



**HAL**  
open science

# Pollution agricole des ressources en eau : approches couplées hydrogéologique et économique

Eloïse Comte

► **To cite this version:**

Eloïse Comte. Pollution agricole des ressources en eau : approches couplées hydrogéologique et économique. Optimisation et contrôle [math.Oc]. Université de La Rochelle, 2017. Français. NNT : 2017LAROS029 . tel-01804984

**HAL Id: tel-01804984**

**<https://theses.hal.science/tel-01804984v1>**

Submitted on 1 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LA ROCHELLE

École doctorale Sciences et Ingénierie pour l'Information, Mathématiques  
(S2IM)

Spécialité

Mathématiques appliquées et Applications des mathématiques

Présentée par

**Éloïse COMTE**

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ DE LA ROCHELLE**

## **Pollution agricole des ressources en eau : Approches couplées hydrogéologique et économique**

soutenue le 8 décembre 2017

devant le jury composé de :

<b>Mme Emmanuelle AUGERAUD-VÉRON</b>	Professeur des Universités, ..... [Co-Directrice] Université de Bordeaux,
<b>Mr Christophe BOUREL</b>	Maître de Conférences, ..... [Examineur] Université du Littoral côte d'Opale,
<b>Mme Catherine CHOQUET</b>	Professeur des Universités, ..... [Directrice] Université de La Rochelle,
<b>Mr Arnaud DUCROT</b>	Maître de Conférences (HDR), .. [Examineur] Université de Bordeaux,
<b>Mr Emmanuel FRÉNOT</b>	Professeur des Universités, ..... [Rapporteur] Université de Bretagne Sud,
<b>Mr Thierry HORSIN</b>	Professeur des Universités, ..... [Rapporteur] Conservatoire National des Arts et Métiers,
<b>Mr Souleymane KADRI-HAROUNA</b>	Maître de Conférences, ..... [Examineur] Université de La Rochelle,
<b>Mr Jean-Christophe PEREAU</b>	Professeur des Universités, ..... [Examineur] Université de Bordeaux.



*À mon Papy.*



---

## Remerciements

J'adresse mes premiers remerciements à mes deux directrices de thèse, Mme Catherine Choquet et Mme Emmanuelle Augeraud-Véron, qui m'ont aidée à mener ce travail jusqu'à son aboutissement. Je réalise pleinement toute l'énergie et tout le temps qu'elles ont su me consacrer durant ces trois ans et leur suis reconnaissante pour tout ce qu'elles m'ont apporté. Je leur exprime toute ma gratitude pour la rigueur et la bienveillance dont elles ont fait preuve : je n'aurais pu être mieux accompagnée durant mes premières années de recherche.

Mes remerciements vont aux rapporteurs Mr Emmanuel Frénod et Mr Thierry Horsin pour avoir accepté d'apporter un jugement objectif et éclairé sur ce travail. Je remercie également Mr Christophe Bourel, Mr Arnaud Ducrot, Mr Souleymane Kadri-Harouna et Mr Jean-Christophe Pereau d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Je tiens à remercier tous les membres du Laboratoire Mathématiques, Image et Applications et du département de Mathématiques de l'Université de La Rochelle pour leur accueil au sein des équipes, en particulier à Mme Sylviane Picq et à Mr Michel Berthier, directeur du laboratoire à mon arrivée.

Je remercie tous les enseignants de l'Éducation Nationale et de l'Enseignement Supérieur que j'ai pu côtoyer en tant qu'élève puis étudiante. Cet enseignement que j'ai reçu et reçois depuis plus de vingt ans est une véritable chance. Je tiens en particulier à remercier Mme Nicole Rivayrand, sans qui mon goût pour les mathématiques ne serait pas le même : je la remercie d'avoir provoqué ce déclic qui m'a menée jusqu'ici.

Un grand merci à mes anciens collègues, devenus des amis, Charles Guyon, Cyrille Beaudry et Moussa Mory Diédhiou : ma première année de thèse à leur côté fut sans aucun doute la plus chaleureuse.

Je remercie également Julie pour son soutien, les nombreuses heures passées au téléphone et son constant et sincère intérêt pour mon travail.

Toutes mes pensées vont vers ma famille, qui a toujours eu confiance en moi. Merci à ma Mamie, mon Tonton, ma Marraine, à Michel et Marco : votre présence, votre soutien et votre amour sont pour moi un véritable réconfort.

Enfin, merci à toi Maman.

Merci de m'aider à avancer, merci de me soutenir, merci d'être à l'écoute et de bon conseil, merci d'être présente même si tu es loin. Merci d'être là, encore et toujours.

---

# Table des matières

Contexte général . . . . .	11
Objectifs . . . . .	12
État de l'art . . . . .	13
Modélisation hydrogéologique . . . . .	13
Modélisation économique . . . . .	14
Repères mathématiques . . . . .	15
Plan de la thèse et défis mathématiques . . . . .	17
<b>1 Modélisation et problème de contrôle optimal</b>	<b>23</b>
1.1 Modélisation hydrogéologique : mise en place de l'équation d'état du modèle	24
1.1.1 Loi de conservation . . . . .	24
1.1.2 Modèles classiques de réactions . . . . .	26
1.1.3 Variantes du modèle . . . . .	28
1.1.4 Conditions initiales et aux bords . . . . .	28
1.2 Caractérisation de l'objectif . . . . .	29
1.2.1 Littérature . . . . .	29
1.2.2 Notre modèle . . . . .	30
1.3 Tableaux récapitulatifs . . . . .	33
1.4 Repères bibliographiques . . . . .	34
<b>2 Résultats d'existence</b>	<b>41</b>
2.1 Modèle et hypothèses . . . . .	41
2.2 Existence d'un $p$ pour un $c$ donné . . . . .	46
2.3 Existence d'un $c$ pour un $p$ donné . . . . .	48
2.3.1 Preuve de la Proposition 2.3.1 . . . . .	52
2.4 Existence globale pour le problème de contrôle optimal . . . . .	67
2.5 Un modèle contrôlable asymptotiquement . . . . .	73
<b>3 Modèle faibles concentrations : analyse asymptotique, existence et unicité de la solution au problème de contrôle optimal</b>	<b>79</b>
3.1 Contre-exemple préliminaire . . . . .	81
3.2 Présentation des problèmes d'optimisation dépendant de $\epsilon$ et limite . . . . .	86



---

3.2.1	Hypothèses mathématiques . . . . .	86
3.2.2	Problème dépendant de $\epsilon$ . . . . .	88
3.2.3	Problème limite . . . . .	90
3.3	Résultats de stabilité pour le problème d'état . . . . .	91
3.4	Analyse mathématique du modèle faibles concentrations . . . . .	96
3.5	Existence d'une solution aux problèmes de contrôle . . . . .	99
3.6	Analyse asymptotique . . . . .	102
3.7	Contrôlabilité asymptotique du modèle limite . . . . .	106
<b>4</b>	<b>Conditions de premier ordre et état stationnaire</b>	<b>107</b>
4.1	Preuve de la Proposition 4.0.1 . . . . .	110
4.2	Conditions d'optimalité de premier ordre . . . . .	115
4.2.1	Approche par la méthode adjointe . . . . .	116
4.2.2	Relaxation des contraintes du Lagrangien . . . . .	120
4.2.3	Condition de transversalité pour un horizon infini . . . . .	130
4.2.4	Une étude analytique dans un cas simple : l'état stationnaire du modèle unidimensionnel avec zone d'épandage donnée . . . . .	133
<b>5</b>	<b>Théorie des Jeux</b>	<b>155</b>
5.1	Hypothèses . . . . .	157
5.2	Caractère bien posé du système d'état et définition de l'équilibre de Nash	159
5.3	Résultats d'existence . . . . .	161
5.4	Relaxation des contraintes des Lagrangiens . . . . .	171
5.5	Une étude analytique dans un cas simple : l'état stationnaire du modèle unidimensionnel avec zone d'épandage donnée . . . . .	178
5.5.1	Simplifications . . . . .	179
5.5.2	Calculs analytiques . . . . .	182
5.5.3	Simulations numériques . . . . .	186
<b>6</b>	<b>Discrétisation par Éléments Finis des modèles hydrogéologiques</b>	<b>199</b>
6.1	Discrétisation en éléments finis . . . . .	203
6.2	Analyse du schéma . . . . .	204
6.2.1	Analyse du problème en charge discret . . . . .	204
6.2.2	Analyse du problème en concentration discret . . . . .	206
6.2.3	Analyse du problème adjoint discret . . . . .	216
6.2.4	Convergence du schéma . . . . .	226
<b>7</b>	<b>Tests numériques</b>	<b>245</b>
7.1	Rappel des problèmes discrets et algorithme de résolution . . . . .	246
7.2	Simulations numériques : initialisation . . . . .	249
7.3	Transport du contaminant pour un apport en engrais donné . . . . .	252

---

7.4	Détail du processus de convergence de l'algorithme (Alg) . . . . .	254
7.4.1	Approximation de la solution optimale après une boucle . . . . .	254
7.4.2	Approximation de la solution optimale après 5 boucles . . . . .	255
7.4.3	Étude de la convergence de l'algorithme (Alg) . . . . .	256
7.5	Étude de la solution optimale . . . . .	258
	<b>Bibliographie</b>	<b>261</b>



# Introduction

## Contexte général

La préservation des ressources en eau est un enjeu important. Au vu de la croissance de la population mondiale, les ressources en eau par personne et par an ne cessent de diminuer. Par ailleurs, leur qualité doit être contrôlée. On y retrouve de nombreux contaminants. Parmi eux, on peut citer les nitrates, résultat principalement de l'utilisation d'engrais azotés sur les cultures. En Europe, l'agriculture est responsable de 50 à 80% de la pollution des eaux par les nitrates et le phosphore (Lankoski et Ollikainen, [55]). En France, 66% des nitrates présents dans l'eau proviennent de l'agriculture (dossiers scientifiques du CNRS [94]). Cette pollution est due à la part d'engrais non absorbée par les plantes qui est ensuite lessivée par les arrosages des cultures et les pluies.

D'après un rapport de l'Office parlementaire de l'évaluation des choix scientifiques et technologiques ([67]), le coût de la dénitrification des eaux est de l'ordre d'un demi euro par mètre cube. Selon le Commissariat Général au Développement Durable ([13]), le coût global de dépollution pour les nitrates des eaux souterraines en France métropolitaine serait de 490 à 742 milliards d'euros.

Pour pallier à cette pollution, de nombreuses réglementations ont été mises en place, parmi lesquelles une loi européenne mise en application en 1991 : la directive européenne 91/676/CEE, aussi appelée Directive Nitrates. Elle a pour objectif de réduire la contamination des eaux par les nitrates d'origine agricole. Des zones vulnérables ont donc été délimitées et sont sujettes à des pratiques agricoles particulières dans le but de limiter les risques de pollution. Les Figures 1 et 2 représentent respectivement la délimitation des zones au niveau national en 2014 et en Nouvelle-Aquitaine en 2017. On constate l'augmentation du nombre de zones vulnérables d'une année sur l'autre, que ce soit au plan national ou régional.

En 2016, les zones vulnérables représentaient environ 55% de la surface agricole française (Ministère de l'Environnement, de l'Énergie et de la Mer [93]). Bien sûr, la réglementation interdit l'épandage au niveau des puits de captage. Il peut y avoir autour des puits des zones tampons ayant pour fonction d'intercepter ou d'atténuer la contamination avant le captage de l'eau ; elles sont réglementées et peuvent être de natures différentes. Introduire ces zones tampons se révèle être efficace (Correll [27]) même lorsqu'elles ne

---

sont pas actives (Léandri [56]).

La Directive Nitrates stipule également qu'une eau est considérée comme potable si elle contient moins de 50mg/L de nitrates. La Figure 3, qui présente la concentration moyenne en nitrates des nappes phréatiques au niveau de la France, montre que ce seuil est atteint dans certaines régions. Malgré les préventions imposées par la loi, de nombreux puits de captage sont contaminés et doivent être traités avant la distribution de l'eau. En 2012, on comptait près de 34000 puits de captage en France, produisant 18 millions de mètres cube d'eau par jour destinée à la consommation humaine (Secrétariat d'État chargé de la Santé, [92]). Cependant, de nombreux puits sont abandonnés : dans 41 % des cas, cela est dû à la qualité de l'eau. La présence de nitrates et/ou de pesticides est décelée dans 19 % des cas (voir Figure 4).

Il faut noter que le temps de transport dans les nappes phréatiques est très long (Kim [47]). Dans les aquifères, la vitesse peut aller de 10 à 100 mètres par an (Lalbat [54]). De ce fait, bien que le temps de transport dépende de la distance entre la zone d'épandage et la station de captage d'eau, on peut compter plusieurs années avant que les émissions n'apparaissent au niveau des puits de captage. Ce délai est donc également à prendre en compte dans les politiques optimales d'épandage mises en place. En effet, même dans l'hypothèse d'un changement radical de politique agricole commune impliquant une suppression totale d'épandage, les nappes resteraient contaminées durant des dizaines d'années du fait du temps de transport des polluants provenant des épandages des années précédentes. Dans ce contexte, les politiques environnementales doivent donc être considérées sur le long terme.

Bien sûr, il existe d'autres types de polluants agricoles (phosphates, pesticides ...) et l'agriculture n'est pas la seule responsable de la pollution des eaux. On peut citer par exemple les déchets domestiques ou l'activité industrielle. Cependant, depuis la création des agences de l'eau dans les années 1960, on constate une diminution des pollutions industrielles, domestiques et urbaines. En revanche, les pollutions agricoles augmentent, notamment les pollutions par les nitrates et les pesticides (étude du Commissariat Général au Développement Durable, [13]).

## Objectif

L'objectif de cette thèse est de développer de nouveaux modèles pour le contrôle de la pollution des ressources en eau. On s'intéressera plus particulièrement à l'impact des engrais d'origine agricole. Bien que ce travail soit généralisable à tout type de pollution, nous prendrons régulièrement les nitrates comme exemple d'application.

Le but de ce travail est de trouver l'arbitrage optimal entre le profit agricole et les coûts de dépollution en modélisant finement le transport du polluant dans le sous-sol. Notons que ce problème est régi par des échelles de temps contrastées. En effet, le profit agricole est considéré à court terme alors que les politiques environnementales agissent

---

sur le long terme. De plus, le temps de réaction des composants chimiques étant très court, il s'y ajoute la prise en compte d'un "temps microscopique".

D'un point de vue mathématique, cela revient à résoudre un problème de contrôle optimal, dont l'objectif économique inter-temporel prend en compte le compromis entre l'utilisation d'engrais et les coûts de dépollution, et dont les équations d'état modélisent la propagation du polluant dans les nappes phréatiques. Ces dernières sont constituées d'une équation aux dérivées partielles parabolique non linéaire couplée par le tenseur de dispersion et le terme de convection avec une équation elliptique. On prend en compte l'opérateur de dispersion dépendant non linéairement de la vitesse du fluide qui est elle-même une inconnue du problème dépendant de la charge hydraulique. Afin de tenir compte des conséquences à long terme d'une politique optimale, on considère l'objectif économique sur un temps arbitraire, pouvant être infini. Le modèle comprend une variable de contrôle, la quantité d'engrais à épandre, et deux variables d'état : la concentration et la vitesse du polluant. Le fort couplage entre les trois variables du modèle ainsi que les nombreuses non linéarités font partie des difficultés à traiter. Hormi pour des exemples de résolution analytique, nous considérerons toujours des modèles tridimensionnels en espace.

## État de l'art

Bien que ce travail allie modélisation hydrogéologique et économique, nous distinguons ici ces deux composantes afin de mettre en évidence les différents apports de cette thèse à chacune.

## Modélisation hydrogéologique

Peu de données sont disponibles dans les nappes phréatiques profondes. En effet, il est difficile d'avoir un ensemble de mesures suffisant sur tout un bassin ; il y a peu de données expérimentales et à des échelles peu accessibles à l'homme. Bien sûr, les mesures aux stations d'eau potable sont possibles et on peut se procurer les données sur les agricultures pratiquées autour de ces stations, mais elles restent très parcellaires. En l'absence de données, il faut donc modéliser mathématiquement les déplacements du polluant dans le sous-sol.

La modélisation de propagation de polluants dans les nappes phréatiques revient à modéliser l'écoulement de fluides miscibles incompressibles en milieux poreux. Plusieurs phénomènes physiques dominants sont à prendre en compte, notamment la convection et la diffusion du polluant, mais également les différentes réactions de celui-ci dans le sous-sol. Les modèles de réaction sont multiples : linéaires ou non linéaires comme par exemple les isothermes de type Freundlich et les isothermes de type Langmuir (Bear et Verruijt dans [10]), réactions entre espèces en solution ou réaction avec le sol.

---

La vitesse de l'écoulement doit être considérée comme une variable du modèle. Le phénomène de diffusion, traduisant le transfert des molécules d'une zone de forte concentration vers une zone de faible concentration, est modélisé par la loi de Fick. Cette dernière permet également, avec la loi de Darcy, de mettre en relation la vitesse du fluide et la charge hydraulique (somme des énergies cinétique et potentielle de l'eau). Mais l'hétérogénéité locale d'un milieu poreux (grains impénétrables et pores pour la circulation) nécessite de remplacer la diffusion par un opérateur de dispersion dépendant non linéairement de la vitesse du fluide dans le terme de diffusion.

## Modélisation économique

La recherche d'une politique environnementale optimale prenant en compte les coûts de dépollution est une question classique en économie, qui a été explorée par Keller [46] et Plourde [71] dans les années 70. Ces modèles sont considérés sans dépendance en espace, ce qui, au vu de la vitesse d'écoulement dans les nappes phréatiques, est peu réaliste. Les travaux de Bordenave et al. [14] soulignent la nécessité de tenir compte d'un délai entre les émissions et les apports d'eau polluée.

Certains auteurs ont donc pris en compte ces délais de transport, qui permettent notamment de modéliser le temps d'attente entre la mise en place de politiques environnementales et leurs éventuels résultats. C'est le cas par exemple de Winkler [87] qui considère un modèle où le stock de pollution s'accumule avec un délai constant, tout comme Bourgeois et Jayet [16] et Augeraud-Véron et Leandri [9].

Mais les équations d'état considérées par ces auteurs sont linéaires. Or, comme nous l'avons vu dans la modélisation hydrogéologique, les équations régissant le transport d'un polluant dans le sous-sol comportent de nombreuses non linéarités. On retrouve dans un exemple classique d'étude des pollutions des eaux peu profondes, dans le cas des modèles considérés sans espace, des modèles avec un terme non linéaire modélisant parfois un phénomène de sédimentation. Carpenter et Brock [23] étudient une pollution au phosphore dans un lac peu profond en introduisant une non linéarité. Ces modèles font apparaître la présence de bifurcations de telle sorte que les politiques optimales peuvent varier très fortement selon les valeurs des paramètres.

Dans le cas où l'on considère que plusieurs régions ou pays sont impliqués et/ou impactés par la pollution des eaux, les modèles utilisent la théorie des jeux afin de comparer des solutions en cas de coopération ou non-coopération des parties impliquées. C'est le cas de Mäler et al [62], Wagener [84], ou encore Kossioris et al [50] qui reprennent l'exemple de pollution au phosphore dans un lac peu profond. On peut citer également De Frutos et Martín-Herrán [35] qui étudient le cas d'une pollution en sous-sol sur plusieurs régions.

On notera également dans le travail de [35] la prise en compte de la dépendance en espace, permettant ainsi de modéliser le transport et la diffusion du polluant dans les nappes, obtenant donc une équation d'état plus réaliste. D'autres problèmes de contrôle optimal en temps et en espace ont été traités, comme par exemple la diffusion du phos-

---

phore à travers des lacs connectés (Brock et Xepapadeas [21]), ou encore l'utilisation optimale des terres selon la pollution de l'air (Camacho et Pérez Barahona [22]). Ces derniers modélisent la dynamique de la pollution grâce à un modèle de dispersion gaussien. Les auteurs prouvent l'existence et l'unicité d'une solution à leur problème.

## Repères mathématiques

Nous donnons ici quelques repères sur les principales thématiques abordées, à savoir la théorie du contrôle optimal et les équations aux dérivées partielles, ainsi que les méthodes généralement utilisées pour l'étude de tels problèmes.

La théorie du contrôle permet d'agir sur un système dynamique (en modifiant l'entrée ou les paramètres) à l'aide d'une commande (contrôle), afin de le maîtriser en le menant d'un état initial donné à un état final souhaité. Dans certains cas, des critères doivent être respectés : on parle de problèmes sous contraintes. On peut alors stabiliser un système face à des perturbations, ou encore déterminer des solutions optimales au problème selon un critère : on parle alors de contrôle optimal. Les domaines d'applications sont variés (économie, environnement, biologie, mécanique ...) ainsi que les systèmes rencontrés (équations différentielles ordinaires, équations de retard, équations aux dérivées partielles ...). On pourra consulter, de manière non exhaustive bien sûr, Alabau-Boussouira et Cannarsa ([3]), Anita et al. ([8]), Grass et al. ([41]), Raymond ([72]), ou encore Trélat ([80]). On pourra également se référer à Coron ([26]) pour le contrôle des équations aux dérivées partielles non linéaires. Nous nous intéressons ici à l'étude de problèmes de contrôle sous contraintes d'un système d'équations aux dérivées partielles.

Un état de l'art représentatif de l'analyse des équations aux dérivées partielles est bien sûr inenvisageable ici. Aussi nous nous concentrons sur les équations aux dérivées partielles traitées comme contraintes d'un problème de contrôle optimal. Par la suite bien sûr, nous nous limitons à des exemples proches de notre modèle, cette littérature n'étant bien évidemment pas exhaustive. On pourra cependant se référer à Ladyzhenskaja ([52] et [53]), Evans ([32]), Gilbarg et Trudinger ([37]), ou encore DiBenedetto ([28]) pour la théorie des équations aux dérivées partielles.

Donnons quelques exemples de stratégies utilisées pour traiter des problèmes de contrôle comparables au nôtre. Dans un contexte différent de notre problématique, Benosman et al étudient un problème de contrôle optimal sous-contraintes d'un système de réaction-advection-diffusion modélisant le développement de la leucémie dans la moelle osseuse ([12]). L'existence d'un contrôle optimal est démontrée à l'aide de la théorie des semi-groupes. Cette méthode ne sera pas applicable à notre modèle. En effet, notre modélisation comprend plus de couplages non linéaires, notamment dans le terme de diffusion où le coefficient de dispersion dépend non linéairement de la vitesse. De plus, nous ne nous limitons pas à des termes de réaction linéaires. Toutes ces non linéarités nous mèneront à utiliser des stratégies de type point fixe de Schauder. De Frutos et Martín Herrán étudient un problème de contrôle optimal sous contrainte d'une équation de convection-diffusion



---

dans [35]. Contrairement à Benosman et al, ils ne démontrent pas l'existence d'une solution à leur problème mais illustrent numériquement son comportement à travers différents exemples. Cependant, leur modèle se rapproche plus du nôtre de par les aspects suivants : il comporte une non linéarité dans la fonction de réaction, la fonction coût est construite de la même façon que la nôtre en prenant en compte les bénéfices et les dommages et elle est définie sur un horizon infini. Le terme convectif de notre modèle posera également des difficultés pour démontrer l'existence globale de la solution au problème hydrogéologique. La méthode utilisée par Pierre dans [69], consistant à élargir des estimations dans  $L^p$  pour tout  $p < \infty$ , ne sera pas applicable ici car une telle régularité n'est pas accessible pour le terme convectif, et nous devons utiliser le principe du maximum faible. Dans [88], Yuan et al étudient numériquement la solution d'un problème de contrôle optimal sous contrainte d'un problème de transport en sous-sol en deux dimensions, en considérant la vitesse du fluide comme une variable.

Intéressons nous à présent aux conditions nécessaires d'optimalité. Ces conditions sont par définition vérifiées par la solution du problème de contrôle, si elle existe. Cependant, elles ne permettent pas de la caractériser car elles ne sont pas suffisantes. Lorsqu'elles font intervenir des dérivées du premier ordre (respectivement du second ordre), on parle de conditions du premier ordre (respectivement du second ordre). Dans le cas d'un problème d'optimisation avec contraintes, et donc dans le cas d'un problème de contrôle optimal, les conditions d'optimalité conduisent à introduire les variables dites adjointes. Les conditions nécessaires d'optimalité permettent de calculer les trajectoires optimales de la solution lorsqu'elle existe. Lorsqu'il y a unicité de la solution, les conditions nécessaires d'optimalité, si elles définissent une trajectoire unique, permettent de la caractériser. Cette démarche est suivie par Benosman et al dans [12], traitant un système de réaction advection-diffusion modélisant le développement de la leucémie dans la moelle osseuse. Dans le cadre des pollutions environnementales, Camacho et al. dans [22] et Brock et Xepapadeas dans [21] fournissent également les conditions de premier ordre pour leur modèle. On peut aussi citer entre autres Raymond et Zidani [73] qui utilisent le principe de Pontryagin pour des problèmes sous contraintes d'équations paraboliques avec des contrôles non bornés.

En temps fini, les conditions de premier ordre de Pontryagin sont caractérisées par une condition terminale. Cependant, celle-ci n'a pas de sens en temps infini. Michel [65] et Grass et al. [41] proposent une approche classique établissant la condition de transversalité en horizon infini.

On retrouvera au paragraphe 1.4 un tableau synthétique des références liées à notre problème.

---

## Plan de la thèse et obstacles mathématiques

Dans le Chapitre 1, nous posons le cadre de l'étude et expliquons en détail la construction du modèle à la fois d'un point de vue hydrogéologique et d'un point de vue économique, le but de ce travail étant de coupler ces deux points de vue dans le problème de contrôle optimal. Nous choisissons de modéliser le transport du polluant en considérant les phénomènes physiques dominants (réaction, advection, dispersion) et nous supposons la vitesse du fluide comme étant aussi une inconnue du problème (et n'étant donc pas supposée donnée). Une conséquence de cette approche est l'introduction de nombreuses non linéarités et couplages dans le modèle. De plus, l'opérateur de dispersion dépendra non linéairement de la vitesse du fluide, c'est-à-dire du gradient d'une des inconnues du problème (la charge hydraulique). On considère des termes de réaction non linéaires. Nous obtenons ainsi un système d'état d'équations aux dérivées partielles parabolique et elliptique fortement et non linéairement couplées, complété par des conditions initiales et aux bords que nous choisissons variées. Nous construisons la fonctionnelle à maximiser en tenant compte du profit agricole et des coûts de dépollution. L'objectif économique est présenté en un temps fini ou infini, ce dernier cas étant dû au fait que les temps de transport dans les nappes phréatiques sont très longs (plusieurs dizaines d'années), entraînant donc des conséquences à très long terme lors d'applications de politiques environnementales.

Nous présentons et démontrons des résultats d'analyse du problème de contrôle optimal dans le Chapitre 2. Nous considérons une forme très générique d'opérateur sur la concentration dans l'objectif, qui du point de vue de l'application, permet en particulier une liberté plus large pour la modélisation du coût de dépollution. Au vu du très fort couplage entre les trois variables du modèle, nous adoptons une stratégie de preuve basée sur un résultat de type point fixe afin de démontrer l'existence d'un triplet solution de notre problème de contrôle optimal. L'étude indépendante des deux problèmes découplés est d'abord traitée : on montre l'existence voire l'unicité d'un contrôle pour le problème d'optimisation et l'existence et l'unicité d'un couple solution au sens faible du système d'état. Ces résultats sur le problème hydrogéologique seront essentiels dans l'ensemble de la thèse. Plusieurs hypothèses techniques doivent bien sûr être posées. Elles portent notamment sur le tenseur de mobilité et les valeurs aux bords de la charge hydraulique : sous certaines conditions, on peut alors obtenir une régularité supplémentaire sur la solution, notamment sur la vitesse du fluide que l'on peut alors borner dans  $L^\infty$ . Un tel résultat est très utile pour traiter le terme convectif de l'équation d'état. Cependant, cela implique des caractéristiques physiques très régulières et de fait, nous ne nous limiterons pas à ces cas restrictifs et affaiblirons au mieux les hypothèses. Nous abordons ensuite l'existence globale, démontrée à l'aide du théorème du point fixe de Schauder. Précisons également que lorsque l'équation d'état couple fortement les lois de conservation de la masse et du moment *via* l'équation d'incompressibilité, l'ensemble des contrôles admis-

---

sibles doit être restreint : nous le définissons donc avec une condition supplémentaire sur l'espace de recherche dépendant des apports et autres pertes exogènes du problème. Cette définition nous permettra notamment d'appliquer un résultat de compacité d'Aubin sur la vitesse. En effet, les nombreuses non linéarités présentes dans l'équation hydrogéologique et dans la fonctionnelle à contrôler nécessitent l'utilisation d'une large gamme d'outils pour passer à la limite dans des produits de termes *a priori* faiblement convergents. Nous établissons également un résultat de contrôlabilité asymptotique, dans le cas où l'équation d'incompressibilité du fluide est indépendante de l'apport d'engrais. Cela prouve qu'une politique d'épandage permettant d'approcher tout seuil de pollution donné avec une erreur arbitraire peut être développée.

L'unicité de la solution est démontrée dans le Chapitre 3. Nous avons choisi de présenter les résultats d'existence et d'unicité dans des chapitres différents, car l'unicité n'est montrée que dans le cas des faibles concentrations d'engrais en sous-sol, c'est-à-dire lorsque la quantité d'engrais épandue est du même ordre que la concentration totale de polluants dans le sol, cette dernière étant très inférieure à 1. Cependant, comme nous le préciserons par la suite, c'est le cas dans la plupart des aquifères contaminés, en particulier par les nitrates (le seuil de dangerosité étant malheureusement lui aussi très inférieur à 1). Nous prenons donc en compte la faible concentration du polluant dans le sous-sol et écrivons rigoureusement le problème de contrôle mis à l'échelle approprié, puis nous étudions son comportement asymptotique. On montre qu'il converge vers un problème limite dont la solution est unique. On se place ici sous les hypothèses assurant la vitesse bornée dans  $L^\infty$ . Pour étudier le comportement limite du problème d'optimisation, on utilise entre autres le théorème de faible semi-continuité inférieure des fonctions concaves dans un raisonnement de type  $\Gamma$ -convergence. Nous donnons également une nouvelle démonstration de l'existence d'un triplet solution du problème de contrôle (déjà assuré par les résultats du Chapitre 2) en utilisant les méthodes développées pour l'analyse asymptotique. La vitesse étant bornée dans  $L^\infty$ , nous gagnons en régularité sur la solution. Enfin, nous obtenons un résultat de stabilité du problème de contrôle en prouvant que la solution du problème effectif est limite de toute suite de solutions du problème correctement perturbé.

Le principe du maximum de Pontryagin permet d'établir des conditions nécessaires d'optimalité et donc de calculer les trajectoires optimales lorsqu'elles existent. Ce sera le sujet du Chapitre 4, où nous définissons un nouvel objectif en horizon fini, en prenant en compte le coût terminal de la présence de la pollution au niveau du puits. Nous redémontrons, pour ce nouveau modèle, le caractère bien posé du problème dans le cas des faibles concentrations. Nous établissons le problème adjoint associé à notre modèle et démontrons son caractère bien posé. La condition terminale obtenue n'étant pas vérifiée en temps infini, nous établissons la condition de transversalité admise pour un horizon infini en introduisant le Hamiltonien.

Nous mènerons ensuite une étude de l'existence et des propriétés qualitatives de l'état

---

stationnaire dans un cas unidimensionnel. Ce cas simple permet de faire de la statique comparative, c'est-à-dire d'étudier analytiquement les effets induits sur la solution par la modification d'un paramètre. Nous nous intéresserons en particulier à l'influence de la taille de la zone tampon sur la solution optimale.

Dans le Chapitre 5, nous nous plaçons dans le cadre d'un jeu différentiel non coopératif à plusieurs joueurs. Pour cela, nous considérons deux propriétés agricoles sur lesquelles l'épandage est géré indépendamment. Les fonctions de profit peuvent être différentes pour les deux joueurs. Nous introduisons la définition d'équilibre de Nash dans le cadre de notre problématique. L'application directe des résultats des Chapitres 2 et 3 nous permet d'établir l'existence d'une solution au problème de jeu différentiel en supposant que les agriculteurs coopèrent. Nous développons également une nouvelle analyse pour le cas où ils ne coopèrent pas. Pour cela, nous exploitons les résultats d'unicité établis dans les chapitres précédents et prouvons l'existence de l'équilibre de Nash grâce au théorème de point fixe de Schauder, les nécessaires conditions de continuité et de compacité étant obtenues par l'exploitation systématique des propriétés d'inférieure-continuité des intégrales et grâce à un critère de compacité de Visintin *via* les fonctions semi-continues inférieurement et strictement convexes (voir Visintin [83]). À l'image du Chapitre 4, nous établissons le problème adjoint correspondant et étudions un cas unidimensionnel à l'état stationnaire pour illustrer ce cadre de jeu.

On se consacre, dans le Chapitre 6, à la construction et à l'étude d'un schéma basé sur la méthode des Éléments Finis pour la partie hydrogéologique de notre problème. On démontre l'existence, l'unicité, et la stabilité de la solution pour des problèmes discrets issus du problème hydrogéologique et de son problème adjoint. On montre également la convergence de notre schéma en introduisant la notion de flux et en travaillant par conséquence avec une formulation mixte.

Des résultats numériques (2D en espace) sont présentés au Chapitre 7. Nous utilisons le logiciel FreeFem++ pour simuler notre problème en utilisant les formulations établies précédemment dans le Chapitre 6 pour le système d'état couplées à un algorithme de gradient conjugué non linéaire. Pour ces simulations, nous utilisons des paramètres physiquement réalistes. Nous étudions la convergence vers la solution optimale et analysons quelques exemples.

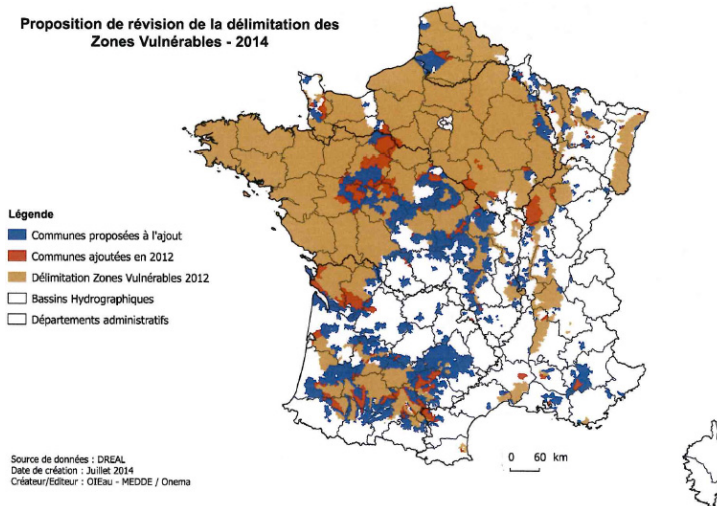


FIGURE 1 – Délimitation des zones vulnérables en France en 2014 ; Direction Régionale de l'Environnement, de l'Aménagement et du Logement.

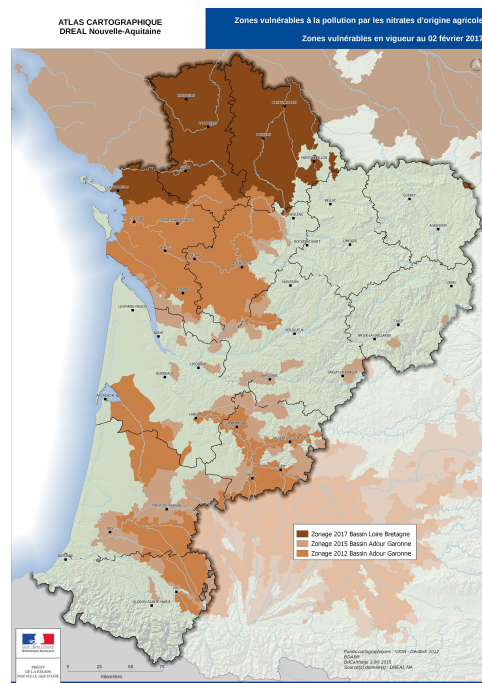


FIGURE 2 – Délimitation des zones vulnérables en Nouvelle-Aquitaine en 2017 ; Direction Régionale de l'Environnement, de l'Aménagement et du Logement Nouvelle Aquitaine.

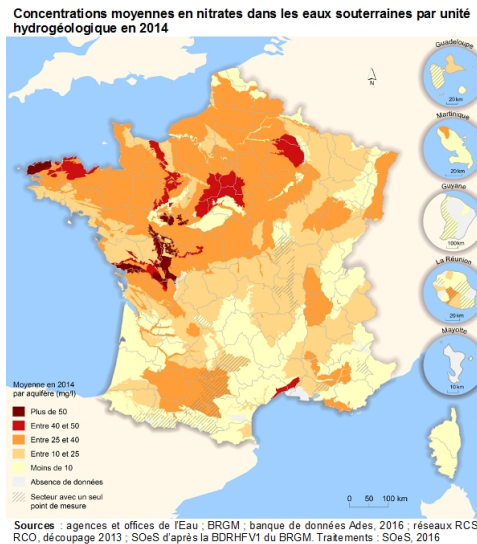
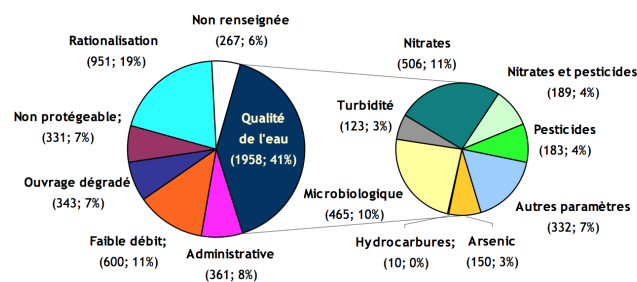


FIGURE 3 – Concentration moyenne en nitrates dans les eaux souterraines en France en 2014; Ministère de la Transition Écologique et Solidaire, Commissariat général au Développement durable [91].



Source : Ministère de la santé – ARS – SISE-Eaux

FIGURE 4 – Répartition des causes d'abandon des puits de captage pour la production d'eau destinée à la consommation humaine (en nombre et pourcentage), Secrétariat d'État chargé de la Santé [92], Bilan Février 2012.

---

# Chapitre 1

## Modélisation et problème de contrôle optimal

On considère une exploitation agricole sur laquelle il y a épandage d'engrais afin d'augmenter la productivité des cultures. Les plantes n'absorbant pas la totalité de l'engrais, une partie de celui-ci s'infiltré dans les nappes phréatiques. L'engrais est alors transporté dans le sous-sol et on le retrouve dans les puits de captage d'eau. Il est alors nécessaire de traiter cette eau avant qu'elle ne soit distribuée aux usagers et cette dépollution a un coût. Dans ce travail, nous étudierons l'arbitrage que doit faire un décideur qui doit tenir compte de l'agriculteur et de l'utilisateur. Nous nous intéresserons à la détermination de la quantité d'engrais à épandre pour maximiser une quantité qui prend en compte le bénéfice des agriculteurs et les coûts de dépollution.

Le modèle étudié dans cette thèse est un problème de contrôle optimal où la fonctionnelle à maximiser est associée à un système d'équations aux dérivées partielles munies de conditions initiales et aux bords que l'on choisira variées. On considère comme la parcelle agricole les quelques premiers centimètres de profondeur de terre sur lesquels l'épandage d'engrais a une influence quasi-immédiate (en terme de concentration d'engrais présent). Ce problème comprend trois variables qui interviennent à la fois dans l'objectif et dans l'équation d'état :

- la quantité d'engrais  $p(t, x)$  épandue au temps  $t$  en un point  $x$  de la parcelle ;
- la concentration du principal polluant  $c(t, x)$  issu de l'engrais au temps  $t$  en  $x$  ;
- la vitesse de déplacement du soluté  $v(t, x)$  au temps  $t$  en  $x$ .

La quantité d'engrais est la variable de contrôle, alors que la concentration et la vitesse sont deux variables d'état. Les principes de conservation font que ces trois inconnues sont très fortement couplées.

On notera la commande  $p(t, x)$  par souci de simplification, bien qu'elle ne soit *a priori* que définie sur la parcelle. En fait,  $p(t, x) = p(t, \chi_{\mathcal{S}}(x))$  où  $\mathcal{S}$  représente la parcelle.

Nous allons présenter le problème en introduisant tout d'abord l'équation d'état, puis en explicitant l'objectif.



---

## 1.1 Modélisation hydrogéologique : mise en place de l'équation d'état du modèle

L'équation d'état associée au problème de contrôle optimal est issue de la modélisation hydrogéologique. En effet, nous avons choisi de modéliser finement l'écoulement du polluant, dans l'aquifère et donc son transport dans les nappes phréatiques (on pourra, par exemple, se référer au travail de Bear et Verruijt [10]). Pour cela, nous introduisons des équations aux dérivées partielles de réaction-convection-diffusion de type parabolique couplées avec une équation de transport de type elliptique. Nous expliquons sa construction ci-dessous.

### 1.1.1 Loi de conservation

La dynamique de l'écoulement et du transport est régie par les lois de conservation de la masse et du moment. Ici, pour simplifier l'exposé, nous allons considérer que seules deux espèces sont transportées en solution dans le sous-sol : le dérivé du polluant de l'engrais, dont la concentration est notée  $c$ , et un autre composant dont la concentration sera donc  $(1 - c)$  (puisque la somme des concentrations est égale à 1). Le problème revient donc à modéliser l'écoulement de deux fluides miscibles et incompressibles (la compressibilité de l'eau étant négligeable en conditions naturelles) dans un milieu poreux (le sous-sol). La loi de conservation de la masse pour le composant de concentration  $c$  s'écrit :

$$\psi \partial_t(\rho_c c) + \operatorname{div}(\rho_c \psi v_c c) = -\rho_c r(c) + \rho_c \gamma + \rho_c p \quad (1.1)$$

avec

$r(c)$  : terme de réaction,

$\gamma$  : apport naturel,

$p$  : apport par l'agriculteur,

$\rho_c$  : densité du composant de concentration  $c$ ,

$v_c$  : vitesse qui transporte le composant de concentration  $c$ ,

$\psi$  : porosité du sous-sol.

**Remarque 1.1.1** *Donnons quelques précisions sur  $p$ , le terme source correspondant à l'apport d'engrais par l'agriculteur. Il contient à la fois les informations sur la quantité d'engrais, sur les périodes d'épandage et sur les zones d'épandage. Dans la suite de la thèse, on précisera parfois la notation, afin de bien souligner par exemple où se situe la zone d'épandage, intuitivement sur une partie  $\mathcal{S}$  de la région étudiée, en remplaçant le terme générique  $p$  par  $p\chi_{\mathcal{S}}$  où  $\chi_{\mathcal{S}}$  est la fonction caractéristique de  $\mathcal{S}$ .*

---

Nous allons faire quelques hypothèses :

*Hypothèse 1 : l'eau est considérée comme un fluide incompressible (c'est-à-dire que son volume reste constant sous l'action d'une pression extérieure).*

Cette hypothèse implique que la densité  $\rho_c$  est constante (strictement positive). On peut donc diviser l'équation (1.1) par  $\rho_c$ ; la loi de conservation de la masse pour le composant de concentration  $c$  devient :

$$\psi \partial_t c + \operatorname{div}(\psi v_c c) = -r(c) + \gamma + p.$$

On introduit dans le modèle la vitesse moyenne  $v$  du mélange dans le sous-sol. On écrit donc

$$\psi v_c = v + (\psi v_c - v) \quad \text{et} \quad \operatorname{div}(\psi v_c c) = \operatorname{div}(vc) + \operatorname{div}((\psi v_c - v)c).$$

*Hypothèse 2 : le terme de décalage  $\operatorname{div}((\psi v_c - v)c)$  suit une loi de Fick.*

Proposée au XIXème siècle, la première loi de Fick donne une relation entre le flux de matière d'une espèce et son gradient de concentration. Plus précisément, le flux de matière est proportionnel au gradient de concentration. On a :

$$\operatorname{div}((\psi v_c - v)c) = -\operatorname{div}(\psi S(v) \nabla c).$$

La loi de Fick est affinée en considérant que  $S$  est le tenseur modélisant les effets de la diffusion moléculaire et de la dispersion. Un modèle classique (voir Scheideger [81]) consiste à prendre

$$S(v) = S_m Id + S_p(v) \tag{1.2}$$

où  $S_m > 0$  est le coefficient de diffusion moléculaire et où  $S_p$  est un tenseur (dit de dispersion) dépendant de  $v$  défini par  $S_p(v) = |v| \left( \alpha_L \epsilon(v) + \alpha_T (Id - \epsilon(v)) \right)$ , avec  $\epsilon(v)_{i,j} = \frac{v_i v_j}{|v|^2}$ . Les réels  $\alpha_L \geq \alpha_T \geq 0$  sont respectivement les coefficients de dispersion transversale et longitudinale.

On suppose aussi que la porosité  $\psi \in L^\infty(\Omega)$  et on note  $\psi_-$  et  $\psi_+$  des réels tels que

$$0 < \psi_- \leq \psi(x) \leq \psi_+, \text{ pour presque tout } x \in \Omega. \tag{1.3}$$

En utilisant les hypothèses 1 et 2, la conservation de la masse se réécrit

$$\psi \partial_t c + \operatorname{div}(vc) - \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla c) = -r(c) + \gamma + p. \tag{1.4}$$

On suppose un modèle simple où le polluant qui réagit est transformé en le second composé en solution. Les autres apports ou pertes sont modélisés par le terme  $g$ . En utilisant le même raisonnement, on obtient l'équation gouvernant le second composé en solution :

$$\psi \partial_t (1 - c) + \operatorname{div}(v(1 - c)) - \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla (1 - c)) = r(c) + g(t, x, p), \tag{1.5}$$

où  $g$  modélise les autres apports ou pertes. On suppose que

$$(t, x) \mapsto g(t, x, p) \in L^\infty(\Omega_T) \text{ pour tout } p \in \mathbb{R}.$$

Nous avons donc formulé les deux équations de conservation de masse (1.4) et (1.5) pour chaque composant. En sommant ces deux équations, on obtient l'équation modélisant la conservation de la masse totale :

$$\psi \partial_t(c + (1-c)) + \operatorname{div}(vc + v(1-c)) - \operatorname{div}(\psi S(v)(\nabla c + \nabla(1-c))) = -r(c) + r(c) + \gamma + p + g$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{div}(v) = \gamma + p + g. \quad (1.6)$$

Cette équation est l'équation classique de l'incompressibilité.

On choisit donc de modéliser la conservation de la masse par les équations (1.4) et (1.6) :

$$\begin{cases} \psi \partial_t c + \operatorname{div}(vc) - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla c) = -r(c) + \gamma + p \\ \operatorname{div}(v) = \gamma + p + g \end{cases}$$

ou bien en utilisant  $\operatorname{div}(vc) = v \cdot \nabla c + c \operatorname{div}(v)$  et en remplaçant l'expression de  $\operatorname{div}(v)$  par (1.6) :

$$\begin{cases} \psi \partial_t c + v \cdot \nabla c - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla c) = -r(c) + (\gamma + p)(1 - c) - gc \\ \operatorname{div}(v) = \gamma + p + g. \end{cases} \quad (1.7)$$

Il faut maintenant compléter le modèle pour  $v$  en utilisant la loi de conservation du moment. À l'échelle où nous nous plaçons, le milieu poreux est un ensemble continu où la vitesse moyenne de l'écoulement  $v$  est régie par la loi de Darcy (résultat de la mise à l'échelle de l'équation de Stokes pour la conservation du moment) :

$$v = -\kappa \nabla \phi,$$

où  $\kappa$  est le tenseur de mobilité et  $\phi$  est la charge hydraulique (contenant les contributions de la pression et de la gravité).

### 1.1.2 Modèles classiques de réactions

Plusieurs fonctions sont classiquement considérées pour caractériser la réaction. Les fonctions de réaction  $r$  sont également appelées isothermes. Logan ([61] chapitre 2) propose d'utiliser des modèles linéaires du type

$$r(c) = kc \text{ avec } k \in \mathbb{R}_+ \text{ constante.}$$

Pour les réactions non linéaires, on considère des modèles :

- 
- du type Freundlich (Bear et Verruijt [10] chapitre Modeling Groundwater Pollution) pour  $c \in [0, 1]$  :

$$r(c) = bc^m \text{ avec } (b, m) \in \mathbb{R}_+^2 \text{ constantes,}$$

- de type Langmuir (Bear et Verruijt [10] et Williams [86]) :

$$r(c) = \frac{k_1 c}{1 + k_2 c} \text{ avec } (k_1, k_2) \in \mathbb{R}_+^2 \text{ constantes,}$$

- ou encore de type Sips (forme combinée de Langmuir et Freundlich, voir Belhachemi [11] et Amrhar et al. [7]) :

$$r(c) = \frac{k_3 c^n}{1 + k_4 c^n} \text{ avec } (k_3, k_4, n) \in \mathbb{R}_+^3 \text{ constantes.}$$

On notera que pour  $n = 1$ , on retrouve le modèle de Langmuir et pour  $k_4 = 0$ , celui de Freundlich.

Dans cette thèse, nous imposerons les hypothèses sur  $r$  les plus faibles possibles, permettant à tout le moins de considérer tous les exemples donnés précédemment.

Il faut aussi inclure la possibilité de réactions à dynamique très rapide. En effet, si la vitesse de réaction est du même ordre de grandeur que la vitesse de l'écoulement ou si on considère une réaction avec le milieu (adsorption), on ne peut pas utiliser un modèle d'équilibre où le terme de réaction apparaît comme un terme source au second membre de l'équation de convection-diffusion. La dynamique de la réaction apparaît alors dans l'équation de conservation de la masse :

$$\begin{cases} \partial_t c + \partial_t \mathcal{R}(c) + v \cdot \nabla c - \operatorname{div}(S(v)\nabla c) = -r(c) + (\gamma + p)(1 - c) - gc \\ \operatorname{div}(v) = \gamma + p + g. \end{cases}$$

Dans le cas d'adsorption par le milieu poreux, on utilise des modèles de réaction linéaire et on a donc  $\partial_t c + \partial_t \mathcal{R}(c) = (1 + \mathcal{R}'(c))\partial_t c$ . En supposant  $1 + \mathcal{R}'(c) = R \in \mathbb{R}$ , on obtient

$$R\partial_t c + v \cdot \nabla c - \operatorname{div}(S(v)\nabla c) = -r(c) + (\gamma + p)(1 - c) - gc.$$

Le réel  $R$  est en général appelé facteur de retard (puisque si  $\mathcal{R}' \geq 0$ ,  $R \geq 1$  et il retarde donc la propagation de  $c$ ). Par la suite, nous le considérerons dans tous les modèles.

Le système d'état qui sera considéré est ainsi le suivant :

$$\begin{cases} \psi R \partial_t c + v \cdot \nabla c - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla c) = -r(c) + (\gamma + p)(1 - c) - gc \\ \operatorname{div}(v) = \gamma + p + g, v = -\kappa \nabla \phi. \end{cases}$$

---

### 1.1.3 Variantes du modèle

#### Une remarque sur les modèles multi-constituants

La modélisation a été faite jusqu'ici dans le cas le plus simple où on peut considérer que l'écoulement dans le sous-sol est celui d'un fluide qui n'a que deux composants (c'est par exemple un cadre admissible si l'on se focalise sur la question de la pollution par les nitrates, Gu et al. [42]).

Le cadre complètement général est celui d'un écoulement à  $N \in \mathbb{N}^*$  constituants. L'équation (1.4) doit donc être remplacée par un système de  $N - 1$  équations aux dérivées partielles traduisant la conservation de la masse de  $N - 1$  des constituants parmi les  $N$  :

$$R\partial_t c_i - \operatorname{div}(S(v)\nabla c_i) + \operatorname{div}(vc_i) = \gamma_i + p_i - r_i(c_j, j = 1, \dots, N - 1), \quad 1 \leq i \leq N - 1$$

et l'équation traduisant la conservation de la masse totale devient :

$$\operatorname{div}(v) = \sum_{i=1}^N \left[ \gamma_i + p_i - r_i(c_j, j = 1, \dots, N - 1) \right].$$

On peut par exemple utiliser ces modèles multi-constituants pour traiter la pollution par substances phytosanitaires (pesticides, herbicides) (Lemière et al. [59]). En effet, la plupart des substances phytosanitaires sont solubles dans l'eau et on constate une forte tendance à la dégradation spontanée sous forme d'autres espèces organiques.

On pourra par exemple consulter Rolland [74] qui étudie l'existence de solutions globales pour des systèmes de réaction-diffusion pour des réactions de type  $C_i + C_j \rightleftharpoons C_k$ , et van Wijngaarden et al. [85] qui étudient une technique permettant de renforcer le sol en fixant une bactérie et considèrent trois différentes phases (bactérie en suspension, bactérie adsorbée et bactérie fixée).

### 1.1.4 Conditions initiales et aux bords

On considère que la zone géographique d'intérêt (correspondant aux sols fertilisés, aux sous-sols correspondants et contenant les puits de pompage de l'eau des nappes phréatiques) est un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \leq 3$ . Le bord du domaine est noté  $\partial\Omega$  supposé de classe  $\mathcal{C}^1$ .

On se donne pour condition initiale

$$c(0, x) = c_0(x), \quad x \in \Omega \tag{1.8}$$

avec  $c_0(x) \in L^2(\Omega)$ .

On choisit les conditions aux bords de type Neumann suivantes

$$S(v)\nabla c \cdot n = \phi_c \cdot n \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \tag{1.9}$$

---

où  $n$  est la normale extérieure de  $\partial\Omega$ , lorsque le flux sortant sur les bords du domaine,  $\phi_c \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ , est connu.

Les conditions aux bords pour  $\phi$  sont de type Dirichlet :

$$\phi = \phi_1 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \quad (1.10)$$

avec  $\phi_1 \in L^\infty(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ . Ce choix de conditions mixtes pour  $c$  et  $\phi$  est le plus technique en terme d'analyse.

D'autres choix de conditions aux bords sont cependant possibles. Nous les listons ci-dessous :

- conditions aux bords de type Dirichlet pour la concentration :

$$c = c_1 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T); \quad (1.11)$$

- conditions aux bords de type Neumann pour la charge hydraulique :

$$-\kappa \nabla \phi \cdot n = v_1 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T); \quad (1.12)$$

- conditions de Fourier (ou de Robin) sur  $c$  ou  $\phi$  :

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma_u u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), u = \phi \text{ ou } c, \quad (1.13)$$

dans le cas où le flux est supposé proportionnel à un saut entre deux milieux.

## 1.2 Caractérisation de l'objectif

### 1.2.1 Littérature

Dans les années 70, la recherche d'une politique environnementale optimale tenant compte des coûts de dépollution a été explorée. On pourra citer Keller et al. [46] qui étudient deux modèles dont l'objectif est identique mais qui diffèrent par la structure de leur fonction de production, ainsi que Plourde [71] qui s'intéresse à l'accumulation des déchets. Van der Ploeg et de Zeeuw [70] ont considéré des modèles sans espace. Cependant, cette hypothèse n'est pas réaliste au regard de la vitesse d'écoulement dans les nappes phréatiques. Les travaux de Bordenave et al. [14] appuient cette remarque en montrant que les flux dans le sous-sol étant lents, il faut tenir compte d'un délai entre l'émission et les apports d'eau polluée aux points de captage.

D'autres travaux prennent en compte ce délai, ce qui permet de modéliser le fait que l'application de politiques environnementales n'a pas de résultats visibles immédiatement. Winkler montre dans [87] que les trajectoires optimales des émissions de pollution sont

---

monotones si l'objectif est séparable en un composant émission et un composant stock de pollution, mais qu'elles peuvent osciller si ce n'est pas le cas. Bourgeois et Jayet [16] considèrent l'influence d'un délai entre l'épandage de l'engrais et son impact environnemental dans l'aquifère, et ils prouvent que cet effet est amplifié par une information asymétrique entre les agriculteurs et le planificateur social (qui ne disposent pas de la même information). Il a été prouvé par Augeraud et Leandri [9] que prendre en compte les temps de délai peut entraîner des politiques optimales cycliques.

Cependant, ces modèles considèrent l'environnement de manière simplifiée. D'autres auteurs ont donc choisi d'être plus précis dans leur modélisation en introduisant des termes non linéaires plus réalistes. C'est le cas de Kossioris et al. [50] qui, en plus d'un terme linéaire de dégradation, considèrent un terme non linéaire dans l'équation d'état. Leur exemple d'application en lacs peu profonds est une référence pour les problèmes de contrôle de pollution.

La théorie des jeux a aussi été utilisée pour comparer des problématiques économiques avec et sans politique environnementale de coopération. On peut citer de nouveau Kossioris et al. [50] qui comparent les équilibres de Nash pour des stratégies *open-loop* (adoptées lorsque les joueurs ne disposent d'information que sur l'état initial) et *feedback* (définies à chaque instant pour chaque état), mais également Ploeg et Zeeuw qui, dans [70], comparent les émissions optimales quand chaque pays applique sa propre politique environnementale sans coopération et quand tous les pays coordonnent leurs actions. Ils montrent entre autres que lorsque les gouvernements ne coopèrent pas, cela mène à une pollution plus importante. Dockner et van Long ont également comparé les stratégies coopératives et non coopératives dans [30] avec un modèle de contrôle de pollution internationale impliquant deux pays voisins. De Frutos et Martín-Herrán [35] étudient eux aussi ce cas de figure.

Récemment, de nouveaux modèles ont pris également en compte l'espace afin de mieux modéliser le transport et la diffusion du polluant. Un exemple d'étude de modèle de contrôle optimal en temps et en espace est le cas des lacs connectés, traité par Brock et Xepapadeas dans [21], qui y étudient la diffusion du phosphore grâce à un système de réaction-diffusion. D'autres modèles spatio-temporels ont été étudiés, en particulier par Boucekkine et al. dans [15]. Dans [22], Camacho et Pérez Barahona étudient un problème d'utilisation optimale des terres, en prenant en compte la pollution de l'air. De Frutos et Martín-Herrán [35] considèrent un problème de pollution en sous-sol sur plusieurs régions. Ils fournissent, pour leur modèle d'advection-diffusion à coefficients constants, une étude numérique permettant de calculer les équilibres de Nash.

## 1.2.2 Notre modèle

Au vue de notre système d'état présenté au paragraphe 1.1, notre problème de contrôle optimal se place dans le cadre des modèles prenant en compte le temps et l'espace. Cependant, notre modélisation est plus fine que dans les travaux cités ci-dessus. En effet,

---

certain aspects du transport du polluant ne sont généralement pas pris en compte dans les modèles cités précédemment : à part dans les travaux de De Frutos et Martín-Herrán [35] qui considèrent un problème en deux dimensions, les modèles sont souvent en une dimension et la vitesse du fluide ainsi que les coefficients de diffusion sont supposés donnés et constants. Enfin, nous considérons un objectif économique en temps infini, afin de prendre en compte les conséquences à long terme d'une politique optimale.

À présent, nous allons expliciter le problème d'optimisation afin de compléter notre problème de contrôle optimal. On considère un décideur (planificateur central) dont l'objectif est de maximiser une fonction de bien être social qui prend en compte le bénéfice privé (provenant de la production agricole) et le dommage environnemental (caractérisé par les coûts de dépollution). L'objectif classique que nous considérons est celui de Ulph and Ulph [82] :

$$J(p, c) = \int_0^T \left( \int_{\Omega} \left( f(x, p) - D(x, c) \right) dx \right) e^{-\rho t} dt$$

où  $T > 0$  est l'horizon de planification qui peut être infini. Le taux d'actualisation  $\rho \in ]0, 1[$  permet de comparer des coûts et des bénéfices se produisant à des dates différentes. Dans un rapport du groupe d'experts présidé par Daniel Lebègue [57], le taux d'actualisation est défini comme "[traduisant] le prix relatif qu'une collectivité attache au présent et [fixant] la limite de l'effort que cette collectivité est prête à consentir pour l'avenir ; [...] c'est en quelque sorte le prix du temps". Ici, il donne un "poids" plus important à la génération actuelle. Pour les investissements publics de court terme, le taux d'actualisation est de 4%, toujours d'après Lebègue, [57] ; pour les projets entre 50 et 100 ans, C. Gollier [39] préconise un taux de 5%.

La variable de contrôle est  $p \leq \bar{p}$  où  $\bar{p} \in \mathbb{R}_+^*$  est un seuil. On supposera  $\bar{p}$  suffisamment grand. En réalité, l'agriculteur ne peut pas épandre une quantité infinie d'engrais : il ne peut dépasser un seuil maximal. On supposera par ailleurs que  $p \in E_0$  où

$$E_0 \subset \{q \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), 0 \leq q(t, x) \leq \bar{p}, \text{ presque partout dans } \Omega \times (0, T)\}.$$

La fonction  $f$  représente le bénéfice de l'agriculteur, dépendant des quantités épandues sur le champ. La fonction  $D$ , qui dépend de la position du puits et de la quantité de polluant à traiter, modélise les dommages environnementaux par le coût de la dépollution des eaux pompées au puits de captage.

On choisit de modéliser le coût de dépollution au niveau du puits par un terme général  $D(x, c)$  qui se localise près du puits d'extraction. On peut par exemple considérer en fait le puits comme un cylindre de petit rayon pénétrant dans le sol à la verticale d'un point de coordonnées  $(L_x, L_y, 0)$ . Si on considère un cylindre de rayon un peu plus large (ou plus généralement un sous-domaine de taille caractéristique plus importante), on peut modéliser l'émergence de la nappe phréatique dans une rivière grâce à un opérateur de même type (le sous-domaine correspond alors à l'éponte).



---

Dans Augeraud-Véron and Leandri [9], ces deux fonctions satisfont les propriétés suivantes :

- $f(x, p)$  est positive, croissante et définie pour  $p \in \mathbb{R}_+$  ;
- $f(x, p)$  est strictement concave ;
- $p \mapsto f(\cdot, p)$  est continue ;
- $D(x, c)$  est croissante, strictement convexe et telle que  $D(x, 0) = 0$  pour tout  $x \in \Omega$ .

**Remarque 1.2.1** *L'hypothèse de continuité de  $f$  par rapport à  $p$  peut en fait être légèrement assouplie : il sera suffisant pour nous de supposer que  $f$  est semi-continue supérieurement et bornée par rapport à  $p$ . En effet, cette hypothèse est suffisante pour utiliser trois outils clef de ce travail : le Théorème 2.2.1 assurant qu'un problème de maximisation coercif est bien posé (pour lequel l'hypothèse de semi-continuité inférieure est suffisante), les résultats de semi-continuité inférieure des fonctions convexes (Tartar [78]) et le critère de compacité de Visintin via les fonctions semi-continues inférieurement et strictement convexes (Visintin [83] Théorème 3).*

**Remarque 1.2.2** *Nous n'aurons pas besoin de supposer la fonction  $D$  continue dans les chapitres qui suivent. Cela permet en particulier d'inclure des cas où le coût du traitement évolue selon des seuils de pollution. L'hémicontinuité et la monotonie de  $D$  sont en fait les seules hypothèses indispensables pour nos analyses du problème de contrôle. La convexité de  $D$  sera utilisée pour obtenir un résultat d'unicité. Les strictes monotonie et convexité ne sont quant à elles nécessaires que pour des calculs explicites dans un exemple stationnaire.*

Le problème de contrôle optimal est alors le suivant :

$$\max_{p \in E_0} \int_0^T \left( \int_{\Omega} \left( f(x, p) - D(x, c) \right) dx \right) e^{-\rho t} dt$$

sous la contrainte

$$\begin{cases} \psi R \partial_t c + v \cdot \nabla c - \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla c) = -r(c) + (\gamma + p)(1 - c) - gc \text{ dans } \Omega_T, \\ \operatorname{div}(v) = \gamma + p + g, v = -\kappa \nabla \phi, \text{ dans } \Omega_T, \\ S(v) \nabla c \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), c|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega, \\ \phi = \phi_1 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T). \end{cases}$$

---

### 1.3 Tableaux récapitulatifs

Nous listons dans les trois tableaux ci-dessous les variables, les conditions initiales et les paramètres du modèle, en précisant leur symbole, unité et valeurs de référence (dans le contexte de cette thèse, l'unité de temps est en général le jour voire l'année).

Variables	Symbole	Unité
Concentration du polluant	$c$	communément pour la problématique des nitrates $\text{mg.L}^{-1}$
Vitesse du polluant	$v$	mètres par unité de temps
Charge hydraulique	$\phi$	mètres d'eau
Quantité d'engrais épandu	$p$	concentration par unité de temps

Conditions initiales	Symbole	Unité	Valeur	Référence
Concentration au bord du domaine	$c_1$		[0; 1]	
Charge hydraulique au bord du domaine	$\phi_1$	mètres d'eau	[50; 80]	[48]
Vitesse au bord du domaine	$v_1$	mètres par unité de temps	[0.5; 20]	[67]

---

Paramètres	Symbole	Unité	Valeur	Référence
Facteur de retard	$R$		[1; 50]	[66]
Borne inférieure de la porosité	$\psi_-$		0.3	[24], [63]
Borne supérieure de la porosité	$\psi_+$		0.35	[24], [63]
Apport naturel	$\gamma$	concentration par unité de temps	[0; 15]	[67]
Perméabilité	$\kappa$	mètres par unité de temps	[20; 400]	[29], [63], [24]
Coefficient de diffusion moléculaire	$S_m$	m <sup>2</sup> par unité de temps	[10 <sup>-6</sup> ; 10 <sup>-1</sup> ]	[29]
Coefficient de dispersion transversale	$\alpha_T$	m <sup>2</sup> par unité de temps	[0; 1]	[29]
Coefficient de dispersion longitudinale	$\alpha_L$	m <sup>2</sup> par unité de temps	[0; 1]	[29]
Taux d'actualisation	$\rho$		]0; 1[	[9]

## 1.4 Repères bibliographiques

On présente ici de façon synthétique des références liées au problème présenté au Chapitre 1 et représentatives de l'état de l'art. Elles sont listées suivant leur date de parution et pour chacune d'entre elles, nous comparerons le modèle étudié avec le notre.

Article	Résumé et modèle mathématique	Comparaison
<p>J. Simon, 1983, Contrôle de la solution d'une équation parabolique avec donnée ponctuelle [76]</p>	<p><i>Thème</i> : Contrôle de la solution d'une équation parabolique avec donnée ponctuelle.  <i>Objectif</i> :</p> $J(v, b) = \int_{\Omega}  y(x, T) - z(x) ^2 dx + N \int_0^T v(t)^2 dt.$ <p><i>Equation d'état</i> : <math>\partial_t y + Ay = v(t)\delta_b(x)</math> avec <math>A</math> un opérateur aux dérivées partielles du deuxième ordre en <math>x</math>, elliptique.  <i>Domaine</i> : <math>\Omega</math> ouvert de <math>\mathbb{R}^n</math>, <math>n \leq 3</math>.  <i>Conditions aux bords</i> : <math>y = 0</math>.</p>	<p><b>Différences</b> :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Pas de convection.</li> <li>• Fonction coût différente.</li> <li>• Terme source en Dirac.</li> </ul>
<p>W. Brock and A. Xepapadeas, 2007 (Diffusion-Induced Instability and Pattern Formation in Infinite Horizon Recursive Optimal Control) [21]</p>	<p><i>Thème</i> : diffusion de polluants à travers des lacs connectés peu profonds.  <i>Objectif</i> :</p> $\max_{a(t,z)} \int_{\mathbb{R}^+} \int_0^L (B(a(t,z)) - C(x(t,z))) e^{-\rho t} dz dt.$ <p><i>Equation d'état</i> :</p> $\partial_t x = a(t,z) - bx(t,z) + h(x(t,z)) + D\partial_{zz}x^2(t,z).$ <p><i>Domaine</i> : 1D, <math>z \in [0, L]</math>.  <i>Conditions aux bords</i> : <math>x(t, 0) = x(t, L)</math>.</p>	<p><b>Points communs</b> :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• L'objectif est le même.</li> </ul> <p><b>Différences</b> :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Notre modélisation a plus de couplages non linéaires dans l'équation d'état qui est un système dans notre cas.</li> <li>• Nos résultats sont valables pour tout <math>\Omega \subset \mathbb{R}^N</math>, <math>N \leq 3</math>.</li> <li>• Equation de diffusion, sans réaction, ni convection, ni dispersion.</li> <li>• Dans [21] on se limite à un cadre périodique (élude la difficulté des termes aux bords).</li> </ul>

Article	Résumé et modèle mathématique	Comparaison
<p>J.P. Raymond, 2009, Optimal Control of Partial Differential Equations [72]</p>	<p><i>Thème</i> : identification d'une source de pollution.  <i>Objectif</i> : trouver <math>a \in K \subset \bar{\Omega}</math> compact, la position de la source de pollution qui minimise</p> $\int_0^T \int_{\mathcal{O}} (y - y_{obs})^2 dx dt,$ <p>où <math>y_{obs}</math> correspond à la concentration mesurée.  <i>Equation d'état</i> :</p> $\partial_t y - \Delta y + V \cdot \nabla y + \sigma y = s(t)\delta_a.$ <p><i>Domaine</i> : <math>(x, t) \in \Omega \times [0, T]</math>, <math>\mathcal{O} \subset \Omega</math>.  <i>Conditions aux bords</i> : de type Neumann.</p>	<p><b>Points communs</b> :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Equation de réaction-diffusion.</li> <li>• Valable en <math>3D</math>.</li> </ul> <p><b>Différences</b> :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• L'objectif de [72] requiert d'avoir certaines données : l'auteur cherche l'origine de la pollution.</li> </ul>
<p>J.P. Raymond, 2009, Optimal Control of Partial Differential Equations [72]</p>	<p><i>Thème</i> : contrôle de l'équation de la chaleur.  <i>Objectif</i> :</p> $J(z, u) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} (z - z_d)^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (z(T) - z_d(T))^2 + \frac{\beta}{2} \int_{\mathcal{Q}} \chi_{\omega} u^2$ <p><i>Equation d'état</i> : <math>\partial_t z - \Delta z = f + \chi_{\omega} u</math>,  <math>f \in L^2(\mathcal{Q})</math> donnée et <math>\omega \subset \Omega</math>,  <math>z_d \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega))</math>.  <i>Domaine</i> : <math>(x, t) \in \Omega \times (0, T) = \mathcal{Q}</math>, <math>\Omega \subset \mathbb{R}^N</math> ouvert borné, avec un bord de classe <math>\mathcal{C}^2</math>  <i>Conditions aux bords</i> : de type Dirichlet.</p>	<p><b>Points communs</b> :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Démonstrations d'existence d'une solution faible.</li> </ul> <p><b>Différences</b> :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Pas de convection.</li> <li>• Fonction coût différente.</li> </ul>

Article	Résumé et modèle mathématique	Comparaison
<p>C. Camacho and A. Pérez-Barahona, 2012 (Land Use Dynamics and the Environment) [22]</p>	<p><i>Thème</i> : utilisation des terres en tenant compte de leur dégradation environnementale.  <i>Objectif</i> :</p> $\max_{c,l} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u(c(t,x))f(x)g(t) dx dt.$ <p><i>Equation d'état</i> :</p> $\partial_t p - \partial_{xx} p = \theta(p, P, x)A(t, x)F(l(t, x)) - G(1 - l - f(x))$ $\int_{\mathbb{R}} c(t, x)f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \theta(p, P, x)A(t, x)F(l) dx$ $P(t) = \int_{\mathbb{R}} p(t, x) dx.$ <p><i>Domaine</i> : <math>(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}</math>.  <i>Conditions aux bords</i> :</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} \partial_x p(t, x) = 0$	<p><b>Points communs</b> :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Pollution agricole.</li> </ul> <p><b>Différences</b> :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Notre modélisation a plus de couplages non linéaires dans l'équation d'état.</li> <li>• Nos résultats sont valables pour tout <math>\Omega \subset \mathbb{R}^N</math>, <math>N \leq 3</math>.</li> <li>• Equation de diffusion seulement.</li> <li>• Domaine non borné (élude la difficulté aux bords).</li> </ul>
<p>Augeraud-Véron and Leandri, 2014 (Optimal Pollution Control with Distributed Delays [9])</p>	<p><i>Thème</i> : notion de délais continus dans un modèle de contrôle optimal de stock de pollution  <i>Objectif</i> :</p> $\max_{p(\cdot)} \int_0^\infty [f(p(t)) - D(c(t))] e^{-\rho t} dt.$	<p><b>Points communs</b> :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• L'objectif est le même.</li> </ul>

Article	Résumé et modèle mathématique	Comparaison
	<p><i>Equation d'état :</i></p> $\dot{c}(t) = -\alpha c(t) + \theta \int_{t-\tau_2}^{t-\tau_1} p(u)\mu(t-u) du$ $0 \leq c(t), 0 \leq p(t) \leq \hat{p},$ <p><math>c(\sigma) = c_0(\sigma) \in \mathcal{C}([-\tau_2, 0])</math> donné pour <math>\sigma \in [-\tau_2, 0]</math></p> <p><math>p(\sigma) = p_0(\sigma) \in \mathcal{C}^b([-\tau_2, 0])</math> donné pour <math>\sigma \in [-\tau_2, 0]</math>.</p> <p><i>Domaine :</i> <math>t \in \mathbb{R}_+</math>.</p>	<p><b>Différences :</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Leur article ne tient pas compte de l'espace.</li> <li>• Pas de modélisation de la partie hydrogéologique.</li> <li>• Nous avons affaibli les hypothèses sur cet objectif.</li> </ul>
<p>C. Benosman, B. Aïnseba and A. Ducrot, 2014 (Optimization of Cytostatic Leukemia Therapy in an Advection-Reaction-Diffusion Model) [12]</p>	<p><i>Thème :</i> système de réaction advection-diffusion modélisant le développement de la leucémie dans la moelle osseuse.</p> <p><i>Objectif :</i></p> $\min_{u \in U} \int_0^T \int_{\Omega} (\epsilon_1(1-u)^2 + \epsilon_2 s^2) dx dt,$ <p><math>U := \{u \in L^\infty((0, T) \times \Omega), 0 \leq u(t, x) \leq 1\}</math>.</p> <p><i>Equation d'état :</i></p> $\partial_t n_i + \partial_x(vn_i) = d_1 \partial_{xx} n_i + k_1(n_{i-1} - n_i),$ $\partial_t s + \partial_x(vs) = d_2 \partial_{xx} s + k_2 s u,$ $\partial_x v = k_1(n_1 + \dots + n_m) + k_2 s u.$ <p><i>Domaine :</i> <math>\Omega \subset \mathbb{R}</math>.</p> <p><i>Conditions aux bords :</i> type Neumann.</p>	<p><b>Points communs :</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Equation d'advection-diffusion.</li> </ul> <p><b>Différences :</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Nos résultats sont valables pour tout <math>\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \leq 3</math></li> <li>• Notre modèle comporte plus de couplages non linéaires : utilisation d'outils moins standards pour établir les compacités.</li> <li>• Nous envisageons tous les types de conditions aux bords classiques.</li> </ul>

Article	Résumé et modèle mathématique	Comparaison
<p>J. de Frutos and G. Martin-Herran, 2016, Pollution control in a multiregional setting : A differential game with spatially distributed controls [35]</p>	<p><i>Thème</i> : modèle de jeux, caractérisation de l'équilibre de Nash pour un problème de pollution à travers plusieurs pays.</p> <p><i>Objectif</i> :</p> $J_i(u_1, \dots, u_j, P_0) = \int_0^{+\infty} \int_{\Omega_i} e^{-\rho t} (B_i(u_i) - D_i(P)) \mathbb{1}_{\Omega_i} dx dt.$ <p><i>Equation d'état</i> :</p> $\partial_t P = \nabla \cdot (k \nabla P) + b^T \nabla P - cP + N(P) + F(u),$ <p>où <math>N(P)</math> fonction non linéaire, <math>b = b(x, t)</math> avec <math>\nabla \cdot b = 0</math>, <math>k</math> coefficient de diffusion dépendant de <math>x</math>.</p> <p><i>Domaine</i> : <math>(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+</math>, <math>\Omega \subset \mathbb{R}^2</math>.</p> <p><i>Conditions aux bords</i> :</p> $\alpha P(t, x) + k(x) \nabla P^T(t, x) \cdot n = \alpha P_b(t, x),$ $x \in \partial\Omega.$	<p><b>Points communs</b> :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Equation de convection-diffusion.</li> <li>• Non linéarité dans la fonction de réaction.</li> <li>• La fonction coût est construite comme la notre (dépend des bénéfiques et des dommages).</li> <li>• Horizon infini dans la fonction coût.</li> </ul> <p><b>Différences</b> :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Le coefficient de diffusion de [35] ne dépend pas de la vitesse.</li> <li>• L'équation d'incompressibilité de [35] est indépendante du contrôle.</li> <li>• Nos résultats sont valables dans <math>\mathbb{R}^3</math>.</li> </ul>



Article	Résumé et modèle mathématique	Comparaison
<p>D. Grass and H. Uecker, 2017 (Optimal management and spatial patterns in a distributed shallow lake model) [41]</p>	<p><i>Thème</i> : cadre numérique pour traiter un problème de contrôle optimal dans des lacs peu profonds avec diffusion.  <i>Objectif</i> :</p> $\max_{k(\cdot, \cdot)} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{ \Omega } \int_{\Omega} (\ln(k(t, x)) - \gamma P(t, x)^2) e^{-rt} dx dt.$ <p><i>Equation d'état</i> :</p> $\partial_t P(t, x) = k(t, x) - bP(t, x) + \frac{P(t, x)^2}{1 + P(t, x)^2} + D\Delta P(t, x).$ <p><i>Domaine</i> : <math>x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d</math>, <math>d \leq 2</math>.  <i>Conditions aux bords</i> : de type Neumann.</p>	<p><b>Différences</b> :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Notre modélisation a plus de couplages non linéaires dans l'équation d'état qui est un système dans notre cas.</li> <li>• Equation de réaction-diffusion, sans convection, sans dispersion.</li> <li>• Nos résultats sont valables pour tout <math>\Omega \subset \mathbb{R}^N</math>, <math>N \leq 3</math></li> <li>• Nous envisageons tous les types de conditions aux bords classiques.</li> </ul>

# Chapitre 2

## Résultats d'existence

Ce chapitre est consacré à la preuve de l'existence d'une solution au problème de contrôle optimal. Avant de commencer l'étude, nous allons faire des hypothèses de régularité qui sont nécessaires à notre étude et écrire le problème sous une forme plus générale :

$$\max_{p \in E} J(p, c) = \int_0^T \int_{\Omega} j(t, x, p, c) dx dt, \quad 0 < T \leq \infty,$$

sous la contrainte

$$\begin{cases} \psi R \partial_t c + v \cdot \nabla c - \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla c) = -r(c) + (\gamma + p)(1 - c) - gc \\ \operatorname{div}(v) = \gamma + p + g, \quad v = -\kappa \nabla \phi. \end{cases}$$

Nous détaillons dans le paragraphe ci-dessous ce modèle.

### 2.1 Modèle et hypothèses

Afin de rassembler les modèles présentés dans les paragraphes 1.1 et 1.2, introduisons quelques notations. Le domaine spatial d'étude est un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ( $1 \leq N \leq 3$  en pratique), dont le bord noté  $\partial\Omega$  est supposé de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soit  $T$  le temps maximal de l'étude,  $0 < T \leq +\infty$ . On posera parfois  $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ .

On rappelle que

$$E_0 = \{q \in L^2(0, T; L^2(\Omega)); 0 \leq q(t, x) \leq \bar{p} \text{ presque partout dans } \Omega \times (0, T)\}.$$

C'est dans cet espace que nous allons chercher la variable de contrôle. Mais lorsque l'équation d'état couple fortement les lois de conservation de la masse et du moment

via l'équation d'incompressibilité, nous allons devoir restreindre cet espace de recherche. Nous posons donc

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } g = g(t, x, p) \text{ tel que } p + g \text{ est indépendant de } p \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.1)$$

la fonction  $g$  modélisant les apports et les pertes exogènes. Nous définissons le sous-espace  $E$  de  $E_0$  tel que

$$E = \{q \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \cap W^{1,1}(0, T; X); 0 \leq q(t, x) \leq \bar{p} \text{ presque partout dans } \Omega_T, \\ \|\alpha \partial_t q\|_{L^1(0, T; X)} \leq C_p \text{ et } \int_{\Omega} (p + \gamma + g) dx = \int_{\partial\Omega} v_1 d\sigma \text{ si (1.12) est utilisée}\}$$

où  $X$  est un espace tel que  $L^2(\Omega)$  s'injecte continûment dans  $X$  et  $C_p > 0$  est une constante donnée. Il faut noter que le paramètre  $\alpha$  ne dépend que du modèle hydrogéologique et est donc donné.

On définit la fonctionnelle  $J$  à optimiser sous la forme générique :

$$J : (p \in E, c \in L^2(\Omega_T)) \mapsto J(p, c) \in \mathbb{R}$$

$$\text{où } J(p, c) = \int_0^T \int_{\Omega} j(t, x, p, c) dx dt, \quad (2.2)$$

avec

$$j : (0, T) \times \Omega \times [0, \bar{p}] \times L^2(\Omega_T) \mapsto \mathcal{M}(\Omega_T),$$

en notant  $\mathcal{M}(\Omega_T)$  l'ensemble des fonctions mesurables sur  $\Omega_T$ , telle que :

- pour presque tout  $(t, x) \in \Omega_T$ , pour tout  $c \in L^2(\Omega_T)$ , la fonction  $p \mapsto j(t, x, p, c)$  est continue<sup>1</sup> et strictement concave sur  $[0, \bar{p}]$ ,
- pour presque tout  $(t, x) \in \Omega_T$ , pour tout  $p \in [0, \bar{p}]$ , l'opérateur  $c \mapsto j(t, x, p, c)$  est monotone, hémicontinu et borné au sens où il existe  $h \in L^1(\Omega_T)$  tel que  $|j| \leq h$ .

**Remarque 2.1.1** *Le fait de définir  $j$  comme un opérateur sur  $c$  plutôt que comme une fonction sur  $\mathbb{R}$  est plus générique. En somme, on ne se limite pas à l'espace de départ  $\mathbb{R}$ , ce qui nous permet de déterminer le coût de dépollution en tenant compte d'autres éléments comme par exemple le débit au niveau du puits, ou encore l'hypothétique impact de la concentration dans le temps sur les traitements et donc tenir compte de  $c(\tau, x)$  avec  $\tau \leq t$ . Cela laisse aussi la possibilité de prendre en compte deux traitements à deux niveaux*

---

1. En fait, on peut affaiblir l'hypothèse de continuité de  $j$  par rapport à  $p$  en supposant  $j$  semi-continue supérieurement et bornée par rapport à  $p$ , cf Remarque 1.2.1.

---

différents. En effet, dans le cas de la pollution par les nitrates, il a été expérimenté ([67]) de traiter les eaux souterraines en amont en injectant un composé organique fournissant un substrat alimentant le métabolisme des bactéries dénitrifiantes. Dans le cas d'une nappe profonde, les bactéries, n'ayant pas suffisamment d'oxygène, consomment les nitrates. Ce procédé est à mettre en commun avec une dépollution à la surface. L'utilisation d'un opérateur sur  $c$  permet de modéliser une éventuelle première dénitrification souterraine en amont du traitement à la surface. On pourra par exemple le considérer de la forme  $c \mapsto j(t, x, p, c) = \mathcal{O}_1(c(t - \tau, x - h)) + \mathcal{O}_2(c(t, 0))$  avec  $(\tau, h) \in \mathbb{R}_+^2$  et où  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  sont des opérateurs modélisant l'action de dénitrification sur la partie pompée.

L'équation d'état associée est le modèle d'équations aux dérivées partielles régissant le problème hydrogéologique. Nous introduisons une définition de solution faible appropriée à cette "équation".

**Définition 2.1.1** Soit  $p \in E$ . L'équation d'état désigne le système

$$\psi R \partial_t c + v \cdot \nabla c - \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla c) = -r(c) + (\gamma + p)(1 - c) - gc \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div}(v) = \gamma + p + g, \quad v = -\kappa \nabla \phi, \quad (2.4)$$

complété par les conditions initiales et aux bords

$$S(v) \nabla c \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \quad c|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega \quad (2.5)$$

$$\phi = \phi_1 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T). \quad (2.6)$$

Un couple  $(c, \phi)$ , avec  $c \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  et  $\phi \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega))$ , est solution faible de (2.3)-(2.6) au sens où pour toute fonction test  $\varphi \in H^1(0, T; H^1(\Omega))$  telle que  $\varphi|_{t=T} = 0$  on a

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_T} \psi R c \partial_t \varphi \, dx \, dt - \int_{\Omega} R c_0 \varphi|_{t=0} \, dx + \int_{\Omega_T} (v \cdot \nabla c) \varphi \, dx \, dt \\ & + \int_{\Omega_T} \psi S(v) \nabla c \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt = \int_{\Omega_T} \left( -r(c) + (\gamma + p)(1 - c) - gc \right) \varphi \, dx \, dt, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\int_{\Omega_T} \operatorname{div}(v) \varphi \, dx \, dt = \int_{\Omega_T} (\gamma + p + g) \varphi \, dx \, dt, \quad (2.8)$$

et pour tout  $\theta \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$

$$\int_{\Omega_T} v \cdot \nabla \theta \, dx \, dt = \int_{\Omega_T} -\kappa \nabla \phi \cdot \nabla \theta \, dx \, dt, \quad (2.9)$$

$$\phi = \phi_1 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T). \quad (2.10)$$

---

Nous pouvons alors définir le sous-ensemble  $E_c$  de  $E$  contraint par l'équation d'état :

$$E_c = \{p \in E; \exists(c, \phi) \text{ solution faible du système (2.3)-(2.6) associé à } p \text{ au sens de la Définition 2.1.1}\}.$$

Notre problème de contrôle optimal peut alors être défini comme suit.

**Définition 2.1.2** *Trouver  $(p^*, c^*, \phi^*)$  tels que*

$$J(p^*, c^*) = \max_{p \in E_c} J(p, c)$$

*et  $(c^*, \phi^*)$  est solution faible du système (2.3)-(2.6) associé à  $p^*$  au sens de la Définition 2.1.1.*

Cela revient à déterminer l'utilisation optimale des engrais sachant qu'ils servent à la croissance des plantes mais que toute eau contaminée doit être traitée. On cherche donc la quantité optimale d'engrais que l'agriculteur peut épandre dans le but de maximiser ce coût intertemporel en prenant en compte la dynamique hydrogéologique du polluant.

**Remarque 2.1.2** *Ce modèle reste cependant très générique. Au delà du contrôle des épandages d'engrais, on peut l'adapter à tout type de pollution, en surface ou en sous-sol, des nappes phréatiques.*

**Remarque 2.1.3** *Nous avons choisi ici de présenter le problème avec des conditions aux bords mixtes, Dirichlet en charge hydraulique, Neumann en concentration. Il s'avère que c'est l'un des cadres les moins confortables mathématiquement. D'autres choix (Dirichlet-Dirichlet, Neumann-Neumann, Neumann-Dirichlet) feront l'objet de remarques en cours de chapitre.*

Listons maintenant les hypothèses techniques. On prendra

- l'opérateur  $S(v)$  supposé donné par (1.2) avec  $\alpha_L \geq \alpha_T \geq 0$ . Notons que d'après la définition (1.2) du tenseur de dispersion, on a

$$S(v)\xi \cdot \xi \geq (S_m + \alpha_T |v|) |\xi|^2, |S(v)\xi| \leq (S_m + \alpha_L |v|) |\xi| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

On suppose que  $S_m > 0$ . On suppose qu'il existe des réels  $\kappa_-$  et  $\kappa_+$  avec  $0 < \kappa_- \leq \kappa_+$  tels que le tenseur de perméabilité vérifie :

$$\kappa \xi \cdot \xi \geq \kappa_- |\xi|^2 \text{ et } |\kappa \xi| \leq \kappa_+ |\xi|, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

- l'isotherme  $r$  une fonction continue telle qu'il existe  $r_+ \in \mathbb{R}^+$  avec

$$|r(x)| \leq r_+ |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

- 
- le facteur de retard tel que  $R > 0$  ;
  - la concentration initiale  $c_0 \in L^2(\Omega)$  avec  $0 \leq c_0(x) \leq 1$  presque partout dans  $\Omega$  ;
  - la fonction  $g \in L^\infty(\Omega_T)$  ;
  - la fonction  $j$  est telle que

$$j : (0, T) \times \Omega \times [0, \bar{p}] \times L^2(\Omega_T) \mapsto \mathcal{M}(\Omega_T),$$

en notant  $\mathcal{M}(\Omega_T)$  l'ensemble des fonctions mesurables sur  $\Omega_T$ , telle que :

- pour presque tout  $(t, x) \in \Omega_T$ , pour tout  $c \in L^2(\Omega_T)$ , la fonction  $p \mapsto j(t, x, p, c)$  est continue<sup>2</sup> et strictement concave sur  $[0, \bar{p}]$ ,
- pour presque tout  $(t, x) \in \Omega_T$ , pour tout  $p \in [0, \bar{p}]$ , l'opérateur  $c \mapsto j(t, x, p, c)$  est monotone, hémicontinu et borné au sens où il existe  $h \in L^1(\Omega_T)$  tel que  $|j| \leq h$ . On note

$$|j(t, x, p, c)| \leq h(t, x) \text{ presque pour tout } (t, x) \in \Omega_T \text{ si } p \in E \text{ et } c \in L^2(\Omega_T), \forall T > 0 ; \quad (2.11)$$

- la donnée  $\phi_1 \in H^1(\Omega)$  ;
- la porosité  $\psi \in L^\infty(\Omega)$  et il existe  $\psi_-$  et  $\psi_+$  des réels tels que  $0 < \psi_- \leq \psi(x) \leq \psi_+$ , presque pour tout  $x \in \Omega$ . Cependant, pour alléger un peu les démonstrations, nous allons supposer dans ce chapitre que

$$\psi \in \mathbb{R}, \psi > 0. \quad ^3$$

- dans le cas de conditions aux bords de type Dirichlet pour la concentration ( $c = c_1$  sur  $\partial\Omega \times (0, T)$ , (1.11)), on supposera la régularité suivante pour  $c_1$  :

$$c_1 \in H^1(0, T; L^2(\Omega) \cap L^2(0, T; W^{1,\infty}(\Omega))) \text{ si } \alpha_T = 0,$$

$$c_1 \in H^1(0, T; L^2(\Omega) \cap L^2(0, T; W^{1,4}(\Omega))) \text{ si } \alpha_T > 0 ;$$

- dans le cas de conditions aux bords de type Neumann pour la charge hydraulique ( $-\kappa \nabla \phi \cdot n = v_1$  sur  $\partial\Omega \times (0, T)$ , (1.12)), on supposera

$$v_1 \in L^2(\partial\Omega).$$

---

2. En fait, on peut affaiblir l'hypothèse de continuité de  $j$  par rapport à  $p$  en supposant  $j$  semi-continue supérieurement et bornée par rapport à  $p$ , cf Remarque 1.2.1.

3. Supposer  $\psi \in L^\infty(\Omega)$  borné par  $\psi_-$  et  $\psi_+$  ne nous interdirait dans la suite que l'utilisation de la forme classique du lemme d'Aubin pour l'étude de la concentration  $c$  (en effet, l'équation (2.3) ne donne l'information "que" sur  $R\psi\partial_t c$ ) : il faut alors utiliser la version de Galusinski et Saad du lemme d'Aubin [36].

---

Au vu du très fort couplage du problème, nous adoptons une stratégie de preuve basée sur un résultat de type point fixe (voir le paragraphe 2.4). Nous commençons donc par étudier indépendamment deux problèmes découplés : l'existence de l'objectif connaissant le comportement hydrogéologique (paragraphe 2.2) et l'existence de solutions physiquement admissibles au modèle hydrogéologique pour un objectif donné (paragraphe 2.3).

## 2.2 Existence d'un $p$ pour un $c$ donné

On se concentre ici sur le problème d'optimisation. Nous allons montrer qu'il admet une unique solution.

