



**HAL**  
open science

# Couplage de méthodes d'éléments finis standards (FEM) et ondulatoires (WFEM) pour le calcul de la réponse vibratoire d'une voie ferrée

Thibaut Gras

## ► To cite this version:

Thibaut Gras. Couplage de méthodes d'éléments finis standards (FEM) et ondulatoires (WFEM) pour le calcul de la réponse vibratoire d'une voie ferrée. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Technologie de Compiègne, 2017. Français. NNT : 2017COMP2372 . tel-01798188v2

**HAL Id: tel-01798188**

**<https://theses.hal.science/tel-01798188v2>**

Submitted on 23 May 2018

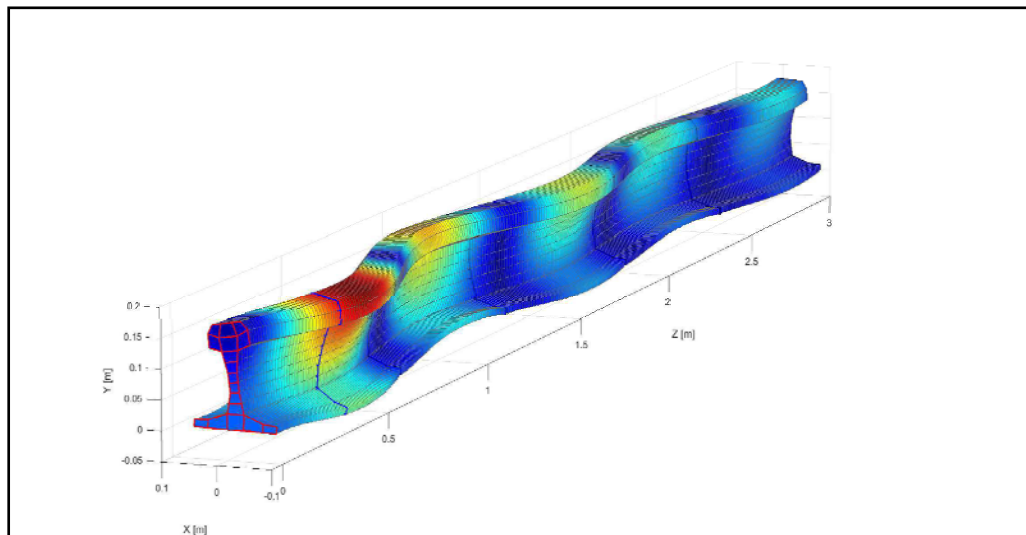
**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Par **Thibaut GRAS**

*Couplage de méthodes d'éléments finis standards (FEM) et ondulatoires (WFEM) pour le calcul de la réponse vibratoire d'une voie ferrée*

Thèse présentée  
pour l'obtention du grade  
de Docteur de l'UTC



Soutenue le 22 septembre 2017

**Spécialité** : Mécanique Avancée : Unité de recherche en  
Mécanique - Laboratoire Roberval (UMR-7337)

D2372

**Thèse de doctorat**  
de  
**l'Université de Technologie de Compiègne**

**Spécialité : Mécanique Avancée**

Présentée par

**Thibaut GRAS**

**Couplage de méthodes d'éléments  
finis standards (FEM) et  
ondulatoires (WFEM) pour le  
calcul de la réponse vibratoire  
d'une voie ferrée**

Soutenue le 22 septembre 2017 devant le jury composé de :

M. J-F. DEÛ (Président)  
M. M-A. HAMDI (Directeur de thèse)  
M. M. BEN TAHAR (Directeur de thèse)  
M N. ATALLA (Rapporteur)  
M. M. ICHCHOU (Rapporteur)  
M. S. ASSAF  
M. J-D. CHAZOT  
Mme E. MANCONI



*À Mathilde, ma famille et mes amis.*

# Remerciements

Expérience singulière, voilà les mots qui caractérisent pour moi la thèse de doctorat. Elle s'inscrit dans les prémices de la vie professionnelle du doctorant, on y entre étudiant et on en sort docteur. Comme dans une relation amoureuse, on y retrouve d'innombrables moments de joie et de bonheur parfois entrecoupés de périodes plus sombres et amères. On aime, on adule on chérie notre thèse mais il peut nous arriver de la détester ou de l'haïr. De nombreuses personnes entourant le doctorant se retrouvent ainsi impliquées dans cette expérience, de manière plus ou moins volontaire, et méritent mes remerciements.

Je remercie profondément toutes les personnes qui ont contribué au bon déroulement de cette thèse et notamment mes directeurs de thèse MM Mohamed-Ali Hamdi et Mabrouk Bentahar pour leur présence et leur soutien durant ces 3 années. Ces travaux n'auraient pas été possible sans le soutien et le financement de l'IRT Railenium qui m'a permis de travailler au sein du laboratoire Roberval de l'UTC. Un grand merci à toute l'équipe du laboratoire AVI de l'UTC qui m'a soutenu et aidé grâce à leurs conseils avisés.

Je remercie enfin celles et ceux qui me sont chers, qui ont su m'accompagner et m'encourager jusqu'au bout de l'aventure. Je tiens à remercier mes collègues du laboratoire, notamment Florian qui a été présent en tant qu'ami pour le meilleur et pour le pire, merci à Romain qui a su m'épauler en début de thèse et m'aviser de ses conseils précieux, merci à Lei Lei avec qui nous avons partagé cette expérience pendant 3 ans, merci aussi aux anciens partenaires du laboratoire Ryan, Nicolas, Yorick. Enfin, je remercie et je souhaite bon courage pour la dernière ligne droite à Guillaume, Chourouk et Congcong.

Je remercie chaleureusement Mathilde qui a toujours été présente à mes côtés, elle a su me comprendre et m'accompagner pour me permettre d'achever ma thèse. Un grand merci à toute ma famille, mes parents, ma sœur, mon frère qui ont su être à l'écoute, ils m'ont montré qu'ils étaient fiers de mon parcours et m'ont donné la force dont j'avais besoin.

# Résumé

La prédiction du bruit de roulement ferroviaire est en enjeu majeur pour la maîtrise des nuisances sonores. Au point de contact roue/rail, la roue et la voie sont excités de manière dynamique, ce qui enclenche le rayonnement du bruit de roulement. Les réponses vibratoires au point de contact ainsi que les taux de décroissance des ondes sont des données primordiales pour simuler de manière précise le bruit de roulement. Or, la dimension infinie de la voie ferrée conduit bien souvent à des modèles éléments finis coûteux et non adaptés à la recherche de solutions innovantes. La thèse a pour objectifs de proposer un modèle vibratoire de voie en éléments finis qui prenne en compte la dimension infinie périodique de la voie, mais aussi d'inclure une portion de voie non-périodique sur laquelle des solutions anti-vibratiles peuvent être testées. La propagation des vibrations est exprimée sous la forme d'une décomposition en ondes par la méthode WFE (Wave Finite Element). Le calcul de la réponse vibratoire de la voie périodique infinie est obtenu à partir du déplacement d'une cellule physique longue d'environ 0.6 m. Pour réduire les temps de calcul nécessaires à sa condensation dynamique, une méthode de bi-périodisation est proposée. Le couplage entre les méthodes éléments finis et WFE est développé pour prendre en considération les supports élastiques dans cette cellule. Les comparaisons avec des mobilités expérimentales ainsi que des taux de décroissance montrent un très bon accord calculs-mesures. Enfin, le modèle développé dans cette thèse a permis de tester l'efficacité d'une solution anti-vibratile innovante développée au sein du projet CERVIFER. Celle-ci offre un comportement bi-mode, elle assouplit les supports autour de la roue préservant ainsi l'infrastructure, mais elle rigidifie les supports loin de la roue pour augmenter les taux de décroissance. Les résultats numériques se révèlent prometteurs en terme d'efficacité du dispositif et entretiennent une poursuite du développement de cette solution anti-vibratile.

**Mots clés :** Périodicité, voie ferrée, semelles, WFEM, éléments finis, taux de décroissance, solutions anti-vibratiles.

# Abstract

Railway noise is a critical issue concerning environmental noise. At the wheel/rail contact point, both the wheel and the track are dynamically excited and vibrate together to emit the well known rolling noise. The point receptance of the rail and the track decay rates are important quantities to accurately predict wheel-rail noise emission. However, the infinite dimension of the track leads to cumbersome numerical finite-element (FE) models and not adapted to assist the research of innovative solutions. The goals of this thesis are to build an efficient numerical model for calculating the vibration from an infinite railway track, but also to include a central non-periodic part with the aim of testing anti-vibration solutions.

The vibration propagation along the track is expressed as a sum of different waves using the WFEM (Wave Finite Element Method). The displacements of a 0.6 m unit cell lead to the computation of the whole track. To reduce the dynamic condensation of this cell, a bi-periodic method is proposed in this thesis. The FEM - WFEM coupling is proposed to easily include elastic supports inside the unit cell. Results show a good correlation between test and calculation.

Finally, the model proposed in this thesis was used to test the efficiency of an innovative anti-vibration solution developed within the CERVIFER project. It is a dual mode device which makes the supports softer around the wheel to protect the infrastructure, and stiffer away from the wheel to increase the track decay rates. The numerical results revealed to be really promising, and they will permit to pursue the development of this anti-vibration solution.

**Keywords :** Periodicity, railway track, pads, WFEM, finite-element, track decay rates, anti-vibration solution.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
0.1 Contexte des travaux de thèse . . . . .	1
0.2 Objectifs scientifiques de la thèse . . . . .	2
<b>1 État de l'art</b>	<b>3</b>
1.1 Le bruit de roulement . . . . .	4
1.1.1 La voie ferrée . . . . .	4
1.1.2 Phénomène physique . . . . .	4
1.1.3 Modèle du bruit de roulement . . . . .	5
1.1.4 Force de contact dynamique . . . . .	6
1.1.5 Rayonnement acoustique du bruit de roulement . . . . .	6
1.1.6 Les logiciels de prédiction du bruit de roulement . . . . .	7
1.2 Les modèles analytiques de la voie . . . . .	8
1.2.1 Poutres infinies sur support continu . . . . .	9
1.2.2 Poutres infinies sur supports discrets périodiques . . . . .	9
1.3 Déformations de section : les modèles éléments finis de voie . . . . .	12
1.3.1 Motivations . . . . .	12
1.3.2 Section complexe sur support continu infini . . . . .	13
1.3.3 Section complexe sur supports discrets périodiques . . . . .	14
1.3.4 Section complexe sur supports répartis périodiques . . . . .	15
1.4 Apports de la thèse . . . . .	17
1.5 Organisation de la thèse . . . . .	18
<b>2 Modèle analytique périodique de la voie ballastée</b>	<b>21</b>
2.1 Les structures périodiques . . . . .	22
2.2 Modélisation analytique . . . . .	24
2.2.1 Méthode des réceptances . . . . .	24
2.2.2 Méthode directe . . . . .	25

2.3	Étude d'un rail infini en flexion verticale par méthode directe . . . . .	26
2.3.1	Modélisation du rail et des supports . . . . .	26
2.3.2	Déplacement vertical de la cellule élémentaire par le principe de périodicité . . . . .	27
2.3.3	Ondes de flexion de la cellule élémentaire . . . . .	28
2.4	Analyse des constantes de propagation d'un rail infini . . . . .	29
2.4.1	Calcul des constantes de propagation . . . . .	29
2.4.2	Condition de propagation des ondes sans amortissement interne	32
2.5	Fréquences limites des bandes d'atténuation . . . . .	32
2.5.1	Fréquences propres d'une cellule élémentaire . . . . .	32
2.5.2	Comportement des cellules élémentaires aux fréquences limites des bandes d'atténuation . . . . .	34
2.5.3	Calcul des fréquences propres de type I et II . . . . .	36
2.5.4	Analogie entre fréquences propres et fréquences limites des bandes d'atténuation . . . . .	37
2.6	Réponse forcée de la voie analytique . . . . .	40
2.6.1	Fonction de Green du rail infini sur supports discrets . . . . .	40
2.6.2	Analyse de la réponse forcée spatiale du rail . . . . .	42
2.6.3	Analyse de la réponse forcée spectrale du rail . . . . .	44
2.7	Conclusion . . . . .	49

### **3 Modèle numérique des structures périodiques par Wave Finite Element** **51**

3.1	La méthode Wave Finite Elements (WFE) . . . . .	52
3.1.1	Matrice de transfert du guide périodique . . . . .	52
3.1.2	Discrétisation par éléments finis . . . . .	52
3.1.3	Reformulation du problème aux valeurs propres généralisé . . . . .	54
3.1.4	Application de la méthode à des éléments de poutres 1D . . . . .	56
3.1.5	Propriétés des vecteurs propres . . . . .	59
3.1.6	Régularisation généralisée pour tout type de cellule . . . . .	62
3.2	Exemples numériques . . . . .	64
3.2.1	Application aux poutres à section variable . . . . .	64
3.2.2	Application à une cellule 3D . . . . .	66
3.3	Réponse forcée des structures périodiques par WFE . . . . .	69
3.3.1	Déplacements et forces au sein de la structure périodique . . . . .	69
3.3.2	Réponse forcée par une approche ondulatoire directe . . . . .	69

3.3.3	Réponse forcée par approche ondulatoire modale . . . . .	75
3.4	Conclusion . . . . .	83
<b>4</b>	<b>Bi-périodisation des structures par couplage FEM - WFEM</b>	<b>85</b>
4.1	Couplage WFEM - FEM . . . . .	86
4.1.1	Influence sur la réduction modale d'une structure finie . . . . .	86
4.1.2	Réponse forcée d'une structure hétérogène infinie . . . . .	88
4.2	Bi-périodisation de cellules homogènes longues . . . . .	92
4.2.1	Principe et motivations . . . . .	92
4.2.2	Comparaison avec la condensation directe . . . . .	93
4.2.3	Calcul des valeurs propres par bi-périodisation . . . . .	93
4.2.4	Influence de la discrétisation longitudinale . . . . .	94
4.3	Couplage FEM - WFEM pour la bi-périodisation . . . . .	97
4.3.1	Principe et motivations . . . . .	97
4.3.2	Réponses forcées . . . . .	100
4.3.3	Couplage avec une partie centrale aux portions hétérogènes . . . . .	108
4.4	Conclusion . . . . .	114
<b>5</b>	<b>Étude d'une voie ballastée comprenant une solution anti-vibratile</b>	<b>115</b>
5.1	Principe de calcul . . . . .	116
5.2	Calcul des modes de propagation du rail UIC 60 . . . . .	118
5.2.1	Ondes libres par WFEM . . . . .	118
5.2.2	Choix du maillage . . . . .	120
5.3	Calcul de la réponse dynamique d'une voie ballastée . . . . .	121
5.3.1	Prise en compte des conditions limites élastiques . . . . .	121
5.3.2	Calcul des modes de propagation du rail supporté . . . . .	121
5.3.3	Comparaison expérimentale des mobilités . . . . .	123
5.3.4	Comparaison expérimentale des taux de décroissance . . . . .	128
5.4	Application à une solution anti-vibratile . . . . .	132
5.4.1	Présentation du dispositif . . . . .	132
5.4.2	Phénomène d'ondes stationnaires . . . . .	134
5.4.3	Calcul des raideurs dynamiques du support bi-mode . . . . .	136
5.4.4	Simulations sur voie . . . . .	138
5.5	Conclusion . . . . .	141
	<b>Conclusion générale</b>	<b>143</b>
5.6	Synthèse . . . . .	143

5.7 Perspectives . . . . .	145
<b>Bibliographie</b>	<b>147</b>
<b>A Théorie des poutres en flexion</b>	<b>155</b>
A.1 Hypothèses . . . . .	155
A.2 Équation du mouvement en flexion . . . . .	156
A.2.1 Déformation contraintes et efforts résultants dans une section droite . . . . .	156
A.2.2 Équilibre dynamique . . . . .	157
A.2.3 Équations différentielles du mouvement . . . . .	158
<b>B Fonction de Green de flexion d'une poutre de Timoshenko libre infinie</b>	<b>162</b>
B.1 Équation différentielle du mouvement . . . . .	162
B.2 Ondes de flexion libres . . . . .	163
B.3 Fonction de Green de la poutre libre de Timoshenko . . . . .	164
<b>C Problème aux valeurs propres généralisé <math>T + T^{-1}</math></b>	<b>166</b>
C.1 Formulation du nouveau problème aux valeurs propres généralisé . . . . .	166
C.2 Transformation $T + T^{-1}$ du problème . . . . .	167
C.3 Retour à la base des vecteurs propres $\Phi$ . . . . .	168
<b>D Dispersion numérique du nombre d'onde de flexion de la poutre d'Euler-Bernoulli</b>	<b>170</b>
<b>E Formulation de la matrice de raideur dynamique condensée par DSM</b>	<b>172</b>
<b>F Schémas techniques du support bi-mode</b>	<b>176</b>

# Introduction

## 0.1 Contexte des travaux de thèse

L'industrie ferroviaire utilise des moyens expérimentaux très onéreux pour qualifier et certifier l'infrastructure et le matériel roulant. Une utilisation optimisée des logiciels de prototypage permettrait un gain considérable de coût et de temps de développement des systèmes liés au transport ferroviaire. Les travaux de thèse se situent dans le cadre du projet CERVIFER (Certification Virtuelle Ferroviaire) qui est un projet coopératif impliquant 14 membres du secteur privé et public :

- Cinq industriels du ferroviaire (ALSTOM, RATP, SNCF-Infra, RFF, VOSSLOH-COGIFER).
- Quatre organismes publics de recherche et de formation (IFSTTAR, UTC, LILLE1, UVHC), un centre Technique le CETIM de Senlis et l'IRT RAILENIUM.
- Trois autres industriels (ESI Group, HUTCHINSON, VIBRATEC).

Le projet CERVIFER vise à développer une plateforme de calcul numérique collaborative pour la pré-certification de composants ferroviaires. La réduction de temps et de coût sur ces opérations de certification permettront à l'industrie française ferroviaire de gagner en compétitivité par rapport à ses concurrents à travers le monde. L'ambition première étant de limiter les tests physiques d'ici 2020 en remplaçant 50% de ces essais par des essais virtuels sur ordinateur.

Le projet est divisé en cinq lots concentrés sur des tâches bien distinctes, pilotés par l'UTC, l'IFSTTAR, Lille 1 ou ESI Group. La thèse est consacrée au Lot 4 - Réduction des nuisances et plus particulièrement à la tâche du Lot 4.1 - Modélisation du bruit de roulement.

LOT 0 Gestion du Projet CERVIFER				
LOT 1	LOT 2	LOT 3	LOT 4	LOT 5
Analyse de l'existant et Spécifications techniques	Sécurité fiabilité Sûreté Interaction Véhicule voie	Usure et Fatigue de Contact	Réduction Des nuisances	Intégration Des logiciels
UTC	IFSTTAR	LILLE 1	UTC	ESI

FIGURE 1 – *Lots du projet CERVIFER*

## 0.2 Objectifs scientifiques de la thèse

Les travaux prévus dans le cadre de la thèse s'orienteront vers le développement de méthodes et d'outils numériques validés expérimentalement, permettant de faire du prototypage sur ordinateur pour la recherche de solutions de réduction du bruit de roulement. Les travaux de recherche concerneront donc la modélisation par éléments finis de la réponse vibratoire d'une voie ferrée. Afin de limiter les temps de calcul, des méthodes utilisant le principe de la périodisation des structures seront développés. Pour représenter au mieux le comportement dynamique de la voie, il sera nécessaire de développer un modèle prenant en considération la répartition longitudinale des supports élastiques sous le rail. De plus, le modèle devra intégrer une portion de voie dont les raideurs ont été localement modifiées suite à l'influence par exemple de la charge statique du véhicule ou de dispositifs anti-vibratiles. Ceci permettra d'assister la recherche de solutions innovantes au sein du projet CERVIFER pour la réduction des nuisances sonores et vibratoires.

# Chapitre 1

## État de l'art

*Ce chapitre présente l'état de l'art des modèles du comportement dynamique des voies pour le bruit de roulement. Les modèles analytiques et numériques de la dynamique des voies ferrées seront confrontés . En tenant compte des avantages et inconvénients de chacune des approches, un choix de méthodologie sera effectué pour répondre aux problématiques du projet CERVIFER. Les apports des travaux de thèse seront explicités en se positionnant par rapport à l'état de l'art.*

## 1.1 Le bruit de roulement

### 1.1.1 La voie ferrée

La voie ballastée est composée de deux rails, de traverses espacées périodiquement et d'une couche de ballast. Une travée est définie comme étant un tronçon de voie pris entre deux milieux de traverses consécutives. Le rail de la voie est fixé par l'intermédiaire de clips de serrage sur les traverses faites de béton, de bois ou de fer. L'ensemble repose généralement sur le ballast, une couche de pierres régulièrement concassées permettant de répartir uniformément la charge de la voie sur le sol.

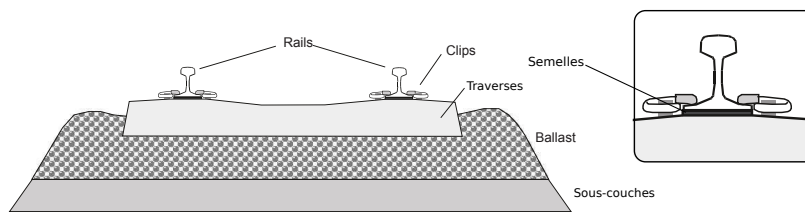


FIGURE 1.1 – *Vue de coupe d'une voie ferrée [1]*

Dans le contexte du bruit de roulement, les couches sous le ballast ne sont pas considérées comme influentes. La couche de ballast peut aller jusqu'à 30 centimètres d'épaisseur. Le système d'attache est quant à lui composé d'une semelle en élastomère située sous le rail et qui permet de protéger les traverses des impacts.

La voie peut reposer sur des dalles de béton mais ce système reste plus coûteux et les frais d'entretien sont plus élevés. Dans cette configuration, le rail peut être fixé directement sur la dalle et impose un système de fixation plus souple que sur un système classique pour compenser l'absence du ballast. Par la suite, la modélisation sera effectuée sur une voie ballastée (avec traverses et ballast). Les traverses peuvent être de type bi-bloc, elles sont alors composées de deux blocs de béton reliés par une tige métallique. Les autres traverses sont monoblocs et sont faites de béton ou de bois.

### 1.1.2 Phénomène physique

Le phénomène physique lié au bruit de roulement a été initialement analysé par Remington [2] dans les années 1980. Thompson [3] a développé un modèle pour décrire le modèle vibratoire lié au bruit de roulement, plus récemment l'auteur a rédigé un ouvrage complet sur les phénomènes du bruit de roulement et de sa modélisation numérique [1]. La roue et le rail présentent des défauts microscopiques en surface



appelés rugosité. La rugosité est définie comme étant la différence de hauteur entre la surface de roue (ou de rail) et une surface de roue parfaite. La rugosité entraîne une excitation au point de contact roue/rail dû à ce déplacement relatif imposé. Cette excitation mécanique provoque la vibration des composants de la voie et de la roue entraînant leur rayonnement acoustique dans l'environnement.

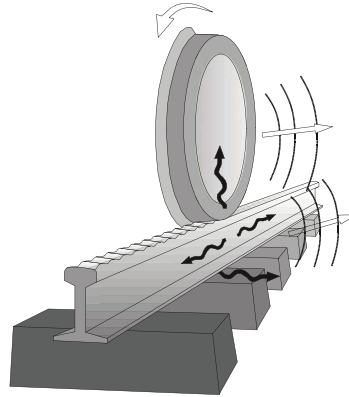


FIGURE 1.2 – Représentation du phénomène du bruit de roulement [1]

### 1.1.3 Modèle du bruit de roulement

Remington [2] a été le premier à mettre en place un modèle mathématique du bruit de roulement basé sur la notion de déplacement relatif imposé au contact. La roue agit sur le rail en imposant une pré-charge liée à la masse du véhicule. Le contact entre la roue et le rail est bien souvent modélisé par un ressort de type Hertzien linéarisé. La voie est représentée par un système double couche composé du rail et des traverses reposant sur les raideurs des semelles et du ballast. L'Eq. (1.1) relie la rugosité  $r$  aux déplacements verticaux de la roue, du rail et du contact notés respectivement  $X_{roue}$   $X_{rail}$   $X_{contact}$  :

$$r = X_{roue} + X_{rail} + X_{contact} \quad (1.1)$$

La rugosité verticale agit ici comme un déplacement relatif vibratoire qui est absorbé par les déplacements combinés du rail, de la roue et du contact. Le contact représente une déformation très localisée de l'acier dans la zone de contact roue/rail.

La rugosité des rails et des roues ne peut être prédite mais seulement mesurée. Pour la roue, sa rugosité est généralement mesurée par trois capteurs de déplacement en contact avec la bande de roulement d'une roue surélevée en rotation. La rugosité du rail est quant à elle mesurée par l'intermédiaire d'un ou plusieurs capteurs en parallèle

fixés sur une poutre reposant sur le rail. Les rugosités sont bien souvent représentées sous la forme d'un spectre de longueur d'onde  $\lambda$  qui est lié la fréquence  $f$  d'excitation et à la vitesse  $V$  du train par :

$$f = \frac{V}{\lambda} \quad (1.2)$$

Les longueurs d'onde de rugosité qui contribuent au bruit de roulement sont comprises entre 1 *cm* et 100 *cm*. L'amplitude de rugosité associée est comprise entre 1  $\mu m$  et 100  $\mu m$ . Les fréquences d'excitation relatives au bruit de roulement pour des vitesses de train usuelles sont comprises entre 100 Hz et 5000 Hz.

#### 1.1.4 Force de contact dynamique

Le véhicule impose une charge statique sur la voie par l'intermédiaire de la roue, cette charge modifie les raideurs des supports sous la voie. En considérant l'hypothèse pour laquelle l'amplitude de la force dynamique générée à l'interface roue/rail est faible par rapport à la charge statique, l'interaction de contact roue/rail peut être linéarisée. Les forces dynamiques générées au contact peuvent être considérées comme étant proportionnelles à l'amplitude de la rugosité  $\mathbf{r}$  [1]. Cela implique que dans un cas idéal de rail et de roue aux surfaces parfaites, le bruit de roulement serait inexistant. Thompson [1] a montré que la force dynamique de contact agissant sur le rail dépend de l'impédance de la roue, du rail, du contact et de la rugosité combinée (combinaison énergétique des rugosités du rail et de la roue).

$$\mathbf{F} = \frac{j\omega \mathbf{r}}{\mathbf{D}_{roue} + \mathbf{D}_{rail} + \mathbf{D}_{contact}} \quad (1.3)$$

$\mathbf{F}$  est l'amplitude complexe de la force dynamique de contact en Newtons,  $\mathbf{r}$  l'amplitude de rugosité combinée en mètres,  $\mathbf{D}_{roue}$ ,  $\mathbf{D}_{rail}$  et  $\mathbf{D}_{contact}$  représentent les mobilités respectivement du rail, de la roue et du contact.

#### 1.1.5 Rayonnement acoustique du bruit de roulement

La force de contact dynamique va être responsable du rayonnement acoustique de l'ensemble roue/voie. La roue va rayonner du bruit dans l'environnement et sa contribution sera majeure en hautes fréquences. Le rayonnement du bogie et de l'essieu du train sont de nature secondaire par rapport à la roue.

Le rayonnement de la voie est fortement lié au rayonnement du rail. Néanmoins l'influence du rayonnement des traverses n'est pas négligeable, en particulier pour les

basses fréquences inférieures à 500 Hz [1]. Le rayonnement de la plateforme (en ballast ou en béton) est négligé pour le bruit de roulement. Les phénomènes d'amortissement jouent un rôle important dans le rayonnement le long du rail. Le taux de décroissance des ondes se propageant dans le rail est donc utilisé pour caractériser le comportement dynamique de la voie. Il est important de comprendre que la différence de contribution entre la voie et la roue dépend de la vitesse de déplacement du train. Pour de grandes vitesses, la contribution de la roue sera majoritaire, pour de plus faibles vitesses la voie contribuera le plus au bruit de roulement [1].

### 1.1.6 Les logiciels de prédiction du bruit de roulement

Les logiciels commerciaux principalement utilisés dans la simulation du bruit de roulement sont Twins et Stardamp [4], ils sont essentiellement basés sur une approche analytique (en bleu sur la Fig. 1.3). Twins a été développé dans les années 1990, Stardamp est le résultat d'un programme de recherche franco-allemand et finalisé en 2013. Twins est plus complet que Stardamp mais nécessite un degré d'expertise plus important. Les deux logiciels sont basés sur la même architecture de modules de calcul.

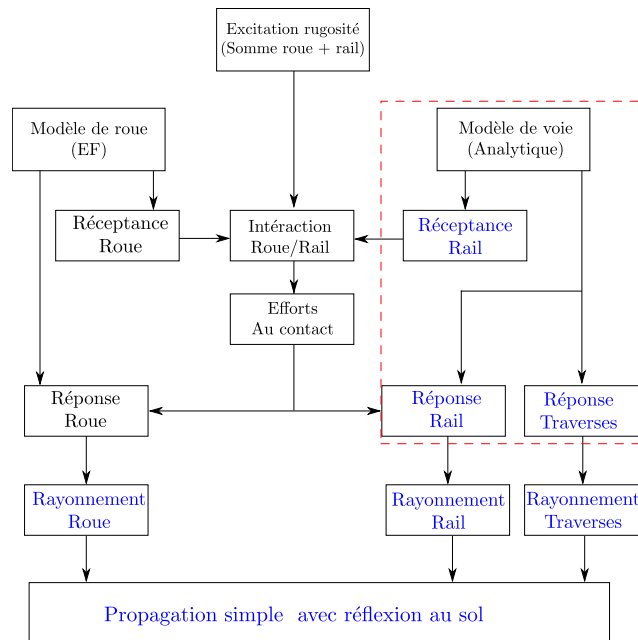


FIGURE 1.3 – Architecture des logiciels de simulation du bruit de roulement Twins et Stardamp [5]

Les données d'entrée sont les suivantes :

- Les rugosités combinées de la roue et du rail
- Les données modales de la roue considérée comme axisymétrique (obtenues par un code externe éléments finis)
- Les propriétés de la voie
- Les propriétés du véhicule (vitesse, charge)

Les résultats de sortie possibles sont :

- Le niveau de puissance ou le niveau de pression en tiers d'octave à une position de réception définie
- Les contributions acoustiques de la voie et de la roue

L'objectif du travail de recherche réalisé dans le cadre de la thèse vise à proposer un modèle de simulation du bruit de roulement en se basant sur la méthode des éléments finis pour la voie. Les points clés à développer dans ce projet concernent principalement [4] :

1. Utilisation des éléments finis pour une modélisation fine de la voie considérée comme périodique infinie.
2. Recherche de solutions anti-vibratiles par simulations numériques de la dynamique de la voie.

## 1.2 Les modèles analytiques de la voie

Pour modéliser le bruit de roulement, il est nécessaire de connaître le comportement dynamique de la voie par l'intermédiaire de la fonction de réponse au point de contact en fréquence (en anglais la Frequency Response Function ou FRF). Il est ainsi possible d'obtenir l'admittance de la voie pour calculer la force de contact liée à l'interaction roue/rail, puis d'en déduire le rayonnement acoustique de la voie. La force d'excitation se modélise comme une charge aléatoire statique ou mobile agissant sur le rail lors du contact. L'approche fréquentielle permet ainsi de résoudre la propagation des ondes dans une structure infinie comme le rail. Dans la littérature, deux approches ont été amplement utilisées pour calculer la réponse de la voie de manière analytique [1]. La première réside dans un modèle de poutres infinies pour des structures simples sur supports continus. La seconde méthode dérive quant à elle de

la théorie des structures périodiques énoncée par Floquet [6] et Bloch [7] puis reprise par Mead [8–12]. Celle-ci permet de calculer la propagation d’ondes au sein d’un rail infini sur supports répartis de manière régulière et discrète.

### 1.2.1 Poutres infinies sur support continu

Les premiers modèles de réponse dynamique de la voie ont utilisé des poutres infinies, le rail étant considéré comme une structure infiniment longue. Il est important de comprendre que le rail n’a donc pas de modes propres de vibration mais se conduit comme un guide d’ondes qui peuvent être propagatives ou évanescentes. Le calcul de sa réponse dynamique est effectué selon les méthodes classiques de propagation des ondes. Il est alors possible d’inclure ou non les supports comme des couches élastiques continues (voir Fig. 1.2.2). La semelle et le ballast sont alors définis comme des raideurs élastiques linéiques (qui peuvent être dépendantes des fréquences et comprenant de l’amortissement). Remington [13] a développé les premiers modèles du comportement dynamique de la voie en approche fréquentielle en 1976. En utilisant des modèles simplifiés de roue et de rail, il a été capable de prédire les premiers résultats liés au bruit de roulement. Grassie [14] a amélioré ces modèles en représentant le rail par une poutre de Timoshenko (autorisant une rotation des sections), valides sur une plage de fréquences plus large qu’avec une poutre d’Euler-Bernoulli. Plusieurs modèles sont présentés dans [14] en incluant un support monocouche élastique (poutre sur une fondation de Winkler) et un support double couche prenant en considération les traverses.

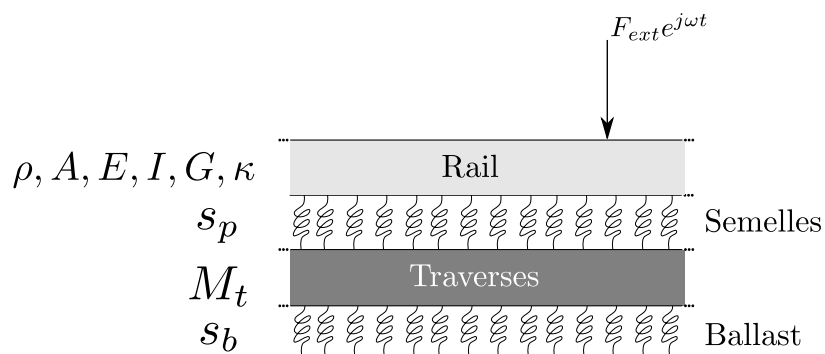


FIGURE 1.4 – Modélisation d’un rail sur une fondation double couche  $K_s$  : raideur linéique de la semelle en  $N/m^2$ ,  $K_b$  : raideur linéique du ballast en  $N/m^2$ ,  $m_t$  : masse linéique des traverses en  $kg/m$

## 1.2.2 Poutres infinies sur supports discrets périodiques

### 1.2.2.1 Motivations

Les modèles de poutres précédents se basent sur une représentation continue des supports, or en pratique les traverses sont réparties sous le rail de manière discrète. Il est possible de modéliser les supports par leur raideur dynamique et leur espacement qui peuvent être variables ou constants. Le fait de prendre en considération la répartition discrète des supports permet de faire apparaître des fréquences clés dans le comportement dynamique des voies comme la "pinned pinned frequency" [1]. Cette fréquence se manifeste lorsque la demi longueur d'onde de flexion au sein du rail est égale à l'écart entre deux supports, elle est donc indépendante des caractéristiques des semelles ou des traverses. Par exemple, pour un rail classique de type UIC 60 cette fréquence se produit à 1070 Hz [1] dans la direction verticale. La réponse dynamique est alors maximale en milieu de travée et est minimale au-dessus d'une traverse.

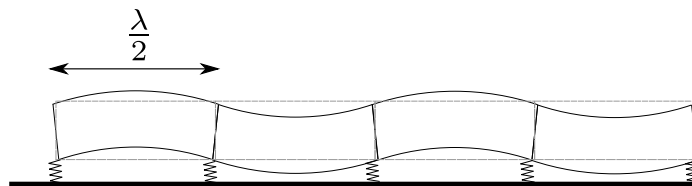


FIGURE 1.5 – Représentation du comportement dynamique du rail à la "pinned pinned frequency"

### 1.2.2.2 Principe de superposition

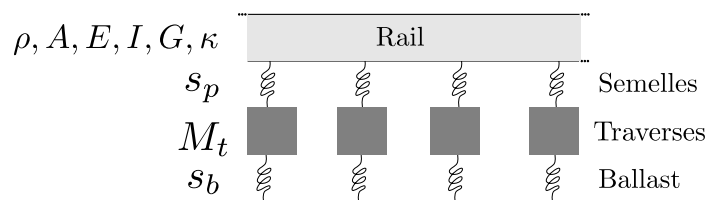


FIGURE 1.6 – Modélisation d'un rail sur des supports discrets élastiques,  $K_s$  : raideur de la semelle en  $N/m$ ,  $K_b$  : raideur du ballast en  $N/m$ ,  $m_t$  : masse des demi-traverses en  $kg$

L'ensemble des supports répartis de manière discrète sous le rail peut être modélisé en utilisant le principe de superposition. La contribution des supports résulte d'un ensemble de forces agissant sur la poutre infinie. La réponse dynamique de la poutre libre

infinie est déterminée par les fonctions de Green, pour la poutre d'Euler-Bernouilli celle-ci est donnée par (voir Annexe B) :

$$G^L(z, z_f, \omega) = -\frac{1}{EI} [F_d e^{-k_B |z-z_f|} + j F_p e^{-ik_B |z-z_f|}] \quad (1.4)$$

Avec :

$$k_B = \left(\frac{M\omega^2}{EI}\right)^{1/4} \quad F_p = \frac{1}{4k_B^4} \quad F_d = \frac{1}{4k_B^4} \quad (1.5)$$

$k_B$  étant le nombre d'onde de flexion de la poutre d'Euler-Bernouilli,  $M$  la masse linéique,  $E$  le module de Young,  $I$  le moment quadratique de la poutre et  $z_e$  la position du point d'impact. Le principe de superposition appliqué au rail infini sur supports discrets s'exprime ainsi :

$$\xi(z, \omega) = F_{ext} G^L(z, z_f, \omega) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_n(\omega) G^L(z, z_n, \omega) \xi(z_n) \quad (1.6)$$

Avec  $\xi(z)$  le déplacement dynamique dans la direction verticale de la poutre à l'abscisse  $z$  et  $Z_n(\omega)$  la raideur dynamique équivalente du support  $n$ . En réalité, les travées ne sont pas toutes égales, leur espacement et la raideur des semelles peuvent varier. Le principe de superposition permet de modéliser un ensemble de raideurs qui peuvent être différentes le long du rail. Heckl [15] a développé un modèle simple de poutre de Timoshenko reposant sur un nombre fini  $N$  de supports discrets, chacun d'eux étant modélisé par une raideur dynamique. L'Eq. (1.6) a été évaluée à chaque position des supports  $z_n$  pour former un système de résolution à  $N$  lignes et ainsi obtenir la réponse du rail en tout point. Heckl [15] a étudié l'influence d'un espacement irrégulier des traverses. Elle en a conclu qu'un espacement aléatoire avait pour conséquences une augmentation de l'amplitude de vibration autour du point d'excitation et des taux de décroissance des ondes de flexion dans les zones passe bandes. Heckel [16] a ensuite développé ce modèle en l'appliquant à une poutre de Timoshenko avec des ondes couplées, elle a calculé la matrice des fonctions de Green associées et a appliqué de la même manière le principe de superposition.

Thompson [17] a utilisé ce principe pour calculer la réponse dynamique d'une voie sous l'influence d'une pré-charge statique représentant le véhicule. La pré-charge modifie la raideur des supports localement autour de la roue et influe le comportement dynamique du rail. Les raideurs chargées ont été déterminées en effectuant au préalable un calcul statique non-linéaire. En prenant un nombre de supports suffisamment élevé il a été en mesure de simuler la réceptance du rail sous influence de raideurs dynamiques

différentes en fonction de leur position par rapport à l'excitation externe. Thompson a montré l'importance de la prise en compte des raideurs chargées notamment pour la réceptance autour du point d'impact et pour le calcul des taux de décroissance.

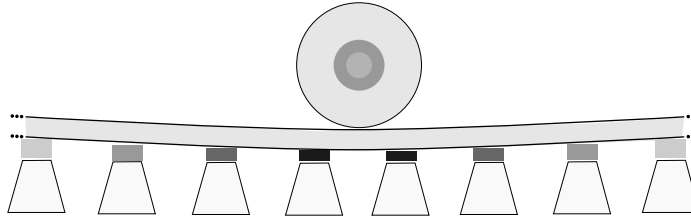


FIGURE 1.7 – *Influence de la charge statique sur les raideurs des supports autour de la roue*

### 1.2.2.3 Application du principe de périodicité

Lorsque les supports sont supposés répartis de manière périodique le long de la voie, il est possible d'utiliser le principe de périodicité pour calculer la réponse dynamique de la voie. Mead [8, 9] s'est intéressé au comportement des structures périodiques en utilisant une constante de propagation permettant de calculer la réponse de ces systèmes infinis. Cette propriété est basée sur le théorème de Bloch [7] introduisant la constante de propagation  $\mu$  qui stipule que dans une structure périodique de période  $l_e$ , les ondes libres se propagent de telle sorte que :

$$\xi(z + nl_e) = \xi(z)e^{-\gamma nl_e} \quad (1.7)$$

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (1.8)$$

Avec  $\alpha$  la constante d'atténuation et  $\beta$  la constante de propagation de l'onde de Bloch.

En utilisant le principe de périodicité associé au principe de superposition, il est possible de faire converger la somme infinie de l'Eq. (1.6) et ainsi obtenir une nouvelle relation de propagation des ondes au sein du rail. Nordborg [18] a utilisé le principe de périodicité associé à une transformée de Fourier pour obtenir la fonction de Green d'une poutre d'Euler-Bernoulli infinie supportée de manière périodique sur des supports élastiques. Hamet et Thompson [5, 19] ont amélioré le modèle précédent en l'appliquant à une poutre de Timoshenko. Munjal et Heckl [20] ont développé un modèle de vibrations verticales d'une poutre de type Euler-Bernoulli fixée sur des supports périodiques discrets, la propagation des ondes est calculée par une méthode



de matrices de transfert. Il est possible de définir une matrice de transfert  $T$  entre deux éléments périodiques telle que :

$$\mathbf{Q}_{L,N+1} = \mathbf{T} \mathbf{Q}_{L,N} \quad (1.9)$$

Avec  $\mathbf{Q}_{L,N}$   $\mathbf{Q}_{R,N}$   $\mathbf{Q}_{L,N+1}$   $\mathbf{Q}_{R,N+1}$  les vecteurs des coordonnées et forces généralisées respectivement de la section gauche/droite de l'élément  $N$  et de la section gauche (en anglais left L) /droite (en anglais right R) de l'élément  $N+1$ .

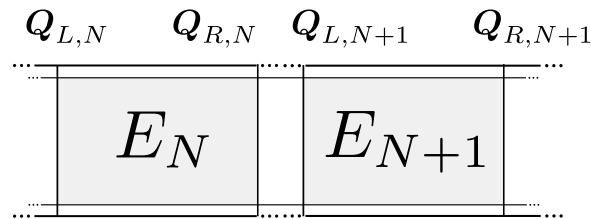


FIGURE 1.8 – Représentation de deux cellules périodiques adjacentes

## 1.3 Déformations de section : les modèles éléments finis de voie

### 1.3.1 Motivations

La réponse dynamique d'un rail a été expérimentée *in situ* [21] et simulée numériquement par Thompson, les résultats tendent à discréditer les modèles basés sur la théorie des poutres simples au-delà de 1500 Hz [22]. Les modèles analytiques précédents sont donc limités à une plage fréquentielle restreinte. Dans le cadre du bruit de roulement, il est nécessaire d'utiliser des modèles de types éléments finis pour reproduire les déformées de section pouvant apparaître à partir de 1500 Hz dans la direction latérale et de 3500 Hz dans la direction verticale [1].

Afin de prendre en considération la déformation de la section du rail, des méthodes semi-analytiques ont tout d'abord été mises en place en calculant ses modes de section. La méthode SAFE (Semi-Analytical Finite Element) a initialement été proposée par Aalami [23] et permet d'étudier les vibrations d'une structure dont la section est uniforme dans la direction longitudinale. La méthode suppose une séparation du champ de déplacement en écrivant la propagation des ondes libres sous la forme  $e^{-jkz}$  le long de l'axe du guide. Gavric [24] et Hayashi [25] ont utilisé la méthode SAFE pour calculer les courbes de dispersion d'un rail libre infini (sans supports). Cependant, les

supports élastiques contribuent à la réponse dynamique du rail et leur présence ne peut donc pas être négligeable. Ryue [26] a montré que les semelles ont une influence sur les courbes de dispersion du rail jusqu'à 5 kHz, même si l'apport des traverses et du ballast est négligeable au dessus de 1 kHz [27]. La prise en compte de la géométrie de la section du rail ainsi que des supports élastiques est donc primordiale pour le calcul de la réponse forcée.

### 1.3.2 Section complexe sur support continu infini

La présence des supports a d'abord été modélisée de manière continue sous le rail. Deux approches sont alors envisageables pour la modélisation numérique, une approche semi-analytique basée sur les modes de section (SAFE) ou une méthode issue de la théorie des structures périodiques [9]. Il est nécessaire de différencier le terme de périodicité numérique et de périodicité physique. La périodicité numérique désignera une tranche dont la longueur est définie selon les besoins d'un calcul numérique. La périodicité physique représentera une cellule dont la longueur correspond à la périodicité physique du problème.

Un modèle original de rail en éléments finis se basant sur la propagation des ondes dans des structures périodiques par matrices de raideur dynamique a été mis en place par Orris et Petyt [28]. La périodicité a été considérée comme physique et des éléments de poutres aux sections indéformables ont été utilisés. Thompson [21] a repris ces travaux en l'appliquant à un rail à section complexe reposant sur une couche élastique continue. La périodicité a été considérée comme numérique *i.e* il a utilisé une tranche de rail de 10 mm assemblée par la méthode traditionnelle des éléments finis. Cette méthode constitue les prémices de la Wave Finite Element Method (WFEM). Elle a l'avantage d'utiliser des éléments classiques présents dans toutes les bases de logiciels commerciaux et de mettre en jeu des systèmes de taille très inférieure à une méthode classique par éléments finis [29]. Thompson a utilisé une longueur de rail élémentaire très courte afin d'éviter les erreurs numériques dues au mauvais conditionnement du calcul [21, 30]. Il a ensuite appliqué la théorie des structures périodiques pour exprimer les déplacements et les forces de la section droite en fonction de celle de gauche. Cette formulation l'a mené à un problème aux valeurs propres généralisé dont les solutions sont les ondes caractéristiques se propageant dans la structure infinie. La réponse forcée dynamique du guide a été formulée sous influence d'une force extérieure stationnaire.

Récemment Li *et al.* [31] ont proposé l'étude de la réponse forcée dynamique d'un rail sur support continu en appliquant la méthode SAFE. Un système multi-couches a été modélisé et représente les semelles, les traverses et le ballast. L'analyse porte sur l'influence de paramètres tels que l'amortissement, le maillage ou encore le type de supports considérés.

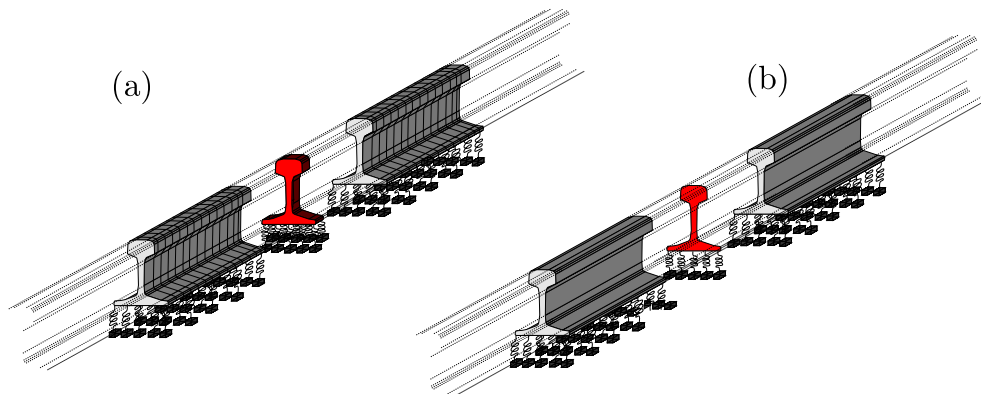


FIGURE 1.9 – (a) WFEM : Tranche élémentaire (rouge) du modèle de Thompson [21] (b) SAFE : Section élémentaire du rail (rouge) utilisée par Li [31]

### 1.3.3 Section complexe sur supports discrets périodiques

Les modèles éléments finis précédents se basent sur une représentation continue des supports, or comme il a été souligné dans la section 1.2.2 les traverses sont réparties sous le rail de manière discrète. Certains auteurs ont donc tenté de modéliser cette répartition discrète en tenant compte de la section du rail maillée par éléments finis.

Un modèle de représentation dynamique du rail basé sur ses modes de section et considérant les supports répartis de manière discrète et périodique a été proposé par Gry [32]. L'inclusion des supports est effectuée en se basant sur la théorie des structures périodiques [9], il a cependant constaté que la présence d'ondes évanescentes rendait les équations du mouvements mal conditionnées menant ainsi à des problèmes numériques difficiles à résoudre. Il a donc utilisé une méthode alternative basée sur l'expression de matrices de transfert et d'une base réduite afin d'éliminer les ondes responsables de ce mauvais conditionnement. Plus tard, Gry et Gontier [33] ont développé une approche plus générale en résolvant le problème par matrices de transfert et séries de Fourier temporelles et spatiales. Les ondes libres se propageant dans la structure ont été calculées en résolvant un problème aux valeurs propres généralisé, la réponse forcée due à une force extérieure stationnaire a ensuite été formulée dans

le domaine fréquentiel pour un impact appliqué à l’intérieur de la cellule élémentaire et à son interface.

Plus récemment, Sheng *et al.* [34, 35] ont développé une méthode basée sur la recherche du nombre d’onde dans des structures périodiques. L’intérêt de cette approche est l’application pour tout type de rail sur supports discrets identiques en présence d’une force extérieure aléatoire stationnaire ou mobile. Sheng [34] a développé la résolution complète de la réponse dynamique forcée du rail par transformée de Fourier en présence d’une force extérieure. Il a démontré l’efficacité de la méthode en l’appliquant sur des modèles de poutres classiques pour le calcul des constantes de propagation [35].

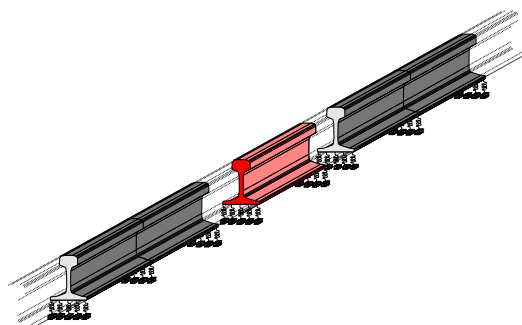


FIGURE 1.10 – Cellule élémentaire (rouge) du modèle de Gry [32] et Sheng [34]

### 1.3.4 Section complexe sur supports répartis périodiques

Dans les modèles précédents, les supports sous le rail ont été considérés comme discrets *i.e* sans prendre en compte la dimension longitudinale des semelles. Cependant, en hautes fréquences la longueur des semelles ne peut être négligée par rapport aux longueurs d’ondes se propageant dans le rail [32]. Il est donc nécessaire de prendre en considération la largeur réelle des semelles pour une représentation physique correcte des ondes en hautes fréquences. Brown [30] a mis en place un modèle Wave Finite Element Method (WFEM) original pour des cellules périodiques non-uniformes et l’a appliqué à un rail incluant la largeur des supports. Il a amélioré la méthode proposée par Thompson [21] en combinant les éléments finis, la théorie des structures périodiques et une méthode de sous-structuration en réduisant le nombre de coordonnées généralisés. Il a décomposé une travée en trois sous-structures (deux portions libres et une supportée). Celles-ci ont été assemblées en utilisant une base réduite des modes de propagation d’une tranche élémentaire en éléments finis de chaque sous-structure.

Les supports ont été modélisés en utilisant une périodicité numérique. La réponse dynamique forcée de la structure infinie a cependant été développée pour un impact situé uniquement à l'interface des trois sous-structures *i.e* entre deux supports (voir Fig. 1.11). Le modèle est ainsi limité à l'étude de la réponse dynamique au point d'impact d'une structure supposée infinie périodique.

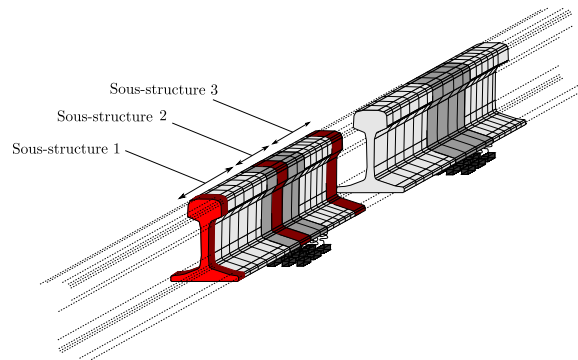


FIGURE 1.11 – *Sous-structuration du modèle de Brown [30] les cellules rouges représentent les cellules élémentaires de chaque sous-structure*

## 1.4 Apports de la thèse

L'étude bibliographique a mis en avant une liste non-exhaustive de modèles utilisés depuis 1976 pour simuler le comportement vibratoire des voies ferrées dans le cadre du bruit de roulement.

Les premiers modèles ont considéré le rail comme une poutre de type Euler-Bernouilli ou de Timoshenko à section indéformable, ceci a permis d'effectuer les premières études dynamiques de la voie sur des supports continus. L'application du théorème des structures périodiques a mené à des modèles prenant en considération une répartition discrète des supports. Des fréquences clés du comportement dynamique du rail ont pu être mises en avant comme la "pinned pinned frequency".

Les comparaisons essais-calculs ont cependant révélé que les modèles de poutres aux sections indéformables étaient limités à une plage fréquentielle inférieure à 1500Hz. Ainsi, l'évolution des méthodes numériques a permis d'utiliser les éléments finis pour introduire les modes de section du rail. Les méthodes semi-analytiques (SAFE par exemple) ont dans un premier temps été utilisées pour le calcul des modes de section d'un rail libre sans supports. Ces méthodes ont ensuite été améliorées pour prendre en considération un support continu ou réparti de manière discrète sous le rail. Des méthodes spectrales (WFEM) tirées de la théorie des structures périodiques ont été utilisées à partir d'une tranche de rail utilisée comme périodicité numérique. L'avantage de cette méthode est double, elle permet l'utilisation d'éléments finis classiques présents dans les bases de logiciels commerciaux. De plus elle offre une plus grande liberté dans la modélisation des guides par rapport aux méthodes semi-analytiques qui contraignent bien souvent l'utilisation d'un guide aux propriétés homogènes dans la direction longitudinale. Dans la mesure où la WFEM s'applique sur une tranche du guide, il est par exemple possible d'intégrer la largeur réelle des semelles du rail plus facilement qu'à l'aide de méthodes semi-analytiques.

La présentation des différentes méthodes relatives au comportement dynamique de la voie a mis en évidence les bénéfices et les limitations de chacune d'entre elles. Dans un cadre industriel, l'objectif de la thèse est de modéliser la voie par éléments finis afin de tester des solutions de réduction des nuisances sonores et vibratoires. Le modèle devra de plus intégrer une portion de voie chargée due à la présence de la charge statique du véhicule. Ainsi, la méthode numérique choisie est la WFEM. Celle-ci permet de modéliser des cellules périodiques non-uniformes en se basant sur une

tranche de structure. L'implémentation par exemple de semelles réparties, de semelles raidies due à la pré-charge statique, ou encore d'absorbeurs dynamiques est envisageable grâce à cette méthode. De plus, la méthode utilise des éléments finis classiques pour l'assemblage des tranches de structure et est donc propice à une utilisation industrielle. Le modèle WFEM devra donc être en mesure de fournir la réponse forcée dynamique d'une voie ferrée en éléments finis suite à une excitation stationnaire située à n'importe quel endroit de la voie. La réponse devra être observable en tout point du guide, les taux de décroissance des ondes pourront être calculés pour caractériser les performances de la voie. De plus, le modèle devra être en mesure d'intégrer une portion de voie non-périodique, à l'intérieur de laquelle il sera par exemple possible d'implémenter des semelles raidies ou des solutions anti-vibratiles.

## 1.5 Organisation de la thèse

Le rapport de thèse s'organise autour de cinq chapitres. Le premier chapitre qui vient d'être exposé a présenté un ensemble de méthodologies possibles pour modéliser la réponse dynamique d'une voie ferrée dans le cadre du bruit de roulement. La méthode retenue pour les objectifs de la thèse est la WFEM (Wave Finite Element Method). Celle-ci apporte une souplesse dans la modélisation qui répond parfaitement aux requêtes du projet CERVIFER.

Le deuxième chapitre présentera plus en détails le comportement dynamique de la voie ferrée à l'aide d'une méthode analytique périodique. Les objectifs sont doubles, être capable dans un premier temps d'exposer de manière claire les enjeux de la dynamique ferroviaire dans le cadre du bruit de roulement en analysant les paramètres les plus influents. La voie sera modélisée par une poutre de Timoshenko infinie reposant sur une infinité de supports élastiques. Le calcul de la réponse se fera au moyen d'une fonction de Green du rail supporté. Ainsi, le principe de périodicité sera utilisé de manière analytique. Il constitue le second objectif de ce chapitre, introduire de manière simple le phénomène de propagation des ondes dans des structures périodiques infinies. L'accent sera mis sur le lien entre les bandes d'atténuation des ondes et les modes propres des cellules élémentaires.

Le troisième chapitre sera consacré à la WFEM (Wave Finite Element Method), les propriétés fondamentales de cette méthode y seront détaillées afin d'utiliser cet outil pour résoudre les objectifs de la thèse. Deux approches seront présentées, la WA (Wave Approach) et la DSM (Dynamic Stiffness Matrix), qui permettent d'obtenir

les réponses forcées de structures périodiques à partir d'une cellule élémentaire. Les avantages et les inconvénients des approches seront étudiés afin de construire par la suite un modèle périodique optimal de la voie ferrée. La réduction modale sera étudiée et posera les limites de son utilisation en fonction des conditions limites du modèle.

Le quatrième chapitre présentera une méthode innovante de calcul par bi-périodisation et couplage entre la méthode des éléments finis (FEM) et la WFEM. Le couplage a une fonction double, mettre en place tout type d'hétérogénéité au sein d'une cellule et réduire le nombre de modes de propagation pour le calcul des réponses forcées. La bi-périodisation sera ensuite développée, elle consiste à utiliser la DSM afin de condenser de manière dynamique une cellule élémentaire longue, l'opération étant indépendante du nombre de degrés de liberté internes. Enfin, le couplage FEM-WFEM sera combiné à la bi-périodisation afin de calculer la réponse forcée de structures infinies comprenant des portions hétérogènes.

Le cinquième chapitre utilise les outils numériques présentés dans les chapitres trois et quatre pour résoudre le cas industriel d'une voie ferrée ballastée comprenant une solution anti-vibratile. Le calcul et l'analyse des modes de propagation d'un rail UIC60 libre seront effectués dans un premier temps. La méthode de bi-périodisation associée au couplage FEM-WFEM sera utilisée pour calculer la réponse dynamique de la voie périodique jusque 5000 Hz. Une comparaison expérimentale permettra de valider le modèle proposé en utilisant des données de mobilité et les taux de décroissance de la voie. Enfin, le modèle mis en place dans cette thèse servira à l'étude d'une solution anti-vibratile en cours de développement au sein du projet CERVIFER. Ce dispositif fonctionne sur deux modes distincts, un mode souple déclenché suite à l'application d'une charge statique et un mode raide actif dans le cas contraire. Le modèle d'une structure infinie comprenant une portion centrale non périodique sera utilisé afin de confirmer les performances escomptées du dispositif anti-vibratile.



## Chapitre 2

# Modèle analytique périodique de la voie ballastée

*Ce chapitre présente le comportement dynamique d'une voie ballastée par l'intermédiaire d'une méthode analytique périodique. Le modèle de voie utilisera une poutre de Timoshenko infinie reposant sur une infinité de supports élastiques. La résolution du comportement dynamique de la voie sera obtenue au moyen d'une fonction de Green du rail supporté. La théorie des structures périodiques sera présentée pour les modèles analytiques. Ceci permettra d'analyser les grandes propriétés relatives aux bandes de propagation et d'atténuation qui influent fortement le comportement dynamique de la voie ferrée.*

## 2.1 Les structures périodiques

Une structure périodique est définie comme un système constitué d'une répétition d'éléments unitaires identiques [9]. La périodicité peut être définie selon une ou plusieurs directions, on distingue trois types de périodicité :

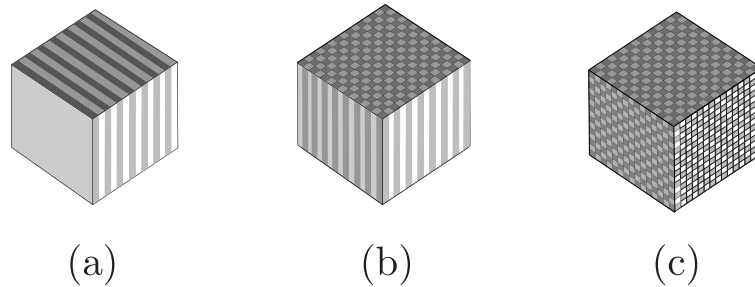


FIGURE 2.1 – Les trois types de périodicité selon leur dimension

- Unidimensionnelle : répétition de l'élément dans une direction de l'espace (par exemple : une voie ferrée)
- Bidimensionnelle : répétition de l'élément dans deux directions de l'espace (par exemple : une plaque perforée ou une structure en nid d'abeille)
- Tridimensionnelle : répétition de l'élément dans les trois directions de l'espace (par exemple : certains cristaux )

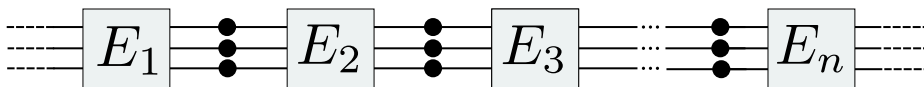


FIGURE 2.2 – Diagramme en blocs d'un système périodique unidimensionnel

La voie ferrée est considérée comme un système périodique unidimensionnel multi-couplé *i.e* dont les éléments unitaires sont couplés par plusieurs degrés de liberté à chaque extrémité [11] (voir Fig. 2.2). Un système multi-couplé est considéré d'ordre  $n_c$  lorsque l'interface entre deux éléments est couplée par  $n_c$  degrés de liberté. On notera les déplacements harmoniques  $\mathbf{q}_L$  et  $\mathbf{q}_R$  ainsi que les forces harmoniques  $\mathbf{F}_L$  et  $\mathbf{F}_R$  appliquées respectivement aux extrémités gauches et droites d'un élément unitaire (voir Fig. 2.3).

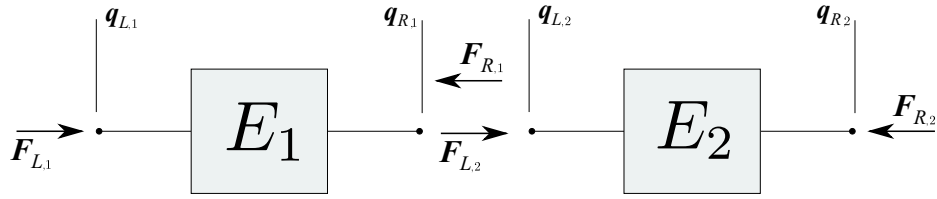


FIGURE 2.3 – Forces et déplacements appliqués à deux éléments unitaires adjacents

Le théorème de Bloch [7], nommé aussi Floquet-Bloch, provient d'une généralisation en 3 dimensions du théorème de Floquet [6] qui décrit la propagation des ondes dans une structure périodique. Pour une structure périodique unidimensionnelle de période  $l_e$  dans la direction  $z$ , les ondes libres se propagent selon une constante de propagation complexe  $\gamma$  de telle sorte que :

$$\mathbf{q}(x, y, z + nl_e, t) = e^{-n\gamma l_e} \mathbf{q}(x, y, z, t) \quad (2.1)$$

Avec  $\gamma$  la constante de propagation telle que :

$$\gamma = \alpha + i\beta \quad (2.2)$$

Où  $\alpha$  représente la composante d'atténuation de l'onde entre deux éléments et  $\beta$  son nombre d'onde.

Dans le cas d'une cellule d'un système périodique multi-couplé, l'utilisation du théorème de Bloch permet de lier les déplacements et les efforts des deux extrémités d'un élément de telle sorte que [11] :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q}_R \\ -\mathbf{F}_R \end{Bmatrix} = e^{-\gamma l_e} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{F}_L \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

Le signe - devant  $\mathbf{F}_R$  traduit l'opposition des forces au niveau de l'interface de deux cellules élémentaires adjacentes (voir Fig. 2.3). Cette formulation permet une description ondulatoire du comportement vibratoire des structures périodiques. La propagation d'une onde au travers d'un ensemble d'éléments unitaires est calculée en multipliant son amplitude par une exponentielle complexe  $e^{-\mu}$  qui décrit un déphasage entre les cellules pour la partie imaginaire de  $\mu$  et d'une atténuation pour sa partie réelle.

## 2.2 Modélisation analytique

La modélisation des structures périodiques a suscité un fort intérêt dans la communauté scientifique, et ce, depuis le 17<sup>ème</sup> siècle lorsque Sir Isaac Newton a tenté de représenter la propagation du son dans l'air à l'aide de masses ponctuelles et de ressorts. Rayleigh [36] fut le premier à s'intéresser à la modélisation d'un système périodique continu en l'appliquant à une corde tendu dont la densité variait le long de celle-ci de manière périodique. L'étude des structures périodiques a ensuite été développée par Brillouin [37], initialement pour le domaine de la cristallographie. Dans son ouvrage, il y a décrit les modèles mathématiques utilisés pour la propagation d'ondes dans les solides, le long de lignes électriques ou encore pour les réflexions en optique. Au cours des dernières décennies, de nombreuses méthodes ont été mises en place pour le calcul des ondes de propagation au sein des systèmes périodiques [12]. Deux méthodes principalement utilisées pour une résolution de manière analytique sont présentées dans cette section (des méthodes numériques seront présentées par la suite, voir section 3.1).

### 2.2.1 Méthode des réceptances

La méthode des réceptances est l'une des premières méthodes à avoir été développée. C'est une approche locale puisqu'elle s'applique sur une cellule élémentaire de la structure globale [10, 11]. Il est possible de caractériser chaque élément par sa matrice de réceptance  $\alpha$  qui est le rapport entre le déplacement harmonique de l'élément et les forces harmoniques qui y sont appliquées :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{LL} & \alpha_{LR} \\ \alpha_{RL} & \alpha_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_L \\ \mathbf{F}_R \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

Pour un système multi-couplé d'ordre  $n_c$ , la matrice  $\alpha$  est sous-divisée en quatre matrices de dimension  $n_c \times n_c$ . Si la structure est linéaire, on obtient la relation  $\alpha_{LR} = \alpha_{RL}^T$ . Les matrices  $\alpha_{LL}$  et  $\alpha_{RR}$  sont toutes deux symétriques [11]. La méthode des réceptances a été amplement utilisée par Mead pour décrire le comportement dynamique de structures mono et multi-couplées [10, 11]. En combinant le théorème de Bloch de l'Eq. (2.3) et l'Eq. (2.4), il a obtenu le système suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{q}_L = (\alpha_{LL} - e^{-\mu} \alpha_{LR}) \mathbf{F}_L \\ e^{-\mu} \mathbf{q}_L = (\alpha_{RL} - e^{-\mu} \alpha_{RR}) \mathbf{F}_L \end{cases} \quad (2.5)$$

Pour un système multi-couplé, ce système admet des solutions si et seulement si :

$$|\alpha_{LL} + \alpha_{RR} - e^{-\mu}\alpha_{LR} - e^{\mu}\alpha_{RL}| = 0 \quad (2.6)$$

Pour le cas d'une structure périodique simple mono-couplée, cette condition se traduit par la relation :

$$\cosh(\mu) = \frac{(\alpha_{LL} + \alpha_{RR})}{2\alpha_{LR}} \quad (2.7)$$

La méthode des réceptances a été employée majoritairement jusque dans les années 70 afin de décrire le comportement des systèmes périodiques mono-couplés. Sen Gupta [38] et Mead [8] s'en sont servis pour l'étude d'une poutre périodique mono-couplée sur supports périodiques. La méthode a ainsi permis une première compréhension du phénomène de propagation des ondes au sein de structures périodiques.

