



HAL
open science

Étude expérimentale et numérique de la localisation de la déformation dans un milieu granulaire

Thai Binh Nguyen

► **To cite this version:**

Thai Binh Nguyen. Étude expérimentale et numérique de la localisation de la déformation dans un milieu granulaire. Matériaux. Université de Rennes, 2017. Français. NNT : 2017REN1S121 . tel-01795721

HAL Id: tel-01795721

<https://theses.hal.science/tel-01795721>

Submitted on 18 May 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire

pour le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1
Mention : Physique

Ecole doctorale 3M – Matière, Molécules et Matériaux

présentée par

Thai Binh Nguyen

Préparée à l'unité de recherche UMR UR1-CNRS 6251
Institut de Physique de Rennes

**Etude expérimentale
et numérique de la
localisation de la
déformation dans un
milieu granulaire**

**Thèse soutenue à Rennes
le 16 Novembre 2017**

devant le jury composé de :

Patrick RICHARD

Directeur de recherche, IFSTTAR, Nantes /
rapporteur

Jérôme WEISS

Directeur de recherche, ISTERre, Grenoble /
rapporteur

Stéphanie DEBOEUF

Chargée de recherche, Institut Jean Le Rond
d'Alembert, Paris / *examineur*

Jérôme CRASSOUS

Professeur, Université de Rennes 1 / *examineur*

Axelle AMON

Maître de Conférences, Université de Rennes 1 /
directrice de thèse

Sean MCNAMARA

Maître de Conférences, Université de Rennes 1 /
Co-directeur de thèse

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction générale et plan du manuscrit | 5 |
| I État de l'art | 7 |
| I.1 Comportement mécanique des milieux granulaires | 7 |
| I.1.1 Généralités | 7 |
| I.1.2 Localisation de la déformation | 8 |
| I.1.2.1 Plasticité et bandes de cisaillement | 8 |
| I.1.2.2 Test biaxial | 10 |
| I.1.3 Orientation des bandes de cisaillement | 13 |
| I.1.3.1 Modèle de Mohr-Coulomb | 13 |
| I.1.3.2 Variabilité de l'angle de la bande de cisaillement . . . | 16 |
| I.1.3.3 Théorie de la bifurcation | 17 |
| I.1.4 Fluctuations de l'écoulement plastique | 19 |
| I.2 Méthodes de mesure des déformation | 23 |
| I.2.1 Digital Image Correlation | 23 |
| I.2.2 Stéréophotogrammétrie | 23 |
| I.2.3 Diffusing Wave Spectroscopy | 25 |
| I.3 Méthodes numériques existantes | 25 |
| I.3.1 Méthode de dynamique des contacts (CD) | 26 |
| I.3.2 Méthodes des éléments discrets (DEM) | 26 |
| II Biaxial expérimental | 27 |
| II.1 Dispositif expérimental | 27 |
| II.1.1 Partie mécanique | 27 |
| II.1.2 Partie optique | 30 |
| II.1.2.1 Diffusion multiple de la lumière | 30 |
| II.1.2.2 Mesure de déformation - Résolution spatiale | 31 |

| | | |
|--------------|---|-----------|
| II.1.2.3 | Mise en oeuvre | 32 |
| II.1.2.4 | Dispositif optique et réglages | 34 |
| II.1.3 | Acquisition des données | 34 |
| II.1.4 | Échantillon : matériel et préparation | 36 |
| II.2 | Résultats expérimentaux | 37 |
| II.2.1 | Courbes de charge | 37 |
| II.2.2 | Cartes de corrélations | 38 |
| II.2.3 | Variation du rapport d'aspect de l'échantillon | 39 |
| II.3 | Conclusion | 41 |
| III | Biaxial numérique | 43 |
| III.1 | Méthode des éléments discrets | 43 |
| III.1.1 | Introduction | 43 |
| III.1.2 | Calcul des forces | 44 |
| III.1.3 | Intégration des équations | 45 |
| III.2 | Simulation d'un essai biaxial | 46 |
| III.2.1 | Unités et paramètres | 46 |
| III.2.2 | Fabrication de l'empilement initial | 47 |
| III.2.2.1 | Génération d'un échantillon numérique | 47 |
| III.2.2.2 | Processus de compression | 48 |
| III.2.3 | Test biaxial | 48 |
| III.2.3.1 | Conditions aux bords | 48 |
| III.2.3.2 | Courbes de charge | 51 |
| III.3 | Résultats numériques et comparaison aux expériences | 51 |
| III.3.1 | Résultats numériques | 52 |
| III.3.1.1 | Courbes de charge | 52 |
| III.3.1.2 | Cartes de déformations | 53 |
| III.3.2 | Comparaison avec les résultats expérimentaux | 53 |
| III.3.2.1 | Courbes de charge | 53 |
| III.3.2.2 | Cartes de déformations et cartes de corrélations | 55 |
| III.4 | Conclusion | 58 |
| IV | Méthodes d'analyse d'images | 61 |
| Introduction | | 61 |
| IV.1 | Histogramme de projection | 63 |

| | | |
|----------------------|--|------------|
| IV.2 | Mesure de l'anisotropie | 66 |
| IV.2.1 | Principe | 66 |
| IV.2.2 | Cas tests | 69 |
| IV.3 | Analyse multi-échelles | 69 |
| IV.3.1 | Images expérimentales | 70 |
| IV.3.2 | Images numériques | 71 |
| IV.4 | Corrélation spatiale | 75 |
| IV.4.1 | Fonction de corrélation | 75 |
| IV.4.2 | Cas tests | 77 |
| IV.4.3 | Cartes de corrélations | 77 |
| IV.5 | Conclusion | 83 |
| V | Résultats des méthodes d'analyse d'images | 85 |
| V.1 | Résultats d'analyse expérimentale | 85 |
| V.1.1 | Orientation de la bande de cisaillement | 86 |
| V.1.1.1 | Angle de l'histogramme de projection | 86 |
| V.1.1.2 | Angle de l'anisotropie | 88 |
| V.1.1.3 | Comparaison avec les angles de Mohr-Coulomb | 90 |
| V.1.2 | Largeur à mi-hauteur de la bande de cisaillement | 92 |
| V.1.3 | Discussion | 95 |
| V.1.4 | Mesure de la taille caractéristique de la déformation | 95 |
| V.1.5 | Analyse multi-échelles | 97 |
| V.2 | Résultats d'analyse numérique | 98 |
| V.3 | Conclusion | 102 |
| VI | Réponse du matériau à une petite perturbation à l'approche de la | |
| | rupture | 107 |
| VI.1 | Biaxial expérimental avec l'inclusion | 107 |
| VI.2 | Biaxial numérique avec le gonflement et le dégonflement d'un grain | 109 |
| A | | 121 |
| Bibliographie | | 132 |

Introduction générale et plan du manuscrit

Les milieux granulaires peuvent être retrouvés au quotidien au tour de nous mais la description de l'ensemble des comportements observés de ces matériaux reste une grande question ouverte. Selon les sollicitations mécaniques auxquels ces matériaux sont soumis, ils peuvent être assimilés à un solide, un liquide ou un gaz. Nous nous intéressons dans ce travail de thèse à un granulaire solide et à la manière dont ce matériau rompt lorsqu'on soumet à une contrainte suffisamment importante.

L'objectif de la thèse est d'étudier expérimentalement et numériquement la déformation d'un milieu granulaire et de caractériser des comportements observés lors d'un test biaxial. Pour pouvoir visualiser de très petites déformations, nous avons utilisé la méthode de la diffusion multiple de la lumière, la DWS (Diffusing Wave Spectroscopy). Pour modéliser numériquement le test biaxial, nous avons utilisé la méthode des éléments discrets, la DEM (Discrete Element Method).

Le manuscrit est présenté de la manière suivante :

- Dans le chapitre I, nous abordons tout d'abord le comportement mécanique général des milieux granulaires. Nous présentons des études dans la littérature sur la localisation de la déformation, l'orientation des bandes de cisaillement, la théorie de la bifurcation puis les fluctuations de l'écoulement plastique. En suite, des méthodes de mesure des déformations sont introduites et en fin les méthodes numériques existantes.
- Le chapitre II présente l'ensemble du dispositif expérimental et des résultats expérimentaux typiques, notamment l'effet du changement du rapport d'aspect de l'échantillon sur la réponse du matériau.
- Le principe de la simulation numérique d'un test biaxial est présenté dans le

chapitre III. Ensuite, nous montrons les résultats numériques et les comparons avec les résultats expérimentaux.

- Des outils développés pour l'analyse d'images utilisés pour étudier aussi bien les expériences que les simulations numériques sont détaillés dans le chapitre IV.
- Le chapitre V montre les résultats des analyses d'images avec nos descriptions et discussions. L'étude du champ plastique moyen dans les expériences montre une bifurcation qui a lieu avant la rupture. L'étude des fluctuations de la plasticité dans les expériences et les simulations numériques semble mettre en évidence une croissance d'une longueur caractéristique.
- Des expériences et simulations numériques préliminaires sur la réponse du matériau à une petite perturbation à l'approche de la rupture sont présentées dans le chapitre VI.
- Le manuscrit se termine par une conclusion générale. L'article publié pendant la thèse est mis en annexe.

Chapitre I

État de l'art

I.1 Comportement mécanique des milieux granulaires

I.1.1 Généralités

Un milieu granulaire est un milieu constitué d'un grand nombre de grains de taille supérieure à $100 \mu m$. On parle souvent de poudres pour des grains de taille comprise entre $1 \mu m$ et $100 \mu m$, et de granulaires seulement pour des tailles plus grandes. Les milieux granulaires ont une place très importante dans de nombreux secteurs de l'activité humaine. On les rencontre dans de nombreuses industries (céréales, préparation de médicaments, ...) ainsi que dans le génie civil (matériaux de construction) ou encore dans l'environnement (sables, roches).

Malgré le développement de la technologie, à ce jour, il n'existe pas de théorie unifiée qui permet de décrire l'ensemble des comportements observés de ces matériaux [1]. On peut mentionner quelques propriétés de la nature complexe des milieux granulaires qui amène cette situation. Tout d'abord, il n'est pas possible de suivre le mouvement individuel de chaque grain dans un milieu granulaire car celui-ci contient généralement un très grand nombre de grains. Le but va être de décrire les quantités moyennes et de décrire le milieu comme un milieu continu. Ensuite, les milieux granulaires sont composés de particules non-Browniennes. Les fluctuations thermiques sont négligeables, les grains peuvent retrouver dans un état métastable en l'absence de sollicitation extérieure. Donc on ne peut pas appliquer la physique statistique pour passer d'une description de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique

comme dans le cas d'un liquide ou d'un gaz. On constate aussi que la granularité est observable pour ces milieux. C'est-à-dire que la distinction entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique est floue. Et puis, selon les conditions limites du milieu granulaire, il y a beaucoup de types d'interactions entre grains. D'autre part, le milieu granulaire est un milieu qui dissipe très facilement l'énergie. Le processus dissipatifs à l'échelle du grain est une difficulté dans la description macroscopique. En plus, un milieu granulaire se comporte de façon très différente selon le mode de sollicitation. Sous une faible déformation un milieu granulaire peut se comporter comme un solide. Mais il s'écoule aussi comme un liquide, et peut se disperser dans tous les sens, comme un gaz. Lors d'un écoulement, ces milieux peuvent être sous trois formes à un même instant : solide en profondeur, liquide puis gazeux en surface (figure I.1). Cependant, la formulation des transitions entre chaque état est difficile et reste une question ouverte. Ces difficultés que nous citons au-dessus donnent beaucoup de travaux à faire pour décrire les comportements des milieux granulaires.

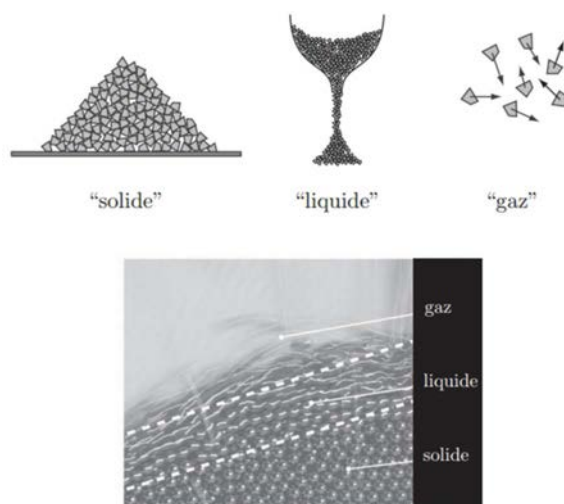


FIGURE I.1 – Trois états des milieux granulaires : solide, liquide et gaz. Ces trois états peuvent être observés comme lors de l'écoulement des grains sur un tas [1].

I.1.2 Localisation de la déformation

I.1.2.1 Plasticité et bandes de cisaillement

La localisation de la déformation est un des phénomènes les plus typiques des milieux granulaires liée à la déformation plastique du matériau (Desrues et Chambon

[2]). D'après le point de vue théorique, si on suppose que le matériau granulaire est initialement à l'équilibre, la réponse en contrainte et en déformation est élastique, donc réversible. Dans ce cas, on observe une continuité des déplacements entre la structure, représentée par le solide continu, et le milieu granulaire. À mesure que la limite élastique est dépassée, correspond à une contrainte suffisamment importante, des déformations plastiques et donc, non réversibles, interviennent, on voit des événements plastiques à l'échelle des grains. Ensuite, ce mode de déformation plastique ne reste pas homogène et cesse d'être diffus, mais bifurque vers un mode de déformation localisée. Les déformations se concentrent sur une zone d'épaisseur finie (d'une dizaine de taille de grains), où a lieu l'essentiel de la déformation, appelée bande de cisaillement, le reste du matériau étant peu déformé [3, 4]. L'étude expérimentale de ce processus est encore assez partielle, n'a pas été faite en détail, c'est l'objet de cette thèse.

La figure I.2 présente trois exemples de la localisation de la déformation en bande de cisaillement. La formation d'une bande de cisaillement est observée lors d'un test de compression triaxiale réalisé par [5] (figure I.2(a)). La localisation peut être également observée in-situ. On peut voir une ligne de train déformée après le tremblement de terre survenu en Turquie en 1999 [6, 7]. La figure I.2(c) montre l'observation des bandes de cisaillement sur une photographie instantanée des vitesses des grains d'une simulation numérique du test biaxial réalisé par Stegmann *et al.* [8].

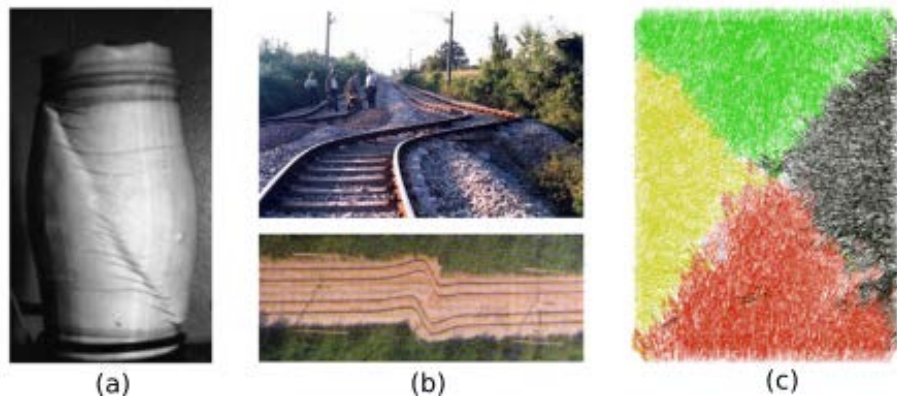


FIGURE I.2 – Observations de la bande de cisaillement. (a) : dans un test de compression triaxiale [5]; (b) : tremblement de terre survenu en Turquie en 1999 [6, 7]; (c) : photographie instantanée des vitesses des grains d'une simulation du test biaxial [8].

I.1.2.2 Test biaxial

Durant la thèse, on a utilisé le test de compression biaxial en déformation plane dans le but d'observer la localisation de la déformation. Ce type de test consiste à appliquer sur un échantillon deux contraintes indépendantes $-\sigma_{xx}$ et $-\sigma_{yy}$ dans les deux directions perpendiculaires et empêcher le déplacement dans la troisième direction. Le schéma du test biaxial est présenté dans la figure I.3.

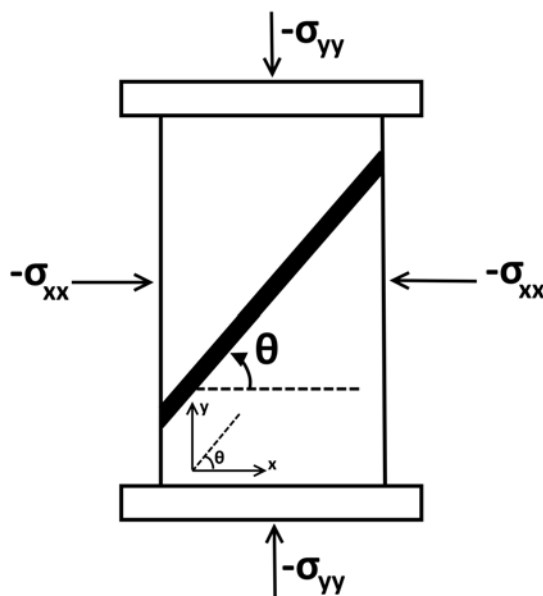


FIGURE I.3 – Schéma du test biaxial.

Plusieurs études expérimentales et numériques dans la littérature montrent l'influence des conditions limites du test biaxial et du rapport d'aspect de l'échantillon à la formation des bandes de cisaillement. En 2004, Desrues et Viggiani [4] ont appliqué des tests biaxiaux à des échantillons de sable. En variant les conditions limites et le rapport d'aspect de l'échantillon, ils ont obtenu de différentes formations de la bande de cisaillement. Quelques résultats sont présentés dans la figure I.4. Lorsque deux platines situées à deux extrémités de l'échantillon sont totalement bloquées, on observe deux bandes sur le champ de déformations (figure I.4(a)). Par contre, on a une seule bande dans le cas où l'on fait libre la rotation des platines sans translation (figure I.4(b)).

Ensuite, Desrues a fait plusieurs de tests avec différentes valeurs du rapport d'aspect de l'échantillon. On montre dans la figure I.5 les bandes de cisaillement

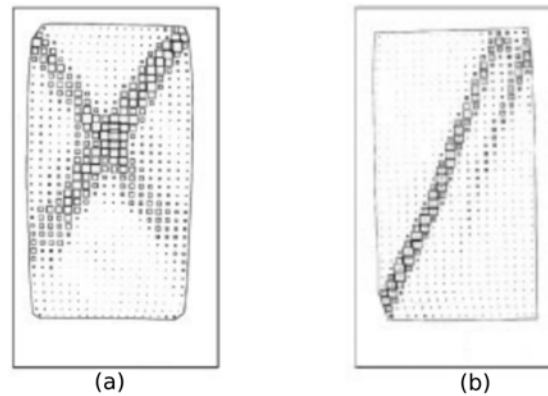


FIGURE I.4 – Champs de déformations obtenus par la méthode de stéréophotogrammétrie en variant les conditions limites. (a) : toutes les deux platines sont bloquées; (b) : toutes les deux platines peuvent tourner sans translation.

observées pour les valeurs de 0,45, 0,95 et 3,35 du rapport *hauteur/longueur* de l'échantillon.

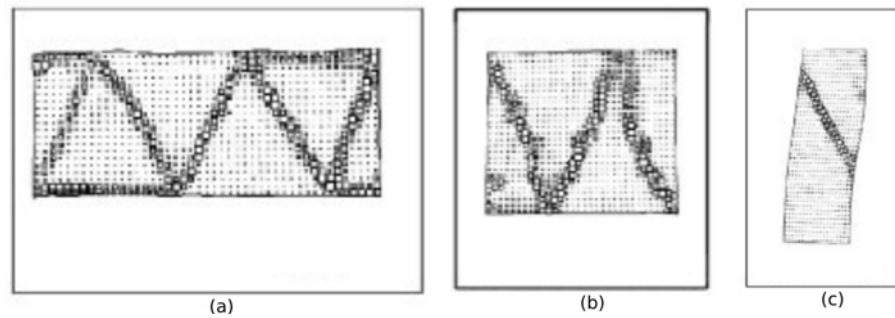


FIGURE I.5 – Champs de déformations obtenus par la méthode de stéréophotogrammétrie en variant le rapport d'aspect. (a) : rapport d'aspect = 0,45; (b) : rapport d'aspect = 0,95; rapport d'aspect = 3,53.

Au niveau de la simulation numérique, en 2013, Ebrahimian et Noorzad [9] réalisent une étude numérique sur les déformations en cisaillement dans un matériau élastoplastique. Ils simulent des tests de compression biaxiale pour comparer avec le résultat de l'observation expérimentale d'Alshibli et Sture [10] : le comportement des matériaux granulaires dépend des conditions limites de l'échantillon. La comparaison est présentée dans les figures I.6.

Ils montrent aussi que le comportement des matériaux granulaires est également influencé par la géométrie de l'échantillon. La figure I.7 représente le processus de la

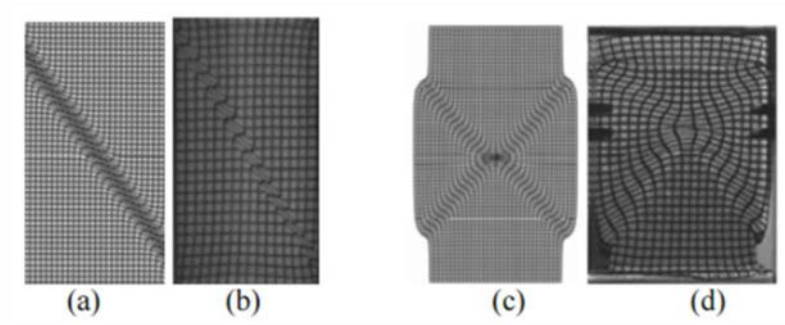


FIGURE I.6 – Comparaison entre les résultats numériques ((a) et (c)) et les résultats expérimentaux ((b) et (d)). (a) et (b) : rotation libre en haut de l'échantillon; (c) et (d) : rotation de deux extrémités de l'échantillon est empêchée.

formation de la bande de cisaillement pour différents rapports d'aspect de l'échantillon.

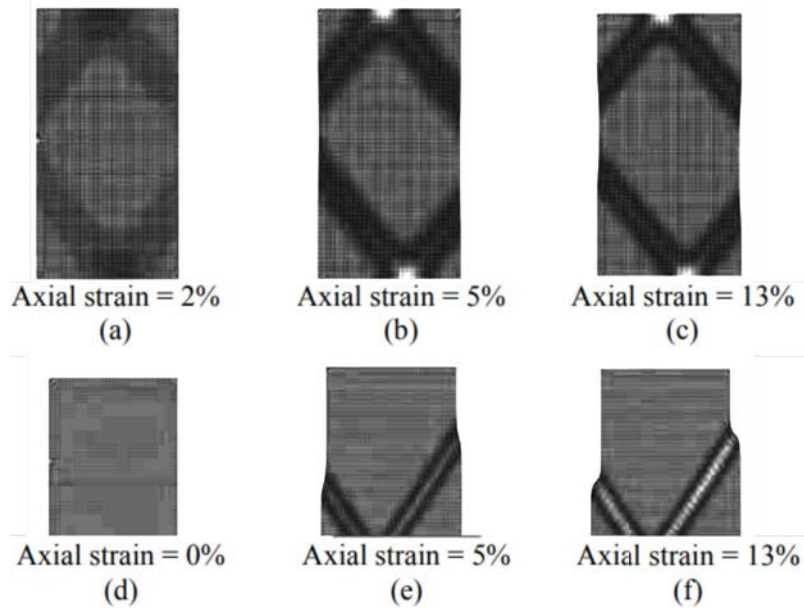


FIGURE I.7 – Processus de la formation de la bande de cisaillement d'un test biaxial. (a), (b) et (c) : rapport d'aspect = 2; (d), (e) et (f) : rapport d'aspect = 1,33.

D'après ces résultats, on constate que malgré le changement de la formation de la bande de cisaillement, on observe un angle d'inclinaison qui semble de ne pas dépendre des conditions du test.

I.1.3 Orientation des bandes de cisaillement

I.1.3.1 Modèle de Mohr-Coulomb

Pour décrire les bandes de cisaillement qui sont observées dans le test biaxial, nous utilisons le modèle de Mohr-Coulomb. Ce modèle est basé sur l'idée simple de milieu frottant et néglige les variations de fraction volumique. Il repose sur le critère de rupture suivant. Le milieu cède au point P, s'il existe en ce point un plan repéré par sa normale \mathbf{n} selon lequel on a :

$$|\tau| = \mu\sigma, \quad (\text{I.1})$$

où σ et τ sont les contraintes normale et tangentielle au plan \mathbf{n} et μ est le coefficient de friction du matériau :

$$\mu = \tan\phi, \quad (\text{I.2})$$

avec ϕ , l'angle de friction du matériau.

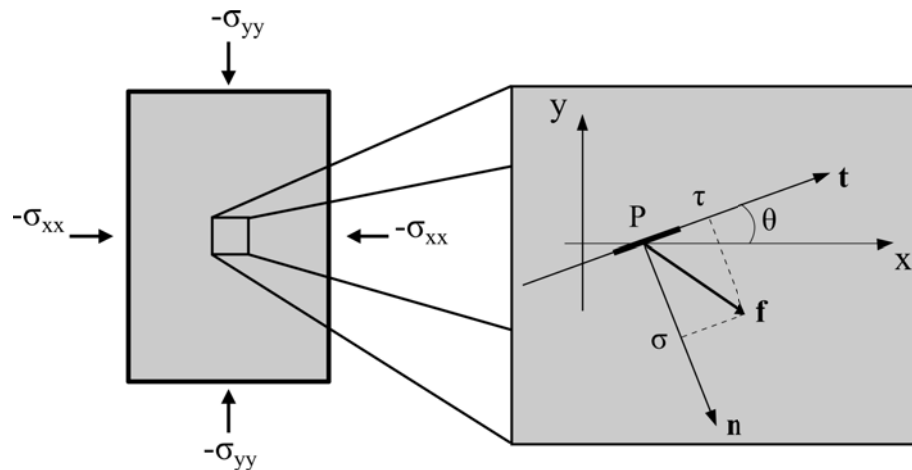


FIGURE I.8 – À gauche : les contraintes appliquées au matériau dans la configuration du test biaxial. À droite : schéma d'une surface unitaire indiquée par sa normale \mathbf{n} et inclinée d'un angle θ par rapport à l'horizontale.

Dans la configuration du test biaxial en déformation plane, on applique sur le matériau deux contraintes indépendantes : une contrainte latérale $-\sigma_{xx}$ et une contrainte axiale $-\sigma_{yy}$ (figure I.8). En supposant que l'état de contraintes dans

l'échantillon est homogène, le tenseur des contraintes s'écrit donc :

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} -\sigma_{xx} & 0 \\ 0 & -\sigma_{yy} \end{pmatrix}. \quad (\text{I.3})$$

Considérons une surface unitaire dans le milieu indiquée par sa normale \mathbf{n} et inclinée d'un angle θ par rapport à l'horizontale, les contraintes normales et tangentielles s'exerçant sur le plan sont (voir figure I.8) :

$$\sigma = -\sigma_{xx} \sin^2 \theta - \sigma_{yy} \cos^2 \theta, \quad (\text{I.4})$$

$$\tau = -\sigma_{xx} \sin \theta \cos \theta + \sigma_{yy} \sin \theta \cos \theta. \quad (\text{I.5})$$

En posant

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}(-\sigma_{xx} - \sigma_{yy}), \quad (\text{I.6})$$

$$r = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}), \quad (\text{I.7})$$

on obtient finalement :

$$\sigma = \sigma_0 + r \cos(-2\theta), \quad (\text{I.8})$$

$$\tau = r \sin(-2\theta). \quad (\text{I.9})$$

D'après le critère de rupture, pour savoir si le matériau cède il faut tester sur toutes les orientations possibles si la relation I.20 est vérifiée. À partir des équations I.9, lorsqu'on fait tourner le plan, σ et τ décrivent un cercle de rayon r et de centre $(\sigma_0, 0)$: on appelle le cercle de Mohr (figure I.9).

Durant un test biaxial, la contrainte $-\sigma_{xx}$ est constante tandis que la contrainte $-\sigma_{yy}$ croît jusqu'à ce que le critère de rupture soit atteint. C'est-à-dire que le cercle de Mohr s'agrandit jusqu'à ce qu'il est en contact avec les droites d'équation $|\tau| = \mu\sigma$. Dans ce cas représenté sur la figure I.10, le matériau cède et on peut calculer l'angle de friction ϕ et la contrainte verticale à la rupture $-\sigma_{yy}^R$ en considérant le triangle rectangle OAO'. On trouve alors :

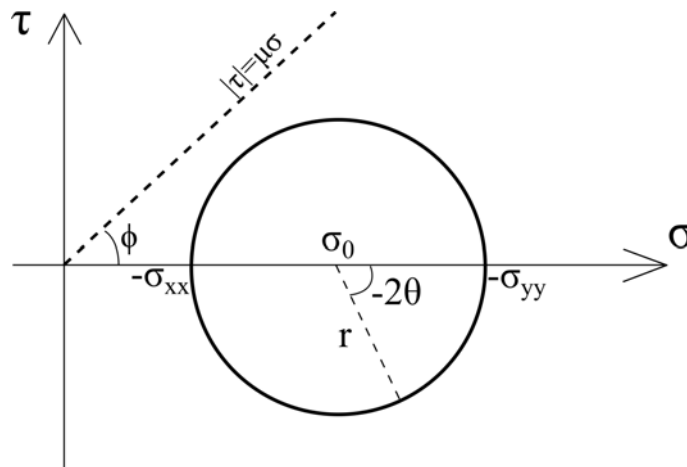


FIGURE I.9 – Cercle de Mohr de rayon r et de centre $(\sigma_0, 0)$. La droite en pointillés représente le critère de rupture $|\tau| = \mu\sigma$ avec $\mu = \tan\phi$.

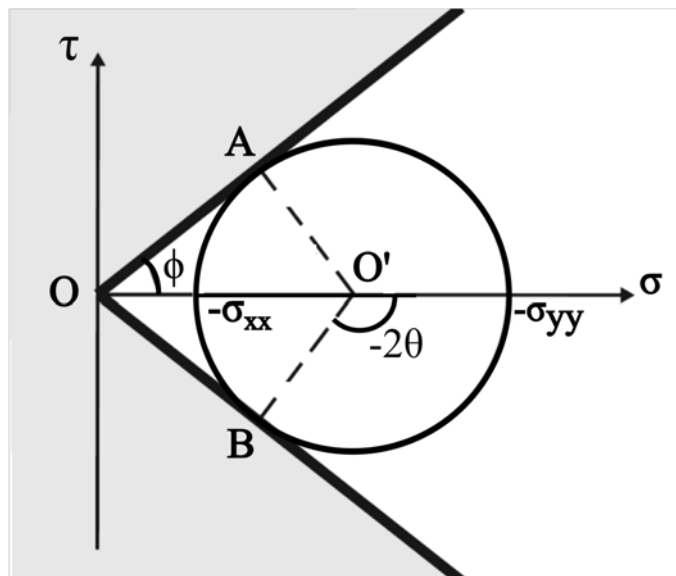


FIGURE I.10 – Cercle de Mohr lorsque le critère de rupture $|\tau| = \mu\sigma$ est atteint.

$$\sin \phi = \frac{r}{\sigma_0} \quad (\text{I.10})$$

soit d'après les équations I.6 et I.7 :

$$\sin \phi = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}^R}{-\sigma_{xx} - \sigma_{yy}^R} \quad (\text{I.11})$$

Le cercle de Mohr permet également de prédire l'inclinaison θ du plan de cisaillement. À partir de l'angle de friction ϕ du matériau, on obtient :

$$\pm 2\theta = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) \quad (\text{I.12})$$

soit

$$\theta = \pm \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \quad (\text{I.13})$$

I.1.3.2 Variabilité de l'angle de la bande de cisaillement

L'équation I.13 nous donne l'angle d'inclinaison de la bande de cisaillement. En fait, plusieurs différentes théories ont aussi été proposées pour prédire cette orientation. En 1970, Roscoe [11] propose un modèle utilisant la règle d'écoulement plastique. L'inclinaison de la bande s'exprime par :

$$\theta_R = \pm \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Psi}{2} \right) \quad (\text{I.14})$$

où Ψ est l'angle de dilatance en rupture, défini par : $\sin(\Psi) = -(\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_3)/(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3)$ avec $\dot{\epsilon}_1$ et $\dot{\epsilon}_3$ sont respectivement le taux de déformation principale majeure et mineure.

Par la suite, Arthur *et al.* (1977) [12] propose une expression qui combine les prédictions de Roscoe et de Mohr-Coulomb :

$$\theta_A = \pm \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi + \Psi}{4} \right). \quad (\text{I.15})$$

En 1990, Bardet [13] compare des données expérimentales de test biaxial et les prédictions de Mohr-Coulomb, Roscoe et Arthur, figure I.11. L'inclinaison de la bande de cisaillement est définie par l'angle entre la bande de cisaillement et l'axe de chargement. Premièrement, on observe que les orientations mesurées sont entre l'angle de la théorie de Mohr-Coulomb et l'angle de la théorie d'Arthur. L'angle de Roscoe est le plus éloigné des résultats expérimentaux. Pour l'angle de dilatance

$\Psi = -10^\circ$, l'angle de Roscoe est plus grand d'environ 20° que les résultats expérimentaux. Néanmoins, les trois théories ne peuvent ni prédire l'orientation de la bande de cisaillement pour tous les circonstances ni expliquer la dispersion des données.

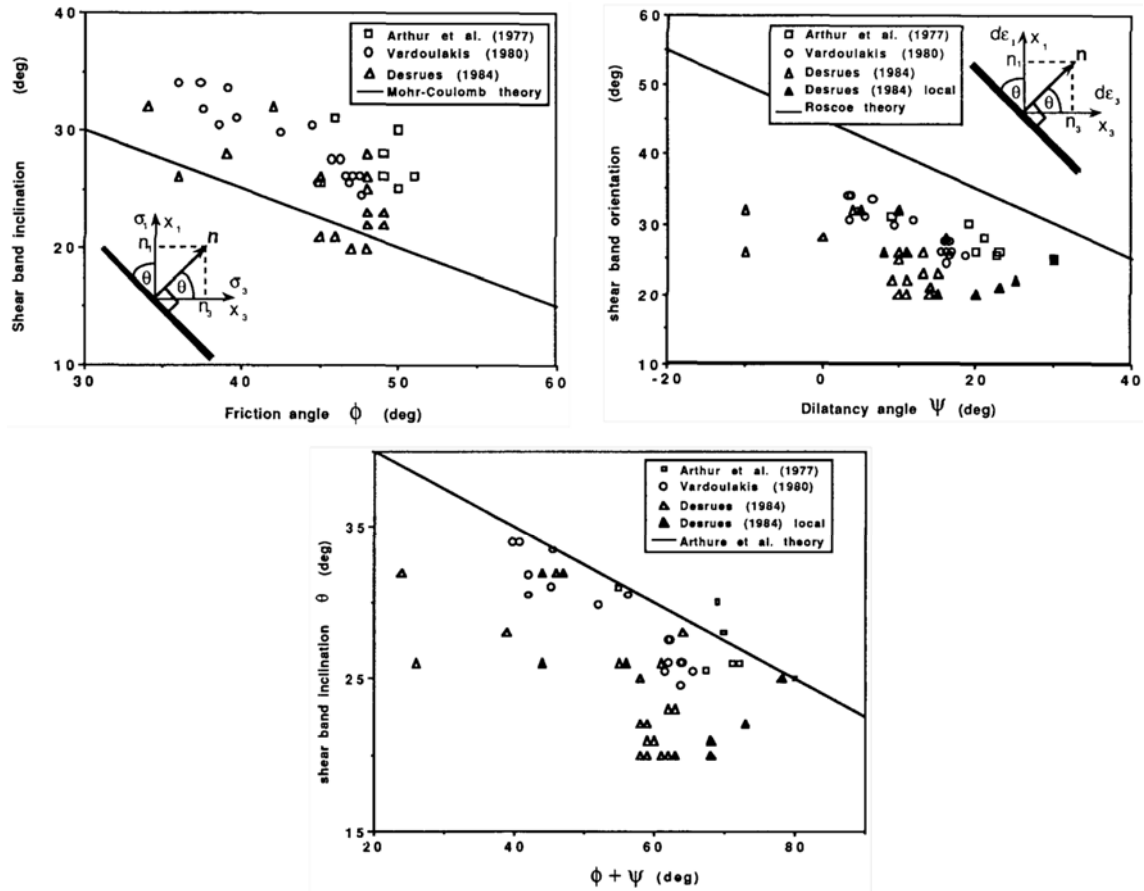


FIGURE I.11 – Comparaison de l'inclinaison de bande de cisaillement entre les données expérimentales [5, 12, 14] et les prédictions de Mohr-Coulomb, Roscoe et Arthur.

I.1.3.3 Théorie de la bifurcation

La localisation de la déformation en bande de cisaillement dans les milieux granulaires peut être décrite par le concept de bifurcation de l'équilibre qui considère l'existence d'une bande comme un problème de stabilité. L'application de cette théorie a été développée par Rice [15] dans l'objectif de donner un critère de bifurcation qui permet de prédire l'apparition d'une bande de cisaillement. Lorsque le critère

de bifurcation est satisfait, on a une transition spontanée et irréversible du mode de déformation homogène au mode localisé en bande de cisaillement.

On considère un milieu homogène soumis à des chargements représentant un état uniforme à un instant donné t_0 , caractérisé par la contrainte $\boldsymbol{\sigma}_0$, la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, leurs vitesses respectives $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_0$ et $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$ [16]. Ensuite, le système évolue de cet état uniforme vers un état non uniforme contenant une bande de cisaillement de normale directrice \vec{n} dans laquelle les vitesses de déformation et de contrainte changent instantanément aux valeurs $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1$ et $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1$ (voir figure I.12). Les vitesses de déformation et de contrainte ne changent pas pour le reste du milieu.

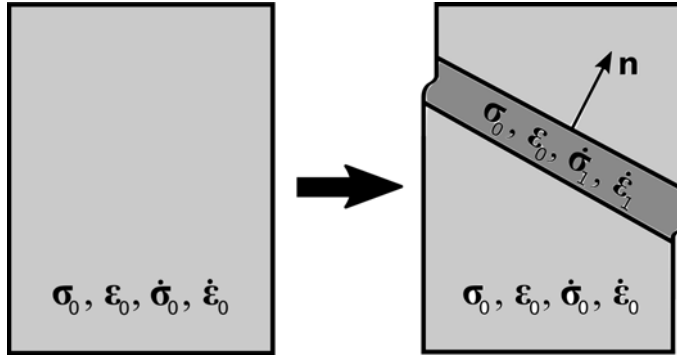


FIGURE I.12 – Localisation en bande de cisaillement : bifurcation d'un mode uniforme vers un mode non uniforme.

D'après la condition statique, la vitesse de contrainte doit être continue lorsqu'on traverse de l'intérieur de la bande à l'extérieur :

$$\dot{\sigma}_{ij}^1 n_j = \dot{\sigma}_{ij}^0 n_j \quad \text{ou} \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^1 \cdot \vec{n} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^0 \cdot \vec{n} \quad (\text{I.16})$$

Dans le mode de localisation envisagé, la condition cinématique nous donne l'équation de la vitesse de la déformation à l'intérieur de la bande :

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^1 = \dot{\varepsilon}_{kl}^0 + \frac{1}{2}(g_k n_l + g_l n_k) \quad \text{ou} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^1 = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 + \frac{1}{2}(\vec{g} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{g}) \quad (\text{I.17})$$

où \vec{g} est le gradient de vitesse dans la direction \vec{n} .

En plus, les vitesses de déformation et de contrainte sont reliées par une loi de comportement qu'on peut écrire sous la forme :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_0 = \mathbb{H} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \quad \text{et} \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}_1 = \mathbb{H} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 \quad (\text{I.18})$$

En combinant les conditions statique I.16 et cinématique I.17 et la loi de comportement I.18 on obtient la condition suivante :

$$[n_i H_{ijkl} n_l] g_k = 0 \quad \text{ou} \quad [\vec{n} \cdot \mathbb{H} \cdot \vec{n}] \cdot \vec{g} = 0 \quad (\text{I.19})$$

La localisation apparaît s'il existe de solutions non triviales ($\vec{g} \neq 0$), on obtient :

$$\det [\vec{n} \cdot \mathbb{H} \cdot \vec{n}] = 0 \quad (\text{I.20})$$

C'est la condition de la localisation en bande de cisaillement. Cette condition correspond à ce que l'on appelle la perte d'ellipticité des équations d'équilibre en vitesse.

Toutes ces théories qu'on a présentées décrivent la rupture comme un événement soudain avec l'apparition brutale de plans de discontinuité dans le champ de déformation mais en fait il a été observé des fluctuations de la plasticité avant la rupture.

I.1.4 Fluctuations de l'écoulement plastique

En 2014, Le Bouil [17] a observé des petites bandes intermittentes avant l'apparition des bandes de cisaillement lors d'un test biaxial. L'angle d'inclinaison moyen de ces petites bandes est différent de l'orientation de Mohr-Coulomb. Pour interpréter ces micro-bandes, Le Bouil a utilisé le modèle d'Eshelby [18] issu de la description de la plasticité des amorphes qui repose sur des événements plastiques localisés au sein d'une matrice élastique. Ce modèle consiste à considérer un matériau homogène, isotrope, élastique et infini. Dans cette matrice élastique, on considère une inclusion qui va subir une modification de forme spontanée correspondant à une déformation \mathbf{e}^* :

$$\mathbf{e}^* = \begin{pmatrix} e_{xx}^* & 0 & 0 \\ 0 & e_{yy}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.21})$$

on peut calculer la contrainte $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ redistribuée dans la matrice élastique loin de l'inclusion. Le calcul de $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ donne $\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\sigma}_{yy} \propto f(\theta)$ avec :

$$f(\theta) = (e_{xx}^* - e_{yy}^*) \left[-\frac{15}{4} \cos(4\theta) + \frac{8\nu - 7}{4} \right] - \frac{9}{2} (e_{xx}^* + e_{yy}^*) \cos(2\theta) \quad (\text{I.22})$$

où ν est le coefficient de Poisson de la matrice.

Si $\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\sigma}_{yy} > 0$, la contrainte déviatorique redistribuée s'ajoute à la contrainte déviatorique appliquée et la déformation croît dans ces directions. La valeur est maximum pour

$$\cos(2\theta_E^*) = \left(\frac{3}{10} \right) \frac{e_{yy}^* + e_{xx}^*}{e_{yy}^* - e_{xx}^*}. \quad (\text{I.23})$$

Dans le cas d'une déformation \mathbf{e}^* isovolume, $\theta_E^* = \pm 45^\circ \pmod{90^\circ}$ représentant des directions préférées de la redistribution des contraintes dans le matériau autour des événements plastiques localisés.

Ensuite, pour analyser la dynamique du réseau de petites bandes, les auteurs ont défini une fonction de corrélation spatio-temporelle $\Psi^{(\Delta\varepsilon)}$ avec $\Delta\varepsilon$ est l'intervalle de déformation sur lequel la corrélation spatio-temporelle est calculée. Puis ils ont défini une fonction χ qui permet de quantifier la partie anisotrope de Ψ , c'est-à-dire que la fonction χ est la valeur de Ψ selon les angles d'Eshelby à laquelle on soustrait la valeur isotrope de Ψ . Lors $\Delta\varepsilon = 0$, la figure I.13 montre $\chi^{(0)}(\varepsilon, r)$ en fonction de r/d (d , le diamètre moyen des billes) pour différentes valeurs de ε . On observe que les valeurs des $\chi^{(0)}(\varepsilon, r)$ croissent avec la charge ε .

Après, deux quantités sont définies :

- l'intégrale $A(\varepsilon) = \int_{r=0}^{r=\ell/2} \chi^{(0)}(\varepsilon, r) dr$, c'est-à-dire l'aire sous chaque courbe ;
- et la distance caractéristique $\xi(\varepsilon)$ pour laquelle la partie anisotrope est maximum, c'est-à-dire le maximum des ajustements.

La figure I.14 représente l'évolution de ces deux quantités au cours de la charge. On constate que l'intégrale $A(\varepsilon)$ et la longueur caractéristique des micro-bandes $\xi(\varepsilon)$ augmentent avec la déformation axiale ε jusqu'à la rupture du matériau.

