



**HAL**  
open science

# Conception et caractérisation de liaisons boulonnées pour la réduction robuste de vibrations de structures

Martin Ghienne

► **To cite this version:**

Martin Ghienne. Conception et caractérisation de liaisons boulonnées pour la réduction robuste de vibrations de structures. Vibrations [physics.class-ph]. Conservatoire national des arts et métiers - CNAM, 2017. Français. NNT : 2017CNAM1146 . tel-01793711

**HAL Id: tel-01793711**

**<https://theses.hal.science/tel-01793711v1>**

Submitted on 16 May 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale Science et Métiers de l'ingénieur

Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés

## THÈSE DE DOCTORAT

*présentée par* : **Martin GHIENNE**

*soutenue le* : **6 Décembre 2017**

*pour obtenir le grade de* : **Docteur du Conservatoire National des Arts et Métiers**

*Discipline* : **Mécanique, génie mécanique, génie civil**

*Spécialité* : **Mécanique**

### Conception et caractérisation de liaisons boulonnées pour la réduction robuste de vibrations de structures

#### THÈSE DIRIGÉE PAR

M BLANZÉ Claude

*Professeur des Universités, Conservatoire National des Arts et Métiers (Directeur de thèse)*

#### RAPPORTEURS

M CHEVALLIER Gaël

*Professeur des Universités, Université de Franche-Comté*

M SCHOEFS Franck

*Professeur des Universités, Université de Nantes*

#### EXAMINATEURS

M DION Jean-Luc

*Professeur des Universités, Supméca - Institut Supérieur de Mécanique de Paris (Président du jury)*

M BOUCARD Pierre-Alain

*Professeur des Universités, École Normale Supérieure Paris-Saclay*

M LAURENT Luc

*Maître de Conférence, Conservatoire National des Arts et Métiers (Co-encadrant de thèse)*



# Abstract

Predictive models are needed to properly design assembled structures. The main issue with this kind of structure is to deal with non-linear phenomena, such as contact or friction, while considering sources of uncertainties mainly responsible for the deviation between the effective behavior of the structure and results from deterministic simulations. This work aims to provide a pragmatic approach to characterize the vibrational behavior of light assembled structures considering the variability of parameters of the joints. This approach would be useful for robust design of solutions, such as solutions for damping vibrations, dedicated to assembled structures and taking into account the variability of the real behavior of each joint. In this work, the dynamical behavior of an actual light structure is studied in order to identify a "just sufficient" nominal model of the considered joints. A non-intrusive approach is then proposed to reduce the vibrational stochastic model of a structure with random parameters. This approach, referred to as the SMR approach (for Stochastic Model Reduction approach), takes advantage of the order of variability of random eigenvectors which is usually lower than the variability of the corresponding random eigenfrequencies. This allows us to significantly reduce the computational cost for a given accuracy to estimate the structure's random eigenfrequencies. The cornerstone of this approach is to adapt the stochastic modeling to each random eigenfrequency depending on a global accuracy requirement on the whole set of sought random eigenfrequencies. The key point is then to identify the stochastic model used for each configuration of random eigenfrequencies. A computationally free indicator is then proposed. Finally, a stochastic mechanical model of the joints of the studied structure is proposed. The SMR approach is used in an optimization process based on the maximum likelihood principle to identify the parameters of this stochastic model. This last step allows us to characterize the vibrational behavior of assembled structures involving many joints taking into account the variability of each joint. This work is then concluded by applying the proposed approach to the design of an original strategy for robust reduction of vibration of light structures.

**Keywords :** Parametric uncertainties, bolted joints, random stiffness, stochastic model reduction, robust design.

ABSTRACT

---

# Résumé

La conception des structures assemblées nécessite de disposer d'outils de simulation prédictifs permettant de minimiser les écarts entre les comportements réel et simulé de ces structures. Et ce, d'autant plus que les exigences en terme de performance du système sont élevées et qu'une conception optimale est recherchée. Lors du dimensionnement des structures assemblées, la pratique généralement adoptée en bureau d'étude consiste à définir un coefficient de sécurité permettant de tenir compte de la variabilité du comportement réel de ces structures. L'inconvénient est de conduire nécessairement à un surdimensionnement qui peut aller à l'encontre des objectifs de dimensionnement optimal de ces structures. Les liaisons sont le siège de phénomènes non-linéaires tels que le contact ou le frottement et différentes sources d'incertitude induisent une variabilité sur les caractéristiques dynamiques réelles des liaisons. Malgré les capacités des calculateurs actuels, la prise en compte conjointe des phénomènes non linéaires et des incertitudes lors de la simulation de structures assemblées complexes reste difficilement envisageable par une approche directe. L'objectif de ce travail est de proposer une approche pragmatique de caractérisation du comportement vibratoire des structures légères assemblées en tenant compte de la variabilité des paramètres des liaisons. L'intérêt de cette approche est de pouvoir être intégrée dans une phase de dimensionnement robuste. On peut ainsi envisager de dimensionner une solution d'amortissement des vibrations d'une structure assemblée en tenant compte de la variabilité du comportement réel des liaisons de cette structure.

Ce travail étudie d'abord le comportement dynamique d'une structure légère réelle afin d'identifier un modèle nominal «juste suffisant» des liaisons considérées. Une approche non intrusive de caractérisation du comportement vibratoire d'une structure en présence de paramètres incertains est ensuite proposée. Cette approche, intitulée approche SMR (pour Stochastic Model Reduction), exploite le fait que la variabilité des vecteurs propres d'une structure est généralement d'un ordre de grandeur inférieur à la variabilité des fréquences propres associées ce qui permet de réduire considérablement le coût de calcul de l'approche tout en gardant une bonne précision sur l'estimation des fréquences propres aléatoires de la structure. Le principe de l'approche est alors d'adapter la modélisation stochastique à chaque fréquence propre aléatoire en fonction d'une exigence de précision globale sur l'ensemble des fréquences propres aléatoires recherchées. Le point clé de cette approche consiste à identifier le modèle stochastique adapté à chaque configuration de fréquence propre, pour cela un indicateur sans coût de calcul supplémentaire est proposé. Finalement, un modèle stochastique des liaisons de la structure considérée est proposé et l'approche SMR est utilisée dans un processus d'optimisation basé sur le principe du maximum de vraisemblance pour identifier les paramètres de ce modèle. Cette dernière étape de la démarche

## RÉSUMÉ

---

proposée permet alors de caractériser le comportement vibratoire de structures assemblées constituées de nombreuses liaisons en tenant compte de la variabilité du comportement de chacune des liaisons. La démarche mise en place dans le cadre de cette thèse est alors concrétisée par la proposition d'une stratégie originale de réduction robuste des vibrations d'une structure assemblée légère.

**Mots clés :** Réduction des vibrations, assemblages boulonnés, incertitudes paramétriques, Réductin de Modèles Stochastiques, raideur aléatoire, dimensionnement robuste

# Remerciements

Ce manuscrit est le fruit de trois années passées au sein du Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés du Conservatoire National des Arts et Métiers de Paris. Cette partie est l'occasion pour moi de remercier l'ensemble des personnes ayant participé à l'aboutissement de ce travail.

Tout d'abord, je tiens à remercier tout particulièrement Claude Blanzé de m'avoir permis de me lancer dans cette grande aventure. Les nombreuses discussions que nous avons eu m'ont permis de tracer mon propre chemin, de lever mes doutes (lorsqu'il y en avait) et finalement de m'approprier cette thèse, ma thèse. Je remercie également Luc Laurent pour les nombreuses heures qu'il a accepté de passer pour me permettre, entre autres, de développer les outils numériques nécessaires à l'aboutissement de ce travail. J'ai tendance à minimiser le nombre de lignes de code qui ont été écrites durant ces trois ans mais je te dois en grande partie le succès de tout ce qui a été implémenté. Je souhaite ensuite remercier M Gaël Chevallier et M Franck Schoefs d'avoir accepté de rapporter mon travail. Merci également à M Jean-Luc Dion d'avoir présidé mon jury ainsi que M Pierre-Alain Boucard d'avoir fait partie de celui-ci en tant qu'examinateur.

Pour continuer, je voudrais remercier tout particulièrement deux membres essentiels du LMSSC sans qui le bon déroulement pratique de cette thèse n'aurait pas été possible : Fred et Philippe. Merci Philippe d'avoir assuré lorsque le matériel informatique ne faisait plus ce que je lui demandais, d'avoir assuré lors des repas de labo avec tes plats *king size*, d'avoir assuré pour l'impression de mon manuscrit malgré l'heure tardive et surtout merci de m'avoir rendu mon adresse IP ! Un très grand merci à Fred, le technicien (classe) exceptionnel à qui je dois la qualité de mes résultats expérimentaux. Nos bons moments passés (entre autres) lors des pauses cafés vont vraiment me manquer. Je remercie également mes "tontons et tatas scientifiques" Lucie, Mathieu, Antoine, Olivier, Jean-Baptiste qui ont toujours gardé la porte ouverte (et le sourire) malgré toutes les fois où je suis venu les déranger dans leur travail. Inversement (puisqu'il aimait bien tout inverser et notamment ses initiales), merci à Roger pour toutes les fois où il est venu me déranger dans mon travail ! Merci également à tous les doctorants aux côtés desquels j'ai pu cheminer durant tout ou partie de ces trois longues années, je pense notamment à Boris, Benjamin, Olivier, Aro, Christophe, Sylvain, Chaïma, Robin, Stéphanie, Pierre et Guillaume. Sans oublier les doctorants mécasupiens Marco, Adrien et Adrien avec lesquels j'ai eu le plaisir d'organiser la meilleure 7ème édition des JJCAB que la communauté vibro-acoustique ait jamais connue !

En sortant un peu du labo j'ai notamment rencontré quelques personnes qui m'ont permis de déconnecter de temps à autre autour d'une toile, le temps d'une pause déjeuner.



## REMERCIEMENTS

---

Parmi elles, je tenais à remercier tout particulièrement Marianne. J'ai vraiment pris beaucoup de plaisir à peindre avec toi. Toute thèse se doit de faire un état de l'art, j'ajouterai juste que durant la mienne, j'ai pu faire un état de lard.

Je tenais à remercier également mes amis, Tup, Bob et Hélène, Sylvain et Anja, Jérôme et Sibyle, Groval et Bidisha, La Poule et Cat, Furet et Jess, qui ne m'ont pas tenu rigueur des nombreuses fois où j'ai dû leur dire non à cause de ma thèse. Je remercie également mes parents, Pierre et Marie-Michelle, mes soeurs, Maité, Noémie et Alice ainsi que ma belle-famille, Nat, Ben et Inès et mes proches, Monique et Bernard ainsi que les Delattres. Vous avez dû vous poser bien des questions sur ce que je faisais durant ces trois ans, tout ça pour une histoire de boulons.

Enfin, je ne remercierai jamais assez celle qui a accepté de me suivre lorsque je me suis lancé dans cette aventure. Perrine, je n'ai certainement pas dû être toujours très facile à vivre au cours de ces trois longues années et malgré tout, tu m'as offert ce petit trésor aux yeux bleu qui me comble de bonheur ! Ca m'amusera toujours de me dire que nous avons accouché en même temps. Toi d'une princesse de 3kg720, moi d'un manuscrit d'à peine 430g.

Pour conclure, je voudrais simplement dédier ce manuscrit à ma fille Louise qui, même si elle ne s'en souvient certainement pas, a veillé le jour à ce que je rédige cette thèse pour que je puisse m'occuper d'elle la nuit.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>19</b>
<b>1 Outils de caractérisation vibratoire robuste des structures assemblées</b>	<b>23</b>
1.1 Introduction . . . . .	24
1.2 Modèles de comportement . . . . .	26
1.2.1 Modèles constitutifs . . . . .	27
1.2.2 Modèles rhéologiques . . . . .	28
1.3 Méthodes d'identification des paramètres de liaison . . . . .	32
1.4 Méthodes de simulation déterministe d'une structure assemblée complète . .	36
1.5 Prise en compte de la variabilité des paramètres de liaison . . . . .	37
1.5.1 Méthodes de perturbation . . . . .	39
1.5.2 Méthode des Eléments Finis Spectraux Stochastiques . . . . .	39
1.5.3 Bilan . . . . .	40
1.6 Approche retenue . . . . .	40
<b>2 Caractérisation et simulation du comportement vibratoire d'une structure assemblée</b>	<b>45</b>
2.1 Caractérisation du dispositif expérimental utilisé . . . . .	47
2.1.1 Présentation de la démarche expérimentale : Analyse différentielle du portique . . . . .	48
2.1.2 Caractérisation de vis instrumentées pour la mesure de l'effort de serrage dans une liaison . . . . .	48
2.1.2.1 Spécification des vis instrumentées . . . . .	49
2.1.2.2 Etalonnage des vis . . . . .	51
2.1.3 Caractérisation des conditions expérimentales . . . . .	52
2.1.3.1 Identification des paramètres matériaux de la structure réelle	53
2.1.3.2 Caractérisation des conditions d'encastrement . . . . .	54
2.1.3.3 Choix des conditions d'excitation . . . . .	55

2.1.3.4	Modélisation du stinger . . . . .	57
2.2	Identification d'un modèle de liaison . . . . .	58
2.2.1	Analyse expérimentale des paramètres de liaison . . . . .	59
2.2.1.1	Identification des fréquences propres et de l'amortissement modal du portique expérimental . . . . .	59
2.2.1.2	Premières observations expérimentales . . . . .	60
2.2.1.3	Influence du serrage de la liaison et de l'amplitude d'excitation sur le comportement expérimental du portique . . . . .	63
2.2.1.4	Conclusions vis-à-vis du modèle de liaison . . . . .	67
2.2.2	Identification de la raideur de liaison . . . . .	70
2.2.2.1	Identification par minimisation d'erreur . . . . .	71
2.2.2.2	Identification directe (ou par analyse différentielle) . . . . .	72
2.3	Simulation du comportement vibratoire d'une autre configuration de portique . . . . .	74
2.3.1	Modélisation du second portique muni d'une seule liaison . . . . .	75
2.3.2	Validation du modèle de comportement de la liaison . . . . .	75
2.4	Conclusion . . . . .	77
<b>3</b>	<b>Réduction de Modèles Stochastiques pour la caractérisation robuste du comportement vibratoire des structures assemblées</b> . . . . .	<b>81</b>
3.1	Introduction . . . . .	82
3.2	Caractérisation des fréquences propres aléatoires d'une structure par l'approche de Réduction de Modèles Stochastiques . . . . .	82
3.2.1	Définition du problème aux valeurs propres aléatoires . . . . .	82
3.2.2	L'approche de Réduction de Modèles Stochastiques (SMR) . . . . .	84
3.2.2.1	Hypothèse fondatrice de l'approche SMR . . . . .	84
3.2.2.2	Premier niveau de raffinement : SMR1 . . . . .	86
3.2.2.3	Deuxième niveau de raffinement : SMR2 . . . . .	88
3.2.2.4	Comparaison avec la méthode de perturbation à l'ordre 2 . . . . .	88
3.2.3	Implémentation de l'approche SMR . . . . .	90
3.2.3.1	Application au cas d'une structure réelle . . . . .	91
3.2.3.2	Définition d'un <i>Facteur de Proximité</i> entre deux valeurs propres aléatoires . . . . .	92
3.2.3.3	Calcul de sensibilité des vecteurs propres . . . . .	93
3.2.3.4	Implémentation de la méthode de calcul de sensibilité des vecteurs propres . . . . .	96
3.2.3.5	Implémentation de l'approche SMR couplée avec le logiciel éléments finis MSC Nastran . . . . .	97

TABLE DES MATIÈRES

---

3.2.3.6	Modélisation stochastique des paramètres incertains . . . . .	98
3.3	Applications de l'approche SMR . . . . .	99
3.3.1	Système à trois degrés de liberté . . . . .	100
3.3.1.1	Modélisation stochastique . . . . .	100
3.3.1.2	Estimation des premiers moments statistiques et densité de probabilité pour des valeurs propres aléatoires distinctes ou proches . . . . .	101
3.3.1.3	Comparaison de l'approche SMR à une méthode classique de perturbation à l'ordre deux . . . . .	102
3.3.1.4	Caractérisation du facteur de proximité . . . . .	103
3.3.2	Une structure simple modélisée par éléments finis : un portique . . . . .	107
3.3.2.1	Modélisation stochastique du portique . . . . .	107
3.3.2.2	Illustration "visuelle" de l'hypothèse fondatrice de l'approche SMR . . . . .	108
3.3.2.3	Estimation des cinq premières valeurs propres aléatoires du portique . . . . .	108
3.3.2.4	Estimation des 25 premières valeurs propres du portique . . . . .	110
3.3.3	Une structure industrielle : l'Adaptateur Charge Utile d'Ariane . . . . .	114
3.3.3.1	Modélisation stochastique . . . . .	114
3.3.3.2	Résultats numériques . . . . .	116
3.4	Conclusion . . . . .	118
3.4.1	Validation de l'approche SMR . . . . .	118
3.4.2	Application au cas d'un portique dont les paramètres aléatoires influent localement . . . . .	120
<b>4</b>	<b>Réduction robuste des vibrations d'un portique 3 barres</b>	<b>123</b>
4.1	Introduction . . . . .	124
4.2	Modélisation stochastique d'une liaison boulonnée à partir de résultats expérimentaux . . . . .	125
4.2.1	Identification des premiers moments statistiques des variables aléatoires associées aux paramètres de liaison . . . . .	125
4.2.2	Application de l'approche SMR au cas du portique muni d'une seule liaison . . . . .	127
4.3	Cas d'un portique muni de plusieurs liaisons . . . . .	129
4.3.1	Portique muni de deux liaisons . . . . .	130
4.3.1.1	Campagne expérimentale . . . . .	130
4.3.1.2	Simulation stochastique du comportement du portique muni de deux liaisons . . . . .	131

## TABLE DES MATIÈRES

---

4.3.2	Portique entièrement boulonné . . . . .	131
4.3.2.1	Campagne expérimentale . . . . .	131
4.3.2.2	Simulation stochastique du comportement du portique entièrement boulonné . . . . .	134
4.4	Réduction robuste des vibrations d'une structure assemblée . . . . .	136
4.4.1	Stratégie de réduction des vibrations d'une structure assemblée . . . . .	136
4.4.2	Faisabilité de la réduction robuste du niveau vibratoire d'un portique boulonné par la stratégie proposée . . . . .	139
4.4.2.1	Influence de la raideur $k_X$ de la liaison pilotée . . . . .	139
4.4.2.2	Influence de la raideur $k_Y$ de la liaison pilotée . . . . .	141
4.4.2.3	Influence de la raideur $k_\theta$ de la liaison pilotée . . . . .	142
4.4.3	Evaluation expérimentale de la faisabilité de la stratégie de réduction des vibrations du portique assemblé . . . . .	142
4.4.3.1	Ajout d'un patin en polytétrafluoroéthylène (PTFE) . . . . .	146
4.4.4	Modifications heuristiques de la liaison pilotée . . . . .	146
4.4.4.1	Décalage de la position verticale de la liaison pilotée par rapport au troisième mode plan du portique . . . . .	148
4.4.4.2	Positionnement de l'axe de la liaison orthogonalement au plan des modes étudiés . . . . .	148
4.5	Conclusion . . . . .	151
	<b>Conclusion</b>	<b>155</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>159</b>
	<b>Annexes</b>	<b>170</b>

# Liste des tableaux

2.1	Gain des vis instrumentées . . . . .	52
2.2	Paramètres matériaux identifiés pour les barres d'aluminium utilisées pour la réalisation des différents portiques . . . . .	54
2.3	Raideurs d'encastrement identifiées à partir de la réponse expérimentale de la poutre encastree . . . . .	54
2.4	Ecart relatifs entre les facteurs d'amortissement modaux du portique assemble et du portique monolithique . . . . .	67
3.1	Erreur relative sur l'estimation des deux premiers moments statistiques obtenus avec SMR1 comparee aux resultats de la simulation de Monte-Carlo . . . . .	101
4.1	Identification des parametres du modele stochastique de liaison pour la premiere configuration de portique ( <i>L1</i> ) et la seconde ( <i>L2</i> ) . . . . .	127
4.2	Plan d'experience complet pour le portique muni de deux liaisons . . . . .	130
4.3	Plan d'experience a "faible" niveau d'excitation . . . . .	133
4.4	Plan d'experience a "fort" niveau d'excitation . . . . .	133

LISTE DES TABLEAUX

---

# Table des figures

1.1	Définition des éléments constitutifs d'une liaison . . . . .	25
1.2	Définition des sollicitations appliquées à une liaison boulonnée . . . . .	28
1.3	Modèle d'Iwan en parallèle pour une distribution discrète d'éléments de Jenkins	31
1.4	Élément poutre d'Iwan ajusté . . . . .	32
1.5	Structure de référence : Portique 3 barres boulonnées . . . . .	41
2.1	Structure de référence : Portique 3 barres boulonnées . . . . .	45
2.2	Portiques monolithique et assemblé utilisés pour l'analyse différentielle . . .	49
2.3	Configurations de jauge pour vis instrumentées . . . . .	50
2.4	Dimensions caractéristiques des vis $M8 \times 25$ instrumentées utilisées et illustration du Pont de Wheatstone . . . . .	51
2.5	Étalonnage des vis instrumentées . . . . .	52
2.6	Courbes d'étalonnage de la vis 2 . . . . .	53
2.7	Modèle éléments finis et FRF de la poutre encastree simulée après recalage .	55
2.8	Application et mesure de l'effort d'excitation de la structure étudiée . . . . .	57
2.9	Répétabilité de la mesure de la FRF du portique monolithique pour différents types d'excitation . . . . .	57
2.10	Définition du modèle éléments finis du portique monolithique . . . . .	58
2.11	FRF simulée après recalage et FRF du portique monolithique . . . . .	59
2.12	FRF expérimentales obtenues pour le portique monolithique et le portique muni d'une seule liaison . . . . .	61
2.13	Variation relative de fréquence propre et de facteur d'amortissement modal pour chacun des modes propres du portique muni d'une seule liaison comparé au portique monolithique . . . . .	62
2.14	Comparaison de la FRF du portique monolithique pour deux niveau d'amplitude d'excitation . . . . .	65
2.15	Influence du serrage de la liaison et de l'amplitude d'excitation sur le comportement expérimental du portique . . . . .	67



TABLE DES FIGURES

---

2.16	Influence du serrage de la liaison et de l'amplitude d'excitation sur le comportement expérimental du portique . . . . .	68
2.17	Modèles de liaison adaptés à la modélisation éléments finis poutre du portique	70
2.18	Modèle éléments finis du portique muni d'une seule liaison . . . . .	71
2.19	Erreur au sens des moindres carrés entre les fréquences propres expérimentales et simulées pour différentes valeurs du module d'Young appliqué à la liaison . . . . .	71
2.20	FRF expérimentale et simulée du portique muni d'une seule liaison . . . . .	72
2.21	Schéma, photo et modèle EF du portique muni d'une seule liaison lorsque celle-ci est située sur la poutre horizontale . . . . .	75
2.22	FRF expérimentale et simulée de la seconde configuration de portique muni d'une seule liaison - Simulation obtenue avec le module d'Young identifié sur la première configuration de portique . . . . .	76
2.23	FRF expérimentale et simulée de la seconde configuration de portique après ré-identification de la raideur de liaison . . . . .	77
2.24	Variation relative de fréquence propre $\Delta_{rel}(f)$ et de facteur d'amortissement modal $\Delta_{rel}(\eta)$ pour chacun des modes propres de la deuxième configuration de portique muni d'une seule liaison comparé au portique monolithique. Le serrage de la liaison est maximal et l'excitation utilisée est au niveau faible .	78
3.1	Lieu des valeurs propres et vecteurs propres associés (a) d'un système à trois degrés de liberté (b) . . . . .	86
3.2	Densités marginales des deuxième et troisième valeurs propres d'un système à trois <i>d.d.l.</i> lorsque la densité de probabilité du paramètre d'entrée $k_2(\theta)$ est en dehors de la zone de <i>veering</i> (a) ou la chevauche (b) . . . . .	87
3.3	Résolution du problème aux valeurs propres aléatoires par l'approche SMR .	92
3.4	Implémentation de l'approche SMR couplée avec le logiciel éléments finis MSC Nastran . . . . .	98
3.5	Système masse-ressort non amorti à trois <i>d.d.l.</i> . . . . .	100
3.6	Superposition des densités marginales des trois valeurs propres aléatoires du système à 3 <i>d.d.l.</i> (a) Les trois valeurs propres aléatoires sont bien séparées. (b) Deux valeurs propres aléatoires sont proches . . . . .	102
3.7	Erreur relative sur l'estimation des deux premiers moments statistiques . . .	103
3.8	Coupe des surfaces de réponse des valeurs propres 2 et 3 calculées avec la résolution exacte du problème (ref) et comparaison avec les surfaces estimées avec SMR1, SMR2 et la méthode de perturbation à l'ordre deux . . . . .	104
3.9	Erreur relative sur l'estimation des premiers moments statistiques lorsque le facteur de proximité varie . . . . .	105
3.10	Estimation du facteur de proximité lorsque $\lambda_2$ et $\lambda_3$ se rapprochent . . . . .	106

TABLE DES FIGURES

---

3.11	Erreur relative sur l'estimation du facteur de proximité obtenu avec SMR1 et SMR2 . . . . .	106
3.12	Définition du portique . . . . .	107
3.13	Densités marginales des 5 premières fréquences propres aléatoires du portique (a) et formes propres correspondantes (b) . . . . .	109
3.14	Densités marginales des cinq premières fréquences propres du portique estimées avec SMR1 et SMR2 . . . . .	110
3.15	Erreur relative sur l'estimation de l'espérance obtenue avec SMR1, SMR2 et une méthode de perturbation à l'ordre deux . . . . .	111
3.16	Erreur relative sur l'estimation de l'écart-type obtenue avec SMR1, SMR2 et une méthode de perturbation à l'ordre deux . . . . .	111
3.17	Erreur relative sur l'estimation de l'espérance des 25 premières fréquences propres du portique . . . . .	113
3.18	Erreur relative sur l'estimation de l'écart-type des 25 premières fréquences propres du portique . . . . .	113
3.19	Influence de la valeur limite du facteur de proximité sur le nombre de valeurs propres pour lesquelles la méthode de calcul utilisée doit être raffinée. . . . .	114
3.20	Illustration du Lanceur Ariane 5 et de l'un de ses Adaptateur Charge Utile [ <i>Ariane 5, User's Manual 2011</i> ] . . . . .	115
3.21	Implémentation de l'approche SMR couplée avec le logiciel éléments finis MSC Nastran . . . . .	115
3.22	Définition de l'ACU 1666MVS d'Ariane 5. (a) Vue de coupe de l'ACU PAS 1666MVS. (b) Définition des conditions d'encastrement du cône inférieur. . . . .	117
3.23	Erreur relative sur l'estimation de l'espérance des 10 premières fréquences propres aléatoires de l'ACU . . . . .	118
3.24	Erreur relative sur l'estimation de l'écart-type des 10 premières fréquences propres aléatoires de l'ACU . . . . .	119
3.25	Définition du modèle éléments finis du portique avec variables aléatoires localisés . . . . .	120
4.1	Modèle éléments finis du portique sans liaisons rigides au niveau des liaisons	125
4.2	Erreur sur l'estimation des deux premiers moments statistiques des dix premières fréquences propres aléatoires du portique muni d'une seule liaison . . . . .	128
4.3	FRF expérimentale et simulée de la première configuration de portique après ré-identification des paramètres du modèle stochastique de liaison . . . . .	129
4.4	Illustration et photo du portique muni de deux liaisons . . . . .	130
4.5	Variabilité expérimentale et simulée à l'aide de l'approche SMR du comportement vibratoire du portique muni de deux liaisons . . . . .	132
4.6	Illustration et photo du portique entièrement boulonné . . . . .	132

TABLE DES FIGURES

---

4.7	Plan d'expérience pour un système à trois paramètres et trois niveaux par paramètre . . . . .	134
4.8	Variabilité expérimentale et simulée à l'aide de l'approche SMR du comportement vibratoire du portique entièrement boulonné . . . . .	135
4.9	Modes plans du portique . . . . .	138
4.10	Schéma de principe du portique 3 barres équipé d'une liaison "amortissante" . . . . .	138
4.11	Illustration du principe de réduction robuste du niveau vibratoire du portique par contrôle de la raideur de la liaison pilotée . . . . .	140
4.12	Dix premiers modes propres moyens du portique pour différentes valeurs de la raideur $k_X$ associée à la liaison pilotée . . . . .	140
4.13	Réponses en fréquence du portique au voisinage des troisième et quatrième fréquences propres lorsque la raideur suivant $x$ (direction horizontale) de la liaison pilotée varie . . . . .	141
4.14	Réponses en fréquence du portique au voisinage des quatre premières fréquences propres lorsque la raideur suivant $y$ (direction verticale) de la liaison pilotée varie . . . . .	142
4.15	Réponses en fréquence du portique au voisinage des troisième et quatrième fréquences propres lorsque la raideur suivant $\theta$ (rotation autour de l'axe orthogonal au plan du portique) de la liaison pilotée varie . . . . .	143
4.16	Illustration du portique équipé d'une liaison pilotée . . . . .	144
4.17	FRF du portique équipé d'une liaison "amortissante" et déformées modales des poutres verticales du portique pour chacune des fréquences propres de la structure . . . . .	145
4.18	Détail de la troisième fréquence propre du portique - Influence du serrage de la liaison pilotée . . . . .	145
4.19	Illustrations de la modification de la liaison par l'ajout d'un patin en PTFE . . . . .	146
4.20	FRF du portique équipé d'une liaison pilotée munie d'un patin en PTFE . . . . .	147
4.21	Détail de la troisième fréquence propre du portique - Influence du serrage de la liaison pilotée avec patin en PTFE . . . . .	147
4.22	Illustration de la nouvelle position verticale de la liaison pilotée . . . . .	149
4.23	FRF du portique équipé d'une liaison pilotée munie d'un patin en PTFE La position de la liaison est décalée du centre des poutres verticales et différents niveaux de serrage sont considérés . . . . .	149
4.24	Illustration de la liaison pilotée dont l'axe est orthogonal au plan du portique . . . . .	150
4.25	FRF d'un portique équipé d'une liaison "amortissante" munie d'un patin en PTFE pour lequel l'axe de la liaison est orthogonal au plan des modes considérés . . . . .	151
26	Caractéristiques géométriques des différents éléments constitutifs du portique étudié . . . . .	169

# Introduction

Les liaisons jouent un rôle clé dans le comportement dynamique des structures assemblées. Elles sont en effet le siège de phénomènes non-linéaires comme le contact ou le frottement qui induisent de la dissipation d'énergie au sein de l'assemblage et peuvent avoir des effets rigidifiant ou assouplissant sur le comportement vibratoire des structures assemblées. La prise en compte du comportement des liaisons dès la phase de conception d'une structure assemblée permet d'optimiser le dimensionnement de ces structures et ainsi d'améliorer les performances des systèmes mécaniques assemblés que l'on retrouve dans de nombreux domaines industriels.

La nécessité de disposer de modèles prédictifs permettant de rendre compte du comportement des structures assemblées n'a cessé d'attiser l'intérêt de la communauté scientifique et industrielle au cours des dernières décennies. Les nombreux projets récents portant sur l'étude du comportement des assemblages confirment l'actualité de ces problématiques. On peut notamment citer les projets FUI MAIAS, CARAB, SICODYN et CLIMA. Le projet FUI MAIAS (Maîtrise de l'Amortissement Induit dans les ASsemblages), débuté en 2010 et porté par EADS innovation work (désormais Airbus Group Innovation), vise à développer des technologies de transmission d'efforts permettant un contrôle de l'amortissement. Le projet FUI CARAB (Conception Avancée Robuste pour les Assemblages Boulonnés) débuté en 2012 et porté par la SNECMA (désormais Safran Aircraft Engines), a pour objectif de produire un ensemble de méthodes et d'outils permettant l'optimisation et la validation des assemblages boulonnés dans les équipements aéronautiques et spatiaux. Le projet FUI SICODYN (SIMulations crédibles via la COrrélation calcul-essai et l'estimation d'incertitudes en DYNamique des structures), débuté en 2012 et porté par EDF R&D, a pour objectif d'évaluer le niveau de confiance associé aux résultats de simulations dynamiques d'un système complexe en tenant compte des incertitudes de modèles et paramétriques. Le système étudié étant constitué de différentes structures assemblées entre elles, une des parties du projet est dédiée à la prise en compte de l'influence des liaisons sur le comportement dynamique du système complet. Enfin, le projet FUI CLIMA (Conception de Liaisons Mécaniques Amortissantes), débuté en 2015 et porté par Airbus Group Innovation, se focalise sur l'identification et la prédiction de l'amortissement dans les jonctions mécaniques.

Parmi ces projets, seul le projet SICODYN intègre la prise en compte des incertitudes lors de la simulation d'un système complexe. La motivation de ce projet peut s'expliquer par le fait que l'augmentation des exigences de performance des systèmes conduit généralement à une plus grande sensibilité de leur comportement réel aux incertitudes, qu'il s'agisse d'incertitudes de modèles ou paramétriques. Plusieurs études bibliographiques soulignent

également la nécessité de tenir compte des incertitudes dès la phase de conception des structures assemblées [AMES et al. 2009; IBRAHIM et PETTIT 2005] et cette préoccupation continue de recevoir un intérêt croissant [BRAKE 2017].

Contrairement au projet SICODYN dont le contexte industriel est celui d'une structure massive assemblée (pompe de centrale thermique) et dont les incertitudes sont modélisées par une approche de type "méconnaissance", ce travail s'intéressera au cas du comportement vibratoire des structures assemblées dites légères pour lesquelles la prise en compte des incertitudes sera abordée dans un cadre probabiliste. La prise en compte des phénomènes non-linéaires intervenant au sein des liaisons nécessite de mobiliser des ressources de calculs relativement importantes. De plus, les structures légères assemblées sont généralement constituées d'un grand nombre de liaisons et les méthodes classiques de prise en compte des incertitudes sont également coûteuses en temps de calcul. La simulation du comportement vibratoire de structures industrielles à l'aide de méthodes directes est alors difficilement envisageable. L'objectif de cette thèse est de proposer une démarche de caractérisation du comportement vibratoire des structures légères assemblées en tenant compte de l'incertitude sur les paramètres de liaison. Cette démarche se veut pilotée par le comportement réel de ce type de structure. Elle se basera donc sur le comportement observé expérimentalement d'une structure assemblée pour identifier un modèle de comportement "juste suffisant" des liaisons étudiées. Afin de tenir compte de la variabilité du comportement réel des liaisons, on choisit de se placer dans un contexte probabiliste paramétrique. Une approche non intrusive de réduction de modèles stochastique est ainsi proposée. Cette approche permet de caractériser les espaces propres aléatoires de structures en présence de paramètres incertains et peut être ainsi intégrée à une phase d'identification des paramètres d'un modèle stochastique de liaison. Dans un contexte de réduction du niveau vibratoire des structures assemblées, la démarche proposée pourra être appliquée afin de proposer des solutions de réduction des vibrations robustes vis-à-vis de la variabilité effective du comportement des structures réelles.

Cette thèse s'articule autour de quatre chapitres.

Le **premier chapitre** passe en revue les différents outils nécessaires à la caractérisation vibratoire des structures assemblées en présence de paramètres incertains. Un panorama des différentes méthodes de modélisation du comportement des liaisons couramment utilisées dans la littérature est proposé. Les méthodes d'identification des paramètres de ces modèles sont ensuite répertoriées. Enfin, les méthodes de simulation déterministe et stochastique sont recensées. Le choix de chacune des méthodes à mettre en oeuvre pour caractériser une structure assemblée en contexte vibratoire incertain est directement lié à la structure étudiée. L'objectif final de ce chapitre est alors de définir une démarche de caractérisation adaptée aux structures assemblées dites légères, démarche qui sera alors suivie dans le reste de cette thèse.

Le **second chapitre** de cette thèse est dédié à la première étape de la démarche proposée. L'objectif est de définir un modèle nominal de liaison permettant de rendre compte du comportement observé expérimentalement pour une structure représentative des structures légères. Ce modèle se veut "juste suffisant" afin de tenir compte de l'influence des liaisons sur le comportement vibratoire de la structure complète avec un minimum de ressources de calcul. La définition du modèle nominal de liaison est directement pilotée par

les résultats expérimentaux présentés dans ce chapitre.

Le **troisième chapitre** est consacré à la mise en place d'une méthodologie de caractérisation du comportement vibratoire des structures en présence de paramètres incertains. Une nouvelle approche dite de réduction de modèles stochastiques est proposée. Désignée **approche SMR** dans la suite de ce travail pour *Stochastic Model Reduction*, cette approche non intrusive est basée sur l'exploitation des propriétés particulières des vecteurs propres aléatoires des structures en présence de paramètres incertains. Les performances de cette approche sont évaluées à l'aide de différents exemples de complexité croissante.

Le **quatrième et dernier chapitre** de cette thèse capitalise les outils mis en place dans les chapitres précédents afin de simuler le comportement vibratoire d'une structure assemblée en tenant compte de la variabilité des paramètres de liaison. Un modèle stochastique de liaison est proposé en se basant sur le principe du maximum d'entropie et les paramètres de ce modèle sont ensuite identifiés à l'aide de l'approche SMR. Deux structures munies de plusieurs liaisons sont étudiées afin de valider l'aptitude de la démarche suivie à caractériser la réponse vibratoire de ces structures lorsque les paramètres de liaison varient aléatoirement. Pour cela, les résultats des simulations stochastiques de ces structures sont comparés à la variabilité effective des structures réelles. La démarche de caractérisation robuste du comportement vibratoire des structures assemblées est finalement appliquée au dimensionnement robuste d'une solution originale de réduction du niveau vibratoire d'une structure assemblée.



## Chapitre 1

# Outils au service de la caractérisation du comportement vibratoire des structures assemblées en présence de paramètres incertains

*L'objectif de ce chapitre est d'identifier une démarche permettant de caractériser le comportement vibratoire d'une structure assemblée en tenant compte de la variabilité des paramètres de liaison. Pour cela, les différentes méthodes de modélisation du comportement des liaisons, d'identification des paramètres de ces modèles et de simulation déterministe et stochastique couramment utilisées dans la littérature sont passées en revue afin d'identifier une démarche adaptée à la caractérisation vibratoire des structures assemblées.*



## 1.1 Introduction

Le comportement des structures assemblées a fait l'objet de nombreuses études au cours des cinquante dernières années. Il en résulte un grand nombre de modèles de comportement disponibles dans la littérature. Ces modèles, suivant leur niveau de complexité, permettent de tenir compte de tout ou partie des phénomènes intervenant au sein des liaisons. Ces modèles dépendent fortement des caractéristiques réelles des liaisons telles que les caractéristiques des interfaces de contact (défauts, lubrification, etc) ou la pression de contact pour les liaisons boulonnées. Les incertitudes sur ces caractéristiques peuvent alors induire des écarts importants entre les comportements observés et simulés des structures assemblées. Ces écarts sont d'autant plus sensibles aux incertitudes sur les paramètres du modèle que les phénomènes mis en jeu sont non-linéaires. Dans le cadre de ce travail, on s'intéresse aux structures assemblées dites légères. Ces structures sont généralement constituées d'un grand nombre de liaisons, il est alors d'autant plus probable que les caractéristiques des liaisons diffèrent d'une liaison à l'autre de la structure par rapport au modèle nominale établi.

Les exigences de performance des systèmes mécaniques sont de plus en plus contraignantes et les écarts entre les comportements réel et simulé d'une structure peuvent remettre en cause certains choix de dimensionnement. Par exemple, si le dimensionnement d'un composant du système mécanique dépend du comportement de la structure assemblée, ces écarts entre modèle et réel peuvent fortement diminuer l'efficacité du composant tel que dimensionné en phase de conception. On pense notamment au dimensionnement optimal de solutions amortissantes basées sur des dispositifs piézoélectriques [DUCARNE, THOMAS et DEÛ 2012; THOMAS, DUCARNE et DEÛ 2012] ou de solutions de type amortisseur à masse accordée [LIU et LIU 2005]. Lorsque le dimensionnement d'un composant est réalisé de manière à être indépendant des sources de variabilité pouvant exister sur le système réel, on parle de dimensionnement robuste [ZANG, FRISWELL et MOTTERSHEAD 2005]. C'est dans le cadre du dimensionnement robuste des structures que se place ce travail. Se pose alors la question de l'intégration de la prise en compte des incertitudes dans les modèles de liaison classiquement utilisés.

Afin de préciser le cadre de cette étude, une proposition de définition du terme *liaison* est d'abord proposée. Une liaison peut être définie comme étant une solution technologique permettant de lier cinématiquement deux sous-structures distinctes afin de garantir un comportement macroscopique de l'ensemble assimilable à une structure continue. La nécessité de recourir à des liaisons se justifie par l'incapacité des moyens de production de réaliser la structure globale directement ou la nécessité de désolidariser l'ensemble pour des raisons diverses (montabilité, maintenance, conditionnement, transport, etc.). Une liaison peut être réalisée de manière permanente (on pensera notamment aux liaisons obtenues par soudage, clinchage et certains collages) ou être démontable (vis, clous, rivets, agrafes, certaines colles, etc.). Les liaisons réalisées par soudage garantissent la solidarité de l'ensemble par continuité de la matière entre les sous-structures assemblées. Cette solution d'assemblage est donc la plus rigide et n'induit pas de dissipation supplémentaire autre que l'amortissement structurel des matériaux utilisés. Dans le cas des liaisons boulonnées, la solidarité de l'ensemble est obtenue par adhérence, la liaison ayant pour fonction de maintenir un effort presseur entre les surfaces en contact des deux sous-structures as-

semblées. On désignera par liaison l'ensemble constitué de l'interface de contact entre les sous-structures à assembler, les éléments participant à l'application de l'effort presseur ainsi que les volumes de matières situés à proximité de l'interface et issus des sous-structures assemblées. La Figure 1.1 présente la frontière définissant une liaison pour un cas simple de deux poutres assemblées par une liaison boulonnée à simple recouvrement.

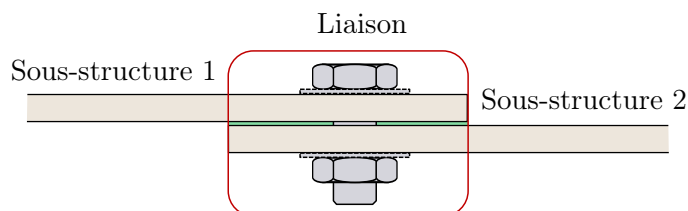


FIGURE 1.1 – Définition des éléments constitutifs d'une liaison

L'adhérence entre les surfaces en contact est directement liée à l'effort presseur appliqué. Suivant les sollicitations, l'effort normal dans l'interface de la liaison peut varier et la raideur de la liaison évoluera alors en conséquence. D'un point de vue dynamique, si les sollicitations appliquées à la liaison restent suffisamment faibles, la zone pour laquelle il y a adhérence reste constante et la raideur de la liaison peut être modélisée par une raideur linéaire. Le comportement dynamique de la structure peut alors être simulé à l'aide des outils classiques d'analyse modale linéaire. Lorsque que l'effort normal n'est plus suffisant pour assurer l'adhérence de l'ensemble de l'interface, les surfaces en contact peuvent glisser les unes contre les autres plus ou moins localement. Deux régimes de glissement peuvent être mis en évidence. Soit l'intégralité de la surface de contact glisse, on parle alors de macro-glissement, soit une partie de l'interface glisse tandis que le reste adhère, on parle de glissement partiel [FESTJENS 2014 ; PEYRET 2012]. La partie de l'interface pour laquelle il y a adhérence dépend fortement du type de sollicitation et de son amplitude. La raideur de liaison peut alors être modélisée par une raideur non-linéaire. Pour la partie de l'interface où il y a glissement, le frottement entraîne une dissipation d'énergie. Du point de vue de la structure globale, la liaison induit de l'amortissement. On peut d'ailleurs montrer que ce phénomène dissipatif est la principale source d'amortissement observée dans les structures assemblées. Comparé à l'amortissement structurel des matériaux utilisés pour les sous-structures, l'amortissement induit par le glissement au sein des liaisons est 10 à 100 fois plus important. Ungar [UNGAR 1973] évoque un facteur de perte de l'ordre de  $10^{-4}$  à  $10^{-3}$  pour les structures métalliques monolithiques à comparer au cas des structures aéronautiques assemblées pour lesquelles le facteur de perte est de l'ordre de  $10^{-2}$ . L'amortissement dans la liaison, comme la raideur de liaison, dépend donc également du type de sollicitation de la liaison et de son amplitude. En résumé, on entend par modèle de liaison, un modèle comprenant :

- un modèle du comportement des volumes de matière associé à chacune des sous-structures assemblées ;
- un modèle du comportement des éléments participant à l'application de l'effort presseur ;
- un modèle de comportement de l'interface.

C'est principalement le modèle de comportement de l'interface qui représente une dif-

ficulté, le comportement des sous-structures à proximité de l'interface étant généralement pris en compte à l'aide d'une discrétisation éléments finis identique à celle du reste de la structure ou à l'aide d'éléments rigides (condensation des noeuds de l'interface en un noeud maître). Concernant les éléments participant à l'application de l'effort presseur, c'est éventuellement de leur masse dont il faudra tenir compte lorsque le matériau de ces derniers est plus dense que celui du reste de la structure. On pense notamment aux cas de boulons en acier utilisés pour assembler des structures en aluminium ou en composite. Leur prise en compte peut se limiter à l'ajout de masses ponctuelles.

L'objectif de ce chapitre est d'identifier une démarche permettant de caractériser le comportement vibratoire d'une structure assemblée en tenant compte de la variabilité des paramètres de liaison. Cette démarche passe par le choix d'un modèle de liaison, l'identification des paramètres de ce modèle (à partir de résultats expérimentaux ou de résultats de simulations basées sur des modèles fins), la simulation du comportement de la structure globale ainsi que la prise en compte de la variabilité des paramètres de liaison. Le choix des trois premières étapes de la démarche est intimement lié à la structure étudiée. Cela rejoint le raisonnement de Bograd et al. [BOGRAD et al. 2011] d'après lesquels, afin de simuler le comportement d'une structure assemblée, un modèle dédié doit être défini et une technique d'identification adaptée doit être choisie pour évaluer les paramètres du modèle et ce pour chaque caractéristique de la liaison dont on souhaite tenir compte.

Dans ce qui suit, un panorama des différents modèles classiquement utilisés dans la littérature est d'abord établi partie 1.2. Les différentes techniques d'identification permettant de déterminer les paramètres constitutifs des modèles de liaison sont ensuite présentées partie 1.3. Puis l'intégration de ces modèles pour la simulation des structures assemblées est abordée partie 1.4. Il reste finalement à tenir compte de la variabilité des paramètres de liaison. Les principales méthodes de caractérisation du comportement vibratoire des structures en présence de paramètres incertains sont étudiées afin d'évaluer la méthode la mieux adaptée à la caractérisation des structures assemblées.

## 1.2 Modèles de comportement

Parmi les phénomènes intervenant au sein d'une liaison, les phénomènes de glissement et d'impact (*slapping*) sont réputés être les principales sources de dissipation d'énergie au sein des assemblages boulonnés [AHMADIAN et JALALI 2007a; AHMADIAN et JALALI 2007b; SEGALMAN 2003]. Le phénomène d'impact apparaît notamment dans le cas de liaisons à simple recouvrement sollicitées en flexion ou encore dans le cas des liaisons de type bride sollicitées en traction-compression dans la direction axial des pièces assemblées. Dans le cadre de ce travail, on suppose que le niveau vibratoire des structures étudiées reste suffisamment faible pour ne pas voir apparaître de phénomènes d'impact. On se limitera donc à la prise en compte des phénomènes de glissement.

Deux types d'approches peuvent être abordées afin de tenir compte des phénomènes non-linéaires intervenant au sein des liaisons. La première consiste à modéliser les propriétés de la liaison par l'intermédiaire de forces extérieures équivalentes à l'influence de la liaison sur le comportement dynamique de la structure [AHMADIAN et JALALI 2007a; CRAWLEY et AUBERT 1986; REN, LIM et LIM 1998]. Ces approches, que l'on peut qualifier

de non-paramétriques, ont l'avantage de ne nécessiter aucun *a priori* sur les phénomènes physiques intervenant au sein des liaisons. Le second type d'approches, certainement le plus intuitif, se base sur une modélisation paramétrique des liaisons permettant de rendre compte des différents phénomènes mis en jeu. Ces modèles sont généralement utilisés pour tenir compte des non-linéarités et dissipations dues au phénomène de frottement. Une manière de classifier les différents modèles paramétriques de liaison consiste à différencier les modèles dits constitutifs des modèles dits phénoménologiques [FESTJENS 2014 ; GAUL et NITSCHKE 2001 ; IBRAHIM et PETTIT 2005]. Les modèles constitutifs utilisent une approche locale tenant compte de la physique du contact afin d'obtenir une relation entre les champs de contrainte et de déplacement dans les différents éléments de la liaison. Les modèles phénoménologiques abordent le problème d'un point de vue plus global en cherchant à définir une relation entre les forces de frottement et le déplacement relatif des pièces assemblées. Ils sont généralement basés sur des observations expérimentales du comportement de la liaison.

### 1.2.1 Modèles constitutifs

Les modèles constitutifs visent à décrire les efforts transmis entre deux composants en se basant sur la mécanique du contact. Cette approche permet de décrire finement les processus microscopiques intervenant dans la liaison. On peut d'abord référencer les modèles analytiques, avec en particulier deux cas de référence basés sur le comportement de poutres en contact sollicitées en flexion ou en traction : le problème de Goodman et Klump [GOODMAN et KLUMPP 1956] et le problème de Metherell et Diller [METHERELL et DILLER 1968]. Dans ces deux cas, l'état de contrainte dans l'interface de contact est obtenu analytiquement en considérant un chargement uniforme des poutres. D'autres cas de chargements plus réalistes ont également été étudiés [NANDA 2006 ; SONG et al. 2005]. Cependant, le principal inconvénient de ce type de modèle est qu'ils restent limités à des géométries simples. Afin de traiter des géométries plus complexes, des approches basées sur une discrétisation éléments finis des constituants de la liaison peuvent être utilisées. Par exemple, le comportement quasi-statique d'une liaison discrétisée par éléments finis peut être caractérisé en considérant un modèle de frottement de Coulomb aux interfaces de la liaison [CROCOMBE et al. 2006 ; OLDFIELD, OUYANG et MOTTERSHEAD 2005]. La principale limitation de ce type d'approche est qu'elles peuvent vite devenir coûteuses en termes de temps de calcul. En effet, la résolution du problème non-linéaire est souvent obtenue par des méthodes itératives de type Newton-Raphson et la prise en compte du contact nécessite l'utilisation de maillages très fins. Le dernier type de modélisations abordé ici correspond aux modèles dits tribologiques. L'objectif de ces modèles est de décrire les phénomènes de frottement par la modélisation du contact entre les aspérités des surfaces en contact. Classiquement, le contact est modélisé en ayant recours à la théorie de Hertz ou en utilisant un modèle de Coulomb [MINDLIN 1949 ; PEYRET 2012]. L'effort de frottement global intervenant au sein d'une liaison de géométrie donnée est alors obtenu en définissant une certaine distribution des aspérités dans la zone de contact. Des modèles de distribution statistique ou fractale peuvent être utilisés, les paramètres de ces modèles étant généralement identifiés à partir de résultats expérimentaux. Ces modèles dépendent fortement des mesures expérimentales et supposent généralement un effort normal constant au cours d'un cycle de

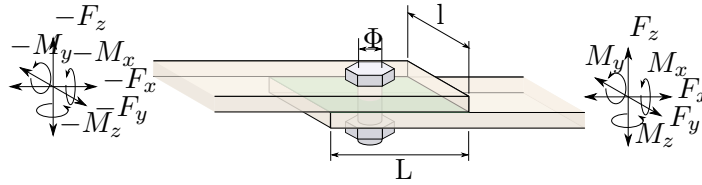


FIGURE 1.2 – Définition des sollicitations appliquées à une liaison boulonnée

chargement de la liaison, ce qui est difficile à garantir expérimentalement [FESTJENS 2014]. Ces inconvénients, auxquels s'ajoutent le nombre important de paramètres nécessaires à la description des modèles tribologiques, permettent de conclure que de manière générale les modèles constitutifs ne sont pas adaptés à la simulation de structures assemblées dont les sous-structures nécessitent un grand nombre de degrés de liberté et comprenant un grand nombre de liaisons.

### 1.2.2 Modèles rhéologiques

Contrairement aux modèles constitutifs, les modèles phénoménologiques ou modèles rhéologiques abordent le comportement des liaisons d'un point de vue macroscopique. Ils se basent sur des observations empiriques pour décrire une relation globale entre effort tangentiel et déplacement relatif dans l'interface de frottement. Bien qu'ils puissent être basés sur des considérations microscopiques, en règle générale, ce type de modèles ne cherche pas à traduire la physique fondamentale du problème. Leur principal avantage réside dans le faible nombre de paramètres nécessaires à leur description. Dans ce qui suit, on présente brièvement les principaux modèles rhéologiques issus de la littérature. Par souci d'uniformisation des notations utilisées pour présenter les différents modèles rhéologiques issus de la littérature, on définit sur la Figure 1.2 les sollicitations appliquées à une liaison boulonnée.

- **Modèle Signum** : Certainement l'approche la plus simple, le modèle dit *Signum* est basé sur la loi de Coulomb. La force de frottement s'écrit simplement :

$$F_x = F_C \operatorname{sgn}(\dot{u}) = \mu F_N \operatorname{sgn}(\dot{u}) \quad (1.1)$$

où  $F_C$  correspond à l'effort tangentiel dû au frottement,  $\dot{u}$  à la vitesse de déplacement relatif des composants de la liaison,  $\mu$  au coefficient de frottement et  $F_N$  à l'effort normal dans l'interface. Ce modèle suppose que le frottement est indépendant de la vitesse de déplacement bien qu'il soit possible de tenir compte du frottement visqueux. On peut également considérer une éventuelle dépendance de l'effort normal à la vitesse de déplacement. L'inconvénient principal de ce modèle est qu'il ne permet pas de tenir compte du cas où il y a adhérence entre les pièces.

- **Élément de Jenkins ou modèle de glissement élastique (*Elasto-slip model*)** : Aussi appelé élément de Masing ou élément de Coulomb, ce modèle vise à tenir compte de la déformation intervenant avant la phase de glissement lorsqu'il y a adhérence en tout point des surfaces en contact. Il est constitué d'un ressort élastique de raideur  $k$  en parallèle

avec un frotteur de Coulomb. La force de frottement s'écrit :

$$F_x = ku + \begin{cases} r(t) & \text{si } |r(t)| < h \\ h \operatorname{sgn}(\dot{u}) & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.2)$$

$$|r(t)| = |k(u(t) - u^+) - h \operatorname{sgn}(\dot{u}^+)|$$

où  $u^+$  correspond au déplacement lors du changement de sens de la vitesse de déplacement et  $h$  correspond à la force limite à partir de laquelle l'élément se met à glisser.

• **Modèle de Dahl** : Le modèle de Dahl [DAHL 1968] propose de calculer l'effort de frottement par intégration sur le déplacement  $u$  de l'équation :

$$\frac{dF}{du} = \sigma \left( 1 - \frac{F_x}{F_x^{max}} \operatorname{sgn}(\dot{u}) \right)^\gamma \quad (1.3)$$

où  $F_x^{max}$  correspond à l'effort lorsque l'ensemble de l'interface glisse et  $\sigma$  est la rigidité avant glissement. Le paramètre  $\gamma$  permet d'ajuster la forme de la courbe d'hystérésis associée au modèle. Comme pour les modèles précédents, l'effort de frottement est considéré indépendant de la vitesse de déplacement.

• **Modèle LuGre** : Proposé par De Wit et al. [CANUDAS-DE-WIT et al. 1995], le modèle LuGre (**Lund Grenoble**) permet de tenir compte de l'effet Stribeck suivant lequel, lorsque la vitesse de glissement augmente, l'effort de frottement diminue dans un premier temps avant de croître si la vitesse continue d'augmenter. Le modèle LuGre est un bon exemple de modèle rhéologique basé sur des considérations microscopiques. En effet, l'effort de frottement est obtenu en considérant l'interface de contact comme un ensemble de brins élastiques de raideur donnée. Lorsqu'un effort tangentiel est appliqué, les brins se déforment. L'utilisation d'un modèle de Dahl à chacune des extrémités des brins permet alors de remonter à l'effort de frottement global dans la liaison. La force de frottement  $F_x$  est obtenue par le système d'équation suivant :

$$F_x = k_0 \phi + k_1 \dot{\phi} + k_2 \dot{u} \quad (1.4)$$

$$\dot{\phi} = \dot{u} - k_0 \frac{|\dot{u}|}{g(\dot{u})} \phi \quad (1.5)$$

$$g(\dot{u}) = F_x^c + F_\Delta \exp(-(\dot{u}/\dot{u}_s)^2) \quad (1.6)$$

où  $\dot{u}$  est la vitesse de glissement relative au niveau de l'interface de frottement,  $\phi$  représente la flèche moyenne des brins,  $F_x^c$  la force limite de glissement,  $k_0$  la raideur des brins et  $k_1$  et  $k_2$  sont deux paramètres définissant l'influence de la force de frottement à la vitesse de déplacement. L'inconvénient de ce modèle est son nombre de paramètres relativement importants.

• **Modèle de Valanis** : Initialement dédié à la modélisation de matériaux thermo-viscoplastiques [VALANIS 1970], le modèle de Valanis peut être utilisé pour modéliser le comportement d'une liaison aussi bien en régime établi que transitoire [GAUL et NITSCHKE 2001]. Ce modèle permet, avec une seule formulation, de tenir compte des phénomènes de macro-glissement (glissement de l'ensemble de la liaison) et de micro-glissement (glissement partiel de l'interface). L'effort de frottement  $F_x$  est obtenu à l'aide de l'équation non-linéaire suivante :

$$\dot{F}_x = \frac{E_0 \dot{u} \left[ 1 + \frac{\lambda}{E_0} \operatorname{sgn}(\dot{u})(E_t u - F_x) \right]}{1 + \kappa \frac{\lambda}{E_0} \operatorname{sgn}(\dot{u})(E_t u - F_x)} \quad (1.7)$$

où  $u$  est le déplacement relatif de l'interface,  $E_0$  une raideur associée à la phase d'adhérence,  $E_t$  une raideur correspondant à la phase de glissement,  $\kappa$  pondère l'influence du micro-glissement et  $\lambda$  est un paramètre matériau.

• **Modèle de Bouc-Wen** : Introduit par Bouc [BOUC 1967] et développé par [WEN 1976], le modèle de Bouc-Wen décrit la force de frottement par une forme hystérétique générale sans sens physique apparent. La force de frottement est obtenue par intégration de l'équation :

$$\dot{F}_x = -\alpha|\dot{u}||z|^{m-1}z - \beta\dot{u}|z|^m + A\dot{u} \quad (1.8)$$

où les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $A$  et  $m$  permettent de régler la forme de l'hystérésis. Seul  $A$  a un sens physique et décrit la raideur initiale du modèle. L'inconvénient de ce modèle est qu'il ne respecte pas la règle de Masing [MASING 1926] selon laquelle, au cours d'un cycle avec glissement total de l'interface, la raideur instantanée au point d'inversion de la charge est égale à la raideur de la liaison sans glissement. Une description détaillée de cette loi est proposée dans [SEGALMAN et STARR 2004]. Il y est notamment développé la relation entre l'énergie dissipée par cycle et la courbe dite *backbone* correspondant au chargement initial de la liaison.

• **Modèle d'Iwan** : Le modèle d'Iwan [IWAN 1966 ; IWAN 1967] consiste en l'association en parallèle d'éléments de Jenkins ayant des seuils de glissement différents comme illustré Figure 1.3 page 31. Ce modèle permet de décrire un cycle d'hystérésis en fonction de la distribution des éléments de Jenkins. Dans sa forme discrète (distribution discrète d'éléments de Jenkins), le modèle d'Iwan à  $N$  éléments peut être assimilé à un ensemble de brins en contact glissant, ce qui se rapproche de la physique du contact réel et rejoint l'idée du modèle de LuGre. Le modèle d'Iwan peut être formulé avec une distribution continue d'éléments de Jenkins [SEGALMAN 2001 ; SEGALMAN et STARR 2004 ; SMALLWOOD, GREGORY et COLEMAN 2001] ce qui permet notamment de réduire le nombre de paramètres du modèle. Par exemple, le modèle proposé par Segalman [SEGALMAN 2001] ne nécessite que trois paramètres. Le modèle le plus répandu dans la littérature est un modèle d'Iwan à quatre paramètres également proposé par Segalman [SEGALMAN 2003]. En se basant sur une densité donnée d'éléments de Jenkins de raideur constante, l'effort appliqué s'écrit :

$$F_x(t) = \int_0^\infty \rho(\phi)[u(t) - x(t, \phi)]d\phi \quad (1.9)$$

et

$$\dot{x}(t, \phi) = \begin{cases} \dot{u} & \text{si } \|u - x(t, \phi)\| = \phi \text{ et } \dot{u}(u - x(t, \phi)) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.10)$$

où  $\rho(\phi)$  est la distribution des éléments de Jenkins et  $x(t, \phi)$  le déplacement à l'instant  $t$  de l'élément de Jenkins ayant glissé de  $\phi$ . Les éléments sont supposés avoir une masse négligeable, la force de frottement est considérée constante durant la phase de glissement et les coefficients de frottement dynamiques sont supposés tous égaux. En définissant une densité d'éléments de Jenkins adaptée à la prise en compte de faibles et fortes sollicitations, du macro-glissement et de la rigidité de la liaison, la force appliquée à l'ensemble s'écrit :

$$F_x(t) = \int_0^{\phi_{max}} [u(t) - x(t, \phi)]R\phi^\lambda d\phi + S[u(t) - x(t, \phi_{max})] \quad (1.11)$$

avec

$$R = \frac{F_S(\chi + 1)}{\phi_{max}^{\chi+2}(\beta + \frac{\chi+1}{\chi+2})} \quad (1.12)$$

et

$$S = \left( \frac{F_S}{\phi_{max}} \right) \left( \frac{\beta}{\beta + \left( \frac{\chi+1}{\chi+2} \right)} \right) \quad (1.13)$$

Les quatre paramètres de ce modèle sont alors :  $\chi$ , un paramètre sans dimension associé à la distribution des éléments de Jenkins,  $F_S$ , l'effort nécessaire pour obtenir un macroglissement de l'ensemble,  $\phi_{max}$ , une singularité définissant le déplacement maximum et  $\beta$ , un paramètre sans dimension permettant d'ajuster la forme de l'hystérésis lors de la comparaison à des résultats expérimentaux. Contrairement au modèle d'Iwan à trois paramètres [SEGALMAN 2001], le modèle à quatre paramètres permet de tenir compte du macroglissement de la liaison et ne se limite pas aux faibles sollicitations.