### 2.2.2 Méthode directe

Contrairement à la méthode des réceptances, la méthode directe est une approche globale de résolution du problème périodique *i.e* sans découpage de la structure en cellules élémentaires. La méthode utilise le comportement d'un élément dans son intégralité par l'intermédiaire par exemple de ses équations analytiques du mouvement. La périodicité du système intervient ensuite sous la forme d'efforts et de moments sur la structure. Connaissant le comportement vibratoire de la structure continue seule, il est possible de déterminer la propagation des ondes au sein de la structure reposant sur des éléments périodiques. La méthode a été utilisée par Mace [39] pour calculer la réponse acoustique et vibratoire d'une plaque comportant des raidisseurs répartis de manière périodique. Nordborg [18] et Hamet [19] ont étudié la réponse vibratoire d'un rail infini sur supports périodiques.

Cette méthode sera utilisée dans ce chapitre pour établir les équations qui régissent la propagation d'ondes élastiques de flexion verticales au sein d'un rail infini comprenant des supports répartis de manière périodique. Le rail sera modélisé par une poutre de Timoshenko, les supports représentent l'ensemble semelle-traverse-ballast.

## 2.3 Étude d'un rail infini en flexion verticale par méthode directe

### 2.3.1 Modélisation du rail et des supports

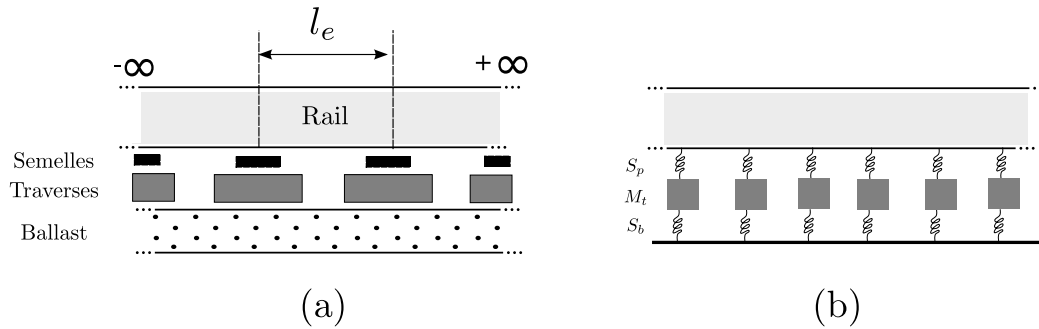


FIGURE 2.4 – (a) Voie ballastée de période  $l_e$  (b) Modélisation des supports discrets du système par des liaisons de type ressort-masse-ressort

La poutre de Timoshenko infinie représente dans ce cas d'étude un rail infini en flexion verticale reposant sur des supports répartis de manière discrète et périodique de période  $l_e$  (voir Fig. 2.4). Les supports sont composés de traverses liées au rail par l'intermédiaire de semelles modélisées par des raideurs élastiques linéaires. Les traverses reposent sur une couche de ballast modélisée dans ce cas d'étude par une raideur élastique linéaire. Les traverses sont considérées comme des masses rigides. Un seul rail est modélisé et donc une demi traverse est prise en considération.

Les considérations suivantes seront adoptées dans le reste du chapitre :

1. L'origine des abscisses  $z_0 = 0$  est placée sur une traverse
2. Les points d'attache sont en quantité infinie et équidistants d'une distance  $l_e$
3. L'abscisse du point d'attache  $n$  est  $z_n = nl_e$
4. La raideur dynamique du support  $n$  est notée  $Z_n(\omega)$
5. La force exercée par le support sur le rail est proportionnelle au déplacement  $\xi$  et à la raideur dynamique  $Z_n$  du support  $n$  telle que :

$$F_n(\omega) = -Z_n(\omega)\xi(z_n, \omega) \quad (2.8)$$

Le Tab. 2.1 regroupe les valeurs des raideurs dynamiques de deux types de supports élastiques.

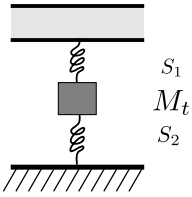
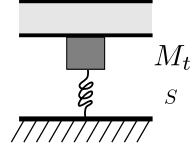
Raideurs dynamiques $Z(\omega)$ des supports	$Z(\omega) = \frac{F(\omega)}{\xi(\omega)}$	
Ressort <sub>1</sub> Masse Ressort (Semelle Traverse Ballast) <sub>2</sub>	$Z = \frac{s_1(M_t\omega^2 - s_2)}{M_t\omega^2 - (s_1 + s_2)}$	
Masse Ressort (Traverse Ballast)	$Z = -M_t\omega^2 + s$	

Tableau 2.1 – Raideurs dynamiques de différents types de supports [16]

### 2.3.2 Déplacement vertical de la cellule élémentaire par le principe de périodicité

Le calcul de la réponse forcée de la poutre de Timoshenko infinie sur supports répartis de manière périodique est effectué par méthode directe en appliquant le principe de superposition. Pour cela, il est nécessaire de connaître le comportement dynamique de la structure seule (*i.e* sans la présence des supports) soumise à une réponse impulsionnelle.

Les équations du mouvement de la poutre de Timoshenko libre (sans supports) en flexion verticale soumise à une force extérieure concentrée en  $z_e$  (voir Annexe A) s'écrivent :

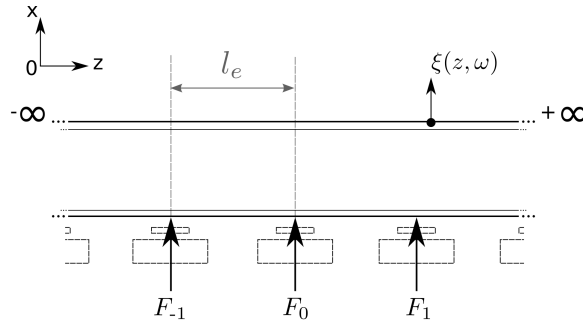
$$\begin{cases} \Gamma A \frac{\partial}{\partial z} \left( \theta_y(z, t) - \frac{\partial \xi(z, t)}{\partial z} \right) + M \frac{\partial^2 \xi(z, t)}{\partial t^2} = F(z_e, t) \\ \Gamma A \left( \theta_y(z, t) - \frac{\partial \xi(z, t)}{\partial z} \right) - EI \frac{\partial^2 \theta_y(z, t)}{\partial z^2} + \rho I \frac{\partial^2 \theta_y(z, t)}{\partial z^2} = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

La fonction de Green associée à la poutre de Timoshenko libre (voir Annexe B) s'écrit :

$$G^L(z, z_f, \omega) = -\frac{1}{B} \left[ F_d e^{-k_d |z - z_f|} + i F_p e^{-i k_p |z - z_f|} \right]$$

Avec :

$$F_p = \frac{1 - \frac{B}{K}(-k_p^2 + k_c^2)}{2k_p(k_p^2 + k_c^2)} \quad F_d = \frac{1 - \frac{B}{K}(k_d^2 + k_c^2)}{2k_d(k_p^2 + k_c^2)}$$

FIGURE 2.5 – Structure infinie sur des supports discrets périodiques de période  $l_e$ 

La méthode directe considère l'influence des supports comme une somme de forces ou de moments discrets agissant sur le rail. En utilisant le principe de superposition et d'après les Eqs. (B.2) et (2.8) les ondes de flexion verticales sont solution de l'équation :

$$\left[ \left\{ \frac{d^2}{dz^2} + k_p^2 \right\} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} - k_d^2 \right\} \right] \xi(z, \omega) + \frac{1}{B} \left[ 1 - \frac{B}{K} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} + k_c^2 \right\} \right] \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_n(\omega) \xi(z, \omega) \delta(z - nl_e) = 0 \quad (2.10)$$

La fonction de Green  $G^L(z, z_f, \omega)$  est solution de l'Eq. (B.9), ainsi la solution de l'Eq. (2.10) est :

$$\xi(z, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -Z_n(\omega) \xi(z_n, \omega) G^L(z, z_n, \omega) \quad (2.11)$$

Le rail est considéré comme une structure périodique unidimensionnelle de période  $l_e$  si toutes les raideurs dynamiques des supports sont égales. Ainsi, il est possible d'utiliser le théorème de Floquet-Bloch [6, 7] qui lie le déplacement d'une cellule à une autre par une constante complexe  $\gamma$  tel que :

$$\xi(z + nl_e, \omega) = \xi(z, \omega) e^{-n\gamma l_e} \quad (2.12)$$

En substituant l'Eq. (2.12) dans l'Eq. (2.11), on obtient :

$$\xi(z, \omega) = -\xi(0, \omega) \frac{Z(\omega)}{B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [F_d e^{-k_d |z - nl_e|} + i F_p e^{-ik_p |z - nl_e|}] e^{-n\gamma l_e} \quad (2.13)$$

Si  $0 \leq z < l_e$ , la somme infinie de l'Eq. (2.13) est convergente, en calculant la convergence de séries géométriques [19] on obtient :

$$\xi(z, \omega) = -\xi(0, \omega) \frac{Z(\omega)}{B} \left[ F_p \frac{\sin(k_p(l_e - z)) + e^{-\gamma l_e} \sin(k_p z)}{\cos(k_p l_e) - \cosh(\gamma l_e)} - F_d \frac{\sinh(k_d(l_e - z)) + e^{-\gamma l_e} \sinh(k_d z)}{\cosh(k_d l_e) - \cosh(\gamma l_e)} \right] \quad (2.14)$$



Il est possible d'écrire le déplacement vertical de la cellule élémentaire comme étant :

$$\forall z \in [0, l_e[ \quad \xi(z, \omega) = -\xi(0, \omega) \frac{Z(\omega)}{B} Y(z, \omega, \gamma) \quad (2.15)$$

Avec la déformée modale  $Y(z, \omega, \gamma)$  telle que :

$$Y(z, \omega, \gamma) = \left[ F_p \frac{\sin(k_p(l_e - z)) + e^{-\gamma l_e} \sin(k_p z)}{\cos(k_p l_e) - \cosh(\gamma l_e)} - F_d \frac{\sinh(k_d(l_e - z)) + e^{-\gamma l_e} \sinh(k_d z)}{\cosh(k_d l_e) - \cosh(\gamma l_e)} \right] \quad (2.16)$$

Le déplacement vertical de la poutre en dehors du domaine de définition  $[0, l_e[$  est déterminé grâce au théorème de Floquet-Bloch de l'Eq. (2.12).

### 2.3.3 Ondes de flexion de la cellule élémentaire

Une fois le déplacement vertical de la cellule élémentaire exprimé grâce à l'Eq. (2.15), il est possible de calculer la constante complexe  $\gamma$  en exprimant l'Eq. (2.15) en  $z = 0$ , on obtient :

$$1 = -\frac{Z(\omega)}{B} \left[ F_p \frac{\sinh(k_d l_e)}{\cosh(k_d l_e) - \cosh(\gamma l_e)} - F_d \frac{\sin(k_p l_e)}{\cos(k_p l_e) - \cosh(\gamma l_e)} \right] \quad (2.17)$$

On obtient alors une relation de dispersion du second degré en  $\cosh(\gamma l_e)$  :

$$\begin{aligned} & \cosh^2(\gamma l_e) + \cosh(\gamma l_e) \left[ \frac{Z(\omega)}{B} (F_d \sinh(k_d l_e) - F_p \sin(k_p l_e)) - (\cosh(k_d l_e) + \cos(k_p l_e)) \right] \\ & + \left[ \frac{Z(\omega)}{B} (F_p \cosh(k_d l_e) \sin(k_p l_e) - F_d \cos(k_p l_e) \sinh(k_d l_e)) + \cosh(k_d l_e) \cos(k_p l_e) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

La résolution de l'Eq. (2.18) mène à deux solutions possibles notées  $\cosh(\gamma_p l_e)$  et  $\cosh(\gamma_d l_e)$ . Chacune admet deux valeurs complexes associées  $\pm\gamma_p$  et  $\pm\gamma_d$  définies à  $2\pi/l_e$  près. Ces 4 valeurs complexes correspondent aux constantes de propagation des ondes au sein de la poutre sur supports discrets périodiques. Les ondes dont la décroissance est la moins rapide seront associées aux constantes  $\pm\gamma_p$  et appelées "*propagatives*" (en anglais *propagative*), celles dont la décroissance est la plus rapide seront associées aux constantes  $\pm\gamma_d$  et appelées "*évanescents*" (en anglais *decaying*). Les constantes de propagation s'écrivent respectivement  $\gamma_p = \alpha_p + i\beta_p$  et  $\gamma_d = \alpha_d + i\beta_d$ . Par convention,  $\gamma_p$  et  $\gamma_d$  seront définies comme étant à partie réelle positive.

## 2.4 Analyse des constantes de propagation d'un rail infini

### 2.4.1 Calcul des constantes de propagation

Les constantes de propagation d'un rail UIC 60 infini reposant sur des supports périodiques élastiques sont calculées en utilisant l'Eq. (2.18). Les paramètres utilisés pour modéliser la voie sont présentés dans les Tabx. 2.2 et 2.3.

<b>Paramètres de la voie sous rail</b>	
Masse d'une demi traverse	$M_t = 162 \text{ kg}$
Raideur de semelle	$s_p = 3 \times 10^8 \text{ N/m}$
Raideur de ballast	$s_b = 7.5 \times 10^7 \text{ N/m}$
Amortissement de semelle	$\eta_p = 0.1$
Amortissement de ballast	$\eta_b = 0.4$
Longueur de travée	$l_e = 0.6 \text{ m}$

Tableau 2.2 – Paramètres de la voie sous rail

<b>Paramètres du rail UIC 60</b>	
Module de Young	$E = 2,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
Amortissement structural	$\eta_r = 0.004$
Moment quadratique	$I = 3,055 \times 10^{-5} \text{ m}^4$
Coefficient de rigidité en flexion	$B = 6,405 \times 10^6 \text{ N.m}^2$
Coefficient de poisson	$\nu = 0,3$
Module de cisaillement	$G = 8,08 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
Masse volumique	$\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$
Masse linéique	$M = 60 \text{ kg/m}$
Aire de la section équivalente	$A = 7,6 \times 10^{-3} \text{ m}^2$
Coefficient de cisaillement de la section	$\kappa = 0,4167$
Coefficient de rigidité au cisaillement	$K = 2,589 \times 10^8 \text{ N/m}$

Tableau 2.3 – Paramètres du rail UIC 60

Les constantes de propagation du rail supporté de manière périodique ainsi que sans supports sont présentées sur la Fig. 2.6. Par soucis de clarté, seules les ondes se propageant dans la direction positive sont représentées, soit les ondes liées aux constantes  $\gamma_p$  et  $\gamma_d$ .

Le taux de décroissance de la voie (en anglais *Track Decay Rate* TDR), exprimé en dB/m en fonction de la fréquence, est calculé grâce à la formulation  $20\log_{10}(e^{\Re\gamma})$  [21]. Il permet de mesurer la décroissance des ondes le long de la voie, ainsi un taux plus élevé est souvent synonyme d'une vibration plus faible sur de grandes distances

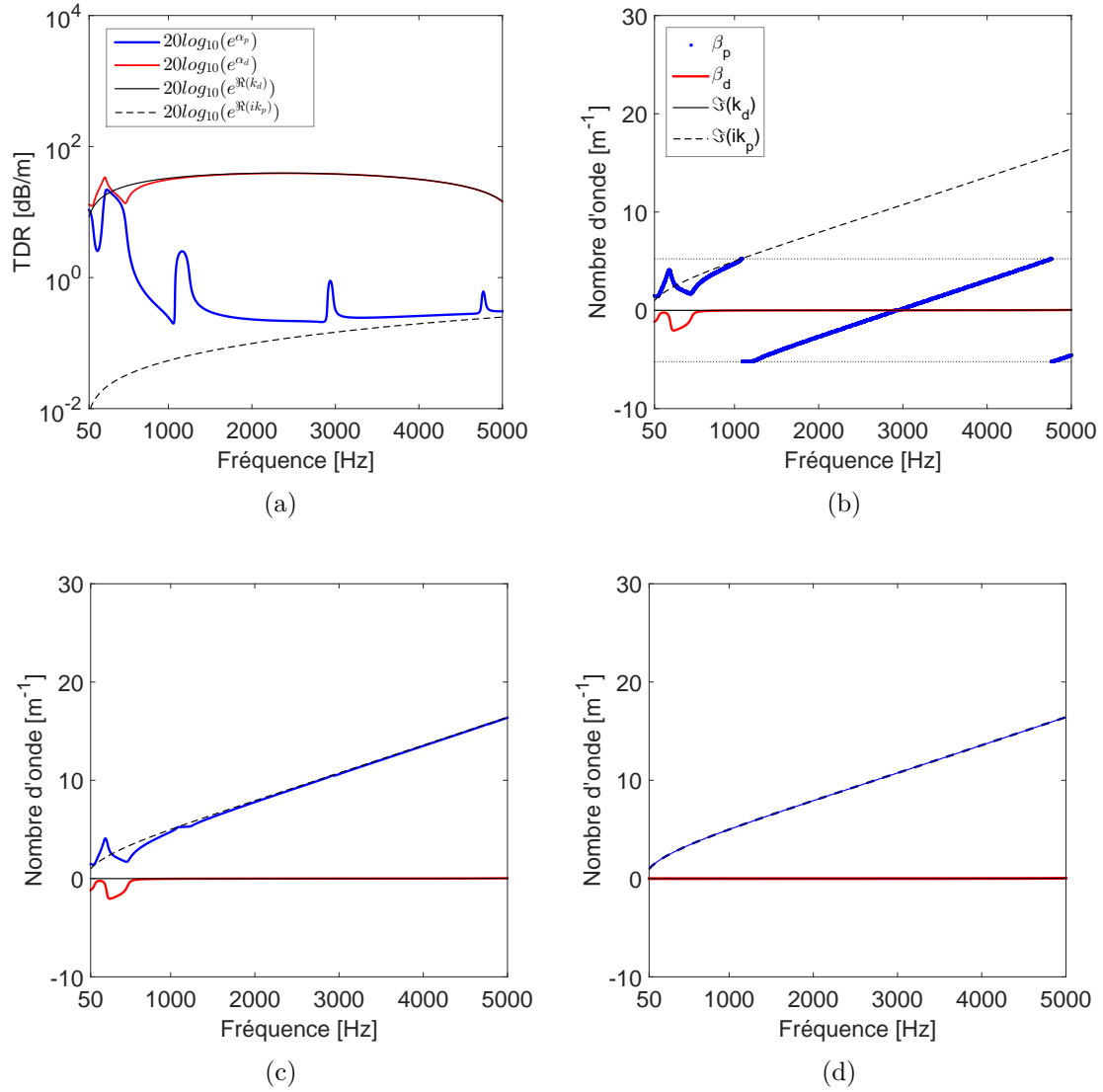


FIGURE 2.6 – (a) Taux de décroissance en dB/m des ondes de la poutre de Timoshenko sur des supports périodiques de type Ressort-Masse-Ressort (b) Constantes de propagation en  $m^{-1}$  dans la première zone de Brillouin (c) Constantes de propagation en  $m^{-1}$  déroulées (d) Constantes de propagation en  $m^{-1}$  pour  $Z = 0$

et donc d'un rayonnement acoustique plus faible [1]. Les TDR de l'onde *propagative*  $\gamma_p$  et *évanescence*  $\gamma_d$  sont tracés sur la Fig. 2.6(a). L'onde *propagative* possède des bandes fréquentielles où l'atténuation s'accroît. Ces zones seront nommées "bandes d'atténuation" (en anglais *stop-bands*), elles proviennent de la répartition périodique des supports et seront détaillées dans la section 2.4.2. Il est à noter qu'en hautes fréquences, les constantes de propagation tendent vers les constantes de propagation de la poutre sans supports  $ik_p$  et  $k_d$ . La poutre périodique se découple en effet progressivement de ses supports et tend à vibrer comme une poutre libre.

Les nombres d'onde  $\beta_p$  et  $\beta_d$  du rail sur supports discrets en fonction de la fréquence sont présentés sur la Fig. 2.6(b). Ils sont dans la première zone de Brillouin [37] d'où le décalage visible entre le nombre d'onde de la poutre avec et sans supports pour l'onde *propagative*. La Fig. 2.6(c) représente les nombres d'ondes déroulés sur le spectre fréquentielle, en ajoutant  $2\pi/l_e$  dès que leur valeur dépasse  $\pi/l_e$ . Le nombre d'onde de l'onde *évanescence* est quant à lui quasiment nul pour une fréquence supérieure à 500 Hz, avec une rétroaction visible en dessous de cette fréquence. L'onde *évanescence* a principalement une fonction d'atténuation et ne se propage donc pas le long de la poutre.

Lorsque la raideur dynamique des supports est définie nulle, les constantes de propagation  $\gamma_p$  et  $\gamma_d$  calculées correspondent aux nombres d'ondes complexes  $ik_p$  et  $k_d$  de la poutre sans supports en flexion verticale (voir Fig. 2.6(d)). En effet, une poutre continue infinie peut être considérée comme une structure périodique numérique de période arbitraire (voir section 1.3.2), le fait d'appliquer une raideur dynamique nulle sur la poutre infinie revient donc à calculer les constantes de propagation de la poutre infinie sans supports.

### 2.4.2 Condition de propagation des ondes sans amortissement interne

La répartition périodique de supports sous la poutre induit donc la présence de bandes particulières nommées *stop-bands* dans lesquelles l'atténuation s'accroît. Sans la présence d'amortissement interne dans la structure, la constante de propagation  $\gamma$  est soit réelle pure ou imaginaire pure [10]. Ainsi, une onde peut se propager dans la structure uniquement si  $\gamma$  est imaginaire pure, ce qui arrive lorsque :

$$|\cosh(\gamma l_e)| \leq 1 \quad (2.19)$$

L'intervalle de fréquences pour lesquelles une onde peut se propager est borné par les fréquences limites telles que  $\cosh(\gamma l_e) = \pm 1$  et donc  $\sinh(\gamma l) = 0$  [10]. La Fig. 2.7(a) représente la variation fréquentielle de  $|\cosh(\gamma_p l_e)|$ . Les fréquences qui ne respectent pas la condition  $|\cosh(\gamma l_e)| \leq 1$  appartiennent aux bandes d'atténuation (*stop-bands*) et ne permettent pas la propagation des ondes. En revanche, les fréquences qui la respectent appartiennent aux bandes de propagation (en anglais *pass-bands*). La Fig. 2.7(b) représente le nombre d'onde  $\beta_p$  et la constante d'atténuation  $\alpha_p$  de l'onde propagative. On remarque la présence d'amortissement lorsque l'onde ne peut se propager. Un système périodique peut donc atténuer les ondes à certaines fréquences même sans la présence d'amortissement interne.

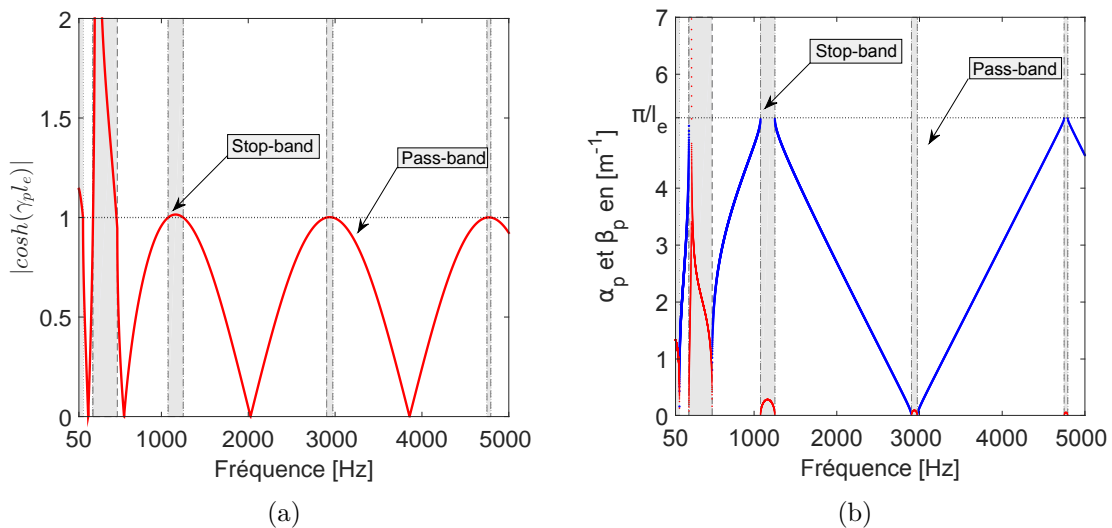


FIGURE 2.7 – (a) Variation de  $|\cosh(\gamma_p l_e)|$  (b) nombre d'onde  $\beta_p$  en bleu / de la constante d'atténuation  $\alpha_p$  en rouge en fonction de la fréquence de la poutre sur supports de type ressort-masse-ressort périodiques sans amortissement interne

## 2.5 Fréquences limites des bandes d'atténuation

### 2.5.1 Fréquences propres d'une cellule élémentaire

Cette section met en lien la relation entre les fréquences limites des bandes d'atténuation et des fréquences propres d'une cellule élémentaire symétrique. La relation est redémontrée [10] pour un système mono-couplé *i.e* à un degré de liberté de couplage.

Pour un système mono-couplé, la constante  $\gamma$  peut être liée à la réceptance grâce à l'Eq.(2.7) :

$$\cosh(\gamma l_e) = \frac{(\alpha_{LL} + \alpha_{RR})}{2\alpha_{LR}}$$

Si un système est linéaire, l'égalité  $\alpha_{LR} = \alpha_{RL}$  est assurée. De plus, si la cellule élémentaire est symétrique, on obtient  $\alpha_{RR} = \alpha_{LL}$ . Cela se traduit par une nouvelle relation :

$$\cosh(\gamma l_e) = \frac{\alpha_{LL}}{\alpha_{LR}} \quad (2.20)$$

En utilisant la condition  $\cosh(\gamma l_e) = \pm 1$  imposée pour la limite de propagation des ondes, les fréquences limites des bandes d'atténuation sont obtenues pour  $\alpha_{LL} = \pm \alpha_{LR}$ .

Cette condition peut être liée aux fréquences naturelles d'un élément symétrique mono-couplé libre ou bloqué à ses extrémités [10]. Par exemple, les équations qui régissent les déplacements d'un élément symétrique bloqué à ses extrémités sont définies par :

$$\begin{cases} q_L = \alpha_{LL} F_L + \alpha_{LR} F_R = 0 \\ q_R = \alpha_{RL} F_L + \alpha_{RR} F_R = 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

Ce système d'équation admet des solutions si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{LL} & \alpha_{LR} \\ \alpha_{RL} & \alpha_{RR} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.22)$$

En utilisant les conditions de symétrie et de linéarité telles que  $\alpha_{RR} = \alpha_{LL}$  et  $\alpha_{LR} = \alpha_{RL}$ , l'Eq. (2.22) se traduit par la relation  $\alpha_{LL} = \pm \alpha_{LR}$ . Ainsi, aux fréquences propres de l'élément unitaire, on obtient la même relation que pour  $\cosh(\gamma l_e) = \pm 1$ . Les fréquences limites des bandes d'atténuation du système mono-couplé<sup>1</sup> correspondent

---

1. Ceci n'est vrai que pour des éléments unitaires symétriques. Dans le cas d'éléments non symé-

donc aux fréquences propres d'un élément unitaire aux extrémités libres ou bloquées [10].

Mead [11] a étendu ce théorème en l'appliquant aux systèmes multi-couplés. Pour un système symétrique linéaire, les deux matrices  $\alpha_{RR}$  et  $\alpha_{LL}$  sont symétriques et l'égalité  $\alpha_{RL} = \alpha_{LR}^T$  est assurée. En utilisant la relation  $\cosh(\gamma l_e) = \pm 1$  et  $\sinh(\gamma l_e) = 0$ , il est parvenu à la relation :

$$|(\alpha_{LL} + \alpha_{RR}) \pm (\alpha_{RL} + \alpha_{LR})| = 0 \quad (2.23)$$

Il a développé le même raisonnement que pour les systèmes mono-couplés à partir de cette équation en séparant les coordonnées en type 1 et en type 2<sup>2</sup>. Pour une structure en flexion verticale, les déplacements verticaux peuvent être considérés comme étant de type 1 et les rotations de type 2 [11]. Dans le cas de cellules élémentaires symétriques, il est possible de lier leurs fréquences naturelles aux fréquences limites des bandes en distinguant deux types de modes propres [11] :

1. Les modes propres de type I admettent les coordonnées de type 2 bloqués et ceux de type 1 libres.
2. Les modes propres de type II admettent les coordonnées de type 1 bloqués et ceux de type 2 libres.

Mead [11] a ainsi pu obtenir une condition sur les fréquences limites des bandes d'atténuation de systèmes multi-couplés. Ces limites correspondent aux fréquences propres d'une cellule élémentaire aux coordonnées de type 1 et 2 alternativement libres ou bloquées à ses extrémités. En règle générale, les bandes d'atténuation seront bornées par deux fréquences propres des modes de type I et/ou de type II, cependant il n'est pas possible de prévoir l'ordre de ces bornes [11].

---

triques, les fréquences propres des éléments libres ou bloqués aux extrémités se trouvent à l'intérieur des bandes d'atténuation mais ne constituent pas les fréquences limites.[10]

2. Pour des éléments symétriques on peut distinguer deux types de coordonnées. Si un mode est symétrique, les coordonnées de type 1 seront en phase de même amplitude alors que les coordonnées de type 2 seront déphasés de même amplitude. Si un mode est antisymétrique, les coordonnées de type 1 seront déphasés de même amplitude alors que les coordonnées de type 2 seront en phase de même amplitude.

### 2.5.2 Comportement des cellules élémentaires aux fréquences limites des bandes d'atténuation

Aux fréquences limites des bandes d'atténuation, la relation  $\cosh(\gamma l_e) = \pm 1$  est assurée ainsi la constante  $\gamma$  est soit nulle soit égale à  $i\pi/l_e$ . D'après l'Eq. (2.3), on obtient aux fréquences limites la relation suivante :

$$\mathbf{q}_R = \pm \mathbf{q}_L \quad (2.24)$$

Les déplacements aux extrémités des cellules élémentaires sont donc en phase si  $\gamma$  est nulle et sont en opposition de phase si  $\gamma$  est égale à  $i\pi/l_e$ . Pour des cellules élémentaires symétriques, les ondes libres au sein de la structure sont symétriques ou antisymétriques au niveau de l'interface. Pour analyser leur déformée, il est nécessaire de considérer les deux valeurs possibles de  $\gamma$  aux fréquences limites ainsi que les conditions de symétrie et d'antisymétrie [35].

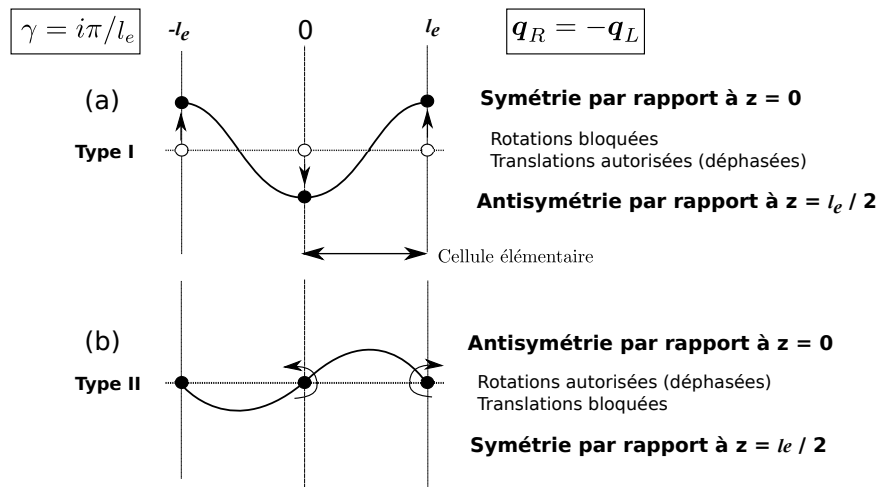


FIGURE 2.8 – Comportement de deux cellules élémentaires adjacentes pour  $\gamma = i\pi/l_e$  en fonction des conditions symétriques et antisymétriques

La condition  $\gamma = i\pi/l_e$  impose  $\mathbf{q}_R = -\mathbf{q}_L$ , si l'onde libre est de nature symétrique par rapport à l'interface en  $z = 0$  (voir Fig. 2.8 (a)), alors les rotations sont bloquées et les translations sont en déphasage de même amplitude. La déformation de la cellule est ainsi antisymétrique par rapport à  $z = l_e/2$ . Si l'onde libre est de nature antisymétrique par rapport à l'interface en  $z = 0$  (voir Fig. 2.8 (b)), alors les rotations sont en déphasage de même amplitude et les translations sont bloquées. La déformation de la cellule est ainsi symétrique par rapport à  $z = l_e/2$ . La même analogie peut être



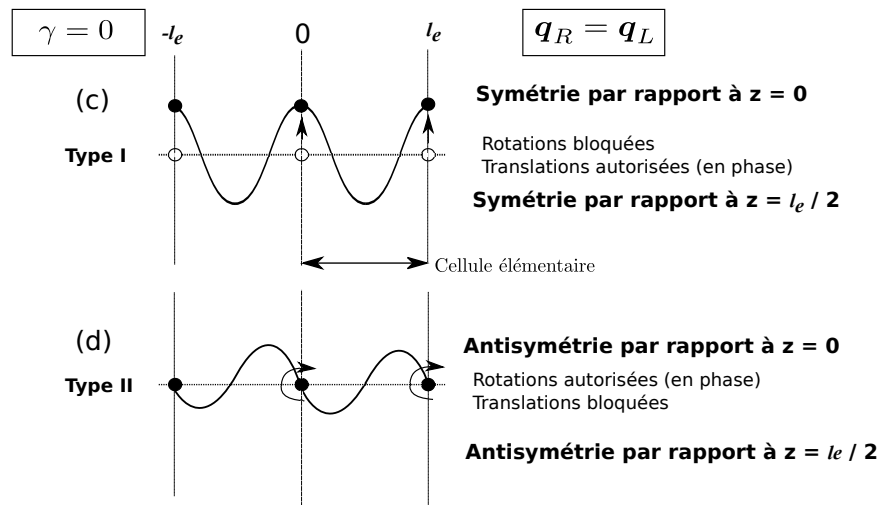


FIGURE 2.9 – Comportement de deux cellules élémentaires adjacentes pour  $\gamma = 0$  en fonction des conditions symétriques et antisymétriques

effectuée pour  $\gamma = 0$  (voir Fig. 2.9).

La condition de symétrie par rapport à l'interface correspond aux rotations bloquées et aux translations autorisées, elle sera nommée type I (voir Fig. 2.10). La condition d'antisymétrie par rapport à l'interface correspond aux translations bloquées et aux rotations autorisées, elle sera nommée type II. Ce sont les fréquences propres de ces modes de types I et II qui correspondent aux fréquences limites des bandes d'atténuation du système périodique.

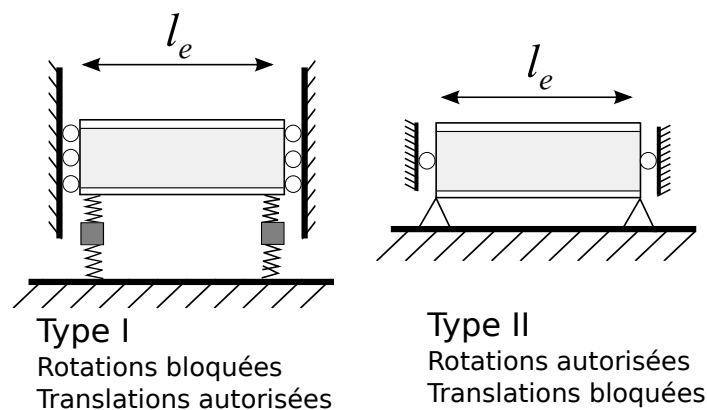


FIGURE 2.10 – Conditions limites des modes de type I et de type II d'une cellule élémentaire

### 2.5.3 Calcul des fréquences propres de type I et II

Cette section se concentre sur le calcul des fréquences propres de type I et II pour la poutre en flexion verticale sur des supports élastiques de type ressort-masse-ressort. Dans l'étude, les supports étant situés aux extrémités de la cellule élémentaire, le calcul des fréquences propres est réalisé en prenant en compte des demi-supports [35]. Pour un support de type ressort-masse-ressort, une demie masse est utilisée ainsi que des demies raideurs par rapport aux valeurs précédemment utilisées (voir Tab 2.2). Les fréquences propres des modes de type I et II ont été calculées par éléments finis en bloquant/autorisant les rotations/translations aux extrémités de la poutre. Les modes de type II ont été calculés en négligeant la raideur de rotation des supports, le rail est ainsi considéré comme reposant sur des appuis simples. Entre 50 Hz et 5000 Hz, six modes propres de type I sont trouvés ainsi que trois modes propres de type II (voir Fig. 2.11).

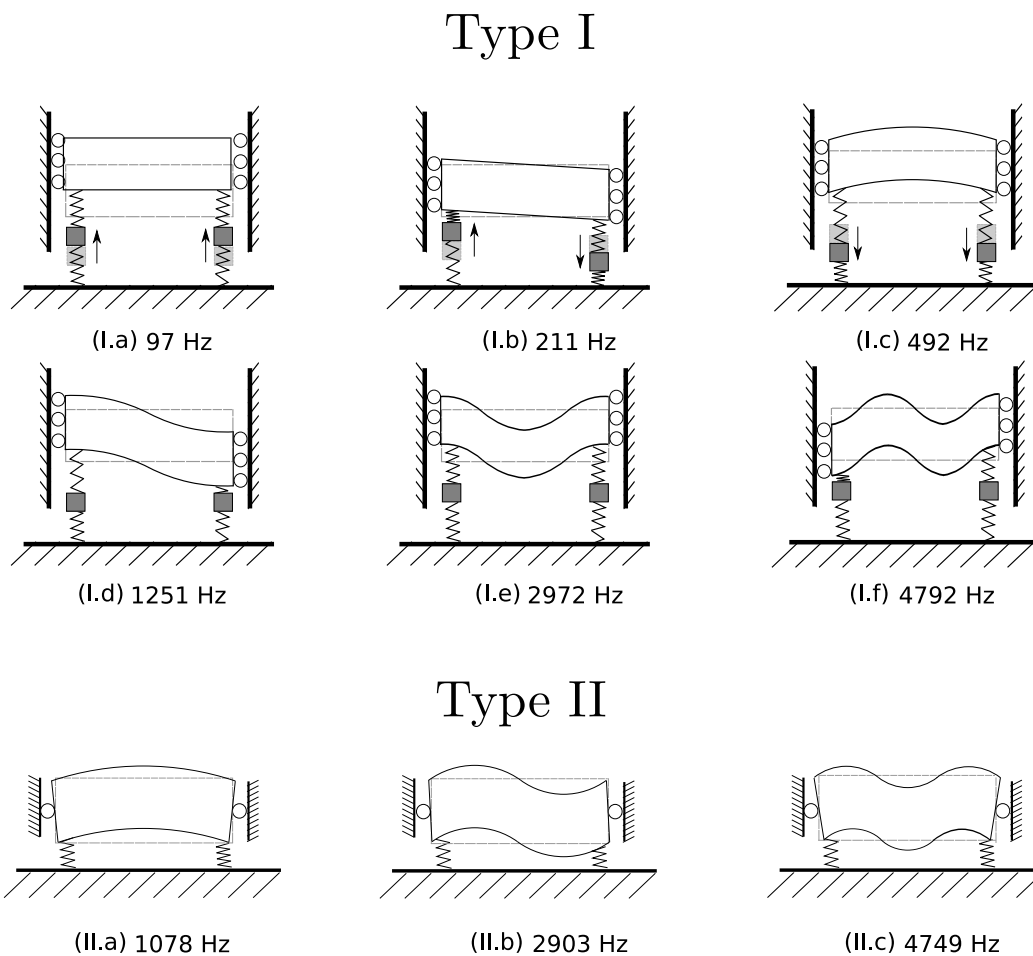


FIGURE 2.11 – Les 9 premiers modes propres de type I et II d'une cellule élémentaire

Les trois premiers mode propres de type I correspondent aux modes rigides d'un système à 3 degrés de liberté (le déplacement vertical du rail et des deux traverses). Le mode (I.a) est symétrique purement rigide dans lequel le rail vibre en phase avec les traverses. Il correspond à la résonance du rail sur les semelles et le ballast. Ce premier mode rigide peut être calculé analytiquement de la façon suivante [1] :

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{M_t}{s_b} + M l_e \left( \frac{1}{s_p} + \frac{1}{s_b} \right) \right)^{-1/2} \quad (2.25)$$

Le mode (I.b) antisymétrique correspond à une résonance déphasée du rail et des traverses. Il est associé à une antirésonance de la voie suite à une excitation du rail. Ce mode peut être approximé par une formule analytique de corps rigide :

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{s_p + s_b}{M_t}} \quad (2.26)$$

Cette formulation estime la résonance du mode 2 à 242 Hz ce qui est plus élevé que la fréquence (I.b) à 211 Hz. L'approximation ne prend pas en compte le cisaillement interne de la poutre et tend à surestimer la fréquence du mode propre. Le mode (I.c) est symétrique avec une légère déformation en flexion du rail, il correspond à la résonance du rail sur les semelles. Le rail vibre en déphasage avec les traverses. Ce troisième mode peut être approximé par :

$$f_3 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{s_p}{M' l_e} + \frac{s_p + s_b}{M_t}} \quad (2.27)$$

Cette formulation estime la résonance du mode 3 à 510 Hz ce qui est plus élevé que la fréquence (I.c) à 492 Hz. L'approche analytique ne prend pas en considération la flexion du rail. Les autres modes (I.d) (I.e) et (I.f) apparaissent respectivement à 1251 Hz, 2972 Hz et 4792 Hz. Le rail se découple progressivement des supports et les modes symétriques/antisymétriques sont alternativement présents.

Le premier mode de type II est présent à partir de 1078 Hz, c'est un mode symétrique de flexion. Cette fréquence est communément appelée en anglais *pinned pinned frequency*, elle est associée à un mode dont la longueur d'onde est telle que  $\lambda_{pinned} = 2l_e$  soit  $k_{pinned} = \pi/l_e$ . La raideur de rotation étant négligée, ce mode est indépendant des caractéristiques des supports. Les autres modes (II.b) et (II.c) apparaissent à 2903 Hz et 4749 Hz, ils correspondent à des modes antisymétriques et symétriques.

### 2.5.4 Analogie entre fréquences propres et fréquences limites des bandes d'atténuation

Les fréquences propres de la section 2.5.3 sont les limites<sup>3</sup> des bandes d'atténuation de la structure périodique, on peut distinguer deux types de bandes [40] : les bandes de Bragg (en anglais *Bragg scattering stop bands*) et les bandes de résonances locales (en anglais *Local resonance stop bands*). Les bandes de Bragg sont dues à la périodicité géométrique de la structure, elles apparaissent lorsque les longueurs d'onde sont du même ordre que la période. Les bandes de résonance locales dépendent quant à elles des propriétés mécaniques des supports.

Les fréquences propres des modes de type I et II de la poutre sur des supports de type ressort-masse-ressort, ainsi que les bandes d'atténuation correspondantes, sont regroupées dans le Tab. 2.4. Le diagramme de dispersion de l'onde propagative superposé aux bandes d'atténuation ainsi que les fréquences propres de type I et II sont représentés sur la Fig. 2.12. Les bandes de résonances locales sont ici bornées par des fréquences propres de type I. La fréquence nulle est située dans la première bande d'atténuation. En effet, Mead [10] a montré que pour des systèmes d'éléments définis positifs<sup>4</sup> (par exemple : une structure sur des supports élastiques) les fréquences proches de 0 Hz se situent dans une bande d'atténuation. La propagation commence ainsi à partir de la première fréquence propre (I.a) du système. On constate de plus une antisymétrie fréquentielle de la constante de propagation  $\gamma$  aux bornes de la bande d'atténuation de résonance locale n°2 comme l'a montré Liu [40].

Les bande de Bragg sont quant à elles bornées par une fréquence de type I et II. Bien que dans ce cas d'étude, les fréquences inférieures soient de type I et les fréquences supérieures de type II, il n'est en théorie pas possible de prévoir l'ordre de ces deux fréquences [10] qui peuvent être alternées selon la bande d'atténuation. On constate une symétrie fréquentielle de la constante de propagation  $\gamma$  ce qui est caractéristique des bandes de Bragg [40]. De plus, pour ce type de support, plus la fréquence est élevée plus la largeur de la bande de Bragg diminue dans la mesure où les fréquences propres de type I et II tendent à se rapprocher en hautes fréquences.

---

3. À condition que les cellules élémentaires soient symétriques.

4. Soit une matrice  $M$  symétrique réelle d'ordre  $n$ . Elle est définie positive si pour toute matrice colonne  $\mathbf{X}$  non nulle à  $n$  éléments réels, l'inéquation  $\mathbf{X}^T M \mathbf{X} > 0$  est respectée. En termes de modes propres, cela signifie qu'il n'y a pas de modes de corps rigide à la fréquence nulle.

Fréquence	Type de mode	$\gamma$	Zone <i>stop bande</i> n°	Type de bande
0 Hz			1	Local resonance
97 Hz	I symétrique	0		
211 Hz	I antisymétrique	$i\pi/l_e$	2	Local resonance
492 Hz	I symétrique	0		
1078 Hz	II symétrique	$i\pi/l_e$	3	Bragg scattering
1251 Hz	I antisymétrique	$i\pi/l_e$		
2903 Hz	II antisymétrique	0	4	Bragg scattering
2972 Hz	I symétrique	0		
4749 Hz	II symétrique	$i\pi/l_e$	5	Bragg scattering
4972 Hz	I antisymétrique	$i\pi/l_e$		

Tableau 2.4 – Variation de la constante  $\gamma$  en fonction des fréquences propres des modes de type I et de type II et bandes d'atténuation de la poutre sur supports de type ressort-masse-ressort

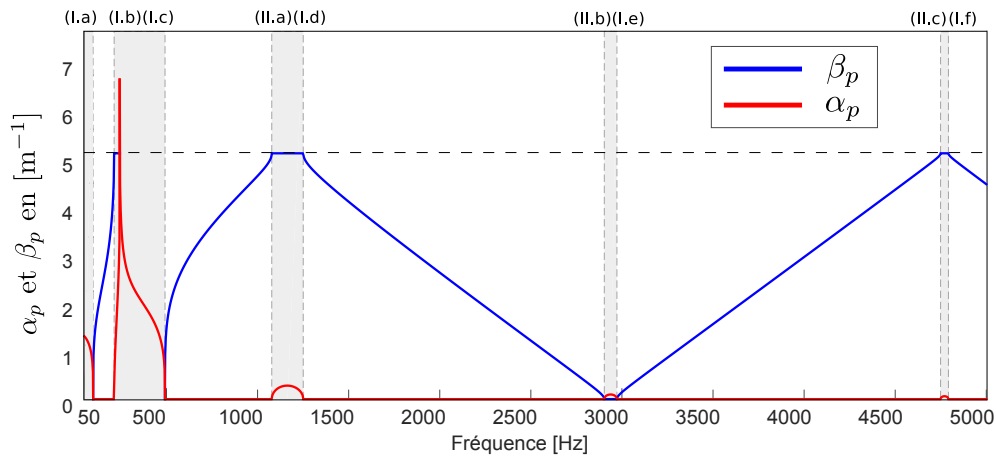


FIGURE 2.12 – Diagramme de dispersion de la poutre sur supports de type ressort-masse-ressort et fréquences propres des mode de type I et II. Les zones grisées correspondent aux bandes d'atténuation

La même analogie est effectuée que précédemment avec une poutre sur des supports de type masse-ressort. Les nouvelles fréquences propres de type I et II ainsi que les bandes d'atténuation sont regroupées dans le Tab. 2.5 et sur la Fig. 2.13. Le système est encore défini positif, ainsi la fréquence nulle est située de nouveau dans une bande d'atténuation. Les masses étant directement liées à la poutre, il n'y a qu'un mode rigide (I.a) à 195 Hz, on ne trouve donc qu'une seule bande de résonance locale.

Les limites des bandes de Bragg sont encore bornées par une fréquence propre de type I et II mais leur ordre est inversé par rapport au cas précédent. Les fréquences propres de type I et II ont de plus tendance à s'éloigner en hautes fréquences, ce qui provoque un élargissement des bandes de Bragg. L'ordre des bornes des bandes d'atténuation

dépend donc de la nature des supports. La symétrie fréquentielle de la constante  $\gamma$  est respectée pour les bandes de Bragg.

Fréquence	Type de mode	$\gamma$	Zone <i>stop bande</i> n <sup>o</sup>	Type de bande
0 Hz				
195 Hz	I symétrique	0	1	Local resonance
391 Hz	I antisymétrique	$i\pi/l$	2	Bragg scattering
1078 Hz	II symétrique	$i\pi/l$		
1642 Hz	I symétrique	0	3	Bragg scattering
2903 Hz	II antisymétrique	0		
3125 Hz	I antisymétrique	$i\pi/l$	4	Bragg scattering
4749 Hz	II symétrique	$i\pi/l$		

Tableau 2.5 – Variation de la constante  $\gamma$  en fonction des fréquences propres des modes de type I et de type II et bandes d'atténuation de la poutre sur supports de type masse-ressort

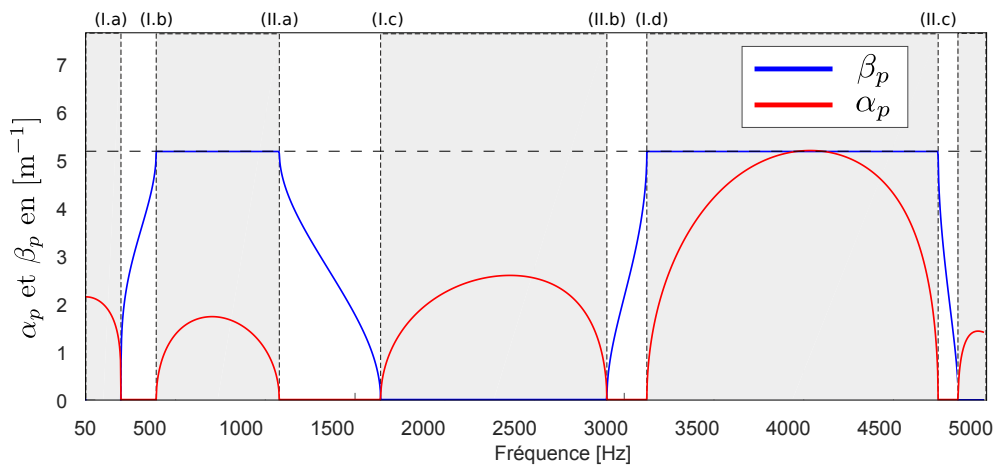


FIGURE 2.13 – Diagramme de dispersion de la poutre sur supports de type masse-ressort et fréquences propres des mode de type I et II. Les zones grisées correspondent aux bandes d'atténuation

## 2.6 Réponse forcée de la voie analytique

Les ondes libres ayant été calculées dans la section 2.3, il est désormais possible d'appliquer une force extérieure sur la structure et de calculer sa réponse forcée spectrale et spatiale. Celle-ci est déterminée par l'expression d'une fonction de Green de la poutre supportée.

### 2.6.1 Fonction de Green du rail infini sur supports discrets

L'équation différentielle (2.10) admet quatre solutions, la solution générale des ondes dans la poutre sur supports périodiques est donc une combinaison linéaire de ces solutions telle que [19] :

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad \exists \tilde{z} \in [0, l[ \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad z = \tilde{z} + nl$$

$$\xi(z, \omega) = a_1 Y(\tilde{z}, -\gamma_d) e^{n\gamma_d l_e} + a_2 Y(\tilde{z}, -\gamma_p) e^{n\gamma_p l_e} + b_1 Y(\tilde{z}, \gamma_d) e^{-n\gamma_d l_e} + b_2 Y(\tilde{z}, \gamma_p) e^{-n\gamma_p l_e} \quad (2.28)$$

Les coefficients  $a_1$   $a_2$   $b_1$   $b_2$  représentent les amplitudes des déformées modales  $Y(\tilde{z}, \pm\gamma_{p/d})$ .

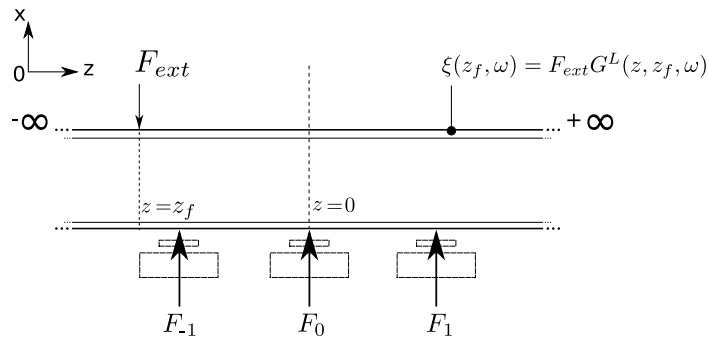


FIGURE 2.14 – Réponse forcée du rail suite à une force extérieure appliquée en  $z = z_f$

La méthode directe ci-dessous reprend le raisonnement établi dans la section 2.3 pour la poutre de Timoshenko infini sur supports discrets en incluant la présence d'une force extérieure  $F_{ext}$ . La fonction de Green  $G^S(z, z_f, \omega)$  correspond à la réponse de la poutre sur supports discrets soumise à une force extérieure unitaire concentrée en  $z = z_f$ . Elle est donc solution de l'équation (B.2) avec présence d'un second membre regroupant la force d'excitation extérieure et les forces exercées par les supports :

$$\begin{aligned}
& \left[ \left\{ \frac{d^2}{dz^2} + k_c^2 \right\} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} + k_t^2 \right\} - k_B^4 \right] G^S(z, z_f, \omega) + \\
& \quad \frac{Z(\omega)}{B} \left[ 1 - \frac{B}{K} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} + k_c^2 \right\} \right] \sum_{n=-\infty}^{\infty} G^S(z, z_f, \omega) \delta(z - nl) \\
& \quad = \frac{1}{B} \left[ 1 - \frac{B}{K} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} + k_c^2 \right\} \right] \delta(z - z_e) \quad (2.29)
\end{aligned}$$

Le système est considéré comme libre en tout point  $z \neq z_f$ , la fonction de Green est donc solution de l'équation :

$$\begin{aligned}
& \left[ \left\{ \frac{d^2}{dz^2} + k_c^2 \right\} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} + k_t^2 \right\} - k_B^4 \right] G^S(z, z_f, \omega) + \\
& \quad \frac{Z(\omega)}{B} \left[ 1 - \frac{B}{K} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} + k_c^2 \right\} \right] \sum_{n=-\infty}^{\infty} G^S(z, z_f, \omega) \delta(z - nl) = 0 \quad (2.30)
\end{aligned}$$

La fonction de Green peut donc être exprimée comme une combinaison linéaire des solutions élémentaires de l'Eq.(2.10) :

$$G^S(z, z_f, \omega) = \begin{cases} a_1 Y(\tilde{z}, -\gamma_d) e^{n\gamma_d l_e} + a_2 Y(\tilde{z}, -\gamma_p) e^{n\gamma_p l_e} & \text{si } z = \tilde{z} + nl_e < z_f, \quad n \in \mathbb{Z}^- \\ b_1 Y(\tilde{z}, \gamma_d) e^{-n\gamma_d l_e} + b_2 Y(\tilde{z}, \gamma_p) e^{-n\gamma_p l_e} & \text{si } z = \tilde{z} + nl_e > z_f, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (2.31)$$

Les coefficients  $a_1$   $a_2$   $b_1$  et  $b_2$  sont déterminés en intégrant successivement l'Eq. (2.30) par rapport à  $z$  de part et d'autre de  $z_f$ . La fonction de Green étant continue en  $z_f$ , on obtient alors un système de 4 équations pour la résolution des coefficients :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^3}{dz^3} G^S(z, z_f, \omega) \Big|_{z_f^-}^{z_f^+} = \frac{1}{B} \left[ 1 + \frac{B}{K} k_t^2 \right] \\ \frac{d^2}{dz^2} G^S(z, z_f, \omega) \Big|_{z_f^-}^{z_f^+} = 0 \\ \frac{d}{dz} G^S(z, z_f, \omega) \Big|_{z_f^-}^{z_f^+} = -\frac{1}{K} \\ G^S(z, z_f, \omega) \Big|_{z_f^-}^{z_f^+} = 0 \end{array} \right. \quad (2.32)$$

La détermination des coefficients  $a_1$   $a_2$   $b_1$  et  $b_2$  revient à résoudre le système matriciel



suivant :

$$\begin{bmatrix} -Y(z_e, -\gamma_d) & -Y(z_e, -\gamma_p) & Y(z_e, \gamma_d) & Y(z_e, \gamma_p) \\ -\dot{Y}(z_e, -\gamma_d) & -\dot{Y}(z_e, -\gamma_p) & \dot{Y}(z_e, \gamma_d) & \dot{Y}(z_e, \gamma_p) \\ -\ddot{Y}(z_e, -\gamma_d) & -\ddot{Y}(z_e, -\gamma_p) & \ddot{Y}(z_e, \gamma_d) & \ddot{Y}(z_e, \gamma_p) \\ -\ddot{Y}(z_e, -\gamma_d) & -\ddot{Y}(z_e, -\gamma_p) & \ddot{Y}(z_e, \gamma_d) & \ddot{Y}(z_e, \gamma_p) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/K \\ 0 \\ \frac{1}{B}[1 + \frac{B}{K}k_t^2] \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Les dérivées  $\dot{Y}$ ,  $\ddot{Y}$  et  $\ddot{Y}$  correspondent respectivement aux dérivées partielles d'ordre 1, 2, 3 de  $Y$  par rapport à  $\tilde{z}$ . La résolution de ces 4 équations linéaires permet de former la fonction de Green  $G^S(z, z_f, \omega)$  relative à la réponse de la poutre de Timoshenko sur supports discrets soumise à une force unitaire concentrée en  $z = z_f$ .

### 2.6.2 Analyse de la réponse forcée spatiale du rail

La fonction de Green du rail sur supports discrets déterminée précédemment permet de calculer la réponse forcée du rail soumis à une force extérieure. Cette force peut représenter l'action dynamique de la roue sur la voie (voir section 1.1.4). L'analyse est effectuée sur la réceptance qui quantifie le rapport du déplacement vertical sur l'amplitude de la force extérieure. Les supports utilisés sont de type ressort-masse-ressort (modélisant l'ensemble semelle-traverse-ballast). La longueur élémentaire d'une cellule, soit la distance entre deux traverses est considérée comme étant égale à 0.6 m.

Les Figs. 2.15(a), 2.15(b) et 2.15(c) représentent les valeurs absolues des réponses spatiales du rail suite à une excitation située respectivement à  $z = 0$  m (au dessus du support 0), à  $z = 0.1$  m et à  $z = 0.3$  m (en milieu de travée) à 500 Hz. Il est clair que les ondes se propagent de manière symétrique de part et d'autre de l'impact si la force est appliquée au dessus des supports ou en milieu de travée (voir Figs. 2.15(a) et 2.15(c)). En revanche, pour l'impact situé en  $z = 0.1$  m la propagation des ondes est clairement non symétrique. À la fréquence de 500 Hz, l'amplitude de la réceptance est plus importante en milieu de travée ce qui s'explique par le mode propre de type I de la cellule élémentaire proche de 500 Hz (voir mode propre (I.c) de la Fig 2.11). La Fig. 2.15(d) représente la valeur absolue de la réponse spatiale suite à un impact situé à  $z = 0.3$  m à 400 Hz. Cette fréquence est située dans une bande d'atténuation de résonance locale (voir Fig. 2.12). L'amplitude au point d'impact est clairement plus faible et la décroissance spatiale bien plus importante que précédemment.

Les Figs. 2.16(a) et 2.16(b) représentent les valeurs absolues des réponses spatiales

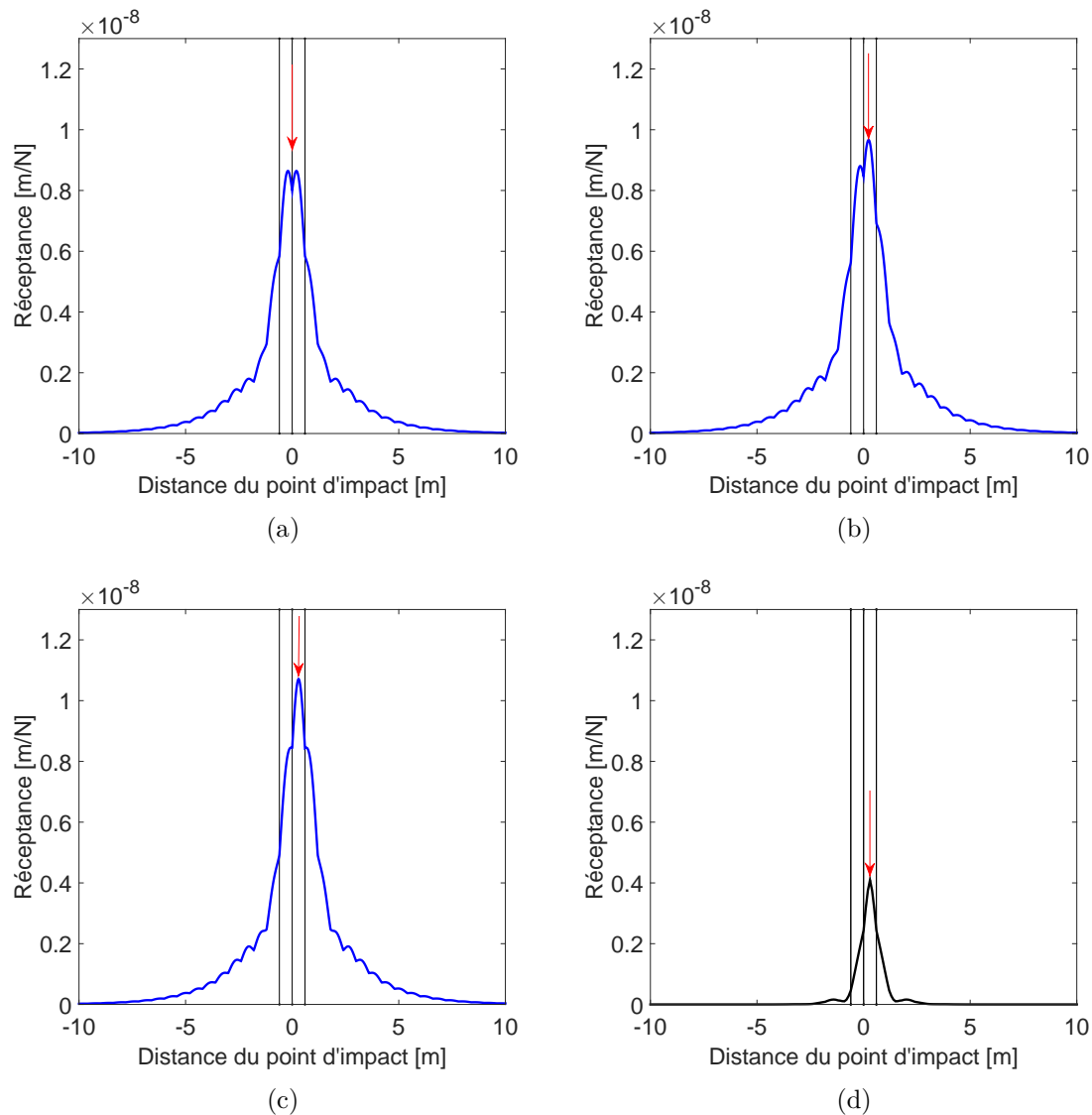


FIGURE 2.15 – Valeur absolue de la réponse spatiale du rail soumis à une force unitaire concentrée en (a)  $z = 0$  m (au dessus du support  $n^{\circ}0$ ) (b)  $z = 0.1$  m (c)  $z = 0.3$  m (entre deux supports) à 500 Hz et (d) en  $z = 0.3$  m à 400 Hz. Les flèches correspondent au point d'impact, les traits verticaux noirs correspondent respectivement aux emplacements des supports  $n^{\circ}-1$   $n^{\circ}0$  et  $n^{\circ}1$

pour un impact situé en milieu de travée et sur un support aux fréquences respectives de 1077Hz et 1200Hz. La réponse à 1077 Hz est nettement moins atténuée en distance par rapport à celles effectuées à 500 Hz et à 1200Hz. La fréquence de 1077 Hz correspond à la *pinned-pinned frequency* et constitue la première fréquence propre du type II. Si l'on reprend la Fig. 2.6(a) il s'agit de la fréquence pour laquelle la constante d'atténuation est minimale (les autres minimums locaux de la constante

d'atténuation sont atteints pour les autres fréquences propres du type II). De plus la réponse à 1077Hz est bien moindre pour un impact situé sur le support qu'en milieu de travée. Ceci est dû au mode propre à 1077 Hz qui admet un maximum en milieu de travée et des minimums aux extrémités. L'importance des bandes d'atténuation et de propagation est claire sur ces exemples pour la propagation des ondes au sein des structures périodiques.

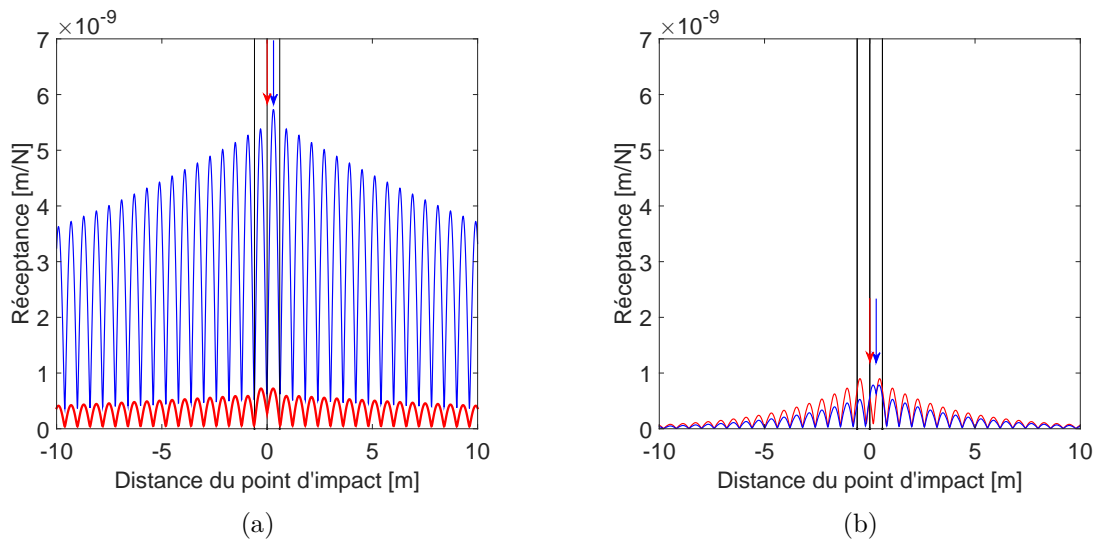


FIGURE 2.16 – Valeur absolue de la réponse spatiale du rail soumis à une force unitaire concentrée en (a)  $z = 0$  m pour la courbe rouge et  $z = 0.3$  m pour la courbe bleue à 1077 Hz (b)  $z = 0$  m pour la courbe rouge et  $z = 0.3$  m pour la courbe bleue à 1200 Hz.

L'analyse est maintenant effectuée sur l'influence de l'amortissement interne des semelles et du rail. Les Figs 2.17(a) et 2.17(b) représentent les valeurs absolues des réponses spatiales à 700 Hz et 1077 Hz. La Fig. 2.17(a) montre qu'à 700Hz des semelles plus amorties engendrent logiquement une décroissance plus rapide de l'onde de flexion sans modifier l'amplitude au point de contact. Cependant, la Fig. 2.17(b) montre qu'un amortissement plus élevé des supports n'engendre pas de décroissance visiblement plus importante à 1077 Hz. C'est l'augmentation de l'amortissement interne du rail qui entraîne ici une décroissance plus rapide de l'onde tout en diminuant l'amplitude au point d'impact. En effet, à cette première *pinned-pinned frequency* le rail vibre de manière quasi indépendante des paramètres du support (voir mode propre (II.a)) et seul l'amortissement du rail affecte réellement la décroissance de l'onde.

