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-module sans torsion alors la $\mathbb{Z}$-torsion des modules $M/(t^n - 1)M$ est bornée indépendamment de n. L'idée de la preuve est essentiellement contenue dans l'exemple suivant.

Exemple 0.8. Soit p un nombre premier et M le $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-module $(t-1, p) \subset \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$. On voit aisément que l'on a $M/(t^n - 1)M \cong \mathbb{Z}/p \oplus \mathbb{Z}^{n-1}$, en particulier sa torsion est toujours égale à p.

On en déduit la croissance exponentielle de l'homologie de torsion pour des complexes de $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-modules en utilisant des manipulations algébriques élémentaires. Pour le cas $m > 1$, comme pour démontrer l'approximation de la torsion ℓ^2 on se ramène au cas cyclique. Pour ce faire on utilise les conséquences algébriques d'un théorème de Bombieri et Zannier.

Torsion analytique et homologie de torsion des variétés hyperboliques de volume fini

On présente ici le contenu des chapitres 3 à 6 et de l'appendice A.

Invariants analytiques et topologiques et approximation pour les variétés compactes

Soit M une variété riemannienne compacte ; il est bien connu que l'on peut relier les nombres de Betti de M à l'analyse des espaces de formes différentielles sur M, via la cohomologie de de Rham et les formes harmoniques. On peut aussi exprimer la torsion de Reidemeister par des biais analytiques : la torsion analytique $T(M)$ est un invariant riemannien défini à partir du spectre des laplaciens sur les formes différentielles (cf. [RS71]) et le théorème de Cheeger-Müller [Che79], [Mül78] montre qu'elle est égale à une certaine torsion de Reidemeister. Par exemple, si M est une 3–variété hyperbolique compacte et $H_1(M) \otimes \mathbb{Q} = 0$ on a

$$T(M) = \operatorname{vol} M \times |H_1(M)_{\text{tors}}|^{-1}.$$

Dans le cas où $H_1(M) \otimes \mathbb{Q} \neq 0$ il s'y rajoute un facteur lié aux 1-formes harmoniques sur M.

La définition de la torsion analytique est la même que celle des torsions de Reidemeister en utilisant la mesure spectrale des Laplaciens de Hodge à la place de celles des différentielles du complexe cellulaire. Idéalement on voudrait poser

$$T(M) = \exp\left(\sum_{p=0}^{\dim M} p(-1)^p \int_0^{+\infty} \log(\lambda) d\mu_p^M(\lambda)\right) = \exp\left(\sum_{p=0}^{\dim M} p(-1)^p \sum_{j\geq 1} \mu_p^M(\lambda_j^p) \log \lambda_j^p\right) \quad (5)$$

où $\mu_p^M([a,b])$ est le nombre de valeurs propres dans $[a,b]$ (comptées avec multiplicités) de $\Delta^p[M]$, $\mu_M^p(\lambda) = \mu_M^p([0,\lambda]) - \mu_M^p([0,\lambda))$ et $(\lambda_j^p), j \geq 1$ sont les valeurs propres positives de $\Delta^p[M]$. L'intégrale dans l'exponentielle ne converge pas vu que $\Delta^p[M]$ est un opérateur non borné ; pour donner néanmoins un sens à (5) on définit une fonction zeta par $\zeta_p(s) = \sum_{j\geq 1}(\lambda_j^p)^{-s}$. Celle-ci converge pour $\operatorname{Re}(s)$ assez grande et se prolonge en une fonction méromorphe qui est holomorphe en $s = 0$, et on a alors formellement $\zeta_p'(0) = \sum_{j\geq 1} \log \lambda_j^p$. On pose ainsi

$$T(M) = \exp\left(\sum_{p=0}^{\dim M} p(-1)^p \zeta_p'(0)\right).$$

Comme dans le cadre combinatoire, on déduit de manière formelle de la convergence des mesures spectrales et d'estimées sur les petites valeurs propres des résultats d'approximation pour les invariants analytiques. Il est cependant plus pratique de travailler avec des noyaux de la chaleur.

Lorsqu'on se restreint à étudier des suites de variétés riemanniennes on gagne un degré de liberté au sens où on n'a plus besoin de considérer des revêtements finis d'une variété fixée pour donner un sens à la question 0.3. Si on fixe un groupe de Lie simple non-compact et à centre fini G, un sous-groupe compact maximal K alors $S = G/K$ est un espace symétrique riemannien et si Γ_n est une suite de sous-groupes cocompacts sans torsion alors les $M_n = \Gamma_n \backslash S$ sont des variétés riemaniennes compactes. On se pose alors la question suivante.

Question 0.9. Quel peut être le comportement asymptotique des suites

$$\frac{b_p(M_n)}{\operatorname{vol} M_n}, \frac{\log |H_p(M_n)_{\text{tors}}|}{\operatorname{vol} M_n}?$$

On peut ainsi reprouver le théorème de Lück 0.4 pour les suites d'espaces localement symétriques ; cette approche analytique permet même de le généraliser à certaines suites Γ_n non exhaustives, voir par exemple le théorème 0.11.

En revanche, pour ce qui est de la torsion on se heurte au problème des petites valeurs propres. Par exemple, si M est une 3–variété hyperbolique compacte alors toute suite exhaustive (M_n) de revêtements finis de M a un nombre arbitrairement grand de valeurs propres arbitrairement petites sur les 1-formes, et la répartition de ces dernières reste bien incomprise. On peut cependant démontrer des résultats d'approximation en considérant la torsion à coefficients dans certains fibrés dits fortement acycliques, par exemple (8) . On discutera cette situation plus loin, on refère aussi à [BV],[ABB$^+$] et aux sections 4.1 et 6.1 ci-dessous pour plus de précisions.

Utilisation des noyaux de la chaleur

L'opérateur de la chaleur sur les p-formes est défini formellement par $e^{-t\Delta^p[M]}$. C'est un opérateur borné et dans le cas où M est compacte il est même compact et à trace, c'est-à-dire qu'il existe une base hilbertienne ϕ_j^p des p-formes de carré intégrable sur M telle que $e^{-t\Delta^p[M]}\phi_j^p = e^{-t\lambda_j^p}\phi_j^p$ et $\sum_{j\geq 0} e^{-t\lambda_j^p} < +\infty$, on note $\operatorname{Tr} e^{-t\Delta^p[M]} = \sum_{j\geq 0} e^{-t\lambda_j^p}$. Un calcul formel donne alors l'égalité

$$\zeta_p(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^s \operatorname{Tr} e^{-s\Delta^p[M]} \frac{dt}{t}$$

pour $\operatorname{Re}(s)$ assez grande, où Γ est la fonction d'Euler définie par $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$. Il vient par prolongement analytique

$$\log T(M) = \frac{d}{ds}\left(\sum_{p=0}^{\dim M} p(-1)^p \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^s \operatorname{Tr} e^{-t\Delta^p[M]} \frac{dt}{t}\right)_{s=0}.$$

Pour tout $t_0 > 0$ le côté droit est égal à

$$\sum_{p=0}^{\dim M} p(-1)^p \left(\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{t_0} t^s \operatorname{Tr} e^{-t\Delta^p[M]} \frac{dt}{t}\right)_{s=0} + \int_{t_0}^{+\infty} \operatorname{Tr} e^{-t\Delta^p[M]} \frac{dt}{t}\right).$$

L'opérateur de la chaleur est un opérateur de convolution par un noyau symétrique, c'est-à-dire qu'il existe une fonction, notée abusivement $e^{-t\Delta^p[M]}$, sur $M \times M$ à valeurs dans $\wedge^p TM \otimes \wedge^p T^*M$ (i.e. on a $e^{-t\Delta^p[M]}(x,y) \in \operatorname{Hom}(\wedge^p T_x^* M, \wedge^p T_y^* M)$) telle que pour toute p-forme f de carré intégrable on ait

$$e^{-t\Delta^p[M]} f(x) = \int_M e^{-t\Delta^p[M]}(y,x) f(y) dy.$$

On a alors

$$\operatorname{Tr} e^{-t\Delta^p[M]} = \int_M \operatorname{tr} e^{-t\Delta^p[M]}(x,x) dx.$$

Une telle fonction existe aussi pour l'opérateur de la chaleur de $\widetilde{M}$, et on définit sa trace par rapport à l'action de $\Gamma = \pi_1(M)$ par

$$\operatorname{Tr}_\Gamma e^{-t\Delta^p[\widetilde{M}]} = \int_D \operatorname{tr} e^{-t\Delta^p[\widetilde{M}]}(x,x) dx$$

où D est un domaine fondamental pour l'action de Γ sur $\widetilde{M}$. La torsion analytique L^2 du revêtement $\widetilde{M} \to M$ est alors définie comme suit :

$$\log T^{(2)}(M) = \sum_{p=0}^{\dim M} p(-1)^p \left(\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{t_0} t^s \operatorname{Tr}_\Gamma e^{-t\Delta^p[\widetilde{M}]} \frac{dt}{t}\right)_{s=0} + \int_{t_0}^{+\infty} \operatorname{Tr}_\Gamma e^{-t\Delta^p[\widetilde{M}]} \frac{dt}{t}\right).$$

Dans le cas où $\widetilde{M} = S$ est un espace symétrique riemannien la trace $\operatorname{tr} e^{-t\Delta^p[S]}(x,x)$ ne dépend pas de $x \in S$ et il suit que $\operatorname{Tr}_\Gamma e^{-t\Delta[S]} = \operatorname{vol} M \operatorname{tr} e^{-t\Delta^p[S]}(x_0,x_0)$ pour tout $x_0 \in S$ et $\log T^{(2)}(M) = t^{(2)}(\widetilde{M}) \operatorname{vol} M$ où $t^{(2)}(\widetilde{M})$ ne dépend que de S. Dans le cas où $S = \mathbb{H}^3$ on a $t^{(2)}(\mathbb{H}^3) < 0$. Si M_n est une suite de 3–variétés hyperboliques compactes telle que $\operatorname{inj} M_n \to \infty$ (on rappelle que pour $x \in M$ le rayon d'injectivité $\operatorname{inj}_x(M)$ est le plus petit $r > 0$ tel que $B_M(x,r)$ soit homéomorphe à une boule ouverte et $\operatorname{inj} M = \inf_{x\in M} \operatorname{inj}_x M$) on montre (cf. [BV]) que pour tout $t_0 > 0$ on a

$$\frac{1}{\operatorname{vol} M_n} \operatorname{Tr} e^{-t_0\Delta^p[M_n]} = \operatorname{tr} e^{-t_0\Delta^p[\mathbb{H}^3]}(x_0,x_0) \tag{6}$$

pour n'importe quel $x_0 \in \mathbb{H}^3$ et que

$$\frac{1}{\operatorname{vol} M_n}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{t_0} t^s \operatorname{Tr}_{\pi_1(M)} e^{-t\Delta^p[M_n]}\frac{dt}{t}\right)_{s=0} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{t_0} t^s \operatorname{Tr}_{\pi_1(M)} e^{-t\Delta^p[\mathbb{H}^3]}\frac{dt}{t}\right)_{s=0}. \tag{7}$$

L'approximation pour les invariants L^2 analytiques est le problème suivant ; on pose $b_p^{(2)}(\mathbb{H}^3) = \lim_{t\to\infty} \operatorname{tr} e^{-t_0\Delta^p[\mathbb{H}^3]}(x_0,x_0)$ pour n'importe quel $x_0 \in \mathbb{H}^3$.

Question 0.10. Soit S un espace symétrique. Pour quelles suites M_n de quotients de volume fini de S a t'on les limites

$$\frac{b_p(M_n)}{\operatorname{vol} M_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} b_p^{(2)}(S), \quad \frac{\log T(M_n)}{\operatorname{vol} M_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} t^{(2)}(S)\ ?$$

On a vu que la première limite est vérifiée au moins par les suites exhaustives de variétés (i.e. dont le rayon d'injectivité tend vers l'infini). Pour la seconde, d'après (7) il suffit de démontrer que l'intégrale aux grands temps, qui tend vers 0 quand $t_0 \to \infty$, le fait uniformément en n. Pour ceci on aurait besoin d'estimées uniformes sur les petites valeurs propres des laplaciens. Voir [ABB$^+$, Conjecture 10.4] pour un énoncé conjectural de conditions suffisantes.

Torsion à coefficients locaux

On peut généraliser les problèmes ci-dessus en introduisant un fibré vectoriel réel $E \to M$ muni d'un produit euclidien ; les p-formes de carré intégrables sur M à coefficients dans E sont munies d'un laplacien et d'un noyau de la chaleur que l'on notera encore $\Delta^p[M], e^{-t\Delta^p[M]}$ et on peut définir la torsion analytique comme ci-dessus. Le théorème de Cheeger-Müller s'étend à ce cadre, cf. [Mül93],[BZ92]. L'intérêt de cette généralisation est que dans certains cas les laplaciens ont un spectre uniformémement minoré, ce qui permet de déduire de (7) l'approximation pour la torsion analytique. On appelle de tels fibrés des fibrés fortement acycliques, pour des variétés hyperboliques il en existe toujours (cf. [BV, Section 4] ou la proposition 0.23 plus bas). Par exemple, si E est le fibré plat induit par la représentation de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sur $V = \operatorname{Sym}^{n_1}\mathbb{C}^2 \otimes \operatorname{Sym}^{n_2}\overline{\mathbb{C}}^2$ il est fortement acyclique si $n_1 \neq n_2$ et si on note $T(M;V)$ la torsion analytique à coefficients dans E et $t^{(2)}(V) = \log T^{(2)}(M;V)/\operatorname{vol} M$ on a $t^{(2)}(V) < 0$ et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log T(M_n;V)}{\operatorname{vol} M_n} = t^{(2)}(V) \tag{8}$$

pour toute suite M_n de 3–variétés hyperboliques compactes telle que $\operatorname{inj} M_n \to \infty$. Si les M_n sont des variétés arithmétiques on peut définir une homologie entière $H_*(M_n;V_\mathbb{Z})$. La forte acyclicité

implique en particulier, via la théorie de de Rham-Hodge, que l'on a $H^*(M;E)=0$ et les groupes $H_p(M_n;V_{\mathbb{Z}})$ sont donc finis. Le théorème de Cheeger-Müller implique alors que l'on a

$$T(M_n;V)=\frac{|H_0(M_n;V_{\mathbb{Z}})|\,|H_2(M_n;V_{\mathbb{Z}})|}{|H_1(M_n;V_{\mathbb{Z}})|}$$

d'où il suit que

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\log|H_1(M_n;V_{\mathbb{Z}})|}{\operatorname{vol}M_n}\geq -t^{(2)}(V)>0.$$

Pour des suites de congruence on sait que $\log|H_p(M_n;V_{\mathbb{Z}})|=o(\operatorname{vol}M_n)$ pour $p\neq 1$ et il suit que l'on a $\lim\frac{\log|H_1(M_n;V_{\mathbb{Z}})|}{\operatorname{vol}M_n}=-t^{(2)}(V)$ (cf. [ABB$^+$, Theorem 10.9] et Théorème 6.1).

Convergence d'espaces localement symétriques

Dans le but d'étudier les problèmes 0.9 et 0.10 pour des suites non exhaustives une notion assez souple de convergence pour les espaces localement symétriques a été introduite dans [ABB$^+$], la "convergence de Benjamini-Schramm" (voir aussi l'appendice A). L'exemple le plus simple d'une telle convergence, qui illustre bien le contenu géométrique de la notion, est la généralisation suivante d'une suite exhaustive : pour une variété riemannienne N et $x\in N$ on note $\operatorname{inj}_x(N)$ le rayon d'injectivité en x, et on dit que M_n converge au sens de Benjamini-Schramm vers S si pour tout $R>0$ on a

$$\frac{\operatorname{vol}\{x\in M_n,\operatorname{inj}_x(M_n)\leq R\}}{\operatorname{vol}M_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Cette approche permet de prouver des résultats assez frappants. Par exemple le théorème suivant est le résultat principal de [ABB$^+$11].

Théorème 0.11. *Soit G un groupe de Lie simple, K un sous-groupes compact maximal, $S=G/K$ et Γ_n une suite de réseaux sans torsion de G. Soient $M_n=\Gamma_n\backslash S$: on suppose de plus que le rayon d'injectivité des M_n est uniformément minoré. On a alors pour tout $p=0,\dots,\dim S$*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_p(M_n)}{\operatorname{vol}M_n}=0.$$

Dans [ABB$^+$] les auteurs obtiennent aussi des résultats sur l'approximation pour la torsion analytique (à coefficients dans un fibré fortement acyclique), comme mentionné plus haut. Cependant on sait qu'il existe des suites M_n qui BS-convergent vers $\mathbb{H}^3$ mais telles que $\log T(M_n)=o(\operatorname{vol}M_n)$ (J. Brock et N. Dunfield [BD] ont en effet construit des suites BS-convergentes M_n telles que $H_1(M_n)=0$ pour tout n)

Variétés à cusps

Les questions 0.9, 0.10 et la notion de convergence de Benjamini-Schramm font sens pour des variétés de volume fini non-compactes. Pour démontrer des résultats on utilise ici une hypothèse supplémentaire sur les suites de variétés que l'on considère : on veut que leurs cusps ne dégénèrent pas (dans l'espace des tores euclidiens unimodulaires), on dit qu'une suite est cusp-uniforme si elle vérifie cette condition (cf. la section 4.2.1). Le premier but de la seconde partie est d'étudier le généralisation des résultats d'approximation (6),(8) au cas de variétés hyperboliques de volume fini (et pour des suites BS-convergentes et cusp-uniformes). Le second est d'énoncer et de démontrer une version du théorème de Cheeger-Müller dans ce cadre et d'en déduire des résultats de croissance exponentielle de l'homologie de torsion. On refère à [MP12],[Pfa12], [MP11] pour des travaux sur des thèmes proches.

Trace régularisée

Soit M une 3–variété hyperbolique de volume fini, non-compacte. Les opérateurs de la chaleur $e^{-t\Delta^p[M]}$ ne sont pas à trace (ils ne sont même pas compacts) et pour utiliser l'approche ci-dessus à la question 0.9 il faut donc trouver un moyen de donner malgré tout un sens à leur trace. Pour ce faire on utilise la formule des traces de A. Selberg. La variété M est composée d'une partie compacte M^1 qui est une variété ayant h composantes de bord toutes homéomorphe au tore $\mathbb{T}^2$ et de "bouts" $E_1, \ldots, E_h$ homéomorphes à $\mathbb{T}^2 \times [1, +\infty)$, recollés sur les composantes de bord. On peut réaliser cette décomposition de manière géométrique, ce qui donne une paramétrisation des bouts par $\mathbb{T}^2 \times [1, +\infty)$. On note alors $M^Y = M^1 \cup \bigcup_{j=1}^h E_j^Y$ où E_j^Y est l'image dans E_j de $\mathbb{T}^2 \times [1, Y]$. Les noyaux de la chaleur sont intégrables sur les variétés compactes M^Y et la formule de pré-trace de Selberg donne une asymptotique pour l'intégrale de leur trace sous la forme suivante :

$$\int_{M^Y} \operatorname{tr} e^{-t\Delta^p[M]}(x,x)dx = A \log Y + B + o(1). \tag{9}$$

On définit alors la trace régularisée Tr_R de l'opérateur de la chaleur par $\operatorname{Tr}_R e^{-t\Delta[M]} = B$. La décomposition de M en M^1 et E_j n'est pas canonique et la trace régularisée dépend des choix faits, c'est pourquoi l'on est réduit à ne l'étudier que dans des suites de revêtements d'une variété fixée (on fait les choix pour cette dernière et cela les détermine dans tous ses revêtements).

Il y a en fait deux formes pour la formule de pré-trace : l'une exprime B en fonction de la géométrie de M (cf. la proposition 3.5 plus bas) et l'autre en fonction du spectre de $\Delta^p[M]$ (le résultat que l'on appelle usuellement formule des traces est l'égalité des deux côtés). Le côté géométrique permet d'étudier le comportement des traces dans des suites de variétés et on peut ainsi établir le résultat suivant (Théorème 4.6).

Théorème 0.12. *Soit M une 3–variété hyperbolique de volume fini et M_n une suite cusp-uniforme de revêtements de M qui BS-converge vers $\mathbb{H}^3$. Alors pour tout $t > 0$ on a*

$$\frac{\operatorname{Tr}_R e^{-t\Delta^p[M_n]}}{\operatorname{vol} M_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \operatorname{tr} e^{-t\Delta^p[\mathbb{H}^3]}(x_0, x_0).$$

Torsions analytiques

La torsion analytique régularisée d'une variété de volume fini non-compacte se définit par la même formule que dans le cas compact :

$$T_R(M) = \sum_{p=0}^{3} p(-1)^p \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{t_0} \operatorname{Tr}_R e^{-t\Delta^p[M]} t^s \frac{dt}{t}\right)_{s=0} + \int_{t_0}^{+\infty} \operatorname{Tr}_R e^{-t\Delta^p[M]} \frac{dt}{t}.$$

Il faut bien sûr vérifier que les intégrales convergent pour $\operatorname{Re}(s)$ assez grande et qu'elles se prolongent analytiquement : on refère à [Par09],[MP12] et à la section 4.3 ci-dessous pour les détails. Dans une suite de revêtements on étudie le terme aux petits temps en utilisant le côté géométrique de la formule des traces et on n'a aucun mal à démontrer qu'il approxime bien le terme L^2 correspondant. Le terme aux grands temps se traite en utilisant le côté spectral, mais les termes additionnels venant du spectre continu viennent compliquer son évaluation par rapport au cas compact. On obtient donc finalement un résultat conditionnel (Théorème 4.14) : pour une suite comme dans le théorème 0.12 et un fibré fortement acyclique provenant d'une représentation de dimension finie V de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, sous une condition supplémentaire de nature analytique on a bien

$$\lim_{n\to\infty} T_R(M_n; V)^{\frac{1}{\operatorname{vol} M_n}} = t^{(2)}(V).$$

Sous les mêmes hypothèses on montre une égalité asymptotique entre la torsion régularisée des M_n et la torsion analytique absolue ou relative* d'une suite de variétés tronquées $M_n^{Y^n}$ (Théorème 4.15). La preuve de ce dernier résultat est semblable à celle de l'approximation pour les torsions analytiques : pour les petits temps on estime les intégrales des noyaux de la chaleur sur les variétés tronquées, en utilisant notamment un résultat de W. Lück et T. Schick [LS99]. Pour les grands temps on a besoin d'estimer le trou spectral pour les laplaciens absolus ou relatifs sur les variétés tronquées, ce qui se fait à l'aide de résultats de F. Calegari and A. Venkatesh [CV10, Chapter 6].

Variétés de congruence

Soit F un corps quadratique imaginaire (par exemple $F = \mathbb{Q}(i)$) et $\mathcal{O}_F$ son anneau des entiers (dans l'exemple donné, $\mathcal{O}_F = \mathbb{Z}[i]$). $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F)$ est alors un réseau arithmétique de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ non cocompact, qui contient de la torsion. Les sous-groupes de congruence principaux sont définis par

$$\Gamma(\mathfrak{I}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F),\ b, c \in \mathfrak{I},\ a, d \in 1 + \mathfrak{I} \right\}$$

pour $\mathfrak{I}$ un idéal non nul de $\mathcal{O}_F$, et un sous-groupe de congruence est un sous-groupe de Γ qui contient l'un des $\Gamma(\mathfrak{I})$.

Pour les variétés de congruence l'image assez floue que l'on a des résultats d'approximation et de la croissance de l'homologie de torsion devient plus claire. Par exemple on a la conjecture suivante (une légère généralisation de [BV, Conjecture 1.3]) :

Conjecture 0.13. *Soit Γ un groupe arithmétique dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et Γ_n une suite de sous-groupes de congruence de Γ deux à deux distincts. Soit $V_{\mathbb{Z}}$ un Γ-module arithmétique, on a la limite :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log |H_1(\Gamma_n; V_{\mathbb{Z}})_{\mathrm{tors}}|}{\mathrm{vol}\, \Gamma_n \backslash \mathbb{H}^3} = -t^{(2)}(V)$$

et aussi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log |H^2(\Gamma_n; V_{\mathbb{Z}})_{\mathrm{tors}}|}{\mathrm{vol}\, \Gamma_n \backslash \mathbb{H}^3} = -t^{(2)}(V)$$

Cette conjecture semble hors de portée dans le cas où $V_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$ n'est pas fortement acyclique, en particulier dans le cas de coefficients triviaux. Dans le cas de coefficients fortemement acycliques elle a été démontrée pour des groupes cocompacts dans [ABB$^+$] (voir aussi le théorème 6.1 ci-dessous), mais pour des groupes non-cocompacts nous ne parvenons pas ici à une solution complète (cette dernière semble cependant accessible par les méthodes utilisées). En plus de ces résultats partiels la conjecture est supportée par des expérimentations numériques de M.H. Şengun [Şen11], et par des considérations arithmétiques (cf. [CV10],[BV, Section 6]).

Pour la première étape (l'approximation pour les torsions analytiques) il faut vérifier les conditions du théorème 4.14. La BS-convergence est vraie pour toutes les suites de variétés de congruence (cf. Théorème 5.14 et [ABB$^+$, Theorem 1.11]). On vérifie la cusp-uniformité pour

*. Ces dernières sont définies comme la torsion analytique des variétés compactes mais en utilisant l'extension du laplacien avec des conditions—absolues ou relatives—au bord, cf. 4.4.1 plus bas.

certaines suites explicites de sous-groupes de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F)$, définies par

$$\Gamma_0(\mathfrak{I}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F),\ c \in \mathfrak{I} \right\},$$
$$\Gamma_1(\mathfrak{I}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F),\ c \in \mathfrak{I},\ a, d \in 1 + \mathfrak{I} \right\}.$$

On a alors le résultat suivant (cf. Théorème 5.11).

Théorème 0.14. *Soit $\mathfrak{I}_n$ une suite d'idéaux de $\mathcal{O}_F$ deux à deux distincts et $\Gamma_n = \Gamma(\mathfrak{I}_n), \Gamma_1(\mathfrak{I}_n)$ ou $\Gamma_0(\mathfrak{I}_n) \cap \Gamma(3)$ †, $M_n = \Gamma_n \backslash \mathbb{H}^3$. On a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log T_R(M_n; V)}{\mathrm{vol}\, M_n} = t^{(2)}(V).$$

On établit aussi pour ces mêmes suites explicites un "théorème de Cheeger-Müller asymptotique". Contrairement à ce qui se passe pour des variétés compactes, même si V est une représentation fortement acyclique de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ on peut avoir $H_1(M; V) \neq 0$ pour M une variété de volume fini, ce qui vient du fait que toute la cohomologie n'est pas représentée par des formes de carré intégrable. Pour énoncer une égalité de la torsion analytique avec une torsion de Reidemeister il faut donc d'abord définir cette dernière. Une telle définition est donnée par Calegari et Venkatesh ‡ : on pose

$$\tau(M; V_{\mathbb{Z}}) = \frac{|H^1(M; V_{\mathbb{Z}})_{\mathrm{tors}}|}{R^1} \times \frac{R^2}{|H^2(M; V_{\mathbb{Z}})_{\mathrm{tors}}|} \tag{10}$$

où R^p est le covolume du réseau $H^1(M; V_{\mathbb{Z}})_{\mathrm{libre}} \subset H^1(M; V)$ pour une métrique euclidienne définie d'une manière réminescente du procédé de régularisation (cf. [CV10, Section 6.2] et (6.5),(6.6) plus bas). Une manière naturelle pour tenter de prouver que $T_R(M; V) = \tau(M; V_{\mathbb{Z}})$ est donc d'appliquer le théorème de Cheeger-Müller à bord [BM11], [Lüc02] aux variétés tronquées et de comparer les deux côté de l'égalité $T_{\mathrm{abs}} = \tau_{\mathrm{abs}}$ avec leurs analogues régularisés. On obtient ainsi le résultat suivant (Théorème 6.4).

Théorème 0.15. *Soient Γ_n, V comme dans l'énoncé du théorème 0.14, on a*

$$\frac{\log T_R(M_n; V) - \log \tau(M_n; V_{\mathbb{Z}})}{\mathrm{vol}\, M_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On ne parvient cependant pas à établir la véracité de la conjecture 0.13 dans ces cas. On arrive à montrer que les termes $|H^1(M_n; V_{\mathbb{Z}})_{\mathrm{tors}}|$ et R^2 dans (10) ont une croissance sous-exponentielle, mais pas à majorer la croissance de R^1 (ce dernier problème est lié aux propriétés arithmétiques des fonctions L de Hecke). On n'obtient ainsi qu'une borne supérieure (Théorème 6.10).

Théorème 0.16. *Soient Γ_n comme dans l'énoncé du théorème 0.14 et $V_{\mathbb{Z}} = \mathcal{O}_F^2$; on a*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log |H^2(M_n; V_{\mathbb{Z}})_{\mathrm{tors}}|}{\mathrm{vol}\, M_n} \leq -t^{(2)}(V).$$

†. Les groupes $\Gamma_0(\mathfrak{I})$ contiennent de la torsion et on l'élimine en les intersectant avec un sous-groupe de congruence sans torsion.

‡. Leur définition incorpore en fait des termes additionnels, mais comme nous ne nous intéressons ici qu'au comportement asymptotique et que ces derniers sont de logarithme négligeable devant le volume on ne les a pas retenus.

En utilisant une astuce géométrique on parvient néanmoins à démontrer le résultat suivant (Théorème 6.19).

Théorème 0.17. *Soit Γ_n comme dans l'énoncé du théorème 0.14, $n_1 \neq n_2$ deux entiers positifs ou nuls et $V_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Sym}^{n_1}(\mathcal{O}_F^2) \otimes \mathrm{Sym}^{n_2}(\overline{\mathcal{O}}_F^2)$ Il existe une suite Γ'_n de sous-groupes d'indice 2 dans Γ_n tels que l'on a*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log |H_1(M'_n; V_{\mathbb{Z}})_{\mathrm{tors}}|}{\mathrm{vol}\, M'_n} \geq -\frac{1}{2} t^{(2)}(V).$$

Multiplicités limites

Soit M une variété hyperbolique de volume fini. L'expression spectrale pour la torsion régularisée a la forme

$$\mathrm{Tr}_R\, e^{-t\Delta^p[M]} = \sum_{j\geq 0} m_M^p(\lambda_j^p) e^{-t\lambda_j^p} + S(M)$$

où $\lambda_j^p, j \geq 0$ sont les valeurs propres de $\Delta^p[M]$ dans les p-formes de carré intégrable et $S(M)$ est composé de termes liés au spectre continu du Laplacien (et dépend des choix faits lors de la définition de la trace régularisée). Une question intéressante est de déterminer le comportement asymptotique des $m_{M_n}^p(\lambda_j^p)$ dans une suite BS-convergente de variétés, ce qui d'après le théorème 6 revient à étudier celui de S. Pour les suites de congruence introduites plus haut on montre que $S(M_n) = o(\mathrm{vol}\, M_n)$, ce qui résulte dans le théorème suivant (Corollaire 5.10).

Théorème 0.18. *Soit Γ_n comme dans l'énoncé du théorème 0.14. Pour tout $\lambda \in [0, +\infty)$ on a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_{M_n}^p(\lambda)}{\mathrm{vol}\, M_n} = 0.$$

Ce résultat est bien connu dans de nombreux autres cadres, dont une liste (non exhaustive) suit. Savin prouve dans [Sav89] la convergence des multiplicités de représentations (qui implique le corollaire 5.10 via la formule de Matsushima) pour toute suite de sous-groupes de congruence principaux dans un $\mathbb{Q}$-groupe simple fixé. Dans le cas cocompact la limite est due à de George et Wallach [dGW78] et on a en fait des bornes sous-linéaires explicites dues à Sarnak et Xue [SX91] pour les sous-groupes de congruence principaux des groupes arithmétiques cocompacts. Ces bornes ont été généralisées aux sous-groupes de congruence non principaux et à un groupe G quelconque dans [ABB$^+$] (mais on perd sur le côté explicite). Enfin, le résultat de multiplicités limites est établi sous une forme plus forte dans [FLM12] pour les suites de sous-groupes principaux de $\mathrm{GL}_n(F)$ où F est un corps de nombres.

Préliminaires

0.1 Homologie cellulaire

0.1.1 Anneaux de groupes et modules

Si E est un ensemble et A un anneau on note $A[E]$ le A-module libre dont une base est indexée par E. Si E est un groupe cet ensemble a de plus une structure de A-algèbre dont la multiplication est donnée par $(a.g) \times (b.h) = (ab).gh$.

Soit Γ un groupe dénombrable. Si $n, n' \geq 1$ et A est une matrice $n \times n'$ à coefficients dans $A[\Gamma]$ on la considère comme un morphisme de Γ-modules de $A[\Gamma]^{n'}$ dans $A[\Gamma]^n$ en faisant opérer $A[\Gamma]$ sur lui-même par multiplication *à droite*. On notera enfin $\ell^2(\Gamma)$ le sous-espace de $\mathbb{C}^\Gamma$ composé des séries formelles de carré sommable :

$$\ell^2(\Gamma) = \left\{ \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma \gamma,\ a_\gamma \in \mathbb{C}, \sum_{\gamma \in \Gamma} |a_\gamma|^2 < +\infty \right\}.$$

Un $\mathbb{Z}[\Gamma]$-complexe fini est une suite

$$0 \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \to \ldots \to A_1 \xrightarrow{d_1} A_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

où chaque A_p est un $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module et les d_p sont Γ-équivariantes et vérifient $d_{p-1} \circ d_p = 0$. On notera A_*, d_* un tel complexe et $H_*(A)$ son homologie, définie par $H_p(A) = \ker(d_p)/\operatorname{im}(d_{p-1})$.

0.1.2 Complexes cellulaires pour les revêtements finis et coefficients locaux

Une bonne référence pour le contenu de cette section est [Hat02, Chapter 2, Chapter 3.H]. Soit X un CW-complexe fini, i.e. $X = \bigcup_{p=1}^d X^p$ où X^0 est un ensemble fini de points et pour $p = 1, \ldots, d$ on a

$$X^p = X^{p-1} \cup_\phi \left(\bigsqcup_{l=1}^{n_p} e_l^p \right)$$

où les e_l^p sont homéomorphes à la boule fermée de dimension p et ϕ est une application continue de $\bigsqcup_{l=1}^{n_p} \partial e_l^p$ vers X^{p-1}. Le complexe cellulaire de X est le $\mathbb{Z}$-module gradué $C_*(X) = \bigoplus_{p=0}^d C_p(X)$ où $C_p(X)$ est le $\mathbb{Z}$-module libre sur les e_l^p. On peut définir des différentielles $d_p : C_p \to C_{p-1}$ qui vérifient $d_{p-1} d_p = 0$ et l'homologie $H_*(X)$ est alors l'homologie du complexe $C_*(X), d_*$; elle ne dépend que du type d'homotopie de X. Ces définitions s'étendent sans problème à des complexes cellulaires infinis.

Soit $\widetilde{X}$ le revêtement universel de X et $\Gamma \cong \pi_1(X)$ le groupe de Galois de $\widetilde{X} \to X$. Alors $\widetilde{X}$ a une structure cellulaire Γ-invariante qui relève celle de X ; on fixe des relevés arbitraires $\widetilde{e}_l^p$ des p-cellules de X à $\widetilde{X}$, le complexe cellulaire de $\widetilde{X}$ muni de cette structure cellulaire est alors un $\mathbb{Z}[\Gamma]$-complexe et $C_p(\widetilde{X})$ est un $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module libre dont une base est formée par les $\widetilde{e}_l^p$.

Soit $\phi : \Gamma \to \Lambda$ un morphisme surjectif et $\widehat{X} = \ker \phi \backslash \widetilde{X}$ qui est donc un revêtement Galoisien de X de groupe de Galois Λ. La structure cellulaire Γ-invariante sur $\widetilde{X}$ descend en une structure Λ-invariante sur $\widehat{X}$ et il suit que pour tout p, $C_p(\widehat{X})$ est un $\mathbb{Z}[\Lambda]$-module libre dont une base est donnée par les $\widehat{e}_l^p$ où $\widehat{e}_l^p$ est l'image de $\widetilde{e}_l^p$ dans $\widehat{X}$. Le complexe $C_*(\widehat{X})$ est un $\mathbb{Z}[\Lambda]$-complexe et chaque $H_p(\widehat{X})$ est donc naturellement un $\mathbb{Z}[\Lambda]$-module.

Un système local sur X est pour nous la donnée d'un $\mathbb{Z}$-module $V_{\mathbb{Z}}$ (qui dans la suite sera toujours libre de type fini) et d'une représentation $\sigma : \Gamma = \pi_1(X) \to \mathrm{SL}(V_{\mathbb{Z}})$, autrement dit d'un $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module. On définit alors le complexe $C_*(X; V_{\mathbb{Z}})$ des chaînes sur X à coefficients dans $V_{\mathbb{Z}}$ par :

$$C_p(X; V) = C_p(\widetilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma]} V_{\mathbb{Z}} \tag{11}$$

où l'on rappelle que l'on considère $C_p(\widetilde{X})$ comme un Γ-module à droite, l'action étant donnée par :

$$(\gamma \widetilde{e}_l^k) \cdot \gamma' = (\gamma\gamma')\widetilde{e}_l^k.$$

On note $H_*(X; V)$ l'homologie du complexe $C_*(X; V)$. Le fait suivant sera utile pour calculer l'homologie des revêtements finis.

Lemme 0.19. *Soit X un complexe cellulaire, $\Gamma' \subset \Gamma = \pi_1(X)$ et $Y = \Gamma' \backslash \widetilde{X}$. Alors pour tout $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module V on a un isomorphisme de complexes Γ-équivariant*

$$C_*(Y; V) \xrightarrow{\sim} (C_*(\widetilde{X}) \otimes V) \otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma]} \mathbb{Z}[\Gamma/\Gamma'].$$

En particulier on a $H_*(Y) \cong H_*(X; \mathbb{Z}[\Gamma/\Gamma'])$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que l'application

$$C_*(\widetilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma']} V \ni x \otimes v \mapsto (x \otimes v) \otimes 1 \in (C_*(\widetilde{X}) \otimes V) \otimes \mathbb{Z}[\Gamma/\Gamma']$$

est bien définie et est un isomorphisme. Ceci suit immédiatement de la définition du produit tensoriel. □

0.1.3 Dualités

Cohomologie

On reprend les notations de la section précédente. On pose $C^p(X; V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(C_p(\widetilde{X}), V)$, par dualité on peut définir des applications $d^p : C^p(X; V) \to C^{p+1}(X; V)$, ce qui définit un complexe dont on note $H^*(X; V)$ l'homologie.

Forme de Kronecker

On note V^* le dual $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{Z})$, $Z_p(X; V) = \ker(d_p)$ et $Z^p(X; V^*) = \ker(d^p)$. On a une forme bilinéaire naturelle sur $Z_p(X; V) \times Z^p(X; V^*)$ dont on vérifie qu'elle descend en une forme bilinéaire non dégénérée

$$(.,.)_X : H_1(X; V)_{\text{libre}} \times H^1(X; V^*)_{\text{libre}} \to \mathbb{Z}.$$

Si Y est un sous-CW-complexe de X et i son inclusion dans X on a la propriété de naturalité suivante :

$$\forall \eta \in H_p(Y; V^*), \omega \in H^p(X; V) : \quad (i_*\eta, \omega)_X = (\eta, i^*\omega)_Y. \tag{12}$$

Si V est muni d'une forme bilinéaire non-dégénérée et Γ-invariante on obtient une forme de Kronecker sur $H_p(X; V)_{\text{libre}} \times H^p(X; V)_{\text{libre}}$ qui possède les mêmes propriétés.

Dualité de Poincaré

On suppose maintenant que X est une variété compacte de dimension n ayant un bord ∂X. On fixe une structure cellulaire sur X telle que ∂X soit un sous-CW-complexe et on définit $C_*(X, \partial X; V) = C_*(X; V)/C_*(\partial X; V)$.

La dualité de Poincaré est un isomorphisme (de $\mathbb{Z}$-modules gradués) $H_*(X; V) \xrightarrow{\sim} H^{n-*}(X, \partial X; V)$ (on a aussi une dualité $H_*(X, \partial X; V) \xrightarrow{\sim} H^{n-*}(X; V)$).

D'autre part on a la suite exacte longue d'homologie :

$$\ldots \to H_{p-1}(X, \partial X; V) \to H_p(\partial X; V) \to H_p(X; V) \to H_p(X, \partial X; V) \to H_{p+1}(\partial X; V) \to \ldots$$

Proposition 0.20. *Le diagramme :*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & \longrightarrow & H_p(\partial\overline{M}; V) & \longrightarrow & H_p(M; V) & \longrightarrow & H_p(\overline{M}, \partial\overline{M}; V) & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\ldots & \longrightarrow & H^{n-1-p}(\partial\overline{M}; V^*) & \longrightarrow & H^{n-p}(\overline{M}, \partial\overline{M}; V^*) & \longrightarrow & H^{n-p}(M; V^*) & \longleftarrow & \ldots
\end{array}$$

commute, où les flèches verticales représentent la dualité de Poincaré.

La dualité de Poincaré et la proposition 0.20 sont établies dans [Bre97, Theorem V.9.3].

0.2 Fibrés plats sur les espaces localement symétriques

Si $V_{\mathbb{Z}}$ est un $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module et on pose $V = V_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}$ on obtient une homologie réelle $H_*(X; V)$ et l'image de $H_*(M; V_{\mathbb{Z}})_{\text{libre}}$ dans $H_*(X; V)$ est un réseau. D'autre part on peut définir un fibré sur X dont l'espace total est $\Gamma\backslash(V \otimes \widetilde{X})$; on va s'intéresser ci-dessous à ces fibrés dans le cas où X est une variété riemanienne localement symétrique.

0.2.1 Espaces symétriques et localement symétriques

Soit G un groupe de Lie réel simple non compact. Les sous-groupes compacts maximaux de G sont tous conjugués, on en choisit un que l'on note K. Si $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de K alors la forme de Killing B de $\mathfrak{g}$ est définie négative sur $\mathfrak{k}$ et en notant $\mathfrak{p}$ l'orthogonal de $\mathfrak{k}$ pour B on a donc $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}$ est stable sous l'action adjointe de K sur $\mathfrak{g}$. Le sous-espace $\mathfrak{p}$ s'identifie donc à l'espace tangent en K à la variété G/K. La forme de Killing est définie positive et K-invariante sur $\mathfrak{p}$ et ceci munit donc $S = G/K$ d'une métrique riemannienne G-invariante. On peut de plus montrer que l'application exponentielle induit un difféomorphisme de $\mathfrak{p}$ sur S ; ce dernier est donc une variété riemanienne simplement connexe (en fait difféomorphe à un $\mathbb{R}^d$) dont on peut montrer qu'elle est à courbure sectionnelle négative.

Le groupe d'isométries directes de S est égal à l'image de G et agit donc transitivement. Si Γ est un sous-groupe discret de G alors l'action de Γ sur S est discontinue (i.e. pour tout $x \in S$ il existe un voisinage U de S tel que $\gamma U \cap U$ est non-vide seulement pour un nombre fini de $\gamma \in \Gamma$, et si de plus Γ est sans torsion alors il n'a pas de point fixe et il suit que pour tout $x \in S$ il existe un voisinage $U \ni x$ tel que $\forall \gamma \in \Gamma - \{1_G\}$, $\gamma U \cap U = \emptyset$. Le quotient $\Gamma\backslash S$ est alors une variété riemannienne localement isométrique à S. On dit qu'un sous-groupe discret $\Gamma \subset G$ est un réseau si le quotient $\Gamma\backslash G$ admet une mesure G-invariante finie, de manière équivalente si $\Gamma\backslash S$ est de volume riemannien fini.

0.2.2 Fibrés plats

On fixe G, K comme ci-dessus et un sous-groupe discret sans torsion $\Gamma \subset G$. Les fibrés vectoriels réels plats sur $M = \Gamma\backslash S$ sont tous obtenus comme suit : soit σ une représentation de Γ sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie W ; on a un fibré vectoriel F_σ sur M dont l'espace est le quotient $\Gamma\backslash(S \times W)$. Pour $\gamma \in \Gamma$ et une p-forme f sur S à coefficients dans W (i.e. f est une section lisse du fibré trivial $\wedge^p T^*\mathbb{H}^3 \otimes W$) on note $\gamma^* f = \sigma(\gamma)^{-1} \circ f \circ \wedge^p T\gamma$ (où Tg désigne l'action de $g \in G$ sur $T\mathbb{H}^3$). Alors les p-formes sur M à coefficients dans F_σ correspondent aux sections Γ-équivariantes de $\wedge^p TS \to W$, i.e. aux $f \in \Omega^p(S; W)$ qui vérifient $\gamma^* f = f$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

On s'intéresse ici aux fibrés plats tels que la représentation de monodromie σ soit la restriction à Γ d'une représentation ρ de G sur un espace vectoriel réel V. La représentation $\sigma = \rho|_\Gamma$ n'est jamais orthogonale mais le fibré F_σ a une autre description qui permet de le munir d'un produit euclidien. A un facteur près il existe un unique produit scalaire sur V pour lequel K agisse par isométries et $\mathfrak{p}$ par des endomorphismes auto-adjoints. D'autre part, le groupe K agit à droite sur $\Gamma\backslash G \times V$ par $(g, v).k = (gk, \rho(k^{-1})v)$ et le quotient $(\Gamma\backslash G \times V)/K$ est l'espace d'un fibré vectoriel de fibre V sur M que l'on notera E_ρ. Comme K préserve le produit euclidien sur V le fibré E_ρ est muni d'une métrique eucidienne, que l'on désignera dans la suite par $|.|$. Les sections de carré intégrable de E_ρ correspondent alors au sous-espace

$$\{f : \Gamma\backslash G \to V,\ |f| \in L^2(\Gamma\backslash G),\ \forall g \in G, k \in K,\ f(gk) = \rho(k^{-1})f(g)\},$$

et plus généralement les p-formes sur M à coefficients dans E_ρ correspondent à

$$L^2\Omega^p(M; E_\rho) = \left(L^2(\Gamma\backslash G) \otimes V \otimes \wedge^p \mathfrak{p}^*\right)^K = \mathrm{Hom}_K(\wedge^p \mathfrak{p}, L^2(\Gamma\backslash G) \otimes V).$$

On a un isomorphisme naturel de E_ρ vers F_σ induit par l'application $G \times V \to G \times V$, $(g, v) \mapsto (g, \rho(g).v)$. Dans la suite on notera $L^2\Omega^p(M; V)$ l'espace des p-formes de carré intégrable sur M à coeficients dans E_ρ.

0.2.3 Laplaciens

On garde la notation de la sous-section précédente. Les Laplaciens de Hodge $\Delta^p[M]$ sont des opérateurs non-bornés des espaces $L^2\Omega^p(M; V)$ qui sont essentiellement auto-adjoints. dont on donne maintenant une brève description. La différentielle extérieure sur $\Omega^p(M; V)$ est définie localement par $d(f \otimes v) = df \otimes v$ pour $v \in V$ et $f \in \Omega^p(M)$. Elle définit un opérateur non borné de $L^2\Omega^p(M; V)$ vers $L^2\Omega^{p+1}(M; V)$; on note d_p^* son adjoint formel, et on définit les laplaciens par $\Delta^p[M] = d_p^* d_p + d_{p-1} d_{p-1}^*$. Il est bien connu (cf. [Che73]) que ces derniers sont des opérateurs essentiellement autoadjoints.

Les définitions ci-dessus sont valables pour toute variété Riemannienne, dans le cas des espaces localement symétriques on a une description alternative de ces opérateurs en termes de représentations unitaires que l'on va exposer succintement en suivant [BW00, Chapter II] (voir aussi [BC05, Chapitre 1]). L'élément de Casimir C de G est un élément du centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. Il agit donc sur un sous-espace dense H^∞ dans la représentation

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\wedge^p \mathfrak{p}, L^2(G) \otimes V)$$

de G (où l'action sur $\wedge^p \mathfrak{p}$ est triviale). Les sous-espaces

$$L^2\Omega^p(M; V) = \mathrm{Hom}_K(\wedge^p \mathfrak{p}, L^2(G) \otimes V).$$

sont contenus dans H^∞ et stables sous l'action de C. Si $f \otimes v = \omega \in L^2\Omega^p(M;V)$ on a alors

$$\forall u \in \wedge^p\mathfrak{p}, \Delta^p[M]\omega(u) = (-C \cdot f(u)) \otimes v(u) + f(u) \otimes (C \cdot v(u))$$

(ce résultat est connu sous le nom de Lemme de Kuga). Le Casimir agit par un scalaire λ_V dans la représentation irréductible V de G, et si $H_\pi \subset L^2(\Gamma\backslash G)$ est une représentation unitaire irréductible de G le Casimir y est représenté par un scalaire λ_π. Si $\omega \in \mathrm{Hom}_K(\wedge^p\mathfrak{p}, H_\pi \otimes V) \subset L^2\Omega^p(M;V)$ on a donc $\Delta^p[M]\omega = (\lambda_V - \lambda_\pi)\omega$. En particulier la décomposition de $L^2(\Gamma\backslash G)$ en représentations irréductibles donne la décomposition de $L^2\Omega^p(M;V)$ en espaces propres pour le Laplacien : soit $\lambda \in [0,+\infty)$ et $\widehat{G}(\lambda)$ l'ensemble des représentations irréductibles π de G pour lesquelles on a $\pi(C) = \lambda$. Le sous-espace des p-formes propres du Laplacien pour la valeur propre $-\lambda$ est égal à

$$\bigoplus_{\pi \in \widehat{G}(\lambda - \lambda_V)} \mathrm{Hom}_K(\wedge^p\mathfrak{p}, H_\pi \otimes V)^{m(\Gamma,\pi)}$$

où $m(\Gamma,\pi)$ est la multiplicité de π dans $L^2(\Gamma\backslash G)$, i.e. le plus grand entier m tel que l'on ait un plongement G-équivariant $(H_\pi)^m \to L^2(\Gamma\backslash G)$.

En général, si M est non-compacte les espaces $L^2\Omega^p(M;V)$ ne sont pas décomposés en somme directe de sous-espaces propres pour les Laplaciens (de manière équivalent $L^2(\Gamma\backslash G)$ n'est pas une somme directe de représentations irréductibles) et on doit utiliser des "paquets spectraux" pour le décrire complètement. Dans tous les cas où une telle situation a lieu on décrira explicitement la décomposition.

0.2.4 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$

Représentations unitaires

Pour $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ on a une classification complète des représentations unitaires irréductibles. On définit les sous-groupes suivants de G :

$$P_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, a \in \mathbb{C}^\times, b \in \mathbb{C} \right\}, \quad N_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{C} \right\},$$
$$A_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}_+^\times \right\}, \quad M_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \theta \in [0,2\pi] \right\}.$$

Pour $a \in A_\infty$ on note $|a|$ la valeur absolue du terme en haut à gauche. Si σ est un caractère de M et $\nu \in \mathbb{C}$ on définit la représentation induite $\pi_{\sigma,\nu}$ de G comme agissant par $g.f(x) = f(xg)$ sur le complété du sous-espace

$$H_{\sigma,\nu} = \{f \in C^\infty(G), f(mang) = \sigma(m)|a|^{2(\nu+1)}f(g)$$

pour le produit préhilbertien

$$\langle f, f' \rangle = \int_K f(k)\overline{g}(k)dk$$

(cf. [Kna01, Chapter VII.1]). La représentation $\pi_{\sigma,\nu}$ est unitaire exactement quand $\nu \in (i\mathbb{R})$ ou quand σ est trivial et $\nu \in [0,2]$. Elle est irréductible si $\nu \neq 0, 2$, et toute représentation unitaire irréductible non triviale de G est isomorphe à l'une des $\pi_{\sigma,\nu}$. Les seuls isomorphismes entre ces dernières sont donnés par $\pi_{\sigma,\nu} \cong \pi_{\overline{\sigma},-\nu}$. Pour une discussion complète de ces résultats on peut consulter [Kna01, Chapter XVI.1]. On notera $\widehat{G}$ l'ensemble des représentations unitaires irréductibles de G, qui est donc en bijection avec $(\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \cup [0,2])/\sim$ où $(k,\nu) \sim (-k,-\nu)$ pour $\nu \in i\mathbb{R}$, $t \sim 2-t$ pour $t \in [0,2]$ et $(0,1) \sim 1$. Ceci le munit d'une topologie (qui est en fait la topologie de Fell, cf. [BC05, Chapitre 2.2]).

Formule de Plancherel et mesures spectrales

La formule de Plancherel pour les groupes semi-simples, dûe à Harish-Chandra, donne une décomposition explicite de $L^2(G)$ en représentations irréductibles pour l'action à droite où à gauche de G. On se contente ici de l'énoncé suivant, pour lequel on réfère à [Ped97, (0.11)] et [Kna01, Theorem 11.2]. On définit la transformée de Fourier d'une fonction $f \in C_c^\infty(G)$ par

$$\widehat{f}(\pi) = \int_G f(g)\pi(g)dg \in \mathcal{B}(H_\pi).$$

Théorème 0.21. *Pour toute $f \in C_c^\infty(G)$ on l'opérateur $\widehat{f}(\pi)$ est à trace. Il existe une mesure Borélienne ν sur $\widehat{G}$, supportée sur les représentations de la série principale et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, telle que*

$$f(h) = \int_{\widehat{G}} \mathrm{Tr}(\pi(h) \circ \widehat{f}(\pi))d\nu(\pi) = \int_{\widehat{G}} \mathrm{Tr}(\widehat{f}(\pi) \circ \pi(h))d\nu(\pi).$$

L'application $f \mapsto \widehat{f}$ se prolonge en un isomorphisme $G \times G$-équivariant d'espaces de Hilbert

$$L^2(g) \cong \int_{\widehat{G}} \mathcal{B}(H_\pi)d\nu(\pi)$$

où $G \times G$ agit sur $\mathcal{B}(H_\pi)$ par $(g,h).\phi = \pi(g) \circ \phi \circ \pi(h)^{-1}$ et sur $L^2(G)$ par la représentation birégulière $((g,h).f)(x) = f(g^{-1}xh)$.

Il suit que l'on a un isomorphisme G-équivariant à gauche

$$(L^2(G) \otimes \wedge^p \mathfrak{p}^* \otimes V)^K \cong \int_{\widehat{G}} \mathrm{Hom}_K(H_\pi, \wedge^p \mathfrak{p} \otimes V^*) \otimes H_\pi \, d\nu(\pi).$$

La valeur propre du Casimir de G dans l'espace H_{ν,σ_l} est égale à $\nu^2 - (1 - |l|/2)^2$. La mesure spectrale sur les p-formes à coefficients dans V est alors la mesure borélienne μ_V^p sur $[0, +\infty)$ définie par

$$\mu_V^p(A) = \int_{\pi_{\sigma_l,\nu}, (-\nu^2 + (1-|l|/2)^2 + \lambda_V) \in A} \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_K(\wedge^p \mathfrak{p}, H_\pi \otimes V)d\nu(\pi). \tag{13}$$

Noyaux automorphes

On note $\mathbb{H}^3$ la variété riemannienne G/K. Les laplaciens sur $\mathbb{H}^3$ sont eux aussi des opérateurs essentiellement auto-adjoints et pour $\phi \in C^\infty([0, +\infty))$ on peut donc définir un opérateur $\phi(\Delta^p[\mathbb{H}^3])$ sur $L^2\Omega^p(\mathbb{H}^3; V)$. Pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ c'est un opérateur à noyau, c'est-à-dire qu'il existe

$$k_{\phi,p} \in C^\infty(\mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3; (\wedge^p T\mathbb{H}^3 \otimes V) \otimes (\wedge^p T\mathbb{H}^3 \otimes V)^*),$$

tel que $\phi(\Delta)$ soit l'opérateur de convolution avec $k_{\phi,p}$, i.e. $k_{\phi,p}(x,y) \in \mathrm{Hom}(\wedge^p T_x\mathbb{H}^3 \otimes V, \wedge^p T_y\mathbb{H}^3 \otimes V)$ et pour une p-forme $f \in L^2\Omega^p(\mathbb{H}^3; V)$ on a

$$\phi(\Delta^p[\mathbb{H}^3])f(y) = \int_{\mathbb{H}^3} k_{\phi,p}(x,y)f(x)dx.$$

La formule de Plancherel implique que pour $x_0 \in \mathbb{H}^3$ on a

$$\mathrm{tr}\, k_\phi(x_0, x_0) = \int_0^{+\infty} \phi(\lambda)d\mu_V^p(\lambda). \tag{14}$$

Pour une large classe de fonctions ϕ les noyaux $k_{\phi,p}$ sont à décroissance rapide. On retiendra le résultat suivant.

Théorème 0.22. *Il existe un sous-espace dense (dans la métrique C^∞) $\mathcal{A}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tel que pour toute $\phi \in \mathcal{R}$ on ait $k_{\phi,p}(x,y) \ll e^{-Ad(x,y)}$ pour tout $A > 0$.*

On verra plus loin par d'autres biais (cf. section 0.4) que la conclusion est vérifiée par $u \mapsto e^{-tu}$. Pour une preuve on refère à [ABB+, Lemma 7.2] (où il en fait est montré que les transformées de Fourier de noyaux à support compact contiennent un sous-espace dense). Les noyaux $k_{\phi,p}$ sont équivariants sous l'action diagonale de G sur $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{H}^3$, ce qui veut dire que pour tout $g \in G$, $x, y \in \mathbb{H}^3$ on a

$$k_{\phi,p}(x,y) = (\wedge^p T_x g^{-1} \otimes \rho(g)^{-1}) \circ k_{\phi,p}(gx, gy) \circ (\wedge^p T_x g \otimes \rho(g)). \tag{15}$$

Pour $g \in G$ on pose $g^* k_{\phi,p}(x,y) = (\wedge^p T_x g^{-1} \otimes \rho(g)^{-1}) \circ k_{\phi,p}(x,y) \in \mathrm{Hom}(\wedge^p T_x \mathbb{H}^3 \otimes V, \wedge^p T_{g^{-1}y} \mathbb{H}^3 \otimes V)$ et on définit le noyau automorphe associé à ϕ par

$$K^\Gamma_{\phi,p}(x,y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma^* k_{\phi,p}(x, \gamma y).$$

La série converge uniformément sur les compacts d'après l'estimée du lemme 0.27 plus loin. On voit enfin que $K^\Gamma_{\phi,p}$ est Γ-équivariant en chaque variable et que pour $f \in L^2\Omega^p(M;V)$ on a

$$\phi(\Delta^p[M])f(y) = \int_{\Gamma \backslash \mathbb{H}^3} K^\Gamma_{\phi,p}(x,y) f(x) dx. \tag{16}$$

Représentations de dimension finie et forte acyclicité

Le groupe $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ agit sur $\mathbb{C}^2$ de la manière naturelle, mais aussi par des transformations anti-holomorphes *via* $g \mapsto \bar{g}$. On note $\overline{\mathbb{C}^2}$ l'espace de cette dernière représentation, les représentations réelles de dimension finie de G sont alors les représentations sur les espaces

$$V_{n_1,n_2} = \mathrm{Sym}^{n_1}(\mathbb{C}^2) \otimes \mathrm{Sym}^{n_2} \overline{\mathbb{C}^2}$$

pour n_1, n_2 deux entiers positifs ou nuls. On remarque que $\rho(-1_G) = 1_{\mathrm{SL}(V_{n_1,n_2})}$ si et seulement si $n_1 - n_2$ est impair. On note e_1, e_2 la base canonique de $\mathbb{C}^2$ et $e_{k,l}$ le vecteur $(e_1^{n_1-k} e_2^k) \otimes (\bar{e}_1^{n_2-l} \bar{e}_2^l) \in V_{n_1,n_2}$, de sorte que $\{e_{k,l}, k = 0, \ldots, n_1,\ l = 0, \ldots, n_2\}$ sont une base de V_{n_1,n_2}.

La propriété la plus importante pour nous des V_{n_1,n_2} est le fait qu'ils ont un trou spectral uniforme quand $n_1 \neq n_2$. Le résultat suivant est une conséquence immédiate de [BV, Lemma 4.1].

Proposition 0.23. *Soient $n_1 \neq n_2$ et $V = V_{n_1,n_2}$. Il existe un $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout sous-groupe discret $\Gamma \subset G$, $N = \Gamma \backslash \mathbb{H}^3$, $p = 0,1,2,3$ et $\phi \in L^2\Omega^p(N;V)$ on a :*

$$\langle \Delta^p[N]\phi, \phi \rangle_{L^2\Omega^p(N;V)} \geq \lambda_0 \|\phi\|_{L^2\Omega^p(N;V)}.$$

Bergeron and Venkatesh donnent à cette propriété de la représentation de G sur V le nom de forte acyclicité.

0.3 Variétés hyperboliques de volume fini

Dans cette section on note $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et on fixe comme sous-groupe compact maximal $K = \mathrm{SU}(2)$.

0.3.1 L'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$

Pour un exposé sur le contenu de cette sous-section on réfère à [EGM98, Chapter 1]. L'espace symétrique Riemannien G/K est isométrique à l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$ que l'on identifiera ici au demi-espace $\mathbb{C} \times (0, +\infty)$ muni de la métrique Riemannienne donnée par $\frac{dzd\bar{z}+dy^2}{y^2}$ dans les coordonnées (z, y). Les géodésiques dans ce modèle sont les arcs de cercle orthogonaux à $\mathbb{C} \times \{0\}$ (où l'on considère $\mathbb{C} \times [0, +\infty)$ comme plongé dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$) et les droites verticales. Une géodésique est donc déterminée par deux points dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Pour voir ce fait on fait agir G sur la droite projective complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, ce qui donne une action sur les géodésiques de $\mathbb{H}^3$. Un point $x \in \mathbb{H}^3$ peut être réalisé comme l'intersection de deux géodésiques c_1, c_2 de $\mathbb{H}^3$, et si $g \in G$ on définit $g.x = (g.c_1) \cap (g.c_2)$. Cette définition ne dépend pas du choix de c_1, c_2. Il existe aussi une réalisation de cette action par une formule en coordonnées, cf. [EGM98, Chapter 1, equations (1.9), (1.10)].

0.3.2 Classification des isométries

On rappelle qu'un élément non trivial $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est dit :
- Parabolique ou unipotent si $\operatorname{tr} g = 2$;
- Elliptique si $\operatorname{tr} g \in \mathbb{R}$ et $|\operatorname{tr} g| < 2$;
- Loxodromique dans les cas restants.

Un élément parabolique fixe exactement un point du bord et agit par des translations euclidiennes sur les horosphères issues de ce point.

Un élément elliptique g fixe exactement deux points du bord et la géodésique qui les joint (que l'on appellera son axe). Il agit par rotations euclidiennes sur les horosphères issues de ses points fixes et par rotations hyperboliques sur les hyperplans orthogonaux à son axe. Toutes ces rotations ont le même angle θ, que l'on appellera donc l'angle de g. Si $x \in \mathbb{H}^3$ la distance $d(x, gx)$ ne dépend que de la distance r de x à l'axe de g, on notera $d(x, gx) = \ell_\theta(r)$.

Enfin, un élément loxodromique g fixe exactement deux points du bord ; il agit par translation sur la géodésique qui les joint (que l'on appellera son axe). Il existe un unique élément elliptique h de même axe tel que $gh = hg$ préserve les hyperplans pasant par son axe, sur lesquels il agit comme un élément hyperbolique.

0.3.3 Fonctions hauteurs sur $\mathbb{H}^3$

On rappelle que les sous-groupes $P_\infty, A_\infty, N_\infty$ et M_∞ ont été définis dans la section 0.2.4. On appelle sous-groupe parabolique de G un sous-groupe conjugué à P_∞ (de manière équivalente P est un sous-groupe qui préserve une droite de $\mathbb{C}^2$ et qui est maximal pour cette propriété). Le bord visuel de $\mathbb{H}^3$ est naturellement identifié à $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et il y a alors une bijection entre les sous-groupes paraboliques et les points au bord, qui associe à P la droite de $\mathbb{C}^2$ qu'il préserve (P_∞ est le stabilisateur de la droite verticale).

Soit $P = gP_\infty g^{-1}$ un sous-groupe parabolique, N, A, M les conjugués respectifs de $N_\infty, A_\infty, M_\infty$ par g. On appelle norme sur A toute fonction conjuguée à $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mapsto a^2$. On a la décomposition de Langlands $P = NAM = MAN$ et la décomposition d'Iwasawa $G = NAK$. On appelle alors fonction hauteur sur $\mathbb{H}^3$ en P n'importe quelle fonction de la forme $gK \mapsto |a|$ où $g = nak \in NAK$ et $|.|$ est une norme sur A (un exemple parlant est donné par $P = P_\infty$ pour lequel les fonctions hauteur sont les $(z, y) \mapsto ty$ pour $t \in \mathbb{R}_+^\times$).

Les ensembles de niveau d'une fonction hauteur en P sont appelés horosphères issues de P ; elles sont isométrique au plan Euclidien $\mathbb{C}$ et le sous-groupe N agit simplement transitivement sur chacune d'entre elles. Soit y_P une fonction hauteur en P, d'après ce qui précède on peut

identifier N avec l'horosphère $\{y_P = 1\} \cong \mathbb{C}$ et on note $|n|$ le module d'un élément de N obtenu *via* cette identification. Pour $x \in \mathbb{H}^3$ le quotient $|n|/y_P(x)$ ne dépend pas du choix de y_P. On normalise la mesure de Haar dn sur N pour qu'elle soit le tiré en arrière de la mesure de Lebesgue $dzd\bar{z}/2i$ de $\mathbb{C}$. La forme volume de $\mathbb{H}^3 \cong N \times (0, +\infty)$ est alors égale à $dndy_P/y_P^3$. On a enfin le résultat suivant pour le déplacement des éléments unipotents.

Lemme 0.24. *Il existe une fonction $\ell : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ telle que*

$$d(x, nx) = \ell\left(\frac{|n|}{y_P(x)}\right) \tag{17}$$

pour tout sous-groupe parabolique $P = MAN$, $n \in N$ et $x \in \mathbb{H}^3$. De plus on a $\ell(r) \gg \log(1+r)$.

Démonstration. Il suffit évidemment de démontrer le résultat pour $P = P_\infty$; soit $n = \begin{pmatrix} 1 & z \\ & 1 \end{pmatrix} \in N_\infty$, on normalise la fonction hauteur y_∞ en P_∞ pour que $|n| = |z|$. Soit $x \in \mathbb{H}^3$, $y = y_\infty(x)$. La formule exacte [BP92, Corollaire A.5.8] donne

$$d(x, nx) = 2\left(\log\left(1 + \sqrt{\frac{|n|^2}{|n|^2 + 4y^2}}\right) - \log\left(1 - \sqrt{\frac{|n|^2}{|n|^2 + 4y^2}}\right)\right) \tag{18}$$

et il suit que l'on a bien $d(x, nx) = \ell(|n|/y)$ où l'on a posé

$$\ell(r) = 2\left(\log\left(1 + (1 + (r/2)^{-2})^{-\frac{1}{2}}\right) - \log\left(1 - (1 + (r/2)^{-2})^{-\frac{1}{2}}\right)\right)$$

Il reste à vérifier que $\ell(r) \gg \log(1 + r)$: le premier terme est dans $[0, \log(2)]$. D'autre part on a pour tout $t \in [0, +\infty)$ la minoration évidente $(1 + t^{-2})^{-1/2} \geq (1 + t^{-1})^{-1}$ et il vient

$$-\log(1 - (1 + t^{-2})^{-1/2}) \geq -\log(1 - (1 + t^{-1})^{-1}) = \log(1 + t^{-1}).$$

d'où la conclusion suit immédiatement. □

0.3.4 Fonctions hauteurs sur les variétés hyperboliques

Soit Γ un réseau dans G (i.e. Γ est discret et $\Gamma\backslash G$ a une mesure Borélienne finie qui est G-invariante). Si P est un sous-groupe parabolique on note $\Gamma_P = \Gamma \cap P$ et on dit que P est Γ-rationnel si Γ_P contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^2$ (de manière équivalente, si $\Gamma \cap N$ est cocompact dans N). Alors Γ est cocompact si et seulement si il n'existe aucun parabolique Γ-rationnel (ou encore si Γ ne contient aucun élément unipotent). Dans tous les cas les Γ-classes de conjugaison de paraboliques Γ-rationnels sont en nombre fini. On choisit des représentants $P_1, \ldots, P_h$ de ces classes ; si $y_{P_1}, \ldots, y_{P_h}$ sont des fonctions hauteur en chacun d'entre eux on pose $y_j = \max_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_{P_j}} y_{P_j}(\gamma^{-1}x)$ et on appelle une telle fonction une fonction hauteur Γ-invariante (dont on voit qu'elle est en effet Γ-invariante).

Convention

Si $\Gamma' \subset \Gamma$ est un sous-groupe d'indice fini les fonctions hauteur Γ-invariantes sont aussi des fonctions hauteur Γ'-invariantes. En présence de revêtements finis on supposera donc toujours que les fonctions hauteur sur le revêtement viennent de fonctions hauteur sur la variété revêtue.

0.3.5 Réseaux euclidiens

On munit $\mathbb{C}$ de la structure euclidienne canonique.

Théorèmes de Minkowski

Soit Λ un réseau dans $\mathbb{C}$; on note $\mathrm{vol}(\Lambda)$ son covolume et $\alpha(\Lambda) = \min\{|v|, v \in \Lambda,\ v \neq 0\}$. On rappelle les résultats classiques suivants, dûs à H. Minkowski (cf. par exemple [Sie89]).

Théorème 0.25. ***Premier théorème.*** *Si C est un sous-ensemble convexe compact, $C = -C$ et $\mathrm{vol}\, C \geq 4\,\mathrm{vol}\,\Lambda$ alors il existe un vecteur non-nul dans $C \cap \Lambda$.*

Second théorème. *Il existe des vecteurs $v_1, v_2 \in \Lambda$ linéairement (sur $\mathbb{R}$) indépendants, tels que $|v_1||v_2| \leq \frac{4}{\pi^2}\,\mathrm{vol}\,\Lambda$.*

Ensembles uniformes

Soit Λ un réseau dans $\mathbb{C}$; le premier théorème de Minkowski implique que si $\pi r^2 \geq 4\,\mathrm{vol}(\Lambda)$ alors Λ contient un point de module > 0 et inférieur à r et il suit que $\mathrm{vol}(\Lambda)/\alpha(\Lambda)^2 \geq \pi/4$. On dit qu'un ensemble S de réseaux dans $\mathbb{C}$ est uniforme s'il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\mathrm{vol}(\Lambda) \leq \delta\alpha(\Lambda)^2 \tag{19}$$

Par le critère de Mahler (cf. Wikipedia) ceci est équivalent à la condition que les représentants normalisés des éléments de S forment un sous-ensemble relativement compact de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

On note $\mathcal{N}_\Lambda(r)$ le nombre de points de Λ de module inférieur à r et $\mathcal{N}^*_\Lambda(r) = \mathcal{N}_\Lambda(r) - 1$. L'équivalent et le terme d'erreur pour $\mathcal{N}_\Lambda$ donnés dans le lemme suivant sont dûs à Gauss, comme on en a besoin sous une forme plus précise on en rappelle la preuve.

Lemme 0.26. *Soit S un ensemble uniformes de réseaux dans $\mathbb{C}$, il existe un $C > 0$ tel que pour tout $\Lambda \in S$ on ait*

$$E_\Lambda(r) := |\mathcal{N}^*_\Lambda(r) - \frac{\pi r^2}{\mathrm{vol}(\Lambda)}| \leq C\frac{r}{\alpha(\Lambda)}.$$

Démonstration. On considère d'abord les $r < \alpha(\Lambda)$, pour lesquels on a $\mathcal{N}_\Lambda(r) = 1$ et donc $E_\Lambda(r) = r^2/\,\mathrm{vol}\,\Lambda$. L'uniformité de S implique alors que l'on a $E_\Lambda(r) \ll (r/\alpha(\Lambda))^2 \leq r/\alpha(\Lambda)$ où la constante ne dépend que de S.

On suppose maintenant que $r \geq \alpha(\Lambda)$. Par le second théorème de Minkowski on peut choisir un parallélogramme fondamental Π pour Λ dont le diamètre d est $\asymp \frac{\mathrm{vol}(\Lambda)}{\alpha(\Lambda)}$ (avec des constantes absolues). Soient $z_1, \ldots, z_n$ les points de Λ dont les modules $|z_k| \leq r$, on a alors $B(0, r-d) \subset \bigcup_k z_k + \Pi \subset B(0, r+d)$ de sorte que $\pi(r-d)^2 \leq \mathrm{vol}(\Pi)n \leq \pi(r+d)^2$. Il vient :

$$\left|\mathcal{N}_\Lambda(r) - \frac{\pi r^2}{\mathrm{vol}(\Lambda)}\right| \leq \frac{d^2}{\mathrm{vol}(\Lambda)} + \frac{2rd}{\mathrm{vol}(\Lambda)} \ll \frac{\mathrm{vol}(\Lambda)}{\alpha(\Lambda)^2} + \frac{r}{\alpha(\Lambda)}.$$

Le quotient $\frac{\mathrm{vol}(\Lambda)}{\alpha(\Lambda)^2}$ est majoré par une constante ne dépendant que de S et il suit que le côté droit est $\ll r/\alpha(\Lambda) + 1 \leq 2r/\alpha(\Lambda)$, ce qui finit la preuve de (0.26) dans ce cas. $\square$

0.3.6 Décomposition fine/épaisse et compactification de Borel-Serre

Structure de la partie fine

Le lemme de Margulis (cf. par exemple [BP92, Theorem D.1.1]) affirme qu'il existe une constante $\varepsilon > 0$ (appelée constante de Margulis) telle que si Γ est un sous-groupe discret de G, $x \in \mathbb{H}^3$ et $\Gamma_\varepsilon(x)$ est le groupe engendré par les éléments $\gamma \in \Gamma$ tels que $d(x, \gamma x) \leq \varepsilon$ alors $\Gamma_\varepsilon(x)$ contient un sous-groupe abélien distingué d'indice fini.

On rappelle que les composantes non-compactes de $M_{<\varepsilon} := \Gamma\backslash\{x \in \mathbb{H}^3, \exists \gamma \in \Gamma - \{1_G\}, d(x, \gamma x) < \varepsilon\}$ sont homéomorphes aux quotients $\Gamma_{P_j}\backslash\{y_{P_j} \geq Y_j\}$ où P_j parcourt des représentants des classes de conjugaison des paraboliques Γ-rationnels, y_{P_j} est une fonction hauteur en P_j et Y_j dépend du choix de y_{P_j} (cf. [BP92, Theorem D.3.3]).

Troncation et compactification de Borel-Serre

Soit Γ un réseau de G, que l'on suppose sans torsion, et soit M la variété hyperbolique $\Gamma\backslash\mathbb{H}^3$. Pour $Y \in (0, +\infty)^h$ on pose :

$$M^Y = \{x \in M, \forall j = 1, \ldots, h \text{ on a } y_j(x) \leq Y_j\}. \tag{20}$$

Il suit du paragraphe précédent que pour Y assez grand (dépendant du choix originel des fonctions hauteur y_{P_j}) M^Y est une variété compacte dont le bord est une union de tores plats T_j, $j = 1, \ldots, h$, que l'on identifiera à $\Gamma_{P_j}\backslash N_j$. Les bouts $\{x \in M,\ y_j(x) \geq Y_j\}$ sont isométrique aux produits tordus $T_j \times (Y_j, +\infty)$ munis des métriques $\frac{dx^2 + dy_j^2}{y_j^2}$ où dx^2 est la métrique plate sur T_j. Dans la suite on supposera que les fonctions hauteur sont normalisées de sorte que les applications $\Gamma_{P_j}\backslash\{y_{P_j} \geq 1\} \to M$ soient des plongements.

La "compactification de Borel-Serre" $\overline{M}$ de M est définie comme l'union disjointe $M \sqcup \left(\bigsqcup_j T_j\right)$ munie de la topologie où, pour $x_n \in T_j, x_n \to x$ et $y_n \in [1, +\infty), y_n \to \infty$ on a $(x_n, y_n) \to (x, y)$. C'est une variété compacte dont le bord est $\bigsqcup_j T_j$ et qui est homéomorphe aux M^Y. L'inclusion $M \to \overline{M}$ est une équivalence d'homotopie.

0.3.7 Orbifolds hyperboliques

On ne considèrera ici que des "bons" orbifolds, complets et sans bord, i.e. pour nous un orbifold hyperbolique est l'espace quotient de $\mathbb{H}^3$ par un groupe discret. Par le lemme de Selberg, si M est un orbifold de volume fini (i.e. le groupe est un réseau) il est égal au quotient d'une variété hyperbolique de volume fini par un groupe (fini) d'isométries. Si $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ est un orbifold hyperbolique de volume fini, son lieu singulier est par définition l'ensemble des images dans M des axes des éléments elliptiques de Γ. On va donner une description des images de ces axes dans M (pour une description locale plus poussée on réfère à [BMP03, Chapter 2.1]).

Si $\gamma \in \Gamma$ est elliptique et n'appartient pas à un parabolique Γ-rationnel (i.e. il ne fixe pas un cusp de M) alors son normalisateur $N_\Gamma(\gamma)$ est isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/q$ ou à $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/q) \rtimes (\mathbb{Z}/2)$ où l'élément non-trivial de $\mathbb{Z}/2$ agit par $(x, y) \mapsto (-x, -y)$. Dans les deux cas q est l'ordre maximal d'un élément elliptique de Γ ayant son axe L en commun avec γ qui est alors une puissance de celui-ci et le facteur $\mathbb{Z}$ est engendré par un élément loxodromique $\tau \in \Gamma$ d'axe L ; on note $\ell(\gamma)$ la longueur de translation de τ. Dans le cas où L ne rencontre aucun autre axe d'élément elliptique de Γ le normalisateur est $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/q$ et L se projette sur une courbe fermée dans M. Si L rencontre l'axe d'un elliptique $\eta \in \Gamma$ alors $\eta \in N_\Gamma(\gamma)$ si et seulement s'il est d'ordre 2 et il engendre alors le facteur semi-direct $\mathbb{Z}/2$ de $N_\Gamma(\gamma) = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/q) \rtimes (\mathbb{Z}/2)$; L se projette alors sur un segment.

Si P est un parabolique Γ-rationnel et $\gamma \in P$ alors le normalisateur de γ est $\mathbb{Z}/q$ engendré par un elliptique de même axe que γ d'ordre maximal ou $\mathbb{Z}/q \rtimes \mathbb{Z}/2$ avec le second facteur agissant non-trivialement, engendré par un elliptique d'ordre 2 d'axe orrthogonal à celui de γ. Selon le cas l'axe de γ se projette sur une géodésique bi-infinie entre deux cusps ou une demi-droite issue d'un cusp. Dans les deux cas on note $\ell(\gamma)$ la longueur de la partie de l'axe de γ comprise entre deux horoshères de hauteur 1 (ceci dépend bien sûr du choix des fonction hauteur Γ-invariantes).

On appellera classe cuspidale une Γ-classe de conjugaison dont chaque élément fixe un cusp de M, et classes non-cuspidales les autres classes de conjugaison elliptiques de Γ. Le lieu singulier non-cuspidal est alors l'ensemble des projections des axes des éléments des classes non-cuspidales, de manière équivalente l'ensemble des géodésiques singulières fermées de M.