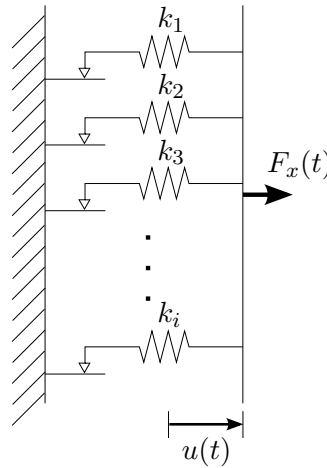


FIGURE 1.3 – Modèle d'Iwan en parallèle pour une distribution discrète d'éléments de Jenkins

Le modèle d'Iwan considère un chargement en suivant  $F_x$  de la liaison constant au cours du temps. Dans le cas d'une liaison sollicitée en flexion, cette hypothèse n'est plus vérifiée et ce modèle ne peut plus être utilisé tel quel. Pour palier à cet inconvénient, Song et al. [SONG et al. 2004] définissent un élément de type poutre incluant deux éléments d'Iwan disposés judicieusement. Cet élément construit de manière similaire à un élément poutre d'Euler-Bernoulli est alors tout à fait adapté aux cas de liaisons sollicitées en flexion. Le formalisme proposé par Song et al. [SONG et al. 2004] est présenté Figure 1.4 page 32. Les degrés de libertés considérés pour cet élément sont les déplacements et rotations de section aux extrémités de l'élément notés respectivement  $v_i$  et  $\theta_i$  ( $i = 1, 2$ ). Les efforts de cisaillement et moments de flexion associés sont notés respectivement  $F_x$  et  $M_z$ . Connaissant  $h$  et  $L$ , respectivement hauteur et longueur de l'élément, les efforts aux extrémités de l'élément peuvent s'écrire :



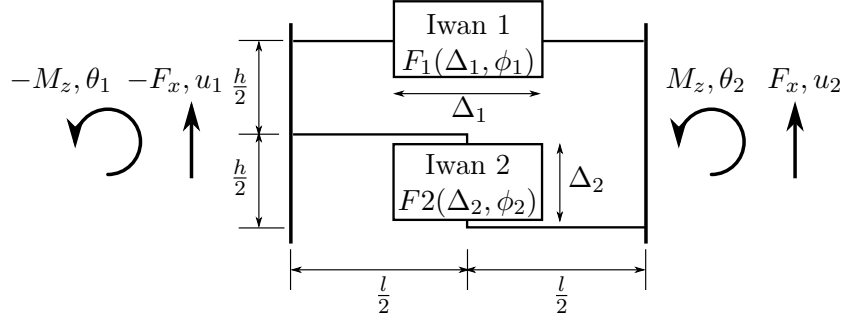


FIGURE 1.4 – Élément poutre d’Iwan ajusté

$$\begin{aligned} -F_x &= F_1(\Delta_1, \phi_1), & -M_z &= \frac{l}{2} F_1(\Delta_1, \phi_1) + \frac{h}{2} F_2(\Delta_2, \phi_2), \\ F_x &= -F_1(\Delta_1, \phi_1), & M_z &= \frac{l}{2} F_1(\Delta_1, \phi_1) - \frac{h}{2} F_2(\Delta_2, \phi_2) \end{aligned} \quad (1.14)$$

où  $F_i(\Delta_i, \phi_i)$  correspond à la force de rappel du modèle d’Iwan,  $\Delta_i$  à l’élongation de l’élément et  $\phi_i$  un vecteur dont les composantes sont les déplacements de chacun des frotteurs de Coulomb internes à l’élément. Afin de tenir compte de la raideur effective de la liaison en phase de glissement total mise en évidence par [GAUL et LENZ 1997], Song et al. [SONG et al. 2004] proposent d’ajouter une raideur  $k_a$  en parallèle de l’élément d’Iwan. Ce nouveau modèle d’élément est alors désigné élément poutre d’Iwan *ajusté*.

La plupart des modèles rhéologiques présentés dans cette partie ont pour but de traduire le comportement d’interfaces de contact travaillant en cisaillement avec une pression dans l’interface constante au cours du temps. Dès lors que la liaison n’est plus sollicitée uniquement en cisaillement, le formalisme proposé par Song et al. [SONG et al. 2004], que l’on retrouve également dans la thèse de Festjens [FESTJENS 2014] semble être un bon candidat pour décrire le comportement d’une liaison boulonnée lorsque la structure travaille en cisaillement et en flexion ( $F_z$  et  $M_y$  non nuls). Une autre approche, proposée par Ahmadian et al. [AHMADIAN et JALALI 2007a] permet également de palier aux inconvénients des modèles précédents lorsque la liaison est sollicitée en flexion. Cette autre approche consiste à proposer une formulation éléments finis de type poutre pour laquelle les composantes des matrices de raideur et d’amortissement sont définies de manière générique. Les différents modèles rhéologiques définis précédemment peuvent alors être directement appliqués aux composantes de ces matrices. Il est ainsi envisageable de traduire le comportement d’une liaison avec plus ou moins de finesse suivant le modèle rhéologique utilisé.

### 1.3 Méthodes d’identification des paramètres de liaison

La partie précédente a permis de faire un tour d’horizon des modèles de comportement classiquement utilisés dans la littérature pour décrire les phénomènes physiques intervenant au sein des liaisons. Il en ressort que les modèles rhéologiques semblent être les mieux adaptés à la simulation de structures comprenant un grand nombre de liaisons. Lorsqu’un

de ces modèles est choisi pour décrire le comportement d'une liaison particulière, il reste alors à identifier les paramètres du modèle correspondant à la liaison étudiée. Cette phase d'identification s'appuie généralement sur des résultats expérimentaux lorsque la liaison étudiée peut être isolée de la structure à laquelle elle appartient. Une autre solution consiste à se baser sur des résultats de simulations obtenus à l'aide de modèles fins de liaison (modèles constitutifs), on parle alors de *virtual testing* [CAIGNOT 2009].

- **Mesure directe effort-déplacement** : L'approche la plus répandue et certainement la plus directe pour identifier les paramètres d'un modèle de frottement est de mesurer expérimentalement la courbe effort-déplacement de la liaison afin d'y faire coïncider la courbe d'hystérésis issue du modèle de liaison [BELVIN 1987; GAUL, LENZ et SACHAU 1998; SEGALMAN et STARR 2004; SEGALMAN 2003]. Certaines précautions doivent cependant être prises en compte lors de la mesure expérimentale. Il peut notamment être nécessaire d'ajouter des résonateurs à la structure test afin de faciliter l'acquisition des grandeurs d'intérêt [GAUL, LENZ et SACHAU 1998]. En effet, les grandeurs à mesurer sont souvent relativement faibles lorsque la structure est sollicitée en fonctionnement nominal (les liaisons n'étant pas dimensionnées pour être soumises à des déplacements importants). Une fois la courbe d'hystérésis de la liaison obtenue expérimentalement, les paramètres du modèle peuvent ensuite être identifiés soit par lecture directe de points caractéristiques de la courbe d'hystérésis lorsque le modèle le permet [GAUL, LENZ et SACHAU 1998], soit par minimisation de l'erreur entre les courbes expérimentales et simulées [BELVIN 1987; SEGALMAN 2003].

- **Technique de représentation dans le plan d'état (*Force-State mapping*)** : Le principal inconvénient de l'identification directe à partir de la courbe d'hystérésis de la liaison est que les éventuelles dépendances de l'effort à la vitesse de déplacement ainsi que l'effet mémoire de la liaison ne sont pas pris en compte [CRAWLEY et O'DONNELL 1987; IBRAHIM et PETTIT 2005]. Une solution consiste à caractériser le comportement de la liaison dans le plan *vitesse-déplacement*. Cette technique est appelée "*Force-State mapping*" [BELVIN 1987; CRAWLEY et AUBERT 1986; CRAWLEY et O'DONNELL 1987; JALALI, AHMADIAN et MOTTERSHEAD 2007] ce qui peut être traduit par *représentation dans le plan d'état*. Le principe de cette technique est le suivant : en négligeant la masse de la liaison devant la masse de la sous-structure, l'équation du mouvement de la liaison étudiée s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{x} = F(t) - \mathbf{K}(x, \dot{x})x - \mathbf{C}(x, \dot{x})\dot{x} \quad (1.15)$$

où  $x$  et  $\dot{x}$  représentent les déplacement et vitesse relatifs des deux parties de la liaison,  $\mathbf{K}(x, \dot{x})$  et  $\mathbf{C}(x, \dot{x})$  sont les raideurs et amortissements généralisés de la liaison et  $F(t)$  est l'effort appliqué à la liaison. L'effort  $F_T$  transmis d'un élément à l'autre de la liaison peut alors se déduire de la mesure de l'effort appliqué à la liaison et des accélérations de part et d'autre de la liaison de la manière suivante :

$$F_T = \mathbf{K}(x, \dot{x})x + \mathbf{C}(x, \dot{x})\dot{x} = F(t) - \mathbf{M}\ddot{x} \quad (1.16)$$

Le tracé de l'évolution de  $F_T$  dans le plan *vitesse-déplacement* fournit une surface appelée "*force-state map*" traduisant le comportement de la liaison. Les raideurs et amortissements non-linéaires de la liaison peuvent alors être identifiés par minimisation de l'erreur entre la surface associée au modèle de liaison et la surface expérimentale. Bien qu'elle soit simple

à mettre en place, l'inconvénient principal de cette approche est que la liaison doit être isolée du reste de la structure [IBRAHIM et PETTIT 2005], ce qui n'est pas toujours envisageable. De plus, cette technique est basée sur une mesure temporelle des grandeurs d'intérêt ce qui peut conduire à un grand volume de données à gérer pour extraire les propriétés de la liaison. Pour palier à cet inconvénient, Kimm et Park [KIMM et PARK 1994] proposent d'étendre la méthode en se basant sur la réponse fréquentielle des sous-structures constituant l'assemblage. Cependant, cette variante nécessite de connaître les vitesses et déplacements de tous les degrés de liberté correspondant à la liaison, ce qui est difficilement réalisable en pratique.

- **Méthode de Balance-Harmonique** : Les techniques désignées sous le terme de *Balance Harmonique* sont des méthodes d'approximation permettant de convertir une équation **différentielle** non linéaire en une équation non linéaire **algébrique** lorsque le système étudié est soumis à une excitation harmonique. Cette approche est très répandue pour simuler le comportement de systèmes non-linéaires [AHMADIAN et JALALI 2007a; BOGRAD et al. 2011; BÖSWALD et LINK 2004; CAMERON et GRIFFIN 1989; FERREIRA 1998; FERRI et BINDEMANN 1992; FESTJENS 2014; REN, LIM et LIM 1998]. L'utilisation la plus courante [BOGRAD et al. 2011; BÖSWALD et LINK 2004; FERRI et BINDEMANN 1992] consiste à utiliser la balance harmonique pour passer d'un modèle de liaison dépendant de l'état de la liaison et de son histoire à un modèle ne dépendant plus que de l'amplitude d'excitation de la liaison. Cela permet ainsi de s'affranchir de l'intégration temporelle de la loi de comportement de la liaison qui peut être très coûteuse. Pour obtenir la FRF sur toute une plage de fréquence, la démarche consiste alors à évaluer la réponse de la structure pour une série d'excitations monofréquentielles appliquées à la structure. Pour chaque fréquence d'excitation, la réponse de la structure peut être supposée périodique et donc décomposable en série de Fourier. Le calcul des coefficients de cette décomposition permet alors de déterminer la réponse de la structure pour cette fréquence d'excitation. En procédant ainsi de suite pour chaque fréquence d'excitation, on peut ainsi évaluer la FRF de la structure sur toute la plage de fréquence considérée. L'utilisation de la méthode de *Balance Harmonique* pour l'identification des paramètres d'un modèle de liaison consiste à déterminer la réponse non-linéaire de la structure sur une plage de fréquence donnée puis à chercher le jeu de paramètres du modèle de liaison qui minimise l'écart entre la réponse expérimentale de la structure et la réponse simulée avec la *Balance Harmonique*. A titre d'exemple, Ren et al. [REN, LIM et LIM 1998] utilisent le formalisme de la balance harmonique pour tracer la courbe d'hystérésis d'une liaison. L'effort et le déplacement dans la liaison sont ainsi décomposés en séries de Fourier et les coefficients de cette décomposition sont identifiés expérimentalement pour chaque fréquence d'excitation par minimisation d'erreur entre les réponses expérimentales et calculées. Les signaux temporels de l'effort et du déplacement dans la liaison sont alors déduits des séries de Fourier. L'inconvénient de cette approche est sa sensibilité aux erreurs de mesures des grandeurs d'intérêts. Boswald et al. [BÖSWALD et LINK 2004] utilisent la méthode de *Balance harmonique* pour identifier les raideurs et amortissements non-linéaires des liaisons boulonnées d'un moteur d'avion. Les raideurs et amortissements équivalents obtenus à chaque pas de fréquence en utilisant l'HBM permettent de tracer la réponse en fréquence (FRF) analytique de la structure et les paramètres de la liaison sont alors identifiés par minimisation de l'erreur entre les FRF non-linéaires expérimentales et analytiques.

• **Identification basée sur la méthode des "éléments spectraux" (*Spectral element method*)** : Une autre approche permettant de simuler le comportement dynamique d'une structure consiste à décomposer la structure en degrés de liberté fréquentiels et non plus spatiaux comme c'est le cas dans la méthode des éléments finis. Ainsi, un degré de liberté spectral dépend directement des composantes fréquentielles du champ de déplacement et les fonctions de forme utilisées sont des fonctions de la fréquence basées sur une résolution exacte des équations différentielles du problème. L'utilisation de la méthode des éléments spectraux permet de modéliser un élément structurel uniforme (c-à-d : sans discontinuité géométrique ou matériau) avec un seul élément spectral indépendamment de la dimension de l'élément structurel. Le problème est donc ainsi grandement réduit sans rogner sur la précision de la solution obtenue. A titre d'exemple, cette approche est utilisée par Lee [LEE 2001] pour identifier les paramètres de masse et de raideur équivalentes d'une liaison de type bride. Esteban et Rogers [ESTEBAN et ROGERS 2000] utilisent cette approche pour caractériser l'énergie dissipée dans une liaison simple à deux boulons. Dans les deux cas, l'identification des paramètres de liaison nécessite uniquement la mesure des déplacements de part et d'autre de la liaison. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle est difficilement applicable à des structures complexes. Les structures étudiées dans le cadre de ce travail sont constituées de sous-structures simples, élancées et potentiellement sans discontinuité géométrique ou matériau. La méthode des éléments spectraux ne poserait *a priori* pas de problème d'implémentation dans ce cas. On préférera toutefois garder la possibilité d'appliquer la démarche choisie à des structures plus complexes. Pour cette raison, cette approche ne sera pas retenue pour identifier les paramètres des liaisons étudiées.

• **Approche par réseau de neurones** : L'approche classique d'identification par algorithme d'optimisation consiste à minimiser l'erreur entre le comportement expérimental du système et le modèle qui en est fait. Comme évoqué par Song [SONG et al. 2004], ces algorithmes sont souvent basés sur des calculs de gradients ce qui peut poser certains problèmes lorsque la structure étudiée présente de fortes non-linéarités. Pour s'en affranchir, une solution consiste à utiliser une approche de type réseau de neurones pour identifier les paramètres de liaison. Des résultats expérimentaux sont alors utilisés pour "entraîner" le réseau de neurones choisi. Song et al. [SONG et al. 2004] utilisent par exemple les résultats d'essais au marteau de choc sur une structure simple constituée de deux poutres assemblées par une liaison à double recouvrement. Il est important de noter que la définition du nombre de noeuds et de couches du réseau utilisé peut conduire à l'obtention de paramètres très différents et dont le domaine de validité doit être étudié en détail. L'expertise nécessaire à la bonne mise en place de ce type de méthode fait qu'elle ne sera pas privilégiée dans le cadre de ce travail. On peut également ajouter que, bien que les phénomènes intervenant au sein des liaisons soient fortement non-linéaires, le comportement de l'ensemble de la structure assemblée reste quand à lui faiblement non-linéaire [FESTJENS 2014]. Le recours à une approche de type réseau de neurones ne semble donc pas adapté.

En dehors des approches par réseaux de neurones, les méthodes d'identifications consistent généralement à choisir une méthode de simulation adaptée à la complexité ou au niveau de non-linéarité du modèle de liaison choisi puis à chercher les paramètres du modèle qui minimisent l'erreur entre les comportements expérimentaux et simulés de la liaison. La méthode de *Balance Harmonique* apparaît alors comme la méthode la plus adaptée à la simulation du comportement vibratoire des systèmes non-linéaires. Se pose alors la question

du niveau de non-linéarité à appliquer au modèle de liaison pour traduire le comportement observé expérimentalement. Une phase d'analyse expérimentale du comportement de la liaison à modéliser semble alors nécessaire et sera mise en place au chapitre 2.

## 1.4 Méthodes de simulation déterministe d'une structure assemblée complète

Une fois un modèle de comportement choisi pour les liaisons considérées et les paramètres de ce modèle identifiés, il est alors possible de simuler le comportement vibratoire d'une structure assemblée complète en tenant compte du comportement des liaisons.

Quatre types d'approches peuvent être recensées pour simuler le comportement d'une structure assemblée, chaque approche étant plus ou moins adaptée au régime de fonctionnement considéré (statique, dynamique transitoire ou stationnaire). On distingue ainsi les techniques d'intégration temporelle utilisées afin de caractériser le comportement statique et transitoire des structures assemblées [BELVIN 1987; GAUL et NITSCHKE 2001; SONG et al. 2004]. Ces techniques sont inefficaces pour l'étude du comportement vibratoire des structures et sont donc inadaptées au cadre de ce travail. Une seconde approche consiste à caractériser de manière "exacte" le comportement vibratoire d'une structure en exploitant le caractère linéaire par morceaux des lois de comportement du contact. Ces approches sont revues en détails par Gaul et Nitsche [GAUL et NITSCHKE 2001]. Il en ressort que, bien que précises, ces approches sont limitées à des structures ayant un faible nombre de liaisons. La troisième classe de techniques de simulation répandues pour l'étude du comportement vibratoire des structures assemblées correspond aux techniques basées sur la méthode de la *Balance Harmonique* [AHMADIAN et JALALI 2007a; BOGRAD et al. 2011; CLAEYS et al. 2016; GAUL et NITSCHKE 2000]. Comme évoqué précédemment, la *Balance Harmonique* consiste à réécrire un problème non-linéaire dans le domaine fréquentiel. Pour cela, les forces non-linéaires sont supposées périodiques puis décomposées en série de Fourier. En négligeant les harmoniques d'ordres supérieurs, l'équation du mouvement peut alors se ramener à une équation algébrique non-linéaire pour chaque excitation mono-fréquentielle considérée. Les équations algébriques non-linéaires sont alors résolues à l'aide de méthodes de résolution classiques de type Newton-Raphson par exemple [BOGRAD et al. 2011]. La réponse en fréquence de la structure est obtenue en balayant une plage de fréquence point par point. Cette approche peut devenir très coûteuse dès lors qu'un grand nombre de degrés de libertés non-linéaires sont considérés ou que le système présente de fortes non-linéarités. Finalement, la dernière approche de simulation du comportement vibratoire d'une structure assemblée consiste à effectuer une analyse modale linéaire classique de la structure assemblée en considérant une raideur et un amortissement équivalent des liaisons [BOGRAD et al. 2011; CROCOMBE et al. 2006]. Dans le cas étudié par Crocombe [CROCOMBE et al. 2006], une relation entre l'énergie dissipée dans la liaison et la sollicitation de la liaison par le reste de la structure est déterminée. La liaison est modélisée par une raideur équivalente et l'analyse modale linéaire permet de déterminer l'effort appliqué à la liaison à l'aide d'un logiciel éléments finis commercial. Cette approche se justifie par le fait que, dans le cas des structures assemblées, les non-linéarités sont localisées au niveau des liaisons et le reste de la structure, les sous-structures assemblées, a un comportement globalement linéaire.

La structure globale en régime forcé répond alors sur des modes quasi-linéaires comme le montrent Heller et al [HELLER, FOLTÊTE et PIRANDA 2009] et les vecteurs propres d'une structure globale présentant des non-linéarités localisées peuvent être considérés comme linéaires.

Finalement, se pose la question de la modélisation de la structure assemblée et de ses différents constituants. En règle générale, les sous-structures élastiques sont modélisées en ayant recourt à une discrétisation éléments finis mais d'autres approches peuvent être trouvées dans la littérature comme par exemple les approches multi-corps [GAUL, LENZ et SACHAU 1998] ou les approches par éléments spectraux (*Spectral element method*) [ESTEBAN et ROGERS 2000 ; LEE 2001]. La méthode des éléments finis étant la plus répandue, on se basera sur cette dernière pour modéliser les sous-structures élastiques étudiées. Il reste alors à définir comment les liaisons peuvent être intégrées aux modèles de sous-structures. Lorsque la structure globale le permet, c-à-d lorsque les liaisons sont suffisamment éloignées des singularités géométriques ou des discontinuités matériaux des sous-structures qu'elles relient ou lorsque les dimensions des liaisons sont faibles devant les dimensions du reste de la structure, un modèle rhéologique peut être implémenté directement entre deux noeuds du modèle éléments finis des sous-structures à assembler. Les éléments "sans-épaisseurs" (*zero-thickness elements*) [BOGRAD et al. 2011 ; MAYER et GAUL 2007] permettent de modéliser l'interaction entre les surfaces de contact de deux structures définies par des maillages volumiques. Ce sont des éléments surfaciques entre lesquels sont imposées des relations traduisant les phénomènes physiques intervenant dans l'interface. On peut par exemple définir une raideur linéaire ou non et un amortissement par l'intermédiaire d'une matrice de dimension égale au nombre de noeuds des deux éléments surfaciques. D'autres éléments peuvent être définis pour modéliser le comportement de l'interface comme les éléments minces (*thin layer elements*). Ces éléments sont des éléments volumiques dont l'épaisseur est faible devant les autres dimensions caractéristiques de l'élément sans que cela n'engendre de problèmes numériques. Ces éléments sont directement reliés aux éléments du maillage volumique des structures assemblées et nécessitent alors des maillages adaptés. Les derniers modèles d'interfaces présentés ici sont les éléments dits noeuds-à-noeuds (*node-to-node elements*) [BELVIN 1987 ; BOGRAD et al. 2011 ; SONG et al. 2004]. Ils consistent à appliquer une relation traduisant le comportement de l'interface entre chaque noeud en vis-à-vis des maillages à assembler. Il y aura alors autant de relations à déterminer que de noeuds en vis-à-vis dans l'interface. Si l'interface comprend un grand nombre de noeuds, on comprend vite que le coût de ce type d'approche peut devenir rédhibitoire. Lorsque l'influence locale de la liaison doit être prise en compte (ex. : rigidification locale des pièces assemblées) il est nécessaire de définir un modèle "numérique" adapté basé sur le modèle physique de comportement de la liaison et permettant de tenir compte de ces effets. Les modèles précédents peuvent être adaptés en condensant une partie des surfaces de contact en un noeud. On parle alors d'éléments *node-to-surface*.

## 1.5 Prise en compte de la variabilité des paramètres de liaison

Afin de mieux prédire le comportement réel d'une structure, la variabilité observée du comportement réel de la structure doit être modélisée dès la phase de conception. On parle

ainsi de dimensionnement robuste de la structure. On suppose ici que cette variabilité est principalement due aux incertitudes sur les paramètres du système étudié. Afin de propager les incertitudes au travers du modèle de comportement d'un système, deux types d'approches peuvent être identifiées suivant qu'elles soient probabilistes ou non. Parmi les approches non-probabilistes, on évoquera notamment les approches de type logique floue [ZADEH 1999], les approches par intervalles ou la théorie des méconnaissances [DAOUK 2016; LADEVÈZE, PUEL et ROMEUF 2006]. Les approches non-probabilistes se justifient dès lors que les incertitudes sont d'ordre épistémiques, c'est à dire qu'elles sont dues à un manque d'information. Les approches probabilistes visent quant à elles à modéliser la variabilité naturelle des phénomènes aléatoires. Deux branches peuvent alors être distinguées suivant que l'on cherche à tenir compte de la variabilité des paramètres des modèles utilisés, on parle alors d'approches probabilistes paramétriques, ou que l'on cherche à tenir compte également de l'incertitude due au modèle choisi ou aux incertitudes de mesure, on parle alors d'approches probabilistes non-paramétriques [SOIZE 2013]. L'approche probabiliste est particulièrement bien adaptée à la résolution numérique des problèmes de structure [BLANZÉ 2003; BLANZÉ et CHAMPANEY 2004; BLANZÉ et ROUCH 2005] et l'on suppose dans un premier temps que la qualité des modèles utilisés est suffisante pour ne pas significativement induire d'incertitudes supplémentaires. C'est donc tout naturellement dans le cadre probabiliste paramétrique que l'on se placera pour la suite de ce travail.

Afin de résoudre un problème dynamique en contexte incertain, les méthodes basées sur un échantillonnage statistique ou méthodes de Monte-Carlo constituent l'approche la plus directe, la plus simple d'implémentation et surtout la plus précise puisque ces méthodes convergent, par définition, vers la solution exacte du problème stochastique [SCHENK et SCHÜLLER 2005; SHINOZUKA et ASTILL 1972]. Le principe des méthodes de Monte-Carlo est le suivant : des réalisations des Variables Aléatoires associées aux paramètres structuraux incertains sont générées numériquement. L'ensemble des réponses correspondantes à chacune des réalisations est ensuite calculé. Enfin, un traitement statistique permet de qualifier l'incertitude des grandeurs d'intérêt [GHANEM et SPANOS 1990]. Les principaux avantages des méthodes de Monte-Carlo sont qu'elles sont insensibles à la dimension stochastique du problème et qu'elles permettent de traiter n'importe quel niveau de variabilité des grandeurs considérées [PAPADRAKAKIS et KOTSOPULOS 1999]. En contrepartie, leurs performances sont fortement dépendantes de la qualité du générateur de nombres aléatoires utilisé mais surtout le coût en temps de calcul nécessaire à garantir la convergence du résultat explose lorsque la durée d'un seul calcul déterministe de la structure étudiée augmente. De nombreuses techniques ont été mises en place afin d'optimiser le temps de calcul des simulations de Monte-Carlo. Ces techniques sont généralement basées sur des méthodes de réduction de variance ou sur la parallélisation des calculs associés à chaque réalisation [Van den NIEUWENHOF et COYETTE 2003]. Malgré cela, dans le cas du calcul de structure, ces méthodes restent difficilement envisageables. Pour ces raisons, différentes méthodes sans échantillonnage statistique ont été développées ces dernières décennies. Les deux approches les plus répandues dans la littérature permettant d'estimer les propriétés statistiques de la réponse d'un système aléatoire sont les méthodes dites de perturbation et les méthodes spectrales. Ces deux familles de méthodes sont présentées ici afin d'identifier les avantages et inconvénients de chacune d'entre elles et d'évaluer leur potentielle application au cas des structures assemblées.

### 1.5.1 Méthodes de perturbation

Les méthodes de perturbation sont basées sur l'approximation des variables aléatoires d'intérêt à l'aide d'un développement de Taylor tronqué. Simple à implémenter, le développement de Taylor utilisé est généralement limité à l'ordre deux car les termes d'ordre supérieur sont relativement coûteux en temps de calcul. De plus, ces méthodes se limitent aux faibles niveaux de variabilité des paramètres aléatoires d'entrée [GHANEM et SPANOS 1990; NAIR et KEANE 2003; SUDRET et KIUREGHIAN 2000]. On considèrera typiquement comme ayant une faible variabilité des variables aléatoires dont le coefficient de variation  $(\delta[\bullet] = \sigma[\bullet]/E[\bullet])^1$  est inférieur à 20%. Le développement de Taylor est généralement appliqué au voisinage de la valeur moyenne des variables aléatoires à estimer. A titre d'exemple, Collins et Thomson [COLLINS et THOMSON 1969] utilisent ce type de développement afin d'estimer les moments statistiques des valeurs propres et vecteurs propres aléatoires de systèmes simples. Adhikari et Friswell [ADHIKARI et FRISWELL 2007] proposent quant à eux de réaliser le développement de Taylor au voisinage d'un point optimal garantissant une meilleure estimation des premiers moments statistiques des valeurs propres aléatoires. Nair et Keane [NAIR et KEANE 2003] se basent sur une méthode de perturbation afin d'estimer les vecteurs propres aléatoires du système et d'en déduire les valeurs propres aléatoires associées. Les vecteurs propres aléatoires sont décomposés sur une base formée des vecteurs propres déterministes et des sensibilités de ces vecteurs propres calculées à la valeur nominale des paramètres aléatoires d'entrée.

### 1.5.2 Méthode des Eléments Finis Spectraux Stochastiques

La méthode des Eléments Finis Spectraux Stochastiques (SSFEM) a été introduite par Ghanem et Spanos [GHANEM et SPANOS 1990] à partir des travaux initiés par Wiener [WIENER 1938]. L'idée consiste à discrétiser les variables aléatoires du problème sur un espace fini engendré par une base de fonctions aléatoires. Les variables aléatoires sont ainsi généralement décomposées sur une base de polynômes multi-variés orthogonaux, fonctions de variables aléatoires de distribution connue. Cette base est appelée Chaos Polynomial. Par exemple, pour les problèmes dont les paramètres d'entrée sont assimilables à des variables aléatoires gaussiennes, la base la mieux adaptée à la décomposition sur le Chaos Polynomial est composée des polynômes d'Hermite multivariés [GHANEM et SPANOS 2003]. En effet, cette base assure une convergence rapide et une bonne estimation des variables aléatoires recherchées. Lorsque les paramètres d'entrée ne sont pas gaussiens, d'autres bases de décomposition ont été développées afin d'assurer une convergence optimale de l'approximation [XIU et KARNIADAKIS 2003]. Une fois la base de décomposition choisie, il reste à déterminer les coefficients correspondants à la variable aléatoire recherchée. Une première méthode, proposée par Ghanem et Gosh [GHANEM et GHOSH 2007], consiste à estimer ces coefficients à l'aide d'un échantillonnage de Monte-Carlo couplé à une méthode de Galerkin. Cependant, cette méthode souffre de sa sensibilité à la qualité du générateur de nombres aléatoires utilisé et devient vite très coûteuse dès lors que des polynômes d'ordres élevés sont nécessaires ou que le nombre de paramètres aléatoires devient important [GHA-

---

1.  $E[\bullet]$  et  $\sigma[\bullet]$  sont définis comme étant respectivement les espérance et écart-type d'une variable aléatoire



NEM et GHOSH 2002 ; GHOSH, GHANEM et PETIT 2003]. Afin de surmonter ces inconvénients, Ghanem et Gosh [GHANEM et GHOSH 2007] proposent une seconde approche basée sur une méthode de Galerkin permettant de déterminer les coefficients de la décomposition en se ramenant à un jeu d'équations non-linéaires mais déterministes. Cette méthode nécessite alors l'utilisation d'algorithmes de résolution de problèmes non-linéaires (type Newton-Raphson). D'autres méthodes dites de Chaos creux, permettent de rendre ce type d'approche moins contraignantes à implémenter. Cependant, le principal inconvénient des méthodes basées sur le Chaos Polynomial est leur coût lorsque le nombre de paramètres aléatoires augmente et que des polynômes d'ordre élevé sont requis.

### 1.5.3 Bilan

Les approches basées sur le Chaos Polynomial présentent un cadre d'étude à la fois général et précis permettant de caractériser les espaces propres d'une structure en présence de paramètres incertains. Cependant, leur mise en oeuvre peut s'avérer coûteuse dès que le nombre de paramètres aléatoires du problème augmente. Les structures assemblées dites légères sont généralement constituées d'un grand nombre de liaisons. Afin de tenir compte de la variabilité du comportement de l'ensemble des liaisons d'une structure, il est nécessaire de définir au moins autant de variables aléatoires que de liaisons. Pour cette raison, l'utilisation du Chaos Polynomial ne semble pas adaptée au cas des structures assemblées comprenant un grand nombre de liaisons. Concernant les méthodes de perturbation, ces dernières sont bien plus simples à implémenter et permettent d'estimer les variables aléatoires recherchées avec un temps de calcul très réduit. Cependant, ces méthodes sont moins générales et se limitent aux problèmes académiques et aux cas des faibles variabilités.

Afin de tenir compte de la variabilité des paramètres de liaison d'une structure industrielle assemblée dite légère, on cherchera à définir une méthodologie permettant de caractériser les espaces propres aléatoires de ce type de structure.

## 1.6 Approche retenue

Bien que de nombreuses études aient été effectuées sur le comportement dynamique des structures assemblées (**modélisation** [AHMADIAN et JALALI 2007a ; AHMADIAN et JALALI 2007b ; FESTJENS 2014 ; GAUL et LENZ 1997 ; GAUL et NITSCHKE 2001 ; SEGALMAN 2001 ; SEGALMAN et STARR 2004 ; SMALLWOOD, GREGORY et COLEMAN 2001 ; SONG et al. 2004], **simulation** [AHMADIAN et JALALI 2007a ; AHMADIAN et JALALI 2007b ; BELVIN 1987 ; BOGRAD et al. 2011 ; ERITEN et al. 2013 ; ESTEBAN et ROGERS 2000 ; GAUL et NITSCHKE 2001 ; HELLER, FOLTÊTE et PIRANDA 2009 ; MAYER et GAUL 2007 ; SONG et al. 2004], **identification** [AHMADIAN et JALALI 2007a ; BELVIN 1987 ; BOGRAD et al. 2011 ; BÖSWALD et LINK 2004 ; CAIGNOT 2009 ; CAMERON et GRIFFIN 1989 ; CRAWLEY et AUBERT 1986 ; ESTEBAN et ROGERS 2000 ; FERREIRA 1998 ; FERRI et BINDEMANN 1992 ; FESTJENS 2014 ; GAUL et LENZ 1997 ; IBRAHIM et PETTIT 2005 ; JALALI, AHMADIAN et MOTTERSHEAD 2007 ; LEE 2001 ; REN, LIM et LIM 1998 ; SEGALMAN 2003 ; SONG et al. 2004] des liaisons), ces travaux se limitent généralement au cadre déterministe. L'étude bibliographique proposée par Ibrahim et Petit [IBRAHIM et PETTIT 2005] illustre bien la nécessité

de prendre en compte les incertitudes lors de la caractérisation dynamique des structures assemblées. Dans l'ouvrage proposé par Ames et al. [AMES et al. 2009] et visant à fournir un manuel d'étude du comportement des structures assemblées, les conclusions sur la variabilité des caractéristiques dynamiques des liaisons soulignent également l'importance de la prise en compte des incertitudes pour le dimensionnement de ce type de structures. Pour les géométries de liaisons simples étudiées dans ce document, la variation de raideur de liaison est **de l'ordre de 30 %** et le taux d'énergie dissipée dans ces liaisons **varie d'un facteur trois**. On retrouve dans la littérature quelques travaux étudiant le comportement dynamique de structures assemblées en tenant compte des incertitudes. Ghanem et Red-Horse [GHANEM et al. 2000] se basent sur l'utilisation du Chaos Polynomial pour caractériser les fréquences propres aléatoires d'une portion d'échelle en aluminium. Cette étude est purement numérique. Les thèses de Gant [GANT 2011] et Daouk [DAOUK 2016] se basent sur la théorie des méconnaissances afin de tenir compte des sources d'incertitudes présentes dans les liaisons lors du dimensionnement statique [GANT 2011] et dynamique [DAOUK 2016] des structures assemblées. Seule la thèse de Daouk [DAOUK 2016] confronte résultats expérimentaux et simulations. Mignolet et al [MIGNOLET, SONG et WANG 2015] proposent une modélisation stochastique du comportement dynamique d'une liaison se basant sur un modèle d'Iwan. Les paramètres stochastiques de ce modèle sont identifiés à partir de résultats expérimentaux obtenus sur la liaison de références sur laquelle se base l'ouvrage de Ames et al. [AMES et al. 2009]. Dans ses travaux de thèse, Karim [KARIM 2013] étudie une solution de réduction des vibrations d'une structure boulonnée par le contrôle de l'effort de serrage d'une des liaisons. Une phase de caractérisation du comportement vibratoire de cette structure en tenant compte de la variabilité des paramètres influents est mise en place afin d'évaluer la robustesse de la stratégie de contrôle de l'effort de serrage de la liaison.

Parmi les travaux issus de la littérature et tenants compte de la variabilité due à la présence des liaisons, les structures traitées ne présentent qu'un nombre limité de liaison, nombre généralement réduit à un. Dans ce travail, on cherche à proposer une démarche de caractérisation robuste du comportement vibratoire des structures assemblées légères comprenant un grand nombre de liaison.

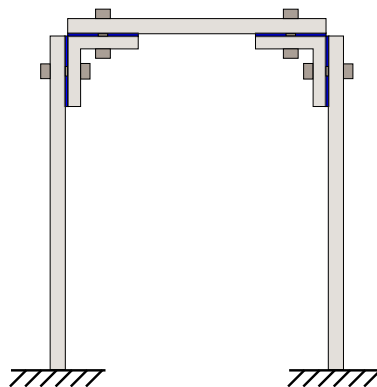


FIGURE 1.5 – Structure de référence : Portique 3 barres boulonnées

Ce travail se place dans le cadre des structures assemblées dites légères pour lesquelles les sous-structures assemblées sont élancées et présentent un comportement globalement élastique-linéaire. Les liaisons sont de faibles dimensions devant celles des sous-structures, les non-linéarités sont donc très localisées et le comportement vibratoire de l'ensemble de la structure est globalement linéaire. L'ensemble de ce travail sera illustré à partir du cas d'un portique constitué de trois poutres assemblées entre elles à l'aide de cornières et de liaisons boulonnées. Cette structure étant représentative des structures légères, la démarche suivie pourra être étendue à n'importe quelle autre structure assemblée. L'architecture du portique étudié est représentée sur la Figure 2.1 page 45.

Un modèle éléments finis poutre semble dès lors tout à fait adapté pour traduire le comportement dynamique des différents constituants de cette structure. Les modèles d'interface de type *éléments minces* ou éléments *sans épaisseurs* sont plutôt destinés à être intégrés dans des modèles volumiques voir 2D pour les éléments *sans épaisseurs*. Partant d'un modèle 1D, l'influence de l'interface peut alors être intégrée au modèle de structure à l'aide d'éléments *noeuds-à-noeuds* ou en modifiant la définition des éléments de la structure relatifs à la liaison. On peut par exemple chercher à définir des éléments poutres ayant une formulation adaptée au type de liaisons étudiées, la formulation de ces éléments étant alors définie par le modèle d'interface choisi. La complexité du modèle se doit d'être adaptée aux phénomènes dont le concepteur souhaite tenir compte lors de la simulation de la structure assemblée. Dans le cas du portique de référence, les liaisons sont sollicitées principalement en flexion et les phénomènes intervenant au sein de l'interface et régissant le comportement de la liaison sont l'adhérence et le glissement dans l'interface ainsi que le "claquement". Le "claquement" étant un phénomène de type choc, sa prise en compte peut représenter une certaine difficulté. On choisit donc de limiter cette étude à des niveaux de sollicitations n'induisant pas de phénomènes de ce type.

Concernant l'influence de l'adhérence et du glissement dans l'interface sur les caractéristiques dynamiques de la liaison, il semble difficile *a priori* d'évaluer si ces phénomènes sont significatifs et surtout si l'un est prépondérant devant l'autre, de manière systématique ou non. Deux approches peuvent alors être envisagées. La première consiste à définir un modèle numérique le plus fin possible de la liaison. On pourrait par exemple envisager de définir un modèle éléments finis volumique avec prise en compte du contact dans l'interface en fonction de la géométrie des surfaces en contact (aspérités, défauts de forme, etc). Puis de simuler le comportement de ce modèle de liaison afin d'évaluer les zones d'adhérence, de glissement, de décollement, etc. L'inconvénient principal de cette approche est lié au temps de calcul nécessaire à la réalisation d'une telle simulation. Dans le cadre de ce travail, on choisit d'envisager la deuxième approche qui consiste à observer expérimentalement le comportement de la structure assemblée afin d'en déduire les phénomènes prédominants à prendre en compte puis d'identifier *in fine* le modèle de comportement le mieux adapté à rendre compte du comportement observable.

Après avoir défini un modèle de liaison adapté aux observations expérimentales, une méthode de simulation adaptée à la nature de ce modèle (linéaire ou non suivant le modèle choisi) peut être sélectionnée et les paramètres du modèle de liaison peuvent être identifiés. On choisit d'identifier les paramètres du modèle par minimisation de l'erreur au sens des moindres carrés entre le comportement observé expérimentalement et le comportement

simulé.

Cette démarche purement déterministe ne permet pas de tenir compte des incertitudes sur les paramètres de liaison. On cherche ensuite à définir une méthode de caractérisation du comportement vibratoire des structures en présence de paramètres incertains. On veillera à ce que cette méthode soit non-intrusive afin d'être appliquée à partir de n'importe quel code éléments finis commercial et peu coûteuse en temps de calcul afin d'être applicable aisément aux cas des structures présentant un grand nombre de liaisons. La méthode alors mise en place vise à exploiter les particularités du comportement des structures assemblées pour étendre le principe des méthodes de perturbation à des variabilités plus importantes. Après validation, cette méthode peut alors être utilisée afin d'identifier les paramètres d'un modèle stochastique de liaison. On cherche ainsi à identifier les paramètres des distributions des variables aléatoires associées aux modèles de liaison. Pour cela, une stratégie d'optimisation au sens du maximum de vraisemblance peut être mise en place en travaillant directement dans l'espace des paramètres du problème (c-à-d les raideurs de liaison) [MIGNOLET, SONG et WANG 2015]. On cherche alors les paramètres des variables aléatoires associées aux raideurs de liaison minimisant l'écart entre les moments statistiques des fréquences propres expérimentales de la structure et les moments statistiques des fréquences propres aléatoires simulées numériquement.

La démarche développée dans le cadre de ce travail afin de simuler le comportement d'une structure assemblée légère et illustrée à partir du portique de référence 2.1 page 45 peut être résumée de la manière suivante :

1. Etapes préliminaires : Caractérisation des vis instrumentées et des conditions expérimentales, identification des paramètres matériaux des éléments utilisés, caractérisation des raideurs d'encastrement du système de fixation utilisé, choix des conditions d'excitation et validation du modèle éléments finis du portique monolithique ;
2. identification des propriétés que doit respecter le modèle de liaison au vu des résultats de l'analyse différentielle expérimentale et déduction du modèle nominal de liaison utilisé ;
3. identification des paramètres de liaison (raideur, amortissement) ;
4. identification d'un modèle stochastique de liaison (raideur et amortissement modélisés par des variables aléatoires) permettant de tenir compte de la variabilité des réponses de la structure assemblée complète ;
5. simulation stochastique du comportement vibratoire du portique et validation à partir de résultats expérimentaux

Les trois premières étapes de cette démarche font l'objet du chapitre 2. Dans ce chapitre, le point de vue est purement déterministe et vise à appréhender les phénomènes observables afin d'en déduire un modèle déterministe "juste suffisant" permettant de retrouver le comportement observé expérimentalement pour une configuration donnée de portique. Afin de pouvoir mener à bien l'étape 4 de cette démarche, il est nécessaire de se doter d'une méthodologie de caractérisation du comportement vibratoire des structures en présence de paramètres incertains suffisamment peu coûteuse en temps de calcul pour être couplée à un algorithme d'optimisation et permettre d'identifier les paramètres du modèle stochastique de liaison. L'approche SMR, pour *Stochastic Model Reduction*, développée dans ce travail

fait l'objet du chapitre 3. Finalement, l'identification des paramètres du modèle stochastique est alors mise en place au chapitre 4. Ces paramètres sont identifiés à partir de la variabilité effective (obtenue expérimentalement) du comportement vibratoire de différents portiques boulonnés. L'ensemble de la démarche est alors validée dans ce même chapitre à partir du comportement vibratoire de deux configurations de portique munis de plusieurs liaisons boulonnées. Pour chacune de ces structures, les variabilités observées expérimentalement sont comparées aux résultats de la simulation stochastique de ces structures. On propose finalement, pour clôturer le chapitre 4 et par la même occasion la démarche mise en place au cours de ce travail, de mettre en application l'outil de simulation numérique ainsi obtenu afin de dimensionner de manière robuste une solution de réduction du niveau vibratoire d'une structure assemblée de type portique.

## Chapitre 2

# Caractérisation et simulation du comportement vibratoire d'une structure assemblée

*L'objectif de ce chapitre est de mettre en place les outils nécessaires à la simulation du comportement vibratoire d'une structure assemblée dite légère. Pour cela, il sera nécessaire de définir un modèle de comportement physique d'une liaison ainsi qu'une méthodologie de simulation permettant de retrouver le comportement observé expérimentalement de la structure étudiée. On choisit comme cas d'étude un portique constitué de trois poutres assemblées par des liaisons boulonnées.*

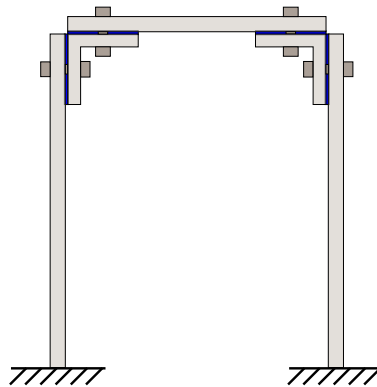


FIGURE 2.1 – Structure de référence : Portique 3 barres boulonnées

## Introduction

Ce travail se concentre sur l'étude vibratoire des structures assemblées qualifiées de légères. Ces structures sont ici assimilées à des structures globalement linéaires présentant des non-linéarités localisées au niveau des liaisons. Cette hypothèse se justifie par le fait que, en dehors des liaisons, ces structures sont généralement constituées d'éléments de grandes dimensions (comparées à l'échelle des liaisons) dont le comportement est globalement linéaire (petites déformations, domaine élastique linéaire des matériaux, etc). En terme de simulation, la majeure partie d'une structure assemblée peut donc être facilement discrétisée par éléments finis et les méthodes de résolution linéaires classiques peuvent être appliquées directement. Les liaisons ont une influence non négligeable sur le comportement de la structure assemblée. Les phénomènes intervenant au niveau des interfaces de contact des liaisons sont non-linéaires ce qui peut induire certaines difficultés lors de la simulation de la structure. On pense notamment au temps de calcul nécessaire à la prise en compte de ces non-linéarités, temps de calcul d'autant plus important que le nombre de liaisons de la structure assemblée est important. Comme évoqué précédemment, le comportement de la structure assemblée globale restant très proche du domaine linéaire, il sera ainsi possible d'envisager certaines simplifications pour simuler le comportement de la structure assemblée en tenant compte de l'influence des liaisons.

Il existe de nombreuses géométries de liaison dépendantes des sous-structures à assembler, du type de sollicitation, du régime de fonctionnement attendu pour le système étudié, de son environnement, etc. Le choix d'une structure conditionne donc nécessairement le type de liaison étudié. Il semble difficile de définir une approche unique valide pour n'importe quelle structure assemblée. Dans le cadre de ce travail, on se focalisera sur l'étude d'une structure représentative des structures légères : un portique encastré à sa base et constitué de trois barres liées entre elles par des liaisons boulonnées. Un schéma de cette structure est présenté Figure 2.1 page 45.

L'objectif de ce chapitre est de mettre en place les outils nécessaires à la simulation du comportement vibratoire nominal d'une structure assemblée. Pour cela, trois étapes ont été mises en évidence au chapitre 1. La première consiste à identifier un modèle physique permettant de prendre en compte les phénomènes prépondérants influant sur le comportement d'une liaison dans un contexte donné (on s'intéresse ici au cas d'un portique boulonné dont les liaisons sont principalement sollicitées en flexion). Une fois ce modèle physique choisi, il est nécessaire d'identifier les paramètres du modèle correspondant au type de liaisons étudiées. Enfin, ce modèle peut être intégré à un modèle global de structure assemblée afin de simuler le comportement complet de la structure étudiée.

Le choix de chacune des étapes de la démarche est intimement lié à la structure étudiée. Cela rejoint le raisonnement de Bograd et al. [BOGRAD et al. 2011] d'après lesquels, afin de simuler le comportement d'une structure assemblée, un modèle dédié doit être identifié et une technique d'identification adaptée doit être choisie pour évaluer les paramètres du modèle et ce pour chaque caractéristique de la liaison dont on souhaite tenir compte. Avant de s'arrêter sur un choix de modèle de liaison adapté à la structure considérée (ici le portique de référence présenté Figure 2.1), on choisit de procéder dans un premier temps à une phase d'analyse expérimentale du comportement d'une configuration simplifiée de portique. Cette

étape préliminaire a pour but de définir les limites des phénomènes observables pour ce type de structure et ainsi choisir un modèle de liaison de complexité adaptée aux observations expérimentales.

La première partie de ce chapitre présente la démarche expérimentale suivie ainsi que la caractérisation des différents éléments du dispositif expérimental utilisé. Cette étape préliminaire permet notamment de réduire les sources d'incertitudes dues aux conditions expérimentales et pouvant intervenir lors de l'identification du modèle de liaison. Afin d'identifier un modèle de liaison adapté au comportement observable des liaisons considérées, une phase d'analyse expérimentale est alors mise en place en deuxième partie de ce chapitre. Cette étape permet d'identifier un modèle de liaison "juste suffisant" permettant de rendre compte du comportement observé expérimentalement avec un coût de calcul minimal. Une fois le modèle de liaison choisi, ses paramètres peuvent être identifiés et la simulation du comportement vibratoire de la structure peut être effectuée. Ces dernières étapes de la démarche sont mises en place en dernière partie de ce chapitre.

## 2.1 Caractérisation du dispositif expérimental utilisé

L'objectif de cette partie est de caractériser le dispositif expérimental permettant d'évaluer l'influence des liaisons sur le comportement vibratoire de la structure globale étudiée (le portique présenté Figure 2.1). L'influence des liaisons sur le comportement de la structure peut être obtenue par analyse différentielle en comparant la structure assemblée à une structure monolithique équivalente. La différence de comportement observée entre les deux structures peut ainsi être imputée à la présence des liaisons. Les grandeurs influant principalement sur le comportement d'une liaison sont la pression au niveau de l'interface de contact et la surface effective de contact [AMES et al. 2009 ; HELLER, FOLTÊTE et PIRANDA 2009 ; IBRAHIM et PETTIT 2005]. Ces grandeurs sont directement liées au serrage (ou précharge) de la liaison et à l'amplitude de la sollicitation appliquée à la liaison. Le dispositif expérimental doit donc permettre d'évaluer et idéalement de contrôler ces grandeurs. Afin de contrôler l'effort de serrage dans les liaisons du portique, on choisit de se doter de vis instrumentées. L'amplitude de la sollicitation appliquée aux liaisons est directement liée à l'amplitude d'excitation de la structure globale. On cherchera alors à évaluer le comportement de la structure pour différents niveaux d'excitation.

Après une présentation du protocole expérimental permettant de caractériser l'influence des liaisons sur le comportement du portique, on propose de caractériser les vis instrumentées permettant de mesurer et contrôler l'effort de serrage de chaque liaisons. Les conditions expérimentales seront ensuite étudiées en détail afin de réduire les sources de variabilité associées qui pourraient remettre en cause la caractérisation du comportement des liaisons.

**Remarque 2.1 :** On notera que d'autres paramètres peuvent également jouer un rôle clé sur le contact au niveau de l'interface comme les défauts de forme [PEYRET 2012], l'état de surface, la lubrification (souhaitée ou non)[IBRAHIM et PETTIT 2005]. Malheureusement, ces paramètres sont difficilement maîtrisables à moindre coût. On fait l'hypothèse que l'influence de la méconnaissance de ces paramètres pourra être pris en compte lors de la modélisation stochastique des liaisons.



### 2.1.1 Présentation de la démarche expérimentale : Analyse différentielle du portique

Généralement, lors de la mise en place d'une analyse différentielle, les structures monolithiques utilisées comme références sont obtenues à partir d'un seul bloc de matière en usinant directement dans la masse. Dans le cas du portique étudié, le bloc de matière nécessaire à une telle opération devrait avoir des dimensions d'au moins  $435 \text{ mm} \times 310 \text{ mm} \times 30 \text{ mm}$ , soit un volume d'environ  $4 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  et la structure monolithique obtenue représenterait un volume d'environ  $2 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ , soit une perte de matière de 95 %. D'un point de vue simplement économique, la réalisation d'un portique équivalent monolithique usiné dans la masse ne semble pas envisageable dans le cadre de ce travail. De plus, le portique étudié est constitué de poutres et de cornières en aluminium assemblées entre elles par des vis, boulons et rondelles en acier. Il n'est malheureusement pas possible d'obtenir une structure monolithique bi-matériaux équivalente à la structure étudiée. On peut également ajouter que les poutres et cornières constituant le portique sont généralement obtenues à l'aide d'un procédé d'extrusion de type tréfilage ou étirage. Ce type de procédé induit une modification des propriétés mécaniques des profilés ainsi obtenus. Ces propriétés seraient alors nécessairement différentes des propriétés d'une structure obtenue par usinage dans la masse. Pour ces raisons, on choisit de réaliser la structure de référence à partir des différentes pièces du portique collées entre elles à l'aide d'une colle epoxy 3M<sup>TM</sup> Scotch-Weld<sup>TM</sup> DP 460. L'utilisation d'une colle permet d'assurer l'adhérence des surfaces en contact au niveau des interfaces ce qui supprime les phénomènes non-linéaires liés au contact ou au frottement. La structure ainsi collée sera assimilée à une structure monolithique et sera désignée comme tel dans la suite de ce travail.

La structure de référence étant désormais définie et réalisée, il reste à définir la démarche expérimentale utilisée pour l'acquisition des données nécessaires à l'identification du modèle de liaison. On s'intéresse à la réponse fréquentielle du portique et notamment à l'influence des liaisons sur le comportement vibratoire de la structure. Bien que les phénomènes intervenant au sein des liaisons soient non-linéaires, le comportement de la structure globale est quant à lui quasiment linéaire. Cette hypothèse pourra être mise en évidence lors des mesures expérimentales. Pour réaliser l'analyse différentielle, on se base sur les Fonctions de Réponse en Fréquence (FRF) de la structure monolithique de référence et de la structure assemblée présentées sur la Figure 2.2. Les caractéristiques géométriques des différents éléments constitutifs de ces portiques sont détaillés en annexe page 170. Leurs FRF sont obtenues à l'aide d'une analyse modale expérimentale linéaire. Pour cela, les structures sont excitées par un signal de type *Sinus balayé* à l'aide d'un pot vibrant *Brüel & Kjaer* type 4809. L'effort appliqué à la structure est alors mesuré à l'aide du capteur d'effort d'une tête d'impédance *Brüel & Kjaer* type 8001.

### 2.1.2 Caractérisation de vis instrumentées pour la mesure de l'effort de serrage dans une liaison

On a vu dans la partie précédente que le comportement d'une liaison était directement lié à l'effort de serrage appliqué. En effet, les phénomènes de contact et de frottement sont pilotés par l'effort normal au niveau des interfaces. Une connaissance précise de cet effort

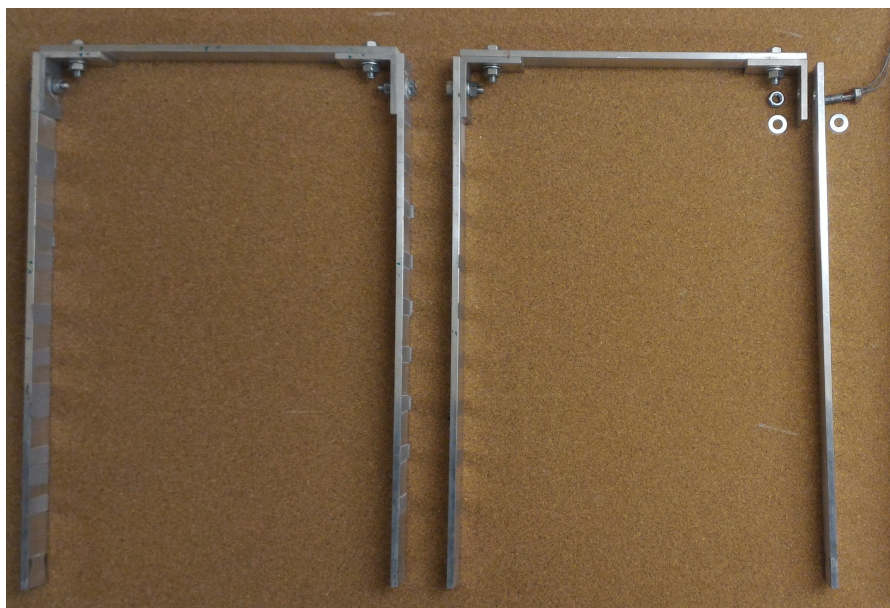


FIGURE 2.2 – Portiques monolithique et assemblé utilisés pour l'analyse différentielle

permet donc d'identifier le comportement d'une liaison en fonction de l'effort de serrage appliqué mais également, lors de la simulation d'une structure plus globale constituée de plusieurs liaisons, de réduire l'écart entre le système réel et le système simulé associé à la variabilité de l'effort de serrage. Il est important de rappeler que la dispersion de l'effort de serrage effectif dans une liaison boulonnée serrée à l'aide d'une clé dynamométrique peut dépasser les  $\pm 30\%$  [GUILLOT 2007]. On choisit donc de se doter d'une procédure de serrage permettant un meilleur contrôle de la précharge dans la liaison. Cette procédure fait l'objet de la partie suivante.

#### 2.1.2.1 Spécification des vis instrumentées

Il existe un grand nombre de procédé de serrage des assemblages boulonnés (clé à choc, couple moteur de l'outil utilisé pour le serrage, clé dynamométrique, serrage hydraulique, serrage à l'angle, serrage à la limite élastique). La dispersion la plus faible est obtenue pour les procédés se basant sur une mesure de l'allongement de la vis lors du serrage. On peut identifier notamment la mesure de l'allongement par ultrasons et par jauge d'extensométrie comme étant les mieux adaptées à l'obtention d'un serrage précis (dispersion pouvant être réduite à  $\pm 1\%$  pour ces deux techniques [OBERG et al. 2016]). Dans le cadre de ce travail, on choisit de mesurer la précharge d'une liaison boulonnée en se basant sur une mesure de déformation par jauge d'extensométrie. Cette approche a été choisie pour sa simplicité de mise en oeuvre vis-à-vis d'une mesure par ultrasons. Les vis instrumentées ont ainsi pu être réalisées directement au laboratoire sans nécessiter d'investissements importants.

La précharge dans la liaison est déduite de la déformation d'une des parties de la vis qui constitue alors le corps d'épreuve du capteur. Typiquement, deux parties de la vis peuvent être utilisées comme corps d'épreuve : la tête de vis et le fût de la vis. En effet, lors du

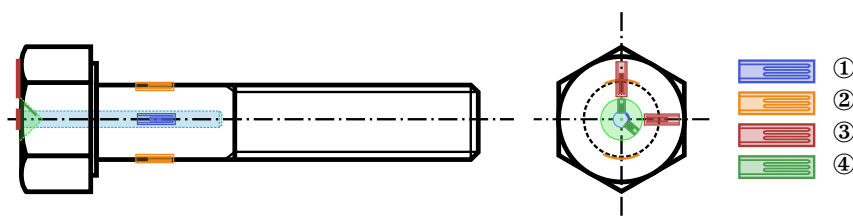


FIGURE 2.3 – Configurations de jauge pour vis instrumentées

serrage de la liaison, le fût de la vis, alors sollicité en traction, subit une élongation proportionnelle à la précharge de la vis. La tête de vis est quant à elle sollicitée en flexion. Il est ainsi possible de mesurer les déformations associées à l'aide de jauges d'extensométrie. Quatre configurations de jauges peuvent être utilisées [BOUAZIZ 2017; MCCARTHY et al. 2005; PAN, YAMAGUCHI et SUZUKI 2011], elles sont présentées sur la Figure 2.3. Les configurations ① et ② visent à mesurer l'élongation du fût de la vis. La configuration ① consiste à mesurer l'élongation du fût de la vis pour un serrage donné. Une seule jauge est nécessaire et est collée sur la paroi intérieure d'un trou colinéaire à l'axe de la vis. L'intérêt est que la jauge est positionnée au plus près de la fibre neutre de la vis. Si la vis travaille en flexion en plus de la traction initialement attendue (à cause de défauts géométriques de la vis par exemple), cette configuration permet de réduire l'erreur de mesure due à la contrainte normale associée à la flexion. L'inconvénient réside dans la difficulté de réalisation de cette configuration, que ce soit dans la réalisation du perçage ou du collage de la jauge. Une autre solution consiste à coller une paire de jauges directement sur le fût de la vis. Ces jauges sont diamétralement opposées afin d'annuler la composante de l'effort normal due à une éventuelle flexion du fût de la vis. Le principal inconvénient de cette configuration est que les jauges ou leurs connectiques peuvent être endommagées lors du montage/démontage de la vis. Les configurations ③ et ④ exploitent la déformation de la tête de vis en fonction du serrage. Les jauges peuvent être positionnées soit directement sur la tête de vis, soit sur les parois d'un trou conique, cette deuxième configuration permet d'améliorer la sensibilité du capteur [BOUAZIZ 2017]. L'avantage de ces configurations est qu'elles se basent sur des surfaces non fonctionnelles de la vis. Ces surfaces ne sont donc pas fortement contraintes d'un point de vue normalisation ce qui permet d'instrumenter n'importe quelle vis standard sans modification des procédures de dimensionnement normalisées. Cette contrainte peut ne pas être respectée dans le cas de la configuration ②, le fût de la vis pouvant nécessiter une opération de dressage pour supprimer les filets et permettre le collage des jauges. Les configurations ① et ④ ne seront pas retenues pour la réalisation des vis instrumentées car les dimensions des vis utilisées nécessiterait l'utilisation de jauges de dimensions très faibles dont le collage précis ne pourrait pas être réalisé au sein du laboratoire. Le choix entre la configuration ② et ③ s'appuie sur les observations de Pan et al. [PAN, YAMAGUCHI et SUZUKI 2011] selon lesquels la configuration ③ présente une plus grande dispersion de mesure. Ainsi on retiendra la configuration ② pour l'instrumentation des vis. La Figure 2.4 présente les dimensions caractéristiques des vis utilisées.

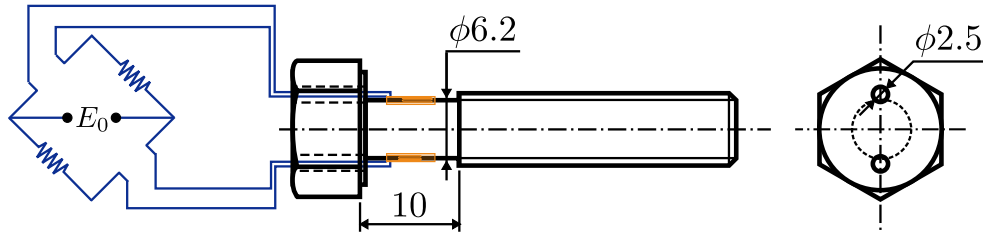


FIGURE 2.4 – Dimensions caractéristiques des vis  $M8 \times 25$  instrumentées utilisées et illustration du Pont de Wheatstone

### 2.1.2.2 Etalonnage des vis

Afin de mesurer avec précision l'effort de serrage appliqué à la liaison, on choisit d'instrumenter les vis utilisées à l'aide de jauges de déformation positionnées sur le fût de la vis. Afin de garantir une mesure de la déformation due uniquement à l'effort normal appliqué au fût de la vis, on choisit d'utiliser une paire de jauges parallèles à l'axe de la vis. On peut montrer qu'un défaut de perpendicularité de l'axe de la vis par rapport à la surface plane sous la tête de vis ou un défaut de désaxage du point d'application de l'effort de traction peut conduire à une contrainte normale due à la flexion de la vis non négligeable devant la contrainte normale due au seul effort de traction. A titre d'exemple, pour les vis instrumentées réalisées au laboratoire, la partie du fût de la vis sur laquelle ont été collées les jauges a été usinée à un diamètre de 6.2 mm. Lorsque la vis est soumise à un effort de traction colinéaire à l'axe de la vis mais désaxé par rapport à cet axe, la vis travaille alors à la fois en traction et en flexion. Le rapport entre la déformation longitudinale du fût de la vis au niveau du point de mesure due à la flexion et la déformation longitudinale due à la traction seule est de 1.3 pour un défaut de 1 mm. Le même rapport peut être calculé dans le cas d'un défaut d'orthogonalité entre la surface sous la tête de vis et l'axe de la vis. Pour un défaut de perpendicularité de  $1^\circ$ , le rapport des déformations dues à la flexion induite par le défaut et la déformation due à la traction est de 0.45. Pour s'affranchir de cette source d'erreur de mesure, les jauges sont positionnées sur le fût de la vis de manière à être diamétralement opposées. L'utilisation d'un demi pont de Wheatstone permet d'annuler directement la déformation due à la flexion. Le branchement du pont est présenté sur la Figure 2.4.