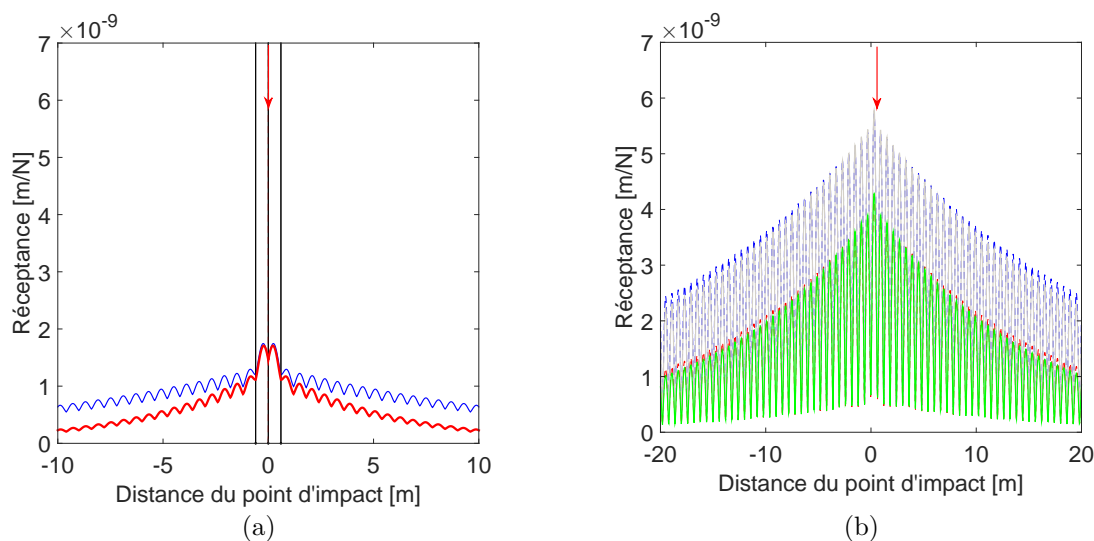


FIGURE 2.17 – Valeur absolue de la réponse spatiale du rail soumis à une force unitaire concentrée en (a)  $z = 0$  m à 700 Hz avec un amortissement des semelles  $\eta_s = 0.25$  pour la courbe rouge et un amortissement des semelles  $\eta_s = 0.1$  pour la courbe bleue (b) en  $z = 0.3$  m à 1077 Hz avec un amortissement du rail  $\eta_r = 0.004$  et un amortissement des semelles  $\eta_s = 0.1$  pour la courbe - - bleue,  $\eta_r = 0.004$  et  $\eta_s = 0.25$  pour la courbe grise,  $\eta_r = 0.008$  et  $\eta_s = 0.1$  pour la courbe - - rouge,  $\eta_r = 0.008$  et  $\eta_s = 0.25$  pour la courbe verte.

### 2.6.3 Analyse de la réponse forcée spectrale du rail

L'analyse de la réponse forcée est maintenant effectuée en balayant le spectre fréquentiel. La valeur de la réceptance est ainsi calculée pour chaque fréquence sur une bande de fréquences allant de 50 à 5000 Hz.

La Fig. 2.18 représente la valeur absolue de la réceptance du rail et de sa phase associée au point d'impact situé en  $z = 0$  m (au dessus d'un support) et en  $z = 0.3$  m (en milieu de travée). La réponse d'un rail sur support continu [1] (sans la répartition périodique discrète) est superposée aux deux courbes.

La première bande d'atténuation se situe entre 0 Hz et 97 Hz. À 97 Hz, apparaît le premier mode propre de type I, le rail se déplace comme un corps rigide. Les déplacements verticaux sont donc de même amplitude quelque soit la localisation de l'impact. Entre 211 Hz et 492 Hz se trouve la deuxième bande d'atténuation. Le deuxième mode propre de type II apparaît à 211 Hz, avec un maximum aux extrémités de la cellule et un minimum en son milieu. À 492 Hz, apparaît le troisième mode propre de type I, ce mode n'est cependant pas rigide et fait apparaître de la flexion

d'où une amplitude de déplacement vertical légèrement supérieure en milieu de travée par rapport aux extrémités. Entre 1077 Hz et 1251 Hz se situe la troisième bande d'atténuation. À 1077 Hz apparaît la *pinned-pinned frequency* relative au premier mode propre de type II. Les translations étant bloquées aux extrémités, la réponse admet une anti-résonance pour un impact situé sur un support et une résonance pour un impact situé en milieu de travée. À 1251 Hz apparaît le quatrième mode propre de type I. Le déplacement vertical est ainsi minimal en milieu de travée et est maximal aux extrémités. Entre 2903 Hz et 2972 Hz se trouve la quatrième bande d'atténuation. À 2903 Hz apparaît le deuxième mode propre de type II. Les déplacements verticaux aux extrémités et en milieu de travée sont minimaux et ainsi égaux. À 2972 Hz apparaît le cinquième mode propre de type I. Les déplacements verticaux en milieux de travée et aux extrémités sont ainsi de même amplitude. Entre 4749 Hz et 4792 Hz se situe la

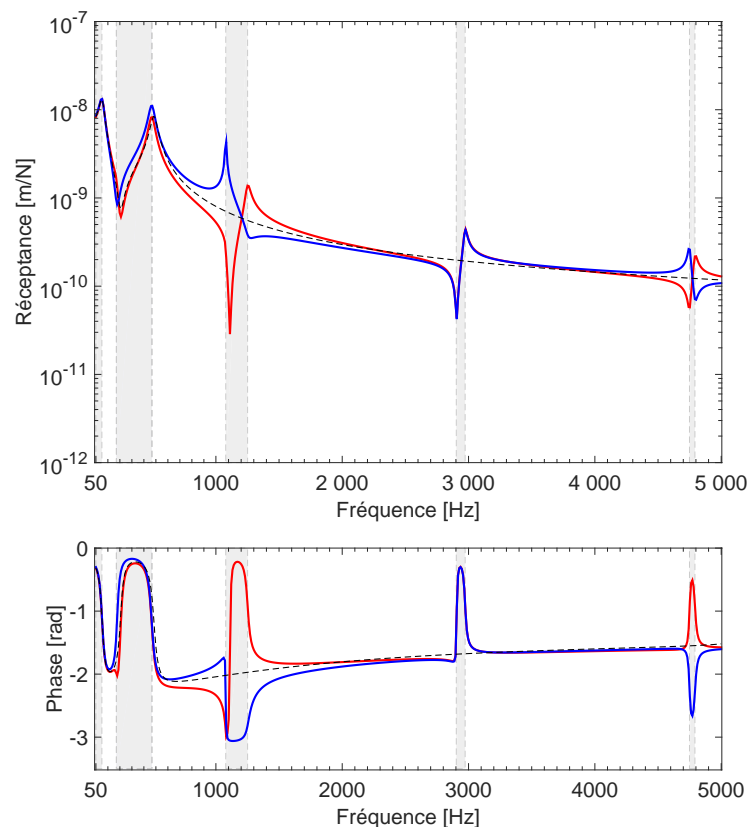


FIGURE 2.18 – Valeur absolue et phase de la réceptance du rail avec un impact en  $z = 0$  m pour la courbe rouge, en  $z = 0.3$  m pour la courbe bleue et sur un support continu pour la courbe - - noire. Les zones grisées correspondent aux bandes d'atténuation.

cinquième bande d'atténuation. À 4749 Hz apparaît le troisième mode propre du type II. Les déplacements aux extrémités sont à un minimum alors que les déplacements en milieu de travée sont au maximum. À 4792 Hz apparaît le sixième mode propre de type I. Les déplacements en milieu de travée sont à un minimum alors que les déplacements aux extrémités sont à un maximum. La même analogie peut être effectuée pour un impact situé à  $z = 0.15 \text{ m}$  (voir Fig. 2.19).

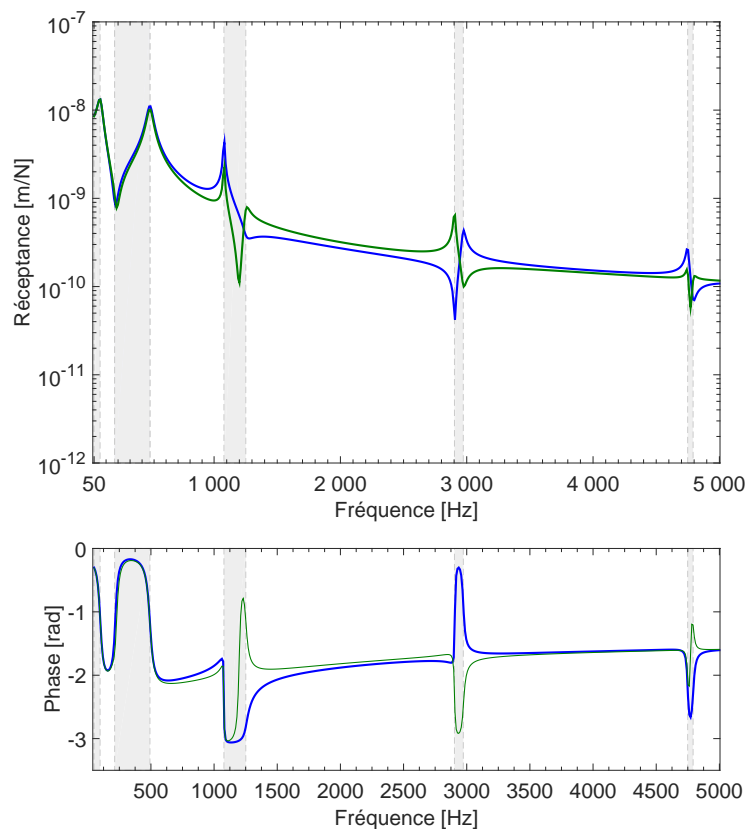


FIGURE 2.19 – Valeur absolue et phase de la réceptance du rail avec un impact en milieu de travée pour la courbe bleue et en  $z = 0.15 \text{ m}$  pour la courbe verte.

Il est intéressant d'analyser l'influence des bandes d'atténuation sur la réceptance du rail. La Fig. 2.20 représente les réponses calculées à  $z = 9 \text{ m}$ ,  $z = 6 \text{ m}$ ,  $z = 3 \text{ m}$  et  $z = 0.3 \text{ m}$  de l'origine avec un impact en  $z = 0.3 \text{ m}$ . L'effet des bandes d'atténuation est clairement visible sur la figure. La décroissance des ondes est majeure dans les trois premières bandes d'atténuation, en accord avec le taux de décroissance de l'onde de flexion verticale (voir Fig. 2.6). Les bandes de résonance locales offrent donc des taux de décroissance très importants empêchant les ondes de s'y propager.

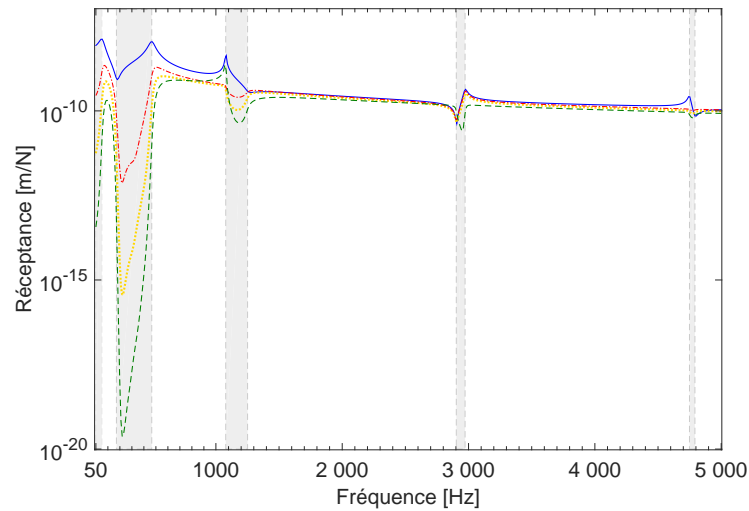


FIGURE 2.20 – Valeur absolue de la réceptance du rail en  $z = 9$  m pour la courbe - - verte, en  $z = 6$  m pour la courbe .. jaune, en  $z = 3$  m pour la courbe -.-rouge et en  $z = 0.3$  m pour la courbe bleue. La force est appliquée en  $z = 0.3$  m.

L'analyse est ensuite portée sur le comportement dynamique du rail supporté par des raideurs de semelles différentes. La Fig. 2.21(a) représente la réceptance et la phase associée au point d'impact d'un rail sur des semelles de raideur  $s_p = 3e8$  N/m et  $s_p = 6e8$  N/m. Le mode propre (I.c) qui correspond à la résonance du rail sur les semelles est logiquement le plus affecté et voit sa fréquence accrue pour une raideur des semelles plus importante. On rappelle que les fréquences propres de type I, qui dépendent directement des caractéristiques des supports, sont aussi les fréquences supérieures des bandes d'atténuation de Bragg. Ainsi, des semelles plus raides vont venir élargir ces bandes particulières et faire accroître le taux de décroissance des ondes.

D'un point de vue vibratoire, l'avantage de semelles plus raides est visible sur la Fig. 2.21(b). La réceptance  $y$  est calculée à  $z = 3$  m pour un impact situé à  $z = 0.3$  m. Les bandes d'atténuation sont clairement plus larges et ont pour conséquence une atténuation accrue de l'onde dans ces bandes. Les semelles rigides ne semblent donc pas avoir d'avantage localement autour de l'impact mais sont bénéfiques en termes de décroissance des ondes. Ce phénomène s'explique par une transmission d'énergie plus importante du rail aux traverses dans une configuration sur semelles rigides. À l'inverse, pour des semelles plus souples, les traverses sont mieux isolées et les ondes peuvent se propager plus aisément le long du rail. [1].

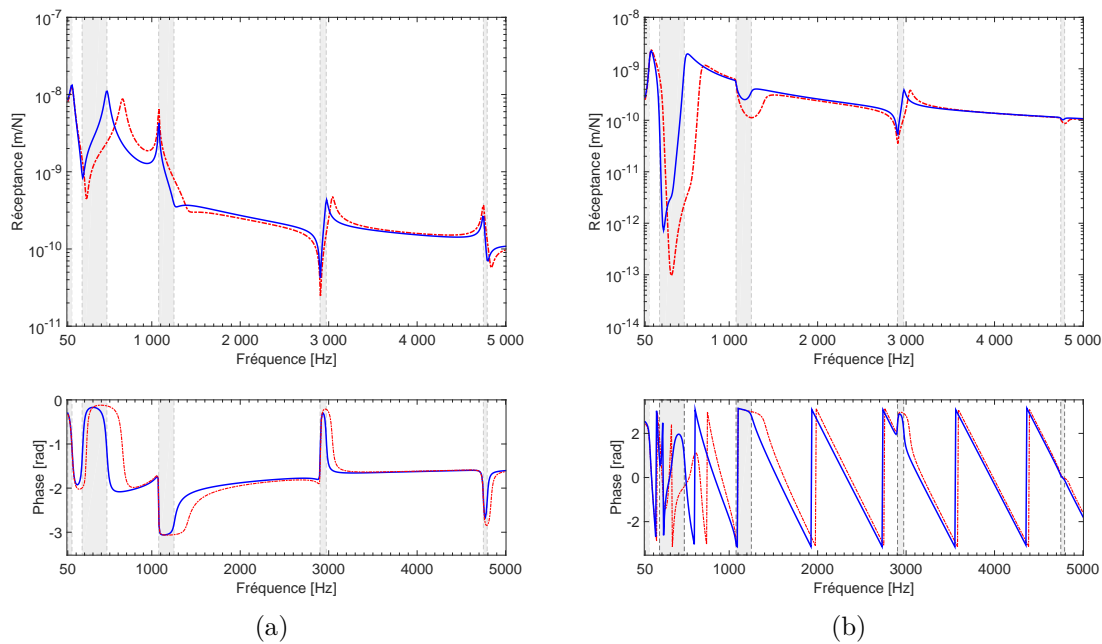


FIGURE 2.21 – Valeur absolue de la réceptance et phase du rail en  $z = 0.3$  m (a) (b) en  $z = 3$  m pour un impact situé en  $z = 0.3$  m. La raideur de la semelle est de  $s_p = 3e8$  N/m pour la courbe bleue et  $s_p = 6e8$  N/m pour la courbe - - rouge. Les zones grisées correspondent aux bandes d'atténuation calculées avec  $s_p = 3e8$  N/m

Les Figs 2.22 et 2.23 représentent la mobilité le long du rail sur supports périodiques discrets et sur support continu en fonction de la fréquence. Cette représentation permet de visualiser l'atténuation spatiale des *stop bands*. Le comportement en basses fréquences du rail sur support continu est très proche de celui du rail sur supports périodiques discrets (voir aussi Fig. 2.18). Le support continu ne prend pas en compte la dimension périodique des supports et explique l'absence des fréquences propres de type II. Il n'y a donc pas de bandes de Bragg caractéristiques des structures périodiques et donc pas de bandes d'atténuation après 500 Hz. Il est donc primordial de prendre en compte la dimension périodique de la voie pour l'étude de sa réponse dynamique en hautes fréquences.



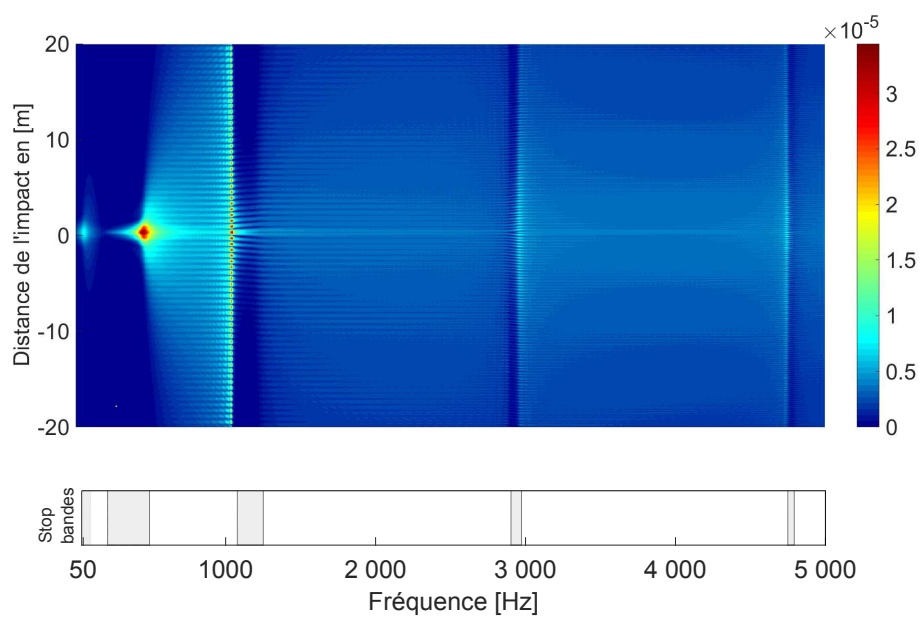


FIGURE 2.22 – Valeur absolue de la mobilité le long du rail sur supports discrets périodiques en fonction de la fréquence avec un impact en  $z = 0.3$  m.

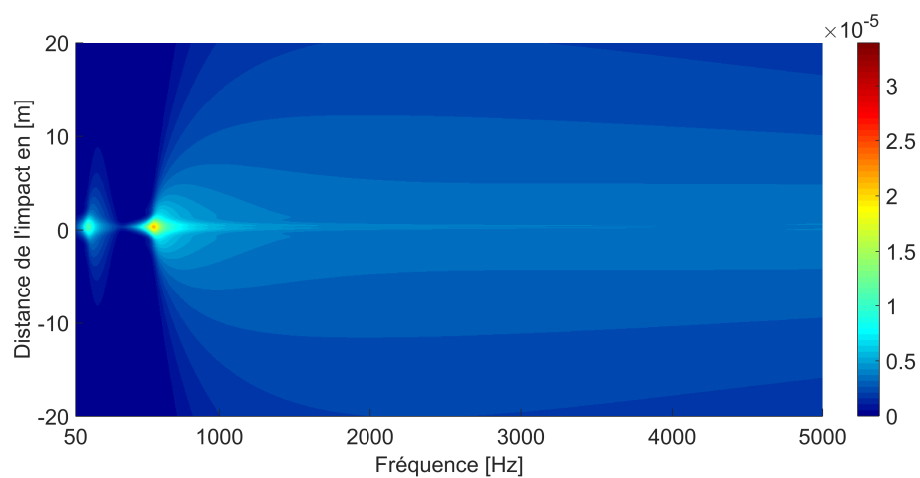


FIGURE 2.23 – Valeur absolue de la mobilité le long du rail sur support continu en fonction de la fréquence avec un impact en  $z = 0.3$  m

## 2.7 Conclusion

Ce chapitre a permis de mettre en avant la modélisation de structures périodiques de manière analytique en s'appuyant sur l'étude d'une voie ferrée ballastée. La voie a été considérée comme une poutre de Timoshenko infinie reposant sur une infinité de supports élastiques. Ces derniers ont été modélisés par un modèle bi-couche comprenant la semelle, la traverse et le ballast. La réponse libre du rail supporté a été calculée grâce à sa fonction de Green. Les constantes de propagation des ondes de flexion du rail ont ainsi pu être déterminées. Ceci a mené à l'étude de zones particulières des structures périodiques, les bandes d'atténuation. Ces zones sont bordées par des fréquences limites qui sont les fréquences propres d'une cellule élémentaire aux conditions limites particulières (modes de type I ou II).

L'étude des ondes périodiques a ainsi permis de faire un lien entre le comportement dynamique de la voie ballastée et les bandes d'atténuation du rail. Un ensemble de bandes particulières telles que les bandes de résonances locales ou les bandes de Bragg ont été étudiées. Ces bandes sont caractéristiques des supports, les semelles jouent ainsi un rôle primordial dans l'atténuation des ondes. Pour améliorer les performances vibratoires et acoustiques de la voie ferrée, il est nécessaire d'utiliser des semelles raides pour élargir les bandes de Bragg. Ceci permet d'accroître le taux de décroissance des ondes et donc de limiter leur propagation.

L'étude bibliographique a cependant révélé que les modèles analytiques ne sont plus valables après 1500 Hz dans la mesure où les modes de section du rail contribuent fortement à la réponse dynamique. Ainsi, bien que très intéressants pour comprendre les bases de la physique des ondes périodiques au sein d'une voie ferrée, les modèles analytiques ne pourront être utilisés dans le cadre du projet CERVIFER pour la pré-certification des infrastructures. Il est nécessaire de prendre désormais en considération la géométrie réelle du rail afin de calculer ses modes de section. La méthode choisie dans le chapitre 1 est la WFEM (Wave Finite Element Method) qui permet de calculer les modes de propagation d'une cellule élémentaire modélisée par éléments finis, elle sera présentée et développée dans les chapitres suivants.

## Chapitre 3

# Modèle numérique des structures périodiques par Wave Finite Element

*Ce chapitre sera consacré à l'étude de la WFEM (Wave Finite Element Method). Deux approches y seront présentées, la WA (Wave Approach) et la DSM (Dynamic Stiffness Matrix), qui permettent d'obtenir les réponses forcées de structures périodiques à partir d'une cellule élémentaire. Les deux approches seront comparées afin de construire les bases du modèle périodique de la voie ferrée. La réduction modale sera étudiée et posera les limites de son utilisation en fonction des conditions limites du modèle.*

### 3.1 La méthode Wave Finite Elements (WFE)

#### 3.1.1 Matrice de transfert du guide périodique

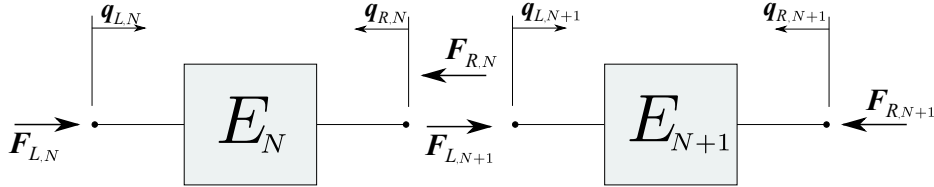


FIGURE 3.1 – Forces et déplacements appliqués à deux cellules élémentaires adjacentes

Le principe de la méthode WFE [29, 41, 42] consiste à décrire la propagation des ondes dans une structure périodique à partir d'une cellule élémentaire modélisée par éléments finis. La méthode exprime les déplacements et les forces aux interfaces gauche et droite des cellules élémentaires. Si l'on considère  $n_c$  degrés de liberté présents sur chaque interface de couplage, il est possible de définir un vecteur  $\mathbf{Q}_{L,N}$  de variables indépendantes et de dimension  $[2n_c \times 1]$  (voir Fig. 3.1) représentant les coordonnées et les forces de la section gauche de l'élément  $N$ . Le vecteur  $\mathbf{Q}_{L,N+1}$  est associé aux composantes de la section gauche de l'élément  $N + 1$ .

$$\mathbf{Q}_{L,N} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{L,N} \\ \mathbf{F}_{L,N} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{Q}_{L,N+1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{L,N+1} \\ \mathbf{F}_{L,N+1} \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

La matrice de transfert  $\mathbf{T}$  de dimension  $[2n_c \times 2n_c]$  entre deux cellules élémentaires est définie telle que :

$$\mathbf{Q}_{L,N+1} = \mathbf{T} \mathbf{Q}_{L,N} \quad (3.2)$$

La continuité des déplacements et l'équilibre des forces aux sections de couplage imposent :

$$\mathbf{q}_{L,N+1} = \mathbf{q}_{R,N} \quad \mathbf{F}_{L,N+1} = -\mathbf{F}_{R,N} \quad (3.3)$$

On obtient la relation :

$$\mathbf{Q}_{R,N} = \mathbf{T} \mathbf{Q}_{L,N} \quad \text{avec} \quad \mathbf{Q}_{R,N} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{R,N} \\ -\mathbf{F}_{R,N} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

### 3.1.2 Discrétisation par éléments finis

Par rapport aux méthodes analytiques, les modèles éléments finis permettent une plus grande liberté dans la modélisation des cellules élémentaires en prenant en compte, par exemple, la forme réelle de la section d'un rail. La formulation du problème par éléments finis passe par une discrétisation de la forme faible de l'équation d'équilibre dynamique qui s'écrit [43] :

$$\mathbf{M} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{q}(x, y, z, t) + \mathbf{C} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q}(x, y, z, t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(x, y, z, t) = \mathbf{F}(x, y, z, t) \quad (3.5)$$

Avec  $\mathbf{M}$  la matrice de masse,  $\mathbf{C}$  la matrice d'amortissement et  $\mathbf{K}$  la matrice de raideur de la cellule. Le vecteur  $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_L \ \mathbf{q}_i \ \mathbf{q}_R]^T$  représente les degrés de liberté (notés *ddl*),  $\mathbf{q}_i$  constitue les  $n_i$  *ddl* internes,  $\mathbf{q}_L$  et  $\mathbf{q}_R$  représentent respectivement les  $n_c$  *ddl* des sections gauche et droite. De même pour le vecteur  $\mathbf{F}$  des efforts généralisés défini comme étant  $\mathbf{F} = [\mathbf{F}_L \ \mathbf{F}_i \ \mathbf{F}_R]^T$ .

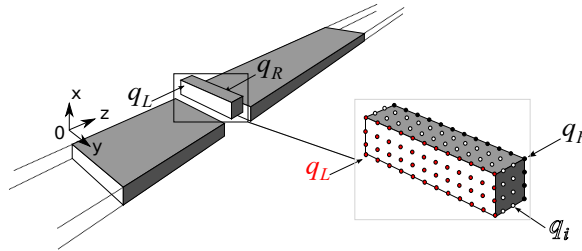


FIGURE 3.2 – Degrés de liberté d'une cellule élémentaire

En appliquant la transformée de Fourier par rapport au temps de l'Eq. (3.5), on trouve :

$$\left( \mathbf{K} + i\omega \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M} \right) \mathbf{q}(x, y, z, \omega) = \mathbf{F}(x, y, z, \omega) \quad (3.6)$$

Avec  $\omega$  est la pulsation en  $[rad.s^{-1}]$ , on note  $\tilde{\mathbf{D}}$  la matrice de raideur dynamique de la cellule élémentaire telle que :

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{K} + i\omega \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M} \quad (3.7)$$

Si aucune force n'est appliquée, la composante  $\mathbf{F}_i$  est nulle et seules les forces de couplage  $\mathbf{F}_L$  et  $\mathbf{F}_R$  sont présentes. Il est ainsi possible de réorganiser la matrice  $\tilde{\mathbf{D}}$

selon ses  $ddl$  gauches et droites telle que :

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{D}}_{LL} & \widetilde{\mathbf{D}}_{Li} & \widetilde{\mathbf{D}}_{LR} \\ \widetilde{\mathbf{D}}_{iL} & \widetilde{\mathbf{D}}_{ii} & \widetilde{\mathbf{D}}_{iR} \\ \widetilde{\mathbf{D}}_{RL} & \widetilde{\mathbf{D}}_{Ri} & \widetilde{\mathbf{D}}_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_L \\ 0 \\ \mathbf{F}_R \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

La matrice de raideur dynamique peut être condensée en exprimant les  $ddl$  internes en fonction des  $ddl$  de couplage [41] et ainsi écrire la matrice de raideur dynamique en une matrice de dimension  $[2n_c \times 2n_c]$ . Ceci mène à une simplification de l'Eq. (3.8) telle que :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{D}_{LR} \\ \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{D}_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_L \\ \mathbf{F}_R \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

En posant :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{LL} &= \widetilde{\mathbf{D}}_{LL} - \widetilde{\mathbf{D}}_{Li} \widetilde{\mathbf{D}}_{ii}^{-1} \widetilde{\mathbf{D}}_{iL} & \mathbf{D}_{LR} &= \widetilde{\mathbf{D}}_{LR} - \widetilde{\mathbf{D}}_{Li} \widetilde{\mathbf{D}}_{ii}^{-1} \widetilde{\mathbf{D}}_{iR} \\ \mathbf{D}_{RL} &= \widetilde{\mathbf{D}}_{RL} - \widetilde{\mathbf{D}}_{Ri} \widetilde{\mathbf{D}}_{ii}^{-1} \widetilde{\mathbf{D}}_{iL} & \mathbf{D}_{RR} &= \widetilde{\mathbf{D}}_{RR} - \widetilde{\mathbf{D}}_{Ri} \widetilde{\mathbf{D}}_{ii}^{-1} \widetilde{\mathbf{D}}_{iR} \end{aligned} \quad (3.10)$$

La matrice de transfert  $\mathbf{T}$  peut être exprimée de manière discrète en combinant les Eqs. (3.3) (3.4) (3.9) :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_{LR}^{-1} \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{D}_{LR}^{-1} \\ -\mathbf{D}_{RL} + \mathbf{D}_{RR} \mathbf{D}_{LR}^{-1} \mathbf{D}_{LL} & -\mathbf{D}_{RR} \mathbf{D}_{LR}^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Pour obtenir les déplacements et les forces au sein de la structure périodique, il est possible de résoudre le problème aux valeurs propres généralisé :

$$(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{Q}_L = \{\mathbf{0}\} \quad (3.12)$$

La résolution de l'Eq. (3.12) fournit  $2n_c$  couples  $(\lambda_j, \phi_j)$  pour chaque fréquence définissant un ensemble d'ondes caractéristiques découplées se propageant le long de la structure. La forme de l'onde caractéristique  $j$  est définie par  $\phi_j$ ,  $\lambda_j$  est lié à sa constante de propagation telle que :

$$\lambda_j = e^{-\gamma_j l_e} \quad \lambda_j = e^{-\mu_j} \quad (3.13)$$

Cependant, le calcul direct aux valeurs propres de la matrice de transfert  $\mathbf{T}$  peut être sujet à des problèmes numériques [30, 44, 45]. En effet, les matrices de transfert sont

naturellement mal conditionnées par l'implication dans un seul et même vecteur de composantes de déplacements et de forces dont les valeurs peuvent être très éloignées. Ainsi, un nombre important de degrés de liberté aux interfaces de couplage peut conduire à l'apparition d'ondes très évanescentes, posant des problèmes de conditionnement pour la résolution directe du problème aux valeurs propres généralisé.

### 3.1.3 Reformulation du problème aux valeurs propres généralisé

Pour pallier ces problèmes de conditionnement, un problème aux valeurs propres généralisé mieux conditionné [45] est explicité dans la suite. Le théorème de Floquet-Bloch (voir Eq. (2.3)) permet d'exprimer les déplacements/forces des interfaces d'une cellule élémentaire par rapport à une cellule adjacente, on obtient ainsi le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{D}_{LR} \\ \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{D}_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_L \\ e^{-\gamma l_e} \mathbf{q}_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_L \\ -e^{-\gamma l_e} \mathbf{F}_L \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

Le nouveau problème aux valeurs propres généralisé des coordonnées de couplage est donné en égalisant les deux lignes de l'Eq. (3.14) :

$$\left[ \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{D}_{RR} \\ \mathbf{0}_{n_c} & \mathbf{I}_{n_c} \end{bmatrix} + e^{-\gamma l_e} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{D}_{LR} \\ -\mathbf{I}_{n_c} & \mathbf{0}_{n_c} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

L'Eq. (3.15) est un problème aux valeurs propres généralisé qui s'écrit [44] :

$$\mathbf{N} \mathbf{w}_j = \lambda_j \mathbf{L} \mathbf{w}_j \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{D}_{RR} \\ \mathbf{0}_{n_c} & \mathbf{I}_{n_c} \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_{LL} & -\mathbf{D}_{LR} \\ \mathbf{I}_{n_c} & \mathbf{0}_{n_c} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Une valeur propre  $\lambda_j$  est associée à un vecteur propre  $\mathbf{w}_j$  des déplacements modaux de dimension  $[2n_c \times 1]$  :

$$\mathbf{w}_j = \begin{Bmatrix} \phi_{q_j} \\ \lambda_j \phi_{q_j} \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

Il est possible de déterminer le vecteur propre  $\phi_{f_j}$  des forces modales de dimension  $[n_c \times 1]$  grâce à la première ligne de l'Eq. (3.14) :

$$\phi_{f_j} = (\mathbf{D}_{LL} + \lambda_j \mathbf{D}_{LR}) \phi_{q_j} \quad (3.18)$$

Il existe ainsi  $2n_c$  vecteurs  $\Phi_j$  pour chaque fréquence représentant une base utilisée

pour décrire les composantes de déplacements et de forces au sein de la structure périodique. Cette base de dimension  $[2n_c \times 2n_c]$  est donnée par :

$$\Phi = \left\{ \begin{array}{l} \phi_q \\ \phi_f \end{array} \right\}_{1..2n_c} \quad (3.19)$$

Le problème aux valeurs propres généralisé de l'Eq. (3.16) est mieux conditionné que celui de l'Eq. (3.12) dans la mesure où les vecteurs propres n'impliquent que les composantes du déplacement. La résolution de ce nouveau problème est cependant plus complexe car les matrices  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{L}$  ne sont pas symétriques, non définies positives et peuvent être singulières [30]. L'utilisation d'un algorithme robuste<sup>1</sup> est donc nécessaire pour ce calcul aux valeurs propres généralisé. Ainsi, la résolution du problème reformulé peut s'avérer plus lente en temps de calcul que celle de l'Eq. (3.12), mais accroît sa stabilité numérique surtout en présence d'un nombre important de degrés de liberté.

### 3.1.4 Application de la méthode à des éléments de poutres 1D

Cette partie met en exergue les valeurs des constantes de propagation tirées du problème aux valeurs propres généralisé de l'Eq. (3.16) par éléments finis à celles déterminées par des méthodes analytiques (voir section 2.4.1). La matrice de raideur dynamique d'une cellule élémentaire est assemblée avec  $n_e$  éléments de longueur  $h_e$  puis est condensée aux nœuds de couplage conformément à l'Eq. (3.9). L'analyse est effectuée sur une poutre d'Euler-Bernoulli puis de Timoshenko.

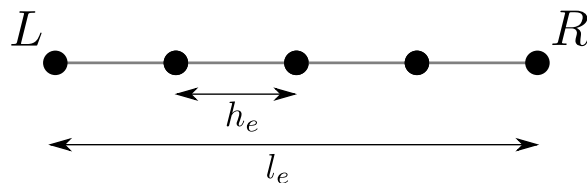


FIGURE 3.3 – Cellule élémentaire concaténée avec des éléments de longueurs  $h_e$

1. Un algorithme de type  $QZ$  [46] qui transforme les matrices non symétriques en matrices triangulaires supérieures pour permettre le calcul aux valeurs propres.



On considère un élément en flexion verticale à deux degrés de liberté (translation verticale et rotation), de longueur élémentaire  $l_e$ , d'aire  $A$  et de moment quadratique  $I_y$ . En utilisant des polynômes d'ordre 3 pour les fonctions de forme associées, les matrices de raideur et de masse sont données par [47] :

1. La matrice élémentaire de raideur statique  $\mathbf{K}_e$

$$\mathbf{K}_e = \frac{EI_y}{h_e^3(1 + \phi_y)} \begin{bmatrix} 12 & -6h_e & -12 & -6h_e \\ -6h_e & h_e^2(4 + \phi) & 6h_e & h_e^2(2 - \phi) \\ -12 & 6h_e & 12 & 6h_e \\ -6h_e & h_e^2(2 - \phi) & 6h_e & h_e^2(4 + \phi) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

2. La matrice élémentaire de masse  $\mathbf{M}_e$

$$\mathbf{M}_e = \frac{\rho Ah_e}{420(1 + \phi)^2} \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ m_2 & m_5 & -m_4 & m_6 \\ m_3 & -m_4 & m_1 & -m_2 \\ m_4 & m_6 & -m_2 & m_5 \end{bmatrix} + \frac{\rho I_y}{30h_e(1 + \phi)^2} \begin{bmatrix} m_7 & m_8 & -m_7 & m_8 \\ m_8 & m_9 & -m_8 & m_{10} \\ -m_7 & -m_8 & m_7 & -m_8 \\ m_8 & m_{10} & -m_8 & m_9 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Avec :  $\phi = \frac{12EI_y}{h_e^2 A \Gamma}$ ,  $\Gamma = \kappa G$

$$\begin{aligned} m_1 &= (156 + 294\phi + 140\phi^2) & m_2 &= -0.5h_e(44 + 77\phi + 35\phi^2) & m_3 &= (54 + 126\phi + 70\phi^2) \\ m_4 &= 0.5h_e(26 + 63\phi + 35\phi^2) & m_5 &= 0.5h_e^2(8 + 14\phi + 7\phi^2) & m_6 &= -0.5h_e^2(6 + 14\phi + 7\phi^2) \\ m_7 &= 36 & m_8 &= -h_e(3 - 15\phi) & m_9 &= h_e^2(4 + 5\phi + 10\phi^2) & m_{10} &= -h_e^2(1 + 5\phi - 5\phi^2) \end{aligned}$$

Le terme  $\kappa$  correspond au coefficient de cisaillement de la section. Pour le modèle de poutre d'Euler, qui ne prend pas en compte le cisaillement (voir Eq. (A.21)), les matrices élémentaires sont obtenues en annulant le terme  $\phi$ . La structure est considérée comme libre infinie. Après l'assemblage des matrices élémentaires, il est possible de calculer de manière formelle les valeurs propres de l'Eq. (3.16). Pour la poutre d'Euler-Bernouilli, ceci mène à la constante de propagation  $\beta_p$  telle que :

$$\beta_p = k_B \left( 1 + (k_B h_e)^4 / 2880 - j(k_B h_e)^5 / 2880 + o((k_B h_e)^5) \right) \quad (3.22)$$

L'erreur relative par éléments finis s'exprime donc :

$$\varepsilon_{relative,ef} = (k_B h_e)^4 / 2880 - j(k_B h_e)^5 / 2880 + o((k_B h_e)^5) \quad (3.23)$$

L'erreur relative provient de la discrétisation  $h_e$  de la cellule élémentaire, elle peut aussi être démontrée par la méthode des différences finies en discrétisant l'Eq. (A.21) du mouvement de la poutre d'Euler (voir Annexe D) :

$$\varepsilon_{relative,df} = \frac{1}{24}(k_B h_e)^2 + \frac{3}{640}(k_B h_e)^4 + o((k_B h_e)^4) \quad (3.24)$$

En pratique, au moins six éléments sont nécessaires par longueur d'onde afin de représenter le système de manière précise [48]. Ce qui correspond au critère  $h_e \leq \lambda_p / 6$  soit  $|\beta_p h_e n_e| \leq 2n_e \pi / 6$ , avec  $n_e$  le nombre d'éléments de longueur  $h_e$  concaténés dans la cellule élémentaire. L'erreur relative dépend des fonctions de forme de l'élément, ainsi dans certains cas le critère  $h_e \leq \lambda_p / 3$  sera suffisant [49].

La Fig. 3.4 représente le diagramme de dispersion de l'onde *propagative* de la poutre d'Euler-Bernoulli en flexion verticale. La cellule unitaire est maillée avec des éléments de telle sorte que  $h_e = \lambda_{max} / n_{min}$ ,  $\lambda_{max}$  représente la longueur d'onde de l'onde de flexion à la fréquence maximale d'étude et  $n_{min}$  un nombre entier caractéristique du nombre d'éléments par longueur d'onde. Trois cas sont analysés pour les valeurs entières  $n_{min} = 1$ ,  $n_{min} = 2$  et  $n_{min} = 3$ . Le critère  $h_e \leq \lambda_{max} / 3$  semble dans ce cas suffisant pour approximer la constante de propagation à la fréquence de 5000 Hz avec une erreur relative inférieure à 1% (voir Fig. 3.4(c)).

La Fig. 3.5 représente le diagramme de dispersion de l'onde *propagative* de la poutre de Timoshenko en flexion verticale. La cellule unitaire est maillée avec des éléments tels que  $n_{min} = 1$ ,  $n_{min} = 3$  et  $n_{min} = 10$ . Il est clair que 10 éléments au minimum sont nécessaires dans ce cas pour limiter l'erreur relative du problème éléments finis à 1% jusque 5000 Hz. Afin d'atteindre ce niveau d'erreur relative, le nombre minimum d'éléments par longueur d'onde doit être plus important que pour la poutre d'Euler-Bernoulli. L'élément de poutre de Timoshenko est donc plus sensible à la discrétisation de la cellule élémentaire. Cette différence s'explique par la prise en compte des effets de cisaillement et des inerties de rotations qui ne sont pas présents pour la poutre d'Euler-Bernoulli.

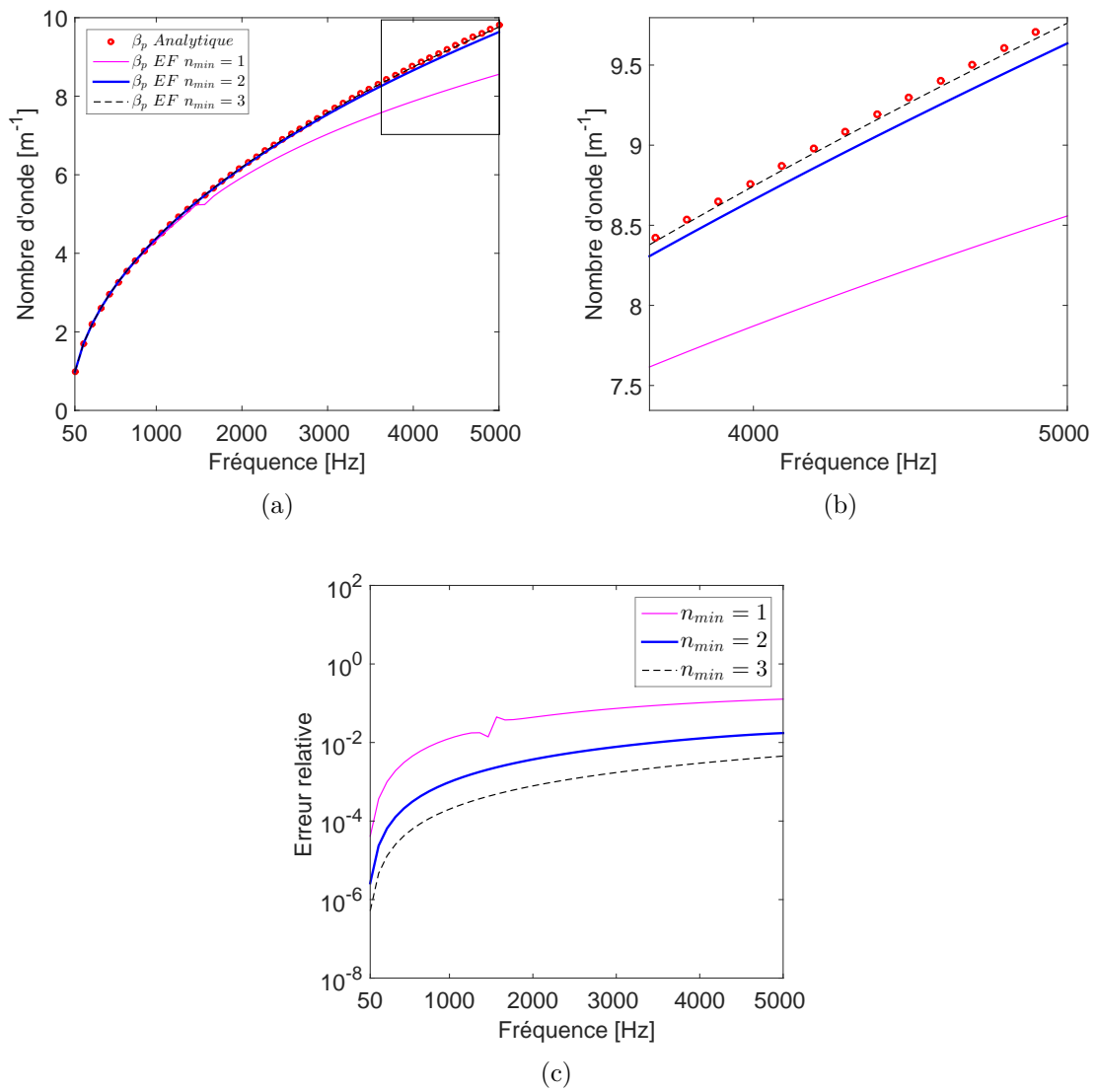


FIGURE 3.4 – Constante de propagation de la cellule élémentaire de la poutre d'Euler-Bernouilli avec (a)  $n_{min} = 1$ ,  $n_{min} = 2$  et  $n_{min} = 3$  (b) zoom de la Figure. a (c) Erreur relative entre la constante de propagation éléments finis et analytique

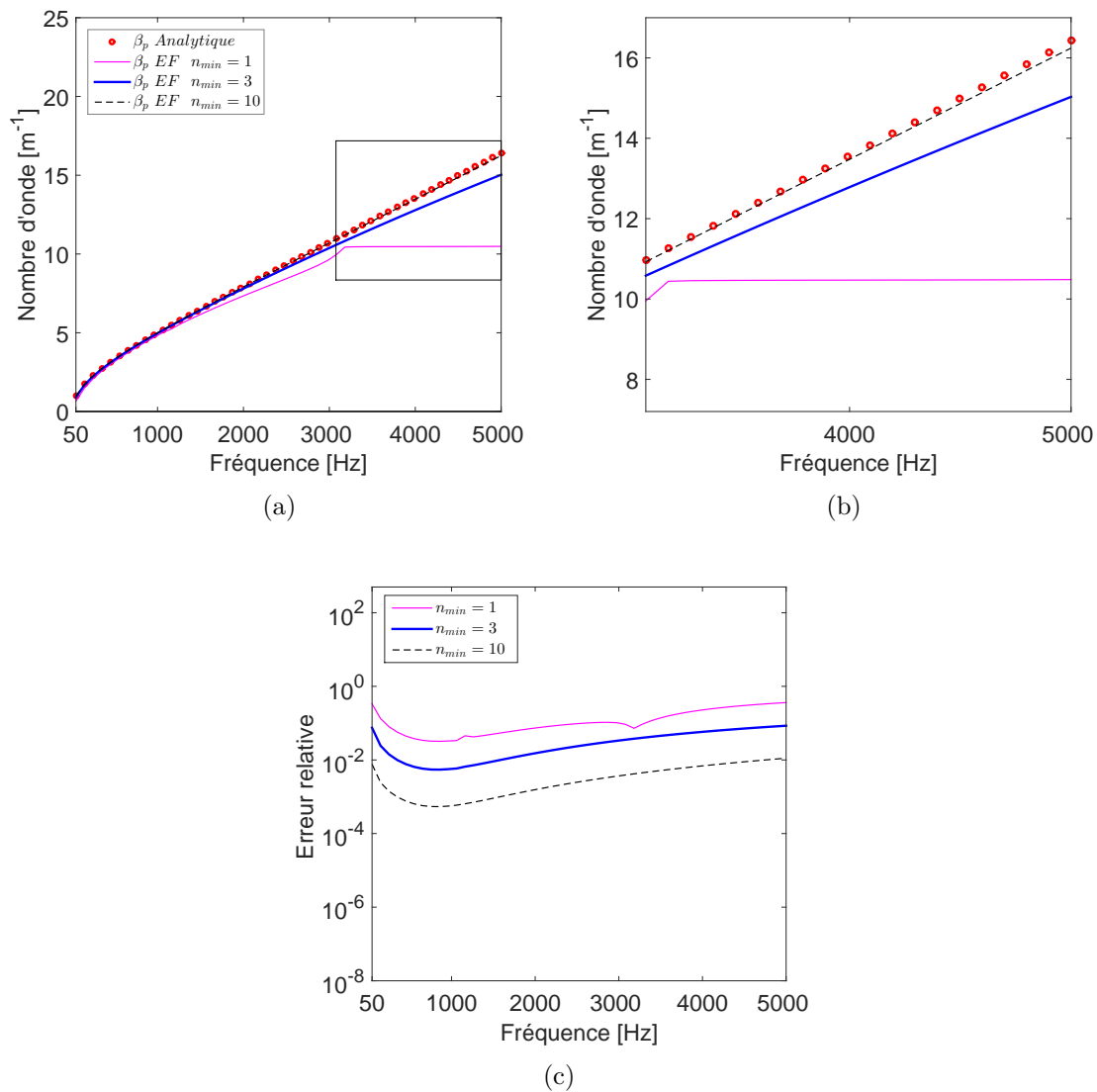


FIGURE 3.5 – Constante de propagation de la cellule élémentaire de la poutre de Timoshenko avec (a)  $n_{min} = 1$ ,  $n_{min} = 3$  et  $n_{min} = 10$  (b) zoom de la Figure. a (c) Erreur relative entre la constante de propagation éléments finis et analytique

### 3.1.5 Propriétés des vecteurs propres

#### 3.1.5.1 Sens de propagation

Les valeurs propres complexes  $\lambda_j$  apparaissent en paires [11, 41] ( $\lambda_j, \lambda_j^{-1}$ ), elles correspondent aux ondes se propageant dans la direction positive ou négative. En effet, si l'on combine la première et la deuxième ligne de l'Eq. (3.14) :

$$\left( \mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR} + \lambda \mathbf{D}_{LR} + \frac{1}{\lambda} \mathbf{D}_{RL} \right) \mathbf{q}_L = \mathbf{0} \quad (3.25)$$

En prenant la transposée de cette équation et en utilisant les propriétés de symétrie de la matrice de raideur dynamique, la structure étant supposée linéaire on obtient :

$${}^t \mathbf{q}_L \left( \mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR} + \frac{1}{\lambda} \mathbf{D}_{LR} + \lambda \mathbf{D}_{RL} \right) = \mathbf{0} \quad (3.26)$$

Le vecteur  $\mathbf{q}_L$  est à la fois vecteur propre droit associé à la valeur propre  $\lambda$  et vecteur propre gauche associé à la valeur propre  $1/\lambda$ . Si  $\lambda$  est une valeur propre de l'Eq. (3.25), il en est de même pour la valeur propre  $1/\lambda$ . En notant  $\lambda_j^- = 1/\lambda_j^+$ , l'ensemble  $(\lambda_j^+, \lambda_j^-)$  représente un couple de valeurs propres associé aux vecteurs propres  $\Phi_j^+$  et  $\Phi_j^-$ . Il est ainsi possible de scinder la base  $\Phi$  telle que :

$$\Phi = [\Phi^+ \quad \Phi^-] \quad \Phi^+ = \begin{bmatrix} \phi_q^+ \\ \phi_f^+ \end{bmatrix} \quad \Phi^- = \begin{bmatrix} \phi_q^- \\ \phi_f^- \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Avec  $\Phi^+$  les vecteurs propres de dimension  $[2n_c \times n_c]$  associés aux ondes se propageant dans le sens positif et  $\Phi^-$  les vecteurs propres de dimension  $[2n_c \times n_c]$  associés aux ondes se propageant dans le sens négatif.

Pour déterminer le sens de propagation de l'onde  $j$  associée à la valeur propre  $\lambda_j$ , il suffit de déterminer sa valeur absolue :

- Si  $|\lambda_j| > 1$  l'onde se propage dans le sens négatif des  $z < 0$
- Si  $|\lambda_j| < 1$  l'onde se propage dans le sens positif des  $z > 0$

Sans la présence d'amortissement, ou si l'onde est très peu atténuée, il est possible d'obtenir  $|\lambda_i| = 1$ . Dans ce cas, il est nécessaire d'analyser le signe de l'énergie vibratoire de l'onde pour déterminer son sens de propagation :

- Si  $\Re(i\omega \phi_q^H \phi_f) > 0$  l'onde se propage dans le sens négatif des  $z < 0$
- Si  $\Re(i\omega \phi_q^H \phi_f) < 0$  l'onde se propage dans le sens positif des  $z > 0$

### 3.1.5.2 Orthogonalité

Une des propriétés intéressantes des vecteurs propres de la base  $\Phi$  concerne l'orthogonalité des modes. Il est à noter que la matrice  $T$  est symplectique [45] ce qui signifie que :

$$T^T J T = J \quad J = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_c} & \mathbf{I}_{n_c} \\ -\mathbf{I}_{n_c} & \mathbf{0}_{n_c} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

La matrice identité et la matrice nulle de dimension  $[n_c \times n_c]$  sont notées respectivement  $\mathbf{I}_{n_c}$  et  $\mathbf{0}_{n_c}$ . On obtient ainsi la relation :

$$\forall j, \quad \lambda_j \neq \frac{1}{\lambda_k} \iff \Phi_j^T J \Phi_k = 0 \quad (3.29)$$

Ce qui signifie que :

$$\forall j, \quad \lambda_j \neq \frac{1}{\lambda_k} \iff \phi_{q_k}^T \phi_{f_j} - \phi_{f_k}^T \phi_{q_j} = 0 \quad (3.30)$$

La norme des vecteurs propres peut donc être choisie de telle sorte que [44] :

$$\forall j \in \{[1 \dots n_c] \subset \mathbb{N}\} \quad \Phi_j^{+T} J \Phi_j^- = \Phi_j^{-T} J \Phi_j^+ = 1 \quad (3.31)$$

L'Eq. (3.31) s'écrit de manière matricielle :

$$\begin{bmatrix} -\phi_f^- & -\phi_f^+ \\ \phi_q^- & \phi_q^+ \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \phi_q^+ & -\phi_q^- \\ \phi_f^+ & -\phi_f^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_c} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_c} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

### 3.1.5.3 Suivi fréquentiel des vecteurs propres

Pour chaque fréquence on obtient autant d'ondes qu'il y a de degrés de liberté sur la face gauche et droite de la cellule élémentaire. L'approche numérique fournit les vecteurs propres  $\Phi_j$  et les valeurs propres  $\lambda_j$  associés à des fréquences discrètes, afin d'analyser l'évolution fréquentielle d'un mode il est nécessaire d'utiliser un critère de suivi [44] :

1. Les relations d'orthogonalité de l'Eq. (3.30) permettent de suivre l'évolution fréquentielle des modes de propagation. En considérant deux modes  $p$  et  $k$  définis à la fréquence  $\omega$  tels que  $\lambda_p(\omega) = 1/\lambda_k(\omega)$ , avec un pas fréquentiel  $\Delta\omega$  suffisam-

ment faible, il est possible de suivre le mode  $k$  à la fréquence  $\omega + \Delta\omega$  tel que :

$$\left| \frac{\Phi_p(\omega)^T \mathbf{J} \Phi_k(\omega + \Delta\omega)}{\|\Phi_p(\omega)\| \|\Phi_k(\omega + \Delta\omega)\|} \right| = \max_j \left\{ \left| \frac{\Phi_p(\omega)^T \mathbf{J} \Phi_j(\omega + \Delta\omega)}{\|\Phi_p(\omega)\| \|\Phi_j(\omega + \Delta\omega)\|} \right| \right\} \quad (3.33)$$

Avec  $\|\mathbf{A}\|$  la norme hermitienne du vecteur telle que  $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathbf{A}^H \mathbf{A}}$ . Ce critère s'avère erroné en très basses fréquences dans le mesure où les différentes valeurs propres peuvent être très proches les unes des autres.

2. Le critère de MAC (Modal Assurance Criterion) est plus général que le critère d'orthogonalité. Il consiste à analyser un mode à deux fréquences distinctes selon le produit scalaire hermitien. En considérant le mode  $p$  défini à la fréquence  $\omega$ , avec un pas fréquentiel  $\Delta\omega$  suffisamment faible, il est possible de suivre le mode  $k$  à la fréquence  $\omega + \Delta\omega$  tel que :

$$\left| \frac{\Phi_k(\omega)^T \Phi_k(\omega + \Delta\omega)}{\|\Phi_k(\omega)\| \|\Phi_k(\omega + \Delta\omega)\|} \right| = \max_j \left\{ \left| \frac{\Phi_k(\omega)^T \Phi_j(\omega + \Delta\omega)}{\|\Phi_k(\omega)\| \|\Phi_j(\omega + \Delta\omega)\|} \right| \right\} \quad (3.34)$$

#### 3.1.5.4 Régularisation analytique directe des vecteurs propres

Il est important de noter que le problème aux valeurs propres généralisé de l'Eq. (3.16) peut être sujet à de légères dispersion numériques [50]. Ainsi, le critère analytique stipulant que  $\lambda_j^+ = 1/\lambda_j^-$ , peut ne pas être vérifié d'un point de vue numérique. Cela peut conduire à des erreurs lors du calcul des réponses forcées de structures périodiques. Une solution à ce problème, valable uniquement pour les structures aux cellules symétriques par rapport à leur plan milieu, consiste à imposer de manière analytique les relations suivantes [32, 50] :

$$(a) \quad \lambda_j^+ = \frac{1}{\lambda_j^-} \quad (b) \quad \Phi_j^- = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{R} \end{bmatrix} \Phi_j^+ \quad (3.35)$$

Avec  $\mathbf{R}$  la matrice de symétrie par rapport au plan milieu de la cellule de dimension  $[n_c \times n_c]$  telle que  $\mathbf{R}\mathbf{R} = \mathbf{I}_{n_c}$ . Cette régularisation permet de renforcer la relation qui lie les vecteurs propres positifs et négatifs au sein d'une structure périodique.

#### 3.1.5.5 Réduction du nombre de modes de propagation

Le calcul aux valeurs propres généralisé du problème périodique donne pour chaque fréquence autant d'ondes qu'il y a de degrés de liberté sur les interfaces gauche et droite

de la cellule élémentaire. Toutes ces ondes ne contribuent pas de la même manière à la réponse forcée de la structure [41, 44, 51], la contribution des ondes très évanescentes y est faible loin de la force extérieure. L'inclusion de ces ondes dans le calcul peut de plus détériorer la précision numérique du problème [52], il est donc préférable de ne pas les comptabiliser. Pour une structure aux nombreux degrés de liberté de couplage, il peut être judicieux d'utiliser un algorithme de Lanczos [53, 54] afin de sélectionner uniquement les modes les plus propagatifs et donc réduire les temps de calcul (voir section 3.1.6).

La Fig. 3.6 représente un exemple des valeurs absolues des valeurs propres des modes de propagation. Plus la valeur absolue s'éloigne de l'unité, plus l'onde sera atténuée et donc moins influente sur la réponse de la structure. En pratique [41, 54], il est possible de fixer un critère de sélection du nombre de modes agissant sur la réponse forcée en se basant par exemple sur la valeur absolue de leur constante de propagation.

### 3.1.6 Régularisation généralisée pour tout type de cellule

La régularisation proposée dans l'Eq. (3.35) (b) est valable uniquement pour des cellules symétriques. Pour faire face à la dispersion numérique dans le cas de cellules non symétriques par rapport à leur plan milieu, un problème aux valeurs propres généralisé basé sur une transformation de type  $\mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1}$  a été proposé [32, 45, 54–56]. Cette transformation permet d'exprimer un nouveau problème selon une valeur propre double, on obtient ainsi (voir Annexe C) :

$$\left(\mathbf{A} - \left(\lambda_j + \frac{1}{\lambda_j}\right) \mathbf{B}\right) \mathbf{p}_j = \mathbf{0} \quad (3.36)$$

Avec les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  de dimension  $[2n_c \times 2n_c]$  telles que :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\mathbf{D}_{RL} - \mathbf{D}_{LR}) & (\mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR}) \\ -(\mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR}) & (\mathbf{D}_{RL} - \mathbf{D}_{LR}) \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_c} & -\mathbf{D}_{RL} \\ \mathbf{D}_{LR} & \mathbf{0}_{n_c} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Les vecteurs propres  $\Phi_j^+$  et  $\Phi_j^-$  de l'Eq. (3.27) peuvent être liés au vecteur propre  $\mathbf{p}_j$



de l'Eq. (3.36) tels que [55] :

$$\Phi_j^+ = \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_c} & \mathbf{0}_{n_c} \\ -\mathbf{D}_{RR} & \mathbf{D}_{RL} \end{bmatrix} - \frac{1}{\lambda_j^+} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_c} & -\mathbf{I}_{n_c} \\ \mathbf{D}_{LR} & -\mathbf{D}_{LL} \end{bmatrix} \right) \mathbf{p}_j \quad (3.38)$$

$$\Phi_j^- = \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_c} & \mathbf{0}_{n_c} \\ -\mathbf{D}_{RR} & \mathbf{D}_{RL} \end{bmatrix} - \lambda_j^+ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_c} & -\mathbf{I}_{n_c} \\ \mathbf{D}_{LR} & -\mathbf{D}_{LL} \end{bmatrix} \right) \mathbf{p}_j \quad (3.39)$$

La résolution du problème par la transformation  $\mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1}$  garantit la relation analytique  $\lambda^+ = 1/\lambda^-$  en mettant en jeu la valeur propre double  $(\lambda_j + 1/\lambda_j)$ . De plus, la formulation du problème de l'Eq. (3.36) permet de calculer directement un nombre réduit de valeurs propres et de vecteurs propres en utilisant par exemple un algorithme de type Lanczos [41, 54].

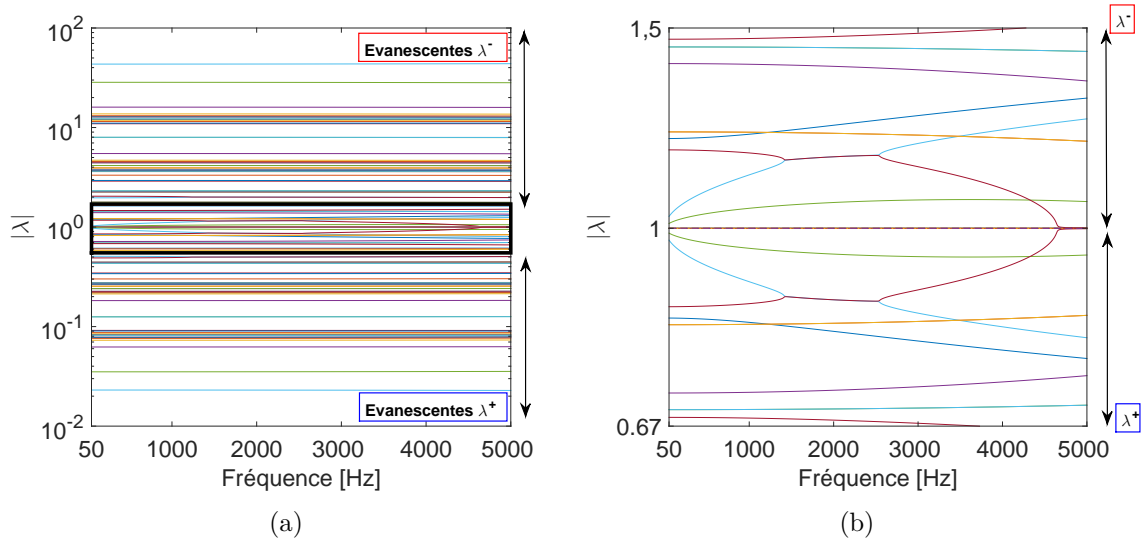


FIGURE 3.6 – (a) Valeurs absolues des valeurs propres d'une cellule élémentaire symétrique (b) zoom sur les ondes les plus propagatives

## 3.2 Exemples numériques

### 3.2.1 Application aux poutres à section variable

L'analyse va maintenant être portée sur les bandes de Bragg d'une poutre à section variable. La méthode des éléments finis permet de mettre en place facilement une hétérogénéité des propriétés de la poutre d'une cellule élémentaire. Il est intéressant d'analyser comment une telle hétérogénéité peut affecter les fréquences limites des bandes d'atténuation. Trois cas d'étude sont étudiés par la suite :

1. Cellule à section constante  $S_1$ .
2. Cellule avec une portion de section  $S_2$  de longueur  $le/12$  centrée sur la cellule pour conserver les propriétés de symétrie.
3. Cellule avec deux portions de section  $S_2$  aux extrémités de longueur  $le/24$ .

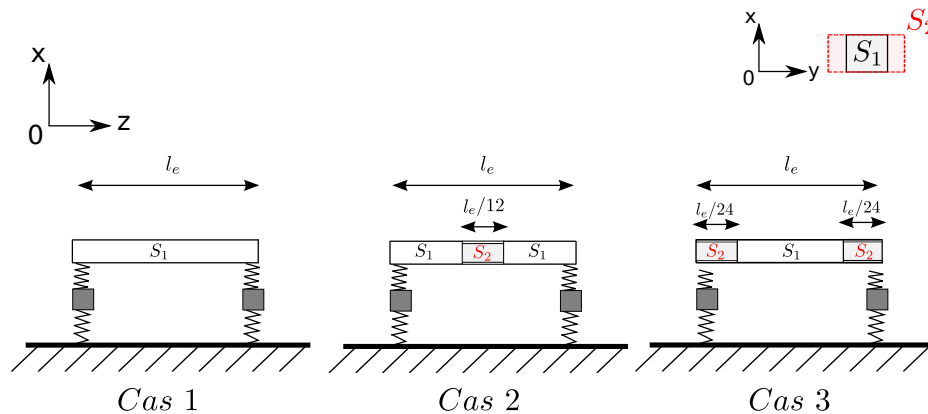


FIGURE 3.7 – 3 cas d'étude pour les poutres à section variable

Pour les cas2 et cas3, on introduira un coefficient de variabilité  $c$  tel que la largeur de la section 2 soit  $l_2 = c l_1$ . Cette hétérogénéité entraîne une modification du moment quadratique  $I_{y,2} = c I_{y,1}$  et de la masse linéique  $Ml_2 = c Ml_1$ . Une cellule élémentaire de 0.6m de long est modélisée par des éléments de poutre de Timoshenko de longueur équivalente à  $0.064 \lambda_{max}$  conformément à l'étude de convergence réalisée dans la section précédente. Des conditions élastiques de type ressort-masse-ressort (voir Chapitre 2) sont appliquées aux extrémités de la cellule élémentaire.

La Fig.3.8(a) représente la partie réelle  $\alpha_p$  de l'onde *propagative* entre 900 Hz et 5000 Hz pour ne visualiser que les bandes de Bragg. Le cas uniforme est comparé au cas2 avec le coefficient de variabilité  $c = 1.25$  et  $c = 2$ . L'influence de la variation de

section est nettement visible en hautes fréquences. La largeur des bandes de Bragg tend à croître avec la variation de section de la portion centrale. Contrairement à la cellule élémentaire à section constante, les fréquences propres de type I et de type II du cas2 s'éloignent les unes des autres en hautes fréquences. Par conséquent, les fréquences limites des bandes d'atténuation s'écartent et les largeurs des bandes de Bragg augmentent.