0.3.8 Comptage

Soit Γ un réseau dans G et M l'orbifold $\Gamma\backslash\mathbb{H}^3$. Si $x \in M$ on définit le rayon d'injectivité de M en x par

$$\ell_x = 2\,\mathrm{inj}_x(M) = \inf\{d(\widetilde{x}, \gamma\widetilde{x}),\ \gamma \in \Gamma - \{1_G\}\}$$

où $\widetilde{x}$ est un relevé de x dans $\mathbb{H}^3$. Si Γ est sans torsion $\ell_x/2$ est égal au rayon d'injectivité riemannien en x. On note Γ_{lox} l'ensemble des éléments loxodromiques de Γ et pour tout $x \in \mathbb{H}^3$ et $r > 0$ on pose

$$\mathcal{N}_\Gamma(x, r) = |\{\gamma \in \Gamma_{\mathrm{lox}},\ d(x, \gamma x) \leq r\}|.$$

L'estimée suivante sur $\mathcal{N}_\Gamma$ est bien connue.

Lemme 0.27. *Il existe une constante absolue $c > 0$ et un $C > 0$ qui ne dépend que de M telles que*

$$\mathcal{N}_\Gamma(x, r) \leq Ce^{cr}.$$

Démonstration. Soit $r > 0$, $x \in \mathbb{H}^3$ et $\ell_0 = \frac{1}{2}\min_{\gamma\in\Gamma_{\mathrm{lox}}} d(x, \gamma x) > 0$. Alors les boules ouvertes $B_{\mathbb{H}^3}(\gamma x, \ell_0)$ sont disjointes pour $\gamma \in \Gamma_{\mathrm{lox}}$ et il suit que

$$\mathrm{vol}\, B_{\mathbb{H}^3}(x, r + \ell_0) \geq \mathcal{N}(x, r)\,\mathrm{vol}(B(x, \ell_0)).$$

Il existe par ailleurs des constantes $c, C', C'' > 0$ telles que l'on ait les bornes $C''e^{cs} \leq \mathrm{vol}\, B_{\mathbb{H}^3}(x, s) \leq C'e^{cs}$ pour le volume d'une boule de rayon s dans $\mathbb{H}^3$. Il vient alors

$$\mathcal{N}(x, r) \leq \frac{C'e^{c(r+\ell_0)}}{C''e^{c\ell_0}} \leq Ce^{cr}$$

où l'on a posé $C = C'/C''e^{-c\ell_0^2}$. □

Lemme 0.28. *Pour tout $x \in \mathbb{H}^3$ il existe une constante C_x dépendant du rayon d'injectivité de M en x et du lieu singulier de M telle que*

$$|\{\gamma \in \Gamma,\ d(x, \gamma x) \leq r\}| \leq C_x e^{cr}.$$

Démonstration. Dans le cas où Γ est sans torsion cette majoration se prouve de la même manière que le lemme 0.27 en remplaçant ℓ_0 par le rayon d'injectivité ℓ_x en x. Sinon on choisit un sous-groupe d'indice fini sans torsion $\Gamma' \subset \Gamma$ et on peut alors conclure en utilisant la majoration suivante.

$$|\{\gamma \in \Gamma,\ d(x, \gamma x) \leq r\}| \leq [\Gamma : \Gamma']|\{\gamma \in \Gamma',\ d(x, \gamma x) \leq 2r\}| \qquad \leq C_x e^{2cr}.$$

Pour démontrer cette dernière on observe que si $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ vérifient $d(x, \gamma_i x) \leq R$ et $\gamma_1^{-1}\gamma_2 = \gamma \in \Gamma'$ il vient $d(x, \gamma x) \leq 2R$. □

0.4 Noyau de la chaleur

0.4.1 Généralités

Soit X une variété Riemannienne (sans bord) de dimension d, E un fibré euclidien plat sur X ; les espaces de formes à coefficients dans X sont alors munis d'un laplacien de Hodge $\Delta^p[X]$ qui sétend en un opérateur essentiellement auto-adjoint sur les espaces $L^2\Omega^p(X;E)$ de formes de carréintégrable. Une solution fondamentale à l'équation de la chaleur sur X est une fonction lisse H sur $(0,+\infty)\times X\times X$ à valeurs dans le fibré $E^*\otimes E$ sur $X\times X$ (i.e. $H_t(x,y)\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E_x,E_y)$) qui soit symétrique (i.e. $H_t(x,y)$est l'adjoint de $H_t(y,x)$), qui vérifie l'équation de la chaleur en la seconde variable :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta^p[X]_y\right)H_t(x,y)=0$$

et telle que $H_t(x,.)$ converge, dans l'espace des distributions sur X à coefficients dans E, vers la masse de Dirac en x quand $t\to 0$.

Dans le cas où X a un quotient compact et E est trivial il est bien connu qu'une telle solution fondamentale est unique et vérifie les propriétés suivantes (cf. [Don79]).

(i) Pour tout $t_0>0$ il existe une constante $C>0$ telle que

$$0\leq H_t(x,y)\leq Ct^{-\frac{d}{2}}e^{-\frac{d_X(x,y)^2}{5t}} \tag{21}$$

pour tous $t\in(0,t_0)$ et $x,y\in X$.

(ii) Il existe des fonctions $u_l\in C^\infty(X\times X), l\geq 0$ qui ne dépendent que de la géométrie locale de X et telles que pour tout $m\geq 0$ on ait

$$H_t(x,y)\underset{t\to 0}{=}\sum_{l=0}^{m+d}u_l(x,y)t^{l-\frac{d}{2}}e^{-\frac{d_X(x,y)^2}{4t}}+O(t^{m+1-\frac{d}{2}}). \tag{22}$$

0.4.2 L'espace hyperbolique

Le noyau automorphe $k_{\phi,p}$ sur $\mathbb{H}^3$ associé à la fonction $\phi(\lambda)=e^{-t\lambda}$ est appelé noyau de la chaleur de $\mathbb{H}^3$. Il possède les mêmes asymptotiques que pour des coefficients triviaux :

- Pour tout $t_0>0$ il existe une constante C telle que pour tous $x,y\in\mathbb{H}^3$ et $t\in(0,t_0)$ on ait
$$e^{-t\Delta[\mathbb{H}^3]}(x,y)\leq Ct^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{d(x,y)^2}{5t}}. \tag{23}$$
- Il existe des fonctions $\alpha_k^p\in C^\infty(G\times\mathbb{H}^3,\mathrm{End}(\wedge^p\mathfrak{p}\otimes V))$ telles que pour tout $x\in\mathbb{H}^3$ on ait en $t\to 0$ le développement asymptotique suivant :
$$g^*e^{-t\Delta^p[\mathbb{H}^3]}(x,gx)=\sum_{k=-3}^{m}\alpha_k^p(g,x)e^{-\frac{d(x,gx)^2}{4t}}t^{\frac{k}{2}}+O(t^{\frac{m+1}{2}}). \tag{24}$$
On a de plus $\alpha_k^p(hgh^{-1},hx)=\alpha_k^p(g,x)$ pour tous $x\in\mathbb{H}^3$, $g,h\in G$.

On va déduire ces propriétés de celles du noyau de la chaleur sur G en suivant la preuve de [BV][Lemme 3.8]. On munit G de l'unique métrique Riemannienne G-invariante à gauche et K-invariante à droite qui induise la métrique utilisée sur $\mathfrak{p}\subset T_{1_G}G$. Le noyau de la chaleur de G (à coefficients triviaux) est alors donné par $H_t(g,h)=p_t(g^{-1}h)$ qui vérifie $p_t(kgk^{-1})=p_t(g)$. Soit $W=V\otimes\wedge^p\mathfrak{p}^*$, on note σ l'action à droite de K sur W, Ω_K le Casimir de K. Alors $\sigma(\Omega_K)$ est défini positif et si $O\in\mathbb{H}^3$ est le point fixe de K on a (cf. par exemple [BV, (3.8.1)]) :

$$e^{-t\Delta^p[\mathbb{H}^3]}(O,gO)=\int_{K\times K}p_t(k_1^{-1}gk_2^{-1})\sigma(k_1e^{2t\Omega_K}k_2)dk_1dk_2.$$

On voit ainsi que (23) est une conséquence directe de (21). On va expliquer comment (24) suit de (22). Après avoir écrit (22) pour p_t sous la forme

$$p_t(1,g) = \sum_{l=-6}^{m} a_l(g) e^{-d_G(1,g)^2/4t} t^{l/2} + O(t^{\frac{m+1}{2}}),$$

développé en série l'exponentielle $e^{2t\Omega_K}$ il reste à montrer que pour tout l,

$$\int_{K\times K} a_k(k_1^{-1}gk_2^{-1}) e^{-d(1,k_1^{-1}gk_2^{-1})^2/4t} \sigma(k_1\Omega_K k_2) dk_1 dk_2 = \int_K a_l(k^{-1}g) e^{-d(1,k^{-1}g)^2/4t} \sigma(k\Omega_K) dk$$

a un développement asymptotique de la forme souhaitée. On va supposer que $d_G(1,g) = d_{\mathbb{H}^3}(O, gO)$ (si ce n'est pas le cas on s'y ramène par un changement de variable dans K). On peut alors se limiter à considérer l'intégrale sur un petit voisinage 1_G dans K, sur lequel on passe en coordonnées linéaires. On écrit alors (dans ces coordonnées) le développement de Taylor de $d_G(1,k^{-1}g)^2$, un changement de variable $v \mapsto t^{-\frac{1}{2}}v$ rend alors l'intégrande indépendante de t et multiplie l'intégrale par $t^{\dim K} = t^3$, ce qui donne le développement voulu, avec le bon exposant.

On notera aussi $e^{-t\Delta^p[M]}(.,.)$ le noyau automorphe $K^{\Gamma}_{\phi,p}$ associé à $\phi(u) = e^{-tu}$. Par unicité des solutions à l'équation de la chaleur c'est la solution fondamentale sur M à coefficients dans E_ρ.

0.4.3 Variétés à bord

Généralités

Soit X une 3-variété Riemanienne compacte à bord et V un fibré vectoriel sur X muni d'une métrique Euclidienne. L'espace $\Omega^p(M;V)$ des p-formes lisses sur X à coefficients dans V est muni d'un Laplacien de Hodge $\Delta^p[X]$. La restriction de $\Delta^p[X]$ aux formes f satisfaisant des conditions absolues au bord (i.e. les restrictions à ∂X de $*f$ et $*df$ sont nulles) admet une extension essentiellement autoadjointe Δ_{abs} à l'espace $L^2\Omega^p(X;V)$ des p-formes de carré intégrable. On peut ainsi former l'opérateur $e^{-t\Delta^p_{\text{abs}}[X]}$ qui est alors donné par la convolution avec un noyau lisse $e^{-t\Delta^p_{\text{abs}}[X]}(.,.)$.

Il existe aussi une extension essentiellement auto-adjointe de $\Delta^p[X]$ restreint aux formes satisfaisant des conditions relatives (i.e. $*f$ satisfait des conditions absolues), qui a les mêmes propriétés et que l'on notera $\Delta^p_{\text{rel}}[X]$.

Variétés hyperboliques tronquées

Soit $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ une variété hyperbolique complète de volume fini, $y_1, \ldots, y_h$ des fonctions hauteur Γ-invariantes. Pour $Y \in [1,+\infty)^h$ le sous-ensemble de $\mathbb{H}^3$ donné par

$$\widetilde{M^Y} = \{x \in \mathbb{H}^3, \forall j = 1,\ldots,h : y_j(x) \leq Y_j\}$$

est le revêtement universel de M^Y. Une p-forme $f \in \Omega^p(M^Y;V)$ satisfait à des conditions relatives au bord si et seulement si pour tout j et tout $x \in M^Y$ tel que $y_j(x) = 0$ on a $(f \wedge dy_j)(x) = 0 = (*d*f \wedge dy_j)(x)$.

On note $e^{-t\Delta^p_{\text{abs}}[M^Y]}(x,y)$ (resp. $e^{-t\Delta^p_{\text{abs}}[\widetilde{M^Y}]}(x,\gamma y)$) la solution fondamentale à l'équation de la chaleur sur M^Y (resp. $\widetilde{M^Y}$), on a alors le développement en série absolument convergente suivant :

$$e^{-t\Delta^p_{\text{abs}}[M^Y]}(x,y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma^* e^{-t\Delta^p_{\text{abs}}[\widetilde{M^Y}]}(x,\gamma y). \tag{25}$$

On a également des bornes euclidiennes pour le noyau de la chaleur des $\widetilde{M}^Y$: pour tout $t_0 > 0$, il existe une constante $C > 0$ ne dépendant pas de $Y \in [1, +\infty)^h$ telle que pour tout $t \in (0, t_0]$ l'on ait

$$e^{-t\Delta^p_{\text{abs}}[\widetilde{M}^Y]}(x, y) \leq C_1 t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{d(x,y)^2}{5t}}. \tag{26}$$

Cette estimée peut se déduire de la preuve du lemme 5.12 et du corollaire 5.14 de [RS71] (qui ne traitent que des coefficients orthogonaux) vu que l'on a une estimée de cette forme pour $e^{-t\Delta^p[\mathbb{H}^3]}$ et que la construction que les auteurs donnent du noyau de la chaleur reste valable pour des coefficients plus généraux.

Les noyaux de la chaleur avec conditions relatives $e^{-t\Delta^p_{\text{rel}}[\widetilde{M}^Y]}$ vérifient les mêmes propriétés.

0.5 Théorie algébrique des nombres

Pour toute cette section on réfère le lecteur à [MR03, Chapter 0] où à [Nar04] pour un exposé plus complet.

Soit d un entier sans facteur carré et $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-d}) \subset \mathbb{C}$ le corps de nombre quadratique imaginaire associé. On note $\mathcal{O}_F$ son anneau d'entiers. On rappelle que $\mathcal{O}_F$ est l'ensemble des éléments de F dont le polynôme minimal est à coefficients entiers, dans le cas d'un corps quadratique on voit facilement que :

$$\mathcal{O}_F = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{d}], \text{ si } d = 2, 3 \pmod 4 \\ \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}] \text{ si } d = 1 \pmod 4. \end{cases}$$

Si $\mathfrak{I}$ est un idéal de $\mathcal{O}_F$ on note $|\mathfrak{I}|$ sa norme (i.e. le cardinal de $\mathcal{O}_F/\mathfrak{I}$). On rappelle que tout idéal admet une unique factorisation

$$\mathfrak{I} = \prod_{k=1}^{r} \mathfrak{P}_k^{l_k}$$

où $l_k \geq 1$ et les $\mathfrak{P}_k$ sont des idéaux premiers. Le groupe de classes $C(F)$ de F est le groupe abélien (noté multiplicativement) engendré par les idéaux premiers $\mathfrak{P}$ de $\mathcal{O}_F$ avec les relations $\prod_{k=1}^{r} \mathfrak{P}_k^{l_k} = 1$ si $\prod_{k=1}^{r} \mathfrak{P}_k^{l_k}$ est un idéal principal. C'est un groupe fini et on notera h_F son cardinal.

0.5.1 Complétions et adèles

Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier ; pour $a \in \mathcal{O}_F$ on écrit $(a) = \mathfrak{P}^k \mathfrak{I}$ où $\mathfrak{I}$ n'est pas divisible par $\mathfrak{P}$ et on pose

$$|a|_{\mathfrak{P}} = |\mathfrak{P}|^{-k}.$$

Pour $x \in F^\times$ on écrit $x = a/b$, $a, b \in \mathcal{O}_F$ et on pose $|x|_{\mathfrak{P}} = |a|_{\mathfrak{P}}/|b|_{\mathfrak{P}}$. Il est alors facile de vérifier que $|.|_{\mathfrak{P}}$ est une valuation sur F. Si v est une telle valuation on notera $v \not| \infty$ (ces valuations sont appelés les "valuations non archimédiennes" de F, ou encore ses "places finies").

Si $v \not| \infty$ on note F_v le complété de F en v et $\mathcal{O}_v$ son anneau des entiers (l'adhérence de $\mathcal{O}_F$ dans F_v, ou encore l'ensemble des éléments de valuation ≤ 1) qui est alors un voisinnage compact-ouvert de 0. On note encore $\mathcal{O}_v^\times$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{O}_v$, i.e. l'ensemble des éléments de F_v de valuation égale à 1. On choisit une uniformisante π_v pour $\mathcal{O}_v$, i.e. π_v est un élément de valuation < 1 maximale. On a alors $F_v^\times = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \pi_v^k \mathcal{O}_v^\times$. On notera $|x|_v$ plutôt que $v(x)$ la valuation de $x \in F_v$ et si $\mathfrak{P}_v$ est l'idéal premier de $\mathcal{O}_F$ associé à v on note v

$$q_v := |\mathfrak{P}_v| = |\mathcal{O}_v/\pi_v \mathcal{O}_v|$$

de sorte que pour $x = \pi_v^k u, u \in \mathcal{O}_v^\times$ on a $|x|_v = q_v^{-k}$. Enfin, on note $|.|_\infty$ le carré de la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{C}$, de sorte que pour $x \in F$ on ait $|x|_\infty \prod_{v \not| \infty} |x|_v = 1$.

Soit $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F, i.e. le sous-anneau

$$\{x \in \prod_v F_v,\ x \in \mathcal{O}_v \text{ pour presque toute } v \not| \infty\}$$

et $\mathbb{A}_f = \mathbb{A} \cap \prod_{v \not| \infty} F_v$. On munit $\mathbb{A}$ de la valuation $|x| = \prod_v |x_v|_v$. On note $\mathbb{A}^\times$ l'ensemble des adèles inversibles, i.e.

$$\mathbb{A}^\times = \{x \in \mathbb{A},\ x_v \in \mathcal{O}_v^\times \text{ pour presque toute } v \not| \infty\} = \{x \in \mathbb{A}, |x| \neq 0\}$$

et enfin $\mathbb{A}^1 = \{a \in \mathbb{A}^\times, |a| = 1\}$. Le quotient $F^\times \backslash \mathbb{A}^1$ est compact.

Enfin, l'application

$$\mathbb{A}_f^\times \ni x = \prod_{v \not| \infty} u_v \pi_v^{k_v} \mapsto \prod \mathfrak{P}_v^{k_v}$$

induit un isomorphisme $F^\times \backslash \mathbb{A}_f^\times / \prod_{v \not| \infty} \mathcal{O}_v^\times \cong C(F)$. Comme l'espace à droite est un quotient de $F^\times \backslash \mathbb{A}^1 / \prod_{v \not| \infty} \mathcal{O}_v^\times$ et donc compact on retrouve ainsi la finitude de $C(F)$.

0.5.2 Mesures de Haar, dualité et la "thèse de Tate"

On réfère à [Bum97, Chapter 3.1] ou [MR03, Chapter 7] pour le contenu de cette sous-section.

Soit $v \not| \infty$. On normalise la mesure de Haar additive dx_v de F_v pour que $\int_{\mathcal{O}_v} dx_v = |d|_v^{\frac{1}{2}}/2$ si $d = 1 \pmod 4$ et $\mathfrak{P}_v | 2$ et $\int_{\mathcal{O}_v} dx_v = |d|_v^{\frac{1}{2}}$ sinon. On prend pour mesure de Haar multiplicative $d^\times x_v = (1 - q_v^{-1}) \frac{dx_v}{|x_v|}$.

Pour tout $x \in F_v$ il existe un $x_1 \in F$ et un $x_2 \in \mathcal{O}_F$ tels que l'on ait $x = x_1 + x_2$, on pose alors

$$e_v(x) = e^{2i\pi(x_1 + \overline{x}_1)}$$

qui est bien défini vu que x_1 est bien défini modulo $\mathcal{O}_F$ et est un morphisme continu $F_v \to \mathbb{C}^\times$. On définit la transformée de Fourier d'une fonction f sur F_v continue (i.e. localement constante) et à support compact par

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{f_v} e_v(\xi x) f(x) dx_v,$$

on a alors la "formule d'inversion" $\hat{\hat{f}} = f$.

De même, on note $C_c^\infty(\mathbb{A}^2)$ l'espace engendré par les fonctions $\prod f_v$ où $f_\infty \in C_c^\infty(\mathbb{C}^2)$ et pour toute place finie v, f_v est localement constante et à support compact. Si $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{A}^2)$, on définit sa transformée de Fourier par :

$$\widehat{\psi}(y) = \int_{\mathbb{A}^2} \psi(x) e(x_1 y_2 - x_2 y_1) dx$$

où $e = \prod_v e_v$. On a la formule d'inversion de Fourier $\hat{\hat{f}} = f$, et la formule sommatoire de Poisson :

$$\sum_{x \in F^2} \psi(ax) = \frac{1}{|a|^2} \sum_{x \in F^2} \widehat{\psi}(a^{-1}x). \tag{27}$$

0.5.3 Caractères de Hecke et fonctions L

Un caractère de Hecke est un morphisme continu de $F^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ dans $\mathbb{C}^\times$, il est de la forme $\chi = \chi_\infty \prod_{v\nmid\infty} \chi_v$. On ne s'intéressera ici qu'aux caractères tels que χ_∞ soit trivial sur $\mathbb{R}_+^\times \subset F_\infty^\times$, il est alors de la forme $\chi_\infty(z) = (z/\sqrt{|z|})^k =: \chi_k(z)$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.

D'autre part, la continuité de χ implique que pour toute place $v \nmid \infty$ on ait un plus petit entier $k_v \geq 0$ tel que χ_v soit trivial sur $1 + \pi_v^{k_v}\mathcal{O}_v$ et que presque tous ces entiers soient nuls ; on dit que χ ramifie en v si $k_v > 0$. Le conducteur de χ est alors l'idéal $\prod_{v\nmid\infty} \mathfrak{P}^{k_v}$, noté $\mathfrak{f}_\chi$. Si χ est non-ramifié en v alors $\chi(\pi_v)$ ne dépend pas du choix de l'uniformisante π_v et on peut donc poser $\chi(\mathfrak{P}_v) = \chi(\pi_v)$. On voit donc que χ définit une fonction sur les idéaux premiers à $\mathfrak{f}_\chi$ que l'on notera encore χ.

La fonction L de Hecke associée à un caractère de Hecke χ est définie pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ par :

$$L(\chi, s) = \sum_{(\mathfrak{f}_\chi,\mathfrak{I})=1} \frac{\chi(\mathfrak{I})}{|\mathfrak{I}|^s}$$

et prolongée méromorphiquement (elle est entière si $\chi_f \neq 1$) au plan complexe [Bum97, Theorem 1.7.2]. On a aussi l'expression en produit Eulérien :

$$L(\chi, s) = \prod_{(\mathfrak{P}_v,\mathfrak{f}_\chi)=1} (1 - \chi(\pi_v)q_v^{-s})^{-1} = \prod_{(\mathfrak{P}_v,\mathfrak{f}_\chi)=1} (1 - q_v)^{-1} \int_{\mathcal{O}_v} |x|^s \chi(x) \frac{dx}{|x|_v}. \tag{28}$$

qui est elle aussi convergente si $\mathrm{Re}(s) > 1$ (les facteurs locaux convergent pour $\mathrm{Re}(x) > 0$). L'équation fonctionnelle de Hecke pour $L(\chi, .)$ (cf. [Bum97, Theorem 1.7.2] ou [Nar04, Corollary 1 on page 338]) est la suivante :

$$L(\chi, 1 - s) = \gamma(s) L(\overline{\chi}, s) \tag{29}$$

où :

$$\gamma(s) = W(\chi) c_\infty(s) \frac{\Gamma(s + \frac{k}{2})}{\Gamma(1 - s + \frac{k}{2})} |\mathfrak{f}_\chi|^{s-\frac{1}{2}},$$

$W(\chi)$ est une constante qui ne dépend que de χ telle que $|W(\chi)| = 1$, $c_\infty(s)$ est une fonction entière en s qui ne dépend que du corps F et $\chi_\infty = \chi_k$.

Chapitre 1

Invariants ℓ^2 et approximation dans le cadre combinatoire

Dans ce chapitre on rappelle la définition des invariants ℓ^2 combinatoires (nombres de Betti et torsions) des revêtements infinis en suivant le livre de W. Lück [Lüc02]. Dans le cas des groupes résolubles on les relie à des invariants algébriques plus classiques (dimension de Ore et torsion de Reidemeister) dans le lemme 1.3 et la proposition 1.7. Dans le cas de revêtements abéliens libres on calcule explicitement la torsion ℓ^2 à partir des mesures de Mahler des polynômes d'Alexander (Corollaire 1.8 et Proposition 1.11), généralisant les résultat de [LZ06],[Lüc94b]. Dans ce même cadre on montre enfin que la torsion ℓ^2 est la limite de torsions de Reidemeister (normalisées) de revêtements finis (Proposition 1.13).

1.1 Invariants ℓ^2 et invariants classiques

Dans toute cette section Γ est un groupe sans torsion résoluble *.

1.1.1 Localisation de Ore

On sait (cf. [DLM+03, Theorem 1.3, Theorem 6.4]) que l'anneau $R = \mathbb{Z}[\Gamma]$ satisfait la condition de Ore à gauche :

$$\forall a \in R,\ \forall b \in R - \{0\},\ \exists a' \in R, \exists b' \in R - \{0\} \text{ tels que } b'a = a'b.$$

On remarque que $\mathbb{Z}[\Gamma]$ satisfait aussi à la condition de Ore à droite (vu que l'involution $g \in \Gamma \mapsto g^{-1}$ inverse les produits). Il existe alors un corps de quotients $\mathbb{Q}(\Gamma)$ pour $\mathbb{Z}[\Gamma]$ défini comme suit : il est composé des éléments de la forme $b^{-1}a$ pour $b \in R - \{0\}, a \in R$ modulo les relations évidentes $(cb)^{-1}(ca) = b^{-1}a$ pour tout $c \in R - \{0\}$, l'addition est définie par

$$b^{-1}a + d^{-1}c = e^{-1}(a' + c') \text{ où } e = d'b = b'd,\ c' = b'c \text{ et } a' = d'a$$

et la multiplication par

$$(b^{-1}a)(d^{-1}c) = (d'b)^{-1}(a'c) \text{ où } a'd = d'a.$$

On aura besoin plus loin du lemme suivant :

*. Diverses conjectures sur les anneaux de groupes impliquent que les résultats de cette section sont valables pour tout groupe moyennable de type fini sans torsion.

Lemme 1.1. *Si $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{Q}(\Gamma)$ il existe un $a \in R - \{0\}$ (resp. $b \in R - \{0\}$) tel que $af_1, \dots, af_n \in R$ (resp. $f_1 b, \dots, f_n b \in R$).*

Démonstration. On écrit $f_j = c_j^{-1} b_j$. Pour $a \in R$ il existe a'_j, c'_j tels que $c'_j a = a'_j c_j$, et il vient alors $af_j = (c'_j)^{-1}(a'_j b)$. Si $a = ec_j$ pour un $e \in R$ il vient $c'_j e = a'_j$ vu que R est intègre et il suit que $af_j = eb \in R$. On voit ainsi que si $a \in \bigcap_j Rc_j$ il satisfait bien $af_j \in R$ pour tout j. Il reste à voir que l'intersection $\bigcap_j Rc_j$ est non nulle, ce qui suit immédiatement du fait que $\mathbb{Q}(\Gamma)$ satisfait aussi à la condition de Ore à droite. La preuve du second point est similaire. □

Il est bien connu (cf. par exemple [Lüc02, Lemme 8.15]) que $\mathbb{Q}(\Gamma)$ est plat sur $\mathbb{Z}[\Gamma]$. Le rang $\mathrm{rg}(M)$ d'un $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module M est par définition la dimension du $\mathbb{Q}(\Gamma)$-espace vectoriel $M \otimes \mathbb{Q}(\Gamma)$. On utilisera systématiquement dans la suite les faits suivants.

Lemme 1.2. *Soit M un R-module de type fini de rang r. Il existe un plongement $i : M \to R^r$, et si M est sans torsion il existe aussi un plongement $i' : R^r \to M$. Les quotients $M/\operatorname{im}(i)$ et $R^r/\operatorname{im}(i')$ sont alors des R-modules de torsion.*

Démonstration. Soit $x_1, \dots, x_r$ une base de l'espace vectoriel $\mathbb{Q}(\Gamma) \otimes M$ telle que $x_k \in M$ pour $k = 1, \dots, r$. Alors le $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module L engendré par $x_1, \dots, x_r$ est un sous-module libre de rang r de M. Si M est sans torsion il est plongé dans $\mathbb{Q}(\Gamma) \otimes M$. Par le lemme 1.1 il existe alors un $f \in \mathbb{Z}[\Gamma]$ tel que $fM \subset L$, ce qui donne le plongement souhaité de M dans un module libre. Il suit aussi que f annihile M/L et L/fM, d'où la seconde partie suit. □

1.1.2 Dimension de von Neumann et nombres de Betti ℓ^2

On définit un Γ-module de Hilbert de type fini comme un espace de Hilbert H muni d'une action unitaire de Γ et d'une surjection Γ-équivariante $\ell^2(\Gamma)^n \to H$ pour un entier n †. Si $M \subset \mathbb{Z}[\Gamma]^n$ est un sous-module l'adhérence de $M \otimes \mathbb{C}$ est un Γ-sous-module de Hilbert de $\ell^2(\Gamma)^n$ et en particulier c'est un Γ-module de Hilbert de type fini. La dimension de von Neumann d'un Γ-module unitaire de type fini est définie pour n'importe quel groupe discret Γ ([Lüc02, Definition 1.10]) et associe à un tel module M un nombre réel $\dim_\Gamma(M)$ défini comme suit. La trace de von Neumann d'une application Γ-équivariante $\phi : \ell^2(\Gamma)^n \to \ell^2(\Gamma)^n$ est définie comme $\operatorname{tr}_\Gamma \phi = \sum_{i=1}^n \langle \phi e_i, e_i \rangle$ où les e_i sont les vecteurs d'une Γ-base hilbertienne ‡. Cette définition ne dépend pas du choix de la base (e_i). Si M est un Γ-module de Hilbert de type fini on choisit une surjection Γ-équivariante $\overline{\pi} : \ell^2(\Gamma) \to M$. Soit π le projecteur orthogonal sur $(\ker \overline{\pi})^\perp$; c'est un endomorphisme Γ-équivariant de $\ell^2(\Gamma)^n$ (vu que $\ker \overline{\pi}$ et donc aussi son orthogonal sont des sous-Γ-modules) et on pose alors

$$\dim_\Gamma(M) = \operatorname{tr}_\Gamma(\pi).$$

Cette définition ne dépend pas du choix de $\overline{\pi}$. La fonction $\dim_\Gamma$ satisfait aux mêmes propriétés de base que la dimension des espaces vectoriels (cf. [Lüc02, Theorem 1.12]), mais peut prendre des valeurs non entières (pour des Γ-modules de Hilbert ne provenant pas de $\mathbb{C}[\Gamma]$-modules). Dans le cas où $\mathbb{Z}[\Gamma]$ possède une localisation de Ore la dimension de von Neumann coïncide en fait avec le rang.

Lemme 1.3. *Soit M un sous-module de $\mathbb{C}[\Gamma]^n$; alors la dimension de von Neumann de son adhérence dans $\ell^2(\Gamma)^n$ est égale à son rang.*

†. Cette terminologie n'est pas standard, dans le livre de Lück ces modules sont appelés $\mathcal{N}(\Gamma)$-modules de Hilbert. On n'a pas voulu introduire ici l'algèbre de von Neumann $\mathcal{N}(\Gamma)$ et on se reposera donc uniquement sur les propriétés démontrées dans cette référence.

‡. i.e. les γe_i pour $i = 1, \dots, n$ et $\gamma \in \Gamma$ sont deux à deux orthogonaux et engendrent un sous-espace dense de $\ell^2(\Gamma)^n$.

Démonstration. On commence par se ramener au cas d'un module libre : soit $L \subset M$ de même rang r (cf. Lemme 1.2). On va montrer que L est dense dans M : comme M/L est de torsion, pour tout $x \in M$ l'intersection $\mathbb{C}[\Gamma]x \cap L$ est non nulle et égale à Ix pour un idéal à gauche non nul I de $\mathbb{C}[\Gamma]$. Il suffit donc de montrer que tout tel idéal I de $\mathbb{C}[\Gamma]$ est dense. Soit $f \in I - \{0\}$; on a alors $I \supset Rf$ et par [Lüc02, Lemme 1.14] on sait que Rf est dense dans $\mathbb{C}[\Gamma]$, ce qui termine la preuve.

L'adhérence de M dans $\ell^2(\Gamma)^n$ est donc égale à celle de L. D'autre part le plongement $\mathbb{C}[\Gamma]^r \to \mathbb{C}[\Gamma]^n$ est continu et se prolonge donc en un plongement $\ell^2(\Gamma)^r \to \ell^2(\Gamma)^n$ dont l'image est l'adhérence de L. On a donc finalement $\dim_\Gamma M = \dim_\Gamma \ell^2(\Gamma)^r$ et on a vu que cette dernière est égale à r. □

De la même manière, si on a un complexe de $\mathbb{Z}[\Gamma]$-modules libres de type fini C_*, d_* on définit son homologie ℓ^2 réduite de la manière suivante : les $C_p \otimes \mathbb{C}$ peuvent être munis d'une métrique préhilbertienne Γ-invariante (on choisit comme base orthonormée une $\mathbb{Z}[\Gamma]$-base et les translatés sous Γ de ses vecteurs), on note $C_p^{(2)}$ le complété de $C_p \otimes \mathbb{C}$ qui est alors un Γ-module de Hilbert de type fini. Les différentielles d_p se prolongent en des opérateurs bornés $d_p^{(2)}$ de $C_p^{(2)}$ vers $C_{p-1}^{(2)}$. On pose alors

$$H_p^{(2)}(C) = \ker(d_p^{(2)})/\overline{\mathrm{im}(d_{p+1}^{(2)})}, \quad b_p^{(2)} = \dim_\Gamma H_p^{(2)}(C).$$

Il suit immédiatement du lemme 1.3 et de la platitude de $\mathbb{Q}(\Gamma)$ sur $\mathbb{Z}[\Gamma]$ que $b_p^{(2)}(C) = \mathrm{rg}(H_p(C))$ (voir aussi [Lüc02, Lemma 1.34]). Ainsi le complexe C_* est ℓ^2-acyclique si et seulement si tous les $H_p(C)$ sont de torsion sur $\mathbb{Z}[\Gamma]$.

1.1.3 Déterminant de Fuglede-Kadison

Le déterminant de Fuglede-Kadison $\mathrm{dét}_\Gamma \phi$ d'un morphisme ϕ entre Γ-modules de Hilbert est défini dans [Lüc02, Definition 3.11]. Nous n'en aurons besoin ici que pour des morphismes induits par des applications linéaires entre des $\mathbb{Z}[\Gamma]$-modules libres. Soit A une matrice de taille $(n \times n')$ à coefficients dans $\mathbb{Z}[\Gamma]$, on continue à noter A l'opérateur borné de $\ell^2(\Gamma)^{n'}$ vers $\ell^2(\Gamma)^n$ induit par A et par $\mathrm{dét}_\Gamma(A)$ son déterminant de Fuglede-Kadison. Les propriétés du déterminant de Fuglede-Kadison que l'on utilisera dans la suite sont :

(i) ([Lüc02, Theorem 3.14(1)]) Si $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$, f a une image dense et g est injective on a

$$\mathrm{dét}_\Gamma(g \circ f) = \mathrm{dét}_\Gamma(f)\mathrm{dét}_\Gamma(g).$$

(ii) ([Lüc02, Theorem 3.14(2)]) Si f_1 est d'image dense et f_2 est injective on a

$$\mathrm{dét}_\Gamma \begin{pmatrix} f_1 & f_3 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix} = \mathrm{dét}_\Gamma(f_1)\mathrm{dét}_\Gamma(f_2).$$

(iii) ([Lüc02, Lemma 3.15(3)]) On a

$$\mathrm{dét}_\Gamma(f|_{\ker(f)^\perp}^{\overline{\mathrm{im}(f)}}) = \mathrm{dét}_\Gamma(f)$$

(iv) ([Lüc02, Lemma 3.15(4)]) soit f^* l'adjoint de f, on a :

$$\mathrm{dét}_\Gamma(f^*) = \mathrm{dét}_\Gamma(f) = \sqrt{\mathrm{dét}_\Gamma(ff^*)}.$$

Les groupes résolubles satisfont la Conjecture du Déterminant de Lück [Lüc02, Conjecture 13.2], en particulier toute matrice sur $\mathbb{Z}[\Gamma]$ a un déterminant de Fuglede-Kadison non nul. On obtient ainsi une application $\mathrm{dét}_\Gamma$ de $\mathbb{Z}[\Gamma] - \{0\}$ vers $\mathbb{R}_+^\times$. On note $\mathbb{Q}(\Gamma)^{\mathrm{ab}}$ l'abélianisé du groupe multiplicatif de $\mathbb{Q}(\Gamma)$. Le résultat suivant peut alors s'obtenir comme une conséquence de la propriété universelle de la localisation de Ore.

Lemme 1.4. *L'application* $g^{-1}f \mapsto \text{dét}_\Gamma(g)^{-1}\text{dét}_\Gamma(f)$ *est bien définie et est un morphisme de groupes* $\mathbb{Q}(\Gamma) \to \mathbb{R}_+^\times$. *Il descend en un morphisme* $\mathbb{Q}(\Gamma)^{\text{ab}}/\pm\Gamma \to \mathbb{R}_+^\times$.

Démonstration. Soit $f \in \mathbb{Z}[\Gamma]$, l'application $g \mapsto fg$ est un automorphisme de l'espace de Hilbert $\ell^2(\Gamma)$. Ainsi, pour tous $f, f' \in \mathbb{Z}[\Gamma]$ il suit du point (i) ci-dessus que $\text{dét}_\Gamma(ff') = \text{dét}_\Gamma(f)\text{dét}_\Gamma(f')$ et on vérifie en utilisant la condition de Ore que dét_Γ est bien défini par la formule donnée sur $\mathbb{Q}(\Gamma)^\times$. On voit immédiatement que c'est un morphisme et il descend donc à $\mathbb{Q}(\Gamma)^{\text{ab}}$ vu que $\mathbb{R}_+^\times$ est abélien. Il reste à vérifier que $\text{dét}_\Gamma(\pm g) = 1$ pour tout $g \in \Gamma$. Comme l'action de Γ sur $\ell^2(\Gamma)$ est unitaire, si $g \in \Gamma$ l'adjoint $(\pm g)^*$ est égal à $\pm g^{-1}$; il suit alors du point (iv) ci-dessus que

$$\text{dét}_\Gamma(\pm g) = \text{dét}_\Gamma(\pm g \circ (\pm g)^*)^{\frac{1}{2}} = \text{dét}_\Gamma(\pm g \circ (\pm g^{-1}))^{\frac{1}{2}} = 1.$$

□

Soit $M \in M_n(\mathbb{Z}[\Gamma])$ une matrice carrée ; il existe des matrices triangulaires supérieures A, B et une matrice de permutation P telles que $M = APB$, voir par exemple [Art96, Chapitre 4]. On définit alors le déterminant de Dieudonné de M comme le produit des valeurs diagonales de A et B dans $\mathbb{Q}(\Lambda)^{\text{ab}}$ s'il est non nul et 0 sinon et on le note $\text{dét}(M)$. Le résultat suivant généralise l'égalité démontrée pour Γ abélien dans [Lüc02, Exercise 8]).

Lemme 1.5. *Soit* M *telle que* $\text{dét}(M) \in \mathbb{Q}(\Gamma)^{\text{ab}}$ *soit non nul, on a alors l'égalité*

$$\text{dét}_\Gamma(M) = \text{dét}_\Gamma(\text{dét}(M)).$$

Démonstration. On notera $\bar{u}$ l'image de $u \in \mathbb{Q}(\Gamma)$ dans $\mathbb{Q}(\Gamma)^{\text{ab}}$. Si M est une matrice triangulaire supérieure le résultat est évident. Dans le cas général on écrit

$$M = APB = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} u_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & u_n \end{pmatrix}$$

où P est une matrice de permutation, de sorte que par définition on a $\text{dét}(M) = \bar{u}_1 \dots \bar{u}_n$. Par le lemme 1.1 il existe $a, b \in R - \{0\}$ tels que $aA \in M_n(\mathbb{Z}[\Gamma])$ et $Bb \in M_n(\mathbb{Z}[\Gamma])$. Les déterminants $\text{dét}(aA), \text{dét}(Bb)$ sont égaux respectivement à $\bar{a}^n$ et $\bar{b}^n\bar{u}_1 \dots \bar{u}_n$, celui de P à 1. Il vient $\text{dét}_\Gamma(aMb) = \text{dét}_\Gamma(a)^{-n}\text{dét}_\Gamma(aAPBb)\text{dét}_\Gamma(b)^{-n}$ d'où suit :

$$\begin{aligned} \text{dét}_\Gamma(M) &= \text{dét}_\Gamma(a)^{-n}\text{dét}_\Gamma(aA)\text{dét}_\Gamma(P)\text{dét}_\Gamma(Bb)\text{dét}_\Gamma(b)^{-n} \\ &= \text{dét}_\Gamma(u_1) \dots \text{dét}_\Gamma(u_n) \\ &= \text{dét}_\Gamma(\text{dét} M) \end{aligned}$$

où la seconde ligne est une conséquence du résultat pour les matrices triangulaires. □

1.1.4 Torsions de Reidemeister et torsion ℓ^2

Torsion de Reidemeister pour les revêtements finis

On commence par rappeler quelques définitions élémentaires. Soient $V = V_\mathbb{Q}, W = W_\mathbb{Q}$ deux $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels de dimension finie ; on suppose que chacun est muni d'une forme quadratique qui devient définie positive quand on étend les scalaires à $\mathbb{R}$. On munit les complexifiés $V_\mathbb{C}, W_\mathbb{C}$

du produit hermitien qui étend le produit scalaire sur $V_{\mathbb{R}}, W_{\mathbb{R}}$. Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V_{\mathbb{Q}}, W_{\mathbb{Q}})$ on définit le déterminant restreint $\text{dét}'(f)$ par la formule :

$$\text{dét}'(f) = \sqrt{\text{dét}(f^* f|_{\ker(f)^\perp})}.$$

On dit qu'un réel est une valeur singulière de f s'il est une valeur propre de l'endomorphisme autoadjoint f^*f ; le déterminant restreint est donc la racine carrée du produit des valeurs singulières non nulles.

Un réseau de $V_{\mathbb{Q}}$ est un sous-$\mathbb{Z}$-module L de rang maximal. Son volume est le module du déterminant d'un endomorphisme qui envoie une base unitaire de $V_{\mathbb{C}}$ (ou une base orthogonale de $V_{\mathbb{R}}$) sur une $\mathbb{Z}$-base de L. Si V' est un sous-espace de V tel que $V' \cap L$ engendre V' c'est aussi vrai de son supplémentaire orthogonal V'' et on a

$$\mathrm{vol}(L) = \mathrm{vol}(L \cap V')\,\mathrm{vol}(L'') = \mathrm{vol}(L')\,\mathrm{vol}(L \cap V'') \tag{1.1}$$

où L', L'' sont les projections orthogonales de L sur V', V'' respectivement (les projecteurs sont définis sur $\mathbb{Q}$). De (1.1) on déduit aisément la "formule du rang métrique" suivante

$$\mathrm{vol}(\mathrm{im}(f)) = \frac{\text{dét}'(f)\,\mathrm{vol}(L)}{\mathrm{vol}(\ker f)}. \tag{1.2}$$

Soit maintenant C_*, d_* un complexe fini de $\mathbb{Z}$-modules libres de type fini ; on choisit pour chaque p une $\mathbb{Z}$-base de C_p et on munit $C_* \otimes \mathbb{C}$ du produit Hermitien pour lequel ces bases sont unitaires. La partie libre $H_p(C)_{\text{libre}}$ est un réseau dans $H_p(C \otimes \mathbb{C})$ qui peut lui-même être vu comme l'orthogonal de $\mathrm{im}(d_{p+1})$ dans $\ker(d_p) \otimes \mathbb{C}$. On définit alors la torsion de Reidemeister de C_* par :

$$\tau(C_*) = \prod_p \text{dét}'(d_p)^{(-1)^p}$$

Lemme 1.6. *La torsion $\tau(C_*)$ ne dépend pas des choix de bases faits et l'on a en fait*

$$\tau(C_*) = \prod_i \left(\frac{|H_p(C)_{\text{tors}}|}{\mathrm{vol}(H_p(C)_{\text{libre}})} \right)^{(-1)^{p+1}}. \tag{1.3}$$

Démonstration. Soit $V_{\mathbb{C}}$ l'orthogonal dans $\ker(d_p) \otimes \mathbb{C}$ de $\mathrm{im}(d_{p+1})$, c'est un sous-espace $\mathbb{Q}$-rationnel et on a donc la décomposition en somme directe :

$$\ker(d_P) \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{im}(d_{p+1}) \otimes \mathbb{Q} \oplus V.$$

Par définition, le volume $\mathrm{vol}\, H_p(C)_{\text{libre}}$ est égal au volume du projeté orthogonal de $\ker(d_P)$ sur $V_{\mathbb{C}}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(\ker(d_p)) &= \mathrm{vol}(H_p(C)_{\text{libre}}) \times \mathrm{vol}(\ker(d_p) \cap \mathrm{im}(d_{p+1}) \otimes \mathbb{Q}) \\
&= \mathrm{vol}(H_p(C)_{\text{libre}}) \times [\ker(d_p) \cap \mathrm{im}(d_{p+1}) \otimes \mathbb{Q} : \mathrm{im}(d_{p+1})] \times \mathrm{vol}(\mathrm{im}(d_{p+1})) \\
&= \mathrm{vol}(H_p(C)_{\text{libre}}) \frac{\mathrm{vol}(\mathrm{im}(d_{p+1}))}{|H_p(C)_{\text{tors}}|}.
\end{aligned}$$

De (1.2) et de la dernière égalité on tire alors

$$\text{dét}' d_p = \mathrm{vol}(\mathrm{im}\, d_p)\,\mathrm{vol}(\ker d_p) = \mathrm{vol}(\mathrm{im}\, d_p)\,\mathrm{vol}(\mathrm{im}\, d_{p+1}) \frac{\mathrm{vol}(H_p(C)_{\text{libre}})}{|H_p(C)_{\text{tors}}|}$$

d'où (1.3) suit en prenant le produit alterné. □

Torsions de Reidemeister pour les revêtements infinis et torsion ℓ^2

Soit C_*, d_* un complexe fini de $\mathbb{Z}[\Gamma]$-modules de type fini ; on suppose qu'il est $\mathbb{Q}(\Gamma)$-acyclique, on a vu qu'il est alors aussi ℓ^2-acyclique. On choisit une $\mathbb{Z}[\Gamma]$-base c_p de C_p, une $\mathbb{Q}(\Gamma)$-base b_p de $\mathrm{im}(d_p) \otimes \mathbb{Q}(\Gamma)$ et un relevé $\tilde{b}_p$ de b_p dans $C_p \otimes \mathbb{Q}(\Gamma)$. Comme le complexe est acyclique, b_p est une base de $\ker(d_p) \otimes \mathbb{Q}(\Gamma)$ et la réunion $b_{p+1} \cup \tilde{b}_p$ est donc une base de $C_p \otimes \mathbb{Q}(\Gamma)$. On note $[c_p : b_{p+1}\tilde{b}_p]$ le déterminant de Dieudonné du changement de base de c_p à $b_{p+1} \cup \tilde{b}_p$. Soit U le groupe des unités de $\mathbb{Z}[\Gamma]$ § et U^{ab} son image dans $\mathbb{Q}(\Gamma)^{\mathrm{ab}}$. On définit enfin la torsion de Reidemeister τ de C_* par :

$$\tau(C_*) = \prod_i [c_i : \tilde{b}_i b_{i+1}]^{(-1)^i} \in \mathbb{Q}(\Gamma)^{ab}/U. \tag{1.4}$$

On vérifie que ceci est bien défini : le côté droit ne dépend pas du choix des b_p ni de celui des $\tilde{b}_p$ (cf. [Tur01, Chapitre I]). D'autre part si on fait un autre choix c'_p pour les bases des C_p on multiplie τ par une unité de $\mathbb{Z}[\Gamma]$.

Comme Γ satisfait à la conjecture du déterminant, pour $u \in U$ on a $\mathrm{dét}_\Gamma(u) = 1$ et il suit en particulier que $\mathrm{dét}_\Gamma(\tau)$ est un nombre réel positif bien défini. On définit d'autre part la torsion ℓ^2 de C_*, d_* par :

$$\tau^{(2)}(C_*) = \prod_p \mathrm{dét}_\Gamma(d_p)^{(-1)^i}. \tag{1.5}$$

Le résultat principal de cette section est alors l'égalité suivante.

Proposition 1.7. *Si C_* est un complexe fini de $\mathbb{Z}[\Gamma]$-modules libres de type fini qui est de plus $\mathbb{Q}(\Gamma)$-acyclique on a*

$$\mathrm{dét}_\Gamma(\tau) = \tau^{(2)}.$$

Démonstration. On note $n_p = \mathrm{rg}(C_p)$, $m_p = \mathrm{rg}(d_p)$. L'orthogonal de $\mathrm{im}(d_{p+1})$ est de rang $n_p - m_p$, on choisit dedans un sous-module L_p libre de rang maximal et une $\mathbb{Z}[\Gamma]$-base $\tilde{b}_p$ de L_p. Il suit que $b_p = d_p(\tilde{b}_p)$ est une base de $\mathrm{im}(d_p) \otimes \mathbb{Q}(\Gamma)$ et $\tilde{b}_p b_{p+1}$ de $C_p \otimes \mathbb{Q}(\Gamma)$. On a donc d'après (1.4) l'égalité

$$\mathrm{dét}_\Gamma(\tau(C_*)) = \prod_p \mathrm{dét}_\Gamma([c_p : \tilde{b}_p b_{p+1}])^{(-1)^p}. \tag{1.6}$$

On note j_p l'inclusion de L_p dans C_p ; on a alors

$$\mathrm{dét}_\Gamma(d_p)\mathrm{dét}_\Gamma(j_p) = \mathrm{dét}_\Gamma(d_p \circ j_p). \tag{1.7}$$

L'application $L_{p-1} \times L_p \to C_{p-1}$ donnée par $j_{p-1} \times (d_p \circ j_p)$ est représentée par une matrice carrée dont le déterminant de Dieudonné est non nul, et qui est en fait la matrice du changement de base de c_p à $b_p = d_p(\tilde{b}_p)$. Il suit donc de (1.7) et du lemme 1.5 que :

$$\begin{aligned} \mathrm{dét}_\Gamma[c_p : \tilde{b}_p b_{p+1}]) &= \mathrm{dét}_\Gamma(j_{p-1})\mathrm{dét}_\Gamma(d_p \circ j_p) \\ &= \mathrm{dét}_\Gamma(j_{p-1})\mathrm{dét}_\Gamma(d_p)\mathrm{dét}_\Gamma(j_p). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Le terme de droite de (1.6) est donc égal à $\prod_p \mathrm{dét}_\Gamma(d_p)$, ce qui termine la preuve. □

On refère au travail récent de H. Li et A. Thom [LT12] pour des résultats plus poussés dans cette direction.

§. Il est conjecturé que si Γ est sans torsion on a $U = \pm\Gamma$ et ceci a été démontré dans le cas où Γ est nilpotent.

1.2 Invariants ℓ^2 des revêtements abéliens

1.2.1 Anneaux de groupes abéliens, polynômes et mesure de Mahler

A partir de maintenant on fixe un entier $m > 0$ et un groupe abélien libre $\Lambda \cong \mathbb{Z}^m$. On identifiera l'anneau de groupe $\mathbb{Z}[\Lambda]$ à l'anneau de polynômes de Laurent $\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_m^{\pm 1}]$ via le choix d'une famille génératrice libre $t_1, \dots, t_m$ de Λ. On appelle polynôme cyclotomique de $\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_m^{\pm 1}]$ un élément de la forme $u\Phi(t_1^{k_1} \dots t_m^{k_m})$ où u est une unité et $\Phi \in \mathbb{Z}[t]$ est un polynôme cyclotomique classique (i.e. divise $t^l - 1$ pour un entier $l \geq 1$) et on étend cette définition aux éléments de $\mathbb{Z}[\Lambda]$.

Soit $\mathbb{T}^m = \{|z| = 1\}^m \subset \mathbb{C}^m$; la mesure de Mahler d'un polynôme $f \in \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_m^{\pm 1}]$ est définie par :

$$\mathcal{M}(f) = \exp(\int_{\mathbb{T}^m} \log |f(z)| dz),$$

l'intégrale étant absolument convergente d'après [EW99, Lemme 3.7]. On a évidemment $\mathcal{M}(fg) = \mathcal{M}(f)\mathcal{M}(g)$. Les polynômes cyclotomiques sont de mesure de Mahler égale à 1, et ce sont les seuls (cf. [EW99, Theorem 3.10]).

Si $A \in \mathrm{SL}_m(\mathbb{Z})$ elle induit un automorphisme A^* de $\mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_m^{\pm 1}]$ par $f \mapsto f \circ A$ et on a alors

$$\mathcal{M}(A^* f) = \int_{\mathbb{T}^m} f(Az) dz = \int_{\mathbb{T}^m} f(z) |\text{dét} A| dz = \mathcal{M}(f).$$

Ainsi la mesure de Mahler d'un élément $f \in \mathbb{Z}[\Lambda]$ peut être définie indépendamment de la base choisie pour identifier $\mathbb{Z}[\Lambda]$ à $\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_m^{\pm 1}]$. On a alors le résultat suivant (cf. [Lüc02, Example 3.13]) : pour $f \in \mathbb{C}[\Lambda]$ on a

$$\text{dét}_\Lambda(f) = \mathcal{M}(f). \tag{1.9}$$

On notera enfin m la mesure de Mahler logarithmique, qui comme son nom l'indique est définie pour $f \in \mathbb{C}[\Lambda]$ par

$$m(f) = \log \mathcal{M}(f).$$

1.2.2 Polynômes d'Alexander

Soit M un $\mathbb{Z}[\Lambda]$-module de type fini ; il existe alors une matrice de présentation $A \in M_{m,n}(\mathbb{Z}[\Lambda])$ de M, i.e. $M = \mathbb{Z}[\Lambda]^m / A\mathbb{Z}[\Lambda]^n$. On définit le l-ième idéal élémentaire $I_l(M)$ de M comme l'idéal engendré par les $(m-l)$-mineurs de A. On sait que deux matrices de présentation de M diffèrent d'une suite d'opérations qui n'affectent pas les I_l et ces derniers ne dépendent donc pas du choix d'une présentation (cf. [Tur01, Lemme 4.4]). Comme $\mathbb{Z}[\Lambda]$ est noetherien et factoriel, on peut définir le plus grand commun diviseur d'un idéal (c'est le pgcd d'une famille génératrice finie, ou de manière équivalente le générateur du plus petit idéal principal le contenant) ; on pose $\Delta_l(M) = \text{pgcd}(I_l)$, que l'on appelle l-ième polynôme d'Alexander de M. Il est facile de voir que $\Delta_l(M)$ est nul pour $l < \text{rg}(M)$ et que $\Delta_{l+\text{rg}(M)}(M) = \Delta_l(M_{\text{tors}})$ (bien entendu, M_{tors} est ici le sous-module de $\mathbb{Z}[\Lambda]$-torsion maximal de M).

On remarque que Δ_0 est multiplicatif, i.e. si on a une suite exacte courte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, alors $\Delta_0(M) = \Delta_0(M')\Delta_0(M'')$. En effet, on peut supposer que M', M'' sont de torsion et si A', A'' sont des matrices de rangs maximaux m', m'' qui présentent M' et M'', M admet une matrice de présentation de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A' & * \\ 0 & A'' \end{pmatrix},$$

dont les $(m' + m'')$-mineurs non nuls sont les produits des m'-mineurs de A' avec les m''-mineurs de A''.

Enfin, la mesure de Mahler de $\Delta_l(M)$ est bien définie puisque les unités de $\mathbb{Z}[\Lambda]$ ont une mesure de Mahler égale à 1.

1.2.3 Calcul de la torsion ℓ^2

Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{Z}[\Lambda])$ le lemme 1.4 et (1.9) donnent

$$\text{dét}_\Lambda(A) = \mathcal{M}(\text{dét}A)$$

si dét$A \neq 0$. D'autre part, dans le cas de coefficients abéliens la torsion de Reidemeister a été calculée par Milnor (cas cyclique) et Turaev (cas général, cf. [Tur01, Theorem 4.7]) en fonction des polynômes d'Alexander de l'homologie : si C_* est un complexe de $\mathbb{Z}[\Lambda]$-modules libres de longueur d tel que $H_*(C)$ soit de torsion on a

$$\tau(C) = \prod_{p=0}^{d} \Delta_0(H_p(C))^{(-1)^p}.$$

On obtient donc comme conséquence de la proposition 1.7 le résultat suivant.

Corollaire 1.8. *Soit C_* un complexe de $\mathbb{Z}[\Lambda]$-modules libres qui est ℓ^2-acyclique. On a*

$$\tau^{(2)}(C) = \prod_p \mathcal{M}(\Delta_0(H_p(C)))^{(-1)^p} \tag{1.10}$$

1.2.4 Exemple : Extérieurs d'entrelacs

Soit ℓ un entrelacs à m brins dans $\mathbb{S}^3$ et L un voisinage régulier de ℓ. On fixe une cellulation X de $\mathbb{S}^3 - L$ et on note $\Lambda = H_1(X) \cong \mathbb{Z}^m$. On note $\widehat{X}$ le revêtement abélien maximal de X, son groupe de Galois est donc Λ et l'homologie $H_*(\widehat{X})$ est un $\mathbb{Z}[\Lambda]$-module. Le seul p pour lequel $H_p(\widehat{X})$ peut contenir de la torsion est $p = 1$. Dans le cas où $\operatorname{rg} H_1(\widehat{X}) = 0$ il suit donc du corollaire 1.8 que

$$\tau^{(2)}(\widehat{X}) = \mathcal{M}(\Delta(\ell))$$

où $\Delta(\ell)$ est le polynôme d'Alexander de ℓ, i.e. $\Delta(\ell) = \Delta_0(H_1(\widehat{X}))$ (qui est non nul puisque $\operatorname{rg} H_1 = 0$). Dans le cas où $\widehat{X}$ n'est pas $\mathbb{Q}(\Lambda)$-acyclique on a $\Delta(\ell) = 0$ et la torsion ℓ^2 dépend de la cellulation choisie. La dépendance précise est calculée plus loin, dans la proposition 1.11.

1.2.5 Une extension de 1.8 au cas non-acyclique

Notre but ici est de généraliser le calcul du corollaire 1.8 ci-dessus au cas d'un complexe dont l'homologie n'est pas de torsion (ce qui en donne aussi une nouvelle preuve). Le résultat précis est donné dans la proposition 1.11 ci-dessous.

Definition du volume ℓ^2

On veut définir un volume ℓ^2 pour les sous-modules de $\mathbb{Z}[\Lambda]^n$ par analogie avec le volume des réseaux d'espaces Hermitiens. Pour des sous-modules libres on a une définition assez naturelle : si $L \subset \mathbb{Z}[\Lambda]^n$ est libre de rang r tous les plongements $\mathbb{Z}[\Lambda]^r \to \mathbb{Z}[\Lambda]^n$ d'image L ont le même déterminant de Fuglede-Kadison ; en effet, si on fixe un tel plongement f, n'importe quel autre

peut s'écrire $f \circ u$ où u est un automorphisme de $\mathbb{Z}[\Lambda]^r$ qui est donc de déterminant de Fuglede-Kadison égal à 1. On choisit donc une matrice $A \in M_{n,r}(\mathbb{Z}[\Lambda])$ d'image L et on définit

$$\mathrm{vol}^{(2)}(L) = \mathrm{dét}_\Lambda(A) = \mathcal{M}(\mathrm{dét}(A^*A)).$$

Si M est un sous-module de $\mathbb{Z}[\Lambda]^n$ de rang r on peut choisir un sous-module libre de rang maximal $L \subset M$ par le lemme 1.2. Le quotient M/L est alors de torsion et son premier polynôme d'Alexander $\Delta_0(M/L)$ est donc non nul. On pose alors (l'analogie avec le volume en dimension finie est que ce dernier est multiplicatif par rapport à l'indice, i.e. si $[L : L']$ est fini on a $\mathrm{vol}(L') = [L : L'] \mathrm{vol}(L)$) :

$$\mathrm{vol}^{(2)}(M) = \frac{\mathrm{vol}^{(2)}(L)}{\mathcal{M}(\Delta_0(M/L))}.$$

Le lemme suivant montre que ceci est bien défini.

Lemme 1.9. *Le nombre réel* $\frac{\mathrm{vol}^{(2)}(L)}{\mathcal{M}(\Delta_0(M/L))}$ *ne dépend pas du sous-module libre de rang maximal* $L \subset M$.

Démonstration. Soient L_1, L_2 deux sous-modules libres de rang maximal dans M. Alors $L_1 \cap L_2$ est un sous-module de rang maximal et contient donc un sous-module libre de rang maximal. Il suffit donc de prouver que si $L' \subset L \subset M$ sont deux modules libres de même rang $\mathrm{rg}\, M$ on a $\frac{\mathrm{vol}^{(2)}(L')}{\mathcal{M}(\Delta_0(M/L'))} = \frac{\mathrm{vol}^{(2)}(L)}{\mathcal{M}(\Delta_0(M/L))}$. Soient b, b' des bases respectives de L, L'. On a

$$\mathrm{vol}^{(2)}(L') = \mathrm{dét}_\Gamma([b : b']) \mathrm{vol}^{(2)}(L) = \mathcal{M}(\Delta_0(L/L')) \mathrm{vol}^{(2)}(L)$$

Par ailleurs on a la suite exacte courte $0 \to L/L' \to M/L' \to M/L \to 0$ d'où il suit que :

$$\mathcal{M}(\Delta_0(M/L')) = \mathcal{M}(\Delta_0(L/L'))\mathcal{M}(\Delta_0(M/L))$$

Il vient finalement que :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{vol}^{(2)}(L')}{\mathcal{M}(\Delta_0(M/L'))} &= \frac{\mathrm{vol}^{(2)}(L)}{\mathcal{M}(\Delta_0(M/L'))\mathcal{M}(\Delta_0(L/L'))} \\ &= \frac{\mathrm{vol}^{(2)}(L)}{\mathcal{M}(\Delta_0(M/L))} \end{aligned}$$

ce qui finit la preuve. □

Formule du rang métrique

On a l'analogue suivant de (1.2), dont la preuve est similaire.

Lemme 1.10. *Soient* M, M' *des* $\mathbb{Z}[\Lambda]$*-sous-modules d'un module libre et* f *un morphisme de* M *vers* M'*, on a l'égalité suivante :*

$$\mathrm{vol}^{(2)}(f(M)) = \frac{\mathrm{dét}_\Gamma(f) \mathrm{vol}^{(2)}(M)}{\mathrm{vol}^{(2)}(\ker(f))}. \tag{1.11}$$

Démonstration. On suppose pour simplifier que $\mathrm{vol}^{(2)}(M) = 1$. Soient $L' \subset \ker(f)$ et $L'' \subset \ker(f)^\perp$ des sous-modules libres de rang maximal, alors la somme directe $L' \oplus L''$ est un sous-module libre de rang maximal dans M. On pose $T' = \ker(f)/L'$, $T'' = \mathrm{im}(f)/f(L'') \cong$

$M/(\ker(f) \oplus L'')$ et $T = M/(L' \oplus L'')$. On obtient un suite exacte courte $0 \to T' \to T \to T'' \to 0$ en appliquant le lemme du serpent au diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker(f) & \longrightarrow & M & \longrightarrow & \mathrm{im}(f) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow f & & \\ 0 & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & L' \oplus L'' & \longrightarrow & L'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Il suit que $\mathcal{M}(\Delta_0(T)) = \mathcal{M}(\Delta_0(T''))\mathcal{M}(\Delta_0(T'))$. Par ailleurs, comme L' et L'' sont orthogonaux on a

$$\mathrm{vol}^{(2)}(L')\,\mathrm{vol}^{(2)}(L'') = \mathrm{vol}^{(2)}(L' + L'')$$

et il suit que

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}^{(2)}(L')\,\mathrm{vol}^{(2)}(L'') &= \mathcal{M}(\Delta_0(T)) \\ &= \mathcal{M}(\Delta_0(T''))\mathcal{M}(\Delta_0(T')). \end{aligned}$$

Vu que $f_{|L''}$ est injective $f(L'')$ est un sous-module libre de rang maximal de $\mathrm{im}(f)$ et on obtient ainsi que

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}^{(2)}(\mathrm{im}(f)) &= \mathrm{vol}^{(2)}(f(L''))/\mathcal{M}(\Delta_0(\mathrm{im}(f)/f(L''))); \\ &= \mathrm{vol}^{(2)}(f(L''))/\mathcal{M}(\Delta_0(T'')). \end{aligned}$$

Enfin, on a

$$\mathrm{vol}^{(2)}(f(L'')) = \mathrm{dét}_\Gamma(f)\,\mathrm{vol}^{(2)}(L'').$$

Il suit des trois égalités ci-dessus que

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}^{(2)}(\mathrm{im}(f)) &= \frac{\mathrm{dét}_\Gamma(f)\,\mathrm{vol}^{(2)}(L'')}{\mathcal{M}(\Delta_0(T''))} \\ &= \frac{\mathrm{dét}_\Gamma(f)\mathcal{M}(\Delta_0(T'))}{\mathrm{vol}^{(2)}(L')} \\ &= \frac{\mathrm{dét}_\Gamma(f)}{\mathrm{vol}^{(2)}(\ker(f))}. \end{aligned}$$

□

Calcul de la torsion ℓ^2

Soit C_*, d_* un complexe fini de $\mathbb{Z}[\Lambda]$-modules libres de type fini. Pour chaque p on choisit un sous-module libre de rang maximal L dans $H_p(C)$; alors L se relève en un sous-module libre de rang maximal L' dans l'orthogonal de $\mathrm{im}(d_{p+1})$ dans $\ker(d_p)$. Soit T le quotient $(H_p(C)/H_p(C)_{\mathrm{tors}})/L$, on pose :

$$\mathrm{vol}^{(2)}(H_p(C)) = \mathcal{M}(\Delta_0(T))\,\mathrm{vol}^{(2)}(L').$$

On remarque que si C_* est ℓ^2-acyclique ceci vaut 1 puisque l'orthogonal de $\mathrm{im}(d_{p+1})$ dans $\ker(d_p)$ est nul.

Proposition 1.11. *Avec les notations ci-dessus on a l'égalité*

$$\tau^{(2)}(C) = \prod_p \left(\frac{\mathcal{M}(\Delta_{b_p^{(2)}(C)}(H_p(C))}{\mathrm{vol}^{(2)}(H_p(C))} \right)^{(-1)^p}.$$

Démonstration. Soit M_p l'orthogonal de $\mathrm{im}(d_{p+1})$ dans $\ker(d_p)$, qui est un sous-module de rang $b_p^{(2)}(C)$ dans C_p. Soit L', L'' des sous-modules libres de rang maximal dans $\mathrm{im}(d_{p-1})$ et M_p respectivement, $L = L' \oplus L''$ est alors un sous-module libre de rang maximal dans $\ker(d_p)$. Comme M_p et $\mathrm{im}(d_{p-1})$ sont orthogonaux on a $\mathrm{vol}^{(2)}(L) = \mathrm{vol}^{(2)}(L')\,\mathrm{vol}^{(2)}(L'')$. En posant $T = \ker(d_p)/L$ il suit que :

$$\mathrm{vol}^{(2)}(\ker(d_p)) = \frac{\mathrm{vol}^{(2)}(L)}{\mathcal{M}(\Delta_0(T))} = \frac{\mathrm{vol}^{(2)}(L')\,\mathrm{vol}^{(2)}(L'')}{\mathcal{M}(\Delta_0(T))}.$$

On pose maintenant $T'' = M_p/L''$, $T' = \mathrm{im}(d_{p-1})/L'$; il y a un plongement naturel de $T' \oplus T''$ dans T dont le conoyau est isomorphe à $H_p(C)/M_p =: T_0$. On obtient ainsi une suite exacte courte $0 \to T' \oplus T'' \to T \to T_0 \to 0$ et il suit que l'on a

$$\mathcal{M}(\Delta_0(T)) = \mathcal{M}(\Delta_0(T'))\mathcal{M}(\Delta_0(T''))\mathcal{M}(\Delta_0(T_0)).$$

Enfin, soit $H'_p(C)$ le quotient de $H_p(C)$ par son sous-module de torsion, dans lequel M_p se plonge, et $T_1 = H'_p(C)/M_p$. Le volume ℓ^2 de $H'_p(C)$ est bien défini et égal à $\mathrm{vol}^{(2)}\, H_p(C)$. On a d'autre part la suite exacte courte $0 \to T_1 \to T_0 \to H_p(C)_{\mathrm{tors}} \to 0$ et il vient :

$$\mathcal{M}(\Delta_0(T_0)) = \mathcal{M}(\Delta_0(T_1))\mathcal{M}(\Delta_0(H_p(C)_{\mathrm{tors}})).$$

En rassemblant toutes ces égalités on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}^{(2)}(\ker(d_p)) &= \frac{\mathrm{vol}^{(2)}(L')}{\mathcal{M}(\Delta_0(T'))} \times \frac{\mathrm{vol}^{(2)}(L'')}{\mathcal{M}(\Delta_0(T''))} \times \frac{1}{\mathcal{M}(\Delta_0(T_0))} \\
&= \mathrm{vol}^{(2)}(\mathrm{im}(d_{p-1})) \times \frac{\mathrm{vol}^{(2)}(M_p)}{\mathcal{M}(\Delta_0(T_1))} \times \frac{1}{\mathcal{M}(\Delta_0(H_p(C)_{\mathrm{tors}}))} \\
&= \frac{\mathrm{vol}^{(2)}(\mathrm{im}(d_{p-1}))\,\mathrm{vol}^{(2)}(H'_p(C))}{\mathcal{M}(\Delta_0(H_p(C)_{\mathrm{tors}}))}
\end{aligned}$$

et de la dernière ligne il suit en utilisant (1.11) que :

$$\mathrm{vol}^{(2)}(\ker(d_p)) = \frac{\mathrm{dét}_\Lambda(d_{p-1})\,\mathrm{vol}^{(2)}(H'_p(C))}{\mathcal{M}(\Delta_0(H_p(C)_{\mathrm{tors}}))\,\mathrm{vol}^{(2)}(\ker d_{p-1})}$$

et en prenant le produit alterné sur p on peut conclure que :

$$1 = \prod_p \left(\frac{\mathrm{dét}_\Lambda(d_{p-1})\,\mathrm{vol}^{(2)}(\widehat{H}_p(C))}{\mathcal{M}(\Delta_0(H_p(C)_{\mathrm{tors}}))} \right)^{(-1)^p}.$$

□

1.3 Approximation pour la torsion de Reidemeister

Pour toute cette section on fixe un groupe abélien libre $\Lambda \cong \mathbb{Z}^m$. Pour une famille génératrice libre $S = \{t_1, \ldots, t_m\}$ de Λ et $v = t_1^{v_1} \ldots t_m^{v_m}$ on note $|v|_S = \max_{l=1,\ldots,m} |v_l|$. Si $\Delta \subset \Lambda$ est un sous-groupe on note

$$\alpha_S(\Delta) = \min_{v \in \Delta - \{0\}} |v|_S.$$

Si S, S' sont deux familles génératrices il existe un $C > 0$ tel que $C^{-1}|.|_S \leq |.|_{S'} \leq C|.|_S$. Comme la plupart du temps on sera intéressé au comportement "à grande échelle" de α_S on notera simplement $\alpha(\Delta) = \alpha_S(\Delta)$ sans se soucier du choix d'une famille génératrice.

Pour un $\mathbb{Z}[\Lambda]$-module M on note M_Δ le $\mathbb{Z}[\Lambda/\Delta]$-module obtenu en restreignant les scalaires :

$$M_\Delta = \mathbb{Z}[\Lambda/\Delta] \otimes_{\mathbb{Z}[\Lambda]} M.$$

On a un isomorphisme Λ/Δ-équivariant de M_Δ vers le module quotient $M/(\Delta - 1)M$. Pour un morphisme $f : \mathbb{Z}[\Lambda]^n \to \mathbb{Z}[\Lambda]^{n'}$ on note f_Δ l'application de $\mathbb{Z}[\Lambda/\Delta]^n \to \mathbb{Z}[\Lambda/\Delta]^{n'}$ induite. Les déterminants $\text{dét}'(f_\Delta)$ sont toujours pris pour la métrique Hermitienne canonique sur $\mathbb{C}[\Lambda/\Delta]$ pour laquelle les éléments du groupe sont une base orthonormée. Si C_*, d_* est un complexe de $\mathbb{Z}[\Lambda]$-modules on note C_Δ le $\mathbb{Z}[\Lambda/\Delta]$-complexe tel que $C_{*,\Delta} = (C_*)_\Delta$ et $d_{*,\Delta} = (d_*)_\Delta$.

Cette section est consacrée à prouver une version faible de l'approximation pour le déterminant de Fuglede-Kadison pour le groupe Λ. On obtient le résultat suivant.

Proposition 1.12. *Soit $A \in M_{n,n'}(\mathbb{Z}[\Lambda])$, on a la limite*

$$\limsup_{\alpha(\Delta)\to\infty} \frac{\log \text{dét} A_\Delta}{[\Lambda : \Delta]} = \log \text{dét}_\Lambda A.$$

Plus précisément on montre le résultat suivant, qui est celui que l'on utilisera dans la section suivante.

Proposition 1.13. *Soit $A_1, \ldots, A_n$ une collection finie de matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}[\Lambda]$. Il existe une suite exhaustive Λ_N de sous-groupes d'indice fini dans Λ tel que l'on ait pour $l = 1, \ldots, n$:*

(i)

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\log \text{dét}'(A_{l,\Lambda_N})}{[\Lambda : \Lambda_N]} = \log \text{dét}_\Lambda(A_l)$$

(ii)

$$|\dim(\ker(A_{l,\Lambda_N}) \otimes \mathbb{C}) - [\Lambda : \Lambda_N] \operatorname{rg}(\ker(A_l))| = O(\log[\Lambda : \Lambda_N]).$$

La proposition 1.12 est une conséquence directe du point (i) vu que l'on a

$$\limsup_{\alpha(\Delta)\to\infty} (\text{dét}'(A_\Delta)^{\frac{1}{[\Lambda:\Delta]}}) \leq \text{dét}_\Lambda(A)$$

(cf. la preuve du lemme 1.18, ou [Lüc94a, Theorem 3.4(2)] pour un énoncé plus général).

1.3.1 Croissance des nombres de Betti

On aura besoin d'estimées précises sur la vitesse de convergence dans le théorème 0.4 de Lück. Pour un sous-groupe $\Delta \subset \Lambda$ on pose :

$$\Delta^\perp = \{\zeta \in \Lambda^*,\ \forall v \in \Delta,\ \zeta(v) = 1\}$$

qui est un sous-groupe fini de cardinal $[\Lambda : \Delta]$ de Λ^*.

Proposition 1.14. *Soit M un $\mathbb{Z}[\Lambda]$-module de type fini (resp. C_* un complexe fini de $\mathbb{Z}[\Lambda]$-modules libres de type fini). Il existe un $P \in \mathbb{Z}[\lambda]$ tel que pour tout sous-groupe $\Delta \subset \Lambda$ on a*[¶] *:*

$$|\dim(M_\Delta \otimes \mathbb{C}) - [\Lambda : \Delta]\,\mathrm{rg}(M)| \leq |\{\zeta \in \Delta^\perp,\ P(\zeta) = 0\}|$$

(resp.

$$\forall p,\ |b_p(C_\Delta) - [\Lambda : \Delta] b_p^{(2)}(C_*)| \leq |\{\zeta \in \Delta^\perp,\ P(\zeta) = 0\}|).$$

Démonstration. On prouve d'abord le résultat pour les modules. Soit M un $\mathbb{Z}[\Lambda]$-module de type fini, $i : L \hookrightarrow M$ un plongement d'un module libre de rang maximal dans M et T le module de torsion M/L. On a alors

$$|\dim(M_\Delta \otimes \mathbb{C}) - [\Lambda : \Delta]\,\mathrm{rg}(M)| \leq \dim(T_\Delta \otimes \mathbb{C}) + \dim(\ker(i_\Delta) \otimes \mathbb{C}).$$

Les deux lemmes qui suivent donnent la majoration souhaitée pour le terme de droite.

Lemme 1.15. *Soit T un $\mathbb{Z}[\Lambda]$-module de torsion de type fini ; il existe un $P \in \mathbb{Z}[\Lambda]$ non nul tel que pour tout sous-groupe Δ d'indice fini on ait*

$$\dim(T_\Delta \otimes \mathbb{C}) \leq |\{\zeta \in \Delta^\perp,\ P(\zeta) = 0\}|.$$

Démonstration. Soient $a_1, \ldots, a_s$ des générateurs de T. Il existe un $P \in \mathbb{Z}[\Lambda]$ tel que $Pa_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, s$. On obtient ainsi une surjection $\mathbb{C}[\Lambda]/(P) \to T$ et il suit que

$$\dim(T_\Delta \otimes \mathbb{C}) \leq s \dim(\mathbb{C}[\Lambda]/(P) \otimes \mathbb{C}[\Lambda/\Delta]).$$

On va maintenant conclure en montrant que la dimension $\dim(\mathbb{C}[\Lambda]/(P))_\Delta$ est égale au nombre de zéros de P dans $\Delta^\perp$. La suite exacte courte

$$0 \to \mathbb{C}[\Lambda] \xrightarrow{\times P} \mathbb{C}[\Lambda] \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}[\Lambda]/(P) \to 0$$

donne pour tout Δ une suite exacte

$$\mathbb{C}[\Lambda/\Delta] \xrightarrow{\times P_\Delta} \mathbb{C}[\Lambda/\Delta] \xrightarrow{\pi_\Delta} (\mathbb{C}[\Lambda]/(P))_\Delta \to 0$$

où P_Δ est l'image de P dans $\mathbb{C}[\Lambda/\Delta]$. On rappelle que pour un caractère $\zeta \in \mathrm{Hom}(\Lambda/\Delta, \mathbb{C}^\times) \cong \Delta^\perp$ on désigne par $\mathbb{C}_\zeta$ la droite complexe sur laquelle Λ/Δ agit par le caractère ζ et que l'on a une décomposition

$$\mathbb{C}[\Lambda/\Delta] = \bigoplus_{\zeta \in \Delta^\perp} \mathbb{C}_\zeta.$$

Pour $v \in \mathbb{C}_\zeta$ on a $P_\Delta.v = P(\zeta)v$ et on a donc $\mathbb{C}_\zeta \subset P_\Delta \mathbb{C}[\Lambda/\Delta]$ si et seulement si $P(\zeta) \neq 0$. Il suit que le noyau de application π_Δ est égal à

$$\ker(\pi) = \bigoplus_{\zeta \in \Delta^\perp, P(\zeta) \neq 0} \mathbb{C}_\zeta$$

de sorte que l'on a bien

$$\begin{aligned}\dim(\mathbb{C}[\Lambda]/(P))_\Delta &= [\Lambda/\Delta] - |\{\zeta \in \Delta^\perp, P(\zeta) \neq 0\}| \\ &= |\Delta^\perp| - |\{\zeta \in \Delta^\perp, P(\zeta) \neq 0\}| \\ &= |\{\zeta \in \Delta^\perp, P(\zeta) \neq 0\}|.\end{aligned}$$

□

¶. On compte toujours les multiplicités dans le nombre de zéros d'un polynôme

Lemme 1.16. *Soit $i : M_1 \to M_2$ un morphisme injectif de $\mathbb{Z}[\Lambda]$-modules. Il existe un $Q \in \mathbb{Z}[\Lambda]$ non nul tel que pour tout Δ d'indice fini on ait*

$$\dim(\ker(i_\Delta) \otimes \mathbb{C}) \leq |\{\zeta \in \Delta^\perp,\ Q(\zeta) = 0\}|.$$

Démonstration. On considère tout d'abord le cas où $M \subset \mathbb{Z}[\Lambda]^n$ est un sous-module d'un module libre et i l'inclusion. On commence par montrer qu'il existe un Q_1 tel que

$$\dim(M_\Delta \otimes \mathbb{C}) \leq [\Lambda : \Delta] \operatorname{rg}(M) + |\{\zeta \in \Delta^\perp,\ Q_1(\zeta) = 0\}|. \tag{1.12}$$

On pose $T = M/L$ où $L \subset M$ est un sous-module libre de rang maximal. L'image de $L_\Delta \otimes \mathbb{C}$ dans $M_\Delta \otimes \mathbb{C}$ est de dimension inférieure à $\dim(L_\Delta \otimes \mathbb{C}) = \operatorname{rg}(M)[\Lambda : \Delta]$ et de codimension égale à $\dim(T_\Delta \otimes \mathbb{C})$ de sorte que (1.12) est vérifiée pour Q_1 égal au polynôme associé à T par le lemme 1.15.