Outre l'erreur de mesure due à la flexion, compensée par l'utilisation de deux jauges diamétralement opposées, le mauvais positionnement des jauges sur le fût de la vis peut également induire une erreur de mesure. Afin de minimiser l'influence de cette erreur sur la mesure, une expression de cette erreur en fonction du défaut de positionnement angulaire ou de coaxialité des jauges peut être obtenue analytiquement mais la compensation de cette erreur nécessiterait alors de connaître finement les défauts réels du capteur après collage des jauges. Ces grandeurs sont difficilement mesurables. On choisit donc de procéder à un étalonnage des vis instrumentées afin de déterminer les courbes caractéristiques  $P = f(\epsilon) = k\epsilon$  de chacune des vis, où  $P$  est la précharge appliquée à la vis et  $\epsilon$  la déformation des jauges de déformations dans leur configuration collée réelle.

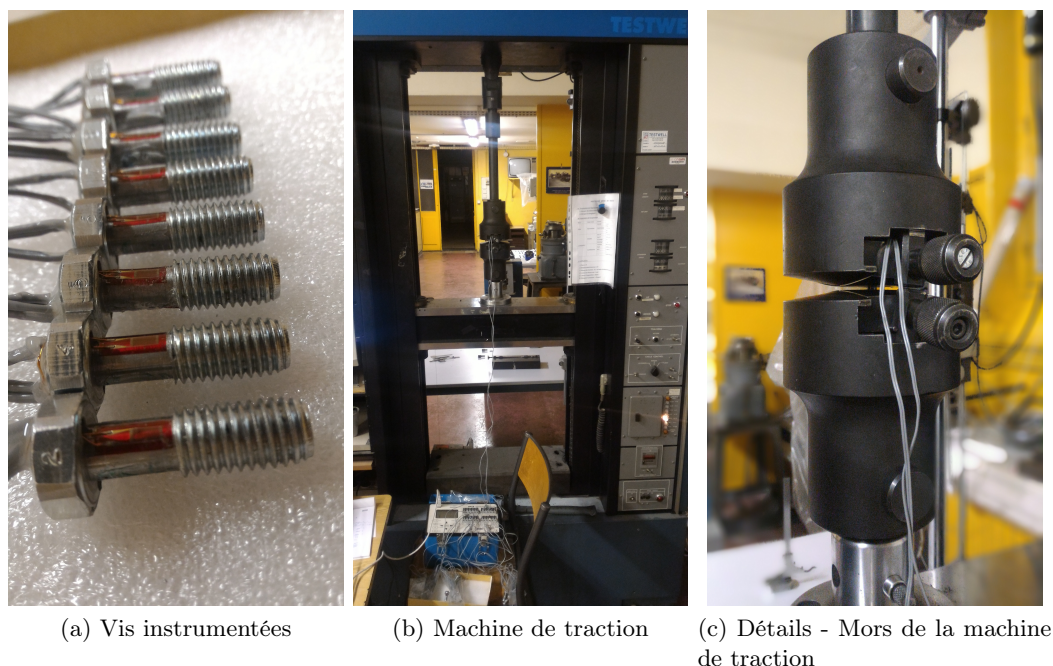


FIGURE 2.5 – Etalonnage des vis instrumentées

Vis	2	4	5	6	7	8	9	10
Gain (N/ $\mu\epsilon$ )	5.98	6.15	5.45	6.06	6.45	6.00	6.25	6.7

TABLE 2.1 – Gain des vis instrumentées

Les vis instrumentées réalisées pour cette étude sont présentées Figure 2.5a. Chaque vis a été numérotée afin de pouvoir associer à chacune d'elle le gain identifié expérimentalement. Les courbes d'étalonnage de ces vis sont obtenues à l'aide d'une machine de traction (Figure 2.5b) équipée de mors pour éprouvettes de traction cylindriques (Figure 2.5c). Afin d'évaluer une éventuelle déviation de la mesure au cours du temps, plusieurs cycles de charge-décharge sans démontage ont été appliqués à chacune des vis. La courbe d'étalonnage de la vis instrumentée N° 2 est présentée Figure 2.6. Les gains moyens identifiés pour cette vis ainsi que les huit autres vis réalisées sont présentés dans le tableau 2.1.

### 2.1.3 Caractérisation des conditions expérimentales

Avant de procéder à la caractérisation des liaisons du portique, une étude approfondie des conditions expérimentales a été mise en place afin de réduire autant que possible les sources de variabilité pouvant remettre en cause la caractérisation des liaisons. En effet, les phénomènes intervenant au sein des liaisons dont on cherche à quantifier les effets sur le comportement global de la structure induisent des variations relativement faibles du comportement global de la structure. La méconnaissance d'autres paramètres de la

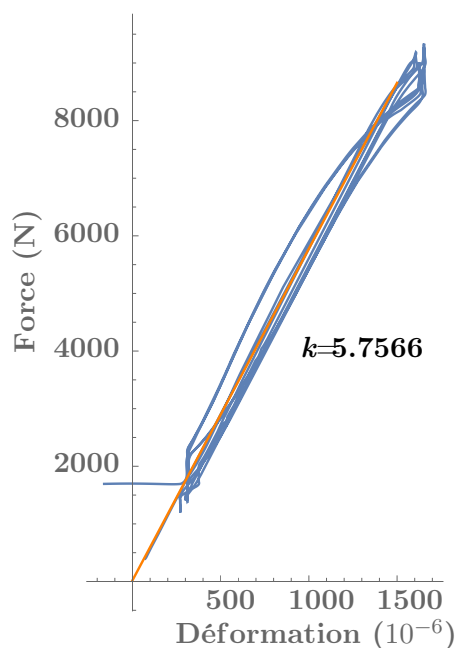


FIGURE 2.6 – Courbes d'étalonnage de la vis 2

structure globale tels que les paramètres matériaux ou les conditions aux limites pourraient alors conduire à une mauvaise identification des paramètres de liaison.

### 2.1.3.1 Identification des paramètres matériaux de la structure réelle

Les deux paramètres matériaux ayant une influence prépondérante sur le comportement vibratoire de la structure étudiée sont le module d'Young et la masse volumique. Ces deux paramètres peuvent varier par rapport aux valeurs moyennes couramment utilisées pour les simulations numériques car les profilés d'aluminium sont obtenus soit par extrusion, soit par tréfilage/étirage.

Afin d'identifier le module d'Young, un essai de traction a été réalisé sur une éprouvette non normalisée prélevée dans la même barre de matière que celle utilisée pour réaliser les poutres du portique. Le moyen d'essai utilisé est une machine de traction universelle MTS Criterion<sup>TM</sup> Model 43 munie d'un extensomètre axial. Afin de réduire la dispersion de la mesure due au moyen d'essai, l'essai a été répété 5 fois sur la même éprouvette avec démontage-remontage complet de l'éprouvette et de l'extensomètre. La masse volumique est obtenue par simple mesure de la masse à l'aide d'une balance de précision et calcul du volume de la pièce correspondante par mesure de ses différentes dimensions et ce pour plusieurs pièces d'aluminium. Les caractéristiques matériaux ainsi identifiées sont présentées dans le tableau 2.2. Les caractéristiques matériaux des cornières utilisées pour réaliser les différents portiques seront prises égales à celles des poutres de section rectangulaire.

	Moyenne $E[\bullet]$	Ecart-type $\sigma[\bullet]$
Module d'Young (Pa)	$65.5 \cdot 10^9$	$5.7 \cdot 10^3$
Masse volumique ( $\text{kg m}^{-3}$ )	$2.65 \cdot 10^3$	56

TABLE 2.2 – Paramètres matériaux identifiés pour les barres d'aluminium utilisées pour la réalisation des différents portiques

$k_x \text{ N m}^{-1}$	$k_y \text{ N m}^{-1}$	$k_{\theta z} \text{ N rad}^{-1}$
$6.3 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^{12}$	$4 \cdot 10^3$

TABLE 2.3 – Raideurs d'encastrement identifiées à partir de la réponse expérimentale de la poutre encastree

### 2.1.3.2 Caractérisation des conditions d'encastrement

Une autre source de variabilité entre le comportement réel du portique et le comportement simulé par EF peut provenir de la modélisation des conditions aux limites notamment lorsque la structure étudiée est encastree. En effet, la modélisation d'un encastrement est souvent réalisée par suppression des degrés de liberté de la structure correspondant aux encastrements ce qui revient à considérer la liaison comme infiniment rigide.

Afin de fixer le portique sur le marbre utilisé pour l'expérience, il a été nécessaire de réaliser deux encastrements dédiés. Les défauts potentiels de ces encastrements peuvent conduire à un assouplissement de la liaison réelle comparé au modèle initial. Cette différence de rigidité entre le système réel et le modèle utilisé pour la simulation induit une erreur sur l'estimation des fréquences propres de la structure étudiée potentiellement non négligeable notamment lorsque l'on monte en fréquence. Pour réduire l'écart entre le comportement du système réel et le comportement simulé, on choisit de modéliser la raideur des liaisons encastrement du portique. Cette raideur est alors identifiée à partir de la réponse en fréquence expérimentale d'une poutre encastree à l'une de ses extrémités.

La poutre est modélisée par un modèle éléments finis constitué de 165 éléments poutres. L'encastrement est quant à lui modélisé par trois raideurs  $\{k_x, k_y, k_{\theta z}\}$  suivant les trois degrés de liberté du noeud encastree. L'identification de ces paramètres est alors obtenue par minimisation de l'erreur au sens des moindres carrés entre les fréquences propres expérimentales de la poutre et les fréquences propres simulées. Expérimentalement, la poutre utilisée a les mêmes caractéristiques matériaux et géométriques que celles utilisées pour la réalisation du portique à savoir  $E = 65.5 \text{ MPa}$ ,  $\rho = 2710 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $L = 410 \text{ mm}$ ,  $b = 30 \text{ mm}$  et  $h = 6 \text{ mm}$ . Ces caractéristiques sont utilisées pour définir les éléments poutres du modèle éléments finis. Elle est excitée à l'aide d'un pot vibrant *Brüel & Kjaer* type 4809. La réponse en fréquence expérimentale de cette poutre est présentée Figure 2.7.

Les raideurs de liaisons ainsi identifiées sont données dans le tableau 2.3. La FRF simulée à l'aide du modèle éléments finis ainsi recalé est présentée également sur la Figure 2.7.

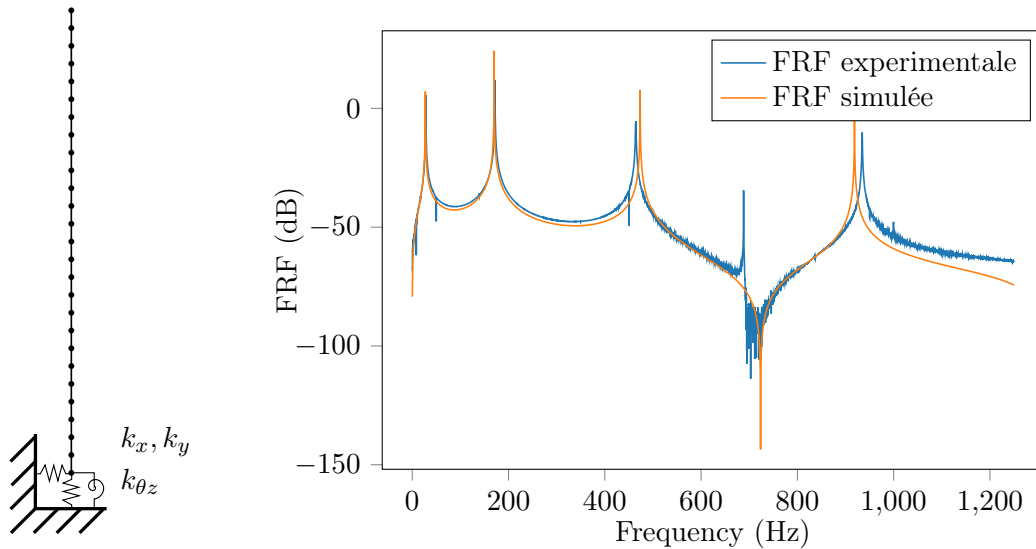


FIGURE 2.7 – Modèle éléments finis et FRF de la poutre encastree simulée après recalage

### 2.1.3.3 Choix des conditions d'excitation

Les deux types d'excitation les plus couramment utilisés en analyse modale expérimentale sont l'excitation par marteau de choc et l'excitation par pot vibrant ou système bobine-aimant [HEWLETT-PACKARD 1986]. Le marteau de choc tire son intérêt de la simplicité de mise en oeuvre de la mesure, qui nécessite relativement peu de matériel, et de la rapidité d'acquisition. Cependant, l'obtention de résultats consistants nécessite une certaine expérience de l'expérimentateur. L'utilisation de pot vibrant ou de système bobine-aimant permet d'imposer la forme du signal d'excitation et l'amplitude de l'effort avec une meilleure précision qu'avec un marteau de choc. Les résultats sont également moins dispersés. L'utilisation d'un système bobine-aimant permet de s'affranchir des problèmes liés à la liaison entre le pot vibrant et la structure mais l'amplitude de l'effort transmissible reste faible. Ce type d'excitation est donc bien adapté aux structures légères en condition libre.

Afin de caractériser une liaison du portique définie partie 2.1.1, les critères de choix de l'excitation sont les suivants :

- avoir une amplitude d'excitation variable ;
- permettre d'observer une dizaine de modes propres du portique, ce qui correspond à une bande de fréquence de 0 à 1250 Hz pour le portique étudié ;
- avoir un bon rapport signal à bruit ;
- garantir une répétabilité de la mesure.

Au vue de ces critères, on choisit d'exciter la structure à l'aide d'un pot vibrant *Brüel & Kjaer* type 4809. La mesure de l'effort d'excitation est obtenue à l'aide du capteur d'effort d'une tête d'impédance *Brüel & Kjaer* type 8001. En règle générale, la tête d'impédance est fixée directement sur la structure. Elle peut alors être liée à la structure par l'intermédiaire de cire ou de colle adaptée, de tige filetée ou même d'aimant en fonction du niveau d'effort



à transmettre [HEWLETT-PACKARD 1986]. L'effort appliqué par le pot vibrant est alors transmis à la tête d'impédance par l'intermédiaire d'une tige métallique appelée "stinger" ou d'une corde à piano. La tête d'impédance permet de mesurer un effort uniquement selon son axe longitudinal, il est nécessaire de garantir que l'effort imposé par le pot vibrant soit exclusivement dirigé dans la direction de mesure de la tête d'impédance. Pour cela le stinger doit avoir une rigidité importante dans la direction longitudinale et faible dans les autres directions. On choisit comme stinger une tige en acier de diamètre 0.6 mm et de longueur 3.6 mm fixé à la tête d'impédance et au pot vibrant par un système de mors adaptés comme présenté Figure 2.8.

Une première série de mesures est effectuée afin de valider le système d'excitation et notamment d'évaluer la répétabilité de la mesure effectuée. Pour cela, un écrou est collé **sur la structure** à l'aide d'une colle cyanoacrylate et la tête d'impédance est fixée à cet écrou par l'intermédiaire d'une tige filetée dont les dimensions garantissent le contact entre la surface de mesure de la tête d'impédance et l'écrou. Une première série de quatre mesures ont été effectuées sur le portique monolithique de référence. Cette série est présentée Figure 2.9 et correspond aux courbes désignées sous l'appellation "*Pot\_vibrant\_A*". Pour chacune des mesures de cette série, le portique n'a pas été démonté, le pot vibrant a été réglé lors du premier essai afin d'assurer un bon alignement de ce dernier vis-à-vis de l'écrou collé sur la structure et ce positionnement n'a pas été modifié d'un essai à l'autre, la tête d'impédance, le stinger et les mors ont été démontés entre chaque essais. On peut constater que la mesure obtenue n'est pas répétable notamment pour le mode 5 pour lequel une variabilité importante est observée entre chaque montage-démontage. La forme de la réponse en fréquence au niveau de ce même mode laisse penser que la structure est amortie par un système équivalent à un amortisseur à masse accordée. Une proposition d'explication peut être liée à la position du point d'excitation par rapport à la déformée du portique pour le mode 5. En effet, pour ce mode, le point d'excitation est proche d'un noeud et la normale à la poutre en ce point varie au cours du temps. La tête d'impédance étant liée en ce point induit une certaine inertie en rotation de la poutre qui n'est pas prise en compte dans la mesure de la réponse en fréquence. La validation de cette conjecture ne présentant pas un intérêt particulier pour cette étude et le comportement observé lors cette série de mesure n'étant pas satisfaisant, on choisit de changer la configuration de la tête d'impédance. La caractérisation des liaisons du portique étant obtenue par "analyse différentielle" avec un portique "monolithique", la répétabilité de la mesure doit être assurée lors du changement de structure expérimentale. Pour garantir une meilleure répétabilité, on choisit de positionner la tête d'impédance non plus sur la structure mais directement **sur le pot vibrant** comme présenté sur la Figure 2.8. L'idée sous-jacente est que de cette manière le stinger sera positionné entre l'excitation et la structure ce qui permet de réduire considérablement le couplage en flexion entre la structure et la tête d'impédance. Une série de trois mesures, référencée "*Pot\_vibrant\_B*" sur la Figure 2.9, a été réalisée. Entre chaque mesure l'ensemble stinger-tête d'impédance a été démonté puis remonté. Deux mesures ont également été effectuées à l'aide d'une excitation de type bobine-aimant avec démontage du support de la bobine entre chaque mesure. Cette série de mesures est désignée sous l'appellation "*Bobine\_aimant*" sur la Figure 2.9. L'excitation par bobine-aimant étant réputée très répétable, cette série de mesures permet de connaître la FRF de référence attendue pour le portique monolithique.

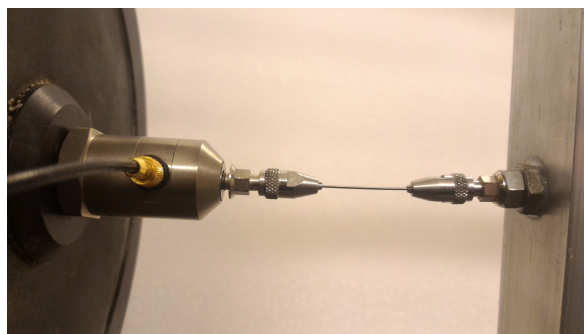


FIGURE 2.8 – Application et mesure de l'effort d'excitation de la structure étudiée

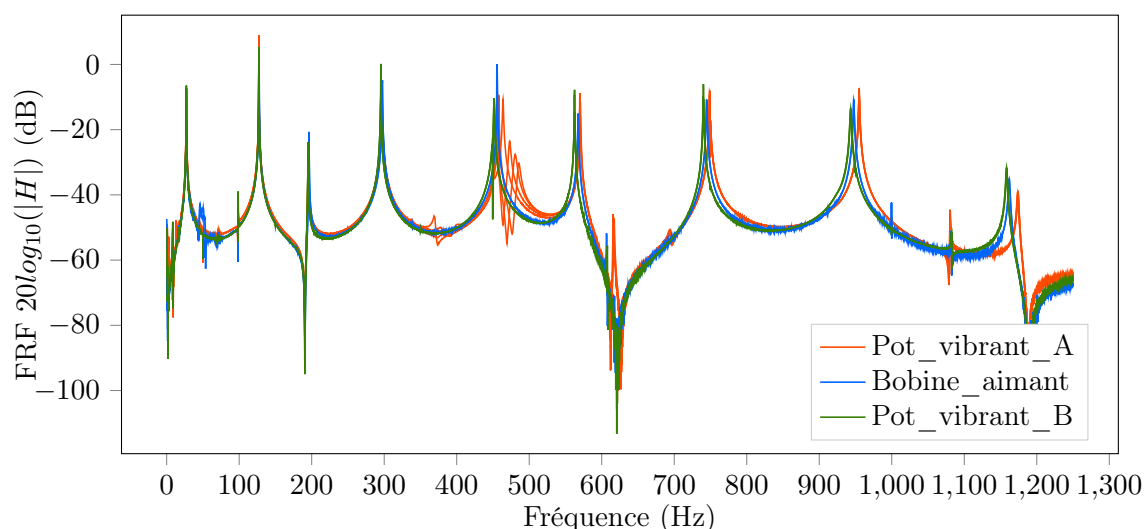


FIGURE 2.9 – Répétabilité de la mesure de la FRF du portique monolithique pour différents types d'excitation

On constate que la mesure pour laquelle la tête d'impédance est fixée directement sur le pot vibrant est tout à fait répétable. L'inconvénient principal est que cette configuration ajoute une raideur intermédiaire suivant l'axe du stinger entre la mesure de l'effort et le point d'application de l'excitation sur la structure. Une attention particulière devra donc être portée à la modélisation du stinger (raideur et masse ajoutée par le stinger et les mors) qui doit désormais être considéré comme faisant partie de la modélisation de la structure. On rappelle que l'intérêt de l'utilisation du pot vibrant comparé à une excitation par bobine-aimant est de pouvoir faire varier l'amplitude d'excitation sur une plus grande plage de valeurs.

#### 2.1.3.4 Modélisation du stinger

Afin de tenir compte du stinger positionné entre la tête d'impédance et la structure à exciter, on ajoute au modèle éléments finis de la structure étudiée un élément défini par des

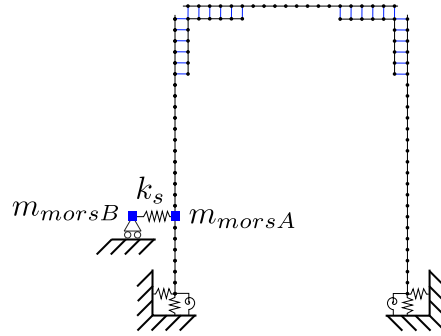


FIGURE 2.10 – Définition du modèle éléments finis du portique monolithique

raideurs généralisées ainsi que deux masses ponctuelles. L'une des masses est positionnée directement sur la structure à l'endroit où est appliqué l'effort du stinger sur la structure. Cette masse correspond à la masse du mors utilisé pour maintenir le stinger à laquelle est ajoutée la masse de l'écrou collé à la structure et permettant de lier le mors à la structure. Cette masse est mesurée à l'aide d'une balance de précision et vaut  $m_{morsA} = 5^{\pm 1}g$ . La seconde masse est positionnée à l'extrémité de l'élément correspondant au stinger et vaut  $m_{morsB} = 6^{\pm 1}g$ . Elle correspond à la masse du second mors à laquelle s'ajoute la masse de la partie de la tête d'impédance située en aval du capteur d'effort. Le stinger ayant pour fonction de transmettre uniquement les efforts longitudinaux, on peut supposer que sa rigidité dans les autres directions est très faible par rapport à la rigidité longitudinale. Afin d'identifier la rigidité longitudinale du stinger, on choisit de définir un modèle éléments finis du portique monolithique tenant compte des raideurs d'encastrement. L'ensemble des paramètres de cette structure ayant été identifiés précédemment, on peut alors facilement identifier la raideur du stinger à partir de la FRF expérimentale du portique monolithique en minimisant l'erreur entre les fréquences propres expérimentales et celles obtenues numériquement. La raideur du stinger ainsi identifiée vaut alors  $k_s = 10^6 N m^{-1}$ .

Le modèle éléments finis utilisé pour réaliser cette simulation est présenté sur la Figure 2.10. La Figure 2.11 présente la FRF du portique monolithique simulé à l'aide du modèle éléments finis recalé tenant compte des raideurs d'encastrement et du stinger. Afin de tenir compte au mieux du comportement des différentes pièces constituant le portique monolithique, notamment le décalage de ligne moyenne entre les poutres et les cornières au niveau des liaisons, on choisit de lier noeud-à-noeud les éléments des maillages relatifs à ces pièces par des liaisons rigides. La FRF expérimentale du portique monolithique est également présentée Figure 2.11. On constate que le modèle éléments finis de cette structure traduit bien le comportement observé expérimentalement.

## 2.2 Identification d'un modèle de liaison

Le dispositif expérimental étant désormais entièrement caractérisé, on cherche alors à définir un modèle de liaison adapté à la structure étudiée. Une première phase d'analyse expérimentale du comportement vibratoire de cette structure est d'abord mise en place. L'objectif est ainsi d'évaluer le degré de complexité du modèle de liaison qu'il faudra choi-

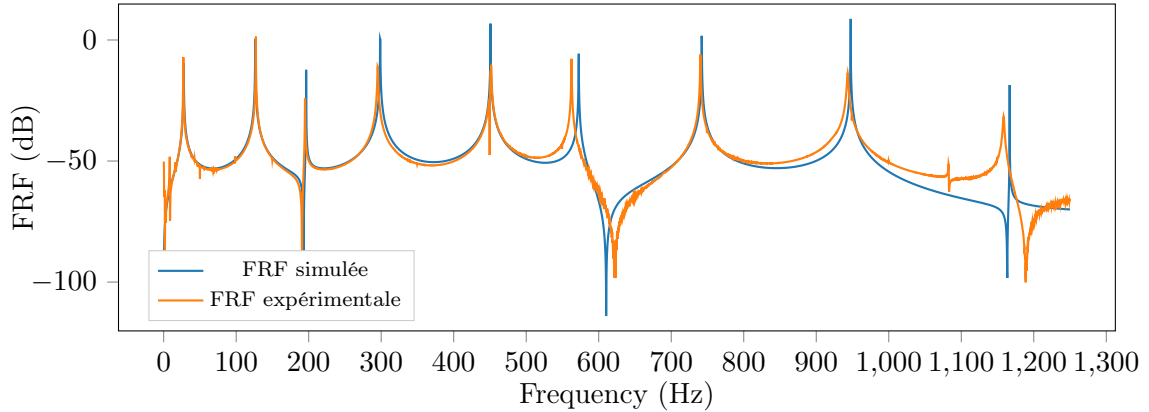


FIGURE 2.11 – FRF simulée après recalage et FRF du portique monolithique

sir pour rendre compte du comportement "observable" de cette structure. Cette analyse consiste à comparer le comportement d'un portique muni d'une seule liaison au comportement d'un portique monolithique équivalent afin d'évaluer qualitativement l'influence de la présence de la liaison sur le comportement de la structure globale. Cette analyse permet également d'identifier la sensibilité des caractéristiques dynamiques de la structure aux paramètres de liaison. Après avoir défini un modèle de liaison adapté à la simulation du comportement vibratoire du portique étudié, les paramètres de ce modèle sont identifiés. Deux approches sont alors proposées. La première consiste à identifier les paramètres minimisant l'erreur entre les fréquences propres expérimentales et les fréquences propres simulées du portique. La seconde reprend l'une des méthodes utilisée au chapitre 3 pour identifier les paramètres de liaison à partir d'un modèle éléments finis d'une structure monolithique équivalente à la structure assemblée à laquelle appartient la liaison. Finalement, le modèle de liaison ainsi défini et caractérisé est confronté à une autre configuration de portique afin d'évaluer si ce modèle peut être étendu à l'ensemble des liaisons du portique de référence défini Figure 2.1.

## 2.2.1 Analyse expérimentale des paramètres de liaison

L'objectif de ce paragraphe est de comparer les FRF expérimentales du portique monolithique et du portique muni d'une seule liaison afin d'en déduire les critères à respecter par le modèle de liaison cherché.

### 2.2.1.1 Identification des fréquences propres et de l'amortissement modal du portique expérimental

La structure étudiée étant faiblement amortie, on choisit d'identifier les paramètres modaux que sont les fréquences propres et amortissements modaux par la méthode de lissage du cercle de Nyquist [EWINS 1984; ROULEAU 2013]. Cette méthode consiste à déterminer l'équation du cercle décrivant le mieux la réponse en fréquence de la structure

au voisinage d'un mode lorsque la FRF est tracée dans le plan complexe. On peut montrer que les caractéristiques de ce cercle dépendent directement de la fréquence de résonance et de l'amortissement modal. Ainsi, connaissant le centre et le rayon de ce cercle, on peut en déduire les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\omega_i &= \frac{\omega_1^2 \tan(\omega_2/2) - \omega_2^2 \tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2) - \tan(\theta_1/2)} \\ \eta_i &= \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_i^2 (\tan(\theta_1/2) + \tan(\theta_2/2))}\end{aligned}\tag{2.1}$$

où  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont les fréquences associées à deux points de mesure de la FRF expérimentale de part et d'autre de la résonance,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont les angles définissant les positions angulaires des points de mesure de la FRF expérimentale  $H(\omega_1)$  et  $H(\omega_2)$  dans le plan de Nyquist. Ces angles sont définis par rapport à l'axe des imaginaires dans le repère centré sur le centre du cercle relatif au mode étudié.

### 2.2.1.2 Premières observations expérimentales

#### Fréquences propres :

On considère que la configuration nominale du portique assemblé correspond au serrage maximal de la liaison boulonnée. Ce serrage maximal est défini comme étant le serrage limite en dessous duquel la limite élastique du matériau n'est pas dépassée en tout point de l'interface de contact. Un rapide calcul élément fini permet de montrer que la précharge de la liaison boulonnée correspondant à ce critère est de 6000 N. L'utilisation d'une vis instrumentée telle que définie partie 2.1.2 permet d'assurer le serrage nominal de la liaison. La Figure 2.12 page 61 présente la réponse en fréquence expérimentale du portique muni d'une seule liaison comparée à la réponse du portique monolithique. On observe un décalage des fréquences de résonances de la structure boulonnée allant dans le sens d'un assouplissement de la structure comparé au portique monolithique de référence. Cette variation est due uniquement à la présence de la liaison. La première observation que l'on peut tirer de ce résultat est qu'il n'y a pas de relation évidente entre la variation relative de fréquence propre et la fréquence de chaque mode comme en atteste la Figure 2.13 page 62. La variation relative de fréquence propre n'étant pas constante pour tous les modes, un modèle de raideur constante ne semble pas adapté. "L'assouplissement" de la structure varie d'un mode à l'autre ce qui peut s'expliquer par le fait que la liaison n'est pas sollicitée de la même manière suivant le mode considéré. Festjens [FESTJENS 2014] propose de déterminer les caractéristiques dynamiques d'une structure assemblée (fréquence de résonance et amortissement) à partir de la connaissance des modes propres linéaires de la structure globale. La façon dont est sollicitée la liaison est déterminée à partir des modes propres de la structure globale, une raideur équivalente et une énergie dissipée par la liaison peuvent alors être déduites des modes de la structure globale. En suivant ce raisonnement, la liaison du portique étant sollicitée principalement en flexion, c'est essentiellement la courbure locale (au niveau de la liaison) de la forme propre du portique qui varie d'un mode à l'autre. On peut en déduire que la raideur de liaison doit dépendre directement de la courbure locale des vecteurs propres du portique. Le portique étudié étant constitué de

pièces élancées, une modélisation poutre est tout à fait adaptée à la modélisation de ces éléments.

### Amortissement :

Concernant l'amortissement, la Figure 2.13 présente la variation relative du facteur d'amortissement modal entre les configurations assemblée et monolithique du portique. On peut constater que cette variation est quasiment nulle pour la majorité des modes considérés. Seuls les modes 5 et 8 présentent une réelle augmentation de l'amortissement de la structure due à la présence de la liaison. Certaines valeurs de variation relative du facteur d'amortissement sont négatives, ce qui traduit une dissipation d'énergie plus importante pour le cas du portique monolithique que pour le cas du portique assemblé. Ces résultats vont à l'encontre du comportement attendu d'une structure assemblée comparée à une structure équivalente monolithique. Les deux structures étant toutes deux assez faiblement amorties, l'évaluation du facteur d'amortissement par lissage du cercle de Nyquist à partir du régime forcé de la structure peut alors être remis en cause. En effet, le nombre de points de mesure étant relativement faible autour des pics de résonance, l'évaluation des caractéristiques du cercle dans le plan de Nyquist peut être entachée d'une erreur non négligeable qui conduit à ce résultat. Les limitations du système d'acquisition, notamment au niveau logiciel et capacité machine, imposent une discrétisation fréquentielle maximale pour réaliser la transformée de Fourier des grandeurs mesurées nécessaire à l'obtention de la réponse en fréquence du portique. Sur la plage de fréquence pour laquelle les 9 premiers modes plans du portique sont obtenus, la discrétisation choisie pour l'acquisition des FRF est maximale. Une solution pour augmenter la résolution des FRF obtenues est de réduire la plage de fréquence étudiée tout en conservant la discrétisation maximale proposée par le logiciel mais cela ne permettrait plus de caractériser une dizaine de modes du portique comme souhaité initialement.

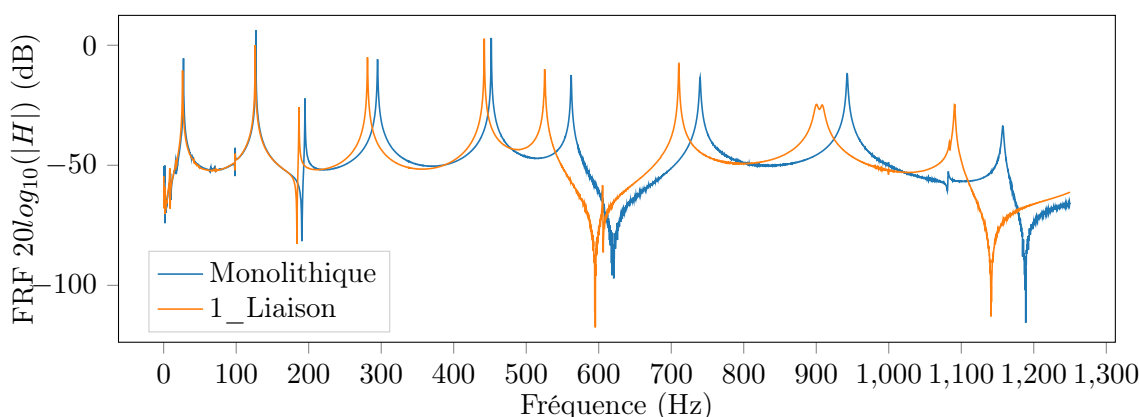


FIGURE 2.12 – FRF expérimentales obtenues pour le portique monolithique et le portique muni d'une seule liaison

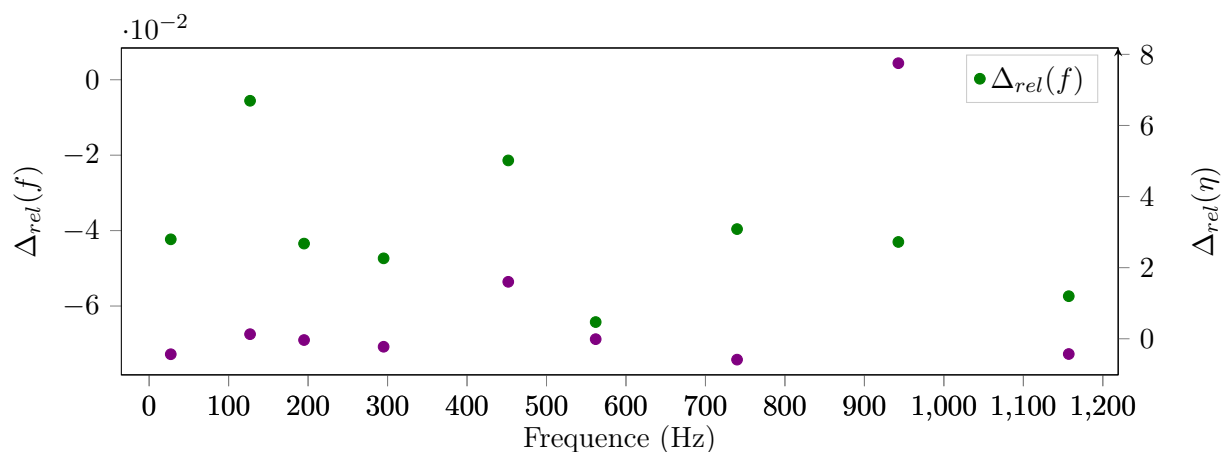


FIGURE 2.13 – Variation relative de fréquence propre et de facteur d'amortissement modal pour chacun des modes propres du portique muni d'une seule liaison comparé au portique monolithique

**Remarque 2.2 :** Afin de réduire l'erreur sur l'évaluation du facteur d'amortissement, d'autres méthodes permettant d'évaluer le taux d'amortissement à partir de la réponse temporelle d'une structure sembleraient mieux adaptées au cas du portique étudié dans ce travail. On pense notamment à la méthode utilisée dans la thèse de Festjens et basée sur la réponse temporelle d'une structure en régime libre après avoir été excitée au voisinage d'une fréquence de résonance [FESTJENS 2014]. Etant donné les ressources matérielles et logicielles disponibles à court terme, cette approche ne sera pas envisagée dans le cadre de ce travail.

Bien qu'il soit possible d'enrichir les données d'entrée de la méthode de lissage du cercle de Nyquist ou de mettre en place une autre méthode d'identification du facteur d'amortissement (en se basant sur la réponse temporelle de la structure par exemple), il semble important de rappeler que les éléments constituant le portique étudié ici sont réalisés en aluminium et que les caractéristiques du contact aluminium-aluminium ont tendance à favoriser l'adhérence des surfaces en contact (le coefficient de frottement pour ce type de contact est relativement élevé, des valeurs supérieures à 1 peuvent être retrouvées dans la littérature [BESANÇON 1990]). Il est alors tout à fait possible que le faible amortissement observé s'explique par le fait que la zone de micro glissement au niveau de l'interface de contact soit quasiment nulle. Une caractérisation tribologique expérimentale du comportement de l'interface de contact lorsque le portique est sollicité dynamiquement permettrait de vérifier cette hypothèse. Il est par exemple possible d'utiliser un film sensible à la pression similaire au film utilisé par Resor et Starr [RESOR et STARR 2007].

**Remarque 2.3 :** Un portique constitué de pièces en acier aurait certainement permis de visualiser une différence d'amortissement modal plus importante entre la structure assemblée et la structure monolithique de référence. Le choix d'un portique en aluminium était initialement motivé par le souhait d'obtenir le plus possible de fréquences de résonances expérimentales en dessous des 2 kHz, fréquence à partir de laquelle le dispositif expérimental, notamment les encastrement et le marbre sur lequel est fixé le portique, ne permet plus de garantir que le comportement du portique est découplé du comportement du bâti.

### 2.2.1.3 Influence du serrage de la liaison et de l'amplitude d'excitation sur le comportement expérimental du portique

Les résultats du paragraphe précédent ont été obtenus pour un serrage maximal de la liaison correspondant au fonctionnement nominal de l'assemblage. Les deux grandeurs réputées pour être les plus influentes sur le comportement d'une liaison étant le serrage de la liaison et l'amplitude d'excitation, on cherche ici à évaluer leurs influences sur les fréquences propres et l'amortissement du portique.

#### **Amplitude d'excitation maximale du dispositif expérimental utilisé :**

Comme il a pu être évoqué partie 2.2.1.2, l'effort de serrage maximal est imposé par un critère de tenue mécanique des matériaux au niveau de l'interface de contact de la liaison. La précharge maximale dans la liaison est ainsi fixée à 6000 N. Concernant l'amplitude d'excitation, ce sont les caractéristiques du dispositif expérimental qui limitent l'amplitude maximale applicable aux portiques étudiés. En effet, afin de garantir que le comportement observé (potentiellement non-linéaire) soit bien dû uniquement à la présence de la liaison, il est nécessaire de s'assurer que le reste du dispositif expérimental conserve un comportement linéaire. Pour cela, on choisit de solliciter le portique monolithique à l'aide de différents niveaux d'amplitude d'excitation jusqu'à apparition d'artefacts sur la réponse en fréquences traduisant l'émergence de phénomènes non-linéaires. On pense notamment à l'apparition d'harmoniques d'ordres supérieures sur la FRF. Pour définir le niveau initial, dit niveau "faible", le portique monolithique est sollicité à l'aide du pot vibrant *Brüel & Kjaer* type 4809 utilisé jusqu'à présent et alimenté par un signal piloté en courant à l'aide d'un amplificateur *Brüel & Kjaer* type 2718. L'amplitude de ce signal est fixée de manière à ce que la FRF du portique ne présente aucune oscillation parasite. L'amplitude de l'effort correspondant appliqué à la structure en dehors des pics de résonance vaut 400 mN.

Lorsque le niveau du signal d'excitation augmente, dès lors qu'une non-linéarité est activée par l'excitation lors du balayage en fréquences, on peut voir apparaître sur la FRF des oscillations, notamment autour des pics de résonance. Ces oscillations ne traduisent pas le comportement de la structure étudiée mais sont une conséquence du traitement du signal par transformée de Fourier. Afin de supprimer ces oscillations parasites, on choisit d'exciter la structure non plus sur toute la bande de fréquence étudiée mais par bandes de fréquences réduites dans l'idée de ne pas solliciter la fréquence correspondant à la non-linéarité. Initialement, le *sinus balayé* utilisé pour exciter la structure couvre une plage de fréquence allant



de 0 à 1250 Hz. Cette plage de fréquence sera utilisée pour l'ensemble des résultats expérimentaux dits à "faible amplitude". Pour obtenir une FRF à "forte amplitude" sur la même plage de fréquence on procède en quatre séries de mesures pour lesquelles le *sinus balayé* utilisé couvre les plages de fréquences [100 Hz; 220 Hz],[220 Hz; 460 Hz],[460 Hz; 800 Hz] et [800 Hz; 1250 Hz]. La FRF sur la plage de fréquence totale est ensuite obtenue par assemblage des quatre FRF élémentaires. Les fréquences inférieures à 100 Hz ont été volontairement écartées car la FRF obtenue sur cette plage de fréquence est fortement perturbée pour cette amplitude d'excitation.

Le Figure 2.14 présente la FRF à "forte amplitude" du portique monolithique obtenue par *sinus balayé* "par morceaux". On peut constater qu'il n'y a plus d'oscillation parasites sur cette courbe. On observe cependant une diminution de l'amplitude de la réponse en amont de certaines fréquences propres. Pour des amplitudes d'excitation au moins 10 fois supérieure au niveau "faible", on observe en pratique, que pour certaines fréquences d'excitation, le stinger se met à vibrer sur des modes de flambement. Ces modes du stinger sont alors visuellement observables sur le dispositif expérimental. Les artefacts observés sur la FRF à "forte" amplitude de cette figure sont certainement dus à l'apparition du flambement du stinger. La FRF de la Figure 2.14 est obtenue pour une amplitude d'excitation 5 fois supérieure au niveau "faible". Pour cette amplitude on constate que les chutes d'amplitude de la FRF en amont des pics de résonances n'influent pas sur les pics de résonance eux même (par comparaison à la FRF à "faible" amplitude).

On peut donc en conclure que, pour évaluer l'influence de l'amplitude d'excitation sur le comportement du portique muni d'une seule liaison, on fera varier l'amplitude du signal appliqué au pot vibrant de manière à ce que l'effort appliqué à la structure en dehors des pics de résonance varie entre 400 mN et 2 N. Ces deux bornes seront désignées par la suite amplitude "faible" et "forte" de l'excitation.

**Remarque 2.4 :** De façon comparable, le cas d'une poutre assemblée par une liaison à simple recouvrement a été étudié par Ahmadian et Jalali [AHMADIAN et JALALI 2007b]. La structure est excitée à l'aide d'excitations mono-fréquentielles et l'amplitude de l'effort appliqué à la structure est asservie. Ils déterminent ainsi la FRF non-linéaire de la structure étudiée pour deux niveaux d'efforts d'excitation valant respectivement 47.6 mN et 90.6 mN. Avec ces amplitudes d'excitations et une démarche expérimentale adaptée à l'observation de phénomènes non-linéaires, la variation de fréquence de résonance observée par Ahmadian et Jalali [AHMADIAN et JALALI 2007b] entre les deux amplitudes d'excitations utilisées reste très faible et la disymétrisation du pic de résonance étudié due à la non-linéarité ne semble pas très significative. La faible distorsion des pics de résonance laisse penser que l'obtention de la FRF du portique à l'aide d'une approche linéaire (transformée de Fourier rapide des signaux) pour deux niveaux d'amplitude du signal d'excitation sera suffisante pour observer l'influence de la liaison sur le comportement du portique. On peut s'attendre à ce que le comportement du portique ne soit que faiblement influencé par l'amplitude d'excitation.

**Influence du serrage et de l'amplitude d'excitation sur le comportement du portique assemblé :**

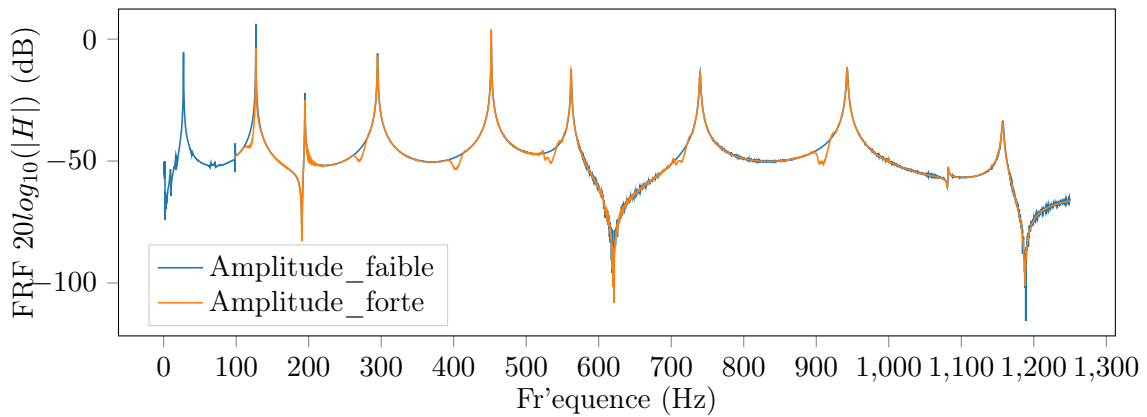


FIGURE 2.14 – Comparaison de la FRF du portique monolithique pour deux niveau d'amplitude d'excitation

Les bornes de variation des paramètres étudiés étant désormais fixées, il reste à évaluer comment varient les caractéristiques dynamiques du portique assemblé en fonction de la précharge de la liaison et de l'amplitude d'excitation. Les réponses en fréquences du portique muni d'une seule liaison (présenté Figure 2.2), sont obtenues expérimentalement pour différentes valeurs de précharge de la liaison et d'amplitude d'excitation. On choisit d'évaluer ces FRF pour neuf niveaux de serrages pris entre 1 N et 6000 N. Pour chaque niveau de serrage, les FRF sont obtenues pour différentes amplitudes d'excitation. La durée d'une mesure à "forte" amplitude étant relativement longue du fait du protocole suivi (*sinus balayé par morceaux*), on se limite dans un premier temps à deux niveaux d'amplitudes correspondant aux amplitudes "faible" et "forte" définies au paragraphe précédent. On verra qu'il ne semble pas nécessaire d'effectuer des mesures à des niveaux d'amplitudes intermédiaires du fait des caractéristiques de la structure étudiée.

La Figure 2.15 présente les FRF ainsi obtenues. Les échelles de couleur verte et mauve correspondent au niveau de serrage de la liaison en échelle logarithmique pour les deux amplitudes d'excitation considérées : l'échelle verte correspond à l'amplitude faible et la mauve à l'amplitude forte.

On peut constater que le serrage de la liaison a tendance à rigidifier la structure. Les fréquences propres du portique augmentent avec le serrage de la liaison. L'amplitude d'excitation a tendance à augmenter l'amortissement modal du portique. Ces observations sont cohérentes avec le comportement attendu de la liaison. En effet, le serrage a tendance à augmenter la zone d'adhérence au sein de l'interface de liaison, la liaison apparaît donc comme plus rigide du point de vue de la structure globale. L'amplitude d'excitation, en sollicitant plus intensément la liaison, a tendance à augmenter la zone de glissement dans l'interface et donc la dissipation d'énergie. On constate toutefois que les grandeurs dynamiques du portique varient relativement peu pour les plages de variations considérées. La Figure 2.16 présente sous une autre forme la fréquence propre et le facteur d'amortissement modal identifiés par la méthode de lissage du cercle de Nyquist pour chacun des modes 2 à 9 du portique lorsque le serrage de la liaison varie. Le premier mode n'étant

pas observé dans le cas de l'excitation à forte amplitude du fait de la plage de fréquence étudiée, ce mode ne sera pas considéré ici. On constate que, hormis pour les modes 2 et 5 où la variation de fréquence propre est quasi-nulle, les fréquences propres du portique ont la même évolution en fonction du serrage et convergent vers une valeur limite correspondant au serrage maximum de la liaison. La raideur de liaison évolue ainsi dans le même sens. L'amplitude d'excitation a tendance à influencer dans le sens d'un assouplissement de la structure, les fréquences de résonances étant globalement plus faibles à forte amplitude. Ce constat est également observé expérimentalement par Gaul et Lenz [GAUL et LENZ 1997]. Toutefois cette variation de fréquence reste négligeable pour les niveaux d'amplitude considérés, la variation relative de fréquence propre entre les niveaux d'amplitude faible et fort est globalement très inférieure à 1 % avec un maximum à 1.1 %. L'hypothèse de faible non-linéarité due à la liaison sur le comportement de la structure globale sur laquelle se basent les travaux de Fesjtens [FESTJENS 2014] semble donc tout à fait vérifiée pour le cas du portique étudié. Il ne semble pas nécessaire de réaliser d'autres séries de mesures avec des niveaux d'amplitude d'excitation intermédiaires.

**Remarque 2.5 :** Des résultats similaires sont obtenus par Ahmadian et Jalali [AHMADIAN et JALALI 2007b] pour le cas de deux poutres assemblées par une liaison à simple recouvrement. Dans leur cas, une démarche expérimentale non-linéaire a été mise en place pour caractériser le comportement de la liaison étudiée. La structure est excitée à différentes fréquences avec une force sinusoïdale d'amplitude imposée. Deux niveaux d'amplitude de la force excitatrice sont considérés, le niveau haut étant deux fois supérieur au niveau bas. Ces résultats confortent donc les observations expérimentales obtenues dans le cas du portique muni d'une seule liaison pour deux niveaux d'excitation (dont l'un est cinq fois supérieur au second).

Concernant l'amortissement, aucune loi liant le facteur d'amortissement au serrage de la liaison ne semble pouvoir être mise en évidence à partir des résultats expérimentaux. L'amplitude d'excitation semble influencer sur le facteur d'amortissement dans le sens d'une augmentation de celui-ci à forte amplitude mais cette observation reste discutable. A nouveau, l'utilisation d'éléments en aluminium peut expliquer ces résultats concernant l'amortissement (le contact aluminium-aluminium ne favorisant pas le glissement). On peut également se demander si un comportement plus marqué pourrait être observé avec une amplitude d'excitation plus importante mais cela nécessiterait quelques modifications du dispositif expérimental, notamment au niveau du stinger liant le pot vibrant à la structure. Sur les graphiques relatifs au facteur d'amortissement de la Figure 2.15, les facteurs d'amortissement modaux du portique monolithique ont été ajoutés afin d'évaluer si l'amortissement observé est dû majoritairement à la présence de la liaison ou s'il s'agit principalement d'amortissement structural. En considérant la variation relative d'amortissement modal par rapport à la structure monolithique (cf Figure 2.13), seuls les modes 5 et 8 sollicitent la liaison de manière à ce qu'elle dissipe de l'énergie. Le tableau 2.4 présente les facteurs d'amortissement modaux du portique monolithique ainsi que les moyennes et coefficients de variation ( $\delta[\bullet] = \sigma[\bullet]/E[\bullet]$ ) des facteurs d'amortissement du portique assemblé. Les moyennes et coefficients de variation sont calculés par rapport à la variable "serrage de la liaison". L'écart relatif entre les facteurs d'amortissement moyens du portique assemblé et les facteurs d'amortissement du portique monolithique est également fourni dans

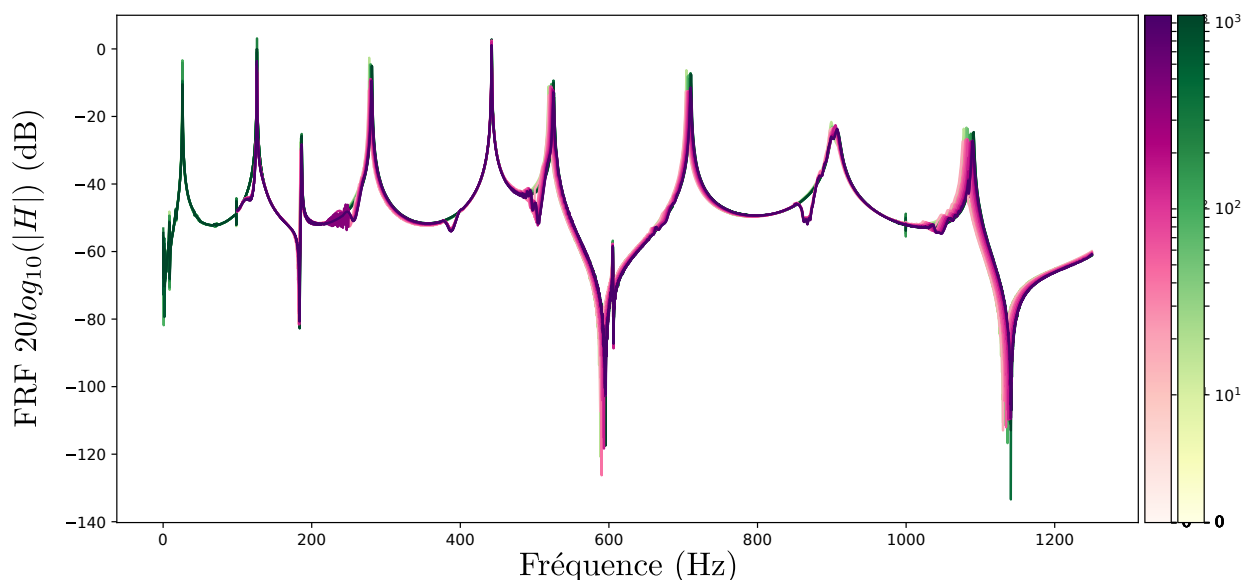


FIGURE 2.15 – Influence du serrage de la liaison et de l'amplitude d'excitation sur le comportement expérimental du portique

	Mode	2	3	4	5	6	7	8	9
Portique monolithique	$\eta_M(10^{-3})$	3.1	3.3	2.3	0.52	1.5	2.1	1.5	2.2
Portique assemblé	$E[\eta_A](10^{-3})$	3.1	2.8	2.0	0.98	2.1	0.11	11.	1.8
	$\delta[\eta_A]$	10 %	20 %	27 %	34 %	54 %	18 %	15 %	21 %
	$\frac{ E[\eta_A]-\eta_M }{\eta_M}$	0.6 %	16 %	15 %	88 %	38 %	48 %	620 %	17 %

TABLE 2.4 – Ecart relatif entre les facteurs d'amortissement modaux du portique assemblé et du portique monolithique

ce tableau. On constate bien que les modes 5 et 8 sont les principaux modes pour lesquels l'amortissement modal de la structure assemblée est significativement différent de l'amortissement de la structure monolithique. Pour les autres modes on ne pourra alors pas tirer de conclusion concernant l'amortissement induit par la liaison, la liaison n'étant visiblement pas suffisamment sollicitée pour faire apparaître du glissement dans l'interface de contact.

#### 2.2.1.4 Conclusions vis-à-vis du modèle de liaison

Cette partie a permis de mettre en évidence expérimentalement l'influence de la présence de la liaison sur le comportement vibratoire du portique comparé au comportement d'un portique monolithique équivalent. Il en ressort que, pour la structure considérée, la variation de fréquence propre ainsi que l'amortissement ajouté par la liaison dépendent directement des modes considérés et plus particulièrement des vecteurs propres de la structure globale. Cette conclusion est particulièrement liée au fait que la liaison est sollicitée

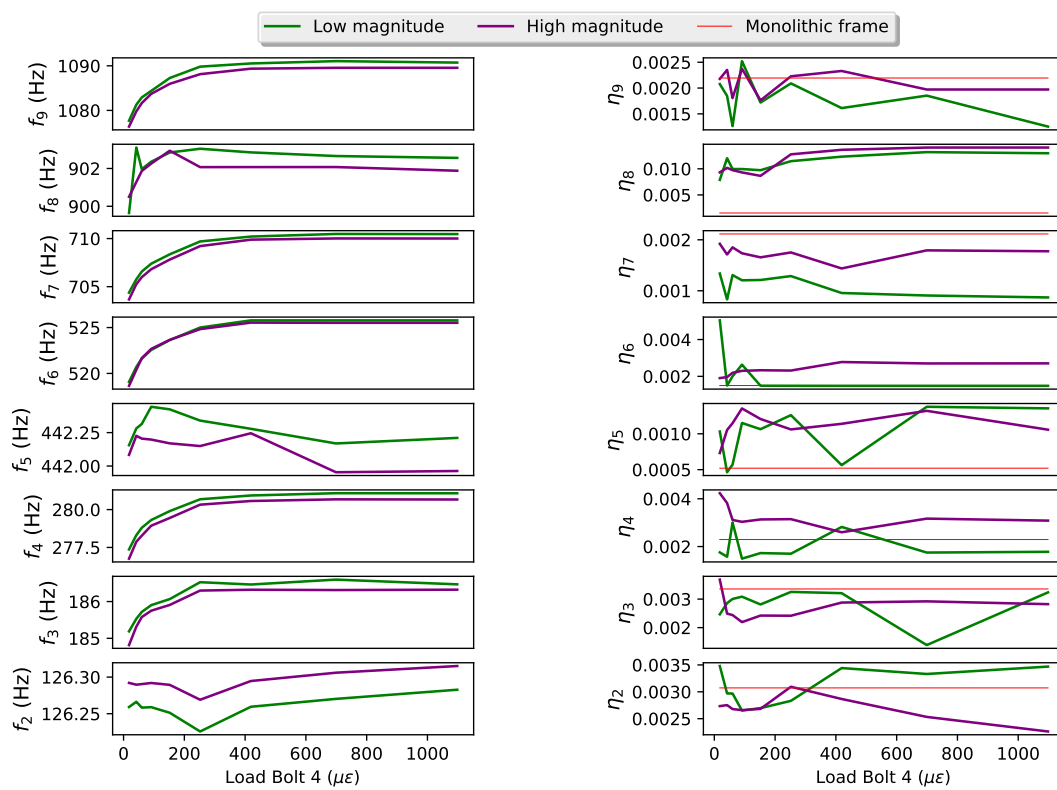


FIGURE 2.16 – Influence du serrage de la liaison et de l'amplitude d'excitation sur le comportement expérimental du portique

principalement en flexion pour la structure étudiée. On en déduit que le modèle de raideur de liaison choisi devra dépendre directement de la courbure locale des vecteurs propres du portique.

Une étude approfondie de l'influence des grandeurs physiques réputées les plus influentes sur le comportement dynamique des liaisons a été mise en place. Cette étude a permis de montrer qualitativement que l'influence de ces grandeurs, le serrage de la liaison et l'amplitude d'excitation, sur les fréquences propres de la structure est conforme aux résultats de la littérature. D'un point de vue quantitatif, on constate que la variation des fréquences propres en fonction de l'amplitude d'excitation reste inférieure au pourcent ce qui confirme l'idée de faible non-linéarité d'un point de vue de la structure globale. Un modèle de liaison linéaire semble donc tout à fait suffisant, la variabilité due à l'amplitude d'excitation pourra alors être prise en compte lors de la modélisation stochastique de la liaison. Bien que la variabilité du comportement de la structure en fonction du serrage de la liaison soit plus significative, on peut en tirer la même conclusion. On peut ajouter que le modèle de liaison ne nécessite pas de dépendance directe au serrage ou à l'amplitude d'excitation. Ces grandeurs étant difficilement mesurables sur une structure en fonctionnement réel, l'influence de ces grandeurs sur le modèle de liaison sera prise en compte de manière implicite dans la modélisation stochastique des liaisons. La connaissance fine du comportement de la structure vis-à-vis de ces grandeurs permettra d'envisager une modélisation stochastique plus précise et dans un sens "plus adaptée" aux liaisons étudiées.

On peut également conclure de ces résultats expérimentaux qu'il semble (malheureusement) difficile de caractériser finement l'amortissement induit par la liaison pour l'ensemble des modes sollicités du fait des caractéristiques physiques de la structure étudiée et des limites du dispositif expérimental utilisé.

La structure étudiée étant constituée de pièces élancées, on se base sur une modélisation éléments finis poutre pour simuler le comportement vibratoire des différents éléments du portique. Parmi les modèles d'interface présentés partie 1.4, les modèles d'éléments *sans-épaisseur* ou *éléments minces* sont plutôt destinés à être intégrés dans des modèles éléments finis volumiques. Pour une structure de type poutre, un modèle d'élément *noeud-à-noeud* paraît dès lors tout à fait adapté. L'approche la plus directe consiste alors à modéliser la liaison par des raideurs et amortissement génériques, linéaires ou non, entre deux noeuds des maillages des pièces assemblées [AHMADIAN et JALALI 2007b ; VAN BUREN et al. 2015]. On définit ainsi autant de raideurs et d'amortisseurs que de degrés de liberté aux noeuds. Une illustration de ce type de modèle appliqué au portique est proposé Figure 2.17. Comme évoqué partie 1.4, on peut également définir un élément *noeud-à-noeud* pour chacune des paires de noeuds de l'interface. Une première approche proposée par Van Buren et al [VAN BUREN et al. 2015] consiste à modéliser le comportement de la liaison, notamment la raideur de liaison, par des liaisons *noeud-à-noeud* rigides dans un rayon d'influence  $r$  autour d'un noeud défini comme étant le centre de la liaison. Ce rayon représente d'une certaine manière la zone de l'interface pour laquelle il y a adhérence. La Figure 2.17 présente également un schéma de principe de ce modèle appliqué au cas du portique. L'avantage, comparé à une approche par raideurs généralisées, est que ce modèle ne nécessite qu'un seul paramètre  $r$  pour décrire le comportement de la liaison. Van Buren et al [VAN BUREN et al. 2015] montrent que les résultats de ce modèle comparé au modèle de raideurs généralisées sont

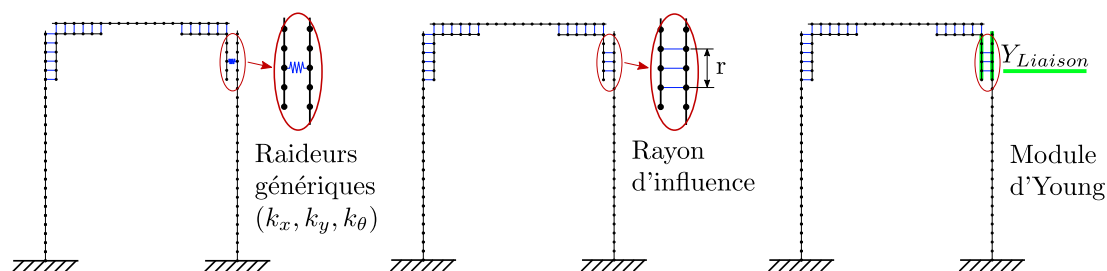


FIGURE 2.17 – Modèles de liaison adaptés à la modélisation éléments finis poutre du portique

tout à fait similaires. L'inconvénient de ce modèle est que le paramètre  $r$  est directement lié à la discrétisation de l'interface et donc du maillage choisi. Pour identifier ce paramètre il sera donc nécessaire de remailler localement la structure ce qui peut devenir fastidieux à automatiser. Une dernière approche consiste à partir non plus d'un maillage par pièces à assembler mais d'un maillage uniforme de la structure puis à modifier la formulation de certains éléments afin de tenir compte du comportement de la liaison, on pense notamment aux éléments génériques définis par Ahmadian et Jalali [AHMADIAN et JALALI 2007a] ou aux éléments poutres d'Iwan ajustés définis par Song et al [SONG et al. 2004]. Les résultats expérimentaux sur le comportement du portique muni d'une seule liaison ont mis en évidence la faible non-linéarité de la raideur de liaison vis-à-vis de l'amplitude d'excitation et un amortissement dû à la liaison quasi-nul pour la plupart des modes étudiés. Les modèles utilisés par Ahmadian et Jalali [AHMADIAN et JALALI 2007a] ou Song et al [SONG et al. 2004] tiennent compte d'une raideur non-linéaire et de l'amortissement dû au glissement dans l'interface de contact de la liaison. Ces modèles sont donc trop fins pour modéliser le comportement de la liaison du portique étudié. La principale contrainte sur le modèle de liaison recherché est que la raideur de liaison doit être directement liée à la courbure locale des modes propres du portique. Par définition, pour un élément de type poutre en flexion, l'énergie de déformation de flexion dépend directement de la courbure et est proportionnelle à  $EI$ .