Au niveau de la simulation numérique, en 2013, Gimbert *et al.* [19] ont également observé une croissance de la longueur de corrélation des événements plastiques jusqu'à l'instabilité de l'échelle macroscopique. Ils ont modélisé des tests biaxiaux en déformation plane pour un échantillon de 10000 grains. Pour étudier la fluctuation de l'écoulement plastique, ils ont appliqué l'analyse multi-échelles au champ du taux de contrainte et de l'incrément de la déformation avant la rupture ayant

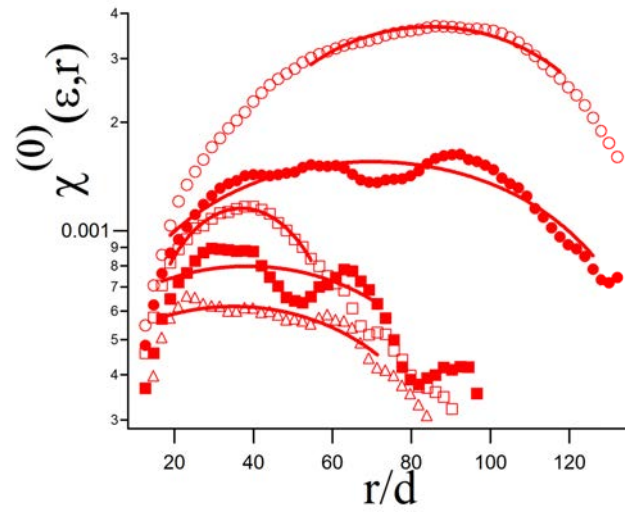


FIGURE I.13 – $\chi^{(0)}(\varepsilon, r)$ en fonction de r/d pour différentes valeurs de déformation axiale $\varepsilon = 1,6\%$ (triangles creux), $\varepsilon = 2,3\%$ (carrés pleins), $\varepsilon = 3,7\%$ (carrés creux), $\varepsilon = 4,0\%$ (cercles pleins), $\varepsilon = 4,4\%$ (cercles creux). Les lignes sont les ajustements quadratiques autour des maximums.

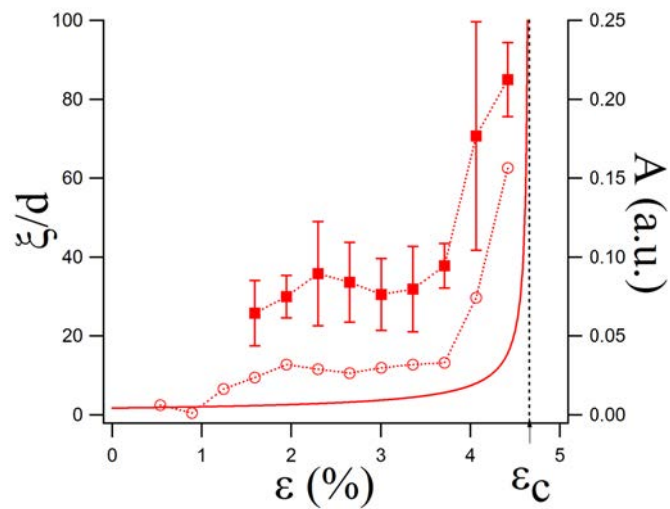


FIGURE I.14 – Longueurs ξ/d (carrés pleins) et amplitude moyenne A (cercles creux) en fonction de la déformation axiale ε . La ligne pointillée noire indique la déformation axiale à la rupture $\varepsilon_c \approx 4,66\%$. La courbe pleine rouge est la longueur de coopérativité.

lieu à $\tau_c \approx 2\sigma_3$ (τ_c est la contrainte critique; σ_3 est la pression latérale appliquée à l'échantillon). Pour cela, un paramètre Δ est défini par : $\Delta = \frac{\tau_c - \tau}{\tau}$. La figure I.15 montre le taux de contrainte $\langle \dot{\tau} \rangle$ et l'incrément de la déformation $\langle \delta\gamma \rangle$ moyennés sur toutes les petites boîtes en fonction de l'échelle pour différentes valeurs de Δ .

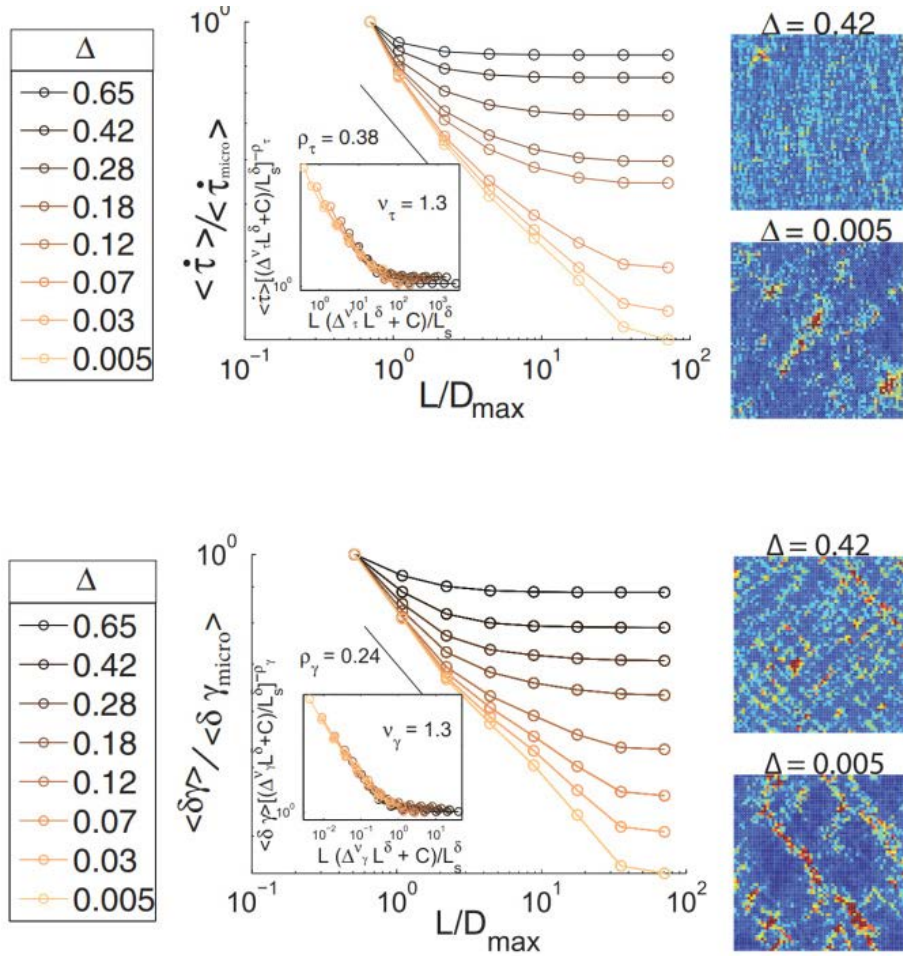


FIGURE I.15 – En haut : la moyenne du taux de contrainte en fonction de l'échelle pour différentes valeurs de Δ et deux champs du taux de contrainte correspondants à $\Delta = 0,42$ et $\Delta = 0,005$. En bas : l'application de l'analyse multi-échelles sur l'incrément de la déformation. L : échelle appliquée; D_{max} : le diamètre le plus grand du grain.

Sur les résultats du taux de contrainte, on observe que pour des petites déformations macroscopiques, c'est-à-dire que pour des grandes valeurs de Δ , et à petite échelle, $\langle \dot{\tau} \rangle$ et $\langle \delta\gamma \rangle$ décroissent en augmentant L jusqu'à une valeur caractéristique l^* . Au-delà de cette valeur, $\langle \dot{\tau} \rangle$ et $\langle \delta\gamma \rangle$ restent constants. La valeur caractéristique l^* est définie comme la longueur de corrélation et elle diverge en approchant la rupture du matériau :

$$l^* \sim \frac{L_s^\delta}{\Delta^\nu L_s^\delta + C} \quad (\text{I.24})$$

où L_s est la racine carrée de la zone d'échantillon, $C = 0,5$, $\delta = 1$ et $\nu = 1,3 \pm 0,1$.

Ces structures spécifiques de la contrainte et de la déformation qui peuvent être caractérisées par la longueur de corrélation l^* sont interprétées comme les résultats des redistributions de la contrainte dynamique provoquées par la dissipation locale de l'énergie élastique.

I.2 Méthodes de mesure des déformation

Afin de comprendre le comportement du milieu granulaire, plusieurs méthodes de visualiser des déformations ont été utilisées. On peut citer les techniques les plus connues comme la DIC (**D**igital **I**mage **C**orrelation), la stéréophotogrammétrie et la DWS (**D**iffusing **W**ave **S**pectroscopy).

I.2.1 Digital Image Correlation

La DIC est une méthode optique en 2D ou 3D qui permet de mesurer les déplacements entre deux images. Cette méthode consiste à identifier une texture d'une première image (image de référence) et corréler cette texture avec celle de la seconde image (image déformée). Pour obtenir des images de référence et des images déformées, la DIC peut être associée à d'autres techniques comme la tomographie à rayon X. La figure I.16 représente un des résultats d'une application de deux méthodes DIC et tomographie à rayon X pour un test triaxial (Viggiani *et al.*, [20]), c'est-à-dire que la DIC est faite sur des images obtenues par la tomographie.

I.2.2 Stéréophotogrammétrie

Le principe de la méthode de stéréophotogrammétrie est de comparer deux photographies prises à deux différents moments par un stéréocomparateur. Cette méthode permet de mesurer le déplacement entre les deux configurations considérées. Elle a été utilisée par Desrues et Viggiani dans un test biaxial [4]. Un de leurs résultats est présenté dans la figure I.17.

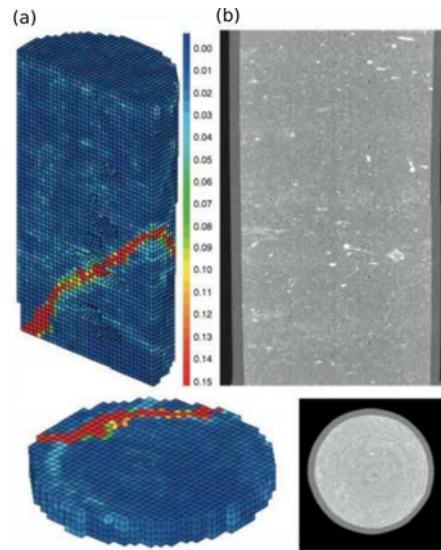


FIGURE I.16 – (a) : cartes de déformation obtenues après le pic de charge ; (b) : sections verticale et horizontale équivalentes obtenues par la méthode de tomographie.

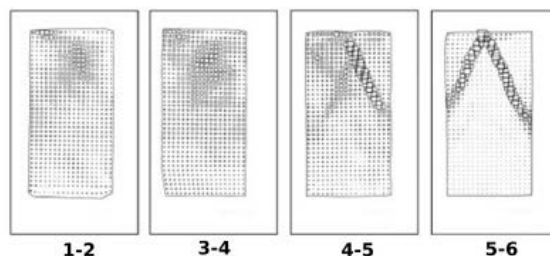
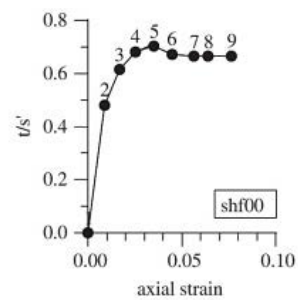


FIGURE I.17 – En haut : la courbe de charge d'une test biaxial. Les photographies prises à différentes moments sont notées par les numéros sur la courbe. En bas : champ de déformation entre deux configurations.

I.2.3 Diffusing Wave Spectroscopy

La DWS est une méthode permettant d'extraire des informations quantitatives de la lumière diffusée par un milieu très diffusant. Par rapport aux autres méthodes, la DWS a l'avantage de pouvoir mesurer des microdéformations de l'ordre de 10^{-6} . Cette technique a été utilisée par Erpelding [21] et Le Bouil [17] durant leurs thèses sous la direction de J. Crassous et A. Amon. Une fonction de corrélation est calculée entre deux images de speckle qui sont obtenues par la lumière rétro-diffusée. Ensuite, on obtient une carte de corrélation qui représente les déformations du matériau entre deux états. La figure I.18 montre une carte de corrélation avec une échelle de couleurs chaudes allant de 0 à 1 pour un incrément de déformation axiale $\delta\varepsilon = 3.10^{-5}$ d'un test de biaxial réalisé par Le Bouil [17].

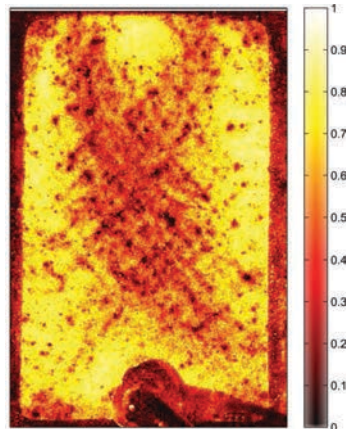


FIGURE I.18 – Carte de corrélation pour un incrément de déformation axiale $\delta\varepsilon = 3.10^{-5}$.

Pour continuer les travaux de Le Bouil, la partie expérimentale de ma thèse consiste à appliquer la méthode DWS dans une géométrie de test biaxial en déformation plane.

I.3 Méthodes numériques existantes

Aujourd'hui, les méthodes numériques discrètes deviennent un outil fiable et très connu pour les chercheurs travaillant sur les milieux granulaires. Leurs principaux avantages est l'accès à des informations à l'échelle des grains et la facilité de programmation. Les méthodes numériques discrètes peuvent être classées en deux grandes

catégories : la méthode de la dynamique des contacts et la méthode des éléments discrets.

I.3.1 Méthode de dynamique des contacts (CD)

La CD (de l'anglais "**C**ontact **D**ynamics") a été proposée par Moreau [22] et Jean [23] et est basée sur le concept de sphères vraiment rigides. Le contact entre deux particules est donc décrit par deux lois non régulières : la règle de non-interpénétrabilité qui stipule que la force normale entre deux particules est nulle s'il n'y a pas de contact et indéterminée sinon, et la règle de Coulomb qui stipule que la force tangentielle est égale au coefficient de friction fois la force normale si la vitesse tangentielle relative au contact est non nulle et inférieure si elle est nulle. La méthode de la dynamique des contacts est basée sur la résolution implicite des équations du mouvement qui permet, à chaque pas de temps, de déterminer un ensemble de forces de contact vérifiant ces règles non régulières avec les équations de la dynamique.

I.3.2 Méthodes des éléments discrets (DEM)

La DEM (de l'anglais "**D**iscrete **E**lement **M**ethod") a été initiée par Cundall et Strack [24] et est aussi appelée la méthode de Dynamique Moléculaire. Elle est directement applicable à la simulation des milieux granulaires. En plus, elle est facile à comprendre et à programmer, et s'applique à de nombreuses situations, allant des gaz granulaires aux empilements quasistatiques. C'est pourquoi nous avons utilisé cette méthode pour la partie de simulation numérique de la thèse. Le cycle de calcul de cette méthode est présenté dans la figure I.19.

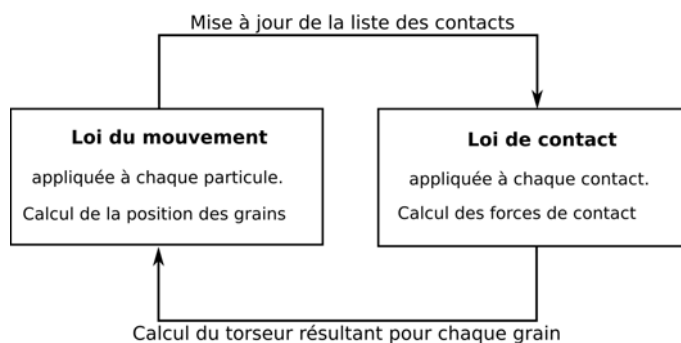


FIGURE I.19 – Cycle de calcul de la méthode des éléments discrets.

Chapitre II

Biaxial expérimental

L'objectif de la partie expérimentale est d'observer la localisation de la déformation d'un milieu granulaire dans un test biaxial en déformation plane. La technique de la diffusion multiple de la lumière (Diffusing Wave Spectroscopy, DWS) est utilisée pour la visualisation des micro-déformations. J'ai repris le montage mécanique et optique développé par A. Le Bouil durant sa thèse sous la direction de J. Crassous et A. Amon [17].

Dans ce chapitre, nous présentons tout d'abord le dispositif mécanique. Ensuite, la méthode de diffusion multiple de la lumière et le montage optique sont abordés. Enfin, nous présentons les résultats expérimentaux typiques.

II.1 Dispositif expérimental

II.1.1 Partie mécanique

Le test biaxial en déformation plane consiste à placer un échantillon de matériau granulaire entre deux murs rigides parallèles, et à appliquer sur cet échantillon deux contraintes indépendantes : la contrainte latérale $-\sigma_{xx}$ et la contrainte axiale $-\sigma_{yy}$ dans les deux directions parallèles aux deux murs. Le dispositif mécanique du test biaxial est présenté dans la figure II.1.

Pour exercer la contrainte latérale $-\sigma_{xx}$, l'échantillon est mis en dépression entre une membrane en latex et une plaque de verre à l'aide d'une pompe à vide (voir figure II.2(a)). Un capteur de pression relié à une électrovanne permet de contrôler la valeur de cette contrainte. La contrainte axiale $-\sigma_{yy}$ est exercée par la plaque ④ fixée à la platine motorisée ②. Le capteur de force ③ permet de mesurer $-\sigma_{yy}$. Durant le

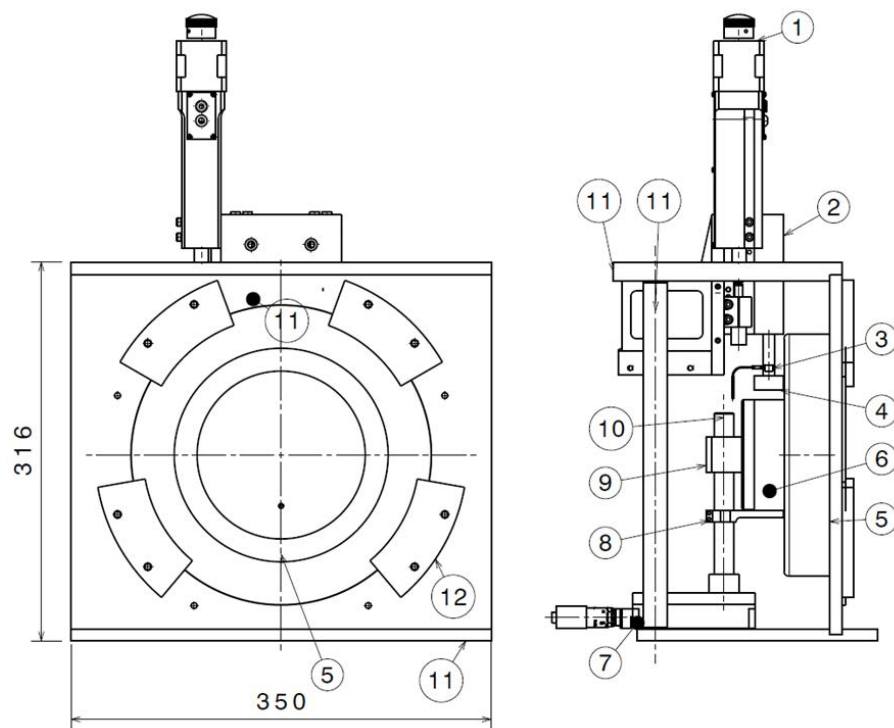


FIGURE II.1 – Plan du dispositif de test biaxial, vue de face et de côté. ① moteur, ② platine de translation motorisée, ③ capteur de force, ④ plaque supérieure, ⑤ hublot, ⑥ échantillon de matériau granulaire, ⑦ platine de translation manuelle, ⑧ plaque inférieure, ⑨ plaque arrière, ⑩ axe de positionnement, ⑪ bâti, ⑫ cales pour le hublot [17].

test, la contrainte $-\sigma_{xx}$ est quasi-constante tandis que la contrainte $-\sigma_{yy}$ croît.

Dans notre étude, on s'intéresse aux apparitions des angles des bandes de cisaillement. Pour bien identifier les apparitions, une structure asymétrique des bandes est nécessaire. L'objectif est donc d'obtenir une seule bande de cisaillement au niveau de la localisation de la déformation du matériau. D'après [3, 4], il faut libérer le déplacement horizontal de l'échantillon. On a ajouté alors un glissière entre la plaque (s) et la partie inférieure de l'échantillon (voir figure II.2(b)).

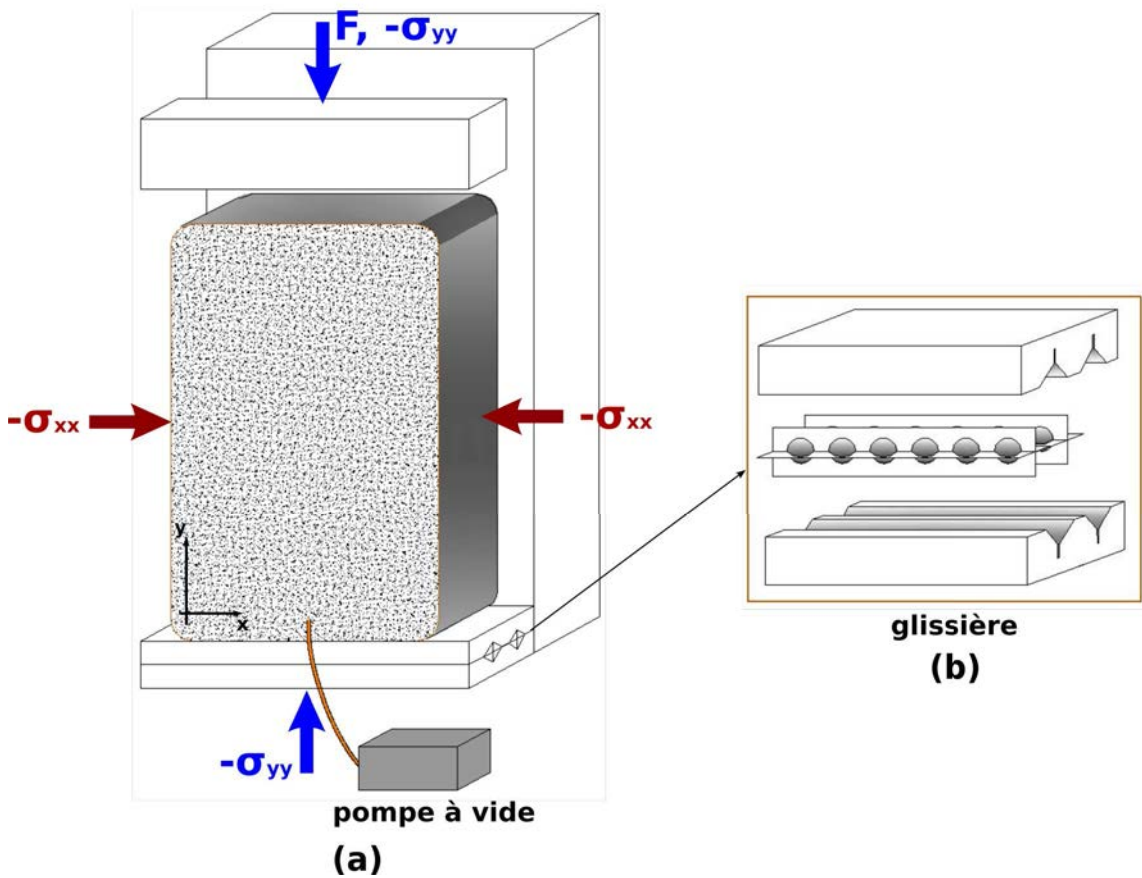


FIGURE II.2 – (a) : Schéma des contraintes exercées sur l'échantillon. (b) : Zoom détaillé du glissière.

II.1.2 Partie optique

II.1.2.1 Diffusion multiple de la lumière

Certains matériaux comme des matériaux granulaires, des mousses, des suspensions colloïdales diffusent fortement la lumière dans toutes les directions. Lorsqu'on éclaire ces matériaux diffusants, les ondes lumineuses sont diffusées sur les hétérogénéités. Si elles sont diffusées plusieurs fois, on parle de diffusion multiple de la lumière.

Pour un matériau désordonné, la lumière peut se propager suivant très grand nombre de chemins optiques. Deux ondes lumineuses incidentes en phase peuvent être déphasées à l'issue de la propagation dans le matériau et sont en mesure d'interférer (voir figure II.3(a)). L'intensité de la lumière diffusée présente des fluctuations formant une figure hétérogène, constituée de tâches aléatoires sombres et brillantes, appelée figure de speckle (voir figure II.3(a)).

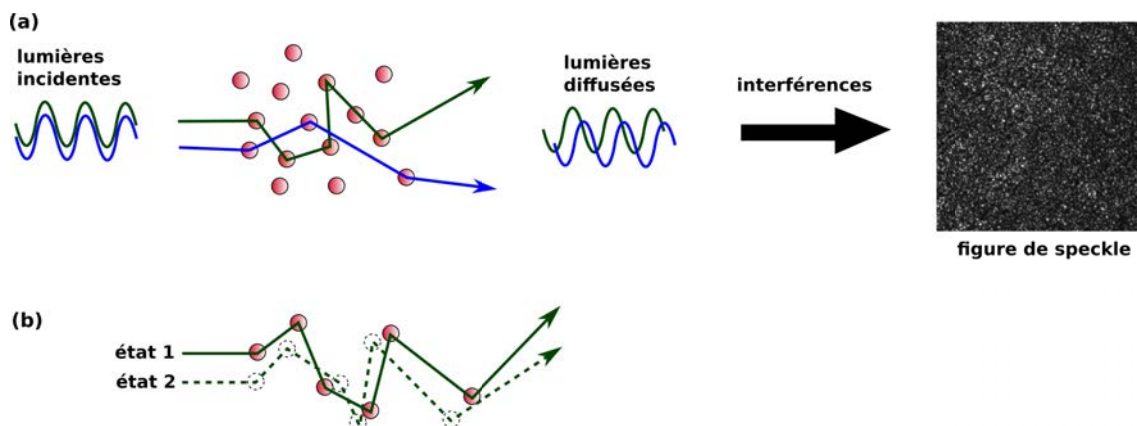


FIGURE II.3 – (a) : Deux chemins optiques possibles de deux ondes incidentes en phase. Après se propager dans le matériau, les ondes sont déphasées et peuvent interférer. Figure de speckle formée par l'interférence entre les ondes. (b) : Un chemin optique est modifié car la dynamique interne du matériau. Les figures de speckle de l'état 1 et l'état 2 sont donc différentes.

Si le matériau possède une dynamique interne, les chemins optiques sont modifiés, voir figure II.3(b). Ces modifications donnent lieu à des fluctuations de l'intensité de la lumière diffusée au cours de temps. C'est-à-dire en d'autres termes, on observe une figure de speckle sur laquelle des tâches brillantes deviennent sombres et inversement. Pour quantifier cette modification entre deux états 1 et 2, on calcule une fonction de corrélation g_I de l'intensité diffusée du matériau, définie comme :

$$g_I^{(12)} = \frac{\langle I_1 I_2 \rangle}{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle}, \quad (\text{II.1})$$

où I_1 et I_2 sont les intensités dans les états 1 et 2, et $\langle \cdot \rangle$ représente une moyenne spatiale.

II.1.2.2 Mesure de déformation - Résolution spatiale

Pour la diffusion de la lumière par des particules sphériques, on distingue deux cas comme dans la figure II.4. Lorsque les particules sont petites devant la longueur de l'onde de la lumière λ , on peut considérer que la lumière est diffusée dans toutes les directions, on parle de diffusion isotrope. En revanche, si les particules ont une taille plus grande que λ , d'après la théorie de Mie, la lumière a une plus grande probabilité d'être diffusée vers l'avant. Dans ce cas, on introduit une longueur de transport (transport mean free path) l^* , correspondant à la distance que la lumière doit parcourir pour rendre aléatoire sa direction de propagation.

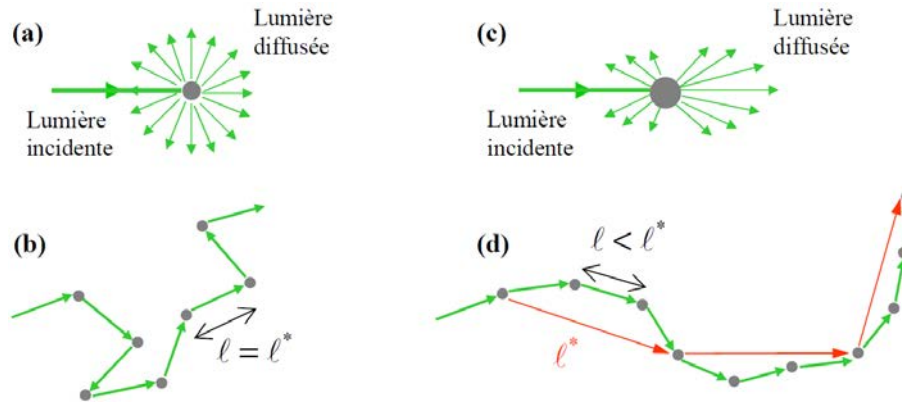


FIGURE II.4 – (a) : Diffusion isotrope (b) : La diffusion peut être modélisée par une marche aléatoire dont le pas $l^* = l$ avec l est la distance entre les centres diffuseurs. (c) : Diffusion de Mie ; (d) : Dans ce cas le pas de la marche aléatoire l^* est supérieure à la distance l [21].

Dans une géométrie de rétrodiffusion, la distribution des longueurs de chemin optiques présente un pic autour de la valeur l^* . Le volume typique sondé par une onde lumineuse dans le matériau est donc de l'ordre de $(l^*)^3$, voir figure II.5. Un modèle de propagation de la lumière dans un milieu granulaire (billes de verre sphériques) [25] et des mesures [25, 26, 27] ont montré que $l^* \simeq 3,3 d$ avec d le diamètre moyen des billes.

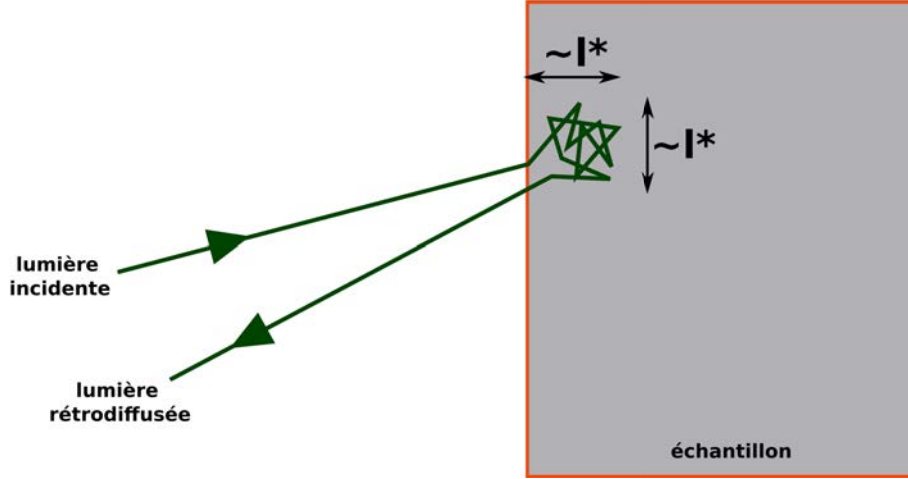


FIGURE II.5 – Schéma d'un chemin optique en géométrie de rétrodiffusion.

Si la déformation du matériau est considérée comme homogène à l'échelle de l^* , la fonction de corrélation $g_I^{(12)}$ peut être liée à la déformation du matériau moyennant certaines approximations explicitées dans [26, 25, 28] :

$$\left| g_I^{(12)} \right| \approx \exp\left(-\eta k l^* \sqrt{f(\mathbf{U})}\right), \quad (\text{II.2})$$

où η est un facteur optique dont la valeur est comprise entre 1,5 et 2,5 ; k est le vecteur d'onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ et

$$f(\mathbf{U}) = \frac{1}{5} \text{Tr}^2(\mathbf{U}) + \frac{2}{5} \text{Tr}(\mathbf{U}^2) \quad (\text{II.3})$$

est une fonction des invariants quadratiques du tenseur de déformation \mathbf{U} de composantes $U_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right)$.

II.1.2.3 Mise en oeuvre

Dans notre expérience, la surface de l'échantillon est éclairée par un faisceau laser étendu. On forme l'image de l'échantillon (figure de speckle) par un appareil photo situé en face de l'échantillon. Pour obtenir une information résolue spatialement, cette image est découpée en zones carrées de $(N \times N)$ pixels appelées métapixels. On calcule la fonction de corrélation g_I pour chaque métapixel. De plus, pour s'affranchir de l'influence des fluctuations de l'intensité du laser aux temps courts, on normalise la fonction de corrélation de la manière suivante :

$$g_I = \frac{\langle I_1 I_2 \rangle - \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle}{\sqrt{\langle I_1^2 \rangle - \langle I_1 \rangle^2} \sqrt{\langle I_2^2 \rangle - \langle I_2 \rangle^2}}, \quad (\text{II.4})$$

où I_1 et I_2 sont les intensités de la lumière diffusée d'un méta-pixel dans les états 1 et 2 et $\langle \cdot \rangle$ représente une moyenne sur l'ensemble des pixels contenus dans un méta-pixel. Après calculer cette fonction de corrélation pour chaque métapixel, on obtient une carte des valeurs de g_I appelée carte de corrélation. La taille pertinente des tâches de speckle est de 2,3 pixels en moyenne [17, 21] et on choisit $N = 16$ pour que la résolution spatiale de la carte de corrélation soit maximale. Chaque métapixel de (16×16) pixels de deux états 1 et 2 correspond donc à un pixel de valeur de g_I sur la carte de corrélation (voir figure II.6).

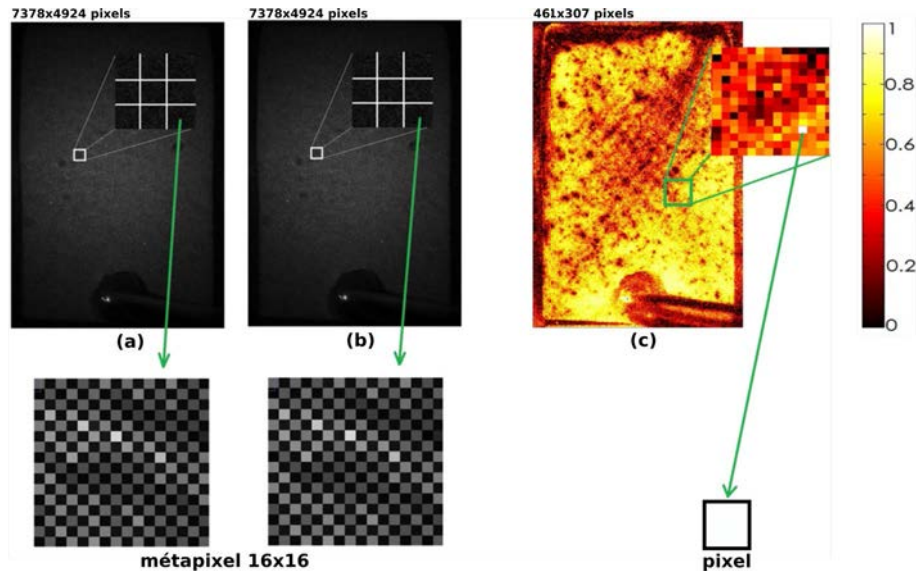


FIGURE II.6 – Image de speckle de l'échantillon dans les états 1 (a) et 2 (b). Ces images sont divisées en zones de (16×16) pixels. Pour chacune de ces zones une valeur de la corrélation g_I est calculée; (c) : Carte de corrélation obtenu à partir des images 1 et 2.

D'autre part, on voit que la fonction de corrélation prend des valeurs entre 0 (lorsque I_1 est très différent de I_2) et 1 (lorsque $I_1 \approx I_2$). Alors, on peut calculer l'ordre de grandeur des déformations observées à partir de l'équation II.2. Avec $\eta \approx 2$; pour un laser de longueur d'onde 532 nm, $k = \frac{2\pi}{532 \cdot 10^{-9}} \text{ rad.m}^{-1}$; pour des billes d'un diamètre de l'ordre de 100 μm , $l^* \approx 3,3 \times 10^{-4} \text{ m}$; dans le cas d'une déformation isovolume, $f(\mathbf{U}) = \frac{2}{5} \text{Tr}(\mathbf{U}^2)$, on obtient :

lorsque $g_I = 0,99$:

$$\sqrt{f(\mathbf{U})} = -\frac{\ln(0,99)}{\eta kl^*} \approx 1.10^{-6}. \quad (\text{II.5})$$

lorsque $g_I = 0,01$:

$$\sqrt{f(\mathbf{U})} = -\frac{\ln(0,01)}{\eta kl^*} \approx 6.10^{-4}. \quad (\text{II.6})$$

Les déformations mesurées sont donc de l'ordre de 10^{-6} à 10^{-4} .

II.1.2.4 Dispositif optique et réglages

Afin d'utiliser la méthode DWS, on éclaire sur toute la face de l'échantillon en contact avec la plaque de verre par un faisceau de laser. Ensuite, on enregistre les figures de speckle par un appareil photo et on calcule la fonction de corrélation pour chaque métapixel entre deux images pour obtenir la carte de corrélation.

La source laser utilisée a la longueur d'onde $\lambda = 532$ nm et d'une puissance maximale de 75 mW (Compass 215M, Coherent). Afin d'éclairer toute la surface de l'échantillon sur la plaque de verre, nous avons étendu le faisceau avec deux lentilles divergentes, voir figure II.7. L'appareil photo utilisé est un Nikon D800E de 7378×4924 pixels avec un objectif de 90 mm de distance focale. La vitesse d'acquisition que nous avons choisie est de 3 images/s.

II.1.3 Acquisition des données

Pour chaque expérience, on a besoin de l'acquisition des positions de la platine, des tensions délivrées par le capteur de force et des images de l'appareil photo. Un programme du logiciel Labview écrit par Patrick Chasle a été utilisé pour piloter la platine et acquérir sa position et le signal de force (voir figure II.8). Ce programme permet d'initialiser en position haute la platine et également d'entrer la vitesse de la platine durant le chargement et sa position finale. On a choisi la vitesse de chargement de $1\mu\text{m/s}$ pour toutes nos expériences. Pour chaque expérience, ce programme enregistre dans un fichier la position de la platine et le temps correspondant à la fréquence d'une position par seconde. Un autre fichier est également créé pour enregistrer le signal de force à la fréquence de 100 signaux par seconde.

Afin d'enregistrer les images de l'appareil photo, on a utilisé le logiciel Camera Control Pro. Les images sont stockées sur le disque dur de notre ordinateur par les options de transfert du logiciel (voir figure II.9(a)). À l'aide de la boîte de dialogue

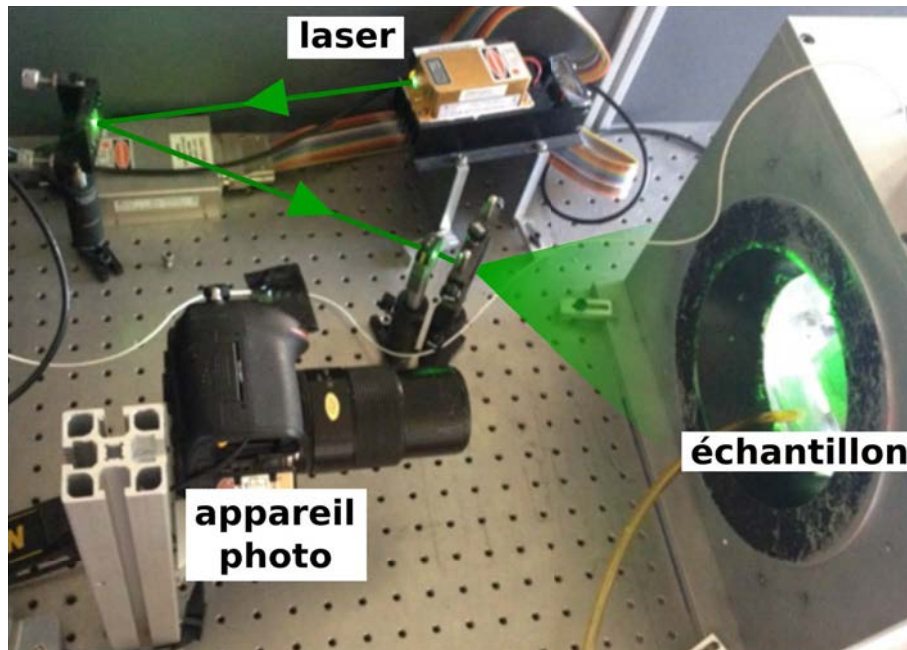


FIGURE II.7 – Ensemble du dispositif expérimental.

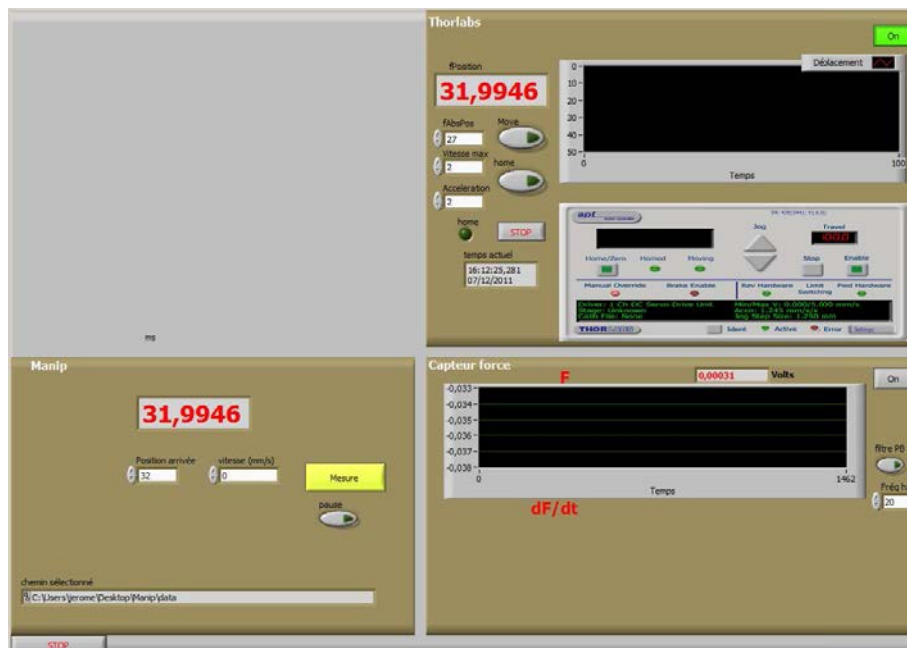


FIGURE II.8 – Interface du logiciel Labview.

Intervallomètre du logiciel Camera Control Pro (voir figure II.9(b)), on peut prendre une série des figures de speckle pendant toute la durée d'une expérience. L'intervalle de temps qu'on a choisi est de 3 secondes, c'est-à-dire la vitesse d'acquisition est de 3 images/seconde.

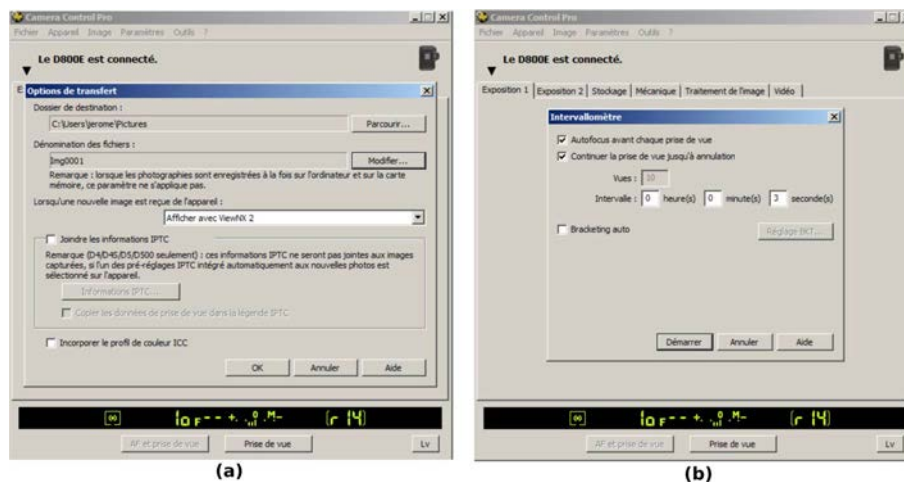


FIGURE II.9 – Interface du logiciel Camera Control Pro. (a) : Options de transfert. (b) : Intervallomètre.