Soit maintenant $M' \subset \mathbb{Z}[\Lambda]^n$ un sous-module tel que $M \cap M' = 0$ et $\operatorname{rg}(M) + \operatorname{rg}(M') = n$ et i' l'inclusion de M'. Le quotient $T' := \mathbb{Z}[\Lambda]^n/(M \oplus M')$ est de torsion et par le lemme 1.15 il existe un Q_2 tel que

$$\dim(T'_\Delta \otimes \mathbb{C}) \leq |\{\zeta \in \Delta^\perp,\ Q_2(\zeta) = 0\}|. \tag{1.13}$$

D'autre part on a une suite exacte courte

$$0 \to M \oplus M' \xrightarrow{i \oplus i'} \mathbb{Z}[\Lambda]^n \to T' \to 0$$

qui après avoir tensorisé par $\mathbb{Z}[\Lambda/\Delta]$ devient :

$$M_\Delta \oplus M'_\Delta \xrightarrow{i_\Delta \oplus i'_\Delta} \mathbb{Z}[\Lambda/\Delta]^n \to T'_\Delta \to 0.$$

On obtient ainsi

$$\dim(\ker(i_\Delta) \otimes \mathbb{C}) + \dim(\ker(i'_\Delta) \otimes \mathbb{C}) = \dim(T'_\Delta \otimes \mathbb{C}) + \dim(M_\Delta \oplus M'_\Delta \otimes \mathbb{C}) - n[\Lambda : \Delta].$$

Le raisonnement utilisé pour prouver (1.12) appliqué à M' donne un Q_3 tel que $\dim(M'_\Delta \otimes \mathbb{C}) - [\Lambda : \Delta] \operatorname{rg}(M')$ est inférieur au nombre de zéros de Q_3 dans $\Delta^\perp$; en posant $Q = Q_1 Q_2 Q_3$ (1.12) et (1.13) ci-dessus et cette dernière majoration montrent que le côté droit de l'égalité ci-dessus est majoré par le nombre de zéros de Q dans $\Delta^\perp$.

Dans le cas général on peut plonger $M_1/(M_1)_{\text{tors}}$ dans un module libre $\mathbb{Z}[\Lambda]^n$; si i' est le plongement de $M_2/(M_2)_{\text{tors}}$ dans $\mathbb{Z}[\Lambda]^n$ ainsi obtenu on obtient le résultat en appliquant le raisonnement ci-dessus à i' et le lemme 1.15 à $(M_2)_{\text{tors}}$. □

Soit C_* un complexe fini de $\mathbb{Z}[\Lambda]$-modules libres de type fini ; on utilise les arguments habituels pour déduire le résultat sur la croissance de l'homologie des $(C_*)_\Delta$ du résultat sur les modules. Soit $n_p = \operatorname{rg}_{\mathbb{Z}[\Lambda]}(C_p)$, on a alors $\dim(C_{p,\Delta} \otimes \mathbb{C}) = [\Lambda : \Delta] n_p$ et il suit que

$$\begin{aligned} b_p(C_\Delta) &= \dim(\ker d_{p,\Delta}) - \dim(\operatorname{im} d_{p+1,\Delta}) \\ &= \dim(\ker d_{p,\Delta}) + n_{p+1}[\Lambda : \Delta] - \dim(\ker d_{p+1,\Delta}). \end{aligned}$$

Par ailleurs on a

$$b_p^{(2)}(C) = \operatorname{rg}_{\mathbb{Z}[\Lambda]}(\ker d_p) + n_{p+1} - \operatorname{rg}_{\mathbb{Z}[\Lambda]}(\ker d_{p+1})$$

et il suffit donc de montrer que pour une matrice $A \in M_{n,n'}(\mathbb{Z}[\Lambda])$ la différence $\dim(\ker A_\Delta) - [\Lambda : \Delta] \operatorname{rg}_{\mathbb{Z}[\Lambda]}(\ker A)$ est majorée par le nombre de racines dans $\Delta^\perp$ d'un polynôme. Le lemme 1.16 et le résultat pour les modules donnent

$$\dim(\operatorname{im} A_\Delta) = [\Lambda : \Delta] \operatorname{rg}_{\mathbb{Z}[\Lambda]}(\operatorname{im} A) + e$$

où e est le nombre de zéros dans $\Delta^\perp$ d'un polynôme. Vu que l'on a

$$\dim(\operatorname{im} A_H) + \dim(\ker A_H) = n'[\Lambda : \Delta] = (\operatorname{rg}_{\mathbb{Z}[\Lambda]} \operatorname{im}(A) + \operatorname{rg}_{\mathbb{Z}[\Lambda]} \ker A)[\Lambda : \Delta]$$

on obtient le résultat désiré. □

Si $P \in \mathbb{Z}[\Lambda]$ est non nul on peut obtenir une majoration pour le nombre de ses zéros dans $\mathbb{C}[\Lambda/\Delta]$. Plus généralement, si X est une sous-variété affine du sous $\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}^\Lambda$ engendré par Λ^* on note $X[\Delta]$ le sous-ensemble fini $\Delta^\perp \cap X$; il existe alors une constante C ne dépendant que de X telle que

$$|X[\Delta]| \leq C \frac{[\Lambda : \Delta]}{\alpha(\Delta)}. \tag{1.14}$$

(cf. [CW03, Section 2]). La proposition 1.14 et cette borne donnent une généralisation au cas non-ℓ^2-acyclique de leur théorème 2.1.

Corollaire 1.17. *Soit M un $\mathbb{Z}[\Lambda]$-module de type fini (resp. C_* un complexe fini de $\mathbb{Z}[\Lambda]$-modules libres de type fini) Il existe un $C > 0$ tel que*

$$|\dim(M_\Delta \otimes \mathbb{C}) - [\Lambda : \Delta] \operatorname{rg}(M)| \leq C \frac{[\Lambda : \Delta]}{\alpha(\Delta)}$$

(resp.

$$|b_p(C_\Delta) - [\Lambda : \Delta] b_p^{(2)}(C)| \leq C \frac{[\Lambda : \delta]}{\alpha(\Delta)}).$$

1.3.2 Convergence des sommes de Riemann

On rappelle ici les faits suivants, qui sont bien connus.

Lemme 1.18. *Soit $P \in \mathbb{Z}[t]$ non nul ;*

(i) On a

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{\zeta^N = 1 \\ P(\zeta) \neq 0}} \log |P(\zeta)| = m(P);$$

(ii) Il existe un $C_P > 0$ telle que pour toute racine N-ième de l'unité ζ vérifiant $P(\zeta) \neq 0$ on ait $\log |P(\zeta)| \geq -C_P \log N$.

Démonstration. Soient $a_1, \ldots, a_d \in \overline{\mathbb{Q}}$ les racines de P. On a alors :

$$\begin{aligned} m(P) &= \int_{|z|=1} \sum_{l=1}^{d} \log |z - a_l| dz \\ &= \sum_{l=1}^{d} \log \max(1, |a_l|) \end{aligned}$$

où la seconde ligne suit de la formule de Jensen (cf. Wikipédia). Il suffit ainsi de montrer que si $a \in \overline{\mathbb{Q}}$ on a :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{\zeta^N=1 \\ \zeta\neq a}} \log|\zeta - a| = \begin{cases} 0 \text{ si } |a| \leq 1; \\ \log|a| \text{ si } |a| > 1. \end{cases}$$

Les cas où $|a| \neq 1$ sont triviaux. Si $|a| = 1$ on définit pour tout $\varepsilon > 0$ une fonction f_ε sur $\mathbb{T}^1$ par

$$f_\varepsilon(z) = \begin{cases} \log|z - a| \text{ si } |z - a| > \varepsilon; \\ \log|z_\varepsilon - a| \text{ si } |z - a| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

où z_ε est l'une des solutions à l'équation $|z - a| = \varepsilon$. On a alors $\log|z - a| \leq f_\varepsilon(z)$ pour tout $z \in \mathbb{T}^1$ et il suit que pour ε assez petit on a :

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{\zeta^N=1 \\ \zeta\neq a}} \log|\zeta - a| \leq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{\zeta^N=1 \\ \zeta\neq a}} f_\varepsilon(\zeta) = \int_{\mathbb{T}^1} f_\varepsilon(z)dz$$

Le côté droit tend vers $\int_{\mathbb{T}^1} \log|z - a|dz$ quand $\varepsilon \to 0$ et on peut donc conclure que

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{\zeta^N=1 \\ \zeta\neq a}} \log|\zeta - a| \leq \int_{\mathbb{T}^1} \log|z - a|dz = 0.$$

Il reste à prouver que

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{\zeta^N=1 \\ \zeta\neq a}} \log|\zeta - a| \geq 0.$$

D'après un résultat diophantien de A. Baker [EW99, Lemma 1.11] il existe un $C_a > 0$ tel que

$$\prod_{\substack{\zeta^N=1 \\ \zeta\neq a}} |\zeta - a| \geq \frac{1}{N^{C_a}}. \tag{1.15}$$

Il suit que pour tout $N \geq 1$ on a

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{\zeta^N=1 \\ \zeta\neq a}} \log|\zeta - a| \geq \frac{-C_a \log N}{N}$$

et comme le côté droit tend vers 0 quand $N \to \infty$ le point (i) du lemme suit.

Le point (ii) se déduit de (1.15). Il suffit de prouver que pour tout nombre algébrique a il existe un C'_a tel que pour tout $N \geq 1$ et toute racine N-ième de l'unité $\zeta \neq a$ on a

$$\log|\zeta - a| \geq -C'_a \log N. \tag{1.16}$$

Le cas où a est une racine de l'unité est trivial ; on suppose donc que $a^N \neq 1$ pour tout $N \geq 1$. Soit ζ_0 la racine N-ième la plus proche de a. On suppose maintenant que (1.16) n'est pas vérifiée par ζ_0. Soit ζ une racine N-ième distincte de ζ_0 ; on a

$$|\zeta - a|^2 = |\zeta - \zeta_0|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\zeta - \zeta_0)(\zeta_0 - a) + |\zeta_0 - a|^2$$

et il suit que

$$\begin{aligned}\log|\zeta-\alpha|-\log|\zeta-\zeta_0| &= \frac{1}{2}\log(1+2\operatorname{Re}\frac{(\zeta-\zeta_0)(\zeta_0-a)}{|\zeta-\zeta_0|^2}+\frac{|\zeta_0-a|^2}{|\zeta-\zeta_0|^2})\\ &\leq C_1\operatorname{Re}\frac{(\zeta-\zeta_0)(\zeta_0-a)}{|\zeta-\zeta_0|^2}\end{aligned}$$

vu que l'on a supposé $|\zeta_0-a|\ll 1/N\leq|\zeta-\zeta_0|$. Par ailleurs on a

$$\sum_{\substack{\zeta^N=1\\ \zeta\neq\zeta_0}}\frac{1}{|\zeta-\zeta_0|^2}\operatorname{Re}(\zeta-\zeta_0)(\zeta_0-a)\leq\sum_{\substack{\zeta^N=1\\ \zeta\neq\zeta_0}}\frac{|\zeta-a|}{|\zeta-\zeta_0|}\leq|\zeta_0-a|N^2$$

et comme on a supposé que $|\zeta_0-a|$ décroît plus vite que toute puissance de N il vient

$$\sum_{\substack{\zeta^N=1\\ \zeta\neq\zeta_0}}\log|\zeta-a|-\sum_{\substack{\zeta^N=1\\ \zeta\neq\zeta_0}}\log|\zeta-\zeta_0|=o(1).$$

Soit $Q(t)=t^N-1$, on a finalement

$$\sum_{\substack{\zeta^N=1\\ \zeta\neq\zeta_0}}\log|\zeta-\zeta_0|=\log|Q'(\zeta_0)|=\log N$$

et comme on a supposé que $\log N=o(\log|\zeta_0-a|)$ il suit $\sum_{\zeta^N=1}\log|\zeta-a|\xrightarrow[N\to\infty]{}-\infty$, ce qui contredit (1.15). □

Pour $m>1$ le même argument que ci-dessus montre que si $P\in\mathbb{Z}[\Lambda]$ on a :

$$\limsup_{\alpha(\Delta)\to\infty}\sum_{\substack{\zeta\in\Delta^\perp\\ P(\zeta)\neq 0}}\log|P(\zeta)|\leq m(P).$$

En revanche l'analogue de (1.15) (où même de la propriété plus faible (1.16)) n'est pas connue pour les polynômes en plusieurs variables ; on ne peut donc pas démontrer la limite. Pour contourner ce problème on utilise un résultat d'approximation de D.W. Boyd et W. Lawton pour déduire du lemme ci-dessus un résultat moins précis sur les polynômes en plusieurs variables.

1.3.3 Construction de Λ_N

Pour cette sous-section on fixe une identification $\Lambda=\mathbb{Z}^m$ et la fonction longueur associée, de sorte que $\alpha(\Delta)=\min_{v\in\Delta-\{0\}}\max_{l=1,\dots,m}|v_l|$.

Proposition 1.19. *Soit $\mathcal{P}$ une collection finie de polynômes dans $\mathbb{Z}[t_1,\dots,t_m]$. Il existe une suite exhaustive de sous-groupes d'indice fini $\Lambda_N\subset\Lambda$ tels que pour tout $P\in\mathcal{P}$ on ait*

$$\frac{1}{[\Lambda:\Lambda_N]}\sum_{\substack{\zeta\in\Lambda_N^\perp\\ P(\zeta)\neq 0}}\log|P(\zeta)|\xrightarrow[N\to\infty]{}m(P); \tag{i}$$

$$|\{\zeta\in\Lambda_N^\perp,\ P(\zeta)=0\}|\leq\log[\Lambda:\Lambda_N]; \tag{ii}$$

$$\forall\zeta\in\Lambda_N^\perp,\ \log|P(\zeta)|\geq-(\log[\Lambda:\Lambda_N])^2. \tag{iii}$$

Démonstration. On commence par considérer le cas d'un seul polynôme $P \in \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_m]$, le cas général en suivra trivialement.

Pour $v = (v_1, \ldots, v_m) \in \mathbb{Z}^m$ on note v^* le sous-groupe $\{(u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{Z}^m,\ \sum_i u_i v_i = 0\}$. On pose $q(v) = \alpha(v^*)$ et pour $P \in \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_m]$ on note $P_v(X) = P(X^{v_1}, \ldots, X^{v_m})$. Le résultat principal de [Law83] est la limite suivante :

$$m(P_v) \underset{q(v)\to\infty}{\longrightarrow} m(P). \tag{1.17}$$

Pour un nombre premier p on note $p = p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ la suite des m nombres premiers qui le suivent et on pose $r_i = \prod_{j\neq i} p_j$ pour $i = 1, \ldots, m$ et $r = (r_1, \ldots, r_m)$. On voit aisément que $q(r) \geq p$: si $\sum_i s_i r_i = 0$ pour un $s \in \mathbb{Z}^m$ et pour un j on a $s_j \neq 0$ on obtient $-s_j r_j = p_j \sum_{i\neq j} \frac{r_i}{p_j} s_i$. Comme p_j ne divise pas r_j on doit avoir $p_j | s_j$ et il suit que $q(r) \geq |s_j| \geq p_j \geq p$. De (1.17) il suit ainsi que $m(P_r) \xrightarrow[p\to\infty]{} m(P)$. Pour un entier $M \geq 0$ on definit le sous-groupe suivant de $\mathbb{Z}^m$:

$$\Lambda_{p,M} = \{v \in \mathbb{Z}^m, \sum_i v_i r_i \equiv 0 \pmod{M}\}.$$

On a alors $\Lambda_{p,M} = r^* \oplus \mathbb{Z}Mv$ pour tout $v \in \mathbb{Z}^m$ qui engendre un supplémentaire à r^* et $\Lambda_{p,M}$ est d'indice M dans $\mathbb{Z}^m$. On montre que si $M > mp_1 \ldots p_m$ on a $\alpha(\Lambda_{p,M}) \geq p$. Soit $v \in \Lambda_{p,M}$, $v \notin r^*$. Alors on a $|\sum_i r_i v_i| \geq M$ et il suit que $|v_j| > M/(m \prod_{i\neq j} p_i)$ pour au moins un j. Le côté droit est supérieur à p pour M comme indiqué.

On fixe maintenant $\varepsilon > 0$ et on choisit p assez grand pour que $|m(P_r) - m(P)| < \varepsilon$; par le Lemme 1.18 il existe un entier M_0 tel que pour tout $M \geq M_0$ on ait

$$\left| m(P_r) - \frac{1}{M} \sum_{\zeta^M = 1,\, P_r(\zeta)\neq 0} \log|P_r(\zeta)| \right| < \varepsilon.$$

On a $\Lambda_{p,M}^{\perp} = \{(\zeta^{r_1}, \ldots, \zeta^{r_m}),\ \zeta^M = 1\}$ et il suit donc que

$$\left| m(P) - \frac{1}{[\Lambda : \Lambda_{p,M}]} \sum_{\zeta \in \Lambda_{p,M}^{\perp},\, P(\zeta)\neq 0} \log|P(\zeta)| \right| < 2\varepsilon$$

pour tout $M \geq M_0$.

Le nombre de zéros de P dans $\Lambda_{p,M}^{\perp}$ est majoré par le nombre de racines de P_r qui est lui-même inférieur à

$$\max_i |r_i| \times \deg(P) \leq \deg(P) p_1 \ldots p_m \leq \deg(P) 2^{\frac{m(m+1)}{2}} p^m$$

vu que $p_i \leq 2p_{i-1}$ par un théorème de Chebyshev (cf. Wikipédia). Il existe donc un entier M_1 tel que pour tout $M \geq M_1$ le nombre de zéros de P dans $\Lambda_{p,M}$ soit inférieur à $\log(M)$.

Du lemme 1.18 on tire que pour tout p il existe un $C_p > 0$ tel que pour tout $\zeta \in \Lambda_{p,M}^{\perp}$ qui ne soit pas un zéro de P on ait

$$\log|P(\zeta)| \geq -C_p \log(M)$$

et il suit que pour $M \geq M_2 = \exp(C_p)$ on a $\log|P(\zeta)| \geq -\log(M)^2$.

On peut donc construire un suite $\Lambda_N = \Lambda_{p_N, M_N}$ où p_N est le N-ième nombre premier et M_N un entier bien choisi : on demande que $M_N > mp_N \ldots p_{N+m-1}$ pour que $\alpha(\Lambda_{p_N,M_N}) \geq p_N$, $M_N \geq M_0, M_1, M_2$ (où M_0 est l'entier ci-dessus correspondant à $\varepsilon = 1/p$) et on obtient ainsi que (i), (ii) and (iii) sont vérifiés par cette suite.

Dans le cas de plusieurs polynômes $P_1, \ldots, P_n$ on obtient des suites $M_N^l, l = 1, \ldots, n, i = 1, 2, 3$ telles que les conclusions de la proposition soient vérifiées pour chaque P_l avec la suite Λ_{p_N, M_N} pour toute suite $M_N \geq M_N^l$. En posant $M_N = \max_{l=1,\ldots,n} M_N^l$ et $\Lambda_N = \Lambda_{p_N, M_N}$ on obtient une suite telle que les propriétés (i), (ii) et (iii) soient vérifiées pour tous les P_l. □

Notation

Dans l'identification $\Lambda = \mathbb{Z}^m$ on a défini le sous-groupe $\Lambda_N = r_N^* \oplus M v_N$; dans la suite on gardera cette notation et on considérera r_N comme un élément du dual $\mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbb{Z})$ et r_N^* comme son noyau.

1.3.4 Preuve de la proposition 1.13

Dans cette preuve on utilisera systématiquement le lemme suivant.

Lemme 1.20. *Soient V, W deux espaces hermitiens et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$. On suppose que toute valeur singulière non nulle λ de f satisfait $c \leq \lambda \leq C$. On pose $f' = f_{|V'}$; on a alors l'encadrement*

$$d \log(c) \leq \log(\text{dét}' f) - \log(\text{dét}' f') \leq d \log(C).$$

Démonstration. Si $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_{\dim V}$ sont les valeurs propres d'un endomorphisme auto-adjoint positif g of V on a l'égalité bien connue (cf. Wikipedia) :

$$\lambda_i = \max_{F \leq V, \dim(F) = i} \min_{x \in F} \frac{||gx||}{||x||};$$

et en appliquant ceci à $g = f^* f|_{\ker(f)^\perp}$ on obtient que si $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_{\dim V - d}$ sont les valeurs propres de $g|_{V'}$ on a $\lambda_i \geq \lambda'_i \geq \lambda_{i+d}$ pour tout i. Il suit que

$$\log(\text{dét}'(f)) - \log(\text{dét}'(f')) \leq \sum_{i=1}^{d} \log(\lambda_i) \leq d \log(C)$$
$$\log(\text{dét}'(f)) - \log(\text{dét}'(f')) \geq \sum_{i=\dim V - d}^{\dim V} \log(\lambda_i) \geq d \log(c).$$

□

Démonstration de la proposition 1.13. Comme dans la preuve de la proposition 1.19 on peut se limiter au cas d'une seule matrice. De plus il suffit de démontrer le résultat pour des matrices auto-adjointes vu que si $A \in M_{n,m}(\mathbb{C}[G])$ on a $\text{dét}_\Lambda(A) = \sqrt{\text{dét}_\Lambda(A^* A)}$.

Soit donc $A \in M_n(\mathbb{Z}[G])$ une matrice auto-adjointe. On veut montrer que

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\log \text{dét}'(A_{\Lambda_N})}{[\Lambda : \Lambda_N]} = \text{dét}_\Lambda(A)$$

pour une suite Λ_N obtenue par la proposition 1.19. La stratégie de la preuve est d'utiliser le lemme 1.20 ci-dessus et les estimées sur les valeurs propres de A_{Λ_N} pour se ramener au cas d'une matrice inversible. Le résultat est ensuite déduit du point (i) de la proposition 1.19 appliqué à $\text{dét}(A)$. Soit L un sous-$\mathbb{Z}[\Lambda]$-module libre de rang maximal dans l'orthogonal de $\ker(A)$, L' son

image par A (qui est un sous-module libre de rang maximal dans $\operatorname{im} A$) et h, g des isomorphismes de $\mathbb{Z}[\Lambda]^r$ ($r = \operatorname{rg}(A)$) vers L, L', de sorte que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\Lambda]^r & \xrightarrow{A'} & \mathbb{Z}[\Lambda]^r \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow \\ \mathbb{Z}[\Lambda]^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{Z}[\Lambda]^n \end{array}$$

où $A' \in M_r(\mathbb{Z}(\Lambda])$ est une matrice carrée de déterminant non nul. Vu que $L \otimes \mathbb{C}$ est dense dans $\ker(A)^\perp$ on obtient par [Lüc02, Lemma 3.15(3)] l'égalité

$$\text{dét}_\Lambda(A) = \text{dét}_\Lambda(g)\text{dét}_\Lambda(A')\text{dét}_\Lambda(h^{-1}).$$

On écrit $\text{dét}(t - A) = \sum_{i=0}^n P_i(t_1, \ldots, t_m)t^i$. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble de polynômes contenant tous les P_i non nuls ainsi que tous les coefficients non nuls des polynômes caractéristiques de A', hh^* et gg^*, tous les polynômes apparaissant dans le lemme 1.16 pour h et g et ceux du lemme 1.15 pour $(\mathbb{Z}[\Lambda]^n/\operatorname{im}(h))_{\text{tors}}$ et $\operatorname{im}(A)/\operatorname{im}(g)$. Soit Λ_N la suite associée à $\mathcal{P}$ par la proposition 1.19. Comme $\text{dét}'A(\zeta) = \pm P_i(\zeta)$ pour $i = \dim\ker(A(\zeta))$ (et une égalité semblable vaut pour les autres matrices) le point (iii) de la proposition 1.19 implique que pour toute valeur singulière λ de $A_{\Lambda_N}, A'_{\Lambda_N}, h_{\Lambda_N}$ ou g_{Λ_N} on a

$$\log\lambda \geq -\log[\Lambda : \Lambda_N]^2. \tag{1.18}$$

D'après le lemme 1.16 et le point (ii) de la proposition 1.19 on voit que le sous-espace $\ker(h_{\Lambda_N}) + \ker(g_{\Lambda_N})$ de $\mathbb{C}[\Lambda/\Lambda_N]^r$ est de dimension $\leq \log[G : G_N]$. De la même manière le lemme 1.15 montre que $\operatorname{im}(h_{\Lambda_N})$ et $\operatorname{im}(g_{\Lambda_N}) = A_\Lambda \operatorname{im} h_{\Lambda_N}$ sont de codimension inférieure à $\log[\Lambda : \Lambda_N]$ dans $\ker(A_\Lambda)^\perp$. On définit des sous-espaces $V_1 \subset \mathbb{C}[\Lambda/\Lambda_N]^r$ et $V_2 \subset \mathbb{C}[\Lambda/\Lambda_N]^n$ par

$$V_1 = \ker(h_{\Lambda_N})^\perp \cap \ker(A'_{\Lambda_N}) \cap A'^{-1}_{\Lambda_N}(\ker(g_{\Lambda_N})^\perp)$$
$$V_2 = h_{\Lambda_N}(V_1)$$

et on a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{A'_{\Lambda_N}} & A'_{\Lambda_N}(V_1) \\ {\scriptstyle h_{\Lambda_N}}\downarrow & & {\scriptstyle g_{\Lambda_N}}\downarrow \\ V_2 & \xrightarrow{A_{\Lambda_N}} & A_{\Lambda_N}(V_2) \end{array}$$

où toutes le flèches sont des isomorphismes. Pour $i = 1, 2$ on a aussi

$$\dim V_i - r[\Lambda : \Lambda_N] = O(\log[\Lambda : \Lambda_N]).$$

Dans la suite on utilisera l'abréviation $\log(u_{\Lambda_N}) = \log(v_{\Lambda_N}) + o([\Lambda : \Lambda_N])$ en $u_{\Lambda_N} \sim v_{\Lambda_N}$. Du lemme 1.20 et de la minoration (1.18) il suit que pour toute $f : \mathbb{Z}[\Lambda]^n \to \mathbb{Z}[\Lambda]^{n'}$ et toute suite de sous-espaces $F_N \subset \mathbb{C}[\Lambda/\Lambda_N]^n$ tels que $\dim(F_N) = O([\Lambda : \Lambda_N]^b)$ pour un $b < 1$ on a $\text{dét}'(f_{\Lambda_N}) \sim \text{dét}'(f_{\Lambda_N}|_{F_N})$. En appliquant ceci à $f = A'$ et $F_N = V_1$ on obtient que

$$\text{dét}'(A'_{\Lambda_N}) \sim \text{dét}'(A'_{\Lambda_N}|_{V_1}).$$

De la même manière on a

$$\begin{aligned} \text{dét}'(A'_{G_N}|_{V_1}) &= \text{dét}'((g_{G_N}|^{A_{G_N}V_2}_{A'_{G_N}V_1})^{-1} A_{G_N} h_{G_N}|_{V_1}) \\ &= \text{dét}(g_{G_N}|^{A_{G_N}V_2}_{A'_{G_N}V_1})^{-1}\text{dét}(A_{G_N}|_{V_2})\text{dét}(h_{G_N}|_{V_1}) \\ &\sim \text{dét}'(g_{G_N})^{-1}\text{dét}'(A_{G_N})\text{dét}'(h_{G_N}), \end{aligned}$$

où la dernière ligne suit du lemme 1.20 appliqué à $f = g_{\Lambda_N}$, $V = \mathbb{C}[\Lambda/\Lambda_N]^r$, $W = \mathrm{im}(A)_{\Lambda_N}$ et $V' = A'_{\Lambda_N} V_1$ puis à $f = A_{\Lambda_N}$, $V = W = \mathrm{im}(A)_{\Lambda_N}$ et $V' = V_2$ et finalement à $f = h_{\Lambda_N}$, $V = \mathbb{C}[\Lambda/\Lambda_N]^r$, $W = \mathrm{im}(A)_{\Lambda_N}$ et $V' = V_1$. On conclut que

$$\frac{\log(\text{dét}'(A_{\Lambda_N}))}{[\Lambda : \Lambda_N]} = \frac{\log(\text{dét}'(h_{\Lambda_N})^{-1}\text{dét}'(A'_{\Lambda_N})\text{dét}'(g_{\Lambda_N}))}{[\Lambda : \Lambda_N]} + o(1)$$

et on voit qu'il suffit donc de considérer le cas où le déterminant est non nul que l'on peut ensuite appliquer à A', hh^* et gg^*.

On suppose donc maintenant que $P = \text{dét}(A) \neq 0$ et on reproduit la preuve classique donnée par exemple dans [Lüc02, Lemma 13.53]. On décompose $\mathbb{C}[\Lambda/\Lambda_N]^n$ en la somme $\bigoplus_{\zeta \in \Lambda_N^\perp} V_\zeta^n$ où Λ/Λ_N agit sur la droite V_ζ par le caractère ζ, de sorte que A_{Λ_N} est représenté dans V_ζ^n par la matrice $A(\zeta)$. Le nombre de $\zeta \in \Lambda_N^\perp$ tels que $\text{dét}(A)(\zeta) = 0$ est inférieur à $\log[\Lambda : \Lambda_N]$ et comme les valeurs propres de A_{Λ_N} sont majorées par une constante et minorées par (1.18) on obtient par le lemme 1.20 que

$$\begin{aligned} \frac{1}{[\Lambda : \Lambda_N]} \log \text{dét}'(A_{\Lambda_N}) &= \frac{1}{[\Lambda : \Lambda_N]} \sum_{\zeta \in \Lambda_N^\perp} \log \text{dét}' A(\zeta) \\ &\sim \frac{1}{[\Lambda : \Lambda_N]} \sum_{\zeta \in \Lambda_N^\perp,\, \text{dét}(A)(\zeta) \neq 0} \log \text{dét}(A(\zeta)). \end{aligned}$$

Le point (i) de la proposition 1.19 appliquée au côté droit montre qu'il converge vers $\log \text{dét}_\Lambda(A)$ quand $N \to \infty$.

Le point (ii) de la proposition est une conséquence immédiate du (ii) de la proposition 1.19 et de la proposition 1.14. □

Chapitre 2

Croissance de l'homologie de torsion dans les revêtements abéliens

Dans ce chapitre on relie le taux de croissance exponentielle de la torsion homologique dans les revêtements abéliens aux mesures de Mahler des polynômes d'Alexander. On traite le cas des revêtements cycliques dans le théorème 2.5 et on obtient un résultat partiel pour le cas général dans le théorème 2.19. Dans tout ce chapitre Λ est un groupe abélien libre de rang fini.

2.1 Le cas ℓ^2-acyclique, d'après [BV]

On s'occupe ici de la croissance du terme parasite $\prod_i \mathrm{vol}(H_i)^{(-1)^i}$ dans (1.3). Le résultat suivant est une adaptation de [BV, Theorem 7.3].

Proposition 2.1. *Soit C_*, d_* un complexe fini de $\mathbb{Z}[\Lambda]$-modules libres de type fini. Si $H_p^{(2)}(C) = 0$ et Λ_N est la suite associée aux d_p par la proposition 1.13 on a*

$$|\log \mathrm{vol}(H_p(C_{\Lambda_N})_{\mathrm{libre}})| = O(\log[\Lambda : \Lambda_N]^2).$$

Démonstration. On reprend la notation de [BV] et on note $R_p(A) = \mathrm{vol}(H_p(A)_{\mathrm{libre}})$ pour tout complexe A_* de $\mathbb{Z}$-modules libres de type fini tel que $A_p \otimes \mathbb{R}$ soit muni d'un produit scalaire défini sur $\mathbb{Q}$. Les deux lemmes suivants sont issus de cette référence.

Lemme 2.2. *Soit K un groupe fini qui agit sur un complexe A_* de $\mathbb{Z}$-modules. On suppose que $A_* \otimes \mathbb{C}$ est muni d'une métrique Hermitienne pour laquelle K agit par isométries. Soient M, ν des majorants respectifs des normes des différentielles de A_* et des normes d'une famille génératrice de A_*. Soit $X \subset \widehat{K}$ l'ensemble des caractères qui apparaissent dans la K-représentation $H_*(A \otimes \mathbb{C})$ et D le maximum des dimensions des sous-espaces X-isotypiques des A_p. Alors on a pour tout p :*

$$R_p(A) \geq (M\nu|K|^5)^{-D}.$$

Lemme 2.3. *Soit A_* comme ci-dessus et B_* le complexe dual $B_{n-p} = \mathrm{Hom}(A_p, \mathbb{Z})$ muni de la métrique duale. On a pour tout p :*

$$R_p(A_*)R_{n-p}(B_*) = 1.$$

Il existe $M > 0$ tel que les différentielles $d_{p,\Delta}$ des complexes $(C_*)_\Delta$ sont de norme inférieure à M pour tout $\Delta \subset \Lambda$ d'indice fini et les $(C_p)_\Delta$ sont engendrés par des vecteurs unitaires. Soit X l'ensemble des caractères de Λ/Δ qui apparaissent dans $H_p(C_\Delta) \otimes \mathbb{C}$ et D le maximum des dimensions des sous-espaces X-isotypiques des $(C_p)_\Delta$ et D_N ce maximum pour $\Delta = \Lambda_N$. Le lemme 2.2 donne

$$R_p(C_\Delta) \geq (M[\Lambda : \Delta]^5)^{-D}.$$

Il suit alors du lemme 2.3 que l'on a

$$(M[\Lambda : \delta]^5)^D \geq R_p(C_\Delta) \geq (M[\Lambda : \Delta]^5)^{-D}. \tag{2.1}$$

Vu que $C_p \cong \mathbb{Z}[\Lambda]^n$ on a $(C_p)_\Delta \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}[\Lambda/\Delta]^n$ et il suit que pour tout ensemble de caractères $Y \subset \mathrm{Hom}(\Lambda/\Delta, \mathbb{C}^\times)$ la dimension du sous-espace Y-isotypique de $(C_p)_\Delta \otimes \mathbb{C}$ est égale à $n|Y|$. En particulier on a $D \leq n \dim(H_p(C_\Delta) \otimes \mathbb{C})$ et du point (ii) de la proposition 1.13 il suit que $D_N = O(\log[\Lambda : \Lambda_N])$ et la majoration souhaitée est alors une conséquence immédiate de (2.1). □

Corollaire 2.4. *Soit C_*, d_* un complexe ℓ^2-acyclique fini de $\mathbb{Z}[\Lambda]$-modules libres de type fini. Il existe une suite exhaustive de sous-groupes d'indice fini $\Lambda_N \subset \Lambda$ telle que l'on ait*

$$\lim_{N\to\infty} \left(\prod_p |H_p(C_{\Lambda_N})_{\mathrm{tors}}|^{(-1)^p} \right)^{\frac{1}{[\Lambda:\Lambda_N]}} = \tau^{(2)}(C).$$

Démonstration. Par les propositions 2.1 et 1.13 il existe une telle suite Λ_N telle que

$$\frac{\log \tau(C_{\Lambda_N})}{[\Lambda : \Lambda_N]} \xrightarrow[N\to\infty]{} \tau^{(2)}(C)$$

et

$$\frac{|\log \mathrm{vol}(H_p(C_{\Lambda_N})_{\mathrm{libre}})|}{[\Lambda : \Lambda_N]} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

Le corollaire suit alors de (1.3). □

2.2 Croissance de l'homologie de torsion dans les revêtements cycliques

Soit X un CW-complexe fini, $\widetilde{X}$ son revêtement universel et ϕ une surjection $\pi_1(X) \to \mathbb{Z}$; alors pour tout $N \geq 1$, $X_N = \phi^{-1}(N\mathbb{Z})\backslash\widetilde{X}$ est un revêtement cyclique de degré N de X et $\widehat{X} = \ker(\phi)\backslash\widetilde{X}$ en est un revêtement cyclique infini. Le but de cette section est de démontrer le résultat suivant.

Théorème 2.5. *Soit V un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini et $\rho : \pi_1(X) \to \mathrm{SL}(V)$. Pour $p = 0, \ldots, \dim X$ soit j le plus petit indice tel que $\Delta_j(H_p(\widehat{X}; V)) \neq 0$. On a la limite*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\log |H_i(X_N; V)_{\mathrm{tors}}|}{N} = m(\Delta_j(H_p(\widehat{X}; V))).$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de (2.2) ci-dessous et du lemme 0.19. □

Le reste de cette section est donc dédié à la preuve des deux résultat suivants : si (C_*, d_*) est un complexe fini de $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-modules libres de type fini on a pour tout p

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\log |H_p(C_N)_{\text{tors}}|}{N} = m(\Delta_{b_p^{(2)}(C)}(H_p(C))) \tag{2.2}$$

et si M est un $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-module de rang r on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\log |(M_N)_{\text{tors}}|}{N} = m(\Delta_r(M)) \tag{2.3}$$

On déduit plus loin (2.2) de (2.3) et cette dernière limite est elle-même prouvée en trois étapes : on considère d'abord le cas d'un module sans torsion, puis celui d'un module de torsion et on combine ces deux cas pour démontrer le résultat en général.

2.2.1 Modules sans torsion

On suppose ici que M est sans torsion et on veut montrer que :

$$\frac{1}{N} \log |(M_N)_{\text{tors}}| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0. \tag{2.4}$$

On montre en fait que la $\mathbb{Z}$-torsion dans M_N est bornée indépendamment de N, et la preuve est remarquablement semblable au cas-jouet 0.8. On choisit un plongement de M dans un module libre $L \cong \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]^n$.

Lemme 2.6. *Soit $T = L/M$; alors le sous-module de $\mathbb{Z}$-torsion de T est d'exposant fini ; soit e non nul tel que eT soit un $\mathbb{Z}$-module libre, alors pour tout $N \geq 1$ l'exposant de $(M_N)_{\text{tors}}$ divise e.*

Démonstration. La partie de $\mathbb{Z}$-torsion de T est isomorphe à M'/M où $M' = L \cap M \otimes \mathbb{Q}$ est de type fini, et si $x_1, \ldots, x_k \in L$ en est une famille génératrice il existe pour tout i un entier $n_i > 0$ tel que $n_i x_i \in M$. Il suit que l'exposant de T divise $n_1 \ldots n_k$.

Supposons maintenant qu'un $x \in M$ ait une image d'ordre exactement n dans M_N. Ceci signifie qu'il existe un $y \in M$ tel que $y \notin dM$ pour tout diviseur $d > 1$ de n et $nx = (t^N - 1)y$. Dans le module libre L on voit en appliquant le lemme de Gauss coordonnée par coordonnée que n doit diviser y. Il suit que $n^{-1}y$ est d'ordre n dans L/M. □

Il existe donc un $K > 0$ ne dépendant que de M tel que pour tout N la $\mathbb{Z}$-torsion de M_N soit de la K-torsion et (2.4) est donc une conséquence du lemme suivant.

Lemme 2.7. *Soit M un $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-module de type fini (resp. C_* un $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-complexe libre fini) et K un entier non nul. On suppose que la partie de K-torsion de M (resp. $H_p(C_*)$) est finie, alors la K-torsion de M_N (resp. $H_p(C_N)$) est bornée indépendamment de N.*

Démonstration. Soit $p_1^{k_1} \ldots p_l^{k_l}$ la factorisation en nombres premiers de K. La partie de K-torsion de M_N se décompose comme suit :

$$(M_N)_{K-tors} \cong \bigoplus_{i=1}^{l} \left(\bigoplus_{j=1}^{d_{i,N}} \mathbb{Z}/p^{\alpha_{i,j}} \right)$$

où $d_{i,N} = \dim(M_N \otimes \mathbb{F}_{p_i}) - \text{rg}_{\mathbb{Z}}(M_N)$ et $\alpha_{i,j} \leq k_i$. Il suit que

$$|(M_N)_{K-tors}| \leq \sum_{i=1}^{l} p_i^{k_i} (\dim(M_N \otimes \mathbb{F}_{p_i}) - \dim(M_N \otimes \mathbb{Q})).$$

Ainsi il suffit de prouver que pour $p = p_1, \dots, p_l$ la différence

$$\dim(M_N \otimes \mathbb{F}_p) - \dim(M_N \otimes \mathbb{Q})$$

est bornée indépendamment de N. On peut le montrer en examinant la preuve de [LLS11, Theorem 0.2(i)] dans notre cas particulier, mais on va en donner une preuve courte et élémentaire. A noter qu'elle est très similaire à celle de la proposition 1.14.

On suppose que M est sans torsion, on pose $r = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]}(M)$ et on choisit un plongement de M dans un module libre L de rang r. Par la proposition 1.14 on sait que $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}}(M_N) - rN$ est borné et on doit donc montrer que $\dim(M_N \otimes \mathbb{F}_p) - rN$ est borné. Dans la suite on note abusivement M, L les $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels $M \otimes \mathbb{F}_p, L \otimes \mathbb{F}_p$. Il existe un $f \in \mathbb{F}_p[t]$ tel que $fL \subset M$. On a alors $f_N L_N \subset M_N \subset L_N$ et il suffit donc de montrer que $\dim_{\mathbb{F}_p} \ker(f_N)$ est borné. Supposons que $L = \mathbb{F}_p[t^{\pm 1}]$ soit de rang 1 ; alors on peut identifier L_N avec les polynômes de $\mathbb{F}_p[t]$ de degré inféreur à N. Soit $\ell = \deg(f)$, si $h \in \mathbb{F}_p[t]$ est non nul et de degré $\deg(h) < N - \ell$ le produit fh est encore un polynôme de degré $< N$ et fh est donc non nul dans L_N. Il suit que f_N est injective sur un sous-espace de dimension $N - \ell$ et son noyau est donc de dimension inférieure à ℓ. Si $L \cong \mathbb{F}_p[t^{\pm 1}]^n$ on peut utiliser le même argument coordonnée par coordonnée.

En général, vu que la p-torsion de M est de rang sur $\mathbb{Z}$ fini on a $\mathrm{rg}_{\mathbb{F}_p[t^{\pm 1}]}(M \otimes \mathbb{F}_p) = r$. Comme on a montré le résultat pour M/M_{tors} il suffit de montrer que $\dim((M_{\mathrm{tors}})_N \otimes \mathbb{F}_p)$ est bornée. Soit $f \in \mathbb{F}_p[t]$ qui annihile M_{tors}, on a alors une surjection $\left(\mathbb{F}_p[t^{\pm 1}]/(f)\right)^k \to T$ et par l'argument ci-dessus on a $\dim((M_{\mathrm{tors}})_N \otimes \mathbb{F}_p) = \dim \mathrm{coker}(f) \ll k \deg f$.

L'énoncé sur l'homologie d'un complexe se déduit de l'énoncé pour un module exactement comme dans la preuve de la proposition 1.14. □

2.2.2 Modules de torsion

Soit T un $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-module de torsion de type fini, on veut montrer que :

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\log |(T_N)_{\mathrm{tors}}|}{N} = m(\Delta_0(T)). \tag{2.5}$$

Le résultat suivant permet d'appliquer le théorème 7.3 de [BV]. Noter que l'énoncé et la preuve du lemme ci-dessous se transposent presque mot pour mot au cas d'un $\mathbb{Z}[\Lambda]$-module de torsion (où $\Lambda \cong \mathbb{Z}^m$) ; il suffit de remplacer 3 par $m + 2$.

Lemme 2.8. *Il existe une résolution*

$$0 \to F_3 \xrightarrow{\phi_3} F_2 \xrightarrow{\phi_2} F_1 \xrightarrow{\phi_1} T \to 0 \tag{2.6}$$

de T par des $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-modules libres de type fini. Le complexe F_*, ϕ_* est ℓ^2-acyclique et sa torsion ℓ^2 est égale à $\mathcal{M}(\Delta_0(T))^{-1}$. De plus, pour tout $p > 1$ il existe un $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-module M_p sans torsion tel que pour tout $N \geq 1$, $H_p(F_N)$ se plonge dans $(M_p)_N$.

Démonstration. L'anneau $\mathbb{Z}[t]$ est régulier de dimension 2 d'après [Ser00, IV.D, Proposition 25] ; vu que ses localisés sont les même que ceux de $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ ce dernier l'est aussi. Ceci signifie que tout $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-module de type fini a une résolution de longueur inférieure à 3 par des modules projectifs de type fini. Comme tous les $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-modules projectifs sont libres par [Lam06, Corollary V.4.12] on obtient la résolution 2.6. On a alors $H_p(F) = 0$ pour $p > 1$ et $H_1(F) = T$ d'où il suit que F_* est ℓ^2-acyclique et par le corollaire 1.8 sa torsion ℓ^2 est égale à $-m(\Delta_0(T))$.

Soit $N \geq 1$ et $p > 1$; l'image $\mathrm{im}(\phi_{p,N})$ est égale à $\mathrm{im}(\phi_p)_N = \ker(\phi_p)_N$ et le groupe d'homologie $H_p(F_N)$ est donc isomorphe au quotient $\ker(\phi_{p,N})/\ker(\phi_p)_N$. L'application ϕ_p donne un plongement de $M_p = F_p/\ker(\phi_p)$ dans F_{p-1} et $\ker(\phi_{p,N})/\ker(\phi_p)_N$ est alors isomorphe au noyau de l'application induite $M_{p,N} \to F_{p-1,N}$ qui est bien sûr plongé dans $M_{p,N}$. □

Il suit du lemme ci-dessus et de (2.4) que pour $p > 1$ on a

$$\frac{1}{N}\log|H_p(C_N)_{\text{tors}}| \leq \frac{1}{N}\log|(M_{p,N})_{\text{tors}}| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

et (2.5) suit donc du corollaire 2.4 appliqué au complexe F_*, ϕ_* vu que $H_1(F_N) \cong T_N$.

2.2.3 Conclusion

Soit M un $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-module de type fini, on a la suite exacte courte

$$0 \to M_{\text{tors}} \xrightarrow{i} M \to M' \to 0$$

où $M' = M/M_{\text{tors}}$ est sans torsion. En tensorisant par $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/N]$ on obtient

$$(M_{\text{tors}})_N \xrightarrow{i_N} M_N \to M'_N \to 0.$$

Lemme 2.9. *Pour tout $N \geq 1$ l'application $i_N : (M_{\text{tors}})_N \to M_N$ est injective.*

Démonstration. Soit $x \in M_{\text{tors}}$ tel que l'image de x dans $(M_{\text{tors}})_N$ soit dans le noyau de i_N. Il existe donc un $y \in M$ tel que $x = (t^N - 1)y$. Mais il suit de cette dernière égalité que $y \in M_{\text{tors}}$ d'où il suit que x est déjà nul dans $(M_{\text{tors}})_N$. □

Il suit que l'on a l'inégalité

$$1 \leq \frac{|(M_N)_{\text{tors}}|}{|(M_{\text{tors}})_N)_{\text{tors}}|} \leq (M'_N)_{\text{tors}}.$$

Le terme de droite est borné d'après (2.4) et il suit que

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log|(M_N)_{\text{tors}}| &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log|((M_{\text{tors}})_N)_{\text{tors}}| \\ &= m(\Delta_0(M_{\text{tors}})) \\ &= m(\Delta_r(M))\end{aligned}$$

ce qui finit la preuve de (2.3).

Soit maintenant C_*, d_* un complexe fini de $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-modules libres de type fini ; l'application naturelle de $\ker(d_p)_N$ vers $\ker(d_{p,N})$ induit une application $j_N : H_p(C)_N \to H_p(C_N)$. Une preuve * similaire à celle du lemme 2.9 montre que j_N est injective et il suit que

$$1 \leq \frac{|H_p(C_N)_{\text{tors}}|}{|(H_p(C)_N)_{\text{tors}}|} \leq |\operatorname{coker}(j_N)_{\text{tors}}|.$$

Pour traiter le côté droit on utilise la même astuce que dans la preuve de (2.5) : le conoyau de j_N se plonge dans $\ker(d_{p,N})/\ker(d_p)_N$ qui lui-même se plonge dans M_N où $M = C_p/\ker(d_p)$ est sans torsion et il suit que $|\operatorname{coker}(j_N)_{\text{tors}}|$ est borné. Au final on a donc prouvé que

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}|H_p(C_N)_{\text{tors}}| = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}|(H_p(C)_N)_{\text{tors}}| = m(\Delta_{b_p^{(2)}(C)}(H_p(C)))$$

où la dernière égalité suit de (2.3) appliqué à $H_p(C)$.

*. Si $x \in \ker(d_p)$ est nul dans $H_p(C_N)$, i.e. $x = y + (t^N - 1)z$, $y \in \operatorname{im}(d_{p+1})$, $z \in (t^N - 1)C_p$ on obtient $(t^N - 1)d_p(z) = 0$ et il suit que $z \in \ker(d_i p)$ donc x est nul dans $H_p(C)_N$.

2.2.4 Exemples en dimension 3

Une présentation pour les modules d'Alexander d'une 3–variété

Si M est une 3–variété et $\widehat{M}$ un revêtement cyclique infini il serait plaisant d'obtenir une formule aussi explicite que possible pour le polynôme d'Alexander $\Delta_j(\widehat{M})$. Le cas le plus simple est celui où M fibre sur $\mathbb{S}^1$ et le morphisme $\pi_1(M) \to \mathbb{Z}$ vient du tiré en arrière d'un générateur de $H^1(\mathbb{S}^1)$: il n'est pas dur de voir (cf. [BV, Corollary 7.7]) que si S est une surface fermée, ϕ un difféomorphisme de S et $M = (S \times [0,1])/\{(x,0) = (\phi(x),1)\}$ on a

$$\Delta_0(\widehat{M}) = \text{dét}(1 - t\phi_*) \tag{2.7}$$

où ϕ_* est l'endomorphisme de $H_1(S)$ induit par ϕ.

Plus généralement tout morphisme $\pi_1(M) \to \mathbb{Z}$ est obtenu par la forme d'intersection avec une surface S plongée, π_1-injective et séparante dans M † (cf. [Hem76, Lemma 6.6]). On suppose maintenant que M est une 3–variété compacte qui contient une telle surface S et que $\widehat{M}$ est le revêtement cyclique infini associé à S. Soit $U \cong S \times (-1,1)$ un voisinage tubulaire de S dans M et $M' = M - U$. On note $S_\pm$ les composantes connexes de $\partial M'$ correspondant à $S \times \{\pm 1\} \subset \overline{U}$. Le groupe fondamental $\pi_1(M)$ est alors une extension HNN : si on considère les $\pi_1(S_\pm)$ comme plongés dans $\pi_1(M')$ il existe un isomorphisme $\alpha : \pi_1(S_+) \to \pi_1(S_-)$ tel que

$$\pi_1(M) = \langle \pi_1(M'), t | \, \forall g \in \pi_1(S_+),\ tgt^{-1} = \alpha(g) \rangle.$$

On note α_* l'application induite $H_1(S_+) \to H_1(S_-)$ et on choisit un difféomorphisme α de S qui induise α sur $\pi_1(S)$.

On peut utiliser S pour donner une construction géométrique de $\widehat{M}$: elle est difféomorphe à la variété obtenue à partir de $M' \times \mathbb{Z}$ en recollant $S_+ \times \{k\}$ à $S_- \times \{k+1\}$ avec α. Soit i le plongement de S dans M' correspondant à S_+. On sait que $H_0(\widehat{M}) = 0$ et que l'application de $H_1(S_+)$ vers $H_1(M')$ est injective et la suite exacte longue d'homologie de la paire

$$S \times \mathbb{Z} \xrightarrow[(1-t\alpha)i]{} M' \times \mathbb{Z} \to \widehat{M}$$

donne ainsi la suite exacte

$$\mathbb{Z}[t^{\pm 1}] \otimes H_1(S) \xrightarrow[(1-t\alpha_*)i_*]{} \mathbb{Z}[t^{\pm 1}] \otimes H_1(M') \to H_1(\widehat{M}) \to 0. \tag{2.8}$$

qui est une présentation de $H_1(\widehat{M})$. Il semble difficile de calculer les mineurs de la matrice $(1 - t\alpha_*)i_*$ en toute généralité vu qu'on ne sait pas grand-chose sur i_*.

Cylindres d'homologie rationnelle

On conserve les notations précédentes et on ajoute la condition que la paire $M', i_\pm$ soit un cylindre d'homologie rationnelle, c'est-à-dire que les applications $(i_\pm)* : H_1(S;\mathbb{Q}) \to H_1(M';\mathbb{Q})$ sont des isomorphismes. Le revêtement $\widehat{M}$ est alors ℓ^2-acyclique et on peut calculer le premier polynôme d'Alexander.

Lemme 2.10. *Dans la situation décrite ci-dessus on a* $\Delta_0(H_1(\widehat{M})) = \tau(M', S_+)\text{dét}(1 - t\alpha_*)$ *où* $\tau(M', S_+) = |H_1(M')/i_* H_1(S)|$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de (2.8) vu que l'application $(1 - t\alpha_*) \circ i_*$ est représentée par une matrice carrée de déterminant égal à $\tau(M', S_+)\text{dét}(1 - t\alpha_*)$. □

†. La classe correspondante dans $H^1(M)$ est la classe duale à S

Dans le cas où M est l'extérieur d'un nœud on retrouve ainsi [Lic97, Theorem 6.5] et dans le cas où M est fibrée on retrouve (2.7).

Il existe beaucoup d'exemples non triviaux de cylindres d'homologie. Si $M', i_\pm$ est un cylindre d'homologie entière Cha, Friedl et Kim en construisent un nouveau en faisant une chirurgie dans l'intérieur de M' (cf. [CFK11, Section 4.3]). Cette construction laisse inchangé le polynôme d'Alexander du revêtement cyclique infini de $M = M'/\{\forall x \in S,\ i_+(x) = i_-(x)\}$ dual à S.

Nombres de Betti ℓ^2 positifs

Il est facile de donner des exemples de revêtements cycliques qui ne soient pas ℓ^2-acycliques : si M_0 est une 3–variété ayant un revêtement cyclique infini $\widehat{M_0}$ et N est une 3–variété telle que $b_1(N) > 0$ la somme connexe $M = M_0 \sharp N$ a un revêtement cyclique infini $\widehat{M}$ difféomorphe à $\widehat{M_0}\sharp(N \times \mathbb{Z})$ et on a alors

$$H_1(\widehat{M}) \cong H_1(\widehat{M_0}) \oplus (\mathbb{Z}[t^{\pm 1}] \otimes H_1(N))$$

d'où il suit que $b_1^{(2)}(\widehat{M}) \geq b_1(N)$ et $\Delta_{b_1(N)+i}(H_1(\widehat{M})) = \Delta_i(\widehat{M_0})$.

L'exemple ci-dessus est artificiel mais élémentaire ; par contraste la récente solution par I. Agol [AGM12] (à la suite de travaux décisifs de D. Wise) de la conjecture VH ‡ permet de montrer le résultat suivant.

Lemme 2.11. *Soit M une 3–variété hyperbolique ; il existe un revêtement Galoisien $\widehat{M}$ de M dont le groupe est virtuellement infini cyclique et tel que $b_1^{(2)}(\widehat{M};\mathbb{Z}) > 0$.*

Démonstration. Il suffit de montrer qu'il existe un revêtement fini M' de M tel que M' ait un revêtement cyclique infini de premier nombre de Betti ℓ^2 positif. La preuve de Agol et Wise montre en fait qu'il existe un revêtement fini M' de M dont le groupe fondamental se surjecte sur le produit libre $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, on va montrer que le revêtement $\widehat{M}$ de M' associé à la projection sur le premier facteur a un premier nombre de Betti ℓ^2 supérieur à 1. En effet, soit M_N le N-ième revêtement cyclique de M' ; le noyau de l'application $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/N$ est le sous-groupe librement engendré par $a^N, b, aba^{-1}, \ldots, a^{N-1}ba^{1-N}$ et il suit que $\pi_1(M_N)$ se surjecte sur un groupe libre de rang N et en particulier que $b_1(M_N) = b_1(\pi_1(M_N)) \geq N$ et le théorème 0.4 implique alors que $b_1^{(2)}(\widehat{M}) \geq 1$. □

Torsion virtuelle

La méconnaissance de l'action des relèvements de classes d'homéomorphismes sur l'homologie des revêtements finis est un obstacle majeur à l'application du théorème 2.5 à la question 0.1. Même dans le cas où M est elle-même fibrée sur le cercle de fibre S et de monodromie ϕ on ne sait pas s'il existe une revêtement fini S' de S et un relevé ϕ' de ϕ à S' tel que le revêtement cyclique infini de la variété fibrée M' obtenue à partir de S', ϕ' ait une torsion ℓ^2 strictement supérieure à 1, ce qui d'après (2.7) revient à demander que l'action de ϕ' sur $H_1(S';\mathbb{C})$ ait une valeur propre de module > 1. A noter que comme on sait d'après [AGM12] que toute variété est virtuellement fibrée, une réponse positive à 0.1 dans ce cas impliquerait sa véracité pour toute variété. T. Koberda a étudié brièvement ces problèmes dans [Kob12] où il donne aussi quelques exemples.

‡. Virtuellement Haken

2.3 Quelques résultats sur les $\mathbb{Q}[\Lambda]$-modules

Soit $\Lambda \cong \mathbb{Z}^m$, $m > 1$. On rappelle que $r_N \in \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbb{Z})$ a été défini dans la preuve de la proposition 1.19, que r_N^* désigne son orthogonal $\ker r_N \subset \Lambda$ et que v_N est un vecteur tel que $r_N(v_N) = 1$. Le but de cette section est de démontrer les deux résultats suivants.

Proposition 2.12. *Soit M un $\mathbb{Q}[\Lambda]$-module que l'on suppose plongé dans un module libre L ; pour N assez grand il existe un produit Φ_N de polynômes cyclotomiques tels que le noyau de $M_{r_N^*} \to L_{r_N^*}$ soit annihilé par $\Phi_N(t^{\pm v_N})$.*

Proposition 2.13. *Mêmes notations, pour N assez grand il existe un produit Φ_N de polynômes cyclotomiques tels que le noyau de l'application $(M_{\mathrm{tors}})_{r_N^*} \to M_{r_N^*}$ soit annihilé par Φ_N.*

On introduit un peu de notation supplémentaire (qui ne servira que dans cette section) : si $A \in M_{m',m}(\mathbb{Z})$ on note Λ_A le sous-groupe de $\mathbb{Z}^{m'}$ engendré par ses lignes. On notera abusivement A l'application $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}^m] \to \mathbb{Z}[\mathbb{Z}^{m'}]$ induite par A. On identifie Λ à $\mathbb{Z}^m$ et $\mathbb{Z}[\Lambda]$ à $\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_m^{\pm 1}]$ et on notera $v \mapsto t^v$ cette dernière identification.

2.3.1 Le théorème de Bombieri-Zannier-Schinzel

Le résultat suivant est une généralisation immédiate d'un résultat de Bombieri et Zannier (qui améliore un résultat plus ancien de Schinzel).

Théorème 2.14. *Soient $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{Z}[\Lambda]$ des polynômes tels que $\mathrm{pgcd}(f_1, \ldots, f_k) = 1$. Il existe un $c = c(f_1, \ldots, f_m)$ tel que pour tout $\Lambda' \cong \mathbb{Z}^{m'}$ et tout $A \in \mathrm{Hom}(\Lambda, \Lambda')$ telle que $\alpha(H_A^*) \leq c$ le polynôme $\mathrm{pgcd}(Af_1, \ldots, Af_k) \in \mathbb{Z}[\Lambda']$ est un produit de facteurs cyclotomiques.*

Démonstration. On le déduit d'une récurrence facile sur le nombre de polynômes en utilisant [Sch00, Theorem 45 et page 517] (cf. aussi [Le, Proposition 5.2]). □

2.3.2 Démonstration de la proposition 2.12

On note A^n l'application donnée par $A^n(f_1, \ldots, f_n) = (Af_1, \ldots, Af_N)$. La proposition 2.12 est une conséquence rapide du résultat suivant.

Proposition 2.15. *Soit $M \subset \mathbb{Q}[\Lambda]^n$ un sous-module ; il existe un $c_M > 0$ telle que pour toute $A \in \mathrm{Hom}(\Lambda, \Lambda')$, si $\alpha(H_A^*) > c_M$ il existe un produit de polynômes cyclotomiques Φ_A tel que l'on ait*

$$\Phi_A \ker(A^n) \cap M \subset \ker(A)M.$$

Démonstration. Dans cette preuve on note $\mathbb{Q}[\Lambda] = R$ et $\mathbb{Q}[\Lambda'] = R'$. Il suffit de démontrer le résultat pour Λ' cyclique.

On commence par le cas où $M = fR$ est un idéal principal non nul de R. Pour un sous-groupe Δ avec $\alpha(\Delta)$ assez grand le support de f s'injecte dans Λ/Δ et en particulier pour $\alpha(\Lambda_A^*)$ assez grand on a $Af \neq 0$. L'idéal $\ker(A)$ est premier vu que $R/\ker(A) \cong R'$ est intègre et si $fg \in \ker(A)$ il suit que $g \in \ker(A)$, ce qui montre que $fR \cap \ker(A) = f\ker(A)$.

On démontre maintenant le résultat dans le cas crucial où M est un idéal de R. Ce dernier est Noetherien et on peut donc démontrer le résultat par une récurrence sur le nombre de générateurs. On réduit d'abord au cas où M n'est contenu dans aucun idéal principal. Soit f le pgcd de M, on peut alors écrire $M = fM'$ où M' n'est contenu dans aucun idéal principal.

On a alors $\ker(A) \cap fM' = f\ker(A) \cap fM'$ par l'argument utilisé ci-dessus et il suffit donc de démontrer le résultat pour $M' \subset fR$.

Soit donc $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{Q}[\Lambda]$ une famille génératrice de M ayant un nombre minimal d'éléments et telle que $\mathrm{pgcd}(f_1, \ldots, f_k) = 1$. Soit A telle que $\alpha(\Lambda_A^*) > c = c(f_1, \ldots, f_k)$ où c est la constante donnée par le théorème 2.14 appliqué à $f_1, \ldots, f_k$. Le pgcd de $Af_1, \ldots, Af_k$ est donc un produit $\Phi \in R'$ de polynômes cyclotomiques. Soit $h = \sum_i h_i f_i \in \ker(A) \cap M$, il vient

$$-Ah_1Af_1 = \sum_{i\geq 2} Ah_iAf_i$$

et il suit que $q = \mathrm{pgcd}(Af_2, \ldots, Af_k)$ divise ΦAh_1. Comme Λ' est cyclique l'anneau $\mathbb{Q}[\Lambda']$ est principal et il existe donc des $g_2, \ldots, g_k$ tels que $q = \sum_{i=2}^k Ag_iAf_i$. On obtient ainsi que $\Phi Ah_1 = \sum_{i=2}^k Ah'_iAf_i$ pour des $h'_2, \ldots, h'_k \in R$ et il vient :

$$\Phi h_1 = \sum_{i=2}^k h'_i f_i + h'_1$$

pour un $h'_1 \in \ker(A)$, soit encore :

$$\Phi h = \Phi h'_1 f_1 + \sum_{i=2}^k (h_i + h'_i f_1) f_i.$$

Soit M' l'idéal $(f_2, \ldots, f_k)$; par l'hypothèse de récurrence il existe un $c' > 0$ tel que si $\alpha(\Lambda_A^*) > c_{M'}$ alors $\sum_{i\geq 2}(h_i + h'_i f_1) f_i \in \Phi' \ker(A) M'$ et le résultat suit avec $c_M = \max(c, c_{M'})$.

On suppose maintenant que $\mathrm{rg}(M) = 1$ et que M est plongé dans un module libre $L \cong R^n$; soit $v_1 \in L \otimes \mathbb{Q}(\Lambda)$ un vecteur générateur de $M \otimes \mathbb{Q}(\Lambda)$ tel que $M \subset Rv_1$ et $v_2, \ldots, v_n \in L$ tels que $(v_1, \ldots, v_n)$ soit une base de $L \otimes \mathbb{Q}(\Lambda)$. Soit L' le R-module libre engendré par $v_1, \ldots, v_n$; par le résultat pour les idéaux il existe un Φ tel que $\Phi(\ker(A)L') \cap M \subset \ker(A)M$ doù il suit que l'on a aussi $\Phi(\ker(A)L) \cap M \subset \ker(A)M$.

On prouve finalement le résultat en toute généralité par une récurrence sur le rang de M. On suppose que $\mathrm{rg}(M) = r > 1$ et $M \subset R^n$; soit $l < n$ tel que l'intersection $M_0 = M \cap (R^l \times 0)$ soit de rang 1 et $M_1 = M/M_0$; alors M_1 est sans torsion et on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & R^l \times 0 & \longrightarrow & R^n & \longrightarrow & R^{n-l} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Soit $x \in \ker(A^n) \cap M$; son image x_1 dans M_1 est contenue dans $\ker(A^{n-l}) \cap M_1$ et par l'hypothèse de récurrence il existe un Φ tel que $\Phi x_1 \in \ker(A)M_1$. Il suit que $\Phi x = y + x_0$ pour un $y \in \ker(A)M$ et un $x_0 \in \ker(A^n) \cap M_0$. Comme $\mathrm{rg}(M_0) = 1$ on sait qu'il existe Φ' tel que $\Phi' x_0 \in \ker(A)M_0$ et on obtient enfin que $\Phi\Phi' x \in \ker(A)M$, ce qui termine la preuve. □

Démonstration de la proposition 2.12. On voit que $\ker(A)$ est égal à $(\Lambda_A^* - 1)R$; en effet les groupes Λ' et Λ/Λ_A^* sont isomorphes *via* A et il suit que le noyau de l'application $A : R \to R'$ et celui de la projection $R \to R/(\Lambda_A^* - 1)R$ sont égaux. Ainsi, si $M \subset L$ est un sous-module d'un module libre la proposition ci-dessus donne un c tel que pour toute A telle que $\alpha(\Lambda_A^*) > c$ il existe un produit de polynômes cyclotomiques Φ_A tel que Φ_A annihile le noyau de l'application

$$M_{\Lambda_A^*} = M/(\Lambda_A^* - 1)M \to L/(\Lambda_A^* - 1) = L_{\Lambda_A^*}.$$

La proposition 2.12 suit de ceci en prenant pour A la forme linéaire r_N, vu que $\alpha(r_N^*)$ tend vers l'infini quand $N \to \infty$. □

2.3.3 Démonstration de la proposition 2.13

On démontre en fait la proposition 2.13 pour une suite de sous-groupes qui contiennent un facteur direct de $\mathbb{Z}^m$ par récurrence sur le rang, en utilisant le lemme suivant.

Lemme 2.16. *Soit Δ un sous-groupe de Λ qui contient un facteur direct de Λ de rang $m-1$. Alors il existe des sous-groupes $\Delta \supset \Delta_1 \supset \ldots \supset \Delta_{m-1} = 0$ tels que pour tout $i \geq 1$ on a $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}}(\Delta_{i+1}) = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}}(\Delta_i) + 1$, le sous-groupe Δ_i est un facteur direct de Λ et on a $\alpha(\Delta_i^*) \geq \alpha(\Delta)$.*

Démonstration. On identifie $\Lambda = \mathbb{Z}^m$. Soit Δ_1 le facteur direct de rang $m-1$ contenu dans Δ. L'intersection $\Delta_1 \cap (0 \times \mathbb{Z}^2)$ est non-vide, soit $v = (0, a, b)$ un vecteur non nul dedans ; on peut supposer que $gcd(a, b) = 1$ vu que Δ_1 est un facteur direct et il suit que $\min(|a|, |b|) \geq \alpha(\Delta)$, donc $\alpha(v^*) > \alpha(\Delta)$. On choisit une base $\{v_1 = v, v_2, \ldots, v_{m-1}\}$ de Δ_1 et on pose $\Delta_i = \bigoplus_{j=1}^{i} \mathbb{Z}v_i$: tous les Δ_i contiennent v et il suit que $\alpha(\Delta_i^*) \geq \alpha(v^*)$. Les autres conclusions sont clairement vérifiées. □

La proposition 2.13 est donc une conséquence du résultat suivant.

Proposition 2.17. *Soit M un R-module de type fini. Il existe un $c > 0$ tel que si Δ est un sous-groupe de Λ de rang r et s'il existe une suite $\Delta_1 \supset \ldots \supset \Delta_r$ de sous-groupes de Δ vérifiant les conclusions du lemme ci-dessus alors le noyau de l'application $(M_{\mathrm{tors}})_\Delta \to M_\Delta$ est annihilé par un produit de polynômes cyclotomiques.*

Démonstration. Si Δ est de rang 1 on a montré que cette application est injective (cf. le lemme 2.9 ci-dessus). Pour l'étape de récurrence on a besoin du lemme suivant.

Lemme 2.18. *Il existe un $c > 0$ tel que pour toute $A \in \mathrm{Hom}(\Lambda, \Lambda')$ telle que $\alpha(\Lambda_A^*) > c$ il existe un produit Φ_A de polynômes cyclotomiques telle que l'application $M_{\mathrm{tors}} \to \Phi_A(M/\ker A)_{\mathrm{tors}}$ soit surjective .*

Démonstration. Soit $M' = M/M_{\mathrm{tors}}$ que l'on plonge dans un R-module libre L, on note π l'application $M \to L$ ainsi obtenue. On suppose que $x \in M$ se projette sur un élément de R'-torsion dans $M/\ker A$; il existe alors un $f \in R$ tel que $Af \neq 0$ et $fx \in \ker(A)M$. Soit c la constante pour $M' \subset L$ donnée par la proposition 2.15 ; pour $\alpha(\Lambda_A^*) > c$ il existe alors un Φ_A tel que $\Phi_A \pi(fx) \in \ker(A)M'$ et il suit que $\Phi_A x = y + x'$ où $y \in M_{\mathrm{tors}} = \ker(\pi)$ et $x' \in \ker(A)M$. Ce qui signifie exactement que $A\Phi_A x$ est dans l'image de M_{tors} par A. □

Soit $I \subset R$ l'annihilateur de M_{tors} ; pour $\alpha(\Delta)$ assez grand (dépendant de M) on a $I \not\subset (\Delta - 1)$, de sorte que pour tout sous-groupe Δ' de Δ l'application $M \to M_{\Delta'}$ envoie les éléments de M_{tors} sur des éléments de $\mathbb{Q}[\Lambda/\Delta']$-torsion. On supposera dans la suite que cette hypothèse est vérifiée par Δ.

On écrit $\Delta = \mathbb{Z}v \oplus \Delta_2$. Soit $x \in M_{\mathrm{tors}}$, on suppose que $x \in (\Delta - 1)M$ et on veut montrer qu'il existe un Φ produit de polynômes cyclotomiques tel que $\Phi x \in (\Delta - 1)M_{\mathrm{tors}}$. On écrit $x = (t^v - 1)x' + z$ avec $z \in (\Delta_2 - 1)M$ et on choisit des $\Lambda', A \in \mathrm{Hom}(\Lambda, \Lambda')$ tels que $\ker(A) = \Delta_2$. Il vient $Ax = (t^{Av} - 1)Ax'$ et il suit que Ax' est un élément de torsion de $M/\ker(A)$. Par le lemme ci-dessus il existe donc un Φ tel que $\Phi x' = y + z'$ avec $z' \in \ker(A)M = (\Delta_2 - 1)M$ et $y \in M_{\mathrm{tors}}$. Il suit que $\Phi x = (t^v - 1)y + \Phi z + z'$, on pose $y' = \Phi z + z'$ de sorte que $y' \in M_{\mathrm{tors}}$ et $y' \in (\Delta_2 - 1)M$. Par l'hypothèse de récurrence il existe un Φ' tel que $\Phi'(z + z') \in (\Delta_2 - 1)M_{\mathrm{tors}}$ et il suit que $\Phi'\Phi x \in (\Delta - 1)M_{\mathrm{tors}}$. □

2.4 Le cas $m > 1$

On fixe un groupe abélien libre $\Lambda \cong \mathbb{Z}^m$, $m > 1$. Soit X un CW-complexe fini et ϕ un morphisme surjectif $\pi_1(X) \to \Lambda$. Pour un sous-groupe $\Delta \subset \Lambda$ on note X_Δ le revêtement $\phi^{-1}(\Delta)\backslash\widetilde{X}$ et on note $\widehat{X}$ le revêtement $\ker(\phi)\backslash\widetilde{X}$.

Théorème 2.19. *Soit V un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini et $\rho : \pi_1(X) \to \mathrm{SL}(V)$. Pour $p = 0, \ldots, \dim X$ soit $j(p)$ le plus petit indice tel que $\Delta_j(H_p(\widehat{X}; V)) \neq 0$. Il existe un suite exhaustive de sous-groupes d'indice fini $\Lambda_N \subset \Lambda$ telle que pour tout p on ait*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\log |H_p(X_{\Lambda_N}; V)_{\mathrm{tors}}|}{[\Lambda : \Lambda_N]} = m(\Delta_j(H_p(\widehat{X}; V))).$$

C'est une conséquence immédiate (cf. la preuve du théorème 2.5) du résultat algébrique suivant.

Théorème 2.20. *(i) Soit M un $\mathbb{Z}[\Lambda]$-module de type fini, $r = \mathrm{rg}\, M$. Il existe une suite Λ_N telle que*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\log |(M_{\Lambda_N})_{\mathrm{tors}}|}{[\Lambda : \Lambda_N]} = m(\Delta_r(M)). \tag{2.9}$$

(ii) Soit C_*, d_* un complexe de modules libres de type fini, il existe une suite Λ_N telle que pour tout p on ait

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\log |H_p(C_{\Lambda_N})_{\mathrm{tors}}|}{[\Lambda : \Lambda_N]} = m(\Delta_{b_p^{(2)}(C)}(H_p(C))). \tag{2.10}$$

Pour prouver ce dernier résultat on utilise le même schéma de preuve que dans le cas cyclique.

2.4.1 Modules sans torsion

On prouve ici que si $M_1, \ldots, M_k$ sont des $\mathbb{Z}[\Lambda]$-modules sans torsion de type fini il existe une suite exhaustive Λ_N de sous-groupes d'indice fini telle que pour $i = 1, \ldots, k$ on ait

$$\frac{1}{[\Lambda : \Lambda_N]} \log |((M_i)_{\Lambda_N})_{\mathrm{tors}}| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0. \tag{2.11}$$

La suite Λ_N est obtenue à partir de la proposition 1.19. On rappelle qu'elle est de la forme

$$\Lambda_N = r_N^* \oplus \mathbb{Z} k_N v_N \tag{2.12}$$

où $r_N \in \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbb{Z})$ et $v_N \in \Lambda$ vérifients $r_N(v_N) = 1$. Il suffit de considérer le cas d'un seul module M. On remarque que $M_{r_N^*}$ est un $\mathbb{Z}[t^{\pm v_N}]$-module (on identifie l'anneau de groupe $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}v_N]$ à $\mathbb{Z}$ via r_N). La stratégie de preuve pour (2.11) est alors d'appliquer les résultats obtenus dans le cas cyclique aux $\mathbb{Z}[t^{\pm v_N}]$-modules $M_{r_N^*}$ et de recoller les morceaux avec la proposition 2.12.

On suppose que M est plongé dans un module libre L. Il suit de la proposition 2.12 que pour N assez grand le noyau T de l'application $M_{r_N^*} \to L_{r_N^*}$ est annihilé par $K\Phi_N$ où K est l'exposant de la partie de $\mathbb{Z}$-torsion de L/M et Φ_N est un produit de polynômes cyclotomiques en t^{v_N}. Le sous-module T est la partie de $\mathbb{Z}[t^{\pm v_N}]$-torsion de $M_{r_N^*}$ et il suit que l'application de $T_{k_N} = T/(t^{k_N v_N} - 1)T$ vers M_{Λ_N} est injective d'après le lemme 2.9. Soit M' l'image de $M_{r_N^*}$ dans $L_{r_N^*}$ et $M'_N = M'/(t^{k_N v_N} - 1)M'$. On a la suite exacte courte

$$0 \to T_{k_N} \to M_{\Lambda_N} \to M'_N \to 0$$

et il suit que

$$|(M_{\Lambda_N})_{\text{tors}}| \leq |(T_{k_N})_{\text{tors}}| \times |(M'_N)_{\text{tors}}|.$$

Le $\mathbb{Z}[t^{\pm v_N}]$-module $T' = KT$ est annihilé par le polynôme Φ_N qui est de mesure de Mahler logarithmique nulle et il suit donc de (2.5) que l'ordre de $(T'_k)_{\text{tors}}$ est un $o(k)$. On a aussi

$$|(T_{k_N})_{\text{tors}}| \leq |(T_{k_N})_{K-\text{tors}}| \times |(T'_{k_N})_{\text{tors}}|$$

et le terme de droite est un $o(k)$ d'après ce qui précède et le lemme 2.7. On peut ainsi choisir k_N tel que l'on ait $|(T_N)_{tors}| < k_N/N$. Comme M'_N ne contient pas de $\mathbb{Z}[t^{\pm v_N}]$-torsion il suit de (2.4) que l'on peut en plus exiger aussi $|(M'_N)_{tors}| < k_N/N$. La conclusion (2.11) suit vu que $k_N = [\Lambda : \Lambda_N]$).

2.4.2 Conclusion

Comme remarqué plus haut le lemme 2.8 reste valide pour des $\mathbb{Z}[\Lambda]$-modules de torsion et il suit par le corollaire 2.4 et (2.11) que si T est un tel module on peut choisir la suite k_N dans (2.12) telle que l'on ait

$$\frac{1}{[\Lambda : \Lambda_N]} \log |(T_{\Lambda_N})_{\text{tors}}| \xrightarrow[N\to\infty]{} m(\Delta_0(T)). \tag{2.13}$$

Soit maintenant M un $\mathbb{Z}[\Lambda]$-module de type fini ; on a la suite exacte courte

$$0 \to M_{\text{tors}} \to M \to M' \to 0$$

où $M' = M/M_{\text{tors}}$. D'après (2.11) on peut choisir les k_N pour que $(M'_{\Lambda_N})_{\text{tors}} = o([\Lambda : \Lambda_N])$ et pour déduire (2.9) de (2.13) il reste à montrer que l'on a :

$$\frac{\log |\ker((M_{\text{tors}})_{\Lambda_N} \to M_{\Lambda_N})_{\text{tors}}|}{[\Lambda : \Lambda_N]} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0. \tag{2.14}$$

Pour ce faire on utilise la proposition 2.13 et un argument similaire à celui utilisé dans la preuve du lemme 2.9. Supposons que $x \in M_{\text{tors}}$ descende en un élément de $\ker((M_{\text{tors}})_{\Lambda_N} \to M_{\Lambda_N})$, il existe alors des $y \in M, z \in (r_N^* - 1)M$ tels que $x = (t^{k_N v_N} - 1)y + z$. Il suit que $y \in M_{\text{tors}} + (r_N^* - 1)M$ et on peut donc écrire $x = (t^{k_N v_N} - 1)y' + z'$ pour des $y' \in M_{\text{tors}}$ et $z' \in (r_N^* - 1)M$. Il suit que x et z' ont la même image dans $(M_{\text{tors}})_{\Lambda_N}$ et que le noyau $\ker((M_{\text{tors}})_{\Lambda_N} \to M_{\lambda_N})$ est l'image de $T = \ker((M_{\text{tors}})_{r_N^*} \to M_{r_N^*})$. D'après la proposition 2.13, (2.7) et (2.5) on peut choisir k_N tel que $|(T_{k_N})_{\text{tors}}| \leq k_N/N$. La torsion dans $\ker((M_{\text{tors}})_{\Lambda_N} \to M_{\Lambda_N}$ est alors elle aussi d'ordre plus petit que $k_N/N = o([\Lambda : \Lambda_N])$ et (2.14) suit.