**Proposition 2.2.1** *Soient  $T > 0$  tel que  $0 < T \leq +\infty$  et  $\bar{p} \geq 0$  donnés. Soit  $c$  donné dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ .*

*Alors le problème*

$$\text{trouver } p \in E_0 \text{ tel que } p = \arg \max_{q \in E_0} \int_0^T \int_{\Omega} j(t, x, q, c) dx dt \quad (2.12)$$

*admet une unique solution  $p \in E_0$ .*

**Remarque 2.2.1** *Ce résultat reste vrai si on cherche  $p$  dans n'importe quel sous-espace fermé et convexe de  $E_0$ . En particulier, il reste vrai en remplaçant  $E_0$  par  $E$ .*

*Preuve.* Pour démontrer cela, nous allons utiliser le théorème suivant :

**Théorème 2.2.1** *Soit  $J$  une fonction concave et continue. Soit  $E_0$  un ensemble convexe, fermé et non vide. On considère le problème*

$$\mathcal{P} : \sup_{v \in E_0} J(v). \quad (2.13)$$

*Alors, si  $J$  est coercive ou si  $E_0$  est borné, il existe au moins une solution au problème  $\mathcal{P}$ . Si de plus  $J$  est strictement concave, alors cette solution est unique.*

*Vérifions que  $E_0$  est convexe :*

Soit  $(p_1, p_2) \in E_0^2$  et soit  $\lambda \in [0, 1]$ . Alors

$$\lambda p_1 + (1 - \lambda) p_2 \in E_0$$

car  $\lambda p_1 \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  et  $(1 - \lambda) p_2 \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $0 \leq \lambda p_1(t, x) \leq \lambda \bar{p}$  et  $0 \leq (1 - \lambda) p_2(t, x) \leq (1 - \lambda) \bar{p}$  presque partout dans  $\Omega \times (0, T)$ . Donc  $E_0$  est convexe.

---

*Montrons que  $E_0$  est fermé pour la topologie forte de  $L^2(\Omega_T)$  :*

Soit  $(p_n)_{n \geq 0}$  une suite de  $E_0$  qui converge fortement vers  $p$ . Nous allons vérifier que  $p \in E_0$ . La convergence forte dans  $L^2$  implique que  $p_n(t, x)$  converge vers  $p(t, x)$  presque partout dans  $\Omega_T$ , d'où  $0 \leq p(t, x) \leq \bar{p}$  presque partout dans  $\Omega_T$ . Donc  $p \in E_0$ .

Donc toute suite convergente de  $E_0$  converge vers une limite dans  $E_0$ . Donc  $E_0$  est fermé.

*Montrons que  $J$  est continue :*

On va montrer que pour toute suite  $(p_n)$  de  $E_0$  convergeant vers  $p$  pour la topologie forte de  $L^2(\Omega_T)$ ,  $J(p_n, c)$  converge vers  $J(p, c)$  dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $(p_n)_{n \geq 0}$  une suite de  $E_0$  qui converge fortement vers  $p \in E_0$ . La fonction  $p \mapsto j(\cdot, p)$  étant continue, on déduit de la convergence presque partout dans  $\Omega_T$  de  $p_n$  celle de  $j(t, x, p_n, c)$  vers  $j(t, x, p, c)$ . Comme  $j$  est majorée par une fonction  $h$  intégrable d'après (2.11), on applique le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour écrire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} j(t, x, p_n, c) dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} j(t, x, p, c) dx dt$$

c'est-à-dire

$$J(p_n, c) \rightarrow J(p, c) \text{ dans } \mathbb{R}.$$

Donc  $J$  est continue de  $E_0$  muni de la topologie de la convergence forte dans  $L^2$  vers  $\mathbb{R}$ .

*Montrons que  $J$  est strictement concave :*

Soit  $\tau \in ]0, 1[$  et soient  $(p, q) \in E_0^2$  distincts presque partout dans  $\Omega \times (0, T)$ .

$$J(\tau p + (1 - \tau)q, c) = \int_0^T \int_{\Omega} j\left(t, x, \tau p(x, t) + (1 - \tau)q(x, t), c\right) dx dt.$$

La fonction  $j$  étant strictement concave par rapport à  $p$  et  $c$  étant fixé, on a

$$j(t, x, \tau p(t, x) + (1 - \tau)q(t, x), c) > \tau j(t, x, p(t, x), c) + (1 - \tau)j(t, x, q(t, x), c).$$

Cela implique que

$$\int_0^T \int_{\Omega} j(t, x, \tau p + (1 - \tau)q, c) dx dt \geq \int_0^T \int_{\Omega} \left( \tau j(t, x, p, c) + (1 - \tau)j(t, x, q, c) \right) dx dt.$$

Montrons qu'on ne peut avoir égalité. Raisonnons par l'absurde et supposons que

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left( j(t, x, \tau p + (1 - \tau)q, c) - \tau j(t, x, p, c) - (1 - \tau)j(t, x, q, c) \right) dx dt = 0. \quad (2.14)$$



---

Comme  $j(t, x, \tau p + (1 - \tau)q, c) - \tau j(t, x, p, c) - (1 - \tau)j(t, x, q, c) > 0$ , on a

$$(2.14) \Leftrightarrow \left\| \left( j(t, x, \tau p + (1 - \tau)q, c) - \tau j(t, x, p, c) - (1 - \tau)j(t, x, q, c) \right) \right\|_{L^1(\Omega_T)} = 0$$

$$\Leftrightarrow j(t, x, \tau p + (1 - \tau)q, c) - \tau j(t, x, p, c) - (1 - \tau)j(t, x, q, c) = 0$$

presque partout dans  $\Omega_T$

ce qui est absurde d'après la stricte concavité de  $j$ . On a donc

$$\int_0^T \int_{\Omega} j(t, x, \tau p + (1 - \tau)q, c) dx dt > \int_0^T \int_{\Omega} \left( \tau j(t, x, p, c) + (1 - \tau)j(t, x, q, c) \right) dx dt$$

c'est-à-dire

$$J(\tau p + (1 - \tau)q, c) > \tau J(p, c) + (1 - \tau)J(q, c).$$

La fonctionnelle  $J$  est donc strictement concave. On peut appliquer le théorème d'optimisation : le problème (2.12) admet une unique solution  $p \in E_0$ , ce qui prouve la Proposition 2.2.1. ■

## 2.3 Existence d'un $c$ pour un $p$ donné

Nous allons à présent démontrer l'existence d'une solution pour l'équation d'état pour un  $p$  donné dans  $E_0$ .

**Proposition 2.3.1** *Soit  $p \in E_0$  donné.*

*Nous envisagerons des hypothèses parmi les suivantes :*

- (1) *Le terme de réaction est tel que  $r(0) - \gamma \leq 0$  et la condition initiale  $c_0$  satisfait  $c_0(x) \geq 0$  presque partout dans  $\Omega$ .*
- (2) *Le terme de réaction est tel que  $r(1) + g \geq 0$  et la condition initiale  $c_0$  satisfait  $c_0(x) \leq 1$  presque partout dans  $\Omega$ .*
- (3)  $\alpha_T > 0$ .
- (4)  $\partial\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $\kappa \in (C^1(\bar{\Omega}))^{N \times N}$  et  $\phi_1 \in W^{2,p}(\bar{\Omega})$  avec  $p > N$ .
- (5)  $\partial\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $\kappa = \kappa^* Id$  avec  $\kappa^* : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\kappa^* \in C^1(\bar{\Omega})$  et  $\phi_1 \in W^{2,p}(\bar{\Omega})$  avec  $p > \frac{N}{2}$ .

---

Si les hypothèses (1)-(3) (ou simplement (3) si  $N = 2$ ) ou si l'hypothèse (4) ou l'hypothèse (5) sont vérifiées, alors il existe un couple  $(c, \phi)$  solution du problème (2.3)-(2.6) associé à  $p$  au sens de la Définition 2.1.1. De plus,  $\phi$  est unique,  $\alpha_T^{\frac{1}{2}} |v|^{\frac{1}{2}} \nabla c \in (L^2(\Omega_T))^N$  et  $c \in H^1(0, T; W^{-1,4}(\Omega))$ . Selon les hypothèses, on a de plus :

— Si  $r$  est dérivable à dérivée bornée sur le domaine image  $c(\Omega \times (0, T))$ , alors la solution est unique.

— Si (1) est vérifiée, alors

$$c(t, x) \geq 0 \text{ presque partout } x \in \Omega, \forall t \in (0, T).$$

— Si (2) est vérifiée, alors

$$c(t, x) \leq 1 \text{ presque partout } x \in \Omega, \forall t \in (0, T).$$

— Si (4) est vérifiée, alors  $\phi \in L^\infty(0, T; W^{2,p}(\Omega))$  (en particulier  $v \in (L^\infty(\Omega_T))^N$ ).

— Si (5) est vérifiée, alors  $\phi \in L^\infty(0, T; W^{1,q}(\Omega))$  avec  $q > N$  (en particulier  $v \in (L^\infty(\Omega_T))^N$ ).

**Remarque 2.3.1** Pour la preuve de la proposition précédente, si les hypothèses (1)-(3) ne sont pas satisfaites, il est essentiel pour la démonstration que nous proposons que la vitesse  $v$  soit bornée dans  $L^\infty(\Omega_T)$ . Cela explique le choix des hypothèses (4) ou (5) qui sont des cas classiques pour lesquels le gradient de la solution d'un problème elliptique sous forme divergence est contrôlé dans  $L^\infty$ .

Nous avons fait ce choix pour la simplicité des énoncés. Le prix à payer est qu'on est ainsi limité à des caractéristiques physiques très régulières (la perméabilité  $\mathcal{C}^1$  en particulier est parfois une hypothèse discutable).

Cependant, cette hypothèse peut être considérablement relaxée. On peut en particulier aboutir aux mêmes conclusions en supposant que la perméabilité est seulement Hölder-continue par morceaux (corollaire 1.3 dans Li et Vogelius [60] pour le cas où les discontinuités des coefficients ne touchent pas le bord du domaine  $\Omega$ ; théorème 2.2 dans Druet [31] dans le cas où les discontinuités atteignent le bord).

**Proposition 2.3.2 (Régularité supplémentaire)** Dans l'un des cas énoncés à la Proposition 2.3.1 où la solution  $(c, \phi)$  existe,

— Si  $\kappa = \kappa Id$  avec  $\kappa : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\kappa \in W^{1,\infty}(\Omega)$ , ou si  $\partial\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $\kappa \in (\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}))^{N \times N}$  et  $\phi_1 \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$  (redondant bien sûr si (4) ou (5) sont réalisées), alors

$$\phi \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)).$$

- 
- D'après Meyers, si  $\partial\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , il existe  $p^* > 2$  tel que si  $\phi_1 \in L^\infty(0, T; W^{1,p^*}(\Omega))$ , alors

$$\phi \in L^\infty(0, T; W^{2,p}(\Omega)), \quad p \leq p^*.$$

- D'après Stampacchia, si  $\phi_1 \in L^\infty(0, T; W^{1,p}(\Omega))$  avec  $p > \frac{N}{2}$ , alors  $\phi \in L^\infty(\Omega_T)$ .

- Si  $\kappa = \kappa_- Id$  avec  $\kappa_- > 0$  alors

$$\phi \in L^\infty(0, T; W^{2,\infty}(\Omega)).$$

- Si  $\alpha_L = \alpha_T = 0$ , si  $c_0 \in H^1(\Omega)$  et si une des hypothèses précédentes assurant que  $\phi \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega))$  est vérifiée, alors

$$c \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega)).$$

**Remarque 2.3.2** (Autres choix de conditions aux bords)

- Ces propositions restent vraies dans le cas des conditions aux bords (1.11), (1.12) et (1.13).
- Dans le cas des conditions aux bords (1.12) de type Neumann (flux donné aux bords) pour le problème de la vitesse

$$(P) \begin{cases} \operatorname{div}(-\kappa \nabla \phi) = p + g + \gamma \\ \kappa \nabla \phi \cdot n = v_1 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

cela impose une contrainte supplémentaire sur  $p$  : il faut chercher le max sur les  $p \in E$  tels que

$$\int_{\Omega} (p + g + \gamma) dx = \int_{\partial\Omega} v_1 d\sigma.$$

En effet, si on teste la première équation de (P) par 1, on voit que

$$\int_{\Omega} (p + g + \gamma) dx = \int_{\Omega} (\kappa \nabla \phi) \cdot \nabla 1 dx + \int_{\partial\Omega} (\kappa \nabla \phi \cdot n) 1 d\sigma = \int_{\partial\Omega} v_1 d\sigma.$$

L'existence d'une solution unique au problème (P) est assurée par une application directe du lemme de Lax-Milgram.

- 
- Dans le cas où on impose des conditions aux bords (1.11) de type Dirichlet en concentration, les Propositions 2.3.1 et 2.3.2 restent vraies si  $c_1$  est prolongeable en une fonction définie sur  $\Omega$  et si les hypothèses sur  $\kappa$  et  $\phi_1$  assurent que  $(\nabla\phi \cdot \nabla c_1) \in L^2(\Omega_T)$  (quel que soit le type de conditions aux bords choisi en charge) sans que les hypothèses (1)-(3) ou (4) ou (5) ne soient nécessaires pour assurer l'existence.
  - Dans le cas où on impose des conditions aux bords de type Neumann en charge (1.12), les Propositions 2.3.1 et 2.3.2 restent vraies si  $v_1 \in H^1(\Omega \times (0, T))$  et (1)-(3) sont vérifiées, si  $v_1 \in (L^\infty(\Omega \times (0, T)))^N$  avec  $\operatorname{div} v_1 \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$  (quel que soit le type de conditions aux bords choisi en concentration) ou si  $v_1$  est essentiellement non négative dans le sens où  $\|\min(0, v_1)\|_{L^\infty(\partial\Omega)} < \psi_- S_m$ , sans que les hypothèses (1)-(3) ou (4) ou (5) ne soient nécessaires pour assurer l'existence.
  - Enfin, la Proposition 2.3.1 reste vraie pour les conditions aux bords de Robin si  $\sigma_u$  est une fonction positive et bornée. De même pour une condition aux bords de type Robin oblique :

$$\frac{\partial u}{\partial m} = \sigma_u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \quad u = \phi \text{ ou } c$$

où  $m$  est un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^1$ , non tangents à  $\partial\Omega$  et tels que  $|m| = 1$  (on utilisera pour cela l'équivalence donnée page 376 dans Fichera [34]).

**Remarque 2.3.3** Dans la démonstration qui suit de la Proposition 2.3.1, on ne traite que les cas où les hypothèses (4) ou (5) sont vérifiées pour assurer l'existence. Si les hypothèses (1)-(3) sont vérifiées, la démonstration suit les mêmes lignes en définissant toutes les non linéarités en  $c$  comme des fonctions définies sur  $[0, 1]$  et prolongées par continuité par des constantes, suivant ainsi la méthode de Amirat et al. [6] si  $N \geq 3$ .

Si  $N = 2$  (hypothèse (3)), on traite le terme convectif comme suit :

on utilise les inégalités de Cauchy-Schwarz et Young :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\tau \int_\Omega (v \cdot \nabla c) c \, dx \, dt \right| &\leq \frac{1}{2\psi\alpha_T} \int_0^\tau \int_\Omega |v| |c|^2 \, dx \, dt + \frac{\psi\alpha_T}{2} \int_0^\tau \int_\Omega |v| |\nabla c|^2 \, dx \, dt \\ &\leq C \|v\|_{L^\infty(0, \tau; L^2(\Omega))} \int_0^\tau \|c(t, \cdot)\|_{L^4(\Omega)}^2 \, dt + \frac{\psi\alpha_T}{2} \int_0^\tau \int_\Omega |v| |\nabla c|^2 \, dx \, dt \\ &\leq C \int_0^\tau \|c(t, \cdot)\|_{L^4(\Omega)}^2 \, dt + \frac{\psi\alpha_T}{2} \int_0^\tau \int_\Omega |v| |\nabla c|^2 \, dx \, dt. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, on a  $\|c(t, \cdot)\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq C \|c(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \|c(t, \cdot)\|_{H^1(\Omega)}$

presque partout dans  $(0, T)$ . On a donc

$$\left| \int_0^\tau \int_\Omega (v \cdot \nabla c) c \, dx \, dt \right| \leq C \int_0^\tau \|c(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt + C \int_0^\tau \|c(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla c(t, \cdot)\|_{(L^2(\Omega))^N} \, dt + \frac{\psi \alpha_T}{2} \int_0^\tau \int_\Omega |v| |\nabla c|^2 \, dx \, dt.$$

Finalement, les inégalités de Cauchy-Schwarz et Young donnent

$$\left| \int_0^\tau \int_\Omega (v \cdot \nabla c) c \, dx \, dt \right| \leq C \int_0^\tau \int_\Omega |c|^2 \, dx \, dt + \frac{\psi S_m}{2} \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla c|^2 \, dx \, dt + \frac{\psi \alpha_T}{2} \int_0^\tau \int_\Omega |v| |\nabla c|^2 \, dx \, dt$$

qui peut alors être traité comme dans la démonstration des autres cas.

La preuve de la Proposition 2.3.1 étant assez longue, nous allons la détailler dans le paragraphe suivant.

### 2.3.1 Preuve de la Proposition 2.3.1

#### Existence et unicité de la charge hydraulique

Nous démontrons dans les lignes qui suivent l'existence et l'unicité de  $v$  et nous analysons sa régularité. Dans la suite, on notera  $C$  une constante générique. On rappelle que le problème est de trouver  $\phi \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$  tel que

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa \nabla \phi) = \gamma + p + g \\ \phi = \phi_1 \text{ sur } \partial\Omega \text{ où } \phi_1 \in H^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.15)$$

L'existence est un résultat classique de théorie des équations aux dérivées partielles elliptiques (voir Stampacchia [77]). Pour s'en convaincre, on fait une estimation *a priori*. On multiplie l'équation ci-dessus par la fonction test  $(\phi - \phi_1)$  (pour annuler les termes aux bords lors de l'intégration par parties) après l'avoir écrite  $-\operatorname{div}(\kappa(\nabla \phi - \nabla \phi_1)) = \gamma + p + g + \operatorname{div}(\kappa \nabla \phi_1)$  et on intègre sur  $\Omega$ . On en déduit

$$\int_\Omega \kappa \nabla(\phi - \phi_1) \cdot \nabla(\phi - \phi_1) \, dx \leq \left| \int_\Omega (\gamma + p + g)(\phi - \phi_1) \, dx \right| + \left| \int_\Omega \kappa \nabla \phi_1 \cdot \nabla(\phi - \phi_1) \, dx \right|$$

et donc

$$\kappa_- \int_\Omega |\nabla(\phi - \phi_1)|^2 \, dx \leq \left| \int_\Omega (\gamma + p + g)(\phi - \phi_1) \, dx \right| + \left| \int_\Omega \kappa \nabla \phi_1 \cdot \nabla(\phi - \phi_1) \, dx \right|.$$

---

D'après les inégalités de Cauchy-Schwarz et Young ( $ab \leq \epsilon a^2 + \frac{Cb^2}{\epsilon}$  où  $C \in \mathbb{R}^+$ ,  $\forall \epsilon > 0$ ), puis d'après l'inégalité de Poincaré (que l'on peut utiliser grâce aux conditions aux bords de Dirichlet) et en utilisant  $\gamma + p + g \in L^2(\Omega_T)$ , on écrit  $\forall \epsilon > 0$  :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (\gamma + p + g)(\phi - \phi_1) dx \right| &\leq \epsilon \kappa_- \int_{\Omega} |\phi - \phi_1|^2 dx + \frac{C}{\epsilon \kappa_-} \int_{\Omega} |\gamma + p + g|^2 dx \\ &\leq c_p \epsilon \kappa_- \int_{\Omega} |\nabla(\phi - \phi_1)|^2 dx + \frac{C}{\epsilon} \end{aligned}$$

où  $c_p \in \mathbb{R}_*^+$  est la constante de Poincaré. De même on a (en utilisant  $\phi_1 \in H^1(\Omega)$  donc  $\nabla \phi_1 \in L^2(\Omega)$ ) :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \kappa \nabla \phi_1 \cdot \nabla(\phi - \phi_1) dx \right| &\leq \epsilon \kappa_- \int_{\Omega} |\nabla(\phi - \phi_1)|^2 dx + \frac{C}{\epsilon \kappa_-} \kappa_+^2 \int_{\Omega} |\nabla \phi_1|^2 dx \\ &\leq c_p \epsilon \kappa_- \int_{\Omega} |\nabla(\phi - \phi_1)|^2 dx + \frac{C}{\epsilon}. \end{aligned}$$

Donc

$$\kappa_- \int_{\Omega} |\nabla(\phi - \phi_1)|^2 dx \leq \int_{\Omega} 2c_p \epsilon \kappa_- |\nabla(\phi - \phi_1)|^2 dx + \frac{C}{\epsilon}$$

et

$$\kappa_- (1 - 2c_p \epsilon) \int_{\Omega} |\nabla(\phi - \phi_1)|^2 dx \leq \frac{2c}{\epsilon}.$$

On choisit  $\epsilon > 0$  tel que  $1 - 2c_p \epsilon > 0$ , on obtient l'estimation de  $\nabla(\phi - \phi_1)$  dans  $L^2(\Omega)$ , donc de  $\phi - \phi_1$  dans  $H^1(\Omega)$  par Poincaré, donc de  $\phi = (\phi - \phi_1) + \phi_1$  dans  $H^1(\Omega)$ .

*Unicité de  $\phi$  (et donc de  $v$ ) :*

On suppose qu'il existe deux solutions  $\phi^*$  et  $\phi^{**}$  au problème (2.15), alors  $\phi = \phi^* - \phi^{**}$  est solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa \nabla \phi) = 0 \\ \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \phi|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

En testant l'équation par  $\phi$  et en utilisant la coercivité de  $\kappa$ , on en déduit que  $\kappa_- \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx = 0$  c'est-à-dire  $\nabla \phi = 0$  presque partout sur  $\Omega$ , où  $v = -\kappa(\nabla \phi^* - \nabla \phi^{**}) = 0$  presque partout sur  $\Omega$ . D'où l'unicité en  $v$ . Celle-ci implique l'unicité de  $\phi$ . En effet, on a vu que  $\nabla \phi = 0$  presque partout dans  $\Omega$ , donc  $\phi$  est presque partout constante par rapport à  $x$ . Or  $\phi = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Donc  $\phi = 0$  presque partout dans  $\Omega$ . D'où l'unicité.

---

*Analyse de la régularité supplémentaire dans la Proposition 2.3.1 :*

En posant  $u = \phi - \phi_1$  et  $f = \gamma + p + g + \operatorname{div}(\kappa \nabla \phi_1)$ , on voit que le problème définissant  $\phi$  revient au problème elliptique avec conditions aux bords de type Dirichlet homogène suivant : trouver  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $-\operatorname{div}(\kappa \nabla u) = f$ .

Si (4) est vérifiée, le fait que  $f \in L^p(\Omega)$  assure que  $u \in L^\infty(0, T; W_0^{2,p}(\Omega))$  et donc  $\phi \in L^\infty(0, T; W^{2,p}(\Omega))$  (la démonstration classique combine cartes locales et théorème de Nirenberg, Brezis Chapitre 9 [19]). Comme dans (4) on a  $p > N$ , les injections de Sobolev donnent en particulier  $\nabla \phi$  et  $v \in L^\infty(\Omega_T)$ .

Si (5) est vérifiée, on a de même  $\phi \in L^\infty(0, T; W^{2,p}(\Omega))$  avec  $p > \frac{N}{2}$ . Comme de plus  $\kappa = \kappa^* Id$ , on a :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa \nabla \phi) = p + \gamma + g \in L^\infty(\Omega_T) \\ \operatorname{rot}(\kappa \nabla \phi) = \nabla \kappa \wedge \nabla \phi \in L^\infty(0, T; W^{1,p}(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0, T; L^q(\Omega)) \end{cases}$$

avec  $q > N$  car  $p > \frac{N}{2}$  (ici le symbole  $\hookrightarrow$  désigne une injection classique de Sobolev).

On rappelle que si  $v$  est un vecteur tel que  $\operatorname{div}(v) \in L^p$ ,  $\operatorname{rot}(v) \in L^{p'}$ , alors  $v \in W^{1, \min(p, p')}$ . Donc ici  $v = -\kappa \nabla \phi \in L^\infty(0, T; W^{1,q}(\Omega))$  avec  $q > N$  (et  $v \in L^\infty(\Omega_T)$  par injection de Sobolev).

*Analyse de la régularité supplémentaire de la Proposition 2.3.2*

Les résultats de Meyers et Stampacchia sont des résultats classiques de la théorie des équations aux dérivées partielles elliptiques (voir par exemple Meyers [64] et Stampacchia [77]).

Le premier *item* de la Proposition 2.3.2 se démontre comme ci-dessus en utilisant la régularité divergence-rotationnelle de  $\kappa \nabla \phi$ . Si de plus (quatrième *item*)  $\kappa = \kappa_- Id$  avec  $\kappa_- > 0$ ,  $\operatorname{rot}(\kappa \nabla \phi) = 0$  et  $\kappa \nabla \phi \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\Omega))$  donc  $\phi \in L^\infty(0, T; W^{2,\infty}(\Omega))$ ,  $v \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\Omega))$ .

## Existence de la concentration

On peut montrer l'existence d'une solution pour un  $p$  donné dans  $E$  en appliquant la méthode de Faedo-Galerkin qui consiste à résoudre un problème approché en dimension finie. On justifie l'applicabilité de la méthode par des estimations *a priori*. Nous les détaillons dans les lignes suivantes. On suppose  $p \in E$ . Une solution  $c$  appartient à  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  avec  $c(x, 0) = c_0(x)$  dans  $\Omega$  et satisfait *a priori* la formulation faible suivante :

$$\int_0^T \int_\Omega \left( \psi R \partial_t c \varphi + \psi S(v) \nabla c \cdot \nabla \varphi + (v \cdot \nabla c) \varphi + r(c) \varphi - (p + \gamma) (1 - c) \varphi + g c \varphi \right) dx dt = 0$$

pour tout  $\varphi \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ .

Soit  $\tau \in (0, T)$ . En substituant  $\varphi = c \chi_{[0, \tau]}(t)$  dans la formulation faible précédente, on

obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{\psi R}{2} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \int_\Omega |c|^2 dx dt + \int_0^\tau \int_\Omega \psi S(v) \nabla c \cdot \nabla c dx dt + \int_0^\tau \int_\Omega (v \cdot \nabla c) c dx dt \\ & + \int_0^\tau \int_\Omega r(c) c dx dt - \int_0^\tau \int_\Omega (p + \gamma)(1 - c) c dx dt + \int_0^\tau \int_\Omega g c^2 dx dt = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Notons que l'on a  $\int_0^\tau \int_\Omega \psi S(v) \nabla c \cdot \nabla c dx dt \geq \int_0^\tau \int_\Omega \psi (S_m + \alpha_T |v|) |\nabla c|^2 dx dt$ .

D'après les inégalités de Cauchy-Schwarz et Young et en utilisant le fait que les isothermes classiques sont de type  $r \in L^\infty(\Omega_T)$  (le traitement du cas où  $r$  est affine est évident), on a :

$$\int_0^\tau \int_\Omega |r(c)c| dx dt \leq \frac{C}{2} \int_0^\tau \int_\Omega |r(c)|^2 dx dt + \frac{1}{2C} \int_0^\tau \int_\Omega |c|^2 dx dt \leq C + C \int_0^\tau \int_\Omega |c|^2 dx dt.$$

De plus :

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_\Omega |(p + \gamma)(1 - c)c + g c^2| dx dt & \leq \int_0^\tau \int_\Omega |p + \gamma| c dx dt + \int_0^\tau \int_\Omega |p + \gamma - g| c^2 dx dt \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_\Omega |p + \gamma|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_\Omega |c|^2 dx dt + (\bar{p} + \gamma + \|g\|_\infty) \int_0^\tau \int_\Omega |c|^2 dx dt \\ & = C + C \int_0^\tau \int_\Omega |c|^2 dx dt. \end{aligned}$$

De plus, en utilisant la régularité établie précédemment pour  $v$  grâce aux hypothèses (4) ou (5) de la Proposition 2.3.1, on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\tau \int_\Omega (v \cdot \nabla c) c dx dt \right| & \leq \|v\|_{L^\infty(\Omega_T)} \|\nabla c\|_{L^2(\Omega_T)} \|c\|_{L^2(\Omega_T)} \leq \frac{\psi S_m}{2} \int_{\Omega_T} |\nabla c|^2 dx dt \\ & + C \int_{\Omega_T} |c|^2 dx dt. \end{aligned}$$

D'où,

$$\frac{\psi R}{2} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \int_\Omega |c|^2 dx dt + \int_0^\tau \int_\Omega \psi \left( \frac{S_m}{2} + \alpha_T |v| \right) |\nabla c|^2 dx dt \leq C \int_0^\tau \int_\Omega |c|^2 dx dt + C$$

soit en particulier

$$\begin{aligned} \frac{\psi R}{2} \int_\Omega |c(\tau, x)|^2 dx + \psi \left( \frac{S_m}{2} + \alpha_T |v| \right) \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla c|^2 dx dt & \leq \frac{\psi R}{2} \int_\Omega |c_0(x)|^2 dx \\ & + C \int_0^\tau \int_\Omega |c|^2 dx dt + C \end{aligned}$$



---

et

$$\frac{\psi R}{2} \int_{\Omega} |c(\tau, x)|^2 dx \leq \frac{\psi R}{2} \int_{\Omega} |c_0(x)|^2 dx + C \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |c(x, t)|^2 dx dt + C.$$

On pose  $y(t) = \int_{\Omega} |c(t, x)|^2 dx$  et on a :

$$y(\tau) \leq C \int_0^{\tau} y(t) dt + C.$$

D'après la version intégrale du Lemme de Gronwall<sup>4</sup>, on a

$$y(\tau) \leq C e^{C\tau} \tag{2.17}$$

soit

$$\int_{\Omega} |c(\tau, x)|^2 dx \leq C \text{ presque pour tout } \tau \in (0, T).$$

On en déduit donc que

$$c \in L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)).$$

On revient à l'équation

$$\begin{aligned} \frac{\psi R}{2} \int_{\Omega} |c(\tau, x)|^2 dx + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \psi \left( \frac{S_m}{2} + \alpha_T |v| \right) |\nabla c|^2 dx dt &\leq \frac{\psi R}{2} \int_{\Omega} |c_0(x)|^2 dx \\ &+ C \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |c|^2 dx dt + C \end{aligned}$$

que l'on peut réduire à

$$\int_0^{\tau} \int_{\Omega} |\nabla c|^2 dx dt \leq C$$

grâce au terme contrôlé avec Gronwall (cf (2.17)). On en déduit que

$$\begin{aligned} \nabla c \text{ est borné dans } L^2(0, T; L^2(\Omega))^N, \\ \alpha_T^{\frac{1}{2}} |v|^{\frac{1}{2}} \nabla c \text{ est borné dans } L^2(0, T; L^2(\Omega))^N, \end{aligned} \tag{2.18}$$

---

4. Si les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  sont intégrables et positives sur  $[t_1, t_2]$ , et si il existe  $C, K$  constantes positives vérifiant  $\phi(t) \leq C + K \int_{t_1}^{t_2} \psi(s) \phi(s) ds$ , alors  $\phi(t) \leq C e^{K \int_{t_1}^{t_2} \psi(s) ds}$ .

car  $v \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ . Dans ce cas, on a justifié que

$$c \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (2.19)$$

Nous allons à présent montrer que  $\psi R \partial_t c \in L^2(0, T; W^{-1,4}(\Omega))$ .  
Puisque  $R > 0$  et  $\psi > 0$ ,

$$\begin{aligned} \partial_t c \in L^2(0, T; W^{-1,4}(\Omega)) &\Leftrightarrow \forall \varphi \in L^2(0, T; W_0^{1,4}(\Omega)), \langle \psi R \partial_t c, \varphi \rangle_{L^2(W^{-1,4}) \times L^2(W_0^{1,4})} \text{ est défini} \\ &\Leftrightarrow \forall \varphi \in L^2(0, T; W_0^{1,4}(\Omega)), \int_0^T \int_\Omega \psi R \partial_t c \varphi \, dx \, dt < \infty. \end{aligned}$$

Soit  $\varphi \in L^2(0, T; W_0^{1,4}(\Omega))$ . Alors :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \psi R \partial_t c \varphi \, dx \, dt &= \int_0^T \int_\Omega \left( \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla c) - v \cdot \nabla c - r(c) + (p + \gamma)(1 - c) - gc \right) \varphi \, dx \, dt \\ &= - \int_0^T \int_\Omega \psi S(v) \nabla c \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega (v \cdot \nabla c) \varphi \, dx \, dt \\ &\quad - \int_0^T \int_\Omega r(c) \varphi \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega (p + \gamma)(1 - c) \varphi \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega gc \varphi \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Or  $v \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  donc  $|v|^{\frac{1}{2}} \in L^\infty(0, T; L^4(\Omega))$  et  $S(v)^{\frac{1}{2}} \in L^\infty(0, T; L^4(\Omega))$ . On a vu de plus que  $\alpha_T^{\frac{1}{2}} |v|^{\frac{1}{2}} \nabla c \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , donc  $S(v)^{\frac{1}{2}} \nabla c \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . Donc  $S(v) \nabla c = S(v)^{\frac{1}{2}} S(v)^{\frac{1}{2}} \nabla c \in L^2(0, T; L^{\frac{4}{3}}(\Omega))$  et la première intégrale existe car  $\nabla \varphi \in L^2(0, T; L^4(\Omega))$ .

De même, la seconde intégrale existe car  $\varphi \in L^2(0, T; L^4(\Omega))$ .

Enfin,  $r(c) \in L^2(\Omega_T)$ ,  $p \in L^\infty(\Omega_T)$ ,  $g \in L^\infty(\Omega_T)$  et  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $(1 - c) \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  donc  $(p + \gamma)(1 - c) - gc \in L^2(\Omega_T)$ . Le dernier terme a donc du sens car  $\varphi \in L^2(\Omega_T)$ .

Donc pour tout  $\varphi \in L^2(0, T; W_0^{1,4}(\Omega))$ ,  $\int_0^T \int_\Omega \psi R \partial_t c \varphi \, dx \, dt = \langle \psi R \partial_t c, \varphi \rangle < \infty$  d'où  $\psi R \partial_t c \in L^2(0, T; W^{-1,4}(\Omega))$ .

Puisque  $\psi R > 0$ , on en déduit

$$c \in H^1(0, T; W^{-1,4}(\Omega)). \quad (2.20)$$

Finalement,

$$c \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; W^{-1,4}(\Omega)). \quad (2.21)$$

---

**Remarque 2.3.4** La régularité (2.21) implique en particulier que  $c \in \mathcal{C}(0, T; L^2(\Omega))$ . En effet, on rappelle que si  $c \in L^2(0, T; X)$  et  $\partial_t c \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  avec  $X \subset L^2(\Omega)$ , alors  $c \in \mathcal{C}(0, T; X)$ . Comme  $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \subset L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , d'après (2.21)  $c \in \mathcal{C}(0, T; L^2(\Omega))$ .

*Régularité supplémentaire de la Proposition 2.3.2 :*

Supposons maintenant que  $\alpha_T = \alpha_L = 0$ , c'est-à-dire que  $S(v) = S_m Id$ , que  $c_0 \in H^1(\Omega)$  et que  $\phi \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega))$ .

On revient à la formulation de départ mais en choisissant cette fois-ci pour fonction test  $\varphi = \frac{\partial c}{\partial t} \chi_{(0, \tau)}$ . On a :

$$\begin{aligned} \psi R \int_0^\tau \int_\Omega |\partial_t c|^2 dx dt + \psi S_m \int_0^\tau \int_\Omega \nabla c \cdot \nabla(\partial_t c) dx dt + \int_0^\tau \int_\Omega (v \cdot \nabla c) \partial_t c dx dt + \int_0^\tau \int_\Omega r(c) \partial_t c dx dt \\ - \int_0^\tau \int_\Omega (p + \gamma)(1 - c) \partial_t c dx dt + \int_0^\tau \int_\Omega gc \partial_t c dx dt = 0. \end{aligned}$$

Or,

$$\psi S_m \int_0^\tau \int_\Omega \nabla c \cdot \nabla(\partial_t c) dx dt = \frac{\psi S_m}{2} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \int_\Omega |\nabla c|^2 dx dt$$

et d'après les inégalités de Cauchy-Schwarz et Young, pour tout  $\epsilon > 0$ , en utilisant la régularité supplémentaire pour  $v$  due à l'hypothèse,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\tau \int_\Omega (v \cdot \nabla c) \partial_t c dx dt \right| \leq \|v\|_{L^\infty(\Omega_T)} \int_0^\tau \int_\Omega |(\nabla c) \partial_t c| dx dt \leq C \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla c| |\partial_t c| dx dt \\ \leq \frac{C}{2\epsilon} \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla c|^2 dx dt + \frac{\epsilon}{2} \int_0^\tau \int_\Omega |\partial_t c|^2 dx dt. \end{aligned}$$

De plus,  $c$  étant bornée dans  $L^2(\Omega_T)$ , on a pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_\Omega |(p + \gamma)(1 - c) \partial_t c + gc \partial_t c| dx dt \leq \frac{1}{2\epsilon} \int_0^\tau \int_\Omega \left( |(p + \gamma)(1 - c)| + gc \right)^2 dx dt \\ + \frac{\epsilon}{2} \int_0^\tau \int_\Omega |\partial_t c|^2 dx dt = \frac{C}{\epsilon} + \frac{\epsilon}{2} \int_0^\tau \int_\Omega |\partial_t c|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse sur l'isotherme,  $|r(x)| \leq r_+ |x|$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on peut écrire

$$\int_0^\tau \int_\Omega |r(c) \partial_t c| dx dt \leq \int_0^\tau \int_\Omega r_+ |c| |\partial_t c| dx dt \leq \frac{C}{\epsilon} + \frac{\epsilon}{2} \int_0^\tau \int_\Omega |\partial_t c|^2 dx dt.$$

On a donc  $\forall \epsilon > 0$  :

$$\left( \psi R - \frac{3\epsilon}{2} \right) \int_0^\tau \int_\Omega |\partial_t c|^2 dx dt + \frac{\psi S_m}{2} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \int_\Omega |\nabla c|^2 dx dt \leq \frac{C}{2\epsilon} \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla c|^2 dx dt + \frac{C}{\epsilon}.$$

---

On choisit  $\epsilon$  tel que  $\psi R - \frac{3\epsilon}{2} > 0$ . On a :

$$\frac{\psi S_m}{2} \int_{\Omega} |\nabla c|^2 dx \leq \frac{\psi S_m}{2} \int_{\Omega} |\nabla c(0, x)|^2 dx + \frac{C}{2\epsilon} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla c|^2 dx dt + \frac{C}{\epsilon}.$$

On pose  $y(t) = \int_{\Omega} |\nabla c|^2 dx$ . Comme  $c_0 \in H^1(\Omega)$ , on a donc

$$y(\tau) \leq C \int_0^{\tau} y(t) dt + C.$$

D'après la formulation intégrale du lemme de Gronwall, on a  $y(\tau) \leq Ce^{C\tau}$  soit :

$$\int_{\Omega} |\nabla c(\tau, x)|^2 dx \leq C \text{ presque pour tout } \tau \in (0, T). \quad (2.22)$$

De (2.22) on déduit que  $\nabla c \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ . On peut donc dire (en utilisant aussi le fait que  $c \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ ) que

$$c \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)). \quad (2.23)$$

On revient à présent à l'équation

$$\left(\psi R - \frac{3\epsilon}{2}\right) \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |\partial_t c|^2 dx dt + \frac{\psi S_m}{2} y(\tau) \leq \frac{\psi S_m}{2} \int_{\Omega} |\nabla c(x, 0)|^2 dx + \frac{C}{2\epsilon} \int_0^{\tau} y(\tau) dt + \frac{C}{\epsilon}$$

d'où l'on tire

$$\int_0^{\tau} \int_{\Omega} |\partial_t c|^2 dx dt \leq C. \quad (2.24)$$

Ainsi

$$\partial_t c \in L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

D'où

$$c \in H^1(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.25)$$

On a donc

$$c \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \quad (2.26)$$

sous les hypothèses du dernier *item* de la Proposition 2.3.2.

---

**Remarque 2.3.5 (Retour sur les autres choix possibles de conditions aux bords)**

Revenons sur les faits avancés dans la Remarque 2.3.2. Les changements de conditions aux bords impactent essentiellement le mode d'estimation du terme convectif  $\int_0^T \int_{\Omega} (v \cdot \nabla c) c dx dt$  dans l'équation (3.37). Les hypothèses (4) ou (5) de la Proposition 2.3.1 permettraient de s'assurer qu'on pouvait contrôler  $v$  dans  $(L^\infty(\Omega_T))^N$  (ou  $c$  dans  $L^\infty(\Omega_T)$  dans le cas des hypothèses (1)-(3) avec la méthode de Amirat et al. [6]). Voyons rapidement pourquoi ces hypothèses sont inutiles pour d'autres choix de conditions aux bords et à quel prix.

- Si on impose les conditions (1.11) de Dirichlet sur la concentration,  $c = c_1$  sur  $\partial\Omega \times (0, T)$  et qu'on assure  $(\nabla\phi \cdot \nabla c_1) \in L^2(\Omega_T)$ , c'est-à-dire  $v \cdot \nabla c_1 \in L^2(\Omega_T)$ , alors, en testant l'équation par  $(c - c_1)$  à cause de la condition de Dirichlet non homogène, le terme convectif donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\Omega} (v \cdot \nabla c)(c - c_1) dx dt &= \int_0^T \int_{\Omega} (v \cdot \nabla(c - c_1))(c - c_1) dx dt \\
&\quad + \int_0^T \int_{\Omega} (v \cdot \nabla c_1)(c - c_1) dx dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} v \cdot \nabla \left( (c - c_1)^2 \right) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (v \cdot \nabla c_1)(c - c_1) dx dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\operatorname{div} v)(c - c_1)^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (v \cdot \nabla c_1)(c - c_1) dx dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (p + \gamma + g)(c - c_1)^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (v \cdot \nabla c_1)(c - c_1) dx dt
\end{aligned}$$

et ainsi

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} (v \cdot \nabla c)(c - c_1) dx dt \right| \leq C + C \int_0^T \int_{\Omega} c^2 dx dt.$$

Le raisonnement peut alors se poursuivre comme précédemment.

- Dans le cas où on impose les conditions (1.12) de type Neumann en charge,

$$-\kappa \nabla\phi \cdot n = v_1 \text{ sur } \partial\Omega$$

avec  $v_1 \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$  et  $\operatorname{div} v_1 \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$  (le cas où les hypothèses (1)-(3)

sont vérifiées se ferait encore avec la méthode de [6]), on écrit

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_\Omega (v \cdot \nabla c) c \, dx \, dt &= \int_0^\tau \int_\Omega ((v - v_1) \cdot \nabla c) c \, dx \, dt + \int_0^\tau \int_\Omega (v_1 \cdot \nabla c) c \, dx \, dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\tau \int_\Omega \operatorname{div}(v - v_1) c^2 \, dx \, dt + \int_0^\tau \int_\Omega (v_1 \cdot \nabla c) c \, dx \, dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\tau \int_\Omega (p + \gamma + g) c^2 \, dx \, dt + \int_0^\tau \int_\Omega \left( \frac{1}{2} (\operatorname{div} v_1) c^2 + (v_1 \cdot \nabla c) c \right) \, dx \, dt \end{aligned}$$

et

$$\left| \int_0^\tau \int_\Omega (v \cdot \nabla c) c \, dx \, dt \right| \leq C \int_0^\tau \int_\Omega c^2 \, dx \, dt + C \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla c|^2 \, dx \, dt + \frac{C}{2} \int_0^\tau \int_\Omega c^2 \, dx \, dt$$

d'après les inégalités de Young et Cauchy-Schwarz.

Le reste de la démonstration est inchangée.

Si  $v_1$  est essentiellement non négative, dans le sens où  $\|\min(0, v_1)\|_{L^\infty(\partial\Omega)} < \psi S_m$ , on écrit

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega (v \cdot \nabla c) c \, dx \, dt &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega v \cdot \nabla(c^2) \, dx \, dt = -\frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \operatorname{div}(v) c^2 \, dx \, dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial\Omega} (v \cdot n) c_{|\partial\Omega}^2 \, d\sigma \, dt. \end{aligned}$$

Le terme  $\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial\Omega} (v \cdot n) c_{|\partial\Omega}^2 \, d\sigma \, dt$  est positif si  $v_1 \geq 0$  et cela ne change donc pas la démonstration. Si  $\|\min(0, v_1)\|_{L^\infty(\partial\Omega)} < \psi S_m$ , on a, d'après le théorème de trace,

$$\frac{1}{2} \left| \int_0^T \int_{\partial\Omega} v_1 c_{|\partial\Omega}^2 \, d\sigma \, dt \right| < \psi S_m \|c_{|\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega \times (0, T))}^2 \leq \psi S_m \|c\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}^2$$

ce qui ne change pas la preuve.

Enfin, si on suppose que  $\bar{v}_1 \in (L^\infty(\Omega))^N$  et que  $\operatorname{div}(\bar{v}_1) \in L^\infty(\Omega)$  tel que  $v_1 = \bar{v}_1 \cdot n$ , on écrit

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial\Omega} v_1 c_{|\partial\Omega}^2 \, d\sigma \, dt = \int_0^T \int_\Omega (\bar{v}_1 \cdot \nabla c) c \, dx \, dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \operatorname{div}(\bar{v}_1) c^2 \, dx \, dt,$$

d'où

$$\begin{aligned} \left| -\frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \operatorname{div}(v) c^2 \, dx \, dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial\Omega} v_1 c_{|\partial\Omega}^2 \, d\sigma \, dt \right| \\ \leq C + C \int_0^T \int_\Omega |c|^2 \, dx \, dt + \frac{\psi S_m}{2} \int_0^T \int_\Omega |\nabla c|^2 \, dx \, dt. \end{aligned}$$

La démonstration reste ensuite inchangée.

Le calcul serait similaire avec des conditions aux bords de Robin.

---

## Les principes du maximum sur la concentration <sup>5</sup>

Nous allons montrer dans ce paragraphe que  $c$  est bornée dans  $L^\infty(\Omega_T)$  sous certaines conditions, plus précisément qu'on peut obtenir l'inégalité physiquement logique :  $0 \leq c \leq 1$  presque partout dans  $\Omega \times (0, T)$ .

**Lemme 2.3.1** *Soit  $(c, \phi)$  une solution de (2.3)-(2.6) au sens de la Définition 2.1.1. Si  $r(0) - \gamma \leq 0$ ,  $p \in E$  (en particulier  $p(x, t) \geq 0$  presque partout dans  $\Omega \times (0, T)$ ) et  $c_0(x) \geq 0$  presque partout dans  $\Omega$ , alors  $c(x, t) \geq 0$  presque partout dans  $\Omega \times (0, T)$ .*

*Preuve.* Pour simplifier la rédaction, on va supposer que la fonction  $\tilde{r}$  est définie sur  $\mathbb{R}$  comme suit :

$$\tilde{r}(c) = \begin{cases} r(c) \text{ un modèle classique de réaction si } c > 0 \\ r(0) \text{ si } c \leq 0 \text{ (prolongement par continuité)}. \end{cases}$$

**Remarque 2.3.6** *Une remarque sur le "presque partout" de  $c(t, x) \geq 0$  presque partout :*

- si  $\dim(\Omega) > 1$ , la régularité de  $c$  en espace n'est que du type  $L^p(\Omega)$  ( $p > 2$  en utilisant une injection de Sobolev),  $c(\cdot, x)$  n'a donc de sens que presque partout ;
- si  $\dim(\Omega) = 1$ , grâce aux injections de Sobolev, on assure la continuité par rapport à  $x$  et le presque partout devient "pour tout" ;
- par rapport à  $t$  : on a vu que  $c \in \mathcal{C}(0, T; L^2(\Omega))$ .

*Finalement, on doit donc écrire  $c(t, x) \geq 0$  presque pour tout  $x \in \Omega, \forall t \in (0, T)$ .*

On définit  $\min(0, c) = c^- \leq 0$ . On veut montrer que  $c(t, x) \geq 0$ , c'est-à-dire  $c^-(t, x) = 0$  presque pour tout  $x \in \Omega, \forall t \in (0, T)$ . On remarque que grâce au prolongement par continuité de  $r$  dans  $\mathbb{R}$  nous ayant permis de définir  $\tilde{r}$ ,

$$\int_0^T \int_\Omega (\tilde{r}(c) - \gamma)c^- dx dt = \int_0^T \int_\Omega (r(0) - \gamma)c^- dx dt \geq 0.$$

En multipliant l'équation définissant  $c$  par  $c^-$  et en intégrant par parties sur  $\Omega \times (0, \tau)$ ,  $\tau \in (0, T)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{\psi R}{2} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \int_\Omega |c^-|^2 dx dt + \psi S_m \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla c^-|^2 dx dt + \int_0^\tau \int_\Omega (v \cdot \nabla c) c^- dx dt \\ & + \int_0^\tau \int_\Omega (\tilde{r}(c) - \gamma)c^- dx dt - \int_0^\tau \int_\Omega p c^- dx dt + \int_0^\tau \int_\Omega (p + g + \gamma) |c^-|^2 dx dt \leq 0. \end{aligned}$$

---

5. Obtenus par formulations variationnelles donc dits "principes de maximum faibles".

Comme  $p, g, \gamma$  et  $-c^-$  sont positifs, que  $c^-(0, x) = \min(c_0(x), 0) = 0$ , et grâce à la définition de  $\bar{r}$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{\psi R}{2} \int_{\Omega} |c^-(\tau, x)|^2 dx dt + \psi S_m \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |\nabla c^-|^2 dx dt + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (v \cdot \nabla c) c^- dx dt \\ + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (r(0) - \gamma) c^- dx dt \leq 0. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, on a

$$\left| \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (v \cdot \nabla c) c^- dx dt \right| \leq \frac{\psi S_m}{2} \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |\nabla c^-|^2 dx dt + \frac{\|v\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2}{2\psi S_m} \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |c^-|^2 dx dt.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\psi R}{2} \int_{\Omega} |c^-(\tau, x)|^2 dx dt + \frac{\psi S_m}{2} \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |\nabla c^-|^2 dx dt + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (r(0) - \gamma) c^- dx dt \\ \leq C \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |c^-|^2 dx dt \end{aligned}$$

Comme  $\psi S_m \geq 0$  et  $r(0) - \gamma \leq 0$ , on a

$$\frac{\psi R}{2} \int_{\Omega} |c^-(\tau, x)|^2 dx dt \leq C \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |c^-|^2 dx dt.$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on obtient

$$\int_{\Omega} |c^-(\tau, x)|^2 dx \leq 0 \text{ presque pour tout } \tau \in (0, T),$$

donc  $c^- = 0$ , i.e.  $c \geq 0$  presque partout dans  $\Omega \times (0, T)$ . ■

**Lemme 2.3.2** Soit  $(c, \phi)$  une solution de (2.3)-(2.6) au sens de la Définition 2.1.1.

Si  $r(1) + g \geq 0$  et si  $c_0(x) \leq 1$  presque partout dans  $\Omega$ , alors  $c(t, x) \leq 1$  presque partout dans  $\Omega \times (0, T)$ .

*Preuve.* On considère que  $\bar{r}$  est définie par

$$\bar{r}(c) = \begin{cases} r(c) \text{ un modèle classique si } c \leq 1 \\ r(1) \text{ si } c > 1. \end{cases}$$

On définit  $c^+ = \max(c - 1, 0) \geq 0$ .

On remarque que

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\bar{r}(c) + g) c^+ dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} (r(1) + g) c^+ dx dt \geq 0.$$



En multipliant l'équation définissant  $c$  par  $c^+$  et en intégrant par parties on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\psi R}{2} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \int_\Omega |c^+|^2 dx dt + \psi S_m \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla c^+|^2 dx dt + \int_0^\tau \int_\Omega (v \cdot \nabla c) c^+ dx dt \\ + \int_0^\tau \int_\Omega r(1)c^+ dx dt - \int_0^\tau \int_\Omega (p + \gamma)(1 - c)c^+ dx dt \leq - \int_0^\tau \int_\Omega gcc^+ dx dt. \end{aligned}$$

Comme  $p + \gamma \geq 0$ , on remarque que  $-(p + \gamma)(1 - c)c^+ \geq 0$ .

De plus,  $-gcc^+ = -g(c - 1)c^+ - gc^+ = -g|c^+|^2 - gc^+$ . En utilisant également le fait que

$$\int_0^\tau \int_\Omega |(v \cdot \nabla c)c^+| dx dt \leq \frac{\psi S_m}{2} \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla c|^2 dx dt + \frac{\|v\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2}{2\psi S_m} \int_0^\tau \int_\Omega |c^+|^2 dx dt,$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{\psi R}{2} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \int_\Omega |c^+|^2 dx dt + \frac{\psi S_m}{2} \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla c^+|^2 dx dt + \int_0^\tau \int_\Omega r(1)c^+ dx dt \\ \leq - \int_0^\tau \int_\Omega g|c^+|^2 dx dt - \int_0^\tau \int_\Omega gc^+ dx dt + \frac{\|v\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2}{2\psi S_m} \int_0^\tau \int_\Omega |c^+|^2 dx dt \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \frac{\psi R}{2} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \int_\Omega |c^+|^2 dx dt + \int_0^\tau \int_\Omega (r(1) + g)c^+ dx dt \\ \leq \left( \frac{\|v\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2}{2\psi S_m} + \|g\|_{L^\infty(\Omega_T)} \right) \int_0^\tau \int_\Omega |c^+|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Comme de plus  $c^+ \geq 0$  et  $r(1) + g \geq 0$ , on a :

$$\frac{\psi R}{2} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \int_\Omega |c^+|^2 dx dt \leq \left( \frac{\|v\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2}{2\psi S_m} + \|g\|_{L^\infty(\Omega_T)} \right) \int_0^\tau \int_\Omega |c^+|^2 dx dt.$$

On a  $c^+_{|t=0} = 0$ , d'où :

$$\frac{\psi R}{2} \int_\Omega |c^+(x, \tau)|^2 dx \leq \left( \frac{\|v\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2}{2\psi S_m} + \|g\|_{L^\infty(\Omega_T)} \right) \int_0^\tau \int_\Omega |c^+|^2 dx dt.$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on obtient

$$\int_\Omega |c^+(\tau, x)|^2 dx \leq 0 \text{ presque pour tout } \tau \in (0, T),$$

donc  $c^+ = 0$ , i.e.  $c \leq 1$  presque pour tout  $x \in \Omega$ , pour tout  $t \in (0, T)$ . ■

---

### Unicité de la concentration

**Lemme 2.3.3** *Supposons qu'il existe un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  tel que  $r$  soit dérivable et à dérivée bornée dans  $I$ . Alors, sous les hypothèses (1)-(3) ou (4) ou (5) de la Proposition 2.3.1, il existe une unique solution  $c$  de (2.3)-(2.5) telle que l'image de  $\Omega \times (0, T)$  par  $c$  soit incluse dans  $I$ .*

*Preuve.* On suppose qu'il existe deux solutions  $c_1$  et  $c_2$  telles que  $c_i(\Omega \times (0, T)) \subset I$ ,  $i = 1, 2$ . Alors  $c = c_1 - c_2$  est solution de

$$\psi R \partial_t c + v \cdot \nabla c - \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla c) + r(c_1) - r(c_2) + (p + \gamma)c + gc = 0 \quad (2.27)$$

$$S(v) \nabla c \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega, c|_{t=0} = 0. \quad (2.28)$$

On multiplie (2.27) par  $c$  et on intègre par parties sur  $\Omega \times (0, \tau)$ ,  $\tau \in (0, T)$  :

$$\begin{aligned} \frac{\psi R}{2} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \int_\Omega |c|^2 dx dt + \int_0^\tau \int_\Omega (v \cdot \nabla c) c dx dt + \int_0^\tau \int_\Omega \psi S(v) \nabla c \cdot \nabla c dx dt \\ + \int_0^\tau \int_\Omega (r(c_1) - r(c_2)) c dx dt + \int_0^\tau \int_\Omega (p + \gamma + g) c^2 dx dt = 0. \end{aligned}$$

Comme  $r$  est dérivable à dérivée bornée sur  $I$ , on peut utiliser l'inégalité des accroissements finis :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_\Omega (r(c_1) - r(c_2)) c dx dt \right| &\leq \|r'\|_{L^\infty(I)} \int_0^T \int_\Omega |c_1 - c_2| |c| dx dt \\ &= \|r'\|_{L^\infty(I)} \int_0^T \int_\Omega |c|^2 dx dt. \end{aligned}$$

En se limitant une fois encore au cas où les hypothèses (4) ou (5) sont vérifiées, on a :

$$\left| \int_0^T \int_\Omega (v \cdot \nabla c) c dx dt \right| \leq \frac{\psi S_m}{2} \int_0^T \int_\Omega |\nabla c|^2 dx dt + \frac{C \|v\|_{L^\infty(\Omega_T)}}{\psi S_m} \int_0^T \int_\Omega |c|^2 dx dt.$$

On en conclut

$$\frac{\psi R}{2} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \int_\Omega |c|^2 dx dt + \frac{\psi S_m}{2} \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla c|^2 dx dt \leq C \int_0^\tau \int_\Omega |c|^2 dx dt.$$

Comme  $S_m \geq 0$ , on a :

$$\frac{\psi R}{2} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \int_\Omega |c|^2 dx dt \leq C \int_0^\tau \int_\Omega |c|^2 dx dt$$

et

$$\frac{\psi R}{2} \int_{\Omega} |c(\tau, x)|^2 dx \leq \frac{\psi R}{2} \int_{\Omega} |c(0, x)|^2 dx + C \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |c|^2 dx dt.$$

Comme  $c(0, x) = c_1(0, x) - c_2(0, x) = 0$  on a donc

$$\frac{\psi R}{2} \int_{\Omega} |c(\tau, x)|^2 dx \leq C \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |c|^2 dx dt$$

et après application du lemme de de Gronwall, on obtient

$$\int_{\Omega} |c(\tau, x)|^2 dx \leq 0 \text{ presque pour tout } \tau \in (0, T).$$

Donc  $c_1 = c_2$  pour presque tout  $x \in \Omega$ , pour tout  $t \in (0, T)$ . La solution est unique. ■

**Remarque 2.3.7** Dans le cas où  $N = 2$  et (3) est vérifiée, on traite le terme convectif de façon analogue à la Remarque 2.3.3 (en utilisant entre autres l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg) :

$$\left| \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (v \cdot \nabla c) c dx dt \right| \leq C \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |c|^2 dx dt + \frac{\psi S_m}{2} \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |\nabla c|^2 dx dt + \frac{\psi \alpha_T}{2} \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |v| |\nabla c|^2 dx dt.$$

Comme à la Remarque 2.3.5, on peut aussi envisager d'autres conditions aux bords.

Si des conditions de Dirichlet homogènes sont imposées sur  $c$ , on écrit

$$\left| \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (v \cdot \nabla c) c dx dt \right| = -\frac{1}{2} \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \operatorname{div}(v) c^2 dx dt = -\frac{1}{2} \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (p + \gamma + g) c^2 dx dt$$

et

$$\left| \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (v \cdot \nabla c) c dx dt \right| \leq \|p + \gamma + g\|_{L^\infty(\Omega_T)} \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |c|^2 dx dt.$$

Enfin, si des conditions aux bords de type Neumann sont imposées sur  $\phi$ , on a

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (v \cdot \nabla c) c dx dt \right| &= -\frac{1}{2} \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \operatorname{div}(v) c^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^{\tau} \int_{\partial\Omega} (v \cdot n) c_{|\partial\Omega}^2 d\sigma dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (p + \gamma + g) c^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^{\tau} \int_{\partial\Omega} v_1 c_{|\partial\Omega}^2 d\sigma dt. \end{aligned}$$

Pour estimer le dernier terme de l'équation, on écrit

$$\int_0^{\tau} \int_{\partial\Omega} v_1 c_{|\partial\Omega}^2 d\sigma dt = \int_0^{\tau} \int_{\partial\Omega} \left( \max(0, v_1) + \min(0, v_1) \right) c_{|\partial\Omega}^2 d\sigma dt$$

où

$$\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \max(0, v_1) c_{|\partial\Omega}^2 d\sigma dt \geq 0$$

et

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \min(0, v_1) c_{|\partial\Omega}^2 d\sigma dt \right| < \psi S_m \|c_{|\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega \times (0, T))}^2 \\ & \leq \psi S_m \|c\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}^2 \leq \psi S_m \int_0^\tau \int_{\Omega} |\nabla c|^2 dx dt + \psi S_m \int_0^\tau \int_{\Omega} |c|^2 dx dt, \end{aligned}$$

ou alors on écrit

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} v_1 c_{|\partial\Omega}^2 d\sigma dt \right| = \left| \int_0^\tau \int_{\Omega} (\bar{v}_1 \cdot \nabla c) c dx dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_{\Omega} \operatorname{div}(\bar{v}_1) c^2 dx dt \right| \\ & \leq \frac{\psi S_m}{2} \int_0^\tau \int_{\Omega} |\nabla c|^2 dx dt + \frac{C \|\bar{v}_1\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2}{2\psi S_m} \int_0^\tau \int_{\Omega} |c|^2 dx dt + \frac{\|\operatorname{div}(\bar{v}_1)\|_{L^\infty(\Omega_T)}}{2} \int_0^\tau \int_{\Omega} |c|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Le reste de la démonstration reste inchangé.

**Remarque 2.3.8** On vérifie facilement que les modèles classiques de réaction vérifient l'hypothèse "r est dérivable à dérivée bornée sur tout sous-ensemble borné de  $\mathbb{R}$ ".

## 2.4 Existence globale pour le problème de contrôle optimal

Maintenant que nous avons établi des résultats d'existence pour chacune de nos variables, il nous est possible de construire une stratégie de point fixe pour démontrer l'existence d'une solution pour notre problème de contrôle optimal. On démontre le résultat suivant :

**Théorème 2.4.1** Soit  $T > 0$ . On suppose r dérivable à dérivée bornée sur le domaine image de c,  $c(\Omega \times (0, T))$  (où dans le cas général  $c(\Omega \times (0, T)) = \mathbb{R}$  ; si de plus  $r(0) - \gamma \leq 0$ ,  $c(\Omega \times (0, T)) = \mathbb{R}^+$  ; si  $r(1) + g \geq 0$ ,  $c(\Omega \times (0, T)) = ]-\infty, 1]$  ; si  $r(0) + \gamma \leq 0$  et  $r(1) + g \geq 0$ ,  $c(\Omega \times (0, T)) = [0, 1]$ ).

Nous envisagerons des hypothèses parmi les suivantes :

1. Le terme de réaction est tel que  $r(0) - \gamma \leq 0$  et la condition initiale  $c_0$  satisfait  $c_0(x) \geq 0$  presque partout dans  $\Omega$ .

---

2. Le terme de réaction est tel que  $r(1) + g \geq 0$  et la condition initiale  $c_0$  satisfait  $c_0(x) \leq 1$  presque partout dans  $\Omega$ .

3.  $\alpha_T > 0$ .

4.  $\partial\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $\kappa \in (\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}))^{N \times N}$  et  $\phi_1 \in W^{2,p}(\bar{\Omega})$  avec  $p > N$ .

5.  $\partial\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $\kappa = \kappa Id$  avec  $\kappa : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\kappa \in C^1(\bar{\Omega})$  et  $\phi_1 \in W^{2,p}(\bar{\Omega})$  avec  $p > \frac{N}{2}$ .

Si les hypothèses (1)-(3) (ou simplement (3) si  $N = 2$ ) ou si l'hypothèse (4) ou l'hypothèse (5) est vérifiée, alors il existe une solution  $(p^*, c^*, \phi^*)$  au problème de contrôle optimal au sens de la Définition 2.1.2. De plus,  $\phi^*$  est unique,  $\alpha_T^{\frac{1}{2}} |v|^{\frac{1}{2}} \nabla c^* \in (L^2(\Omega_T))^N$  et  $c^* \in H^1(0, T; W^{-1,4}(\Omega))$ . Selon les hypothèses, on a de plus :

— Si  $r$  est dérivable à dérivée bornée sur le domaine image  $c^*(\Omega \times (0, T))$ , alors la solution est unique.

— Si (1) est vérifiée, alors

$$c^*(t, x) \geq 0 \text{ presque partout } x \in \Omega, \forall t \in (0, T).$$

— Si (2) est vérifiée, alors

$$c^*(t, x) \leq 1 \text{ presque partout } x \in \Omega, \forall t \in (0, T).$$

— Si (4) est vérifiée, alors  $\phi^* \in L^\infty(0, T; W^{2,p}(\Omega))$  (en particulier  $v \in (L^\infty(\Omega_T))^N$ ).

— Si (5) est vérifiée, alors  $\phi^* \in L^\infty(0, T; W^{1,q}(\Omega))$  avec  $q > N$  (en particulier  $v \in (L^\infty(\Omega_T))^N$ ).

**Remarque 2.4.1** La Proposition 2.3.2 sur les résultats de régularité supplémentaires et la Remarque 2.3.2 qui suit cette proposition sur les choix des conditions aux bords restent vraies.

*Preuve.* L'espace  $E$  est convexe, fermé, borné dans  $L^2(\Omega_T)$  et inclu dans  $E_0$ .

Tout fermé borné de  $L^2(\Omega)$  est par définition compact pour la topologie faible  $L^2$ . Nous allons donc travailler dans cette dernière. Ainsi,  $E$  est compact pour la topologie faible

de  $L^2(\Omega_T)$ .

On définit l'application  $\mathcal{T} : E \rightarrow E$  par

$$\mathcal{T} : p_0 \in E \mapsto p \in E$$

où  $p$  est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} J(p, c) = \max_{q \in E} J(q, c) \text{ où } J(q, c) = \int_0^T \int_{\Omega} j(t, x, q, c) dx dt \\ \text{où } c \text{ solution de : } \psi R \partial_t c - \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla c) + v \cdot \nabla c = -r(c) + (p_0 + \gamma)(1 - c) - gc, \\ \operatorname{div}(v) = \gamma + p_0 + g \text{ avec } v = -\kappa \nabla \phi, \\ S(v) \nabla c \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \phi = \phi_1 \text{ sur } \partial\Omega, c|_{t=0} = c_0. \end{array} \right.$$

L'application  $\mathcal{T}$  est bien définie grâce aux Propositions 2.2.1 et 2.3.1 et en particulier aux résultats d'unicité établis dans ces propositions.

Pour appliquer le théorème du point fixe de Schauder<sup>6</sup>, il faut d'abord établir que  $\mathcal{T}$  est continue pour la topologie faible de  $L^2(\Omega_T)$ . C'est ce que nous faisons dans les lignes qui suivent.

Soit  $(p_{0,n})$  une suite de  $E$  convergeant faiblement dans  $L^2(\Omega_T)$  vers  $p_0 \in E$ . Il faut montrer que la suite  $(\mathcal{T}(p_{0,n}) := p_n)$  converge faiblement dans  $L^2(\Omega_T)$  vers  $(\mathcal{T}(p_0) := p)$ .

On a donc  $(p_{0,n})$  une suite de  $E$  telle que  $p_{0,n} \rightharpoonup p_0$  dans  $L^2(\Omega_T)$ . Par définition de  $E$  ( $C_p$  est une constante indépendante de  $n$ ), on a aussi  $\alpha \partial_t p_{0,n} \rightharpoonup \alpha \partial_t p_0$  dans  $L^1(0, T; X)$ .

À  $p_{0,n}$  correspond la solution  $(c_n, v_n)$  de

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi R \partial_t c_n - \operatorname{div}(\psi S(v_n) \nabla c_n) + v_n \cdot \nabla c_n = -r(c_n) + (p_{0,n} + \gamma)(1 - c_n) - gc_n, \\ \operatorname{div}(v_n) = \gamma + p_{0,n} + g \text{ avec } v_n = -\kappa \nabla \phi_n, \\ S(v_n) \nabla c_n \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \phi_n = \phi_1 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), c_n|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega. \end{array} \right.$$

Comme  $p_{0,n} \in E$ ,  $p_{0,n}$  est bornée dans  $L^\infty(\Omega_T)$  par  $\bar{p}$  indépendamment de  $n$ . On vérifie facilement que cela implique que les estimations établies dans la preuve de la Proposition 2.3.1 restent vraies indépendamment de  $n$ . On a donc en particulier les estimations uniformes par rapport à  $n$  suivantes :

$$\begin{aligned} \|\phi_n\|_{L^\infty(0, T; H^1(\Omega))} &\leq C, \\ \|c_n\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))} &\leq C. \end{aligned}$$

On en déduit l'existence de sous-suites de  $(\phi_n)_n$  et  $(c_n)_n$  que l'on note toujours  $(\phi_n)_n$  et  $(c_n)_n$  par commodité, telles que, pour tout  $q \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} c_n &\rightharpoonup c \text{ faiblement dans } L^q(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)), \\ \phi_n &\rightharpoonup \phi \text{ faiblement dans } L^q(0, T; H^1(\Omega)), \\ v_n &\rightharpoonup v = -\kappa \nabla \phi \text{ faiblement dans } L^q(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

---

6. On rappelle le théorème du point fixe de Schauder : Soient  $B$  un Banach et  $E \subset B$  non vide, convexe et compact. Alors toute application continue  $\mathcal{T} : E \rightarrow E$  possède un point fixe.

Ces résultats de convergence faible ne sont pas suffisants car il nous faut passer à la limite dans des termes non linéaires :  $S(v_n), r(c_n), v_n \cdot \nabla c_n$ . Nous allons donc établir des résultats de compacité pour  $(v_n)$  et  $(c_n)$  dans  $L^2(\Omega_T)$ .

Commençons par  $v_n = -\kappa \nabla \phi_n$ . On a :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa \nabla \phi_n) = p_{0,n} + \gamma + g \text{ dans } \Omega \\ \phi_n = \phi_1 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Comme ce problème est linéaire, on peut passer à la limite et donc  $\phi$  est solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa \nabla \phi) = p_0 + \gamma + g \text{ dans } \Omega \\ \phi = \phi_1 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La quantité  $(\phi_n - \phi)$  est donc solution de

$$-\operatorname{div}(\kappa \nabla (\phi_n - \phi)) = p_{0,n} - p_0 \text{ dans } \Omega \quad (2.29)$$

$$\phi_n - \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (2.30)$$

On multiplie l'équation (2.29) par  $(\phi_n - \phi)$  et on intègre sur  $\Omega_T$ . On déduit des propriétés de  $\kappa$  que :

$$\kappa_- \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla(\phi_n - \phi)|^2 dx dt \leq \int_0^T \int_{\Omega} (p_{0,n} - p_0)(\phi_n - \phi) dx dt$$

donc

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\nabla \phi_n - \nabla \phi\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \leq \frac{1}{\kappa_-} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} (p_{0,n} - p_0)(\phi_n - \phi) dx dt. \quad (2.31)$$

Si  $\alpha = 0$  (où  $\alpha$  est défini par (2.1)), le second membre de (2.31) est nul. Si  $\alpha \neq 0$ , nous allons utiliser la contrainte supplémentaire imposée dans le problème d'optimisation, à savoir :  $\|\alpha \partial_t(p_{0,n} - p_0)\|_{L^1(0,T;X)} \leq C_p$ .

En dérivant l'équation satisfaite par  $\phi_n - \phi$ , on voit que  $\partial_t(\phi_n - \phi)$  est solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa \nabla (\partial_t(\phi_n - \phi))) = \partial_t(p_{0,n} - p_0) \text{ dans } \Omega \\ \partial_t(\phi_n - \phi) = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Cette dérivation formelle prend du sens grâce à la continuité de l'opérateur  $p \mapsto \phi$  où  $\phi$  est la solution de (2.4),(2.6). Comme  $\partial_t(p_{0,n} - p_0)$  est uniformément borné dans  $L^1(0, T; X)$ ,

$\partial_t(\phi_n - \phi)$  est aussi uniformément borné dans  $L^1(0, T; X)$ .

On sait donc que<sup>7</sup>

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\phi_n - \phi) \text{ est uniformément borné dans } L^1(0, T; X) \\ \phi_n - \phi \text{ est uniformément borné dans } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \text{ où } H^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega) \\ L^2(\Omega) \subset X. \end{array} \right.$$

On rappelle le théorème de compacité d'Aubin : Soient  $B_0 \subset B_1 \subset B_2$  trois espaces de Banach. On suppose que l'injection de  $B_1$  dans  $B_2$  est continue et que l'injection de  $B_0$  dans  $B_1$  est compacte. Soient  $1 \leq p, r \leq +\infty$ . Pour  $T > 0$ , on note  $E_{p,r} = \{q \in L^p(0, T; B_0); \partial_t q \in L^r(0, T; B_2)\}$ .

- Si  $p < +\infty$ , alors l'injection de  $E_{p,r}$  dans  $L^p(0, T; B_1)$  est compacte.

- Si  $p = \infty$  et  $r > 1$ , alors l'injection de  $E_{p,r}$  dans  $C^0(0, T; B_1)$  est compacte.

D'après le théorème de compacité d'Aubin,  $(\phi_n - \phi)$  est donc compacte dans  $L^2(\Omega_T)$  et il existe une sous-suite extraite de  $(\phi_n)$ , notée de même pour simplifier, telle que

$$\phi_n - \phi \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega_T).$$

Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_\Omega (p_{0,n} - p_0)(\phi_n - \phi) dx dt = 0$  et d'après (2.31) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_\Omega |\nabla(\phi_n - \phi)|^2 dx dt = 0.$$

D'où

$$\begin{aligned} \phi_n &\rightarrow \phi \text{ dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \\ v_n &\rightarrow v \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Passons à la compacité de  $(c_n)$  dans  $L^2(\Omega_T)$ . D'après les estimations (uniformes en  $n$ ) établies dans la preuve de la Proposition 2.3.1,  $(c_n)$  est uniformément bornée dans  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  et  $(\partial_t c_n)$  est uniformément bornée dans  $L^2(0, T; W^{-1,4}(\Omega))$ .

On a  $H^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,4}(\Omega)$ . Par compacité d'Aubin,  $(c_n)$  est donc compacte dans  $L^2(\Omega_T)$ . Il existe donc une sous-suite de  $(c_n)$  que l'on note également  $c_n$  telle que  $c_n - c \rightarrow 0$  dans  $L^2(\Omega \times (0, T))$  et presque partout dans  $\Omega_T$ .

Comme  $r \in L^\infty(\Omega_T)$ , on peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue : pour  $\phi \in L^2(\Omega_T)$ ,  $\int_{\Omega_T} r(c_n)\phi dx dt \rightarrow \int_{\Omega_T} r(c)\phi dx dt$ . On fait de même pour  $S(v_n)$  et on

---

7. On note  $\subset$  une injection continue et  $\subset\subset$  une injection compacte.



vérifie donc que  $(c, \phi)$  est solution de

$$\begin{cases} \psi R \partial_t c - \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla c) + v \cdot \nabla c = -r(c) + (p_0 + \gamma)(1 - c) - gc \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ -\operatorname{div}(\kappa \nabla \phi) = \gamma + p_0 + g \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ S(v) \nabla c \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega, c|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega, \\ \phi = \phi_1 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Jusqu'ici, nous nous sommes concentrés sur le comportement limite du système d'état. Reprenons à présent l'étude du problème d'optimisation. Comme  $p_n = \mathcal{T}(p_{0,n}) \in E$ ,  $p_n$  est uniformément borné dans  $L^2(\Omega_T)$ . Il existe  $\tilde{p} \in L^2(\Omega_T)$  tel que

$$p_n \rightharpoonup \tilde{p} \text{ faiblement dans } L^2(\Omega_T).$$

Nous allons montrer que  $\tilde{p} = p = \mathcal{T}(p_0)$ . Pour tout  $q \in E$ , par définition de  $\mathcal{T}$ ,

$$\int_0^T \int_{\Omega} j(t, x, p_n, c_n) dx dt \geq \int_0^T \int_{\Omega} j(t, x, q, c_n) dx dt. \quad (2.32)$$

La fonction  $j$  étant strictement concave par rapport à  $p$  et  $p_n \rightharpoonup \tilde{p}$  faiblement dans  $L^2(\Omega)$ , par un argument de semi-continuité inférieure on a

$$\int_0^T \int_{\Omega} j(t, x, \tilde{p}, d) dx dt \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} j(t, x, p_n, d) dx dt$$

pour tout  $d \in L^2(\Omega_T)$ . Comme de plus  $j$  est monotone, bornée et hémicontinue<sup>8</sup> par rapport à  $c$  et comme  $c_n \rightarrow c$  dans  $L^2(\Omega_T)$ , d'après le théorème de la limite monotone on a

$$\int_0^T \int_{\Omega} j(t, x, \tilde{p}, c) dx dt \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} j(t, x, p_n, c_n) dx dt.$$

En utilisant (2.32), on a pour tout  $q \in E$  :

$$\int_0^T \int_{\Omega} j(t, x, \tilde{p}, c) dx dt \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} j(t, x, q, c_n) dx dt = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} j(t, x, q, c) dx dt.$$

Comme la fonctionnelle  $J$  est strictement concave par rapport à  $p$ , le problème d'optimisation admet une unique solution, on voit que cela implique qu'une sous-suite de  $p_n = \mathcal{T}(p_{0,n})$  converge vers  $\mathcal{T}(p_0)$  faiblement dans  $L^2(\Omega_T)$ . La fonction  $p = \mathcal{T}(p_0)$  étant définie de manière unique (toujours d'après la Proposition 2.2.1 et la Remarque 2.2.1),

---

8. On rappelle que si  $A$  est un opérateur borné, hémicontinu et monotone, alors  $A$  est continu de  $V$  (espace de Hilbert) fort dans  $V'$  faible.

cela implique que l'ensemble de la suite  $(p_n)$  converge vers  $p$  faiblement dans  $L^2(\Omega_T)$ . On a donc montré la continuité de  $\mathcal{T}$  pour la topologie faible de  $L^2(\Omega_T)$ .

Mais comme  $c_n \rightarrow c$  fortement et que l'opérateur  $c \mapsto j(t, x, p, c)$  est monotone, on déduit de  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} j(t, x, p_n, c_n) dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} j(t, x, p, c) dx dt$  que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} j(t, x, p_n, c) dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} j(t, x, p, c) dx dt.$$

On tire de cette dernière convergence et du Théorème 3 de Visintin [83], dont le résultat s'applique puisque  $j$  est strictement concave par rapport à  $p$ , que nous avons la compacité de  $(p_n)$  pour la topologie forte de  $L^2$  :

$$p_n \rightarrow p \text{ dans } L^2(\Omega_T).$$

Le théorème du point fixe de Schauder s'applique, d'où le résultat du théorème. ■

**Théorème 2.4.2** *On reprend les hypothèses du Théorème 2.4.1. De plus, on suppose  $r(0) - \gamma \leq 0$  et  $r(1) + g \geq 0$  et  $\kappa = \kappa Id$  avec  $\kappa \in W^{1,\infty}(\Omega)$ ,  $\kappa \geq \kappa_- > 0$  dans  $\Omega$ . On suppose que  $0 \leq c_0(t, x) \leq 1$  presque partout dans  $\Omega_T$ ,  $\phi_1 \in H^1(\Omega)$ . On suppose  $r$  dérivable et à dérivée bornée sur  $[0, 1]$ . Alors le résultat du Théorème 2.4.1 s'étend à  $T = +\infty$ , avec pour tout  $T_0 > 0$  :  $c^* \in \mathcal{C}([0, T_0]; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T_0; H^1(\Omega))$ ,  $0 \leq c^*(x, t) \leq 1$  presque partout dans  $\Omega \times \mathbb{R}$ ,  $\phi^* \in L^\infty(0, T_0; H^2(\Omega))$ .*

*Preuve.* Soit un intervalle  $[0, T^*]$  avec  $0 < T^* \leq +\infty$  l'intervalle maximal d'existence de la solution donnée par le Théorème 2.4.1. D'après les hypothèses du Théorème 2.4.1, cette solution  $(p^*, c^*, \phi^*)$  est bornée dans  $(L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)))^3$ . D'après Amann [4]-[5], on a donc  $T^* = +\infty$ . ■

## 2.5 Un modèle contrôlable asymptotiquement

Dans ce paragraphe, on se concentre sur un cas particulier du modèle précédent, celui où l'équation d'incompressibilité du fluide est indépendante de l'apport d'engrais  $p$  (ce qui la découple de l'équation d'état). Pour un tel cadre, on peut relaxer les conditions imposées sur l'ensemble des fonctions dans lesquelles on cherche le contrôle (voir théorème ci-dessous). On posera ainsi

$$E_{adm} = L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Clairement,  $E \subset E_0 \subset E_{adm}$ . On considère donc le problème suivant :

$$\begin{cases} R\psi\partial_t c - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla c) + v \cdot \nabla c = -r(c) + q + \gamma(1 - c) - gc \text{ dans } \Omega_T, \\ S(v)\nabla c \cdot n = 0 \text{ ou } c = c_1 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), c_{|t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.33)$$

la vitesse  $v$  étant donnée (telle que  $\operatorname{div} v = g + \gamma$ ) dans  $L^\infty(\Omega_T)$ .

En suivant les lignes de la démonstration précédente du Théorème 2.4.1, on vérifie que le résultat suivant est vrai (on notera que pour le modèle (2.33),  $\alpha = 0$ ).

**Théorème 2.5.1** *Soit  $T > 0$ . Sous les hypothèses du Théorème 2.4.1, il existe une solution  $(p^*, c^*)$  au problème de contrôle optimal (2.33) avec  $c^* \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; W^{-1,4}(\Omega))$ .*

*Si  $S(v) = S_m \operatorname{Id}$ , on a de plus  $c^* \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$ .*

Ainsi, pour ce modèle, le problème

$$\begin{cases} R\psi\partial_t c - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla c) + v \cdot \nabla c = -r(c) + q + \gamma(1 - c) - gc \text{ dans } \Omega_T, \\ S(v)\nabla c \cdot n = 0 \text{ ou } c = c_1 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), c|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega, \\ \text{la vitesse } v \text{ étant donnée dans } (L^\infty(\Omega_T))^N, \text{ avec } \operatorname{div} v = g + \gamma \end{cases} \quad (2.34)$$

est contrôlable pour la fonctionnelle  $J$  par l'ensemble des contrôles admissible  $E_{adm} = L^2(\Omega_T)$ ,  $T > 0$ . Le fait de relaxer les hypothèses sur l'ensemble des contrôles (précisément le fait de ne plus considérer des contrôles entre 0 et  $\bar{p} \in \mathbb{R}_+$  presque partout) ne nous permet plus cependant de montrer que la concentration vérifie  $0 \leq c(t, x) \leq 1$  presque partout dans  $\Omega_T$ , quelles que soient les hypothèses sur  $r, \gamma$  et  $g$ . Mais nous pouvons par contre établir un résultat de contrôlabilité asymptotique pour (2.34).

**Définition 2.5.1** *Un système  $\mathcal{L}c = F(q)$  est dit contrôlable asymptotiquement dans un espace de Banach  $\mathcal{B}$  par un ensemble de contrôles admissibles  $E_{adm}$  si, pour tout élément arbitraire  $c^* \in \mathcal{B}$ , il existe une suite de contrôles  $p \in E_{adm}$  telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|c(p_n) - c^*\|_{\mathcal{B}} = 0$$

où  $c(q)$  désigne la solution de  $\mathcal{L}c = F(q)$ .

Pour le problème (2.34), on a le résultat suivant.

**Théorème 2.5.2** *Le système (2.34) est contrôlable asymptotiquement dans*

$$\mathcal{B} = \{q \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), S(v)\nabla q \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega, q|_{t=0} = c_0\}$$

*par l'ensemble de contrôles  $E_{adm} = L^2(\Omega_T)$  pour tout  $T > 0$  fixé, pour tout  $c_0 \in L^2(\Omega)$  donné.*

*Preuve.* Soit  $c^*$  donné arbitrairement dans  $\mathcal{B} \subset L^2(0, T; H^1(\Omega))$ . L'ensemble  $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega_T})$  étant dense dans  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ , il existe des suites  $c_{1,n} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega_T})$ ,  $c_{0,n} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$  et  $c_n \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega_T})$  avec  $S(v)\nabla c_n \cdot n = 0$  ou  $c_n = c_{1,n}$  sur  $\partial\Omega \times ]0, T[$  et  $c_n|_{t=0} = c_{0,n}$  et telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|c_{1,n} - c_1\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; W^{1, \infty}(\Omega))} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|c_{0,n} - c_0\|_{L^2(\Omega)} = 0 \quad (2.35)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|c^* - c_n\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} = 0. \quad (2.36)$$

Si  $\mathcal{L}$  est l'opérateur défini sur  $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega_T})$  par

$$\mathcal{L}c = R\psi\partial_t c - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla c) + v \cdot \nabla c + r(c) - \gamma(1 - c) + gc,$$

où  $v$  est donnée dans  $L^\infty(\Omega_T)$ , on vérifie facilement que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{L}c_n$  appartient à  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ . Or  $E_{adm} = L^2(\Omega_T)$  est dense dans  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ . Il existe donc une suite  $p_{n,k} \in E_{adm}$  telle que

$$\|\mathcal{L}c_n - p_{n,k}\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq \epsilon_k \text{ pour tout } n \in N \text{ avec } \lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = 0. \quad (2.37)$$

Soit  $c(p_{n,k})$  solution de (2.34) pour  $q = p_{n,k}$ .

Nous allons montrer que  $\lim_{n,k \rightarrow \infty} \|c(p_{n,k}) - c^*\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} = 0$ . Pour cela, on écrit

$$\|c^* - c(p_{n,k})\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq \|c^* - c_n\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|c_n - c(p_{n,k})\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}. \quad (2.38)$$

Estimons  $\|c_n - c(p_{n,k})\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}$ . Posons  $C_n = c_n - c(p_{n,k})$ . La fonction  $C_n$  satisfait :

$$R\psi\partial_t C_n - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla C_n) + v \cdot \nabla C_n = -\left(r(c_n) - r(c(p_{n,k}))\right) - (\gamma + g)C_n + (\mathcal{L}c_n - p_{n,k})$$

dans  $\Omega_T$ ,

$$S(v)\nabla C_n \cdot n = 0 \text{ ou } C_n = C_{1,n} = c_{1,n} - c_1 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T),$$

$$C_n|_{t=0} = C_{0,n} = c_{0,n} - c_0 \text{ dans } \Omega.$$

Traisons ici le cas de conditions aux bords de type Neumann. En multipliant la première équation par  $C_n$  et en intégrant par parties sur  $\Omega \times (0, \tau)$ ,  $\tau \in (0, T)$ , comme  $r$  est une fonction à dérivée bornée, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{R\psi}{2} \int_{\Omega} |C_n|_{t=\tau}|^2 dx + \psi \int_0^\tau \int_{\Omega} (S_m + \alpha_T |v|) |\nabla C_n|^2 dx dt \\ & \leq \frac{R\psi}{2} \int_{\Omega} |c_{0,n} - c_0|^2 dx + \|r' + \gamma + g\|_{L^\infty(\Omega_T)} \int_0^\tau \int_{\Omega} |C_n|^2 dx dt \\ & \quad - \int_0^\tau \int_{\Omega} (v \cdot \nabla C_n) C_n dx dt + \int_0^\tau \int_{\Omega} (\mathcal{L}c_n - p_{n,k}) C_n dx dt. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Comme d'après les inégalités de Cauchy-Schwarz et Young, on a pour tout  $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\tau \int_{\Omega} (v \cdot \nabla C_n) C_n dx dt \right| & \leq \epsilon \psi (S_m + \alpha_T |v|) \int_0^\tau \int_{\Omega} |\nabla C_n|^2 dx dt \\ & \quad + \frac{C}{\epsilon} \|v\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2 \int_0^\tau \int_{\Omega} C_n^2 dx dt, \end{aligned}$$

et en écrivant, grâce à (2.37),

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^\tau \int_\Omega (\mathcal{L}c_n - p_{n,k})C_n \, dx \, dt \right| &\leq \| \mathcal{L}c_n - p_{n,k} \|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \| C_n \|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\
&\leq \epsilon_k \| C_n \|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\
&\leq \frac{\epsilon_k}{4\psi S_m} + \epsilon_k \psi S_m \int_0^\tau \int_\Omega |C_n|^2 \, dx \, dt + \epsilon_k \psi \int_0^\tau \int_\Omega S_m |\nabla C_n|^2 \, dx \, dt \\
&\leq \frac{\epsilon_k}{4\psi S_m} + \epsilon_k \psi S_m \int_0^\tau \int_\Omega |C_n|^2 \, dx \, dt + \epsilon_k \psi \int_0^\tau \int_\Omega (S_m + \alpha_T |v|) |\nabla C_n|^2 \, dx \, dt
\end{aligned}$$

on déduit de (2.39) : pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{R\psi}{2} \int_\Omega |C_n|_{t=\tau}|^2 \, dx + \int_0^\tau \int_\Omega \psi(S_m + \alpha_T |v|)(1 - \epsilon - \epsilon_k) |\nabla C_n|^2 \, dx \, dt \\
\leq \left( \frac{C}{\epsilon} + C\epsilon_k \right) \int_0^\tau \int_\Omega |C_n|^2 \, dx \, dt + C\epsilon_k.
\end{aligned}$$

Puisque  $\epsilon_k \rightarrow 0$ , on peut choisir  $k$  suffisamment grand et choisir  $\epsilon > 0$  tels que  $1 - \epsilon - \epsilon_k \geq C > 0$ . En posant  $y(t) = \int_\Omega |C_n|^2 \, dx$ , on a :

$$y(\tau) \leq \left( \frac{C}{\epsilon} + C\epsilon_k \right) \int_0^\tau y(t) \, dt + C\epsilon_k.$$

On déduit alors du lemme de Gronwall que :

$$\| C_n \|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C\epsilon_k e^{CT},$$

c'est-à-dire pour tout  $T > 0$  fixé :

$$\| c_n - c(p_{n,k}) \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_T \epsilon_k.$$

En revenant à l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{R\psi}{2} \int_\Omega |C_n|_{t=\tau}|^2 \, dx + \int_0^\tau \int_\Omega \psi(S_m + \alpha_T |v|)(1 - \epsilon - \epsilon_k) |\nabla C_n|^2 \, dx \, dt \\
\leq \left( \frac{C}{\epsilon} + C\epsilon_k \right) \int_0^\tau \int_\Omega |C_n|^2 \, dx \, dt + C\epsilon_k,
\end{aligned}$$

on obtient à présent

$$\int_0^\tau \int_\Omega |\nabla C_n|^2 \, dx \, dt \leq C.$$

On en déduit donc que

$$\| c_n - c(p_{n,k}) \|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C_T \epsilon_k. \quad (2.40)$$

En incluant cette dernière relation dans (2.38), on obtient :

$$\|c^* - c(p_{n,k})\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq \|c^* - c_n\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + C_T \epsilon_k,$$

où  $\lim_{n,k \rightarrow \infty} \left( \|c^* - c_n\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + C_T \epsilon_k \right) = 0$  d'après (2.36) et (2.37).

