



Flot de Yamabe avec courbure scalaire prescrite

Inas Amacha

► To cite this version:

Inas Amacha. Flot de Yamabe avec courbure scalaire prescrite. Géométrie différentielle [math.DG]. Université de Bretagne occidentale - Brest; Université Libanaise, 2017. Français. NNT: 2017BRES0109 . tel-01793200

HAL Id: tel-01793200

<https://theses.hal.science/tel-01793200>

Submitted on 16 May 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



université de bretagne
occidentale

UNIVERSITE
BRETAGNE
LOIRE

THÈSE / UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE

sous le sceau de l'Université Bretagne Loire

Et

UNIVERSITÉ LIBANAISE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE

Et

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ LIBANAISE

Mention : Mathématiques

École Doctorale MATHSTIC(Brest)

École Doctorale des Sciences et Technologie(Beyrouth)

présentée par

Inas Amacha

Préparée au Laboratoire de Mathématiques de
Bretagne Atlantique

Flot de Yamabe avec courbure scalaire prescrite

Thèse soutenue le 30 novembre 2017

devant le jury composé de :

Rapporteurs : **Emmanuel HEBEY**

Professeur, Université de Cergy-Pontoise

Etienne SANDIER

Professeur, Université Paris 12

Examineurs : **Colette ANNÉ**

Chargée de recherches, CNRS, Université Nantes

Ali FARDOUN

Maître de conférences (HDR), UBO

Emmanuel HUMBERT

Professeur, Université François Rabolais

Mohamad MEHDI

Professeur, Université Libanaise

Ali WEHBE

Professeur, Université Libanaise

Directeur :

Rachid REGBAOUI

Maître de conférences (HDR), UBO

*À mon père Ali, ma
mère Insaf, mes soeurs Mayssaa,
Waed, Diyaa, Zahraa, mon frère Hous-
sein, mon neveu Houssein, ma nièce Ro-
saline, mon oncle Kassem et à mon Yous-
sef. Vous avez toujours été présents pour les
bons conseils. Votre affectation et votre sou-
tien m'ont été d'un grand secours au long
de ma vie. Veuillez trouver dans ce mo-
deste travail ma reconnaissance pour
tous vos efforts. Puisse Dieu,
le tout puissant, vous pré-
server et vous accorder
santé, longue vie
et bonheur.*



Remerciements

*Si tu remerciais Dieu à toutes les joies qu'il t'a donné,
il ne te resterait plus de temps pour te plaindre*

Maître Eckhart

Merci Dieu

Je tiens à exprimer tout d'abord mes vifs remerciements à *RACHID REGBAOUI* mon maître de stage de Master 2 qui est devenu par la suite mon directeur de thèse. J'ai eu la chance de faire mes premiers pas dans la recherche sous sa direction. Je lui suis reconnaissante de m'avoir fait bénéficier tout au long de ce travail de sa grande compétence, de sa rigueur intellectuelle, et de son efficacité certaine que je n'oublierai jamais.

Je suis très reconnaissante envers Emmanuel HEBEY, professeur à l'université de Cergy-Pontoise, et Etienne SANDIER, professeur à l'université Paris 12 pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de participer à mon jury de thèse en qualité de rapporteurs de mon travail et pour le temps consacré à la lecture de cette thèse.

J'associe à ces remerciements Colette ANNE, chargée de recherche CNRS à l'université de Nantes, Emmanuel HUMBERT, professeur à l'Université de François Rabelais, Mohamad MEHDI et Ali WEHBE, professeurs à l'Université Libanaise, d'avoir accepté de faire partie du jury de ma thèse. Je remercie plus particulièrement Ali FARDOUN, maître de conférences à l'UBO, pour d'une part, avoir également accepté d'être membre du jury et d'autre part, pour me permettre d'avoir la chance de trouver une thèse à l'Université de Brest.

Je remercie également Benoit SAUSSOL pour m'avoir accueilli dans le Laboratoire de Mathématiques de Bretagne Atlantique, et de m'avoir permis de travailler dans d'aussi bonnes conditions. Je remercie toutes les personnes formidables que j'ai rencontrées au sein de LMBA. Merci aux secrétaires Annick et Sabine pour leur gentillesse et leur efficacité.

J'apécie du fond du cœur l'amitié que nous avons construite entre les doctorants du laboratoire. Je pense notamment à Hien Tro, Xuan, Thi Hien, Marion, Kamel, Mokdad. Je remercie chaleureusement Lara, Elsa, Nasab et Natahlie, nous faisons ensemble une belle famille à l'étranger. Je n'oublierai jamais toutes les moments qu'on a partagés ensemble,

les voyages, les repas et toutes les soirées. Vous étiez des véritables amies sur lesquelles j'ai toujours pu compter. Que la bonheur et la réussite vous accompagne dans votre vie.

Mon oncle *KASSEM*, les mots ne suffisent guère pour exprimer l'attachement, l'amour et l'affection que je porte pour toi. Je suis très reconnaissante pour ton aide, tes conseils et ton encouragement dans ma vie professionnelle ainsi que ma vie personnelle.

YOUSSEF, lorsque je t'ai connu, j'ai trouvé l'homme de ma vie et la lumière de mon chemin. Je te remercie pour ta grande patience, ton encouragement, ta confiance, ta gentillesse et ton soutien moral ininterrompu.

Je remercie chaleureusement mes soeurs et frère. Malgré mon éloignement depuis nombreuses années, votre confiance, votre tendresse et votre amour inconditionnel me portent et me guident tous les jours. Je vous remercie pour votre soutien qui m'a été bien utile durant ma thèse.

Mes dernières pensées vont vers mes parents. *PAPA*, rien au monde ne vaut les efforts fournis jours et nuits pour mon éducation et mon bien être, tu représentes pour moi la symbole de dévouement qui n'a pas cessé de m'en encourager et de prier pour moi. *MAMAN*, ta prière et ta bénédiction m'ont été d'un grand secours dans ma vie, tu as fait plus qu'une mère puisse faire pour que ses enfants suivent le bon chemin dans leur vie et leurs études. Chers parents, ce travail est le fruit de vos sacrifices sans lesquelles je n'en serais pas là aujourd'hui.

Table des matières

Remerciements	5
Introduction	9
0.1 Le problème de Yamabe	9
0.2 La méthode variationnelle	10
0.3 Le flot de Yamabe	11
0.4 Le problème de la courbure scalaire prescrite	12
0.5 Le flot de Yamabe avec courbure scalaire prescrite	14
1 Préliminaires	23
1.1 Préliminaires géométriques	23
1.2 Préliminaires analytiques	25
1.2.1 Espaces de Hölder.	25
1.2.2 Espaces de Sobolev.	27
1.2.3 Equations elliptiques et paraboliques.	27
1.2.4 Principe du maximum et inégalité de Harnack.	30
2 Flot de Yamabe avec courbure scalaire prescrite : le cas négatif	33
2.1 Existence locale et décroissance de l'énergie	34
2.2 Existence globale	36
2.3 Convergence du flot	45
3 Flot de Yamabe avec courbure scalaire prescrite : le cas positif	61
3.1 Existence locale et propriétés du flot	63
3.1.1 Existence locale	63
3.1.2 Propriétés du flot	63
3.2 Existence globale du flot.	69
3.3 Comportement de la courbure scalaire à l'infini	79
3.4 Comportement du flot à l'infini	90
Bibliographie	114

Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude d'une famille de flots géométriques de type Yamabe qui sont liés au problème de la courbure scalaire prescrite sur une variété riemannienne compacte. Pour la commodité du lecteur, nous introduisons l'historique du problème de la courbure scalaire prescrite dont l'origine fut le fameux problème de Yamabe.

0.1 Le problème de Yamabe

Sur une variété riemannienne compacte sans bord (M, g_0) de dimension $n \geq 3$, on dit qu'une métrique g est conforme à g_0 si $g = wg_0$ avec $0 < w \in C^\infty(M)$.

Si l'on écrit $w = u^{\frac{4}{n-2}}$ avec $u > 0$, alors la relation entre la courbure scalaire R_g de g et R_0 celle de g_0 est donnée par

$$R_g = u^{-\frac{n+2}{n-2}} (-c_n \Delta_0 u + R_0 u),$$

où $c_n = 4 \frac{n-1}{n-2}$ et Δ_0 est l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à g_0 .

Le problème de Yamabe consiste à trouver une métrique g conforme à g_0 de courbure scalaire constante. Ce problème est équivalent à la résolution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$-c_n \Delta_0 u + R_0 u = \lambda u^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad u > 0, \tag{1}$$

où λ est une constante. Cette équation est connue sous le nom d'équation de Yamabe. Il s'agit d'une équation non-linéaire dont la difficulté principale réside dans le terme $u^{\frac{n+2}{n-2}}$.

Ce problème a été conjecturé par Yamabe en 1960 qui annonça dans [30] l'avoir résolu. Quelques années plus tard, en 1968, Trudinger [28] découvre une erreur dans la preuve de Yamabe et résout le problème dans certains cas particuliers. Après Trudinger, en 1976, Aubin [1] améliore l'approche de Yamabe en réduisant le problème à la preuve d'une certaine inégalité sur l'invariant de Yamabe (voir ci-dessous). Cette inégalité a été démontrée par Aubin [1] dans certains cas et ensuite par Schoen [22] dans les autres cas en 1984.

Trudinger, Aubin et Schoen ont utilisé la méthode variationnelle pour étudier le problème de Yamabe dont le principe est décrit ci-après.

0.2 La méthode variationnelle

L'équation (1) est l'équation d'Euler-Lagrange associée à la fonctionnelle dite de Yamabe suivante :

$$E(u) = \frac{\int_M (c_n |\nabla u|_0^2 + R_0 u^2) dv_{g_0}}{\left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n}}},$$

définie pour $u \in H^1(M) \setminus \{0\}$, où dv_{g_0} désigne l'élément de volume associé à g_0 .

La fonction u est un point critique de E si et seulement si elle satisfait l'équation de Yamabe (1).

La fonctionnelle E est minorée par une constante nommée invariant de Yamabe, dont la valeur est essentielle dans l'analyse du problème de Yamabe :

$$Y(M, g_0) = \inf\{E(u) : 0 < u \in C^\infty(M)\}.$$

On peut résumer la résolution du problème de Yamabe par trois théorèmes principaux. Tout d'abord, Trudinger [28] a démontré qu'il existe une constante positive $\alpha(M)$ telle que l'équation (1) admette une solution lorsque $Y(M, g_0) < \alpha(M)$. Aubin [1] a amélioré le résultat de Trudinger en démontrant que $\alpha(M) = Y(\mathbb{S}^n)$ pour toute variété compacte (M, g_0) , où $Y(\mathbb{S}^n)$ est l'invariant de Yamabe de la sphère $\mathbb{S}^n$ munie de sa métrique canonique. Plus précisément, il démontre le résultat suivant :

Théorème 0.1 (Aubin [1]) *Pour toute variété riemannienne compacte (M, g_0) , on a*

$$Y(M, g_0) \leq Y(\mathbb{S}^n),$$

où $Y(\mathbb{S}^n) = n(n-1)\omega_n^{\frac{2}{n}}$, avec ω_n le volume de $\mathbb{S}^n$, est l'invariant de Yamabe de la sphère $\mathbb{S}^n$ munie de la métrique canonique. De plus, si

$$Y(M, g_0) < Y(\mathbb{S}^n), \tag{2}$$

alors le minimum de la fonctionnelle E est atteint et par suite il existe une fonction $u > 0$ et une constante λ qui satisfont (1).

Dans de nombreux cas, Aubin [1] a montré que l'inégalité (2) est vraie :

Théorème 0.2 (Aubin [1]) *Supposons que (M, g_0) soit une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 6$ et non localement conformément plate, alors*

$$Y(M, g_0) < Y(\mathbb{S}^n).$$

0.3 Le flot de Yamabe

Les cas restants ont été démontrés par Schoen[22] :

Théorème 0.3 (Schoen [22]) *Supposons que (M, g_0) soit compacte de dimension $n \leq 5$ ou localement conformément plate et non conforme à la sphère standard $\mathbb{S}^n$. Alors on a*

$$Y(M, g_0) < Y(\mathbb{S}^n).$$

Dans les résultats précédents, la valeur $Y(\mathbb{S}^n)$ est le seuil critique à partir duquel la fonctionnelle E cesse d'avoir la propriété de Palais-Smale. Cela est dû au fait que l'injection de Sobolev $H^1(M) \subset L^p(M)$ est compacte pour $p < \frac{2n}{n-2}$ mais pas pour $p = \frac{2n}{n-2}$.

A l'instar du flot de Ricci qui a permis, entre autres, la résolution de la conjecture de Poincaré, une nouvelle approche a été introduite par Hamilton [15] pour étudier le problème de Yamabe : le flot de Yamabe.

0.3 Le flot de Yamabe

Le flot de Yamabe a été introduit par Hamilton [15] dans les années 1980 comme un outil pour trouver des métriques à courbure scalaire constante dans une classe conforme. Il a considéré le flot suivant :

$$\begin{cases} \partial_t g(t) = - (R_{g(t)} - r_{g(t)}) g(t) \\ g(0) = g^0 \end{cases} \quad (3)$$

où $r_{g(t)}$ est la valeur moyenne de la courbure scalaire de $g(t)$:

$$r_{g(t)} = \frac{\int_M R_{g(t)} dv_{g(t)}}{\int_M dv_{g(t)}},$$

et $g^0 = u_0^{\frac{4}{n-2}} g_0$, avec $0 < u_0 \in C^\infty(M)$, est la donnée initiale.

Le flot de Yamabe est un flot de gradient associé à la fonctionnelle dite de courbure scalaire totale suivante :

$$\mathcal{E}(g) = \frac{\int_M R_g dv_g}{\left(\int_M dv_g\right)^{\frac{n-2}{n}}},$$

où dv_g désigne l'élément de volume de la métrique g .

Il est facile de voir que ce flot préserve le volume ainsi que la structure conforme de (M, g_0) . Si l'on pose $g(t) = u(t)^{\frac{4}{n-2}} g_0$, avec $0 < u(t) \in C^\infty(M)$, alors u vérifie l'équation d'évolution suivante

$$\partial_t u^N = \frac{n+2}{4} (c_n \Delta_0 u - R_0 u + r_{g(t)} u^N), \quad (4)$$

où $N = \frac{n+2}{n-2}$.

Il s'agit d'une équation parabolique non-linéaire dont l'étude est très délicate à cause du terme u^N .

Hamilton [15] a étudié le cas où R_0 est négative et il a obtenu le théorème suivant :

Théorème 0.4 (Hamilton [15]) *Supposons que $R_0 \leq 0$. Alors pour toute donnée initiale g^0 , le flot donné par (3) existe globalement et converge lorsque $t \rightarrow +\infty$ vers une métrique g_∞ de courbure scalaire constante.*

Lorsque $R_0 > 0$ l'étude du flot de Yamabe est plus difficile. Des phénomènes du type « concentration du volume » peuvent apparaître. Comme nous l'avons déjà signalé à propos de la méthode variationnelle, la raison en est la perte de compacité dans l'injection de Sobolev $H^1(M) \subset L^{\frac{2n}{n-2}}(M)$. Néanmoins des résultats très importants ont été obtenus par Ye [31] lorsque (M, g_0) est localement conformément plate, puis Schwetlick-Struwe [24] et Brendle [7] dans la cas général :

Théorème 0.5 (Brendle [7], Schwetlick-Struwe [24], Ye [31]) *Supposons que $R_0 > 0$ et que (M, g_0) est soit une variété conformément plate ou de dimension $3 \leq n \leq 5$. Alors pour toute donnée initiale g^0 , le flot donné par (3) existe globalement et converge vers une métrique g_∞ de courbure scalaire constante.*

Un résultat de Brendle [8] traite également le cas de la dimension $n \geq 6$ mais avec des hypothèses supplémentaires sur le tenseur de Weyl de g_0 .

L'intérêt de l'étude du flot de Yamabe (3) n'est pas seulement de résoudre le problème de Yamabe mais il s'agit également d'une déformation géométrique de la métrique initiale vers une métrique de courbure scalaire constante. De plus, ce flot donne une approche naturelle de la théorie de Morse appliquée à la fonctionnelle de la courbure scalaire totale $\mathcal{E}$. Notons que l'équation d'évolution (4) représente également un modèle de l'équation d'écoulement d'un fluide en milieu poreux (voir par exemple [11]). Pour finir notre rappel sur le flot de Yamabe, on peut également citer le travail de Gursky [14] qui étudie un flot non local pour démontrer le théorème d'uniformisation des surfaces.

Une généralisation naturelle du problème de Yamabe, qui peut être très utile dans l'étude de la classe conforme de g_0 , est le problème de la courbure scalaire prescrite. Il s'agit de trouver une métrique conforme à g_0 dont la courbure scalaire est une fonction donnée sur M .

0.4 Le problème de la courbure scalaire prescrite

Soient (M, g_0) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ et $F \in C^\infty(M)$. Le problème de la courbure scalaire prescrite consiste à trouver une métrique g conforme à

0.4 Le problème de la courbure scalaire prescrite

g_0 , telle que F soit sa courbure scalaire, i.e

$$R_g = F.$$

Ce problème est équivalent à la résolution de l'EDP suivante

$$-c_n \Delta_0 u + R_0 u = F u^N, u > 0, \quad (5)$$

où $N = \frac{n+2}{n-2}$.

Remarquons tout d'abord que lorsque F est constante, on retrouve le problème de Yamabe. La résolution de cette équation dépend de R_0 et de F . Comme dans l'étude du problème de Yamabe, grâce à un changement conforme de g_0 , on peut supposer que R_0 satisfait une des conditions suivantes :

$$R_0 < 0, \quad R_0 > 0 \quad \text{ou} \quad R_0 = 0.$$

On peut facilement trouver des conditions nécessaires qui doivent être vérifiées par la fonction F pour que (5) admette une solution positive :

Proposition 0.1 *Soient (M, g_0) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ et $F \in C^\infty(M)$. Si l'équation (5) admet une solution $u > 0$ alors :*

1. $\int_M F dv_{g_0} < 0$ lorsque $R_0 < 0$.
2. $\int_M F dv_{g_0} < 0$ et $\max_{x \in M} F(x) > 0$ lorsque $R_0 = 0$.
3. $\max_{x \in M} F(x) > 0$ lorsque $R_0 > 0$.

Hormis quelques cas particuliers, on ne sait pas si les conditions nécessaires citées dans la proposition précédente sont également suffisantes pour la résolution de l'équation (5). Notons ici que lorsque $M = \mathbb{S}^n$, d'autres conditions connues sous le nom condition de Kazdan-Warner sont également nécessaires pour la résolution du problème de la courbure scalaire prescrite. Les problèmes de courbure scalaire prescrite ont attiré l'attention de plusieurs chercheurs lors des trente dernières années. Le lecteur pourra consulter ([2], [6], [9], [4], [12], [16], [17], [18], [19]) et les références qui s'y rattachent. Notons ici que tous ces travaux abordent le problème par la méthode variationnelle.

Dans cette thèse, nous développons une approche basée sur l'étude d'une famille de flots géométriques qui permet, entre autres, la résolution de l'équation (5) dans certains cas. Cette approche peut être considérée comme une généralisation du flot de Yamabe.

0.5 Le flot de Yamabe avec courbure scalaire prescrite

Pour introduire le flot de Yamabe avec courbure scalaire prescrite, nous distinguons deux cas dans cette thèse : $R_0 < 0$ et $R_0 > 0$. Le cas $R_0 = 0$ nécessitant un traitement particulier, il sera étudié dans un travail ultérieur. A notre connaissance, il s'agit du premier travail sur le flot de Yamabe avec courbure scalaire prescrite sur une variété riemannienne quelconque de dimension $n \geq 3$. Le seul travail connu traitant du cas F non constante est celui de Chen-Xu [10] qui concerne le cas où $M = \mathbb{S}^n$. En dimension $n = 2$, Struwe [27] étudia un flot avec courbure de Gauss prescrite sur la sphère $\mathbb{S}^2$ (problème de Nirenberg). On peut également citer le travail de Baird-Fardoun-Regbaoui [5] concernant la courbure de Gauss sur des surfaces quelconques.

Nous introduisons deux flots correspondant à deux fonctionnelles distinctes en fonction du signe de R_0 . Les difficultés des deux cas sont différentes et nécessitent des techniques adaptées au signe de R_0 .

Le cas $R_0 < 0$

Dans ce cas nous introduisons le flot suivant :

$$\begin{cases} \partial_t g(t) = - (R_{g(t)} - F) g(t) \\ g(0) = g^0 \end{cases} \quad (6)$$

où $g^0 = u_0^{\frac{4}{n-2}} g_0$, avec $0 < u_0 \in C^\infty(M)$, est la donnée initiale.

Il s'agit d'un flot de gradient associé à la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{E}(g) = \int_M R_g dv_g - \frac{n-2}{n} \int_M F dv_g.$$

Ce flot préserve la structure conforme de (M, g_0) . Si l'on pose $g(t) = u(t)^{\frac{4}{n-2}} g_0$, avec $0 < u(t) \in C^\infty(M)$, alors u vérifie le problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u^N = \frac{n+2}{4} (c_n \Delta_0 u - R_0 u + F u^N) \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (7)$$

où $N = \frac{n+2}{n-2}$.

Ainsi l'existence d'une solution du problème (6) est équivalente à l'existence d'une solution du problème (7) qui est une équation parabolique non-linéaire dont l'existence locale (en temps) d'une solution est donnée par la théorie classique des équations paraboliques.

Notre premier théorème donne l'existence globale en temps d'une solution du problème (6) sans aucune hypothèse sur la fonction $F \in C^\infty(M)$.

0.5 Le flot de Yamabe avec courbure scalaire prescrite

Théorème 1 *Supposons que $R_0 < 0$ et $F \in C^\infty(M)$. Alors pour toute donnée initiale $g^0 = u_0^{\frac{4}{n-2}} g_0$ avec $0 < u_0 \in C^\infty(M)$, il existe une unique solution $g(t) = u(t)^{\frac{4}{n-2}} g_0$ du flot (6) définie sur $[0, +\infty)$, avec $0 < u \in C^\infty(M \times [0, +\infty))$. De plus la fonctionnelle $\mathcal{E}$ est décroissante le long du flot, i.e*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(g(t)) \leq 0.$$

La difficulté pour montrer l'existence globale d'une solution réside en particulier dans le fait que la solution peut dégénérer (s'annuler) en temps fini. D'où la nécessité d'établir une borne inférieure sur la solution qui ne s'annule pas en temps fini. En fait la démonstration de ce théorème est basée sur l'obtention d'une double inégalité sur la solution locale u du problème (7). Plus précisément, si $u \in C^\infty(M \times [0, T))$ avec $T < +\infty$, nous montrons que

$$C^{-1} \leq u(x, t) \leq C e^{CT} \quad (8)$$

où C est une constante positive qui ne dépend que de (M, g_0) , F et la donnée initiale u_0 . La preuve de cette inégalité utilise le principe du maximum.

L'existence globale est ainsi satisfaite pour une donnée initiale quelconque et pour toute fonction $F \in C^\infty(M)$, mais cela ne suffit pas pour démontrer la convergence du flot lorsque t tends vers $+\infty$. En effet, si F est une fonction positive, grâce au principe du maximum, on peut vérifier que

$$u(x, t) \geq C t^{\frac{n-2}{4}},$$

pour une constante C indépendante de t , ce qui donne $u(x, t) \rightarrow +\infty$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Il faudra donc supposer au moins que F est négative quelque part pour obtenir la convergence. Remarquons ici que cette non convergence du flot est également prévisible grâce à la proposition 0.1 car sinon la limite du flot serait une solution de l'équation (5).

Pour montrer la convergence du flot on a besoin d'établir des estimations comme l'inégalité (8) mais uniforme en temps. La première inégalité dans (8) est uniforme en t , cela est dû au fait que $R_0 < 0$. Il nous reste donc à trouver une borne supérieure sur u indépendante de t . C'est là que des hypothèses supplémentaires sur F et la donnée initiale u_0 vont intervenir. Le point clé dans nos hypothèses est que si la donnée initiale u_0 est majorée par une sur-solution de l'équation (5), alors on a une borne supérieure sur $u(t)$ indépendante de t et la convergence du flot est donc assurée. L'hypothèse sur la fonction F va intervenir pour garantir l'existence d'une sur-solution de l'équation (5). Nous avons besoin d'introduire quelques notations afin d'énoncer nos hypothèses sur la fonction F .

Si Ω est un ouvert de M , λ_Ω désigne la première valeur propre du Laplacien conforme $L := -c_n \Delta_0 + R_0$ sur Ω avec condition de Dirichlet, i.e

$$\lambda_\Omega = \inf_{0 \neq u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_M (c_n |\nabla u|_0^2 + R_0 u^2) dv_{g_0}}{\int_M u^2 dv_{g_0}}.$$

Nos conditions sur F sont les suivantes :

Supposons qu'il existe un ouvert $\Omega \subset M$ tel que

$$\lambda_\Omega > 0 \text{ et } F < 0 \text{ sur } M \setminus \Omega \quad (H1)$$

et

$$\sup_\Omega F \leq C_\Omega \inf_{M \setminus \Omega} |F|, \quad (H2)$$

où C_Ω est une constante qui ne dépend que de Ω .

Grâce aux hypothèses (H1) et (H2), nous démontrons le théorème de convergence suivant :

Théorème 2 *Supposons que $R_0 < 0$ et $F \in C^\infty(M)$ satisfaisant les conditions (H1) et (H2). Alors il existe une fonction $0 < \bar{u} \in C^\infty(M)$ telle que pour toute donnée initiale $g^0 = u_0^{\frac{4}{n-2}} g_0$ avec $0 < u_0 \leq \bar{u}$, le flot $g(t) = u(t)^{\frac{4}{n-2}} g_0$ donné par le théorème 1 converge dans $C^\infty(M)$ vers une métrique $g_\infty = u_\infty^{\frac{4}{n-2}} g_0$ de courbure scalaire égale à F .*

La fonction $\bar{u}$ dans le théorème 2 est une sur-solution de l'équation (5), i.e elle vérifie

$$-c_n \Delta_0 \bar{u} + R_0 \bar{u} \geq F \bar{u}^N.$$

Un corollaire immédiat du théorème 1 est le résultat suivant sur l'existence d'une solution de l'équation (5).

Corollaire 1 *Supposons que $R_0 < 0$ et $F \in C^\infty(M)$ satisfaisant les conditions (H1) et (H2). Alors l'équation (5) admet une solution $0 < u \in C^\infty(M)$. Autrement dit, il existe une métrique g conforme à g_0 de courbure scalaire égale à F .*

Un cas particulier où les conditions (H1) et (H2) sont automatiquement satisfaites est lorsque F est négative presque partout sur M . Nous avons le résultat suivant :

Corollaire 2 *Supposons que $R_0 < 0$ et $F \in C^\infty(M)$ telle que $F < 0$ presque partout sur M . Alors il existe une fonction $0 < \bar{u} \in C^\infty(M)$ telle que pour toute donnée initiale $g^0 = u_0^{\frac{4}{n-2}} g_0$, où $0 < u_0 \leq \bar{u}$, le flot $g(t) = u(t)^{\frac{4}{n-2}} g_0$ converge dans $C^\infty(M)$ vers une métrique $g_\infty = u_\infty^{\frac{4}{n-2}} g_0$ conforme à g_0 , avec courbure scalaire égale à F , i.e,*

$$R_{g_\infty} = F.$$

0.5 Le flot de Yamabe avec courbure scalaire prescrite

Des conditions similaires à nos hypothèses (H1)-(H2) ont été obtenues par d'autres auteurs pour résoudre l'équation (5) par des méthodes elliptiques. Voir [21], [6], [29] pour plus de détails.

Après avoir introduit les conditions (H1) et (H2) une question naturelle se pose : les conditions (H1) et (H2) sont-elles nécessaires pour la convergence du flot ? Le théorème suivant nous affirme que c'est le cas au moins pour la condition (H1) :

Théorème 3 *Supposons que $R_0 < 0$ et $F \in C^\infty(M)$ telle que la condition (H1) ne soit pas satisfaite, i.e, pour tout ouvert $\Omega \subset M$ tel que $F > 0$ sur $M \setminus \Omega$, on suppose que $\lambda_\Omega \leq 0$. Alors pour toute donnée initiale $0 < u_0 \in C^\infty(M)$, la solution u de l'équation (7) satisfait*

$$\max_{x \in M} u(x, t) \geq C t^{\frac{n-2}{n+2}},$$

pour une constante C indépendante de t . En particulier, $\max_{x \in M} u(x, t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Le théorème 3 nous dit en particulier que la condition (H1) est nécessaire à la résolution de l'équation de courbure scalaire prescrite (5).

Le cas $R_0 > 0$

Dans ce cas nous introduisons le flot suivant :

$$\begin{cases} \partial_t g(t) = -\frac{4}{n+2} (R_{g(t)} - \lambda(t)F) g(t) \\ g(0) = g^0, \end{cases} \quad (9)$$

où $g^0 = u_0^{\frac{4}{n-2}} g_0$, avec $0 < u_0 \in C^\infty(M)$, est la donnée initiale, et

$$\lambda(t) = \frac{r_{g(t)}}{f(t)}$$

avec $r_{g(t)}$ et $f(t)$ les valeurs moyennes respectives de $R_{g(t)}$ et F :

$$r_{g(t)} = \frac{\int_M R_{g(t)} dv_{g(t)}}{\int_M dv_{g(t)}} \quad \text{et} \quad f(t) = \frac{\int_M F dv_{g(t)}}{\int_M dv_{g(t)}}.$$

La solution $g(t)$ de (9) est le flot de gradient associé à la fonctionnelle dite « énergie » suivante :

$$\mathcal{E}(g) = \frac{\int_M R_g dv_g}{\left(\int_M F dv_g\right)^{\frac{n-2}{n}}},$$

définie sur l'ensemble

$$\mathcal{M}_F = \left\{ g \in [g_0] : \int_M F dv_g > 0 \right\},$$

où $[g_0]$ est la classe conforme de g_0 .

Comme dans le cas $R_0 < 0$, ce flot préserve la structure conforme de (M, g_0) . Par conséquent, si l'on pose $g(t) = u(t)^{\frac{4}{n-2}} g_0$, avec $0 < u(t) \in C^\infty(M)$, alors u vérifie le problème d'évolution suivant

$$\begin{cases} \partial_t u^N = c_n \Delta_0 u - R_0 u + \lambda F u^N \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (10)$$

où la donnée initiale $0 < u_0 \in C^\infty(M)$ est telle que $\int_M F u_0^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} > 0$, i.e. $g^0 = u_0^{\frac{4}{n-2}} g_0 \in \mathcal{M}_F$.

Si F est strictement positive quelque part, alors on a $\mathcal{M}_F \neq \emptyset$. Ensuite il est facile de voir que l'équation (10) est parabolique sur l'ensemble des fonctions $0 < u \in C^\infty(M \times [0, T])$, avec $T > 0$, telle que $g = u^{\frac{4}{n-2}} g_0 \in \mathcal{M}_F$. Ainsi l'existence d'une solution locale est garantie par la théorie classique des EDP paraboliques. Par équivalence de (9) et (10), nous avons donc une solution locale du flot $g(t)$ de l'équation (9). De plus, nous montrons que l'ensemble $\mathcal{M}_F$ est invariant par le flot. En fait, nous montrons les propriétés suivantes du flot $g(t)$:

- Le volume de $(M, g(t))$ reste constant le long du flot.
- La fonctionnelle énergie $\mathcal{E}$ est décroissante le long du flot.
- La moyenne $f(t)$ de F est minorée et majorée uniformément en t .
- La courbure scalaire $R_{g(t)}$ est minorée uniformément en t .

La dernière propriété est utilisée pour montrer que le flot ne dégénère pas en temps fini. En utilisant ces propriétés nous démontrons tout d'abord l'existence globale du flot :

Théorème 4 *Supposons $R_0 > 0$ et $F \in C^\infty(M)$ telle que $\max_{x \in M} F(x) > 0$. Alors pour toute*

donnée initiale $g^0 = u_0^{\frac{4}{n-2}} g_0 \in \mathcal{M}_F$, il existe une unique solution $g(t) = u(t)^{\frac{4}{n-2}} g_0$ du flot (9) définie sur $[0, +\infty)$ avec $0 < u \in C^\infty(M \times [0, +\infty))$. De plus, $g(t) \in \mathcal{M}_F$ pour tout $t \in [0, +\infty)$ et la fonctionnelle $\mathcal{E}$ est décroissante le long du flot.

Après avoir démontré l'existence globale du flot (9), notre deuxième but est d'étudier son comportement asymptotique à l'infini. Contrairement au cas $R_0 < 0$, ici des singularités du type concentration du volume peuvent apparaître. Nous démontrons tout d'abord des estimations intégrales sur la courbure scalaire $R_{g(t)}$. Plus précisément, nous montrons la proposition très importante suivante :

Proposition 1 *Pour tout $p \geq 1$, on a*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_M |R_{g(t)} - \lambda(t) F|^p dv_{g(t)} = 0.$$

0.5 Le flot de Yamabe avec courbure scalaire prescrite

Cette proposition, qui est vraie sans aucune hypothèse supplémentaire sur la fonction prescrite F , est en particulier valable même en cas de non convergence du flot. Comme dans le cas du flot de Yamabe, elle exprime le fait que la courbure scalaire $R_{g(t)}$ est arbitrairement proche de F (à une constante multiplicative positive près) lorsque t est suffisamment grand alors que le flot $g(t)$ peut exploser à l'infini. Une autre conséquence directe de cette proposition est que pour toute suite $t_\nu \rightarrow +\infty$, la suite $u_\nu := u(t_\nu)$ est une suite de Palais-Smale dans $H^1(M)$ pour la fonctionnelle

$$E(u) := \mathcal{E}(u^{\frac{4}{n-2}} g_0) = \frac{\int_M (c_n |\nabla u|^2 + R_0 u^2) dv_{g_0}}{(\int_M F u^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0})^{\frac{n-2}{n}}}.$$

Notons ici, comme $E(u(t))$ est décroissante, que

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} E(u_\nu) = \lim_{t \rightarrow +\infty} E(u(t)) := E_\infty.$$

Avant de donner un premier résultat sur le comportement de la suite (u_ν) lorsque $\nu \rightarrow \infty$, nous avons besoin d'introduire quelques définitions et notations.

On dit qu'une famille de fonctions $\bar{u}_{p,\varepsilon} \in C^\infty(M)$ avec $p \in M$ et $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, où $\varepsilon_0 > 0$ assez petit, est du type « bulle standard » si elle vérifie la propriété suivante :

$$\begin{cases} \bar{u}_{p,\varepsilon}(x) = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + d(p,x)^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} & \text{si } x \in B(p, \delta) \\ \|\bar{u}_{p,\varepsilon}\|_{C^2(M \setminus B(p,\delta))} \leq C \varepsilon^{\frac{n-2}{2}}, \end{cases} \quad (11)$$

où $0 < \delta < \text{inj}_M$ (rayon d'injectivité de (M, g_0)) et $C > 0$ sont des constantes indépendantes de (p, ε) , et $d(p, \cdot)$ désigne la fonction distance riemannienne (par rapport à g_0) au point p .