Soit C_*, d_* un complexe de $\mathbb{Z}[\Lambda]$-modules libres de type fini. On fixe $N \geq 1$, p et on compare la croissance de la $\mathbb{Z}$-torsion dans $(H_p(C)_{r_N^*})_k = H_p(C)_{r_N^*}/(t^{kv_N} - 1)H_p(C)_{r_N^*}$ avec celle de $H_p((C_{r_N^*})_k = H_p(C_{r_N^*}/(t^{kv_N} - 1)C_{r_N^*})$. Plus précisément on montre que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \Big(\log |((H_p(C)_{r_N^*})_k)_{\text{tors}}| - \log |(H_p((C_{r_N^*})_k)_{\text{tors}}| \Big) = 0. \tag{2.15}$$

Soit ϕ l'application de $(H_p(C)_{r_N^*})_{\text{tors}}$ vers $H_p(C_{r_N^*})_{\text{tors}}$; on montre qu'il existe un produit Φ_N de polynômes cyclotomiques qui annihile $\ker(\phi)$. Soit $x \in \ker(d_p)$ dont l'image soit dans $\ker(\phi)$; on a alors $x = y + z$ pour un $z \in \ker(d_p) \cap (r_N^* - 1)C_p$ et un $y \in \text{im}(d_p)$. Par la proposition 2.12 [§] il existe un Φ_N tel que $\Phi_N z \in (r_N^* - 1)\ker(d_p)$ et il suit que $\Phi_N x$ est nul dans $(H_p(C)_{r_N^*})_{\text{tors}}$.

§. On remarque que $C_p/\ker d_p$ ne contient pas de $\mathbb{Z}$-torsion

De la même manière, en appliquant la proposition 2.12 au plongement de $C_p/\ker(d_p)$ dans C_{p-1} *via* d_p on obtient qu'il existe un entier K indépendant de N et un polynôme cyclotomique Φ'_N tels que $K\Phi'_N \operatorname{coker}(\phi) = 0$. On obtient finalement qu'il existe des polynômes cyclotomiques Φ, Φ' et un entier $K' > 0$ tels que $\Phi\Delta_0(H_p(C)^*_{r_N}) = K'\Phi'\Delta_0(H_p(C_{r_N^*}))$; il suit alors de (2.2) que l'on a

$$\limsup_{k\to\infty} \left| \frac{1}{k} \left(\log |(H_p(C_{r_N^*})_k)_{\mathrm{tors}}| - \log |((H_p(C)_{r_N^*})_k)_{\mathrm{tors}}| \right) \right| \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log |(H_p(C_{r_N^*})_k)_{K-\mathrm{tors}}|$$

et par le lemme 2.7 le côté droit tend vers 0 quand $k \to \infty$, ce qui finit de prouver (2.15). On peut donc choisir la suite k_N de sorte que l'on ait

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\log |(H_p(C)_{\Lambda_N})_{\mathrm{tors}}| - \log |H_p(C_{\Lambda_N})_{\mathrm{tors}}|}{[\Lambda : \Lambda_N]} = 0,$$

et on déduit alors (2.10) de (2.9) appliqué à $H_p(C)$.

Chapitre 3

Torsion analytique pour les variétés hyperboliques de volume fini

Le but de ce chapitre est de définir la torsion analytique pour les variétés hyperboliques non-compactes à coefficients dans les fibrés plats $E_{\rho_{n_1,n_2}}$. On suit une approche similaire à celle de [Par09],[MP12] mais utilisant une forme grossière de la formule des traces de Selberg et le développement asymptotique du noyau de la chaleur de $\mathbb{H}^3$ On donne cette formule de pré-trace dans la proposition 3.5, après qu'on ait défini les traces régularisées en utilisant les relations de Maass-Selberg dans la section 3.2. Le développement asymptotique en $t \to 0$ pour la trace du noyau de la chaleur est obtenu dans la proposition 3.6.

Conventions

Dans tout ce chapitre on note $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), K = \mathrm{SU}(2)$ et on identifie G/K à $\mathbb{H}^3$ (cf. 0.3.1). On fixe un réseau non cocompact $\Gamma \subset G$ et on suppose (sauf dans la dernière section) que pour tout parabolique Γ-rationnel $P = MAN$ le sous-groupe $\Gamma \cap P$ ne contient pas d'élément de trace -2 (en particulier, $-1_G \notin \Gamma$). On choisit des représentants $P_1, \ldots, P_h$ des Γ-classes de conjugaison de paraboliques Γ-rationnels, des fonctions hauteur Γ-invariantes $y_1, \ldots, y_h$ et on note $P_j = M_j A_j N_j$ la décomposition de Langlands de P_j. On suppose enfin que les fonctions y_j sont normalisées pour que les ensembles $\{y_j \geq 1\}$ soient deux à deux disjoints. Enfin, V est une représentation réelle de dimension finie de G et on utilisera les notations de la section 0.2.

3.1 Analyse spectrale sur les variétés de volume fini

3.1.1 Décomposition spectrale

On a dit plus haut (0.2.3) que les laplaciens $\Delta^p[M]$ sont des opérateurs essentiellement autoadjoints ; pour définir les traces régularisées et la torsion analytique on a besoin de quelques détails sur leur spectre. Plus précisément on va expliquer comment obtenir la décomposition

$$L^2\Omega^p(M;V) = L^2_{\mathrm{disc}}\Omega^p(M;V) \oplus L^2_{\mathrm{cont}}\Omega^p(M;V)$$

où $L^2_{\mathrm{disc}}\Omega^p(M;V)$ a une base hilbertienne de fonctions propres de $\Delta^p[M]$ et $L^2_{\mathrm{cont}}\Omega^p(M;V)$ a une décomposition en "paquets spectraux" (similaire à celle donnée par l'analyse de Fourier classique sur $\mathbb{R}$) que l'on décrira explicitement en utilisant les séries d'Eisenstein.

3.1.2 Formes cuspidales et séries d'Eisenstein

Soit P un parabolique Γ-rationnel. Si $f \in L^2\Omega^p(\mathbb{H}^3; V)$ est une p-forme Γ-équivariante on définit son terme constant en P comme la p-forme f_P donnée par

$$f_P(v) = \int_{\Gamma_P \backslash N} n^* f(v) \frac{dn}{\mathrm{vol}(\Gamma_P \backslash N)}. \tag{3.1}$$

C'est une forme Γ_P-équivariante et N-équivariante qui ne dépend que de la Γ-classe de conjugaison du parabolique P. Si $h : \Gamma\backslash G \to V \otimes \wedge^p \mathfrak{p}^*$ est la fonction K-équivariante correspondant à f celle qui correspond à f_P est donnée par $g \mapsto \int_{\Gamma_P \backslash N} h(ng)dn$.

L'analyse harmonique sur $\Gamma_P\backslash\mathbb{H}^3$ (voir par exemple [EGM98, 3.3]) permet de montrer que pour toute forme propre f du Laplacien sur M on a $f - f_{P_j} \leq Ce^{-cy_j}$ où c ne dépend que du choix de la fonction hauteur y_j et du groupe Γ_{P_j} et C ne dépend que de Γ_{P_j} et de la valeur propre λ de f pour le Laplacien. On dit que f est cuspidale si $f_P = 0$; on voit donc que toute forme cuspidale qui est une forme propre du Laplacien est de carré intégrable. On note $L^2_{\mathrm{cusp}}\Omega^p(M; V)$ l'espace des p-formes cuspidales de carré intégrable sur M et $L^2_{\mathrm{disc}}\Omega^p(M; V)$ l'adhérence de la somme des espaces propres de $\Delta^p[M]$ dans $L^2\Omega^p(M; V)$, on verra dans la suite que l'on a

$$L^2_{\mathrm{cusp}}\Omega^p(M; V) \subset L^2_{\mathrm{disc}}\Omega^p(M; V).$$

On peut construire explicitement toutes les formes dans l'orthogonal de L^2_{cusp} par le biais de la théorie des séries d'Eisenstein. L'idée première en est la suivante : si P est un parabolique Γ-rationnel, on a une application E_P du sous-espace des formes N-équivariantes dans $L^2\Omega^p(\mathbb{H}^3; V)$ vers l'espace $L^2\Omega^p(M; V)$, donnée par :

$$E_P(f) = \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_P} \gamma^* f \tag{3.2}$$

On a alors :

$$L^2_{\mathrm{cusp}}\Omega^p(M; V)^\perp = \bigoplus_{j=1}^{h} \mathrm{im}\, E_{P_j} =: L^2_{\mathrm{Eis}}\Omega^p(M; V)$$

et il existe un sous-espace de dimension finie $L^2_{\mathrm{res}} \subset L^2_{\mathrm{Eis}}$ tel que $L^2_{\mathrm{disc}} = L^2_{\mathrm{cusp}} \oplus L^2_{\mathrm{res}}$. On note $L^2_{\mathrm{cont}}\Omega^p(M; V)$ l'orthogonal de L^2_{disc} ; c'est un espace stable par le Laplacien et qui ne contient aucune fonction propre.

3.1.3 Description des séries d'Eisenstein

On donne ici une brève et pragmatique présentation des séries d'Eisenstein ; on utilisera le complexifié $V_{\mathbb{C}} = V \otimes \mathbb{C}$ de la représentation V et du fibré plat sur M associé. On rappelle que h désigne le nombre de cusps de M et que $T_1, \ldots, T_h$ sont les composantes du bord de la compactification de Borel-Serre $\overline{M}$ de M (cf. 0.3.6).

Sections

On suppose pour le moment que $\Gamma_{P_j} \subset N_j$ pour tout j. Soient $v_j \in V_{\mathbb{C}}$ et $s \in \mathbb{C}$, on définit une section de $V_{\mathbb{C}}$ sur $\Gamma_{P_j}\backslash\mathbb{H}^3$ comme suit : c'est la section correspondant à la fonction K-équivariante à droite et Γ_P-invariante de G dans V définie par $\phi_j^s(nak) = y_j(aK)^{s+1}\rho(k)^{-1}.v$ pour $nak \in N_jA_jK$. Pour $v \in (V_{\mathbb{C}})^h$ et $\mathrm{Re}(s)$ assez grande la série suivante est alors convergente :

$$E(s, v) = \sum_{j=1}^{h} E_{P_j}(\phi_j^s);$$

Ainsi, $s \mapsto E(s,v)$ définit une application holomorphe sur un demi-plan. Elle se prolonge en une application méromorphe de $\mathbb{C}$ dans $C^\infty(\Gamma\backslash G; V_\mathbb{C})^K$ dont tous le pôles sont dans l'intervalle $(0,1]$. Il existe une application méromorphe ayant les même pôles

$$\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_h) : \mathbb{C} \to \mathrm{End}_\mathbb{C}(V_\mathbb{C}^h)$$

telle que pour tout $s \in \mathbb{C}, v = (v_1, \ldots, v_h) \in V^h$ on ait

$$E(s,v)_{P_j} = y_j^{s+1} v_j + y_j^{1-s} \Psi_j(s)(v).$$

De plus on a $\Psi(s)^{-1} = \Psi(-s)$ et $\Psi(s)$ est unitaire pour $\mathrm{Re}(s) = 0$.

L'espace $V_\mathbb{C}$ se décompose en une somme orthogonale

$$V_\mathbb{C} = \begin{cases} \bigoplus_{k=-q}^{q} V_{2k} & q = \frac{n_1+n_2}{2},\ n_1 - n_2 \text{ pair;} \\ \bigoplus_{k=-q-1}^{q} V_{2k+1} & q = \frac{n_1+n_2-1}{2},\ n_1 - n_2 \text{ impair} \end{cases}$$

où V_i est l'espace sur lequel le sous-groupe abélien $M \cong \mathbb{T}^1$ agit par le caractère $\sigma_i : z \mapsto z^l$. On choisit des $g_j \in G$ tel que $g_j M g_j^{-1} = M_j$ et on note $V_{l,j} = g_j V_l$. Pour $v \in \bigoplus_{j=1}^h V_{l,j}$ les fonctions $E(s,v)$ sont des fonctions propres du Laplacien, de valeur propre $(1 - \frac{|l|}{2})^2 - s^2 + \lambda_V$ où λ_V est la valeur propre du Casimir de G dans la représentation irréductible V. (Pour voir ceci il suffit de constater que les sections K-équivariantes $g \mapsto \rho(g)^{-1}\phi_j^s(g)$ sont des éléments des espaces $H_{\pi_{\sigma_l,s}}$). Les séries d'Eisenstein ne sont pas de carré intégrable, mais si $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ la fonction

$$E(\psi, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u) E(iu, z, v) du$$

l'est. La partie continue $L^2_{\mathrm{cont}}(M; V_\mathbb{C})$ est alors égale au sous-espace vectoriel engendré par ces fonctions. De plus, on a

$$\|E(\psi, v)\|_{L^2(M;V)} = \frac{1}{2\pi} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{3.3}$$

Enfin, l'espace $L^2_{\mathrm{res}}(M; V)$ est engendré par les résidus des séries d'Eisenstein en leurs pôles (dont on rappelle qu'ils sont tous dans $(0,1]$) et la valeur propre d'un résidu de $E(s,v)$ en s est égale à $(1 - \frac{|l|}{2})^2 - s^2 + \lambda_V$ si $v \in (V_l)^h$. Dans le cas où V est fortement acyclique il n'y a pas de résidus.

1-formes

On identifie N_j à $\mathbb{C}$, ce qui le munit d'une coordonnée complexe z_j. Soit $\Omega^+(V)$ l'espace des 1-formes sur $\partial\overline{M}$ engendré par les $\sum_{j=1}^h dz_j \otimes v_j$ pour $(v_1, \ldots, v_h) \in (V_\mathbb{C})^h$ et $\Omega^-(V)$ celui engendré par les $\sum_{j=1}^h d\bar{z}_j \otimes v_j$. On identifie $\mathbb{C}[dy_j, dz_j, d\bar{z}_j]$ à $\mathfrak{p}^*$, sur lequel K agit par la représentation adjointe. Pour $\omega \in \Omega^+(V)$ on définit une 1-forme ω^s sur $\bigsqcup_{j=1}^h \Gamma_{P_j}\backslash\mathbb{H}^3$ par :

$$\omega^s(nak) = \sum_{j=1}^h y_j (naK)^s (k^{-1}.dz_j) \otimes (\rho(k)^{-1}.v_j)$$

et de même pour $\bar{\omega} \in \Omega^-(V)$. La série

$$E(s, \omega) := \sum_{j=1}^h E_{P_j}(\omega_j^s)$$

converge pour $\mathrm{Re}(s)$ assez grand et se prolonge en une fonction entière de $\mathbb{C}$ dans $(C^\infty(\Gamma\backslash G; V_\mathbb{C})\otimes \wedge^p\mathfrak{p}^*)^K$. Il existe des applications holomorphes

$$\Phi^\pm = (\Phi_1^\pm, \dots, \Phi_h^\pm) : \mathbb{C} \to \mathrm{Hom}_\mathbb{C}(\Omega^\pm(V), \Omega^\mp(V))$$

tels que pour tous $s \in \mathbb{C}, \omega = (\omega_1, \dots, \omega_h) \in \Omega^\pm(V)$ on ait

$$E(s,\omega)_{P_j} = y_j^{s+1}\omega_j + y_j^{1-s}\Phi_j^\pm(s)(\omega).$$

On a $\Phi^\pm(s)^{-1} = \Phi^\mp(-s)$ et l'opérateur $\Phi^\pm(s)$ est unitaire pour $\mathrm{Re}(s) = 0$.

Comme dans le cas des fonctions les espaces $\Omega^\pm$ se décomposent en des sommes orthogonales :

$$\Omega^+(V) = \begin{cases} \bigoplus_{k=-q}^q \Omega^+(V_{2k+2}) & q = \frac{n_1+n_2}{2},\ n_1 - n_2 \text{ pair;} \\ \bigoplus_{k=-q}^q \Omega^+(V_{2k+3}) & q = \frac{n_1+n_2-1}{2},\ n_1 - n_2 \text{ impair;} \end{cases}$$

$$\Omega^-(V) = \begin{cases} \bigoplus_{k=-q}^q \Omega^-(V_{2k-2}) & q = \frac{n_1+n_2}{2},\ n_1 - n_2 \text{ pair;} \\ \bigoplus_{k=-q}^q \Omega^-(V_{2k-1}) & q = \frac{n_1+n_2-1}{2},\ n_1 - n_2 \text{ impair;} \end{cases}$$

où $\Omega^+(V_l)$ (resp. $\Omega^-(V_l)$) est le sous-espace engendré par les formes $\sum_j dz_j \otimes v_j$ pour $v_j \in V_{l-2,j}$ (resp. $\sum_j d\overline{z}_j \otimes v_j$ pour $v_j \in V_{l+2,j}$). Pour $\omega \in \Omega^\pm(V_l)$ la 1-forme $E(s,\omega)$ est une forme propre du Laplacien de valeur propre $(1-\frac{|l|}{2})^2 - s^2 + \lambda_V$ qui n'est pas de carré intégrable. Les 1-formes définies par

$$E(\varphi,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)E(iu,\omega)du$$

pour $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ sont de carré intégrable et $L^2_{\mathrm{cont}}\Omega^1(M;V_\mathbb{C})$ est engendré linéairement par l'ensemble de ces formes pour $\omega \in \Omega^\pm(V)$ ainsi que les $dE(\psi, z)$. On a aussi la formule :

$$\|E(\varphi,\omega)\|_{L^2\Omega^1(M;V)} = \frac{1}{2\pi}\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{3.4}$$

2- et 3-formes

La description des espaces de 2- et 3-formes de carré intégrable se fait par l'opérateur $*$ de Hodge qui donne des isométries Δ^*-équivariantes $L^2\Omega^p(M;V) \to L^2\Omega^{3-p}(M;V^*)$.

Troncation, relations de Maass-Selberg

Si f est une forme sur M, on peut la tronquer en lui retirant son terme constant à partir d'une certaine hauteur. Formellement, on définit les opérateurs de troncation par :

$$T^Y f(g) = f(g) - \sum_{j=1}^h 1_{[Y,+\infty)}(y_j(g))f_{P_j}(g)$$

pour $f \in L^2(\Gamma\backslash G)$ et $Y \in [1,+\infty)^h$. Les séries d'Eisenstein tronquées sont de carré intégrable sur M, et on a les formules, dites de Maass-Selberg, suivantes : pour $\mathrm{Re}(s) = 0$

$$\begin{aligned} \|T^Y E(s,v)\|^2_{L^2(M;V)} &= 2\log(Y)|v|_V^2 - \langle \Psi(s)^{-1}\Psi(s)'(v), v\rangle_V \\ &\quad + \frac{1}{s}(Y^s\langle\Psi(-s)(v),v\rangle_V - Y^{-s}\langle\Psi(s)(v),v\rangle_V) \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\|T^Y E(s,\omega)\|^2_{L^2\Omega^1(M;V)} = 2\log(Y)|\omega|^2_{\Omega^\pm(V)} - \langle\Phi^\pm(s)^{-1}\Phi^\pm(s)'(\omega),\omega\rangle_{\Omega^\pm(V)} \tag{3.6}$$

Noter que la dépendance en les fonctions hauteur du côté droit est contenue dans les opérateurs d'entrelacement Ψ, Φ.

Remarque

On a travaillé avec le modèle K-équivariant pour le fibré ; si on veut représenter les séries d'Eisenstein comme des formes Γ-équivariantes sur $\mathbb{H}^3$ les termes constants changent de forme. Pour $v = (0, \dots, e_{k,l}, \dots, 0)$ ($e_{k,l}$ à la j_0-ième place) on a

$$E(s,v)_{P_j} = \delta_j^{j_0} y_j^{s+1+n_1+n_2-2(k+l)} e_{k,l} + y_j^{1-s-n_1-n_2+2(k+l)} \Psi_j(s) v \tag{3.7}$$

et pour $\omega = dz_{j_0} \otimes e_{k,l}$ ou $d\bar{z}_{j_0} \otimes e_{k,l}$

$$E(s,\omega)_{P_j} = \delta_j^{j_0} y_j^{s+n_1+n_2-2(k+l)} e_{k,l} + y_j^{-s-n_1-n_2+2(k+l)} \Phi_j^{\pm}(s)\omega. \tag{3.8}$$

Le cas où Γ contient des elliptiques cuspidaux

Si pour un j on a $\Gamma_{P_j} \not\subset N_j$ alors la construction des sections ϕ_j^s (resp. des 1-formes ω_j^s) n'est valide que pour $v \in V_{\mathbb{C}}^{\Gamma \cap M_j}$ (resp. $\omega \in \Omega^{\pm}(V)^{\Gamma \cap M_j}$). Toutes les séries d'Eisenstein pour M sont obtenues pour ces valeurs.

3.1.4 Références

Une description précise de la théorie (avec des preuves complètes) pour le cas des fonctions est donnée dans [EGM98, Chapters 3,6]. Les séries d'Eisenstein pour les groupes de rang 1 sont décrites en toute généralité par exemple dans [War79, Section 2] (mais cette référence ne contient pas de preuve du prolongement analytique). Une courte preuve du prolongement analytique des séries d'Eisenstein est donnée dans [CdV81]. Enfin, la section 5.4 ci-dessous contient un exposé complet de tous ces résultats pour les sous-groupes de congruence.

3.2 Trace régularisée des noyaux automorphes

Dans cette sous-section on fixe une fonction $\phi \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$; on rappelle que les noyaux $k_{\phi,p}$ (resp. $K_{\phi,p}^{\Gamma}$) associé à l'opérateur borné, positif et auto-adjoint $\phi(\Delta^p[\mathbb{H}^3])$ (resp. $\phi(\Delta^p[M])$) on été définis dans la section 0.2.4. On notera $\phi(\Delta^p[M])_{\text{disc}}, \phi(\Delta^p[M])_{\text{cont}}$ les restrictions de $\phi(\Delta^p[M])$ aux sous-espaces stables $L^2_{\text{disc}}\Omega^p(M;V), L^2_{\text{cont}}\Omega^p(M;V)$ et $(K_{\phi,p}^{\Gamma})_{\text{disc}}$, $(K_{\phi,p}^{\Gamma})_{\text{cont}}$ les noyaux associés. Un des résultats principaux (bien connu) de cette section est le fait que $\phi(\Delta^p[M])_{\text{disc}}$ est un opérateur à trace (Proposition 3.1).

Troncation

Soit P un sous-groupe parabolique, on définit le terme constant de $k_{\phi,p}$ en P comme le noyau donné par

$$(k_{\phi,p})_P(x,y) = \int_N n^* k_{\phi,p}(x, ny) dn.$$

Si P est Γ-rationnel le terme constant $(K_{\phi,p}^{\Gamma})_P$ de $K_{\phi,p}^{\Gamma}$ en P est alors défini par

$$(K_{\phi,p}^{\Gamma})_P(x,y) = \sum_{\gamma \in \Gamma_P \backslash \Gamma} \frac{1}{\text{vol}(\Gamma_P \backslash N)} \gamma^* (k_{\phi,p})_P(x, \gamma y).$$

Pour $f \in L^2\Omega^p(M;V)$ un calcul de routine donne alors que

$$(K_{\phi,p}^{\Gamma})_P(f) = (K_{\phi,p}^{\Gamma})(f_P). \tag{3.9}$$

Pour $Y \in [1,+\infty)^h$ on définit naturellement les noyaux tronqués par

$$T^Y K^\Gamma_{\phi,p} = \begin{cases} K^\Gamma_{\phi,p}(x,y) - \sum_{j=1}^h (K^\Gamma_{\phi,p})_{P_j}(x,y) & y_j(y) \geq Y_j; \\ K^\Gamma_{\phi,p}(x,y) & y \in M^Y \end{cases}$$

et les opérateurs associés $T^Y\phi(\Delta^p[M])$. Il suit de (3.9) que l'on a

$$T^Y\phi(\Delta^p[M])_{\mathrm{disc}}(f) = \phi(\Delta^p[M])_{\mathrm{disc}}(T^Y f). \tag{3.10}$$

L'intérêt de la troncation réside dans le résultat suivant (on rappelle que la classe $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ a été introduite dans le théorème 0.22).

Proposition 3.1. *Pour $\phi \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ l'opérateur $T^Y\phi(\Delta^p[M])$ donné par la convolution avec le noyau $T^Y K^\Gamma_{\phi,p}$ est à trace et on a*

$$\operatorname{Tr} T^Y\phi(\Delta^p[M]) = \int_M \operatorname{tr}(T^Y K^\Gamma_{\phi,p}(x,x))dx.$$

Démonstration. On va montrer que $x \mapsto |T^Y K^\Gamma_{\phi,p}(x,x)|$ est une fonction intégrable sur M. Il suit qu'elle est aussi de carré intégrable et l'opérateur $T^Y\phi(\Delta^p[M])$ est donc de Hilbert-Schmidt. On utilise alors le fait suivant.

Lemme 3.2. *Les opérateurs $T^Y\phi(\Delta^p[M])$ sont positifs.*

Démonstration. On traite le cas où M n'a qu'un cusp associé à un parabolique P. On le montre sur chacun des espaces stables L^2_{cusp} et L^2_{Eis}. Pour $f \in L^2_{\mathrm{cusp}}\Omega^p(M;V)$ on a en fait $T^Y\phi(\Delta^p[M])f = \phi(\Delta^p[M])f$: vu que $y \mapsto (K^\Gamma_{\phi,p}(x,y))_P$ est orthogonal à $L^2_{\mathrm{cusp}}\Omega^p(M;V)$ on a $T^Y K^\Gamma_{\phi,p} f = K^\Gamma_{\phi,p} f$ pour toute $f \in L^2_{\mathrm{cusp}}\Omega^p(M;V)$. Sur $L^2_{\mathrm{Eis}}\Omega^p(M;V)$ l'opérateur T^Y est un projecteur orthogonal et on a donc pour $f \in L^2(\Gamma_P\backslash\mathbb{H}^3;V)$

$$\langle T^Y K^p_\phi E(f), E(f)\rangle = \langle T^Y K^p_\phi E(f), T^Y E(f)\rangle = \langle K^p_\phi T^Y E(f), T^Y E(f)\rangle \geq 0$$

où la deuxième égalité suit de (3.10), ce qui termine la preuve du lemme. □

Ainsi il existe une base hilbertienne $\phi_k, k \geq 1$ de $L^2\Omega^p(M;V)$ telle que l'on ait en norme L^2

$$T^Y K^\Gamma_{\phi,p} = \sum_{k\geq 1} a_k \phi_k \otimes \phi_k^*.$$

On veut alors montrer que l'on a $\sum_{k\geq 1} a_k = \int_M \operatorname{tr}(T^Y K^\Gamma_{\phi,p}(x,x))dx$. Ceci suit de la positivité des a_k et de la convergence L^2.

On doit donc montrer que

$$\int_{M-M^Y} \left| K^\Gamma_{\phi,p} - \sum_{j=1}^h (K^\Gamma_{\phi,p})_{P_j} \right| (x,x)dx < +\infty.$$

On considère d'abord le cas où Γ est sans torsion. On fixe un domaine fondamental D pour l'action de Γ sur $\mathbb{H}^3$ dont les sommets à l'infini sont exactement les points fixés par $P_1,\ldots,P_h$ et pour un $Y \in [1,+\infty)^h$ on pose

$$\begin{aligned} D^Y &= \{x \in D,\ \forall j\ y_j(x) \leq Y_j\} \\ &= \{x \in D,\ \forall j\ y_{P_j}(x) \leq Y_j \text{pour } \min_j Y_j \text{ assez grand}\} \end{aligned}$$

(on notera que y_j et y_{P_j} sont égales loin dans le cusp mais bien sûr par sur $\mathbb{H}^3$). Si N est un sous-groupe unipotent quelconque, $n \in N$ et $x \in \mathbb{H}^3$ la trace $\mathrm{tr}(n^* k_\phi(x, nx))$ ne dépend que de la distance de translation $\ell = d(x, nx)$. On définit ainsi une fonction h sur $\mathbb{R}$ par

$$h(\ell) = \mathrm{tr}(n^* k_\phi(x, nx)). \tag{3.11}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_{M-M^Y} \mathrm{tr}\, K^\Gamma_{\phi,p}(x,x)dx &= \int_{D-D^Y} \mathrm{tr}(K^\Gamma_{\phi,p} - (K^\Gamma_{\phi,p})_P)(x,x)dx \\
&= \sum_{j=1}^h \mathrm{vol}\,\Lambda_j \int_Y^{+\infty} \left(\sum_{\eta \in \Lambda_j - \{0\}} h(\ell(|\eta|/y)) - \frac{1}{\mathrm{vol}\,\Lambda_j} \int_{N_j} h(\ell(|n|/y))dn \right) \frac{dy}{y^3} \\
&\quad + \int_{D-D^Y} \left(\sum_{\gamma \in \Gamma_{\mathrm{lox}}} \mathrm{tr}(\gamma^* k_{\phi,p}(x, \gamma x)) + \sum_{j=1}^h \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_{P_j} - \{\Gamma_{P_j}\}} \sum_{\eta \in \Lambda_j - \{0\}} h(\ell(|\eta|/y_P(\gamma^{-1}x))) \right) dx \\
&\quad - \sum_{j=1}^h \int_{D-D^Y} \frac{1}{\mathrm{vol}\,\Lambda_j} \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma/\Gamma_{P_j} \\ \gamma \neq \Gamma_{P_j}}} \int_{N_j} h(\ell(|n|/y_P(\gamma^{-1}x)))dndx.
\end{aligned}$$

On va d'abord montrer que les intégrandes de la deuxième et troisième lignes sont bornées. La somme sur les éléments loxodromiques est bornée uniformément pour $x \in M$ d'après la rapide décroissance de $k_{\phi,p}$ et le lemme 0.27.

Pour un parabolique Γ-rationnel P on pose

$$\mathcal{N}_P(x,y) = |\{\gamma \in \Gamma/\Gamma_P,\ y_P(\gamma^{-1}x) \geq y\},$$

pour lequel on a l'estimée (non-optimale) suivante.

Lemme 3.3. *Il existe C dépendant de Γ, y_P telle que pour $y_P(x) \geq 1$ on ait $\mathcal{N}_P(x,y) \geq Cy^{-3}$.*

Démonstration. On sait que la série $\sum_{\gamma \in \Gamma_P} y_P(\gamma^{-1}x)^3$ est absolument convergente et que l'on a le développement asymptotique

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_P} y_P(\gamma^{-1}x)^3 = y_P(x)^3 + O(1),$$

où le $O(1)$ est uniforme pour $y_P(x) \geq 1$ (cf. par exemple [EGM98, Proposition III.2.3]). On a donc

$$\mathcal{N}_P(x,y)y^3 \leq \sum_{\gamma \in \Gamma_P, \gamma \neq \Gamma_P} y_P(\gamma^{-1}x)^3 \leq C$$

pour une constante C ne dépendant que de Γ, y_P. □

On note $f(y) = \int_{N_j} h(\ell(|n|/y))dn$; on a $f(y), df/dy \leq y^{-A}$ pour tout A d'après le théorème 0.22 et le lemme 3.3 légitime le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\gamma \in \Gamma/\Gamma_{P_j} \\ \gamma \neq \Gamma_{P_j}}} \int_{N_j} h(\ell(|n|/y_P(\gamma^{-1}x)))dn &= \int_0^1 f(y) d\mathcal{N}_P(x,y) \\
&= f(1)\mathcal{N}_P(x,1) + \int_0^1 \frac{df}{dy} \mathcal{N}_P(x,y)dy \\
&\leq Cf(1) + C\int_0^1 \frac{df}{dy} y^{-3} dy
\end{aligned}$$

et on voit que le côté droit est borné indépendamment de x. On procède de même pour montrer que $\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma/\Gamma_{P_j}\\ \gamma\neq\Gamma_{P_j}}}\sum_{\eta\in\Lambda_j-\{0\}} h(\ell(|\eta|/y_P(\gamma^{-1}x)))$ est borné.

Il reste à voir que

$$\int_Y^{+\infty}\left(\sum_{\eta\in\Lambda_j-\{0\}} h(\ell(|\eta|/y)) - \frac{1}{\operatorname{vol}\Lambda_j}\int_{N_j} h(\ell(|n|/y))dn\right)\frac{dy}{y^3}$$

est absolument convergente. On intègre par parties :

$$\begin{aligned}\int_Y^{+\infty}&\left(\sum_{\eta\in\Lambda_j-\{0\}} h(\ell(|\eta|/y)) - \frac{1}{\operatorname{vol}\Lambda_j}\int_{N_j} h(\ell(|n|/y))dn\right)\frac{dy}{y^3}\\ &= \int_Y^{+\infty}\int_0^{+\infty} h(\ell(r/y))(d\mathcal{N}^*_{\Lambda_j}(r) - \frac{2\pi r}{\operatorname{vol}\Lambda_j}dr)\frac{dy}{y^3}\\ &= \int_Y^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dh(\ell(r/y))}{dr}\left(\mathcal{N}^*_{\Lambda_j}(r) - \frac{\pi r^2}{\operatorname{vol}\Lambda_j}\right)dr\frac{dy}{y^3}\\ &= \int_Y^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dh(\ell(r))}{dr}E_{\Lambda_j}(ry)dr\frac{dy}{y^3}.\end{aligned}$$

Il suit du lemme 0.26 que l'on a $E_{\Lambda_j}(ry) \ll y$ quand $y\to\infty$, et on voit ainsi que le côté droit est fini.

Enfin, il reste à considérer le cas où Γ contient des éléments elliptiques. On choisit un sous-groupe sans torsion d'indice fini Γ' distingué dans Γ, de sorte que

$$\int_{M-M^Y}|K^\Gamma_{\phi,p} - \sum_{j=1}^h (K^\Gamma_{\phi,p})_P|(x,x)dx = [\Gamma:\Gamma']^{-1}\int_{M'-(M')^Y}|K^\Gamma_{\phi,p} - \sum_{j=1}^h (K^\Gamma_{\phi,p})_{P_j}|(x,x)dx$$

et cette dernière intégrale est celle de la troncation d'un noyau automorphe (associé au noyau symétrique G-invariant $1/2\sum_{i=1}^{2m}\gamma_i^* k_{\phi,p}(x,\gamma_i x)$ où $\gamma_1,\dots,\gamma_m$ sont des représentants de Γ/Γ' et $\gamma_{i+m}=\gamma_i^{-1}$) sur $M'-(M')^Y$, qui est donc absolument convergente. □

Corollaire 3.4. *L'opérateur $\phi(\Delta^p_{\text{cusp}}[M])$ est à trace. On a $L^2_{\text{cusp}}\Omega^p(M;V)\subset L^2_{\text{disc}}\Omega^p(M;V)$ et $\phi(\Delta^p_{\text{disc}}[M])$ est lui aussi à trace.*

Démonstration. On a vu plus haut que $(T^Y K^\Gamma_{\phi,p})_{\text{cusp}} = (K^\Gamma_{\phi,p})_{\text{cusp}}$. Comme l'opérateur $T^Y\phi(\Delta^p[M])$ est positif il suit donc de la proposition 3.1 que $\phi(\Delta^p_{\text{cusp}}[M])$ est à trace. En particulier il est compact et ceci implique, par un argument standard (cf. par exemple [Ber11, Chapitre 3.9]), que $\Delta^p_{\text{cusp}}[M]$ est diagonalisable. Comme on l'a énoncé plus haut, L^2_{cusp} est de codimension finie dans L^2_{disc} et il suit que $\phi(\Delta^p[M])$ est lui aussi à trace. □

Développement spectral

Pour $\varphi,\psi\in L^2(\mathbb{R})$, $v\in V_l$ et $\omega\in\Omega^\pm(V_l)$ on a

$$\phi(\Delta^1[M])E(\psi,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\phi\left(\left(1-\frac{|l|}{2}\right)^2 + u^2 + \lambda_V\right)\psi(u)E(iu,\omega)du$$

$$\phi(\Delta^0[M])E(\varphi,v) = \int_{-\infty}^{+\infty}\phi\left(\left(1-\frac{|l|}{2}\right)^2 + u^2 + \lambda_V\right)\varphi(u)E(iu,v)du.$$

On note $d = \dim V$ et on choisit des bases orthonormées v_k, $k = 1, \dots, dh$ de V et $\omega_j, \bar{\omega}_j$, $j = 1, \dots, dh$ de $\Omega^{\pm}(V)$ telles que tous les $v_k \in \bigoplus_{j=1}^{h} V_{l_k,j}$ et tous les $\omega_j, \bar{\omega}_j \in \Omega^{\pm}(V_{l_j})$). Des égalités précédentes et de (3.3),(3.4) et (3.10) on déduit que l'on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(T^Y \phi(\Delta^0[M]))_{\mathrm{cont}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{dh} \phi\left(\left(1 - \frac{|l_k|}{2}\right)^2 + u^2 + \lambda_V\right) \|T^Y E(iu, v_k)\|^2 du \\
\mathrm{Tr}(T^Y \phi(\Delta^1[M]))_{\mathrm{cont}} &= \mathrm{Tr}(T^Y (K^{\Gamma}_{\phi,0})_{\mathrm{Eis}}) \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{dh} \phi\left(\left(1 - \frac{|l_j|}{2}\right)^2 + u^2 + \lambda_V\right) 2\|T^Y E(iu, \omega_j)\|^2 du
\end{aligned}$$

On pose $\Phi(s) = \Phi^-(-s)\Phi^+(s)$, il vient

$$\mathrm{tr}(\Phi(s)^{-1}\Phi(s)') = \mathrm{tr}(\Phi^+(s)^{-1}\Phi^+(s)') + \mathrm{tr}(\Phi^-(-s)^{-1}\Phi^-(-s)')$$

et les relations de Maass-Selberg (3.5),(3.6) donnent (pour $n_1 - n_2$ pair, $q = \frac{n_1+n_2}{2}$, $d_l = \dim(V_l)$, Ψ_l est la restriction de Ψ à $\bigoplus_{j=1}^{h} V_{l,j}$, etc.)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}(T^Y \phi(\Delta^0[M])) \\
&\quad = \mathrm{Tr}(K^{\Gamma}_{\phi,0})_{\mathrm{disc}} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-2q}^{2q} \phi\left(\left(1 - \frac{|l|}{2}\right)^2 + u^2 + \lambda_V\right) \mathrm{tr}\left(\Psi_l(iu)^{-1} \frac{d\Psi_l(iu)}{du}\right) du \\
&\qquad + \frac{h \log Y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-2q}^{2q} d_l \phi\left(\left(1 - \frac{|l|}{2}\right)^2 + u^2 + \lambda_V\right) du \\
&\qquad + \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-2q}^{2q} \phi\left(\left(1 - \frac{|l|}{2}\right)^2 + u^2 + \lambda_V\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(Y^{iu}) \,\mathrm{tr}\, \Psi_l(-iu) - (Y^{-iu}) \,\mathrm{tr}\, \Psi_l(iu)}{iu} du
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}(T^Y \phi(\Delta^1[M])) \\
&\quad = \mathrm{Tr}(T^Y (K^{\Gamma}_{\phi,0})_{\mathrm{cont}}) + \frac{2h \log Y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-2q-2}^{2q+2} d_l \phi\left(\left(1 - \frac{|l|}{2}\right)^2 + u^2 + \lambda_V\right) du \\
&\qquad + \mathrm{Tr}(K^{\Gamma}_{\phi,1})_{\mathrm{disc}} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-2q-2}^{2q+2} \phi\left(\left(1 - \frac{|l|}{2}\right)^2 + u^2 + \lambda_V\right) \mathrm{tr}\left(\Phi_l(iu)^{-1} \frac{d\Phi_l(iu)}{du}\right) du.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Définition de la trace régularisée

Les développements (3.12) et (3.13) permettent de définir la trace régularisée en prenant le terme constant quand $Y \to \infty$. Par exemple en degré 0 on pose

$$\mathrm{Tr}_R\, \phi(\Delta^0[M]) = \lim_{Y \to \infty} \left(\mathrm{Tr}(T^Y \phi(\Delta^0[M))) - \frac{h \log Y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-2q}^{2q} d_l \phi\left(\left(1 - \frac{|l|}{2}\right)^2 + u^2 + \lambda_V\right) du\right) \tag{3.14}$$

Un calcul classique (cf. [EGM98, Proposition 5.3 du Chapter 6]) montre que pour toute fonction $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on a :

$$\lim_{Y \to \infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(u) \frac{Y^{2iu} \,\mathrm{tr}\, \Psi_l(-iu) - Y^{-2iu} \,\mathrm{tr}\, \Psi_l(iu)}{2iu} du\right) = \frac{1}{4} \xi(0) \,\mathrm{tr}\, \Psi_l(0)$$

et (3.13) donne ainsi le développement spectral suivant :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_R\,\phi(\Delta^0[M]) = \mathrm{Tr}(\phi(\Delta^0[M]))_{\mathrm{disc}} + \frac{1}{4}\sum_{l=-2q}^{2q}\phi\left(\left(1-\frac{|l|}{2}\right)^2+\lambda_V\right)\mathrm{tr}\,\Psi_l(0)\\ -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-2q}^{2q}\phi\left(\left(1-\frac{|l|}{2}\right)^2+u^2+\lambda_V\right)\mathrm{tr}\left(\Psi_l(iu)^{-1}\frac{d\Psi_l(iu)}{du}\right)du.\end{aligned} \tag{3.15}$$

On laisse au lecteur le soin de voir quels sont exactement les définitions et développements spectraux pour les autres degrés et pour $n_1 - n_2$ impair (les indices dans les sommes sur l changent). Une fois encore on fait remarquer que la trace régularisée dépend du choix des fonctions hauteur via les opérateurs d'entrelacement.

3.3 Expression géométrique

Pour cette section on fixe p et on note $k_\phi = k_{\phi,p}$, etc. On rappelle que la fonction h a été définie plus haut par $h(\ell) = \mathrm{tr}(n^* k_\phi(x, nx))$ pour n unipotent et $d(x, nx) = \ell$. Pour énoncer la formule des traces pour un orbifold on aura aussi besoin de la fonction suivante : si $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $g \in G$ est un élément elliptique d'angle $\theta \neq 0$ et d'axe L alors pour $x \in \mathbb{H}^3$ la trace $\mathrm{tr}(g^* k_\phi(x, gx))$ ne dépend que de θ et de la distance $r = d(x, L)$ et on la note $f(r, \theta)$. Enfin, pour $y \in \mathbb{R}$ et un parabolique P on note $d(y)$ la longueur d'un arc géodésique issu d'un x avec $y_P(x) = y$, parallèlement aux horosphères issues de P et aboutissant sur l'horosphère $\{y_P = 1\}$ (ceci ne dépend pas de P ou des fonctions hauteur). Le résultat suivant est un calcul grossier du côté géométrique de la formule des traces.

Proposition 3.5. *On note Λ_j le réseau euclidien $\Gamma \cap N_j$. Pour $j = 1, \ldots, h$ on pose $p_j = |\Gamma_{P_j}/\Lambda_j|$ et*

$$\kappa_j = \int_{\alpha(\Lambda_j)}^{+\infty} E_{\Lambda_j}(\rho)\frac{d\rho}{\rho^3} - \frac{\pi(1 + 2\log\alpha(\Lambda_j))}{\mathrm{vol}\,\Lambda_j}.$$

Soient $\gamma_1, \ldots, \gamma_e \in \Gamma$ tels que tout sous-groupe cyclique fini maximal (non-trivial) de Γ soit engendré par un Γ-conjugué de l'un des γ_j. On note q_j l'ordre de γ_j, des représentants pour les classes de conjugaison elliptiques dans Γ sont alors :

$$\gamma_1, \ldots, \gamma_1^{q_1-1}, \gamma_2, \ldots, \gamma_e^{q_e-1}.$$

On note de plus $\ell_j = \ell(\gamma_j)$ (cf. 0.3.7) et $w_j = N_\Gamma(\langle\gamma_j\rangle)/T_j$ où T_j est le sous-groupe des éléments semisimples de Γ ayant le même axe que γ_j (de sorte que $w_j = 1$ ou 2) et $\varepsilon_j = 0$ pour une classe non-cuspidale et 1 sinon.

On a alors l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_R\,\phi(\Delta^p[M]) = \mathrm{Tr}_\Gamma\,k_\phi + \int_D \sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathrm{lox}}}\mathrm{tr}(\gamma^* k_\phi(x, \gamma x))dx\\ + 2\pi\sum_{j=1}^{h}\frac{1}{p_j}\int_0^{+\infty} r\log(r)h(\ell(r))dr + \sum_{j=1}^{h}\frac{\kappa_j\,\mathrm{vol}\,\Lambda_j}{p_j}\int_0^{+\infty} rh(\ell(r))dr\\ + \sum_{j=1}^{e}\sum_{l=1}^{q_j-1}\frac{2(l,q_j)\pi}{w_j q_j}\left(\ell_j\int_0^{+\infty} f\left(r, \frac{2l\pi}{q_j}\right)dr + 2\varepsilon_j\int_1^{+\infty}\int_{d(y)}^{+\infty} f\left(r, \frac{2l\pi}{q_j}\right)dr\frac{dy}{y}\right).\end{aligned} \tag{3.16}$$

On remarque que la dépendance en la fonction hauteur de cette expression géométrique est contenue dans les terme $\sum_j \log \alpha(\Lambda_j)$ et $\sum_j \ell_j$ (où on somme sur les classes elliptiques cuspidales).

Démonstration. On va établir un développement asymptotique de la forme

$$\int_{M^Y} \operatorname{tr} K^\Gamma_{\phi,p}(x,x)dx = A \log Y + B + o(1).$$

Comme $\operatorname{Tr} T^Y K^\Gamma_{\phi,p} - \int_{M^Y} \operatorname{tr} K^\Gamma_{\phi,p}(x,x)dx = o(1)$ d'après la preuve de la proposition 3.1 il suit que l'on a $\operatorname{Tr}_R K^\Gamma_\phi = B$. Il reste ensuite à calculer B pour obtenir le résultat voulu, ce qui sera fait au cours de la preuve.

Termes paraboliques

Soient D, D^Y les domaines fondamentaux utilisés dans la preuve de la proposition 3.1. Soit $P = MAN$ un sous-groupe parabolique et Λ un réseau dans N. On choisit une fonction hauteur y_P en P, un domaine fondamental O pour l'action de Λ sur l'horosphère $\{y_P = 1\}$ et on pose

$$B_\Lambda = AO,\ B^Y_\Lambda = \{x \in B_\Lambda,\ y_P(x) \leq Y\}. \tag{3.17}$$

On veut une asymptotique en $Y \to \infty$ de l'intégrale :

$$\int_{B^Y_\Lambda} \sum_{\eta \in \Lambda - \{0\}} h(d(x, \eta x))dx.$$

L'intégrande est N-invariante et il suit que ceci vaut :

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(\Lambda) \int_0^Y \sum_{\eta \in \Lambda - \{0\}} h(\ell(|\eta|/y)) \frac{dy}{y^3} &= \operatorname{vol}(\Lambda) \sum_{\eta \in \Lambda - \{0\}} \int_{|\eta|/Y}^{+\infty} h(\ell(r)) \frac{rdr}{|\eta|^2} \\ &= \operatorname{vol}(\Lambda) \int_0^{+\infty} rh(\ell(r)) \sum_{0 < |\eta| \leq rY} \frac{1}{|\eta|^2} dr.\end{aligned}$$

On rappelle que $\mathcal{N}_\Lambda$ est la fonction de comptage de Λ, $\mathcal{N}^*_\Lambda = \mathcal{N}_\Lambda - 1$ et $E_\Lambda(r) = \mathcal{N}^*_\Lambda - \frac{\pi r^2}{\operatorname{vol}\Lambda} \ll \frac{r}{\alpha(\Lambda)}$ de sorte que pour tout $r > 0$ on a :

$$\begin{aligned}\sum_{0<|v|\leq r} \frac{1}{|v|^2} &= \int_{\alpha(\Lambda)}^r \frac{d\mathcal{N}^*_\Lambda(\rho)}{\rho^2} = \frac{\mathcal{N}_\Lambda(R)}{R^2} + \int_{\alpha(\Lambda)}^r 2\frac{\mathcal{N}^*_\Lambda(\rho)}{\rho^3} dr \\ &= \frac{\mathcal{N}_\Lambda(R)}{R^2} - \int_{\alpha(\Lambda)}^r \frac{\pi\rho^2}{\operatorname{vol}\Lambda} \frac{d\rho}{\rho^3} + \int_{\alpha(\lambda)}^r E_\Lambda(\rho) \frac{d\rho}{\rho^3} \\ &= \frac{\mathcal{N}_\Lambda(R)}{R^2} + \frac{2\pi(\log r - \log \alpha(\Lambda))}{\operatorname{vol}(\Lambda)} + \int_{\alpha(\Lambda)}^{+\infty} E_\Lambda(\rho) \frac{d\rho}{\rho^3} - \int_r^{+\infty} E_\Lambda(\rho) \frac{d\rho}{\rho^3}.\end{aligned}$$

En posant

$$\kappa_\Lambda = \int_{\alpha(\Lambda)}^{+\infty} E_\Lambda(\rho) \frac{d\rho}{\rho^3} - \frac{\pi(1 + 2\log \alpha(\Lambda))}{\operatorname{vol}\Lambda}$$

on obtient ainsi que

$$\begin{aligned}\int_{B^Y_\Lambda} \sum_{\eta \in \Lambda - 0} h(d(x, \eta x))dx &= \int_0^{+\infty} 2\pi \log(rY) rh(\ell(r))dr + \operatorname{vol}(\Lambda)\kappa_\Lambda \int_0^{+\infty} rh(\ell(r))dr \\ &\quad - \int_0^{+\infty} rh(\ell(r)) \int_{\max(\alpha(\Lambda), rY)}^{+\infty} E_\Lambda(\rho) \frac{d\rho}{\rho^3} dr \\ &\quad - \operatorname{vol}\Lambda \int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathcal{N}_\Lambda(rY)}{(rY)^2} - \frac{\pi}{\operatorname{vol}\Lambda} \right) h(\ell(r))dr.\end{aligned}$$

Le terme de la seconde ligne est le reste d'une intégrale convergente et tend ainsi vers 0 quand $Y \to \infty$. L'intégrande de la troisième ligne tend vers 0 quand $Y \to \infty$ et par le théorème de convergence dominée il suit que l'intégrale tend elle aussi vers 0. Au final on a donc le développement suivant quand $Y \to \infty$:

$$\int_{B_\Lambda^Y} \sum_{\eta \in \Lambda - 0} h(d(x, \eta x))dx = \int_0^{+\infty} 2\pi \log(rY) r h(\ell(r))dr + \mathrm{vol}(\Lambda)\kappa_\Lambda \int_0^{+\infty} h(\ell(r))dr + o(1). \quad (3.18)$$

Termes elliptiques non-cuspidaux

Soit $\gamma_0 \in \Gamma$ un élément elliptique d'ordre q, $\mathcal{C}(\gamma_0)$ sa Γ-classe de conjugaison et $\theta = 2l\pi/q$ son angle ; on suppose que γ_0 ne fixe pas un cusp et on rappelle que l'on note $\ell(\gamma_0)$ la longueur de la géodésique singulière associée. Dans le cas où le normalisateur de γ_0 ne contient pas d'élément elliptique dont l'axe est distinct de celui de γ_0 on a alors quand $Y \to \infty$:

$$\int_M \sum_{\gamma \in \mathcal{C}(\gamma_0)} \mathrm{tr}(\gamma^* k(x, \gamma x))dx = \frac{2\pi\ell}{q} \int_0^{+\infty} f\left(r, \frac{2l\pi}{q}\right) dr. \quad (3.19)$$

Dans le cas restant on divise le côté droit par 2.

Termes elliptiques cuspidaux

On suppose maintenant que γ_0 fixe un cusp ; son axe dans $\mathbb{H}^3$ relie alors deux cusps correspondant à des paraboliques Γ-rationnels P_1 et P_2. On note y_{P_1}, y_{P_2} les fonctions hauteur en P_1 et P_2, H_i les horosphères $y_{P_i} = 1$, on rappelle que l'on a alors défini $\ell(\gamma_0) = d(H_1, H_2)$. L'intégrale sur M de la partie du noyau K_ϕ^Γ liée à la classe de γ_0 diverge, on va donc calculer l'asymptotique de l'intégrale sur M^Y. On définit pour $Y \in [1, +\infty)$ le domaine :

$$B^Y = \{x, \ \text{ pour } i = 1, 2 \text{ on a } y_{P_i}(x) \leq Y\},$$

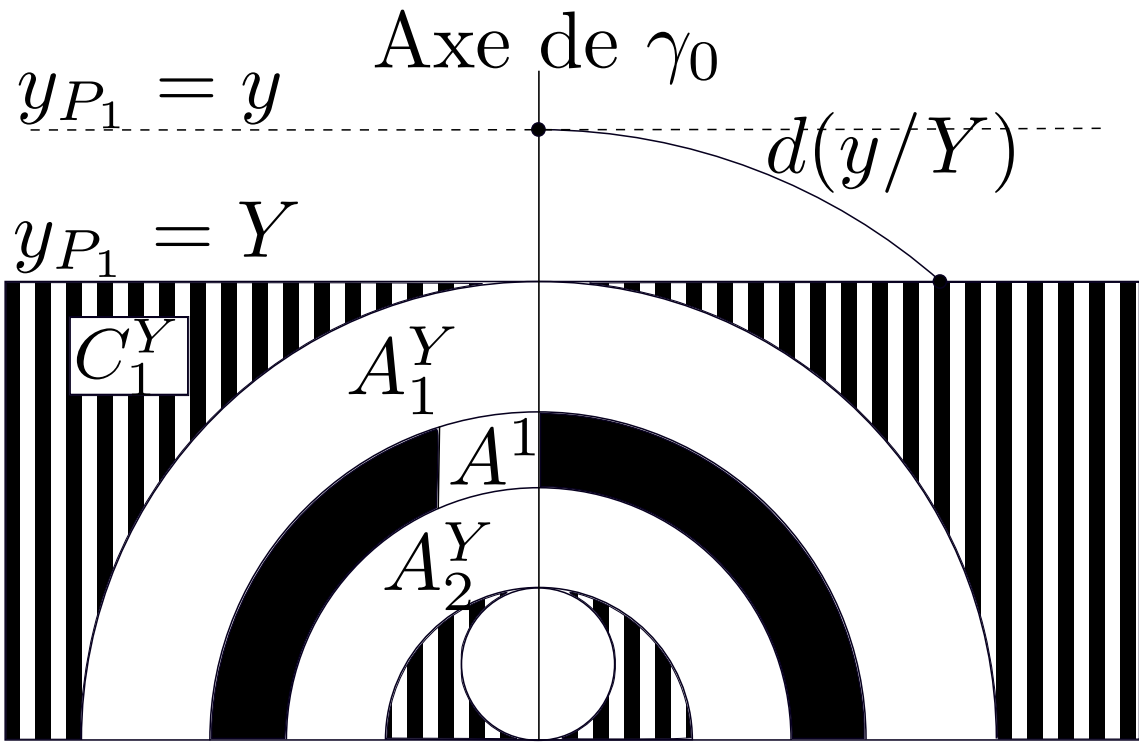
on a alors

$$\int_{M^Y} \sum_{\gamma \in \mathcal{C}(\gamma_0)} \mathrm{tr}(\gamma^* k(x, \gamma x))dx = \int_{B^Y} \mathrm{tr}(\gamma^* k(x, \gamma_0 x))dx + o(1).$$

Soit S_1, S_2 les hyperplans orthogonaux à l'axe de γ_0 aux points de hauteur 1 sur cet axe, A^1 la zone entre ces deux hyperplans. Soit S_1^Y l'hyperplan parallèle à S_1, rencontrant l'axe à hauteur $y_{P_1} = Y$, A_1^Y la zone entre S_1 et S_1^Y. Enfin, soit C_1^Y la zone entre S_1^Y et l'horosphère $\{y_{P_1} = Y\}$. On définit de même A_2^Y, C_2^Y, de sorte que l'on ait

$$B^Y = C_2^Y \cup A_2^Y \cup A^1 \cup A_1^Y \cup C_1^Y$$

avec des intersections de mesure nulle, comme illustré ci-dessous :



On voit immédiatement que l'on a :

$$\int_{A^1} \mathrm{tr}(\gamma^* k(x,\gamma_0 x))dx = \ell(\gamma_0)\frac{2\pi}{q}\int_0^{+\infty} f\left(r, \frac{2l\pi}{q}\right) dr$$
$$\int_{A_1^Y} \mathrm{tr}(\gamma^* k(x,\gamma_0 x))dx = \int_{A_2^Y} \mathrm{tr}(\gamma^* k(x,\gamma_0 x))dx = \log Y \frac{2\pi}{q}\int_0^{+\infty} f\left(r, \frac{2l\pi}{q}\right) dr$$
$$\int_{C_1^Y} \mathrm{tr}(\gamma^* k(x,\gamma_0 x))dx = \int_{C_2^Y} \mathrm{tr}(\gamma^* k(x,\gamma_0 x))dx = \frac{2\pi}{q}\int_Y^{+\infty}\int_{d(y/Y)}^{+\infty} f\left(r, \frac{2l\pi}{q}\right) dr \frac{dy}{y}$$

Si aucune autre isométrie elliptique ne préserve l'axe de γ_0 il vient finalement :

$$\begin{aligned}\int_{M^Y} \sum_{\gamma\in\mathcal{C}(\gamma_0)} \mathrm{tr}(\gamma^* k(x,\gamma x))dx = \frac{2\pi}{q}(\ell(\gamma_0) + 2\log Y)\int_0^{+\infty} f\left(r, \frac{2l\pi}{q}\right) dr \\ + 2\int_1^{+\infty}\int_{d(y)}^{+\infty} f\left(r, \frac{2l\pi}{q}\right) dr \frac{dy}{y} + o(1).\end{aligned} \tag{3.20}$$

Comme ci-dessus, dans le cas contraire on divise par 2 à droite.

Conclusion

On suppose que les classes elliptiques sont ordonnées de sorte que $\gamma_1, \ldots, \gamma_h$ sont les générateurs des stabilisateurs des cusps (quitte à rajouter des classes triviales). On applique (3.18) et

(3.20) à chacun des Γ_{P_j} et (3.19) aux classes elliptiques restantes puis en sommant on obtient

$$\begin{aligned}\int_{M^Y} \operatorname{tr} K^{\Gamma}_{\phi,p}(x,x)dx = &\left(2\pi h \int_0^{+\infty} rh(\ell(r))dr\right)\log Y + 2\pi h \int_0^{+\infty} 2\pi \log(r) rh(\ell(r))dr \\ &+ \sum_{j=1}^{h} \operatorname{vol}(\Lambda_j)\kappa_{\Lambda_j} \int_0^{+\infty} rh(\ell(r))dr + o(1) \\ &+ \sum_{j=1}^{h}\sum_{l=1}^{q_j-1} \frac{2\pi}{q_j}(\ell(\gamma_j) + 2\log Y)\int_0^{+\infty} f\left(r, \frac{2l\pi}{q_j}\right)dr \\ &+ \int_1^{+\infty}\int_{d(y)}^{+\infty} f\left(r, \frac{2l\pi}{q_j}\right)dr\frac{dy}{y} + o(1) \\ &+ \sum_{j=h+1}^{e} \frac{2\pi\ell(\gamma_j)}{q_j}\int_0^{+\infty} f\left(r, \frac{2l\pi}{q_j}\right)dr \\ &+ \int_{D^Y}\left(\operatorname{tr} k_{\phi,p}(x,x) + \sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathrm{lox}}} \operatorname{tr}(\gamma^* k_{\phi,p}(x,\gamma x))\right)dx\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

3.4 Torsion régularisée

3.4.1 La trace du noyau de la chaleur en $t \to 0$

On démontre ici le développement asymptotique suivant (voir aussi [MP12, Proposition 6.9]).

Proposition 3.6. *Pour $p = 0, 1, 2, 3$ et pour tout $m \geq 1$ il existe des coefficients $a_0^p, \ldots, a_m^p$, $b_0^p, \ldots, b_m^p$ et une fonction continue H^p tels que*

$$\operatorname{Tr}_R(e^{-t\Delta^p[M]}) = \sum_{k=0}^{m+3}\left(a_k^p t^{\frac{k-3}{2}} + b_k^p t^{\frac{k-1}{2}}\log t\right) + H^p(t) \tag{3.21}$$

et $H^p(t) \ll t^{\frac{m+1}{2}}$ en $t \to 0$.

Démonstration. On fixe p et si $n \in G$ est unipotent, $x \in \mathbb{H}^3$ et $d(x, nx) = \ell$ on note $h_t^p(\ell) = \operatorname{tr}(n^* e^{-t\Delta^p[M]}(x, nx))$. On conserve les notations introduites dans la preuve de la proposition 3.5 et on pose

$$\begin{aligned}S_1(t) &= 2\pi h \int_0^{+\infty} r\log(r) h_t^p(\ell(r))dr, \\ S_2(t) &= \sum_{j=1}^{h} \kappa_j \operatorname{vol}\Lambda_j \int_0^{+\infty} rh_t^p(\ell(r))\,dr, \\ S_3(t) &= \int_D \sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathrm{lox}}} \operatorname{tr}(\gamma^* e^{-t\Delta^p[M]}(x,\gamma x)), \\ S_4(t) &= \sum_{j=1}^{e}\sum_{l=1}^{q_j-1} \frac{2(l,q_j)\pi}{w_j q_j}\ell_j \int_0^{+\infty} f\left(r, \frac{2l\pi}{q_j}\right)dr, \\ S_5(t) &= \sum_{j=1}^{e}\sum_{l=1}^{q_j-1} \varepsilon_j \int_1^{+\infty}\int_{d(y)}^{+\infty} f\left(r, \frac{2l\pi}{q_j}\right)dr\frac{dy}{y}\end{aligned}$$

de sorte que cette proposition donne :

$$\mathrm{Tr}_R\, e^{-t\Delta^p[M]} = \mathrm{Tr}_\Gamma\, e^{-t\Delta^p[\mathbb{H}^3]} + \sum_{i=1}^{5} S_i(t). \tag{3.22}$$

On va établir le développement séparément pour chacun des termes. En prenant $g = 1_G$ dans l'égalité 24 et en intégrant sur D on obtient le développement

$$\mathrm{Tr}_\Gamma\, e^{-t\Delta^p[\mathbb{H}^3]} = \mathrm{vol}\, D \sum_{k=0}^{m+3} f_k^p t^{-\frac{k}{2}} \tag{3.23}$$

où les f_k^p sont des coefficients absolus, ce qui traite le premier terme.

On s'occupe ensuite de S_3 ; en posant

$$\ell_0 = \inf\{d(x,\gamma x),\ x \in \mathbb{H}^3, \gamma \in \Gamma_{\mathrm{lox}}\}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathrm{lox}}} \mathrm{tr}(\gamma^* e^{-t\Delta^p[M]}(x,\gamma x)) &\leq \sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathrm{lox}}} C t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{d(x,\gamma x)^2}{5t}} \\ &= C\int_{\ell_0}^{+\infty} e^{-\frac{\ell^2}{5t}} d\mathcal{N}_\Gamma(x,\ell) \\ &\ll \int_{\ell_0}^{+\infty} t^{-\frac{5}{2}} \ell e^{-\frac{\ell^2}{5t}} \mathcal{N}_\Gamma(x,\ell) d\ell \\ &\ll t^{-\frac{5}{2}} e^{-\frac{\ell_0^2}{5t}}\end{aligned} \tag{3.24}$$

de sorte que $S_3(t)$ est en fait un $o(t^{\frac{m+1}{2}})$ pour tout $m > 0$.

Pour traiter S_1 et S_2 on va utiliser le développement en $t \to 0$ suivant, qui est une conséquence immédiate de (24) :

$$h_t^p(\ell) = \sum_{k=-3}^{m} b_k^p(\ell) e^{-\frac{\ell^2}{4t}} t^{\frac{k}{2}} + O(t^{\frac{m+1}{2}}) \tag{3.25}$$

On montre maintenant que si ω est une fonction lisse sur $[0,1]$ il existe pour tout $m > 1$ des constantes $c_l, c_l'\, l = 1,\dots,m+1$ telles que

$$\int_0^1 r\log(r)\omega(r) e^{-\ell(r)^2/4t} dr - \sum_{l=2}^{m} t^{l/2}(c_l + c_l' \log t) \leq c_{m+1} t^{(m+1)/2}. \tag{3.26}$$

Vu que $\ell \mapsto r\log(r)/\ell\log(\ell)$ est lisse au voisinage de 0 on se ramène par le changement de variable $r \to \ell(r)$ à démontrer que si ω_0 est une fonction lisse sur $[0,1]$ on a un développement en $t \to 0$ de la forme désirée pour

$$\int_0^1 \ell\log(\ell)\omega_0(\ell) e^{-\frac{\ell^2}{t}} d\ell = t\log t \int_0^{t^{-1/2}} \ell\omega_0(t^{\frac{1}{2}}\ell) e^{-\ell^2} d\ell + t\int_0^{t^{-1/2}} \ell\log(\ell)\omega_0(t^{\frac{1}{2}}\ell) e^{-\ell^2} d\ell.$$

Ce dernier fait est une conséquence immédiate de la formule de Taylor avec reste intégral et de l'estimée suivante

$$\int_0^{t^{-\frac{1}{2}}} \ell^k e^{-\ell^2} d\ell = \int_0^{+\infty} \ell^k e^{-\ell^2} d\ell + O(t^{-\frac{k}{2}} e^{-\frac{1}{t}}).$$

On obtient de la même manière que pour ω lisse sur $[0,1]$ il existe des coefficients c_l'' tels que :

$$\int_0^1 r\omega(r)e^{-\frac{\ell(r)^2}{4t}}dr = \sum_{l=2}^{m} c_l'' t^{l/2} + O(t^{\frac{m+1}{2}}). \tag{3.27}$$

On a finalement démontré que pour tout $m \geq 1$ on a des coefficients c_k^p, d_k^p, e_k^p tels qu'en $t \to 0$ on a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} r\log(r)h_t^p(\ell(r))dr &= \sum_{k=-3}^{m} c_k^p t^{\frac{k}{2}} + \sum_{k=-1}^{m} e_k^p t^{\frac{k}{2}}\log t + O(t^{\frac{m+1}{2}}), \\ \int_0^{+\infty} rh_t^p(\ell(r))dr &= \sum_{k=-3}^{m} e_k^p t^{\frac{k}{2}} + O(t^{\frac{m+1}{2}}). \end{aligned} \tag{3.28}$$

On note $f_t^p(r,\theta) = \mathrm{tr}(g^* e^{-t\Delta^p[\mathbb{H}^3]}(x,gx)$ si g est une rotation d'angle θ et x est à distance r de son axe, on rappelle que l'on note alors aussi $d(x,gx) = \ell_\theta(r)$ (cf. 0.3.2). Il suit alors de (24) que l'on a en $t \to 0$

$$f_t^p(r,\theta) = \sum_{l=-3}^{m} \beta_l^p(r,\theta)e^{-\frac{\ell_\theta(r)^2}{4t}} t^{\frac{l}{2}} + O(t^{\frac{m+1}{2}}). \tag{3.29}$$

Il suit de (3.29) et (3.26) que si l'on pose

$$I_t^p(\theta) = \int_0^{+\infty} f_t^p(r,\theta)dr$$

on a le développement asymptotique en $t \to 0$ suivant :

$$I_t^p(\theta) = \sum_{k=0}^{m+3} a_k^p(\theta) t^{\frac{k-3}{2}} + O(t^{\frac{m+1}{2}}) \tag{3.30}$$

qui montre que S_4 a un développment de la forme souhaitée. On pose encore :

$$J_t^p(\theta) = \int_1^{+\infty}\int_{d(y)}^{+\infty} f_t^p(r,\theta)dr\frac{dy}{y},$$

on a pour tout $m \geq 1$:

$$J_t^p(\theta) = \int_1^{y_0}\int_{d(y)}^{r_0} f_t^p(r,\theta)dr\frac{dy}{y} + o(t^{\frac{m+1}{2}}).$$

où $y_0 = \sup(y, d(y) \leq r_0)$ et $r_0 = \sup(r, \ell_\theta(r) \leq 1)$. On a

$$\int_1^{y_0}\int_{d(y)}^{r_0} \beta_l^p(r,\theta)e^{-\frac{\ell_\theta(r)^2}{4t}}dr\frac{dy}{y} = \int_1^{y_0}\int_{\ell_\theta(d(y))}^{1} \omega(\ell)e^{-\frac{\ell^2}{4t}}d\ell\frac{dy}{y}$$

où $\omega(\ell)$ est une fonction lisse. La fonction $\ell \mapsto y(\ell)$ inverse de $y \mapsto \ell_\theta(d(y))$ est aussi lisse et il vient

$$\int_1^{y_0}\int_{d(y)}^{1} \beta_l^p(r,\theta)e^{-\frac{\ell_\theta(r)^2}{4t}}dr\frac{dy}{y} = \int_0^1 \omega(\ell)\log y(\ell)e^{-\frac{\ell^2}{4t}}d\ell$$

d'où il suit avec (3.29), (3.26) que l'on a

$$J_t^p(\theta) = \sum_{k=0}^{m+3} b_k^p(\theta)t^{\frac{k-3}{2}} + O(t^{\frac{m+1}{2}}),$$

ce qui permet d'obtenir le développement souhaité pour S_5. □

3.4.2 Déterminant régularisé et torsion analytique

On utilise la notation habituelle Γ pour la fonction Gamma d'Euler, dont on rappelle qu'elle est définie pour $\mathrm{Re}(s) > 0$ par la formule $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^s \frac{dt}{t}$ et qu'elle se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Elle a alors un pôle simple en chaque entier négatif et aucun zéro, de sorte que $1/\Gamma$ est une fonction entière sur $\mathbb{C}$. On pose

$$\zeta_p(s) := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \mathrm{Tr}_R(e^{-t\Delta^p[M]}) t^s \frac{dt}{t}. \tag{3.31}$$

Pour démontrer le prolongement analytique on aura besoin du résultat élémentaire bien connu suivant.

Lemme 3.7. *Soit $\phi \in C^0(0, +\infty)$ telle qu'il existe des entiers $m, m' \geq 0$, des coefficients a_k, $k = 0, \ldots, m$ et une fonction H définie au voisinage de 0 tels que*

$$\phi(t) =_{t\to 0} \sum_{k=-m'}^{m} a_k t^{-\frac{k}{2}} + b_k t^{-\frac{k}{2}} \log t + H(t)$$

et $H(t) \ll t^{\frac{m'+1}{2}}$ en $t \to 0$. Alors pour tout $t_0 > 0$ la fonction $s \mapsto \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{t_0} \phi(t) t^s \frac{dt}{t}$ est définie sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > m/2$, se prolonge méromorphiquement sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > -m'/2$ et est holomorphe en $s = 0$.

Démonstration. Le résultat suit d'un calcul explicite des intégrales, laissé au lecteur. □

On peut maintenant démontrer le résultat fondamental suivant.

Proposition 3.8. *On suppose que la représentation V est fortement acyclique. Alors l'intégrale (3.31) converge pour $\mathrm{Re}(s) > 3/2$, et $s \mapsto \zeta_p(s)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ qui est holomorphe en 0.*

Démonstration. La convergence aux grands temps est assurée par le trou spectral du Laplacien *. Le développement spectral (3.15) appliqué au noyau de la chaleur donne, par exemple pour $p = 1$, l'égalité suivante :

$$\mathrm{Tr}_R\, e^{-t\Delta^1[M]} = \mathrm{Tr}(e^{-t\Delta^1[M]})_{\mathrm{cusp}} + e^{-t\lambda_V} S$$

où

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{4} \sum_{l=-2q}^{2q} d_l e^{-t\left(\left(1-\frac{|l|}{2}\right)^2\right)} \operatorname{tr} \Psi_l(0) \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-2q}^{2q} d_l e^{-t\left(\left(1-\frac{|l|}{2}\right)^2 + u^2\right)} \operatorname{tr}\left(\Psi_l(iu)^{-1} \frac{d\Psi_l(iu)}{du}\right) du. \end{aligned}$$

Pour $t \geq 1$ on a

$$|S| \leq \frac{\dim V}{4} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-2q}^{2q} d_l e^{-u^2} \operatorname{tr}\left(\Psi_l(iu)^{-1} \frac{d\Psi_l(iu)}{du}\right) du,$$

le côté droit est fini et ne dépend pas de t et il suit que l'on a $\mathrm{Tr}_R\, e^{-t\Delta[M]} \ll e^{-\lambda_0 t}$ en $t \to \infty$, où $\lambda_0 = \min(\lambda_V, \lambda^1_{\mathrm{disc}})$ avec $\lambda^1_{\mathrm{disc}} > 0$ la plus petite valeur propre de $\Delta^1_{\mathrm{disc}}[M]$. Il suit donc que pour touts $s \in \mathbb{C}$ et $t_0 > 0$ l'intégrale $\int_{t_0}^{+\infty} \mathrm{Tr}_R(e^{-t\Delta^p[M]}) t^s \frac{dt}{t}$ est convergente.

*. S'il n'y a pas de trou spectral cette partie de l'intégale ne converge que pour $\mathrm{Re}(s) < c < 0$ et on peut la prolonger méromorphiquement en une fonction sur $\mathbb{C}$ régulière en 0, cf. [MP12].

La convergence (pour $\mathrm{Re}(s) > 3/2$) et le prolongement méromorphe de l'intégrale aux petits temps $\int_0^{t_0} \mathrm{Tr}_R(e^{-t\Delta^p[M]})t^s \frac{dt}{t}$ sont des conséquences du lemme 3.7 et de la proposition 3.6 ci-dessus. □

On définit finalement le déterminant régularisé du Laplacien par

$$\text{dét}_R\, \Delta^p[M] := \exp(\zeta_p'(0)) \tag{3.32}$$

et la torsion analytique associée par

$$T_R(M) = \left(\prod_{p=0}^{3} \text{dét}_R(\Delta^p[M])^{(-1)^p p}\right)^{\frac{1}{2}} = (\text{dét}_R(\Delta^0[M])^{-3}\text{dét}_R(\Delta^1[M]))^{\frac{1}{2}}. \tag{3.33}$$

3.5 Les cas déviants

Dans cette section on ne suppose plus (contrairement au reste du chapitre) que Γ ne contient pas d'élément de trace -2 (mais on garde l'hypothèse que $-1_G \notin \Gamma$) et on travaille avec $V = V_{n_1,n_2}$ tel que $n_1 - n_2$ soit impair. On garde les notations du chapitre, et on ordonne les P_j pour que Γ_{P_j} ne contienne pas d'éléments de trace -2 pour $j = 1, \ldots, h_0$ et en contienne pour $j > h_0$.

3.5.1 Opérateurs tronqués

La différence avec les cas traités précédemment vient du fait suivant.

Lemme 3.9. *Soit $f \in \Omega^p(M;V)$; pour $j > h_0$ on a $f_{P_j} = 0$.*

Démonstration. Soit $f \in (L^2(\Gamma\backslash G) \otimes \wedge^p\mathfrak{p}^* \otimes V)^K$ correspondant à f. Comme remarqué dans 0.2.4, $-1_G \in K$ agit trivialement sur $\mathfrak{P}$ et par -1_V sur V et il suit que $f(-1_G g) = -f(g)$. Il existe un $\eta \in \Gamma_{P_j} \cap (-N)$ et on obtient alors

$$\int_{(\Gamma_{P_j}\cap N)\backslash N} f(ng)dn = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_P\backslash(-N\cup N)} f(ng)dn$$

d'où le résultat suit vu que le côté droit est nul. □

En particulier, on a en fait

$$T^Y K^\Gamma_{\phi,p} = K^\Gamma_{\phi,p} - \sum_{j=1}^{h_0} (K^\Gamma_{\phi,p})_{P_j}, \tag{3.34}$$

et une conséquence immédiate de la proposition 3.1 est le corollaire suivant.

Corollaire 3.10. *Si pour tout $j = 1, \ldots, h$ le sous-groupe Γ_{P_j} est sans torsion mais on a $\Gamma_{P_j} \not\subset N_j$ alors pour $p = 0, \ldots, 3$ $\phi(\Delta^p[M])$ est un opérateur à trace et $L^2_{\text{disc}}\Omega^p(M;V) = L^2\Omega^p(M;V)$.*

En général on peut définir la trace régularisée comme ci-dessus et on a une expression spectrale semblable à (3.15), où les opérateurs d'entrelacement ne sont définis que sur $(V_{\mathbb{C}})^{h_0}$ et son analogue en degré 1.

3.5.2 Expression géométrique, torsion analytique

Pour $j = h_0 + 1, \dots, h$ on note Λ'_j le sous-réseau d'indice 2 de Λ_j tel que $\Gamma \cap N_j = \Lambda'_j$ et on pose $\kappa'_j = \kappa_{\Lambda'_j}$. On va établir l'expression géométrique suivante, qui permet d'étendre la preuve de la proposition 3.6 au cas présent.