Les fréquences supérieures des bandes 1 et 3 sont plus élevées que celles du cas1. En effet, ces fréquences correspondent aux modes propres (I.d) et (I.f) qui possèdent un nœud de vibration au centre de la cellule. L'augmentation de section au centre de la cellule tend à rigidifier la cellule et augmente donc ces fréquences propres. Les fréquences inférieures des bandes 1 et 3 correspondent aux modes (II.a) et (II.c) qui possèdent un ventre de vibration en leur centre, ainsi la variation de section tend à ajouter de la masse à la cellule et diminue les fréquences inférieures.

Cependant, la fréquence supérieure de la bande de Bragg 2 correspond au mode (I.e) qui possède un ventre en son centre, la variation de section diminue donc sa borne supérieure. Sa borne inférieure correspond au mode (II.b) qui possède un nœud en son centre, la cellule est ainsi rigidifiée et la fréquence inférieure augmente. Si la section centrale est en dessous d'une valeur critique (par exemple  $c = 1.25$ ), la largeur de la bande diminue par rapport au cas1. Au dessus de cette valeur critique (par exemple  $c = 2$ ), ces deux bornes peuvent s'inverser et la largeur de la bande augmente.

La Fig. 3.8(b) correspond au cas1 et au cas3 avec le coefficient de variabilité  $c = 1.25$  et  $c = 2$ . La largeur de la bande 1 du cas3 est plus faible que celle du cas2. Le mode propre (I.d) ayant un ventre aux extrémités de la cellule, la variation de section diminue la borne supérieure. De même pour le mode (II.a) qui possède un nœud de vibration aux extrémités et augmente ainsi la borne inférieure. A partir d'une certaine valeur critique, les bornes pourront s'inverser et la largeur de la bande augmentera. Pour la bande 2, l'inversion des bornes inférieure et supérieure est identique au cas2. Pour la bande 3, les bornes s'inversent mais pour une valeur critique plus faible que la bande 2. La configuration du cas3 a donc pour conséquence une inversion des bornes inférieures et supérieures des trois bandes à partir d'une certaine valeur critique du coefficient  $c$ .

Pour améliorer l'atténuation au sein du système périodique, il est donc nécessaire de séparer au maximum les fréquences propres de type I et de type II d'une cellule

élémentaire, afin d'obtenir des bandes de Bragg les plus larges possibles. Un choix judicieux de masses appliquées le long de la cellule élémentaire peut permettre de prédire les bandes fréquentielles dans lesquelles l'atténuation sera plus importante. La configuration du cas2 semble intéressante dans la mesure où elle permet d'éloigner efficacement les bornes limites des bandes 1 et 3 et donc accroît les taux de décroissance le long de la structure. Ces phénomènes peuvent constituer des pistes intéressantes pour le développement de dispositifs anti-vibratiles le long de la voie ferrée.

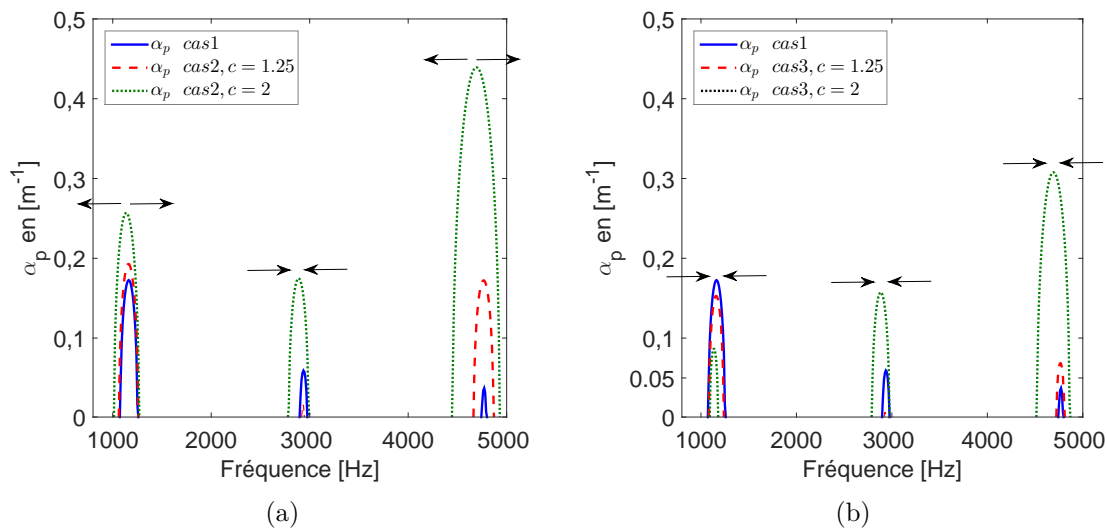


FIGURE 3.8 – Zones stop bandes des cas1 et cas2

### 3.2.2 Application à une cellule 3D

Une cellule modélisée par éléments finis en 3 dimensions est utilisée dans cette partie. L'influence de la discrétisation de sa section est analysée en fonction des valeurs des constantes de propagation associées. Une cellule de largeur 0.034m, de hauteur 0.22m et de profondeur 0.01m est maillée avec des éléments linéaires hexaédriques à 8 nœuds. Trois différents maillages sont étudiés, ils comprennent 30, 63 et 288 *ddls* par section. Les nombres d'onde des ondes les plus propagatives sont calculés, soit  $\beta_j = 1/l_e \Re(\log_{10}(\lambda_j))$ . L'utilisation appropriée de l'un des critères de suivi (voir section 3.1.5.3) permet de tracer l'évolution des constantes de propagation par mode.

La Fig. 3.9 représente les constantes de propagation des quatre premières ondes propagatives se propageant dans la direction positive. Dans les trois configurations,

seul le maillage de la section est modifié. Ce sont les ondes de flexion latérale et de torsion qui sont les plus affectées par le maillage. La différence est notable en hautes fréquences, comme il a été montré dans la section 3.1.4. Par la suite, la configuration 2 à 63 degrés de liberté sera utilisée pour l'analyse des réponses forcées.

La Fig. 3.10 représente les déformées des six premiers modes de propagation à 5000 Hz. La déformée de chaque section est multipliée par sa constante de propagation afin de visualiser la propagation et l'atténuation de ces modes le long de la structure. On retrouve bien les ondes de flexion latérale/verticale, de torsion et de traction-compression. La Fig. 3.10(e) représente le premier mode de section de la structure avec une déformée latérale. La Fig. 3.10(f) représente le premier mode évanescent à 5000 Hz, on constate bien que l'onde s'atténue rapidement le long de la structure.

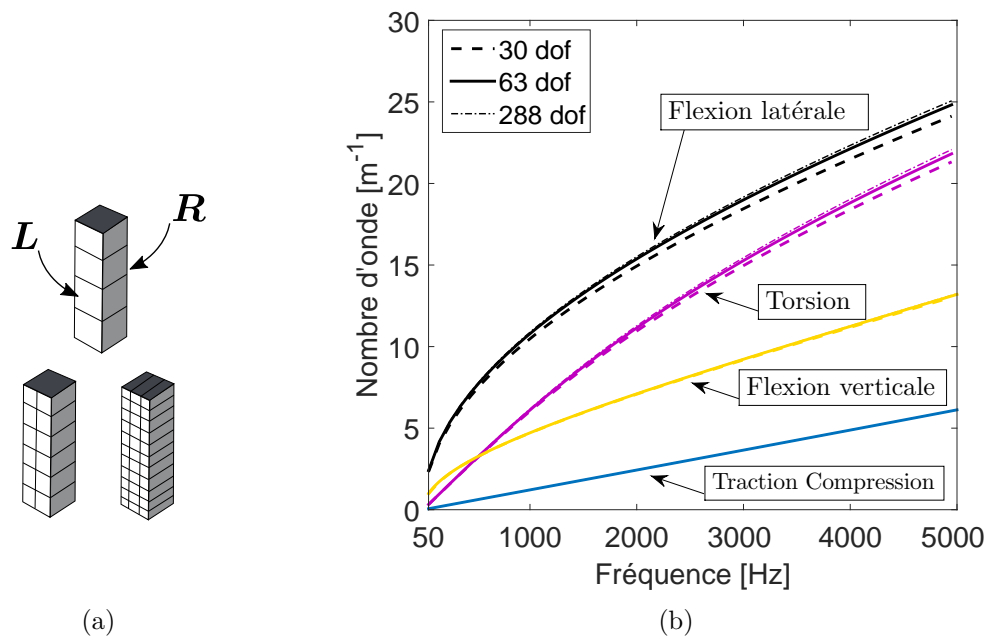


FIGURE 3.9 – (a) Maillage des cellules élémentaires (b) Constantes de propagation en fonction des maillages

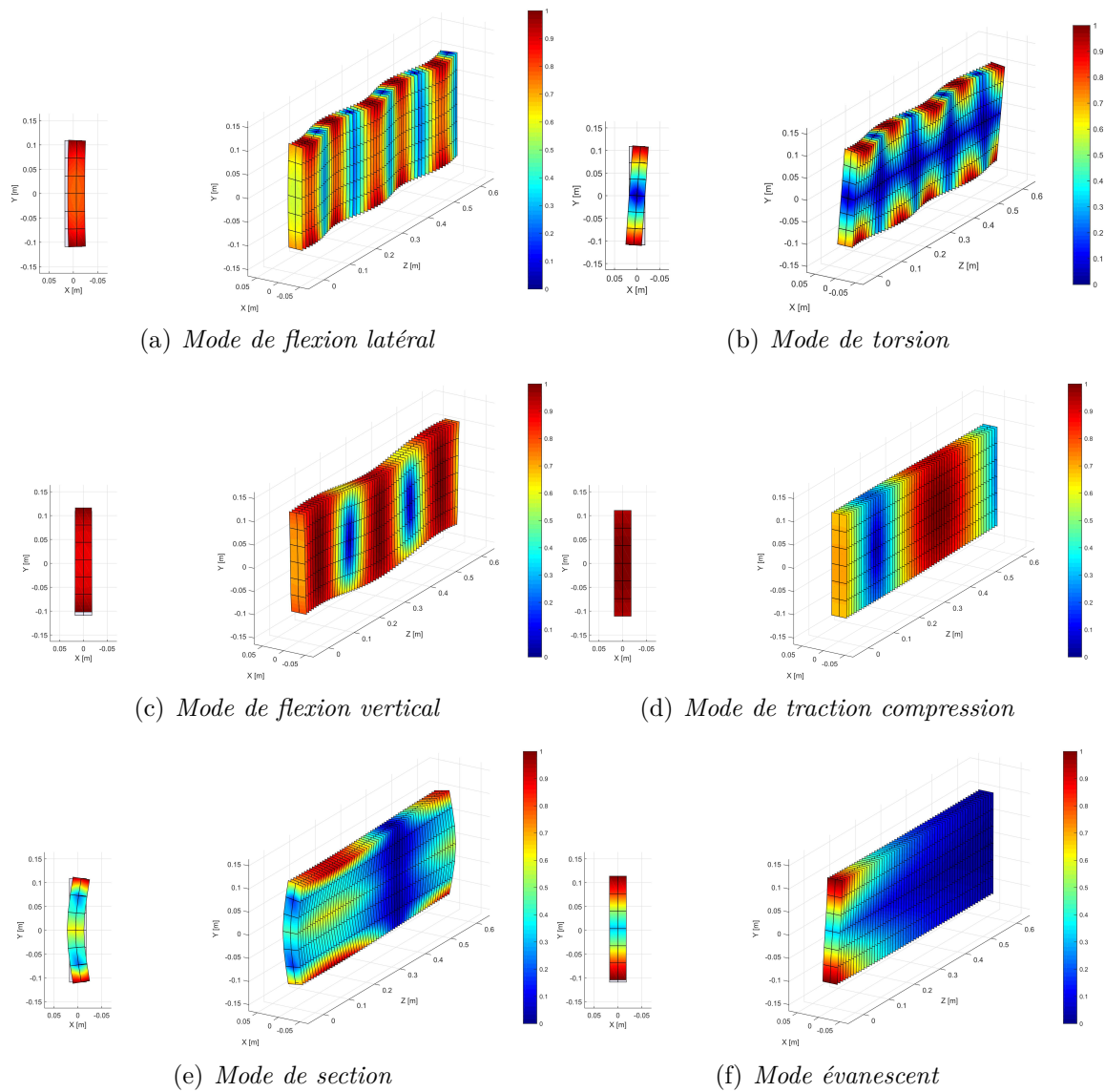


FIGURE 3.10 – Six premiers modes de propagation le long de la structure à 5000Hz.

Les critères de suivi des modes (voir section 3.1.5.3) sont comparés pour la cellule 3D. La Fig. 3.11 représente le critère de MAC (Modal Assurance Criterion) et les relations d'orthogonalité entre les vecteurs propres. Ces critères sont calculés entre 4990 Hz et 5000 Hz. Il est nécessaire d'utiliser un pas fréquentiel relativement faible pour obtenir une concordance entre les modes notamment pour le critère de MAC. Les relations d'orthogonalité fournissent un très bon indicateur de suivi des modes. Cependant, ce critère n'est pas forcément assuré en très basses fréquences là où les constantes de propagation sont très proches les unes des autres, ainsi le critère de MAC peut être une alternative plus fiable dans cette plage fréquentielle.

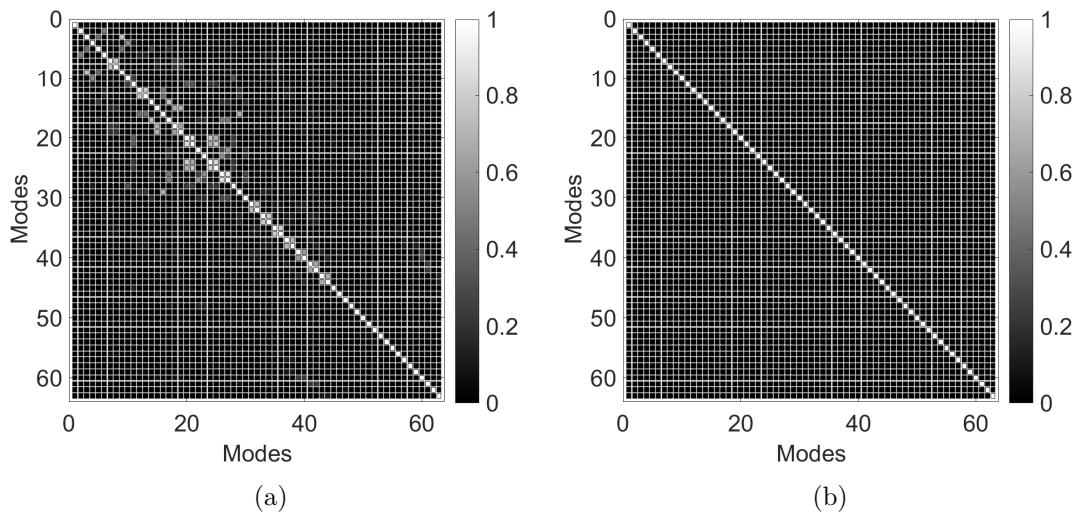


FIGURE 3.11 – (a) Critère de MAC (b) Relations d'orthogonalité entre 4990 Hz et 5000 Hz

### 3.3 Réponse forcée des structures périodiques par WFE

#### 3.3.1 Déplacements et forces au sein de la structure périodique

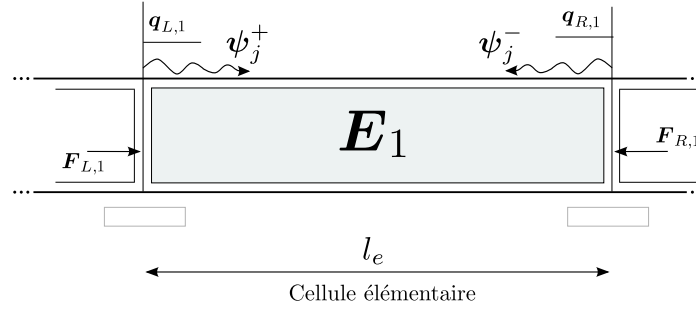


FIGURE 3.12 – Ondes positives et négatives au sein d'une cellule périodique

Pour calculer la réponse forcée de la structure périodique, il est nécessaire d'utiliser la base  $\Phi$  comme une base de projection pour les forces et déplacements au sein du système périodique. Les forces et déplacements au sein de la cellule élémentaire  $E_1$  résultant des  $2n_c$  ondes libres s'écrivent :

$$\mathbf{q}_{L,1} = \sum_{j=1}^{2n_c} \phi_{q_j} \psi_j \quad \mathbf{F}_{L,1} = \sum_{j=1}^{2n_c} \phi_{f_j} \psi_j \quad (3.40)$$

Avec  $\psi$  les amplitudes modales associées aux vecteurs propres de déplacements et de forces. En utilisant le théorème de Floquet-Bloch de l'Eq. (2.3), les déplacements/forces aux extrémités d'une cellule s'écrivent de telle sorte :

$$\mathbf{q}_{R,1} = \mathbf{q}_{L,2} = \sum_{j=1}^{2n_c} \phi_{q_j} \lambda_j \psi_j \quad \mathbf{F}_{R,1} = -\mathbf{F}_{L,2} = -\sum_{j=1}^{2n_c} \phi_{f_j} \lambda_j \psi_j \quad (3.41)$$

La base  $\Phi$  de vecteurs propres étant scindée entre les modes  $\Phi^+$  et  $\Phi^-$ , il est préférable [42, 50] d'écrire les vecteurs  $\mathbf{Q}_{L,1}$  et  $\mathbf{Q}_{R,1}$  comme une somme des contributions des ondes se propageant dans le sens positif et négatif (voir Fig.3.12) :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{L,1} \\ \mathbf{F}_{L,1} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{n_c} \Phi_j^+ \psi_j^+ + \Phi_j^- \lambda_j \psi_j^- \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{R,1} \\ -\mathbf{F}_{R,1} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{n_c} \Phi_j^+ \lambda_j \psi_j^+ + \Phi_j^- \psi_j^- \quad (3.42)$$

Avec  $\lambda_j$  la valeur propre de l'onde  $j$  associée au vecteur propre  $\phi_j^+$  tel que  $|\lambda_j| < 1$  ou  $\Re(i\omega \phi_{q_j}^{+H} \phi_{f_j}^+) < 0$ . Dans la suite, deux méthodes seront analysées pour le calcul des réponses forcées, une approche ondulatoire directe et une approche ondulatoire modale.



### 3.3.2 Réponse forcée par une approche ondulatoire directe

#### 3.3.2.1 Formulation

La première approche ondulatoire possible consiste à calculer directement les degrés de liberté physiques de la structure par l'intermédiaire de la matrice de raideur dynamique ou *Dynamic Stiffness Matrice* (DSM) en anglais. Dans ce cas précis, elle diffère de l'approche classique par éléments finis dans la mesure où elle utilise les modes de propagation d'une cellule périodique. Cette méthode s'applique uniquement aux structures finies. La méthode utilise l'Eq. (3.42) ainsi que les relations d'orthogonalité des vecteurs propres de l'Eq. (3.30).

Soient  $\mathbf{q}_{L,1}$  et  $\mathbf{q}_{R,n}$  les vecteurs de déplacements des extrémités gauche et droite de la structure finie et  $\mathbf{F}_{L,1}$  et  $\mathbf{F}_{R,n}$  les vecteurs de forces. Il est possible de lier ces vecteurs tel que [41] :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{L,1} \\ \mathbf{F}_{R,n} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_m \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{L,1} \\ \mathbf{q}_{R,n} \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

Avec  $\mathbf{D}_m$  la matrice de raideur dynamique construite à partir des modes de propagation de la cellule élémentaire telle que (voir Annexe E) :

$$\mathbf{D}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{0}_{n_c} \\ \mathbf{0}_{n_c} & \mathbf{D}_{RR} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LR} & \mathbf{0}_{n_c} \\ \mathbf{0}_{n_c} & \mathbf{D}_{RL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_q^- \lambda^{n-1} \phi_q^{-1} & \phi_q^+ \lambda \phi_q^{+1} \\ \phi_q^- \lambda \phi_q^{-1} & \phi_q^+ \lambda^{n-1} \phi_q^{+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_q^- \lambda^n \phi_q^{-1} & \mathbf{I}_{n_c} \\ \mathbf{I}_{n_c} & \phi_q^+ \lambda^n \phi_q^{+1} \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.44)$$

L'expression de la matrice  $\mathbf{D}_m$  permet de lier les forces des extrémités de la structure globale à ses déplacements en calculant les vecteurs propres et les valeurs propres d'une cellule élémentaire. Le temps de calcul nécessaire à cette tâche est donc indépendant du nombre de cellules totales au sein de la structure. La formulation de l'Eq. (3.44) minimise les problèmes de conditionnement en inversant une matrice dont la diagonale comporte des valeurs propres telles que  $|\lambda| < 1$ , ceci permet de jouer le rôle de "filtre naturel" pour les ondes évanescentes [54]. La DSM permet d'obtenir facilement la matrice de raideur dynamique d'une structure condensée à ses interfaces. Elle ne permet cependant pas de revenir directement aux déplacements ou aux forces présents à l'intérieur de la structure.

### 3.3.2.2 Comparaison aux éléments finis

Le calcul de la réponse forcée par DSM est comparé à la réponse par éléments finis. Une structure finie sur supports élastiques comprenant  $n$  cellules est considérée (voir Fig. 3.13). Après la résolution du problème aux valeurs propres généralisé, la matrice de raideur dynamique condensée aux interfaces est calculée grâce à l'Eq. (3.44). Des conditions limites élastiques sont ensuite ajoutées sur les arrêtes externes de la structure sous forme d'une matrice d'impédance. La nouvelle matrice de raideur dynamique avec des conditions limites élastiques s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{D}_{LR} \\ \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{D}_{RR} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{D}_{LR} \\ \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{D}_{RR} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^* \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Avec  $\mathbf{K}^*$  la matrice de raideur des supports élastiques appliquée sur chaque interface.

La cellule est maillée en 3D par des éléments linéaires hexaédriques à 8 nœuds, les propriétés du guide et des supports élastiques sont résumées dans le Tab. 3.1. Chaque section du guide est composée de 63 degrés de liberté : soit 63 modes se propageant dans la direction positive et 63 modes dans la direction négative. La Fig. 3.14 compare la réponse par DSM à celle obtenue par éléments finis suite à une force extérieure appliquée sur la face gauche de la structure. L'erreur relative fréquentielle est calculée en comparant la moyenne quadratique des amplitudes des degrés de liberté de la première section à celle obtenue par éléments finis, soit :

$$\epsilon_{relative,\omega} = \frac{|\|\mathbf{q}_{ef}(\omega)\|_2 - \|\mathbf{q}_{per}(\omega)\|_2|}{\|\mathbf{q}_{ef}(\omega)\|_2} \quad (3.46)$$

Il est clair que les deux méthodes donnent la même réponse forcée avec une erreur relative moyenne des amplitudes quadratiques d'environ 0.01%. Si le maillage de la structure par éléments finis correspond à celui par DSM, les réponses forcées obtenues seront sensiblement les mêmes.

### 3.3.2.3 Analyse de la réduction modale

Dans cette étude, l'influence de la réduction modale est analysée sur la réponse forcée par DSM. Une force ponctuelle ou répartie est appliquée sur une extrémité de la structure. La réponse est observée au point d'application de la force selon le nombre de modes de propagation sélectionnés. Considérons un nombre  $2p$  de modes de propagation retenus par un critère de sélection (voir section 3.1.5.5), soit  $p$  modes

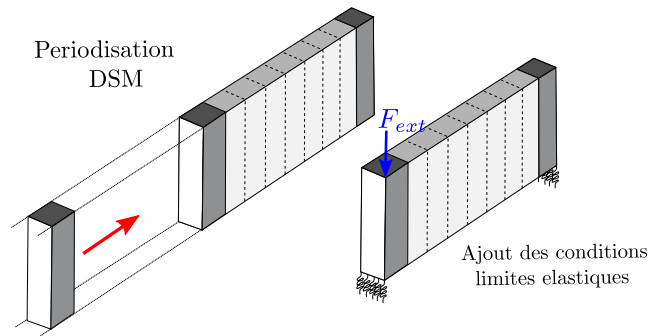
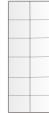
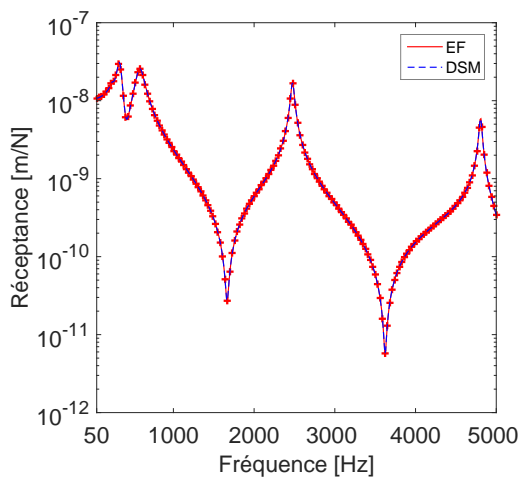


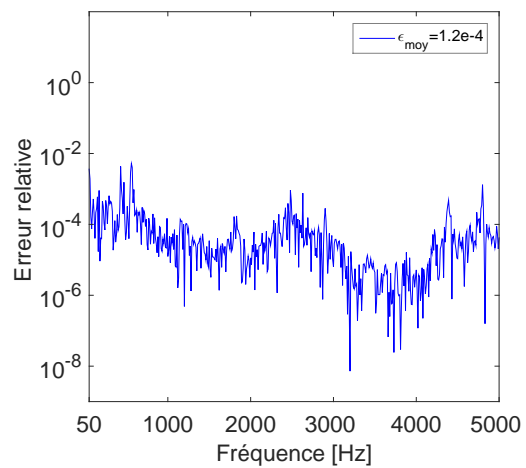
FIGURE 3.13 – Structure assemblée par DSM avec conditions limites élastiques

Tableau 3.1 – Paramètres d'étude

Paramètres d'étude					
Guide	$E$ (Pa)	$\eta$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\nu$	Section
	$2.1 \times 10^{11}$	0.004	7850	0.3	
Périodicité	$n$ cellules 60				
Supports	$K_x$ (N/m)	$K_y$ (N/m)	$K_z$ (N/m)		
	$3.6 \times 10^7$	$1.8 \times 10^8$	$1 \times 10^8$		
	$\eta_x$	$\eta_y$	$\eta_z$		
	0.2	0.2	0.2		



(a)



(b)

FIGURE 3.14 – (a) Amplitude de la réceptance et (b) Erreur relative des amplitudes quadratiques de surface entre le modèle éléments finis et DSM

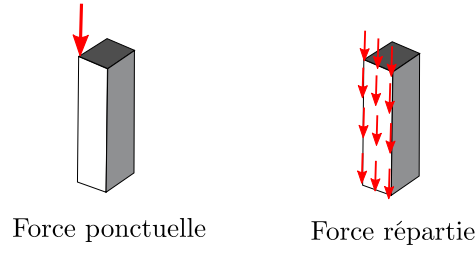


FIGURE 3.15 – Force ponctuelle et répartie appliquées sur une section

positifs et  $p$  modes négatifs, les matrices de vecteurs propres  $\phi_q^+$   $\phi_q^-$   $\phi_f^+$   $\phi_f^-$  sont donc désormais de dimension  $n_c \times p$ . En notant  $(\cdot)^*$  l'opération de pseudo-inverse gauche, la formulation de la matrice de raideur dynamique condensée par DSM de l'Eq. (3.44) s'écrit alors :

$$\mathbf{D}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{RR} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LR} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{RL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_q^- \lambda^{n-1} (\phi_q^-)^* & \phi_q^+ \lambda (\phi_q^+)^* \\ \phi_q^- \lambda (\phi_q^-)^* & \phi_q^+ \lambda^{n-1} (\phi_q^+)^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_q^- \lambda^n (\phi_q^-)^* & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \phi_q^+ \lambda^n (\phi_q^+)^* \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.47)$$

Le calcul a été effectué sur une tranche de 1cm maillée par des éléments linéaires 3D avec 63 degrés de liberté/interface. L'analyse est effectuée dans un premier temps avec des conditions aux limites nulles. Une force verticale ponctuelle ou répartie est appliquée sur la première section de la structure périodique finie. Des conditions limites élastiques sont ensuite ajoutées sur la structure. Le nombre de modes retenus est choisi selon la valeur absolue des valeurs propres à la fréquence maximale. Ainsi, pour  $|\lambda^+| \leq 1$  il n'y a pas de réduction modale, pour  $|\lambda^+| > 0.1$  on obtient 100 modes,  $|\lambda^+| > 0.4$  on obtient 44 modes et pour  $|\lambda^+| > 0.9$  on obtient 14 modes sur 126 possibles.

La Fig. 3.16 représente l'amplitude de la réponse de la structure soumise à une force ponctuelle sur la face supérieure de la première section ainsi que l'erreur relative des amplitudes quadratiques selon la valeur du critère de sélection. L'influence de la réduction est clairement visible. Le critère  $|\lambda^+| > 0.9$ , soit une réduction de près de 90% du nombre de modes de propagation, semble trop restrictif pour reconstituer la réponse dynamique. L'erreur relative  $y$  est proche de 200 % sur l'ensemble du spectre. Pour les deux autres critères de sélection, soit 44 modes et 100 modes, les pics de résonance sont prédits aux mêmes fréquences que celles déterminées par éléments

finis. Cependant pour les anti-résonances, qui sont hautement régies par la présence d'ondes évanescentes, l'imprécision due à la réduction modale y est maximale. Bien qu'un nombre important de ces modes restent très évanescents, l'application d'une force ponctuelle sur l'interface agit comme un point singulier, cette condition nécessite donc un nombre important de modes pour réduire l'erreur relative.

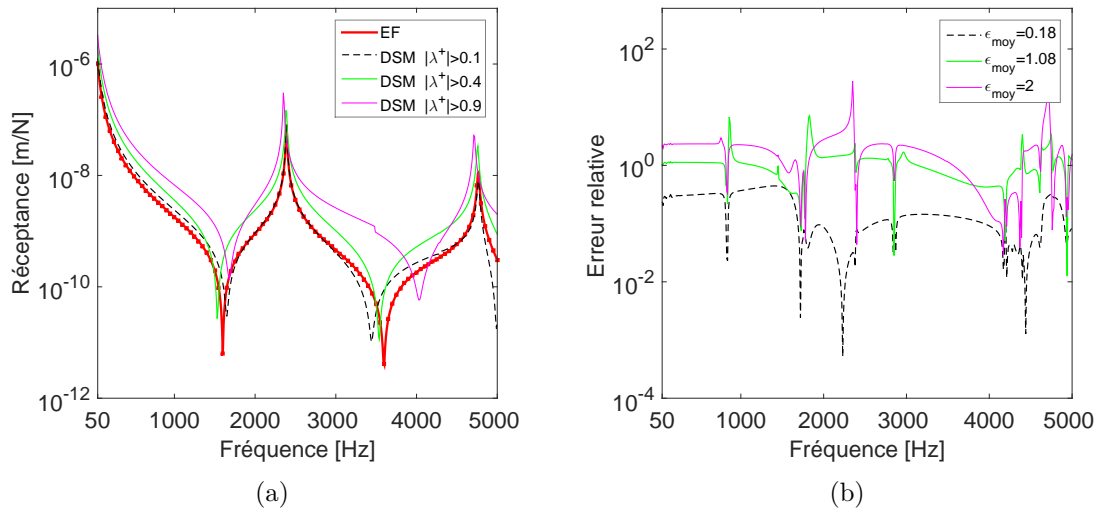


FIGURE 3.16 – Structure aux conditions limites nulles sous influence d'une force ponctuelle (a) Amplitude de la réceptance et (b) Erreur relative des amplitudes quadratiques de surface entre le modèle éléments finis et DSM

La Fig. 3.17 représente l'amplitude de la réponse de la structure soumise à une force répartie sur la première section. L'influence de la réduction est bien moins visible que dans le cas précédent. L'erreur moyenne pour les différents critères a diminué par rapport au cas précédent avec une valeur de 66 % pour le critère  $|\lambda^+| > 0.9$ . Une réduction à 44 modes, soit  $|\lambda^+| > 0.4$ , semble ici suffisante pour reconstruire la réponse forcée avec une erreur relative moyenne de 26%. La force répartie n'agit donc plus comme un point singulier pour l'excitation, en s'appliquant sur un plus grand nombre de degrés de liberté elle fait intervenir un plus grand nombre de modes propagatifs. Le nombre de modes minimum pour reconstruire la réponse forcée est donc plus faible que dans le cas d'une excitation ponctuelle.

La Fig. 3.18 représente l'amplitude de la réponse de la structure avec des conditions limites élastiques et soumise à une force ponctuelle. On constate comme sur la Fig. 3.16 un important décalage entre la réponse par éléments finis et celle par DSM en ne sélectionnant que 14 modes notamment au niveau des pics de résonances basses

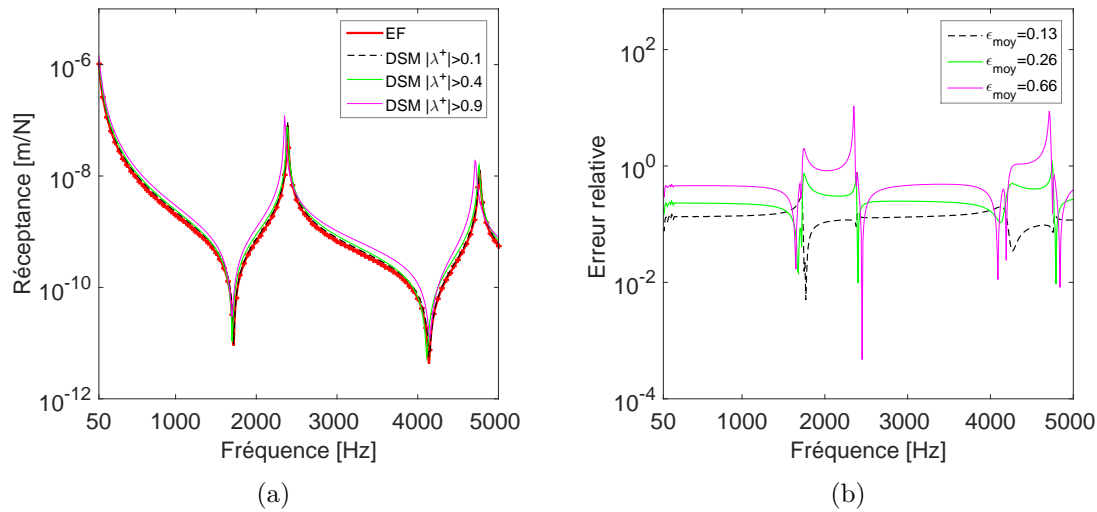


FIGURE 3.17 – Structure aux conditions limites nulles sous influence d’une force répartie (a) Amplitude de la réceptance et (b) Erreur relative des amplitudes quadratiques de surface entre le modèle éléments finis et DSM

fréquences liés aux supports. Il est nécessaire d’utiliser au moins 100 modes, soit le critère  $|\lambda^+| > 0.1$ , pour obtenir les bonnes fréquences de résonance en basses fréquences. L’erreur relative liée à la réduction modale est globalement plus importante que celle du cas aux conditions limites nulles et notamment en basses fréquences. Les conditions limites élastiques sont en fait associées à des contraintes spatiales importantes. Elles nécessitent donc l’emploi de vecteurs propres d’ordres élevés liés aux ondes très évanescentes [54]. Ainsi, afin de converger au mieux vers la réponse éléments finis, il est nécessaire d’utiliser un nombre de modes plus important que dans le cas d’une structure aux conditions limites nulles.

La Fig. 3.19 représente l’amplitude de la réponse de la structure avec des conditions limites élastiques et soumise à une force répartie. Contrairement à la structure aux conditions limites nulles avec une force répartie, il est plus difficile de converger vers la réponse éléments finis. Qu’importe la nature de la force d’excitation, les importantes contraintes spatiales associées aux conditions limites élastiques obligent l’utilisation d’un grand nombre de modes de propagation pour le calcul de la réponse forcée par WFEM.

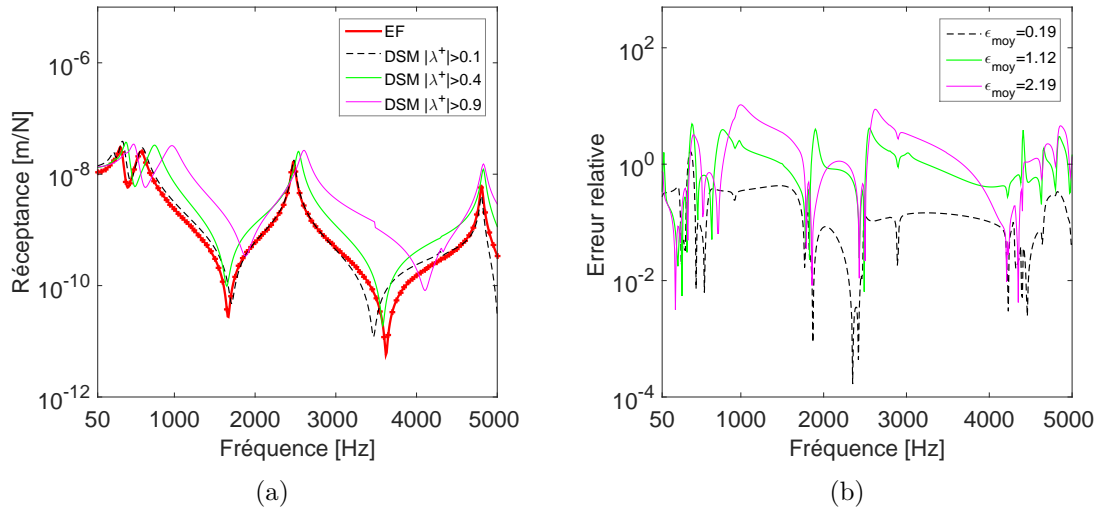


FIGURE 3.18 – Structure aux conditions limites élastiques sous influence d'une force ponctuelle (a) Amplitude de la réceptance et (b) Erreur relative des amplitudes quadratiques de surface entre le modèle éléments finis et DSM

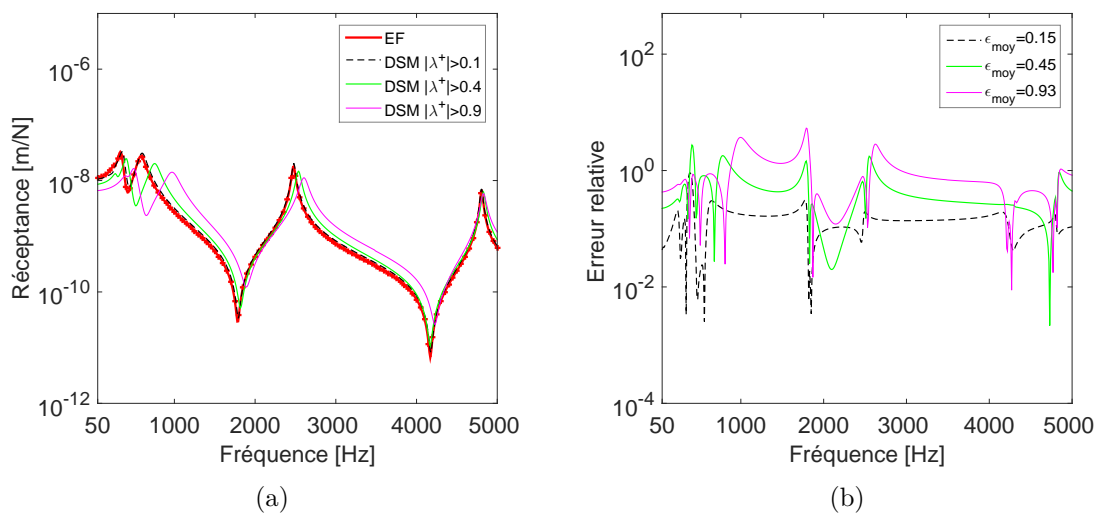


FIGURE 3.19 – Structure aux conditions limites élastiques sous influence d'une force répartie (a) Amplitude de la réceptance et (b) Erreur relative des amplitudes quadratiques de surface entre le modèle éléments finis et DSM

### 3.3.3 Réponse forcée par approche ondulatoire modale

#### 3.3.3.1 Formulation

La seconde approche possible est l'approche ondulatoire [29, 44, 49] ou *Wave Approach* (WA) en anglais, elle traduit les réflexions/transmissions aux extrémités de la structure périodique. Les déplacements et forces aux interfaces de chaque cellule sont déterminés grâce à l'Eq. (3.42). Contrairement à la méthode DSM, celle-ci peut être utilisée pour les structures infinies. D'une manière générale, en utilisant l'Eq. (3.42), les forces et déplacements des interfaces de la cellule  $k$  sont exprimés par :

$$\mathbf{q}_{L,k} = \phi_q^+ \lambda^{k-1} \psi^+ + \phi_q^- \lambda^{n+1-k} \psi^- \quad \mathbf{q}_{R,k} = \phi_q^+ \lambda^k \psi^+ + \phi_q^- \lambda^{n-k} \psi^- \quad (3.48)$$

$$\mathbf{F}_{L,k} = \phi_f^+ \lambda^{k-1} \psi^+ + \phi_f^- \lambda^{n+1-k} \psi^- \quad \mathbf{F}_{R,k} = -\phi_f^+ \lambda^k \psi^+ - \phi_f^- \lambda^{n-k} \psi^- \quad (3.49)$$

Le principe de la WA consiste donc à déterminer les amplitudes  $\psi^+$  et  $\psi^-$  des vecteurs propres  $\Phi^+$  et  $\Phi^-$ . Le problème aux limites de la structure peut être écrit comme étant [44, 49] :

$$\psi_j^+ = \mathbf{X}^+ \lambda^n \psi_j^- + \tilde{\mathbf{F}}^+ \quad (3.50)$$

$$\psi_j^- = \mathbf{X}^- \lambda^n \psi_j^+ + \tilde{\mathbf{F}}^- \quad (3.51)$$

$\mathbf{X}$  représentant une matrice de réflexion et de transmission aux frontières de l'élément et  $\tilde{\mathbf{F}}$  le vecteur source. Le système matriciel des Eqs. (3.50) (3.51) s'écrit donc  $\mathbf{A}\psi = \tilde{\mathbf{F}}$ , la résolution du problème revient à calculer les amplitudes des modes telles que  $\psi = \mathbf{A}^{-1}\tilde{\mathbf{F}}$ . Cette méthode peut être appliquée dans le cas de milieux finis, semi-infinis et infinis en considérant la présence ou non d'ondes réfléchies dans le système [42].



FIGURE 3.20 – Structure soumise à une force  $\mathbf{F}_0$  et un déplacement imposé  $\mathbf{q}_0$

Pour un problème classique de type *Dirichlet Neumann* où l'on impose une force d'un côté de la structure et un déplacement de l'autre (voir Fig 3.20), les conditions limites s'écrivent :

$$\mathbf{F}_{L,1} = \phi_f^+ \psi^+ + \phi_f^- \lambda^n \psi^- = \mathbf{F}_0 \quad \mathbf{q}_{R,n} = \phi_q^+ \lambda^n \psi^+ + \phi_q^- \psi^- = \mathbf{q}_0 \quad (3.52)$$



Soit de manière matricielle :

$$\begin{bmatrix} \phi_f^+ & \phi_f^- \lambda^n \\ \phi_q^+ \lambda^n & \phi_q^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{q}_0 \end{Bmatrix} \quad (3.53)$$

L'inversion matricielle requise de l'Eq. (3.53) peut cependant poser des problèmes de singularité [50] dans la mesure où elle fait intervenir des grandeurs liées aux déplacements et aux forces. On réécrit donc le problème de la forme [50] :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_c} & (\phi_f^+)^+ \phi_f^- \lambda^n \\ (\phi_q^-)^+ \phi_q^+ \lambda^n & \mathbf{I}_{n_c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\phi_f^+)^+ \mathbf{F}_0 \\ (\phi_q^-)^+ \mathbf{q}_0 \end{Bmatrix} \quad (3.54)$$

La solution du problème consiste à résoudre le système :

$$\begin{Bmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_c} & (\phi_f^+)^{-1} \phi_f^- \lambda^n \\ (\phi_q^-)^{-1} \phi_q^+ \lambda^n & \mathbf{I}_{n_c} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} (\phi_f^+)^{-1} \mathbf{F}_0 \\ (\phi_q^-)^{-1} \mathbf{q}_0 \end{Bmatrix} \quad (3.55)$$

Les déplacements à l'intérieur d'une cellule élémentaire  $N$  s'expriment grâce aux Eqs. (3.8) (3.49) tels que :

$$\mathbf{q}_{i,N} = -\tilde{\mathbf{D}}_{ii}^{-1} [\tilde{\mathbf{D}}_{iL} \mathbf{q}_{L,N} + \tilde{\mathbf{D}}_{iR} \mathbf{q}_{R,N}] \quad (3.56)$$

### 3.3.3.2 Comparaison aux éléments finis

La réponse par WA est dans un premier temps comparée à la réponse par éléments finis avec des conditions limites élastiques. La présence de ces conditions limites intervient directement dans la formulation par WA sous forme d'une matrice de réflexion. Soit une structure soumise à une force extérieure  $F_{ext}$ , les conditions limites élastiques peuvent être considérées comme des forces agissant sur les sections externes telles que  $\mathbf{F}_L^* = \mathbf{K}^* \mathbf{q}_{L,1}$  et  $\mathbf{F}_R^* = \mathbf{K}^* \mathbf{q}_{R,n}$  (voir Fig. 3.21). L'équilibre dynamique des deux sections externes donne :

$$\mathbf{F}_{L,1} + \mathbf{F}_L^* + \mathbf{F}_{ext} = 0 \quad \mathbf{F}_{R,n} + \mathbf{F}_R^* = 0 \quad (3.57)$$

En utilisant les expressions des forces/déplacements au sein de la structure périodique,

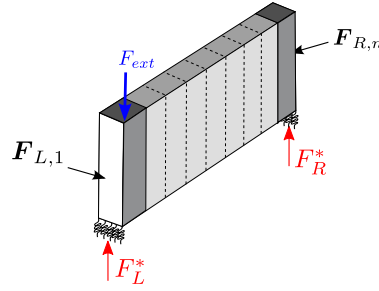


FIGURE 3.21 – Forces appliquées aux interfaces d'une structure avec conditions limites élastiques

on trouve :

$$[\phi_f^+ + \mathbf{K}^* \phi_q^+] \psi^+ + [\phi_f^- + \mathbf{K}^* \phi_q^-] \lambda^n \psi^+ = -\mathbf{F}_{ext} \quad (3.58)$$

$$[-\phi_f^+ + \mathbf{K}^* \phi_q^+] \lambda^n \psi^+ + [-\phi_f^- + \mathbf{K}^* \phi_q^-] \psi^- = 0 \quad (3.59)$$

Une réécriture du système donne :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C}^+ \lambda^n \\ \mathbf{C}^- \lambda^n & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^+ \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.60)$$

$$\mathbf{C}^+ = [\phi_f^+ + \mathbf{K}^* \phi_q^+]^{-1} [\phi_f^- + \mathbf{K}^* \phi_q^-] \quad \mathbf{F}^+ = -[\phi_f^+ + \mathbf{K}^* \phi_q^+]^{-1} \mathbf{F}_{ext} \quad (3.61)$$

$$\mathbf{C}^- = [-\phi_f^- + \mathbf{K}^* \phi_q^-]^{-1} [-\phi_f^+ + \mathbf{K}^* \phi_q^+] \quad (3.62)$$

La Fig. 3.22 représente l'erreur relative entre la réponse par WA et DSM par rapport à celle par éléments finis. Les deux erreurs relatives sont globalement très faibles, même si celle par WA semble inférieure à la DSM en basses fréquences au niveau des résonances des supports élastiques. Cela vient du fait que la WA implique des systèmes à inverser dont les amplitudes des vecteurs propres varient de manière progressive le long de la structure [54] et donc mieux conditionnés que la méthode DSM.

La réponse forcée est ensuite analysée sur une structure longue. Une cellule élémentaire de 60 cm de long est condensée puis est périodisée deux fois avec et sans régularisation analytique des vecteurs propres (voir la section 3.1.5.4). Sans régularisation, les méthodes DSM et WA présentent de fortes instabilités numériques (voir Fig. 3.23(a)), d'autant plus importantes par DSM. Comme il vient d'être expliqué, la WA met en situation des amplitudes de vecteurs dont la variation est gouvernée par des systèmes plus simples et mieux conditionnés que la DSM [54]. Ainsi, les instabi-

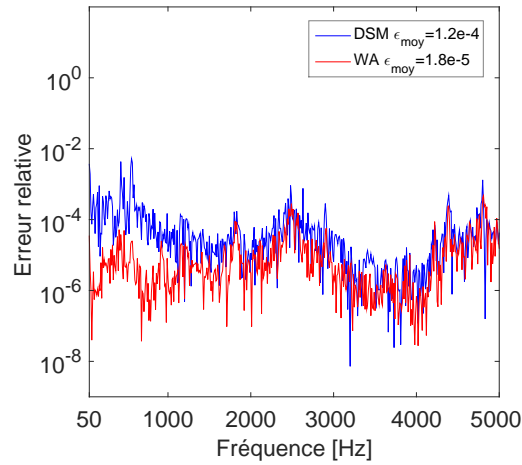


FIGURE 3.22 – Erreur relative de la WA et DSM aux éléments finis

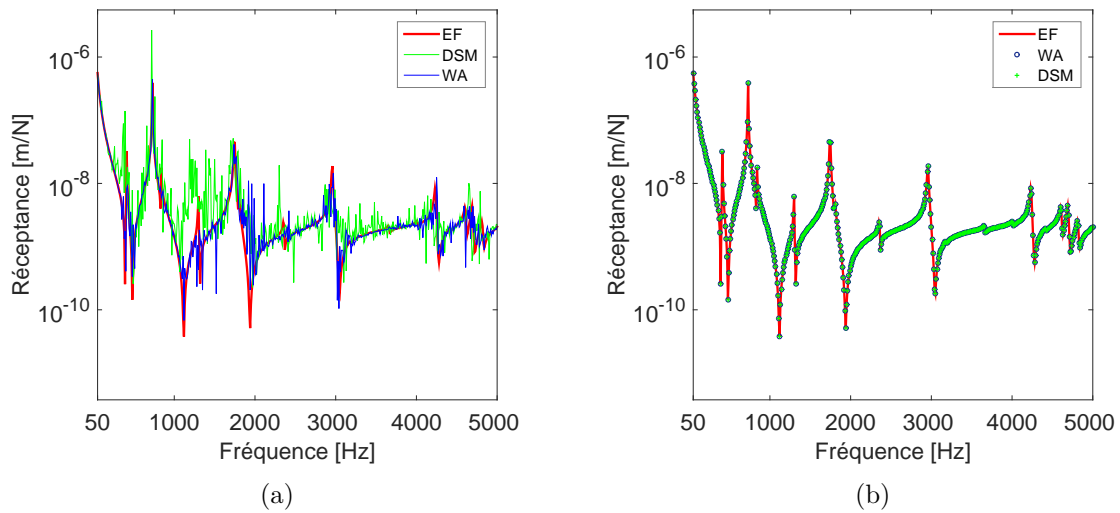


FIGURE 3.23 – Amplitude de la réponse forcée (a) sans régularisation analytique (b) avec régularisation analytique des vecteurs propres

lités numériques naturellement présentes dans le problème aux valeurs propres sont amplifiées par la périodisation de cellules longues (voir Chapitre 4). Afin de converger vers la réponse éléments finis, il est donc nécessaire de recourir à une régularisation analytique<sup>2</sup> (voir section 3.1.5.4) ou d'utiliser la transformation de type  $\mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1}$  (voir section 3.1.6) dans le cas plus général (voir Fig. 3.23(b)).

---

2. Pour les cellules symétriques par rapport à leur plan milieu

### 3.3.3.3 Analyse de la réduction modale

L'influence de la réduction modale est analysée sur la réponse forcée par WA. La résolution du problème suite à la réduction modale s'écrit à partir de l'Eq. (3.60) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C}^+\lambda^n \\ \mathbf{C}^-\lambda^n & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\psi}^+ \\ \boldsymbol{\psi}^- \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^+ \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.63)$$

$$\mathbf{C}^+ = [\boldsymbol{\phi}_f^+ + \mathbf{K}^*\boldsymbol{\phi}_q^+]*[\boldsymbol{\phi}_f^- + \mathbf{K}^*\boldsymbol{\phi}_q^-] \quad \mathbf{F}^+ = -[\boldsymbol{\phi}_f^+ + \mathbf{K}^*\boldsymbol{\phi}_q^+]*\mathbf{F}_{ext} \quad (3.64)$$

$$\mathbf{C}^- = [-\boldsymbol{\phi}_f^- + \mathbf{K}^*\boldsymbol{\phi}_q^-]*[-\boldsymbol{\phi}_f^+ + \mathbf{K}^*\boldsymbol{\phi}_q^+] \quad (3.65)$$

Avec (\*) l'opération de pseudo-inverse gauche.

Le cas le plus contraignant de la section 3.3.2.3 est reproduit soit une force ponctuelle sur la structure aux conditions limites élastiques. Le nombre de modes retenus est choisi selon une valeur minimale de la valeur absolue des valeurs propres. Ainsi, pour  $|\lambda^+| > 0.1$  on obtient 100 modes,  $|\lambda^+| > 0.4$  on obtient 44 modes et pour  $|\lambda^+| > 0.9$  on obtient 14 modes. La Fig. 3.24 représente l'amplitude de la réponse, l'influence de la réduction est clairement visible surtout en basses fréquences. Par rapport à la méthode DSM, il est plus difficile de retrouver les pics de résonance des supports élastiques ainsi que les anti-résonances fortement liés aux ondes évanescentes. D'un point de vue numérique, cette différence peut provenir de la projection de la force extérieure sur la base modale tronquée par rapport à la méthode directe qui opère sur les degrés de liberté physiques.

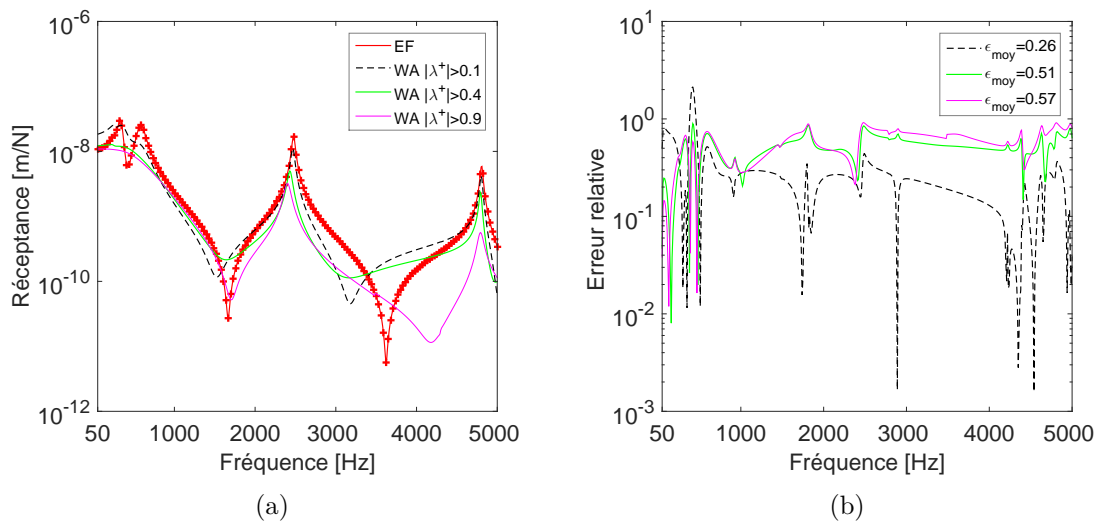


FIGURE 3.24 – Structure aux conditions limites élastiques sous influence d’une force ponctuelle (a) Amplitude de la réceptance et (b) Erreur relative des amplitudes quadratiques de surface entre le modèle éléments finis et WA

### 3.3.3.4 Structures infinies

Les structures infinies sont un cas particulier dans la mesure où les ondes des cellules élémentaires ne se propagent que dans une seule direction sans la présence d'ondes retour.

1. Réponse forcée d'une structure infinie avec impact entre deux cellules :

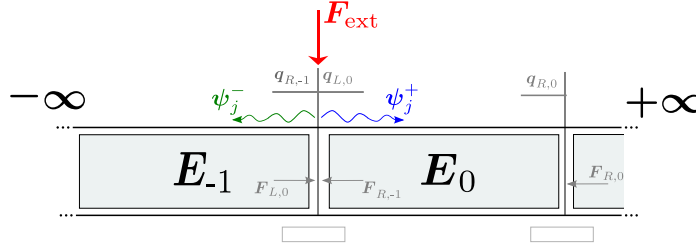


FIGURE 3.25 – Force extérieure à l'interface de deux cellules élémentaires

Lorsque la force extérieure est située à l'interface des cellules  $E_0$  et  $E_{-1}$  on trouve :

$$\mathbf{q}_{L,0} = \phi_q^+ \psi^+ \quad \mathbf{q}_{R,-1} = \phi_q^- \psi^- \quad \mathbf{F}_{L,0} = \phi_f^+ \psi^+ \quad \mathbf{F}_{R,-1} = -\phi_f^- \psi^- \quad (3.66)$$

La continuité des déplacements et l'opposition des forces à l'interface donnent :

$$\begin{Bmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_q^+ & -\phi_q^- \\ \phi_f^+ & -\phi_f^- \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{ext} \end{Bmatrix} \quad (3.67)$$

Afin d'éviter une inversion matricielle, il est possible d'utiliser les relations d'orthogonalité des vecteurs propres (Eq. (3.30)) pour exprimer les amplitudes  $\psi^+ \psi^-$  [52] :

$$\begin{Bmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\phi_f^- & -\phi_f^+ \\ \phi_q^- & \phi_q^+ \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{ext} \end{Bmatrix} \quad (3.68)$$

2. Réponse forcée d'une structure semi-infinie avec impact en son extrémité :

Soit une structure semi-infinie droite soumise à une force extérieure en son extrémité gauche. L'opposition des forces sur cette extrémité s'écrit :

$$\mathbf{F}_{ext} = \mathbf{F}_{L,0} = \phi_f^+ \psi^+ \quad (3.69)$$

Les amplitudes  $\psi^+$  s'expriment donc telles que :

$$\psi^+ = \phi_f^{+^{-1}} \mathbf{F}_{ext} \quad (3.70)$$

### 3. Influence de la réduction modale

La Fig. 3.26 représente la réponse par inversion directe (Eq. (3.67)) puis en utilisant les relations d'orthogonalité (Eq. (3.68)) d'une structure infinie soumise à une force extérieure entre deux cellules. Tous les modes sont pris en compte dans le calcul. Les deux réponses sont identiques, la formulation par orthogonalité fait intervenir des relations analytiques exactes entre vecteurs propres et sera donc utilisée par la suite.

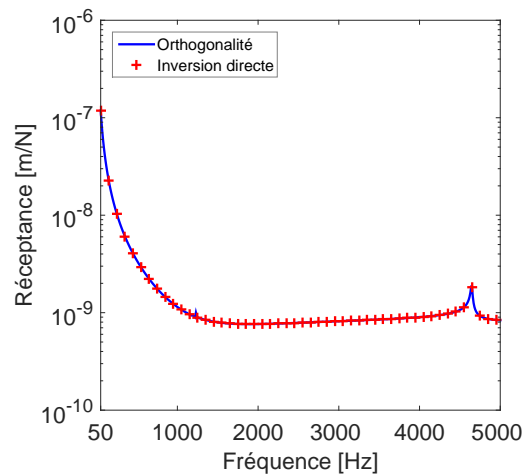


FIGURE 3.26 – Amplitude de la réponse forcée de la structure infinie

L'influence de la réduction modale sur la réponse est maintenant analysée. La réponse forcée est calculée au niveau de l'impact (voir Fig. 3.27(a)) avec une réduction à 14 modes, soit  $|\lambda^+| > 0.9$ , par formulation directe et par orthogonalité. La réduction modale par inversion directe (Eq. (3.67)) cause des instabilités numériques et surestime fortement la réponse à cause de l'inversion d'une matrice rectangulaire. La deuxième réponse est obtenue en utilisant les relations d'orthogonalité (Eq. (3.68)), le fait de ne pas inverser une matrice rectangulaire limite ainsi les erreurs numériques. La réponse est cependant sous estimée par rapport à celle qui comptabilise tous les modes de propagation. Les modes très évanescents ont une influence sur la réponse, plus particulièrement autour de la force extérieure. Comme il est visible sur la Fig. 3.27(b), lorsque l'on se situe plus loin du point d'impact, les deux réponses sont similaires. Ceci montre bien l'influence locale de ces modes très évanescents. Il est donc préférable de prendre en considération les modes propagatifs et quelques modes évanescents [49] pour le calcul de la réponse forcée.

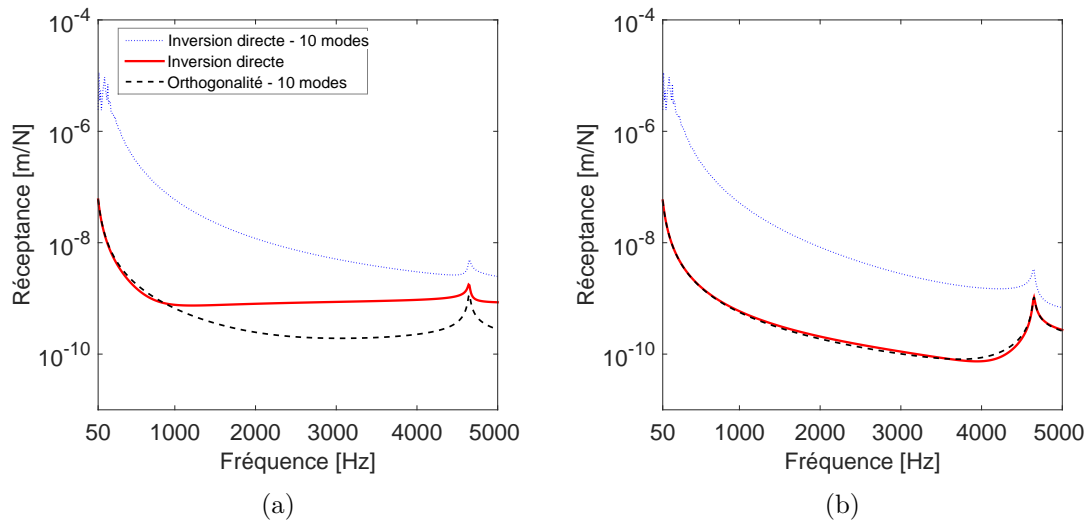


FIGURE 3.27 – (a) Amplitude de la réponse forcée au niveau du point d'impact (b) éloignée du point d'impact

À 4640 Hz, on observe un pic de la réponse forcée qui correspond à un mode de section. La Fig. 3.28(a) représente les amplitudes  $\psi^+$  des 10 premiers modes positifs à cette fréquence, le mode n° 5 (3.28(b)) y est prépondérant. La fréquence du pic correspond à la fréquence de coupure du mode, quand l'onde devient propagative (voir Fig. 3.29).

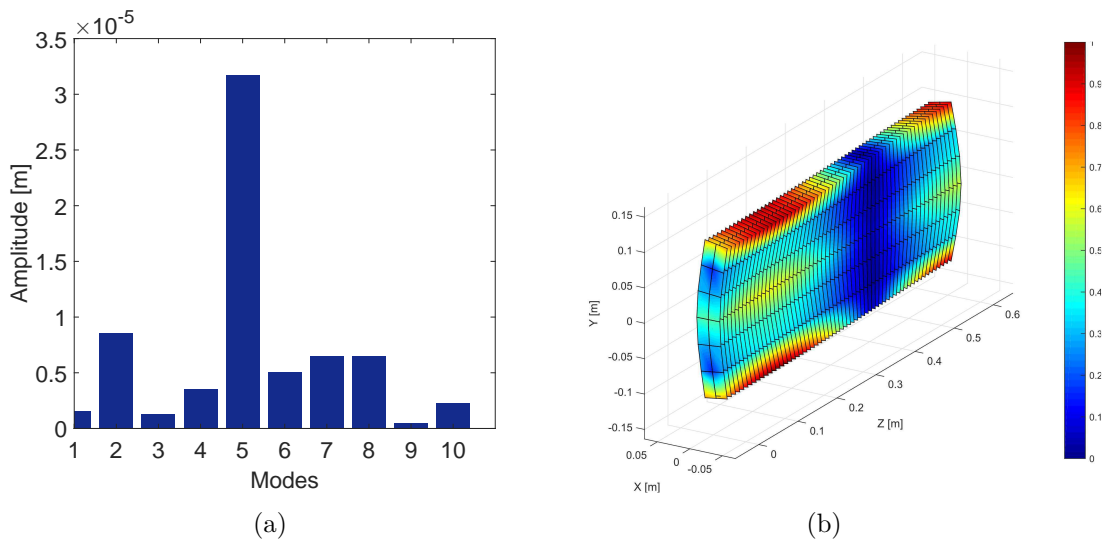


FIGURE 3.28 – (a) Contribution des modes à 4640 Hz au niveau de la section d'impact (b) Mode de propagation n°5 à 5000 Hz



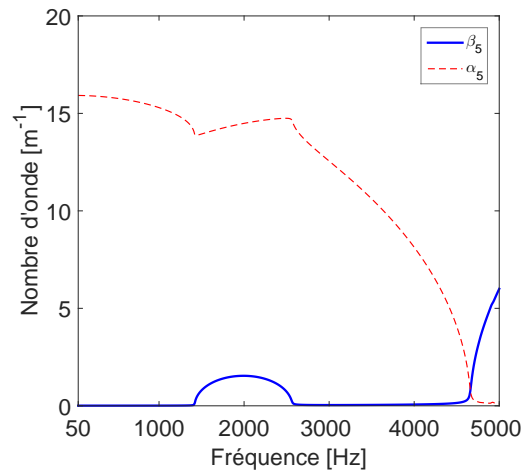


FIGURE 3.29 – Partie imaginaire  $\beta$  et partie réelle  $\alpha$  de la constante de propagation  $\gamma$  de l'onde  $n^{\circ}5$

#### 4. Influence du calcul aux valeurs propres

L'influence de l'algorithme du problème aux valeurs propres généralisé est analysé dans cette section. Le calcul est appliqué à une cellule élémentaire longue de 60 cm. L'algorithme de l'Eq. (3.16) (avec régularisation analytique) est comparé à celui de la transformation de type  $\mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1}$  (voir section 3.1.6). La formulation de l'Eq. (3.16) est d'abord utilisée, la Fig. 3.30 montre des instabilités numériques importantes par orthogonalité avec tous les modes et avec réduction modale. Même si la troncature modale tend à diminuer ces instabilités, l'utilisation des propriétés d'orthogonalité des modes introduit des erreurs numériques.

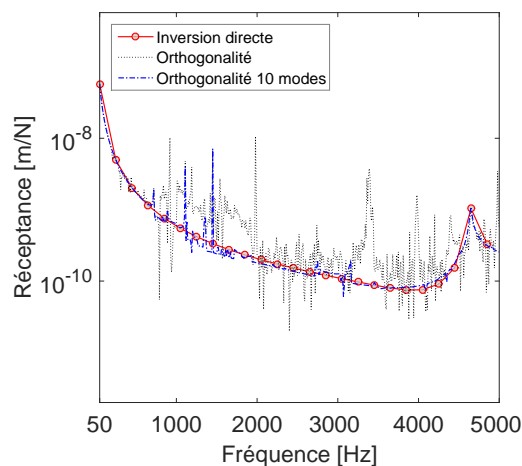


FIGURE 3.30 – Amplitude de la réponse forcée à la section d'impact **sans** transformation de type  $\mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1}$

L'application du principe de périodicité à des cellules longues entraîne l'apparition d'ondes très évanescentes qui détériorent fortement le calcul et ne garantissent pas les relations d'orthogonalité. Les Figs. 3.32(a) 3.32(b) représentent le critère de MAC et les relations d'orthogonalité entre 4990Hz et 5000Hz des modes de la cellule élémentaire calculés à partir de l'Eq. (3.16). Le critère de MAC montre qu'une corrélation entre les modes peut être effectuée uniquement jusqu'au 7<sup>ème</sup> mode. De plus, il est clair qu'à partir du 9<sup>ème</sup> mode, les propriétés d'orthogonalité entre les modes ne sont plus assurées. Dans cet exemple, ce nombre correspond aux modes dont la valeur absolue de la valeur propre devient inférieure à  $10^{-5}$ . Ainsi la précision machine ne permet plus de calculer correctement les vecteurs propres et les relations d'orthogonalité ne sont clairement plus garanties.