Grâce aux travaux désormais classiques de Bahri-Coron [3] et Struwe [26], quitte à passer à une sous-suite de (u_ν) , nous avons la proposition suivante :

Proposition 2 *Il existe un entier $m \geq 0$, une suite de points $x_{k,\nu} \in M$ avec $1 \leq k \leq m$, $\nu \geq 1$, une famille de réels positifs vérifiant $\varepsilon_{k,\nu} \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} 0$ pour tout $1 \leq k \leq m$, et une fonction $0 \leq u_\infty \in C^\infty(M)$ telles que :*

1. La fonction u_∞ satisfait l'équation

$$-c_n \Delta_0 u_\infty + R_0 u_\infty = \lambda_\infty F u_\infty^N,$$

$$\text{où } \lambda_\infty = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \lambda(t_\nu).$$

2. Pour tout $i \neq j$, on a

$$\frac{\varepsilon_{i,\nu}}{\varepsilon_{j,\nu}} + \frac{\varepsilon_{j,\nu}}{\varepsilon_{i,\nu}} + \frac{d(x_{i,\nu}, x_{j,\nu})}{\varepsilon_{i,\nu} \varepsilon_{j,\nu}} \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} +\infty.$$

3. $x_{k,\nu} \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} x_k$ pour tout $k = 1, \dots, m$, où $x_1, \dots, x_k \in M$ sont tels que $F(x_k) > 0$ et

$$\left\| u_\nu - u_\infty - \sum_{k=1}^m \left(\frac{4n(n-1)}{\lambda_\infty F(x_k)} \right)^{\frac{n-2}{4}} \bar{u}_{x_k, \nu, \varepsilon_{k,\nu}} \right\|_{H^1(M)} \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} 0,$$

où $(\bar{u}_{p,\varepsilon})$ est une famille quelconque de fonctions de type « bulle standard », i.e vérifiant la propriété (11).

La proposition précédente donne une description à l'échelle « microscopique » de la suite (u_ν) autour des points de concentration $x_1, \dots, x_m$. Ce phénomène est connu sous le nom de « formation des bulles » dans la littérature. Ainsi si $m = 0$ dans la proposition 2, il n'y a pas de points de concentration et par suite, (u_ν) va converger dans $H^1(M)$ vers une fonction $u_\infty > 0$ car le volume de $g_\nu = u_\nu^{\frac{4}{n-2}} g_0$ est constant. Une fois la concentration du volume est écartée, on peut montrer que $u(t)$ est bornée dans $C^\infty(M)$ (uniformément en t) et converge vers u_∞ par un résultat général de Simon [25] sur la convergence des solutions des équations paraboliques du second ordre.

La proposition suivante nous donne une information très importante sur la valeur de E_∞ , qui dans certains cas, permet de montrer la convergence du flot.

Proposition 3 *On a*

$$E_\infty = \left(\sum_{k=1}^m \frac{Y(\mathbb{S}^n)^{\frac{n}{2}}}{F(x_k)^{\frac{n-2}{2}}} \right)^{\frac{2}{n}} \quad \text{si } u_\infty = 0$$

et

$$E_\infty = \left(E(u_\infty)^{\frac{n}{2}} + \sum_{k=1}^m \frac{Y(\mathbb{S}^n)^{\frac{n}{2}}}{F(x_k)^{\frac{n-2}{2}}} \right)^{\frac{2}{n}} \quad \text{si } u_\infty > 0.$$

Il découle de cette proposition, grâce à la décroissance de l'énergie, que si $m \neq 0$, alors l'énergie de la donnée initiale u_0 vérifie :

$$E(u_0) > \frac{Y(\mathbb{S}^n)}{(\max_M F)^{\frac{n-2}{n}}} . \quad (12)$$

En supposant que (12) ne soit pas vérifiée, la proposition 3 implique que $m = 0$. Ainsi l'absence des points (x_ν^k) dans la proposition 2 implique la non concentration du volume. C'est le point clé qui permet au flot de converger. Plus précisément, nous avons le théorème suivant :

Théorème 5 *Supposons que $R_0 > 0$ et $F \in C^\infty(M)$ telle que $\max_M F > 0$. Alors pour toute donnée initiale $g^0 = u_0^{\frac{4}{n-2}} g_0$ avec u_0 vérifiant*

$$E(u_0) \leq \frac{Y(\mathbb{S}^n)}{(\max_M F)^{\frac{n-2}{n}}} , \quad (13)$$

0.5 Le flot de Yamabe avec courbure scalaire prescrite

le flot $g(t)$ donné par le théorème 4 converge dans $C^\infty(M)$ vers une métrique g_∞ de courbure scalaire égale à $\lambda_\infty F$, pour une constante $\lambda_\infty > 0$.

Dans ce théorème la métrique limite g_∞ a pour courbure scalaire $\lambda_\infty F$. On en déduit que F est la courbure scalaire de la métrique conforme $\lambda_\infty^{-\frac{n-2}{4}} g_\infty$.

On peut se poser la question s'il existe une donnée initiale u_0 vérifiant la condition (13) dans le théorème 5. Le travail de Escobar-Schoen [12] nous dit que la réponse est positive dans certains cas. C'est le cas par exemple si M est de dimension 3 et non conformément équivalente à $\mathbb{S}^3$. Nous en déduisons le corollaire suivant :

Corollaire 3 *Supposons que (M, g_0) est de dimension 3 avec $R_0 > 0$ et qu'elle n'est pas conformément équivalente à la sphère euclidienne $\mathbb{S}^3$. Alors toute fonction $F \in C^\infty(M)$ telle que $\max_M F > 0$ est la courbure scalaire d'une métrique conforme à g_0 .*

Notons ici que le cas de la sphère $\mathbb{S}^n$ est exclu par ce corollaire. Le problème de la courbure scalaire prescrite sur la sphère $\mathbb{S}^n$, connu sous le nom « problème de Nirenberg » est très délicat à étudier à cause de la richesse de la géométrie de la sphère. De nombreux auteurs se sont intéressés à ce problème depuis plusieurs années, voir [2], [4], [9], [10], [17], [19], [23]. Tous ses travaux abordent le problème de Nirenberg par la méthode variationnelle. Comme nous l'avons déjà signalé ci-dessus, le seul travail qui étudie ce problème par une méthode du flot est celui de Chen-Xu [10].

Dans le théorème 5 ci-dessus, on suppose que la donnée initiale $g^0 = u_0^{\frac{4}{n-2}} g_0$ vérifie la condition (13). Comme dans le cas du flot de Yamabe (F constante), on peut se poser la question de savoir s'il existe des conditions sur la fonction F qui garantissent la convergence du flot pour toute donnée initiale g^0 ? Une première tentative de réponse est de faire l'hypothèse suivante :

On suppose qu'il existe une famille de fonctions de type « bulle standard » : $\bar{u}_{p,\varepsilon}$ vérifiant la propriété (11), telle que :

$$E(\bar{u}_{p,\varepsilon}) \leq \frac{Y(\mathbb{S}^n)}{F(p)^{\frac{n-2}{n}}}, \quad (\text{H})$$

pour tout $p \in M$ tel que $F(p) > 0$ et tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. On a alors le théorème de convergence suivant :

Théorème 6 *Supposons que $R_0 > 0$ et $F \in C^\infty(M)$ telle que $\max_M F > 0$ et satisfaisant la condition (H). Alors pour toute donnée initiale $g^0 = u_0^{\frac{4}{n-2}} g_0$ avec $0 < u_0 \in C^\infty(M)$, le flot $g(t) = u(t)^{\frac{4}{n-2}} g_0$ donné par le théorème 4 converge dans $C^\infty(M)$ vers une métrique $g_\infty = u_\infty^{\frac{4}{n-2}} g_0$ de courbure scalaire égale à $\lambda_\infty F$, pour une constante $\lambda_\infty > 0$.*

On peut considérer ce théorème comme une généralisation du résultat de Brendle [7] qui démontra la convergence du flot de Yamabe, i.e. en supposant F constante, pour toute donnée initiale lorsque l'hypothèse (H) est vérifiée. De plus, il démontre (lorsque F est constante) que la condition (H) est automatiquement vérifiée pour toute variété riemannienne compacte (M, g_0) de dimension $n \leq 5$. Pour les variétés de dimension supérieure, des conditions supplémentaires sur le tenseur de Weyl sont nécessaires (voir Brendle [8]). On peut donc se poser la question s'il existe des fonctions non constantes pour lesquelles l'hypothèse (H) est vérifiée. Un calcul comme dans Escobar-Schoen [12] montre que si (M, g_0) est de dimension 3 non conformément équivalente à la sphère $\mathbb{S}^3$ et F suffisamment proche d'une constante positive, alors la condition (H) est satisfaite.

La preuve du théorème 6 repose sur l'inégalité suivante

$$E(u(t)) - E_\infty \leq C \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda(t)F|^{\frac{2n}{n+2}} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n+2}{2n}(1+\gamma)}$$

pour des constante $C > 0$ et $\gamma > 0$ indépendantes de t .

Grâce à cette inégalité nous démontrons qu'il n'y a pas concentration du volume, i.e, pour tout $\eta > 0$, il existe un réel $r > 0$ tel que

$$\int_{B_r(x)} u(t)^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \leq \eta$$

pour tout $x \in M$ et tout $t \geq 0$. Il s'agit là d'un point clé pour la convergence du flot.

Plan de la thèse

Cette thèse est divisée en trois chapitres :

Le premier chapitre a pour but de rappeler l'essentiel des notations géométriques et analytiques, et quelques résultats de base qui seront utilisés dans cette thèse.

Dans le deuxième chapitre nous étudions le flot de Yamabe avec courbure scalaire prescrite dans le cas où R_0 est négative.

Dans le dernier chapitre nous abordons la deuxième partie de cette thèse : l'étude du flot de Yamabe avec courbure scalaire prescrite lorsque R_0 est positive.

Chapitre 1

Préliminaires

Le but de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notations et quelques résultats de base utilisés tout au long de ce travail. Les résultats rappelés dans ce chapitre ou des versions équivalentes sont essentiellement tirés des ouvrages [13], [16], [20].

1.1 Préliminaires géométriques

On considère une variété riemannienne (M, g) de dimension $n \geq 3$. On désigne par ∇ la connection de Levi-Civita de M . Dans une carte locale $(x_1, \dots, x_n)$, les composantes de la connection sont données par

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k,$$

où Γ_{ij}^k sont les symboles de Christoffel, définis par

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right),$$

avec g_{ij} , g^{ij} qui désignent respectivement les composantes de la matrice g ainsi que son inverse. Ici la notation d'Einstein sur la sommation des indices répétés est utilisée.

On note par $\Gamma(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs C^∞ définis sur M . On rappelle dans ce qui suit les différentes notions de courbures :

- Le tenseur de courbure de Riemann, noté Rm , est un tenseur de type (1,3) défini par

$$Rm(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z,$$

pour tous X, Y et $Z \in \Gamma(M)$. Dans une carte locale, ses composantes R_{ijk}^l sont données par :

$$Rm(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R_{ijk}^l \partial_l = (\partial_j \Gamma_{ki}^l - \partial_k \Gamma_{ji}^l + \Gamma_{j\alpha}^l \Gamma_{ki}^\alpha - \Gamma_{k\alpha}^l \Gamma_{ji}^\alpha) \partial_l.$$

- Le tenseur de Ricci est un tenseur du type (0,2) défini par

$$Ric(X, Y) = tr_g(Rm(\cdot, X)Y).$$

Ses composantes dans une carte locale sont données par

$$R_{ij} = Ric(\partial_i, \partial_j) = R_{ilj}^l.$$

- La courbure scalaire est la trace du tenseur de Ricci, notée R . Dans une carte locale, on a

$$R = g^{ij} R_{ij}.$$

Pour une fonction $u \in C^2(M)$, on rappelle :

- Le gradient de u , noté ∇u , est le champs de vecteurs défini par

$$g(\nabla u, X) = du(X)$$

pour tout $X \in \Gamma(M)$, où du désigne la différentielle de u .

- Le hessien de u , noté $\nabla^2 u$, est le (0,2)-tenseur défini par :

$$\nabla^2 u(X, Y) = g(\nabla_X(\nabla u), Y)$$

pour tout $X, Y \in \Gamma(M)$. Ses composantes dans une carte locale sont données par

$$(\nabla^2 u)_{ij} = \nabla^2 u(\partial_i, \partial_j) = \partial_{ij}^2 u - \Gamma_{ij}^k \partial_k u.$$

- Le laplacien de u est la trace (par rapport g) du hessien de u , noté Δu . Dans une carte locale, on a

$$\Delta u = g^{ij} (\partial_{ij}^2 u - \Gamma_{ij}^k \partial_k u).$$

Maintenant on rappelle quelques notions de la géométrie conforme très utilisées dans ce travail.

Définition 1.1.1 Soit (M, g) une variété riemannienne. La classe conforme $[g]$ de g est l'ensemble des métriques riemanniennes sur M qui s'écrivent sous la forme vg avec $0 < v \in C^\infty(M)$.

Pour rendre le calcul simple, il est préférable parfois de poser $v = u^{\frac{4}{n-2}}$, où $n \geq 3$ est la dimension de M , pour une métrique vg conforme à g . Nous avons alors la proposition suivante :

1.2 Préliminaires analytiques

Proposition 1.1.1 Soit $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$ une métrique conforme à g , avec $0 < u \in C^\infty(M)$. Alors la relation entre la courbure scalaire R_g de g et la courbure scalaire $R_{\tilde{g}}$ de $\tilde{g}$ est donnée par :

$$R_{\tilde{g}} = u^{-\frac{n+2}{n-2}} (-c_n \Delta_g u + R_g u) \quad (1.1)$$

avec $c_n = 4\frac{n-1}{n-2}$. Ici, Δ_g désigne le Laplacien par rapport à la métrique g .

Maintenant on introduit un opérateur très utile en géométrie conforme, à savoir, le Laplacien conforme :

$$L_g(\varphi) := -c_n \Delta_g \varphi + R_g \varphi, \quad \varphi \in C^\infty(M). \quad (1.2)$$

La proposition suivante nous donne une relation entre L_g et $L_{\tilde{g}}$ pour une métrique $\tilde{g}$ conforme à g . Elle exprime la covariance conforme de L_g :

Proposition 1.1.2 Soient (M, g) une variété riemannienne de dimension $n \geq 3$ et L_g l'opérateur Laplacien conforme. Si $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$, avec $0 < u \in C^\infty(M)$, est une métrique conforme à g , alors on a

$$L_{\tilde{g}}(\varphi) = u^{-\frac{n+2}{n-2}} L_g(u\varphi), \quad (1.3)$$

pour toute fonction $\varphi \in C^2(M)$.

1.2 Préliminaires analytiques

Dans cette section (M, g) désigne une variété riemannienne compacte. On rappellera les définitions de quelques espaces de fonctions et leurs propriétés, ainsi que quelques résultats classiques sur les EDP elliptiques et paraboliques du second ordre.

1.2.1 Espaces de Hölder.

Pour $\alpha \in (0, 1)$, on rappelle les espaces de Hölder $C^\alpha(M)$:

$u \in C^\alpha(M)$ si et seulement si

$$\sup_{x \neq y \in M} \frac{|u(x) - u(y)|}{d(x, y)^\alpha} < +\infty,$$

où $d(x, y)$ est la distance riemannienne entre x et y sur M .

$C^\alpha(M)$ est muni de la norme suivante :

$$\|u\|_{C^\alpha(M)} = \|u\|_{C^0(M)} + \sup_{x \neq y \in M} \frac{|u(x) - u(y)|}{d(x, y)^\alpha}.$$

Muni de cette norme, $C^\alpha(M)$ est un espace de Banach.

Pour $m \in \mathbb{N}$, on définit l'espace $C^{m+\alpha}(M)$ par :

$$C^{m+\alpha}(M) = \{u \in C^m(M) : \nabla^m u \in C^\alpha(M)\},$$

et on munit $C^{m+\alpha}(M)$ d'une norme définie par :

$$\|u\|_{C^{m+\alpha}(M)} = \|u\|_{C^m(M)} + \sup_{x \neq y \in M} \frac{|\nabla^m u(x) - \nabla^m u(y)|}{d(x, y)^\alpha}.$$

$C^{m+\alpha}(M)$ muni de cette norme est un espace de Banach.

On définit maintenant les espaces de Hölder paraboliques.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $D = M \times I$. On définit la distance parabolique entre les points $z_1 = (x_1, t_1) \in D$ et $z_2 = (x_2, t_2) \in D$ par :

$$\rho(z_1, z_2) = d(x_1, x_2) + |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}}.$$

Pour $\alpha \in (0, 1)$, on définit l'espace de Hölder parabolique $C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(D)$ par

$$C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(D) = \left\{ u \in C^0(D) : \sup_{z_1 \neq z_2 \in D} \frac{|u(z_1) - u(z_2)|}{\rho(z_1, z_2)^\alpha} < +\infty \right\}.$$

On munit $C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(D)$ de la norme

$$\|u\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(D)} = \|u\|_{C^0(D)} + \sup_{z_1 \neq z_2 \in D} \frac{|u(z_1) - u(z_2)|}{\rho(z_1, z_2)^\alpha}$$

qui en fait un espace de Banach.

Pour $m \in \mathbb{N}$, on définit l'espace $C^{2m+\alpha, m+\frac{\alpha}{2}}(D)$ par :

$$C^{2m+\alpha, m+\frac{\alpha}{2}}(D) = \{u \in C^{2m, m}(D) : \partial_t^j \nabla^k u \in C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(D), \forall j, k \text{ tels que } 0 < k + 2j \leq 2m\},$$

On munit cet espace de la norme :

$$\|u\|_{C^{2m+\alpha, m+\frac{\alpha}{2}}(D)} = \sum_{k+2j \leq 2m} \|\partial_t^j \nabla^k u\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(D)}$$

qui en fait un espace de Banach.

Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, on a la propriété suivante :

$$C^{2m+\alpha, m+\frac{\alpha}{2}}(M \times I) = C^{2m+\alpha, m+\frac{\alpha}{2}}(M \times \bar{I}), \quad (1.4)$$

où $\bar{I}$ est l'adhérence de I .

1.2 Préliminaires analytiques

1.2.2 Espaces de Sobolev.

Définition 1.2.1 Soient (M, g) une variété riemannienne de dimension n , $p \geq 1$ un nombre réel et k un entier naturel. L'espace de Sobolev $H_k^p(M)$ est le complété de $C^\infty(M)$ pour la norme

$$\|u\|_{k,p} = \sum_{l=0}^k \|\nabla^l u\|_p.$$

Lorsque $p = 2$, on notera

$$H^k(M) = H_k^2(M).$$

Si Ω est un ouvert de M , on notera par $H_0^k(\Omega)$ l'adhérence de l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ (fonctions C^∞ à support compact inclus dans Ω) dans $H^k(M)$.

Nous rappelons les deux résultats très importants suivants sur les espaces de Sobolev :

Théorème 1.2.1 (Théorème d'injection de Sobolev). Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n et soient k et l deux entiers avec $k \geq l \geq 0$.

1. Si $p, q \geq 1$ sont deux réels tels que $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q} + \frac{(k-l)}{n}$, alors $H_k^p(M)$ est inclus dans $H_l^q(M)$ et cette inclusion est continue. En particulier, $H_k^p(M) \subset L^q(M)$ si $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{p} + \frac{k}{n}$.
2. Si $r \in \mathbb{N}$ et $k - \frac{n}{q} \geq r$, alors on a $H_k^q(M) \subset C^r(M)$ et cette inclusion est continue.

Le deuxième résultat donne des conditions de compacité des inclusions dans le théorème précédent :

Théorème 1.2.2 (Théorème de Rellich-Kondrakov). Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n et soient k et l deux entiers avec $k > l \geq 0$.

1. Si $p, q \geq 1$ sont deux réels tels que $\frac{1}{p} < \frac{1}{q} + \frac{(k-l)}{n}$, alors l'inclusion $H_k^p(M) \subset H_l^q(M)$ est compacte.
2. Si $r \in \mathbb{N}$ et $k - \frac{n}{q} > r$, alors l'inclusion $H_k^q(M) \subset C^r(M)$ est compacte.

1.2.3 Equations elliptiques et paraboliques.

Un opérateur différentiel d'ordre 2 est une application $P : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ qui prend la forme suivante dans toute carte locale $U \subset M$, $x = (x_1, \dots, x_n)$,

$$Pu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij}^2 u + \sum_{k=1}^n b_k(x) \partial_k u + c(x)u, \quad (1.5)$$

où $a_{ij}, b_k, c \in C^\infty(U)$ sont les coefficients de P dans la carte $(U, x_1, \dots, x_n)$.

On dit que l'opérateur P est elliptique si dans toute carte locale, la matrice $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est définie positive, i.e, il existe une constante $\lambda > 0$ telle que pour tout $x \in U$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, on ait

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2.$$

On dit que P est uniformément elliptique si $\exists \lambda$ et $\Lambda > 0$ tels que pour toute carte locale $(U, x_1, \dots, x_n)$, on ait

$$\Lambda |\xi|^2 \geq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2. \quad (1.6)$$

En général une équation aux dérivées partielles du second degré sur M peut s'écrire sous la forme

$$\Phi(u) = 0, \quad (1.7)$$

où dans une carte locale $U \subset M$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, l'application Φ prend la forme

$$\Phi(u) = \varphi(x, u, Du, D^2u)$$

avec $Du = (\partial_1 u, \dots, \partial_n u) \in \mathbb{R}^n$, $D^2u = (\partial_{ij}^2 u)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n^2}$ et $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une application C^∞ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2}$.

On dit que Φ est elliptique, ou que l'équation (1.7) définie par Φ est elliptique, si pour tout $u_0 \in C^2(M)$, la linéarisée de Φ en u_0 , est un opérateur elliptique d'ordre 2. Plus précisément, dans chaque carte locale $U \subset M$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, on a pour tout $w \in C^\infty(U)$,

$$\left. \frac{d}{dt} \Phi(u_0 + tw) \right|_{t=0} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij}^2 w + \sum_{k=1}^n b_k(x) \partial_k w + c(x)w$$

où

$$L := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij}^2 + \sum_{k=1}^n b_k(x) \partial_k + c(x) \quad (1.8)$$

est un opérateur elliptique d'ordre 2.

On considère l'équation dite de la chaleur associée à l'équation (1.7)

$$\partial_t u = \Phi(u). \quad (1.9)$$

On dit que l'équation (1.9) est parabolique si l'application Φ est elliptique. Nous avons le théorème classique d'existence suivant :

1.2 Préliminaires analytiques

Théorème 1.2.3 (*Théorème d'existence locale*) Supposons que Φ définie comme ci-dessus soit elliptique. Alors pour tout $u_0 \in C^\infty(M)$, il existe $T^* > 0$ et une unique solution $u \in C^\infty(M \times [0, T^*))$ du problème

$$\begin{cases} \partial_t u = \Phi(u) \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Les deux théorèmes suivants donnent des estimations de régularité elliptique et parabolique qui seront très utiles pour établir des bornes sur les solutions des équations étudiées dans ce travail.

Théorème 1.2.4 (*Théorème de régularité elliptique*) Soient L un opérateur uniformément elliptique d'ordre 2 défini par (1.5), $\alpha \in (0, 1)$ et $f \in C^\alpha(M)$. Supposons que :

1. $u \in C^{2+\alpha}(M)$ soit une solution de l'équation $Lu = f$ sur M .
2. Les coefficients de L vérifient :

$$\|a_{ij}\|_{C^\alpha(M)} + \|b_k\|_{C^\alpha(M)} + \|c\|_{C^\alpha(M)} \leq \theta.$$

Alors il existe une constante C qui dépend de θ , λ et Λ , où λ et Λ sont comme dans (1.6) telle que

$$\|u\|_{C^{2+\alpha}(M)} \leq C (\|f\|_{C^\alpha(M)} + \|u\|_{C^0(M)}).$$

Maintenant nous donnons la version parabolique du théorème précédent. Dans ce qui suit l'opérateur L est défini comme dans (1.5), mais cette fois-ci ses coefficients peuvent dépendre également de $t \in [0, T]$.

Théorème 1.2.5 (*Théorème de régularité parabolique*) Soient L un opérateur uniformément elliptique d'ordre 2 défini par (1.5), $\alpha \in (0, 1)$ et $f \in C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(M \times [0, T])$. Supposons que :

1. $u \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(M \times [0, T])$ soit une solution de l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u - L(u) = f(x, t) \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (1.10)$$

2. Les coefficients de L vérifient :

$$\|a_{ij}\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(M \times [0, T])} + \|b_k\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(M \times [0, T])} + \|c\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(M \times [0, T])} \leq \theta.$$

3. $u_0 \in C^{2+\alpha}(M)$.

Alors il existe une constante C qui dépend de θ , λ et Λ , où λ et Λ sont comme dans (1.6), telle que

$$\begin{aligned} & \|u\|_{C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(M \times [0, T])} \\ & \leq C \left(\|u_0\|_{C^{2+\alpha}(M)} + \|u\|_{C^0(M \times [0, T])} + \|f\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(M \times [0, T])} \right). \end{aligned}$$

1.2.4 Principe du maximum et inégalité de Harnack.

Dans l'analyse des équations du type Yamabe, le principe du maximum est un outil très important. Nous en rappelons quelques versions utilisées dans ce travail :

Théorème 1.2.6 (*Principe du maximum de Hopf*) Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte et $u \in C^2(M)$ une fonction positive ou nulle. On suppose qu'en tout point x de M ,

$$(\Delta_g u)(x) \geq u(x)f(x, u(x)),$$

où $f : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue. Alors u est soit partout strictement positive, soit identiquement nulle.

Pour les équations paraboliques nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.2.7 (*Principe du maximum pour l'équation de la chaleur*) Soient M une variété compacte, T un réel strictement positif, $g(t)$ une famille de métriques riemanniennes sur M , de classe C^2 sur $M \times [0, T]$ et $u : M \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une famille de fonctions de classe C^2 . On suppose qu'en tout point de $M \times [0, T]$, on a

$$\partial_t u - \Delta_{g(t)} u \geq 0.$$

Alors pour tout $(x, t) \in M \times [0, T]$, on a $u(t, x) \geq \min_{x \in M} u_0(x, 0)$.

Nous utiliserons également quelques inégalités de type Harnack pour les équations elliptiques. On pourra trouver les preuves des théorèmes suivants dans Brendle [7] (Annexe A).

Théorème 1.2.8 (*Régularité intérieure*) Soient (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n et $q > \frac{n}{2}$. Alors, il existe deux constantes positives η_1 et C telles que : si $0 < u \in C^\infty(M)$ vérifiant

$$\int_{B_r(x)} u^{\frac{2n}{n-2}} dv_g \leq 1$$

et

$$\int_{B_r(x)} |R(u)|^q dv_g \leq \eta_1,$$

où $R(u) = u^{-\frac{n+2}{n-2}} (-\Delta_g u + R_g u)$, on a

$$u(x) \leq Cr^{-\frac{n-2}{2}} \left(\int_{B_r(x)} u^{\frac{2n}{n-2}} dv_g \right)^{\frac{n-2}{2n}}.$$

1.2 Préliminaires analytiques

Nous avons également l'inégalité de Harnack suivante :

Théorème 1.2.9 (*Inégalité de Harnack*) Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n et soient a, u dans $C^\infty(M)$ avec $u > 0$ telles que

$$-\Delta_g u + au \geq 0.$$

Alors, il existe une constante $C > 0$ qui dépend de a telle que

$$\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} dv_g \leq C \inf_M u \left(\sup_M u \right)^{\frac{n+2}{n-2}}.$$

Chapitre 2

Flot de Yamabe avec courbure scalaire prescrite : le cas négatif

Soient (M, g_0) une variété riemannienne compacte sans bord de dimension $n \geq 3$, de courbure scalaire $R_0 < 0$ et $F \in C^\infty(M)$. Dans ce chapitre, on va étudier le flot suivant :

$$\begin{cases} \partial_t g(t) = -(R_{g(t)} - F)g(t) \\ g(0) = g^0, \end{cases} \quad (2.1)$$

où la solution $g(t)$ est une métrique riemannienne sur M , $g^0 = u_0^{\frac{4}{n-2}} g_0$, avec $0 < u_0 \in C^\infty(M)$, est la donnée initiale, et $R_{g(t)}$ est la courbure scalaire de $g(t)$.

Comme nous l'avons déjà expliqué dans l'introduction générale, il s'agit du flot de gradient associé à la fonctionnelle dite « énergie » suivante :

$$\mathcal{E}(g) = \int_M R_g dv_g - \frac{n-2}{n} \int_M F dv_g, \quad (2.2)$$

où dv_g est l'élément de volume de g .

Il est facile de voir que ce flot préserve la structure conforme de (M, g_0) . En écrivant $g(t)$ sous la forme $g(t) = u(., t)^{\frac{4}{n-2}} g_0$, avec $0 < u(., t) \in C^\infty(M)$, on peut réécrire l'équation (2.1) en fonction du facteur conforme u sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u^N = \frac{n+2}{4} (c_n \Delta_0 u - R_0 u + F u^N) \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (2.3)$$

où $N = \frac{n+2}{n-2}$, $c_n = 4 \frac{n-1}{n-2}$ et Δ_0 est l'opérateur de Laplace associé à la métrique g_0 . Le facteur conforme sera noté parfois $u(t)$ au lieu de $u(., t)$ pour alléger la notation.

De même, en fonction du facteur conforme u , la fonctionnelle $\mathcal{E}$ prend la forme suivante

$$E(u) := \int_M \left(c_n |\nabla u|^2 + R_0 u^2 - \frac{n-2}{n} F u^{N+1} \right) dv_{g_0}.$$

Les points critiques de cette fonctionnelle sont les solutions de l'équation de courbure scalaire prescrite :

$$-c_n \Delta_0 u + R_0 u = F u^N. \quad (2.4)$$

Comme nous l'avons déjà évoqué dans l'introduction générale, cette équation exprime le fait que la courbure scalaire R_g de la métrique $g = u^{\frac{4}{n-2}} g_0$ est égale à F .

A l'instar du flot de Yamabe, la convergence du flot (2.1) donnerait directement une solution au problème de la courbure scalaire prescrite. De plus, ce flot est une déformation géométrique de la métrique initiale vers une métrique de courbure scalaire prescrite (2.4). Cela donnerait ainsi une démarche naturelle à la théorie de Morse pour la fonctionnelle $\mathcal{E}$ définie ci-dessus. Notons ici qu'il s'agit du premier travail étudiant un flot géométrique associé au problème de la courbure scalaire prescrite sur une variété M de dimension $n \geq 3$ différente de la sphère euclidienne $\mathbb{S}^n$. En effet, à notre connaissance, le seul travail traitant un flot avec courbure scalaire prescrite est celui Chen-Xu [10] concernant le cas $M = \mathbb{S}^n$. Pour les surfaces, on peut citer le travail de Struwe [27] lié au problème de Nirenberg sur $\mathbb{S}^2$, ainsi que celui de Baird-Fardoun-Regbaoui [5] sur les surfaces quelconques.

Ce chapitre est organisé comme suit : tout d'abord on démontre l'existence locale d'une solution du flot (2.1) et la décroissance de la fonctionnelle énergie le long de ce flot. Dans la section 2, on établira des estimations sur la solution $u(t)$ de l'équation (2.3) qui seront utiles pour démontrer l'existence globale du flot sur $[0, +\infty)$. Dans la section 3, on étudiera le comportement asymptotique du flot, et on introduira des conditions sur la fonction F pour assurer la convergence de ce dernier.

2.1 Existence locale et décroissance de l'énergie

Proposition 2.1.1 *Pour toute donnée initiale $g^0 = u_0^{\frac{4}{n-2}} g_0$ avec $0 < u_0 \in C^\infty(M)$, il existe $T^* > 0$ et une unique solution $g(t) = u(t)^{\frac{4}{n-2}} g_0$ du flot (2.1) définie sur $[0, T^*)$, avec $0 < u(t) \in C^\infty(M \times [0, T^*))$.*

Démonstration. On a déjà vu que le flot (2.1) est équivalent à (2.3). Ainsi, pour démontrer l'existence d'une solution $g(t)$ de (2.1), il suffit de montrer l'existence d'une solution $u(t)$ de (2.3) définie sur $[0, T^*)$. Or l'équation (2.3) est une équation parabolique. En effet, si l'on pose

$$\Phi(u) = \frac{n-2}{4} u^{-\frac{4}{n-2}} (c_n \Delta_0 u - R_0 u + F u^N),$$

2.1 Existence locale et décroissance de l'énergie

alors la linéarisée de Φ en u_0 est

$$L(w) := \frac{d}{dt} \Phi(u_0 + tw) \Big|_{t=0} = \frac{n-2}{4} u_0^{-\frac{4}{n-2}} (c_n \Delta_0 w - R_0 w + N F u_0^{N-1} w) \\ - u_0^{-\frac{n+2}{n-2}} (c_n \Delta_0 u_0 - R_0 u_0 + F u_0^N) w.$$

On voit bien que L est un opérateur elliptique, et par suite l'équation (2.3) est parabolique. En utilisant le théorème 1.2.3 du chapitre 1, on conclut qu'il existe $T^* > 0$ maximal et une unique solution $u(t)$ de (2.3) définie sur $[0, T^*)$. Ainsi il existe une unique solution $g(t) = u(t)^{\frac{4}{n-2}} g_0$ de (2.1) définie sur $[0, T^*)$. □

La fonctionnelle énergie $\mathcal{E}$ vérifie la propriété suivante :

Proposition 2.1.2 *La fonctionnelle énergie $\mathcal{E}$ est décroissante le long du flot. Plus précisément, on a*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(g(t)) = -\frac{n-2}{2} \int_M |R_{g(t)} - F|^2 dv_{g(t)} \leq 0, \quad \forall t \in [0, T^*). \quad (2.5)$$

Démonstration. Dérivons $\mathcal{E}(g(t))$ par rapport à t , on obtient,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(g(t)) &= \frac{d}{dt} \left(\int_M R_{g(t)} dv_{g(t)} - \frac{n-2}{n} \int_M F dv_{g(t)} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \int_M (c_n |\nabla u|_0^2 + R_0 u^2) dv_{g_0} - \frac{n-2}{n} \frac{d}{dt} \int_M F u^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \\ &= 2 \int_M (c_n \nabla u \nabla \partial_t u + R_0 u \partial_t u) dv_{g_0} - 2 \int_M F u^N \partial_t u dv_{g_0}. \end{aligned}$$

Comme par (2.3) on a

$$\partial_t u = -\frac{n-2}{4} (R_{g(t)} - F) u,$$

alors

$$\begin{aligned} \int_M (c_n \nabla u \nabla \partial_t u + R_0 u \partial_t u) dv_{g_0} &= - \int_M (c_n \Delta_0 u - R_0 u) \partial_t u dv_{g_0} \\ &= -\frac{n-2}{4} \int_M R_{g(t)} (R_{g(t)} - F) dv_{g(t)}, \end{aligned}$$

et

$$\int_M F u^N \partial_t u dv_{g_0} = -\frac{n-2}{4} \int_M F (R_{g(t)} - F) dv_{g(t)}.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(g(t)) &= -\frac{n-2}{2} \int_M R_{g(t)}(R_{g(t)} - F) dv_{g(t)} + \frac{n-2}{2} \int_M F(R_{g(t)} - F) dv_{g(t)} \\ &= -\frac{n-2}{2} \int_M |R_{g(t)} - F|^2 dv_{g(t)} \leq 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

d'où $\mathcal{E}(g(t))$ est décroissante. □

2.2 Existence globale

Dans cette section on va démontrer l'existence globale du flot (2.1). Plus précisément, on a le théorème suivant :

Théorème 2.2.1 *Pour toute donnée initiale $g^0 = u_0^{\frac{4}{n-2}} g_0$ avec $0 < u_0 \in C^\infty(M)$, il existe une unique solution $g(t) = u(t)^{\frac{4}{n-2}} g_0$ du flot (2.1) définie sur $[0, +\infty)$, avec $0 < u(t) \in C^\infty(M \times [0, +\infty))$.*

Démontrer l'existence d'une solution $g(t)$ de (2.1) définie sur $[0, +\infty)$, est équivalent à démontrer l'existence d'une solution $u(t)$ de (2.3) définie sur $[0, +\infty)$. Pour cela on a besoin de deux propositions :

- Dans la première on va trouver une borne supérieure et une borne inférieure sur u uniformément sur $[0, T^*)$.
- Dans la deuxième, on démontre des estimations *a priori* sur u dans l'espace de Hölder $C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(M \times [0, T^*))$.