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}_R \phi(\Delta^p[M]) = \operatorname{Tr}_\Gamma k_\phi &+ \int_D \sum_{\gamma \in \Gamma_{\mathrm{lox}}} \operatorname{tr}(\gamma^* k_\phi(x, \gamma x)) dx \\ &+ 2\pi \sum_{j=1}^{h_0} \frac{1}{p_j} \int_0^{+\infty} r \log(r) h(\ell(r)) dr + \sum_{j=1}^{h_0} \frac{\kappa_j \operatorname{vol} \Lambda_j}{p_j} \int_0^{+\infty} r h(\ell(r)) dr \\ &+ \sum_{j=h_0+1}^{h} \frac{(2\kappa'_j - \kappa_j) \operatorname{vol} \Lambda_j}{p_j} \int_0^{+\infty} r h(\ell(r)) dr \\ &+ \sum_{j=1}^{e} \sum_{l=1}^{q_j - 1} \frac{2(l, q_j)\pi}{w_j q_j} \left(\ell_j \int_0^{+\infty} f\left(r, \frac{2l\pi}{q_j}\right) dr + \varepsilon_j \int_1^{+\infty} \int_{d(y)}^{+\infty} f\left(r, \frac{2l\pi}{q_j}\right) dr \frac{dy}{y} \right).\end{aligned} \tag{3.35}$$

Tous les autres termes ayant été éxaminés dans la preuve de la proposition 3.5 on doit seulement examiner la somme sur les $\Gamma \cap (\pm N_j)$ pour $j > h_0$: on veut montrer que pour $j > h_0$ on a

$$\int_{D^Y} \sum_{\gamma \in \Gamma / \Gamma_{P_j}} \sum_{\eta \in \Gamma \cap \pm N_j} \operatorname{tr}(\gamma \eta \gamma^{-1})^*(x, \gamma \eta \gamma^{-1} x) dx = \frac{(2\kappa'_j - \kappa_j) \operatorname{vol} \Lambda_j}{p_j} \int_0^{+\infty} r h(\ell(r)) dr + o(1).$$

Pour $g \in G$ on a

$$\operatorname{tr}((-g)^* k_\phi(x, (-g)x)) = -\operatorname{tr}(g^* k_\phi(x, gx))$$

vu que -1_G agit par -1 sur $V \otimes \wedge^p \mathfrak{p}^*$. Si $\Lambda \subset N$ est un réseau euclidien, α est un élément non-trivial de $\operatorname{Hom}(\Lambda, \{\pm 1\})$ on pose $\Lambda' = \ker \alpha$ et

$$\Pi = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha(\eta) & \eta \\ & \alpha(\eta) \end{pmatrix}, \eta \in \Lambda \right\}$$

on a ainsi

$$\int_{B^Y_\Lambda} \sum_{\gamma \in \Pi} \operatorname{tr}(\gamma^* k_\phi(x, \gamma x) dx = \int_{B^Y_\Lambda} \left(2 \sum_{\eta' \in \Lambda'} h\left(\ell\left(\frac{|\eta'|}{y_P(x)}\right)\right) - \sum_{\eta \in \Lambda} h\left(\ell\left(\frac{|\eta|}{y_P(x)}\right)\right) \right) dx.$$

D'autre part, les calculs faits dans la preuve de la proposition 3.5 donnent

$$\int_{B^Y_\Lambda} \sum_{\eta \in \Lambda} h\left(\ell\left(\frac{|\eta'|}{y_P(x)}\right)\right) dx = \int_0^{+\infty} 2\pi \log(rY) r h(\ell(r)) dr + \kappa_\Lambda \operatorname{vol} \Lambda \int_0^{+\infty} r h(\ell(r)) dr + o(1);$$

$$\begin{aligned}\int_{B^Y} \sum_{\eta' \in \Lambda'} h\left(\ell\left(\frac{|\eta'|}{y_P(x)}\right)\right) dx &= \frac{1}{2} \int_{B^Y_{\Lambda'}} \sum_{\eta' \in \Lambda'} h\left(\ell\left(\frac{|\eta'|}{y_P(x)}\right)\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{+\infty} 2\pi \log(rY) r h(\ell(r)) dr + \kappa_{\Lambda'} 2 \operatorname{vol} \Lambda \int_0^{+\infty} r h(\ell(r)) dr \right) + o(1).\end{aligned}$$

On a finalement

$$\int_{B^Y_\Lambda} \sum_{\gamma \in \Pi} \operatorname{tr}(\gamma^* k_\phi(x, \gamma x) dx = (2\kappa_{\Lambda'} - \kappa_\Lambda) \operatorname{vol} \Lambda \int_0^{+\infty} r h(\ell(r)) dr$$

et (3.35) suit en appliquant ce développement asymptotique à chacun des Λ_j, avec α_j l'unique morphisme $\Lambda_j \to \{\pm 1\}$ de noyau Λ'_j (de sorte que $\Pi_j)\Gamma \cap \pm N_j$).

On démontre en utilisant (3.35) un développement asymptotique en $t \to 0$ comme dans la proposition 3.6, et on peut alors définir la torsion analytique régularisée comme dans le cas où Γ ne contient pas d'élément de trace -2.

Chapitre 4

Convergence d'espaces localement symétriques et approximation des invariants L^2 analytiques

Dans ce chapitre on étudie les traces régularisées des noyaux automorphes et la torsion analytique régularisée pour des suites de variétés hyperboliques de volume fini. On commence par rappeler les résultats de [ABB$^+$] dans le cas cocompact et pour tout espace localement symétrique (avec des résultats plus rigides en rang supérieur). On définit ensuite les suites d'orbifolds hyperboliques qui nous intéresseront et on prouve la convergence des traces (Théorème 4.11), puis on démontre l'approximation pour la torsion analytique (Théorème 4.14) sous une hypothèse supplémentaire sur les opérateurs d'entrelacement. On compare ensuite, pour usage futur, la torsion analytique régularisée à la torsion analytique absolue des variétés tronquées dans des suites de variétés (Théorème 4.15).

4.1 Le cas compact (d'après [ABB$^+$])

4.1.1 Topologie de Benjamini-Schramm

Dans [BS01] I. Benjamini et O. Schramm étudient la convergence des graphes au sens suivant : une suite X_n de graphes finis d-réguliers est dite BS-convergente si pour tout entier N, tout graphe d-régulier Y et tout sommet $y \in Y$ la probabilité

$$p_n = \frac{|\{x \in X_n,\ B_{X_n}(x, N) \cong B_Y(y, N)\}|}{|X_n|}$$

converge. Si la suite de graphes converge (dans la topologie de Gromov-Hausdorff) vers une graphe X ayant un quotient fini alors elle est BS-convergente et la limite de la suite (p_n) ci-desssus est la probabilité correspondante pour un quotient compact de X. L'exemple le plus simple est donné par une suite de graphes dont le rayon d'injectivité moyen tend vers $+\infty$, la limite de p_n est alors 0 pour touts $N, Y \ni y$ sauf si $B_Y(y, N)$ est isomorphe à une boule de l'arbre d-régulier. En général on peut donner un sens à la limite d'une suite BS-convergente (mais ce n'est bien sûr plus un graphe), et dans ce contexte M. Abert a étendu le théorème de Lück 0.4

Dans [ABB$^+$] les auteurs introduisent une notion semblable pour les variétés riemanniennes, où on remplace l'espace d'échantilonnage des boules dans des graphes par des boules riemanniennes. Pour des suites d'espace localement symétriques on peut montrer que les limites correspondent à des sous-groupes aléatoires invariants de G, cf. l'appendice A ci-dessous ou [ABB$^+$,

Section 3] pour les détails. On ne s'intéressera ici qu'à la situation la plus simple, quand le rayon d'injectivité tend presque partout vers l'infini (analogue à la convergence d'un graphe vers l'arbre d-régulier). Si S est un espace symétrique riemannien non compact et M_n une suite de quotients de S par des réseaux sans torsion on dit que M_n converge au sens de Benjamini-Schramm vers S si on a pour tout $R > 0$ la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{vol}(x \in X_n, \mathrm{inj}_x(M_n) \leq R)}{\mathrm{vol}\, M_n} = 0. \tag{4.1}$$

On abréviera cela en "M_n BS-converge vers S". Le résultat suivant est alors un corollaire de [ABB$^+$, Theorem 1.4].

Théorème 4.1. *Si $m \geq 3$ et $S = \mathrm{SL}_m(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(m)$ alors pour toute suite infinie Γ_n de réseaux de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$ la suite $\Gamma_n\backslash S$ BS-converge vers S.*

En revanche pour $S = \mathbb{H}^m$ (ou plus généralement pour S de rang réel 1) on a des suites qui BS-convergent vers d'autres limites. Il est par exemple facile de voir que si M est de volume fini, $N \to M$ est un revêtement galoisien de groupe de Galois infini et résiduellement fini il existe une suite de revêtements finis de S qui convergent sur tout compact vers N et donc en particulier BS-convergent vers N. Voir A pour des exemples plus exotiques.

4.1.2 Multiplicités limites dans le cas compact

Le théorème suivant et son corollaire sont (strictement) contenus respectivement dans [ABB$^+$, Section 8] et [ABB$^+$, Corollary 1.5, Theorem 1.7]. Si G est un groupe de Lie on dit qu'une suit Γ_n de sous-groupes discrets est uniformément discrète s'il existe un voisinage U de 1_G tel que $g\Gamma_n g^{-1} \cap U = \{1_G\}$ pour tout $n \geq 1, g \in G$ (si les Γ_n sont sans torsion ceci est équivalent au fait que le rayon d'injectivité des variétés riemanniennes $\Gamma_n\backslash S$ soit uniformément minoré).

Théorème 4.2. *Soit $S = \mathbb{H}^m$ (resp. $S = \mathrm{SL}_m(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(m), m \geq 3$) et Γ_n une suite de réseaux cocompacts de $\mathrm{SO}(n,1)$ telle que $M_n = \Gamma_n\backslash\mathbb{H}^m$ BS-converge vers $\mathbb{H}^m$ (resp. une suite uniformément discrète de réseaux cocompacts de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$). Alors pour toute fonction $\phi \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ et $p = 0, \ldots, n$ (resp. $m(m+1)/2 - 1$) on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Tr}\, \phi(\Delta^p[M_n])}{\mathrm{vol}(M_n)} = \mathrm{tr}\, k_{\phi,p}(x_0, x_0)$$

où x_0 est un point arbitraire de X.

Corollaire 4.3. *Soit Γ_n comme dans le théorème précédent et $p \in \{0, \ldots, m\}$, $p \neq m/2$ (resp. $p = 0, \ldots, m(m+1)/2 - 1$). On a la limite :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_p(\Gamma_n)}{\mathrm{vol}\, M_n} = 0.$$

La preuve dans les deux cas est la même et similaire à celle du lemme 4.12 ci-dessous. La formulation plus souple dans le cas où Γ_n est une suite de réseaux de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$ est bien sûr une conséquence du théorème 4.1. La restriction sur le rayon d'injectivité dans ce cas vient du fait qu'on peut, en rang 1, mener une analyse détaillée du noyau de la chaleur dans la partie fine d'un espace localement symétrique compacte qui ne se généralise pas immédiatement au rang supérieur en raison de la plus grande complexité géométrique de cette dernière. Pour plus de détails voir [ABB$^+$, Section 9].

4.1.3 Torsion analytique

Une preuve semblable à celle de [BV, Theorem 4.5] (voir aussi la preuve de la proposition 4.22 ci-dessous) permet de démontrer le résultat suivant [ABB$^+$, Theorem 10.9].

Théorème 4.4. *Soit V une représentation fortement acyclique de G et Γ_n une suite uniformément discrète de réseaux uniformes sans torsion de G telle que $M_n = \Gamma_n \backslash S$ BS-converge vers S. Alors on a la limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log T(M_n; V)}{\operatorname{vol} M_n} = t^{(2)}(V).$$

La condition d'uniforme discrétude n'est pas optimale mais on ne peut pas espérer un résultat aussi clair que dans le cas des nombres de Betti. En effet un théorème de J. Brock et N. Dunfield montre qu'il existe une suite de 3-variétés hyperboliques compactes qui BS-converge vers $\mathbb{H}^3$ mais pour lesquelles la torsion analytique (à coefficients triviaux) est toujours égale à 1. Pour plus de détails on refère le lecteur à [ABB$^+$, Section 10].

4.2 Suites d'orbifolds hyperboliques de volume fini

4.2.1 Suites cusp-uniformes

Soit Γ un réseau de G. Soit P un parabolique et y_P une fonction hauteur en P. Soit $n \geq 1$ tel que P soit Γ_n-rationnel, $\Lambda = \Gamma \cap N$ est alors un réseau euclidien et la quantité $\operatorname{vol}\Lambda/\alpha(\Lambda)$ ne dépend pas du choix de y_P. On peut donc définir une suite (Γ_n) comme étant cusp-uniforme si l'ensemble des réseaux

$$\{\Gamma_n \cap N,\ n \geq 1,\ P \text{ est un parabolique } \Gamma_n\text{-rationnel}\}$$

est uniforme, i.e. il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout n et tout P qui soit Γ-rationnel, $\Lambda = \Gamma_n \cap N$ on a $\operatorname{vol}\Lambda/\alpha(\Lambda) \geq \delta$. Pour un réseau fixé il existe toujours des suites cusp-uniformes de sous-groupes d'indice fini qui BS-convergent vers $\mathbb{H}^3$, comme le montre le résultat plus précis suivant.

Proposition 4.5. *Soit $\Gamma \subset G$ un réseau, il existe une suite cusp-uniforme $\Gamma_n \subset \Gamma$ qui est de plus exhaustive.*

Démonstration. Il est bien connu (cf. [MR03, Corollary 3.2.4]) qu'à conjugaison près on peut supposer que $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(F)$ pour un corps de nombres F. Comme Γ est de type fini il existe en fait un $a \in \mathcal{O}_F$ tel que l'on ait $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F[a^{-1}])$. Si $\mathfrak{I} \subset \mathcal{O}_F$ est un idéal de $\mathcal{O}_F$ qui soit premier avec a on a $\mathcal{O}_F[a^{-1}]/\mathfrak{I}\mathcal{O}_F[a^{-1}] = \mathcal{O}_F/\mathfrak{I}\mathcal{O}_F$ et le sous-groupe

$$\Gamma(\mathfrak{I}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma,\ a, d \in 1 + \mathfrak{I}\mathcal{O}_F[a^{-1}],\ b, c \in \mathfrak{I}\mathcal{O}_F[a^{-1}] \right\}$$

est donc un sous-groupe d'indice fini. La suite des $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ premier avec a est clairement exhaustive et elle est aussi cusp-uniforme. En effet, si P est un prabolique Γ-rationnel on a $\Gamma_P = 1 + \mathbb{Z}X_1 + \mathbb{Z}X_2$ pour des matrices nilpotentes $X_1, X_2 \in M_2(\mathcal{O}_F[a^{-1}])$. Soit $\mathfrak{I}$ l'idéal de $\mathcal{O}_F[a^{-1}]$ engendré par les coefficients de X_1 et X_2 et m l'entier naturel tel que $\mathfrak{I} \cap \mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$. On pose $\Lambda_n = n\Gamma_P$; alors les Λ_n sont une famille uniforme de réseaux dans N et on a $\Lambda_n \subset \Gamma(n)_P \subset m^{-1}\Lambda_n$ d'où il suit que $\{\Gamma(n)_P, n\}$ est lui aussi uniforme. Comme les sous-groupe $\Gamma(n)$ sont distingués dans Γ il suffit de considérer un nombre fini de paraboliques et le résultat suit. $\square$

4.2.2 Conditions de BS-convergence

On rappelle que si Γ est un sous-groupe discret de G, $x \in \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ et $\widetilde{x} \in \mathbb{H}^3$ est un relevé de x on a défini

$$\ell_x(\Gamma) = \inf\{d(\widetilde{x}, \gamma\widetilde{x}),\ \gamma \in \Gamma - \{1_G\}\}.$$

On dit qu'une suite $M_n = \Gamma_n\backslash\mathbb{H}^3$ d'orbifolds de volume fini BS-converge vers $\mathbb{H}^3$ si pour tout $R > 0$ on a la limite

$$\frac{\mathrm{vol}\{x \in M_n, \ell_x(\Gamma_n) \leq R\}}{\mathrm{vol}\, M_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Variétés

Le résultat suivant est une observation basique.

Lemme 4.6. *Soit M_n une suite de 3–variétés hyperboliques de volume fini et h_n le nombre de cusps de M_n. Si M_n BS-converge vers $\mathbb{H}^3$ alors on a $h_n = o(\mathrm{vol}\, M_n)$.*

Démonstration. Soit ε la constante de Margulis pour $\mathbb{H}^3$. Il y a alors h_n composantes non-compactes dans la partie ε-fine de M_n que l'on notera $E_1, \ldots, E_{h_n}$. Il existe une constante absolue $c > 0$ telle que pour chaque j on ait $\mathrm{vol}\, E_j \geq c\varepsilon^2$ et il suit que pour tout $R \geq \varepsilon$ on a

$$\mathrm{vol}\{x \in M_n : \ell_x \leq R\} \geq c' h_n$$

de sorte que (4.1) force $h_n = o(\mathrm{vol}\, M_n)$. □

Un résultat semblable pour le nombre de géodésiques de petite longueur est valable (pour toutes les suites et tous les espaces symétriques de rang 1), cf. [ABB+, Theorem 6.11]. Une preuve plus élémentaire permet de démontrer le critère suivant *.

Lemme 4.7. *Soient $M_n, n \geq 1$ des variétés hyperboliques de volume fini. On suppose que $\mathrm{inj}_x(M_n) \geq \delta > 0$ pour tout n. Pour $R > 0$ on note $\mathcal{G}_n(R)$ le nombre de géodésiques fermées de longueur inférieure à R dans M_n. Si la suite M_n BS-converge vers $\mathbb{H}^3$ alors pour tout $r > 0$ on a $\mathcal{G}_n(r) = o(\mathrm{vol}\, M_n)$.*

Démonstration. On montre plus bas que pour tous $R, \ell > 0$ il existe un entier $A(R, \ell)$ tel que toute boule de rayon R dans une variété hyperbolique contienne au plus $A(R, \ell)$ géodésiques fermées simples de longueur inférieure à ℓ. On en déduit facilement le résultat sous l'hypothèse que pour tout n on ait $\mathrm{inj}(M_n) \geq \delta$: en effet, on peut alors recouvrir la partie r-fine de M_n par $a_n = o(\mathrm{vol}\, M_n)$ boules de rayon $2r$ telle que toute boule de rayon r soit contenue dans l'une d'entre elles. Le nombre de géodésiques de longueur inférieure à r dans M_n est alors majoré par $(r\varepsilon^{-1})A(2r, r)a_n = o(\mathrm{vol}\, M_n)$.

Supposons donc qu'il existe $R > 0$ et une suite $x_n \in M_n$ telle que le nombre de géodésiques fermées simples de longueur $\leq \ell$ contenues dans $B(x_n, R)$ tende vers l'infini. Soit $x_0 \in \mathbb{H}^3$, on choisit des monodromies $\pi_1(M_n) \to \Gamma_n$ de sorte que $x_n = \Gamma_n x_0$. On pose $S_n = \{\gamma \in (\Gamma_n)_{\mathrm{lox}}, d(x_0, \gamma x_0) \leq C_R\ell\}$ où C_R est telle que tout élément loxodromique de longueur de translation ℓ déplace un point à distance $\leq R$ de son axe d'au moins $C_R\ell$, de sorte que l'on ait $|S_n| \to \infty$ quand $n \to \infty$. Comme l'ensemble $S = \{g \in G, d(x, gx) \leq C_R\ell\}$ est compact il existe une suite (γ_m) avec $\gamma_{2n-1}, \gamma_{2n} \in S_n$ d'axes distincts et $\gamma_m \to g \in S$ quand $m \to \infty$. On a alors que $\mathrm{tr}(\gamma_{2n-1}\gamma_{2n}^{-1}), \mathrm{tr}([\gamma_{2n-1}, \gamma_{2n}])$ tendent toutes deux vers 2. D'autre part on a $[\gamma_{2n-1}\gamma_{2n}^{-1}, \gamma_{2n}] = [\gamma_{2n-1}, \gamma_{2n}]$ et il suit que pour m assez grand on a

$$|\,\mathrm{tr}(\gamma_{2n-1}\gamma_{2n}^{-1})^2 - 4| + |\,\mathrm{tr}[\gamma_{2n-1}\gamma_{2n}^{-1}, \gamma_{2n}] - 2| < 1,$$

*. Une analyse plus poussée de la partie fine permettrait sans doute de supprimer l'hypothèse $\mathrm{inj}\, M_n > \delta$.

ce qui contredit l'inégalité de Jørgensen [EGM98, Theorem II.4.1] vu que $\gamma_{2n}, \gamma_{2n-1}$ engendrent un groupe non-élémentaire. □

On a le critère suivant pour la BS-convergence d'une suite de revêtements finis (on rappelle que $\mathcal{N}_{\Gamma_n}(x,r)$ est le nombre d'éléments *loxodromiques* de Γ_n qui déplacent x d'une distance $\leq r$).

Proposition 4.8. *Soit M_n une suite de revêtements finis d'une 3-variété hyperbolique M et h_n le nombre de cusps de M_n. Si M_n est cusp-uniforme les conditions suivantes sont équivalentes.*
(i) La suite M_n BS-converge vers $\mathbb{H}^3$.
(ii) Pour tout $R > 0$ on a $\mathcal{G}_n(R) = o(\operatorname{vol} M_n)$.
(iii) On a la limite

$$\frac{\int_{M_n} \mathcal{N}_{\Gamma_n}(x,r)dx}{\operatorname{vol} M_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{4.2}$$

Démonstration. On a démontré que (i)⇒(ii) dans le lemme 4.7.

On montre ensuite que (ii)⇒(iii) ; supposons que pour un $r > 0$ on ait $\mathcal{G}_n(r) = o(\operatorname{vol} M_n)$, on montre que l'intégrale de $\mathcal{N}_{\Gamma_n}(.,r)$ sur

$$(M_n)_{H,\leq r} = \{x \in M_n, \exists \widetilde{x}, \gamma \in (\Gamma_n)_{\text{lox}} \text{ tel que } d(\widetilde{x}, \gamma\widetilde{x}) \leq r\}$$

tend vers 0 quand $n \to \infty$. Le déplacement des éléments loxodromiques des Γ_n est uniformément minoré et d'après le lemme 0.28 on a donc un $C > 0$ ne dépendant pas de n tel que

$$\int_{(M_n)_{\leq r}} \mathcal{N}_{\Gamma_n}(x,r)dx \leq Ce^{cr} \operatorname{vol}(M_n)_{H,\leq r}$$

et il reste donc à montrer que l'on a $\operatorname{vol}(M_n)_{H,\leq r} = o(\operatorname{vol} M_n)$. Il existe un $R > 0$ ne dépendant que de la systole de M tel que $(M_n)_{H,\leq r}$ soit inclus dans le R-voisinage des géodésiques de longueur $\leq r$ dans M_n, et il suit que $\operatorname{vol}(M_n)_{H,\leq r} \leq \operatorname{vol} B_{\mathbb{H}^3}(R)\mathcal{G}_n(r)$ est un $o(\operatorname{vol} M_n)$.

Pour démontrer (iii)⇒(i) il est suffisant de démontrer que la partie de M_n où un élément unipotent a un déplacement inférieur à r a un volume négligeable. Plus précisément, si l'on pose

$$(M_n)_{U,\leq r} = \{x \in M_n : \exists P, \widetilde{x}, \eta \in (\Gamma_n)_P - \{1_G\} \text{ tel que } d(x, \eta x) \leq r\}$$

on veut montrer que $\operatorname{vol}(M_n)_{U,\leq r} = o(\operatorname{vol} M_n)$. Par le lemme 0.24 il existe un $c > 0$ (dépendant du choix des fonctions hauteur Γ-invariantes) tel que $(M_n)_{U,\leq r}$ soit contenu dans $\bigcup_j \{y_j \leq cr^{-1}\}$. Il suit que l'on a

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(M_n)_{U,\leq r} &\leq \sum_{j=1}^{h_n} \operatorname{vol}\{y_j \geq cr^{-1}\} \\ &\ll \sum_{j=1}^{h_n} \int_{cr^{-1}}^{+\infty} \frac{dy}{y^3} = r^2 h_n\end{aligned}$$

où la constante de la seconde ligne ne dépend que de Γ. Ainsi la BS-convergence de la suite M_n suit du fait que $h_n = o(\operatorname{vol} M_n)$ que l'on va maintenant démontrer. L'idée est que s'il y a beaucoup de cusps, alors on a beaucoup de "petits" éléments unipotents et que les produits de ces derniers donnent beaucoup de "petits" éléments loxodromiques, ce qui contredit l'hypothèse.

Si P est un parabolique Γ-rationnel P on note $h_{n,P}$ le nombre de Γ_n-classes de conjugaison dans la Γ-classe de conjugaison de P. Si on n'a pas $h_n = o(\operatorname{vol} M_n)$ il doit exister un parabolique Γ-rationnel P et un $c > 0$ tels que l'on ait $h_{n,P} \geq c[\Gamma : \Gamma_n]$ pour une infinité de $n \geq 1$; en passant à une sous-suite on peut supposer que c'est le cas pour tout $n \geq 1$. On choisit des représentants

P_j pour les Γ_n-classes de conjugaison dans la Γ-classe de P, on écrit $\Lambda_j = \Gamma_{P_j}$ et $\Lambda_{n,j} = (\Gamma_n)_{P_j}$ et on réordonne les P_j pour que $[\Lambda_j : \Lambda_{n,j}]$ soit croisssante en j. Enfin, pour $j = 1, \dots, h_{n,P}$ on choisit un $\gamma_{n,j} \in \Gamma$ tel que $P_j = \gamma_{n,j} P \gamma_{n,j}^{-1}$.

Pour $C > 0$ on note a_n^C le plus grand indice j tel que l'on ait $[\Lambda_j : \Lambda_{n,j}] \leq C$. Il existe alors un sous-groupe d'indice fini $\Lambda \leq \Gamma_P$ (dépendant de C) tel que pour tous $n \geq 1$ et $j = 1, \dots, a_n^C$ on ait

$$\gamma_{n,j} \Lambda \gamma_{n,j}^{-1} \subset \Lambda_{n,j}.$$

On fixe un Γ-conjugué P' de P différent de P. Pour tout C on a

$$a_n^C + C(h_{n,P} - a_n^C) \leq [\Gamma : \Gamma_n] \leq c^{-1} h_{n,P}$$

et pour $C > 1$ on a donc $a_n^C \geq \frac{C - c^{-1}}{C-1} h_{n,P}$. On peut donc choisir un C assez grand pour que l'on ait $a_n^C > 2h_{n,P}/3$ pour tout n.

L'ensemble des conjugués de P' par les $\gamma_{n,j}, j = 1, \dots, a_n^C$ et l'ensemble des conjugués de P' qui sont égaux à l'un des $\gamma_{n,j} P \gamma_{n,j}^{-1}$ pour $j \in \{1, \dots, a_n^C\}$ sont tous deux des sous-ensembles de cardinal $a_n^C \geq 2/3 h_{n,P}$ de l'ensemble de tous les Γ_n-conjugués de P' qui est lui de cardinal $h_{n,P}$. Il suit que leur intersection

$$J_n = \{j = 1, \dots, a_n^C,\ \exists j' \in \{1, \dots, a_n^C\}, \gamma_{n,j} P' \gamma_{n,j}^{-1} \text{ est } \Gamma_n\text{-conjugué à } P_{j'}\}$$

est de cardinal au moins égal à $h_{n,P}/3 \geq (c/3)[\Gamma : \Gamma_n]$. Soit $\Lambda' \subset \Gamma_{P'}$ le conjugué de Λ, pour $j \in J_n$ on a alors l'inclusion $\gamma_{n,j} \Lambda' \gamma_{n,j}^{-1} \subset \Gamma_n$. On choisit un $\eta \in \Lambda$ non-trivial, il existe alors un $\eta' \in \Lambda'$ tel que $\gamma_0 = \eta\eta'$ soit loxodromique. Pour tous n et $j \in J_n$ on a alors $\gamma_{n,j} \gamma_0 \gamma_{n,j}^{-1} \in \Gamma_n$. Soit Γ_{γ_0} le centraliseur de γ_0 dans Γ, on sait que $\gamma_0 = \gamma_1^k$ pour un élément primitif $\gamma_1 \in \Gamma$ et un entier $k \geq 1$ et qu'alors Γ_{γ_0} est le sous-groupe cyclique de Γ engendré par γ_1. Pour des entiers $n \geq 1$, $j \in J_n$ et $m \in \mathbb{Z}$ on écrit $m = lk + r$ avec $r \in \{0, \dots, k-1\}$; on a alors :

$$\gamma_1^m \gamma_{n,j} \Gamma_n = \gamma_{n,j} \gamma_1^r \gamma_{n,j}^{-1} \gamma_{n,j} \gamma_1^{lk} \gamma_{n,j}^{-1} \Gamma_n = \gamma_{n,j} \gamma_1^r \gamma_{n,j}^{-1} \gamma_{n,j} \gamma_0^l \gamma_{n,j}^{-1} \Gamma_n = \gamma_1^r \gamma_{n,j} \Gamma_n.$$

Il suit que

$$\Gamma_{\gamma_0} \gamma_{n,j} \Gamma_n = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \gamma_1^m \gamma_{n,j} \Gamma_n = \bigcup_{r=0}^{k-1} \gamma_1^r \gamma_{n,j} \Gamma_n$$

contient k ou moins Γ_n-classes à gauche. Les classes à droite $\gamma_{n,j} \Gamma_n$ sont deux à deux différentes et il suit qu'il existe au moins $m = \lfloor \frac{|J_n|}{k} \rfloor$ doubles classes distinctes $\Gamma_{\gamma_0} \gamma_{n,j} \Gamma_n$ avec $j \in J_n$. Soient $\gamma_{n,j_1}, \dots, \gamma_{n,j_m}$ des représentants de ces classes, alors les éléments loxodromiques $\gamma_{n,j_l} \gamma_0 \gamma_{n,j_l}^{-1} \in \Gamma_n$ ne sont pas Γ_n-conjugués. Il suit que la géodésique fermée de M qui correspond à γ_0 a au moins m relevés distincts dans M_n qui ont la même longueur qu'elle. Comme on a vu plus haut que $m/\operatorname{vol} M_n \gg |J_n|/\operatorname{vol} M_n$ ne tend pas vers 0 ceci contredit le fait que $\mathcal{G}_n(R) = o(\operatorname{vol} M_n)$ pour $R \geq \ell(\gamma_0)$. □

Orbifolds

Soit Γ_n une suite de réseaux de G, $M_n = \Gamma_n \backslash \mathbb{H}^3$. On note e_n^{nc} le nombre de classes de conjugaison elliptiques non-cuspidales de Γ_n. On ordonne les classes de conjugaison elliptiques pour que $1, \dots, e_n^{\mathrm{nc}}$ soient les classes non-cuspidales.

Lemme 4.9. *Si la suite M_n BS-converge vers $\mathbb{H}^3$ alors on a $h_n, e_n - e_n^{\mathrm{nc}} = o(\operatorname{vol} M_n)$.*

Démonstration. Le stabilisateur d'un cusp contient au plus deux classes de conjugaison de sous-groupes cycliques maximaux (ce qui suit de la classification des réseaux d'isométries du plan euclidien) et ces groupes contiennent chacun au plus une rotation fixant le cusp, cette dernière ayant un angle multiple de $\pi/12$; on a donc $e_n - e_n^{\mathrm{nc}} \leq 12h_n$. Pour démontrer que $h_n = o(\mathrm{vol}\, M_n)$ on peut soit adapter la preuve du lemme 4.6 (en tenant compte du fait que l'ordre des éléments elliptiques cuspidaux est uniformémement borné) ou utiliser le lemme de Selberg et le résultat pour une suite de variétés. □

Proposition 4.10. *Soit Γ un réseau de G, Γ_n une suite de sous-groupes d'indice fini. Soient $\ell_1, \ldots, \ell_{e_n^{\mathrm{nc}}}$ les longueurs des géodésiques et des segments géodésiques du lieu singulier non-cuspidal de M_n. Si la suite Γ_n est cusp-uniforme alors $M_n = \Gamma_n \backslash \mathbb{H}^3$ BS-converge vers $\mathbb{H}^3$ si et seulement si l'on a*

$$\forall r > 0,\ \frac{\int_{M_n} \mathcal{N}_{\Gamma_n}(x,r)dx}{\mathrm{vol}\, M_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{4.3}$$

et

$$\sum_{j=1}^{e_n^{\mathrm{nc}}} \ell_j = o(\mathrm{vol}\, M_n). \tag{4.4}$$

Démonstration. Soit Γ' un sous-groupe sans torsion, d'indice fini C dans Γ. Pour tout n le sous-groupe $\Gamma'_n = \Gamma' \cap \Gamma_n$ est alors d'indice $\leq C$ dans Γ_n. On suppose que M_n BS-converge vers $\mathbb{H}^3$, la suite $M'_n = \Gamma'_n \backslash \mathbb{H}^3$ est alors elle aussi BS-convergente vers $\mathbb{H}^3$. D'autre part, pour tout $x \in M'_n$ on a trivialement

$$\mathcal{N}_{\Gamma_n}(x,r) \leq \mathcal{N}_{\Gamma'_n}(Cr)$$

et il suit que l'on a

$$\int_{M_n} \mathcal{N}_{\Gamma_n}(x,r)dx \leq \int_{M'_n} \mathcal{N}_{\Gamma_n}(x,r)dx \leq \int_{M'_n} \mathcal{N}_{\Gamma'_n}(x,Cr)dx$$

et le côté droit est un $o(\mathrm{vol}\, M_n)$ d'après la proposition 4.8, ce qui finit de montrer que (4.3) est vérifié par la suite M_n. On va maintenant vérifier (4.4) : il existe un $\varepsilon > 0$ (dépendant de M) tel que pour un x appartenant à l'axe d'un élément elliptique non-cuspidal dans Γ_n l'application

$$\mathrm{Stab}_{\Gamma_n}(x) \backslash B^3_{\mathbb{H}}(x,\varepsilon) \to M_n$$

soit injective. Quitte à diminuer ε on peut supposer que pour tout $x \in \mathbb{H}^3$ et pour tous $y \in B^3_{\mathbb{H}}(x,\varepsilon)$ et $\gamma \in \mathrm{Stab}_\Gamma x$ on ait $d(y,\gamma y) \leq r$. Il suit que

$$\mathrm{vol}(M_n)_{\leq r} \geq (\max_{x\in\mathbb{H}^3} |\mathrm{Stab}_\Gamma(x)|)^{-1}\, \mathrm{vol}\, V_\varepsilon$$

où V_ε est un ε-voisinage du lieu singulier non-cuspidal de M_n. On a alors $\mathrm{vol}\, V_\varepsilon \geq c \sum_{j=1}^{e_n^{\mathrm{nc}}} \ell_j$ (où c dépend de ε) et il suit que $\sum_{j=1}^{e_n^{\mathrm{nc}}} \ell_j = o(\mathrm{vol}\, M_n)$.

On suppose maintenant que M_n vérifie (4.3) et (4.4) ; il suit immédiatement que M'_n vérifie aussi (4.3). Soit h_n, h'_n les nombres de cusps respectifs de M_n, M'_n ; d'après la proposition 4.8 on a $h'_n = o(\mathrm{vol}\, M'_n)$, ce qui implique clairement $h_n = o(\mathrm{vol}\, M_n)$ et donc que $\mathrm{vol}(M_n)_{u,\leq r} = o(\mathrm{vol}\, M_n)$. Le lieu où les classes non-cuspidales déplacent de moins que r est un d-voisinage tubulaire des géodésiques singulières fermées (où d ne dépend que de r) et son volume est donc $\ll \sum_{j=1}^{e_n^{\mathrm{nc}}} \ell_j$ qui est un $o(\mathrm{vol}\, M_n)$ par hypothèse.

Il reste à montrer que le lieu où les classes cuspidales déplacent de $\leq r$ est de volume $o(\operatorname{vol} M_n)$. Si $\gamma \in \Gamma_n$ est une classe cuspidale elliptique on note

$$L_n(\gamma, r) = \{x \in M_n, d(x, \gamma x) \leq r\},\ M_n(\gamma, r)^1 = L_n(\gamma, r) \cap M_n^1,$$
$$E_n(\gamma, r)^1 = L_n(\gamma, r) \cap (M_n - M_n^1).$$

Tout d'abord le volume de $M_n(\gamma, r)^1$ est borné indépendamment de n : en effet, $M_n(\gamma, r)^1$ est un d-voisinage du relevé à M_n de l'intersection de l'un des arcs singuliers de M avec M^1. Soient maintenant y_j, y_k sont es fonctions hauteur Γ-invariantes en les cusps où finit le lieu singulier de l'arc associé à γ et $\Lambda_{n,j}$ (resp. Λ_j) le réseau de $\{y_j = 1\}$ correspondant au cusp de M_n (resp M). Le volume de $\{y_j \geq [\Lambda_j : \Lambda_{n,j}]\}$ est borné indépendamment de n. D'autre part, si v_d est l'aire d'un disque de rayon e^d dans le plan euclidien on a

$$\begin{aligned}\operatorname{vol} E_n(\gamma, r)^1 &= \operatorname{vol}(E_n(\gamma, r)^1 \cap \{y_j \geq [\Lambda_j : \Lambda_{n,j}]\} + \operatorname{vol}(E_n(\gamma, r)^1 \cap \{1 \leq y_j \leq [\Lambda_j : \Lambda_{n,j}]\}) \\ &\leq \operatorname{vol}\{y_j \geq [\Lambda_j : \Lambda_{n,j}]\} + v_d \log[\Lambda_j : \Lambda_{n,j}]\end{aligned}$$

et on a donc

$$\operatorname{vol} E_n(\gamma, r)^1 \ll h_n + \sum_{j=1}^{h_n} \log[\Lambda_j : \Lambda_{n,j}].$$

On a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{j=1}^{h_n} \log[\Lambda_j : \Lambda_{n,j}] \leq \left(\sum_{j=1}^{h_n} [\Lambda_j : \Lambda_{j,n}]\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{h_n} \frac{(\log[\Lambda_j : \Lambda_{n,j}])^2}{[\Lambda_j : \Lambda_{j,n}]}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $\sum_{j=1}^{h_n} [\Lambda_j : \Lambda_{n,j}] = h_1[\Gamma : \Gamma_n]$ et $(\log[\Lambda_j : \Lambda_{n,j}])^2/[\Lambda_j : \Lambda_{n,j}]$ est borné indépendamment de n, j il vient donc

$$\sum_{j=1}^{h_n} \log[\Lambda_j : \Lambda_{n,j}] \ll (h_n[\Gamma : \Gamma_n])^{\frac{1}{2}}$$

et le côté droit est un $o(\operatorname{vol} M_n)$ par le lemme 4.9. Il suit finalement que M_n est bien BS-convergente vers $\mathbb{H}^3$. □

4.2.3 Convergence des traces

Soient $\phi \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ et D un domaine fondamental pour l'action de Γ sur $\mathbb{H}^3$; la trace normalisée de k_ϕ relativement à Γ est définie comme suit :

$$\operatorname{Tr}_\Gamma k_\phi = \int_D \operatorname{tr} k_\phi(x, x) dx. \tag{4.5}$$

Comme k_ϕ est G-invariant (cf. (15)) on a l'égalité $\operatorname{Tr}_\Gamma k_{\phi,p} = \operatorname{vol}(D) \operatorname{tr} k_{\phi,p}(x_0, x_0)$ pour tout $x_0 \in \mathbb{H}^3$.

Théorème 4.11. *Soit Γ un réseau de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et Γ_n une suite cusp-uniforme de sous-groupes d'indice fini tels que $M_n = \Gamma_n \backslash \mathbb{H}^3$ BS-converge vers $\mathbb{H}^3$. On a alors la limite suivante :*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\operatorname{Tr}_R K_\phi^{\Gamma_n}}{[\Gamma : \Gamma_n]} = \operatorname{Tr}_\Gamma k_\phi \tag{4.6}$$

Démonstration. Soit D_n un domaine fondamental dans $\mathbb{H}^3$ pour Γ_n et h_n le nombre de cusps de M_n. On choisit des représentants $P_1, \dots, P_{h_n}$ pour les Γ_n-classes de conjugaison des paraboliques Γ-rationnels et on note $\Lambda_{n,j}$ le réseau euclidien $(\Gamma_n)_{P_j}$ de N_j (où l'on rappelle que l'on a ientifié le radical unipotent N_j de P_j avec l'horosphère $\{y_{P_j} = 1\}$. On va utiliser l'expression géométrique de la proposition 3.5 pour démontrer le résultat.

On rappelle que $d = \dim V$, pour $p = 0, 1, 2, 3$ on a $3d \geq \dim(V \otimes \wedge^p \mathfrak{p})$ de sorte que l'on a

$$\mathrm{tr}(\gamma^* k_\phi(x, \gamma x)) \leq 3d|\rho(\gamma^{-1})|_V |k_\phi(x, \gamma x)|.$$

Pour $x = gK, y = hK \in \mathbb{H}^3$ on pose $H(d(x, y)) = 3d|\rho(g^{-1}h)|\,|k_\phi(x, y)|$, on a alors $H(r) \ll e^{-Ar}$ pour tout $A > 0$ quand $r \to \infty$. On pose :

$$\begin{aligned}
U_n &= \sum_{j=1}^{h_n} \frac{\kappa_{j,n} \operatorname{vol} \Lambda_{n,j}}{p_j} \int_0^{+\infty} r h(\ell(r)) dr, \\
H_n &= \int_{D_n} \sum_{\gamma \in \Gamma_{\mathrm{lox}}} H(d(x, \gamma x)) dx, \\
E_n &= \sum_{j=1}^{e_n} \sum_{l=1}^{q_j - 1} \frac{2(l, q_j)\pi}{w_j q_j} \left(\ell_j \int_0^{+\infty} f\left(r, \frac{2l\pi}{q_j}\right) dr + \varepsilon_j \int_1^{+\infty} \int_{d(y)}^{+\infty} f\left(r, \frac{2l\pi}{q_j}\right) dr \frac{dy}{y} \right),
\end{aligned}$$

de sorte que par la proposition 3.5 on ait

$$\mathrm{Tr}_R\, \phi(\Delta^p[M_n]) = \mathrm{Tr}_\Gamma\, \phi(\Delta^p[\mathbb{H}^3]) + H_n + E_n + U_n + 2\pi \sum_{j=1}^{h_n} \frac{1}{p_j} \int_0^{+\infty} r \log r\, h(\ell(r)) dr. \tag{4.7}$$

On estime en premier lieu la série sur les éléments loxodromiques :

Lemme 4.12. *Si M_n BS-converge vers $\mathbb{H}^3$ on a $H_n = o(\operatorname{vol} M_n)$.*

Démonstration. La preuve est la même que dans [ABB+]. On a

$$\int_{D_n} H(d(x, \gamma x)) dx = \int_{D_n} \int_0^{+\infty} \frac{dH}{dr} \mathcal{N}_{\Gamma_n}(x, r) dr dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{dH}{dr} \int_{D_n} \mathcal{N}_{\Gamma_n}(x, r) dx\, dr$$

et par le lemme 0.27 on a $\mathcal{N}_{\Gamma_n}(x, r) \leq C e^{cr}$ pour des C, c ne dépendant que de Γ. Le résultat suit alors de (4.2) et du théorème de convergence dominée. □

On a

$$\begin{aligned}
E_n &= \sum_{j=1}^{e_n^{\mathrm{nc}}} \sum_{l=1}^{q_j - 1} \frac{2(l, q_j)\pi}{w_j q_j} \ell_j \int_0^{+\infty} f\left(r, \frac{2l\pi}{q_j}\right) dr \\
&\quad + \sum_{j=e_n^{\mathrm{nc}}+1}^{e_n} \sum_{l=1}^{q_j - 1} \frac{2(l, q_j)\pi}{w_j q_j} \left(\ell_j \int_0^{+\infty} f\left(r, \frac{2l\pi}{q_j}\right) dr + \int_1^{+\infty} \int_{d(y)}^{+\infty} f\left(r, \frac{2l\pi}{q_j}\right) dr \frac{dy}{y} \right) \\
&\ll \sum_{j=1}^{e_n^{\mathrm{nc}}} \ell_j + (e_n - e_n^{\mathrm{nc}})
\end{aligned}$$

vu que les ℓ_j pour $j > e_n^{\mathrm{nc}}$ sont bornées indépendamment de n (en effet ce sont les longueurs de segments qui se relèvent de M à M_n). Le côté droit de la dernière ligne est un $o(\operatorname{vol} M_n)$ d'après le lemme 4.9 et la proposition 4.10, d'où il suit finalement que $E_n = o(\operatorname{vol} M_n)$.

Le terme $2\pi\sum_{j=1}^{h_n}(p_j)^{-1}\int_0^{+\infty} r\log(r)h(\ell(r))dr$ dans (4.7) est $\ll h_n$ et donc un $o(\operatorname{vol} M_n)$ d'après le lemme 4.6. Il reste donc à montrer que le terme U_n de (4.7) est lui aussi un $o(\operatorname{vol} M_n)$. On pose $\alpha_n^j = \alpha(\Lambda_{n,j})$; on rappelle que :

$$\kappa_{j,n} = \int_{\alpha_n^j}^{+\infty} E_{\Lambda_{n,j}}(\rho)\frac{d\rho}{\rho^3} - \frac{\pi(1-2\log\alpha_n^j)}{\operatorname{vol}\Lambda_{n,j}}.$$

Comme les $\Lambda_{n,j}$ sont une famille uniforme de réseaux euclidiens on obtient par le lemme 0.26 l'estimée suivante :

$$\begin{aligned}\kappa_{j,n} &\ll \frac{1}{\alpha_n^j}\int_{\alpha_n^j}^{+\infty}\frac{d\rho}{\rho^2} + \frac{\log\alpha_n^j}{\operatorname{vol}\Lambda_{n,j}} \ll (\alpha_n^j)^{-2} + \frac{\log\alpha_n^j}{\operatorname{vol}\Lambda_{n,j}}\\ &\ll \frac{\log\alpha_n^j}{\operatorname{vol}\Lambda_{n,j}}.\end{aligned}$$

où la constante ne dépend pas de n ou j. Le fait suivant va nous permettre de conclure.

Lemme 4.13. *Sous les hypothèses du théorème on a* $\sum_{j=1}^{h_n}\alpha_n^j = o(\operatorname{vol} M_n)$.

Démonstration. On montre que pour tout $C>0$ on a

$$\limsup_n \frac{\sum_{j=1}^{h_n}\alpha_n^j}{\operatorname{vol} M_n} \le C^{-1}. \tag{4.8}$$

On ordonne les P_j de sorte que α_n^j soit croissante en j et on note h_n^C le plus grand indice tel que $\alpha_n^j < C$ pour tout $j \le h_n^C$. Il vient :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{h_n}\alpha_n^j &\ll Ch_n^C + \sum_{j=h_n^C+1}^{h_n}(\alpha_n^j)^{-1}[\Lambda_j:\Lambda_{n,j}] \ll Ch_n + (\alpha_n^{h_n^C+1})^{-1}\sum_{j=h_n^C+1}^{h_n}[\Lambda_j:\Lambda_{n,j}]\\ &\le Ch_n + C^{-1}h_1[\Gamma:\Gamma_n]\end{aligned}$$

où h_1 est le nombre de cusps de M. La conclusion (4.8) suit immédiatement au vu du lemme 4.6. □

On a donc

$$U_n \ll \sum_{j=1}^{h_n}\operatorname{vol}\Lambda_{n,j}\kappa_{n,j} \ll \sum_{j=1}^{h_n}\log\alpha_n^j \ll \sum_{j=1}^{h_n}\alpha_n^j$$

et le terme à droite est négligeable par le lemme 4.13 ci-dessus. □

4.3 Approximation pour la torsion analytique

A partir de maintenant on fixe une représentation fortement acyclique ρ, V de G et toutes les formes sont à coefficients dans le fibré plat E_ρ.

Théorème 4.14. *Soit Γ_n une suite cusp-uniforme de sous-groupes d'indice fini, sans torsion dans un réseau $\Gamma\subset G$ telle que la suite $M_n := \Gamma_n\backslash\mathbb{H}^3$ BS-converge vers $\mathbb{H}^3$. On suppose de plus qu'il existe un $\varepsilon>0$ et une suite $a_n = o(\operatorname{vol} M_n)$ telles que pour tout n et tous $u\in[-\varepsilon,\varepsilon]$, l on ait*

$$\operatorname{tr}\left(\Psi_l(iu)^{-1}\frac{d\Psi_l(iu)}{du}\right) \le a_n,\ \operatorname{tr}\left(\Phi_l(iu)^{-1}\frac{d\Phi_l(iu)}{du}\right) \le a_n.$$

On a alors

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_R(M_n;V)}{\operatorname{vol} M_n} = t^{(2)}(V). \tag{4.9}$$

où $t^{(2)}(V)$ est défini par (4.11) ci-dessous.

4.3.1 Torsion L^2

Le candidat naturel à être approximé par les torsions analytiques "finies" est la torsion L^2 analytique, cf. [Lüc02, Question 13.73]. On la définit en utilisant la même formule que pour la torsion analytique sur une variété compacte :

$$\begin{aligned}\log T^{(2)}(M;V) = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{3} p(-1)^p \Bigg(\frac{d}{ds}\Bigg(\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{t_0} \mathrm{Tr}_\Gamma(e^{-t\Delta^p[\mathbb{H}^3]})t^{s-1}dt\Bigg)_{s=0} \\ + \int_{t_0}^{+\infty} \mathrm{Tr}_\Gamma(e^{-t\Delta^p[\mathbb{H}^3]})\frac{dt}{t}\Bigg).\end{aligned} \tag{4.10}$$

La première intégrale converge pour $\mathrm{Re}(s) > 3/2$ et se prolonge méromorphiquement en une fonction régulière en 0 d'après le développement asymptotique (3.23) et le lemme 3.7. La convergence de l'intégrale aux grands temps suit ici du fait que le Laplacien sur $\mathbb{H}^3$ a un trou spectral †.

Par ailleurs il est évident que $\log T^{(2)}$ est un multiple de $\mathrm{vol}\, D$ par une constante ne dépendant que de V ; on pose donc

$$t^{(2)}(V) = \frac{\log T^{(2)}(M;V)}{\mathrm{vol}\, M}. \tag{4.11}$$

Les constantes $t^{(2)}(V)$ ont été calculées pour tous les les espaces localement symétriques dans [BV, Section 5] ; dans le cas de l'espace hyperbolique ils montrent que [BV, Section 5.9.3, Example 3] :

$$t^{(2)}(V_{n_1,n_2}) = \frac{-1}{48\pi}((n_1+n_2+2)^3 - |n_1-n_2|^3 + 3|n_1-n_2|(n_1+n_2+2)(n_1+n_2+2-|n_1-n_2|)). \tag{4.12}$$

4.3.2 Plan de la preuve

Il est naturel d'étudier séparément les grands et petits temps. On va prouver ci-dessous que pour tout $t_0 > 0$ on a la limite :

$$\frac{1}{\mathrm{vol}\, M_n}\frac{d}{ds}\left(\int_0^{t_0}(\mathrm{Tr}_R(e^{-t\Delta^p[M_n]}) - \mathrm{Tr}_{\Gamma_n}(e^{-t\Delta^p[\mathbb{H}^3}))t^s\frac{dt}{t}\right)_{s=0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{4.13}$$

La preuve de ceci est essentiellement une combinaison de celles des propositions 3.6 et 4.11.

Une fois cette étape menée à bien on s'occupe de quantifier la convergence de l'intégrale aux grands temps lorsque n tend vers l'infini. Plus précisément on a besoin des limites suivantes, que l'on prouve dans 4.3.3 ci-dessous.

$$\lim_{t_0\to+\infty}\left(\limsup_{n\to\infty}\int_{t_0}^{+\infty}\frac{\mathrm{Tr}_R(e^{-t\Delta^p[M_n]})}{\mathrm{vol}\, M_n}\frac{dt}{t}\right) = 0, \tag{4.14}$$

$$\lim_{t_0\to\infty}\left(\int_{t_0}^{+\infty}\mathrm{Tr}_\Gamma(e^{-t\Delta^p[\mathbb{H}^3]})\frac{dt}{t}\right) = 0. \tag{4.15}$$

La preuve du théorème 4.14 est facile une fois ces résultats connus : la limite (4.13) donne que pour tout $t_0 > 0$ on a

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\log T_R(M_n;V) - \log T^{(2)}(M_n;V)}{\mathrm{vol}\, M_n} \le \limsup_{n\to\infty}\left(\int_{t_0}^{+\infty}\frac{\mathrm{Tr}_R(e^{-t\Delta^p[M_n]})}{\mathrm{vol}\, M_n}\frac{dt}{t}\right) + \int_{t_0}^{+\infty}\mathrm{Tr}_\Gamma(e^{-t\Delta^p[\mathbb{H}^3]})\frac{dt}{t}$$

et par (4.14),(4.15) le côté droit tend vers 0 quand $t_0 \to +\infty$ d'où il suit que la limite supérieure de gauche doit être nulle.

†. En général (par exemple pour des coefficients triviaux) il faut analyser la distribution du spectre du laplacien près de 0, cf. [Lüc02, Chapter 2].

4.3.3 Trou spectral et grands temps

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \mathrm{Tr}_\Gamma\, e^{-t\Delta^p[\mathbb{H}^3]}dt/t$ est absolument convergente et de ceci suit immédiatement (4.15). La preuve de (4.14) utilise le fait que le trou spectral pour les $\Delta^p[M_n]$ est uniforme. Par la proposition 0.23 la borne inférieure $\lambda_0 > 0$ pour le spectre des $\Delta^p[M_n]$ est strictement positive. Soit $u \in [\varepsilon, +\infty)$, les relations de Maass-Selberg (3.5) pour $Y = 1$ donnent pour $v \in V^h_{\mathbb{C}}$

$$-\langle \Psi(iu)^{-1}\frac{d\Psi(iu)}{du}.v, v\rangle_{V^h_{\mathbb{C}}} = |T^1E(iu,v)|^2_{L^2(M_n;V_{\mathbb{C}})} + \frac{1}{iu}(\langle \Psi(iu).v,v\rangle_{V^h_{\mathbb{C}}} - \langle \Psi(-iu).v,v\rangle_{V^h_{\mathbb{C}}}).$$

Comme $\Psi(iu)$ est unitaire le côté droit est minoré par $-2\varepsilon^{-1}$ et il suit que $2\varepsilon^{-1}1_{V^h_{\mathbb{C}}} - \Psi(iu)^{-1}\frac{d\Psi(iu)}{du}$ est un opérateur positif pour $|u| \geq \varepsilon$. En utilisant ceci, le fait que

$$\mathrm{tr}\left(\frac{a_n}{h_n \dim V}1_{V^{h_n}_{\mathbb{C}}} - \Psi_l(iu)^{-1}\frac{d\Psi_l(iu)}{du}\right) \geq 0$$

et l'égalité $e^{-\lambda t} = e^{-\lambda}e^{-\lambda(t-1)}$ pour $t \geq 1$, il vient alors :

$$\begin{aligned}
|\,\mathrm{Tr}_R(e^{-t\Delta^0[M_n]})| &\leq e^{\lambda_0(t-1)}\,\mathrm{Tr}\, e^{-t\Delta^0_{\mathrm{disc}}[M_n]} + e^{-\lambda_V(t-1)}\left|\frac{1}{4}\sum_{l=-2q}^{2q} e^{-(\lambda_V+(1-\frac{|l|}{2}))}\,\mathrm{tr}\,\Psi_l(0)\right| \\
&\quad + e^{-\lambda_V(t-1)}\left|\sum_l \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u^2+(1-|l|/2)^2)}\,\mathrm{tr}\,\Psi_l(iu)^{-1}\frac{d\Psi_l(iu)}{du}du\right| + e^{-t\lambda_V}O(a_n+h_n) \\
&\leq e^{-\lambda_0(t-1)}\,\mathrm{Tr}_R(e^{-\Delta^p[Mn]}) + e^{-t\lambda_V}o(\mathrm{vol}\,M_n)
\end{aligned}$$

d'où il suit que :

$$\sup_n\left(\frac{1}{\mathrm{vol}\,M_n}\int_{t_0}^{+\infty}\mathrm{Tr}_R(e^{-t\Delta^p[M_n]})\frac{dt}{t}\right) \leq \int_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda_0(t-1)}\frac{dt}{t}\sup_n \mathrm{Tr}_R(e^{-\Delta^p[M_n]}) + Ce^{-\lambda_V t_0}.$$

Par le théorème 4.11 la suite $\mathrm{Tr}_R(e^{-\Delta^p[M_n]})$ est bornée, et le côté droit est donc borné et tend vers 0 quand $t_0 \to \infty$.

4.3.4 Petits temps

On va analyser chacun des termes apparaissant dans (3.22). On garde les notations $\Lambda_{j,n}, \alpha^j_n$ et $\kappa_{j,n}$ introduites dans la preuve de la proposition 4.11. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_R\, e^{-t\Delta^p[M_n]} - \mathrm{Tr}_\Gamma\, e^{-t\Delta^p[\mathbb{H}^3]} &= \int_{M_n}\sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathrm{lox}}}\mathrm{tr}\,\gamma^* e^{-t\Delta^p[\mathbb{H}^3]}(x,\gamma x)dx \\
&\quad + 2\pi h_n\int_0^{+\infty} r\log(r)h^p_t(\ell(r))dr + \sum_{j=1}^{h_n}\kappa_{n,j}\,\mathrm{vol}\,\Lambda_{n,j}\int_0^{+\infty} rh^p_t(\ell(r))dr \\
&\quad + \sum_{j=1}^{e_n}\sum_{l=1}^{q_j^{-}1}\frac{2\pi(l,q_j)}{w_jq_j}\ell_j(I^p_t(\frac{2\pi l}{q_j}) + \varepsilon_j J^p_t(\frac{2\pi l}{q_j})) \\
&=: T_1 + T_2 + T_3.
\end{aligned}$$

Par l'estimée (23) on obtient que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left(\int_0^{t_0} T_1 t^s\frac{dt}{t}\right)_{s=0} &\ll \int_0^{t_0}\int_{M_n}\sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathrm{lox}}} e^{-\frac{d(x,\gamma x)^2}{C_2 t}}dx t^{-\frac{5}{2}}\frac{dt}{t} \\
&= \int_{M_n}\sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathrm{lox}}}\left(\int_0^{t_0} e^{-\frac{d(x,\gamma x)^2}{C_2 t}}t^{-\frac{5}{2}}\frac{dt}{t}\right)dx
\end{aligned}$$

et le côté droit est un $o(\operatorname{vol} M_n)$ d'après le lemme 4.12.

On s'occupe maintenant de T_2 ; on pose

$$\begin{aligned}\Xi(s) &= \int_0^{t_0}\int_0^{+\infty} r\log(r)h_t^p(\ell(r))drt^s\frac{dt}{t},\\ \Theta(s) &= \int_0^{t_0}\int_0^{+\infty} rh_t^p(\ell(r))drt^s\frac{dt}{t},\end{aligned} \tag{4.16}$$

fonctions de s qui ne dépendent que de V. Il suit de (3.28) et du lemme 3.7 que Ξ, Θ se prolongent méromorphiquement à $\mathbb{C}$ et sont holomorphes en 0. On peut ainsi écrire :

$$\frac{d}{ds}\left(\int_0^{t_0} T_2 t^s\frac{dt}{t}\right)_{s=0} = 2\pi h_n\frac{d\Xi}{ds}(0) + \sum_{j=1}^{h_n}\kappa_{n,j}\operatorname{vol}\Lambda_{n,j}\frac{d\Theta}{ds}(0).$$

Par ailleurs on a vu dans la preuve du théorème 4.11 que pour une suite Γ_n vérifiant les hypothèses du théorème on a $\sum_{j=1}^{h_n}\kappa_{j,n}\operatorname{vol}\Lambda_{j,n} = o(\operatorname{vol} M_n)$. On a donc finalement :

$$\frac{d}{ds}\left(\int_0^{t_0} T_2 t^s\frac{dt}{t}\right)_{s=0} \ll h_n + \sum_{j=1}^{h_n}\kappa_{j,n}\operatorname{vol}\Lambda_{j,n} = o(\operatorname{vol} M_n).$$

On pose

$$\Upsilon_\theta(s) = \int_0^{t_0} I_t^p(\theta)t^s\frac{dt}{t}, \Omega_\theta(s) = \int_0^{t_0} J_t^p(\theta)t^s\frac{dt}{t}. \tag{4.17}$$

D'après le lemme 3.7 et (3.30) ci-dessus ceci définit une fonction holomorphe sur le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > 3/2$, qui se prolonge méromorphiquement en une fonction holomorphe en 0. On obtient alors :

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left(\int_0^{t_0} T_3 t^s\frac{dt}{t}\right)_{s=0} &= \sum_{j=1}^{e_n^{\mathrm{nc}}}\sum_{l=1}^{q_j-1}\frac{2\pi(l,q_j)}{w_jq_j}\ell_j\frac{d\Upsilon}{ds}(0)\\ &\quad + \sum_{j=e_n^{\mathrm{nc}}+1}^{e_n}\sum_{l=1}^{q_j-1}\frac{2\pi(l,q_j)}{w_jq_j}\ell_j\left(\frac{d\Upsilon}{ds}(0)+\frac{d\Omega}{ds}(0)\right)\\ &\ll \sum_{j=1}^{e_n^{\mathrm{nc}}}\ell_j + (e_n - e_n^{\mathrm{nc}})\end{aligned}$$

et le côté droit est un $o(\operatorname{vol} M_n)$ d'après le lemme 4.9 et la proposition 4.10, ce qui termine la preuve de (4.13) et du théorème.

4.4 Egalité asymptotique entre les torsions analytiques

On démontre ici le théorème suivant, qui est obtenu à partir des propositions 4.16 et 4.17 de la même manière que dans la preuve du théorème 4.14. Pour la preuve de ces derniers résultats on aura besoin de résultats techniques que l'on a relegués dans la section suivante 4.5.

Théorème 4.15. *Soit V une représentation fortement acyclique de G. Soit Γ un réseau de G et Γ_n une suite cusp-uniforme de sous-groupes d'indice fini dans Γ tels que les variétés $M_n = \Gamma_n\backslash\mathbb{H}^3$ BS-convergent vers $\mathbb{H}^3$, on fait la même hypothèse sur les opérateurs d'entrelacement Ψ que dans*

le théorème 4.14. Il existe alors une suite $Y^n \in [1,+\infty)^{h_n}$ telle que $\min_j Y_j/\alpha_n^j \to 0$ et que l'on ait les limites suivantes :

$$\frac{\log T_R(M_n;V) - \log T_{\mathrm{abs}}(M_n^{Y^n};V)}{\mathrm{vol}\, M_n}, \ \frac{\log T_R(M_n;V) - \log T_{\mathrm{rel}}(M_n^{Y^n};V)}{\mathrm{vol}\, M_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{4.18}$$

On donnera toutes les preuves dans le cas de conditions absolues, elles sont exactement les mêmes pour des conditions relatives.

Démonstration. Soit Y^n la suite définie dans la proposition 4.22 ci-dessous. On note $\mathrm{Tr}_Y\, \phi(\Delta^p[M_n]) = \int_{M^Y} K_{\phi,p}^{\Gamma_n}$, D'après la proposition 4.23 on a alors

$$\frac{1}{\mathrm{vol}\, M_n}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{t_0}(\mathrm{Tr}_R\, e^{-t\Delta^p[M_n]} - \mathrm{Tr}_Y\, e^{-t\Delta^p[M_n]})t^s\frac{dt}{t}\right)_{s=0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Il suffit donc de montrer que pour tout $t_0 > 0$ on a d'une part

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{t_0}(\mathrm{Tr}_{Y^n}\, e^{-t\Delta^p[M_n]} - \mathrm{Tr}\, e^{-t\Delta^p_{\mathrm{abs}}[M_n^{Y^n}]})t^s\frac{dt}{t}\right)_{s=0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

ce qui est fait dans la proposition 4.16 ci-dessous, et d'autre part que

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{t_0}^{+\infty}(\mathrm{Tr}_R\, e^{-t\Delta^p[M_n]} - \mathrm{Tr}\, e^{-t\Delta^p_{\mathrm{abs}}[M_n^{Y^n}]})\frac{dt}{t} \xrightarrow[t_0\to\infty]{} 0$$

ce qui suit de (4.14) et de la proposition 4.17 à suivre. □

4.4.1 Torsions analytiques absolue et relative

L'opérateur $e^{-t\Delta^p_{\mathrm{abs}}[X]}$ est à trace et on a un développement asymptotique $\mathrm{Tr}(e^{-t\Delta^p_{\mathrm{abs}}[X]}) = a_3 t^{-\frac{3}{2}} + ... + a_0 + O(t^{\frac{1}{2}})$ en $t \to 0$ (cf. [Gil95, Theorem 1.11.4]). Comme le spectre de $\Delta^p_{\mathrm{abs}}[X]$ est discret on a l'estimée en $t \to \infty$ suivante :

$$\mathrm{Tr}(e^{-t\Delta^p_{\mathrm{abs}}[X]}) - \dim\ker(\Delta^p_{\mathrm{abs}}[X]) \ll e^{-\lambda_1 t}$$

où λ_1 est la plus petite valeur propre positive. Il suit que la fonction zeta

$$\zeta_{p,\mathrm{abs}}(s) := \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}(\mathrm{Tr}(e^{-t\Delta^p_{\mathrm{abs}}[X]}) - \dim\ker(\Delta^p_{\mathrm{abs}}[X]))t^s\frac{dt}{t}$$

est bien définie pour $\mathrm{Re}(s) > 3/2$ et se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ qui est holomorphe en 0. On pose alors $\mathrm{dét}(\Delta^p_{\mathrm{abs}}[X]) = \exp(\zeta'_{p,\mathrm{abs}}(0))$ et

$$T_{\mathrm{abs}}(X;V) = \left(\prod_{p=1}^{3}\mathrm{dét}(\Delta^p_{\mathrm{abs}}[X])^{(-1)^p p}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

La torsion $T_{\mathrm{rel}}(X;V)$ est définie de la même manière en utilisant les $\Delta^p_{\mathrm{rel}}[X]$.

4.4.2 Comparaison aux petits temps

Proposition 4.16. *Soit $t_0 > 0$, $p = 1, 2, 3$ et Y^n la suite de la proposition 4.22. On a*

$$\frac{1}{\operatorname{vol} M_n}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{t_0}(\operatorname{Tr}_{Y^n}(e^{-t\Delta^p[M_n]}) - \operatorname{Tr}(e^{-t\Delta^p_{\mathrm{abs}}[M_n^{Y^n}]}))t^s\frac{dt}{t}\right)_{s=0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{4.19}$$

Démonstration. Il suit de (25) que l'on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}_{Y^n}(e^{-t\Delta^p[M_n]}) - \operatorname{Tr}(e^{-t\Delta^p_{\mathrm{abs}}[M_n^{Y^n}]}) &= \int_{D_n^{Y_n}} \operatorname{tr}(e^{-t\Delta[\mathbb{H}^3]}(x,x) - e^{-t\Delta^p_{\mathrm{abs}}[\widetilde{M_n^{Y^n}}]}(x,x))dx \\ &\quad + \int_{D_n^{Y^n}} \sum_{\gamma\in\Gamma_n-\{1\}} \operatorname{tr}(e^{-t\Delta^p[\mathbb{H}^3]}(x,\gamma x))dx \\ &\quad + \int_{D_n^{Y^n}} \sum_{\gamma\in\Gamma_n-\{1\}} \operatorname{tr}(e^{-t\Delta^p_{\mathrm{abs}}[\widetilde{M_n^{Y^n}}]}(x,\gamma x))dx \\ &=: E_1 + E_2 + E_3.\end{aligned}$$

Les variétés $\widetilde{M}_n^{Y^n}$ et $\widetilde{M}^{Y^n}$ sont égales, de sorte que

$$\frac{d}{ds}(\Gamma(s)^{-1}\int_0^{t_0} E_1 t^{s-1}dt)_{s=0} = \operatorname{vol} M_n(\log T^{(2)}(M;V) - \log T^{(2)}_{\mathrm{abs}}(\widetilde{M^{Y^n}};V)).$$

D'après [LS99, Section 2] on a ‡

$$\log T^{(2)}(M;V) - \log T^{(2)}_{\mathrm{abs}}(\widetilde{M^Y};V) \xrightarrow[\text{all } Y_j\to\infty]{} 0 \tag{4.20}$$

et vu que l'on a $\min_j(Y_j^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ il vient

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{t_0} E_1 t^s\frac{dt}{t}\right)_{s=0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Par ailleurs l'estimée (26) donne

$$\operatorname{tr}(e^{-t\Delta^p_{\mathrm{abs}}[\mathbb{H}^3]}(x,\gamma x)), \operatorname{tr}(e^{-t\Delta^p_{\mathrm{abs}}[\widetilde{M}^Y]}(x,\gamma x)) \ll t^{-3/2}e^{-d(x,\gamma x)^2/5t}$$

avec une constante indépendante de Y, et on a donc (dans la notation de la proposition 4.22) les majorations $E_2, E_3 \ll S(n,t,Y^n)$. Il suit alors de la proposition 4.22 que l'on a

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{t_0} E_i t^{s-1}dt\right)_{s=0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

pour $i = 2, 3$, ce qui finit la preuve. □

4.4.3 Trace aux grands temps

Proposition 4.17. *Pour la suite Y^n de la proposition 4.16 on a que*

$$\sup_{n\geq 1}\left(\int_{t_0}^{+\infty} \operatorname{Tr}(e^{-t\Delta^p_{\mathrm{abs}}[M_n^{Y^n}]})\frac{dt}{t}\right)$$

est fini et tend vers 0 quand $t_0 \to \infty$.

‡. Les auteurs ne traitent que des coefficients triviaux mais la preuve de leur théorème 2.26 s'étend au cas de coefficients quelconques et le reste de leur preuve ne pose pas de problème.

Trou spectral pour les variétés tronquées

On énonce (sans preuve) certains résultats [CV10, Chapter 6] sous une forme plus précise (dont la preuve est la même que celle des résultats originaux). On a vu qu'il existe des constantes $C, c > 0$ ne dépendant que de Γ telles que pour tout $n \geq 1$, toute forme propre $f \in L^2\Omega^p(M;V)$ de valeur propre λ et tout $Y \in [1,+\infty)^{h_n}$ tel que l'on ait $Y_j/\alpha_n^j \geq C\sqrt{\lambda}$ pour $j = 1,\dots,h_n$ la majoration suivante (précisant [CV10, 6.1.3]) tient :

$$|f(x) - f_P(x)| \leq |f|_{L^2\Omega^p(M_n^{C\lambda};V)} e^{-c\frac{y_j(x)}{\alpha_n^j}} \text{ pour tout } x \in M_n - M_n^Y. \tag{4.21}$$

On rappelle que Ψ, Φ sont les opérateurs d'entrelacement pour les sections et les 1-formes respectivement (cf. la section 3.1.3). Suivant [CV10] on pose $f_1(s) = \text{dét}(1 - Y^{-4s}\Phi(s))$, $f_0(s) = \text{dét}(1 - Y^{-2s}\Psi(s))$ et $\mathcal{N}_f(u) = |\{s \in i[0,u],\ f(s) = 0\}|$. On note $\mathcal{N}_Y^1(u)$ le nombre de valeurs propres (avec multiplicités) de $\Delta^p_{\text{abs}}[M_n^Y]$ dans $[0,u^2]$ et $\mathcal{N}^1_{\text{cusp}}(u)$ le nombre de valeurs propre de $\Delta^p_{\text{cusp}}[M_n]$ dans le même intervalle. En utilisant la majoration (4.21) ci-dessus dans la preuve de [CV10, Theorem 6.12] on obtient le résultat suivant.

Théorème 4.18. *On pose $\mathcal{N}_M^1 = \mathcal{N}^1_{\text{cusp}} + \mathcal{N}_{f_1} + \mathcal{N}_{f_0}$. Il existe $c, C > 0$ ne dépendant que de Γ telles que pour touts n, Y vérifiant $\forall j$, $Y_j \geq C\alpha_j^n$ et tout λ tel que $\lambda^2 \leq (Y_j/\alpha_n^j)^2$ on ait :*

$$\mathcal{N}^1_{M_n}(\sqrt{\lambda} - e^{-c\frac{Y}{\alpha_n^j}}) \leq \mathcal{N}_Y^1(\sqrt{\lambda}) \leq \mathcal{N}^1_{M_n}(\sqrt{\lambda} + e^{-c\frac{Y}{\alpha_n^j}}) \tag{4.22}$$

Un résultat semblable tient pour les sections de V et les 2- et 3-formes, où l'on remplace $\mathcal{N}^1$ par une fonction approprié (cf. [CV10] ; dans le cas où les coefficients sont fortement acycliques Ψ n'a pas de pôle et il n'apparaît donc pas de "valeurs propres monstres" comme Calegari et Venkatesh les appellent). Ce théorème a le corollaire plus faible suivant (on rappelle que $\lambda_0 > 0$ est la borne inférieure du spectre des laplaciens à coefficients dans V sur les variétés hyperboliques complètes).

Corollaire 4.19. *Il existe une constante C (dépendant de Γ) telle que pour tous n, Y vérifiant $Y_j \geq C\alpha_n^j$ la plus petite valeur propre non nulle de $\Delta^p_{\text{abs}}[M_n^Y]$ est plus grande que $\lambda_0/2$.*

Conclusion

Démonstration de la proposition 4.17. On procède comme dans 4.3.3, après avoir vérifié que l'on a bien :

(i) Il existe un λ_0^{abs} tel que pour tout n et toute $f \in L^2\Omega^p_{\text{abs}}(M_n^{Y^n};V)$ on ait

$$\langle \Delta^p_{\text{abs}} f, f\rangle_{L^2\Omega^p(M_n^{Y^n};V)} \geq \lambda_0^{\text{abs}}.$$

(ii) La suite $\text{Tr}(e^{-\Delta^p_{\text{abs}}[M_n^{Y^n}]})$ est bornée.

Le point (i) est une conéquence immédiate du corollaire 4.19 vu que l'on a $\min_j(Y_j^n/\alpha_n^j) \to \infty$ quand $n \to \infty$.

Quand à (ii), il suit du fait que pour tout $t > 0$ on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{Tr}\, e^{-t\Delta^p_{\text{abs}}[M_n^{Y^n}]}}{\text{vol}\, M_n} = \text{Tr}_\Gamma(e^{-t\Delta^p[\mathbb{H}^3]}) \tag{4.23}$$

En effet, on voit que

$$\frac{|\,\text{Tr}(e^{-t\Delta^p_{\text{abs}}[M_n^{Y^n}]}) - \text{Tr}_\Gamma(e^{-t\Delta^p[\mathbb{H}^3]})|}{\text{vol}\, M_n} \ll |\,\text{Tr}_\Gamma(e^{-t\Delta^p_{\text{abs}}[\widetilde{M^{Y^n}}]}) - \text{Tr}_\Gamma(e^{-t\Delta^p[\mathbb{H}^3]})| + \frac{S(n,t,Y^n)}{\text{vol}\, M_n}$$

et il suit de la proposition 4.21 que $S(n,t,Y^n) = o(\operatorname{vol} M_n)$. Le premier terme est le reste sur $D - D^{Y^n}$ d'une intégrale absolument convergente sur D et tend donc vers 0 quand $n \to \infty$.

D'après le point (i) on a donc pour $t \geq 1$

$$\int_{t_0}^{+\infty} \operatorname{Tr} e^{-t\Delta^p_{\mathrm{abs}}[M_n^{Y^n}]} \frac{dt}{t} \ll e^{-\lambda_0 t_0/2} \operatorname{Tr} e^{-t\Delta^p_{\mathrm{abs}}[M_n^{Y^n}]}$$

et la proposition 4.17 suit alors du point (ii). □

4.4.4 Une application : croissance des nombres de Betti dans les suites BS-convergentes

On prouve maintenant le résultat suivant, qui n'est pas une conséquence directe du théorème 4.11 vu que l'on ne sait pas contrôler le côté spectral de la formule des traces dans une suite de variétés non-compactes (voir la proposition 5.18 ci-dessous pour des résultats dans le cas de groupes de congruence).

Corollaire 4.20. *Soit M_n une suite cusp-uniforme de revêtements finis d'une 3-variété hyperbolique de volume fini, qui BS-converge vers $\mathbb{H}^3$. On a alors pour tout p :*

$$\frac{b_p(M_n)}{\operatorname{vol}(M_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{4.24}$$

Démonstration. Pour tout n et tout $t > 0$ on a $\dim\ker(\Delta^p_{\mathrm{abs}}[M_n^{Y^n}]) \leq \operatorname{Tr} e^{-t\Delta^p_{\mathrm{abs}}[M_n^{Y_n}]}$. Par ailleurs les groupes de cohomologie $H^p(M_n^{Y^n})$ sont isomorphes aux noyaux $\ker(\Delta^p_{\mathrm{abs}}[M_n^{Y_n}])$ par l'application de Hodge-de Rham, et comme l'inclusion $M_n^{Y^n} \subset M_n$ est une équivalence d'homotopie on a $b_p(M_n) = \dim\ker(\Delta^p_{\mathrm{abs}}[M_n^{Y_n}])$. Pour tout $t > 0$ on obtient alors en faisant tendre n vers l'infini :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{b_p(M_n)}{\operatorname{vol} M_n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Tr} e^{-t\Delta^p_{\mathrm{abs}}[M_n^{Y_n}]}}{\operatorname{vol} M_n} = \operatorname{Tr}_\Gamma e^{-t\Delta^p[\mathbb{H}^3]}.$$

Le côté droit tend vers 0 quand $t \to \infty$ vu que $b_k^{(2)}(\mathbb{H}^3) = 0$ (cf. [Lüc02, Theorem 1.63]) et (4.24) en suit vu que $H^*(M_n) = H^*(\overline{M}_n) = H^*(M_n^{Y_n})$. □

La convergence (4.24) est bien connue pour certaines suites de groupes arithmétiques, cf. 0.18. Pour des suites exhaustives de revêtements d'une variété de volume fini elle suit du théorème 0.4 de Lück appliqué aux variétés tronquées.

4.5 Intégrales tronquées

4.5.1 Convergence des traces tronquées

Proposition 4.21. *Soit M une variété de volume fini, M_n une suite cusp-uniforme de revêtements finis de M qui BS-converge vers $\mathbb{H}^3$. Il existe une suite $Y^n \in [1,+\infty)^{h_n}$ vérifiant pour tout $j \geq 1$ que $\min_j Y_j^n/\alpha_j^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et telle que l'on ait :*

$$\frac{\int_{M^{Y^n}} K_\phi^{\Gamma_n}(x,x)dx}{[\Gamma:\Gamma_n]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \operatorname{Tr}_\Gamma k_\phi. \tag{4.25}$$

Démonstration. On reprend les notations H, H_n utilisées dans la preuve du théorème 4.11, on rappelle que $\Lambda_{n,j} = (\Gamma_n)_{P_j}$ et pour $j = 1, \dots, h_n$ et $Y_j > 0$ soit $B_{n,j}^{Y_j}$ une bande fondamentale pour $\Lambda_{n,j}$ tronquée à hauteur Y_j (cf. (3.17)). On a alors :

$$|\operatorname{Tr}_Y K_\phi^{\Gamma_n} - \operatorname{Tr}_{\Gamma_n} k_\phi| \ll H_n + \sum_{j=1}^{h_n} \int_{B_{n,j}^{Y_j}} \sum_{\eta \in \Lambda_{n,j} - \{0\}} h(\ell(|\eta|/y_{P_j}(x)))dx =: H_n + U_n^Y.$$

Du lemme 4.12 il suit que $H_n = o(\operatorname{vol} M_n)$; on va maintenant démontrer que pour une suite Y^n bien construite on a $U_n^{Y^n} = o(\operatorname{vol} M_n)$.