II.1.4 Échantillon : matériel et préparation

Pour les expériences, nous avons utilisé des billes de verre de la taille de 70 – 110 μm (Silibeads type S, Sigmund Linder) comme milieu granulaire. Les billes de verres sont situées dans une membrane en latex. J'ai repris la manière de fabrication de la membrane et de la mise de l'échantillon sur le dispositif que Le Bouil avait effectuée durant sa thèse [17], présentée dans la figure II.10.

Pour fabriquer la membrane, on utilise un moule en plâtre de forme circulaire de diamètre 150 mm avec un parallélépipède d'une taille de 85 \times 55 \times 25 mm³ en son centre. Sur le moule, on applique environ 8 couches de latex liquide (figure II.10(a)) avec un temps de séchage entre chaque couche. Ensuite, le milieu granulaire est déposé dans la membrane en utilisant un contre-moule comme dans la figure II.10(b).

Pour mettre l'échantillon sur le dispositif de l'expérience, une plaque de verre est posée sur l'échantillon (figure II.10(c)). Afin de permettre l'étanchéité entre la membrane et la plaque de verre, on couvre la graisse à vide sur la partie de la membrane en contact avec la plaque de verre. Cette plaque de verre permet la

visualisation des micro-déformations au sein de l'échantillon et elle est fixée sur une armature circulaire en métal. Pour la mise en dépression, le tuyau d'une pompe à vide est relié à l'échantillon par un trou sur la plaque de verre dans lequel un fritté de porosité 3 (diamètre équivalent du pore le plus gros : 17 à 40 μm) est collé. Lorsque le contact entre la membrane et la plaque est rigide, on peut mettre l'ensemble de la plaque et l'échantillon dans le dispositif de l'essai biaxial (figure II.10(d)).

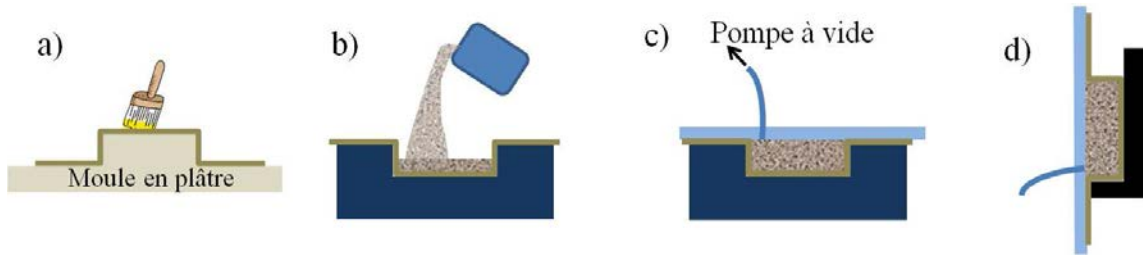


FIGURE II.10 – Image tirée de [17]. Schéma des étapes de préparation du milieu granulaire, a) application au pinceau de couches de latex liquide sur un moule en plâtre, b) versement des grains dans la membrane positionnée dans un contre-moule, c) mise en dépression de l'échantillon par pose de la plaque de verre reliée à la pompe à vide, d) positionnement de l'ensemble hublot+échantillon sur le dispositif de test biaxial.

II.2 Résultats expérimentaux

Durant la thèse, on a réalisé plusieurs d'expériences. Dans cette section, nous présentons d'abord les résultats de trois expériences typiques. Ensuite, nous présentons deux autres expériences avec deux autres dimensions de l'échantillon.

II.2.1 Courbes de charge

La courbe de charge d'un test biaxial est la représentation de la contrainte déviatorique $\sigma_{xx} - \sigma_{yy}$ en fonction de la déformation axiale ε . La contrainte déviatorique est obtenue par la force F indiquée par le capteur de force et la surface initiale de l'échantillon S : $\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \frac{F}{S}$. La déformation axiale ε est le rapport entre le déplacement de la platine et la hauteur initiale de l'échantillon. Nous présentons dans la figure II.11 les courbes de charges de trois expériences différentes. Pour simplifier la mention des expériences dans la suite, on les nomme expérience 1, expérience 2 et expérience 3 équivalents respectivement la courbe bleue, la courbe verte et la courbe

rouge. On utilise les mêmes paramètres pour tous les trois expériences comme les suivants :

- taille de billes : 70-110 μm ;
- état : grains propres ;
- pression de confinement : $-\sigma_{xx} = 30\text{kPa}$;
- vitesse de chargement : 1 $\mu\text{m/s}$;

Toutes les trois courbes de charge présentent une relation quasi-linéaire initiale correspondant à un comportement élastique au début de la charge. Ensuite la pente des courbes diminue jusqu'à l'apparition d'un palier de la contrainte vers $\varepsilon = 6,5\%$ pour l'expérience 1, $\varepsilon = 6,3\%$ pour l'expérience 2 et $\varepsilon = 5\%$ pour l'expérience 3. Ces paliers sont identifiés comme les indicateurs de la rupture de l'échantillon. Pour chaque expérience, à partir de la contrainte correspondante au palier, on peut calculer l'angle θ du plan de cisaillement par le modèle de Mohr-Coulomb qui est présenté dans le chapitre V. Les angles de Mohr-Coulomb θ_{MC} sont présentés dans le tableau suivant :

| | Expérience 1 | Expérience 2 | Expérience 3 |
|-----------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| $\varepsilon_{rupture}$ | 6,5% | 6,3% | 5% |
| $\sigma_{xx} - \sigma_{yy}$ | 78kPa | 86kPa | 92kPa |
| $-\sigma_{xx}$ | 30kPa | 30kPa | 30kPa |
| Angle de friction ϕ | 32° | 36° | 37° |
| θ_{MC} | $\pm 61^\circ$ | $\pm 63^\circ$ | $\pm 64^\circ$ |

II.2.2 Cartes de corrélations

Pendant toute la durée du test biaxial, les images de speckle sont enregistrées avec la vitesse de 3 images/s de l'appareil photo. Afin d'obtenir des informations sur la déformation de matériau, on considère chaque paire d'images de speckle successives (image i et image $i+1$). La déformation axiale du matériau qui correspond à l'image i est ε_i et celle qui correspond à l'image $i+1$ est ε_{i+1} . On calcule la fonction de corrélation g_I , définie par l'équation II.4, pour chaque métapixel (zone de 16×16 pixels). On obtient alors une carte de corrélation (carte des valeurs de g_I), cette carte représente les déformations du matériau pour un incrément de déformation

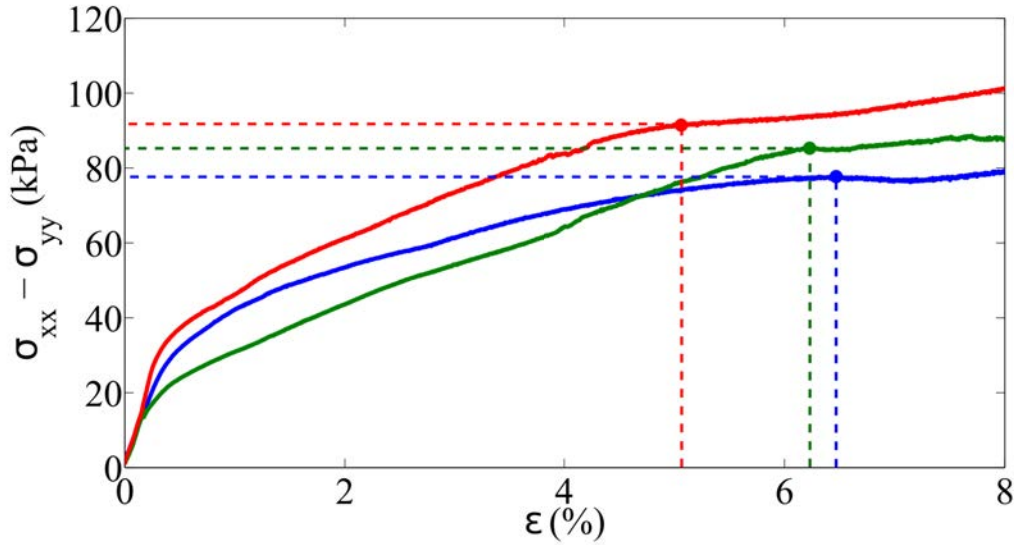


FIGURE II.11 – Courbes de charge de trois expérience différentes (expérience 1 : bleue, expérience 2 : verte, expérience 3 : rouge).

axiale $\delta\varepsilon = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$. Pour nos expériences, la vitesse de chargement est $1\mu\text{m/s}$, l'incrément de déformation axiale entre chaque carte est $\delta\varepsilon \approx 3 \times 10^{-5}$.

Nous présentons dans la figure II.12 des cartes de corrélations de l'expérience 2. On voit que la répartition de la déformation est toujours hétérogène. Des micro-bandes intermittentes sont observées au début de la charge jusqu'à l'apparition d'une ou de deux grandes bandes permanentes. La deuxième grande bande apparaît parce que le glissière est bloqué après une durée suffisamment longue du chargement.

Sur les cartes de corrélations qui correspondent aux paliers des courbes de charges, on peut mesurer directement l'angle d'inclinaison des bandes et les comparer avec les angles de Mohr-Coulomb. Cette mesure est présentée dans la figure II.13. L'angle mesuré de trois expériences est respectivement 58° , 62° et -66° donnant la valeur moyenne de $\pm 62^\circ$. En comparant avec l'angle de Mohr-Coulomb que l'on obtient dans la section précédente, on constate que ces angles mesurés sont en accord avec la prédiction du modèle de Mohr-Coulomb.

II.2.3 Variation du rapport d'aspect de l'échantillon

On a réalisé deux autres moules pour obtenir deux membranes de la taille de $55 \times 55 \times 25 \text{ mm}^3$ et de $85 \times 40 \times 25 \text{ mm}^3$. On a effectué deux expériences avec

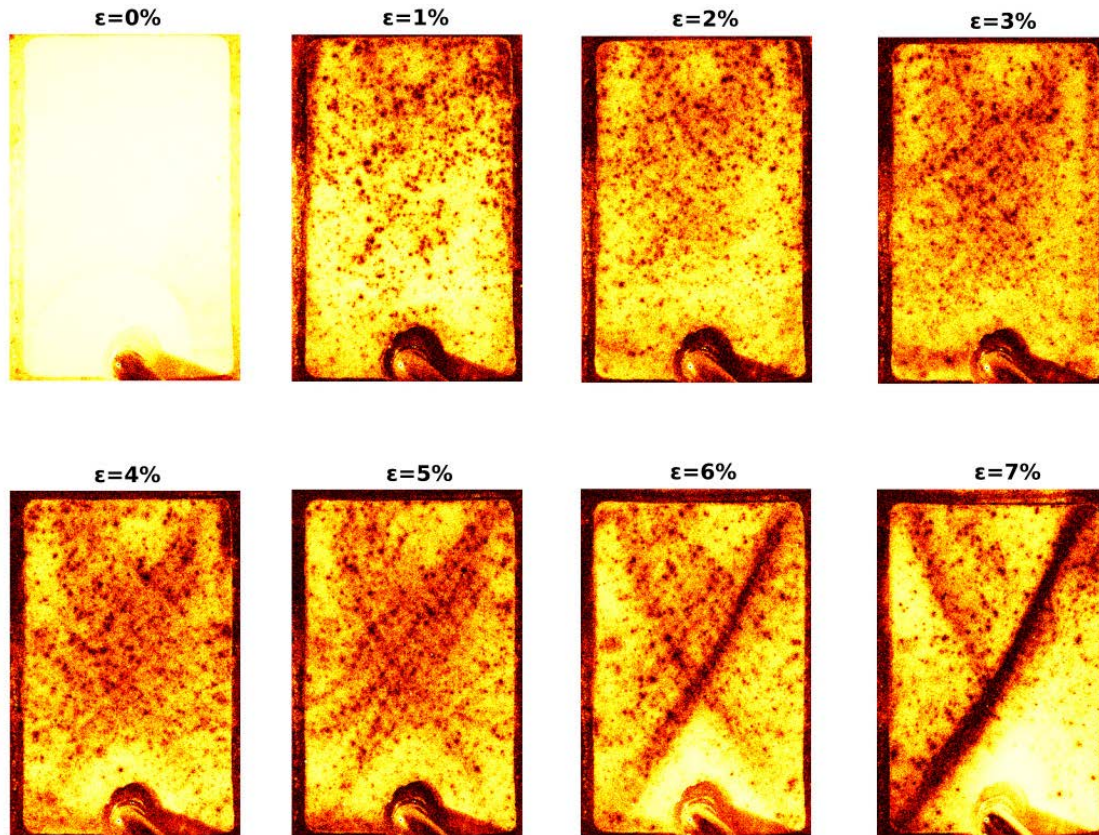


FIGURE II.12 – Cartes de corrélations de l'expérience 2.

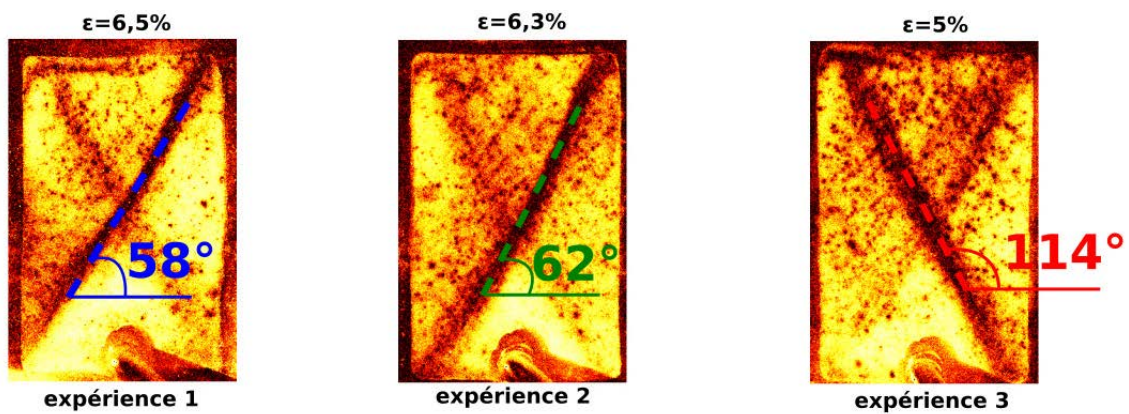


FIGURE II.13 – Angle d'inclinaison des bandes mesuré graphiquement sur la carte de corrélation en rupture pour les trois expériences.

ces deux nouveaux rapports d'aspect de l'échantillon avec les mêmes paramètres des autres expériences. On a également tracé des courbes de charge et réalisé des cartes de corrélation. Ces résultats sont présentés dans la figure II.14. Pour chaque expérience, on prend quelques cartes de corrélation où on voit une ou des grandes bandes de cisaillement pour mesurer directement les angles des bandes (figure II.14). La valeur moyenne des angles mesurés de deux expériences est $\pm 63^\circ$ et $\pm 65^\circ$. On constate que ces valeurs sont proches de celles des angles des bandes des autres expériences qu'on a mesurés dans §II.2.2. Cette cohérence montre que l'angle d'inclinaison de la bande de cisaillement ne dépende pas du rapport d'aspect de l'échantillon.

II.3 Conclusion

Nous avons présenté, dans un premier temps, les matériels et les méthodes pour réaliser un test biaxial. La méthode de la diffusion multiple de la lumière permet la visualisation des micro-déformations avec l'ordre de grandeur de 10^{-6} à 10^{-4} . Pour chaque expérience, nous avons obtenu une série des images de speckle. Une fonction de corrélation g_I est calculée pour chaque deux images consécutives. On obtient une carte de corrélation qui représente les déformations du matériau pour un incrément de déformation axiale $\delta\varepsilon \approx 3 \times 10^{-5}$. Dans un second temps, nous avons montré les courbes de charge et des cartes de corrélation de trois expériences typiques différentes. Nous avons observé l'apparition des bandes de cisaillement et les angles des bandes mesurés sur les cartes de corrélation en rupture de l'échantillon sont cohérents avec les angles du plan de cisaillement calculés par le modèle de Mohr-Coulomb à partir des courbes de charge. Finalement, nous avons présenté les résultats en faisant varier le rapport d'aspect de l'échantillon.

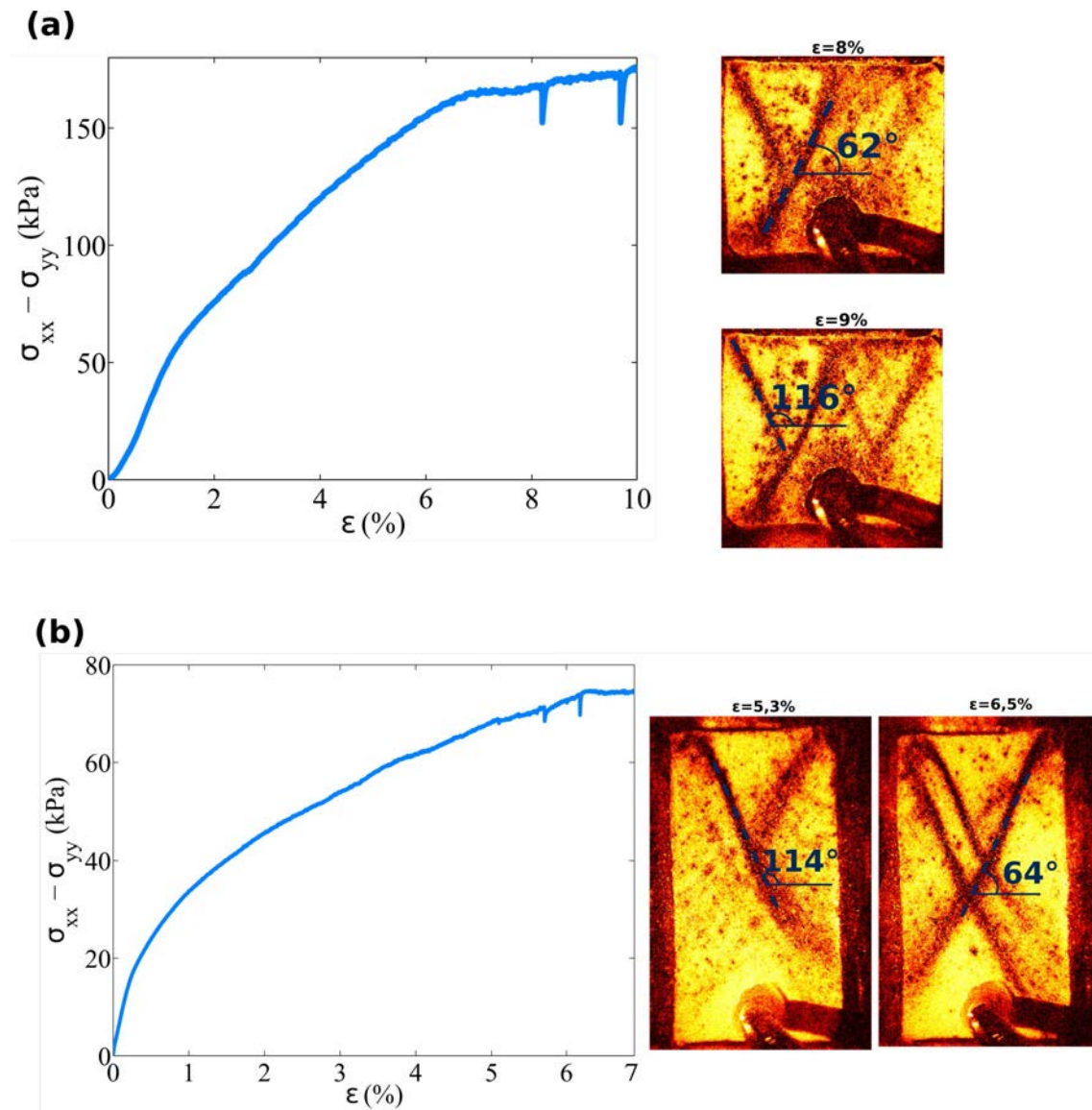


FIGURE II.14 – Courbes de charge et cartes de corrélation où on voit des bandes de cisaillement de deux expériences avec deux autres rapports d'aspect de l'échantillon. (a) : Échantillon de la taille de $55 \times 55 \times 25 \text{ mm}^3$; (b) : Échantillon de la taille de $85 \times 40 \times 25 \text{ mm}^3$.

Chapitre III

Biaxial numérique

L'un des travaux de la thèse est de modéliser un test biaxial en 2D pour étudier plus finement le comportement des milieux granulaire et comparer avec les résultats expérimentaux. Nous avons donc réalisé des simulations numériques par la méthode des éléments discrets (Discrete Element Method, DEM). Dans ce chapitre, on présente d'abord des équations et les forces au niveau de grain de DEM qui sont traitées en détail dans Radjaï *et al* [29]. Ensuite, on aborde la simulation d'un essai biaxial et enfin, la comparaison des résultats numériques et expérimentaux est présentée.

III.1 Méthode des éléments discrets

III.1.1 Introduction

Dans la DEM, les grains sont indéformables mais on leur permet de s'interpénétrer légèrement, et on calcule les forces d'interaction en fonction de cette interpénétration. Les interactions entre des particules sont modélisées par des ressorts dans les directions normales et tangentielle au plan de contact, respectivement de rigidité linéaire k_n et k_t (voir figure III.1).

Le calcul de la position des grains consiste à résoudre numériquement les équations :

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i, \quad i = 1 \dots N \quad (\text{III.1})$$

où N est le nombre de grain dans la simulation, m_i est la masse du grain i , x_i est sa position et \mathbf{F}_i est la somme des forces exercées sur ce grain. Les forces \mathbf{F}_i contiennent les forces d'interaction entre les grains et les forces extérieures :

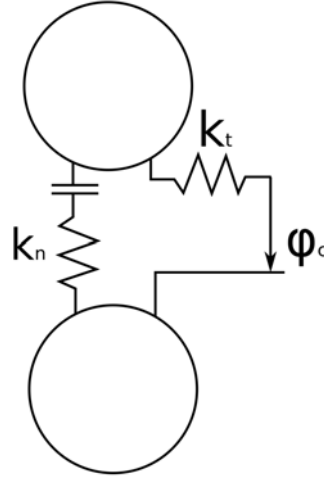


FIGURE III.1 – Loi d'interaction du contact.

$$\mathbf{F}_i = \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ext,i} \quad (\text{III.2})$$

où $\mathbf{F}_{ext,i}$ sont les forces extérieures, par exemple les forces de gravité ou des pressions appliquées sur des murs ; \mathbf{F}_{ij} sont les forces exercées par le grain j sur le grain i ($i \neq j$). Dans la suite, on présente une méthode simple pour calculer ces forces.

III.1.2 Calcul des forces

On considère le cas de deux grains i et j en contact (voir figure III.2). On décompose la force de contact entre deux grains en deux composantes :

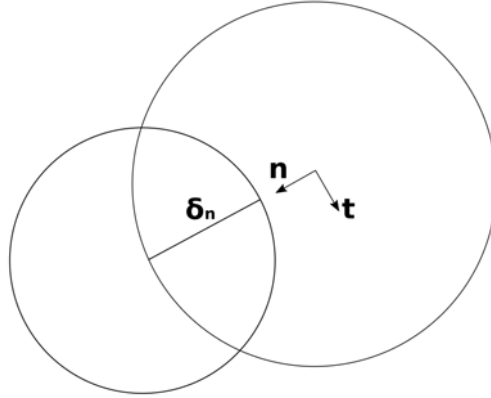
$$\mathbf{F}_{ij} = F_n \mathbf{n} + F_t \mathbf{t} \quad (\text{III.3})$$

où F_n et F_t sont les composantes normale et tangentielle de la force et \mathbf{n} et \mathbf{t} sont les vecteurs unités du repère local.

La force normale au contact F_n est calculée par :

$$F_n = -k_n \delta_n - \gamma_n \dot{\delta}_n \quad (\text{III.4})$$

où γ_n est le coefficient d'amortissement et δ_n est la séparation de deux grains, autrement dit la différence entre la distance entre deux centres des grains et la somme de leurs rayons, présentée dans la figure III.2.

FIGURE III.2 – Deux grains en contact avec la séparation et les vecteurs unitaires \mathbf{n} , \mathbf{t} .

La force tangentielle est calculée de même façon, mais avec une condition supplémentaire pour permettre le glissement. On calcule d'abord une force candidate \hat{F}_t :

$$\hat{F}_t = -k_t \delta_t - \gamma_t \dot{\delta}_t \quad (\text{III.5})$$

où δ_t est l'intégrale de la composante tangentielle du mouvement relatif et γ_t est une constante analogue à γ_n . Après calculer \hat{F}_t , la force tangentielle F_t est déterminée par la vérification de la loi de frottement de Coulomb :

$$F_t = \begin{cases} \text{sgn}(\hat{F}_t) \mu F_n, & |\hat{F}_t| \geq \mu F_n \\ \hat{F}_t, & |\hat{F}_t| < \mu F_n \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

Si la loi de frottement de Coulomb est satisfaite, la force tangentielle est égale à la candidate $F_t = \hat{F}_t$. Sinon, on dit que le contact est glissant, et $F_t = \pm \mu F_n$, en choisissant le signe pour que F_t et \hat{F}_t aient le même signe.

III.1.3 Intégration des équations

La procédure numérique consiste, dans chaque pas de temps Δt , à résoudre les équations différentielles ordinaires III.1. L'algorithme proposé par Verlet et appelé Leap-frog a été choisi pour intégrer ces équations.

Dans le schéma Leap-frog, les relations de récurrence sur la position et la vitesse sont :

$$\mathbf{v}_{k+1/2} = \mathbf{v}_{k-1/2} + \mathbf{a}_k \Delta t \quad (\text{III.7})$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_{k+1/2} \Delta t$$

où \mathbf{x}_k est la position d'un grain à temps $t = k\Delta t$, $\mathbf{v}_{k+1/2}$ est sa vitesse à temps $t = \Delta t(k + 1/2)$ et \mathbf{a}_k est son accélération à temps $t = k\Delta t$.

On voit que les vitesses sont obtenues à $t = \Delta t/2, 3\Delta t/2, \dots$ alors que les positions sont obtenues à $t = \Delta t, 2\Delta t, \dots$. On utilise une équation auxiliaire pour exprimer les vitesses au pas entier :

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{k-1/2} + \mathbf{a}_{k-1} \Delta t \quad (\text{III.8})$$

Pour ne pas avoir un temps élevé de calcul, le pas de temps est choisi le plus grand possible. D'autre part, afin que le schéma Leap-frog soit stable pour un mouvement oscillatoire, il faut aussi que le pas de temps soit beaucoup inférieur à la période d'oscillation la plus lente (la période d'oscillation d'un grain) : $\Delta t \ll T = 2\pi \sqrt{\frac{m_{moy}}{k_n}}$ avec m_{moy} est la masse moyenne des grains (Radjaï *et al.*, 2013).

III.2 Simulation d'un essai biaxial

Pour la simulation numérique d'un essai biaxial, nous avons collaboré avec Sean McNamara (Institut de Physique de Rennes, Équipe Milieux Divisés). J'ai repris ses programmes, les ai compris, les ai exécutés et ai analysé les résultats.

III.2.1 Unités et paramètres

Les grains ont une densité de masse bidimensionnelle ρ_* , la masse totale des grains est M_* et la pression utilisée dans le processus de compression est p_* . Les trois quantités ρ_* , M_* et p_* définissent les unités utilisées pour toutes nos simulations. L'unité de longueur est donc $L_* = \sqrt{M_*/\rho_*}$, l'unité de temps $t_* = \sqrt{M_*/p_*}$ et l'unité de l'énergie $E_* = M_* p_*/\rho_*$.

Dans nos simulations, la valeur du coefficient du frottement est 0,2. La rigidité normale est $k_n = 2000p_*$ et la rigidité tangentielle $k_t = k_n/2$. Les grains sont modélisés par des disques et la polydispersité vaut : $P_d = \frac{r_{max}}{r_{min}} = 1,5$ avec r_{max} et r_{min} sont respectivement le rayon maximal et le rayon minimal des grains.

III.2.2 Fabrication de l'empilement initial

Pour réaliser un test biaxial, il faut préparer un échantillon très dense par un processus de compression. Avant ce processus, une génération d'un échantillon numérique est faite par la création des positions des grains et de leurs rayons. Ces préparations sont présentées dans cette partie.

III.2.2.1 Génération d'un échantillon numérique

On définit le rayon d'un grain de masse moyenne r_{moy} par la formule :

$$r_{moy} = \sqrt{\frac{M_*}{N\rho_*\pi}} \quad (\text{III.9})$$

où N est le nombre de grains.

Pour faciliter la génération des tailles des grains, on choisit r_{max} et r_{min} pour que la masse de deux grains dont les rayons sont r_{max} et r_{min} soit égale à deux fois de la masse moyenne, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \rho_*\pi r_{max}^2 + \rho_*\pi r_{min}^2 &= 2\rho_*\pi r_{moy}^2 \\ \Rightarrow r_{max}^2 + r_{min}^2 &= 2r_{moy}^2 \end{aligned}$$

Avec le polydispersité $P_d = \frac{r_{max}}{r_{min}} = 1,5$, on obtient donc :

$$\begin{aligned} r_{min} &= r_{moy} \sqrt{\frac{2}{1,5^2 + 1}} \\ r_{max} &= 1,5r_{min} \end{aligned}$$

Pour les positions des grains, on crée une grille dont l'espacement est : $d_x = r_{moy} + r_{max}$. Chaque point dans la grille est la position du centre d'un grain.

Afin de créer un système polydispersé des grains, on pose premièrement un rayon de r_{moy} pour tous les grains. Ensuite, on les sépare par des groupes de deux grains. Pour chaque paire de grains, on fait gonfler un grain au rayon r_1 et fait contracter l'autre au rayon r_2 en assurant que les valeurs de r_1 et r_2 sont toujours entre r_{min} et r_{max} ainsi que la condition $r_1^2 + r_2^2 = 2r_{moy}^2$ est satisfaite. On a réalisé trois simulations avec 128^2 , 256^2 et 512^2 grains. Les distributions de tailles de grains de

trois simulations sont présentées dans la figure III.3.

III.2.2.2 Processus de compression

Avant effectuer la compression, on délimite l'échantillon par 4 murs. Les quatre murs sont rigides et parfaitement lisses. Les murs 1 et 2 sont fixés tandis que les murs 3 et 4 peuvent se déplacer normalement à leurs surfaces (voir figure III.4). Les deux côtés de l'échantillon sont initialement L_{x0} et L_{y0} .

Pour réaliser le processus de compression, une pression constante $p_0 = p_*$ est appliquée sur deux murs 3 et 4 comme dans la figure III.4. Afin d'obtenir un échantillon dense, il n'y a pas du frottement pendant ce processus, $\mu = 0$.

Un exemple de la configuration de l'échantillon avant et après la compression est montré sur la figure III.5. La figure à gauche représente l'échantillon à la fin de la phase de génération de l'échantillon numérique et la figure à droite représente l'échantillon après la compression.

À cet instant, les grains sont compacts, l'échantillon est dense et prêt pour réaliser le test biaxial. Les deux côtés de l'échantillon sont L_{x1} et L_{y1} avec $L_{x1} < L_{x0}$ et $L_{y1} < L_{y0}$. Le frottement est réactivé avec $\mu = 0, 2$.

III.2.3 Test biaxial

III.2.3.1 Conditions aux bords

L'échantillon est soumis à un chargement biaxial avec une pression de confinement constante et une vitesse constante de déformation axiale (voir figure III.6). Pour nos simulations, la valeur de la vitesse de déformation axiale est : $\dot{\epsilon} = -2 \times 10^{-5} [T_*^{-1}]$.

Dans chaque pas de temps, les positions des grains sont calculées par l'algorithme décrit dans la section III.1.3. Chaque mur est considéré comme un grain en remarquant que les murs 1 et 2 sont fixés, les murs 3 et 4 peuvent se déplacer normalement à leurs surfaces. De plus, les murs 1, 2 et 3 ont des masses infinies tandis que la masse du mur 4 est $M_4 = \frac{L_{y0}\rho_*^2}{100}$. On impose une vitesse constante sur le mur 3 : $v_{3y} = \dot{\epsilon} \times L_{y1}$. Le mur 3 garde cette vitesse pendant toute la simulation du test biaxial grâce à sa masse infinie. Sur le mur 4 on impose une pression constante p_* qui correspond à une force horizontale $F_{4x} = -p_*L_y$ avec L_y est la hauteur de l'échantillon pour le pas de temps considéré.

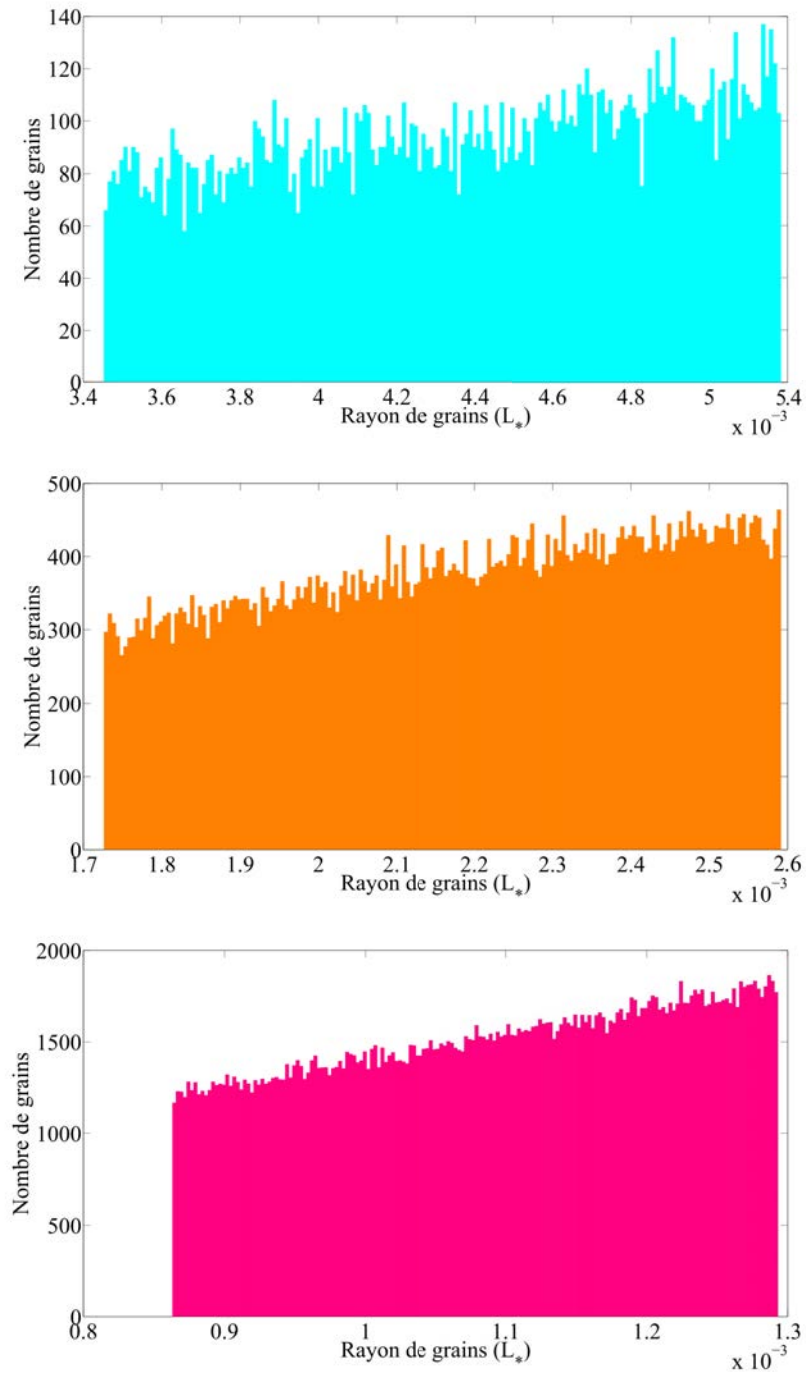


FIGURE III.3 – La distribution de tailles de grains de trois simulations. La cyan : 128^2 grains ; l'orange : 256^2 grains et la magenta : 512^2 grains.

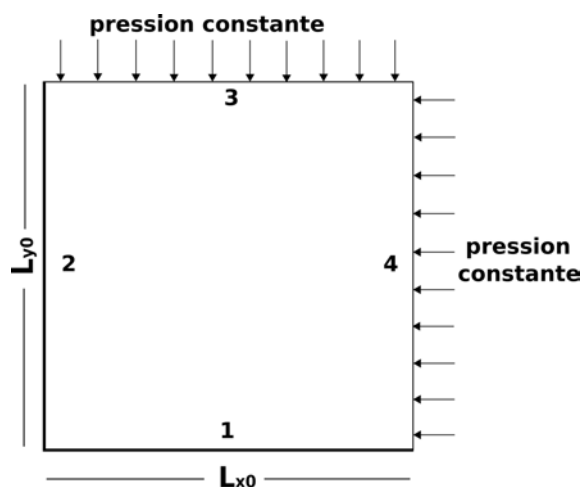


FIGURE III.4 – Schéma du processus de compression.

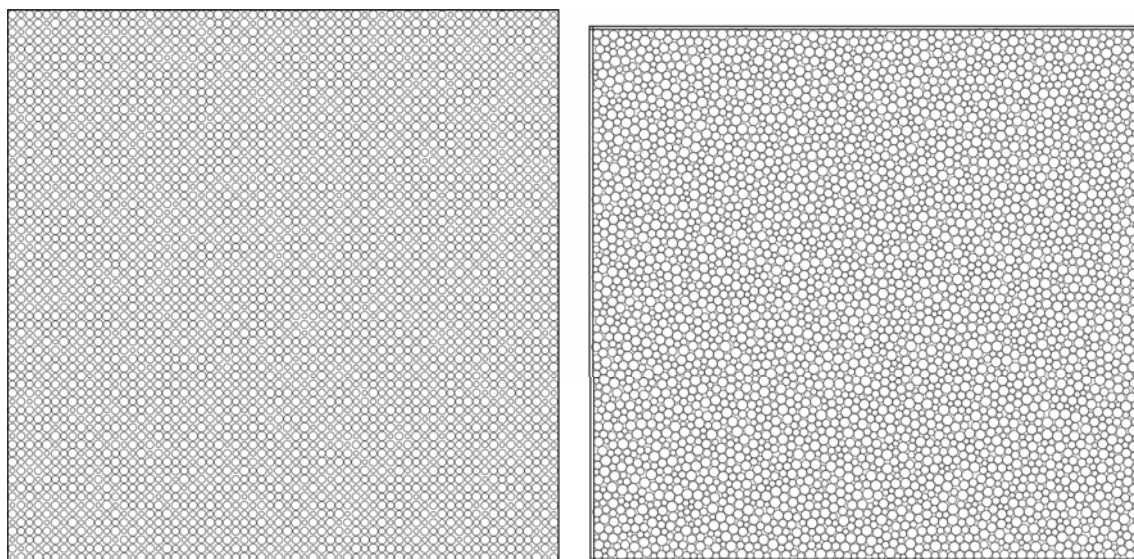


FIGURE III.5 – À gauche : configuration initiale de l'échantillon ; à droite : après la compression.

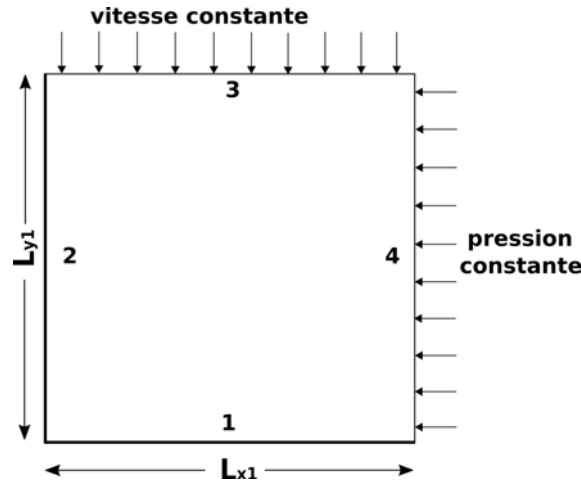


FIGURE III.6 – Schéma du test biaxial.

III.2.3.2 Courbes de charge

Comme des expériences, le résultat typique que nous faisons sortir des simulations est la courbe de charge (courbe contrainte-déformation). La contrainte verticale de l'échantillon est calculée par la formule :

$$\sigma_{yy} = \frac{F_{3y}}{L_x} \quad (\text{III.10})$$

où F_{3y} est la somme des forces verticales appliquées sur le mur 3 par tous les grains et L_x est la largeur de l'échantillon pour le pas de temps considéré.

La déformation axiale de l'échantillon :

$$\epsilon_{yy} = \frac{L_{y1} - L_y}{L_{y1}} \quad (\text{III.11})$$

où L_y est la hauteur de l'échantillon pour le pas de temps considéré.

Les courbes de charge des simulations sont présentées dans la figure III.7.

III.3 Résultats numériques et comparaison aux expériences

On a réalisé trois simulations avec 128^2 , 256^2 et 512^2 grains. À la fin du test biaxial, comme les expériences, on a obtenu des courbes de charge et des cartes de

corrélations. Dans cette partie, on présente nos résultats et les compare avec celles des expériences. Des autres résultats peuvent être trouvés dans les publications de McNamara [30, 31].

III.3.1 Résultats numériques

III.3.1.1 Courbes de charge

Nous présentons dans la figure III.7 les courbes de charge en traçant la contrainte vertical $-\sigma_{yy}$ en fonction de la déformation axiale ε .

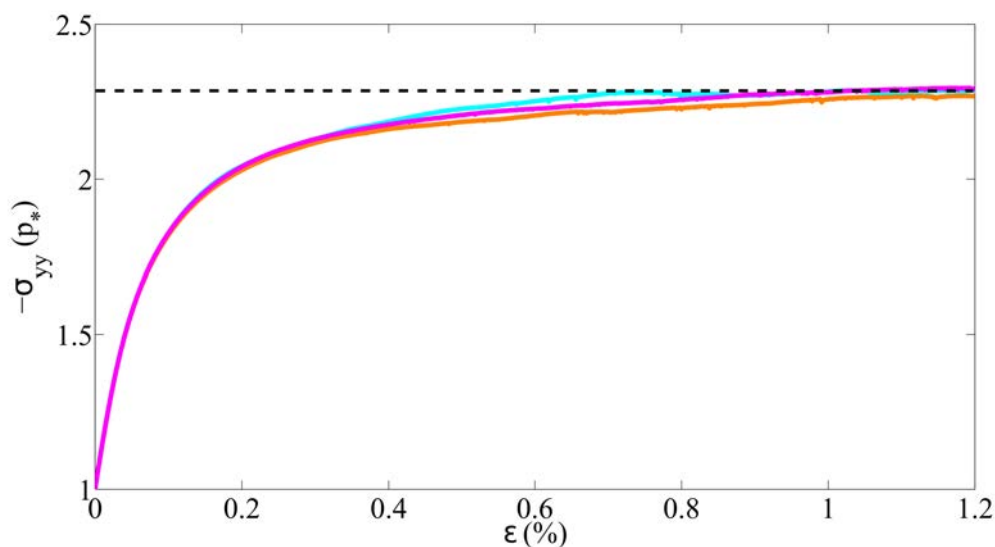


FIGURE III.7 – Courbes de charge de trois simulations. La cyan : 128² grains ; l'orange : 256² grains et la magenta : 512² grains.

Les trois courbes sont à peu près les mêmes et après une montée élastique initiale, on voit un plateau plastique de la contrainte jusqu'à la fin de charge. Ce plateau correspond à une contrainte constante $-\sigma_{yy} \approx 2,3p_*$. À partir de cette contrainte, on calcule l'inclinaison du plan de cisaillement par rapport à l'horizontale selon le modèle de Mohr-Coulomb qui est présenté dans le chapitre V. En remarquant que la contrainte latérale est constante et vaut $-\sigma_{xx} = p_*$, on obtient l'inclinaison du plan de cisaillement de trois simulations $\theta_{MC} = \pm 56^\circ$.

III.3.1.2 Cartes de déformations

Durant la simulation d'un test biaxial, les positions des grains sont enregistrées pour des incréments de déformation $\delta\varepsilon = 10^{-5}$. Considérons le grain i entre deux états consécutifs [0] et [1]. Un grain j est appelé un voisin du grain i si la distance entre deux centres de deux grains $R \leq 2r_{max}$. En supposant qu'il y a \bar{N} grains qui sont les voisins du grain i , on calcule la déformation du grain i par la formule :

$$u_i = \frac{1}{\bar{N}} \sum_{j=1}^{\bar{N}} \left(\left| \frac{\|\vec{i}_1 - \vec{j}_1\| - \|\vec{i}_0 - \vec{j}_0\|}{\|\vec{i}_0 - \vec{j}_0\|} \right| \right) \quad (\text{III.12})$$

où \vec{i}_0 , \vec{i}_1 , \vec{j}_0 et \vec{j}_1 sont les vecteurs des positions des grains i et j aux états [0] et [1].