Proposition 2.2.1 *Soit $g(t) = u(t)^{\frac{4}{n-2}} g_0$ la solution de (2.1) définie sur $[0, T^*)$. Alors on a, pour tout $(x, t) \in M \times [0, T^*)$,*

$$u(x, t) \geq \min(C_0, \min_M u_0), \quad (2.7)$$

$$\text{avec } C_0 = \left(\frac{\min_M |R_0|}{\max_M |F|} \right)^{\frac{n-2}{4}}.$$

Si de plus $T^ < +\infty$, alors on a, pour tout $(x, t) \in M \times [0, T^*)$,*

$$u(x, t) \leq \max(1, \max_M u_0) e^{C_1 T^*}, \quad (2.8)$$

$$\text{avec } C_1 = \frac{n-2}{4} \left(\max_M |R_0| + \max_M |F| \right).$$

2.2 Existence globale

Démonstration. Soit $T \in [0, T^*)$ fixé et soit $(t_0, x_0) \in M \times [0, T]$ tel que $u(x_0, t_0) = \min_{M \times [0, T]} u$. Si $t_0 = 0$, alors on a pour tout $(x, t) \in M \times [0, T]$

$$u(x, t) \geq \min_M u_0. \quad (2.9)$$

Maintenant on suppose que $t_0 > 0$. Dans ce cas, on a

$$\partial_t u(x_0, t_0) \leq 0 \text{ et } \Delta u(x_0, t_0) \geq 0. \quad (2.10)$$

Comme u vérifie l'équation

$$\partial_t u^N = \frac{n+2}{4} (c_n \Delta_0 u - R_0 u + F u^N),$$

alors

$$\partial_t u^N \geq \frac{n+2}{4} (c_n \Delta_0 u + C_1 u - C_2 u^N) \quad (2.11)$$

avec $C_1 = \min_M |R_0|$ et $C_2 = \max_M |F|$.

En substituant (2.10) dans (2.11), on obtient

$$\begin{aligned} 0 &\geq \partial_t u^N(x_0, t_0) \\ &\geq \frac{n+2}{4} u(x_0, t_0) (C_1 - C_2 u^{N-1}(x_0, t_0)). \end{aligned}$$

Comme $u(x_0, t_0) > 0$, alors

$$C_1 - C_2 u^{N-1}(t_0, x_0) \leq 0.$$

Donc

$$u(x_0, t_0) \geq \left(\frac{C_1}{C_2} \right)^{\frac{1}{N-1}}. \quad (2.12)$$

Il découle de (2.9) et (2.12) que

$$u(x, t) \geq \min \left\{ \min_M u_0, \left(\frac{\min_M |R_0|}{\max_M |F|} \right)^{\frac{n-2}{4}} \right\}$$

pour tout $(x, t) \in M \times [0, T]$. Ce qui achève la preuve de la première inégalité (2.7).

Maintenant pour démontrer l'inégalité (2.8), on considère la fonction $v = e^{-C_1 t} u$ où $C_1 = \frac{n-2}{4} \left(\max_M |R_0| + \max_M |F| \right)$. On fixe $T \in [0, T^*)$ et on choisit $(x_0, t_0) \in [0, T]$ tel que $v(x_0, t_0) = \max_{[0, T] \times M} v$.

Si $t_0 = 0$, alors on a $v(x, t) \leq \max_M v_0$ pour tout $(x, t) \in M \times [0, T]$. Par suite

$$u(x, t) \leq \max_M u_0 e^{C_1 t} \quad (2.13)$$

CHAPITRE 2 : *Flot de Yamabe avec courbure scalaire prescrite : le cas négatif*
pour tout $(x, t) \in M \times [0, T]$.

Maintenant on suppose que $t_0 > 0$. Alors on a $\partial_t v(x_0, t_0) \geq 0$ et $\Delta_0 v(x_0, t_0) \leq 0$. Or

$$\partial_t v(x_0, t_0) = -C_1 v(x_0, t_0) + e^{-C_1 t} \partial_t u(x_0, t_0) \text{ et } \Delta_0 v(x_0, t_0) = e^{-C_1 t} \Delta_0 u(x_0, t_0).$$

Donc

$$\partial_t u(x_0, t_0) \geq C_1 u(t_0, x_0) \text{ et } \Delta_0 u(x_0, t_0) \leq 0, \quad (2.14)$$

et comme u vérifie

$$\partial_t u^N = \frac{n+2}{4} (c_n \Delta_0 u - R_0 u + F u^N), \quad (2.15)$$

alors en substituant (2.14) dans (2.15) on obtient

$$NC_1 u^N(x_0, t_0) \leq \frac{n+2}{4} \left(\max_M |R_0| u(x_0, t_0) + \max_M |F| u^N(x_0, t_0) \right).$$

Comme

$$NC_1 = \frac{n+2}{4} \left(\max_M |R_0| + \max_M |F| \right),$$

on en déduit que

$$u(t_0, x_0) \leq 1. \quad (2.16)$$

Grâce à (2.13) et (2.16), on déduit que

$$u(t) \leq \max(1, \max_M u_0) e^{C_1 T^*}.$$

Ce qui achève la preuve de la proposition. □

Pour démontrer que u est bornée dans $C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(M \times [0, T^*])$, on a besoin d'établir quelques estimations intégrales sur la courbure scalaire $R_{g(t)}$. Pour cela on va tout d'abord démontrer les deux lemmes suivants.

Lemme 2.2.1 *La courbure scalaire de la métrique $g(t)$ vérifie l'équation d'évolution suivante :*

$$\partial_t R_{g(t)} = R_{g(t)} (R_{g(t)} - F) + (n-1) \Delta_{g(t)} (R_{g(t)} - F). \quad (2.17)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \partial_t R_{g(t)} &= -\partial_t (u^{-N} (c_n \Delta_0 u - R_0 u)) \\ &= N u^{-1} \partial_t u u^{-N} (c_n \Delta_0 u - R_0 u) - u^{-N} (c_n \Delta_0 \partial_t u - R_0 \partial_t u) \\ &= -N R_{g(t)} \partial_t u u^{-1} - u^{-N} (c_n \Delta_0 \partial_t u - R_0 \partial_t u). \end{aligned} \quad (2.18)$$

D'après (2.3) on a

$$\partial_t u^N = \frac{n+2}{4} (c_n \Delta_0 u - R_0 u + F u^N),$$

2.2 Existence globale

d'où

$$\frac{\partial_t u}{u} = -\frac{n-2}{4} (R_{g(t)} - F). \quad (2.19)$$

D'autre part, en prenant $v = \frac{\partial_t u}{u}$ dans la proposition 1.1.2, on obtient

$$-u^{-N}(c_n \Delta_0 \partial_t u - R_0 \partial_t u) = -c_n \Delta_{g(t)} \left(\frac{\partial_t u}{u} \right) + R_{g(t)} \frac{\partial_t u}{u}. \quad (2.20)$$

En substituant (2.19) et (2.20) dans (2.18), on conclut que

$$\partial_t R_{g(t)} = R_{g(t)} (R_{g(t)} - F) + (n-1) \Delta_{g(t)} (R_{g(t)} - F).$$

□

Lemme 2.2.2 *Pour $p \geq 2$, on a*

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_M |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)} \\ &= -4 \frac{(n-1)(p-1)}{p} \int_M \left| \nabla_g |R_{g(t)} - F|^{\frac{p}{2}} \right|_g^2 dv_{g(t)} + p \int_M F |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)} \\ &+ \left(p - \frac{n}{2} \right) \int_M (R_{g(t)} - F) |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

où ∇_g et $|\cdot|_g$ désignent respectivement le gradient et la norme par rapport à la métrique g .

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_M |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)} \\ &= \int_M \frac{d}{dt} (|R_{g(t)} - F|^p) dv_{g(t)} + \int_M |R_{g(t)} - F|^p \text{tr}_g(\partial_t g) dv_{g(t)} \\ &= p \int_M |R_{g(t)} - F|^{p-2} (R_{g(t)} - F) \frac{d}{dt} (R_{g(t)} - F) dv_{g(t)} - \frac{n}{2} \int_M |R_{g(t)} - F|^p (R_{g(t)} - F) dv_{g(t)}. \end{aligned}$$

En utilisant l'équation d'évolution de la courbure scalaire (2.17), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_M |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)} \\ &= \left(p - \frac{n}{2} \right) \int_M (R_{g(t)} - F) |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)} + p \int_M F |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)} \\ &+ p(n-1) \int_M |R_{g(t)} - F|^{p-2} (R_{g(t)} - F) \Delta_{g(t)} (R_{g(t)} - F) dv_{g(t)}. \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\int_M |R_{g(t)} - F|^{p-2} (R_{g(t)} - F) \Delta_{g(t)} (R_{g(t)} - F) dv_{g(t)} = -4 \frac{p-1}{p^2} \int_M \left| \nabla_g |R_{g(t)} - F|^{\frac{p}{2}} \right|_g^2 dv_{g(t)},$$

alors on a,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_M |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)} \\ &= \left(p - \frac{n}{2} \right) \int_M (R_{g(t)} - F) |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)} + p \int_M F |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)} \\ & \quad - 4 \frac{(n-1)(p-1)}{p} \int_M \left| \nabla_g |R_{g(t)} - F|^{\frac{p}{2}} \right|_g^2 dv_{g(t)}. \end{aligned}$$

□

Proposition 2.2.2 Soit $p = \frac{n^2}{2(n-2)}$. Alors il existe une constante positive C qui dépend de F, g_0 et u_0 telle que si $T^* < +\infty$, on a

$$\int_M |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)} \leq C e^{CT^*} \quad (2.22)$$

pour tout $t \in [0, T^*)$.

Démonstration. Dans ce qui suit, C désigne une constante positive qui dépend de g_0, u_0 , et F et dont la valeur pourrait changer d'une ligne à une autre. D'après le lemme précédent, on a

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_M |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)} \\ &= -4 \frac{(n-1)(p-1)}{p} \int_M \left| \nabla_{g(t)} |R_{g(t)} - F|^{\frac{p}{2}} \right|_{g(t)}^2 dv_{g(t)} + \left(p - \frac{n}{2} \right) \int_M (R_{g(t)} - F) |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)} \\ & \quad + p \int_M F |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)}. \end{aligned}$$

Comme $F \leq \max_M F$, alors

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_M |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)} \\ & \leq -4 \frac{(n-1)(p-1)}{p} \int_M \left| \nabla_{g(t)} |R_{g(t)} - F|^{\frac{p}{2}} \right|_{g(t)}^2 dv_{g(t)} + \left| p - \frac{n}{2} \right| \int_M |R_{g(t)} - F|^{p+1} dv_{g(t)} \\ & \quad + C \int_M |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)}. \end{aligned}$$

2.2 Existence globale

D'après la proposition 2.2.1, on a $u \geq C$. D'où

$$\begin{aligned} \int_M \left| \nabla_{g(t)} |R_{g(t)} - F|^{\frac{p}{2}} \right|_{g(t)}^2 dv_{g(t)} &= \int_M \left| \nabla |R_{g(t)} - F|^{\frac{p}{2}} \right|^2 u^2 dv_{g_0} \\ &\geq C \int_M \left| \nabla |R_{g(t)} - F|^{\frac{p}{2}} \right|^2 dv_{g_0}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

D'après l'inégalité de Sobolev, pour tout $\varphi \in H^1(M)$, on a

$$\left(\int_M |\varphi|^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C \left(\int_M |\nabla \varphi|^2 dv_{g_0} + \int_M |\varphi|^2 dv_{g_0} \right).$$

En prenant $\varphi = |R_{g(t)} - F|^{\frac{p}{2}}$ on obtient

$$\left(\int_M |R_{g(t)} - F|^{\frac{pn}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C \left(\int_M \left| \nabla |R_{g(t)} - F|^{\frac{p}{2}} \right|^2 dv_{g_0} + \int_M |R_{g(t)} - F|^p dv_{g_0} \right),$$

d'où en utilisant (2.23), on obtient

$$\int_M \left| \nabla_{g(t)} |R_{g(t)} - F|^{\frac{p}{2}} \right|_{g(t)}^2 dv_{g(t)} \geq C \left(\int_M |R_{g(t)} - F|^{\frac{pn}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n}} - C \int_M |R_{g(t)} - F|^p dv_{g_0}. \quad (2.24)$$

D'autre part, comme $u \geq C$, on a

$$\begin{aligned} \int_M |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)} &= \int_M |R_{g(t)} - F|^p u^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \\ &\geq C \int_M |R_{g(t)} - F|^p dv_{g_0}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Et comme d'après la proposition 2.2.1, on a $u \leq Ce^{CT^*}$, alors

$$\begin{aligned} \left(\int_M |R_{g(t)} - F|^{\frac{pn}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n}} &= \left(\int_M |R_{g(t)} - F|^{\frac{pn}{n-2}} u^{-\frac{2n}{n-2}} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n-2}{n}} \\ &\geq C^{-1} e^{-CT^*} \left(\int_M |R_{g(t)} - F|^{\frac{pn}{n-2}} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n-2}{n}}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

En substituant (2.25) et (2.26) dans (2.24), on obtient

$$\begin{aligned} \int_M \left| \nabla_{g(t)} |R_{g(t)} - F|^{\frac{p}{2}} \right|_{g(t)}^2 dv_{g(t)} &\geq C^{-1} e^{-CT^*} \left(\int_M |R_{g(t)} - F|^{\frac{pn}{n-2}} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n-2}{n}} \\ &\quad - C \int_M |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Finalement, on trouve que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_M |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)} \\ & \leq \left| p - \frac{n}{2} \right| \int_M |R_{g(t)} - F|^{p+1} dv_{g(t)} + C \int_M |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)} \\ & \quad - C^{-1} e^{-CT^*} \left(\int_M |R_{g(t)} - F|^{\frac{pn}{n-2}} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n-2}{n}}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Maintenant, si on prend $p = \frac{n}{2}$ dans (2.28), on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_M |R_{g(t)} - F|^{\frac{n}{2}} dv_{g(t)} \leq C \int_M |R_{g(t)} - F|^{\frac{n}{2}} dv_{g(t)}. \quad (2.29)$$

On déduit que

$$\int_M |R_{g(t)} - F|^{\frac{n}{2}} dv_{g(t)} \leq C e^{CT^*}. \quad (2.30)$$

En intégrant (2.28) entre 0 et T^* (pour $p = \frac{n}{2}$), et en utilisant (2.30), on obtient

$$\int_0^{T^*} \left(\int_M |R_{g(t)} - F|^{\frac{n^2}{2(n-2)}} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n-2}{n}} dt \leq C e^{CT^*}. \quad (2.31)$$

D'autre part, par l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Young, on a pour tout $\varepsilon > 0$ et $p > \frac{n}{2}$,

$$\int_M |R_{g(t)} - F|^{p+1} dv_{g(t)} \leq \varepsilon \left(\int_M |R_{g(t)} - F|^{\frac{pn}{n-2}} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n-2}{n}} + \varepsilon^{-\frac{n}{2p-n}} \left(\int_M |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)} \right)^{\frac{2p-n+2}{2p-n}}. \quad (2.32)$$

En prenant $\varepsilon = \left| p - \frac{n}{2} \right|^{-1} C^{-1} e^{-CT^*}$ et en substituant (2.32) dans (2.28), on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_M |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)} \leq C e^{CT^*} \left(\int_M |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)} \right)^{\frac{2p-n+2}{2p-n}} + C \int_M |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)},$$

et en divisant par $\int_M |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)}$, on aura

$$\frac{d}{dt} \log \left(\int_M |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)} \right) \leq C \left(e^{CT^*} \left(\int_M |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)} \right)^{\frac{2}{2p-n}} + 1 \right).$$

En particulier, pour $p = \frac{n^2}{2(n-2)}$, en intégrant entre 0 et t , on obtient :

$$\begin{aligned} \log \left(\int_M |R_{g(t)} - F|^{\frac{n^2}{2(n-2)}} dv_{g(t)} \right) & \leq \log \left(\int_M |R_{g(0)} - F|^{\frac{n^2}{2(n-2)}} dv_{g(0)} \right) \\ & \quad + C e^{CT^*} \int_0^t \left(\int_M |R_{g(s)} - F|^{\frac{n^2}{2(n-2)}} dv_{g(s)} \right)^{\frac{n-2}{n}} ds + Ct. \end{aligned}$$

2.2 Existence globale

Mais d'après (2.31) on a

$$\int_0^t \left(\int_M |R_{g(s)} - F|^{\frac{n^2}{2(n-2)}} dv_{g(s)} \right)^{\frac{n-2}{n}} ds \leq Ce^{CT^*}.$$

D'où

$$\log \left(\int_M |R_{g(t)} - F|^{\frac{n^2}{2(n-2)}} dv_{g(t)} \right) \leq Ce^{CT^*}.$$

La proposition est ainsi démontrée. $\square$

Maintenant on va démontrer que u est bornée dans $C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(M \times [0, T^*))$.

Proposition 2.2.3 *Soit $g(t) = u(t)^{\frac{4}{n-2}} g_0$ la solution de l'équation (2.1) définie sur un intervalle maximal $[0, T^*)$. Alors il existe $\alpha \in (0, 1)$, et une constante positive C qui dépend de u_0 , g_0 et F telle que si $T^* < +\infty$, on a*

$$|u(x_1, t_1) - u(x_2, t_2)| \leq Ce^{CT^*} ((t_1 - t_2)^{\frac{\alpha}{2}} + d(x_1, x_2)^\alpha) \quad (2.33)$$

pour tous $x_1, x_2 \in M$ et $t_1, t_2 \in [0, T^*)$.

Démonstration. Posons $\alpha = 2 - \frac{n}{p}$ où $p = \frac{n^2}{2(n-2)}$. En utilisant la proposition 2.2.1 et la proposition 2.2.2, on obtient

$$\int_M |c_n \Delta_0 u - R_0 u|^p dv_{g_0} \leq Ce^{CT^*} \quad (2.34)$$

et

$$\int_M |\partial_t u(t)|^p dv_{g(t)} \leq Ce^{CT^*}. \quad (2.35)$$

En effet, on a

$$\int_M |c_n \Delta_0 u - R_0 u|^p dv_{g_0} = \int_M \left| R_{g(t)} u^{\frac{n+2}{n-2}} \right|^p dv_{g_0},$$

et comme $u \leq Ce^{CT^*}$ et $\int_M |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)} \leq Ce^{CT^*}$, alors

$$\begin{aligned} \int_M |c_n \Delta_0 u - R_0 u|^p dv_{g_0} &\leq Ce^{CT^*} \int_M |R_{g(t)}|^p dv_{g(t)} \\ &\leq Ce^{CT^*} \int_M |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)} + Ce^{CT^*} \int_M |F|^p dv_{g(t)} \\ &\leq Ce^{CT^*}. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \int_M |\partial_t u(t)|^p dv_{g(t)} &= \int_M \left| \frac{n-2}{4} (R - F) u \right|^p dv_{g(t)} \\ &\leq \left(\frac{n-2}{4} \right)^p \int_M |R_{g(t)} - F|^p u^p dv_{g(t)} \\ &\leq C e^{CT^*}. \end{aligned}$$

De l'inégalité (2.34) on déduit que $\Delta_0 u$ est bornée dans $L^p(M)$. Il en découle par la régularité elliptique du Laplacien que u est bornée dans $H_2^p(M)$. D'autre part, d'après le théorème d'injection de Sobolev, on a $H_2^p(M) \subset C^\alpha(M)$ avec $\alpha = 2 - \frac{n}{p}$. Par suite on conclut que u est bornée dans $C^\alpha(M)$, i.e,

$$|u(x_1, t) - u(x_2, t)| \leq C e^{CT^*} d(x_1, x_2)^\alpha \quad (2.36)$$

pour tout $x_1, x_2 \in M$ et $t \in [0, T^*)$.

Maintenant on a pour tout $x \in M$ et $0 < t_1 < t_2 < T^*$

$$|u(x, t_1) - u(x, t_2)| = \frac{1}{\text{Vol}(B)} \int_{B(x, \sqrt{t_2 - t_1})} |u(x, t_1) - u(x, t_2)| dv_{g_0}$$

où $\text{Vol}(B)$ est le volume de la boule $B = B(x, \sqrt{t_2 - t_1})$ par rapport à g_0 . Donc

$$\begin{aligned} |u(x, t_1) - u(x, t_2)| &\leq C(t_2 - t_1)^{-\frac{n}{2}} \int_{B(x, \sqrt{t_2 - t_1})} |u(x, t_1) - u(x, t_2)| dv_{g_0} \\ &= C(t_2 - t_1)^{-\frac{n}{2}} \int_{B(x, \sqrt{t_2 - t_1})} |u(x, t_1) - u(x, t_2) - u(y, t_1) + u(y, t_1) - u(y, t_2) \\ &\quad + u(y, t_2)| dv_{g_0}(y) \\ &\leq C(t_2 - t_1)^{-\frac{n}{2}} C e^{CT^*} d(x, y)^\alpha (t_1 - t_2)^{\frac{n}{2}} \\ &\quad + C(t_1 - t_2)^{-\frac{n}{2}} C e^{CT^*} d(x, y)^\alpha (t_2 - t_1)^{\frac{n}{2}} \\ &\quad + C(t_2 - t_1)^{-\frac{n}{2}} \int_{B(x, \sqrt{t_2 - t_1})} |u(y, t_1) - u(y, t_2)| dv_{g_0}(y). \end{aligned}$$

On a $y \in B(x, \sqrt{t_2 - t_1})$, donc $d(x, y) \leq (t_2 - t_1)^{\frac{1}{2}}$, et par suite

$$\begin{aligned} |u(x, t_1) - u(x, t_2)| &\leq C(t_2 - t_1)^{-\frac{n}{2}} \int_{B(x, \sqrt{t_2 - t_1})} |u(y, t_1) - u(y, t_2)| dv_{g_0}(y) + C e^{CT^*} (t_2 - t_1)^{\frac{\alpha}{2}} \\ &\leq C(t_2 - t_1)^{-\frac{n-2}{2}} \sup_{t_2 \leq t \leq t_1} \int_{B(x, \sqrt{t_2 - t_1})} |\partial_t u(t)| dv_{g_0}(y) + C e^{CT^*} (t_2 - t_1)^{\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

2.3 Convergence du flot

Or en utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité (2.35), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{B(x, \sqrt{t_2-t_1})} |\partial_t u(t)| dv_{g_0} &\leq \left(\int_{B(x, \sqrt{t_2-t_1})} |\partial_t u(t)|^p dv_{g_0} \right)^{\frac{1}{p}} (t_2 - t_1)^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})} \\ &\leq C e^{CT^*} (t_2 - t_1)^{\frac{np-n}{2p}}. \end{aligned}$$

Donc on a pour tous $x \in M$ et $0 < t_1 < t_2 < T^*$,

$$|u(x, t_1) - u(x, t_2)| \leq C e^{CT^*} (t_2 - t_1)^{\frac{\alpha}{2}}. \quad (2.37)$$

En utilisant (2.36) et (2.37), on déduit que

$$\begin{aligned} |u(x_1, t_1) - u(x_2, t_2)| &\leq |u(x_1, t_1) - u(x_1, t_2)| + |u(x_1, t_2) - u(x_2, t_2)| \\ &\leq C e^{CT^*} (|t_2 - t_1|^{\frac{\alpha}{2}} + d(x_1, x_2)^\alpha). \end{aligned}$$

pour tous $x_1, x_2 \in M$ et $0 < t_1 < t_2 < T^*$ □

Maintenant on est en mesure de démontrer le théorème 2.2.1.

Démonstration du Théorème 2.2.1. Soit $g(t) = u(t)^{\frac{4}{n-2}} g_0$ la solution de (2.1) définie sur un intervalle maximal $[0, T^*)$. Supposons par l'absurde que $T^* < +\infty$. On a alors d'après la proposition précédente

$$\|u\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(M \times [0, T^*))} \leq C_{T^*},$$

pour $\alpha \in (0, 1)$. La théorie classique des équations paraboliques implique que u est bornée dans $C^{2k+\alpha, k+\frac{\alpha}{2}}(M \times [0, T^*))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, i.e.,

$$\|u\|_{C^{2k+\alpha, k+\frac{\alpha}{2}}(M \times [0, T^*))} \leq C_{k, T^*}$$

pour une constante C_{k, T^*} . Ce qui implique que u se prolonge en une fonction $u_{T^*} \in C^\infty(M)$ pour $t = T^*$. De plus, d'après la proposition 2.2.1, on a $u_{T^*} \geq C > 0$. En utilisant la proposition d'existence locale (proposition 2.1.1) avec la donnée initiale u_{T^*} , on pourra prolonger u au delà de T^* , ce qui contredit la maximalité de T^* (plus grand temps d'existence). On a donc $T^* = +\infty$ et le théorème d'existence globale est ainsi démontré. □

2.3 Convergence du flot

Dans cette section on va étudier la comportement asymptotique du flot $g(t)$ à l'infini. Rappelons que dans le théorème d'existence globale du flot (Théorème 2.2.1) aucune condition sur la fonction prescrite $F \in C^\infty(M)$ n'est demandée. En revanche, pour démontrer la

convergence du flot on aura besoin de supposer des conditions supplémentaires sur F . En effet, si $F \geq 0$, en appliquant le principe du maximum à l'équation (2.3), il n'est pas difficile de vérifier que

$$u(x, t) \geq \left(\min_M |R_0| \min_M u_0 \right) t^{\frac{n-2}{4}}.$$

Donc $u(x, t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$. C'est pour cela que si l'on veut obtenir la convergence du flot, on doit supposer au moins que F est strictement négative quelque part sur M . Cette condition est par ailleurs nécessaire à l'existence d'une solution $u > 0$ de l'équation de courbure scalaire prescrite (2.4) comme on peut le vérifier en multipliant (2.4) par u^{-N} et en intégrant sur M .

Dans cette section on va donner des conditions suffisantes sur la fonction F pour garantir la convergence du flot. On va fixer quelques notations :

Si $\Omega \subset M$ est un ouvert, on note par λ_Ω la première valeur propre du Laplacien conforme $L := -c_n \Delta_0 + R_0$ sur Ω avec condition de Dirichlet, i.e

$$\lambda_\Omega = \inf_{0 \neq u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_M (c_n |\nabla u|_0^2 + R_0 u^2) dv_{g_0}}{\int_M |u|^2 dv_{g_0}}.$$

Maintenant on va supposer les conditions suivantes sur F :

Il existe un ouvert $\Omega \subset M$, tel que

$$\lambda_\Omega > 0 \text{ et } F < 0 \text{ sur } M \setminus \Omega \quad (H1)$$

et

$$\sup_\Omega F \leq C_\Omega \inf_{M \setminus \Omega} |F|, \quad (H2)$$

où C_Ω est une constante qui ne dépend que de Ω .

Grâce aux hypothèses (H1) et (H2), on a le théorème de convergence suivant :

Théorème 2.3.1 *Supposons que $R_0 < 0$ et $F \in C^\infty(M)$ satisfaisant les conditions (H1) et (H2). Alors il existe une fonction $0 < \bar{u} \in C^\infty(M)$ telle que pour toute donnée initiale $g^0 = u_0^{\frac{4}{n-2}} g_0$ avec $0 < u_0 \leq \bar{u}$, le flot $g(t) = u(t)^{\frac{4}{n-2}} g_0$ donné par le théorème 2.2.1 converge dans $C^\infty(M)$ vers une métrique $g_\infty = u_\infty^{\frac{4}{n-2}} g_0$ de courbure scalaire égale à F .*

La fonction $\bar{u}$ dans le théorème 2.3.1 est une sur-solution de l'équation (2.4), i.e elle vérifie

$$-c_n \Delta_0 \bar{u} + R_0 \bar{u} \geq F \bar{u}^N.$$

Une conséquence directe du théorème 2.3.1 est le résultat suivant sur l'existence d'une solution de l'équation (2.4).

2.3 Convergence du flot

Corollaire 2.3.1 *Supposons que $R_0 < 0$ et $F \in C^\infty(M)$ satisfaisant les conditions (H1) et (H2). Alors l'équation (2.4) admet une solution $0 < u \in C^\infty(M)$. Autrement dit, il existe une métrique g conforme à g_0 de courbure scalaire égale à F .*

Un cas particulier où les conditions (H1) et (H2) sont automatiquement satisfaites est lorsque F est négative presque partout sur M . Nous avons le résultat suivant :

Corollaire 2.3.2 *Supposons que $R_0 < 0$ et $F \in C^\infty(M)$ telle que $F < 0$ presque partout sur M . Alors il existe une fonction $0 < \bar{u} \in C^\infty(M)$ telle que pour toute donnée initiale $g^0 = u_0^{\frac{4}{n-2}} g_0$, où $0 < u_0 \leq \bar{u}$, le flot $g(t) = u(t)^{\frac{4}{n-2}} g_0$ converge dans $C^\infty(M)$ vers une métrique $g_\infty = u_\infty^{\frac{4}{n-2}} g_0$ conforme à g_0 , avec courbure scalaire égale à F , i.e.,*

$$R_{g_\infty} = F.$$

Des conditions similaires à nos hypothèses (H1)-(H2) ont été obtenues par d'autres auteurs pour résoudre le problème de la courbure scalaire prescrite (2.4) par des méthodes elliptiques (méthode variationnelle, méthode de continuité), voir Bismuth [6], Rauzy [21] et Vazquez-Véron [29] pour plus de détails.

Pour démontrer le théorème 2.3.1 nous allons tout d'abord montrer l'existence d'une sur-solution de l'équation (2.4).

Proposition 2.3.1 *Supposons qu'il existe un ouvert $\Omega \subset M$ tel que les conditions (H1) et (H2) soient satisfaites. Alors il existe une métrique $\bar{g} = \bar{u}^{\frac{4}{n-2}} g_0$, avec $0 < \bar{u} \in C^\infty(M)$, telle que*

$$R_{\bar{g}} - F \geq 0$$

i.e.,

$$-c_n \Delta_0 \bar{u} + R_0 \bar{u} - F \bar{u}^N \geq 0.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, on définit

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in M : d(x, \Omega) < \varepsilon\}.$$

Soit $\lambda_{\Omega_\varepsilon}$ la première valeur propre de $-c_n \Delta_0 + R_0$ sur Ω_ε avec condition de Dirichlet. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a par l'hypothèse (H1),

$$\lambda_{\Omega_\varepsilon} > 0.$$

Soit $D \subset M$ un ouvert à bord lisse tel que $\bar{\Omega} \subset D \subset \Omega_\varepsilon$. Comme $\bar{\Omega}$ est compact, on peut supposer sans perte de généralité que D contient un nombre fini de composantes connexes $D_1, \dots, D_N$. De plus, on a, puisque les D_j forment une partition de D ,

$$d(\partial D_j, \bar{\Omega}) \geq d(\partial D, \bar{\Omega}) > 0. \quad (2.38)$$

Comme $D_j \subset D \subset \Omega_\varepsilon$, alors on a pour tout $j = 1, \dots, N$,

$$\lambda_{D_j} \geq \lambda_D \leq \lambda_{\Omega_\varepsilon} > 0. \quad (2.39)$$

Soit φ_j une fonction propre du Laplacien conforme associée à la valeur propre λ_{D_j} , i.e.,

$$-c_n \Delta_0 \varphi_j + R_0 \varphi_j = \lambda_{D_j} \varphi_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

Alors $\varphi_j \in C^\infty(D_j)$ et d'après le principe du maximum on a $\varphi_j > 0$ sur D_j . Quitte à multiplier φ_j par $(\max \varphi_j)^{-1}$, on peut supposer que

$$0 < \varphi_j \leq 1 \text{ sur } D_j, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.40)$$

Soit $\chi_j \in C_0^\infty(D_j)$ telle que $0 \leq \chi_j \leq 1$ et $\chi_j = 1$ sur $\bar{\Omega} \cap D_j$ (ce qui est possible grâce à (2.38)). On définit la fonction $\bar{u} \in C^\infty(M)$ par

$$\bar{u} = \delta \sum_{j=1}^N (\chi_j \varphi_j + 1 - \chi_j),$$

où $\delta > 0$ est à déterminer plus tard.