Soit $P = MAN$ un sous groupe parabolique et y_P une fonction hauteur en P. Par (3.18), si S est un ensemble uniforme de réseaux euclidiens dans N alors pour tout $\Lambda \in S$ on a l'estimée :

$$\int_{B_\Lambda^Y} \sum_{\eta \in \Lambda - 0} H(d(x, \eta x))dx \ll \log Y + \log \alpha(\Lambda) \tag{4.26}$$

avec des constantes ne dépendant que de S et y_P. On définit maintenant la suite Y^n qui conviendra : pour $j = 1, \dots, h_n$ on pose $\log Y_j^n = \max(\sqrt{\frac{\operatorname{vol} M_n}{h_n}}, \alpha_n^j)$, et de cette définition il suit immédiatement que l'on a $\min_j(Y_j^n/\alpha_n^j) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Soit $n \geq 1$ et $j \in \{1, \dots, h_n\}$; il existe un unique $j_0 \in \{1, \dots, h\}$ tel que l'on ait $P_j = \gamma_{n,j} P_{j_0} \gamma_{n,j}^{-1}$ pour un $\gamma_{n,j} \in \Gamma$ et il vient alors :

$$\int_{B_{n,j}^{Y_j^n}} \sum_{\eta \in \Lambda_{n,j} - \{0\}} H(d(x, \eta x))dx = \int_{B_{j_0}^{Y_j^n}} \sum_{\eta \in \gamma_{n,j} \Lambda_{n,j} \gamma_{n,j}^{-1} - \{0\}} H(d(x, \eta x))dx.$$

On réordonne les P_j pour que α_n^j soit croissante en j et on note h_n^b le plus grand indice j tel que l'on ait $\alpha_n^j \leq \sqrt{\operatorname{vol} M_n / h_n}$. On applique l'estimée (4.26) ci-dessus à l'ensemble uniforme de réseaux $\gamma_{n,j} \Lambda_{n,j} \gamma_{n,j}^{-1}$ dans les $N_1, \dots, N_h$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} U_n &\leq \sum_{j=1}^{h_n} \int_{B_{n,j}^{Y_j^n}} \sum_{\eta \in \Lambda_{n,j} - \{0\}} H(d(x, \eta x))dx \\ &\ll \sum_{j=1}^{h_n^b} \log(Y_j^n) + \sum_{j=h_n^b+1}^{h_n} \log(Y_j^n) + h_n \\ &\leq \sqrt{h_n \operatorname{vol} M_n} + \sum_{j=h_n^b+1}^{h_n} \alpha_n^j + h_n \end{aligned}$$

avec des constantes qui ne dépendent que du choix originel des fonctions hauteurs $y_{P_1}, \dots, y_{P_h}$. Par le lemme 4.6 on a $h_n, \sqrt{h_n \operatorname{vol} M_n} = o(\operatorname{vol} M_n)$, de même $\sum_{j=h_n^b+1}^{h_n} \alpha_n^j = o(\operatorname{vol} M_n)$ par le lemme 4.13 et la conclusion suit. □

4.5.2 Trace tronquée aux petits temps

Proposition 4.22. *On conserve les notations de la proposition 4.21 et on pose :*

$$S(n, t, Y) = \int_{M_n^Y} \sum_{\gamma \in \Gamma_n, \gamma \neq 1} e^{-d(x, \gamma x)^2 / C_2 t}.$$

Pour tout $t_0 > 0$ la fonction $s \mapsto \int_0^{t_0} S(n,t,Y)t^{s-\frac{3}{2}}dt/t$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et il existe une suite $Y^n \in [1,+\infty)^{h_n}$ telle que $\min_{j=1,\dots,h_n}(Y_j/\alpha_n^j) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{t_0}\frac{S(n,t,Y^n)}{\operatorname{vol} M_n}t^{s-\frac{3}{2}}\frac{dt}{t}\right)_{s=0} = \int_0^{t_0} t^{-\frac{3}{2}}\frac{S(n,t,Y^n)}{\operatorname{vol} M_n}\frac{dt}{t} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Démonstration. On écrit

$$H_t(x) = \sum_{\gamma\in(\Gamma_n)_{\mathrm{lox}}} t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{d(x,\gamma x)^2}{C_2 t}}, \quad U_t(x) = \sum_{j=1}^{h_n}\sum_{\gamma\in\Gamma_n/(\Gamma_n)_{P_j}}\sum_{\eta\in\Lambda_{n,j}-\{0\}} t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{d(x,\gamma\eta\gamma^{-1}x)^2}{C_2 t}}.$$

Soit $\ell = \min_{\gamma\in\Gamma_{\mathrm{lox}}}\min_{x\in\mathbb{H}^3} d(x,\gamma x)$; comme dans la preuve du lemme 4.12 on a

$$\int_0^{t_0}\int_{D_n^{Y^n}} H_t(x)dx\frac{dt}{t} \le \int_0^{t_0}\int_\ell^{+\infty} 2t^{-\frac{5}{2}}re^{-\frac{r^2}{C_2 t}}\int_{D_n}\mathcal{N}_{\Gamma_n}(x,r)dxdr\frac{dt}{t}$$

et par le même argument on obtient que $\int_0^{t_0}\int_{D_n^{Y^n}} H_t(x)dxdt/t = o(\operatorname{vol} M_n)$.

Pour le terme en U_t on utilise des majorations plus brutes que celles que peuvent fournir (3.18). Pour $n \ge 1, j = 1,\dots,h_n$ et $Y_j > 0$ on a

$$\sum_{\gamma\in\Gamma_n/(\Gamma_n)_{P_j}}\sum_{\eta\in\Lambda_{n,j}-\{0\}} t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{d(x,\gamma\eta\gamma^{-1}x)^2}{C_2 t}} = \int_{B_{n,j}^{Y_j}}\sum_{\eta\in\Lambda_{n,j}-\{0\}} e^{-\frac{d(x,\eta x)^2}{C_2 t}}dx$$

(on rappelle que $B_{n,j}^Y = B_{\Lambda_{n,j}}^Y$ a été défini en (3.17)). Il vient :

$$\begin{aligned}\int_{D_n^Y}\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma_n/(\Gamma_n)_{P_j}\\ \eta\in\Lambda_{n,j}-\{0\}}} t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{d(x,\gamma\eta\gamma^{-1}x)^2}{C_2 t}} &= \operatorname{vol}\Lambda_{n,j}\int_0^{Y_j}\int_{\alpha_n^j}^{+\infty} e^{-\frac{\ell(r/y)^2}{C_2 t}}d\mathcal{N}_{n,j}^*(r)\frac{dy}{y^3}\\ &= \operatorname{vol}\Lambda_{n,j}\int_0^{Y_j}\int_{\alpha_n^j}^{+\infty}\frac{1}{C_2 t}\frac{1}{y}\frac{d\ell}{dr}(r/y)e^{-\frac{\ell(r/y)^2}{C_2 t}}\mathcal{N}_{n,j}^*(r)dr\frac{dy}{y^3}\\ &= \operatorname{vol}\Lambda_{n,j}\int_0^{Y_j}\int_{\alpha_n^j/y}^{+\infty}\frac{1}{C_2 t}\frac{d\ell}{dr}e^{-\frac{\ell(r)^2}{C_2 t}}\mathcal{N}_{n,j}^*(ry)dr\frac{dy}{y^3}.\end{aligned}$$

Par le lemme 0.26 et l'uniformité des $\Lambda_{n,j}$ on a $\mathcal{N}_{n,j}^*(ry) \ll (ry)^2/\operatorname{vol}\Lambda_{n,j}$ avec une constante indépendante de n, j. Il vient :

$$\int_{D_n^Y}\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma_n/(\Gamma_n)_{P_j}\\ \eta\in\Lambda_{n,j}-\{0\}}} t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{d(x,\gamma\eta\gamma^{-1}x)^2}{C_2 t}}dx \ll \int_0^{Y_j}\int_{\alpha_n^j/y}^{+\infty} r^2e^{-\frac{\ell(r)^2}{C_2 t}}dr\frac{dy}{y}t^{-\frac{5}{2}}. \tag{4.27}$$

On va maintenant séparer l'intégration en $r \ge 2$ et $\alpha_n^j/y \le r \le 2$. Pour $r \ge 2$ on a d'après le lemme 0.24 la minoration $\ell(r) \gg \log r$ et il vient donc :

$$\begin{aligned}\int_0^{t_0}\int_0^{Y_j}\int_2^{+\infty} r^2e^{-\frac{\ell(r)^2}{C_2 t}}dr\frac{dy}{y}t^{-\frac{5}{2}}\frac{dt}{t} &\ll \int_0^{t_0} e^{-\frac{(\log 2)^2}{C_2 t}}\log Y_j\, t^{-\frac{5}{2}}\frac{dt}{t}\\ &\ll \log Y_j.\end{aligned} \tag{4.28}$$

D'autre part, pour $r \in [0,2]$ on a $\ell(r) > cr$ pour un $c > 0$ et on a ainsi :

$$\begin{aligned}\int_0^{t_0}\int_0^{Y_j}\int_{\alpha_n^j/y}^2 r^2 e^{-\frac{\ell(r)^2}{C_2 t}}\,dr\frac{dy}{y}t^{-\frac{5}{2}}\frac{dt}{t} &\ll \int_0^{Y_j}\int_0^{t_0} e^{-\frac{(\alpha_n^j/y)^2}{Ct}}t^{-\frac{5}{2}}\frac{dt}{t}\frac{dy}{y}\\ &\ll \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{Ct}}t^{-\frac{5}{2}}\frac{dt}{t}\left(\frac{y}{\alpha_n^j}\right)^5\frac{dy}{y}\\ &\ll \left(\frac{Y_j}{\alpha_n^j}\right)^5.\end{aligned} \tag{4.29}$$

On pose maintenant

$$Y_j = \max(\alpha_n^j \log \alpha_n^j, (\operatorname{vol} M_n/h_n)^{\frac{1}{10}}), \tag{4.30}$$

on voit que $\min_j(Y_j/\alpha_n^j) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. D'autre part on a $(Y_j/\alpha_n^j) \geq \log Y_j$ pour $j = 1,\dots,h_n$, de sorte que pour tout j (4.27),(4.28),(4.29) ci-dessus donnent l'estimée :

$$\int_0^{t_0}\int_{D_n^Y}\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma_n/(\Gamma_n)_{P_j}\\ \eta\in\Lambda_{n,j}-\{0\}}} t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{d(x,\gamma\eta\gamma^{-1}x)^2}{C_2 t}}\frac{dt}{t} \ll \max((\log\alpha_n^j)^5, (\operatorname{vol} M_n/h_n)^{\frac{1}{2}}).$$

On note h_n^b le plus petit j tel que $\alpha_n^j \log \alpha_n^j \geq (\operatorname{vol} M_n/h_n)^{\frac{1}{10}}$, on obtient alors que :

$$\begin{aligned}\int_0^{t_0}\int_{M_n^{Y^n}} U_t(x)dx t^{-\frac{3}{2}}\frac{dt}{t} &\ll \sum_{j=1}^{h_n^b-1}\left(\frac{\operatorname{vol} M_n}{h_n}\right)^{\frac{1}{10}} + \sum_{j=h_n^b}^{h_n}(\log\alpha_n^j)^5\\ &\ll (h_n)^{\frac{9}{10}}(\operatorname{vol} M_n)^{\frac{1}{10}} + \sum_{j=1}^{h_n}(\log\alpha_n^j)^5.\end{aligned}$$

Le premier terme est un $o(\operatorname{vol} M_n)$ par le lemme 4.6 et le second en est aussi un par le lemme 4.13, ce qui conclut la preuve de la proposition. □

4.5.3 Comparaison avec la trace régularisée

Proposition 4.23. *On a pour la suite de la proposition 4.22 :*

$$\frac{\operatorname{Tr}_R \phi(\Delta^p[M_n]) - \operatorname{Tr}_{Y^n}\phi(\Delta^p[M_n])}{\operatorname{vol} M_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

$$\frac{1}{\operatorname{vol} M_n}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{t_0}(\operatorname{Tr}_R e^{-t\Delta^p[M_n]} - \operatorname{Tr}_{Y^n} e^{-t\Delta^p[M_n]})t^s\frac{dt}{t}\right)_{s=0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Démonstration. D'après l'expression du $o(1)$ dans (3.18) on a pour $Y \in [1,+\infty)^{h_n}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}_Y \phi(\Delta^p[M_n]) - \operatorname{Tr}_R\phi(\Delta^p[M_n]) &= \sum_{j=1}^{h_n} 2\pi\log Y_j\int_0^{+\infty} r h_\phi^p(\ell(r))dr\\ &+ \sum_{j=1}^{h_n}\operatorname{vol}\Lambda_{n,j}\int_0^{+\infty} r h_\phi^p(\ell(r))\int_{\max(\alpha_n^j, rY_j)}^{+\infty} E_{\Lambda_{n,j}}(\rho)\frac{d\rho}{\rho^3}dr\\ &+ \sum_{j=1}^{h_n}\operatorname{vol}\Lambda_{n,j}\int_0^{+\infty}\frac{E_{\Lambda_{n,j}(rY_j)}}{(rY_j)^2}h_\phi^p(\ell(r))dr.\end{aligned} \tag{4.31}$$

La première limite suit d'une analyse de chacun des termes, on laisse au lecteur le soin de vérifier que tout se passe bien. La seconde est plus subtile vu qu'on a besoin de prolonger analytiquement. On pose :

$$T_1 = \sum_{j=1}^{h_n} 2\pi \log Y_j \int_0^{+\infty} r h_t^p(\ell(r)) dr$$

$$T_2 = \sum_{j=1}^{h_n} \operatorname{vol} \Lambda_{n,j} \int_0^{+\infty} \frac{E_{\Lambda_{n,j}}(rY_j)}{(rY_j)^2} h_t^p(\ell(r)) dr.$$

$$T_3 = \sum_{j=1}^{h_n} \operatorname{vol} \Lambda_{n,j} \int_0^{+\infty} r h_t^p(\ell(r)) \int_{\max(\alpha_n^j, rY_j)}^{+\infty} E_{\Lambda_{n,j}}(\rho) \frac{d\rho}{\rho^3} dr$$

On rapelle que Θ a été définie en (4.16), on a :

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{t_0} T_1 t^s \frac{dt}{t}\right)_{s=0} = \sum_{j=1}^{h_n} 2\pi \log Y_j \frac{d\Theta}{ds}(0)$$

et par la définition (4.30) de la suite Y^n le côté droit est un $O(\log(\operatorname{vol} M_n) + \sum_{j=1}^{h_n} \log \alpha_n^j)$ et donc un $o(\operatorname{vol} M_n)$ d'après le lemme 4.13.

On rappelle le développement asymptotique (3.25) :

$$h_t^p(\ell) = \sum_{k=0}^{3} b_k^p(\ell) e^{-\frac{\ell^2}{C_2 t}} t^{\frac{-k}{2}} + O(t^{\frac{1}{2}}).$$

On a

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{t_0} \sum_{j=1}^{h_n} \operatorname{vol} \Lambda_{n,j} \int_0^{+\infty} \frac{E_{\Lambda_{n,j}(rY_j)}}{(rY_j)^2} e^{-\frac{\ell(r)^2}{C_2 t}} dr\, t^{s+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t}\right)_{s=0} \\
&\quad = \int_0^{t_0} \sum_{j=1}^{h_n} \operatorname{vol} \Lambda_{n,j} \int_0^{+\infty} \frac{E_{\Lambda_{n,j}(rY_j)}}{(rY_j)^2} e^{-\frac{\ell(r)^2}{C_2 t}} dr\, t^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} \\
&\quad \ll \sum_{j=1}^{h_n} (\alpha_n^j Y_j)^{-1} \leq h_n
\end{aligned}$$

et il suit que :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{t_0} T_2 t^s \frac{dt}{t}\right)_{s=0} \\
&\quad = \sum_{j=1}^{h_n} \sum_{k=0}^{3} \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\Gamma(s)} \operatorname{vol} \Lambda_{n,j} \int_0^{+\infty} \frac{E_{\Lambda_{n,j}}(rY_j)}{(rY_j)^2} b_k^p(\ell(r)) e^{-\frac{\ell(r)^2}{C_2 t}} dr\, t^{s-\frac{k}{2}} \frac{dt}{t}\right)_{s=0} + O(h_n).
\end{aligned}$$

On étudie l'intégrale sur r séparément des deux côtés du point $r = \alpha_n^j / Y_j$; on a tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol} \Lambda_{n,j} \int_{\alpha_n^j / Y_j}^{+\infty} \frac{E_{\Lambda_{n,j}}(rY_j)}{(rY_j)^2} b_k^p(\ell(r)) e^{-\frac{\ell(r)^2}{C_2 t}} dr &\ll (Y_j \alpha_n^j)^{-1} \int_{\alpha_n^j / Y_j}^{+\infty} r^{-1} b_k^p(\ell(r)) e^{-\frac{\ell(r)^2}{C_2 t}} dr \\
&\ll (Y_j \alpha_n^j)^{-1} e^{-\frac{(\alpha_n^j / Y_j)^2}{Ct}}
\end{aligned}$$

où la constante ne dépend pas de n, j. D'autre part :

$$\frac{\operatorname{vol}\Lambda_{n,j}}{\pi}\int_0^{\alpha_n^j/Y_j}\frac{E_{\Lambda_{n,j}}(rY_j)}{(rY_j)^2}b_k^p(\ell(r))e^{-\frac{\ell(r)^2}{C_2t}}\,dr=\int_0^{\alpha_n^j/Y_j}b_k^p(\ell(r))e^{-\frac{\ell(r)^2}{C_2t}}\,dr$$
$$=\int_0^1 b_k^p(\ell(r))e^{-\frac{\ell(r)^2}{C_2t}}\,dr-\int_{\alpha_n^j/Y_j}^1 b_k^p(\ell(r))e^{-\frac{\ell(r)^2}{C_2t}}\,dr.$$

On a $\int_{\alpha_n^j/Y_j}^{+\infty} b_k^p(\ell(r))e^{-\frac{\ell(r)^2}{C_2t}}\,dr \ll e^{-\frac{(\alpha_n^j/Y_j)^2}{Ct}}$, et d'autre part on a d'après (3.27) un développement asymptotique

$$\int_0^1 b_k^p(\ell(r))e^{-\frac{\ell(r)^2}{C_2t}}\,dr=\sum_{l=2}^m c_l t^{l/2}$$

où les c_l sont indépendants de n, j. Il vient

$$\operatorname{vol}\Lambda_{n,j}\int_0^{\alpha_n^j/Y_j}\frac{E_{\Lambda_{n,j}}(rY_j)}{(rY_j)^2}b_k^p(\ell(r))e^{-\frac{\ell(r)^2}{C_2t}}\,dr=\pi\sum_{l=2}^m c_l t^{l/2}+O(e^{-\frac{(\alpha_n^j/Y_j)^2}{Ct}})$$

En rassemblant ces estimées on obtient :

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{t_0}T_2t^s\frac{dt}{t}\right)_{s=0}\ll h_n+\sum_{j=1}^{h_n}\sum_{k=0}^3(1+(\alpha_n^jY_j)^{-1})\int_0^{t_0}e^{-\frac{(\alpha_n^j/Y_j)^2}{Ct}}t^{\frac{-k}{2}}\frac{dt}{t}.$$

Le second terme de droite se traite comme dans la preuve de la proposition 4.22 : on voit que pour $k=1,2,3$ on a

$$\int_0^{t_0}e^{-\frac{(\alpha_n^j/Y_j)^2}{Ct}}t^{-\frac{k}{2}}\frac{dt}{t}\le\left(\frac{Y_j}{\alpha_n^j}\right)^k\int_0^{+\infty}e^{-1/Ct}t^{-\frac{k}{2}}\frac{dt}{t}$$

et pour $k=0$

$$\int_0^{t_0}e^{-\frac{(\alpha_n^j/Y_j)^2}{Ct}}\frac{dt}{t}=\int_0^{\frac{Y_j}{\alpha_n^j}t_0}e^{-1/Ct}\frac{dt}{t}\ll\log(Y_j/\alpha_n^j)$$

d'où on tire finalement que

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{t_0}T_2t^s\frac{dt}{t}\right)_{s=0}\ll\sum_{j=1}^{h_n}\left(\frac{Y_j}{\alpha_n^j}\right)^3$$

qui tend bien vers 0 quand $n\to\infty$ pour $Y=Y^n$.

Le terme T_3 se traite de manière semblable. Pour $n\ge1$ et $j=1,\dots,h_n$ on pose

$$\kappa_j'=\operatorname{vol}\Lambda_{n,j}\int_{\max(\alpha_n^j,rY_j)}^{+\infty}E_{\Lambda_{n,j}}(\rho)\frac{d\rho}{\rho^3},$$

on voit que κ_j' est bornée indépendamment de n, j et il vient :

$$\operatorname{vol}\Lambda_{n,j}\int_0^{+\infty}rh_t^p(\ell(r))\int_{\max(\alpha_n^j,rY_j)}^{+\infty}E_{\Lambda_{n,j}}(\rho)\frac{d\rho}{\rho^3}dr$$
$$=\kappa_j'\int_0^{\alpha_n^j/Y_j}rh_t^p(\ell(r))dr+\int_{\alpha_n^j/Y_j}^{+\infty}rh_t^p(\ell(r))\int_{\max(\alpha_n^j,rY_j)}^{+\infty}E_{\Lambda_{n,j}}(\rho)\frac{d\rho}{\rho^3}dr$$
$$=\kappa_j'\int_0^1rh_t^p(\ell(r))dr+O(t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{(\alpha_n^j/Y_j)^2}{Ct}}).$$

On a donc

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{t_0} T_3 t^s \frac{dt}{t}\right)_{s=0} \ll h_n + \sum_{j=1}^{h_n}\int_0^{t_0} e^{-\frac{(\alpha_n^j/Y_j)^2}{Ct}} t^{-\frac{3}{2}}\frac{dt}{t}$$

et on a vu plus haut que la somme dans le terme de droite est un $o(\operatorname{vol} M_n)$, ce qui termine la preuve. $\square$

Chapitre 5

Sous-groupes de congruence des groupes de Bianchi

On étudie ici certaines suites de sous-groupes de congruence des groupes de Bianchi $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F)$. Après les avoir définies on étudie leur géométrie : on démontre en 5.2.1, en utilisant essentiellement les résultats de [ABB$^+$, Section 5] que les suites d'orbifolds de congruence revêtant un orbifold de Bianchi BS-convergent toujours vers $\mathbb{H}^3$. Une étude fine de la structure de l'ensemble des cusps et des opérateurs d'entrelacement permet alors de conclure que pour certaines suites définies explicitement (cf. 5.1.2 ci-dessous) les conditions du théorème 4.14 sont vérifiées, ce qui démontre dans ces cas l'approximation pour la torsion analytique (Théorème 5.11) et l'égalité asymptotique avec la torsion absolue (Théorème 5.12). On peut aussi établir dans la foulée la convergence des traces discrètes pour ces suites (Théorème 5.9) d'où découlent des résultats de "multiplicités limites" pour le spectre (Corollaire 5.10).

Une bonne partie de ce chapitre est dédiée à étudier les opérateurs d'entrelacement, ce qui se fait le mieux dans un cadre adélique. On introduit les outils nécéssaires, puis on développe l'analyse harmonique sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$ et notamment la théorie des séries d'Eisenstein dans les sections 5.3 et 5.4, et on finit par démontrer les estimées nécéssaires sur la dérivée des opérateurs d'entrelacement dans la section 5.5.

5.1 Les groupes de Bianchi et leurs sous-groupes de congruence

5.1.1 Groupes de Bianchi

On appelle groupes de Bianchi les groupes $\Gamma(\mathcal{O}_F) = \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F)$ pour F un corps quadratique imaginaire. Ce sont des sous-groupes discrets de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et le quotient $\Gamma(\mathcal{O}_F)\backslash\mathbb{H}^3$ est un orbifold de volume fini non-compact (cf. par example [EGM98, Theorem VII.1.1]). Les paraboliques $\Gamma(\mathcal{O}_F)$-rationnels sont ceux qui sont définis sur F, i.e. ceux dont le point fixe est dans $\mathbb{P}^1(F) \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Il est alors bien connu que l'application $P \mapsto (a : b) \mapsto (a, b)$ (où $(a : b)$ est le point fixe de P avec $a, b \in \mathcal{O}_F$ et (a, b) est l'idéal engendré par a et b) induit une bijection des classes de Γ-conjugaison des paraboliques Γ-rationnels sur le groupe de classes $C(F)$ de F, cf. [EGM98, Theorem 2.4]. On décrit maintenant les stabilisateurs dans $\Gamma(\mathcal{O}_F)$ de ces cusps. Soient $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_{h_F}$ tous les idéaux de $\mathcal{O}_F$ qui n'ont pas de diviseur principal non-trivial ; en particulier ils forment un ensemble de représentants pour $C(F)$.

Proposition 5.1. *Soient $a, b \in \mathcal{O}_F$ n'ayant pas de diviseur en commun dans $\mathcal{O}_F$. Alors l'idéal (a, b) est égal à l'un des $\mathfrak{C}_j$ et on écrit $(a) = \mathfrak{C}_j\mathfrak{A}$, $(b) = \mathfrak{C}_j\mathfrak{B}$, de sorte que $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = 1$. Soit*

$P = MAN$ le stabilisateur dans G de $(a : b)$, on a alors

$$\Gamma(\mathcal{O}_F) \cap N = 1 + \left\{ \begin{pmatrix} \frac{a}{b}c & -\frac{a^2}{b^2}c \\ c & -\frac{a}{b}c \end{pmatrix},\ c \in \mathfrak{B}^2 \right\} = 1 + \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{b}{a}c & c \\ -\frac{b^2}{a^2}c & \frac{b}{a}c \end{pmatrix},\ c \in \mathfrak{A}^2 \right\}.$$

Démonstration. On veut montrer que toute matrice nilpotente $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathcal{O}_F)$ dont le noyau contient (a, b) est de la forme indiquée. On a $\alpha a + \beta b = 0 = \gamma a + \delta b$ et il suit que $\alpha, \gamma \in \mathfrak{B}$ et $\beta, \delta \in \mathfrak{A}$. Comme $a = -d$ on a de plus $\delta \in \mathfrak{B}$, ce qui force $\gamma \in \mathfrak{B}^2$. Notant $\gamma = c$ on doit donc avoir

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{b}c & -\frac{a^2}{b^2}c \\ c & -\frac{a}{b}c \end{pmatrix}$$

La matrice de droite appartient à $M_2(\mathcal{O}_F)$ et on obtient la première paramétrisation. La seconde est obtenue de manière exactement semblable. □

L'origine arithmétique des groupes de Bianchi permet de construire un ensemble canonique de fonctions hauteurs $\Gamma(\mathcal{O}_F)$-invariantes sur $\mathbb{H}^3$. Pour $x = (z, y) \in \mathbb{C} \times (0, +\infty) = \mathbb{H}^3$ on note $y_\infty(x) = y$. Si $\mathfrak{P}$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_F$ on note $|.|_\mathfrak{P}$ la valuation $\mathfrak{P}$-adique normalisée sur F et $F_\mathfrak{P}, \mathcal{O}_\mathfrak{P}$ le corps $\mathfrak{P}$-adique et son anneau d'entiers. Pour tout $g \in \mathrm{SL}_2(F_\mathfrak{P})$ on a une décomposition d'Iwasawa $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} k$ avec $k \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_\mathfrak{P})$; elle n'est pas unique mais vu que les éléments inversibles de $\mathcal{O}_\mathfrak{P}$ sont de valuation $\mathfrak{P}$-adique égale à 1 on peut définir $\alpha_\mathfrak{P}(g) := |a|_\mathfrak{P}$ et $\alpha_f(g) = \prod_\mathfrak{P} \alpha_\mathfrak{P}(g)$. Si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(F)$ on a $\alpha_f(g) = |a|^{-2}$ où $|.|$ est la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{C}$. Il suit que pour tout parabolique F-rationel P et tout $g \in \mathrm{SL}_2(F)$ qui conjugue P à P_∞,

$$y_P(x) = \alpha_f(g) y_\infty(gx) \tag{5.1}$$

ne dépend pas du choix de g, et il est évident que ces fonctions définissent un système Γ-invariant de fonctions hauteurs. Dans la suite on considèrera toujours les variétés arithmétiques comme munies de ces dernières.

5.1.2 Sous-groupes de congruence

Dans la suite on fixe F et on note $\Gamma = \Gamma(\mathcal{O}_F)$ et pour un idéal $\mathfrak{I}$ de $\mathcal{O}_F$, $\pi_\mathfrak{I}$ la projection $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F) \to \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F/\mathfrak{I})$.

Approximation forte

Le théorème suivant est dû à M. Eichler dans un cadre plus général, il suit de la version adélique énoncée ci-dessous (Théorème 5.22).

Théorème 5.2. *La projection $\pi_\mathfrak{I}$ est surjective pour tout $\mathfrak{I}$.*

On pose :

$$\Gamma(\mathfrak{I}) = \ker(\pi_\mathfrak{I}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F),\ a, d \in 1 + \mathfrak{I} \text{ and } b, c \in \mathfrak{I} \right\}.$$

On notera de plus $G_\mathfrak{I} = \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F/\mathfrak{I})$. Si $\mathfrak{I} = \mathfrak{P}^k$, $q = |\mathfrak{P}|$ on a $|G_\mathfrak{I}| = q^{3k-1}(q^2 - 1)$. Le théorème d'approximation forte a les conséquences suivantes.

Corollaire 5.3. *Si* $\mathfrak{I} = \prod_{k=1}^{r} \mathfrak{P}_k^{l_k}$ *alors l'application naturelle*

$$G_{\mathfrak{I}} \to \prod_{k=1}^{r} G_{\mathfrak{P}_k^{l_k}}$$

est un isomorphisme. En particulier, $|G_{\mathfrak{I}}| = \prod_{k=1}^{r} q_k^{3l_k-1}(q_k^2-1) = |\mathfrak{I}|^3 \prod_{k=1}^{r}(1-q_k^{-2})$.

Corollaire 5.4. *Si* $\mathfrak{I}, \mathfrak{J}$ *sont des idéaux et* $\mathfrak{K} = (\mathfrak{I}, \mathfrak{J})$ *leur PGCD alors le sous-groupe engendré par* $\Gamma(\mathfrak{I})$ *et* $\Gamma(\mathfrak{J})$ *est égal à* $\Gamma(\mathfrak{K})$.

Définition et exemples

Les sous-groupes $\Gamma(\mathfrak{I})$ sont habituellement appelés sous-groupes de congruence principaux. Un sous-groupe de congruence de Γ est un sous-groupe qui contient $\Gamma(\mathfrak{I})$ pour un idéal $\mathfrak{I}$, et son niveau est le plus grand tel idéal, qui est bien défini d'après le corollaire 5.4. Un sous-groupe de congruence de niveau $\mathfrak{I}$ est donc égal à $\pi_{\mathfrak{I}}^{-1}(H)$ pour un sous-groupe H de $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F/\mathfrak{I}) = G_{\mathfrak{I}}$ qui ne contient aucun des sous-groupes distingués $\pi(\Gamma(\mathfrak{J}))$ pour $\mathfrak{J}$ un diviseur de $\mathfrak{I}$. On notera $\Gamma_H := \pi_{\mathfrak{I}}^{-1}(H)$; pour éviter toute ambiguïté on supposera toujours que $-1_{G_{\mathfrak{I}}} \in H$, de sorte que Γ_H détermine H.

On définit les sous-groupes de $G_{\mathfrak{I}}$ suivants :

$$P_{\mathfrak{I}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ & a^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F),\ a \in (\mathcal{O}_F/\mathfrak{I})^\times,\ b \in \mathcal{O}_F/\mathfrak{I} \right\},$$
$$N_{\mathfrak{I}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F),\ b \in \mathcal{O}_F/\mathfrak{I} \right\}.$$

Les cardinaux de $N_{\mathfrak{I}}, P_{\mathfrak{I}}$ sont respectivement égaux à $|\mathfrak{I}|^2 \prod_{k=1}^{r}(1-q_k^{-1})$ et $|\mathfrak{I}|$. On note $\Gamma_0(\mathfrak{I}) = \Gamma_{P_{\mathfrak{I}}}$, $\Gamma_1(\mathfrak{I}) = \Gamma_{N_{\mathfrak{I}}}$. On a plus explicitement :

$$\Gamma_0(\mathfrak{I}) = \pi_{\mathfrak{I}}^{-1}(P(\mathcal{O}_F/\mathfrak{I}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F),\ c \in \mathfrak{I} \right\},$$
$$\Gamma_1(\mathfrak{I}) = \pi_{\mathfrak{I}}^{-1}(P(\mathcal{O}_F/\mathfrak{I}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F),\ c \in \mathfrak{I},\ a, d \in 1+\mathfrak{I} \right\}.$$

Les groupes $\Gamma_0(\mathfrak{I})$ sont parfois appelés sous-groupes de congruence de Hecke.

Pour $|\mathfrak{I}| \geq 3$ il n'y a pas d'élément de torsion dans $\Gamma(\mathfrak{I})$. Ainsi les $M_{\mathfrak{I}} = \Gamma(\mathfrak{I})\backslash\mathbb{H}^3$ sont des variétés hyperboliques pour $\mathfrak{I}$ assez grand. De même les $\Gamma_1(\mathfrak{I})$ sont sans torsion pour $|\mathfrak{I}|$ assez grande et on note $M_1(\mathfrak{I})$ la variété $\Gamma_1(\mathfrak{I})\backslash\mathbb{H}^3$. En revanche les $\Gamma_0(\mathfrak{I})$ contiennent des éléments de torsion pour tout $\mathfrak{I}$, et si $d = 1, 3$ le groupe $\mathcal{O}_F^\times$ contient strictement $\{\mp 1\}$ et il y a donc en plus des éléments de torsion qui fixent le cusp à l'infini dans tous les $\Gamma_0(\mathfrak{I})$. On notera $M_0(\mathfrak{I})$ l'orbifold $\Gamma_0(\mathfrak{I})\backslash\mathbb{H}^3$.

Remarque 5.5. Les orbifolds $M_{\mathfrak{I}}$ et $M_0(\mathfrak{I})$ ont une systole qui tend vers l'infini avec $|\mathfrak{I}|$. Il n'est pas dur de voir qu'il existe des suites de sous-groupes de congruence pour lesquelles ce n'est pas le cas, par exemple si l'on fixe un élément loxodromique $\gamma_0 \in \Gamma$ et l'on pose :

$$\Gamma_{\gamma_0}(\mathfrak{I}) = \left\{ \gamma \in \Gamma,\ \exists k, \gamma = \gamma_0^k \pmod{\mathfrak{I}} \right\}. \tag{5.2}$$

On peut aussi construire une suite de sous-groupes de congruence de Γ qui n'est pas cusp-uniforme, en remplaçant le γ_0 loxodromique ci-dessus par un élément unipotent.

Cusps

Lemme 5.6. *Si H est un sous-groupe de $G_{\mathfrak{I}}$ on pose*

$$\mathcal{C}(H) = H\backslash G_{\mathfrak{I}}/N_{\mathfrak{I}}.$$

Si $F \neq \mathbb{Q}(\sqrt{-1}), \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ les cusps de $M_H := \Gamma_H\backslash\mathbb{H}^3$ sont en bijection naturelle avec l'ensemble $C(F) \times \mathcal{C}(H)$. Si $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}), \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ on note U_F le sous-groupe des unités de $\mathcal{O}_F$, agissant à droite sur $\mathcal{C}(H)$. L'ensemble des cusps de M_H est alors en bijection avec $\mathcal{C}(H)/U_F$.*

Démonstration. Soit P un parabolique F-rationnel tel que $\pi_{\mathfrak{I}}(\Gamma_P) = N_{\mathfrak{I}}(\mathfrak{I})$. L'ensemble des cusps de M_H au-dessus du cusp de $M(\mathcal{O}_F) = \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ correspondant à P est en bijection naturelle avec $\Gamma_H\backslash\Gamma/\Gamma_P = H\backslash G_{\mathfrak{I}}/N_{\mathfrak{I}}$.

Il suffit donc de démontrer que si P est un parabolique F-rationnel alors l'image $\pi_{\mathfrak{I}}(\Gamma_P)$ est $G_{\mathfrak{I}}$-conjugée à $N_{\mathfrak{I}}$. Comme $N = \pi_{\mathfrak{I}}(\Gamma_P)$ est le produit de ses projections sur les $G_{\mathfrak{P}_k^{l_k}}$ il suffit de montrer ceci pour $\mathfrak{I} = \mathfrak{P}^k$, $\mathfrak{P}$ premier. L'adhérence de Γ_P dans $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}})$ est égale au commutateur de $P(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}})$. D'autre part $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}})$ agit transitivement sur $\mathbb{P}^1(F_{\mathfrak{P}})$ et il suit que $\overline{\Gamma}_P$ est $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}})$-conjuguée au commutateur $[P_\infty(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}), P_\infty(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}})] = N_\infty(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}})$. Soit $K(\mathfrak{I})$ le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}})$ constitué des matrices congrues à 1 modulo $\pi^k\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$, on a alors $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}})/K(\mathfrak{I}) = G_{\mathfrak{I}}$ et $\pi_{\mathfrak{I}}(\Gamma_P) = \overline{\Gamma}_P/(\overline{\Gamma}_P \cap K(\mathfrak{I}))$ qui est donc $G_{\mathfrak{I}}$-conjugué à $N_\infty(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}})/(N_\infty(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}) \cap K(\mathfrak{P}^k)) = N_{\mathfrak{I}}$.

L'énoncé pour $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}), \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ se prouve de la même manière. □

On démontre pour finir la cusp-uniformité des groupes de congruence définis plus haut. On notera dans la suite $\Gamma_N = \Gamma \cap N$ pour $P = MAN$ un sous-groupe parabolique.

Lemme 5.7. *L'ensemble des réseaux euclidiens $\{\Gamma(\mathfrak{I})_N\}$, $\{\Gamma_0(\mathfrak{I})_N\}, \{\Gamma_1(\mathfrak{I})_N\}$, pour $\mathfrak{I}$ un idéal de $\mathcal{O}_F$ et $P = MAN$ un parabolique F-rationnel, est uniforme.*

Démonstration. D'après la proposition 5.1, si $b \neq 0$ et P est le stabilisateur de $(a : b)$ on a

$$\Gamma(\mathfrak{I})_N = 1 + \left\{ \begin{pmatrix} \frac{a}{b}c & -\frac{a^2}{b^2}c \\ c & -\frac{a}{b}c \end{pmatrix},\ c \in \mathfrak{I}\mathfrak{B}^2 \right\}$$

qui à homothétie près est isométrique à $\mathfrak{B}^2\mathfrak{I} \subset \mathbb{C}$. De même,

$$\Gamma_0(\mathfrak{I})_N = 1 + \left\{ \begin{pmatrix} \frac{a}{b}c & -\frac{a^2}{b^2}c \\ c & -\frac{a}{b}c \end{pmatrix},\ c \in \mathfrak{I} \cap \mathfrak{B}^2 \right\},$$
$$\Gamma_1(\mathfrak{I})_N = 1 + \left\{ \begin{pmatrix} \frac{a}{b}c & -\frac{a^2}{b^2}c \\ c & -\frac{a}{b}c \end{pmatrix},\ c \in \mathfrak{I}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}^2 \right\}.$$

Enfin, pour $P = P_\infty$ on a

$$\Gamma_0(\mathfrak{I})_N = \Gamma_1(\mathfrak{I})_N = \Gamma(\mathfrak{I})_N = 1 + \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ c \in \mathfrak{I} \right\}.$$

Ainsi il suffit de montrer que les idéaux de $\mathcal{O}_F$ sont un ensemble uniforme de réseaux. Si $\mathfrak{I}$ est un idéal et σ la conjugaison complexe alors $\mathfrak{I}\sigma(\mathfrak{I})$ est égal à $|\mathfrak{I}|^2\mathcal{O}_F$, d'où il suit que tout idéal de $\mathcal{O}_F$ contient un idéal d'indice 2 de la forme $m\mathcal{O}_F$ pour un entier $m \in \mathbb{Z}$. Comme ces derniers forment évidemment un ensemble uniforme on obtient la conclusion souhaitée. □

*. On envoie $u \in U_F$ sur la matrice diagonale ayant u, u^{-1} (mod $\mathfrak{I}$) comme coefficients, elle normalise alors $N_{\mathfrak{I}}$ et agit donc à droite sur $G_{\mathfrak{I}}/N_{\mathfrak{I}}$.

5.1.3 Indice et niveau

Le lemme suivant sera utile plus loin.

Lemme 5.8. *Pour tout sous-groupe de congruence* $\Gamma \subset \Gamma(\mathcal{O}_F)$ *de niveau* $\mathfrak{I}$ *on a*

$$[\Gamma(\mathcal{O}_F) : \Gamma] \geq \frac{1}{3} |\mathfrak{I}|^{\frac{1}{3}}.$$

Démonstration. Il faut montrer que pour un idéal $\mathfrak{I}$ de $\mathcal{O}_F$ et un sous-groupe propre H de $G_{\mathfrak{I}}$ qui ne contienne aucun des sous-groupes

$$G_{\mathfrak{I}}(\mathfrak{J}) = \{g \in G_{\mathfrak{I}}, g = 0 \pmod{\mathfrak{J}}\}$$

pour $\mathfrak{J}$ divisant $\mathfrak{I}$ on a $[G_{\mathfrak{I}} : H] \geq |\mathfrak{I}|^{\frac{1}{3}}/3$.

On traite d'abord le cas où $\mathfrak{I} = \mathfrak{P}^k$ pour un premier $\mathfrak{P}$, par récurrence sur k. Si $k = 1$ et H est un sous-groupe de $G_{\mathfrak{P}} = \mathrm{SL}_2(k_{\mathfrak{P}})$ distinct de $\{\pm 1\}$, alors H n'est pas distingué dans $G_{\mathfrak{P}}$ vu que le quotient $G_{\mathfrak{P}}/\{\pm 1\} = \mathrm{PSL}_2(k_{\mathfrak{P}})$ est simple. Comme tout sous-groupe de $G_{\mathfrak{P}}$ contenant le sous-groupe engendré par les carrés est lui-même distingué, il existe un $g \in G_{\mathfrak{P}}$ tel que $g^2 \notin H$. Ainsi $G_{\mathfrak{P}}$ n'agit pas par involutions sur $G_{\mathfrak{P}}/H$ et il suit que le représentation de $G_{\mathfrak{P}}$ sur $\mathbb{C}[G_{\mathfrak{P}}/H]$ contient un composant irréductible de dimension > 1 vu que $G_{\mathfrak{P}}^{\mathrm{ab}} = \mathbb{Z}/2$. Comme la dimension minimale d'une telle représentation est $(|\mathfrak{P}|-1)/2$ (cf. par exemple [FH91, Lecture 5]) on obtient le résultat voulu dans ce cas.

On suppose maintenant que $k > 1$; on a la suite exacte

$$0 \to \mathfrak{P}^k \mathfrak{sl}_2(k_{\mathfrak{P}}) \to \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F/\mathfrak{P}^k) \to \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F/\mathfrak{P}^{k-1}) \to 1.$$

Vu que $\mathfrak{P}^k \mathfrak{sl}_2(k_{\mathfrak{P}})$ est un p-groupe abélien (où p est le premier rationnel au-dessus de $\mathfrak{P}$) ses sous-groupes propres ont un idice au moins égal à $p \geq |\mathfrak{P}|^{\frac{1}{2}}$.

Enfin, si $\mathfrak{I} = \prod_{k=1}^r \mathfrak{P}_k^{l_k}$ et H_k est la projection de H dans $G_{\mathfrak{P}_k^{l_k}}$ alors on a $\prod_{k=1}^r [G_{\mathfrak{P}_k^{l_k}} : H_k] \leq [G_{\mathfrak{I}} : H]$. Pour conclure il suffit donc de montrer que $H_k \neq G_{\mathfrak{P}_k^{l_k}}$ et si $l_k \geq 2$, $H_k \not\supset G_{\mathfrak{P}_k^{l_k}}(\mathfrak{P}_k^l)$ pour tous k et $0 < l \leq l_k - 1$, ce pour quoi on refère à la preuve de [ABB+, Lemma 5.9]. □

5.1.4 Torsion analytique pour les M_0

On a $-1_G \in \Gamma_0(\mathfrak{I})$ pour tout $\mathfrak{I}$ et $\Gamma_0(\mathfrak{I})$ n'est donc pas égal au groupe fondamental de $M_0(\mathfrak{I})$. Quand $n_1 - n_2$ est impair, pour pouvoir définir un système local sur $M_0(\mathfrak{I})$ on doit donc choisir un relevé de $\mathrm{P}\Gamma_0(\mathfrak{I})$ à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Vu que $P_{\mathfrak{I}}$ ne contient aucun élément de trace nulle, pour tout idéal $\mathfrak{I} \neq \mathcal{O}_F$ le sous-groupe $\Gamma_0(\mathcal{O}_F)$ ne contient pas de 2-torsion. Par le résultat principal de [Cul86] on peut donc relever $\mathrm{P}\Gamma_0(\mathfrak{I})$ à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Les résultats que l'on énoncera sont valables pour n'importe quel choix de ces relevés.

5.2 Asymptotiques

Soit $\phi \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$. D'après les théorèmes 5.14 et 4.14, pour toute suite cusp-uniforme Γ_n de sous-groupes de congruence on a la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Tr}_R\, K_\phi^{\Gamma_n}}{\mathrm{vol}\, M_n} = \frac{\mathrm{Tr}_{\Gamma(\mathcal{O}_F)}\, k_\phi}{\mathrm{vol}(D)}. \tag{5.3}$$

En particulier cette limite est vrai si Γ_n ne contient que des sous-groupes principaux ou de type Γ_0 ou Γ_1 d'après le lemme 5.7. Pour ces derniers on peut de plus donner des estimées pour le côté spectral de la formule de pré-trace, ce qui permet de démontrer le résultat suivant.

Théorème 5.9. *Soit $\phi \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ et Γ_n une suite de sous-groupes de congruence de type $\Gamma(\mathfrak{I}), \Gamma_0(\mathfrak{I})$ ou $\Gamma_1(\mathfrak{I})$ deux à deux distincts. On a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Tr}(K_\phi^{\Gamma_n})_{\mathrm{disc}}}{\mathrm{vol}\, M_n} = \frac{\mathrm{Tr}_{\Gamma(\mathcal{O}_F)}\, k_\phi}{\mathrm{vol}(D)}.$$

Pour $\lambda \in [0, +\infty)$ on pose

$$m_V^p(\Gamma_n, \lambda) = \dim(\ker \Delta^p[M_n] - \lambda),$$

ce qui définit une mesure sur $[0, +\infty)$. On rappelle que les mesures spectrales m_V^p de $\mathbb{H}^3$ ont été définies par (13) et qu'elles sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. Comme $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1([0, +\infty))$ le théorème ci-dessus implique alors :

Corollaire 5.10. *Soit Γ_n une suite vérifiant les hypothèses du théorème 5.9 et A un borélien régulier de $[0, +\infty)$, on a alors la limite*

$$\frac{\sum_{\lambda\in A} m_V^p(\Gamma_n, \lambda)}{\mathrm{vol}\, M_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} m_V^p(A).$$

En particulier, pour tout $\lambda \in [0, +\infty)$ on a $m_V^p(\Gamma_n, \lambda) = o(\mathrm{vol}\, M_n)$.

Enfin, le contrôle du côté spectral nous permet aussi de vérifier l'hypothèse des théorèmes 4.14 et 4.15 et on obtient ainsi les résultat suivants.

Théorème 5.11. *Soit V une représentation fortemement acyclique de G et Γ_n une suite de sous-groupes de congruence de type $\Gamma(\mathfrak{I}), \Gamma_0(\mathfrak{I})$ ou $\Gamma_1(\mathfrak{I})$ deux à deux distincts. On a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log T_R(M_n; V)}{\mathrm{vol}\, M_n} = t^{(2)}(V).$$

Théorème 5.12. *Sous les mêmes hypothèses il existe une suite $Y^n \in [1, +\infty)^{h_n}$ telle que $\min_j Y_j^n/\alpha_n^j$ tende vers l'infini et que l'on ait les limites*

$$\frac{\log T_R(M_n; V) - \log T_{\mathrm{abs}}(M_n^{Y^n}; V)}{\mathrm{vol}\, M_n}, \frac{\log T_R(M_n; V) - \log T_{\mathrm{rel}}(M_n^{Y^n}; V)}{\mathrm{vol}\, M_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On démontre les théorèmes 5.9, 5.11 et 5.12 pour les groupes de congruence principaux dans 5.2.3, pour les groupes de Hecke dans 5.2.4 et finalement pour les groupes Γ_1 dans 5.2.5.

5.2.1 Convergence des orbifolds de congruence

Le théorème suivant est un cas particulier de [ABB+, Theorem 1.10].

Théorème 5.13. *Il existe un $\delta > 0$ (dépendant de F) tel que pour tout $\gamma_0 \in \Gamma$ il existe une constante C, dépendante de γ_0, telle que pour tout sous-groupe de congruence $\Gamma' \subset \Gamma$ le nombre de points fixes de γ_0 dans Γ/Γ' soit inférieur à $C[\Gamma : \Gamma']^{1-\delta}$.*

Comme dans le cas cocompact on peut en déduire la BS-convergence des suites de congruence.

Théorème 5.14. *Soit $\Gamma = \Gamma(\mathcal{O}_F)$ un groupe de Bianchi et Γ_n une suite de sous-groupes de congruence principaux ou de type Γ_0 ou Γ_1 et deux à deux distincts. Alors la suite des orbifolds $M_n = \Gamma_n \backslash \mathbb{H}^3$ BS-converge vers $\mathbb{H}^3$.*

Démonstration. Comme la suite Γ_n est cusp-uniforme, il suffit de vérifier les deux conditions de la proposition 4.10.

On commence par montrer que si c est une géodésique de longueur ℓ_0 dans $M = \gamma\backslash\mathbb{H}^3$ alors le nombre de ses relevés de longueur ℓ dans M_n est un $o(\operatorname{vol} M_n)$, d'où il suit immédiatement que pour tout $R > 0$ le nombre de géodésiques de longueur inférieure à R dans M_n est un $o(\operatorname{vol} M_n)$. Soient γ_0 un élément de la classe de conjugaison représentant c et $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ des représentants des Γ_n-classes de conjugaison de γ_0 contenues dans Γ_n, le nombre de géodésiques de longueur ℓ_0 au-dessus de c dans M_n est ainsi égal à m. D'autre part, si l'on écrit $\gamma_j = g_j^{-1}\gamma_0 g_j$ pour un $g_j \in \Gamma$ on tire de $\gamma_j \in \Gamma_n$ que l'on a $\gamma_0 g_j \Gamma_n = g_j \Gamma_n$. Comme les γ_j ne sont pas Γ_n-conjugués les classes à droite $g_j\Gamma_n$ sont deux à deux distinctes et il suit que γ_0 a au moins (en fait exactement) m points fixes dans Γ/Γ_n, d'où il suit que $m \leq C[\Gamma : \Gamma_n]^{1-\delta}$.

On vérifie maintenant la condition sur le lieu singulier : soit $\gamma_0 \in \Gamma$ un élément elliptique non-cuspidal, on va montrer que si $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \Gamma_n$ sont des représentants des Γ_n-classes de conjugaison de γ_0 contenues dans Γ_n et $\ell_1, \dots, \ell_m$ les longueurs des géodésiques fermées associées alors

$$\sum_{j=1}^{m} \ell_j \leq C\ell(\gamma_0)[\Gamma : \Gamma_n]^{1-\delta}, \tag{5.4}$$

d'où la condition souhaitée suit immédiatement.

Soit $\gamma_1 \in \Gamma$ un élément loxodromique primitif normalisant γ. On écrit

$$\gamma_j = g_j \gamma_0 g_j^{-1}, \quad N_{\Gamma_n}(\gamma_j) = g_j \langle \gamma_j, \gamma_1^{l_j} \rangle g_j^{-1}$$

de sorte que $\ell_j = k_j \ell_0$. On va donc montrer que le nombre de points fixes de γ_0 dans Γ/Γ_n est égal à $\sum_{j=1}^m k_j$, d'où (5.4) suit d'après le théorème 5.13. Pour cela on remarque que les points fixes de γ_0 dans Γ/Γ_n sont exactement les $\gamma g_j \Gamma_n$ pour $\gamma \in N_\Gamma(\gamma_0)$ (vu que $\gamma_0 g \gamma_n = g\Gamma_n$ si et seulement si $g\gamma_0 g^{-1} \in \Gamma_n$) et que l'orbite de $g_j\Gamma_n$ sous $N_\Gamma(\gamma_0)$ est de cardinal égal à

$$N_\Gamma(\gamma_0)/\mathrm{Stab}_{N_\Gamma(\gamma_0)}(g_j\Gamma_n) = N_\Gamma(\gamma_0)/(g_j N_\Gamma(\gamma_0) g_j^{-1} \cap \Gamma_n) = k_j$$

ce qui termine la preuve. □

On rappelle que les opérateurs d'entrelacement $\Psi_l(s), \Phi_l(s)$ ontété définis dans la section 5.4 et dépendent de n.

Corollaire 5.15. *Si Γ_n est comme dans le théorème 5.11 et on a pour tout l des estimées*

$$\left|\operatorname{tr}\left(\Psi_l(iu)^{-1}\frac{d\Psi_l(iu)}{du}\right)\right|, \left|\operatorname{tr}\left(\Phi_l(iu)^{-1}\frac{d\Phi_l^{\pm}(iu)}{du}\right)\right| = o(\operatorname{vol} M_n)$$

uniformes pour u près de 0 alors on a les limites

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log T_R(M_n; V)}{\operatorname{vol} M_n} = t^{(2)}(V)$$

et (pour la suite du théorème 4.15)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log T_R(M_n; V) - \log T_{\mathrm{abs}}(M_n^{Y^n}; V)}{\operatorname{vol} M_n} = 0.$$

Démonstration. Ces limites sont une conséquence directe du théorème 4.14 (resp. 4.15), du théorème 5.14 et du lemme 5.7. □

5.2.2 Préliminaires à la preuve

Opérateurs d'entrelacement

On fixe $\mathfrak{I}$ et un sous-groupe H de $G_{\mathfrak{I}} = \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F/\mathfrak{I})$, $M = M_H$ et h le nombre de cusps de M. On rappelle que l'on a posé $\mathcal{C}(H) = N_{\mathfrak{I}}\backslash G_{\mathfrak{I}}/H$. On note

$$T_{\mathfrak{I}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix},\ a \in (\mathcal{O}_F/\mathfrak{I})^\times \right\},$$

on a $|T_{\mathfrak{I}}| = |\mathfrak{I}| \prod_{k=1}^r (1 - q_k^{-1})$ (où $\mathfrak{I} = \prod_k \mathfrak{P}_k^{l_k}$). On voit que $T_{\mathfrak{I}}$ normalise $N_{\mathfrak{I}}$ et il agit donc à doite sur $\mathcal{C}(H)$. On identifie $V_{\mathbb{C}}^h$ à $U = \mathbb{C}[C(F) \times \mathcal{C}(H)] \otimes V$ et on considère ainsi les opérateurs d'entrelacement $\Psi(s)$ comme des endomorphismes de U. L'espace U est un $C(F) \times T_{\mathfrak{I}}$-module (où l'action sur V est triviale) et pour un caractère χ de $T_{\mathfrak{I}} \times C(F)$ on note U_χ le sous-espace χ-isotypique. De la même manière, on identifie $U \otimes \mathfrak{p}^*$ à la somme $V_{\mathbb{C}}^h \oplus \Omega^+(V) \oplus \Omega^-(V)$ et on note $U^\pm(\chi)$ les sous-espaces χ-isotypiques dans $U \otimes \mathbb{C}[dz_j]$, $U \otimes \mathbb{C}[d\bar{z}_j]$ respectivement.

Pour tout $\mathfrak{I}$ on a une surjection $F^\times\backslash\mathbb{A}_f^1 \to T_{\mathfrak{I}}$ (cf. 0.5), et tout caractère χ de $T_{\mathfrak{I}} \times C(F)$ se relève donc en un caractère de Hecke $\widetilde{\chi}$. Le conducteur $\mathfrak{f}_\chi$ de χ est alors défini comme le conducteur $\mathfrak{f}_{\widetilde{\chi}}$ (cf. la section 0.5.3) et le résultat suivant est alors un corollaire des estimées adéliques prouvées à la fin du chapitre (la proposition 5.29) et de la discussion de 5.3.6 ci-dessous.

Proposition 5.16. *Les opérateurs $\Psi(s)$ sont unitaires sur U et préservent les sous-espaces $U(\chi) \oplus U(\overline{\chi})$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $l = -2q, \ldots, 2q$ il existe une fonction C_ε à croissance polynomiale sur $\mathbb{R}$ telle que l'on ait*

$$\left| \frac{d}{du} \Psi(iu)|_{U(\chi)\otimes V_l} \right|, \left| \frac{d}{du} \Phi^\pm(iu)|_{U^\pm(\chi)\otimes V_l} \right| \leq C_\varepsilon(u) |\mathfrak{I}|^\varepsilon |\mathfrak{f}_\chi|^{\frac{1}{2}}.$$

De l'estimée sur les traces aux multiplicités limites

Le théorème 5.9 est une conséquence des estimées sur les opérateurs d'entrelacement et du fait suivant.

Lemme 5.17. *Soit Γ_n une suite de sous-groupes de Γ, cusp-uniforme et BS-convergente vers $\mathbb{H}^3$. Si pour tout $l = -2q, \ldots, 2q$ on a une estimée*

$$\left| \mathrm{tr} \left(\Psi_l(iu)^{-1} \frac{d\Psi_l(iu)}{du} \right) \right| \leq C(u) o([\Gamma : \Gamma_n]) \ \textit{(resp.} \ \left| \mathrm{tr} \left(\Phi_l^\pm(iu)^{-1} \frac{d\Phi_l^\pm(iu)}{du} \right) \right| \leq C(u) o([\Gamma : \Gamma_n]) \ )$$

avec $C(u)$ à croissance polynomiale alors on a pour $p = 0$ (resp. $p = 1$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Tr}_{\mathrm{disc}}\, \phi(\Delta^p[M_n])}{[\Gamma : \Gamma_n]} = \mathrm{Tr}_\Gamma\, \phi(\Delta^p[\mathbb{H}^3]).$$

Démonstration. D'après (5.3) les traces régularisées convergent et on doit donc montrer que $\mathrm{Tr}_R\, K_{\phi,p}^\Gamma - \mathrm{Tr}(K_{\phi,p}^\Gamma)_{\mathrm{disc}}$ est un $o(\mathrm{vol}\, M_{\mathfrak{I}})$. On traite $p = 0$; de (3.15) il suit que l'on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_R\, K_{\phi,0}^{\Gamma_n} - \mathrm{Tr}(K_{\phi,0}^{\Gamma_n})_{\mathrm{disc}} = & \frac{1}{4} \sum_{l=-2q}^{2q} d_l \phi \left(\left(1 - \frac{|l|}{2}\right)^2 + \lambda_V \right) \mathrm{tr}\, \Psi_l(0) \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-2q}^{2q} d_l \phi \left(\left(1 - \frac{|l|}{2}\right)^2 + u^2 + \lambda_V \right) \mathrm{tr} \left(\Psi_l(iu)^{-1} \frac{d\Psi_l(iu)}{du} \right) du \end{aligned}$$

Comme $\Psi(iu)$ est unitaire pour tout $u \in \mathbb{R}$ il vient

$$\frac{1}{4}\sum_{l=-2q}^{2q} d_l \phi\left(\left(1-\frac{|l|}{2}\right)^2+\lambda_V\right)\operatorname{tr}\Psi_l(0) \leq C\sum_{l=-2q}^{2q} d_l \leq Ch_n.$$

En posant

$$\xi(u) = \max_{l=-2q,\dots,2q} \phi\left(\left(1-\frac{|l|}{2}\right)^2+u^2+\lambda_V\right)$$

on obtient alors :

$$|\operatorname{Tr}_R K_{\phi,0}^{\Gamma_n} - \operatorname{Tr}(K_{\phi,0}^{\Gamma(\mathfrak{I})})_{\text{disc}}| \leq Ch_n + \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(u)C(u)du\, o([\Gamma:\Gamma_n])$$

et d'après le lemme 4.6 le côté droit est un $o([\Gamma:\Gamma_n])$, ce qui termine la preuve. □

5.2.3 Groupes principaux

Le résultat suivant est un corollaire grossier de la proposition 5.16 ci-dessus.

Lemme 5.18. *Pour un sous-groupe de congruence de niveau $\mathfrak{I}$ et $u \in \mathbb{R}$ on a la majoration $\left|\frac{d\Psi_l(iu)}{du}\right| \leq C_\varepsilon(u)|\mathfrak{I}|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ où $C_\varepsilon(u)$ ne dépend que de F et V et est à croissance polynomiale en u.*

Pour les groupes principaux les cusps sont en bijection avec $G_{\mathfrak{I}}/N_{\mathfrak{I}}$, qui est de cardinal $\leq |\mathfrak{I}|^3/|\mathfrak{I}| = |\mathfrak{I}|^2$ et on a donc pour tout $\varepsilon > 0$ la majoration

$$\left|\operatorname{tr}\left(\Psi_l(iu)^{-1}\frac{d\Psi_l(iu)}{du}\right)\right| \leq C_\varepsilon(u)|\mathfrak{I}|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\dim(V_l)|G_{\mathfrak{I}}/N_{\mathfrak{I}}| \ll C_\varepsilon(u)|\mathfrak{I}|^{\frac{5}{2}+\varepsilon}$$

(et des estimée semblables sont valables pour les $\Phi^{\pm}$). Le côté droit est bien un $o([\Gamma:\Gamma(\mathfrak{I})])$ pour $\varepsilon < 1/2$, et les théorèmes 5.11 et 5.12 (resp. le théorème 5.9) pour les groupes principaux suivent immédiatement du corollaire 5.15 (resp. du lemme 5.17).

5.2.4 Groupes de Hecke

En général les considérations grossières utilisées ci-dessus ne sont pas suffisantes pour vérifier l'hypothèse du lemme 5.17 (par exemple pour les groupes de Hecke de niveau $\mathfrak{P}^2$ l'indice est $\asymp |\mathfrak{P}|^2$ et le nombre de cusps est égal à $|\mathfrak{P}|+1$). On a besoin de prendre en compte la structure de l'ensemble des cusps comme $T_{\mathfrak{I}}$-module pour majorer les termes spectraux, ce qui est fait dans le lemme suivant.

Lemme 5.19. *Il existe une constante C ne dépendant que de F, V telle que pour tout idéal $\mathfrak{I}$, $H = P_{\mathfrak{I}}$ ou $H = N_{\mathfrak{I}}$ et tout l on ait la majoration*

$$\frac{\left|\operatorname{tr}\left(\Psi_l(iu)^{-1}\frac{d\Psi_l(iu)}{du}\right)\right|}{[\Gamma:\Gamma_H]} \leq C_\varepsilon(u)C|\mathfrak{I}|^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\frac{\sum_{g\in P_{\mathfrak{I}}\backslash G_{\mathfrak{I}}/H}\left(\frac{|P_{\mathfrak{I}}\cap(gHg^{-1})|}{|N_{\mathfrak{I}}\cap(gHg^{-1})|}\right)^{-\frac{3}{2}}}{\sum_{g\in P_{\mathfrak{I}}\backslash G_{\mathfrak{I}}/H}|P_{\mathfrak{I}}\cap(gHg^{-1})|^{-1}}.$$

Une majoration similaire est valable pour $\left|\operatorname{tr}\left(\Phi_l(iu)^{-1}\frac{d\Psi_l(iu)}{du}\right)\right|$.

Démonstration. Soient $H = P_{\mathfrak{I}}$ ou $N_{\mathfrak{I}}$, $g \in G_{\mathfrak{I}}$ et $U_l(g)$ le sous-espace de $\mathbb{C}[C(F) \times \mathcal{C}(H)] \otimes V_l$ engendré par les $C(F) \times T_{\mathfrak{I}}$-orbites de $(1_{C(F)}, g) \otimes v$ pour $v \in V_l$. On va commencer par démontrer que l'on a

$$\left| \frac{d\Psi(iu)}{du}|_{U_l(g)} \right| \leq 2C_\varepsilon(u)|\mathfrak{I}|^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \left(\frac{|N_{\mathfrak{I}} \cap gHg^{-1}|}{|P_{\mathfrak{I}} \cap gHg^{-1}|} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.5}$$

On vérifie que les sous-groupes de $T_{\mathfrak{I}}$ pouvant fixer une classe $N_{\mathfrak{I}}gH$ (pour $H = N_{\mathfrak{I}}$ ou $P_{\mathfrak{I}}$, ce n'est bien sûr pas vrai en général) sont les noyaux $T_{\mathfrak{J}}(\mathfrak{J})$ des applications $T_{\mathfrak{I}} \to T_{\mathfrak{J}}$ pour $\mathfrak{J}$ divisant $\mathfrak{I}$. En effet pour $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ on a $\begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Stab}(N_{\mathfrak{I}}gH)$ si et seulement s'il existe un $b \in \mathcal{O}_F/\mathfrak{I}$ tel que $g \begin{pmatrix} a & b \\ & a^{-1} \end{pmatrix} g^{-1} \in H$. On a

$$g \begin{pmatrix} a & b \\ & a^{-1} \end{pmatrix} g^{-1} = \begin{pmatrix} a + (a - a^{-1})\beta\gamma - b\alpha\gamma & \dots \\ \gamma(\delta(a - a^{-1}) - \gamma b) & a^{-1} + (a - a^{-1})\beta\gamma + b\alpha\gamma \end{pmatrix}.$$

On voit ainsi que l'existence d'un b convenable est équivalente à une condition $a = 1 \pmod{\mathfrak{J}}$ pour un $\mathfrak{J}$ ne dépendant que de g.

On a donc $\mathrm{Stab}_{T_{\mathfrak{I}}} N_{\mathfrak{I}}gH = T_{\mathfrak{I}}(\mathfrak{J}(g))$ pour un idéal $\mathfrak{J}(g)$ divisant $\mathfrak{I}$ et il suit que si χ est un caractère intervenant dans $U(g)$ alors $\mathfrak{f}_\chi$ divise $\mathfrak{J}(g)$. On a $|T_{\mathfrak{J}(g)}| = |(\mathcal{O}_F/\mathfrak{J}(g))^\times| \geq 1/2|\mathfrak{J}(g)|$ et il vient

$$\begin{aligned} |\mathfrak{J}(g)| \leq 2|T_{\mathfrak{J}(g)}| &= \frac{|T_{\mathfrak{I}}|}{|T_{\mathfrak{J}(g)}|} = 2\frac{|T_{\mathfrak{I}}|}{|\mathrm{Stab}_{T_{\mathfrak{I}}} N_{\mathfrak{I}}gH|} \\ &\leq 2|\mathfrak{I}|\frac{|\mathrm{Stab}_{N_{\mathfrak{I}}} gH|}{|\mathrm{Stab}_{P_{\mathfrak{I}}} gH|} = 2|\mathfrak{I}|\frac{|N_{\mathfrak{I}} \cap gHg^{-1}|}{|P_{\mathfrak{I}} \cap gHg^{-1}|} \end{aligned}$$

où l'inégalité de la seconde ligne suit du fait que

$$|\mathrm{Stab}_{T_{\mathfrak{I}}} N_{\mathfrak{I}}gH| = \frac{|\mathrm{Stab}_{P_{\mathfrak{I}}} gH|}{|\mathrm{Stab}_{N_{\mathfrak{I}}} gH|}.$$

L'estimée (5.5) est alors une conséquence immédiate de la proposition 5.16.

On a

$$\mathbb{C}[C(F) \times \mathcal{C}(H)] \otimes V_l = \bigoplus_{g \in T_{\mathfrak{I}} \backslash \mathcal{C}(H)} U_l(g)$$

et il suit de (5.5) et du fait que $\Psi(iu)$ est unitaire que l'on a

$$\begin{aligned} \left| \mathrm{tr} \left(\Psi_l(iu)^{-1} \frac{d\Psi_l(iu)}{du} \right) \right| &\leq \sum_{g \in T_{\mathfrak{I}} \backslash \mathcal{C}(H)} \dim U_l(g) \left| \frac{d\Psi(iu)}{du}|_{U_l(g)} \right| \\ &\leq 2C_\varepsilon(u)|\mathfrak{I}|^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \sum_{g \in T_{\mathfrak{I}} \backslash \mathcal{C}(H)} \dim U_l(g) \left(\frac{|N_{\mathfrak{I}} \cap gHg^{-1}|}{|P_{\mathfrak{I}} \cap gHg^{-1}|} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Comme

$$\dim U_l(g) = h_F \frac{|T_{\mathfrak{I}}|}{\mathrm{Stab}_{T_{\mathfrak{I}}} N_{\mathfrak{I}}gH} \dim V_l \leq h_F \dim V_l \, |\mathfrak{I}| \frac{|N_{\mathfrak{I}} \cap gHg^{-1}|}{|P_{\mathfrak{I}} \cap gHg^{-1}|}$$

on obtient finalement que

$$\mathrm{tr} \left(\Psi_l(iu)^{-1} \frac{d\Psi_l(iu)}{du} \right) \leq 2C_\varepsilon(u) h_F \dim V_l |\mathfrak{I}|^{\frac{3}{2}+\varepsilon} \sum_{g \in T_{\mathfrak{I}} \backslash \mathcal{C}(H)} \left(\frac{|N_{\mathfrak{I}} \cap gHg^{-1}|}{|P_{\mathfrak{I}} \cap gHg^{-1}|} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

D'autre part on a $T_{\mathfrak{I}}\backslash\mathcal{C}(H) = P_{\mathfrak{I}}\backslash G_{\mathfrak{I}}/H$ et le calcul suivant pour l'indice :

$$[\Gamma : \Gamma_H] = |G_{\mathfrak{I}}/H| = \sum_{g\in P_{\mathfrak{I}}\backslash G_{\mathfrak{I}}/H} \frac{|P_{\mathfrak{I}}|}{|\mathrm{Stab}_{P_{\mathfrak{I}}} gH|} \geq \frac{1}{2}|\mathfrak{I}|^2 \sum_{g\in P_{\mathfrak{I}}\backslash G_{\mathfrak{I}}/H} |P_{\mathfrak{I}} \cap gHg^{-1}|^{-1}$$

d'où le résultat suit finalement, avec $C = 4h_F \max_l \dim V_l$. La preuve pour les Φ_l est la même en remplaçant V par $V \otimes \mathfrak{p}^*$. □

On traite maintenant le cas particulier des groupes de Hecke $\Gamma_0(\mathfrak{I})$. On pose

$$w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $|wP_{\mathfrak{I}}w^{-1} \cap P_{\mathfrak{I}}| = 1$ et on en tire que

$$\sum_{g\in P_{\mathfrak{I}}\backslash G_{\mathfrak{I}}/P_{\mathfrak{I}}} |gP_{\mathfrak{I}}g^{-1} \cap P_{\mathfrak{I}}|^{-1} \geq |wP_{\mathfrak{I}}w^{-1} \cap P_{\mathfrak{I}}| \geq 1$$

et il suit alors du lemme 5.19 que l'on a

$$\frac{\left|\mathrm{tr}\left(\Psi(iu)^{-1}\frac{d\Psi(iu)}{du}\right)\right|}{[\Gamma : \Gamma_0(\mathfrak{I})]} \leq C_\varepsilon(u) C|\mathfrak{I}|^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}|P_{\mathfrak{I}}\backslash G_{\mathfrak{I}}/P_{\mathfrak{I}}|.$$

Le lemme suivant permet alors d'appliquer le lemme 5.17 et le corollaire 5.15, ce qui finit le preuve des théorèmes 5.9, 5.11 et 5.12 dans ce cas.

Lemme 5.20. *On a $|P_{\mathfrak{I}}\backslash G_{\mathfrak{I}}/P_{\mathfrak{I}}| = o(|\mathfrak{I}|^\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$.*

Démonstration. On note $\widetilde{G}_{\mathfrak{I}} = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F/\mathfrak{I})$ et $\widetilde{P}_{\mathfrak{I}}$ la préimage de $P_{\mathfrak{I}}$ dans $\widetilde{G}_{\mathfrak{I}}$, on a alors $P_{\mathfrak{I}}\backslash G_{\mathfrak{I}}/P_{\mathfrak{I}} = \widetilde{P}_{\mathfrak{I}}\backslash\widetilde{G}_{\mathfrak{I}}/\widetilde{P}_{\mathfrak{I}}$.

On commence par traiter le cas où $\mathfrak{I} = \mathfrak{P}^k$. On note $q = |\mathfrak{P}|$ et on choisit un $\pi \in \mathfrak{P}\mathcal{O}_F - \mathfrak{P}^2\mathcal{O}_F$ de sorte que pour tout l on ait $\mathfrak{P}^l(\mathcal{O}_F/\mathfrak{I}) = \pi^l\mathcal{O}_F/\mathfrak{I}$. On va montrer que $w, 1+\pi w, \ldots, 1+\pi^{k-1}w, 1$ sont des représentants des doubles classes de $\widetilde{P}_{\mathfrak{I}}$ dans $\widetilde{G}_{\mathfrak{I}}$. Pour $l = 1, \ldots, k-1$ et $g = 1 + \pi^l w$ on a :

$$|g\widetilde{P}_{\mathfrak{I}}g^{-1} \cap \widetilde{P}_{\mathfrak{I}}| = q^{2k+l-1}(q-1). \tag{5.6}$$

En effet on voit que $g^{-1} = 1 - (1+\pi^{2l})^{-1}\pi^l w$, et pour $h = \begin{pmatrix} a & b \\ & c \end{pmatrix}$ il vient :

$$\begin{aligned} ghg^{-1} &= 1 + \pi^l(1+\pi^{2l})^{-1}\left(wh - hw + \pi^l(whw^{-1} - h\right) \\ &= \begin{pmatrix} \ldots & \ldots \\ \pi^l(1+\pi^{2l})^{-1}(a - c + \pi^l b) & \ldots \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

pour avoir $ghg^{-1} \in \widetilde{P}_{\mathfrak{I}}$ une fois $a \in (\mathcal{O}_F/\mathfrak{I})^\times$ fixé on doit donc choisir c tel que $a - c \in \pi^l\mathcal{O}_F/\mathfrak{I}$ (ce qui fait q^{k-l} possibilités) et $\pi^{2l}b$ est alors déterminé, ce qui donne q^{2l} choix possibles. Comme $|(\mathcal{O}_F/\mathfrak{I})^\times| = (q-1)q^{k-1}$ on obtient bien (5.6).

On déduit de (5.6) que les $\widetilde{P}_{\mathfrak{I}}$-orbites de $w\widetilde{P}_{\mathfrak{I}}, (1+\pi w)\widetilde{P}_{\mathfrak{I}}, \ldots, \widetilde{P}_{\mathfrak{I}}$ sont deux à deux distinctes et que l'on a $|\widetilde{P}_{\mathfrak{I}}.(1+\pi^l w)\widetilde{P}_{\mathfrak{I}}| = q^{k-l-1}(q-1)$. L'orbite de $w\widetilde{P}_{\mathfrak{I}}$ est de cardinal q^k, celle de $\widetilde{P}_{\mathfrak{I}}$ de cardinal 1. La somme des cardinaux de toutes ces orbites est donc égale à

$$q^k + q^{k-2}(q-1) + q^{k-3}(q-1) + \ldots + (q-1) + 1 = q^k + q^{k-1} = |\widetilde{G}_{\mathfrak{I}}/\widetilde{P}_{\mathfrak{I}}|$$

et il suit que ce sont toutes les orbites, on conclut donc que $|P_{\mathfrak{I}}\backslash G_{\mathfrak{I}}/P_{\mathfrak{I}}| = k+1$.

Si $\mathfrak{I} = \prod_{k=1}^{r} \mathfrak{P}_k^{l_k}$, comme $P_{\mathfrak{I}}$ est le produit de ses projections sur les facteurs $G_{\mathfrak{P}_k^{l_k}}$ de $G_{\mathfrak{I}}$ on obtient par le calcul précédent que

$$|P_{\mathfrak{I}}\backslash G_{\mathfrak{I}}/P_{\mathfrak{I}}| = \prod_{k=1}^{r}(l_k+1).$$

Comme pour tout $\varepsilon > 0$ on a que $q^{k\varepsilon}/(k+1)$ tend vers 0 quand $\max(q,k)$ tend vers l'infini le côté droit est bien un $o(|\mathfrak{I}|^{\varepsilon})$. □

5.2.5 Groupes Γ_1

Pour les groupes $\Gamma_1(\mathfrak{I})$ le cardinal de $|P_{\mathfrak{I}}\backslash G_{\mathfrak{I}}/N_{\mathfrak{I}}|$ n'est pas un $o(|\mathfrak{I}|^{\varepsilon})$ pour tout ε et on doit donc analyser chacun des termes de la somme du numérateur dans le lemme 5.19.

Lemme 5.21. *Soit $k \geq 1$, $\mathfrak{I} = \mathfrak{P}^k$. Pour $l = 1, \ldots, \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor$ et $u \in k_{\mathfrak{P}}^{\times}$ le nombre de doubles classes $P_{\mathfrak{I}} g N_{\mathfrak{I}}$ telles que $g = 1 + u\pi^l w \pmod{\mathfrak{P}^{l+1}}$ est égal à q^{l-1}, et pour un tel g on a $|gN_{\mathfrak{I}}g^{-1} \cap P_{\mathfrak{I}}| = q^{2l}$ et $|gN_{\mathfrak{I}}g^{-1} \cap N_{\mathfrak{I}}| = q^l$.*

Pour $l = \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor, \ldots, k-1$ le nombre de telles classes est égal à q^{k-l-1} et on a $|gN_{\mathfrak{I}}g^{-1} \cap P_{\mathfrak{I}}| = q^k$ et $|gN_{\mathfrak{I}}g^{-1} \cap N_{\mathfrak{I}}| = q^l$.

Démonstration. On commence par calculer le cardinal des stabilisateurs. On travaille dans GL_2 pour simplifier (on note $\widetilde{N}_{\mathfrak{I}}$ la préimage de $N_{\mathfrak{I}}$ dans $\widetilde{G}_{\mathfrak{I}}$) et il suffit de faire le calcul pour $u = 1$ vu que le choix de π a été fait à multiplication par une unité près. Pour $g = 1 + \pi^k w$ on a déjà fait les calculs dans la preuve du lemme 5.20 : pour $h = \begin{pmatrix} a & b \\ & a \end{pmatrix}$ on a

$$ghg^{-1} = \begin{pmatrix} a - (1+\pi^{2l})^{-1}\pi^l b & \ldots \\ -(1+\pi^{2l})^{-1}\pi^{2l} b & a + (1+\pi^{2l})^{-1}\pi^l b \end{pmatrix}$$

et on voit donc que $ghg^{-1} \in \widetilde{P}_{\mathfrak{I}}$ si et seulement si $\pi^{2l} b = 0$, ce qui donne bien q^{2l} possibilités pour b si $l \leq \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor$ et q^k si $l \geq \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor$. De même, on a $ghg^{-1} \in \widetilde{N}_{\mathfrak{I}}$ si et seulement si $\pi^l b = 0$, et on a donc $|N_{\mathfrak{I}} \cap gN_{\mathfrak{I}}g^{-1}| = q^l$ pour tout l.

Dans tous les cas $\widetilde{N}_{\mathfrak{I}} \cap g\widetilde{N}_{\mathfrak{I}}g^{-1}$ et $\widetilde{P}_{\mathfrak{I}} \cap g\widetilde{N}_{\mathfrak{I}}g^{-1}$ sont contenus dans $Z_{\mathfrak{I}}\widetilde{G}_{\mathfrak{I}}(\mathfrak{P}^{k-l})$ (où $Z_{\mathfrak{I}}$ est le centre de $\widetilde{G}_{\mathfrak{I}}$ et $\widetilde{G}_{\mathfrak{I}}(\mathfrak{P}^{k-l})$ est l'ensemble des matrices de $\widetilde{G}_{\mathfrak{I}}$ congrues à 1 modulo $\mathfrak{P}^{k-l}$) et ils sont donc invariants par conjugaison par une matrice congrue à 1 modulo $\mathfrak{P}^l$; il suit que les cardinaux sont les mêmes pour $g = 1 + \pi^l w + x, x = 0 \pmod{\mathfrak{P}^l}$ que pour $1 + \pi^l w$, et la seconde partie du lemme suit.

On va maintenant en déduire la première partie. On minore d'abord le nombre de classes par le résultat souhaité : on va voir que si $k \geq 2l$ alors le nombre de classes est au moins q^{k-l-1}, et comme on a alors une surjection $P_{\mathfrak{I}}\backslash G_{\mathfrak{I}}/N_{\mathfrak{I}} \to P_{\mathfrak{P}^{2l}}\backslash G_{\mathfrak{P}^{2l}}/N_{\mathfrak{P}^{2l}}$ on déduit le résultat dans ce cas du résultat pour $k = 2l$. Pour démontrer cette minoration on prouve que si $g = 1 + \pi^l w \pmod{\mathfrak{P}^l}$ tout élément $g' \in P_{\mathfrak{I}} g N_{\mathfrak{I}}$ tel que $g' = 1 \pmod{\mathfrak{P}^{l-1}}$ a le même coefficient en bas à gauche que g. On peut en effet écrire $g' = hg(1+n)$ avec $h \in P_{\mathfrak{I}}$ et $n = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il vient

$$g' = h'(1-n)g(1+n) = h'g + h'(gn - ng)$$

où $h' = h(1+n) \in P_{\mathfrak{I}}$. Comme $g' = 1 \pmod{\mathfrak{P}^{l-1}}$ on a nécéssairement $h' = 1 \pmod{\mathfrak{P}^{l-1}}$, d'où il suit que $h'g$ a le même coefficient en bas à gauche que g ; d'autre part $gn - ng$ est une matrice

triangulaire supérieure et il suit que g' lui-même a le même coefficient en bas à gauche que g, ce qui termine la preuve de la minoration.