D'où le résultat énoncé dans le théorème. ■

**Remarque 2.5.1** *Abordons le cas de conditions aux bords (1.11) de type Dirichlet. Le traitement du terme de bord rend la démonstration plus technique. En effet dans ce cas, on multiplie l'équation par  $C_n - C_{1,n}$  et on intègre par parties dans  $\Omega \times (0, \tau)$ ,  $\tau \in (0, T)$ . Comme  $r$  est à dérivée bornée, on écrit*

$$\begin{aligned} & \frac{R\psi}{2} \int_{\Omega} |(C_n - C_{1,n})(\tau, x)|^2 dx + \psi_- \int_0^\tau \int_{\Omega} (S_m + \alpha_T |v|) |\nabla(C_n - C_{1,n})|^2 dx dt \\ & \leq \frac{R\psi}{2} \int_{\Omega} |C_{0,n}(x) - C_{1,n}(0, x)|^2 dx - \int_0^\tau \int_{\Omega} (v \cdot \nabla(C_n - C_{1,n})) (C_n - C_{1,n}) dx dt \\ & \quad + \|r' + \gamma + g\|_{L^\infty(\Omega_T)} \int_0^\tau \int_{\Omega} |C_n - C_{1,n}|^2 dx dt \\ & \quad + \|r' + \gamma + g\|_{L^\infty(\Omega_T)} \int_0^\tau \int_{\Omega} |C_{1,n}| |C_n - C_{1,n}| dx dt \\ & + \int_0^\tau \int_{\Omega} (\mathcal{L}C_n - p_{n,k} - R\psi \partial_t C_{1,n} - v \cdot \nabla C_{1,n} + \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla C_{1,n})) (C_n - C_{1,n}) dx dt. \end{aligned} \tag{2.41}$$

On a

$$\left| \frac{R\psi}{2} \int_{\Omega} |C_{0,n}(x) - C_{1,n}(0, x)|^2 dx \right| \leq C \|C_{0,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|C_{1,n}\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}^2.$$

On a vu précédemment que pour un  $0 < \epsilon < 1$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\tau \int_{\Omega} (v \cdot \nabla(C_n - C_{1,n})) (C_n - C_{1,n}) dx dt \right| & \leq \epsilon \psi \int_0^\tau \int_{\Omega} (S_m + \alpha_T |v|) |\nabla(C_n - C_{1,n})|^2 dx dt \\ & + C \|C_{1,n}\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \frac{C}{\epsilon} \int_0^\tau \int_{\Omega} |C_n - C_{1,n}|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Grâce aux inégalités de Cauchy-Schwarz et Young, on a

$$\begin{aligned} \|r' + \gamma + g\|_{L^\infty(\Omega_T)} \left| \int_0^\tau \int_{\Omega} |C_{1,n}| |C_n - C_{1,n}| dx dt \right| & \leq C \|C_{1,n}\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \\ & + C \int_0^\tau \int_{\Omega} |C_n - C_{1,n}|^2 dx dt. \end{aligned}$$

En utilisant (2.37) on a,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\tau \int_\Omega (\mathcal{L}c_n - p_{n,k}) (C_n - C_{1,n}) dx dt \right| &\leq \| \mathcal{L}c_n - p_{n,k} \|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \| C_n - C_{1,n} \|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\ &\leq \epsilon_k \| C_n - C_{1,n} \|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\ &\leq C + C \int_0^\tau \int_\Omega |C_n - C_{1,n}|^2 dx dt + \epsilon_k \psi \int_0^\tau \int_\Omega (S_m + \alpha_T |v|) |\nabla(C_n - C_{1,n})|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Finalement, on écrit

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^\tau \int_\Omega (R\psi \partial_t C_{1,n} + v \cdot \nabla C_{1,n} - \operatorname{div}(S(v)\nabla C_{1,n})) (C_n - C_{1,n}) dx dt \right| \\ &\leq C \| C_{1,n} \|_{H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))} \| C_n - C_{1,n} \|_{L^2(\Omega \times (0,\tau))} \\ &\leq C \| C_{1,n} \|_{H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))}^2 + \int_0^\tau \int_\Omega |C_n - C_{1,n}|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Grâce à (2.35), les estimations donnent dans (2.41)

$$\begin{aligned} \frac{R\psi}{2} \int_\Omega |(C_n - C_{1,n})(\tau, x)|^2 dx + (1 - \epsilon - \epsilon_k) \psi \int_0^\tau \int_\Omega (S_m + \alpha_T |v|) |\nabla(C_n - C_{1,n})|^2 dx dt \\ \leq \frac{C}{\epsilon} \int_0^\tau \int_\Omega |C_n - C_{1,n}|^2 dx dt + C\epsilon_k + CL_n \end{aligned}$$

où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = 0.$$

Comme  $\epsilon_k \rightarrow 0$ , on peut choisir  $k$  assez grand tel que  $1 - \epsilon - \epsilon_k \geq C > 0$ . On obtient ensuite par le lemme de Gronwall

$$\| C_n - C_{1,n} \|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \| \nabla(C_n - C_{1,n}) \|_{(L^2(\Omega_T))^N} \leq CL_n + C\epsilon_k e^{CT}.$$

En insérant ce résultat dans (2.38), on a

$$\| c^* - c(p_{n,k}) \|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq \| c^* - c_n \|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + C_T \epsilon_k + CL_n,$$

où, d'après (2.36) et (2.37),  $\lim_{n,k \rightarrow \infty} (\| c^* - c_n \|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + C_T \epsilon_k + L_n) = 0$ , ce qui conclut la preuve.

**Remarque 2.5.2** Vérifions que  $L^2(\Omega)$  est dense dans  $H^{-1}(\Omega)$  pour tout domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  (en identifiant  $L^2(\Omega)$  avec son dual par représentation de Riesz). Soit  $T$  l'injection de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ . On sait que  $T$  est continue et que  $T(H^1(\Omega))$  est dense dans  $L^2(\Omega)$ . Soit  $T^*$  l'opérateur adjoint à  $T$ ,  $T^* : L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))' \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ . L'application  $T^*$  est également injective et continue et  $T^*(L^2(\Omega))$  est dense dans  $H^{-1}(\Omega)$ .

**Remarque 2.5.3** Le résultat du Théorème 2.5.2 indique qu'on peut développer une politique d'épandage permettant d'approcher tout seuil de pollution donné avec une erreur arbitraire.

## Chapitre 3

# Modèle faibles concentrations : analyse asymptotique, existence et unicité de la solution au problème de contrôle optimal

Nous allons, dans cette partie, affiner le modèle en prenant en compte l'hypothèse de faible concentration du polluant. Plus précisément, par "faibles concentrations" on entend : la quantité d'engrais épanchée par l'agriculteur est du même ordre que la concentration totale de polluants dans le sol, cette dernière étant très inférieure à 1 (d'après un rapport de 2013 du Commissariat Général au Développement Durable [90], la teneur en nitrates dans les nappes phréatiques en France est en moyenne de 23mg/L, soit une concentration de 0.000023. On rappelle qu'une eau est considérée comme potable si elle contient moins de 50mg/L de nitrates [90]. Les apports agricoles varient entre 150 et 300 kg/hectare sur l'année [67].).

Pour simplifier un peu les notations, nous supposons que dans ce modèle il y a pour le premier composant uniquement un apport par l'agriculteur (plus d'apport naturel,  $\gamma = 0$ ).

Notre point de départ est le modèle du chapitre précédent mais mis à l'échelle pour tenir compte de la faible concentration du polluant.

On rappelle le modèle (2.3)-(2.6) :

$$\psi R \partial_t c + v \cdot \nabla c - \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla c) = -r(c) + p(1 - c) - gc$$

$$\operatorname{div}(v) = p + g, \quad v = -\kappa \nabla \phi,$$

complété par les conditions initiales et aux bords

$$S(v) \nabla c \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \quad c|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega$$



---


$$\phi = \phi_1 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T).$$

On adimensionne le modèle (2.3)-(2.6) en posant

$$c = c_{ref}\hat{c},$$

où  $c_{ref}$  est la concentration de référence, supposée "epsilonesque" dans le présent chapitre et  $\hat{c}$  est la concentration "adimensionnée". On pose de même  $v = v_{ref}\hat{v}$ ,  $\phi = \phi_{ref}\hat{\phi}$  et  $p = p_{ref}\hat{p}$ . En supposant  $c_{ref} = p_{ref} = \epsilon$  et  $v_{ref} = \phi_{ref} = 1$ , on obtient les équations suivantes, traduisant les conservations de la masse pour nos deux composants et la conservation de la masse totale dans  $\Omega \times \mathbb{R}_+$  :

$$\begin{aligned} R\psi\partial_t(\epsilon\hat{c}_p) + \epsilon\hat{v}_p \cdot \nabla\hat{c}_p - \epsilon \operatorname{div}(\psi S(\hat{v}_p)\nabla\hat{c}_p) &= -r(\epsilon, \epsilon\hat{c}_p) - \epsilon g\hat{c}_p + \epsilon\hat{p}(1 - \epsilon\hat{c}_p), \\ R\psi\partial_t(1 - \epsilon\hat{c}_p) + \hat{v}_p \cdot \nabla(1 - \epsilon\hat{c}_p) - \operatorname{div}(\psi S(\hat{v}_p)\nabla(1 - \epsilon\hat{c}_p)) &= r(\epsilon, \epsilon\hat{c}_p) + g, \\ \operatorname{div}(\hat{v}_p) &= \epsilon\hat{p} + g, \end{aligned}$$

où  $\hat{v}_p$  est donné par la loi de Darcy  $\hat{v}_p = -\kappa\nabla\hat{\phi}_p$ ,  $\epsilon\hat{p}$  est l'apport d'engrais et où le paramètre  $\epsilon \ll 1$  est l'ordre de grandeur de la concentration du polluant dans le sous-sol. Le terme  $r(\epsilon, \epsilon\hat{c}_p)$  est le terme de réaction issu du processus d'adimensionnement. En effet, non seulement la concentration s'écrit maintenant  $\epsilon\hat{c}_p$ , mais il faut aussi tenir compte de l'ordre de grandeur des temps caractéristiques de réaction et du nombre de Damköhler par rapport à  $\epsilon$  (voir par exemple Choquet et Mikelić [25]), d'où la dépendance de  $r$  en  $\epsilon$ . Après simplification par  $\epsilon$ , on voit que le système satisfait par  $(\hat{c}, \hat{p}, \hat{\phi})$  dépend toujours de  $\epsilon$ . On prend donc le parti de poser

$$\hat{c} = c_{\epsilon, p_\epsilon}, \hat{p} = p_\epsilon, \hat{\phi} = \phi_{\epsilon, p_\epsilon}, \hat{v}_p = v_{\epsilon, p_\epsilon}$$

pour souligner le couplage du problème en  $p_\epsilon$ . En définissant  $r_\epsilon(c) := r(\epsilon, \epsilon c)/\epsilon$ , on a donc :

$$R\psi\partial_t(c_{\epsilon, p_\epsilon}) + v_{\epsilon, p_\epsilon} \cdot \nabla c_{\epsilon, p_\epsilon} - \operatorname{div}(\psi S(v_{\epsilon, p_\epsilon})\nabla c_{\epsilon, p_\epsilon}) = -r_\epsilon(c_{\epsilon, p_\epsilon}) - g c_{\epsilon, p_\epsilon} + p_\epsilon(1 - \epsilon c_{\epsilon, p_\epsilon}), \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div}(v_{\epsilon, p_\epsilon}) = \epsilon p_\epsilon + g \quad (3.2)$$

avec  $v_{\epsilon, p_\epsilon} = -\kappa\nabla\phi_{\epsilon, p_\epsilon}$ .

Comme dans le Chapitre 1, les équations (4.41)-(4.42), complétées par des conditions initiales et aux bords appropriées, vont constituer "l'équation d'état".

La modélisation "économique" se doit par contre d'être faite sur les variables adimensionnées. L'objectif est donc  $J(\hat{p}, \hat{c}_p) = \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{\Omega} f(x, \hat{p}) - D(x, \hat{c}_p) dx \right) e^{-\rho t} dt$ , soit avec nos notations,

$$J(p_\epsilon, c_{\epsilon, p_\epsilon}) = \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{\Omega} f(x, p_\epsilon) - D(x, c_{\epsilon, p_\epsilon}) dx \right) e^{-\rho t} dt. \quad (3.3)$$

Comme dans le chapitre précédent,  $p_\epsilon$  vit dans l'espace

$$E = \{q \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \cap W^{1,1}(0, T; X); 0 \leq q(t, x) \leq \bar{p} \\ \text{presque partout dans } \Omega \times (0, T), \|\alpha \partial_t q\|_{L^1(0, T; X)} \leq C_p\}$$

où  $X$  est tel que  $L^2(\Omega)$  s'injecte continûment dans  $X$ ,  $C_p > 0$  est une constante donnée et  $\alpha \in \mathbb{R}$  est défini par  $\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } g = g(t, x, p) \text{ tel que } \epsilon p + g \text{ est indépendant de } p, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

On note  $(p_\epsilon^*, c_\epsilon^*, \phi_\epsilon^*)$  une solution optimale,  $p_\epsilon^* = \operatorname{argmax} J(p_\epsilon, c_\epsilon, p_\epsilon)$ ,  $p_\epsilon^* \in E$ , dont l'existence est assurée par le Théorème 2.4.2 du Chapitre 2. Nous allons cependant en donner une autre preuve dans le présent chapitre. On a  $c_\epsilon^* = c_{\epsilon, p_\epsilon^*}$ ,  $\phi_\epsilon^* = \phi_{\epsilon, p_\epsilon^*}$ .

La mise à l'échelle consiste à étudier le comportement asymptotique du problème précédent lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . Nous allons voir que ce processus d'*upscaling* démontre que le modèle adapté à l'hypothèse de faible concentration du polluant est constitué de l'équation d'état<sup>1</sup>

$$R\psi \partial_t c_p + v \cdot \nabla c_p - \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla c_p) = -\tilde{r}(c_p) - g c_p + p, \\ \operatorname{div}(v) = g \text{ avec } v = -\kappa \nabla \phi$$

associée à l'optimisation de la fonctionnelle

$$J(p, c_p) = \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{\Omega} (f(x, p) - D(x, c_p)) dx \right) e^{-\rho t} dt$$

dans  $E$ . Mieux, nous allons montrer que  $(p_\epsilon^*, c_\epsilon^*, \phi_\epsilon^*)$  converge en un sens précisé ci-après vers une solution  $(p^*, c^*, \phi^*)$  de ce dernier problème. De plus, nous montrerons que le problème limite est bien posé, c'est-à-dire qu'il admet une unique solution faible (caractère bien posé qu'on ne pouvait assurer pour le problème dépendant de  $\epsilon$ ).

### 3.1 Contre-exemple préliminaire

Dans ce paragraphe, on définit l'infimum de la fonction à minimiser d'un problème de contrôle optimal dépendant de  $\epsilon$  par  $j_\epsilon = \inf_{(v, u_\epsilon) \in E_\epsilon} J(v, u_\epsilon)$  et celui d'un problème de

1. La fonction  $\tilde{r}$  désigne la limite lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  de la fonction  $r_\epsilon$ , sous les hypothèses mathématiques précisées page 87.

---

contrôle optimal limite par  $j_0 = \inf_{(v,u) \in E_0} J(v,u)$ . On note respectivement  $(v_\epsilon^*, u_\epsilon^*)$  et  $(v^*, u^*)$  les solutions optimales du problème dépendant de  $\epsilon$  et du problème limite. Pour que la solution  $(v_\epsilon^*, u_\epsilon^*)$  converge vers la solution  $(v^*, u^*)$  (ce qui serait l'analogie du résultat démontré dans ce chapitre), il faut, entre autres, assurer le passage à la limite dans le problème d'optimisation lorsque  $\epsilon$  tend vers 0. En particulier, l'égalité suivante doit être vérifiée :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} j_\epsilon = j_0. \quad (3.4)$$

**Remarque 3.1.1** *Ceci est une condition nécessaire mais non suffisante. En effet, une autre condition est que si  $(v_\epsilon^*, u_\epsilon^*)$  est une solution optimale du problème dépendant de  $\epsilon$  et si  $(v_\epsilon^*, u_\epsilon^*)$  tend vers  $(v^*, u^*)$ , alors  $(v^*, u^*)$  est une solution optimale pour le problème limite.*

Cependant, l'égalité (3.4) n'est pas toujours vérifiée. Pour l'illustrer, nous reprenons un contre-exemple de Haraux et Murat dans [44], théorème 3.1, page 58.

L'équation d'état mise à l'échelle, c'est-à-dire dépendant d'un paramètre  $\epsilon \geq 0$ , est donnée par :

$$\epsilon Lz + g(z) = v \quad (3.5)$$

où  $L$  est un opérateur auto-adjoint dans  $L^2(\Omega)$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction non linéaire continue telle qu'il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  pour lequel,  $\forall z \in \mathbb{R}$ ,  $|g(z)| \leq M(1 + |z|^p)$  avec  $p \geq 1$  réel.

On considère la fonctionnelle convexe sur  $L^2(\Omega) \times L^{2p}(\Omega)$  dépendant d'un paramètre réel  $N > 0$  définie par :

$$J(v, z) = \int_{\Omega} |z - z_d|^{2p} dx + N \int_{\Omega} |v|^2 dx,$$

où  $z_d \in L^{2p}(\Omega)$ .

L'ensemble des contrôles admissibles est  $\mathcal{U}_{ad}$  fermé dans  $L^2(\Omega)$ . On cherche donc

$$j_\epsilon := \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v, z)$$

avec  $(v, z)$  satisfaisant (3.5).

**Théorème 3.1.1** *Soient  $\lambda > 0$  et  $\Omega = ]0, T[$  avec  $T = \frac{C_0}{\lambda^{\frac{1}{3}}}$  et  $C_0 = 2^{\frac{5}{6}} \int_0^T \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}}$ . Soit  $Lu = u''$  pour  $u \in D(L)$  avec*

$$D(L) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) := D_1,$$

ou

$$D(L) = \{u \in H^2(\Omega), u'(0) = u'(T) = 0\} := D_2,$$

ou

$$D(L) = \{u \in H^2(\Omega), u(0) = u(T) \text{ et } u'(0) = u'(T) = 0\} := D_3.$$

Soit  $\mathcal{U}_{ad} \subset L^2(\Omega)$  un sous-ensemble fermé tel que

$$\{\lambda Id\} \subset \mathcal{U}_{ad} \subset \{v \in L^2(\Omega), v \geq \lambda\}. \quad (3.6)$$

On pose  $p = 3$ . Enfin, soient  $g(u) = u^3$  et  $z_d = -C$  avec  $C \geq 3(\frac{\lambda}{2})^{\frac{1}{3}}$ . Alors, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup j_{1/n^2} J(v, z) < j_0, \quad (3.7)$$

où  $E_{1/n^2} = \{(v, z) \in \mathcal{U}_{ad} \times (L^{2p}(\Omega) \cap D(L)), \frac{1}{n^2}Lz + g(z) = v\}$ , et ce quelle que soit la valeur de  $N > 0$ .

*Preuve.* Soit  $\varphi$  solution sur  $\mathbb{R}$  de

$$\varphi'' + \varphi^3 = \lambda, \varphi(0) = \varphi'(0) = 0.$$

D'après le lemme 4.10 de Haraux et Murat pages 65-66, on a  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \varphi(x) \leq \left(\frac{1}{4\lambda}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.8)$$

et  $\varphi$  est périodique de période

$$T = \frac{C_0}{\lambda^{\frac{1}{3}}}.$$

De plus, on a

$$\varphi(T/2) \leq \left(\frac{1}{4\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (3.9)$$

Prenons  $\varphi_n(x) = \varphi(nx)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $x \in \Omega$ . Nous allons étudier  $j_\epsilon$  pour  $\epsilon = \frac{1}{n^2}$ . On a bien sûr  $\varphi_n \in D_1 \cap D_2 \cap D_3$  et  $\frac{1}{n^2}\varphi_n'' + \varphi_n^3 = \lambda$  dans  $\Omega$ , donc  $(\lambda, \varphi_n) \in E_{1/n^2}$ . On a aussi

$$\begin{aligned} j_{1/n^2} &= \inf_{(v, \psi_n) \in E_{1/n^2}} J(v, \psi_n) \leq J(\lambda, \varphi_n) = \int_0^T |\varphi_n(x) + C|^6 dx + N \int_0^T \lambda^2 dx \\ &= \int_0^T |\varphi(nx) + C|^6 dx + N\lambda^2 T = \int_0^T |\varphi(x) + C|^6 dx + N\lambda^2 T, \end{aligned}$$

soit

$$j_{1/n^2} \leq \int_0^T |\varphi(x) + C|^6 dx + N\lambda^2 T, \text{ pour tout } n > 0. \quad (3.10)$$

L'équation d'état associée à  $j_0$  est  $\varphi^3(x) = v(x)$ . Comme  $v \geq \lambda > 0$ , on peut définir  $v^{\frac{1}{3}}$ . On en déduit grâce à (3.6) que :

$$j_0 = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v, v^{\frac{1}{3}}) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} \left( \int_0^T |v^{\frac{1}{3}} + C|^6 dx + N \int_0^T v^2 dx \right) = T|\lambda^{1/3} + C|^6 + N\lambda^2 T. \quad (3.11)$$

Afin de comparer (3.10) et (3.11), nous allons montrer que

$$\int_0^T |\varphi(x) + C|^6 dx < T|\lambda^{1/3} + C|^6.$$

Cela prouvera grâce à (3.10) que la limite de  $j_{1/n^2}$  ne peut être  $j_0$  donné par (3.11). Pour cela, on introduit le lemme suivant :

**Lemme 3.1.1** *Soient  $F \in \mathcal{C}^1([m, M]) \cap \mathcal{C}([m, M]) : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe et  $w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue avec  $\inf_{x \in [0, T]} w(x) = m$ ,  $\sup_{x \in [0, T]} w(x) = M$ . Si  $F$  n'est pas affine sur tout  $[m, M]$ , alors*

$$F\left(\frac{1}{T} \int_0^T w(x) dx\right) < \frac{1}{T} \int_0^T F(w(x)) dx. \quad (3.12)$$

*Preuve.* Soit  $F' = f$  et  $\bar{w} = \frac{1}{T} \int_0^T w(x) dx \in ]m, M[$ . La fonction  $F$  étant convexe, on a

$$F(w) - F(\bar{w}) \geq f(\bar{w})(w - \bar{w}) \quad \forall w \in [m, M]. \quad (3.13)$$

On pose  $\rho(x) = F(w) - F(\bar{w}) - f(\bar{w})(w - \bar{w})$  qui, d'après (3.13), est positif sur  $[0, T]$ . De plus,

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{T} \int_0^T \rho(x) dx &= \frac{1}{T} \int_0^T F(w(x)) dx - F(\bar{w}) - \frac{1}{T} f(\bar{w}) \int_0^T (w(x) - \bar{w}) dx \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T F(w(x)) dx - F(\bar{w}) - \frac{1}{T} f(\bar{w}) \int_0^T w(x) dx + f(\bar{w})\bar{w} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T F(w(x)) dx - F(\bar{w}). \end{aligned}$$

Donc  $\frac{1}{T} \int_0^T F(w(x)) dx - F(\bar{w})$  est positif. Dans le cas où  $\rho(x) = 0$ , on aurait l'égalité  $F(w) - F(\bar{w}) = f(\bar{w})(w - \bar{w})$  pour tout  $x \in [0, T]$  : cela signifierait que la fonction  $F$  est affine sur  $[m, M]$ , ce qui n'est pas le cas. On a donc  $\frac{1}{T} \int_0^T F(w(x)) dx - F(\bar{w}) > 0$ . D'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T F(w(x)) dx - F(\bar{w}) > 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{T} \int_0^T F(w(x)) dx > F(\bar{w}) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{T} \int_0^T F(w(x)) dx > F\left(\frac{1}{T} \int_0^T w(x) dx\right). \end{aligned}$$

---

Pour montrer que ■

$$\int_0^T |\varphi(x) + C|^6 dx < T |v^{1/3} + C|^6,$$

nous allons utiliser le Lemme 3.1.1 en prenant  $F(t) = -(t^{1/3} + C)^6 \in \mathcal{C}([0, 4\lambda]) \cap \mathcal{C}^2(]0, 4\lambda[)$ .  
On calcule pour  $t > 0$  :

$$\begin{aligned} F'(t) &= -2t^{-2/3}(t^{1/3} + C)^5, \\ F''(t) &= \frac{4}{3}t^{-5/3}(t^{1/3} + C)^5 - \frac{10}{3}t^{-4/3}(t^{1/3} + C)^4 = \frac{2}{3}t^{-5/3}(t^{1/3} + C)^4(2C - 3t^{1/3}). \end{aligned}$$

Comme  $C \geq 3(\frac{\lambda}{2})^{1/3}$ , on a  $2C - 3t^{1/3} \geq 3(4\lambda)^{1/3} - 3t^{1/3} = 3((4\lambda)^{1/3} - t^{1/3})$ . Comme  $t \in ]0, 4\lambda[$ ,  $2C - 3t^{1/3} \geq 0$ .

On en déduit donc que  $F'' \geq 0$  sur  $]0, 4\lambda[$ . De plus,  $F$  n'est jamais affine sur  $[0, 4\lambda]$ .

On intègre  $\varphi'' + \varphi^3 = \lambda$  sur  $]0, T[$  :

$$\frac{1}{T} \int_0^T \varphi''(x) dx + \frac{1}{T} \int_0^T \varphi^3(x) dx = \frac{1}{T} \int_0^T \lambda dx.$$

Grâce aux conditions aux bords vérifiées par  $\varphi$  et à sa périodicité, on trouve

$$\frac{1}{T} \int_0^T \varphi^3(x) dx = \frac{1}{T} \int_0^T \lambda dx = \lambda.$$

On applique le Lemme 3.1.1 avec  $m = 0$ ,  $M = 4\lambda$  et  $w(x) = \varphi^3(x)$  pour tout  $x \in [0, T]$  :

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{T} \int_0^T w(x) dx\right) &< \frac{1}{T} \int_0^T F(w(x)) dx \Rightarrow F\left(\frac{1}{T} \int_0^T \varphi^3(x) dx\right) < \frac{1}{T} \int_0^T F(\varphi^3(x)) dx \\ &\Rightarrow F(\lambda) < -\frac{1}{T} \int_0^T (\varphi(x) + C)^6 dx \\ &\Rightarrow -(\lambda^{1/3} + C)^6 < -\frac{1}{T} \int_0^T (\varphi(x) + C)^6 dx \Leftrightarrow \frac{1}{T} \int_0^T (\varphi(x) + C)^6 dx < (\lambda^{1/3} + C)^6. \end{aligned}$$

Finalement, on en conclut en prenant la limite supérieure dans (3.10) que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup j_{1/n^2} < j_0.$$

Le théorème 3.1 est prouvé et l'égalité (3.4) n'est donc pas vérifiée. ■

On pourra trouver d'autres exemples pour lesquels il n'y a pas convergence de la solution d'un problème de contrôle perturbé vers la solution du problème de contrôle limite dans le livre de Kogut et al. [49], Partie I, Chapitre 5, exemples 5.1 et 5.2.

---

## 3.2 Présentation des problèmes d'optimisation dépendant de $\epsilon$ et limite

### 3.2.1 Hypothèses mathématiques

Soit  $T$  le temps maximal de l'étude,

$$0 < T \leq +\infty.$$

On rappelle que

$$E_0 = \{q \in L^2(0, T; L^2(\Omega)); 0 \leq q(t, x) \leq \bar{p} \text{ presque partout dans } \Omega \times (0, T)\},$$

$$E = \{q \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \cap W^{1,1}(0, T; X); 0 \leq q(t, x) \leq \bar{p} \text{ presque partout dans } \Omega_T, \\ \|\alpha \partial_t q\|_{L^1(0, T; X)} \leq C_p\}$$

où  $X$  est tel que  $L^2(\Omega)$  s'injecte continûment dans  $X$ ,  $C_p > 0$  est une constante donnée et  $\alpha \in \mathbb{R}$  est défini par  $\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } g = g(t, x, p) \text{ tel que } \epsilon p + g \text{ est indépendant de } p, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

On note bien sûr que  $E_0 = E$  lorsque  $\alpha = 0$ . On pose enfin pour tout  $\epsilon > 0$

$$E_\epsilon = \{q \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \cap W^{1,1}(0, T; X); 0 \leq q(t, x) \leq \bar{p} \text{ presque partout dans } \Omega_T, \\ \|\epsilon \alpha \partial_t q\|_{L^1(0, T; X)} \leq C_p\}.$$

Lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , l'ensemble  $E_\epsilon$  tend vers  $E_0$ .

On reprend les mêmes hypothèses qu'au chapitre précédent, à savoir :

- l'opérateur  $S(v)$  est supposé donné par (1.2) avec  $\alpha_L \geq \alpha_T \geq 0$ . Notons que d'après la définition (1.2) du tenseur de dispersion, on a

$$S(v)\xi \cdot \xi \geq (S_m + \alpha_T |v|) |\xi|^2, |S(v)\xi| \leq (S_m + \alpha_L |v|) |\xi| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

On suppose que  $S_m > 0$ . On suppose qu'il existe des réels  $\kappa_-$  et  $\kappa_+$  avec  $0 < \kappa_- \leq \kappa_+$  tels que le tenseur de perméabilité vérifie :

$$\kappa \xi \cdot \xi \geq \kappa_- |\xi|^2 \quad \text{et} \quad |\kappa \xi| \leq \kappa_+ |\xi|, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N;$$

- 
- on suppose que  $\partial\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et qu'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée (afin d'assurer  $v \in L^\infty(\Omega_T)$ ) :

$$\kappa \in (\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}))^{N \times N} \text{ et } \phi_1 \in W^{2,p}(\bar{\Omega}) \text{ avec } p > N,$$

$$\kappa = \kappa^* Id \text{ avec } \kappa^* : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } \kappa^* \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \text{ et } \phi_1 \in W^{2,p}(\bar{\Omega}) \text{ avec } p > \frac{N}{2};$$

- on suppose que la fonction  $x \mapsto r(\epsilon, x)$  est dérivable à dérivée bornée sur  $[0, 1]$  et telle que  $r(\epsilon, 0) = 0$ ,  $r(\epsilon, 1) + g \geq 0$ , et ce pour tout  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  où  $\epsilon_0 > 0$ ;

- posant pour tout  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  et  $x \in [0, 1/\epsilon]$ ,  $r_\epsilon(x) = r(\epsilon, \epsilon x)/\epsilon$ , on suppose que  $r_\epsilon$  converge simplement vers  $\tilde{r}$ ;

- on suppose que  $\tilde{r}$  est concave, dérivable à dérivée bornée sur  $\mathbb{R}_+$ ;

- le facteur de retard est tel que  $R > 0$ ;

- la concentration initiale est  $c_0 \in L^\infty(\Omega)$  avec  $0 \leq c_0(x) \leq 1$  presque partout dans  $\Omega$ ;

- la fonction  $g$  appartient à  $L^\infty(\Omega_T)$ ;

- la fonction  $f$  est continue<sup>2</sup>, strictement concave et définie sur  $\Omega \times [0, \bar{p}]$ ;

- pour presque tout  $x \in \Omega$ , l'opérateur  $c \in L^2(\Omega_T) \mapsto D(x, c) \in \mathcal{M}(\Omega_T)$  est croissant, strictement convexe, hémicontinu et borné au sens où il existe  $h \in L^1(\Omega_T)$  tel que  $|D(x, c)| \leq h(t, x)$  presque partout dans  $\Omega_T$ , pour tout  $c \in L^2(\Omega_T)$ ;

- la porosité  $\psi$  appartient à  $L^\infty(\Omega)$  et il existe  $\psi_-$  et  $\psi_+$  des réels tels que

$$0 < \psi_- \leq \psi(x) \leq \psi_+, \text{ presque pour tout } x \in \Omega;$$

- dans le cas de conditions aux bords de type Dirichlet pour la concentration ( $c = c_1$  sur  $\partial\Omega \times (0, T)$ , (1.11)), on supposera la régularité suivante pour  $c_1$  :

$$c_1 \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; W^{1,\infty}(\Omega)) \text{ si } \alpha_T = 0,$$

$$c_1 \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; W^{1,4}(\Omega)) \text{ si } \alpha_T > 0;$$

---

2. L'hypothèse de continuité de  $f$  par rapport à  $p$  peut être légèrement assouplie en supposant  $f$  semi-continue supérieurement et bornée par rapport à  $p$ , cf Remarque 1.2.1.



- 
- dans le cas de conditions aux bords de type Neumann pour la charge hydraulique ( $-\kappa \nabla \phi \cdot n = v_1$  sur  $\partial\Omega \times (0, T)$ , (1.12)), on supposera

$$v_1 \in L^2(\partial\Omega).$$

**Remarque 3.2.1** *Explicitons l'hypothèse de convergence simple de  $r_\epsilon$  vers  $\tilde{r}$  dans le cas simple où le terme de réaction issu du processus d'adimensionnement est  $r(\epsilon, \epsilon \hat{c}_p) = r(\epsilon \hat{c}_p)$ , c'est-à-dire le cas où les paramètres caractéristiques de la réaction ne dépendent pas de  $\epsilon$ . Supposer l'existence de  $\tilde{r}$  revient alors à supposer que  $r'(0)$  existe. Ce n'est donc pas une hypothèse supplémentaire. Notons qu'alors, pour  $\epsilon c_\epsilon$  au voisinage de 0, on peut écrire  $r(\epsilon c_\epsilon) = r(0) + \epsilon c_\epsilon r'(0) + \epsilon c_\epsilon \eta(\epsilon c_\epsilon)$  avec  $\lim_{\epsilon c_\epsilon \rightarrow 0} \eta(\epsilon c_\epsilon) = 0$ , où  $r(0) = 0$  par hypothèse. Si  $c_\epsilon$  converge de façon adéquate vers  $c$ , on a alors  $r_\epsilon(c_\epsilon) = r(\epsilon c_\epsilon)/\epsilon$  qui converge vers  $\tilde{r}(c) = r'(0)c$ . On est donc dans le cas où à la limite l'isotherme est linéaire. Mais en tenant compte d'une potentielle dépendance de  $r$  en  $\epsilon$ , i.e.  $r(\epsilon, \epsilon \hat{c}_p)$ , on doit envisager à la limite des isothermes variés.*

### 3.2.2 Problème dépendant de $\epsilon$

Dans le problème d'optimisation dépendant de  $\epsilon$ , la fonctionnelle à optimiser dans  $E$  est celle introduite précédemment :

$$J(p_\epsilon, c_{\epsilon, p_\epsilon}) = \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{\Omega} f(x, p_\epsilon) - D(x, c_{\epsilon, p_\epsilon}) dx \right) e^{-\rho t} dt.$$

L'équation d'état associée est le modèle d'équations aux dérivées partielles dépendant de  $\epsilon$  régissant le problème hydrogéologique. Nous introduisons une définition de solution faible appropriée à cette "équation" en  $\epsilon$ .

**Définition 3.2.1** *Soit  $p_\epsilon \in E_0$ . L'équation d'état désigne le système*

$$R\psi \partial_t(c_{\epsilon, p_\epsilon}) - \operatorname{div}(\psi S(v_{\epsilon, p_\epsilon}) \nabla c_{\epsilon, p_\epsilon}) + v_{\epsilon, p_\epsilon} \cdot \nabla c_{\epsilon, p_\epsilon} = -r_\epsilon(c_{\epsilon, p_\epsilon}) + p_\epsilon(1 - \epsilon c_{\epsilon, p_\epsilon}) - g c_{\epsilon, p_\epsilon} \quad (3.14)$$

$$\operatorname{div}(v_{\epsilon, p_\epsilon}) = \epsilon p_\epsilon + g, \quad v_{\epsilon, p_\epsilon} = -\kappa \nabla \phi_{\epsilon, p_\epsilon}, \quad (3.15)$$

dans  $\Omega \times (0, T)$ , complété par les conditions initiales et aux bords

$$S(v_{\epsilon, p_\epsilon}) \nabla c_{\epsilon, p_\epsilon} \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \quad c_{\epsilon, p_\epsilon}|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega \quad (3.16)$$

$$\phi_{\epsilon, p_\epsilon} = \phi_1 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T). \quad (3.17)$$

Un couple  $(c_{\epsilon, p_\epsilon}, \phi_{\epsilon, p_\epsilon})$ , avec  $c_{\epsilon, p_\epsilon} \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  et  $\phi_{\epsilon, p_\epsilon} \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega))$ , est solution faible de (3.14)-(3.17) au sens où pour toute fonction test  $\varphi \in H^1(0, T; H^1(\Omega))$  avec  $\varphi|_{t=T} = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_T} R\psi c_{\epsilon, p_\epsilon} \partial_t \varphi \, dx \, dt - \int_{\Omega} R\psi c_0 \varphi|_{t=0} \, dx + \int_{\Omega_T} (v_{\epsilon, p_\epsilon} \cdot \nabla c_{\epsilon, p_\epsilon}) \varphi \, dx \, dt \\ & + \int_{\Omega_T} \psi S(v_{\epsilon, p_\epsilon}) \nabla c_{\epsilon, p_\epsilon} \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt = \int_{\Omega_T} \left( -r_\epsilon(c_{\epsilon, p_\epsilon}) + p_\epsilon(1 - \epsilon c_{\epsilon, p_\epsilon}) - g c_{\epsilon, p_\epsilon} \right) \varphi \, dx \, dt, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\int_{\Omega_T} \operatorname{div} v_{\epsilon, p_\epsilon} \varphi \, dx \, dt = \int_{\Omega_T} (\epsilon p_\epsilon + g) \varphi \, dx \, dt, \quad (3.19)$$

et pour tout  $\psi \in L^1(0, T; H_0^1(\Omega))$ ,

$$\int_{\Omega_T} v_{\epsilon, p_\epsilon} \cdot \nabla \psi \, dx \, dt = \int_{\Omega_T} -\kappa \nabla \phi_{\epsilon, p_\epsilon} \cdot \nabla \psi \, dx \, dt, \quad (3.20)$$

$$\phi_{\epsilon, p_\epsilon} = \phi_1 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T). \quad (3.21)$$

Nous pouvons alors définir le sous-ensemble  $E_c$  de  $E$  contraint par l'équation d'état :

$$E_c = \{p_\epsilon \in E_\epsilon; \exists (c_{\epsilon, p_\epsilon}, \phi_{\epsilon, p_\epsilon}) \text{ solution faible du système (3.14)-(3.17) associé à } p_\epsilon \text{ au sens de la Définition 3.2.1}\}.$$

Mais au vu des résultats du paragraphe 2.3 du Chapitre 2, on a  $E_c = E_\epsilon$ .

Notre problème de contrôle optimal peut alors être défini comme suit.

**Définition 3.2.2** *Trouver  $(p_\epsilon^*, c_\epsilon^*, \phi_\epsilon^*)$  tels que*

$$J(p_\epsilon^*, c_\epsilon^*) = \max_{p_\epsilon \in E_\epsilon} J(p_\epsilon, c_{\epsilon, p_\epsilon})$$

et  $(c_\epsilon^* = c_{\epsilon, p_\epsilon^*}, \phi_\epsilon^* = \phi_{\epsilon, p_\epsilon^*})$  est solution faible du système (3.14)-(3.17) associé à  $p_\epsilon^*$  au sens de la Définition 3.2.1.

On rappelle le résultat d'existence issu du Théorème 2.4.2 (mais qui sera re-démontré dans le présent chapitre avec une autre méthode, voir au paragraphe 3.5) :

**Proposition 3.2.1** *Soit  $\epsilon > 0$ .<sup>3</sup> Il existe une solution  $(p_\epsilon^*, c_\epsilon^*, \phi_\epsilon^*)$  au problème de contrôle optimal au sens de la Définition 3.2.2 telle que pour tout  $T > 0$ ,  $c_\epsilon^* \in H^1(0, T; W^{-1,4}(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$ ,  $v_\epsilon^* \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$  et  $0 \leq c_\epsilon^*(t, x) \leq \frac{1}{\epsilon}$  presque partout dans  $\Omega \times \mathbb{R}$ .*

---

3. La preuve du principe du maximum  $0 \leq c_\epsilon^* \leq \frac{1}{\epsilon}$  presque partout dans  $\Omega \times (0, T)$  présuppose que la condition initiale vérifie  $0 \leq c_0(x) \leq \frac{1}{\epsilon}$  presque partout dans  $\Omega \times (0, T)$ . Comme  $c_0$  est supposée telle que  $c_0(x) \geq 0$  presque partout et que  $c_0 \in L^\infty(\Omega_T)$ , la Proposition 3.2.1 est plus rigoureusement vraie pour tout  $\epsilon > 0$  tel que  $\epsilon < \sup_{\Omega_T} c_0$ .

---

**Remarque 3.2.2** *L'équation d'état est :*

$$R\psi\partial_t c_\epsilon^* + v_\epsilon^* \cdot \nabla c_\epsilon^* - \operatorname{div}(\psi S(v_\epsilon^*) \nabla c_\epsilon^*) = -r_\epsilon(c_\epsilon^*) - gc_\epsilon^* + p_\epsilon^*(1 - \epsilon c_\epsilon^*).$$

*L'estimation  $0 \leq c_\epsilon^* \leq \frac{1}{\epsilon}$  (qui équivaut à  $0 \leq \epsilon c_\epsilon^* \leq 1$ ) presque partout pour le problème dépendant de  $\epsilon$  est due au terme  $(1 - \epsilon c_\epsilon^*)$  (voir le Chapitre 2).*

**Remarque 3.2.3** *À  $\epsilon > 0$  fixé, chercher le contrôle optimal dans  $E_\epsilon$  est bien sûr équivalent à le chercher dans  $E$ . Nous avons cependant choisi de mentionner la dépendance en  $\epsilon$  car nous utiliserons plus loin une suite de contrôles optimaux ( $\epsilon \mapsto p_\epsilon^*$ ) et nous voulons insister sur le fait que la borne du contrôle dans  $W^{1,1}(0, T; X)$  peut être choisie arbitrairement grande.*

### 3.2.3 Problème limite

La fonctionnelle à optimiser dans le problème d'optimisation limite est toujours la suivante

$$J(p, c_p) = \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{\Omega} f(x, p) - D(x, c_p) dx \right) e^{-\rho t} dt,$$

mais cette fois-ci dans  $E_0$ . En effet, l'espace  $E_0$  est l'espace "naturel" de recherche de l'optimum puisque, au vu de l'équation d'état définissant la vitesse qui ne dépend pas de  $p$  (voir par exemple (3.27) quelques lignes plus bas), l'espace  $E$  doit être caractérisé par  $\alpha = 0$  ici, et on a donc  $E = E_0$ .

L'équation d'état associée est le modèle d'équations aux dérivées partielles régissant le problème hydrogéologique après *upscaling*. Nous introduisons une définition de solution faible appropriée à cette "équation" limite.

**Définition 3.2.3** *Soit  $p \in E_0$ . L'équation d'état désigne le système*

$$R\psi\partial_t c - \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla c) + v \cdot \nabla c = -\tilde{r}(c) + p - gc \tag{3.22}$$

$$\operatorname{div}(v) = g, \quad v = -\kappa \nabla \phi, \tag{3.23}$$

*dans  $\Omega \times (0, T)$ , complété par les conditions initiales et aux bords*

$$S(v) \nabla c \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \quad c|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega \tag{3.24}$$

$$\phi = \phi_1 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T). \tag{3.25}$$

---

Un couple  $(c, \phi)$ , avec  $c \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  et  $\phi \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega))$ , est solution faible de (3.22)-(3.25) au sens où pour toute fonction test  $\varphi \in H^1(0, T; H^1(\Omega))$  avec  $\varphi|_{t=T} = 0$ , on a :

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega_T} R\psi c \partial_t \varphi \, dx \, dt - \int_{\Omega} R\psi c_0 \varphi|_{t=0} \, dx + \int_{\Omega_T} (v \cdot \nabla c) \varphi \, dx \, dt \\
& + \int_{\Omega_T} \psi S(v) \nabla c \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt = \int_{\Omega_t} (-\tilde{r}(c) + (\gamma + p)(1 - c) - gc) \varphi \, dx \, dt, \quad (3.26)
\end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_T} \operatorname{div} v \varphi \, dx \, dt = \int_{\Omega_T} g \varphi \, dx \, dt, \quad (3.27)$$

et pour tout  $\psi \in L^1(0, T; H_0^1(\Omega))$ ,

$$\int_{\Omega_T} v \cdot \nabla \psi \, dx \, dt = \int_{\Omega_T} -\kappa \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, dx \, dt, \quad (3.28)$$

$$\phi = \phi_1 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T). \quad (3.29)$$

Nous pouvons alors définir le sous-ensemble  $E_{c_0}$  de  $E_0$  contraint par l'équation d'état :

$$E_{c_0} = \{p \in E_0; \exists (c_p, \phi) \text{ solution faible du système (3.22)-(3.25) associé à } p \text{ au sens de la Définition 3.2.3}\}.$$

D'après les résultats du Chapitre 2, paragraphe 2.3, on a en fait  $E_{c_0} = E_0$ .

On remarque que  $\phi$  définie par (3.28)-(3.29) est de fait indépendante de  $p$ . Ce n'est donc plus une inconnue du problème.

Notre problème de contrôle optimal peut alors être défini comme suit.

**Définition 3.2.4** *Trouver  $(p^*, c^*)$  tels que*

$$J(p^*, c^*) = \max_{p \in E_{c_0}} J(p, c_p)$$

*et  $(c^*, \phi)$  est solution faible du système (3.22)-(3.25) associé à  $p^*$  au sens de la Définition 3.2.3.*

### 3.3 Résultats de stabilité pour le problème d'état

Dans ce paragraphe, on étudie les propriétés de stabilité de toute solution faible du problème (3.14)-(3.15), (3.16)-(3.17), en fonction des variations de  $\epsilon$  et  $p$ . Nous commençons par quelques estimations uniformes.

**Proposition 3.3.1** Soient  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  et  $p \in E_\epsilon$ . Toute solution faible  $(c_{\epsilon,p}, \phi_{\epsilon,p})$  de (3.14)-(3.15) muni de (3.16)-(3.17), satisfait les estimations uniformes suivantes, en fonction de  $p$  et  $\epsilon$  :

$$\|\phi_{\epsilon,p}\|_{L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))} \leq C, \quad (3.30)$$

$$\|c_{\epsilon,p}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C, \quad (3.31)$$

$$\|\psi \partial_t c_{\epsilon,p}\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C. \quad (3.32)$$

*Preuve.* Nous commençons par les résultats sur la charge hydraulique  $\phi_{\epsilon,p}$ . En multipliant (3.15) par  $\phi_{\epsilon,p} - \phi_1$  et en intégrant par parties sur  $\Omega$ , on a

$$\int_{\Omega} \kappa \nabla \phi_{\epsilon,p} \cdot \nabla \phi_{\epsilon,p} dx = \int_{\Omega} \kappa \nabla \phi_{\epsilon,p} \cdot \nabla \phi_1 dx + \int_{\Omega} (\epsilon p + g)(\phi_{\epsilon,p} - \phi_1) dx.$$

En utilisant les hypothèses sur  $\kappa$ ,  $\phi_1$ ,  $g$  et les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, et en gardant en tête que  $p \in E_\epsilon$  satisfait  $0 \leq p \leq \bar{p}$  presque partout dans  $\Omega_T$ , on tire de la dernière relation que

$$\kappa_- \int_{\Omega} |\nabla \phi_{\epsilon,p}|^2 dx \leq \eta \int_{\Omega} |\nabla \phi_{\epsilon,p}|^2 dx + \eta \int_{\Omega} |\phi_{\epsilon,p} - \phi_1|^2 dx + \frac{C}{\eta}$$

pour tout  $\eta > 0$ . En utilisant l'inégalité de Poincaré, on écrit  $\eta \|\phi_{\epsilon,p} - \phi_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \eta C \|\nabla \phi_{\epsilon,p} - \nabla \phi_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \eta C \|\nabla \phi_{\epsilon,p}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C$ . On choisit  $\eta$  suffisamment petit afin d'obtenir l'estimation uniforme suivante :

$$\|\phi_{\epsilon,p}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leq C. \quad (3.33)$$

La régularité des hypothèses faites sur  $\kappa$  et  $\phi_1$  nous permet d'améliorer le résultat. Posons  $f = \epsilon p + g + \operatorname{div}(-\kappa \nabla \phi_1)$ ,  $u_{\epsilon,p} = \phi_{\epsilon,p} - \phi_1$  solution du problème de Dirichlet homogène

$$\operatorname{div}(-\kappa \nabla u_{\epsilon,p}) = f \text{ dans } \Omega_T, \quad u_{\epsilon,p} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T). \quad (3.34)$$

Comme  $\phi_1 \in L^\infty(0, T; W^{2,p}(\bar{\Omega}))$ , on a  $f \in L^\infty(0, T; L^p(\Omega))$ . Grâce au théorème de Nirenberg (voir par exemple Ladyzhenskaja [53]), on a  $u_{\epsilon,p} \in L^\infty(0, T; W_0^{2,p}(\Omega))$ . Cela nous permet de multiplier (3.34), écrit sous la forme  $-\kappa \Delta u_{\epsilon,p} - \nabla \kappa \cdot \nabla u_{\epsilon,p} = f$ , par  $|\Delta u_{\epsilon,p}|^{s-2} \Delta u_{\epsilon,p}$ ,  $s \leq p$ , et d'intégrer par parties dans  $\Omega$ . On obtient

$$\kappa_- \int_{\Omega} |\Delta u_{\epsilon,p}|^s dx \leq \left| \int_{\Omega} |\Delta u_{\epsilon,p}|^{s-2} \Delta u_{\epsilon,p} (\nabla \kappa \cdot \nabla u_{\epsilon,p}) dx \right| + \left| \int_{\Omega} |\Delta u_{\epsilon,p}|^{s-2} \Delta u_{\epsilon,p} f dx \right|. \quad (3.35)$$

On calcule

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} |\Delta u_{\epsilon,p}|^{s-2} \Delta u_{\epsilon,p} (\nabla \kappa \cdot \nabla u_{\epsilon,p} + f) dx \right| &\leq \int_{\Omega} |\Delta u_{\epsilon,p}|^{s-1} (\|\nabla \kappa\|_{L^\infty(\Omega)} |\nabla u_{\epsilon,p}| + |f|) dx \\ &\leq C \left( \int_{\Omega} |\Delta u_{\epsilon,p}|^s dx \right)^{(s-1)/s} \left( \int_{\Omega} |\nabla u_{\epsilon,p} + f|^s dx \right)^{1/s} \\ &\leq \eta \int_{\Omega} |\Delta u_{\epsilon,p}|^s dx + \frac{C}{\eta} \int_{\Omega} |\nabla u_{\epsilon,p} + f|^s dx, \end{aligned}$$

pour tout  $\eta > 0$ . La dernière relation dans (3.35) donne, en choisissant  $\eta$  suffisamment petit : pour tout  $s \leq p$ ,

$$\int_{\Omega} |\Delta u_{\epsilon,p}|^s dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u_{\epsilon,p} + f|^s dx. \quad (3.36)$$

Nous allons maintenant distinguer nos calculs en fonction de l'hypothèse  $p > N$  ou  $p > N/2$  et de la diffusion isotropic, à savoir  $\kappa = \tilde{\kappa} \text{Id}$  avec  $\tilde{\kappa} \in C^1(\bar{\Omega})$ .

On suppose d'abord  $p > N$ . Comme on a (3.33), on déduit de la relation (3.36) pour  $s = 2$  que  $\|\Delta u_{\epsilon,p}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C$ . Cela signifie qu'il existe  $\tilde{f} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ ,  $\|\tilde{f}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C$ , tel que  $u_{\epsilon,p}$  satisfait

$$\Delta u_{\epsilon,p} = \tilde{f} \text{ dans } \Omega_T, \quad u_{\epsilon,p} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T).$$

Donc  $u_{\epsilon,p}$  est uniformément borné dans  $L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$ . En particulier,  $\nabla u_{\epsilon,p}$  est uniformément borné dans  $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ , et, grâce aux injections Sobolev, dans  $L^\infty(0,T;L^4(\Omega))$ . À présent, on choisit  $s = \min(p, 4)$  dans (3.36). On a

$$\|\Delta u_{\epsilon,p}\|_{L^\infty(0,T;L^s(\Omega))} \leq C.$$

La même estimation uniforme est vérifiée pour  $\phi_{\epsilon,p} = u_{\epsilon,p} + \phi_1$  grâce à la régularité  $\phi_1$ . Comme  $s > N$ , le dernier résultat est suffisant pour prouver (3.30) grâce, une fois encore, au théorème de Nirenberg et aux injections de Sobolev.

On suppose maintenant que  $p > N/2$  et que  $\kappa = \kappa^* \text{Id}$ ,  $\kappa^* \in C^1(\bar{\Omega})$ . Comme on a (3.33), en choisissant  $s = \min(p, 2)$  dans (3.36), on obtient que  $\Delta u_{\epsilon,p}$  est uniformément borné dans  $L^\infty(0,T;L^s(\Omega))$ . On suppose pour simplifier que  $\min(p, 2) = p$ . On en déduit que  $u_{\epsilon,p}$  est uniformément borné dans  $L^\infty(0,T;W_0^{2,p}(\Omega))$ . Il en est de même pour  $\phi_{\epsilon,p} = u_{\epsilon,p} + \phi_1$ . Cette borne et la structure spécifique de  $\kappa$  donnent  $\|\text{rot}(v_{\epsilon,p})\|_{L^\infty(0,T;W^{1,p}(\Omega))} = \|\nabla \kappa \wedge \nabla \phi_{\epsilon,p}\|_{L^\infty(0,T;W^{1,p}(\Omega))} \leq C$ . En particulier, grâce aux injections de Sobolev,  $\|\text{rot}(v_{\epsilon,p})\|_{L^\infty(0,T;L^q(\Omega))} \leq C$  pour un  $q > N$  car  $p > N/2$ .

On sait aussi que  $\|\text{div}(v_{\epsilon,p})\|_{L^\infty(0,T;L^q(\Omega))} = \|\epsilon p + g\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq C$ .

Rappelons que  $H_q(\text{rot}, \text{div}, \Omega) := \{u \in (L^q(\Omega))^N; \text{rot}(u) \in (L^q(\Omega))^N, \text{div}(u) \in L^q(\Omega)\}$  est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni de la norme

$$\left( \|u\|_{(L^q(\Omega))^3} + \|\text{rot}(u)\|_{(L^q(\Omega))^3} + \|\text{div}(u)\|_{L^q(\Omega)} \right)^{1/q}$$

et est tel que  $H_q(\text{rot}, \text{div}, \Omega) \subset (W_{loc}^{1,q}(\Omega))^3$ . On peut dire que  $v_{\epsilon,p}$  est uniformément borné dans  $L^\infty(0,T;W_{loc}^{1,q}(\Omega))$  où  $q > N$ . Grâce au théorème de Rellich-Kondrachov, on montre que  $v_{\epsilon,p}$  est aussi uniformément borné dans  $L^\infty(\Omega_T)$ .

Nous regardons à présent les estimations uniformes de la concentration. Soit  $\tau \in ]0, T[$ . On multiplie (3.14) par  $c_{\epsilon,p}(t, x) \chi_{[0,\tau]}(t)$ ,  $\chi_U$  étant la fonction caractéristique de l'ensemble

$U$ , et on intègre par parties sur  $\Omega_T$ . Grâce à la définition du tenseur  $S(v_{\epsilon,p})$ , on a

$$\begin{aligned} & \frac{R}{2} \int_{\Omega} \psi |c_{\epsilon,p}(\tau, x)|^2 dx + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \psi_- (S_m + \alpha_T |v_{\epsilon,p}|) |\nabla c_{\epsilon,p}|^2 dx dt + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (v_{\epsilon,p} \cdot \nabla c_{\epsilon,p}) c_{\epsilon,p} dx dt \\ & + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} r_{\epsilon}(c_{\epsilon,p}) c_{\epsilon,p} dx dt + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (g + \epsilon p) c_{\epsilon,p}^2 dx dt - \int_0^{\tau} \int_{\Omega} p c_{\epsilon,p} dx dt \leq \frac{R}{2} \int_{\Omega} \psi |c_0|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Avec les inégalité de Cauchy-Schwarz et de Young, on a

$$\left| \int_0^{\tau} \int_{\Omega} r_{\epsilon}(c_{\epsilon,p}) c_{\epsilon,p} dx dt + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (g + \epsilon p) c_{\epsilon,p}^2 dx dt - \int_0^{\tau} \int_{\Omega} p c_{\epsilon,p} dx dt \right| \leq C + C \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |c_{\epsilon,p}|^2 dx dt.$$

La principale difficulté est liée à l'estimation du terme convectif. Ici, on la contourne grâce au travail déjà fourni pour avoir une estimation uniforme sur la vitesse  $v_{\epsilon,p}$  dans  $L^{\infty}(\Omega_T)$  :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (v_{\epsilon,p} \cdot \nabla c_{\epsilon,p}) c_{\epsilon,p} dx dt \right| & \leq \|v_{\epsilon,p}\|_{L^{\infty}(\Omega_T)} \|\nabla c_{\epsilon,p}\|_{L^2(\Omega \times (0, \tau))} \|c_{\epsilon,p}\|_{L^2(\Omega \times (0, \tau))} \\ & \leq \eta \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |\nabla c_{\epsilon,p}|^2 dx dt + \frac{C}{\eta} \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |c_{\epsilon,p}|^2 dx dt \end{aligned}$$

pour tout  $\eta > 0$ . En remplaçant les deux dernières relations dans (3.37) et en choisissant  $\eta$  suffisamment petit, on a :

$$\begin{aligned} \frac{R\psi_-}{2} \int_{\Omega} |c_{\epsilon,p}(\tau, x)|^2 dx + \frac{\psi_-}{2} \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (S_m + \alpha_T |v_{\epsilon,p}|) |\nabla c_{\epsilon,p}|^2 dx dt \leq \\ C + C \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |c_{\epsilon,p}(t, x)|^2 dx dt. \end{aligned}$$

On obtient donc (3.31) en utilisant le lemme de Gronwall.

On vérifie maintenant que  $\psi \partial_t c_{\epsilon,p}$  est uniformément borné dans  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ . On multiplie (3.14) par une fonction test  $\varphi$  dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  et on intègre par partie sur  $\Omega_T$ . En gardant en tête les dernières estimations et le fait que  $0 \leq c_{\epsilon,p}(t, x) \leq 1/\epsilon$  presque partout dans  $\Omega_T$ , on obtient

$$\left| \langle \psi \partial_t c_{\epsilon,p}, \varphi \rangle_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \right| = \left| \int_{\Omega_T} \psi \partial_t c_{\epsilon,p} \varphi dx dt \right| \leq C.$$

La Proposition 3.3.1 est démontrée. ■

À présent, nous allons prouver quelques résultats de compacité. Soient  $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  deux suites de, respectivement,  $\mathbb{R}_+^*$  et  $E_{\epsilon}$ . On note  $\phi_n = \phi_{\epsilon_n, p_n}$ ,  $v_n = v_{\epsilon_n, p_n}$ ,  $c_n = c_{\epsilon_n, p_n}$ . On suppose que

$$\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0 \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } p_n \rightharpoonup p_0 \text{ faiblement dans } L^2(\Omega_T)$$

quand  $n$  tend vers l'infini.

---

**Proposition 3.3.2** *Le résultat de compacité qui suit est vérifié pour des sous-suites (non renommées par simplicité de notation) : il existe  $v \in (L^\infty(\Omega_T))^N$  et  $c \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  tels que*

$$c_n \rightarrow c \text{ dans } L^s(0, T; L^2(\Omega)), \quad 1 \leq s < 2, \text{ presque partout dans } \Omega_T \quad (3.38)$$

et, si de plus  $(\epsilon_n - \epsilon_0)\partial_t\phi_1$  est uniformément borné dans  $L^1(0, T; X)$ ,

$$v_n \rightarrow v \text{ dans } (L^2(\Omega_T))^N \text{ et presque partout dans } \Omega_T, \quad (3.39)$$

quand  $n$  tend vers l'infini.

*Preuve.* Au vue de (3.30), il existe une sous-suite de  $\phi_n$ , non renommée par commodité, et une fonction  $\phi \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\Omega))$  telle que

$$\begin{aligned} \phi_n &\rightharpoonup \phi \text{ faiblement dans } L^q(0, T; H^1(\Omega)), \\ v_n &\rightharpoonup v = -\kappa\nabla\phi \text{ faiblement dans } L^q(0, T; (L^2(\Omega))^N), \quad \forall q \geq 1. \end{aligned}$$

Nous allons prouver que  $\nabla\phi_n$  converge fortement vers  $\nabla\phi$ .

Si  $\alpha_{\epsilon_n} = 0$  pour tout  $n \geq n_0$ ,  $n_0 \in \mathbb{N}^*$ , ce qui signifie que le terme source  $\epsilon_n p_n + g$  dans (3.15) ne dépend pas de  $n$ , alors  $\phi_n = \phi$  ne dépend pas de  $n$  pour  $n \geq n_0$  et le résultat est obtenu directement. On suppose maintenant que pour tout  $n_0 \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $n \geq n_0$  tel que  $\alpha_{\epsilon_n} = 1$ . On peut extraire une sous-suite, non-renommée, telle que  $\alpha_{\epsilon_n} = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . On vérifie que  $\phi_n - \phi$  est une solution faible du problème suivant :

$$-\operatorname{div}(\kappa\nabla(\phi_n - \phi)) = \epsilon_n p_n - \epsilon_0 p_0 \text{ dans } \Omega_T, \quad \phi_n - \phi = 0 \text{ on } \partial\Omega.$$

On multiplie l'équation par  $\phi_n - \phi$  et on intègre par parties sur  $\Omega_T$ . On a

$$\kappa_- \int_0^T \int_\Omega |\nabla(\phi_n - \phi)|^2 dx dt \leq \int_0^T \int_\Omega (\epsilon_n p_n - \epsilon_0 p_0)(\phi_n - \phi) dx dt. \quad (3.40)$$

Comme on a seulement supposé  $p_n - p_0 \rightharpoonup 0$  faiblement dans  $L^2(\Omega_T)$ , on ne peut pas passer directement à la limite dans le terme de droite de (3.40). Cependant, on sait, grâce à la définition de  $E_{\epsilon_n}$ , que  $\partial_t(\epsilon_n p_n - \epsilon_0 p_0)$  est uniformément borné dans  $L^1(0, T; X)$ . Comme  $\partial_t(\phi_n - \phi)$  satisfait

$$-\operatorname{div}(\kappa\nabla(\partial_t(\phi_n - \phi))) = \partial_t(\epsilon_n p_n - \epsilon_0 p_0) \text{ dans } \Omega_T, \quad \partial_t(\phi_n - \phi) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times ]0, T[,$$

la suite  $\partial_t(\phi_n - \phi)$  est uniformément bornée dans  $L^1(0, T; X)$ . Ce dernier point et l'estimation (3.30) nous permettent d'utiliser un argument de compacité d'Aubin (voir par exemple Moussa [68]) et d'assurer que  $\phi_n - \phi \rightarrow 0$  est dans  $L^2(\Omega_T)$ . On utilise (3.40) de la manière suivante :

$$\kappa_- \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_\Omega |\nabla(\phi_n - \phi)|^2 dx dt \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_\Omega (\epsilon_n p_n - \epsilon_0 p_0)(\phi_n - \phi) dx dt = 0,$$



grâce à la convergence forte de  $\phi_n - \phi$ . Le résultat de convergence (3.39) s'en suit.

On tire de (3.31) qu'il existe une sous-suite, toujours notée  $c_n$  par commodité, et une fonction  $c \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$  telles que

$$c_n \rightharpoonup c \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

Grâce à l'estimation (3.32), comme  $0 < \psi_- \leq \psi(x) \leq \psi_+$  presque pour tout  $x \in \Omega$ , comme  $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$  et la première injection étant compacte, on peut utiliser une version avancée du critère de compacité d'Aubin (voir Lemme 3.1 dans Galusinski et Saad [36]) pour prouver que  $c_n$  est séquentiellement compacte dans  $L^p(0, T; L^2(\Omega))$  pour tout  $1 \leq p < 2$ . La Proposition 3.3.2 est démontrée. ■

### 3.4 Analyse mathématique du modèle faibles concentrations

Le théorème suivant établit le caractère bien posé du problème limite.

**Théorème 3.4.1** *Il existe une unique solution globale  $(p^*, c^*, \phi)$  au problème (3.22)-(3.25), avec pour tout  $T > 0$ ,  $c^* \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$  et  $c^*(x, t) \geq 0$  presque partout dans  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ ,  $v \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$ .*

**Remarque 3.4.1** *L'existence de la solution au problème (3.22)-(3.25) posé sur  $(0, T)$  pour tout  $T > 0$  peut être démontrée en suivant les lignes du paragraphe suivant. Elle va aussi être démontrée par passage à la limite. Nous omettrons donc cette partie de la preuve pour nous concentrer sur l'unicité. La positivité de  $c^*$  sera quant à elle établie par passage à la limite dans le paragraphe d'analyse asymptotique.*

**Remarque 3.4.2** *La Remarque 2.3.2 sur le choix des conditions aux bords faite après la Proposition 2.3.1 reste vraie.*

*Preuve.* Soient  $(p_1^*, c_1^*, \phi)$  et  $(p_2^*, c_2^*, \phi)$  deux solutions optimales au problème de contrôle. L'unicité de  $\phi$  est en effet évidente puisque l'équation définissant  $\phi$  est ici découplée de celles définissant  $c^*$  et indépendante de  $p^*$ . De plus, on gardera à l'esprit que les hypothèses faites sur  $\partial\Omega$ ,  $\kappa$  et  $\phi_1$  assurent que  $v = -\kappa\nabla\phi$  appartient à  $L^\infty(\Omega_T)$  (voir Proposition 2.3.1 au Chapitre 2).

On pose

$$J_{opt} := J(p_1^*, c_1^*) = J(p_2^*, c_2^*).$$

On regarde ce que vaut

$$J\left(\frac{1}{2}(p_1^* + p_2^*), c'\right) = \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{\Omega} \left( f(x, \frac{1}{2}p_1^* + \frac{1}{2}p_2^*) - D(x, c') \right) dx \right) e^{-\rho t} dt$$

où  $c' = c_{\frac{1}{2}(p_1^* + p_2^*)}$ , c'est-à-dire que  $c'$  est solution de

$$\begin{cases} R\psi\partial_t c' + v \cdot \nabla c' - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla c') = -\tilde{r}(c') - gc' + \frac{1}{2}(p_1^* + p_2^*) \text{ dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ S(v)\nabla c' \cdot n = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega, c'|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega, \\ \text{où } \begin{cases} \operatorname{div}(v) = g, v = -\kappa\nabla\phi^*, \text{ dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \phi = \phi_1 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega, \phi_1 \in H^1(\Omega). \end{cases} \end{cases} \quad (3.41)$$

Grâce à la propriété de stricte concavité de  $J$ , on sait déjà que si  $p_1^* \neq p_2^*$  presque partout dans  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ ,

$$J\left(\frac{1}{2}(p_1^* + p_2^*), c'\right) > \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2}f(x, p_1^*) + \frac{1}{2}f(x, p_2^*) - D(x, c') \right) dx \right) e^{-\rho t} dt. \quad (3.42)$$

Comme  $D$  est convexe, il nous suffit maintenant de comparer  $D(x, c')$  et  $D(x, c)$  où  $c = \frac{1}{2}(c_1^* + c_2^*)$ .

D'après la Définition 3.2.4,  $\frac{c_1^*}{2} + \frac{c_2^*}{2}$  est solution de

$$\begin{aligned} R\psi\partial_t\left(\frac{c_1^*}{2} + \frac{c_2^*}{2}\right) + v \cdot \nabla\left(\frac{c_1^*}{2} + \frac{c_2^*}{2}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{div}\left(\psi S(v)\nabla(c_1^* + c_2^*)\right) \\ = -\frac{1}{2}\tilde{r}(c_1^*) - \frac{1}{2}\tilde{r}(c_2^*) - g\left(\frac{c_1^*}{2} + \frac{c_2^*}{2}\right) + \frac{p_1^*}{2} + \frac{p_2^*}{2}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$R\psi\partial_t c + v \cdot \nabla c - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla c) = -\frac{1}{2}\tilde{r}(c_1^*) - \frac{1}{2}\tilde{r}(c_2^*) - gc + \frac{p_1^*}{2} + \frac{p_2^*}{2}$$

dans  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ . On va donc comparer les solutions  $c$  et  $c'$  de

$$\begin{cases} R\psi\partial_t c + v \cdot \nabla c - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla c) = -\frac{1}{2}\tilde{r}(c_1^*) - \frac{1}{2}\tilde{r}(c_2^*) - gc + \frac{p_1^*}{2} + \frac{p_2^*}{2} \text{ dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ R\psi\partial_t c' + v \cdot \nabla c' - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla c') = -\tilde{r}(c') - gc' + \frac{p_1^*}{2} + \frac{p_2^*}{2} \text{ dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ S(v)\nabla c \cdot n = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega, c|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega, \\ S(v)\nabla c' \cdot n = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega, c'|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (3.43)$$

On pose  $C = c - c'$ . Montrons que  $C \geq 0$  presque partout dans  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ .

En soustrayant les deux équations de (3.43), on voit que  $C$  est solution de

$$\begin{cases} R\psi\partial_t C + v \cdot \nabla C - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla C) = -\frac{\tilde{r}(c_1^*)}{2} - \frac{\tilde{r}(c_2^*)}{2} + \tilde{r}(c') - gC \text{ dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ S(v)\nabla C \cdot n = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega, C|_{t=0} = 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (3.44)$$

On réécrit la première équation de (3.44) comme suit :

$$R\psi\partial_t C + v \cdot \nabla C - \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla C) = \tilde{r}\left(\frac{1}{2}(c_1^* + c_2^*)\right) - \frac{\tilde{r}(c_1^*)}{2} - \frac{\tilde{r}(c_2^*)}{2} - \left(\tilde{r}\left(\frac{1}{2}(c_1^* + c_2^*)\right) - \tilde{r}(c')\right) - gC.$$

On pose  $C^- = \min(0, C) \leq 0$ . On multiplie l'équation aux dérivées partielles ci-dessus par  $C^-$  et on intègre par parties sur  $(0, \tau)$ ,  $\tau > 0$ . On obtient

$$\begin{aligned} \frac{R\psi}{2} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \int_\Omega |C^-|^2 dx dt + \int_0^\tau \int_\Omega \psi S(v) \nabla C \cdot \nabla C^- dx dt &= - \int_0^\tau \int_\Omega g |C^-|^2 dx dt \\ &+ \int_0^\tau \int_\Omega \left( \tilde{r}\left(\frac{1}{2}(c_1^* + c_2^*)\right) - \frac{\tilde{r}(c_1^*)}{2} - \frac{\tilde{r}(c_2^*)}{2} \right) C^- dx dt \\ &- \int_0^\tau \int_\Omega \left( \tilde{r}\left(\frac{1}{2}(c_1^* + c_2^*)\right) - \tilde{r}(c') \right) C^- dx dt + \int_0^\tau \int_\Omega (v \cdot \nabla C) C^- dx dt. \end{aligned}$$

On utilise le fait que

$$\int_\Omega \psi S(v) \nabla C \cdot \nabla C^- dx \geq \int_\Omega \psi_- S_m |\nabla C^-|^2 dx$$

et on applique le théorème des accroissements finis sur  $\tilde{r}$ . Pour le terme convectif, on écrit

$$\left| \int_0^\tau \int_\Omega (v \cdot \nabla C) C^- dx dt \right| \leq \frac{S_m \psi_-}{2} \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla C^-|^2 dx dt + C \|v\|_{L^\infty(\Omega_T)} \int_0^\tau \int_\Omega |C^-|^2 dx dt.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{R\psi}{2} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \int_\Omega |C^-|^2 dx dt - \int_0^\tau \int_\Omega \left( \tilde{r}\left(\frac{1}{2}(c_1^* + c_2^*)\right) - \frac{\tilde{r}(c_1^*)}{2} - \frac{\tilde{r}(c_2^*)}{2} \right) C^- \\ + \int_0^\tau \int_\Omega \frac{S_m \psi_-}{2} |\nabla C^-|^2 dx dt \leq \left( \|g\|_{L^\infty(\Omega_T)} + 2 \|\tilde{r}'\|_{L^\infty(0,1)} + C \|v\|_{L^\infty(\Omega_T)} \right) \int_0^\tau \int_\Omega |C^-|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Comme  $\tilde{r}$  est concave, le terme  $-\left(\tilde{r}\left(\frac{1}{2}(c_1^* + c_2^*)\right) - \frac{\tilde{r}(c_1^*)}{2} - \frac{\tilde{r}(c_2^*)}{2}\right) C^-$  est positif. En utilisant également le fait que  $S_m > 0$  et en appliquant le théorème de Gronwall, on trouve que

$$\int_0^\tau \int_\Omega |C^-|^2 dx dt \leq 0,$$

soit  $C^- = 0$  donc  $C = c - c' \geq 0$  pour presque tout  $x \in \Omega$ , pour tout  $t \in (0, \tau)$ , pour tout  $\tau > 0$ .

Comme  $D$  est croissante, on en déduit que  $D(x, c) \geq D(x, c')$  donc  $-D(x, c) \leq -D(x, c')$  presque partout dans  $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ .

On a alors ( $D$  étant de plus convexe), avec (3.42) :

$$\begin{aligned}
J\left(\frac{1}{2}(p_1^* + p_2^*), c'\right) &> \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{\Omega} \frac{1}{2}f(x, p_1^*) + \frac{1}{2}f(x, p_2^*) - D(x, c') dx \right) e^{-\rho t} dt \\
&\geq \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{\Omega} \frac{1}{2}f(x, p_1^*) + \frac{1}{2}f(x, p_2^*) - D(x, c) dx \right) e^{-\rho t} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{\Omega} \frac{1}{2}f(x, p_1^*) dx + \int_{\Omega} \frac{1}{2}f(x, p_2^*) dx - \int_{\Omega} D(x, \frac{1}{2}c_1^* + \frac{1}{2}c_2^*) dx \right) e^{-\rho t} dt \\
&\geq \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{\Omega} \frac{1}{2}f(x, p_1^*) dx - \int_{\Omega} \frac{1}{2}D(x, c_1^*) dx + \int_{\Omega} \frac{1}{2}f(x, p_2^*) dx - \int_{\Omega} \frac{1}{2}D(x, c_2^*) dx \right) e^{-\rho t} dt \\
&= 2 \times \frac{1}{2} J_{opt}
\end{aligned}$$

soit  $J\left(\frac{1}{2}(p_1^* + p_2^*), c'\right) > J_{opt}$  où  $c' = c_{\frac{1}{2}(p_1^* + p_2^*)}$ . D'où une contradiction avec la définition de la valeur maximale  $J_{opt}$ .

La solution au problème (3.22)-(3.25) est donc unique. ■

**Remarque 3.4.3** *C'est pour pouvoir traiter le terme convectif dans la démonstration précédente que nous sommes placés sous des hypothèses assurant  $v \in L^\infty(\Omega_T)$ . Si  $N = 2$  et  $\alpha_T > 0$ , ces hypothèses peuvent être relaxées (voir Remarque 2.3.3 du Chapitre 2).*

## 3.5 Existence d'une solution aux problèmes de contrôle

Le but de ce paragraphe est de donner une nouvelle démonstration du Théorème 2.4.2. L'idée est d'utiliser une première fois les méthodes que nous allons re-développer, mais de manière plus fine, pour l'analyse asymptotique. Cette preuve n'est nouvelle que pour la partie concernant le problème de contrôle optimal proprement dit. Tous les résultats concernant l'analyse de l'équation d'état établis au Chapitre 2 (paragraphe 2.3) restent nécessaires et nous y ferons appel.

Pour alléger les notations, nous écrivons le problème sous la forme générique suivante :

Trouver  $(p^*, c^*, \phi^*)$  tel que

$$J(p^*, c^*) = \max_{p \in E} J(p, c_p) = \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{\Omega} (f(x, p) - D(x, c_p)) dx \right) e^{-\rho t} dt$$

où

$$\begin{aligned} R\psi\partial_t c_p + v \cdot \nabla c_p - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla c_p) &= -r(c_p) + p(1 - c_p) - g c_p \text{ dans } \Omega_T, \\ \operatorname{div}(v_p) &= p + g, v_p = -\kappa\nabla\phi_p, \text{ dans } \Omega_T, \\ S(v_p)\nabla c_p \cdot n &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), c_p|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega, \\ \phi_p &= \phi_1 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T) \end{aligned}$$

et  $c^* = c_{p^*}$ ,  $\phi^* = \phi_{p^*}$ . On rappelle que les hypothèses de ce chapitre (en particulier les hypothèses sur  $r$ ) assurent que pour tout  $p \in E$ , on a bien entendu  $0 \leq p(t, x) \leq \bar{p}$  presque partout dans  $\Omega_T$ , mais aussi  $0 \leq c_p(t, x) \leq 1$  (voir le principe du maximum établi au Chapitre 2 (paragraphe 2.3, pages 62-63)). Les hypothèses sur les fonctions  $f$  et  $D$  permettent donc d'assurer que

$$\{J(p, c_p); p \in E\}$$

est une partie majorée de  $\mathbb{R}$ . Elle admet donc une borne supérieure, que nous noterons  $J^*$  dans la suite. Notre but est maintenant de prouver qu'il existe  $(p^*, c^* = c_{p^*})$  tel que

$$J^* = J(p^*, c^*),$$

c'est-à-dire que la borne supérieure est en fait un maximum.

Par définition de la borne supérieure, on peut construire une suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ , associée à une suite  $(c_n = c_{p_n}, \phi_n = \phi_{p_n})_{n \in \mathbb{N}}$  de solutions à l'équation d'état, telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(p_n, c_n) = J^*.$$

D'après le Chapitre 2, on a les estimations uniformes suivantes, pour tout  $T > 0$  :

$$\begin{aligned} \|p_n\|_{L^2(\Omega_T)} &\leq C, 0 \leq p_n(t, x) \leq \bar{p} \text{ presque partout dans } \Omega_T, \\ \|\phi_n\|_{L^\infty(0, T; H^1(\Omega))} &\leq C, \\ \|c_n\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; W^{-1,4}(\Omega))} &\leq C, 0 \leq c_n(t, x) \leq 1 \text{ presque partout dans } \Omega_T. \end{aligned}$$

Il existe donc  $(p^*, c^*, \phi^*)$  tel que, pour tout  $q \geq 2$ , pour tout  $T > 0$ , il existe une suite extraite non renommée par commodité telle que :

$$\begin{aligned} c_n &\rightharpoonup c^* \text{ faiblement dans } L^q(0, T; L^2(\Omega) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))), \\ \phi_n &\rightharpoonup \phi^* \text{ faiblement dans } L^q(0, T; H^1(\Omega)), \\ v_n &\rightharpoonup v^* = -\kappa\nabla\phi^* \text{ faiblement dans } L^q(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Comme au Chapitre 2 (pages 70 à 71), on peut de plus montrer par un raisonnement de type compacité d'Aubin que :

$$\begin{aligned} c_n &\rightarrow c^* \text{ dans } L^2(\Omega_T), \\ \phi_n &\rightarrow \phi^* \text{ dans } L^2(\Omega_T). \end{aligned}$$

Ces résultats sont suffisant pour passer à la limite dans

$$\begin{aligned} R\psi\partial_t c_n + v \cdot \nabla c_n - \operatorname{div}(\psi S(v_n)\nabla c_n) &= -r(c_n) + p_n(1 - c_n) - gc_n \text{ dans } \Omega_T, \\ \operatorname{div}(v_n) &= p_n + g, v_p = -\kappa\nabla\phi_n, \text{ dans } \Omega_T, \\ S(v_n)\nabla c_n \cdot n &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), c_n|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega, \\ \phi_n &= \phi_1 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T). \end{aligned}$$

On prouve ainsi que la limite  $(c^*, \phi^*)$  de  $(c_n, \phi_n)$  est solution de l'équation d'état associée à  $p^*$ , c'est-à-dire  $c^* = c_{p^*}$ ,  $\phi^* = \phi_{p^*}$  pour reprendre les notations précédentes. On sait de plus que  $0 \leq c^*(t, x) \leq 1$  presque partout dans  $\Omega_T$ .

Nous allons terminer la preuve en montrant que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(p_n, c_n) = J(p^*, c^*).$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} J(p_n, c_n)$  est aussi supposée égale à  $J^*$ , la preuve sera alors terminée. De la convergence forte de  $c_n$  vers  $c^*$  et de la monotonie de la fonction  $D$ , on tire par convergence dominée que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \left( \int_{\Omega} D(x, c_n) dx \right) e^{-\rho t} dx = \int_0^T \left( \int_{\Omega} D(x, c^*) dx \right) e^{-\rho t} dx.$$

On a donc

$$\begin{aligned} J^* &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \left( \int_{\Omega} (f(x, p_n) - D(x, c_n)) dx \right) e^{-\rho t} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \left( \int_{\Omega} f(x, p_n) dx \right) e^{-\rho t} dx - \int_0^T \left( \int_{\Omega} D(x, c^*) dx \right) e^{-\rho t} dx \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \left( \int_{\Omega} f(x, p_n) dx \right) e^{-\rho t} dx - \int_0^T \left( \int_{\Omega} D(x, c^*) dx \right) e^{-\rho t} dx. \end{aligned}$$

Or, de la concavité de  $f$  et du théorème de faible semi-continuité inférieure des fonctions concaves (Tartar [78]), on tire :

$$\int_0^T \left( \int_{\Omega} f(x, p^*) dx \right) e^{-\rho t} dx \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \left( \int_{\Omega} f(x, p_n) dx \right) e^{-\rho t} dx.$$

On conclut des deux précédentes relations que

$$J^* \leq J(p^*, c^*) = \int_0^T \left( \int_{\Omega} (f(x, p^*) - D(x, c^*)) dx \right) e^{-\rho t} dt.$$

Or  $p^* \in E$  et  $c^* = c_{p^*}$ . On a donc par définition de la borne supérieure  $J^*$  :

$$J(p^*, c^*) \leq J^*.$$

On a bien démontré que  $J(p^*, c^*) = J^*$ . Ceci clôt la preuve.

## 3.6 Analyse asymptotique

Nous allons à présent travailler par analyse asymptotique : on va étudier le comportement asymptotique de  $(p_\epsilon^*, c_\epsilon^*, \phi_\epsilon^*)$  définie par la Proposition 3.2.1 lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . Sa limite va se révéler être une solution  $(p^*, c^*, \phi^*)$  (la solution d'après le résultat d'unicité du paragraphe précédent) de (3.22)-(3.25).

On note ici que dans la Proposition 3.2.1,  $p_\epsilon^*$  est défini dans  $E_\epsilon$  qui se différencie de  $E_0$ , l'espace où il est naturel de chercher  $p^*$ , par une contrainte supplémentaire dans  $W^{1,1}(0, T; X)$ . Mais nous avons justement précisé la définition de  $E_\epsilon$  (au lieu d'utiliser simplement  $E$ ) pour bien assurer qu'à la limite cette contrainte disparaît. Autrement dit, on s'est bien assuré qu'à la limite l'espace des contrôles s'élargit bien à  $E_0$ .

**Théorème 3.6.1** *Lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro, toute suite de solutions  $(p_\epsilon^*, c_\epsilon^*, \phi_\epsilon^*)$  de (3.14)-(3.17) au sens de la Définition 3.2.2 converge vers l'unique solution  $(p^*, c^*, \phi^*)$  du problème (3.22)-(3.25) au sens de la Définition 3.2.4 vérifiant les propriétés du Théorème 3.4.1 :  $\forall T > 0$ ,*

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_\epsilon^* \rightharpoonup \phi \text{ faiblement dans } L^q(0, T; H^1(\Omega)), \text{ pour tout } q \geq 1, \\ c_\epsilon^* \rightharpoonup c^* \text{ faiblement dans } C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)), \text{ fortement dans } L^2(\Omega_T) \\ \text{et presque partout dans } \Omega \times (0, T), \\ p_\epsilon^* \rightharpoonup p^* \text{ faiblement dans } L^q(\Omega_T), \text{ pour tout } q \geq 1. \end{array} \right.$$

*Preuve.* Soit  $T > 0$ . On sait que  $0 \leq p_\epsilon^* \leq \bar{p}$  presque partout dans  $\Omega \times (0, T) := \Omega_T$  : la suite  $(p_\epsilon^*)_{\epsilon > 0}$  est donc uniformément bornée dans  $L^\infty(\Omega_T)$ . Il existe donc une suite extraite, encore notée  $(p_\epsilon^*)_{\epsilon > 0}$  par souci de simplicité, telle que

$$p_\epsilon^* \rightharpoonup p \text{ faiblement } * \text{ dans } L^\infty(\Omega_T).$$

De plus, les estimations établies dans la preuve de la Proposition 2.3.1 restent valables uniformément par rapport à  $\epsilon$ , et donc il existe  $(c, v, \phi)$  tels que, pour tout  $q \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} c_\epsilon^* &\rightharpoonup c \text{ faiblement dans } L^q(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)), \\ v_\epsilon^* &\rightharpoonup v \text{ faiblement dans } L^q(0, T; L^2(\Omega)), \\ \phi_\epsilon^* &\rightharpoonup \phi \text{ faiblement dans } L^q(0, T; H^1(\Omega)). \end{aligned}$$

On va d'abord prouver que  $(p, c, v)$  sont tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} R\psi \partial_t c + v \cdot \nabla c - \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla c) = -\tilde{r}(c) - gc + p \text{ dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \operatorname{div}(v) = g, v = -\kappa \nabla \phi, \text{ dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ S(v) \nabla c \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \phi = \phi_1 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega, c|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega. \end{array} \right.$$

Le passage à la limite dans l'équation d'incompressibilité  $\operatorname{div}(v_\epsilon^*) = \epsilon p_\epsilon^* + g$  est direct. De plus, puisque la limite  $\phi$  est l'unique solution de  $\operatorname{div}(-\kappa \nabla \phi) = g$  dans  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ ,  $\phi = \phi_1$  sur  $\mathbb{R}_+ \times \partial\Omega$ , les hypothèses posées sur  $\partial\omega$ ,  $\kappa$  et  $\phi_1$  permettent d'utiliser la Proposition 2.3.1 pour conclure à la régularité supplémentaire  $v \in L^\infty(\Omega_T)$ .

Le passage à la limite dans les non linéarités de l'équation de concentration nécessite plus de travail.

En reprenant les estimations et les résultats de convergence utilisés pour démontrer le résultat d'existence du chapitre précédent (voir la preuve du Théorème 2.4.1, pages 68 à 73), on peut prouver la compacité de  $(c_\epsilon^*)_\epsilon$  et  $(v_\epsilon^*)_\epsilon$  dans  $L^2(\Omega_T)$  et conclure qu'il existe une suite extraite  $c_\epsilon^*$  et une suite extraite  $v_\epsilon^*$  telles que

$$\begin{aligned} c_\epsilon^* &\rightarrow c \text{ dans } L^2(\Omega_T) \text{ et presque partout dans } \Omega_T, \\ v_\epsilon^* &\rightarrow v \text{ dans } L^2(\Omega_T) \text{ et presque partout dans } \Omega_T, \end{aligned}$$

(grâce au théorème de compacité d'Aubin) et

$$\begin{aligned} r_\epsilon(c_\epsilon^*) &\rightarrow \tilde{r}(c) \text{ presque partout dans } \Omega_T, \\ S(v_\epsilon^*) &\rightarrow S(v) \text{ presque partout dans } \Omega_T. \end{aligned}$$

On a donc

$$\operatorname{div}(v_\epsilon^*) = \epsilon p_\epsilon^* + g, \quad v_\epsilon^* = -\kappa \nabla \phi_\epsilon^* \text{ dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega \text{ et } \phi_\epsilon^* = \phi_1 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega,$$

qui donne à la limite

$$\operatorname{div}(v) = g, \quad v = -\kappa \nabla \phi \text{ dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega \text{ et } \phi = \phi_1 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega$$

et

$$\begin{aligned} R\psi \partial_t c_\epsilon^* + v_\epsilon^* \cdot \nabla c_\epsilon^* - \operatorname{div}(\psi S(v_\epsilon^*) \nabla c_\epsilon^*) &= -r_\epsilon(c_\epsilon^*) - g c_\epsilon^* + p_\epsilon^* - \epsilon p_\epsilon^* c_\epsilon^* \text{ dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ S(v_\epsilon^*) \nabla c_\epsilon^* \cdot n &= 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega, \end{aligned}$$

qui donne à la limite

$$R\psi \partial_t c + v \cdot \nabla c - \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla c) = -\tilde{r}(c) - g c + p \text{ dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \quad S(v) \nabla c \cdot n = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega.$$

Par continuité de  $c_\epsilon^* \mapsto c_{\epsilon|t=0}^*$ , on a aussi  $c|_{t=0} = c_0$ .

On est donc passé à la limite dans le système d'état. Voyons le comportement limite du problème d'optimisation. On rappelle que  $J^\epsilon(p_\epsilon^*, c_\epsilon^*)$  réalise le maximum du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{q \in E_\epsilon} J^\epsilon(q_\epsilon, c_{\epsilon, q_\epsilon}) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\Omega} f(x, q_\epsilon) - D(x, c_{\epsilon, q}) dx \right) e^{-\rho t} dt := M_\epsilon \\ R\psi \partial_t c_{\epsilon, q_\epsilon} + v_{\epsilon, q_\epsilon} \cdot \nabla c_{\epsilon, q_\epsilon} - \operatorname{div}(\psi S(v_{\epsilon, q_\epsilon}) \nabla c_{\epsilon, q_\epsilon}) = -r_\epsilon(c_{\epsilon, q_\epsilon}) - g c_{\epsilon, q_\epsilon} + q_\epsilon(1 - \epsilon c_{\epsilon, q_\epsilon}) \\ \hspace{20em} \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \operatorname{div}(v_{\epsilon, q_\epsilon}) = \epsilon q_\epsilon + g \text{ avec } v = -\kappa \nabla \phi_{\epsilon, q_\epsilon}, \text{ dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \phi_{\epsilon, q_\epsilon} = \phi_1 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega, \\ S(v_{\epsilon, q_\epsilon}) \nabla c_{\epsilon, q_\epsilon} \cdot n = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega, \quad c_{\epsilon, q_\epsilon}|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega \end{array} \right.$$



avec

$$E_\epsilon = \{q \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \cap W^{1,1}(0, T; X); 0 \leq q(t, x) \leq \bar{p} \text{ presque partout dans } \Omega_T, \\ \|\epsilon \alpha \partial_t q\|_{L^1(0, T; X)} \leq C_p\}.$$

Nous allons montrer que la limite de  $(p_\epsilon^*, c_\epsilon^*)$  qui est  $(p, c)$  vérifiant

$$\begin{cases} R\psi \partial_t c + v \cdot \nabla c - \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla c) = -\tilde{r}(c) - gc + p \text{ dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \operatorname{div}(v) = g \text{ dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ S(v) \nabla c \cdot n = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega, c|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

réalise le maximum de

$$\begin{cases} \max_{q \in E_0} J(q, c_q) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\Omega} f(x, q) - D(x, c_q) dx \right) e^{-\rho t} dt := J(p^*, c^*) := M_{opt} \\ R\psi \partial_t c_q + v \cdot \nabla c_q - \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla c_q) = -\tilde{r}(c_q) - gc_q + q \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div}(v) = g \text{ avec } v = -\kappa \nabla \phi, \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ S(v) \nabla c_q \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), c_{q|t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega, \phi = \phi_1 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \end{cases}$$

avec

$$E_0 = \{q \in L^2(0, T; L^2(\Omega)); 0 \leq q(t, x) \leq \bar{p} \text{ presque partout dans } \Omega \times (0, T)\},$$

c'est-à-dire, montrer que  $J(p, c) = J(p^*, c^*)$ .

On veut donc montrer que  $(p, c, \phi)$  est la solution du problème d'optimisation annoncée au Théorème 3.4.1.

A priori, on sait seulement que  $J(p, c) \leq M_{opt}$  puisque  $c$  satisfait le système d'état associé à  $M_{opt}$ .