En utilisant (2.40) et la définition de χ_j , on a

$$m_0 := \sum_{j=1}^N \inf_M (\chi_j \varphi_j + 1 - \chi_j) > 0$$

et donc

$$\inf_M \bar{u} \geq \delta m_0 > 0. \quad (2.41)$$

Maintenant on va démontrer que

$$\mathcal{L}(\bar{u}) := -c_n \Delta_0 \bar{u} + R_0 \bar{u} - F \bar{u}^N \geq 0.$$

Montrons cette inégalité tout d'abord sur Ω . Si $x \in \Omega$, alors il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x \in D_j$. Or sur $\Omega \cap D_j$, on a $\chi_j = 1$ et donc $\bar{u}(x) = \delta \varphi_j(x)$. D'où, on a sur $\Omega \cap D_j$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\bar{u}) &= -c_n \Delta_0 (\delta \varphi_j) + R_0 (\delta \varphi_j) - F (\delta \varphi_j)^N \\ &= \delta \lambda_{D_j} \varphi_j - F \delta^N \varphi_j^N \\ &= \delta \varphi_j (\lambda_{D_j} - \delta^{N-1} \varphi_j^{N-1} F) \\ &\geq \delta \varphi_j (\lambda_{D_j} - \delta^{N-1} \varphi_j^{N-1} \sup_\Omega F) \end{aligned}$$

et en utilisant (2.39) et (2.40) on a donc

$$\mathcal{L}(\bar{u}) \geq \delta \varphi_j (\lambda_D - \delta^{N-1} \sup_\Omega F) \text{ sur } \Omega \cap D_j.$$

2.3 Convergence du flot

On en déduit que si l'on veut $\mathcal{L}(\bar{u}) \geq 0$ sur Ω , on doit supposer

$$\delta^{N-1} \sup_{\Omega} F \leq \lambda_D. \quad (2.42)$$

Maintenant on examine le signe de $\mathcal{L}(\bar{u})$ sur $M \setminus \Omega$. On a par définition de $\bar{u}$

$$\mathcal{L}(\bar{u}) = \sum_{j=1}^N \delta(-c_n \Delta_0 + R_0)(\chi_j \varphi_j + 1 - \chi_j) - F \bar{u}^N,$$

et en utilisant (2.41) et le fait que $F < 0$ sur $M \setminus \Omega$, il s'en suit que

$$\mathcal{L}\bar{u} \geq -\delta m_1 + \delta^N m_0^N \inf_{M \setminus \Omega} |F|,$$

où

$$m_1 = \sum_{j=1}^N \sup_M |(-c_n \Delta_0 + R_0)(\chi_j \varphi_j + 1 - \chi_j)|.$$

Ainsi si l'on veut $\mathcal{L}(\bar{u}) \geq 0$ sur $M \setminus \Omega$, on doit supposer

$$-m_1 + \delta^{N-1} m_0^N \inf_{M \setminus \Omega} |F| \geq 0$$

c'est à dire

$$\delta^{N-1} \inf_{M \setminus \Omega} |F| \geq m_1 m_0^{-N}. \quad (2.43)$$

Il est clair que l'existence d'un $\delta > 0$ satisfaisant (2.42) et (2.43) est équivalente à la condition (H2) avec $C_\Omega = \lambda_D \frac{m_0^N}{m_1}$. La proposition est ainsi démontrée. $\square$

Maintenant on va démontrer que si la donnée initiale u_0 dans l'équation (2.3) vérifie $u_0 \leq \bar{u}$, la solution $u(t)$ de l'équation (2.3) est bornée par des constantes positives indépendantes de t .

Proposition 2.3.2 *Supposons que la donnée initiale $u_0 \in C^\infty(M)$ dans l'équation (2.3) satisfait $0 < u_0 \leq \bar{u}$. Alors la solution $u(t)$ de (2.3) satisfait pour tout $(x, t) \in M \times [0, +\infty)$,*

$$\min(C_0, \min_M u_0) \leq u(x, t) \leq \max_M \bar{u}, \quad (2.44)$$

avec $C_0 = \left(\frac{\min_M |R_0|}{\max_M |F|} \right)^{\frac{n-2}{4}}$.

Démonstration. La première inégalité est déjà démontrée dans la proposition 2.2.1. Il reste donc à démontrer la deuxième inégalité, c'est à dire

$$u(x, t) \leq \max_M \bar{u}.$$

La fonction $\bar{u}$ vérifie l'inégalité suivante :

$$-c_n \Delta_0 \bar{u} + R_0 \bar{u} - F \bar{u}^N \geq 0 \quad (2.45)$$

et u vérifie

$$\partial_t u^N = \frac{n+2}{4} (c_n \Delta_0 u - R_0 u + F u^N). \quad (2.46)$$

En additionnant (2.45) et (2.46), on obtient

$$\partial_t (\bar{u}^N - u^N) \geq \frac{n+2}{4} (c_n \Delta_0 (\bar{u} - u) - R_0 (\bar{u} - u) + F (\bar{u}^N - u^N)). \quad (2.47)$$

Posons $v = \bar{u} - u$, alors $\bar{u}^N - u^N = av$, où

$$a(x, t) = N \int_0^1 (s \bar{u}(x, t) + (1-s)u(x, t))^{N-1} ds.$$

En utilisant (2.47), on obtient

$$\partial_t (av) \geq \frac{n+2}{4} (c_n \Delta_0 v - R_0 v + F av),$$

et comme $v(x, 0) = \bar{u}(x) - u_0(x) \geq 0$, alors en utilisant le principe du maximum, on conclut que $v(x, t) \geq 0$ pour tout $(x, t) \in M \times [0, +\infty)$, et par suite

$$u(x, t) \leq \bar{u}(x).$$

La proposition est ainsi démontrée. □

Maintenant on va démontrer que l'intégrale dans (2.22) (Proposition 2.2.2) tends vers 0 lorsque t tends vers $+\infty$.

Proposition 2.3.3 *Soit $0 < u_0 \in C^\infty(M)$ telle que $u_0 \leq \bar{u}$, où $\bar{u}$ est donnée par la proposition 2.3.1. Soit $g(t)$ la solution de (2.1) avec donnée initiale $g^0 = u_0^{\frac{4}{n-2}} g_0$. Alors pour tout $p \geq 1$, on a*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_M |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)} = 0. \quad (2.48)$$

2.3 Convergence du flot

Démonstration. Dans cette preuve, C désigne une constante positive qui dépend de u_0 , g_0 et F , dont la valeur peut changer d'une ligne à une autre. En intégrant l'inégalité (2.5) de la proposition 2.1.2 entre 0 et t , on a pour tout $t \geq 0$,

$$\frac{n-2}{2} \int_0^t \int_M |R_{g(s)} - F|^2 dv_{g(s)} ds = \mathcal{E}(g(0)) - \mathcal{E}(g(t)). \quad (2.49)$$

D'autre part, on a

$$\mathcal{E}(g(t)) = \int_M \left(c_n |\nabla u|^2 + R_0 u^2 - \frac{n-2}{n} F u^{\frac{2n}{n-2}} \right) dv_{g_0},$$

et comme u est uniformément bornée grâce à la proposition 2.3.2, alors il existe une constante positive C telle que $\mathcal{E}(g(t)) \geq -C$. Il découle de (2.49) que :

$$\int_0^{+\infty} \int_M |R_{g(t)} - F|^2 dv_{g(t)} \leq C. \quad (2.50)$$

D'après la proposition 2.3.2, on a le volume de $g(t)$ est uniformément borné. Alors en utilisant l'inégalité de Hölder, il est suffisant de démontrer (2.48) pour une suite $p_k \rightarrow +\infty$. On va démontrer (2.48) par récurrence sur $p = p_k$, où

$$p_k := \frac{n}{2} \left(\frac{n}{n-2} \right)^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

On commence par démontrer (2.48) pour $p_0 = \frac{n}{2}$. Comme dans la démonstration du Lemme 2.2.2, et en utilisant le fait que u est uniformément bornée, on peut vérifier que pour tout $p > 1$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_M |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)} + C^{-1} \left(\int_M |R_{g(t)} - F|^{\frac{pn}{n-2}} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n-2}{n}} &\leq C \int_M |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)} \\ &+ \left(p - \frac{n}{2} \right) \int_M |R_{g(t)} - F|^{p+1} dv_{g(t)}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Posons

$$\phi_p(t) = \int_M |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)}.$$

Si $p_0 < 2$, en utilisant l'inégalité de Hölder et la proposition 2.3.2, on a

$$\phi_{p_0} \leq C \phi_2^{\frac{p_0}{2}}. \quad (2.52)$$

Donc en prenant $p = p_0 = \frac{n}{2}$ dans (2.51) on obtient

$$\frac{d}{dt} \phi_{p_0} \leq C \phi_2^{\frac{p_0}{2}},$$

et par suite

$$\frac{d}{dt} \phi_{p_0}^{\frac{2}{p_0}} \leq C \phi_2. \quad (2.53)$$

D'autre part, d'après (2.50), il existe une suite $t_\nu \rightarrow +\infty$ telle que $\phi_2(t_\nu) \rightarrow 0$ et $\int_{t_\nu}^{+\infty} \phi_2(s) ds \rightarrow 0$. Donc en intégrant (2.53) entre t_ν et t , et en utilisant (2.52) on obtient

$$\begin{aligned} \phi_{p_0}^{\frac{2}{p_0}}(t) &\leq \phi_{p_0}^{\frac{2}{p_0}}(t_\nu) + C \int_{t_\nu}^t \phi_2(s) ds \\ &\leq C \phi_2(t_\nu) + C \int_{t_\nu}^t \phi_2(s) ds, \end{aligned}$$

d'où $\phi_{p_0}(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Si $p_0 \geq 2$, grâce aux inégalités de Hölder et de Young, on a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_M |R_{g(t)} - F|^{p_0} dv_{g(t)} \leq \varepsilon \left(\int_M |R_{g(t)} - F|^{\frac{p_0 n}{n-2}} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n-2}{n}} + \varepsilon^{-\frac{n(p_0-2)}{4}} \left(\int_M |R_{g(t)} - F|^2 dv_{g(t)} \right)^{\frac{p_0}{2}} \quad (2.54)$$

En prenant $\varepsilon = \frac{C^{-2}}{2}$ dans (2.54), où C est la constante dans (2.51), on obtient d'après (2.51) (avec $p_0 = p = \frac{n}{2}$),

$$\frac{d}{dt} \phi_{p_0} + \frac{C^{-1}}{2} \phi_{p_0 \frac{n}{n-2}}^{\frac{n-2}{n}} \leq (2C)^{\frac{n(p_0-2)}{4}} \phi_2^{\frac{p_0}{2}},$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{d}{dt} \phi_{p_0} + C \phi_{p_0 \frac{n}{n-2}}^{\frac{n-2}{n}} \leq C \phi_2 \phi_2^{\frac{p_0}{2}-1}.$$

Or par l'inégalité de Hölder on a

$$\phi_2 \leq C \phi_{p_0}^{\frac{2}{p_0}},$$

d'où

$$\frac{d}{dt} \phi_{p_0} + C \phi_{p_0 \frac{n}{n-2}}^{\frac{n-2}{n}} \leq C \phi_2 \phi_{p_0}^{1-\frac{2}{p_0}}. \quad (2.55)$$

En divisant (2.55) par $\phi_{p_0}^{1-\frac{2}{p_0}}$, on obtient

$$\frac{d}{dt} \phi_{p_0}^{\frac{2}{p_0}} + C \phi_{p_0 \frac{n}{n-2}}^{\frac{n-2}{n}} \phi_{p_0}^{\frac{2}{p_0}-1} \leq C \phi_2,$$

et comme par l'inégalité de Hölder on a,

$$\phi_{p_0} \leq C \phi_{p_0 \frac{n}{n-2}}^{\frac{n-2}{n}},$$

2.3 Convergence du flot

on obtient donc

$$\frac{d}{dt}\phi_{p_0}^{\frac{2}{p_0}} + C\phi_{p_0}^{\frac{2}{p_0}} \leq C\phi_2. \quad (2.56)$$

En intégrant (2.56) entre 0 et t on a

$$\phi_{p_0}^{\frac{2}{p_0}}(t) - \phi_{p_0}^{\frac{2}{p_0}}(0) + C \int_0^t \phi_{p_0}^{\frac{2}{p_0}}(s)ds \leq C \int_0^t \phi_2(s)ds.$$

Ce qui implique, en utilisant (2.50), que

$$\int_0^t \phi_{p_0}^{\frac{2}{p_0}}(s)ds \leq C,$$

et comme t est arbitraire alors

$$\int_0^{+\infty} \phi_{p_0}^{\frac{2}{p_0}}(s)ds \leq C.$$

On conclut qu'il existe une suite $t_\nu \rightarrow +\infty$ telle que

$$\phi_{p_0}(t_\nu) \rightarrow 0 \quad \text{quand } \nu \rightarrow +\infty. \quad (2.57)$$

En intégrant (2.56) encore une fois entre t_ν et t on obtient

$$\phi_{p_0}^{\frac{2}{p_0}}(t) \leq \phi_{p_0}^{\frac{2}{p_0}}(t_\nu) + C \int_{t_\nu}^t \phi_2(s)ds,$$

et en utilisant (2.50) et (2.57) on conclut que

$$\phi_{p_0}^{\frac{2}{p_0}}(t) \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

Supposons maintenant par récurrence que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_{p_k}(t) = 0. \quad (2.58)$$

On va tout d'abord montrer que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t^{t+1} \phi_{p_{k+1}}^{\frac{n-2}{n}}(s)ds = 0. \quad (2.59)$$

Pour $k = 0$, on obtient (2.59) facilement en intégrant (2.51) entre t et $t + 1$ et en utilisant (2.58). On suppose maintenant que $k \geq 1$. Grâce à l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Young, on a

$$\int_M |R_{g(t)} - F|^{p+1} dv_{g(t)} \leq \varepsilon \left(\int_M |R_{g(t)} - F|^{\frac{pn}{n-2}} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n-2}{n}} + \varepsilon^{-\frac{n}{2p-n}} \left(\int_M |R_{g(t)} - F|^p dv_{g(t)} \right)^{1 + \frac{2}{2p-n}}. \quad (2.60)$$

En prenant $p = p_k$ et $\varepsilon = \frac{1}{2}C^{-1}$ où C est la constante dans (2.51), alors on obtient de (2.51)

$$\frac{d}{dt}\phi_{p_k} + \frac{1}{2}C^{-1}\phi_{p_{k+1}}^{\frac{n-2}{n}} \leq C\phi_{p_k} + C\phi_{p_k}^{1+\frac{2}{2p_k-n}}.$$

En intégrant cette inégalité entre t et $t+1$, et en utilisant (2.58), on obtient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t^{t+1} \phi_{p_{k+1}}^{\frac{n-2}{n}}(s)ds = 0.$$

Maintenant on prend $p = p_{k+1}$ dans (2.60) et $\varepsilon = \frac{C^{-1}}{p_{k+1}-\frac{n}{2}}$, où C est la constante dans (2.51), alors il découle de (2.51)

$$\frac{d}{dt}\phi_{p_{k+1}} \leq C\phi_{p_{k+1}}^{1+\alpha_k} + C\phi_{p_{k+1}}, \quad (2.61)$$

où $\alpha_k = \frac{2}{2p_{k+1}-n}$.

(2.61) est équivalent à

$$\frac{d}{dt} \log \phi_{p_{k+1}} \leq C \left(\phi_{p_{k+1}}^{\alpha_k} + 1 \right). \quad (2.62)$$

D'après (2.59) il existe une suite $t_\nu \rightarrow +\infty$ telle que $\nu \leq t_\nu \leq \nu+1$ qui satisfait $\phi_{p_{k+1}}(t_\nu) \rightarrow 0$ quand $\nu \rightarrow +\infty$. En intégrant (2.62) entre t_ν et t , où $t \in [\nu, \nu+1]$, on obtient

$$\log \frac{\phi_{p_{k+1}}(t)}{\phi_{p_{k+1}}(t_\nu)} \leq C \left(\int_{t_\nu}^t \phi_{p_{k+1}}^{\alpha_k}(s)ds + 1 \right). \quad (2.63)$$

Comme $\alpha_k \leq \frac{n-2}{n}$, alors d'après l'inégalité de Hölder et (2.59) on a

$$\int_{t_\nu}^t \phi_{p_{k+1}}^{\alpha_k}(s)ds \leq \left(\int_{t_\nu}^t \phi_{p_{k+1}}^{\frac{n-2}{n}}(s)ds \right)^{\frac{\alpha_k n}{n-2}} \rightarrow 0 \text{ quand } \nu \rightarrow +\infty.$$

Donc on conclut de (2.63) que

$$\log \frac{\phi_{p_{k+1}}(t)}{\phi_{p_{k+1}}(t_\nu)} \leq C.$$

Ce qui implique que $\phi_{p_{k+1}}(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.

La proposition est ainsi démontrée. □

Maintenant on va montrer que u est bornée dans $C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(M \times [0, +\infty))$.

Proposition 2.3.4 *Soit $0 < u_0 \in C^\infty(M)$ telle que $u_0 \leq \bar{u}$ où $\bar{u}$ est la fonction donnée par la proposition 2.3.1. Alors, il existe $\alpha \in (0, 1)$, tel que la solution u de (2.3) avec donnée initiale u_0 , satisfait*

$$\|u\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(M \times [0, +\infty))} \leq C,$$

où C est une constante positive qui dépend de u_0 , g_0 et F .

2.3 Convergence du flot

Démonstration. Fixons un réel p tel que $\frac{n}{2} < p < n$. En utilisant les proposition 2.3.2 et 2.3.3, on obtient

$$\int_M |c_n \Delta_0 u - R_0 u|^p dv_{g_0} \leq C \quad (2.64)$$

et

$$\int_M |\partial_t u(t)|^p dv_{g_0} \leq C. \quad (2.65)$$

De l'inégalité (2.64) on déduit que $\Delta_0 u$ est bornée dans $L^p(M)$, et donc $u(t)$ est bornée dans $H_2^p(M)$ par régularité elliptique. Or $H_2^p(M) \subset C^\alpha(M)$, avec $\alpha = 2 - \frac{n}{p}$. On en déduit que $u(t)$ bornée dans $C^\alpha(M)$, i.e,

$$|u(x_1, t) - u(x_2, t)| \leq C d(x_1, x_2)^\alpha \quad (2.66)$$

pour tout $x_1, x_2 \in M$ et $t \geq 0$.

D'autre part, on a pour tous $x \in M$ et $t_1 \geq t_2 \geq 0$,

$$|u(x, t_1) - u(x, t_2)| = \frac{1}{\text{Vol}(B)} \int_{B(x, \sqrt{t_1 - t_2})} |u(x, t_1) - u(x, t_2)| dv_{g_0},$$

où $\text{Vol}(B)$ est le volume de la boule $B = B(x, \sqrt{t_1 - t_2})$ par rapport à la métrique g_0 .

D'où

$$\begin{aligned} |u(x, t_1) - u(x, t_2)| &\leq C(t_1 - t_2)^{-\frac{n}{2}} \int_{B(x, \sqrt{t_1 - t_2})} |u(x, t_1) - u(x, t_2)| dv_{g_0} \\ &= C(t_1 - t_2)^{-\frac{n}{2}} \int_{B(x, \sqrt{t_1 - t_2})} |u(x, t_1) - u(x, t_2) - u(y, t_1) + u(y, t_1) - u(y, t_2) \\ &\quad + u(y, t_2)| dv_{g_0}(y) \\ &\leq C(t_1 - t_2)^{-\frac{n}{2}} C d(x, y)^\alpha (t_1 - t_2)^{\frac{n}{2}} \\ &\quad + C(t_1 - t_2)^{-\frac{n}{2}} C d(x, y)^\alpha (t_1 - t_2)^{\frac{n}{2}} \\ &\quad + C(t_1 - t_2)^{-\frac{n}{2}} \int_{B(x, \sqrt{t_1 - t_2})} |u(y, t_1) - u(y, t_2)| dv_{g_0}(y). \end{aligned}$$

On a pour tout $y \in B(x, \sqrt{t_1 - t_2})$, $d(x, y) \leq (t_1 - t_2)^{\frac{1}{2}}$, et par suite

$$\begin{aligned} |u(x, t_1) - u(x, t_2)| &\leq C(t_1 - t_2)^{-\frac{n}{2}} \int_{B(x, \sqrt{t_1 - t_2})} |u(y, t_1) - u(y, t_2)| dv_{g_0}(y) + C(t_1 - t_2)^{\frac{\alpha}{2}} \\ &\leq C(t_1 - t_2)^{-\frac{n-2}{2}} \sup_{t_2 \leq t \leq t_1} \int_{B(x, \sqrt{t_1 - t_2})} |\partial_t u(t)| dv_{g_0} + C(t_1 - t_2)^{\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité (2.65), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{B(x, \sqrt{t_1-t_2})} |\partial_t u(t)| dv_{g_0} &\leq \left(\int_{B(x, \sqrt{t_1-t_2})} |\partial_t u(t)|^p dv_{g_0} \right)^{\frac{1}{p}} (t_1 - t_2)^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})} \\ &\leq C(t_1 - t_2)^{\frac{np-n}{2p}}. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in M$ et $0 < t_1 - t_2 < 1$, on a

$$|u(x, t_1) - u(x, t_2)| \leq C(t_1 - t_2)^{\frac{\alpha}{2}} \quad (2.67)$$

En utilisant (2.66) et (2.67), on déduit que

$$\begin{aligned} |u(x_1, t_1) - u(x_2, t_2)| &\leq |u(x_1, t_1) - u(x_1, t_2)| + |u(x_1, t_2) - u(x_2, t_2)| \\ &\leq C(|t_1 - t_2|^{\frac{\alpha}{2}} + |x_1 - x_2|^\alpha). \end{aligned}$$

pour tous $x_1, x_2 \in M$ et $t_1 \geq t_2 \geq 0$ tels que $0 < t_1 - t_2 < 1$.

Ceci achève la preuve de la proposition. □

Maintenant on est en mesure de démontrer le théorème 2.3.1.

Démonstration du Théorème 2.3.1. Soit $g(t) = u(t)^{\frac{4}{n-2}} g_0$ la solution de (2.1) donnée par le théorème 2.2.1. D'après la proposition 2.3.2, on a u bornée uniformément sur $[0, +\infty)$. On en déduit que l'équation (2.3) est une équation uniformément parabolique, et d'après la proposition 2.3.4 on a u bornée dans $C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(M \times [0, +\infty))$, pour $\alpha \in (0, 1)$. Alors la théorie classique de régularité parabolique (voir théorème 1.2.5 du chapitre 1) appliquée à (2.3), implique que u est bornée dans $C^{2k+\alpha, k+\frac{\alpha}{2}}(M \times [0, +\infty))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|u\|_{C^k(M \times [0, +\infty))} \leq C_k, \quad (2.68)$$

où C_k est une constante positive dépendant de u_0 , g_0 , F et k . De plus, d'après la proposition 2.3.2, on a

$$\inf_{M \times [0, +\infty)} u \geq C, \quad (2.69)$$

où C est une constante positive qui dépend de u_0 , g_0 et F .

D'après (2.68) et (2.69), il existe une suite $t_\nu \rightarrow +\infty$ et $0 < u_\infty \in C^\infty(M)$, telle que

$$u(t_\nu) \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} u_\infty \quad \text{dans } C^\infty(M).$$

En particulier, on a $R_{g(t_\nu)} \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} R_{g_\infty}$, avec $g_\infty = u_\infty^{\frac{4}{n-2}} g_0$. D'autre part, d'après la proposition 2.3.3 on a

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \int_M |R_{g(t_\nu)} - F|^p dv_{g(t_\nu)} = 0 \quad \text{pour tout } p \geq 1.$$

2.3 Convergence du flot

On en déduit donc que $R_{g_\infty} = F$.

D'après un résultat de Simon [25], u_∞ est l'unique limite de $u(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Ceci achève la preuve du théorème 2.3.1. □

Démonstration du Corollaire 2.3.2. D'après le théorème 2.3.1, il suffit de démontrer qu'il existe un ouvert Ω de M où les conditions (H1) et (H2) sont vérifiées. Comme F est négative presque partout sur M , alors pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, l'ensemble

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in M : F(x) > -\varepsilon\}$$

est de mesure arbitrairement petite. Soit μ_{Ω_ε} la première valeur propre de $-c_n \Delta_0$ sur Ω_ε avec condition de Dirichlet. Ainsi si ε est suffisamment petit, μ_{Ω_ε} est arbitrairement grande. Mais d'après la définition de $\lambda_{\Omega_\varepsilon}$, on a

$$\lambda_{\Omega_\varepsilon} \geq \mu_{\Omega_\varepsilon} + \min_M R_0.$$

On en déduit $\lambda_{\Omega_\varepsilon} > 0$ si ε est suffisamment petit, et par suite la condition (H1) est satisfaite.

D'autre part, par continuité de F on a $F \leq 0$ partout sur M . D'où

$$\sup_{\Omega_\varepsilon} F = 0 \quad \text{et} \quad \inf_{M \setminus \Omega_\varepsilon} |F| \geq \varepsilon.$$

Ainsi la condition (H2) est satisfaite. Le corollaire est démontré. □

Après avoir introduit les conditions (H1) et (H2) une question naturelle se pose : les conditions (H1) et (H2) sont-elles nécessaires pour la convergence du flot ? Le théorème suivant nous affirme que c'est le cas au moins pour la condition (H1) :

Théorème 2.3.2 *Supposons que $R_0 < 0$ et $F \in C^\infty(M)$ telle que la condition (H1) ne soit pas satisfaite, i.e, pour tout ouvert $\Omega \subset M$ tel que $F > 0$ sur $M \setminus \Omega$, on suppose que $\lambda_\Omega \leq 0$. Alors pour toute donnée initiale $0 < u_0 \in C^\infty(M)$, la solution u de l'équation (2.3) satisfait*

$$\max_{x \in M} u(x, t) \geq C t^{\frac{n-2}{n+2}},$$

pour une constante C indépendante de t . En particulier, $\max_{x \in M} u(x, t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Le théorème 2.3.2 nous dit en particulier que la condition (H1) est nécessaire à la résolution de l'équation de courbure scalaire prescrite (2.4).

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et soit la famille des ouverts suivante :

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in M : F(x) > -\varepsilon\}.$$

Dans la suite on va utiliser la notation $\lambda_\varepsilon := \lambda_{\Omega_\varepsilon}$. Comme on suppose que $\lambda_\Omega \leq 0$ pour tout ouvert Ω telle que $F > 0$ sur $M \setminus \Omega$, alors

$$\lambda_\varepsilon \leq 0 \text{ pour tout } \varepsilon > 0. \quad (2.70)$$

D'après le théorème de Sard, il existe une suite $\varepsilon_n \rightarrow 0$ telle que ε_n soit une valeur régulière de F . On en déduit que le bord de Ω_{ε_n} qui est donné par

$$\partial\Omega_{\varepsilon_n} = \{x \in M : F(x) = -\varepsilon_n\}$$

est lisse. Soit $\varphi_n \geq 0$ une fonction propre de $-c_n\Delta_0 + R_0$ associée à λ_{ε_n} . Comme $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega_{\varepsilon_n}$, alors on a

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial\nu} \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega_{\varepsilon_n}, \quad (2.71)$$

où ν est le vecteur normal extérieur de $\partial\Omega_{\varepsilon_n}$. De plus, on peut supposer sans perte de généralité que

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_n}} \varphi_n \, dv_{g_0} = 1. \quad (2.72)$$

En multipliant (2.3) par φ_n et en intégrant sur Ω_{ε_n} , on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_{\varepsilon_n}} u^N \varphi_n \, dv_{g_0} = \frac{n+2}{4} \int_{\Omega_{\varepsilon_n}} (c_n\Delta_0 u - R_0 u) \varphi_n \, dv_{g_0} + \frac{n+2}{4} \int_{\Omega_{\varepsilon_n}} F u^N \varphi_n \, dv_{g_0}. \quad (2.73)$$

D'après la formule de Green, on a

$$c_n \int_{\Omega_{\varepsilon_n}} \Delta_0 u \varphi_n \, dv_{g_0} = c_n \int_{\Omega_{\varepsilon_n}} u \Delta_0 \varphi_n \, dv_{g_0} - c_n \int_{\partial\Omega_{\varepsilon_n}} \frac{\partial\varphi_n}{\partial\nu} u \, dv_{g_0}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\varepsilon_n}} (c_n\Delta_0 u - R_0 u) \varphi_n \, dv_{g_0} &= \int_{\Omega_{\varepsilon_n}} (c_n\Delta_0 \varphi_n - R_0 \varphi_n) u \, dv_{g_0} - c_n \int_{\partial\Omega_{\varepsilon_n}} \frac{\partial\varphi_n}{\partial\nu} u \, dv_{g_0} \\ &= -\lambda_{\varepsilon_n} \int_{\Omega_{\varepsilon_n}} u \varphi_n \, dv_{g_0} - c_n \int_{\partial\Omega_{\varepsilon_n}} \frac{\partial\varphi_n}{\partial\nu} u \, dv_{g_0}. \end{aligned}$$

Ce qui donne, grâce à (2.70), (2.71), (2.72) et le fait que $\varphi_n \geq 0$,

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_n}} (c_n\Delta_0 u - R_0 u) \varphi_n \, dv_{g_0} \geq -\lambda_{\varepsilon_n} \inf_M u - c_n \inf_M u \int_{\partial\Omega_{\varepsilon_n}} \frac{\partial\varphi_n}{\partial\nu} \, dv_{g_0}. \quad (2.74)$$

D'autre part, on a

$$-c_n \int_{\partial\Omega_{\varepsilon_n}} \frac{\partial\varphi_n}{\partial\nu} \, dv_{g_0} = -c_n \int_{\Omega_{\varepsilon_n}} \Delta_0 \varphi_n \, dv_{g_0} = \int_{\Omega_{\varepsilon_n}} (\lambda_{\varepsilon_n} - R_0) \varphi_n \, dv_{g_0},$$

2.3 Convergence du flot

et en utilisant (2.72), on obtient donc

$$-c_n \int_{\partial\Omega_{\varepsilon_n}} \frac{\partial\varphi_n}{\partial\nu} dv_{g_0} \geq \lambda_{\varepsilon_n} + \inf_M |R_0|. \quad (2.75)$$

En combinant (2.74) et (2.75), on a

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_n}} (c_n \Delta_0 u - R_0 u) \varphi_n dv_{g_0} \geq \inf_M |R_0| \inf_M u. \quad (2.76)$$

En substituant (2.76) dans (2.73), on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_{\varepsilon_n}} u^N \varphi_n dv_{g_0} \geq \frac{n+2}{4} \inf_M |R_0| \inf_M u + \frac{n+2}{4} \int_{\Omega_{\varepsilon_n}} F u^N \varphi_n dv_{g_0}. \quad (2.77)$$

Or d'après la proposition 2.3.2, on a $u \geq C$ avec C une constante positive qui dépend seulement de u_0 , g_0 et F . Il s'en suit, en utilisant le fait que $F > -\varepsilon_n$ sur Ω_{ε_n} ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_{\varepsilon_n}} u^N \varphi_n dv_{g_0} \geq C - \frac{n+2}{4} \varepsilon_n \int_{\Omega_{\varepsilon_n}} u^N \varphi_n dv_{g_0}.$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et t , on obtient

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_n}} u^N(t) \varphi_n dv_{g_0} \geq \int_{\Omega_{\varepsilon_n}} u_0^N \varphi_n dv_{g_0} + Ct - \frac{n+2}{4} \varepsilon_n \int_0^t \int_{\Omega_{\varepsilon_n}} u^N(s) \varphi_n dv_{g_0} ds,$$

et puisque

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_n}} \varphi_n dv_{g_0} = 1,$$

alors

$$\max_M u^N(x, t) \geq Ct - \frac{n+2}{4} \varepsilon_n \int_0^t \max_{x \in M} u^N(x, s) ds.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on a finalement

$$\max_M u^N(x, t) \geq Ct.$$

Le théorème est ainsi démontré. □

Chapitre 3

Flot de Yamabe avec courbure scalaire prescrite : le cas positif

Dans ce chapitre on supposera (M, g_0) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, de courbure scalaire $R_0 > 0$. En particulier, l'invariant de Yamabe :

$$Y(M, g_0) = \inf_{0 \neq \varphi \in H^1(M)} \frac{\int_M (c_n |\nabla \varphi|^2 + R_0 \varphi^2) dv_{g_0}}{\left(\int_M |\varphi|^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n}}},$$

avec $c_n = 4 \frac{n-1}{n-2}$, sera supposé $Y(M, g_0) > 0$.

Etant donnée une fonction $F \in C^\infty(M)$, on va étudier le flot suivant :

$$\begin{cases} \partial_t g(t) = -\frac{4}{n+2} (R_{g(t)} - \lambda(t)F) g(t) \\ g(0) = g^0, \end{cases} \quad (3.1)$$

où la solution $g(t)$ est une métrique riemannienne sur M , $g^0 = u_0^{\frac{4}{n-2}} g_0$, avec $0 < u_0 \in C^\infty(M)$, est la donnée initiale, $R_{g(t)}$ est la courbure scalaire de $g(t)$, et

$$\lambda(t) = \frac{r_{g(t)}}{f(t)}$$

avec $r_{g(t)}$ et $f(t)$ les valeurs moyennes respectives de $R_{g(t)}$ et F :

$$r_{g(t)} = \frac{\int_M R_{g(t)} dv_{g(t)}}{\int_M dv_{g(t)}} \quad \text{et} \quad f(t) = \frac{\int_M F dv_{g(t)}}{\int_M dv_{g(t)}}.$$

La solution $g(t)$ de (3.1) est le flot de gradient associé à la fonctionnelle dite « énergie » suivante :

$$\mathcal{E}(g) = \frac{\int_M R_g dv_g}{\left(\int_M F dv_g \right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

définie sur l'ensemble

$$\mathcal{M}_F = \left\{ g \in [g_0] : \int_M F dv_g > 0 \right\},$$

où $[g_0]$ est la classe conforme de g_0 .

Ce flot préserve la structure conforme de (M, g_0) . En écrivant $g(t)$ sous la forme $g(t) = u(., t)^{\frac{4}{n-2}} g_0$, avec $0 < u(., t) \in C^\infty(M)$, on peut réécrire l'équation (3.1) en fonction du facteur conforme u sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u^N = c_n \Delta_0 u - R_0 u + \lambda F u^N \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (3.2)$$

où $N = \frac{n+2}{n-2}$, $c_n = 4 \frac{n-1}{n-2}$, et la donnée initiale $0 < u_0 \in C^\infty(M)$ est telle que $\int_M F u_0^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} > 0$, i.e $g^0 = u_0^{\frac{4}{n-2}} g_0 \in \mathcal{M}_F$.

La fonctionnelle $\mathcal{E}$ prend la forme suivante en fonction du facteur conforme u :

$$E(u) = \frac{\int_M (c_n |\nabla u|^2 + R_0 u^2) dv_{g_0}}{\left(\int_M F u^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n}}}. \quad (3.3)$$

On vérifie facilement que les points critiques de cette fonctionnelle sont les solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$-c_n \Delta_0 u + R_0 u = k F u^N \quad (3.4)$$

pour une certaine constante $k > 0$. Il s'agit de l'équation de la courbure scalaire prescrite ; elle exprime le fait que la courbure scalaire de la métrique $g = u^{\frac{4}{n-2}} g_0$ est égale à kF .