Une solution pour améliorer notamment l'orthogonalité des modes consiste à utiliser un autre algorithme de calcul pour le problème aux valeurs propres. On utilisera par la suite la transformation de type  $\mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1}$  (voir section 3.1.6) qui fournit une stabilité accrue. Cet algorithme consiste à reformuler le problème aux valeurs propres en termes de  $(\lambda + \frac{1}{\lambda})$ . La Fig. 3.31 représente la réponse forcée avec l'utilisation de cette transformation. Il est clair que la réponse par orthogonalité qui considère 10 modes est nettement plus stable que précédemment (voir Fig. 3.31(b)). Les Figs. 3.32(c) 3.32(d) représentent le critère de MAC et les relations d'orthogonalité avec l'utilisation de cet algorithme entre 4990Hz et 5000Hz. Il est clair que celui-ci permet d'améliorer les relations d'orthogonalité jusqu'au 17<sup>ème</sup> mode de propagation. Cet algorithme a le double avantage d'offrir une meilleure stabilité numérique mais aussi de permettre de sélectionner le nombre de modes désirés avant même le calcul aux valeurs propres. Ceci pourra s'avérer utile lors de l'application à des cellules comprenant un nombre important de degrés de liberté par section.

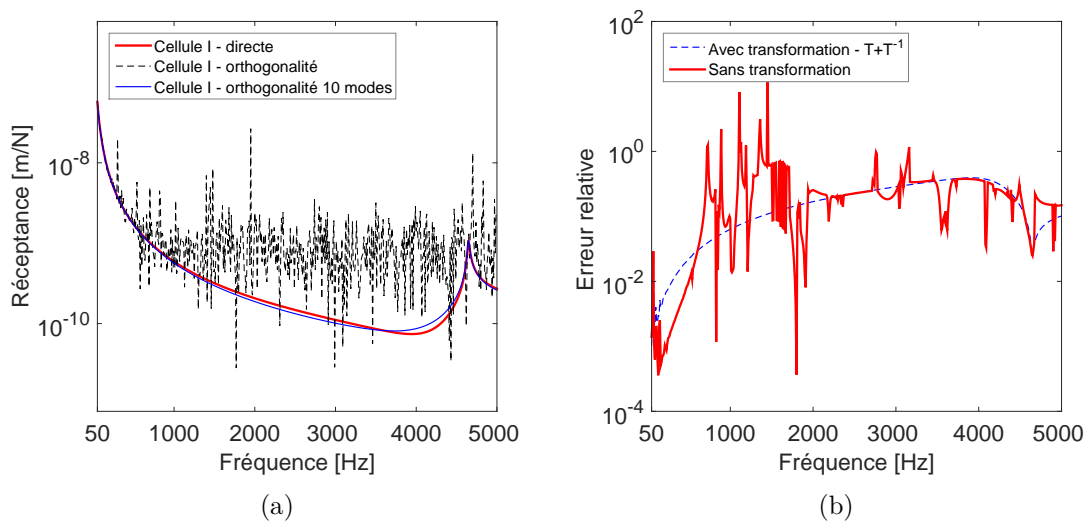


FIGURE 3.31 – (a) Amplitude de la réponse forcée à la section d'impact **avec** transformation de type  $\mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1}$  (b) Erreur relative aux éléments finis avec et sans transformation de type  $\mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1}$

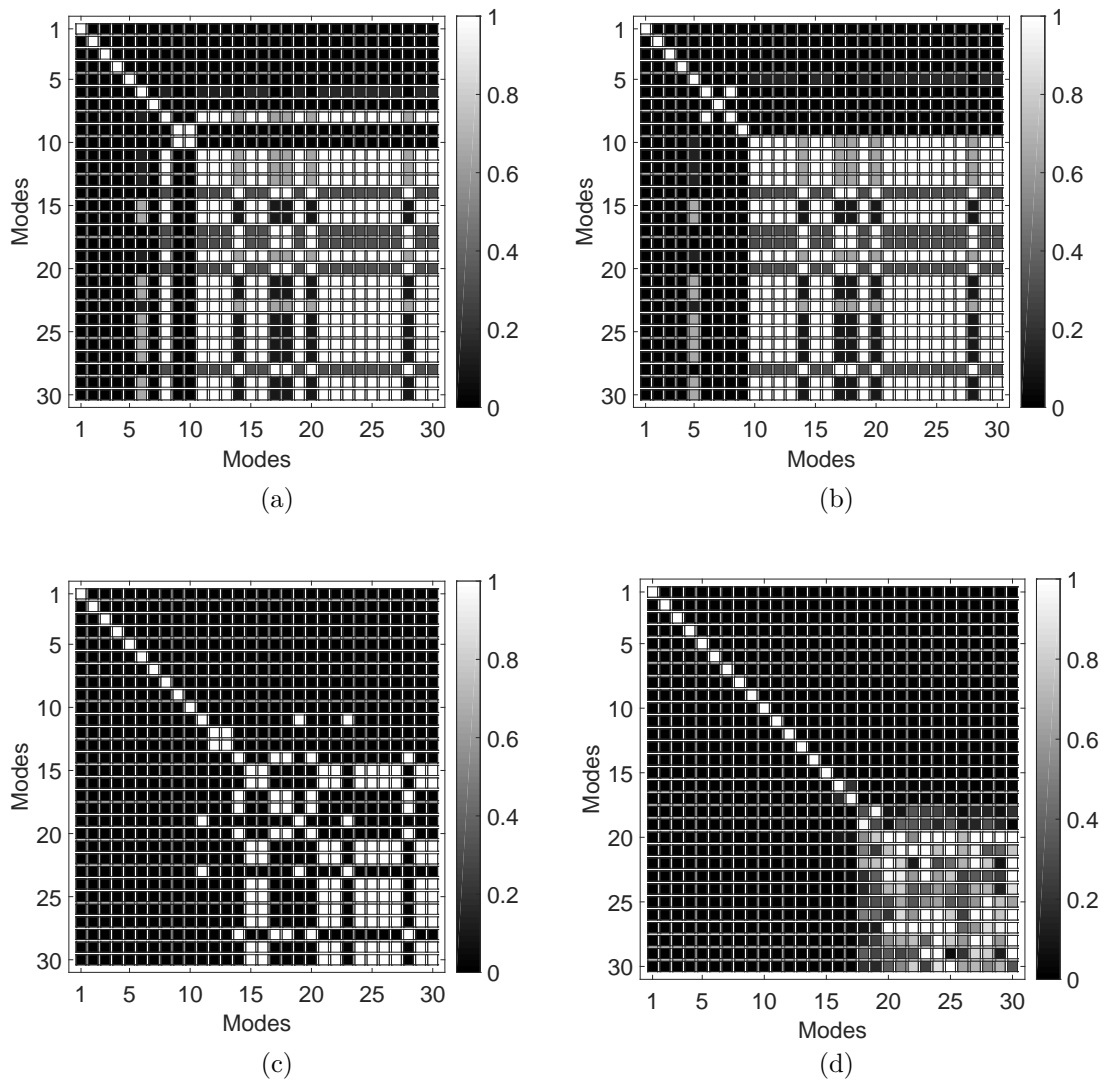


FIGURE 3.32 – *Sans* transformation de type  $\mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1}$  : (a) MAC (b) Orthogonalité ; *Avec* transformation de type  $\mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1}$  : (c) MAC (d) Orthogonalité entre 4990 Hz et 5000 Hz

## 3.4 Conclusion

Ce chapitre a mis en avant deux approches ondulatoires pour le calcul des réponses forcées de structures périodiques par WFEM. Une méthode directe (DSM) et une méthode modale (WA). La méthode directe permet d'exprimer les forces aux extrémités d'une structure périodique par rapport à ses déplacements, elle donne ainsi accès à la matrice de raideur dynamique condensée calculée grâce aux modes de propagation d'une cellule élémentaire. La méthode ne s'applique donc qu'aux structures finies. La seconde méthode ondulatoire (WA), s'applique aux structures finies ou infinies et apporte plus de flexibilité dans la modélisation des conditions limites des structures périodiques.

L'influence de la réduction modale a été analysée sur les deux méthodes suite à l'application d'une force extérieure sur l'une des extrémités de la structure. La présence de conditions limites élastiques sur celle-ci a montré l'importance d'une prise en compte d'un nombre important de modes pour reconstituer la réponse forcée. L'influence de la réduction modale est d'autant plus notable en basses fréquences au niveau des résonances des supports. Bien que la méthode ondulatoire mette en situation des systèmes plus simples et mieux conditionnés que la méthode directe, elle présente plus de difficultés à reconstituer la réponse en basses fréquences notamment du fait de la projection de la force extérieure sur la base modale tronquée.

L'utilisation de la transformation de type  $\mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1}$  pour le calcul aux valeurs propres semble la plus adaptée pour réduire les erreurs numériques. Notamment dans le cas de cellules longues qui peuvent présenter des instabilités dues à la présence d'un nombre très important d'ondes évanescentes.

Pour le calcul aux valeurs propres d'une cellule élémentaire représentant une portion de rail de 0.6m, il sera donc primordial d'utiliser ce type d'algorithme de calcul. Cependant, la fréquence maximale d'étude est de 5000 Hz, il sera donc nécessaire de discrétiser de manière fine cette cellule. Ainsi la condensation dynamique de la cellule pourra s'avérer très coûteuse en temps de calcul. Le chapitre suivant présentera une technique de bi-périodisation basée sur la DSM afin d'accélérer le calcul. Les deux approches présentées dans ce chapitre seront de plus couplées à la méthode des éléments finis pour modéliser tout type d'hétérogénéité le long de la voie.



# Chapitre 4

## Bi-périodisation des structures par couplage FEM - WFEM

### Introduction

*Ce chapitre présente une méthode innovante pour le calcul de la réponse dynamique d'une voie ferrée par bi-périodisation et couplage FEM-WFEM. Le couplage FEM-WFEM permet de modéliser aisément des cellules élémentaires aux conditions limites élastiques. Il a une fonction double, inclure tout type d'hétérogénéité au sein d'une cellule et améliorer la réduction du nombre de modes de propagation. La bi-périodisation sera ensuite présentée, elle permet de condenser de manière dynamique une cellule élémentaire longue par la méthode DSM. Enfin, le couplage FEM - WFEM sera combiné à la bi-périodisation afin de calculer la réponse forcée de structures infinies comprenant des portions hétérogènes.*

## 4.1 Couplage WFEM - FEM

### 4.1.1 Influence sur la réduction modale d'une structure finie

#### 4.1.1.1 Motivations et principe

Comme il a été montré dans la section 3.3.2.3, l'utilisation de conditions limites élastiques sur les extrémités du guide d'onde modélisé par WFEM nécessite une prise en compte importante du nombre de modes de propagation, notamment pour les résonances basses fréquences et les anti-résonances. Pour la modélisation d'un rail en éléments finis supporté périodiquement par des supports élastiques, la prise en compte de nombreux modes peut s'avérer contraignante en termes de temps de calcul et de stockage.

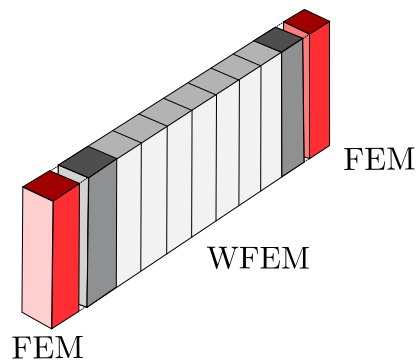


FIGURE 4.1 – Couplage FEM - WFEM de la structure

Une solution à ce problème consiste à séparer le guide en trois parties distinctes :

1. Deux parties aux extrémités du guide modélisées par FEM sur lesquelles sont appliquées les conditions limites élastiques.
2. Une partie centrale homogène du guide modélisée par WFEM.

Cette configuration permet de limiter le problème de la réduction modale dû aux conditions limites élastiques. Le fait d'appliquer ces conditions sur les deux sous-structures FEM permet de diminuer les contraintes spatiales à l'interface du guide homogène WFEM [54]. En utilisant une méthode ondulatoire directe (DSM voir section 3.3.2), la matrice de raideur dynamique  $\mathbf{D}_c$  du guide homogène peut être calculée par WFEM grâce à l'Eq.(3.44). En notant  $\mathbf{D}_A$  et  $\mathbf{D}_B$  les matrices de raideur dynamique des deux parties FEM extrêmes de la structure, le couplage des trois sous-structures



est effectué de la sorte [54] :

$$\mathbf{D}_u = \mathbf{L}_A^T \mathbf{D}_A \mathbf{L}_A + \mathbf{L}_c^T \mathbf{D}_c \mathbf{L}_c + \mathbf{L}_B^T \mathbf{D}_B \mathbf{L}_B \quad (4.1)$$

Avec  $\mathbf{L}_A$ ,  $\mathbf{L}_c$  et  $\mathbf{L}_B$  les matrices booléennes de passage qui expriment les degrés de liberté des sous-structures dans le repère global de la structure couplée et  $\mathbf{D}_u$  sa matrice de raideur dynamique.

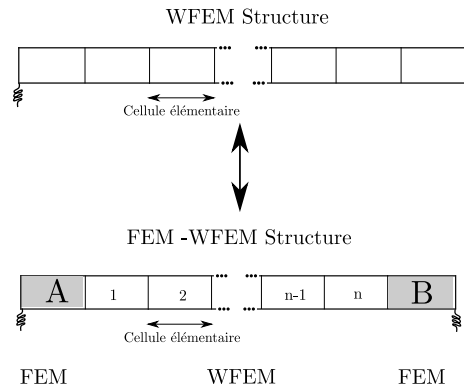


FIGURE 4.2 – *Structure sans et avec couplage FEM WFEM*

#### 4.1.1.2 Exemple numérique

La Fig. 4.3 représente les réponses forcées d'une structure sur supports élastiques, soumise à une force ponctuelle, avec et sans couplage FEM-WFEM, et avec une réduction modale. La configuration sans couplage comporte 60 cellules élémentaires, celle avec couplage comporte 2 sous-structures FEM et 58 cellules élémentaires. Comme dans le Chapitre 3, trois réductions modales sont proposées :  $|\lambda^+| > 0.1$  soit 100 modes,  $|\lambda^+| > 0.4$  soit 44 modes et pour  $|\lambda^+| > 0.9$  soit 14 modes sur les 126 modes possibles. L'erreur relative à la réponse éléments finis est clairement diminuée grâce au couplage FEM-WFEM. On constate une amélioration de la prédiction des fréquences de résonances des supports et des anti-résonances. Le couplage semble donc optimal lors de la réduction modale d'une structure périodique aux conditions limites élastiques qui imposent de fortes contraintes spatiales aux extrémités du guide.

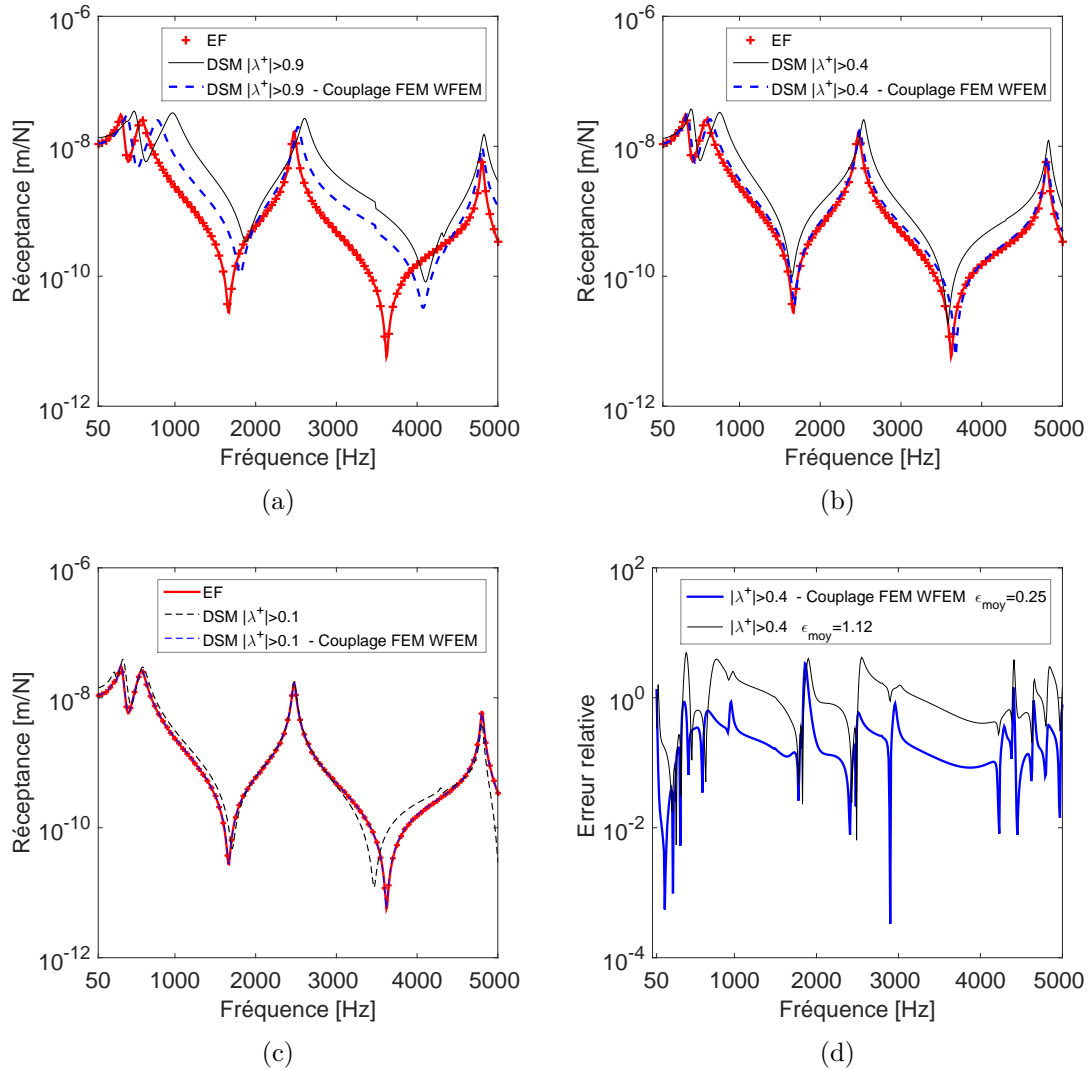


FIGURE 4.3 – Amplitude de la réceptance avec et sans couplage FEM - WFEM pour (a)  $|\lambda^+| > 0.9$  (b)  $|\lambda^+| > 0.4$  (c)  $|\lambda^+| > 0.1$  sous l'influence d'une force ponctuelle verticale (d) Erreur relative des amplitudes quadratiques de surface entre le modèle éléments finis et DSM

## 4.1.2 Réponse forcée d'une structure hétérogène infinie

### 4.1.2.1 Réponse forcée d'une structure comprenant une partie hétérogène chargée

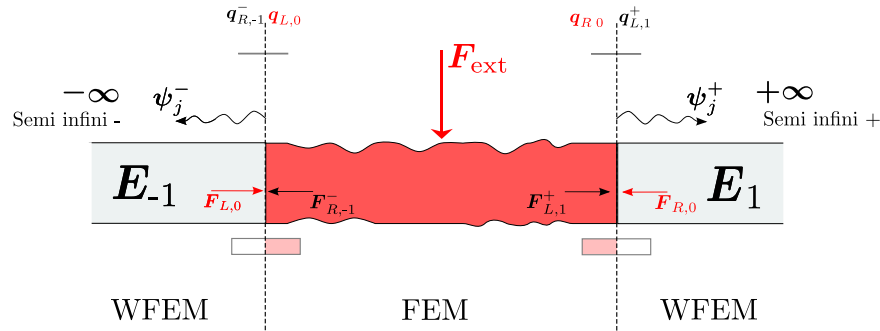


FIGURE 4.4 – *Bilan des efforts d'une structure périodique comprenant une partie hétérogène chargée*

En couplant deux systèmes semi-infinis à un élément hétérogène, il est possible de rompre la périodicité d'un système périodique pour calculer par exemple la réponse d'une structure comprenant des dommages [57]. Les deux systèmes semi-infinis ne sont pas forcément identiques mais imposent une continuité des déplacements et l'opposition des forces aux interfaces de couplage. On considère une structure soumise à une force à l'intérieur d'une partie hétérogène. Le système est composé de trois sous-systèmes, la portion hétérogène et deux systèmes semi-infinis couplés (voir Fig. 4.4). En reprenant l'Eq. 3.8 avec la présence d'une force interne,  $\tilde{\mathbf{S}}$  étant la matrice de raideur dynamique de la portion hétérogène :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_{LL} & \tilde{\mathbf{S}}_{Li} & \tilde{\mathbf{S}}_{LR} \\ \tilde{\mathbf{S}}_{iL} & \tilde{\mathbf{S}}_{ii} & \tilde{\mathbf{S}}_{iR} \\ \tilde{\mathbf{S}}_{RL} & \tilde{\mathbf{S}}_{Ri} & \tilde{\mathbf{S}}_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{L,0} \\ \mathbf{q}_{i,0} \\ \mathbf{q}_{R,0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{L,0} \\ \mathbf{F}_{ext} \\ \mathbf{F}_{R,0} \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

Ainsi, il est possible d'exprimer les déplacements internes  $\mathbf{q}_i$  en fonction des déplacements aux interfaces de couplage et de la force externe :

$$\mathbf{q}_{i,N} = -\tilde{\mathbf{S}}_{ii}^{-1} [\tilde{\mathbf{S}}_{iL} \mathbf{q}_{L,N} + \tilde{\mathbf{S}}_{iR} \mathbf{q}_{R,N} - \mathbf{F}_{ext}] \quad (4.3)$$

La force  $\mathbf{F}_{L,0}$  appliquée à l'interface gauche de la cellule chargée s'exprime donc :

$$\mathbf{F}_{L,0} = [\tilde{\mathbf{S}}_{LL} - \tilde{\mathbf{S}}_{Li} \tilde{\mathbf{S}}_{ii}^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_{iL}] \mathbf{q}_{L,0} + [\tilde{\mathbf{S}}_{LR} - \tilde{\mathbf{S}}_{Li} \tilde{\mathbf{S}}_{ii}^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_{iR}] \mathbf{q}_{R,0} + \tilde{\mathbf{S}}_{Li} \tilde{\mathbf{S}}_{ii}^{-1} \mathbf{F}_{ext} \quad (4.4)$$

D'après l'Eq. (3.11), on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{L,0} &= \mathbf{S}_{LL} \mathbf{q}_{L,0} + \mathbf{S}_{LR} \mathbf{q}_{R,0} + \tilde{\mathbf{S}}_{Li} \tilde{\mathbf{S}}_{ii}^{-1} \mathbf{F}_{i,0} \\ \mathbf{F}_{R,0} &= \mathbf{S}_{RL} \mathbf{q}_{L,0} + \mathbf{S}_{RR} \mathbf{q}_{R,0} + \tilde{\mathbf{S}}_{Ri} \tilde{\mathbf{S}}_{ii}^{-1} \mathbf{F}_{i,0}\end{aligned}\quad (4.5)$$

Avec  $\mathbf{S}_{LL}$  et  $\mathbf{S}_{LR}$  les termes de la matrice de raideur dynamique condensée de la portion hétérogène. Les inconnues sont donc les déplacements des interfaces de couplage de la portion chargée avec les deux systèmes semi-infinis. L'opposition des forces au niveau de ces interfaces s'écrit :

$$\mathbf{F}_{L,0} = -\mathbf{F}_{R,-1}^- \quad \mathbf{F}_{R,0} = -\mathbf{F}_{L,1}^+ \quad (4.6)$$

Avec  $\mathbf{F}_{R,-1}^-$  et  $\mathbf{F}_{L,1}^+$  les forces aux interfaces des deux systèmes semi-infinis. Or d'après l'Eq. (3.70) :

$$\psi^- = -\phi_f^{-1} \mathbf{F}_{R,-1}^- \quad \psi^+ = \phi_f^{+1} \mathbf{F}_{L,1}^+ \quad (4.7)$$

Il est possible d'exprimer les déplacements aux interfaces tels que :

$$\mathbf{q}_{L,1}^+ = \phi_q^+ \phi_f^{+1} \mathbf{F}_{L,1}^+ \quad \mathbf{q}_{R,-1}^- = -\phi_q^- \phi_f^{-1} \mathbf{F}_{R,-1}^- \quad (4.8)$$

L'opposition des forces et la continuité des déplacements donnent :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{R,0} &= -\phi_f^+ \phi_q^{+1} \mathbf{q}_{R,0} \\ \mathbf{F}_{L,0} &= \phi_f^- \phi_q^{-1} \mathbf{q}_{L,0}\end{aligned}\quad (4.9)$$

La combinaison des Eqs. (4.5) (4.9) mène au système suivant :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{L,0} \\ \mathbf{q}_{R,0} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} (\mathbf{S}_{LL} - \phi_f^- \phi_q^{-1}) & \mathbf{S}_{LR} \\ \mathbf{S}_{RL} & (\mathbf{S}_{RR} + \phi_f^+ \phi_q^{+1}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_{Li} \tilde{\mathbf{S}}_{ii}^{-1} \mathbf{F}_{i,0} \\ \tilde{\mathbf{S}}_{Ri} \tilde{\mathbf{S}}_{ii}^{-1} \mathbf{F}_{i,0} \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

Ainsi, on obtient les déplacements  $\mathbf{q}_{L,0}$  et  $\mathbf{q}_{R,0}$  de la portion hétérogène en fonction des vecteurs propres des cellules périodiques et des termes de sa matrice de raideur dynamique condensée . Les termes diagonaux de la matrice inverse sont propres au couplage FEM - WFEM entre la cellule chargée et les deux systèmes semi-infinis. Les déplacements au sein de la structure sont déterminés de telle sorte :

1. Dans la portion chargée, les déplacements sont déterminés grâce à l'Eq. (4.3).
2. Dans le système semi-infini droit, pour  $n \geq 1$ , les déplacements de la cellule  $n$  s'écrivent  $\mathbf{q}_{L,n} = \phi_q^+ \boldsymbol{\lambda}^{n-1} \phi_q^{+1} \mathbf{q}_{R,0}$
3. Dans le système semi-infini gauche, pour  $n \geq 1$ , les déplacements de la cellule  $-n$  s'écrivent  $\mathbf{q}_{R,-n} = \phi_q^- \boldsymbol{\lambda}^{n-1} \phi_q^{-1} \mathbf{q}_{L,0}$

#### 4.1.2.2 Réponse forcée d'une structure périodique infinie avec impact à l'intérieur d'une cellule

La méthode de résolution est donc la même que celle utilisée dans la section précédente, en remplaçant  $\mathbf{S}_{LL}$   $\mathbf{S}_{LR}$  par  $\mathbf{D}_{LL}$  et  $\mathbf{D}_{LR}$ , qui sont les termes de la matrice de raideur dynamique condensée de la cellule élémentaire.

#### 4.1.2.3 Exemple numérique

Le couplage FEM - WFEM présenté dans la section 4.1.2.1 est appliqué à l'étude de la réponse forcée d'un rail soumis à une pré-charge statique. Les effets d'une pré-charge sur la réponse dynamique de la voie ont été analysés par Thompson [17]. Il a modélisé la voie par l'intermédiaire d'une poutre de Timoshenko infinie et a utilisé des résultats expérimentaux [58] pour modéliser le comportement non linéaire des supports. Il a utilisé un modèle équivalent de rail supporté de manière continue pour calculer la raideur de différents supports autour de la roue en fonction de la pré-charge statique. Les différentes raideurs ont ensuite été linéarisées autour de ces valeurs (hypothèse des petits déplacements). Ces valeurs sont regroupées dans le Tab. 4.1 pour une pré-charge statique de 125 kN au dessus d'un support. Les supports sont modélisés sous forme d'une impédance mécanique  $Z(\omega)$ , une série de deux ressorts amortis et d'une masse rigide représentant les semelles le ballast et la traverse :

$$Z(\omega) = \frac{s_{semelle}(M \omega^2 - s_{ballast})}{M \omega^2 - (s_{semelle} + s_{ballast})} \quad (4.11)$$

Thompson a considéré un nombre *fini* de supports agissant sur la poutre de Timoshenko par l'intermédiaire de fonctions de Green. Il a pu obtenir le déplacement vertical  $\xi$  de la voie sous l'influence de la pré-charge  $F_e$  en  $z = z_e$  tel que :

$$\xi(z) = - \sum_{n=-N}^N G^L(z, z_n, \omega) \xi(z_n) Z_n(\omega) + F_e(\omega) G^L(z, z_e, \omega) \quad (4.12)$$

Le couplage FEM - WFEM permet de reprendre le modèle analytique proposé par Thompson en incluant cette fois un nombre infini de supports par l'intermédiaire des éléments finis. Le couplage inclut une partie centrale dont les supports ont été rigidifiés par la pré-charge au sein de la voie infinie. Le rail est modélisé par des éléments de poutre de Timoshenko (1D). Les paramètres des raideurs varient en fonction de la position du support selon les données fournies par le Tab. 4.1. La partie centrale est couplée à deux systèmes semi-infinis modélisés par WFEM.

La Fig. 4.6 représente l'amplitude et la phase de la réceptance de la voie hétérogène sous l'influence d'une force extérieure au dessus d'un support. Le calcul avec couplage est comparé à la réponse obtenue de manière analytique par Thompson. Les deux méthodes donnent bien le même résultat, ce qui valide l'approche par couplage. Comme avancé par Thompson, la réponse locale est semblable à la réponse sur supports chargés uniformément le long de la voie. Le taux de décroissance est quant à lui proche de celui de la voie sur supports déchargés uniformément.

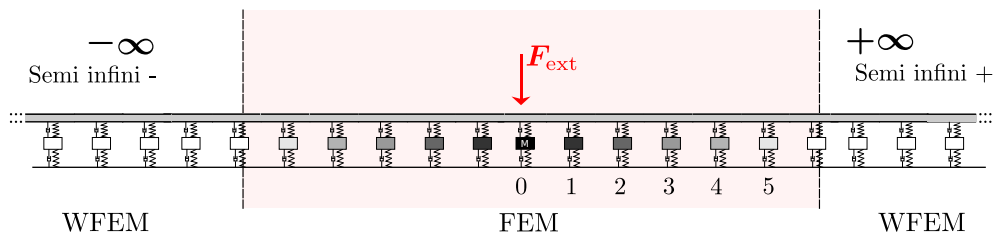


FIGURE 4.5 – Voie infinie comprenant une partie centrale chargée aux raideurs variables

Position du support autour de la roue	Raideur de semelle MN/m	Raideur de ballast MN/m
0	473.7	449.3
1	195	381
2	95.7	286.5
3	73.3	207.9
4	69.0	154.1
5	68.2	139.2
$\infty$	68.8	151

Tableau 4.1 – Valeurs des raideurs de supports pour une précharge de 125 kN au dessus d'un support

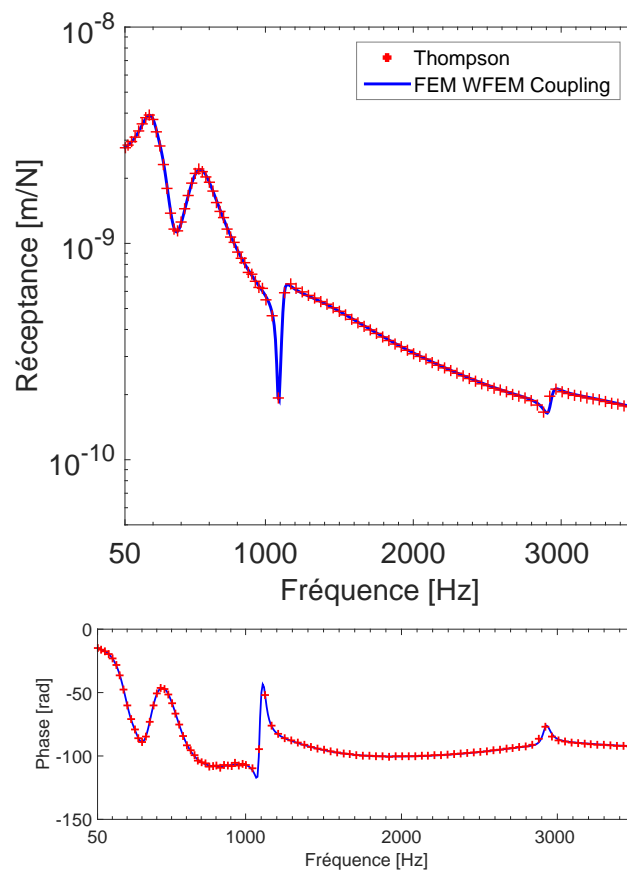


FIGURE 4.6 – Valeur absolue de la réceptance de la voie hétérogène avec impact au dessus d'un support

## 4.2 Bi-périodisation de cellules homogènes longues

Le principe de bi-périodisation est présenté dans cette partie pour le calcul des vecteurs propres d'une cellule physique homogène longue.

### 4.2.1 Principe et motivations

La condensation dynamique (première étape du calcul de la WFEM), consiste à exprimer les degrés de liberté internes au travers d'une inversion matricielle  $\mathbf{D}_{ii}^{-1}$  (voir Eq. (3.11)). L'inversion s'avère coûteuse en temps de calcul et risque de provoquer des erreurs numériques [52] en présence d'un nombre important de degrés de liberté internes.

Le principe de *bi-périodisation* est utilisé à l'intérieur d'une cellule physique homogène *i.e* elle même décomposée en un nombre  $n$  de motifs périodiques [42]. Le motif périodique de la cellule physique sera nommé "*tranche élémentaire*", la procédure est schématisée sur la Fig. 4.7. Un exemple concret est le cas d'un rail supporté périodiquement tous les 0.6 m. Une tranche élémentaire peut être périodisée par DSM afin d'obtenir la matrice de raideur dynamique condensée  $\mathbf{D}_m$  de la cellule physique de 0.6 m. La longueur de la tranche élémentaire est choisie de façon à concorder avec la longueur de maille élémentaire du maillage souhaité pour la cellule physique. Le calcul aux valeurs propres est ensuite effectué sur cette cellule physique condensée aux interfaces.

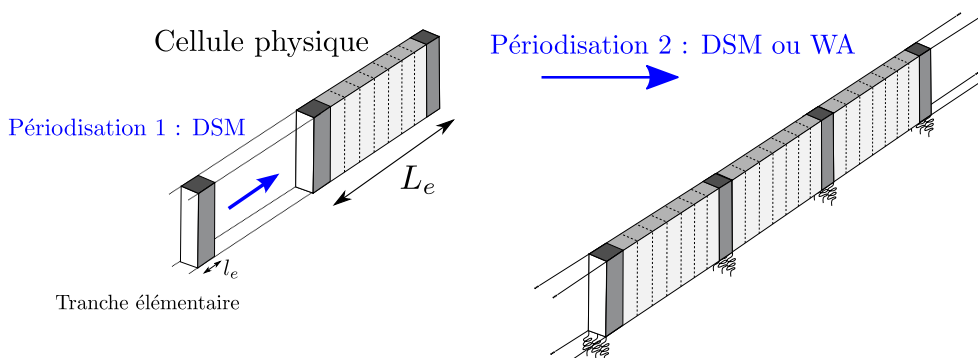


FIGURE 4.7 – Principe de la bi-périodisation



La procédure se résume donc en trois étapes :

1. Condensation dynamique de la *tranche élémentaire* et calcul aux valeurs propres.
2. Périodisation de la tranche  $n$  fois par DSM en une cellule physique et ajout de conditions limites .
3. Calcul aux valeurs propres de la cellule physique.

La *bi-périodisation* est donc indépendante, en termes de temps de calcul, du nombre de motifs périodiques qui constituent la cellule physique. Elle permet une condensation dynamique de la cellule physique beaucoup plus rapide qu'une condensation dynamique directe et limite les erreurs numériques en présence d'un nombre important de degrés de liberté internes. La méthode ne peut cependant s'appliquer qu'à des cellules élémentaires homogènes constituées de motifs périodiques.

### 4.2.2 Comparaison avec la condensation directe

La condensation de la matrice de raideur dynamique doit être effectuée pour chaque fréquence, or une inversion directe de la matrice  $\widetilde{\mathbf{D}}_{ii}$  par FEM peut s'avérer très coûteuse. Une comparaison est effectuée entre la condensation d'une cellule physique de 0.6m de long par méthode directe (voir l'Eq. (3.11)) puis par DSM en utilisant les modes de propagation de la tranche élémentaire. La discrétisation longitudinale est choisie en fonction du nombre minimale  $n_{min}$  d'éléments par longueur d'onde de flexion latérale à 5000 Hz. Les tranches sont choisies de longueur égale à la taille de maille élémentaire (voir Fig. 4.8(a) ). Les temps de calcul de la condensation pour une seule fréquence sont présentés sur la Fig. 4.8(b). Le temps nécessaire à la condensation directe est croissant pour une discrétisation plus fine du maillage. Il varie de 0.52 à 447 secondes pour la discrétisation la plus fine comprenant 7497 degrés de liberté internes. Cependant pour la condensation par DSM, le temps nécessaire au calcul des valeurs propres de la tranche (voir Eq. (3.16)) et de la matrice condensée  $\mathbf{D}_m$  (voir Eq. (3.44)) est de l'ordre de 0.05 secondes. Le temps de calcul de la condensation par DSM est donc bien plus rapide que par la méthode directe et reste indépendant du nombre de tranches qui constituent la cellule physique.

### 4.2.3 Calcul des valeurs propres par bi-périodisation

Pour plus de clarté, les modes de propagation de la cellule physique associés à la valeur propre  $\Lambda_j$  seront notés  $\Theta_j = [\Theta_{Q_j} \ \Theta_{F_j}]^T$  d'amplitude  $\vartheta$  et  $\mathbf{F}_{L/R} \ \mathbf{Q}_{L/R}$

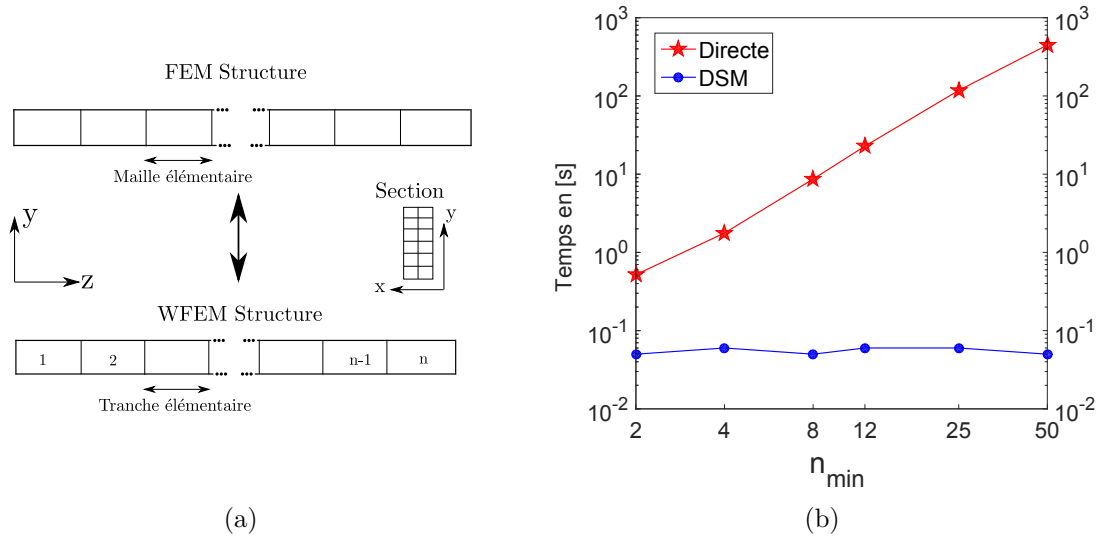


FIGURE 4.8 – Temps de calcul pour la condensation de la à une fréquence en fonction de la taille de maille élémentaire

les forces/déplacements associés. Les modes de la tranche élémentaire associés à la valeur propre  $\lambda_j$  seront notés  $\Phi_j = [\phi_{q_j} \ \phi_{f_j}]^T$  d'amplitude  $\psi$  et  $\mathbf{f}_{L/R}$   $\mathbf{q}_{L/R}$  les forces/déplacements.

Le principe de *bi-périodisation* est appliqué à une cellule physique constituée de 60 tranches de 1cm et aux conditions limites nulles. La Fig. 4.9 représente la partie imaginaire des constantes de propagation  $\gamma$  de la cellule physique ( $\Lambda = e^{\gamma L_e}$ ). Les constantes de propagation  $\gamma$  se trouvent dans la première zone de Brillouin [7] soit dans l'intervalle  $[-\frac{\pi}{L_e} \ \frac{\pi}{L_e}]$  avec  $L_e = 0.6 \text{ m}$ . La Fig 4.9 (a) représente les constantes de propagation des 4 premières ondes positives. La cellule physique ayant des conditions aux limites nulles, les constantes de propagation des ondes propagatives de la cellule physique et de la tranche élémentaire sont censées être identiques. La Fig. 4.9 (b) représente les constantes de propagation de la cellule physique déroulées tous les  $\frac{2\pi}{L_e}$  et superposées à celle de la tranche élémentaire, les constantes sont donc logiquement égales.

#### 4.2.4 Influence de la discrétisation longitudinale

L'analyse est maintenant effectuée sur la discrétisation longitudinale de la cellule physique. Différentes longueurs de tranches élémentaires sont choisies pour former la cellule physique (voir Fig. 4.10(a)). Les longueurs sont choisies en fonction du nombre minimale  $n_{min}$  de tranches par longueur d'onde de flexion latérale de la cellule

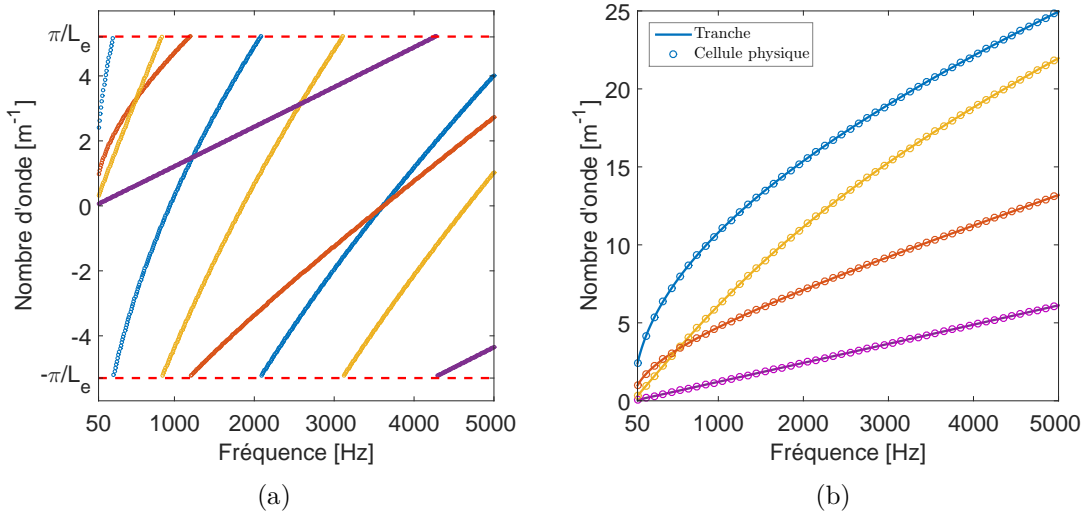


FIGURE 4.9 – Nombres d'onde des 4 premières ondes propagatives positives de la cellule physique (a) dans la première zone de Brillouin (b) déroulés tous les  $\frac{2\pi}{L_e}$

physique. La Fig. 4.10 représente les constantes de propagation des 4 premiers modes pour  $n_{min}$  variant de 2 à 50. Les résultats montrent que les ondes de flexion latérale et verticale ainsi que celle de torsion sont affectées par la discrétisation, même si les ondes de flexion latérale et de torsion y sont plus sensibles. Pour  $n_{min} = 25$ , l'erreur relative par rapport à la solution la plus discrétisée devient inférieure à 1 %, dans la suite de l'étude le nombre  $n_{min} = 25$  sera choisi, soit des tranches élémentaires de 1 cm pour la cellule physique.

La Fig. 4.11 représente les valeurs absolues des valeurs propres de la cellule physique et de la tranche. La cellule physique étant constituée de 60 tranches, ses valeurs propres  $\Lambda$  correspondent physiquement à  $\lambda^{60}$ . Ceci explique le fait que la plupart de ses ondes sont très évanescentes *i.e* dont les valeurs absolues sont très faibles ou très élevées. La Fig. 4.12 représente les 6 premiers modes de la cellule physique à 5000 Hz. On retrouve bien les mêmes ondes que pour la tranche élémentaire, à savoir les ondes de flexion latérale/verticale, de torsion et de traction-compression. La Fig. 4.12(e) représente le premier mode de section de la structure avec une déformée latérale. La Fig. 4.12(f) représente le premier mode évanescent à 5000 Hz. Cette onde s'atténue très rapidement et ne parvient pas à atteindre la deuxième section de la cellule élémentaire, ce qui s'explique par la faible valeur de  $|\Lambda_6|$  (voir Tab 4.2).

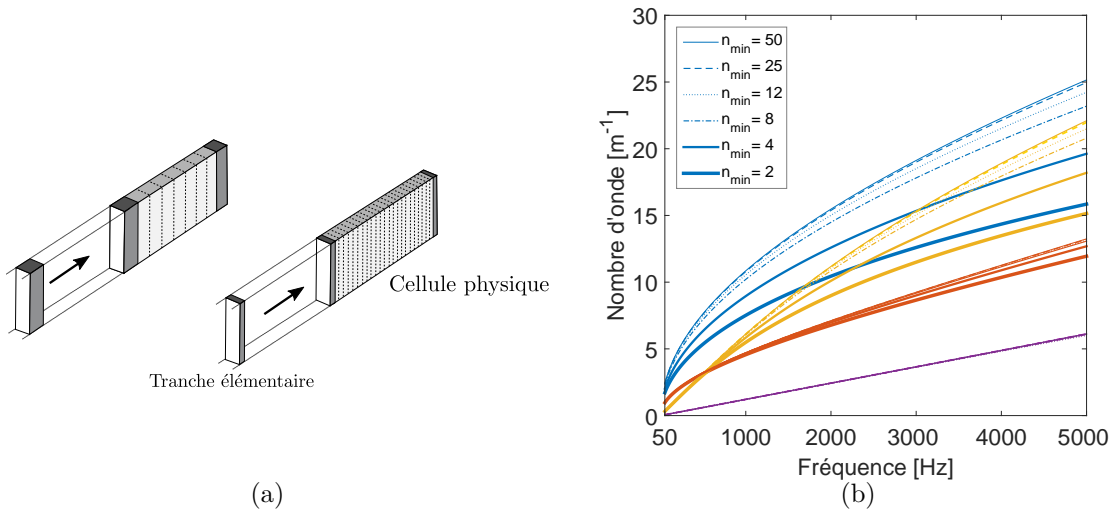


FIGURE 4.10 – (a) Exemple de deux discrétisations longitudinales (b) Constantes de propagation de la cellule physique en fonction de la longueur de maille longitudinale

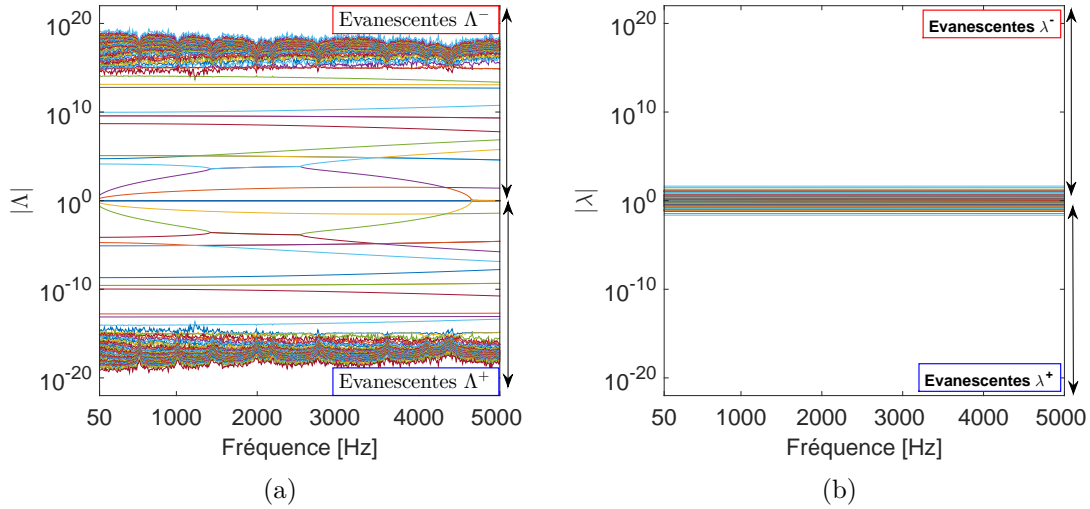


FIGURE 4.11 – (a) Valeurs absolues des valeurs propres de la cellule physique (b) de la tranche élémentaire

Tableau 4.2 – |Λ<sub>j</sub>| de la cellule physique à 5000 Hz

Λ <sub>j</sub>								
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,984	0,982	0,988	0,992	0,948	3.88e-02	2.56e-05	2.56e-05	1.69e-06

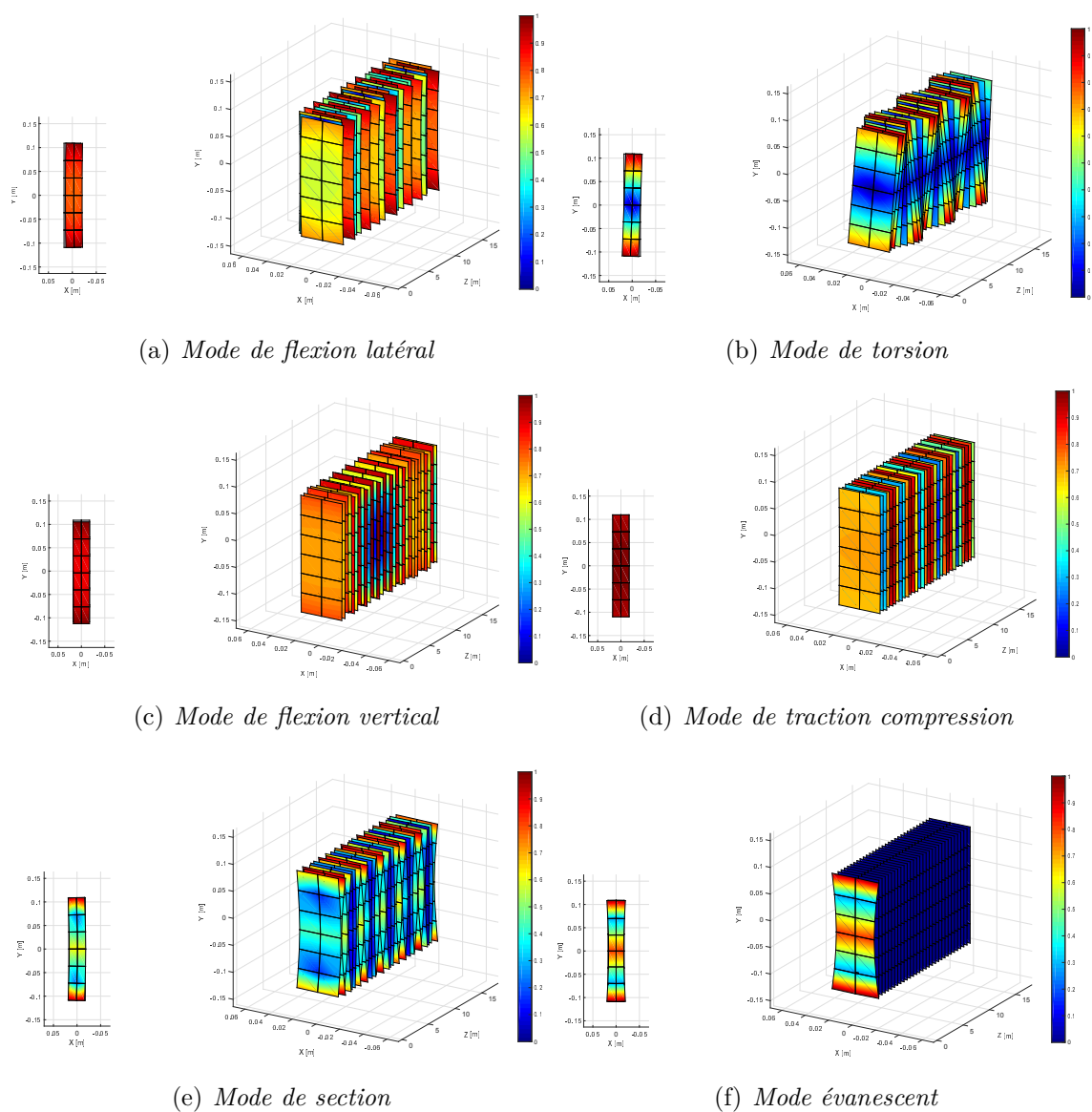


FIGURE 4.12 – Six premiers modes de propagation de la cellule physique à 5000Hz.

## 4.3 Couplage FEM - WFEM pour la bi-périodisation

### 4.3.1 Principe et motivations

La section 4.1 a montré l'intérêt d'un couplage FEM - WFEM pour l'application de conditions limites particulières à une structure finie notamment pour la réduction modale. La section 4.2 a montré le principe et les bénéfices de la bi-périodisation pour la condensation dynamique d'une cellule longue homogène comprenant un nombre important de degrés de liberté. Les bénéfices apportés par le couplage FEM -WFEM vont être associés au principe de bi-périodisation pour l'application du principe de périodicité à des cellules longues comprenant une portion hétérogène. L'intérêt est de pouvoir modéliser un rail infini supporté de manière périodique par des supports élastiques. Le principe est schématisé sur la Fig. 4.13.

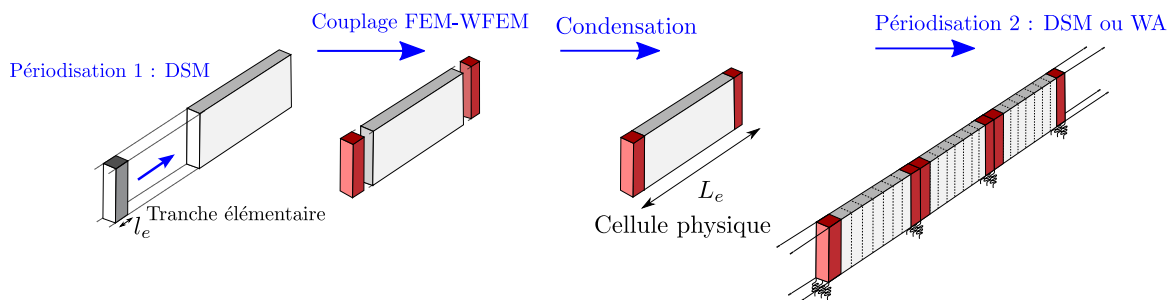


FIGURE 4.13 – Principe de la bi-périodisation avec couplage FEM-WFEM

La procédure se résume donc en quatre étapes :

1. Condensation dynamique de la tranche élémentaire et calcul aux valeurs propres.
2. Périodisation de la tranche  $n$  fois par DSM.
3. Ajout des conditions limites sur la portion FEM, assemblage FEM - WFEM en une cellule physique.
4. Condensation dynamique de la cellule physique.
5. Calcul aux valeurs propres de la cellule physique.

La bi-périodisation avec couplage sera utilisée pour le calcul de la réponse forcée d'une structure considérée comme une infinité de cellules physiques composées d'un couplage FEM - WFEM (voir Fig. 4.14). Les exemples numériques de ce chapitre considéreront le guide rectangulaire précédent reposant sur des supports élastiques dans les trois directions de l'espace. Les propriétés mécaniques sont rassemblées dans le Tab. 4.3. L'étude complète de la voie ballastée sera présentée dans le Chapitre 5.

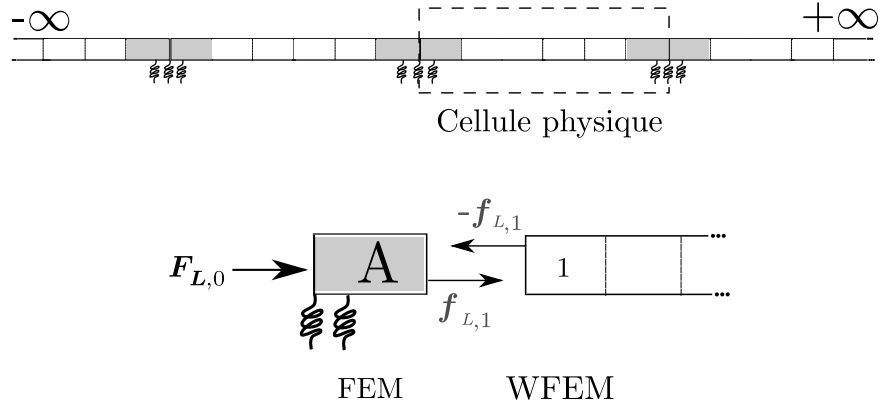


FIGURE 4.14 – Opposition des forces à l’interface FEM - WFEM

Paramètres d’étude			
Guide	$E$ (Pa)	$\rho(kg/m^3)$	$\nu$
	$2.1 \times 10^{11}$	7850	0.3
Supports	$K_x$ (N/m)	$K_y$ (N/m)	$K_z$ (N/m)
	$3.6 \times 10^7$	$1.8 \times 10^8$	$1 \times 10^8$
	$\eta_x$	$\eta_y$	$\eta_z$
	0.2	0.2	0.2

Tableau 4.3 – Propriétés mécaniques du support et du guide

La Fig. 4.15 représente la partie imaginaire des 4 premières ondes propagatives de la cellule physique aux conditions limites nulles et élastiques. On constate comme dans le Chapitre 2 une différence notamment en basses fréquences où l'influence des supports est principale sur le nombre d'onde de propagation. En hautes fréquences, le nombre d'onde avec conditions limites élastiques tend vers celui aux conditions limites nulles, en effet la structure se découple progressivement du support.

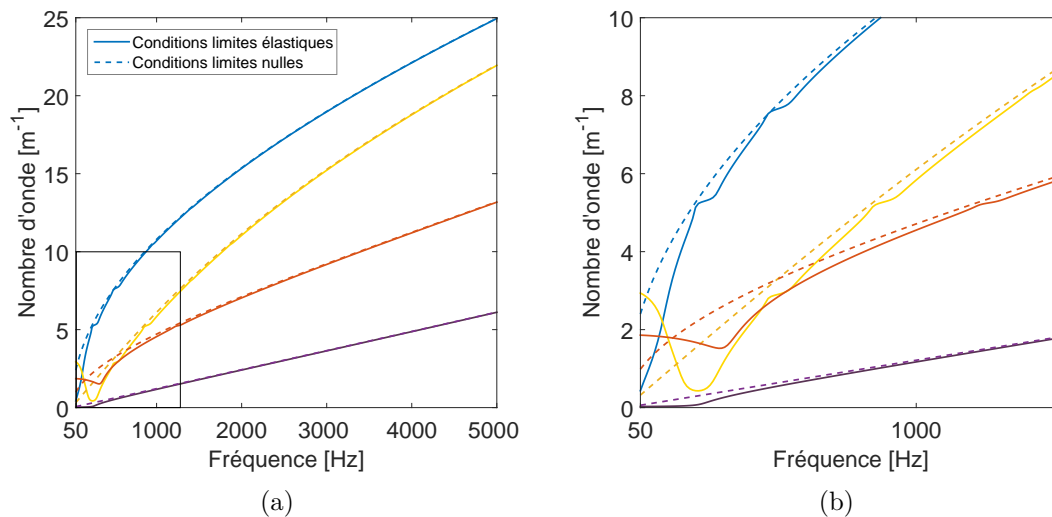


FIGURE 4.15 – Nombres d'onde de propagation de la cellule physique avec conditions limites élastiques (continu) et conditions limites nulles (pointillés)



## 4.3.2 Réponses forcées

### 4.3.2.1 Force aux interfaces

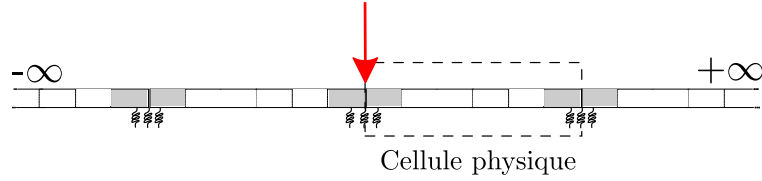


FIGURE 4.16 – Force externe appliquée à l'interface de deux cellules physiques

La réponse forcée de la structure infinie couplée est maintenant exprimée sur toute sa longueur. On considère ici une force extérieure appliquée à l'interface de deux cellules physiques. La réponse interne d'une cellule par WFEM est traditionnellement exprimée grâce à l'Eq. (3.56) :

$$\mathbf{q}_{i,N} = -\tilde{\mathbf{D}}_{ii}^{-1} [\tilde{\mathbf{D}}_{iL} \mathbf{q}_{L,N} + \tilde{\mathbf{D}}_{iR} \mathbf{q}_{R,N}] \quad (4.13)$$

Or, en utilisant le principe de bi-périodisation, la matrice  $\tilde{\mathbf{D}}_{ii}$  du guide homogène n'a pas été construite. En effet, les nœuds internes contenus dans la partie WFEM ont été directement condensés par la méthode DSM. Ainsi afin d'obtenir les déplacements et les forces au sein de la cellule physique, il est nécessaire d'exprimer la propagation des ondes au sein de la partie homogène. En considérant une force externe appliquée entre deux cellules physiques, les forces et déplacements  $\mathbf{Q}_{L/R,0}$   $\mathbf{F}_{L/R,0}$  sont connus aux extrémités de la cellule  $\mathbf{E}_0$ . On considère  $\mathbf{D}_A$  et  $\mathbf{D}_B$  les matrices de raideur dynamique des deux structures éléments finis respectivement à gauche et à droite de la partie homogène. Les équations du mouvement liées aux deux parties éléments finis s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{L,0} \\ -\mathbf{f}_{L,1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{A,LL} & \mathbf{D}_{A,LR} \\ \mathbf{D}_{A,RL} & \mathbf{D}_{A,RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_{L,0} \\ \mathbf{q}_{L,1} \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

$$\begin{Bmatrix} -\mathbf{f}_{R,n} \\ \mathbf{F}_{R,0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{B,LL} & \mathbf{D}_{B,LR} \\ \mathbf{D}_{B,RL} & \mathbf{D}_{B,RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{R,n} \\ \mathbf{Q}_{R,0} \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

La deuxième ligne l'Eq. (4.14) et la première ligne de l'Eq. (4.15) donnent :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{A,RL} \mathbf{Q}_{L,0} + \mathbf{D}_{A,RR} \mathbf{q}_{L,1} &= -\mathbf{f}_{L,1} \\ \mathbf{D}_{B,LL} \mathbf{q}_{R,n} + \mathbf{D}_{B,LR} \mathbf{Q}_{R,0} &= -\mathbf{f}_{R,n} \end{aligned} \quad (4.16)$$

On obtient d'après l'Eq. (3.49) :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{A,RL} \mathbf{Q}_{L,0} + \mathbf{D}_{A,RR} [\phi_q^+ \psi^+ + \phi_q^- \lambda^n \psi^-] &= -[\phi_f^+ \psi^+ + \phi_f^- \lambda^n \psi^-] \quad (4.17) \\ \mathbf{D}_{B,LL} [\phi_q^+ \lambda^n \psi^+ + \phi_q^- \psi^-] + \mathbf{D}_{B,LR} \mathbf{Q}_{R,0} &= [\phi_f^+ \lambda^n \psi^+ + \phi_f^- \psi^-] \end{aligned}$$

En factorisant par les amplitudes des vecteurs propres :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{A,RL} \mathbf{Q}_{L,0} + [\mathbf{D}_{A,RR} \phi_q^- \lambda^n + \phi_f^- \lambda^n] \psi^- &= -[\phi_f^+ + \mathbf{D}_{A,RR} \phi_q^+] \psi^+ \quad (4.18) \\ \mathbf{D}_{B,LR} \mathbf{Q}_{R,0} + [\mathbf{D}_{B,LL} \phi_q^+ \lambda^n \phi_f^+ \lambda^n] \psi^+ &= [\phi_f^- - \mathbf{D}_{B,LL} \phi_q^-] \psi^- \end{aligned}$$

Une réécriture du système donne :

$$\begin{aligned} \psi^+ &= \mathbf{C}^+ \lambda^n \psi^- + \mathbf{F}^+ \quad (4.19) \\ \psi^- &= \mathbf{C}^- \lambda^n \psi^+ + \mathbf{F}^- \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^+ &= -[\mathbf{D}_{A,RR} \phi_q^+ + \phi_f^+]^{-1} [\mathbf{D}_{A,RR} \phi_q^- + \phi_f^-] \quad (4.20) \\ \mathbf{C}^- &= -[\mathbf{D}_{B,LL} \phi_q^- - \phi_f^-]^{-1} [\mathbf{D}_{B,LL} \phi_q^+ - \phi_f^+] \\ \mathbf{F}^+ &= -[\mathbf{D}_{A,RR} \phi_q^+ + \phi_f^+]^{-1} \mathbf{D}_{A,RL} \mathbf{Q}_{L,0} \\ \mathbf{F}^- &= -[\mathbf{D}_{B,LL} \phi_q^- - \phi_f^-]^{-1} \mathbf{D}_{B,LR} \mathbf{Q}_{R,0} \end{aligned}$$

Ce système peut se mettre sous la forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{C}^+ \lambda^n \\ -\mathbf{C}^- \lambda^n & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^+ \\ \mathbf{F}^- \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

Les matrices carrées  $\mathbf{C}^+$  et  $\mathbf{C}^-$  de dimension  $n_c \times n_c$  correspondent aux matrices de réflexion des interfaces gauche et droite du couplage FEM - WFEM. Les vecteurs colonnes  $\mathbf{F}^+$  et  $\mathbf{F}^-$  sont les vecteurs sources de l'excitation. Les déplacements  $\mathbf{Q}_{L/R,0}$  présents au sein des vecteurs sources sont connus et proviennent de l'Eq. (3.68), ils agissent ici comme des déplacements imposés aux extrémités de la cellule  $E_0$ . Une fois l'Eq. (4.21) résolue, les amplitudes modales de la tranche élémentaire permettent de reconstituer la réponse le long de la structure.

Cette formulation a l'avantage numérique de faire intervenir l'identité en diagonale et améliore ainsi le conditionnement [54]. Le conditionnement est primordial pour l'inversion de cette matrice notamment si des ondes très évanescentes sont mises en jeu. Un autre avantage de cette formulation est la possibilité d'utiliser un nombre réduit de modes de propagation pour diminuer le temps de calcul nécessaire à la résolution de l'Eq. 4.21. La réduction modale peut aussi être avantageuse pour ne calculer directement qu'un nombre réduit de modes pour le problème aux valeurs propres en utilisant un algorithme de Lanczos (voir section 3.1.6). Considérons un nombre  $2p$  de modes retenus pour la réponse forcée, les vecteurs propres  $\phi_f$  sont donc de dimension  $n_c \times p$ , les matrices  $C^+$   $C^-$  de dimension  $p \times p$  et les vecteurs colonnes  $F^+$   $F^-$  de dimension  $p \times 1$  tels que :

$$C^+ = -[D_{A,RR} \phi_q^+ + \phi_f^+]^* [D_{A,RR} \phi_q^- + \phi_f^-] \quad (4.22)$$

$$C^- = -[D_{B,LL} \phi_q^- - \phi_f^-]^* [D_{B,LL} \phi_q^+ - \phi_f^+] \quad (4.23)$$

$$F^+ = -[D_{A,RR} \phi_q^+ + \phi_f^+]^* D_{A,RL} Q_{L,0} \quad (4.24)$$

$$F^- = -[D_{B,LL} \phi_q^- - \phi_f^-]^* D_{B,LR} Q_{R,0} \quad (4.25)$$

L'opérateur (\*) correspond à la pseudo-inverse gauche nécessaire à l'inversion de matrices rectangulaires. Les amplitudes modale  $\psi^+$   $\psi^-$  de l'Eq. (4.21) sont donc de dimension  $p \times 1$ .