Comme  $c_\epsilon^*$  converge vers  $c$  dans  $L^2(\Omega_T)$  et presque partout dans  $\Omega_T$ , pour tout  $T > 0$ , et que la fonction  $D$  est monotone, le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet d'affirmer

$$- \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} D(x, c) e^{-\rho t} dx dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} D(x, c_\epsilon^*) e^{-\rho t} dx dt \right).$$

Comme  $f$  est concave et  $p_\epsilon^* \rightharpoonup^* p$  faible \* dans  $L^\infty(\Omega_T)$ , pour tout  $T > 0$ , on sait d'après le théorème de faible semi-continuité inférieure des fonctions concaves (Tartar [78]) que

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} f(x, p) e^{-\rho t} dx dt \geq \overline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} f(x, p_\epsilon^*) e^{-\rho t} dx dt.$$

Globalement, on tire des deux points précédents que

$$J(p, c) = \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{\Omega} \left( f(x, p) - D(x, c) \right) dx \right) e^{-\rho t} dt \geq \overline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} J^\epsilon(p_\epsilon^*, c_\epsilon^*) = \overline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} M^\epsilon. \quad (3.45)$$

Soit  $T > 0$ . Puisque  $(p^*, c^*)$  est tel que  $J(p^*, c^*) = M_{opt}$ , on a  $c^*$  unique solution de (cf Lemme 2.3.3 au chapitre précédent pour l'unicité)

$$\begin{cases} R\psi\partial_t c^* + v \cdot \nabla c^* - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla c^*) = -\tilde{r}(c^*) - gc^* + p^* \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ S(v)\nabla c^* \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), c^*_{|t=0} = c^*_0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (3.46)$$

Cette équation d'état est aussi satisfaite par la limite forte au sens de  $L^2(\Omega_T)$  et presque partout dans  $\Omega_T$  de  $c_{\epsilon_{app}}^*$ , où  $c_{\epsilon_{app}}^*$  est solution (à  $p^*$  fixé) de

$$\begin{aligned} R\psi\partial_t c_{\epsilon_{app}}^* + v_{\epsilon_{app}} \cdot \nabla c_{\epsilon_{app}}^* - \operatorname{div}(\psi S(v_{\epsilon_{app}})\nabla c_{\epsilon_{app}}^*) &= -r_\epsilon(c_{\epsilon_{app}}^*) - gc_{\epsilon_{app}}^* + p^*(1 - \epsilon c_{\epsilon_{app}}^*) \\ &\text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div}(v_{\epsilon_{app}}) &= \epsilon p^* + g, v_{\epsilon_{app}} = -\kappa \nabla \phi_{\epsilon_{app}} \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ S(v_{\epsilon_{app}})\nabla c_{\epsilon_{app}}^* \cdot n &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), c_{\epsilon_{app}}^*_{|t=0} = c^*_0 \text{ dans } \Omega, \phi_{\epsilon_{app}} = \phi_1 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T) \end{aligned}$$

qui est un système d'état du type de la Définition 3.2.1. Notons que la suite  $c_{\epsilon_{app}}^*$  est construite pour converger fortement vers  $c^*$  quand  $\epsilon$  tend vers zéro (on le vérifie facilement avec les mêmes outils que pour l'étude de  $c_\epsilon^*$  et en utilisant l'unicité de la solution à (3.46)). Donc comme  $p^*$  ne dépend pas de  $\epsilon$  et comme on a la convergence forte de  $c_{\epsilon_{app}}^*$  et la continuité de la fonction  $x \mapsto J(p^*, x)$ , on a

$$M_{opt} = J(p^*, c^*) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} J^\epsilon(p^*, c_{\epsilon_{app}}^*) \leq \underline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} M^\epsilon$$

l'inégalité de droite venant de  $J^\epsilon(p^*, c_{\epsilon_{app}}^*) \leq M^\epsilon$ , car  $M^\epsilon$  est la valeur maximale des fonctionnelles du type  $J^\epsilon(q, c_q)$  associée au système d'état de la Définition 3.2.1. En fait on a pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} J^\epsilon(p^*, c_{\epsilon_{app}}^*) &\leq M^\epsilon \\ \text{et donc } \underline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} J^\epsilon(p^*, c_{\epsilon_{app}}^*) &\leq \underline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} M^\epsilon. \end{aligned}$$

Comme la limite de  $J^\epsilon(p^*, c_{\epsilon_{app}}^*)$  existe, alors

$$\underline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} J^\epsilon(p^*, c_{\epsilon_{app}}^*) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} J^\epsilon(p^*, c_{\epsilon_{app}}^*) \leq \underline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} M^\epsilon$$

donc

$$M_{opt} = J(p^*, c^*) \leq \underline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} M^\epsilon. \quad (3.47)$$

---

En résumé, avec (3.45) et (3.47), nous avons montré que

$$M_{opt} \leq \underline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} M^\epsilon \leq \overline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} M^\epsilon \leq J(p, c) \leq M_{opt}$$

d'où

$$J(p, c) = M_{opt}.$$

On conclut que  $(p, c) = (p^*, c^*)$  grâce au résultat d'unicité démontré au Théorème 3.4.1. L'unicité permet de plus d'assurer que c'est l'ensemble de la suite  $(p_\epsilon^*, c_\epsilon^*)$  qui converge et non simplement une suite extraite. ■

**Remarque 3.6.1** *Les inégalités  $0 \leq c_\epsilon^* \leq \frac{1}{\epsilon}$  donnent à la limite  $0 \leq c^*$ . La concentration  $c^*$  n'est donc pas bornée dans  $L^\infty$  : le résultat d'Amann de [4] ne peut pas s'appliquer dans ce cas pour affirmer l'existence globale de  $c^*$ . Ce sont les résultats précédents sur  $c_\epsilon^*$  qui nous la donnent.*

**Remarque 3.6.2** *L'analyse nous permet donc d'établir à la fois l'existence globale d'une solution (déjà montrée unique) au sens de la Définition 3.2.4, mais aussi que (3.22)-(3.25) est le modèle mis à l'échelle adapté à une hypothèse de faible concentration en polluant.*

## 3.7 Contrôlabilité asymptotique du modèle limite

On vérifie facilement que les hypothèses utilisées pour établir le Théorème 2.5.2 du chapitre précédent sont vérifiées ici. On a donc :

**Théorème 3.7.1** *Pour tout  $T > 0$ , le problème (3.22)-(3.25) est contrôlable asymptotiquement dans  $\mathcal{B} = \{q \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), S(v)\nabla q \cdot n = 0, q|_{t=0} = c_0\}$  par  $L^2(\Omega_T)$ .*

# Chapitre 4

## Conditions de premier ordre et état stationnaire

Dans ce chapitre, on travaille avec le modèle pour lequel on a établi l'unicité, c'est-à-dire dans le cas de faibles concentrations au sens de la Définition 3.2.3.

Nous rappelons le modèle. Il est constitué de "l'équation" d'état

$$\begin{aligned} R\psi\partial_t c + v \cdot \nabla c - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla c) &= -r(c) - gc + p\chi_S \text{ dans } \Omega_T, \\ S(v)\nabla c \cdot n &= 0 \text{ ou } c = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ c|_{t=0} &= c_0 \text{ dans } \Omega, \end{aligned}$$

où la vitesse  $v$  est donnée dans  $L^\infty(\Omega_T)$  (provenant de l'équation d'incompressibilité  $\operatorname{div} v = g$ ) telle que  $v \cdot n = -\kappa v_1 \cdot n$  sur  $\partial\Omega$  ou  $\phi = 0$  sur  $\partial\Omega$ , où  $\Omega$  est le domaine d'étude (représentant le sous-sol pour notre application),  $\partial\Omega$  est son bord, et  $(0, T)$  avec  $T > 0$  est l'intervalle d'étude. On a posé  $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ . La fonction  $\chi_S$  est l'indicatrice d'une partie  $S$  de  $\Omega$ . L'équation d'état est associée à l'optimisation de la fonctionnelle

$$\begin{aligned} J(p, c) &= \int_0^T \left( \int_S f(x, p(t, x)) dx - \int_\Omega D(x, c(t, x)) dx \right) e^{-\rho t} dt \\ &\quad - \nu \left( \int_\Omega D(x, c(T, x)) dx \right) e^{-\rho T} \end{aligned}$$

où l'on considère le coût terminal de la présence de la pollution au niveau du puits pondéré par  $\nu \geq 0$ . Dans le cas à horizon infini, on prendra  $\nu = 0$ , ce qui nous ramènera à notre objectif initial. Notons que par rapport au chapitre précédent, nous devons restreindre pour ce qui suit l'ensemble des contrôles admissibles.

Nous allons d'abord préciser que les contrôles doivent correspondre à l'application principale de la thèse. En effet, la quantité  $p\chi_S$  représente l'apport par épandage agricole sur

la parcelle  $\mathcal{S}$ . On considère cette dernière comme les premiers centimètres de profondeur de terre. On va donc supposer

$$\mathcal{S} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N, \text{ où } (N = 1, 2, 3)$$

et pour l'ensemble des contrôles admissibles, on pose

$$E_{0T} = \{q \in L^2(\Omega_T), 0 \leq q(t, x) \leq \bar{p} \text{ presque partout dans } \Omega_T, q|_{t=T} \text{ est définie}\}.$$

Imposer que la quantité  $q|_{t=T}$  ait un sens est une nouvelle contrainte par rapport aux chapitres précédents. Cette condition sera nécessaire pour définir le problème adjoint associé au problème.

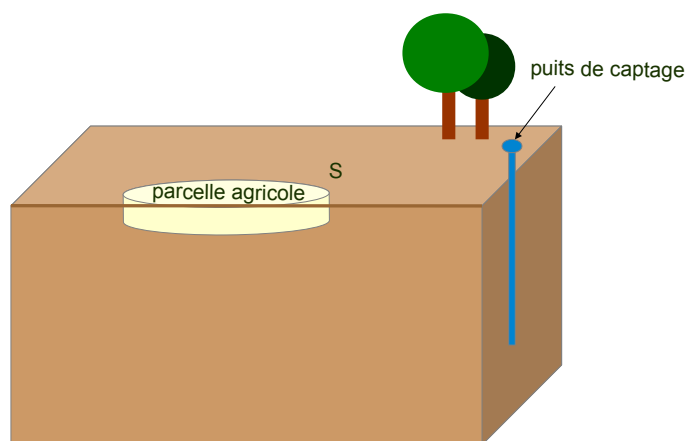


FIGURE 4.1 – Schéma représentatif d'une zone d'agriculture intense

Les autres hypothèses techniques sont les mêmes qu'au chapitre précédent. Rappelons les :

- l'opérateur  $S(v)$  est supposé donné par (1.2) avec  $\alpha_L \geq \alpha_T \geq 0$ . Notons que d'après la définition (1.2) du tenseur de dispersion, on a

$$S(v)\xi \cdot \xi \geq (S_m + \alpha_T |v|) |\xi|^2, |S(v)\xi| \leq (S_m + \alpha_L |v|) |\xi| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

On suppose que  $S_m > 0$ . On suppose qu'il existe des réels  $\kappa_-$  et  $\kappa_+$  avec  $0 < \kappa_- \leq \kappa_+$  tels que le tenseur de perméabilité vérifie :

$$\kappa \xi \cdot \xi \geq \kappa_- |\xi|^2 \text{ et } |\kappa \xi| \leq \kappa_+ |\xi|, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N;$$

- 
- on suppose que  $\partial\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et qu'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée (afin d'assurer  $v \in L^\infty(\Omega_T)$ ) :

$$\kappa \in (\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}))^{N \times N},$$

$$\kappa = \kappa^* Id \text{ avec } \kappa^* : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } \kappa^* \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega});$$

- l'isotherme  $r$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , concave, dérivable à dérivée bornée sur  $\mathbb{R}_+$  et telle qu'il existe  $r_+ \in \mathbb{R}^+$

$$|r(x)| \leq r_+ |x|, \forall x \in \mathbb{R};$$

- le facteur de retard est tel que  $R > 0$ ;
- la concentration initiale est  $c_0 \in H^1(\Omega)$  avec  $0 \leq c_0(x) \leq 1$  presque partout dans  $\Omega$ ;
- la fonction  $g$  appartient à  $L^\infty(\Omega)$ ;
- la fonction  $p \mapsto f(\cdot, p)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , croissante, définie sur  $\mathbb{R}^+$  et strictement concave<sup>1</sup>;
- l'image de  $f'$ , notée  $\mathcal{I}m(f')$ , est incluse dans  $[0, +\infty[$ ;
- la fonction  $f'^{-1}$  est telle que

$$f'^{-1} : \mathcal{I}m(f') \subset [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[;$$

- la fonction  $D : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est telle que pour presque tout  $x \in \Omega$ ,  $c \in \mathbb{R}_+ \mapsto D(x, c)$  est une fonction continue et bornée qui satisfait

$$(t, x) \mapsto D(x, c(t, x)) \in L^1(\Omega_T) \text{ si } c \in L^2(\Omega_T), \frac{\partial D}{\partial c} \geq 0 \text{ et } \frac{\partial^2 D}{\partial c^2} \geq 0;$$

- la donnée  $v_1$  est telle qu'il existe un relèvement satisfaisant  $v_1 \in (L^\infty(\Omega_T))^N$ ,  $\text{div}(v_1) \in L^\infty(\Omega_T)$  et  $\int_\Omega g dx = \int_{\partial\Omega} \kappa v_1 \cdot n d\sigma$  (voir la Remarque 2.3.2 du Chapitre 2);
- la porosité  $\psi$  appartient à  $L^\infty(\Omega)$  et il existe  $\psi_-$  et  $\psi_+$  des réels tels que

$$0 < \psi_- \leq \psi(x) \leq \psi_+, \text{ presque pour tout } x \in \Omega.$$

---

1. L'hypothèse de continuité de  $f$  par rapport à  $p$  peut être légèrement assouplie en supposant  $f$  semi-continue supérieurement et bornée par rapport à  $p, cf$  Remarque 1.2.1.

---

**Définition 4.0.1** On appelle  $\mathcal{P}_{E_{0T}}$  le problème suivant :  
 Trouver  $(p^*, c^*)$  tels que

$$J(p^*, c^*) = \max_{p \in E_{0T}} J(p, c_p), \quad c^* = c_{p^*},$$

où  $c_p$  est solution faible de

$$\begin{aligned} R\psi\partial_t c_p + v \cdot \nabla c_p - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla c_p) &= -r(c_p) - gc_p + p\chi_S, \\ \operatorname{div}(v) &= g, \quad v = -\kappa\nabla\phi, \end{aligned}$$

dans  $\Omega \times (0, T)$ , complété par les conditions initiales et aux bords

$$S(v)\nabla c_p \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad c_p = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T)$$

où  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$ ,  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ , et

$$v \cdot n = -\kappa\nabla\phi \cdot n = -\kappa v_1 \cdot n \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad \phi = 0 \text{ sur } \Gamma_4 \times (0, T)$$

avec  $\Gamma_3 \cup \Gamma_4 = \partial\Omega$ ,  $\Gamma_3 \cap \Gamma_4 = \emptyset$ , et

$$c_p|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega.$$

L'espace  $E_{0T}$  étant un sous-espace convexe et fermé dans  $E_0$ , le Théorème 3.4.1 s'applique encore (au vu des hypothèses ci-dessus).

**Proposition 4.0.1** *Il existe une unique solution au problème de contrôle optimal  $\mathcal{P}_{E_{0T}}$ . Elle vérifie en particulier  $v \in L^\infty(\Omega_T)$ ,  $c^* \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  et  $0 \leq c^*(t, x)$  presque partout dans  $\Omega_T$ .*

Cette proposition est démontrée dans le paragraphe 4.1 ci-dessous.

Le but de la suite de ce chapitre sera de caractériser plus précisément cette solution optimale  $(p^*, c^*)$  sous différentes hypothèses simplificatrices. Alors, le principe du maximum de Pontryagin nous permettra d'établir les conditions nécessaires d'optimalité et donc de calculer les trajectoires optimales de la solution. Les conditions nécessaires d'optimalité, si elles définissent une trajectoire unique, permettront de caractériser la solution optimale (qui est unique comme rappelé à la Proposition 4.0.1).

## 4.1 Preuve de la Proposition 4.0.1

On rappelle le problème d'état pour le confort du lecteur :

$$R\psi\partial_t c + v \cdot \nabla c - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla c) = -r(c) + p\chi_S - gc \tag{4.1}$$

---


$$\operatorname{div}(v) = g, v = -\kappa \nabla \phi, \quad (4.2)$$

dans  $\Omega \times (0, T)$ , complété par les conditions initiales et aux bords

$$S(v) \nabla c \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), c = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T) \quad (4.3)$$

où  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$ ,  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ , et

$$v \cdot n = -\kappa \nabla \phi \cdot n = -\kappa v_1 \cdot n \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \phi = 0 \text{ sur } \Gamma_4 \times (0, T) \quad (4.4)$$

avec  $\Gamma_3 \cup \Gamma_4 = \partial\Omega$ ,  $\Gamma_3 \cap \Gamma_4 = \emptyset$ , et

$$c|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega. \quad (4.5)$$

On rappelle également la fonctionnelle à optimiser, l'objectif :

$$J(p, c) = \int_0^T \left( \int_{\mathcal{S}} f(x, p(t, x)) dx - \int_{\Omega} D(x, c(t, x)) dx \right) e^{-\rho t} dt \\ - \nu \left( \int_{\Omega} D(x, c(T, x)) dx \right) e^{-\rho T}$$

en considérant le coût terminal de la présence de la pollution au niveau du puits pondéré par  $\nu \geq 0$  (on retrouve, pour  $\nu = 0$ , notre objectif initial).

**Remarque 4.1.1** *Les hypothèses de ce chapitre permettent d'assurer que  $0 \leq c(t, x)$  et que  $c \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)))$ . Cela nous permet en particulier d'écrire  $0 \leq c(t, x)$  presque pour tout  $x \in \Omega$ , pour tout  $t \in (0, T)$ , et d'assurer l'existence de  $c(T, x)$  presque partout dans  $\Omega$ .*

Nous allons à présent vérifier que les résultats établis au Chapitre 3 sont toujours valides avec notre nouvel objectif.

Nous commençons par montrer que le Théorème 3.4.1, établissant l'unicité de la solution du problème  $\mathcal{P}_{E_{0T}}$ , reste vrai pour ce nouvel objectif.

**Proposition 4.1.1** *Si il existe une solution au problème  $\mathcal{P}_{E_{0T}}$ , alors elle est unique.*

*Preuve.* Soient  $(p_1^*, c_1^*, \phi)$  et  $(p_2^*, c_2^*, \phi)$  deux solutions optimales au problème de contrôle (l'unicité de  $\phi$  est en effet évidente puisque l'équation définissant  $\phi$  est ici découplée de celles définissant  $c^*$  et indépendante de  $p^*$ ).

On pose

$$J_{opt} := J(p_1^*, c_1^*) = J(p_2^*, c_2^*).$$



---

On regarde ce que vaut

$$J\left(\frac{1}{2}(p_1^* + p_2^*), c'\right) = \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{\mathcal{S}} f(x, \frac{1}{2}p_1^* + \frac{1}{2}p_2^*) dx - \int_{\Omega} D(x, c') dx \right) e^{-\rho t} dt \\ - \nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c'(T, x)) dx$$

où  $c' = c_{\frac{1}{2}(p_1^* + p_2^*)}$ , c'est-à-dire que  $c'$  est solution de

$$\begin{cases} R\psi\partial_t c' + v \cdot \nabla c' - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla c') = -r(c') - gc' + \frac{1}{2}(p_1^* + p_2^*)\chi_{\mathcal{S}} \text{ dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ S(v)\nabla c' \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), c' = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T), \\ \text{où } \begin{cases} \operatorname{div}(v) = g, v = -\kappa\nabla\phi^*, \text{ dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ v \cdot n = -\kappa\nabla\phi \cdot n = -\kappa v_1 \cdot n \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \phi = 0 \text{ sur } \Gamma_4 \times (0, T). \end{cases} \end{cases} \quad (4.6)$$

Grâce à la propriété de stricte concavité de  $J$ , on sait déjà que si  $p_1^* \neq p_2^*$  presque partout dans  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ ,

$$J\left(\frac{1}{2}(p_1^* + p_2^*), c'\right) > \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{\mathcal{S}} \left( \frac{1}{2}f(x, p_1^*) + \frac{1}{2}f(x, p_2^*) \right) dx - \int_{\Omega} D(x, c') dx \right) e^{-\rho t} dt \\ - \nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c'(T, x)) dx. \quad (4.7)$$

On montre ensuite que  $-D(x, c) \leq -D(x, c')$  où  $c = \frac{1}{2}(c_1^* + c_2^*)$ . La démonstration est identique à celle du paragraphe 3.4 pages 96-99. En utilisant la convexité de  $D$ , on obtient

à partir de (4.7) :

$$\begin{aligned}
J\left(\frac{1}{2}(p_1^* + p_2^*), c'\right) &> \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_S \left( \frac{1}{2}f(x, p_1^*) + \frac{1}{2}f(x, p_2^*) \right) dx - \int_{\Omega} D(x, c') dx \right) e^{-\rho t} dt \\
&\quad - \nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c'(T, x)) dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_S \left( \frac{1}{2}f(x, p_1^*) + \frac{1}{2}f(x, p_2^*) \right) dx - \int_{\Omega} D(x, c) dx \right) e^{-\rho t} dt \\
&\quad - \nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c(T, x)) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_S \frac{1}{2}f(x, p_1^*) dx + \int_S \frac{1}{2}f(x, p_2^*) dx \right) e^{-\rho t} dt \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{\Omega} D(x, \frac{1}{2}c_1^* + \frac{1}{2}c_2^*) dx \right) e^{-\rho t} dt \\
&\quad - \nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, \frac{1}{2}c_1^*(T, x) + \frac{1}{2}c_2^*(T, x)) dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_S \frac{1}{2}f(x, p_1^*) dx \right) e^{-\rho t} dt + \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_S \frac{1}{2}f(x, p_2^*) dx \right) e^{-\rho t} dt \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{\Omega} \frac{1}{2}D(x, c_1^*) dx \right) e^{-\rho t} dt - \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{\Omega} \frac{1}{2}D(x, c_2^*) dx \right) e^{-\rho t} dt \\
&\quad - \frac{\nu}{2}e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c_1^*(T, x)) dx - \frac{\nu}{2}e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c_2^*(T, x)) dx = 2 \times \frac{1}{2}J_{opt}
\end{aligned}$$

soit  $J(\frac{1}{2}(p_1^* + p_2^*), c') > J_{opt}$  où  $c' = c_{\frac{1}{2}(p_1^* + p_2^*)}$ . D'où une contradiction avec la définition de la valeur maximale  $J_{opt}$ . On a donc bien l'unicité de la solution. ■

Nous montrons maintenant l'existence d'une solution au problème de contrôle  $\mathcal{P}_{E_{0T}}$ , analogue à celle donnée au paragraphe 3.5 du Chapitre 3.

**Proposition 4.1.2** *Il existe une solution au problème de contrôle  $\mathcal{P}_{E_{0T}}$ .*

*Preuve.* Nous nous appuyons sur la démonstration du paragraphe 3.5 du Chapitre 3 pour vérifier l'existence d'une solution au problème de contrôle.

On rappelle le problème sous sa forme générique :

Trouver  $(p^*, c^*, \phi^*)$  tel que

$$\begin{aligned}
J(p^*, c^*) &= \max_{p \in E_{0T}} J(p, c_p) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_S f(x, p) dx - \int_{\Omega} D(x, c_p) dx \right) e^{-\rho t} dt - \nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c_p(T, x)) dx
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} R\psi\partial_t c_p + v \cdot \nabla c_p - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla c_p) &= -r(c_p) + p\chi_S - gc_p \text{ dans } \Omega_T, \\ \operatorname{div}(v_p) &= g, v_p = -\kappa\nabla\phi_p, \text{ dans } \Omega_T, \\ S(v_p)\nabla c_p \cdot n &= 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), c_p = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T), c_p|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega, \\ v_p \cdot n &= -\kappa\nabla\phi_p \cdot n = -\kappa v_1 \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \phi_p = 0 \text{ sur } \Gamma_4 \times (0, T) \end{aligned}$$

et  $c^* = c_{p^*}$ ,  $\phi^* = \phi_{p^*}$ .

Les hypothèses sur les fonctions  $f$  et  $D$  permettent d'assurer que

$$\{J(p, c_p); p \in E_{0T}\}$$

est une partie bornée de  $\mathbb{R}$ . Elle admet donc une borne supérieure, que nous noterons  $J^*$  dans la suite. Notre but est maintenant de prouver qu'il existe  $(p^*, c^* = c_{p^*})$  tel que

$$J^* = J(p^*, c^*),$$

c'est-à-dire que la borne supérieure est en fait un maximum.

Par définition de la borne supérieure, on peut construire une suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E_{0T}$ , associée à une suite  $(c_n = c_{p_n}, \phi_n = \phi_{p_n})_{n \in \mathbb{N}}$  de solutions à l'équation d'état, telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(p_n, c_n) = J^*.$$

Les estimations uniformes établies au Chapitre 2 étant toujours valables, on passe à la limite dans le système d'état en suivant les lignes de la démonstration du paragraphe 3.5 page 99, et on prouve ainsi que la limite  $(c^*, \phi^*)$  de  $(c_n, \phi_n)$  est solution de l'équation d'état associée à  $p^*$ , c'est-à-dire  $c^* = c_{p^*}$ ,  $\phi^* = \phi_{p^*}$  pour reprendre les notations précédentes. On sait de plus que  $0 \leq c^*(t, x) \leq 1$  presque partout dans  $\Omega$ , pour tout  $t \in [0, T]$ .

Nous allons à présent montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(p_n, c_n) = J(p^*, c^*).$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} J(p_n, c_n)$  est aussi supposée égale à  $J^*$ , la preuve sera alors terminée. De la convergence forte de  $c_n$  vers  $c^*$  dans  $L^2(\Omega_T)$  et presque partout dans  $\Omega$  pour tout  $t \in [0, T]$  et de la continuité de la fonction  $c \mapsto D(\cdot, c)$ , on tire par convergence dominée que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \left( \int_{\Omega} D(x, c_n) dx \right) e^{-\rho t} dt = \int_0^T \left( \int_{\Omega} D(x, c^*) dx \right) e^{-\rho t} dt$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c_n(T, x)) dx = -\nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c^*(T, x)) dx.$$

---

On a donc

$$\begin{aligned}
J^* &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \left( \int_S f(x, p_n) dx - \int_{\Omega} D(x, c_n) dx \right) e^{-\rho t} dt - \lim_{n \rightarrow \infty} \nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c_n(T, x)) dx \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \left( \int_S f(x, p_n) dx \right) e^{-\rho t} dt - \int_0^T \left( \int_{\Omega} D(x, c^*) dx \right) e^{-\rho t} dt \\
&\quad - \nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c^*(T, x)) dx \\
&= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \left( \int_S f(x, p_n) dx \right) e^{-\rho t} dt - \int_0^T \left( \int_{\Omega} D(x, c^*) dx \right) e^{-\rho t} dt \\
&\quad - \nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c^*(T, x)) dx.
\end{aligned}$$

Or, de la concavité de  $f$  et du théorème de faible semi-continuité inférieure des fonctions concaves (Tartar [78]), on tire :

$$\int_0^T \left( \int_S f(x, p^*) dx \right) e^{-\rho t} dx \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \left( \int_S f(x, p_n) dx \right) e^{-\rho t} dx.$$

On conclut des deux précédentes relations que

$$J^* \leq J(p^*, c^*) = \int_0^T \left( \int_S f(x, p^*) dx - \int_{\Omega} D(x, c^*) dx \right) e^{-\rho t} dt - \nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c(T, x)) dx.$$

Or  $p^* \in E_{0T}$  et  $c^* = c_{p^*}$ . On a donc par définition de la borne supérieure  $J^*$  :

$$J(p^*, c^*) \leq J^*.$$

On a bien démontré que  $J(p^*, c^*) = J^*$ . Ceci clôt la preuve de l'existence d'une solution au problème de contrôle. ■

## 4.2 Conditions d'optimalité de premier ordre

Nous commençons par une présentation rapide de la méthode adjointe (relaxation du Lagrangien) telle qu'elle est utilisée pour les équations aux dérivées partielles. On différenciera notamment le cas d'une équation aux dérivées partielles discrétisée en espace et le cas d'une formulation continue. Le sous-paragraphe 4.2.1 qui suit est directement inspirée de Bradley [17]. Puis, à partir du sous-paragraphe 4.2.2, nous utiliserons la méthode pour introduire les conditions de premier ordre associées à notre modèle.

---

### 4.2.1 Approche par la méthode adjointe

Avant de présenter la méthode adjointe dans le cadre continu, nous commençons par la présenter dans le cas discret (après une discrétisation en espace) qui est plus simple. Nous nous appuyerons sur les résultats obtenus en discret pour expliquer ceux du cas continu (que nous utiliserons par la suite).

On utilise la notation suivante : la dérivée totale (le gradient) est notée par  $d_c$ , la dérivée partielle par  $\partial_c$  et la différentielle par  $d$ .

#### Exemple d'une formulation simple

Commençons par un cas simple où le problème d'optimisation ne dépend pas continûment de l'espace. On rencontre par exemple une telle situation lorsque, pour résoudre des problèmes d'optimisation d'équations aux dérivées partielles sous contraintes, on résout le problème d'optimisation numérique résultant de l'équation aux dérivées partielles discrétisée.

Soit  $T$  fini. Considérons le problème

$$\begin{aligned} \min_p F(c, p), \text{ où } F(c, p) &= \int_0^T f(c, p, t) dt, \\ \text{sous contraintes } h(c, \dot{c}, p, t) &= 0, \\ g(c(0), p) &= 0, \end{aligned}$$

où  $p \in \mathbb{R}^{n_p}$  avec  $n_p \in \mathbb{N}^*$  est la commande,  $c \in \mathbb{R}^n$  est la variable d'état dépendant du temps,  $h(c, \dot{c}, p, t) = 0$  est une équation différentielle ordinaire du premier ordre dans sa forme implicite et  $g(c(0), p) = 0$  est la condition initiale qui peut être une fonction de la commande. L'équation différentielle ordinaire  $h = 0$  peut être le résultat de la semi-discrétisation en espace d'une équation aux dérivées partielles.

Un algorithme d'optimisation basé sur le gradient requiert de calculer celui de  $F$  dont l'expression est la suivante :

$$d_p F(c, p) = \int_0^T (\partial_c f d_p c + \partial_p f) dt. \quad (4.8)$$

Le calcul de  $d_p c$  est difficile dans de nombreux cas. Deux méthodes sont possibles en pratique. L'une consiste à approcher le gradient  $d_p F(c, p)$  par différences finies sur  $p$ . Généralement, cela nécessite d'intégrer  $n_p$  équations différentielles ordinaires. L'autre méthode consiste à développer une deuxième équation différentielle ordinaire dont l'inconnu est le vecteur dit adjoint,  $\lambda$  ici, qui permet de calculer le gradient. L'avantage de cette seconde méthode est que le coût de calcul de  $F$  et de ses gradients est à peu près équivalent à

l'intégration de seulement deux équations différentielles ordinaires.

On introduit le Lagrangien correspondant au problème d'optimisation :

$$\mathcal{L} = \int_0^T (f(c, p, t) + \lambda^T h(c, \dot{c}, p, t)) dt + \mu^T g(c(0), p). \quad (4.9)$$

Le vecteur  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  de multiplicateurs de Lagrange est une fonction du temps, et  $\mu$  est un autre vecteur de multiplicateurs de Lagrange associé aux conditions initiales. On a utilisé le produit scalaire suivant :  $\langle \lambda, A \rangle = \lambda^T A$ , avec  $(\lambda, A) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

Comme les deux contraintes  $h = 0$  et  $g = 0$  doivent être satisfaites par construction, quelles que soient les valeurs que nous choisissons pour  $\lambda$  et  $\mu$ , nous aurons  $d_p \mathcal{L} = d_p F$ . Nous allons les choisir afin que le calcul de  $d_p \mathcal{L}$  puisse être explicite.

La dérivée totale du Lagrangien est

$$d_p \mathcal{L} = \int_0^T \left( \partial_c f d_p c + \partial_p f + \lambda^T (\partial_c h d_p c + \partial_{\dot{c}} h d_p \dot{c} + \partial_p h) \right) dt + \mu^T (\partial_{c(0)} g d_p c(0) + \partial_p g). \quad (4.10)$$

Les intégrales contenant les termes en  $d_p c$  et  $d_p \dot{c}$  sont difficiles à évaluer. On fait la manipulation suivante : comme  $d_p \mathcal{L} = d_p F$ , on a d'après (4.8) :

$$\int_0^T \lambda^T \left( \partial_c h d_p c + \partial_{\dot{c}} h d_p \dot{c} + \partial_p h \right) dt + \mu^T \left( \partial_{c(0)} g d_p c(0) + \partial_p g \right) = 0.$$

Nous faisons une intégration par parties, ce qui fait apparaître un terme en  $d_p c$  :

$$\int_0^T \lambda^T \partial_{\dot{c}} h d_p \dot{c} dt = \left[ \lambda^T \partial_{\dot{c}} h d_p c \right]_0^T - \int_0^T (\dot{\lambda}^T \partial_{\dot{c}} h + \lambda^T d_t \partial_{\dot{c}} h) d_p c dt. \quad (4.11)$$

En substituant ce résultat dans (4.10) et en rassemblant les termes en  $d_p c$  et  $d_p c(0)$ , on obtient :

$$d_p \mathcal{L} = \int_0^T \left[ \left( \partial_c f + \lambda^T (\partial_c h - d_t \partial_{\dot{c}} h) - \dot{\lambda}^T \partial_{\dot{c}} h \right) d_p c + \partial_p f + \lambda^T \partial_p h \right] dt \\ + \lambda^T \partial_{\dot{c}} h d_p c|_T + \left( -\lambda^T \partial_{\dot{c}} h + \mu^T \partial_{c(0)} g \right) |_0 d_p c(0) + \mu^T \partial_p g.$$

On impose  $\lambda(T) = 0$  afin d'annuler le terme  $\lambda^T \partial_{\dot{c}} h d_p c|_T$ . De même, on prend  $\mu^T = \lambda^T \partial_{\dot{c}} h|_0 (\partial_{c(0)} g)^{-1}$  pour annuler le terme  $-\lambda^T \partial_{\dot{c}} h + \mu^T \partial_{c(0)} g|_0$ . Finalement, on peut éviter de calculer  $d_p c$  à tous les autres temps  $t > 0$  en imposant

$$\partial_c f + \lambda^T (\partial_c h - d_t \partial_{\dot{c}} h) - \dot{\lambda}^T \partial_{\dot{c}} h = 0.$$

L'algorithme pour le calcul de  $d_p F$  est en résumé le suivant :

- 
- Intégrer  $h(c, \dot{c}, p, t) = 0$  pour  $t$  allant de 0 à  $T$  avec la condition initiale  $g(c(0), p) = 0$  pour déterminer  $c$  en fonction de  $p$ .
  - Intégrer  $\partial_c f + \lambda^T (\partial_c h - d_t \partial_c h) - \dot{\lambda}^T \partial_c h = 0$  pour  $t$  allant de  $T$  à 0 avec la condition terminale  $\lambda(T) = 0$  pour trouver  $\lambda$ . Notons que dans certains cas, cette équation est mal posée (notamment en présence d'un terme de diffusion). Il faut alors faire un changement de variable pour se ramener à une équation en  $t' = 0 \dots T$  avec une condition initiale (ce sera notre cas).
  - Calculer  $d_p F$  par

$$d_p F = d_p \mathcal{L} = \int_0^T (\partial_p f + \lambda^T \partial_p h) dt + \lambda^T \partial_c h|_0 (\partial_{c(0)} g)^{-1} \partial_p g.$$

### La méthode adjointe pour le problème de second ordre

Nous allons rapidement introduire la méthode adjointe dans le cas des problèmes du second ordre. Cette méthode nous permettra d'expliquer le lien entre la méthode adjointe dans le cas continu et dans le cas discret. Ici pour simplifier, on suppose que l'équation différentielle ordinaire peut être écrite sous forme explicite. Le problème général est le suivant :

$$\begin{aligned} \min_p F(c, p), \text{ où } F(c, p) &= \int_0^T f(c, p, t) dt, \\ \text{sous contraintes } \ddot{c} &= \bar{h}(c, p, t) \\ g(c(0), p) &= 0 \\ k(\dot{c}(0), p) &= 0, \end{aligned}$$

avec  $c(t) \in \mathbb{R}$  et  $p \in \mathbb{R}^p$ .

Le Lagrangien correspondant est le suivant :

$$\mathcal{L} = \int_0^T \left( f(c, p, t) + \lambda^T (\ddot{c} - \bar{h}(c, p, t)) \right) dt + \mu^T g(c(0), p) + \eta^T k(\dot{c}(0), p). \quad (4.12)$$

On constate qu'il diffère du Lagrangien pour le problème de premier ordre par le terme provenant de la condition initiale additionnelle sur  $k$  et la forme explicite de  $h$ . Sa dérivée totale est donnée par

$$\begin{aligned} d_p \mathcal{L} &= \int_0^T \left( \partial_c f d_p c + \partial_p f + \lambda^T (d_p \ddot{c} - \partial_c \bar{h} d_p c - \partial_p \bar{h}) \right) dt \\ &+ \mu^T \left( \partial_{c(0)} g d_p c(0) + \partial_p g \right) + \eta^T \left( \partial_{\dot{c}(0)} k d_p \dot{c}(0) + \partial_p k \right). \end{aligned}$$

Pour éliminer le terme  $d_p\ddot{c}$ , il faut cette fois intégrer par parties deux fois de suite :

$$\int_0^T \lambda^T d_p \ddot{c} dt = \lambda^T d_p \dot{c}|_0^T - \dot{\lambda}^T d_p c|_0^T + \int_0^T \ddot{\lambda}^T d_p c dt.$$

En substituant dans l'équation du gradient et en regroupant les termes, on trouve :

$$\begin{aligned} d_p \mathcal{L} = & \int_0^T \left[ (\partial_c f - \lambda^T \partial_c \bar{h} + \ddot{\lambda}^T) d_p c + \partial_p f - \lambda^T \partial_p \bar{h} \right] dt \\ & + \left( \mu^T \partial_c g(0) + \dot{\lambda}^T \right) |_0 d_p c(0) + \left( \eta^T \partial_c k(0) - \lambda^T \right) |_0 d_p \dot{c}(0) \\ & + \lambda^T d_p \dot{c}|_T - \dot{\lambda}^T d_p c|_T + \mu^T \partial_p g + \eta^T \partial_p k. \end{aligned}$$

L'annulation de chaque terme est permise respectivement par :

$$\begin{aligned} \partial_c f - \lambda^T \partial_c \bar{h} + \ddot{\lambda}^T &= 0, \\ \mu^T &= -\dot{\lambda}(0)^T (\partial_c g(0))^{-1}, \\ \eta^T &= \lambda(0)^T (\partial_c k(0))^{-1}, \\ \lambda(T) &= 0, \\ \dot{\lambda}(T) &= 0. \end{aligned}$$

L'équation adjointe est donc

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda}^T &= \partial_c \bar{h}^T \lambda - \partial_c f^T \\ \text{avec les conditions } \lambda(T) &= \dot{\lambda}(T) = 0 \end{aligned}$$

et la dérivée totale de  $F$  est

$$d_p F = d_p \mathcal{L} = \int_0^T \left( \partial_p f - \lambda^T \partial_p \bar{h} \right) dt - \dot{\lambda}(0)^T \partial_s g(0)^{-1} \partial_p g + \lambda(0)^T (\partial_c k(0))^{-1} \partial_p k.$$

Nous allons à présent étendre la méthode adjointe dans le cas d'une formulation continue pour des équations aux dérivées partielles du second ordre. Nous comparerons alors les résultats obtenus ci-dessus avec ceux du cadre continu.

### Cas d'une formulation continue

On note  $A(x; p) = \alpha(x; p) \nabla \cdot (\beta(x; p) \nabla)$  l'opérateur spatial de l'équation aux dérivées partielles, où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des fonctions d'espace  $x$  paramétrisées par les commandes  $p$  du modèle, et  $\nabla$  est l'opérateur du gradient. Le domaine d'étude en espace est noté  $\Omega$ .

La différence entre le problème discrétisé et le problème continu est le produit scalaire entre le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  et l'équation d'état.



---

Dans le cas continu, on définit le produit scalaire comme suit :  $\langle \lambda, A \rangle = \int_{\Omega} \lambda(x)A(x) dx$ . Le Lagrangien comporte donc toujours une intégrale en temps et une intégrale en espace due au produit scalaire :

$$\mathcal{L} = \int_0^T \left( f(c, p, t) + \int_{\Omega} \lambda(\ddot{c} - \bar{h}(c, p, t)) dx \right) dt + \int_{\Omega} \left( \mu g(c(0), p) + \eta k(\dot{c}(0), p) \right) dx.$$

Cette formule est substituée à (4.12) et la suite du raisonnement est similaire au paragraphe précédent.

À présent que l'on a rappelé la méthode adjointe du Lagrangien pour les équations aux dérivées partielles, nous allons l'appliquer à notre modèle, en nous plaçant dans le cadre continu exposé ci-dessus. Les conditions adjointes (de premier ordre), étant des conditions nécessaires que la solution générale doit satisfaire, on choisit de travailler avec le modèle pour lequel l'unicité est prouvée : les conditions de premier ordre, si elles sont uniques, décriront alors la solution du problème.

## 4.2.2 Relaxation des contraintes du Lagrangien

Le théorème suivant nous donne les conditions nécessaires que la solution du problème  $\mathcal{P}_{E_{0T}}$  (Définition 4.0.1) doit satisfaire. Elles seront obtenues grâce à la méthode décrite au paragraphe 4.2.1.

**Théorème 4.2.1** *On suppose que  $p \in [0, \bar{p}] \mapsto f(x, p)$  et  $c \in [0, +\infty[ \mapsto D(x, c)$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  pour tout  $x \in \Omega$  et que  $r$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soit  $(p^*, c^*)$  la solution du problème  $\mathcal{P}_{E_{0T}}$  donnée par le Théorème 3.4.1. Il existe  $\mu \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  tel que*

$$\frac{\partial f}{\partial p}(x, p^*(t, x)) = \mu(t, x)\chi_S(x) \text{ dans } \Omega_T, \quad (4.13)$$

satisfaisant la condition terminale

$$R\psi\mu(T, x) = \nu \frac{\partial D}{\partial c}(x, c^*(T, x)) \text{ dans } \Omega \quad (4.14)$$

et l'équation

$$R\psi\partial_t\mu = -v \cdot \nabla\mu - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla\mu) + r'(c^*)\mu + \mu R\psi\rho - \frac{\partial D}{\partial c^*}(x, c^*) \text{ dans } \Omega_T, \quad (4.15)$$

munie de la condition aux bords

$$\psi S(v)\nabla\mu \cdot n + (v \cdot n)\chi_{\Gamma_4}\mu - (\kappa v_1 \cdot n)\chi_{\Gamma_3}\mu = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \mu = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T). \quad (4.16)$$

*Preuve.* On définit formellement le Lagrangien associé au problème, avec  $\lambda$  sa variable adjointe, par :

$$\mathcal{L}(c, p, \lambda) = J(p, c) + \int_0^T \int_{\Omega} (R\psi\partial_t c + v \cdot \nabla c - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla c) + r(c) + gc - p\chi_S(x))\lambda dx dt.$$

Par définition de  $J$ , intégrations par parties et en appliquant le théorème de Fubini on trouve :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(c, p, \lambda) &= \int_0^T \int_{\mathcal{S}} f(x, p(t, x))e^{-\rho t} dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} D(x, c)e^{-\rho t} dx dt \\ &\quad - \nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c(T, x)) dx \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} (-R\psi\partial_t \lambda c + (v \cdot \nabla c)\lambda + \psi S(v)\nabla c \cdot \nabla \lambda + r(c)\lambda + gc\lambda - p\chi_S\lambda) dx dt \\ &+ R\psi \int_{\Omega} c(T, x)\lambda(T, x) dx - R\psi \int_{\Omega} c_0(x)\lambda(x, 0) dx - \int_0^T \int_{\Gamma_2} (\psi S(v)\nabla c \cdot n)\lambda d\sigma dt. \end{aligned}$$

On utilise le fait que  $(v \cdot \nabla c)\lambda = (\operatorname{div}(vc) - c \operatorname{div}(v))\lambda$ , que  $\operatorname{div} v = g$ , et on intègre par parties  $\operatorname{div}(vc)$ . On obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(c, p, \lambda) &= \int_0^T \int_{\mathcal{S}} f(x, p(t, x))e^{-\rho t} dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} D(x, c)e^{-\rho t} dx dt \\ &\quad - \nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c(T, x)) dx \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} (-R\psi\partial_t \lambda c - (v \cdot \nabla \lambda)c - cg\lambda + \psi S(v)\nabla c \cdot \nabla \lambda + r(c)\lambda + gc\lambda - p\chi_S\lambda) dx dt \\ &+ R\psi \int_{\Omega} c(T, x)\lambda(T, x) dx - R\psi \int_{\Omega} c_0(x)\lambda(0, x) dx \\ &- \int_0^T \int_{\Gamma_2} (\psi S(v)\nabla c \cdot n)\lambda d\sigma dt - \int_0^T \int_{\Gamma_3} (\kappa v_1 \cdot n)\lambda c d\sigma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_4} (v \cdot n)\lambda c d\sigma dt. \end{aligned}$$

On remarque qu'on peut écrire  $\int_0^T \int_{\Gamma_3} (-\kappa v_1 \cdot n)\lambda c d\sigma dt = \int_0^T \int_{\Gamma_1} (-\kappa v_1 \cdot n)\chi_{\Gamma_3}\lambda c d\sigma dt$ . De même,  $\int_0^T \int_{\Gamma_4} (v \cdot n)\lambda c d\sigma dt = \int_0^T \int_{\Gamma_1} (v \cdot n)\chi_{\Gamma_4}\lambda c d\sigma dt$ . En utilisant la formule de Taylor

à l'ordre 1 pour les non linéarités, on a donc

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}(c, p, \lambda) &= \int_0^T \int_S \left( \frac{\partial f}{\partial p}(x, p(t, x))e^{-\rho t} - \lambda\chi_S \right) \delta p \, dx \, dt \\
&+ \int_\Omega \left( R\psi\lambda(T, x) - \nu \frac{\partial D}{\partial c}(x, c(T, x))e^{-\rho T} \right) \delta c(T, x) \, dx \\
&+ \int_0^T \int_\Omega \left( -R\psi\partial_t\lambda - v \cdot \nabla\lambda + r'(c)\lambda - \frac{\partial D}{\partial c}(x, c)e^{-\rho t} \right) \delta c \, dx \, dt \\
&- \int_0^T \int_\Omega \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla\lambda) \delta c \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} (\psi S(v)\nabla\lambda) \cdot n \, \delta c \, d\sigma \, dt \\
&- \int_0^T \int_{\Gamma_2} (\psi S(v)\delta(\nabla c) \cdot n) \lambda \, d\sigma \, dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} (-\kappa v_1 \cdot n) \chi_{\Gamma_3} + v \cdot n \chi_{\Gamma_4} \lambda \, \delta c \, d\sigma \, dt.
\end{aligned}$$

On pose  $\mu = \lambda e^{\rho t}$ .

L'annulation de la variation du Lagrangien suivant la variable d'état  $c(T, x)$  nous fournit la condition terminale (4.14).

En annulant la variation du Lagrangien suivant la variable de contrôle  $p$ , on obtient la condition d'optimalité (4.13).

En annulant la variation du Lagrangien suivant la variable d'état  $c$ , on obtient l'équation adjointe (4.15) et les conditions aux bords (4.16).

■

On remarque que l'équation adjointe (4.15) est anti-diffusive mais elle est bien posée car complétée par une condition terminale et non une condition initiale.

Pour s'en convaincre, on peut faire un changement d'inconnue. Définissons la fonction  $\mu^*$  sur  $\Omega_T$  par :

$$\mu^*(t, x) = \mu(T - t, x).$$

On a alors  $\partial_t \mu^*(t, x) = \partial_t(\mu(T - t, x)) = -\partial_t \mu(T - t, x)$ , où  $\mu(T - t, x)$  est telle que

$$\begin{aligned}
R\psi\partial_t\mu(T - t, x) &= -v(T - t, x) \cdot \nabla\mu(T - t, x) - \operatorname{div}(\psi S(v(T - t, x))\nabla\mu(T - t, x)) \\
&+ r'(c^*(T - t, x))\mu + R\psi\rho\mu(T - t, x) - \frac{\partial D}{\partial c}(x, c^*(T - t, x)) \text{ dans } \Omega_T.
\end{aligned}$$

Nous introduisons la notation suivante : pour toute fonction  $f$  définie sur  $[0, T]$ , on notera  $\mathcal{C}_T f$  la fonction définie par

$$\mathcal{C}_T f(t) = f(T - t), \quad t \in [0, T].$$

Le Théorème 4.2.1 nous autorise à considérer l'algorithme suivant pour résoudre le problème  $\mathcal{P}_{E_{0T}}$  :

---

**Définition 4.2.1** Soit  $v$  tel que  $v = -\kappa \nabla \phi$ ,  $\operatorname{div}(v) = g$ ,  $v \cdot n = -\kappa v_1 \cdot n$  sur  $\Gamma_3 \times (0, T)$  et  $\phi = 0$  sur  $\Gamma_4 \times (0, T)$ .

On appelle  $\mathcal{P}_{adj}$  le problème suivant :

Trouver  $(c^*, \mu^*)$  satisfaisant

$$R\psi \partial_t c^* + v \cdot \nabla c^* - \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla c^*) = -r(c^*) - gc^* + \chi_S F(\chi_S \mathcal{C}_T \mu^*) \text{ dans } \Omega_T, \quad (4.17)$$

$$S(v) \nabla c^* \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad c^* = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad c^*|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega, \quad (4.18)$$

$$R\psi \partial_t \mu^* - \mathcal{C}_T v \cdot \nabla \mu^* - \operatorname{div}(\psi S(\mathcal{C}_T v) \nabla \mu^*) + r'(\mathcal{C}_T c^*) \mu^* + R\psi \rho \mu^* - \frac{\partial D}{\partial c}(\cdot, \mathcal{C}_T c^*) = 0 \text{ dans } \Omega_T, \quad (4.19)$$

$$\psi S(\mathcal{C}_T v) \nabla \mu^* \cdot n + (\mathcal{C}_T v \cdot n) \chi_{\Gamma_4} - (\kappa \mathcal{C}_T v_1 \cdot n) \chi_{\Gamma_3} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad \mu^* = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (4.20)$$

$$R\psi \mu^*|_{t=0} = \nu \frac{\partial D}{\partial c}(\cdot, c^*|_{t=T}), \quad (4.21)$$

où on a défini  $F$  par  $\frac{\partial f}{\partial p}(x, F(y)) = y$ .

**Remarque 4.2.1** L'existence de  $F$  est assurée par l'hypothèse de stricte concavité imposée à la fonction  $p \mapsto f(\cdot, p)$ .

Nous allons maintenant procéder à l'analyse mathématique du problème  $\mathcal{P}_{adj}$ . Nous commençons par le résultat auxiliaire suivant, dédié au problème (4.19)-(4.21) découplé de (4.17)-(4.18). On peut établir le résultat d'existence suivant :

**Proposition 4.2.1** On se place sous les hypothèses du Théorème 4.2.1 et on suppose de plus que  $r' \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ . Soit  $c^* \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega))$ , à valeurs positives ou nulles, donné. Alors, il existe un unique  $\mu \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$  solution faible du problème (4.19)-(4.21). Si de plus il existe un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  tel que  $r$  soit dérivable et à dérivée bornée dans  $I$ , alors  $\mu \geq 0$  presque partout dans  $\Omega \times (0, T)$ .

*Preuve.* On remarque que le problème

$$\begin{aligned} R\psi \partial_t \mu - \mathcal{C}_T v \cdot \nabla \mu - \operatorname{div}(\psi S(\mathcal{C}_T v) \nabla \mu) + (r'(\mathcal{C}_T c^*) + R\psi \rho) \mu - \frac{\partial D}{\partial c}(x, \mathcal{C}_T c^*) &= 0 \text{ dans } \Omega_T \\ \psi S(\mathcal{C}_T v) \nabla \mu \cdot n + (\mathcal{C}_T v \cdot n) \chi_{\Gamma_4} \mu - (\kappa \mathcal{C}_T v_1 \cdot n) \chi_{\Gamma_3} \mu &= 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\ \mu &= 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T) \end{aligned} \quad (4.22)$$

avec  $\operatorname{div} \mathcal{C}_T v = g$  dans  $\Omega_T$  est équivalent au problème

---


$$\begin{aligned}
R\psi\partial_t\mu - \operatorname{div}(\mu\mathcal{C}_T v) - \operatorname{div}(\psi S(\mathcal{C}_T v)\nabla\mu) + (r'(\mathcal{C}_T c^*) + R\psi\rho + \mathcal{C}_T g)\mu - \frac{\partial D}{\partial c}(x, \mathcal{C}_T c^*) &= 0 \\
&\text{dans } \Omega_T, \\
\psi S(\mathcal{C}_T v)\nabla\mu \cdot n + (\mathcal{C}_T v \cdot n)\chi_{\Gamma_4}\mu - (\kappa\mathcal{C}_T v_1 \cdot n)\chi_{\Gamma_3}\mu &= 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \mu = 0 \\
&\text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \\
R\psi\mu(x, 0) &= \nu \frac{\partial D}{\partial \mathcal{C}_T c^*}(x, c_{t=T}). \tag{4.23}
\end{aligned}$$

La formulation variationnelle associée à (4.23) est :

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \int_{\Omega} R\psi\mu\partial_t\varphi \, dx \, dt - \int_{\Omega} R\psi\mu|_{t=0}\varphi|_{t=0} \, dx + \int_0^T \int_{\Omega} \mu\mathcal{C}_T v \cdot \nabla\varphi \, dx \, dt \\
& + \int_0^T \int_{\Omega} \psi S(\mathcal{C}_T v)\nabla\mu \cdot \nabla\varphi \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \left( (r'(\mathcal{C}_T c^*) + R\psi\rho + \mathcal{C}_T g)\mu - \frac{\partial D}{\partial c}(x, \mathcal{C}_T c^*) \right) \varphi \, dx \, dt = 0
\end{aligned} \tag{4.24}$$

pour toute fonction test  $\varphi \in H^1(\Omega \times (0, T))$  avec  $\varphi|_{t=T} = 0$  et  $\varphi|_{\Gamma_2} = 0$ .

La démonstration de l'existence de  $\mu$  est classique : on applique la méthode de Faedo-Galerkin qui consiste à résoudre un problème approché en dimension finie. On justifie l'applicabilité de la méthode par des estimations *a priori*. Nous les détaillons dans les lignes suivantes. Nous les utiliserons aussi dans la preuve du théorème suivant. Aussi, il faut noter que dans les lignes qui suivent,  $C$  est une constante qui ne dépend que des données du problème et de la norme de  $c^*$  dans  $\mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega))$ . Soit  $\tau \in (0, T)$ . En substituant  $\varphi = \mu\chi_{[0, \tau]}(t)$  dans la formulation faible (4.24), on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{R}{2} \int_0^{\tau} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \psi |\mu|^2 \, dx \, dt + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \mu\mathcal{C}_T v \cdot \nabla\mu \, dx \, dt + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \psi S(\mathcal{C}_T v)\nabla\mu \cdot \nabla\mu \, dx \, dt \\
+ \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \left( r'(\mathcal{C}_T c^*) + R\psi\rho + \mathcal{C}_T g \right) \mu^2 \, dx \, dt - \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \frac{\partial D}{\partial c}(x, \mathcal{C}_T c^*) \mu \, dx \, dt = 0. \tag{4.25}
\end{aligned}$$

On rappelle que l'on a  $\int_0^{\tau} \int_{\Omega} \psi S(\mathcal{C}_T v)\nabla\mu \cdot \nabla\mu \, dx \, dt \geq \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \psi_-(S_m + \alpha_T |\mathcal{C}_T v|) |\nabla\mu|^2 \, dx \, dt$ .

On a

$$\left| \int_0^{\tau} \int_{\Omega} r'(\mathcal{C}_T c^*) \mu^2 \, dx \, dt \right| \leq \|r'\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |\mu|^2 \, dx \, dt,$$

car le Théorème 3.4.1 assure que  $c^*(t, x)$ , et donc  $\mathcal{C}_T c^*(t, x)$  appartient à  $\mathbb{R}_+$  presque partout dans  $\Omega_T$ .

De plus, avec les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, on a :

$$\left| \int_0^\tau \int_\Omega \frac{\partial D}{\partial c}(x, \mathcal{C}_T c^*) \mu \, dx \, dt \right| \leq C + C \int_0^\tau \int_\Omega |\mu|^2 \, dx \, dt.$$

Pour le terme de convection, on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\tau \int_\Omega \mu \mathcal{C}_T v \cdot \nabla \mu \, dx \, dt \right| &\leq \|v\|_{L^\infty(\Omega_T)} \|\nabla \mu\|_{L^2(\Omega_T)} \|\mu\|_{L^2(\Omega_T)} \\ &\leq \frac{\psi_- S_m}{2} \int_{\Omega_T} |\nabla \mu|^2 \, dx \, dt + C \int_{\Omega_T} |\mu|^2 \, dx \, dt. \end{aligned}$$

En effet, les hypothèses en début de chapitre sur  $\partial\Omega$  et  $\kappa$  sont celles qui assurent que  $v \in L^\infty(\Omega_T)$ .

On obtient donc finalement

$$\frac{R}{2} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \int_\Omega \psi |\mu|^2 \, dx \, dt + \int_0^\tau \int_\Omega \psi_- \left( \frac{S_m}{2} + \alpha_T |\mathcal{C}_T v| \right) |\nabla \mu|^2 \, dx \, dt \leq C \int_0^\tau \int_\Omega |\mu|^2 \, dx \, dt + C$$

soit en particulier

$$\frac{\psi_- R}{2} \int_\Omega |\mu(\tau, x)|^2 \, dx + \frac{\psi_- S_m}{2} \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla \mu|^2 \, dx \, dt \leq \frac{\psi_+ R}{2} \int_\Omega |\mu_0(x)|^2 \, dx + C \int_0^\tau \int_\Omega |\mu|^2 \, dx \, dt + C \quad (4.26)$$

et

$$\frac{\psi R}{2} \int_\Omega |\mu(\tau, x)|^2 \, dx \leq \frac{\psi R}{2} \int_\Omega |\mu_0(x)|^2 \, dx + C \int_0^\tau \int_\Omega |\mu(t, x)|^2 \, dx \, dt + C,$$

où  $R\psi\mu_0 = R\psi\mu|_{t=0} = \nu \frac{\partial D}{\partial c}(\cdot, \mathcal{C}_T c|_{t=T})$ . On pose  $y(t) = \int_\Omega |\mu(t, x)|^2 \, dx$  et on a :

$$y(\tau) \leq C \int_0^\tau y(t) \, dt + C.$$

D'après la version intégrale du Lemme de Gronwall, on a

$$y(\tau) \leq C e^{C\tau}$$

soit

$$\int_{\Omega} |\mu(\tau, x)|^2 dx \leq C \text{ presque pour tout } \tau \in (0, T).$$

On en déduit donc en revenant à (4.26) que

$$\|\mu\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))} \leq C.$$

Pour démontrer l'unicité, on suppose qu'il existe deux solutions  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . Alors  $\mu = \mu_1 - \mu_2$  est solution de

$$R\psi\partial_t\mu - \operatorname{div}(\mu\mathcal{C}_T v) - \operatorname{div}(\psi S(\mathcal{C}_T v)\nabla\mu) + \left(r'(\mathcal{C}_T c^*) + R\psi\rho + \mathcal{C}_T g\right)\mu = 0 \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \psi S(\mathcal{C}_T v)\nabla\mu \cdot n + (\mathcal{C}_T v \cdot n)\chi_{\Gamma_4}\mu - (\kappa\mathcal{C}_T v_1 \cdot n)\chi_{\Gamma_3}\mu &= 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \mu = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T), \\ \mu|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

On multiplie (4.27) par  $\mu$  et on intègre par parties sur  $\Omega \times (0, \tau)$ ,  $\tau \in (0, T)$  :

$$\begin{aligned} \frac{R}{2} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \psi |\mu|^2 dx dt + \int_0^\tau \int_{\Omega} (\mathcal{C}_T v \cdot \mu)\mu dx dt + \int_0^\tau \int_{\Omega} \psi S(\mathcal{C}_T v)\nabla\mu \cdot \nabla\mu dx dt \\ + \int_0^\tau \int_{\Omega} r'(\mathcal{C}_T c^*)\mu^2 dx dt + \int_0^\tau \int_{\Omega} R\psi\rho\mu^2 dx dt = 0. \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{R}{2} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \psi |\mu|^2 dx dt + \psi_- S_m \int_0^\tau \int_{\Omega} |\nabla\mu|^2 dx dt \leq C \int_0^\tau \int_{\Omega} |\mu|^2 dx dt.$$

Comme  $S_m \geq 0$ , on a

$$\frac{R}{2} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \psi |\mu|^2 dx dt \leq C \int_0^\tau \int_{\Omega} |\mu|^2 dx dt$$

et

$$\frac{\psi_- R}{2} \int_{\Omega} |\mu(\tau, x)|^2 dx \leq \frac{\psi_+ R}{2} \int_{\Omega} |\mu(0, x)|^2 dx + C \int_0^\tau \int_{\Omega} |\mu|^2 dx dt.$$

Comme  $\mu(0, x) = \mu_1(0, x) - \mu_2(0, x) = 0$ , on a donc

$$\frac{\psi_- R}{2} \int_{\Omega} |\mu(\tau, x)|^2 dx \leq C \int_0^\tau \int_{\Omega} |\mu|^2 dx dt$$

et après application du lemme de Gronwall, on obtient

$$\int_{\Omega} |\mu(\tau, x)|^2 dx \leq 0 \text{ presque pour tout } \tau \in (0, T).$$

Donc  $\mu_1 = \mu_2$  pour presque tout  $x \in \Omega$ , pour tout  $t \in (0, T)$ . La solution est unique.

Nous allons à présent montrer la positivité presque partout dans  $\Omega \times (0, T)$  de  $\mu$ .

On définit  $\min(0, \mu) = \mu^- \leq 0$ . On va montrer que  $\mu(t, x) \geq 0$ , c'est-à-dire  $\mu^-(t, x) = 0$  presque pour tout  $x \in \Omega$ , pour tout  $t \in (0, T)$ .

En multipliant l'équation définissant  $\mu$  par  $\mu^-$  et en intégrant par parties sur  $\Omega \times (0, \tau)$ ,  $\tau \in (0, T)$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{R}{2} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \int_\Omega \psi |\mu^-|^2 dx dt + \int_0^\tau \int_\Omega \mu \mathcal{C}_T v \cdot \nabla \mu^- dx dt + \psi_- S_m \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla \mu^-|^2 dx dt \\ & + \int_0^\tau \int_\Omega \left( r'(\mathcal{C}_T c^*) + R\psi\rho + \mathcal{C}_T g \right) \mu \mu^- dx dt - \int_0^\tau \int_\Omega \frac{\partial D}{\partial c}(x, \mathcal{C}_T c^*) \mu^- dx dt \leq 0. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, on a

$$\left| \int_0^\tau \int_\Omega \mu \mathcal{C}_T v \cdot \nabla \mu^- dx dt \right| \leq \frac{\psi_- S_m}{2} \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla \mu^-|^2 dx dt + \frac{\|v\|_{L^\infty(\Omega_T)}^2}{2\psi_- S_m} \int_0^\tau \int_\Omega |\mu^-|^2 dx dt.$$

Comme  $r$  est dérivable à dérivée bornée et que  $g \in L^\infty(\Omega)$ , on a

$$\left| \int_0^\tau \int_\Omega \left( r'(\mathcal{C}_T c^*) + R\psi\rho + \mathcal{C}_T g \right) \mu \mu^- dx dt \right| \leq C \int_0^\tau \int_\Omega |\mu^-|^2 dx dt.$$

On a donc

$$\begin{aligned} & \frac{\psi_- R}{2} \int_\Omega |\mu^-|^2 dx dt - \frac{\psi_+ R}{2} \int_\Omega |\mu^-(x, 0)|^2 dx dt + \frac{\psi_- S_m}{2} \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla \mu^-|^2 dx dt \\ & - \int_0^\tau \int_\Omega \frac{\partial D}{\partial c}(x, \mathcal{C}_T c^*) \mu^- dx dt \leq C \int_0^\tau \int_\Omega |\mu^-|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Comme  $\mu^- \leq 0$  et que  $\frac{\partial D}{\partial c}(x, \mathcal{C}_T c^*) \geq 0$ , alors  $-\int_0^\tau \int_\Omega \frac{\partial D}{\partial c}(x, \mathcal{C}_T c^*) \mu^- dx dt \geq 0$ . De plus, on sait que  $\mu(x, 0) = \frac{1}{R} \frac{\partial D}{\partial c}(x, \mathcal{C}_T c^*(0, x)) \geq 0$ . On en déduit donc que  $\mu^-(0, x) = \min(0, \mu^-(0, x)) = 0$ . D'où  $-\frac{\psi_+ R}{2} \int_\Omega |\mu^-(0, x)|^2 dx dt = 0$ . Finalement, on a

$$\frac{\psi_- R}{2} \int_\Omega |\mu^-|^2 dx dt \leq C \int_0^\tau \int_\Omega |\mu^-|^2 dx dt.$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on obtient

$$\int_\Omega |\mu^-(\tau, x)|^2 dx \leq 0 \text{ presque pour tout } \tau \in (0, T)$$

donc  $\mu^- = 0$ , ie  $\mu \geq 0$  presque partout dans  $\Omega \times (0, T)$ . ■



---

**Remarque 4.2.2** Dans le cas où  $N = 2$  et  $\alpha_T > 0$ , le terme convectif se traite de la même manière que dans la Remarque 2.3.7.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le résultat suivant pour le problème  $\mathcal{P}_{adj}$ .

**Théorème 4.2.2** On se place sous les hypothèses de la Proposition 4.2.1. On suppose de plus que les fonctions  $F$  et  $y \mapsto \frac{\partial D}{\partial c}(\cdot, y)$  sont continues et bornées sur  $\mathbb{R}_+$ . Il existe une unique solution au problème (4.17)-(4.21).

*Preuve.* Une fois encore, nous allons adopter une stratégie de point fixe. Nous avons déjà manipulé plusieurs fois le problème en concentration (4.17)-(4.18). Nous avons en particulier établi que, pour toute fonction  $\mu^*$  donnée dans  $L^2(\Omega_T)$ , il existe une unique solution  $c^*$  à (4.17)-(4.18) telle que  $c^*(t, x) \geq 0$  presque partout dans  $\Omega$ , pour tout  $t \in [0, T]$ , et

$$\begin{aligned} \|c^*\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))} &\leq C_c, \\ \|c^*\|_{H^1(0,T;H^1(\Omega))} &\leq C_c, \end{aligned}$$

où  $C_c$  dépend des données du problème, en particulier des bornes de la fonction  $F$  mais pas de  $\mu^*$ .

On considère le convexe fermé borné  $\mathfrak{C}$  de  $L^2(\Omega_T)$  défini par

$$\mathfrak{C} = \{q \in L^2(\Omega_T), \|q\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_c\}.$$

D'après la Proposition 4.2.1 et les remarques précédentes, on peut définir une application  $\mathcal{C}$  de  $\mathfrak{C}$  dans lui-même par :

$$\mathcal{C} : \begin{cases} \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C} \\ c \mapsto d \end{cases}$$

où  $d$  est défini par

$$R\psi\partial_t d + v \cdot \nabla d - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla d) = -r(d) - gd + \chi_S F(\chi_S \mathcal{C}_T \mu) \text{ dans } \Omega_T, \quad (4.29)$$

$$S(v)\nabla d \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad d = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad d|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega, \quad (4.30)$$

$$R\psi\partial_t \mu - \mathcal{C}_T v \cdot \nabla \mu - \operatorname{div}(\psi S(\mathcal{C}_T v)\nabla \mu) + r'(\mathcal{C}_T c)\mu + R\psi\rho\mu - \frac{\partial D}{\partial c}(\cdot, \mathcal{C}_T c) \text{ dans } \Omega_T, \quad (4.31)$$

$$\psi S(\mathcal{C}_T v)\nabla \mu \cdot n + (\mathcal{C}_T v \cdot n)\chi_{\Gamma_4} - (\kappa \mathcal{C}_T v_1 \cdot n)\chi_{\Gamma_3} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad \mu = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T),$$

$$R\psi\mu|_{t=0} = \eta \frac{\partial D}{\partial c}(\cdot, c|_{t=T}) \text{ dans } \Omega. \quad (4.32)$$

Notre but est maintenant de prouver que  $\mathcal{C}$  admet un point fixe.

Remarquons tout d'abord que  $d$  satisfait

$$\|d\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C_c,$$

---


$$\|\partial_t d\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C_c.$$

Un argument classique d'Aubin permet donc d'assurer la compacité de l'ensemble image  $\mathcal{C}(\mathfrak{C})$  dans  $L^2(\Omega_T)$ .

Prouvons maintenant la continuité de  $\mathcal{C}$ . Soit  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{C}$  une suite telle que

$$c_n \rightarrow c \text{ dans } L^2(\Omega_T).$$

Soit pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $d_n = \mathcal{C}(c_n)$  et  $d = \mathcal{C}(c)$ . Montrons que  $d_n \rightarrow d$  dans  $L^2(\Omega_T)$ . D'après les estimations uniformes établies au cours de la preuve de la Proposition 4.2.1, on a

$$\|\mu_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C,$$

où  $\mu_n$  est la solution de (4.31)-(4.32) où l'on a remplacé  $c$  par  $c_n$ . Il existe donc une sous-suite, non renommée par commodité, et une fonction  $\eta \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$  telles que

$$\mu_n \rightharpoonup \eta \text{ faiblement dans } L^2(\Omega_T) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)).$$

Grâce à la convergence forte de  $c_n$  vers  $c$ , à la continuité de  $r'$ , de  $y \mapsto \frac{\partial D}{\partial c}(\cdot, y)$  et de la fonction  $c \mapsto \mathcal{C}_T c$ , on peut passer à la limite  $n \rightarrow \infty$  dans le système définissant  $\mu_n$  : on voit ainsi que  $\eta$  est solution de (4.31)-(4.32). La solution de (4.31)-(4.32) étant unique, on conclut que

$$\eta = \mu.$$

Par ailleurs, pour tout  $\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ ,

$$\begin{aligned} & \left| \langle R\psi \partial_t \mu_n, \varphi \rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \right| = \\ & \left| - \int_0^T \int_\Omega (\mu_n \mathcal{C}_T v \cdot \nabla \varphi + \psi S(\mathcal{C}_T v) \nabla \mu_n \cdot \nabla \varphi + (r'(\mathcal{C}_T c_n) + R\psi \rho + \mathcal{C}_T g) \mu_n \varphi \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial D}{\partial c}(x, \mathcal{C}_T c_n) \varphi) dx dt \right| \leq C. \end{aligned}$$

Comme  $0 \leq \psi_- \leq \psi$ , presque partout dans  $\Omega_T$ , on peut utiliser une forme avancée du théorème de compacité d'Aubin (voir Galusinski et Saad [36]) pour conclure des bornes uniformes de  $\mu_n$  dans  $L^2(\Omega_T) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$  et de  $\partial_t \mu_n$  dans  $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ , où  $H^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ , que  $\mu_n$  est séquentiellement compacte dans  $L^2(\Omega_T)$ . À une sous-suite près on a donc

$$\mu_n \rightarrow \mu \text{ dans } L^2(\Omega_T) \text{ et presque partout dans } \Omega_T.$$

Comme

$$\|d_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|\partial_t d_n\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C_c,$$

---

on assure aussi, à une sous-suite près, qu'il existe  $e \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$  telle que

$$\begin{aligned} d_n &\rightharpoonup e \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \\ d_n &\rightarrow e \text{ dans } L^2(\Omega_T) \text{ et presque partout dans } \Omega_T. \end{aligned}$$

Les convergences de  $\mu_n$  et  $d_n$  permettent de passer à la limite dans le système définissant  $d_n$ . On en conclut que  $e$  satisfait (4.29)-(4.30). La solution de ce problème étant unique, on a

$$e = d$$

et c'est l'ensemble de la suite  $d_n$  qui converge vers  $d$ . La continuité de  $\mathcal{C}$  est prouvée.

L'application  $\mathcal{C}$  satisfaisant les hypothèses du théorème de Schauder, on en conclut qu'elle admet un point fixe, noté  $c^*$ , solution de (4.17)-(4.18), associé à  $\mu^*$  solution de (4.19)-(4.21).

D'après le principe de Pontryagin, la solution  $c^*$  étant nécessairement la concentration optimale associée au problème  $\mathcal{P}_{E_0T}$  qui admet une unique solution, la solution de (4.17)-(4.21) est unique. Ceci termine la preuve.  $\blacksquare$

### 4.2.3 Condition de transversalité pour un horizon infini

L'objectif considéré ici est le suivant (on prend  $\nu = 0$  et on retrouve l'objectif des chapitres précédents) :

$$J(p, c) = \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} \left( f(x, p(t, x))\chi_S - D(x, c(t, x)) \right) e^{-\rho t} dx dt$$

et l'ensemble des contrôle admissibles est  $E_2$  :

$$E_2 := \{q \in L^2(\Omega \times (0, \infty)) \text{ avec } 0 \leq q(t, x) \leq \bar{p} \text{ presque partout}\}.$$

La condition terminale (4.14) établie dans le Théorème 4.2.1 n'a pas de sens en temps infini. Une approche classique (Michel [65] ou Grass et al. [40] Part II, 3.7) permet d'établir la condition de transversalité en horizon infini.

Nous la présentons dans le théorème suivant.

**Théorème 4.2.3** *La condition de transversalité en temps infini s'écrit :*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\Omega} H(T, c^*, p^*, \lambda^*) dx = 0 \quad (4.33)$$

où  $H$  est le Hamiltonien défini par

$$\begin{aligned} H(t, c, p, \lambda)(x) &= \left( f(x, p(t, x))\chi_S - D(x, c(t, x)) \right) e^{-\rho t} \\ &\quad + \lambda(t, x) \left( \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla c) - v \cdot \nabla c - r(c) - gc + p\chi_S \right)(t, x) \end{aligned} \quad (4.34)$$

où  $\lambda^*(t, x) = \mu^*(t, x)e^{-\rho t}$ ,  $\mu^*$  étant la variable adjointe solution du problème  $\mathcal{P}_{adj}$ .

*Preuve.* Soit  $T \in [0, +\infty)$ .

Soit  $p \in E_2$ . On définit la fonction valeur, dépendant du temps et d'une condition initiale au temps  $T$ ,  $c_T(x)$ , comme suit :

$$w(T, c_T(x)) = \max_{p \in E_2} \int_T^{+\infty} \int_{\Omega} \left( f(x, p(t, x)) \chi_S - D(x, c(t, x)) \right) e^{-\rho t} dx dt \quad (4.35)$$

où  $c(t, x)$  est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} R\psi \partial_t c(t, x) - \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla c) + v \cdot \nabla c + r(c) - p \chi_S + gc = 0 \text{ dans } \Omega \times (T, +\infty), \\ S(v) \nabla c(t, x) \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (T, +\infty), c = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (T, +\infty), \\ c(T, x) = c_T(x) \text{ donnée dans } \Omega. \end{cases} \quad (4.36)$$

On considère pour tout  $t \in \mathbb{R}_*^+$  la fonction  $c_t^*(\cdot) : \Omega \mapsto [0, \infty[$  définie par  $c_t^*(x) = c^*(t, x)$ ,  $x \in \Omega$ , et  $c_T^*(x) = c^*(T, x)$  solution optimale au temps  $T$ , où  $(c^*, p^*)$  est la solution du problème  $J(p^*, c^*) = \max_{p \in E_2} J(p, c)$  sous la contrainte :

$$\begin{cases} R\psi \partial_t c(t, x) - \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla c) + v \cdot \nabla c + r(c) - p \chi_S + gc = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ S(v) \nabla c(t, x) \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, +\infty), c = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, +\infty), \\ c(0, x) = c_0(x) \text{ donnée dans } \Omega. \end{cases}$$

Cette définition a un sens pour tout  $t$  puisque  $c^* \in \mathcal{C}(0, T; L^2(\Omega))$  : on a  $c_t^* \in L^2(\Omega)$  pour tout  $t \in [0, +\infty[$ .

**Remarque 4.2.3** *On note que  $c^*(t, x) = c_t^*(x)$  n'est pas un abus de notation grâce à l'unicité de la solution au problème d'optimisation.*

La fonction valeur est définie par

$$w(0, c_0(x)) = \max_{p \in E_2} \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} \left( f(x, p(t, x)) \chi_S - D(x, c(t, x)) \right) e^{-\rho t} dx dt.$$

On calcule

$$\begin{aligned} w(0, c_0(x)) - w(T, c_T^*(x)) &= - \int_0^T \frac{d}{d\tau} \left[ w(\tau, c_\tau^*(x)) \right] d\tau \\ &= - \int_0^T \left( \frac{d}{d\tau} w(\tau, c_\tau^*(x)) + \langle \partial_\tau c_\tau^*, D_c w(\tau, c_\tau^*(x)) \rangle \right) d\tau \end{aligned} \quad (4.37)$$

où  $\partial_\tau c_\tau^*$  désigne par abus de notation la dérivée de la fonction  $\tau \mapsto c_\tau^*$ , où  $D_c$  est la dérivée au sens de Gâteaux et où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire défini par  $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} fg dx$ .

En posant  $\tau = t - T$ , (4.35) peut s'écrire

$$w(T, c_T(x)) = \max_{p \in E_2} e^{-\rho T} \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} \left( f(x, p(\tau + T, x)) \chi_S - D(x, c(\tau + T, x)) \right) e^{-\rho \tau} dx d\tau. \quad (4.38)$$

Le calcul ci-dessus peut être reproduit pour tout  $T$  donné. On a donc pour tout  $t \in [0, +\infty[$  :

$$w(t, c_t(x)) = \max_{p \in E_2} e^{-\rho t} \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} \left( f(x, p(\tau + t, x)) \chi_S - D(x, c(\tau + t, x)) \right) e^{-\rho \tau} dx d\tau. \quad (4.39)$$

En utilisant la définition (4.39) pour dériver la fonction valeur, (4.37) s'écrit

$$\begin{aligned} w(0, c_0(x)) - w(T, c_T^*(x)) &= \int_0^T \rho w(\tau, c_\tau^*(x)) d\tau \\ &- \int_0^T \left( \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\psi S(v^*) \nabla c^*) - v^* \cdot \nabla c^* - r(c^*) + p^* \chi_S(x) - gc^*)(\tau, x) \lambda^*(\tau, x) dx \right) d\tau. \end{aligned} \quad (4.40)$$

L'égalité dans la relation ci-dessus est justifiée à nouveau par l'unicité de la solution optimale  $(p^*, c^*)$  (l'apparition de  $c^*$  au lieu de  $c_\tau^*$  n'est donc pas une erreur de notation). De plus, on a utilisé le fait que  $\lambda^*(t, x) = D_c w(t, c^*(t, x))$ .

Comme  $w(0, c_0(x)) = \max_{p \in E_2} \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} \left( f(x, p(\tau, x)) \chi_S - D(x, c(\tau, x)) \right) e^{-\rho \tau} dx d\tau = J(p^*, c^*)$ , et en utilisant la définition (4.35) de  $w(T, c_T^*(x))$ , (4.40) s'écrit

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \left( f(x, p^*(\tau, x)) \chi_S - D(x, c^*(\tau, x)) \right) e^{-\rho \tau} dx d\tau &= \int_0^T \rho w(\tau, c_\tau^*(x)) d\tau \\ &- \int_0^T \left( \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\psi S(v^*) \nabla c^*) - v^* \cdot \nabla c^* - r(c^*) + p^* \chi_S - gc^*)(\tau, x) \lambda^*(\tau, x) dx \right) d\tau, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\int_0^T \int_{\Omega} H(\tau, c^*, p^*, \lambda^*) dx d\tau = \int_0^T \rho w(\tau, c_\tau^*(x)) d\tau \text{ pour tout } T \in [0, \infty).$$

En dérivant l'équation ci-dessus par rapport à  $T$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} H(T, c^*, p^*, \lambda^*) dx &= \rho w(T, c_T^*(x)) \\ &= \rho \max_{p \in E_2} \int_T^{+\infty} \int_{\Omega} \left( f(x, p(t, x)) \chi_S - D(x, c_T^*(x)) \right) e^{-\rho t} dx dt \\ &= \rho \int_T^{+\infty} \int_{\Omega} \left( f(x, p^*(t, x)) \chi_S - D(x, c^*(t, x)) \right) e^{-\rho t} dx dt \end{aligned}$$

grâce à l'unicité de la solution au problème d'optimisation. En passant à la limite, on a

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} H(T, c^*, p^*, \lambda^*) dx &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \rho w(T, c_T^*(x)) \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \rho \int_T^{+\infty} \int_{\Omega} \left( f(x, p^*(t, x)) \chi_S - D(x, c^*(t, x)) \right) e^{-\rho t} dx dt = 0 \end{aligned}$$

puisque  $(t, x) \mapsto \left( f(x, p^*(t, x)) \chi_S - D(x, c^*(t, x)) \right) e^{-\rho t}$  est intégrable sur  $\Omega \times (0, \infty)$ .  
Ce qui conclut la preuve. ■

#### 4.2.4 Une étude analytique dans un cas simple : l'état stationnaire du modèle unidimensionnel avec zone d'épandage donnée

L'objectif de cette partie est d'obtenir des propriétés qualitatives de la solution à l'état stationnaire lorsqu'elle existe. On s'intéressera en particulier aux dépendances par rapport à certains paramètres comme la distance optimale entre le champ et la zone d'épandage.

Afin d'obtenir des formules explicites, nous allons nous placer dans un cadre simple, celui d'un modèle uni-dimensionnel. Cette simplification nous permet en particulier de caractériser la zone tampon entre le champ et le puits de captage à l'aide d'un unique paramètre.

On considère dans ce paragraphe l'apport naturel dans l'équation de concentration. Rappelons que le modèle utilisé tout au long de ce chapitre provient du modèle limite présenté au Chapitre 3, paragraphe 3.2.3 page 90, dont l'unique solution est la limite du problème mis à l'échelle présenté au paragraphe 3.2.2 page 88. Nous reprenons donc le processus d'adimensionnement présenté au Chapitre 3 page 80 en introduisant l'apport naturel  $\gamma$  : la concentration étant faible, d'ordre  $\epsilon$ , il en est de même pour l'apport naturel qui est du même ordre que la concentration présente dans le sous-sol. On obtient donc les équations suivantes :

$$\begin{aligned} R\psi \partial_t(\epsilon \hat{c}_p) + \epsilon \hat{v}_p \cdot \nabla \hat{c}_p - \epsilon \operatorname{div}(\psi S(\hat{v}_p) \nabla \hat{c}_p) &= -r(\epsilon, \epsilon \hat{c}_p) - \epsilon g \hat{c}_p + \epsilon(\hat{p} + \hat{\gamma})(1 - \epsilon \hat{c}_p), \\ R\psi \partial_t(1 - \epsilon \hat{c}_p) + \hat{v}_p \cdot \nabla(1 - \epsilon \hat{c}_p) - \operatorname{div}(\psi S(\hat{v}_p) \nabla(1 - \epsilon \hat{c}_p)) &= r(\epsilon, \epsilon \hat{c}_p) + g, \\ \operatorname{div}(\hat{v}_p) &= \epsilon(\hat{p} + \hat{\gamma}) + g, \end{aligned}$$

où  $\hat{v}_p$  est donné par la loi de Darcy  $\hat{v}_p = -\kappa \nabla \hat{\phi}_p$ ,  $\epsilon \hat{p}$  est l'apport d'engrais et où le paramètre  $\epsilon \ll 1$  est l'ordre de grandeur de la concentration du polluant dans le sous-sol. On pose

$$\hat{c} = c_{\epsilon, p\epsilon}, \hat{p} = p_{\epsilon}, \hat{\phi} = \phi_{\epsilon, p\epsilon}, \hat{v}_p = v_{\epsilon, p\epsilon}$$

et on définit  $r_\epsilon(c) := r(\epsilon, \epsilon c)/\epsilon$ . On a donc :

$$R\psi\partial_t(c_{\epsilon,p_\epsilon}) + v_{\epsilon,p_\epsilon} \cdot \nabla c_{\epsilon,p_\epsilon} - \operatorname{div}(\psi S(v_{\epsilon,p_\epsilon})\nabla c_{\epsilon,p_\epsilon}) = -r_\epsilon(c_{\epsilon,p_\epsilon}) - gc_{\epsilon,p_\epsilon} + (p_\epsilon + \gamma_\epsilon)(1 - \epsilon c_{\epsilon,p_\epsilon}), \quad (4.41)$$

$$\operatorname{div}(v_{\epsilon,p_\epsilon}) = \epsilon(p_\epsilon + \gamma_\epsilon) + g \quad (4.42)$$

avec  $v_{\epsilon,p_\epsilon} = -\kappa\nabla\phi_{\epsilon,p_\epsilon}$ .

L'apport naturel  $\gamma$  étant dans  $L^\infty(\Omega_T)$ , tous les résultats obtenus au Chapitre 3 sont donc valables avec ce modèle, en remplaçant  $p_\epsilon$  par  $p_\epsilon + \gamma_\epsilon$ . À la limite, on obtient le modèle effectif suivant :

$$\begin{aligned} R\psi\partial_t c_p + v \cdot \nabla c_p - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla c_p) &= -\tilde{r}(c_p) - gc_p + p + \gamma, \\ \operatorname{div}(v) &= g \text{ avec } v = -\kappa\nabla\phi. \end{aligned}$$

### Simplification

On se place dans le cas unidimensionnel avec  $\Omega = (0, L)$ , où le puits de captage se situe au point  $L$ . On suppose qu'il existe  $L_1$ , avec  $0 \leq L_1 \leq L$ , tel que  $[L_1, L]$  définit une zone tampon entre le champ et le puits de captage. L'épandage se fait donc sur  $\mathcal{S} = [0, L_1]$ . Ces zones tampons sont réglementées. Présentes autour des puits de captage, elles peuvent être de natures différentes (dispositifs enherbés, talus, fossé ... Agence Française pour la Biodiversité, [89]). Dans le cas d'utilisation de fertilisants azotés à proximité des cours d'eau, l'épandage peut être interdit à moins de 35 mètres des berges dans les zones vulnérables (Roux, [75]). Dans le cas présent, on choisira une zone tampon "neutre", c'est-à-dire sans fonction d'interception ou d'atténuation de la contamination.

Nous cherchons à caractériser l'état stationnaire qui est *a priori* structuré en espace. Cet état stationnaire va dépendre de la taille de la parcelle d'épandage, en particulier de  $L_1$ . On utilise des conditions aux bords de type Neumann non homogènes sur  $\phi : \partial_x\phi = v_1$  sur  $\partial\Omega = \{0, L\}$  avec  $v_1 \in L^2(\Omega)$ . On suppose que  $S(v) = S > 0$  et que le terme de réaction est linéaire,  $r(c) = \alpha c$  avec  $\alpha$  constante strictement positive. On a donc le modèle suivant dans  $\Omega_T$  :

$$R\psi\partial_t c - \psi S\partial_x^2 c + v\partial_x c = -\alpha c + p\chi_{\mathcal{S}}(x) + \gamma - gc, \quad (4.43)$$

$$\partial_x v = g, \quad v = -\kappa\partial_x\phi, \quad (4.44)$$

complété par les conditions aux bords (ici  $\Gamma_2 = \Gamma_4 = \emptyset$ )

$$\partial_x c(t, 0) = \partial_x c(t, L) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \quad (4.45)$$

$$\partial_x\phi = v_1 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T). \quad (4.46)$$

On suppose enfin que le puits est localisé en  $L$ , et la fonctionnelle  $J$  prend la forme :

$$J : (p \in E, c \in L^2(\Omega_T)) \mapsto J(p, c) = \int_0^T \left( \int_0^{L_1} f(x, p(t, x)) dx - D(c(t, L)) \right) e^{-\rho t} dt.$$

---

On a en effet posé  $D(x, c) = D(c)\delta_L(x)$ , avec un abus de notation pour conserver simplement une fonction  $D$ . On supposera de plus que

$$\frac{\partial D}{\partial c} > 0 \text{ et } \frac{\partial^2 D}{\partial c^2} > 0.$$

**Remarque 4.2.4** Comme  $v = -\kappa v_1$ , où  $\kappa > 0$ , le problème n'a d'intérêt que si on suppose  $v_1 \leq 0$  presque partout pour que le flux pousse la pollution vers le puits d'extraction.

**Remarque 4.2.5** On satisfait aux conditions du Théorème 3.4.1 ; la solution de ce problème est donc unique.

On note

$$E = \{q \in L^2((0, T) \times (0, L)), 0 \leq q(t, x) \leq \bar{p} \text{ presque partout dans } (0, T) \times (0, L), \\ q|_{t=T} \text{ est définie}\}.$$

Sous les hypothèses adoptées dans ce chapitre, le Théorème 4.2.1 qui présente les conditions nécessaires de Pontryagin donne :

**Corollaire 4.2.1** Soit  $(p^*, c^*)$  la solution de  $J(p^*, c^*) = \max_{p \in E} J(p, c)$  sous la contrainte (4.43)-(4.44) donnée par le Théorème 3.4.1. On suppose  $D$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Il existe  $\mu \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  tel que

$$f'(x, p(t, x)) = \mu(t, x)\chi_S(x) \text{ presque partout dans } \Omega_T, \quad (4.47)$$

satisfaisant la condition terminale

$$\mu(T, x) = 0 \text{ presque partout dans } \Omega, \quad (4.48)$$

et l'équation

$$R\psi\partial_t\mu = -v\partial_x\mu - \psi S\partial_x^2\mu + \alpha\mu + g\mu + \mu R\psi\rho \text{ dans } \Omega_T \quad (4.49)$$

munie des conditions aux bords

$$\psi S\partial_x\mu(t, 0) - \kappa v_1\mu(t, 0) = 0 \text{ dans } (0, T) \quad (4.50)$$

$$D'(c(t, L)) = \psi S\partial_x\mu(t, L) - \kappa v_1\mu(t, L) \text{ dans } (0, T). \quad (4.51)$$



---

*Preuve.* Il s'agit de modifier la démonstration du Théorème 4.2.1 en fonction de l'objectif utilisé dans ce paragraphe.

On définit formellement le Lagrangien associé au problème, avec  $\lambda$  sa variable adjointe, par :

$$\mathcal{L}(c, p, \lambda) = J(p, c) + \int_0^T \int_{\Omega} (R\psi\partial_t c + v\partial_x c - \psi S\partial_x^2 c + \alpha c - p\chi_S(x) - \gamma + gc)\lambda \, dx \, dt.$$

Par intégrations par parties et en appliquant le théorème de Fubini on trouve :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(c, p, \lambda) &= \int_0^T \int_S f(x, p)e^{-\rho t} \, dx \, dt - \int_0^T D(c(t, L))e^{-\rho t} \, dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} (-R\psi\partial_t \lambda c - v\partial_x \lambda c - \psi S\partial_x^2 \lambda c + \alpha c \lambda - p\chi_S \lambda - \gamma \lambda + gc \lambda) \, dx \, dt \\ &\quad + R\psi \int_{\Omega} c(T, x)\lambda(T, x) \, dx - R\psi \int_{\Omega} c_0(x)\lambda(0, x) \, dx \\ &\quad + \int_0^T (v(L)\lambda(t, L)c(t, L) - v(0)\lambda(0, t)c(t, 0)) \, dt \\ &\quad + \int_0^T (\psi S c(t, L, \cdot)\partial_x \lambda(L, t) - \psi S c(t, 0)\partial_x \lambda(t, 0)) \, dt. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 1 pour les non linéarités, on a

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}(c, p, \lambda) &= \int_0^T \int_S (f'(x, p)e^{-\rho t} - \lambda\chi_S) \delta p \, dx \, dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} (-R\psi\partial_t \lambda - v\partial_x \lambda - \psi S\partial_x^2 \lambda + \alpha \lambda + g\lambda)\delta c \, dx \, dt + R\psi \int_{\Omega} \lambda(T, x)\delta c(T, x) \, dx \\ &\quad - \int_0^T (v(0)\lambda(t, 0) + \psi S\partial_x \lambda(t, 0))\delta c(t, 0) \, dt \\ &\quad + \int_0^T (v(L)\lambda(t, L) + \psi S\partial_x \lambda(t, L) - D'(c(t, L))e^{-\rho t})\delta c(t, L) \, dt. \end{aligned}$$

On pose  $\mu = \lambda e^{\rho t}$ .

L'annulation de la variation du Lagrangien suivant la variable d'état  $c(T, x)$  nous fournit la condition terminale (4.48).

En annulant la variation du Lagrangien suivant la variable de contrôle  $p$ , on obtient la condition d'optimalité (4.47).

En annulant la variation du Lagrangien suivant la variable d'état  $c$ , on obtient l'équation adjointe (4.49) et les conditions aux bords (4.50) et (4.51).

■

On simplifie encore le modèle en se restreignant maintenant au cas stationnaire. On suppose à présent que

$$v_1 \in \mathbb{R}, v_1 \leq 0.$$

La condition de compatibilité entre  $g$  et  $v_1$  (voir les hypothèses du présent chapitre, page 246) impose donc  $g = 0$ .