Dans ce chapitre on va tout d'abord montrer l'existence locale et donner quelques propriétés du flot (3.1). On démontrera ensuite son existence globale, c'est à dire l'existence d'une solution $g(t)$ définie sur $[0, +\infty)$ de (3.1). Une fois l'existence globale assurée, on s'intéressera à l'étude du comportement asymptotique de la solution à l'infini, qui pourrait donner lieu à des phénomènes intéressants comme la « formation des bulles ». On donnera également des conditions sur F assurant la convergence du flot dans certains cas, ce qui permettrait d'obtenir directement une solution au problème de la courbure scalaire prescrite. Nous avons ainsi une déformation géométrique naturelle de la donnée initiale vers une métrique de courbure scalaire prescrite à l'avance. On peut considérer cette démarche comme une généralisation du flot de Yamabe (voir introduction générale) introduit par Hamilton [15] dans les années 1980 et qui a fait l'objet de nombreuses études (voir [7], [8], [24], [31]). Comme nous l'avons déjà signalé dans le chapitre précédent, notre travail est le premier traitant d'un flot géométrique avec courbure scalaire prescrite sur une variété riemannienne de dimension $n \geq 3$ différente de la sphère $\mathbb{S}^n$.

3.1 Existence locale et propriétés du flot

Dans ce qui suit, on va supposer que $\max_{x \in M} F(x) > 0$. En effet, cette hypothèse est nécessaire pour que la fonctionnelle $\mathcal{E}$ soit bien définie car si $\max_{x \in M} F(x) > 0$, alors on a $\mathcal{M}_F \neq \emptyset$. Il est par ailleurs facile de voir que cette condition est nécessaire pour l'existence d'une solution $u > 0$ au problème de la courbure scalaire prescrite (3.4) comme on peut le vérifier en intégrant (3.4) sur M après l'avoir multipliée par u^{-N} .

3.1 Existence locale et propriétés du flot

3.1.1 Existence locale

Proposition 3.1.1 *Pour toute donnée initiale $g^0 = u_0^{\frac{4}{n-2}} g_0$ telle que $0 < u_0 \in C^\infty(M)$ et $\int_M F u_0^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} > 0$, il existe $T^* > 0$ et une unique solution $g(t) = u(t)^{\frac{4}{n-2}} g_0 \in \mathcal{M}_F$ du flot (3.1) définie sur $[0, T^*)$, avec $0 < u \in C^\infty(M \times [0, T^*))$.*

Démonstration. On a déjà vu que le flot (3.1) est équivalent à (3.2), donc pour montrer l'existence d'une solution $g(t)$ de (3.1) il suffit de montrer l'existence d'une solution $u(t)$ de (3.2) définie sur $[0, T^*)$. Or il est facile de vérifier que l'équation (3.2) est parabolique sur l'ensemble des fonctions $0 < u \in C^\infty(M \times [0, T])$ avec $\int_M F u^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} > 0$. Le reste de la preuve se fait exactement comme dans la preuve de la proposition 2.1.1 concernant le cas $R_0 < 0$. □

Dans la suite de ce chapitre, on désigne par T^* le plus grand temps d'existence du flot. Dans un premier temps notre objectif est de montrer que $T^* = +\infty$. Pour cela, on va tout d'abord montrer quelques propriétés fondamentales de ce flot.

3.1.2 Propriétés du flot

Proposition 3.1.2 (conservation du volume) *Le volume de M reste constant le long du flot :*

$$\int_M dv_{g(t)} = \int_M dv_{g_0} \quad \forall t \geq 0.$$

Démonstration. Dérivons le volume de M par rapport à t :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_M dv_{g(t)} &= \int_M \partial_t u^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \\ &= \frac{2n}{n-2} \int_M u^{-1} \partial_t u dv_{g(t)}. \end{aligned}$$

Comme u vérifie (3.2), on a

$$\partial_t u = -\frac{n-2}{n+2} (R_{g(t)} - \lambda(t)F) u,$$

d'où

$$\frac{d}{dt} \int_M dv_{g(t)} = -\frac{2n}{n+2} \int_M (R_{g(t)} - \lambda(t)F) dv_{g(t)}. \quad (3.5)$$

Comme $\lambda(t) = \frac{r_{g(t)}}{f(t)}$, alors on a

$$\int_M (R_{g(t)} - \lambda(t)F) dv_{g(t)} = 0$$

car

$$r_{g(t)} = \frac{\int_M R_{g(t)} dv_{g(t)}}{\int_M dv_{g(t)}} \quad \text{et} \quad f(t) = \frac{\int_M F dv_{g(t)}}{\int_M dv_{g(t)}}.$$

Ainsi on a

$$\frac{d}{dt} \int_M dv_{g(t)} = 0.$$

□

Dans la suite, on va supposer sans perte de généralité que $\text{Vol}(M, g(t)) = 1$ pour tout $t \in [0, T^*)$. Avant de donner la deuxième propriété du flot, remarquons que la moyenne $f(t) = \int_M F u^{\frac{2n}{n-2}}(t) dv_{g_0}$ de F vérifie $f(t) > 0$ pour tout $t \in [0, T^*)$, puisque l'on a par le théorème 3.1.1, $g(t) = u^{\frac{4}{n-2}}(t)g_0 \in \mathcal{M}_F$ pour tout $t \in [0, T^*)$.

Proposition 3.1.3 (Décroissance de l'énergie) *L'énergie $\mathcal{E}$ est décroissante le long du flot. Plus précisément, on a*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(g(t)) = -2 \frac{n-2}{n+2} f^{-\frac{n+2}{n}}(t) \int_M |R_{g(t)} - \lambda(t)F|^2 dv_{g(t)} \leq 0. \quad (3.6)$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(g(t)) = E(u(t)) &= \frac{\int_M (c_n |\nabla u|_0^2 + R_0 u^2) dv_{g_0}}{\left(\int_M F u^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n}}} \\ &= f^{\frac{2-n}{n}}(t) \int_M (c_n |\nabla u|_0^2 + R_0 u^2) dv_{g_0}. \end{aligned}$$

Dérivons par rapport à t :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(u(t)) &= \frac{d}{dt} \left(f^{\frac{2-n}{n}}(t) \int_M (c_n |\nabla u|_0^2 + R_0 u^2) dv_{g_0} \right) \\ &= -\frac{n-2}{n} f^{-\frac{2(n+1)}{n}} f'(t) \int_M R_{g(t)} dv_{g(t)} + f^{\frac{2-n}{n}} \int_M (2c_n \nabla u \nabla \partial_t u + 2R_0 u \partial_t u) dv_{g_0}. \end{aligned}$$

3.1 Existence locale et propriétés du flot

Or, en utilisant l'équation (3.2), on a

$$\begin{aligned} \int_M (c_n \nabla u \nabla \partial_t u + R_0 u \partial_t u) dv_{g_0} &= - \int_M (c_n \Delta_0 u - R_0 u) \partial_t u \\ &= - \frac{n-2}{n+2} \int_M R_{g(t)} (R_{g(t)} - \lambda F) dv_{g(t)}, \end{aligned}$$

et

$$f'(t) = \frac{2n}{n-2} \int_M F u^N \partial_t u dv_{g_0} = - \frac{2n}{n+2} \int_M F (R_{g(t)} - \lambda(t) F) dv_{g(t)}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(u(t)) &= -2 \frac{n-2}{n+2} f^{-\frac{2(n+1)}{n}}(t) \left(f(t) \int_M R_{g(t)} (R_{g(t)} - \lambda(t) F) dv_{g(t)} \right. \\ &\quad \left. - r_{g(t)} \int_M F (R_{g(t)} - \lambda(t) F) dv_{g(t)} \right) \\ &= -2 \frac{n-2}{n+2} f^{-\frac{2(n+1)}{n}}(t) \int_M (R_{g(t)} - \lambda(t) F) (f(t) R_{g(t)} - r_{g(t)} F) dv_{g(t)} \\ &= -2 \frac{n-2}{n+2} f^{-\frac{n+2}{n}}(t) \int_M |R_{g(t)} - \lambda(t) F|^2 dv_{g(t)}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Comme $f(t) > 0$ (car $g(t) \in \mathcal{M}_F$), on a donc

$$\frac{d}{dt} E(u(t)) \leq 0.$$

Ce qui achève la preuve de la proposition. □

La proposition suivante donne une borne inférieure et supérieure sur la moyenne $f(t)$ de F ainsi qu'une borne sur la fonction $\lambda(t)$.

Proposition 3.1.4 *On a pour tout $t \in [0, T^*)$:*

$$C_0 \leq f(t) \leq \max_{x \in M} F(x)$$

et

$$0 < \lambda(t) \leq C_1,$$

$$\text{où } C_0 = \left(\frac{Y(M, g_0)}{\mathcal{E}(g^0)} \right)^{\frac{n}{n-2}} \text{ et } C_1 = \left(\frac{\mathcal{E}(g^0)^n}{Y(M, g_0)^2} \right)^{\frac{1}{n-2}}.$$

Démonstration. On rappelle que l'on suppose (sans perte de généralité) que $\text{Vol}(M, g(t)) = 1$ tout au long de ce chapitre. Par définition de $f(t)$, on a

$$f(t) = \int_M F dv_{g(t)} \leq \max_{x \in M} F(x) \int_M dv_{g(t)} = \max_{x \in M} F(x).$$

D'après la définition de l'énergie $\mathcal{E}$, on a

$$f^{\frac{n-2}{n}}(t) = \frac{r_{g(t)}}{\mathcal{E}(g(t))},$$

et comme l'énergie est décroissante le long du flot, on a donc

$$f^{\frac{n-2}{n}}(t) \geq \frac{r_{g(t)}}{\mathcal{E}(g^0)}.$$

D'autre part, par définition de l'invariant de Yamabe :

$$Y(M, g_0) = \inf_{0 \neq \varphi \in H^1(M)} \frac{\int_M (c_n |\nabla \varphi|^2 + R_0 \varphi^2) dv_{g_0}}{\left(\int_M |\varphi|^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

on a

$$\begin{aligned} r_{g(t)} &= \int_M u^{-\frac{n+2}{n-2}} (-c_n \Delta_0 u + R_0 u) dv_{g(t)} \\ &= \int_M (c_n |\nabla u|_0^2 + R_0 u^2) dv_{g_0} \\ &\geq Y(M, g_0) \left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n}} = Y(M, g_0) \end{aligned}$$

car $\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} = \text{Vol}(M, g(t)) = 1$. On en déduit donc

$$f(t) \geq C_0,$$

avec $C_0 = \left(\frac{Y(M, g_0)}{\mathcal{E}(g^0)} \right)^{\frac{n}{n-2}}.$

Maintenant montrons la borne sur $\lambda(t)$. Remarquons que $\lambda(t) = f^{-\frac{2}{n}}(t) \mathcal{E}(g(t))$, et comme $\mathcal{E}(g(t))$ est décroissante, on a $\mathcal{E}(g(t)) \leq \mathcal{E}(g^0)$. Ensuite en utilisant l'inégalité $f(t) \geq C_0$ que l'on vient de démontrer, on a donc

$$\lambda(t) \leq \mathcal{E}(g^0) C_0^{-\frac{2}{n}} = \left(\frac{\mathcal{E}(g^0)^n}{Y(M, g_0)^2} \right)^{\frac{1}{n-2}}.$$

La proposition est donc démontrée. □

Maintenant, on va montrer que la courbure scalaire $R_{g(t)}$ est minorée sur $[0, T^*)$. Pour cela on a besoin tout d'abord du lemme suivant :

Lemme 3.1.1 *La courbure scalaire de la métrique $g(t)$ satisfait l'équation d'évolution suivante :*

$$\partial_t R_{g(t)} = \frac{4}{n+2} R_{g(t)} (R_{g(t)} - \lambda F) + 4 \frac{n-1}{n+2} \Delta_{g(t)} (R_{g(t)} - \lambda F). \quad (3.8)$$

3.1 Existence locale et propriétés du flot

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\partial_t R_{g(t)} &= -\partial_t (u^{-N} (c_n \Delta_0 u - R_0 u)) \\ &= N u^{-N} u^{-1} \partial_t u (c_n \Delta_0 u - R_0 u) - u^{-N} (c_n \Delta_0 (\partial_t u) - R_0 \partial_t u).\end{aligned}$$

Or par (3.2) on a

$$\partial_t u = -\frac{n-2}{n+2} (R_{g(t)} - \lambda F) u,$$

et par la proposition 1.1.2 du chapitre 1, on a

$$u^{-N} (c_n \Delta_0 u_t - R_0 \partial_t u) = c_n \Delta_{g(t)} \left(\frac{\partial_t u}{u} \right) - R_{g(t)} \left(\frac{\partial_t u}{u} \right).$$

On obtient donc,

$$\begin{aligned}\partial_t R_{g(t)} &= R_{g(t)} (R_{g(t)} - \lambda F) + 4 \frac{n-1}{n+2} \Delta_{g(t)} \left(\frac{\partial_t u}{u} \right) - \frac{n-2}{n+2} R_{g(t)} \frac{\partial_t u}{u} \\ &= \frac{4}{n+2} R_{g(t)} (R_{g(t)} - \lambda F) + 4 \frac{n-1}{n+2} \Delta_{g(t)} (R_{g(t)} - \lambda F).\end{aligned}$$

□

Proposition 3.1.5 *Il existe une constante positive C qui dépend de u_0, g_0 et F telle que, si $T^* < +\infty$, alors on a, pour tout $t \in [0, T^*)$:*

$$R_{g(t)} \geq -CT^* - C.$$

Démonstration. Dans ce qui suit, C désigne une constante positive qui dépend de g_0, u_0 et F , dont la valeur peut changer d'une ligne à une autre. D'après (3.8) du lemme précédent, on a

$$\partial_t (R_{g(t)} - \lambda F) = 4 \frac{n-1}{n+2} \Delta_{g(t)} (R_{g(t)} - \lambda F) + \frac{4}{n+2} R_{g(t)} (R_{g(t)} - \lambda F) - F \partial_t \lambda(t). \quad (3.9)$$

Comme $\lambda(t) = \frac{r_{g(t)}}{f(t)}$, et

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} r_{g(t)} &= -2 \frac{n-2}{n+2} \int_M R_{g(t)} (R_{g(t)} - \lambda F) dv_{g(t)}, \\ \frac{d}{dt} f(t) &= -\frac{2n}{n+2} \int_M F (R_{g(t)} - \lambda F) dv_{g(t)},\end{aligned}$$

alors on a

$$\partial_t \lambda(t) = -2 \frac{n-2}{n+2} f^{-1} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^2 dv_{g(t)} + \frac{4}{n+2} \lambda f^{-1} \int_M F (R_{g(t)} - \lambda F) dv_{g(t)}. \quad (3.10)$$

En utilisant les inégalités sur $f(t)$ et $\lambda(t)$ de la proposition 3.1.4, il découle de (3.10) et (3.9)

$$\partial_t(R_{g(t)} - \lambda F) \geq 4\frac{n-1}{n+2}\Delta_{g(t)}(R_{g(t)} - \lambda F) + \frac{4}{n+2}(R_{g(t)} - \lambda F)^2 - C|R_{g(t)} - \lambda F| - C\phi_2(t) - C,$$

où $\phi_2(t) = \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^2 dv_{g(t)}$.

Or

$$\frac{4}{n+2}|R_{g(t)} - \lambda F|^2 - C|R_{g(t)} - \lambda F| \geq -\frac{n+2}{16}C^2.$$

Donc

$$\partial_t(R_{g(t)} - \lambda F) \geq 4\frac{n-1}{n+2}\Delta_{g(t)}(R_{g(t)} - \lambda F) - C\phi_2(t) - C,$$

ce qui donne, en posant $S = R_{g(t)} - \lambda F + C \int_0^t \phi_2(s)ds + Ct$,

$$\partial_t S \geq 4\frac{n-1}{n+2}\Delta_{g(t)}S. \quad (3.11)$$

Le principe du maximum appliqué à (3.11) implique que

$$\min_{x \in M} S(x, t) \geq \min_{x \in M} S(x, 0).$$

D'où

$$R_{g(t)} \geq \min_M (R_0 - \lambda(0)F) + \lambda F - C \int_0^t \phi_2(s)ds - Ct, . \quad (3.12)$$

Mais, d'après la proposition 3.1.3, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{E}(g(t)) &= -2\frac{n-2}{n+2}f^{-\frac{n-2}{n}} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^2 dv_{g(t)} \\ &= -2\frac{n-2}{n+2}f^{-\frac{n-2}{n}}\phi_2(t) \end{aligned}$$

et comme $f(t) \leq \max_M F$ par la proposition 3.1.4, alors

$$\phi_2(t) \leq -C\frac{d}{dt}\mathcal{E}(g(t)). \quad (3.13)$$

En intégrant (3.13) entre 0 et t on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^t \phi_2(s)ds &\leq -C \int_0^t \frac{d}{ds}\mathcal{E}(g(s))ds \\ &\leq C(\mathcal{E}(g(0)) - \mathcal{E}(g(t))) \\ &\leq C. \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.2 Existence globale du flot.

Ainsi il découle de (3.12) et (3.14) que

$$\begin{aligned} R_{g(t)} &\geq -Ct - C \\ &\geq -CT^* - C. \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve de la proposition. □

3.2 Existence globale du flot.

Dans cette section on va démontrer l'existence globale du flot.

Théorème 3.2.1 *Soit $F \in C^\infty(M)$ telle que $\max_{x \in M} F(x) > 0$. Alors pour toute donnée initiale $g^0 = u_0^{\frac{4}{n-2}} g_0 \in \mathcal{M}_F$, il existe une unique solution $g(t) = u(t)^{\frac{4}{n-2}} g_0$ du flot (3.1) définie sur $[0, +\infty)$ avec $0 < u(t) \in C^\infty(M \times [0, +\infty))$. De plus, $g(t) \in \mathcal{M}_F$ pour tout $t \geq 0$ et l'énergie $\mathcal{E}$ est décroissante le long du flot.*

Pour démontrer l'existence d'une solution $g(t)$ de (3.1) définie sur $[0, +\infty)$, il suffit de montrer l'existence d'une solution $u(t)$ de (3.2) définie sur $[0, +\infty)$. Pour cela on a besoin d'établir tout d'abord les deux résultats suivants :

- Dans un premier temps on va montrer que si $T^* < +\infty$, alors il existe une constante positive C_{T^*} telle que, si u est une solution de (3.2) définie sur $[0, T^*)$, on a

$$C_{T^*}^{-1} \leq u(x, t) \leq C_{T^*}, \text{ pour tout } (x, t) \in M \times [0, T^*).$$

- Ensuite, on montrera qu'il existe une constante $C_{T^*} > 0$ telle que $\|u\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(M \times [0, T^*))} \leq C_{T^*}$.

Proposition 3.2.1 *Soit $g(t) = u(t)^{\frac{4}{n-2}} g_0$ la solution de (3.1) définie sur $[0, T^*)$. Si $T^* < +\infty$, alors il existe une constante $C_{T^*} > 0$ telle que*

$$C_{T^*}^{-1} \leq u(x, t) \leq C_{T^*}, \text{ pour tout } (x, t) \in M \times [0, T^*). \quad (3.15)$$

Démonstration. Dans ce qui suit, C désigne une constante positive qui dépend de M , u_0 , g_0 et F dont la valeur peut changer d'une ligne à une autre.

D'après (3.2), la fonction $u(t)$ vérifie l'équation :

$$\frac{\partial_t u}{u} = -\frac{n-2}{n+2} (R_{g(t)} - \lambda(t)F).$$

D'après la proposition 3.1.4, on a $0 < \lambda(t) \leq C_1$. D'où

$$0 \leq \lambda(t)|F| \leq C.$$

Maintenant, en utilisant la proposition 3.1.5, on a $R_{g(t)} \geq -CT^* - C$. On obtient donc

$$\frac{\partial_t u}{u} \leq CT^* + C. \quad (3.16)$$

En intégrant (3.16) entre 0 et t on obtient

$$\begin{aligned} \ln(u(x, t)) &\leq \ln(u_0(x)) + \int_0^t (CT^* + C) ds \\ &\leq \ln(u_0(x)) + CT^{*2} + CT^*. \end{aligned}$$

D'où

$$u(x, t) \leq C_{T^*} \max_{x \in M} u_0(x), \quad (3.17)$$

pour une certaine constante $C_{T^*} > 0$ dépendant de T^* .

Maintenant, il nous reste à prouver $u(x, t) \geq C_{T^*}^{-1}$.

On définit la fonction $a \in C^\infty(M)$ par

$$a = R_0 + (CT^* + C)(C_{T^*} \max_{x \in M} u_0(x))^{\frac{4}{n-2}},$$

où C est la constante dans la proposition 3.1.5 et C_{T^*} est la constante dans l'inégalité (3.17) ci-dessus. Alors en utilisant la proposition 3.1.5 et l'inégalité (3.17), on a

$$-c_n \Delta_0 u + au \geq -c_n \Delta_0 u + R_0 u + (CT^* + C)u^{\frac{n+2}{n-2}} = (R_{g(t)} + CT^* + C)u^{\frac{n+2}{n-2}} \geq 0.$$

Ainsi, en utilisant le théorème 1.2.9 du chapitre 1 (préliminaires), il existe une constante positive C telle que

$$\int_M u^{\frac{2n}{n-2}}(t) dv_{g_0} \leq C \min_{x \in M} u(x, t) \left(\max_{x \in M} u(x, t) \right)^{\frac{n+2}{n-2}}.$$

Or $\int_M u^{\frac{2n}{n-2}}(t) dv_{g_0} = \text{Vol}(M, g(t)) = 1$ et $\max_{x \in M} u(x, t) \leq C_{T^*} \max_{x \in M} u_0(x)$ par (3.17). On obtient donc pour une nouvelle constante $C_{T^*} > 0$ dépendant de T^*

$$\inf_{x \in M} u(x, t) \geq C_{T^*}^{-1}.$$

La preuve de la proposition est ainsi terminée. □

Avant de démontrer que u est bornée dans $C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(M \times [0, T^*))$, on a besoin de démontrer deux résultats techniques.

3.2 Existence globale du flot.

Lemme 3.2.1 *Soit $p > 1$. Si $T^* < +\infty$, alors il existe une constante $C_{T^*} > 0$ dépendant de p, T^*, g_0, u_0 et F telle que*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} &\leq -C_{T^*}^{-1} \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{pn}{n-2}} \right)^{\frac{n-2}{n}} \\ &\quad + \left| \frac{4p-2n}{n+2} \right| \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{p+1} dv_{g(t)} \\ &\quad + C_{T^*} \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \right)^{1-\frac{1}{p}} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^2 dv_{g(t)} \\ &\quad + C_{T^*} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Démonstration. Dans ce qui suit C désigne une constante positive qui dépend de p, g_0, u_0 et F dont la valeur peut changer d'une ligne à une autre. De même, $C_{T^*} > 0$ désignera une constante qui a les mêmes propriétés que C , mais qui peut dépendre en plus de T^* . Comme on l'a déjà signalé ci-dessus, on suppose (sans perte de généralité) tout au long de ce chapitre que le volume de $(M, g(t)) = 1$.

On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} &= p \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{p-2} (R_{g(t)} - \lambda F) \frac{d}{dt} (R_{g(t)} - \lambda F) dv_{g(t)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p \operatorname{tr}_g(\partial_t g) dv_{g(t)}. \end{aligned}$$

Rappelons que

$$\lambda(t) = \frac{r_{g(t)}}{f(t)}$$

et

$$\partial_t R_{g(t)} = \frac{4}{n+2} R_{g(t)} (R_{g(t)} - \lambda F) + 4 \frac{n-1}{n+2} \Delta (R_{g(t)} - \lambda F).$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} r_{g(t)} &= -2 \frac{n-2}{n+2} \int_M R_{g(t)} (R_{g(t)} - \lambda F) dv_{g(t)}, \\ \frac{d}{dt} f(t) &= -\frac{2n}{n+2} \int_M F (R_{g(t)} - \lambda F) dv_{g(t)} \end{aligned}$$

et

$$\operatorname{tr}_g(\partial_t g) dv_{g(t)} = -\frac{2n}{n+2} (R_{g(t)} - \lambda F) dv_{g(t)}.$$

Doù ,

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \\
 &= -16 \frac{(p-1)(n-1)}{p(n+2)} \int_M \left| \nabla_{g(t)} |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{p}{2}} \right|_{g(t)}^2 dv_{g(t)} \\
 &+ \frac{4p-2n}{n+2} \int_M (R_{g(t)} - \lambda F) |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \\
 &+ \frac{4p}{n+2} \int_M \lambda F |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \\
 &+ p \frac{2n-4}{n+2} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{p-2} (R_{g(t)} - \lambda F) F dv_{g(t)} \int_M f^{-1} (R_{g(t)} - \lambda F)^2 dv_{g(t)} \\
 &- \frac{4p}{n+2} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{p-2} (R_{g(t)} - \lambda F) F dv_{g(t)} \int_M \lambda F f^{-1} (R_{g(t)} - \lambda F) dv_{g(t)}.
 \end{aligned}$$

D'après (3.15), on a $u \geq C_{T^*}^{-1}$. On en déduit

$$\begin{aligned}
 \int_M \left| \nabla_{g(t)} |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{p}{2}} \right|_{g(t)}^2 dv_{g(t)} &= \int_M \left| \nabla |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{p}{2}} \right|^2 u^2 dv_{g_0} \\
 &\geq C_{T^*}^{-1} \int_M \left| \nabla |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{p}{2}} \right|^2 dv_{g_0}.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

D'après l'inégalité de Sobolev, on a pour tout $\varphi \in H^1(M)$

$$\left(\int_M |\varphi|^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C \left(\int_M |\nabla \varphi|^2 dv_{g_0} + \int_M |\varphi|^2 dv_{g_0} \right).$$

En prenant $\varphi = |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{p}{2}}$, on obtient

$$\left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{pn}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C \left(\int_M \left| \nabla |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{p}{2}} \right|^2 dv_{g_0} + \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g_0} \right),$$

d'où

$$\int_M \left| \nabla |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{p}{2}} \right|^2 dv_{g_0} \geq C \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{pn}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n}} - C \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g_0}. \tag{3.20}$$

D'autre part, comme par (3.15) on a $u \geq C_{T^*}^{-1}$, alors

$$\begin{aligned}
 \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} &= \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p u^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \\
 &\geq C_{T^*}^{-1} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g_0},
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

3.2 Existence globale du flot.

et toujours d'après (3.15), on a $u \leq C_{T^*}$, d'où

$$\begin{aligned} \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{pn}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n}} &= \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{pn}{n-2}} u^{-\frac{2n}{n-2}} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n-2}{n}} \\ &\geq C_{T^*}^{-1} \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{pn}{n-2}} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n-2}{n}}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

En substituant (3.21) et (3.22) dans (3.20), on obtient

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{p}{2}}|^2 dv_{g_0} &\geq C_{T^*}^{-1} \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{pn}{n-2}} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n-2}{n}} \\ &\quad - C_{T^*} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

ce qui donne grâce à (3.19)

$$\begin{aligned} \int_M \left| \nabla_{g(t)} |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{p}{2}} \right|^2 dv_{g(t)} &\geq C_{T^*}^{-1} \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{pn}{n-2}} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n-2}{n}} \\ &\quad - C_{T^*} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)}. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités sur $\lambda(t)$ et $f(t)$ données par la proposition 3.1.4, on a

$$\frac{4p}{n+2} \int_M \lambda F |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \leq C \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)}$$

et

$$\begin{aligned} p \frac{2n-4}{n+2} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{p-2} (R_{g(t)} - \lambda F) F dv_{g(t)} &\int_M f^{-1} (R_{g(t)} - \lambda F)^2 dv_{g(t)} \\ &\leq C \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \right)^{1-\frac{1}{p}} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^2 dv_{g(t)}. \end{aligned}$$

De même, en utilisant l'inégalité de Höder, on a

$$\begin{aligned} -\frac{4p}{n+2} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{p-2} (R_{g(t)} - \lambda F) F dv_{g(t)} &\int_M \lambda F f^{-1} (R_{g(t)} - \lambda F) dv_{g(t)} \\ &\leq C \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)}. \end{aligned}$$

De ce qui précède on conclut qu'il existe une constante positive C_{T^*} telle que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} &\leq -C_{T^*}^{-1} \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{pn}{n-2}} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n-2}{n}} \\ &\quad + \left| \frac{4p-2n}{n+2} \right| \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{p+1} dv_{g(t)} \\ &\quad + C_{T^*} \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \right)^{1-\frac{1}{p}} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^2 dv_{g(t)}. \\ &\quad + C_{T^*} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)}. \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve du Lemme. $\square$

Proposition 3.2.2 Soit $p = \frac{n^2}{2(n-2)}$. Si $T^* < +\infty$, il existe une constante $C_{T^*} > 0$ qui dépend de F , g_0 , u_0 et T^* telle que

$$\int_M |R_{g(t)} - \lambda(t)F|^p dv_{g(t)} \leq C_{T^*}, \text{ pour tout } t \in [0, T^*).$$

Démonstration.

Dans ce qui suit C désignera une constante positive qui dépend de u_0, g_0 et F , dont la valeur peut changer d'une ligne à l'autre. Posons $\phi_p(t) = \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)}$. Pour $p = \frac{n}{2}$, on a d'après le lemme 3.2.1,

$$\phi'_{\frac{n}{2}}(t) \leq C_{T^*} \phi_{\frac{n}{2}}(t) + C_{T^*} \phi_{\frac{n}{2}}^{1-\frac{2}{n}}(t) \phi_2(t).$$

D'après l'inégalité de Young, on a

$$\phi_{\frac{n}{2}}^{1-\frac{2}{n}}(t) \leq C(\phi_{\frac{n}{2}}(t) + 1),$$

d'où

$$\phi'_{\frac{n}{2}}(t) \leq C_{T^*} (\phi_{\frac{n}{2}}(t) + 1) (\phi_2(t) + 1).$$

En divisant cette inégalité par $\phi_{\frac{n}{2}}(t) + 1$, on obtient

$$\frac{(\phi_{\frac{n}{2}}(t) + 1)'}{(\phi_{\frac{n}{2}}(t) + 1)} \leq C_{T^*} (\phi_2(t) + 1)$$

et en intégrant cette inégalité entre 0 et t , on obtient

$$\phi_{\frac{n}{2}}(t) + 1 \leq (\phi_{\frac{n}{2}}(0) + 1) e^{C_{T^*} \int_0^t (\phi_2(s) + 1) ds}. \quad (3.24)$$

3.2 Existence globale du flot.

Mais, d'après (3.7) on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{E}(g(t)) &= -2\frac{n-2}{n+2}f^{-\frac{n-2}{n}}\int_M |R_{g(t)} - \lambda(t)F|^2 dv_{g(t)} \\ &= -2\frac{n-2}{n+2}f^{-\frac{n-2}{n}}\phi_2(t)\end{aligned}$$

et comme $C_0 \leq f(t) \leq \max_M F$ par la proposition 3.1.4, alors

$$\phi_2(t) \leq -C\frac{d}{dt}\mathcal{E}(g(t))$$

et en intégrant entre 0 et t , on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^t \phi_2(s)ds &\leq -C\int_0^t \frac{d}{ds}\mathcal{E}(g(s))ds \\ &\leq C(\mathcal{E}(g(0)) - \mathcal{E}(g(t))) \\ &\leq C.\end{aligned}\tag{3.25}$$

Ainsi il découle de (3.24) et (3.25)

$$\begin{aligned}\phi_{\frac{n}{2}}(t) &\leq Ce^{Ct} \\ &\leq Ce^{CT^*}.\end{aligned}\tag{3.26}$$

Prenons à nouveau $p = \frac{n}{2}$ dans (3.18). On a

$$\phi'_{\frac{n}{2}}(t) \leq -C_{T^*}\phi_{\frac{n}{2}}^{\frac{n-2}{2(n-2)}}(t) + C_{T^*}\phi_{\frac{n}{2}}(t) + C\phi_{\frac{n}{2}}^{1-\frac{2}{n}}(t)\phi_2(t),$$

et en intégrant entre 0 et t on obtient

$$\phi_{\frac{n}{2}}(t) - \phi_{\frac{n}{2}}(0) + C_{T^*}\int_0^t \phi_{\frac{n}{2}}^{\frac{n-2}{2(n-2)}}(s)ds \leq C_{T^*}\int_0^t \phi_{\frac{n}{2}}(s)ds + C\int_0^t \phi_{\frac{n}{2}}^{1-\frac{2}{n}}(s)\phi_2(s)ds.$$

En utilisant (3.25) et (3.26) dans la dernière inégalité, on obtient

$$\int_0^t \phi_{\frac{n}{2}}^{\frac{n-2}{2(n-2)}}(s)ds \leq C_{T^*}.\tag{3.27}$$

D'autre part, par l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Young, on a pour tout $\varepsilon > 0$ et $p > \frac{n}{2}$,

$$\begin{aligned}\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{p+1} dv_{g(t)} &\leq \varepsilon \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{pn}{n-2}} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n-2}{n}} \\ &\quad + \varepsilon^{-\frac{n}{2p-n}} \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \right)^{\frac{2p-n+2}{2p-n}}.\end{aligned}\tag{3.28}$$

En prenant $\varepsilon = \left| \frac{4p-2n}{n+2} \right|^{-1} C_{T^*}^{-1}$ et en substituant l'inégalité (3.28) dans l'inégalité (3.18) du lemme 3.2.1 (ici C_{T^*} est la constante dans le lemme 3.2.1), on obtient

$$\phi'_p \leq C_{T^*} \left(\phi_p^{\frac{2p-n+2}{2p-n}} + \phi_p + \phi_p^{1-\frac{1}{p}} \phi_2 \right). \quad (3.29)$$

Si l'on suppose $p \geq 2$, alors on a par l'inégalité de Hölder,

$$\phi_p^{1-\frac{1}{p}} \phi_2 \leq \phi_p \phi_2^{\frac{1}{2}},$$

d'où, si $p > \max(2, \frac{n}{2})$, alors on obtient de (3.29) :

$$\phi'_p \leq C_{T^*} \left(\phi_p^{\frac{2p-n+2}{2p-n}} + \phi_p + \phi_p \phi_2^{\frac{1}{2}} \right)$$

et en divisant par ϕ_p , on obtient

$$\frac{d}{dt} \log \phi_p \leq C_{T^*} \left(\phi_p^{\frac{2}{2p-n}} + \phi_2^{\frac{1}{2}} + 1 \right).$$

En particulier, si on prend $p = \frac{n^2}{2(n-2)}$, et on intègre entre 0 et t , on obtient

$$\log \left(\phi_{\frac{n^2}{2(n-2)}}(t) \right) \leq \log \left(\phi_{\frac{n^2}{2(n-2)}}(0) \right) + C_{T^*} \int_0^t \phi_{\frac{n^2}{2(n-2)}}^{\frac{n-2}{2}}(s) ds + C_{T^*} \int_0^t \phi_2^{\frac{1}{2}}(s) ds + C_{T^*} t. \quad (3.30)$$

Mais d'après (3.27) on a

$$\int_0^t \phi_{\frac{n^2}{2(n-2)}}^{\frac{n-2}{2}}(s) ds \leq C_{T^*},$$

et par l'inégalité de Hölder et (3.25) on a

$$\int_0^t \phi_2^{\frac{1}{2}}(s) ds \leq \sqrt{t} \left(\int_0^t \phi_2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \sqrt{T^*}.$$

Ainsi il découle de (3.30) que

$$\log \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda(t) F|^{\frac{n^2}{2(n-2)}} dv_{g(t)} \right) \leq C_{T^*},$$

ce qui termine la preuve de la proposition. $\square$

Maintenant on est en mesure de montrer que u est bornée dans $C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(M \times [0, T^*))$.