On a $|P_{\mathfrak{I}}\backslash G_{\mathfrak{I}}| = q^k + q^{k-1}$; d'autre part $(P_{\mathfrak{I}}w).N_{\mathfrak{I}}$ est de cardinal q^k, et le cardinal d'une orbite $(P_{\mathfrak{I}}g).N_{\mathfrak{I}}$ avec g congru à 1 modulo $\mathfrak{P}^2$ est égal à q^{k-2} d'après la première partie du lemme. Il y a ainsi au plus $(q-1)$ telles orbites, et il y en a donc exactement $(q-1)$. De même, si le résultat est vrai jusqu'à l le cardinal total des classes qui ne sont pas $= 1 \pmod{\mathfrak{P}^l}$ est égal à q^{k-l-1}. Si $l < (k-1)/2$ le cardinal d'une classe $= 1 \pmod{\mathfrak{P}^l}, \neq 1 \pmod{'}\mathfrak{P}^{l+1}$ est égal à q^{k-2l} il y en a au plus $(q-1)q^{l-2}$, donc exactement ce nombre ; si $l \geq (k-1)/2$ le cardinal d'une telle classe est 1, il y en donc au plus $(q-1)q^{k-l-2}$ et par suite c'est le nombre exact. $\square$

D'après ce lemme, pour $\mathfrak{I} = \mathfrak{P}^k$ on a donc

$$\sum_{g\in P_{\mathfrak{I}}\backslash G_{\mathfrak{I}}/N_{\mathfrak{I}}} \left(\frac{|P_{\mathfrak{I}} \cap gN_{\mathfrak{I}}g^{-1}|}{|N_{\mathfrak{I}} \cap gN_{\mathfrak{I}}g^{-1}|}\right)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} (q-1)q^{l-1}q^{-\frac{3l}{2}} + \sum_{l=\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^{k-1} (q-1)q^{k-l-1}q^{-\frac{3(k-l)}{2}} + 1$$
$$\leq 2 + 2\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor q^{-\frac{1}{2}} \leq k+3.$$

D'autre part le dénominateur $\sum_{g\in P_{\mathfrak{I}}\backslash G_{\mathfrak{I}}/N_{\mathfrak{I}}} |P_{\mathfrak{I}} \cap gN_{\mathfrak{I}}g^{-1}|^{-1}$ est supérieur à 1 vu que le terme pour $g = w$ vaut 1, et il suit donc du lemme 5.19 que pour $\mathfrak{I} = \prod_{k=1}^r \mathfrak{P}_k^{l_k}$ on a

$$\frac{\left|\operatorname{tr}\left(\Psi(iu)\frac{d\Psi(iu)}{du}\right)\right|}{[\Gamma : \Gamma_1(\mathfrak{I})]} \leq C_\varepsilon(u)C|\mathfrak{I}|^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \prod_{k=1}^r (l_k+1)$$

et comme plus haut il suit que $\operatorname{tr}\left(\Psi(iu)\frac{d\Psi(iu)}{du}\right)$ est un $o(\operatorname{vol} M_1(\mathfrak{I}))$. On peut donc appliquer le lemme 5.17 et le corollaire 5.15.

5.3 Passage aux adèles

5.3.1 Notations

On réfère à la section 0.5.1 pour les notations et définitions standards concernant l'anneau $\mathbb{A}$ des adèles de F. On utilisera à partir de maintenant les notations suivantes, qui peuvent parfois contredire celles introduites dans les précédents chapitres :

- $G(\mathbb{A}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$, $G(F) = \mathrm{SL}_2(F)$; on considère $G(F)$ comme plongé diagonalement dans $G(\mathbb{A})$.
- $G_\infty = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $G_f = \prod'_{v\not|\infty} \mathrm{SL}_2(F_v)$;
- $K_\infty = \mathrm{SU}(2)$, $K_v = \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_v)$ pour $v \not|\infty$;
- $P(\mathbb{A}) = \left\{\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix},\ a \in \mathbb{A}^\times,\ x \in \mathbb{A}\right\}$, $N(\mathbb{A}) = \left\{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1\end{pmatrix},\ x \in \mathbb{A}\right\}$; on définit de même $P(F)$, $N(F)$ et $P(F_v), N(F_v)$ pour toute place v de F.
- $M_v = \left\{\begin{pmatrix} a_v & 0 \\ 0 & a_v^{-1}\end{pmatrix},\ |a|_v = 1\right\}$ et $M = \prod_v M_v$, de sorte que $P(\mathbb{A}) = MAN(\mathbb{A})$.
- $A_\infty = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R}_+^\times\right\}$, $A^1 = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}, a \in \mathbb{A}^1\right\}$.

On a $F^\times\backslash A^1/M \cong C(F)$. Pour toute place v on a la décomposition $G(F_v) = P(F_v)K_v$; on obtient ainsi que $G(\mathbb{A}) = P(\mathbb{A})K = N(\mathbb{A})A^1A_\infty K$. On a enfin la décomposition de Bruhat :

$$G(F) = P(F) \sqcup N(F)wP(F) \tag{5.7}$$

(on rappelle que $w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$).

5.3.2 Groupes de congruence

Si $K' \subset K$ est un sous-groupe d'indice fini (i.e. $K' = K_\infty K'_f$ avec $K'_f \subset K_f$ ouvert) on note $\Gamma_{K'} = G(F) \cap K'$ qui est un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F)$. Les sous-groupes de $G(F)$ ainsi obtenus sont donc discrets de covolume fini dans G_∞ et on les appelle sous-groupes de congruence. Les quotients $G(\mathbb{A})/K'$ sont alors des unions disjointes de composantes connexes identifiées canoniquement à G_∞/K_∞ (par des éléments de $G(\mathbb{A}_f)$) dont on rappelle qu'il est isométrique à $\mathbb{H}^3$ lorsqu'on le munit d'une métrique Riemannienne G_∞-invariante à gauche. Le théorème suivant est la version adélique de l'approximation forte (Théorème 5.2), on réfère par exemple à [Hum80, Theorem on page 69] pour une preuve.

Théorème 5.22. *Le sous-groupe $G(F)$ est dense dans $G(\mathbb{A}_f)$.*

Il suit que $G(F)G_\infty$ est dense dans $G(\mathbb{A})$, en particulier le quotient $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K'$ n'a qu'une composante connexe et on obtient une identification

$$M_{K'} := G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K' \cong \Gamma_{K'}\backslash \mathbb{H}^3. \tag{5.8}$$

Les cusps de $M_{K'}$ sont isométriques aux composantes connexes de $P(F)N(\mathbb{A}_f)\backslash G(\mathbb{A})/K'$, et ils sont donc en bijection avec $P(F)N(\mathbb{A})A_\infty\backslash G(\mathbb{A})/K'$. On décrit enfin les fonctions hauteurs adéliquement. Si $g \in G(\mathbb{A})$ on écrit $g = naa^1k \in N(\mathbb{A})A_\infty A^1 K$ et on pose $y(g) = |t|^2$ où $a = \begin{pmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{pmatrix}$, et pour $x \in M_{K'}$ on choisit un $g \in G(\mathbb{A})$ au-dessus de x et on pose $y(x) = \max_{\gamma \in G(F)} y(\gamma x)$. Si $y_1, \ldots, y_{h_F}$ sont les fonctions hauteur sur $M_{K'}$ issues des fonctions hauteur $\Gamma(\mathcal{O}_F)$-invariantes introduites dans la sous-section précédente on a alors $y(x) = \max_{j=1,\ldots,h_F} y_j(x)$.

5.3.3 Mesures de Haar

On rappelle que l'on a donné des normalisations des mesures de Haar sur $\mathbb{A}, \mathbb{A}^1$ en 0.5.2. On fixe la mesure de Haar dk_v de K_v pour qu'elle ait masse totale égale à 1 ; la mesure de Haar sur $P(F_v) = F_v \rtimes F_v^\times$ est $d(n_v a_v) = \frac{dx_v}{|\cdot|_v} \otimes d^\times x_v$ On munit les groupes adéliques de leurs mesures produits, on voit que les espaces compacts $N(F)\backslash N(\mathbb{A})$ et $F^\times\backslash A^1$ sont de mesure 1. On considèrera toujours que le quotient par un sous-groupe de volume fini est muni de la mesure poussée en avant par la projection, en particulier la mesure de Haar sur $G(\mathbb{A})$ est le poussé en avant de $dnda\frac{da_\infty}{|a_\infty|_\infty}dk$.

5.3.4 Espaces fonctionnels

Soit v une place finie et H_v l'un des groupes v-adiques définis ci-dessus. On définit l'espace des fonctions lisses $C^\infty(H_v)$ comme l'ensemble des fonctions de H_v dans V qui soient continues, i.e. localement constantes. On note $C_c^\infty(H_v)$ l'espace des fonction à support compact et $L^2(H_v)$ son complété pour la norme L^2. L'espace $C^\infty(H_\mathbb{A})$ est l'espace engendré par les $\prod_v f_v$ où $f_v \in C^\infty(H_v)$ et le support de f_v est contenu dans un sous-groupe compact pour presque toute $v \in S_f$.

Pour $H = K$ le théorème de Peter-Weyl (cf. Wikipédia) donne une décomposition en irréductibles de $L^2(K_v)$. Si τ, W est une représentation irréductible complexe continue de K_v (qui est forcément unitaire de dimension finie vu qu'elle factorise à travers un quotient fini) on note

$C^\infty(\tau)$ la projection dans $C^\infty(K_v)$ du sous-espace $(C^\infty(K_v) \otimes (W \otimes W^*))^{K_v}$ (où K_v agit sur $C_\infty(K_v)$ par $g.f(x) = f(g^{-1}xg)$). On a alors une décomposition en somme Hilbertienne

$$L^2(K_v) = \overline{\bigoplus_{\tau \in \widehat{K}_v} C^\infty(\tau)}$$

On définit de même le M-type à gauche, chaque $C^\infty(\tau)$ est stable sous l'action de M à gauche et se décompose donc en une somme finie de représentations irréductibles de M_v, on note $C^\infty(\xi, \tau)$ l'espace des fonctions de M_v-type à gauche ξ (i.e. $f(mx) = \xi(m)f(x)$ pour tous $m \in M_v, x \in K_v$) et $[\tau : \xi]$ sa multiplicité qui est toujours finie et nulle pour presque toute ξ. On a donc la décomposition en somme Hilbertienne

$$L^2(K_v) = \overline{\bigoplus_{\tau \in \widehat{K}_v} \bigoplus_{[\tau:\xi] \neq 0} C^\infty(\tau, \xi)}. \tag{5.9}$$

On note $\mathcal{H}$ l'espace $L^2(F^\times \backslash (A^1 K))$. Si $s \in \mathbb{C}$ et $\phi \in \mathcal{H} \cap C^\infty(A^1 K)$ il existe un unique prolongement ϕ_s de ϕ à $G(\mathbb{A})$ qui vérifie :

$$\forall n \in N(\mathbb{A}), a_\infty \in A_\infty, a \in A^1, k \in K \ \phi_s(n a_\infty a k) = |\alpha(a_\infty)|_\infty^s \phi(ak) \tag{5.10}$$

et on notera $\mathcal{H}_s$ l'espace de ces fonctions.

Si χ est un caractère de Hecke on lui associe un caractère du groupe abélien A^1 via l'isomorphisme naturel $A^1 \cong \mathbb{A}^1$. On obtient aussi un caractère de $P(\mathbb{A})$ via le morphisme $P(\mathbb{A}) \to A^1$. On a un isomorphisme K-équivariant à droite et A^1-équivariant à gauche

$$\mathcal{H} \cong \mathbb{C}[C(F)] \otimes L^2(K);$$

d'après (5.9) ci-dessus on a donc une décomposition $\mathcal{H} = \bigoplus_{\tau,\xi} C^\infty(\tau, \xi) \otimes \mathbb{C}[C(F)]$ et chacun des espaces $C^\infty(\tau, \xi) \otimes \mathbb{C}[C(F)]$ se décompose suivant l'action de A^1 à droite en une somme sur les caractères de Hecke dont la restriction à M est égale à ξ ; on a donc finalement la décomposition

$$\mathcal{H} = \overline{\bigoplus_{\chi,\tau} \mathcal{H}(\chi, \tau)}$$

où la somme est prise sur les caractères de Hecke.

5.3.5 Définition des séries d'Eisenstein

Soit $f : G(\mathbb{A}) \to V$ une fonction $P(F)N(\mathbb{A})$-invariante ; on définit une fonction $G(F)$-invariante par la série suivante (si elle converge) :

$$E(f)(g) = \sum_{\gamma \in G(F)/P(F)} \rho(\gamma) f(\gamma^{-1} g). \tag{5.11}$$

Le K-type à droite de $E(f)$ est alors le même que celui de f. On note α la fonction sur $P(\mathbb{A})$ définie par $\alpha \begin{pmatrix} a & x \\ & a^{-1} \end{pmatrix} = a^2$, pour $g = nak$ on note $y(g) = |\alpha(a)|$. La fonction y est alors $P(F)$-invariante.

Lemme 5.23. *La série*

$$\sum_{\gamma \in G(F)/P(F)} y(\gamma^{-1} g)^s$$

est absolument convergente pour $\mathrm{Re}(s) > 2$.

Démonstration. Un argument similaire à celui utilisé pour démontrer [Kna97, Lemma 6.7] montre que :

$$y(w\begin{pmatrix}1 & x\\ & 1\end{pmatrix}nak) \ll \frac{1}{|cz+d|_\infty} \text{ pour } x = d/c \in F,\ n_\infty = \begin{pmatrix}1 & z\\ & 1\end{pmatrix}$$

où la constante ne dépend que de $g = nak$. Par la décomposition de Bruhat il suit que

$$\sum_{\gamma\in G(F)/P(F)} y(\gamma^{-1}g)^s \ll \sum_{\substack{c,d\in\mathcal{O}_F\\(c,d)=1}} \frac{1}{|cz+d|_\infty^s} \ll \int_{x\in\mathbb{R}^4,|x|\geq 1} \frac{dx}{|x|^{2s}}$$

et il est bien connu que le côté droit converge pour $\mathrm{Re}(s) > 2$. □

Si $\phi \in \mathcal{H}$ la fonction ϕ_s donnée par (5.10) est $P(F)N(\mathbb{A})$-invariante, on note $E(\phi_s) = E(\phi, s)$ qui est bien définie pour $\mathrm{Re}(s) > 2$ d'après le lemme 5.23. On peut en fait la prolonger à tout le plan complexe d'après la proposition suivante, dont une preuve est donnée dans la section 5.4.1 ci-dessous.

Proposition 5.24. *Pour $\phi \in \mathcal{H}$ la fonction holomorphe définie pour* $\mathrm{Re}(s) > 2$ *par $s \mapsto E(\phi, s)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. De plus, si χ est un caractère de Hecke non trivial et $\phi \in \mathcal{H}(\chi)$ ce prolongement est en fait entier. Si $\chi = 1$ il a un unique pôle d'ordre 1 en $s = 1$.*

5.3.6 Espaces de formes et $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$

Pour cette section on fixe un sous-groupe compact ouvert $K' \subset K$. On note $M = M_{K'}$ et h le nombre de cusps de M.

Identification

Soit ρ une représentation irréductible de G_∞ sur un espace vectoriel réel V de dimension finie que l'on munit de l'unique produit euclidien qui soit K_∞-invariant et pour lequel les éléments de $\mathfrak{p}$ agissent par des transformations autoadjointes. On rappelle que l'on a défini en 0.2.2 le système local E_ρ sur M. On identifiera une fonction dans $(L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})) \otimes \wedge^p\mathfrak{p} \otimes V)^{K'}$ à une p-forme dans $L^2\Omega^p(M; V_\mathbb{C})$.

Séries d'Eisenstein

Soit $s \in \mathbb{C}$; les séries d'Eisenstein adéliques donnent une application

$$E_s^\mathbb{A} : \left(L^2(P(F)A_\infty N(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/K'_f) \otimes V_\mathbb{C} \otimes \wedge^p\mathfrak{p}^*\right)^{K_\infty} \to \left(L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})) \otimes V_\mathbb{C} \otimes \wedge^p\mathfrak{p}^*\right)^{K'}.$$

Un élément v sur la gauche correspond à une fonction ϕ sur A^1K à valeurs dans $V_\mathbb{C} \otimes \wedge^p\mathfrak{p}^*$ qui est K'-équivariante et $E_s^\mathbb{A}(v)$ est alors défini comme la série d'Eisenstein $E(s, \phi)$.

D'autre part on a une identification du côté gauche avec l'espace $\mathbb{C}^h \otimes V_\mathbb{C} \otimes \wedge^p\mathfrak{p}^*$ et ce dernier s'identifie avec $V_\mathbb{C}^h \otimes \wedge^p\mathfrak{p}^*$ qui est lui-même naturellement isomorphe à $V_\mathbb{C}^h$ si $p = 0$ et $V_\mathbb{C}^h \oplus \Omega^+(V) \oplus \Omega^-(V)$ si $p = 1$. On a donc dans les deux cas une application E_s de cet espace dans les p-formes sur M à coefficients dans $E_\rho \otimes \mathbb{C}$ (cf. 3.1.3).

Le diagramme suivant est alors commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
(L^2(P(F)A_\infty N(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/K'_f)\otimes V_{\mathbb{C}}\otimes \wedge^p\mathfrak{p}^*)^{K_\infty} & \xrightarrow{E^{\mathbb{A}}_{\frac{s+1}{2}}} & (L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))\otimes V_{\mathbb{C}}\otimes \wedge^p\mathfrak{p}^*)^{K'} \\
\| & & \| \\
\mathbb{C}[C(F)\times\mathcal{C}(H)]\otimes V_{\mathbb{C}}\otimes\wedge^p\mathfrak{p}^* & \xrightarrow{E_s} & L^2\Omega^p(\Gamma_H\backslash\mathbb{H}^3;V_{\mathbb{C}})
\end{array}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier les points suivants :

- Le prolongement méromorphe des $E(\omega,s)$ et $E(v,s)$ se déduit de la proposition 5.24.
- Les décompositions spectrales de $L^2(M;V)$ et $L^2\Omega^1(M;V)$ énoncées en 3.1.3 suivent des résultats provés dans 5.4.3.
- Les relations de Maass-Selberg (3.5),(3.6) sont des conséquences de (5.19).

5.4 Séries d'Eisenstein

On démontre ici les principales propriétés des séries d'Eisenstein adéliques définies en 5.3.5 ci-dessus.

5.4.1 Prolongement méromorphe

On prouve ici la proposition 5.24, démontrée par Selberg pour $\mathrm{SL}_2/\mathbb{Q}$ et due en toute généralité (pour G réductif) à Langlands. Ici on adapte la démonstration de Godement pour $\mathrm{SL}_2/\mathbb{Q}$ (cf. [God66]) à notre cas.

L'espace homogène $G(\mathbb{A})/N(\mathbb{A})$ est identifié à $\mathbb{A}^2-\{0\}$, soit donc $\psi\in C_c^\infty(\mathbb{A}^2-\{0\})$. Soient $s\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s)>0$ et χ un caractère de Hecke. On définit une fonction $f\in\mathcal{H}_s(\chi)$ par la formule :

$$f(g)=p_{s,\chi}(\psi):=\int_{\mathbb{A}^\times}\psi\left(g^{-1}\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}\right)\mu_s(a)\,d^\times a$$

où $\mu_s(a)=\chi(a)|a|^{2s}$. D'après le lemme 5.23 $E(s,g)=E(f)(g)$ est absolument convergente pour $\mathrm{Re}(s)>2$. Il est facile de voir que pour toute $\phi\in\mathcal{H}(\chi)$ il existe une ψ telle que $\phi_s=f$; on va donc montrer le prolongement pour $E(f)$. La différence entre les cas où χ est trivial ou non vient du fait suivant.

Lemme 5.25. *Soit χ un caractère de Hecke non trivial et $\psi\in C_c^\infty(\mathbb{A}^2)$; il existe $\omega\in\ker(p_{s,\chi})$ telle que $\psi(0)=\omega(0)$ et $\hat\psi(0)=\hat\omega(0)$.*

Démonstration. On suppose que $\chi_f\neq 1$, on choisit des représentants $a_1,\dots,a_{c(F)}$ de $C(F)$ dans $\mathbb{A}_f^\times$ et on pose

$$\omega_0(g)=\begin{cases}0 & x\notin\sqcup_i a_iK\\ \psi(0) & x\in a_iK\end{cases}$$

qui vérifie que $\omega_0(0)=\psi(0)$ et dont l'image dans $\mathcal{H}_s(\chi)$ est nulle. En posant $\omega(g)=\omega_0(g)+\hat\psi(0)1_{M_f}(g)$ on obtient le résultat voulu. □

On montre maintenant la proposition en supposant $\chi\neq 1$ et $\psi(0)=0=\widehat{\psi}(0)$. L'action de

$G(F)$ sur $F^\times\backslash F^2-\{0\}$ est transitive et le stabilisateur de $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ est $P(F)$. On a ainsi :

$$\begin{aligned} E(s,g) &= \sum_{x\in F^\times\backslash F^2-\{0\}} \int_{\mathbb{A}^\times} \psi(g^{-1}ax)\mu_s(a)\, d^\times a \\ &= \int_{\mathbb{A}^\times/F^\times} \sum_{x\in F^2-\{0\}} \psi(g^{-1}ax)\mu_s(a)\, d^\times a. \end{aligned}$$

On sépare l'intégrale sur a en deux parties $\int_{|a|\geq 1}$ et $\int_{|a|\leq 1}$; on fait dans la seconde intégrale le changement de variable $a\to a^{-1}$, il vient :

$$E(s,g)=\int_{\substack{a\in\mathbb{A}^\times/F^\times\\|a|\geq 1}} \sum_{x\in F^2-\{0\}} \psi(g^{-1}ax)\mu_s(a)\, d^\times a + \int_{\substack{a\in\mathbb{A}^\times/F^\times\\|a|\geq 1}} \sum_{x\in F^2-\{0\}} \psi(g^{-1}a^{-1}x)\mu_s(a^{-1})\, d^\times a$$

On a $\mu_s(a^{-1})\times|a|^2=\overline{\chi(a)}|a|^{2(1-s)}=\overline{\mu_{1-s}(a)}$; en appliquant la formule de Poisson (27) à la seconde intégrale on obtient donc :

$$E(s,g)=\int_{\substack{a\in\mathbb{A}^\times/F^\times\\|a|\geq 1}} \sum_{x\in F^2-\{0\}} \psi(g^{-1}ax)\mu_s(a)d^\times a + \int_{\substack{a\in\mathbb{A}^\times/F^\times\\|a|\geq 1}} \sum_{x\in F^2-\{0\}} \widehat{\psi}(g^{-1}ax)\overline{\mu_{1-s}(a)}\, d^\times a \tag{5.12}$$

En recollant les morceaux de l'intégrale on obtient finalement que

$$E(s,g)=\int_{|a|\geq 1} \psi(g^{-1}ax)\mu_s(a)d^\times a + \int_{|a|\geq 1} \hat{\psi}(g^{-1}ax)\overline{\mu_{1-s}(a)}\, d^\times a.$$

Les deux intégrales sont absolument convergentes pour tout $s\in\mathbb{C}$ tel que $0<\mathrm{Re}(s)<1$ vu que $\psi\in C_c^\infty(\mathbb{A}^2)$ et on obtient ainsi une continuation holomorphe de $s\mapsto E(s,g)$ au plan complexe.

Si $\chi=1$ on ne peut plus supposer que ψ et $\hat{\psi}$ s'annulent en 0. Il faut alors isoler le terme correspondant dans l'expression (5.12) ci-dessus et on obtient au final que

$$\begin{aligned} E(s,g) &= \textstyle\int_{|a|\geq 1} \psi(g^{-1}ax)\mu_s(a)d^\times a + \int_{|a|\geq 1} \hat{\psi}(g^{-1}ax)\overline{\mu_{1-s}(a)}\, d^\times a \\ &\quad + \hat{\psi}(0)\textstyle\int_{\substack{a\in\mathbb{A}^\times/F^\times\\|a|\geq 1}} \mu_{1-s}(a)d^\times a - \psi(0)\int_{\substack{a\in\mathbb{A}^\times/F^\times\\|a|\leq 1}} \mu_s(a)d^\times a. \end{aligned}$$

La seconde ligne se calcule explicitement et on voit qu'elle a un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ avec un pôle simple en $s=1$ (voir la preuve de la proposition 3.1.6 dans [Bum97]), ce qui finit la preuve de la proposition 5.24.

On remarque que la preuve ci-dessus fournit aussi l'équation fonctionnelle $E(s,g)=E'(1-s,g)$ où E' est la série d'Eisenstein obtenue à partir de $\widehat{\psi}$ et $\overline{\chi}$.

5.4.2 Termes constants et opérateurs d'entrelacement

Si f est une fonction continue sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$, on définit son terme constant par :

$$f_P(g)=\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} f(ng)dn.$$

Soit $\phi \in \mathcal{H}$, ϕ_s définie par (5.10) et $f = E(\phi_s)$. D'après la décomposition de Bruhat (5.7) on a $G(F)/P(F) = \{P(F)\} \cup \{\gamma w P(F), \gamma \in N(F)\}$ et pour $\mathrm{Re}(s) > 3/2$ on obtient alors :

$$\begin{aligned} f_P(g) &= \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} \sum_{\gamma \in G(F)/P(F)} \phi_s(\gamma^{-1} n g) dn \\ &= \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} \phi_s(ng) dn + \sum_{\gamma \in N(F)} \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} \phi_s(w\gamma n g) dn \\ &= \phi_s(g) + \int_{N(\mathbb{A})} \phi_s(wng) dn. \end{aligned}$$

On définit donc l'opérateur d'entrelacement $\Psi(s)$ sur $\mathcal{H}$ par

$$(\Psi(s)\phi)(ak) = \int_{N(\mathbb{A})} \phi_s(wnak) dn\,; \tag{5.13}$$

on a alors (avec la notation de (5.10)) :

$$E(\phi_s)_P = \phi_s + (\Psi(s)\phi)_{1-s}. \tag{5.14}$$

En effet, pour $g = n_g a_\infty a k$ il vient après le changement de variable $n \to a_\infty^{-1} n n_g a_\infty$

$$\int_{N(\mathbb{A})} \phi_s(wng) dn = |\alpha(a_\infty)| \int_{N(\mathbb{A})} \phi_s(w a_\infty n a k) dn = |\alpha(a_\infty)|^{1-s} \int_{N(\mathbb{A})} \phi_s(wnak) dn$$

vu que $\alpha(w a_\infty w^{-1}) = -\alpha(a_\infty)^{-1}$.

Enfin, l'équation fonctionnelle pour les séries d'Eisenstein montre que si $\phi = p_{s,\chi}(\psi)|_{A^1K}$ on a $\Psi(s).\phi = p_{1-s,\overline{\chi}}(\hat{\psi})|_{A^1K}$ (et que de plus $\Psi(s)^{-1} = \Psi(1-s)$). En utilisant la formule de Poisson de la même manière que pour la preuve de l'équation fonctionnelle on peut alors montrer que si $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ on a $\|p_{1-s,\overline{\chi}}(\hat{\psi})|_{A^1K}\|_{\mathcal{H}} = \|p_{s,\chi}(\psi)|_{A^1K}\|_{\mathcal{H}}$. Les opérateurs $\Psi(s)$ sont donc unitaires pour s sur la droite critique.

5.4.3 Décomposition de $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$

Décomposition de $L^2(P(F)N(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A}))$

On rappelle la formule classique d'inversion de Mellin : si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^\times)$, on définit sa transformée de Mellin par $\hat{f}(s) = \int_0^{+\infty} f(u) u^{1-s} \frac{du}{u}$ pour $s \in \mathbb{C}$. On démontre alors (par exemple en utilisant l'inversion de Fourier) que pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$ on a

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{Re}(s)=\sigma} \hat{f}(s) t^s ds. \tag{5.15}$$

On a $L^2(P(F)N(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})) = L^2(F^\times \backslash A_\infty A^1 K)$; en appliquant l'inversion de Mellin aux fonctions $f_g : t \in \mathbb{R}_+^\times \mapsto f(\begin{pmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{pmatrix} g)$ on obtient une isométrie K-équivariante

$$L^2(P(F)N(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})) = \bigoplus_\chi \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}} \mathcal{H}_s(\chi) d(\mathrm{Im}\, s) \tag{5.16}$$

où la somme est prise sur tous les caractères de Hecke.

Partie discrète et partie continue

On note $L^2_{\text{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ l'adhérence du sous-espace

$$\{f \in C_c^\infty(G(F)\backslash G(\mathbb{A})), f_P = 0\}.$$

Le résutat suivant est classique, cf. par exemple [Bum97, Proposition 3.7.4] :

Proposition 5.26. *L'application $E : L^2(P(F)N(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})) \to L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ est un plongement isométrique dont l'image est l'orthogonal de $L^2_{\text{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$.*

C'est une conséquence immédiate du lemme suivant :

Lemme 5.27. *Si $f \in L^2(N(\mathbb{A})P(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ et $h \in L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ on a*

$$\langle E(f), h\rangle_{L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))} = \langle f, h_P\rangle_{L^2(N(\mathbb{A})P(F)\backslash G(\mathbb{A}))}.$$

Démonstration. Pour $h \in C_c^\infty(P(F)N(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A}))$ on a :

$$\begin{aligned}
\langle E(f), h\rangle_{L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))} &= \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})} \bar{h}(g) \sum_{\gamma \in G(F)/P(F)} f(\gamma^{-1}g)dg \\
&= \int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})} f(g)\bar{h}(g)dg \\
&= \int_{P(F)N(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} f(g) \int_{N(\mathbb{A})} \bar{h}(ng)dndg,
\end{aligned}$$

ce qui finit la preuve vu que E est un plongement isométrique. □

Si $\chi \neq 1$ le prolongement analytique des séries d'Eisenstein donne un plongement isométrique du sous-espace $\int_{\text{Re}(s)=\frac{1}{2}} \mathcal{H}_s(\chi)$ dans $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$. Si $\chi = 1$ un facteur $\mathbb{C}$ apparaît à cause du pôle en $s = 1$. On a donc finalement

$$L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})) \cong L^2_{\text{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \oplus \mathbb{C} \oplus \bigoplus_\chi \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_{\frac{1}{2}+iu}(\chi)\frac{du}{2\pi} \tag{5.17}$$

5.4.4 Relations de Maass-Selberg

On note 1_Y l'indicatrice de l'intervalle $(Y, +\infty)$ et on définit les opérateurs de troncation par

$$T^Y f(g) = f(g) - 1_Y(y(g))f_P(g)$$

pour $f \in C^\infty(G(\mathbb{A}))$.

Proposition 5.28. *Si $\phi, \psi \in \mathcal{H}$, $s, s' \in \mathbb{C}$ et $s \neq \overline{s'}, 1 - \overline{s'}$ on a*

$$\begin{aligned}
&\langle T^Y E(s,\phi), T^Y E(s',\psi)\rangle_{L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))} = \\
&\quad \frac{1}{2(s+\overline{s}'-1)}(Y^{2(s+\overline{s'}-1)}\langle\phi,\psi\rangle_{\mathcal{H}} - Y^{-2(s+\overline{s}'-1)}\langle\Psi(s')^*\Psi(s)\phi,\psi\rangle_{\mathcal{H}}) \\
&\quad + \frac{1}{2(s-\overline{s}')}(Y^{2(s-\overline{s'})}\langle\phi,\Psi(s')\psi\rangle_{\mathcal{H}} - Y^{2(-s+\overline{s}')}\langle\Psi(s)\phi,\psi\rangle_{\mathcal{H}}).
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Démonstration. On prouve le résultat pour $\mathrm{Re}(s), \mathrm{Re}(s') > 1$ et le cas général s'en déduit par prolongement analytique. D'après le lemme 5.27 on a

$$\langle T^Y E(s,\phi), T^Y E(s',\psi)\rangle_{L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))} = \langle T^Y E(s,\phi), E(s',\psi)\rangle_{L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))}$$

D'autre part on voit que

$$T^Y E(s,\phi)(g) = \sum_{\gamma\in G(F)/P(F)} (1 - 1_Y(y(\gamma^{-1}g)))\phi(\gamma^{-1}g) - 1_Y(y(\gamma^{-1}g))\Psi(s)\phi(g)$$

et il vient (dans la suite on note $\phi' = \Psi(s)\phi$ et $\psi' = \Psi(s')\psi$ et pour $t \in \mathbb{R}_+^\times$, $a_t = \begin{pmatrix} t & \\ & t^{-1}\end{pmatrix}$) :

$$\begin{aligned}
&\langle T^Y E(s,\phi), E(s',\psi)\rangle_{L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))}\\
&= \int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})} ((1 - 1_Y(y(g)))\phi(g) + 1_Y(y(g))\phi'(g))\overline{E}(s,\psi)dg\\
&= \int_{F^\times\backslash AK} (1 - 1_Y(|\alpha(a)|))\phi(ak) + 1_Y(|\alpha(a)|)\phi'(ak)) \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} \overline{E(s,\psi)(nak)}dn\frac{da}{|a|}dk.\\
&= \int_0^Y \int_{F^\times\backslash A^1K} \phi'(a_tak)(\overline{\psi(a_tak)} + \overline{\psi'(a_tak)})dadk\frac{dt}{t^3}\\
&\quad + \int_Y^{+\infty} \int_{F^\times\backslash A^1K} \phi(a_tak)(\overline{\psi(a_tak)} + \overline{\psi'(a_tak)})dadk\frac{dt}{t^3}\\
&= \int_0^Y (t^{2(s+\overline{s'})}\langle\phi,\psi\rangle_{\mathcal{H}} + t^{2(s-\overline{s'})+2}\langle\phi,\psi'\rangle_{\mathcal{H}})\frac{dt}{t^3}\\
&\quad + \int_Y^{+\infty} (t^{2(-s+\overline{s'})+2}\langle\phi',\psi\rangle_{\mathcal{H}} + t^{-2(s+\overline{s'})+4}\langle\phi',\psi'\rangle_{\mathcal{H}})\frac{dt}{t^3}
\end{aligned}$$

Le résultat suit en calculant les intégrales en t. □

Pour $s = 1/2+iu$, $u \neq 0$, en faisant tendre s vers s' dans (5.18)on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
\langle T^Y E(\phi,s), T^Y E(\psi,s)\rangle^2_{L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))} =& 2(\log Y)\langle\phi,\psi\rangle_{\mathcal{H}} + \langle\Psi(s)^{-1}\frac{d}{du}\Psi(s)\phi,\psi\rangle_{\mathcal{H}}\\
&+ \frac{1}{2iu}(Y^{2iu}\langle\phi,\Psi(s)\psi\rangle_{\mathcal{H}} - Y^{-2iu}\langle\Psi(s)\phi,\psi\rangle_{\mathcal{H}})
\end{aligned} \tag{5.19}$$

et si ϕ,ψ sont de A^1-type à gauche respectifs χ,χ' la seconde ligne est nulle à moins que $\chi' = \overline{\chi}$. Pour $s \in \mathbb{R}, s > 1/2$ on a

$$\begin{aligned}
\langle T^Y E(\phi,s), T^Y E(\psi,s)\rangle^2_{L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))} =& \frac{Y^{4s-2}}{4s-2}\langle\phi,\psi\rangle_{\mathcal{H}} - \frac{Y^{-4s+2}}{4s-2}\langle\Psi(s)\phi,\Psi(s)\psi\rangle_{\mathcal{H}}\\
&+ \log Y\langle\Psi(s)\phi,\psi\rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle \frac{d\Psi(s+iu)}{du}|_{u=0}\phi,\psi\right\rangle_{\mathcal{H}}.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

5.5 Estimées sur la dérivée des opérateurs d'entrelacement

Si $\mathfrak{I}$ est un idéal de $\mathcal{O}_F$ on note $K(\mathfrak{I})$ le sous-groupe compact-ouvert de K_f donné par $\prod_{v\not|\infty} K_v(m_v)$ où $\mathfrak{I} = \prod_v \mathfrak{p}_v^{m_v}$ et

$$K_v(m_v) = \left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in K_v,\ a,d = 1 \pmod{\pi_v^{m_v}\mathcal{O}_v},\ b,c = 0 \pmod{\pi_v^{m_v}\mathcal{O}_v}\right\}.$$

Le but de cette section est de démontrer :

Proposition 5.29. *Soit τ_∞ une représentation de dimension finie de K_∞. Soit $\mathfrak{I}$ un idéal de $\mathcal{O}_F$ et χ un caractère de Hecke tel que $\mathfrak{f}_\chi|\mathfrak{I}$. Soit τ_f la représentation de K_f sur $\mathbb{C}[K_f/K(\mathfrak{I})]$, $\tau = \tau_\infty \otimes \tau_f$ et $\phi \in \mathcal{H}(\chi, \tau)$. Il existe une fonction C sur $\mathbb{R}$, à croissance polynomiale et ne dépendant que de F, ε et τ_∞, telle que pour tout $u \in \mathbb{R}$ on ait :*

$$\left\| \frac{d}{du} \Psi\left(\frac{1}{2} + iu\right) \phi \right\|_{\mathcal{H}} \leq C(u) |\mathfrak{I}|^\varepsilon |\mathfrak{f}_\chi|^{\frac{1}{2}} \|\phi\|_{\mathcal{H}}. \tag{5.21}$$

Dans toute la suite de cette section on suppose que la fonction $\phi \in C^\infty(K)$ se décompose en un produit $\otimes_v \phi_v$, qu'elle est invariante à droite par un $K(\mathfrak{I})$ et de A^1-type χ pour un caractère de Hecke de conducteur $\mathfrak{f}_\chi$ divisant $\mathfrak{I}$. On peut de plus supposer qu'en toute place on a $\|\phi_v\|_{L^2(K_v)} = 1$. Il suffit alors de montrer que

$$\left\| \frac{d}{du} \Psi\left(\frac{1}{2} + iu\right) \phi \right\|_{L^2(K)} \ll |\mathfrak{I}|^\varepsilon |\mathfrak{f}_\chi|^{\frac{1}{2}}$$

En effet on a $\|.\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{h_F} \|.\|_{L^2(K)}$ pour les fonctions A^1-équivariantes. On va en fait montrer que pour toute $\psi \in L^2(K)$ de norme 1 on a

$$\left\langle \frac{d}{du} \Psi\left(\frac{1}{2} + iu\right) \phi, \psi \right\rangle_{L^2(K)} \ll |\mathfrak{I}|^\varepsilon |\mathfrak{f}_\chi|^{\frac{1}{2}}. \tag{5.22}$$

On peut de plus se limiter à montrer cette dernière majoration pour une fonction ψ qui est aussi $K(\mathfrak{I})$-invariante à droite.

5.5.1 Calcul des opérateurs d'entrelacement

Facteurs L

On note $S_{\mathfrak{I}}$ l'ensemble des places divisant $\mathfrak{I}$, pour v finie hors de $S_{\mathfrak{I}}$ le caractère χ_v n'est pas ramifié et on a $\phi_v = 1$. On utilisera à plusieurs reprises la décomposition d'Iwasawa explicite :

$$w \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{-1} & -1 \\ & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ x^{-1} & 1 \end{pmatrix} \text{ pour } x \in F_v - \mathcal{O}_v. \tag{5.23}$$

On a alors le calcul classique :

$$\begin{aligned} \Psi_v(s)\phi_v(k) &= \int_{F_v - \mathcal{O}_v} \phi_s\left(w \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix} k\right) dx + 1 \\ &= \int_{F_v - \mathcal{O}_v} |x|_v^{-2s} \chi(x)^{-1} \phi\left(\begin{pmatrix} 1 & \\ x^{-1} & 1 \end{pmatrix} k\right) dx + 1 \\ &= 1 + \sum_{k \geq 1} (1 - q_v^{-1}) q_v^{-k} \chi(\pi_v)^k q_v^{-2sk} = \frac{1 - \chi(\pi_v) q_v^{-2s}}{1 - \chi(\pi_v) q_v^{-2s+1}}. \end{aligned}$$

Places ramifiées

On suppose maintenant que $v \in S_{\mathfrak{I}}$. Il vient en utilisant (5.23) et (5.10) :

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_v(s)\phi_v, \psi_v\rangle_{L^2(K_v)} &= \int_{|x|_v>1} |x|^{-2s}\chi^{-1}(x)\int_{K_v} \overline{\psi}_v(k)\phi_v\left(\begin{pmatrix}1 & \\ x & 1\end{pmatrix}k\right)dkdx \\
&\quad + \int_{\mathcal{O}_v}\int_{K_v} \overline{\psi}_v(k)\phi_v\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & x\end{pmatrix}k\right)dkdx \\
&= \int_{|x|_v<1} |x|^{2s-2}\chi(x)\int_{K_v} \overline{\psi}_v(k)\phi_v\left(\begin{pmatrix}1 & \\ x & 1\end{pmatrix}k\right)dkdx \\
&\quad + \int_{\mathcal{O}_v}\int_{K_v} \overline{\psi}_v(k)\phi_v\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & x\end{pmatrix}k\right)dkdx \\
&=: I_v + \int_{\mathcal{O}_v}\int_{K_v} \overline{\psi}_v(k)\phi_v\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & x\end{pmatrix}k\right)dkdx
\end{aligned}$$

La seconde intégrale est indépendante de s et bornée par $\|\phi_v\|_{L^2(K_v)}\|\psi_v\|_{L^2(K_v)} = 1$, on la note J_v. D'autre part, comme $K_v(m_v)$ est distingué ϕ_v est aussi invariante à gauche par $K_v(m_v)$; pour $x \in \pi_v^{m_v}\mathcal{O}_v$ et $k \in K_v$ on a donc $\phi_v\left(\begin{pmatrix}1 & \\ x & 1\end{pmatrix}k\right) = \phi_v(k)$. Si $v \in S_\chi$ on a $\int_{\mathcal{O}_v^\times}\chi(x)dx = 0$ et il suit que :

$$\begin{aligned}
I_v &= \int_{|x|_v>1} |x|^{2s-2}\chi(x)\int_{K_v} \overline{\psi}_v(k)\phi_v(\left(\begin{pmatrix}1 & \\ x & 1\end{pmatrix}k\right)dkdx \\
&= \int_{\mathcal{O}_v-\pi_v^{m_v+1}\mathcal{O}_v} \chi(x)^{-1}|x|_v^{2s-2}\int_{K_v} \overline{\psi}_v(k)\phi_v\left(\begin{pmatrix}1 & \\ x & 1\end{pmatrix}k\right)dkdx.
\end{aligned}$$

Cette dernière intégrale est convergente pour tout s et pour $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ elle est majorée en valeur absolue par

$$\sum_{l=0}^{m_v} q_v^{-(2\,\mathrm{Re}(s)-2)l}q_v^{-l}\|\phi_v\|_{L^2(K_v)}\|\psi_v\|_{L^2(K_v)} = m_v.$$

Si $v \notin S_\chi$ le même calcul donne :

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_v(s)\phi_v(k), \phi_v\rangle_{L^2(K_v)} &= I_v + J_v + \int_{K_v}\int_{\pi_v^{m_v+1}\mathcal{O}_v} |x|_v^{2s-2}\chi(x)dx\phi_v(k)\overline{\psi}_v(k)dk \\
&= I_v + J_v + q_v^{(1-2s)(m_v+1)}\chi(\pi_v)^{m_v+1}\frac{1-\chi(\pi_v)q_v^{-2s}}{1-\chi(\pi_v)q_v^{-2s+1}}J_v'
\end{aligned}$$

où on a $J_v' = \langle \phi_v, \psi_v\rangle_{L^2(K_v)} \leq 1$ et

$$I_v = \int_{K_v}\overline{\psi}_v(k)\int_{1<|x|_v<q_v^{-m_v}} \phi_v\left(w\begin{pmatrix}1 & x\\ & 1\end{pmatrix}k\right)dxdk \leq m_v\|\phi_v\|_{L^2(K_v)}\|\psi_v\|_{L^2(K_v)} = m_v.$$

Place infinie

On calcule finalement $I_\infty = \langle \Psi_\infty(s)\phi_\infty(k), \phi_\infty\rangle_{L^2(K_\infty)}$. On a la décomposition d'Iwasawa explicite

$$w\begin{pmatrix}1 & z\\ & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u^{-1} & u^{-1}\bar{z}\\ & u\end{pmatrix}k_z,\ u = \sqrt{|z|_\infty+1},\ k_z = \begin{pmatrix}-u^{-1}\bar{z} & u^{-1}\\ u^{-1} & u^{-1}z\end{pmatrix}$$

Il suit que

$$I_\infty = \int_{\mathbb{C}} (|z|_\infty + 1)^{-2s} \int_{K_\infty} \phi_\infty(k_z k)\overline{\psi}_\infty(k) dk dz d\bar{z}$$

Quand $z \to \infty$ on a $\left| k_z - \begin{pmatrix} \bar{z}/|z| & \\ & z/|z| \end{pmatrix} \right| \ll |z|_\infty^{\frac{-1}{2}}$ (pour n'importe quelle norme $|.|$ sur K_∞). On a donc pour $\mathrm{Re}(s) > 1/2$:

$$I_\infty = \int_{\mathbb{C}} \chi_\infty(z)(|z|_\infty + 1)^{-2s} dz d\bar{z} \langle \phi_\infty, \psi_\infty \rangle_{L^2(K_\infty)} + O(1) \tag{5.24}$$

où le $O(1)$ dépend de ϕ_∞ (en fait de sa norme C^1) mais pas de s. Si $\chi_\infty \neq 1$ l'intégrale est nulle pour tout $\mathrm{Re}(s) > 0$ et dans ce cas I_∞ est donc borné indépendamment de s pour $\mathrm{Re}(s) \geq 1/2$. Si $\chi_\infty = 1$ on a le calcul classique suivant

$$\int_{\mathbb{C}} (|z|_\infty + 1)^{-2s} dz d\bar{z} = \pi \frac{\Gamma(2s-1)}{\Gamma(2s)}$$

et I_∞ a donc un prolongement méromorphe tel que $I_\infty - \pi\Gamma(2s-1)/\Gamma(2s)\langle \phi_\infty, \psi_\infty \rangle_{L^2(K_\infty)}$ soit borné indépendamment de s pour $\mathrm{Re}(s) \geq 1/2$.

Expression finale

On a finalement le résultat suivant pour s dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) \geq 1/2$:

$$\begin{aligned} \langle \Psi(s).\phi, \psi \rangle_{L^2(K)} = I_\infty & \frac{L(\chi, 2s-1)}{L(\chi, 2s)} \prod_{v \in S_\chi} (I_v + J_v) \\ & \times \prod_{v \in S_{\mathfrak{I}} - S_\chi} \left(q_v^{(1-2s)(m_v+1)} \chi(\pi_v)^{m_v+1} J'_v + \frac{1 - \chi(\pi_v) q_v^{1-2s}}{1 - \chi(\pi_v) q_v^{-2s}} (I_v + J_v) \right) \end{aligned} \tag{5.25}$$

On notera $I'_v = q_v^{(1-2s)(m_v+1)} \chi(\pi_v)^{m_v+1} J'_v + \frac{1-\chi(\pi_v) q_v^{1-2s}}{1-\chi(\pi_v) q_v^{-2s}} (I_v + J_v)$. On voit immédiatement que pour $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ on a $|I'_v| \leq 2 + 4|I_v|$.

5.5.2 Démonstration de la proposition 5.29, $\chi \neq 1$

Dans toute la preuve on écrira $s = \sigma + iu$ et on supposera (sauf mention expresse du contraire) que $\sigma = 1/2$. En dérivant le produit (5.25) on obtient :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{du} \Psi(s).\phi, \psi \right\rangle_{L^2(K)} &= -\frac{\frac{d}{du} L(\chi, 2s)}{L(\chi, 2s)} \langle \Psi(s).\phi, \psi \rangle_{L^2(K)} \\ &\quad + \frac{\frac{d}{du}(I_\infty L(\chi, 2s-1))}{L(\chi, 2s)} \prod_{v \in S_\chi} (I_v + J_v) \prod_{v \in S_{\mathfrak{I}} - S_\chi} I'_v \\ &\quad + \sum_{v \in S_\chi} I_\infty \frac{L(\chi, 2s-1)}{L(\chi, 2s)} \frac{dI_v}{du} \prod_{v' \in S_\chi, v' \neq v} (I_{v'} + J_{v'}) \prod_{v' \in S_{\mathfrak{I}} - S_\chi} I'_{v'} \\ &\quad + \sum_{v \in S_{\mathfrak{I}} - S_\chi} I_\infty \frac{L(\chi, 2s-1)}{L(\chi, 2s)} \prod_{v' \in S_\chi} (I_{v'} + J_{v'}) \frac{dI'_v}{du} \prod_{v' \in S_{\mathfrak{I}} - S_\chi, v' \neq v} I'_{v'} \\ &=: L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \end{aligned}$$

Pour majorer L_1 et L_2 on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 5.30. *Si le caractère de Hecke χ est non-trivial on a*

$$\left|\frac{\frac{d}{du}L(\chi,2s)}{L(\chi,2s)}\right| \ll (\log|\mathfrak{f}_\chi|)^2 \tag{5.26}$$

où la constante ne dépend que de s (et est à croissance polynômiale en $\mathrm{Im}(s)$*) et de F.*

Démonstration. Le produit Eulérien pour $L(\chi,2s)$ donne pour $\mathrm{Re}(s)>1/2$ l'expression en série absolument convergente

$$\frac{\frac{d}{du}L(\chi,2s)}{L(\chi,2s)} = \sum_{v\notin S_\chi} \frac{2i(\log q_v)q_v^{-2s}\chi(\pi_v)}{1-\chi(\pi_v)q_v^{-2s}}.$$

Il vient

$$\frac{\frac{d}{du}L(\chi,2s)}{L(\chi,2s)} = \sum_{v\notin S_\chi} 2i(\log q_v)q_v^{-2s}\chi(\pi_v)\sum_{k\geq 0}\chi(\pi_v)^k q_v^{-2ks}.$$

On voit que la série $\sum_{v\notin S_\chi}(\log q_v)q_v^{-2s}\chi(\pi_v)\sum_{k\geq 1}\chi(\pi_v)^k q_v^{-2ks}$ est absolument convergente pour $\mathrm{Re}(s)>1/4$ et que sa somme est bornée par une constante ne dépendant que de F, on doit donc évaluer $\sum_{v\notin S_\chi}(\log q_v)q_v^{-2s}\chi(\pi_v)$.

Soient $\chi_1,\ldots,\chi_{h_F}$ les caractères de Hecke sur $F^\times\backslash\mathbb{A}^1$ tels que $\ker(\chi_j)\supset M$. Si χ est un caractère de Hecke il existe un j tel que $\chi(\pi_v)=\chi_j(\pi_v)$ pour toute place $v\notin S_\chi$. On a alors

$$\sum_{v\notin S_\chi} q_v^{-2s}\log(q_v)\chi(\pi_v) = \sum_{v\notin S_{\chi_j}} q_v^{-2s}\log(q_v)\chi_j(\pi_v) - \sum_{v\in S_\chi - S_{\chi_j}} q_v^{-2s}\log(q_v)\chi_j(\pi_v).$$

Comme χ_j est non-trivial, $H : s\mapsto \sum_{v\notin S_{\chi_j}} q_v^{-2s}\log(q_v)\chi_j(\pi_v)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur un ouvert contenant le demi-plan fermé $\mathrm{Re}(s)\geq 1/2$, et par un argument standard de convexité on a une borne polynomiale en u pour $H(1/2+iu)$. D'autre part, en posant $q=\max_{v\in S_\chi} q_v$, pour $\mathrm{Re}(s)=1/2$ on a

$$\left|\sum_{v\in S-S_\chi}(\log q_v)q_v^{-2s}\chi(\pi_v)\right| \leq \log q\sum_{v\notin S_\chi}\frac{1}{q_v} \ll (\log q)^2$$

et comme $q\leq|\mathfrak{f}_\chi|$ on obtient bien que

$$\left|\frac{\frac{d}{du}L(\chi,2s)}{L(\chi,2s)}\right| \leq C(u)(\log|\mathfrak{f}_\chi|)^2$$

où $C(u)$ est polynomiale en u. □

Comme $\Psi(s)$ est unitaire on a ainsi

$$|L_1| \leq \left|\frac{\frac{d}{du}L(\chi,2s)}{L(\chi,2s)}\right| \leq C(u)(\log|\mathfrak{f}_\chi|)^2$$

où $C(u)$ est à croissance polynomiale.

On traite maintenant L_2 ; l'équation fonctionnelle (29) donne :

$$\frac{\frac{d}{du}(I_\infty L(\chi,2s-1))}{L(\chi,2s)} = \frac{d}{du}(I_\infty\gamma(s))\frac{L(\overline{\chi},2-2s)}{L(\chi,2s)} + I_\infty\gamma(s)\frac{\frac{d}{du}L(\overline{\chi},2-2s)}{L(\overline{\chi},2-2s)}\frac{L(\overline{\chi},2-2s)}{L(\chi,2s)}$$

D'après 5.5.1 et la forme explicite de $\gamma(s)$ la fonction $I_\infty\gamma(s)$ est entière sur $\mathrm{Re}(s) > 0$ et est majorée par $C(u)|\mathfrak{f}_\chi|^{\frac{1}{2}}$ où C dépend de F, τ, χ_∞ et est polynomiale en u ; il suit aussi que $\frac{d}{du}(I_\infty\gamma(s)) \leq C(u)\log|\mathfrak{f}_\chi|$ (avec la même constante $C(u)$). D'autre part on voit que $L(\overline{\chi}, 2-2s) = \overline{L(\chi, 2s)}$ d'où suit $|L(\overline{\chi}, 2-2s)/L(\chi, 2s)| = 1$. Enfin on a $\frac{d}{du}L(\overline{\chi}, 2-2s)/L(\overline{\chi}, 2-2s) \ll (\log|\mathfrak{f}_\chi|)^2$ d'après le lemme 5.26. Au final on obtient bien que

$$L_2 \leq C(u)|\mathfrak{f}_\chi|^{\frac{1}{2}}(\log|\mathfrak{f}_\chi|)^2$$

avec $C(u)$ à croissance polynomiale.

En dérivant l'expression explicite pour I_v obtenue en 5.5.1 on voit que

$$\frac{dI_v}{du} = \int_{\mathcal{O}_v - \pi_v^{m_v+1}\mathcal{O}_v} \chi_v(x) 2i(\log|x|_v)|x|_v^{2s-2} \int_{K_v} \overline{\phi}_v(k)\phi_v\left(\begin{pmatrix} 1 & \\ x & 1 \end{pmatrix}\right) dkdx$$

d'où il suit immédiatement que $|\frac{dI_v}{du}| \leq 2m_v(\log q_v)|I_v|$ et donc d'après 5.5.1 on a $|\frac{dI_v}{du}| \leq 2m_v^2(\log q_v)$. Il vient donc :

$$\begin{aligned} L_3 &\leq \left|I_\infty\gamma(s)\frac{L(\overline{\chi}, 2-2S)}{L(\chi, 2s)}\right| \sum_{v\in S_\chi} \left|\frac{dI_v}{du}\right| \prod_{v'\in S_\chi, v'\neq v} |I_{v'} + J_{v'}| \prod_{v'\in S_{\mathfrak{I}} - S_\chi} |I'_{v'}| \\ &\leq C(u)|\mathfrak{f}_\chi|^{\frac{1}{2}} \sum_{v\in S_\chi} 2m_v^2(\log q_v) \prod_{v'\in S_\chi, v'\neq v} (m_{v'}+1) \prod_{v'\in S_{\mathfrak{I}} - S_\chi} (4m_{v'}+2) \\ &\leq C(u)|\mathfrak{I}|^\varepsilon|\mathfrak{f}_\chi|^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

où $C(u)$ dépend de F, ε et est polynomiale en u.

Enfin, le terme L_4 se traite de la même façon pusqu'on voit que

$$\left|\frac{dI'_v}{du}\right| \leq 2m_v\log q_v + 4|I_v|\log q_v + 4\frac{dI_v}{du}.$$

On a fini de prouver (5.22), et la proposition, dans ce cas.

5.5.3 Le cas $\chi = 1$

On obtient ici l'expression

$$\langle\Psi(s)\phi, \phi\rangle_{\mathcal{H}} = h_F I_\infty \frac{\zeta_F(2s-1)}{\zeta_F(2s)} \prod_{v\in S_{\mathfrak{I}}} \left(q_v^{(1-2s)(m_v+1)} + \frac{1-q_v^{1-2s}}{1-q_v^{-2s}}(I_v+1)\right).$$

On note $\Pi_{\mathfrak{I}} = \prod_{v\in S_{\mathfrak{I}}}\left(q_v^{(1-2s)(m_v+1)} + \frac{1-q_v^{1-2s}}{1-q_v^{-2s}}(I_v+1)\right)$, il vient :

$$\begin{aligned} h_F^{-1}\left\langle\frac{d}{du}\Psi(s)\phi, \phi\right\rangle_{\mathcal{H}} &= \frac{d}{du}(\log((2s-1)\zeta_F(2s))) \times (2s-1)I_\infty\zeta_F(2s-1) \times \Pi_{\mathfrak{I}} \\ &\quad + \frac{\frac{d}{du}((2s-1)I_\infty\zeta_F(2s-1))}{(2s-1)\zeta_F(2s)} \times \Pi_{\mathfrak{I}} + I_\infty\frac{\zeta_F(2s-1)}{\zeta_F(2s)}\frac{d\Pi_{\mathfrak{I}}}{du}. \end{aligned}$$

Tous les termes sont holomorphes autour de $\mathrm{Re}(s) = 1/2$. Le seul qui dépende de $\mathfrak{I}$ est $\Pi_{\mathfrak{I}}$ que l'on a déjà analysé ci-dessus. La proposition 5.29 tient donc aussi dans ce cas.

5.5.4 Estimées hors de la droite critique

Toutes les estimées faites dans la preuve de la proposition 5.29 restent valides pour tout réel s (au moins si les opérateurs d'entrelacement n'ont pas un pôle en s), avec la différence que des exposants plus (ou moins) élevés pour $|\mathfrak{I}|$ et $\mathfrak{f}_\chi$ en sortent (que ce soit dans l'équation fonctionnelle de la fonction L ou les estimées d'intégrales locales). On se contentera d'énoncer le résultat imprécis suivant, qui suffira à nos besoins dans la prochaine section.

Proposition 5.31. *Pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$, $\chi \neq 1$ et $\phi \in \mathcal{H}(\chi, \tau)$ on a*

$$\|\Psi(s)\phi\|_{\mathcal{H}}, \left\| \frac{d\Psi(\sigma + iu)}{du} \phi \right\|_{\mathcal{H}} \leq C|\mathfrak{I}|^c \|\phi\|_{\mathcal{H}}$$

où C ne dépend que de F, ε, σ et τ_∞ et c ne dépend que de σ.

Chapitre 6

Croissance de l'homologie de torsion pour les variétés arithmétiques

Dans ce dernier chapitre on relie la torsion analytique régularisée à une torsion de Reidemeister définie à partir de l'homologie entière des variétés de congruence et de certaines séries d'Eisenstein harmoniques. Le résultat précis (Théorème 6.4) est une égalité asymptotique. On étudie aussi le comportement des différents facteurs qui composent la torsion de Reidemeister dans des suites de congruence, ce qui résulte dans le théorème 6.10 qui donne une borne supérieur pour l'ordre de croissance de la torsion dans le H^2. On démontre aussi la croissance exponentielle de la torsion pour certaines suites de groupes arithmétiques (cf. le théorème 6.19).

6.1 Le cas compact, d'après [BV] et [ABB$^+$]

Soit G un $\mathbb{Q}$-groupe algébrique semisimple anisotrope, de sorte que $\Gamma = \mathrm{G}(\mathbb{Z})$ est un réseau cocompact dans $G = \mathrm{G}(\mathbb{R})$. Soit ρ une $\mathbb{Q}$-représentation de G sur un espace $V_{\mathbb{Q}}$ telle que la représentation $\rho \otimes \mathbb{R}$ soit fortement acyclique ; on note $V = V_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}$. Par le théorème 4.4 ci-dessus et [ABB$^+$, Theorem 1.11], si Γ_n est une suite de sous-groupes de congruence de Γ et $M_n = \Gamma_n \backslash S$ où S est l'espace symétrique associé à G on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log T(M_n; V)}{\operatorname{vol} M_n} = t^{(2)}(V). \tag{6.1}$$

La forte acyclicité implique que l'on a $H_*(M; V) = 0$. Soit $V_{\mathbb{Z}}$ un réseau de $V_{\mathbb{Q}}$ préservé par $\rho(\Gamma)$: l'homologie entière $H_p(M_n; V_{\mathbb{Z}})$ est donc finie pour tout p. On pose :

$$\tau(M_n; \mathbb{Z}) = \prod_{p=0}^{\dim X} |H_p(M_n; V_{\mathbb{Z}})|^{(-1)^p},$$

et le théorème de Cheeger-Müller [Mül93] donne alors dans ce cas

$$T(M_n; V) = \tau(M_n; V_{\mathbb{Z}}).$$

Avec (6.1) on en déduit que l'un au moins des groupes $H_p(M_n; V_{\mathbb{Z}})$ a un cardinal qui croît exponentiellement avec $\operatorname{vol} M_n$.

Bergeron et Venkatesh montrent [BV, Section 8.6] que la torsion de H_0 et de $H_{\dim S-1}$ ont une croissance polynomiale en le niveau pour les groupes de congruence principaux de $\mathrm{G}(\mathbb{Q})$; il est bien connu que l'indice d'un sous-groupe de congruence est minoré par une puissance du niveau (cf. [LS03, Proposition 6.1.1]) et il suit que $\log |H_0(\Gamma_n; V_{\mathbb{Z}})|$ et $\log |H_{\dim S-1}(\Gamma_n; V_{\mathbb{Z}})|$ sont

des $o([\Gamma : \Gamma_n])$ pour une suite Γ_n de sous-groupes de congruence de $\mathrm{G}(\mathbb{Q})$. Comme pour $S = \mathbb{H}^3$ ce sont les seuls groupes d'homologie autres que H_1 qui peuvent contenir de la torsion on obtient ainsi le résultat suivant.

Théorème 6.1. *Soit* G *une* $\mathbb{Q}$*-forme anisotrope de* $\mathrm{SO}(3,1) \times G'$ *où* G' *est un groupe de Lie réel compact,* $V_{\mathbb{Z}}$ *un réseau dans* V *et* $\Gamma = \mathrm{Stab}_{\mathrm{G}(\mathbb{Q})} V_{\mathbb{Z}}$*. Soit* Γ_n *une suite de sous-groupes de congruence sans torsion de* Γ*. On a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log |H_1(\Gamma_n; V_{\mathbb{Z}})|}{\mathrm{vol}\, M_n} = -t^{(2)}(V) > 0.$$

L'exemple classique d'un tel G est le suivant : soit q est une forme quadratique anisotrope en 4 variables sur un corps quadratique réel F telle que q soit de signature $(3,1)$ et $\bar{q}$ soit définie positive, où $\bar{\cdot}$ est l'automorphisme non-trivial de F. Soit G la restriction de Weil de $\mathrm{SO}(q)/F$, alors

$$\mathrm{G}(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SO}(q,\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}(\bar{q},\mathbb{R}) \cong \mathrm{SO}(3,1) \times \mathrm{SO}(4).$$

On peut par exemple prendre $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et

$$q(x) = px_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \sqrt{2}x_4^2,$$

pour un premier p, on obtient même ainsi une infinité de classes de commensurabilité (cf. [ABB$^+$, Section 13.7] ou [Rai12a, Proposition 4.1]).

6.2 Homologie des variétés à cusps et torsion de Reidemeister

On fixe une représentation réelle fortement acyclique* ρ de G sur V, un corps quadratique imaginaire F et un réseau $V_{\mathbb{Z}} \subset V$ préservé par $\Gamma(\mathcal{O}_F) = \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F)$. On suppose de plus que $n_1 > n_2$ (le cas $n_2 < n_1$ se traite de manière symmétrique).

6.2.1 Cohomologie du bord

On rappelle que pour un idéal $\mathfrak{I}$ de $\mathcal{O}_F$ les groupes $G_{\mathfrak{I}}, N_{\mathfrak{I}}$ ont été définis dans la section 5.1.2 et que pour un sous-groupe $H \subset G_{\mathfrak{I}}$ on note $\mathcal{C}(H) = H\backslash G_{\mathfrak{I}}/N_{\mathfrak{I}}$ et Γ_H la préimage de H dans $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F)$, $M_H = \Gamma_H\backslash\mathbb{H}^3$. Les cusps de de $M = M_H$ sont alors en bijection avec $\mathcal{C}(H) \times C(F)$, et on reprend la notation de la section 3.1.3 pour les composantes T_j du bord $\partial\overline{M}$ de la compactification de Borel-Serre de M_H. On va réaliser la cohomologie $H^*(\partial\overline{M}; V_{\mathbb{C}})$ comme un espace de formes différentielles fermées. Pour une version adélique de cette description on refère à [Ber08, Section 3].

Soit $q = n_1 + n_2$. En degré 1 on a un isomorphisme

$$H^1(\partial M; V_{\mathbb{C}}) \cong \Omega^+(V_q) \oplus \Omega^-(V_{-q}) = \mathbb{C}[\mathcal{C}(H) \times C(F)] \otimes (V_q \oplus V_{-q}) \tag{6.2}$$

défini comme suit : si $v_1, \ldots, v_h \in V_q, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_h \in V_{-q}$ on leur associe la classe de de Rham de la 1-forme ω donnée par

$$\sum_{j=1}^{h} d\bar{z}_j \otimes (g_j\rho(n_{z_j})v_j) + dz_j \otimes (g_j\rho(n_{z_j})\bar{v}_j), \quad n_z = \begin{pmatrix} 1 & z \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

*. On peut étendre sans peine les définitions de cette section au cas non fortement acyclique.

On vérifie qu'elle est fermée. On a $v_j = w_j \otimes u_j$ où $w_j \in (V_{n_1,0})^{N_\infty}$ et $u_j \in (V_{0,n_2})^{wN_\infty}$, donc $\rho(n_z).v_j = w_j \otimes (\sum_{l=0}^{n_2} Q_l(\bar{z})u_j^l$ où (u_j^l) est la bas canonique de $V_{0,n_2} \cong \mathrm{Sym}^{n_2}\mathbb{C}^2$ et Q_l est un polynôme ne dépendant que de n_2, et $z \mapsto \rho(n_z)v_j$ est donc anti-holomorphe. De la même manière, $z \mapsto \rho(n_z)\bar{v}_j$ est holomorphe, et on a donc

$$d(d\bar{z}_j \otimes (g_j\rho(n_{z_j})v_j)) = 0 = d(dz_j \otimes (g_j\rho(n_{z_j})\bar{v}_j)).$$

donc ω est fermée. On vérifie (cf. par exemple la preuve de [MP11, Proposition 2.11]) que toutes ces formes donnent des classes linéairement indépendantes en cohomologie de De Rham. On notera $H^{1,0}(\partial\overline{M}; V_\mathbb{C})$ le sous-espace de H^1 correspondant à $\mathbb{C}[\mathcal{C}(H)\times C(F)]\otimes V_q$ et $H^{0,1}(\partial\overline{M}; V_\mathbb{C})$ celui correspondant à $\mathbb{C}[\mathcal{C}(H) \times C(F)] \otimes V_{-q}$.

Pour les degrés 0 et 2 on a des isomorphismes

$$H^0(\partial\overline{M}; V_\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}[\mathcal{C}(H) \times C(F)] \otimes V_{n_1-n_2} \cong H^2(\partial\overline{M}; V_\mathbb{C}). \tag{6.3}$$

En effet, $V_{n_1-n_2}$ est formé des vecteurs fixés par N_∞, et à $v_1, \ldots, v_h \in V_{n_1-n_2}$ on associe la (classe de la) section holomorphe $\sum_{j=1}^h g_j v_j$ (resp. de la 2-forme holomorphe $\sum_{j=1}^h (dz_j \wedge d\bar{z}_j) \otimes (g_j v_j)$).

6.2.2 Cohomologie et séries d'Eisenstein

La cohomologie L^2 de M à coefficients dans $V_\mathbb{C}$ est nulle (cf. par exemple [MP10, Théorème 2.1]) et l'application $i_p^* : H^p(M; V_\mathbb{C}) \to H^p(\partial\overline{M}; V_\mathbb{C})$ est donc injective pour $p = 1, 2$. On montre alors en utilisant la suite exacte longue et la forme de Kronecker que

$$\dim H^1(M; V_\mathbb{C}) = 1/2 \dim H^1(\partial\overline{M}; V_\mathbb{C}) \tag{6.4}$$

(cf. par exemple [Ser70, Lemme 11]) et d'autre part on voit immédiatement que

$$\dim H^2(M; V_\mathbb{C}) = \dim H^2(\partial\overline{M}; V_\mathbb{C}) - \dim H^0(M; V_\mathbb{C}) = \dim H^2(\partial\overline{M}; V_\mathbb{C})$$

en utilisant la suite exacte, vu que $H^0(M; V_\mathbb{C}) = 0$. On va maintenant décrire plus précisément l'application i_p^* pour $p = 1, 2$.

A une forme harmonique $\omega \in H^1(\partial\overline{M}; V_\mathbb{C})$ et $s \in \mathbb{C}$ est associée la série d'Eisenstein $E(s, \omega) \in \Omega^1(M; V_\mathbb{C})$. Le résultat suivant est bien connu, cf. la preuve de [Har87, Theorem 2]. On note $[f]$ la classe de cohomologie de de Rham représentée par une 1-forme fermée $f \in \Omega^1(M; V_\mathbb{C})$

Lemme 6.2. *On pose $s_V^1 = n_2 - n_1$. Soit $\omega \in H^{1,0}(\partial\overline{M}; V_\mathbb{C})$ une 1-forme holomorphe (resp. $\overline{\omega} \in H^{0,1}(\partial\overline{M}; V_\mathbb{C})$), alors la série d'Eisenstein $E(s_V^1, \omega)$ (resp. $E(-s_V^1, \overline{\omega})$) est une 1-forme fermée. De plus les $[E(s_V^1, \omega)]$ engendrent $H^1(M; V_\mathbb{C})$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que si P est un parabolique Γ-rationnel, le terme constant de $E(s_V^1, \omega)$ en P est une forme fermée sur $\Gamma_P\backslash\mathbb{H}^3$. Ce dernier est égal à $\omega + \Phi^+(s_V^1)\omega$ d'après (3.8) vu que l'on a $\omega = \sum_j dz_j \otimes e_{0,n_2}$. Comme $\omega, \Phi^+(s_V^1)\omega$ sont des formes harmoniques sur $\partial\overline{M}$ (donc fermées) on a bien $d(\omega + \Phi^+(s_V^1)\omega) = 0$. Comme $E(-s_V^1, \overline{\omega}) = E(s_V^1, \Phi^-(-s_V^1)\overline{\omega})$ on obtient l'autre énoncé. Enfin on voit que le terme constant de $E(s_V^1, \omega)$ est non-exact (parce qu'il ne l'est pas en restriction à $\partial\overline{M}$) et il suit que l'application $H^{1,0}(\partial\overline{M}; V_\mathbb{C}) \ni \omega \mapsto [E(s_V^1), \omega]$ est injective. Comme

$$\dim H^{1,0}(\partial\overline{M}; V_\mathbb{C}) = 1/2 \dim H^1(\partial\overline{M}; V_\mathbb{C}) = \dim H^1(M; V_\mathbb{C})$$

il suit qu'elle est aussi surjective. □

On obtient donc une application $E^1 : H^1(\partial\overline{M}; V_{\mathbb{C}}) \to H^1(M; V_{\mathbb{C}})$ définie par $E^1(\omega + \overline{\omega}) = [E(s_V^1, \omega) + E(-s_V^1, \overline{\omega})]$ pour $\omega \in H^{1,0}(\partial\overline{M}; V_{\mathbb{C}}), \overline{\omega} \in H^{0,1}(\partial\overline{M}; V_{\mathbb{C}})$. D'après la formule pour le terme constant d'une série d'Eisenstein, on a

$$i_1^* E^1(\omega) = \omega + \Phi^+(s_V^1)\omega, \quad \omega \in H^{1,0}(\partial\overline{M}; V_{\mathbb{C}})$$

et il suit que

$$\operatorname{im} i_1^* = \{\omega + \Phi^+(s_V^1)\omega,\, \omega \in H^{1,0}(\partial\overline{M}; V_{\mathbb{C}})\} = \{\Phi^-(-s_V^1)\overline{\omega} + \overline{\omega}, \quad \overline{\omega} \in H^{0,1}(\partial\overline{M}; V_{\mathbb{C}})\}.$$

En degré 2 la suite exacte longue de cohomologie de la paire $\overline{M}, \partial\overline{M}$ montre que l'application i_2^* est surjective vu que $H^3(\overline{M}, \partial\overline{M}; V_{\mathbb{C}}) \cong H^0(M; V_{\mathbb{C}}) = 0$. Pour représenter les classes de cohomologie de $H^2(M; V_{\mathbb{C}})$ par des formes fermées on a le lemme suivant, dont la preuve est semblable à celle du lemme 6.2.

Lemme 6.3. *On pose $s_V^0 = n_1 + n_2 + 1$ et $v \in V_N := \bigoplus_{j=1}^h V_{\mathbb{C}}^{N_j} \cong H^0(\partial\overline{M}; V_{\mathbb{C}})$ la 2-forme $*dE(s_V^0, v)$ est fermée. De plus, les $i_2[*dE(s_V^0, v)]$ pour $v \in V_N$ engendrent $H^2(M; V_{\mathbb{C}})$.*

Démonstration. On sait que $E(s_V^0, v)$ est harmonique, d'où il suit que $d*dE(s_V^0, v) = 0$. Le terme constant est une 2-forme holomorphe non nulle donc $*dE(s_V^0, v)$ n'est pas nulle en cohomologie de de Rham, et par égalité des dimensions toutes les classes dans $H^2(M; V_{\mathbb{C}})$ sont donc obtenues de cette manière. □

On note E^2 l'application $H^0(\partial\overline{M}; V_{\mathbb{C}}) \to H^2(M; V_{\mathbb{C}})$ définie par $v \mapsto [*dE(s_V^0, v)]$.

6.2.3 Produits intérieurs sur la cohomologie

On rappelle que l'on suppose $n_1 > n_2$, de sorte que $s_v^1 \geq 1$. D'après les formules de Maass-Selberg (5.20) on a pour $\omega \in H^{1,0}(\partial\overline{M}; V_{\mathbb{C}})$ la limite

$$\lim_{Y\to\infty} Y^{-2s_V^1+1} \|T^Y E(s_V^1, \omega)\|^2_{L^2(M)} = (s_V^1)^{-1} \|\omega\|^2_{L^2(\partial\overline{M})}.$$

On définit donc un produit intérieur sur $H^1_{\text{Eis}}(M; V_{\mathbb{C}})$ par

$$\begin{aligned} \langle i_1^*[E^1(\omega)], i_1^*[E^1(\omega')]\rangle_{H^1_{\text{Eis}}(M)} &= (s_V^1)^{-1} \langle \omega, \omega'\rangle^2_{L^2\Omega^1(\partial\overline{M})} \\ &= \lim_{Y\to\infty} Y^{-2s_V^1} \langle T^Y E(s_V^1, \omega), T^Y E(s_V^1, \omega')\rangle^2_{L^2\Omega^1(M)}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

De la même manière on définit

$$\begin{aligned} \langle i_2^*[E^2(v)], i_2^*[E^2(v')]\rangle_{H^2_{\text{Eis}}(M)} &= (s_V^0)^{-\frac{1}{2}} \langle v, v'\rangle_{L^2(\partial\overline{M})} \\ &= \lim_{Y\to\infty} Y^{-2s_V^0} \langle T^Y(*dE(s_V^0, v)), T^Y(*dE(s_V^0, v'))\rangle_{L^2(M)}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

6.2.4 Torsion de Reidemeister des variétés arithmétiques non-compactes

Pour $p = 1, 2$ la cohomologie entière $H^p(M; V_{\mathbb{Z}})_{\text{libre}}$ est un réseau dans $H^p(M; V_{\mathbb{C}})$. On rappelle que l'on a défini le covolume vol d'un réseau dans un espace hermitien dans la section 1.1.4. On définit la torsion de Reidemeister de M à coefficients dans V par

$$\tau(M; V_{\mathbb{Z}}) = \frac{|H^1(M; V_{\mathbb{Z}})_{\text{tors}}|}{\operatorname{vol} H^1(M; V_{\mathbb{Z}})_{\text{libre}}} \times \frac{\operatorname{vol} H^2(M; V_{\mathbb{Z}})_{\text{libre}}}{|H^2(M; V_{\mathbb{Z}})_{\text{tors}}|}. \tag{6.7}$$

6.3 Théorème de Cheeger-Müller asymptotique

On démontre dans cette section le résultat suivant.

Théorème 6.4. *Soit Γ un groupe de Bianchi, Γ_n une suite cusp-uniforme de sous-groupes de congruence de Γ principaux, sans torsion et d'indice borné dans des $\Gamma_0(\mathfrak{I})$ ou de type Γ_1, et deux à deux distincts, $M_n = \Gamma_n \backslash \mathbb{H}^3$. Pour tout Γ-module arithmétique $V_{\mathbb{Z}}$ fortement acyclique on a :*

$$\lim_{|\mathfrak{I}|\to\infty} \frac{\log \tau(M_n; V_{\mathbb{Z}}) - \log T_R(M_n; V)}{\operatorname{vol} M_n} = 0.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du Théorème 6.5 et de la proposition 6.7. □

6.3.1 Torsions de Reidemeister absolue et relative

La partie libre $H^p(M^Y; V_{\mathbb{Z}})_{\text{libre}}$ de l'homologie entière est naturellement un réseau dans $H^p(M^Y; V) \cong \ker(\Delta^p_{\text{abs}}[M^Y])$ et on note $\operatorname{vol} H^p(M^Y; V_{\mathbb{Z}})_{\text{libre}}$ son covolume respectivement à la métrique L^2 sur ce dernier. On définit alors la torsion de Reidemeister absolue par :

$$\tau_{\text{abs}}(M^Y; V_{\mathbb{Z}}) = \prod_{p=0}^{\dim X} \left(\frac{|H^p(M^Y; V_{\mathbb{Z}})_{\text{tors}}|}{\operatorname{vol} H^p(M^Y; V_{\mathbb{Z}})_{\text{libre}}} \right)^{(-1)^p}. \tag{6.8}$$

Dans la suite on notera $H^p_{\text{abs}}(M^Y; V_{\mathbb{C}})$ l'espace $H^p(M^Y; V_{\mathbb{C}})$ muni de la métrique L^2. De la même manière on définit la torsion de Reidemeister relative par

$$\tau_{\text{rel}}(M^Y; V_{\mathbb{Z}}) = \prod_{p=1}^{3} \left(\frac{|H^p(M^Y, \partial M^Y; V_{\mathbb{Z}})_{\text{tors}}|}{\operatorname{vol} H^p(M^Y, \partial M^Y; V_{\mathbb{Z}})_{\text{libre}}} \right)^{(-1)^p}. \tag{6.9}$$

où l'on considère les $H^p(M^Y, \partial M^Y; V_{\mathbb{Z}})_{\text{libre}}$ comme des réseaux des espaces euclidiens $H^p_{\text{rel}}(M^Y; V) := \ker \Delta^p_{\text{rel}}[M^Y]$.