**Lemme 4.2.1** *L'état stationnaire est caractérisé par le problème suivant :*

$$-\psi S c'' + v c' + \alpha c - p \chi_S - \gamma = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (4.52)$$

$$\psi S \mu'' + v \mu' - (\alpha + R \psi \rho) \mu = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (4.53)$$

avec  $v = -\kappa v_1$ ,  $f'(p \chi_S) = \mu \chi_S$  et

$$D'(c(L)) = \psi S \mu'(L) + v \mu(L), \quad (4.54)$$

$$c'(0) = c'(L) = 0, \quad (4.55)$$

$$\psi S \mu'(0) + v \mu(0) = 0. \quad (4.56)$$

*Preuve.* On sait que  $v' = -\kappa \phi'' = 0$  donc  $\phi(x) = c_1 x + c_2$ , où  $c_1$  et  $c_2$  sont des réels. En utilisant les conditions de bords  $\phi'(0) = \phi'(L) = v_1$ , on trouve  $c_1 = v_1$ . Ainsi

$$\phi(x) = v_1 x + c_2.$$

Comme  $v(x) = -\kappa \phi'(x)$ , on a

$$v = -\kappa v_1.$$

On peut alors résoudre

$$\begin{cases} -\psi S c'' + v c' + \alpha c - p \chi_S - \gamma = 0 \\ \psi S \mu'' + v \mu' - (\alpha + R \psi \rho) \mu = 0 \end{cases}$$

où  $v$  est donnée par  $v = -\kappa v_1$ ,  $f'(p \chi_S) = \mu \chi_S$  et

$$\begin{cases} D'(c(L)) = \psi S \mu'(L) + v \mu(L) \\ c'(0) = c'(L) = 0 \\ \psi S \mu'(0) + v \mu(0) = 0. \end{cases}$$

■

À partir d'ici, on notera  $f(x, p(x)) = f(p(x)\chi_S(x))$  (par un léger abus de notation, on utilise toujours  $f$ ). D'après (4.13),  $f'(p^*(x)) = \mu(x)\chi_S(x)$ . On remarque que  $p^*(x) = f'^{-1}(\mu(x)\chi_S(x))$ . Notons que  $f$  étant strictement concave, et comme on a supposé  $\mathcal{I}m(f') \subset [0, +\infty[$ ,

$$f' : \text{Dom}(f) \rightarrow \mathcal{I}m(f') \subset [0, +\infty[$$

est strictement décroissante donc  $f'^{-1}$  existe et, d'après les hypothèses sur  $f'^{-1}$ ,

$$f'^{-1} : \mathcal{I}m(f') \subset [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[.$$

**Lemme 4.2.2** *Notons  $\mathbf{S} = S\psi$  et  $\mathbf{R} = R\psi$ . Supposons  $\mathcal{I}m(f') = ]0; +\infty[$ . L'état stationnaire  $(c^*(x), p^*(x))$  est donné par*

$$p^*(x, A, L_1) = f'^{-1}(A(e^{r_1x} - Ke^{r_2x})) \text{ si } x \in [0, L_1], p^*(x, A, L_1) = 0 \text{ si } x \in ]L_1, L],$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(s_2 - s_1)c^*(x, A, L_1) &= \int_0^x \left( f'^{-1}(A(e^{r_1u} - Ke^{r_2u})\chi_S(x)) + \gamma \right) (e^{-s_1(u-x)} - e^{-s_2(u-x)}) du \\ &\quad - \frac{e^{s_1x} - \frac{s_1}{s_2}e^{s_2x}}{e^{s_1L} - e^{s_2L}} \int_0^L \left( f'^{-1}(A(e^{r_1u} - Ke^{r_2u})\chi_S(x)) + \gamma \right) \left( e^{-s_1(u-L)} - \frac{s_2}{s_1}e^{-s_2(u-L)} \right) du, \end{aligned} \quad (4.57)$$

où  $A > 0$  est l'unique solution de l'équation

$$\begin{aligned} D' \left( \frac{1}{\mathbf{S}s_1s_2} \left( \frac{e^{(s_1+s_2)L}}{e^{s_1L} - e^{s_2L}} \int_0^{L_1} f'^{-1}(A(e^{r_1u} - Ke^{r_2u})) (s_2e^{-s_2u} - s_1e^{-s_1u}) du - \gamma \right) \right) \\ = A(v + \mathbf{S}r_1)(e^{r_1L} - e^{r_2L}) \end{aligned} \quad (4.58)$$

avec

$$K = \frac{v + \mathbf{S}r_1}{v + \mathbf{S}r_2},$$

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-v - \sqrt{\Delta_1}}{2\mathbf{S}}, r_2 = \frac{-v + \sqrt{\Delta_1}}{2\mathbf{S}}, \text{ où } \Delta_1 = v^2 + 4\mathbf{S}(\alpha + \mathbf{R}\rho), \\ s_1 &= \frac{v - \sqrt{\Delta_2}}{2\mathbf{S}}, s_2 = \frac{v + \sqrt{\Delta_2}}{2\mathbf{S}}, \text{ où } \Delta_2 = v^2 + 4\mathbf{S}\alpha. \end{aligned}$$

---

*Preuve.* Afin de démontrer ce lemme, nous allons tout d'abord chercher une expression formelle de l'état stationnaire. Cette expression n'aura un sens que si il existe un réel  $A > 0$  qui la satisfait. Nous montrerons ensuite qu'il existe bien un  $A > 0$  satisfaisant l'expression et que ce  $A$  est unique.

Le système d'équations différentielles (4.52)-(4.53) étant triangulaire, on résout d'abord l'équation (4.53) en  $\mu$ . On obtient

$$\mu^*(x, A, L_1) = (Ae^{r_1x} + Be^{r_2x})$$

avec  $r_1 = \frac{-v - \sqrt{\Delta_1}}{2\mathbf{S}}$ ,  $r_2 = \frac{-v + \sqrt{\Delta_1}}{2\mathbf{S}}$ ,  $\Delta_1 = v^2 + 4\mathbf{S}(\alpha + \mathbf{S}\rho)$  et  $A$  et  $B$  des constantes à déterminer.

En utilisant la condition au bord (4.56), on trouve

$$B = -AK \text{ avec } K = \frac{v - \sqrt{\Delta_1}}{v + \sqrt{\Delta_1}} = \frac{v + \mathbf{S}r_1}{v + \mathbf{S}r_2} < 0,$$

ce qui permet de réécrire

$$\mu^*(x, A, L_1) = A(e^{r_1x} - Ke^{r_2x}).$$

Comme  $K < 0$  et que  $r_1 < 0 < r_2$ ,  $(e^{r_1x} - Ke^{r_2x}) > 0$  pour tout  $x \in [0, L]$ .

De plus, la condition (4.54) doit être vérifiée, ce qui implique que

$$D'(c(L, A, L_1)) = A((\mathbf{S}r_1 + v)e^{r_1L} - K(\mathbf{S}r_2 + v)e^{r_2L}) = A(v + \mathbf{S}r_1)(e^{r_1L} - e^{r_2L}).$$

La fonction  $D$  étant strictement croissante,  $D'(c(L, A, L_1))$  est strictement positive. Comme  $e^{r_1L} - e^{r_2L} < 0$  et  $v + \mathbf{S}r_1 = -\mathbf{S}r_2 < 0$ , on a donc

$$A > 0. \tag{4.59}$$

On résout à présent l'équation (4.52) en  $c$ . Comme  $A > 0$ , la quantité  $f'^{-1}(A(e^{r_1x} - Ke^{r_2x}))$  est bien définie pour  $x \in [0, L_1]$  et l'équation en  $c$  peut être réécrite comme suit :

$$-\mathbf{S}c'' + vc' + \alpha c - \theta(x, A, L_1) = 0$$

où

$$\theta(x, A, L_1) = f'^{-1}(A(e^{r_1x} - Ke^{r_2x}))\chi_{[0, L_1]}(x) + \gamma, \tag{4.60}$$

et

$$c^*(x, A, L_1) = \frac{1}{\mathbf{S}(s_2 - s_1)} \int_0^x \theta(u, A, L_1) (e^{-s_1(u-x)} - e^{-s_2(u-x)}) du + K_1 e^{s_1x} + K_2 e^{s_2x}, \tag{4.61}$$

avec

$$s_1 = \frac{v - \sqrt{\Delta_2}}{2\mathbf{S}}, \quad s_2 = \frac{v + \sqrt{\Delta_2}}{2\mathbf{S}}, \quad \Delta_2 = v^2 + 4\mathbf{S}\alpha,$$

et  $K_1$  et  $K_2$  à déterminer. On en déduit donc que

$$\frac{\partial \theta}{\partial A}(x, A, L_1) = (e^{r_1 x} - Ke^{r_2 x})(f'^{-1})'(A(e^{r_1 x} - Ke^{r_2 x}))\chi_{[0, L_1]}(x) < 0 \quad (4.62)$$

car  $(e^{r_1 x} - Ke^{r_2 x}) > 0$  et  $f$  est strictement concave. En dérivant (4.61) par rapport à  $x$  on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial c^*}{\partial x}(x, A, L_1) &= \frac{1}{\mathbf{S}(s_2 - s_1)} \int_0^x \theta(u, A, L_1) (s_1 e^{-s_1(u-x)} - s_2 e^{-s_2(u-x)}) du \\ &\quad + K_1 s_1 e^{s_1 x} + K_2 s_2 e^{s_2 x}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

On utilise à présent les conditions aux bords de l'équation (4.55). En remplaçant dans (4.63), la condition de bord  $\frac{\partial c^*}{\partial x}(x, A, L_1) \Big|_{x=0} = 0$  implique que

$$K_2 = -K_1 \frac{s_1}{s_2}$$

et la condition de bord  $\frac{\partial c^*}{\partial x}(x, A, L_1) \Big|_{x=L} = 0$  donne

$$K_1 = \frac{-\int_0^L \theta(u, A, L_1) \left( e^{-s_1(u-L)} - \frac{s_2}{s_1} e^{-s_2(u-L)} \right) du}{(e^{s_1 L} - e^{s_2 L})\mathbf{S}(s_2 - s_1)}.$$

On peut alors réécrire  $c^*$  comme suit :

$$\begin{aligned} c^*(x, A, L_1) &= \frac{1}{\mathbf{S}(s_2 - s_1)} \left( \int_0^x \theta(u, A, L_1) (e^{-s_1(u-x)} - e^{-s_2(u-x)}) du \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{s_1 x} - \frac{s_1}{s_2} e^{s_2 x}}{(e^{s_1 L} - e^{s_2 L})} \int_0^L \theta(u, A, L_1) \left( e^{-s_1(u-L)} - \frac{s_2}{s_1} e^{-s_2(u-L)} \right) du \right). \end{aligned}$$

Comme  $\frac{\partial \theta}{\partial A}(u, A, L_1) < 0$ , on en déduit que

$$\frac{\partial c^*}{\partial A}(L, A, L_1) = \frac{e^{(s_1+s_2)L}}{\mathbf{S} \underbrace{s_1 s_2}_{<0} \underbrace{(e^{s_1 L} - e^{s_2 L})}_{<0}} \int_0^L \frac{\partial \theta}{\partial A}(u, A, L_1) \underbrace{(s_2 e^{-s_2 u} - s_1 e^{-s_1 u})}_{>0} du < 0. \quad (4.64)$$

---

Comme  $c^*(L, A, L_1)$  vérifie la condition au bord  $D'(c^*(L)) = A(v + \mathbf{S}r_1)(e^{r_1L} - e^{r_2L})$ ,  $A$  doit satisfaire :

$$D'(c^*(L, A, L_1)) = A(v + \mathbf{S}r_1)(e^{r_1L} - e^{r_2L}). \quad (4.65)$$

Il reste à prouver que  $A > 0$  existe et est unique. On a déjà vu à l'équation (4.59) que si  $A$  existe,  $A > 0$ . On pose

$$\eta(A, L_1) = -A(v + \mathbf{S}r_1)(e^{r_1L} - e^{r_2L}) + D'(c^*(L, A, L_1)).$$

L'équation (4.65) se réécrit  $\eta(A, L_1) = 0$ . Par ailleurs,  $A \mapsto \eta(A, L_1)$  est une fonction continue. On va montrer que pour  $L_1$  fixé,  $\eta(A, L_1) = 0$  a bien une solution et qu'elle est unique.

On a

$$\frac{\partial \eta}{\partial A}(A, L_1) = -(v + \mathbf{S}r_1)(e^{r_1L} - e^{r_2L}) + D''(c^*(L, A, L_1)) \frac{\partial c^*}{\partial A}(L, A, L_1).$$

En utilisant le fait que  $D$  est strictement convexe et que  $\frac{\partial c^*}{\partial A}(L, A, L_1) < 0$  (obtenu grâce à (4.64)), on montre que

$$\frac{\partial \eta}{\partial A}(A, L_1) = - \overbrace{(v + \mathbf{S}r_1)}^{\leq 0} \overbrace{(e^{r_1L} - e^{r_2L})}^{\leq 0} + D''(c^*(L, A, L_1)) \frac{\partial c^*}{\partial A}(L, A, L_1) < 0.$$

Grâce aux signes des racines de l'équation homogène et au fait que  $f$  (respectivement  $D$ ) est strictement concave (respectivement convexe), on a donc montré ci-dessus que  $\frac{\partial \eta}{\partial A}(A, L_1) < 0$ . La fonction  $\eta$  est donc strictement décroissante en  $A$ . Elle admet donc une bijection réciproque de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  qui permet de définir  $A$ .

De plus,

$$\lim_{A \rightarrow 0} \eta(A, L_1) = D'(c^*(L, A, L_1)) > 0$$

et

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \eta(A, L_1) = -\infty$$

car  $c^*(L, A, L_1) \rightarrow 0$  quand  $A \rightarrow +\infty$  donc  $D'(c^*(L, A, L_1)) \rightarrow D'(0)$  par continuité de  $D'$ .

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc une unique solution  $A > 0$  de  $\eta(A, L_1) = 0$ , c'est-à-dire de (4.58). ■

Pour des fonctions  $f$  et  $D$  très particulières, on peut obtenir une expression explicite de  $A$ .

**Exemple :** Soient  $D(c) = c^2$  et  $f(p) = \ln(p)$ . On a  $f(p) = \ln(p)$ ,  $f'^{-1}(p) = \frac{1}{p}$ . On écrit alors :

$$\eta(A, L_1) = -A(v + \mathbf{S}r_1)(e^{r_1L} - e^{r_2L}) + \frac{2}{\mathbf{S}s_1s_2} \left( \frac{e^{(s_1+s_2)L}}{e^{s_1L} - e^{s_2L}} \int_0^{L_1} \frac{s_2e^{-s_2u} - s_1e^{-s_1u}}{A(e^{r_1u} - Ke^{r_2u})} du - \gamma \right).$$

Résoudre  $\eta(A, L_1) = 0$  revient à résoudre l'équation quadratique

$$A^2(v + \mathbf{S}r_1)(e^{r_1L} - e^{r_2L}) + A \frac{2\gamma}{\mathbf{S}s_1s_2} - \frac{2e^{(s_1+s_2)L}}{\mathbf{S}s_1s_2(e^{s_1L} - e^{s_2L})} \int_0^{L_1} \frac{s_2e^{-s_2u} - s_1e^{-s_1u}}{(e^{r_1u} - Ke^{r_2u})} du = 0.$$

Le discriminant de cette équation est

$$\Delta = \left( \frac{2\gamma}{\mathbf{S}s_1s_2} \right)^2 + 8 \frac{\overbrace{(v + \mathbf{S}r_1)}^{<0} \overbrace{(e^{r_1L} - e^{r_2L})}^{<0}}{\underbrace{\mathbf{S}s_1s_2}_{<0}} \frac{e^{(s_1+s_2)L}}{\underbrace{e^{s_1L} - e^{s_2L}}_{<0}} \int_0^{L_1} \frac{\overbrace{s_2e^{-s_2u} - s_1e^{-s_1u}}^{>0}}{\underbrace{e^{r_1u} - Ke^{r_2u}}_{>0}} du > 0.$$

Pour  $L_1$  donné, l'équation  $\eta(A, L_1) = 0$  admet *a priori* deux solutions réelles :

$$A = \frac{-\frac{2\gamma}{\mathbf{S}s_1s_2} - \sqrt{\Delta}}{2(v + \mathbf{S}r_1)(e^{r_1L} - e^{r_2L})} < 0$$

et

$$A = \frac{-\frac{2\gamma}{\mathbf{S}s_1s_2} + \sqrt{\Delta}}{2(v + \mathbf{S}r_1)(e^{r_1L} - e^{r_2L})} > 0.$$

Comme  $A \mapsto \eta(A, L_1)$  est définie sur  $\mathbb{R}_+$ , on choisira donc la solution positive, c'est-à-dire

$$A = \frac{-\frac{2\gamma}{\mathbf{S}s_1s_2} + \sqrt{\Delta}}{2(v + \mathbf{S}r_1)(e^{r_1L} - e^{r_2L})} > 0.$$

---

## Simulations numériques

Pour les simulations qui suivent, réalisées avec Maple, nous avons d'abord pris les données suivantes :

$$\rho = 0.05, \alpha = 0.1, S = 0.1, \psi = 1, R = 1 \text{ (pas d'absorption),}$$
$$\gamma = 0.05, v = 0.015.$$

Pour la première simulation, on choisit les fonctions de production et de dommages suivantes :

$$f(p) = \ln(p + 0.01), D(c) = c^2.$$

Ici les fonctions  $D$  et  $f$  sont purement académiques. Il faut donc lire les résultats en ne se concentrant que sur les aspects phénoménologiques, pas sur les valeurs.

Nous allons faire varier  $L$ . On commence par  $L = 10$ .

Sur la Figure 4.2, on constate que l'allure de chaque courbe représentant la concentration optimale  $c^*$  est la même. C'est bien sûr tout-à-fait normal : on retrouve la courbe classique pour une quantité soumise à un transport (vers la droite) et à de la diffusion. Cependant, la taille de la zone tampon a un impact sur cette concentration optimale  $c^*$ . En effet, plus la taille de la zone tampon est importante (plus l'épandage se fait loin du puits), plus la concentration optimale  $c^*$  est élevée (cela correspond au fait que plus l'épandage est loin du puits, plus l'agriculteur est autorisé à épandre une quantité importante  $p^*$  d'engrais). Toutefois, cela n'est vérifié que sur le début de la parcelle agricole : en effet, à partir d'une certaine distance, toutes les concentrations optimales  $c^*$  sont similaires, et ce indépendamment de la taille de la zone tampon.

La Figure 4.3 représente l'utilisation optimale d'engrais dans les différents cas étudiés. On remarque que les courbes sont similaires dans les sept cas étudiés mais plus on stoppe les émissions loin du puits de captage, plus la quantité d'engrais épandue peut être importante.

On s'intéresse à présent à l'impact de la taille de la zone tampon sur l'objectif à l'état stationnaire, qui est donné par

$$Obj = \frac{1}{\rho} \left( \int_S f(p^*(x)) dx - D(c^*(L)) \right).$$

Dans ce cas de figure, on peut déterminer le  $L_1$  optimal, qui est ici  $L_1 = 4$ , représenté sur la Figure 4.4.

On prend à présent  $L = 15$ . Dans ce cas de figure, on peut déterminer le  $L_1$  optimal, qui est ici  $L_1 = 8$ , représenté sur la Figure 4.5.



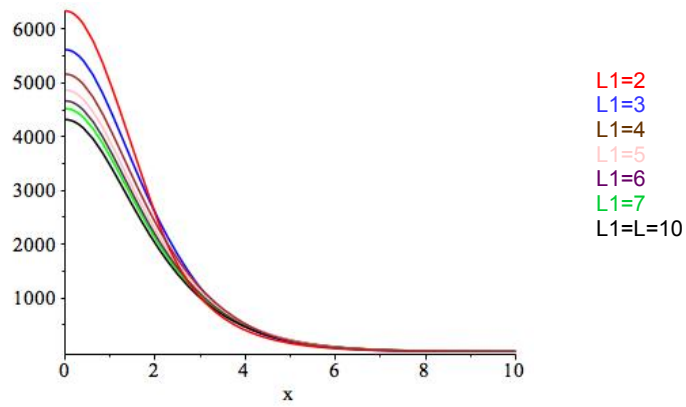


FIGURE 4.2 –  $c^*$  optimale

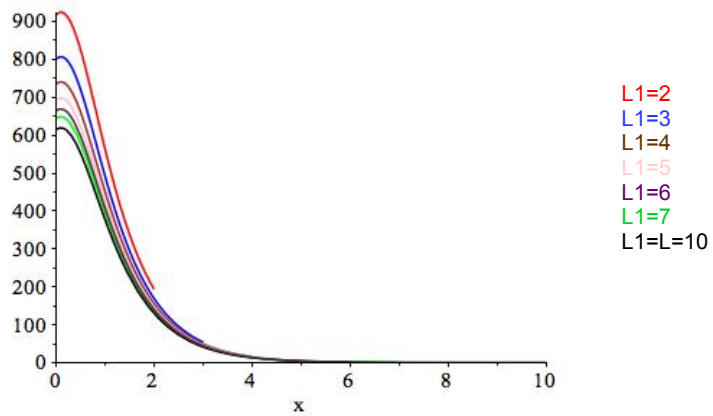


FIGURE 4.3 –  $p^*$  optimal

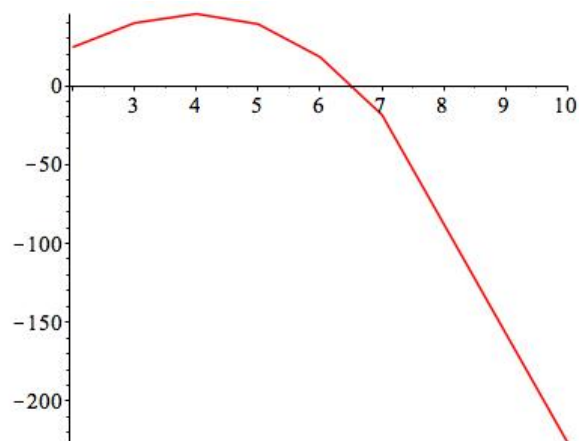


FIGURE 4.4 – Objectif en fonction de  $L_1$  ;  $L = 10$ .

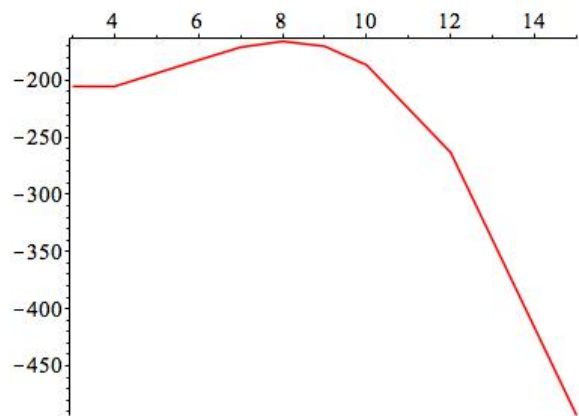


FIGURE 4.5 – Objectif en fonction de  $L_1$  ;  $L = 15$ .

On prend à présent  $L = 20$ . On s'intéresse à l'objectif en fonction de  $L_1$ . Dans ce cas de figure, on constate sur la Figure 4.6 que la politique optimale serait de ne pas épandre. Ces résultats ne sont pas ce que l'on pouvait supposer intuitivement, à savoir qu'en augmentant la distance à laquelle se trouve le puits (pour un  $L$  plus grand), on pourrait avoir une zone d'épandage plus importante. Pour tenter d'expliquer cela, nous allons

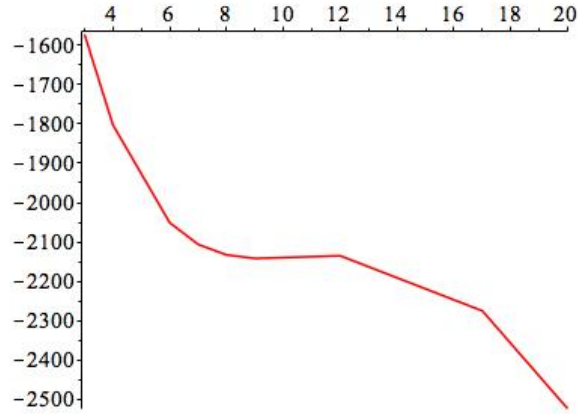


FIGURE 4.6 – Objectif en fonction de  $L_1$  ;  $L = 20$ .

regarder la variation de l'objectif en fonction de  $L_1$ . Afin de bien prendre en compte les dépendances, on note  $A(L_1)$ . On a

$$\rho Obj = \int_0^{L_1} f(p^*(x, A, L_1)) dx - D(c^*(L, A, L_1))$$

avec

$$c^*(L, A, L_1) = \frac{e^{(s_1+s_2)L}}{S(e^{s_1L} - e^{s_2L})} \int_0^{L_1} f'^{-1}(A(L_1)(e^{r_1u} - Ke^{r_2u})) \left( \frac{e^{-s_2u}}{s_1} - \frac{e^{-s_1u}}{s_2} \right) du - \frac{\gamma}{Ss_1s_2}. \quad (4.66)$$

On calcule

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial Obj}{\partial L_1} &= f(p^*(L_1, A, L_1)) + \int_0^{L_1} \frac{\partial p^*}{\partial L_1}(x, A, L_1) f'(p^*(x, A, L_1)) dx \\ &\quad - \frac{\partial c^*}{\partial L_1}(L, A, L_1) D'(c^*(L, A, L_1)). \end{aligned}$$

On sait que

$$D'(c^*(L, A, L_1)) = A(L_1)(v + Sr_1)(e^{r_1L} - e^{r_2L}) \quad (4.67)$$

donc on a :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial Obj}{\partial L_1} &= f(p^*(L_1, A, L_1)) + \int_0^{L_1} \frac{\partial p^*}{\partial L_1}(x, A, L_1) f'(p^*(x, A, L_1)) dx \\ &- A(L_1)(v + Sr_1)(e^{r_1 L} - e^{r_2 L}) \frac{e^{(s_1+s_2)L}}{S(e^{s_1 L} - e^{s_2 L})} \left( f'^{-1}(A(L_1)(e^{r_1 L_1} - Ke^{r_2 L_1})) \left( \frac{e^{-s_2 L_1}}{s_1} - \frac{e^{-s_1 L_1}}{s_2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{L_1} \frac{\partial}{\partial L_1} \left[ f'^{-1}(A(L_1)(e^{r_1 u} - Ke^{r_2 u})) \left( \frac{e^{-s_2 u}}{s_1} - \frac{e^{-s_1 u}}{s_2} \right) \right] du \right). \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L_1} \left[ f'^{-1}(A(L_1)(e^{r_1 u} - Ke^{r_2 u})) \left( \frac{e^{-s_2 u}}{s_1} - \frac{e^{-s_1 u}}{s_2} \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial L_1} \left[ f'^{-1}(A(L_1)(e^{r_1 u} - Ke^{r_2 u})) \right] \left( \frac{e^{-s_2 u}}{s_1} - \frac{e^{-s_1 u}}{s_2} \right) \\ &= \frac{\partial A}{\partial L_1}(L_1)(e^{r_1 u} - Ke^{r_2 u})(f'^{-1})'(A(L_1)(e^{r_1 u} - Ke^{r_2 u})) \left( \frac{e^{-s_2 u}}{s_1} - \frac{e^{-s_1 u}}{s_2} \right) \end{aligned}$$

où  $(f'^{-1})'(x) = \frac{1}{f''(f'^{-1}(x))}$ , on a

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial Obj}{\partial L_1} &= f(p^*(L_1, A, L_1)) + \int_0^{L_1} \frac{\partial p^*}{\partial L_1}(x, A, L_1) \overbrace{f'(p^*(x, A, L_1))}^{\geq 0} dx \\ &- \underbrace{A(L_1)(v + Sr_1)(e^{r_1 L} - e^{r_2 L})}_{\geq 0} \underbrace{\frac{e^{(s_1+s_2)L}}{S(e^{s_1 L} - e^{s_2 L})}}_{\leq 0} \left( \underbrace{f'^{-1}(A(L_1)(e^{r_1 L_1} - Ke^{r_2 L_1}))}_{\geq 0} \underbrace{\left( \frac{e^{-s_2 L_1}}{s_1} - \frac{e^{-s_1 L_1}}{s_2} \right)}_{\leq 0} \right) \\ &+ \int_0^{L_1} \frac{\partial A}{\partial L_1}(L_1) \underbrace{(e^{r_1 u} - Ke^{r_2 u})}_{\geq 0} \underbrace{(f'^{-1})'(A(L_1)(e^{r_1 u} - Ke^{r_2 u}))}_{< 0} \underbrace{\left( \frac{e^{-s_2 u}}{s_1} - \frac{e^{-s_1 u}}{s_2} \right)}_{\leq 0} du. \quad (4.68) \end{aligned}$$

Il nous faut donc déterminer le signe de

$$\frac{\partial A}{\partial L_1}(L_1)(e^{r_1 x} - Ke^{r_2 x})(f'^{-1})'(A(L_1)(e^{r_1 x} - Ke^{r_2 x})).$$

Pour cela, on étudie le signe de  $\frac{\partial A}{\partial L_1}$ . On pose :

$$\mathcal{F}(A, L_1) = D'(c^*(L, A, L_1)) - A(L_1)(v + Sr_1)(e^{r_1 L} - e^{r_2 L}).$$

D'après (4.67), on a

$$\mathcal{F}(A, L_1) = 0.$$

Cette valeur constante implique en particulier que la dérivée de  $\mathcal{F}$  par rapport à  $L_1$  est nulle, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial L_1} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial L_1}. \quad (4.69)$$

On regarde le signe de  $\partial_A \mathcal{F}$  ; à l'aide de (4.66), on calcule :

$$\begin{aligned} \partial_A \mathcal{F} &= \overbrace{D''(c^*(L, A, L_1))}^{>0} \overbrace{\frac{e^{(s_1+s_2)L}}{S(e^{s_1L} - e^{s_2L})}}^{\leq 0} \\ &\times \int_0^{L_1} \overbrace{(e^{r_1u} - Ke^{r_2u})}^{\geq 0} \times \overbrace{(f'^{-1})'(A(L_1)(e^{r_1u} - Ke^{r_2u}))}^{<0} \overbrace{\left(\frac{e^{-s_2u}}{s_1} - \frac{e^{-s_1u}}{s_2}\right)}^{\leq 0} du \\ &\quad - \underbrace{(v + Sr_1)(e^{r_1L} - e^{r_2L})}_{\geq 0} \end{aligned}$$

donc  $\partial_A \mathcal{F} \leq 0$ .

On regarde le signe de  $\partial_{L_1} \mathcal{F}$  ; avec (4.66), on trouve

$$\begin{aligned} \partial_{L_1} \mathcal{F} &= \overbrace{D''(c^*(L, A, L_1))}^{>0} \overbrace{\frac{e^{(s_1+s_2)L}}{S(e^{s_1L} - e^{s_2L})}}^{\leq 0} \overbrace{\left(f'^{-1}(A(L_1)(e^{r_1L_1} - Ke^{r_2L_1}))\right)}^{\geq 0} \overbrace{\left(\frac{e^{-s_2L_1}}{s_1} - \frac{e^{-s_1L_1}}{s_2}\right)}^{\leq 0} \\ &+ \int_0^{L_1} \frac{\partial A}{\partial L_1}(L_1) \underbrace{(e^{r_1u} - Ke^{r_2u})}_{\geq 0} \underbrace{(f'^{-1})'(A(L_1)(e^{r_1u} - Ke^{r_2u}))}_{<0} \underbrace{\left(\frac{e^{-s_2u}}{s_1} - \frac{e^{-s_1u}}{s_2}\right)}_{\leq 0} du \\ &\quad - \frac{\partial A}{\partial L_1}(L_1) \underbrace{(v + Sr_1)(e^{r_1L} - e^{r_2L})}_{\geq 0}. \quad (4.70) \end{aligned}$$

Le signe de  $\partial_{L_1} \mathcal{F}$  dépend donc du signe de  $\partial_{L_1} A$ , qui était précisément l'objet dont l'on voulait déterminer le signe.

Mais, on remarque que si  $\partial_{L_1} A \leq 0$ , on obtient dans (4.70)  $\partial_{L_1} \mathcal{F} \geq 0$ . On en déduirait donc par (4.69) que  $\partial_{L_1} A \geq 0$ , ce qui est contradictoire.

On en conclut que  $\partial_{L_1} A \geq 0$ . On obtient dans (4.69) que  $\partial_{L_1} \mathcal{F} \geq 0$ . On conclut alors que

$$\frac{\partial p^*}{\partial L_1}(x, A, L_1) = \frac{\partial A}{\partial L_1}(L_1)(e^{r_1x} - Ke^{r_2x})(f'^{-1})'(A(L_1)(e^{r_1x} - Ke^{r_2x})) \leq 0. \quad (4.71)$$

On revient à présent à l'équation (4.68) :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial Obj}{\partial L_1} &= f(p^*(L_1, A, L_1)) + \int_0^{L_1} \overbrace{\frac{\partial p^*}{\partial L_1}(x, A, L_1)}^{\leq 0} \overbrace{f'(p^*(x, A, L_1))}^{\geq 0} dx \\ &- \underbrace{A(L_1)(v + Sr_1)(e^{r_1 L} - e^{r_2 L})}_{\geq 0} \underbrace{\frac{e^{(s_1+s_2)L}}{S(e^{s_1 L} - e^{s_2 L})}}_{\leq 0} \underbrace{\left( f'^{-1}(A(L_1)(e^{r_1 L_1} - Ke^{r_2 L_1})) \right)}_{\geq 0} \underbrace{\left( \frac{e^{-s_2 L_1}}{s_1} - \frac{e^{-s_1 L_1}}{s_2} \right)}_{\leq 0} \\ &+ \int_0^{L_1} \underbrace{\frac{\partial A}{\partial L_1}(L_1)}_{\geq 0} \underbrace{(e^{r_1 u} - Ke^{r_2 u})}_{\geq 0} \underbrace{(f'^{-1})'(A(L_1)(e^{r_1 u} - Ke^{r_2 u}))}_{< 0} \underbrace{\left( \frac{e^{-s_2 u}}{s_1} - \frac{e^{-s_1 u}}{s_2} \right)}_{\leq 0} du. \end{aligned}$$

On pose  $Q(A, L_1) = A(L_1)(v + Sr_1)(e^{r_1 L} - e^{r_2 L}) \frac{e^{(s_1+s_2)L}}{S(e^{s_1 L} - e^{s_2 L})} \leq 0$ . En utilisant le fait que  $\frac{\partial p^*}{\partial L_1}(x, A, L_1) = \frac{\partial A}{\partial L_1}(L_1)(e^{r_1 x} - Ke^{r_2 x})(f'^{-1})'(A(L_1)(e^{r_1 x} - Ke^{r_2 x}))$ , on obtient

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial Obj}{\partial L_1} &= f(p^*(L_1, A, L_1)) - Q(A, L_1) f'^{-1}(A(L_1)(e^{r_1 L_1} - Ke^{r_2 L_1})) \left( \frac{e^{-s_2 L_1}}{s_1} - \frac{e^{-s_1 L_1}}{s_2} \right) \\ &+ \int_0^{L_1} \frac{\partial p^*}{\partial L_1}(x, A, L_1) \left( f'(p^*(x, A, L_1)) \right. \\ &\left. - \frac{Q(A, L_1)(e^{r_1 x} - Ke^{r_2 x})(f'^{-1})'(A(L_1)(e^{r_1 x} - Ke^{r_2 x}))}{(e^{r_1 x} - Ke^{r_2 x})(f'^{-1})'(A(L_1)(e^{r_1 x} - Ke^{r_2 x}))} \left( \frac{e^{-s_2 x}}{s_1} - \frac{e^{-s_1 x}}{s_2} \right) \right) dx. \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial Obj}{\partial L_1} &= f(p^*(L_1, A, L_1)) - \underbrace{Q(A, L_1)}_{\leq 0} \underbrace{f'^{-1}(A(L_1)(e^{r_1 L_1} - Ke^{r_2 L_1}))}_{\geq 0} \underbrace{\left( \frac{e^{-s_2 L_1}}{s_1} - \frac{e^{-s_1 L_1}}{s_2} \right)}_{\leq 0} \\ &+ \int_0^{L_1} \underbrace{\frac{\partial p^*}{\partial L_1}(x, A, L_1)}_{\leq 0} \underbrace{\left( f'(p^*(x, A, L_1)) \right)}_{\geq 0} - \underbrace{Q(A, L_1)}_{\leq 0} \underbrace{\left( \frac{e^{-s_2 x}}{s_1} - \frac{e^{-s_1 x}}{s_2} \right)}_{\leq 0} dx. \quad (4.72) \end{aligned}$$

Le signe de  $\frac{\partial Obj}{\partial L_1}$  dépend donc de la fonction de production  $f$  choisie ainsi que de  $\partial_{L_1} A$ . Si la fonction de production est positive (par exemple tirée de l'étude de Godart et al

[43], voir l'exemple ci-après), alors

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial Obj}{\partial L_1} = & \underbrace{f(p^*(L_1, A, L_1)) - \int_0^{L_1} \frac{\partial p^*}{\partial L_1}(x, A, L_1) Q(A, L_1) \left( \frac{e^{-s_2 x}}{s_1} - \frac{e^{-s_1 x}}{s_2} \right) dx}_{\geq 0} \\ & - \underbrace{Q(A, L_1) f'^{-1}(A(L_1)(e^{r_1 L_1} - K e^{r_2 L_1})) \left( \frac{e^{-s_2 L_1}}{s_1} - \frac{e^{-s_1 L_1}}{s_2} \right)}_{\geq 0} \\ & + \underbrace{\int_0^{L_1} \frac{\partial p^*}{\partial L_1}(x, A, L_1) f'(p^*(x, A, L_1)) dx}_{\leq 0}. \end{aligned}$$

On peut donc retrouver les deux configurations obtenues précédemment, à savoir existence d'un optimum comme dans les Figures 4.4 et 4.5, ou bien, dans le cas où

$$\begin{aligned} f(p^*(L_1, A, L_1)) - \int_0^{L_1} \frac{\partial p^*}{\partial L_1}(x, A, L_1) Q(A, L_1) \left( \frac{e^{-s_2 x}}{s_1} - \frac{e^{-s_1 x}}{s_2} \right) dx \leq \\ Q(A, L_1) f'^{-1}(A(L_1)(e^{r_1 L_1} - K e^{r_2 L_1})) \left( \frac{e^{-s_2 L_1}}{s_1} - \frac{e^{-s_1 L_1}}{s_2} \right) - \int_0^{L_1} \frac{\partial p^*}{\partial L_1}(x, A, L_1) f'(p^*(x, A, L_1)) dx, \end{aligned}$$

un objectif décroissant comme dans la Figure 4.6.

Explicitons encore les calculs pour l'exemple correspondant aux simulations précédentes où la fonction de production est  $f(p) = \ln(p)$ . On sait (voir Figure 4.3) que  $p^*(L_1, A, L_1) \rightarrow 0$  lorsque  $L_1 \rightarrow L$ . On a donc  $f(p^*(L_1, A, L_1)) \rightarrow -\infty$  lorsque  $L_1 \rightarrow L$ . Ainsi, d'après (4.72), si

$$\begin{aligned} f(p^*(L_1, A, L_1)) - Q(A, L_1) f'^{-1}(A(L_1)(e^{r_1 L_1} - K e^{r_2 L_1})) \left( \frac{e^{-s_2 L_1}}{s_1} - \frac{e^{-s_1 L_1}}{s_2} \right) \\ + \int_0^{L_1} \frac{\partial p^*}{\partial L_1}(x, A, L_1) f'(p^*(x, A, L_1)) dx \leq \int_0^{L_1} \frac{\partial p^*}{\partial L_1}(x, A, L_1) Q(A, L_1) \left( \frac{e^{-s_2 x}}{s_1} - \frac{e^{-s_1 x}}{s_2} \right) dx, \end{aligned}$$

on a un objectif décroissant pour  $L_1$  au voisinage de  $L$ , comme dans les Figures 4.4-4.6. De plus,  $p^*(L_1, A, L_1) > 1$  lorsque  $L_1 \rightarrow 0$  (voir Figure 4.3) et la pente  $\frac{\partial p^*}{\partial L_1}(x, A, L_1)$  n'explose pas (voir (4.71)). Donc on peut négliger les termes en intégrales et on voit que  $f(p^*(L_1, A, L_1)) = \ln(p^*(L_1, A, L_1)) \geq 0$  lorsque  $L_1 \rightarrow 0$ . On a donc un objectif croissant si

$$\ln(p^*(L_1, A, L_1)) \geq \frac{Q(A, L_1)}{A(L_1)(e^{r_1 L_1} - K e^{r_2 L_1})} \left( \frac{e^{-s_2 L_1}}{s_1} - \frac{e^{-s_1 L_1}}{s_2} \right)$$

et décroissant sinon. Cette condition est satisfaite dans le cas des Figures 4.4 et 4.5, mais pas dans celui de la Figure 4.6.

---

On étudie à présent le problème en considérant les fonctions suivantes :

$$f(p) = \beta_J - (\beta_J - \alpha_J)e^{-p(x)\tau_J} \text{ et } D(c) = \frac{0,2}{50^2}c^2.$$

On trace dans la Figure 4.7 la fonction de production. Le choix de cette fonction de

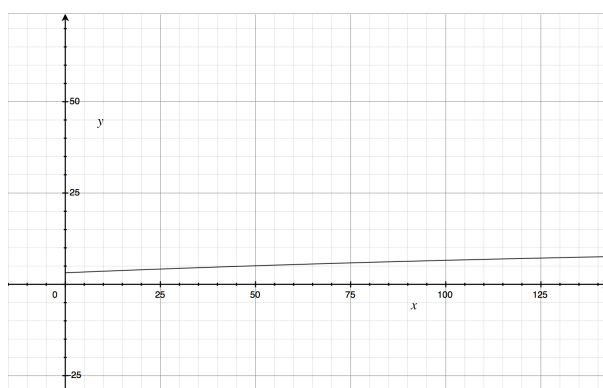


FIGURE 4.7 – Fonction de production

production est tiré de l'étude de Godart et al. [43] où le rendement pour l'agriculteur dépend de  $\alpha_J$  et  $\beta_J$  qui sont respectivement la valeur du rendement sans apport azoté et la valeur asymptotique quand l'apport devient grand. Le rendement maximal est atteint à une vitesse  $\tau_J$ . L'avantage de cette fonction de rendement est qu'elle respecte les hypothèses posées sur  $f$  (elle est croissante et concave) mais elle est également adaptable pour différentes cultures. Dans notre exemple, nous choisirons  $\beta_J = 11,7888$ ,  $\alpha_J = 3,1824$  et  $\tau_J = 0.0050465$ , qui correspondent aux données pour une culture de blé.

Pour la fonction de dommages, nous avons utilisé des données de Ledoux et al. [58] où seul le coût du traitement pour une quantité de nitrates supérieur à la norme admissible (qui est de 50mg/L) est prise en compte. Ce coût de traitement de l'eau est de 0.20 euros par mètre cube.

On se place dans le cas où  $L = 10$ . On obtient les résultats suivants à l'état stationnaire :



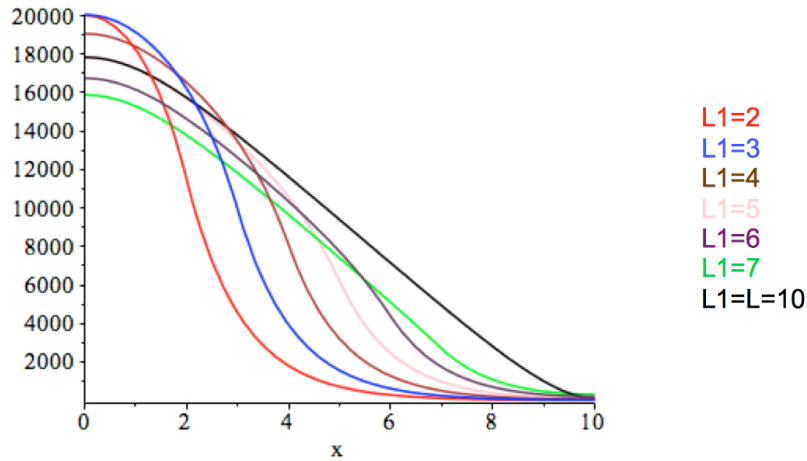


FIGURE 4.8 –  $c^*$  optimale

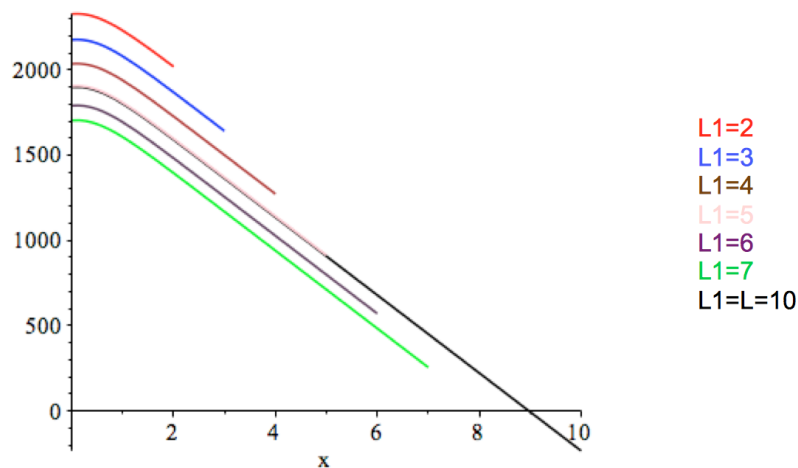


FIGURE 4.9 –  $p^*$  optimal

Contrairement aux précédentes simulations (dans le cas d'une fonction profit logarithmique), on constate qu'un arrêt d'épandage loin du puits n'autorise pas nécessairement une quantité d'engrais notablement plus importante. En effet, pour  $L_1 = 2$ , la concentration dans le sol, témoin de la quantité d'engrais épandue, est moins importante à partir de  $x = 2$ , ce qui est différent de ce que l'on observe dans la Figure 4.2. Cette décroissance est moins marquée lorsque  $L_1$  se rapproche de  $L$  (voir Figure 4.8).

L'allure des courbes de la quantité optimale d'engrais à épandre est la même pour les sept cas simulés à savoir que plus  $L_1$  est grand (plus la parcelle est proche du puits), plus la quantité d'engrais doit être faible (ce qui paraît logique), excepté pour le cas  $L_1 = L = 10$

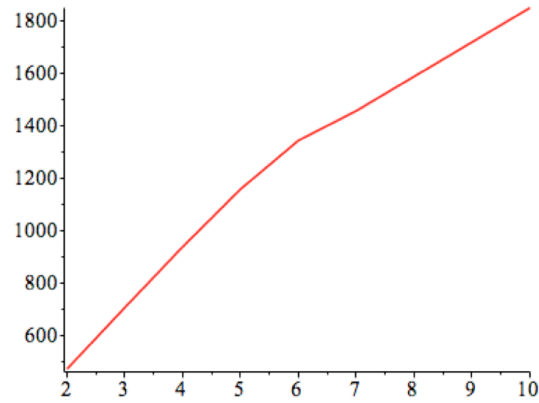


FIGURE 4.10 – Objectif en fonction de  $L_1$

pour lequel le  $p^*$  est similaire au cas  $L_1 = 5$ . Contrairement au cas logarithmique, la décroissance est moins rapide en fonction de  $x$  (voir Figure 4.9).

La fonction objectif est croissante par rapport à  $L_1$  (Figure 4.10), ce qui signifierait que la politique optimale serait d'épandre de l'engrais jusqu'au niveau du puits (ce qui n'est évidemment pas intuitif mais provient du fait que le bénéfice de l'agriculteur est privilégié par les échelles de valeurs utilisées ici dans le modèle d'objectif).



# Chapitre 5

## Théorie des Jeux

On considère à présent deux parcelles agricoles, gérées par deux agriculteurs indépendants, sur lesquelles il y a épandage d'engrais. Le problème que nous rencontrons est un jeu différentiel à deux joueurs qui ne coopèrent pas. En effet, chaque joueur choisit la quantité d'engrais à épandre sur sa parcelle. Son objectif dépend donc de la production agricole qu'il va réaliser grâce à l'utilisation d'engrais, mais également des coûts de dépollution auxquels il devra faire face en tant que membre d'une communauté sociale. Les deux agriculteurs contribuent à la pollution de la nappe phréatique qui est un bien commun, ce qui explique la situation de jeu.

Notons que les résultats de ce chapitre s'étendent facilement (mais lourdement du point de vue des notations) à une situation de jeu plus générale à  $m$  agriculteurs,  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $m \geq 2$ .

Ce problème fait intervenir deux variables de contrôle (une pour chaque agriculteur) et deux variables d'état (qui sont communes aux deux agriculteurs) :

- la quantité d'engrais  $p_1(t, x)\chi_{\Omega_1}(x)$ , épandue par le premier agriculteur au temps  $t$  en un point  $x$  de sa propre parcelle  $\Omega_1$  ;
- la quantité d'engrais  $p_2(t, x)\chi_{\Omega_2}(x)$ , épandue par le deuxième agriculteur au temps  $t$  en un point  $x$  sa propre parcelle  $\Omega_2$  ;
- la concentration  $c(t, x)$  du principal polluant issu de l'engrais dans le sous-sol (aquifère) ;
- la vitesse de déplacement du soluté dans le sous-sol,  $v(t, x)$ .

Tout comme dans les chapitres précédents, l'équation d'état est un système couplé d'équations aux dérivées partielles de type parabolique-elliptique.

Les deux parcelles agricoles  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \leq 3$ , avec  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$  et  $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \Omega$  où  $\Omega$  est la zone globale d'étude, contenant en particulier également des puits de captage. On supposera  $\Omega$  connexe et on note  $\partial\Omega$  son bord (*cf* Figure 5.1). L'intervalle de temps de l'étude est  $(0, T)$  où  $T > 0$  quelconque.

L'équation d'état est la suivante :

$$R\psi\partial_t c + v \cdot \nabla c - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla c) = -r(c) + p_1\chi_{\Omega_1} + p_2\chi_{\Omega_2} - gc \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.1)$$

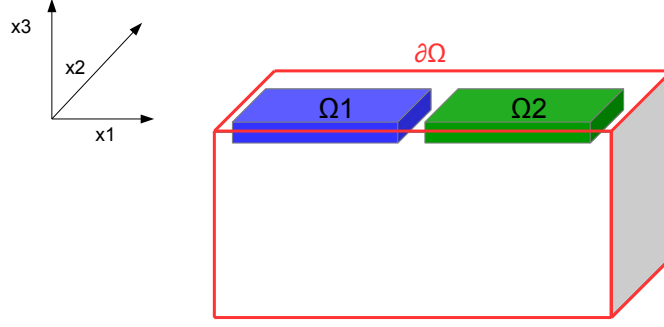


FIGURE 5.1

$$\operatorname{div}(v) = g, v = -\kappa \nabla \phi \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.2)$$

complétées par les conditions initiales et aux bords suivantes :

$$S(v) \nabla c \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), c = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T), \text{ avec } c|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega \quad (5.3)$$

où  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$ ,  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ , et

$$v \cdot n = -\kappa \nabla \phi \cdot n = -\kappa v_1 \cdot n \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \phi = \phi_{bord} \text{ sur } \Gamma_4 \times (0, T), \quad (5.4)$$

avec  $\Gamma_3 \cup \Gamma_4 = \partial\Omega$ ,  $\Gamma_3 \cap \Gamma_4 = \emptyset$ .

Les problèmes d'optimisation associés seront de la forme suivante :

$$\max_{p_1 \in E_1} J_1(p_1; p_2, c(t, x; p_1, p_2)) \text{ où } p_2 \in E_2 \text{ donné}, \quad (5.5)$$

$$\max_{p_2 \in E_2} J_2(p_2; p_1, c(t, x; p_1, p_2)) \text{ où } p_1 \in E_1 \text{ donné}, \quad (5.6)$$

où les fonctionnelles  $J_1$  et  $J_2$  sont données par

$$J_1(p_1; p_2, c(t, x; p_1, p_2)) = \int_0^T \left( \int_{\Omega_1} f_1(x, p_1(t, x)) dx - \int_{\Omega} D(x, c(t, x; p_1, p_2)) dx \right) e^{-\rho t} dt \\ - \nu e^{-\rho T} \left( \int_{\Omega} D(x, c(T, x; p_1, p_2)) dx \right)$$

---

et

$$J_2(p_2; p_1, c(t, x; p_1, p_2)) = \int_0^T \left( \int_{\Omega_2} f_2(x, p_2(t, x)) dx - \int_{\Omega} D(x, c(t, x; p_1, p_2)) dx \right) e^{-\rho t} dt \\ - \nu e^{-\rho T} \left( \int_{\Omega} D(x, c(T, x; p_1, p_2)) dx \right)$$

où  $c(t, x; p_1, p_2)$  est défini par l'équation d'état (5.1)-(5.4) presque partout dans  $\Omega_T$ .

Les fonctions de profit peuvent être différentes pour les deux agriculteurs. Par exemple, les espèces plantées ne sont pas forcément les mêmes sur les deux parcelles. Il faut donc distinguer deux fonctions profit  $f_1$  et  $f_2$ .

**Remarque 5.0.1** *La notation  $c(t, x; p_1, p_2)$  a été introduite pour rappeler que  $c$ , telle que définie par (5.1)-(5.4), dépend de  $p_1$  et  $p_2$ . Mais attention, la dépendance est non locale. Nous n'avons pas  $c(t, x; p_1, p_2) = c(t, x; p_1(t, x), p_2(t, x))$  mais bien  $c(t, x; p_1, p_2) = c(t, x; \{p_1(s, y_1); (s, y_1) \in (0, T) \times \Omega_1\}, \{p_2(s, y_2); (s, y_2) \in (0, T) \times \Omega_2\})$ . Ceci est précisé dans le paragraphe 5.2.*

On peut envisager les problèmes (5.5)-(5.6) selon deux types de situation : la coopération ou la non coopération des agriculteurs. Le cadre coopératif peut être étudié avec les outils des trois chapitres précédents. Ce chapitre est donc essentiellement consacré au cas sans coopération pour lequel nous allons démontrer l'existence d'un équilibre de Nash (paragraphe 5.3). Auparavant, nous décrivons les hypothèses au paragraphe 5.1, nous rappelons le caractère bien posé du système d'état (5.1)-(5.4) et définissons l'équilibre de Nash au paragraphe 5.2. L'applicabilité de l'approche par problème adjoint (Pontryagin) est prouvée au paragraphe 5.4. Le chapitre se termine par des résultats analytiques dans le cas stationnaire 1D (paragraphe 5.5).

## 5.1 Hypothèses

Nous rassemblons dans ce paragraphe les hypothèses techniques utilisées ci-après :

- l'opérateur  $S(v)$  est supposé donné par (1.2) avec  $\alpha_L \geq \alpha_T \geq 0$ . Notons que d'après la définition (1.2) du tenseur de dispersion, on a

$$S(v)\xi \cdot \xi \geq (S_m + \alpha_T |v|) |\xi|^2, |S(v)\xi| \leq (S_m + \alpha_L |v|) |\xi| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

On suppose que  $S_m > 0$ . On suppose qu'il existe des réels  $\kappa_-$  et  $\kappa_+$  avec  $0 < \kappa_- \leq \kappa_+$  tels que le tenseur de perméabilité vérifie :

$$\kappa \xi \cdot \xi \geq \kappa_- |\xi|^2 \quad \text{et} \quad |\kappa \xi| \leq \kappa_+ |\xi|, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N;$$

- 
- on suppose que  $\partial\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et qu'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée (afin d'assurer  $v \in L^\infty(\Omega_T)$ ) :

$$\kappa \in (\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}))^{N \times N} \text{ et } \phi_{bord} \in W^{2,p}(\bar{\Omega}) \text{ avec } p > N,$$

$$\kappa = \kappa^* Id \text{ avec } \kappa^* : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } \kappa^* \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \text{ et } \phi_{bord} \in W^{2,p}(\bar{\Omega}) \text{ avec } p > \frac{N}{2};$$

- l'isotherme  $r$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , concave, dérivable à dérivée bornée sur  $\mathbb{R}$  et telle qu'il existe  $r_+ \in \mathbb{R}_+$

$$|r(x)| \leq r_+ |x|, \forall x \in \mathbb{R};$$

- le facteur de retard est tel que  $R > 0$ ;
- la concentration initiale est  $c_0 \in H^1(\Omega)$  avec  $0 \leq c_0(x) \leq 1$  presque partout dans  $\Omega$ ;
- la fonction  $g$  appartient à  $L^\infty(\Omega)$ ;
- la fonction  $p \mapsto f_i(\cdot, p_i)$ ,  $i = 1, 2$ , est de classe  $\mathcal{C}^1$ , croissante, définie sur  $\Omega \times [0, \bar{p}]$  et strictement concave<sup>1</sup>;
- l'image de  $f'_i$ , notée  $\mathcal{I}m(f'_i)$  pour  $i = 1, 2$ , est incluse dans  $[0, +\infty[$ ;
- la fonction  $f'_i{}^{-1}$  pour  $i = 1, 2$  est telle que

$$f'_i{}^{-1} : \mathcal{I}m(f'_i) \subset [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[;$$

- la fonction  $D : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est telle que pour presque tout  $x \in \Omega$ ,  $c \in \mathbb{R}_+ \mapsto D(x, c)$  est une fonction continue et bornée qui satisfait

$$(t, x) \mapsto D(x, c(t, x)) \in L^1(\Omega_T) \text{ si } c \in L^2(\Omega_T), \frac{\partial D}{\partial c} \geq 0 \text{ et } \frac{\partial^2 D}{\partial c^2} \geq 0;$$

- la donnée  $\phi_{bord}$  est dans  $H^1(\Omega)$ ;
- la donnée  $v_1$  est telle qu'il existe un relèvement satisfaisant  $v_1 \in (L^\infty(\Omega_T))^N$ ,  $\text{div}(v_1) \in L^\infty(\Omega_T)$  et  $\int_\Omega g dx = \int_{\partial\Omega} \kappa v_1 \cdot n d\sigma$  (voir la Remarque 2.3.2 du Chapitre 2);

---

1. En fait, on peut affaiblir l'hypothèse de continuité des fonctions  $f_i$ ,  $i = 1, 2$ , par rapport à  $p$  en supposant  $f_i$  semi-continue supérieurement et bornée par rapport à  $p$ , cf Remarque 1.2.1.

---

— la porosité  $\psi$  appartient à  $L^\infty(\Omega)$  et on note  $\psi_-$  et  $\psi_+$  des réels tels que

$$0 < \psi_- \leq \psi(x) \leq \psi_+, \text{ presque pour tout } x \in \Omega.$$

On définit deux ensembles

$$E_i = \{q \in L^2(0, T; L^2(\Omega_i)), \partial_z q = 0, 0 \leq q \leq \bar{p} \text{ presque partout dans } \Omega_i \times (0, T)\}$$

avec  $i = 1, 2$  et on choisit nos variables de contrôle  $p_i$  dans ces ensembles de sorte que les agriculteurs ne puissent dépasser un seuil maximal de quantité d'engrais à épandre, seuil noté  $\bar{p} \in \mathbb{R}$ .

## 5.2 Caractère bien posé du système d'état et définition de l'équilibre de Nash

Le système d'état est le problème (5.1)-(5.4) .

Un couple  $(c, \phi)$ , avec  $c \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega))$  et  $\phi \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega))$ , est solution faible de (5.1)-(5.4) si pour toute fonction test  $\varphi \in H^1(0, T; H_0^1(\Omega))$  telle que  $\varphi|_{t=T} = 0$  on a

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_T} R\psi c \partial_t \varphi \, dx \, dt - \int_{\Omega} R c_0 \varphi|_{t=0} \, dx + \int_{\Omega_T} \psi S(v) \nabla c \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt \\ + \int_{\Omega_T} (v \cdot \nabla c) \varphi \, dx \, dt = \int_{\Omega_T} \left( -r(c) + p_1 \chi_{\Omega_1} + p_2 \chi_{\Omega_2} - gc \right) \varphi \, dx \, dt, \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\int_{\Omega_T} \operatorname{div} v \varphi \, dx \, dt = \int_{\Omega_T} g \varphi \, dx \, dt, \quad (5.8)$$

et si pour toute fonction test  $\theta \in L^1(0, T; H_0^1(\Omega))$  on a

$$\int_{\Omega_T} v \cdot \nabla \theta \, dx \, dt = \int_{\Omega_T} -\kappa \nabla \phi \cdot \nabla \theta \, dx \, dt, \quad (5.9)$$

$$v \cdot n = -\kappa \nabla \phi \cdot n = -\kappa v_1 \cdot n \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \phi = \phi_{bord} \text{ sur } \Gamma_4 \times (0, T). \quad (5.10)$$

Les propositions et théorèmes d'existence et d'unicité présentés dans le Chapitre 2 s'appliquent au système d'état. En particulier, on a le lemme suivant (voir Chapitre 2, Proposition 2.3.1) :

**Lemme 5.2.1** *Soient  $(p_1, p_2) \in E_1 \times E_2$  donnés. Nous envisagerons des hypothèses parmi les suivantes :*



(1)  $\alpha_T > 0$ .

(2)  $\partial\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $\kappa \in (\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}))^{N \times N}$  et  $\phi_{bord} \in W^{2,p}(\bar{\Omega})$  avec  $p > N$ .

(3)  $\partial\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $\kappa = \kappa^* Id$  avec  $\kappa^* : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\kappa^* \in C^1(\bar{\Omega})$  et  $\phi_{bord} \in W^{2,p}(\bar{\Omega})$  avec  $p > \frac{N}{2}$ .

Si l'hypothèse (2) ou l'hypothèse (3) (ou simplement (1) si  $N = 2$ ) est vérifiée, alors il existe un couple  $(c, \phi)$  solution du problème (5.1)-(5.4) associé à  $(p_1, p_2)$  au sens (5.7)-(5.10). De plus,  $\phi$  est unique,  $\alpha_T |v|^{\frac{1}{2}} \nabla c \in (L^2(\Omega_T))^N$  et  $c \in H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$ . Selon les hypothèses, on a de plus :

- Comme  $r$  est dérivable à dérivée bornée sur le domaine image  $c(\Omega \times (0, T))$ , alors la solution est unique.
- Si (2) est vérifiée, alors  $\phi \in L^\infty(0, T; W^{2,p}(\Omega))$ .
- Si (3) est vérifiée, alors  $\phi \in L^\infty(0, T; W^{1,q}(\Omega))$  avec  $q > N$ .

Le Lemme 5.2.1 nous permet d'introduire la définition suivante.

**Définition 5.2.1** Soient  $p_1$  et  $p_2$  donnés dans  $E_1 \times E_2$ . On notera  $c(x, t; p_1, p_2)$  l'unique solution faible du système d'état (5.1)-(5.4) (sous les hypothèses du présent chapitre).

Le Lemme 5.2.1 prouve l'unicité de  $c$  si  $p_1$  et  $p_2$  sont donnés. On peut donc aussi à partir d'ici simplifier la notation  $J_i(p_i; p_{-i}, c(x, t; p_1, p_2))$  en  $J_i(p_i; p_{-i})$ ,  $i = 1, 2$ , où on a de plus posé  $p_{-1} = p_2$  et  $p_{-2} = p_1$ . Les problèmes de contrôle optimal (5.5)-(5.6), appelés également jeux différentiels, peuvent alors être définis comme suit.

**Définition 5.2.2** Trouver pour presque tout  $(t, x) \in \Omega_T$  les fonctions de meilleure réponse  $p_i^*(t, x; p_{-i})$ , telles que :

$$p_1^*(t, x; p_2) = \operatorname{argmax}_{q_1 \in E_1} J_1(q_1; p_2) \text{ pour tout } p_2 \in E_2, \quad (5.11)$$

$$p_2^*(t, x; p_1) = \operatorname{argmax}_{q_2 \in E_2} J_2(q_2; p_1) \text{ pour tout } p_1 \in E_1. \quad (5.12)$$

Dans ce chapitre, on suppose que  $r$  est concave, se plaçant ainsi dans le cas où la solution de (5.5) pour tout  $p_2$  donné et la solution de (5.6) pour tout  $p_1$  donné sont uniques (cf Théorème 3.6.1, résultat rappelé dans la Proposition 5.3.1 ci-après). Cette hypothèse donne donc sens à la Définition 5.2.2.

---

**Remarque 5.2.1** *On reprend ici le formalisme des Chapitres 2-4 où on a noté avec des étoiles,  $(p^*, c^*)$ , une solution du problème optimal. Bien sûr,  $c^*(t, x; p_1^*, p_2) = c(t, x; p_1^*, p_2)$  (voir le résultat d'unicité pour  $c$  à  $p_1^*$  et  $p_2^*$  donnés, rappelé au Lemme 5.2.1 et la Définition 5.2.1.*

On donne enfin la définition d'un équilibre de Nash, "intersection" des fonctions de meilleure réponse, pour notre problème :

**Définition 5.2.3** *Le quadruplet  $(p_1^b, p_2^b, c^b, \phi)$  est un équilibre de Nash si :*

$$J_1(p_1^b; p_2^b) \geq J_1(p_1; p_2^b) \text{ pour tout } p_1 \in E_1, \quad (5.13)$$

$$J_2(p_2^b; p_1^b) \geq J_2(p_2; p_1^b) \text{ pour tout } p_2 \in E_2, \quad (5.14)$$

où  $(c^b = c^b(\cdot, \cdot; p_1^b, p_2^b), \phi)$  est solution du problème

$$\begin{aligned} R\psi\partial_t c^b - \operatorname{div}(S(v)\psi\nabla c^b) + v \cdot \nabla c^b &= -r(c^b) + p_1^b\chi_{\Omega_1} + p_2^b\chi_{\Omega_2} - gc^b \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div}(v) &= g, \quad v = -\kappa\nabla\phi \text{ dans } \Omega \times (0, T), \end{aligned}$$

muni de

$$\begin{aligned} S(v)\nabla c^b \cdot n &= 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad c^b = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T) \text{ avec } c^b|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega, \\ v \cdot n &= -\kappa\nabla\phi \cdot n = -\kappa v_1 \cdot n \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad \phi = \phi_{bord} \text{ sur } \Gamma_4 \times (0, T). \end{aligned}$$

## 5.3 Résultats d'existence

On peut commencer par remarquer que l'application directe des résultats des Chapitres 2 et 3 permet d'établir l'existence d'une solution au problème de contrôle optimal supposant que les deux agriculteurs coopèrent. En posant  $p = p_1\chi_{\Omega_1} + p_2\chi_{\Omega_2}$ ,  $f(x, p) = f_1(x, p_1)\chi_{\Omega_1} + f_2(x, p_2)\chi_{\Omega_2}$ , on obtient par exemple (voir le Théorème 3.6.1 du Chapitre 3) l'existence et l'unicité de la solution optimale  $(p_1^\#, p_2^\#, c^\# = c(\cdot, \cdot; p_1^\#, p_2^\#))$  telle que

$$J_1(p_1^\#, p_2^\#) + J_2(p_2^\#, p_1^\#) = \max_{p_1 \in E_1, p_2 \in E_2} \{J_1(p_1, p_2) + J_2(p_2, p_1)\}.$$

Cependant, nous nous plaçons ici dans un cadre non coopératif. Les agriculteurs ne coopèrent donc pas ensemble et ne disposent pas d'information sur l'épandage de leur voisin. Cela dit, en imposant  $p \in E_1$  et en posant  $f = f_1\chi_{\Omega_1}$  et  $\gamma = p_2$ , puis en imposant  $p \in E_2$  et en posant  $f = f_2\chi_{\Omega_2}$  et  $\gamma = p_1$  dans le travail fait au Chapitre 3, on assure l'existence de  $p_1^*, c^*(t, x; p_1^*, p_2)$  et  $p_2^*, c^*(t, x; p_1, p_2^*)$  tels que décrits dans la Définition 5.2.2. Plus précisément :

**Proposition 5.3.1** *Pour un  $p_i$  donné dans  $E_i$ ,  $i = 1, 2$ , il existe une unique solution  $(p_{-i}^*, c^*(t, x; p_{-i}^*(t, x; p_i), p_i))$  telle que  $p_{-i}^*(t, x; p_i) = \operatorname{argmax}_{q_{-i} \in E_{-i}} J_{-i}(q_{-i}; p_i)$  et  $(c^*(t, x; p_{-i}^*(t, x; p_i), p_i), \phi)$  est la solution faible de (5.1)-(5.4) associée à  $(p_{-i}^*, p_i)$  au sens de la Définition 5.2.1.*

Le principal résultat théorique de ce chapitre est le suivant, annonçant un résultat d'existence, cette fois-ci sans hypothèse sous-jacente de coopération :

**Théorème 5.3.1** *Il existe un équilibre de Nash au sens de la Définition 5.2.3.*

*Preuve.* Soient  $(p_1, p_2)$  donnés dans  $E_1 \times E_2$ .

Soient  $p_1^* = \operatorname{argmax}_{q_1 \in E_1} J_1(q_1; p_2)$  et  $p_2^* = \operatorname{argmax}_{q_2 \in E_2} J_2(q_2; p_1)$ . Soit de plus,  $c_1^*(t, x) = c_1(t, x; p_1^*, p_2)$  et  $c_2^*(t, x) = c_2(t, x; p_1, p_2^*)$ .

D'après la Proposition 5.3.1, l'application  $\mathcal{C}$  telle que

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : E_1 \times E_2 &\rightarrow E_1 \times E_2 \\ (p_1, p_2) &\mapsto (p_1^*, p_2^*) \end{aligned}$$

est bien définie. Nous allons prouver que  $\mathcal{C}$  admet un point fixe. Montrons d'abord que  $\mathcal{C}$  est continue pour la topologie faible de  $L^2(\Omega_T)$ .

Soient  $(p_1^n)_{n \geq 0}$  et  $(p_2^n)_{n \geq 0}$  deux suites de  $E_1$  et  $E_2$  telles que<sup>2</sup>

$$p_1^n \rightharpoonup p_1 \text{ et } p_2^n \rightharpoonup p_2 \text{ faiblement dans } L^2(\Omega_T). \quad (5.15)$$

On leur associe  $(p_1^{*,n}, p_2^{*,n}) = \mathcal{C}(p_1^n, p_2^n)$ , ainsi que  $c_1^{*,n} = c_1(t, x; p_1^{*,n}, p_2^n)$  et  $c_2^{*,n} = c_2(t, x; p_1^n, p_2^{*,n})$  tels que :

$$p_1^{*,n} = \operatorname{argmax}_{q_1 \in E_1} J_1(q_1; p_2^n) \quad (5.16)$$

$$R\psi \partial_t c_1^{*,n} - \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla c_1^{*,n}) + v \cdot \nabla c_1^{*,n} = -r(c_1^{*,n}) + p_1^{*,n} \chi_{\Omega_1} + p_2^n \chi_{\Omega_2} - g c_1^{*,n} \text{ dans } \Omega_T, \quad (5.17)$$

$$S(v) \nabla c_1^{*,n} \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad c_1^{*,n} = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad c_1^{*,n}|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega, \quad (5.18)$$

et

$$p_2^{*,n} = \operatorname{argmax}_{q_2 \in E_2} J_2(q_2; p_1^n) \quad (5.19)$$

$$R\psi \partial_t c_2^{*,n} - \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla c_2^{*,n}) + v \cdot \nabla c_2^{*,n} = -r(c_2^{*,n}) + p_1^n \chi_{\Omega_1} + p_2^{*,n} \chi_{\Omega_2} - g c_2^{*,n} \text{ dans } \Omega_T, \quad (5.20)$$

$$S(v) \nabla c_2^{*,n} \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad c_2^{*,n} = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad c_2^{*,n}|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega. \quad (5.21)$$

Nous allons montrer que  $p_1^{*,n} \rightharpoonup p_1^*$  faiblement dans  $L^2(\Omega_T)$  et  $p_2^{*,n} \rightharpoonup p_2^*$  faiblement dans  $L^2(\Omega_T)$  où

$$p_1^* = \operatorname{argmax}_{q_1 \in E_1} J_1(q_1; p_2) \quad (5.22)$$

---

2. Dans toute cette preuve, on fera un léger abus de notation en désignant de même une fonction définie sur  $\Omega_i \times (0, T)$  et ne dépendant pas de  $z$ , et son prolongement par 0 à  $\Omega_T$ .

est associé à  $c_1^* = c_1(\cdot, \cdot; p_1^*, p_2)$  solution de

$$R\psi\partial_t c_1^* - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla c_1^*) + v \cdot \nabla c_1^* = -r(c_1^*) + p_1^* \chi_{\Omega_1} + p_2 \chi_{\Omega_2} - g c_1^* \text{ dans } \Omega_T, \quad (5.23)$$

$$S(v)\nabla c_1^* \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), c_1^* = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T), \text{ avec } c_1^*|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega, \quad (5.24)$$

et

$$p_2^* = \operatorname{argmax}_{q_2 \in E_2} J_2(q_2; p_1) \quad (5.25)$$

est associé à  $c_2^* = c_2(\cdot, \cdot; p_1, p_2^*)$  solution de

$$R\psi\partial_t c_2^* - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla c_2^*) + v \cdot \nabla c_2^* = -r(c_2^*) + p_1 \chi_{\Omega_1} + p_2^* \chi_{\Omega_2} - g c_2^* \text{ dans } \Omega_T, \quad (5.26)$$

$$S(v)\nabla c_2^* \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), c_2^* = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T) \text{ avec } c_2^*|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega. \quad (5.27)$$

On commence par établir des estimations uniformes par rapport à  $n$ . Dans la suite,  $C$  désigne une constante générique indépendante de  $n$ .

D'abord, par définition de  $E_1$  et  $E_2$ ,  $0 \leq p_i^{*,n} \leq \bar{p}$  presque partout dans  $\Omega_T$ ,  $i = 1, 2$ .

Ainsi, en particulier

$$\|p_i^{*,n}\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C, \quad i = 1, 2. \quad (5.28)$$

On considère à présent les estimations de  $c_1^{*,n}$  et  $c_2^{*,n}$ . Elles se font de manière complètement semblables au vu de la similitude de (5.17)-(5.18) et (5.20)-(5.21). On va donc simplement les détailler pour  $c_1^{*,n}$ . On rappelle qu'avec les hypothèses utilisées dans le présent chapitre, on est assuré que  $v \in (L^\infty(\Omega_T))^N$ . On multiplie (5.17) par  $c_1^{*,n}$  et on intègre par parties sur  $\Omega \times (0, \tau)$ ,  $\tau \in (0, T)$ , en utilisant (5.18). On obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{R}{2} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \int_\Omega \psi |c_1^{*,n}|^2 dx dt + \int_0^\tau \int_\Omega \psi S(v) \nabla c_1^{*,n} \cdot \nabla c_1^{*,n} dx dt + \int_0^\tau \int_\Omega (v \cdot \nabla c_1^{*,n}) c_1^{*,n} dx dt \\ & + \int_0^\tau \int_\Omega r(c_1^{*,n}) c_1^{*,n} dx dt - \int_0^\tau \int_\Omega (p_1^{*,n} \chi_{\Omega_1} + p_2^{*,n} \chi_{\Omega_2}) c_1^{*,n} dx dt + \int_0^\tau \int_\Omega g(c_1^{*,n})^2 dx dt = 0. \end{aligned}$$

On remarque que l'on a  $\int_0^\tau \int_\Omega \psi S(v) \nabla c_1^{*,n} \cdot \nabla c_1^{*,n} dx dt \geq \psi_- \int_0^\tau \int_\Omega (S_m + \alpha_T |v|) |\nabla c_1^{*,n}|^2 dx dt$ .

En utilisant l'hypothèse sur  $r$ , on écrit :

$$\int_0^\tau \int_\Omega |r(c_1^{*,n}) c_1^{*,n}| dx dt \leq r_+ \int_0^\tau \int_\Omega |c_1^{*,n}|^2 dx dt.$$

De plus, d'après les inégalités de Cauchy-Schwarz et Young, on a

$$\left| \int_0^\tau \int_\Omega (p_1^{*,n} \chi_{\Omega_1} + p_2^n \chi_{\Omega_2}) c_1^{*,n} dx dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_\Omega (p_1^{*,n} \chi_{\Omega_1} + p_2^n \chi_{\Omega_2})^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_\Omega (c_1^{*,n})^2 dx dt \leq C + C \int_0^\tau \int_\Omega (c_1^{*,n})^2 dx dt.$$

Comme  $v \in (L^\infty(\Omega_T))^N$ , on a :

$$\left| \int_0^\tau \int_\Omega (v \cdot \nabla c_1^{*,n}) c_1^{*,n} dx dt \right| \leq \|v\|_{L^\infty(\Omega_T)} \|\nabla c_1^{*,n}\|_{L^2(\Omega_T)} \|c_1^{*,n}\|_{L^2(\Omega_T)} \leq \frac{\psi_- S_m}{2} \int_{\Omega_T} |\nabla c_1^{*,n}|^2 dx dt + C \int_{\Omega_T} |c_1^{*,n}|^2 dx dt.$$

D'où,

$$\frac{\psi_- R}{2} \int_\Omega |c_1^{*,n}(\tau, x)|^2 dx dt + \int_0^\tau \int_\Omega \psi_- \left( \frac{S_m}{2} + \alpha_T |v| \right) |\nabla c_1^{*,n}|^2 dx dt \leq C \int_0^\tau \int_\Omega |c_1^{*,n}|^2 dx dt + \frac{\psi R}{2} \int_\Omega |c_0(x)|^2 dx + C.$$

Avec le Lemme de Gronwall, on en déduit que

$$\int_\Omega |c_1^{*,n}(\tau, x)|^2 dx \leq C \text{ presque pour tout } \tau \in (0, T)$$

et

$$\|c_1^{*,n}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C.$$

On revient alors à l'équation

$$\frac{\psi_- R}{2} \int_\Omega |c_1^{*,n}(\tau, x)|^2 dx + \int_0^\tau \int_\Omega \psi_- \left( \frac{S_m}{2} + \alpha_T |v| \right) |\nabla c_1^{*,n}|^2 dx dt \leq C \int_0^\tau \int_\Omega |c_1^{*,n}|^2 dx dt + C$$

d'où l'on tire

$$\int_0^\tau \int_\Omega |\nabla c_1^{*,n}|^2 dx dt \leq C$$

grâce au terme contrôlé avec Gronwall. On en déduit finalement que

$$\|c_i^{*,n}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C, \quad i = 1, 2 \quad (5.29)$$

grâce à la similarité des équations déterminant  $c_1^{*,n}$  et  $c_2^{*,n}$ .

Par ailleurs, en multipliant (5.17) par une fonction test  $\varphi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ , on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega R\psi \partial_t c_1^{*,n} \varphi \, dx \, dt &= \int_0^T \int_\Omega \left( \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla c_1^{*,n}) - v \cdot \nabla c_1^{*,n} - r(c_1^{*,n}) \right) \varphi \, dx \, dt \\ &+ \int_0^T \int_\Omega \left( p_1^{*,n} \chi_{\Omega_1} c_1^{*,n} + p_2^n \chi_{\Omega_2} c_1^{*,n} - g c_1^{*,n} \right) \varphi \, dx \, dt \\ &= - \int_0^T \int_\Omega \psi S(v) \nabla c_1^{*,n} \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega (v \cdot \nabla c_1^{*,n}) \varphi \, dx \, dt \\ &- \int_0^T \int_\Omega r(c_1^{*,n}) \varphi \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega p_1^{*,n} \chi_{\Omega_1} c_1^{*,n} + p_2^n \chi_{\Omega_2} c_1^{*,n} \varphi \, dx \, dt \\ &- \int_0^T \int_\Omega g c_1^{*,n} \varphi \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Or  $v \in (L^\infty(\Omega_T))^N$ ,  $r(c_1^{*,n})$  est borné dans  $L^2(\Omega_T)$ ,  $p \in L^\infty(\Omega_T)$  et  $g \in L^\infty(\Omega_T)$ . Donc  $\forall \varphi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ ,  $\left| \int_0^T \int_\Omega R\psi \partial_t c_1^{*,n} \varphi \, dx \, dt \right| = \left| \langle \psi R \partial_t c_1^{*,n}, \varphi \rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \right| \leq C \|\varphi\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}$ , c'est-à-dire que  $\psi R \partial_t c_1^{*,n}$  est uniformément borné dans  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ . Des estimations (5.28)-(5.29), on déduit l'existence de fonctions limites  $p_i^0 \in L^2(\Omega_T)$  et  $c_i^0 \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  et d'une sous-suite non renommée par commodité, telles que

$$\begin{aligned} p_i^{*,n} &\rightharpoonup p_i^0 \text{ faiblement dans } L^2(\Omega_T), \quad i = 1, 2, \\ c_i^{*,n} &\rightarrow c_i^0 \text{ dans } L^2(\Omega_T) \text{ et presque partout dans } \Omega_T, \quad i = 1, 2, \\ c_i^{*,n} &\rightharpoonup c_i^0 \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

la compacité de  $c_i^{*,n}$  étant établie avec un argument de type Aubin grâce au fait que  $\psi \geq \psi_- > 0$  (voir Galusinski et Saad [36]). On rappelle ici que le but de cette partie de preuve est de montrer que  $p_i^0 = p_i^*$  et  $c_i^0 = c_i^*$ ,  $i = 1, 2$ . D'abord, les résultats de convergence ci-dessus sont suffisants (avec le théorème de convergence dominée de Lebesgue et la continuité de l'application  $c \in \mathcal{C}(0, T; L^2(\Omega)) \mapsto c|_{t=0}$ ) pour passer à la limite dans (5.17)-(5.18) et (5.20)-(5.21). On en tire :

$$c_1^0(\cdot, \cdot) = c(\cdot, \cdot; p_1^0, p_2) \text{ et } c_2^0(\cdot, \cdot) = c(\cdot, \cdot; p_1, p_2^0). \quad (5.30)$$

Il ne reste donc plus qu'à montrer que  $p_1^0 = p_1^*$  et  $p_2^0 = p_2^*$ . On va utiliser le comportement limite du problème de contrôle. On sait d'une part par définition de l'optimum  $p_1^*$  que

$$J_1(p_1^0; p_2) \leq J_1(p_1^*; p_2). \quad (5.31)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
J_1(p_1^0; p_2) &= \int_0^T \left( \int_{\Omega_1} f_1(x, p_1^0) dx - \int_{\Omega} D(x, c_1^0) dx \right) e^{-\rho t} dt \\
&\quad - \nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c_1^0(T, x)) dx \\
&\geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega_1} f_1(x, p_1^{*,n}) e^{-\rho t} dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} D(x, c_1^0) e^{-\rho t} dx dt \\
&\quad - \nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c_1^0(T, x)) dx
\end{aligned}$$

car la fonction  $f$  est concave.

Comme  $c_1^{*,n} \rightarrow c_1^0$  dans  $\mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega))$  et presque partout dans  $\Omega_T$ , on sait grâce à la continuité de  $D$  que  $\int_0^T \int_{\Omega} D(x, c_1^0) e^{-\rho t} dx dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} D(x, c_1^{*,n}) e^{-\rho t} dx dt$  et que  $\nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c_1^0(T, x)) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c_1^{*,n}(T, x)) dx$  et, avec la relation précédente, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
J_1(p_1^0; p_2) &\geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \left( \int_{\Omega_1} f_1(x, p_1^{*,n}) dx - \int_{\Omega} D(x, c_1^{*,n}) dx \right) e^{-\rho t} dt \\
&\quad - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c_1^{*,n}(T, x)) dx \\
&= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} J_1(p_1^{*,n}; p_2^n). \tag{5.32}
\end{aligned}$$

Par définition de l'optimum  $p_1^{*,n}$ , on a  $J_1(p_1^{*,n}; p_2^n) \geq J_1(q_1; p_2^n)$  pour tout  $q_1 \in E_1$  et donc, en prenant la limite supérieure et en utilisant (5.32) :

$$\begin{aligned}
J_1(p_1^0; p_2) &\geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^T \left( \int_{\Omega_1} f_1(x, q_1) dx - \int_{\Omega} D(x, c(t, x; q_1, p_2^n)) dx \right) e^{-\rho t} dt \right. \\
&\quad \left. - \nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c(T, x; q_1, p_2^n)) dx \right), \tag{5.33}
\end{aligned}$$

pour tout  $q_1 \in E_1$ . On va en déduire que  $J_1(p_1^0; p_2)$  est un majorant de  $J_1(q_1; p_2)$  pour tout  $q_1 \in E_1$ . En effet, on peut établir les mêmes estimations pour la suite  $c(\cdot, \cdot; q_1, p_2^n)$  que celles montrées pour  $c_1^{*,n}$  et en conclure que  $c(\cdot, \cdot; q_1; p_2^n) \rightarrow c(\cdot, \cdot; q_1, p_2)$  dans  $L^2(\Omega_T)$

---

et presque partout dans  $\Omega_T$ . On a donc par conséquent

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^T \left( \int_{\Omega_1} f_1(x, q_1) dx - \int_{\Omega} D(x, c(t, x; q_1, p_2^n)) dx \right) e^{-\rho t} dt \right. \\
& \quad \left. - \nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c(T, x; q_1, p_2^n)) dx \right) \\
& = \int_0^T \left( \int_{\Omega_1} f_1(x, q_1) dx - \int_{\Omega} D(x, c(t, x; q_1, p_2)) dx \right) e^{-\rho t} dt \\
& \quad - \nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c(T, x; q_1, p_2)) dx \\
& = J_1(q_1, p_2).
\end{aligned}$$

En insérant ce dernier calcul dans (5.33), on obtient

$$J_1(p_1^0; p_2) \geq J_1(q_1; p_2) \text{ pour tout } q_1 \in E_1.$$

C'est vrai en particulier pour  $q_1 = p_1^*$  :

$$J_1(p_1^0; p_2) \geq J_1(p_1^*; p_2). \quad (5.34)$$

On conclut de (5.31) et (5.34) que  $J_1(p_1^0; p_2) = J_1(p_1^*; p_2)$ . La fonction  $p_1^0$  est donc solution du même problème de contrôle optimal que  $p_1^*$ . La solution de ce problème de contrôle optimal étant unique (voir Proposition 5.3.1), on a donc

$$p_1^0 = p_1^*$$

et l'ensemble de la suite  $p_1^{*,n}$  converge vers cette limite. Le résultat équivalent pour  $p_2^{*,n}$  se démontre de même.

On a ainsi établi la continuité de  $\mathcal{C}$  pour la topologie faible de  $L^2(\Omega_T) \times L^2(\Omega_T)$ . Mais on peut de plus démontrer que  $\mathcal{C}$  est à image précompacte dans  $L^2(\Omega_T) \times L^2(\Omega_T)$ . Comme  $L^2(\Omega_T)$  est un espace vectoriel normé, il est clairement métrisable, et il est équivalent de démontrer la compacité séquentielle de l'image de  $\mathcal{C}$ . En poursuivant l'analyse ci-dessus, où on a déjà établi que  $p_i^{*,n} \rightharpoonup p_i^*$  faiblement dans  $L^2(\Omega_T)$ , il ne nous reste plus qu'à montrer qu'en fait

$$p_i^{*,n} \rightarrow p_i^* \text{ dans } L^2(\Omega_T), \quad i = 1, 2.$$

Reprenons (5.32) : sachant maintenant que  $p_i^* = p_i^0$ , on a :

$$J_1(p_1^*; p_2) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} J_1(p_1^{*,n}; p_2^n). \quad (5.35)$$

Par définition de  $p_1^{*,n} = \operatorname{argmax}_{q_1 \in E_1} J_1(q_1; p_2^n)$ , on a en particulier, puisque  $p_1^* \in E_1$ ,



$J_1(p_1^{*,n}; p_2^n) \geq J_1(p_1^*; p_2^n)$ . La limite inférieure de cette relation est

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} J_1(p_1^{*,n}; p_2^n) &\geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} J_1(p_1^*; p_2^n) \\ &= \int_0^T \int_{\Omega_1} f_1(x, p_1^*) e^{-\rho t} dx dt - \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^T \int_{\Omega} D(x; c(t, x; p_1^*, p_2^n)) e^{-\rho t} dx dt \right. \\ &\quad \left. - \nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x; c(T, x; p_1^*, p_2^n)) dx \right) \end{aligned} \quad (5.36)$$

où  $c(t, x; p_1^*, p_2^n)$  satisfait

$$\begin{aligned} R\psi \partial_t c(t, x; p_1^*, p_2^n) - \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla c(t, x; p_1^*, p_2^n)) + v \cdot \nabla c(t, x; p_1^*, p_2^n) = \\ - r(c(t, x; p_1^*, p_2^n)) + p_1^* \chi_{\Omega_1} + p_2^n \chi_{\Omega_2} - gc(t, x; p_1^*, p_2^n) \text{ dans } \Omega_T, \end{aligned}$$

$$S(v) \nabla c(t, x; p_1^*, p_2^n) \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad c(t, x; p_1^*, p_2^n) = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T),$$

avec  $c(0, x; p_1^*, p_2^n) = c_0$  dans  $\Omega$ .

Une fois encore, on peut extraire une sous-suite de  $c(\cdot, \cdot; p_1^*, p_2^n)$  convergeant fortement dans  $L^2(\Omega_T)$ , presque partout dans  $\Omega_T$  et faiblement dans  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  vers l'unique solution de

$$\begin{cases} R\psi \partial_t c - \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla c) + v \cdot \nabla c = -r(c) + p_1^* \chi_{\Omega_1} + p_2 \chi_{\Omega_2} - gc \text{ dans } \Omega_T, \\ S(v) \nabla c \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad c = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T), \text{ avec } c|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

c'est-à-dire que  $c(\cdot, \cdot; p_1^*, p_2^n)$  converge fortement vers  $c(\cdot, \cdot; p_1^*, p_2)$ . On peut alors utiliser la continuité de  $D$  pour calculer la limite au second membre de (5.36). On obtient

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} J_1(p_1^{*,n}; p_2^n) \geq J_1(p_1^*; p_2). \quad (5.37)$$

De (5.35) et (5.37), on tire :

$$J_1(p_1^*; p_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_1(p_1^{*,n}; p_2^n). \quad (5.38)$$

Mais on peut également montrer que  $c(\cdot, \cdot; p_1^{*,n}, p_2^n) \rightarrow c(\cdot, \cdot; p_1^*, p_2)$  dans  $L^2(\Omega_T)$  et presque partout dans  $\Omega_T$  et, grâce à la continuité de  $D$ ,

$$\begin{cases} \int_{\Omega_T} D(x, c(t, x; p_1^{*,n}, p_2^n)) e^{-\rho t} dx dt \rightarrow \int_{\Omega_T} D(x, c(t, x; p_1^*, p_2)) e^{-\rho t} dx dt, \\ \int_{\Omega} D(x, c(T, x; p_1^{*,n}, p_2^n)) e^{-\rho T} dx \rightarrow \int_{\Omega} D(x, c(T, x; p_1^*, p_2)) e^{-\rho T} dx. \end{cases}$$

L'égalité (5.38) revient donc à :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega_1} f_1(x, p_1^{*,n}) e^{-\rho t} dx dt = \int_0^T \int_{\Omega_1} f_1(x, p_1^*) e^{-\rho t} dx dt.$$

La fonction  $f_1$  étant continue et strictement concave par rapport à sa deuxième variable, on tire de la limite précédente que (voir théorème 3 de Visintin [83]) :

$$p_1^{*,n} \rightarrow p_1^* \text{ dans } L^2(\Omega_1 \times (0, T)).$$

La convergence forte de  $p_2^{*,n}$  peut être établie de même. On a donc montré que  $\mathcal{C}$  est à image précompacte dans  $E_1 \times E_2$ .

Le théorème du point fixe de Schauder peut donc être appliqué :  $\mathcal{C}$  admet un point fixe  $(p_1^b, p_2^b) \in E_1 \times E_2$  tel que

$$\mathcal{C}(p_1^b, p_2^b) = (p_1^b, p_2^b).$$

Par définition de  $\mathcal{C}$ , on a :

$$\begin{cases} p_1^b = \operatorname{argmax}_{q_1 \in E_1} J_1(q_1; p_2^b) \text{ donc } J_1(p_1^b; p_2^b) \geq J_1(q_1; p_2^b) \text{ pour tout } q_1 \in E_1, \\ p_2^b = \operatorname{argmax}_{q_2 \in E_2} J_2(q_2; p_1^b) \text{ donc } J_2(p_2^b; p_1^b) \geq J_2(q_2; p_1^b) \text{ pour tout } q_2 \in E_2. \end{cases}$$

Le couple  $(p_1^b, p_2^b)$  est donc bien un équilibre de Nash pour le problème considéré. ■

On a de plus le résultat d'unicité suivant.

**Remarque 5.3.1** *Il ne peut exister deux équilibres de Nash, au sens de la Définition 5.2.3, donnant la même valeur d'objectif.*

*Preuve.* Soient  $(\underline{p}_1^b, \underline{p}_2^b, \underline{c}^b, \underline{\phi})$  et  $(\overline{p}_1^b, \overline{p}_2^b, \overline{c}^b, \overline{\phi})$  deux équilibres de Nash et leurs concentrations et charges associées tels que

$$J_1(\underline{p}_1^b; \underline{p}_2^b) = J_1(\overline{p}_1^b; \overline{p}_2^b) \geq J_1(p_1; \underline{p}_2^b) \text{ pour tout } p_1 \in E_1,$$

$$J_2(\underline{p}_2^b; \underline{p}_1^b) = J_2(\overline{p}_2^b; \overline{p}_1^b) \geq J_2(p_2; \overline{p}_1^b) \text{ pour tout } p_2 \in E_2,$$

et  $c^b(t, x) = c(t, x; \underline{p}_1^b, \underline{p}_2^b)$ ,  $\underline{c}^b(t, x) = c(t, x; \underline{p}_1^b, \underline{p}_2^b)$ .