3.2 Existence globale du flot.

Proposition 3.2.3 *Soit $g(t) = u(t)^{\frac{4}{n-2}}g_0$ la solution de l'équation (3.1) définie sur un intervalle maximal $[0, T^*)$. Alors, si $T^* < +\infty$, il existe $\alpha \in (0, 1)$, et une constante C_{T^*} qui dépend de u_0, g_0, F et T^* telle que*

$$|u(x_1, t_1) - u(x_2, t_2)| \leq C_{T^*}((t_1 - t_2)^{\frac{\alpha}{2}} + d(x_1, x_2)^\alpha) \quad (3.31)$$

pour tous $x_1, x_2 \in M$ et $t_1, t_2 \in [0, T^*)$.

Démonstration. Dans ce qui suit C désigne une constante positive qui dépend de p, g_0, u_0 et F dont la valeur peut changer d'une ligne à une autre. De même, $C_{T^*} > 0$ désignera une constante qui a les mêmes propriétés que C , mais qui peut dépendre en plus de T^* . Posons $\alpha = 2 - \frac{n}{p}$, où $p = \frac{n^2}{2(n-2)}$. En utilisant les proposition 3.2.1 et 3.2.2, on a

$$\int_M |c_n \Delta_0 u - R_0 u|^p dv_{g_0} \leq C_{T^*} \quad (3.32)$$

et

$$\int_M |\partial_t u(t)|^p dv_{g(t)} \leq C_{T^*} \quad (3.33)$$

En effet, on a

$$\int_M |c_n \Delta_0 u - R_0 u|^p dv_{g_0} = \int_M \left| R_{g(t)} u^{\frac{n+2}{n-2}} \right|^p dv_{g_0},$$

et comme $u \leq C_{T^*}$ et $\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \leq C_{T^*}$, alors

$$\begin{aligned} \int_M |c_n \Delta_0 u - R_0 u|^p dv_{g_0} &\leq C_{T^*} \int_M |R_{g(t)}|^p dv_{g(t)} \\ &\leq C_{T^*} \int_M |R_{g(t)} - \lambda(t)F|^p dv_{g(t)} + C_{T^*} \int_M |\lambda(t)F|^p dv_{g(t)} \\ &\leq C_{T^*}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $0 \leq \lambda(t)|F| \leq C$ par la proposition 3.1.4.

De même, on a

$$\begin{aligned} \int_M |\partial_t u(t)|^p dv_{g(t)} &= \int_M \left| \frac{n-2}{4} (R - F)u \right|^p dv_{g(t)} \\ &\leq \left(\frac{n-2}{4} \right)^p \int_M |R_{g(t)} - F|^p u^p dv_{g(t)} \\ &\leq C_{T^*}. \end{aligned}$$

De l'inégalité (3.32) on déduit que $\Delta_0 u$ est bornée dans $L^p(M)$. Il en découle par la régularité elliptique du Laplacien que u est bornée dans $H_2^p(M)$. D'autre part, d'après le

théorème d'injection de Sobolev, on a $H_2^p(M) \subset C^\alpha(M)$ avec $\alpha = 2 - \frac{n}{p}$. Par suite on conclut que u est bornée dans $C^\alpha(M)$, i.e,

$$|u(x_1, t) - u(x_2, t)| \leq C e^{CT^*} d(x_1, x_2)^\alpha \quad (3.34)$$

pour tout $x_1, x_2 \in M$ et $t \in [0, T^*)$.

Maintenant on a pour tout $x \in M$ et $0 < t_1 < t_2 < T^*$

$$|u(x, t_1) - u(x, t_2)| = \frac{1}{\text{Vol}(B)} \int_{B(x, \sqrt{t_2-t_1})} |u(x, t_1) - u(x, t_2)| dv_{g_0}$$

où $\text{Vol}(B)$ est le volume de la boule $B = B(x, \sqrt{t_2-t_1})$ par rapport à g_0 . Donc

$$\begin{aligned} |u(x, t_1) - u(x, t_2)| &\leq C(t_2 - t_1)^{-\frac{n}{2}} \int_{B(x, \sqrt{t_2-t_1})} |u(x, t_1) - u(x, t_2)| dv_{g_0} \\ &= C(t_2 - t_1)^{-\frac{n}{2}} \int_{B(x, \sqrt{t_2-t_1})} |u(x, t_1) - u(x, t_2) - u(y, t_1) + u(y, t_1) - u(y, t_2) \\ &\quad + u(y, t_2)| dv_{g_0}(y) \\ &\leq C(t_2 - t_1)^{-\frac{n}{2}} C_{T^*} d(x, y)^\alpha (t_1 - t_2)^{\frac{n}{2}} \\ &\quad + C(t_1 - t_2)^{-\frac{n}{2}} C_{T^*} d(x, y)^\alpha (t_2 - t_1)^{\frac{n}{2}} \\ &\quad + C(t_2 - t_1)^{-\frac{n}{2}} \int_{B(x, \sqrt{t_2-t_1})} |u(y, t_1) - u(y, t_2)| dv_{g_0}(y). \end{aligned}$$

Pour $y \in B(x, \sqrt{t_2-t_1})$, on a $d(x, y) \leq (t_2 - t_1)^{\frac{1}{2}}$, et par suite

$$\begin{aligned} |u(x, t_1) - u(x, t_2)| &\leq C(t_2 - t_1)^{-\frac{n}{2}} \int_{B(x, \sqrt{t_2-t_1})} |u(y, t_1) - u(y, t_2)| dv_{g_0}(y) + C_{T^*} (t_2 - t_1)^{\frac{\alpha}{2}} \\ &\leq C(t_2 - t_1)^{-\frac{n-2}{2}} \sup_{t_2 \leq t \leq t_1} \int_{B(x, \sqrt{t_2-t_1})} |\partial_t u(t)| dv_{g_0}(y) + C_{T^*} (t_2 - t_1)^{\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Or en utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité (3.33), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{B(x, \sqrt{t_2-t_1})} |\partial_t u(t)| dv_{g_0} &\leq \left(\int_{B(x, \sqrt{t_2-t_1})} |\partial_t u(t)|^p dv_{g_0} \right)^{\frac{1}{p}} (t_2 - t_1)^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})} \\ &\leq C_{T^*} (t_2 - t_1)^{\frac{np-n}{2p}}. \end{aligned}$$

Donc on a pour tous $x \in M$ et $0 < t_1 < t_2 < T^*$,

$$|u(x, t_1) - u(x, t_2)| \leq C_{T^*} (t_2 - t_1)^{\frac{\alpha}{2}}. \quad (3.35)$$

En utilisant (3.34) et (3.35), on déduit que

$$\begin{aligned} |u(x_1, t_1) - u(x_2, t_2)| &\leq |u(x_1, t_1) - u(x_1, t_2)| + |u(x_1, t_2) - u(x_2, t_2)| \\ &\leq C e^{CT^*} (|t_2 - t_1|^{\frac{\alpha}{2}} + d(x_1, x_2)^\alpha). \end{aligned}$$

3.3 Comportement de la courbure scalaire à l'infini

pour tous $x_1, x_2 \in M$ et $0 < t_1 < t_2 < T^*$.

La proposition est donc démontrée. $\square$

Démonstration du Théorème 3.2.1.

Soit $g(t) = u(t)^{\frac{4}{n-2}} g_0$ la solution de (3.1) définie sur un intervalle maximal $[0, T^*)$. Supposons par l'absurde que $T^* < +\infty$. On a alors d'après la proposition précédente

$$\|u\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(M \times [0, T^*))} \leq C_{T^*},$$

pour $\alpha \in (0, 1)$. La théorie classique des équations paraboliques implique que u est bornée dans $C^{2k+\alpha, k+\frac{\alpha}{2}}(M \times [0, T^*))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, i.e.,

$$\|u\|_{C^{2k+\alpha, k+\frac{\alpha}{2}}(M \times [0, T^*))} \leq C_{k, T^*}$$

pour une constante C_{k, T^*} . Ce qui implique que u se prolonge en une fonction $u_{T^*} \in C^\infty(M)$ pour $t = T^*$. De plus, d'après la proposition 3.2.1, on a $u_{T^*} \geq C_{T^*}^{-1} > 0$. En utilisant la proposition d'existence locale (proposition 3.1.1) avec la donnée initiale u_{T^*} , on pourra prolonger u au delà de T^* , ce qui contredit la maximalité de T^* (plus grand temps d'existence). On a donc $T^* = +\infty$ et le théorème d'existence globale est ainsi démontré. $\square$

3.3 Comportement de la courbure scalaire à l'infini

Dans cette section on va étudier le comportement de la courbure scalaire $R_{g(t)}$ du flot $g(t)$ pour t grand. Tout d'abord on va démontrer une propriété importante (proposition 3.3.1 ci-après) qui montre que l'intégrale dans la proposition 3.2.2 tends vers 0 lorsque t tends vers $+\infty$. Cette propriété, qui est vraie sans aucune hypothèse supplémentaire sur la fonction prescrite F , est en particulier valable même en cas de non convergence du flot. Comme dans le cas du flot de Yamabe, elle exprime le fait que la courbure scalaire $R_{g(t)}$ est arbitrairement proche de F (à une constante multiplicative positive près) lorsque t est suffisamment grand, alors que le flot $g(t)$ peut exploser à l'infini.

Proposition 3.3.1 *Pour tout $p \geq 1$, on a*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} = 0.$$

Pour démontrer cette proposition on a besoin de deux lemmes techniques.

Lemme 3.3.1 *Soit $p \geq \min(2, \frac{n}{2})$.*

1. Si $2 \leq p \leq \frac{n}{2}$, il existe une constante $C > 0$ indépendante de t telle que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} &\leq -2 \frac{n-2p}{n+2} Y(M, g_0) \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{pn}{n-2}} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n-2}{n}} \\ &+ C \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} + C \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \right)^{1-\frac{1}{p}} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^2 dv_{g(t)} \end{aligned}$$

2. Si $p > \frac{n}{2}$, il existe une constante $C > 0$ indépendante de t telle que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} &\leq -\frac{(p-1)(n-1)}{p(n+2)} Y(M, g_0) \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{pn}{n-2}} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n-2}{n}} \\ &+ C \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} + C \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \right)^{\frac{2p-n+2}{2p-n}}. \end{aligned}$$

Démonstration. Dans ce qui suit C est une constante positive qui dépend de M , u_0 , g_0 , F et p , dont la valeur peut changer d'une ligne à une autre.

Comme dans la preuve du lemme 3.2.1, on calcule

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \\ &= -16 \frac{(p-1)(n-1)}{p(n+2)} \int_M \left| \nabla_{g(t)} |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{p}{2}} \right|_{g(t)}^2 dv_{g(t)} \\ &\quad + \frac{4p-2n}{n+2} \int_M R_{g(t)} |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \\ &\quad + \frac{2n}{n+2} \int_M \lambda F |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \\ &\quad + p \frac{2n-4}{n+2} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{p-2} (R_{g(t)} - \lambda F) F dv_{g(t)} \int_M f^{-1} (R_{g(t)} - \lambda F)^2 dv_{g(t)} \\ &\quad - \frac{4p}{n+2} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{p-2} (R_{g(t)} - \lambda F) F dv_{g(t)} \int_M \lambda F f^{-1} (R_{g(t)} - \lambda F) dv_{g(t)}. \end{aligned}$$

3.3 Comportement de la courbure scalaire à l'infini

Comme $0 < \lambda(t) \leq C_1$ et $C_0 \leq f(t) \leq C$ par la proposition 3.1.4, alors on obtient de ce qui précède

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \\
& \leq -16 \frac{(p-1)(n-1)}{p(n+2)} \int_M \left| \nabla_{g(t)} |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{p}{2}} \right|_{g(t)}^2 dv_{g(t)} \\
& \quad + \frac{4p-2n}{n+2} \int_M R_{g(t)} |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \\
& \quad + C \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \\
& \quad + C \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{p-1} dv_{g(t)} \right) \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^2 dv_{g(t)} \\
& \quad + C \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{p-1} dv_{g(t)} \right) \int_M |R_{g(t)} - \lambda F| dv_{g(t)} \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Pour $2 \leq p < \frac{n}{2}$, on remarque que :

$$\begin{aligned}
& -16 \frac{(p-1)(n-1)}{p(n+2)} \int_M \left| \nabla_{g(t)} |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{p}{2}} \right|_{g(t)}^2 dv_{g(t)} + \frac{4p-2n}{n+2} \int_M R_{g(t)} |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \\
& = -\frac{2n-4p}{n+2} \left(4 \frac{(p-1)(n-1)}{p(\frac{n}{2}-p)} \int_M \left| \nabla_{g(t)} |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{p}{2}} \right|_{g(t)}^2 dv_{g(t)} + \int_M R_{g(t)} |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \right).
\end{aligned}$$

Mais si $2 \leq p < \frac{n}{2}$, on a $4 \frac{(p-1)(n-1)}{p(\frac{n}{2}-p)} \geq 4 \frac{n-1}{n-2} = c_n$. D'où

$$\begin{aligned}
& -16 \frac{(p-1)(n-1)}{p(n+2)} \int_M \left| \nabla_{g(t)} |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{p}{2}} \right|_{g(t)}^2 dv_{g(t)} + \frac{4p-2n}{n+2} \int_M R_{g(t)} |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \\
& \leq -\frac{2n-4p}{n+2} \left(\int_M c_n \left| \nabla_{g(t)} |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{p}{2}} \right|_{g(t)}^2 dv_{g(t)} + \int_M R_{g(t)} |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \right) \\
& \leq -\frac{2n-4p}{n+2} Y(M, g_0) \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{pn}{n-2}} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n-2}{n}}. \tag{3.37}
\end{aligned}$$

Mais par définition de l'invariant de Yamabe $Y(M, g_0)$, on a

$$\begin{aligned}
& \int_M c_n \left| \nabla_{g(t)} |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{p}{2}} \right|_{g(t)}^2 dv_{g(t)} + \int_M R_{g(t)} |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \\
& \geq Y(M, g_0) \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{pn}{n-2}} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n-2}{n}}.
\end{aligned}$$

On obtient donc de (3.37),

$$\begin{aligned}
 & -16 \frac{(p-1)(n-1)}{p(n+2)} \int_M \left| \nabla_{g(t)} |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{p}{2}} \right|_{g(t)}^2 dv_{g(t)} + \frac{4p-2n}{n+2} \int_M R_{g(t)} |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \\
 & \leq -\frac{2n-4p}{n+2} Y(M, g_0) \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{pn}{n-2}} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n-2}{n}}.
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

En substituant (3.38) dans (3.36) et en appliquant l'inégalité de Hölder au dernier terme de (3.36) on a :

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \leq -2 \frac{n-2p}{n+2} Y(M, g_0) \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{pn}{n-2}} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n-2}{n}} \\
 & + C \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} + C \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \right)^{1-\frac{1}{p}} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^2 dv_{g(t)}.
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Si $p = \frac{n}{2}$, il découle facilement de (3.36) en appliquant l'inégalité de Hölder au dernier terme que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} & \leq C \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \\
 & + C \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \right)^{1-\frac{1}{p}} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^2 dv_{g(t)}
 \end{aligned}$$

qui est bien équivalente à (3.39) si $p = \frac{n}{2}$.

Maintenant on suppose $p > \frac{n}{2}$. On a par définition de l'invariant de Yamabe $Y(M, g_0)$:

$$\begin{aligned}
 \int_M c_n \left| \nabla_{g(t)} |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{p}{2}} \right|_{g(t)}^2 dv_{g(t)} & \geq Y(M, g_0) \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{pn}{n-2}} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n-2}{n}} \\
 & - \int_M R_{g(t)} |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)}.
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

D'autre part, comme $|\lambda F| \leq C$ par la proposition 3.1.4, on a

$$\begin{aligned}
 & \int_M R_{g(t)} |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \\
 & \leq \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{p+1} dv_{g(t)} + \int_M |\lambda F| |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \\
 & \leq \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{p+1} dv_{g(t)} + C \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)}.
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

3.3 Comportement de la courbure scalaire à l'infini

En combinant (3.40) et (3.41) on obtient

$$\begin{aligned}
& -16 \frac{(p-1)(n-1)}{p(n+2)} \int_M \left| \nabla_{g(t)} |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{p}{2}} \right|_{g(t)}^2 dv_{g(t)} \leq \\
& C \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{p+1} dv_{g(t)} + \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \right) \\
& - 16 \frac{(p-1)(n-1)}{p(n+2)} Y(M, g_0) \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{pn}{n-2}} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n-2}{n}}. \tag{3.42}
\end{aligned}$$

Ainsi en substituant (3.42) dans (3.36), on a

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \leq -16 \frac{(p-1)(n-1)}{p(n+2)} Y(M, g_0) \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{pn}{n-2}} \right)^{\frac{n-2}{n}} \\
& + C \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{p+1} dv_{g(t)} + C \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \\
& + C \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} + C \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \right)^{1-\frac{1}{p}} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^2 dv_{g(t)}. \tag{3.43}
\end{aligned}$$

Si on note par I et II les deux derniers termes dans l'inégalité (3.43), alors en utilisant l'inégalité de Hölder, il n'est pas difficile de voir que l'on a la majoration suivante

$$I + II \leq C \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{p+1} dv_{g(t)} + C \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)}.$$

Ainsi (3.43) devient

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \leq -16 \frac{(p-1)(n-1)}{p(n+2)} Y(M, g_0) \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{pn}{n-2}} \right)^{\frac{n-2}{n}} \\
& + C \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{p+1} dv_{g(t)} + C \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)}. \tag{3.44}
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hölder on a ,

$$\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{p+1} dv_{g(t)} \leq \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \right)^{\frac{2p-n+2}{2p}} \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{pn}{n-2}} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n-2}{2p}}$$

ce qui implique, grâce à l'inégalité de Young, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
& \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{p+1} dv_{g(t)} \\
& \leq \varepsilon^{-\frac{n}{2p-n}} \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \right)^{\frac{2p-n+2}{2p-n}} + \varepsilon \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{pn}{n-2}} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n-2}{n}}.
\end{aligned}$$

Ainsi en choisissant $\varepsilon = 15^{\frac{(p-1)(n-1)}{p(n+2)}}$ et en utilisant (3.44), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} &\leq - \frac{(p-1)(n-1)}{p(n+2)} Y(M, g_0) \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{pn}{n-2}} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n-2}{n}} \\ &\quad + C \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} + C \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \right)^{\frac{2p-n+2}{2p-n}}. \end{aligned}$$

Le lemme est ainsi démontré. $\square$

Lemme 3.3.2 *Soit Y une fonction positive de classe C^1 sur $[0, +\infty)$. On suppose qu'il existe des constantes $C, \alpha, \beta, \theta > 0$ telles que*

$$Y'(t) \leq C (Y^\alpha(t) + Y^\beta(t)), \text{ pour tout } t \geq 0 \quad (3.45)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t^{t+1} Y^\theta(s) ds = 0. \quad (3.46)$$

Alors on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = 0.$$

Démonstration. Notre but est de démontrer que $Y(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, i.e

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T > 0 : \forall t \geq T, \text{ on a } Y(t) < \varepsilon. \quad (3.47)$$

Par (3.46) il existe une suite réelle (t_j) telle que

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} Y(t_j) = 0 \text{ avec } j < t_j < j+1, \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}.$$

Il en découle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall j \geq j_0, Y(t_j) < \frac{\varepsilon}{\delta} \text{ et } \int_{t_j}^{t_j+1} Y^\theta(t) dt < \left(\frac{\varepsilon}{\delta} \right)^{1+\theta}, \quad (3.48)$$

où $\delta \geq 1$ est une constante à déterminer plus tard.

Montrons que (3.47) est vraie pour $T = t_{j_0+1}$. En effet, supposons que (3.47) ne soit pas vraie. Il existe donc $t \geq T$ tel que $Y(t) \geq \varepsilon$. Posons alors

$$T_1 = \inf \{ t \geq T : Y(t) \geq \varepsilon \}.$$

On a par continuité de Y ,

$$Y(T_1) = \varepsilon \quad (3.49)$$

3.3 Comportement de la courbure scalaire à l'infini

et

$$Y(t) < \varepsilon \quad \text{si } T \leq t < T_1. \quad (3.50)$$

Soit $j_1 \in \mathbb{N}$ défini par

$$t_{j_1} = \max\{ t_j : t_j \leq T_1 \}.$$

Alors on a nécessairement $t_{j_1} \leq T_1 < t_{j_1+1}$ et

$$t_{j_1} \geq t_{j_0+1} = T. \quad (3.51)$$

Ainsi il découle de (3.48)

$$Y(t_{j_1}) < \frac{\varepsilon}{\delta}. \quad (3.52)$$

Si on multiplie (3.45) par Y^θ , on obtient

$$(Y^{1+\theta})' \leq C(1+\theta)(Y^\alpha + Y^\beta)Y^\theta$$

et en intégrant entre t_{j_1} et T_1 , on a

$$Y(T_1) \leq Y^{1+\theta}(t_{j_1}) + C(1+\theta) \int_{t_{j_1}}^{T_1} (Y^\alpha + Y^\beta)Y^\theta(t)dt.$$

En utilisant (3.50), (3.51) et (3.52), on obtient donc

$$Y(T_1) \leq \left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{1+\theta} + C(1+\theta)(\varepsilon^\alpha + \varepsilon^\beta) \int_{t_{j_1}}^{T_1} Y^\theta(t)dt.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer $0 < \varepsilon < 1$. La dernière inégalité devient donc

$$Y(T_1) \leq \left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{1+\theta} + 2C(1+\theta) \int_{t_{j_1}}^{T_1} Y^\theta(t)dt. \quad (3.53)$$

Maintenant, comme $j_0 \leq j_1 \leq t_{j_1} \leq T_1 < t_{j_1+1} \leq j_1 + 2$, on a en utilisant (3.48)

$$\int_{t_{j_1}}^{T_1} Y^\theta(t)dt \leq \int_{j_1}^{j_1+1} Y^\theta(t)dt + \int_{j_1+1}^{j_1+2} Y^\theta(t)dt \leq \frac{\varepsilon}{\delta} + \frac{\varepsilon}{\delta} = 2\frac{\varepsilon}{\delta}$$

et en substituant dans (3.53), on obtient

$$Y(T_1) \leq \left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{1+\theta} + 4C(1+\theta)\frac{\varepsilon}{\delta} \leq \frac{\varepsilon}{\delta} + 4C(1+\theta)\frac{\varepsilon}{\delta}$$

car $\varepsilon < 1$ et $\delta \geq 1$. En choisissant $\delta = 2(1 + 4C(1+\theta))$, on obtient $Y(T_1) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui contredit (3.49). Le lemme est ainsi démontré. $\square$

Maintenant on démontre la proposition 3.3.1

Démonstration de la proposition 3.3.1. Dans ce qui suit C désigne une constante positive qui dépend de M , g_0 , u_0 , F et p , dont la valeur peut changer d'une ligne à une autre.

Soit $\phi_p(t) = \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)}$. D'après le lemme 3.3.1, on a :
si $p \leq \frac{n}{2}$, $\phi_p(t)$ vérifie l'inégalité :

$$\phi_p'(t) \leq -\alpha_0 \phi_p^{\frac{n-2}{pn}}(t) + C \phi_p(t) + C \phi_p^{1-\frac{1}{p}}(t) \phi_2(t), \quad (3.54)$$

si $p > \frac{n}{2}$, $\phi_p(t)$ vérifie l'inégalité :

$$\phi_p'(t) \leq -\alpha_1 \phi_p^{\frac{n-2}{pn}}(t) + C \phi_p^{\frac{2p-n+2}{2p-n}}(t) + C \phi_p(t), \quad (3.55)$$

où $\alpha_0 = 2 \frac{n-2p}{n+2} Y(M, g_0)$ et $\alpha_1 = \frac{(p-1)(n-1)}{p(n+2)} Y(M, g_0)$.

Comme le volume de M est constant, en utilisant l'inégalité de Hölder il est suffisant de démontrer la proposition pour une suite $p_k \rightarrow +\infty$. On va démontrer la proposition par récurrence pour $p = p_k$, avec

$$p_k = p_0 \left(\frac{n}{n-2} \right)^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

où $p_0 \in [\frac{3}{2}, 2]$ est choisi de telle sorte que $p_k \neq \frac{n}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En effet, un tel choix est toujours possible car il suffit de choisir p_0 irrationnel dans $[\frac{3}{2}, 2]$, ce qui implique que p_k est irrationnel et donc $p_k \neq \frac{n}{2}$.

On commence par montrer la proposition pour $p = p_0$. Comme $p_0 < 2$, on a par l'inégalité de Hölder $\phi_{p_0}(t) \leq \phi_2^{\frac{p_0}{2}}(t)$, et donc il suffit de montrer que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_2(t) = 0.$$

D'après la proposition 3.1.3, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(g(t)) &= -2 \frac{n-2}{n+2} f^{-\frac{n-2}{n}} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^2 dv_{g(t)} \\ &= -2 \frac{n-2}{n+2} f^{-\frac{n-2}{n}} \phi_2(t) \end{aligned}$$

et comme $f(t) \leq \max_M F$ par la proposition 3.1.4, alors

$$\phi_2(t) \leq -C \frac{d}{dt} \mathcal{E}(g(t)). \quad (3.56)$$

En intégrant (3.56) entre 0 et t on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^t \phi_2(s) ds &\leq -C \int_0^t \frac{d}{ds} \mathcal{E}(g(s)) ds \\ &\leq C(\mathcal{E}(g(0)) - \mathcal{E}(g(t))) \\ &\leq C. \end{aligned} \quad (3.57)$$

3.3 Comportement de la courbure scalaire à l'infini

Comme $t \geq 0$ est quelconque, on a donc

$$\int_0^{+\infty} \phi_2(t) dt \leq C. \quad (3.58)$$

Maintenant pour montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_2(t) = 0$, on distingue deux cas, si $2 \leq \frac{n}{2}$, on utilise (3.54) (en prenant $p = 2$), alors on a,

$$\phi_2'(t) \leq C \phi_2(t) + C \phi_2^{\frac{3}{2}}(t).$$

Si $2 > \frac{n}{2}$, dans ce cas on a $n = 3$, on utilise (3.55) :

$$\phi_2'(t) \leq C \phi_2^3(t) + C \phi_2(t).$$

Dans les deux cas, en utilisant (3.58) on peut appliquer le lemme 3.3.2, qui donne

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_2(t) = 0. \quad (3.59)$$

Maintenant on suppose que la proposition 3.3.1 est vraie pour $p = p_k$ et on va la démontrer pour p_{k+1} . On suppose donc,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_{p_k}(t) = 0 \quad (3.60)$$

et on va montrer que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_{p_{k+1}}(t) = 0.$$

Tout d'abord on va démontrer que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t^{t+1} \phi_{p_{k+1}}^{\frac{n-2}{n}}(s) ds = 0. \quad (3.61)$$

Comme $p_k \neq \frac{n}{2}$, on distingue deux cas : $p_k < \frac{n}{2}$ et $p_k > \frac{n}{2}$.

Si $p_k < \frac{n}{2}$, on applique l'inégalité (3.54) avec $p = p_k$ et on obtient

$$\phi_{p_k}'(t) \leq -\alpha_0 \phi_{p_{k+1}}^{\frac{n-2}{n}}(t) + C \phi_{p_k}(t) + C \phi_{p_k}^{1-\frac{1}{p_k}}(t) \phi_2(t). \quad (3.62)$$

En intégrant (3.62) entre t et $t+1$, on obtient

$$\phi_{p_k}(t+1) + \alpha_0 \int_t^{t+1} \phi_{p_{k+1}}^{\frac{n-2}{n}}(s) ds \leq \phi_{p_k}(t) + C \int_t^{t+1} \phi_{p_k}(s) ds + C \int_t^{t+1} \phi_{p_k}^{1-\frac{1}{p_k}}(s) \phi_2(s) ds,$$

et en utilisant (3.59) et (3.60) on obtient donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t^{t+1} \phi_{p_{k+1}}^{\frac{n-2}{n}}(s) ds = 0.$$

Si $p_k > \frac{n}{2}$, on applique l'inégalité (3.55) au lieu de (3.54) et on procède comme dans le cas $p_k < \frac{n}{2}$. Ainsi (3.61) est démontrée.

Maintenant montrons que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_{p_{k+1}}(t) = 0$. Là encore on distingue deux cas : $p_{k+1} < \frac{n}{2}$ et $p_{k+1} > \frac{n}{2}$.

Si $p_{k+1} < \frac{n}{2}$, on applique l'inégalité (3.54) avec $p = p_{k+1}$ et on obtient

$$\phi'_{p_{k+1}}(t) \leq C\phi_{p_{k+1}}(t) + C\phi_{p_{k+1}}^{1-\frac{1}{p_{k+1}}}(t)\phi_2(t) \quad (3.63)$$

mais par (3.59) on a $\phi_2(t) \leq C$. D'où

$$\phi'_{p_{k+1}}(t) \leq C\phi_{p_{k+1}}(t) + C\phi_{p_{k+1}}^{1-\frac{1}{p_{k+1}}}(t).$$

Maintenant il suffit d'appliquer le lemme 3.3.2 en utilisant l'inégalité (3.61) pour avoir

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_{p_{k+1}}(t) = 0.$$

Si $p_{k+1} > \frac{n}{2}$, on applique l'inégalité (3.55) au lieu de (3.54) et on procède comme dans le cas $p_{k+1} < \frac{n}{2}$.

La proposition est ainsi démontrée. □

Maintenant on va démontrer que la courbure scalaire $R_{g(t)}$ est minorée par une constante indépendante de t .

Proposition 3.3.2 *Il existe une constante positive C indépendante de t , telle que*

$$R_{g(t)} \geq -C \quad \forall t \geq 0.$$

Démonstration. Dans ce qui suit, C désigne une constante positive qui dépend de u_0 , g_0 et F , dont la valeur change d'une ligne à une autre.

D'après (3.8) du lemme 3.1.1, on a

$$\partial_t R_{g(t)} = \frac{4}{n+2} R_{g(t)} (R_{g(t)} - \lambda F) + 4 \frac{n-1}{n+2} \Delta_{g(t)} (R_{g(t)} - \lambda F).$$

En posant $\tilde{R} = R_{g(t)} - \lambda F$, on obtient

$$\partial_t \tilde{R} = \frac{4}{n+2} (\tilde{R} + \lambda F) \tilde{R} + 4 \frac{n-1}{n+2} \Delta \tilde{R} - F \partial_t \lambda. \quad (3.64)$$

Mais,

$$\partial_t \lambda = -2 \frac{n-2}{n+2} f^{-1} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^2 dv_{g(t)} + \frac{4}{n+2} \lambda f^{-1} \int_M F (R_{g(t)} - \lambda F) dv_{g(t)}.$$

3.3 Comportement de la courbure scalaire à l'infini

Or d'après la proposition 3.3.1 on a

$$\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \leq C \quad \forall p \geq 1,$$

et comme $C_0 \leq f \leq \max_M F$ et $0 < \lambda(t) \leq C_1$ d'après la proposition (3.1.4), alors il existe une constante positive C telle que

$$|\partial_t \lambda| \leq C.$$

D'autre part, il existe une constante positive C telle que

$$|\lambda F| \leq C.$$

Il découle de (3.64) que

$$\partial_t \tilde{R} \geq 4 \frac{n-1}{n+2} \Delta_{g(t)} \tilde{R} + \frac{4}{n+2} \tilde{R}^2 - C |\tilde{R}| - C. \quad (3.65)$$

Fixons $t \in [0, +\infty)$ et soit $(x_0, t_0) \in M \times [0, t]$ tel que $\tilde{R}(x_0, t_0) = \min_{M \times [0, t]} \tilde{R}$. Si $t_0 = 0$, alors $\min_{M \times [0, t]} \tilde{R} = \tilde{R}(x_0, 0)$, et donc

$$\min_{x \in M} \tilde{R}(x, t) \geq \min_{x \in M} \tilde{R}(x, 0).$$

Alors par définition de $\tilde{R}(x, t)$, on conclut qu'il existe une constante C telle que

$$\min_{x \in M} R(x, t) \geq \min_{x \in M} R_0(x) - C.$$

Si $t_0 > 0$, alors on a $\partial_t \tilde{R}(x_0, t_0) \leq 0$ et $\Delta \tilde{R}(x_0, t_0) \geq 0$, alors d'après (3.65), on obtient

$$0 \geq \frac{4}{n+2} |\tilde{R}(x_0, t_0)|^2 - C |\tilde{R}(x_0, t_0)| - C.$$

Posons $S = |\tilde{R}(x_0, t_0)|$, on sait que

$$\frac{4}{n+2} S^2 - CS - C \leq 0$$

si et seulement si $S \leq S_1 := \frac{n+2}{8} \left(C + \sqrt{C^2 + \frac{16C}{n+2}} \right)$.

Donc on conclut que

$$|\tilde{R}(x_0, t_0)| \leq S_1$$

et par suite

$$\tilde{R}(x_0, t_0) \geq -S_1.$$

Finalement, par définition de S et $\tilde{R}$, on déduit qu'il existe une constante positive C telle que

$$R(x, t) \geq -C.$$

Ceci achève la démonstration de la proposition. $\square$

3.4 Comportement du flot à l'infini

Dans cette section nous allons étudier le comportement asymptotique du flot $g(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. On mettra en évidence des conditions assurant sa convergence et on donnera une description précise de son profil en cas d'explosion (non convergence). On constatera ainsi des phénomènes comme celui de la « formation des bulles » déjà rencontrés dans l'étude du flot de Yamabe .