On choisit donc de modéliser la raideur de la liaison par l'intermédiaire d'un module d'Young équivalent appliqué aux éléments du portique correspondants à la liaison. L'influence de la courbure étant prise en compte directement par la formulation éléments finis des éléments poutres du portique. Ce modèle de liaison est présenté sur la Figure 2.17 à partir du modèle du portique monolithique utilisé au paragraphe 2.1.3.4 lors de l'identification des caractéristiques du stinger. La prochaine étape consiste alors à identifier ce module d'Young et fera l'objet du prochain paragraphe.

## 2.2.2 Identification de la raideur de liaison

Le paramètre de liaison que l'on cherche à identifier ici est la raideur de liaison. Pour le modèle de liaison choisi, la raideur de liaison est prise en compte par le module d'Young appliqué aux éléments correspondant à la liaison. Pour identifier ce module d'Young, deux approches peuvent être mises en place. La première consiste à minimiser l'erreur entre

les fréquences propres mesurées expérimentalement et les fréquences propres issues d'une simulation éléments finis du portique muni d'une seule liaison. Pour la seconde approche, l'identification est obtenue à partir du modèle éléments finis du portique monolithique en exploitant les propriétés des vecteurs propres de cette structure sur le même principe que l'approche de Réduction de Modèle Stochastique (SMR) présentée dans le chapitre 3.

### 2.2.2.1 Identification par minimisation d'erreur

On définit la fonction coût à minimiser comme étant la somme des écarts au carré entre les fréquences propres expérimentales du portique muni d'une seule liaison et les fréquences propres calculées à partir du modèle EF présenté Figure 2.18. Il s'agit donc de l'erreur au sens des moindres carrés définie par :

$$\epsilon_{ls} = \sum_{k=1}^N (\omega_k^{exp} - \omega_k^{EF})^2 \quad (2.2)$$

Les résultats expérimentaux présentés partie 2.2.1.3 étant disponibles, on choisit d'utiliser comme valeur de référence des fréquences de résonance du portique la moyenne de chacune des fréquences propres obtenues pour les différentes valeurs de serrage et d'amplitude d'excitation. La Figure 2.19 présente la variation de l'erreur définie précédemment lorsque le module d'Young  $Y_{Liaison}$  varie. On observe bien un minimum local pour lequel le module d'Young vaut  $Y_{Liaison} = 11.5$  GPa. Il est important de noter ici que cette valeur de module d'Young ne traduit pas le comportement physique des matériaux utilisés pour réaliser la liaison. La valeur du module d'Young ainsi identifié est liée à la modélisation éléments finis de la liaison. Les liaisons rigides noeuds à noeuds appliquées ont tendance à rigidifier l'ensemble *poutre-cornière* correspondant à la liaison, la valeur relativement faible du module d'Young identifié "compense" en quelque sorte cette rigidité due au modèle de liaison.

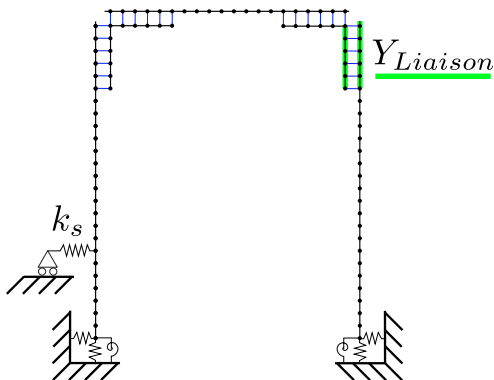


FIGURE 2.18 – Modèle éléments finis du portique muni d'une seule liaison

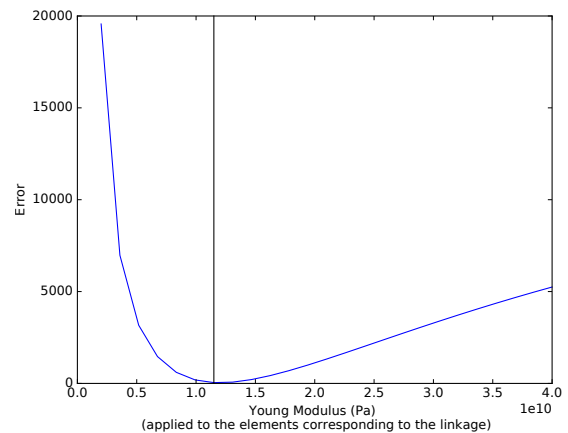


FIGURE 2.19 – Erreur au sens des moindres carrés entre les fréquences propres expérimentales et simulées pour différentes valeurs du module d'Young appliqué à la liaison



La FRF obtenue à partir du modèle éléments finis du portique et du module d'Young ainsi identifié pour la liaison est présentée Figure 2.20. Cette FRF est comparée aux FRF expérimentales obtenues pour l'ensemble des niveaux de serrage appliqués à la liaison. L'amplitude d'excitation correspond au niveau faible tel que défini au paragraphe 2.2.1.2. On constate que le modèle de raideur de liaison choisi permet de retrouver le comportement du portique muni d'une seule liaison observé expérimentalement.

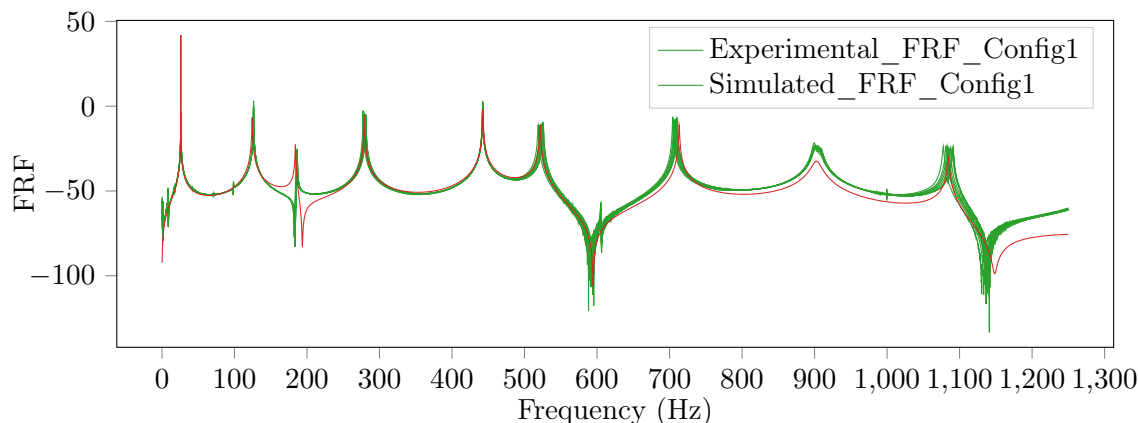


FIGURE 2.20 – FRF expérimentale et simulée du portique muni d'une seule liaison

### 2.2.2.2 Identification directe (ou par analyse différentielle)

La principe de cette approche est similaire au principe de l'approche SMR proposée au chapitre 3 et notamment du second niveau de raffinement SMR2. Cette approche a été initialement mise en place afin de caractériser les espaces propres aléatoires d'une structure en présence de paramètres incertains. Cette approche étant basée sur une interprétation paramétrique du problème aux valeurs propres aléatoires, elle est ainsi tout à fait adaptée à l'identification d'un paramètre structural déterministe tel que le module d'Young du modèle de liaison choisi. Cette approche permet alors d'identifier une valeur de module d'Young pour chaque fréquence propre mesurée expérimentalement à l'aide d'une seule simulation éléments finis ce qui la différencie de l'approche précédente qui nécessite de procéder par itérations afin de converger vers une valeur de module d'Young unique sur une plage de fréquence donnée.

La méthode proposée se base sur le fait que la variation de fréquence observée entre les fréquences propres du portique monolithique et celles du portique muni d'une seule liaison (Figure 2.12) peut s'écrire en fonction des vecteurs propres et des matrices de rigidités issus des modèles EF des deux structures. En effet, notons  $\Delta\lambda_k = \lambda_k^L - \lambda_k^M$  la différence entre la  $k^{me}$  valeur propre du portique muni d'une seule liaison et la  $k^{me}$  valeur propre du portique monolithique. Dans ce qui suit, les exposants  $L$  et  $M$  désignent respectivement les quantités relatives au portique muni d'une seule Liaison et au portique Monolithique. En supposant les structures non-amorties, la variation de fréquence propre entre les deux structures peut s'écrire sous la forme :

$$\Delta\lambda_k = \Phi_k^{L\top} \mathbf{K}^L \Phi_k^L - \Phi_k^{M\top} \mathbf{K}^M \Phi_k^M \quad (2.3)$$

où  $\Phi_k$  représente le vecteur propre associé à la  $k^{me}$  valeur propre  $\lambda_k$ ,  $\mathbf{K}^L$  et  $\mathbf{K}^M$  les matrices de rigidité des structures étudiées. On suppose que les vecteurs propres sont normalisés par la masse. Les deux structures ayant les mêmes caractéristiques géométriques et matériaux, leurs matrices de masse sont donc identiques.

La matrice de rigidité du portique muni d'une seule liaison peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{K}^L = \sum_{i=0}^m k_i \mathbf{K}_i^M \quad (2.4)$$

où  $k_i$  est un coefficient adimensionné représentant le rapport de raideur entre un élément du portique monolithique et l'élément correspondant appartenant au portique muni d'une seule liaison. On note  $m$  le nombre d'éléments du modèle éléments finis et  $\mathbf{K}_i^L$  la matrice de rigidité élémentaire de l'élément  $i$ . En dehors des éléments correspondant à la liaison, les modules d'Young et matrices de raideurs élémentaires des deux portiques étudiés sont égaux, on a donc :

$$\mathbf{K}^L = \mathbf{K}_0^M + k_L \sum_{i \in Liaison} \mathbf{K}_i^M \quad (2.5)$$

où  $\mathbf{K}_0^M = \sum_{i \notin Liaison} \mathbf{K}_i^M$ . Leurs matrices de rigidité étant différentes, les vecteurs propres du portique muni d'une seule liaison sont nécessairement différents des vecteurs propres du portique monolithique. Cependant, on peut supposer que les vecteurs propres du portique muni d'une liaison sont relativement proches de ceux du portique monolithique. On peut donc écrire les vecteurs propres du portique muni d'une seule liaison à partir d'un développement de Taylor des vecteurs propres du portique monolithique. En première approximation on a donc :

$$\Phi_k^L = \Phi_k^M + \left. \frac{\partial \Phi_k^M}{\partial k_L} \right|_{k_L=1} (k_L - 1) \quad (2.6)$$

En injectant les équations 2.5 et 2.6 dans 2.3, la variation de fréquence propre entre les deux structures s'écrit alors :

$$\Delta\lambda_k = [\Phi_k^M + d\Phi_k^M]^\top (\mathbf{K}_0^M + k_L K_{Liaison}^M) [\Phi_k^M + d\Phi_k^M] - \Phi_k^{M\top} \mathbf{K}^M \Phi_k^M \quad (2.7)$$

où

$$d\Phi_k^M = \left. \frac{\partial \Phi_k^M}{\partial k_L} \right|_{k_L=1} \quad \text{et} \quad K_{Liaison}^M = \sum_{i \in Liaison} \mathbf{K}_i^M$$

$\Delta\lambda_k$  peut alors se mettre sous la forme

$$\Rightarrow \Delta\lambda_k = A + Bk_L + Ck_L^2 + Dk_L^3 \quad (2.8)$$

avec

$$\begin{aligned}
 A &= -\Phi_k^{M\top} K_{Liaison}^M \Phi_k^M - 2 d\Phi_k^{M\top} \mathbf{K}_0^M \Phi_k^M + d\Phi_k^{M\top} \mathbf{K}_0^M d\Phi_k^M \\
 B &= \Phi_k^{M\top} K_{Liaison}^M \Phi_k^M + 2 d\Phi_k^{M\top} (\mathbf{K}_0^M - K_{Liaison}^M) \Phi_k^M - 2 d\Phi_k^{M\top} \left( \mathbf{K}_0^M - \frac{1}{2} K_{Liaison}^M \right) d\Phi_k^M \\
 C &= 2 d\Phi_k^{M\top} K_{Liaison}^M \Phi_k^M + d\Phi_k^{M\top} (\mathbf{K}_0^M - 2K_{Liaison}^M) d\Phi_k^M \\
 D &= d\Phi_k^{M\top} K_{Liaison}^M d\Phi_k^M
 \end{aligned}$$

L'équation 2.8 montre que  $k_L$  est racine d'un polynôme d'ordre 3 dont les coefficients sont définis à l'aide de grandeurs relatives au portique monolithique. Un modèle éléments finis du portique monolithique suffisamment précis et représentatif du comportement du portique monolithique réel peut être obtenu facilement afin de déterminer les coefficients ainsi définis. Une expression analytique des racines du polynôme défini par l'équation 2.8 peut être obtenue [ABRAMOWITZ, STEGUN et al. 1966].

Cette méthode est particulièrement adaptée à l'identification des paramètres pour lesquels la matrice de masse ou de rigidité est linéaire par bloc par rapport à ces paramètres. On pense notamment au cas où les liaisons sont modélisées par des raideurs généralisées. Dans le cadre de ce travail, une identification de la raideur de liaison par minimisation de l'erreur au sens des moindres carrés entre les fréquences propres expérimentales et simulées sera utilisée pour identifier les raideurs des liaisons du portique. Ce choix se justifie par la simplicité de mise en oeuvre de cette méthode qui ne nécessite pas de calcul de sensibilité des vecteurs propres. De plus, le nombre de simulations éléments finis nécessaires à l'identification d'une raideur de liaison étant relativement faible, l'identification directe ne garantit pas, pour le cas considéré, de gain en temps de calcul suffisamment important pour être justifiée ici. On pourra toutefois envisager dans le cadre de travaux futurs d'utiliser cette méthode afin d'identifier un modèle de raideur de liaison de type raideur généralisée dépendant du mode de la structure. On peut également envisager d'utiliser cette méthode afin d'identifier plusieurs raideurs de liaisons à partir d'une seule FRF.

## 2.3 Simulation du comportement vibratoire d'une autre configuration de portique

On cherche ici à caractériser le comportement d'un portique muni d'une seule liaison lorsque celle-ci n'est plus positionnée sur une des poutres verticales mais sur la poutre horizontale du portique comme illustrée sur la Figure 2.21. Dans cette nouvelle configuration, la liaison n'est pas sollicitée de la même manière que précédemment, il apparaît alors nécessaire de vérifier la validité du modèle utilisé ainsi que la valeur de raideur identifiée sur la première configuration de portique. La raideur identifiée dans la partie précédente est utilisée afin de simuler le comportement vibratoire de cette autre configuration de portique. Les résultats issus de cette simulation seront alors comparés au comportement observé expérimentalement de ce portique afin d'évaluer si une nouvelle phase d'identification pour cette configuration de liaison doit être mise en place.



FIGURE 2.21 – Schéma, photo et modèle EF du portique muni d'une seule liaison lorsque celle-ci est située sur la poutre horizontale

### 2.3.1 Modélisation du second portique muni d'une seule liaison

Le modèle éléments finis utilisé afin de simuler le comportement de cette seconde configuration de portique est identique au modèle utilisé au paragraphe 2.2.2.1 à ceci près que le module d'Young de la liaison étudiée précédemment entre la poutre verticale de droite et la cornière correspondante est pris à nouveau égal au module d'Young de l'aluminium et le module d'Young associé aux éléments de la liaison étudiée (liaison entre la poutre supérieure et la cornière de droite) est pris égal au module d'Young identifié au paragraphe 2.2.2.1. On a donc à nouveau  $Y_{Liaison} = 11.5 \text{ GPa}$ . Les raideurs d'encastrement ainsi que le modèle du stinger identifiés précédemment sont conservés dans ce modèle.

### 2.3.2 Validation du modèle de comportement de la liaison

Afin d'évaluer la validité du modèle de liaison dans le cas où la liaison n'est plus située sur une des poutres verticales du portique mais sur la poutre horizontale, une campagne expérimentale a été mise en place. Le portique utilisé expérimentalement, présenté sur la Figure 2.21, a les mêmes caractéristiques géométriques que le portique utilisé pour l'analyse différentielle et les pièces (poutres et cornières) ne correspondant pas à la liaison étudiée ont été collées en suivant le même procédé que pour le cas du portique monolithique. Cela permet à nouveau de s'assurer que seule la liaison étudiée travaille et influe sur le comportement de la structure. Les conditions expérimentales restent les mêmes que pour les cas étudiés précédemment.

La Figure 2.22 présente les FRF expérimentales de la seconde configuration du portique muni d'une seule liaison ainsi que la FRF du portique simulée à l'aide du modèle de liaison identifié sur la configuration précédente du portique. Les FRF expérimentales sont obtenues pour trois niveaux de serrage allant d'un serrage faible (quelques newtons) au serrage maximal de la liaison (6000 N) et l'amplitude d'excitation correspond au niveau faible tel que défini au paragraphe 2.2.1.2. On constate que la valeur du module d'Young identifiée sur la première configuration du portique n'est plus adaptée à cette nouvelle configuration, ce qui peut se justifier par la sollicitation de la liaison qui est alors différente de la sollicitation appliquée à la première configuration de liaison, tant en terme de nature de sollicitation que d'intensité. La valeur du module d'Young appliqué aux éléments doit

donc être réévaluée. La procédure d'identification mise en place partie 2.2.2 peut être appliquée à cette nouvelle configuration de portique. Le module d'Young ainsi identifié vaut alors  $Y_{Liaison} = 25 \cdot 10^9 \text{Pa}$ . La Figure 2.23 présente la FRF simulée avec cette nouvelle valeur de module d'Young ainsi que les FRF expérimentales de cette configuration de portique pour les différentes valeurs de serrage considérées. On constate qu'on retrouve bien le comportement du portique observé expérimentalement.

Bien que la valeur de la raideur de liaison nécessite d'être réévaluée suivant que la liaison soit associée à une poutre verticale ou horizontale du portique, le modèle de liaison choisi permet de retrouver le comportement vibratoire du portique observé expérimentalement pour cette deuxième configuration de portique. Le portique de référence défini Figure 2.1 étant symétrique, les modules d'Young identifiés pour chacune des liaisons de la cornière de droite peuvent être directement appliqués pour modéliser le comportement des liaisons de la cornière de gauche. On peut donc désormais simuler le comportement du portique tout entier muni de ses quatre liaisons. Cependant, bien que deux liaisons symétriques du portique soient supposées soumises aux mêmes sollicitations, il existe nécessairement une certaine variabilité entre les comportements de ces liaisons. Cette variabilité peut être due aux différences géométriques ou matériaux, à l'état de surface ou encore à la précharge des liaisons qui peut différer d'une liaison à l'autre. Simuler le comportement du portique muni de quatre liaisons avec une approche déterministe conduirait nécessairement à des écarts importants entre les comportements simulés et observés expérimentalement de cette structure due à la présence de ces variabilités. Pour cette raison la simulation du portique complet défini au début de ce chapitre sera abordée avec une approche probabiliste. La présentation de cette approche fera l'objet du chapitre 3. La caractérisation stochastique du comportement du portique complet sera ensuite abordée au chapitre 4.

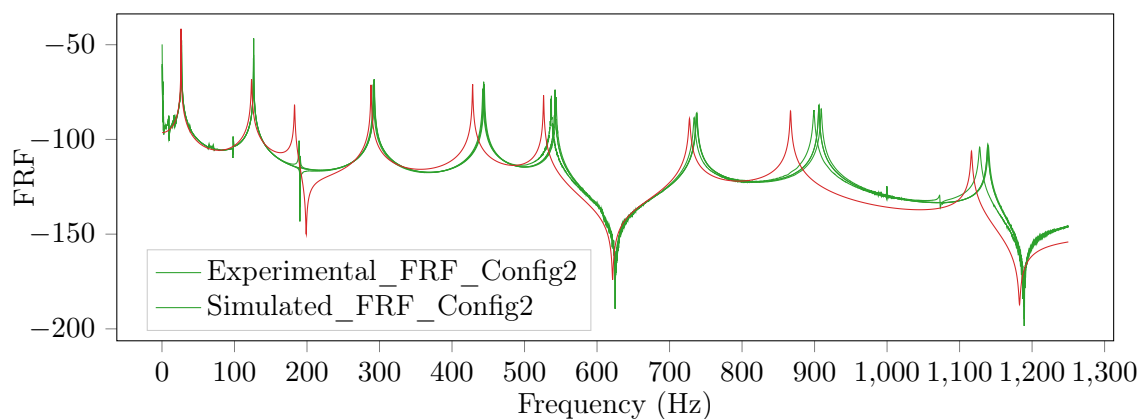


FIGURE 2.22 – FRF expérimentale et simulée de la seconde configuration de portique muni d'une seule liaison - Simulation obtenue avec le module d'Young identifié sur la première configuration de portique

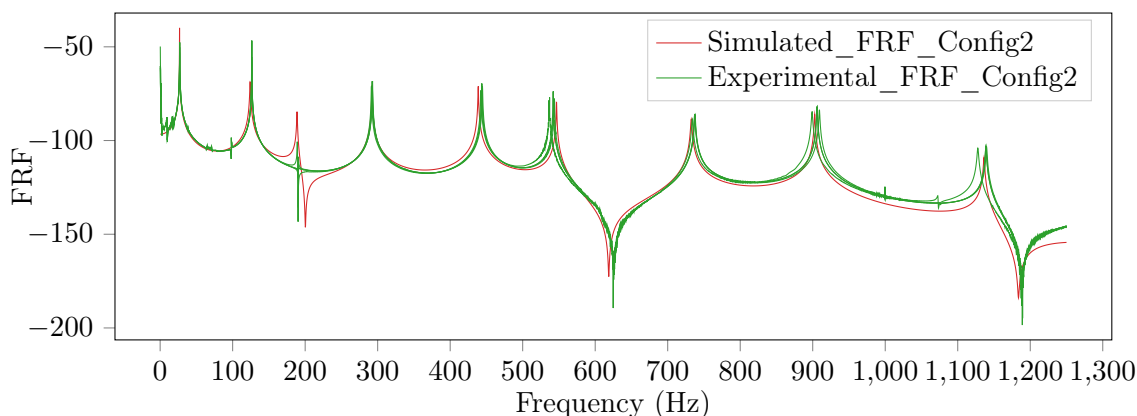


FIGURE 2.23 – FRF expérimentale et simulée de la seconde configuration de portique après ré-identification de la raideur de liaison

**Remarque 2.6 :** Le choix du modèle de liaison utilisé pour la première configuration de portique a été motivé par les observations expérimentales du comportement du portique. Afin d'assurer que ce modèle puisse être réutilisé afin de traduire le comportement de la deuxième configuration de liaison, des résultats similaires aux résultats présentés Figure 2.15 page 67 et Figure 2.16 page 68 ont été obtenus expérimentalement. Ces résultats aboutissent aux mêmes conclusions quand au modèle de liaison et ne seront donc pas présentés dans le cadre de ce travail. Afin de présenter rapidement les différences de comportement observées entre les deux configurations de portique, la Figure 2.24 présente les résultats de l'analyse différentielle de la deuxième configuration du portique muni d'une seule liaison. Les variations relatives de fréquence de résonance entre le portique muni d'une seule liaison et le portique monolithique et notées  $\Delta_{rel}(f)$  sur la Figure 2.24 dépendent à nouveau du mode considéré. On constate cependant que les  $\Delta_{rel}(f)$  ne présentent aucun lien avec les mêmes variations relatives observées pour la première configuration de portique Figure 2.13 page 62. Pour l'amortissement, le mode 8 ne semble plus solliciter la liaison de manière à dissiper de l'énergie et les modes 1 et 2 font désormais travailler la liaison. On rappelle que ce n'était pas le cas pour la première configuration de portique. Le mode 5 induit toujours significativement un amortissement supplémentaire due à la présence de la liaison.

## 2.4 Conclusion

Ce chapitre a permis de mettre en évidence un modèle simple de liaison permettant de simuler le comportement vibratoire d'une structure assemblée dite "légère" : un portique constitué de trois barres assemblées par des liaisons boulonnées. L'étude de la littérature montre que le choix d'un modèle de liaison, d'une méthode d'identification des paramètres de ce modèle et d'une méthode de simulation est difficilement généralisable à n'importe quel cas d'application. Ces choix sont ainsi très dépendants du cadre d'étude choisi. Dans

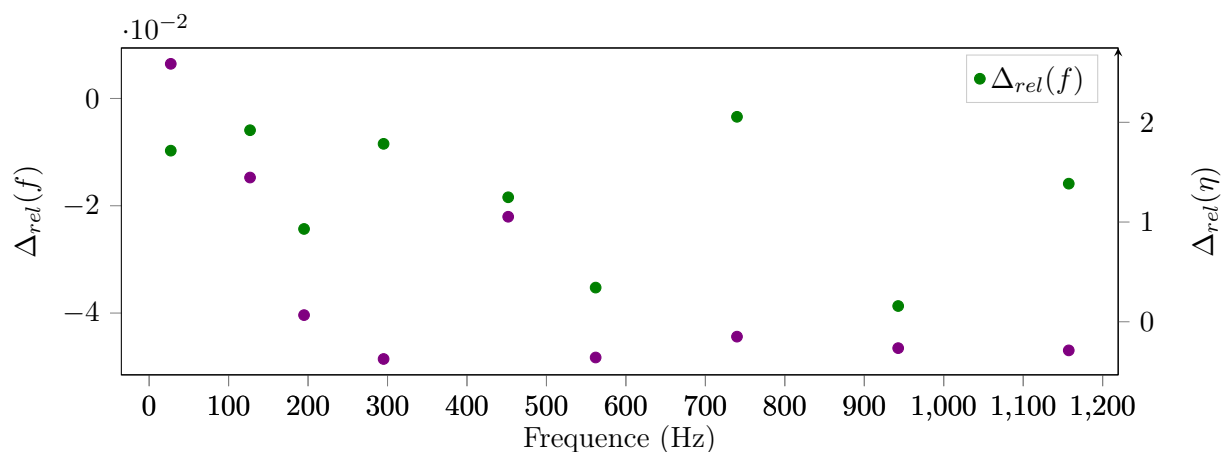


FIGURE 2.24 – Variation relative de fréquence propre  $\Delta_{rel}(f)$  et de facteur d'amortissement modal  $\Delta_{rel}(\eta)$  pour chacun des modes propres de la deuxième configuration de portique muni d'une seule liaison comparé au portique monolithique. Le serrage de la liaison est maximal et l'excitation utilisée est au niveau faible

le cadre de ce travail, un modèle de liaison adapté à la structure étudiée est choisi après avoir observé expérimentalement la variabilité des phénomènes observables ainsi que les limitations imposées par les moyens d'essais utilisés.

Une première étape de caractérisation fine des différents constituants du dispositif expérimental est mise en place afin de tenter de réduire au mieux les incertitudes dues aux moyens d'essais. L'influence de la présence d'une liaison sur le comportement vibratoire global du portique est ensuite étudiée par analyse différentielle expérimentale. Cette étape consiste à comparer les réponses expérimentales d'un portique muni d'une seule liaison à un portique monolithique équivalent ayant les mêmes caractéristiques géométriques et matériaux mais pour lequel les interfaces de contact ont été supprimées. Cette phase exploratoire permet ainsi d'identifier un modèle de liaison très simple mais tout à fait suffisant pour simuler le comportement du portique. Pour modéliser l'influence de la liaison, on choisit d'appliquer un module d'Young non physique aux éléments du modèle éléments finis du portique correspondant à la liaison.

Parmi les limitations imposées par les moyens expérimentaux, il ressort notamment que l'amortissement induit par les liaisons du portique est quasiment nul sur la majeure partie de la plage de fréquence étudiée. Le portique utilisé, et notamment le choix des matériaux utilisés pour réaliser cette structure, semble limiter les possibilités de glissement de l'interface. Il en résulte que, hormis pour certains modes particuliers du portique, la liaison ne dissipe pas (ou peu) d'énergie. Il ressort également que l'utilisation d'un modèle non-linéaire ne soit pas nécessaire étant donné les faibles variations des caractéristiques dynamiques du portique lorsque l'amplitude d'excitation varie. On choisit ainsi de tenir compte de la variabilité de la raideur de liaison due à l'amplitude d'excitation directement dans le modèle stochastique du portique (ce qui sera abordé au chapitre 4). Comme le font remarquer Boswald et Link [BÖSWALD et LINK 2004], dans le cas d'un modèle non-

linéaire de liaison, la raideur et l'amortissement sont très sensibles aux incertitudes sur les paramètres de liaison (serrage, géométrie, amplitude, etc). Par conséquent, dès lors que la variabilité des paramètres de la structure assemblée devient importante, la prédictibilité d'un modèle éléments finis n'est pas nécessairement améliorée par l'utilisation de modèles non-linéaires pour traduire le comportement des liaisons. C'est dans cette optique que se place la démarche de modélisation stochastique mise en place dans la suite de ce travail.





## Chapitre 3

# Réduction de Modèles Stochastiques pour la caractérisation robuste du comportement vibratoire des structures assemblées

*L'objectif de ce chapitre est de définir une méthodologie de caractérisation des espaces propres aléatoires d'une structure dont les paramètres varient aléatoirement. On tiendra en particulier à ce que la démarche proposée soit non-intrusive et peu coûteuse en terme de temps de calcul.*

## 3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de caractériser de manière robuste la réponse vibratoire d'une structure en contexte incertain à partir d'un modèle éléments finis de structure. On s'intéresse particulièrement à la caractérisation des espaces propres aléatoires des systèmes linéaires dont les propriétés dynamiques sont modélisées par des variables aléatoires. Les structures assemblées, notamment les structures légères, ont la particularité d'être constituées d'un ensemble de sous-structures, dont le comportement reste globalement linéaire-élastique, assemblées entre-elles par des liaisons, dont le comportement est lui non-linéaire. Ces non-linéarités restant toutefois très localisées à l'échelle de la structure globale, le comportement de la structure assemblée reste globalement linéaire. Ainsi, restreindre la cadre de cette étude stochastique au cas des structures linéaires ne constitue pas un frein à son application au cas des structures assemblées.

L'approche proposée dans ce travail est une approche non-intrusive permettant de caractériser les espaces propres aléatoires d'une structure à partir d'un nombre réduit de calculs éléments finis déterministes. Cette approche est basée sur la propriété suivante : la variabilité des vecteurs propres est généralement d'un ordre de grandeur inférieur à la variabilité de la valeur propre associée. En première approximation, un simple calcul déterministe suffit à caractériser les modes propres aléatoires de la structure. Pour les valeurs propres ne pouvant être estimées ainsi, on propose de recourir à des méthodes d'approximation plus précises. Cette approche, désignée par la suite approche de Réduction de Modèle Stochastique ou approche SMR pour *Stochastic Model Reduction* consiste alors à adapter le modèle stochastique utilisé à chaque valeur propre en fonction d'un critère de précision global imposé pour l'ensemble du jeu de valeurs propres recherchées. Ainsi, l'approche SMR permet de minimiser le temps de calcul nécessaire à la détermination d'un ensemble de valeurs propres en concentrant les ressources numériques disponibles sur certaines valeurs propres en fonction de leur configuration. Ce chapitre est décomposé en deux parties. La première partie présente les fondements de l'approche SMR ainsi que son implémentation. La seconde partie vise à confronter l'approche proposée à différents cas d'application allant de structures académiques simples au cas d'une structure industrielle. Ces applications permettront d'illustrer les performances de l'approche SMR mais églament de mettre en évidence certaines particularités de cette approche.

## 3.2 Caractérisation des fréquences propres aléatoires d'une structure par l'approche de Réduction de Modèles Stochastiques

### 3.2.1 Définition du problème aux valeurs propres aléatoires

Le problème aux valeurs propres aléatoires généralisé pour un système non-amorti ou proportionnellement amorti peut s'écrire

$$\lambda_k(\theta)\mathbf{M}(\theta)\Phi_k(\theta) = \mathbf{K}(\theta)\Phi_k(\theta) \quad (3.1)$$

où

$$\lambda_k(\theta) \in \mathbb{R}, \quad \Phi_k(\theta) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{M}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{K}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \theta \in \Omega$$

$\lambda_k(\theta)$  est la  $k$ ième valeur propre aléatoire et  $\Phi_k(\theta)$  le vecteur propre aléatoire associé. La  $k$ ième pulsation propre du système se déduit de la valeur propre par la relation  $\lambda_k = \omega_k^2$ . Dans l'ensemble de ce travail, on suppose que les vecteurs propres sont normalisés par la masse. On a ainsi  $\Phi_k^\top \mathbf{M} \Phi_k = 1$ . On définit l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$  associé à l'ensemble des expériences aléatoires.  $\theta \in \Omega$  est un événement élémentaire de l'espace des probabilités  $\Omega$ . L'espace des variables aléatoires de carré intégrable est noté  $L_2(\Omega)$  et forme un espace de Hilbert muni de la norme  $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$ . Les matrices  $\mathbf{M}(\theta)$  et  $\mathbf{K}(\theta)$  représentent les matrices de masse et de raideur de la structure étudiée. L'aspect aléatoire est dû aux paramètres physiques de la structure comme la masse volumique, le module d'Young ou les propriétés géométriques. On notera désormais  $E[\cdot]$ ,  $\text{Var}[\cdot]$  et  $\sigma[\cdot]$  les opérateurs mathématiques correspondants à l'espérance, la variance et l'écart-type.

Dans le cadre de ce travail, on s'intéresse au cas des structures assemblées. Ces structures peuvent être considérées comme étant constituées de sous-structures linéaires assemblées entre elles par des éléments de raideurs connues. Dans un premier temps on s'intéresse au cas de structures composées de  $n$  sous-structures de modules d'Young différents  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ . Ces modules d'Young sont modélisés par des variables aléatoires indépendantes, la matrice de rigidité  $\mathbf{K}(\theta)$  est donc aléatoire. La matrice de rigidité peut s'écrire en fonction des matrices de rigidités des sous-structures  $\mathbf{K}_i(\theta)$  sous la forme :

$$\mathbf{K}(\theta) = \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i(\theta) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(\theta) \mathbf{K}_i \quad (3.2)$$

où  $\gamma_i(\theta)$  est la variable aléatoire associée au  $i$ ème module d'Young et définie tel que :

$$\gamma_i(\theta) = \frac{Y_i(\theta)}{Y_{0i}} \quad ; \quad Y_{0i} = E[Y_i(\theta)] \quad \text{and} \quad E[\gamma_i(\theta)] = 1$$

Les matrices  $\mathbf{K}_i$  sont les matrices de sensibilités de la matrice de rigidité globale par rapport aux paramètres  $\gamma_i(\theta)$ . On suppose que la matrice de masse  $\mathbf{M}$  de la structure est quant à elle déterministe.

L'approche proposée est basée sur l'observation suivante : pour une structure dont les paramètres varient aléatoirement et dont on cherche à déterminer un jeu de fréquences propres aléatoires, il apparaît que certains vecteurs propres associés à certaines fréquences propres varient peu et peuvent, par conséquent, être considérés comme étant déterministes. Les valeurs propres aléatoires associées peuvent alors être déterminées avec un coût de calcul réduit à partir de ces vecteurs propres déterministes. Lorsque les vecteurs propres ne peuvent plus être considérés comme déterministes, en première approximation, on propose de tenir compte de la variabilité des vecteurs propres à l'aide d'une décomposition en série de Taylor au premier ordre en fonction des paramètres aléatoires de la structure. Ainsi, le modèle stochastique du  $k$ ième mode propre  $(\lambda_k(\theta), \Phi_k(\theta))$  est réduit en fonction de la configuration du mode étudié et les ressources numériques disponibles peuvent être concentrées sur la détermination d'un nombre réduit de valeurs propres aléatoires. Cette approche de **Réduction de Modèle Stochastique** se base sur les travaux initiés dans la

thèse de Karim [KARIM 2013] et sera désignée par la suite **approche SMR** pour *Stochastic Model Reduction*. On identifie deux niveaux de raffinement notés SMR1 et SMR2 suivant la configuration du mode étudié.

### 3.2.2 L'approche de Réduction de Modèles Stochastiques (SMR)

Cette partie présente les fondements de l'approche SMR. Comme évoqué précédemment, l'approche SMR est basée sur le constat que, pour une structure dont les paramètres varient aléatoirement et dont on cherche à déterminer un couple de valeur propre - vecteur propre aléatoires, dans certains cas, le vecteur propre recherché varie peu avec les paramètres aléatoires de la structure. La valeur propre aléatoire associée à ce vecteur propre peut alors être obtenue directement à partir de la connaissance du vecteur propre déterministe de la structure. En première approximation, on peut ainsi déterminer un jeu de valeurs propres aléatoires d'une structure à partir de ses vecteurs propres déterministes. Dans le cas d'une structure ne présentant qu'une seule variable aléatoire, les vecteurs propres sont même exactement déterministes comme le démontre Martini [MARTINI 2008]. Martini se base d'ailleurs également sur ce phénomène afin de développer la procédure dite de stabilité modale MSP (*Modal Stability Procedure*). Cette procédure est équivalente à la méthode de perturbation à l'ordre un et par conséquent également équivalente au premier niveau de raffinement de l'approche SMR.

Lorsqu'un vecteur propre aléatoire ne peut plus être approximé par sa valeur déterministe, on propose de l'estimer en fonction des paramètres aléatoires de la structure. Cela permet d'améliorer l'estimation des valeurs propres aléatoires par la prise en compte de la variabilité des vecteurs propres. Après avoir illustré les hypothèses fondatrices de l'approche SMR, les deux niveaux de raffinement SMR1 et SMR2 sont présentés.

Afin de tenir compte de la variabilité des vecteurs propres, un développement de Taylor au premier ordre a été choisi comme fonction d'approximation des vecteurs propres aléatoires. L'approche SMR peut être perçue comme une méthode de perturbation, cependant, quelques nuances sont à préciser par rapport aux méthodes de perturbation que l'on retrouve classiquement dans la littérature. Ce point sera abordé à la fin de cette partie.

#### 3.2.2.1 Hypothèse fondatrice de l'approche SMR

On rappelle que l'on s'intéresse au cas d'une structure composée de  $n$  sous-structures de modules d'Young différents  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ . Ces modules d'Young sont modélisés par des variables aléatoires indépendantes, la matrice de rigidité  $\mathbf{K}(\theta)$  est donc aléatoire. On suppose que la matrice de masse  $\mathbf{M}$  de la structure est quant à elle déterministe.

Une première illustration de l'hypothèse fondatrice de l'approche SMR est basée sur une méthode très répandue dans la littérature [ADHIKARI et FRISWELL 2007; SUDRET et KIUREGHIAN 2000] : la **méthode de perturbation** au premier ordre. Cette méthode consiste à développer la  $k$ ième valeur propre aléatoire  $\lambda_k(\gamma(\theta))$  en série de Taylor au voisinage de la valeur moyenne des paramètres d'entrée  $E[\gamma(\theta)] = \gamma_0$ ,  $\gamma(\theta)$  étant le vecteur aléatoire des  $n$  paramètres de la structure étudiée. Par souci de simplification des notations, la dépendance à l'aléa du vecteur  $\gamma(\theta)$  sera implicite et on retiendra la notation  $\gamma$  dans

le reste de cette partie. Le développement de Taylor à l'ordre 1 de la  $k$ ième valeur propre aléatoire s'écrit alors :

$$\lambda_k(\gamma) = \lambda_k(\gamma_0) + \sum_{i=1}^n \left( \left. \frac{\partial \lambda_k}{\partial \gamma_i} \right|_{\gamma=\gamma_0} (\gamma_i - \gamma_{i0}) \right) \quad (3.3)$$

L'expression de la dérivée partielle d'une valeur propre par rapport à un paramètre  $\gamma_i$ , mise en évidence par Fox et Kapoor [FOX et KAPOOR 1968], s'écrit :

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial \gamma_i}(\gamma) = \Phi_k^\top(\gamma) \left[ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \gamma_i}(\gamma) - \lambda_k(\gamma) \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \gamma_i}(\gamma) \right] \Phi_k(\gamma) \quad (3.4)$$

En supposant les vecteurs propres normalisés par la masse tels que  $\Phi_k^\top \mathbf{M} \Phi_k = 1$ , le premier terme du développement de Taylor peut s'écrire  $\lambda_k(\gamma_0) = \overline{\Phi_k}^\top \mathbf{K} \overline{\Phi_k}$ . Ainsi, la méthode de perturbation à l'ordre 1 nous donne l'expression suivante de la  $k$ ième valeur propre aléatoire :

$$\lambda_k(\gamma) = \overline{\Phi_k}^\top \mathbf{K} \overline{\Phi_k} + \sum_{i=1}^n \left[ \left( \overline{\Phi_k}^\top \left[ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \gamma_i}(\gamma_0) - \lambda_k \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \gamma_i}(\gamma_0) \right] \overline{\Phi_k} \right) (\gamma_i - \gamma_{i0}) \right] \quad (3.5)$$

Il apparaît directement que la  $k$ ième valeur propre aléatoire dépend uniquement du vecteur propre déterministe correspondant.

L'hypothèse fondatrice de l'approche SMR peut également se justifier par une description du problème aux valeurs propres d'un point de vue purement paramétrique. L'étude du comportement des valeurs propres lorsque les paramètres du système étudié varient a été l'objet de nombreuses études [BALMES 1993 ; DU BOIS, ADHIKARI et LIEVEN 2011 ; PERKINS et MOTE 1986]. Il apparaît que les systèmes dont les paramètres varient sur une plage relativement importante présentent souvent un phénomène de coalescence et/ou de *veering* de leurs modes propres. Ces phénomènes apparaissent lorsque, pour une variation d'un paramètre d'entrée, les lieux de deux valeurs propres se rapprochent l'un de l'autre puis s'écartent brusquement, chacun empruntant alors la trajectoire initiale de l'autre. Les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres considérées permutent alors lors du passage des lieux des valeurs propres par la zone de dite de *veering*. En dehors de cette zone, les vecteurs propres restent constants. Ce phénomène est illustré sur la Figure 3.1 page 86. Cette figure présente le lieu des valeurs propres (Figure 3.1 - a) d'un système à trois degrés de liberté (*d.d.l.*) de type masse-ressort non amorti (Figure 3.1 - b). Les paramètres de ce système ont été choisis afin d'observer le phénomène de *veering* entre la seconde et la troisième valeur propre lorsque la raideur  $k_2$  varie. Les autres raideurs sont prises égales à  $\{k_i\}_{(i=1,\dots,6)} = \{1, k_2, 3, 0.1, 0.1, 0.1\}$  et les trois masses sont considérées unitaires ( $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ ). Les fenêtres situées au dessus de chaque lieu de valeur propre sur la Figure 3.1 correspondent aux vecteurs propres associés dans la plage de valeur de  $k_2$ .

Considérons à présent le cas d'un système dont l'un des paramètres  $p(\theta)$  varie aléatoirement avec une certaine densité de probabilité. La variabilité de ce paramètre peut être comparée aux lieux des valeurs propres du système étudié. Considérons à nouveau le cas du système à trois *d.d.l.*. Deux cas particuliers peuvent être mis en évidence. Le premier

correspond au cas où la majeure partie de la fonction densité de probabilité du paramètre aléatoire se situe en dehors de la zone de *veering*. Dans ce cas, un tirage du paramètre aléatoire,  $k_2(\theta)$  par exemple, conduira dans la plupart des cas à une valeur propre associée à un vecteur propre constant comme l'illustre la Figure 3.2a page 87. Le vecteur propre obtenu pour la valeur déterministe du paramètre d'entrée peut alors être utilisé pour estimer la valeur propre aléatoire associée. Cela illustre bien l'hypothèse fondatrice de l'approche SMR. Le second cas pouvant apparaître correspond au chevauchement de la zone de *veering* par la densité de probabilité du paramètre aléatoire illustré Figure 3.2b page 87. La dépendance du vecteur propre au tirage du paramètre aléatoire est immédiate. Il est alors nécessaire de tenir compte de la variabilité du vecteur propre pour estimer la valeur propre aléatoire associée.

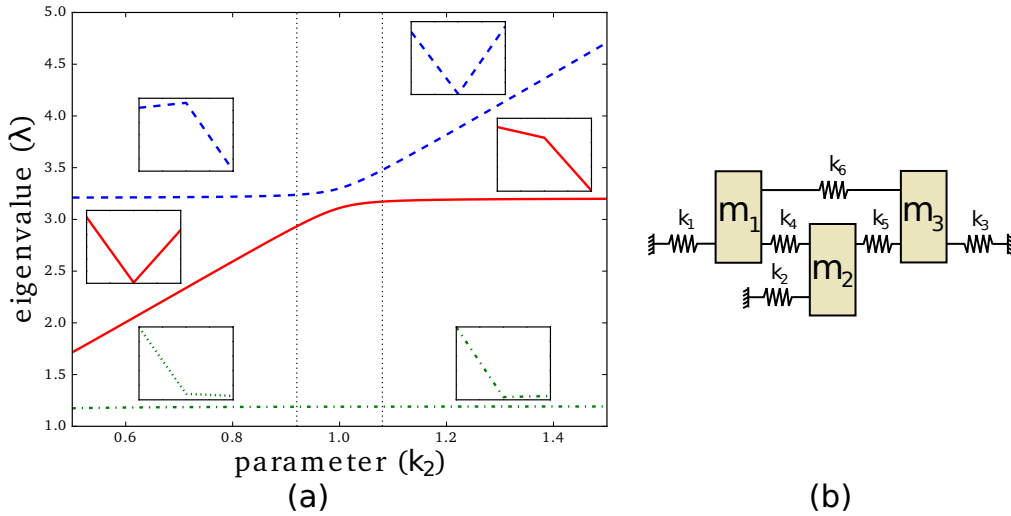


FIGURE 3.1 – Lieu des valeurs propres et vecteurs propres associés (a) d'un système à trois degrés de liberté (b)

Ce paragraphe illustre donc bien les fondements de l'approche SMR et notamment l'hypothèse suivant laquelle les vecteurs propres peuvent être considérés déterministes suivant la configuration des modes propres étudiés. On verra dans le paragraphe suivant que la  $k$ ième valeur propre aléatoire d'une structure s'écrit alors très facilement et que ses premiers moments statistiques et sa densité marginale de probabilité se déduisent sans calcul supplémentaire.

### 3.2.2.2 Premier niveau de raffinement : SMR1

Conformément à l'hypothèse fondatrice de l'approche SMR, on suppose que les variations des paramètres aléatoires de la structure n'influent pas sur les vecteurs propres. On choisit ici comme paramètres aléatoires les modules d'Young des différentes sous-structures composant le système étudié. Ainsi, la matrice des vecteurs propres aléatoires est supposée égale à la matrice des vecteurs propres calculés avec les valeurs nominales des paramètres aléatoires.

$$\Phi(\theta) = \bar{\Phi} \quad (3.6)$$

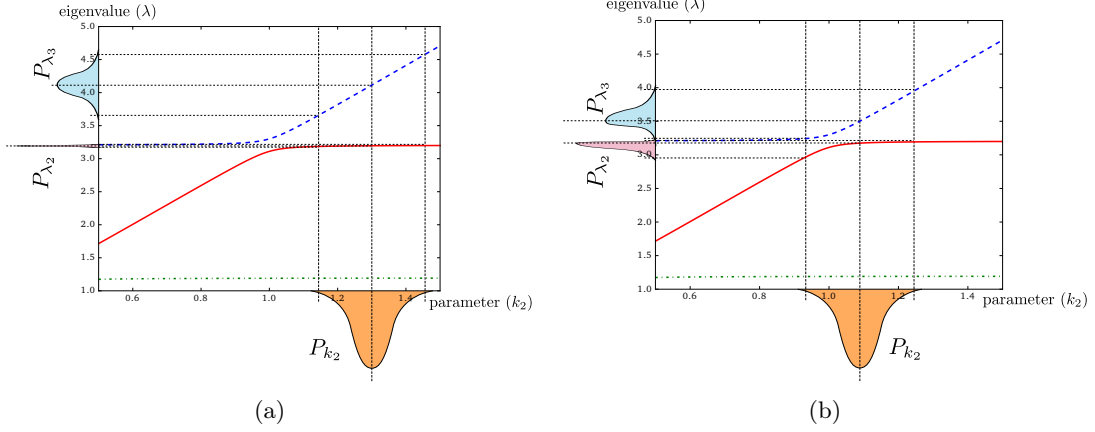


FIGURE 3.2 – Densités marginales des deuxième et troisième valeurs propres d’un système à trois *d.d.l.* lorsque la densité de probabilité du paramètre d’entrée  $k_2(\theta)$  est en dehors de la zone de *veering* (a) ou la chevauche (b)

Cette hypothèse associée à la normalisation par la masse des vecteurs propres permet d’écrire la  $k$ ième valeur propre aléatoire sous la forme :

$$\lambda_k(\theta) = \omega_k^2(\theta) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(\theta) \overline{\Phi_k}^\top \mathbf{K}_i \overline{\Phi_k} = \sum_{i=1}^n \lambda_{ki} \gamma_i(\theta) \quad (3.7)$$

où

$$\lambda_{ki} = \overline{\Phi_k}^\top \mathbf{K}_i \overline{\Phi_k} \quad (3.8)$$

La  $k$ ième valeur propre s’écrit donc simplement en fonction des paramètres aléatoires d’entrée du problème. Les coefficients de cette décomposition sont déterministes et la variabilité de la valeur propre est due uniquement à la variabilité des paramètres d’entrée.

#### Estimation des premiers moments statistiques :

Le principal intérêt de ce niveau de raffinement est que les deux premiers moments statistiques d’une valeur propre aléatoire ainsi estimée peuvent être déduits directement, sans aucun coût de calcul supplémentaire. En effet, en supposant les paramètres aléatoires comme étant des variables aléatoires indépendantes, l’**espérance** de la  $k$ ième valeur propre s’obtient directement :

$$E[\lambda_k] = \sum_{i=1}^n E[\gamma_i] \overline{\Phi_k}^\top \mathbf{K}_i \overline{\Phi_k} = \sum_{i=1}^n \overline{\Phi_k}^\top \mathbf{K}_i \overline{\Phi_k} = \sum_{i=1}^n \lambda_{ki} = \bar{\lambda}_k \quad (3.9)$$

où  $\bar{\lambda}_k$  est la valeur propre déterministe associée au problème au valeur propre déterministe :

$$\mathbf{K}_0 \overline{\Phi_k} = \bar{\lambda}_k \mathbf{M} \overline{\Phi_k} \quad (3.10)$$

et

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}|_{\gamma_i(\theta)=1} = \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i \quad (3.11)$$



La **variance** de la  $k$ ième valeur propre s'écrit :

$$\text{Var}[\lambda_k] = \sum_{i=1}^n \lambda_{ki}^2 \text{Var}[\gamma_i] = \sum_{i=1}^n \lambda_{ki}^2 \delta_i^2 \quad (3.12)$$

où  $\delta_i = \sigma[Y_i]/E[Y_i]$  est le coefficient de variation du  $i$ ème paramètre aléatoire  $Y_i$ .

L'estimation des deux premiers moments statistiques est donc obtenue à l'aide d'un seul calcul éléments finis déterministe et de la connaissance des moments statistiques des paramètres aléatoires de la structure. Aucun calcul stochastique n'est donc nécessaire pour obtenir ces estimations. On désignera par la suite SMR1 ce premier niveau de raffinement de l'approche SMR.

### 3.2.2.3 Deuxième niveau de raffinement : SMR2

Lorsque la variabilité des vecteurs propres augmente, il n'est alors plus possible d'estimer les vecteurs propres aléatoires à l'aide des vecteurs propres déterministes. Afin d'estimer les valeurs propres associées à ces vecteurs propres, on propose de tenir compte de la variabilité des vecteurs propres à l'aide d'un développement de Taylor au voisinage du point  $\gamma(\theta) = \gamma_0$ . Ce niveau de raffinement sera désigné SMR2 dans la suite de ce document.

La  $k$ ième valeur propre aléatoire  $\lambda_k(\gamma(\theta))$  et le  $k$ ième vecteur propre  $\Phi_k(\gamma(\theta))$  estimé par son développement de Taylor au premier ordre s'écrivent :

$$\lambda_k(\theta) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(\theta) \Phi_k^\top(\gamma(\theta)) \mathbf{K}_i \Phi_k(\gamma(\theta)) \quad (3.13)$$

$$\Phi_k(\gamma(\theta)) = \Phi_k(\gamma_0) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial \Phi_k}{\partial \gamma_i} \right|_{\gamma_i=1} (\gamma_i(\theta) - 1) \quad (3.14)$$

Il reste alors à déterminer les sensibilités des vecteurs propres par rapport aux paramètres aléatoires. De nombreux papiers sur l'analyse et le calcul de sensibilité des valeurs et vecteurs propres peuvent être trouvés dans la littérature. L'approche SMR se veut peu coûteuse et non intrusive, le calcul des sensibilités des vecteurs propres doit donc être adapté à ces critères. La partie 3.2.3 dédiée à l'implémentation de l'approche SMR présente les différentes méthodes de calcul des dérivées d'un vecteur propre afin d'identifier la méthode la mieux adaptée à l'approche SMR.

### 3.2.2.4 Comparaison avec la méthode de perturbation à l'ordre 2

Comme évoqué au paragraphe 3.2.2.1, le premier niveau de raffinement de l'approche SMR peut être assimilé à une méthode de perturbation à l'ordre un. La méthode de perturbation à l'ordre deux est également répandue dans la littérature [ADHIKARI et FRISWELL 2007] et il semble important à ce niveau de l'étude de confronter le second niveau de raffinement de l'approche SMR à la méthode classique de perturbation à l'ordre deux.

Considérons le problème aux valeurs propres aléatoires défini par l'équation 3.1. Les matrices de masse  $\mathbf{M}(\gamma) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{N \times N}$  et de raideur  $\mathbf{K}(\gamma) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{N \times N}$  sont supposées

continuellement dérivables et au moins deux fois dérivables par rapport au vecteur  $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}$  représentant les  $n$  paramètres du système vibratoire étudié. La méthode de perturbation à l'ordre deux consiste à estimer la  $k$ ème valeur propre aléatoire par son développement de Taylor à l'ordre deux au voisinage du point  $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_0$  où  $\boldsymbol{\gamma}_0$  est composé des valeurs moyennes des paramètres. Cette approximation de  $\lambda_k(\boldsymbol{\gamma})$  sera notée  $\lambda_k^{pert.2}$ . On a donc :

$$\lambda_k(\boldsymbol{\gamma}) \approx \lambda_k^{pert.2} = \lambda(\boldsymbol{\gamma}_0) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \lambda_k}{\partial \gamma_i} \Big|_{\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_0} (\gamma_i - \gamma_{i0}) \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} \Big|_{\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_0} (\gamma_i - \gamma_{i0})(\gamma_j - \gamma_{j0}) \right) \quad (3.15)$$

La dérivée première d'une valeur propre a été présentée précédemment (équation 3.4). Cette expression ne fait intervenir que les sensibilités des matrices de masse et de raideur prises à la valeur moyenne du vecteur des paramètres  $\boldsymbol{\gamma}$ . Dans le cas où les valeurs propres sont distinctes, Plaut et Huseyin [PLAUT et HUSEYIN 1973] montrent que la dérivée seconde de la  $k$ ème valeur propre s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j}(\boldsymbol{\gamma}) &= \boldsymbol{\Phi}_k(\boldsymbol{\gamma})^\top \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{K}(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} - \lambda_k(\boldsymbol{\gamma}) \frac{\partial^2 \mathbf{M}(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} \right] \boldsymbol{\Phi}_k(\boldsymbol{\gamma}) \\ &\quad - \left( \boldsymbol{\Phi}_k(\boldsymbol{\gamma})^\top \frac{\partial \mathbf{M}(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_i} \boldsymbol{\Phi}_k(\boldsymbol{\gamma}) \right) \left( \boldsymbol{\Phi}_k(\boldsymbol{\gamma})^\top \mathcal{G}_{kj}(\boldsymbol{\gamma}) \boldsymbol{\Phi}_k(\boldsymbol{\gamma}) \right) \\ &\quad - \left( \boldsymbol{\Phi}_k(\boldsymbol{\gamma})^\top \frac{\partial \mathbf{M}(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_j} \boldsymbol{\Phi}_k(\boldsymbol{\gamma}) \right) \left( \boldsymbol{\Phi}_k(\boldsymbol{\gamma})^\top \mathcal{G}_{ki}(\boldsymbol{\gamma}) \boldsymbol{\Phi}_k(\boldsymbol{\gamma}) \right) \\ &\quad + 2 \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^N \frac{\left( \boldsymbol{\Phi}_r(\boldsymbol{\gamma})^\top \mathcal{G}_{ki}(\boldsymbol{\gamma}) \boldsymbol{\Phi}_k(\boldsymbol{\gamma}) \right) \left( \boldsymbol{\Phi}_r(\boldsymbol{\gamma})^\top \mathcal{G}_{kj}(\boldsymbol{\gamma}) \boldsymbol{\Phi}_k(\boldsymbol{\gamma}) \right)}{\lambda_k(\boldsymbol{\gamma}) - \lambda_r(\boldsymbol{\gamma})} \end{aligned} \quad (3.16)$$

où

$$\mathcal{G}_{ki}(\boldsymbol{\gamma}) = \left[ \frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_i} - \lambda_k(\boldsymbol{\gamma}) \frac{\partial \mathbf{M}(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_i} \right] \quad (3.17)$$

Cette expression peut être reformulée sous la forme d'un polynôme d'ordre deux dont les variables sont les composantes du vecteur  $\boldsymbol{\gamma}$  :

$$\lambda_k^{pert.2} = a_k + \sum_{i=1}^n b_{ki} \gamma_i + \sum_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2} c_{kij} \gamma_i \gamma_j \quad (3.18)$$

Dans le cas du second niveau de raffinement de l'approche SMR, la  $k$ ème valeur propre est estimée en considérant le développement de Taylor à l'ordre un du vecteur propre associé (et non plus le développement de Taylor à l'ordre deux de la valeur propre elle-même).

L'expression de la valeur propre dans le cas SMR2 s'écrit alors :

$$\lambda_k^{SMR2} = \sum_{i=1}^n \gamma_i \Phi_k^\top(\gamma) \mathbf{K}_i \Phi_k(\gamma) \quad (3.19)$$

$$= \sum_{i=1}^n \gamma_i \left( \Phi_k(\gamma_0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_k}{\partial \gamma_j} \Big|_{\gamma_j=1} (\gamma_j - 1) \right)^\top \mathbf{K}_i \left( \Phi_k(\gamma_0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_k}{\partial \gamma_j} \Big|_{\gamma_j=1} (\gamma_j - 1) \right) \quad (3.20)$$

En écrivant à nouveau la valeur propre sous la forme d'un polynôme fonction des paramètres du problème, on constate que le degré du polynôme est alors supérieur à celui du polynôme correspondant à  $\lambda_k^{pert.2}$  :

$$\lambda_k^{SMR2} = e_k + \sum_{i=1}^n f_{kij} \gamma_i + \sum_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2} g_{kij} \gamma_i \gamma_j + \sum_{(i,j,l) \in \llbracket 1;n \rrbracket^3} h_{kijl} \gamma_i \gamma_j \gamma_l \quad (3.21)$$

On verra ultérieurement (partie 3.2.3.3) que le calcul des sensibilités des vecteurs propres peut être formulé de manière à ne nécessiter que la connaissance au point  $\gamma = \gamma_0$  du couple valeur-vecteur propre, des matrices de masse et de raideur et de leurs sensibilités. La méthode de perturbation à l'ordre deux nécessite quant à elle de calculer les dérivées premières et secondes des matrices de masse et de raideur ainsi que l'ensemble des vecteurs propres du problème. Le calcul de  $\lambda_k^{SMR2}$  est par conséquent moins coûteux que celui de  $\lambda_k^{pert.2}$ . De plus,  $\lambda_k^{SMR2}$  est approchée avec un polynôme d'ordre supérieur à celui utilisé pour estimer  $\lambda_k^{pert.2}$ . L'approximation obtenue avec SMR2 sera donc plus à même d'approximer la surface de réponse réelle des valeurs propres aléatoires recherchées.

### 3.2.3 Implémentation de l'approche SMR

Après avoir présenté les fondements de l'approche SMR, cette partie a pour objectif de présenter l'implémentation pratique de l'approche appliquée au cas des structures réelles. Lors de la caractérisation des espaces propres aléatoires d'une structure réelle, le premier niveau de raffinement peut être suffisant pour déterminer certaines valeurs propres aléatoires de la structure alors que pour d'autre le second niveau sera nécessaire. L'approche SMR peut être organisée de manière à allouer au mieux les ressources de calcul disponibles pour déterminer un jeu de valeurs propres aléatoires d'une structure réelle. Dans cette optique, une démarche pratique sera alors présentée ici sous forme d'un algorithme de résolution.

Il apparaît alors que le bon fonctionnement de l'approche nécessite d'identifier quand SMR1 ou SMR2 doivent être utilisés. On définira alors un critère permettant de distinguer les différents cas.

Comme il a pu être évoqué précédemment, l'implémentation de SMR1 ne représente pas de grande difficulté, les valeurs propres aléatoires étant déduites de la connaissance des vecteurs propres déterministes et des matrices de sensibilités des matrices de masse et de raideur. L'implémentation de SMR2 nécessite cependant de déterminer les sensibilités des vecteurs propres associés aux valeurs propres recherchées. Le choix d'une méthode de calcul

adaptée au contexte apparaît alors indispensable pour garantir la minimisation du temps de calcul nécessaire à la détermination du jeu de valeur propre aléatoire. Les différentes méthodes de calcul de dérivée de vecteur propre classiquement utilisées dans la littérature seront alors passées en revue afin d'identifier la méthode la mieux adaptée au contexte de l'approche SMR.

Finalement, afin de résoudre le problème stochastique considéré, il ne restera plus qu'à définir le modèle stochastique des paramètres de la structure.

### 3.2.3.1 Application au cas d'une structure réelle

Pour une structure réelle dont on cherche à déterminer un jeu de valeurs propres aléatoires, l'ensemble de valeurs propres recherché est très susceptible de contenir aussi bien des valeurs propres correspondant à des vecteurs propres quasi-déterministes que des valeurs propres associées à des vecteurs propres aléatoires. Ainsi les deux niveaux de raffinement de l'approche SMR sont nécessaires pour assurer une bonne estimation de l'ensemble du jeu de valeurs propres aléatoires. Dans la mesure du possible, on cherche à minimiser le temps de calcul nécessaire à l'évaluation de l'ensemble des valeurs propres aléatoires recherchées. Dans ce but, on propose d'adapter les ressources de calcul investies à la détermination de chacune des valeurs propres en suivant la démarche de résolution présentée sur la Figure 3.3 page 92. La première étape consiste alors à estimer **l'ensemble** des valeurs propres aléatoires recherchées avec le premier niveau de raffinement SMR1. Cela revient à considérer **l'ensemble** des vecteurs propres aléatoires comme étant déterministes. Comme nous avons pu le voir au paragraphe 3.2.2.2, cette étape nécessite un temps de calcul quasi-nul et fournit une première estimation de toutes les valeurs propres aléatoires du problème. Il est alors nécessaire d'évaluer pour chaque valeur propre si l'hypothèse faite avec SMR1 est valide ou si il est nécessaire de raffiner en tenant compte de la variabilité des vecteurs propres. Une idée apparaissant dans différents papiers portant aussi bien sur les méthodes de perturbation [ADHIKARI et FRISWELL 2007], que sur le calcul de sensibilité des valeurs-vecteurs propres [LIN, WANG et LIM 1996] ou encore sur l'étude du lieu des valeurs propres d'une structure [BALMES 1993; DU BOIS, ADHIKARI et LIEVEN 2011] consiste à distinguer le cas où les valeurs propres sont distinctes les unes des autres du cas où elles sont proches. En effet, dans le cas où les valeurs propres sont bien distinctes, la sensibilité des vecteurs propres aux variations des paramètres de la structure est faible [BALMES 1993], l'hypothèse associée à SMR1 est donc valide et les valeurs propres aléatoires seront donc correctement estimées à l'aide de SMR1. Dans le cas où les valeurs propres ne peuvent plus être considérées comme étant bien distinctes, il est alors proposé d'utiliser le second niveau de raffinement SMR2 pour obtenir une meilleure estimation des valeurs propres aléatoires. Ainsi, SMR2 n'est appliqué qu'à un nombre réduit de valeurs propres ce qui minimise les calculs nécessaires à la détermination de l'ensemble des valeurs propres aléatoires recherchées.