On pose

$$J_{i,Nash} := J_i(\underline{p}_i^b; \underline{p}_{-i}^b) = J_i(\overline{p}_i^b; \overline{p}_{-i}^b), \quad i = 1, 2.$$

Supposons d'abord que  $\underline{p}_1^b \neq \overline{p}_1^b$ . On regarde ce que vaut

$$\begin{aligned} J_1 \left( \frac{1}{2}(\underline{p}_1^b + \overline{p}_1^b); \frac{1}{2}(\underline{p}_2^b + \overline{p}_2^b) \right) &= \int_{\mathbb{R}^+} \left( \int_{\Omega_1} f_1(x, \frac{1}{2}(\underline{p}_1^b + \overline{p}_1^b)) dx - \int_{\Omega} D(x, c') dx \right) e^{-\rho t} dt \\ &\quad - \nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c'(T, x)) dx \end{aligned}$$

où  $c'$  est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} R\psi\partial_t c' + v \cdot \nabla c' - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla c') = -r(c') - gc' + \frac{1}{2}(p_1^b + \underline{p}_1^b)\chi_{\Omega_1} + \frac{1}{2}(p_2^b + \underline{p}_2^b)\chi_{\Omega_2} \\ \hspace{20em} \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ S(v)\nabla c' \cdot n = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \Gamma_1, c' = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \Gamma_2, \\ \text{où } \begin{cases} \operatorname{div}(v) = g, v = -\kappa\nabla\phi^*, \text{ dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ v \cdot n = -\kappa\nabla\phi \cdot n = -\kappa v_1 \cdot n \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \Gamma_3, \phi = \phi_{bord} \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \Gamma_4. \end{cases} \end{array} \right. \quad (5.39)$$

Grâce à la propriété de stricte concavité de  $f_1$ , on sait déjà que, comme  $p_1^b \neq \underline{p}_1^b$ , presque partout dans  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ ,

$$\begin{aligned} J_1 \left( \frac{1}{2}(p_1^b + \underline{p}_1^b); \frac{1}{2}(p_2^b + \underline{p}_2^b) \right) &> \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega_1} \left( \frac{1}{2}f_1(x, p_1^b) + \frac{1}{2}f_1(x, \underline{p}_1^b) \right) e^{-\rho t} dx dt \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} D(x, c') e^{-\rho t} dx dt - \nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c'(T, x)) dx. \end{aligned} \quad (5.40)$$

De façon identique à la démonstration du paragraphe 3.4 pages 96-99, grâce aux propriétés de  $r$ , on montre ensuite que  $-D(x, c) \leq -D(x, c')$  où  $c = \frac{1}{2}(c^b + \underline{c}^b)$  est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} R\psi\partial_t c + v \cdot \nabla c - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla c) = -\frac{1}{2}r(c(\cdot, \cdot; p_1^b, p_2^b)) - \frac{1}{2}r(\underline{c}(\cdot, \cdot; p_1^b, p_2^b)) - gc \\ \hspace{10em} + \frac{1}{2}(p_1^b + \underline{p}_1^b)\chi_{\Omega_1} + \frac{1}{2}(p_2^b + \underline{p}_2^b)\chi_{\Omega_2} \text{ dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ S(v)\nabla c \cdot n = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \Gamma_1, c = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \Gamma_2, \\ \text{où } \begin{cases} \operatorname{div}(v) = g, v = -\kappa\nabla\phi^*, \text{ dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ v \cdot n = -\kappa\nabla\phi \cdot n = -\kappa v_1 \cdot n \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \phi = \phi_{bord} \text{ sur } \Gamma_4 \times (0, T). \end{cases} \end{array} \right.$$

En utilisant ce dernier résultat puis la convexité de  $D$ , on obtient à partir de (5.40) :

$$\begin{aligned}
J_1 \left( \frac{1}{2}(p_1^b + \underline{p}_1^b); \frac{1}{2}(p_2^b + \underline{p}_2^b) \right) &> \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega_1} \left( \frac{1}{2}f_1(x, p_1^b) + \frac{1}{2}f_1(x, \underline{p}_1^b) \right) e^{-\rho t} dx dt \\
&- \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} D(x, c') e^{-\rho t} dx dt - \nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c'(T, x)) dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega_1} \left( \frac{1}{2}f_1(x, p_1^b) + \frac{1}{2}f_1(x, \underline{p}_1^b) \right) e^{-\rho t} dx dt \\
&- \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\Omega} D(x, c) e^{-\rho t} dx dt - \nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c(T, x)) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{\Omega_1} \frac{1}{2}f_1(x, p_1^b) dx + \int_{\Omega_1} \frac{1}{2}f_1(x, \underline{p}_1^b) dx \right) e^{-\rho t} dt \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{\Omega} D(x, \frac{1}{2}c^b + \frac{1}{2}\underline{c}^b) dx \right) e^{-\rho t} dt \\
&\quad - \nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, \frac{1}{2}c^b(T, x) + \frac{1}{2}\underline{c}^b(T, x)) dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{\Omega_1} \frac{1}{2}f_1(x, p_1^b) dx + \int_{\Omega_1} \frac{1}{2}f_1(x, \underline{p}_1^b) dx \right) e^{-\rho t} dt \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{\Omega} \frac{1}{2}D(x, c^b) dx \right) e^{-\rho t} dt - \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{\Omega} \frac{1}{2}D(x, \underline{c}^b) dx \right) e^{-\rho t} dt \\
&\quad - \frac{\nu}{2}e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c^b(T, x)) dx - \frac{\nu}{2}e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, \underline{c}^b(T, x)) dx = 2 \times \frac{1}{2}J_{1,Nash}
\end{aligned}$$

soit  $J_1 \left( \frac{1}{2}(p_1^b + \underline{p}_1^b); \frac{1}{2}(p_2^b + \underline{p}_2^b) \right) > J_{1,Nash}$ . De plus, en utilisant encore  $-D(x, c) \leq -D(x, c')$ , on vérifie également que  $J_2 \left( \frac{1}{2}(p_2^b + \underline{p}_2^b); \frac{1}{2}(p_1^b + \underline{p}_1^b) \right) \geq J_{2,Nash}$ .

On montre de la même manière que si  $p_2^b \neq \underline{p}_2^b$  alors  $J_2 \left( \frac{1}{2}(p_2^b + \underline{p}_2^b); \frac{1}{2}(p_1^b + \underline{p}_1^b) \right) > J_{2,Nash}$  et  $J_1 \left( \frac{1}{2}(p_1^b + \underline{p}_1^b); \frac{1}{2}(p_2^b + \underline{p}_2^b) \right) \geq J_{1,Nash}$ . D'où une contradiction avec la définition de la valeur maximale  $(J_{1,Nash}; J_{2,Nash})$  si  $(p_1^b, p_2^b) \neq (\underline{p}_1^b, \underline{p}_2^b)$ . ■

## 5.4 Relaxation des contraintes des Lagrangiens

Dans ce paragraphe, afin de simplifier les calculs, on prend  $\phi_{bord} = 0$ . Le théorème suivant nous donne les conditions nécessaires qu'un équilibre de Nash exhibé au Théorème 5.3.1 doit satisfaire.

---

**Théorème 5.4.1** *On suppose que  $p_i \mapsto f_i(x, p_i)$ ,  $i = 1, 2$ , est de classe  $\mathcal{C}^1$  pour tout  $x \in \Omega$  et que  $r$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soit  $(p_1^b, p_2^b)$  un équilibre de Nash donné par le Théorème 5.3.1. On pose  $c^b(t, x) = c(t, x; p_1^b, p_2^b)$ . Il existe  $(\mu_1, \mu_2) \in (L^2(0, T; H^1(\Omega)))^2$  tel que*

$$\frac{\partial f_1}{\partial p}(x, p_1^b(t, x)) = \mu_1(t, x)\chi_{\Omega_1}(x) \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.41)$$

et

$$\frac{\partial f_2}{\partial p}(x, p_2^b(t, x)) = \mu_2(t, x)\chi_{\Omega_2}(x) \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.42)$$

satisfaisant les conditions terminales

$$R\psi\mu_1(T, x) = \frac{\partial D}{\partial c}(x, c^b(T, x)) \text{ dans } \Omega \times (0, T) \quad (5.43)$$

$$R\psi\mu_2(T, x) = \frac{\partial D}{\partial c}(x, c^b(T, x)) \text{ dans } \Omega \times (0, T) \quad (5.44)$$

et les équations

$$R\psi\partial_t\mu_1 = -v \cdot \nabla\mu_1 - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla\mu_1) + r'(c^b)\mu_1 + \mu_1 R\psi\rho - \frac{\partial D}{\partial c}(x, c^b) \text{ dans } \Omega \times (0, T) \quad (5.45)$$

$$R\psi\partial_t\mu_2 = -v \cdot \nabla\mu_2 - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla\mu_2) + r'(c^b)\mu_2 + \mu_2 R\psi\rho - \frac{\partial D}{\partial c}(x, c^b) \text{ dans } \Omega \times (0, T) \quad (5.46)$$

munies des conditions aux bords

$$\psi S(v)\nabla\mu_1 \cdot n + (v \cdot n)\chi_{\Gamma_4} - \kappa(v_1 \cdot n)\chi_{\Gamma_3}\mu_1 = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \mu_1 = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T) \quad (5.47)$$

et

$$\psi S(v)\nabla\mu_2 \cdot n + (v \cdot n)\chi_{\Gamma_4} - \kappa(v_1 \cdot n)\chi_{\Gamma_3}\mu_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \mu_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T). \quad (5.48)$$

*Preuve.* On rappelle les définitions des objectifs :

$$J_1(p_1; p_2^b, c) = \int_0^T \left( \int_{\Omega_1} f_1(x, p_1(t, x)) dx - \int_{\Omega} D(x, c(t, x; p_1, p_2^b)) dx \right) e^{-\rho t} dt \\ - \nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c(T, x; p_1, p_2^b)) dx$$

et

$$J_2(p_2; p_1^b, c) = \int_0^T \left( \int_{\Omega_2} f_2(x, p_2(t, x)) dx - \int_{\Omega} D(x, c(t, x; p_1^b, p_2)) dx \right) e^{-\rho t} dt \\ - \nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c(T, x; p_1^b, p_2)) dx$$

en considérant le coût terminal de la présence de la pollution au niveau du puits.

On rappelle que  $p_1^b = \operatorname{argmax}_{p_1 \in E_1} J_1(p_1; p_2^b)$  et  $p_2^b = \operatorname{argmax}_{p_2 \in E_2} J_2(p_2; p_1^b)$ .

On définit formellement les Lagrangiens associés à ces deux problèmes, avec  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les variables adjointes, par :

$$\mathcal{L}_1(c, p_1, \lambda_1) = J_1(p_1; p_2^b, c) + \int_0^T \int_{\Omega} (R\psi \partial_t c + v \cdot \nabla c - \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla c) + r(c)) \\ + gc - p_1 \chi_{\Omega_1} - p_2^b \chi_{\Omega_2}) \lambda_1 dx dt$$

et

$$\mathcal{L}_2(c, p_2, \lambda_2) = J_2(p_2; p_1^b, c) + \int_0^T \int_{\Omega} (R\psi \partial_t c + v \cdot \nabla c - \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla c) + r(c)) \\ + gc - p_1^b \chi_{\Omega_1} - p_2 \chi_{\Omega_2}) \lambda_2 dx dt.$$

On étudie d'abord  $\mathcal{L}_1(c, p_1, \lambda_1)$ . Par intégrations par parties et en appliquant le théorème de Fubini on trouve :

$$\mathcal{L}_1(c, p_1, \lambda_1) = \int_0^T \int_{\Omega_1} f_1(x, p_1(t, x)) e^{-\rho t} dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} D(x, c(t, x; p_1, p_2^b)) e^{-\rho t} dx dt \\ - \nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c(T, x; p_1, p_2^b)) dx \\ + \int_0^T \int_{\Omega} (-R\psi \partial_t \lambda_1 c + (v \cdot \nabla c) \lambda_1 + \psi S(v) \nabla c \cdot \nabla \lambda_1 + r(c) \lambda_1 + gc \lambda_1 - p_1 \chi_{\Omega_1} \lambda_1 - p_2^b \chi_{\Omega_2} \lambda_1) dx dt \\ + R\psi \int_{\Omega} c(T, x) \lambda_1(T, x) dx - R\psi \int_{\Omega} c_0(x) \lambda_1(0, x) dx - \int_0^T \int_{\Gamma_2} (\psi S(v) \nabla c \cdot n) \lambda_1 d\sigma dt.$$

On utilise le fait que  $(v \cdot \nabla c)\lambda_1 = (\operatorname{div}(vc) - c \operatorname{div}(v))\lambda_1$ , que  $\operatorname{div} v = g$ , et on intègre par parties  $\operatorname{div}(vc)$ . On obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(c, p_1, \lambda_1) &= \int_0^T \int_{\Omega_1} f_1(x, p_1(t, x))e^{-\rho t} dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} D(x, c(t, x; p_1, p_2^b))e^{-\rho t} dx dt \\ &\quad - \nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c(T, x; p_1, p_2^b)) dx \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} (-R\psi \partial_t \lambda_1 c - (v \cdot \nabla \lambda_1)c - cg\lambda_1 + \psi S(v)\nabla c \cdot \nabla \lambda_1) + (r(c) + gc - p_1 \chi_{\Omega_1} - p_2^b \chi_{\Omega_2})\lambda_1 dx dt \\ &\quad + R\psi \int_{\Omega} c(T, x)\lambda_1(T, x) dx - R\psi \int_{\Omega} c_0(x)\lambda_1(0, x) dx \\ &- \int_0^T \int_{\Gamma_2} (\psi S(v)\nabla c \cdot n)\lambda_1 d\sigma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} (v \cdot n)\chi_{\Gamma_4}\lambda_1 c d\sigma dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \kappa(v_1 \cdot n)\chi_{\Gamma_3}\lambda_1 c d\sigma dt. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 1, on a donc

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_1(c, p_1, \lambda) &= \int_0^T \int_{\Omega_1} \left( \frac{\partial f_1}{\partial p_1}(x, p_1(t, x))e^{-\rho t} - \lambda_1 \right) \delta p_1 dx dt \\ &\quad + \int_{\Omega} \left( R\psi \lambda_1(T, x) - \nu \frac{\partial D}{\partial c}(x, c(T, x; p_1, p_2^b))e^{-\rho T} \right) \delta c(T, x) dx \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Omega} (-R\psi \partial_t \lambda_1 - v \cdot \nabla \lambda_1 + r'(c)\lambda_1 - \frac{\partial D}{\partial c}(x, c(t, x; p_1, p_2^b))e^{-\rho t}) \delta c dx dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla \lambda_1) \delta c dx dt - \int_0^T \int_{\Gamma_2} (\psi S(v)\delta(\nabla c) \cdot n)\lambda_1 d\sigma dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Gamma_1} (\psi S(v)\nabla \lambda_1) \cdot n \delta c d\sigma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} (v \cdot n)\chi_{\Gamma_4}\lambda_1 \delta c d\sigma dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \kappa(v_1 \cdot n)\chi_{\Gamma_3}\lambda_1 \delta c d\sigma dt. \end{aligned}$$

On pose  $\mu_1 = \lambda_1 e^{\rho t}$ .

L'annulation de la variation du Lagrangien en  $p_1 = p_1^b$  suivant la variable d'état  $c(T, x)$  nous fournit la condition terminale (5.43).

En annulant la variation du Lagrangien suivant la variable de contrôle  $p_1$ , on obtient la condition d'optimalité (5.41).

En annulant la variation du Lagrangien suivant la variable d'état  $c$ , on obtient l'équation adjointe (5.45) et les conditions aux bords (5.47).

On fait de même pour  $\mathcal{L}_2(c, p_2, \lambda_2)$ , et on en déduit (5.42), (5.44), (5.46) et (5.48). ■

Les équations adjointes (5.45) et (5.46) sont anti-diffusives mais bien posées car complétées par des conditions terminales. On effectue un changement d'inconnue et on définit la fonction  $\mu_i^*$  sur  $\Omega_T$  par :

$$\mu_i^b(t, x) = \mu_i(T - t, x), \quad i = 1, 2.$$

On a alors  $\partial_t \mu_i^b(t, x) = \partial_t(\mu_i(T - t, x)) = -\partial_t \mu_i(T - t, x)$ , où  $\mu_i(T - t, x)$  est telle que

$$\begin{aligned} R\psi \partial_t \mu_i(T - t, x) &= -v(T - t, x) \cdot \nabla \mu_i(T - t, x) - \operatorname{div}(\psi S(v(T - t, x)) \nabla \mu_i(T - t, x)) \\ &\quad + r'(c^b(T - t, x)) \mu_i + R\psi \rho \mu_i(T - t, x) - \frac{\partial D}{\partial c}(x, c^b(T - t, x)) \text{ dans } \Omega_T, \end{aligned}$$

$i = 1, 2$ . Nous introduisons la notation suivante : pour toute fonction  $f$  définie sur  $[0, T]$ , on notera  $\mathcal{C}_T f$  la fonction définie par

$$\mathcal{C}_T f(t) = f(T - t), \quad t \in [0, T].$$

Le Théorème 5.4.1 nous conduit à étudier le problème suivant :

**Définition 5.4.1** Soit  $v$  tel que  $v = -\kappa \nabla \phi$ ,  $\operatorname{div}(v) = g$ ,  $v \cdot n = -\kappa v_1 \cdot n$  sur  $\Gamma_3 \times (0, T)$  et  $\phi = 0$  sur  $\Gamma_4 \times (0, T)$ .

On appelle *Problème adj2* le problème suivant :

Trouver  $(c^b, \mu_1^b, \mu_2^b)$  satisfaisant

$$\begin{aligned} R\psi \partial_t c^b + v \cdot \nabla c^b - \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla c^b) &= -r(c^b) - g c^b + \chi_{\Omega_1} F(\chi_{\Omega_1} \mathcal{C}_T \mu_1^b) + \chi_{\Omega_2} F(\chi_{\Omega_2} \mathcal{C}_T \mu_2^b) \\ &\text{dans } \Omega_T, \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$S(v) \nabla c^b \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad c^b = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad c^b|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega, \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} R\psi \partial_t \mu_i^b - \mathcal{C}_T v \cdot \nabla \mu_i^b - \operatorname{div}(\psi S(\mathcal{C}_T v) \nabla \mu_i^b) + r'(\mathcal{C}_T c^b) \mu_i^b + R\psi \rho \mu_i^b - \frac{\partial D}{\partial c}(\cdot, \mathcal{C}_T c^b) &= 0 \\ \text{dans } \Omega_T, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} \psi S(\mathcal{C}_T v) \nabla \mu_i^b \cdot n + (\mathcal{C}_T v \cdot n) \chi_{\Gamma_4} - (\kappa \mathcal{C}_T v_1 \cdot n) \chi_{\Gamma_3} &= 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\ \mu_i^b &= 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (5.52)$$

$$R\psi \mu_i^b|_{t=0} = \nu \frac{\partial D}{\partial c}(\cdot, c^b|_{t=T}) \text{ dans } \Omega, \quad i = 1, 2, \quad (5.53)$$

où on a défini  $F$  par  $\frac{\partial f}{\partial p}(x, F(y)) = y$ .

On a de plus le théorème suivant :

**Théorème 5.4.2** On suppose que  $r' \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ . On suppose également que l'une des deux propositions suivantes est vérifiée :

(1)  $\kappa = \kappa_- \operatorname{Id}$  avec  $\kappa_- > 0$  ;

(2)  $\kappa = \kappa^* \operatorname{Id}$  avec  $\kappa^* : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\kappa^* \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ .

Alors il existe une solution faible  $(c^b, \mu_1^b, \mu_2^b)$  du Problème  $\mathcal{P}_{adj2}$  défini à la Définition 5.4.1, telle que  $(c^b, \mu_1^b, \mu_2^b) \in (L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)))^3$ . Si de plus il existe un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  tel que  $r$  soit dérivable et à dérivée bornée dans  $I$ , alors  $\mu_i \geq 0$  presque partout dans  $\Omega \times (0, T)$ ,  $i = 1, 2$ .



*Preuve.* Cette démonstration est basée sur des outils très similaires à ceux déjà utilisés dans les chapitres précédents (en particulier au Chapitre 2, Proposition 2.3.1 et Théorème 2.4.1 pour l'analyse des problèmes en vitesse et concentration, au Chapitre 4 pour l'analyse de l'équation adjointe, voir Proposition 4.2.1 et Théorème 4.2.2). Nous allons donc présenter une version très synthétique de la démonstration.

Tout d'abord, les hypothèses sont suffisantes pour assurer l'existence d'un  $v$  appartenant à  $(L^\infty(\Omega_T))^N$  tel que  $v = -\kappa \nabla \phi$ ,  $\operatorname{div} v = g$ ,  $v \cdot n = -\kappa v_1 \cdot n$  sur  $\Gamma_3 \times (0, T)$  et  $\phi = 0$  sur  $\Gamma_4 \times (0, T)$ .

Soit

$$K = \{u \in (L^2(\Omega \times (0, T)))^2; \|u\|_{(L^2(\Omega \times (0, T)))^2} \leq M_\mu\}$$

où  $M_\mu$  est une constante qui sera définie plus bas et qui ne dépend que des données du problème.

On considère l'application

$$\mathcal{C} : \begin{cases} K \rightarrow K \\ (\mu_1, \mu_2) \mapsto (\mu_1^b, \mu_2^b) \end{cases}$$

où  $(\mu_1^b, \mu_2^b)$  est défini par

$$R\psi \partial_t c + v \cdot \nabla c - \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla c) = -r(c) - gc + \chi_{\Omega_1} F(\chi_{\Omega_1} \mathcal{C}_T \mu_1) + \chi_{\Omega_2} F(\chi_{\Omega_2} \mathcal{C}_T \mu_2) \quad \text{dans } \Omega_T, \quad (5.54)$$

$$S(v) \nabla c \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), c = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T), c|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega, \quad (5.55)$$

$$R\psi \partial_t \mu_1^b - \mathcal{C}_T v \cdot \nabla \mu_1^b - \operatorname{div}(\psi S(\mathcal{C}_T v) \nabla \mu_1^b) + r'(\mathcal{C}_T c) \mu_1^b + R\psi \rho \mu_1^b - \frac{\partial D}{\partial c}(\cdot, \mathcal{C}_T c) = 0 \quad \text{dans } \Omega_T, \quad (5.56)$$

$$\psi S(\mathcal{C}_T v) \nabla \mu_1^b \cdot n + (\mathcal{C}_T v \cdot n) \chi_{\Gamma_4} - (\kappa \mathcal{C}_T v_1 \cdot n) \chi_{\Gamma_3} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \mu_1^b = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T),$$

$$R\psi \mu_{1|t=0}^b = \nu \frac{\partial D}{\partial c}(\cdot, c|_{t=T}) \text{ dans } \Omega, \quad (5.57)$$

$$R\psi \partial_t \mu_2^b - \mathcal{C}_T v \cdot \nabla \mu_2^b - \operatorname{div}(\psi S(\mathcal{C}_T v) \nabla \mu_2^b) + r'(\mathcal{C}_T c) \mu_2^b + R\psi \rho \mu_2^b - \frac{\partial D}{\partial c}(\cdot, \mathcal{C}_T c) = 0 \quad \text{dans } \Omega_T, \quad (5.58)$$

$$\psi S(\mathcal{C}_T v) \nabla \mu_2^b \cdot n + (\mathcal{C}_T v \cdot n) \chi_{\Gamma_4} - (\kappa \mathcal{C}_T v_1 \cdot n) \chi_{\Gamma_3} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \mu_2^b = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T),$$

$$R\psi \mu_{2|t=0}^b = \nu \frac{\partial D}{\partial c}(\cdot, c|_{t=T}) \text{ dans } \Omega. \quad (5.59)$$

L'application  $\mathcal{C}$  est bien définie. D'abord pour  $(\mu_1, \mu_2)$  donné dans  $K^2$ , comme  $F$  est bornée, la Proposition 2.3.1 du Chapitre 2 assure l'existence d'une unique solution  $c \in H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$ , avec  $c(t, x) \geq 0$  presque partout dans  $\Omega_T$ , solution

---

faible de (5.54)-(5.55). Ensuite,  $c$  étant maintenant donné, il existe une unique solution  $(\mu_1^b, \mu_2^b) \in (L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)))^2$ , du système parabolique linéaire (5.56)-(5.59) (voir par exemple Ladyzhenskaja [52]), vérifiant les estimations (uniformes par rapport à  $c$ ) suivantes :

$$\|\mu_i^b\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))} \leq C, \quad (5.60)$$

$$\|\partial_t \mu_i^b\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq C. \quad (5.61)$$

De plus (voir la démonstration dans la preuve de la Proposition 4.2.1), si il existe un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  tel que  $r$  soit dérivable et à dérivée bornée dans  $I$ , alors  $\mu_i^b \geq 0$  presque partout dans  $\Omega_T$ ,  $i = 1, 2$ .

L'estimation (5.60) permet de définir  $M_\mu$  tel que  $\mathcal{C}(K) \subset K$ .

Montrons maintenant que  $\mathcal{C}$  est continue. Soit une suite de  $K$  telle que

$$(\mu_{1,n}, \mu_{2,n}) \rightarrow (\mu_1, \mu_2) \text{ dans } (L^2(\Omega_T))^2.$$

Soient  $\mathcal{C}(\mu_{1,n}, \mu_{2,n}) = (\mu_{1,n}^b, \mu_{2,n}^b)$  et  $\mathcal{C}(\mu_1, \mu_2) = (\mu_1^b, \mu_2^b)$ .

On va vérifier que

$$(\mu_{1,n}^b, \mu_{2,n}^b) \rightarrow (\mu_1^b, \mu_2^b) \text{ dans } (L^2(\Omega_T))^2.$$

Pour cela, on vérifie que  $\|c_n\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))} + \|\partial_t c_n\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq C$ . Donc il existe  $e \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$  telle que, à une sous-suite près,

$$c_n \rightharpoonup e \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)),$$

$$c_n \rightarrow e \text{ dans } L^2(\Omega_T) \text{ et presque partout dans } \Omega_T.$$

La convergence forte de  $\mu_{i,n}$ ,  $i = 1, 2$ , permet alors de passer à la limite dans l'équation en  $c_n$ . Comme la solution du problème en concentration est unique (voir Lemme 5.2.1), on a

$$e = c \text{ où } c \text{ est définie par (5.54)-(5.55).}$$

On a  $\|\mu_{i,n}^b\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))} \leq C$ , où  $\mu_{i,n}^b$  est solution de (5.56)-(5.59),  $i = 1, 2$ . Il existe donc un couple de sous-suites, non renommées par commodité, et un couple de fonctions  $(\eta_1, \eta_2) \in (L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)))^2$  tels que

$$(\mu_{1,n}^b, \mu_{2,n}^b) \rightharpoonup (\eta_1, \eta_2)$$

faiblement dans  $(L^2(\Omega \times (0, T)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)))^2$ .

Grâce à la convergence forte de  $c_n$ , on passe à la limite dans les équations en  $\mu_{i,n}^b$  (5.56)-(5.59). La solution du problème étant unique (voir Théorème 4.2.2), on a

$$(\eta_1, \eta_2) = (\mu_1^b, \mu_2^b)$$

et c'est l'ensemble de la suite  $(\mu_{1,n}^b, \mu_{2,n}^b)$  qui converge vers  $(\mu_1^b, \mu_2^b)$ .

De plus, de l'estimation (5.61) et d'un argument de compacité d'Aubin, on peut tirer un résultat de compacité pour la suite  $(\mu_{1,n}^b, \mu_{2,n}^b)$  dans  $(L^2(\Omega_T))^2$ . La continuité de  $\mathcal{C}$  (pour la topologie de la convergence forte de  $(L^2(\Omega))^2$ ) est prouvée. Enfin, en utilisant encore une fois les estimations (5.60)-(5.61) et un critère de compacité d'Aubin, on montre que l'image  $\mathcal{C}(K)$  est compacte.

Comme l'application  $\mathcal{C}$  satisfait les hypothèses du théorème de Schauder, on peut en conclure qu'elle admet un point fixe noté  $(\mu_1^b, \mu_2^b)$ , solution de (5.56)-(5.59), associée à  $c^b$  solution de (5.54)-(5.55). ■

Les conditions terminales ne sont pas vérifiées en temps infini. Le théorème ci-dessous établit les conditions de transversalité en horizon infini.

**Théorème 5.4.3** *Les conditions de transversalité s'écrivent :*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\Omega} H_1(T, c^b, p_1^b, \lambda_1) dx = 0 \quad (5.62)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\Omega} H_2(T, c^b, p_2^b, \lambda_2) dx = 0 \quad (5.63)$$

où  $H_1$  et  $H_2$  sont les Hamiltoniens définis par

$$\begin{aligned} H_1(t, c, p_1, \lambda_1)(x) &= \left( f_1(x, p_1(t, x))\chi_{\Omega_1} - D(x, c(t, x; p_1, p_2)) \right) e^{-\rho t} \\ &+ \lambda_1(t, x) \left( \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla c) - v \cdot \nabla c - r(c) - gc + p_1 \chi_{\Omega_1} + p_2 \chi_{\Omega_2} \right)(t, x) \end{aligned} \quad (5.64)$$

$$\begin{aligned} H_2(t, c, p_2, \lambda_2)(x) &= \left( f_2(x, p_2(t, x))\chi_{\Omega_2} - D(x, c(t, x; p_1, p_2)) \right) e^{-\rho t} \\ &+ \lambda_2(t, x) \left( \operatorname{div}(\psi S(v) \nabla c) - v \cdot \nabla c - r(c) - gc + p_1 \chi_{\Omega_1} + p_2 \chi_{\Omega_2} \right)(t, x) \end{aligned} \quad (5.65)$$

où  $\lambda_1(t, x) = \mu_1(t, x)e^{-\rho t}$ ,  $\lambda_2(t, x) = \mu_2(t, x)e^{-\rho t}$ ,  $\mu_1$  et  $\mu_2$  étant les variables adjointes présentées au théorème précédent.

*Preuve.* Les démonstrations sont les mêmes que celles du Chapitre 4. ■

## 5.5 Une étude analytique dans un cas simple : l'état stationnaire du modèle unidimensionnel avec zone d'épandage donnée

L'objectif de cette partie est, tout comme dans le Chapitre 4, d'obtenir des propriétés qualitatives de la solution à l'état stationnaire lorsqu'elle existe.

---

Tout comme dans le paragraphe 4.2.4 du Chapitre 4, on considère ici l'apport naturel dans l'équation en concentration. On se référera à l'adimensionnement rappelé page 133 pour l'obtention du modèle.

### 5.5.1 Simplifications

On se place dans le cas unidimensionnel avec  $\Omega = (0, L)$ ,  $\Omega_1 = [0, L_1]$ ,  $\Omega_2 = [L_1, L_2]$  et  $L_1 < L_2 \leq L$ . On considère un modèle pour lequel  $g$  est une constante. L'épandage du premier agriculteur se fait sur  $\Omega_1$  et celui du deuxième agriculteur sur  $\Omega_2$ . On utilise des conditions aux bords de type Neumann non homogène sur  $\phi : \partial_x \phi = v_1$  sur  $\partial\Omega = \{0, L\}$  avec  $v_1 \in L^2(\Omega)$ . On considère que  $S(v) = S > 0$  et que le terme de réaction est linéaire,  $r(c) = \alpha c$  avec  $\alpha$  constante strictement positive. On a donc le modèle suivant dans  $\Omega_T$  :

$$R\psi\partial_t c - \psi S\partial_x^2 c + v\partial_x c = -\alpha c + p_1\chi_{\Omega_1} + p_2\chi_{\Omega_2} + \gamma, \quad (5.66)$$

$$\partial_x v = 0, \quad v = -\kappa\partial_x \phi, \quad (5.67)$$

complété par les conditions aux bords (ici  $\Gamma_2 = \Gamma_4 = \emptyset$ )

$$\partial_x c(t, 0) = \partial_x c(t, L) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \quad (5.68)$$

$$\partial_x \phi = v_1 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T). \quad (5.69)$$

Enfin, on suppose que le puits de captage est localisé en  $x = L$ . Les fonctionnelles  $J_i$  prennent donc la forme :

$$J_1 : p_1 \in E \mapsto J_1(p_1; p_2) = \int_0^T \left( \int_0^{L_1} f_1(x, p_1(t, x)) dx - D(x, c(t, L)) \right) e^{-\rho t} dt,$$

$$J_2 : p_2 \in E \mapsto J_2(p_2; p_1) = \int_0^T \left( \int_{L_1}^{L_2} f_2(x, p_2(t, x)) dx - D(x, c(t, L)) \right) e^{-\rho t} dt,$$

où  $c$  est solution de (5.66)-(5.69).

On supposera dans ce paragraphe que

$$(t, x) \mapsto D(x, c(t, x)) \in L^1(\Omega_T) \text{ si } c \in L^2(\Omega_T), \quad \frac{\partial D}{\partial c} > 0 \text{ et } \frac{\partial^2 D}{\partial c^2} > 0.$$

**Remarque 5.5.1** Comme  $v = -\kappa v_1$ , où  $\kappa > 0$ , le problème n'a d'intérêt que si on suppose  $v_1 \leq 0$  pour que le flux pousse la pollution vers le puits d'extraction.

**Remarque 5.5.2** On satisfait aux conditions du Théorème 3.4.1 ; la solution de ce problème est donc unique.

On note

$E_i = \{q \in L^2(\Omega_i \times (0, T)), 0 \leq q(t, x) \leq \bar{p} \text{ presque partout dans } \Omega_i \times (0, T), q|_{t=T} \text{ est définie}\},$

$i = 1, 2$ , dans le but de pouvoir utiliser des intégrations par parties afin d'établir le problème adjoint.

Sous les hypothèses adoptées dans ce chapitre, le Théorème 5.4.1 devient :

**Corollaire 5.5.1** *Si  $(p_1^b, p_2^b)$  est une solution de  $J_1(p_1^b; p_2^b) = \max_{p_1 \in E_1} J_1(p_1; p_2^b)$  et  $J_2(p_2^b; p_1^b) = \max_{p_2 \in E_2} J_2(p_2; p_1^b)$  sous la contrainte (5.66)-(5.67) donnée par le Théorème 5.3.1 et si  $c^b(t, x) = c(t, x; p_1^b, p_2^b)$ , alors il existe  $(\mu_1, \mu_2) \in (L^2(0, T; H^1(\Omega)))^2$  tels que*

$$f'_1(x, p_1(t, x)) = \mu_1(t, x)\chi_{\Omega_1}(x) \text{ presque partout dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.70)$$

$$f'_2(x, p_2(t, x)) = \mu_2(t, x)\chi_{\Omega_2}(x) \text{ presque partout dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.71)$$

satisfaisant les conditions terminales

$$\mu_i(x, T) = 0 \text{ presque partout dans } \Omega, \quad i = 1, 2, \quad (5.72)$$

et les équations

$$R\psi\partial_t\mu_1 = -v\partial_x\mu_1 - \psi S\partial_x^2\mu_1 + \alpha\mu_1 + \mu_1 R\psi\rho + g\mu_1 \text{ dans } \Omega_T \quad (5.73)$$

$$R\psi\partial_t\mu_2 = -v\partial_x\mu_2 - \psi S\partial_x^2\mu_2 + \alpha\mu_2 + \mu_2 R\psi\rho + g\mu_2 \text{ dans } \Omega_T \quad (5.74)$$

munies des conditions aux bords

$$\psi S\partial_x\mu_i(t, 0) - \kappa v_1\mu_i(t, 0) = 0 \text{ dans } (0, T), \quad i = 1, 2, \quad (5.75)$$

$$D'(c(t, L)) = \psi S\partial_x\mu_i(t, L) - \kappa v_1\mu_i(t, L) \text{ dans } (0, T), \quad i = 1, 2. \quad (5.76)$$

*Preuve.* Elle est basée sur celle du Corollaire 4.2.1.

On définit formellement le Lagrangien associé au problème, avec  $\lambda_1$  sa variable adjointe, par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(c, p_1, \lambda_1) &= J_1(p_1; p_2) \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} (R\psi\partial_t c + v\partial_x c - \psi S\partial_x^2 c + \alpha c - p_1\chi_{\Omega_1}(x) - p_2\chi_{\Omega_2}(x) - \gamma + gc)\lambda_1 \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Par intégrations par parties et en appliquant le théorème de Fubini on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1(c, p_1, \lambda_1) &= \int_0^T \int_{\Omega_1} f_1(x, p_1) e^{-\rho t} dx dt - \int_0^T D(c(t, L)) e^{-\rho t} dt \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega} (-R\psi \partial_t \lambda_1 c - v c \partial_x \lambda_1 - \psi S \partial_x^2 \lambda_1 c + \alpha c \lambda_1 - p_1 \chi_{\Omega_1} \lambda_1 - p_2 \chi_{\Omega_2} \lambda_1 - \gamma \lambda_1 + g c) dx dt \\
&\quad + R\psi \int_{\Omega} c(T, x) \lambda_1(T, x) dx - R\psi \int_{\Omega} c_0(x) \lambda_1(0, x) dx \\
&\quad + \int_0^T \left( v(L) \lambda_1(t, L) c(t, L) - v(0) \lambda_1(t, 0) c(t, 0) \right) dt \\
&\quad + \int_0^T \left( \psi S c(t, L) \partial_x \lambda_1(t, L) - \psi S c(t, 0) \partial_x \lambda_1(t, 0) \right) dt.
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 1 pour les non linéarités, on a donc

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L}_1(c, p_1, \lambda_1) &= \int_0^T \int_{\Omega_1} \left( f_1'(x, p_1) e^{-\rho t} - \lambda_1 \chi_{\Omega_1} \right) \delta p_1 dx dt \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega} (-R\psi \partial_t \lambda_1 - v \partial_x \lambda_1 - \psi S \partial_x^2 \lambda_1 + \alpha \lambda_1 + g \lambda_1) \delta c dx dt \\
&\quad + R\psi \int_{\Omega} \lambda_1(T, x) \delta c(T, x) dx \\
&\quad - \int_0^T \left( v(0) \lambda_1(t, 0) + \psi S \partial_x \lambda_1(t, 0) \right) \delta c(t, 0) dt \\
&+ \int_0^T \left( v(L) \lambda_1(t, L) + \psi S \partial_x \lambda_1(t, L) - D'(c(t, L)) e^{-\rho t} \right) \delta c(t, L) dt.
\end{aligned}$$

On pose  $\mu_1 = \lambda_1 e^{\rho t}$ . On fait ensuite de même pour  $\mathcal{L}_2(c, p_2, \lambda_2)$ .

L'annulation de la variation du Lagrangien suivant la variable d'état  $c(T, x)$  nous fournit les conditions terminales (5.72).

En annulant la variation du Lagrangien suivant la variable de contrôle  $p_1$ , on obtient les conditions d'optimalité (5.70)-(5.71).

En annulant la variation du Lagrangien suivant la variable d'état  $c$ , on obtient les équations adjointes (5.73)-(5.74) et les conditions aux bords (5.75) et (5.76). ■

On simplifie encore le modèle en se restreignant maintenant au cas stationnaire. On suppose à présent que

$$v_1 \in \mathbb{R}, v_1 \leq 0.$$

La condition de compatibilité entre  $g$  et  $v_1$  (voir page 158) impose donc  $g = 0$ .

Tout comme dans la démonstration du Lemme 4.2.1, la condition de compatibilité  $g = 0$

nous amène à résoudre

$$\begin{cases} -\psi S c'' + v c' + \alpha c - p_1 \chi_{\Omega_1} - p_2 \chi_{\Omega_2} - \gamma = 0 \\ \psi S \mu'' + v \mu' - (\alpha + R\psi\rho)\mu = 0 \end{cases}$$

où  $v$  est donnée par  $v = -\kappa v_1$ ,  $f'(p_i \chi_{\Omega_i}) = \mu \chi_{\Omega_i}$ ,  $i = 1, 2$  et

$$\begin{cases} D'(c(L)) = \psi S \mu'(L) + v \mu(L) \\ c'(0) = c'(L) = 0 \\ \psi S \mu'(0) + v \mu(0) = 0. \end{cases}$$

L'état stationnaire est donc caractérisé par le problème suivant :

$$-\psi S c'' + v c' + \alpha c - p_1 \chi_{\Omega_1} - p_2 \chi_{\Omega_2} - \gamma = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (5.77)$$

$$\psi S \mu_i'' + v \mu_i' - (\alpha + R\psi\rho)\mu_i = 0 \text{ dans } \Omega, \quad i = 1, 2, \quad (5.78)$$

avec  $v = -\kappa v_1$ ,  $f'_i(p_i) = \mu_i \chi_{\Omega_i}$ ,  $i = 1, 2$ , et

$$D'(c(L)) = S \psi \mu_i'(L) + v \mu_i(L), \quad i = 1, 2, \quad (5.79)$$

$$c'(0) = c'(L) = 0, \quad (5.80)$$

$$\psi S \mu_i'(0) + v \mu_i(0) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (5.81)$$

### 5.5.2 Calculs analytiques

À partir d'ici, on notera  $f_i(x, p_i(x, t)) = f_i(p_i(x, t) \chi_{\Omega_i}(x))$ ,  $i = 1, 2$  (par un léger abus de notation, on utilise toujours  $f_i$ ). D'après (5.70)-(5.71),  $f'_i(p_i^b(x, t)) = \mu_i(x, t) \chi_{\Omega_i}(x)$  et  $p_i^b(x, t) = f_i'^{-1}(\mu_i(x, t) \chi_{\Omega_i}(x))$ ,  $i = 1, 2$ . Notons que  $f_i$  étant strictement concave et comme on a supposé  $\mathcal{I}m(f'_i) \subset [0, +\infty[$ ,

$$f'_i : \text{Dom}(f_i) \rightarrow \mathcal{I}m(f'_i) \subset [0, +\infty[$$

est strictement décroissante donc  $f_i'^{-1}$  existe et, d'après les hypothèses sur  $f_i'^{-1}$ ,

$$f_i'^{-1} : \mathcal{I}m(f'_i) \subset [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[.$$

---

**Lemme 5.5.1** Notons  $\mathbf{S} = S\psi$  et  $\mathbf{R} = R\psi$ . Supposons  $\mathcal{I}m(f') = [0; +\infty[$ . L'équilibre de Nash  $(p_1^b, p_2^b)$  est donné par

$$p_i^b(x, A_i, L_i) = f_i'^{-1}(A_i(e^{r_1x} - Ke^{r_2x})) \text{ si } x \in \Omega_i, p_i^b(x, A_i, L_i) = 0 \text{ sinon, } i = 1, 2,$$

associé à  $c^b(x) = c(x; p_1^b, p_2^b)$  tel que

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(s_2 - s_1)c^b(x, A_1, A_2, L_1, L_2) &= \int_0^x \theta(x, A_1, A_2, L_1, L_2) (e^{-s_1(u-x)} - e^{-s_2(u-x)}) du \\ &\quad - \frac{e^{s_1x} - \frac{s_1}{s_2}e^{s_2x}}{e^{s_1L} - e^{s_2L}} \int_0^L \theta(x, A_1, A_2, L_1, L_2) \left( e^{-s_1(u-L)} - \frac{s_2}{s_1}e^{-s_2(u-L)} \right) du \end{aligned}$$

avec

$$\theta(x, A_1, A_2, L_1, L_2) = f_1'^{-1}(A_1(e^{r_1u} - Ke^{r_2u})\chi_{\Omega_1}(x)) + f_2'^{-1}(A_2(e^{r_1u} - Ke^{r_2u})\chi_{\Omega_2}(x)) + \gamma$$

et où  $A_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ , est l'unique solution de l'équation

$$\begin{aligned} D' \left( \frac{e^{(s_1+s_2)L}}{\mathbf{S}s_1s_2(e^{s_1L} - e^{s_2L})} \int_{\Omega_i} f_i'^{-1}(A_i(e^{r_1u} - Ke^{r_2u}))(s_2e^{-s_2u} - s_1e^{-s_1u})du - \frac{\gamma}{\mathbf{S}s_1s_2} \right) \\ = A_i(v + \mathbf{S}r_1)(e^{r_1L} - e^{r_2L}) \quad (5.82) \end{aligned}$$

avec

$$K = \frac{v + S'r_1}{v + \mathbf{S}r_2},$$

$$\begin{aligned} r_1 = \frac{-v - \sqrt{\Delta_1}}{2\mathbf{S}}, r_2 = \frac{-v + \sqrt{\Delta_1}}{2\mathbf{S}}, \text{ où } \Delta_1 = v^2 + 4\mathbf{S}(\alpha + \mathbf{R}\rho), \\ s_1 = \frac{v - \sqrt{\Delta_2}}{2\mathbf{S}}, s_2 = \frac{v + \sqrt{\Delta_2}}{2\mathbf{S}}, \text{ où } \Delta_2 = v^2 + 4\mathbf{S}\alpha. \end{aligned}$$

**Remarque 5.5.3** On remarque que dans ce cadre simplifié, le Lemme 5.5.1 donne en particulier l'unicité de l'équilibre de Nash, qui n'était pas établie dans le cadre général.

*Preuve.* La démonstration de ce lemme est basée sur la preuve du Lemme 4.2.2. Nous allons tout d'abord chercher une expression formelle de l'état stationnaire. Cette expression n'aura un sens que si il existe deux réels  $A_1 > 0$  et  $A_2 > 0$  qui la satisfont. Nous montrerons ensuite qu'il existe bien  $A_1 > 0$  et  $A_2 > 0$  satisfaisant l'expression et que ces  $A_1$  et  $A_2$  sont uniques.

Le système d'équations différentielles (5.77)-(5.78) étant triangulaire, on résout d'abord l'équation en  $\mu_i$  (5.78),  $i = 1, 2$ . On obtient

$$\mu_i^b(x, A_i, L_i) = (A_i e^{r_1x} + B_i e^{r_2x}),$$



---

avec  $r_1 = \frac{-v - \sqrt{\Delta_1}}{2\mathbf{S}}$ ,  $r_2 = \frac{-v + \sqrt{\Delta_1}}{2\mathbf{S}}$ ,  $\Delta_1 = v^2 + 4\mathbf{S}(\alpha + \mathbf{R}\rho)$  et  $A_i$  et  $B_i$  des constantes à déterminer. En utilisant la condition de bord (5.81), on trouve

$$B_i = -A_i K \text{ avec } K = \frac{v - \sqrt{\Delta_1}}{v + \sqrt{\Delta_1}} = \frac{v + \mathbf{S}r_1}{v + \mathbf{S}r_2} < 0$$

ce qui permet de réécrire

$$\mu_i^{\flat}(x, A_i, L_i) = A_i(e^{r_1 x} - K e^{r_2 x}).$$

Comme  $K < 0$  et que  $r_1 < 0 < r_2$ ,  $(e^{r_1 x} - K e^{r_2 x}) > 0$  pour tout  $x \in [0, L]$ . De plus, la condition (5.79) doit être vérifiée, ce qui implique que

$$D'(c^{\flat}(L, A_1, A_2, L_1, L_2)) = A_i \left( (\mathbf{S}r_1 + v)e^{r_1 L} - K(\mathbf{S}r_2 + v)e^{r_2 L} \right) = A_i(v + \mathbf{S}r_1)(e^{r_1 L} - e^{r_2 L}),$$

pour tout  $i = 1, 2$ . La fonction  $D$  étant strictement croissante,  $D'(c^{\flat}(L, A_i, L_i))$  est strictement positive. Comme  $e^{r_1 L} - e^{r_2 L} < 0$  et  $v + \mathbf{S}r_1 = -\mathbf{S}r_2 < 0$ , on a donc

$$A_i > 0. \quad (5.83)$$

On résout à présent (5.77) en  $c$ . Comme  $A_i > 0$ , la quantité  $f_i'^{-1}(A_i(e^{r_1 x} - K e^{r_2 x})\chi_{\Omega_i}(x))$  est bien définie et l'équation en  $c^{\flat}$  peut être réécrite comme suit :

$$-\mathbf{S}c^{\flat''} + v c^{\flat'} + \alpha c^{\flat} - \theta(x, A_1, A_2, L_1, L_2) = 0$$

où

$$\theta(x, A_1, A_2, L_1, L_2) = f_1'^{-1}(A_1(e^{r_1 x} - K e^{r_2 x})\chi_{\Omega_1}(x)) + f_2'^{-1}(A_2(e^{r_1 x} - K e^{r_2 x})\chi_{\Omega_2}(x)) + \gamma,$$

et

$$c^{\flat}(x, A_1, A_2, L_1, L_2) = \frac{1}{\mathbf{S}(s_2 - s_1)} \int_0^x \theta(u, A_1, A_2, L_1, L_2) (e^{-s_1(u-x)} - e^{-s_2(u-x)}) du + K_1 e^{s_1 x} + K_2 e^{s_2 x}, \quad (5.84)$$

avec

$$s_1 = \frac{v - \sqrt{\Delta_2}}{2\mathbf{S}}, s_2 = \frac{v + \sqrt{\Delta_2}}{2\mathbf{S}}, \Delta_2 = v^2 + 4\mathbf{S}\alpha,$$

et  $K_1$  et  $K_2$  à déterminer. On en déduit donc que

$$\frac{\partial \theta}{\partial A_i}(x, A_1, A_2, L_1, L_2) = (e^{r_1 x} - K e^{r_2 x})(f_i'^{-1})'(A_i(e^{r_1 x} - K e^{r_2 x}))\chi_{\Omega_i}(x) < 0 \quad (5.85)$$

car  $(e^{r_1x} - Ke^{r_2x}) > 0$  et  $f_i$ ,  $i = 1, 2$  est strictement concave. En dérivant (5.84) par rapport à  $x$  on a

$$\frac{\partial c^b}{\partial x}(x, A_1, A_2, L_1, L_2) = \frac{1}{\mathbf{S}(s_2 - s_1)} \int_0^x \theta(u, A_1, A_2, L_1, L_2) (s_1 e^{-s_1(u-x)} - s_2 e^{-s_2(u-x)}) du + K_1 s_1 e^{s_1 x} + K_2 s_2 e^{s_2 x}. \quad (5.86)$$

On utilise à présent les conditions aux bords de l'équation (5.80). En remplaçant dans (5.86), la condition de bord  $\frac{\partial c^b}{\partial x}(x, A_1, A_2, L_1, L_2)|_{x=0} = 0$  implique que

$$K_2 = -K_1 \frac{s_1}{s_2}$$

et la condition de bord  $\frac{\partial c^b}{\partial x}(x, A_1, A_2, L_1, L_2)|_{x=L} = 0$  donne

$$K_1 = \frac{- \int_0^L \theta(u, A_1, A_2, L_1, L_2) \left( e^{-s_1(u-L)} - \frac{s_2}{s_1} e^{-s_2(u-L)} \right) du}{(e^{s_1 L} - e^{s_2 L}) \mathbf{S}(s_2 - s_1)}.$$

On peut alors réécrire  $c^b$  comme suit :

$$c^b(x, A_1, A_2, L_1, L_2) = \frac{1}{\mathbf{S}(s_2 - s_1)} \left( \int_0^x \theta(u, A_1, A_2, L_1, L_2) (e^{-s_1(u-x)} - e^{-s_2(u-x)}) du - \frac{e^{s_1 x} - \frac{s_1}{s_2} e^{s_2 x}}{(e^{s_1 L} - e^{s_2 L})} \int_0^L \theta(u, A_1, A_2, L_1, L_2) \left( e^{-s_1(u-L)} - \frac{s_2}{s_1} e^{-s_2(u-L)} \right) du \right).$$

Comme  $\frac{\partial \theta}{\partial A_i}(u, A_1, A_2, L_1, L_2) < 0$ , on en déduit que

$$\frac{\partial c^b}{\partial A_i}(L, A_1, A_2, L_1, L_2) = \frac{e^{(s_1+s_2)L}}{\mathbf{S} \underbrace{s_1 s_2}_{<0} \underbrace{(e^{s_1 L} - e^{s_2 L})}_{<0}} \int_0^L \frac{\partial \theta}{\partial A_i}(u, A, L_1) \underbrace{(s_2 e^{-s_2 u} - s_1 e^{-s_1 u})}_{>0} du < 0. \quad (5.87)$$

Comme  $c^b(L, A_1, A_2, L_1, L_2)$  vérifie la condition au bord  $D'(c^b(L, A_1, A_2, L_1, L_2)) = A_i(v + \mathbf{S}r_1)(e^{r_1 L} - e^{r_2 L})$ ,  $A_i$  doit satisfaire :

$$D'(c^b(L, A_1, A_2, L_1, L_2)) = A_i(v + \mathbf{S}r_1)(e^{r_1 L} - e^{r_2 L}). \quad (5.88)$$

Il reste à prouver que  $A_i > 0$  existe et est unique. On a déjà vu à l'équation (5.83) que si  $A_i$  existe,  $A_i > 0$ . On pose

$$\eta(A_i, L_i) = -A_i(v + \mathbf{S}r_1)(e^{r_1 L} - e^{r_2 L}) + D'(c^b(L, A_1, A_2, L_1, L_2)).$$

L'équation (5.88) se réécrit  $\eta(A_i, L_i) = 0$ . Par ailleurs,  $A_i \mapsto \eta(A_i, L_i)$  est une fonction continue. On va montrer que pour  $L_i$  fixé,  $\eta(A_i, L_i) = 0$  a bien une solution et qu'elle est unique.

On a

$$\frac{\partial \eta}{\partial A_i}(A_i, L_i) = -(v + \mathbf{S}r_1)(e^{r_1 L} - e^{r_2 L}) + D''(c^b(L, A_1, A_2, L_1, L_2)) \frac{\partial c^b}{\partial A_i}(L, A_1, A_2, L_1, L_2).$$

En utilisant le fait que  $D$  est strictement convexe et que  $\frac{\partial c^b}{\partial A_i}(L, A_1, A_2, L_1, L_2) < 0$  (obtenu grâce à (5.87)), on montre que

$$\frac{\partial \eta}{\partial A_i}(A_i, L_i) = - \overbrace{(v + \mathbf{S}r_1)}^{\leq 0} \overbrace{(e^{r_1 L} - e^{r_2 L})}^{\leq 0} + D''(c^b(L, A_1, A_2, L_1, L_2)) \frac{\partial c^b}{\partial A_i}(L, A_1, A_2, L_1, L_2) < 0.$$

Grâce aux signes des racines de l'équation homogène et au fait que  $f_i$  (respectivement  $D$ ) est strictement concave (respectivement convexe), on a donc montré ci-dessus que  $\frac{\partial \eta}{\partial A_i}(A_i, L_i) < 0$ . La fonction  $\eta$  est donc strictement décroissante en  $A_i$ . Elle admet donc une bijection réciproque de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  qui permet de définir  $A_i$ .

De plus,

$$\lim_{A_i \rightarrow 0} \eta(A_i, L_i) = D'(c^b(L, A_1, A_2, L_1, L_2)) > 0$$

et

$$\lim_{A_i \rightarrow +\infty} \eta(A_i, L_i) = -\infty$$

car  $c^b(L, A_1, A_2, L_1, L_2) \rightarrow 0$  quand  $A_i \rightarrow +\infty$  donc  $D'(c^b(L, A_1, A_2, L_1, L_2)) \rightarrow D'(0)$  par continuité de  $D'$ .

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc une unique solution  $A_i > 0$  de  $\eta(A_i, L_i) = 0$ , c'est-à-dire de (5.82). ■

### 5.5.3 Simulations numériques

Pour les simulations qui suivent, réalisées avec Maple, nous avons pris les données suivantes :

$$\begin{aligned} \rho = 0.05, \alpha = 0.1, S = 0.1, \psi = 1, R = 1 \text{ (pas d'absorption)}, \\ \gamma = 0.05, v = 0.015. \end{aligned}$$

Pour la première simulation, on choisit les fonctions de production et de dommages suivantes :

$$f_i(p_i) = \ln(p_i + 0.01), \quad i = 1, 2, \quad D(c) = c^2.$$

Le joueur 1 a un champ allant de  $x = 0$  à  $x = L_1$ , alors que le champ du joueur 2 s'étend sur  $[L_1; L_2]$ .

On fixe  $L = 10$ . Pour ce cas de simulation dans le Chapitre 4 (à un seul joueur), le  $L_1$  optimal valait 4. Nous allons donc fixer  $L_2 = 4$  et faire varier  $L_1$ .

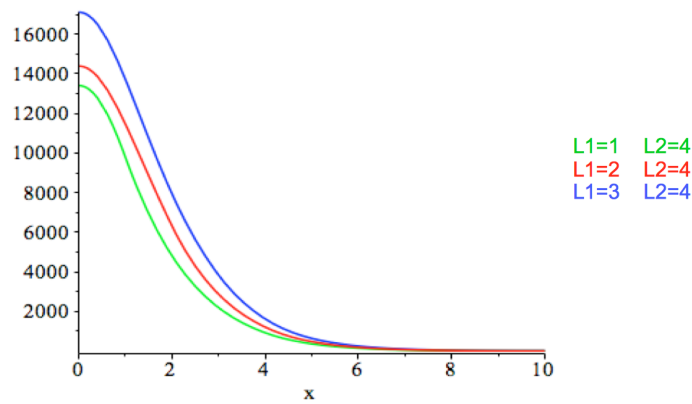


FIGURE 5.2 – Concentration  $c^b$  correspondant à l'équilibre de Nash

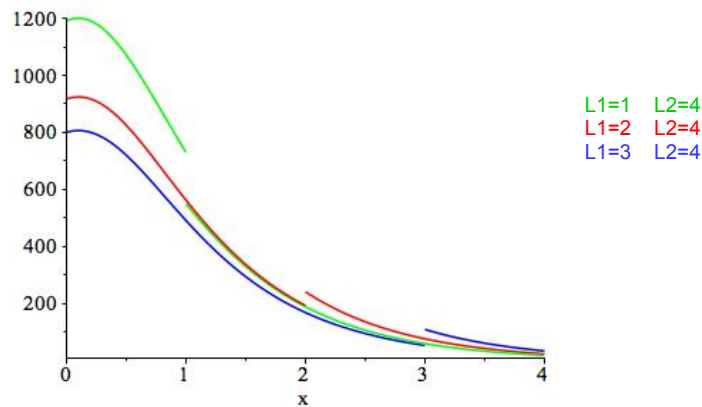


FIGURE 5.3 –  $p_1^b$  et  $p_2^b$  correspondant à l'équilibre de Nash

Comme au Chapitre 4, on retrouve pour  $c^b$  l'allure de courbe typique d'un phénomène de convection-diffusion (Figure 5.2). L'allure des courbes  $p_1^b$  et  $p_2^b$  est aussi semblable à celle de la quantité d'engrais optimale  $p^*$  calculée au Chapitre 4. On remarque que plus  $L_1$  est grand, plus la concentration autorisée en engrais est importante au début de la parcelle

du joueur 1. Le joueur 2, excepté dans le cas où  $L_1 = 1$ , a intérêt à épandre davantage au départ de sa parcelle que le joueur 1 ne devrait le faire à la fin de sa parcelle (Figure 5.3).

On s'intéresse à présent à l'impact de la taille de la zone tampon sur les objectifs à l'état stationnaire pour les deux agriculteurs, qui sont donnés par

$$Obj_1 = \frac{1}{\rho} \left( \int_0^{L_1} f_1(p_1^b(x)) dx - D(c^b(L)) \right),$$

$$Obj_2 = \frac{1}{\rho} \left( \int_{L_1}^{L_2} f_2(p_2^b(x)) dx - D(c^b(L)) \right).$$

On rappelle qu'ici  $f_1 = f_2$ . Les résultats sont représentés dans la Figure 5.4.

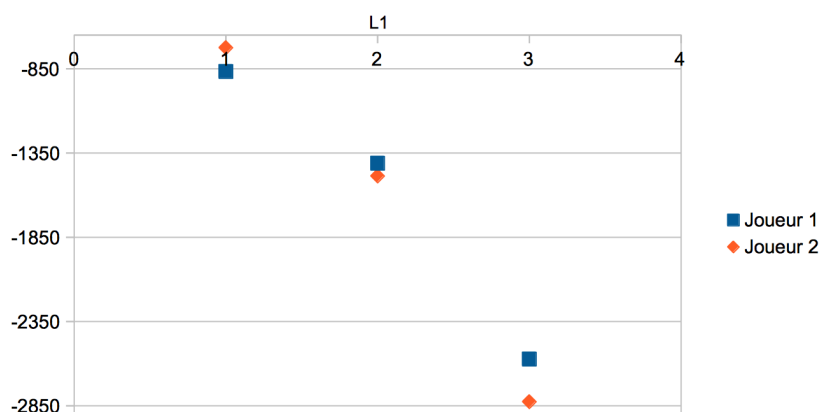


FIGURE 5.4 – Objectifs des deux joueurs en fonction de  $L_1$ ;  $L_2 = 4$ ,  $L = 10$ .

Excepté pour le cas où  $L_1 = 1$ , l'objectif lié au joueur 1 est meilleur que celui lié au joueur 2. On constate cependant que pour les deux joueurs, l'objectif est décroissant en fonction de  $L_1$ , ce qui signifie que la politique optimale serait de ne pas épandre d'engrais. On peut comparer ce résultat avec ceux obtenus au Chapitre 4 avec un seul joueur. En effet, le cas où le champ de l'unique agriculteur s'arrête au point  $L_1 = 4$ , comme présenté en Figure 4.4, correspond ici à une coopération entre les deux joueurs qui occupent la zone  $[0, L_2] = [0, 4]$ , en considérant l'objectif suivant :

$$Obj_{1,2} = Obj_1 + Obj_2 + \frac{1}{\rho} D(c^b(L)) = \frac{1}{\rho} \left( \int_0^{L_1} f_1(p_1^b(x)) dx + \int_{L_1}^{L_2} f_2(p_2^b(x)) dx - D(c^b(L)) \right). \quad (5.89)$$

L'objectif obtenu pour ce cas au Chapitre 4 était de 45,6. Or ici, que ce soit pour  $L_1 = 1$ , 2 ou 3, on obtient pour l'objectif (défini par (5.89)) un résultat négatif et strictement

---

inférieur à 45,6, comme présenté dans le Tableau 5.1 ci-dessous :

$L_1 = 1$	$L_1 = 2$	$L_1 = 3$
-1541.4	-2814.2	-5253.6

Tableau 5.1 – Objectif  $Obj_{1,2}$  (non-coopération) en fonction de  $L_1$ ;  $L_2 = 4$ ,  $L = 10$ .

Cela signifie donc qu'il est plus intéressant pour les joueurs de coopérer.

On effectue un autre test avec  $L = 15$  en fixant cette fois-ci  $L_2 = 8$ .

Les résultats obtenus sont qualitativement semblables, à savoir que plus  $L_1$  est petit, plus la concentration est importante au début du domaine (Figure 5.5), et plus le joueur 1 a intérêt à épandre de l'engrais (Figure 5.6). Ici aussi, l'objectif du joueur 1 est meilleur que celui du joueur 2, excepté dans le cas où  $L_1 = 2$ , et les objectifs des deux joueurs sont décroissants (Figure 5.7). Pour comparer cet exemple avec le cas où les joueurs coopèrent, nous reprenons les résultats obtenus au Chapitre 4 avec un seul joueur, avec  $L = 15$  et  $L_1 = 8$ . Sur la Figure 4.5, on constate que la valeur de l'objectif était de -166. Ici, l'objectif  $Obj_{1,2}$  est strictement inférieure à -166, comme on peut le constater dans le Tableau 5.2.

$L_1 = 2$	$L_1 = 4$	$L_1 = 6$
-3927.3	-7998.3	-17009.0

Tableau 5.2 – Objectif  $Obj_{1,2}$  (non-coopération) en fonction de  $L_1$ ;  $L_2 = 8$ ,  $L = 15$ .

Il convient donc aux joueurs de coopérer.

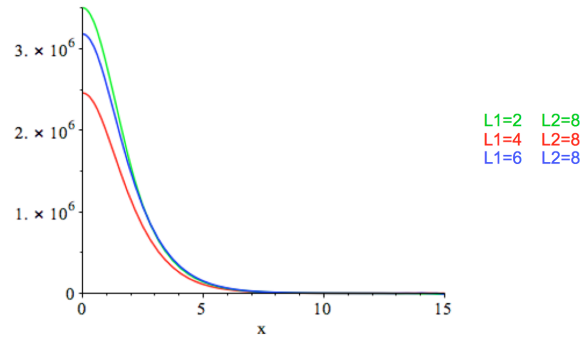


FIGURE 5.5 – Concentration  $c^b$  correspondant à l'équilibre de Nash

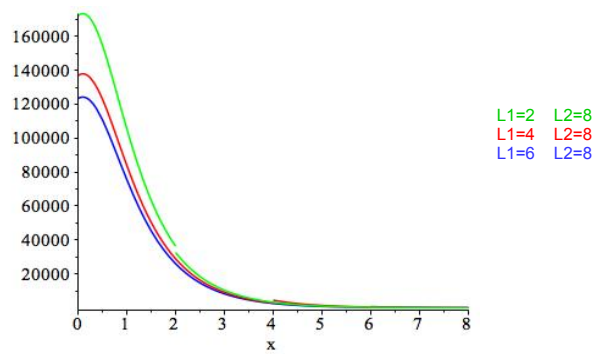


FIGURE 5.6 –  $p_1^b$  et  $p_2^b$  correspondant à l'équilibre de Nash

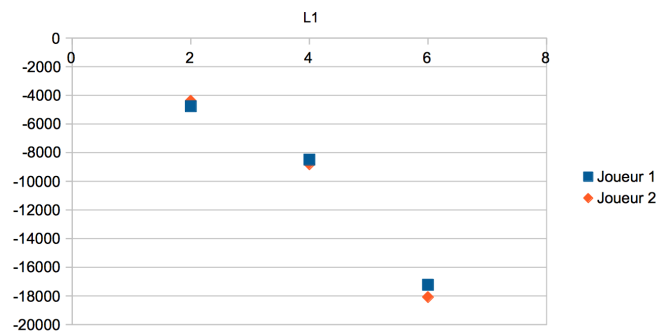


FIGURE 5.7 – Objectifs des deux joueurs en fonction de  $L_1$ ;  $L_2 = 8$ ,  $L = 15$ .

---

Nous allons à présent faire varier  $L_2$  et fixer  $L_1$ . On prend  $L = 10$  et  $L_1 = 4$ . On remarque que plus  $L_2$  est grand (plus la parcelle du joueur 2 est proche du puits de captage), moins la concentration est importante sur l'ensemble du domaine (Figure 5.8). Cette différence est plus importante que dans la simulation précédente. Les résultats sur  $(p_1^b, p_2^b)$  sont identiques et se chevauchent dans les cas testés : le joueur 2 devrait épandre plus au début de son champ que le joueur 1 à la fin du sien (Figure 5.9).

Dans les trois cas, l'objectif du joueur 1 est meilleur que celui du joueur 2 (Figure 5.10). Contrairement à la simulation précédente, les objectifs des deux joueurs sont croissants, ce qui signifierait une politique optimale d'épandage jusqu'au niveau du puits, ce qui n'est pas réaliste bien sûr (rappelons que ces cas tests sont purement académiques).

	$L_2 = 5$	$L_2 = 6$	$L_2 = 7$
avec coopération	39.1	18.2	-18.5
sans coopération	-3706.8	-2853.0	-2565.9

Tableau 5.3 – Objectifs avec et sans coopération en fonction de  $L_2$ ;  $L_1 = 4$ ,  $L = 10$ .

Si on compare ces résultats avec ceux du Chapitre 4 (correspondant à une coopération entre les joueurs), on remarque que dans les trois cas choisis pour  $L_2$ , l'objectif  $Obj_{1,2}$  est strictement inférieur à l'objectif commun calculé et représenté à la Figure 4.4. Le Tableau 5.3 indique donc qu'il est dans l'intérêt des joueurs de coopérer.



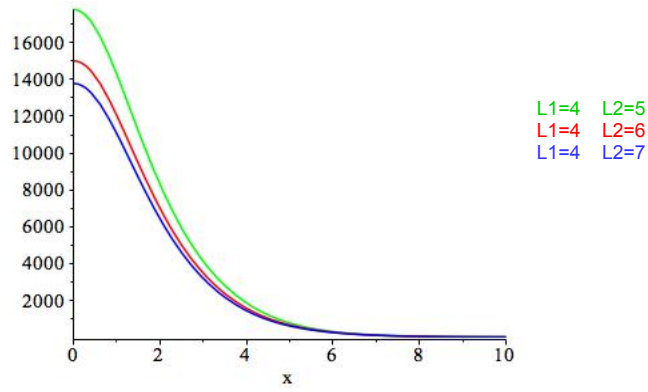


FIGURE 5.8 – Concentration  $c^b$  correspondant à l'équilibre de Nash

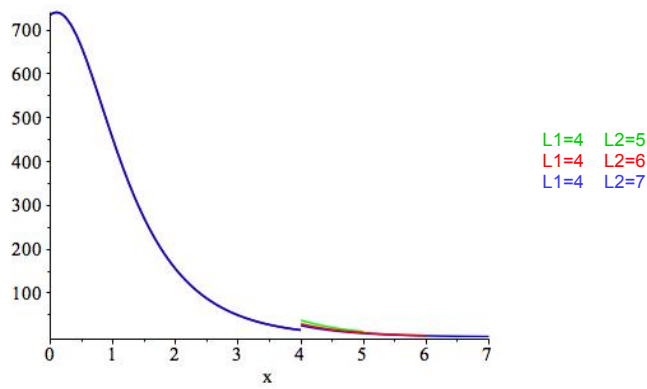


FIGURE 5.9 –  $p_1^b$  et  $p_2^b$  correspondant à l'équilibre de Nash

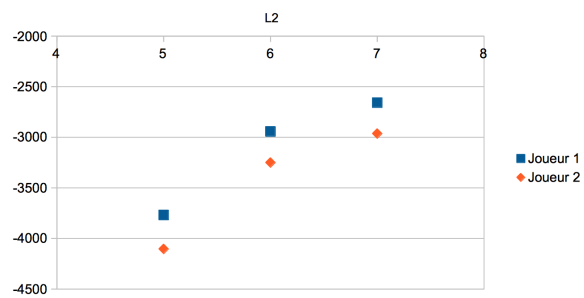


FIGURE 5.10 – Objectifs des deux joueurs en fonction de  $L_2$  ;  $L_1 = 4$ ,  $L = 10$ .

On choisit à présent les fonctions suivantes :

$$f(p) = \beta_J - (\beta_J - \alpha_J)e^{-p(x)\tau_J} \text{ et } D(c) = \frac{0,2}{50^2}c^2.$$

On trace dans la Figure 5.11 ci-dessous la fonction de production. Tout comme

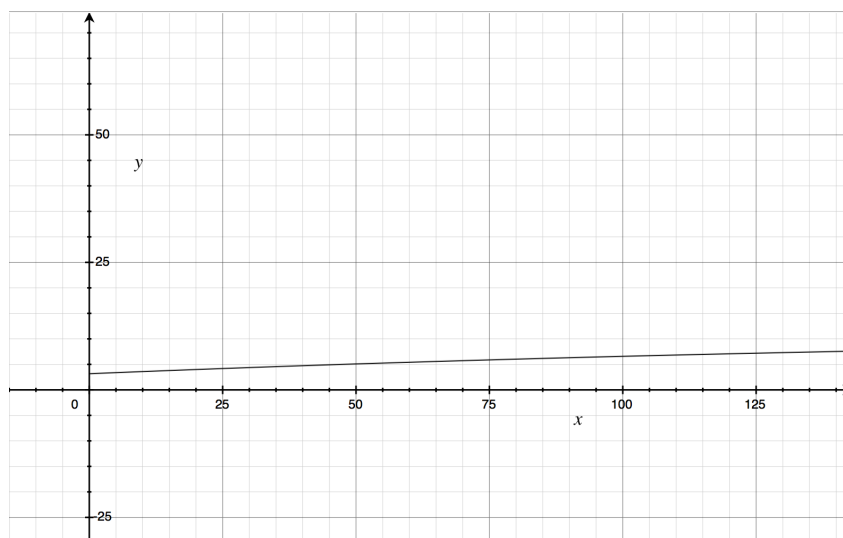


FIGURE 5.11 – Fonction de production

dans le Chapitre 4, le choix des fonctions de production et de dommages est tiré de l'étude de Godart et al. [43] et de Ledoux et al. [58], avec  $\beta_J = 11,7888$ ,  $\alpha_J = 3,1824$  et  $\tau_J = 0.0050465$ , qui correspondent aux données pour une culture de blé.

On fixe  $L = 10$  et  $L_2 = 4$  et on fait varier  $L_1$ .

Comme dans le cas logarithmique, plus  $L_1$  est petit, moins la concentration est importante (Figure 5.12). On peut s'en étonner au regard de la Figure 5.13, où la quantité d'engrais à épandre est plus importante lorsque  $L_1$  est petit. Cependant, on remarque également que l'on met moins d'engrais entre  $L_1$  et  $L_2$ , cette différence étant d'autant plus importante lorsque  $L_1$  est petit. En somme, plus  $L_1$  est petit, plus la quantité d'engrais à épandre est importante pour le joueur 1 et moins elle l'est pour le joueur 2. Ce saut entre les courbes de la Figure 5.13 permettrait d'expliquer l'allure des courbes de la Figure 5.12.

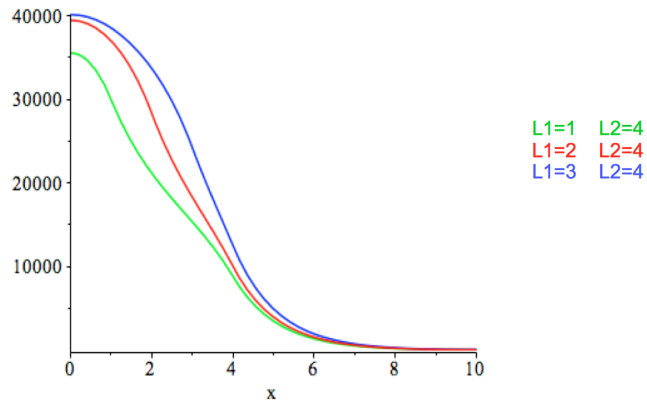


FIGURE 5.12 – Concentration  $c^b$  correspondant à l'équilibre de Nash

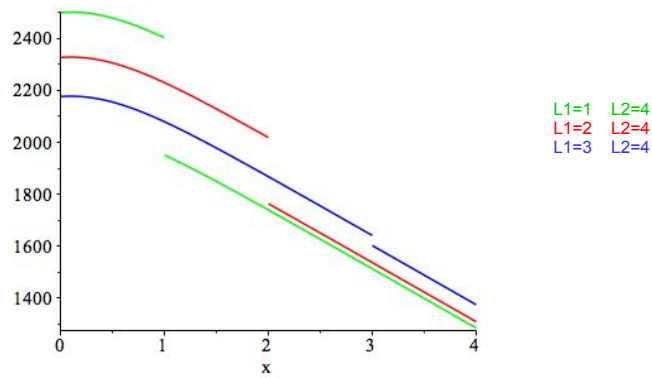


FIGURE 5.13 –  $p_1^b$  et  $p_2^b$  correspondant à l'équilibre de Nash

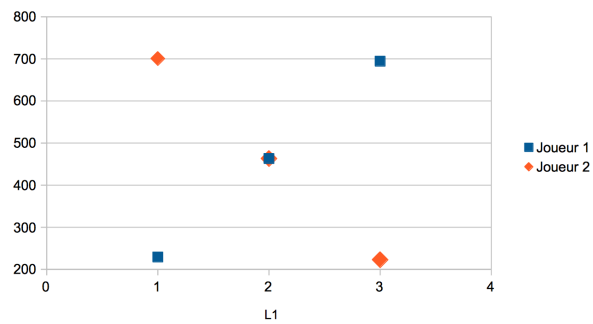


FIGURE 5.14 – Objectifs des deux joueurs en fonction de  $L_1$  ;  $L_2 = 4$ ,  $L = 10$ .

---

Hormis dans le cas où  $L_1 = 1$ , l'objectif du joueur 1 est meilleur que celui du joueur 2 (Figure 5.14). Notons que pour  $L_1 = 2$ , les objectifs des deux joueurs sont pratiquement égaux avec une valeur de 463,2 pour le joueur 1 et de 463,1 pour le joueur 2, les deux points se confondant sur la figure. Cependant, on constate que l'objectif du joueur 1 est croissant, alors que celui du joueur 2 est décroissant. Cela signifie donc que plus la parcelle du joueur 1 est grande (et donc plus la parcelle du joueur 2 est petite), plus l'objectif du joueur 1 est important.

Toujours dans l'idée de comparer nos résultats avec ceux du Chapitre 4 correspondant à une coopération des joueurs, nous comparons l'objectif  $Obj_{1,2}$  avec l'objectif obtenu à la Figure 4.10, d'une valeur de 937.5 :

$L_1 = 1$	$L_1 = 2$	$L_1 = 3$
936.4	934.6	930.1

Tableau 5.4 – Objectif  $Obj_{1,2}$  (non-coopération) en fonction de  $L_1$ ;  $L_2 = 4$ ,  $L = 10$ .

On constate que la coopération reste plus bénéfique pour les joueurs.

À présent, on fixe  $L = 10$  et  $L_1 = 4$  et on fait varier  $L_2$ .

On remarque que plus  $L_2$  est petit (plus la parcelle du joueur 2 est éloignée du puits), plus la concentration est élevée, sauf dans le cas où  $L_2 = 5$  ( $x \geq 5$ ) (Figure 5.15).

Dans les trois cas testés, le joueur 1 devrait épandre la même quantité d'engrais sur son champ. Quant au joueur 2, plus  $L_2$  est grand (donc proche du puits), moins il doit épandre d'engrais sur sa parcelle, ce qui paraît logique (Figure 5.16).

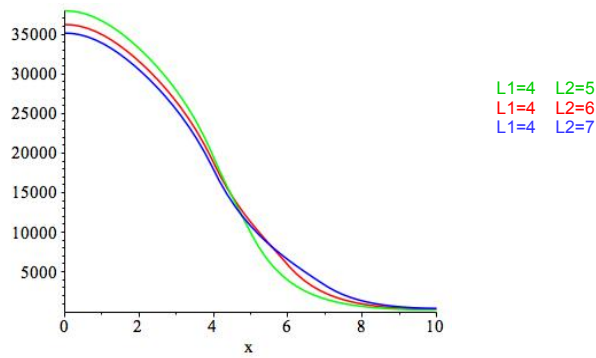


FIGURE 5.15 – Concentration  $c^b$  correspondant à l'équilibre de Nash

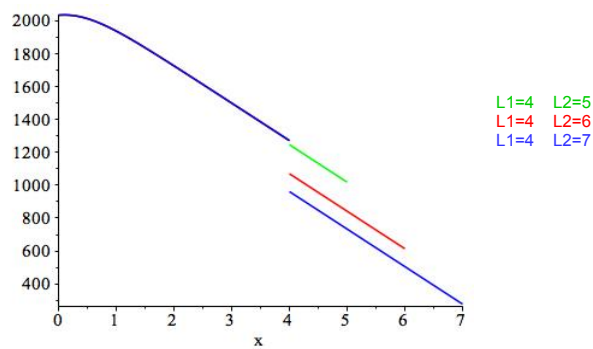


FIGURE 5.16 –  $p_1^b$  et  $p_2^b$  correspondant à l'équilibre de Nash

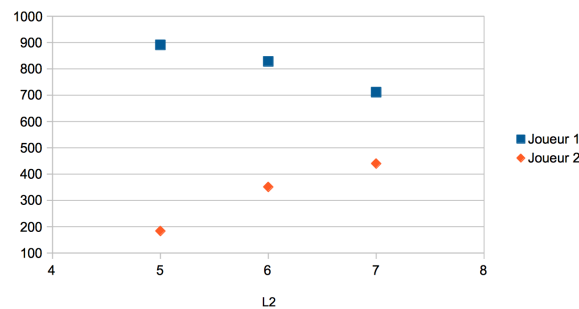


FIGURE 5.17 – Objectifs des deux joueurs en fonction de  $L_2$  ;  $L_1 = 4$ ,  $L = 10$ .

L'objectif du joueur 1 est plus important que celui du joueur 2 mais il est décroissant en fonction de  $L_2$ , alors que celui du joueur 2 est croissant (Figure 5.17). Cela signifie

---

simplement que plus la parcelle du joueur 2 est grande, plus l'objectif de joueur 2 est important. En revanche, cela dessert le joueur 1.

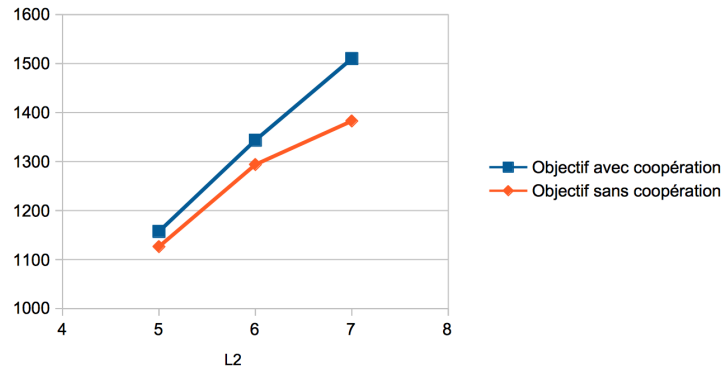


FIGURE 5.18 – Objectifs avec et sans coopération en fonction de  $L_2$ ;  $L_1 = 4$ ,  $L = 10$ .

Si l'on compare ces résultats avec ceux du Chapitre 4 présentés dans la Figure 4.10, on constate qu'il est plus intéressant pour les joueurs de coopérer. En effet, comme on peut le constater dans la Figure 5.18, pour les trois valeurs de  $L_2$  testées, l'objectif  $Obj_{1,2}$  (sans coopération) est moins élevé que l'objectif commun (avec coopération). Cependant, les deux courbes restent très proches, notamment pour  $L_2 = 5$ . L'intérêt à coopérer dans ce cas là n'est donc pas très élevé, même s'il augmente lorsque la zone cultivée approche le puits (c'est-à-dire lorsque  $L_2$  croît).

---

## Chapitre 6

# Discrétisation par Éléments Finis des modèles hydrogéologiques

Dans ce chapitre, nous construisons un schéma basé sur la méthode des éléments finis et établissons un résultat d'existence et d'unicité pour les problèmes discrets issus du problème hydrogéologique et de son problème adjoint (présentés au chapitre précédent). Dans un premier temps, nous détaillerons la construction du schéma discret associé aux équations d'état et adjointe. Nous montrerons ensuite l'existence puis l'unicité de la solution des problèmes d'état et adjoint discrets.

On rappelle le système désignant l'équation d'état :

$$R\psi\partial_t c - (\kappa\nabla\phi) \cdot \nabla c - \operatorname{div}(S(v)\psi\nabla c) = -r(c) - gc + p\chi_S \text{ dans } \Omega_T, \quad (6.1)$$

$$\operatorname{div}(v) = g, v = -\kappa\nabla\phi \text{ dans } \Omega_T, \quad (6.2)$$

où la fonction  $\chi_S$  est l'indicatrice d'une partie  $S$  de  $\bar{\Omega}$ , complété par les conditions initiales et aux bords suivantes :

$$\chi S(v)\nabla c \cdot n + (1 - \chi)c = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), c|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega, \quad (6.3)$$

avec  $\chi = 0$  ou  $1$  selon qu'on utilise des conditions aux bords de Dirichlet ou Neumann, et

$$\tilde{\chi}\kappa\nabla\phi \cdot n + (1 - \tilde{\chi})\phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \quad (6.4)$$

avec de même  $\tilde{\chi} = 0$  ou  $1$ .

Nous nous sommes limités ci-dessus à des conditions aux bords homogènes pour alléger les notations dans l'analyse du schéma. Mais les résultats s'appliquent aussi à des conditions aux bords non homogènes (sous les mêmes hypothèses de régularité que celles décrites au Chapitre 2).



---

On rappelle également le problème adjoint correspondant (avant changement de variable) :

$$R\psi\partial_t\mu - (\kappa\nabla\phi) \cdot \nabla\mu + \operatorname{div}(S(v)\psi\nabla\mu) = r'(c)\mu + \mu R\psi\rho - \frac{\partial D(x, c)}{\partial c} \text{ dans } \Omega_T, \quad (6.5)$$

complété par les conditions

$$\chi\left(S(v)\nabla\mu \cdot n + (v \cdot n)\mu\right) + (1-\chi)\mu = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \quad R\psi\mu(0, x) = \frac{\partial D(x, c(T, x))}{\partial c} \text{ dans } \Omega. \quad (6.6)$$

On rappelle les hypothèses :

- l'opérateur  $S(v)$  est supposé donné par (1.2). Notons que d'après la définition (1.2) du tenseur de dispersion, on a

$$S(v)\xi \cdot \xi \geq (S_m + \alpha_T |v|) |\xi|^2, \quad |S(v)\xi| \leq (S_m + \alpha_L |v|) |\xi| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \quad (6.7)$$

On suppose que

$$S_m > 0, \alpha_L > \alpha_T \geq 0.$$

Le cas le plus trivial sans dispersion, *i.e.*  $\alpha_L = \alpha_T = 0$ , est traité dans Kumar et al [51]. On suppose qu'il existe des réels  $\kappa_-$  et  $\kappa_+$  avec  $0 < \kappa_- \leq \kappa_+$  tels que le tenseur de perméabilité vérifie :

$$\kappa\xi \cdot \xi \geq \kappa_- |\xi|^2 \text{ et } |\kappa\xi| \leq \kappa_+ |\xi|, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N;$$

- l'isotherme  $r$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , concave, dérivable à dérivée bornée sur  $\mathbb{R}_+$  et telle qu'il existe  $r_+ \in \mathbb{R}^+$

$$|r(x)| \leq r_+ |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

- le facteur de retard est tel que  $R > 0$ ;
- la concentration initiale est  $c_0 \in H^1(\Omega)$  avec  $0 \leq c_0 \leq 1$  presque partout dans  $\Omega$ ;
- la fonction  $g$  appartient à  $L^\infty(\Omega_T)$ ;
- la fonction  $p \mapsto f(\cdot, p)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , croissante, définie sur  $\mathbb{R}^+$  et strictement concave;

- 
- la fonction  $D : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est telle que pour presque tout  $x \in \Omega$ ,  $c \in \mathbb{R}_+ \mapsto D(x, c)$  est une fonction continue et bornée qui satisfait

$$(t, x) \mapsto D(x, c(t, x)) \in L^1(\Omega_T) \text{ si } c \in L^2(\Omega_T), \frac{\partial D}{\partial c} \geq 0 \text{ et } \frac{\partial^2 D}{\partial c^2} \geq 0;$$

- la porosité  $\psi$  appartient à  $L^\infty(\Omega)$  et il existe  $\psi_-$  et  $\psi_+$  des réels tels que

$$0 < \psi_- \leq \psi(x) \leq \psi_+, \text{ presque pour tout } x \in \Omega.$$

On rappelle que sous ces hypothèses, les théorèmes d'existence et d'unicité d'une solution pour le problème (6.1)-(6.4) s'appliquent (voir pages 48-52 et Chapitre 3).

Au vu de la formulation que nous allons utiliser dans ce chapitre, nous allons traduire et compléter les propriétés vérifiées par le tenseur de dispersion comme suit :  $S(v)$  étant donné par (1.2), il est symétrique et donc on peut écrire :

$$S(v)^{-1} \xi \cdot \xi \geq \frac{1}{S_m + \alpha_T |v|} \left( 1 - \frac{(\alpha_L - \alpha_T) |v|}{S_m + \alpha_T |v|} \right) |\xi|^2 \geq M_- |\xi|^2, \quad M_- > 0 \quad (6.8)$$

pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^N$ ,  $N = 2$  ou  $3$  étant la dimension du domaine. En effet, d'après (1.2),  $S(v)$  s'écrit

$$S(v) = (S_m + \alpha_T |v|)(Id + E), \text{ avec } E = \frac{(\alpha_L - \alpha_T) |v|}{S_m + \alpha_T |v|} \epsilon(v),$$

l'inverse  $(Id + E)^{-1} = Id - E(Id + E)^{-1}$  étant bien défini, les matrices  $Id$  et  $E$  étant définies positives.

Grâce à la symétrie et à la positivité de  $(Id + E)$ , on peut définir  $(Id + E)^{\frac{1}{2}}$  et  $(Id + E)^{-\frac{1}{2}}$ . On écrit

$$(Id + E)^{-1} \xi \cdot \xi = |\xi|^2 - E(Id + E)^{-\frac{1}{2}} \xi \cdot (Id + E)^{-\frac{1}{2}} \xi$$

où  $E$  est tel que  $-E\eta \cdot \eta \geq -\frac{(\alpha_L - \alpha_T) |v|}{S_m + \alpha_T |v|} |\eta|^2$  pour tout  $\eta \in \mathbb{R}^N$ . En appliquant ce dernier résultat à  $\eta = (Id + E)^{-\frac{1}{2}} \xi$ , qui est tel que  $|\eta| \leq \xi$ , on en conclut que

$$(Id + E)^{-1} \xi \cdot \xi \geq \left( 1 - \frac{(\alpha_L - \alpha_T) |v|}{S_m + \alpha_T |v|} \right) |\eta|^2.$$

D'autres résultats vont être utilisés dans la suite. Notons  $(S(v))^{\frac{1}{2}}$  l'unique matrice symétrique définie positive telle que

$$S(v)^{\frac{1}{2}} S(v)^{\frac{1}{2}} = S(v).$$

On commence par déduire de (6.7) qu'il existe  $C \geq 0$  tel que

$$\left| S(v)^{\frac{1}{2}} \xi \right| \leq C(1 + |v|^{\frac{1}{2}}) |\xi|, \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N. \quad (6.9)$$

Par ailleurs, il existe une constante  $M_+ > 0$  telle que

$$|S(v)^{-1}v| \leq M_+. \quad (6.10)$$

En effet, soit  $\xi \in \mathbb{R}^N$ ,  $\xi \neq 0_{\mathbb{R}^N}$ . L'opérateur  $S(v)$  étant inversible, on peut poser  $\mu = S(v)^{-1}\xi$  et  $\mu \neq 0_{\mathbb{R}^N}$ . On a  $|S(v)\mu \cdot \mu| = |\xi \cdot \mu| \leq |\xi| |\mu|$ . Par ailleurs, par définition de  $S(v)$ ,

$$\begin{aligned} |S(v)\mu \cdot \mu| &= S(v)\mu \cdot \mu = (S_m + \alpha_T |v|) |\mu|^2 + \frac{\alpha_L - \alpha_T}{|v|} |v \cdot \mu|^2 \\ &= (S_m + \alpha_T |v|) |\mu|^2 + \frac{\alpha_L - \alpha_T}{|v|} \frac{|v \cdot \mu|^2}{|\mu|^2} |\mu|^2 \\ &\leq |\xi| |\mu|. \end{aligned}$$

En simplifiant par  $|\mu|$ , en gardant à l'esprit que  $|\mu| = |S(v)^{-1}\xi|$ , on en tire que :

$$|S(v)^{-1}\xi| \leq \frac{1}{S_m + \alpha_T |v| + \frac{\alpha_L - \alpha_T}{|v|} \frac{|v \cdot \mu|^2}{|\mu|^2}} |\xi|. \quad (6.11)$$

Estimons maintenant  $\frac{|v \cdot \mu|^2}{|\mu|^2}$  dans le cas où  $\xi = v$ . Dans ce cas,  $\mu \cdot v = S(v)^{-1}v \cdot v$ . Donc d'après (6.8),  $|\mu \cdot v| = \mu \cdot v$  et

$$|\mu \cdot v| \geq M_- |v|^2.$$

Par ailleurs, on tire facilement de (6.11) que  $|S(v)^{-1}v| = |\mu| \leq \frac{|v|}{S_m}$ . Ainsi,

$$\frac{|\mu \cdot v|^2}{|\mu|^2} \geq M_-^2 S_m^2 |v|^2.$$

En intégrant cette estimation dans (6.11), on obtient

$$|S(v)^{-1}v| \leq \frac{|v|}{S_m + \alpha_T |v| + (\alpha_L - \alpha_T) M_-^2 S_m^2 |v|}$$

et il existe  $M_+ > 0$  telle que pour tout  $v \in \mathbb{R}^N$ ,

$$\frac{|v|}{S_m + \alpha_T |v| + (\alpha_L - \alpha_T) M_-^2 S_m^2 |v|} \leq M_+.$$

Dans la suite du chapitre, nous utiliserons souvent les estimations (6.9) et (6.10) pour contrôler des termes de la forme  $\langle S(v)^{-1}vu, S(v)^{\frac{1}{2}}w \rangle$  avec  $u \in R$ ,  $w \in R^N$ . On a

$$\begin{aligned} \left| \langle S(v)^{-1}vu, S(v)^{\frac{1}{2}}w \rangle \right| &\leq M_+ |u| \left| S(v)^{\frac{1}{2}}w \right| \\ &\leq M_+ C \left( 1 + |v|^{\frac{1}{2}} \right) |u| |w| \end{aligned}$$

qu'on résume en

$$\left| \langle S(v)^{-1}vu, S(v)^{\frac{1}{2}}w \rangle \right| \leq C_{disp} \left( 1 + |v|^{\frac{1}{2}} \right) |u| |w|. \quad (6.12)$$

On imposera également la condition suivante :

$$\frac{\partial D}{\partial c} \in L^2(\mathbb{R}_+). \quad (6.13)$$

## 6.1 Discrétisation en éléments finis

La formulation variationnelle du problème continu (6.1),(6.2),(6.5) muni de (6.3),(6.4) et (6.6) est : trouver un triplet  $(c, \mu, \phi)$ , avec  $c \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ ,  $\phi \in L^\infty(0, T; W^{2,p}(\Omega))$  avec  $p > N$  ou  $\phi \in L^\infty(0, T; W^{1,q}(\Omega))$  avec  $q > N$  (et donc  $v \in L^\infty(\Omega)$ ) et  $\mu \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ , tel que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} R\psi \partial_t c \varphi \, dx - \int_{\Omega} (\kappa \nabla \phi \cdot \nabla c) \varphi \, dx + \int_{\Omega} \psi S(v) \nabla c \cdot \nabla \varphi \, dx &= \int_{\Omega} \left( -r(c) - gc + p\chi_S \right) \varphi \, dx, \\ \int_{\Omega} \kappa \nabla \phi \cdot \nabla \tilde{\varphi} \, dx &= \int_{\Omega} g \tilde{\varphi} \, dx, \\ \int_{\Omega} R\psi \partial_t \mu \tilde{\tilde{\varphi}} \, dx - \int_{\Omega} (\kappa \nabla \phi \cdot \nabla \mu) \tilde{\tilde{\varphi}} \, dx - \int_{\Omega} \psi S(v) \nabla \mu \cdot \nabla \tilde{\tilde{\varphi}} \, dx \\ &= \int_{\Omega} \left( r'(c) \mu + R\psi \rho \mu - \frac{\partial D(x, c)}{\partial c} \right) \tilde{\tilde{\varphi}} \, dx, \end{aligned}$$

pour toutes fonctions test  $\varphi$ ,  $\tilde{\varphi}$  et  $\tilde{\tilde{\varphi}}$  telles que

$$\varphi \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)) \text{ avec } (1 - \chi)\varphi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (6.14)$$

$$\tilde{\varphi} \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \text{ avec } (1 - \tilde{\chi})\tilde{\varphi} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (6.15)$$

$$\tilde{\tilde{\varphi}} \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)) \text{ avec } (1 - \chi)\tilde{\tilde{\varphi}} + (1 - \tilde{\chi})\tilde{\tilde{\varphi}} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (6.16)$$

Notons

$$\begin{aligned} W &= \{f \in H^1(\Omega), (1 - \chi)f \in H_0^1(\Omega)\} \\ \tilde{W} &= \{f \in H^1(\Omega), (1 - \tilde{\chi})f \in H_0^1(\Omega)\}. \end{aligned}$$

La discrétisation de notre modèle se fera en temps et en espace.