Cette déformation est exprimée sur la carte de grains par des niveaux de gris. Plus la déformation d'un grain est importante, plus sa couleur est sombre. Nous présentons dans la figure III.8 des cartes de déformations de trois simulations.

Malgré que l'on ne voie pas un pic sur les courbes de charges, on peut prendre quelques cartes de déformations (correspondantes à la partie du plateau) où l'on voit bien une ou des grandes bandes pour comparer avec l'angle de Mohr-Coulomb. La figure III.9 montre l'angle de la bande mesuré directement sur des cartes de déformations pour les trois simulations.

La valeur moyenne des angles des bandes sur les trois cartes de déformations des simulations de 128^2 , 256^2 et 512^2 grains est respectivement $-53, 3 \pm 1, 2^\circ$, $52, 3 \pm 1, 5^\circ$ et $54, 7 \pm 1^\circ$. Les petites valeurs des incertitudes montrent que les angles d'inclinaison de la bande sur les trois cartes pour chaque simulation sont les mêmes. En comparant avec l'angle de Mohr-Coulomb que l'on obtient dans la section III.3.1.1, on constate que ces angles mesurés sont en accord avec la prédiction du modèle de Mohr-Coulomb.

III.3.2 Comparaison avec les résultats expérimentaux

III.3.2.1 Courbes de charge

Comme les courbes de charge des expériences, la partie initiale de celles des simulations est aussi une croissance élastique (voir figure III.10). Après cette croissance, aux expériences on voit un palier et en suite une autre croissance de la contrainte tandis qu'un plateau apparaît jusqu'à la fin de la charge pour les simulations. À

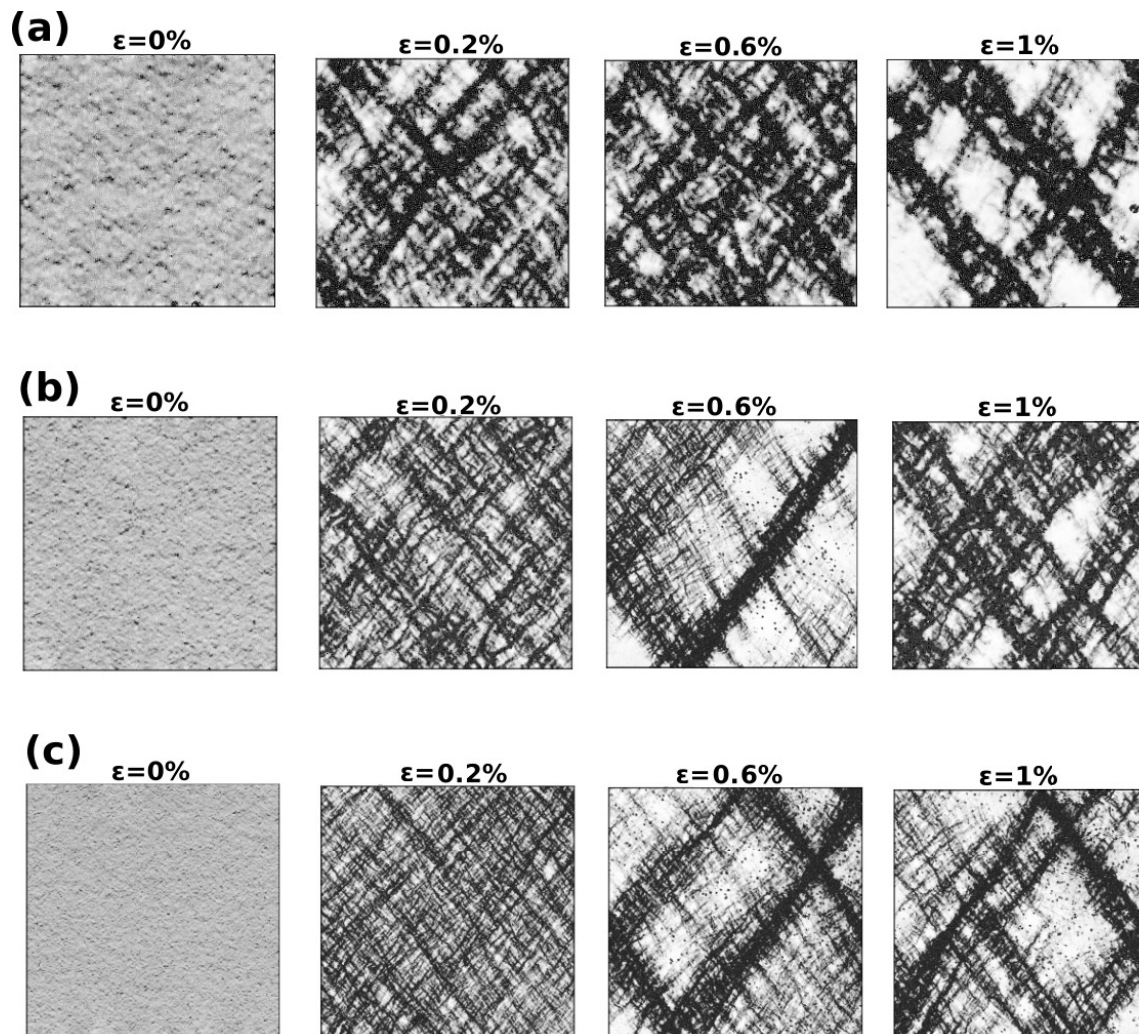


FIGURE III.8 – Cartes de déformations de trois simulations. (a) : Simulation de 128^2 grains ; (b) : Simulation de 256^2 grains ; (c) : Simulation de 512^2 grains.

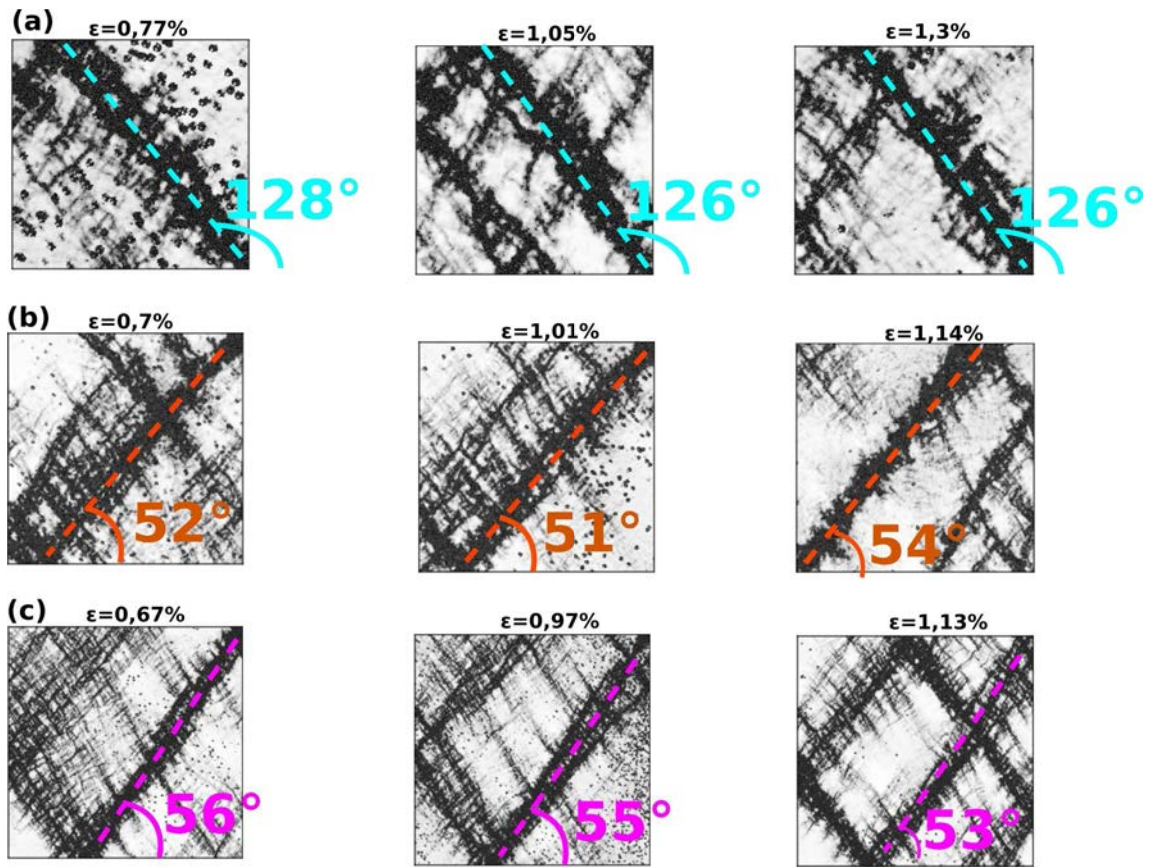


FIGURE III.9 – Angle d’inclinaison des bandes mesuré graphiquement sur trois cartes de déformations pour chaque simulation. (a) : Simulation de 128^2 grains; (b) : Simulation de 256^2 grains; (c) : Simulation de 512^2 grains.

partir des paliers, dans le chapitre précédent, on a calculé les angles d’inclinaison du plan de cisaillement selon la prédiction de Mohr-Coulomb. La valeur moyenne de ces angles : $\theta_{MC}^{moy} = \pm 62,7 \pm 1,5^\circ$. On voit donc que l’angle de Mohr-Coulomb des expériences est plus grand que celui des simulations avec un écart d’environ 7° .

III.3.2.2 Cartes de déformations et cartes de corrélations

Les deux types des cartes sont obtenues par des fonctions différentes mais elles permettent également l’observation de la déformation des grains. La figure III.11 représente quatre cartes de déformations de la simulation de 256^2 grains correspondant à quatre points A, B, C et D sur la courbe de charge et quatre cartes de corrélations d’une expérience correspondant à quatre point A’, B’, C’ et D’ sur la courbe de charge (voir figure III.10).

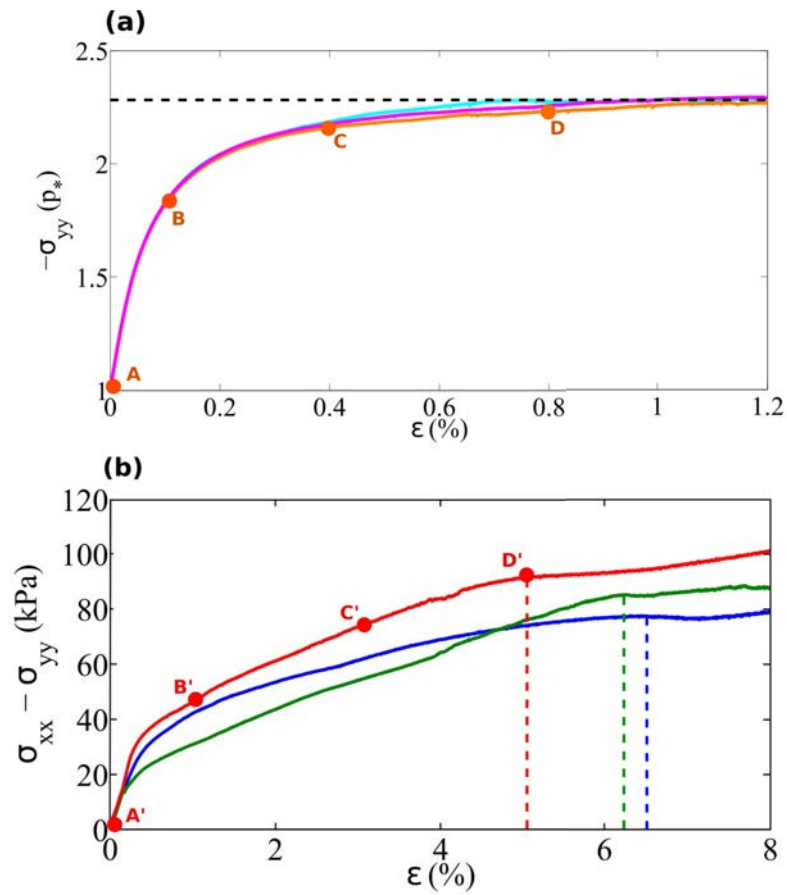


FIGURE III.10 – (a) : Courbes de charge de trois simulations ; (b) : Courbes de charge de trois expériences.

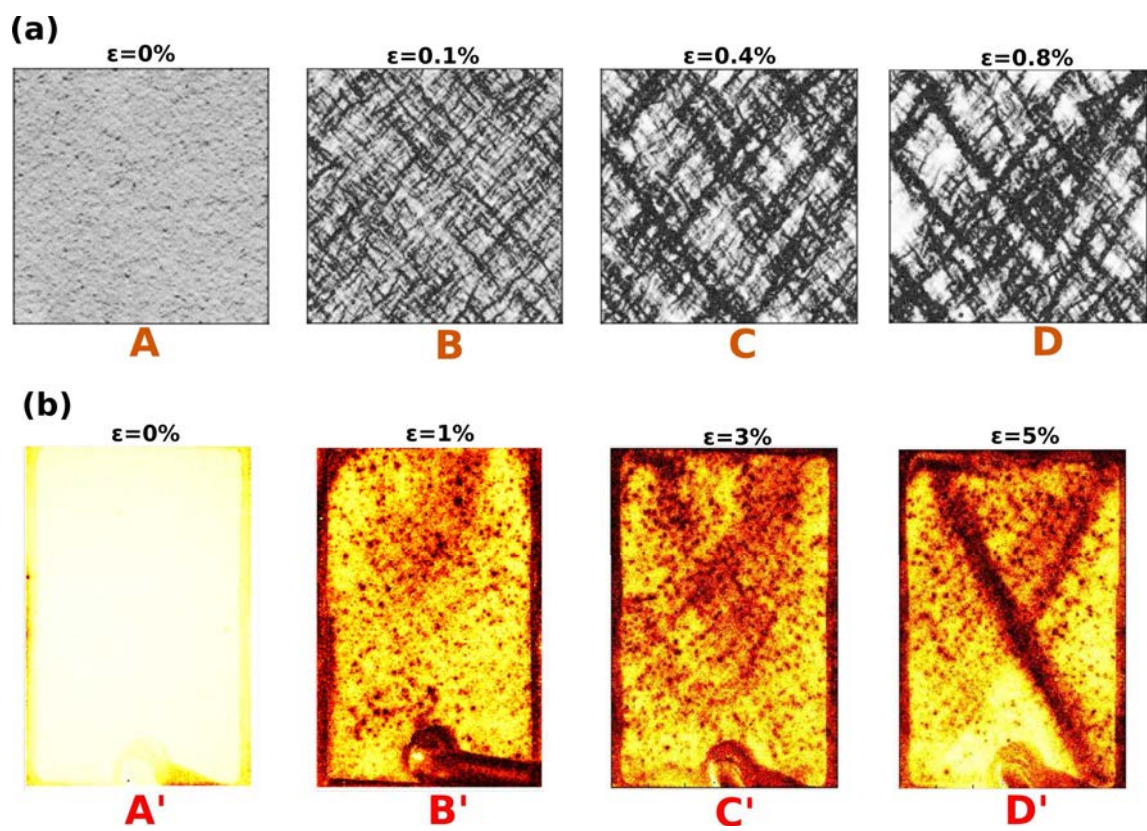


FIGURE III.11 – (a) : Cartes de déformations de la simulation de 256^2 grains. (b) : Cartes de corrélations d'une expérience, rupture à $\epsilon = 5\%$.

On voit généralement la même dynamique de la déformation dans les cartes de déformations de la simulation : l'ensemble des points noirs qui sont répartis uniformément au début de la charge, puis de petites bandes même avant le plateau de la contrainte et enfin des grandes bandes.

D'autre part, on constate que dans les cartes de déformations de simulation, les petites bandes apparaissent jusqu'aux bords, en contact avec les murs. Mais au niveau de l'expérience, les petites bandes ne concentrent que sur la zone centrale de l'échantillon. Cette différence est expliquée par les conditions limites. Les murs dans les simulations sont parfaitement glissants, les grains peuvent librement glisser sur les murs. Par contre, pour les expériences, il y a toujours un frottement entre les billes et la membrane. Ce frottement empêche le déplacement des billes aux bords.

En plus, les grandes bandes des expériences sont totalement permanentes, elles gardent leur forme et leur position. En revanche, les grandes bandes des simulations changent tout le temps leurs positions et leurs formes. Cette différence est encore une conséquence des conditions limites. Quand la déformation atteint une valeur très importante comme dans les grandes bandes, la membrane flexible des expériences permet de déplacer un peu aux deux bouts de la bande suivant les grains-là et conserve donc la position de la bande. Par contre, les murs dans les simulations sont rigides, les grains aux bouts des bandes continuent de déplacer et entraînent le changement des bandes. Une autre raison, à notre avis, est le vieillissement du contact des grains. Dans notre théorie, la valeur des forces du contact entre des grains diminue de temps en temps, surtout dans la bande finale. Cette diminution amène la stabilité de la bande pour les expériences mais n'existe pas dans les simulations.

III.4 Conclusion

Afin de modéliser un test biaxial en 2D, la méthode des éléments discrets a été utilisée. En premier lieu, nous avons présenté la loi d'interaction du contact, les équations principales, les formules pour calculer les forces de la méthode et l'algorithme de l'intégration des équations.

En second lieu, le processus de la simulation d'un essai biaxial a été exprimé. Nous avons abordé les unités, les paramètres, la génération de l'échantillon et la procédure du test. Trois simulations de 128^2 , 256^2 et 512^2 grains ont été exécutées.

Finalement, nous avons présenté les résultats numériques et les avons comparé

avec ceux des expériences. Les courbes de charges des simulations ont les mêmes formes et les angles d'inclinaison du plan de cisaillement de Mohr-Coulomb des simulations sont plus petits que ceux des expériences. Ensuite, les cartes de déformations des simulations ont aussi été réalisées. Sur les cartes de déformation, une partie de la réponse est similaire à celle des expériences même si on n'observe pas de bandes permanentes dans les simulations.

Chapitre IV

Méthodes d'analyse d'images

Introduction

Dans les deux chapitres précédents, nous avons montré des résultats expérimentaux et numériques. Pour tous les deux types de résultats, on observe également des points chauds au début de la charge, puis un réseau de petites bandes et enfin des grandes bandes (voir figure IV.1).

Afin de caractériser cette dynamique de la déformation du matériau, nous avons utilisé plusieurs outils d'analyse d'images qui sont détaillés dans ce chapitre. Ils permettent d'extraire l'information caractéristique contenue dans une image. Grâce à ces méthodes, on souhaite détecter les directions privilégiées, le processus de la localisation ainsi que mettre en évidence une taille typique de ces structures. Tout d'abord, on présente l'outil des histogrammes de projection. Après, la méthode de l'anisotropie est abordée. Ensuite, nous présentons l'analyse multi-échelles et enfin, la fonction de corrélation spatiale est présentée.

Pour les cartes de corrélations des expériences, on délimite une zone d'analyse Z (voir figure IV.2) sur laquelle les outils d'analyse d'images sont appliqués. Cette zone est carrée avec le côté de $L = 256 \text{ pixel} \Leftrightarrow 512d$, où d est le diamètre de grain. Elle est choisie au centre de l'échantillon pour éliminer les choses inutiles et éviter les effets du bord. Des tests sur des zones circulaires ont aussi été faits pour certains outils mais pas de différence notable.

En plus, on remarque que la valeur de la fonction de corrélation g_I sur la carte de corrélations est faible quand la déformation est importante. Donc, pour analyser la dynamique de la déformation, on définit l'activité de chaque pixel de la carte de

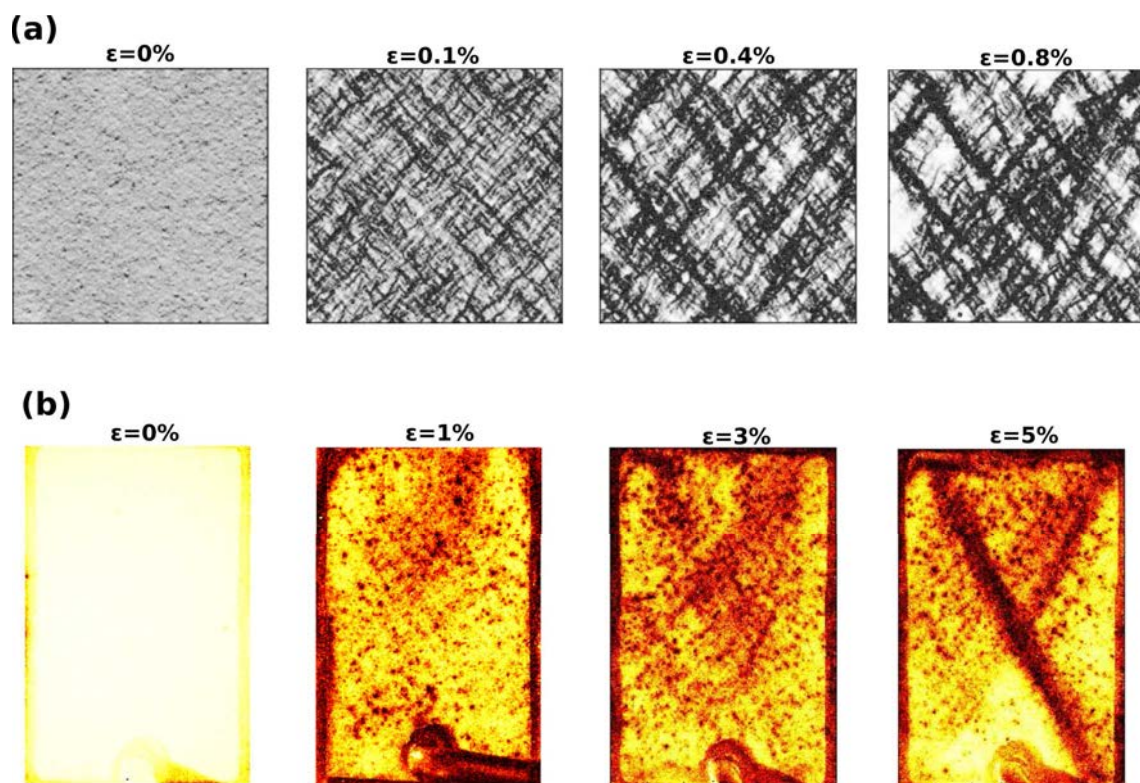


FIGURE IV.1 – (a) : Cartes de déformations d'une simulation numérique. (b) : Cartes de corrélations d'une expérience.

corrélations :

$$a(\mathbf{r}) = 1 - g_I(\mathbf{r}) \quad (\text{IV.1})$$

où \mathbf{r} est le vecteur position de chaque pixel. La carte de l'ensemble de $a(\mathbf{r})$ est appelée la carte d'activités A .

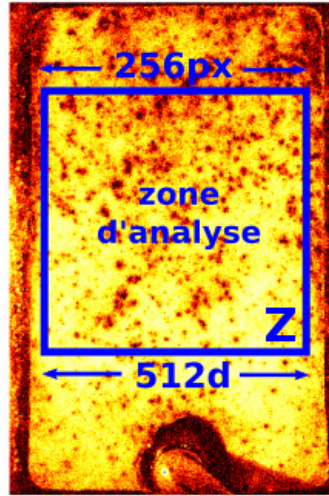


FIGURE IV.2 – Zone d'analyse sur la carte de corrélation.

IV.1 Histogramme de projection

L'histogramme de projection est une technique permettant de détecter l'orientation privilégiée dans une image. On considère une image de corrélation comme dans la figure IV.3, m est une droite d'inclinaison β avec l'horizontale. On définit une droite n perpendiculaire à m en distance r de l'origine O . La procédure de projection de cette image selon la direction β de la droite m comprend les étapes suivantes :

1. On fait la moyenne de l'activité de tous les pixels situés sur la droite n : $\langle a_n \rangle$.
2. On calcule la moyenne $\langle a_n \rangle$ pour toutes les droites n en faisant varier r sur toute la droite m .
3. On trace la moyenne $\langle a_n \rangle$ en fonction de r . La courbe est présentée dans la

figure IV.4, représente le profil de l'image projetée sur la droite m , appelé l'histogramme de projection de l'image dans la direction β .

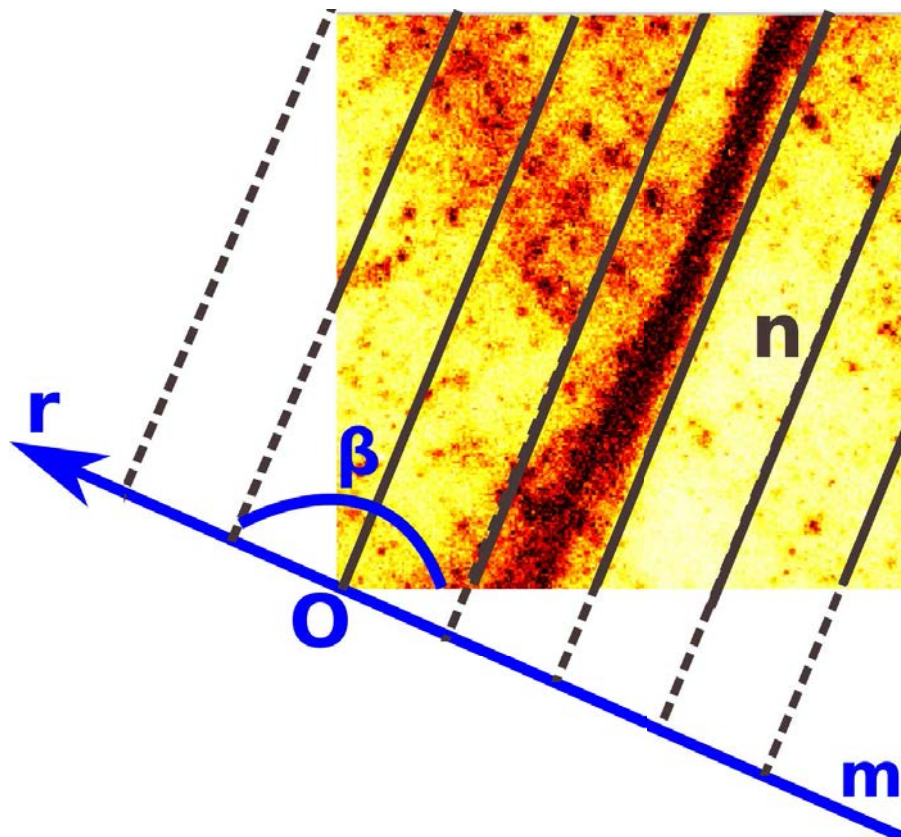


FIGURE IV.3 – Une carte de corrélation avec une droite m d'inclinaison β et des droites n perpendiculaires à m .

En plus, pour limiter les effets de bords, on fixe un seuil du nombre de points sur lesquels la moyenne $\langle a_n \rangle$ est calculée.

Quand on fait varier β de 0° à 180° , on obtient l'ensemble de tous les histogrammes de projection de l'image en traçant l'ensemble des profils en fonction de β (voir figure IV.5).

On voit clairement que l'angle β_m qui correspond au maximum de la carte des histogrammes nous donne l'angle d'inclinaison θ de la bande sur la carte de corrélation par la relation :

$$\theta = \begin{cases} \beta_m + 90^\circ, & \beta_m < 90^\circ \\ \beta_m - 90^\circ, & \beta_m \geq 90^\circ \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

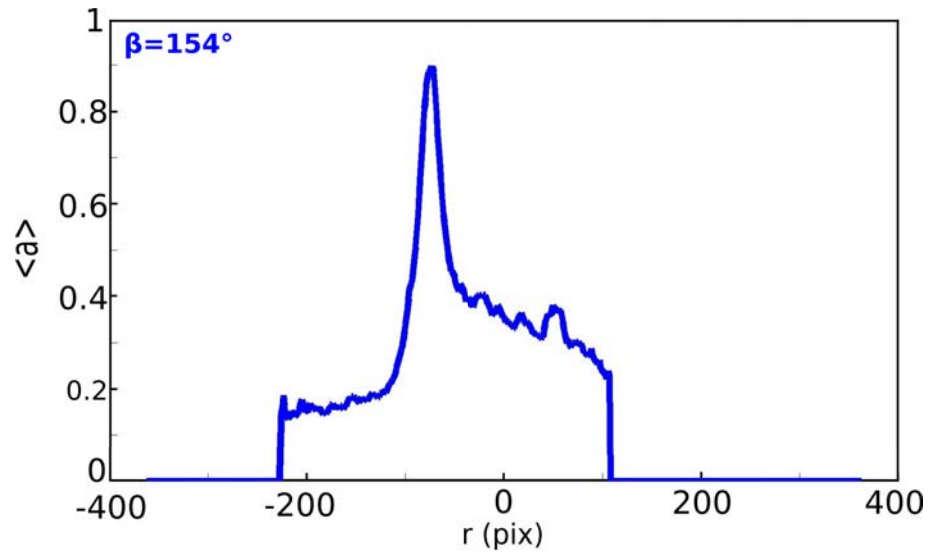


FIGURE IV.4 – Histogramme de projection de l'image de corrélation ci-dessus selon la direction β de la droite m .

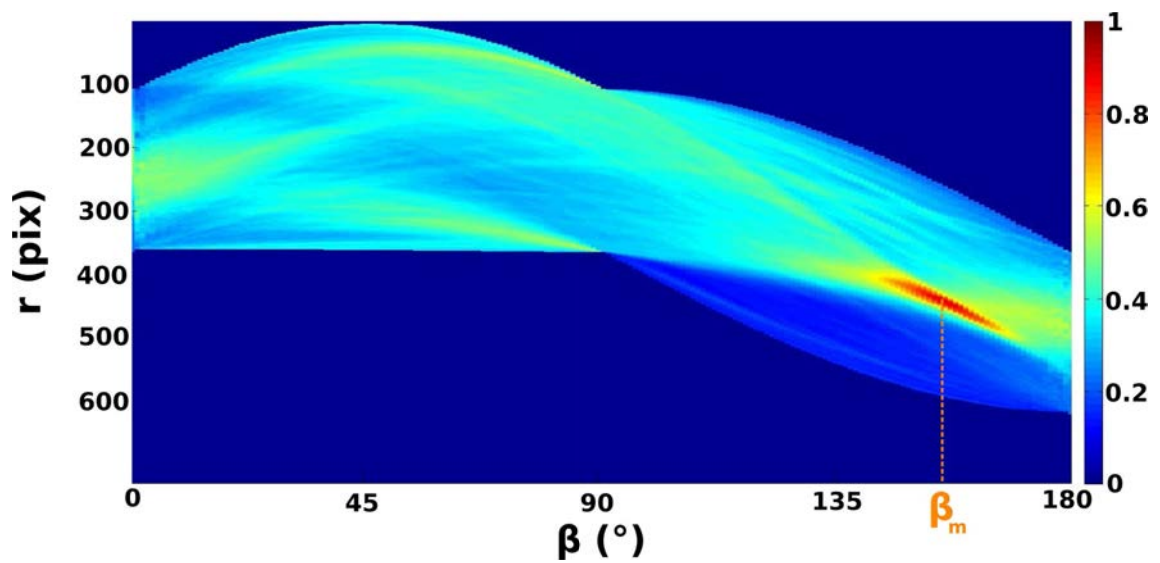


FIGURE IV.5 – Carte de l'ensemble des histogrammes de projection en fonction de l'angle β .

Pour l'image considérée, $\beta_m = 154^\circ$, on obtient donc $\theta = 154^\circ - 90^\circ = 64^\circ$.

À partir de l'histogramme de projection correspondant au maximum de la carte des histogrammes on définit une manière de déterminer la largeur de la bande de cisaillement qui est présentée dans la figure IV.6. La largeur à la moyenne de la valeur minimale non nulle et la valeur maximale de la courbe est considérée comme la largeur de la bande.

Les évolutions des angles d'inclinaison et des largeurs à mi-hauteur de la bande de cisaillement au cours de la charge de trois expériences déterminées par cette méthode sont présentées dans le chapitre suivant.

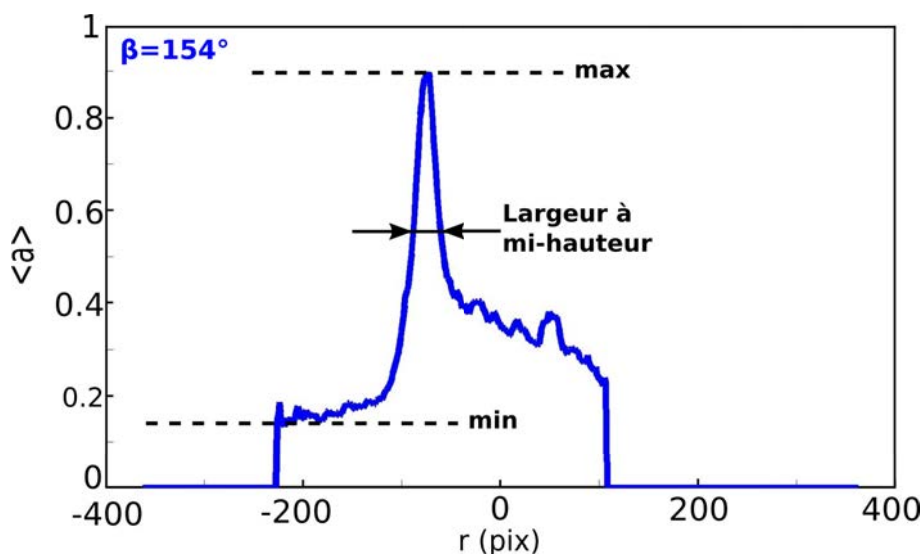


FIGURE IV.6 – Mesure de la largeur à mi-hauteur de la bande de cisaillement sur le profil correspondant au maximum de la carte des histogrammes.

IV.2 Mesure de l'anisotropie

IV.2.1 Principe

Pour les expériences, on observe une seule bande sur les cartes de corrélations dans la plupart de la durée du mode localisé de la déformation (avant l'apparition de la deuxième bande lorsque le glissement est bloqué). On peut donc dire que la structure entière des cartes de corrélations est anisotrope. Afin de caractériser cette

anisotropie, on a utilisé la méthode de mesure de l'anisotropie qui nous permet de déterminer la direction dans laquelle le signal de la déformation est plus présent. Cette méthode est détaillée dans Lehoucq *et al.* [32].

On considère la même carte de corrélation utilisée dans la section précédente (figure IV.7).

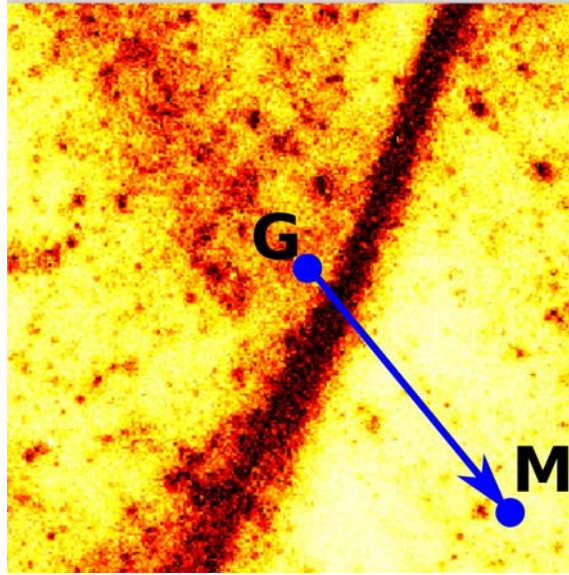


FIGURE IV.7 – Carte de corrélation avec le barycentre G .

En posant que $A(M)$ est la valeur de l'intensité du pixel M sur la carte d'activités équivalente, on définit le barycentre G de la carte d'activités dont les coordonnées sont calculées par :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_G = \frac{\sum A(M)X_M}{\sum A} \\ Y_G = \frac{\sum A(M)Y_M}{\sum A} \end{array} \right. \quad (\text{IV.3})$$

où X_M et Y_M sont les coordonnées du pixel M et Σ est la somme sur tous les pixels dans la carte d'activités.

Ensuite, un tenseur d'inertie mesurant la répartition spatiale des signaux est calculé. Son expression est donnée par :

$$\bar{\bar{P}} = \sum \begin{pmatrix} X^2 & XY \\ XY & Y^2 \end{pmatrix} A \quad (\text{IV.4})$$

où (X, Y) sont les coordonnées de \overrightarrow{GM} .

Le tenseur d'inertie $\bar{\bar{P}}$ correspond à une ellipse dont les directions des axes principaux sont données par les vecteurs propres du tenseur et leurs normes par les valeurs propres associées λ_1 et λ_2 ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$), voir figure IV.8.

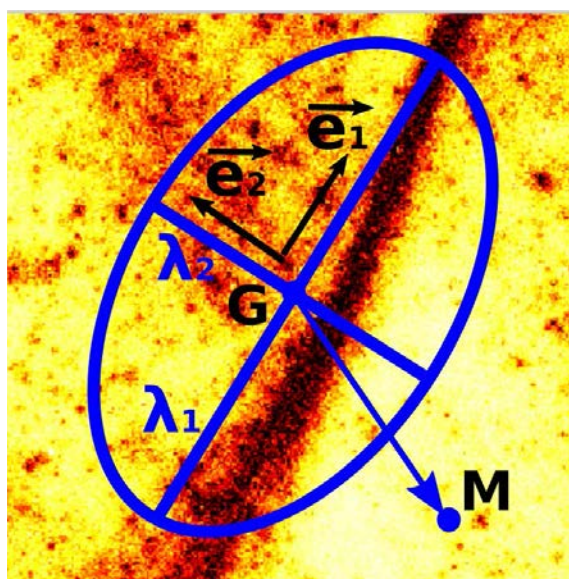


FIGURE IV.8 – Ellipse correspondante au tenseur d'inertie $\bar{\bar{P}}$. \vec{e}_1 et \vec{e}_2 sont les directions des axes principaux; λ_1 et λ_2 sont les normes.

On peut alors donner une mesure de l'anisotropie de la carte grâce à la quantité $1 - \lambda_2/\lambda_1$. Cet indice vaut 0 lorsque $\lambda_1 = \lambda_2$, l'ellipse devient un cercle représentant une structure isotrope. Il atteint son maximum, 1, lorsque $\lambda_2 \ll \lambda_1$, l'ellipse devient une droite représentant une structure très anisotrope.

On s'intéresse aussi à l'inclinaison du grand axe de l'ellipse par rapport à l'horizontal. Cette inclinaison nous donne l'orientation de la bande de cisaillement. Pour l'image considérée, l'inclinaison de l'ellipse est $\theta = 58^\circ$, plus petite que l'inclinaison de la bande obtenue par la méthode de l'histogramme de projection avec un écart de 6° . Cette différence est causée par les fluctuations autour de la bande. L'inclinaison de la bande obtenue est donc moins précise que celle qui est obtenue par la méthode de l'histogramme de projection.

IV.2.2 Cas tests

Nous appliquons la méthode de l'anisotropie à deux cas tests typiques pour comprendre des résultats obtenus sur des structures équivalentes. Les deux images tests sont binaires, représentent respectivement une bande et deux bandes symétriques (voir figure IV.9).

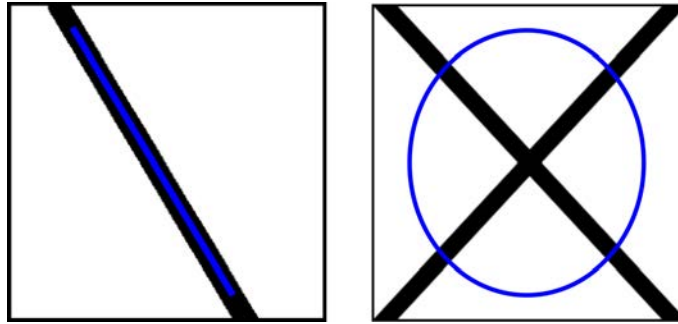


FIGURE IV.9 – Cas tests avec les ellipses obtenues par la méthode de l'anisotropie.

Les ellipses obtenues par la méthode de l'anisotropie pour les cas tests sont présentées dans la figure IV.9.

Pour le premier test, l'ellipse devient une droite avec l'inclinaison $\theta = 148^\circ$. L'indice de l'anisotropie est donc très important : $1 - \lambda_2/\lambda_1 = 0,9963$.

Le deuxième test représente deux bandes symétriques. L'ellipse est très proche d'un cercle avec l'inclinaison $\theta = 90^\circ$ et une valeur très faible de l'anisotropie : $1 - \lambda_2/\lambda_1 = 0,142$. On constate que lorsque l'on voit deux grandes bandes sur des cartes de corrélations, l'inclinaison de l'ellipse ne nous donne plus l'orientation des bandes. Elle tend à devenir verticale comme dans ce cas test.

IV.3 Analyse multi-échelles

Dans les cartes de corrélations, avant l'apparition des grandes bandes permanentes on observe des petites bandes intermittentes. Ces petites structures correspondent à plusieurs échelles dans une même image. Elles se superposent de l'une dans l'autre. Lorsqu'on voit des grandes bandes, le réseau de petites bandes ne disparaissent pas. On observe que les petites bandes sont imbriquées dans les grandes bandes. Afin d'étudier la dynamique du réseau de petites bandes, on applique l'analyse multi-échelles. Pour deux types des résultats expérimentaux et numériques, on

a deux manières différentes d'application de cette analyse.

IV.3.1 Images expérimentales

Cette analyse consiste à diviser la zone d'analyse de la carte de corrélations en boîtes carrées de côté $R = 2^n$ pixels pour n allant de 0 à 8 (voir figure IV.10). Pour chaque échelle, on calcule l'anisotropie moyenne de toutes les boîtes en notant que seulement les boîtes qui ont l'indice d'anisotropie non nulle sont comptées pour la moyenne.

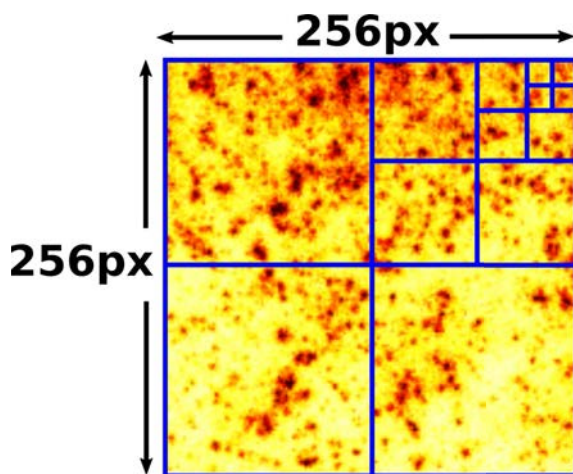


FIGURE IV.10 – Boîtes carrées de différentes tailles sur la carte de corrélations.

Nous montrons tout d'abord cette analyse sur des images tests qui sont présentées dans la figure IV.11. Les images tests sont de dimensions (256×256) pixels comme la taille de la zone d'analyse sur la carte de corrélation. Ces deux images binaires représentent deux bandes symétriques et un réseau de petits croix. La figure IV.12 montre l'anisotropie moyenne en fonction de taille des boîtes de deux images tests.

Pour tous les deux cas, on voit premièrement une valeur très faible mais pas nulle de l'anisotropie moyenne à l'échelle de 2 pixels. Elle est très faible parce qu'il y a beaucoup de boîtes blanches mais elle n'est pas nulle parce qu'il y a des boîtes qui contiennent une part des bandes. Ensuite, l'anisotropie moyenne croît avec l'échelle car on a moins de boîtes blanches. Elle atteint sa valeur maximale à l'échelle de 128 pixels pour le cas test (a) et à l'échelle de 32 pixels pour le cas test (b) où chaque boîte de deux cas contient une seule bande diagonale. Après cette valeur maximale, pour les échelles plus grandes, les boîtes représentent des structures symétriques.