De même que pour SMR1, la qualité de l'approximation faite avec SMR2 diminue lorsque les valeurs propres tendent à se rapprocher. Le développement de Taylor au premier ordre des vecteurs propres peut devenir insuffisant pour tenir compte de la variabilité de ces derniers. Un développement de Taylor à l'ordre deux des vecteurs propres semble inapproprié car il nécessiterait de calculer les dérivées secondes des vecteurs propres. Une solution

consisterait à estimer les vecteurs propres aléatoires de la structure à l'aide d'une décomposition sur le Chaos Polynomial (CP). Les coefficients de cette décomposition peuvent être complexes à déterminer [GHANEM et GHOSH 2007], c'est pourquoi cette approche n'est envisagée que pour les valeurs propres aléatoires pour lesquelles SMR2 n'est plus suffisant.

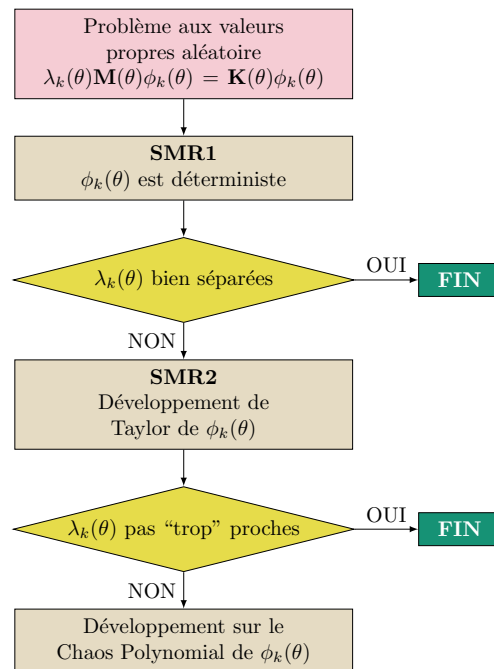


FIGURE 3.3 – Résolution du problème aux valeurs propres aléatoires par l'approche SMR

Dès lors, il apparaît que le bon fonctionnement de l'approche proposée est directement liée à l'aptitude à caractériser la "proximité" entre deux valeurs propres. Cette notion n'est pas clairement définie dans la littérature pour le cas des valeurs propres aléatoires et sera donc l'objet de la partie suivante.

### 3.2.3.2 Définition d'un *Facteur de Proximité* entre deux valeurs propres aléatoires

La notion de "valeurs propres proches" apparaît dans différents papiers portant sur le phénomène de *veering* du lieu des valeurs propres [BALMES 1993; DU BOIS, ADHIKARI et LIEVEN 2011], sur les approches SEA (Statistical Energy Analysis) [MANOHAR et KEANE 1994], sur le calcul des dérivées des valeurs et vecteurs propres [LIN, WANG et LIM 1996] et, a fortiori, sur le problème aux valeurs propres aléatoires [ADHIKARI et FRISWELL 2007]. Les cas de valeurs propres proches et distinctes sont traités systématiquement dans ces papiers mais la limite entre les deux configurations n'apparaît pas clairement lorsqu'il s'agit de valeurs propres aléatoires. Initialement prévu pour l'étude paramétrique des valeurs propres d'une structure ou pour des approches statistiques, deux critères issus de la littérature semblent pouvoir être adaptés au cas du problème aux valeurs propres aléatoires. Il s'agit des critères proposés par Du Bois et al. [DU BOIS, ADHIKARI et LIEVEN 2011] et par

Manohar et Keane [MANOHAR et KEANE 1994]. Du Bois et al. [DU BOIS, ADHIKARI et LIEVEN 2011] proposent un facteur de couplage modal inspiré des travaux de Perkins et Mote [PERKINS et MOTE 1986]. Ce facteur est basé sur les matrices de sensibilité des matrices de masse et de raideur. Ces grandeurs sont également nécessaires pour l'application de SMR1 ce qui rend ce critère assez cohérent pour une utilisation dans l'approche SMR. Cependant, cet indicateur de "proximité" entre deux valeurs propres est initialement prévu pour le cas où un seul paramètre varie au sein de la structure étudiée. Une adaptation de ce critère au cas d'un système multi-paramétrique semble possible mais n'a pas encore été validé pour le moment. Dans un premier temps on choisit alors de se baser sur le critère proposé par Manohar et Keane [MANOHAR et KEANE 1994]. Leur critère appelé "facteur de chevauchement statistique" (*statistical overlap factor*) est défini comme étant le rapport entre l'écart-type de la  $k$ ème valeur propre et l'écart moyen avec la valeur propre suivante. Etant basé sur les moments statistiques des valeurs propres, il est alors très peu coûteux puisque ces grandeurs sont obtenues directement avec SMR1. On propose d'adapter le facteur de chevauchement statistique afin de tenir compte d'une éventuelle différence d'écart-type entre deux valeurs propres successives, on définit alors ce que nous appellerons dans la suite le Facteur de Proximité (FP) entre deux valeurs propres aléatoires  $\lambda_i, \lambda_{i+1}$  tel que :

$$FP(\lambda_i) = \frac{2(\sigma[\lambda_i] + \sigma[\lambda_{i+1}])}{E[\lambda_{i+1}] - E[\lambda_i]} \quad (3.22)$$

Le Facteur de Proximité permet de qualifier la qualité de l'estimation obtenue avec SMR1 ou SMR2. Lorsque le FP est supérieur à une certaine limite, on peut choisir dans un premier temps  $FP > 1$ , les valeurs propres aléatoires correspondantes sont supposées "proches" et l'hypothèse liée à SMR1 (i.e. les vecteurs propres sont supposés déterministes) n'est alors plus valide. Pour SMR2, on peut également fixer une valeur de FP au delà de laquelle les vecteurs propres aléatoires ne peuvent plus être simplement estimés par leur développement de Taylor à l'ordre un. En d'autre terme, le taux de "confiance" attribué à l'estimation faite avec SMR1 ou SMR2 pour une valeur propre aléatoire donnée est directement liée à la valeur du Facteur de Proximité de cette valeur propre par rapport aux valeurs propres adjacentes.

### 3.2.3.3 Calcul de sensibilité des vecteurs propres

Le second point technique pouvant influencer sur l'efficacité de l'approche SMR est le calcul des dérivées des vecteurs propres aléatoires. Le calcul des dérivées des valeurs et vecteurs propres a été largement étudié ces dernières décennies. En effet, le calcul des dérivées de ces grandeurs apparaît dans de nombreuses applications telles que l'optimisation de forme, le recalage de modèle ou l'analyse de sensibilité. Le but de cette partie est d'identifier la méthode de calcul des dérivées d'un vecteur propre la plus adaptée au niveau de raffinement SMR2. Quatre types d'approches peuvent être identifiées dans la littérature. Cette classification se veut adaptée au contexte de l'approche SMR et vise à faciliter le choix de la méthode retenue. Une cinquième approche sortant des quatre catégories identifiées sera également présentée.

Dans un premier temps, on peut identifier les méthodes de superposition modales ini-

tiées par les travaux de Fox et Kapoor [FOX et KAPOOR 1968]. Deux résultats principaux ressortent de ce papier. Le premier est une expression de la dérivée d'un vecteur propre basée sur les valeur et vecteur propre du mode considéré. L'inconvénient de cette formulation est qu'elle nécessite d'inverser une matrice dense de dimension  $(n \times n)$  où  $n$  est le nombre de *d.d.l.* du système étudié. Pour s'affranchir de cette inversion très coûteuse en temps de calcul, Fox et Kapoor proposent une seconde expression basée sur la décomposition de la dérivée du vecteur propre sur la base des modes propres. De nombreux papiers ont fait suite aux travaux de Fox et Kapoor. A titre d'exemple, Roger [ROGERS 1970] a étendu ces résultats au cas général des matrices non symétriques, Hirai et Kashiwaki [HIRAI et KASHIWAKI 1977] se sont concentrés sur le cas particulier des structures obtenues par modification d'un faible nombre de paramètre par rapport à une structure de référence. Le principal inconvénient du développement sur la base des modes propres est que l'ensemble des vecteurs propres de la structure est nécessaire pour obtenir une expression exacte des dérivées des vecteurs propres et la précision de la méthode décroît dès lors que la base utilisée est tronquée. Pour compenser cela, de nombreuses formulations basées sur une compensation statique ou sur des approches itératives ont été proposées [ALVIN 1997]. Lin [LIN, WANG et LIM 1996] propose une formulation basée sur la superposition modale de Fox et Kapoor permettant d'estimer la dérivée d'un vecteur propre à partir des seuls paramètres modaux du mode considéré. Cependant, cette méthode reste une méthode approchée et devient inappropriée lorsque les valeurs propres sont trop proches les unes des autres. L'ensemble des méthodes basées sur les formulations de Fox et Kapoor ne semblent donc pas adaptées au contexte de l'approche SMR.

La seconde classe de méthode correspond aux méthodes basées sur la méthode proposée par Nelson [NELSON 1976]. Nelson propose de calculer la dérivée du  $k$ ème vecteur propre d'un système d'ordre  $n$  symétrique ou non à partir de la seule connaissance des vecteurs propres à gauche (ou à droite) du problème et des valeurs propres associées. Le principal avantage de cette méthode est qu'elle ne nécessite que la connaissance du couple valeur propre - vecteur propre du mode considéré et que la structure bande du problème aux valeurs propres initial est conservée. De nombreux travaux sont basés sur la méthode de Nelson. Friswell [FRISWELL 1996 ; FRISWELL 1995] montre notamment que la méthode peut être étendue aux cas de dérivée d'ordre  $n$  des valeurs propres et vecteurs propres. Ojalvo [OJALVO 1987], Mills-Curran [MILLS-CURRAN 1988 ; MILLS-CURRAN 1990] et Dailey [DAILEY 1989] ont contribué à étendre la méthode de Nelson aux cas de valeurs propres multiples. Cependant, ces approches nécessitent de calculer les dérivées secondes des matrices de masse et de raideur ce qui les rend inappropriées à une implémentation dans SMR2. Chen [CHEN 1993] a mis en évidence le fait que, dans certains cas particuliers de valeurs propres multiples, les méthodes de Ojalvo, Mills-Curran et Dailey peuvent être évitées mais ces cas particuliers ne correspondent pas au cadre de l'approche SMR. En gardant à l'esprit que, comme le fait remarquer Lee [LEE et JUNG 1997], la méthode de Nelson peut être fastidieuse à programmer et relativement longue pour calculer les dérivées des vecteurs propres, elle reste néanmoins plus rapide que les méthodes modales basées sur les travaux de Fox et Kapoor. La méthode de Nelson semble donc être adaptée au calcul des dérivées des vecteurs propres du second niveau de raffinement de l'approche SMR.

Les méthodes itératives de calcul des dérivées des vecteurs propres constituent la troisième classe de méthode identifiée dans le cadre de ce travail. On peut citer par exemple les

travaux de Belegundu et Yoon [BELEGUNDU et YOON 1988] qui proposent de perturber le vecteur des paramètres d'entrée du problème pour ensuite résoudre le problème non-linéaire obtenu par une méthode classique de type Newton-Raphson. En suivant un processus itératif, la méthode permet de converger vers la dérivée du vecteur propre recherchée. Alvin [ALVIN 1997] propose lui d'utiliser un algorithme itératif basé sur une technique de projection sur une base de Gradient conjugué (*Preconditioned Conjugate Projected Gradient-based technique*) pour faire converger la méthode de Fox et Kapoor tronquée vers la valeur de la dérivée recherchée. Andrew [ANDREW et TAN 1999] utilise une méthode d'itération simultanée pour calculer les dérivées croisées d'ordre deux des valeurs propres et vecteurs propres quelque soit l'ordre de multiplicité des valeurs propres considérées. De manière générale, l'approche SMR ayant pour but de s'affranchir de l'aspect itératif des méthodes de Monte-Carlo, le calcul itératif des dérivées des vecteurs propres ne sera donc pas privilégié.

La dernière classe de méthode correspond aux méthodes dites semi-analytiques. Ces méthodes présentent l'avantage d'être exactes (aux erreurs d'arrondi numérique près). Jankovic [JANKOVIC 1994] propose ainsi de calculer de manière exacte la dérivée des valeurs et vecteurs propres dans le cas de valeurs propres simples de problèmes aux valeurs propres aussi bien linéaires que non-linéaires. Olhoff et Lunf [LUND et OLHOFF 1994; OLHOFF, LUND et SEYRANIAN 1994] s'intéressent aux cas des valeurs propres simples et multiples de structures complexes et Mateus [MATEUS et al. 1997] traite le cas des valeurs propres multiples des structures coques. Bien que la précision de ces méthodes soit très intéressante, elles nécessitent une implémentation au niveau élémentaire du solveur éléments finis ce qui ferait perdre le caractère non-intrusif de l'approche SMR. Ces méthodes ne sont donc pas envisageables.

Une attention particulière peut être apportée à la méthode algébrique proposée par Lee [LEE, KIM et JUNG 1999a; LEE, KIM et JUNG 1999b] afin de calculer les dérivées des vecteurs propres d'une structure amortie. Cette méthode n'appartient pas explicitement à l'une des catégories identifiées précédemment mais apparaît comme tout à fait adaptée à une implémentation dans l'approche SMR. Cette méthode est appliquée dans un cas intrusif pour calculer les dérivées de matrices élémentaires dans le logiciel libre *Code Aster* développé par *Électricité De France (EDF)* [ANDRIAMBOLOLONA 2009]. Cette méthode est basée sur la formulation matricielle du problème aux valeurs propres et de la condition d'orthogonalité des vecteurs propres. Le cas traité dans les références [LEE, KIM et JUNG 1999a; LEE, KIM et JUNG 1999b] considère un système amorti. Dans un premier temps l'approche SMR est appliquée au cas d'une structure non-amortie. La condition d'orthogonalité des modes étant différente dans le cas d'un système amorti ou non, le paragraphe suivant détaille l'implémentation du calcul de la dérivée d'un vecteur propre dans le cas d'un système non amorti telle qu'elle sera effectuée dans l'approche SMR. Lorsque deux valeurs propres se "rapprochent" avec la variation d'un paramètre, le cas d'une valeur propre double peut être vu comme le cas limite où les valeurs propres sont suffisamment proches pour être confondues. Pour cette raison, le raisonnement présenté dans le paragraphe suivant est développé à partir du cas de valeurs propres d'ordre de multiplicité quelconque. Le cas de valeurs propres simples étant un cas particulier pour lequel l'ordre de multiplicité est égal à 1, il se déduit facilement du cas général d'ordre de multiplicité quelconque.



### 3.2.3.4 Implémentation de la méthode de calcul de sensibilité des vecteurs propres

Considérons le cas d'une valeur propre  $\lambda_m$  d'ordre de multiplicité quelconque noté  $m$ . On définit ci-dessous le problème aux valeurs propres où  $\Phi_m$  est la matrice  $(n \times m)$  des vecteurs propres associés à la valeur propre  $\lambda_m$  :

$$-\mathbf{M}\Phi_m\Lambda_m + \mathbf{K}\Phi_m = 0 \quad (3.23)$$

où

$$\Lambda_m = \mathbf{I}_m * \lambda_m$$

La condition d'orthogonalité des vecteurs propres s'écrit :

$$\Phi_m^\top \mathbf{M} \Phi_m = \mathbf{I}_m \quad (3.24)$$

On introduit  $\mathbf{X}$  la matrice des vecteurs propres adjacents. Les vecteurs propres adjacents sont définis dans la documentation technique du logiciel *Code\_Aster* [ANDRIAMBOLOLONA 2009] comme étant les  $m$  vecteurs propres d'un même sous espace propre multiple vers lesquels tendent les  $m$  vecteurs propres ( $\mathbf{X}(p)$ ) deux à deux distincts lorsque le paramètre  $p$  tend vers sa valeur nominale  $p_0$ . Les  $m$  valeurs propres associées aux vecteurs propres ( $\mathbf{X}(p)$ ) tendent alors vers la valeur propre multiple  $\lambda_m$  lorsque  $p$  tend vers  $p_0$ . Une transformation orthogonale permet d'écrire les vecteurs propres adjacents en fonction de la matrice des vecteurs propres  $\Phi_m$  de la manière suivante :

$$\mathbf{X} = \Phi_m \mathbf{T} \quad (3.25)$$

où  $\mathbf{T}$  est la matrice de transformation, d'ordre  $m$  et vérifiant  $\mathbf{T}^\top \mathbf{T} = \mathbf{I}_m$ . La matrice des vecteurs adjacents  $\mathbf{X}$  satisfait également la condition d'orthogonalité  $\mathbf{X}^\top \mathbf{M} \mathbf{T} = \mathbf{I}_m$ .

Afin de calculer  $\frac{\partial \Lambda_m}{\partial p}$  et  $\mathbf{X}$ , on écrit puis différencie un second problème aux valeurs propres défini ci-dessous :

$$-\mathbf{M}\mathbf{X}\Lambda_m + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (3.26)$$

En différenciant par rapport à un paramètre  $p$  de la structure, on obtient :

$$(\mathbf{K} - \Lambda_m \mathbf{M}) \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial p} = -\left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p} - \Lambda_m \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p}\right) \mathbf{X} + \mathbf{M}\mathbf{X} \frac{\partial \Lambda_m}{\partial p} \quad (3.27)$$

En prémultipliant par  $\Phi_m^\top$  et substituant  $\mathbf{X} = \Phi_m \mathbf{T}$  dans (3.27), on obtient un nouveau problème aux valeurs propres :

$$\mathbf{D}\mathbf{T} = \mathbf{E}\mathbf{T} \frac{\partial \Lambda_m}{\partial p} \quad (3.28)$$

où

$$\mathbf{D} = \Phi_m^\top \left(-\lambda_m \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p}\right) \Phi_m \quad (3.29)$$

$$\mathbf{E} = -\Phi_m^\top \mathbf{M} \Phi_m = -\mathbf{I}_m \quad (3.30)$$

La méthode de Lee commence à proprement parler à cette étape. Cette méthode consiste à ajouter une équation à l'équation 3.27 pour obtenir un système régulier et symétrique

à résoudre. En différenciant la condition d'orthogonalité des vecteurs propres adjacents, le problème peut se réécrire sous forme d'une équation matricielle en combinant les équations (3.27) et (3.31) :

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial p} = -\frac{1}{2} \mathbf{X}^\top \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} \mathbf{X} \quad (3.31)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - \lambda_m \mathbf{M} & \mathbf{M} \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^\top \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial p} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p} - \Lambda_m \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p}\right) \mathbf{X} + \mathbf{M} \mathbf{X} \frac{\partial \Lambda_m}{\partial p} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{X}^\top \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} \mathbf{X} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

La résolution de ce système peut être obtenue par une factorisation  $\mathbf{LDL}^\top$  ou une décomposition  $\mathbf{LU}$  par exemple.

L'algorithme de Lee peut être résumé par les étapes suivantes :

---

**Algorithm 1** Lee's algorithm

---

- 1: Calcul des matrices  $\mathbf{D} = \Phi_m^\top \left( -\lambda_m \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p} \right) \Phi_m$  et  $\mathbf{E} = -\mathbf{I}_m$
  - 2: Résolution du problème aux valeurs propres  $\mathbf{D} \mathbf{T} = \mathbf{E} \mathbf{T} \frac{\partial \Lambda_m}{\partial p}$  et normalisation des vecteurs propres tels que  $\mathbf{T}^\top \mathbf{T} = \mathbf{I}_m$
  - 3: Définition des nouveaux vecteurs propres  $\mathbf{X} = \Phi_m \mathbf{T}$
  - 4: Définition de la matrice  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - \lambda_m \mathbf{M} & \mathbf{M} \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^\top \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$
  - 5: Calcul de la matrice  $F = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p} - \Lambda_m \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p}\right) \mathbf{X} + \mathbf{M} \mathbf{X} \frac{\partial \Lambda_m}{\partial p} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{X}^\top \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} \mathbf{X} \end{bmatrix}$
  - 6: Calcul du vecteur des composantes de la dérivée des vecteurs propres (résolution du système linéaire suivant)  $\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial p} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = [\mathbf{A}]^{-1} F$
- 

### 3.2.3.5 Implémentation de l'approche SMR couplée avec le logiciel éléments finis MSC Nastran

Comme évoqué précédemment, l'approche SMR est non intrusive et peut être mise en place à l'aide d'un logiciel éléments finis commercial. On choisit de travailler avec le logiciel MSC Nastran. L'approche SMR a été implémentée en langage python et la librairie libre pyNastran, développée par Steeve Doyle [*pyNastran*], permet d'exploiter simplement les données issues de Nastran. La Figure 3.21 page 115 présente l'implémentation de l'approche SMR couplée avec Nastran. La modélisation stochastique des paramètres aléatoires de la structure a été implémentée à l'aide de la librairie libre OpenTURNS [*OpenTURNS*] également disponible sous python.

L'architecture choisie pour implémenter l'approche SMR est détaillée ici. A partir d'un fichier d'entrée du logiciel MSC Nastran (fichier *\*.bdf*) généré, par exemple, à l'aide du préprocesseur MSC Patran, le fichier est configuré de manière à exporter les matrices de masse et de raideur de la structure étudiée. Les résultats du calcul Nastran, notamment

les valeurs propres et vecteurs propres de la structure, sont stockés dans un fichier binaire de type *\*.op2* propre à Nastran. Les matrices de masse et de rigidité sont quant à elles exportées dans un autre type de fichier binaire Nastran d'extension *\*.op4*. Ces fichiers binaires de résultats sont alors lus à l'aide des fonctions dédiées de la librairie pyNastran. Les matrices de sensibilités des matrices de masse et de raideur par rapport aux paramètres du problème sont obtenues par différences finies. Pour cela, le fichier *\*.bdf* est modifié (à nouveau à l'aide de fonctions de la librairie pyNastran) et les nouvelles matrices de masse et de rigidité sont exportées. Ces données (valeurs propres, vecteurs propres et matrices de sensibilités) constituent alors une partie des données d'entrée de l'approche SMR, il reste à définir les variables aléatoires d'entrée du problème. Les distributions de ces variables aléatoires sont alors définies à l'aide de la librairie OpenTURNS. Finalement, les valeurs propres aléatoires de la structure sont générées à l'aide de la classe *openturns.RandomVector* et des données d'entrées.

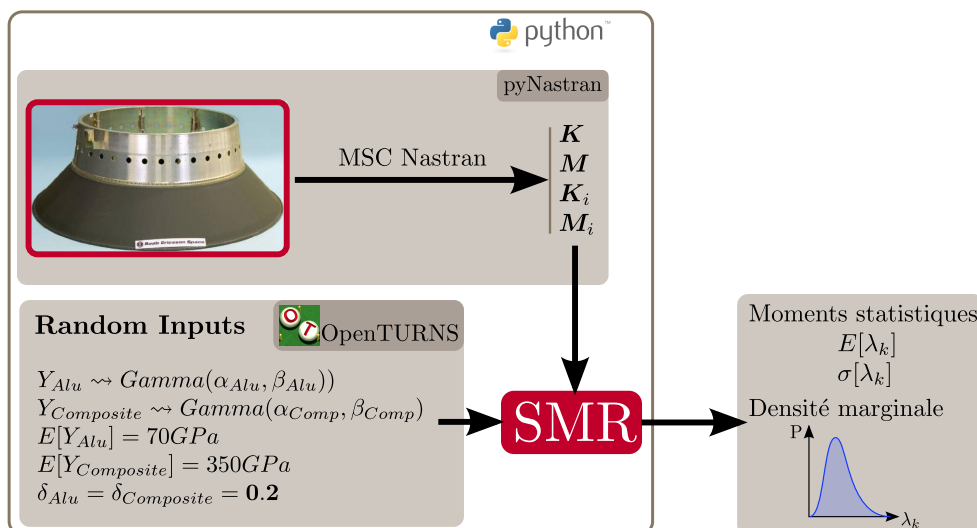


FIGURE 3.4 – Implémentation de l'approche SMR couplée avec le logiciel éléments finis MSC Nastran

### 3.2.3.6 Modélisation stochastique des paramètres incertains

Les différentes étapes de l'implémentation de l'approche SMR étant désormais établies, afin d'appliquer l'approche au cas d'une structure, il reste à définir, le plus objectivement possible, la loi de probabilité des paramètres de la structure. On choisit de définir leur fonction densité de probabilité, notée *pdf* dans la suite.

Soit  $X(\theta)$  un paramètre aléatoire de la structure étudiée. Pour modéliser ce paramètre, il est nécessaire de tenir compte des informations suivantes [SOIZE 2013] :

- $X(\theta)$  est une variable aléatoire à valeurs positives (grandeur physique telle que le module d'Young par exemple),
- $X(\theta)$  est une variable aléatoire du second ordre, i.e.  $E[X^2(\theta)] < \infty$ ,
- la valeur moyenne de  $X(\theta)$  est connue et notée  $E[X(\theta)] = \bar{x} > 0$ ,

— la solution du problème, ici  $\lambda(\theta)$  est également une variable aléatoire du second ordre.

Lorsque des informations supplémentaires sont disponibles, comme des données expérimentales par exemple, la *pdf* d'une variable aléatoire peut être obtenue à l'aide du principe du maximum de vraisemblance. Dans le cas contraire, on peut construire la *pdf* à l'aide du principe du maximum d'entropie [SOIZE 2013]. Par exemple, en se basant sur le principe du maximum d'entropie, une variable aléatoire  $X$  à valeurs réelles et support positif  $\text{Supp}(X) = ]0, +\infty[$  telle que  $E[X] = m_X$  et  $\text{Var}[X] = \sigma_X^2$  suit une distribution Gamma.

Pour un matériau donné, le module d'Young varie aléatoirement. Son espérance et son écart-type sont supposés connus et ce paramètre est à support positif. En utilisant le principe du maximum de vraisemblance, le module d'Young peut être modélisé par une variable aléatoire dont la distribution suit une loi Gamma. Si  $Y_i \rightsquigarrow \text{Gamma}(\alpha_i, \beta_i) = \Gamma(\alpha_i, \beta_i)$  alors on a  $E[Y_i] = \alpha_i\beta_i$  et  $\text{Var}[Y_i] = \alpha_i\beta_i^2$ .  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont alors définis par :

$$\alpha_i = \left( \frac{E[Y_i]}{\sigma_{Y_i}} \right)^2 \quad \text{et} \quad \beta_i = \frac{\sigma_{Y_i}^2}{E[Y_i]} \quad (3.33)$$

La propriété de changement d'échelle de la distribution Gamma est définie telle que, si  $Y \rightsquigarrow \text{Gamma}(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha, \beta)$ , alors pour tout  $c > 0$ ,  $cY \rightsquigarrow \text{Gamma}(\alpha, c\beta)$ . Cette propriété nous permet de définir les variables aléatoires d'entrée du problème  $\gamma_i$  en fonction du coefficient de variation des différents modules d'Young  $\delta_i = \frac{\sigma_{Y_i}}{E[Y_i]}$  :

$$\gamma_i \rightsquigarrow \text{Gamma} \left( \frac{1}{\delta_i^2}, \delta_i^2 \right) \quad (3.34)$$

Une deuxième propriété intéressante des distributions Gamma est la propriété de sommation. La distribution d'une somme de variables aléatoires indépendantes  $(Y_i)_{1 \leq i \leq N}$  de distributions respectives  $\text{Gamma}(\alpha_i, \beta)$  pour  $i = 1, \dots, N$  ayant le même facteur d'échelle  $\beta$  s'écrit :

$$\sum_{i=1}^N Y_i \rightsquigarrow \text{Gamma} \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i, \beta \right) \quad (3.35)$$

On verra que ce résultat permet, dans certains cas, de caractériser directement la loi des valeurs propres d'une structure.

### 3.3 Applications de l'approche SMR

Cette partie a pour objectif de valider les différentes propriétés de l'approche SMR à l'aide d'exemples pratiques basés sur trois structures différentes. Dans un premier temps, un simple système masse-ressort à trois *d.d.l.* permet d'estimer les premiers moments statistiques et densité de probabilité des valeurs propres du système avec l'approche SMR et de les comparer à leurs valeurs analytiques. Ce système permet également de comparer la précision de l'approche SMR à celle de la méthode classique de perturbation à l'ordre deux et de caractériser le facteur de proximité permettant de sélectionner le niveau de raffinement de l'approche SMR. La deuxième structure étudiée est un portique constitué

de trois poutres. Cette structure permettra de confronter l'approche SMR à une structure réelle modélisée par éléments finis. Finalement, le rapport précision - gain en temps de calcul de l'approche SMR sera illustré à l'aide d'une structure industrielle modélisée par éléments finis : l'Adaptateur Charge Utile d'Ariane. L'implémentation de l'approche SMR couplée avec un logiciel éléments finis commercial sera présentée sur cet exemple.

### 3.3.1 Système à trois degrés de liberté

Le premier exemple applicatif de l'approche SMR est basé sur un système simple : un système masse-ressort à trois degrés de liberté. Cet exemple, présenté Figure 3.5, est tiré de la littérature [ADHIKARI et FRISWELL 2007 ; FRISWELL 1996] et présente l'avantage de pouvoir facilement configurer les valeurs propres du système par la modification d'un seul des paramètres du problème. Cette propriété sera exploitée afin de caractériser la qualité de l'approche SMR lorsque les valeurs propres aléatoires recherchées sont distinctes ou proches.

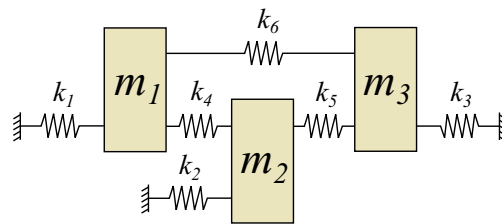


FIGURE 3.5 – Système masse-ressort non amorti à trois *d.d.l.*

#### 3.3.1.1 Modélisation stochastique

Les matrices de masse et de raideur de ce système à trois *d.d.l.* s'écrivent :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_4 + k_6 & -k_4 & -k_6 \\ -k_4 & k_2 + k_4 + k_5 & -k_5 \\ -k_6 & -k_5 & k_3 + k_5 + k_6 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

On suppose que seules les raideurs des ressorts  $k_i$  pour  $i = 1, \dots, 6$  varient aléatoirement et on note  $\mathbf{x}$  le vecteur des raideurs aléatoires tel que  $\mathbf{x} = [k_1, \dots, k_6]^\top$ . Chaque raideur aléatoire est supposée suivre une distribution Gamma d'espérance  $\bar{k}_i = 1 \text{ N m}^{-1}$  pour  $i = 1, \dots, 5$ . L'espérance de la raideur  $k_6$  est fixée à  $\bar{k}_6 = 3 \text{ N m}^{-1}$  pour les simulations correspondant au cas où toutes les valeurs propres aléatoires du système sont bien distinctes. Pour le cas de valeurs propres proches on prendra  $\bar{k}_6 = 1.275 \text{ N m}^{-1}$ . L'écart-type de chaque raideur aléatoire est pris égal à  $\sigma_{k_i} = 0.15 \text{ N m}^{-1}$  pour  $i = 1, \dots, 6$ .

Une simulation de Monte-Carlo permet de calculer les *pdf* ainsi que les deux premiers moments statistiques des valeurs propres aléatoires du système. Pour cela, les tirages des six

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$
Erreur relative sur l'espérance	$3.6 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$
Erreur relative sur l'écart-type	$6.1 \cdot 10^{-3}$	$6.6 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^{-3}$

TABLE 3.1 – Erreur relative sur l'estimation des deux premiers moments statistiques obtenus avec SMR1 comparée aux résultats de la simulation de Monte-Carlo

variables aléatoires indépendantes suivant des loi Gamma sont générés et les valeurs propres du système sont calculées pour chaque tirage en résolvant le problème aux valeurs propres (3.1) correspondant. Une simulation de Monte-Carlo basée sur 30 000 tirages permet de garantir une estimation des deux premiers moments statistiques avec une erreur inférieure à 0.1 %. Les résultats de cette simulation de Monte-Carlo seront pris comme référence pour évaluer la qualité des estimations réalisées avec l'approche SMR.

### 3.3.1.2 Estimation des premiers moments statistiques et densité de probabilité pour des valeurs propres aléatoires distinctes ou proches

Considérons dans un premier temps le cas de valeurs propres aléatoires distinctes, ce qui correspond au cas  $\bar{k}_i = 1 \text{ N m}^{-1}$  pour  $i = \{1, \dots, 5\}$  et  $\bar{k}_6 = 3 \text{ N m}^{-1}$ . On suppose que les formes propres aléatoires sont déterministes et égales aux formes propres obtenues pour la valeur moyenne des paramètres aléatoires d'entrée. Les deux premiers moments statistiques des valeurs propres aléatoires sont obtenus directement à partir des expressions 3.9 et 3.12. On définit l'erreur relative sur l'estimation du  $i$ ème moment statistique obtenu avec SMR1 et notée  $\hat{m}_i^{SMR1}$  :

$$Error(\hat{m}_i^{SMR1}[\lambda_k]) = \epsilon(\hat{m}_i^{SMR1}[\lambda_k]) = \left| \frac{\hat{m}_i^{SMR1}[\lambda_k] - \hat{m}_i^{MC}[\lambda_k]}{\hat{m}_i^{MC}[\lambda_k]} \right| \quad (3.37)$$

Le tableau 3.1 présente l'erreur relative sur l'estimation des deux premiers moments statistiques obtenus avec SMR1 comparé à la simulation de Monte-Carlo de référence. On peut constater que l'espérance et l'écart-type sont estimés avec une erreur respectivement inférieure à 0.4 % et 0.7 % pour l'ensemble des valeurs propres. Les moments statistiques de référence, obtenus avec la simulation de Monte-Carlo, nécessitent 30 000 résolutions du problème aux valeurs propres correspondant à chaque réalisation du jeu de raideurs aléatoires d'entrée. En comparaison, l'estimation obtenue avec SMR1 n'a nécessité qu'une seule résolution déterministe du problème aux valeurs propres pour une précision équivalente. On peut remarquer que, dans ce cas, le premier niveau de raffinement de l'approche SMR est suffisant pour estimer les deux premiers moments statistiques de toutes les valeurs propres car celles-ci sont toutes bien distinctes les unes des autres.

On s'intéresse alors au cas où deux valeurs propres aléatoires sont dites "proches". Pour cela, on fixe l'espérance de la 6<sup>ième</sup> raideur aléatoire à  $\bar{k}_6 = 1.275 \text{ N m}^{-1}$ . Cela a pour effet de garder la première valeur propre du système relativement inchangée par rapport au cas précédent et de rapprocher les 2<sup>ième</sup> et 3<sup>ième</sup> valeurs propres l'une de l'autre.

Cette configuration permet alors d'appliquer SMR1 au cas de valeurs propres aléatoires proches et de mettre en évidence les avantages du second niveau de raffinement SMR2. La Figure 3.6 page 102 présente les densités marginales des trois valeurs propres aléatoires du système à 3 *d.d.l.* Il est important de noter que cette représentation est utilisée uniquement pour illustrer la proximité entre deux valeurs propres aléatoires, les densités marginales étant une sorte de "projection" des lois jointes, représenter ces densités marginales sur un même axe peut porter à confusion.

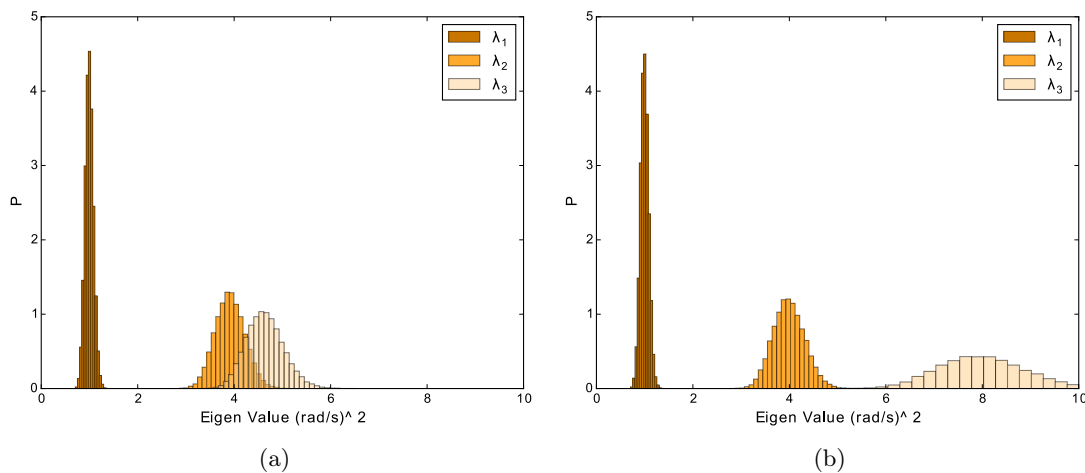


FIGURE 3.6 – Superposition des densités marginales des trois valeurs propres aléatoires du système à 3 *d.d.l.* (a) Les trois valeurs propres aléatoires sont bien séparées. (b) Deux valeurs propres aléatoires sont proches

La Figure 3.7 page 103 présente l'erreur relative sur l'estimation des deux premiers moments statistiques obtenus avec SMR1 et SMR2. Cette figure illustre bien la dégradation de l'estimation obtenue avec SMR1 lorsque les valeurs propres se rapprochent. L'erreur sur l'estimation des deux premiers moments statistiques est alors près de dix fois supérieure au cas de valeurs propres bien distinctes. Le second niveau de raffinement SMR2 permet alors de réduire l'erreur relative sur l'estimation de l'espérance des 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> valeurs propres respectivement à  $5.9 \cdot 10^{-3}$  et  $5.1 \cdot 10^{-3}$ . Cette erreur est de  $5.7 \cdot 10^{-3}$  et  $7.1 \cdot 10^{-3}$  pour l'estimation de l'écart-type de ces valeurs propres avec SMR2.

### 3.3.1.3 Comparaison de l'approche SMR à une méthode classique de perturbation à l'ordre deux

La Figure 3.7 page 103 présente également l'estimation des deux premiers moments statistiques obtenus avec une méthode classique de perturbation à l'ordre deux. On peut constater que l'espérance est mieux estimée avec la méthode de perturbation qu'avec SMR2, cependant l'estimation de l'écart-type est bien moins performante avec la méthode de perturbation à l'ordre deux qu'avec SMR2. En effet, l'erreur relative sur l'estimation de l'écart-type obtenu avec SMR2 est inférieure à 1% alors que la méthode de perturbation

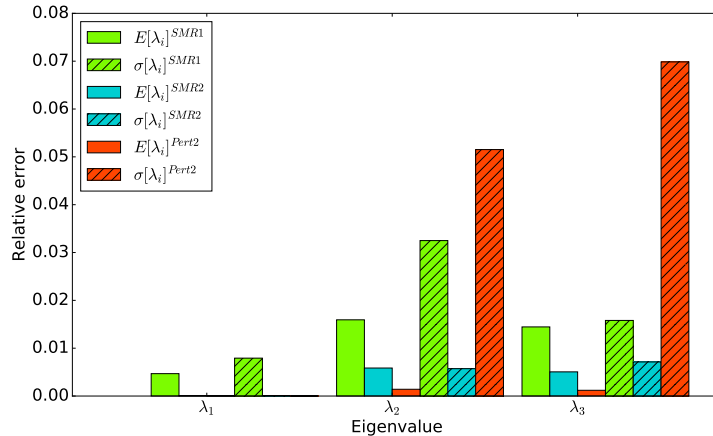


FIGURE 3.7 – Erreur relative sur l’estimation des deux premiers moments statistiques

à l’ordre deux induit une erreur relative supérieure à 5%. Cela peut s’expliquer par la forme de la surface de réponse exacte des valeurs propres qui est alors mieux représentée par l’approximation SMR2 comme l’illustre la Figure 3.8 page 104. Cette figure présente une coupe des surfaces de réponses exactes des 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> valeurs propres lorsque les cinq premiers paramètres de raideur  $k_1, \dots, k_5$  sont fixés à leur valeur moyenne  $k_i = 1 \text{ N m}^{-1}$  et  $k_6$  varie entre 0 et  $2 \text{ N m}^{-1}$ . La surface de réponse exacte, indiquée *Ref* (pour référence), est comparée aux surfaces de réponse approchées obtenues avec SMR1, SMR2 et la méthode de perturbation à l’ordre deux (*Pert2*). On retrouve les conclusions de la partie 3.2.2.4 selon lesquelles la méthode de perturbation revient à estimer les valeurs propres aléatoires par un polynôme multivarié des paramètres aléatoires d’entrée. L’estimation SMR2 revient alors à utiliser un polynôme d’ordre supérieur. La forme de la surface de réponse réelle justifie alors la meilleure approximation obtenue avec SMR2. La Figure 3.8 page 104 est équivalente à une coupe dans le plan  $x = k_6$  des hyper-surfaces de réponse obtenues avec les différentes méthodes de résolutions. La représentation des hyper-surfaces n’étant pas envisageable en dimension 6, on choisit de représenter ici une vue en coupe équivalente à la variation d’une seule variable mais les conclusions mises en évidence restent valides pour le cas de plusieurs variables.

### 3.3.1.4 Caractérisation du facteur de proximité

La modularité du système à trois *d.d.l* est particulièrement bien adaptée pour caractériser le comportement du facteur de proximité pour différentes configurations de valeurs propres aléatoires. Afin d’étudier des cas pour lesquels les deuxième et troisième valeurs propres du système sont plus où moins proches, on choisit de conserver les mêmes caractéristiques (espérance et écart-type) pour l’ensemble des paramètres aléatoires d’entrée définis au paragraphe 3.3.1.1 excepté pour la raideur aléatoire  $k_6$  pour laquelle l’espérance varie entre  $1.275 \text{ N m}^{-1}$  et  $3 \text{ N m}^{-1}$ .

On étudie dans un premier temps la qualité de l’estimation réalisée avec SMR1 et



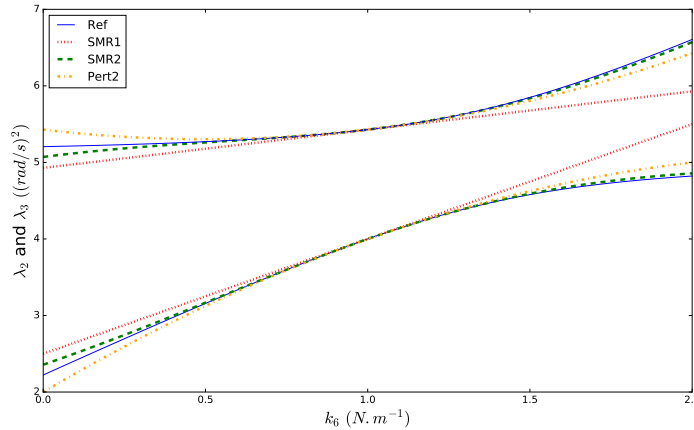


FIGURE 3.8 – Coupe des surfaces de réponse des valeurs propres 2 et 3 calculées avec la résolution exacte du problème (ref) et comparaison avec les surfaces estimées avec SMR1, SMR2 et la méthode de perturbation à l'ordre deux

SMR2 lorsque le facteur de proximité varie. La Figure 3.9 page 105 présente l'erreur sur l'estimation de l'espérance et de l'écart-type obtenue avec SMR1 et SMR2 relativement aux résultats de la simulation de Monte-Carlo. On observe que la qualité de l'estimation des moments statistiques diminue lorsque le facteur de proximité augmente. On peut ainsi identifier une valeur du facteur de proximité pour laquelle les valeurs propres aléatoires sont correctement estimées avec SMR1. Pour un facteur de proximité inférieur à 1, on constate que l'espérance des valeurs propres  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  est estimée avec une erreur inférieure 0.7 % et l'écart-type avec une erreur inférieure à 3 %. En imposant le même critère de qualité pour l'estimation avec SMR2, le facteur de proximité maximum pour lequel les moments statistiques des valeurs propres aléatoires sont correctement estimés vaut 1.5.

Le facteur de proximité est donc un bon indicateur de la qualité de l'estimation obtenue avec SMR1 et SMR2 et permet d'évaluer quand il est nécessaire de raffiner la méthode d'estimation des valeurs propres. On a vu ici que pour un critère de qualité fixé pour l'estimation des deux premiers moments statistiques des valeurs propres  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$ , si le facteur de proximité entre ces deux valeurs propres est supérieur à 1, il est nécessaire de recourir à SMR2 pour estimer les valeurs propres.

L'erreur sur l'estimation des premiers moments statistiques induit une certaine approximation du facteur de proximité lui même. Deux valeurs propres aléatoires peuvent être considérées proches lorsque la différence de leurs espérances est faible ou que leurs écarts-type sont importants. On propose alors d'étudier l'estimation du facteur de proximité obtenu avec SMR1 et SMR2 lorsque l'espérance et l'écart-type des valeurs propres aléatoires étudiées varient. Pour cela, on choisit de simuler le comportement du système à 3 *d.d.l.* pour différentes valeurs d'espérance et d'écart-type de la raideur aléatoire  $k_6$ . On choisit 10 valeurs d'espérance  $E[k_6]$  comprises entre 1.275 et 4, et 12 valeurs de coefficient de variation  $\delta[k_6] = \sigma[k_6]/E[k_6]$  comprises entre 0.05 et 0.3. La raideur aléatoire  $k_6(\theta)$  est assimilée à une variable aléatoire de loi Gamma. Pour chaque simulation, on prend

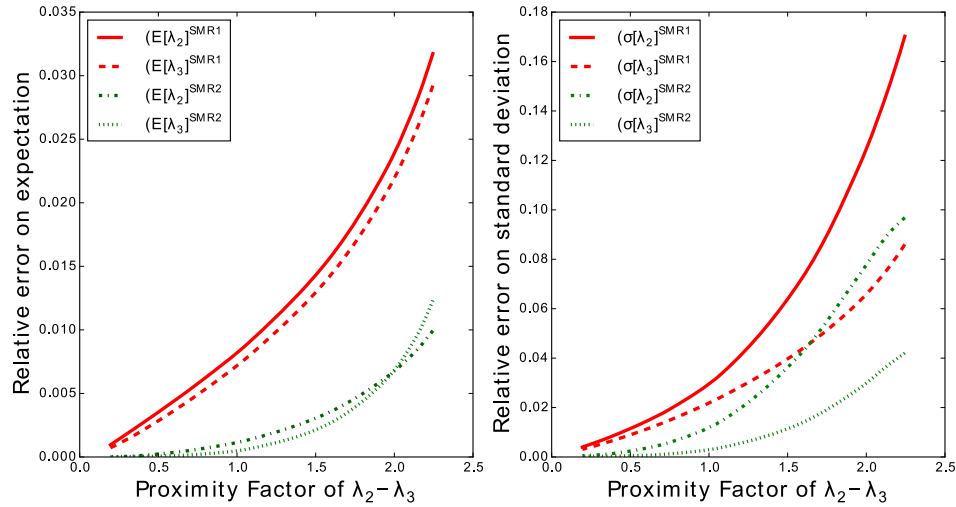


FIGURE 3.9 – Erreur relative sur l'estimation des premiers moments statistiques lorsque le facteur de proximité varie

comme référence la valeur du facteur de proximité obtenue à l'aide d'une simulation de Monte-Carlo à 30 000 tirages.

La Figure 3.10 page 106 présente la surface de réponse "exacte" du facteur de proximité (PF) obtenue par interpolation à partir des résultats de la simulation de Monte-Carlo (surface bleue  $PF_2^{exact}$ ). On constate que pour les valeurs du facteur de proximité inférieures à 1 et représentées par le plan rouge d'équation  $z = 1$ , l'estimation de PF avec SMR1 et SMR2 est très proche de la valeur de référence. Une représentation quantitative de l'erreur sur l'estimation de PF obtenue avec SMR1 et SMR2 est donnée Figure 3.11 page 106. La droite d'équation  $y = x$  représente la valeur limite  $PF = 1$  et une interpolation cubique a été utilisée pour représenter la tendance de l'erreur relative sur l'ensemble de la plage d'étude. Ce choix de représentation justifie le manque d'information dans la zone supérieure gauche des figures représentées. Comme espéré, on constate que le facteur de proximité est moins bien estimé pour les valeurs supérieures à  $PF = 1$ . Cependant, l'objectif de cet indicateur est d'identifier le domaine de validité des estimations obtenues avec SMR1 et SMR2. En d'autres termes, cet indicateur a pour but d'identifier avec une certaine précision la valeur limite de PF au dessus de laquelle la méthode utilisée pour estimer les valeurs propres aléatoires doit être raffinée. On peut constater que l'erreur sur l'estimation de la valeur limite  $PF = 1$  obtenue avec SMR1 est inférieure à 10%. On peut donc considérer que l'estimation de PF avec SMR1 est suffisante pour identifier quand passer de SMR1 à SMR2. De même, on peut envisager d'utiliser cet indicateur pour évaluer pour quelle configuration de valeurs propres aléatoires SMR2 ne sera plus suffisant, par exemple pour des valeurs de  $PF$  supérieures à  $PF = 1.5$ .

**Discussion :** Par définition, l'estimation de PF est plus sensible à la proximité des valeurs propres aléatoires que l'estimation des deux premiers moments statistiques eux-mêmes.

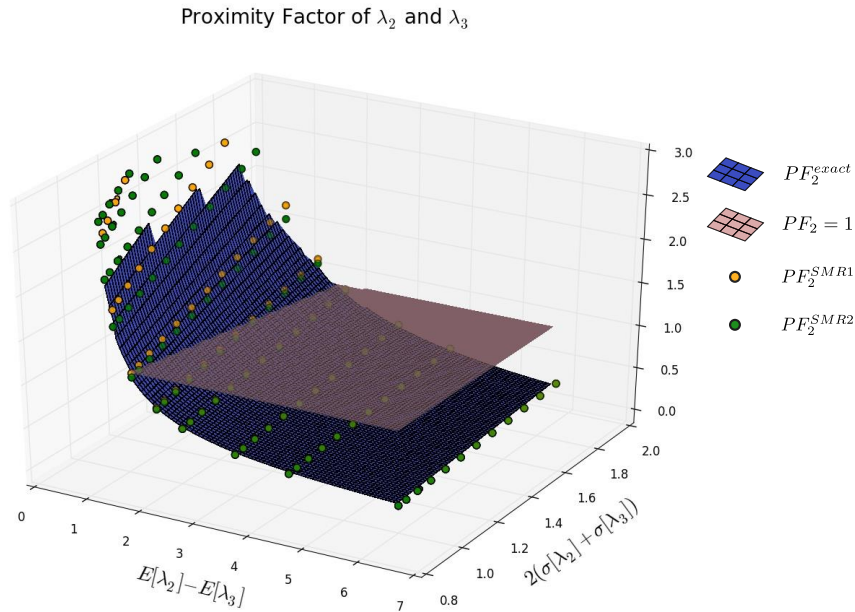


FIGURE 3.10 – Estimation du facteur de proximité lorsque  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  se rapprochent

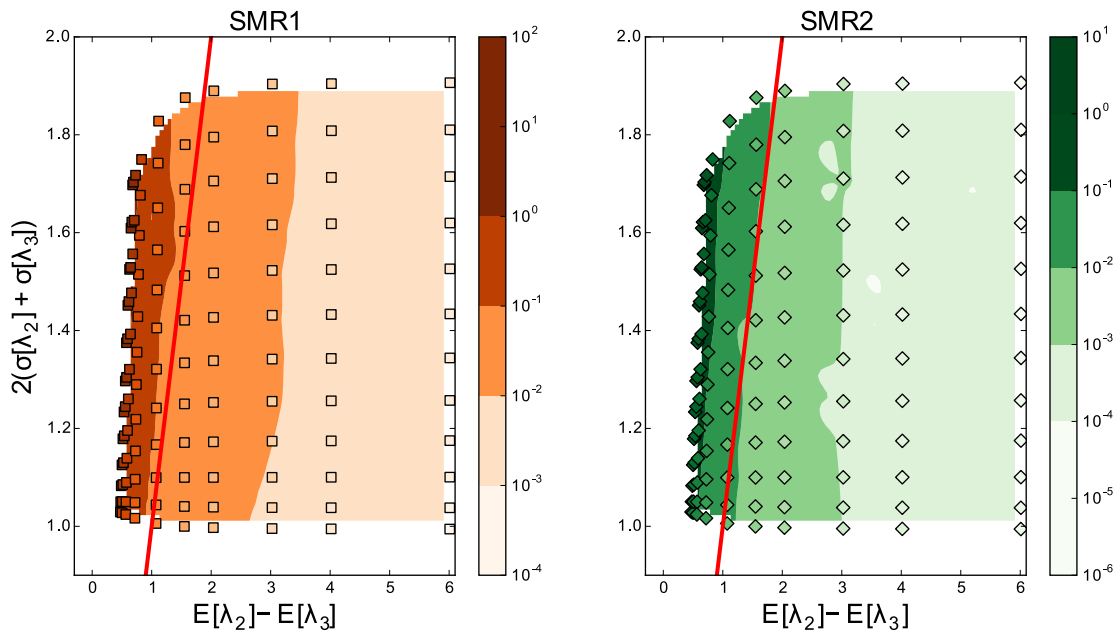


FIGURE 3.11 – Erreur relative sur l'estimation du facteur de proximité obtenu avec SMR1 et SMR2

Cependant, cette sensibilité n'est pas critique dans le sens où l'objectif du facteur de proximité est d'identifier quel niveau de raffinement est le mieux adapté à l'estimation des moments statistiques. Considérons le cas SMR1 et notamment l'estimation de la valeur limite du facteur de proximité  $PF = 1$ . Cette valeur limite, matérialisée par la droite rouge d'équation  $y = x$  sur la Figure 3.11 page 106, est estimée avec une erreur proche de 8% alors que les espérances et écarts-types correspondants sont estimés avec une erreur respective inférieure à 0.8% et 3%. Ainsi, bien que le facteur de proximité soit relativement mal estimé, l'erreur sur l'estimation des premiers moments statistiques est acceptable. Cette remarque reste valable pour SMR2. Afin d'assurer une meilleure estimation du facteur de proximité, la valeur limite à partir de laquelle la méthode doit être raffinée peut être diminuée. Cela revient à diminuer la pente de la droite rouge sur la Figure 3.11 page 106. Cependant, le nombre de valeurs propres aléatoires considérées comme proches augmentera et avec lui le coût en temps de calcul nécessaire à l'estimation de l'ensemble des valeurs propres aléatoires recherchées. Le choix de la valeur limite du facteur de proximité joue donc un rôle clé dans le rapport précision-temps de calcul de l'approche SMR. Diminuer la valeur limite du facteur de proximité permet d'améliorer la qualité de l'estimation en raffinant la méthode utilisée pour estimer les vecteurs propres aléatoires pour un plus grand nombre de valeurs propres aléatoires mais cela nécessite un investissement en temps de calcul plus important.

### 3.3.2 Une structure simple modélisée par éléments finis : un portique

Le second exemple abordé ici est une structure constituée de plusieurs sous-structures dont les caractéristiques matériaux, notamment les modules d'Young de chaque sous-structure, peuvent être considérées comme variant aléatoirement. On choisit une structure académique simple jugée représentative des structures assemblées dites légères : un portique. Cette structure est modélisée par éléments finis et présente l'avantage d'apporter un support illustratif du fonctionnement de l'approche SMR.

#### 3.3.2.1 Modélisation stochastique du portique

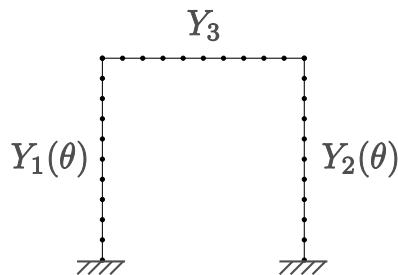


FIGURE 3.12 – Définition du portique

Le portique étudié, présenté Figure 3.12 page 107, est constitué de trois poutres assemblées entre elles à leurs extrémités. Les modules d'Young des deux poutres verticales sont supposés varier aléatoirement et sont modélisés par des variables aléatoires indépendantes,

notées  $Y_1(\theta)$  et  $Y_2(\theta)$ , de valeur nominale  $\overline{Y_1} = \overline{Y_2} = 75$  GPa. Le module d'Young de la poutre horizontale, noté  $Y_3$ , est supposé déterministe et vaut  $Y_3 = 20$  GPa. Les propriétés géométriques des trois poutres sont supposées identiques et définies de la manière suivante : longueur 250 mm, largeur 10 mm et épaisseur 1 mm. Leurs masses volumiques sont supposées identiques et égales à  $\rho = 2800$  kg m<sup>-3</sup>. Le portique est modélisé par éléments finis à l'aide de 30 éléments poutres à 3 *d.d.l* par noeuds. La base du portique est encastree. Le système complet est ainsi constitué de 87 *d.d.l*.

Les deux paramètres aléatoires  $Y_1(\theta)$  et  $Y_2(\theta)$  sont modélisés par des variables aléatoires indépendantes suivant des lois Gamma. Leurs deux premiers moments statistiques sont définis tels que  $E[Y_1] = E[Y_2] = 75$  GPa et  $\sigma[Y_1] = \sigma[Y_2] = 5$  GPa (soit un coefficient de variation  $\delta = \sigma[Y_i]/E[Y_i] = 1/15$ ), ce qui correspond à une faible variabilité des modules d'Young. Une simulation de Monte-Carlo à 30 000 tirages permet alors d'approximer les *pdf* de chaque variable aléatoire d'intérêt. Les résultats, issus de cette simulation, seront alors pris comme référence pour la suite de cette étude et seront comparés aux résultats issus de l'approche SMR.

### 3.3.2.2 Illustration "visuelle" de l'hypothèse fondatrice de l'approche SMR

La simulation de Monte-Carlo mise en place sur le portique défini précédemment permet de représenter les densités marginales des cinq premières valeurs propres aléatoires du portique. La Figure 3.13 page 109 présente les densités marginales des fréquences propres aléatoires du portique en vis-à-vis desquelles sont représentées les formes propres associées aux différents tirages. On observe que pour les 1<sup>re</sup>, 2<sup>e</sup> et 5<sup>e</sup> fréquences propres aléatoires, les formes propres associées ne varient quasiment pas alors que pour les 3<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> fréquences propres, la variabilité des vecteurs propres est importante. Cela illustre l'hypothèse fondatrice de l'approche SMR suivant laquelle certains vecteurs propres peuvent être considérés comme étant déterministes alors que d'autres nécessitent de tenir compte de leur variabilité. Le comportement des modes 3 et 4 peut dès lors être rapproché de la configuration des fréquences propres aléatoires associées. En effet, en traçant les densités marginales de chacune des fréquences propres aléatoires sur un même axe, on constaterait que les densités marginales des 3<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> fréquences propres se chevaucheraient alors que celles des autres fréquences propres resteraient bien séparées.

### 3.3.2.3 Estimation des cinq premières valeurs propres aléatoires du portique

On s'intéresse désormais à l'estimation des cinq premières fréquences propres aléatoires du portique obtenues avec SMR1 et SMR2. La Figure 3.14 page 110 présente les densités marginales de ces fréquences propres estimées avec SMR1 et SMR2. On constate que pour les fréquences propres bien distinctes les unes des autres, les densités marginales estimées avec SMR1 et SMR2 correspondent parfaitement avec les densités marginales de référence. Dans le cas de fréquences propres proches, les densités marginales ne sont pas correctement estimées avec SMR1 alors que SMR2 reste en accord avec les résultats de référence.

Les Figures 3.15 page 111 et 3.16 page 111 présentent les erreurs relatives sur l'estimation des deux premiers moments statistiques des cinq premières fréquences propres

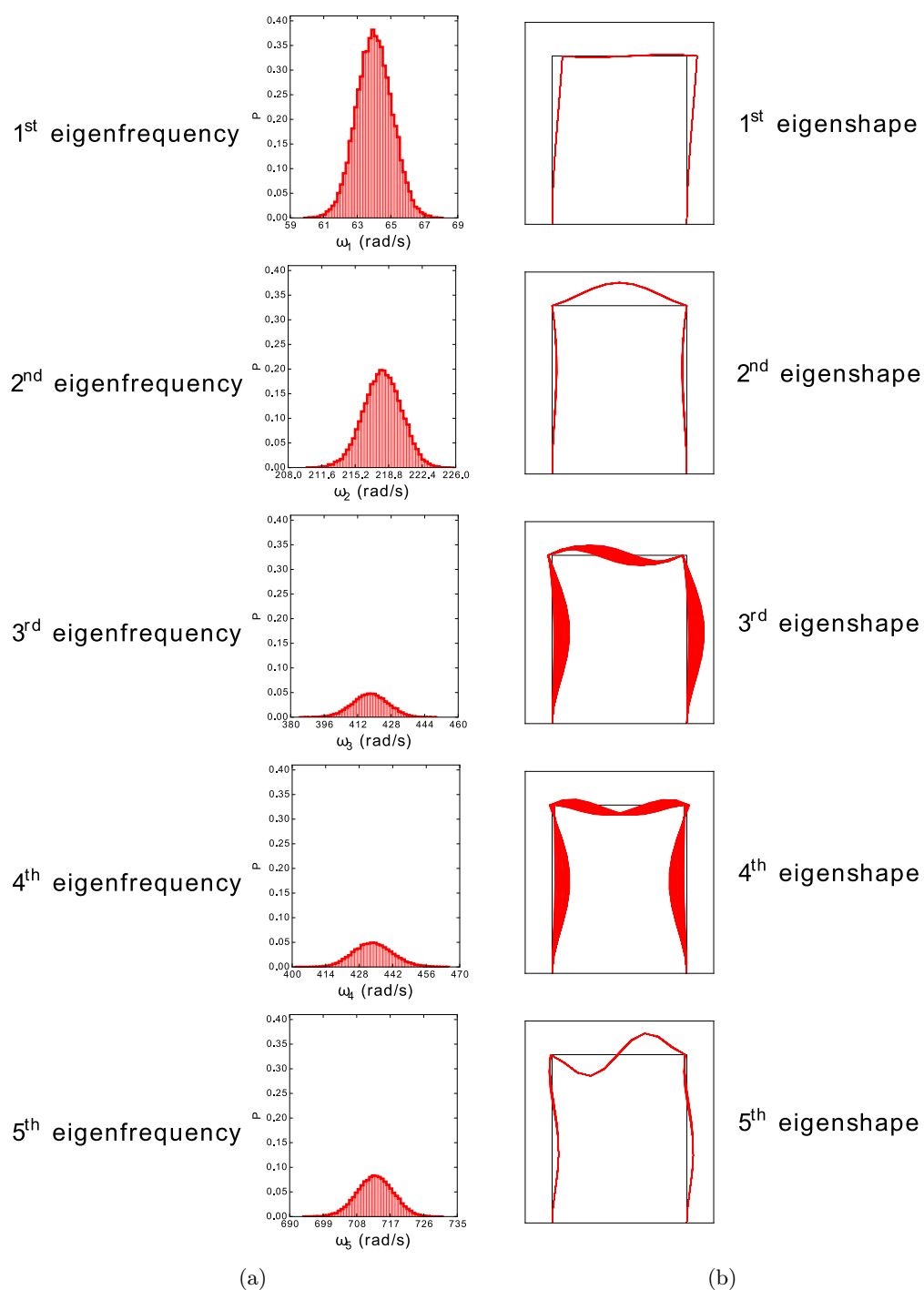


FIGURE 3.13 – Densités marginales des 5 premières fréquences propres aléatoires du portique (a) et formes propres correspondantes (b)

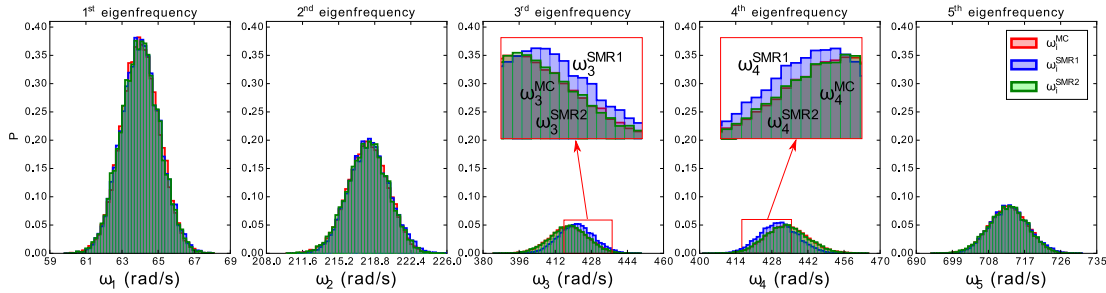


FIGURE 3.14 – Densités marginales des cinq premières fréquences propres du portique estimées avec SMR1 et SMR2

aléatoires du portique lorsque celles-ci sont estimées avec SMR1 et SMR2. A titre de comparaison, les erreurs correspondant à une estimation des fréquences propres à l'aide d'une méthode de perturbation à l'ordre deux classique sont également présentées sur ces figures. On observe que, pour le cas des trois fréquences propres bien distinctes les unes des autres ( $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $\omega_5$ ), les deux premiers moments statistiques sont estimés avec une erreur inférieure à 0.5 %. Comme on pouvait s'y attendre, l'erreur est plus faible lorsque les fréquences propres sont estimées avec SMR2 mais il semble superflu de mettre en place une méthode plus coûteuse en temps de calcul alors que la qualité des résultats obtenus avec SMR1 est largement suffisante. Le tableau présenté en dessous de chacun des diagrammes d'erreur illustre l'estimation du facteur de proximité obtenu à partir des moments statistiques obtenus respectivement avec SMR1 et SMR2 ainsi que la valeur du facteur de proximité de référence obtenu à partir des résultats de la simulation de Monte-Carlo. Le facteur de proximité étant relatif à deux valeurs propres consécutives, la cellule du tableau située entre la première et la deuxième fréquence propre représente donc le facteur de proximité entre ces deux fréquences propres. Il en va de même pour le reste des fréquences propres. La couleur de la cellule indique la position du facteur de proximité par rapport à la valeur limite  $PF = 1$ . Une cellule violette correspond alors à un facteur de proximité inférieur à  $PF = 1$  et la couleur orange indique un facteur de proximité au dessus de cette limite. Une cellule orange indique donc que l'estimation des fréquences propres correspondantes avec SMR1 n'est pas suffisante et qu'il est nécessaire d'utiliser le second niveau de raffinement SMR2. On constate que le facteur de proximité identifie correctement les deux fréquences propres pour lesquelles il est nécessaire d'utiliser SMR2.