Détaillons d'abord la discrétisation en espace. On définit  $\mathcal{T}_h$  une décomposition régulière

---

de  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  en  $N$ -simplexes fermés où  $h$  représente le diamètre des mailles.

On suppose que  $\bar{\Omega} = \cup_{\mathcal{O} \in \mathcal{T}_h} \mathcal{O}$ . On définit les sous-espaces discrets (les éléments finis)  $W_h \subset W$ ,  $\tilde{W}_h \subset \tilde{W}$ , par

$$W_h := \{q \in W, q \text{ est constant sur chaque maille } \mathcal{O} \in \mathcal{T}_h\} \quad (6.17)$$

$$\tilde{W}_h := \{q \in \tilde{W}, q \text{ est un polynôme de degré au plus 1 sur chaque élément de } \mathcal{O} \in \mathcal{T}_h\}. \quad (6.18)$$

Pour les fonctions vectorielles, nous définissons aussi :

$$U_h := \{q \in H(\text{div}, \Omega), \forall i \in \{1, \dots, N\}, \text{ la } i\text{-ème composante de } q \text{ est un polynôme de degré } \leq 1 \text{ sur chaque élément de } \mathcal{O} \in \mathcal{T}_h\}$$

et

$$U_{h,0} := \{q \in H(\text{div}, \Omega) \text{ avec } q \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \forall i \in \{1, \dots, N\}, \text{ la } i\text{-ème composante de } q \text{ est un polynôme de degré } \leq 1 \text{ sur chaque élément de } \mathcal{O} \in \mathcal{T}_h\}.$$

Détaillons à présent la discrétisation en temps.

On notera  $\tau$  le pas de temps. La discrétisation en temps se fera avec un schéma d'Euler semi-implicite. On effectue également un changement de variable en temps sur l'équation en  $\mu$  en posant  $t' = T - t$ . On passe donc d'une équation pour  $t \in [0, T]$  avec une condition terminale à une équation pour  $t' \in [0, T]$  avec une condition initiale.

En utilisant le changement de variable fait sur l'équation adjointe dans le Chapitre 4 page 122, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} R\psi \partial_t \mu \tilde{\varphi} \, dx + \int_{\Omega} (\kappa \nabla \phi \cdot \nabla \mu) \tilde{\varphi} \, dx + \int_{\Omega} S(v) \psi \nabla \mu \cdot \nabla \tilde{\varphi} \, dx = \\ - \int_{\Omega} \left( r'(c) \mu + R\psi \rho \mu - \frac{\partial D(x, c)}{\partial c} \right) \tilde{\varphi} \, dx \end{aligned}$$

avec  $R\psi \mu(x, 0) = \frac{\partial D}{\partial c}(x, c(x, T))$  et  $t \in [0, T]$ .

La formulation variationnelle (telle qu'elle sera codée dans Freefem au chapitre suivant) de notre discrétisation du problème (6.1),(6.2),(6.5) complété par les conditions (6.3),(6.4),(6.6) est décrite et analysée dans le paragraphe suivant.

## 6.2 Analyse du schéma

### 6.2.1 Analyse du problème en charge discret

Le problème en charge discret est le suivant :

Trouver  $\phi_h \in \tilde{W}_h$  et  $v_h \in U_h$  (ou  $U_{h,0}$  selon les conditions aux bords) tels que

$$\begin{cases} \int_0^T \int_{\Omega} v_h \cdot \psi_h \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \kappa \nabla \phi_h \cdot \psi_h \, dx \, dt = 0, \\ \int_0^T \int_{\Omega} v_h \cdot \nabla \varphi_h \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} g \varphi_h \, dx \, dt = 0, \end{cases} \quad (6.19)$$

pour tous  $\psi_h \in U_h$  (ou  $U_{h,0}$ ) et  $\varphi_h \in W_h$ .

Le traitement de ce problème est classique que ce soit dans le cas de conditions aux bords de type Neumann ou Dirichlet (voir le premier schéma de Achdou et al. [2] ou Girault et al. [38]). La formulation variationnelle (6.19) permettant de calculer  $\phi_h$  ne nécessite pas de discrétisation en temps. L'intérêt est que ce schéma peut facilement s'adapter à des milieux fortement contrastés du point de vue géologique (Achdou et Bernardi [1]). De plus, on a le résultat de convergence, optimal, suivant :

**Proposition 6.2.1** (i) *Si la solution du problème (6.2)-(6.4) est telle que  $(v, \phi) \in (H^s(\Omega))^N \times H^{s+1}(\Omega)$ , pour un  $s \in \mathbb{R}$  tel que  $0 < s \leq 1$ , alors on a l'estimation optimale uniforme suivante :*

$$\|v - v_h\|_{(L^2(\Omega))^N} + \|\phi - \phi_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^s \left( \|v\|_{(H^s(\Omega))^N} + \|\phi\|_{H^{s+1}(\Omega)} \right).$$

(ii) *En particulier, si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée,*

- $\partial\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $\kappa \in (\mathcal{C}^1(\Omega))^{N \times N}$ ,
- $\partial\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $\kappa = \kappa^* \text{Id}$  avec  $\kappa^* : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\kappa \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ ,

*on sait (cf Proposition 2.3.1 du Chapitre 2) que  $\phi \in L^\infty(0, T; W^{2,p}(\Omega))$  et  $v \in (L^\infty(\Omega_T))^N$ . On a donc la convergence forte du schéma dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  au sens où*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - v_h\|_{(L^2(\Omega_T))^N} = 0.$$

*De plus, pour tout  $h$ ,*

$$\|v_h\|_{(L^\infty(\Omega_T))^N} \leq C.$$

*Preuve.* Le point (i) est le théorème 8 de Achdou et al. [2]. Sous les hypothèses de (ii), en choisissant  $p = 2$ , le point (i) s'applique et donne  $\lim_{h \rightarrow 0} \|v_h - v\|_{(L^2(\Omega_T))^N} = 0$ . La même convergence est alors aussi vraie presque partout dans  $\Omega_T$ . Ainsi,  $\forall \epsilon > 0$ , il existe  $H > 0$  tel que si  $h < H$ ,

$$|v_{h,i} - v_{,i}| < \epsilon, \quad 1 \leq i \leq N, \quad \text{presque partout dans } \Omega_T$$

où on a noté  $u_{,i}$  la  $i$ -ème composante d'un vecteur  $u \in \mathbb{R}^N$ . On en déduit que pour  $h < H$ , on a

$$|v_{h,i}| \leq |v_{h,i} - v_{,i}| + |v_{,i}| \leq \epsilon + \|v_{,i}\|_{L^\infty(\Omega_T)}.$$

La borne uniforme de  $v_h$  dans  $L^\infty(\Omega_T)$  s'en déduit. ■

Détaillons maintenant le problème en concentration.

### 6.2.2 Analyse du problème en concentration discret

Dans ce paragraphe, nous allons réécrire le modèle en nous servant de la formule  $\operatorname{div}(vc) = c \operatorname{div}(v) + v \cdot \nabla c$  et en utilisant le fait que  $\operatorname{div}(v) = g$ . On obtient :

$$R\psi \partial_t c + \operatorname{div}(v_c) = -r(c) + p\chi_S \text{ dans } \Omega_T, \quad (6.20)$$

avec

$$v_c = -S(v)\psi \nabla c + vc, \quad (6.21)$$

équations complétées par les conditions initiales et aux bords suivantes :

$$\chi S(v)\nabla c \cdot n + (1 - \chi)c = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \quad c|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega. \quad (6.22)$$

On pose

$$\tilde{p} = \begin{cases} p & \text{si } x \in \mathcal{S}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par commodité, on notera  $\tilde{p} = p$ .

**Remarque 6.2.1** *Lors du calcul de la concentration, la quantité d'engrais épandue est connue pour tout  $x$  et pour tout  $t$ ,  $p$  n'est donc pas une inconnue du problème, nous n'avons donc pas besoin d'écrire sa discrétisation.*

On établit ainsi une formulation plus "physique" du problème où le flux  $v_c$  est explicitement donné. Un schéma naturel (et classique) pour ce problème serait

$$\langle R\psi(c_h^n - c_h^{n-1}), w \rangle + \tau \langle \operatorname{div}(v_{c_h}^n), w \rangle + \tau \langle r(c_h^{n-1}), w \rangle - \tau \langle p, w \rangle = 0,$$

$$\langle S(v_h)^{-1} \psi^{-1} v_{c_h}^n, u \rangle - \langle c_h^n, \operatorname{div}(u) \rangle - \langle S(v_h)^{-1} \psi^{-1} v_h c_h^n, u \rangle = 0.$$

Cependant, nous allons plutôt adopter la formulation discrète en éléments mixtes suivante :

$$\langle R\psi(c_h^n - c_h^{n-1}), w \rangle + \tau \langle \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}} v_{c_h}^n), w \rangle + \tau \langle r(c_h^{n-1}), w \rangle - \tau \langle p, w \rangle = 0,$$

$$\langle S(v_h)^{-\frac{1}{2}} \psi^{-1} v_{c_h}^n, u \rangle - \langle c_h^n, \operatorname{div}(u) \rangle - \langle S(v_h)^{-1} \psi^{-1} v_h c_h^n, u \rangle = 0,$$

pour tout  $w \in W_h$  défini par (6.17) et pour tout  $u \in U_h$  dans le cas où  $\chi = 0$ , ou pour tout  $u \in U_{h,0}$  sinon. Cette formulation garantit en effet la stabilité pour des vitesses  $L^2$  (voir plus loin).

On a ici désigné par  $S(v)^{\frac{1}{2}}$  l'unique matrice symétrique racine carrée de la matrice symétrique définie positive  $S(v_h)$  et on a posé  $S(v)^{-\frac{1}{2}} = \left(S(v_h)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$ . On est ainsi dans le cadre confortable où les matrices  $S(v)$ ,  $S(v)^{-1}$  et  $S(v)^{-\frac{1}{2}}$  commutent toutes entre elles. On récapitule dans le cadre ci-dessous le problème variationnel ainsi obtenu :

**Problème variationnel discret correspondant à l'équation d'état :**

Soient  $n \in \{1, \dots, N\}$  et  $(c_h^{n-1}, v_h)$  donnés dans  $(W_h, U_h)$  et  $p$  donné dans  $L^2(\Omega)$ . Le problème est de trouver  $c_h^n \in W_h$  tel que :

$$\langle R\psi(c_h^n - c_h^{n-1}), w_h \rangle + \tau \langle \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}} v_{c_h}^n), w_h \rangle + \tau \langle r(c_h^{n-1}), w_h \rangle - \tau \langle p, w_h \rangle = 0 \quad (6.23)$$

$$\langle S(v_h)^{-\frac{1}{2}} \psi^{-1} v_{c_h}^n, u_h \rangle - \langle c_h^n, \operatorname{div}(u_h) \rangle - \langle S(v_h)^{-1} \psi^{-1} v_h c_h^n, u_h \rangle = 0 \quad (6.24)$$

pour tout  $(w_h, u_h) \in (W_h, U_h)$  tel que  $\chi u_h \in U_{h,0}$ . Le schéma est initialisé par  $c_h^0$  donné dans  $W_h$ .

**Théorème 6.2.1** *On suppose que les hypothèses rappelées en début de chapitre sont vérifiées. Alors :*

(i) *Si  $\tau$  est suffisamment petit et si  $v_h$  est borné dans  $L^2(\Omega)$  indépendamment de  $h$ , le problème (6.23)-(6.24) admet une unique solution.*

(ii) *Si de plus l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée,*

- a) *le maillage est supposé quasi-uniforme lorsque le tenseur de diffusion  $S(\cdot)$  dépend effectivement de la vitesse, et il existe  $\epsilon > 0$  tel que la condition suivante de type Courant-Friedrich-Lewy est vérifiée*

$$\frac{\tau^{1-\epsilon}}{h^N} := C_{CFL} = \mathcal{O}(1); \quad (6.25)$$

- b) *la vitesse  $v_h$  est bornée dans  $L^\infty(\Omega_T)$  indépendamment de  $h$  ;*

*alors on a l'estimation suivante :*

$$\|c_h^n\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \tau \|v_{c_h}^n\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \leq C. \quad (6.26)$$

**Remarque 6.2.2** *Soulignons que si la vitesse discrète  $v_h$  est donnée par le schéma décrit au paragraphe précédent, le résultat (ii) est vérifié sous les hypothèses de (ii) dans la Proposition 6.2.1 (car alors l'hypothèse (b) est satisfaite). L'intérêt du schéma est qu'il*



reste bien défini (voire stable : voir plus loin) même lorsque la vitesse n'est pas contrôlée dans  $L^\infty(\Omega_T)$ .

*Preuve.* Cette preuve est directement inspirée de Diédhiou [29].

### Existence de $c_h^n$

Soit

$$\{w_1, \dots, w_{N_1}\} \cup \{u_1, \dots, u_{N_2}\} \text{ une base orthonormée de } W_h \times U_h. \quad (6.27)$$

Soient  $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_{N_1}) \in \mathbb{R}^{N_1}$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{N_1}) \in \mathbb{R}^{N_1}$  et  $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_{N_2}) \in \mathbb{R}^{N_2}$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{N_2}) \in \mathbb{R}^{N_2}$ . On pose  $\hat{\xi} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \in \mathbb{R}^{N_1+N_2}$  et  $\xi = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{N_1+N_2}$ . On considère le produit scalaire et la norme sur  $\mathbb{R}^{N_1+N_2}$  définis par :

$$((\hat{\xi}, \xi)) := (\hat{\alpha}, \alpha)_{N_1} + \tau (\hat{\beta}, \beta)_{N_2} = \sum_{i=1}^{N_1} \hat{\alpha}_i \alpha_i + \tau \sum_{i=1}^{N_2} \hat{\beta}_i \beta_i, \quad (6.28)$$

et

$$\|\xi\| = ((\xi, \xi))^{\frac{1}{2}}, \quad (6.29)$$

où  $(\cdot, \cdot)_p$  est le produit scalaire euclidien dans  $\mathbb{R}^p$ . De plus, pour tout  $\xi = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{N_1+N_2}$ , il existe un unique  $(\bar{w}, \bar{u}) \in W_h \times U_h$  défini par

$$\bar{w} = \sum_{k=1}^{N_1} \alpha_k w_k, \quad \bar{u} = \sum_{k=1}^{N_2} \beta_k u_k. \quad (6.30)$$

On a de plus

$$\begin{aligned} \|\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{k=1}^{N_1} \alpha_k^2 \|w_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \sum_{k=1}^{N_2} \beta_k^2 \|u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \sum_{k=1}^{N_1} \alpha_k^2 + \tau \sum_{k=1}^{N_2} \beta_k^2 \text{ car } \|w_k\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 = 1 \text{ d'après (6.27)} \\ &= (\alpha, \alpha)_{N_1} + \tau (\beta, \beta)_{N_2} = ((\xi, \xi)) = \|\xi\|^2. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Pour  $\xi$  donné et pour  $(\bar{w}, \bar{u})$  défini par (6.30), on utilise les équations (6.23) et (6.24) pour définir les composantes de  $\hat{\xi} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \in \mathbb{R}^{N_1+N_2}$  comme suit :

$$\hat{\alpha}_k = \langle R\psi(\bar{w} - c_h^{n-1}), w_k \rangle + \tau \langle \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}} \bar{u}), w_k \rangle + \tau \langle r(c_h^{n-1}), w_k \rangle - \tau \langle p, w_k \rangle = 0 \quad (6.32)$$

pour tout  $k = 1, \dots, N_1$  et

$$\hat{\beta}_k = \langle S(v_h)^{-\frac{1}{2}} \psi^{-1} \bar{u}, u_k \rangle - \langle \bar{w}, \operatorname{div}(u_k) \rangle - \langle S(v_h)^{-1} \psi^{-1} v_h \bar{w}, u_k \rangle = 0 \quad (6.33)$$

pour tout  $k = 1, \dots, N_2$ .

Enfin, on définit l'application  $\mathcal{P} : \mathbb{R}^{N_1+N_2} \rightarrow \mathbb{R}^{N_1+N_2}$  par

$$\mathcal{P}(\xi) = \hat{\xi}$$

qui est continue par construction.

Le problème revient alors à résoudre

$$\mathcal{P}(\xi) = 0.$$

On construit  $((\mathcal{P}(\xi), \xi)) = ((\hat{\xi}, \xi))$  comme défini dans (6.28). On calcule le produit scalaire euclidien dans  $\mathbb{R}^{N_1}$  suivant :

$$(\hat{\alpha}, \alpha)_{N_1} = \langle R\psi(\bar{w} - c_h^{n-1}), \bar{w} \rangle + \tau \langle \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}\bar{u}), \bar{w} \rangle + \tau \langle r(c_h^{n-1}), \bar{w} \rangle - \tau \langle p, \bar{w} \rangle, \quad (6.34)$$

puis le produit scalaire euclidien dans  $\mathbb{R}^{N_2}$  :

$$\begin{aligned} \tau(\hat{\beta}, \beta)_{N_2} &= \tau \langle S(v_h)^{-\frac{1}{2}}\psi^{-1}\bar{u}, S(v_h)^{\frac{1}{2}}\bar{u} \rangle - \tau \langle \bar{w}, \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}\bar{u}) \rangle \\ &\quad - \tau \langle S(v_h)^{-1}\psi^{-1}v_h\bar{w}, S(v_h)^{\frac{1}{2}}\bar{u} \rangle. \end{aligned} \quad (6.35)$$

En sommant (6.34) et (6.35), on obtient :

$$\begin{aligned} ((\mathcal{P}(\xi), \xi)) &= \langle R\psi\bar{w}, \bar{w} \rangle - \langle R\psi c_h^{n-1}, \bar{w} \rangle + \tau \langle r(c_h^{n-1}), \bar{w} \rangle - \tau \langle p, \bar{w} \rangle \\ &\quad + \tau \langle S(v_h)^{-\frac{1}{2}}\psi^{-1}\bar{u}, S(v_h)^{\frac{1}{2}}\bar{u} \rangle - \tau \langle S(v_h)^{-1}\psi^{-1}v_h\bar{w}, S(v_h)^{\frac{1}{2}}\bar{u} \rangle. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Nous allons à présent montrer que  $((\mathcal{P}(\xi), \xi)) > 0$ . Pour cela, nous allons estimer les termes de (6.36), notamment grâce aux inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young. On obtient :

$$\begin{aligned} I_1 &= \langle R\psi\bar{w}, \bar{w} \rangle \geq R\psi_- \|\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ |I_2| &= |\langle R\psi c_h^{n-1}, \bar{w} \rangle| \leq \frac{R\psi_-}{8} \|\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2R\psi_+^2}{\psi_-} \|c_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ |I_3| &= |\tau \langle r(c_h^{n-1}), \bar{w} \rangle| \leq \frac{R\psi_-}{8} \|\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2\tau^2 r_+}{R\psi_-} \|c_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ |I_4| &= |\tau \langle p, \bar{w} \rangle| \leq \frac{R\psi_-}{8} \|\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2\tau^2}{R\psi_-} \|p\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ I_5 &= \tau \langle S(v_h)^{-\frac{1}{2}}\psi^{-1}\bar{u}, S(v_h)^{\frac{1}{2}}\bar{u} \rangle \geq \tau\psi_+^{-1} \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ |I_6| &= \left| \tau \langle S(v_h)^{-1}\psi^{-1}v_h\bar{w}, S(v_h)^{\frac{1}{2}}\bar{u} \rangle \right|. \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (6.12) introduite en début de chapitre, on a

$$|I_6| \leq \tau \psi^{-1} C_{disp} \left(1 + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\right) \|\bar{w}\|_{L^2(\Omega)} \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, on obtient

$$|I_6| \leq \frac{R\psi_-}{8} \|\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2\tau^2 C_{disp}^2 \left(1 + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\right)^2}{R\psi_-^3} \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

On obtient donc :

$$((\mathcal{P}(\xi), \xi)) \geq \frac{R\psi_-}{2} \|\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \left(\psi_+^{-1} - C'\right) \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 - K$$

$$\text{où } C' = \frac{2\tau C_{disp}^2 \left(1 + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\right)^2}{R\psi_-^3} \text{ et } K = \frac{2}{\psi_-} \left( (R\psi_+^2 + \frac{\tau^2 r_+}{R}) \|c_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau^2}{R} \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

En prenant un pas de temps assez petit tel que  $\psi_+^{-1} - C' > 0$  et en posant  $m = \min\{\frac{R\psi_-}{2}, \psi_+^{-1} - C'\}$ , on a

$$((P(\xi), \xi)) \geq m \|\xi\|^2 - K.$$

On peut donc montrer que pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^{N_1+N_2}$  satisfaisant  $\|\xi\|^2 = 2K/m$ , on a  $((P(\xi), \xi)) \geq K > 0$ . D'après le Lemme 1.4 page 164 de Temam [79], il existe donc un  $\xi \in \mathbb{R}^{N_1+N_2}$  tel que  $P(\xi) = 0$ . On en déduit l'existence de  $c_h^n$  solution du problème.

### Unicité de $c_h^n$

Le pas de discrétisation en espace  $h$  ne changeant pas, nous l'omettrons par la suite afin d'alléger les notations. On suppose qu'il existe deux couples de solutions  $(c_1^n, v_{c,1}^n), (c_2^n, v_{c,2}^n) \in W_h^2 \times U_h^2$  à (6.23) issues de la même solution  $(c_h^{n-1}, v_{c_h}^{n-1})$ . Elles vérifient donc

$$\langle R\psi(c_1^n - c_h^{n-1}), w_h \rangle + \tau \langle \text{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}} v_{c,1}^n), w_h \rangle + \tau \langle r(c_h^{n-1}), w_h \rangle - \tau \langle p, w_h \rangle = 0 \quad (6.37)$$

$$\langle S(v_h)^{-\frac{1}{2}} \psi^{-1} v_{c,1}^n, u_h \rangle - \langle c_1^n, \text{div}(u_h) \rangle - \langle S(v_h)^{-1} \psi^{-1} v_h c_1^n, u_h \rangle = 0 \quad (6.38)$$

et

$$\langle R\psi(c_2^n - c_h^{n-1}), w_h \rangle + \tau \langle \text{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}} v_{c,2}^n), w_h \rangle + \tau \langle r(c_h^{n-1}), w_h \rangle - \tau \langle p, w_h \rangle = 0 \quad (6.39)$$

$$\langle S(v_h)^{-\frac{1}{2}} \psi^{-1} v_{c,2}^n, u_h \rangle - \langle c_2^n, \text{div}(u_h) \rangle - \langle S(v_h)^{-1} \psi^{-1} v_h c_2^n, u_h \rangle = 0. \quad (6.40)$$

On soustrait (6.37) et (6.39), et (6.38) et (6.40). On pose  $C = c_1^n - c_2^n$  et  $V_c = v_{c,1}^n - v_{c,2}^n$ . On obtient

$$\langle R\psi C, w_h \rangle + \tau \langle \text{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}} V_c), w_h \rangle = 0 \quad (6.41)$$

$$\langle S(v_h)^{-\frac{1}{2}} \psi^{-1} V_c, u_h \rangle - \langle C, \text{div}(u_h) \rangle - \langle S(v_h)^{-1} \psi^{-1} v_h C, u_h \rangle = 0. \quad (6.42)$$

Afin d'éliminer les deuxièmes termes de chaque équation, on prend comme fonctions tests  $w_h = C$  et  $u_h = \tau S(v_h)^{\frac{1}{2}} V_c$  et on somme (6.41) et (6.42). On obtient :

$$\langle R\psi C, C \rangle + \tau \langle S(v_h)^{-\frac{1}{2}} \psi^{-1} V_c, S(v_h)^{\frac{1}{2}} V_c \rangle - \tau \langle S(v_h)^{-1} \psi^{-1} v_h C, S(v_h)^{\frac{1}{2}} V_c \rangle = 0. \quad (6.43)$$

Nous estimons à présent les trois termes de l'équation comme suit :

$$I_1 = \langle R\psi C, C \rangle \geq R\psi_- \|C\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$I_2 = \tau \langle S(v_h)^{-\frac{1}{2}} \psi^{-1} V_c, S(v_h)^{\frac{1}{2}} V_c \rangle \geq \tau \psi_+^{-1} \|V_c\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

D'après (6.12),

$$|I_3| = \left| \tau \langle S(v_h)^{-1} \psi^{-1} v_h C, S(v_h)^{\frac{1}{2}} V_c \rangle \right| \leq \tau \psi_-^{-1} C_{disp} \left( 1 + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \right) \|C\|_{L^2(\Omega)} \|V_c\|_{L^2(\Omega)}$$

soit

$$|I_3| = \left| \tau \langle S(v_h)^{-1} \psi^{-1} v_h C, S(v_h)^{\frac{1}{2}} V_c \rangle \right| \leq \frac{R\psi_-}{2} \|C\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau^2 C_{disp}^2 \left( 1 + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \right)^2}{2R\psi_-^3} \|V_c\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

L'équation (6.43) devient donc

$$\frac{R\psi_-}{2} \|C\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \left( \psi_+^{-1} - C'' \right) \|V_c\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0$$

$$\text{avec } C'' = \frac{\tau C_{disp}^2 \left( 1 + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \right)^2}{2R\psi_-^3}.$$

Pour un pas de temps suffisamment petit tel que  $\psi_+^{-1} - C'' > 0$ , on tire de l'inégalité précédente :

$$\|C\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0 \text{ et } \|V_c\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0 \Rightarrow c_1^n = c_2^n \text{ et } v_{c,1}^n = v_{c,2}^n = 0 \text{ presque partout dans } \Omega.$$

La solution  $(c_h^n, v_{c_h}^n)$  du problème (6.23)-(6.24) est donc unique.

### Estimation en fonction de $h$ et $\tau$

Pour obtenir les estimations en fonction de  $h$  et  $\tau$ , on reprend l'estimation de  $I_6$  :

$$|I_6| \leq \tau \langle \psi^{-1} C_{disp} \left( 1 + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \right) \bar{w}, \bar{u} \rangle \leq \tau \psi_-^{-1} C_{disp} \sum_{\mathcal{O}_h \in \mathcal{T}_h} \int_{\mathcal{O}_h} (1 + |v_h|^{\frac{1}{2}}) |\bar{w}_h| |\bar{u}_h| dx.$$

Dans le cas où l'hypothèse (ii) (b) du Théorème 6.2.1 est vérifiée, l'estimation de ce terme est évidente et on obtient directement (6.26). Sinon, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}
|I_6| &\leq \tau\psi^{-1}C_{disp} \sum_{\mathcal{O}_h \in \mathcal{T}_h} \left( \int_{\mathcal{O}_h} (1 + |v_h|^{\frac{1}{2}})^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathcal{O}_h} |\bar{w}_h|^2 |\bar{u}_h|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \tau\psi^{-1}C_{disp} \sum_{\mathcal{O}_h \in \mathcal{T}_h} \left( \int_{\mathcal{O}_h} C |v_h| dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathcal{O}_h} |\bar{w}_h|^2 |\bar{u}_h|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\tau\psi^{-1}C_{disp} \sum_{\mathcal{O}_h \in \mathcal{T}_h} \left( \left( \int_{\mathcal{O}_h} |v_h|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathcal{O}_h} 1^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathcal{O}_h} |\bar{w}_h|^2 |\bar{u}_h|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $\|v_h\|_{L^2(\mathcal{O}_h)} \leq \|v_h\|_{L^2(\Omega)}$ , quantité qu'on suppose uniformément bornée dans le Théorème 6.2.1, on trouve

$$\begin{aligned}
|I_6| &\leq C\tau\psi^{-1}C_{disp} \sum_{\mathcal{O}_h \in \mathcal{T}_h} \|v_h\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} |\mathcal{O}_h|^{\frac{1}{4}} \left( \int_{\mathcal{O}_h} |\bar{w}_h|^2 |\bar{u}_h|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\tau\psi^{-1}C_{disp} \sum_{\mathcal{O}_h \in \mathcal{T}_h} |\mathcal{O}_h|^{\frac{1}{4}} \left( \int_{\mathcal{O}_h} |\bar{w}_h|^2 |\bar{u}_h|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Comme  $\bar{w}_h$  est constant par maille, on a

$$\begin{aligned}
|I_6| &\leq C\tau\psi^{-1}C_{disp} \sum_{\mathcal{O}_h \in \mathcal{T}_h} |\mathcal{O}_h|^{\frac{1}{4}} |\bar{w}_h| \left( \int_{\mathcal{O}_h} |\bar{u}_h|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C\tau\psi^{-1}C_{disp} \sum_{\mathcal{O}_h \in \mathcal{T}_h} |\mathcal{O}_h|^{\frac{1}{4}} \left( \frac{1}{|\mathcal{O}_h|} \int_{\mathcal{O}_h} |\bar{w}_h|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathcal{O}_h} |\bar{u}_h|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

En supposant le maillage quasi-uniforme (car on utilise des éléments finis  $P_0$  constants par maille, dans d'autres cas il faut adapter la démonstration en utilisant les inégalités inverses (voir le théorème 4.5.11 et la remarque associée dans Brenner et Scott [18])), on obtient

$$|I_6| \leq \frac{C\tau\psi^{-1}C_{disp}}{h^{\frac{N}{4}}} \sum_{\mathcal{O}_h \in \mathcal{T}_h} \left( \|\bar{w}_h\|_{L^2(\mathcal{O}_h)} \|\bar{u}_h\|_{L^2(\mathcal{O}_h)} \right).$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète, on a

$$\begin{aligned}
|I_6| &\leq \frac{C\tau\psi^{-1}C_{disp}}{h^{\frac{N}{4}}} \left( \sum_{\mathcal{O}_h \in \mathcal{T}_h} \|\bar{w}_h\|_{L^2(\mathcal{O}_h)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{\mathcal{O}_h \in \mathcal{T}_h} \|\bar{u}_h\|_{L^2(\mathcal{O}_h)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{C\tau\psi^{-1}C_{disp}}{h^{\frac{N}{4}}} \|\bar{w}\|_{L^2(\Omega)} \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Enfin, grâce à l'inégalité de Young, on obtient

$$|I_6| \leq \frac{R\psi_-}{8} \|\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2C^2\tau^2 C_{disp}^2}{h^{\frac{N}{2}} R\psi_-^3} \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{R\psi_-}{8} \|\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C'\tau \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\text{où } C' = \frac{2C^2\tau C_{disp}^2}{h^{\frac{N}{2}} R\psi_-^3} = \frac{2C^2 C_{disp}^2 \tau^{\frac{1-\epsilon}{2}} \tau^{\frac{1+\epsilon}{2}}}{h^{\frac{N}{2}} R\psi_-^3}.$$

Comme on a montré précédemment l'existence et l'unicité de  $c_h^n$  et  $v_{ch}^n$ , on peut écrire :

$$((\mathcal{P}(\xi), \xi)) \geq \frac{R\psi_-}{2} \|c_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \left( \psi_+^{-1} - C' \right) \|v_{ch}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - K$$

$$\text{où } K = \frac{2}{\psi_-} \left( (R\psi_+^2 + \frac{\tau^2 r_+}{R}) \|c_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau^2}{R} \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

Si la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (6.25) est vérifiée, alors on a

$$((\mathcal{P}(\xi), \xi)) \geq \frac{R\psi_-}{2} \|c_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \left( \psi_+^{-1} - C_{CFL} \tau^{\frac{1+\epsilon}{2}} \right) \|v_{ch}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - K.$$

Comme le calcul de  $((\mathcal{P}(\xi), \xi))$  implique maintenant des constantes uniformes en  $h$  et  $\tau$ , on en déduit les estimations uniformes du théorème pour  $\tau$  suffisamment petit (tel que  $\psi_+^{-1} - C_{CFL} \tau^{1+\frac{\epsilon}{2}} > 0$ ). ■

### Stabilité

Passons maintenant à l'étude de stabilité. On a le résultat suivant :

**Théorème 6.2.2** *On suppose que les hypothèses rappelées en début de chapitre sont vérifiées et que  $(c_h^n, v_{ch}^n)$  est solution du problème (6.23)-(6.24). On suppose  $r \in L^\infty(\mathbb{R})$  ou  $|r(x)| \leq r^+ |x|$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  avec  $r^+ \in \mathbb{R}$  et la condition (6.26) vérifiée. On a les estimations suivantes*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \sum_{n=1}^{T/\tau} \|c_h^n - c_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sup_{0 \leq k \leq T/\tau} \|v_{ch}^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^{T/\tau} \|v_{ch}^n - v_{ch}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq C \left( 1 + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right) \end{aligned} \quad (6.44)$$

et

$$\tau \sum_{n=1}^{T/\tau} \left\| \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}} v_{ch}^n) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left( 1 + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right). \quad (6.45)$$

*Preuve.* On rappelle (6.23) et (6.24) :

$$\begin{aligned} \langle R\psi(c_h^n - c_h^{n-1}), w_h \rangle + \tau \langle \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}} v_{ch}^n), w_h \rangle + \tau \langle r(c_h^{n-1}), w_h \rangle - \tau \langle p, w_h \rangle = 0, \\ \langle S(v_h)^{-\frac{1}{2}} \psi^{-1} v_{ch}^n, u_h \rangle - \langle c_h^n, \operatorname{div}(u_h) \rangle - \langle S(v_h)^{-1} \psi^{-1} v_h c_h^n, u_h \rangle = 0. \end{aligned}$$

En réécrivant l'équation (6.24) aux temps  $t^n$  et  $t^{n-1}$  et en faisant la différence des deux équations, on obtient :

$$\langle S(v_h)^{-\frac{1}{2}}\psi^{-1}(v_{c_h}^n - v_{c_h}^{n-1}), u_h \rangle - \langle (c_h^n - c_h^{n-1}), \operatorname{div}(u_h) \rangle - \langle S(v_h)^{-1}\psi^{-1}v_h(c_h^n - c_h^{n-1}), u_h \rangle = 0. \quad (6.46)$$

On additionne les équations (6.23) et (6.46) en prenant  $w_h = c_h^n - c_h^{n-1}$  et  $u_h = \tau S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{c_h}^n$  :

$$\begin{aligned} & \langle R\psi(c_h^n - c_h^{n-1}), (c_h^n - c_h^{n-1}) \rangle + \tau \langle r(c_h^{n-1}), (c_h^n - c_h^{n-1}) \rangle - \tau \langle p, (c_h^n - c_h^{n-1}) \rangle \\ & + \tau \langle S(v_h)^{-\frac{1}{2}}\psi^{-1}(v_{c_h}^n - v_{c_h}^{n-1}), S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{c_h}^n \rangle - \tau \langle S(v_h)^{-1}\psi^{-1}v_h(c_h^n - c_h^{n-1}), S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{c_h}^n \rangle = 0. \end{aligned}$$

On estime les cinq termes :

$$I_1 \geq R\psi_- \|c_h^n - c_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$|I_2| \leq \frac{\tau^2}{R\psi_-} \|r(c_h^{n-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{R\psi_-}{4} \|c_h^n - c_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$|I_3| \leq \frac{\tau^2}{R\psi_-} \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{R\psi_-}{4} \|c_h^n - c_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{\tau}{2} \int_{\Omega} \psi^{-1} \left( (v_{c_h}^n)^2 - (v_{c_h}^{n-1})^2 + (v_{c_h}^n - v_{c_h}^{n-1})^2 \right) dx \\ &= \frac{\tau}{2} \left\| \psi^{-\frac{1}{2}}v_{c_h}^n \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau}{2} \left\| \psi^{-\frac{1}{2}}(v_{c_h}^n - v_{c_h}^{n-1}) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\tau}{2} \left\| \psi^{-\frac{1}{2}}v_{c_h}^{n-1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

puisque'on a supposé ici  $S(v_h)$  symétrique, et enfin en utilisant (6.12)

$$\begin{aligned} |I_5| &\leq \frac{\tau^2 C_{disp}^2 \left(1 + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\right)^2}{R\psi_-^3} \|v_{c_h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{R\psi_-}{4} \|c_h^n - c_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \frac{C\tau^2 C_{disp}^2 \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}}{R\psi_-^3} \|v_{c_h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{R\psi_-}{4} \|c_h^n - c_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} & \frac{R\psi_-}{4} \|c_h^n - c_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau}{2} \left\| \psi^{-\frac{1}{2}}(v_{c_h}^n - v_{c_h}^{n-1}) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau}{2} \left\| \psi^{-\frac{1}{2}}v_{c_h}^n \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{\tau}{2} \left\| \psi^{-\frac{1}{2}}v_{c_h}^{n-1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \frac{\tau^2}{R\psi_-} \left( \|r(c_h^{n-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{disp}^2 C \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \psi_-^{-2} \|v_{c_h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

Si  $r \in L^\infty(\Omega)$ , on a  $\|r(c_h^{n-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C$ . De même, comme on suppose la condition (6.26) vérifiée, on a  $\|c_h^n\|_{L^2(\Omega)} \leq C$ . Donc si  $|r(x)| \leq r^+ |x|$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\|r(c_h^{n-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C$ . D'où

$$\begin{aligned} & \frac{R\psi_-}{4} \|c_h^n - c_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau}{2} \|\psi^{-\frac{1}{2}}(v_{ch}^n - v_{ch}^{n-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau}{2} \|\psi^{-\frac{1}{2}}v_{ch}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \frac{\tau}{2} \|\psi^{-\frac{1}{2}}v_{ch}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau^2}{R\psi_-} \left( C + C_{disp}^2 C \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \psi_-^{-2} \|v_{ch}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

En sommant pour  $n = 1, \dots, k$  et en remarquant que  $\sum_{n \leq T/\tau} C\tau^2 \leq C\tau$ , on obtient

$$\begin{aligned} C \sum_{n=1}^k \|c_h^n - c_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\tau \sum_{n=1}^k \|v_{ch}^n - v_{ch}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau}{2} \|v_{ch}^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq C\tau + 2\tau \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \left( \sum_{n=1}^k \frac{\tau}{2} \|v_{ch}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (6.47)$$

On commence par exploiter

$$\tau \|v_{ch}^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\tau + 2\tau \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \left( \sum_{n=1}^k \frac{\tau}{2} \|v_{ch}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

L'inégalité de Gronwall discrète<sup>1</sup> donne :

$$\|v_{ch}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left( 1 + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \right).$$

On peut alors aussi déduire de (6.47) :

$$\sum_{n=1}^k \|c_h^n - c_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\tau \left( 1 + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right)$$

et

$$\sum_{n=1}^k \|v_{ch}^n - v_{ch}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left( 1 + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right).$$

Comme les résultats sont vrais pour tout  $k$ ,  $0 \leq k \leq T/\tau$ , on conclut :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \sum_{n=1}^{T/\tau} \|c_h^n - c_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sup_{0 \leq k \leq T/\tau} \|v_{ch}^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^{T/\tau} \|v_{ch}^n - v_{ch}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq C \left( 1 + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (6.48)$$

---

1. Si  $(a_k)_{k \geq 0}$ ,  $(b_k)_{k \geq 0}$ ,  $(c_k)_{k \geq 0}$ , sont trois suites à termes positifs telles que pour tout  $k \geq 0$  on ait  $a_{k+1} \leq c_{k+1} + \sum_{n=0}^k a_n b_n$ , alors  $a_{k+1} \leq c_{k+1} + \sum_{n=0}^k c_n b_n \exp\left(\sum_{j=n+1}^k b_j\right)$ .



---

On revient à présent à l'équation (6.23) en prenant  $w_h = \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{c_h}^n)$ . On a :

$$\begin{aligned} \langle R\psi(c_h^n - c_h^{n-1}), \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{c_h}^n) \rangle + \tau \langle \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{c_h}^n), \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{c_h}^n) \rangle \\ + \tau \langle r(c_h^{n-1}), \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{c_h}^n) \rangle - \tau \langle p, \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{c_h}^n) \rangle = 0. \end{aligned}$$

On estime les termes suivants :

$$|I_1| \leq \frac{R^2\psi_+^2}{\tau} \|c_h^n - c_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau}{4} \left\| \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{c_h}^n) \right\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$I_2 \geq \tau \left\| \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{c_h}^n) \right\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$|I_3| \leq C\tau + \frac{\tau}{4} \left\| \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{c_h}^n) \right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

car  $r$  est supposé  $L^\infty(\Omega)$  ou sous-linéaire avec la condition (6.26), et

$$|I_4| \leq C\tau + \frac{\tau}{4} \left\| \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{c_h}^n) \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

On obtient donc

$$\frac{\tau}{4} \left\| \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{c_h}^n) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\tau + \frac{R^2\psi_+^2}{\tau} \|c_h^n - c_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En sommant pour  $n = 1, \dots, k$ , on a

$$C\tau \sum_{n=1}^k \left\| \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{c_h}^n) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C + \frac{C}{\tau} \sum_{n=1}^k \|c_h^n - c_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

D'après (6.48),  $\frac{C}{\tau} \sum_{n=1}^k \|c_h^n - c_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left( 1 + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right)$ . On en conclut

$$\tau \sum_{n=1}^{T/\tau} \left\| \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{c_h}^n) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left( 1 + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right). \quad (6.49)$$

■

### 6.2.3 Analyse du problème adjoint discret

Pour être complets, nous présentons également la discrétisation du problème adjoint. Il faut cependant garder à l'esprit que du point de vue de l'implémentation, il est souvent plus efficace de considérer le problème adjoint associé à la version discrétisée du

problème que de discrétiser le problème adjoint associé à la version continue du problème.

On rappelle l'équation en  $\mu$  après changement de variable :

$$R\psi\partial_t\mu - v \cdot \nabla\mu - \operatorname{div}(S(v)\psi\nabla\mu) = -r'(c)\mu - R\psi\rho\mu + \frac{\partial D}{\partial c}(x, c) \text{ dans } \Omega_T,$$

avec  $R\psi\mu(0, x) = \frac{\partial D}{\partial c}(x, c(T, x))$ .

Pour l'analyse du schéma du problème discret de l'équation adjointe, on se sert également de la formule  $\operatorname{div}(v\mu) = \mu \operatorname{div}(v) + v \cdot \nabla\mu$  et du fait que  $\operatorname{div}(v) = g$ . On écrit le problème sous forme mixte :

$$R\psi\partial_t\mu + \operatorname{div}(v_\mu) + r'(c)\mu + R\psi\rho\mu - \frac{\partial D}{\partial c}(x, c) + g\mu = 0$$

$$v_\mu = -S(v)\psi\nabla\mu - v\mu,$$

avec  $R\psi\mu(0, x) = \frac{\partial D}{\partial c}(x, c(T, x))$ .

Après avoir calculé l'ensemble des valeurs  $c_h^p$ ,  $0 \leq p \leq T/\tau$ , on peut utiliser la formulation variationnelle discrète suivante :

$$\begin{aligned} \langle R\psi(\mu_h^n - \mu_h^{n-1}), w_h \rangle + \tau \langle \operatorname{div}(v_{\mu_h}^n), w_h \rangle + \tau \langle r'(c_h^n)\mu_h^n, w_h \rangle + \tau \langle R\psi\rho\mu_h^n, w_h \rangle \\ - \tau \langle \frac{\partial D}{\partial c}(c_h^n), w_h \rangle + \tau \langle g\mu_h^n, w_h \rangle = 0 \end{aligned}$$

$$\langle S(v_h)^{-1}\psi^{-1}v_{\mu_h}^n, u_h \rangle - \langle \mu_h^n, \operatorname{div}(u_h) \rangle + \langle S(v_h)^{-1}\psi^{-1}v_h\mu_h^n, u_h \rangle = 0$$

pour tout  $(w_h, u_h) \in (W_h, U_h)$  si  $\chi = 0$ , pour tout  $(w_h, u_h) \in (W_h, U_{h,0})$  sinon.

On récapitule dans le tableau ci-dessous :

**Problème variationnel discret correspondant à l'équation adjointe :**

Soient  $n \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\mu_h^{n-1}$  et  $c_h^p$ ,  $0 \leq p \leq T/\tau$  donnés dans  $W_h$ ,  $v_h$  donné dans  $U_h$ . Le problème est de trouver  $\mu_h^n \in W_h$  tel que :

$$\begin{aligned} \langle R\psi(\mu_h^n - \mu_h^{n-1}), w_h \rangle + \tau \langle \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{\mu_h}^n), w_h \rangle + \tau \langle r'(c_h^n)\mu_h^n, w_h \rangle + \tau \langle R\psi\rho\mu_h^n, w_h \rangle \\ - \tau \langle \frac{\partial D}{\partial c}(c_h^n), w_h \rangle + \tau \langle g\mu_h^n, w_h \rangle = 0 \quad (6.50) \end{aligned}$$

$$\langle S(v_h)^{-\frac{1}{2}}\psi^{-1}v_{\mu_h}^n, u_h \rangle - \langle \mu_h^n, \operatorname{div}(u_h) \rangle + \langle S(v_h)^{-1}\psi^{-1}v_h\mu_h^n, u_h \rangle = 0 \quad (6.51)$$

pour tout  $(w_h, u_h) \in W_h \times U_h$  tel que  $\chi u_h \in U_{h,0}$ . Le schéma est initialisé par  $R\psi\mu_h^0 = \frac{\partial D}{\partial c}(c_h^{\frac{T}{\tau}})$ .

---

**Remarque 6.2.3** On utilise ici l'indice générique "n" pour repérer les temps discrets. Mais dans l'algorithme codé (voir chapitre suivant), on commence par calculer les  $c_h^n$ ,  $0 \leq n \leq t/\tau$ , puis on calcule les  $\mu_h^{n'}$ ,  $0 \leq n' \leq t/\tau$ , et la valeur appelée en concentration dans les troisième et cinquième termes de (6.50) est  $c_h^{\frac{t}{\tau}-n'}$ .

**Théorème 6.2.3** On suppose que les hypothèses rappelées en début de chapitre sont vérifiées. Alors :

(i) Si  $\tau$  est suffisamment petit et si  $v_h$  est uniformément borné dans  $L^2(\Omega)$ , le problème (6.50)-(6.51) admet une unique solution.

(ii) Si l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée,

a) le maillage est supposé quasi-uniforme lorsque le tenseur de diffusion  $S(\cdot)$  dépend de la vitesse  $v$ , et il existe  $\epsilon > 0$  tel que la condition (6.25) est vérifiée ;

b) la vitesse  $v_h$  est bornée dans  $L^\infty(\Omega_T)$  indépendamment de  $h$  ;

alors on a l'estimation suivante

$$\|\mu_h^n\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \tau \|v_{\mu_h}^n\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \leq C. \quad (6.52)$$

*Preuve.* La preuve est complètement similaire à la précédente. Nous la reproduisons pour le confort du lecteur.

### Existence de $\mu_h^n$

On reprend les mêmes définitions introduites dans la preuve du Théorème 6.2.1.

Pour  $\xi$  donné et pour  $(\bar{w}, \bar{u})$  défini par (6.30), on utilise les équations (6.50) et (6.51) pour définir les composantes de  $\hat{\xi} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \in \mathbb{R}^{N_1+N_2}$  comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_k = \langle R\psi(\bar{w} - \mu_h^{n-1}), w_k \rangle + \tau \langle \text{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}\bar{u}), w_k \rangle + \tau \langle r'(c_h^n)\bar{w}, w_k \rangle + \tau \langle R\psi\rho\bar{w}, w_k \rangle \\ - \tau \langle D'(c_h^n), w_k \rangle + \tau \langle g\bar{w}, w_k \rangle = 0 \end{aligned} \quad (6.53)$$

pour tout  $k = 1, \dots, N_1$  et

$$\hat{\beta}_k = \langle S(v_h)^{-\frac{1}{2}}\psi^{-1}\bar{u}, u_k \rangle - \langle \bar{w}, \text{div}(u_k) \rangle + \langle S(v_h)^{-1}\psi^{-1}v_h\bar{w}, u_k \rangle = 0 \quad (6.54)$$

pour tout  $k = 1, \dots, N_2$ .

On a noté  $D'$  au lieu de  $\frac{\partial D}{\partial c}$  pour simplifier les notations.

On définit l'application  $\mathcal{P} : \mathbb{R}^{N_1+N_2} \rightarrow \mathbb{R}^{N_1+N_2}$  par

$$\mathcal{P}(\xi) = \hat{\xi}$$

qui est continue par construction. Le problème revient à résoudre

$$\mathcal{P}(\xi) = 0.$$

On construit  $((\mathcal{P}(\xi), \xi)) = ((\hat{\xi}, \xi))$  comme défini dans (6.28). On calcule le produit scalaire euclidien dans  $\mathbb{R}^{N_1}$  suivant :

$$(\hat{\alpha}, \alpha)_{N_1} = \langle R\psi(\bar{w} - \mu_h^{n-1}), \bar{w} \rangle + \tau \langle \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}\bar{u}), \bar{w} \rangle + \tau \langle r'(c_h^n)\bar{w}, \bar{w} \rangle + \tau \langle R\psi\rho\bar{w}, \bar{w} \rangle - \tau \langle D'(c_h^n), \bar{w} \rangle + \tau \langle g\bar{w}, \bar{w} \rangle = 0 \quad (6.55)$$

puis le produit scalaire euclidien dans  $\mathbb{R}^{N_2}$  :

$$\tau(\hat{\beta}, \beta)_{N_2} = \tau \langle S(v_h)^{-\frac{1}{2}}\psi^{-1}\bar{u}, S(v_h)^{\frac{1}{2}}\bar{u} \rangle - \tau \langle \bar{w}, \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}\bar{u}) \rangle + \tau \langle S(v_h)^{-1}\psi^{-1}v_h\bar{w}, S(v_h)^{\frac{1}{2}}\bar{u} \rangle = 0. \quad (6.56)$$

En sommant (6.55) et (6.56), on obtient :

$$((\mathcal{P}(\xi), \xi)) = \langle R\psi\bar{w}, \bar{w} \rangle - \langle R\psi\mu_h^{n-1}, \bar{w} \rangle + \tau \langle r'(c_h^n)\bar{w}, \bar{w} \rangle + \tau \langle R\psi\rho\bar{w}, \bar{w} \rangle - \tau \langle D'(c_h^n), \bar{w} \rangle + \tau \langle g\bar{w}, \bar{w} \rangle + \tau \langle S(v_h)^{-\frac{1}{2}}\psi^{-1}\bar{u}, S(v_h)^{\frac{1}{2}}\bar{u} \rangle + \tau \langle S(v_h)^{-1}\psi^{-1}v_h\bar{w}, S(v_h)^{\frac{1}{2}}\bar{u} \rangle. \quad (6.57)$$

Afin de montrer que  $((\mathcal{P}(\xi), \xi)) > 0$ , nous allons à présent estimer les termes de (6.57). On obtient :

$$\begin{aligned} I_1 &= \langle R\psi\bar{w}, \bar{w} \rangle \geq R\psi_- \|\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ |I_2| &= |\langle R\psi\mu_h^{n-1}, \bar{w} \rangle| \leq \frac{R\psi_-}{4} \|\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{R\psi_-^2}{\psi_-} \|\mu_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ I_3 &= \tau \langle r'(c_h^n)\bar{w}, \bar{w} \rangle \geq \tau \min_{\theta \in \mathcal{T}_h} r'(c_{h|\theta}^n) \|\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ I_4 &= \tau \langle R\rho\psi\bar{w}, \bar{w} \rangle \geq \tau R\rho\psi_- \|\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ |I_5| &= |\tau \langle D'(c_h^n), \bar{w} \rangle| \leq \frac{R\psi_-}{4} \|\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^2 \frac{\|D'(c_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2}{R\psi_-}, \\ I_6 &= \tau \langle g\bar{w}, \bar{w} \rangle \geq \tau \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \|\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ I_7 &= \tau \langle S(v_h)^{-\frac{1}{2}}\psi^{-1}\bar{u}, S(v_h)^{\frac{1}{2}}\bar{u} \rangle \geq \tau \psi_+^{-1} \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ |I_8| &= \left| \tau \langle S(v_h)^{-1}\psi^{-1}v_h^n\bar{w}, S(v_h)^{\frac{1}{2}}\bar{u} \rangle \right|. \end{aligned}$$

On notera que le terme  $I_3$  se traite ici très simplement car  $c_h^n$  est constant par mailles. On traite  $I_8$  de la même manière que pour la démonstration de l'existence de  $c_h^n$  en utilisant les mêmes hypothèses. On a donc

$$|I_8| \leq \frac{R\psi_-}{4} \|\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau^2 C_{disp}^2 \left(1 + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\right)^2}{R\psi_-^3} \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{R\psi_-}{4} \|\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C'\tau \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

où  $C' = \frac{\tau C_{disp}^2 (1 + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}})^2}{R\psi_-^3} \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}$ .

On obtient donc :

$$\begin{aligned} ((\mathcal{P}(\xi), \xi)) \geq & \left( \frac{R\psi_-}{4} + \tau \left( \min_{\theta \in \mathcal{T}_h} r'(c_h^n |_\theta) + R\rho\psi_- + \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \right) \|\bar{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \tau \left( \psi_+^{-1} - C' \right) \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 - K \end{aligned}$$

où  $K = \frac{R\psi_-^2}{\psi_-} \|\mu_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^2 \frac{\|D'(c_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2}{R\psi_-}$ .

En prenant un pas de temps assez petit tel que  $\frac{R\psi_-}{4} + \tau \left( \min_{\theta \in \mathcal{T}_h} r'(c_h^n |_\theta) + R\rho\psi_- + \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \right) > 0$  et  $\psi_+^{-1} - C' > 0$  et en posant  $m = \min \left\{ \frac{R\psi_-}{4} + \tau \left( \min_{\theta \in \mathcal{T}_h} r'(c_h^n |_\theta) + R\rho\psi_- + \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \right), \psi_+^{-1} - C' \right\}$ , on a

$$((P(\xi), \xi)) \geq m \|\xi\|^2 - K.$$

On peut donc montrer que pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^{N_1+N_2}$  satisfaisant  $\|\xi\|^2 = 2K/m$ , on a  $((P(\xi), \xi)) \geq K > 0$ . D'après le Lemme 1.4 page 164 de Temam [79], on en déduit l'existence de  $\mu_h^n$  solution du problème.

### Unicité de $\mu_h^n$

Le pas de discrétisation en espace ne changeant pas, on introduit une nouvelle notation en omettant  $h$ . On suppose qu'il existe deux couples de solutions  $(\mu_1^n, v_{\mu,1}^n), (\mu_2^n, v_{\mu,2}^n) \in W_h \times U_h$  à (6.50) issues de la même solution  $(\mu_h^{n-1}, v_{\mu_h}^{n-1})$ . Elles vérifient donc

$$\begin{aligned} \langle R\psi(\mu_1^n - \mu_h^{n-1}), w_h \rangle + \tau \langle \text{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}} v_{\mu,1}^n), w_h \rangle + \tau \langle r'(c_h^n) \mu_1^n, w_h \rangle + \tau \langle R\rho\psi \mu_1^n, w_h \rangle \\ - \tau \langle D'(c_h^n), w_h \rangle + \tau \langle g \mu_1^n, w_h \rangle = 0 \end{aligned} \quad (6.58)$$

$$\langle S(v_h)^{-\frac{1}{2}} \psi^{-1} v_{\mu,1}^n, u_h \rangle - \langle \mu_1^n, \text{div}(u_h) \rangle - \langle S(v_h)^{-1} \psi^{-1} v_h \mu_1^n, u_h \rangle = 0 \quad (6.59)$$

et

$$\begin{aligned} \langle R\psi(\mu_2^n - \mu_h^{n-1}), w_h \rangle + \tau \langle \text{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}} v_{\mu,2}^n), w_h \rangle + \tau \langle r'(c_h^n) \mu_2^n, w_h \rangle + \tau \langle R\rho\psi \mu_2^n, w_h \rangle \\ - \tau \langle D'(c_h^n), w_h \rangle + \tau \langle g \mu_2^n, w_h \rangle = 0 \end{aligned} \quad (6.60)$$

$$\langle S(v_h)^{-\frac{1}{2}} \psi^{-1} v_{\mu,2}^n, u_h \rangle - \langle \mu_2^n, \text{div}(u_h) \rangle - \langle S(v_h)^{-1} \psi^{-1} v_h \mu_2^n, u_h \rangle = 0. \quad (6.61)$$

On soustrait (6.58) et (6.60), et (6.59) et (6.61). On pose  $U = \mu_1^n - \mu_2^n$  et  $V_\mu = v_{\mu,1}^n - v_{\mu,2}^n$ . On obtient

$$\langle R\psi U, w_h \rangle + \tau \langle \text{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}} V_\mu), w_h \rangle + \tau \langle r'(c_h^n) U, w_h \rangle + \tau \langle R\rho\psi U, w_h \rangle + \tau \langle g U, w_h \rangle = 0 \quad (6.62)$$

$$\langle S(v_h)^{-\frac{1}{2}} \psi^{-1} V_\mu, u_h \rangle - \langle U, \text{div}(u_h) \rangle - \langle S(v_h)^{-1} \psi^{-1} v_h U, u_h \rangle = 0. \quad (6.63)$$

Afin d'annuler les deuxièmes termes de chaque équation, on choisit comme fonctions tests  $w_h = C$  et  $u_h = \tau S(v_h)^{\frac{1}{2}} V_\mu$  et on somme (6.62) et (6.63). On obtient :

$$\begin{aligned} \langle R\psi U, U \rangle + \tau \langle r'(c_h^n) U, U \rangle + \tau \langle R\rho\psi U, U \rangle + \tau \langle gU, U \rangle + \tau \langle S(v_h)^{-\frac{1}{2}} \psi^{-1} V_\mu, S(v_h)^{\frac{1}{2}} V_\mu \rangle \\ - \tau \langle S(v_h)^{-1} \psi^{-1} v_h U, S(v_h)^{\frac{1}{2}} V_\mu \rangle = 0. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Nous estimons les six termes de l'équation comme suit :

$$I_1 = \langle R\psi U, U \rangle \geq R\psi_- \|U\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$I_2 = \tau \langle r'(c_h^n) U, U \rangle \geq \tau \min_{\theta \in \mathcal{T}_h} r'(c_{h|\theta}^n) \|U\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$I_3 = \tau \langle R\rho\psi U, U \rangle \geq \tau R\rho\psi_- \|U\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$I_4 = \tau \langle gU, U \rangle \geq \tau \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \|U\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$I_5 = \tau \langle \psi^{-1} V_\mu, V_\mu \rangle \geq \tau \psi_+^{-1} \|V_\mu\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$|I_6| = \left| \tau \langle S(v_h)^{-1} \psi^{-1} v_h U, S(v_h)^{\frac{1}{2}} V_\mu \rangle \right| \leq \frac{R\psi_-}{2} \|U\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau^2 C_{disp}^2 \left(1 + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\right)^2}{2R\psi_-^3} \|V_\mu\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

L'équation (6.64) devient donc

$$\left( \frac{R\psi_-}{2} + \tau \min_{\theta \in \mathcal{T}_h} r'(c_{h|\theta}^n) + \tau R\rho\psi_- + \tau \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|U\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \left( \psi_+^{-1} - C'' \right) \|V_\mu\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0$$

$$\text{avec } C'' = \frac{\tau C_{disp}^2 (1 + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}})^2}{2R\psi_-^3}.$$

Pour un pas de temps suffisamment petit tel que  $\frac{R\psi_-}{2} + \tau \min_{\theta \in \mathcal{T}_h} r'(c_{h|\theta}^n) + \tau R\rho\psi_- + \tau \|g\|_{L^\infty(\Omega)} > 0$  et  $\psi_+^{-1} - C'' > 0$ , on a :

$$\|U\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0 \text{ et } \|V_\mu\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0 \Rightarrow \mu_1^n = \mu_2^n \text{ et } v_{\mu,1}^n = v_{\mu,2}^n = 0 \text{ presque partout dans } \Omega.$$

La solution  $(c_h^n, v_{c_h}^n)$  du problème (6.50)-(6.51) est donc unique.

### Estimations en fonction de $h$ et $\tau$

Pour obtenir les estimations en fonction de  $h$  et  $\tau$ , on reprend l'estimation de  $I_8$  de la même manière qu'on avait repris l'estimation de  $I_6$  à la page 211 pour le problème en concentration. Si l'hypothèse (b) du théorème est satisfaite, on obtient directement (6.52). Sinon, on a :

$$|I_8| \leq \frac{R\psi_-}{4} \|\bar{w}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C^2 \tau^2 C_{disp}^2}{h^{\frac{N}{2}} R\psi_-^3} \|\bar{u}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{R\psi_-}{4} \|\bar{w}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + C'' \tau \|\bar{u}_h\|_{L^2(\Omega)}^2$$

---


$$\text{où } C'' = \frac{C^2 \tau C_{disp}^2}{h^{\frac{N}{2}} R \psi_-^3} = \frac{C^2 C_{disp}^2 \tau^{\frac{1-\epsilon}{2}} \tau^{\frac{1+\epsilon}{2}}}{h^{\frac{N}{2}} R \psi_-^3}.$$

Comme on a montré précédemment l'existence et l'unicité de  $\mu_h^n$  et  $v_{\mu_h}^n$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} ((\mathcal{P}(\xi), \xi)) &\geq \left( \frac{R\psi_-}{4} + \tau \left( \min_{\theta \in \mathcal{T}_h} r'(c_h^n | \theta) + R\rho\psi_- + \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \right) \|\mu_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \tau(\psi_+^{-1} - C'') \|v_{\mu_h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - K \end{aligned}$$

$$\text{où } K = \frac{R\psi_-^2}{\psi_-} \|\mu_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^2 \frac{\|D'(c_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2}{R\psi_-}.$$

Si la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) (6.25) est vérifiée, alors on a

$$\begin{aligned} ((\mathcal{P}(\xi), \xi)) &\geq \left( \frac{R\psi_-}{4} + \tau \left( \min_{\theta \in \mathcal{T}_h} r'(c_h^n | \theta) + R\rho\psi_- + \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \right) \|\mu_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \tau(\psi_+^{-1} - C_{CFL} \tau^{\frac{1+\epsilon}{2}}) \|v_{\mu_h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - K. \end{aligned}$$

Comme le calcul de  $((\mathcal{P}(\xi), \xi))$  implique maintenant des constantes uniformes en  $h$  et  $\tau$ , on en déduit les estimations uniformes (6.52) pour  $\tau$  suffisamment petit (tel que  $\psi_+^{-1} - C_{CFL} \tau^{\frac{1+\epsilon}{2}} > 0$ ).  $\blacksquare$

## Stabilité

**Théorème 6.2.4** *On suppose que les hypothèses rappelées en début de chapitre sont vérifiées et que  $(\mu_h^n, v_{\mu_h}^n)$  est solution du problème (6.50)-(6.51). On suppose que  $r' \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ , que  $D' \in L^\infty(\mathbb{R})$  ou  $|D'(x)| \leq |x|$  et que la condition (6.52) est vérifiée. On a les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \sum_{n=1}^{T/\tau} \|\mu_h^n - \mu_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sup_{0 \leq k \leq t/\tau} \|v_{\mu_h}^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^{T/\tau} \|v_{\mu_h}^n - v_{\mu_h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq C(1 + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}^2) \end{aligned}$$

et

$$\tau \sum_{n=1}^{T/\tau} \left\| \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}} v_{\mu_h}^n) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(1 + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}^2).$$

*Preuve.* On rappelle les équations (6.50) et (6.51) :

$$\begin{aligned} \langle R\psi(\mu_h^n - \mu_h^{n-1}), w_h \rangle + \tau \langle \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}} v_{\mu_h}^n), w_h \rangle + \tau \langle r'(c_h^n) \mu_h^n, w_h \rangle + \tau \langle R\psi \rho \mu_h^n, w_h \rangle \\ - \tau \langle D'(c_h^n), w_h \rangle + \tau \langle g \mu_h^n, w_h \rangle = 0 \end{aligned}$$

$$\langle S(v_h)^{-\frac{1}{2}} \psi^{-1} v_{\mu_h}^n, u_h \rangle - \langle \mu_h^n, \operatorname{div}(u_h) \rangle + \langle S(v_h)^{-1} \psi^{-1} v_h \mu_h^n, u_h \rangle = 0.$$

En réécrivant l'équation (6.51) aux temps  $t^n$  et  $t^{n-1}$  et en faisant la différence des deux équations, on obtient :

$$\langle S(v_h)^{-\frac{1}{2}}\psi^{-1}(v_{\mu_h}^n - v_{\mu_h}^{n-1}), u_h \rangle - \langle (\mu_h^n - \mu_h^{n-1}), \operatorname{div}(u_h) \rangle + \langle S(v_h)^{-1}\psi^{-1}v_h(\mu_h^n - \mu_h^{n-1}), u_h \rangle = 0. \quad (6.65)$$

On additionne les équations (6.50) et (6.65) en prenant  $w_h = \mu_h^n - \mu_h^{n-1}$  et  $u_h = \tau S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{\mu_h}^n$  :

$$\begin{aligned} & \langle R\psi(\mu_h^n - \mu_h^{n-1}), (\mu_h^n - \mu_h^{n-1}) \rangle + \tau \langle r'(c_h^{n-1})\mu_h^n, (\mu_h^n - \mu_h^{n-1}) \rangle + \tau \langle R\psi\rho\mu_h^n, (\mu_h^n - \mu_h^{n-1}) \rangle \\ & - \tau \langle D'(c_h^n), \mu_h^n - \mu_h^{n-1} \rangle + \tau \langle g\mu_h^n, \mu_h^n - \mu_h^{n-1} \rangle + \tau \langle S(v_h)^{-\frac{1}{2}}\psi^{-1}(v_{\mu_h}^n - v_{\mu_h}^{n-1}), S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{\mu_h}^n \rangle \\ & + \tau \langle S(v_h)^{-1}\psi^{-1}v_h(\mu_h^n - \mu_h^{n-1}), S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{\mu_h}^n \rangle = 0. \end{aligned}$$

On estime les termes :

$$\begin{aligned} I_1 & \geq R\psi_- \|\mu_h^n - \mu_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ I_2 & \leq \frac{R\psi_-}{10} \|\mu_h^n - \mu_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{5\tau^2}{2R\psi_-} \|r'\|_{L^\infty(\Omega)} \|\mu_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ I_3 & \leq \frac{R\psi_-}{10} \|\mu_h^n - \mu_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{5\tau^2 R\rho^2 \psi_+^2}{2\psi_-} \|\mu_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ |I_4| & \leq \frac{5\tau^2}{2R\psi_-} \|D'(c_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{R\psi_-}{10} \|\mu_h^n - \mu_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ I_5 & \leq \frac{R\psi_-}{10} \|\mu_h^n - \mu_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{5\tau^2}{2R\psi_-} \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \|\mu_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ I_6 & = \frac{\tau}{2} \left( \|\psi^{-\frac{1}{2}}v_{\mu_h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi^{-\frac{1}{2}}(v_{\mu_h}^n - v_{\mu_h}^{n-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\psi^{-\frac{1}{2}}v_{\mu_h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \\ I_7 & \leq \frac{5\tau^2 C_{disp}^2 \left(1 + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\right)^2}{2R\psi_-^3} \|\psi^{-\frac{1}{2}}v_{\mu_h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{R\psi_-}{10} \|\mu_h^n - \mu_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} & \frac{R\psi_-}{2} \|\mu_h^n - \mu_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau}{2} \|\psi^{-\frac{1}{2}}(v_{\mu_h}^n - v_{\mu_h}^{n-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau}{2} \|\psi^{-\frac{1}{2}}v_{\mu_h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C\tau \|\psi^{-\frac{1}{2}}v_{\mu_h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\tau^2 \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \|\psi^{-\frac{1}{2}}v_{\mu_h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\tau^2 \|\mu_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\tau^2 \|D'(c_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C\tau \|\psi^{-\frac{1}{2}}v_{\mu_h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\tau^2 \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \|\psi^{-\frac{1}{2}}v_{\mu_h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\tau^2 \|\mu_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\tau^2. \end{aligned}$$



La dernière inégalité étant vérifiée car puisque (6.52) est vérifiée, le Théorème 6.2.3 donne  $\|\mu_h^n\|_{L^2(\Omega)} \leq C$  et car on a l'hypothèse (6.13) sur  $D'$ .

En sommant pour  $n = 1, \dots, k$  et en notant que  $\sum_{m \leq T/\tau} C\tau^2 \leq C\tau$ , on obtient

$$\begin{aligned} C \sum_{n=1}^k \|\mu_h^n - \mu_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\tau \sum_{n=1}^k \|v_{\mu_h}^n - v_{\mu_h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\tau \|v_{\mu_h}^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq C\tau + 2\tau \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \left( \sum_{n=1}^k \frac{\tau}{2} \|v_{\mu_h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + C\tau \sum_{n=1}^k \|\mu_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Comme la condition (6.52) est vérifiée, on a  $\|\mu_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C$ . D'où

$$\begin{aligned} C \sum_{n=1}^k \|\mu_h^n - \mu_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\tau \sum_{n=1}^k \|v_{\mu_h}^n - v_{\mu_h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\tau \|v_{\mu_h}^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq C\tau + 2\tau \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \left( \sum_{n=1}^k \frac{\tau}{2} \|v_{\mu_h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (6.66) \end{aligned}$$

On commence par exploiter

$$C \|v_{\mu_h}^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\tau + 2\tau \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \left( \sum_{n=1}^k \frac{\tau}{2} \|v_{\mu_h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

L'inégalité de Gronwall discrète donne :

$$\|v_{\mu_h}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(1 + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}).$$

On peut alors aussi déduire de (6.66) :

$$\sum_{n=1}^k \|\mu_h^n - \mu_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\tau(1 + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}^2)$$

et

$$\sum_{n=1}^k \|v_{\mu_h}^n - v_{\mu_h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(1 + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}^2).$$

Comme les résultats sont vrais pour tout  $k$ ,  $0 \leq k \leq T/\tau$ , on conclut :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \sum_{n=1}^{T/\tau} \|\mu_h^n - \mu_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sup_{0 \leq k \leq T/\tau} \|v_{\mu_h}^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^{T/\tau} \|v_{\mu_h}^n - v_{\mu_h}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq C(1 + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}^2). \quad (6.67) \end{aligned}$$

On revient à présent à l'équation (6.50) en prenant  $w_h = \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{\mu_h}^n)$ . On a :

$$\begin{aligned} & \langle R\psi(\mu_h^n - \mu_h^{n-1}), \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{\mu_h}^n) \rangle + \tau \langle \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{\mu_h}^n), \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{\mu_h}^n) \rangle \\ & + \tau \langle r'(c_h^{n-1})\mu_h^n, \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{\mu_h}^n) \rangle + \tau \langle R\psi\rho\mu_h^n, \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{\mu_h}^n) \rangle \\ & - \tau \langle D'(c_h^n), \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{\mu_h}^n) \rangle + \tau \langle g\mu_h^n, \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{\mu_h}^n) \rangle = 0. \end{aligned}$$

On estime les termes suivants :

$$|I_1| \leq \frac{3R^2\psi_+^2}{2\tau} \|\mu_h^n - \mu_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau}{6} \left\| \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{\mu_h}^n) \right\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$I_2 \geq \tau \left\| \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{\mu_h}^n) \right\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$|I_3| \leq \frac{3\tau}{2} \max_{\theta \in \mathcal{T}_h} r'(c_h^n|_{\theta}) \|\mu_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau}{6} \left\| \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{\mu_h}^n) \right\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$|I_4| \leq \frac{3R^2\psi_+^2\rho\tau}{2} \|\mu_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau}{6} \left\| \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{\mu_h}^n) \right\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$|I_5| \leq \frac{3\tau}{2} \|D'(c_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau}{6} \left\| \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{\mu_h}^n) \right\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$|I_6| \leq \frac{3\tau \|g\|_{L^\infty(\Omega)}}{2} \|\mu_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau}{6} \left\| \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{\mu_h}^n) \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

On obtient donc

$$\frac{\tau}{6} \left\| \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{\mu_h}^n) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\tau + \frac{C}{\tau} \|\mu_h^n - \mu_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\tau \|\mu_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En sommant pour  $n = 1, \dots, k$ , on a

$$C\tau \sum_{n=1}^k \left\| \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{\mu_h}^n) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C + \frac{C}{\tau} \sum_{n=1}^k \|\mu_h^n - \mu_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\tau \sum_{n=1}^k \|\mu_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

D'après (6.67),  $\frac{1}{\tau} \sum_{n=1}^k \|\mu_h^n - \mu_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(1 + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}^2)$ . De plus, on a, d'après (6.52),  $\|\mu_h^n\|_{L^2(\Omega)} \leq C$ . On en conclut

$$\tau \sum_{n=1}^{T/\tau} \left\| \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{\mu_h}^n) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(1 + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)}^2). \quad (6.68)$$

■

## 6.2.4 Convergence du schéma

On rappelle le problème étudié :

$$\begin{cases} R\psi\partial_t c + \operatorname{div}(vc - S(v)\psi\nabla c) = -r(c) + p\chi_S \text{ dans } \Omega_T \\ S(v)\nabla c \cdot n = 0 \text{ ou } c = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ c|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (6.69)$$

Nous avons choisi ici de travailler avec une condition aux bords de Neumann.

On suppose maintenant que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

-  $\partial\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $\kappa \in (\mathcal{C}^1(\Omega))^{N \times N}$  ;

-  $\partial\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $\kappa = \kappa^* Id$  avec  $\kappa^* : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\kappa \in \mathcal{C}^1(\Omega)$  ;

ce qui assure que la solution  $v$  du problème en vitesse continu appartient à  $L^\infty(\Omega_T)$ . On

suppose de plus que  $v_h$ , sa discrétisation, est donnée par le schéma présenté en (6.19).

On rappelle qu'alors, d'après la Proposition 6.2.1, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v_h - v\|_{(L^2(\Omega_T))^N} = 0 \text{ et } \|v_h\|_{(L^\infty(\Omega_T))^N} \leq C.$$

Ceci entraîne que (6.26) et (6.44)-(6.45) sont vérifiées.

Comme nous allons travailler avec la formulation mixte, nous réintroduisons la notation du flux

$$v_c = -S(v)\psi\nabla c + vc.$$

On introduit les espaces suivants :

$$\mathcal{W} := H^1(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$\mathcal{U} := L^2(0, T; H(\operatorname{div}; \Omega)).$$

Pour la discrétisation totale, on rappelle la définition des sous-espaces discrets suivants :

$\mathcal{W}_h \subset L^2(\Omega)$  et  $\mathcal{U}_h \subset H(\operatorname{div}; \Omega)$  définis comme suit :

$$\mathcal{W}_h := \{c \in L^2(\Omega), c \text{ est constante sur chaque élément } \mathcal{O} \in \mathcal{T}_h\},$$

$$\mathcal{U}_h := \{v_c \in H(\operatorname{div}, \Omega), v_c \text{ est affine sur chaque élément } \mathcal{O} \in \mathcal{T}_h\}.$$

On définit également les projections suivantes :

$$P_h : L^2(\Omega) \mapsto \mathcal{W}_h, \langle P_h w - w, w_h \rangle = 0$$

pour tout  $w_h \in \mathcal{W}_h$ . De même, la projection  $\Pi_h$  est définie sur  $(H^1(\Omega))^2$  telle que

$$\Pi_h : (H^1(\Omega))^2 \mapsto \mathcal{U}_h, \langle \operatorname{div}(\Pi_h v_c - v_c), w_h \rangle = 0$$

pour tout  $w_h \in \mathcal{W}_h$ . D'après Kumar et al. [51], cet opérateur peut être étendu à  $H(\text{div}; \Omega)$  et on a les estimations suivantes :

$$\begin{cases} \|w - P_h w\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \|w\|_{H^1(\Omega)} \text{ pour tout } w \in H^1(\Omega), \\ \|v_c - \Pi_h v_c\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \|v_c\|_{H^1(\Omega)} \text{ pour tout } v_c \in (H^1(\Omega))^N, \\ \|\text{div } v_c - \text{div}(\Pi_h v_c)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \|v_c\|_{H^2(\Omega)} \text{ pour tout } v_c \in (H^2(\Omega))^N. \end{cases} \quad (6.70)$$

Afin de démontrer la convergence du problème discrétisé, nous allons dans un premier temps montrer la convergence pour le problème semi-discrétisé en temps, puis nous étudierons la convergence du modèle totalement discrétisé. On suit ainsi le format de preuve de Kumar et al. [51]. Contrairement à [51], nous ne considérons que l'équation en concentration sans tenir compte du transport d'ions. En revanche, notre équation a un second membre et le tenseur de dispersion (dépendant de la vitesse) est pris en compte ce qui complexifiera les démonstrations. Les résultats obtenus dans les paragraphes précédents sur la stabilité du modèle nous seront utiles dans les preuves.

### Formulation variationnelle mixte discrète en temps

Dans ce qui suit, on notera le pas de temps  $\tau$  et  $t_n = n\tau$  pour  $n = 1, \dots, T/\tau$  pour considérer la discrétisation en temps (implicite en  $c$ ) avec un pas de temps uniforme. À chaque pas de temps  $t_n$ , on utilise  $c^{n-1} \in L^2(\Omega)$  déterminé à  $t_{n-1}$  pour trouver l'approximation suivante  $c^n$ . On initialise avec  $c_0$ . Plus précisément, on cherche  $(c^n, v_c^n) \in (L^2(\Omega), H(\text{div}; \Omega))$  satisfaisant le problème semi-discret en temps suivant :

Problème  $\mathcal{P}^n$  : pour  $(c^{n-1}, p)$  donné dans  $(L^2(\Omega))^2$ , trouver  $(c^n, v_c^n) \in (L^2(\Omega), H(\text{div}; \Omega))$  tel que

$$\langle R\psi(c^n - c^{n-1}), w \rangle + \tau \langle \text{div}(S(v)^{\frac{1}{2}} v_c^n), w \rangle + \tau \langle r(c^{n-1}), w \rangle - \tau \langle p, w \rangle = 0, \quad (6.71)$$

$$\langle S(v)^{-\frac{1}{2}} \psi^{-1} v_c^n, u \rangle - \langle c^n, \text{div}(u) \rangle - \langle S(v)^{-1} \psi^{-1} v_c^n, u \rangle = 0 \quad (6.72)$$

pour tout  $(w, u) \in (L^2(\Omega), H(\text{div}; \Omega))$ .

On peut montrer pour  $c_n$  l'analogie des estimations obtenues dans le cas totalement discrétisé au paragraphe précédent. Cependant, ces estimations ne sont pas suffisantes pour passer à la limite. Afin de montrer la convergence du schéma, nous avons besoin de propriétés de compacité.

Pour cela, nous allons tout d'abord introduire l'opérateur de translation en espace suivant :

$$\Delta_\xi f(\cdot) := f(\cdot) - f(\cdot + \xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Pour  $\xi \in \mathbb{R}^N$  donné, on considère  $\Omega_\xi \subset \Omega$  tel que  $\Omega_\xi := \{x \in \Omega, \text{dist}(x, \Gamma) > \xi\}$ . De cette façon, les translations  $\Delta_\xi f(x)$  avec  $x \in \Omega_\xi$  sont bien définies. On rappelle que si

$u \in H^1(\Omega)$ , il existe une constante  $C$  telle que pour tout ouvert  $\omega \subset\subset \Omega$  et tout  $\xi \in \mathbb{R}^N$  avec  $|\xi| < \text{dist}(\omega, \Omega)$  on a

$$\|\Delta_\xi u - u\|_{L^2(\omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)} |\xi|. \quad (6.73)$$

On considère d'abord la translation en espace de  $c_h^n$  défini dans  $\Omega$  et prolongé par 0 en dehors de  $\Omega$ . Le lemme ci-dessous nous permet de contrôler cette translation :

**Lemme 6.2.1** *On a l'estimation suivante :*

$$\tau \sum_{n=1}^{T/\tau} \|\Delta_\xi c^n\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \leq C |\xi| (1 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2) \leq C |\xi|. \quad (6.74)$$

*Preuve.* On fait une translation en espace sur l'équation (6.72). On obtient :

$$\langle \Delta_\xi (S(v)^{-\frac{1}{2}} \psi^{-1} v_c^n), u \rangle - \langle \Delta_\xi (c^n), \text{div}(u) \rangle - \langle \Delta_\xi (S(v)^{-1} \psi^{-1} v_c^n), u \rangle = 0. \quad (6.75)$$

On construit une fonction test appropriée pour obtenir l'estimation ci-dessus. On prend  $\eta^n$  tel que

$$\begin{cases} -\Delta \eta^n = \Delta_\xi c^n \text{ dans } \Omega, \\ \eta^n = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

En prenant  $u = \nabla \eta^n$  dans (6.75), on obtient :

$$\langle \Delta_\xi (S(v)^{-\frac{1}{2}} \psi^{-1} v_c^n), \nabla \eta^n \rangle + \langle \Delta_\xi (c^n), \Delta_\xi (c^n) \rangle - \langle \Delta_\xi (S(v)^{-1} \psi^{-1} v_c^n), \nabla \eta^n \rangle = 0. \quad (6.76)$$

Notons que  $\eta^n$  satisfait  $\|\Delta \eta^n\|_{L^2(\Omega)} = \|\Delta_\xi (c^n)\|_{L^2(\Omega)}$ , et donc  $\|\eta^n\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|\Delta_\xi (c^n)\|_{L^2(\Omega)}$ . Cela implique que les translations de  $\nabla \eta^n$  sont contrôlées par celles de  $c^n$  en vertu de (6.73). Plus précisément, d'après (6.73) on a :

$$\|\Delta_{\xi_0} (\nabla \eta^n)\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla (\Delta_{\xi_0} \eta^n)\|_{L^2(\Omega)} \leq C |\xi_0| \|\nabla \eta^n\|_{H^1(\Omega)} \leq C |\xi_0| \|\Delta_{\xi_0} (c^n)\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \xi_0 \in \mathbb{R}^N.$$

D'après (6.26),  $\|c^n\|_{L^2(\Omega)} \leq C$ . Comme  $\|\Delta_{\xi_0} (c^n)\|_{L^2(\Omega)} \leq 2 \|c^n\|_{L^2(\Omega)}$ , on a donc :

$$\|\nabla (\Delta_{\xi_0} \eta^n)\|_{L^2(\Omega)} \leq C |\xi_0|, \quad \forall \xi_0 \in \mathbb{R}^N. \quad (6.77)$$

Par ailleurs, en sommant l'équation (6.76) pour  $n = 1, \dots, T/\tau$ , on a le résultat suivant <sup>2</sup> :

$$\tau \sum_{n=1}^{T/\tau} \|\Delta_\xi c^n\|_{L^2(\Omega)}^2 = \tau \sum_{n=1}^{T/\tau} \left( S(v)^{-1} \psi^{-1} v_c^n, \nabla (\Delta_{-\xi} \eta^n) \right) - \tau \sum_{n=1}^{T/\tau} \left( S(v)^{-\frac{1}{2}} \psi^{-1} v_c^n, \nabla (\Delta_{-\xi} \eta^n) \right).$$

2. On utilise de plus le fait que pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\Omega$  et prolongées par 0 en dehors de  $\Omega$ , on a  $\langle \Delta_\xi f, g \rangle = \langle f, \Delta_{-\xi} g \rangle$ . En effet,  $\langle \Delta_\xi f, g \rangle = \int_\Omega f(x) g(x) dx - \int_\Omega f(x + \xi) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^3} f(x) g(x) dx - \int_{\mathbb{R}^3} f(x + \xi) g(x) dx$  (grâce aux prolongements par 0) où l'on reconnaît par changement de variable que  $\int_{\mathbb{R}^3} f(x + \xi) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^3} f(x) g(x - \xi) dx$ .

D'après (6.10),  $|S(v)^{-1}\psi^{-1}vc^n| \leq CM_+ |c^n|$ . De plus, en utilisant (6.11),  $|S(v)^{-\frac{1}{2}}\psi^{-1}vc^n| \leq \frac{Cv_c^n}{(1+|v|)^{\frac{1}{2}}}$ . D'où

$$\begin{aligned} \tau \sum_{n=1}^{T/\tau} \|\Delta_\xi c^n\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C\tau \sum_{n=1}^{T/\tau} \|c^n\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(\Delta_{-\xi}\eta^n)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + C\tau \sum_{n=1}^{T/\tau} \left\| \frac{1}{(1+|v|)^{\frac{1}{2}}} |v_c^n| \right\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(\Delta_{-\xi}\eta^n)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'après (6.44),  $\left\| \frac{1}{(1+|v|)^{\frac{1}{2}}} v_c^n \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v_c^n\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C(1 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2)$ , et en utilisant (6.26) et (6.77), on trouve :

$$\tau \sum_{n=1}^{T/\tau} \|\Delta_\xi c^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C|\xi| \left(1 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2\right) \leq C|\xi|$$

ce qui conclut la preuve. ■

Nous allons à présent montrer la convergence en temps du schéma semi-discrétisé. On considère la suite  $\{(c^n, v_c^n), n = 0, \dots, T/\tau\}$  solution du problème (6.71)-(6.72), et on construit une approximation continue en temps par interpolation linéaire. Pour  $t \in (t_{n-1}, t_n]$ ,  $n = 1, \dots, T/\tau$ , on définit

$$Z^\tau(t) := z^n \frac{(t - t_{n-1})}{\tau} + z^{n-1} \frac{(t_n - t)}{\tau}, \quad (6.78)$$

où  $Z^\tau$  peut valoir respectivement  $C^\tau$  ou  $V_C^\tau$ , avec alors respectivement  $z^n = c^n$  ou  $z^n = v_c^n$ .

**Lemme 6.2.2** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $\tau$  on a les estimations suivantes :*

$$\|C^\tau\|_{L^2(\Omega_T)} + \tau \|V_C^\tau\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C, \quad (6.79)$$

$$\|\partial_t C^\tau\|_{L^2(\Omega_T)} + \left\| \operatorname{div}(\psi^{-1}S(v)^{\frac{1}{2}}V_C^\tau) \right\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C \left(1 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2\right). \quad (6.80)$$

*Preuve.* Comme

$$\begin{aligned} \|C^\tau\|_{L^2(\Omega_T)}^2 &\leq \left\| \frac{t - t_{n-1}}{\tau} |c^n| + \frac{t_n - t}{\tau} |c^{n-1}| \right\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \leq \| |c^n| + |c^{n-1}| \|_{L^2(\Omega_T)}^2 \\ &\leq 2 \|c^n\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + 2 \|c^{n-1}\|_{L^2(\Omega_T)}^2, \end{aligned}$$

d'après (6.26), on a

$$\|C^\tau\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \leq 2\|c^n\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + 2\|c^{n-1}\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \leq C.$$

De même,

$$\|V_C^\tau\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \leq 2\|v_c^n\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + 2\|v_c^{n-1}\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \leq \frac{C}{\tau}.$$

D'où (6.79).

Pour estimer  $\|\partial_t C^\tau\|_{L^2(\Omega_T)}$ , on note que pour chaque  $\tau \in (t_{n-1}, t_n]$ ,  $\partial_t C^\tau = \frac{c^n - c^{n-1}}{\tau}$ , ce qui implique que

$$\int_0^T \|\partial_t C^\tau\|_{L^2(\Omega_T)}^2 dt = \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{1}{\tau^2} \|c^n - c^{n-1}\|_{L^2(\Omega_T)}^2 dt \leq \sum_{n=1}^{T/\tau} \frac{1}{\tau} \|c^n - c^{n-1}\|_{L^2(\Omega_T)}^2.$$

D'après (6.44), on a donc

$$\int_0^T \|\partial_t C^\tau\|^2 dt \leq C \frac{T}{\tau} \left(1 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2\right) \leq C \left(1 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2\right).$$

De même,

$$\begin{aligned} \|V_C^\tau\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_0^T \|\partial_t V_C^\tau\|_{L^2(\Omega)}^2 dt = \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{1}{\tau^2} \|v_c^n - v_c^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &\leq \sum_{n=1}^{T/\tau} \frac{1}{\tau} \|v_c^n - v_c^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(1 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2\right). \end{aligned}$$

Enfin, on remarque que

$$\operatorname{div}(S(v)^{\frac{1}{2}} V_C^\tau) = \operatorname{div}\left(S(v)^{\frac{1}{2}} V_C^{n-1}\right) + \frac{t - t_{n-1}}{\tau} \operatorname{div}\left(S(v)^{\frac{1}{2}} (V_C^n - V_C^{n-1})\right).$$

On montre alors grâce à (6.45) l'estimation de  $\operatorname{div}(S(v)^{\frac{1}{2}} V_C^\tau)$  dans  $L^2(\Omega_T)$ . ■

Les estimations du lemme précédent assurent l'existence de fonctions  $c^\#, v_c^\#$ , et d'une sous-suite  $\tau \rightarrow 0$  telle que

$$— C^\tau \rightharpoonup c^\# \text{ faiblement dans } L^2(\Omega_T) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$— V_C^\tau \rightharpoonup v_c^\#, \operatorname{div}(S(v)^{\frac{1}{2}} V_C^\tau) \rightharpoonup \operatorname{div}(S(v)^{\frac{1}{2}} v_c^\#) \text{ faiblement dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)^N).$$

Pour obtenir une convergence forte, on utilise les estimations translatées comme dans le Lemme 6.2.1. On obtient le résultat suivant :

---

**Lemme 6.2.3** *La suite  $C^\tau$  converge fortement vers  $c^\#$  dans  $L^2(\Omega_T)$  lorsque  $\tau \rightarrow 0$ .*

*Preuve.* On va utiliser le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov<sup>3</sup>. Comme  $\partial_t C^\tau \in L^2(\Omega_T)$ , la translation en temps est déjà contrôlée. Il nous reste donc à contrôler la translation en espace :

$$\mathcal{I}_\xi := \int_0^T \int_\Omega |\Delta_\xi C^\tau|^2 dx dt \rightarrow 0 \text{ quand } |\xi| \rightarrow 0.$$

D'après la définition de  $C^\tau$ , on a

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\xi &= \int_0^T \int_\Omega |C^\tau(x) - C^\tau(x + \xi)|^2 dx dt = \\ &= \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega_\xi} \left| c^n(x) \frac{t - t_{n-1}}{\tau} + c^{n-1}(x) \frac{t_n - t}{\tau} - c^n(x + \xi) \frac{t - t_{n-1}}{\tau} - c^{n-1}(x + \xi) \frac{t_n - t}{\tau} \right|^2 dx dt \\ &= \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega_\xi} \left| \Delta_\xi c^n \frac{t - t_{n-1}}{\tau} + \Delta_\xi c^{n-1} \frac{t_n - t}{\tau} \right|^2 dx dt. \end{aligned}$$

D'où

$$|\mathcal{I}_\xi| \leq \sum_{n=1}^{T/\tau} \tau \left( 2 \|\Delta_\xi c^n\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + 2 \|\Delta_\xi c^{n-1}\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \right).$$

En utilisant le Lemme 6.2.1, on trouve que

$$|\mathcal{I}_\xi| \leq C |\xi| \left( 1 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right),$$

où  $C$  est indépendant de  $\tau$  et de  $h$ .