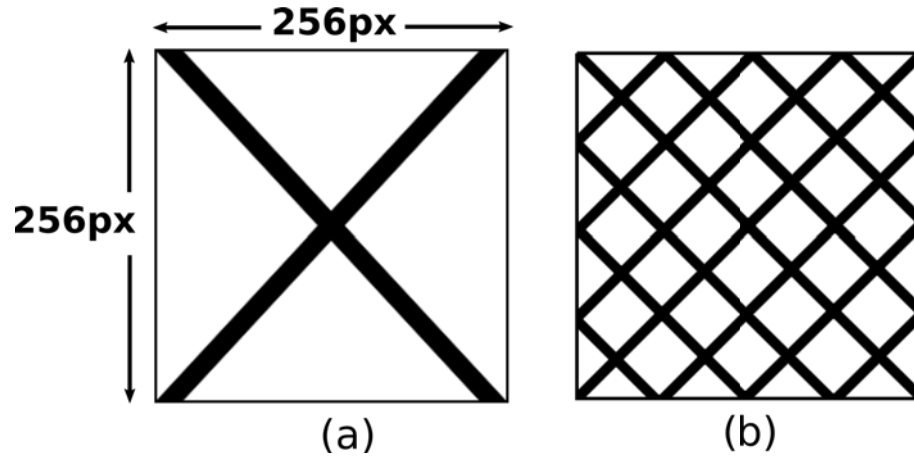


FIGURE IV.11 – Cas tests. (a) : deux bandes symétriques; (b) : réseau de petits croix.

Donc l'anisotropie moyenne décroît fortement et proche de zéro.

Puis on montre cette analyse sur les cartes de corrélations d'une expérience dans la figure IV.13. Dans environs de deux tiers de la charge, l'anisotropie moyenne est très faible, inférieure à 0, 2. On ne voit pas clairement la formation des petites bandes. Les valeurs très importantes de l'anisotropie qui sont atteintes à $\epsilon \approx 6,7\%$ à l'échelle de 256 pixels et à $\epsilon \approx 7,2\%$ à l'échelle de 128 pixels correspondent respectivement à l'apparition de la première et de la deuxième bande de cisaillement.

IV.3.2 Images numériques

Pour appliquer l'analyse de multi-échelles aux résultats numériques, on considère un échantillon de taille $L \times L$ contenant $2^N \times 2^N$ grains. Ensuite, on divise cet échantillon en boîtes carrées de côté $L/2^n$ pour n allant de 0 à N . Le nombre moyen de grains dans chaque boîte vaut donc $2^{N-n} \times 2^{N-n}$ grains (figure IV.14). Pour chaque échelle, on applique la méthode de mesure l'anisotropie à chaque boîte. Le tenseur d'inertie est calculé sur les déformations des grains dans chaque boîte. On obtient un ensemble des indices d'anisotropie $1 - \lambda_2/\lambda_1$ et des angles d'inclinaison de l'ellipse de toutes les boîtes. Puis on groupe toutes les boîtes d'une même taille en classes selon leur angle d'inclinaison de l'ellipse θ . C'est-à-dire toutes les boîtes avec $0^\circ < \theta \leq 5^\circ$ dans la première classe, toutes avec $5^\circ < \theta \leq 10^\circ$ dans la seconde, etc. On peut donc ensuite construire l'histogramme du nombre de boîtes par l'angle d'inclinaison de l'ellipse (voir un exemple dans la figure IV.15(a)).

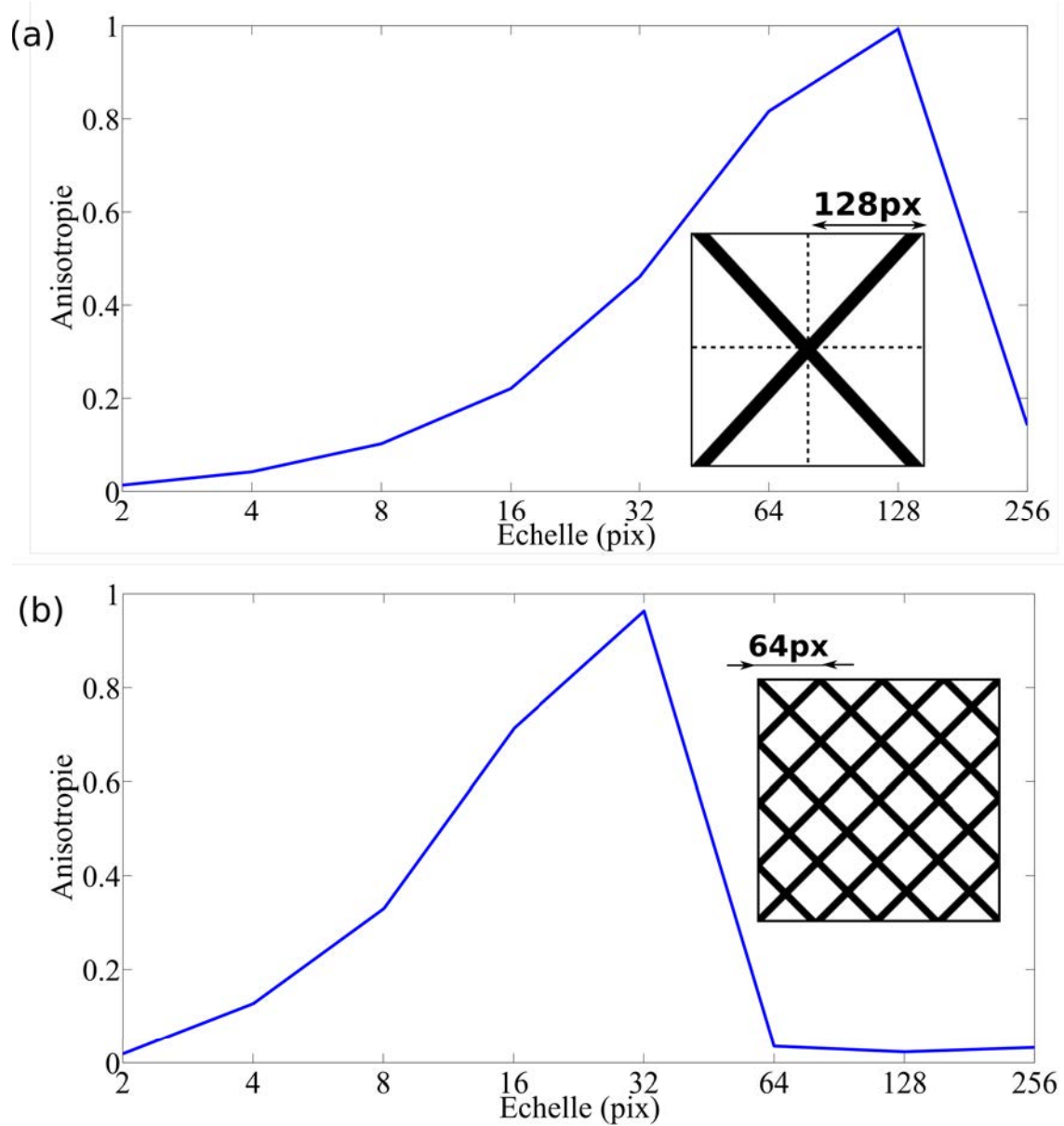


FIGURE IV.12 – Anisotropie moyenne en fonction de taille des boîtes pour les deux images tests.

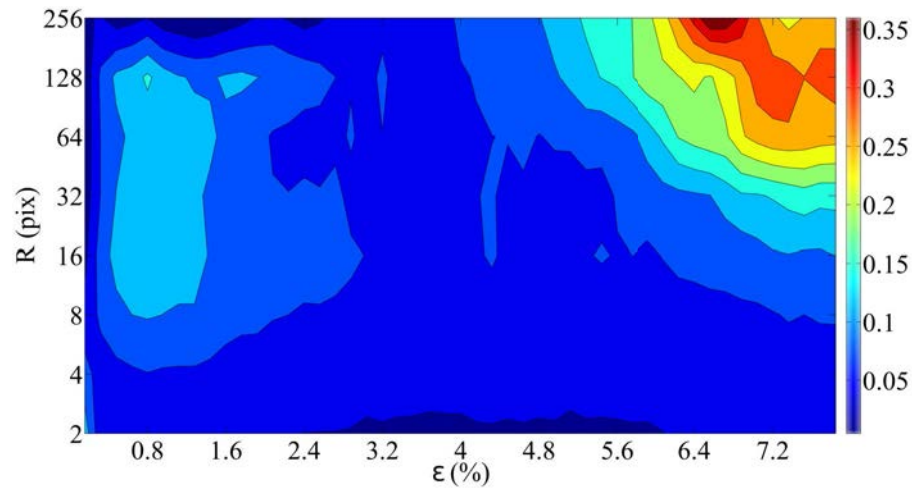


FIGURE IV.13 – Anisotropie en fonction de la taille de boîte R au cours de la charge d'une expérience. Code de couleur : bleu = isotrope, rouge = anisotrope.

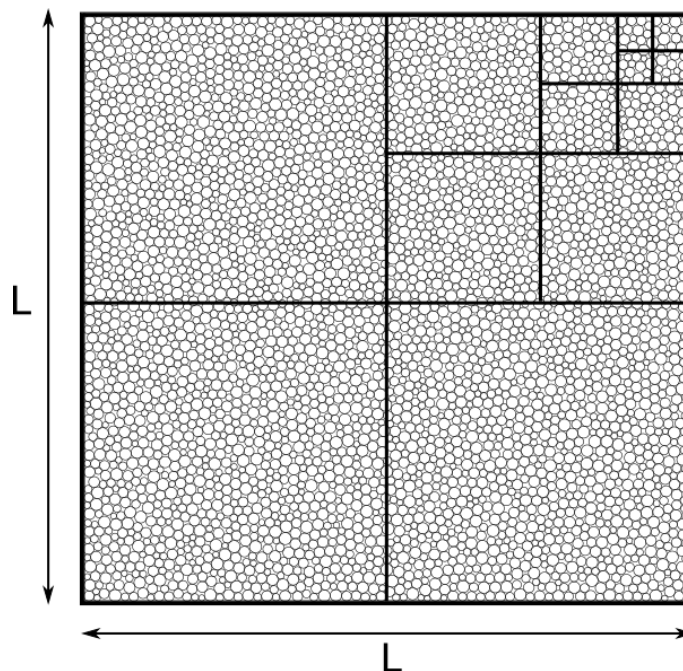


FIGURE IV.14 – Boîtes carrées de différentes tailles sur l'échantillon des grains.

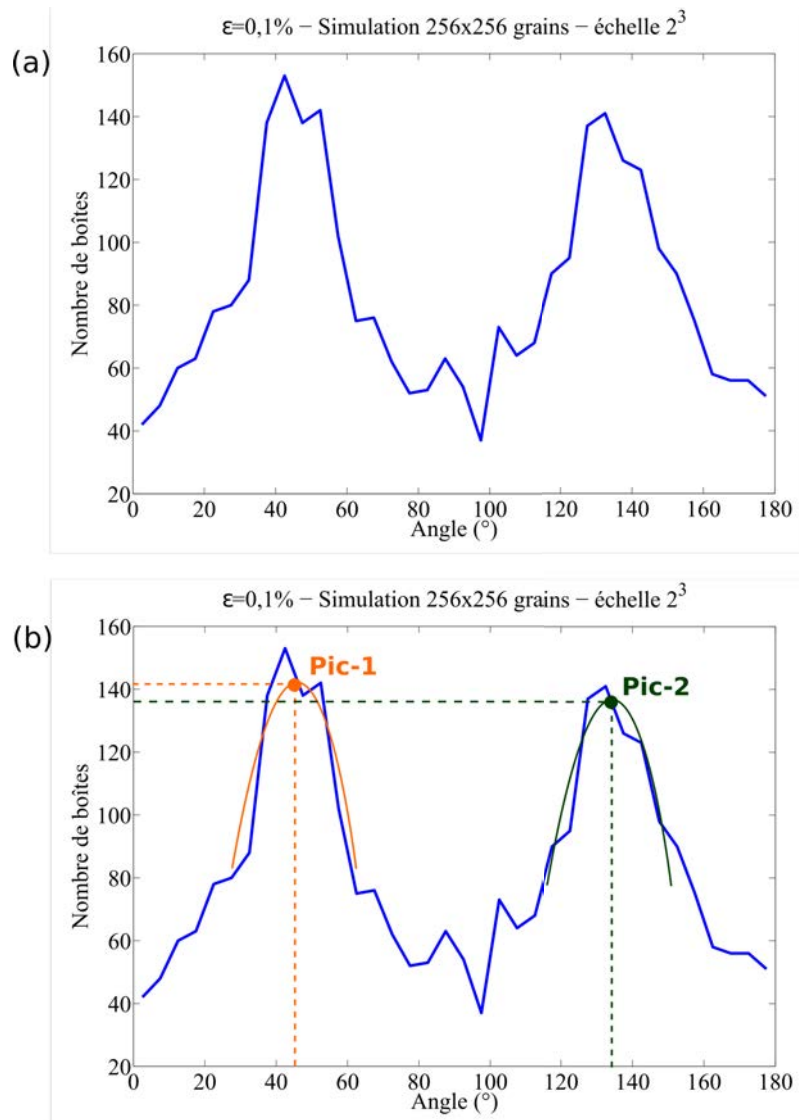


FIGURE IV.15 – (a) : Histogramme du nombre de boîtes selon l'angle d'inclinaison des ellipses à l'échelle de 8^2 grains pour chaque boîte. (b) : Histogramme avec deux ajustements paraboliques.

Sur cet histogramme, chaque valeur nous donne le nombre de boîtes où l'angle d'inclinaison équivalent apparaît. Rappelons que l'angle d'inclinaison de l'ellipse d'une boîte représente l'orientation de la petite bande dans cette boîte. Donc, pour trouver les angles privilégiés de petites bandes dans toutes les boîtes, on va chercher les valeurs les plus importantes de l'histogramme. En notant que chaque moitié de l'histogramme a la forme près d'une parabole concave, on fait deux ajustements paraboliques et trouve deux pics comme dans la figure IV.15(b). Ces deux pics nous donnent deux directions les plus présentes de petites bandes dans les boîtes par leurs abscisses et les nombres de boîtes équivalents par leurs ordonnées. Pour chaque direction, à partir des boîtes qui la contiennent, on obtient également l'anisotropie moyenne de ces boîtes.

Ensuite, quand on réalise cette analyse pour toutes les images numériques au cours de la charge à différentes échelles, les deux directions privilégiées de petites bandes restent quasi-constantes de 45° et 135° . Pour chaque direction, on peut tracer l'évolution du nombre de boîtes et l'évolution de l'anisotropie moyenne équivalente au cours de la charge. Ces évolutions et des discussions sont présentées dans le chapitre suivant.

IV.4 Corrélation spatiale

IV.4.1 Fonction de corrélation

Dans le but de mettre en évidence la taille caractéristique des déformations observées sur les cartes de corrélations g_I , on définit une fonction de corrélation spatiale comme suivant :

$$\psi(\mathbf{r}, \rho, \gamma) = a(\mathbf{r}) \times a(\mathbf{r} + \rho \mathbf{e}_\rho) \quad (\text{IV.5})$$

où $a(\mathbf{r})$ est la valeur de l'activité du point de coordonnée \mathbf{r} et $\mathbf{e}_\rho = (\cos \gamma) \mathbf{e}_x + (\sin \gamma) \mathbf{e}_y$. C'est-à-dire que pour chaque point sur la zone d'analyse Z , la fonction de corrélation est calculée entre lui et tous les autres points situés dans son voisinage dont les coordonnées polaires sont (ρ, γ) avec $0 \leq \rho \leq R = L/4$, et $0^\circ \leq \gamma \leq 360^\circ$ (voir figure IV.16).

La fonction de corrélation ψ est calculée pour chaque paire de points sur la zone Z . En rappelant que la valeur de l'activité est grande quand la déformation est

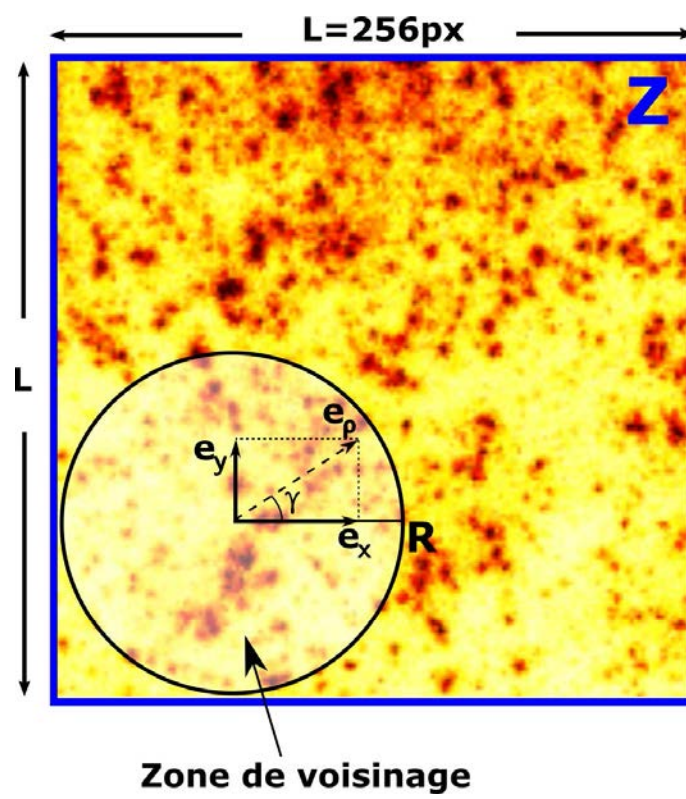


FIGURE IV.16 – Zone d'analyse Z d'une carte de corrélation g_I et zone de voisinage d'un point.

importante, on constate que la valeur de ψ est importante seulement quand tous les deux points sont très déformés. La fonction de corrélation permet donc détecter les paires de points qui sont corrélés et très déformés comme les points sur la zone localisée, bande de cisaillement.

Ensuite, on représente la corrélation spatiale en fonction de ρ par la moyenne sur la zone d'analyse Z en toute la direction :

$$\left\langle \langle \psi(\mathbf{r}, \rho, \gamma) \rangle_{0^\circ \leq \gamma \leq 360^\circ} \right\rangle_{\mathbf{r} \in Z} = \bar{\psi}(\rho) \quad (\text{IV.6})$$

Pour trouver une manière de déterminer la taille caractéristique des déformations, on applique cette fonction de corrélation à des cas tests, puis aux cartes de corrélations.

IV.4.2 Cas tests

Les images tests sont définies avec une taille caractéristique minimale de 2^n pixels pour n allant de 0 à 4. La valeur de chaque pixel dans une image test est donnée aléatoirement de 0 à 1. On utilise aussi des images tests binaires : la valeur de chaque pixel dans une image est donnée soit 0 soit 1. Les images tests et la fonction de corrélation spatiale $\bar{\psi}(\rho)$ pour chaque image sont présentées dans les figures IV.17 et IV.18.

On constate que pour tous les deux types des images tests, la fonction de corrélation spatiale décroît jusqu'à ce que ρ atteigne la taille caractéristique de l'image test considérée. À partir de cette valeur de ρ la corrélation spatiale est près de constante. Autrement dit, nous avons une manière facile pour déterminer la taille caractéristique de l'image test : c'est la valeur de ρ qui correspond au dernier point de la partie de décroissance de la fonction de corrélation.

IV.4.3 Cartes de corrélations

On applique la fonction de corrélation spatiale à 6 cartes de corrélations d'une expérience correspondant à $\varepsilon = 1\%$, 2% , 3% , 4% , 5% et 6% . La figure IV.19 montre la corrélation spatiale en fonction de ρ pour ces 6 cartes.

On voit que les courbes sont à peu près horizontales, la corrélation spatiale est quasi-constante. Il n'y a pas de décroissances comme les images tests. C'est la fluctuation dans les cartes de corrélations qui garde le nombre de couples de points

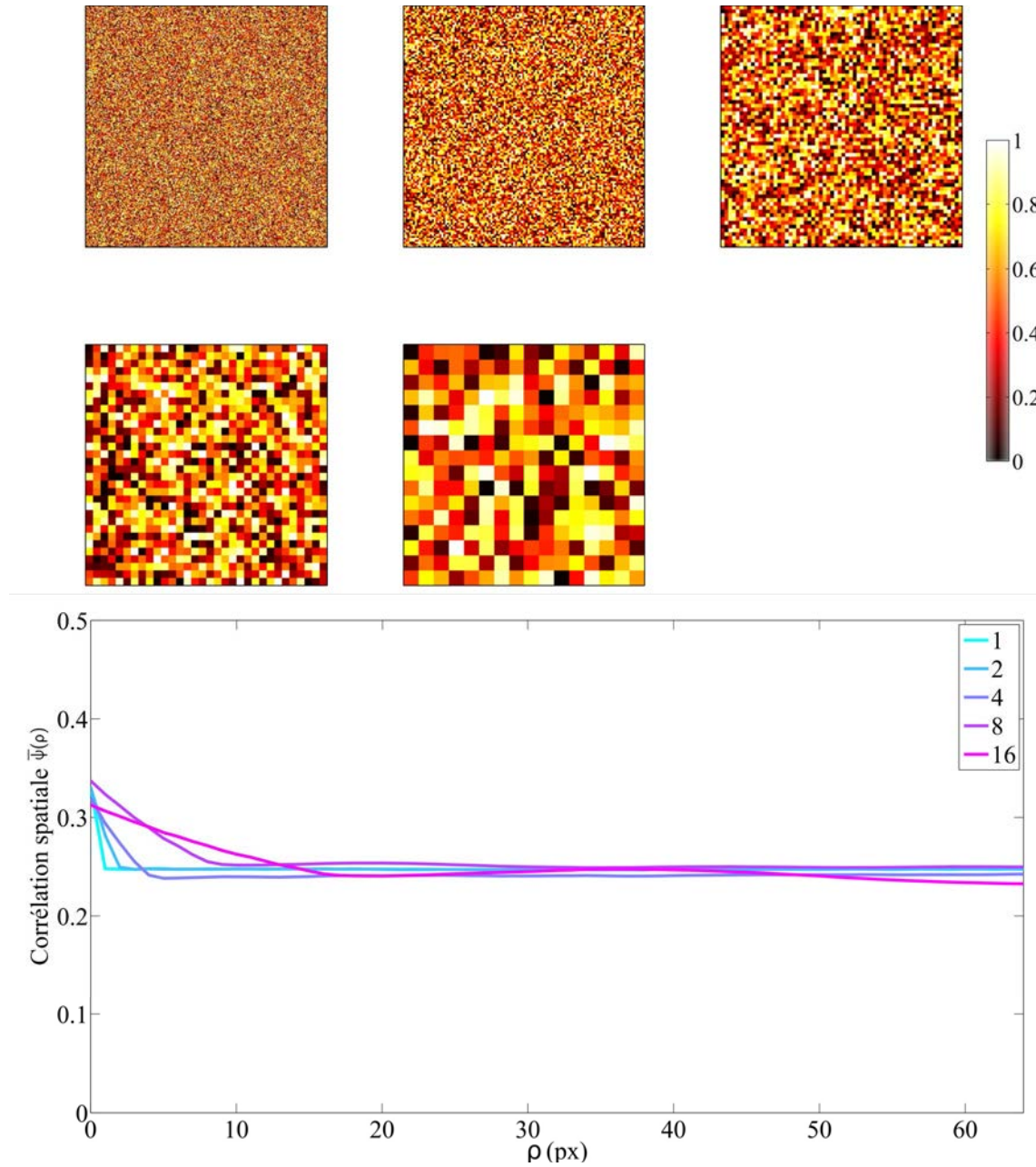


FIGURE IV.17 – En haut : images tests de taille caractéristique minimale de 2^n pixels pour n allant de 0 à 4. En bas : corrélation spatiale en fonction de ρ pour les images tests. En légende : la taille caractéristique 2^n des images tests.

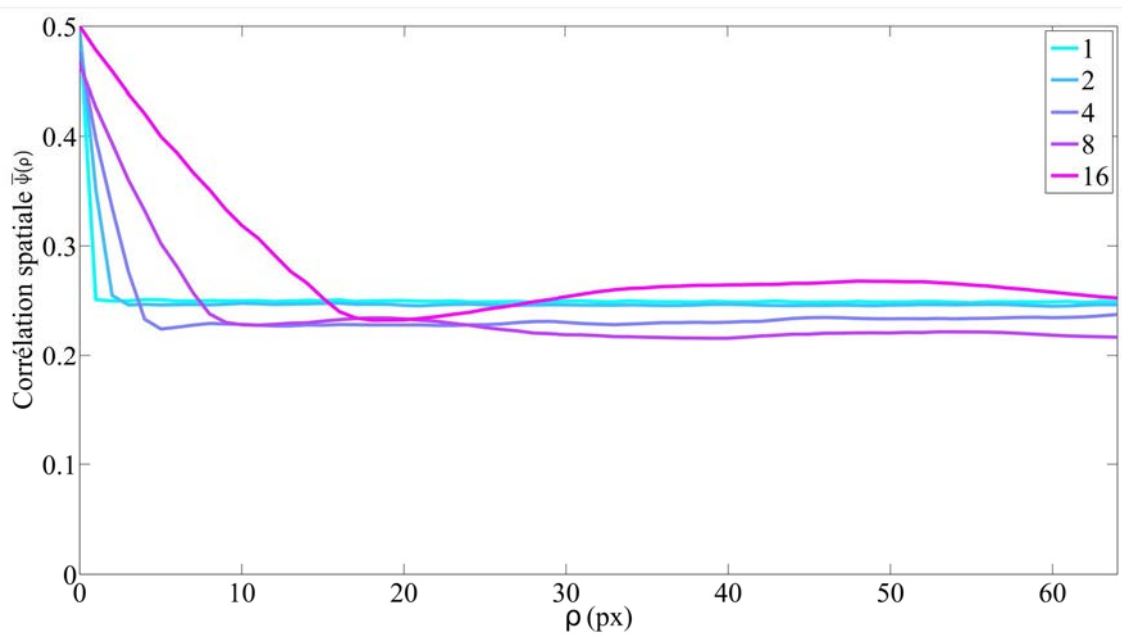
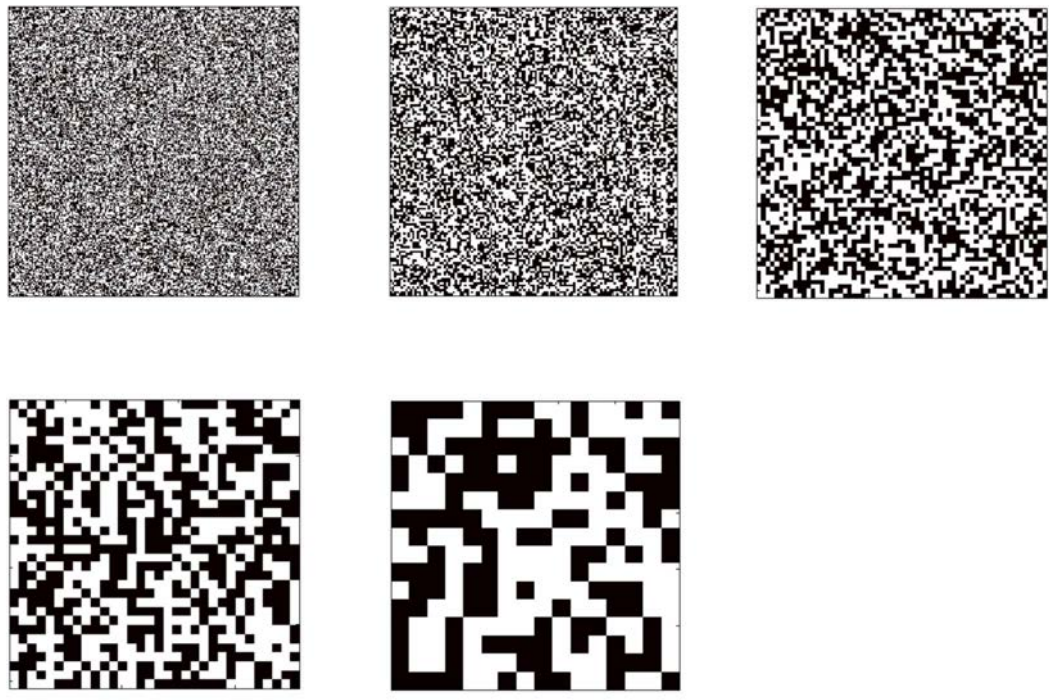


FIGURE IV.18 – En haut : images tests binaires. En bas : corrélation spatiale en fonction de ρ pour les images tests binaires.

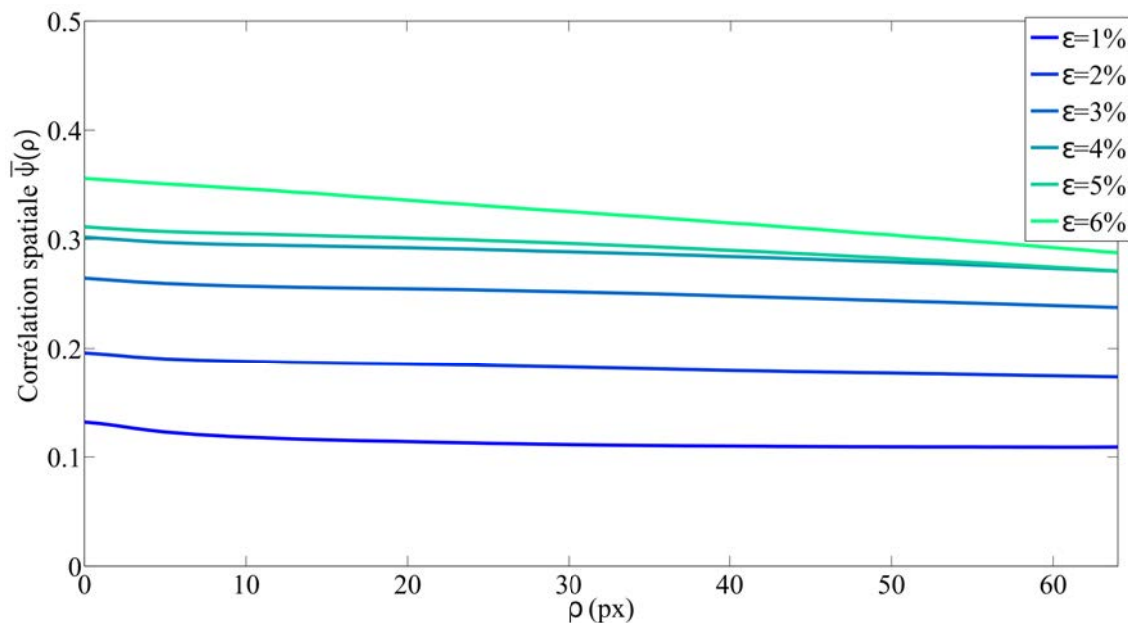


FIGURE IV.19 – Corrélation spatiale en fonction de ρ pour 6 cartes de corrélations correspondant à $\epsilon = 1\%$, $\epsilon = 2\%$, $\epsilon = 3\%$, $\epsilon = 4\%$, $\epsilon = 5\%$, $\epsilon = 6\%$ d'une expérience.

corrélés en grande valeur de ρ . Pour limiter l'influence de la fluctuation, on effectue une binarisation sur chaque carte de corrélation par définir un seuil $S = 0,75 \langle g_I \rangle$, où $\langle g_I \rangle$ est la moyenne de toutes les valeurs des pixels sur la zone Z de cette carte. Les pixels dont les valeurs sont inférieures au seuil S vaudront 0 et les autres vaudront 1. La figure IV.20 montre deux cartes de corrélations correspondant à $\epsilon = 3\%$ et $\epsilon = 6\%$ avant et après binariser.

La fonction $\bar{\psi}(\rho)$ est recalculée sur les images binarisées et elle est tracée en fonction de ρ pour 6 cartes de corrélations binarisées (voir figure IV.21).

À partir de ces courbes, on définit une façon de déterminer la taille caractéristique des déformations ξ : la valeur de ρ correspondant à la corrélation spatiale qui égale à la moyenne de la première valeur $\bar{\psi}(0)$ et la dernière valeur $\bar{\psi}(R)$ est définie comme la taille caractéristique. Cette façon est présentée dans la figure IV.22, réalisée sur la fonction de corrélation de la carte binaire à $\epsilon = 6\%$. On obtient une valeur d'environ de 19 pixels de la taille caractéristique ξ . Elle correspond à la largeur de la bande sur la carte binaire de corrélation (voir figure IV.20).

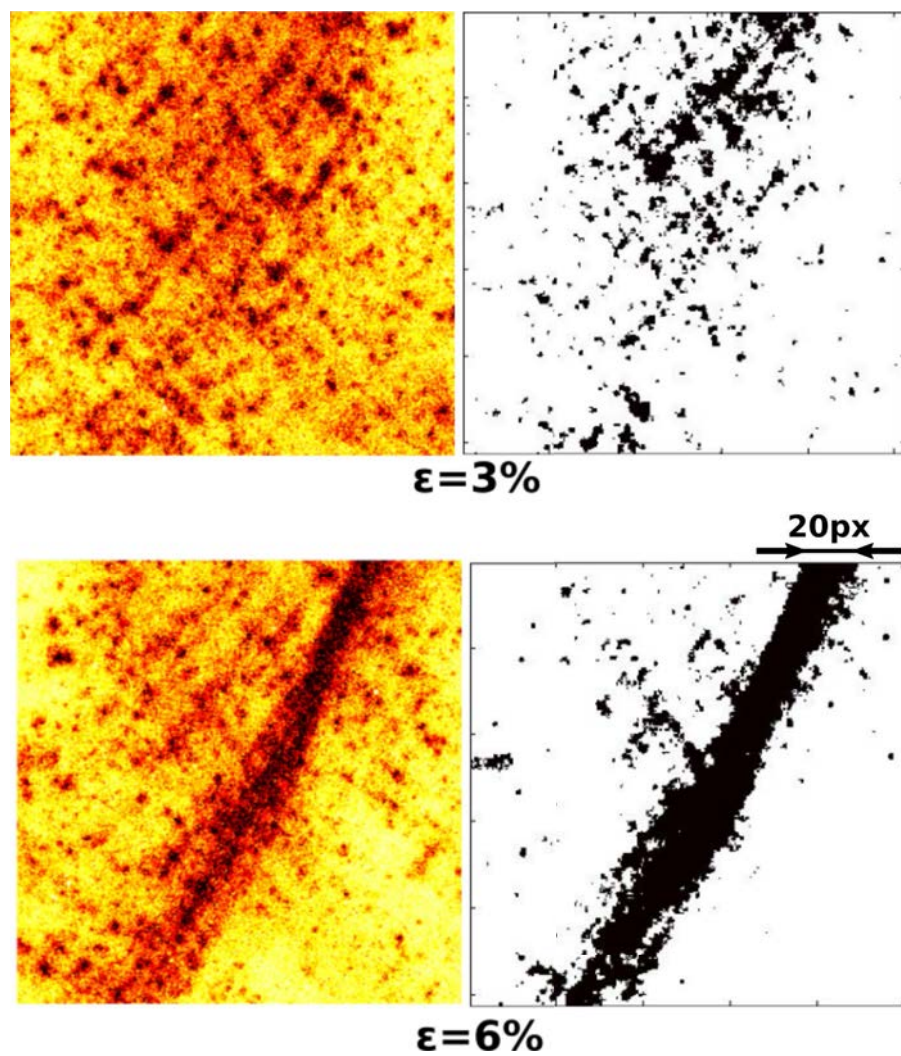


FIGURE IV.20 – Deux exemples de la binarisation. À gauche : avant binariser ; à droite : après binariser.

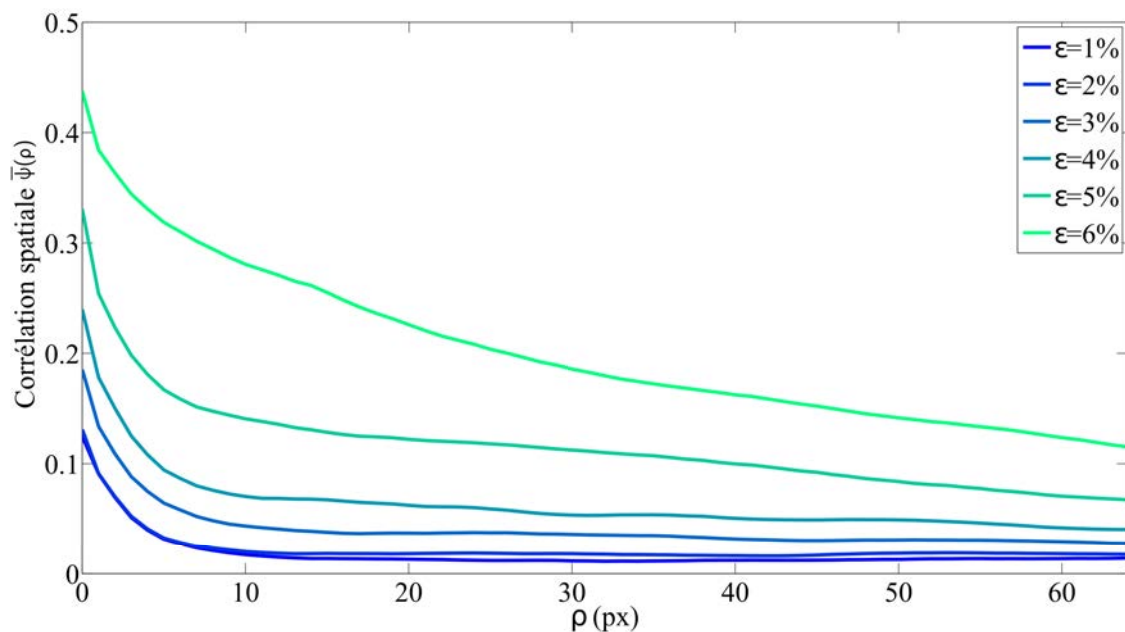


FIGURE IV.21 – Corrélation spatiale en fonction de ρ pour 6 cartes de corrélations binarisées correspondant à $\epsilon = 1\%$, $\epsilon = 2\%$, $\epsilon = 3\%$, $\epsilon = 4\%$, $\epsilon = 5\%$, $\epsilon = 6\%$ d'une expérience.

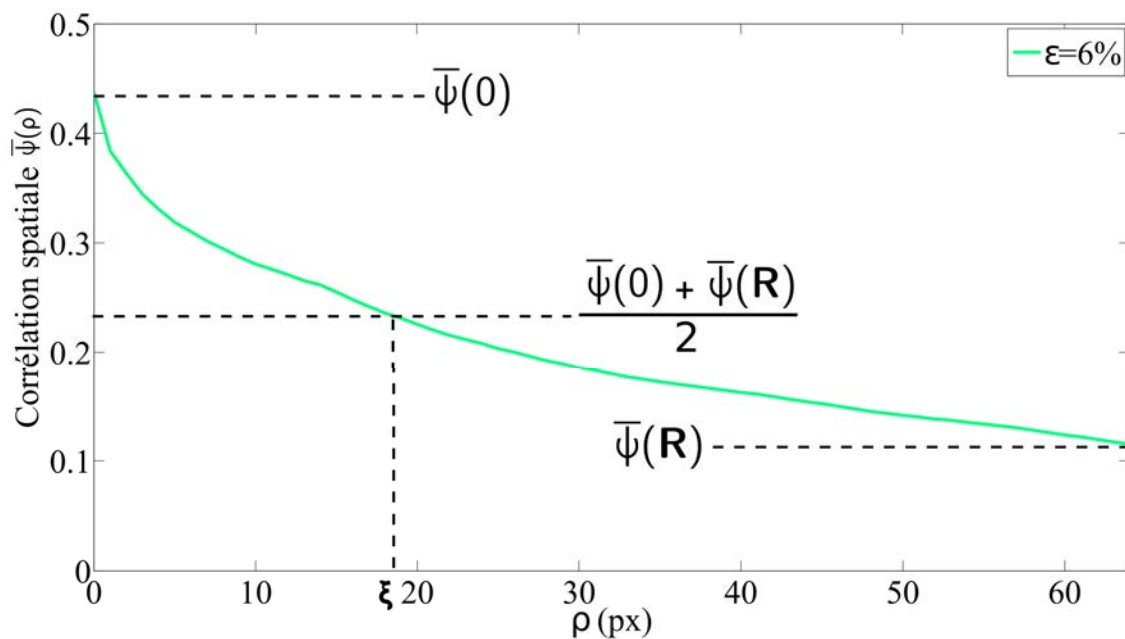


FIGURE IV.22 – Définition de la taille typique des déformations ξ .

IV.5 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre les outils d'analyse d'images. Ils ont été appliqués aux images expérimentales et numériques. Les résultats sont présentés et discutés dans le chapitre suivant.

Chapitre V

Résultats des méthodes d'analyse d'images

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats des méthodes d'analyse d'images détaillées au chapitre IV et appliquées sur les cartes de corrélations des expériences et sur les cartes de déformations des simulations numériques.

V.1 Résultats d'analyse expérimentale

Pour les images expérimentales, on s'intéresse à étudier non seulement la grande bande de cisaillement par les méthodes de l'histogramme de projection et de l'anisotropie mais aussi les micro-bandes intermittentes par la corrélation spatiale et l'analyse multi-échelles. La grande bande de cisaillement correspond à l'image entière ou bien à l'échelle la plus grande de la carte de corrélation, c'est aussi une structure stationnaire. Les méthodes d'analyse de la grande bande de cisaillement sont réalisées sur des cartes de corrélations moyennes. L'intérêt d'effectuer ce moyennage est de supprimer des fluctuations et des petites structures sur les cartes. En effet, les cartes sont moyennées sur 50 images soit sur un incrément de déformation axiale $\Delta\varepsilon \approx 0,15\%$. Par contre, les petites bandes correspondent à plusieurs échelles dans une même image et sont contenues dans des petites structures fluctuantes. C'est pourquoi on n'effectue pas le moyennage sur des cartes de corrélations pour la corrélation spatiale et l'analyse multi-échelles à l'effet de garder les micro-bandes.

Au début de la charge ($\varepsilon \leq 1\%$), le changement soudain du comportement du matériau entraîne beaucoup de valeurs bruyantes des résultats. Nous négligeons donc

cette partie de la charge dans les courbes de résultats suivantes.

V.1.1 Orientation de la bande de cisaillement

V.1.1.1 Angle de l'histogramme de projection

En appliquant la méthode de l'histogramme de projection, pour chaque image moyennée, on obtient l'ensemble des histogrammes de projection. Un exemple est présenté dans la figure V.1. Avec les coordonnées du maximum de la carte des histogrammes, on trace en pointillés blancs, la droite correspondante sur la carte de corrélations moyennée. On voit bien que l'orientation de cette droite est celle de la bande de cisaillement, autrement dit, l'angle β correspond au maximum de la carte des histogrammes nous donne l'inclinaison de la bande de cisaillement par rapport à l'horizontale. La figure V.2 montre l'évolution de l'inclinaison de la bande au cours de la charge de trois expériences avec le même code de couleur des courbes de charges présentées dans §IV.2.1.

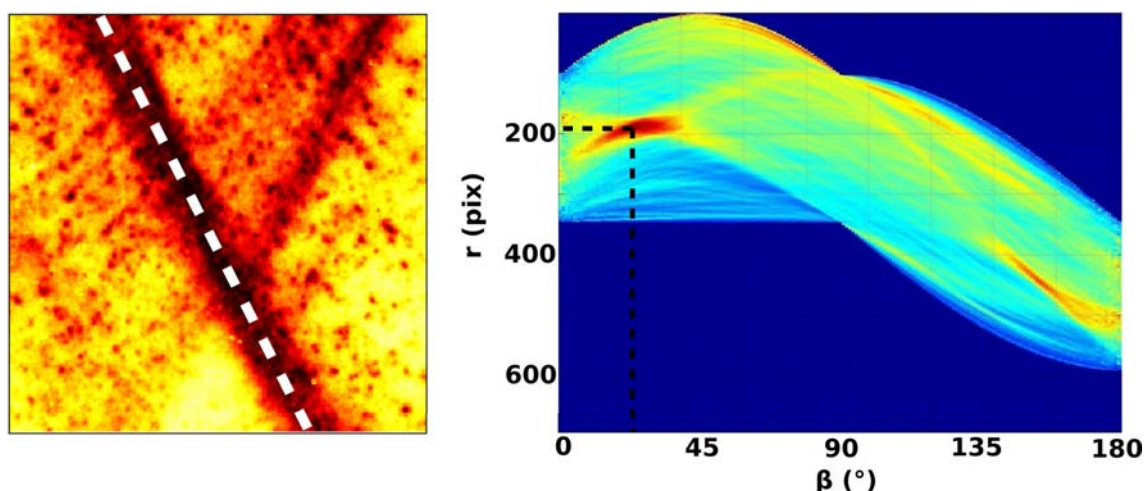


FIGURE V.1 – Carte de corrélation moyennée à 5% de la déformation de l'expérience 3 et l'ensemble des histogrammes de projection correspondant.