### 3.3.2.4 Estimation des 25 premières valeurs propres du portique

Le cas du portique permet, à la différence du système à trois *d.d.l* étudié précédemment, d'étudier le comportement de l'approche SMR pour des fréquences propres plus élevées. Les Figure 3.17 page 113 et 3.18 page 113 présentent la qualité des estimations des 25 premières fréquences propres aléatoires du portique. On peut constater que l'espérance est estimée pour l'ensemble des fréquences propres avec une erreur inférieure à 1.5 % avec SMR1 et inférieure à 1.1 % avec SMR2. Pour l'écart-type, l'erreur maximale est inférieure

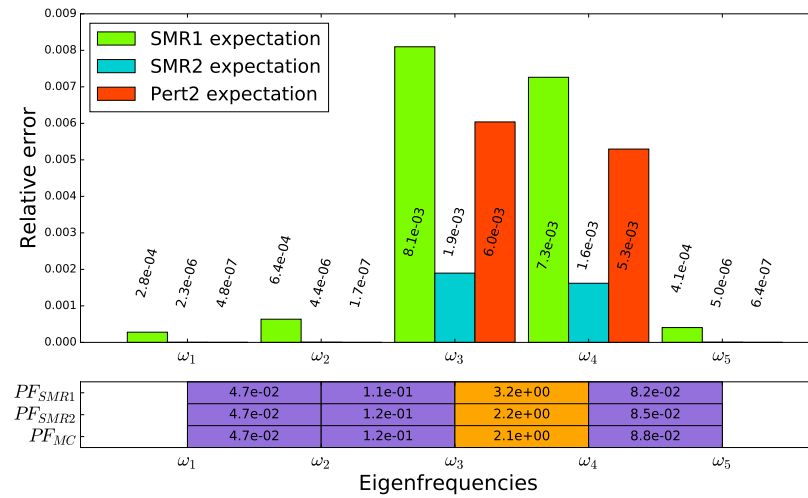


FIGURE 3.15 – Erreur relative sur l'estimation de l'espérance obtenue avec SMR1, SMR2 et une méthode de perturbation à l'ordre deux

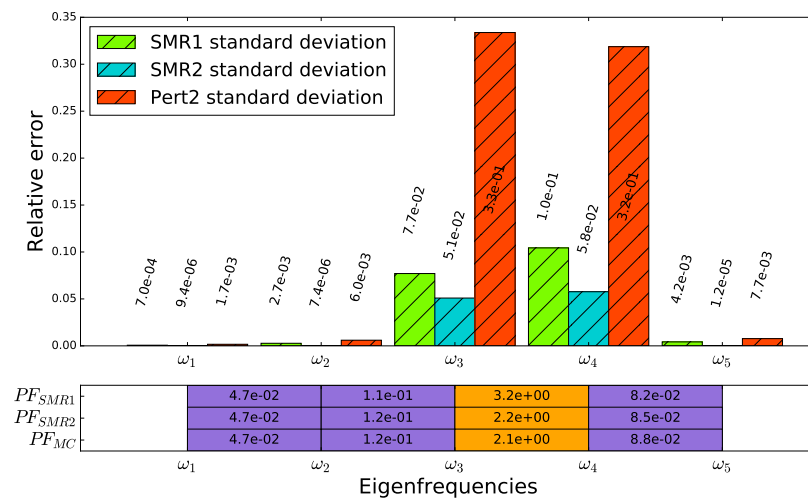


FIGURE 3.16 – Erreur relative sur l'estimation de l'écart-type obtenue avec SMR1, SMR2 et une méthode de perturbation à l'ordre deux



à 20 % avec SMR1 et inférieure à 14 % avec SMR2 pour l'ensemble des fréquences propres étudiées. D'un point de vue global, l'erreur relative augmente avec la fréquence.

On propose d'analyser plus en détail certaines valeurs propres aléatoires du portique :

- Concernant les 6<sup>e</sup> et 19<sup>e</sup> fréquences propres aléatoires du portique, on constate que les premiers moments statistiques de ces fréquences propres sont moins bien estimés avec SMR1 qu'avec SMR2. L'erreur sur l'estimation de l'espérance de la 6<sup>e</sup> fréquence propre passe de 0.3 % avec SMR1 à 0.03 % avec SMR2 soit un gain de 95 % en terme de précision d'estimation. Pour la 19<sup>e</sup> fréquence propre le gain sur la précision de l'estimation de l'écart-type est de 75 % en passant de SMR1 à SMR2. Le point commun à ces deux fréquences propres est que leur facteur de proximité est inférieur à 1, ce qui indique que SMR1 reste suffisant pour estimer ces fréquences propres et contredit les observations précédentes. La valeur limite du facteur de proximité initialement choisie à  $PF = 1$  peut donc être remise en cause. La Figure 3.19 page 114 illustre le nombre de fréquences propres considérées comme proches en fonction de la valeur du facteur de proximité choisi. Pour une valeur limite du facteur de proximité  $PF = 1$ , on identifie 13 fréquences propres considérées comme proches pour lesquelles SMR1 n'est plus suffisant. Pour une valeur limite du facteur de proximité  $PF = 0.5$ , 16 fréquences propres, dont  $\omega_6$  et  $\omega_{19}$  sont identifiées comme étant proches. Ces observations confirment le rôle clé du choix de la valeur limite du facteur de proximité.
- Les fréquences propres 10 et 11 ont la particularité d'avoir une indication du facteur de proximité différente suivant que celui-ci soit évalué avec SMR1, SMR2 ou avec la simulation de Monte-Carlo. Cela s'explique par une valeur du facteur de proximité très légèrement inférieure à 1. Dans le cas de l'estimation avec SMR1, le facteur de proximité indique une nécessité de raffiner la méthode utilisée alors que le facteur de proximité de référence (calculé à partir de la simulation de Monte-Carlo) aurait validé une estimation moins précise de ces fréquences propres. Ce cas particulier peut être vu aussi bien comme un avantage qu'un inconvénient suivant le point-de-vue pris par le concepteur. En effet, la précision de l'estimation est améliorée par le raffinement de la méthode utilisée mais cela induit une augmentation du coût en temps de calcul pour un gain de précision relativement faible. Le critère choisit pour évaluer quelle méthode doit être mise en place est un critère "tout-ou-rien" alors que le caractère proche de deux valeurs propres est une notion plus floue. A nouveau, la valeur limite du facteur de proximité doit être choisie avec une attention toute particulière suivant les objectifs de conception choisis.
- Le dernier cas étudié ici est celui des 23<sup>e</sup> et 24<sup>e</sup> fréquences propres. On constate qu'aucun des moments statistiques n'est estimé avec une erreur inférieure à 10 %, que ce soit avec SMR1 ou avec SMR2. Cela peut s'expliquer par la proximité de ces deux fréquences propres aléatoires. En effet, si l'on s'intéresse à la valeur du facteur de proximité correspondant à ce jeux de fréquences propres, on constate que celle-ci est très grande devant la valeur limite  $PF = 1$ . Les hypothèses sur lesquelles sont basées SMR1 et SMR2 ne sont donc plus valides et la variabilité des vecteurs propres aléatoires associés à ces fréquences propres n'est plus correctement modélisée. Pour ce couple de fréquences propres aléatoires, il semble approprié d'estimer les vecteurs propres aléatoires associés à l'aide d'une autre méthode. On pourrait par exemple

utiliser un développement sur la base du Chaos Polynomial [GHANEM et GHOSH 2007].

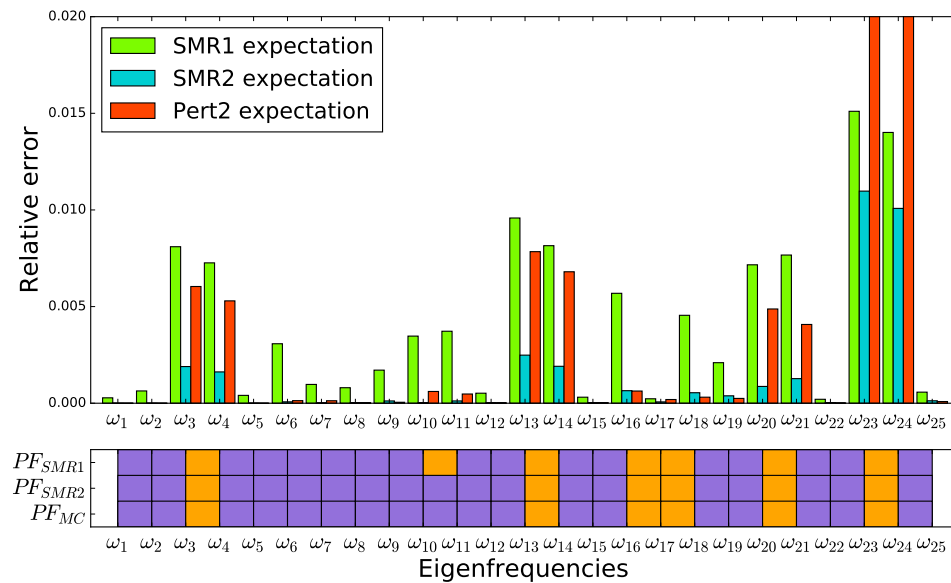


FIGURE 3.17 – Erreur relative sur l'estimation de l'espérance des 25 premières fréquences propres du portique

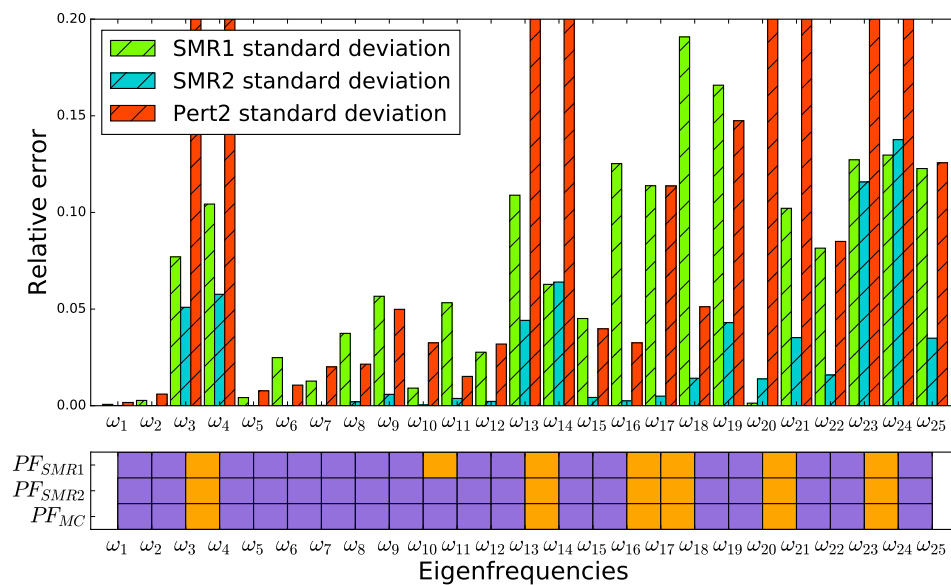


FIGURE 3.18 – Erreur relative sur l'estimation de l'écart-type des 25 premières fréquences propres du portique

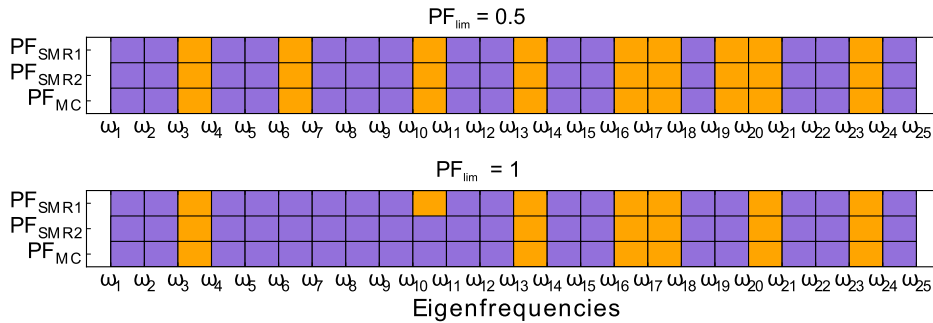


FIGURE 3.19 – Influence de la valeur limite du facteur de proximité sur le nombre de valeurs propres pour lesquelles la méthode de calcul utilisée doit être raffinée.

### 3.3.3 Une structure industrielle : l’Adaptateur Charge Utile d’Ariane

Le dernier exemple de ce chapitre est l’occasion d’appliquer l’approche SMR au cas d’une structure réelle modélisée par éléments finis à l’aide d’un code commercial. On choisit d’étudier le cas de l’Adaptateur Charge Utile d’Ariane 5. Ariane 5 est un lanceur lourd capable de transférer jusqu’à deux charges utiles en orbite géostationnaire. Les charges utiles sont localisées sous la coiffe et positionnées l’une en dessous de l’autre. Chaque charge est arrimée à une structure intermédiaire appelée Adaptateur Charge Utile (ACU) qui assure l’interface avec le lanceur. La Figure 3.20 page 115 illustre le lanceur Ariane 5 ainsi qu’un modèle d’ACU. Il existe différents types d’ACU dépendant des profils de mission du lanceur. On choisit ici d’étudier le cas de l’ACU 1666MVS [*Ariane 5, User’s Manual 2011*].

Comme évoqué précédemment, l’objectif de cet exemple est d’appliquer l’approche SMR au cas d’une structure réelle modélisée à l’aide d’un logiciel éléments finis commercial. On choisit de travailler avec le logiciel MSC Nastran. L’approche SMR a été implémentée en langage python et la librairie libre pyNastran, développée par Steeve Doyle [*pyNastran*], permet d’exploiter simplement les données issues de Nastran. La Figure 3.21 page 115 présente l’implémentation de l’approche SMR couplée avec Nastran. La modélisation stochastique des paramètres aléatoires de la structure a été implémentée à l’aide de la librairie libre OpenTURNS [*OpenTURNS*] également disponible sous python.

#### 3.3.3.1 Modélisation stochastique

L’ACU 1666MVS est une structure conique constituée d’une interface supérieure compatible avec la charge utile et d’une interface inférieure boulonnée compatible avec le lanceur. Un schéma de l’architecture de l’ACU est proposé Figure 3.22.a page 117. Le cône inférieur est en matériaux composite. On suppose pour cette application qu’il s’agit d’un matériaux composite de type carbone-epoxy de module d’Young isotrope homogénéisé. Sa valeur nominale est prise égale à  $\bar{Y}_{Composite} = 350\,000$  MPa. Son coefficient de Poisson est fixé à 0.28 et sa densité à  $1590$  kg m<sup>-3</sup>. Le cône supérieur est une pièce monolithique en aluminium. On suppose que son module d’Young nominal vaut  $\bar{Y}_{Alu} = 70\,000$  MPa, son coefficient de Poisson est pris égal à 0.3 et sa densité est fixée à  $2800$  kg m<sup>-3</sup>. Un anneau en



FIGURE 3.20 – Illustration du Lanceur Ariane 5 et de l'un de ses Adaptateur Charge Utile [*Ariane 5, User's Manual 2011*]

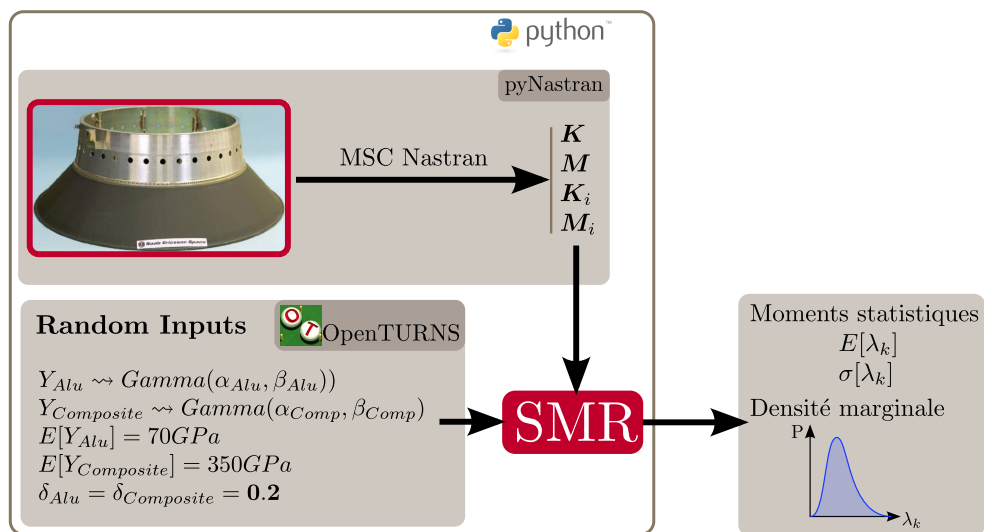


FIGURE 3.21 – Implémentation de l'approche SMR couplée avec le logiciel éléments finis MSC Nastran

aluminium est inclus comme élément de structure du cône inférieur en composite. Un second anneau métallique constitue l'interface boulonnée du cône en composite. On suppose que ces anneaux ont les mêmes caractéristiques matériaux que le cône supérieur.

Afin d'étudier le comportement vibratoire de l'ACU lorsque ses paramètres matériaux varient aléatoirement, on suppose dans un premier temps que les modules d'Young des deux matériaux sont des variables aléatoires indépendantes de distribution Gamma. Leur espérance et écart-type respectifs sont définis tels que  $E[Y_{Composite}] = \bar{Y}_{Composite} = 350\,000$  MPa,  $E[Y_{Alu}] = \bar{Y}_{Alu} = 70\,000$  MPa,  $\delta[Y_{Composite}] = \delta[Y_{Alu}] = 0.20$ .

L'ACU est une structure axisymétrique, par conséquent, l'ensemble de ses modes propres sont des modes doubles. Dans le cadre de l'approche SMR, on se limite au cas de modes propres simples plus ou moins proches les uns des autres. L'approche pourrait être adaptée au cas de modes multiples mais ce cas n'a pas été étudié et validé et sort par conséquent du cadre de ce travail. On propose donc de disymétriser l'ACU en lui appliquant des conditions aux limites non symétriques. L'ACU 1666MVS est fixé au lanceur par le biais de 72 liaisons boulonnées régulièrement espacées sur le contour de l'anneau inférieur. On choisit de désolidariser certaines portions angulaires de l'interface boulonnée. Ce choix peut être interprété comme un défaut de conditions aux limites dû à une rupture de liaison ou un assemblage défectueux. Afin de choisir les portions angulaires libres, on se donne comme critère qu'au moins les dix premiers modes de l'ACU soient des modes simples. Une rapide étude préliminaire permet d'identifier que, dans le cas d'une seule portion angulaire libre d'ouverture  $\pi/6$  rad, les sept premiers modes de l'ACU sont clairement identifiés comme étant des modes simples. Pour obtenir un minimum de dix modes simples, on choisit une configuration pour laquelle trois portions d'encastrement sont désormais libres. Deux petites portions d'angle  $\pi/6$  rad espacées d'un angle de  $\pi/2$  rad et une portion plus large d'angle  $\pi/3$  rad espacée de  $\pi/6$  rad de l'une des petites portions. Cette configuration est illustrée sur la Figure 3.22.b page 117. Avec cette configuration, un calcul déterministe permet de montrer que le premier mode double est le 12<sup>e</sup> mode de l'ACU.

L'analyse éléments finis de l'ACU a été réalisée avec le logiciel commercial MSC Nastran. L'ACU a été modélisé à l'aide d'éléments coques et on choisit de limiter le modèle à 20 000 *d.d.l* afin d'éviter des coûts de calcul rédhibitoires. Une simulation de Monte-Carlo à 10 000 tirages permet de déterminer les *pdf* des dix premières fréquences propres aléatoires de l'ACU. Elle sera prise comme référence afin d'évaluer la qualité des estimations réalisées avec l'approche SMR. Cette simulation a été réalisée à l'aide d'un ordinateur équipé d'un processeur quatre-coeurs Intel<sup>®</sup> Xeon<sup>®</sup> CPU E5507 - 2.27 GHz et disposant de 16 Gb de mémoire vive DDR3-1066. La durée totale de la simulation de Monte-Carlo sur cette machine est d'environ **16 heures**.

### 3.3.3.2 Résultats numériques

Les dix premières fréquences propres de l'ACU ont été estimées avec SMR1 et SMR2 ainsi qu'avec une méthode classique de perturbation à l'ordre deux. Les Figures 3.23 et 3.24 présentent les erreurs relatives sur l'estimation des deux premiers moments statistiques obtenus avec les trois méthodes étudiées. Le tableau situé sous les diagrammes d'erreur présente, sous forme de code couleur, la position du facteur de proximité par rapport à

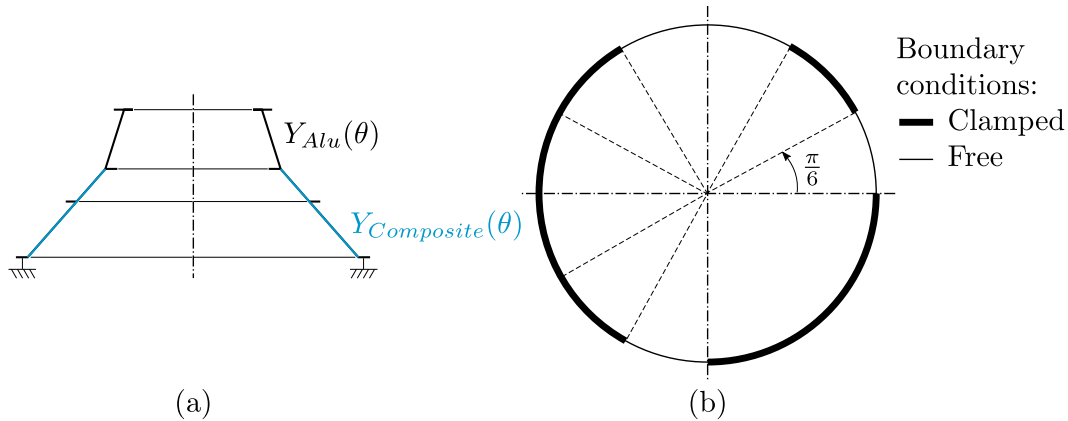


FIGURE 3.22 – Définition de l'ACU 1666MVS d'Ariane 5. (a) Vue de coupe de l'ACU PAS 1666MVS. (b) Définition des conditions d'encastrement du cône inférieur.

la valeur limite  $PF = 1$ . Les cellules violettes indiquent un facteur de proximité inférieur à 1 ce qui signifie que pour les fréquences propres correspondantes, SMR1 est suffisant. Les cellules oranges correspondent aux facteurs de proximité au dessus de la valeur limite  $PF = 1$  et indiquent donc la nécessité d'utiliser SMR2 plutôt que SMR1.

En n'utilisant que le premier niveau de raffinement de l'approche SMR, l'espérance et l'écart-type des dix premières fréquences propres aléatoires de l'ACU sont estimés avec une erreur maximale respectivement de 3.0% et 12%. Le temps de calcul nécessaire à l'obtention de ces grandeurs, sur la même machine que celle utilisée pour le simulation de Monte-Carlo de référence, est **inférieur à la minute**. Avec le second niveau de raffinement SMR2, l'erreur sur l'estimation de l'espérance et de l'écart-type est réduite à 1.6% et 9.2% et ce avec un temps de calcul **inférieur à 18 minutes** pour le calcul de l'ensemble des fréquences propres aléatoires considérées. On peut constater sur les Figures 3.23 et 3.24 que la méthode de perturbation à l'ordre deux est à nouveau moins performante que SMR2 pour estimer l'écart-type des fréquences propres aléatoires étudiées. Concernant l'estimation de l'espérance, la méthode de perturbation constitue pour certaines fréquences propres une meilleure estimation que SMR2. Cependant pour ces fréquences propres, l'estimation obtenue avec SMR2 reste entièrement satisfaisante. Les "mauvaises" performances de la méthode de perturbation, notamment concernant l'estimation de l'écart-type, s'expliquent par le niveau de variabilité des paramètres aléatoires de la structure. En effet, le coefficient de variation des différents modules d'Young est de  $\delta = 0.20$  et les méthodes de perturbation sont réputées être limitées aux cas de coefficients de variations inférieurs à 0.20%. Le cas traité ici est donc à la limite du domaine de validité des méthodes de perturbation. L'approche SMR permet donc de traiter des cas de variabilité plus important que les méthodes de perturbation classiques.

L'un des principes de l'approche SMR est de minimiser l'investissement en temps de calcul en utilisant le second niveau de raffinement de l'approche uniquement lorsque cela est nécessaire. Pour le cas de l'ACU, on constate que le facteur de proximité indique la nécessité d'utiliser SMR2 pour la quasi-totalité des fréquences propres aléatoires recherchées. Cependant, pour les fréquences propres  $\omega_3, \omega_4$  et  $\omega_8$ , le recourt à SMR2 ne semble

pas nécessaire. Le facteur de proximité semble donc indiquer un faux-positif qui peut aller à l'encontre de l'objectif de minimisation du temps de calcul. Une solution pour palier à ce défaut du facteur de proximité serait de définir un autre critère permettant d'identifier quand raffiner la méthode utilisée. Une solution consisterait, en s'inspirant des travaux de Perkins et Mote [PERKINS et MOTE 1986] et Du Bois et al. [DU BOIS, ADHIKARI et LIEVEN 2011], à définir un critère basé sur la courbure des surfaces que constituent les lieux des valeurs propres. L'objectif étant d'identifier quand ces surfaces sont suffisamment planes pour être approchées par SMR1.

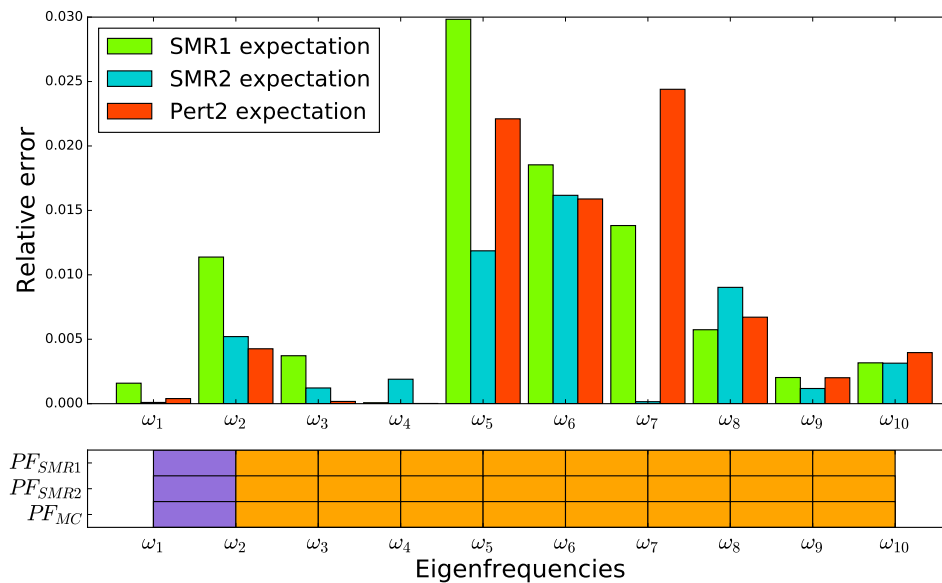


FIGURE 3.23 – Erreur relative sur l'estimation de l'espérance des 10 premières fréquences propres aléatoires de l'ACU

## 3.4 Conclusion

### 3.4.1 Validation de l'approche SMR

Ce chapitre a permis de définir une nouvelle approche permettant d'estimer les fréquences propres aléatoires d'une structure dont les paramètres de raideur varient aléatoirement. Cette approche intitulée approche SMR pour Réduction de Modèle Stochastique (*Stochastic Model Reduction* en anglais) ne nécessite qu'un nombre extrêmement réduit de calculs éléments finis comparé aux méthodes statistiques couramment utilisées pour caractériser les espaces propres aléatoires d'une structure. Son principal avantage est d'être non-intrusive, ce qui permet de la coupler à n'importe quel code éléments finis commercial.

L'approche SMR est basée sur l'hypothèse suivant laquelle, au voisinage d'un mode donné, le comportement dynamique d'une structure est principalement caractérisé par les propriétés modales du mode considéré dès lors que les autres fréquences propres de la

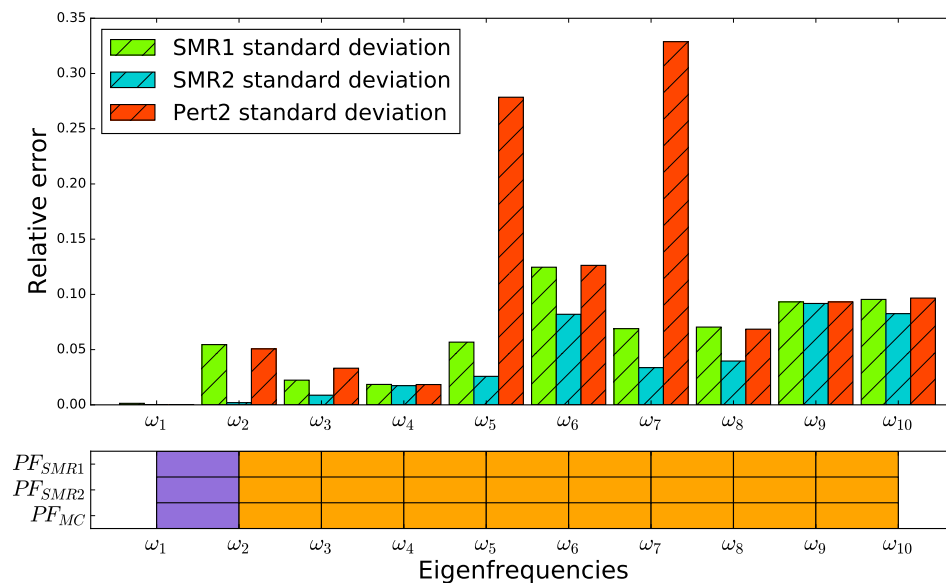


FIGURE 3.24 – Erreur relative sur l’estimation de l’écart-type des 10 premières fréquences propres aléatoires de l’ACU

structure sont suffisamment éloignées. Cette hypothèse permet de considérer les vecteurs propres du problème comme étant quasi-déterministes en première approximation. Dès lors que les fréquences propres de la structure deviennent proches, cette hypothèse doit être remise en cause car le système devient alors plus couplé. On propose alors de raffiner la méthode en tenant compte de la variabilité des vecteurs propres à l’aide d’un développement de Taylor au premier ordre. Le point clé de l’approche réside dans l’identification de la méthode à utiliser pour estimer une fréquence propre aléatoire en fonction de sa configuration. Pour cela, un premier indicateur appelé Facteur de Proximité a été proposé. Basé sur les premiers moments statistiques des fréquences propres aléatoires, cet indicateur ne représente aucun coût de calcul supplémentaire. L’efficacité de l’approche SMR en terme de rapport précision - temps de calcul est alors directement liée au choix de la valeur limite de cet indicateur à partir de laquelle la méthode utilisée pour estimer les fréquences propres aléatoires de la structure doit être raffinée. Le choix de cette valeur limite dépend alors de l’appréciation du concepteur.

Trois cas d’étude ont été traités afin de tester les performances de l’approche proposée. Dans un premier temps, un système à trois degrés de liberté a permis de valider l’approche SMR. Ce système simple a également permis de caractériser le comportement du Facteur de Proximité et sa capacité à identifier quand passer du premier niveau de raffinement de l’approche (SMR1) au second plus précis mais également plus coûteux (SMR2). Avec le second exemple, un portique dont les modules d’Young varient aléatoirement, l’approche SMR a pu être testée sur une large gamme de fréquences propres aléatoires. Les hypothèses fondatrices de l’approche SMR ont notamment pu être mises en évidence visuellement grâce au caractère didactique de cet exemple. La capacité du facteur de proximité a été validée



sur un grand nombre de configuration de fréquence propres. Finalement, l'approche SMR a été appliquée au cas d'une structure industrielle : l'Adaptateur Charge Utile d'Ariane 5. Modélisée par éléments finis à l'aide d'un logiciel commercial, cette structure a permis d'illustrer le caractère non-intrusif de l'approche ainsi que le gain en temps de calcul comparé à une simulation de Monte-Carlo. Les moments statistiques des dix premières fréquences propres de l'ACU ont ainsi pu être correctement estimés avec une **réduction du temps de calcul de 16 heures à 18 minutes** (soit une réduction du temps de calcul de 98 %).

On peut donc conclure que le rapport précision - temps de calcul de l'approche SMR en fait une approche particulièrement efficace en prédimensionnement. Le facteur de proximité, permettant d'adapter la méthode utilisée à chaque fréquence propre, joue un rôle clé dans l'efficacité de l'approche. Une attention toute particulière doit être apportée au choix de la valeur limite du facteur de proximité en fonction du compromis précision - temps de calcul imposé par le concepteur.

### 3.4.2 Application au cas d'un portique dont les paramètres aléatoires influent localement

Les exemples traités dans ce chapitre afin de valider l'approche SMR considèrent tous des variables aléatoires ayant une influence globale sur le comportement des structures étudiées. L'approche SMR sera appliquée au chapitre suivant au cas de structures assemblées afin de tenir compte de la variabilité des paramètres de liaison sur le comportement vibratoire de ces structures. Comme évoqué dans les chapitres précédents, les liaisons d'une structure assemblée ont une influence relativement locale. Se pose alors la question de la validité de l'approche SMR dans le cas où les variables aléatoires considérées ont une influence locale sur le comportement de la structure. L'objet de ce paragraphe est alors de valider l'approche SMR dans le cas de variables aléatoires agissant localement.

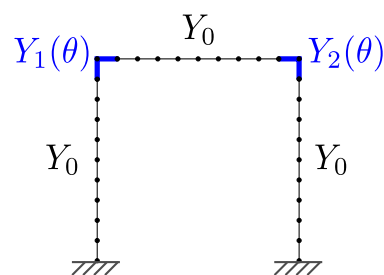


FIGURE 3.25 – Définition du modèle éléments finis du portique avec variables aléatoires localisés

La structure étudiée est un portique dont les coins sont supposés de raideur variable. Le modèle éléments finis utilisé pour cette application est similaire au modèle utilisé partie 3.3.2. Les propriétés géométriques des trois poutres sont reprises de cet exemple et sont rappelées ici : longueur 250 mm, largeur 10 mm et épaisseur 1 mm. Leurs masses volumiques sont supposées identiques et égales à  $\rho = 2800 \text{ kg m}^{-3}$ . Le portique est modélisé par éléments finis à l'aide de 30 éléments poutres et 3 *d.d.l* par noeuds. L'ensemble des

éléments poutres du portique sont définis comme ayant un module d'Young déterministe égal à  $Y_0 = 75 \cdot 10^9 \text{Pa}$  à l'exception des éléments situés dans les angles. Les modules d'Young appliqués à ces éléments sont modélisés par des variables aléatoires indépendantes suivant des distributions Gamma et sont notés respectivement  $Y_1(\theta)$  et  $Y_2(\theta)$ . Ces variables aléatoires sont définies de manière à ce que leur espérance soit égale à la moitié du module  $Y_0$  du reste du portique. On a donc  $E[Y_1] = E[Y_2] = 37.5 \cdot 10^9 \text{Pa}$ . Leur coefficient de variation est pris égale à  $\delta = \sigma[Y_1]/E[Y_1] = \sigma[Y_2]/E[Y_2] = 0.2$ .

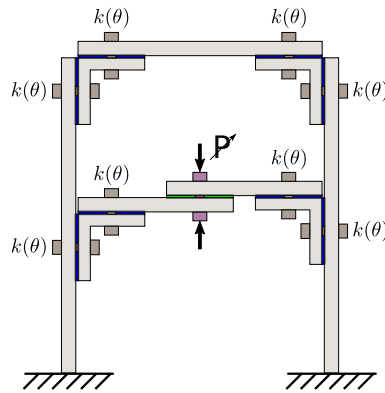
Une simulation de Monte-Carlo à 10 000 tirages de calculer les *pdf* des dix premières fréquences propres aléatoires du portique. Les résultats de cette simulation sont pris comme référence et sont comparés aux résultats issus de l'approche SMR. Il en ressort que l'approche SMR permet d'estimer l'espérance des fréquences propres aléatoires considérées avec une erreur inférieure à 0.3% avec SMR1 et inférieure à 0.06% avec SMR2. Pour l'écart-type, l'erreur maximale est de 10% avec SMR1 et de 3.6% avec SMR2. On peut en conclure que l'approche SMR reste tout à fait applicable au cas de structures pour lesquelles les variables aléatoires considérées ont une influence localisée sur le comportement de la structure globale.



## Chapitre 4

# Réduction robuste des vibrations d'un portique 3 barres

*L'objectif de ce chapitre est de caractériser de manière robuste le comportement vibratoire d'un portique muni de plusieurs liaisons dans le but de proposer une solution robuste de réduction des vibrations de cette structure.*



## 4.1 Introduction

La prise en compte de la variabilité des paramètres de liaison dès la phase de conception d'une structure assemblée permet notamment de proposer des solutions de réduction des vibrations plus robustes aux écarts existant entre le système réel et le système défini initialement. Le chapitre 3 de ce travail a permis de définir une nouvelle approche permettant de caractériser les espaces propres aléatoires d'une structure de manière non-intrusive, c'est-à-dire pouvant être mise en place à partir de n'importe quel logiciel éléments finis. Cette approche, intitulée approche SMR, est tout à fait adaptée aux structures assemblées pour lesquelles les paramètres de liaison peuvent être assimilés à des variables aléatoires définies localement. De plus, l'approche SMR est très peu coûteuse en temps de calcul. Le second chapitre a permis de définir un modèle de liaison adapté aux structures dites légères (pour lesquelles les sous-structures assemblées sont élançées et les liaisons sont localisées). Bien que très simple, le modèle de liaison choisi est tout à fait suffisant pour simuler le comportement de ces structures. Le cas d'un portique constitué de trois barres a été caractérisé expérimentalement et confirme cette hypothèse. L'objectif de ce chapitre est de capitaliser les méthodologies mises en place au cours des chapitres précédents afin de caractériser de manière robuste le comportement vibratoire d'un portique muni de plusieurs liaisons et permettre ensuite de proposer une solution robuste de réduction des vibrations de cette structure.

Dans un premier temps, on s'intéresse à la modélisation stochastique des paramètres du modèle de liaison choisi. En se basant sur le principe du maximum d'entropie [MIGNOLET, SONG et WANG 2015; SOIZE 2013], la distribution associée aux différentes variables aléatoires modélisées peut être ainsi définie et les premiers moments statistiques identifiés à partir des résultats d'une campagne expérimentale. Les cas de deux portiques munis respectivement de deux et quatre liaisons sont ensuite traités. Une modélisation stochastique des liaisons étant définie, l'objectif de cette seconde partie est de vérifier la validité de ce modèle stochastique lorsque la structure comprend plusieurs liaisons. Pour chacun des cas, une campagne expérimentale permet de comparer les résultats de la simulation stochastique à la variabilité effective des structures réelles et ainsi de valider l'ensemble de la démarche suivie. Enfin, disposant désormais des outils nécessaires à la caractérisation robuste du comportement vibratoire d'une structure assemblée, la dernière partie de ce chapitre vise à proposer une solution de réduction robuste des vibrations d'un portique. La solution proposée tire son originalité de la volonté d'agir directement sur les formes propres de la structure étudiée par l'intermédiaire d'une liaison pilotée. Une loi de commande de l'effort de serrage de la liaison peut alors être définie à partir de la simulation stochastique de la structure à "amortir". Concernant le contrôle de l'effort de serrage de la liaison, on peut envisager d'appliquer cet effort par l'intermédiaire d'un actionneur piézoélectrique [BELLY et al. 2017; BOUAZIZ 2017; KARIM 2013].

### Remarque préliminaire concernant le modèle de portique utilisé :

La Figure 4.1 page 125 présente le modèle éléments finis qui sera utilisé dans la suite de ce travail. Les éléments utilisés sont des éléments poutre de module d'Young  $Y_{Li}$  pour  $i \in [1, 2, 3, 4]$  pour les éléments correspondant aux liaisons et  $Y_0$  en dehors des liaisons. L'épaisseur des éléments est prise égale à  $e_i = 11$  mm pour les éléments correspondant aux

liaisons et vaut  $e_0 = 6$  mm sinon. Le reste des caractéristiques géométriques et matériaux sont prises égales pour l'ensemble des éléments. La masse volumique est celle de l'aluminium prise égale à  $\rho = 2710 \text{ kg m}^{-3}$  et la largeur des éléments est égale à  $b = 30$  mm.

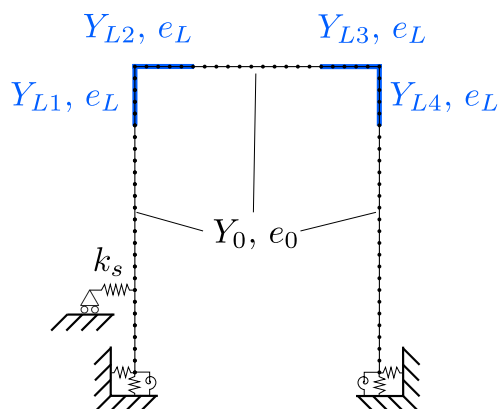


FIGURE 4.1 – Modèle éléments finis du portique sans liaisons rigides au niveau des liaisons

## 4.2 Modélisation stochastique d'une liaison boulonnée à partir de résultats expérimentaux

### 4.2.1 Identification des premiers moments statistiques des variables aléatoires associées aux paramètres de liaison

Lorsqu'un grand nombre de données sont disponibles, la densité de probabilité d'une variable aléatoire peut être estimée à l'aide de méthodes non paramétriques dites méthodes par noyau [MIGNOLET, SONG et WANG 2015 ; SOIZE 2012]. Ces méthodes nécessitent de disposer d'échantillons relativement importants ce qui n'est pas le cas ici. Lorsque un nombre limité d'informations sur la variable à modéliser est disponible, il est possible d'identifier la distribution d'une variable aléatoire par méthode indirecte à l'aide d'une décomposition de la variable aléatoire à modéliser en fonction d'un jeu de variables aléatoires de distributions connues. On peut par exemple décomposer la variable aléatoire recherchée sur le Chaos Polynomial [MIGNOLET, SONG et WANG 2015 ; SOIZE 2012]. L'approche directe, déjà évoquée au paragraphe 3.2.3.6 chapitre 3, consiste à appliquer le principe du maximum d'entropie afin d'identifier une densité de probabilité appropriée. La raideur de liaison dont on cherche à définir un modèle stochastique est à valeurs réelles et support positif  $\text{Supp}(K_{\text{Liaison}}) = ]0, +\infty[$ . Il en résulte que la raideur de liaison peut être modélisée par une variable aléatoire suivant une distribution Gamma. La connaissance de l'espérance et de l'écart-type permet de définir entièrement les paramètres de cette loi Gamma. Expérimentalement, on dispose des fréquences propres du portique muni d'une seule liaison pour différentes valeurs de serrage de la liaison et différents niveaux d'excitation obtenus au chapitre 2, et ce pour deux configurations de portique muni d'une seule liaison. On cherche alors à déterminer les deux premiers moments statistiques de la raideur de liaison correspondant à la variabilité observée des caractéristiques dynamiques des deux configurations

de portique. La loi Gamma étant une loi à deux paramètres, les deux premiers moments statistiques des variables aléatoires associées aux raideurs de liaison sont alors suffisants. On cherche alors à identifier les "meilleurs" paramètres de la loi Gamma. Le chapitre 2 a mis en évidence la nécessité de différencier l'influence de la liaison sur le comportement global du portique suivant que la liaison soit liée à une poutre verticale ou horizontale du portique. La modélisation stochastique des raideurs de liaison doit donc être adaptée à chacune des configurations de liaison. On identifiera ainsi deux couples de moments statistiques, un couple pour chacune des configurations du portique muni d'une seule liaison. Pour simplifier, le raisonnement est développé sur le cas du portique muni d'une seule liaison pour lequel la liaison est positionnée sur la poutre verticale (première configuration). Il sera ensuite appliqué à la seconde configuration de portique. L'identification des paramètres du modèle stochastique de la raideur de liaison est obtenue en utilisant le principe du maximum de vraisemblance [MIGNOLET, SONG et WANG 2015]. Pour cela, on cherche les deux premiers moments statistiques de la variable aléatoire associée à cette raideur qui minimisent l'erreur entre les moments statistiques des fréquences propres observées expérimentalement et calculées à l'aide du modèle stochastique du portique.

Afin de déterminer les moments statistiques du modèle numérique, une simulation de Monte-Carlo avec un nombre suffisant de tirages permettrait d'obtenir une estimation précise de ces grandeurs. Cependant, le nombre de tirages nécessaires pour garantir la convergence du résultat d'une simulation de Monte-Carlo étant de l'ordre de 10 000, l'utilisation de cette méthode pour déterminer les moments statistiques des fréquences propres du portique est donc difficilement envisageable dans le cadre d'une démarche d'optimisation. L'approche SMR développée au chapitre 3 permet d'estimer avec une bonne précision les moments statistiques des fréquences propres aléatoires d'une structure assemblée et ce avec un temps de calcul extrêmement réduit. L'approche SMR ne nécessite en effet qu'un nombre réduit de calculs déterministes (égal au nombre de variables aléatoires si le calcul des matrices de sensibilités des matrices de masse et de raideur sont obtenues par différences finies). On choisit donc d'utiliser cette approche afin d'estimer les moments statistiques des fréquences propres "simulées" du portique nécessaires à l'identification du modèle stochastique de liaison. On définit ainsi l'erreur suivante pour chaque moment statistique :

$$\epsilon_E = \sum_{i=1}^N [\mathbb{E}[\omega^{exp}] - \mathbb{E}[\omega^{SMR}]]^2 \quad (4.1)$$

$$\epsilon_\delta = \sum_{i=1}^N [\delta[\omega^{exp}] - \delta[\omega^{SMR}]]^2 \quad (4.2)$$

Où  $\epsilon_E$  correspond à l'erreur sur l'espérance des fréquences propres du portique muni d'une seule liaison et  $\epsilon_\delta$  l'erreur sur le coefficient de variation. Dans un premier temps, on cherche l'espérance de la raideur de liaison minimisant l'erreur  $\epsilon_E$ . Une fois cette espérance identifiée, le coefficient de variation de la raideur de liaison est alors obtenu en minimisant l'erreur  $\epsilon_\delta$ . Les paramètres de la loi Gamma associée à la raideur aléatoire sont déduits de ces moments statistiques à partir des propriétés des lois Gamma énoncées partie 3.2.3.6.

Moments statistiques raideur de liaison	$E[Y_{L1}]$ (Pa)	$\delta[Y_{L1}]$	$E[Y_{L2}]$ (Pa)	$\delta[Y_{L2}]$
	$24 \cdot 10^9$	0.09	$73.5 \cdot 10^9$	0.22
Paramètres loi Gamma	$\alpha_{\gamma_1}$	$\beta_{\gamma_1}$	$\alpha_{\gamma_2}$	$\beta_{\gamma_2}$
	123	0.0081	20.7	0.0484

TABLE 4.1 – Identification des paramètres du modèle stochastique de liaison pour la première configuration de portique ( $L1$ ) et la seconde ( $L2$ )

Ainsi pour  $Y_i = \bar{Y}_i \gamma_i$  et  $\gamma_i \rightsquigarrow \text{Gamma}(\alpha_i, \beta_i) = \Gamma(\alpha_i, \beta_i)$ ,  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont définis par :

$$\alpha_i = \left( \frac{E[Y_i]}{\sigma_{Y_i}} \right)^2 = \left( \frac{1}{\delta[Y_i]} \right)^2 \quad \text{et} \quad \beta_i = \left( \frac{\sigma_{Y_i}}{E[Y_i]} \right)^2 = \delta^2[Y_i] \quad (4.3)$$

On procède de la même manière pour la seconde configuration de portique. Les résultats de deux phases d'identifications sont présentés dans le Tableau 4.1 où l'indice  $L1$  correspond aux paramètres de la liaison de la première configuration de portique et l'indice  $L2$  aux paramètres de la seconde configuration.

#### 4.2.2 Application de l'approche SMR au cas du portique muni d'une seule liaison

Les paramètres de la variable aléatoire associée à la raideur de liaison étant désormais identifiés, on peut vérifier *a posteriori* la qualité des résultats obtenus à l'aide de l'approche SMR. Cette étape permet de s'assurer que, pour les valeurs des paramètres identifiés, le comportement vibratoire aléatoire du portique est bien dans le domaine de validité de l'approche SMR.

La Figure 4.2 page 128 présente les erreurs relatives sur l'estimation des deux premiers moments statistiques des dix premières fréquences propres du portique muni d'une seule liaison. Ces résultats sont obtenus pour le cas d'une liaison associée à une poutre verticale et la raideur de liaison est modélisée par une variable aléatoire  $Y_1 = \bar{Y}_1 \gamma_1$  où  $\gamma_1$  suivant une loi Gamma de paramètres  $\alpha_{\gamma_1} = 123$  et  $\beta_{\gamma_1} = 0.081$ . On constate que pour les dix premières fréquences propres aléatoires de la première configuration de portique, l'espérance est estimée avec une erreur très inférieure au pourcent pour l'ensemble des fréquences propres considérées et ce quelque soit la méthode de résolution utilisée. L'estimation de l'écart-type est obtenue avec une erreur maximale de 2.1 % avec SMR1 et une erreur très inférieure au pourcent avec SMR2. Cela peut s'expliquer par la faible variabilité de la raideur aléatoire dont le coefficient de variation est inférieur à 0.1.

La même démarche est ensuite mise en place pour la seconde configuration de portique muni d'une seule liaison. L'erreur maximale sur l'estimation de l'espérance des 10 premières fréquences propres de cette seconde configuration de portique est de 0.13 % avec SMR1 et très inférieure au pourcent avec SMR2. L'erreur maximale sur l'estimation de l'écart-type est quand à elle de 10.2 % avec SMR1 et 1.8 % avec SMR2. On constate donc que pour les



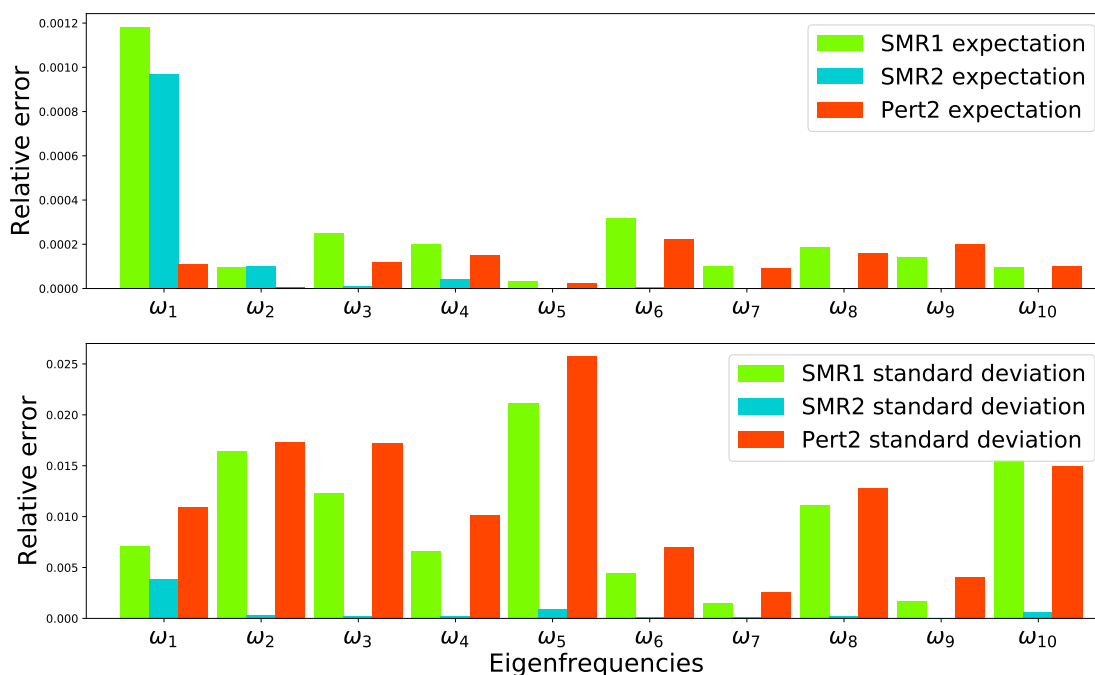


FIGURE 4.2 – Erreur sur l'estimation des deux premiers moments statistiques des dix premières fréquences propres aléatoires du portique muni d'une seule liaison

deux configurations de portique, les variables aléatoires considérées permettent d'assurer la validité de l'approche SMR.

L'étude précédente a montré que la qualité des estimations des premiers moments statistiques obtenus avec SMR1 est tout à fait suffisante pour les dix premières fréquences propres des deux configurations de portique munis d'une seule liaison. On peut donc se limiter à l'utilisation de SMR1 pour simuler le comportement vibratoire de ces portiques en tenant compte de la variabilité des raideurs de liaison. La Figure 4.3 page 129 présente la variabilité des FRF expérimentales ainsi que la variabilité des FRF simulées à l'aide de SMR1 pour la première configuration du portique muni d'une seule liaison. La même étude a été mise en place pour la deuxième configuration de portique muni d'une seule liaison. Les conclusions étant similaires dans les deux cas, on se limite ici à la présentation des résultats sur la première configuration de portique (liaison entre la cornière et la poutre verticale).

Afin de mettre en forme les résultats obtenus avec SMR1, on choisit de représenter la FRF moyenne du portique (trait plein référencé  $FRF\_SMR1$  dans la légende). Cette FRF moyenne est obtenue à partir de l'espérance des valeurs propres aléatoires estimée avec SMR1 et des vecteurs propres déterministes (hypothèse SMR1) du portique. L'enveloppe des FRF obtenues avec SMR1 à partir de 1000 tirages indépendants des raideurs aléatoires considérées est représentée également sur la Figure 4.3 page 129. Cette représentation peut être soumise à discussion car elle ne permet pas de rendre compte de la probabilité de réalisation de chacune des FRF comprises dans l'enveloppe alors que cette probabilité pourrait être estimée avec SMR1 (ou SMR2). L'absence d'outil de représentation adapté justifie le

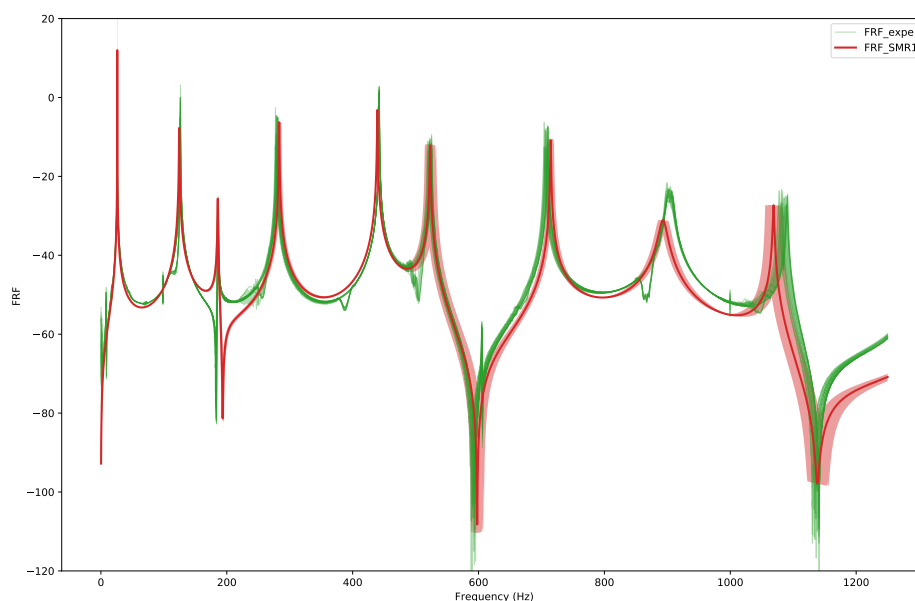


FIGURE 4.3 – FRF expérimentale et simulée de la première configuration de portique après ré-identification des paramètres du modèle stochastique de liaison

choix de l'utilisation d'une courbe enveloppe afin de rendre compte de la variabilité du comportement vibratoire du portique.

On constate alors, sur la Figure 4.3 page 129, que la variabilité du comportement observé expérimentalement est bien retrouvée numériquement. On observe toutefois un décalage de la moyenne de certaines fréquences propres par rapport à la valeur moyenne des fréquences propres expérimentales correspondantes, notamment pour les fréquences plus élevées. Cette erreur est due au choix du modèle de liaison qui reste trop simpliste pour représenter correctement le comportement vibratoire du portique. Ce défaut du modèle était déjà en partie observable au chapitre 2 (cf Figure 2.20 page 72) pour le modèle éléments finis de portique avec liaison rigide au niveau des liaisons.

### 4.3 Cas d'un portique muni de plusieurs liaisons

Les modèles stochastiques de liaison sont désormais définis et validés, aux limitations du modèle moyen de liaison près. Pour chacune des configurations de liaison, il est alors possible de caractériser de manière robuste le comportement vibratoire de n'importe quelle configuration de portique muni de plusieurs liaisons. Le but de cette partie est de valider la portabilité du modèle stochastique de liaison aux cas de portiques comprenant plusieurs liaisons. On s'intéresse notamment ici aux cas de portiques munis de deux et quatre liaisons. Pour chacun de ces portiques, une campagne de mesures expérimentales a été mise

	Essai	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Amplitude faible	Vis A	1	1	1	2	2	2	3	3	3
	Vis B	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Amplitude forte	Vis A	1	1	1	2	2	2	3	3	3
	Vis B	1	2	3	1	2	3	1	2	3

TABLE 4.2 – Plan d'expérience complet pour le portique muni de deux liaisons

en place afin d'évaluer la variabilité de la réponse vibratoire du portique lorsque les paramètres de liaison varient. Les résultats de ces campagnes expérimentales permettent ainsi de confronter la réponse aléatoire simulée à l'aide de l'approche SMR à la variabilité du comportement du portique réel observé expérimentalement.

### 4.3.1 Portique muni de deux liaisons

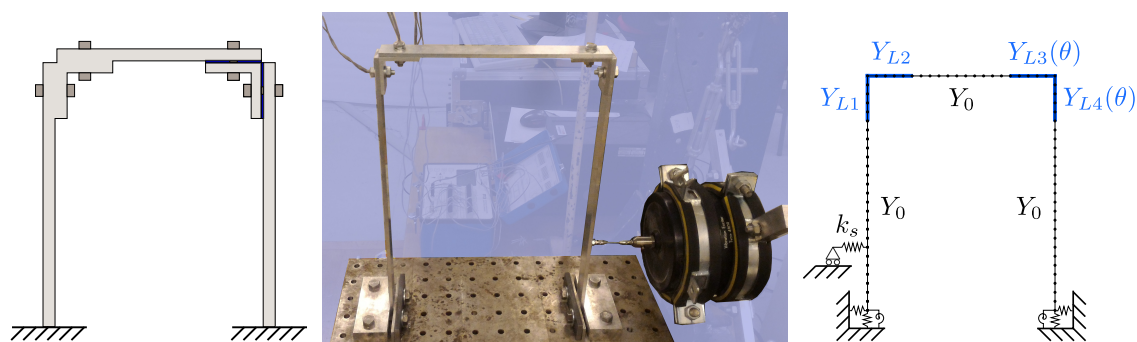


FIGURE 4.4 – Illustration et photo du portique muni de deux liaisons

#### 4.3.1.1 Campagne expérimentale

Dans un premier temps, on s'intéresse à la variabilité expérimentale du comportement vibratoire d'un portique muni de deux liaisons lorsque les paramètres de liaison varient. On choisit comme paramètres de l'étude le serrage des liaisons et l'amplitude d'excitation de la structure. On utilisera deux niveaux d'excitation dits à "faible" et "forte" amplitude définis de la même manière qu'au paragraphe 2.2.1.3. L'amplitude forte est ainsi prise 5 fois supérieure au niveau faible. Pour minimiser la durée de la campagne expérimentale, trois niveaux de serrage sont considérés. Les valeurs de serrage des liaisons sont référencées de 1 à 3 où l'indice 1 correspond à un niveau de serrage faible de moins d'une centaine de newtons, l'indice 2 correspond à un serrage moyen de l'ordre de 1800 N et l'indice 3 correspond à un serrage fort de l'ordre de 6000 N. Le tableau 4.2 présente le schéma du plan d'expérience complet suivi pour cette campagne expérimentale. A titre indicatif, les vis instrumentées utilisées pour cette campagne expérimentale et référencées vis A et B dans le tableau 4.2 sont respectivement les vis  $n^{\circ}$  4 et 6.

### 4.3.1.2 Simulation stochastique du comportement du portique muni de deux liaisons

On dispose désormais de la variabilité expérimentale du portique muni de deux liaisons. On cherche alors à retrouver numériquement cette variabilité à partir des modèles stochastiques de liaisons identifiés dans la partie 4.2.1. L'approche SMR est appliquée au portique muni de deux liaisons dont un modèle éléments finis poutre est défini Figure 4.4 page 130. Les caractéristiques de ce modèle sont les mêmes que celles définies en introduction de ce chapitre. Les modules d'Young des liaisons correspondant à la cornière de droite sur la Figure 4.4 page 130 sont assimilés à des variables aléatoires de distribution Gamma. Les premiers moments statistiques de ces variables aléatoires sont définis tels que  $E[Y_{L3}(\theta)] = 73.5 \cdot 10^9 \text{Pa}$  et  $\delta[Y_{L3}(\theta)] = 0.22$  pour la liaison entre la cornière et la poutre horizontale et à  $E[Y_{L4}(\theta)] = 24 \cdot 10^9 \text{Pa}$  et  $\delta[Y_{L4}(\theta)] = 0.09$  pour la liaison entre la cornière et la poutre verticale.