On contrôle donc la translation en espace de  $c^n$  et d'après le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov, l'ensemble  $\{C^\tau, \tau > 0\}$  est compact. On en conclut donc la convergence forte dans  $L^2(\Omega_T)$  de  $C^\tau$  vers  $c^\#$ . ■

À présent que nous avons démontré la convergence forte de  $C^\tau$ , on peut passer à la limite.

**Théorème 6.2.5** *L'ensemble de la suite  $(C^\tau, V_C^\tau)$  converge vers la solution  $(c, v_c)$  de (6.69) lorsque  $\tau \rightarrow 0$ .*

---

3. Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov : Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert et soit  $\omega \subset\subset \Omega$ . Soit  $\mathcal{F}$  un sous-ensemble borné de  $L^p(\Omega)$  avec  $1 \leq p < \infty$ . On suppose que  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \delta < \text{dist}(\omega, \mathbf{C}\Omega)$  tel que  $\|f(x+h) - f(x)\|_{L^p(\omega)} < \epsilon, \forall h \in \mathbb{R}^N$  avec  $|h| < \delta$  et ce pour tout  $f \in \mathcal{F}$ . Alors  $\mathcal{F}|_\omega$  est relativement compact dans  $L^p(\omega)$  (définition tirée de Brezis [20], p.72).



*Preuve.* La fonction  $(C^\tau, V_C^\tau)$  satisfait

$$\begin{aligned} \langle R\psi\partial_t C^\tau, w \rangle + \langle \operatorname{div}(S(v)^{\frac{1}{2}}V_C^\tau), w \rangle + \langle r(C^\tau), w \rangle - \langle p, w \rangle = \\ \langle \operatorname{div}(S(v)^{\frac{1}{2}}(V_C^\tau - v_c^n)), w \rangle + \langle r(C^\tau) - r(c^{n-1}), w \rangle \end{aligned} \quad (6.81)$$

et

$$\begin{aligned} \langle S(V)^{-\frac{1}{2}}\psi^{-1}V_C^\tau, u \rangle - \langle C^\tau, \operatorname{div}(u) \rangle - \langle S(V)^{-1}\psi^{-1}V_C^\tau, u \rangle = \\ \langle S(V)^{-\frac{1}{2}}\psi^{-1}(V_C^\tau - v_c^n), u \rangle - \langle C^\tau - c^n, \operatorname{div}(u) \rangle - \langle S(V)^{-1}\psi^{-1}(V_C^\tau - V_C^n), u \rangle \end{aligned} \quad (6.82)$$

pour tout  $(w, u) \in (L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \mathcal{S})$ . On considère d'abord (6.81) et on note que grâce au Lemme 6.2.3, le membre de gauche converge vers  $\langle R\psi\partial_t c^\#, w \rangle + \langle \operatorname{div}(S(v)^{\frac{1}{2}}v_c^\#), w \rangle + \langle r(c^\#), w \rangle - \langle p, w \rangle$ . Montrons que le membre de droite s'annule lorsque  $\tau \rightarrow 0$ . On note les deux termes du membre de droite respectivement  $I_1$  et  $I_2$ . En intégrant  $I_1$  par parties, ce qui est permis grâce au choix de  $w \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ , on a

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} S(v)^{\frac{1}{2}}(V_C^\tau - v_c^n) \cdot \nabla w \, dx \, dt \\ &= \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} S(v)^{\frac{1}{2}} \left( v_c^n \frac{t - t_{n-1}}{\tau} + v_c^{n-1} \frac{t_n - t}{\tau} - v_c^n \right) \cdot \nabla w \, dx \, dt \\ &= \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{t - t_n}{\tau} S(v)^{\frac{1}{2}} (v_c^n - v_c^{n-1}) \cdot \nabla w \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Lorsque  $t \in [t_{n-1}, t_n]$ ,  $\frac{t-t_n}{\tau} < 1$ . On a donc grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \tau^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=1}^{T/\tau} \left\| S(v)^{\frac{1}{2}}(v_c^n - v_c^{n-1}) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \tau^{\frac{1}{2}} C \left( 1 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right) \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C\tau^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \text{ lorsque } \tau \rightarrow 0 \end{aligned}$$

grâce à l'estimation (6.44).

On a

$$|I_2| = |\langle r(C^\tau) - r(c^{n-1}), w \rangle| \leq \left( C \sum_{n=1}^{T/\tau} \tau \|r(C^\tau) - r(c^{n-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme  $r$  est supposé dérivable à dérivée bornée, on a

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \tau^{\frac{1}{2}} \|r'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left( \sum_{n=1}^{T/\tau} \|C^\tau - c^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\tau^{\frac{1}{2}} \|r'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left( \sum_{n=1}^{T/\tau} \|c^n - c^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'après (6.44), on a

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq C\tau^{\frac{1}{2}} \|r'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left( \tau \left( 1 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C\tau \|r'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left( 1 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C\tau \rightarrow 0 \text{ lorsque } \tau \rightarrow 0. \end{aligned}$$

On a donc  $|I_2| \rightarrow 0$ . D'où

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \left( \langle R\psi \partial_t C^\tau, w \rangle + \langle \operatorname{div}(S(v)^{\frac{1}{2}} V_C^\tau), w \rangle + \langle r(C^\tau), w \rangle - \langle p, w \rangle \right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\langle R\psi \partial_t c^\#, w \rangle + \langle \operatorname{div}(S(v)^{\frac{1}{2}} v_c^\#), w \rangle + \langle r(c^\#), w \rangle - \langle p, w \rangle = 0. \quad (6.83)$$

On regarde à présent (6.82). On note les trois termes du membre de droite respectivement  $I_4$ ,  $I_5$  et  $I_6$ . On a

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} S(v)^{-\frac{1}{2}} \psi^{-1} (V_C^\tau - v_c^n) \cdot u \, dx \, dt \\ &\leq \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left| \frac{t - t_n}{\tau} S(v)^{-\frac{1}{2}} \psi^{-1} (v_c^n - v_c^{n-1}) \cdot u \right| \, dx \, dt \\ &\leq \tau^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=1}^{T/\tau} \|S(v)^{-\frac{1}{2}} \psi^{-1} (v_c^n - v_c^{n-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \text{ lorsque } \tau \rightarrow 0 \end{aligned}$$

d'après (6.44).

De même, on trouve  $|I_5|$  et  $|I_6| \rightarrow 0$ .

On a donc

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \left( \langle S(v)^{-\frac{1}{2}} \psi^{-1} V_C^\tau, u \rangle - \langle C^\tau, \operatorname{div}(u) \rangle - \langle S(v)^{-1} \psi^{-1} V_C^\tau, u \rangle \right) = 0$$

c'est-à-dire

$$\langle S(v)^{-\frac{1}{2}}\psi^{-1}v_c^\#, u \rangle - \langle c^\#, \operatorname{div}(u) \rangle - \langle S(v)^{-1}\psi^{-1}vc^\#, u \rangle = 0. \quad (6.84)$$

D'après (6.83) et (6.84),  $(c^\#, v_c^\#)$  est une solution faible de (6.69). La solution de ce problème étant unique, on a  $(c^\#, v_c^\#) = (c, v_c)$  et l'ensemble de la suite  $(C^\tau, V_C^\tau)$  converge vers cette limite. ■

Nous avons donc démontré la convergence de la solution du modèle semi-discret en temps. Nous allons à présent revenir au modèle complètement discrétisé, en temps et en espace, et montrer la convergence de la solution.

### Discrétisation totale

On discrétise à présent en temps et en espace. On initialise le problème avec  $c_h^0 = c_0$ , avec  $n = 1, \dots, N$ . On cherche l'approximation  $(c_h^n, v_{c_h}^n)$  de  $(c(t_n), v_c(t_n))$  à  $t = t_n$  solution du problème suivant :

Problème  $\mathcal{P}_h^n$  : pour un  $c_h^{n-1} \in \mathcal{W}_h$  donné, trouver  $(c_h^n, v_{c_h}^n) \in (\mathcal{W}_h, \mathcal{U}_h)$  satisfaisant

$$\langle R\psi(c_h^n - c_h^{n-1}), w \rangle + \tau \langle \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}}v_{c_h}^n), w \rangle + \tau \langle r(c_h^{n-1}), w \rangle - \tau \langle p, w \rangle = 0, \quad (6.85)$$

$$\langle S(v_h)^{-\frac{1}{2}}\psi^{-1}v_{c_h}^n, u \rangle - \langle c_h^n, \operatorname{div}(u) \rangle - \langle S(v_h)^{-1}\psi^{-1}v_h c_h^n, u \rangle = 0 \quad (6.86)$$

pour tout  $(w, u) \in \mathcal{W}_h \times \mathcal{U}_h$ .

La démarche pour montrer la convergence de la solution est la même que pour le modèle semi-discretisé. On introduit  $Z_h^\tau$  l'approximation de  $Z_h^\tau$  par interpolation définie par

$$Z_h^\tau = z_h^n \frac{t - t_{n-1}}{\tau} + z_h^{n-1} \frac{t_n - t}{\tau}$$

où  $Z_h^\tau$  peut se référer à  $C_h^\tau$  ou  $V_{C_h}^\tau$ .

On a le lemme suivant :

**Lemme 6.2.4** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tous  $\tau$  et  $h$  on a l'estimation suivante*

$$\|C_h^\tau\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \tau \|V_{C_h}^\tau\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \leq C, \quad (6.87)$$

$$\|\partial_t C_h^\tau\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \left\| \operatorname{div}(\psi^{-1}S(v_h)^{\frac{1}{2}}V_{C_h}^\tau) \right\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \leq C \left( 1 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right) \leq C. \quad (6.88)$$

*Preuve.* La preuve est similaire à celle du Lemme 6.2.2. ■

---

**Lemme 6.2.5** *Il existe une sous-suite  $\tau \rightarrow 0$  et des fonctions  $c^\#$  et  $v_c^\#$  telles que :*

$$\begin{aligned} C_h^\tau &\rightharpoonup c^\# \text{ faiblement dans } L^2(\Omega_T), \\ \partial_t C_h^\tau &\rightharpoonup \partial_t c^\# \text{ faiblement dans } L^2(\Omega_T), \\ V_{C_h^\tau} &\rightharpoonup v_c^\# \text{ faiblement dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)^N), \\ \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}} V_{C_h^\tau}) &\rightharpoonup \operatorname{div}(S(v)^{\frac{1}{2}} v_c^\#) \text{ faiblement dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)^N). \end{aligned}$$

*Preuve.* Elle est similaire au travail fait dans le cas semi-discret. Pour la dernière convergence, on utilise le fait que  $v_h \rightarrow v$  fortement dans  $L^2(\Omega_T)$ . ■

On note  $E$  l'ensemble des bords des triangles  $\mathcal{T}_h$ . On a de plus  $E = E_{int} \cup E_{ext}$  avec  $E_{int} = E \setminus E_{ext}$ . On adopte la notation suivante :

$|T|$  l'aire de  $T \in \mathcal{T}_h$ ,  $x_i$  le centre du cercle circonscrit à  $T$ ,

$$|\mathcal{T}_h| = \max_{T_i \in \mathcal{T}_h} |T_i|,$$

$\ell_{ij}$  le bord entre  $T_i$  et  $T_j$ ,  $d_{ij}$  la distance de  $x_i$  à  $\ell_{ij}$ ,  $\sigma_{ij} = \frac{|\ell_{ij}|}{d_{ij}}$ .

On définit les produits scalaires suivants pour tout  $c_h^n, w_h^n \in \mathcal{U}_h$  :

$$(c_h^n, w_h^n)_h := \sum_{T_i \in \mathcal{T}_h} |T_i| c_{h,i}^n w_{h,i}^n, \quad (c_h^n, w_h^n)_{1,h} := \sum_{\ell_{ij} \in E} |\sigma_{ij}| (c_{h,i}^n - c_{h,j}^n)(w_{h,i}^n - w_{h,j}^n). \quad (6.89)$$

Le produit scalaire discret donne la norme discrète  $H_0^1$  :

$$\|c_h^n\|_{1,h}^2 = \sum_{\ell_{ij} \in E} |\sigma_{ij}| (c_{h,i}^n - c_{h,j}^n)^2. \quad (6.90)$$

**Lemme 6.2.6** *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N = 2$  ou  $3$ , et  $\mathcal{T}_h$  un maillage. Pour un  $c$  défini dans  $\Omega$  et prolongé en  $\bar{c}$  par  $0$  en dehors de  $\Omega$ , on a*

$$\|\Delta_\xi \bar{c}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq \|c\|_{1,h}^2 |\xi| (|\xi| + C |\mathcal{T}_h|) \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N. \quad (6.91)$$

*Preuve.* On se réfèrera à la preuve du lemme 4 dans Eymard et al. [33]. ■

**Lemme 6.2.7** *Pour une suite  $c_h^n$ , on a l'inégalité suivante :*

$$\|c_h^n\|_{1,h} \leq C \left( \|v_{c_h^n}\|_{L^2(\Omega)} + \|c_h^n\|_{L^2(\Omega)} \right) \quad (6.92)$$

avec  $C$  indépendante de  $h$  et de  $n$ .

*Preuve.* On définit  $f_h^n$  en donnant sa valeur sur tout élément  $T_i \in \mathcal{T}_h$  :

$$|T_i| f_h^n|_{T_i} := \sum_{\ell_{ij}} \frac{|\ell_{ij}|}{d_{ij}} (c_{h,i}^n - c_{h,j}^n). \quad (6.93)$$

On a grâce à la définition de  $\|\cdot\|_{1,h}^2$ , et grâce au fait que  $c_h^n$  est constant par maille :

$$\begin{aligned} (f_h^n, c_h^n) &= \sum_{T_i \in \mathcal{T}_h} |T_i| f_h^n|_{T_i} c_h^n|_{T_i} = \sum_{T_i \in \mathcal{T}_h} \left( \sum_{\ell_{ij}} \frac{|\ell_{ij}|}{d_{ij}} (c_{h,i}^n - c_{h,j}^n) \right) c_{h,i}^n \\ &= \sum_{\ell_{ij} \in E} \frac{|\ell_{ij}|}{d_{ij}} |c_{h,i}^n - c_{h,j}^n|^2 = \|c_h^n\|_{1,h}^2. \end{aligned} \quad (6.94)$$

Illustrons l'avant dernière égalité sur l'exemple de la configuration simple de la Figure 6.1. On voit que :

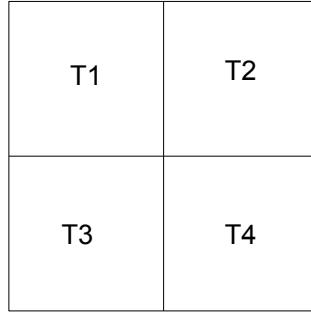


FIGURE 6.1 – Exemple à 4 mailles

$$\begin{aligned} \sum_{T_i \in \mathcal{T}_h} \left( \sum_{\ell_{ij}} \frac{|\ell_{ij}|}{d_{ij}} (c_{h,i}^n - c_{h,j}^n) \right) c_{h,i}^n &= \\ \frac{|\ell_{12}|}{d_{12}} (c_{h,1}^n - c_{h,2}^n) c_{h,1}^n + \frac{|\ell_{13}|}{d_{13}} (c_{h,1}^n - c_{h,3}^n) c_{h,1}^n + \frac{|\ell_{12}|}{d_{12}} (c_{h,2}^n - c_{h,1}^n) c_{h,2}^n + \frac{|\ell_{24}|}{d_{24}} (c_{h,2}^n - c_{h,4}^n) c_{h,2}^n \\ + \frac{|\ell_{13}|}{d_{13}} (c_{h,3}^n - c_{h,1}^n) c_{h,3}^n + \frac{|\ell_{34}|}{d_{34}} (c_{h,3}^n - c_{h,4}^n) c_{h,3}^n + \frac{|\ell_{24}|}{d_{24}} (c_{h,4}^n - c_{h,2}^n) c_{h,4}^n + \frac{|\ell_{34}|}{d_{34}} (c_{h,4}^n - c_{h,3}^n) c_{h,4}^n \\ &= \sum_{\ell_{ij} \in E} \frac{|\ell_{ij}|}{d_{ij}} (c_{h,i}^n - c_{h,j}^n)^2. \end{aligned}$$

De plus, on a grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|f_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_i |T_i \in \mathcal{T}_h| \left| f_h^n|_{T_i} \right|^2 \leq \left( \sum_{\ell_{ij} \in E} \frac{|\ell_{ij}|}{d_{ij}} (c_{h,i}^n - c_{h,j}^n)^2 \frac{1}{|T_i|} \right) \left( \sum_{\ell_{ij}} \frac{|\ell_{ij}|}{d_{ij}} \right)$$

ce qui implique que  $|f_h^n| \leq |c_h^n|_{1,h}$ . Par ailleurs, comme  $f_h^n \in L^2(\Omega)$ , il existe  $\beta_h \in U_h$  tel que

$$\operatorname{div} \beta_h = f_h^n \text{ dans } \Omega \quad (6.95)$$

$$\beta_h = 0 \text{ sur } \Gamma. \quad (6.96)$$

Grâce aux bornes de  $f_h^n$ , on a également  $\|\beta_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f_h^n\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|c_h^n\|_{1,h}$ .

Avec (6.95) dans (6.94), on tire que  $(c_h^n, \operatorname{div}(\beta_h)) = (c_h^n, f_h^n) = \|c_h^n\|_{1,h}^2$ . On choisit la fonction test  $u = \beta_h$  dans (6.86) et on obtient

$$\begin{aligned} \|c_h^n\|_{1,h}^2 &= (c_h^n, \operatorname{div}(\beta_h)) = (S(v_h)^{-\frac{1}{2}} \psi^{-1} v_{ch}^n, \beta_h) - (S(v_h)^{-1} \psi^{-1} v_h c_h^n, \beta_h) \\ &\leq \psi_-^{-1} S_m^{-\frac{1}{2}} \|v_{ch}^n\|_{L^2(\Omega)} \|\beta_h\|_{L^2(\Omega)} + \psi_-^{-1} S_m^{-1} \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \|c_h^n\|_{L^2(\Omega)} \|\beta_h\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|v_{ch}^n\|_{L^2(\Omega)} \|c_h^n\|_{1,h} + C \|c_h^n\|_{L^2(\Omega)} \|c_h^n\|_{1,h}. \end{aligned}$$

D'où

$$\|c_h^n\|_{1,h} \leq C \left( \|v_{ch}^n\|_{L^2(\Omega)} + \|c_h^n\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

■

**Lemme 6.2.8** *Il existe une sous-suite de  $C_h^\tau$  qui converge fortement dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  lorsque  $(\tau, h) \rightarrow (0, 0)$ .*

*Preuve.* Comme  $\partial_t C_h^\tau \in L^2$ , la translation en temps est contrôlée. Il reste à considérer la translation en espace. On prend (6.92) et on somme pour  $n = 1, \dots, T/\tau$ . On obtient :

$$\tau \sum_{n=1}^{T/\tau} \|c_h^n\|_{1,h}^2 \leq C \tau \sum_{n=1}^{T/\tau} \left( \|v_{ch}^n\|^2 + \|c_h^n\|^2 \right) \leq C \left( 1 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right) \leq C \quad (6.97)$$

d'après (6.26) et (6.44). On prolonge  $c_h^n$  par 0 en dehors de  $\Omega$  (on garde la même notation pour simplifier) et on utilise le Lemme 6.2.6 pour contrôler la translation par la norme  $\|\cdot\|_{1,h}$  :

$$\tau \sum_{n=1}^{T/\tau} \|\Delta_\xi c_h^n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \tau \sum_{n=1}^{T/\tau} \|c_h^n(\cdot + \xi) - c_h^n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \tau C \sum_{n=1}^{T/\tau} \|c_h^n\|_{1,h}^2 |\xi| (|\xi| + |\mathcal{T}_h|).$$

On a donc d'après (6.97)

$$\tau \sum_{n=1}^{T/\tau} \|\Delta_\xi c_h^n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq C |\xi| (|\xi| + |\mathcal{T}_h|) \left(1 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2\right) \leq C |\xi| (|\xi| + |\mathcal{T}_h|)$$

ce qui donne l'estimation suivante pour  $C_h^\tau$  :

$$\tau \sum_{n=1}^{T/\tau} \|C_h^\tau(\cdot + \xi) - C_h^\tau\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq C |\xi| (|\xi| + |\mathcal{T}_h|).$$

D'après le théorème de compacité de Riesz-Fréchet-Kolmogorov,  $\{C_h^\tau, h > 0, \tau > 0\}$  est compact, ce qui permet de conclure. ■

La convergence forte de  $C_h^\tau$  étant obtenue, on peut à présent passer à la limite.

**Lemme 6.2.9** *La limite  $(c^\#, v_c^\#)$  est une solution faible de (6.69).*

*Preuve.* La fonction  $(C^\tau, V_{C^\tau}^\tau)$  satisfait (6.81) que l'on rappelle ci-dessous :

$$\begin{aligned} \langle R\psi \partial_t C_h^\tau, w \rangle + \langle \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}} V_{C_h^\tau}^\tau), w \rangle + \langle r(C_h^\tau), w \rangle - \langle p, w \rangle = \\ \langle \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}} (V_{C_h^\tau}^\tau - v_{c_h^n}^n)), w \rangle + \langle r(C_h^\tau) - r(c_h^{n-1}), w \rangle \end{aligned} \quad (6.98)$$

pour tout  $w \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ . Elle satisfait donc également

$$\begin{aligned} \langle R\psi \partial_t C_h^\tau, w - w_h \rangle + \langle \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}} V_{C_h^\tau}^\tau), w - w_h \rangle + \langle r(C_h^\tau), w - w_h \rangle - \langle p, w - w_h \rangle = \\ \langle \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}} (V_{C_h^\tau}^\tau - v_{c_h^n}^n)), w - w_h \rangle + \langle r(C_h^\tau) - r(c_h^n), w - w_h \rangle \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \langle R\psi \partial_t C_h^\tau, w - w_h \rangle + \langle \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}} V_{C_h^\tau}^\tau), w - w_h \rangle + \langle r(C_h^\tau), w - w_h \rangle - \langle p, w - w_h \rangle \\ + \langle \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}} (V_{C_h^\tau}^\tau - v_{c_h^n}^n)), w_h - w \rangle + \langle r(C_h^\tau) - r(c_h^n), w_h - w \rangle = 0 \end{aligned} \quad (6.99)$$

pour tout  $w \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  et où  $w_h$  est la projection de  $w$  sur  $\mathcal{W}_h$ ,  $w_h = P_h w$ , introduite précédemment. En ajoutant (6.99) au membre de droite de (6.98), on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_0^T (R\psi \partial_t C_h^\tau, w) dt + \int_0^T (\operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}} V_{C_h^\tau}), w) dt + \int_0^T (r(C_h^\tau), w) dt - \int_0^T (p, w) dt = \\
& \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (R\psi \partial_t C_h^\tau, w - w_h) dt + \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}} V_{C_h^\tau}) - \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}} v_{c_h^n}), w) dt \\
& + \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}} V_{C_h^\tau}), w - w_h) dt \\
& + \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}} V_{C_h^\tau}) - \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}} v_{c_h^n}), w_h - w) dt \\
& + \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (r(C_h^\tau) - r(c_h^n), w) dt + \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (r(C_h^\tau), w - w_h) dt \\
& + \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (r(C_h^\tau) - r(c_h^n), w_h - w) dt - \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (p, w - w_h) dt.
\end{aligned}$$

Notons qu'on suppose une régularité  $H^1$  en espace pour les fonctions test  $w$ . Nous allons l'utiliser pour contrôler les termes  $\|w - w_h\|_{L^2(\Omega_T)}$  grâce à (6.70).

On note les termes du membre de droite respectivement  $I_i$  avec  $i = 1, \dots, 8$ . On a :

$$|I_1| \leq R\psi_+ \|\partial_t C_h^\tau\|_{L^2(\Omega_T)} \left( \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|w - w_h\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'après (6.88) du Lemme 6.2.4 et les propriétés de l'opérateur de projection (6.70), on a

$$|I_1| \leq C \left( \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|w - w_h\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq Ch \|w\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} \leq Ch \rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0$$

car  $w \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ .

Comme  $t_n = t_{n-1} + \tau$ , on a  $Z_h^\tau - z_h^\tau = (t - t_n)(z_h^n - z_h^{n-1})/\tau$  et  $|V_{C_h^\tau} - v_{c_h^n}| \leq C |v_{c_h^n} - v_{c_h^{n-1}}|$ . On a alors, après une intégration par parties qui ne fait pas apparaître de termes aux bords puisque  $w \in H_0^1(\Omega)$  :

$$|I_2| \leq \left( \sum_{n=1}^{T/\tau} \tau \left\| S(v_h)^{\frac{1}{2}} (v_{c_h^n} - v_{c_h^{n-1}}) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'après (6.44), on a

$$|I_2| \leq \tau^{\frac{1}{2}} \left\| (S_m + \alpha_L |v_h|)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^\infty(\Omega)} C \left( 1 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla w\|_{(L^2(\Omega_T))^N}.$$



Comme  $v_h \rightarrow v$  fortement dans  $L^2(\Omega)$ , on peut passer à la limite. On a

$$|I_2| = C\tau^{\frac{1}{2}} \left(1 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C\tau^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \text{ lorsque } \tau \rightarrow 0.$$

D'après (6.44) et (6.70),

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \left(C \sum_{n=1}^{T/\tau} \tau \left\| S(v_h)^{\frac{1}{2}} (v_{ch}^n - v_{ch}^{n-1}) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\nabla(w - w_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \tau^{\frac{1}{2}} \left\| (S_m + \alpha_L |v_h|)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^\infty(\Omega)} C \left(1 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}} \|w - w_h\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\ &\leq C\tau^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0 \text{ et } \tau \rightarrow 0 \end{aligned}$$

car  $w - w_h \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ .

De même,

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq \left(C \sum_{n=1}^{T/\tau} \tau \left\| S(v_h)^{\frac{1}{2}} (v_{ch}^n - v_{ch}^{n-1}) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\nabla(w_h - w)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \tau^{\frac{1}{2}} \left\| (S_m + \alpha_L |v_h|)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^\infty(\Omega)} C \left(1 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}} \|w_h - w\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\ &\leq C\tau^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0 \text{ et } \tau \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Pour le terme de réaction, on a

$$|I_5| \leq \left(C \sum_{n=1}^{T/\tau} \tau \|r(C_h^\tau) - r(c_h^{n-1})\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme  $r$  est supposé dérivable à dérivée bornée, on a

$$\begin{aligned} |I_5| &\leq \tau^{\frac{1}{2}} \|r'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left(\sum_{n=1}^{T/\tau} \|C_h^\tau - c_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\tau^{\frac{1}{2}} \|r'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left(\sum_{n=1}^{T/\tau} \|c_h^n - c_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_{L^2(\Omega_T)}. \end{aligned}$$

D'après (6.44), on a

$$\begin{aligned} |I_5| &\leq C\tau^{\frac{1}{2}} \|r'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left(\tau \left(1 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_{L^2(\Omega_T)} \\ &\leq C\tau \|r'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left(1 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C\tau \rightarrow 0 \text{ lorsque } \tau \rightarrow 0. \end{aligned}$$

De même,

$$|I_6| \leq \left( C \sum_{n=1}^{T/\tau} \tau \|r(C_h^\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|w - w_h\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq Ch \|w\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0,$$

$$|I_7| \leq \left( C \sum_{n=1}^{T/\tau} \tau \|r(C_h^\tau) - r(c_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|w_h - w\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq C\tau \|r'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left( 1 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w_h - w\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C\tau \rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0, \text{ et } \tau \rightarrow 0$$

et

$$|I_8| \leq \|p + \gamma\|_{L^2(\Omega)} \left( \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|w_h - w\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq Ch \|w\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0.$$

On regarde à présent l'équation

$$\int_0^T (S(v_h)^{-\frac{1}{2}} \psi^{-1} V_{C_h^\tau}, u) dt - \int_0^T (C_h^\tau, \operatorname{div} u) dt - \int_0^T (S(v_h)^{-1} \psi^{-1} v_h C_h^\tau, u) dt = \\ \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (S(v_h)^{-\frac{1}{2}} \psi^{-1} (V_{C_h^\tau} - v_c^n), u) dt + \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (S(v_h)^{-\frac{1}{2}} \psi^{-1} v_{c_h^n}, u - u_h) dt \\ + \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (c_h^n - C_h^\tau, \operatorname{div} u) dt + \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (c_h^n, \operatorname{div}(u_h - u)) dt \\ + \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (v_h(c_h^n - C_h^\tau), u) dt + \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (v_h c_h^n, u_h - u) dt \quad (6.100)$$

pour tout  $u \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$  et  $u_h = \Pi_h(u)$ . Le membre de gauche converge vers la limite désirée. En effet,

$$\int_0^T (S(v_h)^{-1} \psi^{-1} v_h C_h^\tau, u) dt = \int_0^T (S(v_h)^{-1} \psi^{-1} v C_h^\tau, u) dt + \int_0^T (S(v_h)^{-1} \psi^{-1} (v_h - v) C_h^\tau, u) dt.$$

Comme  $v \in L^\infty(\Omega)$ , le premier terme du membre de droite converge vers la limite désirée grâce en particulier à la convergence forte de  $v_h$  vers  $v$  dans  $L^2(\Omega_T)$  et presque partout. De même, le second terme de droite s'annule car  $v_h - v \in (L^\infty(\Omega))^N$ .

Il reste à présent à montrer que le membre de droite de (6.100) s'annule à la limite. On note  $I_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$  les termes. On a,

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq C \|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \left( \sum_{n=1}^{T/\tau} \tau \left\| S(v_h)^{-\frac{1}{2}} \psi^{-1} (v_{ch}^n - v_{ch}^{n-1}) \right\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \tau^{\frac{1}{2}} C \left( 1 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} S_m^{-\frac{1}{2}} \psi_-^{-1} \leq C \tau^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \text{ lorsque } \tau \rightarrow 0, \end{aligned}$$

puisque  $v_h$  est bornée dans  $L^\infty(\Omega)$  et grâce à (6.44). On a aussi d'après (6.44),

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \left( \sum_{n=1}^{T/\tau} \tau \left\| S(v_h)^{-\frac{1}{2}} \psi^{-1} v_{ch}^n \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=1}^{T/\tau} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \tau^{\frac{1}{2}} \psi_-^{-1} S_m^{-\frac{1}{2}} \sup \|v_{ch}^n\|_{L^2(\Omega)} \left( \sum_{n=1}^{T/\tau} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq S_m^{-1} \psi_-^{-1} \left( 1 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq Ch \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch. \end{aligned}$$

D'où

$$|I_2| \rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0.$$

De même, toujours grâce à (6.44),

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \left( \sum_{n=1}^{T/\tau} \tau \|c_h^n - c_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=1}^{T/\tau} \|\operatorname{div}(u)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \tau C \left( 1 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=1}^{T/\tau} \|\operatorname{div}(u)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \tau^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \text{ lorsque } \tau \rightarrow 0, \end{aligned}$$

car  $u \in L^2(0, T; H(\operatorname{div}; \Omega))$ .

On a d'après (6.26) et (6.70)

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq \left( \sum_{n=1}^{T/\tau} \tau \|c_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=1}^{T/\tau} \|\operatorname{div}(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq Ch \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq Ch \rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Comme  $\|v_h\|_{(L^\infty(\Omega))^N} \leq C$ , on a grâce à (6.44)

$$\begin{aligned} |I_5| &\leq C \left( \sum_{n=1}^{T/\tau} \tau \|c_h^n - c_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\leq \tau C \left( 1 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \tau \rightarrow 0 \text{ lorsque } \tau \rightarrow 0. \end{aligned}$$

---

De même,

$$|I_6| \leq C \left( \sum_{n=1}^{T/\tau} \tau \|c_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=1}^{T/\tau} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq Ch \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ \leq Ch \rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0.$$

■

**Théorème 6.2.6** *L'ensemble de la suite  $(C_h^\tau, V_{C_h^\tau})$  converge vers la solution  $(c, v_c)$  de (6.69).*

*Preuve.* En utilisant le résultat du lemme précédent et le fait que la solution de ce problème est unique, on a  $(c^\#, v_c^\#) = (c, v_c)$  et l'ensemble de la suite  $(C_h^\tau, V_{C_h^\tau})$  converge vers cette limite. ■

**Remarque 6.2.4** *La convergence du schéma discret pour le problème adjoint se démontre de même.*

---

# Chapitre 7

## Tests numériques

Dans ce chapitre, nous illustrons numériquement le comportement de la solution de notre problème. Nous nous plaçons dans le même cadre que dans les Chapitres 3, 4 et 6 dont nous rappelons les hypothèses :

- on suppose que  $\partial\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et qu'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée (afin d'assurer  $v \in L^\infty(\Omega_T)$ ) :

$$\kappa \in (\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}))^{N \times N},$$

$$\kappa = \kappa^* Id \text{ avec } \kappa^* : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } \kappa^* \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega});$$

- l'isotherme  $r$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , concave, dérivable à dérivée bornée sur  $\mathbb{R}_+$  et telle qu'il existe  $r_+ \in \mathbb{R}^+$

$$|r(x)| \leq r_+ |x|, \forall x \in \mathbb{R};$$

- le facteur de retard est tel que  $R > 0$ ;
- la concentration initiale est  $c_0 \in H^1(\Omega)$  avec  $0 \leq c_0 \leq 1$  presque partout dans  $\Omega$ ;
- la fonction  $g$  appartient à  $L^\infty(\Omega)$ ;
- la fonction  $p \mapsto f(\cdot, p)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , croissante, définie sur  $\mathbb{R}^+$  et strictement concave;
- la fonction  $D : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est telle que pour presque tout  $x \in \Omega$ ,  $c \in \mathbb{R}_+ \mapsto D(x, c)$  est une fonction continue et bornée qui satisfait

$$(t, x) \mapsto D(x, c(t, x)) \in L^1(\Omega_T) \text{ si } c \in L^2(\Omega_T), \frac{\partial D}{\partial c} \geq 0, \frac{\partial^2 D}{\partial c^2} \geq 0 \text{ et } \frac{\partial D}{\partial c} \in L^2(\mathbb{R}_+);$$

---

— la donnée  $v_1$  est telle qu'il existe un relèvement satisfaisant  $v_1 \in (L^\infty(\Omega_T))^N$ ,  $\operatorname{div}(v_1) \in L^\infty(\Omega_T)$  et  $\int_\Omega g dx = \int_{\partial\Omega} \kappa v_1 \cdot n d\sigma$  (voir la Remarque 2.3.2 du Chapitre 2);

— la porosité  $\psi$  appartient à  $L^\infty(\Omega)$  et il existe  $\psi_-$  et  $\psi_+$  des réels tels que

$$0 < \psi_- \leq \psi(x) \leq \psi_+, \text{ presque pour tout } x \in \Omega;$$

— l'opérateur  $S(v)$  est supposé donné par (1.2). Notons que d'après la définition (1.2) du tenseur de dispersion, on a

$$S(v)\xi \cdot \xi \geq (S_m + \alpha_T |v|) |\xi|^2, |S(v)\xi| \leq (S_m + \alpha_L |v|) |\xi| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \quad (7.1)$$

On suppose que

$$S_m > 0, \alpha_L > \alpha_T \geq 0.$$

On suppose qu'il existe des réels  $\kappa_-$  et  $\kappa_+$  avec  $0 < \kappa_- \leq \kappa_+$  tels que le tenseur de perméabilité vérifie :

$$\kappa \xi \cdot \xi \geq \kappa_- |\xi|^2 \text{ et } |\kappa \xi| \leq \kappa_+ |\xi|, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Ce Chapitre est organisé comme suit : dans le paragraphe 7.1, nous rappelons les problèmes discrets utilisés et donnons l'algorithme de résolution du modèle. Le paragraphe 7.2 résumera les initialisations et les valeurs données aux paramètres pour les simulations. Nous présentons un exemple de la dynamique hydraulique obtenue pour un apport d'engrais donné dans le paragraphe 7.3. Le paragraphe 7.4 est consacré à l'illustration du processus de convergence de l'algorithme du gradient conjugué non linéaire associé à la discrétisation du système d'état selon la méthode du Chapitre 6. Nous présentons les résultats obtenus, à la fois pour la quantité d'engrais à épandre et pour la concentration en sous-sol, après une boucle (sous-paragraphe 7.4.1) et cinq boucles (sous-paragraphe 7.4.2). Les illustrations sont complétées par un calcul de l'ordre de convergence en norme  $L^\infty$  au sous-paragraphe 7.4.3. L'analyse qualitative de la solution optimale calculée est détaillée dans le paragraphe 7.5.

## 7.1 Rappel des problèmes discrets et algorithme de résolution

On note l'ensemble  $E$  :

$$E = \{q \in L^2(\Omega_T), 0 \leq q(t, x) \leq \bar{p} \text{ presque partout dans } \Omega_T, q|_{t=T} \text{ est définie}\},$$

et la parcelle agricole  $\mathcal{S} \subset \Omega$ . De plus, on choisit  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$ ,  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ , et  $\Gamma_3 \cup \Gamma_4 = \partial\Omega$ ,  $\Gamma_3 \cap \Gamma_4 = \emptyset$ .

On a vu au Chapitre 4 que l'unique solution pour l'optimisation dans  $E$  de l'objectif

$$J(p, c) = \int_0^T \left( \int_{\mathcal{S}} f(x, p(t, x)) dx - \int_{\Omega} D(x, c(t, c)) dx \right) e^{-\rho t} dt - \nu \left( \int_{\Omega} D(x, c(T, x)) dx \right) e^{-\rho T}$$

sous la contrainte

$$\begin{cases} R\psi\partial_t c + v \cdot \nabla c - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla c) = -r(c) - gc + p\chi_{\mathcal{S}} \text{ dans } \Omega_T, \\ S(v)\nabla c \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), c = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T), \\ c|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

et

$$\operatorname{div} v = g, v = -\kappa \nabla \phi \text{ dans } \Omega_T, \quad (7.2)$$

$$v \cdot n = -\kappa v_1 \cdot n \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \phi = 0 \text{ sur } \Gamma_4 \times (0, T), \quad (7.3)$$

est déterminée par :

$$p^* \text{ est solution de } \frac{\partial f}{\partial p}(x, p^*(t, x)) = \mu^*(t, x)\chi_{\mathcal{S}}(x) \text{ dans } \Omega_T, \quad (7.4)$$

où  $\mu^*$  satisfait :

$$R\psi\mu^*(T, x) = \nu \frac{\partial D}{\partial c}(x, c^*(T, x)) \text{ dans } \Omega, \quad (7.5)$$

$$R\psi\partial_t \mu^* = -v \cdot \nabla \mu^* - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla \mu^*) + r'(c^*)\mu^* + \mu R\psi\rho - \frac{\partial D}{\partial c^*}(x, c^*) \text{ dans } \Omega_T, \quad (7.6)$$

$$\psi S(v)\nabla \mu^* \cdot n + (v \cdot n)\chi_{\Gamma_4}\mu^* - (\kappa v_1 \cdot n)\chi_{\Gamma_3}\mu^* = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \mu = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (7.7)$$

$$R\psi\partial_t c^* + v \cdot \nabla c^* - \operatorname{div}(\psi S(v)\nabla c^*) = -r(c^*) - gc^* + \chi_{\mathcal{S}} F(\chi_{\mathcal{S}} \mathcal{C}_T \mu^*) \text{ dans } \Omega_T, \quad (7.8)$$

$$S(v)\nabla c^* \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), c^* = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T), c^*|_{t=0} = c_0 \text{ dans } \Omega, \quad (7.9)$$

où on a défini  $F$  par  $\frac{\partial f}{\partial p}(x, F(y)) = y$ .

On note  $h$  le diamètre des mailles,  $\tau$  le pas de temps et  $T$  le temps maximal de l'étude avec  $N = T/\tau$ . On rappelle les problèmes en charge, en concentration et adjoint discrets construits au Chapitre 6 :



---

**Problème variationnel discret correspondant au problème en charge (7.2)-(7.3) :**

Trouver  $\phi_h \in \tilde{W}_h$  et  $v_h \in U_{h,0}$  tels que

$$\begin{cases} \int_0^T \int_{\Omega} v_h \cdot \psi_h \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \kappa \nabla \phi_h \cdot \psi_h \, dx \, dt = 0, \\ \int_0^T \int_{\Omega} v_h \cdot \nabla \varphi_h \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} g \varphi_h \, dx \, dt = 0, \end{cases} \quad (7.10)$$

pour tous  $\psi_h \in U_{h,0}$  et  $\varphi_h \in W_h$ .

**Problème variationnel discret correspondant au problème en concentration (7.8)-(7.9) :**

Soient  $n \in \{1, \dots, N\}$  et  $(c_h^{n-1}, v_h)$  donnés dans  $(W_h, U_h)$  et  $p$  donné dans  $L^2(\Omega)$ . Le problème est de trouver  $c_h^n \in W_h$  tel que :

$$\langle R\psi(c_h^n - c_h^{n-1}), w_h \rangle + \tau \langle \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}} v_{c_h}^n), w_h \rangle + \tau \langle r(c_h^{n-1}), w_h \rangle - \tau \langle p, w_h \rangle = 0 \quad (7.11)$$

$$\langle S(v_h)^{-\frac{1}{2}} \psi^{-1} v_{c_h}^n, u_h \rangle - \langle c_h^n, \operatorname{div}(u_h) \rangle - \langle S(v_h)^{-1} \psi^{-1} v_h c_h^n, u_h \rangle = 0 \quad (7.12)$$

pour tout  $(w_h, u_h) \in (W_h, U_h)$  tel que  $\chi u_h \in U_{h,0}$ . Le schéma est initialisé par  $c_h^0$  donné dans  $W_h$ .

**Problème variationnel discret correspondant au problème adjoint (7.5)-(7.7) :**

Soient  $n \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\mu_h^{n-1}$  et  $c_h^p$ ,  $0 \leq p \leq N$  donnés dans  $W_h$ ,  $v_h$  donné dans  $U_h$ . Le problème est de trouver  $\mu_h^n \in W_h$  tel que :

$$\begin{aligned} \langle R\psi(\mu_h^n - \mu_h^{n-1}), w_h \rangle + \tau \langle \operatorname{div}(S(v_h)^{\frac{1}{2}} v_{\mu_h}^n), w_h \rangle + \tau \langle r'(c_h^{T/\tau-n}) \mu_h^n, w_h \rangle + \tau \langle R\psi \rho \mu_h^n, w_h \rangle \\ - \tau \langle \frac{\partial D}{\partial c}(c_h^{T/\tau-n}), w_h \rangle + \tau \langle g \mu_h^n, w_h \rangle = 0 \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$\langle S(v_h)^{-\frac{1}{2}} \psi^{-1} v_{\mu_h}^n, u_h \rangle - \langle \mu_h^n, \operatorname{div}(u_h) \rangle + \langle S(v_h)^{-1} \psi^{-1} v_h \mu_h^n, u_h \rangle = 0 \quad (7.14)$$

pour tout  $(w_h, u_h) \in W_h \times U_h$  tel que  $\chi u_h \in U_{h,0}$ . Le schéma est initialisé par  $R\psi \mu_h^0 = \frac{\partial D}{\partial c}(c_h^{T/\tau})$ .

Nous utilisons le logiciel FreeFem++ (voir Hecht et al [45]) pour nos simulations. La solution optimale est calculée en réitérant un algorithme de gradient conjugué non linéaire pour la résolution de (7.4) couplé au schéma (7.10)-(7.14) :

**(Alg)**

*Calcul de  $\phi_h$  vérifiant (7.10).*

Étape 0 : *initialisation*

$i = 0$ ,  $p_h^{n,i} = p_h^n$  données quelconques dans  $W_h$ ,  $0 \leq n \leq N$ .

Pour  $i = i + 1$  :

Étape 1 : *résolution des problèmes en concentration et adjoint discrets*

*calcul des  $c_h^n$  vérifiant (7.11)-(7.12), pour  $p = p_h^n$ ,*

*calcul des  $\mu_h^n$  vérifiant (7.13)-(7.14).*

Étape 2 : *gradient conjugué non linéaire*

*calcul des  $p_h^{n,i}$  solutions de  $f'(p_h^{n,i}) = \mu_h^n$ .*

Critère d'arrêt :  $\max_{1 \leq n \leq N} |p_h^{n,i-1} - p_h^{n,i}| < s$ ,  $s = \text{seuil donné}$ .

## 7.2 Simulations numériques : initialisation

Nous présentons dans le cadre ci-dessous les données utilisées pour les simulations.

Conditions aux bords

- pour le problème en charge : mixtes Neumann homogène (en haut et à gauche) et Dirichlet homogène (en bas et à droite),
- pour le problème en concentration : Neumann homogène,
- pour le problème adjoint : imposées par (7.7).

Initialisation

- $c_h^0 = 0$ ,
- $p_h^{n,0} = 0.05$  pour tout temps  $n$ , à la surface du champ pour  $x \in [0; 0.5]$ .

---

Paramètres :

$S_p = 0$  ;  $S_m = 0.01$  ;  $R = 1$  ;  $\kappa = 39.04$  ;  $\psi = 0.3$  ;  $g = 0.5$  ;  $\rho = 0.05$ .

Fonction de réaction :  $r(c) = c^2$ .

Fonctions de production et de dommages :  $f(p) = \frac{\ln(p)}{10^3}$  ;  $D(c) = c^2 e^{-(7.5-10x)^2}$ .

Domaine carré  $1 \times 1$  ; pas de temps  $\tau = 0.01$  ; pas d'espace  $h = 0.01$ .

On choisit des éléments finis  $P_1$  pour  $c_h^n$ ,  $p_h^n$  et  $v_h^n$ , et  $P_2$  pour  $\phi_h$ .

**Remarque 7.2.1** *Les valeurs prises pour les paramètres physiques correspondent à celles indiquées en référence dans le paragraphe 1.3 du Chapitre 1. Les fonctions de production et dommages sont par contre choisies de façon purement académique.*

**Remarque 7.2.2** *La fonction dommages  $D(c) = c^2 e^{-(7.5-10x)^2}$  prend en compte le pompage au niveau du puits, que l'on caractérise ici par  $e^{-(7.5-10x)^2}$ .*

**Remarque 7.2.3** *L'initialisation de  $p_h^{n,0}$  est bien sûr totalement arbitraire. Par ailleurs, il est bien évident que l'épandage d'engrais ne se fait pas en continu par l'agriculteur. Cependant, on peut raisonnablement supposer que l'engrais épandu s'infiltré de façon continue dans le sous-sol après son application.*

On lance 300 itérations, représentant une simulation de trois jours au vu du pas de temps  $\tau$ . Il s'avère que si le seuil du test d'arrêt est  $10^{-3}$ , on renouvelle les étapes de l'algorithme présenté au paragraphe précédent quinze fois (quinze boucles), c'est-à-dire que l'on utilise le gradient conjugué non linéaire à quinze reprises.

Par la suite, nous ferons un agrandissement au niveau du champ comme présenté dans la Figure 7.1 afin de mieux visualiser la quantité d'engrais optimale à épandre.

On représente dans la Figure 7.2 la fonction pompage au niveau du puits de captage (figure de gauche), et la vitesse du fluide solution du problème discret (7.10) (figure de droite). Les données ont été choisies pour que la vitesse soit dirigée vers la droite où se situe le puits de captage.

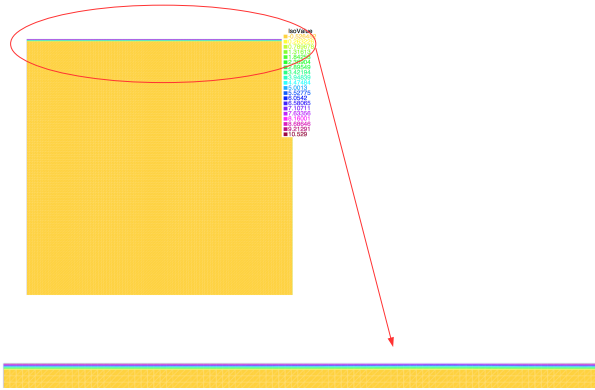


FIGURE 7.1 – Visualisation de  $p_h^n$

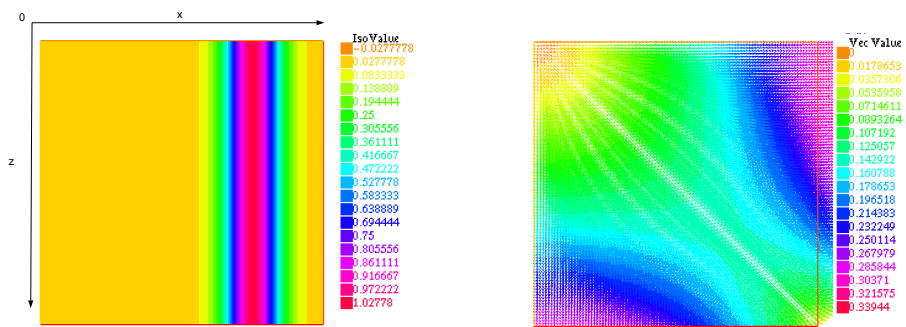


FIGURE 7.2 – Fonction pompage et vecteur vitesse

---

### 7.3 Transport du contaminant pour un apport en engrais donné

On représente sur la Figure 7.3 l'initialisation  $p_h^{n,0}$ . Afin d'illustrer le comportement d'une nappe phréatique après un apport d'engrais, nous présentons ici les résultats en concentration obtenus par (7.11)-(7.12) pour  $p = p_h^{n,0}$ . Les Figures 7.4, 7.5 et 7.6 représentent la concentration présente dans l'aquifère aux premier, deuxième et troisième jours (c'est-à-dire pour  $n = 100, 200$  et  $300$ ).

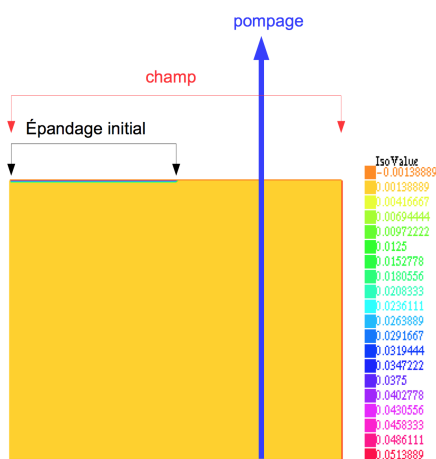


FIGURE 7.3 – Quantité d'engrais initialement épandue

Au premier jour (Figure 7.4), on constate que la concentration est bien nulle sur une grande partie de l'aquifère. Cependant, la propagation de la pollution a nettement commencé : on remarque une accumulation en haut à gauche de la figure, qui correspond au sous-sol au niveau du début du champ agricole. Cela est dû au fait que la vitesse à ce niveau de la nappe est faible (de l'ordre de 0.018 mètres par jour, voir Figure 7.2). La propagation n'est donc pas rapide et le fait d'épandre de l'engrais à chaque itération implique la formation de cette masse. Si on s'intéresse à la partie plus éloignée du champ se rapprochant du puits de captage, on peut constater des "trainées" horizontales, avec des concentrations de l'ordre de  $10^{-5}$ , représentant le déplacement du polluant épandu à la fin du champ. La vitesse entre les points de coordonnées 0.2 et 0.5 mètres étant de 0.1 mètres par jour, la pollution ayant été épandue à 0.5 mètres est à présent à environ 0.6 mètres de l'entrée du champ.

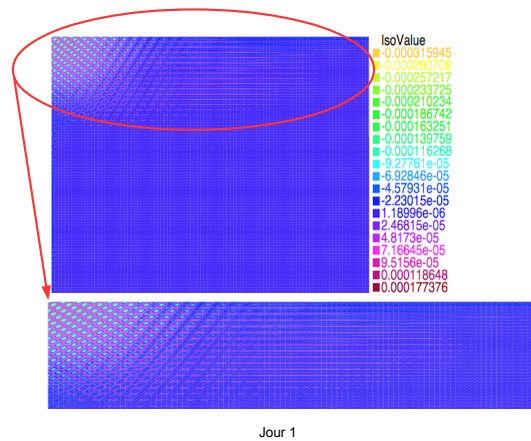


FIGURE 7.4 – Concentrations (résolution initiale) au premier jour.

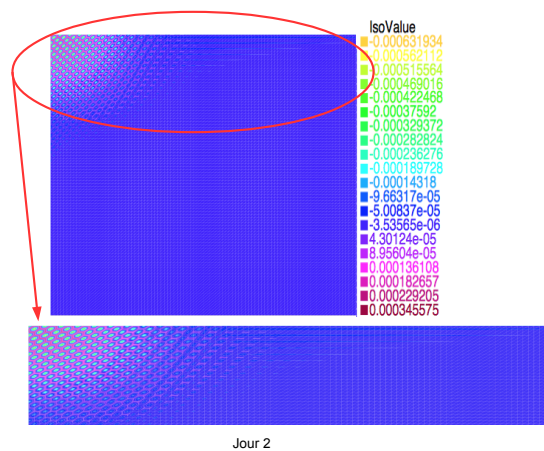


FIGURE 7.5 – Concentrations (résolution initiale) au deuxième jour.

La concentration au deuxième jour (Figure 7.5) est similaire à celle du premier jour en ce qui concerne le début du champ. On remarque cependant que la concentration est plus importante, de l'ordre de  $10^{-4}$ . En revanche, on constate que les traînées horizontales sont nettement moins marquées. Cela est dû au fait que la pollution a atteint le puits (situé à 0.75 mètres) et a donc été pompée.

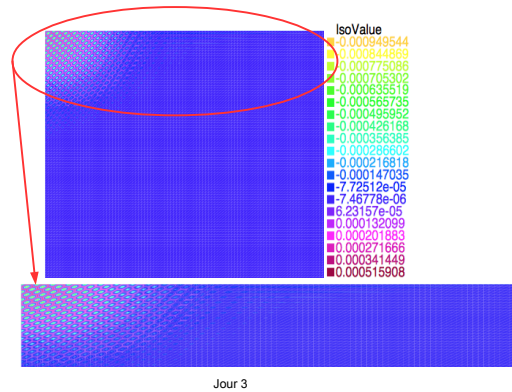


FIGURE 7.6 – Concentrations (résolution initiale) au troisième jour.

Au troisième jour (Figure 7.6), les trainées ne sont pratiquement plus visibles, tout le nitrate déjà transporté ayant été pompé au puits et celui présent au début du champ n'ayant pas encore parcouru suffisamment de distance. On remarque que l'accumulation au niveau du sous-sol sous le début du champ a encore augmenté et est de l'ordre de  $2 \times 10^{-4}$ .

## 7.4 Détail du processus de convergence de l'algorithme (Alg)

### 7.4.1 Approximation de la solution optimale après une boucle

La Figure 7.7 représente les solutions obtenues grâce au gradient conjugué non linéaire à l'issue de la première boucle de l'algorithme (Alg) pour la quantité optimale d'engrais à épandre aux premier, deuxième et troisième jours ( $n = 100, 200$  et  $300$ ) à la surface du champ. On remarque également que l'épandage est visiblement réparti de manière homogène sur toute la surface du domaine.

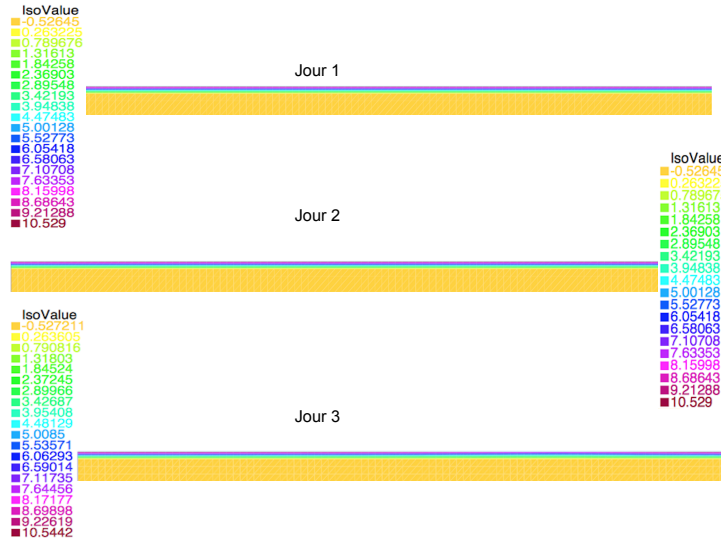


FIGURE 7.7 –  $p_h^{n,1}$  pour  $n = 100, 200, 300$

## 7.4.2 Approximation de la solution optimale après 5 boucles

On ré-itére ce processus quatre fois. On obtient donc  $p_h^{n,5}$  après calcul par le gradient conjugué non linéaire. La Figure 7.8 le représente pour  $n = 100, 200, 300$ . On constate que la quantité d’engrais à épandre est du même ordre qu’après une seule boucle d’itération de passage par le gradient (voir Figure 7.7). En revanche, l’épandage ne devrait pas être autant homogène : en effet, on constate qu’il devrait être moins important au niveau du puits de pompage (ce qui paraît logique) et plus important sur le premier tiers du champ. L’épandage pour le deuxième jour est similaire à celui du premier jour, avec une quantité moindre au niveau du puits. En revanche, au troisième jour, cette restriction est nettement plus visible, avec un arrêt total d’épandage au puits de captage et aux alentours correspondant au cône de pompage.



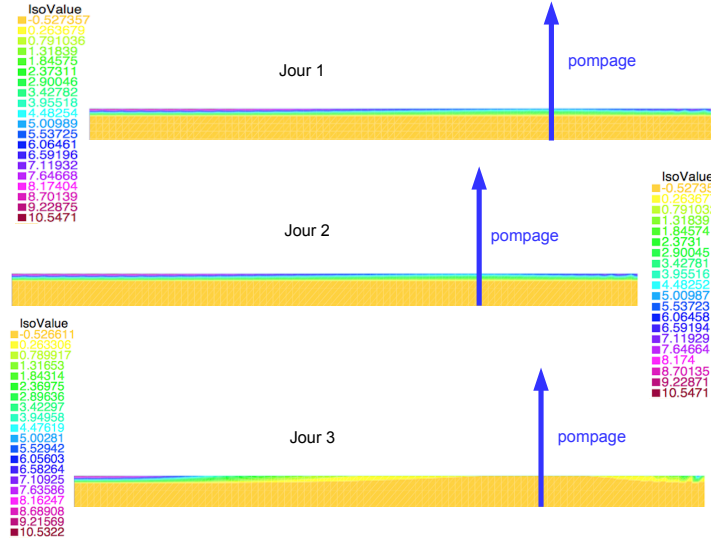


FIGURE 7.8 –  $p_h^{n,5}$  pour  $n = 100, 200, 300$

### 7.4.3 Étude de la convergence de l'algorithme (Alg)

#### Convergence de l'algorithme du gradient

Afin d'illustrer la convergence de l'algorithme (Alg), nous avons calculé la différence entre les  $p_h^n$  issus de la boucle  $i$  et ceux issus de la boucle  $i - 1$  et fait la moyenne à l'issue de chaque boucle. Le calcul est le suivant :

$$\frac{\sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{h=0}^{h_{max}} |p_h^{n,i-1} - p_h^{n,i}|}{n_{max} \times h_{max}}$$

avec ici  $n_{max} = 301$  et  $h_{max} = 100$ .

Nous présentons les résultats sur vingt boucles.

On constate que la moyenne décroît au fil des boucles, ce qui illustre la convergence de l'algorithme (Alg). Le résultat pour la première boucle, proche de 10, correspond en fait à la moyenne des  $p_h^{n,1}$ . Dès la cinquième boucle, la moyenne des  $|p_h^{n,i-1} - p_h^{n,i}|$  est de l'ordre de 0.05. On peut considérer que les résultats présentés à l'issue de la quinzième boucle sont corrects, la moyenne de l'erreur étant de l'ordre de  $5 \times 10^{-4}$ .

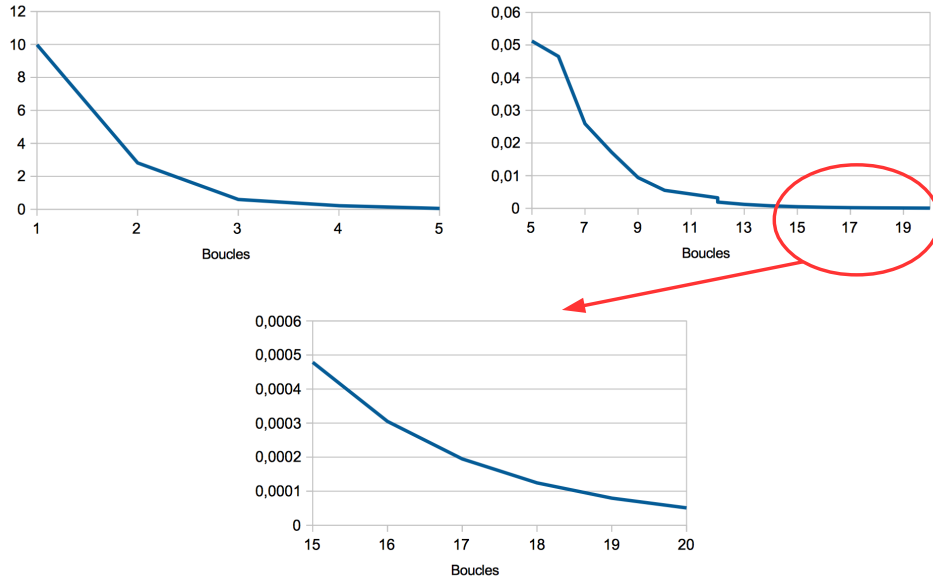


FIGURE 7.9 – Moyenne des  $|p_h^{n,i-1} - p_h^{n,i}|$  pour vingt boucles de calcul ( $1 \leq i \leq 20$ ).

### Étude de l'objectif

Nous allons à présent observer le comportement de l'objectif obtenu à l'issue des boucles du programme. Nous le rappelons ci-dessous :

$$\int_0^T \left( \int_S f(x, p(t, x_1)) e^{-\rho t} dx - \int_{\Omega} D(x, c(t, x)) e^{-\rho t} dx \right) - \nu e^{-\rho T} \int_{\Omega} D(x, c(T, x)) dx.$$

Dans le cadre de nos simulations, il s'écrit comme suit :

$$\int_0^T \left( \int_S \ln(p) e^{-\rho t} dx - \int_{\Omega} c^2 e^{-\rho t} dx \right) - e^{-\rho T} \int_{\Omega} c^2 dx.$$

La Figure 7.10 représente l'évolution de la valeur de l'objectif au cours des vingt premières boucles du programme. L'objectif est croissant jusqu'à la quatorzième itération, puis est légèrement décroissant ensuite mais reste stable. Cette dernière stabilité rejoint le résultat obtenu grâce au calcul de l'erreur, à savoir qu'il illustre que l'on peut stopper le programme au bout de quinze itérations. La croissance de l'objectif (sur les quatorze premières itérations) témoigne du processus effectif d'optimisation.

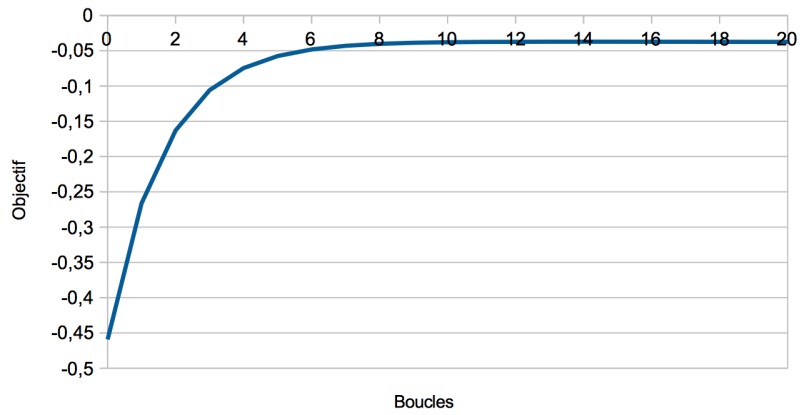


FIGURE 7.10 – Objectif en fonction de vingt boucles.

## 7.5 Étude de la solution optimale

Comme montré dans le paragraphe précédent, nous considérons sur cet exemple la solution comme optimale au bout de quinze boucles. Les résultats obtenus sont présentés dans les figures qui suivent.

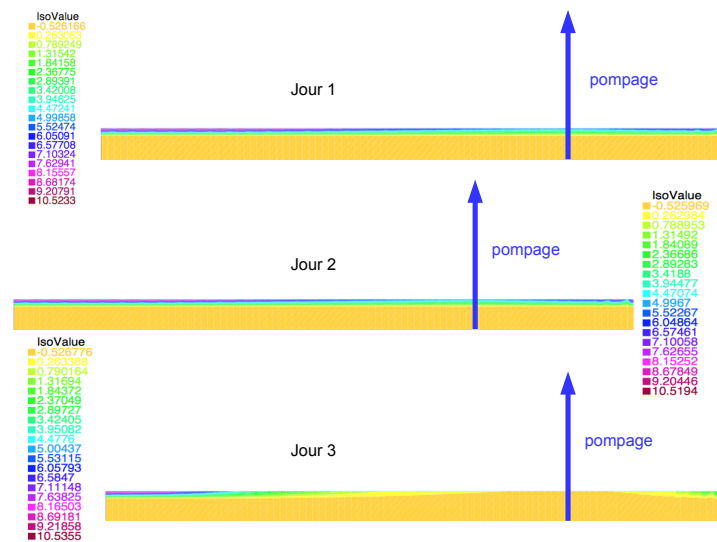


FIGURE 7.11 – Approximation de la solution optimale après 15 boucles de (Alg),  $p_h^{n,15}$  pour  $n = 100, 200, 300$ .

La Figure 7.11 représente les apports optimaux d'engrais aux premier, deuxième

et troisième jours. Le premier jour, l'apport prend des valeurs maximales sur le début du champ, de l'ordre de  $8 \text{ g.L}^{-1}.\text{jour}^{-1}$ . On constate qu'au niveau du puits de pompage, cette quantité est moitié moindre. Cependant, on notera que l'engrais n'est pas proscrit autour du puits. On remarque que l'attitude à adopter au deuxième jour est similaire à celle du premier jour. En revanche, l'épandage au puits (et aux alentours correspondant au cône de pompage) est proscrit au troisième jour.

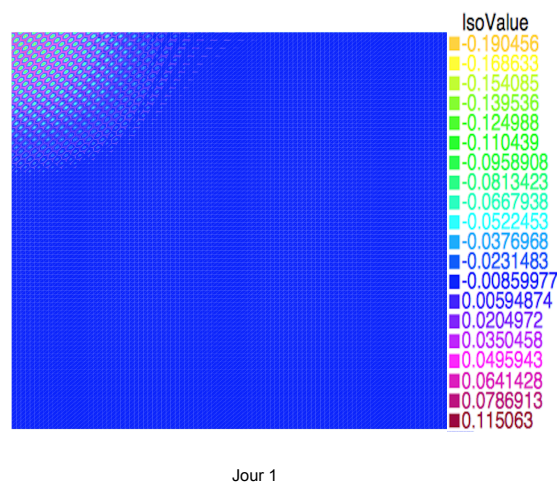


FIGURE 7.12 – Approximation de la concentration optimale après 15 boucles : au premier jour,  $c_h^{100,15}$ .

La Figure 7.12 ci-dessus représente les  $c_h^n$  optimales, c'est-à-dire calculées par (7.11)-(7.12) pour  $p = p_h^{n,15}$  au premier jour (pour  $n = 100$ ). On retrouve une accumulation de la concentration au début du champ de l'ordre de  $5 \times 10^{-2} \text{ g.L}^{-1}$ .

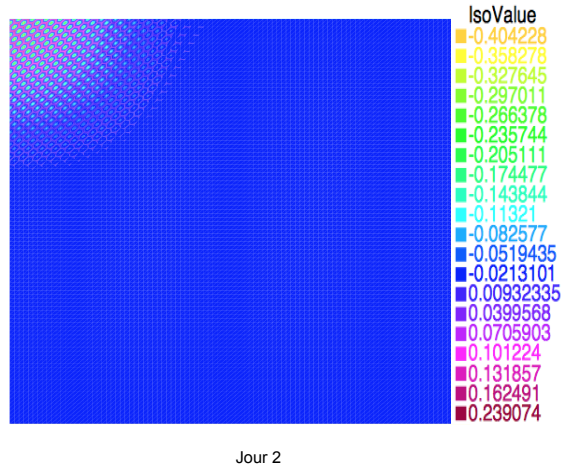


FIGURE 7.13 – Approximation de la concentration optimale après 15 boucles : au deuxième jour,  $c_h^{200,15}$ .

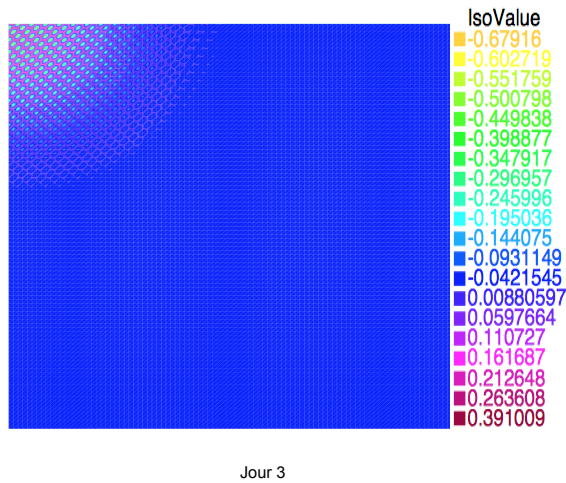


FIGURE 7.14 – Approximation de la concentration optimale après 15 boucles : au troisième jour,  $c_h^{300,15}$ .

La concentration au début du champ augmente de jours en jours. Au deuxième jour (Figure 7.13), elle est de l'ordre de  $1,1 \times 10^{-1} \text{ g.L}^{-1}$ . Au troisième jour (Figure 7.14), la concentration au début du champ est de l'ordre de  $1,6 \times 10^{-1} \text{ g.L}^{-1}$ .

# Bibliographie

- [1] Y. ACHDOU AND C. BERNARDI : *Un schéma de volumes ou éléments finis adaptatif pour les équations de Darcy à perméabilité variable*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 333, Série I, p. 693-698, 2001.
- [2] Y. ACHDOU, C. BERNARDI AND F. COQUEL : *A priori and a posteriori analysis of finite volume discretizations of Darcy's equations*, Numer. Math. , Vol. 96, Issue I, pp. 17-42, 2003.
- [3] F. A-BOUSSOUIRA AND P. CANNARSA : *Control of Partial Differential Equations*, Springer Encyclopedia of Complexity and Systems Science, Springer New-York, 1485-1509, 2009.
- [4] H. AMANN : *Dynamic Theory of Quasilinear Parabolic Systems, III. Global existence*, Mathematische Zeitschrift, 202, 219-250, 1989.
- [5] H. AMANN : *Dynamic Theory of Quasilinear Parabolic Systems, III. Global existence*, Mathematische Zeitschrift, 205, 331, 1990.
- [6] Y. AMIRAT, K. HAMDACH AND A. ZIANI : *Mathematical analysis for compressible miscible displacement models in porous media*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. 6, pp 729-747, 1996.
- [7] O. AMRHAR, H. NASSALI AND M.S. ELYOUBI : *Application of nonlinear regression analysis to select the optimum absorption isotherm for Methylene Blue adsorption onto Natural Illitic Clay*, Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol 84, p. 116-130, 2015.
- [8] S. ANITA, V. ARNAUTU AND V. CAPASSO : *An Introduction to Optimal Control Problems in Life Sciences and Economics*, From Mathematical Models to Numerical Simulation with MATLAB, Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology, Birkhäuser, 2010.
- [9] E. AUGERAUD-VÉRON AND M. LEANDRI : *Optimal pollution control with distributed delays*, Journal of Mathematical Economics 55, 24-32, 2014.
- [10] J. BEAR AND A. VERRUIJT : *Modeling Groundwater Flow and Pollution*, Theory and Applications of Transport in Porous Media, 1987.

- 
- [11] M. BELHACHEMI AND F. ADDOUN : *Comparative adsorption isotherms and modeling of methylene blue onto activated carbons*, Appl Water Sci, 1 :111-117, DOI 10.1007/s13201-011-0014-1, 2011.
- [12] C. BENOSMAN, B. AÏNSEBA AND A. DUCROT : *Optimization of Cytostatic Leukemia Therapy in an Advection-Reaction-Diffusion Model*, Journal of Optimization Theory and Applications, DOI 10.1007/s10957-014-0667-7, 2014.
- [13] O. BOMMELAER AND J. DEVAUX : *Coûts des principales pollutions agricoles de l'eau*, Commissariat général au développement durable, Observations et Statistiques, numéro 52, Septembre 2011.
- [14] P. BORDENAVE, F. BOURAOUI, C. GASCUEL-ODOUX, J. MOLÉNAT AND P. MÉROT : *Décalages temporels entre des modifications des pratiques agricoles et la diminution des nitrates dans les eaux superficielles*, In : Merceron, M. (ed.), *Pollutions Diffuses : du bassin au littoral (IFREMER)* vol. 24, pp. 311-333, 1999.
- [15] R. BOUCEKKINE, C. CAMACHO AND G. FABBRI : *On the Optimal Control of some Parabolic Partial Differential Equations Arising in Economics*, Document de Recherche EPEE, Centre d'Etudes des Politiques Economiques de l'Université d'Evry, 2013.
- [16] C. BOURGEOIS AND P.-A. JAYET : *Regulation of relationships between heterogeneous farmers and an aquifer accounting for lag effects*, Aust. J. Agric. Resour. Econ. 60(1), 39-59, 2016.
- [17] A.M. BRADLEY : *PDE-constrained optimization and the adjoint method*, 2013.
- [18] S.C. BRENNER AND J.L. SCOTT : *The mathematical theory of finite element methods*. Texts in Applied Mathematics : Springer, 19, 2002.
- [19] H. BREZIS : *Functional Analysis Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer.
- [20] H. BREZIS : *Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications*, Dunod.
- [21] W. BROCK AND A. XEPAPADEAS : *Diffusion-Induced Instability and Pattern Formation in Infinite Horizon Recursive Optimal Control*, Journal of Economic Dynamics and Control 32(9) : 2745-2787, DOI : 10.1016/j.jedc.2007.08.005, 2007.
- [22] C. CAMACHO AND A. PÉREZ-BARAHONA : *Land Use Dynamics and the Environment*, CES Working Papers, Documents de Travail du Centre d'Economie de la Sorbonne, 2012.
- [23] S. R. CARPENTER, D. LUDWIG AND W. A. BROCK : *Management of Eutrophication for Lakes Subject to Potentially Irreversible Change*, Ecological Applications, Vol. 9, No. 3, pp. 751-771, 1999.
- [24] C. CHOQUET, M. DIEDHIYOU AND C. ROSIER : *Derivation of a Sharp-Diffuse Interfaces Model for Seawater Intrusion in a Free Aquifer. Numerical Simulations*. SIAM J. Appl. Math., 76(1), 138-158, 2016.

- 
- [25] C. CHOQUET AND A. MIKELIĆ : *Rigorous upscaling of the reactive flow with finite kinetics and under dominant Péclet number*. Continuum Mech. Thermodyn. 21 : 125-140, DOI 10.1007/s00161-009-0099-z, 2009.
- [26] J.-M. CORON : *Control and Nonlinearity*, Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Vol. 136, 2007.
- [27] D.L. CORRELL : *Buffer zones and water quality protection : general principles. Buffer zones : their processes and potential in water protection*. Quest Environmental, Harpenden, 7-20, 1996.
- [28] E. DIBENEDETTO : *Partial Differential Equations*, Birkhäuser, 1995.
- [29] M.M. DIÉDHIOU : *Approche mixte interface nette/diffuse pour les problèmes d'intrusion saline en sous-sol : Modélisation, analyse mathématique et illustrations numériques*, Université de La Rochelle, Laboratoire Mathématiques, Image et Applications, 2015.
- [30] E.J. DOCKNER AND N. VAN LONG : *International Pollution Control : Cooperative versus Noncooperative Strategies*, Journal of Environmental Economics and Management, Vol. 25, Issue 1, 13-29, 1993.
- [31] P.E. DRUET : *Global Lipschitz continuity for elliptic transmission problems with a boundary intersecting interface*, Mathematica Bohemica, Vol. 138, pp.185-224, 2013.
- [32] L.C. EVANS : *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, American Mathematical Society, 1994.
- [33] R. EYMARD, T. GALLOUËT AND R. HERBIN : *Convergence of finite volume schemes for semi-linear convection diffusion equations*, Numer. Math, 82, pp. 91-116,1999.
- [34] G. FICHERA : *Existence theorems in elasticity*, Handbuch der Physik, Springer, Berlin, pp 347-389, 1972.
- [35] J. DE FRUTOS AND G. MARTIN-HERRAN : *Pollution control in a multiregional setting : A differential game with spatially distributed controls*, ISCH COST ACTION IS1104, The EU in the new economic complex geography, Geocomplexity Discussion Papers ISSN 2409-7497, Discussion Paper No. 1/2016, 2016.
- [36] C. GALUSINSKI AND M. SAAD : *On a degenerate parabolic system for compressible, immiscible, two-phase flows in porous media*. Adv. Diff. Equ. 9, 1235-1278, 2004.
- [37] D. GILBARG AND N.S. TRUDINGER : *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2001.
- [38] V. GIRAULT, F. MURAT AND A. SALGADO : *Finite element discretization of Darcy's equations with pressure dependent porosity*, M2AN, 44, 1155-1191, 2010.
- [39] C. GOLLIER : *Discounting an uncertain future*, Journal of Public Economics, 85, 149-166, 2002.



- 
- [40] D. GRASS, J.P. CAULKINS, G. FEICHTINGER, G. TRAGLER AND D.A. BEHRENS : *Optimal Control of Nonlinear Processes, with applications in drugs, corruption and terror*, Springer.
- [41] D. GRASS AND H. UECKER : *Optimal management and spatial patterns in a distributed shallow lake model*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2017, No. 01, pp. 1-21. ISSN : 1072-6691, 2017.
- [42] C. GU, F. MAGGI, W.J. RILEY, G.M. HORNBEGER, T. XU, C.M. OLDENBURD, N. SPYCHER, N.L. MILLER, R.T. VENTEREA AND C. STEEFEL : *Aqueous and gaseous nitrogen losses induced by fertilizer application*. Journal of Geophysical Research Biogeosciences, Vol 114, G01006, DOI : 10.1029/2008JG000788, 2009.
- [43] C. GODART, P.-A. JAYET, B. NIANG, L. BAMIÈRE, S. DE CARA, E. DEBOVE AND E. BARANGER : *Modélisation intégrée des composantes économique et biophysique des productions végétales en relation avec le changement climatique*. Rapport Final - APR GICC 2002, Convention de recherche MEDD num 02-00019 Institut National de la Recherche Agronomique, UMR Economie Publique INRA-INAPG, 2002.
- [44] A. HARAUX AND F. MURAT : *Influence of a Singular Perturbation on the Infimum of Some Functionals*. Journal of Differential Equations, 58, 43-75, 1985.
- [45] F. HECHT, S. AULIAC, O. PIRONNEAU, J. MORICE, A. LE HYARIC, K. OHTSUKA AND P. JOLIVET : *FreeFem++*, 2017.
- [46] E. KEELER, M. SPENCE AND R. ZECKHAUSER : *The optimal control of pollution*. J. Econ. Theory. 4, 19-34, 1972.
- [47] C. KIM, J. HOSTETLER AND G. AMACHER : *The regulation of groundwater quality with delayed responses*. Water Resour. Res. 29 (5), 1369-1377, 1993.
- [48] K. M. KNAPP : *The interpolation of Hydraulic Head Contours*. Department of Mathematics and Computer Science, Ursinus College, Advisor/Sponsor : Dr. Linda C. Thiel RI, 2000.
- [49] P.I. KOGUT AND G.R. LEUGERING : *Optimal Control Problems for Partial Differential Equations on Reticulated Domains. Approximation and Asymptotic Analysis*. Systems and Control : Foundations and Applications, Birkhäuser. DOI 10.1007/978-0-8176-8149-4, 2011.
- [50] G. KOSSIORIS, M. PLEXOUSAKIS, A. XEPAPADEAS, A.J. DE ZEEUW AND K-G. MALER : *Feedback Nash equilibria for non-linear differential games in pollution control*. Journal of Economic Dynamics and Control, 2008.
- [51] K. KUMAR, I.S. POP AND F.A. RADU : *Convergence Analysis of Mixed Numerical Schemes for Reactive Flow in a Porous Media*. SIAM J. Numer. Anal. Vol 51, No. 4, pp. 2283-2308, 2013.
- [52] O. A. LADYZHENSKAJA : *Linear and quasilinear equations of parabolique type*. Amer. Math. Soc., 1968.

- 
- [53] O. A. LADYZHENSKAJA AND N.N URAL'TSEVA : *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*. Mathematics in Sciences in Engineering Academic Press, 1968.
- [54] F. LALBAT, B. BLAVOUX, O. BANTON : *Description of a simple hydrochemical indicator to estimate groundwater residence time in carbonate aquifers*. Geophysical Research Letters, 34(19), 2007.
- [55] J. LANKOSKI AND M. OLLIKAINEN : *Innovations in nonpoint source pollution policy - European perspectives*, Mag. Food Farm Resour. 28(3), 3rd Quarter, 2013.
- [56] M. LEANDRI : *The shadow price of assimilative capacity in optimal flow pollution control*. Ecological economics, 68(4), 1020-1031, 2009.
- [57] D. LEBÈGUE : *Révision du taux d'actualisation des investissements publics, Rapport du groupe d'experts présidé par Daniel Lebègue*, 2005.
- [58] E. LEDOUX, E. GOMEZ, J.M. MONGET, C. VIAVATTENE, P. VIENNOT, A. DUCHARNE, M. BENOIT, C. MIGNOLET, C. SCHOTT AND B. MARY : *Agriculture and groundwater nitrate contamination in the Seine basin. The STICS-MODCOU modelling chain*. Science of the Total Environment, 375, 33-47, 2007.
- [59] B. LEMIÈRE, J.J SEGUIN, C. LE GUERN, D. GUYONNET, PH. BARANGER, D. DARMENDRAIL AND P. CONIL : *Guide sur le comportement des polluants dans les sols et les nappes ; Applications dans un contexte d'Evaluation Détaillée des Risques pour les ressources en eau*, Etude réalisée dans le cadre des opérations de Service public du BRGM 99-F-194 et de la convention MATE/DPPR 13/1999, étude 3, 2001.
- [60] Y.Y. LI AND M. VOGELIUS : *Gradient estimates for solutions to divergence form elliptic equations with discontinuous coefficients*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 153, pp.91-151, 2000.
- [61] J.D. LOGAN : *Transport Modeling in Hydrogeochemical Systems*, XIV, 226 p., Hardcover, ISBN : 978-0-387-95276-5, 2001.
- [62] K.-G. MÄLER, A. XEPAPADEAS AND A. DE ZEEUW : *The Economics of Shallow Lakes*, Environmental and Resource Economics, 26 : 603-624, 2003.
- [63] P. MARION, K. NAJIB AND C. ROSIER : *Numerical simulations for a seawater intrusion problem in a free aquifer*, Appl. Numer. Math., 75(48-60), 2014.
- [64] N.G. MEYERS : *An  $L^p$ -estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations*, Annali Della Scuola Normale Superiore Di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 17, Num. 3, p. 189-206, 1963.
- [65] P. MICHEL : *On the transversality Condition in Infinite Horizon Optimal Problems*, Econometrica, Vol. 50, Num. 4, pp. 975-985, 1982.
- [66] J. MIKOLAJKÓW : *Laboratory methods of estimating the retardation factor of migrating mineral nitrogen compounds in shallow groundwater*, Geological Quarterly, 47 (1) :91-96, 2003.

- 
- [67] G. MIQUEL AND G. DE MARSILY : *La qualité de l'eau et l'assainissement en France (rapport de l'Office parlementaire d'évaluation des choix scientifiques et technologiques)*, site internet du Sénat (<https://www.senat.fr/rap/102-215-1/102-215-113.html>), 2003.
- [68] A. MOUSSA : *Some variants of the classical Aubin-Lions Lemma*, 2015.
- [69] M. PIERRE : *Global Existence in Reaction-Diffusion Systems with Control of Mass : a Survey*, Milan Journal of Mathematics, Vol. 78, 417-455, 2010.
- [70] F. VAN DER PLOEG AND A.J. DE ZEEUW : *International Aspects of Pollution Control*, Environmental and Resource Economics, 1992.
- [71] C. PLOURDE : *A Model of Waste Accumulation and Disposal*. Can. J. Economics. 5(1), 119-125,1972.
- [72] J.-P. RAYMOND : *Optimal Control of Partial Differential Equation*, Université Paul Sabatier, 2009.
- [73] J.-P. RAYMOND AND H. ZIDANI : *Pontryagin's Principle for State-Constrained Control Problems Governed by Parabolic Equations with Unbounded Controls*, SIAM Journal of Control and Optimisation, 36(6), 1853-1879, 1998.
- [74] G. ROLLAND : *Global existence and fast-reaction limit in reaction-diffusionsSystems with cross effects, Part III Reaction-diffusion systems with advection-migration, Global well-posedness for reaction-diffusion-advection systems with a triangular reaction*, 2013.
- [75] J. ROUX : *Tenir compte de la réglementation dans son projet d'implantation de zones tampons*, Directive Nitrates, Groupe Technique "Intégration des zones tampons dans les bassins versants", 2015.
- [76] J. SIMON : *Contrôle de la solution d'une équation parabolique avec donnée ponctuelle*, J. Sys. Sci. and Math. Scis. 3 (1), 1-27, 1983.
- [77] G. STAMPACCHIA : *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Annales de l'Institut Fourier, tome 15, Num. 1, p. 189-257, 1965.
- [78] L.C. TARTAR : *Compensated compactness and applications to partial differential equations*. In : R. J. Knops, Ed., Research Notes in Mathematics, Nonlinear Analysis and Mechanics, Heriot-Watt Symposium, Vol. 4, Pitman Press, London, 1979.
- [79] R. TEMAM : *Navier-Stokes equations : theory and numerical analysis*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2001.
- [80] E. TRELAT : *Contrôle optimal : théorie et applications*, Vuibert, 2008.
- [81] A.E. SCHEIDEGER : *The Physics of Flow through Porous Media*. University of Toronto Press, Toronto, 1974.

- 
- [82] A. ULPH AND D. ULPH : *The Optimal Time Path of a Carbon Tax*, Oxford Economic Papers 46, 857-868, 1994.
- [83] A. VISINTIN : *Strong convergence results related to strict convexity*. Comm. in Partial Differential Equations, 9(5), 439-466, 1984.
- [84] F. WAGENER : *Shallow lake economics run deep : Nonlinear Aspects of Economic-Ecological Interst Conflict*. Tinbergen Institute Discussion Paper 09-033/1, 2009.
- [85] W.K. VAN WIJNGAARDEN, F.J. VERMOLEN, G.A.M VAN MEURS AND C. VUIK : *A mathematical model for Biogrowth*, Computers and Geosciences, 17 :463-478, DOI 10.1007/s10596-012-9316-0, 2013.
- [86] F.A. WILLIAMS : *Combustion Theory : the fundamental Theory of chemically reacting Flow Systems*. Benjamin-Cummings Pub. Co., Menlo Park, Calif., 2nd ed., 1985.
- [87] R. WINKLER : *A note on the optimal control of stocks accumulating with a delay*. Macroecon. Dyn. 15, 565-578, 2011.
- [88] Y. YUAN, D. LIANG AND H. ZHU : *Optimal control of groundwater pollution combined with source abatement costs and taxes*. Journal of Computational Science, 20, 17-29, 2017.
- [89] AGENCE FRANÇAISE POUR LA BIODIVERSITÉ : *Les zones tampons*, Office National de l'Eau et des Milieux Aquatiques (<http://zonestampons.onema.fr>).
- [90] COMMISSARIAT GÉNÉRAL AU DÉVELOPPEMENT DURABLE : *Les teneurs en nitrates augmentent dans les nappes phréatiques jusqu'en 2004 puis se stabilisent*. Commissariat général au développement durable, numéro 161, mai 2013 ([www.statistiques.developpement-durable.gouv.fr](http://www.statistiques.developpement-durable.gouv.fr)).
- [91] COMMISSARIAT GÉNÉRAL AU DÉVELOPPEMENT DURABLE : *Pollution des eaux souterraines par les nitrates*, Ministère de la Transition Écologique et Solidaire, Commissariat général au développement durable, ([www.statistiques.developpement-durable.gouv.fr](http://www.statistiques.developpement-durable.gouv.fr)).
- [92] SECRÉTARIAT D'ÉTAT CHARGÉ DE LA SANTÉ : *Abandons de captages utilisés pour la production d'eau destinée à la consommation humaine*, Direction Générale de la Santé, Sous-direction de la prévention des risques liés à l'environnement et à l'alimentation, Bilan Février 2012.
- [93] *Lutte contre les pollutions de l'eau*, site internet du Ministère de l'Environnement, de l'Énergie et de la Mer (<http://www.developpement-durable.gouv.fr/lutte-contre-pollutions-leau>), 2016.
- [94] CNRS, dossiers scientifiques, [www.cnrs.fr](http://www.cnrs.fr).

---

## Résumé

---

Ce travail s'inscrit dans un contexte de contrôle de la pollution des ressources en eau. On s'intéresse plus particulièrement à l'impact des engrais d'origine agricole sur la qualité de l'eau, en alliant modélisation économique et hydrogéologique. Pour cela, nous définissons d'une part un objectif économique spatio-temporel prenant en compte le compromis entre l'utilisation d'engrais et les coûts de dépollution. D'autre part, nous décrivons le transport du polluant dans le sous-sol (3D en espace) par un système non linéaire d'équations aux dérivées partielles couplées de type parabolique (réaction-convection-dispersion) et elliptique dans un domaine borné.

Nous prouvons l'existence globale d'une solution au problème de contrôle optimal. L'unicité est quant à elle démontrée par analyse asymptotique pour le problème effectif tenant compte de la faible concentration d'engrais en sous-sol.

Nous établissons les conditions nécessaires d'optimalité et le problème adjoint associé à notre modèle. Quelques exemples analytiques sont donnés et illustrés.

Nous élargissons ces résultats au cadre de la théorie des jeux, où plusieurs joueurs interviennent, et prouvons notamment l'existence d'un équilibre de Nash.

Enfin, ce travail est illustré par des résultats numériques (2D en espace), obtenus en couplant un schéma de type Éléments Finis Mixtes avec un algorithme de gradient conjugué non linéaire.

**Mots clés :** Équations aux dérivées partielles ; contrôle optimal ; systèmes couplés non-linéaires ; équations aux dérivées partielles paraboliques et équations aux dérivées partielles elliptiques ; analyse asymptotique ; schéma Éléments Finis ; simulations numériques.

---

## Abstract

---

This work is devoted to water resources pollution control. We especially focus on the impact of agricultural fertilizer on water quality, by combining economical and hydrogeological modeling. We define, on one hand, the spatio-temporal objective, taking into account the trade off between fertilizer use and the cleaning costs. On an other hand, we describe the pollutant transport in the underground (3D in space) by a nonlinear system coupling a parabolic partial differential equation (reaction-advection-dispersion) with an elliptic one in a bounded domain.

We prove the global existence of the solution of the optimal control problem. The uniqueness is proved by asymptotic analysis for the effective problem taking into account the low concentration fertilizer.

We define the optimal necessary conditions and the adjoint problem associated to the model. Some analytical results are provided and illustrated. We extend these results within the framework of game theory, where several players are involved, and we prove the existence of a Nash equilibrium.

Finally, this work is illustrated by numerical results (2D in space), produced by coupling a Mixed Finite Element scheme with a nonlinear conjugate gradient algorithm.

**Key words :** Partial differential equations ; optimal control ; parabolic partial differential equation and elliptic partial differential equation ; nonlinear coupled systems ; asymptotic analysis ; Finite Element method ; numerical simulations.