Pour les barres d'erreur, on considère une zone sur la carte d'ensemble des histogrammes contenant des points dont les valeurs ne sont pas inférieures à 95% du maximum. Les distances projetées sur l'horizontale entre le barycentre et les deux extrémités de cette zone constituent la barre d'erreur équivalente (voir figure V.3). Lorsque la barre d'erreur est grande, c'est-à-dire qu'il existe des directions très différentes sur lesquelles on trouve des valeurs importantes de la moyenne de l'activité,

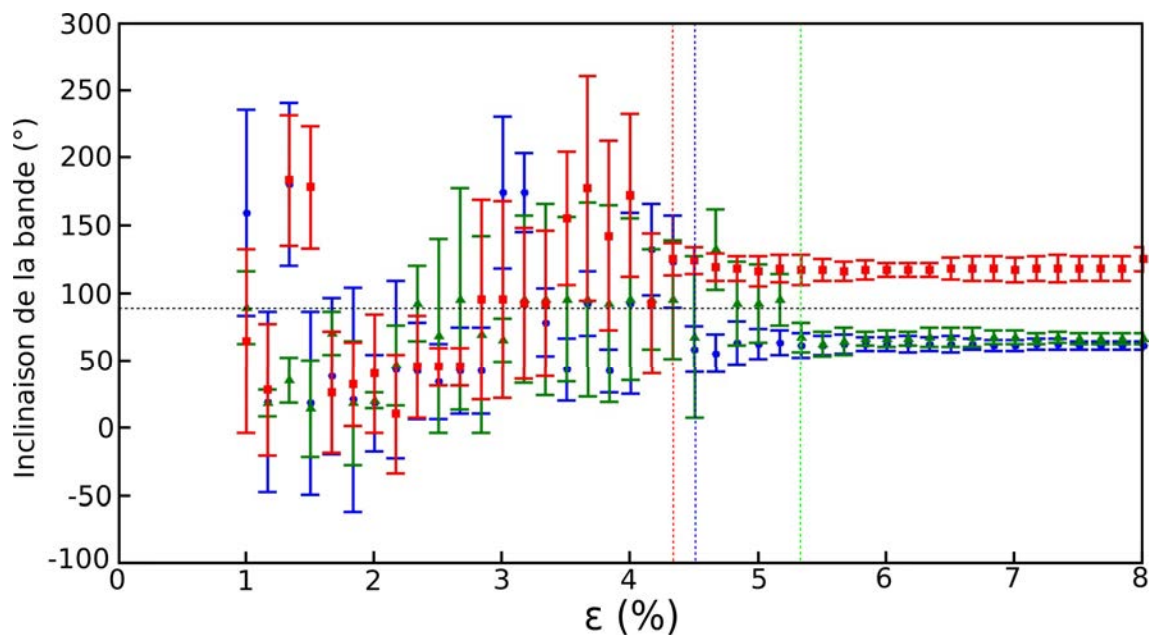


FIGURE V.2 – Inclinaison de la bande de cisaillement principale obtenue par la méthode de l’histogramme de projection de trois expérience au cours de la charge (expérience 1 : bleue, expérience 2 : verte, expérience 3 : rouge). La droite pointillée horizontale : 90° . Les droites pointillées verticales indiquent la déformation axiale à partir de laquelle l’orientation est bien choisie pour chaque expérience.

la direction est mal définie, il n'y a pas de direction claire qui ressort. Cela représente une distribution aléatoire des déformations sur la carte de corrélation. Au contraire, lors que la barre d'erreur est petite, on a une seule direction sur laquelle les déformations se concentrent.

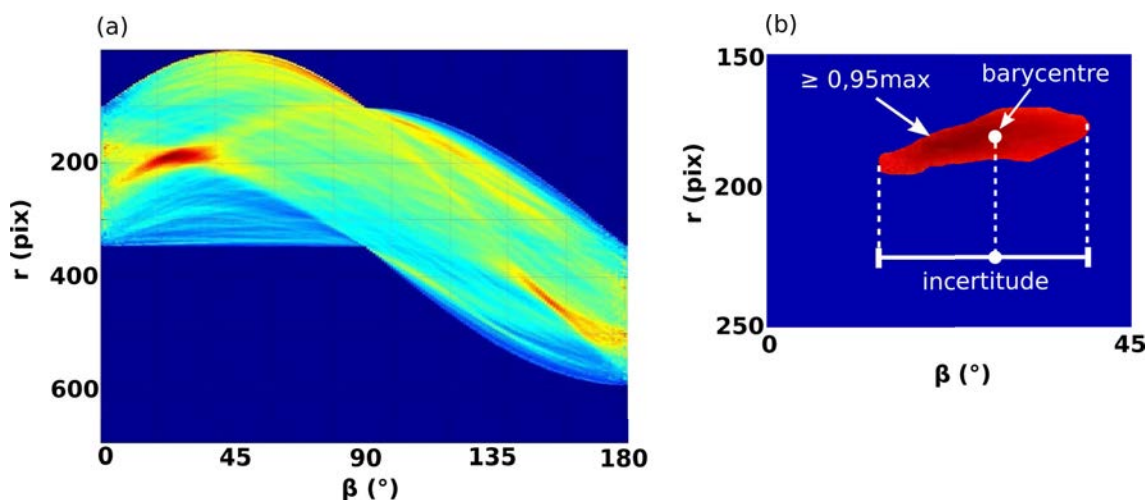


FIGURE V.3 – Définition de l'incertitude de l'inclinaison de la bande obtenue par la méthode de l'histogramme de projection. (a) : Carte de l'ensemble des histogrammes. (b) : Zoom de la zone de max.

Sur la figure V.2, pour les déformations inférieures à 4,5%, la direction obtenue est répartie au hasard avec des grandes barres d'erreur, montrant qu'aucune orientation claire n'est définie dans les cartes de corrélations. À partir de $\varepsilon \simeq 4,5\%$ pour la première expérience, de $\varepsilon \simeq 5,3\%$ pour la deuxième expérience et de $\varepsilon \simeq 4,3\%$ pour la troisième expérience, chacune affiche une orientation bien définie et constante. On voit clairement une brisure de symétrie entre deux orientations possibles : pour les deux premières expériences, l'angle bascule vers une valeur de 60° tandis que pour la troisième expérience, l'angle bascule vers la valeur symétrique par rapport à la verticale, 120° .

V.1.1.2 Angle de l'anisotropie

La méthode de l'anisotropie nous permet d'obtenir une ellipse pour chaque carte de corrélation moyennée. La quantité $1 - \lambda_2/\lambda_1$ (λ_1 et λ_2 sont les normes de l'ellipse) nous donne l'indice d'anisotropie de la carte et l'angle d'inclinaison du grand axe de l'ellipse par rapport à l'horizontale nous donne l'angle d'inclinaison de la bande de cisaillement (voir figure V.4).

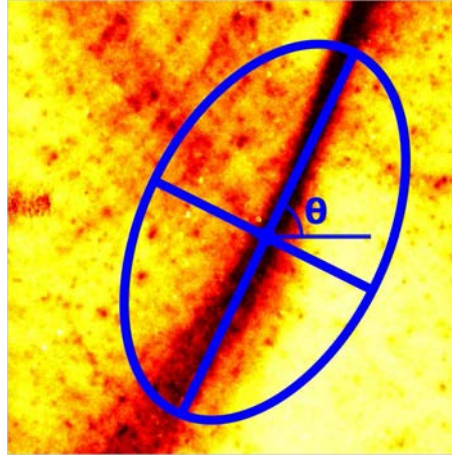


FIGURE V.4 – Carte de corrélation moyennée à 7% de la déformation de l'expérience 1 et l'ellipse correspondante au tenseur d'inertie de la carte. L'angle d'inclinaison du grand axe de l'ellipse par rapport à l'horizontale nous donne l'angle d'inclinaison de la bande de cisaillement θ .

Nous présentons dans la figure V.6(a) l'évolution de l'indice d'anisotropie au cours de la charge. Cette figure montre une bonne reproductibilité d'une expérience à l'autre. La courbe noire représente l'anisotropie moyenne de trois expériences. Pour les déformations axiales entre 1% et 4,5%, l'anisotropie est faible (environ 0,1) et la répartition spatiale de la déformation peut être considérée comme isotrope, aucune orientation est bien définie. À partir de 4,5% de la déformation, l'anisotropie augmente régulièrement jusqu'à atteindre une valeur maximale vers $\varepsilon \simeq 6,8\%$ montrant qu'il y a un angle qui apparaît dans le matériau. Au-delà de cette valeur maximale, l'anisotropie soit reste constante, soit diminue. Les diminutions sont dues à l'apparition d'une bande secondaire, conjuguée à la première.

On constate que l'incertitude de l'angle obtenu par la méthode de l'anisotropie est proportionnelle à la forme de l'ellipse ou bien l'indice d'anisotropie. Elle est grande lorsque la déformation est largement répartie dans la carte de corrélation, l'ellipse est proche d'un cercle. Au contraire, elle est petite lorsque la déformation est localisée en bande de cisaillement, l'ellipse est plus proche d'une droite. En fait, il est difficile d'avoir une manière de définir l'incertitude selon l'indice d'anisotropie. Par ailleurs, en tenant compte l'influence des fluctuations sur la carte de corrélation à la forme de l'ellipse, on peut faire une estimation grossière de l'incertitude. On réalise une translation verticalement de 10 pixels de la zone d'analyse dans la carte de corrélation comme dans la figure V.5. Les différences entre les angles de l'ellipse obtenus dans les deux nouvelles zones et dans la zone initiale constituent la barre

d'erreur dans la courbe de l'évolution de l'angle.

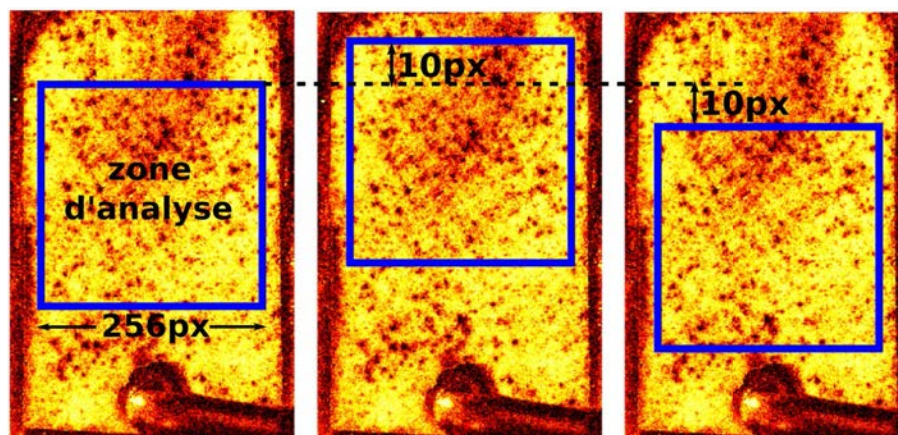


FIGURE V.5 – Translation de la zone d'analyse sur la carte de corrélation pour définir l'incertitude de l'angle d'inclinaison de la bande.

La figure V.6(b) présente l'angle d'inclinaison de l'ellipse en fonction de la déformation pour trois expériences. Comme les résultats obtenus par la méthode de l'histogramme de projection, avant $\varepsilon \simeq 4,5\%$, on voit des fluctuations des angles avec des grandes barres d'erreur correspondant à des petites valeurs de l'anisotropie (figure V.6(a)). Après, malgré qu'on observe quand même deux directions : 65° pour les deux premières expériences et 115° pour la troisième expérience, ces directions sont moins convaincantes que celles de la méthode de l'histogramme de projection. Les barres d'erreur restent importantes à cause des fluctuations autour de la bande. Au niveau de la mesure de l'angle, l'avantage de la méthode de l'histogramme de projection en comparant avec la méthode d'anisotropie est l'indépendance par rapport aux fluctuations sur la carte. Dans le cas de la méthode d'anisotropie, à la fin de la charge, les deux directions reviennent vers la verticale à cause de l'apparition de la bande secondaire.

V.1.1.3 Comparaison avec les angles de Mohr-Coulomb

Dans la section §II.2.1, à partir de la contrainte correspondante au palier sur les courbes de charge, on a calculé l'angle d'inclinaison du plan de cisaillement de trois expériences selon la prédiction du modèle de Mohr-Coulomb. Les valeurs de trois angles de Mohr-Coulomb de trois expériences sont présentées dans la figure V.7(c). En les comparant avec les directions bien définies de la bande de cisaillement de

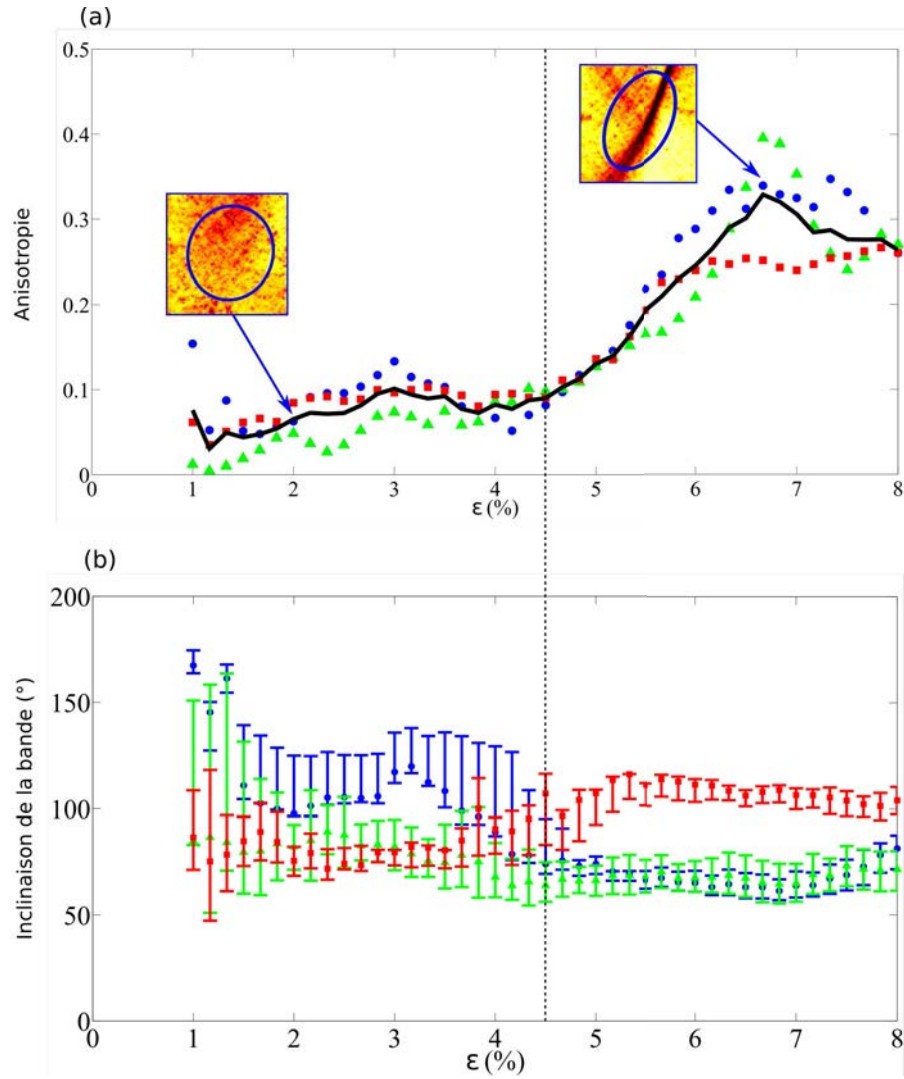


FIGURE V.6 – (a) : Indice d'anisotropie $1 - \lambda_2/\lambda_1$ de trois expériences au cours de la charge. (b) : Inclinaison de la bande de cisaillement principale obtenue par la méthode de l'anisotropie de trois expériences au cours de la charge.

deux méthodes de l'histogramme de projection et de l'anisotropie (figure V.7(a) et V.7(b)), on voit une forte cohérence. En plus, on observe que pour chaque expérience, la ligne pointillée verticale qui indique l'apparition de l'angle bien défini croise la courbe de charge avant le point qui est utilisé pour déduire l'angle de Mohr-Coulomb. C'est-à-dire que l'orientation est bien choisie avant le plateau de la courbe de charge, montrant que l'angle de Mohr-Coulomb apparaît dans le matériau avant le seuil de rupture.

V.1.2 Largeur à mi-hauteur de la bande de cisaillement

Avec des grandes barres d'erreur des angles obtenus par la méthode d'anisotropie et la croissance de l'anisotropie même après l'apparition d'une direction bien définie, on remarque que l'angle apparaît alors que le champ de plasticité était encore diffus. On veut mesurer la largeur de ce champ. L'indice d'anisotropie permet d'en avoir une idée mais la mesure de la largeur à mi-hauteur permet d'être quantitatif. Cette mesure est présentée dans §IV.1. La figure V.8 montre l'évolution de la largeur à mi-hauteur en diamètre de grain d au cours de la charge.

Pour les déformations axiales inférieures à 3%, les profils projetés sont principalement plats avec beaucoup de fluctuations. La mesure de la largeur amène donc des valeurs énormes de l'ordre de la dimension de la zone d'analyse ($512d \times 512d$). Ensuite, les largeurs de la bande diminuent jusqu'à ce qu'une valeur stationnaire soit atteinte vers $\varepsilon \simeq 6,5\%$. Cette valeur stationnaire est d'environ $50d$ et reste quasi-constante jusqu'à la fin de la charge. La largeur $50d$ de la bande de cisaillement obtenue par notre mesure est plus grande que celle dans la littérature [33, 34] qui vaut environ $10 - 20d$ et est obtenue par les mesures plus directes. La raison est que notre méthode de visualisation permet de détecter de très faibles déformations de l'ordre de 10^{-5} et en plus elle est non-linéaire en déformation. Mais en fait, il est difficile de définir la bande car elle n'a pas de limite franche. Pour justifier, on réalise la mesure de la largeur à mi-hauteur sur la carte de corrélation à $\varepsilon = 8\%$ en augmentant l'incrément de la déformation axiale entre deux images speckles équivalentes. La figure V.9 montre la largeur de la bande à $\varepsilon = 8\%$ en fonction de l'incrément de la déformation pour trois expériences. On observe que la largeur de la bande croît avec l'incrément de la déformation montrant que le matériau s'écoule même loin de la bande de cisaillement.

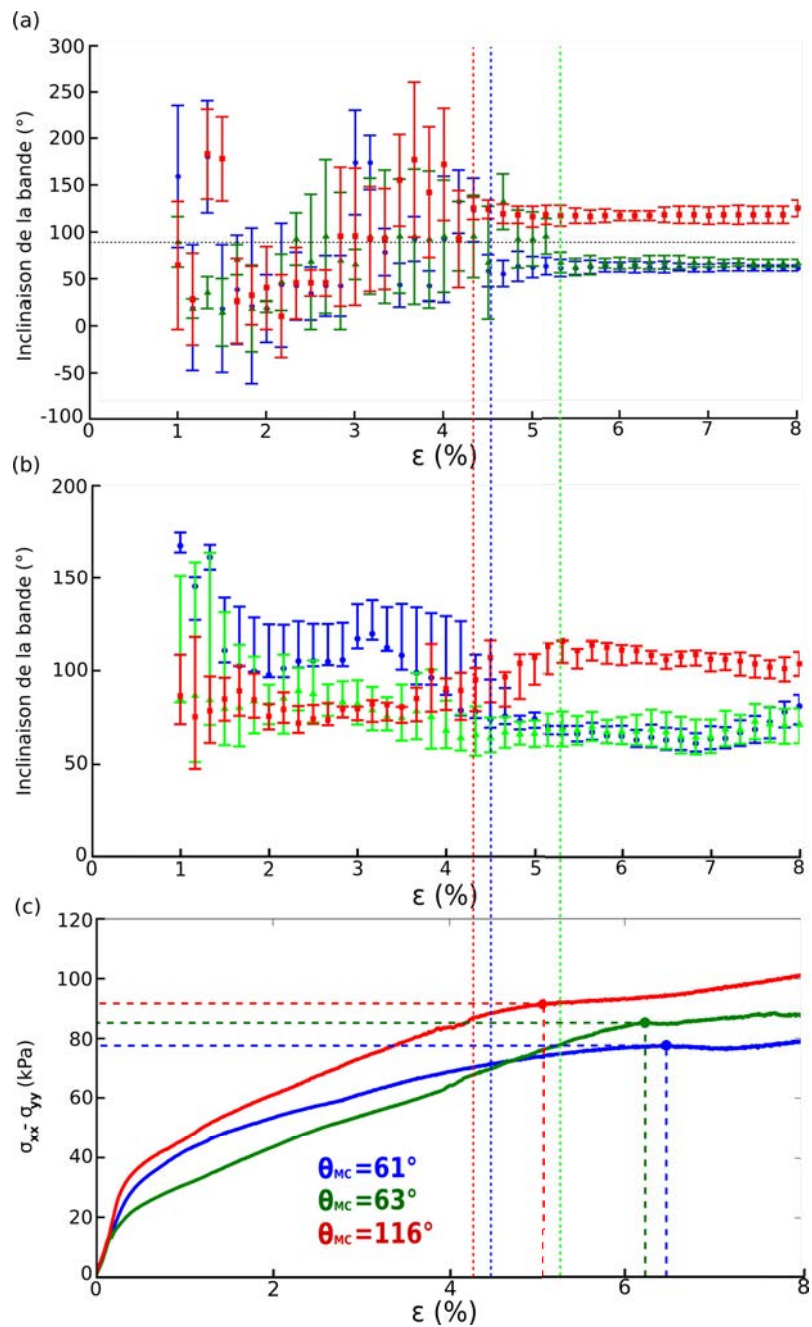


FIGURE V.7 – Évolutions de l'angle d'inclinaison de la bande de cisaillement selon les méthodes de l'histogramme de projection et de l'anisotropie et les courbes de charges de trois expériences.

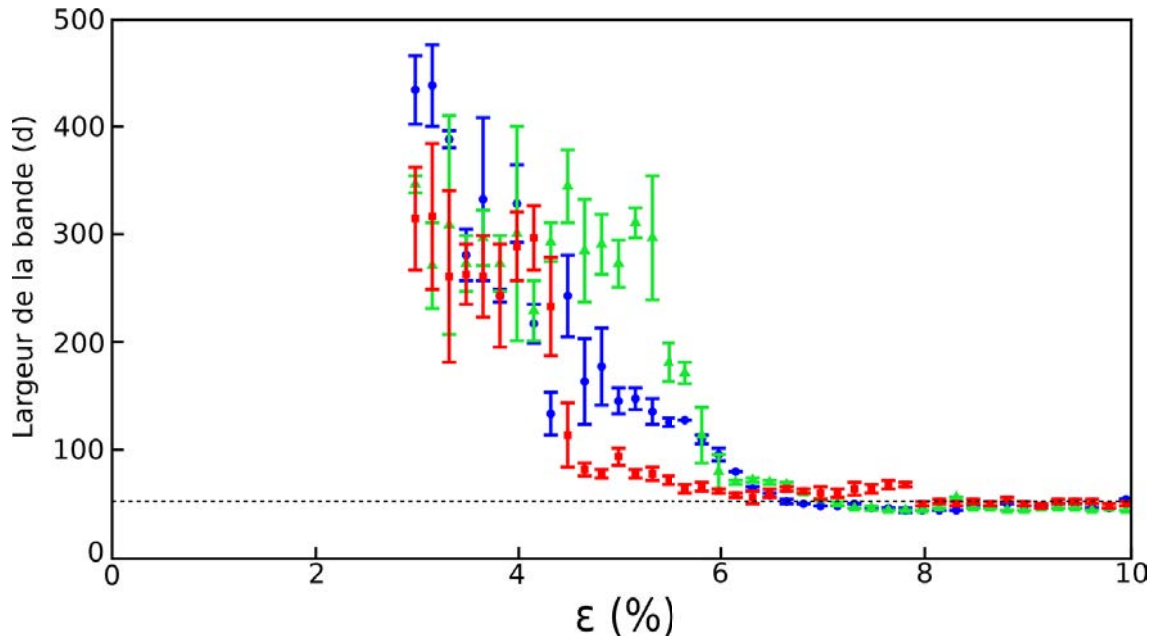


FIGURE V.8 – Largeur à mi-hauteur de la bande de cisaillement au cours de la charge.

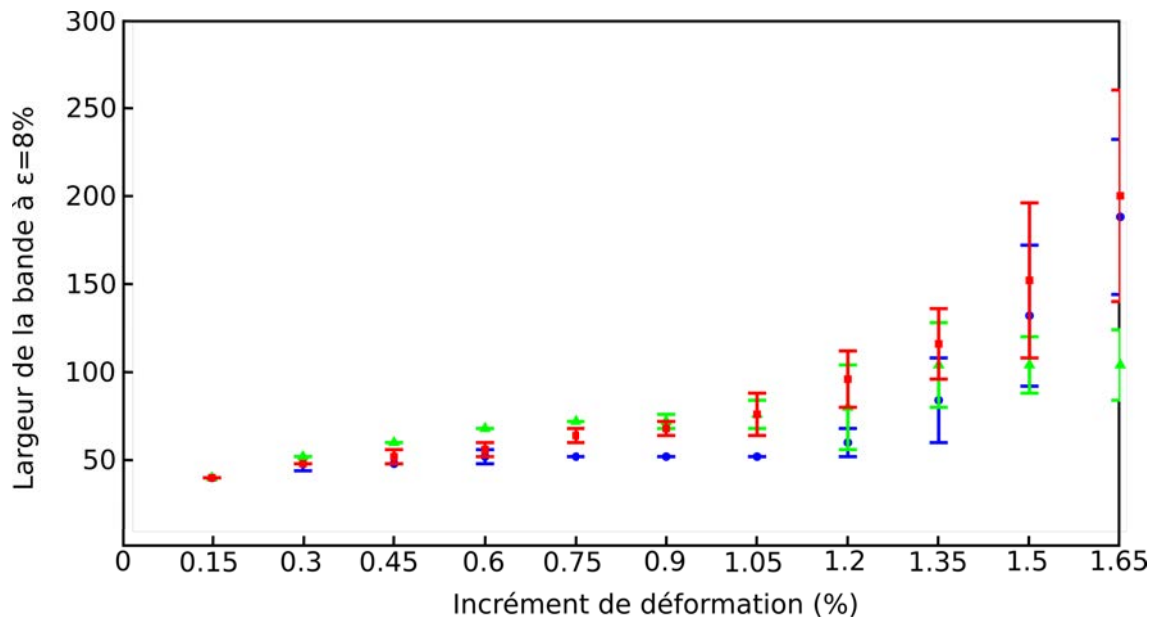


FIGURE V.9 – Largeur de la bande mesurée à $\varepsilon = 8\%$ en fonction de l'incrément de la déformation pour trois expériences.

V.1.3 Discussion

Pour bien étudier la dynamique de formation des bandes de cisaillement, nous présentons dans la figure V.10 l'évolution de l'anisotropie, de l'inclinaison de la bande de cisaillement obtenue par la méthode de l'histogramme de projection et de la largeur de la bande de trois expériences au cours de la charge.

En observant tous les trois graphiques dans la figure V.10, on constate que la localisation de la déformation est un processus progressif initié par une bifurcation qui se produit vers $\varepsilon \simeq 4,5\%$. La bifurcation observée correspond à une brisure de symétrie entre deux directions possibles pour l'angle de la bande de cisaillement (voir figure V.10(b)), simultanément à la croissance de l'anisotropie (voir figure V.10(a)) et se produit avant les plateaux des courbes de charge (voir figure V.7). Pour la deuxième expérience, l'incertitude de l'angle reste importante jusqu'à $\varepsilon \simeq 5,3\%$ mais son anisotropie augmente régulièrement à partir de $\varepsilon \simeq 4,5\%$, montrant qu'une orientation apparaît même si la bande est moins clairement définie par rapport aux deux autres expériences. Nous observons aussi que pour tous les trois expériences, la largeur de la bande est encore très grande (de l'ordre de la moitié de la taille de la zone d'analyse) même si l'orientation est bien établie (figure V.10(c)). On constate donc que cette bifurcation ne correspond pas à une localisation de la déformation sous forme d'un plan de rupture et la déformation est encore largement distribuée dans l'échantillon (voir figure V.10(c)).

On a montré jusqu'à présent les travaux dans le but de caractériser le champ plasticité moyen. Dans les parties suivantes, on veut étudier les fluctuations de l'écoulement plastique. On va donc travailler sur des images qui ne sont pas moyennées.

V.1.4 Mesure de la taille caractéristique de la déformation

Dans cette partie, on veut étudier la taille caractéristique des petites structures qu'on observe sur les cartes de corrélations avant l'apparition des grandes bandes de cisaillement. On réalise la mesure de la taille caractéristique détaillée dans §IV.4.1 sur les cartes de corrélations binarisées. La taille caractéristique est calculée en diamètre de grain d et son évolution au cours de charge pour les trois expériences est présentée dans la figure V.11.

Au début de la charge, des petites zones déformées sur la carte de corrélation binaire nous donnent des faibles valeurs de la taille caractéristique. Il est difficile d'identifier un comportement reproductible avant la bifurcation. On voit sans doute

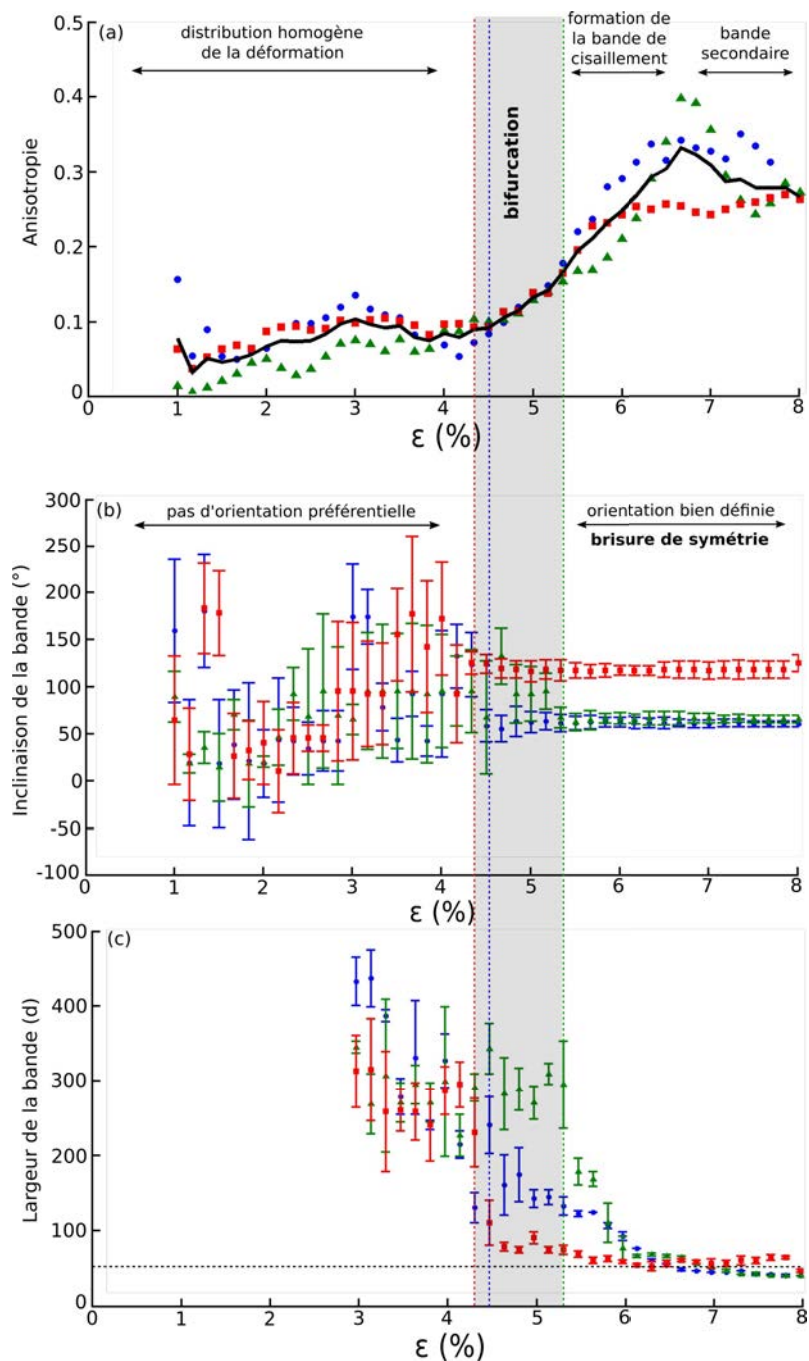


FIGURE V.10 – (a) Anisotropie au cours de la charge. (b) Inclinaison de la bande selon la méthode de l’histogramme de projection au cours de la charge. (c) Largeur à mi-hauteur de la bande au cours de la charge.

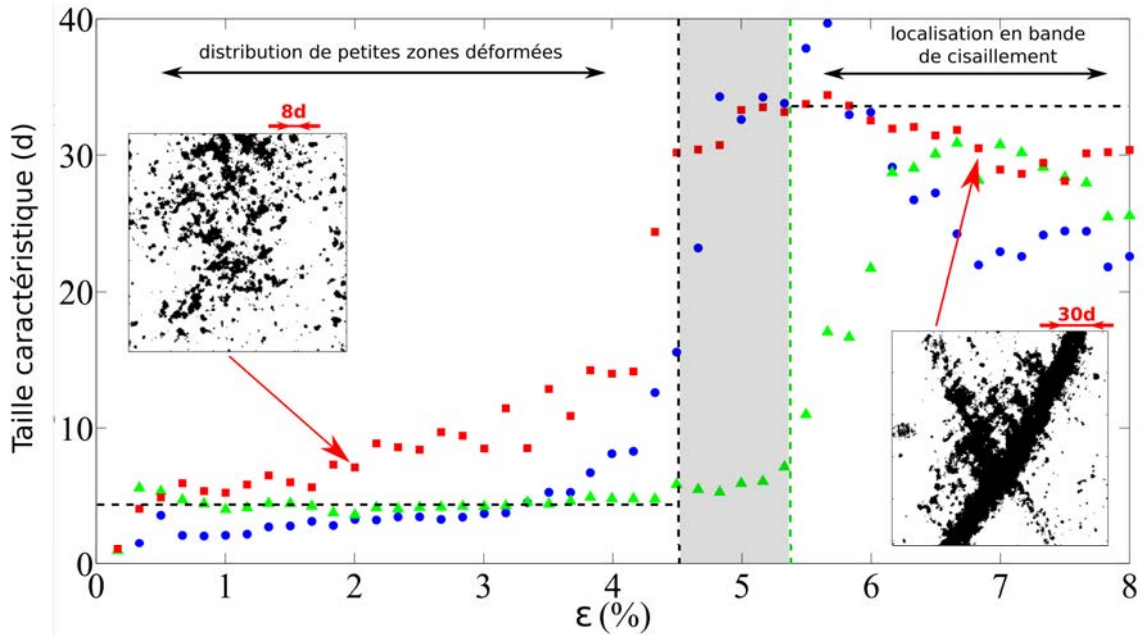


FIGURE V.11 – Évolution de la longueur de corrélation au cours de la charge.

une croissance assez lente de la taille caractéristique avant bifurcation pour la première et la troisième expérience (les points bleus et rouges) mais on ne voit pas cette croissance sur la deuxième expérience (les points verts).

Pour l'expérience 1 et l'expérience 3, à partir de $\varepsilon \simeq 4,5\%$, la taille caractéristique croît fortement et atteint la valeur maximale vers $5,7\%$ de la déformation. Pour l'expérience 3, dès $\varepsilon \simeq 5,3\%$, la taille caractéristique augmente jusqu'à ce que la valeur maximale soit atteinte vers $6,7\%$ de la déformation. Ces valeurs maximales correspondent à la bande de cisaillement bien formée. La valeur moyenne de trois valeurs maximales de la taille caractéristique de trois expériences est environ $35d$. Elle est plus petite que la valeur de $50d$ de la largeur de la bande mesurée par la méthode de l'histogramme de projection parce que l'on a effectué la binarisation sur les cartes de corrélations moyennées. Après le maximum, pour toutes les trois expériences, la taille caractéristique décroît lentement.

V.1.5 Analyse multi-échelles

Afin d'étudier la dynamique du réseau de petites bandes, on a appliqué la méthode d'analyse multi-échelles détaillée dans §IV.3.1 à chaque carte de corrélation. Dans le but de garder les petites structures, les cartes de corrélations ne sont pas

moyennées. Ensuite, on moyenne les anisotropies obtenues sur 50 cartes de corrélations consécutives pour chaque échelle. La figure V.12 représente l'anisotropie moyenne en fonction de la taille de boîte R au cours de la charge de trois expériences.

On s'intéresse à l'évolution de l'anisotropie à petites échelles avant l'apparition de la bande de cisaillement. Mais on voit que pour tous les trois expériences, dans la première moitié de la charge, jusqu'à environ 4,3% de la déformation axiale, l'anisotropie est très faible pour toutes les tailles de boîte. C'est-à-dire que l'on n'arrive pas à caractériser la dynamique de petites bandes dans les cartes de corrélations. La raison est que les cartes de corrélations avant la bifurcation sont très bruitées par rapport à celles où on voit les bandes de cisaillement.

Après $\varepsilon \simeq 4,3\%$, pour l'expérience 1 et l'expérience 3, à chaque état du chargement, l'anisotropie atteint toujours la valeur maximale à l'échelle de 128 pixels. C'est-à-dire qu'une partie de la bande secondaire apparaît en même temps que la première. Au contraire, l'anisotropie pour l'expérience 2 est toujours plus importante à l'échelle 256 pixels par rapport aux autres échelles jusqu'à environ 7% de la déformation. La valeur maximale de l'anisotropie est trouvée à $\varepsilon \simeq 6,7\%$ nous montrant une seule grande bande sur la carte de corrélation. À partir de $\varepsilon \simeq 7\%$, l'anisotropie est maximale à l'échelle de 128 pixels à cause de l'apparition de la deuxième bande.

Pour la formation de petites bandes, on pense que l'analyse sur des simulations numériques va nous donner des informations. La figure V.13 montre une carte de déformation d'une simulation et une carte de corrélation d'une expérience. Les deux cartes sont également obtenues très tôt dans la charge. On observe que les petites bandes dans la carte de déformation sont beaucoup plus claires que celles dans la carte de corrélation. On applique alors dans la section suivante l'analyse de multi-échelles sur des simulations numériques.

V.2 Résultats d'analyse numérique

Pour les cartes de déformations des simulations numériques, avant le palier de la courbe de charge, on observe un réseau de petites bandes intermittentes. On s'intéresse à caractériser la formation de ces petites bandes par la méthode de multi-échelles. Comme le principe de cette méthode présenté dans §IV.3.2, elle consiste à appliquer la mesure de l'anisotropie à chaque petite boîte carrée sur l'échantillon

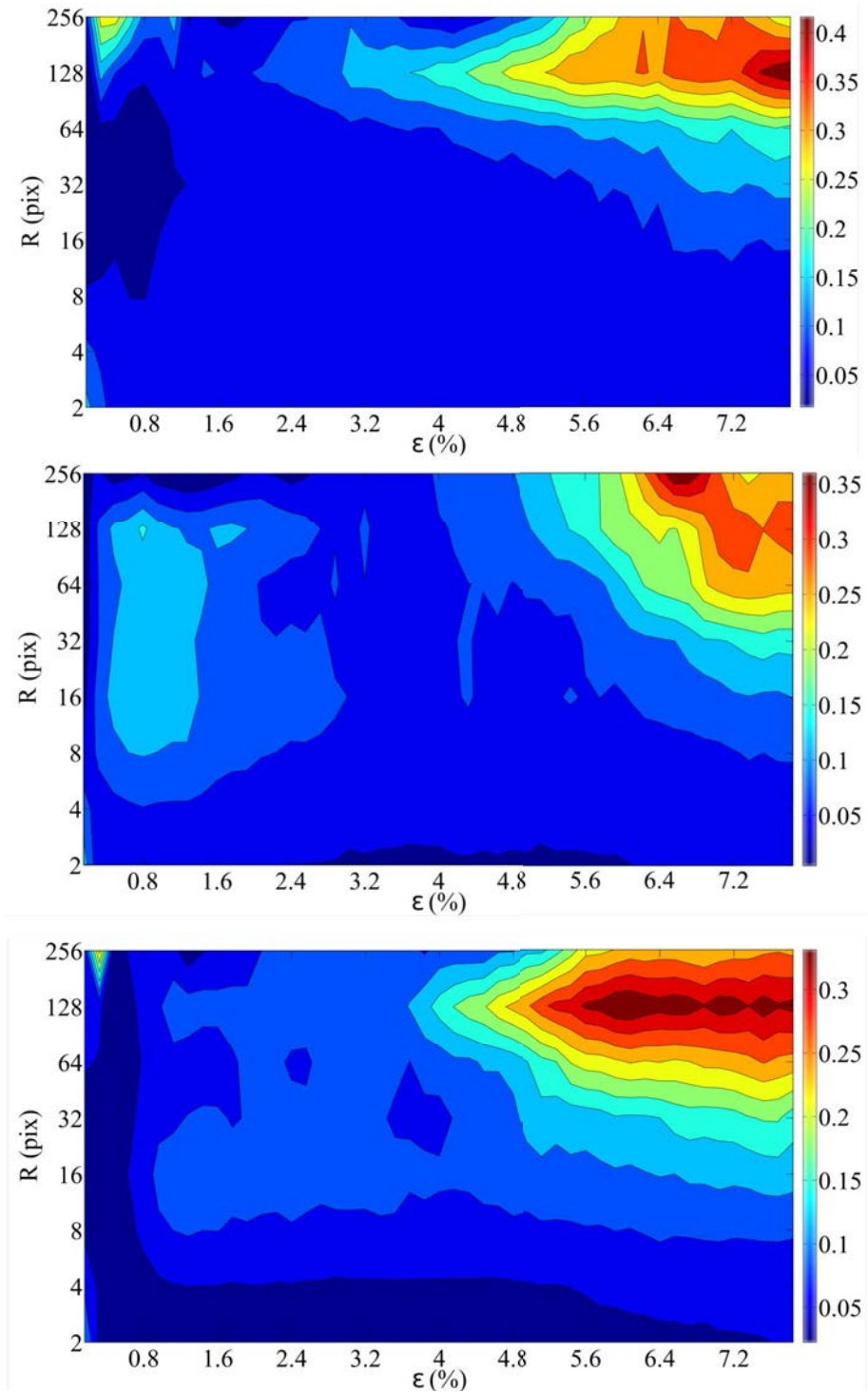


FIGURE V.12 – Du haut en bas : Anisotropie moyenne en fonction de la taille de boîte R au cours de la charge pour l'expérience 1, 2 et 3.

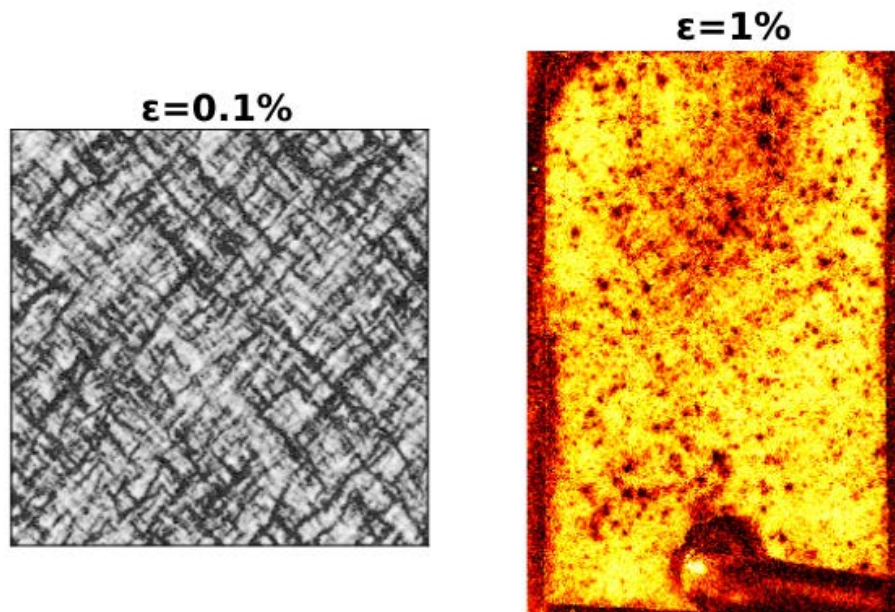


FIGURE V.13 – À gauche : carte de déformation d'une simulation numérique ; à droite : carte de corrélation d'une expérience.

des grains. En rappelant que la simulation numérique nous donne les coordonnées et la déformation de chaque grain, on peut grouper des grains en boîte carrée selon leur position et calculer le tenseur d'inertie de chaque boîte par la déformation des grains.