La Fig. 4.17(a) représente le conditionnement de la matrice à inverser de l'Eq. (4.21). Afin d'analyser l'influence de sa formulation, le conditionnement du système matriciel de l'Eq. (4.18) est également calculé. Ce dernier correspond à la formulation de l'Eq. (4.21) avant le réarrangement, c'est à dire sans la présence de l'identité sur la diagonale. La réduction modale n'a pas d'influences majeures sur le conditionnement de la matrice à inverser, il est d'environ 50 sur l'ensemble du spectre. Cependant, le conditionnement de la matrice sans réarrangement est bien plus élevé avec une moyenne de 300 et une valeur supérieure à 1000 en basses fréquences. La matrice à inverser de l'Eq. (4.21) après réarrangement est donc mieux conditionnée et permet de réduire les erreurs numériques liées à la réduction modale. La Fig. 4.17(b) représente l'amplitude des réponses forcées de la structure infinie suite à une force verticale unitaire située entre deux cellules physiques. La réponse est observée dans la direction verticale au milieu de la cellule physique grâce à la résolution de l'Eq. (4.21). Le nombre de modes sélectionnés pour la cellule physique est fixé à 18 selon les relations d'orthogonalité vues dans la section 3.3.3.4 soit le critère  $|\Lambda| > 1e^{-5}$ . Une réduction

du nombre de modes de la tranche élémentaire est testée pour  $|\lambda| > 0.9$  soit 14 modes de propagation et  $|\lambda| > 0.98$  soit 8 modes. La réduction à 8 modes semble trop restrictive et sous estime la réponse, cependant la réduction à 114 modes est suffisante pour reconstituer la réponse.

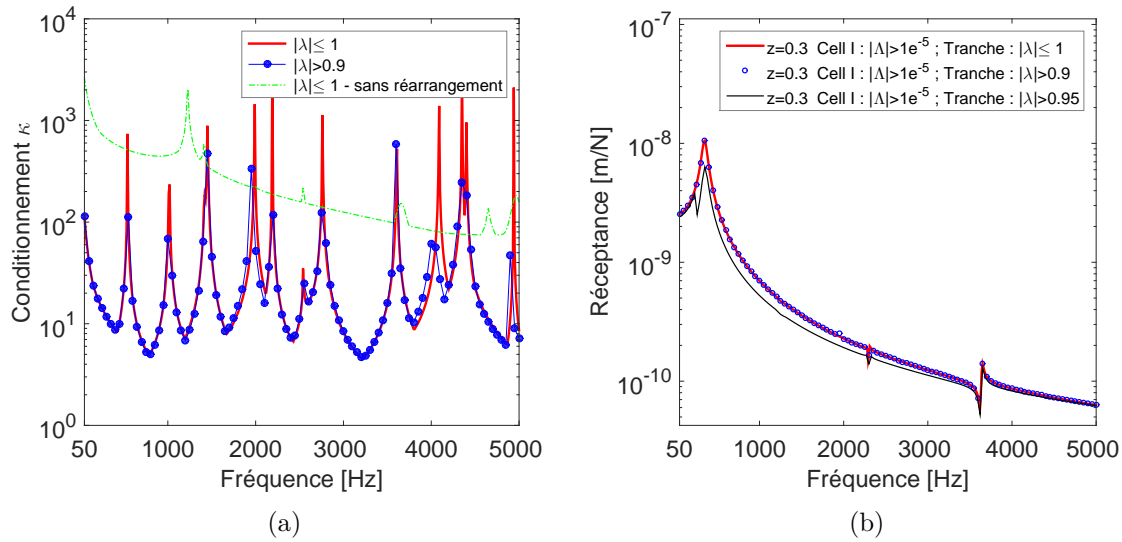


FIGURE 4.17 – (a) Conditionnement de la matrice de l'Eq. (4.21) avec et sans réarrangement (b) Amplitude de la réponse forcée en  $z = 0.3$  m avec réduction modale

#### 4.3.2.2 Force entre les interfaces

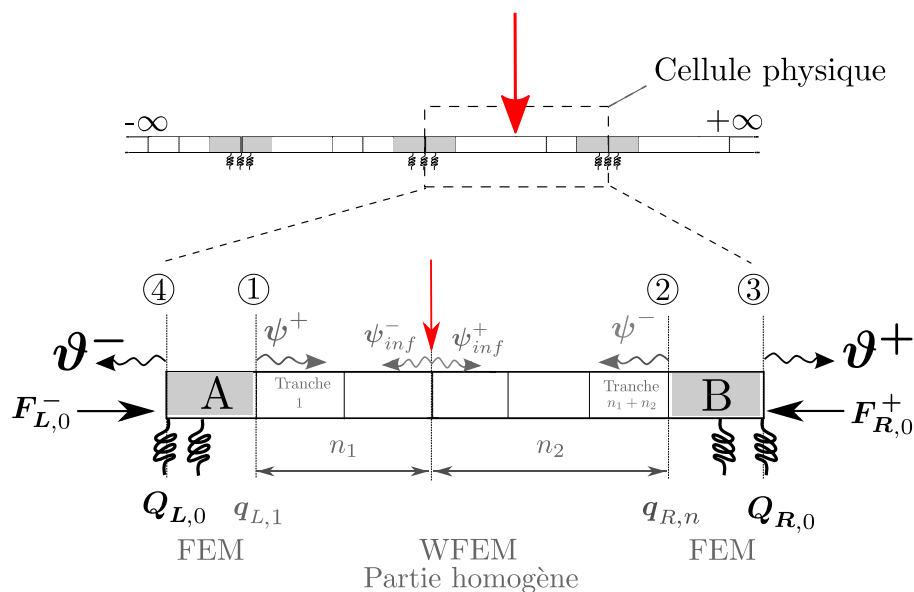


FIGURE 4.18 – Force externe appliquée à l'intérieur d'une cellule physique

On considère dans cette section une force externe appliquée à l'intérieur de la cellule physique. Comme il a été expliqué précédemment, l'utilisation de la bi-périodisation ne donne pas accès directement à la matrice  $\tilde{\mathbf{D}}_{ii}$  du guide homogène. La réponse de la structure doit donc de nouveau être calculée en exprimant la propagation des ondes par WFEM.

La force extérieure est modélisée par des ondes incidentes  $\psi_{inf}^-$   $\psi_{inf}^+$ , calculées comme des ondes se propageant dans un milieu infini (voir section 3.3.3.4). Ces ondes se propagent de part et d'autre du point d'application de la force, elles sont ensuite réfléchies et transmises au niveau des interfaces de couplage FEM - WFEM. On rappelle la formulation des amplitudes modales pour un système infini :

$$\begin{Bmatrix} \psi_{inf}^+ \\ \psi_{inf}^- \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\phi_f^- & -\phi_f^+ \\ \phi_q^- & \phi_q^+ \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{ext} \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

Les ondes réfléchies au niveau des interfaces de couplages sont notées  $\psi^-$  et  $\psi^+$ , elles se propagent dans la partie homogène WFEM. Les ondes transmises sont notées  $\vartheta^-$  et  $\vartheta^+$ , elles correspondent aux ondes de propagation de la cellule physique. Elles ne sont pour l'instant pas connues, contrairement au cas précédent où la force extérieure était projetée sur les extrémité de la cellule physique. En notant  $n_1$  et  $n_2$  le nombre de cellules à gauche et à droite de la force extérieure tel que  $n = n_1 + n_2$ , les déplacements et forces au sein du guide homogène sont une contribution des ondes réfléchies et incidentes :

— Si  $1 \leq k \leq n_1$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{L,k} &= \phi_q^+ \lambda^{k-1} \psi^+ + \phi_q^- \lambda^{n_1+1-k} \psi^- + \phi_q^- \lambda^{n_1+1-k} \psi_{inf}^- \\ \mathbf{q}_{R,k} &= \phi_q^+ \lambda^k \psi^+ + \phi_q^- \lambda^{n-k} \psi^- + \phi_q^- \lambda^{n_1-k} \psi_{inf}^- \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{L,k} &= \phi_f^+ \lambda^{k-1} \psi^+ + \phi_f^- \lambda^{n_1+1-k} \psi^- + \phi_f^- \lambda^{n_1+1-k} \psi_{inf}^- \\ \mathbf{f}_{R,k} &= -\phi_f^+ \lambda^k \psi^+ - \phi_f^- \lambda^{n-k} \psi^- - \phi_f^- \lambda^{n_1-k} \psi_{inf}^- \end{aligned}$$

— Si  $n_1 < k \leq n$

$$\mathbf{q}_{L,k} = \phi_q^+ \lambda^{k-1} \psi^+ + \phi_q^- \lambda^{n+1-k} \psi^- + \phi_q^+ \lambda^{k-n_1-1} \psi_{inf}^+ \quad (4.28)$$

$$\mathbf{q}_{R,k} = \phi_q^+ \lambda^k \psi^+ + \phi_q^- \lambda^{n-k} \psi^- + \phi_q^+ \lambda^{k-n_1} \psi_{inf}^+$$

$$\mathbf{f}_{L,k} = \phi_f^+ \lambda^{k-1} \psi^+ + \phi_f^- \lambda^{n+1-k} \psi^- + \phi_f^+ \lambda^{k-n_1-1} \psi_{inf}^+$$

$$\mathbf{f}_{R,k} = -\phi_f^+ \lambda^k \psi^+ - \phi_f^- \lambda^{n-k} \psi^- - \phi_f^+ \lambda^{k-n_1} \psi_{inf}^+$$

Les forces et déplacements aux extrémités de la cellule physique sont :

— Si  $m \geq 0$

$$\mathbf{Q}_{L,-m}^- = \Theta_q^- \Lambda^m \vartheta^- \quad \mathbf{F}_{L,-m}^- = \Theta_f^- \Lambda^m \vartheta^- \quad (4.29)$$

$$\mathbf{Q}_{R,m}^+ = \Theta_q^+ \Lambda^m \vartheta^+ \quad \mathbf{F}_{R,m}^+ = \Theta_f^+ \Lambda^m \vartheta^+ \quad (4.30)$$

Le problème possède donc 4 inconnues  $\psi^+$   $\psi^-$   $\vartheta^+$   $\vartheta^-$  déterminées en exprimant les équations d'équilibre dynamique aux 4 interfaces de couplage (voir Fig. 4.18).

1. L'équation d'équilibre dynamique à l'interface 1 s'écrit :

$$\mathbf{D}_{A,RL} \mathbf{Q}_{L,0} + \mathbf{D}_{A,RR} \mathbf{q}_{L,1} = -\mathbf{f}_{L,1} \quad (4.31)$$

En exprimant les déplacements et forces comme étant une somme des ondes de propagation, on trouve :

$$\psi^+ - \mathbf{C}^+ \lambda^n \psi^- + \mathbf{Z}_{Ad}^{-1} \mathbf{D}_{A,RL} \Theta_q^- \vartheta^- = \mathbf{C}^+ \lambda^{n_1} \psi_{inf}^- \quad (4.32)$$

$$\mathbf{C}^+ = -[\mathbf{D}_{A,RR} \phi_q^+ + \phi_f^+]^{-1} [\mathbf{D}_{A,RR} \phi_q^- + \phi_f^-] \quad (4.33)$$

$$\mathbf{Z}_{Ad} = [\mathbf{D}_{A,RR} \phi_q^+ + \phi_f^+] \quad (4.34)$$

$\mathbf{C}^+$  correspond à la matrice de réflexion de l'élément A liée à l'interface 1.

2. L'équation d'équilibre dynamique à l'interface 2 s'écrit :

$$\mathbf{D}_{B,LL} \mathbf{q}_{R,n} + \mathbf{D}_{B,LR} \mathbf{Q}_{R,0} = -\mathbf{f}_{R,n} \quad (4.35)$$

Une réécriture du système donne :

$$\psi^- - \mathbf{C}^- \lambda^n \psi^+ + \mathbf{Z}_{Bg}^{-1} \mathbf{D}_{B,LR} \phi_{qII}^+ = \mathbf{C}^- \lambda^{n_2} \psi_{inf}^+ \quad (4.36)$$

$$\mathbf{C}^- = -[\mathbf{D}_{B,LL} \phi_q^- - \phi_f^-]^{-1} [\mathbf{D}_{B,LL} \phi_q^+ - \phi_f^+] \quad (4.37)$$

$$\mathbf{Z}_{Bg} = [\mathbf{D}_{B,LL} \phi_q^- - \phi_f^-] \quad (4.38)$$

$\mathbf{C}^-$  correspond à la matrice de réflexion de l'élément B liée à l'interface 2.

3. L'équation d'équilibre dynamique à l'interface 3 s'écrit :

$$\mathbf{D}_{B,RL} \mathbf{q}_{R,n} + \mathbf{D}_{A,RR} \mathbf{Q}_{R,0} = \mathbf{F}_{R,0} \quad (4.39)$$

Une réécriture du système donne :

$$\mathbf{Z}_{Bd} \vartheta^+ + \mathbf{D}_{B,RL} \phi_q^- \psi^- + \mathbf{D}_{B,RL} \lambda^n \phi_q^+ \psi^+ = -\mathbf{D}_{B,RL} \phi_q^+ \lambda^{n_2} \psi_{inf}^+ \quad (4.40)$$

$$\mathbf{Z}_{Bd} = [\mathbf{D}_{B,RR} \Theta_Q^+ + \Theta_F^+] \quad (4.41)$$

4. L'équation d'équilibre dynamique à l'interface 4 s'écrit :

$$\mathbf{D}_{A,LL} \mathbf{Q}_{L,0} + \mathbf{D}_{A,LR} \mathbf{q}_{L,1} = \mathbf{F}_{L,0} \quad (4.42)$$

Une réécriture du système donne :

$$\mathbf{Z}_{Ag} \vartheta^- + \mathbf{D}_{A,LR} \phi_q^+ \psi^+ + \mathbf{D}_{A,LR} \lambda^n \phi_q^- \psi^- = -\mathbf{D}_{A,LR} \phi_q^- \lambda^{n_1} \psi_{inf}^- \quad (4.43)$$

$$\mathbf{Z}_{Ag} = [\mathbf{D}_{A,LL} \Theta_Q^- - \Theta_F^-] \quad (4.44)$$

La combinaison des Eqs.(4.34) (4.38) (4.41) (4.44) mène au système matriciel suivant :

$$\begin{Bmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \\ \vartheta^+ \\ \vartheta^- \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{C}^+ \lambda^n & \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{Ad}^{-1} \mathbf{D}_{A,RL} \Theta_Q^- \\ -\mathbf{C}^- \lambda^n & \mathbf{I} & \mathbf{Z}_{Bg}^{-1} \mathbf{D}_{B,LR} \Theta_Q^+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{X} \phi_q^+ \lambda^n & \mathbf{X} \phi_q^- & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{W} \phi_q^+ & \mathbf{W} \phi_q^- \lambda^n & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}^+ \lambda^{n_1} \psi_{inf}^- \\ \mathbf{C}^- \lambda^{n_2} \psi_{inf}^+ \\ -\mathbf{X} \phi_q^+ \lambda^{n_2} \psi_{inf}^+ \\ -\mathbf{W} \phi_q^- \lambda^{n_1} \psi_{inf}^- \end{Bmatrix} \quad (4.45)$$

Avec :

$$\mathbf{W} = \mathbf{Z}_{Ag}^{-1} \mathbf{D}_{A,LR} \quad \mathbf{X} = \mathbf{Z}_{Bd}^{-1} \mathbf{D}_{B,RL} \quad (4.46)$$

Le bloc supérieur gauche de la matrice à inverser correspond à la matrice de l'Eq.

(4.21). Il est possible de considérer le système comme un ensemble d'ondes réfléchies sur les interfaces FEM-WFEM en notant l'onde de propagation positive comme la somme des deux contributions :  $\tilde{\psi}^+ = \psi^+ + \lambda^{-n_2} \psi_{inf}^+$  et l'onde de propagation négative :  $\tilde{\psi}^- = \psi^- + \lambda^{-n_1} \psi_{inf}^-$ .

Comme dans le cas précédent, il est possible d'utiliser un nombre réduit de modes de propagation pour le calcul des amplitudes des vecteurs propres. Les matrices carrées  $C^+$   $C^-$  s'écrivent donc après réduction modale :

$$C^+ = -Z_{Ad}^* [D_{A,RR} \phi_q^- + \phi_f^-] \quad C^- = -Z_{Bg}^* [D_{B,LL} \phi_q^+ - \phi_f^+] \quad (4.47)$$

Les Figs. 5.9(a) 5.9(b) représentent les amplitudes des réponses forcées du système infini suite à une excitation verticale et latérale au sommet de la section. La comparaison est effectuée en se basant sur le principe de réciprocité *i.e* on observe la réponse forcée du système au milieu de la cellule suite à l'action d'une force entre deux cellules physiques (voir section 4.3.2.1 ) et on compare avec la réponse entre deux cellules suite à l'action d'une force au milieu de la cellule. Les réponses forcées sont obtenues en utilisant les critères  $|\Lambda^+| > 1e^{-5}$  et  $|\lambda^+| \leq 1$  . Les deux méthodes donnent bien les mêmes résultats, ce qui valide les formulations proposées.

La Fig 4.19(c) représente les amplitudes des réponses forcées verticales avec et sans réduction modale de la tranche élémentaire. La réduction modale est effectuée avec le critère  $|\lambda^+| > 0.9$  soit 14 modes de propagation et  $|\lambda^+| > 0.98$  soit 8 modes. La réduction à 8 modes ne permet pas de reproduire correctement la résonance des supports en basses fréquences. Contrairement à la section 4.3.2.1, la réduction à 1 à 18 mod n'est toujours pas suffisante et sous estime légèrement la fréquence de résonance en basses fréquences.

Il est à noter que le conditionnement de la matrice à inverser de l'Eq. (4.57) (voir Fig. 4.19(d)) est proche de  $10^5$  en basses fréquences. La réduction modale ne modifie que très peu le conditionnement de cette matrice, en moyennes fréquences le conditionnement diminue et reste proche de  $10^3$ . Le conditionnement de la matrice à inverser est beaucoup plus élevé que celui du système plus simple lié à l'Eq. (4.21) (courbe noire) lors de l'application d'une force aux interfaces. Ainsi, il sera nécessaire de porter une attention toute particulière lors de la sélection modale pour la réponse forcée d'une structure soumise à une force à l'intérieur de la cellule physique.



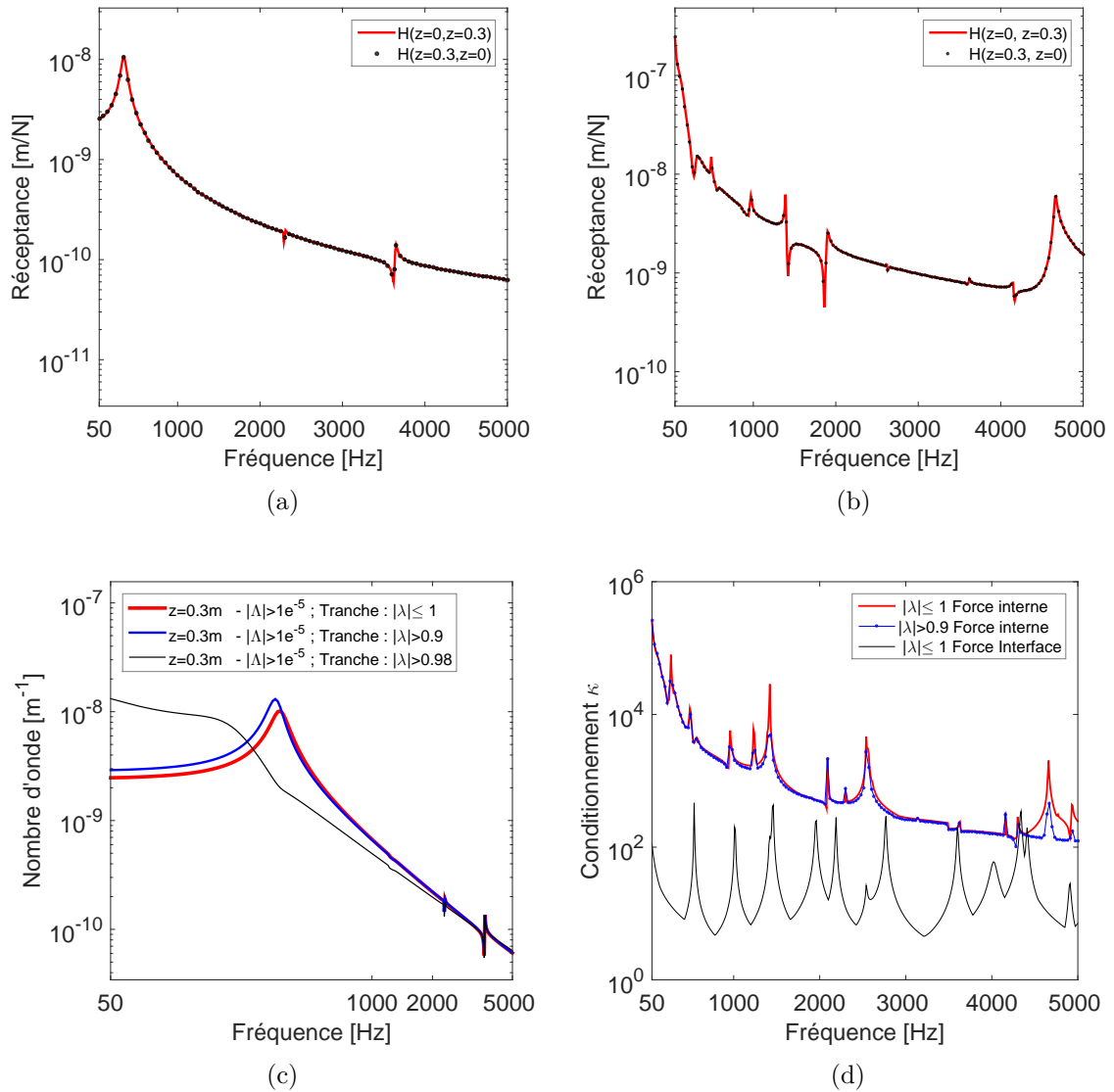


FIGURE 4.19 – (a) Vérification du principe de réciprocité selon les deux méthodes de calcul suite à une force extérieure verticale (b) latérale (c) Amplitude de la réponse forcée suite à une réduction modale du nombre de modes de propagation de la tranche (d) Conditionnement des matrices à inverser des Eqs. (4.57) (4.21)

### 4.3.3 Couplage avec une partie centrale aux portions hétérogènes

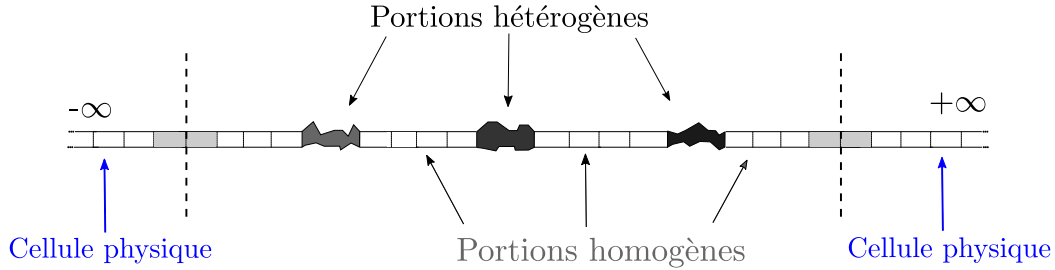


FIGURE 4.20 – Structure infinie avec une partie centrale aux portions hétérogènes

On considère ici une structure infinie aux portions hétérogènes *i.e* une structure constituée d'une infinité de cellules physiques et qui comporte une partie centrale avec un certain nombre de portions hétérogènes sur sa longueur. Les portions homogènes seront constituées d'un nombre  $n_j$  de tranches élémentaires. Les portions hétérogènes notées  $P_j$  sont assemblées par éléments finis et représentent une discontinuité de la structure.

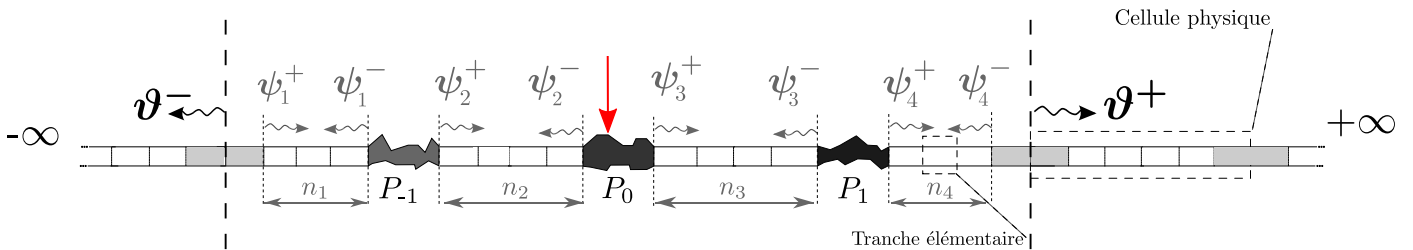
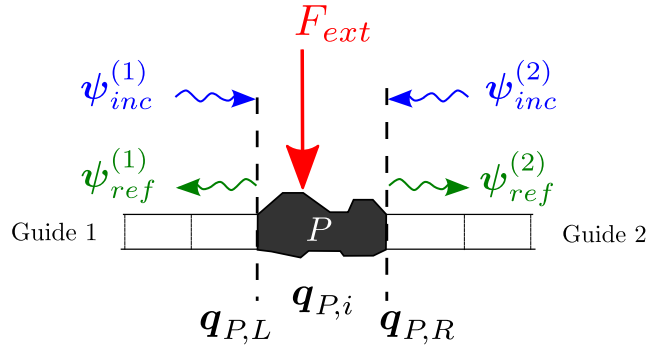


FIGURE 4.21 – Ondes présentes au sein de la structure hétérogène infinie

La réponse forcée de cette structure est calculée par WFEM, la portion homogène  $j$  est traversée par des ondes positives et négatives notées  $\psi_j^+$   $\psi_j^-$ . La force extérieure est appliquée sur l'une des portions hétérogènes (voir Fig 4.21). La propagation des ondes au travers des portions hétérogènes est modélisée en utilisant les matrices de diffusion [57]. L'équation d'équilibre dynamique d'une portion  $P$  chargée peut s'écrire d'après l'Eq. (4.5) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{D}_{LR} \\ \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{D}_{RR} \end{bmatrix}_P \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{P,L} \\ \mathbf{q}_{P,R} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{P,L} \\ \mathbf{F}_{P,R} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_{P,Li} \mathbf{D}_{P,ii}^{-1} F_{ext} \\ \mathbf{D}_{P,Ri} \mathbf{D}_{P,ii}^{-1} F_{ext} \end{Bmatrix} \quad (4.48)$$

FIGURE 4.22 – Ondes réfléchies et incidentes de l'élément  $P$ 

Soient  $\phi_q^{inc}$   $\phi_q^{ref}$  les matrices des ondes incidentes et réfléchies de l'élément  $P$  :

$$\phi_q^{inc} = \begin{bmatrix} \phi_q^{inc(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \phi_q^{inc(2)} \end{bmatrix} \quad \phi_q^{ref} = \begin{bmatrix} \phi_q^{ref(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \phi_q^{ref(2)} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

$$\phi_f^{inc} = \begin{bmatrix} \phi_f^{inc(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \phi_f^{inc(2)} \end{bmatrix} \quad \phi_f^{ref} = \begin{bmatrix} \phi_f^{ref(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \phi_f^{ref(2)} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Si les deux guides connectés à l'élément  $P$  sont égaux, alors on obtient  $\phi_q^{(1)} = \phi_q^{(2)}$  et  $\phi_f^{(1)} = -\phi_f^{(2)}$  [59]. En écrivant l'Eq. (4.48) sous forme modale, on obtient [57, 59, 60] :

$$\psi^{ref} = \widetilde{\mathbf{C}}_P \psi^{inc} + \widetilde{\mathbf{F}} \quad (4.51)$$

Avec  $\psi^{ref}$   $\psi^{inc}$  les amplitudes modales des ondes réfléchies et incidentes.  $\widetilde{\mathbf{C}}_P$  représente la matrice de diffusion de l'élément  $P$  et  $\widetilde{\mathbf{F}}$  le vecteur source, en notant  $\mathbf{D}_P$  la matrice de raideur dynamique condensée aux interfaces de l'élément  $P$  :

$$\widetilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{C}}_{11} & \widetilde{\mathbf{C}}_{12} \\ \widetilde{\mathbf{C}}_{21} & \widetilde{\mathbf{C}}_{22} \end{bmatrix}_P = - [\mathbf{D}_P \phi_q^{ref} + \phi_f^{ref}]^{-1} [\mathbf{D}_P \phi_q^{inc} + \phi_f^{inc}] \quad (4.52)$$

$$\widetilde{\mathbf{F}} = \begin{Bmatrix} \widetilde{\mathbf{F}}_1 \\ \widetilde{\mathbf{F}}_2 \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}_P \phi_q^{ref} + \phi_f^{ref}]^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_{P,Li} \mathbf{D}_{P,ii}^{-1} F_{ext} \\ \mathbf{D}_{P,Ri} \mathbf{D}_{P,ii}^{-1} F_{ext} \end{Bmatrix} \quad (4.53)$$

D'après la Fig. 4.22, pour l'élément  $P_0$ , les ondes incidentes  $\psi_{inc}^{(1)}$   $\psi_{inc}^{(2)}$  des guides (1) et (2) correspondent respectivement aux ondes  $\lambda^{n_2}\psi_2^+$  et  $\lambda^{n_3}\psi_3^-$ . D'après l'Eq. (4.51), pour une force extérieure appliquée à l'élément  $P_0$ , on a donc :

$$\begin{Bmatrix} \psi_2^- \\ \psi_3^+ \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{C}_{11} & \widetilde{C}_{12} \\ \widetilde{C}_{21} & \widetilde{C}_{22} \end{bmatrix}_{P_0} \begin{Bmatrix} \lambda^{n_2}\psi_2^+ \\ \lambda^{n_3}\psi_3^- \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \widetilde{F}_1 \\ \widetilde{F}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.54)$$

Le même raisonnement est appliqué pour les portions hétérogènes non chargées, on obtient ainsi pour les portions  $P_{-1}$  et  $P_1$  :

$$\begin{Bmatrix} \psi_1^- \\ \psi_2^+ \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{C}_{11} & \widetilde{C}_{12} \\ \widetilde{C}_{21} & \widetilde{C}_{22} \end{bmatrix}_{P_{-1}} \begin{Bmatrix} \lambda^{n_1}\psi_1^+ \\ \lambda^{n_2}\psi_2^- \end{Bmatrix} \quad (4.55)$$

$$\begin{Bmatrix} \psi_3^- \\ \psi_4^+ \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{C}_{11} & \widetilde{C}_{12} \\ \widetilde{C}_{21} & \widetilde{C}_{22} \end{bmatrix}_{P_1} \begin{Bmatrix} \lambda^{n_3}\psi_3^+ \\ \lambda^{n_4}\psi_4^- \end{Bmatrix} \quad (4.56)$$

L'expression des amplitudes  $\vartheta^+$   $\vartheta^-$   $\psi_1^+$   $\psi_4^-$  peut être déduit des équations d'équilibre dynamique des interfaces FEM-WFEM exprimées dans l'Eq. (4.45). La résolution de ce problème peut ainsi être écrit de manière matricielle (voir Eq. (4.57)).

Pour valider la formulation de l'Eq. (4.57), la réponse forcée est analysée dans le cas de portions hétérogènes identiques correspondant aux doubles portions FEM des cellules physiques. Les portions homogènes sont identiques aux guides homogènes des cellules physiques. L'intérêt étant de pouvoir comparer la réponse forcée calculée à partir de l'Eq. (4.57) à la réponse qui découle de la section 4.3.2.1 (Force appliquée à l'interface de la cellule physique et la réponse à l'intérieur de celle-ci). La Fig. 4.23(a) représente la réponse forcée au milieu de la portion homogène adjacente au support 0 suite à une force extérieure appliquée sur ce support. La réponse est donc comparée à la réponse au milieu de la cellule physique suite à un impact situé sur son interface. Les réponses sont sensiblement les mêmes avec néanmoins une atténuation spatiale légèrement plus faible en hautes fréquences pour la méthode de la section 4.3.2.1. Ceci vient du fait que la projection de la force extérieure avait été effectuée sur une base modale réduite des modes de propagation de la cellule physique. Les résultats tendent donc à valider l'approche proposée dans cette section pour la réponse d'une structure hétérogène infinie.

La structure est maintenant composée d'un ensemble de 11 portions hétérogènes correspondant aux supports sous charge de la section 4.1.2.3. La force extérieure est appliquée sur la portion  $P_0$ . La réponse est observée au niveau du support chargé et du support n°6 (à la limite droite de la zone chargée) sur la Fig. 4.23(b). On voit bien l'influence des raideurs chargées sur la réponse dynamique, avec la présence de résonances basses fréquences qui diffèrent selon la position d'observation. En hautes fréquences, les ondes sont logiquement atténuées à cause de l'amortissement interne du guide et des supports. Les Figs. 4.23(c) et 4.23(d) représentent les coefficients de réflexion et de transmission de la matrice de diffusion de l'élément  $P_0$  (voir Eq. (4.52)). Ces coefficients correspondent respectivement aux valeurs réelles diagonales de  $\widetilde{\mathbf{C}}_{11}$  et  $\widetilde{\mathbf{C}}_{21}$  et sont donc représentés pour chaque mode de propagation. Les coefficients de réflexion des ondes propagatives sont majoritairement négatifs en basses fréquences et tendent vers la valeur nulle en hautes fréquences, ce qui correspond au fait que les supports se découplent progressivement du guide. Les coefficients de transmission sont positifs et inférieurs à 1 en basses fréquences. Ceux des ondes de traction-compression et de flexion verticale tendent vers la valeur unitaire en hautes fréquences, ceux des ondes de flexion latérale et de torsion tendent vers 0.9, ce qui indique que ces dernières sont légèrement plus atténuées.

La formulation de l'Eq. (4.57) donne les amplitudes modales d'une structure avec une force extérieure appliquée sur une portion hétérogène. Dans le cas d'une force appliquée entre deux portions hétérogènes, les termes  $\widetilde{\mathbf{F}}_1$   $\widetilde{\mathbf{F}}_2$  du vecteur source sont remplacés par les termes  $\psi_{inf}^+$   $\psi_{inf}^-$  multipliés par les termes des matrices de diffusion correspondants (voir section 4.3.2.2).



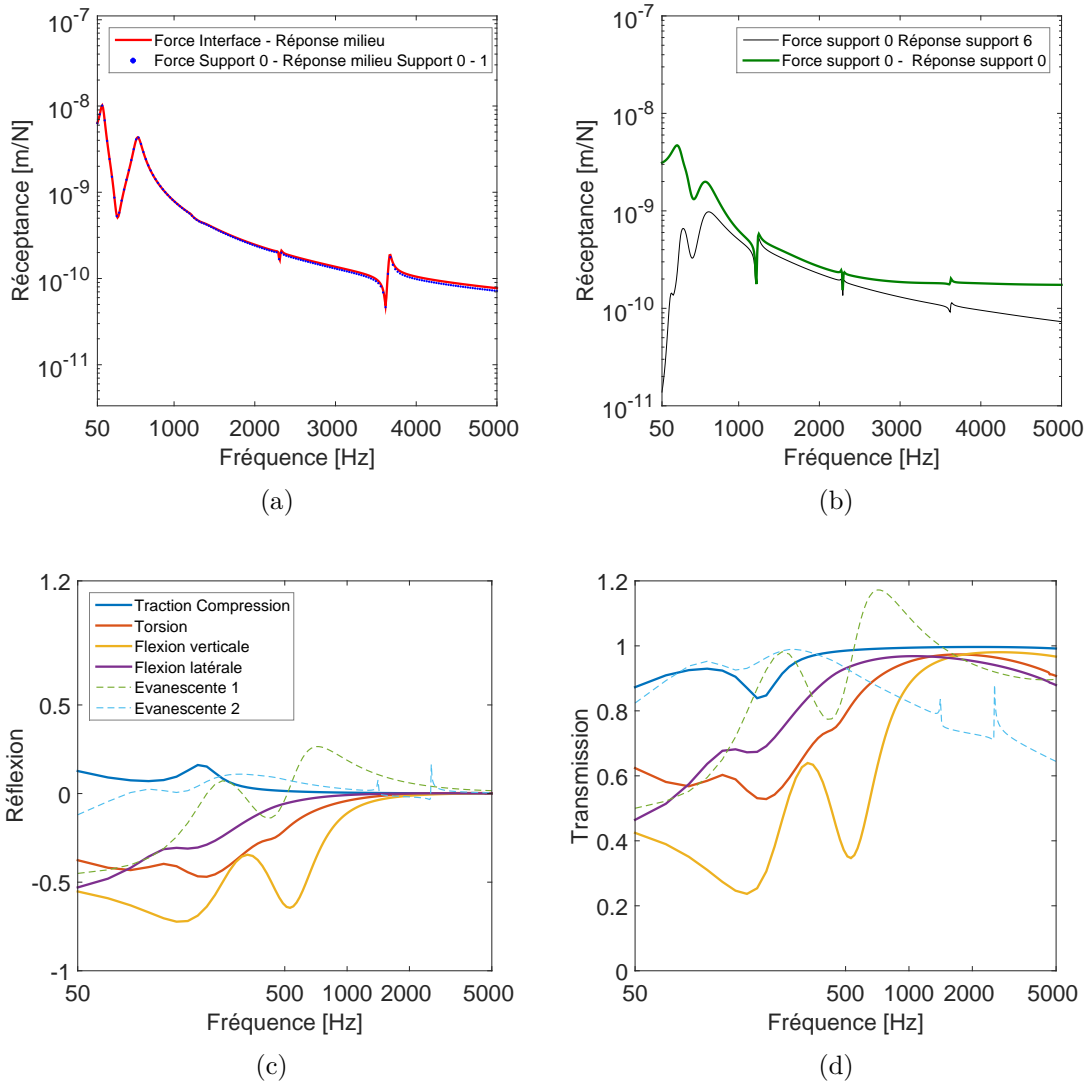


FIGURE 4.23 – (a) Amplitudes des réceptances suite à une force aux interfaces ou au milieu de la cellule physique (b) Amplitude des réceptances au point d'impact et au support 6 de la structure sur supports raidis dans la portion centrale (c) Coefficients de réflexion (c) Coefficient de transmission des ondes d'un support

## 4.4 Conclusion

Ce chapitre a tout d'abord mis en avant la méthode de couplage FEM-WFEM pour la réduction modale de structures finies. En effet, le chapitre précédent avait pointé la difficulté de réduire le nombre de modes de propagation d'une structure aux conditions limites élastiques. En concentrant les conditions limites sur des portions assemblées par éléments finis, les contraintes spatiales imposées sur les cellules de la WFEM ont pu être diminuées. Le nombre de modes de propagation dans les parties homogènes a pu être réduit, permettant d'accélérer les temps de calcul. Cette méthode de couplage permet de plus d'inclure aisément tout type d'hétérogénéité sur la structure, ce qui est un des objectifs attendus du projet CERVIFER.

La méthode de bi-périodisation a été introduite, elle permet de condenser une cellule longue en se basant sur la méthode DSM. Ainsi, il est bien plus rapide d'obtenir la matrice de raideur dynamique condensée, et ce même sans réduction modale, d'une cellule longue homogène discrétisée finement dans la direction longitudinale. Une comparaison avec la méthode directe de condensation a confirmé l'intérêt de cette approche en termes de temps de calcul.

Le couplage FEM-WFEM a été associé à la méthode de bi-périodisation pour calculer la réponse dynamique d'une structure infinie constituée de cellules élémentaires aux portions hétérogènes. La réponse forcée  $y$  a été calculée pour une force située à l'intérieur de la cellule physique et au niveau de ses interfaces. De plus, la méthode a été étendue au calcul de la réponse dynamique d'une structure infinie comprenant une partie centrale aux portions hétérogènes. Ceci permettra de mettre en place, dans le chapitre suivant, la réponse dynamique d'une voie ballastée comprenant une solution anti-vibratile.



## Chapitre 5

# Étude d'une voie ballastée comprenant une solution anti-vibratile

*Ce chapitre utilise les outils numériques présentés dans les deux chapitres précédents pour l'étude d'une voie ferrée ballastée avec une solution anti-vibratile. Le calcul et l'analyse des modes de propagation d'un rail UIC60 libre seront effectués dans un premier temps. La méthode de bi-périodisation associée au couplage FEM-WFEM sera ensuite utilisée pour calculer la réponse dynamique de la voie ballastée jusque 5000 Hz. Une comparaison expérimentale permettra de valider le modèle proposé en utilisant des données de mobilité et les taux de décroissance de la voie. Enfin, le modèle mis en place dans cette thèse servira à l'étude d'une solution anti-vibratile en cours de développement au sein du projet CERVIFER.*

## 5.1 Principe de calcul

Les méthodes numériques présentées dans les chapitres précédents sont appliquées à l'étude d'une voie ballastée. Celle-ci est composée d'un rail UIC 60 reposant de manière périodique sur des traverses. Une semelle élastique répartie assure le contact entre le rail et la traverse, ces dernières reposent sur une couche de ballast. Les sous-couches présentes sous le ballast (influentes en très basses fréquences) ne sont pas considérées. Les traverses utilisées sont de type bi-bloc. La section du rail UIC 60 est présentée sur la Fig. 5.1. Les propriétés mécaniques du rail, des semelles, du ballast et des traverses sont regroupées dans le Tab. 5.1

Les calculs sont effectués sur la plage fréquentielle comprise entre 50 et 5000 Hz. Le maillage éléments finis de la section du rail est effectué à l'aide du logiciel Gmsh®[61]. L'ensemble des calculs sont ensuite réalisés à l'aide de Matlab®. Une force harmonique stationnaire est appliquée à diverses positions sur la section du rail. Les réponses forcées du rail sont calculées sous forme de mobilité, *i.e* le rapport entre la vitesse et la force appliquée au point d'excitation. La propagation des ondes est présentée sous forme de taux de décroissance en dB/m calculés de la même manière qu'expérimentalement [62].

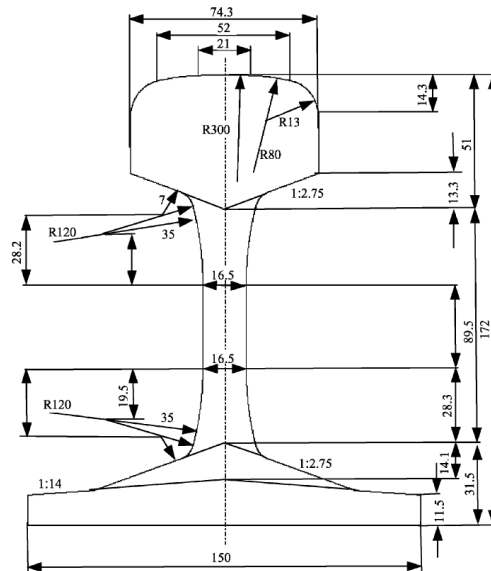


FIGURE 5.1 – Dimensions en mm de la section du rail UIC 60

Tableau 5.1 – Paramètres de la voie ballastée [32]

Paramètres d'étude				
Rail	$E$ (Pa) $2.1 \times 10^{11}$	$\eta$ 0.004	$\rho$ ( $kg/m^3$ ) 7850	$\nu$ 0.3
Périodicité	$L_e$ 0.6 m	$l_e$ 0.01 m	Largeur semelles 0.18 m	
		Latéral	Vertical	Longitudinal
Semelles	$K_{trans}(N/m)$ $\eta$	$2.5 \times 10^8$ 0.2	$8.5 \times 10^8$ 0.2	$5.0 \times 10^8$ 0.2
Ballast	$K_{trans}(N/m)$ $\eta$ $K_{rot}(N/rad)$ $\eta$	$3.0 \times 10^8$ 0.4 $2.0 \times 10^8$ 0.8	$2.5 \times 10^8$ 0.4 $2.5 \times 10^8$ 0.8	$9.5 \times 10^8$ 0.2 $2.0 \times 10^8$ 0.8
Demi-traverse (m=122 kg)	$I$ ( $kg\ m^2$ )	0.64	1.32	1.14

## 5.2 Calcul des modes de propagation du rail UIC 60

### 5.2.1 Ondes libres par WFEM

La première étape consiste à calculer les modes et constantes de propagation de la tranche élémentaire, soit une tranche libre de rail de 0.01 m de longueur. Les relations de dispersion sont présentées sur la Fig. 5.2. Seules les 13 premières ondes propagatives sont présentées, une multitude d'autres ondes ont été calculées mais elles présentent un taux de décroissance très important et contribuent peu à la réponse du rail. On rappelle que la valeur propre du système périodique est notée  $\lambda$  et est liée à la constante de propagation  $\mu$  telle que  $\lambda = e^{-\mu} = e^{-(\alpha+i\beta)}$ . Afin de distinguer plus facilement les différentes ondes, la partie imaginaire  $\beta$  est tracée en échelle linéaire et logarithmique sur les Figs. 5.2(a) 5.2(b). La partie réelle  $\alpha$  qui correspond à l'atténuation des ondes est tracée sur la Fig. 5.2(c).

Les quatre ondes classiques, les plus propagatives, sont identifiées sur ces courbes. L'onde n°1 correspond à l'onde de flexion latérale. L'onde n°2 représente l'onde de torsion, l'onde n°3 est l'onde de flexion verticale et l'onde n°4 correspond à l'onde de traction-compression. Ces quatre ondes ont une fréquence de coupure à 0Hz. Leur déformée est tracée sur la Fig. 5.3. Le vecteur propre du mode est multiplié par sa valeur propre pour représenter la propagation du mode sur quelques cellules. La colonne de gauche représente les modes à 500 Hz et la colonne de droite à 5000Hz. On constate une différence dans la sollicitation des parties de la section du rail. Par exemple, pour l'onde de flexion latérale, la déformée de la tête est prépondérante en basses fréquences alors que celle du pied devient majeure en hautes fréquences. Cela passe aussi par une augmentation du déphasage entre deux sections, due à l'accroissement de la valeur de  $\beta$ , et donc par l'apparition de plus de nœuds et de ventres en hautes fréquences. La même remarque est valable pour les autres ondes, notamment l'onde de flexion latérale dont la déformée du pied du rail est prépondérante contrairement à sa déformée en basses fréquences.

Les ondes n°5 et n°6 correspondent à des modes de section latéral et de torsion du rail. Ces modes ont une fréquence de coupure à 1420 Hz et à 4480 Hz respectivement. Il est clair qu'avant ces fréquences, ces modes sont très évanescents et ne contribueront que très peu à la réponse. En hautes fréquences, ils deviennent propagatifs (voir Fig. 5.4) et leur contribution n'est plus négligeable. Ces modes de section ne peuvent être calculés que par la prise en compte de la géométrie réelle du rail. Les modes n°7

et n°8, associés aux ondes évanescentes de flexion latérale et verticale, peuvent être déterminés de manière analytique en reprenant la théorie des poutres de Timoshenko (voir Chapitre 2). Leur fréquence de coupure est supérieure à 5000 Hz, ces ondes restent donc évanescentes sur toute la plage fréquentielle d'étude.

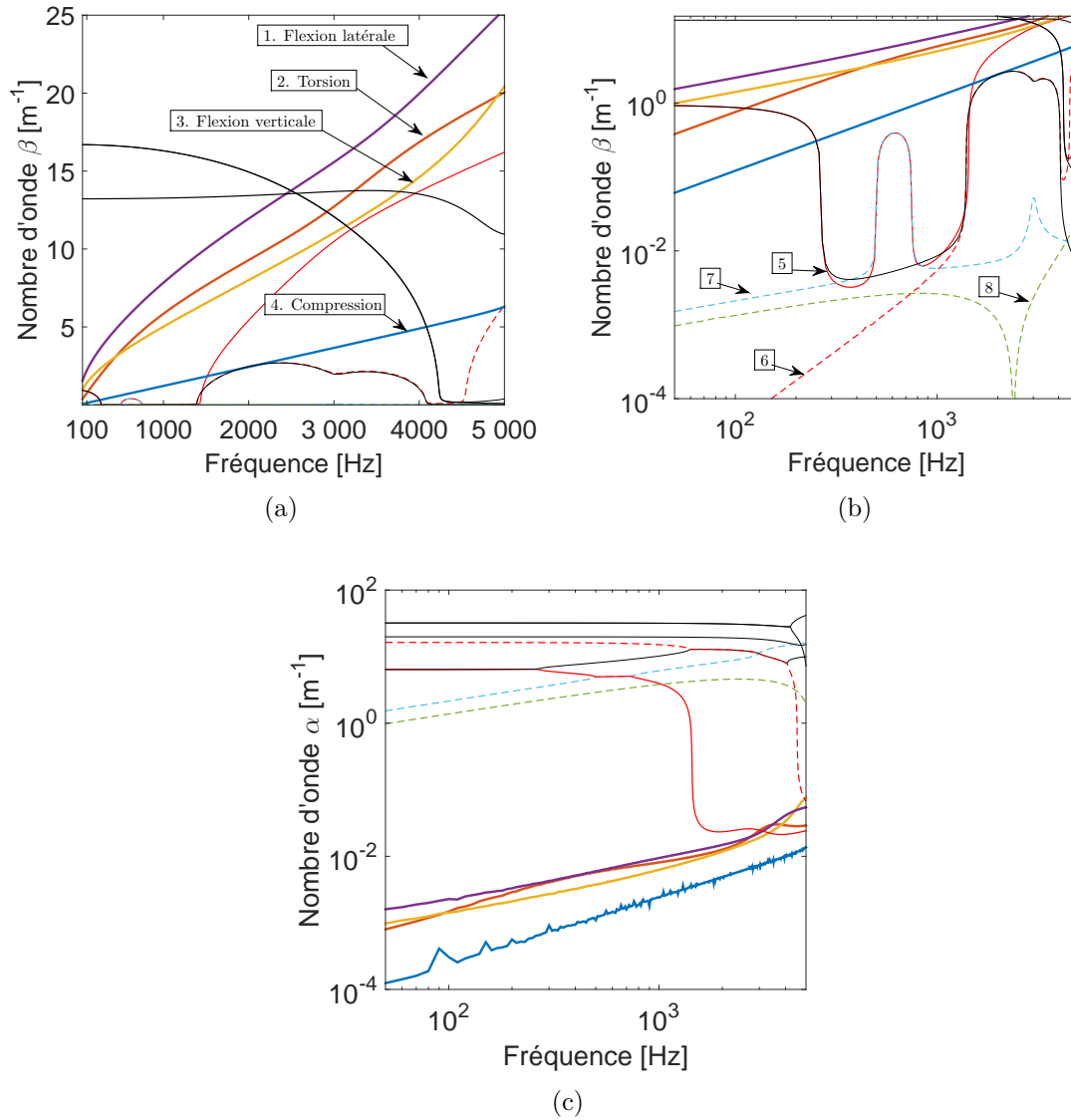


FIGURE 5.2 – Courbes de dispersion du rail libre (a) Partie imaginaire  $\beta$  (b) échelle linéaire, (c) Partie réelle  $\alpha$  de la constante de propagation  $\gamma = \alpha + i\beta$

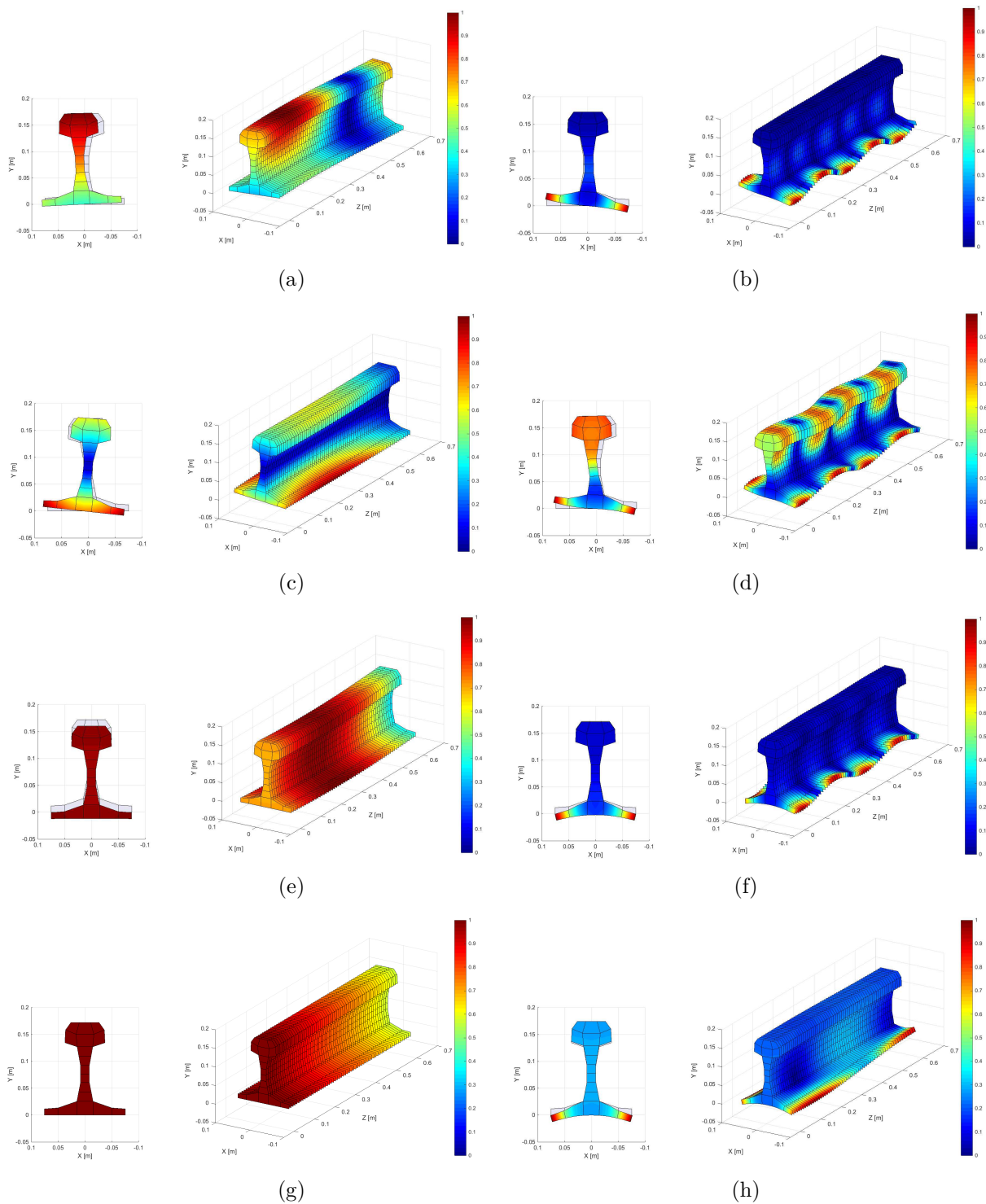


FIGURE 5.3 – *Onde de flexion latérale* (a) 500 Hz (b) 5000 Hz, *Onde de torsion* (c) 500 Hz (d) 5000 Hz, *Onde de flexion verticale* (e) 500 Hz (f) 5000 Hz, *Onde de compression* (g) 500 Hz (h) 5000 Hz

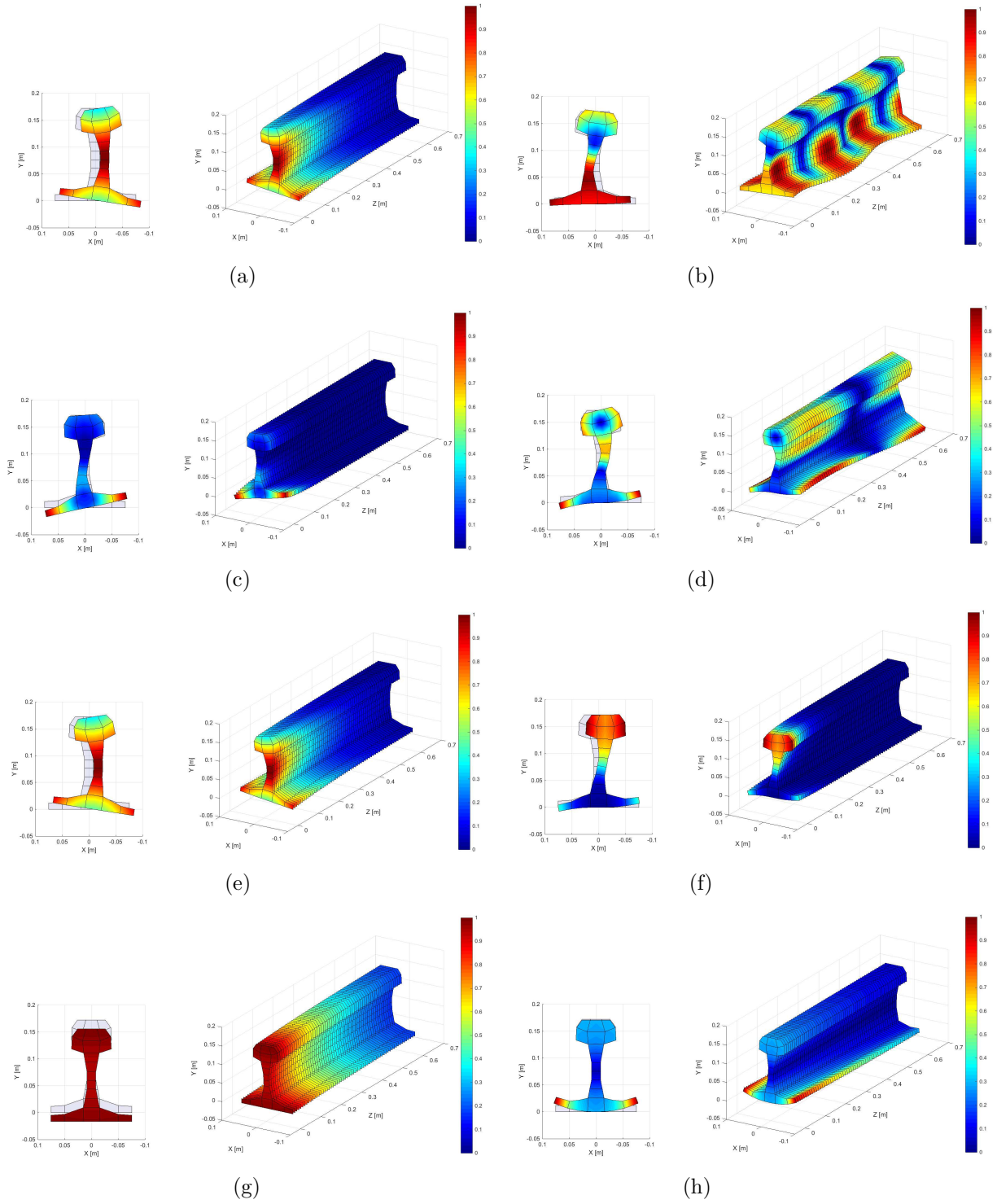


FIGURE 5.4 – *Mode de section latérale (a) 500 Hz (b) 5000 Hz, Mode de section de torsion (c) 500 Hz (d) 5000 Hz, Onde évanescente de flexion latérale (e) 500 Hz (f) 5000 Hz, Onde évanescente de flexion verticale (g) 500 Hz (h) 5000 Hz*

### 5.2.2 Choix du maillage

L'influence du maillage est analysée sur les courbes de dispersion de la tranche du rail. Trois maillages sont proposés, un linéaire à 99 nœuds, puis deux quadratiques à 84 nœuds et 185 nœuds. La Fig. 5.5(d) représente leurs courbes de dispersion. On constate une différence importante en hautes fréquences entre les maillages quadratiques et le linéaire, notamment pour les ondes de flexion latérale/verticale et de torsion. De plus, un décalage est présent au niveau des fréquences de coupure des deux modes de section, plus prononcé pour le second (courbe verte). La différence entre les deux maillages quadratiques est nettement plus faible, le maillage quadratique à 84 nœuds permet donc une convergence des courbes de dispersion notamment pour les modes les plus propagatifs. Ce maillage offre un bon compromis entre le nombre de degrés de liberté et la convergence des courbes de dispersion, il sera donc utilisé par la suite.

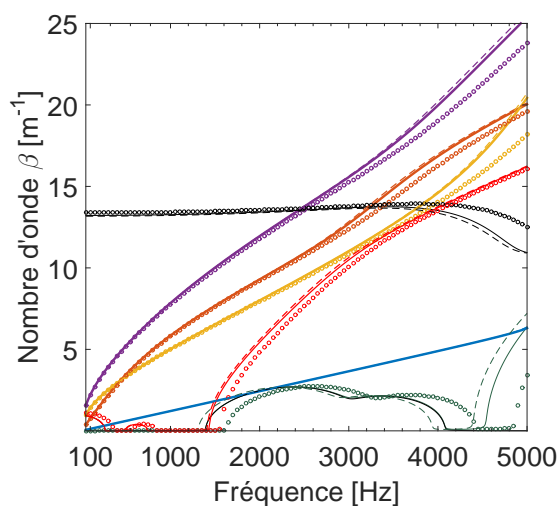
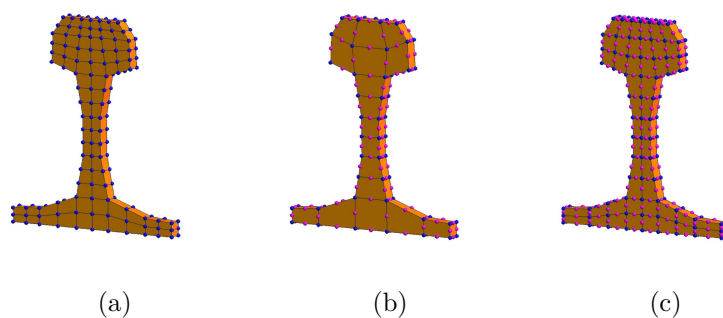


FIGURE 5.5 – Maillage (a) linéaire à 99 nœuds (b) – quadratique à 84 nœuds (c) quadratique à 185 nœuds sur chaque face (d) Courbes de dispersion o o maillage linéaire **a** — maillage quadratique **b** - - maillage quadratique **c**



## 5.3 Calcul de la réponse dynamique d'une voie ballastée

Le calcul de la réponse dynamique de la voie est effectué en utilisant la méthode de couplage FEM-WFEM (voir Chapitre 4). Les étapes nécessaires au calcul sont :

1. Condensation dynamique de la tranche élémentaire et calcul aux valeurs propres.
2. Périodisation de la tranche  $n$  fois par DSM.
3. Ajout des conditions limites sur la portion FEM, assemblage FEM - WFEM en une cellule physique.
4. Condensation dynamique de la cellule physique.
5. Calcul aux valeurs propres de la cellule physique.

La première étape a été présentée dans la section précédente. L'étape 2 est effectuée par l'intermédiaire de l'Eq. (3.44).

### 5.3.1 Prise en compte des conditions limites élastiques

L'ajout des conditions limites sur la portion FEM est effectué par l'intermédiaire de matrices d'impédance. Un modèle éléments finis représentant la semelle, la traverse et le ballast est créé sous Abaqus® (voir Fig. 5.6). Un ensemble de 33 ressorts correspondant aux degrés de liberté du pied du rail sont reliés à la traverse bi-bloc modélisée par une masse ponctuelle. Elle repose sur le ballast considéré comme 3 ressorts de translation et de rotation. La matrice d'impédance est obtenue en inversant le système qui exprime les déplacements de chacun des nœuds du pied du rail en fonction des forces imposées sur chacun d'eux. Les demis matrices d'impédance sont ensuite appliquées aux interfaces de la cellule physique.

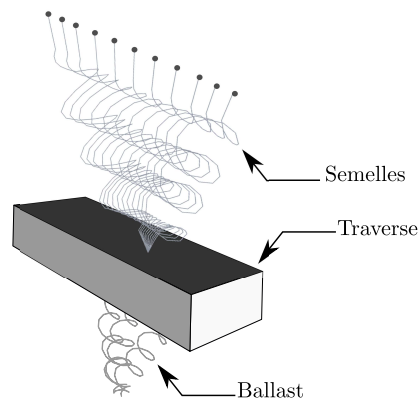


FIGURE 5.6 – Support élastique en éléments finis

### 5.3.2 Calcul des modes de propagation du rail supporté

L'étape 4 consiste à condenser dynamiquement les trois sous-structures par méthode directe. Pour l'étape 5, le calcul aux valeurs propres de la cellule physique est réalisé par la transformation de type  $\mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1}$  (voir section 3.1.6). La cellule physique étant de longueur 0.6 m, seules les 26 premières ondes sont calculées, ce qui correspond à un taux de décroissance maximum de 35 dB/m. Ceci permet de réduire le temps de calcul en ne conservant que les ondes dont les propriétés d'orthogonalité sont respectées (voir section 3.3.3.4). La Fig. 5.7 représente les relations de dispersion de la cellule physique avec conditions limites élastiques. On remarque que l'ensemble des ondes de propagation sont impactées par les supports élastiques par rapport aux courbes de dispersion de la tranche élémentaire libre. La partie réelle  $\alpha$  de la constante de propagation montre clairement les bandes d'atténuation, les bandes de Bragg ou les bandes de résonances locales (voir Chapitre 2). Celles-ci sont présentes pour les ondes de flexion latérale/verticale, torsion, compression et pour le premier mode de section, dans la mesure où ces ondes ont une valeur de  $\beta$  qui atteint la limite de la première zone de Brillouin soit  $\pi \setminus 0.6$  entre 50 et 5000 Hz.

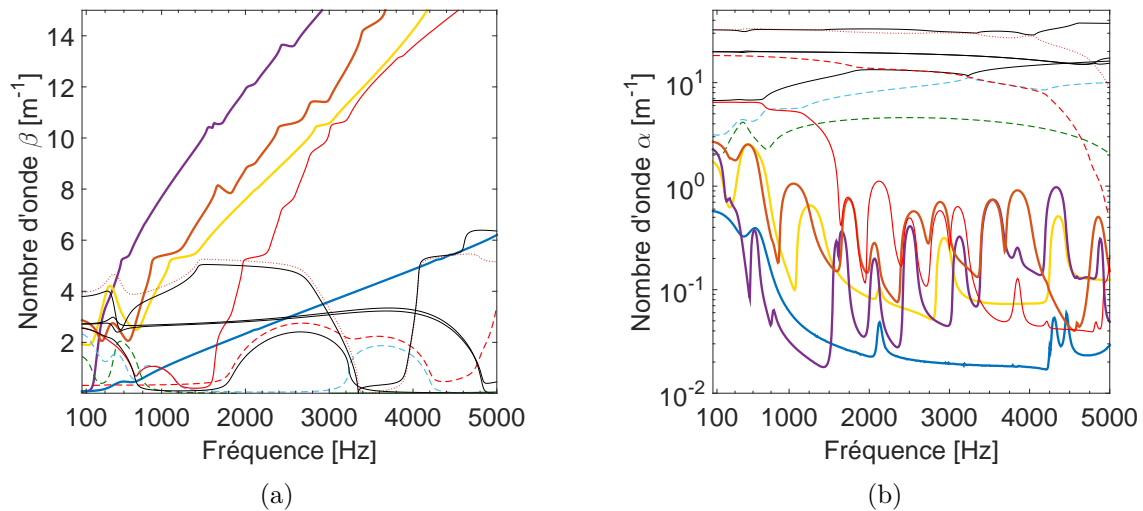


FIGURE 5.7 – Courbes de dispersion du rail sur des traverses bi-bloc (a) Partie imaginaire  $\beta$  (b) Partie réelle  $\alpha$  de la constante de propagation  $\gamma = \alpha + i\beta$

### 5.3.3 Comparaison expérimentale des mobilités

Cette section met en avant la comparaison des mobilités (le rapport entre la vitesse et la force au point d'impact) expérimentales et simulées de la voie. Les résultats expérimentaux sont tirés de la publication de L.Gry [32] et ont été réalisés sur une ligne grande vitesse. Les paramètres de la voie sont présentés dans le Tab. 5.1. L'excitation est effectuée au marteau de choc dans la direction verticale et latérale du rail. La simulation est réalisée avec des supports élastiques répartis et non répartis. Les supports répartis prennent en compte la dimension réelle des supports (voir Fig. 5.8). Les supports élastiques non répartis sont appliqués sur une ligne nodale sans prendre en considération la largeur physique des semelles.