Une conséquence directe de proposition 3.3.1 de la section précédente est que pour toute suite $t_\nu \rightarrow +\infty$, la suite $u_\nu := u(t_\nu)$ est une suite de Palais-Smale dans $H^1(M)$ pour la fonctionnelle E , i.e $E(u_\nu)$ est bornée et $dE(u_\nu) \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} 0$ dans $H^{-1}(M)$, où $dE(u_\nu)$ est la différentielle de E en u_ν . En effet, si on prend $p = \frac{2n}{n+2}$ dans la proposition 3.3.1 on a

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \int_M |R_{g(t_\nu)} - \lambda(t_\nu)F|^{\frac{2n}{n+2}} dv_{g(t_\nu)} = 0,$$

i.e

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \int_M \left| c_n \Delta_0 u_\nu - R_0 u_\nu + \lambda(t_\nu) F u_\nu^{\frac{n+2}{n-2}} \right|^{\frac{2n}{n+2}} dv_{g_0} = 0. \quad (3.66)$$

D'autres part, un calcul simple montre que

$$dE(u_\nu)(\varphi) = \int_M \left(-c_n \Delta u_\nu + R_0 u_\nu - \lambda(t_\nu) F u_\nu^{\frac{2n}{n+2}} \right) \varphi dv_{g_0}, \text{ pour tout } \varphi \in H^1(M),$$

ce qui donne par l'inégalité de Hölder puis l'injection de Sobolev $H^1(M) \subset L^{\frac{2n}{n-2}}(M)$:

$$\|dE(u_\nu)\|_{H^{-1}(M)} \leq C \left\| -c_n \Delta u_\nu + R_0 u_\nu - \lambda(t_\nu) F u_\nu^{\frac{2n}{n+2}} \right\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(M)}.$$

Ainsi par (3.66) on a $\|dE(u_\nu)\|_{H^{-1}(M)} \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} 0$.

Avant de donner un premier résultat sur le comportement de la suite (u_ν) lorsque $\nu \rightarrow \infty$, nous avons besoin d'introduire quelques définitions et notations.

On dit qu'une famille de fonctions $\bar{u}_{p,\varepsilon} \in C^\infty(M)$ avec $p \in M$ et $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, où $\varepsilon_0 > 0$ assez petit, est du type « bulle standard » si elle vérifie la propriété suivante :

$$\begin{cases} \bar{u}_{p,\varepsilon}(x) = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + d(p,x)^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \text{ si } x \in B(p, \delta) \\ \|\bar{u}_{p,\varepsilon}\|_{C^2(M \setminus B(p,\delta))} \leq C \varepsilon^{\frac{n-2}{2}}, \end{cases} \quad (3.67)$$

où $0 < \delta < \text{inj}_M$ (rayon d'injectivité de (M, g_0)) et $C > 0$ sont des constantes indépendantes de (p, ε) , et $d(p, \cdot)$ désigne la fonction distance riemannienne (par rapport à g_0) au point p .

Grâce aux travaux désormais classiques de Bahri-Coron [3] et Struwe [26], quitte à passer à une sous-suite de (u_ν) , nous avons la proposition suivante :

3.4 Comportement du flot à l'infini

Proposition 3.4.1 *Il existe un entier $m \geq 0$, une suite de points $x_{k,\nu} \in M$ avec $1 \leq k \leq m$, $\nu \geq 1$, une famille de réels positifs vérifiant $\varepsilon_{k,\nu} \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} 0$ pour tout $1 \leq k \leq m$, et une fonction $0 \leq u_\infty \in C^\infty(M)$ telles que :*

1. *La fonction u_∞ satisfait l'équation*

$$-c_n \Delta_0 u_\infty + R_0 u_\infty = \lambda_\infty F u_\infty^N,$$

où $\lambda_\infty = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \lambda(t_\nu)$.

2. *Pour tout $i \neq j$, on a*

$$\frac{\varepsilon_{i,\nu}}{\varepsilon_{j,\nu}} + \frac{\varepsilon_{j,\nu}}{\varepsilon_{i,\nu}} + \frac{d(x_{i,\nu}, x_{j,\nu})}{\varepsilon_{i,\nu} \varepsilon_{j,\nu}} \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} +\infty.$$

3. *$x_{k,\nu} \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} x_k$ pour tout $k = 1, \dots, m$, où $x_1, \dots, x_k \in M$ sont tels que $F(x_k) > 0$ et*

$$\left\| u_\nu - u_\infty - \sum_{k=1}^m \left(\frac{4n(n-1)}{\lambda_\infty F(x_k)} \right)^{\frac{n-2}{4}} \bar{u}_{x_k, \nu, \varepsilon_{k,\nu}} \right\|_{H^1(M)} \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} 0,$$

où $(\bar{u}_{p,\varepsilon})$ est une famille quelconque de fonctions de type « bulle standard », i.e vérifiant la propriété (3.67).

La proposition précédente donne une description à l'échelle « microscopique » de la suite (u_ν) autour des points de concentration $x_1, \dots, x_m$. Ce phénomène est connu sous le nom de « formation des bulles » dans la littérature. Ainsi si $m = 0$ dans la proposition 3.4.1, il n'y a pas de points de concentration et par suite, (u_ν) va converger dans $H^1(M)$ vers une fonction $u_\infty > 0$ car le volume de $g_\nu = u_\nu^{\frac{4}{n-2}} g_0$ est constant. Une fois la concentration du volume est écartée, on peut montrer que $u(t)$ est bornée dans $C^\infty(M)$ (uniformément en t) et converge vers u_∞ par un résultat général de Simon [25] sur la convergence des solutions des équations paraboliques du second ordre. Avant de donner des conditions sur la fonction F permettant d'écarter la concentration du volume, nous allons donner quelques propriétés de la fonction u_∞ .

Proposition 3.4.2 *On a soit $u_\infty > 0$ ou bien $u_\infty \equiv 0$. Autrement dit, Si u_∞ s'annule en un point, alors u_∞ est nulle partout.*

Démonstration. La fonction u_∞ satisfait l'équation suivante

$$c_n \Delta_0 u_\infty - R_0 u_\infty + \lambda_\infty F u_\infty^{\frac{n+2}{n-2}} = 0,$$

d'où

$$\Delta_0 u_\infty = u_\infty c_n^{-1} \left(R_0 - \lambda_\infty F u_\infty^{\frac{4}{n-2}} \right).$$

Comme $u_\infty \geq 0$, d'après le principe du maximum de Hopf (voir Chapitre 1), u_∞ est soit partout strictement positive, soit identiquement nulle. Ceci achève la preuve de la proposition. $\square$

Avant de donner une deuxième propriété importante, rappelons que l'énergie E est décroissante le long du flot. Ce qui a pour conséquence que la suite $E(u_\nu)$ a une limite E_∞ indépendante de la suite (t_ν) . En fait, on a

$$E_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} E(u(t)).$$

Notons ici que par définition de E on a

$$E(u_\nu) = f(t_\nu)^{\frac{2-n}{n}} \int_M (c_n |\nabla u_\nu|^2 + R_0 u_\nu^2) dv_{g_0} \geq f(t_\nu)^{\frac{2-n}{n}} Y(M, g_0)$$

car

$$\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} = \text{Vol}(M, g(t_\nu)) = 1.$$

Comme $f(t_\nu)^{\frac{2-n}{n}} \geq \left(\max_M F \right)^{\frac{2-n}{n}}$, alors on a

$$E(u_\nu) \geq \left(\max_M F \right)^{\frac{2-n}{n}} Y(M, g_0),$$

d'où par passage à la limite

$$E_\infty \geq \left(\max_M F \right)^{\frac{2-n}{n}} Y(M, g_0) \quad \text{et} \quad \lambda_\infty \geq \left(\max_M F \right)^{-1} Y(M, g_0).$$

La proposition suivante est encore plus précise que l'inégalité ci-dessus sur E_∞ .

Proposition 3.4.3 E_∞ vérifie :

1. Si $u_\infty = 0$, alors

$$E_\infty = \left(\sum_{k=1}^m \frac{Y(\mathbb{S}^n)^{\frac{n}{2}}}{F(x_k)^{\frac{n-2}{2}}} \right)^{\frac{2}{n}}. \quad (3.68)$$

2. Si $u_\infty > 0$, alors

$$E_\infty = \left(E(u_\infty)^{\frac{n}{2}} + \sum_{k=1}^m \frac{Y(\mathbb{S}^n)^{\frac{n}{2}}}{F(x_k)^{\frac{n-2}{2}}} \right)^{\frac{2}{n}}. \quad (3.69)$$

Démonstration. On rappelle que $f(t)$ vérifie $C_0 \leq f(t) \leq \max_M F$ par la proposition 3.1.4. Alors quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} f(t_\nu) = f_\infty \geq C_0 > 0$. On a donc

$$\begin{aligned} f_\infty &= \lim_{\nu \rightarrow +\infty} f(t_\nu) \\ &= \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \int_M F(x) u_\nu^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0}. \end{aligned}$$

3.4 Comportement du flot à l'infini

Mais d'après la partie 3 de la proposition 3.4.1 on a

$$u_\nu = u_\infty + \sum_{k=1}^m \left(\frac{4n(n-1)}{\lambda_\infty F(x_k)} \right)^{\frac{n-2}{4}} \bar{u}_{x_k, \nu, \varepsilon_{k, \nu}} + o(1),$$

où $o(1) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$ dans $H^1(M)$. Donc,

$$f_\infty = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \int_M F(x) \left(u_\infty + \sum_{k=1}^m \left(\frac{4n(n-1)}{\lambda_\infty F(x_k)} \right)^{\frac{n-2}{4}} \bar{u}_{x_k, \nu, \varepsilon_{k, \nu}} + o(1) \right)^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0}.$$

Un calcul simple qui utilise les propriétés de la fonction $\bar{u}_{x_k, \nu, \varepsilon_{k, \nu}}$ nous donne

$$f_\infty = \int_M F(x) u_\infty^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} + \lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \left(\frac{4n(n-1)}{\lambda_\infty F(x_k)} \right)^{\frac{n}{2}} F(x_k) \int_M \bar{u}_{x_k, \nu, \varepsilon_{k, \nu}}^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0}. \quad (3.70)$$

Ici on distingue deux cas : $u_\infty = 0$ et $u_\infty > 0$.

Si $u_\infty = 0$, de (3.70) on a

$$f_\infty = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \frac{(4n(n-1))^{\frac{n}{2}}}{\lambda_\infty^{\frac{n}{2}} F(x_k)^{\frac{n-2}{2}}} \int_M \bar{u}_{x_k, \nu, \varepsilon_{k, \nu}}^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0}.$$

Un calcul comme dans Hebey [16] (chapitre 6, Théorème 6.2.13), nous donne

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \int_M \bar{u}_{x_k, \nu, \varepsilon_{k, \nu}}^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} = \left(\frac{Y(\mathbb{S}^n)}{4n(n-1)} \right)^{\frac{n}{2}}. \quad (3.71)$$

On obtient donc

$$f_\infty = \sum_{k=1}^m \frac{Y(\mathbb{S}^n)^{\frac{n}{2}}}{\lambda_\infty^{\frac{n}{2}} F(x_k)^{\frac{n-2}{2}}}.$$

En multipliant par $\lambda_\infty^{\frac{n}{2}}$ et en remarquant que $\lambda_\infty = E_\infty f_\infty^{-\frac{2}{n}}$, on a donc

$$E_\infty = \left(\sum_{k=1}^m \frac{Y(\mathbb{S}^n)^{\frac{n}{2}}}{F(x_k)^{\frac{n-2}{2}}} \right)^{\frac{2}{n}}.$$

Supposons maintenant $u_\infty > 0$. Comme u_∞ vérifie l'équation

$$-c_n \Delta_0 u_\infty + R_0 u_\infty = \lambda_\infty F u_\infty^{\frac{n+2}{n-2}},$$

alors en multipliant par u_∞ et en intégrant sur M , on obtient

$$\int_M (c_n |\nabla u_\infty|_0^2 + R_0 u_\infty^2) dv_{g_0} = \lambda_\infty \int_M F u_\infty^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0}.$$

Or on a $E(u_\infty) = \frac{\int_M (c_n |\nabla u_\infty|^2 + R_0 u_\infty^2) dv_{g_0}}{\left(\int_M F u_\infty^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n}}}$. D'où

$$\int_M F u_\infty^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} = \left(\frac{E(u_\infty)}{\lambda_\infty} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

En substituant dans (3.70) et en utilisant (3.71), on a donc

$$f_\infty = \left(\frac{E(u_\infty)}{\lambda_\infty} \right)^{\frac{n}{2}} + \sum_{k=1}^m F(x_k) \left(\frac{Y(\mathbb{S}^n)}{\lambda_\infty F(x_k)} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

En multipliant par $\lambda_\infty^{\frac{n}{2}}$ et en remarquant que $\lambda_\infty = E_\infty f_\infty^{-\frac{2}{n}}$, on obtient

$$E_\infty = \left(E(u_\infty)^{\frac{n}{2}} + \sum_{k=1}^m \frac{Y(\mathbb{S}^n)^{\frac{n}{2}}}{F(x_k)^{\frac{n-2}{2}}} \right)^{\frac{2}{n}}.$$

Ce qui achève la preuve de la proposition. $\square$

Comme on va le voir dans la preuve du théorème 3.4.1 ci-dessus, le cas $u_\infty = 0$ dans la proposition précédente ne peut avoir lieu que lorsque $m \neq 0$. Il découle de cette proposition, grâce à la décroissance de l'énergie, que si $m \neq 0$, alors l'énergie de la donnée initiale u_0 vérifie :

$$E(u_0) > \frac{Y(\mathbb{S}^n)}{(\max_M F)^{\frac{n-2}{n}}}. \quad (3.72)$$

En supposant que (3.72) ne soit pas vérifiée, la proposition 3.4.3 implique que $m = 0$. Ainsi l'absence des points (x_ν^k) dans la proposition 3.4.1 implique la non concentration du volume. C'est le point clé qui permet au flot de converger. Plus précisément, nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.4.1 *Supposons que $R_0 > 0$ et $F \in C^\infty(M)$ telle que $\max_M F > 0$. Alors pour toute donnée initiale $g^0 = u_0^{\frac{4}{n-2}} g_0$ avec u_0 vérifiant*

$$E(u_0) \leq \frac{Y(\mathbb{S}^n)}{(\max_M F)^{\frac{n-2}{n}}}, \quad (3.73)$$

le flot $g(t)$ donné par le théorème 3.2.1 converge dans $C^\infty(M)$ vers une métrique g_∞ de courbure scalaire égale à $\lambda_\infty F$, pour une constante $\lambda_\infty > 0$.

3.4 Comportement du flot à l'infini

Dans ce théorème la métrique limite g_∞ a pour courbure scalaire $\lambda_\infty F$. On en déduit que F est la courbure scalaire de la métrique conforme $\lambda_\infty^{-\frac{n-2}{4}} g_\infty$.

Démonstration. Nous allons tout d'abord montrer que le volume ne se concentre pas. Plus précisément, Pour chaque x fixé dans M , on va montrer que pour tout $\eta > 0$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $t \in [0, +\infty)$, on ait

$$\int_{B(x,r)} u(t)^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \leq \eta. \quad (3.74)$$

En effet, supposons que (3.74) ne soit pas vraie. Alors, il existe un $\eta_0 > 0$ et une suite $t_j \rightarrow +\infty$ tels que

$$\int_{B(x, \frac{1}{j})} u(t_j)^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \geq \eta_0 \quad \text{pour tout } j \geq 1. \quad (3.75)$$

Appliquons la proposition 3.4.1 à la suite $u_j = u(t_j)$. On va distinguer deux cas concernant l'entier m dans la proposition 3.4.1 :

Supposons $m > 0$. Alors on a grâce à la proposition 3.4.3

$$E_\infty \geq \frac{Y(\mathbb{S}^n)}{(\max_M F)^{\frac{n-2}{n}}},$$

et par hypothèse (3.73) on a

$$E(u_0) \leq \frac{Y(\mathbb{S}^n)}{(\max_M F)^{\frac{n-2}{n}}}.$$

On en déduit que $E(u_0) = E_\infty$. Comme $E_\infty \leq E(u(t)) \leq E(u_0)$ par décroissance de $E(u(t))$, on a donc $E(u(t))$ est constante. Mais,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(u(t)) &= -2 \frac{n-2}{n+2} f^{-\frac{n-2}{n}} \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^2 dv_{g(t)} \\ &= -2 \frac{n+2}{n-2} f^{-\frac{n-2}{n}} \int_M |\partial_t u|^2 u^{-2} dv_{g(t)} \end{aligned}$$

et comme $u > 0$, alors

$$\partial_t u = 0,$$

ce qui implique que le flot est constant. Ainsi si on choisit $r > 0$ tel que $\int_{B(x,r)} u(0)^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \leq \frac{\eta_0}{2}$, on aura pour tout $t \geq 0$,

$$\int_{B(x,r)} u(t)^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} = \int_{B(x,r)} u(0)^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \leq \frac{\eta_0}{2},$$

ce qui est en contradiction avec (3.75).

Maintenant on suppose $m = 0$. D'après la partie 3 de la proposition 3.4.1, on a $u_j \rightarrow u_\infty$ dans $H^1(M)$. En particulier, grâce à l'inégalité de Sobolev, $u_j \rightarrow u_\infty$ dans $L^{\frac{2n}{n-2}}(M)$. Ainsi si on choisit un $r > 0$ tel que $\int_{B(x,r)} u_\infty^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \leq \frac{\eta_0}{4}$, on aura pour j assez grand

$$\int_{B(x,r)} u_j^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \leq \frac{\eta_0}{2},$$

ce qui contredit (3.75). Ainsi (3.74) est démontrée.

Maintenant pour compléter la preuve du théorème on va montrer que $u(t)$ est majorée inférieurement et supérieurement par des constantes indépendantes de t . C'est là que va intervenir la non concentration du volume qui nous permettra d'appliquer le théorème de régularité intérieure (théorème 1.2.8 du chapitre 1) et l'inégalité de Harnack (théorème 1.2.9 du chapitre 1). Comme dans les précédentes preuves, on notera par C une constante positive indépendante de t dont la valeur peut changer d'une ligne à l'autre. Soit $x \in M$ fixé et soit η_1 comme dans le théorème 1.2.8. Il nous faudra trouver $r > 0$ vérifiant pour tout $t \geq 0$:

$$\int_{B_r(x)} |R_{g(t)}|^q dv_{g(t)} \leq \eta_1,$$

où $q > \frac{n}{2}$.

Fixons $p > q > \frac{n}{2}$. On a

$$\begin{aligned} \int_M |R_{g(t)}|^p dv_{g(t)} &= \int_M |R_{g(t)} - \lambda F + \lambda F|^p dv_{g(t)} \\ &\leq C \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} + C \int_M |\lambda F|^p dv_{g(t)}, \end{aligned}$$

D'après la proposition 3.3.1 on a $\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \leq C$, et par la proposition 3.1.4 on a $|\lambda F| \leq C$. D'où

$$\int_M |R_{g(t)}|^p dv_{g(t)} \leq C.$$

Et d'après (3.74), pour tout η_0 , il existe un réel $r > 0$ tel que

$$\int_{B_r(x)} dv_{g(t)} \leq \eta_0,$$

pour tout $t \geq 0$. Donc, par l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)} |R_{g(t)}|^q dv_{g(t)} &\leq \left(\int_{B_r(x)} |R_{g(t)}|^p dv_{g(t)} \right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_{B_r(x)} dv_{g(t)} \right)^{\frac{p-q}{p}}, \\ &\leq C^{\frac{p}{q}} \eta_0^{\frac{p-q}{p}}. \end{aligned}$$

3.4 Comportement du flot à l'infini

En choisissant $\eta_0 > 0$ tel que $C^{\frac{p}{q}} \eta_0^{\frac{p-q}{p}} \leq \eta_1$ on a donc

$$\int_{B_r(x)} |R_{g(t)}|^q dv_{g(t)} \leq \eta_1.$$

Grâce au théorème 1.2.8 on conclut que

$$u(x, t) \leq C r^{-\frac{n-2}{2}} \left(\int_{B_r(x)} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n-2}{2n}} \leq C r^{-\frac{n-2}{2}}$$

car $\int_M dv_{g(t)} = 1$. On a ainsi démontré que u est majorée uniformément en t .

Maintenant on va trouver une borne inférieure de u indépendante de t . Pour cela on pose

$$a = R_0 + C \left(\sup_{(x,t) \in M \times [0, +\infty)} u(x, t) \right)^{\frac{4}{n-2}},$$

où C est la constante dans la proposition 3.3.2.

On a

$$\begin{aligned} -c_n \Delta u(t) + au(t) &\geq -c_n \Delta_0 u(t) + R_0 u(t) + C u(t)^{\frac{n+2}{n-2}} \\ &= (R_{g(t)} + C) u(t)^{\frac{n+2}{n-2}} \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi d'après l'inégalité de Harnack (théorème 1.2.9), on conclut que

$$\inf_{x \in M} u(x, t) \left(\sup_{x \in M} u(x, t) \right)^{\frac{n+2}{n-2}} \geq C \int_M u^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} = C,$$

par suite il existe une constante $C' > 0$ indépendante de t telle que

$$\inf_{x \in M} u(x, t) \geq C'.$$

Maintenant pour montrer que u est bornée dans l'espace de Hölder $C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(M \times [0, +\infty))$, on procède de la même façon que pour la preuve de la proposition 2.3.4 du chapitre 2 (cas $R_0 < 0$). La preuve est identiquement la même, la seule différence est qu'il faut utiliser la proposition 3.3.1 au lieu de la proposition 2.3.3.

Ainsi la théorie classique de régularité parabolique (voir théorème 1.2.5 du chapitre 1) appliquée à (3.2), implique que u est bornée dans $C^{2k+\alpha, k+\frac{\alpha}{2}}(M \times [0, +\infty))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|u\|_{C^k(M \times [0, +\infty))} \leq C_k, \tag{3.76}$$

où C_k est une constante positive dépendant de u_0 , g_0 , F et k .

D'après (3.76) il existe une suite $t_\nu \rightarrow +\infty$ et $u_\infty \in C^\infty(M)$, telle que

$$u(t_\nu) \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} u_\infty \quad \text{dans } C^\infty(M).$$

De plus comme $u(x, t) \geq C$, avec $C > 0$ indépendante de t , on a $u_\infty \geq C$. On a également par passage à la limite $R_{g(t_\nu)} \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} R_{g_\infty}$, avec $g_\infty = u_\infty^{\frac{4}{n-2}} g_0$. D'autre part, d'après la proposition 3.3.1 on a

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \int_M |R_{g(t_\nu)} - \lambda(t_\nu)F|^p dv_{g(t_\nu)} = 0 \quad \text{pour tout } p \geq 1.$$

On en déduit donc que $R_{g_\infty} = \lambda_\infty F$, avec $\lambda_\infty = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \lambda(t_\nu)$.

D'après un résultat de Simon [25], u_∞ est l'unique limite de $u(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Le théorème 3.4.2 est donc démontré. □

On peut se poser la question s'il existe une donnée initiale u_0 vérifiant la condition (3.73) dans le théorème 3.4.1. Le travail de Escobar-Schoen [12] nous dit que la réponse est positive dans certains cas. C'est le cas par exemple si M est de dimension 3 et non conformément équivalente à $\mathbb{S}^3$. Nous en déduisons le corollaire suivant :

Corollaire 3.4.1 *Supposons que (M, g_0) est de dimension 3 avec $R_0 > 0$ et qu'elle n'est pas conformément équivalente à la sphère euclidienne $\mathbb{S}^3$. Alors toute fonction $F \in C^\infty(M)$ telle que $\max_M F > 0$ est la courbure scalaire d'une métrique conforme à g_0 .*

Notons ici que le cas de la sphère $\mathbb{S}^n$ est exclu par ce corollaire. Le problème de la courbure scalaire prescrite sur la sphère $\mathbb{S}^n$, connu sous le nom « problème de Nirenberg », est très délicat à étudier à cause de la richesse de la géométrie de la sphère. De nombreux auteurs se sont intéressés à ce problème depuis plusieurs années, voir [2], [4], [9], [10], [17], [19], [23]. Tous ses travaux abordent le problème de Nirenberg par la méthode variationnelle. Comme nous l'avons déjà signalé ci-dessus, le seul travail qui étudie ce problème par une méthode du flot est celui de Chen-Xu [10].

Dans le théorème 3.4.1 ci-dessus, on suppose que la donnée initiale $g^0 = u_0^{\frac{4}{n-2}} g_0$ vérifie la condition (3.73). Comme dans le cas du flot de Yamabe (F constante), on peut se poser la question de savoir s'il existe des conditions sur la fonction F qui garantissent la convergence du flot pour toute donnée initiale g^0 ? Une première tentative de réponse est de faire l'hypothèse suivante :

On suppose qu'il existe une famille de fonctions de type « bulle standard » : $\bar{u}_{p,\varepsilon}$ vérifiant la propriété (3.67) telle que :

$$E(\bar{u}_{p,\varepsilon}) \leq \frac{Y(\mathbb{S}^n)}{F(p)^{\frac{n-2}{n}}}, \tag{H}$$

3.4 Comportement du flot à l'infini

pour tout $p \in M$ tel que $F(p) > 0$ et tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. On a alors le théorème de convergence suivant :

Théorème 3.4.2 *Supposons que $R_0 > 0$ et $F \in C^\infty(M)$ telle que $\max_M F > 0$ et satisfaisant la condition (H). Alors pour toute donnée initiale $g^0 = u_0^{\frac{4}{n-2}} g_0$ avec $0 < u_0 \in C^\infty(M)$, le flot $g(t) = u(t)^{\frac{4}{n-2}} g_0$ donné par le théorème 3.2.1 converge dans $C^\infty(M)$ vers une métrique $g_\infty = u_\infty^{\frac{4}{n-2}} g_0$ de courbure scalaire égale à $\lambda_\infty F$, pour une constante $\lambda_\infty > 0$.*

On peut considérer ce théorème comme une généralisation du résultat de Brendle [7] qui démontra la convergence du flot de Yamabe, i.e en supposant F constante, pour toute donnée initiale lorsque l'hypothèse (H) est vérifiée. De plus, il démontre (lorsque F est constante) que la condition (H) est automatiquement vérifiée pour toute variété riemannienne compacte (M, g_0) de dimension $n \leq 5$. Pour les variétés de dimension supérieure, des conditions supplémentaires sur le tenseur de Weyl sont nécessaires (voir Brendle [8]). On peut donc se poser la question s'il existe des fonctions non constantes pour lesquelles l'hypothèse (H) est vérifiée. Un calcul comme dans Escobar-Schoen [12] montre que si (M, g_0) est de dimension 3 non conformément équivalente à la sphère $\mathbb{S}^3$ et F suffisamment proche d'une constante positive, alors la condition (H) est satisfaite.

La preuve du théorème 3.4.2 repose sur l'idée que le volume ne se concentre pas lorsque $t \rightarrow +\infty$. Pour cela nous avons besoin de démontrer quelques résultats préliminaires. On commence par la proposition suivante dont la démonstration sera faite à la fin de ce chapitre. Dans toute la suite de ce chapitre la fonction F sera supposée satisfaire la condition (H) ci-dessus.

Proposition 3.4.4 *Soit $g(t) = u(t)^{\frac{4}{n-2}} g_0$ la solution du flot (3.1) et $F \in C^\infty(M)$ telle que (H) soit vérifiée. Alors il existe des réels positifs γ , C , et t_0 , tels que*

$$E(u(t)) - E_\infty \leq C \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda(t)F|^{\frac{2n}{n+2}} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n+2}{2n}(1+\gamma)} \quad (3.77)$$

pour tout $t \geq t_0$.

Une fois cette proposition démontrée, elle a pour conséquence la proposition suivante :

Proposition 3.4.5 *Il existe une constante C telle que*

$$\int_0^\infty \left(\int_M u(t)^{\frac{2n}{n-2}} |R_{g(t)} - \lambda(t)F|^2 dv_{g_0} \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq C$$

Démonstration. Dans ce qui suit on rappelle que le volume de $(M, g(t))$ égale à 1. On désigne par C une constante positive qui dépend de g_0 , u_0 et F dont la valeur change d'une ligne à une autre. D'après la proposition 3.1.3 on a

$$\frac{d}{dt}(E(u(t)) - E_\infty) = -2 \frac{n-2}{n+2} f^{-\frac{n-2}{n}} \int_M u(t)^{\frac{2n}{n-2}} |R_{g(t)} - \lambda F|^2 dv_{g_0}.$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{2n}{n+2}} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n+2}{2n}} \leq \left(\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^2 dv_{g(t)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

et comme $f = \int_M F dv_{g(t)} \leq \max_{x \in M} F(x)$, alors il existe une constante C telle que

$$\frac{d}{dt}(E(u(t)) - E_\infty) \leq -C \left(\int_M u(t)^{\frac{2n}{n-2}} |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{2n}{n+2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n+2}{n}}.$$

D'autre part, en utilisant la proposition 3.4.4 on a ,

$$E(u(t)) - E_\infty \leq C \left(\int_M u(t)^{\frac{2n}{n-2}} |R_{g(t)} - \lambda F|^{\frac{2n}{n+2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n+2}{2n}(1+\gamma)}.$$

Par suite

$$\frac{d}{dt}(E(u(t)) - E_\infty) \leq -C(E(u(t)) - E_\infty)^{\frac{2}{1+\gamma}}. \quad (3.78)$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(E(u(t)) - E_\infty)^{-\frac{1-\gamma}{1+\gamma}} &= -\frac{1-\gamma}{1+\gamma} (E(u(t)) - E_\infty)^{-\frac{2}{1+\gamma}} \frac{d}{dt}(E(u(t)) - E_\infty) \\ &\geq C. \end{aligned} \quad (3.79)$$

En intégrant (3.79) entre 0 et t , on conclut que

$$(E(u(t)) - E_\infty)^{-\frac{1-\gamma}{1+\gamma}} \geq C t,$$

donc,

$$E(u(t)) - E_\infty \leq C t^{-\frac{1+\gamma}{1-\gamma}}. \quad (3.80)$$

En utilisant l'inégalité de Hölder on a,

$$\begin{aligned} &\int_T^{2T} \left(\int_M u(t)^{\frac{2n}{n-2}} (R_{g(t)} - \lambda F)^2 dv_{g_0} \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &\leq \left(\int_T^{2T} \int_M u(t)^{\frac{2n}{n-2}} (R_{g(t)} - \lambda F)^2 dv_{g_0} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_T^{2T} dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

3.4 Comportement du flot à l'infini

Mais,

$$\frac{d}{dt}E(u(t)) = -2\frac{n-2}{n+2}f^{-\frac{n-2}{n}} \int_M (R_{g(t)} - \lambda F)^2 u^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0},$$

alors

$$\begin{aligned} & \int_T^{2T} \left(\int_M u(t)^{\frac{2n}{n-2}} (R_{g(t)} - \lambda F)^2 dv_{g_0} \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ & \leq \left(-\frac{n+2}{2(n-2)} T \int_T^{2T} f^{\frac{n-2}{n}} \frac{d}{dt} E(u(t)) dt \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.81)$$

et comme $\frac{d}{dt}E(u(t)) \leq 0$ et $f \leq \max_M F$, alors il existe une constante positive C telle que

$$\begin{aligned} & \int_T^{2T} \left(\int_M u(t)^{\frac{2n}{n-2}} (R_{g(t)} - \lambda F)^2 dv_{g_0} \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ & \leq \left(\frac{n+2}{2(n-2)} C T (E(u(T)) - E(u(2T))) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

D'après (3.80) on a,

$$\begin{aligned} E(u(T)) - E(u(2T)) & \leq E(u(T)) - E_\infty \\ & \leq CT^{-\frac{1+\gamma}{1-\gamma}}, \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} & \int_T^{2T} \left(\int_M u(t)^{\frac{2n}{n-2}} (R_{g(t)} - \lambda F)^2 dv_{g_0} \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ & \leq C(T T^{-\frac{1+\gamma}{1-\gamma}})^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C T^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\int_M u(t)^{\frac{2n}{n-2}} (R_{g(t)} - \lambda F)^2 dv_{g_0} \right)^{\frac{1}{2}} dt & = \int_0^1 \left(\int_M u(t)^{\frac{2n}{n-2}} (R_{g(t)} - \lambda F)^2 dv_{g_0} \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ & \quad + \sum_{k=0}^\infty \int_{2^k}^{2^{k+1}} \left(\int_M u(t)^{\frac{2n}{n-2}} (R_{g(t)} - \lambda F)^2 dv_{g_0} \right)^{\frac{1}{2}} dt \end{aligned}$$

grâce à (3.82) on conclut que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\int_M u(t)^{\frac{2n}{n-2}} (R_{g(t)} - \lambda F)^2 dv_{g_0} \right)^{\frac{1}{2}} dt & \leq C \sum_{k=0}^\infty 2^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}k} \\ & \leq C. \end{aligned}$$

□

On a le corollaire suivant sur la non concentration du volume :

Corollaire 3.4.2 *Pour tout $\eta_0 > 0$ il existe un réel $r > 0$ tel que*

$$\int_{B_r(x)} u(t)^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \leq \eta_0$$

pour tout $x \in M$ et tout $t \geq 0$.

Démonstration. D'après la proposition précédente, on a,

$$\int_0^\infty \left(\int_M u(t)^{\frac{2n}{n-2}} |R_{g(t)} - \lambda F|^2 dv_{g_0} \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq C,$$

donc on peut trouver un $T > 0$ tel que

$$\int_T^\infty \left(\int_M u(t)^{\frac{2n}{n-2}} |R_{g(t)} - \lambda F|^2 dv_{g_0} \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq \frac{\eta_0}{2n}.$$

On considère maintenant un réel $r > 0$ tel que

$$\int_{B_r(x)} u(t)^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \leq \frac{\eta_0}{2} \tag{3.83}$$

pour tout $x \in M$ et tout $0 \leq t \leq T$.

Donc en utilisant l'équation (3.2), on a

$$\begin{aligned} & \int_{B_r(x)} u(t)^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} - \int_{B_r(x)} u(T)^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \\ &= - \int_t^T \int_{B_r(x)} \frac{\partial}{\partial s} (u(s)^{\frac{2n}{n-2}}) dv_{g_0} ds \\ &\leq \frac{2n}{n+2} \int_t^T \int_{B_r(x)} u(s)^{\frac{2n}{n-2}} |R_{g(s)} - \lambda F| dv_{g_0} ds \\ &\leq \frac{2n}{n+2} \int_t^T \int_M u(s)^{\frac{2n}{n-2}} |R_{g(s)} - \lambda F| dv_{g_0} ds \\ &\leq \frac{2n}{n+2} \int_t^T \left(\int_M u(s)^{\frac{2n}{n-2}} |R_{g(s)} - \lambda F|^2 dv_{g_0} \right)^{\frac{1}{2}} ds \\ &\leq \frac{2n}{n+2} \frac{\eta_0}{2n} \\ &\leq \frac{\eta_0}{2}, \end{aligned}$$

3.4 Comportement du flot à l'infini

en utilisant (3.83) on en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)} u(t)^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} &\leq \int_{B_r(x)} u(T)^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} + \frac{\eta_0}{2} \\ &\leq \eta_0 \end{aligned}$$

pour tout $x \in M$ et $t \geq 0$. Le corollaire est donc démontré. $\square$

Maintenant on est en mesure de démontrer le théorème 3.4.2.

Démonstration du théorème 3.4.2. Comme dans les précédentes preuves, dans ce qui suit C désigne une constante positive indépendante de t dont la valeur peut changer d'une ligne à une autre.