D'autre part, en notant que l'objet de l'analyse est de petites bandes et qu'un faible nombre de points peut causer des bruits des résultats, il est nécessaire que les échelles que l'on analyse ne soient ni trop grandes, ni trop petites. On étudie donc les petites boîtes qui contiennent de 8^2 , 16^2 , 32^2 et 64^2 grains. Mais on n'analyse pas les boîtes de 64^2 grains pour la simulation de 128^2 grains parce qu'elles sont trop grandes pour cette simulation, soient un quart de l'échantillon. Dans la suite on présente les résultats en fonction de nombre de grains dans chaque petite boîte pour les trois simulations.

À l'aide de la méthode d'anisotropie, pour chaque petite boîte, on obtient un angle et un indice d'anisotropie. Puis on groupe toutes les boîtes d'une même taille en classes selon leur angle d'anisotropie. On peut donc ensuite construire l'histogramme du nombre de boîtes par l'angle d'anisotropie. Après avoir fait deux ajustements paraboliques sur cet histogramme à chaque moment de la charge, obtient

deux directions privilégiées de petites bandes correspondant à deux pics de deux ajustements (voir §IV.3.2). Les figures V.14(b) et V.14(c) présentent l'évolution de ces deux directions avec l'incrément de 0,01% de la déformation axiale. Après une fluctuation au début de la charge jusqu'à $\varepsilon \simeq 0,05\%$, les deux directions sont quasi-constantes de 45° et 135° . En comparant avec les courbes de charge (figure V.14(a)), on constate que ces angles atteignent la valeur constante beaucoup plus tôt par rapport le plateau des courbes de charge. Ces deux angles sont en accord avec la prédiction d'Eshelby [18]. Ensuite, pour présenter l'évolution du nombre de boîtes, on effectue une normalisation. On suppose qu'au début de la charge, le nombre total de boîtes N_T distribuent uniformément selon l'angle de l'ellipse. En rappelant qu'on a groupé les boîtes en classes selon l'angle de l'ellipse avec l'amplitude de 5° pour chaque classe (voir §IV.3.2), on peut normaliser le nombre N_θ de toutes les boîtes qui contient la même direction θ à un état donné de la charge par la formule : $N_\theta^m = \frac{N_\theta}{N_T/(180^\circ/5^\circ)}$. Pour chaque état du chargement, pour une taille de boîte donnée, ces deux directions privilégiées nous donnent deux valeurs de l'anisotropie moyenne de toutes les boîtes correspondantes. Nous présentons dans la figure V.15 l'évolution du nombre de boîtes normalisé à différente taille de boîte au cours de la charge pour trois simulations pour la direction privilégiée de 45° et dans la figure V.16 l'évolution de l'anisotropie moyenne équivalent. Pour la direction privilégiée de 135° , on a obtenu les courbes à peu près identiques.

Tout d'abord l'on observe une première valeur très petite mais non-nulle pour toutes les courbes. Cette valeur est non-nulle parce qu'au début du test, l'échantillon a déjà été soumis un chargement biaxial initial. Elle est petite parce qu'il y a très peu de grains qui sont déformés. On a donc très peu de petites boîtes contenant des déformations et l'anisotropie dans ces boîtes est très faible. On voit aussi qu'elle est d'autant plus faible que la taille de boîte est grande. C'est parce que quand la taille de boîte est plus grande que la taille des petites structures, la symétrie de ces structures diminue l'anisotropie de boîte.

Lors que la déformation augmente, il y a de plus en plus de petites boîtes contenant une des deux directions privilégiées (voir figure V.15). Mais on observe une croissance de l'anisotropie moyenne montrant qu'il y a une augmentation forte de l'anisotropie de ces petites structures. Autrement dit, les petites bandes commencent à se former dans les petites boîtes et elle sont de plus en plus nombreuses. D'autre part, on remarque sur les courbes que la pente de cette croissance dépend de la taille

des boîtes. Plus le nombre de grains dans chaque boîtes est petit, plus l'anisotropie moyenne croît rapidement. Cette dépendance montre que les petites bandes s'organisent premièrement à la petite taille caractéristique et elles sont séparées de l'une à l'autre, puis elles se relient et forment un réseau de petites bandes donnant des valeurs importantes de l'anisotropie dans les boîtes de tailles plus grandes.

Et puis, on constate qu'après la croissance, lorsque l'anisotropie moyenne atteint une valeur maximale, elle reste quasi-constante jusqu'à la fin du chargement. C'est-à-dire qu'à partir de ce moment, le réseau de petites bandes est bien formé, reste stable et existe en parallèle des grandes bandes de cisaillement. On voit ainsi que ce moment dépend de la taille de boîte. Plus le nombre de grains dans chaque boîtes est grand, plus la croissance de l'anisotropie moyenne se termine tard montrant que la taille caractéristique des structures augmente avec la déformation. Cette méthode devrait permettre de mettre en évidence l'augmentation des structures à différentes échelles.

Cette étude de multi-échelles a aussi été faite sur les cartes de déformations obtenues à partir des simulations (§III.3.1.2) et elles conduisent aux mêmes résultats.

V.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats des méthodes d'analyse d'images. Tout d'abord, les analyses d'images expérimentales ont montré des résultats surprenants. On a observé que la localisation de la déformation est un processus progressif initié par une bifurcation qui correspond à l'apparition d'une direction bien définie. Cette direction est en accord avec l'angle de Mohr-Coulomb et son apparition a lieu avant le plateau de la courbe de charge. Lors de la bifurcation, ni l'anisotropie, ni largeur de la bande ne présentent une discontinuité. Donc, la théorie de bifurcation n'est pas suffisante pour décrire ces résultats. Ensuite, nous avons aussi montré une décroissance de la largeur de la bande pendant le chargement jusqu'à ce qu'une valeur stationnaire d'environ $50d$ soit atteinte. Et puis, la mesure de la taille caractéristique des fluctuations semble montrer une croissance avant la bifurcation.

Pour les résultats d'analyse numérique, nous avons présenté l'évolution de l'anisotropie moyenne correspondant à deux directions privilégiées de petites bandes au cours de la charge. Ces deux directions privilégiées obtenues sont de 45° et 135° , en accord avec la prédiction d'Eshelby. Après une petite première valeur, l'anisotropie

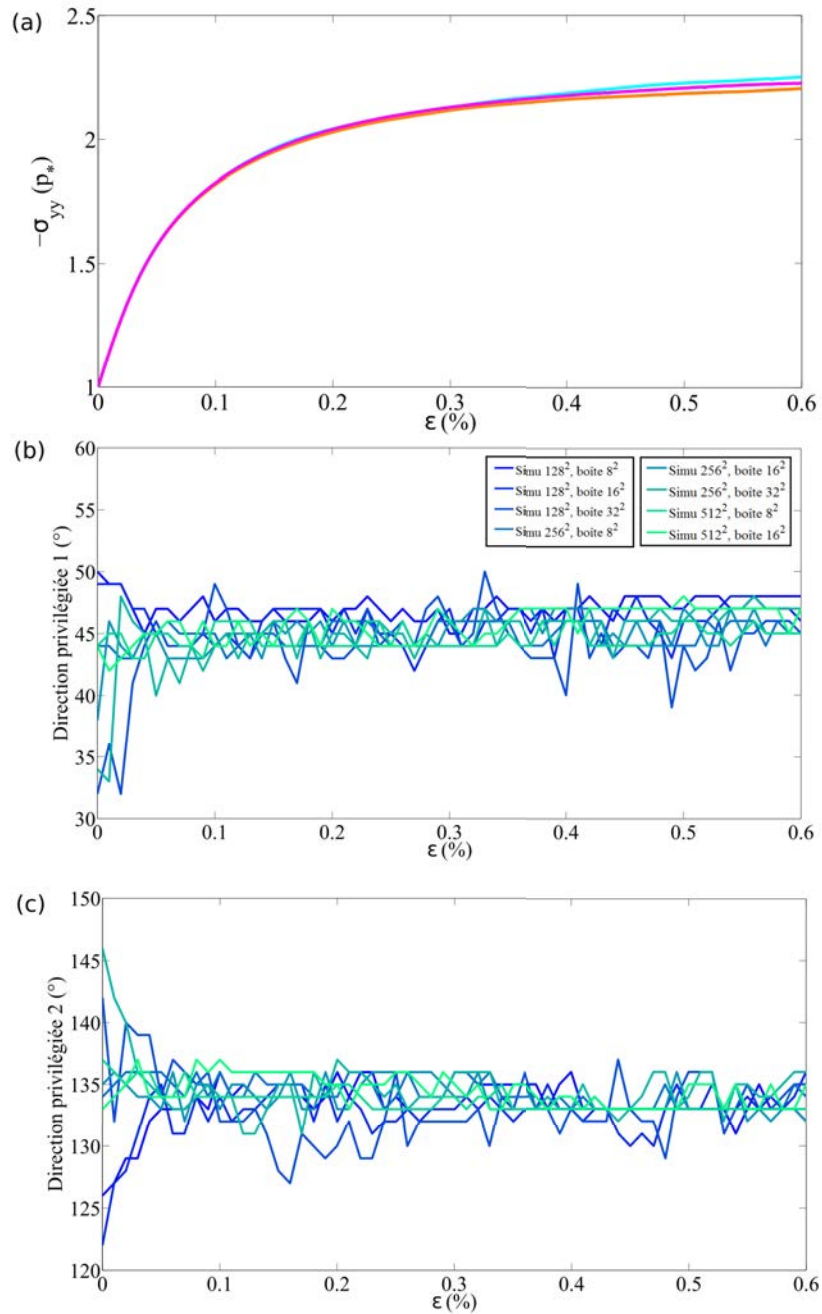


FIGURE V.14 – (a) : les courbes de charge de trois simulation. La cyan : 128² grains ; l’orange : 256² grains et la magenta : 512² grains ; (b) et (c) : évolution de deux directions privilégiées de petites bandes dans les boîtes obtenues par l’application de la méthode de multi-échelles sur les informations des grains avec l’incrément de 0,01% de la déformation axiale. (b) et (c) ont les mêmes légendes.

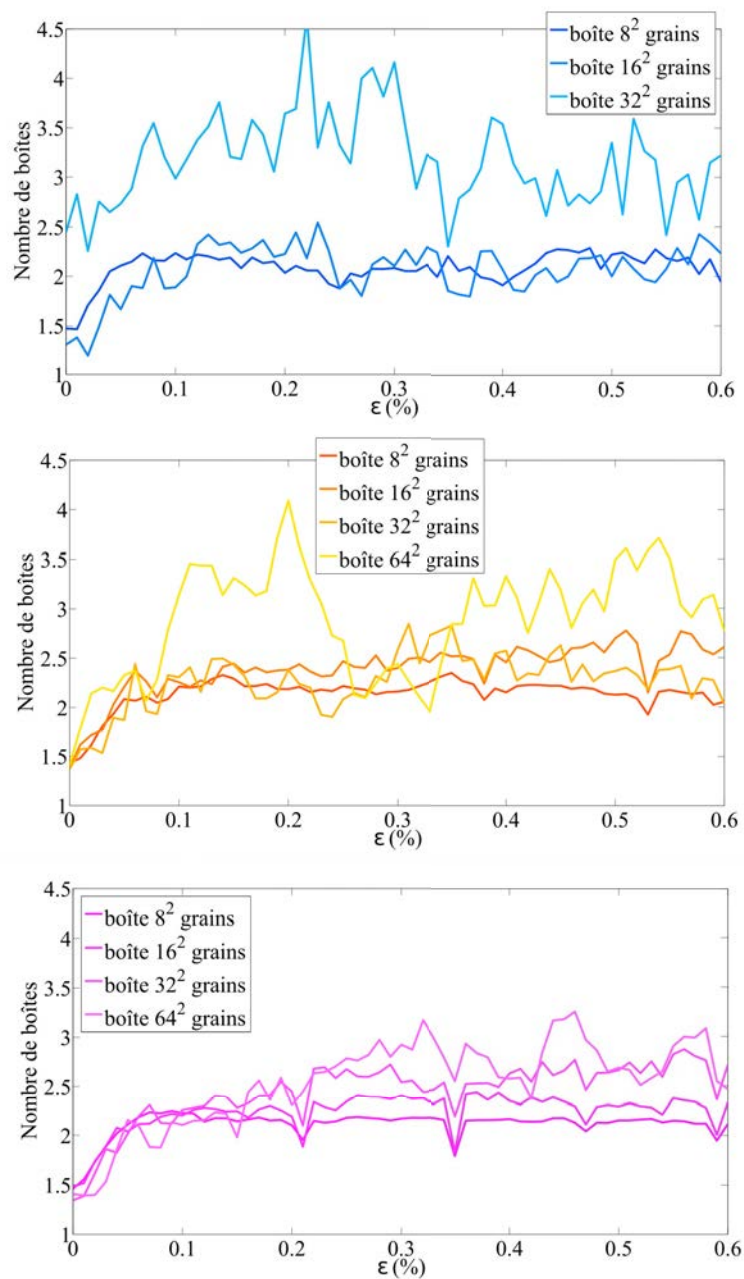


FIGURE V.15 – Évolution du nombre de boîtes normalisé avec l'incrément de 0,01% de la déformation axiale pour la direction privilégiée 1 (45°). En haut : simulations de 128^2 grains. Au centre : simulations de 256^2 grains. En bas : simulations de 512^2 grains.

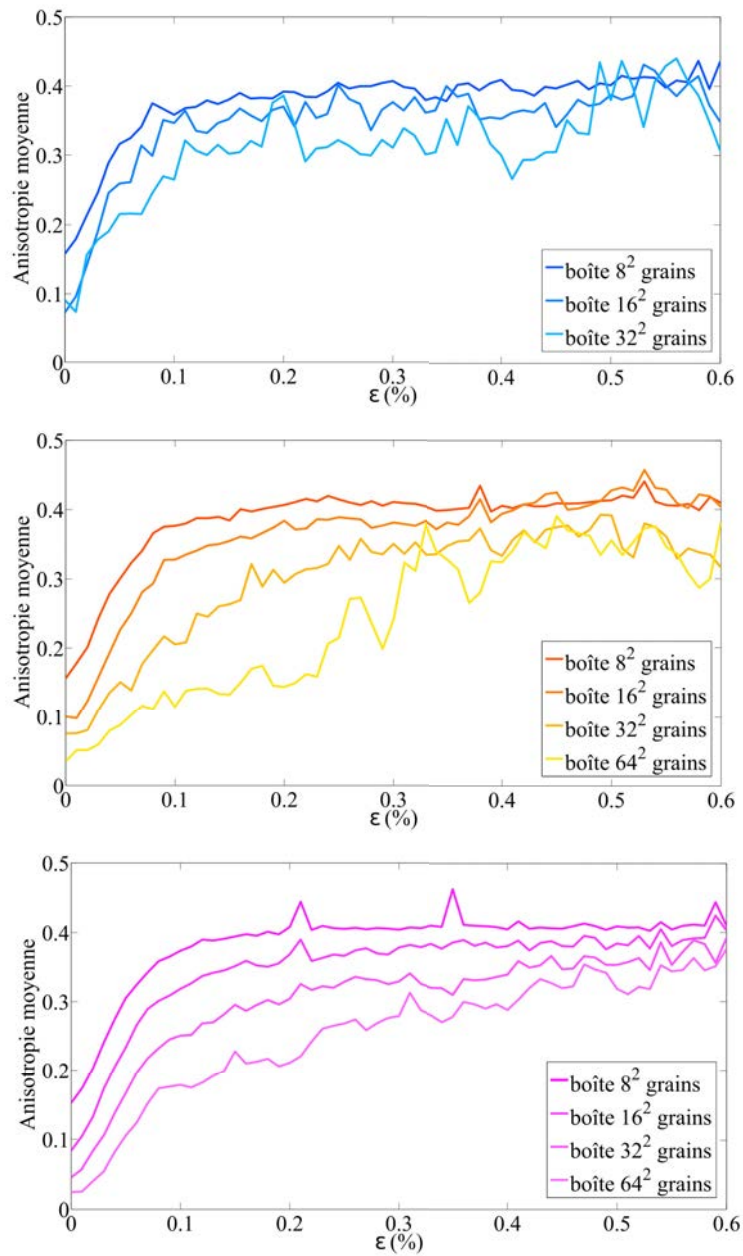


FIGURE V.16 – Évolution de l'anisotropie moyenne avec l'incrément de 0,01% de la déformation axiale pour la direction privilégiée 1 (45°).

moyenne croît jusqu'à une valeur maximale et reste quasi-constante. La pente et la durée de cette croissance dépendent de l'échelle analysée. Cette dépendance montre la dynamique de petites bandes : elles s'arrangent premièrement à petite taille et puis forment un réseau.

Chapitre VI

Réponse du matériau à une petite perturbation à l'approche de la rupture

Après avoir caractérisé la dynamique de la formation d'une bande de cisaillement, on s'intéresse aussi à étudier la réponse du matériau à une petite perturbation à l'approche de la rupture en collaboration avec Jérôme Crassous (Institut de Physique de Rennes, Équipe Matière molle). On a fait des expériences et des simulations numériques préliminaires pour examiner l'influence d'une perturbation localisée sur la structure autour durant un test biaxial. Ce travail est présenté dans deux sections suivantes.

VI.1 Biaxial expérimental avec l'inclusion

Pour effectuer un déplacement local, on utilise une céramique piézoélectrique de $2 \times 2 \times 2 \text{ mm}^3$ (figure VI.1(a)). Son déplacement est réglé par un amplificateur et atteint la valeur maximale de $2,2 \mu\text{m}$ lors d'une tension de 100V. La céramique piézoélectrique est fixée par un ruban adhésif sur la surface de la plaque de verre qui est en contact avec les grains, comme dans la figure VI.1(b). Nous présentons la courbe de charge d'un test biaxial avec la céramique piézoélectrique dans la figure VI.2.

À partir de $\epsilon = 1\%$, pour tous les $0,3\%$ de la déformation, on applique une petite pause à la compression pour faire deux cycles identiques du réglage de l'amplificateur : $0\text{V} - 100\text{V} - 0\text{V}$. Ces étapes du réglage sont détaillées dans la figure VI.3.

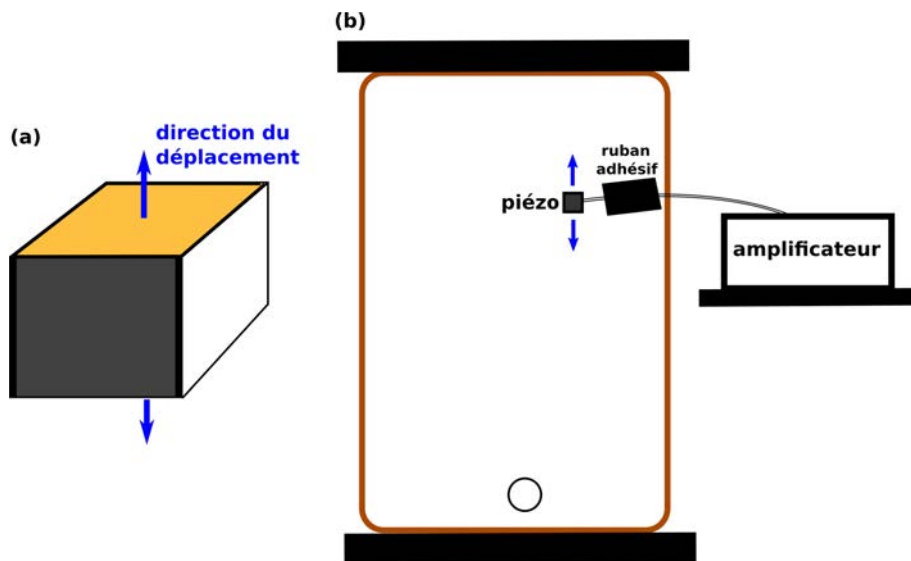


FIGURE VI.1 – (a) : Céramique piézoélectrique. (b) : Schéma du test biaxial avec la céramique piézoélectrique.

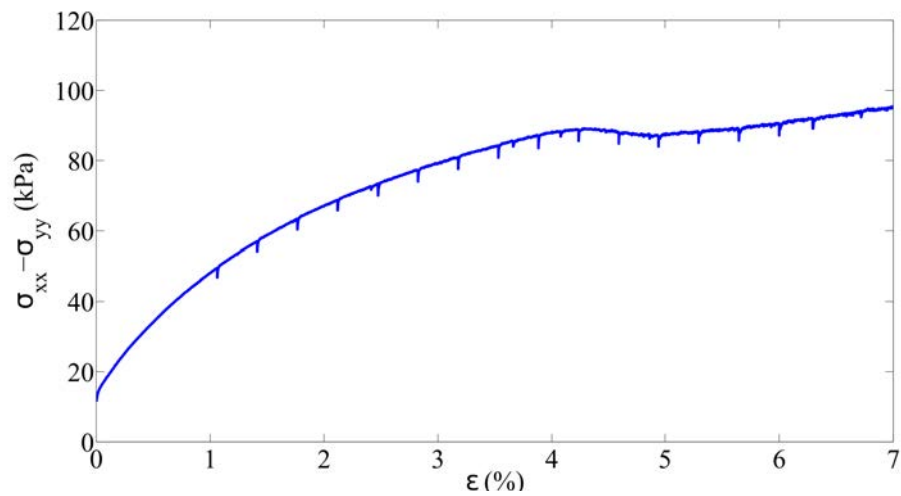


FIGURE VI.2 – Courbe de charge d'une expérience avec la céramique piézoélectrique.

Dans la courbe de charge, équivalentes aux pauses, on observe des relaxations de la contrainte. Ensuite, après la pause, la contrainte croît rapidement au niveau de contrainte d'avant la pause et reprend la croissance.

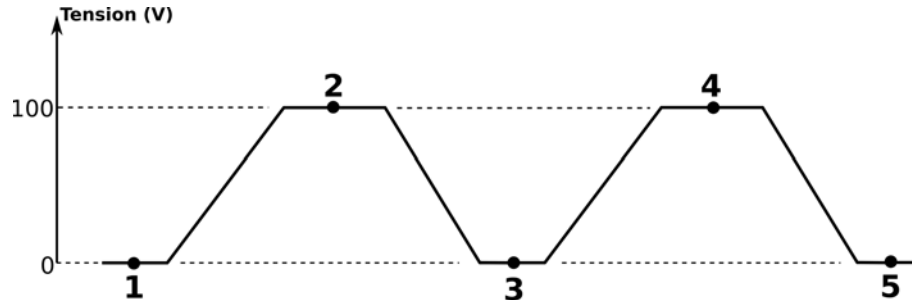


FIGURE VI.3 – Étapes du réglage de l'amplificateur pour chaque pause.

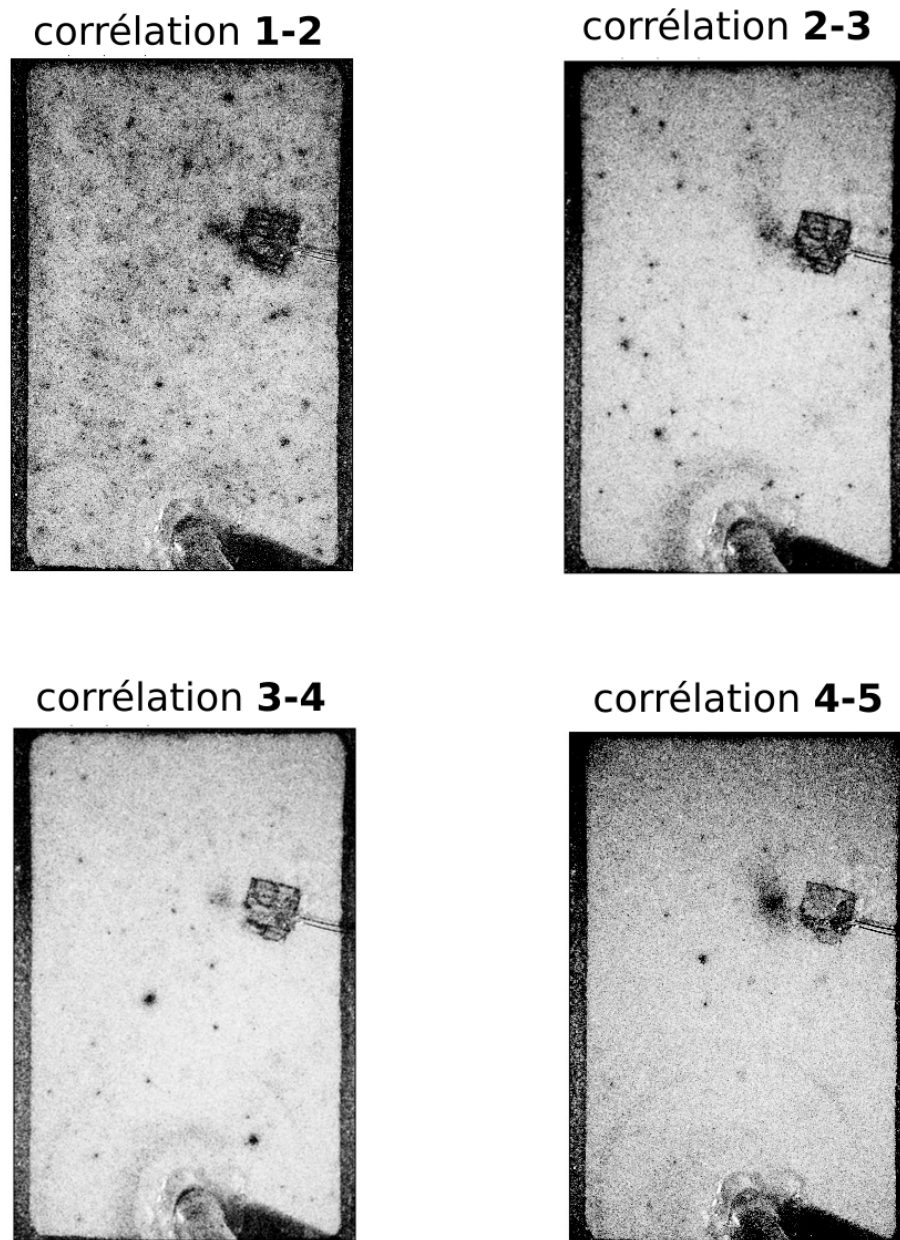
Pour chaque état de **1** à **5** dans la figure VI.3, on prend une image de speckle. Puis on calcule la fonction de corrélation entre deux états et l'exprime dans une carte des niveaux de gris. Plus la déformation est importante, plus la couleur correspondante est sombre. L'un des buts est d'étudier la réversibilité et la réponse élastique du matériau lors d'une petite perturbation. Nous présentons la réponse du matériau pour un même état du piézoélectricité dans les figures VI.4, VI.5, VI.6, VI.7 et VI.8.

VI.2 Biaxial numérique avec le gonflement et le dégonflement d'un grain

De même principe du test biaxial avec l'inclusion, on réalise des simulation numérique biaxiale en modifiant la taille d'un grain. C'est-à-dire qu'à un moment choisi du test biaxial, on arrête d'appliquer la vitesse constante sur le mur 3 de l'échantillon et on fait gonfler ou contracter le grain au centre pendant une durée que l'on choisit (voir figure VI.9).

En posant que t_n est le temps actuel et t_{end} est la durée de la variation de la taille du grain, on divise t_{end} par n parties. Pour nos simulations, on choisit $n = 10$, le pas de temps est donc : $\delta t = \frac{t_{end}}{10}$. Ensuite, on utilise une fonction exponentielle pour évoluer la variation de la taille du grain en définissant un facteur

$$f : f = \frac{e^\alpha}{e^\alpha + \frac{1}{e^\alpha}} \text{ avec } \alpha = \frac{t_n - \frac{t_{end}}{2}}{\delta t}. \text{ On pose que } R_0 \text{ est le rayon avant modifier du}$$

FIGURE VI.4 – Réponses du matériau pour les incréments 1 – 2, 2 – 3, 3 – 4 et 4 – 5 à $\varepsilon = 1\%$.

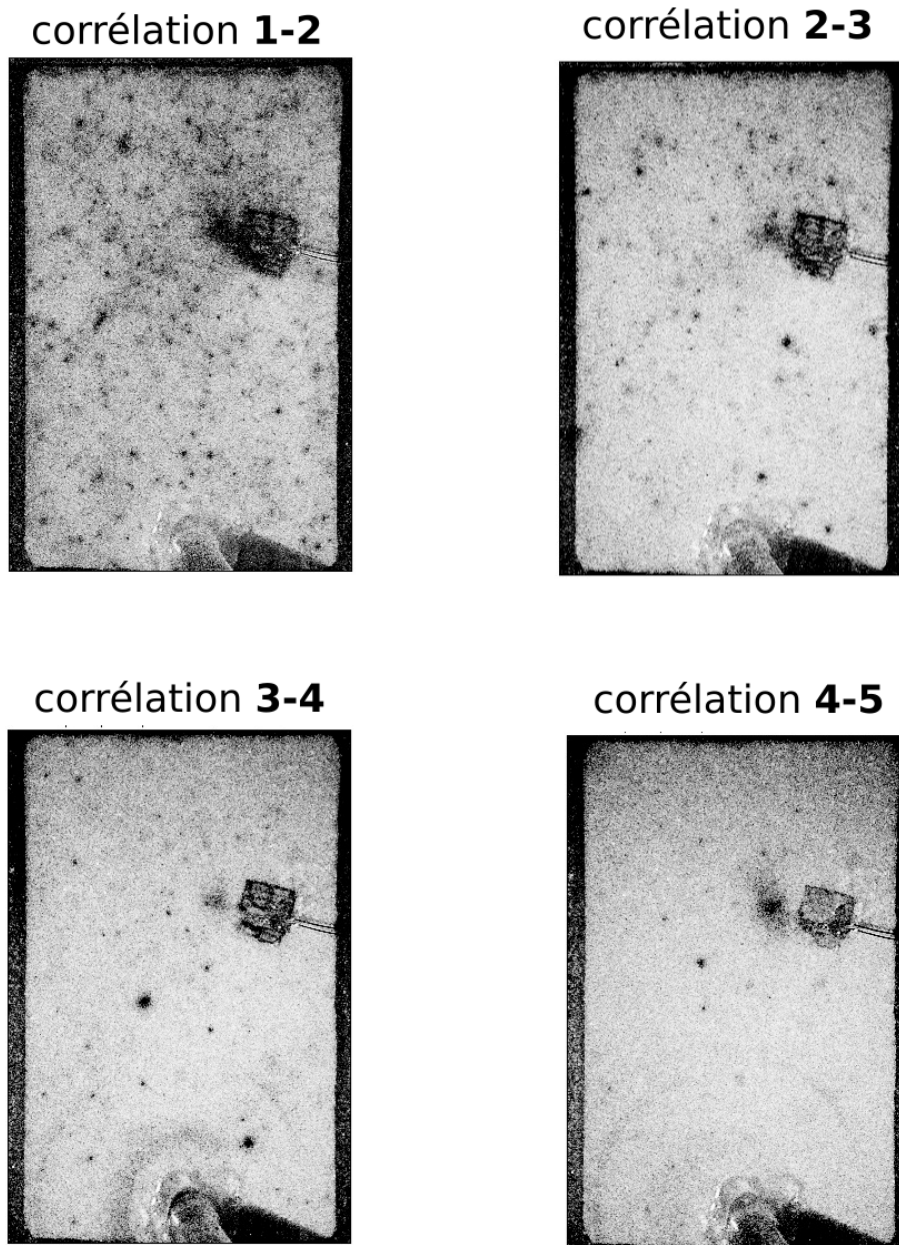
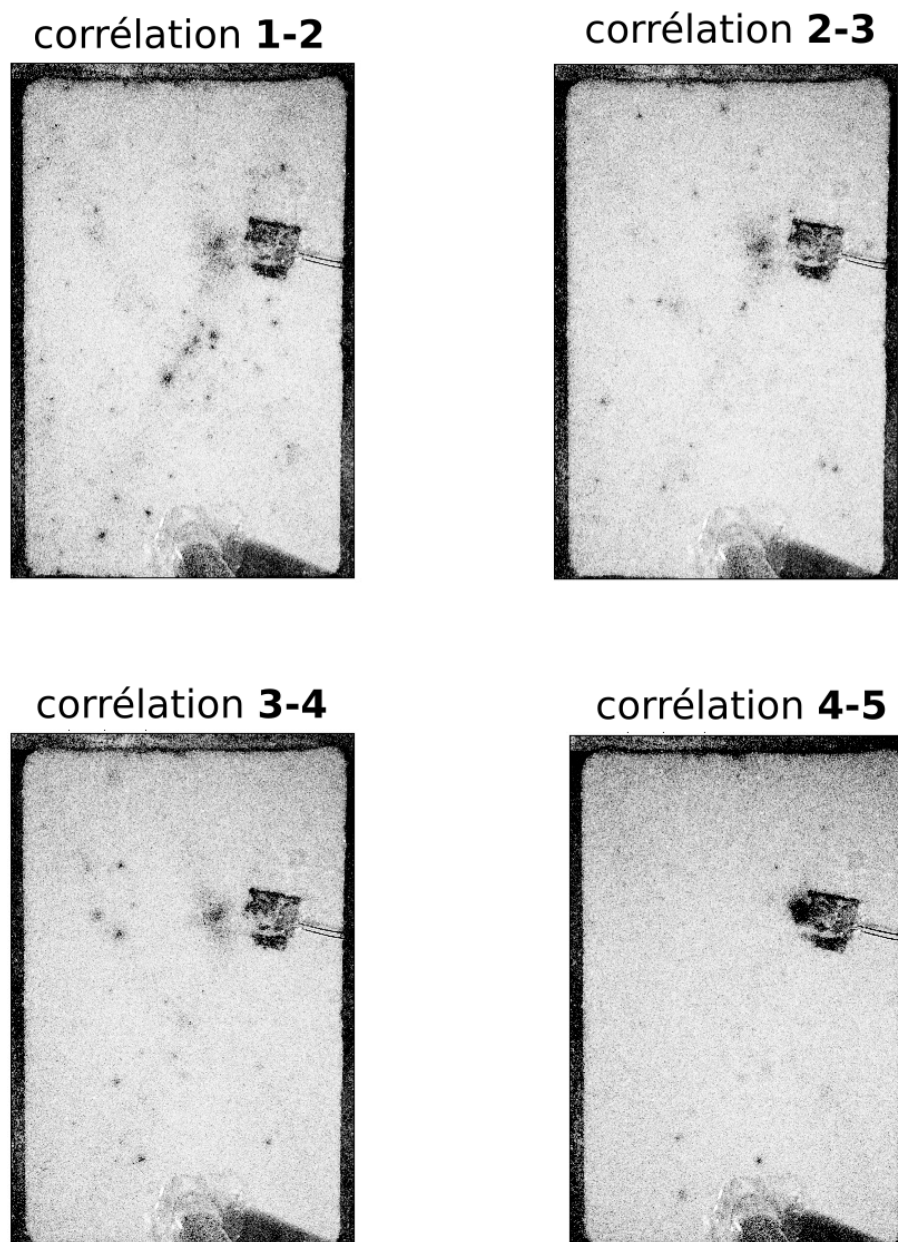


FIGURE VI.5 – Réponses du matériau pour les incréments **1-2**, **2-3**, **3-4** et **4-5** à $\varepsilon = 2,1\%$.

FIGURE VI.6 – Réponses du matériau pour les incréments 1–2, 2–3, 3–4 et 4–5 à $\varepsilon = 3,9\%$.

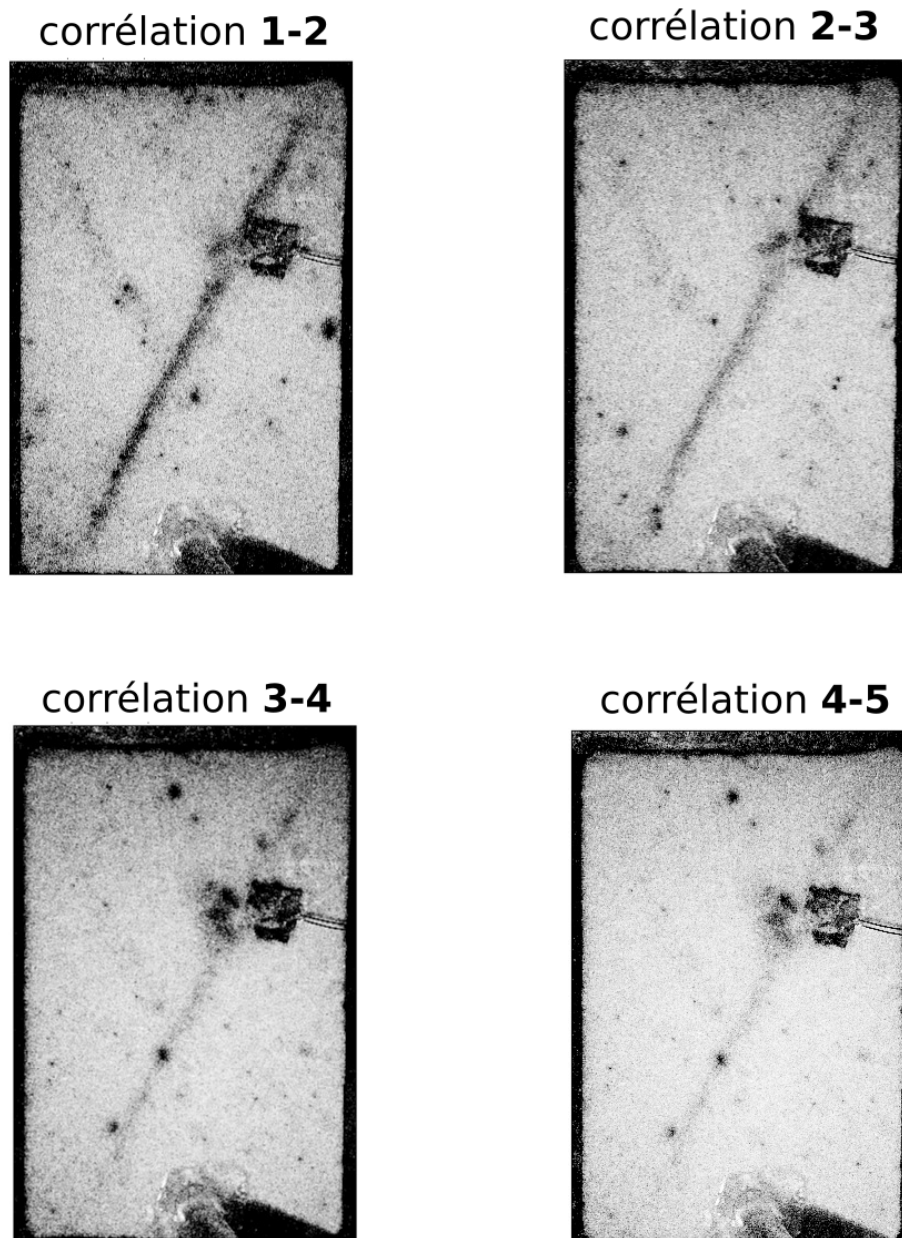
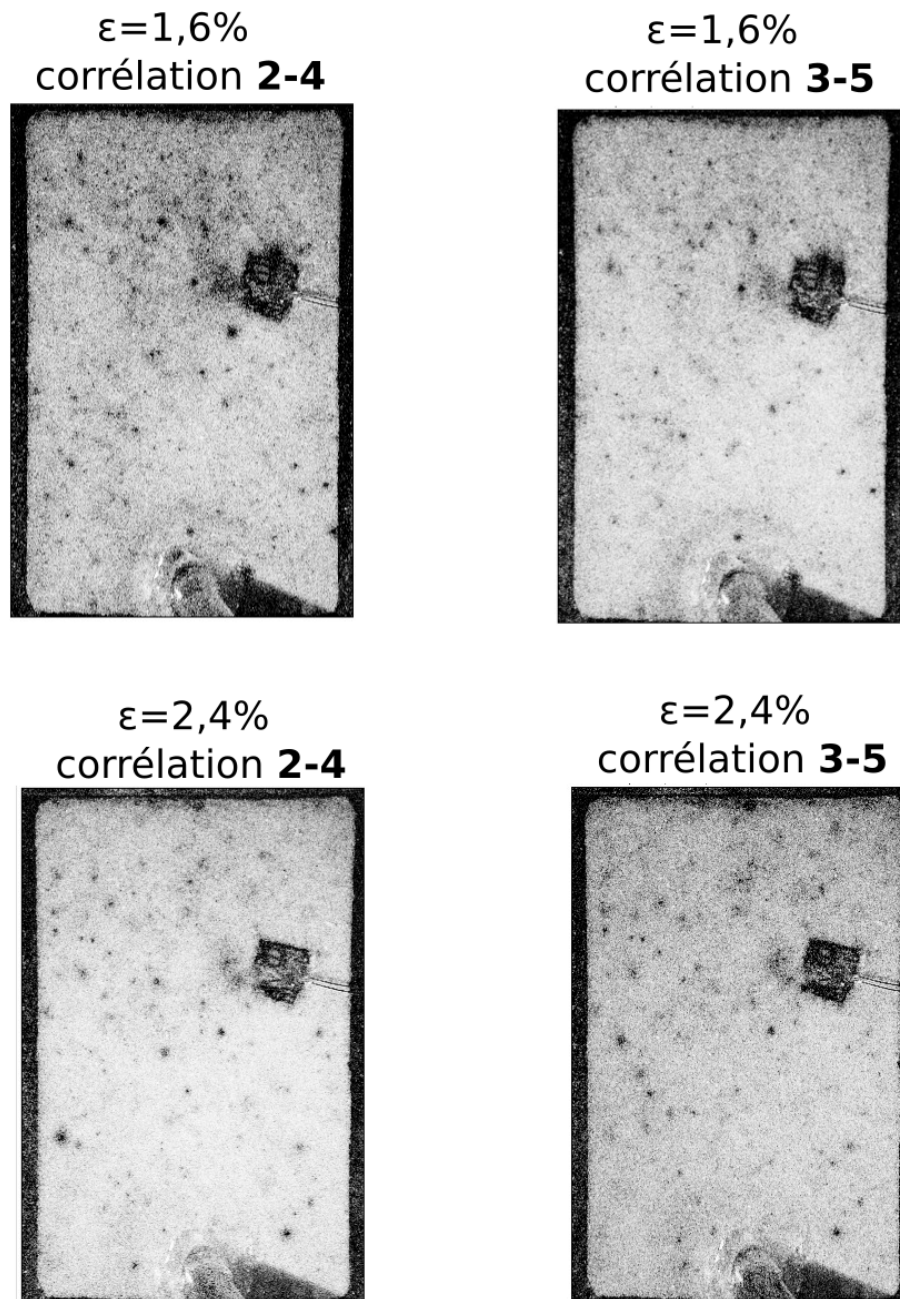


FIGURE VI.7 – Réponses du matériau pour les incréments **1-2**, **2-3**, **3-4** et **4-5** à $\varepsilon = 5,1\%$.

FIGURE VI.8 – Réponses du matériau pour les incréments **2-4** et **3-5** à $\varepsilon = 1,6\%$ et $\varepsilon = 2,4\%$.

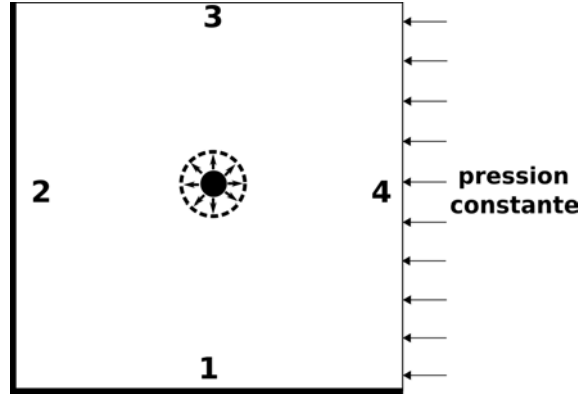


FIGURE VI.9 – Schéma du gonflement du grain central.

grain et $R_n = R_0 + \beta R_0$ est le rayon qu'on veut atteindre à la fin du gonflement ou de la contraction. Le rayon du grain pour chaque pas de temps durant la variation est donc calculé par : $R_n = R_0 + f \times (\beta R_0)$. L'évolution du facteur f au cours du temps est présentée dans la figure VI.10.