La figure 4.5 page 132 présente la variabilité de la FRF du portique simulée à l'aide de SMR1 et SMR2. Les FRF moyennes obtenues avec les deux méthodes sont représentées en trait plein. Elles sont obtenues à partir des espérances des valeurs propres aléatoires estimées avec chacune des méthodes et les vecteurs propres considérés sont les vecteurs propres déterministes du portique. Les enveloppes de FRF présentées sont obtenues à partir de 1000 tirages indépendants des raideurs aléatoires considérées. A nouveau, ce choix de représentation ne permet pas de représenter la probabilité de réalisation de chacune des FRF mais permet d'illustrer la variabilité du comportement du portique. On peut constater que l'écart de comportement entre SMR1 et SMR2 est très faible ce qui laisse penser qu'à nouveau SMR1 reste tout à fait suffisant.

Les FRF obtenues à partir de la campagne expérimentale présentée paragraphe 4.3.1.1 sont alors comparées aux résultats de simulations stochastiques. La simulation stochastique du portique muni de deux liaisons permet bien de retrouver la variabilité expérimentale du comportement vibratoire du portique. On retrouve un certain décalage entre les fréquences propres moyennes expérimentales et simulées pour les fréquences les plus élevées. Cette observation peut à nouveau être imputée à la qualité du modèle éléments finis de la structure.

## 4.3.2 Portique entièrement boulonné

### 4.3.2.1 Campagne expérimentale

L'objectif de cette campagne expérimentale est d'observer expérimentalement la variabilité du comportement vibratoire d'un portique entièrement boulonné lorsque les paramètres de liaison varient. A nouveau, on choisit comme paramètres de l'étude le serrage des liaisons et l'amplitude d'excitation de la structure. On utilisera deux niveaux d'excitation définis de la même manière que pour les études précédentes. Une illustration du dispositif expérimental utilisé est présentée Figure 4.6 page 132. Etant donné le nombre de liaisons, il semble difficile de considérer un nombre important de niveaux de serrage. On choisit donc de se limiter à deux niveaux de serrages correspondant à un serrage "faible" et un serrage "fort" de la liaison. La forme des courbes traduisant l'évolution des fréquences

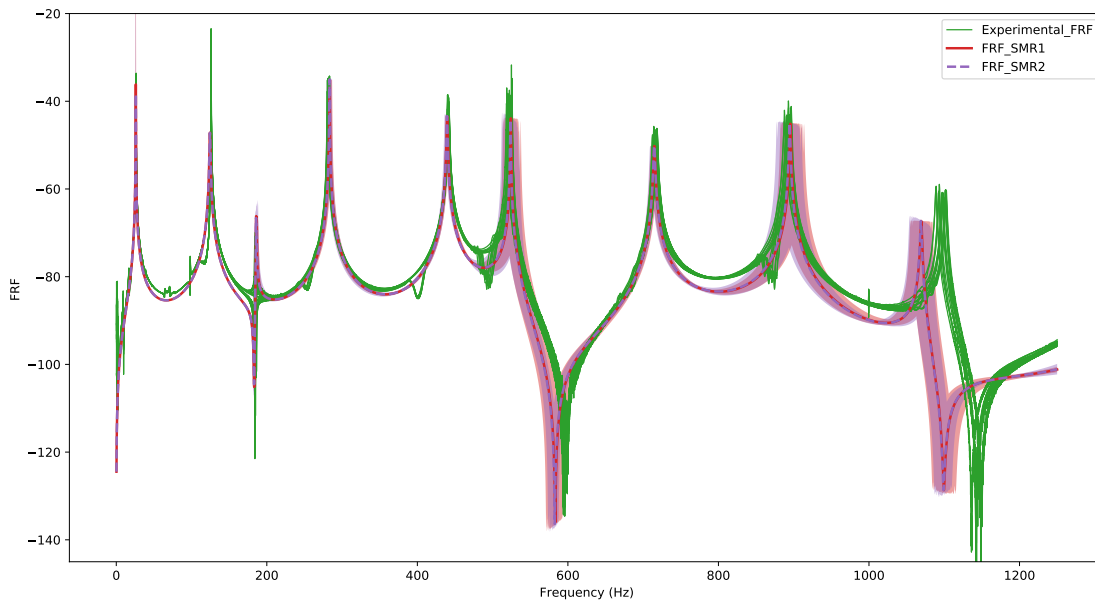


FIGURE 4.5 – Variabilité expérimentale et simulée à l'aide de l'approche SMR du comportement vibratoire du portique muni de deux liaisons

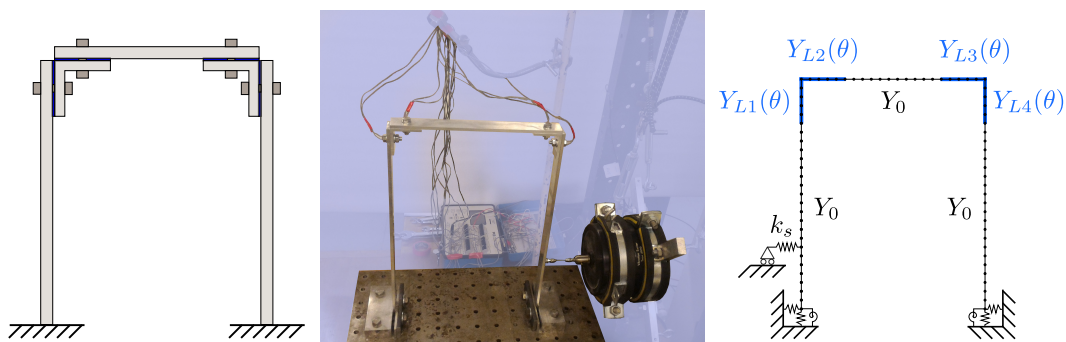


FIGURE 4.6 – Illustration et photo du portique entièrement boulonné

Essai	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Vis A	1	3	1	1	1	3	3	3	1	1	1	3	3	3	1	3	2
Vis B	1	1	3	1	1	3	1	1	3	3	1	3	3	1	3	3	2
Vis C	1	1	1	3	1	1	3	1	3	1	3	3	1	3	3	3	2
Vis D	1	1	1	1	3	1	1	3	1	3	3	1	3	3	3	3	2

TABLE 4.3 – Plan d'expérience à "faible" niveau d'excitation

Essai	1	2	3	4	5	6	7
Vis A	3	3	3	1	3	1	2
Vis B	3	3	1	3	3	1	2
Vis C	3	1	3	3	3	1	2
Vis D	1	3	3	3	3	1	2

TABLE 4.4 – Plan d'expérience à "fort" niveau d'excitation

propres en fonction du serrage (cf parties 2.3 et 2.2.1) montre qu'un serrage dit "moyen" ne conduirait pas à un comportement très différent d'un serrage "fort". De plus, un serrage "fort" correspondrait plus à une configuration d'assemblage réel. La configuration serrage "faible" peut-être assimilée à une liaison défaillante.

La mesure à amplitude faible étant relativement rapide, on considérera l'ensemble des valeurs de serrage des liaisons. En notant 1 le niveau de serrage faible et 3 le niveau de serrage fort, les mesures à effectuer sont résumées dans le tableau 4.3. On choisit d'ajouter également un point de mesure correspondant à une configuration moyennement serrée de toutes les liaisons. A titre indicatif, les vis instrumentées utilisées pour cette campagne expérimentale et référencées Vis A à D dans le tableau 4.3 sont respectivement les Vis n° 2, 6, 7 et 9.

L'obtention de la réponse en fréquence à "forte" amplitude d'excitation sur l'ensemble de la plage de fréquence est obtenue par morceaux, c'est à dire que l'obtention d'une FRF complète est obtenue par plusieurs séries de mesures sur des gammes de fréquences réduites. Chaque FRF sur toute la gamme de fréquence étudiée est donc relativement longue à obtenir. On choisit donc de réduire le plan d'expérience. Le niveau de serrage dit "fort" est le niveau le plus proche du serrage effectif d'une liaison boulonnée sur une structure réelle. En conservant la notation précédente pour les niveaux de serrage, la configuration du portique assemblée dont toutes les liaisons sont serrées avec un serrage fort est notée 3333. On choisit de concentrer les mesures autour de cette configuration. On considère alors les sommets directement adjacents à cette configuration. Un schéma du type de plan d'expérience utilisé est proposé Figure 4.7a en se basant sur le cas d'un système à trois paramètres (un plan à 4 paramètres étant difficilement représentable) et trois niveaux par paramètre. On note 1 le niveau faible, 2 le niveau moyen et 3 le niveau fort. On ajoutera également les cas où toutes les liaisons sont faiblement et moyennement serrées. Le tableau 4.4 résume les niveaux de serrage considérés pour ce plan d'expérience à forte amplitude d'excitation.

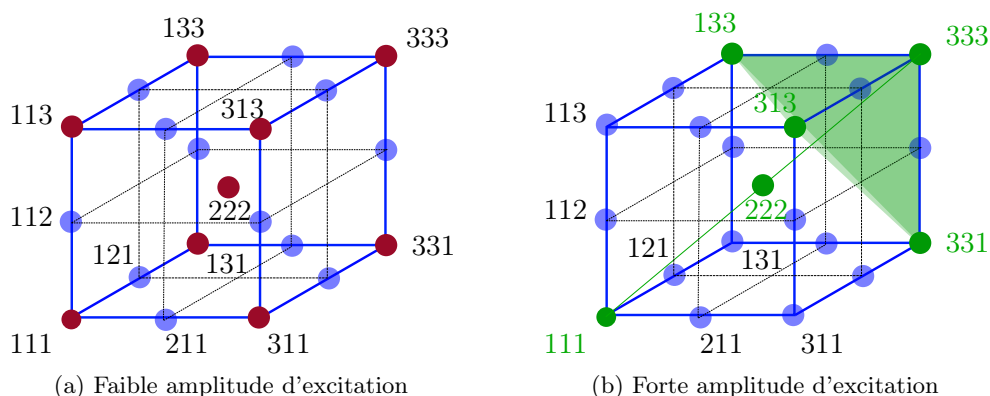


FIGURE 4.7 – Plan d'expérience pour un système à trois paramètres et trois niveaux par paramètre

#### 4.3.2.2 Simulation stochastique du comportement du portique entièrement boulonné

Les FRF expérimentales du portique entièrement boulonné obtenues à partir de la campagne définie précédemment sont présentées sur la Figure 4.8 page 135. La simulation stochastique de ce portique est obtenue à l'aide du modèle éléments finis défini Figure 4.6 page 132 pour lequel les raideurs de liaisons  $Y_{L1}(\theta)$ ,  $Y_{L2}(\theta)$ ,  $Y_{L3}(\theta)$  et  $Y_{L4}(\theta)$  sont modélisées par des variables aléatoires de distribution Gamma. Les premiers moments statistiques de ces variables aléatoires valent respectivement :

$$\begin{aligned} E[Y_{L1}] = E[Y_{L4}] &= 24 \cdot 10^9 \text{Pa} \\ E[Y_{L2}] = E[Y_{L3}] &= 73.5 \cdot 10^9 \text{Pa} \\ \delta[Y_{L1}(\theta)] = \delta[Y_{L4}(\theta)] &= 0.09 \\ \delta[Y_{L2}(\theta)] = \delta[Y_{L3}(\theta)] &= 0.22 \end{aligned}$$

La Figure 4.8 page 135 présente les résultats de la simulation stochastique du portique entièrement boulonné. Cette simulation a été réalisée à l'aide de l'approche SMR et des modèles stochastiques de raideur de liaison identifiés précédemment. La représentation des résultats de simulation reste la même que pour la Figure 4.5 page 132 de la partie 4.3.1.2 à savoir une FRF moyenne et une enveloppe de FRF obtenue à partir de 1000 tirages des raideurs aléatoires considérées et ce pour chacune des simulations obtenues avec SMR1 et SMR2. A nouveau, on peut constater que les résultats obtenus à partir des deux méthodes sont très similaires et SMR1 est tout à fait suffisant.

Contrairement à ce qui était attendu, on constate que les résultats des simulations stochastiques de ce portique ne coïncident pas parfaitement avec les résultats expérimentaux. Globalement, les fréquences propres aléatoires du portique simulé sont surestimées comparées aux fréquences propres observées expérimentalement. Le portique simulé semble ainsi plus "rigide" que le portique réel. Cette observation remet en question le caractère intrinsèque des variables aléatoires associées aux raideurs de liaison identifiées partie 4.2.1. Cette différence de comportement peut s'expliquer par les conditions de l'essai sur le portique

entièrement boulonné. En effet, cette structure est fortement hyperstatique et la séquence d'assemblage des différents éléments du portique peut conduire à l'ajout de contraintes supplémentaires au niveau des liaisons. Afin d'assembler cette structure, les poutres verticales ont dans un premier temps été fixées au bâti à l'aide des encastremets dédiés. Puis l'ensemble des pièces (poutres + cornières + vis) ont été mises en position sans appliquer de serrage au niveau des liaisons. Enfin, chaque vis a été serrée au serrage maximal à l'aide d'une clé dynamométrique sans tenir compte de l'ordre de serrage des vis. Du fait de cette procédure de serrage, l'état de contrainte initial des liaisons du portique peut alors être différent de l'état de contrainte des liaisons utilisées pour l'identification des paramètres du modèle de liaison. Les liaisons se comportent alors différemment des liaisons utilisées lors de la phase d'identification. Van Buren et al [VAN BUREN et al. 2015] étudient l'influence de l'ordre de serrage des liaisons d'un portique similaire au portique considéré dans ce travail. Il en ressort que l'ordre de serrage des liaisons d'une telle structure influe de manière non négligeable sur les fréquences propres de la structure ce qui rejoint l'hypothèse avancée ici. On peut également ajouter qu'à nouveau, les "mauvaises qualités" du contact aluminium-aluminium peuvent favoriser les écarts de comportement entre deux liaisons de géométries nominale-ment identiques. En effet, les caractéristiques du contact aluminium-aluminium ont tendance à favoriser l'adhérence et la présence de défauts au niveau des surfaces de contact des deux pièces à assembler peut alors conduire à des comportements d'interfaces très différents.

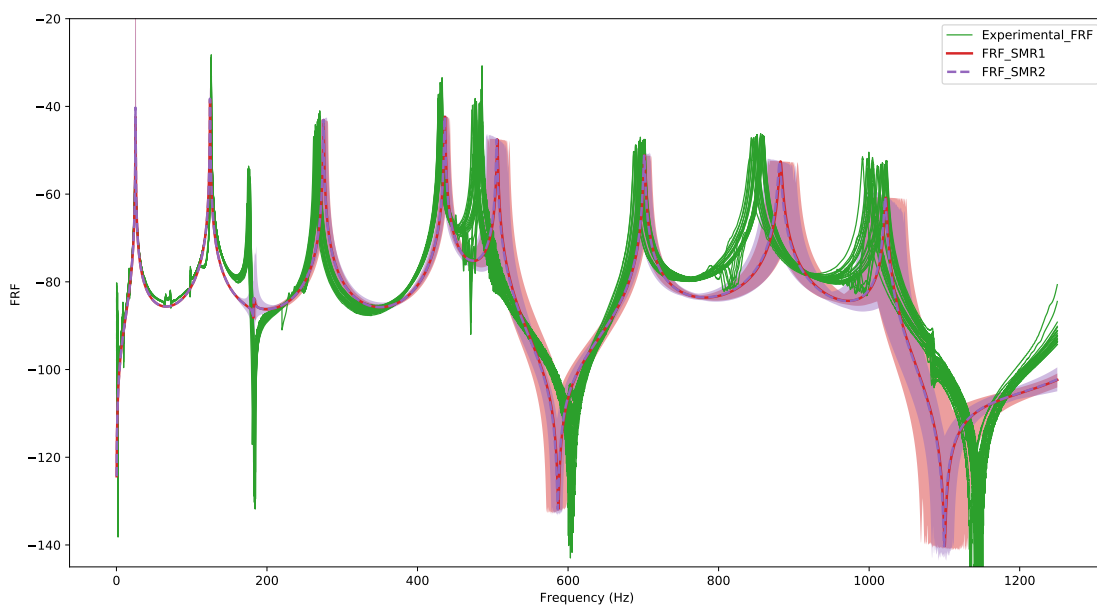


FIGURE 4.8 – Variabilité expérimentale et simulée à l'aide de l'approche SMR du comportement vibratoire du portique entièrement boulonné



## 4.4 Réduction robuste des vibrations d'une structure assemblée

Pour des raisons de confort ou de sécurité, la réduction des vibrations des structures assemblées légères en environnement dynamique représente un enjeu important de conception dans de nombreux domaines industriels. Des solutions telles que l'ajout de matériaux viscoélastiques ou l'utilisation de dispositifs piézoélectriques couplés à un circuit électrique peuvent être mises en place afin de répondre à ces contraintes. L'optimisation de ces solutions passe alors par une caractérisation des modes propres de la structure.

Comme il a pu être évoqué précédemment, différents facteurs peuvent influencer sur le comportement des liaisons, notamment le serrage de la liaison, la géométrie effective des éléments constituant la liaison ainsi que l'amplitude des sollicitations appliquées à la liaison. Ces paramètres varient d'une liaison à l'autre et induisent des écarts entre le comportement de la structure réelle et le comportement prédit à partir d'un modèle déterministe de la structure (pour lequel tous ces paramètres sont pris à leur valeur nominale). Lorsqu'un composant d'une structure ou d'un système mécanique est dimensionné en tenant compte de la variabilité des paramètres de la structure réelle, on parle de dimensionnement robuste. Cette partie a pour objectif de proposer une solution de réduction des vibrations d'une structure assemblée qui soit robuste vis-à-vis de la variabilité des raideurs de liaison qui peut exister d'une liaison à l'autre dans le cas d'une structure assemblée réelle.

### 4.4.1 Stratégie de réduction des vibrations d'une structure assemblée

Afin de limiter le niveau vibratoire d'une structure en régime entretenu, deux stratégies peuvent être envisagées. La première consiste à amortir le ou les modes de la structure sollicités lors des différentes phases de fonctionnement de la structure à l'aide de phénomènes dissipatifs. On peut par exemple recourir à l'utilisation d'amortisseurs à masse accordée, de dispositifs piézoélectriques ou de matériaux viscoélastiques. Dans le cas des structures assemblées, la principale source de dissipation naturelle de ces structures est due à la présence de frottement dans les interfaces de contact des liaisons [UNGAR 1973]. Il pourrait sembler judicieux, avec un raisonnement simple, de chercher à exploiter ce phénomène afin de maximiser la dissipation au sein des liaisons de la structure et limiter ainsi le niveau vibratoire. Toutefois, on peut montrer que le serrage d'une liaison boulonnée visant à maximiser la dissipation par frottement est contradictoire avec la fonction principale de la liaison qui est d'assurer la rigidité de l'assemblage. Beards [BEARDS 1983] cite à ce sujet de nombreuses études sur l'amortissement dans les liaisons boulonnées. Afin d'exploiter le frottement d'une liaison pour dissiper de l'énergie, il est nécessaire d'ajouter à la structure des liaisons dont la fonction principale est purement dissipative ou d'ajouter des éléments de type frotteur. Beards et Williams [BEARDS et WILLIAMS 1977] étudient le cas d'un cadre mécano-soudé en acier muni d'un tirant entre deux coins opposés du cadre. Ils étudient notamment l'amortissement induit par une des liaisons boulonnées du tirant sollicitée uniquement en torsion lorsque le serrage de la liaison varie. L'inconvénient principal de cette solution est que l'efficacité de l'amortissement est très dépendant de la valeur effective du serrage de la liaison.

La seconde stratégie de réduction des vibrations d'une structure consiste à modifier les caractéristiques vibratoires de la structure lorsque celle-ci est sollicitée au voisinage d'une de ses fréquences de résonances (afin que la fréquence d'excitation diffère de la fréquence propre de la structure). La masse d'une structure est difficilement modifiable mais il est possible d'intervenir sur la rigidité de la structure en modifiant, par exemple, le serrage d'une ou plusieurs de ses liaisons. En modifiant ainsi la raideur de la structure, ses modes peuvent être décalés. Le cas traité par Bears et Williams [BEARDS et WILLIAMS 1977] met également en évidence cette propriété sur le cas d'un cadre couplé à un tirant. Le niveau vibratoire de la structure peut ainsi être diminué du fait de l'éloignement de la fréquence de résonance par rapport à la fréquence d'excitation. C'est cette stratégie qui sera envisagée dans le cadre de ce travail. Le chapitre 2 a permis de mettre en évidence le lien entre la raideur d'une liaison et le serrage de celle-ci. C'est cette propriété qu'on cherche à exploiter ici.

La structure dont on souhaite réduire les vibrations est un portique constitué de trois barres assemblées entre elles par quatre liaisons boulonnées. Cette structure est identique au portique entièrement boulonné traité partie 4.3.2. Pour simplifier l'étude, on considère uniquement les modes plans de ce portique. On suppose que la géométrie initiale du portique répond à une fonction structurelle définie par une première phase de conception, elle ne peut donc être modifiée. Le serrage nominal des liaisons doit permettre de garantir l'intégrité du portique. Les liaisons ont donc un rôle structurel et il n'est ainsi pas envisageable de modifier une ou plusieurs des liaisons initiales du portique pour modifier la rigidité de l'ensemble. Afin de modifier la rigidité de cette structure et décaler ses modes propres en fonction de l'excitation appliquée, on conclut qu'il est nécessaire d'introduire une ou plusieurs liaisons supplémentaires à cette structure. Cette liaison est dimensionnée de manière à influencer sur les modes de la structure suivant la valeur de serrage appliquée à cette liaison. Le serrage de la liaison influe ainsi comme un actionneur permettant de modifier la raideur locale du portique. En pilotant ce serrage, à l'aide d'une rondelle piézoélectrique par exemple [BOUAZIZ 2017 ; GAUL et NITSCHKE 2000 ; KARIM 2013], on peut alors envisager de modifier le comportement de la structure en fonction de la fréquence d'excitation appliquée et ainsi "éloigner" les modes de la structure de la fréquence d'excitation si nécessaire. La liaison dont on pilote l'effort de serrage sera désignée *liaison pilotée* dans la suite de ce travail.

Le positionnement de la liaison pilotée sur le portique initial est défini de manière à pouvoir influencer sur un ou plusieurs des modes du portique initial (l'idée étant de solliciter la liaison à l'aide des modes de la structure initiale afin d'assurer une variation de raideur de liaison significative lorsque le serrage de celle-ci varie). L'intégration de la liaison pilotée au portique est obtenue à l'aide de deux poutres et deux cornières en liaison boulonnée avec le reste du portique. La Figure 4.10 page 138 présente le portique trois barres initial muni de la liaison pilotée et des éléments nécessaires à l'intégration de cette liaison. Les deux poutres utilisées pour intégrer la liaison pilotée au reste du portique seront désignées par la suite *demi-poutres centrales du portique*. Le choix de ce montage s'explique par la simplicité de réalisation de cette solution. Une autre raison est que, de cette manière, les liaisons utilisées pour lier les demi-poutres au reste du portique sont modélisables de la même manière que les liaisons identifiées dans les parties précédentes de ce travail. Ce qui permet de simuler le comportement de cette structure sans phase d'identification supplémentaire de modèle

de liaison.

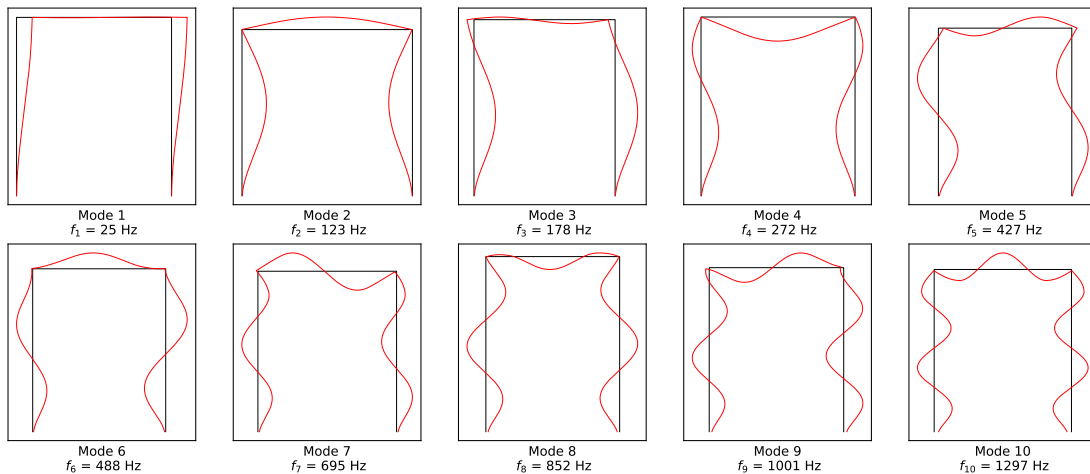


FIGURE 4.9 – Modes plans du portique

Les modes plans du portique initial sont présentés sur la Figure 4.9 page 138. On choisit dans un premier temps d'exploiter la forme propre associée au second mode de ce portique. Pour ce mode, les poutres verticales travaillent sur un mode de flexion en opposition de phase l'une de l'autre. En ajoutant une liaison de manière à lier les deux poutres verticales du portique, on peut ainsi "contraindre" le second mode de cette structure. La liaison pilotée travaille alors globalement en cisaillement.

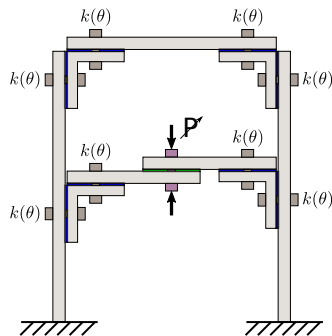


FIGURE 4.10 – Schéma de principe du portique 3 barres équipé d'une liaison "amortissante"

Une remarque peut être faite concernant la masse ajoutée à la structure initiale par l'ajout d'une ou plusieurs liaisons. Il semble en effet que cette solution de réduction de vibration présente une augmentation de masse plus importante que des solutions basées sur l'utilisation de dispositifs piézoélectriques ou de matériaux viscoélastiques. Toutefois, l'intérêt de cette approche est que les éléments utilisés sont des éléments standards très peu coûteux, contrairement aux solutions basées sur des dispositifs piézoélectriques. De plus, contrairement aux solutions utilisant des matériaux viscoélastiques, la modification de raideur induite par la liaison "amortissante" influe sur les premiers modes de la structure et est indépendante de la température.

#### 4.4.2 Faisabilité de la réduction robuste du niveau vibratoire d'un portique boulonné par la stratégie proposée

L'objectif de cette partie est d'évaluer la faisabilité de la stratégie proposée pour réduire le niveau vibratoire d'une structure assemblée de manière robuste. En d'autres termes, on cherche à évaluer ici si la modification de la raideur d'une liaison dédiée (et judicieusement choisie) permet de réduire le niveau vibratoire d'une structure assemblée en tenant compte de la variabilité des raideurs des autres liaisons de la structure.

Le cas traité est celui du portique défini Figure 4.10. Cette étude étant illustrative et ne disposant pas d'un modèle adapté au comportement de la liaison pilotée, on choisit de modéliser cette liaison par trois raideurs généralisées  $k_X$ ,  $k_Y$  et  $k_\theta$  entre les noeuds terminaux des demi-poutres centrales du portique. On évalue alors l'influence de la variation de chacune de ces raideurs sur le comportement vibratoire du portique. L'objectif est d'évaluer si il existe une plage de variation de ces raideurs généralisées pour laquelle le mode du portique dont on souhaite limiter l'influence varie suffisamment pour ne plus être sollicité par une fréquence d'excitation donnée. Le caractère robuste de la stratégie sera validé si ce comportement est valable quelque soit les raideurs effectives des autres liaisons du portique.

Pour évaluer la faisabilité d'une réduction robuste du niveau vibratoire du portique, le comportement du portique muni de la liaison pilotée est simulée à l'aide de l'approche SMR pour différentes valeurs des raideurs généralisées associées à la liaison pilotée. Le comportement des liaisons du portique, à l'exception de la liaison pilotée, est pris en compte à l'aide des modèles stochastiques de liaison identifiés partie 4.2.1. La représentation du comportement du portique en tenant compte de la variabilité des raideurs de liaison est obtenue en traçant les FRF moyennes et l'enveloppe des FRF obtenue pour 1000 tirages indépendants des raideurs aléatoires. Trois cas de raideur de la liaison pilotée sont considérés dans ce qui suit afin d'étudier séparément l'influence des raideurs  $k_X$ ,  $k_Y$  et  $k_\theta$ .

##### 4.4.2.1 Influence de la raideur $k_X$ de la liaison pilotée

Le premier cas traité ici correspond à la raideur en cisaillement de la liaison  $k_X$ . On définit les raideurs  $k_Y$  et  $k_\theta$  de manière à ce que les degrés de liberté des noeuds des demi-poutres associés à ces raideurs soit fixes les uns par rapport aux autres. Les valeurs choisies en pratique pour ces raideurs sont respectivement  $k_Y = 10^{10} \text{N m}^{-1}$  et  $k_\theta = 10^8 \text{N rad}^{-1}$ . On simule alors le comportement du portique à l'aide de l'approche SMR pour  $k_X = \{2 \cdot 10^5, 2.5 \cdot 10^5, 5 \cdot 10^5, 10^7\} \text{N m}^{-1}$ . La valeur maximale a été choisie de manière à ce qu'une valeur plus élevée de la raideur  $k_X$  ne modifie pas la FRF du portique. La valeur minimale a été choisie de manière à ce que l'enveloppe des FRF du portique au voisinage de la troisième fréquence de résonance ne coïncide en aucun point avec l'enveloppe des FRF correspondant au serrage maximal de la liaison.

La Figure 4.11 présente les FRF du portique muni de la liaison pilotée pour les différentes valeurs de raideur  $k_X$ . On constate que, notamment pour les troisième et quatrième fréquences propres du portique, le passage de la valeur minimum de la raideur en cisaillement de la liaison pilotée à la valeur maximale permet d'assurer un décalage suffisant des

fréquences de résonances du portique pour réduire le niveau vibratoire du portique conformément à la stratégie proposée. La Figure 4.12 présente les dix premières formes propres du portique pour ces mêmes valeurs de raideur de la liaison pilotée. On constate que les modes 3 et 4 sont bien modifiés par la raideur en cisaillement de la liaison. Sur cette figure, les valeurs des fréquences propres associées à chacun des modes sont indiquées afin de faciliter la comparaison des Figures 4.11 et 4.12. Ces fréquences propres du portique sont obtenues à partir de la raideur maximale  $k_X$  de la liaison pilotée.

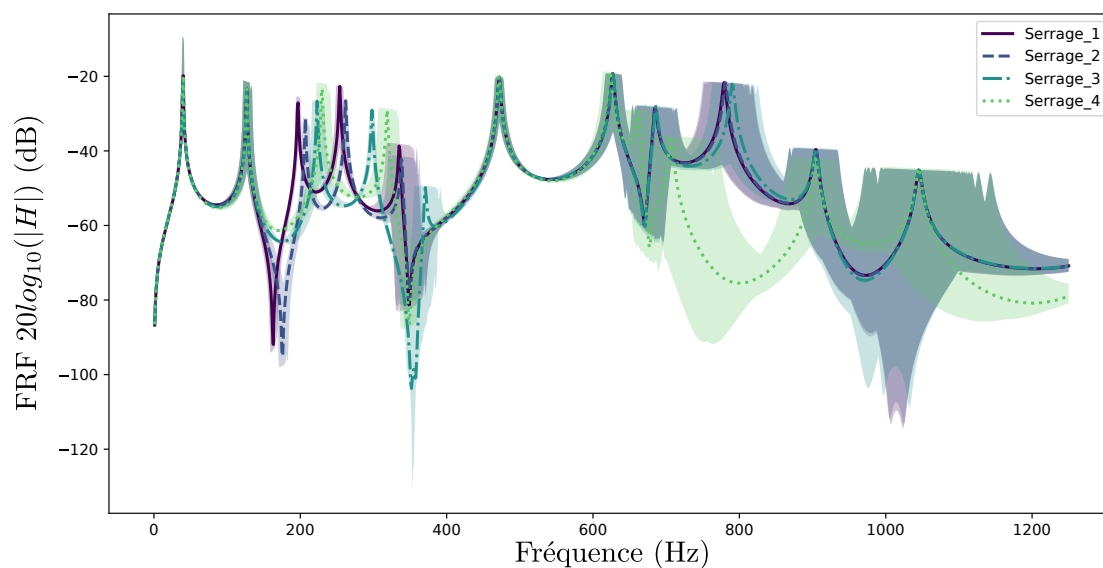


FIGURE 4.11 – Illustration du principe de réduction robuste du niveau vibratoire du portique par contrôle de la raideur de la liaison pilotée

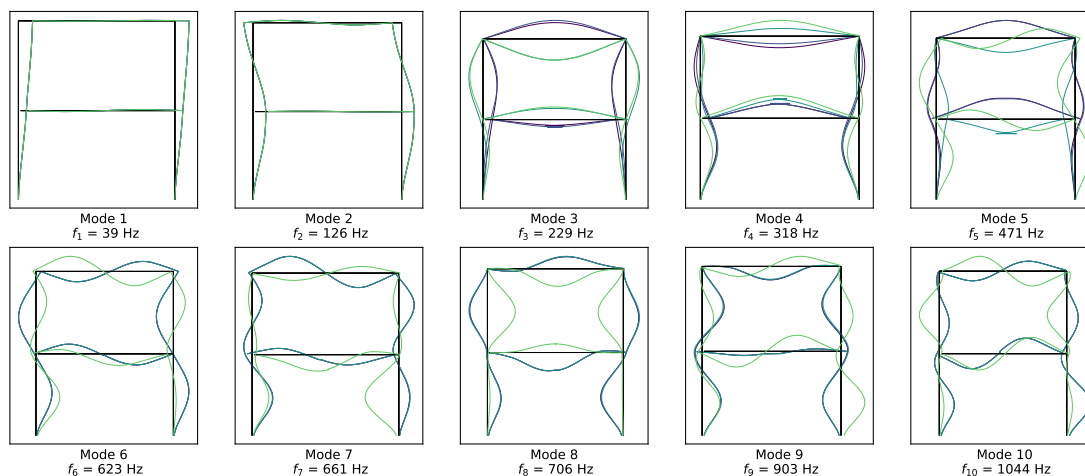


FIGURE 4.12 – Dix premiers modes propres moyens du portique pour différentes valeurs de la raideur  $k_X$  associée à la liaison pilotée

La Figure 4.13 présente plus en détail les FRF du portique pour les différentes valeurs de

raideur  $k_X$  de la liaison pilotée. On constate ainsi que les enveloppes des FRF correspondant aux valeurs extrémales de la raideur  $k_X$  ne se chevauchent pas aux voisinages des pics de résonance ce qui permet de conclure que la stratégie de réduction du niveau vibratoire est bien robuste à la variabilité des raideurs des autres liaisons du portique. La variation de la troisième fréquence propre du portique entre les valeurs extrémales de la raideur  $k_X$  est d'environ 30 Hz mais une variation d'une vingtaine de Hertz semble suffisante pour garantir une réduction robuste du niveau vibratoire en suivant la stratégie proposée.

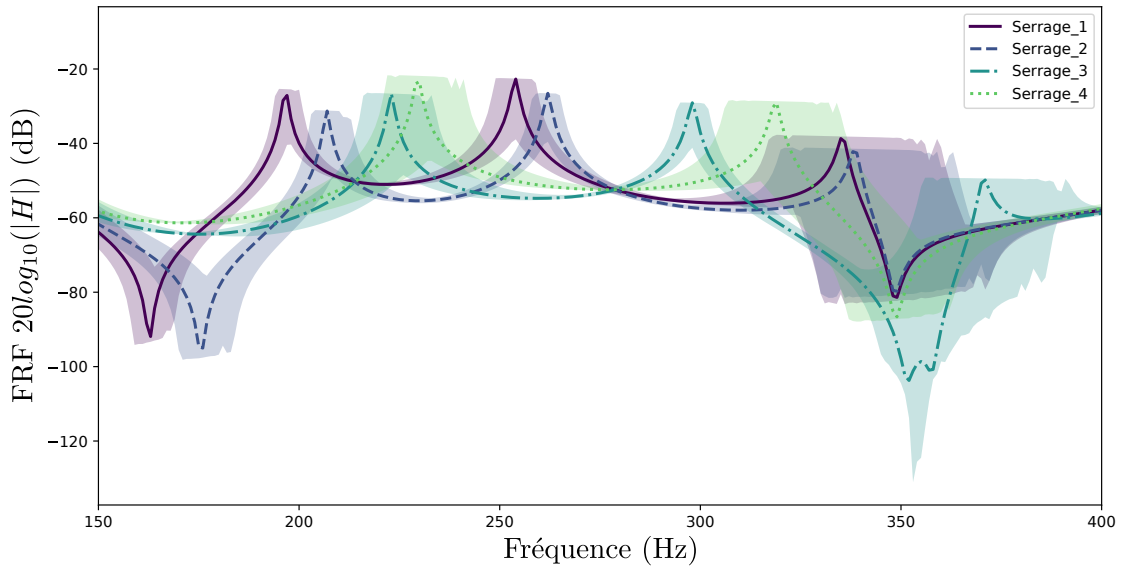


FIGURE 4.13 – Réponses en fréquence du portique au voisinage des troisième et quatrième fréquences propres lorsque la raideur suivant  $x$  (direction horizontale) de la liaison pilotée varie

#### 4.4.2.2 Influence de la raideur $k_Y$ de la liaison pilotée

Etant données les formes propres du portique muni de la liaison pilotée présentées Figure 4.12 page 140 pour le cas où seule la raideur  $k_X$  varie, on peut remarquer que certains modes auront tendance à faire travailler la liaison sur un mode d'ouverture de la liaison (les extrémités des demi-poutres assemblées par la liaison ont tendance à s'écartier l'une de l'autre dans la direction verticale), en particulier pour les deux premiers modes du portique. La variation de la raideur de la liaison pilotée suivant la direction verticale  $k_Y$  peut alors permettre d'appliquer la stratégie de réduction du niveau vibratoire à ces modes. Pour cette étude, les raideurs  $k_X$  et  $k_\theta$  sont prises respectivement égales à  $k_X = 10^{10} \text{N m}^{-1}$  et  $k_\theta = 10^8 \text{N rad}^{-1}$  et les différentes valeurs de la raideur "d'ouverture" de la liaison sont prises égales à  $k_Y = \{10^3, 10^4, 10^5, 10^5\} \text{N m}^{-1}$ .

La Figure 4.14 présente les cinq premières fréquences propres du portique lorsque la raideur  $k_Y$  varie. On constate que seule la première fréquence propre du portique varie de manière significative et permet d'envisager l'application de la stratégie proposée.

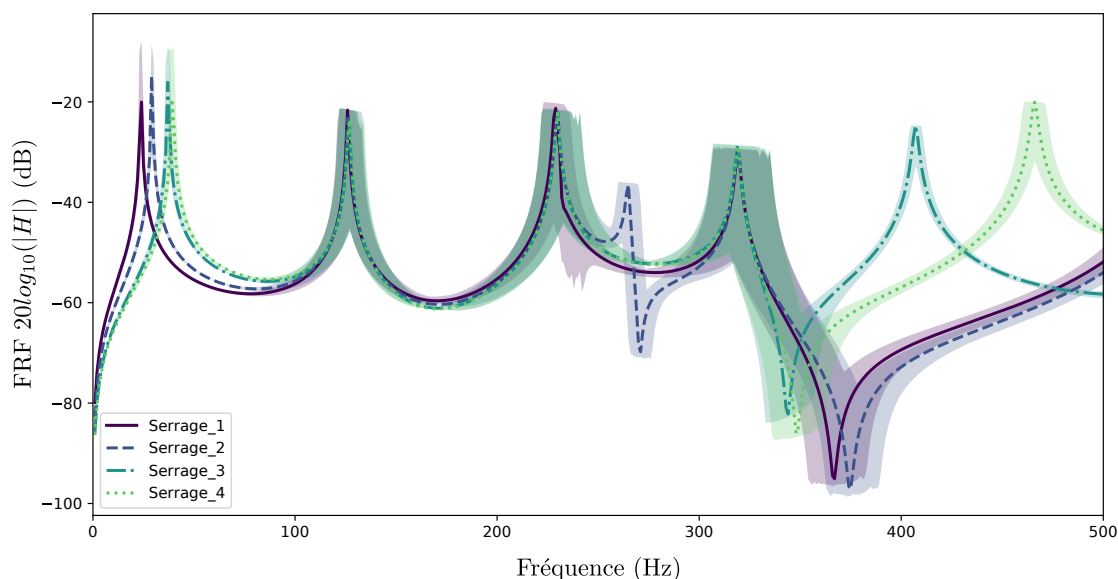


FIGURE 4.14 – Réponses en fréquence du portique au voisinage des quatre premières fréquences propres lorsque la raideur suivant  $y$  (direction verticale) de la liaison pilotée varie

#### 4.4.2.3 Influence de la raideur $k_\theta$ de la liaison pilotée

On étudie enfin l'influence de la raideur  $k_\theta$  les modes propres du portique. Pour cette simulation les raideurs  $k_X$  et  $k_Y$  sont prises égales à  $k_X = k_Y = 10^{10} \text{N m}^{-1}$  et les différentes valeurs de la raideur en flexion de la liaison sont  $k_\theta = \{10^2, 2.5 \cdot 10^2, 5 \cdot 10^2, 10^5\} \text{N rad}^{-1}$ .

La Figure 4.15 présente les FRF du portique au voisinage des troisième et quatrième fréquences propres pour les différentes valeurs de raideur  $k_\theta$ . Les deux premiers modes du portique n'étant pas impactés par la variation de raideur  $k_\theta$ , ils ne sont pas présentés ici. On constate que les enveloppes des FRF associées aux valeurs de raideurs minimum et maximum ne se chevauchent pas au voisinage des pics de résonance ce qui permet de conclure que le pilotage de la raideur suivant  $\theta$  permet d'envisager de réduire le niveau vibratoire du portique sur une plage de fréquence englobant les modes 3 et 4.

#### 4.4.3 Evaluation expérimentale de la faisabilité de la stratégie de réduction des vibrations du portique assemblé

L'objectif de cette partie est d'évaluer si la variation de raideur de la liaison pilotée réelle en fonction du serrage permet effectivement de mettre en place la stratégie proposée.

Afin d'évaluer la faisabilité pratique d'une réduction du niveau vibratoire du portique par le contrôle de la raideur d'une liaison pilotée ajoutée à la structure initiale, une série d'essais expérimentaux a été mise en place. La Figure 4.16 illustre le dispositif expérimental utilisé. Pour ce portique, on considère que toutes les liaisons autres que la liaison pilotée sont structurelles. Elles sont serrées avec un serrage nominal assurant la fonction encastrement entre les pièces à assembler. Ce serrage est choisi de manière à maximiser l'effort presseur

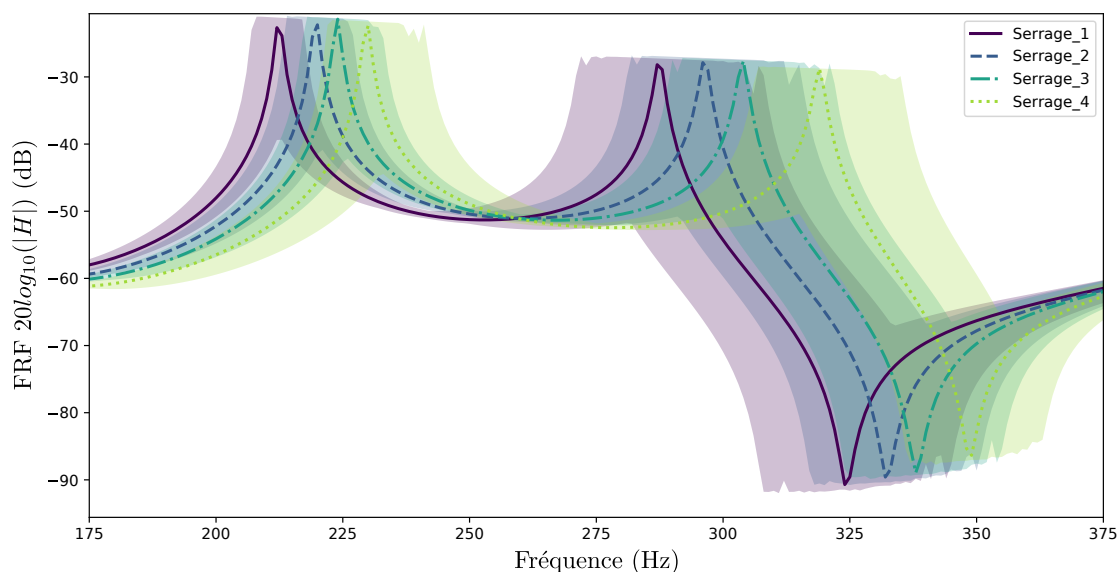


FIGURE 4.15 – Réponses en fréquence du portique au voisinage des troisième et quatrième fréquences propres lorsque la raideur suivant  $\theta$  (rotation autour de l'axe orthogonal au plan du portique) de la liaison pilotée varie

entre les deux pièces assemblées tout en assurant que la limite élastique du matériau ne soit pas dépassée en tout point de l'interface de contact. Ce serrage correspond à un effort normal dans le fût de la vis de 6000 N et est appliqué à chacune des vis structurales à l'aide d'une clé dynamométrique. La liaison amortissante est quant à elle équipée d'une vis instrumentée permettant d'imposer précisément le serrage de cette liaison afin d'étudier l'influence de la variation de raideur de cette liaison sur le comportement vibratoire de la structure globale. Différents niveaux de serrage sont alors considérés allant d'une liaison très faiblement serrée (quelques newtons) à une liaison serrée avec un serrage maximum (6000 N).

La Figure 4.17 présente les FRF expérimentales de ce portique pour différents serrages de la liaison. L'ajout des demi-poutres centrales accueillant la liaison pilotée a comme inconvénient de favoriser certains modes de torsion des poutres verticales du portique qui se retrouvent alors observables sur la plage de fréquence étudiée. Afin d'identifier la présence de ces modes hors-plan sur les FRF expérimentales du portique, les déformées modales des poutres verticales du portique sont également représentées sur la Figure 4.17 pour chacune des fréquences propres identifiées expérimentalement. On déduit de la Figure 4.17 que les déformées modales relatives aux 4<sup>ème</sup>, 7<sup>ème</sup>, 8<sup>ème</sup> et 10<sup>ème</sup> modes semblent correspondre à des modes hors plan du portique.

On constate sur la Figure 4.17 page 145 que la fréquence de résonance du troisième mode plan du portique est bien influencée par le serrage de la liaison. Dans l'état actuel de la mesure, il semble difficile de conclure quant à la présence du second mode influencé par la raideur  $k_X$  de la liaison et défini comme étant le quatrième mode du portique simulé partie 4.4.2.1. Concernant les autres modes plan du portique, on retrouve les conclusions de la partie 4.4.2.1. Ces modes ayant tendance à faire travailler la liaison dans le sens d'une



ouverture de la liaison suivant l'axe de la vis, la variation de précharge de la liaison n'a donc pas d'influence significative sur ces modes. On peut également remarquer que les modes 8 et 10 présentent une variation significative de leur fréquence de résonance en fonction du serrage de la liaison. Ces modes ne correspondent pas à des modes clairement identifiés comme étant plan. Le maillage utilisé pour réaliser la mesure expérimentale ne permet pas d'identifier clairement les formes propres du portique associées à ces fréquences propres. Il semble à nouveau difficile dans l'état actuel des choses de conclure sur l'influence de la liaison pour ces modes.

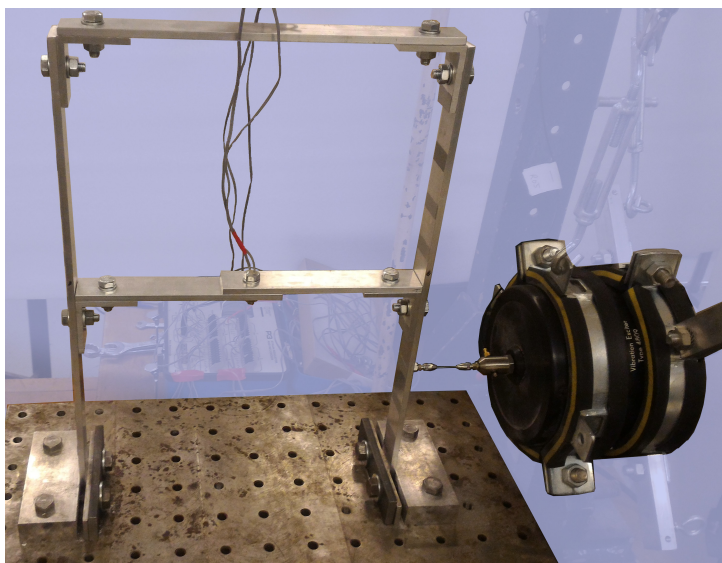


FIGURE 4.16 – Illustration du portique équipé d'une liaison pilotée

La Figure 4.18 page 145 présente la FRF du portique au voisinage de la troisième fréquence propre lorsque le serrage de la liaison pilotée varie. On peut constater que l'évolution de la fréquence de résonance et de l'amortissement n'est pas monotone avec le serrage de la liaison pilotée. On observe bien une fréquence de résonance limite  $f_3^{max}$  aux alentours de 206 Hz pour les valeurs de serrage *fort* de la liaison. Cela semble tout à fait conforme avec les observations expérimentales obtenues pour d'autres types de liaison dans les chapitres précédents de ce travail. Toutefois, pour certaines valeurs de serrage *faible* (90 N et 188 N la fréquence de résonance est égale à la fréquence limite associée au serrage *fort*. Cela laisse penser que, pour ces valeurs de serrage, il y a adhérence de l'ensemble de l'interface de contact de la liaison. Ce phénomène peut s'expliquer par les mauvaises propriétés du contact aluminium-aluminium. Ce comportement n'est pas satisfaisant vis-à-vis de l'objectif initial de réduction du niveau vibratoire de la structure par modification de la raideur locale. Dans la partie suivante, une proposition de modification de la liaison est présentée afin de garantir une évolution monotone de la troisième fréquence propre du portique avec le serrage de la liaison pilotée.

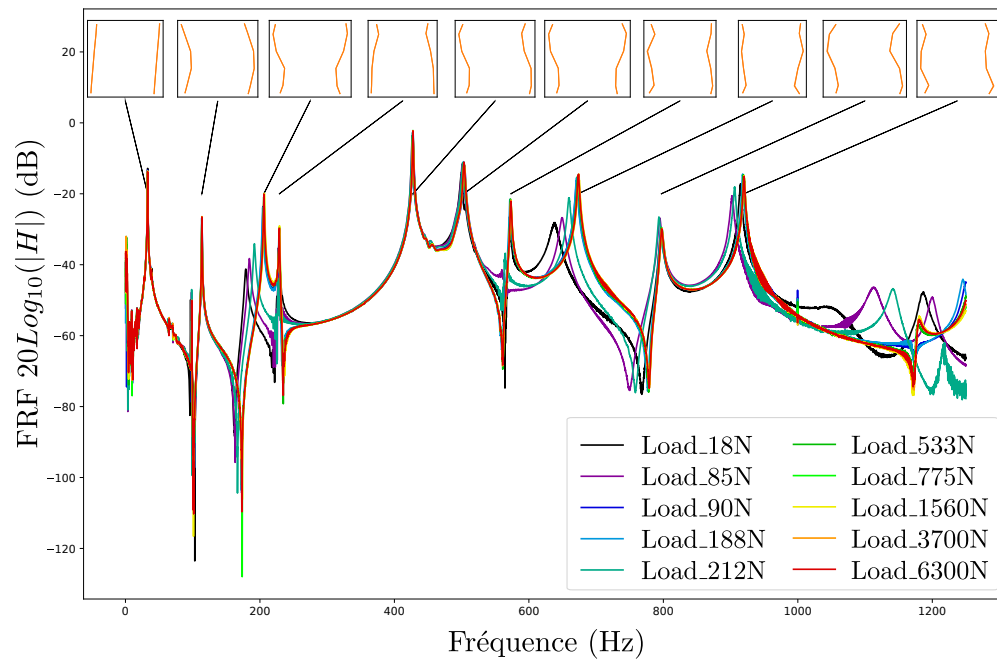


FIGURE 4.17 – FRF du portique équipé d'une liaison "amortissante" et déformées modales des poutres verticales du portique pour chacune des fréquences propres de la structure

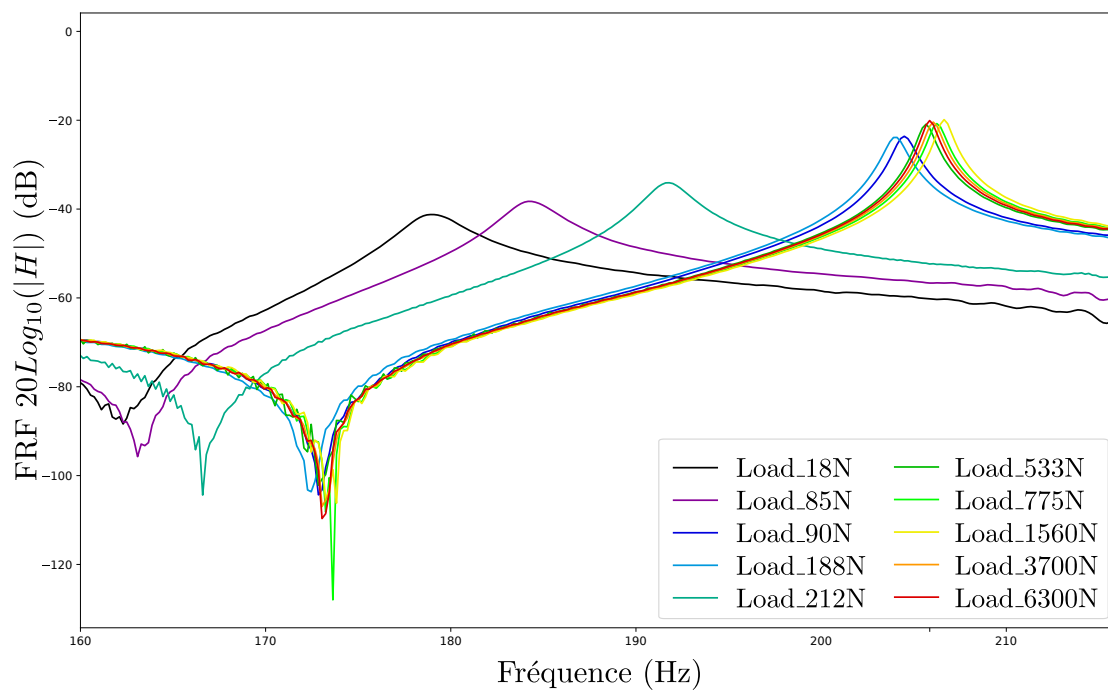


FIGURE 4.18 – Détail de la troisième fréquence propre du portique - Influence du serrage de la liaison pilotée

#### 4.4.3.1 Ajout d'un patin en polytétrafluoroéthylène (PTFE)

Afin d'observer un comportement monotone entre la variation de fréquence de résonance et la serrage de la liaison, on choisit de modifier les caractéristiques de la liaison pilotée afin de favoriser le glissement dans l'interface de liaison. Pour cela, un patin en polytétrafluoroéthylène (PTFE) est ajouté entre les poutres centrales du portique. La Figure 4.19 page 146 présente l'intégration du patin en PTFE à la liaison pilotée.

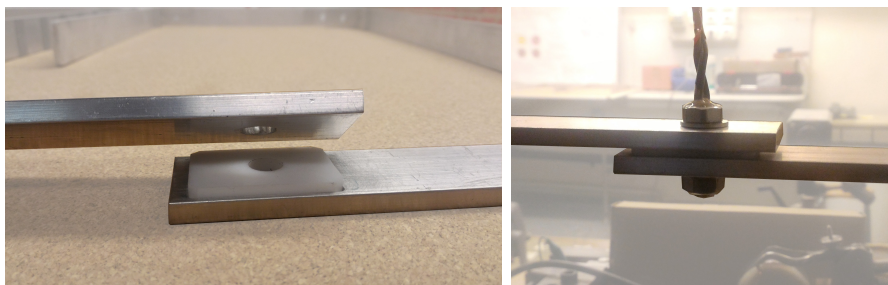


FIGURE 4.19 – Illustrations de la modification de la liaison par l'ajout d'un patin en PTFE

La Figure 4.20 page 147 présente les FRF du portique pour différents niveaux de serrage de la liaison pilotée désormais équipée d'un patin en PTFE. On retrouve un comportement vibratoire similaire au comportement du portique avec liaison pilotée sans patin en PTFE. La variation de fréquence de résonance pour les modes 3, 8 et 10 est désormais bien monotone avec le serrage de la liaison pilotée. La Figure 4.21 page 147 permet de confirmer cette hypothèse sur le cas du troisième mode plan du portique. La Figure 4.21 page 147 permet également d'évaluer la plage de variation de la troisième fréquence de résonance lorsque le serrage de la liaison pilotée varie entre un serrage très faible (quelques newtons) et le serrage maximal. La variation maximale de la troisième fréquence de résonance est de l'ordre de 15 Hz. La sensibilité de cette fréquence de résonance au serrage de la liaison pilotée est relativement faible. Toutefois, en comparant aux résultats de simulations présentés partie 4.4.2.1, cette variation peut s'avérer suffisante sous réserve que la variabilité réelle des raideurs des autres liaisons du portique ne dépasse pas les variabilités identifiées partie 4.2.1. Afin d'assurer la robustesse de la stratégie de réduction des vibrations proposée dans le cas de variabilités plus importantes des paramètres de la structure, la sensibilité de la raideur de la liaison pilotée à l'effort de serrage doit être maximisée. Pour cela, on peut chercher à identifier les paramètres influant sur la sensibilité à la raideur de liaison des fréquences propres dont on souhaite limiter l'influence. La partie suivante propose d'étudier expérimentalement certaines caractéristiques de la liaison pilotée.

#### 4.4.4 Modifications heuristiques de la liaison pilotée

On cherche ici à évaluer l'influence de certains paramètres sur la sensibilité de certaines fréquences de résonance du portique au serrage de la liaison pilotée. Les paramètres étudiés sont choisis de manière heuristique. On étudiera notamment l'influence de la position des poutres centrales du portique par rapport aux poutres verticales ainsi que l'influence de l'orientation de l'axe de la liaison par rapport au plan du portique.

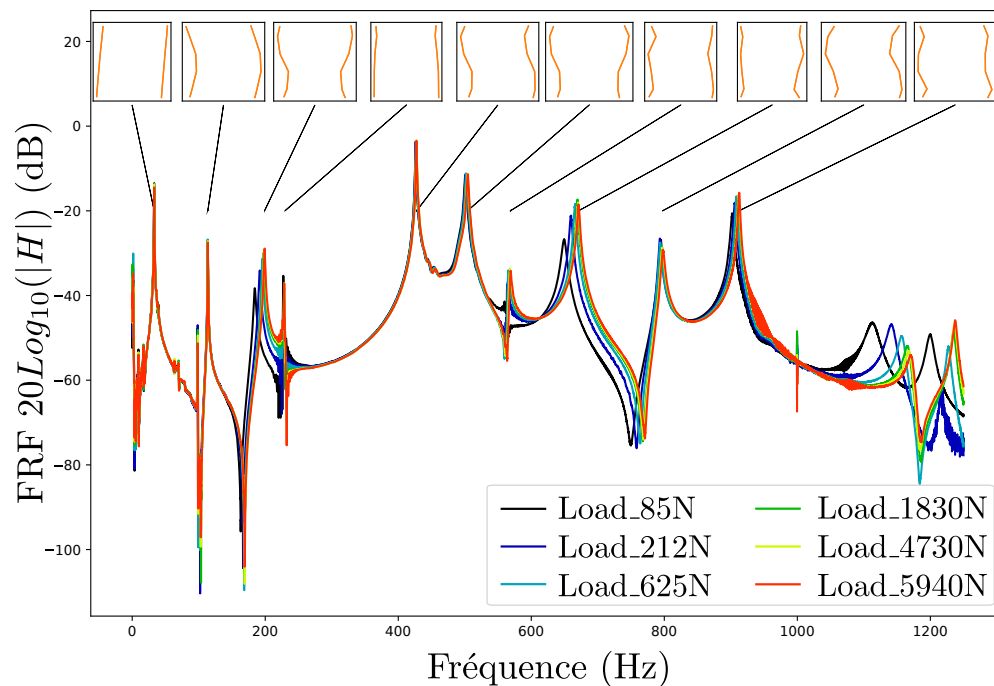


FIGURE 4.20 – FRF du portique équipé d'une liaison pilotée munie d'un patin en PTFE

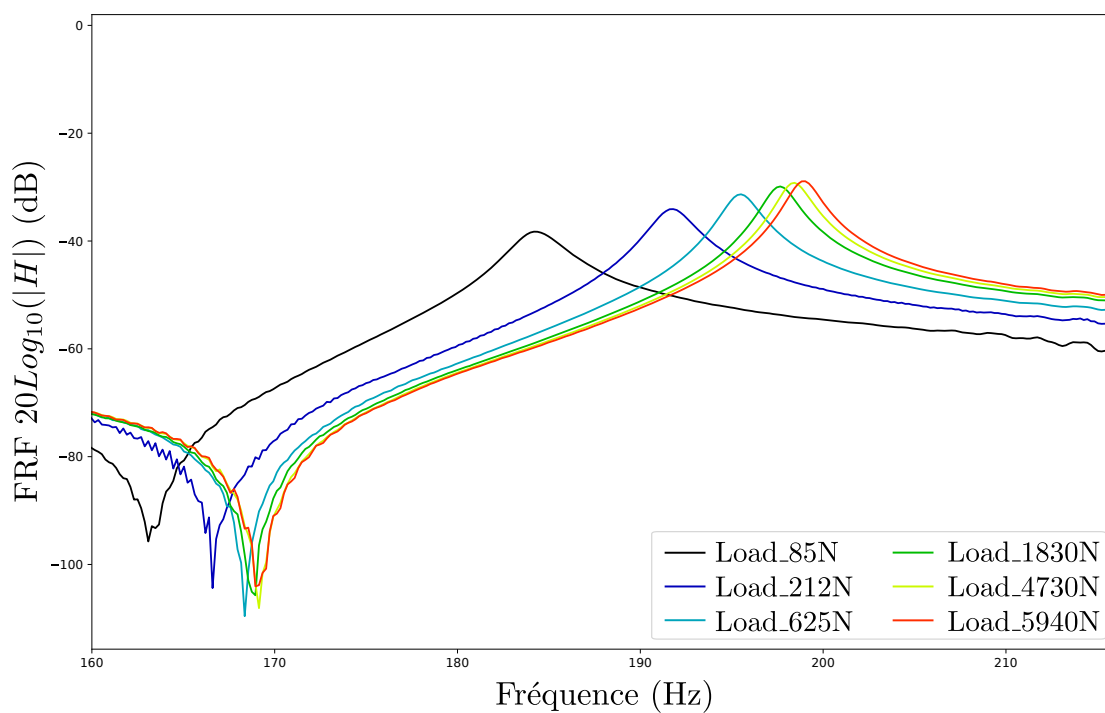


FIGURE 4.21 – Détail de la troisième fréquence propre du portique - Influence du serrage de la liaison pilotée avec patin en PTFE

#### 4.4.4.1 Décalage de la position verticale de la liaison pilotée par rapport au troisième mode plan du portique

Lors de l'analyse des FRF expérimentales du portique au voisinage de la troisième fréquence de résonance, la faible sensibilité de cette fréquence de résonance au serrage de la liaison pilotée a été mise en évidence. La position de la liaison pilotée par rapport aux poutres verticales du portique a été initialement choisie de manière à ce que l'interface de liaison soit positionnée au centre des poutres verticales du portique. Ce choix de positionnement était initialement motivé par le fait que pour le second mode plan d'un portique trois barres simple (cf Figure 4.9 page 138), les poutres verticales travaillent en opposition de phase et le déplacement maximal est obtenu au centre de ces poutres. L'ajout d'une barre centrale au portique modifie les formes propres de ce dernier. Le premier mode plan pour lequel les poutres verticales vibrent en opposition de phase est alors le troisième mode observé sur les FRF expérimentales de la Figure 4.20 page 147. Ce mode présente désormais un noeud au centre des poutres verticales. On peut alors se demander si la liaison pilotée est suffisamment sollicitée pour que la sensibilité de la fréquence de résonance au serrage de la liaison soit significative. On propose d'éloigner les demi-poutres centrales du portique du noeud du mode des poutres verticales. Les cornières permettant de lier les poutres horizontales aux poutres verticales sont alors retournées comme définies sur la Figure 4.22 page 149. Le patin en PTFE dans l'interface de liaison est conservé.