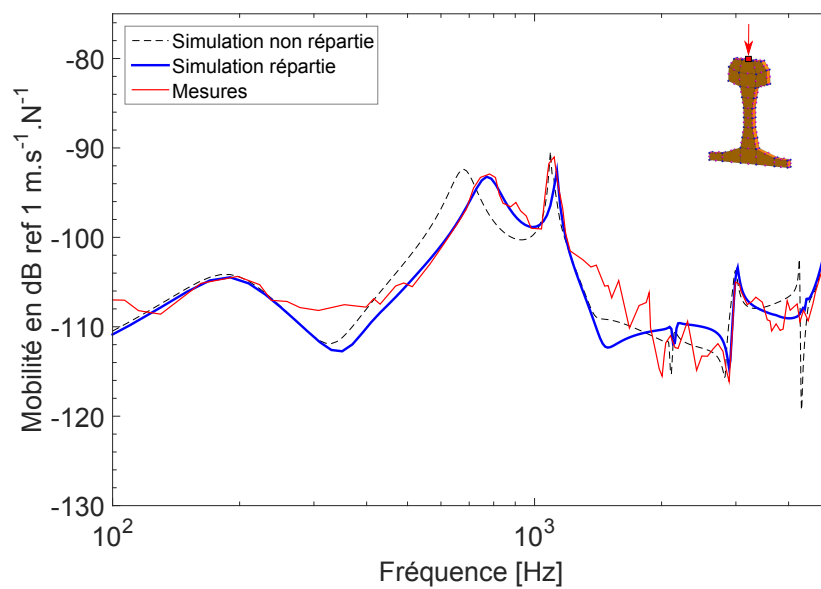
FIGURE 5.8 – Cellule physique avec supports non répartis et répartis

La Fig. 5.9 compare les mobilités suite à une force entre deux supports. La simulation résulte de l'Eq. (4.45) qui permet de résoudre le problème d'une force appliquée entre les interfaces de la cellule physique. L'accord calculs mesures est bon sur la plage fréquentielle pour l'excitation verticale et à partir de 200 Hz pour l'excitation latérale. En dessous de 400 Hz, le mouvement de la traverse est relativement important, l'influence du ballast n'y est donc pas négligeable. Or il peut être sujet à des phénomènes de non linéarité et peut expliquer les différences basses fréquences observées pour les mouvements verticaux et latéraux. Les *pinned-pinned frequencies*, qui correspondent à la demi longueur d'onde égale à la distance entre supports, sont bien prédites à 1090 Hz et à 520 Hz pour la direction verticale et latérale. Les Figs. 5.11(a) 5.11(b) représentent les réponses 3D du rail à ces fréquences. On retrouve de même les résonances verticales et latérales dues à la répartition périodique des supports à 3030 Hz et 3040 Hz 5.12(a) 5.11(b).

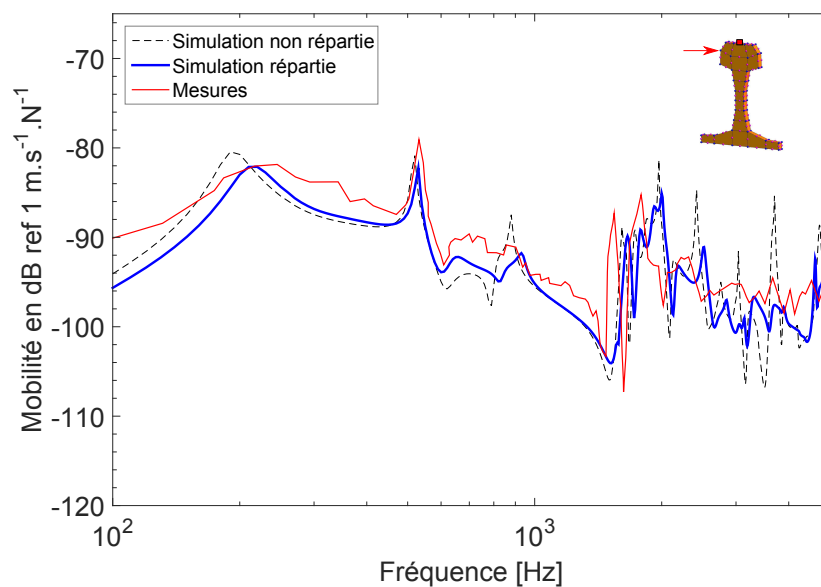
Les résultats de simulation montrent qu'il est préférable d'utiliser le modèle réparti qui prend en compte la dimension physique des semelles. Il permet notamment pour le mouvement vertical de prédire correctement la fréquence de résonance du rail sur les semelles à 770 Hz. Il réduit de plus la résonance du modèle à 4240 Hz visiblement amortie sur la courbe expérimentale. Pour le mouvement latéral, le modèle réparti diminue l'amplitude des oscillations à partir de 2000 Hz et est donc plus proche de la mesure. Les bénéfices du modèle réparti s'expliquent physiquement par le fait que les longueurs d'onde des ondes propagatives ne peuvent pas être considérées comme très grandes devant la largeur des semelles (environ 18 cm). Il n'est donc pas correct de moyenniser l'influence des semelles sur une seule section, car cela autoriserait la présence d'ondes évanescentes qui sont en réalité atténuées par la largeur des semelles. Ainsi, le modèle non réparti confère au rail une souplesse excessive, ce qui explique la différence avec la fréquence de résonance du rail sur les semelles et les oscillations latérales surestimées.

La Fig. 5.10 compare les mobilités au dessus d'un support. La simulation résulte de l'Eq. (3.68) qui permet de résoudre le problème d'une force appliquée aux interfaces de la cellule physique. Les remarques évoquées pour le modèle réparti et non réparti sont aussi valables pour ce cas. L'accord calculs mesures est bon jusqu'à 4000 Hz, à partir de cette fréquence on peut néanmoins observer une légère sous-estimation des niveaux vibratoires, notamment pour la réponse verticale. Cette différence provient du fait que la périodisation d'une cellule longue ne permet pas de calculer avec précision la totalité des ondes de propagation. Un certain nombre de modes très évanescents ont été retirés de la solution afin d'améliorer la stabilité de la réponse. Ces modes peuvent néanmoins contribuer à la réponse autour du point d'impact. C'est ce qui explique la différence des niveaux en hautes fréquences, et particulièrement pour la réponse verticale qui est observée au niveau du point d'impact.

La Fig. 5.13 compare le modèle éléments finis proposé avec le modèle analytique du Chapitre 2. La réponse verticale par les deux méthodes donne des résultats proches jusque 4000 Hz, malgré des résonances surestimées pour le modèle analytique. Après 4000 Hz, les déformations de section dans la direction verticale influent fortement la mobilité du rail. Pour la réponse latérale, les déformations de section sont présentes dès 1000 Hz et explique la différence importante des niveaux vibratoires. De plus, le modèle analytique ne permet pas de reproduire le couplage existant entre les ondes de torsion et de flexion.

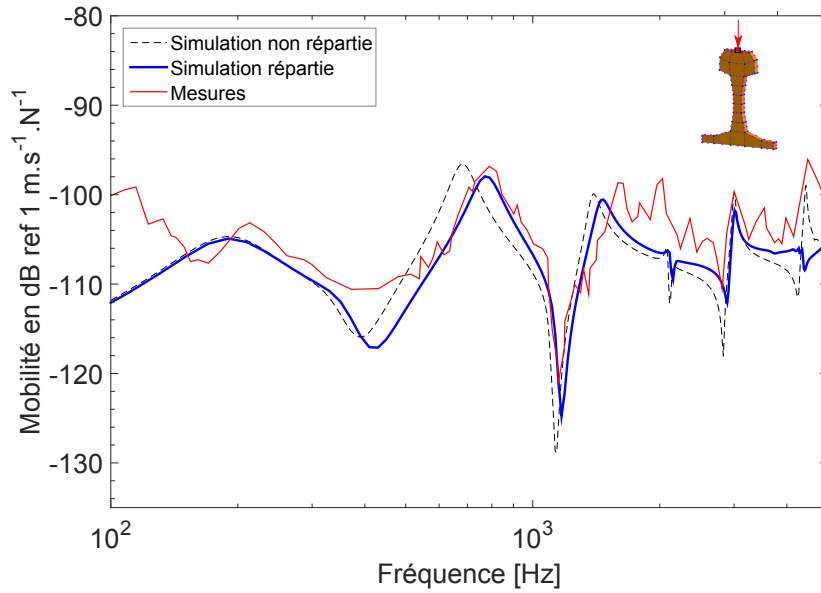


(a)

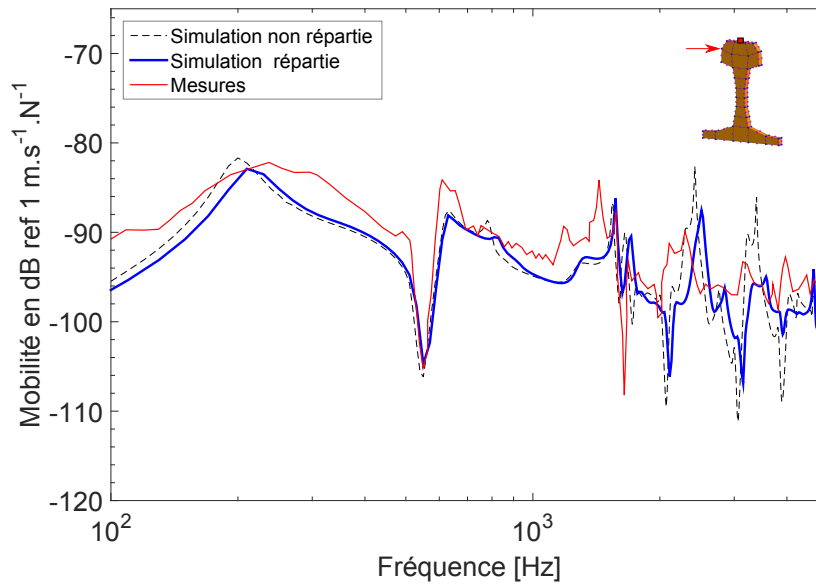


(b)

FIGURE 5.9 – Mobilité (a) verticale (b) latérale entre deux supports

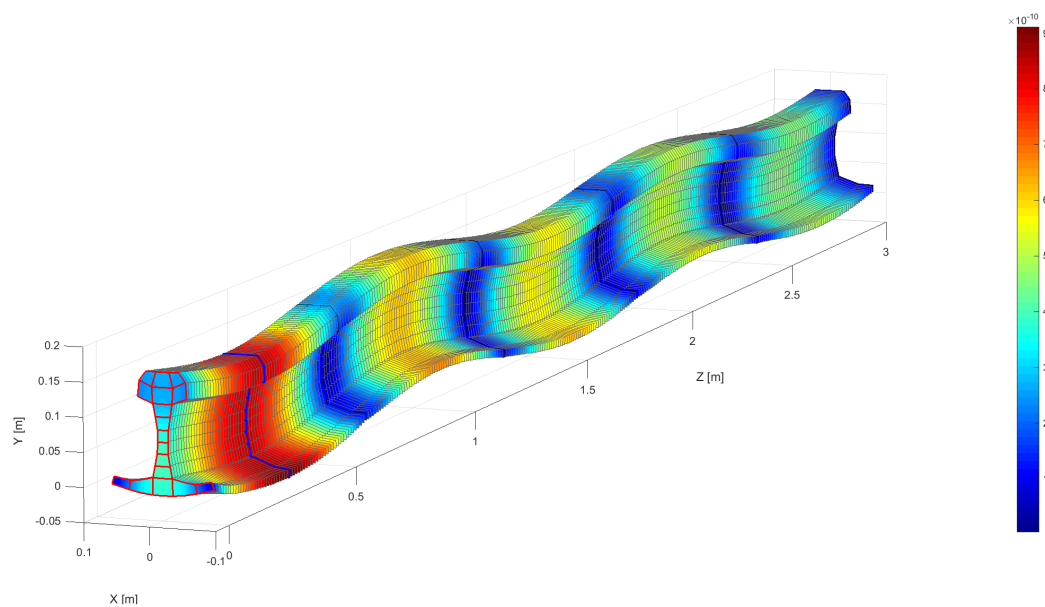


(a)

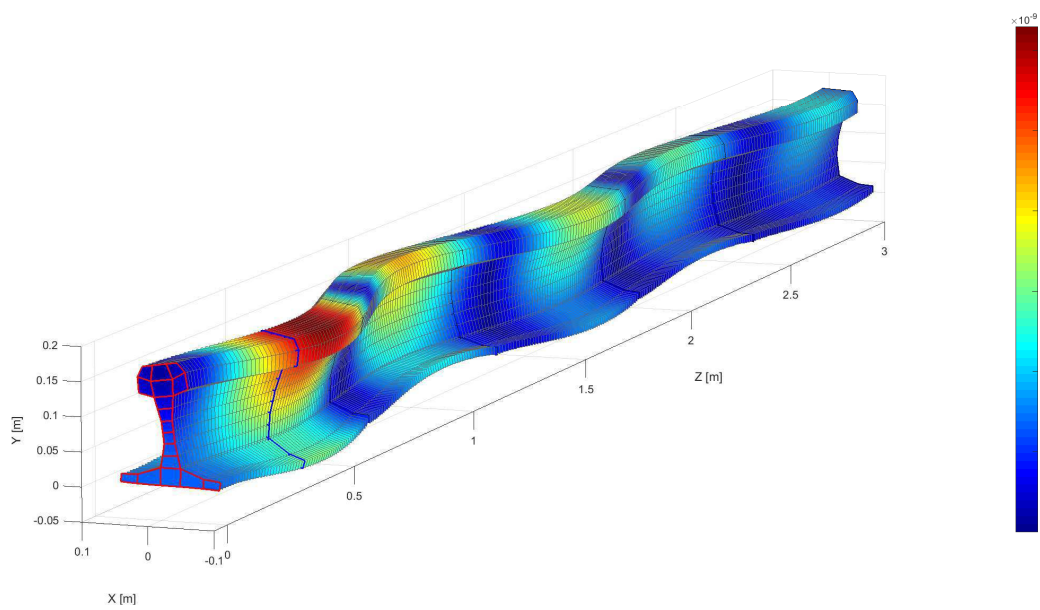


(b)

FIGURE 5.10 – Mobilité (a) verticale (b) latérale au dessus d'un support

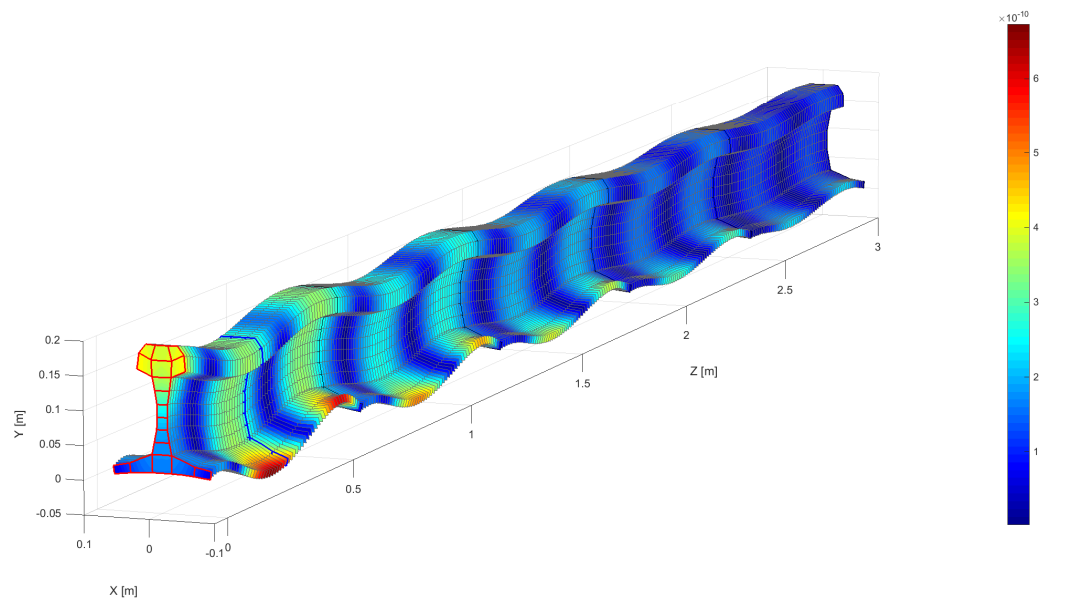


(a)

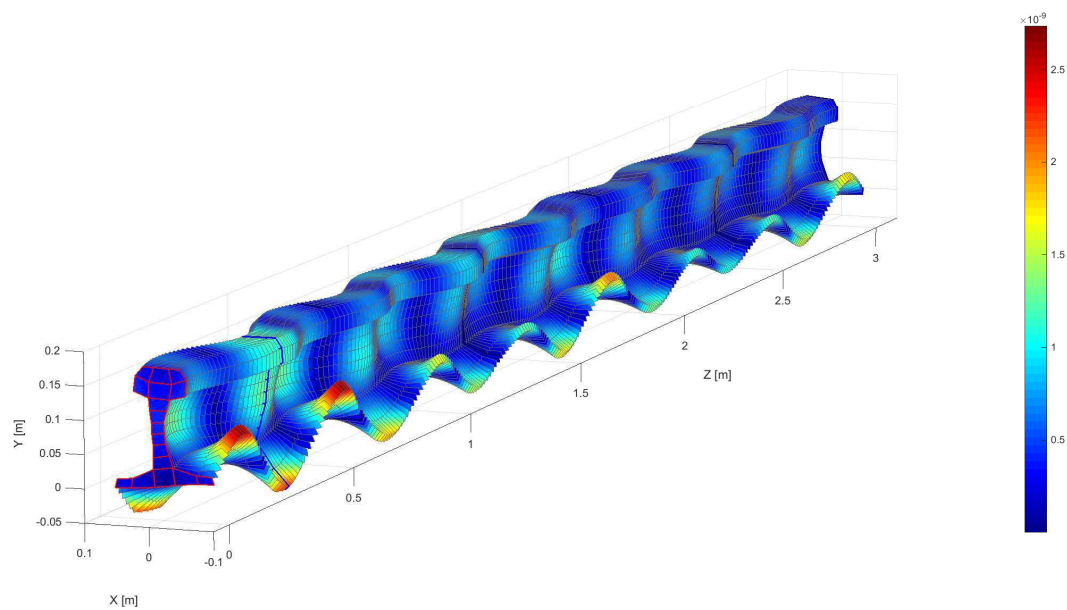


(b)

FIGURE 5.11 – Déplacement le long des quatre premières cellules suite à une excitation (a) verticale à 1090 Hz (b) latérale à 520 Hz entre deux supports



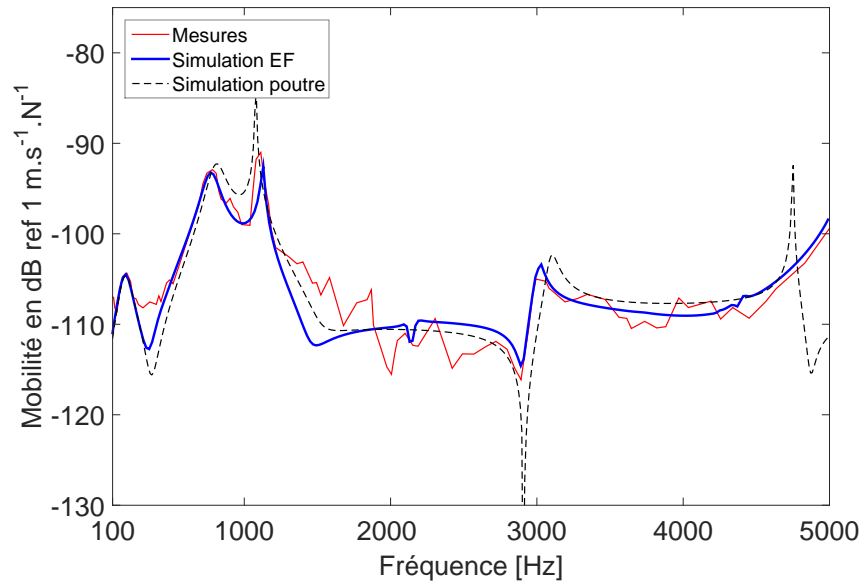
(a)



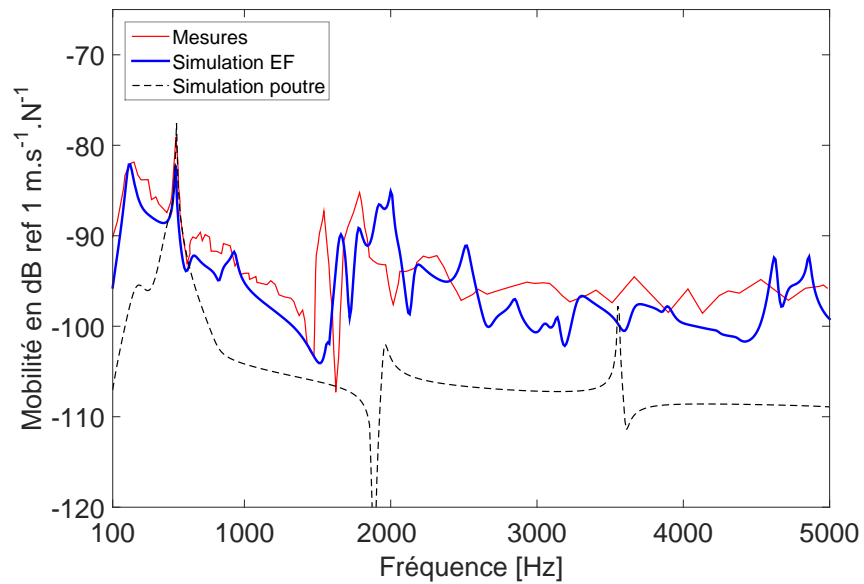
(b)

FIGURE 5.12 – Déplacement le long des quatre premières cellules suite à une excitation (a) verticale à 3030 Hz (b) latérale à 3040 Hz entre deux supports





(a)



(b)

FIGURE 5.13 – Comparaison du modèle éléments finis et de poutre de la mobilité (a) verticale (b) latérale entre deux supports

### 5.3.4 Comparaison expérimentale des taux de décroissance

Les performances acoustiques d'une voie ferrée sont évaluées par la mesure des taux de décroissance (*Track Decay Rates TDR* en anglais). Si l'on considère une décroissance exponentielle des ondes le long du rail, l'amplitude d'une onde en un point  $z$  représentant la distance depuis le point de contact peut être exprimée par l'intermédiaire d'une constante de propagation  $\mu_{onde}$  telle que  $|v_{onde}(z)| = |v_{onde}(0)|e^{-\mu_{onde}z}$ . Cette constante peut être exprimée [62] en terme de taux de décroissance  $\Delta$  en dB/m telle que :

$$\Delta = 20 \log_{10}(e^{\mu_{onde}}) \quad (5.1)$$

Le taux de décroissance est calculé de manière expérimentale grâce à un ensemble de fonctions de transfert à différentes positions le long du rail. Ces taux correspondent à une décroissance globale dans la direction verticale ou latérale, englobant ainsi toutes les ondes. Le rail est excité au marteau de choc suivant une grille de positions prédéfinies [62]. L'excitation se situe bien souvent entre deux supports, les mesures sont effectuées à quatre positions par travée pour les deux premières travées (voir Fig. 5.14). Au delà de la deuxième travée, les points de mesure sont nécessaires uniquement au dessus et entre deux supports. L'espacement restreint des points de mesure dans les premières travées permet de mesurer les taux de décroissance très importants de l'ordre de 10 dB/m. Pour les taux de décroissance faibles, c'est la longueur de mesure totale qui devient déterminante.

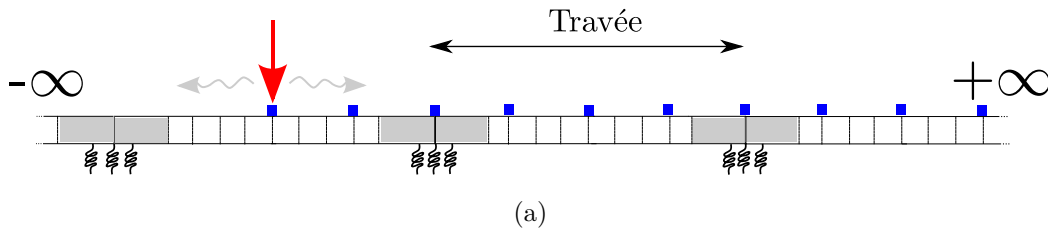


FIGURE 5.14 – Positions des accéléromètres pour la mesure du taux de décroissance

Si l'on considère  $M(z)$  comme la mobilité de transfert entre le point d'impact et le point de mesure en  $z$ , la constante de propagation expérimentale  $\mu$  s'exprime :

$$\frac{1}{2\mu} = \int_0^{\infty} \frac{|M(z)|^2}{|M(0)|^2} dz \approx \sum_{z_i=0}^{z_{max}} \frac{|M(z_i)|^2}{|M(z_0)|^2} \Delta z_i \quad (5.2)$$

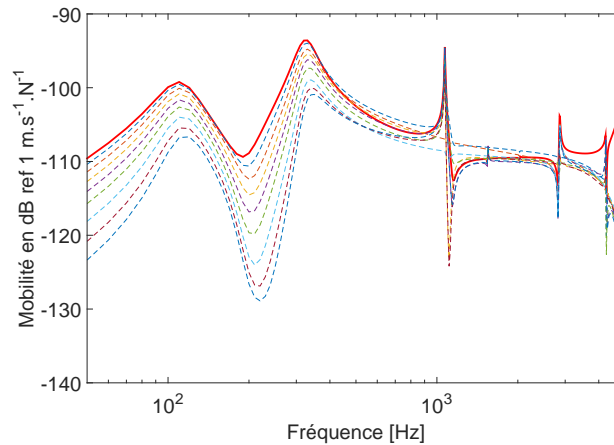
La valeur  $z_{max}$  représente la longueur de mesure et  $\Delta z_i$  la distance entre deux points. Le taux de décroissance peut ainsi être exprimé par :

$$\Delta \approx \frac{4.343|M(z_0)|^2}{\sum_{z_i=0}^{z_{max}} |M(z_i)|^2 \Delta z_i} \quad (5.3)$$

La mesure de la mobilité au point d'impact est donc essentielle pour calculer correctement les taux de décroissance. D'après l'Eq. (5.2), la valeur minimale du taux de décroissance mesurable dépend de la longueur de mesure et s'exprime comme :

$$\Delta_{min} = \frac{4.343}{z_{max}} \quad (5.4)$$

Afin de comparer les valeurs expérimentales des taux de décroissance aux simulations, le même procédé est réalisé de manière numérique. Les données sont intégrées en tiers d'octave moyenné. L'impact est appliqué entre deux supports, les valeurs des mobilités à diverses positions le long de la voie sont ensuite utilisées pour calculer le taux de décroissance selon l'Eq. (5.3). Pour la direction verticale, une force est appliquée au sommet de la tête du rail, et sur l'arrête pour la direction latérale. Les calculs de la mobilité sont réalisés au point d'impact. La Fig. 5.15 représente un exemple des 9 premières mobilités le long de la voie pour la direction verticale.



(a)

FIGURE 5.15 – Mobilités des 9 premières positions suite à un impact dans la direction verticale

Les Figs. 5.16(a) 5.16(b) comparent les taux de décroissances mesurés à ceux simulés. Les mesures des taux de décroissance proviennent du rapport technique [63] réalisé par l'Université de Southampton sur une voie test. La voie repose sur des traverses monoblocs et des semelles souples dont la raideur verticale est estimée à  $1.2e8$  N/m et la latérale à  $2.4e7$  N/m. Le taux de décroissance est simulé sur une distance de 28 m ce qui garantit un taux de décroissance minimum de 0.15 dB/m. Pour la direction verticale, l'accord calculs mesures est bon sur la plage fréquentielle. En basses fréquences, le taux de décroissance est élevé à cause du couplage entre le rail et la traverse. Après 300 Hz, le rail se découple du support, les ondes deviennent propagatives et le taux de décroissance chute. Dans la bande de 5000 Hz, un pic est visible et provient du mode de battement du pied du rail [64] (voir Fig. 5.17(a)) dont la fréquence de coupure est d'environ 5000 Hz. Ce mode de section vertical provoque une augmentation de la déformation de la semelle et donc accroît le taux de décroissance des ondes verticales. Pour la direction latérale, l'accord calculs mesures est bon, avec une légère sous-estimation du pic dans la bande de 3000 Hz. Ce pic correspond à l'apparition du mode de section de torsion qui provoque de même un battement du pied du rail (voir Fig. 5.17(b)).

Les Figs. 5.16(c) 5.16(d) comparent le taux de décroissance vertical et latéral d'une voie sur supports souples et raides. Les paramètres des supports raides sont ceux du Tab. 5.1, les supports souples sont ceux utilisés dans le cas précédent. La confrontation des taux montre clairement l'avantage d'un point de vue vibratoire des semelles raides. Plus le taux de décroissance est important plus les ondes seront atténuées le long de la voie. Sur les semelles raides, le rail se découple plus haut en fréquences et permet de conserver un taux de décroissance élevé jusque 900 Hz. De plus, les bandes de Bragg (liées à la périodicité des supports, voir Chapitre 2) sont plus larges par rapport à la voie sur semelles souples. Ce qui explique un taux plus haut entre 1500 Hz et 4000 Hz par rapport aux semelles souples. La même analyse est valable pour le taux de décroissance latéral, avec un pic accru dans la bande de 1500 Hz dû à l'apparition du mode de section latéral (voir Fig. 5.17(c)).

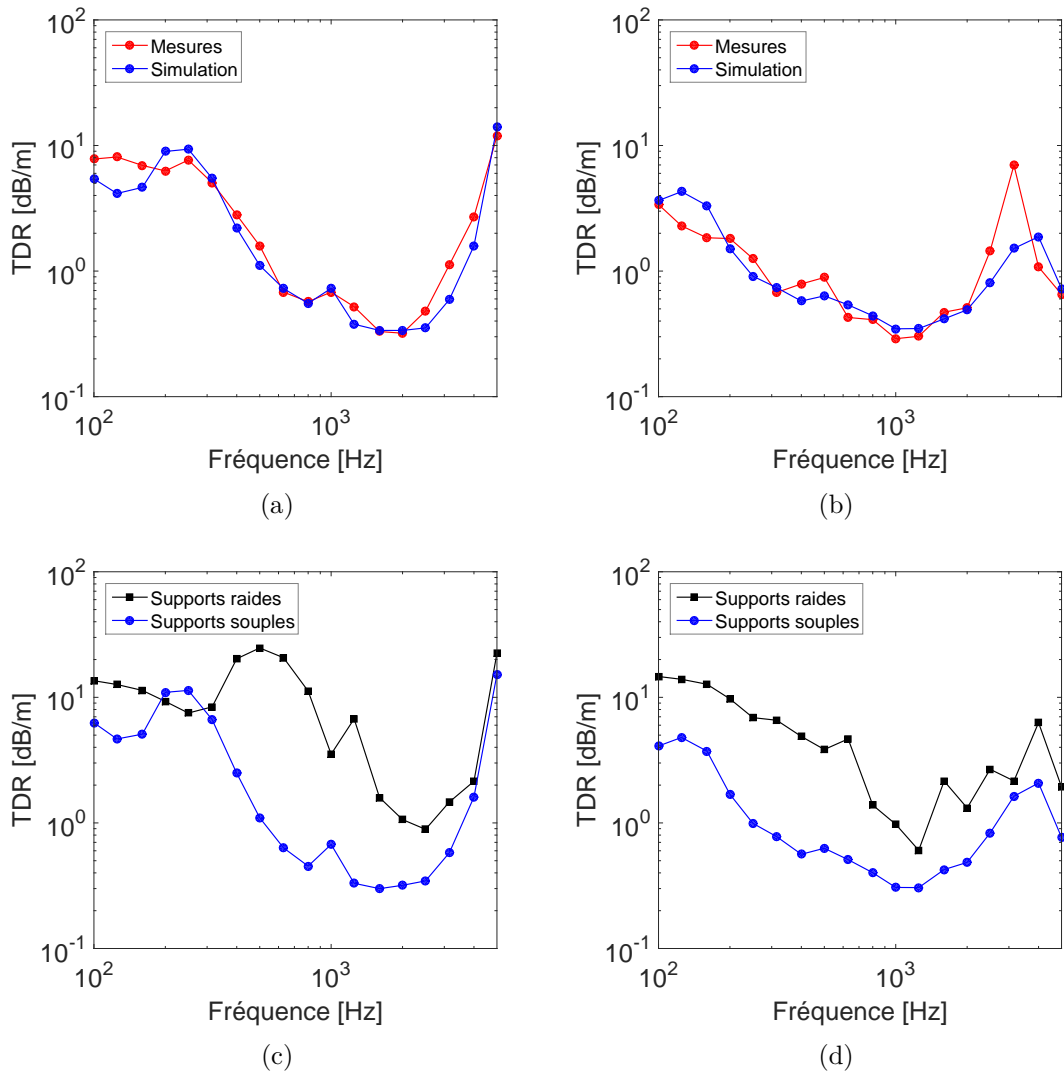


FIGURE 5.16 – Taux de décroissance (a) vertical (b) latéral expérimental et simulé. Comparaison avec le taux de décroissance (c) vertical (d) latéral sur supports raides

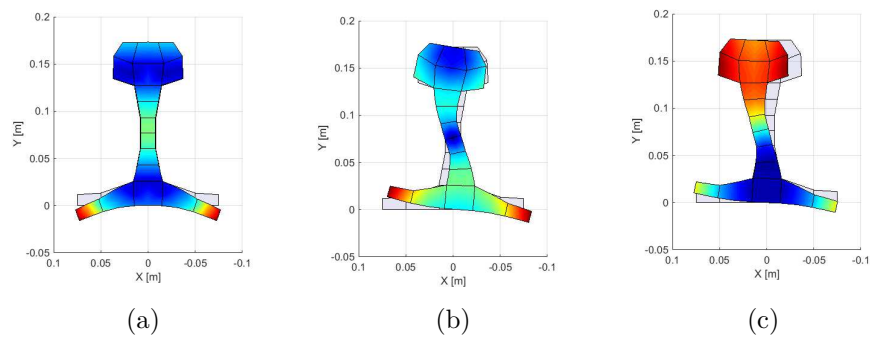


FIGURE 5.17 – Mode de section (a) vertical (b) de torsion (c) latéral à 4000 Hz

## 5.4 Application à une solution anti-vibratile

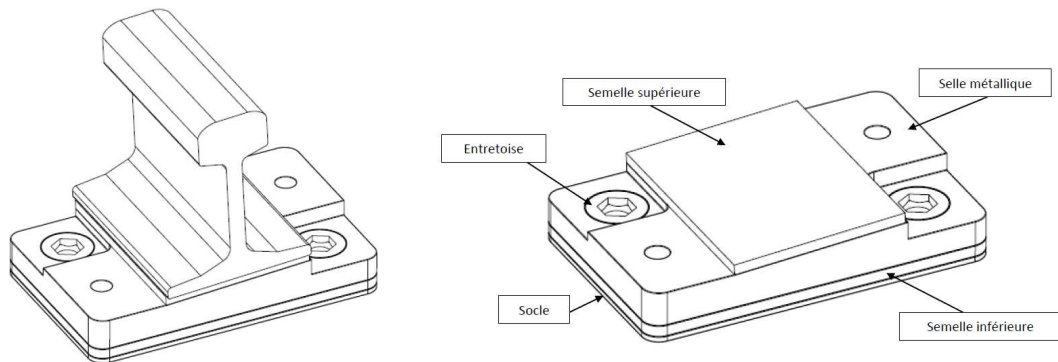
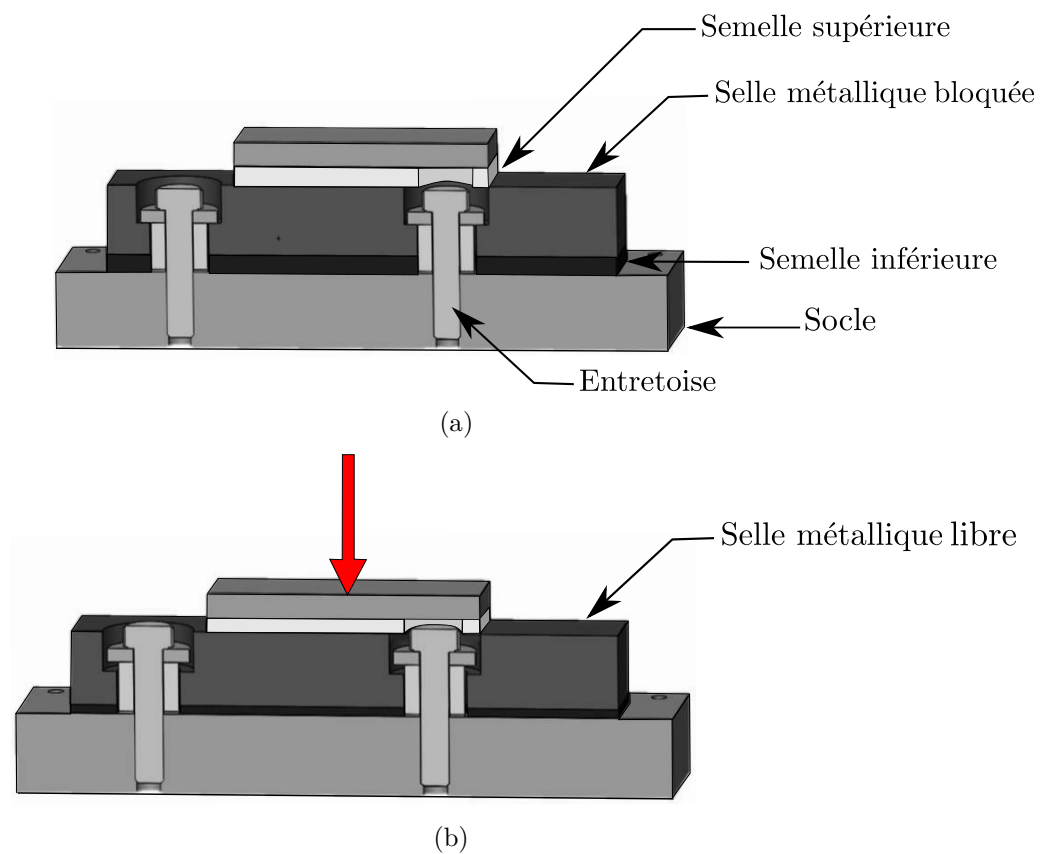
### 5.4.1 Présentation du dispositif

Les semelles sont des éléments essentiels de la voie ferrée qui influent fortement la propagation des ondes. Pour améliorer les performances acoustiques, il est préconisé d'utiliser des semelles raides pour obtenir un taux de décroissance élevé. Cependant, pour réduire les coûts de maintenance de la voie, il est nécessaire de poser des supports souples afin de mieux répartir les efforts. Ceci permet notamment de limiter les phénomènes d'affaissement du ballast. Un compromis doit donc être choisi entre les performances acoustiques et les requêtes de la maintenance.

Le groupe Hutchinson a donc développé un prototype de support bi-mode innovant [65]. Son fonctionnement est dépendant de la charge exercée sur le rail par l'intermédiaire d'un seuil d'effort. Le support respecte les critères suivants :

- Faible raideur verticale sous charge (maintenance du matériel)
- Forte raideur verticale sans charge (performance acoustique)
- Forte raideur latérale quasi-statique de la voie vue du rail (éviter l'écartement)
- Effort résistif longitudinal élevé (résister aux efforts de dilatation thermique)
- Forte raideur de torsion (éviter le déversement)

Le support est composé d'une semelle supérieure viscoélastique raide (raideur verticale supérieure à  $5e8$  N/m), d'une selle métallique qui joue le rôle de bride et de batteur dynamique, et d'une semelle inférieure résiliente souple (raideur statique inférieure à  $5e7$  N/m). Le système est précontraint par l'intermédiaire d'entretoises épaulées qui assurent le contact entre la selle et le socle. Lorsqu'aucune charge n'est appliquée sur le rail, celui-ci repose uniquement sur la semelle supérieure raide (voir Fig. 5.19(a)), ainsi le taux de décroissance associé aux ondes verticales est élevé. Lorsqu'une charge est appliquée sur le rail et qu'elle dépasse le seuil d'effort, l'épaulement des entretoises n'est plus en contact avec la selle métallique qui peut se déplacer librement (voir Fig. 5.19(b)). Le rail repose ainsi sur l'intégralité des étages de semelles, il peut donc s'affaisser de plusieurs millimètres au passage du train et répartir la charge sur plusieurs travées. La semelle inférieure a une précontrainte fixée à 26 kN ce qui permet par exemple de déclencher 4 supports autour de la roue pour une charge de 150 kN située entre deux supports [65].

FIGURE 5.18 – *Vue isométrique du support bi-mode*FIGURE 5.19 – *Vue en coupe du mécanisme du (a) support non déclenché (b) déclenché*

### 5.4.2 Phénomène d'ondes stationnaires

La section 4.1.2.3 a présenté une voie dont les supports autour de la roue étaient raidies à cause de la charge statique de la roue. Thompson [17] a montré que la réponse au point d'impact était semblable à celle obtenue en considérant des supports raidis uniformément le long de la voie. Au contraire, les taux de décroissance obtenus étaient plus semblables à ceux calculés avec les supports non raidis uniformes. On devrait retrouver le même type de résultats pour les supports bi-modes, cependant la configuration pour le dispositif est différente. Le fait d'introduire des raideurs souples dans une partie centrale qui est bordée par des raideurs plus importantes, entraîne l'apparition d'ondes stationnaires à cause des conditions de réflexion aux extrémités. Ce phénomène est problématique car les ondes stationnaires peuvent détériorer les performances acoustiques et vibratoires attendues pour le support bi-mode.

Pour mettre en avant ce phénomène, deux cas d'étude sont proposés. Le premier compare la réponse verticale suite à une excitation entre deux supports d'une voie sur supports raidis uniformes avec une voie dont la portion centrale comporte de 2 à 8 supports raidis (les autres supports sont alors souples). Les supports raidis ont une raideur verticale de  $7.5e8$  N/m, celle des supports souples est de  $4e7$  N/m. Ces raideurs correspondent à celles des semelles supérieure et inférieure du support bi-mode. La Fig. 5.20(a) montre que quelque soit le nombre de supports centraux raidis, la réponse au point d'impact est très proche de celle sur supports uniformément raidis.

Le second cas compare la réponse d'une voie sur supports souples uniformes avec une voie dont la portion centrale comporte de 2 à 8 supports souples (voir Fig. 5.20(b)). Cette configuration correspond à la répartition des raideurs dues aux supports bi-modes. La différence est nette avec le premier cas, un certain nombre de résonances sont présentes pour la voie comportant une portion centrale souple. Plus le nombre de supports souples est important, plus le nombre d'ondes stationnaires est grand. La conception de la solution anti-vibratile prévoit le déclenchement de 4 supports autour de la roue, ce qui correspond à des résonances principales situées à 620 Hz, 730 Hz, 1140 Hz, 1790 Hz, 2420 Hz et 3560 Hz. Cependant, ces résonances sont susceptibles d'être modifiées dans un cas réel. En effet, la roue va imposer un nœud de vibration au niveau du contact, les pics deviendront des anti-résonances et vice-versa. De plus, les raideurs ont été considérées comme constantes et la présence de la selle métallique n'a pas été prise en compte. La maîtrise de ces ondes stationnaires est un enjeu majeur pour obtenir les bénéfices escomptés des supports bi-modes.



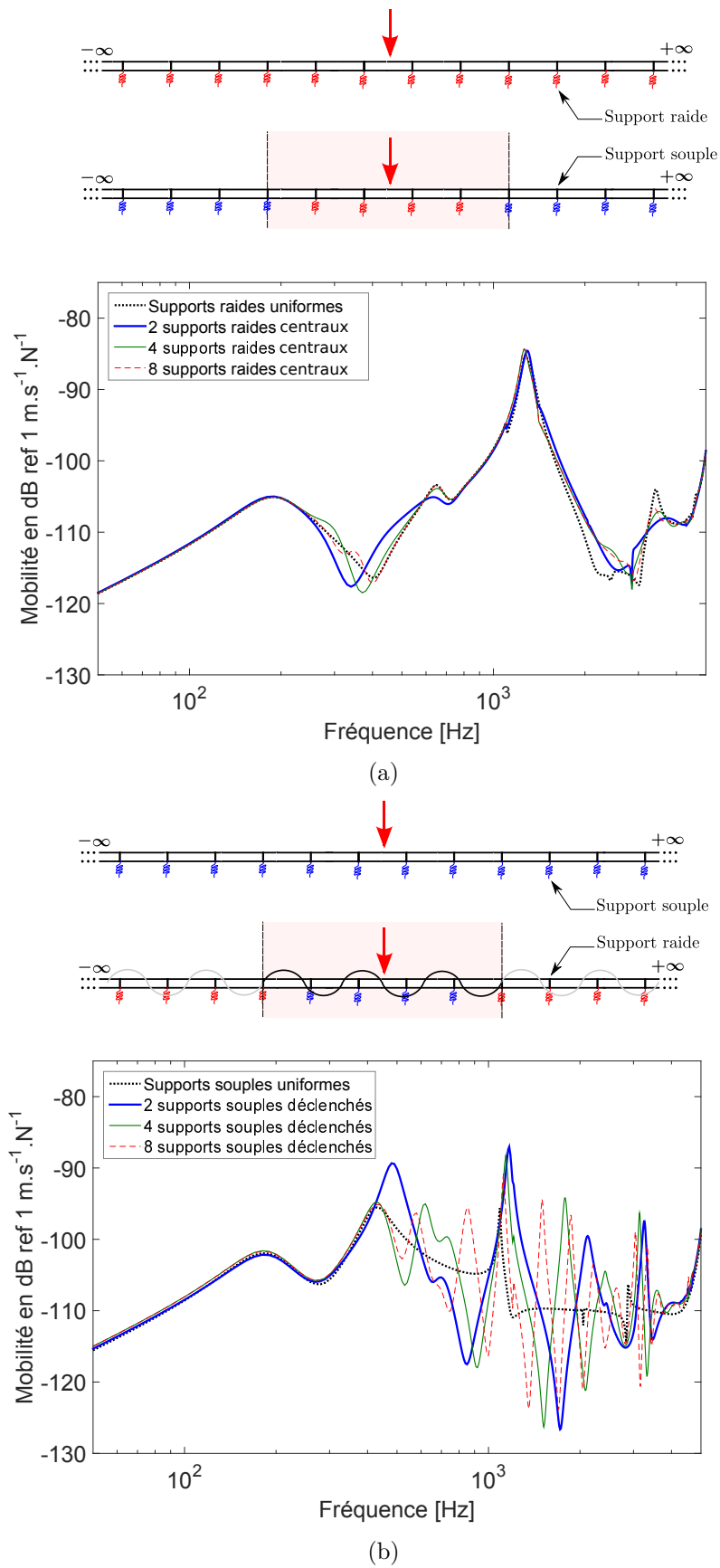


FIGURE 5.20 – Configurations bi-raideurs : (a) supports raides centraux (b) supports souples centraux

### 5.4.3 Calcul des raideurs dynamiques du support bi-mode

Le comportement dynamique du support bi-mode réel est complexe notamment en hautes fréquences. En effet, la selle métallique intermédiaire induit des effets dynamiques non négligeables et les matériaux que constituent les semelles peuvent avoir des effets de rigidification en hautes fréquences.

Un modèle numérique en 3D a été développé par Hutchinson afin d'évaluer les raideurs dynamiques du support dans chacun de ses deux modes de fonctionnement. La semelle supérieure est contrainte par une rigidité (sans masse) représentant le rail. Le déplacement de la selle métallique est bloqué pour la configuration non-déclenchée. Un effort est appliqué dans chacune des trois directions, le déplacement au centre de la semelle supérieure  $y$  est calculé. La matrice d'impédance du support est calculée comme dans la section 5.3.1.

La Fig. 5.21(a) représente les raideurs dynamiques verticales du support déclenché et non déclenché. La raideur du mode déclenché est bien plus faible que celle du mode non déclenché, ce qui respecte les deux premières conditions imposées dans la section 5.4.1. L'écart quasi-statique des deux modes est conservé sur l'ensemble de la plage fréquentielle malgré des effets de résonances internes [65]. Pour le mode déclenché, on observe un creux de rigidité à 300 Hz qui est dû à la résonance de la selle métallique sur les semelles comme batteur dynamique. Cette résonance sépare un régime basses fréquences, où la raideur est quasi constante et souple (dû à la semelle souple inférieure), d'un régime hautes fréquences qui tend vers une raideur plus importante (dû à la semelle raide supérieure). Le pic à 840 Hz correspond à une anti-résonance de la selle entre les deux semelles. Les deux creux à 1710 Hz et 1840 Hz correspondent aux deux premières fréquences de résonance des modes de flexion de la selle métallique (voir Fig 5.22).

Les Figs. 5.21(b) et 5.21(c) correspondent aux raideurs latérales et longitudinales du support bi-mode. On constate que pour les deux modes, les raideurs tendent vers une valeur commune qui correspond à celle de la couche supérieure en cisaillement. Le matériau viscoélastique fortement amorti de celle-ci permet de limiter les résonances des modes propres de la selle métallique.

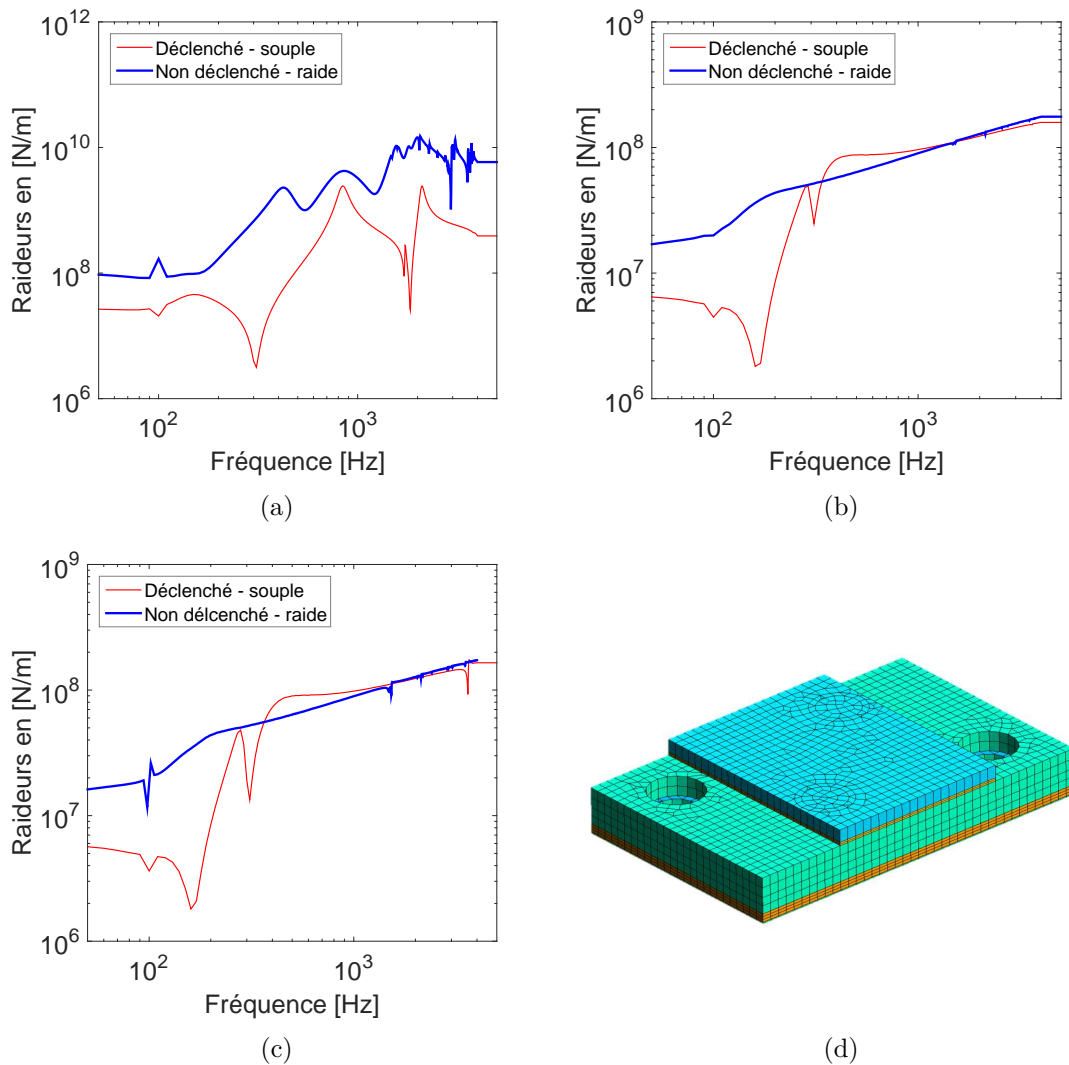


FIGURE 5.21 – Raideurs numériques (a) verticale (b) latérale (c) longitudinale du support bi-mode. (d) Modèle éléments finis du support bi-mode. [65]

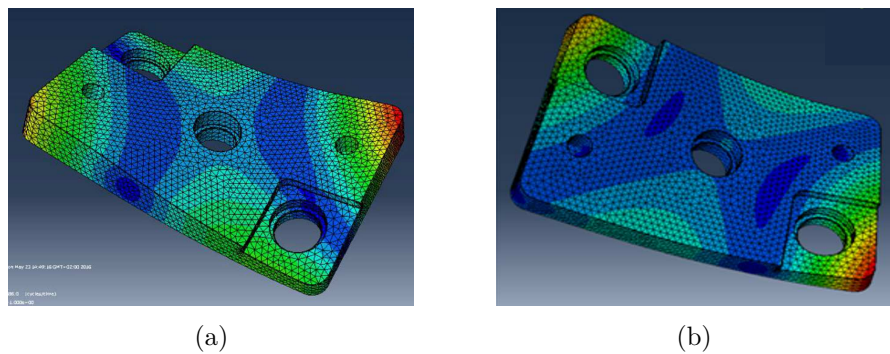


FIGURE 5.22 – Deux premiers modes propres de flexion de la selle métallique [65]

#### 5.4.4 Simulations sur voie

Une simulation de la réponse dynamique de la voie avec le support bi-mode est réalisée en se basant sur le modèle de la section 4.3.3. Une force est appliquée entre deux supports, quatre supports sont supposés déclenchés (deux de part et d'autre de la force). Les autres supports sont considérés comme non déclenchés (raides). Les raideurs des supports complets sont calculées en utilisant la section 5.3.1 et les données numériques du support bi-mode.

La Fig. 5.23(a) compare la mobilité verticale de la voie sur 4 supports déclenchés avec une voie sur des supports uniformes en mode déclenché et non déclenché. Ceci permet d'analyser l'influence des supports bi-modes sur les ondes stationnaires évoquées dans la section 5.4.2. Pour la réponse sur supports déclenchés uniformes, on observe un premier pic à 170 Hz qui correspond à la résonance du rail sur l'ensemble semelles-ballast. Deux pics sont ensuite visibles à 710 Hz et 940 Hz, ils correspondent aux résonances du rail sur la semelle inférieure et supérieure. Le creux à 840 Hz correspond à l'anti-résonance de la selle métallique entre les deux semelles. On retrouve la *pinned-pinned frequency* à 1090 Hz, ainsi que la résonance à 2960 Hz qui correspond à la borne supérieure de la deuxième bande de Bragg (voir Chapitre 2). Pour la réponse sur supports non déclenchés, on observe de nouveau la résonance basses fréquences liée au ballast. La raideur du support étant très forte dans cette configuration, la résonance du rail sur le support se situe à 1450 Hz. Il n'y a qu'une résonance sur le support dans la mesure où la selle n'est pas libre. La borne supérieure de la deuxième bande de Bragg est logiquement plus élevée et se situe à 3460 Hz.

La comparaison avec la mobilité de la voie sur 4 supports déclenchés montre qu'il n'y a pas d'ondes stationnaires créées par les supports bi-modes avant 1200 Hz. Dans la section 5.4.2, la Fig. 5.20(b) présentait un ensemble d'ondes stationnaires dues à la configuration bi-raideur à 620 Hz, 730 Hz et 1140 Hz. Cependant, les supports ne comprenaient pas la selle métallique qui joue visiblement le rôle d'atténuateur dynamique avant son premier mode de flexion (1710 Hz). Le rôle de batteur dynamique est un peu plus limité à partir de ce premier mode. On voit clairement apparaître une succession de résonances à 1830 Hz 2540 Hz et d'anti-résonances à 1550 Hz 2300 Hz, semblables à celles observées sur la Fig. 5.20(b). Cependant leur amplitude semble moins importante que sans la présence de la selle métallique. La configuration du support bi-mode permet donc bien d'atténuer les ondes stationnaires en basses fréquences qui étaient susceptibles de détériorer les performances acoustiques du dispositif.

La Fig. 5.23(b) compare les mobilités latérales de la voie dans les mêmes configurations que précédemment. La réponse de la voie avec 4 supports déclenchés est très proche de celle sur supports déclenchés uniformes. Il semble y avoir néanmoins la présence d'une onde stationnaire en basses fréquences à 160 Hz, la selle métallique n'agit donc pas comme atténuateur dynamique dans cette zone. Il n'y a pas d'autres ondes stationnaires prépondérantes sur la plage fréquentielle. En effet, les raideurs latérales tendent très rapidement vers une valeur commune, il n'y a donc pas de discontinuité très marquée entre les différents supports et donc pas d'ondes stationnaires majeures.

Afin de confirmer les performances escomptées du support bi-mode, il est primordial d'évaluer les taux de décroissance de la voie comprenant le dispositif. Le calcul réalisé est similaire à celui de la section 5.3.4, ainsi on applique une force entre deux supports et on simule le taux de décroissance sur une longueur de 28 m. La Fig. 5.24(a) compare le taux de décroissance vertical de la voie sur 4 supports déclenchés avec celui d'une voie sur supports uniformément déclenchés et non déclenchés. Il est clair que le taux de la voie avec les 4 supports déclenchés est bien plus proche de celui de la voie sur supports non déclenchés.

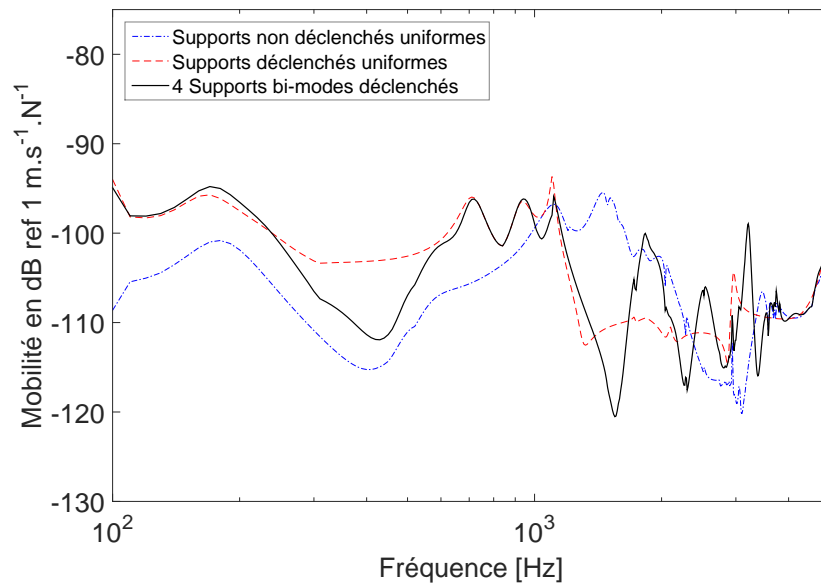
En basses fréquences, on se situe dans une bande de résonance locale ce qui confère à la voie un taux de décroissance élevé dans les trois cas. À partir de 200 Hz, la voie sur supports déclenchés uniformes se découple des supports, les ondes deviennent propagatives et le taux de décroissance chute. Bien que la mobilité au point d'impact de la voie sur 4 supports déclenchés soit très proche de la voie sur supports déclenchés uniformes, le taux de décroissance de cette première ne chute pas après 200 Hz mais reste élevé. Le taux de décroissance est en fait piloté ici par le comportement de la voie loin de la zone centrale et est donc semblable à celui de la voie sur supports non déclenchés.

On observe un pic très important dans la bande de 1000 Hz pour la configuration supports déclenchés uniformes, celui ci correspond à l'anti-résonance de la selle métallique entre les deux semelles. L'anti-résonance confère au support bi-mode une augmentation de sa raideur (voir Fig. 5.21(a)) et donc un accroissement net du taux de décroissance.

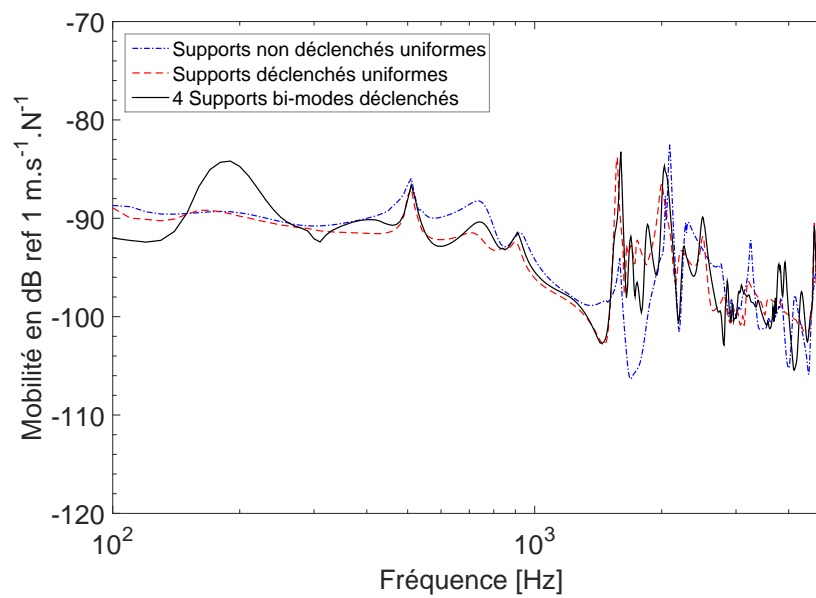
On observe une légère chute du taux pour la voie sur 4 supports déclenchés entre 1000 Hz et 3000 Hz, ce qui correspond à l'apparition des ondes stationnaires. Le taux de décroissance des 3 cas augmente ensuite à partir de 3000 Hz, ceci est dû à la propagation du mode de section vertical qui provoque un battement du pied du rail (voir section 5.3.4).

La Fig. 5.24(b) compare les taux de décroissance latéraux des 3 configurations. Tout comme le taux vertical, celui sur les 4 supports déclenchés est bien plus proche de celui de la voie sur supports déclenchés uniformes. Bien que les raideurs latérales tendent vers une valeur commune, l'excitation sur l'arrête de la tête du rail fait travailler les raideurs verticales. Ceci explique les différences avec les taux de décroissance des cas uniformes en hautes fréquences.

La simulation du support bi-mode sur voie a donc montré les intérêts de cette solution technique. Elle confère localement autour de la roue, une raideur souple aux supports permettant de mieux répartir les efforts le long de la voie et de préserver l'infrastructure. Cependant, elle rigidifie les supports loin de la roue, ce qui a pour conséquences directes une augmentation du taux de décroissance et donc une réduction du rayonnement acoustique. De plus, les phénomènes d'ondes stationnaires, dus à une portion centrale souple bordée par des raideurs plus élevées, sont réduits par la selle métallique qui joue le rôle de batteur dynamique en basses fréquences. Le support bi-mode a donc montré ses performances en étant capable de limiter la propagation des ondes tout en protégeant l'infrastructure ferroviaire.

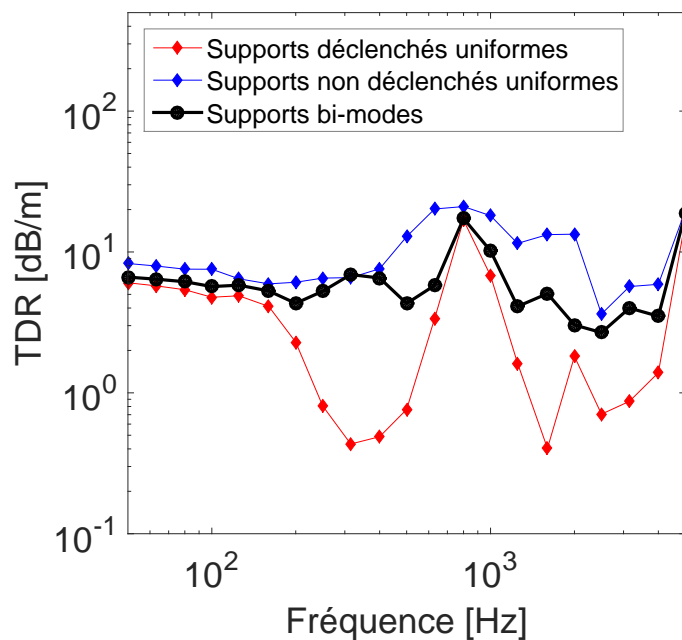


(a)

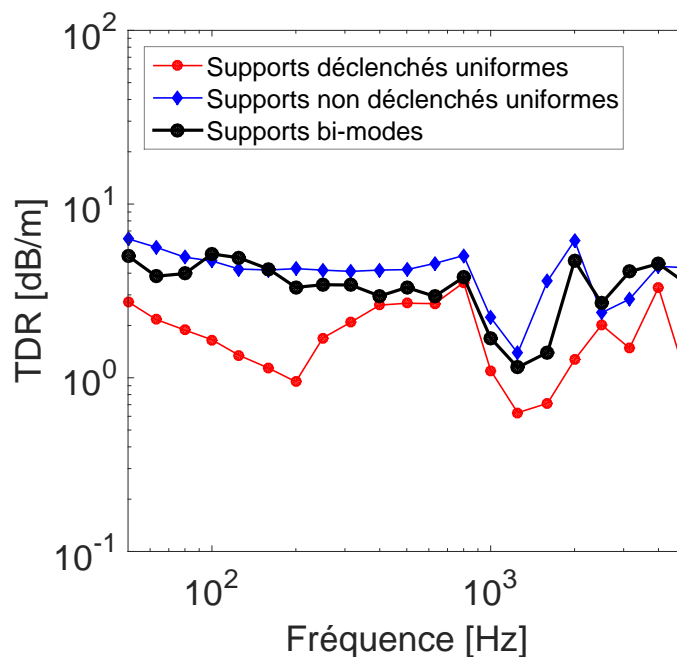


(b)

FIGURE 5.23 – Mobilité (a) verticale (b) latérale entre deux supports de la voie avec supports bi-modes



(a)



(b)

FIGURE 5.24 – Taux de décroissance (a) vertical (b) latéral de la voie avec les supports bi-modes



## 5.5 Conclusion

Ce dernier chapitre a permis d'appliquer les outils numériques développés dans les chapitres de cette thèse pour l'étude d'une voie ballastée comprenant une solution anti-vibratile. Pour appliquer la méthode de bi-périodisation associée au couplage FEM-WFEM, il a fallu dans un premier temps calculer les modes de propagation d'une tranche de rail libre de 1cm de largeur. Un ensemble d'ondes de propagation ont pu être analysées. L'étude a révélé un certain nombre de modes de section qui apparaissaient après 1500 Hz, en accord avec les informations relevées dans la bibliographie. Ces modes justifient l'utilisation d'un modèle éléments finis pour reconstruire la réponse dynamique de la voie ferrée. Un maillage quadratique a été sélectionné après une étude de convergence, ce qui assure un bon compromis entre performances et nombre de degrés de liberté par section.

Une fois les modes de propagation de la tranche élémentaire calculés, la méthode de bi-périodisation associée au couplage FEM-WFEM a pu être appliquée. Pour cela, les supports sous le rail ont été modélisés par un logiciel éléments finis afin de récupérer les matrices d'impédance qui ont été injectées au niveau du pied du rail. Les constantes de propagation de la cellule physique ont révélés un ensemble de bandes d'atténuation des différentes ondes présentes au sein de la travée. Les mobilités de la voie ballastée ont été tracées au dessus et entre deux supports puis comparées à des données expérimentales de la littérature. L'accord calculs mesures est bon sur la plage fréquentielle, malgré de légères baisses du niveau vibratoire en hautes fréquences pour l'impact situé sur les supports. Cette différence provient de l'application du principe de périodicité à une cellule longue qui contraint une sélection du nombre de modes (pour des raisons de stabilité numérique) et donc une sous-estimation de la participation des ondes très évanescences en hautes fréquences. De plus, l'accord simulations mesures des taux de décroissance des ondes le long de la voie est très bon sur la plage fréquentielle.