On calcule la valeur du rayon du grain à trois pas typiques de temps :

$$t_n = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{t_{end}}{\delta t} = -5 \Rightarrow f = \frac{\frac{1}{e^5}}{e^5 + \frac{1}{e^5}} \approx 0 \Rightarrow \mathbf{R_n = R_0}$$

$$t_n = T_0 = \frac{t_{end}}{2} \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow f = \frac{\frac{1}{e^0}}{e^0 + \frac{1}{e^0}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbf{R_n = R_0 + \frac{1}{2} \times (\beta R_0)}$$

$$t_n = t_{end} \Rightarrow \alpha = \frac{t_{end} - T_0}{\delta t} = 5 \Rightarrow f = \frac{e^5}{e^5 + \frac{1}{e^5}} \approx 1 \Rightarrow \mathbf{R_n = R_0 + (\beta R_0)}$$

La fonction exponentielle du facteur f nous donne donc une évolution exponentielle de la taille du grain.

On effectue le processus de la modification de la taille du grain à une simulation de 600^2 grains. La courbe de charge est présentée dans la figure VI.11(a).

À quatre points A, B, C et D sur la courbe de charge correspondants à 0,05%, 0,1%, 0,15% et 0,5% de la déformation axiale, le grain situé au centre de l'échantillon est gonflé avec $\beta = 0,02$ pendant une durée $t_{end} = t_*$. Pour chaque point, on

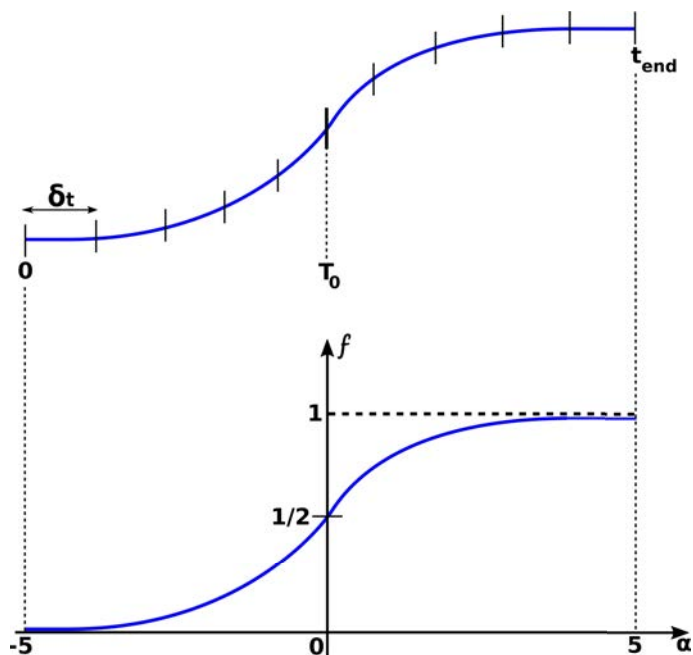


FIGURE VI.10 – Évolution exponentielle du facteur f au cours du temps.

fait une carte de déformation qui représente la déformation des grains entre avant et après le gonflement. La figure VI.11(b) montre les quatre cartes de déformations.

On observe que le gonflement du grain central entraîne les déformations des grains autour. On souhaite dans le futur réaliser ce travail avec des simulations plus grandes et caractériser des directions de ces réarrangements.

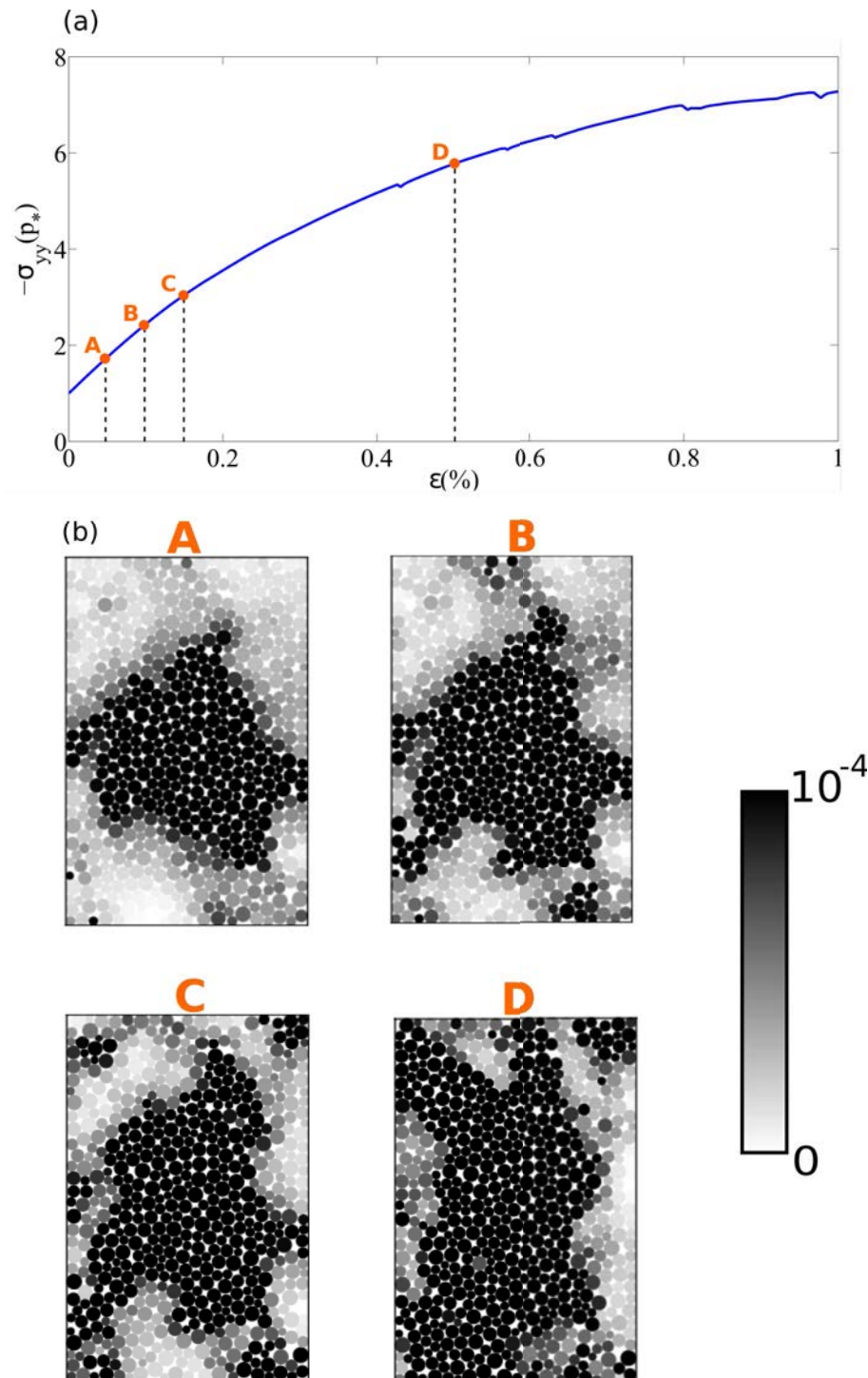


FIGURE VI.11 – Courbe de charge de la simulation 600^2 grains.

Conclusion générale

Le travail de recherche exposé dans ce mémoire avait pour l'objectif d'étudier expérimentalement et numériquement les déformations dans un milieu granulaire lors d'un test biaxial.

Une première partie de notre travail a été consacrée à la réalisation des tests biaxiaux en déformation plane et à l'analyse des résultats expérimentaux. Le matériau granulaire utilisé est des billes de verre de la taille de $70 - 110\mu m$. On a utilisé la méthode de la diffusion multiple de la lumière pour la visualisation des micro-déformations. Grâce à une fonction de corrélation, nous avons obtenu des cartes de corrélations qui représentent les déformations du matériau pour un incrément de déformation axiale $\delta\varepsilon \simeq 3 \times 10^{-5}$. Sur les cartes de corrélations, nous avons observé la localisation de la déformation en bandes de cisaillement à la rupture du matériau correspondant au palier de la courbe de charge. L'inclinaison des bandes de cisaillement a été décrite par le modèle de Morh-Coulomb. En effet, les angles d'inclinaison des bandes mesurés sur les cartes de corrélations en rupture sont cohérents avec les angles de Morh-Coulomb calculés à partir des courbes de charges. De plus, en appliquant des outils d'analyse d'images, on a constaté que la localisation de la déformation est un processus progressif initié par une bifurcation correspondant à une orientation bien définie de la bande de cisaillement. Cette orientation est en accord avec l'angle de Morh-Coulomb et apparaît dans le matériau avant la rupture. Ensuite, avec la mesure de la largeur à mi-hauteur, on a montré que le champ plastique est diffus et se concentre progressivement sur zone de plus en plus étroite. Et puis, des études préliminaires de l'évolution de la taille caractéristique des fluctuations constituant le champ de déformation plastique semblent montrer une augmentation avant la bifurcation.

La seconde partie de notre travail se concentre sur la modélisation numérique du test biaxial dans des conditions similaires à celles de l'expérience et sur l'application de l'analyse multi-échelles aux résultats numériques. le but est d'étudier la partie

fluctuante dont la phénoménologie est semblable à celle de l'expérience même si pas de bande finale stationnaire. Les courbes de charges des simulations ont les mêmes formes que ceux des expériences. Et puis, on a défini une formule pour calculer la déformation d'un grain entre deux états consécutifs du chargement. On a exprimé les déformations de tous les grains par des niveaux de gris sur une carte de grains appelée la carte de déformation. Comme les cartes de corrélations, avant l'apparition des grandes bandes, on a observé un réseau de petites bandes sur les cartes de déformations. L'application de l'analyse multi-échelles nous a montré que les orientations privilégiées de ces petites bandes sont de 45° et 135° , en accord avec la prédiction d'Eshelby. On a aussi montré l'évolution de l'anisotropie moyenne correspondant à ces deux directions privilégiées au cours de la charge. On a observé une croissance de l'anisotropie moyenne dépendant de l'échelle analysée. Cette observation montre que la taille caractéristique des structures augmente avec la déformation axiale.

Annexe A

Experimental study of shear band formation: Bifurcation and localization

T. B. NGUYEN and A. AMON^(a)

*Université de Rennes 1, Institut de Physique de Rennes (UMR UR1-CNRS 6251) - Bât. 11A,
Campus de Beaulieu, F-35042 Rennes, France*

received 31 August 2016; accepted in final form 17 November 2016
published online 1 December 2016

PACS 83.80.Fg – Granular solids

PACS 91.55.Fg – Dynamics and mechanics of faulting

PACS 81.40.Lm – Deformation, plasticity, and creep

Abstract – We report the experimental observation of the bifurcation at the origin of localization of the deformation in a granular material submitted to uniaxial compression. We present a quantitative characterization of the heterogeneity in the strain field repartition allowing to evidence objectively the existence of a bifurcation initiating the shear bands formation process. We show that this bifurcation is supercritical and has no clear signature on the stress-strain curve. At the bifurcation, a symmetry breaking occurs characterized by the emergence of a well-defined orientation corresponding to the Mohr-Coulomb angle. Yet, plasticity is still diffuse and the shear band extension is of the order of the sample width. While loading proceeds, the shear band narrows until it reaches, after the peak of the stress-strain curve, a stationary width.

Copyright © EPLA, 2016

Introduction. – Numerous amorphous materials such as foams, colloidal glasses, granular materials or metallic glasses, tend to present shear banding when they are sheared, *i.e.*, the concentration of the deformation in a subpart of the system, so that a cohabitation between an almost solid part and a fluid-like part is observed [1].

In the case of granular materials, this localization of the deformation takes the form of failure planes of a few beads diameter thickness [2–4]. Because this localization of the deformation has obvious connection with soils stability and fault formation, numerous works have been devoted to its prediction. In the context of elastoplasticity, localization is described as a bifurcation phenomenon [3,5,6] which corresponds to the emergence of solutions presenting discontinuities in the strain rate field. The condition yields solely a direction, without any prediction concerning the number of bands, their thickness or their position. Experimentally, setup allowing a full-field observation of the strain repartition during the loading are scarce [4,7,8] and there has been a long debate if shear bands emerge before, at or after the peak of the loading curve. Recent progresses in the detection methods [9,10] have allowed to observe intermittent inhomogeneities in the strain field occurring before failure [11–13]. Those results have renewed

the interest for this field of research with a particular interest for the understanding the microscale processes at the origin of the shear bands formation [14]. All those studies show that the localization process initiates well before the peak of the loading curve and cannot be identified has the sudden propagation of a failure plane from a defect. Surprisingly, a clear experimental signature of the bifurcation coining the initiation of the localization process is still missing.

As granular materials are amorphous materials, an approach to understand the physics underlying the shear localization process is to tackle the problem from the soft glassy materials point of view. Indeed, recent progresses in the understanding of the elementary mechanisms at the origin of their plastic response have been made [15] and the similarities in their behaviors allow to hope for a universal description of the plastic flow of amorphous systems. Failure and shear bands formation in this framework are supposed to originate from the elastic long-range coupling between the elementary plastic events which initiates avalanches of correlated rearrangements. Corresponding to this picture, recent numerical and theoretical works show that the failure of amorphous materials could be seen as a critical phenomenon [16,17]. The question of the nature of this transition and of the universality class to which it belongs is one of the key questions of the field.

^(a)E-mail: axelle.amon@univ-rennes1.fr

Several recent works, both experimental [18,19] and theoretical [20] point towards a discontinuous phase transition, *i.e.*, a first-order transition. Practically, depending on the material and on the loading conditions, the precise form and nature of the shear bands differ from one system to another [1]. It is thus not clear if the universality of the mechanism of plasticity at the elementary scale hold when the plasticity self-organizes at a larger scale into shear bands.

Here we present an experimental study of the whole process of failure in a granular sample submitted to a biaxial test, from the initial homogeneous deformation to final permanent shear bands. Using image analysis tools, we quantify the anisotropy in the spatial distribution of the strain and exhibit objective quantities to characterize shear bands formation. We demonstrate experimentally the existence of a bifurcation during the loading process corresponding to a symmetry breaking and to the birth of a definite direction in the strain field. We show that this bifurcation is supercritical: no discontinuity occurs in the observed field during the loading and at the bifurcation, the strain field is still diffuse in the material. As the loading proceed, the thickness of the shear band decreases until it reaches a stationary value.

In a first part, we describe the experimental setup. In a second part we present the image analysis tools which allow us to give an objective measurement of the spatial repartition of the deformation in the sample and we apply it to the analysis of our experiments. In the last part, we discuss our results in the framework of different theories.

Experimental setup. – The setup is a biaxial compressive test extensively described in another publication [11] and schematized in fig. 1. The material consists in dry glass beads of diameter $d = 70\text{--}110\ \mu\text{m}$. It is placed between a preformed latex membrane ($85 \times 55 \times 25\ \text{mm}^3$) and a glass plate. A pump produces a partial vacuum inside the membrane, creating a confining pressure $-\sigma_{xx}$. The preparation of the sample ensures reproducible experiments at a volume fraction of ≈ 0.60 . The prismatic sample thus obtained is placed in a testing machine which enforces the following conditions: i) the back plate and the front glass plate forbid displacements normal to their plane and thus ensure plane strain conditions; ii) a roller bearing at the bottom allows for a translational degree of freedom. This feature is a modification of the setup of ref. [11] which allows a breaking of symmetry when failure occurs as we will see in the following; iii) the upper plate is displaced vertically by a stepper motor with a velocity of $1\ \mu\text{m/s}$ leading to a deformation rate of $1.1 \times 10^{-5}\ \text{s}^{-1}$. A sensor fixed on the top plate measures the force exerted in the y direction from which the stress on the plate is deduced. The value of the confining stress for all the experiments presented here is $30\ \text{kPa}$ so that crushing of particles is not expected. The loading curves of three different experiments prepared in the same conditions are shown in fig. 1(c). Such curves are very similar to loading

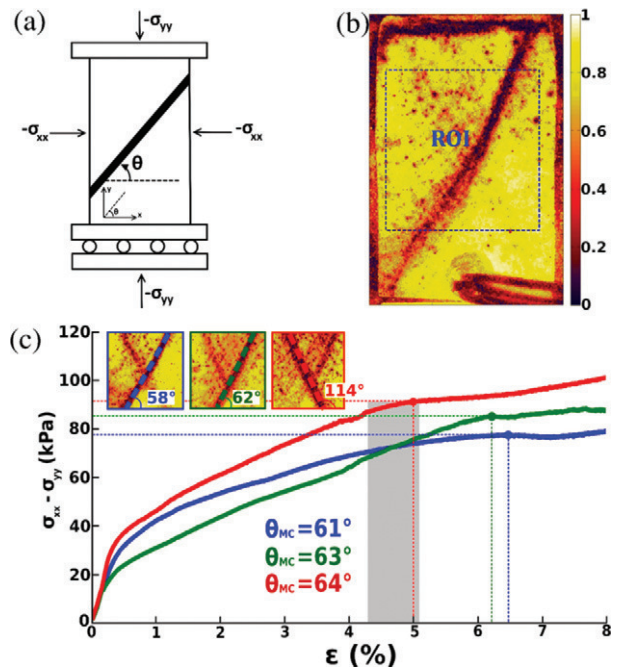


Fig. 1: (Color online) (a) Schematic of the biaxial test. (b) Example of a correlation map with the color code scale. The square region of interest (ROI) used for image analysis is shown in blue. (c) Loading curves for three different runs. The gray zone is the same as in fig. 3 and indicates roughly the position of the bifurcation for all three experiments. The values of the Mohr-Coulomb angles deduced from the loading curves are given for each run (θ_{MC}). Upper insets: correlation maps at the plateaus with direct measurement of the shear bands inclination.

curves reported in the literature for not too dense samples. A plateau with a local maximum can be identified for each of those curves indicating a modification in the response of the material. Those changes in response are usually identified as indicator of the failure of the material: after this point the sample is supposed to be best represented as separated in blocks in relative solid translation. In our experiments those local maxima occur at a value of the deviatoric stress in the range 80 to $90\ \text{kPa}$, corresponding to an axial deformation of 5 to 6.5% . From the value of stress at those points, the Mohr-Coulomb angle, θ_{MC} , can be deduced for each experiment [21]: $\theta_{MC} = 45^\circ + \frac{1}{2} \sin^{-1} \left[\frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{\sigma_{yy} + \sigma_{xx}} \right]$. Our measurements give an average of $62.5^\circ \pm 1.5^\circ$.

We use a full-field method based on dynamic light scattering for the quantification of the spatial repartition of the deformation. This method has been described in details in previous publications [10,22]. A laser beam ($532\ \text{nm}$) is expanded to illuminate the material. The light is multiply scattered inside the sample and we collect the backscattered light. The multiple light rays interfere to form a speckle pattern. The image of the front side of the sample is recorded by a 7360×4912 pixels camera. Images are subdivided in square zones of size

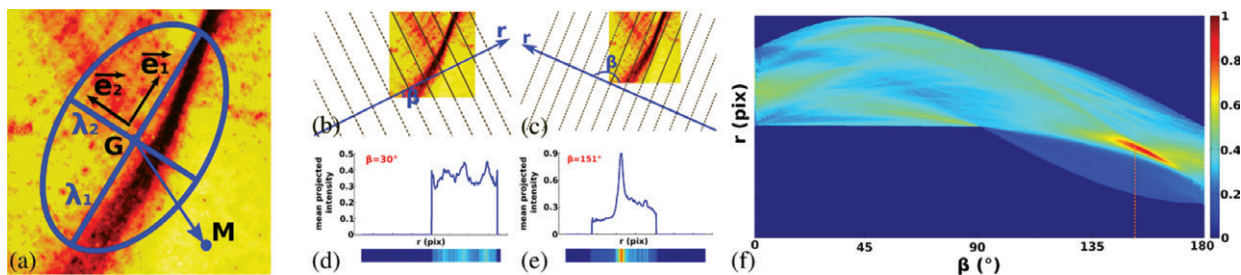


Fig. 2: (Color online) (a) Graphical representation of the inertia tensor $\overline{\overline{P}}$ computed from the pixels of the image using eq. (2). (b)–(e): principle of the projection method. (b) and (c): the intensities of the pixels are averaged along the direction orthogonal to a line given by its slope β ((b) $\beta = 30^\circ$, (c) $\beta = 151^\circ$). (d) and (e): unidirectional curve of averaged intensity obtained for each value of β . Those curves can also be represented using a colorscale as shown underneath each curve. (f) Juxtaposition of the projected profiles obtained for all values of β . From the value of the maximum of the map, the principal orientation in the initial image can be deduced.

16×16 pixels. For each zone the correlation between two successive speckle patterns 1 and 2 is computed as

$$g_I^{(1,2)} = \frac{\langle I_1 I_2 \rangle - \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle}{\sqrt{\langle I_1^2 \rangle - \langle I_1 \rangle^2} \sqrt{\langle I_2^2 \rangle - \langle I_2 \rangle^2}}, \quad (1)$$

where I_1 and I_2 are intensities of the pixels of two successive images and the averages $\langle \cdot \rangle$ are done over the 16×16 pixels of a zone. Each computed value gives a pixel in the final correlation map and corresponds to a volume of area in the front plane $2d \times 2d$ and depth of a few d . An example of a map of correlation is shown in fig. 1(b). The normalisation of the correlation function ensures that the correlation values are in the interval $[0, 1]$ and the colorscale used in all the following is shown in fig. 1(b). The decorrelation of the scattered light comes from relative beads motions, *i.e.*, combination of affine and nonaffine bead displacements and rotation of nonspherical beads. In the following, the axial deformation increment between the two images used to obtain a map is 3.2×10^{-5} .

Spatial repartition of the deformation. – A movie of the successive correlation maps during the loading is in supplemental material. The general phenomenology observed during the loading has been already described elsewhere [11,12]. Strain repartition in the sample is inhomogeneous. Intermittent micro-bands are observed from the beginning of the loading until the final shear bands are established. This microstructure has been studied before and the orientation of the micro-bands differ from the orientation of the final shear bands [12]. The former corresponds to the orientation predicted by elasticity for stress released by local plastic rearrangements (Eshelby’s quadrupolar redistribution [23]) and does not depend of the frictional properties of the material. On the other hand distinct final shear bands are observed in all our experiments with an orientation in agreement with the Mohr-Coulomb angle deduce from the loading curves [21] as is shown in the insets of fig. 1(c).

The goal of the present letter is to study the process of formation of the final shear bands. For our purpose, we

need to exhibit objective quantities from our deformation maps. To remove intermittent fluctuations, we average stacks of 50 consecutive maps to obtain a smooth strain field. We underline that no further image treatment is done on the images. In the following, we first present the image analysis tools we use to characterize the degree of localisation in the sample and the orientation of the observed large-scale structure. In a second part, we use those tools to study shear band formation.

Image analysis. To quantify the emergence of an oriented structure at a large scale and its degree of localisation, we use two different tools that we call in the following anisotropy measurement for the first one and projection analysis for the second one. For those two methods we need that information encoded in the image (*i.e.*, deformation) have the largest weight when the correlation is low. Consequently we define for each correlation map its invert image which we call activity image. The values of the pixels of those images are given by $I_A(\vec{r}) = 1 - g_I(\vec{r})$ and all the subsequent analyses are done on the activity images.

To characterize the degree of anisotropy in an image we use a method extensively described elsewhere [24]. Considering the value of each pixel of an activity image as a weight, we compute the center of mass of the image G and the inertia tensor $\overline{\overline{P}}$ which quantify the spatial repartition of the weights around G (see fig. 2(a)):

$$\overline{\overline{P}} = \sum_{\vec{M}} I_A(\vec{M}) \overline{\overline{GM}} \otimes \overline{\overline{GM}}. \quad (2)$$

This tensor has two positive eigenvalues noted $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. The eigenvector associated with the largest eigenvalue gives the principal direction of the anisotropy in the image and the anisotropy index $a = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ gives a measurement of the degree of anisotropy between 0 (isotropic) and 1 (maximal anisotropy). A visualization of the tensor can be given by an ellipse of axis determined by the eigenvalues and eigenvectors of $\overline{\overline{P}}$ (see fig. 2(a)).

The second method consists in projecting the intensity of the activity image on a line going through the origin and with an angle β with the x -axis [25] (see fig. 2(b) and (c)).

Different values of β provide different projection profiles of the same image as shown in fig. 2(d) and (e) which are the profiles obtained for, respectively, fig. 2(b) and fig. 2(c). The aggregation of all the profiles obtained for all possible values of β are shown in fig. 2(f). The line for which the profile present a maximum provides an orientation of the structure (orthogonal to the line) and the full width at half maximum (FWHM) of the profile provides a width of the structure. Note that this method is very close in spirit to the Hough transform [26].

Results. – Figure 3(a) shows the anisotropy of the spatial distribution of the deformation as a function of the axial deformation ϵ for three different experiments (same color code as fig. 1(c)). We observe a good reproducibility from one experiment to the other. The black curve is the mean anisotropy obtained by an average over the different experiments. At the very beginning of the loading ($\epsilon \lesssim 1\%$), the settlement of the sample leads to spurious heterogeneous effects that leads to unrelevant large anisotropy values (see movie in supplemental material). For axial deformations between 1% and about 4.5% the anisotropy is low (about 0.1) and the spatial repartition of the strain can be considered as isotropical on average. From a value of the axial deformation of about 4.5%, the anisotropy increases steadily until it reaches a maximal value at about 6.8%. Beyond this value, depending on the experiment, the anisotropy stays for further loading roughly constant or decreases. Decreases are due to the emergence of a secondary shear band, conjugated to the initial one (see movie `movie.mkv` in the supplemental material).

Figure 3(b) shows the principal orientation of the strain distribution (projection analysis). For an axial deformation smaller than $\sim 4.5\%$, the direction obtained are randomly distributed and the errors on the determination of the angles are large, indicating that no clear orientation can be defined in the images. Beyond $\epsilon \simeq 4.5\%$, each experiment displays a well-defined, constant, orientation. Depending on the experiment this direction is either about 60° or 120° , but the ensemble of orientations collected on all the experiments are symmetrical compared to 90° . There has been thus a symmetry breaking between two possible directions. For one of the experiments (green triangles), the uncertainty on the angle stays large until $\epsilon \simeq 5.3\%$. Still, its anisotropy is increasing steadily from $\epsilon \simeq 4.5\%$ showing that an orientation has emerged even if the band is less clearly defined compared to the other two experiments.

Figure 3(c) displays the evolution of the FWHM of the profile obtained along the principal orientation of the spatial distribution of the strain using the projection method. For values of the axial strain smaller than 4%, the projected profiles are mainly flat with noise so that thickness measurements lead to noisy values of the order of size of the ROI. Thus, FWHM are clearly defined only when the orientation have been determined with small uncertainty. We have added an indication of the axial deformation for which the orientation is well defined for each run (vertical

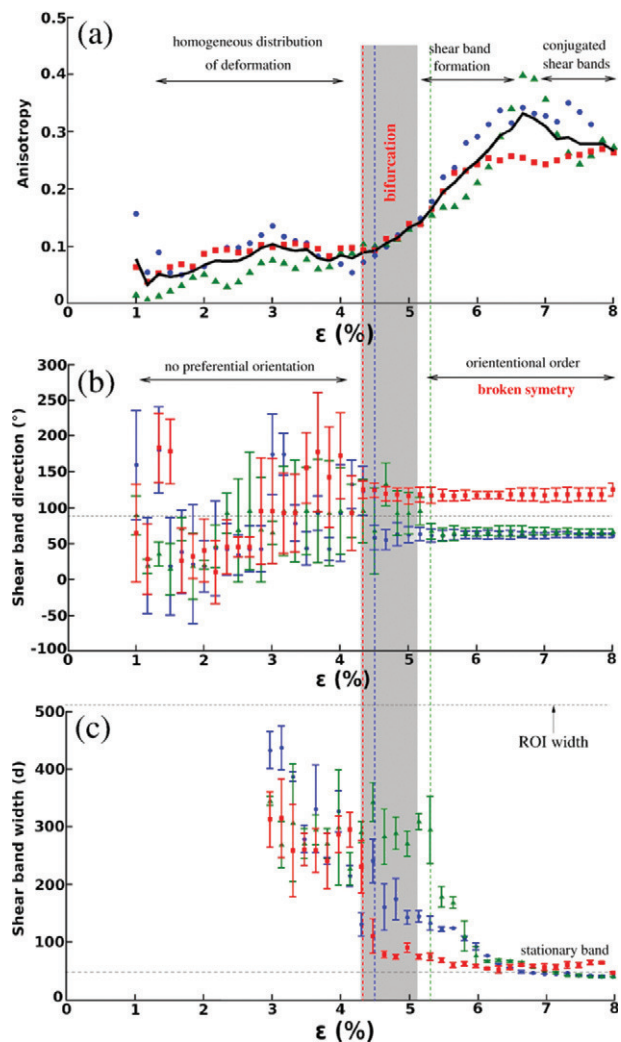


Fig. 3: (Color online) (a) Anisotropy of the spatial distribution of the deformation as a function of the axial deformation. Data points correspond to the three experiments of fig. 1(c). The black solid line is the average of those measurements. (b) Principal orientation of the deformation as a function of the axial deformation for the three same experiments. Horizontal dashed line: 90° . Vertical dashed lines indicate the axial strain from which the orientation has been unambiguously chosen (drastic decrease of the uncertainty) for each experiment. The shadow box has been traced from the mean and standard deviation of those values of the axial strain ($4.7 \pm 0.4\%$). (c) Thickness of the shear band rescaled by the mean diameter of the beads as a function of the axial deformation.

dashed lines). We observe that for all the experiments, the width of the band is still very large (of the order of half the size of the ROI) even though the orientation is unambiguously established and that we are sure that the bifurcation has been crossed. For further loading, a decrease of the width is observed until a stationary value is reached. This stationary value is about $50d$ and stays roughly constant for further loading (*i.e.*, above 8%).

Discussion and conclusion. – The first result that emerges from fig. 3 is that localization of deformation is

indeed initiated by a bifurcation that occurs at an axial strain of about $\epsilon \simeq 4.5\%$. The observed bifurcation coins a breaking of symmetry in the distribution of the strain (see fig. 3(b)) simultaneous to an increase of the anisotropy of this strain distribution (see fig. 3(a)). This bifurcation does not correspond to a sudden localization of the strain distribution in the form of a failure plane. On the contrary, the deformation is still largely diffuse in the sample at the bifurcation (see fig. 3(c)). This bifurcation is thus *supercritical*: neither the anisotropy (fig. 3(a)), nor the width of the band (fig. 3(c)) present a discontinuity. This experimental observation confirms the prediction of several theories that the bifurcation corresponds to the emergence of a direction without any definition of a particular plane or a finite thickness. It is interesting to note that this supercritical feature is closely linked to the progressive organization of plasticity in the material and hence to the ductile nature of the failure.

The location of the bifurcation is reported in fig. 1(c) as a shaded region. It can be seen that this bifurcation occurs well before the plateaus of the loading curves except for one of the experiment. It has to be noted that this particular experiment (red squares) is the one that localizes the first in fig. 3(b) so that the bifurcation also happened before the maximum in this experiment. After the bifurcation, the finite direction that has emerged stays constant for further loading as can be seen in fig. 3(b). Its value corresponds to the Mohr-Coulomb angle which can be deduced from the plateaus of each stress-strain curves. This result is surprising: the Mohr-Coulomb angle emerges in the material *before* the yield stress is reached and the internal friction manifests itself while the system cannot be represented as two blocks sliding one against the other as a rough picture of the Mohr-Coulomb model would suggest [21].

After the bifurcation, the band is progressively forming as can be characterized by the decrease of its thickness (see fig. 3(c)). It reaches a stationary value at an axial strain of about $\epsilon \gtrsim 6.5\%$. The shear band thickness we measure ($\sim 50d$) is significantly larger than the ones reported in the literature [3,7] by more direct measurements which are generally about $\sim 10\text{--}20d$. This is due to the high sensitivity in strain of our measurement method. Indeed, it is now well established that the transition between the liquid-like and solid-like regions of a granular material are not well defined [27] and that creeping flow with an exponential decay of the velocity can be detected even very far from a shear band (see, *e.g.*, [28] and references therein). In fact, recent experiments show that in presence of a shear band the whole material is flowing and no solid part can be properly defined [29,30]. Because our method is able to detect deformation of order 10^{-5} [11], the shear bands we observe in our correlation maps are larger than the ones obtained by more direct measurement.

Bifurcation theories that describe failure in soil mechanics [3,5] rely on the assumption of the existence of discontinuous solutions of the strain rate field.

As experimentally such discontinuities are not observed, those models are not fully satisfying to describe the behavior of the system. The need to describe the strain field during localization as a smooth inhomogeneous field calls for new models.

Nonlocal rheological models inspired by theoretical works on soft glassy materials have been proposed to describe the rheology of granular materials [31,32]. Those models belong to continuum mechanics and introduce a new variable to describe the local state of the material, the *fluidity*. Spatial heterogeneities in the flow emerge because this fluidity obey to a partial differential equation (PDE) coupled to the constitutive law. This PDE describes the spatial dynamics of the fluidity by a diffusive term and introduces a lengthscale, the “cooperative length” which roughly represents the extension of the perturbation caused by a flowing zone (see ref. [32] for a discussion of the differences between the models). Such models are able to describe heterogeneous dense flows in numerous configurations as well as slow flows far from the shear bands [33]. Still, they have been developed to describe steady flows, in particular they don’t consider any volume change, and it is unclear if they could describe the process of failure, which is, by nature, a transient. It could seem unlikely that a partial differential equation including a diffusive term for the ability to flow (Laplacian of the fluidity) could describe the spontaneous narrowing of the band after the bifurcation. In fact, dispersive effects can be cancelled by non-linear effects, leading to soliton-like solution as has been shown in a very recent theoretical work [34]. Shear bands could then be seen as localized solution in the dynamical systems meaning of the term. Nevertheless, a clear physical picture of the competing effects at play in the process is still missing, which points out the necessity of a clear understanding of what is hiding behind the fluidity state variable.

To conclude, we have shown experimentally that the failure of a granular material in uniaxial compression is linked to a supercritical bifurcation. This bifurcation coined the emergence of a definite orientation in the diffuse plasticity field. The orientation observed corresponds to the Mohr-Coulomb angle deduced from the plateau of the loading curve but its emergence precedes this plateau. A strong narrowing of the band follows as the loading proceed until a stationary size is reached. In the present work, the fluctuations of the strain field have been removed by the averaging process that allows image analysis. Those fluctuations in the vicinity of the bifurcation are awaited to play a major role [16,17] and are probably linked to the micro-bands observed at the earlier stages of the loading [12]. The study of those fluctuations is the subject of a future work.

It is a pleasure to thank J. CRASSOUS, S. MCNAMARA and J. WEISS for fruitful discussions.

REFERENCES

- [1] SCHALL P. and VAN HECKE M., *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **42** (2010) 67.
- [2] DAVIS R. O. and SELVADURAI A. P. S., *Plasticity and Geomechanics* (Cambridge University Press) 2002.
- [3] VARDOULAKIS I. and SULEM J., *Bifurcation Analysis in Geomechanics* (Blackie Academic and Professional, Glasgow, England) 1995.
- [4] DESRUES J. and VIGGIANI G., *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, **28** (2004) 279.
- [5] RUDNICKI J. W. and RICE J. R., *J. Mech. Phys. Solids*, **23** (1975) 371.
- [6] BARDET J. P., *Comput. Geotech.*, **10** (1990) 163.
- [7] RECHENMACHER A. L., *J. Mech. Phys. Solids*, **54** (2006) 22.
- [8] HALL S. *et al.*, *Géotechnique*, **60** (2010) 315.
- [9] ANDÓ E., HALL S. A., VIGGIANI G. and DESRUES J., *Géotech. Lett.*, **3** (2013) 142.
- [10] ERPELDING M. *et al.*, *Strain*, **49** (2013) 167.
- [11] LE BOUIL A. *et al.*, *Granular Matter*, **16** (2014) 1.
- [12] LE BOUIL A., AMON A., MCNAMARA S. and CRASSOUS J., *Phys. Rev. Lett.*, **112** (2014) 246001.
- [13] DESRUES J. and ANDÓ E., *C. R. Phys.*, **16** (2015) 26.
- [14] TORDESILLAS A. *et al.*, *EPL*, **110** (2015) 58005.
- [15] BARRAT J.-L. and LEMAÎTRE A., in *Dynamical Heterogeneities in Glasses, Colloids, and Granular Media*, edited by BERTHIER L. *et al.* (Oxford University Press) 2011, Chapt. 8, pp. 264–297.
- [16] GIMBERT F., AMITRANO D. and WEISS J., *EPL*, **104** (2013) 46001.
- [17] LIN J., GUEUDRÉ T., ROSSO A. and WYART M., *Phys. Rev. Lett.*, **115** (2015) 168001.
- [18] DIJKSMAN J. A., WORTEL G. H., VAN DELLEN L. T. H., DAUCHOT O. and VAN HECKE M., *Phys. Rev. Lett.*, **107** (2011) 108303.
- [19] CHIKKADI V., MIEDEMA D. M., DANG M. T., NIENHUIS B. and SCHALL P., *Phys. Rev. Lett.*, **113** (2014) 208301.
- [20] JAISWAL P. K., PROCACCIA I., RAINONE C. and SINGH M., *Phys. Rev. Lett.*, **116** (2016) 085501.
- [21] NEDDERMAN R. M., *Statics and Kinematics of Granular Materials* (Cambridge University Press) 1992.
- [22] ERPELDING M., AMON A. and CRASSOUS J., *Phys. Rev. E*, **78** (2008) 046104.
- [23] ESHELBY J. D., *Proc. R. Soc. A*, **241** (1957) 376.
- [24] LEHOUCQ R. *et al.*, *Front. Phys.*, **2** (2015) 84.
- [25] WELKER P., PhD Thesis, Universität Stuttgart (2011), <http://dx.doi.org/10.18419/opus-5019>.
- [26] DUDA R. O. and HART P. E., *Commun. ACM*, **15** (1972) 11.
- [27] KOMATSU T. S., INAGAKI S., NAKAGAWA N. and NASUNO S., *Phys. Rev. Lett.*, **86** (2001) 1757.
- [28] CRASSOUS J. *et al.*, *J. Stat. Mech.: Theory Exp.* (2008) P03009.
- [29] NICHOL K. *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **104** (2010) 078302.
- [30] REDDY K. A., FORTERRE Y. and POULIQUEN O., *Phys. Rev. Lett.*, **106** (2011) 108301.
- [31] KAMRIN K. and KOVAL G., *Phys. Rev. Lett.*, **108** (2012) 178301.
- [32] BOUZID M. *et al.*, *Eur. Phys. J. E*, **38** (2015) 125.
- [33] HENANN D. L. and KAMRIN K., *Phys. Rev. Lett.*, **113** (2014) 178001.
- [34] BENZI R. *et al.*, *Soft Matter*, **12** (2016) 514.

Bibliographie

- [1] B. Andreotti, Y. Forterre, and O. Pouliquen, *Les milieux granulaires-entre fluide et solide : Entre fluide et solide*. EDP sciences, 2012.
- [2] J. Desrues and R. Chambon, “Shear band analysis and shear moduli calibration,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 39, no. 13, pp. 3757–3776, 2002.
- [3] P. Bésuelle and J. W. Rudnicki, “Localization : shear bands and compaction bands,” *International geophysics series*, vol. 89, pp. 219–322, 2004.
- [4] J. Desrues and G. Viggiani, “Strain localization in sand : an overview of the experimental results obtained in grenoble using stereophotogrammetry,” *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 28, no. 4, pp. 279–321, 2004.
- [5] J. Desrues, *La localisation de la déformation dans les matériaux granulaires*. PhD thesis, Institut de Mécanique de Grenoble, 1984.
- [6] F. Marinelli, *Comportement couplé des géo-matériaux : deux approches de modélisation numérique*. PhD thesis, Université Grenoble Alpes, 2013.
- [7] G. Viggiani, *Localizzazione delle deformazioni e fenomeni di rottura nelle argille consistenti sovraconsolidate*. PhD thesis, Università di Roma, 1994. 11, 1994.
- [8] T. Stegmann, J. Török, L. Brendel, and D. E. Wolf, “Minimal dissipation theory and shear bands in biaxial tests,” *Granular Matter*, vol. 13, no. 5, pp. 565–572, 2011.

- [9] B. Ebrahimiyan and A. Noorzad, “Numerical investigations of shear strain localization in an elasto-plastic cosserat material,” in *Proceedings of 18th international conference on soil mechanics and geotechnical engineering, paper no. TC103-P17*, pp. 703–706, 2013.
- [10] K. A. Alshibli and S. Sture, “Shear band formation in plane strain experiments of sand,” *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, vol. 126, no. 6, pp. 495–503, 2000.
- [11] K. H. Roscoe, “The influence of strains in soil mechanics,” *Geotechnique*, vol. 20, no. 2, pp. 129–170, 1970.
- [12] J. Arthur, T. Dunstan, Q. Assadi, and A. Assadi, “Plastic deformation and failure in granular material,” *Geotechnique*, vol. 27, pp. 53–74, 1977.
- [13] J.-P. Bardet, “A comprehensive review of strain localization in elastoplastic soils,” *Computers and geotechnics*, vol. 10, pp. 163–188, 1990.
- [14] I. Vardoulakis, “Shear band inclination and shear modulus of sand in biaxial tests,” *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech*, vol. 4, pp. 103–119, 1980.
- [15] J. R. Rice, “The localization of plastic deformation,” 1976.
- [16] J. Lemaitre, J.-L. Chaboche, A. Benallal, and R. Desmorat, *Mécanique des matériaux solides-3eme édition*. Dunod, 2009.
- [17] A. Le Bouil, *Étude expérimentale de la plasticité et des précurseurs à la rupture de milieux granulaires*. PhD thesis, Université Rennes 1, 2014.
- [18] J. D. Eshelby, “The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, vol. 241, pp. 376–396, 1957.
- [19] F. Gimbert, D. Amitrano, and J. Weiss, “Crossover from quasi-static to dense flow regime in compressed frictional granular media,” *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 104, 2013.
- [20] G. Viggiani, P. Bésuelle, and J. Desrues, “X-ray micro tomography as a tool for studying localized damage/deformation in clay rock,” *Unclassified NEA/RWM/CLAYCLUB (2013)*, p. 91, 2011.

- [21] M. Erpelding, *Étude expérimentale de micro-déformations dans des matériaux hétérogènes par diffusion de la lumière*. Thèse, Université de Rennes 1, 2010.
- [22] J. J. Moreau, “Some numerical methods in multibody dynamics : application to granular materials,” *European journal of mechanics. A. Solids*, vol. 13, pp. 93–114, 1994.
- [23] M. Jean and J. J. Moreau, “Unilaterality and dry friction in the dynamics of rigid body collections,” in *Proceedings of Contact Mechanics International Symposium*, vol. 1, pp. 31–48, 1992.
- [24] P. A. Cundall and O. D. L. Strack, “A discrete numerical model for granular assemblies,” *Géotechnique*, vol. 29 No. 1, pp. 47–65, 1979.
- [25] J. Crassous, “Diffusive wave spectroscopy of a random close packing of spheres,” *Eur. Phys. J. E*, vol. 23, pp. 145–152, 2007.
- [26] L. Djaoui and J. Crassous, “Probing creep motion in granular materials with light scattering,” *Granular Matter*, vol. 7, pp. 185–190, 2005. 10.1007/s10035-005-0210-5.
- [27] A. Amon, R. Bertoni, and J. Crassous, “Experimental investigation of plastic deformations before a granular avalanche,” *Phys. Rev. E*, vol. 87, p. 012204, Jan 2013.
- [28] M. Erpelding, A. Amon, and J. Crassous, “Diffusive wave spectroscopy applied to the spatially resolved deformation of a solid,” *Phys. Rev. E*, vol. 78, p. 046104, Oct 2008.
- [29] F. Radjai and F. Dubois, “Modélisation numérique discrète des matériaux granulaires,” 2010.
- [30] P. Welker and S. McNamara, “Precursors of failure and weakening in a biaxial test,” *Granular Matter*, vol. 13, no. 1, pp. 93–105, 2011.
- [31] S. C. McNamara, “Acoustics and frictional sliding in granular materials,” *Granular Matter*, vol. 17, no. 3, pp. 311–324, 2015.
- [32] R. Lehoucq, J. Weiss, B. Dubrulle, A. Amon, A. Le Bouil, J. Crassous, D. Amirano, and F. Graner, “Analysis of image vs. position, scale and direction reveals pattern texture anisotropy,” *Frontiers in Physics*, vol. 2, p. 84, 2015.

- [33] I. Vardoulakis and J. Sulem, “Bifurcation analysis in geomechanics,” *Blackie Academic and Professional Glasgow Google Scholar*, 1995.
- [34] A. L. Rechenmacher, “Grain-scale processes governing shear band initiation and evolution in sands,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 54, no. 1, pp. 22–45, 2006.