6.3.2 Application du théorème de Cheeger-Müller à bord

Le passage des torsions analytiques aux torsions de Reidemeister se fait dans le théorème suivant.

Théorème 6.5. *Soit ρ, V une représentation fortement acyclique de G. Soit Γ un réseau non-uniforme G et Γ_n une suite de sous-groupes d'indice fini dans Γ, sans torsion qui soit cusp-uniforme et telle que la suite $M_n = \Gamma_n \backslash \mathbb{H}^3$ BS-converge vers $\mathbb{H}^3$. On suppose enfin que Γ préserve un réseau $V_{\mathbb{Z}} \subset V$ et soit τ_{abs} (resp. τ_{rel}) donné par (6.8) (resp. (6.9)) ci-dessus. Pour toute suite $\Upsilon^n \in [1, +\infty)^{h_n}$ telle que l'on ait $\Upsilon^n_j \geq Y^n_j$ (où $Y^n \in [1, +\infty)^{h_n}$ est la suite de la proposition 4.22) on a :*

$$\frac{\log T_R(M_n; V) - \log \tau_{\text{rel}}(M_n^{\Upsilon_n}; V_{\mathbb{Z}})}{\operatorname{vol} M_n}, \frac{\log T_R(M_n; V) - \log \tau_{\text{abs}}(M_n^{\Upsilon_n}; V_{\mathbb{Z}})}{\operatorname{vol} M_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{6.10}$$

Démonstration. On écrit la démonstration pour des conditions absolues au bord mais elle reste valable pour des conditions relatives. On commence par démontrer le résultat pour $\Upsilon^n = Y^n$.

Si M est une variété hyperbolique de volume fini et $Y \in [1,+\infty)^h$ on note g_0 la métrique hyperbolique sur M^Y et g_1 une métrique Riemanienne sur M^Y qui soit égale à g_0 sur $M^{Y/3}$ et soit un produit près du bord,par exemple on peut prendre

$$g_1(x) = dy_j^2 + \psi(\log(Y_j/y_j(x)))Y_j^{-2} + (1-\psi(\log(Y_j/y_j(x))))y_j^{-2}$$

où ψ est une fonction lisse nulle sur $[1,+\infty)$ et égale à 1 au voisinage de 0. On pose $g_u = ug_1 + (1-u)g_0$. Vu que le germe sur le bord des métriques g_u ne dépend pas de M ou Y, par [Che79, Theorem 3.27] il existe des fonctions lisses c_p sur $[0,1]$ qui ne dépendent pas de M, Y telles que l'on ait

$$\frac{d}{du}\Big(\log T_{\text{abs}}((M^Y,g_u);V) - \log\tau_{\text{abs}}((M^Y,g_u);V_{\mathbb{Z}})\Big) = \text{vol}(\partial M^Y)\sum_{p=0}^{3} p(-1)^p c_p(u).$$

Par le théorème de Cheeger-Müller à bord de Brüning et Ma [BM11, Theorem 0.1] on a $T_{\text{abs}}((M^Y,g_1);V) = \tau_{\text{abs}}((M^Y,g_1);V_{\mathbb{Z}})$ et il suit finalement que l'on a :

$$\frac{\log T_{\text{abs}}(M^Y;V) - \log\tau_{\text{abs}}(M^Y;V_{\mathbb{Z}})}{\text{vol}\, M} = \text{vol}(\partial M^Y)\int_0^1 \sum_{p=1}^{3}(-1)^p p c_p(u)du \tag{6.11}$$

Par le théorème 4.15, pour la suite $Y^n \in [1,+\infty)^{h_n}$ on a

$$\log T_{\text{abs}}(M_n^{Y^n};V) - \log T_R(M_n;V) = o(\text{vol}\, M_n) \tag{6.12}$$

et $\min_j Y_j^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Il vient

$$\text{vol}(\partial M_n^{Y^n}) \leq (\min_j Y_j^n)^{-2}\,\text{vol}(\partial M_n^1) = o(\text{vol}\, M_n)$$

et par (6.11) il suit que

$$\log T_{\text{abs}}(M^Y;V) - \log\tau_{\text{abs}}(M^Y;V_{\mathbb{Z}}) = o(\text{vol}\, M_n). \tag{6.13}$$

Le théorème est une conséquence immédiate de (6.12), (6.13) et du lemme suivant, dont la preuve est semblable à ce que l'on a déjà fait.

Lemme 6.6. *Pour toute suite $\Upsilon^n \in [1,+\infty)^{h_n}$ telle que pour $j = 1,\dots,h_n$ on a $\Upsilon_j^n \geq Y_j^n$, on a*

$$\frac{(\log T_{\text{abs}}(M_n^{Y^n};V) - \log\tau_{\text{abs}}(M_n^{Y^n};V_{\mathbb{Z}})) - (\log T_{\text{abs}}(M_n^{\Upsilon^n};V) - \log\tau_{\text{abs}}(M_n^{\Upsilon^n};V_{\mathbb{Z}}))}{\text{vol}\, M_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Démonstration. On commence par fixer une variété hyperbolique de volume fini M ayant $h \geq 1$ cusps. Soit $g_u, u \in [1,+\infty)^h$ une famille lisse de métriques riemanniennes sur $\overline{M}$ telle que $(\overline{M}, g_u)$ soit isométrique à M^u. Alors le germe de la métrique en un point du bord ne dépend pas de u et d'après (6.11) on a donc pour tous Y', Y l'égalité

$$\log(T_{\text{abs}}(M^Y;V)/\tau_{\text{abs}}(M^Y;V_{\mathbb{Z}})) - \log(T_{\text{abs}}(M^{Y'};V)/\tau_{\text{abs}}(M^{Y'};V_{\mathbb{Z}})) = \sum_{j=1}^{h} c_p \int_{Y_j}^{Y_j'} \text{vol}(T_j, g_u)du$$

où $c_p = c_p(0)$ dans la notation de (6.11). On a $\mathrm{vol}(T_j, g_u) = (Y_j/u)^2 \mathrm{vol}(T_j, g_Y)$ et il suit en particulier que

$$\log(T_{\mathrm{abs}}(M^Y; V)/\tau_{\mathrm{abs}}(M^Y; V_{\mathbb{Z}})) - \log(T_{\mathrm{abs}}(M^{Y'}; V)/\tau_{\mathrm{abs}}(M^{Y'}; V_{\mathbb{Z}})) \\ \leq c_p \,\mathrm{vol}(\partial M^1) \min(Y_j)^{-2} \int_{\min_j Y_j}^{\max_j Y'_j} u^{-2} du \leq c_p \,\mathrm{vol}(\partial M^1).$$

En particulier, on a

$$(\log T_{\mathrm{abs}}(M_n^{Y^n}; V) - \log \tau_{\mathrm{abs}}(M_n^{Y^n}; V_{\mathbb{Z}})) - (\log T_{\mathrm{abs}}(M_n^{\Upsilon^n}; V) - \log \tau_{\mathrm{abs}}(M_n^{\Upsilon^n}; V_{\mathbb{Z}})) \ll h_n$$

ce qui conclut la preuve du lemme et du théorème. □

□

6.3.3 Egalité asymptotique des torsions de Reidemeister

On démontre ici le résultat suivant, ce qui finit la preuve du théorème 6.4.

Proposition 6.7. *Soit Γ_n comme dans l'énoncé du théorème 6.4. Il existe une suite Υ^n telle que l'on ait*

$$\frac{\log \tau_{\mathrm{abs}}(M_n^{\Upsilon^n}; V_{\mathbb{Z}}) - \log \tau(M_n; V_{\mathbb{Z}})}{\mathrm{vol}\, M_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{6.14}$$

On aura besoin de la proposition ci-dessous, dont la preuve est essentiellement contenue dans [CV10, 6.8.3].

Proposition 6.8. *Il existe des constantes C, c ne dépendant que de F telles que l'on ait les propriétés suivantes. Soient $\Gamma \subset G(F)$ un sous-groupe de congruence, $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$, h son nombre de cusps, $\alpha_j = \alpha(\Gamma_{N_j})$ où $N_1, \ldots, N_h$ sont des représentants des sous-groupes unipotents Γ-rationnels et $Y \in [1, +\infty)^h$ tel que $Y_j \geq C\alpha_j$. Soient $\omega \in H^{1,0}(\partial\overline{M}; V_{\mathbb{C}})$, $f = E(s_V^1, \omega)$ et f_Y la projection de $f|_{M^Y}$ sur le sous-espace $H^1_{\mathrm{abs}}(M^Y; V_{\mathbb{C}})$. On a*

$$\|f - f_Y\|_{L^2(M^Y)} \leq C\|f\|_{L^2(M^Y)} e^{-c \min_j (Y_j/2\alpha_j)} \,\mathrm{vol}(M^Y - M^{Y/2}).$$

Démonstration. On introduit une fonction lisse $h : [1, +\infty) \to [0, 1]$ telle que $h(1) = 1, h(2) = 0$ et on définit une fonction f'_Y sur M^Y par $f'_Y = f - h(Y/y)(f - f_P)$ (où $y = \max_j y_j$). D'après (4.21) on a

$$\|f - f'_Y\|_{L^2(M^Y)} \leq \|f - f_P\|_{L^2(M^Y - M^{Y/2})} \ll \|f\|_{L^2(M^Y)} e^{-c \min_j (Y_j/2\alpha_j)}. \tag{6.15}$$

On vérifie maintenant que f'_Y vérifie des conditions absolues au bord : près du bord on a $f'_Y = f_P$, vu que l'on a clairement $dy \wedge *f_P = 0$ et que $df_P = 0$ on a bien $f'_Y \in \Omega^1_{\mathrm{abs}}(M^Y; V_{\mathbb{C}})$. On peut donc calculer :

$$\Delta^1_{\mathrm{abs}}[M^Y] f'_Y = \Delta^1[M^Y] f'_Y = -\Delta^1[M^Y](h(Y/y)(f - f_P)) = (f_P - f)\Delta^1[M^Y] h(Y/y) \tag{6.16}$$

et la norme L^2 du côté droit est $\leq C\|f\|_{L^2(M^Y)} e^{-c \min_j (Y_j/2\alpha_j)}$.

D'après le corollaire 4.19, quitte à augmenter C on peut supposer que si $Y_j \geq C\alpha_j$ le laplacien $\Delta^1_{\mathrm{abs}}[M^Y]$ n'a pas de valeur propre dans $(0, \lambda_0/2)$ pour $Y_j \geq C\alpha_j$, et il suit alors de (6.15) et (6.16) que l'on a

$$\begin{aligned}
\|f - f_Y\|_{L^2(M^Y)} &\leq \|f - f'_Y\|_{L^2(M^Y)} + \|f'_Y - f_Y\|_{L^2(M^Y)} \\
&\leq \|f\|_{L^2(M^Y)} \left(\int_{M^Y - M^{Y/2}} (\sum_{j=1}^{h} e^{-c \min_j (y_j(x)/\alpha_j)})^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \frac{2}{\lambda_0} \|(f_P - f)\Delta^1[M^Y] h(Y/y)\|_{L^2(M^Y)} \\
&\ll \|f\|_{L^2(M^Y)} \left(\int_{M^Y - M^{Y/2}} e^{-c \min_j y_j(x)/\alpha_j} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|f\|_{L^2(M^Y)} \operatorname{vol}(M^Y - M^{Y/2}) e^{-c \min_j (Y_j/\alpha_j)}
\end{aligned}$$

où la dernière ligne suit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

Démonstration de la proposition 6.7. Soit $\Upsilon \in [1, +\infty)^{h_n}$; on a

$$\frac{\tau(M_n; V_{\mathbb{Z}})}{\tau_{\mathrm{abs}}(M_n^{\Upsilon}; V_{\mathbb{Z}})} = \frac{\operatorname{vol} H^2(M_n; V_{\mathbb{Z}})_{\mathrm{libre}}}{\operatorname{vol} H^2(M_n^{\Upsilon}; V_{\mathbb{Z}})_{\mathrm{libre}}} \frac{\operatorname{vol} H^1(M_n^{\Upsilon}; V_{\mathbb{Z}})_{\mathrm{libre}}}{\operatorname{vol} H^1(M_n; V_{\mathbb{Z}})_{\mathrm{libre}}}$$

et on va donc montrer que pour $p = 1, 2$ on a

$$\log \operatorname{vol} H^p(M_n; V_{\mathbb{Z}})_{\mathrm{libre}} - \log \operatorname{vol} H^p(M_n^{\Upsilon^n}; V_{\mathbb{Z}})_{\mathrm{libre}} = o(\operatorname{vol} M_n)$$

pour une suite Υ^n bien choisie.

On traite $p = 1$, le cas $p = 2$ est similaire. Soit r_n l'application de restriction $H^1(M_n; V_{\mathbb{C}}) \to H^1(M_n^{\Upsilon}; V_{\mathbb{C}})$. Comme l'inclusion de M_n^{Υ} dans M_n est une équivalence d'homotopie elle induit un isomorphisme entre les groupes de cohomologie entière et on a ainsi

$$\operatorname{vol} H^1(M_n^{\Upsilon}; V_{\mathbb{Z}})_{\mathrm{libre}} = |\text{dét}(r_n)| \operatorname{vol} H^1(M_n; V_{\mathbb{Z}})_{\mathrm{libre}}$$

où le déterminant est pris pour des bases unitaires de chaque espace (l'espace à gauche étant muni de la métrique définie par (6.5) et celui à droite de la métrique L^2). On va donc montrer que $\log |\text{dét}(r_n)| = o(\operatorname{vol} M_n)$ (en fait on va établir le résultat plus précis $|r_n|, |r_n|^{-1} \leq 1 + \varepsilon_n$ pour une suite ε_n telle que $b_1(M_n; V_{\mathbb{C}}) \log \varepsilon_n = o(\operatorname{vol} M_n)$).

On reprend la notation f_{Υ} de la proposition 6.8, pour une forme fermée f on a alors $r_n[f] = [f_{\Upsilon}]$. Pour majorer $\|f_{\Upsilon}\|_{L^2(M^Y)}$ on écrit

$$\|f_{\Upsilon}\|_{L^2(M^{\Upsilon})} \leq \|f\|_{L^2(M^{\Upsilon})} + \|f - f_{\Upsilon}\|_{L^2(M^{\Upsilon})} \leq (1 + Ch_n)\|f\|_{L^2(M^{\Upsilon})} \tag{6.17}$$

où la seconde inégalité suit de la proposition 6.8 et de la majoration grossière $\operatorname{vol}(M^{\Upsilon} - M^{\Upsilon/2}) \leq Ch_n$ (où la constante est uniforme vu que $Y_j^n/2\alpha_j^n$ est borné et la suite Γ_n est cusp-uniforme). On majore maintenant le côté droit en utilisant le lemme suivant.

Lemme 6.9. *Soit $Y = \max_j \Upsilon_j$, $a = s_V^1$ et $\mathfrak{I}_n$ le niveau de Γ_n. Il existe des $b, C > 0$ (dépendant de F et V) tels que l'on a*

$$(C^{-1}Y^a - C|\mathfrak{I}_n|^b)\|[f]\|_{H^1(M_n)} \leq \|f\|_{L^2(M_n^{\Upsilon})} \leq C(Y^a + |\mathfrak{I}_n|^b)\|[f]\|_{H^1(M_n)}. \tag{6.18}$$

Démonstration. Soit M_n^Y la variété tronquée à hauteur $(Y,\dots,Y)\in[1,+\infty)^{h_n}$, de sorte que $M_n^\Upsilon\subset M_n^Y$ et $\|f\|_{L^2(M_n^{Y^n})}\le\|f\|_{L^2(M_n^Y)}\le\|T^Yf\|_{L^2(M_n)}$. D'après les relations de Maass-Selberg (5.20) on a

$$\begin{aligned}\|T^Yf\|^2_{L^2(M_n)}\le{}&\frac{Y^{2s_V^1-1}}{2s_V^1-1}\|\omega\|^2_{L^2\partial\overline{M}}+\frac{Y^{-2s_V^1+1}}{2s_V^1-1}\|\Phi^+(s_V^1)\omega\|^2_{L^2(\partial\overline{M})}\\&+\log Y\|\Phi^+(s_V^1)\omega\|_{L^1(\partial\overline{M})}\|\omega\|_{L^2(\partial\overline{M})}+\left\|\frac{d\Phi^+(s_V^1+iu)}{du}|_{u=0}\omega\right\|_{L^2(\partial\overline{M})}\|\omega\|_{L^2(\partial\overline{M})}.\end{aligned}$$

D'après la proposition 5.31 il vient

$$\frac{\|T^Yf\|^2_{L^2(M_n)}}{|\omega|^2_{L^2(\partial\overline{M})}}\ll Y^{2s_V^1}+|\mathfrak{I}_n|^c(1+\log Y)\ll Y^{2a}+|\mathfrak{I}_n|^{2c}$$

et la majoration suit. La minoration se prouve de la même manière. □

On a

$$h_n\le h_F|G_{\mathfrak{I}_n}/N_{\mathfrak{I}_n}|\le h_F|\mathfrak{I}_n|^2$$

et il suit donc de (6.17) et du lemme 6.9 qu'il existe un $e>0$ tel que

$$\|f_\Upsilon\|_{L^2(M^\Upsilon)}\ll|\mathfrak{I}_n|^eY^e \tag{6.19}$$

(on conserve la notation $Y=\max_j\Upsilon_j$).

La minoration de $\|f_\Upsilon\|_{L^2(M^\Upsilon)}$ est plus subtile. On écrit

$$\begin{aligned}\|f_\Upsilon\|_{L^2(M^\Upsilon)}&\ge\|f\|_{L^2(M^\Upsilon)}-\|f-f_\Upsilon\|_{L^2(M^\Upsilon)}\\&\ge(1-\mathrm{vol}(M^\Upsilon-M^{\Upsilon/2})e^{-cY/\max\alpha_n^j})\|f\|_{L^2(M^\Upsilon)}\end{aligned}$$

où la seconde minoration suit de la proposition 6.8. On a $\max\alpha_n^j\ll|\mathfrak{I}|^{\frac12}$ et aussi $\mathrm{vol}(M^\Upsilon-M^{\Upsilon/2})\ll h_n\ll|\mathfrak{I}_n|^2$ et par le lemme 6.9 il vient

$$\|f_\Upsilon\|_{L^2(M^\Upsilon)}\ge(1-C|\mathfrak{I}_n|^2\exp(-c\frac{Y}{|\mathfrak{I}_n|^{\frac12}}))(C^{-1}Y^a-C|\mathfrak{I}|^b)\|[f]\|_{H^1(M_n)}. \tag{6.20}$$

Pour tout A assez grand et la suite $\Upsilon_j^n=|\mathfrak{I}_n|^{A-1}$ il suit de (6.19) et (6.20) que l'on a

$$1/2\|[f]\|_{H^1(M_n)}\le\|f_Y\|_{L^2(M_n^{\Upsilon^n})}\le C|\mathfrak{I}_n|^{Ae}\|[f]\|_{H^1(M_n)}.$$

On a donc $|r_n|^{-1}\le2$ et $|r_n|\le C|\mathfrak{I}_n|^{Ae}$ et comme $\dim H^1(M_n;V_{\mathbb{C}})=h_n$ il suit que

$$|\log\text{dét}(r_n)|\ll h_n\log|\mathfrak{I}_n|.$$

D'autre part on a vu dans les sections 5.2.3 et 5.2.5 que l'on a $h_n\ll[\Gamma:\Gamma_n]^{1-\delta}$ pour un $\delta>0$, et il suit que le côté droit est un $o(\mathrm{vol}\,M_n)$, ce qui termine la preuve pour $p=1$. □

6.4 Croissance de la torsion

On démontre ici le résultat suivant ; l'énoncé lui-même n'est pas extrêmement intéressant mais la méthode de preuve n'est pas très loin de démontrer l'égalité.

Théorème 6.10. *Soit Γ_n une suite de sous-groupes de congruence principaux ou de type Γ_1 dans $G(F)$ et $V_{\mathbb{Z}} = \mathcal{O}_F^2$. On a*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log |H^2(M_n; V_{\mathbb{Z}})_{\text{tors}}|}{\operatorname{vol} M_n} \leq -t^{(2)}(V). \tag{6.21}$$

Démonstration. On a d'après les théorèmes 5.11 et 6.4 la limite

$$\lim_{n\to\infty} \log \left(\frac{|H^1(M_n; V_{\mathbb{Z}})_{\text{tors}}|}{\operatorname{vol} H^1(M_n; V_{\mathbb{Z}})_{\text{libre}}} \frac{\operatorname{vol} H^2(M_n; V_{\mathbb{Z}})_{\text{libre}}}{|H^2(M_n; V_{\mathbb{Z}})_{\text{tors}}|} \right) = t^{(2)}(V).$$

Le logarithme du numérateur est un $o(\operatorname{vol} M_n)$ par les lemmes 6.23 et 6.17 ci-dessous, et il suit que l'on a

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log |H^2(M_n; V_{\mathbb{Z}})_{\text{tors}}|}{\operatorname{vol} M_n} \leq -t^{(2)}(V) - \liminf_{n\to\infty} \log \operatorname{vol} H^1(M_n; V_{\mathbb{Z}})_{\text{libre}}$$

et par le lemme 6.18 le côté droit est égal à $-t^{(2)}(V)$. □

6.4.1 Croissance du H_0

Lemme 6.11. *Soit Γ_n une suite de sous-groupes de congruence de $\Gamma(\mathcal{O}_F)$, $M_n = \Gamma_n \backslash \mathbb{H}^3$. On a* $\log |H_0(M_n; V_{\mathbb{Z}})| = o(\operatorname{vol} M_n)$

Démonstration. On commence par prouver le résultat pour les groupes principaux. On montre que l'on a $N\mathfrak{I}V_{\mathbb{Z}} \subset (\Gamma(\mathfrak{I}) - 1)V_{\mathbb{Z}}$ pour un entier N ne dépendant que de n_1, n_2, de sorte que $|H_0(M_{\mathfrak{I}}; V_{\mathbb{Z}})| \leq (N|\mathfrak{I}|)^{\dim V}$ et $\log |H_0(M_{\mathfrak{I}}; V_{\mathbb{Z}})| = O(\log |\mathfrak{I}|)$ est bien un $o(\operatorname{vol} M_{\mathfrak{I}})$.

Soient $X_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour $a \in \mathfrak{I}$ on a alors $\eta_a = 1 + aX_\infty \in \Gamma(\mathfrak{I})$. On considère d'abord le cas où $n_2 = 0, n_1 = n$; on pose $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$, la famille $e_1^n, e_1^{n-1}e2, \ldots, e_2^n$ est alors $\mathbb{Z}$-base du module libre $V_{\mathbb{Z}}$. Soit N le produit de tous les coefficients biniomiaux $\binom{n}{k}$, on a alors $Nae_1^{n-k}e_2^k \in (\Gamma(\mathfrak{I}) - 1)$ pour tout $k < n$. En effet, on voit que $ae_2^n = \eta_a.(e_1e_2^{n-1}) - e_1e_2^{n-1}$ et comme d'autre part $\eta_a.(e_1^{k+1}e_2^{n-k-1}) - e_1^{k+1}e_2^{n-k-1}$ est une combinaison linéaire des $e_1^l e_2^{n-l}$ pour $l \geq k$ on peut démontrer ceci par une récurrence. On a aussi $ae_1^n = (1 + aX_0)e_1^{n-1}e_2 - e_1^{n-1}e_2 \in (\Gamma(\mathfrak{I}) - 1)V_{\mathbb{Z}}$, ce qui finit la preuve dans ce cas. On peut utiliser la même démonstration pour le cas où $n_1 = 0$ et le cas où $n_1, n_2 \neq 0$.

Si $H \subset G_{\mathfrak{I}}$ est un sous-groupe propre on a une surjection $H_0(M_H; V_{\mathbb{Z}}) \to H_0(M_{\mathfrak{I}}; V_{\mathbb{Z}})$. Si $\mathfrak{I}_n$ est le niveau de Γ_n on a donc $\log |H_0(M_n; V_{\mathbb{Z}})| = O(\log |\mathfrak{I}_n|)$, et il suit du lemme 5.8 que l'on a bien $\log |H_0(M_n; V_{\mathbb{Z}})| = o(\operatorname{vol} M_n)$. □

6.4.2 Homologie du bord

Complexes cellulaires

Soit T un tore, U un $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini et $\rho : \pi_1(T) \to \mathrm{SL}(U)$. On suppose que T est muni d'une structure cellulaire standard ayant une 2-cellule e^2, deux 1-cellules e_1^1 et e_2^1 et un

sommet e^0, on note u_1, u_2 la base de $\pi_1(T)$ associée (i.e. u_i est représenté par le lacet e_i^1). On a alors un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules respectant les degrés $C_*(\widetilde{T};U) \cong C_*(\widetilde{T}) \otimes U$ qui descend en un isomorphisme

$$C_*(T;U) = C_*(\widetilde{T};U) \underset{\mathbb{Z}[\pi_1(T)]}{\otimes} \mathbb{Z} \cong c_*(T) \otimes U$$

et les différentielles sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} d_2(e^2 \otimes v) &= e_1^1 \otimes (v - \rho(u_2)v) + e_2^1 \otimes (\rho(u_1)v - v), \\ d_1(e_i^1 \otimes v) &= e^0 \otimes (v - \rho(u_i)v). \end{aligned} \tag{6.22}$$

Torsion

Lemme 6.12. *Soit Λ un réseau dans un groupe unipotent F-rationnel N, alors pour toute suite Λ_n de sous-groupes deux à deux distincts de Λ on a*

$$\log |H_0(\Lambda_n; V_{\mathbb{Z}})_{\mathrm{tors}}|, \log |H_1(\Lambda_n; V_{\mathbb{Z}})_{\mathrm{tors}}| = o([\Lambda : \Lambda_n]).$$

Démonstration. On démontre le résultat pour $\Lambda = 1 + \mathcal{O}_F X_\infty$ (où $X_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$). On a démontré dans la preuve du lemme 6.11 que si $1 + aX_\infty \in \Lambda'$ alors $(\Lambda' - 1)V_{\mathbb{Z}} \supset Na\overline{V}_{\mathbb{Z}}$, où $\overline{V}_{\mathbb{Z}} = \ker \rho(X_\infty)$. En particulier on a, si $d = \dim V$:

$$|(V_{\mathbb{Z}}/(\Lambda' - 1)V_{\mathbb{Z}})_{\mathrm{tors}}| \leq (N[\Lambda : \Lambda'])^d$$

d'où le résultat pour H_0 suit immédiatement.

On écrit $\Lambda' = \mathbb{Z}u_1 \oplus \mathbb{Z}u_2$. D'après (6.22), $H_1(\Lambda'; V_{\mathbb{Z}})$ est un sous-module de $(V_{\mathbb{Z}} \oplus V_{\mathbb{Z}})/\operatorname{im}(\rho(u_1) - 1) \oplus (\rho(u_2) - 1)$. La $\mathbb{Z}$-torsion de ce dernier module se plonge dans

$$V_{\mathbb{Z}}/(\operatorname{im}(\rho(u_1) - 1) \oplus V_{\mathbb{Z}}(\rho(u_2) - 1)).$$

On a vu que ce dernier module a une torsion d'ordre inférieur à $(N|u_1|^2 \times N|u_2|^2)^d \ll [\Lambda : \Lambda']^{4d}$, ce qui finit la preuve. □

Volumes

On suppose que $V_{\mathbb{Z}} = \mathcal{O}_F^2$, et on fixe une composante T du bord de $\overline{M}$. Le sous-espace $H^{1,0}(T; V_{\mathbb{C}}) \subset H^1(T; V_{\mathbb{C}})$ est rationnel et on note $H^{1,0}(T; V_{\mathbb{Z}})$ son intersection avec $H^1(T; V_{\mathbb{Z}})$; on définit de même $H^{0,1}(T; V_{\mathbb{Z}})$.

Lemme 6.13. *Le réseau $H^{1,0}(T; V_{\mathbb{Z}}) \oplus H^{0,1}(T; V_{\mathbb{Z}})$ est d'indice $\ll (\operatorname{vol} T)^4$ dans $H^1(T; V_{\mathbb{Z}})$.*

Démonstration. On peut choisir une décomposition cellulaire de T comme plus haut telle que les éléments $u_1, u_2 \in \pi_1(T)$ associés à e_1^1, e_2^1 vérifient $\operatorname{vol} T \asymp |u_1| \times |u_2|$. On fixe des vecteurs $v_1, v_2 \in V_{\mathbb{Z}}$ tels que v_1 soit fixé par tous les éléments de $\pi_1(T)$ et v_1, v_2 engendrent $V_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathcal{O}_F$. On a alors $\rho(u_1)v_2 = v_2 + a_1 v_1$, $\rho(u_2)v_2 = v_2 + a_2 v_1$ pour des $a_1, a_2 \in \mathcal{O}_F$; de plus $|a_i| \ll |u_i|$.

On pose

$$\begin{aligned} \theta_1 &= e_1^1 \otimes v_1, & \omega_1 &= dz \otimes v_2, \\ \theta_2 &= (a_2 e_1^1 - a_1 e_2^1) \otimes v_2 & \omega_2 &= d\bar{z} \otimes v_1. \end{aligned}$$

On vérifie que θ_1, θ_2 sont des cycles entiers qui engendrent (sur $\mathcal{O}_F$) un réseau d'indice $\ll |a_1 a_2|^2$ dans $H_1(T; V_{\mathbb{Z}})$. Par ailleurs ω_1, ω_2 sont des formes fermées et on calcule que

$$(\omega_1, \theta_1)_T = a_1,\ (\omega_2, \theta_2)_T = 2a_1 a_2,$$
$$(\omega_1, \theta_2)_T = (\omega_2, \theta_1)_T = 0$$

et il suit que ω_1, ω_2 sont entières et engendrent un réseau d'indice $\ll |a_1 a_2|^4 \ll (\operatorname{vol} T)^4$ dans $H^1(T; V_{\mathbb{Z}})$. □

Lemme 6.14. *On a* $|\log \operatorname{vol} H^p(\partial\overline{M}; V_{\mathbb{Z}})_{\text{libre}}| = o(\operatorname{vol} M_n)$ *pour* $p = 0, 1, 2, (0,1)$ *et* $(1,0)$.

Démonstration. Pour $p = 0, 2$ la preuve est laissée au lecteur. D'après le lemme précédent, le résultat pour $p = 1$ suit de celui pour $(0,1)$ et $(1,0)$. On a par ailleurs, en gardant la notation de la preuve du lemme précédent :

$$(\operatorname{vol} T)^{-2} |\omega_1|^2 \ll \operatorname{vol} H^{1,0}(T; V_{\mathbb{Z}}) \ll |\omega_1|^2$$

d'où il suit bien que $\log \operatorname{vol} H^{1,0}(T; V_{\mathbb{Z}}) \ll \log \operatorname{vol} T$, et de la même manière on démontre que $\log \operatorname{vol} H^{0,1}(T; V_{\mathbb{Z}}) \ll \log \operatorname{vol} T$. □

6.4.3 Torsion dans le H^1

On travaille dans cette section avec le système local donné par la représentation canonique de $\Gamma(\mathcal{O}_F)$ sur $V_{\mathbb{Z}} = \mathcal{O}_F^2$. On a alors une forme bilinéaire ϕ non-dégénérée et $\Gamma(\mathcal{O}_F)$-invariante sur $V_{\mathbb{Z}} \times V_{\mathbb{Z}}$ donnée par $\phi(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$, de sorte que pour toute variété $M = \Gamma \backslash \mathbb{H}^3, \Gamma \subset \Gamma(\mathcal{O}_F)$ on a une forme de Kronecker sur $H_1(M; V_{\mathbb{Z}}) \times H^1(M; V_{\mathbb{Z}})$. On aura besoin du fait suivant pour exploiter ceci.

Lemme 6.15. *Soient* $A \in \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^m, \mathbb{Z}^n)$ *et* $B \in \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^m)$ *tels que pour tout* $\varphi \in \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^m, \mathbb{Z})$ *et* $v \in \mathbb{Z}^n$ *on ait* $(\varphi, Bv) = (\varphi \circ A, v)$. *Alors* $\mathbb{Z}^m / B\mathbb{Z}^n$ *et* $\mathbb{Z}^n / A\mathbb{Z}^m$ *ont les même sous-groupe de torsion.*

Démonstration. Si on fixe des bases de $\mathbb{Z}^n$ et $\mathbb{Z}^m$ les matrices de A et B sont transposées l'une de l'autre et ont donc les mêmes facteurs élémentaires. □

Lemme 6.16. *On a*

$$\frac{\log |H^1(M_n; V_{\mathbb{Z}})_{\text{tors}}|}{\operatorname{vol} M_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0. \tag{6.23}$$

Démonstration. Tous les groupes de (co)homologie sont à coefficients dans $V_{\mathbb{Z}}$. L'existence de la forme de Kronecker, la propriété de naturalité (12) (cf. 0.1.3) et le lemme 6.15 impliquent que

$$[H_2(M)_{\text{libre}} : (\operatorname{im} i_*^2)_{\text{libre}}] = [H^2(\partial\overline{M})_{\text{libre}} : (\operatorname{im} i_2^*)_{\text{libre}}]$$

et il vient alors

$$[H_2(M)_{\text{libre}} : (\operatorname{im} i_*^2)_{\text{libre}}] = [H_0(\partial\overline{M})_{\text{libre}} : \operatorname{im}(\delta^1)_{\text{libre}}] \leq |H_0(M)|$$

où l'égalité est obtenue par dualité de Poincaré (proposition 0.20) et la majoration est une conséquence du segment $H_1(\overline{M}, \partial\overline{M}) \xrightarrow{\delta^1} H_0(\partial\overline{M}) \to H_0(M)$ de la suite exacte longue d'homologie. En utilisant une nouvelle fois la dualité de Poincaré on obtient que

$$[H^1(\overline{M}, \partial\overline{M}) : \operatorname{im} \delta_0] = [H_2(M)_{\text{libre}} : (\operatorname{im} i_*^2)_{\text{libre}}] \leq |H_0(M)_{\text{tors}}|. \tag{6.24}$$

D'autre part la suite exacte longue de cohomologie de $\overline{M}, \partial\overline{M}$ contient la séquence

$$H^0(\partial\overline{M}) \xrightarrow{\delta_0} H^1(\overline{M}, \partial\overline{M}) \to H^1(M) \to H^1(\partial\overline{M})$$

d'où il suit que

$$\begin{aligned}\log|H^1(M)_{\text{tors}}| &\leq \log[H^1(\overline{M}, \partial\overline{M}) : \operatorname{im}\delta_0] + \log|H^1(\partial\overline{M})_{\text{tors}}| \\ &\leq \log|H_0(M)_{\text{tors}}| + \log|H_1(\partial\overline{M})_{\text{tors}}|\end{aligned}$$

où la seconde ligne suit de (6.24). Le côté droit est un $o(\operatorname{vol} M_n)$ par ce qui précède et les lemmes 6.11 et 6.12, ce qui finit la preuve. □

6.4.4 Volume du H^2

Lemme 6.17. *Soit $V_{\mathbb{Z}} = \mathcal{O}_F^2$, on a*

$$\frac{\log \operatorname{vol} H^2(M_n; V_{\mathbb{Z}})_{\text{libre}}}{\operatorname{vol} M_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{6.25}$$

Démonstration. L'application $i_2^* : H^2(M_n; V_{\mathbb{C}}) \to H^2(\partial\overline{M}_n; V_{\mathbb{C}})$ est une isométrie d'après la définition (6.6) du produit hermitien sur $H^2(M_n; V_{\mathbb{C}})$. De plus en utilisant la suite exacte on obtient

$$[H^2(\partial\overline{M}_n; V_{\mathbb{Z}}) : \operatorname{im} i_2^*] = |H^3(\overline{M}_n, \partial\overline{M}_n; V_{\mathbb{Z}})| = |H_0(M_n; V_{\mathbb{Z}})|$$

et il suit donc que

$$|\log \operatorname{vol} H^2(M_n; V_{\mathbb{Z}})_{\text{libre}}| \leq \log|H_0(M_n; V_{\mathbb{Z}})| + |\log \operatorname{vol} H^2(\partial\overline{M}; V_{\mathbb{Z}})|$$

et le côté droit est un $o(\operatorname{vol} M_n)$ d'après les lemmes 6.11 et 6.14. □

6.4.5 Volume du H^1

Le plongement $H^1(M_n; V_{\mathbb{C}}) \to H^1(\partial\overline{M}_n; V_{\mathbb{C}})$ est isométrique par définition de la métrique sur $H^1(M_n; V_{\mathbb{C}})$ et son image est donnée par

$$\{\omega + \Phi^+(s_V^1)\omega, \omega \in H^{1,0}(\partial\overline{M}_n; V_{\mathbb{C}})\}.$$

Soit π la projection orthogonale de $H^1(\partial\overline{M}_n; V_{\mathbb{C}})$ sur $H^{1,0}(\partial\overline{M}_n; V_{\mathbb{C}})$, alors d'après le lemme 6.13 l'image $\pi(H^1(\partial\overline{M}_n; V_{\mathbb{Z}}))$ contient $H^{1,0}(\partial\overline{M}_n; V_{\mathbb{Z}})$ avec indice $\ll (\operatorname{vol} M_n)^{4h_n}$. Comme

$$\operatorname{vol} \pi(i_1^* H^1(M_n; V_{\mathbb{Z}})) \leq \operatorname{vol} i_1^* H^1(M_n; V_{\mathbb{Z}})$$

on obtient que

$$\operatorname{vol} H^1(M_n; V_{\mathbb{Z}}) \gg (\operatorname{vol} M_n)^{4h_n} \operatorname{vol} H^{1,0}(\partial\overline{M}_n; V_{\mathbb{Z}})$$

et avec le lemme 6.14 on obtient ainsi le résultat suivant.

Lemme 6.18. *On a*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log \operatorname{vol} H^1(M_n; V_{\mathbb{Z}})}{\operatorname{vol} M_n} \geq 0.$$

Si ω est entière (i.e. prend des valeurs entières sur les cycles de $Z_1(\partial\overline{M};V_{\mathbb{Z}})$) alors $E^1(\omega)$ est rationnelle (cf. [Har87]). Il existe donc un entier $N \geq 1$ tel que $NE^1(\omega) \in H^1(M_n;V_{\mathbb{Z}})$ pour toute $\omega \in H^{1,0}(\partial\overline{M};V_{\mathbb{Z}})$. Si on note

$$L = \{(\omega, \Phi^+(s_V^1)\omega),\ \omega \in H^{1,0}(\partial\overline{M}_n;V_{\mathbb{Z}})\}$$

on a donc $NL \subset i_1^* H^1(M_n;V_{\mathbb{Z}})$. D'autre part,

$$\operatorname{vol} L = \text{dét}(1 + \Phi^+(s_V^1)^*\Phi^+(s_V^1)) \operatorname{vol} H^{1,0}(\partial\overline{M}_n;V_{\mathbb{Z}})$$

et il suit finalement que

$$\operatorname{vol} H^1(M_n;V_{\mathbb{Z}}) \leq N^{h_n}\text{dét}(1 + \Phi^+(s_V^1)^*\Phi^+(s_V^1)) \operatorname{vol} H^{1,0}(\partial\overline{M}_n;V_{\mathbb{Z}}).$$

Il suit de la la proposition 5.31 que $\text{dét}(1 + \Phi^+(s_V^1)^*\Phi^+(s_V^1)) \ll |\mathfrak{I}_n|^C$ pour un $C > 0$ (où $\mathfrak{I}_n$ est le niveau de Γ_n) et d'après le lemme lemme 5.8 ceci implique que $\log \text{dét}(1+\Phi^+(s_V^1)^*\Phi^+(s_V^1)) = o(\operatorname{vol} M_n)$. Avec le lemme 6.14 on obtient donc que le côté droit est égal à $h_n \log N + o(\operatorname{vol} M_n)$. On voit ainsi que si l'on savait que $h_n \log N = o(\operatorname{vol} M_n)$ (par exemple si N était à croissance polynomiale en $|\mathfrak{I}_n|$) on aurait en fait

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \operatorname{vol} H^1(M;V_{\mathbb{Z}})}{\operatorname{vol} M_n} = 0.$$

Le problème d'estimer N est lié (via l'expression (5.25) pour les opérateurs d'entrelacement) à des problèmes d'intégralité de valeurs de fonctions L. On réfère à [CV10, Section 6.6] pour une discussion de ce sujet en rapport avec le problème traité ici. Les propriétés arithmétiques des valeurs spéciales de fonctions L sont aussi discutées dans [Ber08].

6.5 Une autre méthode

On peut court-circuiter la méthode indiquée ci-dessus par une astuce géométrique (l'existence de relevés acycliques) et un peu d'algèbre homologique pour démontrer le résultat suivant.

Théorème 6.19. *Soit F un corps de nombres quadratique imaginaire, $n_1 \neq n_2$ et $V_{\mathbb{Z}} = \operatorname{Sym}^{n_1} \mathcal{O}_F^2 \otimes \operatorname{Sym}^{n_2} \overline{\mathcal{O}}_F^2$. Soit Γ_n une suite de sous-groupes de congruence principaux ou de type Γ_1 deux à deux distincts. Il existe une suite de sous-groupes $\Gamma'_n \subset \Gamma_n$ d'indice 2 telle que l'on ait*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log |H_1(\Gamma'_n;V_{\mathbb{Z}})_{\text{tors}}|}{\operatorname{vol}(\Gamma'_n\backslash\mathbb{H}^3)} \geq -\frac{1}{2}t^{(2)}(V_{n_1,n_2}). \tag{6.26}$$

6.5.1 Relèvements acycliques

Soit M une 3-variété hyperbolique complète de volume fini (orientée), on fixe une monodromie $\pi_1(M) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. On dit qu'un réseau $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est un relevé de $\pi_1(M)$ à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ s'il se projette bijectivement sur $\pi_1(M)$ sous l'applcation $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Un résultat classique (voir par exemple [Cul86, Corollary 2.3] affirme qu'un tel relevé existe toujours, et on a en fait le résultat suivant (cf. [MP11, Proposition 2.7]).

Lemme 6.20. *L'ensemble des relevés de $\pi_1(M) \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est en bijection avec $\operatorname{Hom}(\pi_1(M),\mathbb{Z}/2) = H^1(M;\mathbb{Z}/2)$. De plus il existe un tel relevé Γ qui vérifie $\Gamma \cap P \not\subset N$ pour tout parabolique Γ-rationnel.*

Démonstration. On fixe un relevé Γ de $\pi_1(M)$ à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et on identifie le préimage totale $\overline{\Gamma}$ de $\pi_1(M)$ dans $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ avec $\Gamma \oplus \mathbb{Z}/2$. Pour $\alpha \in \mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{Z}/2) = \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}/2)$ le sous-groupe

$$\Gamma_\alpha = \{(\gamma, \alpha(\gamma)),\ \gamma \in \Gamma\} \subset \overline{\Gamma}$$

est alors un relevé de $\pi_1(M)$. Réciproquement, si $\Gamma' \subset G$ est un relevé de $\pi_1(M)$ on peut définir un morphisme $\alpha : \pi_1(M) \to \mathbb{Z}/2$ par $\gamma \mapsto \epsilon$ où $(\gamma, \epsilon) \in \overline{\Gamma}$ est l'unique préimage de γ dans Γ' et on a alors $\Gamma' = \Gamma_\alpha$, ce qui prouve que l'application $\alpha \mapsto \Gamma_\alpha$ est une bijection.

La seconde partie du lemme est beaucoup plus profonde : c'est une conséquence du théorème de chirurgie de Dehn hyperbolique de Thurston et de l'interprétation des relevés comme structures de spin sur M : on refère à [MP11, Proposition 2.7] pour la preuve complète. □

On fixe un relevé Γ de $\pi_1(M)$ qui vérifie $\Gamma_P \not\subset N$ pour tous les paraboliques Γ-rationnels. On a alors une repreésentation linéaire $\pi_1(M) \cong \Gamma \subset G \to \mathrm{SL}(V)$ et on note V_Γ le système de coefficients sur M associé. Noter que si $\alpha \in H^1(\Gamma; \mathbb{Z}/2)$ et $\mathbb{C}_\alpha$ est la représentation de dimension 1 de Γ associée on a un isomorphisme $\pi_1(M)$-équivariant $V_{\Gamma_\alpha} \to \mathbb{C}_\alpha \otimes V_\Gamma$. Notre but est de démontrer le résultat suivant, qui justifie l'appellation "relevé acyclique" pour Γ.

Proposition 6.21. *On fixe M, Γ comme ci-dessus et $V = V_{n_1,n_2}$ avec $n_1 - n_2$ impair. Alors l'homologie $H_*(M; V_\Gamma)$ est nulle.*

Démonstration. Comme on est dans le cas fortement acyclique il suffit de montrer que $H_*(T; V) = 0$ pour toute composante T de $\partial\overline{M}$. Pour H_0 c'est trivial vu que si $\mathrm{tr}(\eta) = -1$ on a $\mathrm{im}(\rho(\eta) - 1) = V$. Par dualité il suit que l'on a aussi $H_2 = 0$, et comme la caractéristique de Poincaré de T est nulle il suit que $H_1 = 0$. □

6.5.2 Preuve du théorème 6.19

Par le lemme 6.20 et la proposition 6.21 on obtient que pour tout n il existe un $\alpha_n \in \mathrm{Hom}(\Gamma_n, \mathbb{Z}/2)$ tel que $H_*(\Gamma_n; \alpha_n \otimes V) = 0$. On peut par ailleurs appliquer les théorèmes 4.14 et 6.5 à la suite de sous-groupes Γ_{n,α_n} et comme il n'y a pas d'autre terme que la torsion dans la définition (6.8) on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{vol}\, M_n} \log\left(\frac{|H_1(M_n; \alpha_n \otimes V_\mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}|}{|H_0(M_n; \alpha_n \otimes V_\mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}|}\right) = -t^{(2)}(V). \tag{6.27}$$

Le théorème 6.19 est alors une conséquence immédiate de (6.27), du lemme 6.11 et du résultat suivant.

Lemme 6.22. *Soit $\Gamma'_n = \ker \alpha_n$, on a*

$$\log|H_0(\Gamma_n; V_\mathbb{Z} \otimes \alpha_n)_{\mathrm{tors}}|,\ \log|H_0(\Gamma'_n; V_\mathbb{Z}) = o(\mathrm{vol}\, M_n), \tag{6.28}$$

$$\log|H_1(\Gamma'_n, V_\mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}| \geq \log|H_1(\Gamma_n, \alpha_n \otimes V_\mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}| + o(\mathrm{vol}\, M_n). \tag{6.29}$$

Démonstration. Les asymptotiques (6.28) sont prouvées exactement comme dans le lemme 6.11 ci-dessus.

Par ailleurs, la restriction de $\alpha_n \otimes V_\mathbb{Z}$ au sous-groupe Γ'_n est isomorphe à celle de $V_\mathbb{Z}$ et la suite spectrale de Hochschild-Serre permet alors d'obtenir la suite exacte suivante :

$$H_2(\Gamma_n; V'_\mathbb{Z}) \to H_2(\Gamma_n/\Gamma'_n; H_0(\Gamma'_n; V_\mathbb{Z})) \to H_1(\Gamma'_n; V_\mathbb{Z})_{\Gamma_n/\Gamma'_n} \to$$
$$\to H_1(\Gamma_n; \alpha_n \otimes V_\mathbb{Z}) \to H_1(\Gamma_n/\Gamma'_n; H_0(\Gamma'_n; V_\mathbb{Z})) \to 0$$

(cf. [Bro82, Corollary 6.4 in Chapter VII]) ; on rappelle que pour un groupe H et un H-module M on désigne par M_H le quotient $M/(H-1)M$. Vu que $\Gamma_n/\Gamma'_n \cong \mathbb{Z}/2$ on en tire :

$$A \otimes \mathbb{Z}/2 \to H_1(\Gamma'_n; V_{\mathbb{Z}})_{\Gamma_n/\Gamma'_n} \to H_1(\Gamma_n; \alpha_n \otimes V_{\mathbb{Z}}) \to B \otimes \mathbb{Z}/2 \to 0$$

où A, B sont des quotients de $H_0(\Gamma'_n; V_{\mathbb{Z}})$ de sorte que (6.28) implique que l'on a

$$|(H_1(\Gamma'_n; V_{\mathbb{Z}})_{\Gamma_n/\Gamma'_n})_{\mathrm{tors}}| = (1 + o(\mathrm{vol}\, M_n))|H_1(\Gamma_n; \alpha_n \otimes V_{\mathbb{Z}})_{\mathrm{tors}}| \tag{6.30}$$

Il reste à voir que la torsion du terme de gauche n'est pas beaucoup plus grande que celle de $H_1(\Gamma'_n; V_{\mathbb{Z}})$, et pour ceci on doit montrer que la partie libre de ce dernier ne s'y envoie pas sur des classes de torsion d'ordre trop grand. On note π la projection de $H_1(\Gamma'_n; V_{\mathbb{Z}})$ sur $H_1(\Gamma'_n; V_{\mathbb{Z}})_{\Gamma_n/\Gamma'_n}$ et σ l'élément non-trivial de Γ_n/Γ'_n ; pour tout $v \in H_1(\Gamma'_n; V_{\mathbb{Z}})$ on a $2v = (v + \sigma.v) + (v - \sigma.v)$, d'où suit $4\pi(v) = 2\pi(v + \sigma.v)$ vu que $\pi(v - \sigma.v)$ est de la 2-torsion. Comme π est injective sur l'image de l'application $v \mapsto v + \sigma.v$ on obtient

$$|(H_1(\Gamma'_n; V_{\mathbb{Z}})_{\Gamma_n/\Gamma'_n})_{\mathrm{tors}}| \leq 2^{b_1(\Gamma'_n; V_{\mathbb{C}})}|H_1(\Gamma'_n; V_{\mathbb{Z}})_{\mathrm{tors}}|$$

et la conclusion suit enfin de (6.30) vu que $b_1(\Gamma'_n; V_{\mathbb{C}}) = o(\mathrm{vol}\, M_n)$. □

Annexe A

Sous-groupes aléatoires invariants des groupes de Lie simples

Le but de cet appendice est de donner une idée de la démonstration du théorème 4.1 et de décrire quelques constructions pour les groupes $\mathrm{SO}(n,1)$.

A.1 Convergence de Benjamini-Schramm et sous-groupes aléatoires invariants

Si G est un groupe topologique localement compact l'ensemble Sub_G des sous-groupes fermés est muni d'une topologie naturelle appelée topologie de Chabauty. Une base d'ouverts est formée par les

$$\{H \in \mathrm{Sub}_G,\, H \cap K = \emptyset\} \text{ et } \{H \in \mathrm{Sub}_G,\, H \cap U \neq \emptyset\}$$

où K (resp. U) parcourt les compacts (resp. ouverts) de G. L'espace Sub_G est alors un espace métrisable compact sur lequel G agit continûment par $H \mapsto gHg^{-1}$. Un sous-groupe aléatoire de G est une mesure de probabilité Borélienne sur Sub_G et il est dit invariant si G préserve cette mesure. On abréviera sous-groupe aléatoire invariant en SAI dans la suite. Pour les propriétés de base des SAI on renvoie à [ABB$^+$, Section 2].

Si $H \in \mathrm{Sub}_G$ on a une application naturelle et G-équivariante v

$$G/H \to \mathrm{Sub}_G,\, gH \mapsto gHg^{-1}.$$

Si $H = \Gamma$ est un réseau de G cette application permet de définir un SAI μ_Γ de G en poussant en avant la mesure de probabilité G-invariante sur G/Γ. Si G est un groupe de Lie simple le résultat suivant est un corollaire de la preuve de Furstenberg du théorème de densité de Borel, cf. [ABB$^+$, Theorem 2.3].

Proposition A.1. *Si G est un groupe de Lie simple alors les SAI de G qui ne sont pas la masse de Dirac en G ou $\{1_G\}$ sont supportés sur les sous-groupes discrets et Zariski-denses.*

On va maintenant définir rigoureusement la convergence de Benjamini-Schramm dans le cas général. Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des variétés Riemanniennes complètes localement isométiques à $S = G/K$, i.e. l'ensemble des quotients de S par des sous-groupes discrets sans torsion de G. Soit encore

$$\mathfrak{X}_R = \{B_X(x,R),\, X \in \mathfrak{S}, x \in X\}$$

qui est un espace métrique localement compact quand on le munit de la topologie de Gromov-Hausdorff pointée (on pointe une boule en son centre). Si μ est une mesure sur Sub_G supportée sur les sous-groupes discrets on définit une mesure $m_R(\mu)$ sur $\mathfrak{X}_R$ par :

$$m_R(\mu)(A) = \mu\{\Gamma \in \mathrm{Sub}_G,\ B_{\Gamma\backslash S}(K,R) \in A\}.$$

On dit qu'une suite $M_n = \Gamma_n\backslash S$ de quotients de volume fini de S BS-converge si la mesure $m_R(\mu_{\Gamma_n})$ a une limite faible. On a alors le résultat suivant (cf. [ABB$^+$, Lemma 3.6]), qui montre en particulier que la limite d'une suite BS-convergente peut être interprétée comme un SAI.

Proposition A.2. *Soit Γ_n une suite de réseaux de G et μ un SAI de G. Alors la suite de mesures μ_Γ converge faiblement vers μ si et seulement si pour tout $R > 0$ la suite $\Gamma_n\backslash S$ BS-converge vers $m_R(\mu)$.*

On a défini plus haut la "BS-convergence vers S" (cf. (4.1)), dans le cadre des IRS elle s'interprète donc comme suit.

Corollaire A.3. *La suite $\Gamma_n\backslash S$ BS-converge vers S si et seulement si μ_{Γ_n} converge faiblement vers la masse de Dirac en $\{1_G\}$.*

A.2 Théorème de Nevo-Stück-Zimmer et BS-convergence en rang supérieur

Un SAI μ est dit ergodique s'il n'existe pas de Borélien A de Sub_G qui soit G-invariant et tel que $\mu(A) \neq 0, 1$. En rang supérieur on a la classification suivante des SAI ergodiques, due à Nevo, Stück et Zimmer.

Théorème A.4. *Soit G un groupe de Lie simple de rang ≥ 2. Alors tout SAI ergodique de G est égal à la masse de Dirac en G ou $\{1_G\}$ ou à un μ_Γ pour un réseau Γ de G.*

Couplé avec les résultats suivants et le corollaire A.3 on obtient le théorème 4.1.

Proposition A.5. *Soit Γ_n une suite de réseaux dans un groupe de Lie simple G ayant la propriété (T) ;*
(i) On ne peut pas avoir $\mu_{\Gamma_n} \to \delta_G$;
(ii) Si Γ est un réseau de G on ne peut pas avoir $\mu_{\Gamma_n} \to \mu_\Gamma$;
(iii) Toute valeur d'adhérence de (μ_{Γ_n}) est un SAI ergodique de G.

Le point (i) est un fait général, cf. [ABB$^+$, Proposition 2.1] ; (ii) et (iii) sont des conséquences de la propriété (T) de Kazhdan, cf. [ABB$^+$, Lemma 4.6, Lemma 4.8].

A.3 Sous-groupes aléatoires invariants en rang 1

Dans cette section on montre que le théorème de Nevo-Stück-Zimmer n'est pas vrai pour des groupes de rang 1. Pour les groupes $\mathrm{SO}(n,1)$ en particulier on a des contructions assez diverses de SAI.

A.3.1 Induction

Soit μ un SAI d'un réseau Γ dans un groupe de Lie G. On a une application naturelle

$$G \times \mathrm{Sub}_\Gamma \ni (g, \Lambda) \longrightarrow g^{-1}\Lambda g \in \mathrm{Sub}_G$$

qui descend au quotient $(G \times \mathrm{Sub}_\Gamma)/\Gamma$ (où Γ agit par $(g, \Lambda)\gamma = (g\gamma, \gamma^{-1}\Lambda\gamma)$). Soit λ une mesure de Haar de G, alors $\lambda \otimes \mu$ est Γ-invariante et descend en une mesure de volume fini sur $(G \times \mathrm{Sub}_\Gamma/)\Gamma$ et son poussé en avant définit un SAI de G, que l'on appelle le SAI induit par μ.

En particulier, si un réseau Γ de G a un sous-groupe distingué Λ d'indice infini on obtient un SAI μ de Γ en prenant la masse de Dirac en Λ et la construction ci-dessus donne un SAI ergodique de G supporté sur les conjugués de Λ, ce qui montre que le théorème de Nevo-Stück-Zimmer ne s'étend à aucun groupe de rang 1 (pusque tous les réseaux des groupes de rang réel 1 possèdent de tels sous-groupes distingués). En-dehors des groupes libres non-abéliens (L. Bowen, [Bow12]), d'exemples non-archimédiens similaires (S. Mozes, non publié) et des groupes qui se surjectent virtuellement sur les premiers (parmi lesquels les réseaux de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et de nombreux exemples dans les $\mathrm{SO}(n, 1)$, $n \geq 4$ on ne connaît pas d'exemple de SAI de groupes discrets qui ne provienne pas d'un sous-groupe distingué.

A.3.2 Variétés hybrides et SAI de $\mathrm{SO}(n, 1)$

On présente maintenant la construction de SAI dans $G = SO(n, 1)$ qui ne sont pas induits par des SAI de réseaux : en fait leur support est disjoint des Sub_Γ pour Γ un réseau de G. La construction utilise des idées de [GPS88]. Le fait suivant est bien connu, cf. [ABB$^+$, Section 13].

Proposition A.6. *Il existe des n-variétés arithmétiques noncommensurables compactes M_0, M_1 et une $n-1$-variété hyperbolique compacte Σ qui se plonge comme une hypersurface non-séparante dans M_0 et M_1.*

On note N_a la complétion de $M_a - \Sigma$, ce sont toutes les deux des variétés compactes à bord totalement géodésique isométrique à deux copies de Σ, on fait un choix d'étiquettes $\pm$ et d'identification à Σ pour toutes ces composantes et on les note $\Sigma_a^\pm$. Pour $\alpha \in \{0, 1\}^\mathbb{Z}$ soit :

$$N_\alpha = \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{Z}} N_{\alpha_i} \times \{i\} \right) / (i^+_{\alpha_i} x, i) \sim (i^-_{\alpha_{i+1}} x, i + 1) \quad (i \in \mathbb{Z}, x \in \Sigma)$$

Pour toute mesure de probabilité ν sur $\{0, 1\}^\mathbb{Z}$ on peut alors définir un SAI μ_ν de $\mathrm{SO}(n, 1)$ en choisissant un repère orthonormé aléatoire dans $N_{\alpha_0} \times \{0\} \subset N_\alpha$ où α est une suite ν'-aléatoire et

$$\nu'(A) = \frac{\int_A \mathrm{vol}(N_{\alpha_0}) d\nu(\alpha)}{\int_{\{0,1\}^\mathbb{Z}} \mathrm{vol}(N_{\alpha_0}) d\nu(\alpha)}.$$

Si ν est invariante par décalage alors μ_ν est un SAI, et si elle est ergodique il l'est aussi.

Si ν est supportée sur une une orbite périodique du décalage engendrée par une suite α de prériode k alors μ_ν est induit du réseau cocompact Γ_α qui est la monodromie de la variété compacte

$$M_\alpha = \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{Z}/k} N_{\alpha_i} \times \{i\} \right) / (i^+_{\alpha_i} x, i) \sim (i^-_{\alpha_{i+1}} x, i + 1) \quad (i \in \mathbb{Z}/k, x \in \Sigma)$$

et du sous-groupe distingué qui est le groupe fondamental de N_α. Dans le cas contraire μ_ν a un support non dénombrable (homéomorphe à un Cantor) et on a le résultat suivant [ABB$^+$, Theorem 13.5].

Théorème A.7. *Si $n \geq 3$ et α est une suite non-périodique la variété N_α n'a pas de quotient compact. En particulier, si la mesure ergodique ν n'est pas supportée sur une orbite finie le SAI μ_ν n'est pas un SAI induit.*

A.3.3 Variétés hyperboliques de petite dimension

En dimensions 2 et 3 on a d'autres exemples de SAI non-induits, utilisants des constructions gémoétriques propres à ces dimensions (le recollement de pantalons en dimension 2 et–entre autres–les "mapping tori" des difféomorphismes pseudo-Anosov en dimension 3). On refère à [ABB$^+$, Section 12].

A.4 Construction de variétés hyperboliques réelles non commensurables

Une partie des techniques utilisées pour démontrer le théorème A.7 peuvent être adaptées pour prouver le résultat suivant [Rai12a, Theorem 1.1].

Théorème A.8. *Soit $n \geq 3$; il existe des $V, K > 0$ qui ne dépendent que de n telles que pour tout entier $m \geq V$ il existe au moins 2^m variétés hyperboliques compactes de dimension n qui sont non-commensurables et qui ont toutes le même volume $v \leq Km$.*

On peut voir ce résultat comme donnant une borne inférieure explicite dans le théorème de Wang [Wan72] qui affirme que pour $n \geq 4$ et $v > 0$ il n'y a qu'un nombre fini de n-variétés hyperboliques de volume inférieur à v. Pour ce problème il existe déjà des résultats donnant une borne bien meilleure ; par exemple dans [BGLM02] il est prouvé que pour m assez grand il y a au moins $m!$ variétés hyperboliques de dimension n ayant le même volume inférieur à $K'm$ (où K' dépend de n). Cependant toutes ces variétés sont obtenues comme revêtements d'une variété fixée et le résultat ci-dessus est donc essentiellement différent de ce dernier ou de ceux prouvés par V. Emery [Eme12] ou B. Zimmermann [Zim94]. Un corollaire immédiat en est :

Corollaire A.9. *Soit $L_{\mathrm{com}}(v)$ le nombre de classes de commensurabilité de n-variétés hyperboliques qui contiennent un élément de volume inférieur à v. On a*

$$\liminf_{v\to\infty} \frac{\log L_{\mathrm{com}}(v)}{v} > 0.$$

Comme il y a au moins un élément maximal par classe de commensurabilité il suit aussi du théorème A.8 que pour $v \geq V$ il existe au moins $2^{\frac{v}{K}}$ réseaux maximaux de covolume inférieur à v. Il a été démontré par M. Belolipetsky [Bel07] que le taux de croissance des sous-groupes arithmétiques maximaux est sous-exponentiel et on a donc le résultat suivant.

Corollaire A.10. *On note $L_{\max}(v)$ (resp. $L_{a,\max}(v)$) le nombre de classes de conjugaison de réseaux cocompacts maximaux dans $\mathrm{SO}(1,n)$ (resp. le nombre de celles qui sont arithmétiques) de covolume inférieur à v. Alors $L_{\max}$ est au moins exponentiel, en particulier on a*

$$\lim_{v\to\infty} \frac{\log L_{a,\max}(v)}{\log L_{\max}(v)} = 0.$$

A.5 Une idée de la preuve des théorèmes A.7 et A.8

Le théorème A.8 est une conséquence immédiate du résultat suivant [Rai12a, Proposition 2.1] et d'un dénombrement trivial.

Proposition A.11. *Soient $\alpha, \beta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}/m}$. Les variétés hyperboliques $M_{\alpha_1,\dots,\alpha_m}$ et $M_{\beta_1,\dots,\beta_m}$ sont commensurables si et seulement s'il existe un $p \in \mathbb{Z}/m$ tel que l'on ait $\forall j$, $\alpha_{j+p} = \beta_j$ ou bien $\forall j$, $\alpha_{p-j} = \beta_j$.*

Le principal ingrédient de la preuve de cette proposition est le lemme suivant, qui est prouvé en utilisant des arguments inspirés de [GPS88].

Lemme A.12. *Si W est une variété hyperbolique complète, N_0', N_1' sont des revêtements finis de N_0, N_1 respectivement et ι_0, ι_1 des plongements $N_0', N_1' \hookrightarrow W$ alors $\iota_0(N_0') \cap \iota_1(N_1')$ est d'intérieur vide.*

Le théorème A.7 est nettement plus dur à prouver. Cependant il est assez facile de montrer que N_α n'admet aucune isométrie d'ordre infini (et donc qu'elle n'a pas de quotient Galoisien) en utilisant le lemme A.12 et la proposition A.11 (cf. [ABB$^+$, Corollary 13.12]). Le cas général utilise un argument semblable (mais plus compliqué) une fois qu'on a démontré (cf. [ABB$^+$, Lemma 13.17]) :

Lemme A.13. *Si N_α a un quotient compact il existe un revêtement fini de N_α qui admette une isométrie d'ordre infini.*

La preuve de ce dernier lemme utilise des résultats profonds et très récents de I. Agol et D. Wise (cf. [ABB$^+$, Proposition 13.14]).

Bibliographie

[ABB+] M. Abert, N. Bergeron, I. Biringer, T. Gelander, N. Nikolov, J. Raimbault et I. Samet : On the growth of L^2 invariants for sequences of lattices in Lie groups. *In preparation.*

[ABB+11] Miklos Abert, Nicolas Bergeron, Ian Biringer, Tsachik Gelander, Nikolay Nikolov, Jean Raimbault et Iddo Samet : On the growth of Betti numbers of locally symmetric spaces. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 349(15-16):831–835, 2011.

[AGM12] I. Agol, D. Groves et J. Manning : The virtual Haken conjecture. *ArXiv e-prints*, avril 2012.

[Art96] Emil Artin : *Algèbre géométrique.* Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics]. Éditions Jacques Gabay, Paris, french édition, 1996. Translated from the 1957 English original by M. Lazard, Edited and with a foreword by G. Julia.

[BC05] Nicolas Bergeron et Laurent Clozel : Spectre automorphe des variétés hyperboliques et applications topologiques. *Astérisque*, (303):xx+218, 2005.

[BD] Jeff Brock et Nathan M. Dunfield : Injectivity radii of integer homology 3–spheres. *En préparation.*

[BE06] Nigel Boston et Jordan S. Ellenberg : Pro-p groups and towers of rational homology spheres. *Geom. Topol.*, 10:331–334 (electronic), 2006.

[Bel07] Mikhail Belolipetsky : Counting maximal arithmetic subgroups. *Duke Math. J.*, 140(1):1–33, 2007. With an appendix by Jordan Ellenberg and Akshay Venkatesh.

[Ber08] Tobias Berger : Denominators of Eisenstein cohomology classes for GL_2 over imaginary quadratic fields. *Manuscripta Math.*, 125(4):427–470, 2008.

[Ber11] Nicolas Bergeron : *Le spectre des surfaces hyperboliques.* Savoirs actuels. CNRS Editions, EDP sciences, 2011.

[BGLM02] M. Burger, T. Gelander, A. Lubotzky et S. Mozes : Counting hyperbolic manifolds. *Geom. Funct. Anal.*, 12(6):1161–1173, 2002.

[BM11] Jochen Brüning et Xiaonan Ma : On the gluing formula for the analytic torsion. *preprint*, 2011.

[BMP03] Michel Boileau, Sylvain Maillot et Joan Porti : *Three-dimensional orbifolds and their geometric structures*, volume 15 de *Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses].* Société Mathématique de France, Paris, 2003.

[Bow12] L. Bowen : Invariant random subgroups of the free group. *ArXiv e-prints*, avril 2012.

[BP92] Riccardo Benedetti et Carlo Petronio : *Lectures on hyperbolic geometry.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[Bre97] Glen E. BREDON : *Sheaf theory*, volume 170 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second édition, 1997.

[Bro82] Kenneth S. BROWN : *Cohomology of groups*, volume 87 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1982.

[BS01] Itai BENJAMINI et Oded SCHRAMM : Recurrence of distributional limits of finite planar graphs. *Electron. J. Probab.*, 6:no. 23, 13 pp. (electronic), 2001.

[Bum97] Daniel BUMP : *Automorphic forms and representations*, volume 55 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[BV] Nicolas BERGERON et Akshay VENKATESH : The asymptotic growth of torsion homology for arithmetic groups. *To appear in JIMJ.* math.NT/1004.1083v1.

[BW00] A. BOREL et N. WALLACH : *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, volume 67 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, second édition, 2000.

[BZ92] Jean-Michel BISMUT et Weiping ZHANG : An extension of a theorem by Cheeger and Müller. *Astérisque*, (205):235, 1992. With an appendix by François Laudenbach.

[CD06] Frank CALEGARI et Nathan M. DUNFIELD : Automorphic forms and rational homology 3-spheres. *Geom. Topol.*, 10:295–329 (electronic), 2006.

[CdV81] Yves Colin de VERDIÈRE : Une nouvelle démonstration du prolongement méromorphe des séries d'Eisenstein. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 293(7):361–363, 1981.

[CFK11] Jae Choon CHA, Stefan FRIEDL et Taehee KIM : The cobordism group of homology cylinders. *Compos. Math.*, 147(3):914–942, 2011.

[Che73] Paul R. CHERNOFF : Essential self-adjointness of powers of generators of hyperbolic equations. *J. Functional Analysis*, 12:401–414, 1973.

[Che79] Jeff CHEEGER : Analytic torsion and the heat equation. *Ann. of Math. (2)*, 109(2): 259–322, 1979.

[Cul86] Marc CULLER : Lifting representations to covering groups. *Adv. in Math.*, 59(1):64–70, 1986.

[CV10] Frank CALEGARI et Akshay VENKATESH : A torsion Jacquet-Langlands conjecture. *preprint*, 2010.

[CW03] Bryan CLAIR et Kevin WHYTE : Growth of Betti numbers. *Topology*, 42(5):1125–1142, 2003.

[dGW78] David L. de GEORGE et Nolan R. WALLACH : Limit formulas for multiplicities in $L^2(\Gamma\backslash G)$. *Ann. of Math. (2)*, 107(1):133–150, 1978.

[DLM+03] Józef DODZIUK, Peter LINNELL, Varghese MATHAI, Thomas SCHICK et Stuart YATES : Approximating L^2-invariants and the Atiyah conjecture. *Comm. Pure Appl. Math.*, 56(7):839–873, 2003. Dedicated to the memory of Jürgen K. Moser.

[Don79] Harold DONNELLY : Asymptotic expansions for the compact quotients of properly discontinuous group actions. *Illinois J. Math.*, 23(3):485–496, 1979.

[DT06] Nathan M. DUNFIELD et William P. THURSTON : Finite covers of random 3-manifolds. *Invent. Math.*, 166(3):457–521, 2006.

[EGM98] J. ELSTRODT, F. GRUNEWALD et J. MENNICKE : *Groups acting on hyperbolic space*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998. Harmonic analysis and number theory.

[Eme12] Vincent EMERY : Arbitrarily large families of spaces with the same volume. *Geometriae dedicata*, 156(1), 2012.

[EW99] Graham EVEREST et Thomas WARD : *Heights of polynomials and entropy in algebraic dynamics.* Universitext. Springer-Verlag London Ltd., London, 1999.

[FH91] William FULTON et Joe HARRIS : *Representation theory*, volume 129 de *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.

[FLM12] T. FINIS, E. LAPID et W. MUELLER : Limit multiplicities for principal congruence subgroups of GL(n). *ArXiv e-prints*, août 2012.

[GAS91] Francisco GONZÁLEZ-ACUÑA et Hamish SHORT : Cyclic branched coverings of knots and homology spheres. *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid*, 4(1):97–120, 1991.

[Gil95] Peter B. GILKEY : *Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah-Singer index theorem.* Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, second édition, 1995.

[God66] R. GODEMENT : The decomposition of $L^2(G/\Gamma)$ for $\Gamma = \mathrm{SL}(2, Z)$. *In Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo*, pages 211–224. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966.

[Gor72] C. McA. GORDON : Knots whose branched cyclic coverings have periodic homology. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 168:357–370, 1972.

[GPS88] M. GROMOV et I. PIATETSKI-SHAPIRO : Nonarithmetic groups in Lobachevsky spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (66):93–103, 1988.

[Har87] G. HARDER : Eisenstein cohomology of arithmetic groups. The case GL_2. *Invent. Math.*, 89(1):37–118, 1987.

[Hat02] Allen HATCHER : *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[Hem76] John HEMPEL : 3-*Manifolds.* Princeton University Press, Princeton, N. J., 1976. Ann. of Math. Studies, No. 86.

[Hum80] James E. HUMPHREYS : *Arithmetic groups*, volume 789 de *Lecture Notes in Mathematics.* Springer, Berlin, 1980.

[Kna97] A. W. KNAPP : Theoretical aspects of the trace formula for GL(2). *In Representation theory and automorphic forms (Edinburgh, 1996)*, volume 61 de *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 355–405. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[Kna01] Anthony W. KNAPP : *Representation theory of semisimple groups.* Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001. An overview based on examples, Reprint of the 1986 original.

[Kob12] Thomas KOBERDA : Homological eigenvalues of mapping classes and torsion homology growth for fibered 3–manifolds. *preprint*, 2012.

[Kow08] Emmanuel KOWALSKI : *The large sieve and its applications*, volume 175 de *Cambridge Tracts in Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2008. Arithmetic geometry, random walks and discrete groups.

[Lam06] T. Y. LAM : *Serre's problem on projective modules.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[Law83] Wayne M. LAWTON : A problem of Boyd concerning geometric means of polynomials. *J. Number Theory*, 16(3):356–362, 1983.

[Le] Thang LE : Homology torsion growth and Mahler measure. *math.GT/1010.4199.*

[Lic97] W. B. Raymond LICKORISH : *An introduction to knot theory*, volume 175 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997.

[LLS11] Peter LINNELL, Wolfgang LÜCK et Roman SAUER : The limit of $\mathbb{F}_p$-Betti numbers of a tower of finite covers with amenable fundamental groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 139(2):421–434, 2011.

[LS99] W. LÜCK et T. SCHICK : L^2-torsion of hyperbolic manifolds of finite volume. *Geom. Funct. Anal.*, 9(3):518–567, 1999.

[LS03] Alexander LUBOTZKY et Dan SEGAL : *Subgroup growth*, volume 212 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.

[LT12] Hanfeng LI et Andreas THOM : Entropy, determinants and L^2-torsion. *ArXiv e-prints*, février 2012.

[Lüc94a] W. LÜCK : Approximating L^2-invariants by their finite-dimensional analogues. *Geom. Funct. Anal.*, 4(4):455–481, 1994.

[Lüc94b] Wolfgang LÜCK : L^2-torsion and 3-manifolds. *In Low-dimensional topology (Knoxville, TN, 1992)*, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology, III, pages 75–107. Int. Press, Cambridge, MA, 1994.

[Lüc02] Wolfgang LÜCK : *L^2-invariants : theory and applications to geometry and K-theory*, volume 44 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge.* Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[LZ06] Weiping LI et Weiping ZHANG : An L^2-Alexander invariant for knots. *Commun. Contemp. Math.*, 8(2):167–187, 2006.

[MM82] John P. MAYBERRY et Kunio MURASUGI : Torsion-groups of abelian coverings of links. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 271(1):143–173, 1982.

[MP10] P. MENAL-FERRER et J. PORTI : Twisted cohomology for hyperbolic three manifolds. *ArXiv e-prints*, janvier 2010.

[MP11] P. MENAL-FERRER et J. PORTI : Higher dimensional Reidemeister torsion invariants for cusped hyperbolic 3-manifolds. *ArXiv e-prints*, octobre 2011.

[MP12] Werner MÜLLER et Jonathan PFAFF : Analytic torsion of complete hyperbolic manifolds of finite volume. *J. Funct. Anal.*, 263(9):2615–2675, 2012.

[MR03] Colin MACLACHLAN et Alan W. REID : *The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds*, volume 219 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2003.

[Mül78] Werner MÜLLER : Analytic torsion and R-torsion of Riemannian manifolds. *Adv. in Math.*, 28(3):233–305, 1978.

[Mül93] Werner MÜLLER : Analytic torsion and R-torsion for unimodular representations. *J. Amer. Math. Soc.*, 6(3):721–753, 1993.

[Nar04] Władysław NARKIEWICZ : *Elementary and analytic theory of algebraic numbers*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, third édition, 2004.

[Par09] Jinsung PARK : Analytic torsion and Ruelle zeta functions for hyperbolic manifolds with cusps. *J. Funct. Anal.*, 257(6):1713–1758, 2009.

[Ped97] Emmanuel PEDON : *Analyse des formes différentielles sur l'espace hyperbolique réel*. Thèse de doctorat, Univerité Henri Poicaré (Nancy 1), 1997.

[Pfa12] J. PFAFF : Selberg zeta functions on odd-dimensional hyperbolic manifolds of finite volume. *ArXiv e-prints*, mai 2012.

[Por04] Joan PORTI : Mayberry-Murasugi's formula for links in homology 3-spheres. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 132(11):3423–3431 (electronic), 2004.

[Rai12a] Jean RAIMBAULT : A note on maximal subgroup growth in $\mathrm{SO}(1, n)$. *preprint, à paraître dans IMRN*, 2012.

[Rai12b] Jean RAIMBAULT : Exponential growth of torsion in abelian coverings. *Algebr. Geom. Topol.*, 12(3):1331–1372, 2012.

[Ril90] Robert RILEY : Growth of order of homology of cyclic branched covers of knots. *Bull. London Math. Soc.*, 22(3):287–297, 1990.

[RS71] D. B. RAY et I. M. SINGER : R-torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds. *Advances in Math.*, 7:145–210, 1971.

[Sav89] Gordan SAVIN : Limit multiplicities of cusp forms. *Invent. Math.*, 95(1):149–159, 1989.

[Sch00] A. SCHINZEL : *Polynomials with special regard to reducibility*, volume 77 de *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. With an appendix by Umberto Zannier.

[Şen11] Mehmet Haluk ŞENGÜN : On the integral cohomology of Bianchi groups. *Exp. Math.*, 20(4):487–505, 2011.

[Ser70] Jean-Pierre SERRE : Le problème des groupes de congruence pour SL2. *Ann. of Math. (2)*, 92:489–527, 1970.

[Ser00] Jean-Pierre SERRE : *Local algebra*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2000. Translated from the French by CheeWhye Chin and revised by the author.

[Sie89] Carl Ludwig SIEGEL : *Lectures on the geometry of numbers*. Springer-Verlag, Berlin, 1989. Notes by B. Friedman, Rewritten by Komaravolu Chandrasekharan with the assistance of Rudolf Suter, With a preface by Chandrasekharan.

[SW02a] Daniel S. SILVER et Susan G. WILLIAMS : Mahler measure, links and homology growth. *Topology*, 41(5):979–991, 2002.

[SW02b] Daniel S. SILVER et Susan G. WILLIAMS : Torsion numbers of augmented groups with applications to knots and links. *Enseign. Math. (2)*, 48(3-4):317–343, 2002.

[SX91] Peter SARNAK et Xiao Xi XUE : Bounds for multiplicities of automorphic representations. *Duke Math. J.*, 64(1):207–227, 1991.

[Tur01] Vladimir TURAEV : *Introduction to combinatorial torsions*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2001. Notes taken by Felix Schlenk.

[Wan72] Hsien Chung WANG : Topics on totally discontinuous groups. *In Symmetric spaces (Short Courses, Washington Univ., St. Louis, Mo., 1969–1970)*, pages 459–487. Pure and Appl. Math., Vol. 8. Dekker, New York, 1972.

[War79] Garth WARNER : Selberg's trace formula for nonuniform lattices : the R-rank one case. *In Studies in algebra and number theory*, volume 6 de *Adv. in Math. Suppl. Stud.*, pages 1–142. Academic Press, New York, 1979.

[Web79] Claude WEBER : Sur une formule de R. H. Fox concernant l'homologie des revêtements cycliques. *Enseign. Math. (2)*, 25(3-4):261–272 (1980), 1979.

[Zim94] B. ZIMMERMANN : A note on hyperbolic 3-manifolds of the same volume. *Monatsh. Math.*, 117(1-2):139–143, 1994.