On va tout d'abord montrer que $u(t)$ est majorée inférieurement et supérieurement par des constantes indépendantes de t . C'est là que va intervenir la non concentration du volume qui nous permettra d'appliquer le théorème de régularité intérieure (théorème 1.2.8 du chapitre 1) et l'inégalité de Harnack (théorème 1.2.9 du chapitre 1). Soit η_1 comme dans le théorème 1.2.8. Il nous faudra trouver $r > 0$ vérifiant pour tout $x \in M$:

$$\int_{B_r(x)} |R_{g(t)}|^q dv_{g(t)} \leq \eta_1,$$

où $q > \frac{n}{2}$.

Fixons $p > q > \frac{n}{2}$. On a

$$\begin{aligned} \int_M |R_{g(t)}|^p dv_{g(t)} &= \int_M |R_{g(t)} - \lambda F + \lambda F|^p dv_{g(t)} \\ &\leq C \int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} + C \int_M |\lambda F|^p dv_{g(t)}, \end{aligned}$$

D'après la proposition 3.3.1 on a $\int_M |R_{g(t)} - \lambda F|^p dv_{g(t)} \leq C$, et par la proposition 3.1.4 on a $|\lambda F| \leq C$. D'où

$$\int_M |R_{g(t)}|^p dv_{g(t)} \leq C.$$

Et d'après le corollaire précédent, pour tout η_0 , il existe un réel $r > 0$ tel que

$$\int_{B_r(x)} dv_{g(t)} \leq \eta_0,$$

$\forall x \in M$ et $\forall t \geq 0$.

Donc, par l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)} |R_{g(t)}|^q dv_{g(t)} &\leq \left(\int_{B_r(x)} |R_{g(t)}|^p dv_{g(t)} \right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_{B_r(x)} dv_{g(t)} \right)^{\frac{p-q}{p}}, \\ &\leq C^{\frac{p}{q}} \eta_0^{\frac{p-q}{p}} \end{aligned}$$

En choisissant $\eta_0 > 0$ tel que $C^{\frac{p}{q}} \eta_0^{\frac{p-q}{p}} \leq \eta_1$ on a donc

$$\int_{B_r(x)} |R_{g(t)}|^q dv_{g(t)} \leq \eta_1.$$

Grâce au théorème 1.2.8 on conclut que

$$u(x, t) \leq C r^{-\frac{n-2}{2}} \left(\int_{B_r(x)} dv_{g(t)} \right)^{\frac{n-2}{2n}} \leq C r^{-\frac{n-2}{2}},$$

car $\int_M dv_{g(t)} = 1$. On a ainsi démontré que u est majorée uniformément en t .

Maintenant on va trouver une borne inférieure de u indépendante de t . Pour cela on pose

$$a = R_0 + C \left(\sup_{(x,t) \in M \times [0, +\infty)} u(x, t) \right)^{\frac{4}{n-2}},$$

où C est la constante dans la proposition 3.3.2.

On a

$$\begin{aligned} -c_n \Delta u(t) + au(t) &\geq -c_n \Delta_0 u(t) + R_0 u(t) + Cu(t)^{\frac{n+2}{n-2}} \\ &= (R_{g(t)} + C)u(t)^{\frac{n+2}{n-2}} \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi d'après l'inégalité de Harnack (théorème 1.2.9), on conclut que

$$\inf_{x \in M} u(x, t) \left(\sup_{x \in M} u(x, t) \right)^{\frac{n+2}{n-2}} \geq C \int_M u^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g(t)} = C,$$

par suite il existe une constante $C' > 0$ indépendante de t telle que

$$\inf_{x \in M} u(x, t) \geq C'.$$

Maintenant pour montrer que u est bornée dans l'espace de Hölder $C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(M \times [0, +\infty))$, on procède de la même façon que pour la preuve de la proposition 2.3.4 du chapitre 2 (cas

3.4 Comportement du flot à l'infini

$R_0 < 0$). La preuve est identiquement la même, la seule différence est qu'il faut utiliser la proposition 3.3.1 au lieu de la proposition 2.3.3.

Ainsi la théorie classique de régularité parabolique (voir théorème 1.2.5 du chapitre 1) appliquée à (3.2), implique que u est bornée dans $C^{2k+\alpha, k+\frac{\alpha}{2}}(M \times [0, +\infty))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|u\|_{C^k(M \times [0, +\infty))} \leq C_k, \quad (3.84)$$

où C_k est une constante positive dépendant de u_0 , g_0 , F et k .

D'après (3.84) il existe une suite $t_\nu \rightarrow +\infty$ et $u_\infty \in C^\infty(M)$, telle que

$$u(t_\nu) \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} u_\infty \quad \text{dans } C^\infty(M).$$

De plus comme $u(x, t) \geq C$, avec $C > 0$ indépendante de t , on a $u_\infty \geq C$. On a également par passage à la limite $R_{g(t_\nu)} \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} R_{g_\infty}$, avec $g_\infty = u_\infty^{\frac{4}{n-2}} g_0$. D'autre part, d'après la proposition 3.3.1 on a

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \int_M |R_{g(t_\nu)} - \lambda(t_\nu)F|^p dv_{g(t_\nu)} = 0 \quad \text{pour tout } p \geq 1.$$

On en déduit donc que $R_{g_\infty} = \lambda_\infty F$, avec $\lambda_\infty = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \lambda(t_\nu)$.

D'après un résultat de Simon [25], u_∞ est l'unique limite de $u(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Le théorème 3.4.2 est donc démontré. $\square$

Preuve de la proposition 3.4.4

Le lemme suivant est une version légèrement modifié des propositions 5.6 et 6.15 et des corollaires 5.5 et 6.10 de l'article de Brendle [7]. La preuve est identique avec des modifications naturelles concernant la fonction F . Dans ce qui suit les suites $(x_{k,\nu})$, $(\varepsilon_{k,\nu})$ ainsi que les points $(x_1, \dots, x_m)$ sont celles de la proposition 3.4.1.

Lemme 3.4.1 *Supposons que la fonction F satisfait l'hypothèse (H). Alors, il existe des suites $\alpha_{1,\nu}, \dots, \alpha_{m,\nu}$ vérifiant $\alpha_{k,\nu} \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} 1$ pour tout $k = 1, \dots, m$, et il existe une suite $\varphi_\nu \in C^\infty(M)$ vérifiant $\varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} u_\infty$ dans $H^1(M)$, telles que si on pose*

$$v_\nu = \varphi_\nu + \sum_{k=1}^m \alpha_{k,\nu} \left(\frac{4n(n-1)}{\lambda_\infty F(x_k)} \right)^{\frac{n-2}{4}} \bar{u}_{\varepsilon_{k,\nu}, x_{k,\nu}}$$

et

$$w_\nu = u_\nu - v_\nu,$$

alors on a, pour ν suffisamment grand,

$$\frac{n+2}{n-2}\lambda_\nu \int_M F v_\nu^{\frac{4}{n-2}} w_\nu^2 dv_{g_0} \leq (1 - C_0) \int_M (c_n |\nabla w_\nu|_0^2 + R_0 w_\nu^2) dv_{g_0},$$

où C_0 est une constante positive indépendante de ν . De plus, il existe des constantes positives γ et C_1 telle que pour tout ν assez grand on ait :

$$\begin{aligned} E(v_\nu) &\leq \left(E(u_\infty)^{\frac{n}{2}} + \sum_{k=1}^m \frac{Y(\mathbb{S}^n)^{\frac{n}{2}}}{F(x_k)^{\frac{n-2}{2}}} \right)^{\frac{2}{n}} \\ &\quad + C_1 \left(\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-2}} |R_{g_\nu} - \lambda(t_\nu)F|^{\frac{2n}{n+2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n+2}{2n}(1+\gamma)}. \end{aligned}$$

Le lemme précédent nous permet de démontrer la proposition suivante qui est le point clé pour la démonstration de la proposition 3.4.4.

Proposition 3.4.6 *Il existe une constante $0 < \gamma < 1$ et une constante $C > 0$ telles que*

$$E(u_\nu) - E_\infty \leq C \left(\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-2}} |R_{g_\nu} - \lambda(t_\nu)F|^{\frac{2n}{n+2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n+2}{2n}(1+\gamma)}.$$

Démonstration. Dans ce qui suit, C désigne une constante positive qui dépend de u_0 , g_0 et F , dont la valeur change d'une ligne à une autre. Rappelons que

$$\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} = 1,$$

$$R_{g_\nu} = -u_\nu^{-\frac{n+2}{n-2}} (c_n \Delta u_\nu - R_0 u_\nu),$$

et si l'on pose

$$f_\nu := f(t_\nu) = \int_M F u_\nu^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0}$$

on a

$$E(u_\nu) = \int_M (c_n |\nabla u_\nu|^2 + R_0 u_\nu^2) dv_{g_0} f_\nu^{-\frac{n-2}{n}},$$

et donc

$$f_\nu^{\frac{n-2}{n}} E(u_\nu) = \int_M (c_n |\nabla u_\nu|^2 + R_0 u_\nu^2) dv_{g_0}.$$

Notons également

$$\lambda_\nu := \lambda(t_\nu).$$

3.4 Comportement du flot à l'infini

Comme $u_\nu = v_\nu + w_\nu$, alors

$$\begin{aligned}
& \int_M (c_n |\nabla u_\nu|^2 + R_0 u_\nu^2) dv_{g_0} \\
&= \int_M (c_n |\nabla (v_\nu + w_\nu)|^2 + R_0 (v_\nu + w_\nu)^2) dv_{g_0} \\
&= \int_M (c_n |\nabla v_\nu|^2 + R_0 v_\nu^2) dv_{g_0} + \int_M (c_n |\nabla w_\nu|^2 + R_0 w_\nu^2) dv_{g_0} \\
&\quad + 2 \int_M (c_n \langle \nabla v_\nu, \nabla w_\nu \rangle + R_0 v_\nu w_\nu) dv_{g_0}.
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
& 2 \int_M (c_n \langle \nabla v_\nu, \nabla w_\nu \rangle + R_0 v_\nu w_\nu) dv_{g_0} \\
&= 2 \int_M (c_n |\nabla w_\nu|^2 + R_0 w_\nu^2 + c_n \langle \nabla v_\nu, \nabla w_\nu \rangle + R_0 v_\nu w_\nu) dv_{g_0} - 2 \int_M (c_n |\nabla w_\nu|^2 + R_0 w_\nu^2) dv_{g_0} \\
&= 2 \int_M (c_n \langle \nabla u_\nu, \nabla w_\nu \rangle + R_0 u_\nu w_\nu) dv_{g_0} - 2 \int_M (c_n |\nabla w_\nu|^2 + R_0 w_\nu^2) dv_{g_0} \\
&= 2 \int_M (-c_n \Delta_0 u_\nu w_\nu + R_0 u_\nu w_\nu) dv_{g_0} - 2 \int_M (c_n |\nabla w_\nu|^2 + R_0 w_\nu^2) dv_{g_0} \\
&= 2 \int_M u_\nu^{\frac{n+2}{n-2}} R_{g_\nu} w_\nu dv_{g_0} - 2 \int_M (c_n |\nabla w_\nu|^2 + R_0 w_\nu^2) dv_{g_0}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
f_\nu^{\frac{n-2}{n}} E(u_\nu) &= \int_M (c_n |\nabla v_\nu|^2 + R_0 v_\nu^2) dv_{g_0} \\
&\quad + 2 \int_M u_\nu^{\frac{n+2}{n-2}} R_{g_\nu} w_\nu dv_{g_0} \\
&\quad - \int_M (c_n |\nabla w_\nu|^2 + R_0 w_\nu^2) dv_{g_0}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\int_M (c_n |\nabla v_\nu|^2 + R_0 v_\nu^2) dv_{g_0} = E(v_\nu) \left(\int_M F v_\nu^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n}},$$

alors

$$\begin{aligned}
 f_\nu^{\frac{n-2}{n}} E(u_\nu) &= E(v_\nu) \left(\int_M F v_\nu^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n}} \\
 &\quad + 2 \int_M u_\nu^{\frac{n+2}{n-2}} (R_{g_\nu} - \lambda_\nu F) w_\nu dv_{g_0} \\
 &\quad - \int_M \left(c_n |\nabla w_\nu|^2 + R_0 w_\nu^2 - \frac{n+2}{n-2} \lambda_\nu F v_\nu^{\frac{4}{n-2}} w_\nu^2 \right) dv_{g_0} \\
 &\quad + \lambda_\nu \int_M F \left(-\frac{n+2}{n-2} v_\nu^{\frac{4}{n-2}} w_\nu^2 + 2 (v_\nu + w_\nu)^{\frac{n+2}{n-2}} w_\nu \right) dv_{g_0}.
 \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Taylor pour la fonction $h(X) = X^{\frac{n-2}{n}}$, on trouve que

$$X^{\frac{n-2}{n}} - 1 \leq \frac{n-2}{n}(X-1) \quad \forall X > 0.$$

Ainsi, en prenant $X = \frac{\int_M F v_\nu^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0}}{f_\nu}$, on obtient

$$\begin{aligned}
 &\left(\int_M F v_\nu^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n}} - f_\nu^{\frac{n-2}{n}} \\
 &\leq \int_M \left(\frac{n-2}{n} F v_\nu^{\frac{2n}{n-2}} f_\nu^{-\frac{2}{n}} - \frac{n-2}{n} f_\nu^{\frac{n-2}{n}} \right) dv_{g_0} \\
 &= f_\nu^{-\frac{2}{n}} \int_M \left(\frac{n-2}{n} F v_\nu^{\frac{2n}{n-2}} - \frac{n-2}{n} f_\nu \right) dv_{g_0},
 \end{aligned}$$

or,

$$f_\nu = \int_M F u_\nu^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} = \int_M F (v_\nu + w_\nu)^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0},$$

alors

$$\left(\int_M F v_\nu^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n}} - f_\nu^{\frac{n-2}{n}} \leq f_\nu^{-\frac{2}{n}} \int_M F \left(\frac{n-2}{n} v_\nu^{\frac{2n}{n-2}} - \frac{n-2}{n} (v_\nu + w_\nu)^{\frac{2n}{n-2}} \right) dv_{g_0}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 E(v_\nu) &\left(\int_M F v_\nu^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n}} \\
 &= f_\nu^{\frac{n-2}{n}} E_\infty + (E(v_\nu) - E_\infty) \left(\int_M F v_\nu^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n}} \\
 &\quad + E_\infty \left(\left(\int_M F v_\nu^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n}} - f_\nu^{\frac{n-2}{n}} \right).
 \end{aligned}$$

3.4 Comportement du flot à l'infini

Donc,

$$\begin{aligned}
f_\nu^{\frac{n-2}{n}} E(u_\nu) &\leq f_\nu^{\frac{n-2}{n}} E_\infty + (E(v_\nu) - E_\infty) \left(\int_M F v_\nu^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n}} \\
&\quad + 2 \int_M u_\nu^{\frac{n+2}{n-2}} (R_{g_\nu} - \lambda_\nu F) w_\nu dv_{g_0} \\
&\quad - \int_M \left(c_n |\nabla w_\nu|^2 + R_0 w_\nu^2 - \frac{n+2}{n-2} \lambda_\nu F v_\nu^{\frac{4}{n-2}} w_\nu^2 \right) dv_{g_0} \\
&\quad + \lambda_\nu \int_M F \left(\frac{n-2}{n} v_\nu^{\frac{2n}{n-2}} - \frac{n-2}{n} (v_\nu + w_\nu)^{\frac{2n}{n-2}} \right. \\
&\quad \quad \left. - \frac{n+2}{n-2} v_\nu^{\frac{4}{n-2}} w_\nu^2 + 2 (v_\nu + w_\nu)^{\frac{2n}{n-2}} w_\nu \right) dv_{g_0}.
\end{aligned}$$

Mais $0 < \lambda_\nu \leq C$ (d'après Proposition 3.1.4) et $F \leq \max_M F$, alors

$$\begin{aligned}
f_\nu^{\frac{n-2}{n}} E(u_\nu) &\leq f_\nu^{\frac{n-2}{n}} E_\infty + (E(v_\nu) - E_\infty) \left(\int_M F v_\nu^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n}} \\
&\quad + 2 \int_M u_\nu^{\frac{n+2}{n-2}} (R_{g_\nu} - \lambda_\nu F) w_\nu dv_{g_0} \\
&\quad - \int_M \left(c_n |\nabla w_\nu|^2 + R_0 w_\nu^2 - \frac{n+2}{n-2} \lambda_\nu F v_\nu^{\frac{4}{n-2}} w_\nu^2 \right) dv_{g_0} \\
&\quad + C \int_M \left| \frac{n-2}{n} v_\nu^{\frac{2n}{n-2}} - \frac{n-2}{n} (v_\nu + w_\nu)^{\frac{2n}{n-2}} \right. \\
&\quad \quad \left. - \frac{n+2}{n-2} v_\nu^{\frac{4}{n-2}} w_\nu^2 + 2 (v_\nu + w_\nu)^{\frac{2n}{n-2}} w_\nu \right| dv_{g_0}.
\end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned}
&\int_M u_\nu^{\frac{n+2}{n-2}} (R_{g_\nu} - \lambda_\nu F) w_\nu dv_{g_0} \\
&\leq \left(\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-2}} |R_{g_\nu} - \lambda_\nu F|^{\frac{2n}{n+2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n+2}{2n}} \left(\int_M |w_\nu|^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{2n}}.
\end{aligned} \tag{3.85}$$

D'après le lemme 3.4.1, on a

$$\frac{n+2}{n-2} \lambda_\nu \int_M F v_\nu^{\frac{4}{n-2}} w_\nu^2 dv_{g_0} \leq (1 - C_0) \int_M (c_n |\nabla w_\nu|_0^2 + R_0 w_\nu^2) dv_{g_0},$$

donc,

$$\int_M \left(c_n |\nabla w_\nu|_0^2 + R_0 w_\nu^2 - \frac{n+2}{n-2} \lambda_\nu F v_\nu^{\frac{4}{n-2}} w_\nu^2 \right) dv_{g_0} \geq C_0 \int_M (c_n |\nabla w_\nu|_0^2 + R_0 w_\nu^2) dv_{g_0}.$$

D'où par définition de l'invariant de Yamabe $Y(M, g_0)$

$$\int_M \left(c_n |\nabla w_\nu|_0^2 + R_0 w_\nu^2 - \frac{n+2}{n-2} \lambda_\nu F v_\nu^{\frac{4}{n-2}} w_\nu^2 \right) dv_{g_0} \geq C_0 Y(M, g_0) \left(\int_M |w_\nu|^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n}}. \quad (3.86)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} & \left| \frac{n-2}{n} v_\nu^{\frac{2n}{n-2}} - \frac{n-2}{n} (v_\nu + w_\nu)^{\frac{2n}{n-2}} - \frac{n+2}{n-2} v_\nu^{\frac{4}{n-2}} w_\nu^2 + 2(v_\nu + w_\nu)^{\frac{2n}{n-2}} w_\nu \right| \\ & \leq C v_\nu^{\max\{0, \frac{4}{n-2}-1\}} |w_\nu|^{\min\{\frac{2n}{n-2}, 3\}} + C |w_\nu|^{\frac{2n}{n-2}}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} & \int_M \left| \frac{n-2}{n} v_\nu^{\frac{2n}{n-2}} - \frac{n-2}{n} (v_\nu + w_\nu)^{\frac{2n}{n-2}} - \frac{n+2}{n-2} v_\nu^{\frac{4}{n-2}} w_\nu^2 + 2(v_\nu + w_\nu)^{\frac{2n}{n-2}} w_\nu \right| dv_{g_0} \\ & \leq C \int_M v_\nu^{\max\{0, \frac{2n}{n-2}-3\}} |w_\nu|^{\min\{\frac{2n}{n-2}, 3\}} dv_{g_0} + C \int_M |w_\nu|^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \\ & \leq C \left(\int_M |w_\nu|^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n} \min\{\frac{n}{n-2}, \frac{3}{2}\}}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

En combinant les trois inégalités (3.85), (3.86) et (3.87), on conclut que

$$\begin{aligned} f_\nu^{\frac{n-2}{n}} E(u_\nu) & \leq f_\nu^{\frac{n-2}{n}} E_\infty + (E(v_\nu) - E_\infty) \left(\int_M F v_\nu^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n}} \\ & \quad + 2 \left(\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-2}} |R_{g_\nu} - \lambda_\nu F|^{\frac{2n}{n+2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n+2}{2n}} \left(\int_M |w_\nu|^{\frac{2n}{n+2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{2n}} \\ & \quad - C^{-1} \left(\int_M |w_\nu|^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n}} + C \left(\int_M |w_\nu|^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n} \min\{\frac{n}{n-2}, \frac{3}{2}\}}, \end{aligned}$$

ce qui donne pour ν assez grand, en remarquant que $w_\nu \rightarrow 0$ dans $H^1(M)$ par la proposition 3.4.1,

$$\begin{aligned} f_\nu^{\frac{n-2}{n}} E(u_\nu) & \leq f_\nu^{\frac{n-2}{n}} E_\infty + (E(v_\nu) - E_\infty) \left(\int_M F v_\nu^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n}} \\ & \quad + C \left(\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-2}} |R_{g_\nu} - \lambda_\nu F|^{\frac{2n}{n+2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n+2}{n}}, \end{aligned}$$

et comme $\left(\int_M F v_\nu^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C$ car $v_\nu - u_\nu \rightarrow 0$ dans $H^1(M)$ et $\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-2}} dv_{g_0} = 1$, alors on obtient :

$$\begin{aligned} f_\nu^{\frac{n-2}{n}} E(u_\nu) &\leq f_\nu^{\frac{n-2}{n}} E_\infty + C (E(v_\nu) - E_\infty) \\ &\quad + C \left(\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-2}} |R_{g_\nu} - \lambda_\nu F|^{\frac{2n}{n+2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n+2}{n}}, \end{aligned} \quad (3.88)$$

D'autre part, on a par le Lemme 3.4.1 :

$$\begin{aligned} E(v_\nu) &\leq \left(E(u_\infty)^{\frac{n}{2}} + \sum_{k=1}^m \frac{Y(\mathbb{S}^n)^{\frac{n}{2}}}{F(x_k)^{\frac{n-2}{2}}} \right)^{\frac{2}{n}} \\ &\quad + C_1 \left(\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-2}} |R_{g_\nu} - \lambda_\nu F|^{\frac{2n}{n+2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n+2}{2n}(1+\gamma)}. \end{aligned}$$

ce qui donne en utilisant la proposition 3.4.3,

$$E(v_\nu) - E_\infty \leq C \left(\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-2}} |R_{g_\nu} - \lambda_\nu F|^{\frac{2n}{n+2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n+2}{2n}(1+\gamma)}.$$

En substituant cette inégalité dans (3.88), on obtient

$$\begin{aligned} f_\nu^{\frac{n-2}{n}} (E(u_\nu)) - E_\infty &\leq C \left(\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-2}} |R_{g_\nu} - \lambda_\nu F|^{\frac{2n}{n+2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n+2}{2n}(1+\gamma)} \\ &\quad + \left(\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-2}} |R_{g_\nu} - \lambda_\nu F|^{\frac{2n}{n+2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n+2}{n}}, \end{aligned}$$

ce qui donne puisque $0 < \gamma < 1$

$$f_\nu^{\frac{n-2}{n}} (E(u_\nu)) - E_\infty \leq C \left(\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-2}} |R_{g_\nu} - \lambda_\nu F|^{\frac{2n}{n+2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n+2}{2n}(1+\gamma)}.$$

Mais d'après la proposition 3.1.4, on a $f_\nu \geq C_0$, alors il existe une constante positive C telle que

$$E(u_\nu) - E_\infty \leq C \left(\int_M u_\nu^{\frac{2n}{n-2}} |R_{g_\nu} - \lambda_\nu F|^{\frac{2n}{n+2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n+2}{2n}(1+\gamma)}.$$

Ce qui achève la preuve de la proposition. □

Maintenant on clot ce chapitre avec la démonstration de la proposition 3.4.4.

Démonstration de la proposition 3.4.4. Supposons le contraire, donc on a : $\forall 0 < \gamma < 1$ et $\forall t_0 > 0 \exists t \geq t_0$ tels que

$$E(u(t)) - E_\infty \geq \left(\int_M u(t)^{\frac{2n}{n-2}} |R_{g(t)} - \lambda(t) F|^{\frac{2n}{n+2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n+2}{2n}(1+\gamma)}.$$

Donc, il existe une suite $\{t_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$ $t_\nu \rightarrow +\infty$ telle que

$$E(u(t_\nu)) - E_\infty \geq \left(\int_M u(t_\nu)^{\frac{2n}{n-2}} |R_{g_\nu} - \lambda(t_\nu)F|^{\frac{2n}{n+2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n+2}{2n}(1+\frac{1}{\nu})}.$$

Mais d'après la proposition 3.4.6 on a

$$E(u(t_\nu)) - E_\infty \leq C \left(\int_M u(t_\nu)^{\frac{2n}{n-2}} |R_{t_\nu} - \lambda(t_\nu)F|^{\frac{2n}{n+2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n+2}{2n}(1+\gamma)},$$

ce qui implique que

$$1 \leq C \left(\int_M u(t_\nu)^{\frac{2n}{n-2}} |R_{t_\nu} - \lambda(t_\nu)F|^{\frac{2n}{n+2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n+2}{2n}(\gamma-\frac{1}{\nu})}.$$

D'autre part, on a d'après la proposition 3.3.1

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left(\int_M u(t_\nu)^{\frac{2n}{n-2}} |R_{t_\nu} - \lambda(t_\nu)F|^{\frac{2n}{n+2}} dv_{g_0} \right)^{\frac{n+2}{2n}(\gamma-\frac{1}{\nu})} = 0.$$

On obtient ainsi une contradiction. □

Bibliographie

- [1] T. Aubin , *Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*, J. Math. Pures Appl. 55, 269-296(1976).
- [2] T. Aubin et H. Hebey, *Courbure scalaire prescrite*, Bull. Sci. Math. 115, 125-132 (1990).
- [3] A. Bahri et J. M. Coron, *On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent : The effect of the topology of the domain*, Comm. Pure Appl.Math. 41, 253-290 (1988).
- [4] A. Bahri et J. M. Coron, *The scalar curvature problem on the standard three-dimensional sphere* , J. Funct. Anal. 95, 106-172 (1991).
- [5] P. Baird, A. Fardoun et R.Regbaoui, *The evolution of the scalar curvature of a surface to a prescribed function*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa. Cl. Sci. 5, 17-38 (2004).
- [6] S. Bismuth, *Courbure scalaire prescrite sur une variété riemannienne C^∞ compacte dans le cas nul*, J. Math. Pures Appl. 77, 667-695 (1998).
- [7] S. Brendle, *convergence of the Yamabe flow for arbitrary initial energy*, J. Diff. Geom. 69, 217-278 (2005).
- [8] S. Brendle, *Convergence of the Yamabe flow in dimension 6 and higher*, Invent. Math. 170(3), 541-576 (2007).
- [9] A. Chang, M. Gursky and P. Yang , *The scalar curvature equation on the 2- and 3-sphere*, Calc. Var. Partial Differ. Equ. 1, 205-229 (1993).
- [10] X. Chen and X. Xu , *The scalar curvature flow on S^n - perturbation theorem revisited*, Invent. Math. 187, 395-506 (2012).
- [11] E. DiBenedetto , *Continuity of weak solutions to general porous medium equation*, Indiana. Univ. Math. J. 32, 83-118 (1983).
- [12] J. F. Escobar and R. M. Schoen, *Conformal metrics with prescribed scalar curvature*, Invent. Math. 86, 241-254 (1986).
- [13] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, New-York, 1983.
- [14] M. J. Gursky, *A non-local flow for Riemann surfaces*, Calc. Var. Partial Differential Equations 32, 53-80 (2008).
- [15] R.S. Hamilton, *Lectures on geometric flows*, 1989 (unpublished).

-
- [16] E. Hebey, *Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés*, Fondations, Diderot Editeur, Paris, 1997.
 - [17] E. Hebey, *Changements de métriques conformes sur la sphère - Le problème de Nirenberg*, Bull. Sci. Math. 114, 215-242 (1990).
 - [18] E. Hebey et M. Vaugon, *Le problème de Yamabe équivariant*, Bull. Sci. Math. 117, 241-286, (1993).
 - [19] J. L. Kazdan and F. W. Warner, *Scalar curvature and conformal deformation of Riemannian structure*, J. Differential Geom. 10, 113-134 (1975).
 - [20] G. M. Lieberman, *Second Order Parabolic Differential Equations*, World Scientific, 1996.
 - [21] A. Rauzy, *Courbures scalaires des variétés d'invariant conforme négatif*, Trans. Amer. Math. Soc. 347, 4729-4745 (1995).
 - [22] R.M. Schoen, *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*, J. Diff. Geom. 20, 479-495 (1984).
 - [23] R.M. Schoen and D. Zhang, *Prescribed scalar curvature on the n -sphere*, Calc. Var. Partial Differ. Equ. 4(1), 1-25 (1996).
 - [24] H.Schwetlick and M.Struwe, *Convergence of the Yamabe flow for large energies*, J. Reine Angew. Math. 562, 59-100 (2003).
 - [25] L. Simon, *Asymptotics for a class of nonlinear evolution equations with applications to geometric problems*, Ann. of Math., 118(3), 525-571 (1983).
 - [26] M. Struwe, *A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities*, Math. Z. 187, 511-517 (1984).
 - [27] M. Struwe, *A flow approach to Nirenberg's problem*, Duke. Math. J. 128, 19-65 (2005).
 - [28] N. Trudinger, *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa 22, 265-274 (1968).
 - [29] J. Vazquez et L. Véron, *Solutions positives d'équations elliptiques semi-linéaires sur des variétés riemanniennes compactes*, C. R. Acad. Sei. Paris. Sér. I Math. 312, 811-815 (1991).
 - [30] H.Yamabe, *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Osaka Math. J., 12, 21-37 (1960).
 - [31] R.Ye, *Global existence and convergence of Yamabe flow*, J. Diff. Geom. 39, 35-50 (1994).

Titre : Flot de Yamabe avec courbure scalaire prescrite

Cette thèse est consacrée à l'étude d'une famille des flots géométriques associés au problème de la courbure scalaire prescrite sur une variété riemannienne compacte. Plus précisément, si on désigne par (M, g_0) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, et si $F \in C^\infty(M)$ est une fonction donnée, le problème de la courbure scalaire prescrite consiste à trouver une métrique g conforme à g_0 telle que F soit sa courbure scalaire. Ce problème est équivalent à la résolution de l'EDP suivante :

$$-4\frac{n-1}{n-2}\Delta u + R_0 u = F u^{\frac{n+2}{n-2}}, u > 0, \quad (\text{E})$$

où R_0 est la courbure scalaire de la métrique initiale g_0 et Δ est le laplacien associé à g_0 .

Il s'agit d'une équation elliptique non-linéaire dont la difficulté principale provient du terme $u^{\frac{n+2}{n-2}}$. Hormis le cas de la sphère standard $\mathbb{S}^n$, tous les travaux consacrés à l'étude de l'équation (E) sont basés sur la méthode variationnelle.

Dans cette thèse, on développe une autre approche basée sur l'étude d'une famille de flots géométriques qui permet, entre autres, de résoudre l'équation (E). La question dépend bien entendu de la métrique initiale g_0 et en particulier du signe de sa courbure scalaire R_0 .

Les flots introduits sont des flots de gradient associés à deux fonctionnelles distinctes dépendant du signe de R_0 .

La première partie de cette thèse est consacrée au cas $R_0 < 0$. On étudie le flot suivant, dont la solution $g(t)$ est une métrique riemannienne sur M ,

$$\begin{cases} \partial_t g(t) = -(R_{g(t)} - F) g(t) \\ g(0) = g^0, \end{cases}$$

où $g^0 = u_0^{\frac{4}{n-2}} g_0$, avec $0 < u_0 \in C^\infty(M)$, est la donnée initiale, et $R_{g(t)}$ est la courbure scalaire de $g(t)$.

Dans la deuxième partie on traite le cas $R_0 > 0$. On étudiera le flot :

$$\begin{cases} \partial_t g(t) = -\frac{4}{n+2} (R_{g(t)} - \lambda(t)F) g(t) \\ g(0) = g^0, \end{cases}$$

où $\lambda(t) = \frac{r_{g(t)}}{f(t)}$, avec $r_{g(t)}$ et $f(t)$ sont les valeurs moyennes respectives de $R_{g(t)}$ et F .

Dans les deux cas, on démontre l'existence globale du flot et on étudie son comportement asymptotique à l'infini.

Mots clé : Métrique conforme, courbure scalaire, flot de Yamabe.

Title : Yamabe flow with prescribed scalar curvature

This thesis is devoted to the study of a family of geometric flows associated with the prescribed scalar curvature problem on a compact riemannian manifold. More precisely, if we denote by (M, g_0) a compact riemannian manifold with dimension $n \geq 3$, and if $F \in C^\infty(M)$ is a given function, the prescribed scalar curvature problem consists of finding a conformal metric g to g_0 such that F is its scalar curvature. This problem is equivalent to the resolution of the following PDE :

$$-4\frac{n-1}{n-2}\Delta u + R_0 u = F u^{\frac{n+2}{n-2}}, u > 0, \quad (\text{E})$$

where R_0 is the scalar curvature of the initial metric g_0 and Δ is the laplacian associated with g_0 .

It is a nonlinear elliptic equation, whose the main difficulty comes from the term $u^{\frac{n+2}{n-2}}$. Apart from the case of the standard sphere $\mathbb{S}^n$, all the works that study the equation (E) are based on the variational method.

In this thesis, we develop another approach based on the study of a family of geometric flows which allows to solve equation (E). The resolution of this equation depends on the initial metric g_0 and in particular the sign of its scalar curvature R_0 .

The flows introduced are gradient flows associated with two distinct functional functions depending on the sign of R_0 .

The first part of this thesis is devoted to the case $R_0 < 0$. We study the following flow, where the solution $g(t)$ is a Riemannian metric on M ,

$$\begin{cases} \partial_t g(t) = -(R_{g(t)} - F) g(t) \\ g(0) = g^0, \end{cases}$$

where $g^0 = u_0^{\frac{4}{n-2}} g_0$, with $0 < u_0 \in C^\infty(M)$, is the initial given, and $R_{g(t)}$ is the scalar curvature of $g(t)$.

In the second part we treat the case $R_0 > 0$. We will study the flow :

$$\begin{cases} \partial_t g(t) = -\frac{4}{n+2} (R_{g(t)} - \lambda(t)F) g(t) \\ g(0) = g^0, \end{cases}$$

where $\lambda(t) = \frac{r_{g(t)}}{f(t)}$, with $r_{g(t)}$ and $f(t)$ are the respective average values of $R_{g(t)}$ and F .

In both cases, our aim is to proof the global existence of the flow and study its asymptotic behavior at infinity.

Keywords : Conformal metric, scalar curvature, Yamabe flow.