La Figure 4.22 page 149 présente les FRF expérimentales obtenues pour différentes valeurs de serrage de la liaison pilotée (allant de quelques newtons au serrage maximal de la liaison) lorsque la liaison pilotée est en *position 2*. On constate alors que l'influence du serrage sur le troisième mode du portique est alors négligeable. La liaison pilotée ne semble alors plus suffisamment sollicitée dans cette configuration de portique pour que l'influence du serrage soit significative. La liaison est alors "trop" rigide quelque soit l'état de serrage de la liaison pilotée.

On peut en conclure que la liaison pilotée nécessite un positionnement optimal par rapport aux modes du portique sous peine de voir son efficacité fortement diminuée. Les outils développés dans le cadre de ce travail, et notamment l'approche SMR, permettent d'envisager la mise en place d'une démarche de positionnement optimal de la liaison pilotée indépendamment de la variabilité du comportement des autres liaisons du portique. Cette démarche n'a pas pu être mise en place dans l'état actuel de ce travail du fait des limitations du modèle choisi pour les différentes liaisons du portique ainsi que de l'absence de modèle dédié au comportement de la liaison pilotée. Cette étude pourra toutefois être mise en place dans le cadre de travaux futurs.

#### 4.4.4.2 Positionnement de l'axe de la liaison orthogonalement au plan des modes étudiés

Les liaisons pilotées étudiées jusqu'à présent n'ont aucune influence sur les modes du portique pour lesquels les poutres verticales vibrent en phase. Cela s'explique par le fait que pour ces modes, les demi-poutres assemblées par la liaison pilotée ont tendance à s'éloigner l'une de l'autre de manière à ouvrir la liaison. Les résultats des simulations présentés partie 4.4.2.2 ont montré qu'une variation de la raideur  $k_Y$  de la liaison pilotée influe

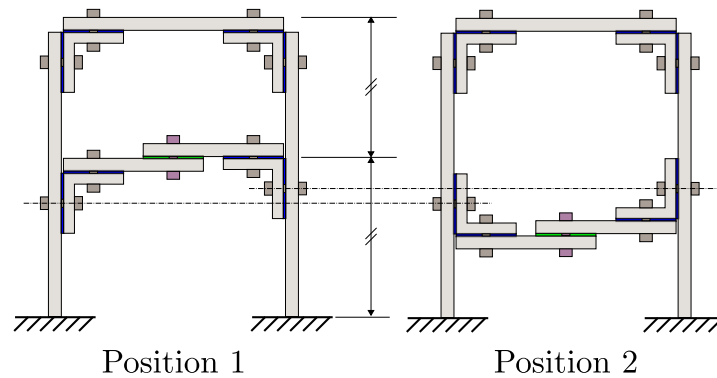


FIGURE 4.22 – Illustration de la nouvelle position verticale de la liaison pilotée

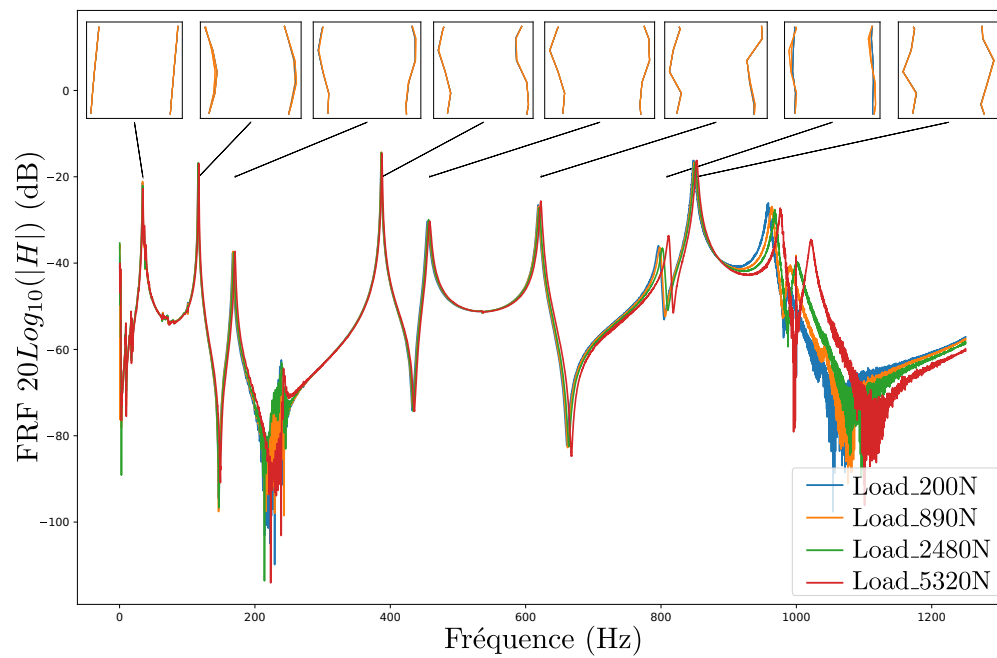


FIGURE 4.23 – FRF du portique équipé d'une liaison pilotée munie d'un patin en PTFE  
La position de la liaison est décalée du centre des poutres verticales et différents niveaux de serrage sont considérés

significativement sur la première fréquence propre du portique. Dans le cas du portique muni d'une liaison pilotée traité expérimentalement jusqu'à présent, c'est essentiellement la rigidité de la vis (en acier) qui permet de faire transiter les efforts d'une demi-poutre à l'autre, et ce quelque soit l'effort de serrage de la liaison. Il semble ainsi difficile de faire varier la raideur  $k_Y$  de la liaison pour cette géométrie de portique. Une autre configuration de liaison est alors proposée telle que l'interface de liaison soit sollicitée en cisaillement pour l'ensemble des modes plans du portique. Pour cela, l'axe de la vis de la liaison pilotée doit nécessairement être orthogonal au plan du portique. La Figure 4.24 illustre cette nouvelle configuration de liaison pilotée.

Le comportement du portique muni de cette nouvelle configuration de liaison pilotée est alors testé expérimentalement pour différentes valeurs de serrage. La Figure 4.25 présente les FRF ainsi obtenues. On constate que les trois premiers modes ne sont quasiment pas influencés par la variation du serrage de la liaison pilotée. L'absence de variation de la troisième fréquence propre en fonction du serrage de la liaison pilotée peut en partie s'expliquer par la solution retenue pour assembler les cornières aux demi-poutres. En effet, les deux pièces sont emboîtées l'une dans l'autre par l'intermédiaire de fentes et l'assemblage est assuré par une colle époxy à défaut de solution de soudage ou de brasage disponible au laboratoire. La rigidité de l'assemblage peut donc être remise en question notamment pour des efforts longitudinaux dans les demi-poutres centrales du portique. Concernant les deux premiers modes, la rigidité des cornières peut justifier le comportement observé. En effet, des liaisons relativement souples entre les demi-poutres centrales du portique et les poutres verticales n'influent pas sur les deux premiers modes du portique car pour ces modes, la partie supérieure du portique est alors assimilable à un parallélogramme déformable. La liaison n'est donc pas fortement sollicitée dans le plan du portique pour ces modes.

On observe une influence du serrage de la liaison sur les modes suivant. Toutefois, c'est essentiellement l'amortissement du cinquième mode qui semble être influencé par le serrage de la liaison. On observe également une variation de la fréquence de résonance de ce mode avec le serrage mais cette variation est trop peu significative pour être exploitable dans le cadre de la stratégie de réduction du niveau vibratoire du portique choisie dans ce travail.

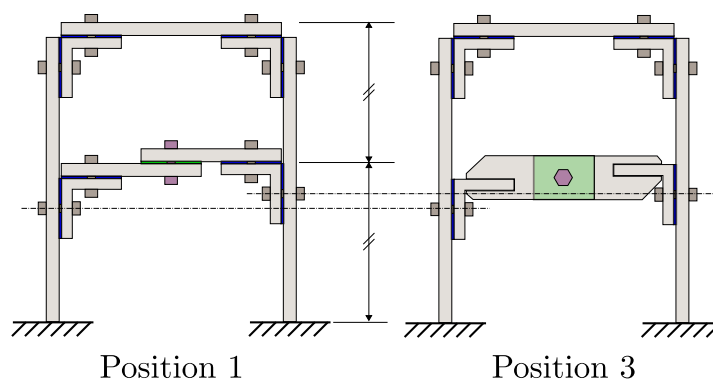


FIGURE 4.24 – Illustration de la liaison pilotée dont l'axe est orthogonal au plan du portique

On peut conclure que, bien que la liaison soit désormais positionnée de manière à ce que l'axe de la vis soit orthogonal au plan du portique, le choix de la solution technologique

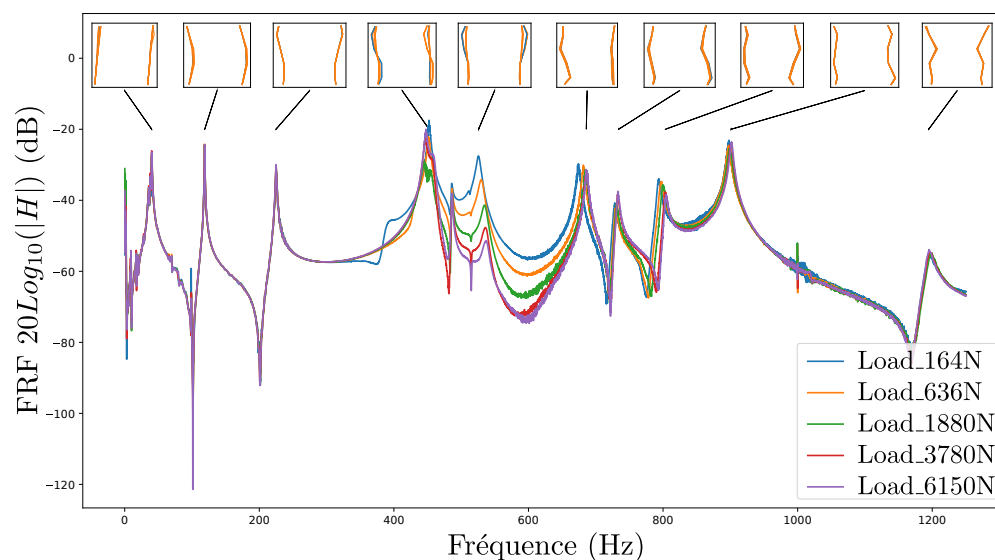


FIGURE 4.25 – FRF d'un portique équipé d'une liaison "amortissante" munie d'un patin en PTFE pour lequel l'axe de la liaison est orthogonal au plan des modes considérés

ainsi que la qualité de réalisation de celle-ci ne permettent pas d'observer une variation significative des fréquences propres de plusieurs modes plans du portique lorsque le serrage de la liaison pilotée varie. En plus du positionnement de la liaison pilotée par rapport aux constituants de la structure globale, les solutions technologiques choisies pour intégrer la liaison pilotée au reste de la structure sont également déterminantes pour assurer le bon fonctionnement de la stratégie de réduction du niveau vibratoire du portique. Un dimensionnement adapté des demi-poutres liant la liaison pilotée au reste de la structure ainsi que des liaisons entre les demi-poutres et les poutres verticales semble nécessaire. Pour un modèle de liaison adapté à la géométrie de la liaison pilotée, une optimisation des caractéristiques géométriques des demi-poutres centrales du portique peut être envisagée avec comme objectif de maximiser la plage de variation de certaines fréquences propres du portique en fonction du serrage de la liaison. On peut par exemple modéliser la liaison pilotée par une raideur généralisée bornée par deux valeurs identifiées expérimentalement à partir d'une liaison. Pour ces deux valeurs de raideurs on peut alors quantifier une plage de variation maximale pour une ou plusieurs fréquences propres du portique et identifier des paramètres des demi-poutres (comme la section ou le moment quadratique) maximisant la variation des fréquences propres d'intérêt.

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, l'ensemble des outils développés au cours de ce travail ont été capitalisés afin de caractériser de manière robuste le comportement vibratoire d'une structure assemblée. Un modèle stochastique de liaison a été proposé et identifié à l'aide de l'approche SMR. Les qualités de l'approche SMR et notamment sa rapidité de calcul a permis



de mettre en place une méthode d'optimisation afin d'identifier les moments statistiques des variables aléatoires associées aux raideurs de liaison. Ces quantités sont ainsi obtenues en minimisant l'erreur au sens des moindres carrés entre les moments statistiques des fréquences propres expérimentales de la structure et les moments statistiques des fréquences propres simulées à l'aide de l'approche SMR. La variabilité expérimentale des fréquences propres est obtenue en faisant varier le serrage de la liaison étudiée et l'amplitude d'excitation appliquée à la structure.

Les modèles stochastiques de raideur de liaison identifiés pour chacun des types de liaison de la structure (suivant que la liaison soit associée à une poutre verticale ou horizontale du portique) sont alors utilisés pour simuler le comportement de deux structures munis de plusieurs liaisons en tenant compte de la variabilité de chacune des liaisons. Les résultats de ces simulations sont comparés à la variabilité expérimentale de ces structures. Il en ressort que les modèles stochastiques de raideur de liaison mis en place permettent de retrouver la variabilité observée expérimentalement dans le cas d'un portique muni de deux liaisons. Dans le cas d'une structure entièrement boulonnée, les résultats de simulation présentent une allure générale ainsi qu'une variabilité autour de la réponse nominale de cette structure conformes aux observations expérimentales. Toutefois, un décalage de la plupart des fréquences propres moyennes simulées par rapport aux fréquences propres expérimentales est observé et peut s'expliquer par la sensibilité importante du modèle de liaison aux conditions de montage de la structure. De plus, les caractéristiques des matériaux utilisés semblent aggraver cette sensibilité. Ces résultats mettent en évidence une des limitations de la démarche suivie et notamment du modèle de liaison proposé : il ne tient pas compte de la variabilité des paramètres qui influent sur la nature du contact tels que les défauts macro-géométriques des constituants de la structure, défauts de formes et défauts micro-géométriques des interfaces de contact.

Aux limitations du modèle de liaison choisie, le comportement vibratoire d'une structure assemblée quelconque peut ainsi être caractérisé numériquement en tenant compte de la variabilité des raideurs de liaison. Une stratégie de réduction robuste des vibrations d'une structure assemblée est alors proposée. Cette stratégie est basée sur la variation de la raideur de la structure par la modification du serrage d'une liaison boulonnée dédiée. Les outils mis en place dans le cadre de ce travail sont alors utilisés afin d'évaluer la faisabilité de cette stratégie. Les résultats de simulations montrent qu'à partir d'éléments standards similaires aux éléments constitutifs de la structure et d'une liaison pilotée de raideur variable il est possible de limiter le niveau vibratoire de manière robuste. Lors de cette phase de simulation exploratoire, la liaison pilotée est modélisée par des raideurs généralisées. Différentes plages de variation permettant d'assurer la robustesse de la stratégie sont identifiées pour chacune de ces raideurs. La faisabilité pratique de cette stratégie est alors testée expérimentalement. Il en ressort qu'à partir de choix technologiques simples, la variation de serrage d'une liaison permet de décaler certaines fréquences propres d'un portique réel. Toutefois, une phase d'optimisation des caractéristiques de la liaison semble nécessaire afin de maximiser la plage de variation des fréquences propres de la structure et d'assurer le bon fonctionnement de la stratégie de réduction des vibrations. Cette phase d'optimisation pourra faire l'objet de travaux futurs.

L'optimisation des paramètres de la liaison pilotée nécessite d'identifier un modèle de

comportement dédié à la liaison pilotée. L'inconvénient des modèles rhéologiques est que leurs paramètres dépendent d'une phase d'identification expérimentale pour laquelle les caractéristiques de la liaison sont difficilement modifiables. Dans la mesure où certains paramètres de la liaison sont amenés à être modifiés lors de la phase d'optimisation, l'utilisation d'un modèle constitutif de l'interface de contact de la liaison pilotée semble être plus adapté. Ces modèles sont réputés coûteux en temps de calcul mais sont fidèles à la physique du problème. La nécessité de ne modéliser finement qu'une seule liaison de la structure, à savoir la liaison pilotée, permet d'envisager ce type de modèle.

Un autre paramètre à prendre en compte lors du dimensionnement de la liaison est le dimensionnement de l'actionneur permettant d'imposer la valeur de serrage de la liaison. Dans le cas d'un actionneur piézoélectrique on prendra notamment garde à la faisabilité technologique de ce type de composant, en particulier à la plage d'effort que peut imposer le composant [BELLY et al. 2017 ; BOUAZIZ 2017].



# Conclusion et perspectives

Les travaux développés dans cette thèse ont permis de proposer une démarche de caractérisation robuste du comportement vibratoire des structures légères assemblées. Cette démarche permet de caractériser les espaces propres de ce type de structures lorsque les paramètres dynamiques des liaisons (notamment la raideur) varient aléatoirement. L'intérêt est alors de pouvoir proposer, dès la phase de dimensionnement d'un système mécanique, des solutions robustes aux variabilités des paramètres dynamiques des liaisons. Dans le cadre de cette thèse, la démarche est appliquée au dimensionnement robuste d'une solution de réduction du niveau vibratoire d'une structure assemblée.

Les différentes étapes de la démarche proposée peuvent se résumer de la manière suivante :

---

**Algorithm 2** Démarche de caractérisation robuste du comportement vibratoire d'une structure légère assemblée

---

- 1: Choix d'un modèle de liaison **adapté** à la structure étudiée
  - 2: Intégration du modèle de liaison dans un modèle de structure globale<sup>1</sup>
  - 3: **for** Chaque configuration de liaison de la structure complète **do**
  - 4:     Identification des caractéristiques **nominales** des paramètres de liaison
  - 5:     Identification de la **variabilité** des paramètres de liaison
  - 6: Simulation stochastique de la structure
- 

Les méthodes de caractérisation du comportement des structures en présence de paramètres incertains sont généralement coûteuses en terme de temps de calcul. Un modèle "juste suffisant" permettant de traduire le comportement des liaisons apparaît dès lors comme une nécessité afin de limiter la durée des simulations. Dans le cadre de ce travail, le choix du modèle de liaison est piloté par les résultats expérimentaux. Le **chapitre 2** présente la démarche de caractérisation expérimentale suivie dans cette thèse afin de **choisir un modèle** de liaison et d'en **identifier les caractéristiques nominales**. Une structure représentative des structures légères a été choisie : un portique constitué de trois barres en aluminium assemblées entre elles par des liaisons boulonnées. De par le choix de cette structure constituée d'éléments en aluminium, et du fait des limitations imposées par les moyens d'essais utilisés, le modèle de liaison "juste suffisant" permettant de rendre compte

---

1. Les sous-structures composant la structure globale et assemblées par des liaisons sont généralement modélisées par éléments finis, différentes solutions d'intégration du modèle de liaison au modèle de la structure globale peuvent alors être envisagées suivant le type de sous-structures.

de l'influence des liaisons sur le comportement de la structure complète est très simplifié et **peut se réduire à une raideur linéaire**. L'amortissement induit par la présence des liaisons, notamment par le glissement au niveau des interfaces de contact des liaisons, n'est pas suffisamment significatif dans le cas de la structure étudiée pour être pris en compte dans le modèle de liaison.

Afin d'identifier la variabilité des paramètres de liaison et plus généralement de caractériser la réponse vibratoire d'une structure assemblée en présence de paramètres incertains, une nouvelle approche a été mise en place au **chapitre 3** : l'approche de Réduction de Modèle Stochastique ou **approche SMR** (*Stochastic Model Reduction*). Cette approche **non-intrusive** permet d'estimer avec une très bonne précision les fréquences propres aléatoires d'une structure à partir d'**un seul calcul déterministe** et ce pour des paramètres incertains de variabilité moyenne. Le principe de l'approche SMR consiste à exploiter les propriétés particulières des vecteurs propres aléatoires de la structure pour adapter le modèle stochastique utilisé à chaque fréquence propre aléatoire en fonction d'un critère de précision global imposé pour l'ensemble des fréquences propres recherchées. Un critère permettant d'identifier la méthode à utiliser pour estimer une fréquence propre aléatoire en fonction de sa configuration est proposé. Ce critère est basé sur les premiers moments statistiques des fréquences propres aléatoires et ne représente donc aucun coût de calcul supplémentaire. L'approche SMR est appliquée à trois structures tests de complexité croissante : un système masses-ressorts à trois *ddl*, un portique trois barres dont les modules d'Young sont modélisés par des variables aléatoires et une structure industrielle correspondant à l'Adaptateur Charge Utile (ACU) d'Ariane 5. Ces applications permettent de valider les performances de l'approche SMR et notamment le gain en temps de calcul comparé à une simulation de Monte-Carlo classique.

L'approche SMR a été présentée lors de conférences nationales et internationales [GHIENNE et BLANZÉ 2015 ; GHIENNE, BLANZÉ et LAURENT 2017a ; GHIENNE et BLANZÉ 2016] et fait l'objet d'un article dans un journal à comité de lecture international [GHIENNE, BLANZÉ et LAURENT 2017b].

Après avoir proposé un modèle stochastique de raideur de liaison en se basant sur le principe du maximum d'entropie, les caractéristiques des variables aléatoires associées aux raideurs de liaisons sont ainsi identifiées au **chapitre 4**. Pour cela, les variabilités des fréquences propres de différentes configurations de portiques munis d'une seule liaison sont caractérisées expérimentalement. Le rapport précision-temps de calcul de l'approche SMR permet d'intégrer cette approche dans un processus d'optimisation basé sur le principe du maximum de vraisemblance pour identifier les paramètres d'un modèle stochastique de raideur de liaison. Les paramètres de ce modèle sont ainsi identifiés par minimisation de l'erreur au sens des moindres carrés entre les fréquences propres expérimentales et les fréquences propres aléatoires simulées à l'aide de l'approche SMR. Ces modèles de raideur aléatoires sont ensuite utilisés pour simuler le comportement stochastique de portiques munis de plusieurs liaisons boulonnées. La comparaison des résultats de simulations aux résultats expérimentaux montre que **la démarche suivie permet de retrouver la variabilité expérimentale** du comportement de ces structures. Bien qu'il existe certains écarts entre le comportement nominal prédit et le comportement nominal observé expérimentalement, ces écarts peuvent être imputés aux limitations du modèle nominal de liaison

et ne remettent pas en cause la démarche suivie. Cette démarche est alors utilisée afin de proposer une stratégie de réduction **robuste** du niveau vibratoire d'une structure assemblée. Cette stratégie est basée sur la variation de raideur de la structure globale induite par la variation de serrage d'une liaison boulonnée dédiée. La liaison boulonnée est modélisée par des raideurs généralisées ce qui permet de tester l'influence des différents paramètres de liaison sur la faisabilité de la stratégie proposée. Une phase de validation expérimentale est également mise en place et permet de valider le potentiel de la stratégie proposée. Les résultats expérimentaux soulignent la nécessité d'une phase d'optimisation des caractéristiques de la liaison afin de maximiser la sensibilité des modes propres de la structure complète au serrage de la liaison pilotée. En effet, le serrage de la liaison pilotée peut être imposé à l'aide d'un actionneur piézoélectrique et la maximisation de la sensibilité des modes de la structure au serrage de la liaison permettrait de limiter les exigences de performance de l'actionneur.

Les résultats de ce travail ont permis de soulever certaines limitations de la démarche suivie et un certain nombre de perspectives peuvent être envisagées.

## Perspectives

Tout d'abord, le modèle de comportement nominal choisi pour tenir compte de l'influence des liaisons sur le comportement de la structure complète peut être questionné. Le modèle de liaison utilisé dans cette thèse est linéaire alors que les phénomènes intervenant au niveau des interfaces de contact des liaisons sont fortement non-linéaires, ce qui suggérerait l'utilisation de modèles de liaison également non-linéaires. Ce choix se justifie par le fait que les modèles non-linéaires sont généralement très sensibles aux incertitudes sur les paramètres du modèle [BÖSWALD et LINK 2004] ce qui peut conduire à réduire la prédictibilité d'un modèle non-linéaire comparé à un modèle linéaire moins fidèle à la physique du problème mais moins sensible aux incertitudes. On peut alors envisager d'implémenter différents modèles non-linéaire de liaisons issus de la littérature et simuler le comportement dynamique de cette structure pour chaque modèle considéré en tenant compte des incertitudes sur les paramètres de liaisons. La variabilité du comportement vibratoire de ce portique ayant été caractérisée expérimentalement, on pourra ainsi évaluer l'intérêt de chaque modèle non-linéaire de liaison. La réponse vibratoire stochastique d'une structure non-linéaire pouvant être obtenue à l'aide de la méthode de Balance Harmonique multidimensionnelle stochastique proposée par [DIDIER, SINOÛ et FAVERJON 2013].

Ensuite, la modélisation des liaisons considérées dans ce travail a été pilotée par les résultats expérimentaux obtenus à partir d'une structure réelle. Le choix de la structure étudiée n'a pas permis d'observer certains phénomènes comme la dissipation induite par la présence des liaisons pour chacun des modes étudiés. Seuls quelques modes font travailler suffisamment les liaisons pour induire du glissement au niveau des interfaces de contact. Il est donc, dans l'état actuel des choses, difficile d'en déduire un modèle d'amortissement pour les liaisons étudiées. Apparaît alors la nécessité d'une étude tribologique de l'interface des liaisons considérées afin de mettre en évidence les paramètres prépondérants pour la dissipation d'énergie dans les liaisons [PEYRET, CHEVALLIER et DION 2016]. Il sera ensuite possible de concevoir un dispositif expérimental permettant l'étude de la dissipation

d'énergie dans les assemblages.

Le Facteur de Proximité de l'approche SMR présente certaines limitations. En effet, le cas de l'ACU traité au chapitre 3 a mis en évidence la possibilité d'apparition de faux-positifs de cet indicateur. Ces faux-positifs conduisent à une augmentation du temps de calcul global sans amélioration significative de la qualité d'estimation des fréquences propres aléatoires de la structure. L'étude d'un autre indicateur est actuellement en cours de validation. Cet indicateur est basé sur l'étude de la courbure du lieu des valeurs propres au voisinage de la valeur nominale des paramètres du système. Il pourra faire l'objet de travaux futurs.

L'approche proposée de simulation du comportement vibratoire des structures en présence de paramètres incertains est suffisamment "légère" pour être intégrée dans une démarche de dimensionnement optimal robuste. On peut ainsi se baser sur l'approche SMR pour dimensionner une solution d'amortissement vibratoire de manière à maximiser l'efficacité de la solution quelque soit les variations des paramètres des liaisons de la structure. On pense notamment au dimensionnement de dispositifs piézoélectriques amortissants ou d'amortisseurs à masse accordée.

Deux catégories de liaisons peuvent être mises en évidence : les liaisons dites structurales, dont la fonction est de garantir l'intégrité de la structure, et les liaisons dédiées à la modification pilotée du comportement vibratoire de la structure. Ces liaisons pilotées sont généralement en nombre réduit. Le dimensionnement de cette deuxième catégorie de liaisons, dont l'effort de serrage est supposé piloté par un actionneur dédié, nécessite une phase d'optimisation de ses caractéristiques afin de maximiser son efficacité. L'utilisation d'un modèle fin de liaison (modèle constitutif) est rendu possible par le faible nombre de liaisons pilotées considérées et par le coût réduit de la simulation stochastique par l'utilisation de l'approche SMR. Les autres liaisons de la structure peuvent être modélisées à l'aide de modèles simples tels qu'utilisés dans cette thèse.

Enfin, à plus long terme, on peut envisager de mettre en place une maquette numérique de liaison [CAIGNOT 2009] permettant d'évaluer l'influence de paramètres tels que l'effort de serrage, l'amplitude d'excitation, le coefficient de frottement dans l'interface de contact sur le comportement de la liaison et notamment sur la raideur équivalente de liaison. On peut également envisager d'étudier l'influence des défauts micro et macro géométriques des pièces assemblées sur le comportement de la liaison. Cette étude permettrait d'identifier la variabilité de la raideur équivalente de liaison en s'affranchissant de la phase de caractérisation expérimentale. Cette variabilité pourrait alors être associée à un modèle simplifié de liaison ce qui permettrait de simuler le comportement d'une structure assemblée complète munis d'un grand nombre de liaisons. Cette maquette numérique pourrait également servir de base afin d'évaluer l'amortissement induit par le glissement au niveau des interfaces de contact de la liaison étudiée.

# Bibliographie

- ABRAMOWITZ, M., I. A. STEGUN et al. (1966). *Handbook of mathematical functions*. T. 55. 62, p. 17 (cf. p. 74).
- ADHIKARI, S. et M. I. FRISWELL (2007). “Random matrix eigenvalue problems in structural dynamics”. In : *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 69.3, p. 562–591 (cf. p. 39, 84, 88, 91–92, 100).
- AHMADIAN, H. et H. JALALI (2007a). “Generic element formulation for modelling bolted lap joints”. In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 21.5, p. 2318–2334 (cf. p. 26, 32, 34, 36, 40, 70).
- (2007b). “Identification of bolted lap joints parameters in assembled structures”. In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 21.2, p. 1041–1050 (cf. p. 26, 40, 64, 66, 69).
- ALVIN, K. F. (1997). “Efficient Computation of Eigenvector Sensitivities for Structural Dynamics”. In : *AIAA Journal* 35.11, p. 1760–1766 (cf. p. 94–95).
- AMES, N. M. et al. (2009). *Handbook on dynamics of jointed structures*. Rapp. tech. Sandia National Laboratories (cf. p. 20, 41, 47).
- ANDREW, A. L. et R. C. E. TAN (1999). “Computation of mixed partial derivatives of eigenvalues and eigenvectors by simultaneous iteration”. In : *Communications in Numerical Methods in Engineering* 15.9, p. 641–649 (cf. p. 95).
- ANDRIAMBOLOLONA, H. (2009). *Calcul de sensibilité en dynamique*. Rapp. tech. R4.03.04. Code\_Aster (cf. p. 95–96).
- Ariane 5, User’s Manual* (2011). Issue 5, Revision 1. Arianespace S.A. (cf. p. 114–115).
- BALMES, E. (1993). “High modal density, curve veering, localization - A different perspective on the structural response”. In : *Journal of Sound Vibration* 161, p. 358–363 (cf. p. 85, 91–92).
- BEARDS, C. F. (1983). “The Damping of Structural Vibration by Controlled Interfacial Slip in Joints”. In : *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design* 105.3, p. 369–373 (cf. p. 136).
- BEARDS, C. et J. WILLIAMS (1977). “The damping of structural vibration by rotational slip in joints”. In : *Journal of Sound and Vibration* 53.3, p. 333–340 (cf. p. 136–137).
- BELEGUNDU, A. D. et B. G. YOON (1988). “Iterative methods for design sensitivity analysis”. In : *AIAA Journal* 26.11, p. 1413–1415 (cf. p. 95).
- BELLY, C. et al. (2017). “Active washer for smart mechanical linkage”. In : *VIII ECCOMAS Thematic Conference on Smart Structures and Materials* (cf. p. 124, 153).



- BELVIN, K. W. (1987). "Modeling of joints for the dynamic analysis of truss structures". M.S. Thesis. George Washington Univ., Washington, DC : School of Engineering et Applied Science (cf. p. 33, 36–37, 40).
- BESANÇON, R. (1990). *The encyclopedia of physics*. T. p 498. Springer Science & Business Media (cf. p. 62).
- BLANZÉ, C. (2003). *Stratégie de calcul de structures en présence de paramètres incertains*. LMT (Cachan). Laboratoire de mécanique et technologie (cf. p. 38).
- BLANZÉ, C. et L. CHAMPANEY (2004). "A computational strategy for the random response of assemblies of structures". In : *International Journal of Solids and Structures* 41.22-23, p. 6383–6405 (cf. p. 38).
- BLANZÉ, C. et P. ROUCH (2005). "Analysis of structures with stochastic interfaces in the medium-frequency range". In : *Journal of Computational Acoustics* 13.04, p. 711–729 (cf. p. 38).
- BOGRAD, S. et al. (2011). "Modeling the dynamics of mechanical joints". In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 25.8, p. 2801–2826 (cf. p. 26, 34, 36–37, 40, 46).
- BÖSWALD, M. et M. LINK (2004). "Identification of non-linear joint parameters by using frequency response residuals". In : *International Conference on Noise and Vibration Engineering, ISMA*. Leuven, Belgium, p. 3121–3140 (cf. p. 34, 40, 78, 157).
- BOUAZIZ, H. (2017). "Contrôle vibratoire des structures assemblées". Thèse de doct. Cotutelle entre l'Ecole Nationale des Inéieurs de Sfax et l'Ecole Centrale Paris (cf. p. 50, 124, 137, 153).
- BOUC, R. (1967). "Forced vibration of mechanical systems with hysteresis". In : *Abstract of proceedings of the fourth conference on nonlinear oscillations, Prague* (cf. p. 30).
- BRAKE, M. R., éd. (2017). *The Mechanics of Jointed Structures. Recent Research and Open Challenges for Developing Predictive Models for Structural Dynamics*. Springer International Publishing (cf. p. 20).
- CAIGNOT, A. (2009). "Prédiction par essais virtuels de l'amortissement dans les structures spatiales". Thèse de doct., 1 vol. (117 p.) (Cf. p. 33, 40, 158).
- CAMERON, T. M. et J. H. GRIFFIN (1989). "An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems". In : *Journal of Applied Mechanics* 56.1, p. 149–154 (cf. p. 34, 40).
- CANUDAS-DE-WIT, C. et al. (1995). "A new model for control of systems with friction". In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 40.3, p. 419–425 (cf. p. 29).
- CHEN, T.-Y. (1993). "Design sensitivity analysis for repeated eigenvalues in structural design". In : *AIAA Journal* 31.12, p. 2347–2350 (cf. p. 94).
- CLAEYS, M. et al. (2016). "Experiments and numerical simulations of nonlinear vibration responses of an assembly with friction joints - Application on a test structure named "Harmony"". In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 70-71, p. 1097–1116 (cf. p. 36).
- COLLINS, J. D. et W. T. THOMSON (1969). "The eigenvalue problem for structural systems with statistical properties". In : *AIAA Journal* 7.4, p. 642–648 (cf. p. 39).
- CRAWLEY, E. F. et A. C. AUBERT (1986). "Identification of nonlinear structural elements by force-state mapping". In : *AIAA Journal* 24.1, p. 155–162 (cf. p. 26, 33, 40).
- CRAWLEY, E. F. et K. J. O'DONNELL (1987). "Force-state mapping identification of nonlinear joints". In : *AIAA Journal* 25.7, p. 1003–1010 (cf. p. 33).

- CROCOMBE, A. et al. (2006). “Estimating the energy dissipated in a bolted spacecraft at resonance”. In : *Computers & Structures* 84.5-6, p. 340–350 (cf. p. 27, 36).
- DAHL, P. (1968). *A solid friction model*. Rapp. tech. DTIC Document (cf. p. 29).
- DAILEY, R. L. (1989). “Eigenvector derivatives with repeated eigenvalues”. In : *AIAA Journal* 27.4, p. 486–491 (cf. p. 94).
- DAOUK, S. (2016). “Propagation d’incertitudes à travers des modèles dynamiques d’assemblages de structures mécaniques”. Thèse de doct. École Normale Supérieure de Cachan (cf. p. 38, 41).
- DIDIER, J., J.-J. SINOÛ et B. FAVERJON (2013). “Nonlinear vibrations of a mechanical system with non-regular nonlinearities and uncertainties”. In : *Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 18.11, p. 3250–3270 (cf. p. 157).
- DOYLE, S. *pyNastran*. <https://github.com/SteveDoyle2/pyNastran/wiki> (cf. p. 97, 114).
- DU BOIS, J. L., S. ADHIKARI et N. A. LIEVEN (2011). “On the quantification of eigenvalue curve veering : a veering index”. In : *Journal of applied mechanics* 78.4, pp. 041007–1–041007–8 (cf. p. 85, 91–93, 118).
- DUCARNE, J., O. THOMAS et J.-F. DEÛ (2012). “Placement and dimension optimization of shunted piezoelectric patches for vibration reduction”. In : *Journal of Sound and Vibration* 331.14, p. 3286–3303 (cf. p. 24).
- ERITEN, M. et al. (2013). “Nonlinear system identification of frictional effects in a beam with a bolted joint connection”. In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 39.1-2, p. 245–264 (cf. p. 40).
- ESTEBAN, J. et C. A. ROGERS (2000). “Energy dissipation through joints : theory and experiments”. In : *Computers & Structures* 75.4, p. 347–359 (cf. p. 35, 37, 40).
- EWINS, D. J. (1984). *Modal testing - Theory and practice*. T. ch 3, pp. 158-168. Mechanical engineering research studies (cf. p. 59).
- FERREIRA, J. V. (1998). “Dynamic Response Analysis of Structures with Nonlinear Components”. Thèse de doct. Imperial college of science, technology et medecine, University of London (cf. p. 34, 40).
- FERRI, A. A. et A. C. BINDEMANN (1992). “Damping and Vibration of Beams With Various Types of Frictional Support Conditions”. In : *Journal of Vibration and Acoustics* 114.3, p. 289–296 (cf. p. 34, 40).
- FESTJENS, H. (2014). “Identification and modeling of jointed structures for dynamic analysis”. Theses. Ecole Centrale Paris (cf. p. 25, 27–28, 32, 34–35, 40, 60, 62, 66).
- FOX, R. L. et M. P. KAPOOR (1968). “Rates of change of eigenvalues and eigenvectors.” In : *AIAA Journal* 6.12, p. 2426–2429 (cf. p. 85, 94).
- FRISWELL, M. (1996). “The derivatives of repeated eigenvalues and their associated eigenvectors”. In : *Journal of vibration and acoustics* 118.3, p. 390–397 (cf. p. 94, 100).
- FRISWELL, M. I. (1995). “Calculation of second and higher order eigenvector derivatives”. In : *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 18.4, p. 919–921 (cf. p. 94).
- GANT, F. (2011). “Modeling and simulation strategy of aeronautical assemblies in an uncertain context”. Theses. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan (cf. p. 41).
- GAUL, L. et J. LENZ (1997). “Nonlinear dynamics of structures assembled by bolted joints”. In : *Acta Mechanica* 125.1, p. 169–181 (cf. p. 32, 40, 66).

- GAUL, L., J. LENZ et D. SACHAU (1998). “Active Damping of Space Structures by Contact Pressure Control in Joints”. In : *Mechanics of Structures and Machines* 26.1, p. 81–100 (cf. p. 33, 37).
- GAUL, L. et R. NITSCHKE (2000). “Friction control for vibration suppression”. In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 14.2, p. 139–150 (cf. p. 36, 137).
- GAUL, L. et R. NITSCHKE (2001). “The Role of Friction in Mechanical Joints”. In : *Applied Mechanics Reviews* 54.2, p. 93–106 (cf. p. 27, 29, 36, 40).
- GHANEM, R. et al. (2000). “Modal properties of a space-frame with localized system uncertainties”. In : *in 8th ASCE Specialty Conference of Probabilistic Mechanics and Structural Reliability, ASCE* (cf. p. 41).
- GHANEM, R. et D. GHOSH (2002). “Eigenvalue analysis of a random frame”. In : *EURO-DYN2002*. Munich, Germany, p. 341 (cf. p. 39).
- (2007). “Efficient characterization of the random eigenvalue problem in a polynomial chaos decomposition”. In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 72.4, p. 486–504 (cf. p. 39–40, 92, 113).
- GHANEM, R. et P. D. SPANOS (1990). “Polynomial Chaos in Stochastic Finite Elements”. In : *Journal of Applied Mechanics* 57.1, p. 197–202 (cf. p. 38–39).
- GHANEM, R. G. et P. D. SPANOS (2003). *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*. (Revised edition). Dover : New York (cf. p. 39).
- GHIENNE, M. et C. BLANZÉ (2015). “Caractérisation robuste du comportement vibratoire d’une structure en présence de paramètres incertains”. In : *Actes du 22ème Congrès Français de Mécanique, CFM 2015*. Lyon, France, (cf. p. 156).
- GHIENNE, M., C. BLANZÉ et L. LAURENT (2017a). “Réduction de Modèle Stochastique pour la caractérisation robuste du comportement vibratoire des structures assemblées”. In : *Actes du 13ème Colloque National en Calcul des Structures, CSMA 2017* (cf. p. 156).
- (2017b). “Stochastic model reduction for robust dynamical characterization of structures with random parameters”. In : *Comptes Rendus Mécanique* (cf. p. 156).
- GHIENNE, M. et C. BLANZÉ (2016). “A simplified method for random vibration analysis of structures with random parameters”. In : *Journal of Physics : Conference Series* 744.1, p. 012174 (cf. p. 156).
- GHOSH, D., R. GHANEM et C. PETIT (2003). “Stochastic buckling of a joined wing”. In : *Stochastic Dynamics Conference*. Hangzhou, China (cf. p. 40).
- GOODMAN, L. E. et J. H. KLUMPP (1956). “Analysis of slip damping with reference to turbine blade vibration”. In : *Journal of Applied Mechanics* 23, p. 421 (cf. p. 27).
- GUILLOT, J. (2007). “Modélisation et calcul des assemblages vissés. Généralités”. In : *Techniques de l’ingénieur Assemblages et fixations mécaniques* base documentaire : TIB177DUO.ref. article : bm5560 (cf. p. 49).
- HELLER, L., E. FOLTÊTE et J. PIRANDA (2009). “Experimental identification of nonlinear dynamic properties of built-up structures”. In : *Journal of Sound and Vibration* 327.1-2, p. 183–196 (cf. p. 37, 40, 47).
- HEWLETT-PACKARD, C. (1986). *The fundamentals of modal testing : application note 243-3*. Application note : Hewlett-Packard Company. Hewlett Packard Company (cf. p. 55–56).

- HIRAI, I. et M. KASHIWAKI (1977). “Derivatives of eigenvectors of locally modified structures”. In : *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 11.11, p. 1769–1773 (cf. p. 94).
- IBRAHIM, R. et C. PETTIT (2005). “Uncertainties and dynamic problems of bolted joints and other fasteners”. In : *Journal of Sound and Vibration* 279.3 - 5, p. 857 –936 (cf. p. 20, 27, 33–34, 40, 47).
- IWAN, W. D. (1966). “A distributed-element model for hysteresis and its steady-state dynamic response”. In : *Journal of Applied Mechanics* 33.4, p. 393–900 (cf. p. 30).
- (1967). “On a class of models for the yielding behavior of continuous composite systems”. In : *American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics* 89, p. 612–617 (cf. p. 30).
- JALALI, H., H. AHMADIAN et J. E. MOTTERSHEAD (2007). “Identification of nonlinear bolted lap-joint parameters by force-state mapping”. In : *International Journal of Solids and Structures* 44.25-26, p. 8087 –8105 (cf. p. 33, 40).
- JANKOVIC, M. S. (1994). “Exact nth derivatives of eigenvalues and eigenvectors”. In : *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 17.1, p. 136–144 (cf. p. 95).
- KARIM, Y. (2013). “Caractérisation robuste de liaisons amortissantes avec dispositifs piézo-électriques pour la réduction de vibrations de structures”. Theses. Conservatoire national des arts et metiers - CNAM (cf. p. 41, 84, 124, 137).
- KIMM, W.-J. et Y.-s. PARK (1994). “Non-linear joint parameter identification by applying the force-state mapping technique in the frequency domain”. In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 8.5, p. 519 –529 (cf. p. 34).
- LADEVÈZE, P., G. PUEL et T. ROMEUF (2006). “Lack of knowledge in structural model validation”. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195.37. John H. Argyris Memorial Issue. Part I, p. 4697 –4710 (cf. p. 38).
- LEE, I.-W., D.-O. KIM et G.-H. JUNG (1999a). “Natural frequency and mode shape sensitivities of damped systems : Part I, Distinct natural frequencies”. In : *Journal of Sound and Vibration* 223.3, p. 399 –412 (cf. p. 95).
- (1999b). “Natural Frequency and Mode Shape Sensitivities of Damped Systems : Part II, Multiple Natural Frequencies”. In : *Journal of Sound and Vibration* 223.3, p. 413 –424 (cf. p. 95).
- LEE, I.-W. et G.-H. JUNG (1997). “An efficient algebraic method for the computation of natural frequency and mode shape sensitivities - Part I. Distinct natural frequencies”. In : *Computers & Structures* 62.3, p. 429 –435 (cf. p. 94).
- LEE, U. (2001). “Dynamic Characterization of the Joints in a Beam Structure by Using Spectral Element Method”. In : *Shock and Vibration* 8.6 (cf. p. 35, 37, 40).
- LIN, R., Z. WANG et M. LIM (1996). “A practical algorithm for the efficient computation of eigenvector sensitivities”. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 130.3–4, p. 355 –367 (cf. p. 91–92, 94).
- LIU, K. et J. LIU (2005). “The damped dynamic vibration absorbers : Revisited and new result”. In : 284, p. 1181–1189 (cf. p. 24).
- LUND, E. et N. OLHOFF (1994). “Shape design sensitivity analysis of eigenvalues using “exact” numerical differentiation of finite element matrices”. In : *Structural optimization* 8.1, p. 52–59 (cf. p. 95).
- MANOHAR, C. S. et A. J. KEANE (1994). “Statistics of energy flows in spring-coupled one-dimensional subsystems”. In : *Philosophical Transactions of the Royal Society of*

- London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 346.1681, p. 525–542 (cf. p. 92–93).
- MARTINI, L. (2008). “Développement et évaluation de l’hypothèse de stabilité modal pour la variabilité du comportement vibratoire des structures minces modélisées par éléments finis”. Thèse de doct. Université de Technologie de Compiègne (cf. p. 84).
- MASING, G. (1926). “Eigenspannungen und verfestigung beim messing”. In : *Proceedings of the 2nd International Congress of Applied Mechanics*, p. 332–335 (cf. p. 30).
- MATEUS, H. C. et al. (1997). “Sensitivity analysis and optimization of thin laminated structures with a nonsmooth eigenvalue based criterion”. In : *Structural optimization* 14.4, p. 219–224 (cf. p. 95).
- MAYER, M. et L. GAUL (2007). “Segment-to-segment contact elements for modelling joint interfaces in finite element analysis”. In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 21.2, p. 724–734 (cf. p. 37, 40).
- MCCARTHY, M. A. et al. (2005). “Measurement of Bolt Pre-load in Torqued Composite Joints”. In : *Strain* 41.3, p. 109–112 (cf. p. 50).
- METHERELL, A. F. et S. V. DILLER (1968). “Instantaneous Energy Dissipation Rate in a Lap Joint—Uniform Clamping Pressure”. In : *Journal of Applied Mechanics* 35.1, p. 123–128 (cf. p. 27).
- MIGNOLET, M. P., P. SONG et X. WANG (2015). “A stochastic Iwan-type model for joint behavior variability modeling”. In : *Journal of Sound and Vibration* 349, p. 289–298 (cf. p. 41, 43, 124–126).
- MILLS-CURRAN, W. C. (1988). “Calculation of eigenvector derivatives for structures with repeated eigenvalues”. In : *AIAA Journal* 26.7, p. 867–871 (cf. p. 94).
- (1990). “Comment on “Eigenvector Derivatives with Repeated Eigenvalues””. In : *AIAA Journal* 28.10, p. 1846–1846 (cf. p. 94).
- MINDLIN, R. D (1949). “Compliance of elastic bodies in contact”. In : *Journal of Applied Mechanics* 16, p. 259–268 (cf. p. 27).
- NAIR, P. et A. KEANE (2003). “An approximate solution scheme for the algebraic random eigenvalue problem”. In : *Journal of Sound and Vibration* 260.1, p. 45–65 (cf. p. 39).
- NANDA, B. (2006). “Study of the effect of bolt diameter and washer on damping in layered and jointed structures”. In : *Journal of Sound and Vibration* 290.3-5, p. 1290–1314 (cf. p. 27).
- NELSON, R. B. (1976). “Simplified calculation of eigenvector derivatives”. In : *AIAA Journal* 14.9, p. 1201–1205 (cf. p. 94).
- BERG, E. et al. (2016). *Machinery’s Handbook*. Sous la dir. de H. H. RYFFEL. 30th Edition. Toolbox Edition (cf. p. 49).
- OJALVO, I. U. (1987). “Efficient computation of mode-shape derivatives for large dynamic systems”. In : *AIAA Journal* 25.10, p. 1386–1390 (cf. p. 94).
- OLDFIELD, M., H. OUYANG et J. E. MOTTERSHEAD (2005). “Simplified models of bolted joints under harmonic loading”. In : *Computers & Structures* 84.1-2, p. 25–33 (cf. p. 27).
- OLHOFF, N., E. LUND et A. P. SEYRANIAN (1994). “Sensitivity Analysis and optimization of Multiple eigenvalues in structural design problems”. In : *Structural optimization* 8.4, p. 207–227 (cf. p. 95).

- PAN, C., T. YAMAGUCHI et Y. SUZUKI (2011). “Evaluation of the Bolt Axial Force in High Strength Bolted Joints by Using Strain Gauges”. In : *Memoirs of the Faculty of Engineering, Osaka City University* (cf. p. 50).
- PAPADRAKAKIS, M. et KOTSOPULOS (1999). “Parallel solution methods for stochastic finite element analysis using Monte Carlo simulation”. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 168.1, p. 305–320 (cf. p. 38).
- PERKINS, N. et C. MOTE (1986). “Comments on curve veering in eigenvalue problems”. In : *Journal of Sound and Vibration* 106.3, p. 451–463 (cf. p. 85, 93, 118).
- PEYRET, N. (2012). “Dissipation de l’énergie mécanique dans les assemblages : effet du frottement en sollicitation dynamique”. Thèse de doct. Université Paris-Est (cf. p. 25, 27, 47).
- PEYRET, N., G. CHEVALLIER et J.-L. DION (2016). “Dynamic Damping in Joints : Multiscale Model Taking into Account Defects in a Nominally Plane Surface”. In : *International Journal of Applied Mechanics* 08.08, p. 1650097 (cf. p. 157).
- PLAUT, R. H. et K. HUSEYIN (1973). “Derivatives of eigenvalues and eigenvectors in non-self-adjoint systems.” In : *AIAA Journal* 11.2, p. 250–251 (cf. p. 89).
- REN, Y., T. M. LIM et M. K. LIM (1998). “Identification of Properties of Nonlinear Joints Using Dynamic Test Data”. In : *Journal of Vibration and Acoustics* 120.2, p. 324–330 (cf. p. 26, 34, 40).
- RESOR, B. R. et M. J. STARR (2007). *Influence of Misfit Mechanisms on Jointed Structure Response*. Rapp. tech. Sandia National Laboratories (SNL-NM), Albuquerque, NM (United States) (cf. p. 62).
- ROGERS, L. C. (1970). “Derivatives of eigenvalues and eigenvectors”. In : *AIAA Journal* 8.5, p. 943–944 (cf. p. 94).
- ROULEAU, L. (2013). “Modélisation vibro-acoustique de structures sandwich munies de matériaux viscoélastiques”. Thèse de doct. Conservatoire National des Arts et Métiers (cf. p. 59).
- SCHENK, C. A. et G. I. SCHÜLLER (2005). “Uncertainty Assessment of Large Finite Element Systems”. In : *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. T. 24. Springer Berlin Heidelberg. Chap. 9, p. 59–61– (cf. p. 38).
- SEGALMAN, D. J. (2001). *An initial overview of Iwan modeling for mechanical Joints*. Rapp. tech. SAND2001-0811. Sandia National Laboratories (cf. p. 30–31, 40).
- SEGALMAN, D. J. et M. J. STARR (2004). *Relationships among certain joint constitutive models*. SAND2001-0811, Unlimited Release. Sandia National Laboratories (cf. p. 30, 33, 40).
- SEGALMAN, D. J. (2003). “A four-parameter Iwan model for lap-type joints”. In : *Proposed for publication in Journal of Applied Mechanics*. (Cf. p. 26, 30, 33, 40).
- SHINOZUKA, M. et C. J. ASTILL (1972). “Random Eigenvalue Problems in Structural Analysis”. In : *AIAA Journal* 10.4, p. 456–462 (cf. p. 38).
- SMALLWOOD, D. O., D. L. GREGORY et R. G. COLEMAN (2001). “A three parameter constitutive model for a joint which exhibits a power law relationship between energy loss and relative displacement”. In : *Proceeding of the Shock and Vibration Symposium*. Destin, FL. (cf. p. 30, 40).

- SOIZE, C. (2013). “Stochastic modeling of uncertainties in computational structural dynamics - Recent theoretical advances”. In : *Journal of Sound and Vibration* 332.10, p. 2379–2395 (cf. p. 38, 98–99, 124).
- SOIZE, C. (2012). *Stochastic Models of Uncertainties in Computational Mechanics*. American Society of Civil Engineers (cf. p. 125).
- SONG, Y. et al. (2004). “Simulation of dynamics of beam structures with bolted joints using adjusted Iwan beam elements”. In : *Journal of Sound and Vibration* 273.1- 2, p. 249 –276 (cf. p. 31–32, 35–37, 40, 70).
- SONG, Y. et al. (2005). “Effect of Pressure Distribution on Energy Dissipation in a Mechanical Lap Joint”. In : *AIAA Journal* 43.2, p. 420–425 (cf. p. 27).
- SUDRET, B. et A. D. KIUREGHIAN (2000). *Stochastic Finite Element Methods and Reliability : A State-of-the-Art Report*. Rapp. tech. (cf. p. 39, 84).
- THOMAS, O, J. DUCARNE et J.-F. DEÛ (2012). “Performance of piezoelectric shunts for vibration reduction”. In : *Smart Materials and Structures* 21.1, p. 015008 (cf. p. 24).
- UNGAR, E. (1973). “The status of engineering knowledge concerning the damping of built-up structures”. In : *Journal of Sound and Vibration* 26.1, p. 141 –154 (cf. p. 25, 136).
- VALANIS, K. C. (1970). “A friction viscoplasticity without a yield surface”. In : *Archive Mech* 23.4, p. 517–551 (cf. p. 29).
- VAN BUREN, K. L. et al. (2015). “A case study to quantify prediction bounds caused by model-form uncertainty of a portal frame”. In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 50-51, p. 11–26 (cf. p. 69, 135).
- Van den NIEUWENHOF, B. et J.-P. COYETTE (2003). “Modal approaches for the stochastic finite element analysis of structures with material and geometric uncertainties”. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192.33, p. 3705 –3729 (cf. p. 38).
- WEN, Y. K. (1976). “Method of random vibration of hysteretic systems”. In : *Journal of the Engineering Mechanics Division* 102.2, p. 249–263 (cf. p. 30).
- WIENER, N. (1938). “The Homogeneous Chaos”. In : *American Journal of Mathematics* 60.4, p. 897–936 (cf. p. 39).
- WWW.OPENTURNS.ORG. *OpenTURNS* (cf. p. 97, 114).
- XIU, D. et G. E. KARNIADAKIS (2003). “Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos”. In : *Journal of Computational Physics* 187.1, p. 137 –167 (cf. p. 39).
- ZADEH, L. (1999). “Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility”. In : *Fuzzy Sets and Systems* 100.Supplement 1, p. 9 –34 (cf. p. 38).
- ZANG, C, M. FRISWELL et J. MOTTERSHEAD (2005). “A review of robust optimal design and its application in dynamics”. In : *Computers & structures* 83.4, p. 315–326 (cf. p. 24).

# Annexes





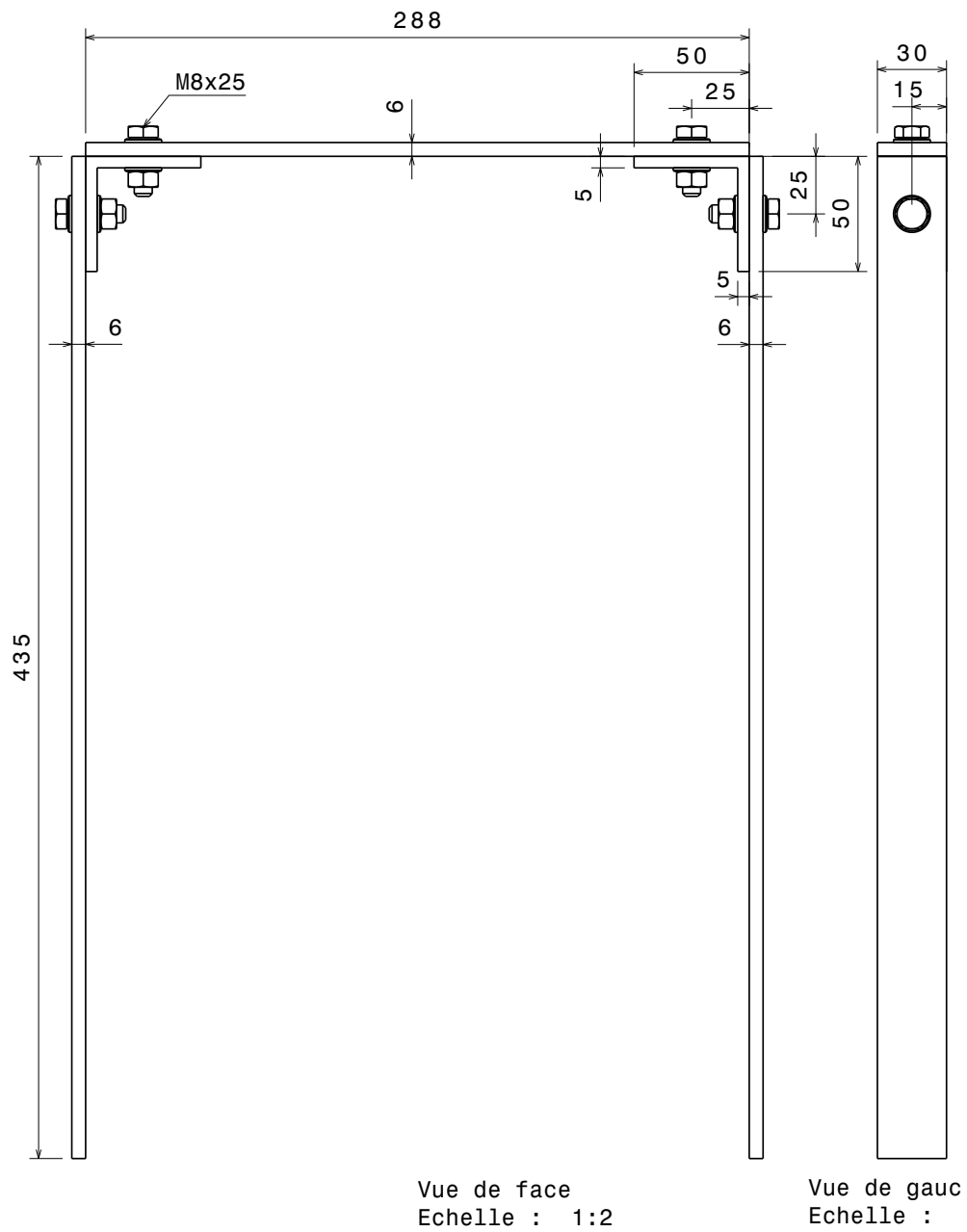


FIGURE 26 – Caractéristiques géométriques des différents éléments constitutifs du portique étudié





**Résumé :**

La conception des structures assemblées nécessite de disposer d'outils de simulation prédictifs permettant de minimiser les écarts entre les comportements réel et simulé de ces structures. Cette affirmation est d'autant plus vraie que les exigences en terme de performance du système sont élevées et qu'une conception optimale est recherchée. Lors du dimensionnement des structures assemblées, la pratique généralement adoptée en bureau d'étude consiste à définir un coefficient de sécurité permettant de tenir compte de la variabilité du comportement réel de ces structures. L'inconvénient est que cela conduit nécessairement à un surdimensionnement qui peut aller à l'encontre des objectifs de dimensionnement optimal de ces structures. Les liaisons sont le siège de phénomènes non-linéaires tels que le contact ou le frottement et différentes sources d'incertitude induisent une variabilité sur les caractéristiques réelles de la dynamique des liaisons. Malgré les capacités des calculateurs actuels, la prise en compte conjointe des phénomènes non linéaires et des incertitudes lors de la simulation de structures assemblées complexes reste difficilement envisageable par une approche directe. L'objectif de ce travail est de proposer une approche pragmatique de caractérisation du comportement vibratoire des structures légères assemblées en tenant compte de la variabilité des paramètres des liaisons. L'intérêt de cette approche est de pouvoir être intégrée dans une phase de dimensionnement robuste. On peut ainsi envisager de dimensionner une solution d'amortissement des vibrations d'une structure assemblée en tenant compte de la variabilité du comportement réel des liaisons de cette structure. Ce travail étudie d'abord le comportement dynamique d'une structure légère réelle afin d'identifier un modèle nominal «juste suffisant» des liaisons considérées. Une approche non intrusive de caractérisation du comportement vibratoire d'une structure en présence de paramètres incertains est ensuite proposée : l'approche SMR pour Stochastic Model Reduction. Cette approche, intitulée approche SMR (pour Stochastic Model Reduction), exploite le fait que la variabilité des vecteurs propres d'une structure est généralement d'un ordre de grandeur inférieur à la variabilité des fréquences propres associées ce qui permet de réduire considérablement le coût de calcul de l'approche tout en gardant une bonne précision sur l'estimation des fréquences propres aléatoires de la structure. Le principe de l'approche est alors d'adapter la modélisation stochastique à chaque fréquence propre aléatoire en fonction d'une exigence de précision globale sur l'ensemble des fréquences propres aléatoires recherchées. Le point clé de cette approche consiste à identifier le modèle stochastique adapté à chaque configuration de fréquence propre, pour cela un indicateur sans coût de calcul supplémentaire est proposé. Finalement, un modèle stochastique des liaisons de la structure considérée est proposé et l'approche SMR est utilisée dans un processus d'optimisation basé sur le principe du maximum de vraisemblance pour identifier les paramètres de ce modèle. Cette dernière étape de la démarche proposée permet alors de caractériser le comportement vibratoire de structures assemblées constituées de nombreuses liaisons en tenant compte de la variabilité du comportement de chacune des liaisons. La démarche mise en place dans le cadre de cette thèse est alors concrétisée par la proposition d'une stratégie originale de réduction robuste des vibrations d'une structure assemblée légère.

**Mots clés :**

Réduction des vibrations, assemblages boulonnés, incertitudes paramétriques, Réductin de Modèles Stochastiques, raideur aléatoire, dimensionnement robuste

**Abstract :**

Predictive models are needed to properly design assembled structures. The main issue with this kind of structure is to deal with non-linear phenomena as contact or friction while considering sources of uncertainties mainly responsible for the deviation between the effective behavior of the structure and results from deterministic simulations. This work aims to provide a pragmatic approach to characterize the vibrational behavior of light assembled structures considering the variability of joints parameters. This approach would be useful for robust design of solutions, such as damping solutions, dedicated to assembled structures and taking into account the variability of the real behavior of each joints. In this work, the dynamical behavior of an actual light structure is studied in order to identify a "just sufficient" nominal model of the considered joints. A non intrusive approach is then proposed to reduce the vibrational stochastic model of a structure with random parameter is then proposed. This approach, referred as the SMR approach (for Stochastic Model Reduction approach), takes advantages of the order of variability of random eigenvectors which is usually lower than the variability of corresponding random eigenfrequencies. It then allows to significantly reduce the computational cost for a given accuracy to estimate the structure random eigenfrequencies. The approach cornerstone is to adapt the stochastic modeling to each random eigenfrequency depending on a global accuracy requirements on the whole set of sought random eigenfrequency. The key point is then to identify the stochastic model used for each configuration of random eigenfrequency. A computationally free indicator is then proposed. In the end, a stochastic mechanical model of the joints of the studied structure is proposed. The SMR approach is used in an optimization process based on the maximum likelihood principle to identify the parameters of this stochastic model. This last step allows to characterize the vibrational behavior of assembled structures involving many joints and taking into account the variability of each joints. This work is then concluded by applying the proposed approach to the design of an original strategy for robust reduction of vibration of light structures.

**Keywords :**

Parametric uncertainties, bolted joints, random stiffness, stochastic model reduction, robust design.