Après validation du modèle par rapport aux données expérimentales, l'étude a été portée sur l'évaluation d'un dispositif anti-vibratile développé au sein du projet CERVIFER. C'est un support bi-mode qui propose deux caractéristiques mécaniques en fonction de la charge sur le rail. En présence de la roue, le support repose sur un ensemble d'étage de semelles et devient donc souple. Ceci permet de répartir correctement la charge sur plusieurs travées et donc évite de détériorer l'infrastructure. Sans présence de la roue, le support est raidi et agit comme un piège à ondes permettant d'augmenter les taux de décroissance de la voie. Les premières simulations,

réalisées en simplifiant le support bi-mode à une raideur constante, ont révélé la présence d'ondes stationnaires dues à la portion centrale souple bordée par des supports raides. Cependant, les simulations réalisées avec les raideurs numériques du support à étage ont montré que la selle métallique du support permettait d'atténuer ces ondes stationnaires en basses fréquences. L'évaluation des taux de décroissance a confirmé les bénéfices d'un tel dispositif sur la propagation des ondes, et a permis de valider l'intérêt de cette solution pour la suite du projet CERVIFER.

# Conclusion générale

## 5.6 Synthèse

Dans ce mémoire de thèse, la théorie des milieux périodiques unidimensionnels en éléments finis a été appliquée à l'étude d'une voie ballastée comprenant une solution anti-vibratile. Un modèle numérique de la voie infinie comprenant une partie non périodique a été réalisé pour répondre à la problématique de thèse.

Une étude bibliographique a tout d'abord permis de dégager les principales méthodes numériques utilisées pour la modélisation du comportement dynamique de la voie ballastée. Les modèles analytiques se sont révélés être limités à 1500 Hz car la contribution des modes de section  $y$  devient prépondérante. Pour une étude en hautes fréquences, il est devenu primordial de travailler avec des modèles reproduisant la géométrie réelle du rail par éléments finis. Ces derniers sont utilisés par des méthodes numériques telles que la SAFE (Semi Analytical Finite Element) et la WFE (Wave Finite Element), qui permettent de calculer la réponse dynamique de structures périodiques. La WFE a été choisie car elle répond mieux aux problématiques posées par le projet CERVIFER, à savoir, développer des modèles intégrant des solutions anti-vibratiles sur la voie.

L'analyse du comportement dynamique de la voie ballastée a été effectuée en utilisant un modèle analytique périodique. Celui-ci a permis de comprendre les principaux mécanismes de propagation d'ondes de flexion d'un rail supporté de manière périodique. La réponse du rail a été calculée par l'intermédiaire d'une fonction de Green. Un ensemble de bandes d'atténuation ont été décrites et liées aux modes propres d'une cellule élémentaire. L'étude paramétrique a montré l'intérêt d'utiliser des semelles raides pour augmenter les taux de décroissance des ondes. Ce modèle analytique a permis de valider les résultats des premières approches en éléments finis réalisées au cours de la thèse.

Pour implémenter la géométrie du rail dans le modèle, la méthode WFE a été sélectionnée et étudiée, notamment au niveau des différentes formulations existantes. Deux approches ont été considérées, la WA (Wave Approach) et la DSM (Dynamic Stiffness Matrix). La WA s'est révélée efficace pour calculer la réponse de structures périodiques finies ou infinies. La seconde ne s'applique qu'aux structures finies mais permet d'obtenir la matrice de raideur dynamique condensée d'une structure. Les deux méthodes ont montré la possibilité de travailler avec des bases modales réduites afin de limiter les temps de calcul. De plus, une méthode de calcul basée sur une transformation de type  $\mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1}$  a permis de limiter les erreurs numériques dues à l'application du principe de périodicité à des cellules longues.

La condensation dynamique de cellules longues peut cependant être très lourde en temps de calcul. Ainsi, une méthode de bi-périodisation associée au couplage des méthodes WFE et des éléments finis a été proposée. La bi-périodisation se base sur la formulation DSM pour condenser une partie homogène de la cellule élémentaire. Le couplage permet d'inclure des portions hétérogènes sur lesquelles sont appliqués des supports élastiques répartis. La réponse forcée a été développée en tout point de la structure infinie. La modélisation a été étendue à une structure comprenant une partie centrale non périodique et qui est couplée à deux structures semi-infinies.

Les méthodes numériques présentes dans cette thèse ont été utilisées pour l'étude d'une solution anti-vibratile sur voie ballastée. La section d'un rail UIC 60 a donc été maillée par éléments finis, des supports élastiques répartis ont été appliqués aux extrémités d'une cellule élémentaire. Les résultats ont montré un très bon accord calculs-mesures pour les mobilités et les taux de décroissance des ondes. Une solution anti-vibratile qui consiste à modifier la raideur des supports en fonction de la position de la roue sur la voie a été étudiée. Les premiers résultats ont validé les performances escomptées du dispositif dans le cadre du projet CERVIFER. Le support bi-mode permet en effet de limiter la raideur des supports localement autour de la roue afin de préserver le matériel, tout en garantissant une raideur élevée loin de la roue pour augmenter les taux de décroissance des ondes.

## 5.7 Perspectives

Les travaux réalisés dans cette thèse ont permis de modéliser une voie ballastée infinie en éléments finis comprenant une partie centrale non périodique. Afin de permettre au projet CERVIFER d'accomplir les objectifs de pré-certification numérique et d'homologation de l'infrastructure, nous proposerons ici quelques perspectives découlant du modèle.

Les premiers résultats de l'étude du support bi-mode se sont révélés très prometteurs. Pour poursuivre l'étude, il serait judicieux dans un premier temps d'obtenir les raideurs expérimentales du dispositif. Tout comme la procédure numérique, l'application d'un effort tri-directionnel à l'aide d'un vérin piloté en fréquence permettrait d'obtenir les déplacements à la surface du support, et donc les raideurs associées. Ensuite, un essai du dispositif sur voie pourrait être réalisé. Pour cela, 4 supports déclenchés seraient disposés sur la voie, les autres supports seraient alors en configuration non déclenchée. L'étude des mobilités permettrait de s'assurer que les ondes stationnaires sont atténuées en basses fréquences grâce à la selle métallique. Enfin, une mesure des taux de décroissance sur voie confirmerait ou non l'intérêt du dispositif pour la réduction des nuisances sonores et vibratoires.

Pour le modèle numérique, afin de prendre en considération le déplacement du train en conditions de circulation, une force mobile pourrait être implémentée dans le modèle. Celle-ci serait calculée par transformée de Fourier spatiale et permettrait d'obtenir une réponse vibratoire plus proche du mécanisme du bruit de roulement. De plus la prise en compte d'excitations multiples liées à la présence de plusieurs roues pourrait être implémentée.

Afin d'obtenir les niveaux d'émission acoustique de la voie, la réponse vibratoire obtenue grâce au modèle pourrait être calculée en l'implémentant directement dans un code éléments finis de type BEM-FEM. En utilisant les vitesses de la peau du rail, il est possible de faire rayonner le rail dans un environnement infini. Le couplage fluide-structure est considéré comme faible dans la mesure où la dynamique du rail n'est pas influencée par la dynamique de l'air. La méthode de périodisation appliquée à la dynamique du rail pourrait de plus être une source d'inspiration pour simuler plus rapidement le rayonnement acoustique de la voie dans le cadre du bruit de roulement.



# Bibliographie

- [1] D.J. Thompson. *Railway noise and vibration : mechanisms, modelling and means of control*. Elsevier Science, December 2008.  
*10 citations pages 4, 5, 6, 8, 10, 13, 31, 36, 44, et 46*
- [2] P.J. Remington. Wheel/rail rolling noise, I : Theoretical analysis. *The journal of the Acoustical Society of America*, 81(6) :1805–1823, 1987.  
*2 citations pages 4 et 5*
- [3] D.J. Thompson. *Ph.D. Thesis, University of Southampton. Wheel-rail noise : theoretical modelling of the generation of vibrations*. PhD thesis, 1990.  
*Cité page 4*
- [4] B. Betgen and N. Vincent. Rapport technique sur lot 1.tâche 1.1 projet cervifer - spécification des besoins en termes de logiciels pour la modélisation du bruit de roulement. Technical report, Vibrattec, 2014.  
*2 citations pages 7 et 8*
- [5] D.J Thompson. Twins track-wheel interaction noise software theoretical manual (version 3.0). Technical report, 1999.  
*2 citations pages 7 et 12*
- [6] G. Floquet. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, (Sér. 2, 12) :47–88, 1883.  
*3 citations pages 9, 22, et 28*
- [7] C.H. Wilcox. Theory of bloch waves. *Journal d'Analyse Mathématique*, 33(1) :146–167, 1978.  
*5 citations pages 9, 11, 22, 28, et 94*
- [8] D.J. Mead. Free wave propagation in periodically supported, infinite beams. *Journal of Sound and Vibration*, 11(2) :181 – 197, 1970.  
*3 citations pages 9, 11, et 25*
- [9] D.J. Mead. A general theory of harmonic wave propagation in linear periodic systems with multiple coupling. *Journal of Sound and Vibration*, 27(2) :235–260, 1973.  
*4 citations pages 11, 13, 14, et 22*

- [10] D.J. Mead. Wave propagation and natural modes in periodic systems I mono coupled systems. *Journal of Sound and Vibration*, 40(1) :1–18, 1975.  
5 citations pages 24, 32, 33, 37, et 38
- [11] D.J. Mead. Wave propagation and natural modes in periodic systems : II. multi-coupled systems, with and without damping. *Journal of Sound and Vibration*, 40(1) :19 – 39, 1975.  
6 citations pages 22, 23, 24, 33, 34, et 59
- [12] D.J. Mead. Wave propagation in continuous periodic structures : Research contributions from southampton, 1964–1995. *Journal of Sound and Vibration*, 190(3) :495 – 524, 1996.  
2 citations pages 9 et 24
- [13] P.J. Remington. Wheel/rail noise – part 1 : Characterization of the wheel/rail dynamic system. *Journal of Sound and Vibration*, 46 :359–379, 1976. Cité page 9
- [14] S.L. Grassie, R.W. Gregory, D. Harrison, and K.L. Johnson. The dynamic response of railway track to high frequency vertical excitation. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 24 :77–90, 1982.  
Cité page 9
- [15] M.A. Heckl. Railway noise – can random sleeper spacings help? *Journal of the Acoustical Society of America*, 81 :559–564, 1995.  
Cité page 11
- [16] M.A. Heckl. Coupled waves on a periodically supported timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration*, 252 :849–882, 2002.  
2 citations pages 11 et 26
- [17] T.X. Wu and D.J. Thompson. The effects of local preload on the foundation stiffness and vertical vibration of railway track. *Journal of Sound and Vibration*, 219(5) :881–904, 1999.  
3 citations pages 11, 90, et 134
- [18] A. Nordborg. Vertical rail vibrations : Pointforce excitation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 84 :280–288, 1998.  
2 citations pages 12 et 25
- [19] J.F. Hamet. Railway noise : Use of the timoshenko model in rail vibration studies. *Journal of the Acoustical Society of America*, 85 :54–62, 1999.  
4 citations pages 12, 25, 28, et 40
- [20] M.L. Munjal and M. Heckl. Vibrations of a periodic rail-sleeper system excited by an oscillating stationary transverse force. *Journal of Sound and Vibration*, 81(4) :491 – 500, 1982.  
Cité page 12
- [21] D.J. Thompson. Wheel-rail noise generation, part III : rail vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 161 :421–446, 1993.  
5 citations pages 12, 13, 14, 15, et 29



- [22] D.J. Thompson and N. Vincent. Track dynamic behaviour at high frequencies. part 1 : Theoretical models and laboratory measurements. *Vehicle System Dynamics*, 24(sup1) :86–99, 1995. *Cité page 12*
- [23] B. Aalami. Waves in prismatic guides of arbitrary cross section. *Journal of Applied Mechanics*, 40(4) :1067–1072, 1973. *Cité page 13*
- [24] L. Gavric. Computation of propagative waves in free rail using a finite element technique. *Journal of Sound and Vibration*, 185(3) :531–543, 1995. *Cité page 13*
- [25] W.J. Song T. Hayashi and J.L. Rose. Guided wave dispersion curves for a bar with an arbitrary cross-section, a rod and rail example. *Ultrasonics*, 41(3) :175 – 183, 2003. *Cité page 13*
- [26] P.R. White J. Ryue, D.J. Thompson and D.R. Thompson. Investigations of propagating wave types in railway tracks at high frequencies. *Journal of Sound and Vibration*, 315(1–2) :157 – 175, 2008. *Cité page 13*
- [27] K.L. Knothe and S.L. Grassie. Modelling of railway track and vehicle/track interaction at high frequencies. *Vehicle system dynamics*, 22(3-4) :209–262, 1993. *Cité page 13*
- [28] M. Pandyt and M. Orris. A finite element study of harmonic wave propagation in periodic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 33 :223–236, 1973. *Cité page 13*
- [29] J.M. Renno and B.R. Mace. On the forced response of waveguides using the wave and finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, 329(26) :5474 – 5488, 2010. *3 citations pages 14, 52, et 75*
- [30] G.P. Brown and K.P. Byrne. Determining the response of infinite, one-dimensional, non-uniform periodic structures by substructuring using wave-shape coordinates. *Journal of Sound and Vibration*, 287 :421–446, 1993. *5 citations pages 14, 15, 16, 54, et 56*
- [31] R.A. Dwight W. Li and T. Zhang. On the study of vibration of a supported railway rail using the semi-analytical finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, 345 :121 – 145, 2015. *Cité page 14*
- [32] L. Gry. Dynamic modelling of railway track based on wave propagation. *Journal of Sound and Vibration*, 195(3) :477 – 505, 1996. *6 citations pages 14, 15, 62, 63, 117, et 123*

- [33] L. Gry and C. Gontier. Dynamic modelling of railway track : A periodic model based on a generalized beam formulation. *Journal of Sound and Vibration*, 199(4) :531 – 558, 1997. *Cité page 15*
- [34] C.J.C. Jones X. Sheng and D.J. Thompson. Responses of infinite periodic structures to moving or stationary harmonic loads. *Journal of Sound and Vibration*, 282(1) :125–149, 2005. *Cité page 15*
- [35] X. Sheng and M.H. Li. Propagation constants of railway tracks as a periodic structure. *Journal of sound and vibration*, 299(4) :1114–1123, 2007. *3 citations pages 15, 35, et 36*
- [36] Lord Rayleigh Sec. R. S. XVII. on the maintenance of vibrations by forces of double frequency, and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure. *Philosophical Magazine Series 5*, 24(147) :145–159, 1887. *Cité page 24*
- [37] L. Brillouin. *Wave Propagation in Periodic Structures*. McGraw-Hill Publishing, New York, 1946. *2 citations pages 24 et 31*
- [38] G. Sen Gupta. Natural flexural waves and the normal modes of periodically-supported beams and plates. *Journal of Sound and Vibration*, 13(1) :89 – 101, 1970. *Cité page 25*
- [39] B.R. Mace. Periodically stiffened fluid-loaded plates, I : Response to convected harmonic pressure and free wave propagation. *Journal of Sound and Vibration*, 73(4) :473 – 486, 1980. *Cité page 25*
- [40] L. Liu and M.I. Hussein. Wave motion in periodic flexural beams and characterization of the transition bandween bragg scattering and local resonance. *Journal of Applied Mechanics*, 79(1) :011003, 2012. *2 citations pages 37 et 38*
- [41] D. Duhamel, B.R. Mace, and M.J. Brennan. Finite element analysis of the vibrations of waveguides and periodic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 294(1–2) :205 – 220, 2006. *7 citations pages 52, 53, 59, 62, 63, 70, et 172*
- [42] D.J. Mead. The forced vibration of one-dimensional multi-coupled periodic structures : An application to finite element analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 319(1–2) :282 – 304, 2009. *4 citations pages 52, 69, 75, et 92*

- [43] G. Dhatt, G. Touzot, and E. Lefrançois. *Méthode des éléments finis*. Lavoisier, 2005. *Cité page 53*
- [44] J.-M. Mencik. On the low- and mid-frequency forced response of elastic structures using wave finite elements with one-dimensional propagation. *Computers and Structures*, 88 :674–689, 2010. *6 citations pages 54, 55, 60, 61, 62, et 75*
- [45] W.X. Zhong and F.W. Williams. On the direct solution of wave propagation for repetitive structures. *Journal of Sound and Vibration*, 181(3) :485 – 501, 1995. *3 citations pages 54, 60, et 63*
- [46] C.B. Moler and G.W. Stewart. An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 10(2) :241–256, 1973. *Cité page 56*
- [47] J.-Louis Batoz and G. Dhatt. *Modélisation des structures par éléments finis : Solides élastiques*, volume 1. Presses Université Laval, 1990. *Cité page 57*
- [48] M. Petyt. *Introduction to finite element vibration analysis*. Cambridge university press, 2010. *Cité page 58*
- [49] Y. Waki. *On the application of finite element analysis to wave motion in one-dimensional waveguides*. PhD thesis, University of Southampton, 2007. *3 citations pages 58, 75, et 80*
- [50] J.-M. Mencik. New advances in the forced response computation of periodic structures using the wave finite element (wfe) method. *Computational Mechanics*, 54(3) :789–801, 2014. *4 citations pages 61, 62, 69, et 76*
- [51] J.-M. Mencik. A model reduction strategy for computing the forced response of elastic waveguides using the wave finite element method. *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering*, 229–232 :68 – 86, 2012. *Cité page 62*
- [52] B.R. Mace Y. Waki and M.J. Brennan. Numerical issues concerning the wave and finite element method for free and forced vibrations of waveguides. *Journal of Sound and Vibration*, 327(1–2) :92 – 108, 2009. *3 citations pages 62, 79, et 92*
- [53] G.H Golub and C.F Van Loan. *Matrix computations*, volume 3. JHU Press, 2012. *Cité page 62*

- [54] J.-M. Mencik and D. Duhamel. A wave-based model reduction technique for the description of the dynamic behavior of periodic structures involving arbitrary-shaped substructures and large-sized finite element models. *Finite Elements in Analysis and Design*, 101 :1 – 14, 2015.  
*7 citations pages 62, 63, 70, 74, 77, 86, et 102*
- [55] T.-M Huang, W.-W Lin, and J. Qian. Structure-preserving algorithms for palindromic quadratic eigenvalue problems arising from vibration of fast trains. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 30(4) :1566–1592, 2009.  
*4 citations pages 62, 63, 166, et 168*
- [56] R.V. Patel. On computing the eigenvalues of a symplectic pencil. *Linear Algebra and its Applications*, 188 :591 – 611, 1993. *2 citations pages 63 et 166*
- [57] M.N. Ichchou, J.-M. Mencik, and W. Zhou. Wave finite elements for low and mid-frequency description of coupled structures with damage. *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(15–16) :1311 – 1326, 2009.  
*3 citations pages 88, 108, et 109*
- [58] J.W. Verheij, D.J. Thompson, and W.J. Van. Developments of the indirect method for measuring the high frequency dynamic stiffness of resilient elements. 1998. *Cité page 90*
- [59] J.-M. Mencik and M.N. Ichchou. Multi-mode propagation and diffusion in structures through finite elements. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 24(5) :877 – 898, 2005. *2 citations pages 108 et 109*
- [60] M.N. Ichchou, J.-M. Mencik, and L. Jézéquel. Propagation multimodale dans les systèmes périodiques couplés. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 15(1-3) :293–305, 2006. *Cité page 109*
- [61] C. Geuzaine and J.-F. Remacle. Gmsh : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11), :1309–1331, 2009. *Cité page 116*
- [62] C.J.C. Jones, D.J. Thompson, and R.J. Diehl. The use of decay rates to analyse the performance of railway track in rolling noise generation. *Journal of Sound and Vibration*, 293(3–5) :485 – 495, 2006. Proceedings of the Eighth International

- Workshop on Railway Noise Proceedings of the Eighth International Workshop on Railway Noise. *2 citations pages 116 et 128*
- [63] G. Squicciarini, X. Zhang, S. Rushworth, M. Toward, B. Broadbent, D.J. Thompson, B. Betgen, and E. Jansen. Virtual certification of acoustic performance for freight and passenger trains - d2.7 – improved model components. Technical report, Institute of Sound and Vibration Research, 2014. *Cité page 130*
- [64] D.J. Thompson. Experimental analysis of wave propagation in railway tracks. *Journal of Sound and Vibration*, 203(5) :867 – 888, 1997. *Cité page 130*
- [65] L. Beaubatie, O. Tanneau, S. Dalle, and T. Gras. Lot 4 – tâche 4.3 – rapport technique n°4.3 - c démonstrateurs de systèmes d’amortisseurs des vibrations. Technical report, CERVIFER, 2017. *3 citations pages 132, 136, et 137*



# Annexe A

## Théorie des poutres en flexion

Par convention, les composantes du déplacement seront écrites telles que :  $\xi(z, t) = \tilde{A}e^{-ikz}e^{i\omega t}$  pour des ondes se propageant dans la direction  $z > 0$  avec  $\Re(k) > 0$  et  $\Im(k) > 0$ . Avec  $k$  la constante de propagation en  $m^{-1}$ ,  $\omega$  la pulsation en  $s^{-1}$  et  $i$  le nombre imaginaire tel que  $i^2 = -1$ .

### A.1 Hypothèses

Une poutre est un solide engendré par une surface plane d'aire  $A$  dont le centre d'inertie de ce plan, noté  $G$ , décrit une courbe  $(O_1 O_2)$  représentant l'axe neutre de la poutre. La poutre est située dans un repère orthonormée  $(O_1, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

L'étude des poutres en flexion admet les hypothèses suivantes :

1. La section droite de la poutre est indéformable.
2. Le déplacement transversal est uniforme sur la section droite.
3. La section subit un déplacement vertical suivant l'axe  $x$ .
4. La section subit une rotation autour de l'axe  $y$ .
5. Les déplacements et déformations sont petits.

Ceci permet d'exprimer le déplacement en n'importe quel point de la section de la poutre par rapport aux déplacements de l'axe neutre.

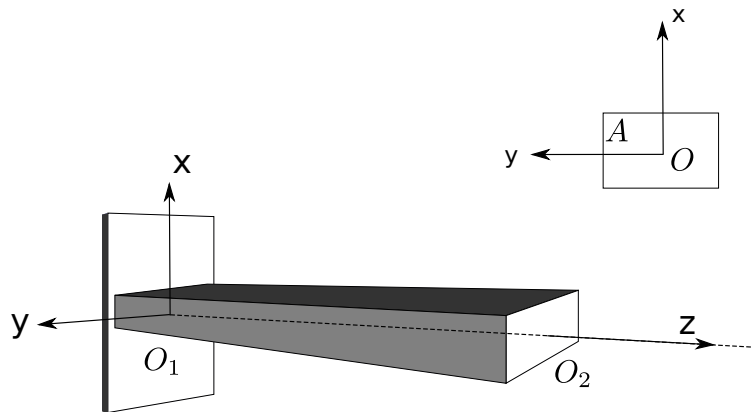


FIGURE A.1 – Poutre droite

## A.2 Équation du mouvement en flexion

La flexion est le mouvement de translation et de rotation autour d'un axe perpendiculaire à l'axe neutre. Les équations du mouvement sont présentées pour des poutres en flexion autour de l'axe  $\vec{y}$  (voir Fig. A.2) ou  $\vec{x}$ . Le déplacement vertical sera noté  $v(z)$  et la rotation autour de l'axe  $\vec{y}$  sera notée  $\theta_y$ .

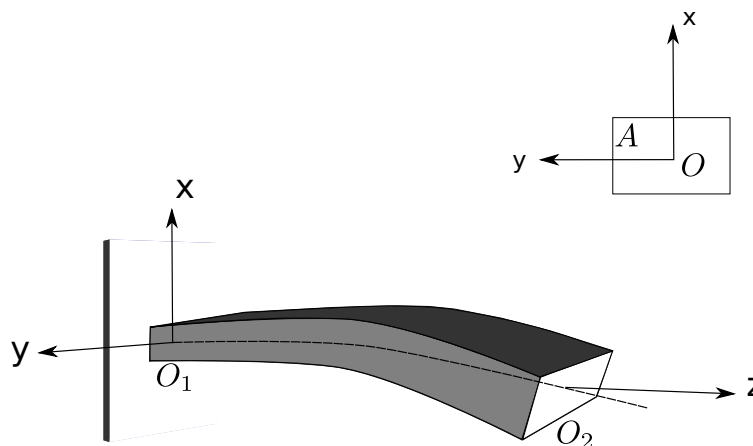
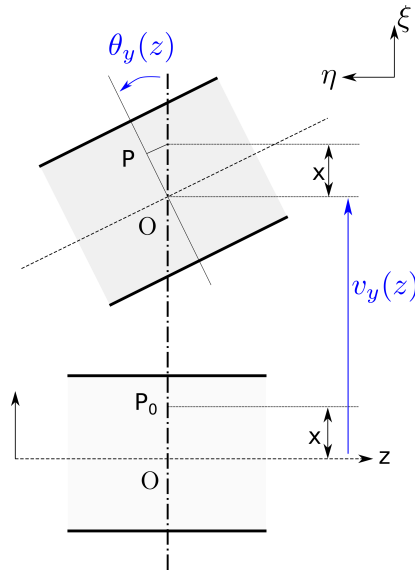
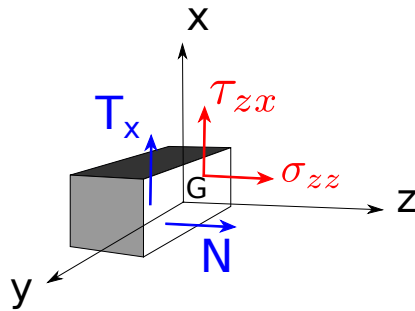


FIGURE A.2 – Discrétisation d'une poutre en flexion

### A.2.1 Déformation contraintes et efforts résultants dans une section droite

La Fig. A.3 représente le champ des déplacements de la poutre dans le plan  $(O x z)$ . Il est possible d'exprimer le déplacement suivant l'axe  $x$  et  $z$  d'un point  $P$  appartenant à la poutre en fonction de la rotation  $\theta_y$  autour de l'axe  $y$  et du déplacement  $v$  vertical



FIGURE A.3 – Déplacements d'une section droite dans le plan  $(O x z)$ FIGURE A.4 – Déplacements d'une section droite dans le plan  $(O x z)$ 

de la section. Ainsi :

$$\begin{cases} \eta(x, z) = -x \theta_y(z) \\ \xi(x, z) = \xi(z) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

La section subit une contrainte normale et tangentielle dans son plan (voir Fig. A.4).

Or, les grandeurs élastiques dans la section s'expriment :

$$\begin{cases} \varepsilon_{zz} = \frac{\partial \eta}{\partial z} = -x \frac{\partial \theta_y}{\partial z} \\ \varepsilon_{zx} = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} = -\theta_y + \frac{\partial \xi}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{cases} \sigma_{zz} = E\varepsilon_{zz} = -E x \frac{\partial\theta_y}{\partial z} \\ \tau_{zx} = \Gamma \varepsilon_{zx} = \Gamma \left(-\theta_y + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right) \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Avec :

$$\Gamma = G\kappa$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} : \text{Module de cisaillement}$$

E : Module de Young

$\kappa$  : Coefficient d'aire cisailée

$\nu$  : Coefficient de Poisson

Le coefficient de Poisson permet de caractériser la déformation de la section par rapport à une effort appliqué dans la direction perpendiculaire. Le coefficient d'aire cisailée  $\kappa$  est défini par :

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{A}{T_x} \int_A \tau_{zx}^2 dA \quad (\text{A.4})$$

Il représente le fait que le cisaillement n'est pas réparti de manière uniforme au sein de la section. Les efforts résultants de la section s'expriment donc :

$$\text{Effort normal : } N = \int_A \sigma_{zz} dA = -E \frac{\partial\theta_y}{\partial z} \int_A x dA \quad (\text{A.5})$$

Le moment statique d'une section de densité homogène par rapport à un axe passant par son centre de gravité est nul. Or, le centre de gravité étant centre du repère, le moment statique de la section par rapport à l'axe (Gy) est donc nul :

$$\int_A x dA = 0 \quad (\text{A.6})$$

D'où l'effort normal nul  $N = 0$ .

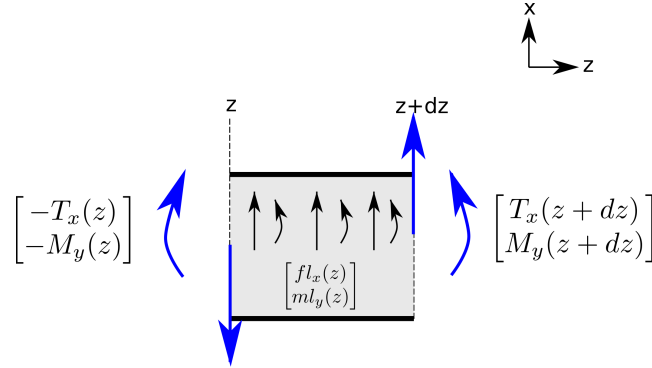
$$\text{Effort tranchant : } T_x = \int_A \tau_{zx} dA = \Gamma A \left(-\theta_y + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right) \quad (\text{A.7})$$

$$\text{Moment fléchissant : } M_y = \left( \int_A (x \vec{x}) \wedge (\sigma_{zz} dA \vec{z}) \right) \cdot \vec{y} \quad (\text{A.8})$$

$$M_y = - \int_A x \sigma_{zz} dA = E \frac{\partial\theta_y}{\partial z} \int_A x^2 dA = EI_y \frac{\partial\theta_y}{\partial z}$$

$I_y = \int_A x^2 dA$  est le moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe ( $O_1y$ ).

## A.2.2 Équilibre dynamique

FIGURE A.5 – *Équilibre dynamique d'une portion de poutre de longueur dz*

Par soucis de clarté, la variable temporelle ne sera pas clairement écrite dans le paragraphe suivant. La tranche de poutre comprise entre  $z$  et  $z + dz$  est soumise aux efforts tranchants et aux moments appliqués aux extrémités (notés respectivement  $T_x$  et  $M_y$ ). De plus, la tranche est soumise à une charge répartie et à un couple linéique (notés respectivement  $f l_x$  et  $m l_y$ ). La formulation de Taylor pour les efforts en  $z + dz$  d'ordre 1 s'écrit :

$$T_x(z + dz) = T_x(z) + \frac{\partial T_x}{\partial z}(z)dz + o(dz - z) \quad (\text{A.9})$$

$$M_y(z + dz) = M_y(z) + \frac{\partial M_y}{\partial z}(z)dz + o(dz - z) \quad (\text{A.10})$$

Or l'équilibre dynamique de cette tranche s'écrit :

$$\int_V \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x, z) dV = T_x(z + dz) - T_x(z) + \int f l_x(z) dz \quad (\text{A.11})$$

$$\int_V -\rho x \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}(x, z) dV = M_y(z + dz) - M_y(z) + T_x(z)dz + \int m l_y(z) dz \quad (\text{A.12})$$

En considérant les efforts extérieurs comme étant constants suivant  $dz$ , on obtient à l'ordre 1 près :

$$\rho A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} dz = \frac{\partial T_x}{\partial z} dz + f l_x dz \quad (\text{A.13})$$

$$\rho I_y \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} dz = \frac{\partial M_y}{\partial z} dz + T_x dz + m l_y dz \quad (\text{A.14})$$

### A.2.3 Équations différentielles du mouvement

On obtient les équations différentielles du mouvement d'après les Eqs. (A.9) et (A.7) :

$$\rho A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \Gamma A \left( -\theta_y + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \right) + fl_x \quad (\text{A.15})$$

$$\rho I_y \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left( EI_y \frac{\partial \theta_y}{\partial z} \right) + \Gamma A \left( -\theta_y + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) + ml_y \quad (\text{A.16})$$

Si la poutre est de section constante et est du même matériau le long de l'axe longitudinal, il est possible de combiner ces deux équations. Tout d'abord, on dérive une fois l'Eq. (A.16) par rapport à  $z$  :

$$\rho I_y \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial z \partial t^2} = EI_y \left( \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial z^3} \right) + \Gamma A \left( -\frac{\partial \theta_y}{\partial z} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) \quad (\text{A.17})$$

L'Eq. (A.15) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial z} = \frac{1}{\Gamma A} \left( -\rho A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + fl_x \right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \quad (\text{A.18})$$

L'équation combinée se déduit ainsi des Eqs. (A.17) et (A.18) :

$$\begin{aligned} EI_y \left( \frac{1}{\Gamma A} \left( -\rho A \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2 fl_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} \right) + \Gamma A \left( - \left( \frac{1}{\Gamma A} \left( -\rho A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + fl_x \right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) \\ - \rho I_y \left( \frac{1}{\Gamma A} \left( -\rho A \frac{\partial^4 \xi}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 fl_x}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$$EI_y \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} + \rho A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \left[ \rho I_y + \frac{\rho EI_y}{\Gamma} \right] \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I_y}{\Gamma} \frac{\partial^4 \xi}{\partial t^4} = fl_x - \frac{EI_y}{\Gamma A} \frac{\partial^2 fl_x}{\partial z^2} + \frac{\rho I_y}{\Gamma A} \frac{\partial^2 fl_x}{\partial t^2} \quad (\text{A.20})$$

Les termes de l'Eq. A.20 représentent :

1.  $\rho A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$  le terme d'inertie de translation
2.  $\rho I_y \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2}$  l'inertie de rotation de flexion
3.  $\frac{\rho EI_y}{\Gamma} \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2}$  l'inertie de rotation en considérant le cisaillement transverse
4.  $\frac{\rho^2 I_y}{\Gamma} \frac{\partial^4 \xi}{\partial t^4}$  le couplage entre l'inertie de rotation et l'inertie de translation

Le modèle de poutre de Timoshenko prend en compte le cisaillement et autorise la rotation des sections par rapport à la fibre neutre. Il est ainsi possible de modéliser des poutres à l'élancement (hauteur de la section/ longueur) faible. Pour le modèle de poutre Euler-Bernouilli, l'inertie de rotation et la déformation due à l'effort tranchant sont négligés. La section droite est considérée comme normale à la déformée de l'axe neutre, la rotation de section est donc définie comme étant la dérivée du déplacement vertical par rapport à  $z$ . Ce qui simplifie les Eqs. (A.20) (A.9) et (A.14) :

$$EI_y \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} + \rho A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = fl_x \quad (\text{A.21})$$

$$\theta_y = \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad (\text{A.22})$$

$$M_y = EI_y \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial z^2} \quad (\text{A.23})$$

$$T_x = -EI_y \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial z^3} \quad (\text{A.24})$$



# Annexe B

## Fonction de Green de flexion d'une poutre de Timoshenko libre infinie

### B.1 Équation différentielle du mouvement

Le mouvement de poutre de Timoshenko est défini par sa flexion verticale  $\xi(z, t)$  et la rotation de sa section  $\theta_y(z, t)$ . Les équations qui régissent le mouvement de la poutre soumise à une force verticale  $F(z, t)$  sont :

$$\begin{cases} M \frac{\partial^2 \xi(z, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \xi(z, t)}{\partial z} - \Gamma A \frac{\partial \theta_y(z, t)}{\partial z} + F(z, t) \\ \rho I_y \frac{\partial^2 \theta_y(z, t)}{\partial t^2} = \Gamma A \left( \frac{\partial \xi(z, t)}{\partial z} - \theta_y(z, t) \right) + B \frac{\partial^2 \theta_y(z, t)}{\partial z^2} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Avec :

G : Module de cisaillement

$\kappa$  : Coefficient d'aire cisailée

$\Gamma = G\kappa$

A : Aire de la section

M : Masse linéique de la poutre

E : Module de Young

I : Moment quadratique de la section

$B = EI_y$

$\rho$  : Masse volumique

$F(z, t)$  : Force d'excitation extérieure

En utilisant la transformée de Fourier par rapport au temps des Eqs. (B.1) et en les combinant, il est possible de réécrire l'équation différentielle de la poutre de Timo-

Timoshenko en flexion pour le déplacement  $\xi(z, \omega)$  :

$$\left[ \left\{ \frac{d^2}{dz^2} + k_c^2 \right\} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} + k_t^2 \right\} - k_B^4 \right] \xi(z, \omega) = \frac{1}{B} \left[ 1 - \frac{B}{K} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} + k_c^2 \right\} \right] F(z, \omega) \quad (\text{B.2})$$

Avec :

$k_B = \left(\frac{M\omega^2}{B}\right)^{1/4}$  : Nombre d'onde de flexion d'une poutre

$k_c = \omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}$  : Nombre d'onde des ondes de compression

$k_t = \omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}$  : Nombre d'onde des ondes de cisaillement

$K = \frac{GM}{\rho}$  : Coefficient de rigidité au cisaillement

## B.2 Ondes de flexion libres

En l'absence de forces extérieures, l'Eq. (B.2) est réduite à l'équation homogène de la poutre libre :

$$\left[ \left\{ \frac{d^2}{dz^2} + k_c^2 \right\} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} + k_t^2 \right\} - k_B^4 \right] \xi(z, \omega) = 0 \quad (\text{B.3})$$

Les solutions générales de l'Eq. (B.3) sont des combinaisons linéaires d'ondes de la forme  $\xi(z, \omega) = e^{\gamma(\omega)z}$ . En substituant l'expression précédente dans l'Eq. (B.3), il est possible de calculer les valeurs de la constante  $\gamma$  des ondes au sein de la poutre de Timoshenko libre. L'équation de dispersion suivante est obtenue :

$$\gamma^4 + (k_c^2 + k_t^2)\gamma^2 - (k_B^4 - k_c^2 k_t^2) = 0 \quad (\text{B.4})$$

Cette équation admet 4 solutions élémentaires :  $ik_p$ ,  $-ik_p$ ,  $k_d$  et  $-k_d$ , en notant :

$$k_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left[ (k_c^2 + k_t^2)^2 + 4(k_B^4 - k_c^2 k_t^2) \right]^{\frac{1}{2}} + (k_c^2 + k_t^2) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.5})$$

$$k_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left[ (k_c^2 + k_t^2)^2 + 4(k_B^4 - k_c^2 k_t^2) \right]^{\frac{1}{2}} - (k_c^2 + k_t^2) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.6})$$

L'onde propagative de la poutre de Timoshenko en flexion verticale est associée au nombre d'onde  $k_p$  et l'onde évanescence est associée au nombre d'onde  $k_d$ . La notation  $\frac{1}{2}$  est associée à la racine carrée à partie réelle positive et à partie imaginaire négative.



Il est possible de réécrire l'Eq. (B.3) comme étant :

$$\left\{ \frac{d^2}{dz^2} + k_p^2 \right\} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} - k_d^2 \right\} \varepsilon(z, \omega) = 0 \quad (\text{B.7})$$

La solution générale de l'équation homogène (B.7) est une combinaison linéaire des 4 solutions élémentaires :

$$\xi(z, \omega) = a_1 e^{k_d z} + a_2 e^{ik_p z} + b_1 e^{-k_d z} + b_2 e^{-ik_p z} \quad (\text{B.8})$$

L'Eq. (B.3) est composée de deux ondes propagatives  $a_2 e^{ik_p z} + b_2 e^{-ik_p z}$  et de deux ondes évanescentes  $a_1 e^{k_d z} + b_1 e^{-k_d z}$ . Le signe  $-$  devant les constantes de propagation correspond à la propagation des ondes dans la direction  $x > 0$ . Les coefficients  $a_1$   $a_2$   $b_1$  et  $b_2$  sont des constantes déterminées par les conditions limites du problème.

### B.3 Fonction de Green de la poutre libre de Timoshenko

La fonction de Green  $G^L(z, z_f, \omega)$  est la réponse de la poutre libre soumise à une force concentrée unitaire en  $z_f$  telle que  $F(z, \omega) = \delta(z - z_f)$ . Elle est donc solution de l'Eq. (B.7) avec second membre :

$$\left[ \left\{ \frac{d^2}{dz^2} + k_p^2 \right\} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} - k_d^2 \right\} \right] G^L(z, z_f, \omega) = \frac{1}{B} \left[ 1 - \frac{B}{K} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} + k_c^2 \right\} \right] \delta(z - z_f) \quad (\text{B.9})$$

La fonction de Green peut être résolue par transformée de Fourier spatiale ou par méthode directe. La méthode directe consiste à intégrer l'Eq. (B.9) de part et d'autre du point  $z = z_f$ .

Le système est considéré comme libre en tout point  $z \neq z_f$ , la fonction de Green est alors solution de l'équation homogène (B.3). La fonction de Green peut être exprimée comme une combinaison linéaire des solutions élémentaires :

$$G^L(z, z_f, \omega) = a_1 e^{k_d(z-z_f)} + a_2 e^{ik_p(z-z_f)} + b_1 e^{-k_d(z-z_f)} + b_2 e^{-ik_p(z-z_f)} \quad (\text{B.10})$$

La fonction doit de plus être bornée sur son ensemble de définition :

$$G^L(z, z_f, \omega) = \begin{cases} a_1 e^{k_d(z-z_f)} + a_2 e^{ik_p(z-z_f)} & \text{si } z < z_e \\ b_1 e^{-k_d(z-z_f)} + b_2 e^{-ik_p(z-z_f)} & \text{si } z > z_e \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

Les coefficients  $a_1$   $a_2$   $b_1$  et  $b_2$  sont déterminés en intégrant successivement l'équation (B.9) par rapport à  $z$  de part et d'autre de  $z_f$ . La fonction de Green étant continue en  $z_f$ , on obtient alors un système de 4 équations pour la résolution des coefficients :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^3}{dz^3} G_\omega^L(z, z_f, \omega) \Big|_{z_f^-}^{z_f^+} + (k_p^2 - k_d^2) \frac{d}{dz} G_\omega^L(z, z_f) \Big|_{z_f^-}^{z_f^+} = \frac{1}{B} \left[ 1 - \frac{B}{K} k_c^2 \right] \\ \frac{d^2}{dz^2} G_\omega^L(z, z_f) \Big|_{z_f^-}^{z_f^+} = 0 \\ \frac{d}{dz} G_\omega^L(z, z_f) \Big|_{z_f^-}^{z_f^+} = -\frac{1}{K} \\ G_\omega^L(z, z_f) \Big|_{z_f^-}^{z_f^+} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{B.12})$$

Or  $k_p^2 - k_d^2 = k_c^2 + k_t^2$ , ce qui conduit au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^3}{dz^3} G_\omega^L(z, z_f) \Big|_{z_f^-}^{z_f^+} = \frac{1}{B} \left[ 1 + \frac{B}{K} k_t^2 \right] \\ \frac{d^2}{dz^2} G_\omega^L(z, z_f) \Big|_{z_f^-}^{z_f^+} = 0 \\ \frac{d}{dz} G_\omega^L(z, z_f) \Big|_{z_f^-}^{z_f^+} = -\frac{1}{K} \\ G_\omega^L(z, z_f) \Big|_{z_f^-}^{z_f^+} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{B.13})$$

La détermination des coefficients  $a_1$   $a_2$   $b_1$  et  $b_2$  revient à résoudre le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -k_d & -ik_p & -k_d & -ik_p \\ -k_d^2 & k_p^2 & k_d^2 & -k_p^2 \\ -k_d^3 & ik_p^3 & -k_d^3 & ik_p^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/K \\ 0 \\ \frac{1}{B} \left[ 1 + \frac{B}{K} k_t^2 \right] \end{pmatrix} \quad (\text{B.14})$$

La fonction de Green associée s'écrit :

$$G_\omega^L(z, z_f) = -\frac{1}{B} [F_d e^{-k_d |z-z_f|} + iF_p e^{-ik_p |z-z_f|}] \quad (\text{B.15})$$

Avec :

$$F_p = \frac{1 - \frac{B}{K} (-k_p^2 + k_c^2)}{2k_p(k_p^2 + k_c^2)} \quad F_d = \frac{1 - \frac{B}{K} (k_d^2 + k_c^2)}{2k_d(k_p^2 + k_c^2)} \quad (\text{B.16})$$

# Annexe C

## Problème aux valeurs propres généralisé $\mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1}$

### C.1 Formulation du nouveau problème aux valeurs propres généralisé

Le problème aux valeurs propres généralisé basé sur la transformation  $\mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1}$  est détaillé dans cette annexe. Il provient [55, 56] d'une reformulation du problème aux valeurs propres généralisé de l'Eq. (3.16) telle que :

$$(\mathbf{M} - \lambda_j \mathbf{R}) \mathbf{t}_j = \mathbf{0} \quad (\text{C.1})$$

Avec :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_c} & \mathbf{I}_{n_c} \\ \mathbf{D}_{LR} & \mathbf{0}_{n_c} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{0}_{n_c} \\ -(\mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR}) & \mathbf{I}_{n_c} \end{bmatrix} \quad \mathbf{t}_j = \begin{bmatrix} \phi_{q_j} \\ \frac{1}{\lambda_j} \mathbf{D}_{RL} \phi_{q_j} \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

Les valeurs propres  $\lambda_j$  de l'Eq. (C.1) sont les mêmes que celles de la matrice de transfert  $\mathbf{T}$ . Comme pour la matrice de transfert, le problème de l'Eq. (C.1) est symplectique [55] ce qui signifie que :

$$\mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{M}^T = \mathbf{R} \mathbf{J} \mathbf{R}^T \quad (\text{C.3})$$

Le lien existant entre le vecteur propre  $\mathbf{t}_j$  et  $\Phi_j$  provient de la deuxième ligne de l'Eq. (3.14) :

$$-\mathbf{F}_L = \frac{1}{\lambda} \mathbf{D}_{RL} \mathbf{q}_L + \mathbf{D}_{RR} \mathbf{q}_L \quad (\text{C.4})$$

D'où :

$$-\phi_{f_j} = \frac{1}{\lambda_j} \mathbf{D}_{RL} \phi_{q_j} + \mathbf{D}_{RR} \phi_{q_j} \quad (\text{C.5})$$

Ce qui mène à la relation entre le le vecteur propre  $\mathbf{t}_j$  et  $\Phi_j$  :

$$\Phi_j = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_c} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}_{RR} & -\mathbf{I}_{n_c} \end{bmatrix} \mathbf{t}_j \quad (\text{C.6})$$

## C.2 Transformation $\mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1}$ du problème

Le vecteur propre  $\mathbf{t}_j$  est scindé en composantes du déplacements et de forces dont les valeurs peuvent être très éloignées. La résolution directe du problème de l'Eq.(C.1) peut être sujet à des instabilités numériques comme explicité dans la section 3.1.2. Il est donc nécessaire d'utiliser la transformation  $\mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1}$  qui permet d'exprimer un nouveau problème selon la valeur propre double  $(\lambda_j + \frac{1}{\lambda_j})$ .

En multipliant l'Eq. (C.1) par  $\mathbf{J}\mathbf{R}^T$  on obtient :

$$\left( \mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{R}^T - \lambda_j \mathbf{R}\mathbf{J}\mathbf{R}^T \right) \mathbf{t}_j = \mathbf{0} \quad (\text{C.7})$$

En divisant l'Eq. (C.1) par  $\lambda_j$  et en la multipliant par  $\mathbf{J}\mathbf{M}^T$  on obtient :

$$\left( \frac{1}{\lambda_j} \mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^T - \mathbf{R}\mathbf{J}\mathbf{M}^T \right) \mathbf{t}_j = \mathbf{0} \quad (\text{C.8})$$

En utilisant l'Eq (C.3) et en additionnant les Eqs. (C.7) (C.8) on obtient :

$$\left( \mathbf{A} - \left( \lambda_j + \frac{1}{\lambda_j} \right) \mathbf{B} \right) \mathbf{p}_j = \mathbf{0} \quad (\text{C.9})$$

Avec les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  de dimension  $[2n_c \times 2n_c]$  telles que :

$$\mathbf{A} = (\mathbf{R}\mathbf{J}\mathbf{M}^T + \mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{R}^T) = \begin{bmatrix} (\mathbf{D}_{RL} - \mathbf{D}_{LR}) & (\mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR}) \\ -(\mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR}) & (\mathbf{D}_{RL} - \mathbf{D}_{LR}) \end{bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

$$(\text{C.11})$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}\mathbf{J}\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_c} & -\mathbf{D}_{RL} \\ \mathbf{D}_{LR} & \mathbf{0}_{n_c} \end{bmatrix} \quad (\text{C.12})$$

### C.3 Retour à la base des vecteurs propres $\Phi$

Les valeurs propres de l'Eq. (C.1) viennent en paires  $(\lambda_j^+, \lambda_j^-)$ , ainsi le problème aux valeur propre généralisé de l'Eq. (C.9) fournit des valeurs propres doubles. Les valeurs propres  $\lambda_j$  sont donc obtenues par la résolution d'une équation du second degrés. Ainsi, la relation  $\lambda_j^+ = \frac{1}{\lambda_j^-}$  est assurée sans risque d'erreur liée à la dispersion numérique.

Une fois les vecteurs propres  $\mathbf{p}_j$  calculés, il est nécessaire de revenir à la base des vecteurs propres  $\Phi$ . Pour cela, on passe par la factorisation de l'Eq. (C.9) :

$$\left( (M\mathbf{J}\mathbf{R}^T - \frac{1}{\lambda_j}\mathbf{R}\mathbf{J}\mathbf{R}^T) - \lambda_j(\mathbf{R}\mathbf{J}\mathbf{R}^T - \frac{1}{\lambda_j}\mathbf{R}\mathbf{J}\mathbf{M}^T) \right) \mathbf{p}_j = 0 \quad (\text{C.13})$$

$$\left( (M\mathbf{J}\mathbf{R}^T - \lambda_j\mathbf{R}\mathbf{J}\mathbf{R}^T) - \frac{1}{\lambda_j}(\mathbf{R}\mathbf{J}\mathbf{R}^T - \lambda_j\mathbf{R}\mathbf{J}\mathbf{M}^T) \right) \mathbf{p}_j = 0 \quad (\text{C.14})$$

En utilisant l'Eq (C.3), on obtient :

$$\left( M(\mathbf{J}\mathbf{R}^T - \frac{1}{\lambda_j}\mathbf{J}\mathbf{M}^T) - \lambda_j\mathbf{R}(\mathbf{J}\mathbf{R}^T - \frac{1}{\lambda_j}\mathbf{J}\mathbf{M}^T) \right) \mathbf{p}_j = 0 \quad (\text{C.15})$$

$$\left( M(\mathbf{J}\mathbf{R}^T - \lambda_j\mathbf{J}\mathbf{M}^T) - \frac{1}{\lambda_j}\mathbf{R}(\mathbf{J}\mathbf{R}^T - \lambda_j\mathbf{J}\mathbf{M}^T) \right) \mathbf{p}_j = 0 \quad (\text{C.16})$$

Ainsi il est possible de faire l'analogie entre les vecteurs propres  $\mathbf{t}_j$  de l'Eq. (C.1) et les vecteurs propres  $\mathbf{p}_j$  tels que [55] :

$$\mathbf{t}_j^+ = (\mathbf{J}\mathbf{R}^T - \frac{1}{\lambda_j^+}\mathbf{J}\mathbf{M}^T)\mathbf{p}_j \quad \mathbf{t}_j^- = (\mathbf{J}\mathbf{R}^T - \lambda_j^+\mathbf{J}\mathbf{M}^T)\mathbf{p}_j \quad (\text{C.17})$$

En utilisant la relation de l'Eq. (C.3) et l'Eq (C.17), on obtient la relation qui permet de passer de la base des vecteurs propres  $\mathbf{p}_j$  aux vecteurs propres  $\Phi_j$  :

$$\Phi_j^+ = \left( \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{I}_{n_c} & \mathbf{0}_{n_c} \\ -\mathbf{D}_{RR} & \mathbf{D}_{RL} \end{array} \right] - \frac{1}{\lambda_j^+} \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{0}_{n_c} & -\mathbf{I}_{n_c} \\ \mathbf{D}_{LR} & -\mathbf{D}_{LL} \end{array} \right] \right) \mathbf{p}_j \quad (\text{C.18})$$

$$\Phi_j^- = \left( \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{I}_{n_c} & \mathbf{0}_{n_c} \\ -\mathbf{D}_{RR} & \mathbf{D}_{RL} \end{array} \right] - \lambda_j^+ \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{0}_{n_c} & -\mathbf{I}_{n_c} \\ \mathbf{D}_{LR} & -\mathbf{D}_{LL} \end{array} \right] \right) \mathbf{p}_j \quad (\text{C.19})$$



## Annexe D

# Dispersion numérique du nombre d'onde de flexion de la poutre d'Euler-Bernouilli

Cet annexe met en évidence la dispersion numérique du nombre d'onde de flexion d'une poutre d'Euler-Bernouilli. L'erreur relative par rapport au nombre d'onde analytique dépend de la longueur de la maille élémentaire. La méthode des différences finies qui approxime les dérivées partielles dans les équations de mouvements permet de montrer facilement cette condition de maillage. Si l'on considère l'Eq. (A.21) du mouvement de la poutre d'Euler sans second membre :

$$EI_y \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} + \rho A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{D.1})$$

En appliquant la transformée de Fourier par rapport au temps et en notant le nombre d'onde de flexion  $k_B = \left( \frac{\rho A \omega^2}{EI_y} \right)^{1/4}$  on obtient :

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} - k_B^4 \xi = 0 \quad (\text{D.2})$$

En discrétisant la poutre en éléments de longueurs  $h$ , le schéma centré d'une dérivée quatrième à l'ordre 4 peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} = \left[ \frac{\xi(z+2h) - 4\xi(z+h) + 6\xi(z) - 4\xi(z-h) + \xi(z-2h)}{h^4} \right] + o(h^4) \quad (\text{D.3})$$

Pour étudier la notion de dispersion numérique, on considère la solution de l'équation

(D.2) avec  $\tilde{k}_B$  le nombre d'onde numérique :

$$\xi(z) = e^{i\tilde{k}_B z} \quad (\text{D.4})$$

En appliquant le schéma ci-dessus et en simplifiant par  $e^{i\tilde{k}z}$  on obtient :

$$\left[ e^{i\tilde{k}_B 2h} + e^{-i\tilde{k}_B 2h} - 4e^{i\tilde{k}_B h} - 4e^{-i\tilde{k}_B h} + 6 \right] - (k_B h)^4 = 0 \quad (\text{D.5})$$

$$\left[ 8 \cos(\tilde{k}_B h) - 2 \cos(\tilde{k}_B 2h) \right] = 6 - (k_B h)^4 \quad (\text{D.6})$$

Or la fonction inverse de  $f : x \rightarrow 8 \cos(x) - 2 \cos(2x)$  est :

$$f^{-1} : x \rightarrow \arccos \left( 1 - \frac{1}{2} \sqrt{6 - x} \right) \quad (\text{D.7})$$

Ainsi on peut exprimer le nombre d'onde  $\tilde{k}_B h$  :

$$\tilde{k}_B h = \arccos \left( 1 - \frac{1}{2} \sqrt{(k_B h)^4} \right) \quad (\text{D.8})$$

Or le développement en série de Taylor de  $\arccos$  à l'ordre 3 s'écrit :

$$\arccos(1 - x) = \sqrt{2x} \left[ 1 + \frac{1}{12}x + \frac{3}{160}x^2 + o(x^2) \right] \quad (\text{D.9})$$

L'Eq. (D.8) s'écrit donc :

$$\tilde{k}_B = k_B \left[ 1 + \frac{1}{24}(k_B h)^2 + \frac{3}{640}(k_B h)^4 + o(k_B h)^4 \right] \quad (\text{D.10})$$

L'erreur relative entre le nombre d'onde numérique  $\tilde{k}_B$  par méthode des différences finies et le nombre d'onde analytique s'exprime donc :

$$\varepsilon_{relative} = \left[ \frac{1}{24}(k_B h)^2 + \frac{3}{640}(k_B h)^4 + o(k_B h)^4 \right] \quad (\text{D.11})$$



## Annexe E

# Formulation de la matrice de raideur dynamique condensée par DSM

Cette annexe fournit la démonstration [41] de la matrice de raideur dynamique condensée  $\mathbf{D}_m$  de la structure globale obtenue à partir des modes de propagation d'une cellule élémentaire. Soit  $\mathbf{Q}_1$  le vecteur des déplacements/forces à l'extrémité gauche de la structure finie et  $\mathbf{Q}_{n+1}$  le vecteur à l'extrémité droite tel que :

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{L,1} \\ \mathbf{F}_{L,1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{R,n} \\ -\mathbf{F}_{R,n} \end{bmatrix} \quad (\text{E.1})$$

En utilisant l'Eq. (3.42), il est possible d'exprimer les vecteurs  $\mathbf{Q}_1$  et  $\mathbf{Q}_{n+1}$  sur la base des modes de propagation :

$$\mathbf{Q}_1 = \Phi^+ \psi^+ + \Phi^- \lambda^n \psi^- \quad (\text{E.2})$$

$$\mathbf{Q}_{n+1} = \Phi^+ \lambda^n \psi^+ + \Phi^- \psi^- \quad (\text{E.3})$$

L'orthogonalité des vecteurs propres de l'Eq. (3.30) et la norme de ces vecteurs propres de l'Eq. (3.31) donnent pour tout  $j$  la relation :

$$\psi_j^+ = \Phi_j^{-T} \mathbf{J} \mathbf{Q}_1 \quad \lambda^n \psi_j^+ = \Phi_j^{-T} \mathbf{J} \mathbf{Q}_{n+1} \quad (\text{E.4})$$

$$\psi_j^- = \Phi_j^{+T} \mathbf{J} \mathbf{Q}_{n+1} \quad \lambda^n \psi_j^- = \Phi_j^{+T} \mathbf{J} \mathbf{Q}_1 \quad (\text{E.5})$$

On obtient ainsi une relation matricielle entre les vecteurs  $\mathbf{Q}_1$  et  $\mathbf{Q}_{n+1}$  telle que :

$$\lambda^n \Phi_j^{-T} \mathbf{J} \mathbf{Q}_1 = \Phi_j^{-T} \mathbf{J} \mathbf{Q}_{n+1} \quad (\text{E.6})$$

$$\lambda^n \Phi_j^{+T} \mathbf{J} \mathbf{Q}_{n+1} = \Phi_j^{+T} \mathbf{J} \mathbf{Q}_1 \quad (\text{E.7})$$

En reprenant l'Eq. (3.18) qui lie les vecteurs propres du déplacement et ceux des forces, on obtient :

$$\lambda^n (\phi_q^{-T} \mathbf{F}_{L,1} - \phi_f^{-T} \mathbf{q}_{L,1}) = -\phi_q^{-T} \mathbf{F}_{R,n} - \phi_f^{-T} \mathbf{q}_{R,n} \quad (\text{E.8})$$

$$\lambda^n (-\phi_q^{+T} \mathbf{F}_{R,n} - \phi_f^{+T} \mathbf{q}_{R,n}) = \phi_q^{+T} \mathbf{F}_{L,1} - \phi_f^{+T} \mathbf{q}_{L,1} \quad (\text{E.9})$$

En multipliant l'Eq. (E.8) par  $(\phi_q^{-T})^{-1}$  et l'Eq. (E.9) par  $(\phi_q^{+T})^{-1}$ , on obtient le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} (\phi_q^{-T})^{-1} \lambda^n \phi_q^{-T} & \mathbf{I}_{n_c} \\ \mathbf{I}_{n_c} & (\phi_q^{+T})^{-1} \lambda^n \phi_q^{+T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{L,1} \\ \mathbf{F}_{R,n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\phi_q^{-T})^{-1} \lambda^n \phi_f^{-T} & -(\phi_q^{-T})^{-1} \phi_f^{-T} \\ (\phi_q^{+T})^{-1} \phi_f^{+T} & -(\phi_q^{+T})^{-1} \lambda^n \phi_f^{+T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{L,1} \\ \mathbf{q}_{R,n} \end{Bmatrix} \quad (\text{E.10})$$

Il est possible d'exprimer les vecteurs propres liés aux forces à ceux liés aux déplacements grâce à l'Eq. (3.9) de la matrice de raideur dynamique condensée :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{D}_{LR} \\ \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{D}_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_q^+ \\ \phi_q^+ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_f^+ \\ -\phi_f^+ \lambda \end{Bmatrix} \quad (\text{E.11})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{D}_{LR} \\ \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{D}_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_q^- \\ \phi_q^- \lambda^{-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_f^- \\ -\phi_f^- \lambda^{-1} \end{Bmatrix} \quad (\text{E.12})$$

En prenant les transposées des Eqs. (E.11) et (E.12) et en y combinant l'Eq. (E.10), on obtient la relation matricielle :

$$\begin{bmatrix} (\phi_q^{-T})^{-1} \lambda^n \phi_q^{-T} & \mathbf{I}_{n_c} \\ \mathbf{I}_{n_c} & (\phi_q^{+T})^{-1} \lambda^n \phi_q^{+T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{L,1} \\ \mathbf{F}_{R,n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\phi_q^{-T})^{-1} [\lambda^n \phi_q^{-T} \mathbf{D}_{LL} + \lambda^{n-1} \phi_q^{-T} \mathbf{D}_{RL}] & (\phi_q^{-T})^{-1} \lambda \phi_q^{-T} \mathbf{D}_{LR} + \mathbf{D}_{RR} \\ (\phi_q^{+T})^{-1} \lambda \phi_q^{+T} \mathbf{D}_{RL} + \mathbf{D}_{LL} & (\phi_q^{+T})^{-1} [\lambda^{n-1} \phi_q^{+T} \mathbf{D}_{LR} + \phi_q^{+T} \mathbf{D}_{RR}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{L,1} \\ \mathbf{q}_{R,n} \end{Bmatrix} \quad (\text{E.13})$$

Pour exprimer les forces de couplage en fonction des déplacements, on multiplie l'Eq.(E.13) par la matrice inverse facteur des forces :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{L,1} \\ \mathbf{F}_{R,n} \end{Bmatrix} = \left[ \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{0}_{n_c} \\ \mathbf{0}_{n_c} & \mathbf{D}_{RR} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\phi_q^{-T})^{-1} \lambda^n \phi_q^{-T} & \mathbf{I}_{n_c} \\ \mathbf{I}_{n_c} & (\phi_q^{+T})^{-1} \lambda^n \phi_q^{+T} \end{bmatrix}^{-1} \right. \\ \left. \times \begin{bmatrix} (\phi_q^{-T})^{-1} \lambda^{n-1} \phi_q^{-T} & (\phi_q^{-T})^{-1} \lambda \phi_q^{-T} \\ (\phi_q^{+T})^{-1} \lambda \phi_q^{+T} & (\phi_q^{+T})^{-1} \lambda^{n-1} \phi_q^{+T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{0}_{n_c} \\ \mathbf{0}_{n_c} & \mathbf{D}_{LR} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{L,1} \\ \mathbf{q}_{R,n} \end{Bmatrix} \quad (\text{E.14})$$

En prenant la transposée de l'Eq. (E.14) et grâce aux propriétés de symétrie, il est possible d'obtenir la matrice de raideur dynamique condensée  $\mathbf{D}_m$  de la structure finie telle que :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{L,1} \\ \mathbf{F}_{R,n} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_m \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{L,1} \\ \mathbf{q}_{R,n} \end{Bmatrix} \quad (\text{E.15})$$

Avec :

$$\mathbf{D}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{0}_{n_c} \\ \mathbf{0}_{n_c} & \mathbf{D}_{RR} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LR} & \mathbf{0}_{n_c} \\ \mathbf{0}_{n_c} & \mathbf{D}_{RL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_q^- \lambda^{n-1} \phi_q^{-1} & \phi_q^+ \lambda \phi_q^{+1} \\ \phi_q^- \lambda \phi_q^{-1} & \phi_q^+ \lambda^{n-1} \phi_q^{+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_q^- \lambda^n \phi_q^{-1} & \mathbf{I}_{n_c} \\ \mathbf{I}_{n_c} & \phi_q^+ \lambda^n \phi_q^{+1} \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{E.16})$$



## Annexe F

# Schémas techniques du support bi-mode

Cette annexe propose une description technique du support bi-mode utilisé dans le Chapitre 5. Le dispositif anti-vibratile est composé d'une semelle supérieure viscoélastique raide (raideur verticale supérieure à  $5e8$  N/m), d'une selle métallique qui joue le rôle de bride et de batteur dynamique, et d'une semelle inférieure résiliente souple (raideur statique inférieure à  $5e7$  N/m). Le système est précontraint par l'intermédiaire d'entretoises épaulées qui assurent le contact entre la selle et le socle. Lorsqu'aucune charge n'est appliquée sur le rail, celui-ci repose uniquement sur la semelle supérieure raide, ainsi le taux de décroissance associé aux ondes verticales est élevé. Lorsqu'une charge est appliquée sur le rail et qu'elle dépasse le seuil d'effort, l'épaulement des entretoises n'est plus en contact avec la selle métallique qui peut se déplacer librement.

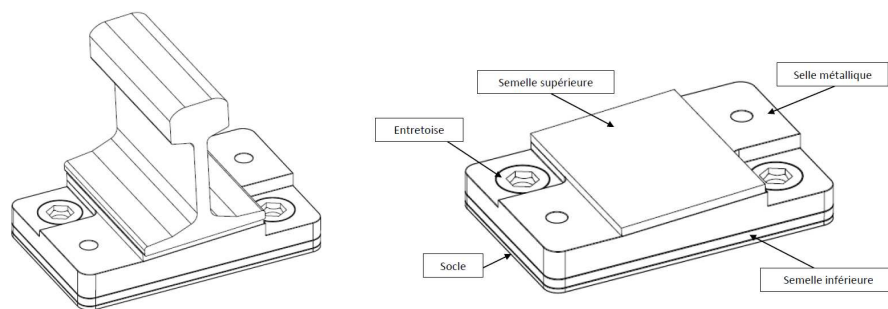


FIGURE F.1 – *Vue isométrique du support bi-mode*

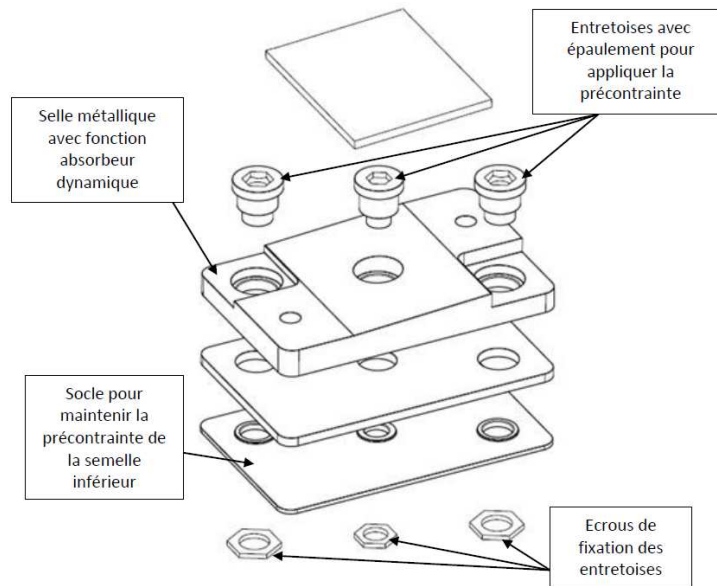


FIGURE F.2 – Vue éclatée du support bi-mode

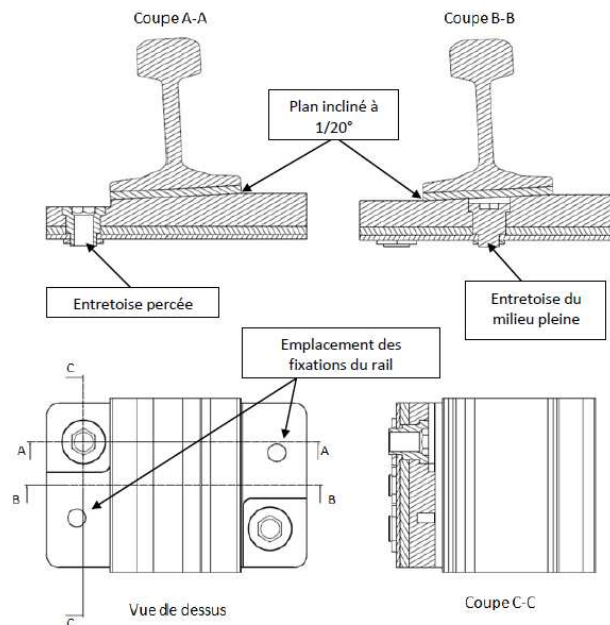


FIGURE F.3 – Vue de coupe du support bi-mode

